TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

520

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ

IV

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 520 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ

IV

ТАРТУ 1980

К ОБОСНОВАНИЮ ПОНЯТИЯ МАССЫ

П. Г. Кард

1. Цель настоящей статьи заключается в новом обосновании понятия массы как величины, присущей не только телам, но и свету. Уже ранее была показана выдающаяся методико-дидактическая и методологическая плодотворность этого понятия (см. [1—4]). Было также показано, что его целесообразно вводить сначала в рамках классической (нерелятивистской) механики. Будучи вслед за тем перенесено в релятивистскую область, оно необычайно облегчает и упрощает вывод основных релятивистских соотношений. Методологическое значение понятия массы света обусловлено главным образом его связью с законом эквивалентности массы и энергии, полное и непротиворечивое истолкование которого неизбежно требует учета массы света (см. [4]). Однако способ, примененный в [1, 2] для обоснования массы света в классической механике, небезупречен. Мы рассматривали там тело массы M, имеющее заполненную черным излучением вакуумную полость. Было показано, что внешняя сила $\mathbf{F}$ сообщает этому телу ускорение

$$\mathbf{a}=(M+\mu)^{-1}\mathbf{F}, \tag{1}$$

где

$$\mu=\int\frac{dp}{c}, \tag{2}$$

а dp — импульс частицы излучения; интеграл в формуле (2) берется по всем таким частицам. Таким образом, полная масса тела оказывается больше массы оболочки на величину μ, которую и следует, очевидно, толковать как массу излучения, заключенного в полости.

Этот вывод, при всей подкупающей простоте, имеет два недостатка. Во-первых, для получения формулы (1) необходимо предполагать, что импульс света изменяется пропорционально его скорости: если частица света имеет скорость $\mathbf{c}$ и импульс $d\mathbf{p}$, то при изменении скорости на $-\mathbf{a}dt$ импульс изменяется на $-\frac{dp\cdot\mathbf{a}dt}{c}$. Тем самым заранее предполагается, что данная частица света характеризуется некоторой, не зависящей от скорости, величиной $\frac{dp}{c}$. Этим еще, конечно, не сказано, что $\frac{dp}{c}$ есть масса; поэтому нельзя думать, что наш вывод содержит логический круг. Тем не менее, указанное предположение ниоткуда не вытекает, а необходимость его в данном выводе является, очевидно, определенным дефектом метода.*

Другой недостаток рассматриваемого вывода состоит в том, что в нем ничего не говорится о сохранении массы. Вследствие этого мы вынуждены дополнительно постулировать, что закон сохранения массы выполняется строго только при учете в полном балансе массы наряду с массой тел также массы света. Без этого дополнительного постулата переход в релятивистскую область ничего бы не дал.

Поэтому следует считать предпочтительным такой способ, которым существование массы света обосновывалось бы в неразрывной связи с общим законом сохранения массы. Этот путь был бы вполне аналогичен тому, который ведет к обнаружению импульса света. Основным фактом является давление света. Излучаемый телом в определенном направлении световой поток, давя на него, приводит его в движение, т. е. сообщает ему некоторый импульс. Если бы сам свет не обладал импульсом, то это явление означало бы несохранение импульса. Но с таким заключением было бы трудно согласиться — не в силу каких-либо соображений «высшего порядка», а просто потому, что тот же свет, поглотившись в другом теле, сообщил бы ему равный и противоположный импульс. Тем самым сохранение импульса вновь оказалось бы в силе. Вот такое «временное» исчезновение импульса на фоне «запаздывающего» сохранения было бы действительно необъяснимо. Отсюда мы и приходим к неизбежному выводу, что сам свет, как равноправный с телами материальный объект, является носителем импульса. Кстати, в случае энергии дело обстоит совершенно так же. Откуда мы знаем, что свет обладает энергией? Только из того, что испускание света уменьшает запас энергии излучателя, а поглощение того же света увеличивает запас энергии поглотителя ровно на ту же величину.

Перенесем теперь те же соображения на массу. Предположим, мы обнаружили уменьшение массы излучившего световой поток тела. Первая мысль могла бы быть та, что масса не сохраняется. Пусть, однако, мы обнаружили еще, что тот же световой поток, поглощаясь в другом теле, увеличивает его массу ровно на ту же величину, на какую ранее уменьшилась масса излучателя. Тогда мы будем должны неизбежно заключить, что масса в конечном счете сохраняется; а чтобы избежать странного вы-

* Автор благодарен И. Пийру за привлечение внимания к этому обстоятельству.

вода о «временном несохранении» массы, мы должны будем приписать массу самому свету. Это — столь же обоснованное и обязательное заключение, как в случае импульса или энергии. Весь вопрос состоит, стало быть, только в том, действительно ли излучение света уменьшает, а поглощение увеличивает массу.

По этому вопросу ситуация в случае массы несколько иная, чем в случае импульса или энергии. Там мы имеем прямое экспериментальное подтверждение. Давление света является хорошо известным опытным фактом. Еще проще подтверждаются на опыте энергетические соотношения. Но для массы прямые опыты того же типа на макроскопическом уровне едва ли возможны. Препятствием служит крайняя малость ожидаемого эффекта. Благоприятнее обстоит дело для микрочастиц (например, атомов), однако и здесь еще эффект настолько мал, что возможность его прямого измерения (помимо закона эквивалентности массы и энергии) остается под сомнением. Но в этом и нет нужды. Оказывается, что изменение массы при испускании и поглощении света есть следствие закона сохранения импульса, если потребовать, что этот закон, в согласии с принципом относительности, выполняется во всех инерциальных системах. Таким образом, опыты по давлению света можно рассматривать как доказательство существования не только импульса света, но, косвенным образом, также и массы света.

2. Как мы уже отметили выше, методически целесообразно обосновывать понятие массы света уже в рамках классической механики, чтобы иметь затем возможность применить это понятие при построении теории относительности. Итак, рассмотрим покоящееся тело массы m, испускающее световой поток с импульсом $\mathbf{p}$. В силу сохранения импульса оно получает импульс $-\mathbf{p}$. Если предположим, что его масса не изменилась, то его скорость будет равна $-\mathbf{p}/m$. Перейдем в другую инерциальную систему, движущуюся относительно первой с произвольной скоростью $\mathbf{v}$. В другой системе начальная скорость тела равна $-\mathbf{v}$, конечная скорость $-\mathbf{p}/m-\mathbf{v}$. Соответственно, начальный импульс равен $-m\mathbf{v}$, конечный $-\mathbf{p}-m\mathbf{v}$. Следовательно, изменение импульса тела в другой инерциальной системе равно той же величине $-\mathbf{p}$, что и в первой системе. А так как импульс должен в силу принципа относительности сохраняться в обеих системах, то импульс излученного света равен $\mathbf{p}$ в другой системе, как и в первой. Но это невозможно, так как импульс направлен параллельно скорости, а направление скорости при переходе в другую инерциальную систему, вообще говоря, изменяется.

Попытаемся исправить результат, предположив, что масса тела m_1 после излучения света отличается от начальной массы m. Тогда скорость тела после излучения будет $-\mathbf{p}/m_1$. В другой инерциальной системе скорость тела до излучения равна $-\mathbf{v}$, после — $-\mathbf{p}/m_1-\mathbf{v}$. Импульс равен до излучения $-m\mathbf{v}$, после —

$-\mathbf{p}-m_1\mathbf{v}$. Обозначив импульс света в другой системе через $\mathbf{p}'$, напишем соотношение, выражающее сохранение импульса:

$$-m\mathbf{v}=\mathbf{p}'-\mathbf{p}-m_1\mathbf{v}. \tag{3}$$

Далее обозначим скорость света в первой системе через $\mathbf{c}$; тогда во второй системе скорость света выразится как $\mathbf{c}-\mathbf{v}$ (напомним, что мы придерживаемся здесь нерелятивистской кинематики). А так как импульс параллелен скорости, то мы имеем право положить

$$\begin{aligned}\mathbf{p}&=\mu\mathbf{c},\\ \mathbf{p}'&=\mu'(\mathbf{c}-\mathbf{v}),\end{aligned} \tag{4}$$

где μ и μ' — некоторые положительные скалярные коэффициенты. Они имеют размерность массы, но являются ли действительно массой, пока неизвестно. Подставляя в формулу (3) вместо $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ выражения (4), находим:

$$(\mu'-\mu)\mathbf{c}=(m_1+\mu'-m)\mathbf{v}. \tag{5}$$

Учтем теперь, что векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{v}$ имеют произвольные направления. Следовательно, равенство (5) возможно только если обе части обращаются в нуль, т. е.

$$\mu'=\mu \tag{6}$$

и

$$m_1=m-\mu. \tag{7}$$

Итак, мы видим, что тело, испуская свет, теряет некоторую часть массы μ. Ее нельзя положить равной нулю, так как, согласно формуле (4), в таком случае импульс света тоже обратился бы в нуль.

Совершенно аналогичным путем можно убедиться в том, что свет с импульсом $\mathbf{p}=\mu\mathbf{c}$, поглощаясь в теле, возвращает ему вместе с импульсом $\mathbf{p}$ также ранее утраченную источником света массу μ. Отсюда мы должны заключить, что в промежутке между испусканием и поглощением сам свет обладает этой массой, так что масса в каждом акте излучения или поглощения сохраняется. Формулы (4) вдобавок показывают, что соотношение между скоростью, массой и импульсом имеет у света в точности тот же вид, что и у тел, а формула (6) утверждает инвариантность массы света, что также является общим свойством массы (напомним опять, что наша механика здесь нерелятивистская).

3. Приведенное выше обоснование массы света является нерелятивистским. На этом основании могут возникнуть сомнения, правомерно ли переносить это понятие в теорию относительности. Нам кажется, что такие сомнения беспочвенны. В теорию относительности мы приходим с определенным запасом понятий, взя-

тых из нерелятивистской физики. На пустом месте новую теорию не построить. Естественно, старые понятия подвергаются при необходимости в новой теории определенному перетолкованию, ибо они должны быть согласованы с новыми постулатами. Так на старой основе рождаются новые, релятивистские понятия. Например, масса тел, инвариантная в нерелятивистской теории относительно инерциальных преобразований, оказывается в теории относительности неинвариантной величиной. Важно, однако, то, что для начала мы должны располагать нерелятивистским понятием массы, и притом не только тел, но и света. Будучи вначале обосновано на нерелятивистском уровне, понятие массы света может быть с успехом перенесено в теорию относительности. Понятно, оно тоже получает при этом новое истолкование; в частности, релятивистская масса света тоже неинвариантна. В силе остается, однако, основное: свет обладает массой.

Целесообразность такого подхода к построению теории относительности, когда масса считается с самого начала присущей не только телам, но и свету, обнаруживается в практическом осуществлении самым очевидным образом. Простота, ясность и изящество этого подхода не имеют себе равных в методике. Мы воздержимся здесь от дальнейших пояснений, отсылая читателя к существующей литературе (см. [1, 2]).

4. Итак, масса света свободно и легко входит в отверстую дверь теории относительности. Но, как ни странно, для многих она является нежелательной гостьей (см. об этом подробнее в [4]). Ее пытаются изгнать. Но, как обычно в подобных случаях, гонимая в дверь, она проникает через окно. Этот путь не столь широк, но к цели ведет одинаково. Посмотрим, как это происходит.

Откажемся, уступая нашим оппонентам, от нерелятивистского обоснования массы света и попытаемся проделать аналогичную процедуру с самого начала на релятивистском уровне. Это требует значительно более громоздких выкладок, но принципиальная простота метода сохраняется. Несколько более подробно этот метод изложен в [5], а здесь приведем ход рассуждений в главных чертах. Используем вытекающие из преобразований Лоренца формулы преобразования скорости тела

$$\mathbf{u}'=\frac{\mathbf{u}\sqrt{1-v^2/c^2}+v^{-2}\left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\mathbf{uv}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}}{1-\mathbf{uv}/c^2} \qquad (8)$$

и скорости света

$$\mathbf{c}'=\frac{\mathbf{c}\sqrt{1-v^2/c^2}+v^{-2}\left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\mathbf{cv}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}}{1-\mathbf{cv}/c^2}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{c}$ — скорости тела и света в первой, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{c}'$ — во второй инерциальной системе, $\mathbf{v}$ — скорость второй системы относительно первой. Кроме того, положим в основу закон сохранения импульса в любой инерциальной системе, а также будем учитывать параллельность импульса любого объекта его скорости. Покажем, как из этих предпосылок вытекает согласованным образом существование массы света, формула зависимости массы тела от скорости, формулы преобразования массы и импульса и закон сохранения массы.

Возможную зависимость массы тела от скорости будем учитывать зависящим от абсолютной величины скорости множителем $\gamma(u)$, т. е. положим

$$m(u)=m(0)\gamma(u). \tag{10}$$

Вид этого множителя пока неизвестен, его только предстоит найти. Заметим, что введение его не означает, что мы заранее требуем зависимости массы от скорости; если бы оказалось, что масса от скорости не зависит, то мы получили бы $\gamma=1$.

Пусть теперь покоящееся в данной инерциальной системе тело массы покоя m_0 излучает направленный световой поток и получает некоторую скорость отдачи $\mathbf{u}$. Обозначим массу покоя тела после излучения через m_1, допуская тем самым, что, возможно, $m_1 \neq m_0$. Импульс светового потока запишем в виде $\mu\mathbf{c}$. Этим мы учитываем параллельность векторов импульса и скорости; величина μ положительна и имеет размерность массы, но является ли она в действительности массой, пока неизвестно. Сохранение импульса записывается в виде:

$$\mu\mathbf{c}+m_1\gamma(u)\mathbf{u}=0. \tag{11}$$

Перейдем в другую инерциальную систему, движущуюся относительно первой с произвольной скоростью $\mathbf{v}$. Скорости тела в этой системе до и после испускания равны соответственно $-\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$, а скорость испущенного света равна $\mathbf{c}'$, причем $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{c}'$ выражаются формулами (8) и (9). Обозначив импульс света в виде $\mu'\mathbf{c}'$, запишем формулу сохранения импульса:

$$-m_0\gamma(v)\mathbf{v}=m_1\gamma(u')\mathbf{u}'+\mu'\mathbf{c}'. \tag{12}$$

Далее, исключая из формул (8), (9), (11) и (12) векторы $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{u}'$, находим:

$$\begin{aligned}-m_0\gamma(v)\mathbf{v}= &(1-\mathbf{uv}/c^2)^{-1}[m_1\gamma(u')\mathbf{u}\sqrt{1-v^2/c^2}+\\&+m_1\gamma(u')v^{-2}(1-\sqrt{1-v^2/c^2})\mathbf{uv}\cdot\mathbf{v}-m_1\gamma(u')v]-\\&-(1+m_1\gamma(u)\mathbf{uv}/\mu c^2)^{-1}[\mu'\mu^{-1}m_1\gamma(u)\mathbf{u}\sqrt{1-v^2/c^2}+\\&+\mu'\mu^{-1}m_1\gamma(u)v^{-2}(1-\sqrt{1-v^2/c^2})\mathbf{uv}\cdot\mathbf{v}+\mu'\mathbf{v}].\end{aligned} \tag{13}$$

Это равенство содержит независимые друг от друга векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, относительно которых оно должно выполняться тождественно. Поэтому коэффициенты при $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ должны обращаться в нуль. Это дает два уравнения, из которых можно выразить μ и μ':

$$\mu=-m_1\gamma(u)+\frac{m_0\gamma(u)\gamma(v)}{\gamma(u')}(1-\mathbf{uv}/c^2) \tag{14}$$

и

$$\mu'=-m_1\gamma(u')+m_0\gamma(v). \tag{15}$$

Так как μ от $\mathbf{v}$ зависеть не может, то формула (14) верна для любого $\mathbf{v}$. Положив $\mathbf{v}=0$, так что $\gamma(v)=1$ и $\mathbf{u}'=\mathbf{u}$, находим:

$$\mu=-m_1\gamma(u)+m_0. \tag{16}$$

Если же положим $\mathbf{v}=\mathbf{u}$, то $\mathbf{u}'=0$, $\gamma(u')=1$ и $\gamma(v)=\gamma(u)$. Тогда формула (14) примет вид:

$$\mu=-m_1\gamma(u)+m_0\gamma^2(u)\,(1-u^2/c^2). \tag{17}$$

Сравнение этой формулы с предыдущей дает

$$\gamma(u)=(1-u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Итак, мы получили формулу зависимости массы тела от скорости:

$$m(u)=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{19}$$

Сравнивая еще формулы (14) и (16), видим, что

$$\gamma(u')=\gamma(u)\gamma(v)\,(1-\mathbf{uv}/c^2). \tag{20}$$

Эта формула согласуется с формулой (18), так как из формулы (8) непосредственно вытекает

$$\sqrt{1-u'^2/c^2}=\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\,\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\mathbf{uv}/c^2}, \tag{21}$$

что и совпадает с (20).

Обратимся теперь к формулам (15) и (16). Они показывают, что μ и μ' равны убыли массы излучающего тела в двух инерциальных системах. Рассматривая аналогичным образом процесс поглощения света, мы нашли бы, что масса поглощающего тела увеличивается как раз на ту же величину. Поэтому мы должны отождествить μ и μ' с массой света. При этом закон сохранения массы остается в силе для всякого элементарного процесса испускания и поглощения света. Импульс света $\mu\mathbf{c}$ или $\mu'\mathbf{c}'$ оказывается равным произведению массы на скорость, вполне аналогично такому же соотношению у тел.

Выведем далее формулы преобразования массы и импульса. Обозначая $m(u)$ и $m(u')$ через m и m', из формулы (21) находим:

$$m'=\frac{m(1-\mathbf{uv}/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{22}$$

т. е.

$$m'=\frac{m-\mathbf{pv}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{23}$$

Умножая эту формулу на формулу (8), находим:

$$\mathbf{p}'=\frac{\mathbf{p}\sqrt{1-v^2/c^2}+v^{-2}(1-\sqrt{1-v^2/c^2})\,\mathbf{pv}\cdot\mathbf{v}-m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{24}$$

Формулы (23) и (24) и есть формулы преобразования массы и импульса тела. Такого же вида формулы получим и для света. Для этого исключим m_0 из формул (15) и (16):

$$\mu'=\mu\gamma(v)-m_1[\gamma(u')-\gamma(u)\gamma(v)]. \tag{25}$$

Но из формул (11) и (20) следует

$$\gamma(u')=\gamma(u)\gamma(v)\left(1+\frac{\mu\mathbf{cv}}{m_1c^2\gamma(u)}\right). \tag{26}$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу и учитывая формулу (18), находим:

$$\mu'=\frac{\mu-\mathbf{pv}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{27}$$

где $\mathbf{p}=\mu\mathbf{c}$. Умножая эту формулу на формулу (9), находим:

$$\mathbf{p}'=\frac{\mathbf{p}\sqrt{1-v^2/c^2}+v^{-2}(1-\sqrt{1-v^2/c^2})\,\mathbf{pv}\cdot\mathbf{v}-\mu\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{28}$$

Формулы (27) и (28) и есть формулы преобразования массы и импульса света. Они по виду тождественны формулам (23) и (24).

Убедимся, наконец, что закон сохранения массы, справедливость которого мы обнаружили в процессе испускания или поглощения света, верен в любых процессах (при условии сохранения импульса), и притом во всех инерциальных системах. Это вытекает, в самом деле, из линейности формул преобразования массы и импульса. Именно, в силу линейности полная масса и полный импульс любой совокупности объектов преобразуются по формулам такого же вида, как и для отдельных объектов. Если обозначим массу и импульс совокупности через M и $\mathbf{P}$, то

$$M'=\frac{M-\mathbf{P}\mathbf{v}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{29}$$

и

$$\mathbf{P}'=\frac{\mathbf{P}\sqrt{1-v^2/c^2}+v^{-2}\left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\mathbf{P}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-M\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{30}$$

Если теперь $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$ сохраняются, то, как явствует из формулы (30), сохраняется и M. А отсюда, как показывает формула (29), вытекает сохранение M'. Итак, закон сохранения массы есть в любой инерциальной системе следствие закона сохранения импульса.

Возвращаясь еще раз напоследок к рассмотренному выше процессу испускания света телом, покажем, что не только полная масса излучающего тела уменьшается, но и масса покоя. Именно, исключая μ из уравнений (11) и (16), находим:

$$m_1=m_0\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}. \tag{31}$$

5. Подводя итог, мы видим, что предварительное введение массы света в рамках нерелятивистской теории необязательно. Этот метод только чрезвычайно упрощает все выкладки. Он имеет также методологическое значение, демонстрируя, что масса света не есть чисто релятивистское понятие. Оно не исчезает при обратном переходе из теории относительности в классическую теорию (см. по этому поводу [6]). С другой стороны, метод, изложенный в предыдущем пункте, имеет свое очарование. Он замечателен тем, что дает на основе всего лишь общей релятивистской формулы преобразования скорости и закона сохранения импульса одновременно целый букет фундаментальных выводов: зависимость массы тела от скорости, существование массы света, формулы преобразования массы и импульса, общий закон сохранения массы и др.

В заключение остается еще убедиться в том, что масса света, существование которой мы обосновали в рамках закона сохранения массы, определяет инертность света точно так же, как масса тел определяет их инертность. Для этого достаточно рассмотреть действие внешней силы на тело, имеющее заполненную черным излучением полость. Релятивистская сила определяется как производная импульса по времени

$$\mathbf{F}=d\mathbf{P}/dt. \tag{32}$$

Здесь $\mathbf{P}$ есть суммарный импульс оболочки и излучения. Пусть тело движется со скоростью $\mathbf{u}$. Обозначим импульс и массу какой-либо i-ой частицы излучения в инерциальной системе мгновенного покоя тела через $\mathbf{p}_{i0}$ и μ_{i0}, а импульс и массу той же частицы в системе, в которой тело движется со скоростью $\mathbf{u}$, через $\mathbf{p}_i$ и μ_i. Тогда, согласно формулам преобразования (27) и (28),

$$\mu_i=\frac{\mu_{i0}+\mathbf{p}_{i0}\mathbf{u}/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{33}$$

и

$$\mathbf{p}_i=\frac{\mathbf{p}_{i0}\sqrt{1-u^2/c^2}+u^{-2}(1-\sqrt{1-u^2/c^2})\,\mathbf{p}_{i0}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mu_{i0}\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{34}$$

Суммируя по i, т. е. по всем частицам излучения, и учитывая, что в системе покоя тела распределение импульсов по направлениям изотропно, находим:

$$\mu=\frac{\mu_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{35}$$

и

$$\mathbf{p}=\frac{\mu_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{36}$$

где μ_0 — полная масса излучения в системе покоя тела. Обратим внимание на то, что формулы (35) и (36) совпадают по виду с формулами массы и импульса тела, имеющего массу покоя μ_0 и движущегося со скоростью $\mathbf{u}$. Это значит, что замкнутое в полость излучение ничем в отношении массы и импульса не отличается от тела. Поэтому полный импульс полого тела выражается формулой

$$\mathbf{P}=\frac{(m_0+\mu_0)\,\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=M\mathbf{u}, \tag{37}$$

где

$$M = \frac{m_0 + \mu_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{38}$$

есть его полная масса. Отсюда и вытекает, что инертность этого тела определяется на одинаковых основаниях как массой оболочки, так и массой излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Кард. Новая методика преподавания основ теории относительности. — «Известия АН ЭССР, Физ., Матем.», 1975, **24**, 305—311.
2. П. Кард. Основы теории относительности. — Издательство Тартуского гос. ун-та, Тарту, 1976, 73 с.
3. П. Кард. К обоснованию релятивистских понятий массы и импульса. — «Известия АН ЭССР, Физ., Матем.», 1976, **25**, 75—77.
4. П. Г. Кард. Масса света. — «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 417. Методологические вопросы физики III. Тарту, 1977, с. 48—56.
5. П. Кард. К обоснованию понятия релятивистской массы. — «Известия АН ЭССР, Физ., Матем.», 1979, **28**, 34—41.
6. П. Кард. К вопросу о соотношении релятивистской и классической механики. — «Известия АН ЭССР, Физ., Матем.», 1976, **25**, 15—22.

Поступила в редакцию 8 сентября 1978 г.

MASSI MÕISTE PÕHJENDAMISEST

P. Kard

Resümee

Esitatakse uus meetod massi jäävuse seaduse ja valguse massi olemasolu kooskõlaliseks põhjendamiseks. Eeldusteks on relatiivsusprintsiip, impulsi jäävuse seadus, impulsi paralleelsus kiirusega ja kiiruse teisendusvalem. Vaadeldakse suunatud valgusvoo kiirgumist kehast kahes inertsiaalsüsteemis — keha algse paigaloleku süsteemis ja selle suhtes meelevaldse kiirusega **v** liikuvas süsteemis. Lähtevõrranditeks on impulsi jäävust väljendavad võrrandid mõlemas inertsiaalsüsteemis ja keha lõppkiiruse **u** ning valguse kiiruse **c** teisendusvalemid. On võimalik nii mitterelativistlik kui ka relativistlik käsitlus. Mitterelativistlikul juhul annab kiiruste **c**′, **u**′ ja **u** elimineerimine võrrandi (5), kus μ on valguse impulsi jagatis kiirusega, m on keha algmass ja m_1 lõppmass. Kiiruste **c** ja **v** sõltumatuse tõttu järgnevad siit seosed (6) ja (7). Viimasest selgub, et μ on valguse mass, eelmine näitab selle invariantsust. Relativistlikul juhul annab kiiruste **c**, **c**′ ja **u**′ elimineerimine võrrandi (13), kus m_0 ja m_1 on keha seisumass enne ja pärast kiirgamist ning γ — tegur, mille poolest liikuva keha mass erineb seisumassist. Kiiruste **u** ja **v** sõltuma-

tuse tõttu järgnevad siit valemid (14) ja (15). Valemist (14) järgnevad μ sõltumatuse tõttu **v**-st valemid (16) ja (19). Valemitest (15) ja (16) selgub, et μ on valguse mass ja et mõlemas inertsiaalsüsteemis kehtib massi jäävus. Edasi tuletatakse suvalise kogumi massi ja impulsi relativistlikud teisendusvalemid (29) ja (30), millest nähtub, et massi jäävuse seadus on impulsi jäävuse seaduse järeldus. Lõpuks näidatakse, et õõnsusega keha seisumass võrdub kesta ja õõnsust täitva musta kiirguse seisumasside summaga.

ZUR BEGRÜNDUNG DES MASSENBEGRIFFES

P. Kard

Zusammenfassung

Zu einem überzeugenden Beweis der Existenz von der Masse des Lichtes und zum allgemeinen Erhaltungssatz der Masse gelangt man durch die Betrachtung der Ausstrahlung eines wohlgerichteten Lichtbündels von einem Körper, der anfangs entweder als ruhend oder, in einem anderen Inertialsystem, als bewegt angesehen wird. Als theoretische Voraussetzungen gelten das Relativitätsprinzip, der Erhaltungssatz des Impulses, die Parallelität des Impulses mit der Geschwindigkeit und die Transformationsformel der Geschwindigkeit. Den Ausgangspunkt bilden vier Gleichungen: die Transformationsformeln der Geschwindigkeit des Körpers nach der Ausstrahlung und der des ausgestrahlten Lichtes (**u**, **c** im ersten, **u**′, **c**′ im zweiten Inertialsystem) und die Erhaltungsformeln des Impulses in beiden Inertialsystemen. Man kann das Problem entweder nichtrelativistisch oder relativistisch behandeln. In nichtrelativistischen Fassung erhält man nach der Elimination von **c**′, **u**′ und **u** die Formel (5), wo **v** die Geschwindigkeit des zweiten Inertialsystems relativ zum ersten, m und m_1 die Masse des Körpers vor und nach der Ausstrahlung und μ (oder μ') der Quotient des Impulses des Lichtes durch die Geschwindigkeit ist. Die Unabhängigkeit von **c** und **v** läßt davon auf die Formeln (6) und (7) schließen, die die Existenz und die Invarianz der Masse des Lichtes und die Erhaltung der Masse lehren. In relativistischer Fassung bekommt man nach der Elimination von **c**, **c**′ und **u**′ die Formel (13), wo m_0 und m_1 die Ruhmasse des Körpers vor und nach der Ausstrahlung und γ ein geschwindigkeitsabhängiger Massenfaktor ist. Die Unabhängigkeit von **u** und **v** hat die Formeln (14) und (15) zur Folge. Aus der Formel (14) schließt man wegen der Unabhängigkeit von μ und **v** auf die weiteren Formeln (16) und (19). Die Formeln (15) und (16) drücken

die Erhaltung der Masse in beiden Inertialsystemen aus, wobei μ (oder μ') wiederum als die Masse des Lichtes zu erkennen ist. Ferner leitet man die Transformationsformeln (29) und (30) der Masse und des Impulses einer beliebigen Gesamtheit ab, woraus zu ersehen ist, daß der allgemeine Erhaltungssatz der Masse eine Folge des Erhaltungssatzes des Impulses ist. Schließlich wird gezeigt, daß die Ruhmasse eines Hohlkörpers die Masse der eingeschlossenen Hohlraumstrahlung einbezieht.

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ МАССЫ ПОКОЯ

П. Г. Кард

0. Общеизвестно, что масса покоя абсолютна, т. е. релятивистски инвариантна. Заглавие нашей статьи может поэтому вызвать недоумение и породить сомнения в компетентности автора. Поспешим рассеять эти мрачные мысли: мы не покушаемся на инвариантность массы покоя. Об относительности будет идти речь совсем в другом смысле.

Относительность массы покоя тесно связана с ее неаддитивностью. Последнее означает, что масса покоя совокупности независимых объектов, рассматриваемой как одно целое, не равна сумме масс покоя отдельных составляющих совокупность объектов. Хотя это свойство массы покоя, вообще говоря, хорошо известно, не всегда оно находит адекватное толкование. В частности, обычно остается незамеченным тот аспект неаддитивности, который дает основание говорить об особого рода относительности массы покоя.

1. Рассмотрим произвольную совокупность независимых материальных объектов, каждый из которых имеет определенную скорость $\mathbf{u}_k$ и массу m_k. Объектами могут быть тела, частицы, потоки электромагнитного излучения и др. Каждый объект обладает также импульсом $\mathbf{p}_k$, равным произведению массы на скорость:

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{u}_k. \tag{1}$$

Известно, что импульс и умноженная на скорость света c масса образуют четырехмерный вектор, откуда вытекает инвариантность величины

$$m_k^0 = (m_k^2 - \mathbf{p}_k^2/c^2)^{1/2}. \tag{2}$$

Эта величина называется массой покоя объекта. Основанием тому служит факт, что при $\mathbf{p}_k = 0$ (т. е. когда объект покоится) $m_k^0 = m_k$. Впрочем, понятие массы покоя обобщается и на объекты, движущиеся в любой инерциальной системе со скоростью света. Такие объекты покоиться вообще не могут, но масса покоя их определяется той же формулой (2). Фактически она равна нулю (так как $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{c}_k$, где $|\mathbf{c}_k| = c$). Другую формулу для массы покоя получим, заменив в формуле (2) $\mathbf{p}_k$ на $m_k \mathbf{u}_k$:

$$m^0_k = m_k (1 - \mathbf{u}^2_k / c^2)^{1/2}. \tag{3}$$

Подчеркнем, что масса m_k любого объекта всегда и в любой инерциальной системе отлична от нуля. Что же касается импульса, то для каждого объекта с ненулевой массой покоя существует система покоя, в которой его скорость и импульс равны нулю. Наоборот, для объектов с нулевой массой покоя системы покоя нет; их скорость и импульс в любой инерциальной системе отличны от нуля.

