Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Janno Veeorg

Jälg ja päranduv aproksimatsiooniomadus Banachi ruumides

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Aleksei Lissitsin

Tartu 2016

Jälg ja pāranduv aproksimatsiooniomadus Banachi ruumides

Bakalaureusetöö

Janno Veeorg

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös vaadeldakse Banachi ruumis tuumaoperaatoril defineeritud jälge. Töös uuritakse, millistes Banachi ruumides on iga summeeruvate omaväärtustega tuumaoperaatori jälg võrdne tema omaväärtuste summaga. Tuuakse näide sellisest Banachi ruumist, kus see tingimus on täidetud, aga mis ei ole Hilberti ruum. Lisaks näidatakse, et sellistel ruumidel on pāranduv aproksimatsiooniomadus. Töö põhineb peamiselt W. B. Johnsoni ja A. Szankowski artiklil *The trace formula in Banach spaces* (Israel J. Math. 203, 2014).

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Jälg, aproksimatsiooniomadus, tuumaoperaator, Banach–Mazuri kaugus.

Trace and hereditary approximation property in Banach spaces

Bachelor's thesis

Janno Veeorg

Abstract. This bachelor's thesis considers trace defined for a nuclear operator in a Banach space. We investigate Banach spaces for which every nuclear operator with absolutely summing eigenvalues has its trace equal to sum of its eigenvalues. An example of a Banach space, which satisfies this condition and is not a Hilbert space is provided. In addition it is shown that every Banach space satisfying this condition has the hereditary approximation property. The thesis is mainly based on article *The trace formula in Banach spaces* (Israel J. Math. 203, 2014) by W. B. Johnson and A. Szankowski.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Märksõnad: Trace, approximation property, nuclear operator, Banach–Mazur distance.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö valdkonnaks on funktsionaalanalüüs. Töös käsitletakse jälge ja päranduvat aproksimatsiooniomadust. Bakalaureusetöö on referatiivne. Peamise allikana on kasutusel Bill Johnsoni ja Andrzej Szankowski artikkel jäljest Banachi ruumides [JSz2].

On teada, et Hilberti ruumidel on kaks head omadust. Esiteks on igal Hilberti ruumi kinnisel alamruumil aproksimatsiooniomadus ehk Hilberti ruumil on päranduv aproksimatsiooniomadus (tõestatud alajaotuses 3.7). Teiseks on Hilberti ruumis iga summeeruvate omaväärtustega tuumaoperaatori jälg võrdne tema omaväärtuste summaga. Selle tulemuse tõestas Viktor Lidski aastal 1959 [L]. Selliseid Banachi ruume, kus see omadus kehtib, nimetatakse Lidski ruumideks.

Kuni Johnsoni ja Szankowski artiklini aastal 2014 ei olnud teada klassikalistel ruumidel põhinevaid näiteid Lidski ruumidest, mis ei olnud Hilberti ruumid. Näiteid oli olemas ka varasemast, aga need kasutasid keerulisemaid konstruktsioone. Selle töö peamiseks eesmärgiks on tuua Johnsoni ja Szankowski artikli eeskujul näide Lidski ruumist, mis ei ole Hilberti ruum. Seejuures tõestatakse ära ka see, et lõpmatumõõtmelised Hilberti ruumid on Lidski ruumid.

Selle töö teiseks eesmärgiks on näidata, et igal Lidski ruumil on päranduv aproksimatsiooniomadus. Märgime, et ei ole teada, kas leidub selliseid päranduva aproksimatsiooniomadusega ruume, mis ei ole Lidski ruumid [JSz2].

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis defineeritakse vajalikud mõisted ja tuuakse ära vajalikud teadmised, mida siin töös ei tõestata, aga kasutatakse.

Teises peatükis tuuakse sisse Lidski ruumi mõiste. Esimeses alajaotuses defineeritakse päranduv aproksimatsiooniomadus ja näidatakse, et see on Lidski ruumil olemas. Teises alajaotuses tuuakse sisse kolmandas alajaotuses vajalikud tulemused Ringrose'i struktuuriteooriast [R]. Kolmandas alajaotuses tõestatakse ära, et ruum, kus iga kvaasinilpotentse tuumaoperaatori jälg on null, on Lidski ruum.

Kolmandas peatükis tuuakse näide sellisest Lidski ruumist, mis ei ole Hilberti ruum. Esimeses kahes alajaotuses tuuakse mõned ettevalmistavad tulemused. Kolmandas, neljandas ja viiendas alajaotuses tuuakse sisse polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruumi mõiste ja näidatakse et sellised ruumid on Lidski ruumid. Kuuendas alajaotuses tuuakse klassikalistel ruumidel põhinev näide, mille kohta tõestatakse, et tegemist on polünomiaalse kasvuga täiendavalt asümptootiliselt Hilberti ruumiga. Samuti näidatakse, et tegemist ei ole Hilberti ruumiga. Viimases alajaotuses näidatakse ära, et lõpmatumõõtmeline Hilberti ruum on Lidski ruum.

Töös on mõnedele tulemustele lisatud ainult viide ja pole neid tõestatud. Põhjuseks asjaolu, et nende tõestamine oleks nõudnud paljude uute teadmiste sisse toomist, mille käsitlemine oleks väljunud käesoleva töö raamidest. Folkloorsete tulemuste tõestused on enamasti esitatud ilma viideteta.

Töös tähistab $\dim X$ vektorruumi X mõõdet. Tähistust $\operatorname{span} X$ kasutatakse hulga X elementide lineaarse katte tähistamiseks. Operaatori T tuuma tähistab $\ker T$. Sümboliga I_X tähistatakse ühikoperaatorit vektorruumis X. Sümboliga B_X tähistatakse kinnist ühikkera normeeritud ruumis X. Maatriksi $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ korral tähistab $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, selle maatriksi determinanti. Vektoruumide X ja Y korral tähistab $X \oplus Y$ nende sisemist otsesummat. Kui reaalarvuliste muutumispiirkondadega funktsioonid f ja g on määratud mingitel reaalarvudel, siis kirjutame, et $f(x) = O(g(X))$, kui leidub arv $M > 0$ nii, et iga x korral $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$. Hulga X korral tähistab $|X|$ tema võimsust. Normeeritud ruumide X ja Y korral tähistab $T|_{X_0}$ operaatori $T\colon X \to Y$ ahendit alamhulgale $X_0 \subset X$.

Peatükk 1

Põhimõisted ja eelteadmised

Selles peatükis esitatakse mõisted ja teadmised, mis on kasutusel ülejäänud bakalaureusetöös. Lemmadele ja teoreemidele, millel on olemas nimi, viidatakse ülejäänud bakalaureusetöös nende nime, mitte järjekorranumbri järgi.

1.1 Eelteadmised operaatoritest

Kõigi normeeritud ruumide X ja Y vahel tegutsevate pidevalt lineaarsete operaatorite ruumi tähistatakse sümboliga $\mathcal{L}(X, Y)$ või kui $X = Y$, siis ka lihtsalt sümboliga $\mathcal{L}(X)$. Kui X on normeeritud ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, siis tähistatakse kõigi ruumide X ja $\mathbb{K}$ vahel tegusevate pidevalt lineaarsete funktsionaalide ruumi sümboliga $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$.

Definitsioon 1.1. Olgu X vektorruuum. Öeldakse, et lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on *projektor*, kui $P = P^2$.

Definitsioon 1.2. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Operaatorit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nimetatakse *lõplikumõõtmeliseks*, kui tema kujutisruum $\operatorname{ran} T$ on lõplikumõõtmeline.

Kõigi normeeritud ruumide X ja Y vahel tegutsevate lõplikumõõtmeliste operaatorite ruumi tähistatakse sümboliga $\mathcal{F}(X, Y)$ või kui $X = Y$, siis ka lihtsalt sümboliga $\mathcal{F}(X)$.

Definitsioon 1.3. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ja olgu $x^* \in X^*$ ning $y \in Y$. Ühemõõtmeline operaator $x^* \otimes y\colon X \to Y$ defineeritakse võrdusega

$$(x^* \otimes y)(x) = x^*(x)y, \quad x \in X.$$

Vahetult on kontrollitav, et $x^* \otimes y \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on lõplikumõõtmeline parajasti siis, kui leiduvad funktsionaalid $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ ja elemendid $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ nii, et

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i,$$

(vt nt [Pie, B.1.3]).

Definitsioon 1.4. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Operaatorit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ nimetatakse *kompaktseks*, kui ta teisendab ruumi X kinnise ühikkera suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis Y.

Kõigi normeeritud ruumide X ja Y vahel tegutsevate kompaktsete operaatorite ruumi tähistatakse sümboliga $\mathcal{K}(X,Y)$ või kui $X = Y$, siis ka lihtsalt sümboliga $\mathcal{K}(X)$. Ruum $\mathcal{F}(X,Y)$ on ruumi $\mathcal{K}(X,Y)$ alamruum ja $\mathcal{K}(X,Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ kinnine alamruum (vt nt [FHHMPZ, Proposition 7.2]). Seega $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subset \mathcal{K}(X,Y)$.

Definitsioon 1.5. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *aproksimatsiooniomadus*, kui iga kompaktse hulga $K \subset X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lõplikumõõtmeline operaator $T\colon X \to X$ nii, et iga $x \in K$ korral $\|Tx - x\| < \varepsilon$.

Definitsioon 1.6. Olgu X Banachi ruum. Operaatorit $T \in \mathcal{L}(X)$ nimetatakse *tuumaoperaatoriks*, kui leiduvad $x_1^*, x_2^*, \ldots \in X^*$ ja $x_1, x_2, \ldots \in X$ nii, et

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes x_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\|\|x_i\| < \infty.$$

Kõigi Banachi ruumis X tegutsevate tuumaoperaatorite ruumi tähistatakse sümboliga $\mathcal{N}(X)$. On ilmne, et $\mathcal{N}(\mathrm{X}) \subset \overline{\mathcal{F}(\mathrm{X})}$ ja kuna $\overline{\mathcal{F}(\mathrm{X})} \subset \mathcal{K}(\mathrm{X})$, siis on iga tuumaoperaator kompaktne. Hulk $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ on normeeritud ruum ka normi

$$\|T\|_\wedge = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\|\|x_i\| \,\middle|\, T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes x_i \right\}$$

suhtes (vt nt [Pie, Theorem 6.3.2]). On lihtne näha, et ka selle normi suhtes kehtib sisalduvus $\mathcal{N}(\mathrm{X}) \subset \overline{\mathcal{F}(\mathrm{X})}$.

Teoreem 1.7 (vt nt [LT, Theorem 1.e.4])**.** *Banachi ruumil X on aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui mis tahes $x_1^*, x_2^*, \ldots \in X^*$ ja $x_1, x_2, \ldots \in X$ korral, mis rahuldavad tingimusi*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\|\|x_i\| < \infty \quad \text{ja} \quad \forall x \in X\colon \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i = 0,$$

kehtib võrdus $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i) = 0.$

Definitsioon 1.8. Olgu X aproksimatsiooniomadusega Banachi ruum. Tuumaoperaatori $T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes x_i \in \mathcal{N}(X)$ *jälg* $\operatorname{tr} T$ defineeritakse võrdusega

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i).$$

Teoreemist 1.7 järeldub lihtsasti, et see definitsioon on korrektne. Tõepoolest, olgu $T = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^* \otimes y_i$ ja $T = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^* \otimes z_i$ tuumaoperaatori T kaks erinevat esitust, kusjuures

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\| \|y_i\| < \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|z_i^*\| \|z_i\| < \infty.$$

Siis iga $x \in X$ korral

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(x) y_i - \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*(x) z_i = 0.$$

Kuna mõlemad read on absoluutselt koonduvad, siis

$$(y_1^*(x)y_1) + (-z_1^*(x)z_1) + (y_2^*(x)y_2) + (-z_2^*(x)z_2) + \ldots = 0$$

ja kuna

$$\|y_1^*\|\|y_1\| + \| - z_1^*\|\|z_1\| + \|y_2^*\|\|y_2\| + \| - z_2^*\|\|z_2\| + \ldots < \infty,$$

siis teoreemi 1.7 põhjal

$$y_1^*(y_1) - z_1^*(z_1) + y_2^*(y_2) - z_2^*(z_2) + \ldots = 0$$

ehk $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^*(z_i).$

Definitsioon 1.9. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ on *nilpotentne*, kui leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $T^n = 0$.

