

Est. A-12362

November 1868
32

Das
Berührungsproblem
des
Apollonius von Pergae
und
mehrere Grundlehren der neueren Geometrie.

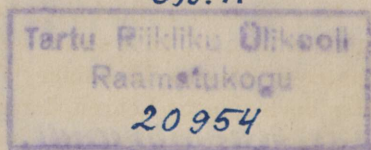
Von
Julius Käcklbrandt,
Oberlehrer der mathematischen Wissenschaften
am Gymnasium zu Pernau.

Dorpat,
Druck von C. Mattiesen.

1868.

Von der Censur gestattet.
№ 141. Dorpat, den 8. October 1868.

Est. A



6250

In keinem der mathematischen Lehrbücher, welche an den Unterrichtsanstalten des Dorpatschen Lehrbezirks im Gebrauch sind, haben die Lehren und Sätze der „neueren Geometrie“ eine Berücksichtigung gefunden. Wenn nun auch bei der gegenwärtig für den mathematischen Unterricht festgesetzten Stundenzahl eine Erweiterung des Lehrstoffes in keiner Weise erwünscht erscheinen dürfte, und wenn eine Behandlung der neueren Geometrie als Geometrie der Lage im Gegensatze zur Geometrie des Maasses sich auf den Schulen schon aus dem Grunde von selbst verbietet, dass sie den Schülern der oberen Klassen eine Betrachtungsweise geometrischer Gebilde zumuthen würde, zu welcher sie durch den Unterricht in den unteren Klassen in keiner Weise vorbereitet sind, so könnten doch manche Lehren derselben in der Form von Uebungsaufgaben zur Befestigung des Gelernten mit in den Unterricht hineingezogen werden. Die auf diese Weise gewonnene Bekanntschaft mit dem Gegenstande kann allerdings nur eine lückenhafte sein; dennoch dürfte der Nutzen derselben nicht zu gering anzuschlagen sein, indem sie nächst der Einübung und Befestigung des Gelernten den strebsamen Schüler durch die Eigenthümlichkeit ihrer Resultate dazu reizt, sich das Gebiet, auf welches ihm nur einzelne Streifblicke vergönnt waren, genauer anzusehen.

Der neueren Geometrie war es vorbehalten, das Berührungsproblem des Apollonius von Pergae (um 200 v. Chr.), betreffend die Berührung dreier Kreise durch einen vierten, in seiner Allgemeinheit zu lösen. Es scheint mir diese Aufgabe gerade eine solche zu sein, welche den Schüler einer höheren Klasse zu ihrer Behandlung auffordert. Sie bietet eine gute Gelegenheit dar, mehrere Grundlehren

der neueren Geometrie zu entwickeln, wobei eine elementare Behandlungsweise nicht überschritten zu werden braucht, indem nur die Kenntniss der Planimetrie, soweit sie auf den Gymnasien gelehrt wird, dazu erforderlich ist.

§ 1.

In zwei Kreisen K_1 und K_2 , welche mit den Radien r_1 und r_2 ($r_1 > r_2$) beschrieben sind, ist die Entfernung der Mittelpunkte, die Centrallinie, $C_1 C_2 = m$ (Fig. 1). Werden zwei parallele Durchmesser gezogen, deren auf derselben Seite der Centrallinie liegende Endpunkte mit B und D , resp. B_1 und D_1 , bezeichnet sind, so schneiden die Verbindungslinien von B_1 und D_1 und von B und D die Centrallinie oder ihre Verlängerung im Allgemeinen in zwei Punkten J und A zwischen den dadurch entstandenen Dreiecken finden folgende Beziehungen statt:

$$\frac{\triangle BC_1 J}{C_1 J : JC_2} \propto \frac{\triangle D_1 C_2 J}{r_1 : r_2}$$

$$\text{oder } C_1 J + JC_2 : C_1 J = r_1 + r_2 : r_1$$

$$\text{d. h. } m : C_1 J = r_1 + r_2 : r_1$$

$$1a) C_1 J = \frac{m \cdot r_1}{r_1 + r_2}$$

$$\frac{\triangle BC_1 A}{C_1 A : C_2 A} \propto \frac{\triangle DC_2 A}{r_1 : r_2}$$

$$\text{oder } C_1 A - C_2 A : C_1 A = r_1 - r_2 : r_1$$

$$\text{d. h. } m : C_1 A = r_1 - r_2 : r_1$$

$$2a) C_1 A = \frac{m \cdot r_1}{r_1 - r_2} = m \cdot \frac{r_1}{r_1 - r_2}$$

Ebenso findet man:

$$1b) C_2 J = \frac{m \cdot r_2}{r_1 + r_2} = m \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

$$2b) C_2 A = \frac{m \cdot r_2}{r_1 - r_2} = C_1 A - m$$

Aus 1a), 1b), 2a) und 2b) sieht man, dass der Abstand der Punkte J und A von C_1 und C_2 nur von der Länge der Linien m , r_1 und r_2 abhängig ist; diese Linien sind bei unveränderter Lage und Grösse der Kreise unveränderlich, daher ist es auch die Lage der Punkte J und A . Dieselben

Punkte J und A müssen sich demnach ergeben, wenn man B_1 mit D und D_1 verbindet, oder ein anderes Paar paralleler Durchmesser wählt.

J ist derjenige Punkt der Centrallinie, in welcher sich die Verbindungslinien der auf verschiedenen Seiten der Centrallinie liegenden Endpunkte paralleler Durchmesser der beiden Kreise schneiden; er heisst der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise.

A ist derjenige Punkt der Centrallinie, in welchem sich die Verbindungslinien der auf derselben Seite der Centrallinie liegenden Endpunkte paralleler Durchmesser der beiden Kreise schneiden; er heisst der äussere Aehnlichkeitspunkt.

Die durch diese Punkte gezogenen Linien heissen Aehnlichkeitsstrahlen, und zwar innere oder äussere, je nachdem sie durch J oder A gehen.

Die besondere Lage der Punkte J und A für verschiedene Kreislagen ergibt sich aus den Formeln 1 und 2.

I. Liegen die Kreise vollständig auseinander, so ist $m > r_1 + r_2$ und $> r_1 - r_2$,

folglich $C_1J > r_1$ und $C_2J > r_2$;

ebenso $C_1A > r_1$ und $C_2A > r_2$, d. h.