Как известно, масса и импульс являются сохраняющимися величинами. Другое важное свойство этих величин состоит в их аддитивности: масса совокупности независимых объектов равна сумме масс отдельных объектов и импульс совокупности равен сумме импульсов отдельных объектов. Аддитивность является необходимым (хотя и недостаточным) условием сохранения, так как полный баланс массы и импульса неизбежно должен содержать суммарную массу и суммарный импульс. Следует также отметить связь аддитивности с линейностью формул преобразования массы и импульса. Благодаря линейности суммарные масса и импульс преобразуются по формулам того же вида, что и отдельные члены. Очевидно, линейность преобразования является необходимым (хотя и недостаточным) условием аддитивности. В то же время линейность гарантирует согласие законов сохранения с принципом относительности: если масса и импульс сохраняются хотя бы в одной инерциальной системе, то они сохраняются и в любой другой.

Итак, полный импульс и полная масса совокупности выражаются формулами:

$$\mathbf{p} = \sum_k \mathbf{p}_k \tag{4}$$

и

$$m = \sum_k m_k. \tag{5}$$

2. Обратимся к вопросу о массе покоя совокупности независимых объектов. Здесь мы прежде всего сталкиваемся с фактом неаддитивности. В самом деле, рассматривая совокупность как одно целое и характеризуя ее полными массой и импульсом согласно формулам (4) и (5), мы могли бы применить к ней и формулу (2). Масса покоя совокупности как целого выразилась бы тогда в виде:

$$m^0 = (m^2 - \mathbf{p}^2/c^2)^{1/2} = [(\sum_k m_k)^2 - c^{-2}(\sum_k \mathbf{p}_k)^2]^{1/2}. \tag{6}$$

Но эта величина не равна, вообще говоря, сумме масс покоя отдельных объектов:

$$m^0 \neq \sum_k m_k^0, \tag{7}$$

в чем и состоит неаддитивность.

Рассмотрим данный вопрос подробнее. Исследуем поближе формулу (6). Имеем ли мы право считать величину m^0 массой покоя совокупности? Приведем соображения, заставляющие ответить на этот вопрос утвердительно. Убедимся прежде всего в вещественности m^0. Для этого вычислим подкоренное выражение:

$$m^2 - \mathbf{p}^2/c^2 = (\sum_k m_k)^2 - c^{-2}(\sum_k \mathbf{p}_k)^2 =$$
$$= \sum_k m_k^{02} + \sum_{k \neq l} \sum (m_k m_l - \mathbf{p}_k \mathbf{p}_l/c^2). \tag{8}$$

Выражение, стоящее под знаком двойной суммы, удовлетворяет очевидному неравенству

$$m_k m_l - \mathbf{p}_k \mathbf{p}_l/c^2 \geqslant 0, \tag{9}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, если $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{c}$ и $\mathbf{p}_l = m_l \mathbf{c}$, т. е. если оба объекта движутся со скоростью света в одном и том же направлении. Учитывая, что первый член правой части формулы (8) тоже неотрицателен, получаем неравенство

$$m^2 - \mathbf{p}^2/c^2 \geqslant 0, \tag{10}$$

откуда и следует вещественность m^0. Формулу (10) можно переписать в виде

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}, \tag{11}$$

где $\mathbf{u}$ есть некоторая скорость, характеризующая данную совокупность, причем $u \leqslant c$. Эту скорость принято называть скоростью центра масс. Если подставим в формулу (6) $m\mathbf{u}$ вместо $\mathbf{p}$, то получим другое выражение для массы покоя совокупности:

$$m_0 = m(1 - \mathbf{u}^2/c^2)^{1/2}. \tag{12}$$

Формулы (11), (6) и (12) вполне аналогичны формулам (1)—(3). Мы приходим, таким образом, к выводу, что масса m, импульс $\mathbf{p}$, скорость $\mathbf{u}$ и масса покоя m^0 совокупности независимых объектов связаны между собой формулами такого же вида, как те же величины, относящиеся к отдельному объекту. Это обстоятельство и оправдывает введение массы покоя совокупности согласно формуле (6). Отметим еще, что эта величина так же инвариантна, как всякая вообще масса покоя. Мы видим также, что масса покоя совокупности при $u<c$ отлична от нуля, а при $u=c$ равна нулю. В первом случае существует инерциальная система, в которой импульс совокупности равен нулю (система центра масс), во втором случае такой системы нет. Система центра масс движется относительно произвольной системы, в которой импульс и масса равны $\mathbf{p}$ и m, со скоростью $\mathbf{u}$. Все это опять-таки совершенно аналогично тому, что имеет место для отдельного объекта. Правда, «центра масс» как точки, расположение которой относительно объектов не зависит от выбора инерциальной системы, не существует, но понятие системы центра масс этого и не требует. Даже отдельные объекты не предполагаются обязательно точечными; нас интересуют только масса и импульс, но не пространственные характеристики объектов.

Сделаем еще одно немаловажное замечание. Как видно из вывода формулы (10), знак равенства в ней имеет место только при одном весьма специальном условии. Именно, равенство получается тогда и только тогда, если оба члена в правой части формулы (8) обращаются в нуль. А это значит, что все входящие в совокупность объекты должны иметь нулевую массу покоя и двигаться в одном и том же направлении. Если же масса покоя хотя бы одного объекта отлична от нуля, или если хотя бы один из них движется в ином направлении, чем остальные, то в формуле (10) имеет место неравенство, т. е. масса покоя совокупности отлична от нуля. Иначе говоря, равенство нулю масс покоя всех объектов является необходимым, но не достаточным условием равенства нулю массы покоя совокупности; вдобавок необходимо также, чтобы скорости всех объектов имели одно и то же направление.

Обратимся теперь к неравенству (7) и уточним его. Покажем прежде всего, что в случае, если все объекты движутся с одной и той же скоростью, оно обращается в равенство. В самом деле, если общая скорость равна скорости света, то обе части равны нулю. Если же общая скорость меньше скорости света, то с той же скоростью движется и система центра масс, причем все объекты в этой системе неподвижны. Это и значит, что масса покоя совокупности равна сумме масс покоя отдельных объектов. Во всех остальных случаях, т. е. если скорости объектов различны, имеет место неравенство. В системе центра масс тогда не все объекты покоятся; следовательно, полная масса больше суммы масс покоя, т. е. в неравенстве (7) левая часть больше правой. Итак,

$$m^0 \geqslant \sum_k m_k^0, \tag{13}$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, если скорости всех объектов равны.

2*

3. В предыдущем пункте мы выяснили, что масса покоя — неаддитивная величина. Это означает своеобразную относительность массы покоя. Величина, определяемая формулой (6) и стоящая в левой части неравенства (13), является во всех отношениях для совокупности как целого тем же, чем масса покоя является для отдельного объекта. Но так как входящие в совокупность объекты независимы, то мы с равным правом можем рассматривать каждый объект с его массой покоя в отдельности. Сумма масс покоя всех объектов получится тогда меньше предыдущего значения (правая часть неравенства (13)). Можно также разбить совокупность (если в ней больше двух объектов) на несколько подсовокупностей и определять массу покоя каждой по формуле (6). Сумма масс покоя всех таких подсовокупностей зависит, очевидно, от способа разбиения. Каждому разбиению соответствует свое значение суммарной массы покоя. В этом и заключается та обусловленная неаддитивностью относительность массы покоя, на которую мы хотим здесь обратить особое внимание. Эта относительность не имеет, очевидно, ничего общего с относительностью в смысле зависимости от выбора инерциальной системы. В нижеследующем остановимся на относительности массы покоя подробнее и обсудим некоторые возникающие в этой связи вопросы.

Прежде всего мы должны дать ответ на следующее соображение. Выше мы, рассматривая совокупность независимых объектов, обосновали понятие массы покоя всей этой совокупности, согласно формуле (6). Против этого можно возразить указанием на чисто формальный характер этого определения. Раз объекты независимы, взаимодействие между ними отсутствует, то объединение их в «совокупность» искусственно, оно лишено непосредственного физического смысла. Не было бы ли правильнее рассматривать каждый независимый объект в отдельности? Тогда мы избавились бы от неаддитивности, никакой относительности тоже не возникло бы; массу покоя совокупности мы понимали бы как сумму масс покоя отдельных объектов, а величину, определяемую формулой (6), просто игнорировали бы.

На приведенное возражение мы дадим двоякий ответ. Во-первых, величину m^0 (формула (6)) не так-то просто игнорировать. Хотя объекты и независимы, эта величина объективно характеризует все их множество. Существование этой инвариантной величины указывает на векторный характер комплекса величин $\mathbf{p}$ и mc, т. е. полных импульса и массы совокупности; стало быть, нельзя считать ее лишенной всякого смысла. Словом, характеризуя множество объектов импульсом и массой, нельзя закрывать глаза и на зависящую от них величину $(m^2-\mathbf{p}^2/c^2)^{1/2}$. Но, может быть, она не заслуживает названия массы покоя? Нет, лучшего названия не придумать. Как мы показали, она играет для всей совокупности как целого в точности ту же роль, что масса покоя для отдельного объекта.

Во-вторых, важное значение имеет случай, когда входящие в совокупность объекты образуют компактное целое. Тогда они, правда, не могут быть полностью независимы, но часто бывает возможно взаимодействием их пренебречь. В таких случаях все наши предыдущие рассуждения остаются в силе, но вместо формального объединения имеем реальный объект, состоящий из слабо взаимодействующих частей. Состояние покоя этого объекта узнается непосредственно, т. е. независимо от импульсов составных частей. Поэтому и масса покоя его имеет непосредственный смысл массы в состоянии покоя, в согласии с формулой (6). Но вместе с тем и каждая отдельная часть имеет свою массу покоя, причем выполняется неравенство (13). Ни той, ни другой величине в этом неравенстве никак нельзя отказать в реальности, ибо одинаково несомненно как существование компактного объекта, покой и движение которого можно рассматривать не зная ничего о его внутреннем строении, так и то, что он состоит из частей, практически независимых. Типичным примером является тело, имеющее наполненную черным излучением полость. Масса покоя такого тела больше массы покоя оболочки на массу излучения (в состоянии покоя тела). А излучение можно представить как суперпозицию волн с определенными импульсом и массой и с нулевой массой покоя. Сумма масс покоя всех этих волн равна нулю. Но в массу покоя всего тела излучение дает отличный от нуля вклад. Другой, аналогичный пример — сосуд, наполненный идеальным газом. Масса покоя его равна сумме массы покоя стенок и масс всех молекул газа. А так как масса каждой молекулы больше ее массы покоя, то масса покоя сосуда с газом больше суммы масс покоя стенок и всех молекул.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что неаддитивность и связанная с ней относительность массы покоя неустранимы. Об этой характерной особенности массы покоя часто забывают, что влечет за собой неоправданную переоценку этого понятия. Часто главное внимание направляется на а б с о л ю т н о с т ь массы покоя в смысле ее релятивистской инвариантности, тогда как ее о т н о с и т е л ь н о с т ь в объясненном выше смысле остается в тени. Так, М. Борн в статье «Физическая реальность» [1] склонен рассматривать инвариантность величин как главный показатель реальности тех вещей, к которым они относятся («...идея инвариантов является ключом к рациональному понятию реальности...»); неинвариантные величины он понимает как проекции или компоненты инвариантов. На наш взгляд, инвариантность сама по себе по вопросу о реальности никакого решающего значения не имеет. Верно, что неинвариантные величины, например, импульс и масса (компоненты четырехмерного импульса) являются проекциями на координатные оси инерциальной системы. Отдельно взятый компонент, конечно, мало что говорит о реальности объекта. Но все компоненты вместе выражают его реальность во всяком случае полнее, чем всего лишь тот или другой инвариант. В случае вектора единственным инвариантом является его абсолютная величина (в случае импульса — масса покоя); но одна лишь абсолютная величина не может заменить всего вектора. Другой пример: электромагнитное поле. Оно описывается антисимметричным тензором второго ранга с его шестью неинвариантными компонентами. Этот тензор полностью отражает реальность данного объекта. Напротив, два инварианта, которые можно составить из компонентов тензора, никоим образом не способны выразить то многообразие свойств поля, носителем которого является весь тензор и в котором как раз отражается реальность поля. Тяга к инвариантам как выразителям якобы безупречной реальности является фактически отголоском тех контроверсий, в которых релятивистскую относительность хотели толковать в субъективистском духе как зависимость от наблюдателя. Сам М. Борн выдвигает свою концепцию в противовес субъективистским воззрениям Г. Дингля. На самом же деле релятивистская относительность ровно никакого отношения к субъективизму не имеет, так что отсутствует и надобность искать спасения от субъективизма под сенью инвариантов.

Что касается, в частности, массы покоя, то именно этот инвариант менее всего способен взять на себя роль преимущественного выразителя реальности. Это обусловлено прежде всего его относительностью, о которой была речь в этой статье. Помимо этого, масса покоя, как хорошо известно, не сохраняется. Конечно, если говорить об элементарных частицах, то масса покоя является их существенной характеристикой, причем, именно в силу элементарности, относительность для каждой отдельной частицы не имеет места (впрочем, это верно только с точки зрения наших сегодняшних знаний об элементарных частицах). Но даже в случае элементарных частиц роль массы покоя не столь всеобъемлюща, чтобы усматривать в ней главный признак реальности частиц. Частицы, как и все физические объекты вообще, существуют в движении; поэтому лучше и полнее, чем массой покоя, реальность их выражается сохраняющимися величинами — импульсом и массой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн. Физика в жизни моего поколения. М., ИИЛ, 1963, с. 267—284.

Поступила в редакцию 2 октября 1978 г.

SEISUMASSI RELATIIVSUS

P. Kard

Resümee

Mitmest sõltumatust või nõrgalt seostatud objektist koosneva kogumi seisumassina võib vaadelda kas üksikute objektide seisumasside summat või kogumi summaarset massi massikeskme süsteemis. Enam kui kahe objekti puhul on seisumass defineeritav veelgi mitmel viisil, nimelt kogumi jaotamise teel väiksemateks kogumiteks. Kõik need seisumassi väärtused on üldiselt üksteisest erinevad, mis tähendab seisumassi mitteaditiivsust. Ometi iseloomustavad nad kõik võrdväärsetena kogumi struktuuri. Selles mõttes on seisumass relatiivne suurus. Siit järgneb, et seisumassi ei saa pidada objekti reaalsuse peamiseks väljendajaks. Seisumassi invariantsusel pole reaalsuse küsimuses mingit määravat tähtsust. Ennemini on reaalsus seostatav jäävusega. Iga objekti reaalsuse väljendajaks tuleb pidada jäävaid, olgugi mitteinvariantseid suurusi — eelkõige massi ja impulssi.

DIE RELATIVITÄT DER RUHMASSE

P. Kard

Zusammenfassung

Die Ruhmasse einer Gesamtheit von ungebundenen oder schwach gebundenen Objekten kann man entweder als die Summe der Ruhmassen einzelner Objekte oder als die Masse der ganzen Gesamtheit im Schwerpunktsystem definieren. Falls die Gesamtheit mehr als zwei Objekte enthält, kann man sie auch in mehrere kleinere Gesamtheiten aufteilen und die Summe der Ruhmassen der Teile als die Ruhmasse des Ganzen ansehen. Alle diese möglichen Werte sind allgemein verschieden, die Ruhmasse ist also keine additive Größe. Alle Werte sind doch gleichberechtigt, insofern als sie die Struktur der Gesamtheit objektiv widerspiegeln. Daher ist die Ruhmasse in diesem Sinne eine relative Größe. Daraus wird ersichtlich, daß die Ruhmasse keineswegs als der Vertreter der Realität des Objektes gewertet werden kann. Die Invarianz der Ruhmasse ist anläßlich der Realitätsfrage von keinem prinzipiellen Belang. Vielmehr hat die Realität ein direktes Verhältnis zur Erhaltung. Nicht die Ruhmasse, sondern die Größen, die erhalten bleiben, auch wenn sie nichtinvariant sind, vor allem die Masse und der Impuls, sind die wahren Repräsentanten der Realität.

О ЕДИНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИЙ ГРАВИТАЦИИ

А. А. Коппель

0. Введение.

Общая теория относительности (ОТО) как релятивистская (Р) теория гравитации формулируется на геометрическом языке. Свойства гравитационного поля (Г-поля) выражаются в свойствах искривленного пространства-времени (П-В). Теория гравитации Эйнштейна — это «геометродинамика» [1].*

Классическая формулировка ньютоновой нерелятивистской (НР) теории гравитации традиционно «негеометрическая». Пространство и время понимаются обычно как пассивный фон для гравитационных явлений. Однако ньютонова теория гравитации — это предел ОТО. Уже давно была доказана также возможность геометрической формулировки ньютоновой теории [3]. Впоследствии эта идея развивалась во многих работах [4—12].

Фактически можно получить единый целостный геометрический подход к ОТО и ее НР пределам в том смысле, что и математический аппарат, и основные физические идеи являются в них едиными. На наш взгляд, эта цельная точка зрения является очень существенной для углубленного понимания физического содержания и геометрического смысла как самой Р теории гравитации, так и ее НР пределов. Этим проблемам посвящены работы Кереса [8—12], а также несколько работ автора [13—15]. Особо стоит подчеркнуть, что, как показано Кересом [9, 10], НР теория гравитации, получаемая из ОТО в пределе $c \to \infty$, не исчерпывается ньютоновой теорией (c — скорость света как релятивистский параметр). НР теория более обща, чем ньютонова

* Отметим, что цитируемый здесь фундаментальный труд по основам и приложениям ОТО — монография-учебник Мизнера, Торна и Уилера издан в трех томах также в русском переводе [2]. В данной статье в дальнейшем мы будем ссылаться именно на это русское издание, указывая каждый раз том и страницу.

теория, в которую она переходит лишь в частном, т. наз. безвихревом случае.

В настоящей статье ставится следующая задача: опираясь на математический аппарат («свободный от координат язык» тензоров и внешних форм) книги [1, 2], подробно обосновать единую геометрическую формулировку как Р, так и НР теории гравитации, причем последняя понимается как общий возможный предел ОТО при $c \to \infty$.

В первом параграфе дадим компактную формулировку тех общих и единых исходных положений, которые служат основой как Р, так и НР теории, а затем укажем на основные отличия этих теорий. Вдобавок ставится дополнительная задача методологического характера, которая заключается в подробном анализе взаимоотношений между математической формулировкой основ теории гравитации, применяемой в [1, 2], и более простым применением исчисления внешних форм в ранних работах автора [13—17].

Во втором параграфе зададим Р и НР теории гравитации в свободно падающем репере и обсудим конкретный переход к пределу $c \to \infty$. Выдвинем основные моменты, позволяющие говорить о тесной связи между ОТО и ее пределами.

В третьем параграфе ставится задача анализа аксиом для геометрической формулировки ньютоновой теории, приведенных в книге Мизнера, Торна и Уилера ([2], I, с. 368), с точки зрения нашего более общего подхода к НР теории гравитации.

Итак, данная работа предлагает подробное математическое обоснование высказанных ранее [13, 17] общих соображений, относящихся к трактовке НР теории гравитации в рамках ОТО.

1. Исходные понятия и формулы геометрической формулировки теории гравитации.

1.1. **Пространство-время как дифференцируемое многообразие V_4.** Как Р, так и НР теорию гравитации можно начинать с понятия пространства-времени — «мира событий». При этом, характеризуя события «тем, что в них происходит» ([2], I, с. 33), можно «умозрительно перейти к идеализированному предельному случаю бесконечно густой сети световых лучей и мировых линий бесконечно малых пробных частиц» ([2], I, с. 38). Этой идеализации в физике можно сопоставить математическое понятие непрерывного 4-мерного многообразия, точнее — понятие 4-мерного связного хаусдорфова *дифференцируемого многообразия* V_4.

Каждое открытое подмножество $U_A \subset V_4$ взаимно однозначно отображается на некоторое открытое множество четырех действительных независимых переменных R_4, т. е. $f_A : U_A \to R_4$. Если

$\mathfrak{P}\in U_A$ ($\mathfrak{P}$ — событие П-В), то $f_A(\mathfrak{P})=\{x^\nu\}$ — точка числового пространства R_4, т. е. набор упорядоченных совокупностей из 4 чисел $\{x^\nu\}$, которые принимаются за *координаты события* $\mathfrak{P}$. Если $\mathfrak{P}\in U_A\cap U_B$ и $f_A(\mathfrak{P})=\{x^\nu\}$, $f_B(\mathfrak{P})=\{x^{\mu'}\}$, то при изменении $\mathfrak{P}$ в $U_A\cap U_B$ предполагается, что функции $x^{\mu'}=x^{\mu'}(x^\nu)$ являются гладкими функциями определенного класса C^k, т. е. функциями, дифференцируемыми до k-го порядка, и якобиан $D(x^{\mu'}, x^\nu)\equiv\left|\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right|$ не исчезает. «Когда говорят, что система координат «гладкая», имеют в виду, что близкие события имеют близкие значения координат» ([2], I, с. 35).

Покрытие, т. е. счетное число подмножеств $\{U_A\}$, и набор диффеоморфизмов (гладких гомеоморфизмов) $\{f_A\}$ называют в дифференциальной геометрии *атласом*, а пару (U_A, f_A) — *картой* (см., например, [18], с. 38). Итак, конкретная *система координат* в П-В вводится с помощью определенной карты (U_A, f_A). Подчеркнем, что с точностью до ограничений, налагаемых в НР случае на допускаемые преобразования координат (см. ниже формулу (83)), это имеет место как в Р, так и в НР теории гравитации.

1.2. **Локальные реперы и кореперы. Тензоры как геометрические образы физических величин.** В каждой точке $\mathfrak{P}\in V_4$ определяется *слой* — касательное векторное пространство $T_{\mathfrak{P}}(V_4)$, где в свою очередь вводятся локальные, в общем *некоординатные* (неголономные) *базисы*, состоящие из четырех линейно независимых векторов * $\mathbf{e}_{(\alpha)}$. Частным случаем являются локальные *координатные* (голономные) базисы $\mathbf{e}_\nu=\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$([2], I, с. 287), причем полагаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\equiv\mathbf{e}_\nu=z^{(\alpha)}_{\nu}\mathbf{e}_{(\alpha)},\qquad \mathbf{e}_{(\beta)}=z^{\mu}_{(\beta)}\frac{\partial}{\partial x^\mu},\tag{1}$$

где $z^{(\alpha)}_{\nu}$, $z^{\mu}_{(\beta)}$ — функции координат $\{x^\nu\}$, и

$$z^{(\alpha)}_{\sigma}z^{\sigma}_{(\beta)}=\delta^{(\alpha)}_{(\beta)},\qquad z^{(\alpha)}_{\mu}z^{\nu}_{(\alpha)}=\delta^{\nu}_{\mu}\ .\tag{2}$$

В каждой точке $\mathfrak{P}\in V_4$ получается и касательное ковекторное пространство $T^*_{\mathfrak{P}}(V_4)$, где определяются *дуальные* (в общем некоординатные) *базисы* 1-форм ** $\{\mathbf{w}^{(\beta)}\}$, причем ([2], I, с. 289)

* По техническим причинам «некоординатные» индексы, обозначенные «шапочками» в [1, 2, 13—15, 17], в данной работе заключены в скобки, как и в [16], т. е. $\mathbf{e}_{(\beta)}\equiv\mathbf{e}_{\hat\beta}$. В данной работе греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3. По дважды встречающемуся в произведении индексу всегда производится суммирование.

** В [1, 2] базисные 1-формы обозначаются вместо $\mathbf{w}$ полужирной греческой буквой ω.

$$\langle \mathbf{w}^{(\beta)}, \mathbf{e}_{(\alpha)} \rangle = \delta^{(\beta)}_{(\alpha)}. \tag{3}$$

Частным случаем являются дуальные координатные базисы* $\mathbf{w}^\nu = \mathbf{d}x^\nu$, т. е.

$$\left\langle \mathbf{d}x^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \delta^\nu_\mu, \tag{4}$$

причем

$$\mathbf{w}^{(\beta)} = z^{(\beta)}_\mu \mathbf{d}x^\mu, \qquad \mathbf{d}x^\nu = z^\nu_{(\alpha)} \mathbf{w}^{(\alpha)}. \tag{5}$$

В локальных базисах и дуальных базисах, принадлежащих к определенной точке $\mathfrak{P} \in V_4$, можно построить *тензоры* любого ранга $\binom{n}{m}$ как «линейные машины» с «n входными каналами для n 1-форм и с m входными каналами для m векторов, после ввода которых на выходе получается вещественное число» ([2], I, с. 113), а также можно построить тензорную алгебру.

Имеем, например, для тензора ранга $\binom{2}{1}$ ([2], I, с. 291)

$$\mathbf{A}(.,.,.) = A^{(\alpha)(\beta)\cdot}_{\cdot\cdot(\gamma)} \mathbf{e}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{e}_{(\beta)} \otimes \mathbf{w}^{(\gamma)} = A^{\varkappa\lambda\cdot}_{\cdot\cdot\mu} \, \mathbf{e}_\varkappa \otimes \mathbf{e}_\lambda \otimes \mathbf{d}x^\mu, \tag{6}$$

причем для некоординатных (неголономных, реперных, «физических») составляющих имеет место соотношение

$$A^{(\alpha)(\beta)\cdot}_{\cdot\cdot(\gamma)} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{w}^{(\alpha)}, \mathbf{w}^{(\beta)}, \mathbf{e}_{(\gamma)}) = z^{(\alpha)}_\varkappa z^{(\beta)}_\lambda z^\mu_{(\gamma)} A^{\varkappa\lambda\cdot}_{\cdot\cdot\mu}, \tag{7}$$

а для координатных (голономных) составляющих —

$$A^{\varkappa\lambda\cdot}_{\cdot\cdot\mu} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{d}x^\varkappa, \mathbf{d}x^\lambda, \mathbf{e}_\mu) = z^\varkappa_{(\alpha)} z^\lambda_{(\beta)} z^{(\gamma)}_\mu A^{(\alpha)(\beta)\cdot}_{\cdot\cdot(\gamma)}. \tag{8}$$

Для произвольных входных 1-форм** ($\mathbf{v}$ и $\mathbf{t}$) и векторов ($\mathbf{U}$) получается

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{U}) = A^{(\alpha)(\beta)\cdot}_{\cdot\cdot(\gamma)} v_{(\alpha)} t_{(\beta)} U^{(\gamma)} = A^{\varkappa\lambda\cdot}_{\cdot\cdot\mu} v_\varkappa t_\lambda U^\mu. \tag{9}$$

Физическое осмысление тензоров превращает эти геометрические объекты в физические величины, а затем с их помощью получается описание физических феноменов на геометрическом языке как в Р, так и НР случае — либо с использованием координат, либо на свободном от координат языке.

---

* «Внешняя производная» или «градиент» $\mathbf{d}f$ функции f является более строгой формой понятия «дифференциал». $\mathbf{d}f$ характеризует изменение f в направлении, которое не задано ([2], I, с. 100).

** Обычно для обозначения форм пользуются полужирными греческими буквами. В данной работе будем применять для форм полужирные латинские буквы, преимущественно строчные.

В дальнейшем будем говорить о *реперах* или *кореперах*, определяемых как выбранной точкой $\mathfrak{P} \in V_4$, так и базисными векторами или 1-формами: о некоординатных $\{\mathfrak{P}, \mathbf{e}_{(\alpha)}\}$ или $\{\mathfrak{P}, \mathbf{w}^{(\alpha)}\}$, и о координатных $\left\{\mathfrak{P}, \dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right\}$ или $\{\mathfrak{P}, \mathbf{d}x^{\mu}\}$.

1.3. **Связность и кривизна.** Аффинная связность определяется в V_4 независимо от метрики. Поэтому сначала оставляем открытым вопрос о метрических свойствах V_4 и будем рассматривать это многообразие лишь как пространство с аффинной связностью, как «пространство с ковариантной производной» ([2], I, с. 303), пользуясь при этом понятием «подвижного репера» Картана. Отметим, что уже предположение о существовании аффинной связности в V_4 позволяет сформулировать принцип эквивалентности как «связующее звено между негравитационными законами и гравитацией» ([2], II, с. 14), которое фактически имеет место как в Р, так и в НР теории.

В качестве исходных понятий выбираем здесь «производную от точки» ([2], I, с. 428—429), которую зададим в некоординатном репере

$$\mathbf{d}\mathfrak{P} = \mathbf{e}_{(\alpha)}\mathbf{w}^{(\alpha)} \tag{10}$$

и закон изменения базисных векторов ([2], I, с. 425)

$$\mathbf{d}\mathbf{e}_{(\beta)} = \mathbf{e}_{(\alpha)}\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}\,. \tag{11}$$

Величина $\mathbf{d}\mathfrak{P}$ описывает *бесконечно малое перемещение* в V_4, причем направление является неопределенным. В книге [1, 2] $\mathbf{d}\mathfrak{P}$ толкуется как тензор ранга $\binom{1}{1}$, который имеет «входной канал». Лишь после того, как в этот канал введен определенный вектор $\mathbf{V}$, $\mathbf{d}\mathfrak{P}$ дает определенный ответ в форме вектора. Например, перемещение, равное $d\mathbf{S}$ (см. ниже формулу (49)), заставляет точку воспроизводить перемещение, которое само есть $d\mathbf{S}$, т. е.

$$<\mathbf{d}\mathfrak{P},\ d\mathbf{S}> = d\mathbf{S}. \tag{12}$$

Формула (11) для «векторозначной 1-формы» $\mathbf{d}\mathbf{e}_{(\beta)}$ и дает в векторном расслоении $T(V_4) = \bigcup\limits_{\mathfrak{P} \in V_4} T_{\mathfrak{P}}(V_4)$ аффинную связность векторных пространств $T_{\mathfrak{P}}(V_4)$, $T_{\mathfrak{P}+\mathbf{d}\mathfrak{P}}(V_4)$, принадлежащих бесконечно близким точкам $\mathfrak{P} \in V_4$, $\mathfrak{P} + \mathbf{d}\mathfrak{P} \in V_4$, причем, используя эту аффинную связность, можно построить тензорный анализ. Величины $\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ — *1-формы связности*, причем

$$\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)} = \Gamma^{(\alpha)\cdot\cdot}_{\cdot(\beta)(\gamma)}\,\mathbf{w}^{(\gamma)}, \tag{13}$$

где $\Gamma^{(\alpha)\cdot\cdot}_{\cdot(\beta)(\gamma)}$ — *коэффициенты связности* ([2], I, с. 425).