Definitsioon 1.10. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ on *kvaasinilpotentne*, kui iga arvu $\lambda \neq 0$ korral on operaator $\lambda I_X - T$ bijektiivne.

1.2 Eelteadmised normeeritud ruumidest

Definitsioon 1.11. Olgu X normeeritud ruum ja $Y \subset X$ tema alamruum. Siis elemendi $x \in X$ *kaugus* $d(x, Y)$ hulgast Y defineeritakse võrdusega

$$d(x,Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Lemma 1.12 (Rieszi lemma; vt nt [OO, lk 93])**.** *Olgu X normeeritud ruum ja $Y \subsetneq X$ tema kinnine pärisalamruum. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $x \in X$ nii, et*

$$\|x\| = 1 \quad ja \quad d(x,Y) > 1 - \varepsilon\,.$$

Teoreem 1.13 (Hahn–Banachi teoreem; vt nt [OO, lk 165])**.** *Olgu X normeeritud ruum ja $Y \subset X$ tema alamruum. Kui $y^* \in Y^*$, siis leidub $x^* \in X^*$ nii, et*

$$\|x^*\| = \|y^*\| \quad ja \quad x^*|_Y = y^*.$$

Teoreem 1.14 (Banachi teoreem pöördoperaatorist; vt nt [OO, lk 139])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiivne. Siis $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.*

Definitsioon 1.15. Olgu Y normeeritud ruumi X alamhulk ja olgu $\varepsilon > 0$. Hulka $L \subset Y$ nimetatakse *ε–võrguks* hulgale Y, kui iga $y \in Y$ korral leidub $z \in L$ nii, et $\|x - z\| < \varepsilon$.

Teoreem 1.16 (Hausdorffi teoreem; vt nt [OO, lk 41])**.** *Banachi ruumi osahulk K on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulgale K lõplik ε–võrk.*

Lemma 1.17 (vt nt [OO, lk 91])**.** *Lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis on hulk suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud.*

.

1.3 Eelteadmised omaväärtustest

Definitsioon 1.18. Olgu X Banachi ruum ja olgu $T \in \mathcal{L}(X)$. Arvu λ nimetatakse operaatori T *omaväärtuseks*, kui leidub element $x \neq 0$ nii, et

$$Tx = \lambda x.$$

Vektorit x nimetatakse seejuures omaväärtusele λ vastavaks *omavektoriks.*

Definitsioon 1.19. Olgu X Banachi ruum, olgu $T \in \mathcal{L}(X)$ ja olgu λ operaatori T omaväärtus. Omaväärtuse λ *kordsuseks* nimetatakse talle vastavatest omavektoritest moodustuva ruumi mõõdet

$$\dim\{x \in X \,\big|\, Tx = \lambda\, x\}.$$

Lemma 1.20 (vt nt [DS, lk 579])**.** *Kompaktsel operaatoril on omaväärtusi koos kordsustega ülimalt loenduv arv.*

1.4 Banach–Mazuri kaugus

Definitsioon 1.21. Olgu X ja Y isomorfsed Banachi ruumid. Ruumide X ja Y vaheline *Banach–Mazuri kaugus* $d_{BM}(X,Y)$ defineeritakse võrdusega

$$d_{BM}(X,Y) = \inf\big\{\|T\|\|T^{-1}\| \,\big|\, T \text{ on isomorfism ruumide } X \text{ ja } Y \text{ vahel}\big\}.$$

Omadus 1.22. *Kui X, Y ja Z on isomorfsed Banachi ruumid, siis*

$$d_{BM}(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Z) d_{BM}(Z,Y).$$

Tõestus. Olgu $J_1\colon X \to Z$ ja $J_2\colon Z \to Y$ isomorfismid. Siis on isomorfism ka $J = J_2 J_1$. Kuna $\|J\| \leqslant \|J_1\|\|J_2\|$ ja $\|J^{-1}\| \leqslant \|J_1^{-1}\|\|J_2^{-1}\|$, siis saame, et

$$d_{BM}(X,Y) \leqslant \|J_1\|\|J_1^{-1}\|\|J_2\|\|J_2^{-1}\|.$$

Seega $d_{BM}(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Z) d_{BM}(Z,Y)$. □

Sellest omadusest tuleneb lihtsasti ka järgnev omadus.

Omadus 1.23. *Kui X ja Y on isomeetriliselt isomorfsed Banachi ruumid ja Z on nendega isomorfne Banachi ruum, siis*

$$d_{BM}(Z,X) = d_{BM}(Z,Y).$$

1.5 Eelteadmised Hilberti ruumidest

Teoreem 1.24 (Rieszi teoreem pideva lineaarse funktsionaali üldkujust; vt nt [OO, lk 244])**.** *Olgu H Hilberti ruum. Iga funktsionaali $f \in H^*$ korral leidub parajasti üks* *element $y \in H$ nii, et iga $x \in H$ korral*

$$f(x) = (x, y),$$

kus (,) *tähistab skalaarkorrutist. Seejuures* $\|f\| = \|y\|$.

Lemma 1.25 (vt nt [DS, lk 254]). *Hilberti ruumid H_1 ja H_2 on isomeetriliselt isomorfsed parajasti siis, kui* $\dim H_1 = \dim H_2$.

Lemma 1.26 (vt nt [H, lk 213]). *Igal Hilberti ruumil on aproksimatsiooniomadus.*

1.6 Eelteadmised kompleksmuutuja funktsioonidest

Definitsioon 1.27. Öeldakse, et $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on *täisfunktsioon*, kui leiduvad üheselt määratud $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{C}$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0 \quad \text{ja} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i, \quad \forall x \in \mathbb{C}\,.$$

Definitsioon 1.28 (vt nt [B, 2.1.1]). Öeldakse, et funktsioonil f on *lõplik järk*, kui leidub piirväärtus

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \max_{|z|=r} |f(z)|}{\ln r}.$$

Kui selline piirväärtus leidub, siis nimetatakse seda funktsiooni f *järguks.*

Lemma 1.29 (vt nt [B, 2.2.2]). *Täisfunktsioonil $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$ on lõplik järk parajasti siis, kui leidub piirväärtus*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln\left(\frac{1}{|c_n|}\right)}.$$

Kui selline piirväärtus leidub, siis on see võrdne funktsiooni f järguga.

Teoreem 1.30 (Hadamard'i faktoriseerimisteoreem; vt nt [B, 2.7.1]). *Olgu f täisfunktsioon, mille positiivsed või negatiivsed nullkohad koos kordsustega on $a_1, a_2, \ldots$, kusjuures need on järjestatud nii, et $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$. Kui funktsioonil f on lõplik järk λ, siis iga $z \in \mathbb{C}$ korral*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} h_p\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

kus m *ja* $p \leqslant \lambda$ *on täisarvud,* g *on kompleksmuutuja polünoom, mille aste ei ole suurem kui* λ*, ja*

$$h_p(x) = (1-x)e^{\left(x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^p}{p}\right)}.$$

Peatükk 2

Lidski ruum

Definitsioon 2.1 ([JSz2, lk 391])**.** Aproksimatsiooniomadusega komplekset Banachi ruumi X kutsutakse *Lidski ruumiks*, kui iga operaatori $T \in \mathcal{N}(X)$ korral kehtib implikatsioon

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty \Rightarrow \operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i,$$

kus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ on operaatori T omaväärtused koos kordsustega.

See definitsioon on korrektne, sest kõik tuumaoperaatorid on kompaktsed ja kompaktsel operaatoril on omaväärtusi koos kordsustega ülimalt loenduv arv.

2.1 Päranduv aproksimatsiooniomadus

Teoreem 2.2 ([JSz1, lk 1989])**.** *Lidski ruumi igal kinnisel alamruumil on aproksimatsiooniomadus.*

Tõestus. Olgu X Lidski ruum. Oletame vastuväiteliselt, et leidub ruumi X kinnine alamruum Y, millel ei ole aproksimatsiooniomadust. Siis teoreemi 1.7 põhjal leiduvad funktsionaalid $y_1^*, y_2^*, \ldots \in Y^*$ ja elemendid $y_1, y_2, \ldots \in Y$ nii, et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\|\|y_i\| < \infty, \quad \forall y \in Y\colon \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(y) y_i = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(y_i) \neq 0.$$

Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub iga $i \in \mathbb{N}$ korral $x_i^* \in X^*$ nii, et $x_i^*|_Y = y_i^*$ ja $\|x_i^*\| = \|y_i^*\|$. Olgu $T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i$. Siis $T \in \mathcal{N}(X)$, sest $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\|\|y_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\|\|y_i\| < \infty$.

Seega

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(y_i) \neq 0.$$

Samas $T(X) \subset Y$ ja $Ty = 0$ iga $y \in Y$ korral, millest näeme, et $T^2 = 0$. Seega on operaatori T kõik omaväärtused nullid, mis tähendab, et kuna X on Lidski ruum, siis $\operatorname{tr} T = 0$. Oleme jõudnud vastuoluni. Seega peab Lidski ruumi igal kinnisel alamruumil olema aproksimatsiooniomadus. □

Definitsioon 2.3. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *päranduv aproksimatsiooniomadus*, kui igal tema kinnisel alamruumil on aproksimatsiooniomadus.

Seega teoreemi 2.2 põhjal on Lidski ruumil päranduv aproksimatsiooniomadus. Teoreemi 2.2 tõestusest on lihtne näha, et päranduv aprkosimatsiooniomadus järeldub ka järgnevast mõnevõrra nõrgemast tulemusest.

Lause 2.4. *Kui aproksimatsiooniomadusega komplekssel Banachi ruumil on iga nilpotentse tuumaoperaatori jälg* 0*, siis on tal päranduv aproksimatsiooniomadus.*

Seejuures on lahtine küsimus, et kas iga pärandava aproksimatsiooniomadusega kompleksne Banachi ruum on Lidski ruum või mitte [JSz2, lk 403].

2.2 Ringrose'i struktuuriteeoria

Selles alajaotuses esitatakse tulemused Ringrose'i struktuuriteooriast [R], mida kasutatakse järgmises alajaotuses. Siin tähistab X kompleksset Banachi ruumi ja $T \in \mathcal{K}(X)$ kompaktset operaatorit selles ruumis.

Definitsioon 2.5. Ruumi X alamruumide hulka N nimetatakse *alamruumide ahelaks*, kui hulk N on lineaarselt järjestatud operaatori $\subset$ järgi. See tähendab, et iga $M_1, M_2 \in N$ korral kas $M_1 \subset M_2$ või $M_2 \subset M_1$.

Definitsioon 2.6. Olgu N alamruumide ahel ruumis X. Öeldakse, et ahel N on invariantne T suhtes, kui iga $M \in N$ korral $T(M) \subset M$.

Olgu N hulga X alamruumide ahel. Edaspidi tähistame $M \in N$ korral

$$M^- := \overline{\cup\{L \mid L \in N, L \subsetneq M\}}.$$

Definitsioon 2.7. Ruumi X alamruumide ahelat N nimetatakse *lihtsaks*, kui

1. $\{0\} \in N$, $X \in N$;

2. iga $N_0 \subset N$ korral $\cap\{L \,|\, L \in N_0\} \in N$ ja $\overline{\cup\{L \,|\, L \in N_0\}} \in N$;

3. iga $M \in N$ korral on faktorruum M/M^- maksimaalselt ühemõõtmeline.

Teoreem 2.8 ([R, Theorem 1])**.** *Leidub lihtne alamruumide ahel N, mis on invariantne T suhtes.*

Olgu N lihtne T suhtes invariantne alamruumide ahel ruumis X. Olgu $M \in N$ selline, et $\dim M/M^- = 1$. Olgu $x + M^- \in M/M^-$. Kuna N on invariantne T suhtes, siis $Tx \in M$ ja seega leiduvad üheselt määratud $y \in M^-$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$ nii, et

$$Tx = \lambda x + y.$$

Kuna T on lineaarne, siis on ilmne, et λ väärtus ei sõltu x valikust.

Definitsioon 2.9. Väärtust λ nimetatakse operaatori T *diagonaalseks kordajaks* kohal M. Kui $\dim M/M^- = 0$, siis defineeritakse, et diagonaalne kordaja on 0.

Definitsioon 2.10. Väärtuse λ *diagonaalseks kordsuseks* nimetatakse selliste $M \in N$ (potentsiaalselt lõpmatut) arvu, mille diagonaalne kordaja on λ.