J sowohl als A liegen in diesem Falle ausserhalb der Kreise.

II. Berühren sich die Kreise von aussen, so ist

$m = r_1 + r_2$ und $> r_1 - r_2$,

folglich $C_1J = r_1$ und $C_2J = r_2$;

dagegen $C_1A > r_1$, und $C_2A > r_2$, d. h.

J fällt zusammen mit dem Berührungspunkte beider Kreise, während A ausserhalb der Kreise liegt.

III. Schneiden sich die Kreise, so ist

$m < r_1 + r_2$ und $> r_1 - r_2$, folglich

$C_1J < r_1$ und $C_2J < r_2$,

und $C_1A > r_1$ und $C_2A > r_2$; d. h.

J liegt in dem den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstück, während A ausserhalb der beiden Kreise liegt.

IV. Berühren sich die Kreise von innen, so ist

$$m < r_1 + r_2 \text{ und } = r_1 - r_2, \text{ folglich}$$

$$C_1J < r_1 \text{ und } C_2J < r_2,$$

$$\text{dagegen } C_1A = r_1 \text{ und } C_2A = r_2, \text{ d. h.}$$

J liegt innerhalb der Kreise, während A mit dem Berührungspunkt zusammenfällt.

V. Umschliesst der grössere Kreis den kleineren, ohne ihn zu berühren, so ist

$$m < r_1 + r_2 \text{ und } < r_1 - r_2, \text{ folglich}$$

$$C_1J < r_1 \text{ und } C_2J < r_2,$$

$$\text{ebenso } C_1A < r_1 \text{ und } C_2A < r_2, \text{ d. h.}$$

J und A liegen innerhalb der beiden Kreise.

VI. Sind endlich die Kreise concentrisch, so ist $m = 0$,

$$\text{also auch } C_1J = 0 \text{ und } C_2J = 0,$$

$$\text{ebenso } C_1A = 0 \text{ und } C_2A = 0, \text{ d. h.}$$

die Aehnlichkeitspunkte fallen mit dem gemeinschaftlichen Centrum der Kreise zusammen.

Sind die beiden Kreise einander gleich, also $r_1 = r_2$, so ist

$$C_1J = \frac{m}{2} \text{ und } C_2J = \frac{m}{2},$$

$$\text{während } C_1A = \infty \text{ und } C_2A = \infty, \text{ d. h.}$$

der innere Aehnlichkeitspunkt halbirt die Centrallinie, während der äussere Aehnlichkeitspunkt unendlich weit gerückt ist, so dass alle äusseren Aehnlichkeitsstrahlen mit der Centrallinie parallel laufen.

Was die Aufeinanderfolge der Centra und der Aehnlichkeitspunkte betrifft, so zeigen dieselben Formeln 1 und 2, aus denen man $C_1J + C_2J = m$ und $C_1A - C_2A = m$ findet, dass sie in der Ordnung C_1, J, C_2, A auf der Centrallinie und ihrer Verlängerung liegen.

Wenn ein äusserer oder innerer Aehnlichkeitsstrahl auf einem Durchmesser des Kreises K_1 , in dessen Endpunkt senkrecht steht, so muss er auf dem parallelen Durchmesser des Kreises K_2 , in dessen Endpunkt ebenfalls senkrecht stehen, d. h. der Aehnlichkeitsstrahl, welcher Tangente an einem der beiden Kreise ist, ist es auch am andern, so dass also auch die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise durch

die Aehnlichkeitspunkte gehen. Diese Eigenschaft der Aehnlichkeitspunkte gestattet eine einfache Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise; zugleich ist es ersichtlich, dass es im Allgemeinen deren vier geben muss, indem sowohl aus dem Punkte J als auch aus dem Punkte A je zwei Tangenten an den einen Kreis gezogen werden können, welche gleichzeitig Tangenten an dem zweiten Kreise sind. Denkt man sich irgend eine dieser vier Tangenten um den Aehnlichkeitspunkt, durch welchen sie geht, gedreht, so muss sie entweder gleichzeitig für beide Kreise zur Sekante werden, oder eine solche Lage annehmen, dass sie keinen Punkt mit den Kreisen gemeinschaftlich hat. Man gelangt auf diese Weise zu dem allgemeinen Satze:

Wenn ein Aehnlichkeitsstrahl mit einem Kreise zwei, einen oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich hat, so findet dasselbe auch für den zweiten Kreis statt.

Aus den Formeln 1 und 2 folgt ferner

$$\begin{aligned} 3) \quad C_1J : C_2J &= C_1A : C_2A \text{ oder} \\ JC_1 : AC_1 &= JC_2 : AC_2. \end{aligned}$$

Eine Aufeinanderfolge von vier Punkten auf einer Geraden, zwischen deren Abständen von einander die Proportion 3) statt findet, heisst harmonisch, und die Strecke C_1C_2 , welche sowohl durch J als auch durch A nach demselben Verhältniss getheilt wird, wird durch J und A harmonisch getheilt genannt; ebenso ist die Strecke JA durch C_1C_2 harmonisch getheilt; und zwar heissen C_1 und C_2 , so wie J und A zugeordnete Punkte. Aendert einer der Punkte, z. B. J seine Lage, so ist damit eine gleichzeitige Verschiebung des zugeordneten Punktes verbunden. Denkt man sich die in I bis V besprochenen Fälle dadurch hervorgerufen, dass bei unveränderter Lage der Centra der Radius r_1 des Kreises K_1 wächst, so wachsen gleichzeitig die Nenner der Ausdrücke $C_2J = \frac{m \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ und $C_2A = \frac{m \cdot r_2}{r_1 - r_2}$, wodurch eine gleichzeitige Verschiebung der Punkte J und A angedeutet ist. Da die Nenner der Brüche mit wachsendem r_1 immer grösser werden, so wird der Werth der Brüche immer kleiner, d. h. J sowohl als A nähern sich dem Punkte C_3 und zwar von verschiedenen Seiten. Bemerkenswerth ist

noch der Fall, wenn J die Strecke $C_1 C_2$ halbt, wenn also $C_1 J = \frac{m}{2}$ wird; dann wird, wie wir oben gesehen haben, $C_1 A = \infty$ und $C_2 A = \infty$.

