



E. ETVERK

Piirväärtus  
ja pidevus

TALLINN 1966

68802

A-28099

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Matemaatika kateeder

E. Etverk

PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Konspekt ja metoodilisi juhendeid  
kaugüliõpilastele

Tallinn

1966

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
Кафедра математики

Э. Этверк

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

На эстонском языке

2

Tartu Riiklik Olikooll  
Raamatukogu  
68802

Vastutav toimetaja H. Roos

---

Trükkimisele antud 10.VI 66. Paber 60x84, 1/16  
Trükipg. 2,5. Tingpg. 2,32. Tiraaž 1500  
MB-04991. TPI rotaprint, 1966. Tell. nr.271  
Hind 8 kop.

## S A A T E K S

Käesolev konspekt ja juhend on mõeldud abimaterjaliks TPI Kaugõppeteaduskonna esimese kursuse üliõpilastele kõrgema matemaatika kahe tähtsama ja ühtlasi ka raskema mõiste - funktsiooni piirväärtuse mõiste ja pidevuse mõiste tundmaõppimisel. Selle koostamisel on eeldatud, et õppija kasutab I. Peterseni ja H. Roosi poolt koostatud "Kõrgema matemaatika ülesannete kogu" I. Viited sellele raamatule on märgitud kujul (P-R, lk. 127) või (P-R, ül. 591). Konspekti materjal on jaotatud paragrahvideks ja viimased punktideks. Viited juhendile on märgitud kujul (§3, 4), mis tähendab §3 punkti 4.

Asudes funktsiooni piirväärtuse mõiste tundmaõppimisele, peab õppija enne veendunud olema, et ta tunneb eelnevat kursuseosa, eeskätt, et ta oskab teadlikult vastata järgmistele küsimustele.

1. Millal üht suurust ( $y$ ) nimetatakse teise suuruse ( $x$ ) funktsiooniks?
2. Mida nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks, mida tema muutumispiirkonnaks? Mis on funktsiooni väärtuste hulk?
3. Missugust funktsiooni nimetatakse antud vahemikus kasvavaks, missugust kahanevaks?
4. Missugust funktsiooni nimetatakse monotoonseks?

### § 1. Arvujada piirväärtus

1. Arvujada mõiste. Matemaatikas ja selle rakendustes tuleb sageli tegelda niisuguste funktsioonidega, mille argument saab omada ainult positiivseid täisarvulisi ehk, teisiti, naturaalarvulisi väärtusi 1, 2, 3, ... Mõnikord see argumendi väärtuste hulk algab ka arvust 1 suuremast naturaalarvust, näiteks arvust 3.

Näiteid. 1. Käesoleva aasta novembrikuu päevade minimaalne

Šhuteperatuur teatud kohas kuupäeva n funktsioonina.

2. Kumera hulknurga sisenurkade summa nurkade arvu n funktsioonina.

3. Korrapärase kõõlhulknurga übermõõt hulknurga külgede arvu n funktsioonina.

4. Naturaalarvu n jagajate hulk.

Uga sellise funktsiooni väärtuste hulk moodustab ühe arvu-jada, nagu seda on siin ka argumendi väärtuste hulk.

Arvujada on funktsiooni väärtuste hulk, mis saadakse, kui argumendile antakse ainult naturaalarvulised väärtused.

Jadade puhul kasutatakse harilikust veidi erinevat terminoloogiat ja sümboolikat, näiteks

1. funktsiooni väärtusi nimetatakse jada liikmeteks ehk elementideks ja tähistatakse sümbolitega

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

kus indeksid 1, 2, 3, ..., n, ... on jada liikmete järjenumbrid ja ühtlasi argumendi väärtused;

2. funktsiooni avaldist  $f(x)$  nimetatakse jada üldliikme avaldiseks ehk, lihtsalt, üldliikmeks või üldelemendiks ja tähistatakse  $a_n$ .

Näiteks, kui funktsiooni  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  argumendile x anda ainult naturaalarvulised väärtused 1, 2, 3, ..., saame arvujada

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \dots,$$

mille üldliikme valem on

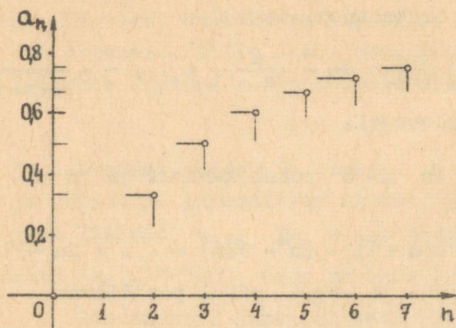
$$a_n = \frac{n-1}{n+1},$$

kus n on liikme järjekorranumber.

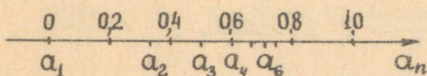
Edasi vaatleme ainult lõpmatuid arvujadasid, s.o. jadasid, millel leidub igale naturaalarvule 1, 2, 3, ..., n, ... vastav liige.