В коэффициентах связности выражаются свойства ковариантной производной следующим образом. Либо

$$\nabla_{(\beta)}\mathbf{e}_{(\alpha)}=\mathbf{e}_{(\gamma)}\Gamma^{(\gamma)\cdot\cdot}_{\cdot(\alpha)(\beta)}, \tag{14}$$

либо

$$\nabla_{(\beta)}\mathbf{w}^{(\gamma)}=-\Gamma^{(\gamma)\cdot\cdot}_{\cdot(\alpha)(\beta)}\,\mathbf{w}^{(\alpha)}, \tag{15}$$

где $\nabla_{(\beta)}$ — оператор ковариантной производной, действующий вдоль базисного вектора $\mathbf{e}_{(\beta)}$; $\nabla_{(\beta)}\mathbf{e}_{(\alpha)}$ и $\nabla_{(\beta)}\mathbf{w}^{(\gamma)}$ — скорости изменения одного из базисных векторов $\mathbf{e}_{(\alpha)}$ или базисных 1-форм $\mathbf{w}^{(\gamma)}$ вдоль $\mathbf{e}_{(\beta)}$, соответственно ([2], I, с. 320). Ковариантная производная вдоль вектора имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{U}}=U^{(\alpha)}\nabla_{(\alpha)}, \tag{16}$$

а оператор ковариантной производной ∇, действующий на тензор $\mathbf{A}$, определяет градиент тензора $\nabla\mathbf{A}$ ([2], I, с. 260). При этом $\nabla_{\mathbf{U}}f\equiv\partial_{\mathbf{U}}f$, где *

$$\partial_{\mathbf{U}}=U^{(\alpha)}z^{\sigma}_{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}=U^{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}=\mathbf{U} \tag{17}$$

и

$$\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V}=U^{(\alpha)}\nabla_{(\alpha)}\mathbf{V}=U^{(\alpha)}[V^{(\beta)}{}_{,\sigma}z^{\sigma}_{(\alpha)}+V^{(\gamma)}\Gamma^{(\beta)\cdot\cdot}_{\cdot(\gamma)(\alpha)}]\mathbf{e}_{(\beta)}\equiv U^{(\alpha)}V^{(\beta)}{}_{;(\alpha)}\mathbf{e}_{(\beta)}. \tag{18}$$

В общем случае пространство с аффинной связностью может обладать как кривизной, так и кручением. Согласно ОТО, физическое П-В не имеет кручения. Вопрос о необходимости для описания всех тонкостей реального физического мира более общей, обладающей кручением модели П-В, остается открытым. В случае отсутствия кручения основные свойства V_4 как пространства с аффинной связностью полностью выражаются следующими *уравнениями структуры*:

$$\mathbf{d}\mathbf{w}^{(\alpha)}+\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}\wedge\mathbf{w}^{(\beta)}=0, \tag{19}$$

$$\mathbf{d}\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}+\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\gamma)}\wedge\mathbf{w}^{(\gamma)\cdot}_{\cdot(\beta)}=\mathbf{r}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}. \tag{20}$$

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться аппаратом внешнего исчисления Картана (см., например, [2], I, с. 132, а также [14], прил. I). Уравнения (19) эквивалентны соотношениям $\mathbf{d}^2\mathfrak{P}\equiv\equiv\mathbf{d}\wedge\mathbf{d}\mathfrak{P}=0$, причем исчезновение правых сторон в этих уравнениях и выражает отсутствие кручения или «симметрию ковари-

* Запятая с индексом означает дифференцирование по соответствующей координате.

антной производной» ([2], I, с. 428). Уравнения (20) определяют *2-формы кривизны* *

$$\mathbf{r}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)} = \frac{1}{2} R^{(\alpha)\cdots}_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)} \mathbf{w}^{(\gamma)} \wedge \mathbf{w}^{(\delta)}, \tag{21}$$

где $R^{(\alpha)\cdots}_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)}$ — *компоненты тензора кривизны* $\mathbf{R}$.

Отметим, что из (21) вытекает антисимметричность тензора $\mathbf{R}$ в двух последних индексах, а из условий интегрируемости уравнений (19) вытекает полная антисимметричность в трех последних индексах. Условия интегрируемости уравнений (20) являются тождествами Бианки.

Аналогично тому, как по формулам (14) коэффициентам связности можно сопоставить оператор ковариантной производной, компонентам тензора кривизны соответствует *оператор кривизны:*

$$\mathfrak{R}(\mathbf{e}_{(\alpha)}, \mathbf{e}_{(\beta)}) \mathbf{e}_{(\gamma)} = \mathbf{e}_{(\delta)} R^{(\delta)\cdots}_{\cdot(\gamma)(\alpha)(\beta)} \tag{22}$$

где ([2], I, с. 335)

$$\mathfrak{R}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv [\nabla_{\mathbf{U}}, \nabla_{\mathbf{V}}] - \nabla_{[\mathbf{U}, \mathbf{V}]}. \tag{23}$$

Здесь с учетом (17) введено понятие коммутатора двух векторов

$$[\mathbf{U}, \mathbf{V}] \equiv [\partial_{\mathbf{U}}, \partial_{\mathbf{V}}] \equiv 2\partial_{[\mathbf{U}}\partial_{\mathbf{V}]} \equiv \partial_{\mathbf{U}}\partial_{\mathbf{V}} - \partial_{\mathbf{V}}\partial_{\mathbf{U}}, \tag{24}$$

а $\nabla_{[\mathbf{U}, \mathbf{V}]}$ — ковариантная производная вдоль коммутатора $[\mathbf{U}, \mathbf{V}]$. Отсюда в силу (1) и (17)—(18), кстати, получается ** также

$$[\mathbf{e}_{(\alpha)}, \mathbf{e}_{(\beta)}] = 2\Gamma^{(\varkappa)}_{\cdot[(\beta)(\alpha)]} \mathbf{e}_{(\varkappa)} \equiv (\Gamma^{(\varkappa)}_{\cdot(\beta)(\alpha)} - \Gamma^{(\varkappa)}_{\cdot(\alpha)(\beta)}) \mathbf{e}_{(\varkappa)}. \tag{25}$$

Для обоснования формулы (22) полезно иметь в виду, что в результате прямого вычисления из (23) вытекает

$$\mathfrak{R}(\mathbf{e}_{(\alpha)}, \mathbf{e}_{(\beta)}) \mathbf{e}_{(\gamma)} = 2[\nabla_{[(\alpha)}\nabla_{(\beta)]} + \Gamma^{(\varkappa)}_{\cdot[(\alpha)(\beta)]} \nabla_{(\varkappa)}] \mathbf{e}_{(\gamma)}, \tag{26}$$

а, с другой стороны, из уравнений структуры (20) получается

$$R^{(\delta)\cdots}_{\cdot(\gamma)(\alpha)(\beta)} = 2(\Gamma^{(\delta)}_{\cdot(\gamma)[(\beta),(\alpha)]} + \Gamma^{(\lambda)}_{\cdot(\gamma)[(\beta)} \Gamma^{(\delta)}_{\cdot|(\lambda)|(\alpha)]} + \Gamma^{(\varkappa)}_{\cdot[(\alpha)(\beta)]} \Gamma^{(\delta)}_{\cdot(\gamma)(\varkappa)}). \tag{27}$$

---

* 2-формы кривизны обычно обозначаются через прописную омегу (Ω), а в книге [1, 2] через прописное «фигурное» R.

** В книге [1, 2] используется обозначение $c_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma} \equiv 2\Gamma_{(\gamma)[(\beta)(\alpha)]}$. Здесь и в дальнейшем по паре индексов, заключенных в квадратные или круглые скобки, производится альтернирование или симметрирование, соответственно. Индекс между вертикальными черточками не участвует в альтернировании или симметрировании.

Оператор кривизны $\mathfrak{R}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ тождественно совпадает с т. наз. $\binom{1}{1}$ -тензорнозначной 2-формой $\mathfrak{R}(.,.)$, вычисленной для бивектора $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} \equiv \mathbf{U} \otimes \mathbf{V} - \mathbf{V} \otimes \mathbf{U}$ ([2], I, с. 427)

$$<\mathfrak{R}, \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}> = \mathfrak{R}(\mathbf{U}, \mathbf{V}), \tag{28}$$

где

$$\mathfrak{R}(.,.) = \mathbf{e}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{w}^{(\beta)} \mathbf{r}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)\cdot} . \tag{29}$$

Отсюда получается и формула

$$\mathbf{d}^2\mathbf{V} = \mathfrak{R}\mathbf{V} = \mathbf{e}_{(\alpha)} \mathbf{r}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)} V^{(\beta)}, \tag{30}$$

т. е. результат двукратного применения оператора $\mathbf{d}$ к $\mathbf{V}$ представляет собой линейную алгебраическую операцию над $\mathbf{V}$. (Отметим, что для любой «тензорнозначной 0-формы», т. е. для тензора $\mathbf{T}$ ранга $\binom{n}{0}$ имеем $\mathbf{d} \wedge \mathbf{T} \equiv \mathbf{d}\mathbf{T} \equiv \nabla \mathbf{T}$, а операция $\mathbf{d}^2$ представляет собой, по существу, антисимметризованную ковариантную производную).

В силу соотношений (22)—(27) получаются следующие важные формулы для тензора кривизны

$$\mathbf{R}(.,., \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathfrak{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A^{(\alpha)} B^{(\beta)} R^{(\delta)\cdots}_{\cdot(\gamma)(\alpha)(\beta)} \mathbf{e}_{(\delta)} \otimes \mathbf{w}^{(\gamma)}, \tag{31}$$

$$\mathbf{R}(., \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathfrak{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{C} = C^{(\gamma)} A^{(\alpha)} B^{(\beta)} R^{(\delta)\cdots}_{\cdot(\gamma)(\alpha)(\beta)} \mathbf{e}_{(\delta)}, \tag{32}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = <\mathbf{t}, \mathfrak{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{C}> = t_{(\delta)} C^{(\gamma)} A^{(\alpha)} B^{(\beta)} R^{(\delta)\cdots}_{\cdot(\gamma)(\alpha)(\beta)} . \tag{33}$$

Операторы ковариантной производной и кривизны позволяют записать в сжатом виде как формулы для параллельного переноса векторов, так и уравнения геодезических линий и уравнения геодезического отклонения. Имеем для *параллельного переноса вектора* $\mathbf{A}$ вдоль $\mathbf{U}$

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A} = 0 \tag{34}$$

и для *параллельного переноса по бесконечно малому замкнутому контуру* (параллелограмму)

$$\delta\mathbf{A} + \mathfrak{R}(\mathbf{B}, \mathbf{C})\mathbf{A} = 0, \tag{35}$$

где $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ определяют ребра параллелограмма ([2], I, с. 341). *Уравнения геодезических линий* получаются как частный случай (34):

$$\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} = 0, \tag{36}$$

где $\mathbf{U} = \dfrac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \lambda}$, а λ аффинный параметр вдоль геодезической. *Урав-*

нения геодезического отклонения имеют вид ([2], I, с. 351)

$$\nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{N} + \mathfrak{R}(\mathbf{N}, \mathbf{U}) \mathbf{U} = 0, \qquad (37)$$

где $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial n}$ служит мерой разделения двух точек с одним и тем же значением λ на соседних геодезических; параметр n («параметр отбора») позволяет отличать одну геодезическую от другой. Определяя *оператор кривизны Якоби* $\mathfrak{J}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ соотношением

$$\mathfrak{J}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{C} \equiv \frac{1}{2} [\mathfrak{R}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathfrak{R}(\mathbf{C}, \mathbf{B}) \mathbf{A}], \qquad (38)$$

получаем уравнения геодезического отклонения также в виде

$$\nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{N} + \mathfrak{J}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \mathbf{N} = 0. \qquad (39)$$

Отметим еще, что оператор ковариантной производной ∇ и коэффициенты связности $\Gamma^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)(\gamma)}$ «выполняют одну и ту же операцию в любом мире, совместимом с принципом эквивалентности: 1) они воплощают в себе свойства всех геодезических, которые проходят через интересующую нас точку, и тем самым 2) они дают физический метод (параллельный перенос), позволяющий сравнивать значения векторных и тензорных полей в двух соседних точках» ([2], I, с. 319). Аналогично можно толковать оператор кривизны $\mathfrak{R}(.,.)$ и компоненты тензора кривизны $R^{(\alpha)\cdots}_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)}$ как «выполняющие одну и ту же операцию», как «инструмент, который дает возможность понять физику» ([2], I, с. 407) (здесь имеется в виду «динамичность» геометрии П-В, ее непосредственное участие в физических явлениях). И для наших целей теперь важно подчеркнуть, что все эти понятия равным образом можно применить как в Р, так и НР теориях гравитации.

1.4. **Метрика пространства-времени.** Согласно основным положениям Р теории гравитации Эйнштейна, V_4 является *римановым* пространством, т. е. *метрическим* пространством с аффинной связностью и с исчезающим кручением. Это значит, что в V_4 можно задать тензорное поле ранга $\binom{0}{2}$

$$\mathbf{g}(.,.) \equiv \mathbf{ds}^2 = g_{(\alpha)(\beta)} \mathbf{w}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{w}^{(\beta)} = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^{\mu} \otimes \mathbf{d}x^{\nu}, \qquad (40)$$

которое определяет расстояние между двумя бесконечно близкими точками $\mathfrak{P} \in V_4$ и $\mathfrak{P} + \mathbf{d}\mathfrak{P} \in V_4$. При этом, согласно принципу эквивалентности, касательные векторные пространства $T_{\mathfrak{P}}(V_4)$ можно отождествить с пространствами Минковского, где все физические законы имеют «специально-релятивистский» вид. Такое отождествление снабжает и риманову метрику $\mathbf{g}$ в V_4

лоренцовой сигнатурой, которую мы выбираем в виде $(-,+,+,+)$. Подчеркнем теперь, что в НР случае такими общими метрическими свойствами П-В уже не обладает. Отметим также, что в дальнейшем будем приписывать в каждой точке $\mathfrak{P} \in V_4$ репер $\{\mathfrak{P}, \mathbf{e}_{(\alpha)}\}$ именно локальному 4-пространству Минковского.

На языке абстрактной дифференциальной геометрии метрика является билинейной машиной $\mathbf{g}(.,.)$, производящей число («скалярное произведение $\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$») из двух касательных векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ([2], I, с. 375). При помощи метрики можно устанавливать и соответствие между 1-формами и касательными векторами: вектору $\mathbf{A}$ соответствует своя 1-форма $\overline{\mathbf{A}}$, определяемая так, что

$$<\overline{\mathbf{A}}, \mathbf{B}> \equiv \mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathbf{g}(\overline{\mathbf{A}}, \mathbf{B}) \qquad (41)$$

для всех $\mathbf{B}$. Таким образом, операция определения дуальной величины $< >$ заменяется по существу операцией скалярного произведения, обозначаемой здесь «точкой».

Как известно, именно в силу существования метрики можно «опускать» и «поднимать» индексы при составляющих тензоров, а также вообще говорить о ковариантных составляющих тензоров. Отметим, что такое «опускание» и «поднятие» индексов распространяется и на p-формы. При этом можно и далее параллельно иметь дело как с тензорами и векторами, так и с p-формами (в книге [1, 2] так и делается). Но обратим внимание на то, что соотношение (41) по существу позволяет «исключить» понятие p-форм из изложения геометрической теории гравитации и свести применяемый математический аппарат только к рассмотрению тензоров. Например, вместо соотношений (3), определяющих дуальные базисные 1-формы, можно получить определение векторов дуального репера («корепера») $\mathbf{e}^{(\beta)}$:

$$<\mathbf{w}^{(\beta)}, \mathbf{e}_{(\alpha)}> \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}^{(\beta)}, \mathbf{e}_{(\alpha)}) \equiv e^{(\beta)} \cdot \mathbf{e}_{(\alpha)} = \delta^{(\beta)}_{(\alpha)} . \qquad (42)$$

Имея в виду (1) и (2), получаем соотношения между ковариантными некоординатными и координатными составляющими метрического тензора как частные случаи формул типа (7) и (8):

$$g_{(\alpha)(\beta)} = z^{\mu}_{(\alpha)} z^{\nu}_{(\beta)} g_{\mu\nu} \quad (\text{а}), \qquad g_{\mu\nu} = z^{(\alpha)}_{\mu} z^{(\beta)}_{\nu} g_{(\alpha)(\beta)} \quad (\text{б}). \qquad (43)$$

Контравариантные составляющие метрического тензора определяются формулами

$$g^{(\alpha)(\gamma)} g_{(\gamma)(\beta)} = \delta^{(\alpha)}_{(\beta)}, \quad g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \qquad (44)$$

причем

$$g^{(\alpha)(\gamma)} = z^{(\alpha)}_{\mu} z^{(\gamma)}_{\nu} g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\lambda} = z^{\mu}_{(\alpha)} z^{\lambda}_{(\beta)} g^{(\alpha)(\beta)}. \qquad (45)$$

3 Заказ № 1195

Кроме опускания и поднятия индексов, наличие метрики наделяет базисные 1-формы, а также формы связности и кривизны еще некоторыми новыми свойствами. (Подчеркнем, что все такие свойства обязательно нужно отличать от тех, которыми обладают упомянутые формы и в пространствах без метрики, но имеющих аффинную связность. Это важно для сравнения геометрических теорий гравитации в Р и НР случаях.) Теперь, во-первых, добавляются уравнения «совместности» метрики со связностью ([2], I, с. 430)

$$\mathbf{d}g_{(\alpha)(\beta)}=2\mathbf{w}_{((\alpha)(\beta))}\equiv\mathbf{w}_{(\alpha)(\beta)}+\mathbf{w}_{(\beta)(\alpha)}. \tag{46}$$

Во-вторых, отсюда вытекает антисимметричность 2-форм кривизны

$$2\mathbf{r}_{((\alpha)(\beta))}\equiv\mathbf{r}_{(\alpha)(\beta)}+\mathbf{r}_{(\beta)(\alpha)}=0. \tag{47}$$

Наличие метрики позволяет образовать из **R** также целый ряд новых тензоров кривизны ([2], I, с. 396), дважды дуальный тензор кривизны ***R***, конформный тензор Вейля **C**, тензор кривизны Эйнштейна **G**, тензор кривизны Риччи **Rc**, скалярную кривизну R. Отметим, что мы определяем компоненты тензора Риччи формулой

$$R_{(\lambda)(\mu)}=R^{(\varkappa)\cdots}_{\cdot(\lambda)(\mu)(\varkappa)}, \tag{48}$$

по которой эти величины и скалярная кривизна имеют обратный знак по сравнению с ([2], I, с. 275).

Величину $\mathbf{ds}^2$, определяемую формулой (40), можно интерпретировать как «интервал неконкретизированного смещения» ([2], I, с. 375). Вводя определенное смещение во входные каналы $\mathbf{ds}^2$, получаем «конкретизированное» значение интервала ds^2. Например, пусть имеем

$$d\mathbf{S}=\omega^{(\alpha)}\mathbf{e}_{(\alpha)}=dx^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} \tag{49}$$

как *определенное бесконечно малое смещение*. Тогда

$$ds^2=\mathbf{g}(d\mathbf{S},d\mathbf{S})=g_{(\alpha)(\beta)}\omega^{(\alpha)}\omega^{(\beta)}=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \tag{50}$$

т. е. получается «обычное» понятие *«линейного элемента»*.

Отметим, что в силу (3) имеем

$$\omega^{(\alpha)}=\langle\mathbf{w}^{(\alpha)},\omega^{(\beta)}\mathbf{e}_{(\beta)}\rangle=\langle\mathbf{w}^{(\alpha)},d\mathbf{S}\rangle, \tag{51}$$

т. е. $\omega^{(\alpha)}$ является значением 1-формы $\mathbf{w}^{(\alpha)}$ на векторе смещения $d\mathbf{S}$ (ср. [2], I, с. 257), а в силу (4) —

$$dx^{\mu}=\langle\mathbf{d}x^{\mu},dx^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}\rangle=\langle\mathbf{d}x^{\mu},d\mathbf{S}\rangle. \tag{52}$$

Аналогичным образом можно определить в силу (13) и (51) также величины

$$\omega^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)} = <\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}, d\mathbf{S}> = \Gamma^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)(\gamma)} <\mathbf{w}^{(\gamma)}, d\mathbf{S}> = \Gamma^{(\alpha)}_{\cdot(\beta)(\gamma)}\, \omega^{(\gamma)} \tag{53}$$

как значения 1-форм связности $\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ на $d\mathbf{S}$, и в силу (21) и (51) —

$$\Omega^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)} = <d\mathbf{S}, <\mathbf{r}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}, d\mathbf{S}>> =$$

$$= \frac{1}{2} R^{(\alpha)\cdots}_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)} <d\mathbf{S}, <\mathbf{w}^{(\gamma)} \wedge \mathbf{w}^{(\delta)}, d\mathbf{S}>> =$$

$$= \frac{1}{2} R^{(\alpha)\cdots}_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)}\, \omega^{(\gamma)} \wedge \omega^{(\delta)} \tag{54}$$

как значения 2-форм кривизны на $d\mathbf{S}$. Получаемые $\omega^{(\alpha)}, \omega^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ и $\Omega^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ можно теперь рассматривать как скаляры, как инварианты относительно координатных преобразований $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\nu})$. Но они остаются внешними формами, для них имеют место все правила внешнего исчисления, имеют место уравнения структуры (19)—(20) и при наличии метрики можно также с помощью некоординатных компонент $g_{(\alpha)(\beta)}$ и $g^{(\alpha)(\beta)}$ «опускать» и «поднимать» их некоординатные индексы. Таким образом, можно толковать и $\omega^{(\alpha)}$, $\omega^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ и $\Omega^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ как «базисные 1-формы», «1-формы связности» и «2-формы кривизны», соответственно, хотя имеем здесь лишь «проекции», но притом однозначно определенные проекции соответствующих «настоящих» дифференциальных форм как геометрических объектов, понимаемых в духе книги [1, 2]. На наш взгляд, имеет определенную методологическую ценность и такое простое применение исчисления внешних дифференциальных форм в ОТО (см. такой подход в [13—17]). Отметим также, что формулами (51)—(54) можно пользоваться и без метрики.

1.5. **Уравнения гравитационного поля.** Согласно ОТО, в свойствах V_4 выражаются свойства как физического П-В, так и Г-поля, если только удовлетворяются *уравнения Эйнштейна* для метрического тензора $\mathbf{g}$. На языке дифференциальных форм можно этим уравнением придать вид

$$\varepsilon_{(\alpha)(\lambda)(\mu)(\nu)} \mathbf{w}^{(\lambda)} \wedge \mathbf{w}^{(\mu)} \wedge \mathbf{r}^{(\nu)\cdot}_{\cdot(\beta)} = \Pi_{(\alpha)(\beta)} \mathbf{w}^{(0)} \wedge \mathbf{w}^{(1)} \wedge \mathbf{w}^{(2)} \wedge \mathbf{w}^{(3)}, \tag{55}$$

где

$$\Pi_{(\alpha)(\beta)} \equiv \frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2} g_{(\alpha)(\beta)} T\right), \tag{56}$$

$\varepsilon_{(\alpha)(\lambda)(\mu)(\nu)}$ — символы Леви—Чивита, G — ньютонова гравитационная постоянная, а $T_{(\alpha)(\beta)}$ — составляющие тензора энергии-импульса, характеризующего материальные источники Г-поля. На свободном от координат тензорном языке уравнения (55) принимают вид

$$\mathbf{Rc}=\frac{8\pi G}{c^4}\left(\mathbf{T}-\frac{1}{2}\mathbf{g}T\right). \tag{57}$$

В общем случае к уравнениям Г-поля добавляются еще физические соотношения для негравитационных величин (например, уравнения Максвелла для электромагнитного поля, уравнение состояния вещества и т. д.).

Уравнения (55) могут быть также истолкованы как условия, выделяющие из всевозможных римановых 4-пространств V_4 с лоренцовой сигнатурой определенный класс $\mathfrak{M}$, соответствующий Р Г-полям.

Если координатные компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям Г-поля, то они называются *метрическими потенциалами* Г-поля. Соответствующие этим метрическим потенциалам величины $z^{(\alpha)}_{\mu}$ как компоненты 4-векторов относительно координатного репера (α — номер 4-вектора) будем называть *тетрадными потенциалами* Г-поля. Отметим еще, что при данных метрических потенциалах $g_{\mu\nu}$ нужно определенным образом выбрать «условия нормировки» (43а), т. е. фиксировать вид метрического тензора $g_{(\alpha)(\beta)}$ в некоординатном репере. Нужно также присоединить к этим соотношениям полные или неполные наборы т. наз. калибровочных условий, чтобы полностью или частично определялась связь тетрадных потенциалов $z^{(\alpha)}_{\mu}$ с метрическими $g_{\mu\nu}$ (см., например, [19], с. 170).

1.6. **ОТО в локальном орторепере Минковского.** При получении конкретных физических следствий из ОТО, в том числе для изучения взаимоотношений Р и НР Г-полей, важную роль играет корректное разделение многообразия V_4, принимаемого в качестве математической модели физического П-В, на понятия пространства и времени, имеющие непосредственный физический смысл. Это, по существу, проблема введения понятия *системы отсчета* в искривленном V_4 (см., например, [20], с. 67, [21], а также [14]). К этой проблеме вернемся еще в следующем параграфе, а здесь коснемся ее в локальном аспекте.

С целью строгого определения системы отсчета, имеющей физический смысл, приходится ввести в П-В «множество приборов и наблюдателей». Самым простым модельным прототипом подобного множества может служить определенное множество материальных точек с присоединенными к ним воображаемыми «масштабами» и «часами». А этим «масштабам» и «часам» в качестве математических моделей и можно считать поставленными в соответствие в каждой точке $\mathfrak{P}\in V_4$ *локальные реперы Мин-*

ковского, которые в дальнейшем полагаем ортогональными, причем *

$$g_{(\alpha)(\beta)}=\eta_{(\alpha)(\beta)}\equiv-c^2\delta^{(0)}_{(\alpha)}\,\delta^{(0)}_{(\beta)}+\delta^{(s)}_{(\alpha)}\,\delta^{(p)}_{(\beta)}\delta_{(s)(p)}\equiv\operatorname{diag}(-c^2,1,1,1), \tag{58}$$

т. е.

$$g^{(\alpha)(\beta)}=\operatorname{diag}\left(-\frac{1}{c^2},\ 1,1,1\right). \tag{59}$$

Теперь (40) приобретает локально «обычный специально-релятивистский» (относительно 1-форм $\mathbf{w}^{(\alpha)}$) вид

$$\mathbf{ds}^2=-c^2\mathbf{w}^{(0)}\otimes\mathbf{w}^{(0)}+\mathbf{w}^{(i)}\otimes\mathbf{w}^{(i)}. \tag{60}$$

Отсюда в случае конкретного смещения (49) получается также соответствующий «конкретизированный» интервал ds^2 (50), который является форм-инвариантным относительно $\omega^{(\alpha)}$ при лоренцовых преобразованиях локального орторепера. В данном случае проекции $\omega^{(\alpha)}$ 1-форм $\mathbf{w}^{(\alpha)}$ на смещении $d\mathbf{S}$, вычисленные по (51), являются компонентами этого смещения в конкретном орторепере $\{\mathfrak{P},\ \mathbf{e}_{(\alpha)}\}$. При этом величина $\omega^{(0)}$ совпадает с бесконечно малым промежутком собственного времени $d\tau$ в этом репере.

В качестве «первичных» величин, непосредственно описывающих свойства V_4, т. е. свойства данного Г-поля, будем в дальнейшем рассматривать базисные 1-формы $\mathbf{w}^{(\alpha)}$ или, в силу (5), тетрадные потенциалы $z^{(\alpha)}_{\mu}$ (аналогичное соотношение имеем и между проекциями (51) и (52)). С учетом (58) 1-формы связности $\mathbf{w}_{(\alpha)(\beta)}$, а тем самым и величины $\Gamma_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ определяются из соотношений

$$\mathbf{w}_{(\alpha)(\beta)}=\Gamma_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}\mathbf{w}^{(\gamma)}=(\Gamma_{(\alpha)[(\beta)(\gamma)]}+\Gamma_{(\beta)[(\gamma)(\alpha)]}-\Gamma_{(\gamma)[(\alpha)(\beta)]})\,\mathbf{w}^{(\gamma)}, \tag{61}$$

так как в силу (46) и (58) имеет место

$$\mathbf{w}_{((\alpha)(\beta))}=\Gamma_{((\alpha)(\beta))(\gamma)}\mathbf{w}^{(\gamma)}=0. \tag{62}$$

Антисимметричные величины $\Gamma_{(\alpha)[(\beta)(\gamma)]}$ получаются после внешнего дифференцирования и разложения по $\mathbf{w}^{(\beta)}\wedge\mathbf{w}^{(\gamma)}$ из уравнений структуры (19). После определения $\mathbf{w}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ 2-формы кривизны $\mathbf{r}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ вычисляются из (20). Тем самым на основе (21) определены и величины $R^{(\alpha)\cdots}_{\cdot(\beta)(\gamma)(\delta)}$.

---

* Латинские индексы, обозначающие пространственные координаты, принимают значения 1, 2, 3.

2. Теория гравитации в свободно падающем ортореперe.

2.1. **Релятивистская теория.** Как в Р, так и НР случаях свободное падение материальных тел в Г-поле является одним из самых характерных гравитационных явлений вообще. Поэтому и задачу сравнения Р и НР теорий гравитации естественно поставить в первую очередь в системах отсчета, определяемых множеством свободно падающих материальных точек, причем это множество рассматривается как нежесткое тело отсчета [8—10, 22, 23].

Введем теперь «свободно падающие системы отсчета», полагая, что любая из этих систем определяется полем *свободно падающих ортореперов Минковского* [14, 16]. В локальном ортореперe Минковского $\{\mathfrak{P}, \overset{*}{\mathbf{e}}_{(\alpha)}\}$, связанном со свободно падающей материальной точкой, относительно которого координатный репер $\{\mathfrak{P}, \mathbf{e}_\nu\}$ движется произвольным образом, базисные 1-формы можно задать в следующем специальном виде

$$\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(0)}=\mathbf{d}t, \quad \overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(i)}=v^{(i)}\mathbf{d}t+\underset{s}{\gamma}{}^{(i)}\mathbf{d}x^s. \tag{63}$$

Имеем определенный вариант т. наз. кинеметрической калибровки тетрадных потенциалов (ср., например, [19], с. 240). Согласно терминологии Кереса, координатное время t, выбранное согласно (63) совпадающим с собственным временем определенного поля свободно падающих реперов, будем называть *ньютоновым*. Отметим здесь, что для данного Р Г-поля имеем определенное множество ньютоновых временных координат, причем соответствующие системы координат связаны между собой определенными преобразованиями (см. [8, 22], а также [14]).