Halbt man bei vier harmonischen Punkten die Strecke zwischen zwei zugeordneten Punkten (Fig. 2) etwa $C_1 C_2$ in E , so dass $C_1 E = C_2 E$ ist, so folgt aus 3)

$$C_1 E + EJ : EA + C_1 E = C_2 E - EJ : EA - C_2 E,$$

oder $C_1 E + EJ : C_2 E - EJ = EA + C_1 E : EA - C_2 E,$

woraus sich die neue Proportion bilden lässt

$$2 C_2 E : 2 EA = 2 EJ : 2 C_2 E \text{ oder}$$

$$4) EA : C_2 E = C_2 E : EJ, \text{ d. h.}$$

die halbe Strecke zwischen zwei zugeordneten Punkten ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Halbierungspunktes von dem anderen Paar zugeordneter Punkte.

§ 2.

Die Kreise K_1 , K_2 und K_3 (Fig. 3) liefern sechs Aehnlichkeitspunkte; für K_1 und K_2 erhält man J_1 und A_1 , für K_2 und K_3 ebenso J_2 und A_2 , für K_3 und K_1 endlich J_3 und A_3 . Wenn die Mittelpunkte der drei Kreise, C_1 , C_2 und C_3 , nicht in einer geraden Linie liegen, so werden die sechs Aehnlichkeitspunkte sich zu zweien auf den drei Centrallinien und deren Verlängerungen vertheilen. Durch die drei Centrallinien, welche der Reihe nach m_1 , m_2 und m_3 heissen mögen, wird das Dreieck $C_1 C_2 C_3$ gebildet, auf dessen drei Seiten die inneren Aehnlichkeitspunkte liegen, die daher nicht in eine gerade Linie fallen können.

Eine gerade Linie, die man durch A_1 und A_2 zieht, d. h. durch zwei Punkte, welche auf den Verlängerungen der Dreieckseiten $C_1 C_2$ und $C_2 C_3$ liegen, durchschneidet die dritte Dreieckseite $C_3 C_1$ ebenfalls in ihrer Verlängerung, kann also nicht durch J_3 gehen. Der Durchschnittspunkt sei D . Wird $C_3 E$ parallel $C_1 C_2$ gezogen, so hat man folgende Proportion:

$$\frac{C_1 D : C_3 D = C_1 A_1 : C_3 E}{C_3 A_2 : C_2 A_2 = C_3 E : C_2 A_1 = r_3 : r_2}$$

$$C_3 E = \frac{r_3 \cdot C_2 A_1}{r_2}, \text{ folglich}$$

$$C_1 D : C_3 D = \frac{C_1 A_1}{C_2 A_1} : \frac{r_3}{r_2} \text{ oder}$$

$$C_1 D : C_3 D = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_2} = r_1 : r_3.$$

Vergleicht man diese Proportion mit folgenden:

$$C_1 J_3 : C_3 J_3 = r_1 : r_3 \text{ und } C_1 A_3 : C_3 A_3 = r_1 : r_3,$$

so sieht man, dass D entweder innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt für K_1 und K_3 ist. Wie oben gezeigt wurde, kann die durch A_1 und A_2 gezogene Linie nicht durch J_3 gehen, folglich ist D äusserer Aehnlichkeitspunkt und fällt mit A_3 zusammen.

Die drei äussern Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen also auf einer geraden Linie, welche die äussere Aehnlichkeitsaxe heisst.

Eine gerade Linie, die man durch J_1 und J_2 zieht, kann mit $C_3 C_1$ nicht parallel laufen, weil $C_1 C_2$ und $C_2 C_3$ durch J_1 und J_2 nicht proportional getheilt werden, muss also $C_3 C_1$ in einem Punkte, etwa in F , schneiden. $C_3 G$ ist parallel $C_1 C_2$, es finden deshalb folgende Proportionen statt:

$$C_1 F : C_3 F = C_1 J_1 : C_3 G$$

$$\frac{C_2 J_2 : C_3 J_2 = C_2 J_1 : C_3 G = r_2 : r_3}{C_3 G = \frac{r_3 \cdot C_2 J_1}{r_2}, \text{ folglich}}$$

$$C_1 F : C_3 F = \frac{C_1 J_1}{C_2 J_1} : \frac{r_3}{r_2} \text{ oder}$$

$$C_1 F : C_3 F = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_2} = r_1 : r_3.$$

Vergleicht man diese Proportion mit

$$C_1 J_3 : C_3 J_3 = r_1 : r_3 \text{ und } C_1 A_3 : C_3 A_3 = r_1 : r_3,$$

so folgt daraus, dass F für K_3 und K_1 entweder innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt ist. Da aber J_1 , J_2 und J_3 , wie oben gezeigt wurde, nicht in einer geraden Linie liegen können, so muss F äusserer Aehnlichkeitspunkt für K_3 und K_1 sein und mit A_3 zusammenfallen. J_1 , J_2 und A_3 liegen also in gerader Linie. Ebenso findet man, dass J_2 , J_3 und A_1 , so wie J_3 , J_1 und A_2 in einer geraden Linie liegen.

Jede dieser drei Linien, auf welcher zwei innere und der dritte äussere Aehnlichkeitspunkt liegen, heisst eine innere Aehnlichkeitsaxe.

§ 3.

Hat man (Fig. 4) zwei Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 und r_2 und der Centrallinie C_1C_2 , so lässt sich ein Punkt P finden, welcher eine solche Lage hat, dass die von demselben an K_1 und K_2 gezogenen Tangenten unter sich gleich sind. Es sei also $PA = PB = t$, dann ist

$$C_1P^2 = r_1^2 + PA^2$$

$$C_2P^2 = r_2^2 + PB^2 \text{ oder}$$

$$1) C_1P = \sqrt{r_1^2 + t^2} \text{ und } C_2P = \sqrt{r_2^2 + t^2}.$$

Von der Wahl der Grösse t hängen C_1P und C_2P oder die Lage des Punktes P ab; verschiedenen Werthen von t werden verschiedene Punkte P entsprechen, und es wird deren eine unbegrenzte Anzahl geben, die auf einer bestimmten Linie liegen werden.