Jada geomeetrilisel kujutamisel eelistatakse tavalisele "koordinaatide meetodile", mis jada kujutisena annab rea isoleeritud punkte koordinaatasapinnal (joon. 1), astmikkujutist (joon. 2), mille puhul jada liikmed on esitatud arvtelje punktidenä. Esimesest kujutamisviisist saab teise, kui jada liikmeid

kirjutavad punktid projekteerida funktsiooniteljele.



Joon. 1.



Joon. 2.

Harjutus 1. Kirjutada esimesed viis liiket jadale, mille üldliige on järgmine:

- a)  $2n + 1$ ,
- b)  $\frac{4 - n^2}{n}$ ,
- c)  $\frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + n - 1}$ ,
- d)  $\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ ,
- e)  $\sin \frac{\sqrt{n}}{6}$ .

Kujutada jada liikmed arvoteljel.

2. Kasvav ja kahanev jada. Kooskõlas funktsiooni kasvamise ja kahanemise mõistega võtame kasutusele kasvava ja kahaneva jada mõiste.

Arvujada on kasvav, kui  $a_{n+1} > a_n$ , s.t. kui järgnev liige on eelnevast suurem.

Arvujada on kahanev, kui  $a_{n+1} < a_n$ , s.t. kui järgnev liige on eelnevast väiksem.

Nagu iga funktsioon võib jada olla ühes vahemikus kasvav, teises kahanev. Kui iga  $n$  puhul, mis kuulub teatud vahemikku,  $a_{n+1} - a_n > 0$ , siis jada on selles vahemikus kasvav, ja kui  $a_{n+1} - a_n < 0$ , siis jada on selles vahemikus kahanev.

Näited. 1. Jada, mille üldliikmeks on  $\frac{2n - 1}{n}$ , on kasvav, sest

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1) - 1}{n+1} - \frac{2n - 1}{n} = \dots = \frac{1}{n(n+1)},$$

mis on positiivne  $n$  igal väärtusel.

2. Jada  $a_n = \frac{n}{2n-1}$  on kahanev, sest

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)-1} - \frac{n}{2n-1} = \dots = -\frac{1}{4n^2-1},$$

mis on negatiivne n igal väärtusel.

3. Jada  $a_n = n^2 - 12n$  on  $n < 6$  puhul kahanev ja  $n > 6$  puhul kasvav, sest

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 12(n+1) - (n^2 - 12n) = \dots = 2n - 11,$$

mis  $n < 6$  puhul on negatiivne ja  $n \geq 6$  puhul positiivne.

Harjutus 2. Jada liikmeid arvutamata selgitada, kas jada on kasvav või kahanev:

a)  $\frac{2n}{2n+1}$ ,    b)  $\frac{4-n^2}{n}$ ,    d)  $\frac{n^2+1}{n+1}$ .

3. Tõkestatud jada ja tõkestamata jada.

Jada on alt tõkestatud, kui leidub selline arv t, millest jada kõik liikmed on suuremad, ja ülalt tõkestatud, kui leidub selline arv T, millest jada kõik liikmed on väiksemad.

Jada, mis on tõkestatud nii alt kui ka ülalt, nimetatakse tõkestatud jadaks. Jada, mis pole tõkestatud (alt või ülalt), nimetatakse tõkestamata jadaks.

Tõkestatud jada puhul  $t < a_n < T$ . Arve t ja T nimetatakse vastavalt jada alamtõkkeks ja ülemtõkkeks. On selge, et kui jadal leidub üks alam- või ülemtõke, siis leidub neid kuitahes palju: kui alamtõkkeks (ülemtõkkeks) on näiteks arv 5, siis on selleks ka iga arv, mis on väiksem (suurem) kui 5.

Kui jada pole tõkestatud alt või ülalt või ei alt ega ka ülalt, siis tema liikmete muutumiskiirkonda märgitakse vastavalt kujul

$$-\infty < a_n < T; \quad t < a_n < +\infty; \quad -\infty < a_n < +\infty.$$

Kui jada pole tõkestatud, siis tal leidub liikmeid, mille absoluutväärtus on suurem kuitahes suurest antud arvust, sest

vastasel juhul see arv ja tema vastand arv oleksid selle jada liiketeks. Näiteks jadal, mille üldliige  $a_n = 10 - 3n$ , leidub liikmeid, mille absoluutväärtus on suurem kui 1000. Nende liikmete leidmiseks koostame võrratuse

$$|10 - 3n| > 1000$$

ja lahendame selle. Et ilmselt  $n > 4$ , siis  $|10 - 3n| = 3n - 10$  ja võrratuse lahendamine annab:  $3n > 1010$ ,  $n \geq 337$ . Arvutades jada liikmed  $a_{336}$  ja  $a_{337}$ , näeme, et tšepoollest  $|a_{336}| < 1000$ , kuid  $|a_{337}| > 1000$ , nagu on seda ka kõik järgmised liikmed.

Lihtsamatel juhtudel saab üldliikme avaldise põhjal otsustada, kas antud jada on tõkestatud või mitte. Mõnikord on selleks vaja üldliikme avaldist teisendada.