Teoreem 2.11 ([R, Theorem 2 (i)–(ii)])**.** *Olgu N lihtne T suhtes invariantne alamruumide ahel. Siis $\lambda \neq 0$ on operaatori T omaväärtus kordsusega k parajasti siis, kui λ on operaatori T diagonaalne kordaja, mille diagonaalne kordsus on k.*

Teoreem 2.12 ([R, Theorem 2 (iii)])**.** *Olgu N lihtne T suhtes invariantne alamruumide ahel. Operaator T on kvaasinilpotentne parajasti siis, kui iga $M \in N$ korral $T(M) \subset M^-$.*

2.3 Nõrk Lidski ruum

Definitsioon 2.13 ([JSz2, lk 391])**.** Aproksimatsiooniomadusega kompleksset Banachi ruumi kutsutakse *nõrgaks Lidski* ruumiks, kui iga kvaasinilpotentse tuumaoperaatori jälg on 0.

Järgmise teoreemi tõestuses läheb vaja järgnevat Hahn–Banachi teoreemi järeldust.

Järeldus 2.14. *Olgu X normeeritud ruum üle korpuse $\mathbb{K}$ ja $Y \subset X$ tema kinnine alamruum. Kui $x \notin Y$, siis leidub $x^* \in X^*$ nii, et*

$$\|x^*\| = \frac{1}{d(x,Y)}, \quad x^*|_Y = 0 \quad ja \quad x^*(x) = 1.$$

Tõestus. Vaatleme alamruumi

$$Z = \{y + ax \,|\, y \in Y, a \in \mathbb{K}\}.$$

Defineerime seal funktsionaali $z^*\colon Z \to \mathbb{K}$ nii, et iga $y \in Y$ ja $a \in \mathbb{K}$ korral

$$z^*(y + ax) = a.$$

On selge, et z^* on lineaarne. Kuna

$$\begin{aligned}\|z^*\| &= \sup_{y\in Y, a\in\mathbb{K}} \frac{\|z^*(y+ax)\|}{\|y+ax\|} = \sup_{y\in Y, a\in\mathbb{K}} \frac{|a|}{\|y+ax\|} \\ &= \sup_{y\in Y, a\in\mathbb{K}} \frac{1}{\|x-(-\frac{y}{a})\|} \leqslant \frac{1}{d(x,Y)}\end{aligned}$$

ja

$$\|z^*\| \geqslant \sup_{y\in Y} \frac{\|z^*(y-x)\|}{\|y-x\|} = \frac{1}{\inf_{y\in Y}\|y-x\|} = \frac{1}{d(x,Y)},$$

siis on z^* tõkestatud ja $\|z^*\| = \dfrac{1}{d(x,Y)}$. Seega $z^* \in Z^*$. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub nüüd $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = \|z^*\| = \dfrac{1}{d(x,Y)}$ ja $x^*|_Z = z^*$. Lihtsasti saame, et $x^*|_Y = z^*|_Y = 0$ ja $x^*(x) = z^*(x) = 1$. Seega sobib x^* otsitavaks funktsionaaliks. □

Teoreem 2.15 ([JSz2, Theorem 4.2])**.** *Kompleksne Banachi ruum on Lidski ruum parajasti siis, kui ta on nõrk Lidski ruum.*

Tõestus. Tarvilikkus on ilmne, kuna kvaasinilpotentse operaatori kõik omaväärtused on nullid. Piisavuse tõestamiseks eeldame, et X on kompleksne Banachi ruum, kus iga kvaasinilpotentse operaatori jälg on null. Olgu $T \in \mathcal{N}(X)$ selline, et $\sum |\lambda_i| < \infty$, kus λ_i on T omaväärtused koos kordsustega. Siis $T \in \mathcal{K}(X)$ ja teoreemi 2.8 kohaselt leidub lihtne T suhtes invariantne alamruumide ahel. Olgu see ahel N. Olgu

$$N' := \{M \in N \,|\, \dim M/M^- = 1\}.$$

Teoreemi 2.11 kohaselt saab igale $M \in N'$ seada vastavusse omaväärtuse λ_M, kusjuures omaväärtuse λ_M kordsus on sama suur, kui on talle vastavate alamruumide arv hulgas N'. Seega, kuna operaatoril T on omaväärtusi koos kordsustega ülimalt loenduv arv, peab ka N' olema ülimalt loenduv.

Rieszi lemma põhjal leidub iga $M \in N'$ korral $x_M \in M$ nii, et $\|x_M\| = 1$ ja

$d(x_M, M^-) > \dfrac{1}{2}$, sest M^- on M kinnine pärisalamruum. Vastavalt Hahn–Banachi teoreemi järeldusele 2.14 leidub iga $M \in N'$ korral $x_M^* \in X^*$ nii, et

$$x_M^*|_{M^-} = 0, \quad \|z_M^*\| = \frac{1}{d(x_M, M^-)} < 2 \quad \text{ja} \quad x_M^*(x_M) = 1.$$

Olgu

$$S = \sum_{M \in N'} \lambda_M x_M^* \otimes x_M.$$

Siis S on tuumaoperaator, sest

$$\sum_{M \in N'} \|\lambda_M x_M^*\| \|x_M\| < 2 \sum_{M \in N'} |\lambda_M| < \infty.$$

Näitame nüüd, et $T - S$ on kvaasinilpotentne. Teoreemi 2.12 kohaselt piisab selleks näidata, et iga $L \in N$ korral $(T-S)(L) \subset L^-$. Kõigepealt märkame, et iga $L \in N$ korral $S(L) \subset L$, sest kui $M \in N'$ korral $M \not\subset L$, siis $x_M^*(L) = \{0\}$ ja seega

$$S(L) = \left(\sum_{M \in N', M \subset L} \lambda_M x_M^* \otimes x_M \right)(L) \subset L.$$

Järelikult on N invariantne S suhtes ja kuna ta on invariantne ka T suhtes, siis on ta invariante $T - S$ suhtes. Seega juhul, kui $\dim L/L^- = 0$ saame, et $(T-S)(L) \subset L = L^-$. Jääb vaadata juht kui $\dim L/L^- = 1$. Olgu $x \in L$, siis leiduvad $a \in \mathbb{C}$ ja $y \in L^-$ nii, et

$$x = ax_L + y.$$

Kuna λ_L on operaatori T diagonaalne kordaja, siis $Tx - \lambda_L x \in L^-$ ja järelikult ka $Tx - \lambda_L ax_L \in L^-$. Seega

$$\begin{aligned}
(T-S)(x) &= Tx - aSx_L - Sy \\
&= Tx - a(\lambda_L x_L^*(x_L)x_L + \sum_{M \in N', M \subsetneq L} \lambda_M x_M^*(x_L)x_M) - Sy \\
&= (Tx - \lambda_L ax_L) - (a \sum_{M \in N', M \subsetneq L} \lambda_M x_M^*(x_L)x_M) + Sy) \in L^-.
\end{aligned}$$

Seejuures $Sy \in L^-$, sest $L^- \in N$ ja N on invariantne S suhtes. Seega oleme saanud, et $(T-S)(L) \subset L^-$. Järelikult on $T - S$ kvaasinilpotentne ja eelduse põhjal $\operatorname{tr}(T-S) = 0$.

Seega

$$\operatorname{tr} T = \operatorname{tr} S = \sum_{M \in N'} \lambda_M x_M^*(x_M) = \sum_{M \in N'} \lambda_M,$$

millest saamegi, et X on Lidski ruum.

$\square$

Peatükk 3

Hilberti ruumide seos Lidski ruumidega

Selle peatüki eesmärk on näidata, et leidub Lidski ruume, mis ei ole Hilberti ruumid. Selle jaoks defineeritakse kõigepealt Γ–ruum ja näidatakse, et iga aproksimatsiooniomadusega kompleksne Γ–ruum on Lidski ruum. Seejärel defineeritakse polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum ja tõestatakse, et see on Γ–ruum. Viimaks tuuakse näide sellisest polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruumist, mis ei ole isomorfne Hilberti ruumiga. Lisaks näidatakse ka ära, et iga lõpmatumõõtmeline Hilberti ruum on Lidski ruum.

3.1 Banachi ruumi n–mõõtmeliste alamruumide kaugus ruumist ℓ_2^n

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Banachi ruumi X korral tähistame

$$d_n(X) = \sup\big\{d_{BM}(E, \ell_2^{\dim E})\,\big|\, E \subset X, \dim E \leqslant n\big\}.$$

On selge, et alamruumi $Y \subset X$ ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral $d_n(Y) \leqslant d_n(X)$. Samuti iga $m \leqslant n$ korral $d_m(X) \leqslant d_n(X)$. Kui $n \leqslant \dim X$, siis

$$d_n(X) = \sup\big\{d_{BM}(E, \ell_2^n)\,\big|\, E \subset X, \dim E = n\big\}.$$

Tõepoolest, fikseerime $m \leqslant n$ ja fikseerime m–mõõtmelise alamruumi $E \subset X$. Olgu $F \subset X$ selline n–mõõtmeline alamruum, et $E \subset F$. Olgu $J\colon F \to \ell_2^n$ isomorfism ruumide F ja ℓ_2^n vahel, siis $\|J|_E\|$ on isomorfism ruumide E ja ℓ_2^m vahel. Seega

$$d_{BM}(E, \ell_2^m) \leqslant \|J|_E\|\|(J|_E)^{-1}\| \leqslant \|J\|\|J^{-1}\|.$$

Järelikult $d_{BM}(E) \leqslant d_{BM}(F)$, mis tähendab, et väide on tõestatud.

Järgneva lemma esitame ilma tõestuseta, kuna tõestus kasutab tüüpi ja kotüüpi Banachi ruumides. Nendega tegelemiseks oleks muuhulgas vaja tuua sisse tulemusi tõenäosusteooriast, mis väljuks antud töö raamidest.

Lemma 3.1 ([JSz2, lk 394 tingimus (14)]). *Kui X on Banachi ruum, siis kõigi arvude $n, m \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus*

$$d_{n^m}(Y) \leqslant d_n(Y)^{2m}.$$

Esitame nüüd John'i lemma, mida me siinkohal ei tõesta.

Lemma 3.2 (John'i lemma; vt nt [Pis, lk 27]). *Iga n–mõõtmelise normeeritud ruumi E korral $d_{BM}(E, \ell_2^n) \leqslant n^{\frac{1}{2}}$.*

John'i lemmast tuleneb otseselt järgnev lause.

Lause 3.3. *Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $d_n(X) \leqslant n^{\frac{1}{2}}$.*

Esitame nüüd kaks lemmat, mida me samuti siin tõestama ei hakka, aga mida me kasutame, et hinnata $d_n(Z)$ väärtust.

Lemma 3.4 ([JL, lk 43]). *Iga $1 \leqslant p$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral $d_{BM}(\ell_p^n, \ell_2^n) = n^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|}$.*

Lemma 3.5 ([JSc, Theorem 3]). *Iga $1 \leqslant p$ ja iga ruumi ℓ_p n–mõõtmelise alamruumi E korral leidub projektor $P\colon \ell_p \to E$ nii, et*

$$\inf\left\{\|S\|\|U\| \,\middle|\, P = SU, U \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_2), S \in \mathcal{L}(\ell_2, E)\right\} \leqslant n^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|}.$$

Lause 3.6. *Iga $1 \leqslant p$ ja $n, m \in \mathbb{N}$ korral $d_n(\ell_p^m) \leqslant n^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|}$.*

Tõestus. Fikseerime n–mõõtmelise alamruumi $E \subset \ell_p$. Siis lemma 3.5 põhjal leidub projektor $P\colon \ell_p \to E$ nii, et

$$\inf\left\{\|S\|\|U\| \,\middle|\, P = SU, U \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_2), S \in \mathcal{L}(\ell_2, E)\right\} \leqslant n^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|}.$$

Fikseerime $U \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_2)$ ja $S \in \mathcal{L}(\ell_2, E)$ nii, et $P = SU$. Siis kehtib, et $(SU)|_E = I_E$, millest järeldub, et $U|_E$ on isomorfism ruumi $F := U(E)$ ja ruumi E vahel, kusjuures $(U_E)^{-1} = S|_F$. Ruumi ℓ_2 n–mõõtmeline alamruum on aga Hilberti ruum ja seega isomeetriliselt isomorfne ruumiga ℓ_2^n. Seega

$$d_{BM}(E, \ell_2^n) = d_{BM}(E, F) \leqslant \|U|_E\|\|S|_F\| \leqslant \|U\|\|S\|.$$

Järelikult $d_{BM}(E, \ell_2^n) \leqslant n^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|}$, millest saame, et

$$d_n(\ell_p^m) \leqslant d_n(\ell_p) \leqslant n^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|}.$$

□

3.2 Banachi ruumide otsesummad ℓ_2 normiga

Teoreem 3.7 (vt nt [Pie, C.4.1]). *Olgu $X_1, X_2, \dots$ Banachi ruumid. Ruum*

$$\ell_2((X_i)_{i=1}^\infty) := \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \,\middle|\, \sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^2 \leqslant \infty, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots \right\}$$

on Banachi ruum normi

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\| = \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2((X_i)_{i=1}^\infty)$$

suhtes.