Zieht man PO senkrecht auf C_1C_2 und die Tangenten DO und EO , so ist

$$OD^2 = C_1O^2 - r_1^2$$

$$C_1O^2 = C_1P^2 - OP^2, \text{ folglich}$$

$$OD^2 = C_1P^2 - OP^2 - r_1^2.$$

Wird für C_1P sein Werth aus 1) eingesetzt, so ist
2) $OD^2 = t^2 - OP^2$.

$$\text{Ebenso ist } OE^2 = C_2O^2 - r_2^2$$

$$C_2O^2 = C_2P^2 - OP^2, \text{ folglich}$$

$$OE^2 = C_2P^2 - OP^2 - r_2^2.$$

Wird für C_2P ebenfalls sein Werth aus 1) eingesetzt, so ist
3) $OE^2 = t^2 - OP^2$.

Aus 2) und 3) ist ersichtlich, dass $OD = OE$ ist, dass also die von O gezogenen Tangenten einander gleich sind. Für jeden anderen Punkt der Linie PO lässt es sich in derselben Weise zeigen, dass sich von ihm gleiche Tangenten an die Kreise ziehen lassen; diese Linie heisst die Potenzlinie der beiden Kreise und steht senkrecht auf der Centrallinie.

Berühren sich die Kreise, so gehen für $t = 0$ die Gleichungen 1) über in $C_1P = r_1$ und $C_2P = r_2$, so dass

die Potenzlinie in diesem Falle durch den Berührungspunkt geht, also mit der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise zusammenfällt.

Schneiden sich die beiden Kreise, so kann t ebenfalls den Werth Null erhalten; es wird dann wieder $C_1P = r_1$ und $C_2P = r_2$, und P entspricht den Durchschnittspunkten der beiden Kreise. Diese Durchschnittspunkte müssen daher Punkte auf der Potenzlinie sein; die Potenzlinie ist die verlängerte gemeinschaftliche Sehne. Punkte, welche auf der gemeinschaftlichen Sehne liegen, liefern begreiflicher Weise keine Tangenten; an ihre Stelle treten die kleinsten Sehnen, die sich durch diese Punkte ziehen lassen, indem sie unter sich gleich sind, denn es ist (Fig. 5)

$$CE^2 = BC \cdot AC$$

$$CG^2 = BC \cdot AC, \text{ folglich}$$

$$CE = CG \text{ oder } DE = FG.$$

Bei drei Kreisen K_1 , K_2 und K_3 giebt es natürlich drei Potenzlinien; für K_1 und K_2 sei es P_1 , für K_2 und K_3 sei es P_2 und für K_3 und K_1 eben so P_3 . Liegen die Centra der Kreise nicht auf einer geraden Linie, so müssen P_1 und P_2 sich in einem Punkte O schneiden. Denn: die von O an K_1 und K_2 gezogenen Tangenten müssen einander gleich sein, weil O ein Punkt von P_1 ist; ebenso müssen die von O an K_2 und K_3 gezogenen Tangenten einander gleich sein, weil O zugleich ein Punkt der Linie P_2 ist. Es sind daher auch die von O an K_3 und K_1 gezogenen Tangenten einander gleich, d. h. O ist auch ein Punkt der Linie P_3 . Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich also in einem und demselben Punkte, welcher das Potenzcentrum heisst. Die von diesem Punkt an die drei Kreise gezogenen Tangenten sind gleich.

Diese Eigenschaft der Potenzlinien giebt ein bequemes Mittel zur Construction derselben für swei Kreise K_1 und K_2 an die Hand: man beschreibt einen weiten Kreis, so dass er die beiden ersten schneidet. Die dadurch bestimmten gemeinschaftlichen Sehnen, welche für den dritten und die beiden gegebenen Kreise Potenzlinien sind, schneiden sich in dem Potenzcentrum der Kreise, wodurch ein Punkt der gesuchten Potenzlinie bestimmt ist. Die Senkrechte, welche

man von diesem Punkte auf die Centrallinie C_1C_2 fällt, ist dann die Potenzlinie von K_1 und K_2 .

§ 4.

In einem eigenthümlichen Zusammenhange steht die Potenzlinie zweier Kreise mit den Aehnlichkeitspunkten zweier anderen Kreise, welche gleichzeitig von den beiden ersten berührt werden. Um diesen Zusammenhang zu finden, construiren wir zwei Kreise K_a und K_b (Fig. 6) mit ihren Aehnlichkeitspunkten J und A ; Aa sei ein äusserer, a_2Jb ein innerer Aehnlichkeitsstrahl. a_1a_2 muss von $C_b b_1$ und von $C_b b_2$ in zwei Punkten geschnitten werden, da die Linien nicht parallel sind; C_1 und C_2 seien die Durchschnittspunkte. Dadurch entstehen mehrere ähnliche Dreiecke, unter denen zwei Paar besonders hervorzuheben sind,

$$\begin{aligned} \triangle a C_a a_1 &\propto \triangle a_1 C_1 b_1 \text{ und} \\ \triangle b C_b b_2 &\propto \triangle a_2 C_2 b_2. \end{aligned}$$

Da die Dreiecke $a C_a a_1$ und $b C_b b_2$ gleichschenkelig sind, so müssen es auch die Dreiecke $a_1 C_1 b_1$ und $a_2 C_2 b_2$ sein,

$$\begin{aligned} \text{also } C_1 a_1 &= C_1 b_1 \text{ und} \\ C_2 a_2 &= C_2 b_2. \end{aligned}$$

Denken wir uns um C_1 und C_2 Kreise beschrieben mit den Radien $C_1 a_1 = r_1$ und $C_2 a_2 = r_2$, so ist

$$\begin{aligned} C_1 C_a &= r_1 + r_a \text{ und } C_1 C_b = r_1 + r_b, \\ C_2 C_a &= r_2 - r_a \text{ und } C_2 C_b = r_2 + r_b \text{ d. h.} \end{aligned}$$

der mit dem Radius r_1 um C_1 beschriebene Kreis berührt die beiden Kreise K_a und K_b gleichzeitig von aussen; der mit dem Radius r_2 um C_2 beschriebene Kreis berührt K_a von innen, K_b von aussen.