Näited. 1. Kui jada üldliikmele  $a_n = \frac{6n - 1}{2n}$  anda kuju

$$a_n = \frac{6n}{2n} - \frac{1}{2n} = 3 - \frac{1}{2n},$$

siis on näha, et jada kõik liikmed on väiksemad kui 3, seega jada on ülalt tõkestatud. Uhtlasi näeme, et jada on kasvav, sest  $n$  suurenemisel  $2n$  suureneb, muid  $\frac{1}{2n}$  väheneb ja vahe  $3 - \frac{1}{2n}$  suureneb (lahutatava vähenemisel vahe suureneb). Selle jada vähim liige on seega  $a_1 = 3 - 0,5 = 2,5$ . Niisiis on jada ka alt tõkestatud:

$$2,5 \leq a_n < 3.$$

2. Olgu  $a_n = \frac{3n + 1}{3n + 5}$ . Otsekohe on näha, et jada on alt tõkestatud arvuga 0, sest jada kõik liikmed on positiivsed, ja ülalt arvuga 1, sest  $n$  iga väärtuse juures murru lugeja  $3n + 1$  on väiksem kui nimetaja  $3n + 5$ :

$$0 < a_n < 1.$$

Kui soovime üldliikme avaldisest näha, kas jada on kasvav või kahanev, siis eraldame murrust täisosa:

$$a_n = \frac{3n + 1}{3n + 5} = \frac{3n + 5 - 4}{3n + 5} = 1 - \frac{4}{3n + 5}.$$

Niüd näeme, et kui  $n$  suureneb, siis suureneb ka nimetaja

$3n + 5$ , muid  $\frac{4}{3n+5}$  aga väheneb ja vane  $1 - \frac{4}{3n+5}$  suureneb: jada on kasvav.

3. Kui  $a_n = 1000 - 5n$ , siis küllalt suurte  $n$  väärtuste juures  $1000 - 5n < 0$  ja  $|1000 - 5n|$  on kuitahes suur, seega jada ei ole alt tõkestatud:  $-\infty < a_n < 1000$ .

Harjutus 3. Näidata, kas jada on tõkestatud või mitte, ja anda jaataval korral tõkkes:

a)  $\frac{n+1}{n}$ , b)  $\frac{n^2+1}{n+1}$ , c)  $\frac{4n-1}{n+1}$ , d)  $2^{-n}$ , e)  $\cos \frac{\sqrt{n}}{3}$ .

Harjutus 4. Leida järjekorranumber jada liikmel, millest alates iga järgneva liikme absoluutväärtus on suurem kui antud arv  $M$ .

a)  $5 - \frac{n}{2}$ ;  $M = 100$ ; b)  $n^2 + 4n$ ;  $M = 1000$ ; c)  $\frac{n^2+1}{n+1}$ ;  $M = 500$ .

4. Arvujada piirväärtuse mõiste. Kui jada liikme järjekorranumber  $n$  suureneb, siis liikme väärtus  $a_n$  võib käituda mitmeti:

- 1)  $a_n$  ei muutu, vaid omab konstantset väärtust;
- 2)  $a_n$  absoluutväärtus saab suuremaks mistahes etteantud arvust  $M > 0$  ja  $n$  edasisel kasvamisel ka jääb sellest suuremaks;
- 3)  $a_n$  läheneb mingile arvule  $A$  nii, et tema erinevus arvust  $A$  võib saada ja  $n$  edasisel kasvamisel ka jääda kuitahes väikeseks;
- 4)  $a_n$  võngub mingis vahemikus ilma eelmises punktis kirjeldatud lähenemiseta ühelegi arvule.

Näited. 1.  $a_n = \frac{5n}{|n|}$ : 5, 5, 5, ... Siin  $a_n$  on konstantne.

2.  $a_n = n^2$ : 1, 4, 9, 16, ... Siin  $a_n$  võib saada kuitahes suureks.

3.  $a_n = 2 - \frac{1}{10^n}$ : 1,9, 1,99, 1,999, 1,9999, ... Siin  $a_n$  läheneb arvule 2.

4.  $a_n = \cos \frac{\sqrt{n}}{4}$ :  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 0;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; -1;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 0;  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 1; ...

Siin  $a_n$  väärtused võnguvad  $-1$  ja  $+1$  vahel.

Pöörame tähelepanu punktis 3 kirjeldatud muutumisele. Seal esinevat arvu  $A$  nimetatakse jada piirväärtuseks ja tähistatakse sümboliga  $\lim a_n$ . Samas kirjeldatud  $a_n$  lähenemist arvule  $A$  märgitakse sümboliga  $a_n \rightarrow A$ . Niisiis näites 3

$$a_n \rightarrow 2 \quad \text{ehk} \quad \left(2 - \frac{1}{10^n}\right) \rightarrow 2 \quad \text{ja} \quad \lim a_n = \lim \left(2 - \frac{1}{10^n}\right) = 2.$$

(Sümbol  $\lim$  on tuletatud ladinakeelsest sõnast limes, mis tähendab piiri.)

Piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi põhiline mõiste, sest selle mõiste abil defineeritakse väga paljusid matemaatilise analüüsi mõisteid. Sellepärast tuleb sellele mõistele endale anda täpne definitsioon ja see täiesti omandada. See definitsioon on järgmine:

arvu  $A$  nimetatakse arvu jada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

piirväärtuseks, kui iga kuitahes väikese arvu  $\varepsilon > 0$  puhul leidub jada liige  $a_n$ , millest alates jada iga järgneva liikme ja arvu  $A$  vahe absoluutväärtus on väiksem kui  $\varepsilon$ .

Lause lõpuosa saab kirjutada sümbolites kujul

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Et jada teatava liikme  $a_n$  otsimine taandub selle järjekorranumbri  $N$  otsimisele, kusjuures järgnevates liikmetes  $n > N$ , siis saab kogu definitsiooni lühemalt sõnastada ka nii:

arvu  $A$  nimetatakse arvu jada piirväärtuseks, kui iga kuitahes väikese arvu  $\varepsilon > 0$  puhul leidub niisugune  $N$ , et võrratusest  $n > N$  järeldub võrratus  $|a_n - A| < \varepsilon$ .

Selle definitsiooni alusel peame oskama tõestada, et antud arv on antud jada piirväärtus (või et ta seda ei ole). Selleks 1) arvutame  $|a_n - A|$ , 2) valime mingi  $\varepsilon > 0$ , 3) koostame võrratuse  $|a_n - A| < \varepsilon$  ja lahendame selle. Kui sellel võrratu-

sel leidub naturaalarvulisi lahendeid, siis antud arv on selle jada piirväärtuseks, kui selliseid lahendeid ei leidu, siis see arv ei ole jada piirväärtuseks.

Näited. 1. Tõestada, et

$$\lim \frac{3n+1}{n+2} = 3.$$

Tõestus. 1)  $|a_n - A| = \left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| =$

$$= \left| \frac{3n+1-3n-6}{n+2} \right| = \left| \frac{-5}{n+2} \right| = \frac{5}{n+2}.$$

2) Olgu  $\varepsilon = 10^{-k}$ , kus  $k = 1, 2, 3, \dots$

3) Koostame võrratuse

$$\frac{5}{n+2} < 10^{-k}.$$

Selle lahendamisel saame:

$$n+2 > 5 \cdot 10^k;$$

$$n > 5 \cdot 10^k - 2;$$

$$N = 5 \cdot 10^k - 2.$$

Kontrolliks võtame  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Siis  $N = 5 \cdot 10^2 - 2 = 498$ . Tähendab,  $|a_{499} - 3|$  peab olema väiksem kui 0,01. Arvutades selle, saame, et

$$|a_{499} - 3| = 3 - \frac{1498}{501} = \frac{5}{501} < 0,01.$$

2. Tõestada, et  $\lim \frac{n}{2n+1} \neq 1$ .

Tõestuseks oletame, et  $\lim \frac{n}{2n+1} = 1$  ja arvutame  $|a_n - A|$ :

$$|a_n - A| = \left| \frac{n}{2n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-2n-1}{2n+1} \right| = \left| \frac{-n-1}{2n+1} \right| = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Valime mingi  $\varepsilon > 0$ , näiteks  $\varepsilon = 0,01$ , ja nõuame, et

$$\frac{n+1}{2n+1} < 0,01.$$

Selle võrratuse lahendamisel saame võrratuse

$$0,98n < -0,99,$$

mida ei rahulda ükski naturaalarv. Sellest nähtub, et 1 ei ole

antud jada piirväärtuseks.

Espool nägime, et jada liikme järjekorranumbri  $n$  tõkestamatu kasvamisel võib jada liige  $a_n$  käituda mitmel viisil. Võiki neid viise saame kirjeldada nüüd piirväärtuse mõiste abil.

1. Kui  $a_n = c$ , kus  $c$  on konstant, siis ka  $\lim a_n = c$ , sest  $|a_n - c| = 0$ , seega  $n$  iga väärtuse puhul  $|a_n - c| < \varepsilon$ , olu  $\varepsilon$  kuidahes väike positiivne arv.

2. Kui  $a_n$  absoluutväärtus saab ja  $n$  edasisel muutumisel ka järb suuremaks mistahes etteantud arvust  $M > 0$ , siis  $t < a_n < +\infty$  või  $-\infty < a_n < T$  või  $-\infty < a_n < +\infty$ , s.t.  $a_n$  pole tõkestatud. Sel juhul  $\lim a_n$  puudub, kuid kokkuleppeliselt märgitakse neid  $a_n$  muutumise viise kujul

$\lim a_n = +\infty$ ,  $\lim a_n = -\infty$  ja  $\lim a_n = \infty$ , ning öeldakse, et  $a_n$  piirväärtus on vastavalt pluss lõpmatus, miinus lõpmatus või lõpmatus.

3. Kui  $a_n$  läheneb arvule  $A$  ülalkirjeldatud viisil, siis  $\lim a_n = A$ .

4. Kui  $a_n$  vöngub mingis vahemikus (mis võib olla kas lõplik või lõpmatu) ilma lähenemiseta mingile arvule, siis  $\lim a_n$  puudub.