Lõpliku hulga Banachi ruumide $X_1, \dots, X_n$ korral

$$\ell_2((X_i)_{i=1}^n) := \ell_2(X_1, \dots, X_n, \{0\}, \dots).$$

Lause 3.8. *Kui X_1 ja X_2 on Banachi ruumid, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$d_n(\ell_2(X_1, X_2)) \leqslant \max\{d_n(X_1), d_n(X_2)\}.$$

Tõestus. Fikseerime $n \in \mathbb{N}$ ja fikseerime n–mõõtmelise alamruumi $E \subset l_2(X_1, X_2)$. Defineerime projektorid P_1 ja P_2 nii, et iga $x_1 \in X_1$ ja $x_2 \in X_2$ korral $P_1(x_1, x_2) = x_1$ ja $P_2(x_1, x_2) = x_2$. Olgu $Y_1 = P_1(E)$ ja $Y_2 = P_2(E)$, siis $E \subset Y_1 \oplus Y_2$. Olgu $n_1 = \dim Y_1$ ja $n_2 = \dim Y_2$. Olgu J_1 isomorfism ruumide Y_1 ja $\ell_2^{n_1}$ vahel ning J_2 isomorfism ruumide Y_2 ja $\ell_2^{n_2}$ vahel. Defineerime isomorfismi J ruumide $Y_1 \oplus Y_2$ ja $\ell_2(\ell_2^{n_1}, \ell_2^{n_2})$ vahel nii, et iga $y_1 \in Y_1$ ja $y_2 \in Y_2$ korral

$$J(y_1 + y_2) = (\|J_1^{-1}\| J_1(y_1), \|J_2^{-1}\| J_2(y_2)).$$

Nüüd saame, et

$$
\begin{aligned}
\|J\| &= \sup_{y_1\in Y_1, y_2\in Y_2} \frac{\|J(y_1+y_2)\|}{\|y_1+y_2\|} \\
&= \sup_{y_1\in Y_1, y_2\in Y_2} \frac{((\|J_1^{-1}\|\|J_1(y_1)\|)^2 + (\|J_2^{-1}\|\|J_2(y_2)\|)^2)^{\frac{1}{2}}}{(\|y_1\|^2+\|y_2\|^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&\leqslant \sup_{y_1\in Y_1, y_2\in Y_2} \frac{((\|J_1^{-1}\|\|J_1\|\|y_1\|)^2 + (\|J_2^{-1}\|\|J_2\|\|y_2\|)^2)^{\frac{1}{2}}}{(\|y_1\|^2+\|y_2\|^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&\leqslant \max\{\|J_1^{-1}\|\|J_1\|, \|J_2^{-1}\|\|J_2\|\}.
\end{aligned}
$$

Sarnaselt saame, et

$$
\|J^{-1}\| = \sup_{y_1\in \ell_2^{n_1}, y_2\in \ell_2^{n_2}} \frac{\left(\left(\frac{\|J_1^{-1}(y_1)\|}{\|J_1^{-1}\|}\right)^2 + \left(\frac{\|J_2^{-1}(y_2)\|}{\|J_2^{-1}\|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(\|y_1\|^2+\|y_2\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1.
$$

Seega

$$
\|J\|\|J^{-1}\| \leqslant \max\{\|J_1^{-1}\|\|J_1\|, \|J_2^{-1}\|\|J_2\|\}.
$$

Lihtne kontroll näitab, et $\ell_2(\ell_2^{n_1}, \ell_2^{n_2})$ on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $\ell_2^{n_1+n_2}$. Järelikult on ruum $\ell_2(\ell_2^{n_1}, \ell_2^{n_2})$ Hilberti ruum ja tema n–mõõtmeline alamruum $J(E)$ on isomeetriliselt isomorfne ruumiga ℓ_2^n. Seega omaduse 1.23 põhjal

$$
\begin{aligned}
d_{BM}(E, \ell_2^n) = d_{BM}(E, J|_E(E)) &\leqslant \|J|_E\|\|(J|_E)^{-1}\| \\
&\leqslant \|J\|\|J^{-1}\| \leqslant \max\{\|J_1^{-1}\|\|J_1\|, \|J_2^{-1}\|\|J_2\|\},
\end{aligned}
$$

mis tähendab, et

$$
\begin{aligned}
d_{BM}(E, \ell_2^n) &\leqslant \max\{d_{BM}(Y_1, \ell_2^{n_1}), d_{BM}(Y_2, \ell_2^{n_2})\} \\
&\leqslant \max\{d_{n_1}(X_1), d_{n_2}(X_2)\} \leqslant \max\{d_n(X_1), d_n(X_2)\}.
\end{aligned}
$$

Sellest saame omakorda, et

$$
d_n(\ell_2(X_1, X_2)) \leqslant \max\{d_n(X_1), d_n(X_2)\}.
$$

Seega on vajalik väide tõestatud. □

Eelnevast lemmast saame triviaalselt, et kui $X_1, X_2, \ldots, X_m$ on Banachi ruumid, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $d_n(\ell_2(X_1, \ldots, X_m)) \leqslant \max\{d_n(X_1), \ldots, d_n(X_m)\}$.

Enne antud tulemuse sõnastamist loenduval hulgal Banachi ruumidel, sõnastame ühe abitulemuse.

Lemma 3.9. *Olgu K suhteliselt kompaktne hulk Banachi ruumis X ja olgu operaatorite jada $(T_i)_{i=0}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X)$ selline, et iga $x \in K$ korral $\lim_{n\to\infty} T_n x = 0$, kusjuures iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\|T_n\| \leqslant 1$. Siis*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|T_n x\| = 0.$$

Tõestus. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Hausdorffi teoreemi kohaselt leidub hulgale K lõplik $\frac{\varepsilon}{2}$–võrk L. Kuna iga $x \in K$ korral $\lim_{n\to\infty} T_n x = 0$, siis leidub M nii, et kui $m \geqslant M$, siis iga $z \in L$ korral $\|T_m z\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Järelikult iga $x \in K$ korral leidub $z \in L$ nii, et

$$\|T_m x\| \leqslant \|T_m(x-z)\| + \|T_m(z)\| < \|T_m\|\|x-z\| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\,.$$

Seega

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|T_n x\| = 0.$$

□

Lause 3.10. *Olgu $X_1, X_2, \ldots$ Banachi ruumid. Kui $X := \ell_2((X_i)_{i=1}^{\infty})$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$d_n(X) \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} d_n(X_i).$$

Tõestus. Fikseerime $m, n \in \mathbb{N}$ ja fikseerime n–mõõtmelise alamruumi $E \subset X$. Defineerime projektori P_m nii, et iga $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ korral

$$P_m((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots).$$

Tähistame $Q_m := I_X - P_m$. Olgu T_m isomorfism ruumide $P_m(E)$ ja $\ell_2^{\dim P_m(E)}$ vahel ning U_m isomorfism ruumide $Q_m(E)$ ja $\ell_2^{\dim Q_m(E)}$ vahel. Vaatleme ruumi X alamruumi $Y := P_m(E) \oplus Q_m(E)$. Paneme tähele, et $E \subset Y$. Defineerime isomorfismi J_m ruumide Y ja $L := \ell_2(\ell_2^{\dim P_m(E)}, \ell_2^{\dim Q_m(E)})$ vahel nii, et iga $x \in Y$ korral

$$J_m(x) = (\|T_m^{-1}\| T_m(P_m(x)), \|U_m^{-1}\| U_m(Q_m|_E(x))).$$

Nüüd saame, et

$$\|J_m^{-1}\| = \sup_{(y_1,y_2)\in L} \frac{\left(\left(\frac{\|T_m^{-1}(y_1)\|}{\|T_m^{-1}\|}\right)^2 + \left(\frac{\|U_m^{-1}(y_2)\|}{\|U_m^{-1}\|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant 1.$$

Samuti saame, et

$$\|J_m\| \leqslant \|T_m^{-1}\|\|T_m\|\|P_m\| + \|U_m^{-1}\|\|U_m\|\|Q_m|_E\| \leqslant \|T_m^{-1}\|\|T_m\| + \|J_m^{-1}\|\|J_m\|\|Q_m|_E\|.$$

Järelikult

$$\|J_m^{-1}\|\|J_m\| \leqslant \|T_m^{-1}\|\|T_m\| + \|J_m^{-1}\|\|J_m\|\|Q_m|_E\|,$$

millest saame, et

$$\|J_m^{-1}\|\|J_m\|(1 - \|Q_m|_E\|) \leqslant \|T_m^{-1}\|\|T_m\|.$$

Kuna ruum L on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $\ell_2^{\dim P_m(E)+\dim Q_m(E)}$, siis on tema alamruum $J_m(E)$ isomeetriliselt isomorfne ruumiga ℓ_2^n. Järelikult

$$d_{BM}(E, \ell_2^n) = d_{BM}(E, J_m(E)) \leqslant \|(J_m|_E)^{-1}\|\|J_m|_E\| \leqslant \|J_m^{-1}\|\|J_m\|.$$

Seega

$$d_{BM}(E, \ell_2^n)(1 - \|Q_m|_E\|) \leqslant \|T_m^{-1}\|\|T_m\|,$$

mis tähendab, et

$$\begin{aligned} d_{BM}(E, \ell_2^n)(1 - \|Q_m|_E\|) &\leqslant d_{BM}(P_m(E), \ell_2^{\dim P_m(E)}) \leqslant d_n(\ell_2((X_i)_{i=1}^m)) \\ &\leqslant \max\{d_n(X_1), \dots, d_n(X_m)\} \leqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} d_n(X_i). \end{aligned}$$

Näitame nüüd, et $\lim\limits_{m\to\infty} \|Q_m|_E\| = 0$. Kuna E on lõplikumõõtmeline, siis lemma 1.17 põhjal on tema ühikkera B_E suhteliselt kompaktne. Seega rakendades lemmat 3.9 operaatoritele $Q_1, Q_2, \dots$ saame võrduse

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x \in B_E} \|Q_m(x)\| = 0,$$

mis tähendab, et $\lim\limits_{m\to\infty} \|Q_m|_E\| = 0$. Järelikult $d_{BM}(E, \ell_2^n) \leqslant \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} d_n(X_i)$, millest saamegi soovitud võrratuse

$$d_n(X) \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} d_n(X_i).$$

□

Lause 3.11. *Olgu X Banachi ruum, millel leiduvad alamruumid Y ja Z nii, et $X = Y \oplus Z$. Siis ruum X on isomorfne ruumiga $\ell_2(Y, Z)$.*

Tõestus. Saame defineerida bijektsiooni $J\colon \ell_2(Y, Z) \to X$ nii, et iga $y \in Y$ ja $z \in Z$ korral

$J(y,z) = y + z$. On lihtsasti näidatav, et J on lineaarne. Seega

$$\|J\| = \sup_{y\in Y, z\in Z} \frac{\|y+z\|}{(\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \sup_{y\in Y, z\in Z} \frac{\|y\| + \|z\|}{(\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \sqrt{2}.$$

Kuna J on tõkestatud ja lineaarne, siis vastavalt Banachi teoreemile pöördoperaatorist saame, et ka J^{-1} on pidev ja lineaarne. Seega on J isomorfism, mis tähendab, et ruumid X ja $\ell_2(Y,Z)$ on isomorfsed. $\square$

3.3 Asümptootiliselt Hilberti ruum

Definitsioon 3.12. Öeldakse, et Banachi ruum X on *asümptootiliselt Hilberti ruum*, kui leiduvad alamruumid $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\dim X/Y_n < \infty \quad \text{ja} \quad \sup_n d_n(Y_n) < \infty.$$

Lemma 3.13. *Olgu X Banachi ruum ja Y tema alamruum. Kui* $\dim X/Y < \infty$*, siis leidub alamruum $Z \subset X$ nii, et $X = Y \oplus Z$. Seejuures* $\dim Z = \dim X/Y$.