Nehmen wir für das andere Paar der auf dem äusseren Aehnlichkeitsstrahl liegenden Punkte a und b dieselbe Construction wie für a_1 und b_2 vor, so finden wir einen Punkt, C_3 , welcher der Mittelpunkt eines Kreises ist, der K_a und K_b gleichzeitig von innen berührt, während die Vertauschung der auf dem inneren Aehnlichkeitsstrahl gelegenen Punkte a_2 und b_2 mit dem anderen Paar Punkte auf demselben Strahl den Mittelpunkt C_4 , eines Kreises liefert, der K_a von aussen,

dagegen K_b von innen berührt. Die Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der Berührung hängt also davon ab, ob die Durchschnittspunkte der Kreise mit einem äusseren oder inneren Aehnlichkeitsstrahle zur Construction der Berührungskreise gewählt werden.

Da ferner für die Wahl der Punkte a_1, a_2, b_1 und b_2 keine andere Bestimmung getroffen wurde, als die, dass sie auf einem Aehnlichkeitsstrahle liegen, also ein jedes Paar von Punkten, welches dieser Bedingung entspricht, den Mittelpunkt eines Berührungskreises liefert, so können wir auch umgekehrt schliessen, dass die Berührungspunkte eines Kreises mit K_a und K_b auf einem Aehnlichkeitsstrahle liegen werden, was sich auch leicht direkt beweisen lässt; und zwar auf einem äusseren, wenn die Berührung gleichartig ist, auf einem inneren, wenn die Berührung ungleichartig ist.

Fernere Beziehungen zwischen den Berührungspunkten zweier Kreise K_a und K_b mit einem dritten ergeben sich, wenn man die gemeinschaftlichen Tangenten, die nach § 1 ebenfalls durch A oder J gehen, zu Hülfe nimmt; wir bezeichnen sie t_a und t_b . Nach § 1 ist

$$Aa : Ab_1 = r_a : r_b,$$

$$Ab : Aa_1 = r_b : r_a$$

$$Aa \cdot Ab : Aa_1 \cdot Ab_1 = 1 \text{ oder}$$

$$Aa \cdot Ab = Aa_1 \cdot Ab_1.$$

$$\text{Es ist aber } Aa \cdot Aa_1 = t_a^2$$

$$Ab \cdot Ab_1 = t_b^2$$

$$Aa \cdot Ab \times Aa_1 \cdot Ab_1 = t_a^2 \cdot t_b^2 \text{ oder}$$

$$Aa_1^2 \cdot Ab_1^2 = t_a^2 \cdot t_b^2,$$

$$\text{folglich } Aa_1 \cdot Ab_1 = t_a \cdot t_b.$$

Für ein anderes Punktepaar a_3 und b_3 , welches auf einem äusseren Aehnlichkeitsstrahl gelegen eine gleichartige Berührung anzeigt, hat man in gleicher Weise

$$Aa_3 \cdot Ab_3 = t_a \cdot t_b.$$

Die hieraus hervorgehende Gleichung $Aa_1 \cdot Ab_1 = Aa_3 \cdot Ab_3$ kann aber nur dann bestehen, wenn die Punkte a_1, b_1, a_3 und b_3 auf der Peripherie eines Kreises liegen. Nennen wir diesen Kreis K , so sind die gemeinschaftlichen Sehnen von K und

K_1 , so wie von K und K_3 nach § 3 die Potenzlinien der genannten Kreispaaire, die sich in einem Punkte schneiden, welcher zugleich ein Punkt auf der Potenzlinie von K_1 und K_3 ist. Es ist dies der äussere Aehnlichkeitspunkt von K_a und K_b , da die genannten gemeinschaftlichen Sehnen äussere Aehnlichkeitsstrahlen der Kreise K_a und K_b sind.

Wenn die Berührung der zwei Kreise durch zwei andere eine ungleichartige ist, so tritt, während im Uebrigen die Betrachtung dieselbe bleibt, an die Stelle des äusseren Aehnlichkeitspunktes der innere. Das führt zu dem allgemeinen Satze:

Die Potenzlinie zweier Kreise, welche zwei andere Kreise berühren, geht durch einen Aehnlichkeitspunkt des letzteren Paares, und zwar durch den äusseren, wenn die Berührung eine gleichartige ist, durch den inneren, wenn die Berührung eine ungleichartige ist.

§ 5.

Wird der Durchmesser AB eines Kreises (Fig. 7) durch zwei Punkte M und N harmonisch getheilt, so heisst ein jeder dieser Punkte ein Pol in Bezug auf den andern; eine Senkrechte in M errichtet heisst die Polare für den Punkt N , eine Senkrechte in N die Polare für M . Da AB durch C halbart wird, so besteht nach § 1, 4 die Proportion:

$$CM : CB = CB : CN$$

$$\text{oder } CM : r = r : CN.$$

Zusammengehörige Pole theilen den Durchmesser also so, dass der Radius des Kreises die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Centrums von den Polen ist.

Jede durch N gehende Linie hat ihren Pol in den Polaren des Punktes N und umgekehrt. Denn:

$$\triangle CMG \propto \triangle CFN$$

$$\text{folglich } CG : CM = CN : CF.$$

$$\text{Es ist aber } \frac{CM : r = r : CN}{CG : r = r : CF}$$

$$\text{oder } CG + r : CG - r = r + CF : r - CF$$

$$\text{d. i. } GJ : GH = FJ : FH;$$

HJ ist also durch F und G harmonisch getheilt.

Umgekehrt: sind F und G zusammengehörige Pole, so ist die Senkrechte in F , welche CM in einem Punkt X schneiden mag, die Polare von G , denn

$$\begin{aligned} \triangle CMG &\propto \triangle CFX \\ \text{folglich } CM : CG &= CF : CX \\ \frac{CG : r = r : CF}{CM : r = r : CX} \end{aligned}$$

Diese Proportion kann nur dann bestehen, wenn X mit N , d. h. mit dem Pole von M zusammenfällt; die Polare von G geht also durch N .

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass alle Linien, die durch M gehen, ihren Pol in KL , der Polaren von M , haben, und dass für jeden Punkt von KL die zugehörige Polare durch M , den Pol von KL , geht.