Näiteks, kui jada üldliige  $a_n = n \sin \frac{\sqrt{n}}{2}$ , siis  $n$  kasvamisel  $a_n$  vöngub lõpmatus vahemikus:  $-\infty < a_n < +\infty$ . Selle jada liikmed on

1; 0; -3; 0; 5; 0; -7; 0; 9; 0; -11; 0; ...

Siin  $\lim a_n \neq \infty$ , sest  $n$  muutumisel  $a_n$  ei jää suuremaks etteantud arvust  $M > 0$ , kuigi ta saab sellest suuremaks.

Harjutus 5. (P-R, ül. 591).

Harjutus 6. Tõestada, et  $\lim \frac{6n+1}{4n-1} = \frac{3}{2}$ .

5. Monotoonse jada piirväärtuse olemasolu tunnus. Vaatleme mõnda näidet.

1. Antud raadiusega ringjoone sisse joonestatud korrapä-

raste hulknurkade pindalad moodustavad hulknurga külgede arvu  $n$  tõekestamatul kasvamisel kasvava jada, mis on ülalt tõekestatud. Üheks ülemtõkkeks on näitaks selle ringi puutujaruudu pindala. Sellel jadal leidub piirväärtus, milleks teatavasti on ringi pindala.

2. Antud kõrgusega ja põhja raadiusega silindri sisse kujudatud korrapärase prisma ruumala on prisma põhja külgede arvu  $n$  funktsioon. Viimase tõekestamatul kasvamisel prisma ruumalad moodustavad kasvava ja ülalt tõekestatud jada (ülemtõkkeks kõlhab iga ümberkujudatud prisma ruumala). Sellel jadal leidub piirväärtus, milleks teatavasti on silindri ruumala.

3. Vaatleme lõpmatult kahanevat geomeetrilist progressiooni, mille esimene liige  $a = 1$  ja tegur  $q = \frac{1}{2}$ . Progressiooni osasummade jada

$$a; a + aq; a + aq + aq^2; a + aq + aq^2 + aq^3; \dots$$

ehk

$$1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}; \dots$$

ehk

$$1; \frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{15}{8}; \frac{31}{16}; \dots$$

on kasvav ja ülalt tõekestatud, sest kui geomeetrilise progressiooni  $n$  liikme summa valemile

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

anda kuju

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q},$$

siis on näha, et iga  $n$  puhul see summa on väiksem kui  $\frac{a}{1 - q}$ . Sellel jadal leidub piirväärtus, milleks on  $\frac{a}{1 - q}$  ja mida nimetatakse lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks.

Saab tõestada, et üldiselt

igal monotoonsel ja tõekestatud jadal leidub piirväärtus.

Meie seda teoreemi üldkujul ei tõesta, kuid tarbe korral teeme seda iga konkreetse jada puhul.

Näide. Jada  $5, \frac{20}{3}, \frac{30}{4}, \dots$ , mille üldliige on  $\frac{10n}{n+1}$ , on tõkestatud, sest  $\frac{10n}{n+1} = \frac{10}{1+\frac{1}{n}}$ , millest nähtub, et  $\frac{10}{1+\frac{1}{n}} < 10$ . See jada on monotoonselt kasvav, sest kui  $n$  kasvab, siis  $\frac{1}{n}$  kahaneb,  $1 + \frac{1}{n}$  kahaneb (miks?), seega murd  $\frac{10}{1+\frac{1}{n}}$  kasvab. Niisiis ülalantud teoreemi põhjal sel jadal peab leiduma piirväärtus. Saab tõestada, et selleks on arv 10.

Tuleb hoiduda eksiarvamusest, nagu leiduks piirväärtus ainult monotoonsel jadal. Näiteks jada

$$2, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{13}{4}, \dots, \frac{3n + (-1)^n}{n}, \dots$$

on küll tõkestatud, kuid mitte monotoonne. Tal leidub siiski piirväärtus: selleks on 3.

Küll on aga õige, et

ühelgi tõkestamata jadal ei leidu piirväärtust.

Harjutus 7. Tõestada, et igal alljärgneval jadal leidub piirväärtus:

a)  $\frac{1}{n}$ ; b)  $\frac{n-1}{n}$ ; c)  $\frac{3n+2}{2n}$ ; d)  $\frac{8n}{2n+1}$ ; e)  $\frac{n^2+1}{n^2+2}$ .