Исходя из базисных 1-форм $\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(\alpha)}$ (63), можно далее поставить задачу получить общие виды основных величин и соотношений, характеризующих Р Г-поле в свободно падающих ортореперах Минковского. По уравнениям структуры (19) и формулам (61—62) получаются 1-формы связности $\overset{*}{\mathbf{w}}_{(\alpha)(\beta)}$ в виде

$$\overset{*}{\mathbf{w}}_{(0)(i)}=\overset{*}{\Gamma}_{(0)(i)(j)}\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(j)}=-\overset{*}{D}_{(i)(j)}\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(j)}, \tag{64}$$

$$\overset{*}{\mathbf{w}}_{(i)(j)}=\overset{*}{\Gamma}_{(i)(j)(0)}\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(0)}+\overset{*}{\Gamma}_{(i)(j)(k)}\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(k)}=-(\overset{*}{E}_{(i)(j)}+$$

$$+\overset{*}{\gamma}_{(i)(j)(k)}v^{(k)})\,\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(0)}+\overset{*}{\gamma}_{(i)(j)(k)}\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(k)}, \tag{65}$$

причем

$$\overset{*}{E}_{(i)(j)}\equiv-\gamma^{p}_{[(j)}v_{(i)],p}+\overset{*}{\gamma}_{(n)[(i)(j)]}v^{(n)}+\gamma^{p}_{[(j)}\gamma_{(i)]p,0}, \tag{66}$$

$$\overset{*}{D}_{(i)(j)}\equiv-\gamma^{p}_{((j)}v_{(i)),p}+\overset{*}{\gamma}_{(n)((i)(j))}v^{(n)}+\gamma^{p}_{((j)}\gamma_{(i))p,0}, \tag{67}$$

а $\overset{*}{\gamma}_{(i)(j)(k)}$ — коэффициенты связности для 3-пространства $\overset{*}{V}_3$, определяемого метрическим тензором

$$\gamma_{ps}=\gamma^{(i)}_{p}\gamma^{(i)}_{s},\quad \gamma^{sp}=\gamma^{s}_{(i)}\gamma^{p}_{(i)},\quad \gamma^{p}_{(i)}\gamma^{(k)}_{p}=\delta^{(k)}_{(i)}. \tag{68}$$

2-формы кривизны $\overset{*}{\mathbf{r}}_{(\alpha)(\beta)}$ можно выразить в виде

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_{(0)(i)}=\overset{*}{R}_{(0)(i)(0)(j)}\overset{*}{\mathbf{w}}^{(0)}\wedge\overset{*}{\mathbf{w}}^{(j)}+\frac{1}{2}\overset{*}{R}_{(0)(i)(j)(k)}\overset{*}{\mathbf{w}}^{(j)}\wedge\overset{*}{\mathbf{w}}^{(k)}, \tag{69}$$

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_{(i)(j)}=(\overset{*}{R}_{(i)(j)(0)(k)}-\overset{*}{P}_{(i)(j)(k)(l)}v^{(l)})\overset{*}{\mathbf{w}}^{(0)}\wedge\overset{*}{\mathbf{w}}^{(k)}+$$
$$+\frac{1}{2}\overset{*}{R}_{(i)(j)(k)(l)}\overset{*}{\mathbf{w}}^{(k)}\wedge\overset{*}{\mathbf{w}}^{(l)}, \tag{70}$$

где $\overset{*}{P}_{(i)(j)(k)(l)}$ — компоненты тензора кривизны для $\overset{*}{V}_3$, а $\overset{*}{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ получаются из (20) и (21) выраженными через величины $\overset{*}{D}_{(i)(j)}$, $\overset{*}{E}_{(i)(j)}$, $\overset{*}{\gamma}_{(i)(j)(k)}$ и их производные, причем

$$\overset{*}{R}_{(i)(j)(k)(l)}=\overset{*}{P}_{(i)(j)(k)(l)}+\frac{2}{c^2}\overset{*}{D}_{(i)[(k)}\overset{*}{D}_{(l)](j)}. \tag{71}$$

Пользуясь базисными 1-формами $\overset{*}{\mathbf{w}}^{(\alpha)}$, найденными 2-формами кривизны $\overset{*}{\mathbf{r}}_{(\alpha)(\beta)}$ и компонентами метрического тензора $g^{(\alpha)(\beta)}$ (59), можно конкретизировать также уравнения Г-поля (55). Имеем по существу

$$\overset{*}{R}_{(s)(0)(0)(s)}=\frac{1}{2}\overset{*}{\Pi}_{(0)(0)}, \tag{72}$$

$$\overset{*}{R}_{(s)(0)(i)(s)}=\frac{1}{2}\overset{*}{\Pi}_{(0)(i)}, \tag{73}$$

$$\overset{*}{R}_{(i)(j)}=\frac{1}{2}\overset{*}{\Pi}_{(i)(j)}. \tag{74}$$

Обратим здесь внимание на вид составляющих $\overset{*}{R}_{(i)(j)}$: с учетом (71) имеем

$$
\overset{*}{R}_{(i)(j)}=\overset{*}{R}_{(s)(i)(j)(s)}-\frac{1}{c^2}\,\overset{*}{R}_{(0)(i)(j)(0)}=
$$

$$
=\overset{*}{P}_{(i)(j)}+\frac{1}{c^2}\,[2\overset{*}{D}_{(s)[(j)}\overset{*}{D}_{(s)](i)}-\overset{*}{R}_{(0)(i)(j)(0)}], \tag{75}
$$

где $\overset{*}{P}_{(i)(j)}$ — компоненты тензора Риччи для $\overset{*}{V}_3$.

Итак, нами найдены общие формулы для величин $\overset{*}{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ и $\overset{*}{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$, характеризующие в свободно падающих ортореперах Минковского аффинную связность и кривизну П-В, а тем самым и Г-поле. Пользуясь формулами (14) и (22), получаем и операторы ковариантной производной и кривизны, а затем в более конкретном виде уравнения (34) для параллельного переноса, (36) для геодезических линий и (37) для геодезического отклонения, описывающие одновременно и динамическое воздействие П-В, т. е. Г-поля (см. § 1). Подчеркнем, что, поскольку в принципе всегда можно вести в V_4 некоторое определенное ньютоново время t (см. [22—24], а также [14—16]), то всегда можно и характеризовать данное Г-поле посредством определенной совокупности величин $\overset{*}{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ и $\overset{*}{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$.

2.2. **Нерелятивистская теория.** Следуя Кересу [8—12], предположим, что в римановых 4-пространствах V_4 любой структуры, определяемых уравнениями Эйнштейна (55), т. е. соответствующих Р Г-полям, оказывается возможным выбор таких специальных систем отсчета с ньютоновым временем, названных *G-системами*, в которых переход $c\to\infty$ может дать НР теорию Г-полей уже в рамках самой ОТО.

В 1-формах $\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(\alpha)}$ (63) тетрадные потенциалы $v^{(i)}$ и $\gamma^{(i)}_s$ соответствуют G-системам, если эти величины, а также их производные по координатам содержат скорость света c как Р параметр таким образом, что при $c\to\infty$ они обязательно имеют конечные предельные значения *

$$
\tilde{v}^{(i)}\equiv\lim v^{(i)},\quad \tilde{\gamma}^{(i)}_s\equiv\lim_{c\to\infty}\gamma^{(i)}_s, \tag{76}
$$

$$
\tilde{v}^{(i)}{}_{,\sigma\ldots}\equiv\lim_{c\to\infty}v^{(i)}{}_{,\sigma\ldots},\quad \tilde{\gamma}^{(i)}_{s,\sigma\ldots}\equiv\lim_{c\to\infty}\gamma^{(i)}_{s,\sigma\ldots}, \tag{77}
$$

причем в частном случае некоторые или все из $\tilde{v}^{(i)}$ и некоторые

* В дальнейшем все предельные значения при $c\to\infty$ будем обозначать тильдой. При этом для краткости будем опускать звездочки у величин, относящихся к свободно падающим реперам, поскольку ниже других величин мы рассматривать не будем; итак $\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)}\equiv\tilde{\overset{*}{\mathbf{w}}}{}^{(\alpha)}$ и т. д.

из $\tilde{\gamma}_s^{(i)}$ могут быть и равны нулю, но обязательно должно иметь место

$$\det|\tilde{\gamma}_s^{(i)}\tilde{\gamma}_p^{(i)}| \equiv \det|\tilde{\gamma}_{sp}| \neq 0. \tag{78}$$

Отметим здесь, что проблема строгости и единственности перехода к НР пределу с помощью формального приема $c\to\infty$ несомненно требует изучения и сама по себе (см., например, аналогичную проблему при переходе к НР теории в случае теории Дирака [25] или в случае теории электромагнетизма [26], с. 101). Разложение гравитационных потенциалов по определенному малому параметру, который при переходе к НР пределу исчезает (в нашем случае $\frac{v_{\text{хар}}}{c}\to 0$, где $v_{\text{хар}}$ — определенный характеристический параметр размерности скорости), до сих пор общепринято (см., например, [7], [27], с. 65).

В силу (76)—(77) из соотношений (63)—(71) теперь следует, что предельные формы $\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)}$, $\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ и $\tilde{\mathbf{r}}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$, , а также $\tilde{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ и $\tilde{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ конечны. При этом всегда

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(0)\cdot}_{\cdot(i)} \equiv \lim_{c\to\infty}(g^{(0)(0)}\mathbf{w}_{(0)(i)})=0, \quad \tilde{\mathbf{r}}^{(0)\cdot}_{\cdot(i)} \equiv \lim_{c\to\infty}(g^{(0)(0)}\mathbf{r}_{(0)(i)})=0, \tag{79}$$

но $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)\cdot}_{\cdot(0)}$, $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)\cdot}_{\cdot(k)}$ и $\tilde{\mathbf{r}}^{(i)\cdot}_{\cdot(0)}$, $\tilde{\mathbf{r}}^{(i)\cdot}_{\cdot(k)}$ не должны быть нулевыми. Далее будем считать названные предельные формы характеристиками определенного класса $\tilde{\mathfrak{M}}$ предельных П-В $\tilde{V}_4$, обладающих аффинной связностью и кривизной. Можно убедиться (см. ниже, а также [14]), что в свойствах $\tilde{V}_4$ выражаются и свойства НР Г-поля, причем 1-формы $\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)}$ описывают здесь НР Г-поле именно в свободно падающих реперах, определяемых векторами $\{\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha)}\}$ и движущихся по геодезическим в $\tilde{V}_4$. Предельное бесконечно малое смещение в $\tilde{V}_4$ имеет вид

$$d\tilde{\mathbf{S}}=\tilde{\omega}^{(\alpha)}\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha)}, \tag{80}$$

причем по примеру (51) имеет место $<\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)}, d\tilde{\mathbf{S}}>=\tilde{\omega}^{(\alpha)}$, а

$$<\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\beta)}>=\delta^{(\alpha)}_{(\beta)}. \tag{81}$$

В силу (53)—(54) в виде аналогичных проекций получаются и $\tilde{\omega}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ и $\tilde{\Omega}^{(\alpha)\cdot}_{\cdot(\beta)}$ (данные со звездочками в [14]).

Существенным своеобразием 4-пространств $\tilde{V}_4$ является их расслоенность, которая получается из предположения, что в НР случае в каждой точке П-В $\mathfrak{P} \in \tilde{V}_4$ физические величины и законы, заданные в локальных реперах, не могут более быть лоренц-инвариантными, а должны быть галилей-инвариантными (см. также [6, 7]), т. е. локальные 4-мерные реперы в $\mathfrak{P} \in \tilde{V}_4$ нужно считать связанными локальными преобразованиями Галилея. Следовательно, после перехода $c \to \infty$ локальные свободно падающие реперы $\{\mathfrak{P}, \tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha)}\}$ должны рассматриваться уже как 3-мерные, причем координатное ньютоново время t, совпадающее с собственным временем свободно падающих реперов, следует принимать за абсолютное. (Видим, что если с учетом (58) ввести в Р выражении линейного элемента (50) вместо ds^2 собственное время $d\tau^2 = -\dfrac{ds^2}{c^2}$, то в пределе $c \to \infty$ получается $\tilde{d\tau} = \tilde{\omega}^{(0)}$ т. е. $\tilde{d\tau} = dt$.) 1-форму $\tilde{\mathbf{w}}^{(0)} = \mathbf{d}t$ следует теперь рассматривать как «форму времени», как градиент скалярного «поля абсолютного времени» t, независимого от метрики. На основе (81) вектор $\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}$ можно толковать как касательный вектор «линии времени», которая пересекает каждое пространственное сечение $t = \mathrm{const}$ один и только один раз (см. также [2], I, с. 367). Метрика «вырождается» теперь в трехмерную, т. е. вместо (60) имеем 3-мерный метрический тензор в декартовом репере:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \delta_{(i)(k)} \tilde{\mathbf{w}}^{(i)} \otimes \tilde{\mathbf{w}}^{(k)}. \tag{82}$$

Во временном направлении метрики уже нет, а в расслоении 3-пространств $\tilde{V}_3$ каждый из слоев, определяемых условием $t = \mathrm{const}$, является метрическим пространством. Сохраняя «общерелятивистский язык» для НР теории гравитации, можно пользоваться и в пределе $c \to \infty$ любыми (в том числе нежесткими) телами отсчета, произвольно движущимися относительно свободно падающих реперов. К этим телам отсчета относим системы координат $\{t, \tilde{x}^s\}$, содержащихся в $\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}$ и $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}$, причем эти системы координат связываются между собой преобразованием

$$t' = t, \quad \tilde{x}^{i'} = \tilde{x}^{i'}(\tilde{x}^k, t). \tag{83}$$

В координатах $\{t, \tilde{x}^s\}$ 3-мерный метрический тензор $\tilde{\mathbf{g}}$ в (82) можно трактовать также как 4-мерный для $\tilde{V}_4$, но при этом теперь имеем вместо (58)—(59) формулу

$$\tilde{g}_{(\alpha)(\beta)} = \tilde{g}^{(\alpha)(\beta)} = \delta^{(s)}_{(\alpha)} \delta^{(p)}_{(\beta)} \delta_{(s)(p)} = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1). \tag{84}$$

Таким образом, 4-пространства $\tilde{V}_4$ класса $\tilde{\mathfrak{M}}$ с *аффинной связностью* и *кривизной*, описывающие *свойства НР Г-полей*, обладают т. наз. *вырожденной* или *сингулярной метрикой*, а это обстоятельство и выражает расслоенность НР П-В.

Как следствие соответствия класса $\tilde{\mathfrak{M}}$ 4-пространств $\tilde{V}_4$ классу $\mathfrak{M}$ римановых V_4, имеем добавочные условия для связности и кривизны 4-пространств $\tilde{V}_4$ в виде предельной формы уравнений Г-поля (72)—(74). Эти условия представляют собой *уравнения НР Г-поля.* Отсюда следует, что конкретный вид НР уравнений Г-поля существенно зависит от структуры Р тензора энергии-импульса материи. При предположениях, принятых до сих пор, в принципе возможна довольно широкая НР теория Г-полей. Можно убедиться [14], что в случае т. наз. обычной материи ($T_{(\alpha)(\beta)}$ описывают идеальную жидкость или электромагнитное поле) только компонента $T_{(0)(0)}$ дает ненулевой вклад в величины $\tilde{\Pi}_{(\alpha)(\beta)}$ и уравнения (72)—(74) приобретают в пределе $c \to \infty$ вид

$$\tilde{R}_{(s)(0)(0)(s)} = -4\pi G\tilde{\varrho}, \tag{85}$$

$$\tilde{R}_{(s)(i)(0)(s)} = 0, \tag{86}$$

$$\tilde{P}_{(i)(j)} = 0, \tag{87}$$

где $\tilde{\varrho}$ — плотность вещества. Теперь из (87) вытекает, что 3-пространство $\tilde{V}_3$ евклидово. Но полученные уравнения не являются полностью эквивалентными основным уравнениям ньютоновой теории гравитации, хотя в частном случае в них действительно содержится и ньютоново уравнение Г-поля (см. [8—12], а также [14]). Из уравнений геодезических линий в $\tilde{V}_4$ получаются уравнения движения пробной частицы в НР поле, записанные в свободно падающем репере, которые также являются обобщением ньютоновых уравнений движения. С одной стороны этот результат, конечно, доказывает, что в частном случае рассмотренный выше предельный переход действительно может привести к геометрической формулировке общепризнанной ньютоновой НР теории гравитации. С другой стороны, он обязательно требует также более подробного анализа, так как в общем случае без дополнительных условий или аксиом *ad hoc* невозможно ограничить общий вид основных уравнений НР теории гравитации, получаемой из ОТО. Только при определенных дополнительных условиях, которые с учетом (71) и (87) можно выразить в виде

$$\tilde{\mathbf{r}}_{(i)(j)} = \tilde{R}_{(0)(i)(j)(k)} \tilde{\mathbf{w}}^{(0)} \wedge \tilde{\mathbf{w}}^{(k)} = 0, \tag{88}$$

рассматриваемые 4-пространства $\tilde{V}_4$ совпадают с моделями П-В, построенными Картаном для описания *ньютоновых Г-полей* [3, 12]. Если условия (88) не выполняются, то получаются *более общие модели НР П-В.* Геометрические свойства этих моделей обсудим более подробно в § 3, при анализе системы специальных аксиом, дающей геометрическую формулировку ньютоновой теории гравитации.

2.3. **Единый и целостный подход к релятивистской и нерелятивистской теориям.** Вышеизложенное в пунктах 2.1 и 2.2 содержит по существу *единый и целостный геометрический подход* к Р и НР теориям гравитации. Видим, что в обоих случаях используется один и тот же общий математический аппарат, изложенный кратко в § 1; имеются одни и те же характеристики, — формы базисные, формы связности и кривизны, операторы ковариантной производной и кривизны; формулируются единым образом уравнения параллельного переноса, геодезических линий и геодезического отклонения, допускающие в обоих случаях определенное физическое толкование; уравнения Г-поля записываются как для Р, так и НР случая в виде аналогичных дополнительных условий, налагаемых на геометрические свойства рассматриваемых 4-пространств. В такой же единой геометрической формулировке выражаются и другие общие структурные черты Р и НР теорий гравитации, например, возможность говорить о принципах эквивалентности и общей относительности в обоих случаях [8—11, 22, 23] и т. д.

В подходе, развитом в работах Кереса [8—12] и автора [13—17], самым существенным нужно считать то, что *геометрическая формулировка НР теории* гравитации получается из геометрической формулировки Р теории в результате *предельного процесса* $c \to \infty$ в виде некоторой «проекции» последней. Этим достигается возможно более *тесный контакт* обеих теорий при их сравнении. В свою очередь такая тесная связь служит основой для *общего метода анализа* Р Г-полей с точки зрения их возможных НР пределов, развитого в работах автора (см., например, [13, 15]).

Обратим здесь также внимание на одно важное обстоятельство, показывающее логическую необходимость начинать сравнение геометрических формулировок Р и НР теорий именно в свободно падающих реперах. В этом случае, как видим из (63), благодаря введению ньютонова времени t, уже для Р Г-полей физическая информация о конкретных свойствах Г-поля содержится явно только в «пространственных» базисных 1-формах $\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(i)}$ (в эти формы входят тетрадные потенциалы $v^{(i)}$ и $\gamma^{(i)}_{s}$). Следовательно, переход от анализа метрического тензора $\mathbf{g}$ (60) к анализу $\tilde{\mathbf{g}}$ (82) с «отбрасыванием» временной части ничуть не означает потерю конкретной физической информации, а изменение структуры 1-форм $\overset{*}{\mathbf{w}}{}^{(i)}$ при переходе $c \to \infty$ интерпретируется как раз как переход от описания Р Г-поля к описанию соответствующего ему НР Г-поля.

Как следует из необходимости перехода от $\mathbf{g}$ к $\tilde{\mathbf{g}}$, основное принципиальное различие между свойствами 4-пространств классов $\mathfrak{M}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ заключается в их метрических свойствах. Из-за этого в § 1 и были четко выделены те свойства моделей П-В, которые связаны с метрикой. Это нужно теперь иметь в виду при геометрическом описании НР Г-полей.

Чтобы получить геометрическую формулировку ньютоновой теории гравитации, обычно формулируется определенная система аксиом, как правило, независимо от Р теории, хотя, в конечном счете, по ее примеру (см., например, [5], [2], I, с. 368). В следующем параграфе изучим подробно систему аксиом для ньютоновой теории, приведенную в [2]. Покажем, во-первых, каким образом эти аксиомы получаются в рамках нашего подхода, и, во-вторых, какие из этих аксиом нужно заменить другими, чтобы получить более общую, неньютонову НР теорию гравитации.

Нумерация пунктов следующего параграфа (3.1—3.8) соответствует нумерации аксиом, приведенных в книге Мизнера, Торна и Уилера ([2], I, с. 368).

3. Ньютонова теория тяготения и более общая нерелятивистская теория неньютоновых (вихревых) гравитационных полей.

3.1. Первая аксиома в [2], согласно которой в П-В с ньютоновым Г-полем должны существовать «функция t, называемая «мировым временем», и симметричная ковариантная производная ∇», является естественным результатом в нашем подходе. Это уже показано нами в § 2.

Пользуясь предельными величинами для тетрадных потенциалов $\tilde{v}^{(i)}$, $\tilde{\gamma}^{(i)}_{s}$ и для $\tilde{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ $\tilde{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ и учитывая их свойства, обусловленные как свойствами исходных Р величин в свободно падающих ортореперах, так и предельным переходом, получаем легко конкретные выражения, например, ковариантных производных базисных векторов $\tilde{\mathbf{e}}_{(\alpha)}$:

$$\nabla_{(0)}\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}=0, \tag{89}$$

$$\nabla_{(0)}\tilde{\mathbf{e}}_{(i)}=\tilde{\mathbf{e}}_{(k)}\left(-\tilde{E}_{(k)(i)}-\tilde{\gamma}_{(k)(i)(l)}\tilde{v}^{(l)}\right), \tag{90}$$

$$\nabla_{(i)}\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}=\tilde{\mathbf{e}}_{(k)}\tilde{D}_{(k)(i)}, \tag{91}$$

$$\nabla_{(i)}\tilde{\mathbf{e}}_{(j)}=\tilde{\mathbf{e}}_{(k)}\tilde{\gamma}_{(k)(j)(i)}. \tag{92}$$

Из (89) видим, что $\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}$ переносится всегда параллельно вдоль $\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}$. $\nabla_{(0)}\tilde{\mathbf{e}}_{(i)}$ определяет вращение вектора $\tilde{\mathbf{e}}_{(i)}$ при переносе вдоль $\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}$ и т. д. С учетом уравнений НР Г-поля в виде (85)—(87), можем считать $\tilde{V}_3$ евклидовым и ввести в нем ортонормированный координатный базис $\{\tilde{\mathbf{e}}_j\}$, $\tilde{\mathbf{e}}_j\cdot\tilde{\mathbf{e}}_k=\delta_{jk}$, т. е. ввести декартовы координаты. Тогда $\tilde{\gamma}_{(i)(k)(j)}=0$, а $\tilde{D}_{(i)(j)}=-\tilde{v}_{(j,\,i)}$, $\tilde{E}_{(i)(j)}=\tilde{v}_{[j,\,i]}$. Если ротор поля скоростей $\tilde{v}^i$ не зависит от пространственных координат, то имеет место условие (88) и НР Г-поле ньютоново (см. [8—12], а также [14]). Тогда линейными преобразованиями декартовых координат можно обратить величины $\tilde{E}_{(i)(j)}$ в нуль. Но если $\tilde{v}_{[j,\,i]}$ являются функциями пространственных координат, то (88) не имеет места и величины $\tilde{E}_{(i)(j)}$ не исчезают. Тогда имеем более общие неньютоновы НР Г-поля. Таким образом, имея в $\tilde{V}_3$ декартовые координаты, в ньютоновом случае только вектор $\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}$ вращается при переносе вдоль $\tilde{\mathbf{e}}_{(i)}$, а векторы $\tilde{\mathbf{e}}_{(j)}$ переносятся параллельно вдоль всех других базисных векторов. В неньютоновом случае добавляется вращение векторов $\tilde{\mathbf{e}}_{(j)}$ при переносе вдоль $\tilde{\mathbf{e}}_{(0)}$, — в этом проявляется вихревой характер такого более общего НР Г-поля.

Полезно иметь еще формулу для ковариантной производной произвольного вектора $\tilde{\mathbf{V}}$ вдоль некоторого другого вектора $\tilde{\mathbf{U}}$. В силу общей формулы (18) имеем

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\tilde{\mathbf{V}}=\tilde{U}^{(\alpha)}[\tilde{V}^{(\beta)}{}_{,\sigma}\,\tilde{z}^{\sigma}_{(\alpha)}+\tilde{V}^{(\gamma)}\tilde{\Gamma}^{(\beta)}_{\cdot(\gamma)(\alpha)}]\tilde{\mathbf{e}}_{(\beta)}, \tag{93}$$

Для конкретных случаев нужно теперь учитывать вид как $\tilde{\Gamma}^{(\beta)}_{\cdot(\gamma)(\alpha)}$, так и $\tilde{z}^{\sigma}_{(\alpha)}$. В силу (2), (63) и (68) имеем в пределе $c\to\infty$

$$\tilde{z}^{0}_{(0)}=1,\quad \tilde{z}^{s}_{(0)}=-\tilde{\gamma}^{s}_{(i)}\tilde{v}^{(i)},\quad \tilde{z}^{0}_{(i)}=0,\quad \tilde{z}^{s}_{(i)}=\tilde{\gamma}^{s}_{(i)}. \tag{94}$$

В дальнейших рассуждениях понадобятся также предельные виды формул (31)—(32) для оператора кривизны. Имея в виду евклидовость 3-пространства $\tilde{V}_3$, с учетом (71) получаются формулы

$$\tilde{\Re}(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})=2\tilde{A}^{[(s)}\tilde{B}^{(0)]}[\tilde{R}_{(0)(p)(0)(s)}\tilde{\mathbf{e}}_{(p)}\otimes\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}-$$

$$-\tilde{R}_{(0)(s)(p)(k)}\tilde{\mathbf{e}}_{(p)}\otimes\tilde{\mathbf{w}}^{(k)}]-\tilde{A}^{(k)}\tilde{B}^{(s)}R_{(0)(p)(k)(s)}\tilde{\mathbf{e}}_{(p)}\otimes\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}, \tag{95}$$

$$\tilde{\Re}(\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})\,\tilde{\mathbf{C}}=\{\tilde{C}^{(0)}[2\tilde{A}^{[(s)}\tilde{B}^{(0)]}\tilde{R}_{(0)(p)(0)(s)}-$$

$$-\tilde{A}^{(k)}\tilde{B}^{(s)}\tilde{R}_{(0)(p)(k)(s)}]+2\tilde{C}^{(k)}\tilde{A}^{[(0)}\tilde{B}^{(s)]}\tilde{R}_{(0)(s)(p)(k)}\}\tilde{\mathbf{e}}_{(p)}. \tag{96}$$

3.2. Вторая аксиома в [2] («1-форма $\mathbf{d}t$ ковариантно постоянна, т. е. $\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{d}t=0$ для всех $\mathbf{U}$») получается из предельного вида соотношения (15). С учетом (79) для $\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}=\mathbf{d}t$ имеем

$$\nabla_{(\beta)}\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}=-\tilde{\Gamma}^{(0)}_{\cdot(\alpha)(\beta)}\tilde{\mathbf{w}}^{(\alpha)}=0. \tag{97}$$

Отсюда в силу (16) также вытекает

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}=\tilde{U}^{(\beta)}\nabla_{(\beta)}\tilde{\mathbf{w}}^{(0)}=0. \tag{98}$$

В [2] далее получается следствие: если $\tilde{\mathbf{V}}$ — поле пространственного вектора (т. е. $\tilde{\mathbf{V}}$ повсюду лежит в поверхности постоянного значения t), то при любом $\tilde{\mathbf{U}}$ вектор $\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}}\tilde{\mathbf{V}}$ тоже пространственный. Этот результат теперь следует и из (93): если $\tilde{V}^{(0)}=0$, то в силу $\tilde{\Gamma}^{(0)}_{\cdot(\nu)(\alpha)}=0$ получается $\nabla_{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{V}}=\tilde{U}^{(\alpha)}\tilde{V}^{(k)}{}_{;(\alpha)}\mathbf{e}_{(k)}$, т. е. имеем чисто пространственный вектор, причем может быть и $\tilde{U}^{(0)}\neq 0$. Другими словами, вращение пространственного вектора $\tilde{\mathbf{V}}$ при переносе вдоль произвольного $\tilde{\mathbf{U}}$ является чисто пространственным.

3.3. По третьей аксиоме в [2] пространственные векторы не должны изменяться при параллельном переносе по любому бесконечно малому замкнутому контуру.

С учетом (96) получим из общей формулы (35) для пространственного вектора $\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{C}^{(0)}=0)$:

$$\delta\tilde{\mathbf{C}}=2\tilde{C}^{(k)}\tilde{A}^{[(s)}\tilde{B}^{(0)]}\tilde{R}_{(0)(s)(p)(k)}\tilde{\mathbf{e}}_{(p)}. \tag{99}$$

Следовательно, в общем случае неньютоновых Г-полей (условия (88) не имеют места) пространственные векторы все-таки изменяются при параллельном переносе по бесконечно малому замкнутому контуру, построенному на произвольных векторах $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$. Видим, что при параллельном переносе во временном направлении П-В (по меньшей мере одна из составляющих $\tilde{A}^{(0)}$ и $\tilde{B}^{(0)}$ не должна исчезать) в поведении чисто пространственного вектора проявляется определенный эффект кривизны, выражающий вихревой характер Г-поля. Но при дополнительных условиях (88), т. е. в случае ньютонова предела, действительно имеет место $\delta\tilde{\mathbf{C}}=0$ для любых $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$. Это и есть третья аксиома в [2].

3.4. По четвертой аксиоме в [2] ни один вектор не должен изменяться при параллельном переносе по бесконечно малому замкнутому пространственному контуру.

Для чисто пространственных векторов ($\tilde{A}^{(0)}=\tilde{B}^{(0)}=0$) получаем из (95)

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = -\tilde{A}^{(k)}\tilde{B}^{(s)}\tilde{R}_{(0)(p)(k)(s)}\tilde{\mathbf{e}}_p \otimes \tilde{\mathbf{w}}^{(0)} \tag{100}$$

и из (35) и (96) —

$$-\delta\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})\,\tilde{\mathbf{C}} = -\tilde{C}^{(0)}\tilde{A}^{(k)}\tilde{B}^{(s)}\tilde{R}_{(0)(p)(k)(s)}\tilde{\mathbf{e}}_{(p)}. \tag{101}$$

Следовательно, в общем случае НР Г-полей при параллельном переносе по бесконечно малому замкнутому пространственному контуру $\tilde{\mathbf{C}}$ не изменяется лишь тогда, когда $\tilde{\mathbf{C}}$ чисто пространственный вектор. В этом проявляется евклидовый характер пространственных слоев $t=\text{const}$. Если $\tilde{C}^0 \neq 0$, то определенный эффект кривизны, выражающий опять вихревой характер Г-поля, проявляется и при параллельном переносе вектора $\tilde{\mathbf{C}}$ по чисто пространственному контуру. Но если имеют место условия (88), т. е. Г-поле ньютоново, то

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = 0 \tag{102}$$

для любых пространственных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, что и есть четвертая аксиома в [2]).

3.5. Согласно пятой аксиоме в [2] тензор кривизны Риччи должен иметь вид

$$\tilde{\mathbf{Rc}} = -4\pi G\tilde{\varrho}\,\mathbf{d}t \otimes \mathbf{d}t \tag{103}$$

(здесь уже применены наши обозначения и в соответствии с (48) учтено различие в знаке). Видим, что та же самая структура тензора Риччи выражается и нашими предельными уравнениями НР Г-поля (85)—(87). Таким образом, в случае т. наз. обычной материи наш подход приводит к той же пятой аксиоме.

Отметим все-таки, что в общем случае неньютоновых Г-полей в уравнениях (86), т. е. в соотношениях $\tilde{R}_{(i)(0)}=0$, выражена лишь т. наз. нулевая средняя кривизна, причем существует и определенная добавочная неисчезающая анизотропная часть кривизны П-В, характеризуемая составляющими тензора кривизны $\tilde{R}_{(s)(i)(0)(p)}$ и связанная с вихревой природой НР Г-поля. В ньютоновом случае такой добавочной анизотропной части кривизны нет, т. наз. средняя кривизна и анизотропная часть кривизны проявляются лишь в компонентах $\tilde{R}_{(0)(i)(0)(p)}$ (см. терминологию [2], I, с. 74).

