

Handbuch
der
A r i t h m e t i k ,

zum Gebrauche

für

Elementar- und Kreisschulen

und

zum Selbstunterrichte,

von

Heinrich Westberg,

Collegienassessor und wissenschaftlicher Lehrer an der Kreisschule zu Mitau.



M i t a u ,

gedruckt bei Johann Friedrich Steffenhagen und Sohn.

1 8 4 6 .

Der Druck wird gestattet, mit der Anweisung, nach Beendigung desselben die
gesetzliche Anzahl von Exemplaren hieher eingängig zu machen.
Riga, am 30. Januar 1846.

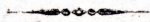
Dr. C. E. Napieršky,
Censur.



Inhalts : Verzeichniß.

	Seite
E rläuterungen	1
Numeration	2
Addition unbenannter Zahlen	4
Subtraction unbenannter Zahlen	5
Multiplication unbenannter Zahlen	6
Division unbenannter Zahlen	7
Von den benannten Zahlen im Allgemeinen	10
Verzeichniß der Maaße, Gewichte und Münzen	10
Resolvirung benannter ganzer Zahlen	11
Reduction benannter ganzer Zahlen	12
Addition ungleichbenannter ganzer Zahlen	13
Subtraction ungleichbenannter ganzer Zahlen	13
Multiplication ungleichbenannter ganzer Zahlen	16
Division ungleichbenannter ganzer Zahlen	17
Eintheilung der Zahlen nach gewissen Eigenschaften	18
Merkmale, woran zu erkennen, ob eine einfache Zahl in einer andern ohne Rest aufgeht	18
Von der Zerlegung einer theilbaren Zahl in ihre einfachen Factoren	20
Von der Auffindung sämmtlicher Zahlen, die in einer gegebenen ohne Rest aufgehen	21
Von dem Verfahren, das größte gemeinschaftliche Maaß zwischen zwei gegebenen Zahlen zu finden	22
Von dem Verfahren, die kleinste gemeine theilbare Zahl für mehrere Zahlen zu finden	23
Von einigen Vortheilen bei der Multiplication	25
Von einigen Vortheilen bei der Division	26
Von den Brüchen im Allgemeinen	27
Von den gemeinen Brüchen	28
Von dem sogenannten Aufheben der Brüche	30
Von der Anweisung, Brüche unter einerlei Benennung zu bringen	31
Addition der Brüche	34
Subtraction der Brüche	35
Multiplication der Brüche	36
Division der Brüche	38
Resolvirung benannter gebrochener Zahlen	39
Reduction benannter gebrochener Zahlen	40

	Seite
Addition ungleichbenannter gebrochener Zahlen	41
Subtraction ungleichbenannter gebrochener Zahlen	41
Multiplication ungleichbenannter gebrochener Zahlen	42
Division ungleichbenannter gebrochener Zahlen	42
Von den Decimalbrüchen im Allgemeinen	43
Addition der Decimalbrüche	44
Subtraction der Decimalbrüche	44
Multiplication der Decimalbrüche	45
Division der Decimalbrüche	46
Von dem Verfahren, einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln	49
Von dem Verfahren, einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu ver- wandeln	52
Von den Kettenbrüchen	52
Von der Erhebung einer Zahl zum Quadrat und Cubus, und von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel	55
Von den Verhältnissen und Proportionen	63
Von den Progressionen	69
Von der Anwendung der Proportionen auf	
I. die einfache Regel detri	72
II. die Gesellschaftsrechnung	76
III. die zusammengesetzte Regel detri, namentlich die Wasedowsche Regel	81
IV. den Kettenatz	83
V. die Vermischungs- oder Allegationsrechnung	87
Das mittlere und große Cinnal Eins	96



Verlag des Verlegers
Herausgegeben von
Herausgegeben von
Herausgegeben von

§. 1. Die Arithmetik ist die Lehre von den Zahlengrößen.
 §. 2. Eine Größe ist, was einer Theilung fähig ist, oder: was vergrößert und verkleinert werden kann.

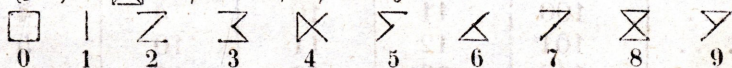
§. 3. Betrachtet man eine Größe nach der Menge ihrer Theile, ohne auf den Raum, den sie einnimmt, und auf ihre Gestalt zu sehen, so ist dieses eine arithmetische Größe.

§. 4. Nur gleichartige Dinge sind gegen einander in Hinsicht ihrer Menge zu vergleichen. Gleichartige Dinge sind die, an denen man bloß ihr Uebereinstimmiges oder Gemeinschaftliches betrachtet, z. B. machen 3 Bänke und 3 Tische zusammen weder 6 Bänke, noch 6 Tische, weil sie ungleichartige Dinge sind; aber sie können unter dem gemeinschaftlichen Begriff "Möbeln," nach ihrer Menge verglichen, zusammen gezählt werden. Eben so sind 3 Hunde und 4 Pferde in Beziehung auf ihren gemeinschaftlichen Namen "Thiere," zusammen 7 Thiere.

§. 5. Um ein oder mehrere gleichartige Dinge, ihrer Menge nach, anzudeuten, wird eine Zahl erfordert. Eine Zahl ist demnach ein oder mehrere gleichartige Dinge, ohne Rücksicht auf die Raumgröße, Form oder anderweitige Eigenschaften derselben. Eins von diesen Dingen heißt die Einheit.

§. 6. Die Benennung der Einheiten, welche in einer Zahl vereinigt sind, lehrt der Sprachgebrauch, z. B. eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn u. s. w.

§. 7. Zur sinnlichen Darstellung der Zahlen werden Zahlzeichen oder Ziffern erfordert. Der Ziffern giebt es zehn, die wahrscheinlich aus dem Zeichen \boxtimes entstanden sind, und zwar:



§. 8. Man hat arabische und römische Ziffern, z. B.

arabische:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
römische:	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
arabische:	13.	19.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.			
römische:	XIII.	XIX.	XX.	XXX.	XL.	L.	LX.	LXX.	LXXX.			
arabische:	90.	100.	200.	300.	400.	500.	600.	700.				
römische:	XC.	C.	CC.	CCC.	CD.	D.	DC.	DCC.				
arabische:	800.	900.	1000.	1100.	1200.	2000.						
römische:	DCCC.	DCCCC.	M.	MC.	MCC.	IM.						
arabische:	20000.	100000.			1846.							
römische:	XXM.	CM.			MDCCCXLVI.							

Anmerk. Wenn das kleinste von zwei zusammengesetzten römischen Zahlzeichen (M ausgenommen) zur linken Hand steht, so wird es vom größern subtrahirt. Schreibe mit römischen Ziffern folgende Zahlen:

79, 98, 407, 519, 727, 3548, 9346, 10856.

§. 9. Eine ganze Zahl besteht aus einer oder mehreren ganzen Einheiten, und ein Bruch oder eine gebrochene Zahl aus Theilen der Einheit.

§. 10. Zählen heißt: zu der Einheit oder zu jeder beliebigen Zahl die Einheit nach und nach hinzufügen.

§. 11. Die Art und Weise, nach welcher man zählt und Zahlen schreibt, heißt Zahlensystem.

§. 12. Die Numeration lehrt Zahlen gehörig schreiben u. aussprechen.

§. 13. Daß große Zahlen mit so wenig Ziffern geschrieben werden können, geschieht durch die geordnete Verbindung derselben unter einander. Es war aber nicht notwendig, unbedingt 10 Zahlzeichen anzunehmen; es konnten ihrer weniger oder mehr als 10 sein, wenn man nur dabei das Gesetz befolgt: daß jede Ziffer, welche von der rechten Hand um eine Stelle weiter nach der linken zu gerückt wird, so viel Mal mehr gilt, als Zahlzeichen im System angenommen sind.

Um dies zu bewerkstelligen, hat das Zahlzeichen 0 keinen Werth, und ist nur zur Ausfüllung der leeren Zahlenstellen bestimmt, worin keine geltende Ziffer zu stehen kommen soll.

§. 14. Dieses allgemeine Gesetz der Zifferverbindung ist auf jedes beliebige Zahlensystem anwendbar, es mag aus so viel Ziffern bestehen, als es will.

In nachstehender Tabelle ist das obige Gesetz der Zifferverbindung auf das zwei-, drei-, vier- und zehnziffrige System angewandt.

Anzahl der Einheiten	für das zweiziffrige Zahlensystem 0, 1	für das dreiziffrige Zahlensystem 0, 1, 2	für das vierziffrige Zahlensystem 0, 1, 2, 3	für das fünzfiffrige Zahlensystem 0 1, 2 3 4	für das zehnziffrige Zahlensystem. 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
.	1	1	1	1	1
..	10	2	2	2	2
...	11	10	3	3	3
....	100	11	10	4	4
.....	101	12	11	10	5
.....	110	20	12	11	6
.....	111	21	13	12	7
.....	1000	22	20	13	8
.....	1001	100	21	14	9
.....	1010	101	22	20	10
.....	1011	102	23	21	11
.....	1100	110	30	22	12
.....	1101	111	31	23	13
.....	1110	112	32	24	14
.....	1111	120	33	30	15
.....	10000	121	100	31	16

u.

f.

m.

§. 15. Die Verbindung, durch welche man Zahlen mit zehn angenommenen Zahlzeichen schreibt, wird Dekadik oder das dekadische, auch Decimal- oder Zehnziffer-System genannt und die geltenden Ziffern in der ersten Stelle od. Ordn. rech. Hand heißen Einer.

"	zweiten	"	"	"	"	Zehner.
"	dritten	"	"	"	"	Hunderter.
"	vierten	"	"	"	"	Tausender.
"	fünften	"	"	"	"	Zehntausender.
"	sechsten	"	"	"	"	Hunderttausender.
"	siebenten	"	"	"	"	Millioner.
"	achten	"	"	"	"	Zehnmillioner.
"	neunten	"	"	"	"	Hundertmillioner.
"	zehnten	"	"	"	"	Tausendmillioner.
"	elften	"	"	"	"	Zehntausendmillioner.
"	zwölften	"	"	"	"	Hunderttausendmillioner.
"	dreizehnten	"	"	"	"	Billioner u. s. w.
"	neunzehnten	"	"	"	"	Trillioner u. s. w.
"	fünf und zwanzigsten	"	"	"	"	Quadrillioner u. s. w.
"	dreißigsten	"	"	"	"	Quintillioner u. s. w.
				u.	f.	w.

Es werden demnach die Einer . . . mit einer Ziffer geschrieben,
 die Zehner . . . mit 2 Ziffern "
 die Hunderter . . . mit 3 " "
 die Tausender . . . mit 4 " "
 die Zehntausender . . . mit 5 " "
 die Hunderttausender mit 6 " "
 die Millioner . . . mit 7 " "
 die Billioner . . . mit 13 " "
 die Trillioner . . . mit 19 " "
 die Quadrillioner . . . mit 25 " "
 die Quintillioner . . . mit 31 " "

u. f. w.

§. 16. Sollen große Zahlen ausgesprochen werden, so theile man sie von der rechten Hand zur linken, von sechs zu sechs Ziffern, durch vertikale Striche in Hauptabtheilungen und jede der letztern aufs Neue, von drei zu drei Ziffern durch kleinere Striche, in Unterabtheilungen, ab, und schreibe an jede Hauptabtheilung, die ihr zukommende Benennung, gewöhnlich nur durch ihren Anfangsbuchstaben: m, b, t, q zc., Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen zc. Sollte z. B. die Zahl

14500617983012367894012351

ausgesprochen werden, so erscheint sie mit ihren Haupt- und Unterabtheilungen in folgender Gestalt:

14^q | 500,617^t | 983,012^b | 367,891^m | 012,351

und wird gelesen: 14 Quadrillionen; 500tausend sechshundert siebzehn Trillionen; 983 Tausend und zwölf Billionen; 367 Tausend achthundert ein und neunzig Millionen; 12 Tausend dreihundert und ein und funfzig.

Uebungs - Aufgaben.

Spreche folgende Zahlen aus und schreibe sie mit Buchstaben:

1) 938543257.

2) 45830006953.

3) 100385762932795836.

4) Schreibe: 70 Billionen; 180 Millionen, 9703.

§. 17. Rechnen heißt: aus bekannten Zahlengrößen eine unbekannte Zahl finden. Und dies geschieht durch die sogenannten 4 Rechnungsarten oder Species. Diese sind: die Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

Da durch das Numeriren keine unbekannte Zahl aus den gegebenen Zahlen aufgefunden wird, so kann die Numeration auch füglich nicht zu den Rechnungsarten gezählt werden.

§. 18. Addiren oder Zusammenzählen heißt: eine Zahl finden, welche an Einheiten mehreren gegebenen Zahlen gleich ist. Die zum Zusammenzählen gegebenen Zahlengrößen werden Posten (Addendi oder Summandi), und die durch die Addition hervorgebrachte Zahl, Summe oder Aggregat genannt.

Um die Addition anzudeuten, bedient man sich des Zeichens +, welches plus oder mehr gelesen wird. Eben so ist (=) das Zeichen der Gleichheit, und man schreibt: $3 + 4 = 7$, und liest es: 3 plus 4 sind zusammengenommen gleich 7.

§. 19. Um die gegebenen Posten in eine Summe zu bringen, ordne man dieselben so, daß bei gleichartigen Dingen die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner, die Hunderter unter die Hunderter u. s. w. zu stehen kommen, und verfähre dabei nach folgender Regel:

3 6 7 9	Man addire zuerst die Ziffern der Einer und spreche:
9 7 9 8	$9 + 8 + 2 = 19$ Einern, welche aus 1 Zehner und 9 Einern
5 4 3 2	bestehen. Die 9 Einer schreibe unter den gezogenen Strich unter
(1) (2) (1)	die Einer und den 1 Zehner unter die Zehner über den Strich
1 8 9 0 9	und spreche dann: (7 + 9 + 3 + 1) Zehner sind = 20 Zehnern,
	welche aus 2 Hundertern und keinem Zehner bestehen. Daher
	schreibe unter die Zehner unterhalb des Strichs, 0 Zehner und über den Strich,
	die 2 Hundertter unter die Hundertter, und spreche weiter: (6 + 7 + 4 + 2)
	Hundertter sind = 19 Hundertern, welche aus 1 Tausender und 9 Hundertern
	bestehen. Die 9 Hundertter schreibe unterhalb des Strichs unter die Hundertter
	und die 1 Tausender oberhalb des Strichs unter die Tausender und spreche dann:
	(3 + 9 + 5 + 1) Tausender betragen zusammen 18 Tausender, welche aus
	1 Zehntausender und 8 Tausendern bestehen. Man schreibe die 8 Tausender unter-
	halb des Strichs unter die Tausender und die 1 Zehntausender, als die letzte Ziffer
	der Addition, gleichfalls unterhalb des Strichs unter die Zehntausender oder in die
	5te Ordnung; so erhält man die Summe 18909.

§. 20. Zur Erleichterung der Addition wähle man möglichst die Ziffern in den Posten, die zusammengenommen 10 ausmachen, z. B. $9 + 1$; $8 + 2$; $7 + 3$ u. s. w. — Die beste Probe für die Richtigkeit der geschenehen Addition ist: die einzelnen Ordnungen des Exempels noch einmal, und zwar von unten auf, zu addiren. Stimmen die beiden Summen dann überein, so ist es ein sicherer Beweis für die Richtigkeit der Rechnung.

§. 21. Subtrahiren oder Abziehen heißt: zwischen zwei gegebenen Zahlengrößen den Unterschied finden. Die Zahlengröße, von welcher eine andere hinweggenommen werden soll, heißt der Minuend, und die Zahlengröße, um welche der Minuend verringert werden soll, heißt der Subtrahend. Das, was nach diesem Verfahren übrig bleibt, wird Unterschied oder Differenz genannt. — Das Zeichen der Subtraction ist $(-)$ und wird minus oder weniger gelesen. So wird $18 - 15 = 3$ gelesen: 18 minus oder weniger 15 ist gleich 3.

§. 22. Um zwei Zahlengrößen von einander zu subtrahiren, setze man bei gleichnamigen Dingen, die kleinere Zahl unter die größere, und zwar so, daß die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner, die Hunderter unter die Hunderter u. s. w. zu stehen kommen, und verfare dann nach folgender Anleitung:

5.0.1.179 Minuend	
1 7 3 528 Subtrahend	
3 2 7 651 Differenz.	

Man fange bei den Einern oder der ersten Ordnung an, und spreche: 8 Einer von 9 Einern hinweggenommen, bleibt 1 Einer, welchen man unterhalb des gezogenen Strichs unter die erste Ordnung schreibt und spreche dann: 2 Einer der 2ten Ordnung von 7 Einern derselben Ordnung subtrahirt, bleiben 5 Einer der zweiten Ordnung übrig, welche man unterhalb des Strichs unter die 2te Ordnung schreibt. Jetzt spreche man: 5 Einheiten der 3ten Ordnung von 1 Einheit derselben Ordnung können nicht subtrahirt werden; daher muß man eine Einheit von der 4ten Ordnung zu Hülfe nehmen oder abborgen. Diese abgeborgte Einheit der 4ten Ordnung machen 10 Einheiten der 3ten Ordnung aus. Diese 10 Einheiten der 3ten Ordnung zu jener Einheit derselben Ordnung im Minuend addirt, geben 11 Einheiten der 3ten Ordnung. Von diesen ziehe man die 5 Einer derselben Ordnung ab und schreibe den Rest von 6 Einern unterhalb des Strichs unter die 3te Ordnung. Nun spreche man weiter: 3 Einheiten der 4ten Ordnung von 0 Einheiten derselben Ordnung können nicht subtrahirt werden; man borge daher bei der nächst höhern 5ten Ordnung eine Einheit. Da aber die 5te Ordnung keine Einheit hat, so borge man bei der 6ten Ordnung 1 Einheit. Diese 1 Einheit der 6ten Ordnung ist gleich 10 Einheiten der 5ten Ordnung und davon 1 Einheit derselben Ordnung hinweggenommen, bleiben 9 Einheiten der 5ten Ordnung nach. Die abgeborgte Einheit der 5ten Ordnung sind gleich 10 Einheiten der 4ten Ordnung. Von diesen 10 Einheiten der 4ten Ordnung subtrahire nun die 3 Einheiten derselben Ordnung; so bleiben 7 Einheiten der 4ten Ordnung übrig, die man unterhalb des Strichs unter die 4te Ordnung schreibt. Jetzt subtrahire 7 Einheiten der 5ten Ordnung von 9 nachgebliebenen Einheiten derselben Ordnung; so bleiben 2 Einheiten der 5ten Ordnung nach, die man unter den Strich in die 5te Ordnung schreibt. Zuletzt subtrahire man 1 Einheit der 6ten Ordnung von den 4 nachgebliebenen Einheiten derselben Ordnung,

so bleiben 3 Einheiten der 6ten Ordnung nach, die man unter den Strich in die 6te Ordnung schreibt. Auf diese Weise erhält man den ganzen Unterschied: 327651.

Anmerk. Die Bezeichnung des Vorgens geschieht durch einen Punkt.

Uebungs: Exempel.

- 1) 79304 — 9876 = 69428.
- 2) 300501639 — 27089815 = 273411824.
- 3) 1000203 — 708015 = 292188.

P r o b e.

Die beste Probe für die Richtigkeit des Subtrahirens ist: man addire zu der Differenz den Subtrahend, und ist deren Summe dem Minuend gleich, so ist das Exempel richtig gerechnet.

§. 23. Multipliciren oder Vervielfältigen heißt: eine Zahl so oft zu sich selbst nehmen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten oder Theile von Einheiten enthält. Die Zahl, welche vervielfältigt werden soll, heißt der Multiplicand, und die Zahl, mit welcher vervielfältigt wird, der Multiplikator. Beide werden auch Factoren genannt. Das Ergebniß, welches durch die Multiplication hervorgebracht wird, heißt Product oder Factum. Das Zeichen der Multiplication ist \times oder $(.)$ und wird Mal gelesen, z. B. 3×4 oder $3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ liest man: 3 Mal 4 ist gleich 12.

Regel der Multiplication.

§. 24. Man mache sich zuvörderst mit den Producten aller einziffrigen Zahlen bekannt und präge sie dem Gedächtniß gehörig ein. In nachstehender Tabelle sind die Producte sämmtlicher einziffrigen Zahlen enthalten.

1 Mal 1 ist 1	3 Mal 1 ist 3	4 Mal 1 ist 4	5 Mal 1 ist 5
2 — 2 — 4	3 — 2 — 6	4 — 2 — 8	5 — 2 — 10
2 — 3 — 6	3 — 3 — 9	4 — 3 — 12	5 — 3 — 15
2 — 4 — 8	3 — 4 — 12	4 — 4 — 16	5 — 4 — 20
2 — 5 — 10	3 — 5 — 15	4 — 5 — 20	5 — 5 — 25
2 — 6 — 12	3 — 6 — 18	4 — 6 — 24	5 — 6 — 30
2 — 7 — 14	3 — 7 — 21	4 — 7 — 28	5 — 7 — 35
2 — 8 — 16	3 — 8 — 24	4 — 8 — 32	5 — 8 — 40
2 — 9 — 18	3 — 9 — 27	4 — 9 — 36	5 — 9 — 45
2 — 10 — 20	3 — 10 — 30	4 — 10 — 40	5 — 10 — 50
6 Mal 1 ist 6	7 Mal 1 ist 7	8 Mal 1 ist 8	9 Mal 1 ist 9
6 — 2 — 12	7 — 2 — 14	8 — 2 — 16	9 — 2 — 18
6 — 3 — 18	7 — 3 — 21	8 — 3 — 24	9 — 3 — 27
6 — 4 — 24	7 — 4 — 28	8 — 4 — 32	9 — 4 — 36
6 — 5 — 30	7 — 5 — 35	8 — 5 — 40	9 — 5 — 45
6 — 6 — 36	7 — 6 — 42	8 — 6 — 48	9 — 6 — 54
6 — 7 — 42	7 — 7 — 49	8 — 7 — 56	9 — 7 — 63
6 — 8 — 48	7 — 8 — 56	8 — 8 — 64	9 — 8 — 72
6 — 9 — 54	7 — 9 — 63	8 — 9 — 72	9 — 9 — 81
6 — 10 — 60	7 — 10 — 70	8 — 10 — 80	9 — 10 — 90

10 Mal 10 ist 100.

Sollen Zahlen, welche aus mehreren Ziffern bestehen, multiplicirt werden, so schreibe man sie dergestalt unter einander, daß die letzten geltenden Ziffern des Multiplicands und Multiplicators unter einander zu stehen kommen. Folgen zuletzt Nullen in einem oder dem andern, oder in beiden Factoren, so werden sie sämmtlich dem Hauptproducte angehängt. Z. B.

$$\begin{array}{r}
 316500 \text{ Multiplicand} \\
 4700300 \text{ Multiplicator} \\
 \hline
 9495 \\
 22155 \\
 12660 \\
 \hline
 1487644950000 \text{ Haupt = Product.}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 316500 \\ 4700300 \\ 9495 \\ 22155 \\ 12660 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Factoren.} \\ \\ \text{Partial = Producte.} \end{array}$$

Erklärung. Man multiplicire zuerst mit den Einern des Multiplicators alle Ziffern des Multiplicands nach ihrer Ordnung. Entstehen zweiziffrige Producte, so werden die Zehner derselben zu dem Producte der nächstfolgenden Ziffern des Multiplicands hinzugezählt.

Jedes folgende einzelne oder Partialproduct von jeder Ziffer des Multiplicators in die Ziffern des Multiplicands wird allemal eine Stelle nach der linken Hand zu eingerückt, damit Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. zu stehen kommen. Sind endlich eine oder mehrere Nullen zwischen den geltenden Ziffern des Multiplicators enthalten, so wird das folgende Product der nächst geltenden Ziffer, um so viel Stellen nach der linken Hand weiter fortgerückt, als Nullen im Multiplicator vorhanden sind, und endlich werden dann alle über einander stehenden einzelnen Producte addirt.

Uebungs - Aufgaben.

- 1) Der Durchmesser der Erde enthält 1719 geographische Meilen, und jede Meile 24000 Fuß; wie viel enthält der Erddurchmesser an solchen Füßen?
Antw. 41256000 Fuß.
- 2) Jemand besitzt 8536 Bücher, jedes Buch kostet ihm durchschnittlich 345 Cop.; was kosten ihm alle jene Bücher zusammen?
Antw. 2944920 Cop.

Probe der Multiplication.

Man werfe von der Summe jedes Factors so vielmal die Zahl 9 hinweg, als sie darin enthalten ist; multiplicire die Reste mit einander; werfe ebenfalls von diesem Producte so vielmal 9 hinweg, als es angeht, und schreibe den Rest darunter. Auf eben diese Weise verfährt man mit dem Haupt-Producte, und ist der Rest von diesem gleich dem obigen gefundenen Reste aus den beiden Factoren; so ist die Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß das Exempel richtig gerechnet sei. Stimmen aber beide Reste nicht vollkommen überein, so ist es ein sicherer Beweis, daß das Exempel falsch ist.

Anmerk. Das Verfahren der Neunerprobe beruht auf den Beweis in §. 36 zu *N* 2 und 7.

§. 25. Dividiren oder Theilen heißt: untersuchen, wie viel Mal eine Zahl, als Einheit betrachtet, in einer andern Zahl enthalten ist. Die Zahl, welche getheilt werden soll, heißt der Dividend, und die Zahl,

welche als Theiler dient, wird Divisor genannt. Die Zahl, welche man durch die Division erhält, nennt man Quotient. Das, was bei der Division übrig bleibt, heißt Rest. — Das Zeichen der Division ist (:), oder ein horizontaler Strich zwischen dem Dividend und Divisor, von denen ersterer über, und letzterer unter dem Strich stehen muß; z. B. $15 : 3$, oder $\frac{15}{3}$ liefert man: 15 dividirt durch 3.

Verfahren bei der Division.

§. 26. Durch Hülfe des Einmal-Eins läßt sich jedes Mal der Quotient leicht finden, d. h. wie vielmal der Divisor im Dividend enthalten ist. Der Divisor wird mit dem Quotient multiplicirt, das so gefundene Product unter den Dividend gesetzt und von demselben subtrahirt. Zu dem Reste setze man die nächste Ziffer des Dividends und verfare dann eben so, wie vorhin; z. B.

$$\begin{array}{r|l} \text{Divisor } 8 & \begin{array}{l} \text{Dividend} \\ 6952 \\ \hline 64 \\ \hline 55 \\ \hline 48 \\ \hline 72 \\ \hline 72 \\ \hline 0 \end{array} & 869 \text{ Quotient.} \end{array}$$

In 69 ist der Divisor 8 achtmal enthalten. Das Product $8 \times 8 = 64$ wird von 69 subtrahirt, und zu dem Reste 5 wird die im Dividend nächstfolgende 5 herabgesetzt und nun aufs Neue getheilt. Es ist der Divisor 8 in 55 des Dividends sechsmal enthalten. Das Product $8 \times 6 = 48$ subtrahirt von 55, bleibt 7 übrig. Zu dieser 7 wird die, der 5 zunächst stehende Ziffer 2 im Dividend herabgezogen. Diese 72 wird wieder durch 8 getheilt; denn 8 ist in 72 genau 9mal enthalten. Das Product $8 \times 9 = 72$ von den 72 des Dividends subtrahirt, bleibt nichts übrig.

Sind im Divisor 2, 3 oder mehrere Ziffern enthalten, so verfährt man auf gleiche Weise, wie im obigen Beispiele geschehen; nur muß man den jedesmaligen Quotient mit dem ganzen Divisor multipliciren, z. B.

$$\begin{array}{r|l} 473 & \begin{array}{l} 10879 \\ \hline 946 \\ \hline 1419 \\ \hline 1419 \end{array} & 23 \text{ Quotient.} \end{array}$$

Anmerk. 1) Man hüte sich, den jedesmaligen Quotient nicht zu groß zu nehmen, weil dieser mit den übrigen Ziffern des Divisors multiplicirt, ein zu großes Product geben könnte;

2) Bleibt bei der Division ein Rest, so setzt man den Divisor unter denselben, in Gestalt eines Bruches und stellt diesen Bruch neben den Quotient zur Rechten, z. B.

$$\begin{array}{r|l|l}
 7 & 451 & 64\frac{2}{3} \text{ Quotient.} \\
 & \underline{42} & \\
 & 31 & \\
 & \underline{28} & \\
 & \frac{2}{3} \text{ Rest.} &
 \end{array}$$

- 3) Hat der Divisor und Dividend zur Rechten Nullen, so streiche man diese gegen einander weg, und dividire dann nach obiger Regel, z. B.

$$\begin{array}{r|l|l}
 5000 & 30000 & 6 \text{ Quotient.} \\
 & \underline{30} &
 \end{array}$$

- 4) Der jedesmalige Rest des Dividends muß jedesmal kleiner sein, als der Divisor.
 5) Sollte die, nach dem Abzuge des Products übrig gebliebene Zahl (mit Einschluß der zu ihr vom Dividend heruntergezogenen) kleiner als der Divisor sein; so setze man eine Null in den Quotient und nehme auch die folgende Ziffer des Dividends dazu, so daß nun die Division verrichtet werden kann.

Proben der Division.

1) Die beste und untrüglichsste Probe für die Richtigkeit einer ausgeführten Division ist: wenn das Product des Quotients mit dem Divisor genau den Dividend gibt.

2) Wenn man Divisor und Quotient, als Factoren, und den Dividend, als Product betrachtet; so verfährt man mit der Probe der Division ganz auf dieselbe Weise, wie bei der Probe der Multiplication in §. 24.; z. B.

$$\begin{array}{r|l|l}
 \text{Divisor } 345 & \begin{array}{l} \text{Dividend} \\ 2944926 \end{array} & 8536 \text{ Quotient.} \\
 & \underline{6 \text{ Rest.}} &
 \end{array}$$

Vom Quotient 8536 ist die Probezahl = 4.

Vom Divisor 345 ist die Probezahl = 3.

Product = 12.

Dazu addire vom Reste 6 die Probezahl = 6.

Summa = 18.

Von 18 ist die Probezahl 0; der Dividend muß nun auch als Probezahl 0 haben, wenn das Exempel die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit für sich haben soll.

Uebungs-Exempel.

- Es sollen 25500 Rbl. unter 125 Personen vertheilt werden; wie viel erhält jede Person? Antw. 204 Rbl.
- Wenn die Sonne ungefähr 3816176605404750 und die Erde 2659310190 geogr. Cubikmeilen enthält; wie viel Mal ist die Sonne größer als die Erde? Antw. Beinahe 1435025 Mal.
- 35 Personen theilen sich in 169 Rbl. 75 Cop.; was kommt auf jede? Antw. 4 Rbl. 85 Cop.

§. 27. Zahlen, ohne weitere Beziehung auf irgend einen Gegenstand gelesen, heißen unbennante (abstracte) Zahlen; hingegen in Bezug

auf vorhandene Gegenstände gelesen, benannte (concrete) Zahlen, z. B. sind 3, 7, 9 unbenannte; dagegen 3 ₰, 3 Tschetwert, 9 Rubel benannte Zahlen. Die unbenannten Zahlen sind bereits in den frühern §§. abgehandelt worden.

Von den benannten Zahlen.

§. 28. Es ist für die Rechnung im Geschäftsleben nothwendig, sich mit den landüblichen Eintheilungen der Maaße, Gewichte und Münzen bekannt zu machen, und dieselben dem Gedächtniß einzuprägen. Hier folgt die Zusammenstellung der gegenwärtig in Rußland und der früher in den Ostseeprovinzen gebräuchlichen Maaße, Gewichte und Münzen.

I. In Rußland überhaupt.

a. Getreide = Maaße:

1 Tschetwert	=	2 Dsmina.
1 Dsmina	=	4 Tschetwerik.
1 Tschetwerik	=	8 Garniz.
1 Kull	=	10 Tschetwerik.

c. Gewichte:

1 Berkowiz	=	10 Pud.
1 Pud	=	40 Pfund (₰).
1 ₰	=	96 Solotnik.
1 Solotnik	=	96 Dolä.

b. Flüssigkeits = Maaße:

1 Sorokowoi	=	40 Wedro.
1 Wedro	=	8 Kruschken.
1 Kruschke	=	11 Tscharken.

d. Längen = Maaße:

1 Werst	=	500 Sashen.
1 Sashen	=	3 Arschien.
1 Arschien	=	16 Werschok.
1 Sashen	=	7 Fuß.

1 Rubel = 100 Copeken, und 1 Rubel Silber = 3½ Rubel Banco.

1 Dessätine Land der Krone = 2400 Quadrat = Sashen.

104½ Dessätine Land = 1 Quadrat = Werst.

100 Dessätinen Land } = 294 livländischen Loffstellen.

= 522½ revalschen "

= 298½ kurländischen "

II. In den Ostsee = Provinzen.

A. In Livland.

1 Last Weizen oder Gerste = 48 Lof.

1 Last Roggen = 45 "

1 Last Haber, Erbsen, Malz = 60 "

1 Lof überhaupt = 6 Küllm.

1 Küllmit = 9 Stof.

3 rigische Lof = 1 Tschetwert.

17 " Lof = 28 revalsche Lof.

39 " Stof = 4 Wedro.

380 " ₰ = 389 russ. ₰.

400 " ₰ = 389 rev. ₰.

B. In Estland.

1 Last Getreide = 24 Tonnen.

1 Tonne = 3 Lof.

1 Lof = 3 Küllmit.

1 Küllmit = 12 Stof.

84 revalsche Lof = 17 Tschetwert.

28 " Lof = 17 rig. Lof.

11 " Stof = 1 Wedro.

38 " ₰ = 40 russ. ₰.

389 " ₰ = 400 rig. ₰.

III. In beiden Provinzen zugleich.

1 Last Quellsalz = 12 Tonnen. 1 Schiffsfund (S₰) = 20 Riespfund.

1 Last Seesalz = 18 Tonnen. 1 Riespfund (R₰) = 20 Pfund.

1 Tonne Salz = 4 Lof. 1 Pfund (₰) = 32 Loth.

1 Lof wiegt 22 ₰. 1 Loth = 4 Quentch.

1 Faden = 6 Fuß.	1 Orhoft = 6 Anker.
1 Fuß = 12 Zoll.	1 Faß oder Tonne = 4 Anker.
1 Zoll = 12 Linien.	1 Anker = 3 Cimer.
1 Elle = 2 Fuß.	1 Cimer = 10 Stof.
33 Ellen = 25 Arschien.	

1 Mark Silber = 16 Loth.	1 Ballen (Papier) = 10 Rieß.
1 Mark Gold = 24 Karat.	1 Rieß = 20 Buch.
1 Loth = 240 Gran Apothekergewicht.	1 Buch Schreibpapier = 24 Bogen.
1 Zimmer (Felle) = 4 Decher.	1 " Druckpapier = 25 Bogen.
1 Decher = 10 Stück.	

1 Jahr = 12 Monaten = 52 Wochen = 365 Tagen. 1 Monat = 30 und 31 Tagen (der Februar hat gewöhnlich 28 Tage; im Schaltjahr aber 29 Tage).
 1 Woche = 7 Tagen; 1 Tag = 24 Stunden; 1 Stunde = 60 Minuten;
 1 Minute = 60 Secunden.

Resolvirung benannter ganzen Zahlen*).

§. 29. Benannte Zahlen resolviren, heißt: gleichartige Einheiten von verschiedener Benennung in Einheiten von einerlei Benennung verwandeln.

Regel. Man multiplicire die Zahl der höchsten Benennung mit der Verhältnißzahl**) der nächst niedern Benennung und addirt letztere zum Product hinzu. Auf gleiche Weise verfährt man mit der auf diese Art erhaltenen Summe, so wie mit allen folgenden Summen.

Aufgabe 1.

Wie viel betragen 4 Tschetw. 1 Dsm. 3 Tschetw. und 5 Garniz an Garnizen?

Auflösung. 4 Tschetw. 1 Dsm. 3 Tschetw. 5 Garniz.

2 (Verhältnißzahl).

8 Dsm. Dazu addire

1 Dsm.

giebt: 9 Dsm.

4 (Verhältnißzahl).

36 Tschetw. Dazu addire

3 Tschetw.

macht: 39 Tschetw.

8 (Verhältnißzahl).

312 Garniz. Dazu addire

5 Garniz.

Summa 317 Garniz.

*) Ueber die Resolvirung der benannten Zahlen in Brüchen s. §. 57.

**) Eine Verhältnißzahl ist diejenige Zahl, die anzeigt, wie viel Einheiten der niedern Benennung auf eine Einheit der nächst höhern Benennung gerechnet werden.

Aufgabe 2.

Was betragen 3 Sorokowoi 5 Kruschken an Tscharken?

Auflösung: 3 Sorokowoi 5 Kruschken.

40 (Verhältnißzahl).

120 Wedro.

8 (Verhältnißzahl).

960 Kruschken. Dazu addire

5 Kruschken

geben: 965 Kruschken.

11 (Verhältnißzahl).

965

965

machen: 10615 Tscharken.**Uebungs-Beispiele.**1) Wie viel betragen 3 Berkowiz 5 Pud 16 \mathbb{H} an \mathbb{H} ? Antw. 1416 \mathbb{H} .

2) Wie viel betragen 5 Rubel 72 Cop. an Copeken? Antw. 572 Cop.

3) Was betragen 1 Sorok. 24 Wedro 5 Kr. 6 Tschk. an Tscharken?

Antw. 5693 Tscharken.