Tõestus. Kui $\dim X/Y < \infty$, siis ruumil X/Y leidub baas $x_1 + Y, \ldots, x_k + Y \in X/Y$, kus $x_1, \ldots, x_k \in X$. Valime iga $i = 1, \ldots, k$ korral $x_i^* \in (X/Y)^*$ niimoodi, et $x_i^*(x_i + Y) = 1$ ja $x_i(x_j + Y) = 0$, kui $i \neq j$. Defineerime projektori $P\colon X \to X$ nii, et iga $x \in X$ korral $P(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i^*(x+Y)x_i$. Lihtne kontroll näitab, et $(I_X - P)(X) = Y$. Seega, kui $Z := P(X)$, siis $X = Y \oplus Z$. Vahetult P definitsioonist saame, et $\dim Z \leqslant \dim X/Y$ ja kuna $x_1 + Y, \ldots, x_k + Y$ on lineaarselt sõltumatud, peavad ka $x_1, \ldots, x_k$ olema lineaarselt sõltumatud, mis tähendab, et $\dim Z = \dim X/Y$. $\square$

Teoreem 3.14 ([JSz2, Proposition 2.1])**.** *Kui X on asümptootiliselt Hilberti ruum, siis iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $\alpha > 0$ korral $d_n(X) = O(n^\alpha)$.*

Tõestus. Kuna X on asümptootiliselt Hilberti ruum, siis leiduvad $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\dim X/Y_n < \infty$ ja $\sup_n d_n(Y_n) < \infty$. Olgu $\beta = \sup_n d_n(Y_n)$. Olgu $m \in \mathbb{N}$ selline, et $\beta^2 \leqslant m^\alpha$. Seega lemma 3.1 põhjal iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$d_{m^k}(Y_m) \leqslant d_m(Y_m)^{2k} \leqslant \beta^{2k} \leqslant m^{\alpha k}.$$

Seega $d_n(Y_m) = O(n^\alpha)$.

Kuna X/Y_m on lõplikumõõtmeline, siis lemma 3.13 põhjal leidub alamruum $Z \subset X$, nii et $X = Y \oplus Z$. See tähendab, et vastavalt lausele 3.11 on ruum X isomorfne ruumiga $\ell_2(Y_m, Z)$. Järelikult leidub isomorfism $J\colon X \to \ell_2(Y_m, Z)$. Fikseerime n–mõõtmelise alamruumi $E \subset X$. Kasutades lauset 3.8 saame, et

$$\begin{aligned} d_{BM}(E, \ell_2^n) &\leqslant d_{BM}(E, J(E)) d_{BM}(J(E), \ell_2^n) \\ &\leqslant \|J_E\| \|(J_E)^{-1}\| d_n(\ell_2(Y_m, Z)) \\ &\leqslant \|J\| \|J^{-1}\| \max\{d_n(Y_m), d_n(Z)\}. \end{aligned}$$

Seega

$$d_n(X) \leqslant \|J\| \|J^{-1}\| \max\{d_n(Y_m), d_n(Z)\},$$

millest koos teadmisega, et $d_n(Y_m) = O(n^\alpha)$, järeldub võrdus $d_n(X) = O(n^\alpha)$. $\square$

3.4 Γ–ruum

Selles alajaotuses defineerime Γ–ruumi ja näitame, et kui kompleksne aproksimatsiooniomadusega Banachi ruum on Γ–ruum, siis on ta nõrk Lidski ruum. See definitsioon pärineb Johnsonilt ja Szankowskilt [JSz2, lk 393].

Olgu X Banachi ruum, olgu $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in (X^*)^n$ ja olgu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$. Tähistame

$$G(\varphi, x) = \det(\varphi_i(x_j))_{i,j=1}^n.$$

Defineerime nüüd

$$\begin{aligned} G_n(X) &= \sup\{|G(\varphi, x)| \mid \varphi \in B_{X^*}^n, x \in B_X^n\}; \\ \Gamma_n(X) &= G_n(X)^{\frac{1}{n}}; \\ \Gamma_{\inf}(X) &= \liminf_{n\to\infty} \Gamma_n(X). \end{aligned}$$

Definitsioon 3.15. Öeldakse, et Banachi ruum X on Γ*–ruum*, kui kehtib, et $\Gamma_{\inf}(\mathrm{X}) < \infty$ ja X on asümptootiliselt Hilberti ruum.

Märkus 3.16. Johnson ja Szankowski [JSz2, Corollary 3.1] on tõestanud, et tingimusest $\Gamma_{\inf}(\mathrm{X}) < \infty$ järeldub, et X on asümptootiliselt Hilberti ruum. Seega ei ole see tingimus Γ–ruumi definitsioonis tegelikult vajalik.

Tõestame kõigepealt järgneva abitulemuse.

Lause 3.17 ([JSz2, Lemma 2.1]). *Kui X on Banachi ruum, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $G_n(X) \leqslant d_n(X)^n$.*

Tõestus. Fikseerime $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B_X$ ja $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in B_{X^*}$. Kui $x_1, \ldots, x_n$ või $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ on lineaarselt sõltuvad, siis $G(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0$. Seega eeldame, et nad on lineaarselt sõltumatud. Olgu $E = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ja olgu iga $i = 1, \ldots, n$ korral $\gamma_i = \varphi_i\,|_E$, siis $\gamma_i \in E^*$ ja $\|\gamma_i\| \leqslant \|\,\varphi_i\,\| \leqslant 1$. Sellisel juhul on ruum E ruumi X n–mõõtmeline alamruum. Seega $d_{BM}(E, \ell_2^n) \leqslant d_n(X)$, mis tähendab, et leidub isomorfism J ruumide E ja ℓ_2^n vahel, nii et $\|J\|\|J^{-1}\| \leqslant d_n(X)$. Vaatleme isomorfismi $J' = \|J^{-1}\|J$. Iga $i = 1, \ldots, n$ korral defineerime operaatori $\beta_i(x) = \gamma_i((J')^{-1}x)$. Lihtne kontroll näitab, et β_i on lineaarne ja samuti kehtib, et

$$\|\beta_i\| = \sup_{x \in B_{\ell_2^n}} \|\gamma_i((J')^{-1}x)\| \leqslant \|\gamma_i\|\|(J')^{-1}\| \leqslant \frac{\|(J)^{-1}\|}{\|(J)^{-1}\|} = 1.$$

Seega $\beta_i \in (\ell_2^n)^*$. Vastavalt Rieszi teoreemile pideva lineaarse funktsionaali üldkujust leidub iga $i = 1, \ldots, n$ korral $y_i \in \ell_2^n$ nii, et iga $x \in \ell_2^n$ korral

$$\beta_i(x) = (x, y_i) \quad \text{ja} \quad \|y_i\| = \|\beta_i\|,$$

kus $(\ ,\ )$ tähistab skalaarkorrutist. Märgime, et ruumis ℓ_2^n on elementide $(\xi_i)_{i=1}^n$ ja $(\eta_i)_{i=1}^n$ korral skalaarkorrutis defineeritud võrdusega

$$((\xi_i)_{i=1}^n, (\eta_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i}.$$

Elementide $(a_{1,j})_{j=1}^n, \ldots, (a_{n,j})_{j=1}^n \in \ell_2^n$ korral defineerime

$$V((a_{1,j})_{j=1}^n, \ldots, (a_{n,j})_{j=1}^n) := \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n.$$

Näitame nüüd, et

$$|G(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)| = |V(J'x_1, \ldots, J'x_n)||(V(y_1, \ldots, y_n)|.$$

Olgu iga $i = 1, \ldots, n$ korral $J'x_i = (\xi_{i,j})_{j=1}^n$ ja $y_i = (\eta_{i,j})_{j=1}^n$. Sellisel juhul saame, et

$$|(V(y_1, \ldots, y_n)| = |\det((\eta_{i,j}))_{i,j=1}^n| = |\det((\overline{\eta_{i,j}}))_{i,j=1}^n| = |\det((\overline{\eta_{j,i}}))_{i,j=1}^n|.$$

Seega

$$\begin{aligned}
|V(J'x_1,\dots,J'x_n)||(V(y_1,\dots,y_n)| &= |\det((\xi_{i,j}))_{i,j=1}^n||\det((\overline{\eta_{j,i}}))_{i,j=1}^n| \\
&= \left|\det\left(\sum_{k=1}^n \xi_{i,k}\overline{\eta_{j,k}}\right)_{i,j=1}^n\right| \\
&= |\det((J'x_i,y_j))_{i,j=1}^n| \\
&= |\det(\beta_j(J'x_i))_{i,j=1}^n| \\
&= |\det(\gamma_j((J')^{-1}(J'x_i)))_{i,j=1}^n| \\
&= |\det(\varphi_j(x_i))_{i,j=1}^n| \\
&= |G(x_1,\dots,x_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n)|.
\end{aligned}$$

Kasutame nüüd Hadamard'i võrratust (vt nt [Ga, Theorem 14.1.1]). Hadamard'i võrratus ütleb, et $(a_{1,j})_{j=1}^n,\dots,(a_{n,j})_{j=1}^n \in \ell_2^n$ korral

$$|\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n| \leqslant \prod_{i=1}^n \|(a_{i,j})_{j=1}^n\|.$$

Seega saame otse sellest võrratusest, et

$$|V(J'x_1,\dots,J'x_n)| \leqslant \prod_{i=1}^n \|J'x_i\| \leqslant \prod_{i=1}^n \|J'\|\|x_i\| \leqslant (\|J^{-1}\|\|J\|)^n \leqslant d_n(X)^n$$

ja

$$|(V(y_1,\dots,y_n)| \leqslant \prod_{i=1}^n \|y_i\| = \prod_{i=1}^n \|\beta_i\| \leqslant 1.$$

Järelikult $|G(x_1,\dots,x_n,\varphi_1,\dots,\varphi_n)| \leqslant d_n(X)^n$, mis tähendab, et $G_n(X) \leqslant d_n(X)^n$. □

Teoreem 3.18 ([JSz2, Theorem 4.1]). *Kui aproksimatsiooniomadusega kompleksne Banachi ruum X on Γ–ruum, siis on ta nõrk Lidski ruum*

Enne selle teoreemi tõestuse juurde asumist, tõestame mõned abitulemused.

Olgu X Banachi ruum. Iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n \in X$ ja $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$ korral tähistame

$$\alpha_n(x_1^* \otimes x_1,\dots,x_n^* \otimes x_n) = \frac{1}{n!}\det(x_i^*(x_j))_{i,j=1}^n.$$

Seda definitsiooni saame laiendada lõplikumõõtmelistele operaatoritele niimoodi, et α_n on n–lineaarne. See tähendab, et kui $U_1 = \sum_{i=1}^m x_{1,i}^* \otimes x_{1,i},\dots,U_n = \sum_{i=1}^m x_{n,i}^* \otimes x_{n,i} \in \mathcal{F}(\mathrm{X})$

on lõplikumõõtmelised operaatorid, siis

$$\alpha_n(U_1, \dots, U_n) = \sum_{i_1=1,\dots,i_n=1}^{m} \alpha_n(x^*_{1,i_1} \otimes x_{1,i_1}, \dots, x^*_{n,i_n} \otimes x_{n,i_n}).$$

Nüüd saame seda definitsiooni pidevalt laiendada tuumaoperaatoritele. See tähendab, et kui $T_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x^*_{1,i} \otimes x_{1,i}, \dots, T_n = \sum_{i=1}^{\infty} x^*_{n,i} \otimes x_{n,i} \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ on tuumaoperaatorid, siis

$$\alpha_n(T_1, \dots, T_n) = \lim_{m\to\infty} \alpha_n \left(\sum_{i=1}^{m} x^*_{1,i} \otimes x_{1,i}, \dots, \sum_{i=1}^{m} x^*_{n,i} \otimes x_{n,i} \right).$$

Tõestust, miks selline laiendamine on korrektne, saab vaadata Pisier raamatust [Pis, Chapter 15].