3.6. По шестой аксиоме в [2] «существует метрика «·», определенная на одних только пространственных векторах, которая совместима с ковариантной производной». Как показано в 2.2, с учетом (78) наш переход к пределу $c \to \infty$ также гарантирует существование невырожденной метрики в $\tilde{V}_3$, характеризуемой тензором $\tilde{\gamma}_{sp}$ и определяющей в свою очередь и скалярное произведение «·» в $\tilde{V}_3$. Совместность этой метрики с ковариантной производной обеспечивается фактически предельным видом условий «совместности» (46), причем учитывается и (82):

$$\mathbf{d}\delta_{(i)(k)} = 2\tilde{\mathbf{w}}_{((i)(k))} = 0, \tag{104}$$

т. е. $\tilde{\Gamma}_{((i)(k))(\alpha)} = 0$. Теперь, исходя из (93), прямым вычислением можно показать, что как в общем неньютоновом, так и в ньютоновом случаях для пространственных $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ и для любого $\tilde{\mathbf{U}}$ имеет место соотношение

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}} (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) = (\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{A}} \cdot (\nabla_{\tilde{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{B}}), \tag{105}$$

выражающее по шестой аксиоме в [2] совместность метрики $\tilde{V}_3$ с ковариантной производной.

3.7. Согласно седьмой аксиоме в [2] для П-В с ньютоновым Г-полем оператор кривизны Якоби, определяемый формулой (38), должен быть, действуя на пространственные векторы, самосопряженным, т. е.

$$\tilde{\mathbf{V}}[\mathfrak{J}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{U}}] = \tilde{\mathbf{U}}[\mathfrak{J}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{V}}], \tag{106}$$

где $\tilde{\mathbf{V}}$ и $\tilde{\mathbf{U}}$ — пространственные, а $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ — произвольные векторы.

С учетом (96) из определения (38) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}[\mathfrak{J}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{U}}] = \{ & \tilde{A}^{(0)} \tilde{B}^{(0)} \tilde{R}_{(0)(p)(0)(s)} - \\ & - 2\tilde{R}_{(k)((p)(s))(0)} \tilde{A}^{((0)} \tilde{B}^{(k))} \} \tilde{U}^{(s)} \tilde{V}^{(p)}. \end{aligned} \tag{107}$$

Таким образом, и в общем случае неньютоновых Г-полей, а тем более в ньютоновом случае, действительно имеет место (106).

3.8. Восьмая аксиома в [2] дает определение «идеальных линеек», «идеальных часов» и «свободно падающих частиц» в случае НР Г-поля: ««Идеальные линейки» отмеряют длины, численные значения которых задаются пространственной метрикой; «идеальные часы» отмеряют мировое время t (или отличающееся от него числовым множителем); «свободно падающие частицы» движутся по геодезическим ∇.»

Как отмечено в [2], и как теперь непосредственно вытекает из нашего единого и цельного подхода к теориям Р и НР Г-полей, «более полная теория», т. е. ОТО уже заранее определяет эти понятия. В ОТО геодезические линии определяют мировые линии свободно падающих частиц, а идеальные стержни и часы можно сконструировать из геодезических мировых линий свободно падающих пробных частиц и фотонов ([2], II, с. 26). «Другими словами, пространство-время содержит стержни и часы в самом себе, даже если вещество и негравитационные поля отсутствуют!» ([2], II, с. 24).

4. Заключение.

Итак, в 4-пространствах $\tilde{V}_4$ класса $\tilde{\mathfrak{M}}$ для НР Г-полей, получаемых в пределе $c\to\infty$ из V_4 класса $\mathfrak{M}$ (см. выше § 2), при выполнении определенных дополнительных условий (88), имеют место все аксиомы, положенные в основу геометрической формулировки теории тяготения Ньютона в книге Мизнера, Торна и Уилера ([2], I, с. 368). Следовательно, в результате упомянутого предельного перехода действительно и должна получиться ньютонова теория гравитации, что и показано конкретно ранее в работах [8—12], а затем и в [13—15]. Если условия (88) не выполняются, то третья и четвертая аксиомы не имеют места. Соответствующая замена этих аксиом в духе книги [1—2] определенной системой иных аксиом могла бы дать ту более общую НР теорию неньютоновых (вихревых) Г-полей, которая в виде предела получена в работах [8—12], а затем рассмотрена и изучена также в [13—15] и в настоящей работе.

На наш взгляд, в настоящее время уже назрела необходимость проведения возможно разностороннего и основательного дифференциально-геометрического, групповотеоретического и т. д. анализа искривленных многообразий $\tilde{V}_4$ с вырожденной метрикой, соответствующих НР Г-полям, в том числе более общим, неньютоновым (вихревым) НР Г-полям. По этой тематике, для ньютонова случая, конечно, целый ряд исследований уже имеется, но они не составляют единого целого и общая картина еще далеко не ясна. Актуальность данной проблемы явствует из нескольких работ последних лет, в которых обсуждается сущность НР теории гравитации как геометрической теории (см., например, [28]). При этом пытаются даже доказать, что ньютонова теория является единственно возможным вариантом геометрической теории такого рода [29], но это, как вытекает из вышесказанного, вызывает определенные сомнения. Представляет также большой интерес подробное изучение взаимоотношений между нашим подходом к единой геометрической формулировке Р и НР теорий гравитации и методом геометризации ньютоновой НР теории с использованием современного аппарата теории расслоенных пространств (см., например, [30]).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1973.
2. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация. I—III. М., 1977.
3. E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité generalisée. — «Ann. de L'Ecole Normale Sup.», 1923, **40,** 325; 1924, **41,** 1.
4. K. Friedrichs. Eine invariante Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes und des Grenzüberganges von Einsteinschen zum Newtonschen Gesetz. — «Math. Ann.», 1928, **98,** 566.
5. A. Trautman. Sur la théorie newtonienne de la gravitation. — «C. r. Acad. sci.», 1963, **257,** No. 3, 617.
6. P. Havas. Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity. — «Revs. Mod. Phys.», 1964, **36,** No. 4, 938.
7. G. Dautcourt. Die Newtonsche Gravitationstheorie als strenger Grenzfall der allgemeinen Relativitätstheorie. — «Acta phys. polon.», 1964, **25,** No. 5, 637.
8. Х. Керес Принцип соответствия в общей теории относительности. — ЖЭТФ, 1964, **46**, № 5, 1741.
9. Х. Керес. Гравитационные поля неньютоновского типа. — ЖЭТФ, 1965, **48**, № 5, 1319.
10. Х. Керес. Нерелятивистское приближение теории гравитации Эйнштейна. — В сб.: «Современные проблемы гравитации, 1965». Тбилиси, 1967, с. 52.
11. Х. П. Керес. Представления ньютоновой теории. — В сб.: «Гравитация». Киев, 1972, с. 62.
12. Х. Керес. Тензорный гравитационный потенциал и четырехмерное представление ньютоновской теории Э. Картаном. — «Изв. АН ЭстССР. Физ., Мат.», 1976, **25**, № 4, 349.
13. А. А. Коппель. О взаимоотношениях между общей теорией относительности и ее нерелятивистскими пределами. — «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 417, Тарту, 1977, с. 10.
14. А. Коппель. Нерелятивистские гравитационные поля в общей теории относительности. Ротапринт ТГУ, Тарту, 1977.
15. А. Коппель. Нерелятивистский анализ релятивистских гравитационных полей. Ротапринт ТГУ, Тарту, 1977.
16. А. Коппель. К вопросу о калибровках тетрадных потенциалов. (Системы отсчета с ньютоновым временем.) — «Изв. АН ЭстССР. Физ., Мат.», 1978, **27**, № 2, 123.
17. А. А. Коппель. О моделях пространства-времени с вырожденной метрикой и теории нерелятивистских гравитационных полей. — Тезисы докладов V Прибалтийской геометрической конференции. Друскининкай, 1978, с. 38.
18. Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. М., 1972.
19. О. С. Иваницкая. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Минск, 1979.
20. Н. В. Мицкевич. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
21. В. И. Родичев. Теория тяготения в ортогональном репере. М., 1974.
22. Х. П. Керес. Обобщенные инерциальные системы в ньютоновской и общерелятивистской механиках. I. Теория Ньютона. — «Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР», 1963, № 20, 92.
23. Х. П. Керес. Обобщенные инерциальные системы в ньютоновской и общерелятивистской механиках. II. Теория Эйнштейна. — «Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР», 1964, № 25, 3.

24. Х. П. Керес. О понятии инерциальной системы в общей теории относительности. — «Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР», 1957, № 5, 12.
25. W. Hunziker. On the nonrelativistic limit of the Dirac theory. — «Commun. Math. Phys.», 1975, **40**, No. 3, 215.
26. В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Электродинамика с магнитным зарядом. Минск, 1975.
27. Л. Инфельд, Е. Плебанский. Движение и релятивизм. М., 1962.
28. H. P. Künzle. Covariant Newtonian limit of Lorentz space-times. — «Gen. Relat. and Gravit.», 1976, **7**, No. 5, 445.
29. W. G. Dixon. On the uniqueness of the Newtonian theory as a geometric theory of gravitation. — «Commun. Math. Phys.», 1975, **45**, No. 2, 167.
30. C. Duval, H. P. Künzle. Sur les connexions newtoniennes et l'extension non triviale du groupe de Galilée. — «C. r. Acad. sci.», 1977, **AB285**, № 12, A813.

Поступила в редакцию 27 июня 1978 г.

RELATIVISTLIKU JA MITTERELATIVISTLIKU GRAVITATSIOONITEOORIA ÜHTSEST GEOMEETRILISEST ESITUSEST

A. Koppel

Resümee

Käesoleva töö esimeses paragrahvis esitatakse kompaktselt relativistliku ja mitterelativistliku gravitatsiooniteooria ühtsed matemaatilised põhialused. Mitterelativistliku gravitatsiooniteooriana käsitatakse siin üldrelatiivsusteooria (ÜRT) üldist võimalikku piirjuhtu $c \to \infty$. Kasutatakse monograafia [1—2] matemaatilist aparatuuri (tensorite ja välisvormide «koordinaatvaba keelt») ning analüüsitakse selle vahekorda välisvormide arvutuse lihtsustatud rakendusega töödes [13—17]. Teises paragrahvis antakse nii relativistlik kui mitterelativistlik gravitatsiooniteooria vabalt langevas reeperis ning iseloomustatakse konkreetselt piirprotsessi $c \to \infty$. Tuuakse esile põhimomendid, mis lubavad rääkida ÜRT ja selle mitterelativistlike piirjuhtude ühtsest ja terviklikust käsitlusest. Üldisema, piirprotsessi $c \to \infty$ teel ÜRT-st saadava ning üldjuhul mittenjuutonlike (pööriseliste) mitterelativistlike gravitatsiooniväljade teooria seisukohalt analüüsitakse kolmandas paragrahvis üksikasjalikult njuutonliku gravitatsiooniteooria geomeetrilise esituse aksioomide süsteemi, mis on aluseks võetud Misneri, Thorne'i ja Wheeleri raamatus (vt. [1], lk. 300 või [2], köide I, lk. 368). Näidatakse, et need aksioomid järelduvad üldisemast teooriast njuutonlike (pöörisvabade) väljade erijuhul. Üldjuhul on vajalik asendada uutega nimetatud aksioomidest kaks (kolmas ja neljas).

ON THE COMMON GEOMETRIC FORMULATION OF RELATIVISTIC AND NON-RELATIVISTIC THEORY OF GRAVITY

A. Koppel

Summary

In Section 1, a compact representation of common basic mathematical apparatus for building up both the relativistic and the non-relativistic theory of gravity is given. The non-relativistic theory is regarded as the generally possible limit of general relativity for $c \to \infty$, including the theory of both the Newtonian and the non-Newtonian (vortex) gravitational fields. The mathematics («coordinate-free language» of tensors and exterior forms) according to [1] is used and by means of that the simplified application of exterior calculus developed in [13—17] is discussed. In Section 2, the theory of gravity, in both the relativistic and the non-relativistic case, has been examined in freely falling local bases and the limiting process, $c \to \infty$, is investigated more closely. The essence of the common approach to the general theory of relativity and its non-relativistic limits is emphasized. In Section 3, the set of coordinate-free geometric axioms for Newton's theory of gravity formulated by Misner, Thorne and Wheeler (s. [1], p. 300) is analysed in detail, proceeding from the above-mentioned generalized non-relativistic theory. It is shown that in the special case of Newtonian (vortex-free) fields these axioms derive from the more complicated theory. In general, it is necessary to reformulate two of them, the third and the fourth.

К МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ НАЧАЛ ОБЩЕСТАТИСТИЧЕСКОГО АППАРАТА ТОЧНЫХ НАУК

Х. Т. Ээлсалу

Современная «общая» теория математической статистики не свободна от пробелов, компиляций и компромиссов. Она обязана своим развитием прежде всего демографическим и биологическим наукам. Специфику точных наук она учитывает только в ограниченной мере. Поэтому при рассмотрении основ тех конкретных статистических методов, которые свойственны той или другой точной науке, методологи должны критически относиться к «общей» теории статистики. Нижеследующие комментарии представляют собой попытку выделить соответствующие основные методологические проблемы, исходя из опыта, накопленного при рассмотрении взаимоотношений между методами статистики и спецификой некоторых точных наук.

1. Одним из основных методологических недостатков «общей» теории статистики следует считать недостаточно четкое разделение аппарата статистики на первичный статистический аппарат, где не используется ни концепция стохастической величины, ни теория вероятностей, и вторичный, стохастический аппарат. Хотя стохастический аппарат составляет почти все содержание статистики, его следует считать интерпретационным, и к его рассмотрению нельзя поэтому приступать в самом начале изложения основ статистики. Без такого разделения это изложение обычно остается пустым и тавтологическим.

Методологические недостатки «общей» теории могут проявляться уже в дидактических рассуждениях, которые опираются только на первичный статистический аппарат. К этому аппарату — который можно назвать алгоритмическим — следует отнести *принцип статистической устойчивости*, характеризующий свойства устойчивости выборки или измерительной серии, вместе с понятием *оценочных алгоритмов*, т. е. математических формул для статистического объединения выборки (напр. правила арифметического усреднения выборки) и понятием *оценки*, т. е. численного значения алгоритма, полученного при его конкретизации (при реализации выборки).

Вторичный же статистический аппарат, очевидно, основывается на понятии *эстиматора* как (обычно многомерной) случайной (стохастической) величины, введенной с целью вероятностной интерпретации оценочного алгоритма *. В принципе описание процесса статистического познания должно проводиться с учетом того, что алгоритмы могут применяться без использования их статистической интерпретации. Для методологии особый интерес должны представлять логические проблемы, возникающие при переходе от алгоритмического аппарата к стохастическому аппарату.

Алгоритмический аппарат дает средства для упрощения и формализации проведения индукции как логической операции над выборкой данных. Однако имеется возможность проведения индукции даже без применения алгоритмов с целью обнаружения по интуиции устойчивых цифр в измерительной серии (прежде всего с целью обнаружения грубых, нестатистических промахов). Существование такой возможности предполагается всегда и именно в ней следует видеть содержание упомянутого выше принципа статистической устойчивости **. В такой интерпретации принцип устойчивости служит для отделения осуществимых событий от неосуществимых. В «общей» теории статистики (напр. [2]) трактовка этого принципа иная. Там этот принцип формулируется как возможность эмпирического построения распределения вероятностей, т. е. как основа создания не алгоритмического, а вероятностного аппарата статистики.

2. «Общая» теория статистики ставит перед точными науками ряд терминологических проблем. Термины следовало бы рассматривать как элементы специфического для статистики «повествования», изложенного с целью описания ее интуитивных начал. К сожалению, еще не разработана постановка проблемы того, что можно было бы назвать н а р р а т и в о м с т а т и с т и к и. По некоторой аналогии с определением нарратива в некоторых гуманитарных науках (см., напр., [3]) можно попытаться определить нарративное знание в статистике примерно как «упорядоченное в словах и терминах знание того, какова специфика исследуемых статистических явлений». По-видимому, общестатистический нарратив окажется довольно пустым в отличие от

---

* Терминология статистики очень запутана. Напр., в переводе солидного курса [1] на стр. 14 то, что у нас названо оценкой, называется значением оценки, то, что нами названо оценочным алгоритмом — оценочной функцией или оценкой, а то, что у нас названо эстиматором — статистикой.

** Понятие статистической устойчивости не следует путать с понятием устойчивости в смысле устойчивой процедуры, т. е. стохастической процедуры для изучения нечувствительности эстиматоров к форме распределения вероятностей (см. напр. [1] гл. 31).

нарратива специфических отраслей статистики, в которых следует прибегать к нарративной аргументации преимущественно в связи с описанием алгоритмического аппарата. Нарратив можно в какой-то мере противопоставить аксиоматическому методу, которым пользуется, в частности, теория вероятностей.

Существование терминологических трудностей, встречающихся при переходе к статистическому образу мышления, можно проиллюстрировать на примерах, взятых из книги [4]. Однако противопоставленные в ней (с. 8—9) пары терминов типа «физики говорят — статистики говорят» и типа «демографический термин — физический термин» не представляют значительного методологического интереса. Больше внимания заслуживает предложение авторов книги отказаться от использования как термина *ошибка* («который может ввести в заблуждение»), так и термина *точность* («поскольку он точно не определен»). Хотя сами авторы не предлагают альтернативной концепции, нами было выдвинуто в, так сказать, нарративном плане предложение отказаться от использования понятия «случайные ошибки» [5]. А именно, во избежание определения понятий ошибки и точности друг через друга мы предложили пользоваться концепцией «условий измерения или наблюдения». Состояние условий измерения, наблюдения и подсчета при образовании отдельной выборки и при переходе от одной выборки к другой может описываться такими выражениями, как «хаотические условия», «полуустойчивые условия» и т. д.

С точки зрения точных наук крайне нежелательным является употребление в «общей» теории статистики выражения «количество информации» в смысле «информации по Фишеру» или в близком к нему смысле. Принятое в физических науках и технике обычное определение информации и энтропии, носящее универсальный характер, не оставляет места другим особым мерам информации. «Информация по Фишеру» связана с минимальной границей дисперсии распределения, фигурирующей в неравенстве Крамера-Рао. Запас «информации по Фишеру», который обратно пропорционален этой границе, должен интерпретироваться так же, как и сама дисперсия или квадратный корень из нее (стандарт). Поскольку обратная величина определяет различающую способность (*различение* или *точность*) на данной шкале, то и «информация по Фишеру» тесно связана с понятием различающей способности, которую можно считать первичной по отношению к понятию информации.

Курсы статистики умалчивают о том, что введение понятия информации может дать для статистики кое-что принципиально новое только в случае, когда речь идет не об одном-единственном оцениваемом параметре, а о нескольких, рассматриваемых совместно. В самом деле, в одномерном случае можно говорить либо о «точности», либо об «информации», однако так или иначе речь идет только об определении различающей способности на только одной шкале. Но дело обстоит иначе в многомерном случае, поскольку понятие различающей способности можно определить только на каждой шкале в отдельности. Поэтому тогда возникает необходимость во введении определения «информации» с тем, чтобы получить возможность охарактеризовать одним числом («количеством информации») свойства точности многомерной стохастической модели (многомерного распределения) в целом, т. е. как-то сочетать величины, определяющие различающую способность отдельных шкал.

Сказанное относится, например, к книге [4], написанной для физиков. На первый взгляд кажется, что в ней имеется то, что можно назвать нарративом по информации. Однако перечислены только такие свойства информации («возрастание с увеличением числа наблюдений», «связанность с точностью», «связанность с тем, что мы изучаем в эксперименте»), которые не специфичны для «информации» по той причине, что их можно выдвинуть уже при изложении нарратива, относящегося к обоснованию понятия «точность» или «различение».

3. Основным стремлением теоретиков при развитии математической статистики является желание обеспечить эту дисциплину богатым математическим аппаратом. Это достигается главным образом благодаря рассмотрению 1) математически конкретизированных функций распределения вероятности, и 2) асимптотических свойств эстиматоров. Для методологии эти тенденции представляют сравнительно малый интерес, если оставить в стороне вопросы классификации методов.

В отношении первого пункта следует отметить, что уже заметна также противоположная тенденция, например, в виде зачатков теории «свободных от распределения процедур» (см., напр., [1]). Что касается второго пункта, то было бы выгодно выделить «в чистом виде» ту часть аппарата статистики, которая опирается не на асимптотические, а на *актуальные* (выборочные) *свойства эстиматоров и оценочных функций.* Они имеют свою специфику.* Теорией актуальных свойств эстиматоров нельзя пренебрегать хотя бы потому, что эвристическая экспериментальная и наблюдательная работа, осуществляемая с целью форсирования открытий, обычно опирается на выборки в каком-то смысле минимального объема. Такие наблюдательные дисциплины, как галактическая и внегалактическая астрономия, в общем опираются почти исключительно на выборки ограниченного

* Например, в книге [4] говорится следующее (с. 147): «...метод максимума правдоподобия необязательно дает лучшие оценки для выборок конечного объема. Несмотря на то, что функция правдоподобия содержит всю информацию, заключенную в данных, это вовсе не означает, что метод м. п. использует эту информацию наилучшим образом.»

объема. Для них следует считать типичными методы, опирающиеся в основном только на актуальные свойства выборок.*

Основной трудностью при применении аппарата статистики к выборкам ограниченного объема являются усложнения, возникающие при наличии смещения у соответствующих эстиматоров. Разумеется, простым объединением смещенных оценок ограниченного объема нельзя избавиться от смещения результата. Поскольку аргументировать с понятием асимптотической несмещенности нет смысла, то среди актуальных свойств в данном случае наиболее критичным является смещение, а не, например, эффективность (концентрация оценок).

4. Теорию проверки гипотез следует рассматривать как ту «необязательную» часть общестатистического аппарата, которая опирается на аксиоматическую теорию вероятностей. Это — вероятностный аппарат.** Как известно, эмпирические вероятности связаны с теоретическими через формулу Бейеса. Практическое значение формулы зависит прежде всего от возможности формального выделения таких событий, которым можно присвоить одновременно как эмпирическую, так и теоретическую вероятность. В принципиальном же отношении роль формулы зависит от того, в какой мере она может дать что-то качественно новое для математической статистики по сравнению с ее первичными методами. Здесь вопрос следует поставить, по-видимому, исходя из тех же соображений, что и выше при сравнении понятий «точность» и «информация». А именно, решающей должна оказаться многомерная ситуация.

В качестве примера дискуссии, опирающейся на рассмотрение однопараметрического случая, можно отметить приведенную в [4] (§ 1.3 и гл. 6 вместе с комментариями редактора). Такие рассуждения подтверждают почти очевидное заключение о том, что теория проверки гипотез носит преимущественно иллюстративный характер. Однако положение изменяется при переходе к многомерной проблеме (к сложным гипотезам). Пусть имеем, например, модель, описываемую двумя параметрами. Если ввести две гипотезы о модели и если затем окажется, что одна гипотеза дает лучшее согласие с эмпирическим прообразом по одному параметру, а другая — по другому параметру, то может оказаться полезным обратиться к теории проверки сложных гипотез (примером разработки такого подхода в точных науках может служить [7]). Правда, и здесь можно попытаться обойтись без

---

* Отметим, что предложенная недавно нами схема классификации статистических дисциплин [6] не учитывала с достаточной четкостью их специфику в отношении объема выборок, так как речь шла только о специфике у п о р я д о ч е н и я выборок, а не о различиях в специфике выборок ограниченного и неограниченного объема.

** Иногда под вероятностным аппаратом понимается то, что нами выше названо стохастическим аппаратом.

вероятностного аппарата статистики, прибегнув к концепции запаса информации для модели (в обобщенном смысле).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. «Наука», М., 1973.
2. Г. Крамер. Математические выводы статистики. НШЛ, М., 1948.
3. А. А. Порк. Нарратив как проблема методологии исторической науки. — «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 361. Тарту, 1975, с. 149—164.
4. В. Идье и др. Статистические методы в экспериментальной физике. «Атомиздат», М., 1976.
5. H. Eelsalu. Comments on systemic and didactic approach to Galactic research. «Tartu Astr. Obs. Teated», 1972, nr. 37, 14—23.
6. Х. Т. Ээлсалу. Концепция исследовательской системы как методологическое средство анализа процесса научного исследования. — «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 417. Тарту, 1977, с. 42—47.
7. A. Sturrock. Evaluation of astrophysical hypotheses. «Astrophys. J.», 1973, **182**, 569—580.

Поступила в редакцию 26 апреля 1977 г.

LISA TÄPPISTEADUSTE ÜLDSTATISTILISE APARAADI ALUSTE METODOLOOGILISELE ANALÜÜSILE

H. Eelsalu

Resümee

Metodoloogiliste küsimuste käsitlemiseks vastandatakse puhtalgoritmiline aparaaat stohhastilisele aparaadile, mis põhineb estimaatori (statistiku) mõistel. Stohhastilisele aparaadile omakorda vastandatakse tõenäosusteoreetiline aparaat.

Väidetakse, et informatsiooni-kontseptsiooni ja aksiomaatilise tõenäosusteooria rakendamine võib viljakaks osutuda alles mitmemõõtmeliste probleemide käsitlemisel. Tehakse ettepanek metodoloogiliseks analüüsiks välja töötada statistika narratiivi kontseptsioon. Põhjendatakse vajadust senisest enam tähelepanu pöörata võendite aktuaalsete (mitteasümptootiliste) omaduste teooriale.

ON THE METHODOLOGICAL ANALYSIS OF THE FOUNDATIONS OF THE GENERAL STATISTICAL APPARATUS OF EXACT SCIENCES

H. Eelsalu

Summary

To treat methodological problems, purely algorithmic apparatus is viewed against stochastic apparatus which makes use of the notion of estimator (statistics). The latter apparatus is, in its turn, viewed against probabilistic apparatus.

It is stated that application of both the concept of information, and the axiomatic probability theory can become fertile only in the case of multidimensional problems. A suggestion is made to create a narrative of statistics for methodological analysis. Arguments for the necessity of paying more attention to the theory of actual (non-asymptotic) properties of samples are presented.

О ПОТЕНЦИАЛАХ, ДОПУСКАЮЩИХ СОВПАДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА И ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Ю. Я. Лембра

Введение

Вопрос о совпадении решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби был впервые рассмотрен в работе Розена [1] на основе результатов известной работы Бома [2]. Следуя Розену, рассмотрим нерелятивистское движение частицы с массой m в поле с потенциальной энергией $U(x, y, z)$. Функции U назовем сокращенно потенциалами. Волновую функцию стационарных состояний представим в виде

$$\Psi = Re^{\frac{iS}{\hbar}}, \tag{1}$$

где R и S вещественные функции координат x, y, z.

Подставляя волновую функцию из формулы (1) в уравнение Шредингера, получим следующие уравнения для определения функций R и S:

$$\frac{1}{2m}(\operatorname{grad} S)^2 + U - \frac{\hbar^2 \Delta R}{2mR} = E \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(R^2 \operatorname{grad} S) = 0, \tag{3}$$

где E — энергия частицы.

Сравним уравнение (2) с уравнением Гамильтона—Якоби в классической нерелятивистской механике:

$$\frac{1}{2m}(\operatorname{grad} S)^2 + U = E, \tag{4}$$

где S является действием.

Это сравнение показывает, что совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби может иметь место в том случае, если величина

$$U_q = -\frac{\hbar^2 \Delta R}{2mR} \tag{5}$$

является постоянной. Поэтому Розеном введено требование

$$\Delta R = CR, \tag{6}$$

где C — вещественная постоянная.

Формула (3) не содержит постоянной Планка. Поэтому она имеет одинаковый физический смысл (выражает уравнение непрерывности) в классической и квантовой механике.

Таким образом, совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби может получаться только в случае некоторых определенных потенциалов, для нахождения которых надо решить систему уравнений (2), (3) и (6). В целях обозримости выпишем все уравнения этой системы вместе:

$$\left.\begin{aligned} U = -\frac{1}{2m}(\operatorname{grad} S)^2 + E' \\ \operatorname{div}(R^2 \operatorname{grad} S) = 0 \\ \Delta R = CR, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где введено обозначение

$$E' = E + \hbar^2 C/2m. \tag{8}$$

Решения системы Розена (7) исследовались в работах [1], [3] и [4]. В данной статье мы приведем некоторые новые решения этой системы.

Примеры в трехмерном случае

Положим для третьего уравнения системы (7) $C=0$ и рассмотрим решение $R=\text{const}$. Функцию S будем искать методом разделения переменных:

$$S(x, y, z) = u(x)\,v(y)\,w(z). \tag{9}$$

Подставляя S из формулы (9) во второе уравнение системы (7), найдем

$$\left.\begin{aligned} u'' + k_1 u = 0 \\ v'' + k_2 v = 0 \\ w'' + k_3 w = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Постоянные разделения переменных k_1, k_2 и k_3 при этом подчиняются условию

$$k_1+k_2+k_3=0. \tag{11}$$

Выбор этих постоянных исчерпывается следующими четырьмя случаями.

а) Все постоянные разделения переменных равны нулю $k_1=k_2=k_3=0$. Уравнения (10) решаются легко

$$\begin{aligned} u&=C_1x+K_1\\ v&=C_2y+K_2\\ w&=C_3z+K_3. \end{aligned} \tag{12}$$

В этом разделе мы обозначим постоянные интегрирования через C_j и K_j, где индексы $j=1$, 2 и 3 соответствуют функциям u, v и w.