Reduction benannter ganzen Zahlen.

§. 30. Reduciren heißt: aus niedern Benennungen alle darin enthaltenen höhern Einheiten herausziehen, und die Brüche höherer Benennungen in niedere Einheiten verwandeln. *)

Aufgabe.Wie viel Berkowiz, Pud und \mathbb{H} sind in 7950 \mathbb{H} enthalten?

Auflösung:	40	7950 \mathbb{H}	$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 198 \text{ Pud} \\ 10 \\ \hline 98 \\ 90 \\ \hline 8 \text{ Pud} \end{array}$	19 Berkowiz.
		$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 395 \\ 360 \\ \hline 350 \\ 320 \\ \hline 30 \mathbb{H} \end{array}$		

Antwort: 19 Berk. 8 Pud 30 \mathbb{H} .

Das Verfahren bei der Reduction benannter ganzen Zahlen ist folgendes: Man dividire die gegebene Zahl (hier 7950 \mathbb{H}) der niedrigsten Benennung durch die Verhältnißzahl der nächst höhern (hier 40). Den dadurch erschienenen Quotient (198 Pud) theile wieder durch die Verhältnißzahl der nächst höhern (hier 10). Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man zur höchsten Benennung gelangt ist (hier 19 Berk.). — Dem jedesmaligen Rest einer Division setze die Benennung des Dividends bei.

*) Ueber die Reduction der Brüche höherer Benennungen in niedere Einheiten siehe §. 58.

Uebungs : Beispiele.

- 1) Wie viel Berkowiz, Pud, R und Solotnik sind in 198400 Solotnik enthalten? Antw. 5 Berk. 1 Pud 26 R 64 Sol.
 2) Wie viel Ballen, Rieß, Buch und Bogen sind in 19098 Bogen Schreibpapier enthalten? Antw. 3 Ballen 9 Rieß 15 Buch 18 Bog.

Addition ungleichbenannter ganzen Zahlen.

§. 31. Nachdem die gleichnamigen Größen gehörig unter einander geordnet sind, addire man die über einander stehenden Größen, jede für sich besonders und reducire die erhaltene Summe nach Anleitung des vorhergehenden §. 30.

Aufgabe.

Es sollen 5 Sassen 2 Arschien 15 Werschok und 6 Sassen 1 Arschien 10 Werschok und 17 Sassen 1 Arschien 9 Werschok und 10 Sassen 2 Arschien 12 Werschok und endlich 3 Sassen 11 Werschok addirt und reducirt werden?

Auflösung: Man schreibe die gleichnamigen Größen unter einander und addire sie zuvörderst, z. B.

5	Sassen	2	Arschien	15	Werschok.	
6	—	1	—	10	—	
17	—	1	—	9	—	
10	—	2	—	12	—	
3	—	—	—	11	—	

Summa: 41 Sassen 6 Arschien 57 Werschok.

Diese reducire nach §. 30., woraus sich ergibt:

44 Sassen — Arschien 9 Werschok.

Uebungs : Exempel.

- 1) Man addire 1236 Rub. 38 Cop. + 29 Rub. 62 Cop. + 90 Rub. 90 Cop. + 670 Rub. 12 Cop. + 3128 Rub. 73 Cop., was ist deren Summe? Antw. 5155 Rub. 75 Cop.
 2) Man summire 5 Berk. 8 Pud 30 R + 4 Berk. 7 Pud 35 R + 18 Berk. 5 Pud 20 R + 19 Berk. 8 Pud 15 R + 17 Berk. 3 Pud, was macht's zusammen? Antw. 66 Berk. 3 Pud 20 R .

Subtraction ungleichbenannter ganzen Zahlen.

§. 32. Die gleichnamigen Größen werden, wie bei der Addition, unter einander geschrieben, und mit der Subtraction bei der niedern Benennung angefangen. Sollte in einem der Fälle die abzuziehende Zahl größer sein, als diejenige, von welcher abgezogen werden soll; so nehme man eine Einheit von der nächst höhern Benennung hinweg, verwandle sie in nächst niedere Einheiten, addire diese zu den gleichnamigen des Minuends und verrichte die Subtraction, wie bereits in §. 22. gelehrt worden. Die Fälle der erhaltenen Differenzen werden sodann gehörig reducirt.

Aufgabe 1.

Jemand besitzt 5 Ballen 3 Rieß 6 Buch 18 Bogen Schreibpapier und verkauft davon 2 Ballen 8 Rieß 15 Buch 16 Bogen; wie viel behält er übrig?

In unserm obigen Exempel würde demnach den 6ten Nov. 1827 heißen:
1826 Jahre 10 Monate und 6 Tage, und den 25sten Juni 1806: 1805 J.
5 Monat 25 Tage, und der Ansaß des Exempels wäre folgender:

1826	Jahre	10	Monate	6	Tage
1805	—	5	—	25	—

Antwort. 21 Jahre 4 Monate 12 Tage.

Da 25 Tage von 6 Tagen nicht subtrahirt werden können, so borge man von den 10 Monaten einen Monat ab. Da der 10te Monat der October ist und dieser 31 Tage zählt; so addire man diesen abgeborgten Monat oder die 31 Tage zu obigen 6 Tagen, deren Summe dann 37 Tage beträgt. Von diesen 37 Tagen ziehe die 25 Tage ab, und schreibe den Rest von 12 Tagen unter den gezogenen Strich. Eben so verfare man mit der Subtraction der Monate und Jahre.

Aufgabe 3.

Jemand ist geboren im Jahre 1797 den 6ten Mai Morgens halb 7 Uhr; wie alt ist er geworden im Jahre 1837 den 17ten April Abends $\frac{3}{4}$ auf 9 Uhr?

Ansaß: 1836 Jahre 3 Monate 16 Tage 20 Stunden 45 Min.

1796	"	4	"	5	"	6	"	30	"
------	---	---	---	---	---	---	---	----	---

Antwort: 39 Jahr 11 Monat 11 Tage 14 Stunden 15 Min.

Aufgabe 4.

Es ist Jemand im Jahre 1807 den 25sten Oct. geboren und 15 Jahre 8 Monate 2 Tage alt geworden; wann ist derselbe geboren?

Ansaß: 1806 Jahre 9 Monate 25 Tage

dazu addire: 15 " 8 " 2 "

Es sind: 1822 Jahre 5 Monate 27 Tage

seit Christi Geburt verfloßen, als er starb, d. h. er starb im Jahre 1823 den 27sten Juni.

Uebungs-Aufgaben.

1) Wie alt wurde der Mann, der 1769 den 24sten März geboren wurde, und 1827 den 8ten August starb? Antwort. 58 Jahr 4 Mt. 15 Tage.

2) Wann wurde derjenige geboren, der am 3ten November 1827 gerade 10 Jahre 7 Monat alt war! Antwort. Im J. 1817 den 3ten April.

3) Es trat Jemand den 5ten März 1817 Abends 5 Uhr 30 Min. eine Reise an und kehrte wieder heim den 2ten März 1819 Morgens um halb 10 Uhr; wie lange war er abwesend gewesen?

Antwort. 1 Jahr 11 Mt. 24 Tage 16 Stunden.

4) Jemand starb 1837 den 13ten April Abends 8 Uhr 45 Minuten, und er war gerade 39 Jahre 11 Monate 11 Tage 14 Stunden 15 Min. alt geworden; wann war er geboren?

Antwort. 1797 den 6ten Mai Morgens halb 7 Uhr.

Aufgabe 5.

Wann geht die Sonne auf und unter, wenn sie 7 Stunden unter dem Horizonte gestanden hat?

Auflösung. Hat die Sonne 7 Stunden unter dem Horizonte gestanden, so ist sie 17 Stunden über dem Horizonte gewesen. Von diesen 17 Stunden

gehört die eine Hälfte derselben, d. i. $8\frac{1}{2}$ Stunden, dem Vormittage, und die andere Hälfte, d. i. $8\frac{1}{2}$ Stunden, dem Nachmittage an; folglich ist die Sonne um $3\frac{1}{2}$ Uhr auf- und um $8\frac{1}{2}$ Uhr untergegangen.

Aufgabe 6.

Wann geht die Sonne unter, wenn sie um $4\frac{1}{2}$ Uhr des Morgens aufgeht?

Auflösung. Geht die Sonne um $4\frac{1}{2}$ Uhr auf, so hat sie am Vormittage $7\frac{1}{2}$ Stunden geschienen; eben so lange scheint sie auch am Nachmittage, folglich geht sie um $7\frac{1}{2}$ Uhr unter; denn die Sonne ist am Vormittage eben so lange über dem Horizonte als am Nachmittage.

Uebungs-Exempel.

- 1) Wann geht die Sonne auf wenn sie um 9 Uhr Abends untergeht?
Antwort. Um 3 Uhr Morgens.
- 2) Wann geht die Sonne auf und unter, wenn zwischen Sonnen-Auf- und Untergang 16 Stunden liegen? Antwort. 4 Uhr Auf- u. 8 Uhr Unterg.
- 3) Wann geht die Sonne auf und unter, wenn sie $12\frac{1}{2}$ Stunden über dem Horizont gestanden hat? Antwort. Um $\frac{3}{4}$ auf 6 Uhr geht sie auf,
" $\frac{1}{4}$ " 7 " geht sie unter.

Multiplication ungleichbenannter ganzen Zahlen.

§. 33. Regel. Man multiplicire jeden einzelnen Posten mit dem gegebenen Multiplicator und reducire die erhaltenen Producte nach §. 30.

Aufgabe 1.

Wenn Jemand 5 Tschwt. 3 Tschwf. 7 Garniz Mehl erhält; wie viel werden demnach 25 Personen erhalten?

Auflösung. 5 Tschwt. 3 Tschwf. 7 Garniz
multiplicire mit 25

so erscheinen: 125 Tschwt. 75 Tschwf. 175 Garniz.

Werden diese Posten nach §. 30 reducirt, so erscheinen

137 Tschwt. — Tschwf. 7 Garniz.

Aufgabe 2.

Was kosten 2 Tschwt. 3 Tschwf., wenn 1 Garniz 15 Cop. kostet?

Auflösung. Man resolvire nach §. 19 die 2 Tschwt. 3 Tschwf. zu Garnizen, so erscheinen 152 Garnizen. Diese multiplicirt mit 15 (da 1 Garniz 15 Cop. kostet), so ergiebt sich das Product von 2280 Cop. = 22 Rbl. 80 Cop.

Uebungs-Exempel.

- 1) In einer Fabrik werden täglich versponnen 1 Berk. 8 Pud 30 R 45 Sol. Baumwolle; was beträgt es in 1 Jahre von 365 Tagen?
Antwort. 684 Berk. 8 Pud 1 R 9 Sol.
- 2) Was kosten 3 Rieß 18 Buch Schreibpapier, wenn 1 Buch 75 Cop. kostet?
Antwort. 58 Rbl. 50 Cop.
- 3) Für 2 Kruschken 7 Tscharken Brandtwein zahlt man 1 Rbl.; was bekommt man für 250 Rbl.? Antwort. 2 Cor. 2 Wed. 3 Kr. 1 Tschk.

Division ungleichbenannter ganzen Zahlen.

§. 34. **Regel.** Jeder Posten der benannten Zahlen wird durch den gegebenen Divisor dividirt, und die erhaltenen Quotiente reducirt nach §. 30.

Aufgabe 1.

Es sollen 7 Berk. 8 Pud 31 R 43 Sol. Flachß unter 5 Personen vertheilt werden; wie viel erhält jede Person?

Auflösung. Gegeben war: 7 Berk. 8 Pud 31 R 43 Sol.

$$5 \left| \begin{array}{l} 7 \text{ Berkowiz} \\ 5 \end{array} \right| 1 \text{ Berk.}$$

2 Berk. Diese mache zu Pud und addire 8 Pud hinzu.

10

$$5 \left| \begin{array}{l} 28 \text{ Pud} \\ 25 \end{array} \right| 5 \text{ Pud.}$$

3 Pud. Diese mache zu R und addire 31 R hinzu.

40

$$5 \left| \begin{array}{l} 151 \text{ R} \\ 150 \end{array} \right| 30 \text{ R}$$

1 R . Dieses mache zu Solotnik und addire 43 Solotnik hinzu.

96

$$5 \left| \begin{array}{l} 139 \text{ Sol.} \\ 10 \end{array} \right| 27\frac{1}{2} \text{ Solotnik.}$$

39

35

$\frac{1}{2}$ Solotnik.

Demnach erhält jede Person: 1 Berk. 5 Pud 30 R 27 $\frac{1}{2}$ Sol.

Aufgabe 2.

Wenn 2 Tschwt. 1 Dsm. 3 Tschwf. 6 Garniz für 45 Rbl. 60 Cop. verkauft werden; wie theuer ist 1 Garniz?

Auflösung. Resolvire 2 Tschwt. 1 Dsm. 3 Tschwf. 6 Garniz zu Garnizen.

2

5 Dsmina.

4

23 Tschwf.

8

190 Garniz; folglich

sind 2 Tschwt. 1 Dsm. 3 Tschwf. 6 Garn. = 190 Garnizen, die zusammen 45 Rbl. 60 Cop. kosten; daher muß 1 Garniz den 190sten Theil von 45 Rbl. 60 Cop. kosten, d. i.

4560 Cop. = 24 Cop.

190

Uebungs - Exempel.

1) Jemand legte in 14 Tagen einen Weg von 1750 Werst 260 Sassen 2 Arschien zurück; wie viel macht's auf einen Tag?

Antw. 125 Werst 18 Sassen 1 Arschien 13 $\frac{1}{2}$ Werschoch.

2) Von 5 Berk. 8 Pud 24 K 1 Sol. Flachß werden 2 Berk. 8 Pud 35 K verkauft; von dem Reste wird der 5te Theil verschifft, und der abermalige Rest unter 4 Personen vertheilt; was erhält jede Person davon?

Antw. 5 Pud 37 K 77 Solotnik.

3) Für 52 Rbl. kauft Jemand 6 Pud 23 K 76 Sol. Seife; wie viel erhielt er für 1 Rubel?

Antw. 5 K 7 Solotnik.

4) Für 70 Rbl. 40 Kop. kauft Jemand 1 Sorokowoi Brandtwein; was kostet ihm 1 Kruschke?

Antw. 22 Cop.

Eintheilung der Zahlen nach gewissen Eigenschaften.

§. 35. Gerade oder Paarzahlen werden diejenigen Zahlen genannt, die sich durch 2 ohne Rest theilen lassen, wozu auch die 0 gerechnet wird. Die Paarzahlen sind demnach: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, u. s. w.

Ungerade Zahlen heißen solche, die durch 2 dividirt, 1 zum Reste lassen. Diese Zahlen sind: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 u. s. w.

Theilbar wird eine Zahl genannt, wenn sie durch irgend eine andere Zahl dividirt, keinen Rest läßt; so sind z. B. 15, 12, 49 theilbare Zahlen, weil 15 durch 5 und 3; 12 durch 4 und 3, und 49 durch 7 theilbar ist.

Untheilbare, absolute Primzahlen, oder Primzahlen für sich heißen solche Zahlen, welche nur durch sich selbst und durch die Einheit ohne Rest theilbar sind, z. B. 1, 2, 3, 7, 11, 13, 17 u. s. w.

Relative Primzahlen oder Primzahlen unter sich sind diejenigen Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, wie z. B. 9 und 16, so wie 25 und 18 u. s. w.

§. 36. Merkmale, woran zu erkennen ist, ob eine einfache Zahl in einer andern gegebenen ohne Rest aufgeht.

1) Die **2** geht in jeder Zahl ohne Rest auf, wenn letztere mit einer Paarzahl, d. i. mit 0, 2, 4, 6, 8 endigt; z. B. die Zahl 9174 geht durch 2 auf, weil deren letztere Ziffer 4 durch 2 dividirt, ohne Rest aufgeht.

2) Die **3** geht in jeder Zahl ohne Rest auf, wenn die Summe der Ziffern dieser Zahl durch 3 ohne Rest aufgeht; z. B. die Zahl 7956 geht durch 3 auf, weil die Summe ihrer Ziffern $7 + 9 + 5 + 6 = 27$ durch 3 aufgeht.

3) Die **4** geht in jeder Zahl ohne Rest auf, wenn sie in den beiden letzten Ziffern der Zahl ohne Rest aufgeht; z. B. 7384 geht durch 4 auf, weil die 4 in den beiden letztern Ziffern (84) der Zahl ohne Rest aufgeht.

4) Die **5** ist genau in einer Zahl enthalten, wenn sie sich mit 5 oder 0 endigt; z. B. $7895 : 5 = 1579$.

5) Die **6** geht in einer Zahl auf, wenn die Merkmale von 3 und 2 zugleich in der Zahl enthalten sind, d. h. wenn die letzte Ziffer eine Paarzahl ist, und die Summe der Ziffern dieser Zahl durch 3 getheilt werden kann; z. B. 4710 geht durch 2 ohne Rest auf, weil die letzte Ziffer 0 durch 2 theilbar ist. Diese Zahl geht auch durch 3 auf, weil die Summe ihrer Ziffern $4 + 7 + 1 + 0 = 12$ durch 3 ohne Rest theilbar ist. *)

*) Das Merkmal der 7 ist wegen seiner Weitläufigkeit von keinem Nutzen und deshalb hier weggelassen.

6) Die 8 geht in einer Zahl auf, wenn 8 in den letzten 3 Ziffern der Zahl ohne Rest theilbar ist; z. B. ist 10816 durch 8 theilbar, weil die 8 in den letzten 3 Ziffern (816) der Zahl ohne Rest aufgeht.

7) Die Zahl 9 ist ohne Rest in einer Zahl enthalten, wenn die Summe der Ziffern dieser Zahl durch 9 ohne Rest dividirbar ist; z. B. geht die 9 in der Zahl 184563 ohne Rest auf, weil die Summe der Ziffern dieser Zahl $1 + 8 + 4 + 5 + 6 + 3 = 27$ durch 9 theilbar ist.

8) Die 10 geht in einer Zahl ohne Rest auf, wenn sich dieselbe mit einer oder mehreren Nullen endigt; z. B. $7850 : 10 = 785$.

9) Die 11 geht in einer Zahl ohne Rest auf, wenn der Unterschied der Summe der graden und ungraden Stellen der Zahl durch 11 ohne Rest aufgeht; z. B. in der Zahl 7254291 ist

$$7 + 5 + 2 + 1 = 15, \text{ die Summe der ungraden Stellen,}$$

$$\text{und } 2 + 4 + 9 = 15, \text{ die Summe der graden Stellen.}$$

Der Unterschied der Summe der graden und ungraden Stellen ist hier $15 - 15 = 0$, welche durch 11 theilbar ist; folglich geht 11 auch in obiger Zahl 7254291 ohne Rest auf.

10) Sind in einer gegebenen Zahl zugleich die Merkmale von 2, 3, 5, enthalten, so geht diese Zahl auch durch $2 \times 3 \times 5 = 30$ ohne Rest auf. Sind die Merkmale von 8, 5, 11 in einer Zahl zugleich enthalten, so geht diese auch durch $8 \times 5 \times 11 = 440$ auf u. s. w.

B e w e i s .

Zu № 1. Die Zahl 9174 kann zerlegt werden in 9170 und 4. Beide gehen durch 2 ohne Rest auf; folglich muß auch 9174 durch 2 theilbar seyn.

Zu № 2 und 7. Die Zahl 7956 kann zerlegt werden in 7000 + 900 + 50 + 6.

Dividirt man 9 in 7000, so ist der Quotient 777, und der Rest ist 7; folglich ist

$$7000 = 9 \cdot 777 + 7. \text{ Eben so ist}$$

$$900 = 9 \cdot 99 + 9. \text{ Eben so ist}$$

$$50 = 9 \cdot 5 + 5.$$

$$6 = \dots + 6.$$

$$\text{folglich } 7956 = 9 \cdot [777 + 99 + 5] + [7 + 9 + 5 + 6] \text{ oder}$$

$$7956 = 9 \cdot 881 + (7 + 9 + 5 + 6).$$

Hier ist also die Zahl 7956 in 2 Theile zerlegt, so daß der erste Theil den Factor 9, und der zweite Theil die Summe aller Ziffern der Zahl 7956 enthält. Daher ist jede Zahl durch 3 oder 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffer 7 + 9 + 5 + 6 als der zweite Theil der zerlegten Zahl, durch 3 oder 9 theilbar ist.

Zu № 3. Die Zahl 7384 läßt sich zerlegen in 7300 + 84. Beide gehen durch 4 ohne Rest auf; folglich muß auch die 7384 durch 4 ohne Rest dividirbar seyn.

Zu № 4. Die Zahl 7895 läßt sich zerlegen in 7890 + 5. Beide gehen durch 5 ohne Rest auf; folglich muß auch 7895 durch 5 ohne Rest theilbar seyn.

Zu № 6. Die 10816 kann zerlegt werden in 10000 + 816. In beiden Theilen ist 8 ohne Rest enthalten; folglich auch in 10816.

Zu № 9. Wird eine Zahl mit 11 multiplicirt, so steht bei der Addition der Partial-Producte jede Multiplicanduziffer einmal auf einer ungraden und

einmal auf einer graden Stelle. Kommt also bei der Addition dieser Partial-Producte nie mehr als 9 heraus, so müßte in dem Producte, die Summe der Ziffern auf grader Stelle eben so groß, als die Summe der Ziffern auf ungrader Stelle seyn; folglich der Unterschied der Summen beider Stellen = 0 sein, welche durch 11 dividirt, keinen Rest läßt. Allein jedesmal, wenn bei der Addition ein Zehner erscheint, so wird derselbe auf der betreffenden Stelle weggelassen, und dafür die nächste Stelle um 1 vermehrt; mithin in jenen Ziffersummen ein Unterschied von 11 Einheiten hervorgebracht. Eine Zahl ist daher auch umgekehrt durch 11 ohne Rest theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern auf graden Stellen von der Summe ihrer Ziffern auf ungraden Stellen abgezogen, einen Rest = 0 oder 11, oder ein Vielfaches von 11 giebt.

Von der Zerlegung einer theilbaren Zahl in ihre einfachen Factoren (Primzahlen).

§. 37. Factoren wurden nach §. 23 diejenigen Zahlen genannt, welche durch ihre Multiplication ein Product hervorbringen. Die Factoren können entweder einfache oder zusammengesetzte seyn. Die letzteren sind solche, die man aufs Neue in Factoren zerlegen kann. So sind z. B. 3 und 4 Factoren von 12, weil $3 \times 4 = 12$ ist. Hier würde 3 ein einfacher und 4 ein zusammengesetzter Factor seyn, da 4 in 2×2 zerlegt werden kann. Die einfachen Factoren von 12 sind also: $2 \times 2 \times 3$.

Um die einfachen Factoren einer Zahl zu finden, untersuche man zuvörderst, welche von den einfachen Zahlen (Primzahlen) z. B. 2, 3, 5, 11, vermöge ihrer Merkmale in der gegebenen Zahl ohne Rest aufgehen, und dividire dann diese einfache Zahl in der gegebenen Zahl. Mit dem erhaltenen Quotient verfähre man auf gleiche Weise, und so auch mit allen übrigen, bis der letzte Quotient 1 erscheint; so sind die gebrauchten Divisoren, die gesuchten einfachen Factoren der gegebenen Zahl, die, wenn man sie mit einander multiplicirt, letztere hervorbringen. Z. B. sollen die einfachen Factoren der Zahl 2310 gefunden werden, so ist zuvörderst nach §. 36 N^o 4 die Zahl 2310 durch 5 ohne Rest theilbar; also ist $2310 : 5 = 462$. Demnächst $2310 = 5 \times 462$. Dieser Quotient (462) ist nach §. 36 N^o 1 durch 2 theilbar; also ist $2310 = 5 \times 2 \times 231$. Dieser Quotient (231) ist nach §. 36 N^o 2 durch 3 theilbar; also ist $2310 = 5 \times 2 \times 3 \times 77$. Dieser Quotient (77) ist nach §. 36 N^o 9 durch 11 theilbar; demnach ist $2310 = 5 \times 2 \times 3 \times 11 \times 7$.

Beispiele zur Uebung.

Es sollen zu folgenden Zahlen die einfachen Factoren gefunden werden.

Von der Zahl	22275	find dieselben	5, 11, 5, 3, 3, 3, 3.
"	"	"	5, 5, 5, 11, 3.
"	"	"	11, 7, 3, 5, 2, 11.
"	"	"	2, 2, 2, 2, 3, 3, 5.
"	"	"	5, 11, 7, 13.
"	"	"	2, 2, 2, 3, 7, 11.
"	"	"	2, 3, 5, 11, 7, 13.
"	"	"	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 11.

Von der Auffindung sämtlicher Zahlen, die in einer gegebenen Zahl ohne Rest aufgehen.

§. 38. Um sämtliche Zahlen zu finden, die in einer gegebenen ohne Rest aufgehen, zerlege man die gegebene Zahl nach Anleitung des §. 37. in ihre einfachen Factoren. Schreibe dann die Zahl 1 und den ersten einfachen Factor neben einander hin, und multiplicire sie mit dem zweiten einfachen Factor und setze deren Producte neben die vorherigen Producte, und multiplicire dann alle so erhaltenen Producte mit dem dritten einfachen Factor, und dieses Verfahren setze man so lange fort, bis die Multiplication aller vorstehenden Producte mit dem letzten einfachen Factor vollendet ist. Alle auf diese Weise erhaltenen Producte — und nicht mehr — gehen sämtlich in der gegebenen Zahl ohne Rest auf. Sollten 2 oder mehrere gleiche Producte durch die besagte Multiplication entstehen; so läßt man natürlich alle bis auf eines derselben hinweg; z. B. die Zahl 210 kann in die einfachen Factoren 2, 3, 5, 7 zerlegt werden. Schreibe zuvörderst die 1 und den ersten Factor 2 neben einander, also: 1, 2; multiplicire diese mit dem zweiten einfachen Factor 3; so erhält man folgende Producte: 3, 6. Setze diese neben obige; so erhält man: 1, 2, 3, 6. Diese multiplicire mit dem dritten einfachen Factor 5; so erhält man wieder folgende Producte: 5, 10, 15, 30. Diese setze neben die vorherigen Producte; so erhält man: 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30. Diese multiplicire mit dem letzten einfachen Factor 7; so erhält man: 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. Diese setze neben die oben erhaltenen Producte; so erhält man überhaupt nachstehende Zahlen: 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105 und 210; welche sämtliche in 210 ohne Rest aufgehen. Diese Zahlen müssen ihrer natürlichen Reihenfolge nach also geordnet werden:
1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 und 210. —

Sollen ferner alle Zahlen gefunden werden, die in der Zahl 900 ohne Rest aufgehen; so zerlege die Zahl 900 in ihre einfachen Factoren; diese sind: 2, 2, 3, 3, 5, 5. Hier sind 2 Factoren einander gleich. Um nun aus denselben alle Zahlen zu finden, die in 900 ohne Rest aufgehen; verfähre man ganz nach obiger Anleitung, werfe aber von den hier erscheinenden gleichen Producten alle bis auf eins derselben hinweg; z. B. 1, 2. Mit dem zweiten Factor 2 multiplicirt, giebt: 2, 4. Diese zu 1 und 2 gesetzt, geben: 1, 2, 2, 4. Hier lasse man die eine Zahl 2 hinweg, so bleiben nach: 1, 2, 4. Diese multiplicire mit dem dritten Factor 3, so erscheinen: 3, 6, 12. Diese zu obigen 1, 2, 4 gesetzt, geben: 1, 2, 4, 3, 6, 12. Diese mit dem vierten einfachen Factor 3 multiplicirt, geben:
3, 6, 12, 9, 18, 36. Hier lasse die eine 3, 6, 12 hinweg, weil sie zweimal vorkommen, so bleiben nach: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36. Diese mit dem fünften einfachen Factor 5 multiplicirt, erscheinen:
5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180. Diese zu den obigen hinzugefügt, geben: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180. Diese mit dem letzten Factor 5 multiplicirt, geben:

5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 25, 50, 100, 75, 150, 300, 225, 450, 900. Hier lasse man 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180 hinweg, weil sie doppelt vorkommen, und füge die nachgebliebenen Zahlen den obigen hinzu; so erscheinen gut geordnet folgende 27 Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900, welche sämmtlich in 900 ohne Rest aufgehen.

Beispiele zur Uebung.

Zu 1155 sind sämmtliche ohne Rest aufgehende Zahlen: 3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385, 1155.

Zu 2310 sind es: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310.

Zu 360 sind es: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Von dem Verfahren, das größte gemeinschaftliche Maaß zwischen zwei gegebenen Zahlen zu finden.

§. 39. Wenn eine Zahl in mehreren andern Zahlen ohne Rest enthalten ist, so wird dieselbe das gemeinschaftliche Maaß dieser Zahl genannt, und die größte Zahl davon erhält den Namen „größtes gemeinschaftliches Maaß.“ So sind z. B. von 12, 24, 36, 48 die gemeinschaftlichen Maaße: 2, 3, 4, 6, 12, und 12 ist das größte gemeinschaftliche Maaß derselben.

Bei kleinern Zahlen ist das größte gemeinschaftliche Maaß durch Hülfe der Merkmale in §. 36 leicht zu bestimmen; bei größern Zahlen hingegen würde solches mehrere Schwierigkeiten verursachen, wenn man sich nicht nachstehenden Verfahrens bedienen wollte: Es soll z. B. das größte gemeinschaftliche Maaß zwischen 5561 und 6557 gefunden werden. Man dividire mit der kleinern Zahl 5561 in die größere 6557, welche 1 zum Quotient und 996 zum Rest giebt. Mit diesem Rest 996 dividire man aufs Neue in den Divisor 5561, wodurch 5 zum Quotient und 581 zum Rest erhalten wird. Mit diesem Rest 581 wird in den vorhergehenden Divisor 996 dividirt, wodurch man 1 zum Quotient und 415 zum Rest erhält. Auf diese Weise fahre man fort mit jedem Rest in den vorhergehenden Divisor zu dividiren, bis endlich ein Rest in dem vorhergehenden Divisor aufgeht, welcher Divisor dann das größte gemeinschaftliche Maaß beider gegebenen Zahlen ist. Sollte der letzte Rest 1 sein, so ist dieses ein Zeichen, daß kein gemeinschaftliches Maaß für die gegebenen Zahlen stattfindet, z. B.

$$5561 \overline{) 6557} \quad 1 \text{ (Quotient).}$$

$$\text{Rest: } 996 \overline{) 5561} \quad 5 \text{ (Quotient).}$$

$$\text{Rest: } 581 \overline{) 996} \quad 1 \text{ (Quotient).}$$

$$\text{Rest: } 415 \overline{) 581} \quad 1 \text{ (Quotient).}$$

$$\text{Rest: } 166 \overline{) 415} \quad 2 \text{ (Quotient).}$$

$$\text{Rest: } 83 \overline{) 166} \quad 2 \text{ (Quotient).}$$

Es ist demnach 83 das größte gemeinschaftliche Maaß von 5561 und 6557.

B e w e i s .

Da 83 in 166 aufgeht, so muß 83 auch in 415 ($= 2 \cdot 166 + 83$) aufgehen.
 Da nun 83 in 415 aufgeht, so muß 83 auch in 581 ($= 415 + 166$) aufgehen.
 Da 83 in 581 aufgeht, so muß 83 auch in 996 ($= 581 + 415$) aufgehen.
 Da 83 in 996 aufgeht, so muß 83 auch in 5561 ($= 5 \cdot 996 + 581$) aufgehen.
 Da 83 in 5561 aufgeht, so muß 83 auch in 6557 ($= 5561 + 996$) aufgehen.
 Folglich ist 83 in den beiden gegebenen Zahlen 5561 und 6557 ein gemeinschaftliches und zwar das größte gemeinschaftliche Maaß, wodurch demnach die beiden Zahlen ohne Rest dividierbar sind.

Uebungs - Beispiele.

Von 6142 und 7719 ist das größte gemeinschaftliche Maaß 83.
" 3621 " 6248 " " " " " " 71.
" 6496 " 8439 " " " " " " 29.
" 3813 " 8463 " " " " " " 31.
" 8439 " 9309 " " " " " " 87.

Von dem Verfahren, die kleinste gemeine theilbare Zahl für mehrere Zahlen zu finden.

§. 40. Die kleinste gemeine theilbare Zahl wird diejenige Zahl genannt, welche unter allen andern die kleinste ist, worin mehrere gegebene Zahlen ohne Rest aufgehen. So sind z. B. die Zahlen 2, 3, 4 in 48, 36, 24, 12 ohne Rest enthalten; hievon ist aber 12 die kleinste gemeine theilbare Zahl durch 2, 3, 4. Die Bestimmung der kleinsten gemeinen theilbaren Zahl kann auf zweierlei Art geschehen.

- 1) Vermitteltst Zerfällung der gegebenen Zahlen in ihre einfachen Factoren nach §. 36.

Die Zerfällung wird mit jeder gegebenen Zahl vorgenommen, aber nur diejenigen einfachen Factoren derselben werden beibehalten, die zur Hervor-

bringung jeder einzelnen der gegebenen Zahlen nothwendig sind, z. B. von den gegebenen Zahlen 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25 sind die einfachen Factoren von $12 = 2 \times 2 \times 3$ und $15 = 3 \times 5$;

weil nun 3 "bereits in 12 enthalten ist, so wird dieselbe hinweggelassen, da in dem Producte $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ sowohl 12 als 15 aufgehen.

Die einfachen Factoren von 16 sind $2 \times 2 \times 2 \times 2$; hievon sind 2×2 hinwegzulassen und zu den vorhergehenden einfachen Factoren ($2 \times 2 \times 3 \times 5$) nur 2×2 hinzuzufügen, weil in dem Producte $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 = 240$ sowohl 12 als 15 und 16 ohne Rest enthalten sind. So fahre man bis zur letzten Zahl 25 fort, und man erhält die benöthigten einfachen Factoren für die kleinste gemeine theilbare Zahl:

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 3600.$$

Uebungs-Beispiele.

Für 10, 12, 14, 21, 24, 25, 27, 30, ist 37800 und für 9, 10, 16, 18, 20, 25, 30, 36 ist 3600 die kleinste gemeine theilbare Zahl.

2) Vermittelt Anwendung gemeinschaftlicher Maaße nach §. 39.

Die gegebenen Zahlen werden neben einander geschrieben und zuvörderst untersucht, ob eine oder mehrere der hingeschriebenen Zahlen in den danebenstehenden Zahlen ohne Rest aufgehen, welche erstere sodann ausgestrichen werden. Dann suche man durch Hülfe der Merkmale in §. 39. ein gemeinschaftliches Maaß, das wenigstens in 2 der nicht ausgestrichenen Zahlen aufgeht. Mit diesem gemeinschaftlichen Maaße, das man vor die übriggebliebenen Zahlen, als Divisor setzt, dividire man in diejenigen Zahlen, worin es ohne Rest aufgeht, und setze die erhaltenen Quotiente, so wie die nachgebliebenen Zahlen, unter einen Strich. Nun untersuche man aufs Neue, ob einer oder mehrere der erhaltenen Quotiente, in einer danebenstehenden Zahl aufgehen, welche sodann ebenfalls ausgestrichen werden. Setzt nehme man, wenn es möglich ist, ein zweites gemeinschaftliches Maaß an, und verfare damit auf gleiche Weise, bis sämmtlich nachgebliebene Zahlen Primzahlen unter sich sind, d. h. keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben; z. B. zu den Zahlen 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25 soll die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden.

Auflösung.

$$\begin{array}{r} 2) \ 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25 \\ \hline 2) \ 15, 8, 9, 10, 12, 25 \\ \hline 2) \ 15, 4, 9, 5, 6, 25 \\ \hline 3) \ 15, 2, 9, 3, 25 \\ \hline 5, 2, 3, 25. \end{array}$$

Folglich gibt $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 25 = 3600$ die kleinste gemeine theilbare Zahl für 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25.

§. 41. Von einigen Vortheilen, welche zuweilen bei der Multiplication ganzer Zahlen angewendet werden können.

1) Soll eine Zahl mit **10** multiplicirt werden; so hänge an die gegebene Zahl eine 0, z. B. $24 \times 10 = 240$. Soll sie mit **100** multiplicirt werden; so hänge an dieselbe 2 Nullen, mit **1000**, 3 Nullen u. s. w.; z. B.

$$24 \times 100 = 2400 \text{ und } 24 \times 1000 = 24000 \text{ u. s. w.}$$

2) Mit **5**. Da $5 = \frac{10}{2}$ ist; so hänge an die gegebene Zahl eine Null und dividire sie dann durch 2, oder: dividire die Zahl erst durch 2, und hänge dann an den erhaltenen Quotient eine Null an; z. B.

$$24 \times 5 = 24 \cdot \frac{10}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

3) Mit **15**. Da $15 = \frac{30}{2}$ ist, so multiplicire die gegebene Zahl mit 3, hänge dann dem Producte eine Null an und dividire dieses darauf durch 2; z. B.

$$24 \times 15 = 24 \cdot \frac{30}{2} = \frac{720}{2} = 360;$$

oder: man nehme 15 doppelt, also 30, und von dem andern Factor die Hälfte, z. B. $36 \times 15 = 18 \times 30 = 540$.