Aus der Proportion $CM : r = r : CN$ ergibt sich die verschiedene Lage von M , wenn N seine Lage auf dem Durchmesser verändert. Wir schreiben zu dem Zweck die Proportion in folgender Weise:

$$\frac{CM}{r} = \frac{r}{CN}.$$

I. Liegt N im Mittelpunkte des Kreises, so ist $CN = 0$, also $\frac{CM}{r} = \frac{r}{0} = \infty$, was nur dann sein kann, wenn $CM = \infty$ ist; d. h. der Pol von N rückt in diesem Falle in eine unendliche Entfernung.

II. Je grösser CN wird, desto kleiner wird der Werth des Bruches $\frac{r}{CN}$ oder von $\frac{CM}{r}$, was nur dadurch geschehen kann, dass CM kleiner wird. Bewegt sich also der innere Pol vom Mittelpunkt zur Peripherie des Kreises hin, so nähert sich der äussere Pol gleichzeitig der Peripherie von aussen.

III. Liegt N in dem Endpunkte des Durchmessers auf der Peripherie des Kreises, so ist $CN = r$, der Bruch $\frac{r}{CN} = 1 = \frac{CM}{r}$, d. h. $CM = r$; M liegt dann ebenfalls auf der Peripherie des Kreises und fällt mit N zusammen.

IV. Liegt N ausserhalb des Kreises, so wird $CN > r$, und $\frac{r}{CN} = \frac{CM}{r}$ ein ächter Bruch. Dass kann nur dadurch ge-

schehen, dass $CM < r$ ist: M liegt also in demselben Falle innerhalb des Kreises.

Die Aenderung der gegenseitigen Lage der beiden Pole stimmt genau überein mit der am Schluss des § 1 erwähnten Verschiebung, die der Punkt A erleidet, wenn der zugeordnete Punkt J seine Lage ändert, und gilt ganz allgemein für jedes Paar zugeordneter harmonischer Punkte.

Bemerkenswerth ist besonders der Fall III, in welchem die beiden Pole in einem Punkt auf der Peripherie des Kreises zusammenfallen, indem sich daraus eine sehr einfache Construction der Polare zu einem gegebenen Pol herleiten lässt.

In Fig. 8 seien M und N zusammengehörige Pole. Wie oben gezeigt wurde, geht für einen jeden Punkt der Linie KL die zugehörige Polare durch M . Die Polare des Punktes L als des inneren Poles geht also ebenfalls durch M , der zu L gehörige äussere Pol fällt aber nach III auch auf L ; die Polare ist daher in diesem Falle die Verbindungslinie LM . Da nun die Polare eines Punktes senkrecht auf dem Durchmesser steht, auf dem die Pole liegen, so ist LM senkrecht auf LC , d. h. LM ist eine Tangente des Kreises; ebenso ist KM die zweite Tangente, die sich aus M an den Kreis ziehen lässt. Die Polare des Punktes M ist also die Verbindungslinie der Berührungspunkte der aus H gezogenen Tangenten; ihr Durchschnittspunkt mit dem durch M gehenden Durchmesser der zu M gehörige Pol. Die Construction der Polaren eines Punktes oder des zu demselben gehörigen Poles ist mit Hülfe dieser Eigenschaft ohne weitere Schwierigkeit ausführbar.

§ 6.

Die Berührungsaufgabe des Apollonius, betreffend die Berührung dreier Kreise durch einen vierten, ist der allgemeinste Fall der Kreisberührung; der allgemeinste darum, weil in ihm die Aufgaben als Specialfälle enthalten sind, in denen einer oder mehrere der gegebenen Kreise mit dem Radius 0 oder ∞ beschrieben sind, die Kreise also zu Punkten zusammengeschrunpft, oder in gerade Linien übergegangen sind. In der Auflösung der allgemeinen Aufgabe müssen nun alle die Fälle enthalten sein, in denen es sich um

eine Berührung von Punkten, Linien und Kreisen in einer Zusammenstellung zu dreien derselben durch einen Kreis handelt.

Der Aufgabe wird jedenfalls durch mehrere Kreise genügt werden können, was daraus hervorgeht, dass die Berührung zweier Kreise eine zweifache sein kann, eine Berührung von aussen oder von innen.

Sind die drei Kreise K_a , K_b und K_c gegeben, so sei der gesuchte Kreis K_x , für den die Lage des Centrums und die Länge des Radius gefunden werden soll. Dabei sind folgende Fälle denkbar:

- 1) K_x berührt die drei Kreise von aussen,
- 2) K_x berührt die drei Kreise von innen,
- 3) K_x berührt K_a und K_b von aussen, K_c von innen,
- 4) K_x berührt K_a und K_b von innen, K_c von aussen,
- 5) K_x berührt K_a und K_c von aussen, K_b von innen,
- 6) K_x berührt K_a und K_c von innen, K_b von aussen,
- 7) K_x berührt K_b und K_c von aussen, K_a von innen,
- 8) K_x berührt K_b und K_c von innen, K_a von aussen.

Acht Kreise wird es also voraussichtlich geben, welche der Aufgabe genügen; sie lassen sich in vier Gruppen theilen, deren jede zwei Kreise enthält, die sich durch eine entgegengesetzte Berührung der gegebenen Kreise unterscheiden. Die vier Gruppen würden sich demnach in der Weise vertheilen, das 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 und endlich 7 und 8 zusammengehören.

Denken wir uns die Figur construirt, und die acht Kreise durch K_1 bis K_8 bezeichnet, so lassen sich auf jedes eine Gruppe bildende Kreispaar die Sätze des § 4 anwenden.

K_1 und K_2 berühren K_a und K_b gleichartig, ihre Potenzlinie geht daher durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von K_a und K_b , der A_a heissen mag.

K_1 und K_2 berühren aber auch K_b und K_c gleichartig, ihre Potenzlinie geht daher auch durch den entsprechenden äusseren Aehnlichkeitspunkt A_b . Die Potenzlinie von K_1 und K_2 fällt daher mit der durch A_a und A_b gehenden geraden Linie zusammen, auf welcher nach § 2 auch der dritte Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise, A_c , liegt, und die keine andere als die äussere Aehnlichkeitsaxe der Kreise K_a , K_b und K_c ist.

*

Für das Paar K_3 und K_4 geht die Potenzlinie durch A_a , J_b und J_c , ist also eine der inneren Aehnlichkeitsaxen der Kreise K_a , K_b und K_c . In gleicher Weise weiter schliessend findet man den Satz:

I. Eine jede der vier Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise ist Potenzlinie für ein berührendes Kreispaar.