Далее получим из формулы (9)

$$S=(C_1x+K_1)(C_2y+K_2)(C_3z+K_3). \tag{13}$$

Подставляя полученный результат в первую формулу системы (7), находим искомый потенциал

$$U=-\frac{1}{2m}[C_1^2(C_2y+K_2)^2(C_3z+K_3)^2+C_2^2(C_1x+K_1)^2\times$$
$$\times(C_3z+K_3)^2+C_3^2(C_1x+K_1)^2(C_2y+K_2)^2]+E'. \tag{14}$$

б) Одна постоянная разделения переменных равна нулю, остальные отличны от нуля. Поэтому положим, например, $k_1=0$, $k_2=-k_3=\omega^2$, где ω — положительная постоянная. Уравнения (10) также легко решаются. Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$U=-\frac{1}{2m}[C_1^2(C_2\cos\omega y+K_2\sin\omega y)^2(C_3e^{\omega z}+K_3e^{-\omega z})^2+$$
$$+\omega^2(C_1x+K_1)^2(C_2\sin\omega y-K_2\cos\omega y)^2(C_3e^{\omega z}+K_3e^{-\omega z})^2+$$
$$+\omega^2(C_1x+K_1)^2(C_2\cos\omega y+K_2\sin\omega y)^2(C_3e^{\omega z}-K_3e^{-\omega z})^2]+E'. \tag{15}$$

в) Две постоянные разделения переменных положительны, одна отрицательна: $k_1>0$, $k_2>0$, $k_3<0$. Положим $k_1=\omega_1^2$ и

$k_2=-\omega_2^2$, где ω_1 и ω_2 — положительные постоянные. Тогда $k_3=-(\omega_1^2+\omega_2^2)$. Искомый потенциал выражается так:

$$U=-\frac{1}{2m}\Big[\omega_1^2(C_1\sin\omega_1x-K_1\cos\omega_1x)^2\times$$
$$\times(C_2\cos\omega_2y+K_2\sin\omega_2y)^2\left(C_3e^{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z}+K_3e^{-\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z}\right)^2+$$
$$+\omega_2^2(C_1\cos\omega_1x+K_1\sin\omega_1x)^2(C_2\sin\omega_2y-K_2\cos\omega_2y)^2\times$$
$$\times\left(C_3e^{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z}+K_3e^{-\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z}\right)^2+(\omega_1^2+\omega_2^2)\times$$
$$\times(C_1\cos\omega_1x+K_1\sin\omega_1x)^2(C_2\cos\omega_2y+K_2\sin\omega_2y)^2\times$$
$$\times\left(C_3e^{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z}-K_3e^{-\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z}\right)^2\Big]+E'. \tag{16}$$

г) Две постоянные разделения переменных отрицательны, одна положительна: $k_1<0$, $k_2<0$, $k_3>0$. Положим $k_1=-\omega_1^2$ $k_2=-\omega_2^2$, где ω_1 и ω_2— положительные постоянные. Теперь $k_3=\omega_1^2+\omega_2^2$. Для потенциала получим

$$U=-\frac{1}{2m}\big[\omega_1^2(C_1e^{\omega_1x}-K_1e^{-\omega_1x})^2(C_2e^{\omega_2y}+K_2e^{-\omega_2y})^2\times$$
$$\times(C_3\cos\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z+K_3\sin\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z)^2+\omega_2^2(C_1e^{\omega_1x}+K_1e^{-\omega_1x})^2\times$$
$$\times(C_2e^{\omega_2y}-K_2e^{-\omega_2y})^2(C_3\cos\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z+K_3\sin\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z)^2+$$
$$+(\omega_1^2+\omega_2^2)(C_1e^{\omega_1x}+K_1e^{-\omega_1x})^2(C_2e^{\omega_2y}+K_2e^{-\omega_2y})^2\times$$
$$\times(C_3\sin\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z-K_3\cos\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}z)^2\big]+E'. \tag{17}$$

В заключение этого раздела рассмотрим при тех же предположениях (т. е. $C=0$, $R=\text{const}$) тривиальный пример решения второго уравнения системы (7). Оно, очевидно, удовлетворяется, если S является линейной функцией

$$S=ax+by+cz+d, \tag{18}$$

где a, b, c и d являются произвольными вещественными постоянными. Теперь получим из первой формулы системы (7)

$$U=-\frac{1}{2m}(a^2+b^2+c^2)+E'. \tag{19}$$

В данном случае U является всюду постоянным, т. е. частица является свободной. Без ограничения общности можно положить $U=0$. Тогда получим из (8), (18) и (19):

$$E=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \tag{20}$$

где $\mathbf{p}=\operatorname{grad} S$ является импульсом частицы.

Отметим, что случай свободной частицы был рассмотрен уже в [1]. Однако методика исследования этого случая в [1] не соответствует обычной схеме решения системы (7), поскольку там в качестве исходного положения выбрано значение $U=0$.

Примеры в двухмерном случае

Как и предыдущем разделе допустим, что $C=0$ и $R=\text{const}$. Второе уравнение системы (7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=0. \tag{21}$$

Удобно ввести произвольную аналитическую функцию $f(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta=x+iy$. Представим функцию $f(\zeta)$ в форме:

$$f(\zeta)=u(x,y)+iv(x,y), \tag{22}$$

где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ вещественные функции. Как известно, вещественная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому при $S=u(x,y)$ либо $S=v(x,y)$, уравнение (21) удовлетворяется.

Если выберем $S=u(x,y)$, получим из первой формулы системы (7)

$$U=-\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+E'. \tag{23}$$

Если же $S=v(x,y)$, то

$$U=-\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+E'. \tag{24}$$

В силу условий Коши—Римана обе формулы (23) и (24) дают один и тот же потенциал, который можно выразить и так

$$U=-\frac{1}{2m}|f'(\zeta)|^2+E', \tag{25}$$

где штрих обозначает производную по комплексной переменной ζ.

В качестве примера приведем некоторые простые генерирующие функции $f(\zeta)$ вместе с соответствующими потенциалами.

Пусть в качестве $f(\zeta)$ выступает степенная функция

$$f(\zeta)=k\zeta^n, \tag{26}$$

где n — целое положительное число. Здесь и в следующих примерах этого раздела k является вещественной постоянной.

Пользуясь формулой бинома Ньютона, найдем, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются полиномами, структура которых определяется следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)&=k[x^n-C_n^2\,x^{n-2}y^2+C_n^4\,x^{n-4}y^4-\ldots]\\ v(x,y)&=k[nx^{n-1}y-C_n^3\,x^{n-3}y^3+C_n^5\,x^{n-5}y^5-\ldots].\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Последний член в квадратных скобках (27) определяется из условия, что x не может иметь отрицательного показателя степени.

Из (25) находим искомый потенциал

$$U=-\frac{(kn)^2}{2m}\,r^{2(n-1)}+E', \tag{28}$$

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{29}$$

В частном случае, если $n=2$, получим из (28) известный из работы [1] потенциал:

$$U=-\frac{2k^2}{m}\,(x^2+y^2)+E'. \tag{30}$$

В частном случае, если $n=1$, находим из (27) и (28):

$$\left.\begin{aligned} u&=kx\\ v&=ky\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$U=-\frac{k^2}{2m}+E'. \tag{32}$$

Этот потенциал характеризует свободную частицу. Если она движется вдоль оси x, то $S=kx$, если вдоль оси y, то $S=ky$. Импульс частицы в обоих случаях равен $|k|$.

В следующем примере допустим, что генерирующая функция является экспоненциальной функцией:

$$f(\zeta)=e^{k\zeta}. \tag{33}$$

Выделяя у этой функции вещественную и мнимую части, получим

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= e^{kx}\cos ky \\ v(x, y) &= e^{kx}\sin ky. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Соответствующий потенциал получим из (25)

$$U=-\frac{k^2}{2m}e^{2kx}+E'. \tag{35}$$

Если же исходить из функции

$$f(\zeta)=\sin k\zeta, \tag{36}$$

получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sin kx \operatorname{ch} ky \\ v(x, y) &= \cos kx \operatorname{sh} ky \end{aligned} \tag{37}$$

$$U=-\frac{k^2}{2m}(\cos^2 kx+\operatorname{sh}^2 ky)+E'. \tag{38}$$

Аналогично можно провести анализ во всех остальных случаях.

Общее решение в одномерном случае

В одномерном случае система уравнений Розена (7) позволяет путем простого интегрирования легко найти общее решение.

Случай $C=0$ рассмотрен уже в [1] и повторялся также в [3]. Однако в обеих работах анализ является неполным, так как пропущен случай свободной частицы. Кроме того, мы приведем здесь более изящный метод интегрирования, позволяющий вычислить искомый потенциал сразу после нахождения функции R. Для этого заметим, что независимо от значения постоянной C из второго уравнения системы (7) вытекает постоянство произведения $R^2\frac{dS}{dx}$. Следовательно, можно написать

$$\frac{dS}{dx}=\frac{A}{R^2}, \tag{39}$$

где A является постоянной интегрирования. При этом, как вытекает из формулы (3), $\frac{A}{m}$ есть плотность потока.

Подставляя dS/dx из (39) в первое уравнение системы (7) можно найти потенциал по следующей формуле:

$$U = -\frac{A^2}{2mR^4} + E'. \tag{40}$$

После этих общих замечаний перейдем к изучению случая, если $C=0$. Из третьего уравнения системы (7) следует

$$R = Bx + D, \tag{41}$$

где B и D постоянные интегрирования, которые одновременно не равняются нулю.

Следовательно, потенциал выражается так

$$U = -\frac{A^2}{2m(Bx+D)^4} + E'. \tag{42}$$

Найдем также функцию S, исходя из формул (39) и (41). При интегрировании следует различать два случая.

В случае, если $B \neq 0$, получим после интегрирования

$$S = -\frac{A}{B(Bx+D)} + K, \tag{43}$$

где K — постоянная интегрирования.

Если же $B=0$, то получим

$$S = \frac{A}{D^2} x + K. \tag{44}$$

Из (42) видно, что этот случай соответствует свободной частице. Ее импульс, как следует из формулы (44), равен $|A|/D^2$.

Далее рассмотрим случай, если $C \neq 0$. В работе [3] R выражается через экспоненциальные функции, т. е. C полагается положительной постоянной. Однако тогда не удовлетворяется известное из квантовой механики условие конечности волновой функции. Поэтому в данной работе мы рассмотрим случай отрицательных C и положим $C = -\mu^2$, где μ — положительная постоянная. Решение третьего уравнения системы (7) имеет вид

$$R = F \cos \mu x + G \sin \mu x, \tag{45}$$

где F и G — постоянные интегрирования, которые одновременно не равняются нулю.

С учетом формул (40) и (45) получим потенциал

$$U=-\frac{A^2}{2m(F\cos\mu x+G\sin\mu x)^4}+E'. \tag{46}$$

В частном случае, если $G=0$, получим из (46) известный из работы [1] потенциал

$$U=-\frac{A^2}{2mF^4\cos^4\mu x}. \tag{47}$$

Найдем еще функцию S путем использования формул (39) и (45). После интегрирования получим

$$S=\frac{A}{\mu(F^2+G^2)}\cdot\frac{F\sin\mu x-G\cos\mu x}{F\cos\mu x+G\sin\mu x}+K. \tag{48}$$

Заключение

Учитывая результаты, полученные в [1], [3] и [4], а также в данной работе, приходим к заключению, что с математической точки зрения не редки потенциалы, допускающие совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби. Однако среди этих потенциалов нет ни одного, который имел бы непосредственное практическое применение. Исключение составляет лишь всюду постоянный потенциал, который описывает свободную частицу.

Совпадение решений уравнения Шредингера и Гамильтона-Якоби еще не означает, что имеет место тождественное движение частицы в квантовой и классической механике, как указано в заглавии работы [1]. Это ясно уже из того обстоятельства, что указанное выше совпадение имеет место для свободной частицы. Однако хорошо известно, что поведение свободной микрочастицы существенно отличается от поведения свободной частицы в смысле макроскопического объекта. Совпадение решений уравнения Шредингера и Гамильтона—Якоби фактически означает лишь то, что плотность вероятности R^2 движется по законам квантовой механики со скоростью $\mathbf{v}=\frac{1}{m}\operatorname{grad}S$ так же, как двигалась бы частица по законам классической механики при том же потенциале, определяемом из условий (7). Предельный переход от квантовой механики к классической механике требует специального анализа, что выходит за рамки этой статьи.

Отметим, что при этом нельзя ограничиваться только сравнением уравнения Шредингера и Гамильтона—Якоби. Такое сравнение позволяет лишь найти необходимое условие для перехода от квантовой механики к классической. Как указано в [5] и [6], для этого величина U_q, определяемая формулой (5), должна стремиться к нулю при $\hbar \to 0$. С учетом формулы (6) это в нашем изложении требует выполнения условия

$$\lim_{\hbar \to 0} \hbar^2 C = 0. \tag{49}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Rosen. Identical motion in quantum and classical mechanics. — «Amer. J. Phys.», 1964, **32**, Nr. 5, 377—379.
2. D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of «hidden» variables. — «Phys. Rev.», 1952, **85**, Nr. 2, 166—179.
3. D. B. Berkowitz, P. D. Skiff. Potential energies of identical motions in classical and quantum mechanics. — «Amer. J. Phys.», 1972, **40**, Nr. 11, 1625—1628.
4. Ю. Я. Лембра. О возможности совпадения решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби. — «Изв. вузов. Физика», 1968, № 7, 158—159.
5. N. Rosen. The relation between classical and quantum mechanics. — «Amer. J. Phys.», 1964, **32**, Nr. 8, 597—600.
6. П. Г. Кард. Принцип несоответствия. — «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 360. Методологические вопросы физики, II, Тарту, 1975, с. 21—26.

Поступила в редакцию 5 октября 1978 г.

POTENTSIAALIDEST, MIS VÕIMALDAVAD SCHRÖDINGERI JA HAMILTON-JACOBI VÕRRANDITE LAHENDITE ÜHTIMIST

J. Lembra

Resümee

Potentsiaale, mis võimaldavad Schrödingeri ja Hamilton-Jacobi võrrandite lahendite ühtimist, uuriti Roseni [1] võrrandisüsteemi (7) alusel. Kolme- ja kahedimensionaalsel juhul leiti erilahendeid, kusjuures kahedimensionaalsel juhul on leitud lahendite klass küllalt lai, kuna neid võib genereerida kompleksmuutuja suvalise analüütilise funktsiooni abil. Ühedimensionaalsel juhul leiti üldlahend. Schrödingeri ja Hamilton-Jacobi võrrandite lahendite ühtimine näitab kvantmehhaanika seisukohalt seda, et tõenäosuse tihedus R^2 liigub kiirusega $\mathbf{v} = m^{-1} \operatorname{grad} S$ (m — osakese mass, R ja S — süsteemi (7) lahendid) nii nagu liigub klassikalise mehhaanika järgi osake väljas, milles potentsiaalne energia U on määratud tingimustega (7).

ON THE POTENTIALS ALLOWING THE COINCIDENCE OF SOLUTIONS OF SCHRÖDINGER EQUATION AND HAMILTON-JACOBI EQUATION

J. Lembra

Summary

The potentials allowing the coincidence of solutions of the Schrödinger equation and the Hamilton-Jacobi equation have been investigated on the basis of Rosen's [1] system of equations (7). Particular solutions in three- and two-dimensional cases have been found. The class of solutions in the two-dimensional case is quite wide because they are generated by an arbitrary analytic function of the complex variable. The general solution in the one-dimensional case has been established. The coincidence of solutions of the Schrödinger and Hamilton-Jacobi equations indicates that from the point of view of quantum mechanics the probability density R^2 moves with the velocity $\mathbf{v}=m^{-1}\,\mathrm{grad}\, S$ (m — mass of the particle, R and S — solutions of system (7)) as the particle moves according to classical mechanics in a field with the potential energy U under conditions (7).

СООТНОШЕНИЕ ОБЪЕКТИВНОГО И СУБЪЕКТИВНОГО В ПОНЯТИИ РЕДУКЦИИ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

А. М. Мостепаненко, И. Д. Невважай

Проблема редукции волновой функции в квантовой механике относится к числу тех фундаментальных проблем, решая которые физики вынуждены обращаться к философии. Спектр предлагаемых решений парадокса редукции простирается от субъективно-психологических трактовок до отрицания редукции как проблемы квантовой физики. В отечественной литературе можно назвать две работы, в которых дается обзор различных подходов к решению парадокса редукции [1], [2]. Данная работа отличается от указанных тем, что в ней больше внимания уделяется гносеологическим моментам интерпретаций процесса редукции. Кроме того, в ней выдвигается точка зрения, что проблема редукции связана не только с особым характером взаимодействия материальных объектов, но и с соотношением понятий квантовой и классической картин мира.

Исторически проблема редукции берет свое начало с выступления А. Эйнштейна на 5-м Сольвеевском конгрессе в 1927 году [3]. Выступление Эйнштейна содержало попытку проиллюстрировать неполноту новой в то время волновой механики, идейное содержание которой было раскрыто в работах Н. Бора и В. Гейзенберга. Возражение Эйнштейна сводилось к тому, что в дифракционном опыте по рассеянию электронов на щели $|\psi|^2$ выражает вероятность попадания электрона в какую-то область плоскости экрана (фотопластинки). «Однако интерпретация, согласно которой $|\psi|^2$ выражает вероятность того, что определенная частица находится во вполне определенном месте, предполагает совершенно особый механизм действия на расстоянии, не позволяющий волнам, непрерывно распределенным в пространстве, оказывать свое действие одновременно в двух участках пленки» ([3], с. 529). Поискам упомянутого «особого механизма» посвящены все работы, в которых обсуждается процесс редукции. Следует отметить, что противоречие процесса редукции положениям теории относительности не может быть аргументом против нерелятивистской квантовой теории. Поэтому постановка проблемы редукции как парадоксального «стягивания» де-бройлевской волны, занимающей неограниченное пространство, в точку, соответствующую месту попадания частицы на экран, является некорректной.

Впоследствии формулировка проблемы редукции изменилась, что было связано с отказом от представления о ψ-функции как о некой субстанции в трехмерном пространстве. Проблема редукции стала формулироваться как проблема сведения волнового пакета, задаваемого рядом $\Psi(x)=\sum_n c_n\psi_n(x)$, и описывающего состояние микрообъекта до акта взаимодействия с прибором, к одному его члену $c_n\psi_n$ — после измерения. До процесса наблюдения ψ-функция системы допускает целый ряд потенциальных возможностей. Однако в процессе наблюдения все эти возможности мгновенно сводятся к одной. Редукция волнового пакета не описывается уравнением Шредингера. Это уравнение описывает непрерывное изменение волновой функции в промежутках между наблюдениями, но ничего не говорит о скачкообразном поведении волновой функции в акте наблюдения.

Проблема редукции исторически возникла как реакция классического миропонимания на трактовку формализма квантовой механики, данную Бором, Гейзенбергом и Борном. Как известно, копенгагенская интерпретация квантовой механики основана на том, что волновая функция относится к системе «микрообъект + макроприбор» и описывает фиксированную экспериментальную ситуацию. Взаимодействие микрообъекта с макроскопическим окружением является неделимым, целостным актом, обусловленным существованием кванта действия $\hbar$. Уравнения движения допускают описание взаимодействия прибора и объекта постольку, поскольку состояние объекта находится в соответствии с состоянием измерительного прибора. Поскольку, с точки зрения копенгагенской школы, любое осмысленное высказывание об объекте требует фиксирования экспериментальной ситуации, редукцию волновой функции вообще нельзя рассматривать как реальный физический процесс.

Сначала полагали, что рассмотрение квантового объекта без фиксации соответствующей экспериментальной ситуации есть пережиток классического мировоззрения. Поэтому сама постановка проблемы редукции выглядела как консервативная. Однако подобное мнение опиралось на крайне феноменологическую трактовку квантовых объектов, не учитывающую, что даже до процесса измерения микрообъектам объективно присуща система потенциальных возможностей, а также — значения ряда физических величин, не зависящих от экспериментальной ситуации (электрического и других зарядов) [4].

Как известно, проблема редукции есть составная часть квантовомеханической теории измерений, сформулированной фон Нейманом [5]. Рассмотрим некоторые положения этой теории.

Пусть измеряемый объект описывается волновой функцией $\psi(x)$ (система I), а взаимодействующая с ним другая система (система II) описывается волновой функцией $\varphi(y)$. Если система II описывается классическим потенциалом, то изменение состояния системы I определяется из уравнения Шредингера. Если же система II описывается волновой функцией, то изменение состояния системы I подчиняется другим закономерностям.

До взаимодействия волновая функция системы I + II задается произведением $\psi(x)\varphi(y)$. Взаимодействие между I и II описывается уравнением Шредингера для составной системы I+II, так что общее решение его представляется в виде $\Psi_{\mathrm{I+II}} = \sum\limits_n u_n(x)\varphi_n(y)$. В последней формуле отсутствует отдельно волновая функция первой системы. Согласно фон Нейману, такой функции для системы I после взаимодействия с системой II вообще не существует. В этом случае система I, как часть системы I+II, описывается матрицей плотности $\varrho_{xx'} = \int dy \Psi^*_{\mathrm{I+II}}(x, y) \cdot \Psi_{\mathrm{I+II}}(x', y)$. Так что если априорное распределение вероятностей задавалось выражением $|\Psi(x)|^2 = |\sum\limits_n c_n\psi_n(x)|^2$, где ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... — собственные функции некоторого оператора, соответствующего наблюдаемой физической величине, то распределение вероятностей для измеряемой величины после взаимодействия с системой II задается выражением $\varrho_{xx} = \sum\limits_n |u_n(x)|^2$, в котором отсутствуют интерференционные члены. Фиксация состояния системы II приводит к выделению подсовокупности из «смеси», которая соответствует новой волновой функции системы I:

$$\Psi_{\mathrm{I+II}} = \sum_n u_n(x)\varphi_n(y) \to u_{n_0}(x)\varphi_{n_0}(y). \qquad (1)$$

Переход (1) соответствует процессу редукции — в дополнение к тому изменению состояния системы I, которое происходит под действием оператора энергии $\widehat{H}$:

$$\psi \to \exp\left[-\frac{i}{\hbar} t\widehat{H}\right]\psi. \qquad (2)$$

И. фон Нейман, не останавливаясь на констатации двойственной природы изменения вектора состояния измеряемой системы (1) и (2), ставит задачу ее объяснения. «Сравним теперь эти соотношения с теми, которые действительно осуществляются в природе или при ее наблюдении. Во-первых, само по себе безусловно верно, что измерение или связанный с ним процесс субъективного восприятия является по отношению к внешнему физическому миру новой, не сводящейся к нему сущностью. Действительно, такой процесс выводит нас из внешнего физического мира или, правильнее, вводит в неконтролируемую, так как в каждом контрольном опыте уже предполагаемую, мысленную внутреннюю жизнь индивидуума» ([5], с. 307).

С такой точки зрения, механизм редукции действует не между физическими объектами, а между ними и субъектом, производящим наблюдение. Согласно фон Нейману, здесь имеет место принцип психофизического параллелизма: границу между субъектом и объектом можно как угодно передвигать, причем будет иметь место определенное соответствие между состояниями сознания и дествительности. Мы можем провести эту грань между объектом и макроприбором, можем включить в объект макроприбор и, наконец, перенести ее внутрь человеческого тела или провести ее между «абстрактным Я субъекта» и остальным миром. В таком случае редукцию волновой функции можно связать с актом «осознания» субъектом информации о квантовом явлении. «Аказуальное» изменение состояния объекта в процессе (1) интерпретируется фон Нейманом на основе положений о принципиальной неконтролируемости и неанализируемости психического. Иначе говоря, с такой точки зрения теория измерений в квантовой механике смыкается с психологией.

Справедливо, на наш взгляд, отмечая несводимость измерения к одному лишь взаимодействию объектов и нетривиальную роль субъекта в процессе измерения, фон Нейман, однако, абсолютизирует эту роль. По его собственному признанию, на него оказали влияние соображения Бора об аналогии между влиянием наблюдения на атомные процессы и изменением психического события, вызываемым переходом внимания от одного его элемента к другому [6]. Эта аналогия связана, в свою очередь, с неверной концепцией «неконтролируемости» атомных процессов.

Использование фон Нейманом принципа психофизического параллелизма приводит его к логическим противоречиям. В соответствии с этим принципом, сознание понимается им как эпифеномен, как нечто побочное, лишь сопутствующее явлению, но не оказывающее на него никакого влияния. Но это противоречит той активной роли сознания субъекта, которую подразумевает фон Нейман и которая в явной форме выражена в книге комментаторов его теории [7]. Прибегая к помощи принципа психофизического параллелизма, фон Нейман по существу подменяет проблему отношения субъекта и объекта проблемой соотношения материального и идеального, трактуя при этом сознание как нечто нематериальное в онтологическом аспекте, иррациональное и «неконтролируемое».

Нельзя согласиться и с пониманием опыта у фон Неймана. Он пишет: «Опыт может приводить только к утверждениям... типа — наблюдатель испытал определенное (субъективное) восприятие, но никогда к утверждениям таким, как: некоторая физическая величина имеет определенное значение» ([5], с. 308). Но можно представить себе такую организацию опыта, когда результаты взаимодействия объекта и прибора автоматически обрабатываются дополнительными устройствами и выдаются в виде визуально наблюдаемых цифровых данных, считываемых реальным субъектом. Очевидно, что при этом будет получена та же информация о мире, что и в обычном эксперименте, о котором говорит фон Нейман.

Однако, несмотря на сказанное, в фон-неймановской интерпретации измерительного процесса содержатся важные моменты, заслуживающие пристального внимания. Во-первых, измерение не сводится к взаимодействию объекта с прибором. Далее, ставится проблема гносеологической границы между субъектом и объектом в измерении. Наконец, в-третьих, ставится вопрос о связи квантовомеханического опыта и психологии.

В дальнейшем теория фон Неймана подвергалась в работах различных авторов критике и попыткам ее усовершенствовать. Эти попытки можно разделить на две большие группы. Одна относится к поискам реальных физических процессов, ответственных за редукцию. Другая группа характеризуется поисками субъективно-психологических механизмов данного процесса. На наш взгляд, эти два направления абсолютизируют один из двух аспектов отношения субъекта и объекта в квантовой механике. В самом деле, с одной стороны, мы можем говорить о некотором физическом процессе, особый характер которого отражается в знании в форме дуалистического представления о способах изменения вектора состояния. С другой — необходимо рассматривать сами гносеологические основы и предпосылки возникновения такого дуалистического представления. Иначе говоря, проблему редукции следует связывать как с различием квантовой и классической природы объектов познания, так и с несовпадением классических и квантовых понятий.

Признавая принципиальное отличие природы квантовых и классических объектов, мы не рассматриваем таких толкований редукции волновой функции, которые принципиально не отличаются от объяснения выпадения «орла» или «решки» в опытах с бросанием монеты; так, например, в концепции квантовомеханических ансамблей процесс редукции состоит в том, что регистрирующая часть прибора фиксирует уже то, что актуально имело место до нее, то есть в анализаторе [8].

Естественно, что первой попыткой решения проблемы редукции должно быть описание ее механизма на основе математической схемы самой квантовой теории. Эта задача решалась в плане примирения, согласования процессов (1) и (2). Так, можно попытаться объяснить статистический, «аказуальный» характер процесса (1), исходя из макроскопической природы прибора. При этом считается, что прибор необходимо описывать только матрицей плотности. Тогда в процессе взаимодействия «смешанный» характер прибора «заражает» и систему «объект + прибор» так, что и состояние составной системы изменяется по способу (1). Но как было показано фон Нейманом, а затем более строго Е. Вигнером ([9], с. 149—152), такое предположение противоречит линейному характеру уравнений движения квантовой механики (динамически система из «чистого» состояния никогда не переходит в «смесь»).

Попытки другого направления нацелены на объяснение процесса (1), исходя из процесса (2). Авторы этого направления явно или неявно считают применимой квантовую теорию ко всем материальным объектам. Однако логика сведения (1) к (2) приводит к тому, что процесс измерения становится несовместимым с уравнением Шредингера, оказываясь вне компетенции такого подхода [10]. Пусть микрообъект μ взаимодействует с прибором m. В результате состояние системы $\mu+m$ изменится по способу (2). Знание об объекте извлекается из знания состояния системы $\mu+m$ после взаимодействия. Но знание состояния системы $\mu+m$ может быть получено лишь на основе измерения ее другим прибором M. Состояние новой системы $\mu+m+M$ изменится также по способу (2). Так мы можем получить бесконечный ряд включенных друг в друга систем, если не будем допускать процесс (1) в измерение. Для того, чтобы говорить об определенном результате измерения, необходимо «оборвать» бесконечный ряд.

Способы, которые предлагаются для «обрыва» бесконечного ряда, весьма различны. Одни полагают, что конечный предел этого ряда обусловлен влиянием сознания субъекта, другие — что ответственным за такой процесс является макроскопический характер прибора — последнего члена ряда.

Согласно подходу Зэе [11], состояние макроприбора, например, положение стрелки прибора, в принципе можно описывать суперпозицией возможных ее положений. Но такая суперпозиция для макросостояний по его оценкам не наблюдается в силу того, что «туннельное время перехода» между двумя компонентами такой суперпозиции больше времени возраста Вселенной. Единственно истинно «чистым» состоянием является лишь состояние всей Вселенной. Поэтому феномен редукции получает объяснение, если представить себе Вселенную, расщепленную на множество возможных не связанных друг с другом миров, в которых реализуются все потенциальные возможности, присущие квантовому объекту до акта измерения. В самом же процессе редукции происходит случайная фиксация одного из возможных миров.

Эверетту, Уилеру и Де Витту [12] принадлежит похожая интерпретация, с тем отличием, что для объяснения отсутствия суперпозиции на макроуровне они, кроме «ветвления» Вселенной, предполагают соответствующее расщепление сознания субъекта, в силу чего сам субъект не чувствует «расщепления миров», находясь лишь в состоянии одной компоненты суперпозиции.

Приведенные точки зрения разрешают парадокс редукции путем перекладывания трудностей на область космологии и психологии. Методологическим недостатком этих интерпретаций является допущение ненаблюдаемости всех миров, кроме «нашего». Допущение «иных миров» является здесь положением *ad hoc*, не имеющим научного обоснования.

Изложенные выше попытки сведения (1) к (2) свидетельствуют о том, что пренебрежение классической природой измерительного прибора неизбежно ведет к еще большим трудностям. В связи с этим не прекращаются попытки объяснения редукции наличием субъекта, связь которого с процедурой измерения не вызывает сомнений, если измерение рассматривать как познавательную процедуру. Однако в работах авторов, придерживающихся этого направления, мы находим соображения, скорее заостряющие проблему субъекта и объекта в измерении, нежели адекватно решающие проблему редукции, что, на наш взгляд, объясняется, прежде всего, использованием упрощенного представления о субъекте и не вполне корректным пониманием его отношений к объекту ([13], [5], [9], с. 44, 142, 161—162, [14]).

Как уже отмечалось, мировоззренческим принципом, на основе которого рассматривалась роль субъекта в измерении, был принцип психофизического параллелизма, который по своей сути противоположен диалектико-материалистическому пониманию отношения субъекта и объекта в познании. В теории фон Неймана «микрообъект + прибор + субъект» является замкнутой квантовомеханической системой, находящейся в «чистом» состоянии. Можно рассматривать сознание субъекта как некую систему с собственной волновой функцией до акта наблюдения (суперпозиция собственных «внутренних» состояний интеллекта). В момент наблюдения путем «акта осознания» собственного состояния субъект выделяет определенную, связанную с осознанием состояния своего «Я», подсовокупность, в которой существует волновая функция наблюдаемой системы [7].

Подобного рода рассуждения неизбежно приводят к парадоксам. Один из них, замеченный Э. Шредингером (см., например, [15], с. 134—136), — это парадокс о кошке, который заключается в том, что акт наблюдения, связанный с актом субъективного осознания, «делает» кошку либо живой, либо мертвой, тогда как до акта наблюдения она находилась в суперпозиции «живого» и «мертвого» состояний. Можно себе представить такую ситуацию, когда один субъект, открывая «черный ящик» с содержащейся в нем кошкой, «осознает», что кошка мертва; но она может быть просто спит как «убитая», о чем догадывается другой субъект, разбирающийся в поведении кошек лучше, чем в квантовой механике...

Позиция Ломсадзе и др. [14], связывающих редукцию с «актом смотра», приводит к традиционному пониманию волновой функции как записи информации об объективных характеристиках микрообъекта. Это подчеркивает известную истину о том, что всякое знание об объективном мире субъективно по форме. Правильно выделяя положение об активности субъекта в измерении, авторы представляют эту активность несколько ограниченно, поскольку функции и роль субъекта в измерении сведены к актам «смотра» и «осознания».

История разрешения парадокса доказывает, по крайней мере, одно: математический аппарат квантовой теории процесса редукции не описывает. Остается, таким образом, и двойственность описания изменения состояния объекта в процессе измерения. Эта ситуация нашла отражение в дуалистическом понимании смысла волновой функции у К. Вейцзеккера [16]. По Вейцзеккеру, волновая функция имеет различный смысл в зависимости от ситуации, в которой она используется для описания поведения объекта: она является объективной характеристикой для описания поведения квантового объекта до акта измерения и субъективной, описывающей изменение знаний субъекта, — в самом акте измерения.