4) Mit **25**. Da $25 = \frac{100}{4}$ ist, so hänge an die gegebene Zahl 2 Nullen und dividire sie dann durch 4; oder: man nehme 25 viermal und von der andern Zahl den 4ten Theil; z. B.

$$25 \times 48 = \frac{100}{4} \cdot 48 = 100 \cdot \frac{48}{4} = 100 \cdot 12 = 1200.$$

5) Mit **75**. Da $75 = \frac{4 \cdot 75}{4} = \frac{300}{4}$ ist, so multiplicire man die andere Zahl mit 3, hänge dann derselben 2 Nullen an und dividire sie durch 4; z. B.

$$75 \times 48 = \frac{300}{4} \cdot 48 = 300 \cdot \frac{48}{4} = 300 \cdot 12 = 3600.$$

6) Mit **125**. Da $125 = \frac{1000}{8}$ ist; so hänge an die gegebene Zahl 3 Nullen an und dividire sie durch 8; oder man nehme 125 achtmal (= 1000) und von der andern Zahl den 8ten Theil; z. B.

$$125 \times 848 = \frac{1000}{8} \cdot 848 = 1000 \cdot \frac{848}{8} = 1000 \cdot 106 = 106000.$$

7) Mit **11**. Die erste Ziffer der gegebenen Zahl rechter Hand wird hingeschrieben, dieselbe sodann zur folgenden zweiten, die zweite zur dritten u. s. w. addirt und die letzte Ziffer linker Hand, der durch obiges Verfahren hervorgebrachten Zahlenreihe, vorgesetzt. Sollten zweiziffrige Summen bei dieser Addition entstehen, so werden die Zehner derselben mit zu der folgenden Summe gezählt; z. B. 37653×11 .

Hier ist	3 =	3)	}	Diese Ziffern in gehöriger Ordnung auf einander folgend, geben das ver- langte Product.
	3 + 5 =	8)		
	5 + 6 =	(1) 1)		
6 + 7 +	(1) =	(1) 4)		
7 + 3 +	(1) =	(1) 1)		
3 +	(1) =	4)		

$$37653 \times 11 = 414183.$$

8) Mit **111**. Hier verfähre man auf ähnliche Weise als mit 11; z. B.

$$\begin{array}{r}
 6813 \times 111 = 3 \\
 3 + 1 = 4. \\
 3 + 1 + 8 = 12. \\
 1 + 8 + 6 = 15. \\
 8 + 6 = 14. \\
 6 = 6.
 \end{array}$$

Demnach ist $6813 \times 111 = 756243$.

Ebenso ist das Verfahren mit 1111 u. f. w.

9) Durch Zerfällung des Multiplcators in Factoren. Es soll z. B. 3719 mit **48** multiplicirt werden. Es ist $48 = 8 \cdot 6$. Die Zahl 3719 zuerst mit 8 multiplicirt, ist = 29752; diese Zahl noch mit 6 multiplicirt, gibt 178512.

10) Mit **9**. Es ist $75 \times 9 = 75 \cdot (10 - 1) = 750 - 75 = 675$.

11) Mit **99**. Es ist $874 \times 99 = 874 \cdot (100 - 1) = 87400 - 874 = 86526$.

12) Mit **999**. Es ist $431 \times 999 = 431 \cdot (1000 - 1) = 431000 - 431 = 430569$. Ebenso verfährt man auch mit 9999 u. f. w.

13) Mit **97**. Es ist $48 \times 97 = 48 \cdot (100 - 3) = 4800 - 144 = 4656$.

14) Mit **996**. Es ist $43 \times 996 = 43 \cdot (1000 - 4) = 43000 - 172 = 42828$.

§. 42. Von einigen Vortheilen, welche zuweilen bei der Division ganzer Zahlen angewendet werden können.

1) Mit 10. Es ist $850 : 10 = 85$

$$945 : 10 = 94\frac{5}{10}$$

$$371 : 10 = 37\frac{1}{10}$$

wobei die letzte Ziffer der Zahl durch ein Comma abgefordert und unter dieselbe 10 als Nenner gesetzt wird.

2) Mit 100. Es ist $8500 : 100 = 85$

$$850 : 100 = 8\frac{50}{100} = 8\frac{1}{2}$$

$$757 : 100 = 7\frac{57}{100}$$

3) Mit 1000. Es ist $79000 : 1000 = 79$

$$38500 : 1000 = 38\frac{500}{1000} = 38\frac{1}{2}$$

$$7952 : 1000 = 7\frac{952}{1000}$$

4) Mit 5. Es ist $84 : 5 = 84 : \frac{10}{2} = \frac{84 \cdot 2}{10} = \frac{168}{10} = 16\frac{8}{10}$.

Man multiplicire den Dividendus mit 2 und dividire das Product durch 10, so erhält man den gewünschten Quotient.

$$5) \text{ Mit } 15. \text{ Es ist } 240 : 15 = 240 : \frac{30}{2} = 240 \cdot \frac{2}{30} = \frac{480}{30} = 16.$$

$$6) \text{ Mit } 25. \text{ Es ist } 850 : 25 = 850 : \frac{100}{4} = 850 \times \frac{4}{100} = \frac{3400}{100} = 34.$$

$$7) \text{ Mit } 125. \text{ Es ist } 845 : 125 = 845 : \frac{1000}{8} = \frac{845 \cdot 8}{1000} = \frac{6760}{1000} = 6\frac{760}{1000}.$$

Zuweilen ist es auch ein Vortheil in der Division den Divisor in Factoren zu zerlegen und zuvörderst mit dem ersten derselben den Dividendus zu theilen; den dadurch erhaltenen Quotient durch den zweiten Factor und den so erhaltenen Quotient wieder durch den dritten Factor u. s. w. zu theilen; z. B.

$$8) 848 : 8 = 848 : 2 \cdot 2 \cdot 2 = 106;$$

denn 848 dividirt durch 2 gibt 424

$$424 \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad 212$$

$$212 \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad 106.$$

$$\text{Ebenso } 816 : 48 = 816 : 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 17;$$

denn 816 dividirt durch 2 gibt 408

$$408 \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad 204$$

$$204 \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad 102$$

$$102 \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad 51$$

$$51 \quad " \quad " \quad 3 \quad " \quad 17.$$

Von den Brüchen überhaupt.

§. 43. Ein Bruch ist ein Theil eines Ganzen oder der Einheit. Soll aber die Größe oder der Werth des Bruches ausgedrückt werden, so müssen die Theile, in welche die Einheit getheilt worden ist, durchaus einander gleich sein. Wenn man daher die Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, etwa in 6 theilt, und einen solchen Theil mit der Einheit vergleicht, so ist dieser eine Theil Ein Sechstel von der Einheit und man schreibt diesen Bruch $\frac{1}{6}$. Zwei, drei, oder mehrere solcher Theile geben 2 mal, oder 3 mal Ein Sechstel oder $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ u. s. w.

Ein Bruch wird demnach durch 2 Begriffe bestimmt:

- 1) in wie viel gleiche Theile das Ganze oder die Einheit getheilt wird, und
- 2) wie vielmals ein solcher Theil der Einheit genommen worden ist.

Aus der Bezeichnung des Bruchs $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ u. s. w. ersieht man, daß die Zahl, welche andeutet, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt werden soll, unter den Strich, und die Zahl, wie vielmals einer dieser Theile genommen werden soll, über den Strich zu stehen kommt. Die Zahl unter dem Striche wird deshalb der Nenner, und die über demselben, der Zähler des Bruches genannt.

Die Brüche zerfallen überhaupt in 3 Classen, nämlich:

- 1) in gemeine Brüche,
- 2) in Decimalbrüche, und
- 3) in Kettenbrüche.

Wenn für den Nenner eines Bruches jede beliebige Zahl angenommen werden darf, so werden es gemeine Brüche genannt.

Wenn aber der Nenner eines Bruches die Zahl 10 oder ein Product derselben ist, also 100, 1000, 10000 u. s. w., so heißt ein solcher Bruch ein Decimalbruch. Besteht der Nenner eines Bruches aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, und des zweiten Bruches Nenner wieder aus einer ganzen Zahl und einem Bruche u. s. w. fort: so nennt man einen solchen Bruch einen Ketten- oder continuirlichen Bruch, z. B.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2 + 1 \\ \hline 3 + 1 \\ \hline 5 + \dots \end{array}$$

I. Von den gemeinen Brüchen.

§. 44. Die gemeinen Brüche theilt man ein in ächte, unächte, vermischte und Doppelbrüche.

- 1) Ein ächter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist, z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$ u. s. w.
- 2) Ein unächter Bruch hingegen, dessen Zähler größer als der Nenner ist, z. B. $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{7}$ u. s. w.
- 3) Ein vermischter Bruch heißt derjenige Bruch, welcher aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch besteht, z. B. $8\frac{1}{3}$, $9\frac{2}{7}$.
- 4) Doppelbrüche sind solche Brüche, deren Zähler aus einem Bruche und dessen Nenner aus einer ganzen Zahl besteht, z. B. $\frac{3}{\frac{1}{5}}$, $\frac{2}{\frac{1}{7}}$. Man liest diese Brüche: dreiviertel fünftel; zweidrittel siebentel.

Einen unächtigen Bruch verwandelt man dadurch in einen vermischten, daß man mit dem Nenner in den Zähler desselben dividirt, wodurch die Ganzen aus dem Bruche ausgeschieden werden; so ist $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ und $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$.

Eben so einfach kann man auch jeden vermischten Bruch in einen unächtigen Bruch verwandeln, indem man die ganze Zahl in Theilen des angehängten Bruches ausdrückt und die gleich großen Theile des Zählers dazu addirt. z. B. $5\frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$.

§. 45. **Lehrsatz.** Wenn zwei Brüche gleiche Nenner und ungleiche Zähler haben, so ist derjenige Bruch an Werth größer, der den größern Zähler hat, und zwar so vielmal größer, als sein Zähler größer ist als der Zähler des andern Bruches; z. B. ist $\frac{5}{8}$ fünfmal mehr an Werth als $\frac{1}{8}$.

B e w e i s .

Da die Einheit bei beiden Brüchen in 8 gleiche Theile getheilt ist, und einer dieser gleichen Theile bei dem einen Bruch fünfmal, und bei dem andern einmal genommen, und da 5 fünfmal größer, als 1 ist; so ist offenbar, auch $\frac{5}{8}$ fünfmal größer als $\frac{1}{8}$, und umgekehrt $\frac{1}{8}$ fünfmal kleiner als $\frac{5}{8}$.

Hieraus folgt offenbar, daß der Werth eines Bruches so vielmal vergrößert wird, als man den Zähler desselben vergrößert, und umgekehrt, daß der Werth eines Bruches so vielmal verkleinert wird, als man den Zähler desselben verkleinert,

z. B. wollte man $\frac{2}{3}$ dreimal vergrößern, so hat man den Zähler 2, 3mal zu nehmen, folglich wird $\frac{6}{3}$ dreimal größer als $\frac{2}{3}$ sein, und wollte man von $\frac{8}{3}$ den 4ten Theil nehmen, so braucht man nur vom Zähler 8 den 4ten Theil, d. i. 2, zu nehmen; also ist $\frac{2}{3}$ viermal kleiner als $\frac{8}{3}$.

§. 46. **Lehrsatz.** Wenn zwei Brüche gleiche Zähler und ungleiche Nenner haben, so ist derjenige Bruch an Werth größer, der den kleinern Nenner hat, und zwar ist der eine Bruch so vielmal größer, als sein Nenner kleiner ist, als der Nenner des andern Bruches. Es ist z. B. $\frac{2}{3}$ viermal so groß als $\frac{2}{32}$, weil der Nenner 8 des ersten Bruches viermal kleiner ist, als der Nenner 32 des zweiten Bruches.

Beweis.

Bei $\frac{2}{3}$ ist die Einheit in 3 unter sich gleiche Theile und bei $\frac{2}{32}$ ist dieselbe Einheit wieder in 32 unter sich gleiche Theile, folglich in viermal mehr Theile getheilt, als bei $\frac{2}{3}$; demnach muß $\frac{2}{32}$ viermal kleiner an Werth sein als $\frac{2}{3}$. — Nun ist bei $\frac{2}{3}$ der eine Theil $\frac{1}{3}$ dreimal, und bei $\frac{2}{32}$ der eine Theil $\frac{1}{32}$ auch dreimal, also bei beiden Brüchen gleich vielmal genommen; folglich muß auch $\frac{2}{3}$ viermal größer als $\frac{2}{32}$ seyn. Hieraus folgt einfach, daß man den Werth eines Bruches so vielmal verkleinert, als man den Nenner desselben vergrößert, und umgekehrt, daß man den Werth eines Bruchs so vielmal vergrößert, als man den Nenner desselben verkleinert; z. B. wollte man vom Bruche $\frac{1}{11}$ den vierten Theil nehmen, so kann man entweder den vierten Theil vom Zähler 8 nehmen oder den Nenner 11 viermal vergrößern; so wäre z. B. von $\frac{1}{11}$ der vierte Theil $\frac{1}{44}$ und auch $\frac{8}{44}$, also ist $\frac{1}{11} = \frac{8}{44}$. Eben so heißt $\frac{3}{5}$ weiter nichts, als daß $\frac{3}{5}$ in 5 gleiche Theile getheilt und demnach der Werth von $\frac{3}{5}$, fünfmal verkleinert werden soll; folglich ist $\frac{3}{5} = \frac{3}{25}$. Auf gleiche Weise ist $\frac{2}{7} = \frac{2}{49}$ u. s. w.

§. 47. **Lehrsatz.** Ein Bruch verliert nichts an seinem Werthe, wenn sein Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt wird; z. B.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{12}{32}.$$

Beweis.

Durch die Multiplication des Zählers mit 4, ist der Werth des Bruches (nach §. 45) viermal vergrößert, und durch die Multiplication des Nenners mit 4 wiederum viermal verkleinert (nach §. 46); es ist also der Werth von $\frac{3}{8}$ um ein gleich Vielfaches vergrößert und verkleinert worden; folglich ist der Bruch an Werth unverändert geblieben, obgleich sich sein Zähler und Nenner verändert haben.

Eben so verhält es sich, wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches mit einerlei Zahl dividirt; z. B. ist

$$\frac{8}{24} = \frac{8 : 8}{24 : 8} = \frac{1}{3}.$$

Beweis.

Durch die Division des Zählers 8 mit 8 ist der Werth des Bruches (nach §. 46) achtmal verkleinert und durch die Division des Nenners 24 mit 8 ist der

Werth desselben (nach §. 45) achtmal vergrößert; es ist also der Werth von $\frac{8}{24}$ um ein gleich Vielfaches verkleinert und vergrößert worden; folglich ist der Bruch an Werth unverändert geblieben, obgleich Zähler und Nenner desselben verändert worden sind.

Hieraus folgt, daß, wenn Zähler und Nenner eines Bruches einander gleich sind, der Werth desselben = 1 ist; — denn $1 = \frac{1}{1}$. Multiplicirt man nun Zähler und Nenner mit einerlei Zahl, etwa mit 12, so bleibt der Werth nach §. 47 unverändert; also ist

$$1 = \frac{1 \cdot 12}{1 \cdot 12} = \frac{1 \cdot 17}{1 \cdot 17} = \frac{1 \cdot 23}{1 \cdot 23} = \frac{12}{12} = \frac{17}{17} = \frac{23}{23} \text{ u. s. w.}$$

Von dem sogenannten Heben oder Aufheben der Brüche.

§. 48. Einen Bruch aufheben heißt: denselben mit Beibehaltung seines Werthes durch kleinere Zahlen ausdrücken, indem man seinen Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt. Dieses kann auf zweierlei Art geschehen:

- 1) vermittelt der Merkmale durch wiederholte Division nach §. 36, und
 - 2) durch Auffuchung des größten gemeinschaftlichen Maaßes zwischen Zähler und Nenner nach §. 39.
- I. $\frac{1264032}{1596672}$, dividire Zähler und Nenner durch 8 (nach §. 36 N° 6), giebt $\frac{158004}{199584}$, dividire dieselben durch 4 (nach §. 36 N° 3), giebt $\frac{39501}{49896}$, dividire sie durch 9 (nach §. 36 N° 7), giebt $\frac{4389}{5544}$, dividire sie durch 3 (nach §. 36 N° 2) giebt $\frac{1463}{1848}$, dividire sie durch 11 (nach §. 36 N° 9), giebt $\frac{133}{168}$, dividire dieselben durch 7, giebt $\frac{1}{4}$.

II. Man suche nach §. 39 das größte gemeinschaftliche Maaß von den beiden gegebenen Zahlen, z. B.

1264032	1596672	1		
	1264032		3	
	332640		1264032	3
			997920	
			266112	332640
				266112
				66528
				266112
				266112

Es ist also hier zwischen dem Zähler 1264032 und dem Nenner 1596672 die Zahl 66528 das größte gemeinschaftliche Maaß, wodurch genannter Zähler und Nenner dividirt, der Bruch $\frac{1}{4}$ erscheint.

Der Bruch	$\frac{3792096}{4790016}$	gehörig aufgehoben, ist	$= \frac{1}{4}$.
" "	$\frac{1736955}{1856745}$	" "	$= \frac{2}{3}$.
" "	$\frac{623392}{780016}$	" "	$= \frac{2}{3}$.

In dem Bruche $\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{5}$ ist weder in dessen Zähler noch Nenner keins der in §. 36 angeführten Merkmale enthalten. Es soll daher ein Versuch gemacht werden, ob dieser Bruch durch irgend eine andere Zahl aufgehoben werden kann. Um dieses auszumitteln, suche man nun auch zwischen dem Zähler 1209 und dem Nenner 2795 das größte gemeinschaftliche Maaß nach Anleitung des im §. 39 angeführten Verfahrens, z. B.

1209	2795	2	
	2418		
	377	1209	3
		1131	
	78	377	4
		312	
	65	78	1
		65	
	13	65	5
		65	

Es ist demnach 13 das größte gemeinschaftliche Maaß des Bruches $\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{5}$. Dieser Bruch durch 13 aufgehoben, gibt $\frac{2}{3} \frac{2}{5}$.

Der Bruch	$\frac{42994}{54033}$	ist	$= \frac{2}{3}$
" "	$\frac{25347}{43736}$	ist	$= \frac{2}{5}$.

Anmerk. Einen Bruch, dessen Zähler und Nenner kein gemeinschaftliches Maaß enthält, annäherungsweise zu bestimmen, siehe §. 72.

Von der Anweisung, Brüche unter einerlei Benennung zu bringen.

§. 49. Sind mehrere Brüche gegeben, die unter einerlei Benennung gebracht werden sollen, so kann solches auf zweierlei Art geschehen:

- 1) Durch Auffindung der kleinsten gemeinen theilbaren Zahl für sämtliche Nenner, welche Zahl sodann den Namen General- oder gemeinschaftlichen Nenner erhält.

Es kommt hierbei nur darauf an, zu allen Nennern der gegebenen Brüche die kleinste gemeine theilbare Zahl nach Anleitung des in §. 40 angegebenen Verfahrens zu finden.

Aufgabe.

Die Brüche: $\frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{4}{9}, \frac{9}{10}, \frac{13}{14}, \frac{8}{15}, \frac{11}{21}$ sollen unter einerlei Benennung gebracht werden.

Auflösung. Man setze alle Nenner der gegebenen Brüche neben einander und verfähre dann genau nach der in §. 40, 2 angegebenen Regel, wie z. B. hier

$$\begin{array}{r} 3) \quad 6, 8, 9, 10, 14, 15, 21 \\ \hline 2) \quad 2, 8, 3, 10, 14, 5, 7 \\ \hline \quad \quad 4, 3, 5, 7, \quad 7. \end{array}$$

Demnach ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner

$$3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520.$$

Setzt man die obigen Brüche unter einander und schreibe den so gefundenen kleinsten Nenner (Generalnenner) oben in eine Klammer; dann verwandle man alle gegebenen Brüche in solche, die den Generalnenner zu ihrem Nenner haben, ohne daß sie an ihrem ursprünglichen Werthe etwas einbüßen (hier in 2520stel). Hierbei ist das Verfahren folgendes:

Der Nenner 6 des ersten Bruches $\frac{2}{3}$, dividirt man in den Generalnenner 2520 und man erhält dadurch den Quotient 420. Mit diesem multiplicirt man den

Zähler und Nenner des Bruches $\frac{2}{3}$; so erhält man $\frac{2100}{2520}$, welcher Bruch nach

§. 47 = $\frac{2}{3}$ ist. Ferner dividirt man den Nenner 8 des zweiten Bruches $\frac{1}{8}$ in den Generalnenner 2520 und mit dem dadurch erhaltenen Quotient 315 multiplicirt

man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{8}$; so erhält man $\frac{2205}{2520}$, welcher Bruch

nach §. 47 = $\frac{1}{8}$ ist. Ebenso verfährt man auch mit jedem einzelnen der übrigen Brüche;

	z. B.	$\frac{2}{3}$	=	$\frac{5 \cdot 420}{6 \cdot 420}$	=	$\frac{2100}{2520}$
				$\frac{7 \cdot 315}{8 \cdot 315}$		$\frac{2205}{2520}$
		$\frac{4}{9}$		$\frac{4 \cdot 280}{9 \cdot 280}$		$\frac{1120}{2520}$
				$\frac{9 \cdot 252}{10 \cdot 252}$		$\frac{2268}{2520}$
		$\frac{9}{10}$		$\frac{10 \cdot 252}{13 \cdot 180}$		$\frac{2520}{2340}$
		$\frac{13}{14}$		$\frac{8 \cdot 168}{15 \cdot 168}$		$\frac{1344}{2520}$
		$\frac{8}{15}$		$\frac{11 \cdot 120}{21 \cdot 120}$		$\frac{1320}{2520}$
		$\frac{11}{21}$				

$$\text{Summa} = \frac{12697}{2520} = 5\frac{97}{2520}.$$

2) Durch Zerlegung der Nenner in einfache Factoren und des daraus herzuleitenden kleinsten gemeinschaftlichen Nenners (Generalnenners).

Soll z. B. zu den obigen Brüchen: $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{17}{21}$ die kleinste gemeine theilbare Zahl (Generalnenner) gefunden werden, so zerlege man nach §. 37 jeden einzelnen Nenner der gegebenen Brüche in seine einfachen Factoren und nehme aus diesen nur diejenigen heraus, in deren Product die Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest aufgehen. Ist dies geschehen, so multiplicire man alle auf diese Weise herausgenommenen einfachen Factoren mit einander und deren Product ist sodann nach §. 40 die gesuchte kleinste gemeine theilbare Zahl. Es besteht nämlich der Nenner 6 aus den einfachen Factoren 2×3

"	"	8	"	"	"	"	2	\times	2	\times	2
"	"	9	"	"	"	"	3	\times	3		
"	"	10	"	"	"	"	2	\times	5		
"	"	14	"	"	"	"	2	\times	7		
"	"	15	"	"	"	"	3	\times	5		
"	"	21	"	"	"	"	3	\times	7		

Soll der Nenner 6 in dem Generalnenner aufgehen, so müssen in diesem die einfachen Factoren 2×3 vorkommen.

Soll der Nenner 8 in dem Generalnenner aufgehen, so müssen in diesem die einfachen Factoren $2 \times 2 \times 2$ vorkommen. Von diesen nehme man nun heraus 2×2 . Der Generalnenner wird nun bestehen aus $2 \times 3 \times 2 \times 2$; denn in diesem Product gehen die Nenner 6 und 8 auf. Soll der Nenner 9 in dem Generalnenner aufgehen; so müssen in diesem die einfachen Factoren 3×3 enthalten sein; folglich besteht schon der Generalnenner aus $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3$, worin die Nenner 6, 8 und 9 aufgehen. Soll der Nenner 10 in dem Generalnenner aufgehen; so müssen in diesem die einfachen Factoren 2×5 enthalten sein; folglich wird jetzt der Generalnenner enthalten die Factoren $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, worin die Nenner 6, 8, 9 und 10 aufgehen.

Soll der Nenner 14 in dem Generalnenner aufgehen; so müssen in ihm auch die Factoren 2×7 enthalten sein; demnach wird der Generalnenner bestehen aus $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$, in welchem die Nenner 6, 8, 9, 10 und 14 aufgehen. Soll der Nenner 15 in dem Generalnenner aufgehen; so müssen in diesem auch die einfachen Factoren 3×5 enthalten sein; diese beiden Factoren sind schon in dem Product von $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ enthalten; folglich bleibt für den Nenner 15 der bisherige Generalnenner unverändert. Soll auch 21 in dem Generalnenner enthalten sein; so müssen auch 3×7 in demselben vorkommen. Diese beiden Factoren sind schon in dem obigen Generalnenner enthalten; folglich ist der Generalnenner oder die kleinste gemeine theilbare Zahl: $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$. Eine kleinere Zahl, als die, auf diese Weise gefundene, kann der Generalnenner nicht sein; denn ließe man aus jenem Producte auch nur einen der einfachen Factoren hinweg, so würde, wie leicht einzusehen ist, der eine oder der andere Nenner der gegebenen Brüche in den General-Nenner nicht aufgehen.

§. 50. Will man sich bei der Einrichtung der Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner die Division ersparen, so schreibe man oben in die Klammer statt des ausgerechneten Generalnenners, nur dessen einfache Factoren hin, und lasse statt der Division mit dem einzelnen Nenner eines jeden

Bruches in den Generalnenner, aus den einfachen Factoren desselben diejenige Zahl hinweg, die dem jedesmaligen Nenner gleich ist und multiplicire die nachgebliebenen einfachen Factoren des Generalnenners mit einander und noch mit dem Zähler eines jeden Bruches; z. B.

$$\begin{array}{r}
 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 180. \\
 \hline
 \frac{1}{2} | 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \times 1 = \frac{90}{180} \\
 \frac{2}{3} | 3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \times 3 = \frac{135}{180} \\
 \frac{3}{4} | 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \times 5 = \frac{150}{180} \\
 \frac{5}{6} | 2 \cdot 2 \cdot 5 \quad \times 7 = \frac{140}{180} \\
 \frac{7}{10} | 3 \cdot 2 \cdot 2 \quad \times 6 = \frac{17}{180} \\
 \hline
 \frac{17}{15}
 \end{array}$$

$$3) \frac{2, 4, 6, 9, 15}{4, 2, 3, 5}$$

wo also der General-Nenner
 $= 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 180$ ist.

$$\frac{587}{180} = 3\frac{47}{180}$$

Dieses Verfahren ist besonders bei großen General-Nennern mit Vortheil anzuwenden.

Von den vier Species der gemeinen Brüche.

I. Addition der Brüche.

§. 51. Hier giebt es zwei Fälle:

1) Wenn die zu addirenden Brüche gleiche Nenner haben.

Da unter dieser Bedingung sämtliche Theile des Ganzen von einerlei Größe sind, so kann man ihre Zähler zusammen addiren und den Nenner darunter setzen. Ist die erhaltene Summe der Zähler größer als der gemeinschaftliche Nenner, so dividire man mit letzterem in diese Summe und verwandele dadurch den unächtten Bruch in einen vermischten, dessen ganze Einheiten mit zu den Ganzen der zu addirenden Brüche zu zählen sind, z. B. addire $2\frac{5}{8} + 1\frac{7}{8} + 3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{8} + 5\frac{1}{8} = 15 + \frac{5}{8} = 15 + 2\frac{1}{8} = 17\frac{1}{8}$.

2) Wenn die zu addirenden Brüche verschiedene Nenner haben.

Man bringe dann die Brüche nach §. 40 unter einerlei Benennung und addire die erhaltenen Zähler, wobei der gemeinschaftliche Nenner nicht unter jeden einzelnen Bruch geschrieben wird, um Irrungen bei der Addition zu vermeiden. Addire folgende Brüche:

$$\begin{array}{r}
 240 \\
 \hline
 1\frac{5}{12} | 100 \\
 \frac{8}{15} | 128 \\
 2\frac{3}{8} | 90 \\
 12\frac{5}{16} | 75 \\
 7\frac{1}{10} | 12 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$3) \frac{12, 15, 8, 16, 20}{4, 5, 16, 20}$$

$$4) \frac{4, 5, 16, 20}{4, 5}$$

$$\text{Also der General-Nenner} = 3 \times 4 \times 4 \times 5 = 240$$

$$\frac{405}{240} = 1\frac{65}{40} = 1\frac{13}{8}$$

Hiezu die Ganzen $1 + 2 + 12 + 7$ addirt, bringt die Summe $23\frac{13}{8}$ hervor.

Uebungs-Beispiele.

- 1) $13\frac{1}{2} \text{ fl.} + 12\frac{5}{8} \text{ fl.} + 14\frac{3}{4} \text{ fl.} + 16\frac{1}{2} \text{ fl.} = 57\frac{7}{8} \text{ fl.}$
- 2) $38\frac{1}{2} \text{ Rbl.} + 62\frac{2}{3} \text{ Rbl.} + 90\frac{3}{4} \text{ Rbl.} + 12\frac{5}{8} \text{ Rbl.} + 73\frac{7}{8} \text{ Rbl.}$
 $= 278\frac{1}{2} \text{ Rbl.}$
- 3) $1\frac{3}{4} \text{ Cop.} + 5\frac{5}{8} \text{ Cop.} + 8\frac{7}{16} \text{ Cop.} + 9\frac{3}{8} \text{ Cop.} + 10\frac{5}{12} \text{ Cop.}$
 $+ \frac{1}{4} \text{ Cop.} = 36\frac{1}{4} \text{ Cop.}$
- 4) $1\frac{1}{2} \text{ Berk.} + 2\frac{2}{3} \text{ Berk.} + 3\frac{3}{8} \text{ Berk.} + 6\frac{7}{8} \text{ Berk.} = 14\frac{1}{2} \text{ Berk.}$

II. Subtraction der Brüche.

§. 52. Hier finden drei Fälle Statt:

- 1) Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen ist.

Hierbei verfähre man auf folgende Weise: Man nehme von der ganzen Zahl eine Einheit hinweg, und verwandle diese in einen Bruch, dessen Zähler und Nenner dem Nenner des abzuziehenden Bruches gleich ist; schreibe diesen so erhaltenen neuen Bruch neben die Ganzen des Minuendus, und ziehe dann den Zähler des gegebenen Bruches von dem Zähler des bei dem Minuendus stehenden Bruches ab, und schreibe unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner.

Die ganze Zahl wird sodann wegen der hinweggenommenen Einheit um Eins vermindert, und vor den als Bruch erhaltenen Unterschied gesetzt; z. B. es soll von $83, \frac{7}{13}$; von $5, \frac{8}{11}$; von $10, \frac{7}{9}$ abgezogen werden.

$$\begin{array}{r|l|l} \text{Auflösung: } 83. \frac{13}{13} & 5. \frac{11}{11} & 10. \frac{9}{9} \\ \frac{7}{13} & \frac{8}{11} & \frac{7}{9} \\ \hline \text{Rest } 82 \frac{6}{13} & 4 \frac{8}{11} & 9 \frac{2}{9} \end{array}$$

- 2) Wenn Brüche von gleichen Nennern abgezogen werden sollen.

Die Brüche werden unter einander geschrieben und die Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus abgezogen, und der gemeinschaftliche Nenner unter den Rest der Zähler gesetzt. Ist aber der Zähler des Subtrahendus größer, als der Zähler des Minuendus, so nehme man eine Einheit von den dabeistehenden Ganzen des Minuendus und verwandle diese Einheit in einen Bruch, dessen Zähler und Nenner dem Nenner der gegebenen Brüche gleich ist; zähle zu dem aus der Einheit erhaltenen Bruch den Bruch des Minuendus hinzu, und ziehe dann von deren Summe den Bruch des Subtrahendus ab. Die ganze Zahl des Minuendus ist um die Einheit vermindert worden.

Aufgabe.

Von $18\frac{7}{8}$ ziehe ab $10\frac{5}{8}$; was ist der Unterschied?

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung. } 18\frac{7}{8} \\ \underline{10\frac{5}{8}} \\ \text{Rest } 8\frac{2}{8}. \end{array}$$

Von $20\frac{3}{4}$ ziehe ab $15\frac{7}{4}$; was ist der Rest?

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung. } 20. \frac{3}{4} = 19 + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = 19\frac{10}{4} \\ \underline{15 \frac{7}{4} = \dots\dots\dots} \quad \underline{15\frac{7}{4}} \\ \text{Rest} = 4\frac{3}{4}. \end{array}$$

Uebungs-Beispiele.

- 1) Von $16\frac{3}{10}$ Rubeln ziehe ab $7\frac{9}{10}$ Rubel; wie viel bleibt übrig?
Antwort: $8\frac{4}{10}$ Rubel.
- 2) Von $24\frac{3}{17}$ Fuß ziehe ab $16\frac{1}{17}$ Fuß; was bleibt übrig?
Antwort: $7\frac{2}{17}$ Fuß.
- 3) Von $12\frac{3}{8}$ Pud ziehe ab $9\frac{1}{8}$ Pud; was bleibt übrig?
Antwort: $2\frac{2}{8}$ Pud.
- 3) Wenn Brüche von verschiedenen Nennern subtrahirt werden sollen.

Man bringe die Brüche nach §. 40 unter einerlei Benennung und verfare sodann nach der hier (in 2) enthaltenen Anleitung.

Aufgabe.

Von $12\frac{1}{5}$ sollen $5\frac{2}{5}$ subtrahirt werden?

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung.} \quad 12\frac{1}{5} \quad \overline{) \begin{array}{l} 63 \\ 40 \\ \hline 23 \\ 20 \\ \hline 3 \end{array}} \\ \quad \quad \quad 5\frac{2}{5} \quad \overline{) \begin{array}{l} 27 \\ 20 \\ \hline 7 \end{array}} \\ \hline \text{Rest:} \quad 7\frac{2}{5} \quad \overline{) \begin{array}{l} 27 \\ 20 \\ \hline 7 \end{array}} \quad \text{Rest des Bruches.} \end{array}$$

Aufgabe.

Von $15\frac{2}{11}$ sollen $7\frac{3}{11}$ abgezogen werden?

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung.} \quad 15\frac{2}{11} \quad \overline{) \begin{array}{l} 44 \\ 33 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 0 \end{array}} + \begin{array}{l} 44 \\ 33 \\ \hline 11 \end{array} = \begin{array}{l} 52 \\ 33 \\ \hline 19 \end{array} \\ \quad \quad \quad 7\frac{3}{11} \quad \overline{) \begin{array}{l} 33 \\ 33 \\ \hline 0 \end{array}} \dots = \begin{array}{l} 33 \\ 33 \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline \text{Rest:} \quad 7\frac{10}{11} \quad \overline{) \begin{array}{l} 33 \\ 33 \\ \hline 0 \end{array}} \quad \quad \quad 1\frac{9}{11} \quad \text{Rest des Bruches.} \end{array}$$

Uebungs-Beispiele.

- 1) Von $5\frac{2}{3}$ fl ziehe ab $2\frac{5}{6}$ fl; was bleibt übrig? Antw. $2\frac{1}{3}$ fl.
- 2) Von $17\frac{1}{10}$ Pud ziehe ab $7\frac{5}{11}$ Pud; was bleibt übrig?
Antwort: $10\frac{21}{10}$ Pud.
- 3) Von $40\frac{2}{8}$ Rubeln ziehe ab $36\frac{1}{2}$ Rubel; was bleibt übrig?
Antwort: $3\frac{1}{4}$ Rubel.

III. Multiplication der Brüche.

§. 53. Multipliciren heißt: den einen Factor so oft zu sich selbst nehmen, als der andere Factor Einheiten oder Theile von Einheiten enthält; demnach würde

1) $\frac{2}{3} \times 4$ heißen: es soll $\frac{2}{3}$ viermal zu sich selbst genommen werden; nämlich $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Man hat also den Zähler des Bruches mit den Ganzen zu multipliciren und darunter den Nenner des gegebenen Bruches zu setzen.

2) $4 \times \frac{2}{3}$ würde heißen: es soll die 4 zweimal, und von diesem Product der 3te Theil genommen werden. Es ist 4 zweimal genommen 8, und davon ist der 3te Theil $= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Demnach ist $4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 4$.

3) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ heißt: es soll $\frac{3}{4}$ zweimal, und von diesem Product der 3te Theil genommen werden. Es ist $\frac{3}{4}$ zweimal genommen $= \frac{3}{2}$ und davon ist der 3te Theil $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Das Product $\frac{1}{2}$ ist also aus der Multiplication des Zählers mit dem Zähler, und des Nenners mit dem Nenner beider

Brüche hervorgegangen. Daher ist bei der Multiplication der Brüche die Regel: Man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Ebenso ist:

4) $3\frac{3}{4} \times 6 = 1\frac{5}{4} \times 6 = 9\frac{0}{4} = 22\frac{1}{2}$. Hier verwandle man zuvörderst $3\frac{3}{4}$ in einen unächten Bruch $1\frac{5}{4}$ und dann multiplicire dieses Bruches Zähler nach 1) mit der ganzen Zahl 6; wodurch $9\frac{0}{4} = 22\frac{1}{2}$ erscheint.

5) $2\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{8} = \frac{8}{3} \times \frac{1^5}{8} = \frac{8 \times 1^5}{3 \times 8} = 5$. Hier verwandle beide vermischten Brüche in unächte Brüche. Es ist $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ und $1\frac{1}{8} = \frac{1^5}{8}$ und dann multiplicire man nach 3) Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Haben aber vor der Multiplication die Zähler und Nenner beider Brüche ein gemeinschaftliches Maaß, so dividire erst Zähler und Nenner mit demselben und multiplicire dann die nachgebliebenen Primzahlen sowohl im Zähler als im Nenner mit einander.

Man soll z. B. die Brüche $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $2\frac{1}{3}$ und 8 mit einander multipliciren.