Lemma 3.19 ([Pis, Proposition 15.3])**.** *Tuumaoperaatorite* $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ *korral*

$$|\alpha_n(T_1, \dots, T_n)| \leqslant \frac{G_n(X)}{n!} \|T_1\|_\wedge \|T_2\|_\wedge \dots \|T_n\|_\wedge.$$

Tõestus. Tõestame väite kõigepealt juhul, kui leiduvad $x_1, \dots, x_n \in X$ ja $x^*_1, \dots, x^*_n \in X^*$ nii, et $T_1 = x^*_1 \otimes x_1, \dots, T_n = x^*_n \otimes x_n$. Paneme tähele, et siis definitsiooni kohaselt ja tänu sellele, et G on $2n$–lineaarne, saame, et

$$\begin{aligned}
|\alpha_n(T_1, \dots, T_n)| &= \frac{1}{n!} |G((x^*_1, \dots, x^*_n), (x_1, \dots, x_n))| \\
&= \frac{1}{n!} \|x^*_1\| \dots \|x^*_n\| \|x_1\| \dots \|x_n\| \left| G\left(\left(\frac{x^*_1}{\|x^*_1\|}, \dots, \frac{x^*_n}{\|x^*_n\|} \right), \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{n!} \|T_1\|_\wedge \|T_2\|_\wedge \dots \|T_n\|_\wedge G_n(X).
\end{aligned}$$

Nüüd saame lõplikumõõtmeliste operaatorite

$$T_1 = \sum_{i=1}^{m} x^*_{1,i} \otimes x_{1,i}, \dots, T_n = \sum_{i=1}^{m} x^*_{n,i} \otimes x_{n,i} \in \mathcal{F}(\mathrm{X})$$

korral, et

$$\begin{aligned}|\alpha_n(T_1,\dots,T_n)| &\leqslant \sum_{i_1=1,\dots,i_n=1}^{m} |\alpha_n(x^*_{1,i_1}\otimes x_{1,i_1},\dots,x^*_{n,i_n}\otimes x_{n,i_n})| \\ &\leqslant \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1,\dots,i_n=1}^{m} \|x^*_{1,i_1}\|\dots\|x^*_{n,i_n}\|\|x_{1,i_1}\|\dots\|x_{n,i_n}\|G_n(X) \\ &= \frac{1}{n!}G_n(X)\sum_{i=1}^{m}\|x^*_{1,i}\|\|x_{1,i}\|\dots\sum_{i=1}^{m}\|x^*_{n,i}\|\|x_{n,i}\|.\end{aligned}$$

Seega, kuna see võrratus kehtib kõigi operaatorite $T_1,\dots,T_n$ esituste korral, siis

$$|\alpha_n(T_1,\dots,T_n)| \leqslant \frac{G_n(X)}{n!}\|T_1\|_\wedge\|T_2\|_\wedge\dots\|T_n\|_\wedge.$$

Viimaks jääb vaadata juht, kus $T_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x^*_{1,i}\otimes x_{1,i},\dots,T_n = \sum_{i=1}^{\infty} x^*_{n,i}\otimes x_{n,i} \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ on tuumaoperaatorid. Sellisel juhul

$$\begin{aligned}|\alpha_n(T_1,\dots,T_n)| &= \lim_{m\to\infty}\left|\alpha_n\left(\sum_{i=1}^{m} x^*_{1,i}\otimes x_{1,i},\dots,\sum_{i=1}^{m} x^*_{n,i}\otimes x_{n,i}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{G_n(X)}{n!}\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m} x^*_{1,i}\otimes x_{1,i}\right\|_\wedge\dots\left\|\sum_{i=1}^{m} x^*_{n,i}\otimes x_{n,i}\right\|_\wedge.\end{aligned}$$

Kuna see võrratus kehtib kõigi operaatorite $T_1,\dots,T_n$ esituste korral, siis

$$|\alpha_n(T_1,\dots,T_n)| \leqslant \frac{G_n(X)}{n!}\|T_1\|_\wedge\|T_2\|_\wedge\dots\|T_n\|_\wedge.$$

Seega on lemma väide tõestatud kõigi tuumaoperaatorite jaoks. $\square$

Olgu $T \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$. Siis tähistame lihtsustavalt $\alpha_n(T) = \alpha_n(T,\dots,T)$. Kasutades lemmat 3.19 ning lauseid 3.17 ja 3.3 saame, et

$$|\alpha_n(T)| \leqslant \frac{G_n(X)}{n!}\|T\|^n_\wedge \leqslant \frac{d_n(X)^n}{n!}\|T\|^n_\wedge \leqslant \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}\|T\|^n_\wedge,$$

millest

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n(T)|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n!^{\frac{1}{n}}}\|T\|_\wedge = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\frac{n}{e}}\|T\|_\wedge = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}n^{\frac{1}{2}}}\|T\|_\wedge = 0.$$

Seega saame defineerida funktsiooni $D_T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nii, et iga $z \in \mathbb{C}$ korral

$$D_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(T) z^n,$$

kus $\alpha_0(T) = 1$. Seejuures on D_T täisfunktsioon.

Meil läheb vaja järgnevat Grothendiecki tulemust, mille tõestust me siinkohal ei esita.

Lemma 3.20 ([Gr, Theoreme 4]). *Arv $\lambda \neq 0$ on tuumaoperaatori T omaväärtus parajasti siis, kui $\dfrac{1}{\lambda}$ on D_T nullkoht.*

Järgmises lemmas läheb vaja Stirlingi valemit. Tuletame meelde, et selle üks variant (vt nt [K, lk 82]) ütleb, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\alpha}{12n}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Lemma 3.21 ([JSz2, Proposition 4.1]). *Kui X on Banachi ruum ja $T \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ on kvaasinilpotentne, siis leidub $a \in \mathbb{C}$ nii, et $D_T(z) = e^{az}$ iga $z \in \mathbb{C}$ korral.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et D_T järk on väiksem kui 2. Olgu D_T järk σ, siis lemma 1.29 põhjal

$$\sigma = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln\left(\frac{1}{|\alpha_n(T)|}\right)}.$$

Teoreemi 3.14 põhjal teame, et leidub $\gamma < \dfrac{1}{2}$ nii, et $d_n(X) = O(n^\gamma)$. Seega leidub $M > 0$ nii, et $d_n(X) < Mn^\gamma$. Kasutades seda tulemust, Stirlingi valemit, lemmat 3.19 ja lauset 3.17 saame, et

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{|\alpha_n(T)|}\right) \geqslant \ln\left(\frac{n!}{G_n(X)\|T\|_\wedge^n}\right) &\geqslant \ln\left(\frac{n^n e^{-n}}{d_n(X)^n \|T\|_\wedge^n}\right)\\
&= n(\ln n - 1 - \ln d_n(X) - \ln \|T\|_\wedge)\\
&\geqslant n(\ln n - 1 - \ln (Mn^\gamma) - \ln \|T\|_\wedge)\\
&= n(1-\gamma)\ln n - n(1 + \ln M + \ln \|T\|_\wedge).
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\sigma &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{n(1-\gamma)\ln n - n(1 + \ln M + \ln \|T\|_\wedge)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{(1-\gamma)\ln n - (1 + \ln M + \ln \|T\|_\wedge)} = \frac{1}{1-\gamma} < 2.
\end{aligned}$$

Kuna T on kvaasinilpotentne, siis ei leidu tal nullist erinevaid omaväärtusi, mis lemma 3.20 kohaselt tähendab, et funktsioonil D_T puuduvad nullist erinevad nullkohad ning kuna $D_T(0) = 1$, siis tal puuduvad üldse nullkohad. Järelikult Hadamard'i faktoriseerimisteoreemi kohaselt iga $z \in \mathbb{C}$ korral $D_T(z) = e^{g(z)}$, kus g on polünoom, mille aste on väiksem kui 2. Seega leiduvad $a, b \in \mathbb{C}$ nii, et $D_T(z) = e^{az+b}$. Kuna $D_T(0) = 1$, siis $e^b = 1$ ehk $b = 0$. Seega $D_T(z) = e^{az}$. □

Lemma 3.22 ([JSz2, Lemma 4.2])**.** *Olgu X Banachi ruum. Iga $T \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub C nii, et iga n korral*

$$|\alpha_n(T)| \leqslant \frac{C}{n!} G_n(X)\, \varepsilon^n \,. \tag{3.1}$$

Tõestus. Kuna $\mathcal{N}(\mathrm{X}) \subset \overline{\mathcal{F}(\mathrm{X})}$, siis leidub $U \in \mathcal{F}(\mathrm{X})$ nii, et $\|T - U\|_\wedge < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tähistame $V := T - U$. On lihtne näha, et kui α_n argumentide järjekorda vahetada, siis tulemus sellest ei muutu. Seega kuna α_n on lineaarne oma iga argumendi suhtes, siis

$$\alpha_n(T) = \alpha_n(U + V) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha_n(\underbrace{U, \dots, U}_{j \text{ korda}}, V, \dots, V).$$

Kuna U on lõplikumõõtmeline, siis leiduvad $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in X$ ja $x_1^*, \dots, x_k^* \in X^*$ nii, et $U = \sum_{i=1}^{k} x_i^* \otimes x_i$. Seega kui $n > k$, siis $\alpha_n(\underbrace{U, \dots, U}_{k+1 \text{ korda}}, \dots) = 0$, sest igas determinandis, mille summa see on, on vähemalt 2 samasugust rida, mis tähendab, et vastav determinant on 0. Järelikult kui $n \geqslant k$, siis

$$\alpha_n(T) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \alpha_n(\underbrace{U, \dots, U}_{j \text{ korda}}, V, \dots, V). \tag{3.2}$$

Lemmat 3.19 ja eeldust, et $\|V\|_\wedge < \dfrac{\varepsilon}{2}$ kasutades saame nüüd, et

$$|\alpha_n(\underbrace{U, \dots, U}_{j \text{ korda}}, V, \dots, V)| \leqslant \frac{G_n(X)}{n!} \|U\|_\wedge^j \|V\|_\wedge^{n-j} \leqslant \frac{G_n(X)}{n!} \frac{\varepsilon^n}{2^n} \frac{\|U\|_\wedge^j 2^j}{\varepsilon^j}. \tag{3.3}$$

Kui $j < k$, siis

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \leqslant n(n-1)\dots(n-j+1) \leqslant n^j \leqslant n^k. \tag{3.4}$$

Seega kui $n \geqslant k$, siis (3.2), (3.3) ja (3.4) põhjal

$$|\alpha_n(T)| \leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \frac{G_n(X)}{n!} \frac{\varepsilon^n}{2^n} \frac{\|U\|_\wedge^j 2^j}{\varepsilon^j} \leqslant \frac{G_n(X)}{n!} \varepsilon^n \left(\frac{n^k}{2^n} \sum_{j=0}^{k} \frac{\|U\|_\wedge^j 2^j}{\varepsilon^j} \right).$$

Valides $C_1 = \sup_{n \geqslant k} \frac{n^k}{2^n} \sum_{j=0}^{k} \frac{\|U\|_\wedge^j 2^j}{\varepsilon^j}$ ja $C_2 = \max_{1 \leqslant n \leqslant k} \frac{|\alpha_n(T)| n!}{G_n(X)\, \varepsilon^n}$, siis $C = \max\{C_1, C_2\}$ korral kehtib (3.1). □

Esitame nüüd teoreemi 3.18 tõestuse.

Tõestus. Γ–ruumi definitsioonist saame, et leidub K nii, et $\liminf_{n\to\infty} \Gamma_n(X) < K$. Seega leidub lõpmata palju arve n nii, et $\Gamma_n(X) < K$ ehk $G_n(X) < K^n$. Kuna X on asümptootiliselt Hilberti ruum, siis teoreemi 3.14 põhjal $d_n(X) = O(n^\gamma)$ iga $\gamma > 0$ korral. Olgu $T \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ kvaasinilpotentne. On vaja tõestada, et $\operatorname{tr} T = 0$. Lemma 3.21 põhjal leidub a nii, et $D_T(z) = e^{az}$. Seega $D_T(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}$ ja kuna definitsiooni põhjal $D_T(z) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_n(T) z^n$, siis järelikult $\alpha_n(T) = \frac{a^n}{n!}$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Lemma 3.22 põhjal leidub C nii, et iga n korral $\frac{|a|^n}{n!} = |\alpha_n(T)| \leqslant \frac{C}{n!} G_n(X)\, \varepsilon^n$. Seega leidub lõpmata palju arve n nii, et $|a| \leqslant C^{\frac{1}{n}} G_n(X)^{\frac{1}{n}}\, \varepsilon \leqslant C^{\frac{1}{n}} K\, \varepsilon$, millest saame, et $a = 0$ ja seega $\alpha_1(T) = 0$. Olgu $T = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes x_i$, siis $0 = \alpha_1(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_1(x_i^* \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i) = \operatorname{tr} T$. Järelikult on ruum X nõrk Lidski ruum. □

3.5 Polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum

Selles alajaotuses tutvustame polünomiaalse kasvuga asümptootiliselt Hilberti ruumi ja näitame, et see on Γ–ruum. Kõigepealt aga tõestame kaks edaspidiseks vajalikku tulemust.