Da die Berührung zweier Kreise immer eine gegenseitige ist, so kann man auch K_a und K_b als Berührungskreise für K_1 und K_2 ansehen, und zwar ist die Berührung eine ungleichartige; ebenso wird das Kreispaar K_1 und K_2 durch K_b und K_c , so wie durch K_c und K_a ungleichartig berührt. Jede der drei Potenzlinien der gegebenen drei Kreise geht deshalb durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise K_1 und K_2 . Nach § 3 durchschneiden sich diese drei Potenzlinien in dem Potenzcentrum, welches mit dem inneren Aehnlichkeitspunkt des Kreispaares K_1 und K_2 zusammenfällt.

Ebenso verhält es sich mit den Kreisen K_a , K_b und K_c gegenüber dem Kreispaares K_3 und K_4 , überhaupt gegenüber jedem der zu einer Gruppe gehörigen Kreispaares, so dass man den Satz erhält:

II. Das Potenzcentrum der drei gegebenen Kreise ist der innere Aehnlichkeitspunkt für jedes berührende Kreispaar einer Gruppe.

Da für jede zwei Kreise die Potenzlinie senkrecht auf der Centrallinie steht, die Aehnlichkeitspunkte der Kreise aber in der Centrallinie liegen, so ist durch die Potenzlinie und einen Aehnlichkeitspunkt die Richtung der Centrallinie vollkommen bestimmt. Wenden wir dieses in Verbindung mit Satz I und II auf das Kreispaar einer Gruppe an, für welches nach I die Potenzlinie und nach II der innere Aehnlichkeitspunkt bekannt ist, so finden wir die Centrallinie für das entsprechende Kreispaar. Daher

III. Auf den Linien, welche durch das Potenzcentrum der gegebenen Kreise gehen und auf einer ihrer Aehnlichkeitsaxen senkrecht stehen, liegen die Mittelpunkte je zweier berührenden Kreise.

Um die Mittelpunkte selbst zu finden, braucht man nur noch die Berührungspunkte auf den gegebenen Kreisen zu bestimmen. Die durch dieselben gezogenen Radien müssen in ihrer Verlängerung die eben genannten Senkrechten, d. h.

die Centrallinien der Berührungskreise schneiden; die Durchschnittpunkte sind dann die gesuchten Mittelpunkte, die Linien von den Berührungspunkten bis zu den Durchschnittpunkten die Radien der Berührungskreise.

Die auf dem Kreise K_a liegenden Berührungspunkte mit den Kreisen K_1 bis K_8 mögen $a_1, a_2, \dots a_8$ heißen; dieselbe Bedeutung mögen $b_1 \dots b_8$ und $c, \dots c_8$ für die Kreise K_b und K_c haben. Dann liegen nach § 4 a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 , ferner a_3 und a_4, b_3 und b_4, c_3 und c_4 u. s. w., da die Berührung eine ungleichartige ist, auf inneren Aehnlichkeitsstrahlen der entsprechenden Kreise K_1 und K_2 oder K_3 und K_4 u. s. w., d. h. auf Linien, die vom inneren Aehnlichkeitspunkte, hier also nach II vom Potenzcentrum der gegebenen Kreise K_a, K_b und K_c , ausgehen.

Die Tangenten, die man von K_a in den Punkten a_1 und a_2 , oder a_3 und a_4 u. s. w., so wie an K_b in den Punkten b_1 und b_2, b_3 und b_4 u. s. w. zieht, sind einander gleich; da diese Tangentenpaare gleichzeitig die Kreise K_1 und K_2 oder K_3 und K_4 u. s. w. berühren, und unter einander gleich sind, so gehen sie nach § 3 von den Potenzlinien der entsprechenden Kreispaaire aus, die nach I mit den Aehnlichkeitsaxen der gegebenen Kreise zusammenfallen. Die Verbindungslinien von a_1 und a_2, b_1 und b_2 u. s. w., die, wie gezeigt wurde, durch das Potenzcentrum der drei Kreise gehen, sind nach § 5 die Polaren der Tangentendurchschnittpunkte, welche auf einer Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreisen liegen. Ebenfalls nach § 5 müssen deshalb diese Aehnlichkeitsaxen ihren Pol für die verschiedenen Kreise K_a, K_b und K_c in den Verbindungslinien von a_1 und a_2, b_1 und b_2 u. s. w. haben, deren Richtung ferner durch das Potenzcentrum bestimmt ist. Die Berührungspunkte bestimmen sich also nach folgendem Satze:

IV. Eine jede Linie, welche vom Potenzcentrum der drei gegebenen Kreise durch den Pol einer Aehnlichkeitsaxe gezogen wird, durchschneidet den entsprechenden Kreis in zwei Punkten, welche die Berührungspunkte für das Kreispaar einer Gruppe sind.

Für welches Kreispaar auf diese Weise die Berührungspunkte gefunden werden sollen, hängt von der Wahl der Aehnlichkeitsaxe ab.

Unter Anwendung der Sätze III und IV lassen sich nun leicht die Berührungskreise construiren, deren es im Allgemeinen acht geben wird, wenn nicht eine besondere Lage der gegebenen Kreise die Auflösung der Aufgabe zum Theil oder ganz unmöglich macht, wie z. B. wenn die Kreise concentrisch sind. Wie viele und welche Berührungskreise in besonderen Fällen nicht construirt werden können, giebt unmittelbar die nach Satz III und IV ausgeführte Construction an, indem sie in solchen Fällen keine Berührungspunkte auf den gegebenen Kreisen liefert.

§ 7.

In der allgemeinen Auflösung der Berührungsaufgabe sind die speciellen Fälle der Kreisberührung für Punkte, Linien und Kreise mit eingeschlossen, wofern man nur die Aehnlichkeitspunkte und die Potenzlinien für die besonderen Fälle, mit denen man es gerade zu thun hat, aufsucht. Nur ganz kurz soll die Lage derselben für alle möglichen Paare von Punkten, Linien und Kreisen angegeben werden.