Auflösung. Man setze alle Zähler dieser Brüche über und alle Nenner unter einen horizontalen Strich. Nun suche man von je einem Zähler und Nenner das gemeinschaftliche Maaß und dividire hiemit beide (wodurch der Werth des Bruches nach §. 47 unverändert bleibt). Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis alle nachgebliebenen Zähler und Nenner gegen einander verglichen, Primzahlen unter sich sind. Diese multiplicire mit einander sowohl im Zähler als im Nenner; z. B. $\frac{7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 8}{12 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 25} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$.

Zähler und Nenner haben hier das gemeinschaftliche Maaß: $6 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3$. Mit diesem Maaß dividire man obige Zähler und Nenner, so bleiben als Zähler nach $2 \times 7 = 14$ und als Nenner 5, welche Zahlen unter einander Primzahlen sind.

§. 54. **Lehrsatz.** Das Product von ächten Brüchen ist stets kleiner, als jeder der beiden Factoren desselben. Soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden, so wird hier $\frac{3}{4}$ zweimal vergrößert und dreimal verkleinert; also mehr verkleinert als vergrößert. Folglich muß das Ergebnis dieser Operation, d. i. das Product von $\frac{3}{4}$ mal $\frac{2}{3}$, kleiner als $\frac{3}{4}$, also kleiner als ein Factor ($\frac{3}{4}$) werden. Ebenso, wenn $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden soll, so wird $\frac{2}{3}$ dreimal vergrößert und viermal verkleinert, also mehr verkleinert, als vergrößert; folglich muß das Product von $\frac{2}{3}$ mal $\frac{3}{4}$, kleiner als $\frac{2}{3}$, also kleiner als ein Factor ($\frac{2}{3}$) werden.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Von 16 Personen soll jede $1\frac{5}{2}$ Rubel erhalten; wie viel beträgt die zu vertheilende Größe? Antwort. $6\frac{3}{2}$ Rubel.
- 2) Wenn Jemand $\frac{1}{3}$ H Brod erhält; wie viel erhalten 35 Personen? Antwort. $30\frac{2}{3}$ H.
- 3) Wenn 1 Arschien $1\frac{1}{3}$ Rubel kostet, was kostet $1\frac{1}{2}$ Arschien? Antwort. $1\frac{1}{3}$ Rubel.

- 4) Wenn 1 Eschetwert Roggen $2\frac{3}{4}$ Rbl. kostet, was kosten $1\frac{1}{2}$ Eschetwert?
 Antw. $5\frac{5}{8}$ Rubel.
- 5) Multiplicire $1\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{20}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{5}$, was ist das Product?
 Antw. $1\frac{1}{2}$.

IV. Division der Brüche.

§. 55. Das practische Verfahren bei der Division von Brüchen ist folgendes: Man kehre den Bruch des Divisors um, d. h. man mache den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler des Divisorbruches und multiplicire diesen mit dem Bruche des Dividends nach Anleitung des §. 53; das dadurch entstandene Product ist sodann der Quotient dieser Division;
 z. B. ist $1\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = 1\frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{40}{6} = 11$.

1ster Beweis für dieses Verfahren.

Wenn $1\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll und man $1\frac{5}{6}$ erst durch 3 Ganze dividirt; so entsteht der Quotient $\frac{15}{16 \cdot 3}$. Nimmt man aber den Divisor 3 viermal kleiner, also $\frac{3}{4}$, so muß dadurch der Quotient $\frac{15}{16 \cdot 3}$, viermal größer werden, also $\frac{15 \times 4}{16 \times 3}$. Hier ist $1\frac{5}{6}$ der oben gegebene Dividendus und $\frac{3}{4}$ ist der umgekehrte Divisorbruch. Demnach ist das vorhin angegebene Verfahren gerechtfertigt.

2ter Beweis.

Wenn man $1\frac{5}{6}$ durch 1 dividirt, so ist der Quotient auch $1\frac{5}{6}$. Vergrößert man den Divisor 1 durch 3, so muß dadurch der Quotient $1\frac{5}{6}$ nach §. 46 dreimal kleiner, also $\frac{15}{16 \cdot 3}$ werden. Verkleinert man nun den Divisor 3 durch 4 (wobey der Divisor $\frac{3}{4}$ wird), so muß alsdann nach §. 45 der Quotient $\frac{15}{16 \cdot 3}$ viermal größer, also $\frac{15 \cdot 4}{16 \cdot 3}$ werden. Hier ist $1\frac{5}{6}$ der gegebene Dividendus und $\frac{3}{4}$ der umgekehrte Divisor.

§. 56. Da man jeder ganzen Zahl die Gestalt eines Bruches geben kann, wenn man unter dieselbe die Einheit, in Gestalt eines Bruches setzt; so ist dann auch nach obiger Anleitung

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} : 4 &= \frac{3}{4} : \frac{4}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, \text{ und} \\ 6 : \frac{5}{8} &= \frac{6}{1} : \frac{5}{8} = \frac{6}{1} \times \frac{8}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}; \text{ ebenso} \\ 2\frac{1}{3} : 4 &= \frac{7}{3} : \frac{4}{1} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{12}; \\ 3\frac{2}{3} : 1\frac{2}{3} &= \frac{11}{3} : \frac{5}{3} = \frac{11}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Uebungs-Beispiele.

- 1) Was kostet 1 Hk, wenn $\frac{1}{3}$ Hk $12\frac{2}{3}$ Cop. kosten? Antw. $15\frac{5}{6}$ Cop.
- 2) Wenn 12 Solotnik $\frac{2}{3}$ Rubel kosten, was kostet 1 Solotnik?
 Antw. $2\frac{2}{7}$ Rubel.
- 3) Wenn $1\frac{1}{3}$ Pud 21 Rbl. kosten, was kostet 1 Pud? Antw. $22\frac{1}{2}$ Rbl.
- 4) Was kostet 1 Urschien, wenn $4\frac{2}{3}$ Urschien $\frac{7}{8}$ Rubel kosten?
 Antw. $1\frac{3}{8}$ Rubel.

- 5) Für 1 Berk. zahlt man $32\frac{3}{4}$ Rbl., was erhält man für $1266\frac{1}{3}$ Rbl.?
 Antw. $38\frac{2}{3}$ Berkowiz.
- 6) Mit welcher Zahl muß man 6 multipliciren, damit $16\frac{1}{2}$ K entstehen?
 Antw. $2\frac{2}{3}$.
- 7) Jemand erhält an Seife: $2\frac{1}{2}$ Pud + $3\frac{3}{5}$ Pud + $1\frac{1}{4}$ Pud; verkauft davon: $\frac{7}{8}$ Pud + $1\frac{1}{5}$ Pud + $2\frac{5}{8}$ Pud. Den Rest multiplicirt er mit $(2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{3})$ und das Product theilt er durch $(4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2})$; was ist der Quotient?
 Antw. $1\frac{3}{10}\frac{6}{5}\frac{5}{4}$ Pud.
- 8) Jemand empfängt an Flachß: $10\frac{2}{3}$ Berk. + $9\frac{3}{8}$ Berk. + $5\frac{7}{8}$ Berk.; verkauft davon: $5\frac{5}{8}$ Berk. + $3\frac{5}{8}$ Berk. + $2\frac{3}{4}$ Berk. Den Rest vergrößert er $3\frac{3}{8}$ mal und das Product theilt er in $47\frac{1}{3}\frac{7}{8}$ Theile; was ist da der Quotient?
 Antw. 1 Berk.
- 9) Wenn A. $6\frac{3}{8}$ Tschetw. + $5\frac{7}{8}$ Tschetw. + $1\frac{1}{2}$ Tschetw. + $10\frac{3}{4}$ Tschetw. einkauft, und gleich wieder davon verkauft: $3\frac{7}{8}$ Tschetw. + $2\frac{1}{3}$ Tschetw. $4\frac{1}{4}$ Tschetw. + $2\frac{1}{4}$ Tschetw. Den Rest $2\frac{1}{3}$ mal vergrößert und das Product durch $2075\frac{2}{3}$ dividirt; wie groß ist da der Quotient?
 Antw. $\frac{1}{72}$ Tschetw. = $\frac{8}{9}$ Garniz.
- 10) Wenn Kaufmann B. einkauft: $(20\frac{2}{3} + 3\frac{7}{8} + 5\frac{3}{4})$ Wedro Brandwein; aber gleich darauf wieder davon verkauft: $(9\frac{3}{8} + 4\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4})$ Wedro; den Rest mit $(1\frac{7}{8} + 3\frac{3}{4} + 2\frac{5}{8})$ multiplicirt und das Product durch $4\frac{7}{8}$ dividirt; welchen Quotient giebt diese Ausübung?
 Antw. $23\frac{1}{2}\frac{9}{8}\frac{7}{10}$ Wedro.

Resolviren benannter gebrochener Zahlen.

§. 57. Was Resolviren heißt, und wie man dabei zu verfahren habe, ist schon in §. 29 gesagt.

Um aber niedere Einheiten benannter Zahlen auf die höchste Benennung zu resolviren, dividire man die gegebene Zahl der niedrigsten Benennung durch die Verhältnißzahl der nächst höhern Benennung und addire dazu die nächst höhern Einheiten (wenn solche vorhanden sind). Mit der erhaltenen Summe und den folgenden höhern Einheiten verfähre man auf dieselbe Weise.

Aufgabe 1.

Was betragen 3 Rbl. 60 Cop. in Rubeln ausgedrückt?

Auflösung. 60 Cop. ist = $\frac{60}{100}$ Rbl. = $\frac{3}{5}$ Rbl. = $\frac{3}{5}$ Rbl. Dazu addire die 3 Rbl. hinzu, so macht es $3\frac{3}{5}$ Rbl.

Aufgabe 2.

Wie viel betragen 3 Berk. 4 Pud 20 K an Berkowizen?

Auflösung. 20 K ist = $\frac{20}{80}$ Pud = $\frac{1}{4}$ Pud. Dazu addire die gegebenen 4 Pud; so sind $4\frac{1}{4}$ Pud 20 K = $4\frac{1}{4}$ Pud. Aber $4\frac{1}{4}$ Pud sind = $\frac{1}{2}$ Pud = $\frac{9}{20}$ Berk. = $\frac{9}{20}$ Berk. Dazu addire die gegebenen 3 Berk., so sind 3 Berk. 4 Pud 20 K = $3\frac{9}{20}$ Berk.

Aufgabe 3.

Wie viel betragen $1\frac{3}{4}$ Sorok. $20\frac{2}{3}$ Wedro $6\frac{1}{2}$ Kruschken an Sorokowoi?

Auflösung. Man fange mit der niedrigsten Benennung an. Es sind $6\frac{1}{2}$ Kr. = $2\frac{1}{2}$ Kr. = $2\frac{1}{2}$ Wed. Dazu addire $20\frac{1}{2}$ Wedro, so sind $22\frac{1}{2}$ Wedro + $20\frac{1}{2}$ Wedro = $43\frac{1}{2}$ Wedro. Es sind $43\frac{1}{2}$ Wedro = $12\frac{1}{2}$ Corok. Dazu addire die $1\frac{1}{2}$ Corok., so sind $14\frac{1}{2}$ Corok. + $1\frac{1}{2}$ Corok. = $16\frac{1}{2}$ Corok.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Wie viel betragen 3 Rbl. 75 Cop. an Rubeln? Antw. $3\frac{3}{4}$ Rbl.
- 2) Wie viel betragen 4 Rieß 4 Buch 6 Bogen an Ballen? Antw. $2\frac{10}{100}$ Ballen.
- 3) Wie viel R sind $48\frac{5}{6}$ Solotnik? Antw. $15\frac{3}{6}$ R .
- 4) Wie viel Tschetwert sind $1\frac{1}{2}$ Dsmina $4\frac{1}{8}$ Tschetwerik $5\frac{1}{4}$ Garniz? Antw. $1\frac{1}{2}$ Tschetwert.

Reduction benannter gebrochener Zahlen.

§. 58. Was reduciren heißt, und wie man dabei zu verfahren habe, ist in §. 30 bereits gesagt.

Aufgabe.

Es sollen $3\frac{3}{4}$ Berk. $16\frac{5}{8}$ Pud $70\frac{3}{8}$ R $175\frac{1}{2}$ Sol. reducirt werden.

Auflösung. Man reducire zuvörderst die Benennungen der ganzen Zahlen, z. B. in $16\frac{5}{8}$ Pud sind enthalten 1 Berk. $6\frac{5}{8}$ Pud. Dieses 1 Berk. zu $3\frac{3}{4}$ Berk. addirt, machen $4\frac{3}{4}$ Berk.

Die $70\frac{3}{8}$ R betragen 1 Pud $30\frac{3}{8}$ R . Dieses 1 Pud zu obigen nachgebliebenen $6\frac{5}{8}$ Pud addirt, geben $7\frac{3}{8}$ Pud.

Die $175\frac{1}{2}$ Sol. sind = 1 R $79\frac{1}{2}$ Sol. Dieses 1 R zu obigen nachgebliebenen $30\frac{3}{8}$ R addirt, geben $31\frac{3}{8}$ R .

Es sind die reducirtten ganzen Zahlen, ohne Rücksicht auf die Brüche, gegenwärtig: $4\frac{3}{4}$ Berk. $7\frac{3}{8}$ Pud $31\frac{3}{8}$ R $79\frac{1}{2}$ Sol.

Um die Brüche der höhern Benennungen in niedere Einheiten zu reduciren, fange man bei dem Bruche der höchsten Benennung (hier $\frac{3}{4}$ Berk.) an, und mache selbige durch die Multiplication zu Pudern u. s. w. Es ist

$$\frac{3}{4} \text{ Berk.} = \frac{3 \times 12}{4} \text{ Pud} = 9 \text{ Pud.}$$

Dazu addire die obigen $7\frac{3}{8}$ Pud,

$$\text{geben } 16\frac{5}{8} \text{ Pud} = 1 \text{ Berk. } 6\frac{5}{8} \text{ Pud.}$$

$$\text{Die } \frac{5}{8} \text{ Pud sind} = \frac{5 \times 40}{8} \text{ R} = 25 \text{ R.}$$

Dazu die obigen $31\frac{3}{8}$ R addirt

$$\text{machen } 56\frac{3}{8} \text{ R} = 1 \text{ Pud } 16\frac{3}{8} \text{ R.}$$

$$\text{Die } \frac{1}{2} \text{ Sol sind} = \frac{2 \times 96}{3} \text{ Sol.} = 64 \text{ Sol.}$$

Dazu addire die obigen $79\frac{1}{2}$ Sol.

$$\text{betragen } 143\frac{1}{2} \text{ Sol.} = 1 \text{ R } 47\frac{1}{2} \text{ Sol.}$$

Daher beträgt die Reduction in Allem: 5 Berkowiz 7 Pud 17 R $47\frac{1}{2}$ Sol.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Reducire $70\frac{1}{2}$ Wedro $90\frac{3}{4}$ Kruschken und $60\frac{3}{4}$ Tscharken?
 Antw. 2 Cor. 2 Wedro 6 Kruschk. $10\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ Tschark.
- 2) Reducire $5\frac{1}{2}$ Tschetwert $30\frac{5}{8}$ Tschetwerik $60\frac{3}{8}$ Garniz?
 Antw. 9 Tschwt. 7 Tschwfk. $2\frac{3}{8}$ Garniz.

Addition ungleichbenannter gebrochener Zahlen.

§. 59. Das Verfahren hierbei ist vollkommen gleich dem in §. 51 bereits angeführten.

Aufgabe.

Jemand hat empfangen 5 Rbl. $25\frac{2}{3}$ Cop. + 24 Rbl. $30\frac{7}{8}$ Cop. + 6 Rbl. $16\frac{2}{6}$ Cop. + 9 Rbl. $75\frac{1}{2}$ Cop. + 3 Rbl. $80\frac{3}{8}$ Cop.; was macht es zusammen?

Auflösung. Man schreibe die Größen gleichartiger Benennungen unter einander und verfare dann nach §. 51, z. B.

				120	
5 Rbl.	$25\frac{2}{3}$	Cop.		80	
24 "	$30\frac{7}{8}$	"		105	
6 "	$16\frac{2}{6}$	"		100	
9 "	$75\frac{1}{2}$	"		110	
3 "	$80\frac{3}{8}$	"		72	
Summa 49 Rbl.	$291\frac{97}{120}$	Cop.		467	
				120	= $31\frac{97}{120}$ Cop.

Erläuterung. Man addire zuerst die Brüche der Cop., diese machen zusammen $31\frac{97}{120}$ Cop. aus; die 3 ganze Cop. addire zu den obigen ganzen Cop. Aus der Summe der ganzen Cop. (hier sind es 229 Cop.) scheid die Rbl. (hier 2 Rbl.) aus und zähle sie zu den übrigen Rbl., so erscheint die Totalsumme von 49 Rbl. $291\frac{97}{120}$ Cop.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Addire: 2 Ballen 7 Rieß $8\frac{3}{4}$ Buch + 4 Ballen 6 Rieß $15\frac{7}{8}$ Buch + 3 Ballen 4 Rieß $10\frac{3}{8}$ Buch und 1 Ballen 8 Rieß $12\frac{7}{2}$ Buch; was ist die Summe?
 Antw. 12 Ballen 7 Rieß $7\frac{7}{8}$ Buch.
- 2) Addire: 5 Tschetw. 1 Dsm. 3 Tschetwfk. $5\frac{1}{2}$ Garniz + 2 Tschetw. 2 Tschetwfk. $6\frac{3}{4}$ Garniz + 8 Tschetw. 1 Dsm. 2 Tschetwfk. $3\frac{5}{2}$ Garn. + 3 Tschetw. 1 Dsm. $1\frac{5}{6}$ Garniz; was ist deren Summe?
 Antw. 20 Tschetw. 1 Dsm. 1 Tschetwfk. $\frac{3}{8}$ Garn.

Subtraction ungleichbenannter gebrochener Zahlen.

§. 60. Auch hier gilt das schon in §. 52 angeführte Verfahren.

Aufgabe 1.

Von 20 Tschetw.	1 Dsmina	1 Tschetwfk.	$\frac{2}{3}\frac{9}{6}$	Garniz ziehe ab
8 "	—	1 "	$5\frac{1}{8}\frac{1}{4}$	"
Rest 12 Tschetw.	— Dsmina	3 Tschetwfk.	$3\frac{7}{12}\frac{3}{6}$	Garniz.

Erläuterung. Man bringe zuvörderst die Brüche der Garnize unter einerlei Benennung, und ziehe dann den untern Bruch vom obern ab. Ist das geschehen, so verfare man mit den übrigen Posten ganz so, wie in §. 52 gezeigt worden ist.

Aufgabe 2.

Von $24\frac{5}{2}$ Stk $10\frac{2}{3}$ Lth $8\frac{5}{8}$ Hk $24\frac{1}{3}$ Loth $3\frac{3}{4}$ Quentchen ziehe ab
 $7\frac{3}{4}$ " $18\frac{5}{9}$ " $16\frac{1}{2}$ " $30\frac{1}{8}$ " $3\frac{1}{8}$ "

Rest 16 Stk 5 Lth — Hk 25 Loth $3\frac{3}{5}$ Quentchen.

Verfahren. Man subtrahire die Größen jedes einzelnen Postens und reducire die dabei sich ergebenden Brüche nach §. 52, so erscheint der obige Rest.

Uebungs-Exempel.

- 1) Von 146 Rbl. $36\frac{1}{4}$ Cop. wurden 49 Rbl. $29\frac{2}{7}$ Cop. ausgegeben; was blieb übrig? Antw. 97 Rbl. $6\frac{3}{7}$ Cop.
- 2) Von 5 Berk. $\frac{3}{4}$ Pud + 4 Berk. $3\frac{1}{3}$ Pud + 1 Berk. $1\frac{2}{3}$ Pud wurden verkauft: 5 Berk. $3\frac{2}{3}$ Pud; was blieb übrig? Antw. 5 Berk. $1\frac{1}{3}$ Pud.

Multiplication ungleichbenannter gebrochener Zahlen.

§. 61. Auch hier gilt das, was in §. 53 bereits angeführt worden ist.

Aufgabe.

$2\frac{1}{2}$ Sor. $21\frac{2}{3}$ Wedro $4\frac{1}{3}$ Kruschk. $2\frac{2}{3}$ Tschark. multiplicire mit $4\frac{1}{2}$

Product $11\frac{1}{4}$ Sor. $97\frac{1}{3}$ Wedro $19\frac{1}{2}$ Kruschk. $10\frac{1}{4}$ Tschark.

Zuerst reducire die Brüche jedes einzelnen Postens, so erscheint: 11 Sor. 107 Wedro 21 Kruschk. $11\frac{1}{3}$ Tschark., und dann die Ganzen derselben, so ergibt sich daraus: 13 Sor. 29 Wedro 6 Kruschk. $\frac{3}{5}$ Tschark.

Exempel zur Uebung.

- 1) Wenn 1 Hk Butter $12\frac{1}{2}$ Cop. kostet; was kosten da $15\frac{3}{4}$ Hk. Antw. 1 Rbl. 95 Cop.
- 2) Was kosten $18\frac{1}{3}$ Tschetw., wenn 1 Tschetw. $4\frac{3}{4}$ Rbl kostet? Antw. $87\frac{1}{2}$ Rbl.
- 3) Welches Product erscheint, wenn man $6\frac{2}{3}$ Rbl. $42\frac{5}{8}$ Cop. mit $5\frac{2}{3}$ vergrößert? Antw. 41 Rbl. $13\frac{1}{2}$ Cop.

Division ungleichbenannter gebrochener Zahlen.

§. 62. Das Verfahren ist hier dasselbe, wie in §. 55.

Aufgabe.

Es sollen $6\frac{2}{3}$ Sor. $24\frac{1}{2}$ Wedro $5\frac{1}{6}$ Kruschk. $7\frac{2}{3}$ Tschark. unter 5 Personen vertheilt werden; was erhält jede Person?

Auflösung. Man theile jede einzelne Benennung durch 5, so entstehen die einzelnen Quotiente: $1\frac{1}{3}$ Sor. $4\frac{1}{10}$ Wedro $1\frac{1}{30}$ Kruschk. $1\frac{1}{3}$ Tscharken. Diese Ausdrücke reducirt, geben:

1 Sorokowei 18 Wedro 3 Kruschken $\frac{2}{3}$ Tscharken.

Uebungs-Beispiele.

1) Wenn $16\frac{1}{2}$ Eschetw. $6\frac{1}{2}$ Eschetw. $4\frac{1}{2}$ Garniz durch $3\frac{1}{2}$ getheilt werden sollen; was ist der reducirte Quotient?

Antw. 5 Eschetw. 1 Eschetw. $3\frac{2}{3}$ Garniz.

2) Es sollen $9\frac{1}{4}$ Berk. $8\frac{1}{2}$ Pud $3\frac{3}{4}$ R $90\frac{3}{5}$ Sol. durch $3\frac{5}{2}$ dividirt werden; was ist der reducirte Quotient?

Antw. 2 Berk. 9 Pud 21 R $78\frac{11}{20}$ Solotnik.

II. Von den Decimalbrüchen.

§. 63. Nach dem dekadischen Zahlen-System hängt der Werth jeder Ziffer von der Stelle ab, in welcher sie befindlich ist; nämlich in der ersten Stelle rechter Hand stehen die Einer; in der zweiten Stelle nach der linken Hand hin die Zehner; in der dritten Stelle die Hunderter u. s. w. Hieraus ergiebt sich auch umgekehrt: daß jede Ziffer, von der rechten zur linken Hand hin, 10 Mal weniger Werth, als die zunächst darauf folgende Stelle haben muß.

In der Zahl 1111 ist die erste Ziffer linker Hand: ein Tausender; die zweite Ziffer nach der Rechten hin, 10 Mal kleiner, also ein Hunderter; die dritte Ziffer zur Rechten hin, wieder 10 Mal kleiner als die zunächst vorhergehende, also ein Zehner; die vierte und letzte Ziffer ist wiederum 10 Mal kleiner als die unmittelbar vorhergehende, also ein Einer. Setzt man jetzt hinter den Einer ein Comma, und hinter letzteres noch eine 1, z. B. 1111,1; so ist diese letzte Eins zehnmal kleiner als der zunächst vorhergehende Einer, also $\frac{1}{10}$. Setzt man noch eine 1 hinter dieses $\frac{1}{10}$, z. B. 1111,11; so ist die letzte 1 wieder zehnmal kleiner als das zunächst vorhergehende $\frac{1}{10}$, also $\frac{1}{100}$; die dritte nach dem Comma hinzugefügte 1, in 1111,111 wäre demnach $\frac{1}{1000}$, die vierte 1 in 1111,1111 wäre $\frac{1}{10000}$ u. s. w.

Daher würde die ganze Zahl 1111,1111 gelesen werden: ein Tausend ein Hundert elf Ganze, ein Zehnthheil, ein Hunderttheil, ein Tausendtheil und ein Zehntausendtheil.

Eben so würde man 4,2093 lesen: 4 Ganze, 2 Zehnthheil (kein Hunderttheil), 9 Tausendtheil und 3 Zehntausendtheil, oder: 4 Ganze und $\frac{2093}{10000}$; denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{10} &= \frac{2000}{10000} \\ \frac{9}{1000} &= \frac{90}{10000} \\ \frac{3}{10000} &= \frac{3}{10000} \end{aligned}$$

$$\text{also } \frac{2}{10} + \frac{9}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{2093}{10000}.$$

Um daher einen Decimalbruch zu schreiben, setze man nach den Ganzen ein Comma (oder Einerzeichen); sodann die Zehnthheile rechts in die erste Stelle; die Hunderttheile in die zweite; die Tausendtheile in die dritte Stelle u. s. w. und fülle die Decimalstellen, welche nicht genannt worden sind, durch Nullen aus.

Sollen z. B. dreiundfunzig Ganze, 7 Zehnthheil, 8 Hunderttheil, 8 Hunderttausendtheil geschrieben werden; so wird diese Zahl auf folgende Art geschrieben: 53,78008, und gelesen: 53 Ganze $\frac{78008}{100000}$. Ferner: 7 Hunderttheil, 5 Tausendtheil, 3 Milliontheil wird so geschrieben: 0,075003.

Eben so 75 Zehnthheil: 7,5; 1125 Hunderttheil: 11,25, und 12 Ganze 95 Milliontheil: 12,000095.

Ueberhaupt merke man sich beim Schreiben der Decimalbrüche folgende Regel: Der Zähler des Decimalbruches muß so viel Ziffern enthalten, als der Nenner desselben Nullen hat; ist dieses nicht der Fall, so setze man dem Zähler so viel Nullen voran, als demselben Ziffern fehlen. Z. B. es sollen 95 Milliontheil geschrieben werden. Million enthält 6 Nullen, der Zähler des gegebenen Decimalbruches ($\frac{95}{1000000}$) enthält nur 2 Ziffern; folglich setze man demselben 4 Nullen vor und es entsteht dann 0,000095. Ein Decimal- oder zehnthheiliger Bruch ist demnach ein solcher Bruch, der zu seinem Zähler jede beliebige Zahl, zu seinem Nenner aber nur die 10 und das Product von 10 haben kann.

Addition der Decimalbrüche.

§. 64. Dem Grundsatz gemäß, daß nur gleichartige Größen addirt werden können, setze man die Decimalstellen bei der Addition dergestalt unter einander, daß Ganze unter Ganze, Zehnthteile unter Zehnthteile, Hunderttheile unter Hunderttheile u. s. w. zu stehen kommen, und da bei derselben auch das dekadische Gesetz zu Grunde liegt; so addire man sie eben so wie ganze Zahlen und setze das Comma an die ihm zukommende Stelle der Summe.

Aufgabe.

Man addire $5,306 + 0,0793 + 14,009631 + 125,0004358$.

Auflösung.

5,306
0,0793
14,009631
125,0004358

Summa: 144,3953668.

Ferner addire $0,0087 + 0,289 + 0,0008 + 0,004793$.

Auflösung.

0,0087
0,289
0,0008
0,004793

Summa: 0,303293.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Man hat berechnet, daß von 5 Silbermünzen die erste 8,407 Solot., die zweite 1,0976 Sol., die dritte 0,85 Sol., die vierte 2,371 Sol. und die fünfte 0,0997 Sol. wiegt; wie viel Solotnik beträgt ihr Gewicht zusammen? Antw. 12,8253 Solotnik.
- 2) Von 4 sichtenen Stämmen enthält der erste 38,079, der zweite 40,7985, der dritte 56,3 und der vierte 58,985 Cubikfuß; wie viel dieses Körpermaasses enthalten sie zusammen? Antw. 194,1625 Cubikfuß.

Subtraction der Decimalbrüche.

§. 65. Nachdem die Decimalbrüche, wie bei der Addition, gehörig unter einander geordnet sind, so ergänze man, wenn in beiden gegebenen

Decimalbrüchen nicht gleich viel Decimalstellen sein sollten, die fehlenden rechter Hand durch Nullen, weil dadurch der Werth des Decimalbruches nicht verändert wird, und verfare dann, wie bei der Subtraction ganzer Zahlen.

Aufgabe.

Ziehe von 60,035607 ab 24,7093.

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung.} \quad 60,035607 \\ \quad \quad \quad 24,709300 \\ \hline \end{array}$$

Rest: 35,326307.

Ferner ziehe von 2,036 ab 0,790364.

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung.} \quad 2,036000 \\ \quad \quad \quad 0,790364 \\ \hline \end{array}$$

Rest: 1,245636.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Ein Pariser Cubizoll atmosphärischer Luft wiegt 0,46 Gran und ein Cubizoll brennbarer Luft wiegt 0,03539 Gran; wie viel wiegt erstere mehr als letztere? Antw. 0,42461 Gran.
- 2) Bei einer Vermessung sollen von 38,5 Faden 19,4805 Faden abgezogen werden; wie viel Faden bleiben übrig? Antw. 19,0195 Faden.

Multiplikation der Decimalbrüche.

§. 66. Die practische Regel bei der Multiplication der Decimalbrüche ist folgende: Man multiplicire die Decimalbrüche, wie ganze Zahlen, ohne Rücksicht auf das Comma, und schneide im Producte so viel Decimalstellen von der rechten zur linken Hand ab, als die beiden Factoren Decimalstellen zusammen enthalten.

Aufgabe.

Man soll 2,34 mit 3,042 multipliciren.

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung.} \quad 2,34 \\ \quad \quad \quad 3,042 \\ \hline \quad \quad \quad 468 \\ \quad \quad \quad 936 \\ \quad \quad \quad 702 \\ \hline \quad \quad 7,11828 \end{array}$$

Hier haben beide Factoren 5 Decimalstellen; folglich schneide man auch im Producte 5 Decimalstellen, von der rechten zur linken Hand gerechnet, ab.

Beweis.

$$2,34 = \frac{234}{100}, \text{ und}$$

$$3,042 = \frac{3042}{1000}. \text{ Folglich ist}$$

$$2,34 \times 3,042 = \frac{234}{100} \times \frac{3042}{1000} = \frac{711828}{100000} = 7,11828.$$

Ferner ist 0,0847 mit 0,0039 zu multipliciren.

$$\begin{array}{r} \text{Auflösung.} \quad 0,0847 \\ \quad \quad \quad 0,0039 \\ \hline \quad \quad \quad 7623 \\ \quad \quad \quad 2541 \\ \hline \quad \quad 0,00033033 \end{array}$$

Da in beiden Factoren 8 Decimalstellen enthalten sind, im Producte aber nur 5 Ziffern erscheinen; so setze man diesen 5 Ziffern noch 3 Nullen vor und dann noch eine Null für die Ganzen.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Ein Cubikfuß Buchenholz wiegt 0,854 Mal so viel als ein Cubikfuß Wasser, der 48,883 H schwer ist; wie viel H wiegt ein Cubikfuß Buchenholz? Antw. 41,746082 H .
- 2) Die Länge einer Linie ist 4,832 Fuß; dieselbe soll mit 0,0078 multiplicirt werden; wie lang wird demnach diese Linie werden? Antw. 0,0376896 Fuß.
- 3) Wie viel wiegen 80,43 Cubikfuß brennbarer Luft, wenn 1 Cubikfuß derselben 0,03539 H schwer ist? Antw. 2,8464177 H .

Division der Decimalbrüche.

§. 67. In der Division mit Decimalbrüchen finden 3 Fälle Statt.

- 1) Einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Regel. Man betrachte den Decimalbruch als eine ganze Zahl und dividire wie mit ganzen Zahlen; schneide darauf im Quotient so viel Decimalstellen ab, als der Dividendus Decimalstellen enthält. Sollte im Quotient nicht so viel Decimalstellen enthalten sein, als obiger Regel nach abgeschnitten werden sollen; so setze man dem Quotient so viel Nullen vor, als demselben Ziffern für das Abschneiden mangeln, und noch überdies eine Null für die Ganzen, welche durch das Comma abgesondert wird. Noch ist hiebei zu merken: daß ein Decimalbruch ungeändert bleibt, wenn an denselben rechter Hand Nullen angehängt werden; denn $2,73 = 2,730000$ und $3,5 = 3,5000$ u. s. w.

Aufgabe 1.

Der Decimalbruch 42,3592 soll auf Zehntausendtheilchen durch 8 dividirt werden.

Auflösung.

$$\begin{array}{r|l}
 8 & 42,3592 & | & 5,2949. \\
 & 40 & & \\
 & \underline{23} & & \\
 & 16 & & \\
 & \underline{75} & & \\
 & 72 & & \\
 & \underline{39} & & \\
 & 32 & & \\
 & \underline{72} & & \\
 & 72 & & \\
 & \underline{72} & &
 \end{array}$$

Der Dividend enthält hier 4 Decimalstellen; folglich müssen im Quotient auch von der Rechten zur Linken hin 4 Decimalstellen abgeschnitten werden.

Beweis.

Es ist $42,3592$ dividirt durch 8 nach §. 55 $= \frac{423592}{10000} : \frac{8}{1} = \frac{423592}{10000} \times \frac{1}{8} = \frac{423592}{80000} = 5,2949$.

Eben so beweiset man auch die Richtigkeit des Verfahrens bei der Division nachfolgender Exempel.

Aufgabe 2.

Es soll 0,439 durch 23 bis auf Hunderttausendtheilchen dividirt werden.

Auflösung. Hier sind die fehlenden Decimaltheilchen im Dividend durch Nullen zu ergänzen; z. B.

$$\begin{array}{r|l}
 23 \quad | \quad 0,43900 \quad | \quad 0,01908 \dots \\
 \quad \quad | \quad 23 \\
 \hline
 \quad \quad | \quad 209 \\
 \quad \quad | \quad 207 \\
 \hline
 \quad \quad | \quad 200 \\
 \quad \quad | \quad 184 \\
 \hline
 \quad \quad | \quad 16 \text{ u. f. w. Rest.}
 \end{array}$$

Aufgabe 3.

Dividire 0,00625 durch 125.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Auflösung.} \quad 125 \quad | \quad 0,00625 \quad | \quad 0,00005. \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad 625 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad | \quad 0
 \end{array}$$

Da im Dividend 5 Decimalstellen und im Quotient nur eine Ziffer enthalten sind, so setze man letzterer noch 4 Nullen vor und dann noch eine Null für die Ganzen.

2) Wenn nur der Divisor Decimalstellen enthält, und der Dividendus keine hat.

Regel. Hier trenne die Ganzen des Dividends durch ein Comma und hänge denselben wenigstens so viel Nullen an, als der Divisor Nullen enthält und dividire dann ohne Rücksicht auf das Comma. Der dadurch erscheinende Quotient enthält nur Ganze.

Aufgabe.

Dividire 75832 durch 2,354.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Auflösung.} \quad 2,354 \quad | \quad 75832,000 \quad | \quad 32214 \text{ Ganze.} \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad 7062 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad | \quad 5212 \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad 4708 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad | \quad 5040 \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad 4708 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad | \quad 3320 \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad 2354 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad | \quad 9660 \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad 9416 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad | \quad 244 \text{ u. f. w. Rest.}
 \end{array}$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens wird ganz so geführt, wie in Aufgabe 1 dieses §.

Will man diese Division weiter fortsetzen, so hänge man an den Rest 244 Nullen an und dividire weiter. Die nun im Quotient erscheinenden Stellen sind Decimalstellen.

3) Wenn beide zur Division gegebenen Zahlen Decimalbrüche enthalten.

Sind im Dividendus nicht so viel Decimalstellen als im Divisor, so ergänze man sie durch hinzugefügte Nullen und dividire dann ohne Rücksicht auf das Comma. Der Quotient besteht dann nur aus ganzen Einheiten. Sind im Dividendus mehr Decimalstellen enthalten, als im Divisor, so dividire man auch hier ohne Rücksicht auf das Comma und streiche dann im Quotient so viel Decimalstellen von der Rechten zur Linken ab, als der Dividendus Decimalstellen hat, weniger der Decimalstellen des Divisors.

Aufgabe 1.

Dividire 273,694 durch 0,543.

Auflösung. $0,543 \mid 273,694 \mid 504 \text{ Ganze.}$

$$\begin{array}{r} 273,694 \\ \underline{271 } \end{array}$$

$$2 \ 194$$

$$\underline{2 \ 172}$$

$$22 \text{ (Rest).}$$

Aufgabe 2.

$7,2 \mid 2,53944 \mid 0,3527.$

$$\begin{array}{r} 2,53944 \\ \underline{2 \ 16} \end{array}$$

$$379$$

$$\underline{360}$$

$$194$$

$$\underline{144}$$

$$504$$

$$504$$

Hier hat der Dividend 5, und der Divisor 1 Decimalstelle; folglich streiche man im Quotient 4 Decimalstellen ab.