Lause 3.23 ([JSz2, Lemma 2.1])**.** *Kui X on lõpmatumõõtmeline Banachi ruum, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$G_n(X) \leqslant G_{n+1}(X).$$

Tõestus. Olgu $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in B_{X^*}^n$ ja $(x_1, \ldots, x_n) \in B_X^n$. Olgu $\varphi_{n+1} \in B_{X^*}$ selline, et $\|\, \varphi_{n+1} \,\| = 1$ ja $\varphi(x_i) = 0$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral. Kuna $\|\, \varphi_{n+1} \,\| = 1$, siis peab leiduma

$x_{n+1} \in B_X$ nii, et $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = 1$. Seega saame, et

$$G(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}, x_1, \ldots, x_{n+1}) = G(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_n),$$

millest järeldub, et $G_n(X) \leqslant G_{n+1}(X)$. $\square$

Lemma 3.24 ([JSz2, Lemma 5.1])**.** *Olgu X lõpmatumõõtmeline Banachi ruum. Olgu $P\colon X \to X$ selline projektor, et* $\dim P(X) = k \in \mathbb{N}$. *Kui*

$$Y := \ker P \quad \textit{ja} \quad K = \max(\|P\|, \|I_X - P\|),$$

siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\Gamma_n(X) \leqslant K^2 n^{\frac{2k}{n}} d_n(Y).$$

Tõestus. Funktsionaali $\varphi \in X^*$ korral tähistame

$$\varphi^1(y) = \varphi(Py) \quad \text{ja} \quad \varphi^0(y) = \varphi((I_X - P)y), \quad y \in X$$

ning elemendi $x \in X$ korral tähistame

$$x^1 = Px \quad \text{ja} \quad x^0 = (I_X - P)x.$$

Märkame, et $\varphi \in X^*$ korral $\varphi = \varphi^1 + \varphi^0$ ja $x \in X$ korral $x = x^1 + x^0$. Olgu $\varphi \in (X^*)^n$ ja $x \in X^n$. Kui $\varepsilon, \delta \in \{0,1\}^n$, siis tähistame

$$G_{\varepsilon,\delta}(\varphi, x) = \det(\varphi_i^{\delta_i}(x_j^{\varepsilon_j}))_{i,j=1}^n.$$

Kuna G on $2n$–lineaarne, siis

$$G(\varphi, x) = \sum_{\varepsilon,\delta \in \{0,1\}^n} G_{\varepsilon,\delta}(\varphi, x).$$

Paneme tähele, et $\varphi^1(x^0) = \varphi(P((I_X - P)x)) = \varphi(Px - Px) = 0$, analoogselt ka $\varphi^0(x^1) = 0$. Seega, kui $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \neq \sum_{j=1}^n \delta_j$, siis $G_{\varepsilon,\delta}(\varphi, x) = 0$. Kui $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ on sellised, et $|A| = |B|$, siis defineerime $G^1_{A,B}(\varphi, x)$ kui maatriksi $[\varphi_i^1(x_j^1)]_{i,j=1}^n$ selline miinor, kuhu on valitud need read, mille järjekorranumber sisaldub hulgas A ja need veerud, mille järjekorranumber sisaldub hulgas B. Sarnaselt defineerime, et $G^0_{A,B}(\varphi, x)$ on maatriksi $[\varphi_i^0(x_j^0)]_{i,j=1}^n$ selline miinor, kuhu on valitud need read, mille järjekorranumber ei sisaldu hulgas A ja need veerud, mille järjekorranumber ei sisaldu hulgas B. Nüüd saame, et kui

$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j$, siis

$$|G_{\varepsilon,\delta}(\varphi, x)| = |G^1_{A,B}(\varphi, x) G^0_{A,B}(\varphi, x)|,$$

kus $A = \{i \mid \varepsilon_i = 1\}$ ja $B = \{i \mid \delta_i = 1\}$. Eelduse põhjal $\dim P(X) = k$. Seega kui $|A| = |B| > k$, siis $G^1_{A,B} = 0$, sest tekkival maatriksil peab olema vähemalt üks rida, mis avaldub teiste kaudu. Järelikult saame, et

$$|G(\varphi, x)| \leqslant \sum_{A,B \subset \{1,\ldots,n\}, |A|=|B| \leqslant k} |G^1_{A,B}(\varphi, x) G^0_{A,B}(\varphi, x)|.$$

Nüüd saame $|A| = |B| = j$ korral, et kui $\varphi \in B^n_{X^*}$ ja $x \in B^n_X$, siis

$$|G^1_{A,B}(\varphi, x)| \leqslant \|P\|^{2j} G_j(P(X)) \leqslant K^{2j} G_j(P(X))$$

ja

$$|G^0_{A,B}(\varphi, x)| \leqslant \|I_X - P\|^{2(n-j)} G_{n-j}(Y) \leqslant K^{2(n-j)} G_{n-j}(Y).$$

Seega saame, et

$$|G(\varphi, x)| \leqslant K^{2n} \sum_{0}^{k} \binom{n}{j}^2 G_j(P(X)) G_{n-j}(Y).$$

Lausete 3.23 ja 3.17 põhjal $G_{n-j}(Y) \leqslant G_n(Y) \leqslant d_n(Y)^n$ ning lausete 3.17 ja 3.3 põhjal $G_j(P(X)) \leqslant d_j(P(X))^n \leqslant j^{\frac{j}{2}} \leqslant j!$. Järelikult

$$|G(\varphi, x)| \leqslant K^{2n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}^2 j! d_n(Y)^n \leqslant K^{2n} d_n(Y)^n \sum_{j=0}^{k} \frac{n^{2j}}{j!} \leqslant K^{2n} n^{2k} d_n(Y)^n,$$

millest saamegi võrratuse

$$\Gamma_n(X) \leqslant K^2 n^{\frac{2k}{n}} d_n(Y).$$

□

Definitsioon 3.25 ([JSz2, lk 401])**.** Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et X on *polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum* kui leidub $\lambda > 0$, leidub $K > 0$ ja leiduvad alamruumid $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ nii, et

$$\dim X/Y_n = O(n^\lambda), \tag{3.5}$$

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(Y_n) < \infty \tag{3.6}$$

ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub projektor $P_n\colon X \to Y_n$ nii, et

$$P_n(X) = Y_n \quad \text{ja} \quad \|P_n\| < K. \tag{3.7}$$

Lause 3.26 ([JSz2, lk 394]). *Kui X on polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum, siis X on asümptootiliselt Hilberti ruum.*

Tõestus. Teame, et leidub $\lambda > 0$ ja leiduvad alamruumid $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ nii, et tingimused (3.5) ja (3.6) on täidetud. Võrdusest (3.6) saame, et (Y_n) sisaldab osajada (Y_{k_n}) nii, et $\sup_n d_{k_n}(Y_{k_n}) < \infty$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $d_n(Y_{k_n}) \leqslant d_{k_n}(Y_{k_n})$, siis saame, et $\sup_n d_n(Y_{k_n}) < \infty$. Võrdusest (3.5) saame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\dim X/Y_{k_n} < \infty$. Seega oleme saanud, et X on asümptootiliselt Hilberti ruum. □

Lemma 3.27 ([JSz2, Proposition 5.1]). *Kui X on polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum, siis iga $\lambda > 0$ korral leiduvad $K > 0$, alamruumid $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ ja projektorid $P_1, P_2, \ldots$ nii, et (3.5), (3.6) ja (3.7) on täidetud.*

Tõestus. Definitsiooni põhjal leiduvad $\lambda > 0$, $K > 0$, alamruumid $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ ja projektorid $P_1, P_2, \ldots$ nii, et (3.5), (3.6) ja (3.7) on täidetud. Seega leiduvad naturaalarvud $n_1 < n_2 < \ldots$ ja arv $C > 0$ nii, et

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} d_{n_i}(Y_{n_i}) < \infty \quad \text{ja} \quad \dim X/Y_{n_i} \leqslant C n_i^{\lambda}.$$

Fikseerime $\gamma > 0$. Olgu iga $i \in \mathbb{N}$ korral $m_i = n_i^{\gamma}$ ja $Z_{m_i} = Z_{m_i+1} = \ldots = Z_{m_{i+1}-1} = Y_{n_i}$. Lemma 3.1 põhjal

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(Z_n) \leqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} d_{m_i}(Z_{m_i}) \leqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} d_{n_i}(Z_{m_i})^{2\gamma} < \infty.$$

Nüüd saame, et iga $i \in \mathbb{N}$ ja $m_i \leqslant n < m_{i+1}$ korral

$$\dim X/Z_n = \dim X/Y_{n_i} \leqslant C n_i^{\lambda} = C m_i^{\frac{\lambda}{\gamma}} \leqslant C n^{\frac{\lambda}{\gamma}}.$$

Seega $\dim X/Z_n = O(n^{\frac{\lambda}{\gamma}})$. Valides γ piisavalt suure, saamegi soovitud väite. □

Teoreem 3.28 ([JSz2, Theorem 5.1]). *Kui aproksimatsiooniomadusega kompleksne lõpmatumõõtmeline Banachi ruum X on polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum, siis X on Γ–ruum.*

Tõestus. Definitsiooni ja lemma 3.27 põhjal leiduvad alamruumid $Y_1, Y_2, \ldots \subset X$ ja leidub arv $K > 0$ nii, et

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(Y_n) < \infty,$$

$$\dim X/Y_n = O(n^{\frac{1}{2}})$$

ning iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub projektor $P_n\colon X \to Y_n$ nii, et

$$P_n(X) = Y_n \quad \text{ja} \quad \|P_n\| < K.$$

Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $X = P_n(X) \oplus (I_X - P_n)(X)$. Seega lemma 3.13 põhjal $\dim(I_X - P_n)(X) = \dim X/Y_n = O(n^{\frac{1}{2}})$, mis tähendab, et leidub arv $C > 0$ nii, et $\dim(I_X - P_n)(X) < Cn^{\frac{1}{2}} < C\dfrac{n}{\ln n}$. Märkame, et $\|I_X - P_n\| \leqslant \|I_X\| + \|P_n\| < K + 1$. Rakendame nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral lemmat 3.24 projektorile $I_X - P_n$. Saame, et

$$\begin{aligned}\Gamma_n(X) &\leqslant (K+1)^2 n^{\frac{2\dim(I_X - P_n)(X)}{n}} d_n(\ker(I_X - P_n)) \\ &\leqslant (K+1)^2 n^{\frac{2C\frac{n}{\ln n}}{n}} d_n(P_n(X)) \leqslant (K+1)^2 e^{2C} d_n(Y_n).\end{aligned}$$

Seega

$$\Gamma_{\inf}(\mathrm{X}) = \liminf_{n\to\infty} \Gamma_n(X) \leqslant \liminf_{n\to\infty} (K+1)^2 e^{2C} d_n(Y_n) < \infty.$$

Järelikult kuna ruum X on lause 3.26 põhjal asümptootiliselt Hilberti ruum, siis on ta ka Γ–ruum. □

3.6 Näide Hilberti ruumiga mitteisomorfsest Lidski ruumist

Selles alajaotuses toome näite sellisest Banachi ruumist, mis on polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum, aga ei ole Hilberti ruum. Näide pärineb Johnsoni ja Szankowski artiklist [JSz2, lk 402].