I. Für die Aehnlichkeitspunkte ergeben sich die verschiedenen Lagen aus dem § 1 gefundenen Formeln 1 und 2, nachdem dieselben passend umgeformt sind, um für die den einzelnen Fällen entsprechende Substitution $r_1 = 0$ oder ∞ und $r_2 = 0$ oder ∞ brauchbare Werthe für $C_1 J$, $C_1 A$, $C_2 J$ und $C_2 A$ zu erhalten.

1) Für einen Kreis und einen Punkt ist der letztere sowohl äusserer als auch innerer Aehnlichkeitspunkt.

2) Für einen Kreis und eine gerade Linie fallen diese Punkte mit den Endpunkten des auf der geraden Linie senkrechten Durchmessers zusammen, und zwar der innere mit dem der geraden Linien näher liegenden, der äussere mit dem entfernter liegenden Endpunkte.

3) Für eine gerade Linie und einen Punkt ist der letztere sowohl äusserer als auch innerer Aehnlichkeitspunkt.

4) Für zwei gerade Linien liegen diese Punkte unendlich weit entfernt.

5) Für zwei Punkte kann ein jeder derselben als äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt angesehen werden.

II. Bei der Bestimmung der Lage der Potenzlinien für dieselben Paare braucht man sich nur auf die Eigenschaft derselben zu stützen, dass dieselben die Verbindungslinien der Halbirungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten ist, da sie ja die Linie der gleichen Tangenten ist.

1) Für einen Kreis und einen Punkt können zwei Fälle eintreten:

- a. Der Punkt liegt ausserhalb des Kreises; die Potenzlinie halbirt dann die von demselben an den Kreis gezogenen Tangenten;
- b. Der Punkt liegt innerhalb des Kreises; die Potenzlinie halbirt dann die an die Endpunkte der kürzesten Sehne, welche sich durch den Punkt ziehen lässt, gezogenen Tangenten.

2) Für einen Kreis und eine gerade Linie ist die letztere die Potenzlinie.

3) Für eine gerade Linie und einen Punkt ist die erstere gleichzeitig die Potenzlinie.

4) Für zwei gerade Linien ist die Potenzlinie die Halbirungslinie des von den geraden Linien gebildeten Winkels.

5) Für zwei Punkte ist die auf der Mitte ihrer Verbindungslinie errichtete Senkrechte die Potenzlinie.

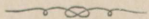


Fig. 1.

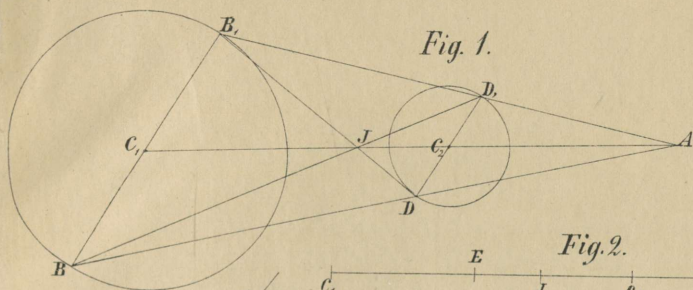


Fig. 2.

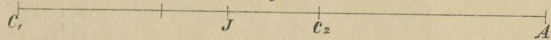


Fig. 6.

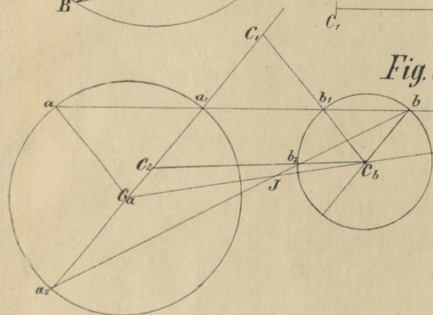


Fig. 5.

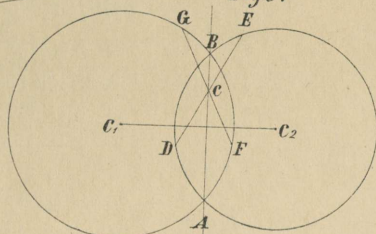


Fig. 3.

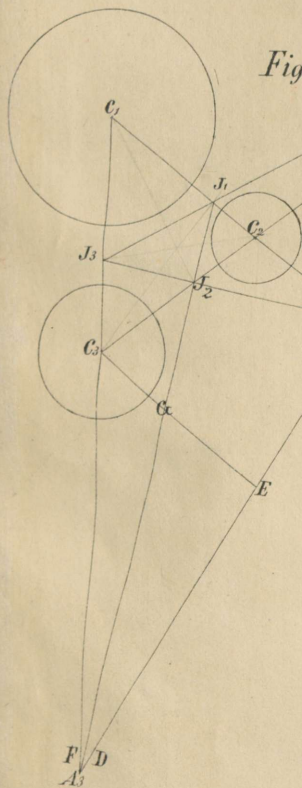


Fig. 8.

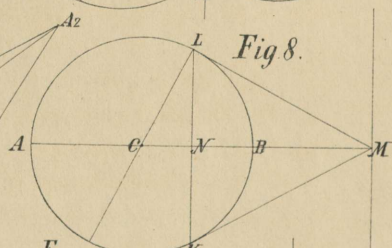


Fig. 7.

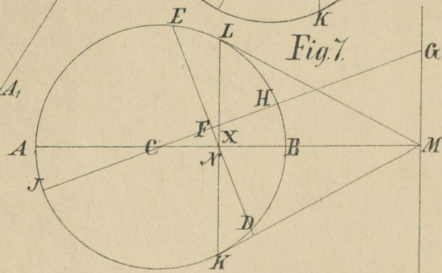
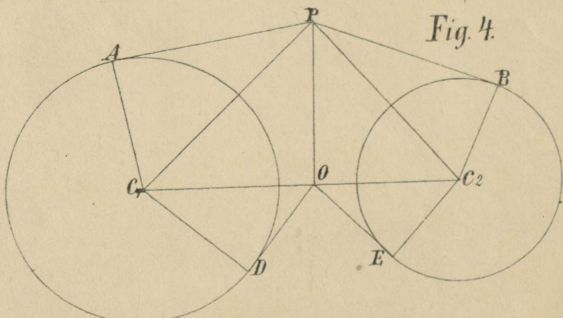


Fig. 4.



Est.

A-12 362

2095+