Aufgabe 3.

Wie viel Berk. sind $\frac{3}{4}$ Pud, $\frac{5}{8}$ Pud, $\frac{7}{8}$ Pud in Decimalbrüchen ausgedrückt?

$$\text{Auflösung. } \frac{3}{4} \text{ Pud} = \frac{3}{40} \text{ Berk.} = 40 \mid 3,000 \mid 0,075 \text{ Berk.}$$

$$\frac{5}{8} \text{ Pud} = \frac{5}{60} \text{ Berk.} = 60 \mid 5,0000 \mid 0,08333 \dots \text{ Berk.}$$

$$\frac{7}{8} \text{ Pud} = \frac{7}{80} \text{ Berk.} = 80 \mid 7,000 \mid 0,0875 \text{ Berk.}$$

Uebungs-Beispiele.

- 1) Von $(5,32 + 0,075 + 2,13 + 7,9 + 3,0036)$ ziehe ab $(2,035 + 0,92 + 6,0079 + 3,072 + 4,00036)$. Den Rest multiplicire mit $(0,25 + 4,006 + 1,9 + 2,72)$. Das Product dividire durch 4,438. Was ist das Endresultat? Antw. 4,78668.
- 2) Von $(10,356 + 7,0081 + 1,98 + 0,138 + 3,000125)$ ziehe ab $(8,5 + 3,08 + 2,865 + 0,0073 + 4,78)$. Den Rest multiplicire mit $(0,005 + 1,92 + 0,7341 + 1,35 + 2,0007)$. Das Product dividire durch 0,649985. Was ist der Quotient? Antw. 30,049.

- 3) Bei Berechnung zweier Felder hat man gefunden, daß das erste 45,78 Quadratfaden und das zweite 91,3784 Quadratfaden enthält; wie vielmal ist das zweite Feld bis auf Tausendtheilchen größer, als das erste? Antw. 1,996 Mal.
- 4) Ein Millimeter beträgt 0,44 Linien; wie viel Mal wird dieses Maaß in 13,4 Linien bis auf Tausendtheilchen genau enthalten sein? Antw. 30,454 Mal.
- 5) Es hat Jemand eine Rechnung auszuüben, in welcher 3,75 zu 9,837 addirt, von der Summe 0,879564 abgezogen und die erhaltene Differenz durch 93,57 bis auf Zehntausendtheilchen dividirt werden soll; was ist der Quotient? Antw. 0,1358.

Von dem Verfahren, einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

§. 68. Wenn das Comma hinter eine ganze Zahl gesetzt wird, so kann man mehrere Nullen folgen lassen, ohne daß dadurch der Werth der Zahl sich ändert, weil jede Ziffer unverrückt in ihrer dekadischen Stelle bleibt; z. B. $7 = 7,0000 = 7$ Ganze. Geschieht dieses mit dem Zähler eines Bruches; so kann derselbe durch den Nenner dividirt und in einen Decimalbruch verwandelt werden. Hier giebt es zwei Fälle:

- 1) Wo der gemeine Bruch vollkommen genau in einen Decimalbruch verwandelt werden kann.

Dieses findet Statt, wenn dessen Nenner in lauter Zweien oder Fünfen, oder in Zweien und Fünfen zerfällt werden kann, weil diese Zahlen in den dekadischen Nennern ohne Rest aufgehen. Dieser Bedingung nach sind $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{1600}$ u. s. w. vollkommen genau in Decimalbrüche zu verwandeln, weil der Nenner 64 in 2. 2. 2. 2. 2. 2, ferner 125 in 5. 5. 5 und der Nenner 2500 in 2. 2. 5. 5. 5. 5 zerlegt werden kann.

Aufgabe.

Ein H enthält, wie bekannt, 32 Loth; folglich ist 1 Loth $= \frac{1}{32} \text{H}$ und 7 Loth $= \frac{7}{32}$ Loth; wie viel beträgt der letztere Bruch in Decimaltheilchen eines Pfundes?

Auflösung.

$$\frac{7}{32} = \frac{7,00000}{32} = 0,21875 \text{ H.}$$

Eben so ist $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$

$$\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0,75$$

$$\frac{1}{125} = \frac{7,000}{125} = 0,056$$

$$\frac{1}{16} = \frac{13,0000}{16} = 0,8125$$

$$\frac{372}{1250} = \frac{372,0000}{1250} = 0,2976.$$

2) Wo der gemeine Bruch nicht vollkommen genau in einen Decimalbruch verwandelt werden kann.

Dieses findet Statt, sobald der Nenner aus andern einfachen Factoren, als 2 und 5 besteht. Die Ursache ist: weil durch andere einfache Factoren, außer 2 und 5, die dekadischen Nenner nicht vollkommen genau ausmessbar sind.

Man setzt deshalb in diesem Falle die Division nach Anleitung (1) so weit fort, bis der übrig gebliebene Rest, als ein Theil der letzten Decimalstelle, ohne merklichen Fehler hinweggelassen werden kann.

Viele dieser Brüche haben die Eigenschaft, daß bei fortgesetzter Division die Ziffern des Quotients sich wiederholen, welches man Periode, und die Brüche periodische Brüche nennt. So haben alle Neuntel in Decimalbrüche verwandelt, die Eigenschaft, daß sie aus einer einziffrigen Periode bestehen, z. B. $\frac{1}{3} = \frac{7,0000}{9} = 0,7777 \dots$ u. s. w.

Alle aus Fünfteln entstehenden Decimalbrüche bestehen aus zweiziffrigen Zahlen; z. B. $\frac{1}{5} = \frac{5,0000}{11} = 0,4545 \dots$ u. s. w.

Alle aus Sieben und dreißigteln entstehenden Decimalbrüche enthalten dreiziffrige Perioden; z. B. $\frac{1}{7} = 0,621621621 \dots$ u. s. w.

Uebungs-Beispiele.

1) Wie viel Sorokowoi sind: a) 6 Tscharken, b) 5 Kruschken, c) 7 Wedro in Decimalbrüchen ausgedrückt?

Antw. 6 Tschrk. = 0,001704 ... Sorok.

5 Krschk. = 0,015625 ... Sorok.

7 Wedro = 0,175 Sorokowoi.

2) Wie viel Tschetwert betragen: a) $6\frac{1}{2}$ Garniz, b) $3\frac{1}{3}$ Tschetwerk und c) $1\frac{1}{4}$ Dsmina in Decimalbrüchen ausgedrückt?

Antw. $6\frac{1}{2}$ Garniz = 0,101562 .. Tschetwert.

$3\frac{1}{3}$ Tschetwk. = 0,41666 .. Tschetwert.

$1\frac{1}{4}$ Dsmina = 0,625 Tschetwert.

3) Wie viel Rubel sind: a) 85 Cop., b) 72 Cop., c) $65\frac{1}{2}$ Cop. und d) $54\frac{3}{4}$ Cop. in Decimalbrüchen ausgedrückt?

Antw. 85 Cop. = 0,85 Rubel.

72 Cop. = 0,72 Rubel.

$65\frac{1}{2}$ Cop. = 0,655 Rubel.

$54\frac{3}{4}$ Cop. = 0,5475 Rubel.

§. 69. Um aus einem gegebenen periodischen Bruch denjenigen gemeinen Bruch zu finden, aus dem ersterer entstanden ist, befolge man nachstehendes Verfahren.

Man nehme eine ganze Periode aus dem periodischen Decimalbruch heraus, und setze so viel Neuner als Nenner, in Gestalt eines Bruches, unter die Periode, als sie Ziffern enthält; z. B. nehme man von dem periodischen Decimalbruche $0,4545 \dots$ die eine Periode 45 heraus, und setze darunter

in Gestalt eines Bruches 99, so ist in $\frac{45}{99}$ Zähler und Nenner durch 9 dividierbar; also $= \frac{5}{11}$. Eben so nehme man von dem periodischen Decimalbruche $0,621621621 \dots$ die eine Periode 621 heraus und setze darunter 3 Neuner; so ist in $\frac{621}{999}$ Zähler und Nenner durch 27 theilbar, also ist $\frac{621}{999} = \frac{23}{37}$ u. s. w.

Beweis.

Es sei $B. = 0,621621621 \dots$. Setzt mache man eine Periode des Decimalbruches zu Ganzen durch die Multiplication mit 1000; so ist $1000 B. = 621,621621621 \dots$; ziehe die obere Gleichung von der untern ab; so ist der Unterschied $999 B. = 621$; folglich ist $B. = \frac{621}{999}$.

Uebungs-Aufgaben.

- 1) Verwandle den periodischen Decimalbruch: $0,428571428571 \dots$ in einen gewöhnlichen Bruch. Antw. $\frac{3}{7}$.
- 2) Eben so $0,66666 \dots$ in einen gewöhnlichen Bruch. Antw. $\frac{2}{3}$.
- 3) Verwandle den periodischen Decimalbruch $0,857142857142857142 \dots$ in einen gewöhnlichen Bruch. Antw. $\frac{17}{20}$.

§. 70. Zuweilen steht vor einem periodischen Decimalbruche noch eine oder mehrere Ziffern, die nur in der ersten Periode vorkommen, in den übrigen aber nicht wiederkehren. In diesem Falle ziehe man von der ersten Periode und den vor derselben stehenden Ziffern die letztern ab, und setze dann in Gestalt eines Bruches so viel Neuner unter den Rest, als die Periode Ziffern, und so viel Nullen daran, als die Periode nicht wiederkehrende Ziffern enthält; z. B. der periodische Bruch $0,43181818 \dots$ enthält 2 wiederkehrende und 2 nicht wiederkehrende Ziffern. Ziehe von der ersten Periode und den vor ihr stehenden Ziffern, hier von 4318 die nicht wiederkehrenden Ziffern, hier 43 ab; so bleibt 4275; setze darunter so viel Neuner, als die wiederkehrende Periode Ziffern enthält, also hier 2 Neuner, und so viel Nullen daran, als der nicht wiederkehrende Theil Ziffern hat, also hier 2 Nullen; so entsteht aus obigem periodischen Bruch nachstehender gemeiner Bruch $\frac{4275}{990} = \frac{17}{42}$.

Aufgabe.

Es soll der periodische Bruch $0,83333$ -in einen gemeinen Bruch verwandelt werden.

Auflösung. $0,8333 \dots = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$.

Eben so ist $0,416666 \dots = \frac{416 - 41}{900} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$.

Beweis.

Es sei $B. = 0,83333 \dots$ so ist

$$100 \cdot B. = 83,333 \dots \text{ und}$$

$$10 \cdot B. = 8,333 \dots$$

Rest: $90 \cdot B. = 75$; folglich

$$B. = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$$

Von der Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

§. 71. Soll ein Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so schreibe man den Decimalbruch in Gestalt eines gemeinen Bruches und suche, wenn im Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maaß enthalten ist, durch letzteres denselben aufzuheben.

Aufgabe 1.

Den Decimalbruch 0,0375 in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. $0,0375 = \frac{375}{10000}$. Zähler und Nenner haben das gemeinschaftliche Maaß 125. Folglich ist $0,0375 = \frac{3}{800} = \frac{3}{80}$.

Aufgabe 2.

Ferner soll 3,512 durch einen gemeinen Bruch ausgedrückt werden.

Auflösung. Es ist $3,512 = \frac{3512}{1000}$. Zähler und Nenner haben das gemeinschaftliche Maaß 8; daher ist $3,512 = \frac{439}{125} = 3\frac{64}{125}$.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Verwandele den Decimalbruch 0,8125 in einen gemeinen Bruch? Antw. $\frac{13}{16}$.
- 2) Ebenso 0,00875? Antw. $\frac{7}{800}$.
- 3) Ebenso 0,222464? Antw. $\frac{3476}{15625}$.
- 4) Ebenso 0,136? Antw. $\frac{17}{125}$.
- 5) Verwandele den periodischen Bruch 0,2083333 in einen gemeinen Bruch? Antw. $\frac{5}{24}$.
- 6) Wie viel betragen 0,85 Rbl., 0,915 Rbl., 0,655 Rbl. und 0,5475 Rbl. in gemeinen Brüchen ausgedrückt? Antw. 0,85 Rbl. = 85 Cop.
0,915 Rbl. = $91\frac{1}{2}$ Cop.
0,655 Rbl. = $65\frac{1}{2}$ Cop.
0,5475 Rbl. = $54\frac{3}{4}$ Cop.

III. Von den Kettenbrüchen oder continuirlichen Brüchen.

§. 72. Ein Kettenbruch ist ein solcher Bruch, der zu seinem Nenner eine ganze Zahl und einen Bruch hat; der Nenner dieses zweiten Bruchs besteht wieder aus einer ganzen Zahl und einem Bruch u. s. w., z. B.

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \text{u. s. w.}}}}}$$

Dergleichen Kettenbrüche entstehen auf folgende Weise: Wenn man bei einem gemeinen Bruche Zähler und Nenner desselben, (die beide aber kein gemeinschaftliches Maaß haben dürfen) durch den Zähler dividirt, so entsteht ein Kettenbruch, z. B. $\frac{7}{19} = \frac{7 : 7}{19 : 7} = \frac{1}{2 + \frac{5}{7}}$. Wiederholt man diese Division bei dem zum Nenner gehörigen Bruche $\frac{5}{7}$, so bleibt der erhaltene Ausdruck auch unter dieser Gestalt, dem gegebenen Bruche $\frac{7}{19}$ gleich, nämlich:

$$\frac{7}{19} = \frac{1}{2 + \frac{5}{5}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}}}$$

Führt man mit der Division des Zählers in den Zähler und Nenner des zuletzt erhaltenen Bruchs fort, bis der letzte Zähler selbst eine 1 wird, so sagt man, der gegebene Bruch sei in einen Kettenbruch verwandelt.

Aufgabe.

Der Bruch $\frac{13}{100}$ soll in einen Kettenbruch verwandelt werden?
 Auflösung.

$$\frac{13}{100} = \frac{1}{1 + \frac{27}{73}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{19}{27}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{8}{19}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{8}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

Geschwinder würde diese Verwandlung geschehen sein, wenn man zuvörderst das Verfahren anwendete, welches bei Auffindung des größten gemeinschaftlichen Maasses in §. 39 Statt findet, z. B.

73	100	1	1	1ster Quotient.
27	73	2	2	2ter "
19	27	1	1	3ter "
8	19	2	2	4ter "
3	8	2	2	5ter "
2	3	1	1	6ter "
1	2	2	2	7ter "

Erläuterung. Man schreibe nun eine 1 hin, ziehe darunter einen Strich und setze unter denselben den ersten Quotient (1) mit dem Zeichen +; schreibe aufs Neue eine Eins daneben und ziehe darunter einen Strich und setze unter denselben den zweiten Quotient (2) mit dem Zeichen +; schreibe aufs Neue eine 1 daneben und wiederhole dieses Verfahren, indem man den dritten Quotient (hier 1) unter einen dritten Strich schreibt, und auf diese Weise mit dem 4ten, 5ten u. s. w. Quotient verfährt.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}$$

Ein Kettenbruch hat die Eigenschaft, daß derselbe theilweise aufgelöst werden kann, so daß die aufgelösten Theile, dem wahren Werthe des gegebenen Bruches sich immer mehr und mehr nähern. So sind z. B. die auf einander folgenden aufgelösten Theile obigen Kettenbruches:

$$\frac{1}{1} = \dots\dots\dots 1.$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 : \frac{3}{2} = 1 \times \frac{2}{3} = \dots\dots\dots \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 : \frac{4}{3} = 1 \times \frac{3}{4} = \dots\dots\dots \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{1}{\frac{11}{8}} = 1 : \frac{11}{8} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{3}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{19}{7}}} = 1 : \frac{19}{7} = \dots\dots\dots \frac{7}{19} \text{ u. f. w.}$$

Die durch vorstehende Auflösung entstandene Reihe der Brüche $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}, \frac{10}{13}$ u. f. w. würde auch erscheinen, wenn man nachstehendes practisches Verfahren anwendet:

Wenn man bei einem gemeinen Bruche das Verfahren anwendet, welches bei Auffuchung des größten gemeinschaftlichen Maaßes (S. 39) befolgt wird, so merke man sich genau die auf diese Weise erhaltenen Quotiente. So erscheinen z. B. bei dem obigen Bruche $\frac{1}{10\frac{3}{8}}$, die Quotiente: 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2. — Da der Bedingung nach, bei dem gegebenen Bruche kein gemeinschaftliches Maaß Statt findet, so wird der letzte Divisor 1 sein. Hierauf ziehe man einen horizontalen Strich, schreibe links zu Anfange über denselben eine Null, darunter eine 1; ziehe rechts dahinter einen verticalen Strich; schreibe nochmals eine 1 als Zähler und den ersten durch die Division erhaltenen Quotient, als Nenner darunter. Mit dem darauf folgenden Quotient multiplicire man Zähler und Nenner des so eben hingeschriebenen Bruches; addire aber zu dem Producte des Zählers den links vorhergehenden Zähler und zu dem Producte des Nenners, den vorhergehenden Nenner, und fahre mit allen folgenden Quotienten auf gleiche Weise fort, den Zähler und Nenner des letzten Bruches zu den Producten zu addiren; so entsteht eine

Reihe von Brüchen, die sich immer mehr dem wahren Werthe des gegebenen Bruchs nähern, und durch die Multiplikation mit dem letzten Quotient ihn vollkommen darstellen.

Aufgabe.

Der Bruch $\frac{73}{100}$ soll durch Annäherung bestimmt und der nächste ein- und zweiziffrige Bruch gefunden werden.

Auflösung. Man suche durch das wechselseitige Dividiren nach §. 39 die Quotiente, wie bei der Auffuchung des größten gemeinschaftlichen Maasses. Die hier gefundenen Quotiente sind: 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2.

Die Annäherung der Brüche geschieht nach vorstehender Anleitung auf folgende Art:

(0)	1	$\overbrace{2}$	$\overbrace{3}$	$\overbrace{8}$	$\overbrace{19}$	$\overbrace{27}$	$\overbrace{73}$
(1)	1	3	4	11	26	37	100

Uebungs-Beispiele.

- 1) Wie läßt sich der Bruch $\frac{33\frac{1}{3}}{100}$ durch kleinere Brüche geben?
Antw. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}$.
- 2) Wie kann man den Bruch $\frac{25\frac{1}{4}}{100}$ durch kleinere Brüche ausdrücken?
Antw. $\frac{1}{3}, \frac{22}{67}, \frac{23}{70}, \frac{114}{117}$.
- 3) Wenn man den Durchmesser eines Kreises in 100000 Theile theilt, so enthält sein Umfang beinahe 314159 solcher Theile. Welches ist der genaueste ein-, zwei- und dreiziffrige Bruch, um dieses Verhältniß so genau als möglich auszudrücken?
Antw. Wie 1 : 3, wie 7 : 22 oder wie 113 : 355.
- 4) Wie läßt sich die Zahl 27,321661 durch kleinere Brüche darstellen?
Antw. Durch $\frac{27}{1}, \frac{8^2}{3}, \frac{765}{28}, \frac{3997}{143}$ u. s. w.
- 5) Wie läßt sich die Zahl 87,969255 durch kleinere Zahlen ausdrücken?
Antw. Durch $\frac{87}{1}, \frac{88}{1}, \frac{2815}{32}$.

Von der Erhebung einer Zahl zum Quadrat und zum Cubus und von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 73. Das Product von 2 gleichen Factoren heißt die Quadratzahl des einen Factors und einer dieser Factoren heißt die Quadratwurzel jenes Products.

Das Product von 3 gleichen Factoren nennt man die Cubikzahl des einen Factors, und einer dieser gleichen Factoren heißt die Cubikwurzel dieses Products; z. B. ist $6 \times 6 = 36$. Hier ist 36 die Quadratzahl vom Factor 6, und der Factor 6 die Quadratwurzel aus dem Product 36. Eben so ist $6 \times 6 \times 6 = 216$. Hier ist 216 die Cubikzahl vom Factor 6 und der Factor 6 die Cubikwurzel aus 216.

Man schreibt auch 6×6 auf folgende Weise: 6^2 , und $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ und nennt 6^2 das Quadrat oder die 2te Potenz von 6, und 6^3 die Cubikzahl oder die 3te Potenz von 6.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl wird bezeichnet durch $\sqrt{\quad}$ oder $\sqrt{\quad}^2$, und die Ausziehung der Cubikwurzel durch $\sqrt[3]{\quad}$, z. B. ist $\sqrt[2]{64} = 8$, und $\sqrt[3]{64} = 4$, d. h. die Quadratwurzel aus 64 ist 8, und die Cubikwurzel aus 64 ist 4.

Anmerk. Läßt sich aus einer Zahl die Wurzel vollkommen ziehen, so heißt sie eine Rationalzahl; kann man hingegen aus derselben die Wurzel nur näherungsweise ziehen, so nennt man sie eine Irrationalzahl.

S. 74. Da jede Zahlengröße in 2 Theile zerlegt und dann zum Quadrat oder Cubus erhoben werden kann; so läßt sich leicht übersehen, aus welchen Theilen ein solches Product besteht. So kann z. B. 35 in die beiden Theile $30 + 5$, und 40 in $40 + 0$ zerlegt werden.

Aufgabe.

Die zweiziffrige Zahl 35 zum Quadrat zu erheben.

Auflösung. Man multiplicire 35 mit sich selbst, und zwar:

$$\begin{array}{r} 35 \dots\dots\dots = 30 + 5 \\ 35 \dots\dots\dots = 30 + 5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{multiplicire die einzelnen} \\ \text{Theile mit einander.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} 175 \\ 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30^2 + 30 \times 5 \\ + 30 \times 5 + 5^2 \end{array}$$

Quadratzahl: 1225

$$= 30^2 + 2 \times 30 \times 5 + 5^2.$$

Betrachtet man die Multiplication der beiden zerlegten Factoren rechts; so findet man, daß in jeder Quadratzahl enthalten ist: 1) das Quadrat des ersten Theils der Wurzel (30^2); 2) das doppelte Product des ersten mit dem zweiten Theile ($2 \times 30 \times 5$) und 3) das Quadrat des zweiten Theils der Wurzel (5^2).

Nennt man im Allgemeinen das erste Glied einer zerlegten Zahl a , das zweite Glied derselben b , und man die ganze Zahl $a + b$ mit einander multiplicirt; so erscheint das Product oder die Quadratzahl: $a^2 + 2a \times b + b^2$.

Nach dieser Formel sind wir im Stande, aus jeder gegebenen ganzen Zahl oder aus jedem Bruche die Quadratwurzel zu ziehen.

Eine zweiziffrige Zahl gibt, zum Quadrat erhoben, eine drei- oder vierziffrige Zahl, also eine Zahl, die doppelt so viel Ziffern enthält, als die Wurzel derselben. Eben so gibt eine dreiziffrige Zahl, zum Quadrat erhoben, eine fünf- oder sechsziffrige Zahl, also wieder eine Zahl, die doppelt so viel Ziffern enthält, als die Wurzel derselben u. s. f.

Soll demnach aus einer Zahl von 9 oder 10 Ziffern die Quadratwurzel gezogen werden; so kann aus derselben die Wurzelgröße nur 5 Ziffern enthalten. Daher theilt man eine ganze Zahl, aus der die Quadratwurzel gezogen werden soll, von der rechten zur linken Hand, in Classen ein, und rechnet zu jeder Classe 2 Ziffern; die letzte Classe links kann auch aus einer Ziffer bestehen. So viel Classen also die Quadratzahl enthält, so viel Ziffern wird auch die Wurzel derselben enthalten müssen.

Quotient $8 = c$, als den zweiten Theil der Wurzel. Mit dieser 8 multiplicire 106; so entsteht das Product $848 = 2(a + b) \times c$. Diese 848 ziehe von dem Reste 854 ab, so bleibt 64 übrig. Setz subtrahire von 64 das Quadrat des zweiten Theils der Wurzel $64 = c^2$; so bleibt nichts übrig. Demnach ist aus 289444 die Quadratwurzel $538 = a + b + c$; wo $a = 500$, $b = 30$ und $c = 8$ ist.

§. 76. Aufgabe.

Man soll die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ zum Quadrat erheben. Auflösung. Da die Multiplication einer gegebenen Zahl mit sich selbst die Quadratzahl gibt; so ist $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; und $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. Demnach ist $\frac{1}{4}$ die Quadratzahl von $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{4} & " & " & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{9} & " & " & \frac{2}{3} \\ \frac{9}{16} & " & " & \frac{3}{4} \\ \frac{25}{36} & " & " & \frac{5}{6} \end{array}$$

§. 77. Aufgabe.

Man soll aus den Brüchen $\frac{36}{64}$, $\frac{64}{81}$, $\frac{144}{169}$ die Quadratwurzel ziehen.

Auflösung. Man ziehe nach obiger Anleitung aus dem Zähler und Nenner der gegebenen Brüche die Wurzel. Demnach ist

$$\sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8}; \quad \sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9}; \quad \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Sollte aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel sich nicht vollständig ziehen lassen; so verwandle man den gegebenen Bruch nach §. 68 in einen Decimalbruch und ziehe dann aus demselben die Wurzel; z. B. man wollte aus $\frac{1}{8}$ die Quadratwurzel ziehen, so verwandle $\frac{1}{8}$ in einen Decimalbruch. Es ist nämlich $\frac{1}{8} = 0,875 = 0,8750000000$. Demnach ist

$$\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{0,87|50|00|00|00} = 0,93541\dots$$

$$a^2 = 81$$

$$2a = 18 \quad | \quad 65$$

$$2a \cdot b = 54$$

$$\hline 110$$

$$b^2 = 9$$

$$2(a + b) = 186 \quad | \quad 1010$$

$$2(a + b) \cdot c = 930$$

$$\hline 800$$

$$c^2 = 25$$

$$2(a + b + c) = 1870 \quad | \quad 7750$$

$$2(a + b + c) \cdot d = 7480$$

$$\hline 2700$$

$$d^2 = 16$$

$$2(a + b + c + d) = 18708 \quad | \quad 26840$$

$$2(a + b + c + d) \cdot e = 18708$$

$$\hline 81320$$

$$e^2 = 1$$

$$\hline 81319 \text{ u. s. w.}$$

§. 78. Soll die Quadratwurzel aus einer Zahlgröße gezogen werden, die aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche besteht; so theile man die ganze Zahl vom Comma aus, von der Rechten zur Linken, und die Decimalstellen von der Linken zur Rechten, in Classen ein; ziehe dann aus der so eingetheilten Zahl die Wurzel, ohne Rücksicht auf das Comma, und streiche darauf in der Wurzelgröße so viel Stellen von der Linken zur Rechten für die Ganzen ab, als die ganzen Zahlen Classen haben; z. B.

$$\sqrt{16|07,44|86|49} = 40,093.$$

Exempel zur Uebung.

- 1) $\sqrt{4096} = 64$; 2) $\sqrt{256} = 16$; 3) $\sqrt{611009} = 247$;
 4) $\sqrt{57198969} = 7563$; 5) $\sqrt{780811249} = 27943$; 6) $\sqrt{5} = 2,23606 \dots$; 7) $\sqrt{101} = 10,04987$; 8) $\sqrt{15,2379} = 3,90357$;
 9) $\sqrt{0,056} = 0,23664$; 10) $\sqrt{\frac{1}{4}} = 1,32287$; 11) $\sqrt{\frac{5}{2}} = 0,64549 \dots$

§. 79. Aufgabe.

Die zweiziffrige Zahl 35 zum Cubus zu erheben.

Auflösung. Man erhält den Cubus einer Zahl, wenn man dieselbe 3mal mit sich selbst multiplicirt, z. B. ist $35 \times 35 \times 35 = 35^3$. Diese angegebene Multiplication führe man wirklich aus, wie folgt:

	35 = 30 + 5	} mit einander multiplicirt.
	35 = 30 + 5	
	175	$30^2 + 30 \cdot 5$
	105	$+ 30 \cdot 5 + 5^2$
Quadrat: 1225	35	$30^3 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2$
		} nochmals mit 35 multiplicirt.
	6125	$30^3 + 2 \cdot 30^2 \cdot 5 + 30 \cdot 5^2$
	3675	$+ 30^2 \cdot 5 + 2 \cdot 30 \cdot 5^2 + 5^3$
Cubus: 42875		$30^5 + 3 \cdot 30^2 \cdot 5 + 3 \cdot 30 \cdot 5^2 + 5^3$

Das Product links ist gleich der Summe der einzelnen Producte rechts. Aus der letztern Darstellungsart ergibt sich, daß in der Cubikzahl 42875 enthalten ist: 1) der Cubus des ersten Theils der zerlegten Zahl (30^3); 2) das dreifache Product des Quadrats des ersten Theils mit dem zweiten Theile ($3 \cdot 30^2 \cdot 5$); 3) das dreifache Product des ersten Theils mit dem Quadrate des zweiten Theils ($3 \cdot 30 \cdot 5^2$) und 4) der Cubus des zweiten Theils der zerlegten Zahl (5^3).

§. 80. Nennt man den ersten Theil einer zerlegten Zahl allgemein a und den zweiten Theil derselben b, und man deren Summe a + b dreimal mit sich selbst multiplicirt; so erhält man eine allgemeine Formel, nach welcher man aus jeder gegebenen rationalen und irrationalen Zahl und aus Brüchen die Cubikwurzel ziehen kann; z. B.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{mit einander multiplicirt.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} a^2 + a \cdot b \\ + a \cdot b + b^2 \\ \hline \end{array}$$

gibt die Quadratzahl: $a^2 + 2a \cdot b + b^2$ diese Zahl nochmals mit $a + b$ multiplicirt.

$$\begin{array}{r} a^3 + 2a^2 \cdot b + a \cdot b^2 \\ + a^2 \cdot b + 2a \cdot b^2 + b^3 \\ \hline \end{array}$$

gibt den Cubus: $a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$.

§. 81. Eine zweiziffrige Zahl zum Cubus erhoben, gibt ein Product von 4, 5 oder 6 Ziffern; eine dreiziffrige Zahl zum Cubus erhoben, gibt ein Product von 7, 8 oder 9 Ziffern. Daher schließt man umgekehrt, daß die Cubikwurzel aus einer 4, 5 und 6ziffrigen Zahl nur 2 Ziffern, die Cubikwurzel aus einer 7, 8 und 9ziffrigen Zahl nur 3 Ziffern — und durchaus nicht mehr und nicht weniger Ziffern — enthalten kann.

Diese Ueberzeugung berechtigt uns, eine ganze Zahl, aus der die Cubikwurzel gezogen werden soll, von der Rechten zur Linken in Classen zu theilen und zu jeder der ersten Classen rechts 3 Ziffern zu nehmen; die letzte Classe links kann aus 1, 2 und 3 Ziffern bestehen. So viel Classen die Cubikzahl enthält, so viel Ziffern hat auch jedesmal die Cubikwurzel derselben.

§. 82. Aufgabe.

Man soll die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ zum Cubus erheben.

Auflösung. Da die dreimalige Multiplication einer Zahl mit sich selbst den Cubus derselben gibt; so ist demnach

$$\begin{array}{l} (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \text{ also ist der Cubus von } \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ (\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \quad \text{ " " " " " } \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \\ (\frac{3}{4})^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \quad \text{ " " " " " } \frac{3}{4} = \frac{27}{64}. \end{array}$$

§. 83. Aufgabe 1.

Aus der Zahl 42875 soll die Cubikwurzel gezogen werden.

Auflösung. Man theile die gegebene Zahl in Classen von 3 zu 3 Ziffern nach §. 81 und ziehe dann aus derselben nach obiger Formel: $a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$ die Wurzel auf folgende Weise:

$$\sqrt[3]{42|875} = 35$$

$$a^3 = 27$$

$$3a^2 = 27 \quad | \quad 158$$

$$3a^2 \cdot b = 135$$

$$237$$

$$3a \cdot b^2 = 225$$

$$125$$

$$b^3 = 125$$

Erläuterung. Zu der ersten Classe 42 suche eine Zahl, welche zum Cubus erhoben, 42 nahe kommt. Diese gesuchte Zahl ist $3 = a$, und macht den ersten Theil der Wurzelgröße aus. Den Cubus von $3 = 27 = a^3$ ziehe von der ersten Classe 42 ab, und setze zu dem Reste 15 die erste Ziffer 8 der zweiten Classe; dies gibt 158. Jetzt nehme man nach der Formel, 3 mal das Quadrat von $3 = a$, so erhält man $27 = 3a^2$ und dividire damit in 158, so ist der Quotient $5 = b$, welche Zahl der zweite Theil der gesuchten Wurzelgröße ist. Mit dieser $5 = b$ multiplicire die $27 = 3a^2$, so ist deren Product $135 = 3a^2 \cdot b$. Diese Zahl ziehe von obiger 158 ab, so bleibt 23 übrig. Dieser 23 setze die zweite Ziffer 7 der zweiten Classe hinzu, so entsteht 237. Davon ziehe nach der Formel $3a \cdot b^2 = 225$ ab, so bleibt 12 übrig. Hierzu setze die dritte Ziffer 5 der zweiten Classe, so entsteht 125. Davon ziehe $b^3 = 125$ ab, so bleibt nichts übrig. Also ist aus 42875 die Cubikwurzel $35 = a + b$.

Aufgabe 2.

Es soll aus 17173512 die Cubikwurzel gezogen werden.

Auflösung.
$$\sqrt[3]{17|173|512} = 258^{a+b+c}$$

$$a^3 = 8$$

$$3a^2 = 12 \quad | \quad 91$$

$$3a^2 \cdot b = 60$$

$$317$$

$$3a \cdot b^2 = 150$$

$$1673$$

$$b^3 = 125$$

$$3(a+b)^2 = 1875 \quad | \quad 15485$$

$$3(a+b)^2 \cdot c = 15000$$

$$4851$$

$$3(a+b) \cdot c^2 = 4800$$

$$512$$

$$c^3 = 512$$

Erläuterung. Man theile die gegebene Zahl nach §. 81 in Classen und suche zu der ersten Classe 17 eine Zahl, die zum Cubus erhoben, 17 nahe kommt. Diese Zahl ist 2, welche den ersten Theil (a) der Wurzel ausmacht. Der Cubus von 2 ist $8 = a^3$. Diese 8 ziehe von 17 ab, so bleibt 9 übrig. Dazu heruntergezogen die nächste Ziffer 1, gibt 91. Diese 91 dividire mit $3a^2 = 12$, so erscheint 5 als der zweite Theil (b) der Wurzel. Dann ist $3a^2 \cdot b = 60$, die von 91 abgezogen, 31 zum Rest läßt. Hierzu setze die zweite Ziffer 7 der zweiten Classe, so erscheint 317. Davon ziehe ab $3a \cdot b^2 = 150$, so ist der Rest 167. Dazu ziehe herab die dritte Ziffer 3 der zweiten Classe, so entsteht die Zahl 1673. Davon subtrahire $b^3 = 125$, so bleibt 1548 übrig. Dazu nehme die erste Ziffer 5 der dritten Classe, so entsteht 15485. — Jetzt erhebe nach der Formel die schon theilweise gefundene Wurzel $25 = (a+b)$ zum Quadrat. Dieses Quadrat ist $= 625$

$= (a + b)^2$, und nehme diese Zahl 3 mal, so erscheint $1875 = 3(a + b)^2$ und dividire damit in 15485; so ist 8 der Quotient, welcher der zweite Theil (c) der Wurzel ist. Diese 8 (c) multiplicirt mit 1875 gibt 15000 $= 3(a + b)^2 \cdot c$. Diese 15000 ziehe von obigen 15485 ab, so bleibt als Rest 485 übrig. Dazu setze die zweite Ziffer 1 der dritten Classe, so erscheint die Zahl 4851. Davon subtrahire $3 \cdot (a + b) \cdot c^2 = 4800$, so bleibt 51 übrig. Dazu setze die dritte Ziffer der dritten Classe, wodurch 512 entsteht; davon endlich $c^3 = 512$ abgezogen, bleibt nichts übrig; folglich ist aus 17173512 die Cubikwurzel $258 = a + b + c$.

§. 84. Um aus einem gewöhnlichen Bruche die Cubikwurzel zu ziehen, ziehe man aus dessen Zähler und Nenner die Wurzel, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}; \quad \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}; \quad \sqrt[3]{\frac{343}{512}} = \frac{7}{8} \text{ u. s. m.}$$

Läßt sich aber aus Zähler und Nenner des Bruchs, oder aus einem derselben die Wurzel nicht vollständig ziehen, so verwandele man den Bruch nach §. 68 in einen Decimalbruch; theile darauf denselben vom Komma aus, von der Linken zur Rechten, in Classen (zu deren jeder 3 Ziffern gehören müssen) und ziehe dann aus diesem Decimalbruche ganz so, wie aus einer ganzen Zahl, die Cubikwurzel, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{0, | 666 | 666 | 666 |} = 0,87358 \dots$$

Ist aber aus einer Zahl, die aus Ganzen und Decimalen besteht, die Cubikwurzel zu ziehen, so theile man die Ganzen, vom Komma aus, von der Rechten zur Linken und die Decimalen von der Linken zur Rechten, in Classen ein. Fehlen etwa in der letzten Classe der Decimalen ein oder zwei Ziffern, so setze man so viel Nullen der letzten Classe hinzu, daß sie zu 3 Ziffern ergänzt werde. Es soll z. B. aus 1897,0074963 die Cubikwurzel gezogen werden, so theile man sie auf folgende Art ein:

$$\sqrt[3]{1 | 897, | 007 | 496 | 300 |},$$

und ziehe dann nach der gegebenen Formel, ohne weitere Rücksicht auf das Comma, die Cubikwurzel.