6. Arve. Vaatleme jada, mille üldliige

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Arvutades selle esimesed liikmed, saame

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots$$

Et  $n$  kasvamisel astendaja kasvab ja astme alus väheneb, siis pole näha, kuidas muutub aste. Tõestame, et see jada on monotoonne, nimelt kasvav ja tõkestatud. Selleks arendame üldliikme avaldist Newtoni binoomvalemi järgi ja teisendame tulemust järgmiselt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\
& = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\
& + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Kui saadud võrduses  $n$  asendada arvuga  $n + 1$ , siis paremal iga liidetav alates teisest suureneb ja üks uus liidetav tuleb juurde. Sellest nähtub, et jada  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  on kasvav. Et näidata, et ta on ka tõkestatud, asendame saadud võrduse paremas pooles kõik tegurid  $1 - \frac{1}{n}$ ,  $1 - \frac{2}{n}$ , ...  $1 - \frac{n-1}{n}$  neist suuremate arvudega  $1$ ,  $1$ , ...  $1$  ja iga liikme esimese teguri nimetajas kõik tegurid  $3$ ,  $4$ , ...  $n$  neist väiksemate arvudega  $2$ ,  $2$ , ...  $2$ . Selle tulemusena võrduse parem pool suureneb. Nii saame võrratuse, mille parema poole teisendamiseks rakendame kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemit:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
& = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.
\end{aligned}$$

Niisiis

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Et vaadeldav jada on kasvav ja ülalt tõkestatud, siis tal peab leiduma piirväärtus. Seda piirväärtust tähistatakse tähega  $e$ :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Selle arvu kohta teame praegu ainult seda, et ta asetseb  $2$  ja  $3$  vahel. Hiljem õpime temast arvutama kitsasest palju kümnendkohti ja näeme, et

$$e = 2,7182\ 8182\dots$$

On tõestatud, et  $e$  on irratsionaalarv.

7. Naturaallogaritmid. Kõrgeras matemaatikas kasutatakse kümnendlogaritme (ehk Briggsi logaritme) kõrval õige laialdaselt logaritme alusel e, nimetades neid naturaallogaritme ehk Napieri (ka Neperi) logaritmeiks. (Napier ehk Neper oli šoti matemaatik, elas 1550...1617.) Naturaallogaritmi tähiseks on ln. Niisiis  $\ln x = \log_e x$ .

Tuletame seose arvu x logaritme vahel alusel e ja mis tahes alusel a. Selleks kirjutame arvu x kujul

$$x = e^{\ln x}.$$

Logaritmi seade võrdust alusel a:

$$\log_a x = \ln x \cdot \log_a e.$$

Siit saame:

$$\ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e} = \frac{1}{\log_a e} \cdot \log_a x.$$

Kui  $a = 10$ , siis see seos saab kujul

$$\ln x = \frac{1}{\log e} \log x.$$

Et  $e = 2,718$ , siis  $\log e = \log 2,718 = 0,4343$  ja

$$\frac{1}{\log e} = 2,303.$$

Niisiis

$$\underline{\ln x = 2,303 \log x},$$

millest

$$\underline{\log x = 0,4343 \ln x}.$$

Arvu  $M = \log e \doteq 0,4343$  nimetatakse kümnendlogaritme moduliks.

Harjutus 8. Kasutades kümnendlogaritme tabelit, leida

$$\ln 2, \ln 5, \ln 7, \ln 10, \ln 25.$$

## § 2. Funktsiooni piirväärtus

1. Argumendi muutumisviisidest. Funktsiooni piirväärtuse mõiste on jada piirväärtuse mõistest selles mõttes koerukam, et jada puhul argument - jada liikme järjenumber  $n$  - muutub alati ühel ja ainult ühel viisil, nimelt kasvab tõkestamatult, kuna mistahes funktsiooni puhul argumenti muutumine võib toimuda väga mitmel viisil. Tutvume tähtsamatega neist.

1. Argument  $x$  kasvab tõkestamatult, alates mingist väärtusest  $a$ . Argumendi muutumist võime kujutleda  $x$ -teljel paremale liikuva punktina, mille kaugus alguspunktist võib saada kuitahes suureks. See muutumine erineb arvujada järjekorranumbri muutumisest esiteks selle poolest, et  $x$  lähteväärtuseks ei tarvitse olla 1, ja teiseks selle poolest, et  $x$  läbib ka kõik variepealsed väärtused täisarvude vahel. Seda  $x$  muutumist märgitakse kujul

$$x \rightarrow +\infty.$$

2. Argument  $x$  väheneb tõkestamatult, alates mingist väärtusest  $b$ . Argumendi muutumist võime kujutleda  $x$ -teljel vasakule kuitahes kaugule liikuva punkti abil. Sellel muutumisel  $x$  saab ja jääb negatiivseks ja tema absoluutväärtus kasvab tõkestamatult. Seda muutumist märgitakse kujul

$$x \rightarrow -\infty.$$

3. Argumendi  $x$  absoluutväärtus  $|x|$  kasvab tõkestamatult, kusjuures  $x$  omandab nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Argumendi muutumist võime kujutleda  $x$ -teljel paremale ja vasakule liikuva punkti abil, mille kaugus alguspunktist võib saada kuitahes suureks. Seda muutumist märgitakse kujul

$$x \rightarrow \infty.$$

4. Argument  $x$  lähenob kasvades mingile arvule  $a$  nii, et tema erinevus arvust  $a$ , s.o.  $|x - a|$  võib saada kuitahes väikeseks, kuid mitte nulliks. Seda muutumist märgitakse kujul

$$x \rightarrow a - 0.$$

5. Argument  $x$  lähenob vähenedes mingile arvule  $a$  nii, et

tema erinevus arvust  $a$ , s.o.  $|x - a|$  võib saada kuitahes väikeseks, kuid mitte nulliks. Seda  $x$  muutumist märgitakse kujul

$$x \rightarrow a + 0.$$

Märkus. Kui arvuks  $a$ , millele  $x$  läheneb vasakult (p. 4), on  $0$ , siis  $x$  muutumist märgitakse kujul  $x \rightarrow -0$  (mitte  $0-0$ ). Analoogiliselt märgitakse  $x$  lähenemist arvule  $0$  paremalt kujul  $x \rightarrow +0$ .