Vaatleme kompleksseid ruume kujul $Z := \ell_2\left((\ell_{p_i}^{k_i})_{i=1}^{\infty}\right)$, kus $k_n \in \mathbb{N}$ ja $1 \leqslant p_n \leqslant 3$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tähistame $\delta_n = |p_n - 2|$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Kasutades lemmat 3.9 saab lihtsasti näidata, et ruumil Z on aproksimatsioonioma-dus. Tõepoolest, fikseerime kompaktse hulga K. Vaatleme iga $n \in \mathbb{N}$ korral projektorit $P_n\colon Z \to \ell_2((\ell_{p_i}^{k_i})_{i=1}^{n})$. On selge, et need projektorid on lõplikumõõtmelised. Sellisel juhul operaatorite jada $(I_Z - P_n)_{n=1}^{\infty}$ rahuldab lemma 3.9 tingimusi ja seega

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|(I_Z - P_n)(x)\| = 0.$$

Sellest järeldub koheselt, et ruumil Z on aproksimatsiooniomadus.

Lause 3.29. *Kui X on Hilberti ruumiga isomorfne Banachi ruum, siis*

$$\sup_n d_n(X) < \infty.$$

Tõestus. Olgu X isomorfne Hilberti ruumiga H. Olgu $T\colon X \to H$ isomorfism ruumide X ja H vahel. Fikseerime $n \in \mathbb{N}$ ja n–mõõtmelise alamruumi $E \subset X$. Siis $S := T|_E$ on isomorfism ruumide E ja $F := S(E)$ vahel, kusjuures $\|S\| \leqslant \|T\|$ ja $\|S^{-1}\| \leqslant \|T^{-1}\|$. Seega $d_{BM}(E,F) \leqslant \|S\|\|S^{-1}\| \leqslant \|T\|\|T^{-1}\|$. Kuna F on Hilberti ruumi kinnine alamruum, siis on ta Hilberti ruum ja seega isomeetriliselt isomorfne ruumiga ℓ_2^n. Järelikult vastavalt Banach–Mazuri kauguse omadusele 1.23 saame, et

$$d_{BM}(E, \ell_2^n) = d_{BM}(E,F) \leqslant \|T\|\|T^{-1}\|.$$

Seega $d_n(X) \leqslant \|T\|\|T^{-1}\|$. Järelikult $\sup\limits_n d_n(X) \leqslant \|T\|\|T^{-1}\| < \infty$. □

Lemma 3.30. *Kui $\sup\limits_m k_m^{\delta_m} = \infty$, siis Z ei ole isomorfne Hilberti ruumiga.*

Tõestus. Kui $p \leqslant 3$, siis $\dfrac{|p-2|}{6} \leqslant \dfrac{|p-2|}{2p} = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right|$. Järelikult vastavalt lemmale 3.4 saame, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$k_m^{\frac{1}{6}\delta_m} \leqslant k_m^{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p_m}\right|} = d_{BM}(\ell_{p_m}^{k_m}, \ell_2^{k_m}) = d_{k_m}(\ell_{p_m}^{k_m}).$$

Seega

$$\sup_n d_n(Z) \geqslant \sup_m d_{k_m}(Z) \geqslant \sup_m d_{k_m}(\ell_{p_m}^{k_m}) \geqslant \sup_m k_m^{\frac{1}{6}\delta_m} = \infty.$$

Järelikult lause 3.29 põhjal ei ole Z isomorfne Hilberti ruumiga. □

Iga $m \in \mathbb{N}$ korral tähistame $Z_m = \ell_2\big(\{0\}, \dots, \{0\}, \ell_{p_{m+1}}^{k_{m+1}}, \ell_{p_{m+2}}^{k_{m+2}}, \dots\big)$. On selge, et tegemist on ruumi Z alamruumidega. Märkame, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral $\dim Z/Z_m = \sum\limits_{n=1}^{m} k_m$.

Lemma 3.31. *Kui $(\delta_i)_{i=1}^{\infty}$ on kahanev jada, mis koondub nulliks, siis iga $n, m \in \mathbb{N}$ korral $d_n(Z_m) \leqslant n^{\delta_{m+1}}$.*

Tõestus. Fikseerime $n, m \in \mathbb{N}$. Kui $p \geqslant 1$, siis $\frac{|p-2|}{2} \geqslant \frac{|p-2|}{2p} = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$. Järelikult vastavalt lausele 3.6 kehtib, et iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$d_n(\ell_{p_i}^{k_i}) \leqslant n^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p_i}\right|} \leqslant n^{\frac{\delta_i}{2}}.$$

Seega lause 3.10 põhjal saame, et

$$d_n(Z_m) \leqslant \sup_{m<i\in\mathbb{N}} d_n(\ell_{p_i}^{k_i}) \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} n^{\frac{\delta_i}{2}}.$$

Kuna $(\delta_i)_{i=1}^{\infty}$ on kahanev jada, siis

$$d_n(Z_m) \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} n^{\frac{\delta_i}{2}} = n^{\frac{\delta_{m+1}}{2}} \leqslant n^{\delta_{m+1}},$$

millega on lemma tõestatud. □

Lemma 3.32. *Kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral $k_{n+1} \geqslant 2k_n$ ja $\delta_{n+1} = \frac{C}{\ln k_n}$, kus C on konstant, siis Z on polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum.*

Tõestus. Kui $1 \leqslant n < k_1$, siis valime $Y_n = Z$. Iga $m \in \mathbb{N}$ korral, kui $k_m \leqslant n < k_{m+1}$, siis valime, et $Y_n = Z_m$. Meil on vaja näidata, et

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(Y_n) < \infty, \tag{3.8}$$

$$\exists\, \lambda\colon\ \dim Z/Y_n = O(n^{\lambda}) \tag{3.9}$$

ja leidub $K \in \mathbb{R}$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub projektor $P_n\colon Z \to Y_n$ nii, et

$$P_n(Z) = Y_n \quad \text{ja} \quad \|P_n\| < K. \tag{3.10}$$

Teame, et iga n korral $Y_{k_n} = Z_m$. Kuna vastavalt eeldusele on jada $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ kasvav ja seega jada $(\delta_i)_{i=1}^{\infty}$ kahanev, siis lemma 3.31 põhjal

$$d_{k_n}(Y_{k_n}) = d_{k_n}(Z_n) \leqslant k_n^{\delta_{n+1}}.$$

Kuna jada (k_n) on kasvav, siis

$$\liminf_{n\to\infty} d_n(Y_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} d_{k_n}(Y_{k_n}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} k_n^{\delta_{n+1}} = \liminf_{n\to\infty} k_n^{\frac{C}{\ln k_n}} = e^C < \infty.$$

Tingimus (3.8) on meil seega näidatud.

Näitame nüüd tingimuse (3.9). Vastavalt Y_n valikutele leidub iga n korral m_n nii, et $Y_n = Z_{m_n}$ ja $n \geqslant k_{m_n}$. Seega

$$\dim Z/Y_n = \dim Z/Z_{m_n} = \sum_{n=1}^{m_n} k_{m_n} \leqslant 2k_{m_n} \leqslant 2n.$$

Järelikult $\dim Z/Y_n = O(n)$ ja tingimus (3.9) on täidetud.

Jääb näidata tingimus (3.10). Iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $m_n \in \mathbb{N}$ nii, et $Y_n = Z_{m_n}$. Defineerime iga n korral projektori $P_n \colon Z \to Y_n$ nii, et iga $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Z$ korral

$$P_n(x) = (0, \dots, 0, x_{m_n+1}, x_{m_n+2}, \dots).$$

Seega

$$\begin{aligned}\|P_n\| = \sup_{x \in B_Z} \|P_n(x)\| &= \sup_{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_Z} \left(\sum_{i=m_n+1}^{\infty} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sup_{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B_Z} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{x \in B_Z} \|x\| = 1.\end{aligned}$$

Seega on ka tingimus (3.10) täidetud ja lemma seega tõestatud. □

Lemma 3.33. *Kui iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln k_{n+1}}{\ln k_n} = \infty$ ja $\delta_{n+1} = \dfrac{C}{\ln k_n}$, kus C on konstant, siis Z ei ole isomorfne Hilberti ruumiga.*

Tõestus. Kuna

$$\sup k_n^{\delta_n} \geqslant \lim_{n\to\infty} k_n^{\delta_n} = \lim_{n\to\infty} k_n^{\frac{C}{\ln k_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} e^{C \frac{\ln k_{n+1}}{\ln k_n}} = \infty,$$

siis vastavalt lemmale 3.30 ei ole Z isomorfne Hilberti ruumiga. □

Teoreem 3.34. *Leidub Lidski ruum, mis ei ole isomorfne Hilberti ruumiga.*

Tõestus. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral valime $k_n = 2^{2^{2^n}}$, $p_1 = 3$ ja $p_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{\ln k_n}$. Siis $\delta_{n+1} = \dfrac{1}{\ln k_n}$. Kuna $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln k_{n+1}}{\ln k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2^{n+1}} \ln 2}{2^{2^n} \ln 2} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{2^n} = \infty$, siis vastavalt lemmale 3.33 ei ole Z isomorfne Hilberti ruumiga. Samas on selge, et $k_{n+1} \geqslant 2k_n$ iga n korral ja seega vastavalt lemmale 3.32 on Z polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum. Järelikult teoreemide 3.28, 3.18 ja 2.15 põhjal on Z Lidski ruum. □

3.7 Hilberti ruum kui Lidski ruum

Teoreem 3.35. *Lõpmatumõõtmeline kompleksne Hilberti ruum on Lidski ruum.*

Tõestus. Olgu X Hilberti ruum. Näitame, et X on polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum. Valime, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $Y_n = X$. Sellisel juhul saame igale alamruumile vastavaks projektoriks valida sama projektori, näiteks I_X. Samuti iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\dim X/Y_n = 0$. Lausest 3.29 saame, et $\sup_n d_n(X) < \infty$, seega $\liminf_{n\to\infty} d_n(Y_n) < \infty$. Järelikult on X polünomiaalse kasvuga täiendatavalt asümptootiliselt Hilberti ruum, mis tähendab, et ta on Lidski ruum. $\square$

Oleme näidanud, et iga lõpmatumõõtmeline kompleksne Hilberti ruum on Lidski ruum ja et igal Lidski ruumil on päranduv aproksimatsiooniomadus. Seega on igal lõpmatumõõtmelisel kompleksel Hilberti ruumil päranduv aproksimatsiooniomadus. Selle tulemuseni on võimalik tegelikult ka palju lihtsamini jõuda. Tõepoolest, teame, et iga Hilberti ruumi kinnine alamruum on Hilberti ruum. Kuna lemma 1.26 põhjal on igal Hilberti ruumil aproksimatsiooniomadus, siis on ka igal Hilberti ruumi kinnisel alamruumil aproksimatsiooniomadus. Seega on igal Hilberti ruumil päranduv aproksimatsiooniomadus.

Kirjandus

[B] R. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.

[DS] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators. Part I. General Theory*, Interscience Publishers, London–New York, 1958.

[FHHMPZ] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite–Dimensional Geometry*, Springer–Verlag, New York, 2001.

[Ga] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Gr] A. Grothendieck, *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 319–384.

[H] A. Y. Helemskii, *Lectures and exercises on functional analysis*, American Mathematical Society, Providence, 2006.

[JL] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Basic Concepts in the Geometry of Banach Spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces Volume 1, 1–84, North–Holland, Amsterdam, 2001.

[JSc] W. B. Johnson, G. Schechtman, *Finite dimensional subspaces of L_p*, Handbook of the geometry of Banach spaces Volume 1, 837–870, North–Holland, Amsterdam, 2001.

[JSz1] W. B. Johnson, A. Szankowski, *Hereditary approximation property*, Ann. of Math. (2) 176 (2012), 1987–2001.

[JSz2] W. B. Johnson, A. Szankowski, *The trace formula in Banach spaces*, Israel J. Math. 203 (2014), 389–404.

[K] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II*, Valgus, Tallinn, 1968.

[L] V. B. Lidski, *Non–selfadjoint operators with a trace*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 125 (1959), 485–487, (vene keeles).

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces*, Springer–Verlag, Berliin–New York, 1977.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[Pie] A. Pietsch, *Operator ideals*, North–Holland Mathematical Library 20, North–Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1980.

[Pis] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[R] J. R. Ringrose, *Super–diagonal forms for compact linear operators*, Proc. London Math. Soc. (3) 12 (1962), 367–384.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Janno Veeorg,

- annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Jälg ja pāranduv aproksimatsiooniomadus Banachi ruumides", mille juhendaja on Aleksei Lissitsin,
  - reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
- olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
- kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**