Uebungs-Beispiele.

- 1) $\sqrt[3]{12167} = 23$; 2) $\sqrt[3]{884736} = 96$; 3) $\sqrt[3]{405224} = 74$;
 4) $\sqrt[3]{2460375} = 135$; 5) $\sqrt[3]{1191016} = 106$; 6) $\sqrt[3]{8000000} = 200$;
 7) $\sqrt[3]{6372783864} = 1854$; 8) $\sqrt[3]{12} = 2,28942 \dots$
 9) $\sqrt[3]{5,8} = 1,7967$; 10) $\sqrt[3]{102,875} = 4,68565$; 11) $\sqrt[3]{15\frac{3}{8}} = 2,50222$.

Anmerk. Zur schnellern Auffindung des Cubus einer einfachen Zahl diene folgende Tabelle:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubikzahl	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 85. Ein Verhältniß ist die Vergleichung zweier gleichartigen Dinge in Ansehung ihrer Größe. Diese Vergleichung kann auf zweierlei Weise geschehen:

1) Wenn man untersucht, um wie viel Einheiten eine Größe größer als eine andere ist. Diese Vergleichung geschieht durch Subtraction und wird ein arithmetisches Verhältniß genannt, und durch einen kleinen horizontalen Strich (—) zwischen den beiden zu vergleichenden Größen angedeutet, z. B. $9-6$. Man liest diese Andeutung: 9 verhält sich zu 6.

2) Wenn man untersucht, wie vielmal die eine Größe, welche als Einheit oder Maaß angenommen wird, in einer andern enthalten ist. Diese Vergleichung geschieht durch die Division und wird ein geometrisches Verhältniß genannt und durch zwei Punkte über einander (:) zwischen den beiden zu vergleichenden Größen angedeutet, z. B. $3 : 12$. Man liest diese Andeutung: 3 verhält sich zu 12.

§. 86. Die erste Größe eines Verhältnisses heißt das Vorderglied, und die zweite Größe das Hinterglied desselben.

§. 87. Die Zahl, die bei einem arithmetischem Verhältnisse anzeigt, um wie viel Einheiten die eine Größe größer ist als die andere, heißt Unterschied oder Differenz, und die Zahl, welche bei einem geometrischem Verhältnisse anzeigt, wie vielmal die eine Größe in der andern enthalten ist, heißt Quotient oder Exponent.

§. 88. Ist in einem Verhältnisse das Vorderglied kleiner als das Hinterglied, so nennt man es ein steigendes Verhältniß; ist aber das Vorderglied größer als das Hinterglied, so heißt ein solches Verhältniß ein fallendes. Demnach sind: $6-9$ und $3 : 12$ steigende, und $12-7$ und $15 : 5$ fallende Verhältnisse.

§. 89. Bei einem steigenden geometrischem Verhältnisse ist der Quotient größer als 1, und bei einem fallenden kleiner als 1, also ein ächter Bruch, z. B. bei dem Verhältnisse $3 : 12$ ist der Quotient oder Exponent $\frac{1}{4}$ Ganze, und bei $36 : 9$ ist der Quotient $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

§. 90. Es kommen demnach bei einem geometrischem Verhältnisse stets 3 Größen vor, nämlich: das erste und zweite Glied und der Exponent. Fehlet in einem Verhältnisse eine dieser Größen, so kann dieselbe, (welche stets mit x bezeichnet wird), leicht gefunden werden. Z. B. es sei das Vorderglied 4, das Hinterglied 12, so ist der Exponent 3. Man erhält

dann nachstehendes Verhältniß $4 : 12$. Fehlet hier der Exponent, so findet man ihn, wenn man das Vorderglied 4 in das Hinterglied dividirt,

also $\frac{12}{4} = 3$. Ist $4 : x$ gegeben, so findet man das Hinterglied, wenn man das Vorderglied 4 mit dem Exponent 3 multiplicirt, also

4 · 3 = 12. Ist $x : 12$ gegeben, so wird das Vorderglied gefunden, wenn man den Exponent in das Hinterglied dividirt, also $\frac{12}{3} = 4^*$).

Anmerk. Dieses Verfahren bleibt dasselbe, es mag das Verhältniß ein steigendes oder fallendes, und ihre Glieder ganze oder gebrochene Zahlen sein.

§. 91. Zwei arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Unterschiede, und zwei geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn ihre Exponente gleich sind.

§. 92. Die Gleichstellung zweier gleichen Verhältnisse heißt eine Proportion, und zwar eine arithmetische, wenn sie aus zwei gleichen arithmetischen, und eine geometrische, wenn sie aus zwei gleichen

geometrischen Verhältnissen besteht. So ist z. B. $12 \overset{3}{-} 9 = 8 \overset{3}{-} 5$ eine arithmetische und $3 \overset{4}{:} 12 = 5 \overset{4}{:} 20$ eine geometrische Proportion, weil bei der erstern die Unterschiede und bei der letztern die Quotiente gleich sind.

Anmerk. Eine Proportion kann nur aus zwei steigenden oder zwei fallenden Verhältnissen, nie aber aus einem steigenden und einem fallenden Verhältnisse bestehen.

§. 93. Eine Proportion heißt eine stetige, wenn die beiden mittlern Glieder derselben gleich, eine unterbrochene oder discrete aber, wenn die beiden mittlern Glieder ungleich sind. Z. B. ist

$$9 - 6 = 6 - 3 \text{ eine stetige arithmetische,}$$

$$4 : 6 = 6 : 9 \text{ eine stetige geometrische,}$$

$$7 - 5 = 9 - 7 \text{ eine discrete arithmetische,}$$

$$2 : 4 = 5 : 10 \text{ eine discrete geometrische Proportion.}$$

§. 94. Bei einer Proportion heißen das erste und vierte Glied die äußern, und das zweite und dritte Glied die innern Glieder derselben.

§. 95. **Lehrsatz.** In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der innern Glieder, z. B.

$$\overset{5}{14} - \overset{5}{9} = \overset{5}{11} - \overset{5}{6}. \text{ Hier ist}$$

$$14 + 6 = 20 \text{ die Summe der äußern, und}$$

$$9 + 11 = 20 \text{ die Summe der innern Glieder.}$$

Wenn man das erste Glied einer arithmetischen Proportion allgemein durch a, das dritte Glied durch b und den Unterschied beider Verhältnisse der Proportion durch u bezeichnet, so wird die arithmetische Proportion allgemein auf folgende Weise dargestellt:

$$a \overset{u}{-} (a \overset{u}{+} u) = b \overset{u}{-} (b \overset{u}{+} u), \text{ wo}$$

$$a \overset{u}{+} b \overset{u}{+} u \text{ die Summe der äußern, und}$$

$$a \overset{u}{+} u \overset{u}{+} b \text{ die Summe der innern Glieder der Proportion sind,}$$

*) Auf ähnliche Weise findet man auch das fehlende Glied bei einem arithmetischen Verhältnisse.

welche Summen einander gleich sind, weil in beiden gleiche Größen mit gleichen Zeichen vorkommen.

§. 96. Aufgabe.

Das fehlende Glied in einer discreten arithmetischen Proportion zu finden.

Es sei gegeben: I. $12 - 9 = 18 - x$. Nach §. 95
ist $12 + x = 9 + 18 = 27$. Davon ziehe ab:
 $12 \dots \dots \dots = 12$

bleibt $x \dots \dots \dots = 15$

II. $12 - 18 = x - 20$; hier ist nach §. 95

$12 + 20 = 18 + x$, oder $32 = 18 + x$. Davon ziehe ab:
 $18 = 18$

bleibt $14 = x$.

Anmerk. Auch kann man im Beispiel I. x durch den Unterschied des ersten und zweiten Gliedes finden. Dieser Unterschied ist 3; subtrahirt man nun 3 von 18, so erhält man das vierte Glied $x = 15$. Im Beispiele II. findet man x , wenn man 6 als den Unterschied des ersten und zweiten Gliedes von 20 abzieht, so bleibt 14 für das fehlende Glied x .

§. 97. Aufgabe.

Die beiden fehlenden Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion, oder, was dasselbe heißt: zwischen zwei gegebenen Zahlen (hier 12 und 36) das arithmetische Mittel zu finden.

Es sei gegeben: $12 - x = x - 36$. Nach §. 95 ist
 $12 + 36 = 2x$, oder
 $48 = 2x$; folglich
 $24 = x$.

§. 98. **Lehrsatz.** In einer geometrischen Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder, z. B.

$3 : 15 = 7 : 35$. Hier ist

$3 \times 35 = 105$ das Product der äußern,

und $15 \times 7 = 105$ das Product der innern Glieder.

Wird das erste Glied allgemein durch a , das dritte Glied durch b , und der Exponent durch e ausgedrückt, so kann eine geometrische Proportion allgemein auf folgende Art dargestellt werden:

$a : a \cdot e = b : b \cdot e$, wo

$a \times b \cdot e$ das Product der äußern, und

$a \cdot e \times b$ das Product der innern Glieder ist, welche Producte einander gleich sind, da in beiden eine gleiche Menge gleicher Factoren vorkommen.

§. 99. Aufgabe.

In einer geometrischen Proportion ein fehlendes Glied zu finden.

Es sei gegeben: I. $5 : 15 = 8 : x$. Hier ist nach §. 98

$$\begin{array}{r} 5 \times x = 15 \times 8, \text{ folglich} \\ x = \frac{15 \times 8}{5} = 24 \end{array}$$

II. $7 : 21 = x : 33$. Hier ist nach §. 98

$$\begin{array}{r} 7 \times 33 = 21 \times x; \text{ folglich} \\ 7 \times 33 = x, \text{ oder} \\ \frac{231}{21} \end{array}$$

$$11 = x.$$

§. 100. Hierauf beruht die Lösung der einfachen Regeldetri-Exempel, d. h. „die Regel aus drei bekannten Größen die vierte unbekannte Größe (x) finden.“ Steht letztere im vierten Gliede, wie in I., so findet man x , wenn man das Product der beiden innern Glieder durch das erste Glied dividirt.

§. 101. In einer discreten geometrischen Proportion kann ein fehlendes Glied auch durch Anwendung des Exponents gefunden werden, denn im Beispiel I. des vorhergehenden §. ist 5 in 15 dreimal enthalten, folglich muß 8 in x auch dreimal enthalten sein; demnach muß $x = 8 \times 3 = 24$ sein.

§. 102. Aufgabe.

In einer stetigen geometrischen Proportion die beiden fehlenden mittlern Glieder, oder, was dasselbe heißt: zwischen zwei gegebenen Zahlen (hier 4 und 64) die mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden.

Es sei gegeben: $4 : x = x : 64$. Nach §. 98 muß sein

$$4 \cdot 64 = x \cdot x, \text{ oder}$$

$$256 = x^2. \text{ Aus beiden Theilen die Quadratwurzel}$$

gezogen, gibt $16 = x$.

§. 103. **Lehrsatz.** In einer geometrischen Proportion können

- 1) die beiden mittlern Glieder;
- 2) die beiden Verhältnisse, und
- 3) das Vorderglied mit dem Hintergliede in beiden Verhältnissen verwechselt werden, wobei die Proportion stets eine richtige bleibt; z. B.

sei gegeben $3 : 6 = 5 : 10$; so kann sein:

- 1) $3 : 5 = 6 : 10$
 - 2) $5 : 10 = 3 : 6$
 - 3) $6 : 3 = 10 : 5$
- In diesen 3 neuen Proportionen ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder; folglich sind diese 3 Proportionen richtig.

§. 104. **Lehrsatz.** In einer geometrischen Proportion können die beiden Glieder eines Verhältnisses; oder auch die Vorder- oder Hinterglieder beider Verhältnisse, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden, und die Proportion bleibt stets eine richtige; z. B. sei gegeben:

- I. $\frac{3:6}{5\ 5} = 2:4$ } Multiplicire die beiden Glieder des ersten Verhältnisses mit 5;
 so ist $15:30 = 2:4$. Hier ist $15 \times 4 = 30 \times 2 = 60$.
- II. $\frac{3:6}{7\ 7} = 2:4$ } Multiplicire die Vorderglieder beider Verhältnisse mit 7;
 so ist $21:6 = 14:4$. Hier ist $21 \cdot 4 = 6 \cdot 14 = 84$.
- III. $\frac{4:12}{:4) = 6:18}$ } Dividire die beiden Glieder des ersten Verhältnisses durch 4;
 so ist $1:3 = 6:18$. Hier ist $1 \cdot 18 = 3 \cdot 6 = 18$.
- IV. $\frac{8:4}{:4) = 2:1}$ } Dividire das erste und dritte Glied durch 4.
 so ist $2:4 = 3:6$. Hier ist $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 12$.

§. 105. Aufgabe.

Das gegebene Verhältniß $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$; so wie das Verhältniß $3\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2}$ durch ganze Zahlen darzustellen.

Gegeben sei I. $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$; II. $3\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2}$.

Man bringe hier die beiden gegebenen Verhältnisse, jedes für sich, unter einerlei Benennung; so entstehen folgende Verhältnisse:

- I. $\frac{2 \cdot 9}{7 \cdot 9} : \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7}$, oder $\frac{18}{63} : \frac{35}{63}$, multiplicire beide Theile mit 63; so ist das verlangte Verhältniß 18 : 35.
- II. $\frac{11 \cdot 4}{3 \cdot 4} : \frac{23 \cdot 3}{4 \cdot 3}$, oder $4\frac{1}{2} : 5\frac{3}{4}$, multiplicire beide Theile mit 12; so ist das verlangte Verhältniß 44 : 69.

Anmerk. Hierauf beruht die Wegschaffung der Brüche in den Proportionen.

§. 106. **Lehrsatz.** Sind in 2 oder mehreren geometrischen Proportionen die Vorderglieder der einen Proportion gleich den Hintergliedern einer andern Proportion; so können in denselben die gleichen Zahlengrößen ausgestrichen werden und die übrig gebliebenen Glieder bilden wieder eine richtige Proportion.

Z. B. seien gegeben: $3:6 = 4:8$
 $6:18 = 8:24$

so ist $3:18 = 4:24$, wo $3 \cdot 24 = 18 \cdot 4 = 72$ ist.

§. 107. **Lehrsatz.** Werden die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer Proportionen mit einander multiplicirt; so geben deren Producte wieder eine richtige Proportion.

Z. B. seien gegeben: $3:6 = 2:4$
 $1:4 = 3:12$
 $5:10 = 4:8$

so ist $3 \cdot 1 \cdot 5 : 6 \cdot 4 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 4 : 4 \cdot 12 \cdot 8$, oder
 $15:240 = 24:384$, wo
 $15 \cdot 384 = 240 \cdot 24 = 5760$ ist.

Anmerk. Auf §§. 106 und 107 beruht die sogenannte „Bafedowsche Regel“. Siehe darüber §. 133.

§. 108. **Lehrsatz.** Sind 4 Größen proportionirt, so sind auch ihre Potenzen oder Wurzeln von einerlei Exponenten proportionirt.

z. B. sei gegeben: I. $4 : 8 = 5 : 10$

Setze darunter dieselbe Proportion $4 : 8 = 5 : 10$

so ist (nach §. 107) $4^2 : 8^2 = 5^2 : 10^2$. Jetzt setze

darunter nochmals dieselbe Proportion $4 : 8 = 5 : 10$;

so ist (nach §. 107) $4^3 : 8^3 = 5^3 : 10^3$.

II. $9 : 36 = 49 : 196$.

Ziehe aus jedem einzelnen Gliede dieser Proportion die Quadratwurzel;

z. B. $\sqrt{9} : \sqrt{36} = \sqrt{49} : \sqrt{196}$, oder

$3 : 6 = 7 : 14$, wo

$3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 = 42$ ist.

III. $8 : 27 = 64 : 216$.

Ziehe aus jedem einzelnen Gliede dieser Proportion die Cubikwurzel;

z. B. $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{216}$, oder

$2 : 3 = 4 : 6$, wo

$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$ ist.

§. 109. **Lehrsatz.** In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder der Unterschied des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder der Unterschied des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede.

Es sei gegeben $3 : 6 = 4 : 8$; so soll sein:

I. $(3+6) : 3 = (4+8) : 4$, oder

$9 : 3 = 12 : 4$, wo $9 \cdot 4 = 3 \cdot 12 = 36$ ist.

II. $(3+6) : 6 = (4+8) : 8$, oder

$9 : 6 = 12 : 8$, wo $9 \cdot 8 = 6 \cdot 12 = 72$ ist.

III. $(3-6) : 3 = (4-8) : 4$, oder

$3 : 3 = 4 : 4$, wo $3 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$ ist.

IV. $(3-6) : 6 = (4-8) : 8$, oder

$3 : 6 = 4 : 8$, wo $3 \cdot 8 = 6 \cdot 4 = 24$ ist.

Anmerk. Auf diesen Lehrsatz beruht die Gesellschafts-Rechnung. S. §. 125.

§. 110. **Lehrsatz.** Sind in zwei geometrischen Proportionen die Vorder- oder Hinterglieder, oder auch das vierte Glied der einen Proportion dem zweiten Gliede der zweiten Proportion gegenseitig gleich, so können sie hinweggelassen werden, und die nachgebliebenen Glieder bilden in derselben Ordnung wieder eine richtige Proportion, z. B.

I.	$3 : 12 = 5 : 20$
	$4 : 12 = 6\frac{2}{3} : 20$
folglich $3 : 4 = 5 : 6\frac{2}{3}$	
	$\text{wo } 3 \cdot 6\frac{2}{3} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ ist.}$
II.	$4 : 8 = 3 : 6$
	$4 : 12 = 3 : 9$
folglich $8 : 12 = 6 : 9$	
	$\text{wo } 8 \cdot 9 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ ist.}$
III.	$4 : 8 = 3 : 6$
	$1 : 6 = 4 : 24$
folglich $4 : 8 = 12 : 24$	
	$\text{wo } 4 \cdot 24 = 8 \cdot 12 = 96 \text{ ist.}$

§. 111. **Lehrsatz.** Wenn mehrere Proportionen ein Verhältniß gemein haben, so ist das aus gleichen Zahlen bestehende Verhältniß gleich dem Verhältnisse der Summe der über einander stehenden ungleichen Glieder. Z. B. seien gegeben

$$2 : 6 = 1 : 3$$

$$3 : 9 = 1 : 3$$

$$4 : 12 = 1 : 3$$

so soll sein $(2+3+4) : (6+9+12) = 1 : 3$, oder

$$9 : 27 = 1 : 3, \text{ wo}$$

$$9 \cdot 3 = 27 \cdot 1 = 27 \text{ ist.}$$

§. 112. **Lehrsatz.** Stehen drei Größen in stetiger geometrischer Proportion, so verhält sich die erste Größe zur dritten, wie das Quadrat der ersten zum Quadrat der zweiten Größe. Z. B. sei gegeben

$$5 : 10 = 10 : 20. \text{ Hier soll sich verhalten}$$

$$5 : 20 = 5^2 : 10^2, \text{ oder}$$

$$5 : 20 = 25 : 100, \text{ wo } 5 \cdot 100 = 20 \cdot 25 = 500 \text{ ist.}$$

§. 113. **Lehrsatz.** Stehen vier Größen in stetiger geometrischer Proportion, so verhält sich die erste zur vierten Größe, wie der Cubus der ersten Größe zum Cubus der zweiten Größe. Z. B. sei gegeben

$$3 : 6 = 6 : 12 = 12 : 24, \text{ oder abgekürzt geschrieben}$$

$$3 : 6 : 12 : 24. \text{ Hier soll sich verhalten}$$

$$3 : 24 = 3^3 : 6^3, \text{ oder}$$

$$3 : 24 = 27 : 216; \text{ wo}$$

$$3 \cdot 216 = 24 \cdot 27 = 648 \text{ ist; folgl. ist obiger Lehrsatz richtig.}$$

Von den Progressionen.

§. 114. Eine fortlaufende Reihe stetiger Proportionen heißt eine Progression, und zwar eine arithmetische, wenn sie aus stetigen arithmetischen, und eine geometrische, wenn sie aus stetigen geometrischen Proportionen besteht, z. B.

$3-6-9-12-15-18$ ist eine arithmetische, und

$2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$ eine geometrische Progression.

Wenn in einer arithmetischen Progression das erste Glied mit a , der Unterschied mit u , und die Anzahl der Glieder mit n bezeichnet werden, so kann die arithmetische Progression allgemein auf folgende Art dargestellt werden:

$$a - (a + u) - (a + 2u) - (a + 3u) - (a + 4u) - \dots - [a + (n-1) \cdot u],$$

wo $a + (n-1) \cdot u$ das letzte Glied dieser Progression andeutet.

Wenn bei einer geometrischen Progression das erste Glied durch a , der Exponent durch e , und die Anzahl der Glieder durch n bezeichnet werden, so kann eine solche Progression allgemein so dargestellt werden:

$$a : a \cdot e : a \cdot e^2 : a \cdot e^3 : a \cdot e^4 : \dots : a \cdot e^{n-1};$$

wo $a \cdot e^{n-1}$ das letzte Glied dieser Progression andeutet.

§. 115. Aufgabe.

Eine gegebene arithmetische Progression zu addiren.

Auflösung. Man addire das erste und letzte Glied der Progression, und multiplicire deren Summe mit der halben Anzahl der Glieder der Progression, z. B. in der Progression

$$3 - 6 - 9 - 12 - 15 - 18 - 21 - 24 - 27 - 30 - 33$$

ist das erste Glied 3, und das letzte Glied 33, und deren Summe = 36. Diese Summe multiplicire mit der halben Anzahl der Glieder, d. i. mit $5\frac{1}{2}$, so erscheint das Product $36 \times 5\frac{1}{2} = 198$, als die Summe der gegebenen arithmetischen Progression.

Beweis.

Da nach §. 98 in einer arithmetischen Proportion die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der innern Glieder ist, so müssen in einer arithmetischen Progression die Summen des ersten und letzten Gliedes, des zweiten Vorder- und des zweiten Hintergliedes, des dritten Vorder- und des dritten Hintergliedes u. s. w. einander gleich sein. Demnach muß sein

$$3 + 33 = 6 + 30 = 9 + 27 = 12 + 24 = 15 + 21,$$

und 18, als die Hälfte von 36, bleibt übrig. Folglich besteht die Summe der obigen Progression aus $5\frac{1}{2}$ Mal $36 = 198$, d. i. aus der Summe des ersten und letzten Gliedes, multiplicirt mit der halben Anzahl der Glieder der Progression.

§. 116. Aufgabe.

Wenn in einer arithmetischen Progression das erste Glied = 120 und der Unterschied = 15 ist; was ist dann 1) das letzte Glied und 2) die Summe der ganzen Progression, wenn dieselbe 21 Glieder haben soll?

Auflösung. 1) Da nach §. 114 das letzte Glied einer arithmetischen Progression ausgedrückt wird durch $a + (n-1) \cdot u$ und hier $a = 120$; $u = 15$ und $n = 21$ gegeben ist; so ist das letzte Glied = $120 + 20 \cdot 15 = 420$.

2) Zu diesem letzten Gliede 420 addire das erste Glied 120; so ist deren Summe = 540. Diese multiplicire mit der halben Anzahl der Glieder, d. i. mit $21\frac{1}{2}$; so ist die Summe der Glieder der gegebenen Progression = $540 \times 21\frac{1}{2} = 5670$.

Übungs-Beispiele.

- 1) Wie viel Schläge macht eine Uhr in 12 Stunden?
 Antw. 78 Schläge.
- 2) Eine Bäuerin bringt 10 Hühner zu Markt, und verlangt für jedes Huhn 11 Cop. Ein Käufer will ihr aber für das erste Huhn 3 Cop., für das zweite 5 Cop., und so immer für das folgende 2 Cop. mehr geben, als für das vorhergehende. Die Bäuerin nahm dieses Anerbieten gern an; was erhielt sie demnach für ein Huhn?
 Antw. 12 Cop.
- 3) Wenn in einer arithmetischen Progression das erste Glied = 50, die Differenz = 12 und die Anzahl der Glieder derselben = 61 ist; wie groß ist die Summe aller Glieder?
 Antw. 25010.
- 4) Was ist die Summe der Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge von 1 bis 1000?
 Antw. 500500.

§. 117. Aufgabe.

Man soll nachstehende geometrische Progression addiren: 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187.

Auflösung. Man multiplicire das letzte Glied (hier 2187) mit dem Exponent (hier 3) der Progression. Ziehe von diesem Product (hier 6561) das erste Glied (hier 1) ab und dividire den Rest (hier 6560) durch den Exponent weniger 1 (hier $3-1=2$); so ist der dadurch hervorgehende Quotient (hier 3280) die Summe der Glieder einer geometrischen Progression.

B e w e i s .

Man setze die Summe der gegebenen geometrischen Progression = S; so ist
 $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$

Diese Gleichung multiplicire mit dem Exponent 3; so entsteht:

$$3 \cdot S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 2187 \cdot 3$$

Subtrahire die erstere Gleichung von der zweiten; so ist der Unterschied:

$$\begin{aligned} 3S - S &= 2187 \cdot 3 - 1, \text{ oder} \\ (3-1) \cdot S &= 2187 \cdot 3 - 1; \text{ folglich} \\ S &= \frac{2187 \cdot 3 - 1}{3-1}, \end{aligned}$$

welche Formel mit obiger Auflösung vollkommen übereinstimmt.

Allgemeiner Beweis.

Wenn a das erste Glied, e der Exponent und n die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression bedeuten; so ist die allgemeine Darstellung derselben folgende: $a : a \cdot e : a \cdot e^2 : a \cdot e^3 : a \cdot e^4 : \dots : a \cdot e^{n-1}$

Man setze die Summe dieser Progression = S; so ist

$$S = a + a \cdot e + a \cdot e^2 + a \cdot e^3 + a \cdot e^4 + \dots + a \cdot e^{n-1}$$

Setzt multiplicire die ganze Gleichung durch e (den Exponent); so erscheint:

$$e \cdot S = a \cdot e + a \cdot e^2 + a \cdot e^3 + a \cdot e^4 + \dots + a \cdot e^{n-1} + a \cdot e^n$$

Subtrahire nun von der letztern Gleichung die erstere; so ist der Unterschied:

$$e \cdot S - S = a \cdot e^n - a, \text{ oder}$$

$$(e - 1) \cdot S = a \cdot e^n - a; \text{ folglich}$$

$$S = \frac{a \cdot e^n - a}{e - 1}$$

welche Formel mit obiger vollkommen übereinstimmend ist.

§. 118. Aufgabe.

Was ist 1) das letzte Glied und 2) die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied = 7, der Exponent = 5 und die Zahl der Glieder = 4 ist?

Auflösung. Da das letzte Glied einer geometrischen Progression allgemein dargestellt wird durch $a \cdot e^{n-1}$; so ist dieser Ausdruck in Zahlen = $7 \cdot 5^{4-1}$
 $= 7 \cdot 5^3 = 7 \cdot 125 = 875$. Und die Summe der Progression
 $= \frac{875 \cdot 5 - 7}{4 - 1} = 1456$.

Übungs-Beispiel.

- 1) Was ist das letzte Glied und die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied = 12, der Exponent = 3 und die Anzahl der Glieder = 6 ist? Antw. das letzte Glied = 2916 und die Summe der Progression = 4368.
- 2) Was ist die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied = 20, der Exponent = 10 und die Anzahl der Glieder = 8 ist? Antw. 222222220.
- 3) Was betragen die Zinszinsen eines Capitals von 4000 Rbl. zu 4 Proc. in 9 Jahren? Antw. 1693 Rbl. 24 Cop.
- 4) Jemand kauft 16 Schafe und zahlt für das erste Schaf 1 Cop., für das zweite 2 Cop., für das dritte 4 Cop., für das vierte 8 Cop.; genug für jedes folgende doppelt so viel, als für das vorhergehende; was hat er demnach für die 16 Schafe zusammen gezahlt? Antw. 655 Rbl. 35 Cop.

Anwendung der Proportionen auf Rechnungs-Gegenstände des gemeinen Lebens.

I. Anwendung der Proportionen auf Regeldetri.

§. 119. Die Werthe gleichartiger Waaren stehen mit ihren Preisen, die Capitale mit ihren Zinsen; der Arbeitslohn mit der Anzahl der Arbeiter, bei übrigens gleichen Umständen, in gleichen Verhältnissen; indem 3mal so viel Waare, auch 3mal so viel Rubel kostet; ein 5mal größeres Capital auch 5mal mehr Zinsen gibt und 4mal so viel Arbeiter auch 4mal so viel Arbeitslohn erhalten. Daher kann man, wenn 2 gleichartige Gegenstände und ein dritter ungleichartiger, — der sich auf einen der beiden gleichartigen bezieht, — gegeben sind, den vierten Gegenstand, der mit dem obigen ungleichartigen gleichnamig sein muß, mittelst Aufsetzung einer geometrischen Proportion, finden. Dieses geschieht dadurch, daß man zu den 3 gege-

benen Zahlengrößen, ohne auf ihre Benennung zu sehen, die vierte Proportionalzahl (nach §. 99) sucht. Das practische Verfahren hievon wird Regeldetri genannt.

§. 120. Aufgabe 1.

Wenn 15 ₰ 18 Rbl. kosten; was kosten demnach 25 ₰?

Auflösung. Da bei der Regeldetri die richtige Stellung des Ansatzes das Schwierigste ist; so beobachte man dabei folgende allgemeine Regeln:

- 1) Man untersuche in der Aufgabe, wornach gefragt wird (hier nach Rubeln), und setze x Rubel als 4tes Glied in der Proportion an.
- 2) Weil nur gleichartige Größen mit einander verglichen werden können; so muß in das 3te Glied der Proportion ebenfalls Rubel (hier 18 Rubel) zu stehen kommen. Es würde demnach das eine Verhältniß der Proportion sein: 18 Rbl. : x Rbl.
- 3) Nun untersuche man, ob der Natur der Aufgabe zufolge, das Verhältniß 18 Rbl. : x Rbl. ein steigendes oder fallendes ist. Im erstern Falle ordne man die beiden andern gleichnamigen Größen (hier 15 ₰ und 25 ₰) so, daß sie auch ein steigendes; im letztern Falle, daß sie ein fallendes Verhältniß bilden, weil eine richtige Proportion nur aus 2 steigenden oder aus 2 fallenden Verhältnissen bestehen kann.

In unserm Exempel gibt 18 Rbl. : x Rbl., nach geschehener Untersuchung, ein steigendes Verhältniß, weil 25 ₰ mehr kosten werden als 15 ₰; folglich muß hier das zweite Verhältniß der Proportion auch ein steigendes, also 15 ₰ : 25 ₰ sein. Demnach ist die ganze Proportion folgende:

15 ₰ : 25 ₰ = 18 Rbl. : x Rbl.; folglich ist nach §. 99

$$x = \frac{25 \cdot 18}{15} = 30 \text{ Rbl.}$$

- 4) Da im Zähler vorstehenden Bruches das Product des 2ten und 3ten Gliedes, und im Nenner das 1ste Glied der Proportion stehen; so kann demnach auch das 1ste Glied gegen das 2te und 3te Glied durch ein gemeinschaftliches Maaß gehoben werden. Dividire daher im vorstehenden Exempel das 1ste und 2te Glied durch 5, so entsteht aus obiger Proportion nachstehende: 3 ₰ : 5 ₰ = 18 Rbl. : x Rbl. Dividire ferner das 1ste und 3te Glied durch das gemeinschaftliche Maaß 3; so verwandelt sich die Proportion in folgende:

1 ₰ : 5 ₰ = 6 Rbl. : x Rbl. und

$$x = \frac{5 \cdot 6}{1} = 30 \text{ Rbl.}$$

- 5) Es können die einzelnen Glieder einer Proportion auch aus mehreren ungleichnamigen Theilen bestehen. In diesem Falle bringe man alle Theile eines Gliedes unter einerlei Benennung und suche dann nach obiger Anleitung das unbekante 4te Glied (x); z. B.

Aufgabe 2.

Was werden 3 Berk. 7 Pud 30 ₰ zu stehen kommen, wenn 7 Pud 30 ₰ 4 Rbl. 75 Cop. kosten?

7 Kull $3\frac{1}{2}$ Tschwf. : 1 Tschwf. $5\frac{1}{2}$ Garniz = $44\frac{1}{2}$ Rbl. : x Rbl.		
<u>10</u>	<u>8</u>	<u>2</u>
73 $\frac{3}{4}$ Tschwf.	13 $\frac{1}{2}$ Garniz.	<u>89</u>
<u>4</u>	<u>2</u>	<u>2</u> Rbl.
295 Tschwf.	<u>27</u>	
<u>4</u>	<u>2</u> Garniz	
$\frac{295 \cdot 8}{4}$ Garniz.		

Demnach ist $x = \frac{27 \cdot 89 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 295 \cdot 8}$ Rbl. = $101\frac{91}{118}$ Cop. = 1 Rbl. $1\frac{91}{118}$ Cop.

§. 124. Aufgabe 6.

Jemand gibt einem Silberarbeiter 40 Loth Silber, um daraus einen Pokal anzufertigen. Ersterer macht jedoch die Bedingung, daß der Silberarbeiter so viel von dem unverarbeiteten Silber zurückbehalten soll, als der Arbeitslohn für den fertigen Pokal beträgt. Der Mann rechnet 1 Loth unverarbeitetes Silber zu 60 Cop., und der Silberarbeiter für die Verarbeitung eines Lothes 20 Cop.; wie viel Loth wird nun besagter Pokal enthalten?

Auflösung. Da 1 Loth unverarbeitetes Silber 60 Cop. und der Arbeitslohn für 1 Loth 20 Cop. angeschlagen ist; so wird 1 Loth verarbeitetes Silber 80 Cop. kosten. Demnach ist das Verhältniß des Gewichts des unverarbeiteten Silbers (40 Lth.) zu dem Gewicht x des fertigen Pokals ein fallendes; folglich müssen auch 80 Cop. und 60 Cop. ein fallendes Verhältniß bilden. Man wird also das Gewicht des fertigen Pokals durch den Ansatz finden:

$80 \text{ Cop.} : 60 \text{ Cop.} = 40 \text{ Loth unverb. Silb.} : x \text{ Loth verb. Silb.}$

Also ist $x = 30$ Loth (Schwere des Pokals) und daher wird der Silberarbeiter 10 Loth rohes Silber an Arbeitslohn zurück behalten.

Probe. Die 10 Loth Silber à 60 Cop., die der Silberarbeiter zurück behält, betragen 6 Rbl., und der Arbeitslohn für 30 Loth à 20 Cop. beträgt gleichfalls 6 Rbl.; folglich ist die Vertheilung des Silbers richtig. *)

Uebungs-Beispiele.

- 1) Ein Edelmann gibt einem Gerber 120 rohe Felle zu gerben, und rechnet jedes zu 6 Rbl. Beide kommen darin überein, daß der Gerber so viel von den rohen Fellen zurückbehalten soll, daß der Arbeitslohn für die abzuliefernden fertigen Felle, der für 1 Stück zu 2 Rbl. bedungen worden, gedeckt ist; wie viel fertige Felle wird der Edelmann zurück erhalten? Antw. 90 Felle.
- 2) A. gibt dem Lichtgießer B. 60 H Fett à 10 Cop., um Lichte daraus zu gießen; B. rechnet an Gießerlohn für 1 H 2 Cop. Wenn nun unter ihnen die Abmachung getroffen worden, daß B. so viel vom rohen

*) Dieses Exempel gehört eigentlich zu der Gesellschafts-Rechnung.

- Fett zurückbehalten soll, daß sein Arbeitslohn gedeckt sei; wie viel R fertige Lichte wird A. erhalten? Antw. 50 R Licht.
- 3) Wenn $1\frac{1}{2}$ Rull Roggen $9\frac{1}{2}$ Rbl. kosten; wie theuer sind 5 Tschetw. 1 Garniz? Antw. 3 Rbl. $7\frac{1}{2}$ Cop.
- 4) Wenn 1 Cor. 4 Wedro 3 Kruschk. Brandtwein 480 Rbl. 60 Cop. kosten; was kosten 3 Kruschken? Antw. 4 Rbl. $6\frac{1}{4}$ Cop.
- 5) Jemand erhält von seinem Capitale in $2\frac{1}{2}$ Jahren 1000 Rbl. Zinsen; wie viel Zinsen wird er in $1\frac{1}{4}$ Jahr erhalten? Antw. 700 Rbl.
- 6) Jemand braucht zu einem Mantel 8 Ellen 12 Viertel breites Tuch. Wenn nun dieser Mantel mit Zeug gefüttert werden soll, das 9 Viertel breit ist, wie viel Ellen sind dazu an Futter erforderlich? Antw. $10\frac{2}{3}$ Ellen.
- 7) Zu einer Allee werden 408 Bäume gebraucht, wenn dieselben in jeder Reihe $6\frac{1}{4}$ Arschien weit aus einander zu stehen kommen; wie viel Bäume sind erforderlich, wenn sie 5 Arschien Entfernung erhalten sollten? Antw. 510 Bäume.
- 8) Aus einem Balken können 14 Bretter von $1\frac{1}{4}$ Zoll Dicke geschnitten werden; wie viel Bretter würde man daraus schneiden können, wenn sie eine Dicke von $3\frac{1}{2}$ Zoll erhalten sollen? Antw. 5 Bretter.

II. Gesellschafts-Rechnung.

§. 125. Den Namen hat diese Rechnung von ihrer zweckmäßigen Anwendung in Gesellschafts-Handlungen erhalten; allein man braucht sie auch bei Erbvertheilungen, Ausschreibung von Lieferungen, Vermischungen nach gegebenen Verhältnissen und andern gemeinschaftlichen Unternehmungen.