6. Argument  $x$  läheneb ükskõik mil viisil ükskõik kummalt poolt arvule  $a$  nii, et  $|x - a|$  võib saada kuitahes väikeseks. Seda  $x$  muutumist märgitakse kujul

$$x \rightarrow a.$$

Kirjeldataud kuuest muutumisviisist esimest kolme iseloomustab see asjaolu, et nende puhul  $x$  absoluutväärtus  $|x|$  võib saada kuitahes suureks, seega  $|x| > N$ , kus  $N$  on kuitahes suur etteantud positiivne arv. Viimase kolme muutumisviisi ühiseks omaduseks on see asjaolu, et nende puhul  $|x - a|$  võib saada kuitahes väikeseks, seega  $|x - a| < \delta$ , kus  $\delta$  on kuitahes väike positiivne arv.

2. Funktsiooni piirväärtuse mõiste. Oletame, et funktsiooni  $f(x)$  argument  $x$  muutub ühel eelmises punktis kirjeldatud viisil. Kui seejuures funktsiooni väärtus muutub nõnda, et tema erinevus mingist arvust  $A$  võib (absoluutväärtuse poolest) saada väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust  $\varepsilon$  ja  $x$  edasisel muutumisel ka jääda sellest väiksemaks, siis nimetame arvu  $A$  funktsiooni  $f(x)$  piirväärtuseks  $x$  antud muutumisel. Funktsiooni piirväärtust märgime endiselt sümboliga  $\lim f(x)$ , mille alla märgime  $x$  antud muutumisliigi kujul

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{või} \quad x \rightarrow -\infty \quad \text{jne.} \quad \text{või} \quad x \rightarrow a.$$

Nii saame piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{jne.} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Jada puhul argumendi muutumisliigi märkimine polnud tarvilik, sest see oli alati üks ja sama:  $n \rightarrow +\infty$ .

Saadud kuus piirväärtust nõuavad kuut, mõnevõrra erinevat

definiitsiooni. Et argumenti  $x$  tähtsamad muutumisviisid saime liigitada kahte rühma (§2, 1), siis ka kuus piirväärtuse definiitsiooni liigituvad kolmekaupa kahte rühma nii, et ühte rühma kuuluvad definiitsioonid erinevad omavahel õige vähe. Seepärast anname täielikult ainult kaks definiitsiooni:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{ja} \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

1. Arvu  $A$  nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  piirväärtuseks argumenti  $x$  tõkestamatul kasvamisel, kui iga kuitahes väikese arvu  $\varepsilon > 0$  puhul leidub niisugune arv  $N > 0$ , et võrratusest  $x > N$  järelneb võrratus

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Sellest definiitsioonist saame  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  definiitsiooni, kui sõnad "argumenti  $x$  tõkestamatul kasvamisel" asendada sõnadega "argumenti  $x$  tõkestamatul kahanemisel" ja võrratuse " $x > N$ " asendada võrratusega " $x < -N$ ".

Analoogiliselt saame antud definiitsioonist definiitsiooni  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  jaoks, kui eelmises lauses nimetatud kohad asendada vastavalt väljendiga "argumenti  $x$  absoluutväärtuse tõkestamatul kasvamisel" ja võrratusega " $|x| > N$ ".

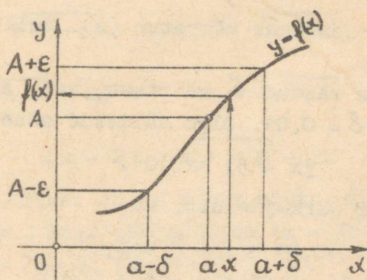
2. Arvu  $A$  nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  piirväärtuseks argumenti  $x$  lähenemisel arvule  $a$ , kui iga kuitahes väikese arvu  $\varepsilon > 0$  puhul leidub niisugune arv  $\delta > 0$ , et võrratustest  $0 < |x - a| < \delta$  järelneb võrratus

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Sellest definiitsioonist saame definiitsioonid piirväärtuste  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  jaoks, kui sõnad "lähenemisel arvule  $a$ " asendada vastavalt sõnadega "lähenemisel arvule  $a$  kasvades" ja "lähenemisel arvule  $a$  kahanedes".