По нашему мнению, нельзя согласиться с субъективистскими интерпретациями процесса редукции. Из того факта, что современная квантовая теория этого процесса не описывает, еще не следует, что он вообще не поддается научному рациональному описанию и объяснению. Конечно, мы имеем в виду не отказ от принципиального и неустранимого значения квантовой случайности и неопределенности, а их более глубокое научное обоснование. Получить такое обоснование может помочь более фундаментальная физическая теория, которая позволит осуществить более естественное согласование двух уровней материи — макроуровня и микроуровня.

Пытаясь дать такое обоснование, часто ссылаются на принцип всеобщей взаимосвязи, согласно которому любой объект связан со всеми другими, что приводит к неопределенности и непредсказуемости его поведения. Но при такой интерпретации фактически полагается, что непредсказуемое поведение квантовых объектов обусловлено какими-то тонкими внешними связями, которые не учтены в современном описании. А это неявно подразумевает возрождение концепции «скрытых параметров» и абсолютизацию лапласовского детерминизма. Другое, на наш взгляд, более приемлемое решение состоит в том, что в процессе эксперимента происходит скачкообразное «отображение» микрореальности, локализованной в пространстве с иной, чем у нас топологией, на макроскопическое пространство-время наблюдения. Такое предположение хорошо объясняет скачкообразный характер редукции и непредсказуемость индивидуального поведения квантовых объектов.

Почти общепринятым является взгляд, согласно которому микрореальность — это не волна и не частица, а есть нечто третье, гораздо более сложное и своеобразное, локализованное, возможно, в пространстве и времени с особыми свойствами. В процессе измерения происходит «проецирование» этой реальности на наше макропространство и макровремя. Проблема редукции не может быть решена без более глубокого изучения механизмов этого проецирования (отображения).

В этом плане заслуживает внимания предположение Л. Г. Антипенко о связи процесса редукции с необратимым процессом формирования корпускулярных свойств микрообъекта, который происходит при взаимодействии объекта с прибором. Макроскопический прибор реализует такой необратимый процесс, который обрывает другой, обратимый во времени и описываемый эволюцией волновой функции [17].

Выдвинутое выше предположение, что механизм редукции связан с особым процессом взаимодействия микроуровня и макроуровня, не означает, что процесс редукции должен иметь чисто «онтологическую» природу. Как показывает история решения парадокса редукции, всякое квантовомеханическое описание действительности сталкивается с проблемой бесконечной регрессии. Кроме того, не исключено, что упомянутый процесс «отображения» микроуровня на макроуровень вообще нельзя будет описать на языке какой-либо физической теории, даже более фундаментальной. В таком случае макро- и микрофизика окажутся несводимыми друг к другу, и некоторые важные аспекты взаимосвязи между ними смогут быть выявлены лишь на уровне метатеории или методологии физики.

В этом плане необходим дальнейший методологический анализ взаимосвязи квантовых и классических понятий. Выше уже подчеркивалось, что квантовый объект на теоретическом уровне описания не является ни волной, ни частицей, а представляет собой объект иной онтологической природы. Необходимо делать различие между эмпирическим объектом, проявляющим в различных условиях познания двойственную природу (волновую и корпускулярную), и теоретическим объектом, имеющим в рамках теории чисто «квантовое» описание [18].

Исследование процесса редукции требует анализа перехода в процессе измерения от референта теоретического объекта к референту эмпирического объекта. Редукция, на наш взгляд, связана с процессом выделения классического фрагмента бытия микрообъекта посредством взаимодействия с условиями познания, представляющими опредмеченную деятельность субъекта познания и практики — то, что К. Маркс называл «второй природой». Само понятие измеряемого свойства возникает в результате отражения соответствующей характеристики микрообъекта, как инварианта относительно варьирования определенных условий познания ([19], с. 18). Деятельность субъекта, воплощенная в таком варьировании условий познания и практики, имеет чисто классическую природу. Поэтому репрезентация измеряемого свойства микрообъекта происходит в классических понятиях.

Можно сказать, что двойственная природа описания изменения состояния микрообъекта (формулы (1) и (2)) соответствует двойственной репрезентации бытия микрообъекта — как «теоретического» и «эмпирического» объектов.

Вопрос о гносеологической природе редукции связан с вопросом о применении квантовых понятий к описанию действительности. Ведь кроме проблемы применимости классических понятий к описанию атомных процессов (которая была предметом постоянного внимания в период формирования понятий квантовой механики), существует и проблема применимости квантовых понятий для описания макроопыта, постановка которой стала возможной после выявления самостоятельного статуса у некоторых понятий квантовой теории.

Понять специфику отношений квантовых и классических понятий в измерении — это и есть путь к пониманию роли субъекта в процессе редукции. Рассмотрим процесс образования бесконечной регрессии с несколько другой точки зрения. Не существует другой возможности что-либо узнать о микрообъекте μ, определить его состояние, кроме как через посредство взаимодействия его с другим объектом m. Вызванное этим взаимодействием изменение состояния объекта m дает нам некоторую информацию о состоянии объекта μ, выраженную в понятиях, соответствующих установленному состоянию объекта m. Но для определения состояния объекта m необходимо аналогичным образом использовать другой объект M, в терминах (понятиях) которого мы характеризуем знание (информацию) о состоянии объекта m. И так можно до бесконечности определять информацию в понятиях. Это означает, что мы не располагаем конечными, далее не сводимыми понятиями, в которых выражается знание об объекте μ. На уровне объективной реальности это соответствует взаимодействию множества объектов μ, $\mu+m$, m, $m+M$, M друг с другом. Любое измерение объектов иной (не классической) онтологической природы предполагает своеобразное определение одних понятий (физических величин) через другие. Поскольку определение понятий в рамках одной концептуальной системы ведет к тавтологии (чему соответствует бесконечный регресс в рассуждении), то определяющим понятием считается то, которое соответствует некоторому выбранному эталону. Подобно тому, как измеряют эталоном, так и квантовомеханические понятия определяют через «эталонные» классические понятия (принцип

6 Заказ № 1195

дополнительности). Таким образом, «обрыв» бесконечного ряда связан не с осознанием состояния собственного «Я», а с эталонной формой фиксации получаемой информации о состоянии измеряемого объекта μ. Рассматривая **все** объекты природы квантовомеханически, мы лишаем себя тех предельных понятий, с помощью которых мы способны характеризовать результаты измерений.

Акт наблюдения фиксирует не просто факт изменения состояния прибора, он имеет качественную специфику, связанную с включением данного факта в определенную концептуальную схему. В наблюдении объективное явление субъективируется в форме понятий, соответствующих определенной практике субъекта. В связи с этим можно сформулировать утверждение: в плане отношения субъекта и объекта процесс редукции представляет процедуру проецирования картины описания квантового бытия объекта на картину описания его классического бытия. Здесь затрагивается проблема соотношения бытия вообще и определенного бытия. Определенность бытия объекта в различных физических картинах мира отражается различными способами. Так, например, задать бытие микрообъекта — значит задать, вообще говоря, суперпозицию его возможных собственных состояний, а бытие макрообъекта задается его координатами и импульсом. Скачкообразный характер редукции связан с невозможностью непрерывного предельного перехода квантовомеханического формализма (при $\hbar \to 0$) в формализм классической теории без дополнительных ограничений (например, действие оператора превращается в простое умножение), что с точки зрения теории информации неизбежно ([20], с. 44).

Граница между наблюдателем и наблюдаемым, о которой говорил фон Нейман, есть, по существу, граница между областями применимости квантовых и классических (эталонных) понятий. А редукция волновой функции связана с процессом отображения объектов особой онтологической природы (микрообъектов) на макроскопические условия их наблюдения и, вместе с тем, с соответствующим этому процессу «переводом» квантовой картины мира на язык классических понятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Ковальчук. Некоторые аспекты проблемы измерений в квантовой механике. — В кн.: Гносеологические аспекты измерений. Киев, «Наукова думка», 1968, с. 279—292.
2. Л. Г. Антипенко. Проблема физической реальности. М., «Наука», 1973.
3. А. Эйнштейн. Замечание о квантовой теории. Выступление в дискуссии на 5-м Сольвеевском конгрессе. — В кн.: Собрание научных трудов, т. 3. М., «Наука», 1966, с. 528—530.
4. В. А. Фок. Об интерпретации квантовой механики. — В кн.: Философские вопросы современной физики. М., Изд. АН СССР, 1959, с. 154—176.

5. И. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М., «Наука», 1964.
6. Н. Бор. Квант действия и описание природы. — В кн.: Избранные научные труды, т. II. М., «Наука», 1971, с. 56—61.
7. F. London, E. Brauer. La théorie de la observation en mécanique quantique. Hermann et Cie, Paris, 1939.
8. Д. И. Блохинцев. Принципиальные вопросы квантовой механики. М., «Наука», 1966.
9. Е. Вигнер. Этюды о симметрии. М., «Мир», 1971.
10. J. M. Jauch, Problem of measurement in quantum mechanics. — In: The physicist's conception of nature. Dordrecht — Boston, 1973, p. 684—686.
11. H. D. Zeh. On the interpretation of measurement in quantum theory. — Foundations of Physics, 1970, No. 1.
12. B. S. De Witt. The many-universes interpretations of quantum mechanics. — Proceedings of the International School of Physics «Enrico Fermi». Foundations of quantum mechanics. N. Y. — L. 1971.
13. В. Гейзенберг. Развитие интерпретации квантовой теории. — В кн.: Нильс Бор и развитие физики. М., ИЛ, 1958, с. 23—45.
14. Ю. М. Ломсадзе, А. Е. Ковальчук, И. Ю. Кривский. К проблеме понимания процесса измерения в квантовой теории. — В кн.: Методологические проблемы теории измерений. Киев, «Наукова думка», 1966, с. 94—111.
15. Ж. Л. Андраде э Силва, Ж. Лошак. Поля, частицы, кванты. М., «Наука», 1972.
16. C. F. von Weizsäcker. Classical and quantum descriptions. — In: The physicist's conception of nature. Dordrecht — Boston, 1973, p. 635—667.
17. Л. Г. Антипенко. О сущности редукции волновых пакетов в свете законов сохранения энергии и импульса. — В кн.: Философские вопросы квантовой физики. М., «Наука», 1970, с. 180—184.
18. P. Kard. The problem of determinism in quantum mechanics. — In: Abstracts of IV International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, 1971, pp. 243—244.
19. В. С. Степин, Л. М. Томильчик. Практическая природа познания и методологические проблемы современной физики. Минск, «Наука и техника», 1970.
20. И. А. Акчурин. Единство естественнонаучного знания. М., «Наука», 1974.

Поступила в редакцию 18 сентября 1978 г.

OBJEKTIIVSE JA SUBJEKTIIVSE VAHEKORRAST LAINEFUNKTSIOONI REDUKTSIOONI KÜSIMUSES

A. Mostepanenko, I. Nevvažai

Resümee

Artiklis analüüsitakse metodoloogilisest seisukohast mitmeid eri lähenemisviise lainefunktsiooni reduktsiooni probleemile. Probleemi lahendust tuleb otsida klassikaliste ja kvantmõistete vahekorra uurimise teel. Reduktsioon eeldab kvantkeele tõlkimist klassikalise kirjelduse keelde. Reduktsiooniprotsess seisneb kvantobjektide projitseerimises nende eksistentsi klassikalistele tingimustele.

CORRELATION OF THE OBJECTIVE AND SUBJECTIVE ELEMENTS IN THE CONCEPT OF REDUCTION OF WAVE FUNCTION

A. Mostepanenco, I. Nevvajay

Summary

This paper contains a methodological analysis of approaches to the problem of the reduction of the wave function. The solution of this problem can be found in the investigation of the correlation of the quantum and the classical notions. According to this idea reduction presupposes the translation of the quantum language into the classical mode of description. The process of reduction consists in the projection of the objects of quantum nature on the conditions of their classical existence.

ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ — ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОСТЬ

У. А. Раджабов

Вопрос о месте принципа соответствия в науке, его роли в развитии физического знания непосредственно связан со значительно более широкой методологической проблемой. Суть ее в выяснении взаимоотношения момента преемственности в развитии знания с моментом его радикальных перестроек, с далеко не тривиальным и малоисследованным вопросом о том, в какой мере можно говорить о кумулятивном характере знания. Определенная преемственность в развитии и углублении сменяющих друг друга уровней теоретического знания была отмечена еще Гегелем применительно к философским системам. Истинная система как высшее «должна, скорее, содержать внутри себя низшее» ([1], с. 13), т. е. предшествующую систему.

Поскольку идея соответствия сыграла немаловажную роль при развитии и интерпретации квантовомеханического формализма, может оказаться полезным исторический экскурс в генезис этого принципа.

Открытие Планком законов излучения абсолютно черного тела показало, как отмечал Н. Бор, что «классические теории физики являются идеализациями, которые допускают однозначное применение только в тех предельных случаях, когда все величины размерности действия велики по сравнению с квантом действия» ([2], с. 399—400).

С самого начала трудность состояла в том, как понять соотношение между квантовой и классической физикой. Закон излучения Планка явно шел вразрез с классической физикой, его формулирование требовало допущений, выходящих за рамки классической физики. С другой стороны, закон Планка первоначально был получен из интерполяции двух формул, одна из которых — формула Релея-Джинса — возникла на основе классических принципов. Следовательно, закон Планка не был полностью оторван от классической физики и давал прогнозы, в некоторых пределах совпадавшие с законами, существующими в обычной электродинамике. Однако такое асимптотическое поведение, казалось, не содержало в себе никаких намеков на дальнейшее развитие квантовой теории.

Введение Эйнштейном световых квантов, казалось, привело к возрождению корпускулярной теории света. Но поскольку формула для энергии квантов содержала понятие частоты, то о простом замещении волновой теории не могло быть и речи.

По выражению А. Петерсена, одного из сотрудников Н. Бора, «замечательным историческим совпадением оказалось то, что квант открыли почти одновременно с тем временем, когда были экспериментально подтверждены широкие характеристики строения атома. Основные затруднения, связанные со стабильностью атома Резерфорда, очень похожи на затруднения, вставшие перед учеными в связи с тепловым равновесием в излучении черного тела. С развитием квантовой теории стало ясно, по какому пути нужно идти» [3].

В формулировке своих постулатов Бор руководствовался теорией Планка и эмпирически установленными спектральными закономерностями. Его основной целью был не поиск объяснения или подтверждения этих постулатов, а проверка их объяснительной силы. В конце 1913 г. Н. Бор опубликовал работу «О строении атомов и молекул» ([4], с. 84), где была разработана квантовая теория спектров, объяснены спектры водородного и водородоподобных атомов. Здесь же была намечена та идея, которая впоследствии приняла окончательную форму в принципе соответствия и позволила включить этот круг вопросов в общую проблему квантовой теории теплового излучения.*

Принцип соответствия является одной из форм проявления преемственности в развитии знания. Он позволяет установить связь между теориями, находящимися на качественно различных этапах развития познания. Это можно проследить на истории развития оптики. В оптике корпускулярная и волновая теории были выдвинуты почти одновременно. Основателем волновой теории света является Гюйгенс, корпускулярной — Ньютон. Корпускулярная теория света хорошо гармонировала с геометрической оптикой и на первых порах служила хорошей теоретической основой для расчета существовавших тогда оптических систем. Подкрепленная авторитетом Ньютона, она казалась незыблемой. Но дальнейшее развитие оптических приборов привело к получению результатов, заставивших осознать необходимость развития

---

* По утверждению профессора Копенгагенского университета И. Витт-Хансена, Бор пришел к принципу соответствия, развив идею постепенной аппроксимации к истине, лежащую в основе определения истины у Лейбница: $A = B(a, b, c, \ldots)$ — предикат есть бесконечный ряд, содержащийся в субъекте; а также принципы аналогии и преемственности, сформулированные тоже Лейбницем (см. [5], с. 491—508, а также [9], с. 250—263, [10], с. 234—252, [11], с. 343—369, [12]).

теории. В поле зрения физиков попадают вопросы интерференции, диффракции, поляризации. Эти явления не только не объясняются корпускулярной теорией, но даже приходят в противоречие с ней, так как отрицают основной закон геометрической оптики: закон прямолинейного распространения света. Для объяснения явлений диффракции Гюйгенс и Френель развили теорию, основанную на представлении о световых волнах, образующихся во всепроникающей среде — эфире (волновую теорию). Волновая теория подтвердилась самыми точными экспериментами, но окончательно восторжествовала, только встав на прочную основу электромагнитной теории Максвелла, которая оставалась непоколебимой вплоть до начала XX в. С помощью электромагнитной теории было найдено строгое доказательство того, что геометрическая оптика является предельной формой волновой оптики. В том случае, когда длину световой волны можно считать бесконечно малой, основной закон волновой оптики — волновое уравнение — переходит в уравнение, определяющее путь светового луча, которое является формулировкой законов геометрической оптики. Вместе с тем выяснилось, в каких случаях с достаточной степенью точности можно пользоваться геометрическими, а, значит, и корпускулярными, представлениями при анализе световых явлений.

В первом приближении геометрическая оптика служит основным методом расчета большинства оптических систем. Но чтобы выяснить, например, пределы разрешающей способности этих приборов, нам нужно основываться на волновом характере распространения света. Электромагнитная волновая теория хорошо объясняет чисто оптические явления, но встречает трудности при объяснении процессов, связанных с поглощением и испусканием света. Созданная в начале XX в. квантовая теория света является обобщением волновой, соединяющим в себе как корпускулярные, так и волновые представления. В согласии с принципом соответствия, квантовая теория асимптотически переходит в электромагнитную. Подчеркнем, что электромагнитная теория при этом не была отброшена, хотя в основе ее и лежат совершенно иные положения.

На приведенном примере развития теории света мы видим, как при исследовании определенного круга явлений ученый сталкивается с необходимостью объяснить ряд наблюдений, которые не укладываются в рамках старой теории. Тогда построенная новая теория с необходимостью должна включить в себя старую теорию, если последняя имеет объективную основу. Причем важно видеть взаимосвязь любой новой и старой теории; они связаны некоторым числом характеристических параметров, которые имеют различные значения в старой и новой теории. Не случайно принцип соответствия был сформулирован в начале XX в. Этот период характеризовался коренной ломкой старых физических представлений. А принцип соответствия ярко проявляет себя именно в такие периоды, помогая раскрыть физическую сущность вновь введенных понятий.

Особенно наглядно этот процесс прослеживается на примере возникновения квантовой механики. Старые классические представления были не в состоянии объяснить устойчивость атомов и дискретность испускаемых ими спектров. Теория Бора привела к правильному объяснению спектральных закономерностей водорода. Распространение этой теории на многопериодические системы расширило ее сферу, но не пролило больше света на ее отношение к классической физике. Стимулом к продвижению в этой области стала знаменитая работа Эйнштейна «К квантовой теории излучения», вышедшая в 1916 г. ([6], с. 303). В этой работе Эйнштейн впервые показал, что квантовые постулаты Бора приводят к формуле излучения Планка, если предположить, что вероятность испускания и поглощения излучения соответствующей частоты определяется по аналогии с классической электродинамикой системы, совершающей гармонические колебания с тою же частотой. В этой же теории Эйнштейн впервые рассмотрел не только спонтанные, но и индуцированные переходы.

До этой работы вероятностные соображения не играли существенной роли в квантовой теории излучения. Теперь Эйнштейн ввел коэффициенты вероятности при переходе от одного стационарного состояния к другому. Это наводило на мысль о том, что помимо асимптотического совпадения есть более глубокая аналогия между старой и новой теорией. До этого совпадение в предельных переходах было сведено к частотам. Теперь оно распространилось и на интенсивность.

В 1918 г. идея внутренней формальной аналогии между старой и новой теорией натолкнула Н. Бора на формулировку принципа соответствия. В работе «О квантовой теории линейчатых спектров» говорится, что каждому из квантовомеханических переходных состояний может быть сопоставлен соответствующий компонент Фурье из классической механики, а в случае больших квантовых чисел природа света, излучаемого в процессе квантового перехода, его частота, интенсивность и полярность согласуются с этими же характеристиками света, излучаемого по классическим законам.

Такое предположение сразу превратило отношение соответствия в мощный эвристический принцип. Несмотря на глубокое различие квантового и классического механизмов излучения оно позволяло строить модель квантового механизма, опираясь на хорошо известный классический. Это стало возможным благодаря сделанному Бором новому шагу — представлению о структурном соответствии элементов механизма, которые в целом были глубоко противоположны друг другу. С помощью указанного структурного соответствия между спектром и движением электрона в «старой квантовой теории» было получено огромное количество результатов по решению конкретных задач, связанных с излучением света атомами. Заметим, что в 1918 г. Бор все еще не употреблял термина «принцип соответствия», называя структурное соответствие квантовой и классической моделей излучений «формальной аналогией» ([4], с. 505). Впервые термин «принцип соответствия» начал им применяться лишь в начале 20-х годов. В работах, относящихся к этому времени, Бор неоднократно возвращался к разъяснению его сущности, не забывая никогда обращать особое внимание на то, что структурная аналогия, зафиксированная в принципе соответствия, не означает какого-либо возврата к классическим идеям ([4], с. 392).

Глубокая интуиция Бора позволила ему предсказать на основании идеи соответствия, что будущая теория (теория самого Бора, нося полуклассический характер, была ее преддверием) должна предстать как рациональное обобщение классической. Дальнейшее развитие теории требовало устранения постулативности идеи Бора и объяснения широкого круга атомных явлений, в первую очередь теории атомных спектров. Попытки создать теорию на основе классических представлений окончились неудачей. Новая квантовая теория — квантовая механика — создавалась на основе радикального отхода от старых принципов.

Бор подчеркивал эвристические функции принципа соответствия как принципа, «выражающего стремление до предела использовать понятия классической теории», распространив их за рамки того фактического материала, на котором они сложились и развились.

Принцип соответствия, таким образом, следует рассматривать прежде всего как принцип развития нового знания на базе установленных ранее представлений ([7], с. 171). Развитие «старой» квантовой теории исчерпалось и завершилось после того, как Бор сформулировал и применил к процессам излучения света атомами принцип соответствия, а в 1921 г. объяснил периодический закон Менделеева ([8], с. 94).

Дальнейшее развитие квантовой механики исторически пошло по двум направлениям: матричной механики В. Гейзенберга, М. Борна, П. Йордана и П. А. М. Дирака и волновой механики Л. де Бройля и Э. Шредингера. Как писал Н. Бор, «рациональная квантовая механика Гейзенберга вводит формальный аппарат, в котором кинематические и динамические переменные классической механики заменяются абстрактными символами, подчиняющимися некоммутативной алгебре» ([2], с. 406). Гейзенберг отказался от использования величин, которые не наблюдаются в атомных явлениях (таких, как скорость движения и траектория электронов) и оперировал с величинами, непосредственно наблюдаемыми в эксперименте (частота, интенсивность и т. д.), предположив, что каждой классической величине должна соответствовать определенная квантовая величина. Найдя такие квантовые величины, Гейзенберг предположил, что между ними существуют такие же соотношения, как и для соответствующих им классических величин. Несмотря на отказ от понятия траектории частицы, основные уравнения механики в их гамильтоновой канонической форме были сохранены без изменений, а постоянная Планка вошла в перестановочные соотношения. Совокупность величин, поставленных в соответствие классическим величинам, оказалась матрицами. Для нахождения энергии нужно взять функцию Гамильтона, заменив в ней классические величины на квантовые. Так была создана механика Гейзенберга. Развивая идеи Гейзенберга, Дираку удалось установить соответствие между квантовой и классической механикой.

Другой подход в углублении теории Бора после матричной механики Гейзенберга связан с именем Луи де Бройля. Вначале казалось, что нет связи между этими теориями, так как основополагающие принципы теории де Бройля отличались от принципов, на которые опирался Гейзенберг. В отличие от Гейзенберга, который отказался от модельных представлений в теории микроявлений, де Бройль считал возможным использовать эти представления. Он установил, что двойственность волна-частица не ограничивается свойствами излучения, но неизбежна и при описании поведения материальных частиц. Эйнштейн приветствовал эту мысль, так как им уже была установлена глубоко лежащая аналогия между свойствами теплового излучения и свойствами газов в так называемом вырожденном состоянии ([6], с. 481, 489, 503).

Шредингер, используя корпускулярно-волновой дуализм де Бройля и тот факт, что задачи классической механики и геометрической оптики сводятся к одним и тем же математическим уравнениям (как уже отмечалось, геометрическая оптика является частным случаем волновой), обобщил уравнения классической механики ([13], с. 37). Он получил уравнение, описывающее поведение микрочастиц, — основное уравнение квантовой механики. Путь к установлению вида волнового уравнения был ему указан формальной аналогией между механическими и оптическими проблемами, на которую впервые обратил внимание Гамильтон. Решая уравнение Шредингера для случая осциллятора, можно определить вид волновых функций и возможные значения энергии. Теории Гейзенберга и Шредингера привели к одинаковым результатам. В 1926 г. была доказана полная эквивалентность обоих подходов. «Матричная механика» Гейзенберга слилась с волновой механикой Шредингера, и возникла квантовая механика.

Кроме объяснения эффектов Штарка и Зеемана ([4], с. 266, 268), расшифровки спектральных линий, теории дисперсии и т. д., принцип соответствия в рамках старой квантовой теории играл еще одну немаловажную роль. Дело в том, что, согласно квантовым представлениям, частоты спектральных линий определялись с помощью правила Ридберга—Ритца, по которому они представляли собой разности термов, соответствующих энергетическим уровням атома в стационарных состояниях. Но эмпирические данные показали, что в реальных спектрах имеются далеко не все линии, разрешенные правилом Ридберга—Ритца. Средством для объяснения такого «произвола со стороны природы» оказался опять-таки принцип соответствия, с помощью которого Бор обосновывал свои «правила отбора», запрещающие некоторые переходы, разрешенные одним только правилом Ридберга—Ритца, т. е. осуществляющие выбор среди многих возможностей, предоставляемых этим правилом ([4], с. 341, 415). Благодаря этому, как указывал Бор, квантовая теория снимает налет таинственности с капризности комбинационного принципа. Квантовые постулаты представляли собой новые специфические правила соединения классических понятий как между собой, так и с новыми, квантовыми понятиями. Таким же правилом была и структурная аналогия между спектром и движением, составляющая существенный момент развитого принципа соответствия. Что же касается соответствия в форме асимптотического совпадения предельного перехода, то оно как раз и служило для обоснования квантовых постулатов, демонстрируя их теоретическое оправдание в длинноволновой области. То, что квантовые постулаты обосновывались в конечном счете ссылкой на классическую теорию, ярко демонстрирует диалектическую противоречивость ([14], с. 123) преемственного развития теоретических систем. Принцип соответствия, связывающий между собой элементы концептуальной структуры классической и квантовой теоретических систем, сам является при этом, как указывал Бор, квантовотеоретическим законом ([4], с. 524).

Имея в виду все это, можно понять всю глубину одного из любимых утверждений Бора, согласно которому квантовая теория представляет собой «рациональное обобщение» классической электродинамики ([4], с. 287; см. также [15], с. 47). Как указывал Ю. В. Сачков, «идея обобщения лежит в основе синтезирующих тенденций в развитии современного естествознания, его теоретических концепций», и «рассмотрение процесса развития теоретических представлений как процесса выработки более обобщенных систем знаний, имеет прямое отношение... к принципу соответствия» ([16], с. 428, 445). Принцип соответствия, в котором, по словам Бора, выражена тенденция использовать при развитии квантовой теории каждую черту классической теории ([2], с. 15), позволяет конкретно рассмотреть теоретический механизм процесса обобщения.

Принцип соответствия как бы перекидывал мост от привычной классической физики к квантовой, но это не означало, что их можно примирить. Теории непримиримы, поскольку в них предполагается совершенно разный характер излучения. Как писал В. Паули, «Бор со всей определенностью указал на то, что принцип соответствия предназначен отнюдь не для того, чтобы стирать различие между классической механикой и квантовой теорией. Наоборот, этот принцип был введен для того, чтобы наметить путь общего перехода с позиций классической механики на логически непротиворечивую точку зрения квантовой теории. Фактически физическое содержание принципа соответствия — признание того факта, что при описании любой микроскопической теории необходимо пользоваться терминологией, применяемой в макромире» ([17], с. 223).

Несмотря на то, что принцип соответствия оказался весьма эффективным методологическим средством развития старой квантовой теории, последняя все же не обладала достаточной внутренней согласованностью и собственным относительно самостоятельным математическим аппаратом, с помощью которого можно было бы дедуктивно развертывать решения конкретных физических задач, руководствуясь единым для всех них подходом. Для каждой такой задачи приходилось сначала строить специфическую классическую модель, опираясь на которую (под руководством принципа соответствия) можно было перейти к квантовым формулам. Решение одной задачи не давало практически ничего для решения другой — ее приходилось решать заново.

С оформлением нерелятивистской квантовой механики в ее современном виде потребность в использовании принципа соответствия как эвристического приема для решения конкретных задач перестала существовать. Но это не означает, что принцип соответствия был отброшен. Он был «встроен» в фундаментальные уравнения новой квантовой теории ([18], с. 118). Таким образом, его роль перестала быть явной, но не перестала быть главной. Уйдя в «подтекст» теории, принцип соответствия, выполняясь теперь автоматически, продолжает существовать как конкретный механизм связи квантовой и классической механики, взятых в их интенсивно завершенной форме.

Принцип соответствия выступает необходимым условием и при создании релятивистских теорий. Нелинейные теории поля создаются такими, чтобы в случае слабых полей и увеличения радиуса действия уравнения теории переходили в уравнения линейных теорий, а все варианты квантованного пространства и времени в микромире учитывают требования, вытекающие из принципа соответствия. Таковы концепции Амбарцумяна и Иваненко, Марха, Снайдера, Кадышевского, единой теории праматерии В. Гейзенберга, нелокальной теории А. А. Маркова, Дж. Уилвера и т. д. Есть основания предполагать, что квантовая хромодинамика должна объяснить кварковую модель строения материи, ибо она обладает свойством асимптотической свободы, т. е. свойством, аналогичным предельному переходу принципа соответствия ([25], с. 147—149).

Оценивая роль, которую сыграл принцип соответствия в современной физике, М. Джеммер пишет, что исключительным случаем в физике является тот факт, чтобы теория так много была обязана единственному принципу, как квантовая механика обязана принципу соответствия.

Сколь большое значение уделяли физики принципу соответствия, видно из того, что в 1932 г. традиционный доклад при получении Нобелевской премии В. Гейзенберг «Развитие квантовой механики» начал словами: «Квантовая механика, о которой я здесь буду докладывать, по своей внешней форме возникла из попытки построить стройную математическую схему путем уточнения высказывания боровского принципа соответствия» ([19], с. 15). Однако надо заметить, что большие успехи, достигнутые с помощью принципа соответствия, привели последователей Бора к некоторому преувеличению его значимости ([9], с. 263). А. Зоммерфельд говорил, например о его «волшебной силе»: «Принцип соответствия стал путеводной нитью для всех новых открытий Бора и его школы»... и тут же добавлял: «Несмотря на это, я не могу считать его окончательно удовлетворительным уже из-за того, что в нем смешаны квантовая и классическая точки зрения. Мне хотелось бы увидеть принцип соответствия как особо важное следствие будущей дополнительной квантовой теории, а не как ее основание» ([20], с. 1049).

Для физиков, однако, принцип соответствия все же оставался эмпирическим. Выявление принципа соответствия как общеметодологического принципа развития научного знания стало возможным благодаря анализу истории науки, в особенности формирования современных физических теорий, на основе философских принципов диалектического материализма.