Diese Rechnung zerfällt in 2 Theile: in die einfache und die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung. Einfach wird sie genannt, wenn die Vertheilung nach einem Verhältniß, zusammengesetzt, wenn die Vertheilung nach mehreren gegebenen Verhältnissen geschieht.

1. Die einfache Gesellschaftsrechnung.

Das Verfahren hierbei beruht darauf, eine gegebene Größe nach gewissen verlangten Verhältnissen zu theilen. Z. B. man soll 1000 in 3 Theile so zerlegen, daß sich ihre Theile zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, 3, 5.

Auflösung. Es mögen die 3 Theile, in welche 1000 zerlegt werden sollen, x, y, z heißen und demnach ist $x + y + z = 1000$. Hier soll sich verhalten $x : y : z = 2 : 3 : 5$. Zuvörderst verhält sich

$$x : y = 2 : 3. \text{ Nach §. 109 ist}$$

$$(x + y) : y = (2 + 3) : 3. \text{ Es ist auch gegeben}$$

$$y : z = 3 : 5. \text{ Folglich ist nach §. 106}$$

$$(x + y) : z = (2 + 3) : 5. \text{ Nach §. 109 ist}$$

$$(x + y + z) : z = (2 + 3 + 5) : 5. \text{ Da nun}$$

$$(x + y + z) = 1000 \text{ sein soll; so verhält sich}$$

$$1000 : z = (2 + 3 + 5) : 5, \text{ oder nach §. 103}$$

$$(2 + 3 + 5) : 5 = 1000 : z. \text{ Demzufolge ist nach §. 99}$$

$$z = \frac{1000 \cdot 5}{2+3+5} = 500. \quad \text{Auf eben diese Weise findet}$$

$$\text{man } y = \frac{1000 \cdot 3}{2+3+5} = 300, \text{ und}$$

$$x = \frac{1000 \cdot 2}{2+3+5} = 200$$

Summe 1000.

Aus diesem theoretischen Verfahren geht für die Gesellschaftsrechnung die practische Regel hervor: Man addire die Verhältnißzahlen, dividire mit deren Summe in die zu theilende Zahl und multiplicire mit dem so erhaltenen Quotient jede einzelne Verhältnißzahl.

§. 126. Aufgabe.

Vier Kaufleute A., B., C., D. legen zu einem Handel 30000 Rubel zusammen, und zwar gibt A. dazu 4000 Rubel, B. 7000, C. 9000 und D. 10000. Sie gewinnen mit diesem Capitale 4000 Rubel; was erhält davon jeder von ihnen, nach Verhältniß seiner Einlage?

Auflösung.	A. = 4000 Rubel,	}	4000 Rubel Gewinn.
	B. = 7000 "		
	C. = 9000 "		
	D. = 10000 "		
zusammen 30000 Rubel.			

Man setze die Capitale unter einander und erwäge, daß, da die gewonnenen 4000 Rubel in Verhältniß von 4000, 7000, 9000, 10000 getheilt werden sollen, diese Verhältnißzahlen durch einerlei Zahl (1000) dividirt werden können, ohne daß dadurch die Verhältnisse dieser Zahlen zu einander leiden. Demnach entstehen nun folgende Verhältnisse 4 : 7 : 9 : 10.

Die Summe dieser Verhältnißzahlen ist 30; folglich

erhält A. von den 4000 Rubeln	=	$\frac{4 \cdot 4000}{30}$	=	$533\frac{1}{3}$	Rubel.
B. " " " "	=	$\frac{7 \cdot 4000}{30}$	=	$933\frac{1}{3}$	"
C. " " " "	=	$\frac{9 \cdot 4000}{30}$	=	1200	"
D. " " " "	=	$\frac{10 \cdot 4000}{30}$	=	$1333\frac{1}{3}$	"

Summa 4000 Rubel.

§. 127. Um die Ueberzeugung zu erhalten, ob die Theilung wirklich richtig sei, so müssen die erhaltenen Theile $533\frac{1}{3}$, $933\frac{1}{3}$, 1200 und $1333\frac{1}{3}$ sich genau verhalten wie 4 : 7 : 9 : 10. Was auch hier der Fall ist; denn

man richte die obigen Theile ein, und verkleinere ihre Verhältnißzahlen, so erhält man

$$\begin{array}{rcl}
 533\frac{1}{3} & = & \frac{1600}{3} \text{ durch } 400 \text{ dividirt, gibt } \frac{4}{3} \\
 933\frac{1}{3} & = & \frac{2800}{3} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{7}{3} \\
 1200 & = & \frac{3600}{3} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{9}{3} \\
 1333\frac{1}{3} & = & \frac{4000}{3} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{10}{3}
 \end{array}$$

welche Zahlen sich wirklich verhalten wie 4 : 7 : 9 : 10; also ist die Vertheilung richtig.

Uebungs-Beispiele.

- 1) 3 Personen, von denen die eine 200 Rbl., die 2te 300 und die 3te 450 Rbl. zu einer Unternehmung hergeben, verlieren, statt zu gewinnen, 95 Rbl.; wie groß ist nun der Verlust eines jeden nach Verhältniß ihrer Einlagen?

Antw. A. hat verloren 20 Rbl., B. 30 Rbl. und C. 45 Rbl.

- 2) Ein Fuhrmann erhält von 4 Kaufleuten Fracht, und zwar von A. 70 Pud, von B. 90 Pud, von C. 120 Pud und von D. 100 Pud, für Alles zusammen erhält er 190 Rbl. Fuhrlohn; wie viel mußte für jede einzelne Fracht bezahlt werden?

Antw. A. bezahlte 35, B. 45, C. 60 und D. 50 Rbl.

- 3) Zur Reparatur eines Weges hatte das Dorf A. 24 Menschen, das Dorf B. 16, das Dorf C. 40 und das Dorf D. 56 Menschen geschickt; alle zusammen bekamen als Entschädigung 340 Rbl.; was erhielt jedes einzelne Dorf?

Antw. A. erhielt 60, B. 40, C. 100 und D. 140 Rbl.

- 4) Zu einer gewissen Composition werden 4 verschiedene Bestandtheile gebraucht, und zwar von dem 1ten 13 Loth, von dem 2ten 7, von dem 3ten 8 und von dem 4ten 12 Loth; nun sollen von dieser Mischung 10 \mathfrak{H} gefertigt werden; wie viel ist von jedem Bestandtheile zu nehmen?

Antw. Von dem 1ten 104 Loth = $3\frac{1}{4}$ \mathfrak{H} .

" " 2ten 56 " = $1\frac{1}{4}$ \mathfrak{H} .

" " 3ten 64 " = 2 \mathfrak{H} .

" " 4ten 96 " = 3 \mathfrak{H} .

2. Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

§. 128. Wenn ein gegebenes Ganze nach mehreren Verhältnissen getheilt werden soll, so sind letztere durch Multiplication oder Division, wie solches die Bedingung der Aufgabe verlangt, auf ein Verhältniß zu bringen und dann hat man nach den Regeln der einfachen Gesellschaftsrechnung zu verfahren.

§. 129. Aufgabe 1.

An einer Festung arbeiten aus A. 30 Mann 8 Tage lang; aus B. 40 Mann 16 Tage lang; aus C. 50 Mann

24 Tage lang; sie bekommen zusammen 520 Rbl. G.; was kommt davon auf jede Gesellschaft?

Auflösung.

A.	30 Mann auf 8 Tage erhalten so viel als	$30 \times 8 \text{ M.} = 240 \text{ M.}$	auf 1 T.
B.	40 " " 16 " " " " " "	$40 \times 16 \text{ " } = 640 \text{ " " "}$	
C.	50 " " 24 " " " " " "	$50 \times 24 \text{ " } = 1200 \text{ " " "}$	
			Summa 2080 M. auf 1 T.

$$\text{Demnach erhält A. } \frac{240}{2080} \times 520 \text{ Rbl.} = 60 \text{ Rbl.}$$

$$\text{B. } \frac{640}{2080} \times 520 \text{ " } = 160 \text{ "}$$

$$\text{C. } \frac{1200}{2080} \times 520 \text{ " } = 300 \text{ "}$$

Summa 520 Rbl.

§. 130. Aufgabe 2.

Vier Kaufleute haben eine Geschäftshandlung errichtet; dazu hat A. 400 Rbl. auf 5 Monate; B. 700 Rbl. auf 3; C. 600 Rbl. auf 4, und D. 300 Rbl. auf 9 Monate eingelegt. Im Ganzen haben sie 460 Rbl. gewonnen; wie viel erhält jeder davon nach Maassgabe der verschiedenen Einlagen und der Zeit?

Auflösung.

400 Rbl. in 5 Monat. gewonnen so viel als	$400 \times 5 \text{ Rbl.} = 2000 \text{ Rbl.}$	in 1 Mt.
700 " " 3 " " " " " "	$700 \times 3 \text{ " } = 2100 \text{ " " 1 "}$	
600 " " 4 " " " " " " "	$600 \times 4 \text{ " } = 2400 \text{ " " 1 "}$	
300 " " 9 " " " " " " "	$300 \times 9 \text{ " } = 2700 \text{ " " 1 "}$	
		Summe 9200 Rbl. in 1 Mt.

$$\text{Folglich erhält A. } = \frac{2000}{9200} \times 460 = 100 \text{ Rubel.}$$

$$\text{B. } = \frac{2100}{9200} \times 460 = 105 \text{ "}$$

$$\text{C. } = \frac{2400}{9200} \times 460 = 120 \text{ "}$$

$$\text{D. } = \frac{2700}{9200} \times 460 = 135 \text{ "}$$

Summe 460 Rubel Gewinn.

§. 131. Aufgabe 3.

Es sollen 753 Balken in möglichster Geschwindigkeit geschnitten werden. In der Nähe sind 3 Schneidemühlen, davon kann die erste täglich 8 Stück in 9 Stunden; die zweite 10 Stück in 12 Stunden und die dritte 16 Stück in 15 Stunden schneiden. Wie viel Balken sind nach jeder Mühle zu führen, damit sie zu gleicher Zeit fertig geschnitten sind?

Auflösung.

Wenn in 9 Stund. 8 Balken geschnitten werden, so kommt auf 1 Stunde $\frac{8}{9}$ Balk.
 " " 12 " 10 " " " " " " 1 " $\frac{10}{6}$ "
 " " 15 " 16 " " " " " " " 1 " $1\frac{1}{3}$ "

Folglich in 1 Stunde zusammen $2\frac{11}{6}$ Balk.

$$\text{Es ist } 753 : 2\frac{11}{6} = 753 : \frac{251}{90} = \frac{753 \cdot 90}{251} = 270.$$

Demnach sind auf die 1ste Schneidemühle $\frac{8}{9} \cdot 270 = 240$ Balken zu führen.
 " " 2te " $\frac{10}{6} \cdot 270 = 225$ " " "
 " " 3te " $1\frac{1}{3} \cdot 270 = 288$ " " "
 Summe 753 Balken zu führen.

§. 132. Aufgabe 4.

Wie viel ist der Betrag der sämtlichen Zinsen von 400 Rbl. auf 3 Jahr, 500 Rbl. auf 4 Jahr, 600 Rbl. auf 5 Jahr und 700 Rbl. auf 6 Jahr zu 5 Proc. gerechnet?

Auflösung.

400 Rbl. in 3 Jahren ist so gut als 1200 Rbl. in 1 Jahre.
 500 " " 4 " " " " " 2000 " " 1 "
 600 " " 5 " " " " " 3000 " " 1 "
 700 " " 6 " " " " " 4200 " " 1 "

Summe 10400 Rbl. in 1 Jahre.

Nun verhält sich 100 Rbl. Capital : 10400 Rbl. Cap. = 5 R. Zinsen : x R. Zins.,
 folglich $x = 520$ Rubel Zinsen.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Drei Landleute pachten eine Wiese für 60 Rubel zur Schafweide; A. läßt 50 Schafe 4 Wochen, B. 30 Schafe 6 Wochen und C. 20 Schafe 5 Wochen darauf gehen; was muß jeder an Pacht zahlen?
 Antw. A. 25 Rbl., B. $22\frac{1}{2}$ Rbl. und C. $12\frac{1}{2}$ Rbl.
- 2) Zum Bau einer Landstraße liefert das Dorf A. 100 Mann, die 120 Tage, das Dorf B. 120 Mann, die 90 Tage, das Dorf C. 75 Mann, die 120 Tage, und das Dorf D. 75 Mann, die 125 Tage lang arbeiten. Sie erhalten zusammen für diese Arbeit 296 Rubel 46 Cop. S.; was erhält demnach jedes Dorf?
 Antw. A. 86 Rbl. 40 Cop., B. 77 Rbl. 76 Cop.,
 C. 64 Rbl. 80 Cop., D. 67 Rbl. 50 Cop.
- 3) Drei Schreiber sollen 158 Bogen abschreiben, und zwar unter der Bedingung, daß sie zu gleicher Zeit fertig werden. A. schreibt in 3 Stunden 2 Bogen, B. in 5 Stunden 4 Bogen und C. in 6 Stunden 7 Bogen. Wie viel Bogen müssen jedem zugetheilt werden, damit sie ihre Arbeit zu einer Zeit abliefern können?
 Antw. A. 40 Bogen, B. 48 Bogen und C. 70 Bogen.
- 4) Es hatte Jemand zu 5 Proc. ausstehen: 8000 Rbl. auf 3 Jahre, 9000 Rbl. auf $3\frac{1}{2}$ Jahre und 7000 Rbl. auf 5 Jahre; wie viel betragen die sämtlichen Zinsen?
 Antw. 4450 Rbl.

- 5) A. hat an B. in 6 Monaten 4000 Rbl. und in 4 Monaten 5200 Rbl., jedes Capital zu 4 Proc. auszuzahlen. Zu welcher Zeit können beide Capitalien ohne Nachtheil dieser beiden Personen auf einmal entrichtet werden?
 Antw. Nach $4\frac{2}{3}$ Monaten.

III. Von der zusammengesetzten Regel detri.

§. 133. Wenn eine zu findende Größe durch mehrere auf dieselbe sich beziehenden Verhältnisse zu bestimmen ist, so hat man eigentlich so viel Aufsätze zu machen, als verschiedene Verhältnisse in der Aufgabe vorhanden sind. Nachstehende Aufgabe wird dieses erläutern.

§. 134. Aufgabe.

Wenn 200 Faden Holz in 8 Wochen von 15 Mann, die wöchentlich 4 Tage und täglich 7 Stunden arbeiten, zersägt und gespaltet werden; wie viel Mann werden in diesem Verhältnisse erforderlich sein, wenn sie 800 Faden in 5 Wochen zersägen und spalten, und wöchentlich 6 Tage und täglich 8 Stunden arbeiten sollen?

Hierbei ist zu merken, daß der Theil der Aufgabe, in welchem alle Bedingungen gegeben sind, der Bedingungsatz, und der Theil derselben, in welchem die gesuchte Größe (x) vorkommt, der Folgesatz heißt.

Anordnung der Sätze.

Man setze zuvörderst die Theile des Bedingungsatzes neben einander und die Theile des Folgesatzes unter jene, jedoch so, daß die gleichnamigen Größen unter einander zu stehen kommen, z. B.

200 Faden 8 Wochen à 4 Tage à 7 Stunden 15 Mann (Bedingungsatz)
 800 " 5 " à 6 " à 8 " x " (Folgesatz).

Erste Auflösung durch einfache Regel detri.

Erste Frage. Wenn 200 Faden von 15 Mann zersägt werden, werden zu 800 Faden mehr oder weniger Mann erforderlich sein?

Antw. Mehr Mann;

folglich muß x größer werden als 15; also bildet $15 : x$ ein steigendes Verhältniß; demnach müssen 200 und 800 Faden auch ein steigendes Verhältniß bilden; daher entsteht die steigende Proportion: $200 : 800 = 15 : x$ Mann.

Hier kann x nach §. 99 gefunden werden, und ist = 60 Mann.

Zweite Frage. Wenn in 8 Wochen 15 Mann mit der ganzen Arbeit fertig werden, werden mehr oder weniger Mann erforderlich sein, um in 5 Wochen mit derselben Arbeit fertig zu werden?

Antw. Mehr Mann;

folglich muß hier die gesuchte Zahl y größer werden, als die bereits gefundene $x = 60$ Mann; es bildet also $x : y$ ein steigendes Verhältniß; demnach müssen 8 Wochen und 5 Wochen auch ein steigendes Verhältniß sein. Folglich entsteht die steigende Proportion: $5 : 8 = 60 : y$; also ist $y = 96$ Mann.

Dritte Frage. Wenn in 4 Tagen 15 Mann mit der Arbeit fertig werden, werden mehr oder weniger Mann erforderlich sein, um die Arbeit in 6 Tagen zu vollenden?

Antw. Weniger Mann;

folglich muß bei dieser Frage die gesuchte Zahl z kleiner werden, als die bereits gefundene Zahl y ($= 96$) Mann; daher bildet $y : z$ ein fallendes Verhältniß; folglich müssen 4 Tage und 6 Tage auch ein fallendes Verhältniß bilden. Es entsteht demnach hier die fallende Proportion:

$$6 : 4 = 96 : z; \text{ also ist } z = 64 \text{ Mann.}$$

Vierte Frage. Wenn bei 7stündiger Thätigkeit 15 Mann mit einer Arbeit fertig werden, werden mehr oder weniger Mann erforderlich sein, wenn sie bei 8stündiger Thätigkeit mit derselben Arbeit fertig werden sollen?

Antw. Weniger Mann;

folglich wird in dieser Beziehung die neu gesuchte Zahl v kleiner werden, als die bereits gefundene $z = 64$ Mann; demnach bildet $64 : v$ ein fallendes Verhältniß; folglich müssen auch 7 Stunden zu 8 Stunden ein fallendes Verhältniß bilden. Es entsteht hier die fallende Proportion:

$$8 : 7 = 64 : v; \text{ und } v = 56 \text{ Mann.}$$

Zweite Art der Auflösung durch zusammengefestete Proportionen.

Dasselbe Resultat würde erzielt werden, wenn man die vier Proportionen, welche die Aufgabe herbeiführt, nach §. 106 in eine einzige Proportion auf folgende Weise verbindet:

$$\begin{array}{l} 200 \text{ Faden} : 800 \text{ Faden} = 15 \text{ Mann} : x \text{ Mann} \\ 5 \text{ Woch.} : 8 \text{ Woch.} = x \text{ Mann} : y \text{ Mann} \\ 6 \text{ Tage} : 4 \text{ Tage} = y \text{ Mann} : z \text{ Mann} \\ 8 \text{ Stund.} : 7 \text{ Stund.} = z \text{ Mann} : v \text{ Mann.} \end{array}$$

Man streiche nach §. 106 x gegen x , y gegen y , und z gegen z aus, und multiplicire die über einander stehenden Glieder nach §. 107. Die Verhältnisse werden zuvörderst nach den 4 in der ersten Auflösung enthaltenen Fragen bestimmt und geordnet. Durch die Multiplication der über einander stehenden Glieder erhält man demnach:

$$200 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 : 800 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 7 = 15 \text{ Mann} : v \text{ Mann.}$$

Nach §. 99 ist $200 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot v = 800 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 15$; folglich

$$\text{ist } v = \frac{800 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 15}{200 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} = 56 \text{ Mann, wie in der ersten Auflösung.}$$

Dritte Art der Auflösung nach der Basedowschen oder Reesfischen Regel.

x Mann	15 Mann	1) Man ziehe zuvörderst einen verticalen Strich;
200	800 Faden	schreibe oben links desselben die Frage (x Mann); rechts
5	8 Wochen	dieselbe Größe, die mit x gleichnamig ist, (hier 15
6	4 Tagen	Mann). Hierauf werden auch die übrigen Verhältnisse
8	7 Stund.	nach den 4 in der ersten Auflösung enthaltenen Fragen

bestimmt. Ergiebt sich aus der Frage, daß das Verhältniß ein steigendes ist, so setze man die kleinere Zahl des Verhältnisses links und die größere Zahl desselben rechts. Ist das Verhältniß aber ein fallendes, so setze man die größere Zahl desselben links und die kleinere rechts vom verticalen Strich.

2) Sind Brüche unter den Größen, so werden die vermischten zu unächten gemacht und die Nenner der linken Hand stehenden Brüche rechts, so wie die Nenner der rechten Hand stehenden links des Strichs geschrieben.

3) Hierauf suche man durch gemeinschaftliche Maaße die rechter und linker Hand stehenden Zahlen gegen einander aufzuheben, wodurch das gegenseitige Verhältniß der beiden Zahlensäulen nicht gestört wird, da die Zahlen links des verticalen Strichs den Divisor und rechts desselben den Dividendus bilden.

4) Endlich dividire man mit dem Producte der linker Hand stehenden Zahlen (Divisor) in das Product der rechter Hand stehenden (Dividend); so gibt der Quotient die verlangte Fragezahl (hier 56 Mann) an.

Anmerk. Die Stellung der Verhältnißzahlen auf obige Weise war das Verdienst des Basedow oder des Reese; weshalb denn auch obiger Aufsatz „die Basedowsche“ oder „Reesesche Regel“ genannt wird.

Uebungs-Beispiele.

- 1) 100 Mann machten in 5 Tagen eine Mauer, die 230 Fuß lang, 3 Fuß breit, 9 Fuß hoch war; wie lang wird eine Mauer in $1\frac{1}{2}$ Tagen werden können, wenn 250 Mann daran arbeiten und sie 9 Fuß breit und 5 Fuß hoch werden soll? Antw. $103\frac{1}{2}$ Fuß lang.
- 2) Wenn 15 Weber in 28 Wochen 12 Stück Zeug von 60 Ellen Länge und $\frac{1}{4}$ Ell. Breite bei 8stündiger Arbeit täglich fertig bekommen; wie viel Stück $\frac{3}{4}$ breites Zeug, jedes 65 Ellen lang, werden 20 Weber in 15 Wochen fertig bekommen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten? Antw. $11\frac{7}{8}$ Stück.
- 3) Welches Capital gibt bei 6 Proc. nach 18 Monaten 500 Rbl. Zinsen? Antw. $555\frac{5}{8}$ Rbl. Capital.
- 4) Nach welcher Zeit bringen 18000 Rbl. zu $6\frac{1}{4}$ Proc. 1790 Rbl. Zinsen? Antw. 1 Jahr 7 Monat $2\frac{1}{2}$ Tage.
- 5) Wie viel Procent muß ein Capital von 5000 Rbl. verintereßirt sein, wenn es vierteljährlich 75 Zinsen bringen soll? Antw. Zu 6 Proc.
- 6) Wenn Jemand nach 8 Jahren von 800 Rbl. zu 4 Proc. gewisse Zinsen erhält; wie lange müssen dann 1200 Rbl. zu 6 Proc. auf Zinsen stehen, um eben so viel Zinsen zu erhalten? Antw. $3\frac{2}{3}$ Jahre.

IV. Kettenatz.

§. 135. Wenn bei zusammengesetzten Regelbetri-Aufgaben die Fragezahl durch solche Verhältnisse bestimmt wird, daß das erste Verhältniß sich auf das zweite, das zweite auf das dritte u. s. w. beziehet; so bestimmt diese Bedingung einen Aufsatz, dessen gleichnamige Glieder sich kettenartig an einander knüpfen und deshalb Kettenatz oder Kettenrechnung genannt wird. Auch kann hierbei die Prüfung der Verhältnisse, ob sie steigende oder fallende sind, wegfallen, weil diese Rechnung die vorkommenden Verhältnisse durch ihren kettenförmigen Aufsatz von selbst ordnet. Die Kettenrechnung ist besonders bei Verwandlung der Maaße, Gewichte und Münzen, in den Waaren- und Wechselrechnungen, bei Einkaufs- und Verkaufrechnungen, wobei Verlust oder Gewinn mit in Anschlag gebracht wird und bei Vertauschung von Waaren mit Vortheil anzuwenden.

§. 136. Aufgabe 1.

Was kosten in Ducaten 4 Berk. Hanf, wenn 3 H Flachs mit 80 Cop. B. A. bezahlt und 4 H Flachs gleich 5 H Hanf

und 1 Ducaten gleich 3 Rbl. S., à $3\frac{1}{2}$ Rbl. B. U. gerechnet werden?

Diese und alle dergleichen Aufgaben lassen sich auf 3 Arten lösen.

Erste Auflösung durch Regeldetri.

Hier finden folgende vier Regeldetri = Exempel Statt:

- 1) 5 H Hanf : 4 Berk. Hanf = 4 H Flachs : x H Flachs.
400
- $\frac{1600 \text{ H}}{5} = x = 1280 \text{ H Flachs.}$
- 2) 3 H Flachs : 1280 H Flachs = 80 Cop. B. : y Cop. B.
 $y = 341 \text{ Rbl. } 33\frac{1}{3} \text{ Cop. B.} = 341\frac{1}{3} \text{ Rbl. B.}$
- 3) $3\frac{1}{2}$ Rbl. B. : $341\frac{1}{3}$ Rbl. B. = 1 Rbl. S. : z Rbl. S.
 $z = 97\frac{1}{3} \text{ Rbl. S.}$
- 4) 3 Rbl. S. : $97\frac{1}{3}$ Rbl. S. = 1 Duc. : v Duc. v = $32\frac{2}{3}$ Duc.
betragen die 4 Berk. Hanf.

Zweite Auflösung durch Verbindung der Proportionen.

Ohne den Werth von x, y, z zu berechnen, ordne man obige Proportionen nach Anleitung des §. 107 unter einander; streiche nach §. 110 III. die in den äußern und innern Gliedern befindlichen unbekanntten Größen x, y, z gegen einander aus und multiplicire die über einander stehenden Glieder, wodurch eine Proportion erhalten wird, in welcher sämtliche gegebenen Glieder vereinigt enthalten sind; z. B.

$$\begin{array}{l} 5 \text{ H Hanf} : 1600 \text{ H Hanf} = 4 \text{ H Flachs} : x \text{ H Flachs} \\ 3 \text{ H Flachs} : x \text{ H Flachs} = 80 \text{ Cop. B.} : y \text{ Cop. B.} \\ 350 \text{ Cop. B.} : y \text{ Cop. B.} = 1 \text{ Rbl. S.} : z \text{ Rbl. S.} \\ 3 \text{ Rbl. S.} : z \text{ Rbl. S.} = 1 \text{ Ducaten} : v \text{ Ducaten.} \end{array}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 350 \cdot 3 : 1600 = 4 \cdot 80 : v \text{ Ducaten.}$$

$$v = \frac{1600 \cdot 4 \cdot 80}{5 \cdot 3 \cdot 350 \cdot 3} = 32\frac{2}{3} \text{ Ducaten.}$$

Dritte Auflösung nach dem Kettenfatz.

Obige Aufgabe wird durch den Kettenfatz auf folgende Art gelöst:

$$\begin{array}{l} x \text{ Ducaten} = 4 \text{ Berk. Hanf an Werth} \\ 1 \text{ Berk. Hanf} = 400 \text{ H Hanf} \\ 5 \text{ H Hanf} = 4 \text{ H Flachs} \\ 3 \text{ H Flachs} = 80 \text{ Cop. B.} \\ 350 \text{ Cop. B.} = 1 \text{ Rbl. S.} \\ 3 \text{ Rbl. S.} = 1 \text{ Ducaten.} \end{array}$$

§. 137. **Regel beim Kettenfatz.** 1) Man setze die Frage (hier x Ducaten) links und die Größe (4 Berk.), aus der die Frage hergeleitet werden und ihr an Werth gleich sein soll, rechts, und trenne beide Größen durch das Gleichheitszeichen, wie oben geschehen.

2) Jetzt setze man die Größe, welche mit dem letzten Theile der vorhergehenden Gleichung gleichnamig ist, links und was ihr gleich ist rechts, und verbinde sie gleichfalls durch ein Gleichheitszeichen. Fehlt aber in der Aufgabe eine Größe, die mit dem letzten Theile einer Gleichung gleichnamig sein soll; so suche man die Gleichnamigkeit der Glieder durch eingeschobene Verhältnißgrößen herbeizuführen, wie es in unserm Beispiele mit der zweiten Größe (1 Berk. = 400 H) geschehen ist.

3) Auf diese Weise setze die Bildung der übrigen Gleichungen bei steter Beobachtung der in \mathcal{N} 2 gegebenen Regel fort, bis das letzte Glied einer Gleichung gleichnamig mit der unbekanntem Größe x geworden ist. In diesem Falle ist die Kette als geschlossen zu betrachten. Ist dieses geschehen, so findet die Berechnung ganz so Statt, wie sie schon in der Basedowschen Regel (§. 133) gezeigt worden ist. Das Product aller Zahlen linker Hand muß gleich sein dem Producte aller Zahlen rechter Hand, weil Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gleiche Producte giebt. Man hat also, um die unbekanntem Größe x zu finden, mit dem Producte aller Zahlen linker Hand in das Product aller Zahlen rechter Hand zu dividiren. Um sich aber die Rechnung zu erleichtern, sucht man auch hier, ehe man dividirt, die einzelnen Größen im Divisor gegen die einzelnen Größen im Dividendus zu heben.

4) Kommen in dem einen oder dem andern Theile der Gleichungen ächte oder gemischte Brüche vor, so verwandle letztere zuvörderst in unächte Brüche und setze die Nenner derselben auf die entgegengesetzte Seite der Gleichungen d. h. den Nenner eines Bruches in dem Theile linker Hand bringe auf die andere Seite rechter Hand und umgekehrt. Die Zähler der Brüche bleiben, wo sie sind.

§. 138. Aufgabe 2.

Wie viel Rubel betragen 600 Thaler sächsisch, wenn 35 Thlr. sächsisch 36 Thlr. preussisch und 1 Thlr. preussisch 92 Cop. S. und 1 Rbl. S. = $3\frac{1}{2}$ Rbl. B. ausmachen?

$$\begin{aligned} \text{Auflösung. } x \text{ Rbl. B.} &= 600 \text{ Thlr. sächsisch} \\ 35 \text{ Thlr. sächs.} &= 36 \text{ Thlr. preuß.} \\ 1 \text{ Thlr. preuß.} &= 92 \text{ Cop. S.} \\ 100 \text{ Cop. S.} &= 3\frac{1}{2} \text{ Rbl. B.} \end{aligned}$$

$$x = 1987\frac{1}{2} \text{ Rbl. B.}$$

§. 139. Aufgabe 3.

Wie viel Thaler preuß. wird in Berlin 1 Centner Wolle zu stehen kommen, wenn sie in Riga gekauft, das Pud mit 37 Rbl. S. bezahlt worden und die Transportkosten mit 17 Proc. zugeschlagen werden, und man dabei 20 Proc. gewinnen will?

$$\begin{aligned} (1 \text{ Centner} &= 110 \text{ Berliner } \mathcal{H}; 9 \text{ Berliner } \mathcal{H} = 10 \text{ russ. } \mathcal{H}; 1 \text{ Thlr.} \\ &\text{preuß.} = 92\frac{1}{2} \text{ Cop. S.}; 1 \text{ Rbl. S.} = 3\frac{1}{2} \text{ Rbl. B.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Auflösung. } x \text{ preuß. Thlr.} &= 1 \text{ Centner} \\ 1 \text{ Centner} &= 110 \text{ Berl. } \mathcal{H} \\ 9 \text{ Berl. } \mathcal{H} &= 10 \text{ russ. } \mathcal{H} \\ 40 \mathcal{H} &= 1 \text{ Pud} \\ 1 \text{ Pud} &= 37 \text{ Rbl. S.} \\ 1 \text{ Rbl. S.} &= 100 \text{ Cop. S.} \\ 92\frac{1}{2} \text{ Cop. S.} &= 1 \text{ Thlr. preuß.} \\ 100 \text{ Thlr. sollen} &= 117 \text{ Thlr. Transportkosten, und} \\ 100 \text{ Thlr. sollen} &= 120 \text{ Thlr. Gewinn geben.} \end{aligned}$$

$$x = 171\frac{1}{2} \text{ preuß. Thlr.}$$

§. 140. Aufgabe 4.

Jemand kauft in Reval 1999 $\frac{1}{2}$ Tschwert Roggen und bezahlt für 1 Tschwt. 16 Rbl. B.; er verkauft die ganze Masse nach England für 1360 £ Sterling; wie viel Proc. gewann er dabei?

(1 £ Sterl. = 5 $\frac{3}{4}$ Rbl. S. à 3 $\frac{1}{2}$ Rbl. B.)

Auflösung.	x Rbl. B. Verkauf	=	100 Rbl. B. Einkauf
	16 Rbl. B. Einkauf	=	1 Tschwt.
	1999 $\frac{1}{2}$ Tschwt.	=	1360 £ Sterl. Verkauf
	1 £ Sterl.	=	5 $\frac{3}{4}$ Rbl. S.
	1 Rbl. S.	=	3 $\frac{1}{2}$ Rbl. B.

x = 83 $\frac{1}{3}$ Rbl. B. Verkauf; folglich hat er auf 100 Rbl. B. Einkauf 16 $\frac{2}{3}$ Rbl. B., d. i. 16 $\frac{2}{3}$ Proc. verloren.

§. 141. Aufgabe 5.

Wenn 1000 Rbl. S. auf Zinszins zu 4 Proc. stehen; wie hoch ist das Capital nebst Zinszins in 4 Jahren herangewachsen?

x Rbl. S. gegenwärtig	=	1000 Rbl. S. (nach 4 Jahren)
gegenwärtig sind 100 Rbl.	=	104 Rbl. nach einem Jahre,
" " 100 Rbl.	=	104 Rbl. " " "
" " 100 Rbl.	=	104 Rbl. " " "
" " 100 Rbl.	=	104 Rbl. " " "
x	=	1169 Rbl. 85 $\frac{107}{25}$ Cop.

§. 142. Aufgabe 6.

Wenn ein Capital 3 Jahre zu 5 Proc. auf Zinszins gestanden hat, und auf 4500 Rbl. S. mit den Zinszinsen herangewachsen ist; wie groß muß das anfängliche Capital gewesen sein?

Ansatz. x Rbl. Capital (nach 3 Jahren)	=	4500 Rbl. S. gegenwärtig
105 Rbl. nach 1 Jahre sind	=	100 Rbl. gegenwärtig,
105 Rbl. " 1 " "	=	100 Rbl. "
105 Rbl. " 1 " "	=	100 Rbl. "
x	=	3887 Rbl. 26 $\frac{946}{1025}$ Cop.

Übungs-Beispiele.

- 1) Ein Schiffer kauft 40 Tschwert Weizen, bezahlt so viel dafür, daß ihm 5 Garniz 1 $\frac{1}{2}$ Rbl. Bco. kosten; wie viel Imperiale ist für die 40 Tschwert bezahlt worden, wenn 1 Imperial = 10 Rbl. S. à 3 $\frac{1}{2}$ Rbl. Bco. ist? Antw. 21 $\frac{3}{4}$ Imperiale.
- 2) Wie viel £ Flachß kann man für 6 Rbl. B. einkaufen, wenn 1000 Imperiale für 180 $\frac{1}{4}$ Berk. gegeben werden, und 1 Imp. = 10 $\frac{3}{10}$ R. S. ist? Antw. 12 £ Flachß.
- 3) Wenn man 24 Tschwert Haber für 36 Rbl. einkauft, und jedes Tschwert für 2 Rbl. verkauft; wie viel gewinnt man dabei? Antw. 33 $\frac{1}{3}$ Proc.

- 4) Es verkauft Jemand $1\frac{1}{2}$ R Thee für $3\frac{1}{2}$ R bl.; wie viel Proc. gewann er bei diesem Verkauf, wenn er $20\frac{3}{8}$ P ud für $1562\frac{1}{2}$ R bl. eingekauft hatte?
 Antw. 60 Proc. Gewinn.
- 5) Wenn Jemand genöthigt ist, 1 Berl. Waare für 23 R bl. S . zu verkaufen, und dabei 8 Proc. Verlust hatte; für wie viel wird gegenwärtig das Berl. verkauft werden müssen, um 10 Proc. Gewinn zu haben?
 Antw. $27\frac{1}{2}$ R bl. S .
- 6) Wie viel betragen die Zinszinsen von 8000 R bl. zu $4\frac{1}{2}$ Proc. in 3 Jahren?
 Antw. 1129 R bl. $32\frac{2}{3}$ Cop.
- 7) Wenn Jemand nach 6 Jahren ein Capital nebst Zinszins, zusammen 8040 R bl. $57\frac{1}{2}$ Cop., zurückgezahlt erhält, und dasselbe zu 5 Proc. gestanden hatte; wie groß war sein anfänglich angelegtes Capital?
 Antw. 6000 R bl.
- 8) Wenn 3 Berliner Centner Zucker in Hamburg 100 M ark B co. kosten; wie hoch in S . M . wird 1 R Russisch zu stehen kommen, wenn für Unkosten 120 Proc. zugeschlagen werden müssen? (1 Cent. = 110 Berl. R ; 9 Berl. R = 10 R uss. R , und 1 M ark B co. = 47 Cop. S .)
 Antw. $28\frac{1}{3}$ Cop. S .

V. Von der Vermischungs- oder Allegations-Rechnung.

§. 143. Wenn Dinge, die gemischt oder zusammengeschmolzen werden können, von verschiedener Güte vorhanden sind, und man will aus denselben einen mittlern Preis ausmitteln, oder den reinen Gehalt von zwei gemischten Dingen erforschen, oder auch eine bestimmte Menge zu einem festgesetzten Preise daraus zusammen mischen; so geschieht solches durch die Vermischungs-Rechnung. Man theilt diese Rechnungsart in zwei Theile: in die einfache und in die zusammengesetzte Vermischungs-Rechnung.

A. Die einfache Vermischungs-Rechnung.

Hievon gibt es wieder drei verschiedene Arten.

Erste Art.

Man soll den mittlern Werth von mehreren gemischten Dingen zu verschiedenen Preisen finden.

§. 144. Aufgabe 1.

Jemand mengt 18 R Mehl à 5 Cop. mit 15 R à 4 Cop., 12 R à 3 Cop. und 24 R à 2 Cop.; was ist der mittlere Preis eines Pfundes dieses vermengten Mehls?

Auflösung.	18 R à 5 Cop.	find =	90 Cop.
	15 R à 4 Cop.	" =	60 Cop.
	12 R à 3 Cop.	" =	36 Cop.
	24 R à 2 Cop.	" =	48 Cop.

folglich kosten 69 R = 234 Cop.
 folglich 1 R des gemischten Mehles = $3\frac{2}{3}$ Cop.

§. 145. Aufgabe 2.

Ein Goldarbeiter schmelzt 3 Mark 14lötthiges, 7 Mark 12lötthiges und 6 Mark 11lötthiges Silber zusammen; welchen Gehalt bekommt die Mischung?

Auflösung.	3 Mark 14lötthiges	enthalten	42 Theile	feines Silber
	7 " 12lötthiges	"	84 " "	" "
	6 " 11lötthiges	"	66 " "	" "

folglich werden 16 Mark enthalten 192 Theile feines Silber.

folglich 1 Mark $\frac{192}{16} = 12$ Theile feines Silber,

oder 1 Mark des gemischten Silbers wird 12lötthig sein.

§. 146. Aufgabe 3.

Ein Weinhändler vermischt 12 Stof Wein à 3 Rbl., 10 Stof à 2 Rbl., 36 Stof à $1\frac{1}{2}$ Rbl. mit einander und gießt dazu 4 Stof Wasser; was wird nun ein Stof des so gemischten Weines betragen?

Auflösung.	12 Stof Wein à 3 Rbl.	betragen	36 Rbl.
	10 " " à 2 " "	"	20 "
	36 " " à $1\frac{1}{2}$ " "	"	54 "
	4 " Wasser	"	0 "

folglich werden 62 Stof des gemischten Weines 110 Rbl.,

und demnach 1 Stof = 1 Rbl. $77\frac{1}{3}$ Cop. betragen.

Uebungs-Exempel.

- 1) Jemand mischt 40 H Wollé à 1 Rbl. mit 30 H à 175 Cop. und 60 H à 75 Cop.; was beträgt 1 H der gemischten Wollé?

Antw. 1 Rbl. $57\frac{2}{3}$ Cop.

- 2) Ein Goldarbeiter schmelzt 10 Loth 18karatiges Gold und 15 Loth 14karatiges mit 5 Loth feinem (24 karatigem) Golde und 6 Loth Kupfer zusammen; wie viel karatig wird jetzt 1 Loth des gemischten Goldes sein?

Antw. $14\frac{1}{6}$ karatig.

Zweite Art.

Man soll aus einer Mischung von zwei Dingen, den reinen Gehalt eines jeden finden, oder man sucht die Menge des Zusatzes zu dem Gehalte eines andern Dinges, um dessen Werth auf einen festgestellten geringeren Werth zu bringen.

§. 147. Aufgabe 1.

Wie viel feines Silber, d. h. 16lötthiges, und wie viel Kupfer ist in einem Gefäße von 12lötthigem Silber enthalten, wenn es 80 Loth wiegt?

Auflösung. Da in 12lötthigem Silber 12 Theile feines Silber und 4 Theile Kupfer enthalten sind, so wird demnach in 80 Loth Gemisch das reine Silber zu dem 12lötthigen sich verhalten, wie 16 Theile : 12 Theile, und daher erhält man den Ansatz:

$$16 : 12 = 80 \text{ Loth} : x \text{ Loth feines Silber.}$$

$$x = \frac{12 \cdot 80}{16} = 60 \text{ Loth feines Silber.}$$

Daher sind in den 80 Loth 20 Loth Kupfer enthalten.

Probe.

60 Loth feines oder 16 löth. Silber enthalten 960 Theile f. S.

20 " Kupfer enthalten 0 " "

folglich 80 Loth Gemisch werden enthalten 960 Theile f. S.

$$\text{folglich 1 Loth Gemisch} = \frac{960}{80} = 12 \text{ Theile f. Silber.}$$

§. 148. Aufgabe 2.

Wie viel feines Gold, d. h. 24karatiges Gold, ist in einer Dose von 18karatigem Golde enthalten, wenn dieselbe 26 Loth wiegt?

Auflösung. Da in 1 Mark 18karatigem Golde 18 Theile feines Gold und 6 Theile Zusatz enthalten sind, so wird das feine Gold zu dem 18karatigen Golde in der Dose sich verhalten, wie 24 : 18, und daher wird man das feine Gold durch nachstehenden Ansatz ermitteln :

$$24 : 18 = 26 \text{ Loth} : x \text{ Loth feines Gold.}$$

$$x = \frac{18 \cdot 26}{24} = 19\frac{1}{2} \text{ Loth feines Gold und}$$

6 $\frac{1}{2}$ Loth Zusatz.

Probe.

19 $\frac{1}{2}$ Loth 24karatiges Gold enthalten 468 Theile feines Gold

6 $\frac{1}{2}$ Loth Zusatz enthalten an Gold 0 " " "

folglich 26 Loth des gemischten Goldes enthalten 468 Theile feines Gold.

und demnach 1 Loth ; $\frac{468}{26} = 18$ Lth. fein. Gold.
was in der Aufgabe gegeben war.

§. 149. Aufgabe 3.

Jemand hat 24 Loth feines Silber, und will daraus 12löthiges machen; wie viel Zusatz an Kupfer wird dazu erforderlich sein?

Auflösung. Wenn man zu 24 Loth feines Silber Kupfer zusetzt, damit es 12löthig werde, so wird offenbar die Menge des feinen Silbers zu der Menge des gemischten Silbers sich verhalten müssen wie 12 : 16. Also findet man das Gemisch durch den Ansatz:

$$12 : 16 = 24 \text{ Loth fein. Silber} : x \text{ Loth Gemisch;}$$

$$\text{wo } x = \frac{16 \cdot 24}{12} = 32 \text{ Loth Gemisch. Davon ziehe ab}$$

24 Loth feines Silber;

folglich ist 8 Loth Zusatz an Kupfer erforderlich.

P r o b e.

24 Loth 16löth. Silber enthalten 384 Theile feines Silber,
8 Loth Kupfer 0 " " "

folglich 32 Loth Gemisch. enthalten . . . 384 Theile feines Silber.

also 1 Loth " " $\frac{384}{32} = 12$ Thl. fein. Silb.,

was in der Aufgabe verlangt wurde.

§. 150. Aufgabe 4.

Jemand hat 30 Stof Essig und will das Stof zu 20 Cop. S. verkaufen; da es aber den Käufern zu theuer ist, will er so viel Wasser zu dem Essig gießen, daß er ein Stof davon für 12 Cop. ohne Nachtheil für beide Theile verkaufen kann; wie viel Wasser muß er dazu nehmen?

Auflösung. Diese Aufgabe ist ähnlich der in *N* 3, daher wird sich verhalten 12 Cop. : 20 Cop. = 30 Stof : x Stof Gemisch;

$$\text{folglich } x = \frac{20 \cdot 30}{12} = 50 \text{ Stof Gemisch.}$$

Davon ziehe ab 30 Stof reinen Essig;

so ist 20 Stof Wasser zur Mischung erforderlich.

Uebungs-Exempel.

1) Wie viel feines Silber ist in 6 silbernen Löffeln, jeder zu $4\frac{1}{2}$ Loth, enthalten, wenn das Silber 13 löthig ist? Antw. $21\frac{3}{8}$ Lth. fein. Silb.

2) Wie viel Kupfer muß zu 18 Loth 15 löthigen Silbers zugesetzt werden, wenn dessen Gehalt auf 12löthig gebracht werden soll?

Antw. $4\frac{1}{2}$ Loth Kupfer.

3) Wie viel feines Gold ist in 6 Ringen, die zusammen 9 Loth wiegen und jeder 18 karatig ist, enthalten? Antw. $6\frac{3}{4}$ Loth fein. Gold.

4) Jemand will 10 Stof Wein à 2 Rbl. mit so viel Wasser mischen, damit er 1 Stof des gemischten Weines für 125 Cop. verkaufen kann; wie viel Wasser ist dazu erforderlich? Antw. 6 Stof.

Dritte Art.

Man soll aus einer bessern und einer geringern Sorte eine verlangte Menge von bestimmter mittlern Güte zusammemischen.

§. 151. Aufgabe.

Ein Weinhändler hat zweierlei Weine, das Stof zu 250 Cop. und 175 Cop. Er will 30 Stof aus beiden zusammemischen, daß das Stof 190 Cop. zu stehen kommt; wie viel muß er von jeder der beiden Sorten nehmen?

Auflösung. Man ziehe einen verticalen Strich, schreibe linker Hand desselben die verlangte Menge nebst dem verlangten mittlern Werth (hier 30 Stof à 190 Cop.); über diesen Werth (von 190 Cop.) schreibe die gegebene bessere Sorte (hier 250 Cop.) und unter denselben die geringere Sorte (hier 175 Cop.) der zu vermischenden Dinge. Subtrahire sodann den mittlern von dem bessern Werthe und schreibe den erhaltenen Unterschied dem geringern

rechts gegenüber. Ebenso subtrahire man den geringern Werth von dem mittlern und setze dann den Unterschied dem bessern gegenüber; so geben beide Unterschiede die Menge der zu vermischenden Weinsorten an, um den mittlern Werth eines Stofes hervorzubringen; denn durch diese wechselseitige Ergänzung des Schlechtern zum Bessern, und des Bessern zum Schlechtern werden beide gegen einander ausgeglichen und vereinigen sich zu dem verlangten mittlern Werthe. Weil jedoch eine bestimmte Menge der Mischung vorgeschrieben ist, so geschieht die Vertheilung nach den gefundenen Verhältnissen, mittelst der einfachen Gesellschaftsrechnung.

Der Ansatz ist demnach folgender:

250 Cop.	(190 — 175) = 15 Stof vom guten Weine
30 Stof à 190 Cop.	
175 Cop.	(250 — 190) = 60 Stof vom geringen Weine
Summe 75 Stof Vermischung.	

Der Weinhändler wollte aber nicht 75 Stof gemischten Wein, sondern nur 30 Stof haben; folglich ist die Vertheilung nach der Gesellschaftsrechnung nachstehende:

$\frac{30}{75} \times 15 =$	6 Stof guter Wein
$\frac{30}{75} \times 60 =$	24 Stof geringer Wein.
Summe 30 Stof Vermischung.	

Um die Richtigkeit dieser Rechnung zu prüfen, finde man den Werth des zur Mischung gebrauchten guten und geringen Weines und dividire die Summe dieses Werthes durch die verlangte Menge der Mischung (hier 30 Stof); so ergiebt sich der verlangte mittlere Werth eines Stofes; z. B.

6 Stof à 250 Cop. machen =	15 Rbl.
24 " à 175 " " =	42 "

Demnach werden 30 Stof vom gemischt. Wein kosten 57 Rbl.; folglich 1 Stof wird kosten $\frac{57}{30}$ Rbl. = 190 Cop., was verlangt war.

Beweis für das obige Verfahren.

Da 190 Cop. der verlangte mittlere Preis ist, so ist der Preis von 250 Cop. zu hoch und der von 175 Cop. zu niedrig für denselben. Es muß den 250 Cop. 60 Cop. abgezogen und den 175 Cop. wiederum 15 Cop. hinzugefügt werden, damit beide Preise = 190 Cop. werden. Man erhält demnach die beiden Gleichungen: $250 - 60 = 190$ und $175 + 15 = 190$; multiplicire die erste Gleichung mit 15 und die zweite mit 60; so entsteht:

$250 \cdot 15 - 60 \cdot 15 =$	$190 \cdot 15$
$175 \cdot 60 + 60 \cdot 15 =$	$190 \cdot 60$

$$\text{Summa } 250 \cdot 15 + 175 \cdot 60 = 190 \cdot (15 + 60) = 190 \cdot 75.$$

Hieraus erstet man, daß der Preis des bessern Weines (250 Cop.) mit 15, als dem Unterschiede des geringern und mittlern Preises, und der Preis des geringern Weines (175 Cop.) mit 60, als dem Unterschiede des mittlern und bessern

Preises, multiplicirt werden muß, und daß die Summe beider Producte gleich ist dem Producte des verlangten mittlern Preises (190 Cop.) mit 75, als der Summe der Unterschiede beider Preise. Also ist das obige mechanische Verfahren hiedurch gerechtfertiget.

Anmerk. Wenn mehr als zwei Dinge von verschiedenen Werthen mit einander zu einem mittlern Preise gemischt werden sollen, so wird der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens dabei auf ähnliche Weise, wie oben, geführt.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Ein Kaufmann hat zweierlei Waaren zu verschiedenen Preisen, das R zu 6 Cop. und 11 Cop. Er will 110 R davon zusammen mischen, damit er das R zu 8 Cop. verkaufen kann; wie viel R sind von beiden Sorten zur Mischung zu nehmen?

Antw. Von der bessern Sorte 44 R .
" schlechtern " 66 R .

- 2) Ein Silberarbeiter hat 9 und 13löthiges Silber, und will aus denselben 30 Loth 13löthiges zusammenschmelzen; wie viel Loth muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

Antw. 20 Loth vom bessern und 10 Loth vom schlechtern.

- 3) Es will Jemand 29 Faden Holz à 375 Cop. aus zwei andern Holzsorten mischen; der Faden der einen Sorte kostet 550 Cop. und der Faden der andern Sorte 260 Cop.; wie viel Faden von jeder Sorte wird dazu erforderlich sein? Antw. von der bessern Sorte $11\frac{1}{2}$ Faden und von der geringern Sorte $17\frac{1}{2}$ Faden.

B. Zusammengesetzte Vermischungs-Rechnung.

§. 152. Diese Rechnungsart wird angewendet, wenn mehr als zwei, an Werth verschiedene Sorten, gemischt werden sollen.

I. Wenn eine vorgeschriebene Menge aus mehreren bessern und geringeren Sorten gemischt werden soll.

§. 153. Aufgabe.

Ein Weinhändler hat 5 Sorten Wein, das Stof zu 80, 120, 150, 200 und 240 Cop. Er will 70 Stof à 160 Cop. daraus zusammenmischen; wie viel kann er von jeder Sorte nehmen?

Auflösung.

1) Die gegebenen Werthe, so wie der verlangte mittlere Werth, sind nach ihrer Folge unter einander zu ordnen und rechts dahinter ein verticaler Strich zu ziehen.

4) Man subtrahire den mittlern Werth von jedem der besseren, so wie jeden geringern Werth von dem mittlern und schreibe die erhaltenen Unterschiede, als Nenner von Brüchen, sowohl jeder Zahl, von welcher der mittlere Werth abgezogen wurde, als jeder Zahl, die man von dem mittlern Werthe subtrahirte, rechts gegenüber, z. B.

240 Cop.	80
200 "	40
70 Stof à (160) "	10
150 "	40
120 "	80
80 "	80

3) Für sämtliche Nenner sind sodann willkürliche Zähler anzunehmen, jedoch unter der Bedingung: daß die Summe der Zähler der bessern Sorte gleich der Summe der Zähler der geringern Sorte ist. Man kann sich hier die Rechnung sehr erleichtern, wenn die Zähler, mit Beibehaltung obiger Bedingung, so angenommen werden, daß die Werthe der Brüche als ganze Zahlen erscheinen, z. B.

240 Cop.	$\frac{80}{80} = 1$	Stof oder 240 Cop.	$\frac{160}{80} = 2$	Stof.
200 "	$\frac{120}{40} = 3$	200 "	$\frac{120}{40} = 3$	"
70 Stof à (160) "	$\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$	70 Stof à (160) "	$\frac{40}{160} = \frac{1}{4}$	"
150 "	$\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$	150 "	$\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$	"
120 "	$\frac{40}{160} = \frac{1}{4}$	120 "	$\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$	"
80 "	$\frac{80}{80} = 1$	80 "	$\frac{160}{80} = 2$	"
Summa 14 Stof.			Summa 13 Stof.	

In diesen, durch obiges Verfahren in beiden Fällen hervorgebrachten Zahlen, liegen bereits die Verhältnisse der Mischung.

Zugleich ist aus diesem Verfahren deutlich zu ersehen, daß hier unendlich viele verschiedene Mischungs-Verhältnisse Statt finden können. Der Beweis dieses Verfahrens kann nur in der Mathematik durch die unbestimmte Analytik erwiesen werden.

Probe bei dem ersten Ansätze.

1 Stof à 240 Cop. kostet	240 Cop.
3 " à 200 " " "	600 "
8 " à 150 " " "	1200 "
1 " à 120 " " "	120 "
1 " à 80 " " "	80 "

14 Stof betragen 2240 Cop.

folglich 1 Stof $2\frac{2}{3} = 160$ Cop.

Probe bei dem zweiten Ansätze.

2 Stof à 240 Cop. kosten	480 Cop.
3 " à 200 " " "	600 "
4 " à 150 " " "	600 "
2 " à 120 " " "	240 "
2 " à 80 " " "	160 "

13 Stof betragen 2080 Cop.

folglich 1 Stof $= \frac{2080}{13} = 160$ Cop.

4) Weil endlich 70 Stof nach obigen gefundenen Verhältnissen eingetheilt werden sollen, so geschieht solches nach der Gesellschaftsrechnung.

Für die Verhältnisse des ersten Ansatzes ist demnach die Vertheilung:

10	X	1	Stof	=	5	Stof	à	240	Cop.	=	1200	Cop.
10	X	3	"	=	15	"	à	200	"	=	3000	"
10	X	8	"	=	40	"	à	150	"	=	6000	"
10	X	1	"	=	5	"	à	120	"	=	600	"
10	X	1	"	=	5	"	à	80	"	=	400	"

Summe 70 Stof betragen 11200 Cop.;
folglich 1 Stof 160 Cop., was verlangt wurde.

Für die Verhältnisse des zweiten Ansatzes ist die Vertheilung folgende:

10	X	2	Stof	=	$10\frac{2}{3}$	Stof	à	240	Cop.	=	$2584\frac{2}{3}$	Cop.
10	X	3	"	=	$16\frac{2}{3}$	"	à	200	"	=	$3230\frac{2}{3}$	"
10	X	4	"	=	$21\frac{2}{3}$	"	à	150	"	=	$3230\frac{2}{3}$	"
10	X	2	"	=	$10\frac{2}{3}$	"	à	120	"	=	$1292\frac{2}{3}$	"
10	X	2	"	=	$10\frac{2}{3}$	"	à	80	"	=	$861\frac{2}{3}$	"

Summe 70 Stof betragen 11200 Cop.;
folglich 1 Stof 160 Cop., was verlangt wurde.

Auf diese Weise können unendlich viele Mischungen Statt finden, die alle den verlangten mittlern Werth hervorbringen.

Uebungs-Beispiele.

- 1) Ein Kaufmann hat viererlei Waaren von derselben Gattung, das Hk zu 4, 8, 12, 16 Cop. Er will 120 Hk à zu 9 Cop. davon zusammen mischen; wie viel Hk kann er von jeder Sorte nehmen?

Antw. Ist unbestimmt und deshalb die Richtigkeit derselben selbst zu prüfen.

- 2) Ein Holzhändler will aus 4 Holzarten, von denen der Faden 5 Rbl., $4\frac{1}{2}$ Rbl., 3 Rbl. und 1 Rbl. kostet, eine mittlere Sorte mischen, den Faden zu $3\frac{1}{2}$ Rbl.; wie viel muß er von jeder der 4 Holzarten dazu nehmen?

Antw. Ist unbestimmt und deshalb die Richtigkeit derselben selbst zu prüfen.

- II. Wenn von mehreren Sorten gewisse Quantitäten vorhanden und von andern bessern und geringern Sorten zugemischt werden soll, bis der verlangte mittlere Werth hervorgebracht wird.

§. 154. Aufgabe.

Ein Silberarbeiter hat 3 Mark 15löthiges u. 4 Mark 9löthiges Silber. Er will von 11 und 13löthigem Silber hinzuthun, damit die Mischung 12löthig werde; wie viel kann er von jeder Sorte an Marken dazu nehmen?

Auflösung. Nachdem die Auffindung der Nenner, wie in den frühern Aufgaben in I. geschehen ist, multiplicire man den gefundenen Nenner von jeder gegebenen Quantität mit der Menge Einheiten, welche die Quantität enthält, und setze das Product als Zähler in den Bruch; nehme für die übrigen

Nenner beliebige Zähler an, doch ebenfalls unter der Bedingung, daß die Summe der Zähler der bessern Sorten gleich ist der Summe der Zähler der geringern Sorten; so geben die dadurch hervorgebrachten ganzen Zahlen oder Brüche das verlangte Mischungsverhältniß; z. B.

15lÖthig	$\frac{3 \times 3 \text{ Mf.}}{3}$	$= \frac{9}{3} = 3$	3 Mark 15lÖthiges enthält	45 Loth	reines Silb.
13 "	$\frac{1}{1}$	$= 1 = 4$	" 13 "	52 "	" "
(12) "	$\frac{1}{1}$	$= 1 = 1$	" 11 "	11 "	" "
11 "	$\frac{4 \times 3 \text{ Mf.}}{3}$	$= \frac{12}{3} = 4$	" 9 "	36 "	" "

Summe 12 Mark enthalten . . . 144 Loth reines Silb.
 folglich enthält 1 Mark 12 Loth reines Silb.

In dieser Mischung sind, der Bedingung gemäß, die gegebenen 3 Mark 15lÖthiges und die 4 Mark 9lÖthiges Silber enthalten und zugleich der verlangte mittlere Werth der Mischung hervorgebracht.

Uebungs = Beispiele.

- 1) Ein Silberarbeiter hat 4 Mark 9lÖthiges; ferner 3 Mark 11lÖthiges und 8 Mark 15lÖthiges Silber; wie viel Mark muß er noch vom 14lÖthigen Silber dazu nehmen, damit die Mischung 13lÖthig werde?
 Antw. 6 Mark 14lÖthiges Silber.
- 2) Wenn zu 4 Stof Wein à 160 Cop. und zu 8 Stof Wein à 120 Cop. 2 andere Sorten Wein zu 220 und 80 Cop. das Stof hinzugemischt werden sollen, damit von der ganzen Mischung für das Stof 140 Cop. gegeben werden kann; wie viel Stof sind da von jeder der beiden letzten Sorten zu nehmen?
 Antw. Ist unbestimmt.

Das mittlere Einmal Eins.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2 Mal 11 ist 22</td></tr> <tr><td>2 — 12 — 24</td></tr> <tr><td>2 — 13 — 26</td></tr> <tr><td>2 — 14 — 28</td></tr> <tr><td>2 — 15 — 30</td></tr> <tr><td>2 — 16 — 32</td></tr> <tr><td>2 — 17 — 34</td></tr> <tr><td>2 — 18 — 36</td></tr> <tr><td>2 — 19 — 38</td></tr> <tr><td>2 — 20 — 40</td></tr> </table>	2 Mal 11 ist 22	2 — 12 — 24	2 — 13 — 26	2 — 14 — 28	2 — 15 — 30	2 — 16 — 32	2 — 17 — 34	2 — 18 — 36	2 — 19 — 38	2 — 20 — 40	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3 Mal 11 ist 33</td></tr> <tr><td>3 — 12 — 36</td></tr> <tr><td>3 — 13 — 39</td></tr> <tr><td>3 — 14 — 42</td></tr> <tr><td>3 — 15 — 45</td></tr> <tr><td>3 — 16 — 48</td></tr> <tr><td>3 — 17 — 51</td></tr> <tr><td>3 — 18 — 54</td></tr> <tr><td>3 — 19 — 57</td></tr> <tr><td>3 — 20 — 60</td></tr> </table>	3 Mal 11 ist 33	3 — 12 — 36	3 — 13 — 39	3 — 14 — 42	3 — 15 — 45	3 — 16 — 48	3 — 17 — 51	3 — 18 — 54	3 — 19 — 57	3 — 20 — 60	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>4 Mal 11 ist 44</td></tr> <tr><td>4 — 12 — 48</td></tr> <tr><td>4 — 13 — 52</td></tr> <tr><td>4 — 14 — 56</td></tr> <tr><td>4 — 15 — 60</td></tr> <tr><td>4 — 16 — 64</td></tr> <tr><td>4 — 17 — 68</td></tr> <tr><td>4 — 18 — 72</td></tr> <tr><td>4 — 19 — 76</td></tr> <tr><td>4 — 20 — 80</td></tr> </table>	4 Mal 11 ist 44	4 — 12 — 48	4 — 13 — 52	4 — 14 — 56	4 — 15 — 60	4 — 16 — 64	4 — 17 — 68	4 — 18 — 72	4 — 19 — 76	4 — 20 — 80
2 Mal 11 ist 22																																
2 — 12 — 24																																
2 — 13 — 26																																
2 — 14 — 28																																
2 — 15 — 30																																
2 — 16 — 32																																
2 — 17 — 34																																
2 — 18 — 36																																
2 — 19 — 38																																
2 — 20 — 40																																
3 Mal 11 ist 33																																
3 — 12 — 36																																
3 — 13 — 39																																
3 — 14 — 42																																
3 — 15 — 45																																
3 — 16 — 48																																
3 — 17 — 51																																
3 — 18 — 54																																
3 — 19 — 57																																
3 — 20 — 60																																
4 Mal 11 ist 44																																
4 — 12 — 48																																
4 — 13 — 52																																
4 — 14 — 56																																
4 — 15 — 60																																
4 — 16 — 64																																
4 — 17 — 68																																
4 — 18 — 72																																
4 — 19 — 76																																
4 — 20 — 80																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5 Mal 11 ist 55</td></tr> <tr><td>5 — 12 — 60</td></tr> <tr><td>5 — 13 — 65</td></tr> <tr><td>5 — 14 — 70</td></tr> <tr><td>5 — 15 — 75</td></tr> <tr><td>5 — 16 — 80</td></tr> <tr><td>5 — 17 — 85</td></tr> <tr><td>5 — 18 — 90</td></tr> <tr><td>5 — 19 — 95</td></tr> <tr><td>5 — 20 — 100</td></tr> </table>	5 Mal 11 ist 55	5 — 12 — 60	5 — 13 — 65	5 — 14 — 70	5 — 15 — 75	5 — 16 — 80	5 — 17 — 85	5 — 18 — 90	5 — 19 — 95	5 — 20 — 100	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>6 Mal 11 ist 66</td></tr> <tr><td>6 — 12 — 72</td></tr> <tr><td>6 — 13 — 78</td></tr> <tr><td>6 — 14 — 84</td></tr> <tr><td>6 — 15 — 90</td></tr> <tr><td>6 — 16 — 96</td></tr> <tr><td>6 — 17 — 102</td></tr> <tr><td>6 — 18 — 108</td></tr> <tr><td>6 — 19 — 114</td></tr> <tr><td>6 — 20 — 120</td></tr> </table>	6 Mal 11 ist 66	6 — 12 — 72	6 — 13 — 78	6 — 14 — 84	6 — 15 — 90	6 — 16 — 96	6 — 17 — 102	6 — 18 — 108	6 — 19 — 114	6 — 20 — 120	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>7 Mal 11 ist 77</td></tr> <tr><td>7 — 12 — 84</td></tr> <tr><td>7 — 13 — 91</td></tr> <tr><td>7 — 14 — 98</td></tr> <tr><td>7 — 15 — 105</td></tr> <tr><td>7 — 16 — 112</td></tr> <tr><td>7 — 17 — 119</td></tr> <tr><td>7 — 18 — 126</td></tr> <tr><td>7 — 19 — 133</td></tr> <tr><td>7 — 20 — 140</td></tr> </table>	7 Mal 11 ist 77	7 — 12 — 84	7 — 13 — 91	7 — 14 — 98	7 — 15 — 105	7 — 16 — 112	7 — 17 — 119	7 — 18 — 126	7 — 19 — 133	7 — 20 — 140
5 Mal 11 ist 55																																
5 — 12 — 60																																
5 — 13 — 65																																
5 — 14 — 70																																
5 — 15 — 75																																
5 — 16 — 80																																
5 — 17 — 85																																
5 — 18 — 90																																
5 — 19 — 95																																
5 — 20 — 100																																
6 Mal 11 ist 66																																
6 — 12 — 72																																
6 — 13 — 78																																
6 — 14 — 84																																
6 — 15 — 90																																
6 — 16 — 96																																
6 — 17 — 102																																
6 — 18 — 108																																
6 — 19 — 114																																
6 — 20 — 120																																
7 Mal 11 ist 77																																
7 — 12 — 84																																
7 — 13 — 91																																
7 — 14 — 98																																
7 — 15 — 105																																
7 — 16 — 112																																
7 — 17 — 119																																
7 — 18 — 126																																
7 — 19 — 133																																
7 — 20 — 140																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>8 Mal 11 ist 88</td></tr> <tr><td>8 — 12 — 96</td></tr> <tr><td>8 — 13 — 104</td></tr> <tr><td>8 — 14 — 112</td></tr> <tr><td>8 — 15 — 120</td></tr> <tr><td>8 — 16 — 128</td></tr> <tr><td>8 — 17 — 136</td></tr> <tr><td>8 — 18 — 144</td></tr> <tr><td>8 — 19 — 152</td></tr> <tr><td>8 — 20 — 160</td></tr> </table>	8 Mal 11 ist 88	8 — 12 — 96	8 — 13 — 104	8 — 14 — 112	8 — 15 — 120	8 — 16 — 128	8 — 17 — 136	8 — 18 — 144	8 — 19 — 152	8 — 20 — 160	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>9 Mal 11 ist 99</td></tr> <tr><td>9 — 12 — 108</td></tr> <tr><td>9 — 13 — 117</td></tr> <tr><td>9 — 14 — 126</td></tr> <tr><td>9 — 15 — 135</td></tr> <tr><td>9 — 16 — 144</td></tr> <tr><td>9 — 17 — 153</td></tr> <tr><td>9 — 18 — 162</td></tr> <tr><td>9 — 19 — 171</td></tr> <tr><td>9 — 20 — 180</td></tr> </table>	9 Mal 11 ist 99	9 — 12 — 108	9 — 13 — 117	9 — 14 — 126	9 — 15 — 135	9 — 16 — 144	9 — 17 — 153	9 — 18 — 162	9 — 19 — 171	9 — 20 — 180	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>11 Mal 11 ist 121</td></tr> <tr><td>11 — 12 — 132</td></tr> <tr><td>11 — 13 — 143</td></tr> <tr><td>11 — 14 — 154</td></tr> <tr><td>11 — 15 — 165</td></tr> <tr><td>11 — 16 — 176</td></tr> <tr><td>11 — 17 — 187</td></tr> <tr><td>11 — 18 — 198</td></tr> <tr><td>11 — 19 — 209</td></tr> <tr><td>11 — 20 — 220</td></tr> </table>	11 Mal 11 ist 121	11 — 12 — 132	11 — 13 — 143	11 — 14 — 154	11 — 15 — 165	11 — 16 — 176	11 — 17 — 187	11 — 18 — 198	11 — 19 — 209	11 — 20 — 220
8 Mal 11 ist 88																																
8 — 12 — 96																																
8 — 13 — 104																																
8 — 14 — 112																																
8 — 15 — 120																																
8 — 16 — 128																																
8 — 17 — 136																																
8 — 18 — 144																																
8 — 19 — 152																																
8 — 20 — 160																																
9 Mal 11 ist 99																																
9 — 12 — 108																																
9 — 13 — 117																																
9 — 14 — 126																																
9 — 15 — 135																																
9 — 16 — 144																																
9 — 17 — 153																																
9 — 18 — 162																																
9 — 19 — 171																																
9 — 20 — 180																																
11 Mal 11 ist 121																																
11 — 12 — 132																																
11 — 13 — 143																																
11 — 14 — 154																																
11 — 15 — 165																																
11 — 16 — 176																																
11 — 17 — 187																																
11 — 18 — 198																																
11 — 19 — 209																																
11 — 20 — 220																																

Das große Einmal Eins.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>12 Mal 12 ist 144</td></tr> <tr><td>12 — 13 — 156</td></tr> <tr><td>12 — 14 — 168</td></tr> <tr><td>12 — 15 — 180</td></tr> <tr><td>12 — 16 — 192</td></tr> <tr><td>12 — 17 — 204</td></tr> <tr><td>12 — 18 — 216</td></tr> <tr><td>12 — 19 — 228</td></tr> <tr><td>12 — 20 — 240</td></tr> </table>	12 Mal 12 ist 144	12 — 13 — 156	12 — 14 — 168	12 — 15 — 180	12 — 16 — 192	12 — 17 — 204	12 — 18 — 216	12 — 19 — 228	12 — 20 — 240	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>13 Mal 13 ist 169</td></tr> <tr><td>13 — 14 — 182</td></tr> <tr><td>13 — 15 — 195</td></tr> <tr><td>13 — 16 — 208</td></tr> <tr><td>13 — 17 — 221</td></tr> <tr><td>13 — 18 — 234</td></tr> <tr><td>13 — 19 — 247</td></tr> <tr><td>13 — 20 — 260</td></tr> </table>	13 Mal 13 ist 169	13 — 14 — 182	13 — 15 — 195	13 — 16 — 208	13 — 17 — 221	13 — 18 — 234	13 — 19 — 247	13 — 20 — 260	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>14 Mal 14 ist 196</td></tr> <tr><td>14 — 15 — 210</td></tr> <tr><td>14 — 16 — 224</td></tr> <tr><td>14 — 17 — 238</td></tr> <tr><td>14 — 18 — 252</td></tr> <tr><td>14 — 19 — 266</td></tr> <tr><td>14 — 20 — 280</td></tr> </table>	14 Mal 14 ist 196	14 — 15 — 210	14 — 16 — 224	14 — 17 — 238	14 — 18 — 252	14 — 19 — 266	14 — 20 — 280
12 Mal 12 ist 144																										
12 — 13 — 156																										
12 — 14 — 168																										
12 — 15 — 180																										
12 — 16 — 192																										
12 — 17 — 204																										
12 — 18 — 216																										
12 — 19 — 228																										
12 — 20 — 240																										
13 Mal 13 ist 169																										
13 — 14 — 182																										
13 — 15 — 195																										
13 — 16 — 208																										
13 — 17 — 221																										
13 — 18 — 234																										
13 — 19 — 247																										
13 — 20 — 260																										
14 Mal 14 ist 196																										
14 — 15 — 210																										
14 — 16 — 224																										
14 — 17 — 238																										
14 — 18 — 252																										
14 — 19 — 266																										
14 — 20 — 280																										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>15 Mal 15 ist 225</td></tr> <tr><td>15 — 16 — 240</td></tr> <tr><td>15 — 17 — 255</td></tr> <tr><td>15 — 18 — 270</td></tr> <tr><td>15 — 19 — 285</td></tr> <tr><td>15 — 20 — 300</td></tr> </table>	15 Mal 15 ist 225	15 — 16 — 240	15 — 17 — 255	15 — 18 — 270	15 — 19 — 285	15 — 20 — 300	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>16 Mal 16 ist 256</td></tr> <tr><td>16 — 17 — 272</td></tr> <tr><td>16 — 18 — 288</td></tr> <tr><td>16 — 19 — 304</td></tr> <tr><td>16 — 20 — 320</td></tr> </table>	16 Mal 16 ist 256	16 — 17 — 272	16 — 18 — 288	16 — 19 — 304	16 — 20 — 320	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>17 Mal 17 ist 289</td></tr> <tr><td>17 — 18 — 306</td></tr> <tr><td>17 — 19 — 323</td></tr> <tr><td>17 — 20 — 340</td></tr> </table>	17 Mal 17 ist 289	17 — 18 — 306	17 — 19 — 323	17 — 20 — 340									
15 Mal 15 ist 225																										
15 — 16 — 240																										
15 — 17 — 255																										
15 — 18 — 270																										
15 — 19 — 285																										
15 — 20 — 300																										
16 Mal 16 ist 256																										
16 — 17 — 272																										
16 — 18 — 288																										
16 — 19 — 304																										
16 — 20 — 320																										
17 Mal 17 ist 289																										
17 — 18 — 306																										
17 — 19 — 323																										
17 — 20 — 340																										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>18 Mal 18 ist 324</td></tr> <tr><td>18 — 19 — 342</td></tr> <tr><td>18 — 20 — 360</td></tr> </table>	18 Mal 18 ist 324	18 — 19 — 342	18 — 20 — 360	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>19 Mal 19 ist 361</td></tr> <tr><td>19 — 20 — 380</td></tr> </table>	19 Mal 19 ist 361	19 — 20 — 380	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>20 Mal 20 ist 400</td></tr> </table>	20 Mal 20 ist 400																		
18 Mal 18 ist 324																										
18 — 19 — 342																										
18 — 20 — 360																										
19 Mal 19 ist 361																										
19 — 20 — 380																										
20 Mal 20 ist 400																										

(Eine Sammlung practischer Uebungs-Exempel zu diesem Buche wird noch im Laufe dieses Semesters im Druck erscheinen).

Der Verfasser.