Первым серьезным философским исследованием об основных этапах эволюции принципа соответствия и конкретном механизме его использования при построении квантовой механики была известная книга И. В. Кузнецова «Принцип соответствия в современной физике и его философское значение», написанная 30 лет назад. На основе анализа развития новых теорий и установления форм преемственности, взаимосвязи теорий И. В. Кузнецов дал классическое определение принципа соответствия в общем виде. С философской точки зрения принцип соответствия свидетельствует о том, что физические теории не беспорядочно сменяются, полностью отрицая друг друга, а закономерно развиваются, опираясь одна на другую. В подобной интерпретации принцип соответствия является естественнонаучным подтверждением и конкретизацией для определенной области знания диалектико-материалистического учения об относительной и абсолютной истине ([20], с. 170).

При рассмотрении роли принципа соответствия в функционировании научного знания следует отметить следующие три аспекта.

Во-первых, принцип соответствия используется на начальном этапе построения новой научной теории, где вскрывается взаимосвязь строящейся теории и концептуального аппарата, полученного в наследство от предыдущего этапа развития науки. На этом этапе принцип соответствия выполняет эвристическую функцию, помогая строить новую теорию на основе старой. Он служит дополнительным, внеэмпирическим аргументом, обосновывающим истинность новой теории. При этом раскрывается единство логического и исторического в эволюции научно-теоретического знания. Специфика процесса познания такова, что каждая исторически последующая теория после того, как она сформировалась, рассматривает предыдущую, т. е. ту, из которой она выросла, как свое логическое следствие, как одну из своих сторон. Другими словами, исторически первый этап познания оказывается логически вторым, и наоборот, исторически второй — логически первым. Эти отношения между старой и новой теориями были логически объяснены еще Гегелем и Марксом.

Во-вторых, принцип соответствия выступает в своей логической функции, употребляется для объяснения органической взаимосвязи между уже существующими, сформулированными теориями — старой и новой, воссоздавая промежуточные логические связки между ними. Наконец, в-третьих, принцип соответствия можно рассматривать как некий эксплицирующий метод, применяемый к систематизации уже построенной неформализованной теории. В этом плане он в некотором роде созвучен с аксиоматическим методом построения теории, которая возможна лишь на базе уже существующей теории (как, например, были аксиоматизированы геометрия Эвклида Гильбертом или «наивная» теория множеств Кантора в работах Цермело, Геделя и др.).

Принцип соответствия в более общей символической форме может быть эксплицирован и следующим образом. Пусть в ходе развития физики теория T, интерпретируемая на множестве объектов M, сменилась теорией T_1, справедливой в более широкой области объектов M_1, включающей M в качестве своего истинного подмножества. В таком случае T_1 не исключает T, но переходит в T для множества M. То есть теоретический синтез охватывает не только вновь накопленный материал науки, но и все положительное содержание прежних представлений, теорий и понятий, которые были подвергнуты ломке в результате новых открытий. При этом, во-первых, очевидно, что «включение» «старой» теории в структуру новой зависит от характера сопоставляемых теорий, их соответствия действительности, истинности, научности. Во-вторых, «вхождение» одной теоретической системы в другую в качестве предельного случая не означает ее абсолютной в смысле вечной, неизменной в будущем истинности.

Само название «принцип соответствия» предполагает наличие по крайней мере двух теорий (математических, физических и др.), между которыми устанавливается определенное соответствие. Однако принцип соответствия может успешно «работать» только в тех случаях, когда, во-первых, между объектами рассматриваемых теорий (или теорией и гипотезой) существует некая структурная, материальная общность. Другими словами, соответствие устанавливается между такими теориями, у которых объекты изучения выступают как система и подсистема. Во-вторых, соответствие имеет место между теориями, которые изучают один и тот же объект с разной степенью глубины на различных уровнях сложности. Если при этом первая теория (T_1) «создает» свой объект, отвлекаясь от определенных связей (пренебрегая ими), то вторая теория (T_2), которая обладает большей общностью и глубиной, должна включать эти связи как объяснимые с новой точки зрения. В таком случае между T_1 и T_2 существует соответствие определенных параметров.

Если, соответственно, между объектами сравниваемых теорий, например T_3 и T_4, нет и принципиально не может быть сходных черт, признаков, то к этим теоретическим построениям рассматриваемый принцип не применим. Иначе говоря, принцип соответствия применим только там, где существует отношение типа: система—подсистема; уровень сложности 1-й степени — уровень 2-й степени (соответственно n и $n+1$ степени).

На наш взгляд, для выяснения методологического содержания принципа соответствия важны две проблемы:

1) Исчерпывается ли содержание принципа соответствия отношением предельного перехода между математическими аппаратами новой и старой теорий?

2) Исчерпывает ли принцип соответствия — как бы его ни понимать — отношение преемственности между теориями, последовательно сменяющими друг друга в ходе исторического движения?

Вообще говоря, решение как первой, так и второй сформулированных выше проблем, в первую очередь зависит от определений принципа соответствия, отношения предельного перехода и отношения преемственности. Известно, что определения содержат некоторую долю конвенциональности. Но, тем не менее, от них все же следует требовать, чтобы они были экспликациями действительного положения вещей. В данном случае это означает, что определение принципа соответствия должно учитывать реальную историю его формирования и функционирования в ходе развития старой квантовой теории. Имея это в виду, можно предложить следующее решение двух поставленных выше проблем о соотношении предельного перехода, принципа соответствия и отношения преемственности между теориями.

1) **Отношение предельного перехода между отдельными элементами математических аппаратов старой и новой теорий является одной из компонент принципа соответствия — его формально-математической компонентой. Другой (содержательной) компонентой принципа соответствия является отношение качественного различия между предметными содержаниями новой и старой теории.** Иными словами, сфера действия отношения предельного перехода ограничивается математическим аппаратом теории.

Такое определение принципа соответствия согласуется с реальным содержанием взглядов Бора на эту проблему. Как показал в своих исследованиях один из учеников Бора А. Петерсен, у Бора можно выделить следующие четыре аспекта идеи соответствия: а) постулат относительно **асимптотического совпадения предсказаний** старой квантовой теории и классической теории излучения; б) постулат относительно **аналогии структурного сходства** между классической теорией Максвелла-Лоренца и квантовой теорией излучения; в) имеющуюся в трудах Гейзенберга, Борна и Иордана идею о том, что квантовая теория приобретает форму **обобщенной классической механики** в том виде, который придал ей Гамильтон; г) идею рационального обобщения и **последовательной аппроксимации** [21, 22]. С нашей точки зрения аспекты б) и в) могут быть объединены и с учетом часто повторявшегося Бором высказывания о коренном различии предметного содержания классической и квантовой теории ([4], с. 253, 493) представлены как вторая компонента принципа соответствия в нашем понимании. Аспект а) — это отношение предельного перехода. Что же касается аспекта г), то он относится уже к философской трактовке принципа соответствия в русле идеи обобщения.

2) **Отношение преемственности является более общим отношением по сравнению с принципом соответствия, которое представляет собой лишь одну из его форм.**

Предлагавшиеся попытки модификации трактовки принципа соответствия чаще всего вызваны к жизни чрезмерно узким его пониманием, отождествляющим его с отношением предельного перехода между математическими аппаратами новой и старой теории. Можно предположить, что двухаспектная трактовка принципа соответствия, сочетающая в себе момент **непрерывного количественного предельного перехода между некоторыми элементами математических аппаратов теорий на формальном уровне** и момент качественного отличия их предметного содержания сможет способствовать более глубокому осмыслению его методологической природы.

Критика преемственности в развитии научного знания и отрицание принципа соответствия как одного из ее специфических воплощений, встречающаяся в работах Куна, Фейерабенда и др., не учитывает, на наш взгляд, того обстоятельства, что принцип соответствия вовсе не отрицает момента существенных концептуальных изменений в развитии науки и не сводится к плоскому кумулятивизму. Новая и старая теория, связанные отношением соответствия, **радикально отличаются друг от друга по своему содержанию.** Тем не менее, это не препятствует существованию предельного перехода в рамках математических аппаратов этих теорий. То, что термины наблюдения являются теоретически нагруженными, не препятствует также возможности сравнения их смысла, поскольку этот смысл не сводится к «онтологическому» предметному содержанию. У него имеется операциональная компонента, которая хотя также «теоретически нагружена», но нагружена одинаково для всех физических теорий. В этой связи можно напомнить известное утверждение Бора о необходимости описывать опытные данные в любой области физики, какой бы неклассической она ни была, с помощью классических понятий. Эти понятия и создают условия для сопоставления экспериментальных данных у теорий с различным предметным содержанием.

* *
*

В ходе исторического развития физической теории принцип соответствия сыграл важную эвристическую роль. Однако, помимо своей эвристической функции, он выполняет и важную логическую функцию, вскрывая взаимосвязь между уже существующими, сформулированными теориями. Особенностью процесса развития науки является то, что пройденные в ходе этого развития этапы не перестают существовать, а продолжают играть свою роль в процессе познания. Так, возникновение теории относительности не привело к прекращению существования ньютоновской механики и электродинамики Максвелла—Лоренца, точно так же, как возникновение релятивистской квантовой механики не ликвидировало нерелятивистской теории, обобщением которой она является. В этом раскрывается известное положение марксистско-ленинской философии о единстве исторического и логического в эволюции знания.

Поскольку принцип соответствия относится к межтеоретическим связям, то проблема выяснения его места в структуре современной физики не может быть поставлена и решена на материале какой-либо одной из физических теорий. Его можно обнаружить только сопоставляя по крайней мере две теоретические системы. Наиболее полная характеристика роли, которую принцип соответствия играет в структуре современной физики, должна быть выяснена путем анализа всей системы физического знания, физики в целом. В этом плане принцип соответствия выступает как один из факторов, способствующих достижению единства физической картины мира.

С самого начала своего существования как научного систематического исследования природы, естествознание всегда стремилось связать воедино накопленные факты, отразить общий характер природы, ее целостность, взаимосвязанность, ее постоянное движение и никогда не прекращающуюся изменчивость. Вся история естествознания была историей попыток создания единой картины мира. Эта особенность естествознания находит наиболее адекватное выражение в физике, которая «...по своему основному духу, содержанию и методам исследования была и, видимо, останется в будущем своего рода управляющим центром наук о природе» ([14], с. 6).

Поскольку каждая фундаментальная физическая теория типа квантовой механики или теории относительности обладает своей специфической картиной мира, то проблема единства физической картины мира тесно связана с проблемой единства физики как науки. В этом плане принцип соответствия оказывается обеспечивающим связь между отдельными фундаментальными физическими теориями и, тем самым, между отдельными физическими картинами мира, сводя их в единую картину.

Конкретное место принципа соответствия в структуре современной физики можно выяснить только тогда, когда будет построена конкретная модель связи между фундаментальными физическими теориями, образующими в совокупности физическую науку на данном этапе ее развития. Такие модели уже разработаны. Рассмотрим две таких модели — модель А. Л. Зельманова ([23], с. 238) и модель М. Штраусса [24]. Они интересны тем, что не ограничиваются простой констатацией положения дел на сегодняшний день, а выдвигают определенные прогнозы относительно будущих этапов развития физики, которые существенно опираются на принцип соответствия.

Исходным элементом (точнее, подсистемой) «куба Зельманова» является ньютоновская механика (НМ), в структуре которой нет фундаментальных констант. С ней связаны отношением предельного перехода три теоретических подсистемы, каждая из которых характеризуется наличием в ее структуре одной фундаментальной константы: ньютоновская теория тяготения (НТТ), содержащая гравитационную постоянную γ; специальная теория относительности (СТО), характеризующаяся наличием предельной скорости распространения взаимодействий — скоростью света c; нерелятивистская квантовая механика (НКМ), в состав которой входит постоянная Планка h, фиксирующая минимально допустимое значение действия. Обобщение ньютоновской теории тяготения и специальной теории относительности приводит к общей теории относительности (ОТО), представляющей собой релятивистскую теорию тяготения и характеризующуюся наличием в ее структуре двух фундаментальных констант — скорости света c и гравитационной постоянной γ. Аналогично, обобщение специальной теории относительности и нерелятивистской квантовой механики дает релятивистскую квантовую механику (РКМ), также содержащую две фундаментальных константы — скорость света c и постоянную Планка h.

Указанные подсистемы в настоящее время уже достаточно развиты, а некоторые представляют собой замкнутые теоретические системы. Отличительной особенностью модели А. Л. Зельманова является предположение, что будущая единая физическая теория (ЕФТ) не требует введения еще одной фундаментальной константы — элементарной длины l. Эта теория, с одной стороны, должна быть обобщением общей теории относительности, а с другой — релятивистской квантовой механики, так что в ее состав будут входить три элементарных константы — h, c и γ.

Переход от теорий большей степени общности к теориям меньшей степени общности совершается путем предельного перехода. Таким образом, отношение предельного перехода, являющееся одной из компонент принципа соответствия, выступает в данной модели в роли системообразующего отношения, которое объединяет указанные теоретические подсистемы в единую систему физического знания. Вторая компонента принципа соответствия — отношение качественного различия между предметными содержаниями теорий, связанных отношением предельного перехода, явно не изображена в модели А. Л. Зельманова. Однако она содержится там неявно — при желании можно дополнить «куб Зельманова» изображениями соответствующих отношений.

Для «куба Зельманова» специфично также выделение ньютоновской теории тяготения в отдельную теоретическую подсистему, отличную от подсистемы ньютоновской механики. Этот пункт заслуживает специального обсуждения, так как, на первый взгляд, между ньютоновской теорией тяготения и ньютоновской механикой нельзя установить отношение типа соответствия, поскольку НТТ выглядит просто как часть НМ, конкретизирующая характер сил, действующих между движущимися телами. Однако более внимательное рассмотрение позволяет подвести отношение между этими теориями под принцип соответствия, если явно иметь в виду вторую компоненту этого принципа.

Дело в том, что ньютоновская механика не специфирует конкретной природы сил, являющихся причиной изменения состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Масса в ньютоновской механике выступает как мера инертности тел, их сопротивления действию сил. В ньютоновской теории тяготения масса играет роль «гравитационного заряда», генерирующего силы тяготения, т. е. является источником гравитационного поля вне зависимости от конкретного механизма гравитационного взаимодействия — будет ли оно близкодействующим или дальнодействующим. Это соответствует хорошо известному различию между инертной и тяготеющей массами, которые качественно различны по своему концептуальному содержанию. Факт их численного совпадения можно трактовать в плане расширенной аналогии с численным совпадением частот, вычисленных согласно классической и квантовой моделям излучения в старой квантовой теории для малых частот, т. е. как соответствие, имеющее значение не только в предельной области, но для всех значений масс. Тогда ньютоновская механика в модели А. Л. Зельманова будет представлять собой теорию движения тел без учета сил тяготения, а ньютоновская теория тяготения — теорию их движения с учетом сил тяготения. НТТ, таким образом, будет содержать в себе НМ как частный случай, могущий быть полученным из НТТ формальным устремлением гравитационной постоянной к нулю. Конечно, такие рассуждения могут показаться довольно искусственными, но, несмотря на это, они весьма показательны, демонстрируя неожиданные скрытые возможности принципа соответствия.

Отметим также, что переходы от гипотетической единой физической теории к релятивистской квантовой механике и к общей теории относительности требуют в модели А. Л. Зельманова предельного перехода по двум фундаментальным константам. Это показывает повышение уровня обобщения по сравнению с обобщениями «первого порядка» и позволяет ввести количественно определенное представление об уровнях обобщения, характеризующихся числом фундаментальных констант, входящих в состав теории.

Модель М. Штраусса [24] также использует в качестве системообразующей связи отношение предельного перехода по фундаментальным константам, но способ ее построения несколько отличается от зельмановского.

М. Штраусс начинает тоже с классической механики, в состав которой не входят никакие фундаментальные константы. Среди существующих в настоящее время теорий с фундаментальными константами он выделяет четыре: (нерелятивистскую) квантовую механику, которую он называет h-теорией, (специальную) теорию относительности (c-теорию), квантовую теорию поля (h—c-теорию) и (эйнштейновскую) теорию гравитации (γ—c-теорию). Дальнейшее обобщение теорий М. Штраусс, в отличие от А. Л. Зельманова, видит в направлении учета новой фундаментальной константы — универсальной длины. В дополнение к этому, М. Штраусс полагает, что h—c-теория (квантовая теория поля) и γ—c-теория (общая теория относительности) потребуют для своего обобщения разных фундаментальных длин, т. е. будут обобщаться самостоятельно и независимо друг от друга. Обобщение квантовой теории поля в $h—c—l_1$-теорию, которую М. Штраусс рассматривает как теорию элементарных частиц без учета гравитации, по его мысли, потребует введения элементарной длины $l_1 \approx 10^{-13}$ см. В качестве конкретного примера такого рода обобщения Штраусс рассматривает нелинейную спинорную теорию поля Гейзенберга. Обобщение же эйнштейновской релятивистской теории тяготения в $\gamma—c—l_2$-теорию, которая представляет собой обобщенную квантовую теорию поля, включающую также гравитационное поле, будет, по мысли Штраусса, связано с введением другой универсальной константы размерности длины — планковской длины $l_2 \approx 10^{-33}$ см, с помощью которой будет квантоваться пространственно-временная метрика. Это в соединении с обобщением $h—c—l_1$-теории приведет, наконец, к возникновению единой физической $h—\gamma—c—l_1—l_2$-теории. Две длины — l_1 и l_2 — существенно различны по физической природе, — считает М. Штраусс, — так что окончательное предвидимое в настоящее время обобщение физики в единую $h—\gamma—c—l_1—l_2$-теорию будет содержать две фундаментальных длины, а всего, таким образом, пять фундаментальных постоянных.

В отличие от «куба Зельманова», М. Штраусс, во-первых, не выделяет ньютоновской теории тяготения в самостоятельную теоретическую подсистему, так что гравитационная постоянная γ появляется у него в результате обобщения только специальной теории относительности, и, если использовать геометрические образы, вместо «куба» модель Штраусса имеет вид двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Во-вторых, переходы от теорий с двумя фундаментальными постоянными — общей теории относительности ($\gamma—c$-теории) и релятивистской квантовой механики ($h—c$-теории) к единой физической теории, опосредованы каждый в модели Штраусса промежуточными теоретическими системами — $\gamma—c—l_2$- и $h—c—l_1$-теорией, в результате чего единая физическая теория ($h—\gamma—c—l_1—l_2$-теория) содержит у него четыре фундаментальных размерности, но пять фундаментальных констант за счет наличия двух постоянных размерности длины. Таким образом, модели А. Л. Зельманова и М. Штраусса предлагают существенно различные методологические стратегии обобщения существующих теорий с двумя фундаментальными постоянными. Вопрос о преимуществах какой-либо одной из этих стратегий достаточно сложен, и здесь затрагиваться не будет. Примечательно, однако, что обе этих стратегии основаны на принципе соответствия, который выступает в роли механизма, обеспечивающего объединение отдельных теоретических систем в единую систему физического знания. Это единство обнаруживается как в динамическом аспекте, в плане которого принцип соответствия выполняет эвристическую функцию, обеспечивая единый механизм развития физического знания на всех его этапах, так и в статическом аспекте, в плане которого принцип соответствия оказывается основной системообразующей связью между теориями, демонстрируя свою логическую функцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Гегель. Наука логики. Т. 3, М., 1972.
2. Н. Бор. Избранные научные труды. Т. 2, М., 1971.
3. A. Petersen. On the philosophical significance of the correspondence argument. — In: Boston Studies in the Philosophy of Science. Vol. V. Dordrecht, 1969, pp. 242—252.
4. Н. Бор. Избранные научные труды. Т. 1, М., 1970.
5. L. Witt-Hansen. The Impact of Niels Bohr's Thought on Danish Philosophy in Contemporary Scandinavia. London, 1972, p. 491—508.
6. А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. III, М., 1966.
7. С. Б. Крымский. Научное знание и принципы его трансформации. Киев, 1974.
8. Е. Л. Фейнберг. Научное творчество Н. Бора. — В кн.: Нильс Бор. Жизнь и творчество. М., 1967.
9. Е. М. Кляус, У. И. Франкфурт, А. М. Френк. Нильс Бор. М., 1977.
10. У. А. Раджабов. О взаимосвязи принципов дополнительности и соответствия. — В кн.: Принцип дополнительности и материалистическая диалектика. М., 1977.
11. А. Ф. Зотов. Принцип соответствия. — В кн.: Методологические принципы физики. М., 1975, с. 343—384.
12. И. С. Алексеев. Соответствие и дополнительность. — Уч. записки Тартуского гос. ун-та, вып. 417. Методологические вопросы физики III, Тарту, 1977, с. 91—98.
13. Э. Шредингер. Основная идея волновой механики. — В кн.: Современная квантовая механика. М.—Л., 1934.
14. М. Э. Омельяновский. Диалектика в современной физике. М., 1973.
15. K. Meyer-Abich. Korrespondenz, Individualität und Komplementarität. Wiesbaden, 1965.
16. Ю. В. Сачков. Процессы обобщения в синтезе знаний. — В кн.: Синтез научного знания. М., 1973.
17. В. Паули. Физические очерки. М., 1975.
18. M. Jammer. The Conceptual Development of the Quantum Mechanics. N.-Y., Toronto, London, 1966.
19. Современная квантовая механика (Три нобелевских доклада), М.—Л., 1934.
20. И. В. Кузнецов. Избранные труды по методологии физики. М., 1975.
21. A. Petersen. Quantum Physics and the Philosophical Tradition. N.-Y., 1968.
22. A. Petersen. The Philosophy of Niels Bohr. — «Bulletin of the Atomic Scientist», 1963, Vol. XIX, No. 7, pp. 8—14.
23. А. Л. Зельманов. О бесконечности материального мира. — В кн.: Диалектика в науках о неживой природе. М., 1964.
24. M. Strauss. Entwicklungsgesetze der Physik. D. Zs. f. Philos., 1967, **15**, H. 2, 217—222.

Поступила в редакцию 23 мая 1978 г.

VASTAVUSE PRINTSIIBI AJALUGU JA TÄNAPÄEV

U. Radžabov

Resümee

N. Bohri ja tema õpilaste poolt aastatel 1913—1926 formuleeritud vastavuse printsiip väljendab teaduse arengu järjepidevuse üht külge. Ajalooliselt seostub ta Leibnizi ideedega, Hegeli filosoofilise süsteemiga ja Marxi õpetusega. Algul nähti selle printsiibi sisu ainult piirprotsessis, mis viib uuelt teoorialt tagasi vanale teooriale. Ent piirprotsess ei väljenda adekvaatselt mõlema teooria vahekorda ja tema heuristilised võimalused on piiratud. Artiklis käsitletakse vastavuse printsiipi laiemalt, ja nimelt kahe aspekti seisukohalt. Matemaatilise formalismi tasemel seisneb selle mõte tõesti teooriate mõningaid elemente ühendavas piirprotsessis. Ent sisulisel tasemel arvestab ta teooriate kvalitatiivset erinevust. Niisugune käsitlus aitab sügavamalt mõtestada vastavuse printsiibi kui metodoloogilise printsiibi olemust ja võimaldab siitkaudu selgitada selle osa füüsikalise teooria struktuuris ja uute fundamentaalsete teooriate loomisel.

PRINCIPE DE LA CORRESPONDANCE: HISTOIRE ET TEMPS MODERNES

Ou. Radjabov

Résumé

Le principe de la correspondance élaboré aux années 1913—1926 par N. Bohr et ses élèves comme une des formes de manifestation de la succession dans le développement des sciences, remonte aux idées de G. W. Leibniz, système philosophique de G. W. F. Hegel, doctrine de K. Marx. La formulation originale de ce principe comme celle du passage limite ne possédait que des possibilités heuristiques limitées et ne présentait pas une réflection assez adéquate du rapport réciproque entre l'ancienne et nouvelle théories.

La présente interprétation «à deux aspects» du principe de la correspondance qui réunit en soi le moment du passage quantitatif continu limite entre certains éléments des appareils mathématiques des théories au niveau formel et le moment d'une différence qualitative de leur contenu objectif, cette interprétation peut contribuer à saisir d'une manière plus profonde le sens de la nature méthodologique du principe.. Dans l'article une tentative est faite de trouver la place du principe de la correspondance dans la structure de la théorie physique et son rôle dans la mise au point des théories fondamentales.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 520. Теория относительности и квантовая теория. **Методологические вопросы физики IV.** На русском языке. Резюме на эстонском, немецком и английском языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли 18. Ответственный редактор П. Кард. Корректоры В. Логинова, Л. Отсмаа, Л. Кивимяги. Сдано в набор 26. 03. 1979. Подписано к печати 28. 01. 1980. Бумага печатная № 1 $60 \times 90^{1}/_{16}$. Печ. листов 7,0. Учетно-издат. листов 6,36. Тираж 500. МВ-01044. Зак. № 1195. Типография им. Х. Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли 17/19, I.

Цена 95 коп.

2 — 3

УДК 531.18

К обоснованию понятия массы. К а р д П. Г. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 3—15.

Для обоснования понятия массы света и общего закона сохранения массы предлагается метод, основанный на применении закона сохранения импульса к процессу испускания телом направленного светового потока. Кроме закона сохранения импульса, теоретическими предпосылками являются только принцип относительности, параллельность импульса скорости и формула преобразования скорости. Исходными являются четыре уравнения: два уравнения, выражающие сохранение импульса в двух инерциальных системах — в системе начального покоя тела и в произвольной другой системе — и формулы преобразования двух скоростей — скорости тела после испускания света и скорости испущенного света. Метод применим как в нерелятивистской, так и в релятивистской теории. В первом случае названная система уравнений приводит к выводу, что масса тела после испускания света меньше начальной массы на величину, равную импульсу света, деленному на его скорость. Эта величина инвариантна и ее естественно толковать как массу света, чем гарантируется и сохранение массы. Аналогичный результат получается и в релятивистской теории, где вдобавок из той же системы уравнений вытекает зависимость массы тела от скорости, а масса света оказывается неинвариантной. Далее выводятся общие релятивистские формулы преобразования массы и импульса. На их основе получается общий закон сохранения массы. В заключение показано, что масса черного излучения, заключенного в полости тела, является в системе покоя этого тела частью его массы покоя.

Библ. 6 назв. Рез. эст., нем.

УДК 531.18

Относительность массы покоя. К а р д П. Г. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 16—23.

Масса покоя совокупности независимых или слабо связанных объектов может быть определена или как сумма масс покоя отдельных объектов, или как масса всей совокупности в системе центра масс. Если совокупность состоит более чем из двух объектов, то можно также, разделив совокупность произвольно на подсовокупности, понимать под массой покоя целого сумму масс покоя частей. Таким образом, масса покоя совокупности имеет много различных значений, в чем выражается неаддитивность этой величины. Поскольку многозначность массы покоя объективно отражает структуру совокупности, то ее следует понимать как относительную величину — ее значение зависит от способа разбиения совокупности на части. Отсюда следует, что массу покоя нельзя считать преимущественной выразительницей реальности объекта. Ее инвариантность не имеет в вопросе о реальности никакого решающего значения. Наоборот, независимо от инвариантности, реальность связывается с сохраняемостью. Величинами, выражающими реальность объекта или совокупности объектов, следует считать сохраняющиеся (хотя бы и неинвариантные) величины, в первую очередь массу и импульс.

Библ. 1 назв. Рез. эст., нем.

УДК 530.1:530.12:531.51

О единой геометрической формулировке релятивистской и нерелятивистской теорий гравитации. Коппель А. А. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 24—53.

Дана компактная формулировка единых исходных положений, образующих математическую основу как релятивистской, так и нерелятивистской теории гравитации, причем последняя понимается как общий возможный предел ОТО при $c \to \infty$. Обе эти теории заданы в свободно падающем репере. Обсужден конкретный механизм перехода к пределу $c \to \infty$. Выдвинуты основные моменты, позволяющие говорить о едином и цельном геометрическом подходе к ОТО и ее нерелятивистским пределам. Применен математический аппарат («свободный от координат язык» тензоров и внешних форм) книги Мизнера, Торна, Уилера «Гравитация» (т. I—III, изд. «Мир», М., 1977). Рассмотрены взаимоотношения между этим аппаратом и более простым применением исчисления внешних форм в ранних работах автора. Дан конкретный анализ системы аксиом для геометрической формулировки ньютоновой теории гравитации, приведенной в книге Мизнера, Торна, Уилера (т. I, с. 368), с точки зрения более общей нерелятивистской теории неньютоновых (вихревых) гравитационных полей, получаемой из ОТО при $c \to \infty$. Показана совместность этих аксиом с развитой нами предельной теорией в частном случае ньютоновых (безвихревых) полей. В общем случае следует заменить две (третью и четвертую) из этих аксиом.

Библ. 30 назв. Рез. эст., англ.

УДК 523

К методологическому анализу начал общестатистического аппарата точных наук. Ээлсалу Х. Т. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 54—60.

С целью методологического анализа алгоритмический аппарат статистики противопоставляется стохастическому аппарату, который, в свою очередь, противопоставляется вероятностному аппарату.

Утверждается, что применение как концепции информации, так и аксиоматической теории вероятностей может оказаться плодотворным только при рассмотрении многомерных задач. Выдвигается предложение разработать нарратив статистики. Рекомендуется обратить больше внимания на разработку теории актуальных свойств выборок.

Библ. 7 назв. Рез. эст., англ.

УДК 530.145

О потенциалах, допускающих совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби. Лембра Ю. Я. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 61—71.

Для исследования потенциалов, допускающих совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби, была использована система уравнений Розена. Найдены частные решения этой системы в трех- и двухмерном случаях. В двухмерном случае класс решений является довольно обширным, так как решения можно генерировать с помощью произвольной аналитической функции комплексной переменной. В одномерном случае получено общее решение. Совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона—Якоби означает с точки зрения квантовой механики, что плотность вероятности движется так, как двигалась бы частица по законам классической механики при том же потенциале, определяемом из системы Розена.

Библ. 6 назв. Рез. эст., англ.

УДК 530.145

Соотношение объективного и субъективного в понятии редукции волновой функции. Мостепаненко А. М., Невважай И. Д. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 72—84.

Статья содержит методологический анализ подходов к проблеме редукции волновой функции. Решение этой проблемы может быть найдено в исследовании соотношения квантовых и классических понятий. Согласно данной идее редукция предполагает перевод квантового языка на классический способ описания. Процесс редукции состоит в проецировании объектов квантовой природы на условия их классического существования.

Библ. 20 назв. Рез. эст., англ.

УДК 530.145

Принцип соответствия — история и современность. Раджабов У. А. «Уч. записки Тартуского гос. ун-та», вып. 520, Тарту, 1980, с. 85—103.

Принцип соответствия, разработанный как одна из форм проявления преемственности в развитии знания Н. Бором и его учениками в 1913—1926 гг., имеет исторические корни в идеях Лейбница, в философской системе Гегеля, в учении Маркса. Первоначальная формулировка этого принципа как предельного перехода обладала лишь ограниченными эвристическими возможностями и не являлась достаточно адекватным отражением взаимоотношения между старой и новой теориями.

Предлагаемая двухаспектная трактовка принципа соответствия, сочетающая в себе момент непрерывного количественного предельного перехода между некоторыми элементами математических аппаратов теорий на формальном уровне и момент качественного отличия их предметного содержания, сможет способствовать более глубокому осмыслению его методологической природы. В статье предпринята попытка выяснить место принципа соответствия в структуре физической теории и его роль при создании фундаментальных теорий.

Библ. 24 назв. Рез. эст., франц.