Piirväärtuse mõiste õigeks mõistmiseks on vaja õppijal esmalt tabada selle põhiidee, s.o. et  $f(x)$  ja  $A$  erinevust peab olema võimalik teha kuitahes väikeseks (väiksemaks kui  $\varepsilon$ ), milleks  $x$  peab saama küllalt suureks (definiitsioonis 1, suuremaks kui  $N$ ) või  $x$  peab erinema arvust  $a$  küllalt vähe (defi-

nitsioonis 2, vähem kui  $\delta$  võrra). Tähelepanu tuleb pöörata ka teises definitisioonis esinevale nõudele  $0 < |x - a|$ : see näitab, et  $x$  ei või saada võrdseks arvuga  $a$ , ta peab sellele lähenema.



Joon. 3.

Geomeetriliselt tähendab väide  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  seda

(joon. 3), et iga antud  $\varepsilon > 0$  järgi saab leida niisuguse  $\delta > 0$ , et kui  $x$  on võetud abstsissitelje punktide  $a - \delta$  ja  $a + \delta$  vahelt, siis vastav  $f(x)$  väärtus kujutub ordinaatteljel punktide  $A - \varepsilon$  ja  $A + \varepsilon$  vahel, s.t. võrratusest  $|x - a| < \delta$  järeljub võrratus  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Niisamuti, nagu jada puhul, tuleb funktsiooni piirväärtuse definitisiooni alusel osata tõestada, et antud arv on antud funktsiooni piirväärtuseks  $x$  antud muutumisel (või et ta ei ole seda). Need tõestused on mõnel juhul tunduvalt raske-  
mad kui jada puhul.

Näited. 1. Tõestada, et  $\lim_{x \rightarrow 5} (3x + 2) = 17$ .

Tõestuseks tuleb näidata, et  $3x + 2$  võib erineda 17-st kuitahes väge (vähem kui  $\varepsilon$  võrra), kui  $x$  erineb 5-st küllalt vähe (vähem kui  $\delta$  võrra). Veidi teisiti: antud  $\varepsilon$  põhjal tuleb leida  $\delta$  nii, et võrratusest  $0 < |x - 5| < \delta$  järeljub võrratus

$$|(3x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \dots \quad (*)$$

Teisendades avaldist  $|(3x + 2) - 17|$ , saame

$$|(3x + 2) - 17| = |3x - 15| = 3|x - 5|.$$

Kui  $3|x - 5| < \varepsilon$ , siis  $|x - 5| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Saadud võrratus on samaväärne võrratusega (\*), s.t. temast järeldub võrratus (\*); tähendab, kui võtta  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ , siis ka võrratustest  $0 < |x - 5| < \delta$  järeldub võrratus (\*). Sellega on väide tõestatud.

Kontrollime saadud  $\delta$  väärtust, kui  $\varepsilon = 0,03$ . Tõestuse kohaselt siis  $\delta = 0,01$ . Olgu täidetud nõue

$$|x - 5| < 0,01.$$

Sellest järeldub järk-järgult, et

$$\begin{aligned} -0,01 < x - 5 < 0,01, \\ 5 - 0,01 < x < 5 + 0,01, \\ 15 - 0,03 < 3x < 15 + 0,03, \\ 17 - 0,03 < 3x + 2 < 17 + 0,03, \\ -0,03 < (3x + 2) - 17 < 0,03, \\ |(3x + 2) - 17| < 0,03. \end{aligned}$$

Niisiis võrratusest  $|x - 5| < 0,01$  järeldub tõepoolest võrratus

$$|(3x + 2) - 17| < 0,03.$$

2. Tõestada, et  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 7$ .

Tõestuseks leiame niisuguse  $\delta$ , et võrratustest  $0 < |x - 2| < \delta$  järelduks võrratus  $|(x^2 + 3) - 7| < \varepsilon$ , kus  $\varepsilon > 0$  on antud arv. Viimasest võrratusest järelduvad temaga samaväärsed võrratused

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| < \varepsilon, \\ -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon, \\ 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Edasi võtame arvesse, et kui  $x$  läheneb 2-le, siis võib lugeda, et  $x > 0$ , mistõttu viimase võrratusepaari negatiivsed lahendid võime kõrvale jätta. Saame

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon} \\ \sqrt{4 - \varepsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2. \end{aligned}$$

Viimasest võrratusepaarist tuleb tuletada võrratus  $|x - 2|$  kohta. Et selle kohta pole võimalik saada eelmistega samaväärset võrratust, siis võtame neist rangemad võrratused, suurendades  $x - 2$  alamtõket  $\sqrt{4 - \varepsilon} - 2$  ülemtõkke vastand-arvuni  $2 - \sqrt{4 + \varepsilon}$  (et  $2 - \sqrt{4 + \varepsilon} > \sqrt{4 - \varepsilon} - 2$ , seda põh-jendame allpool):

$$2 - \sqrt{4 + \varepsilon} < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$$

ehk

$$-(\sqrt{4 + \varepsilon} - 2) < x - 2 < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2,$$

millest

$$|x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2.$$

Tulemusest nähtub, et on sobiv võtta  $\delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$ .

Kui  $\delta$  nii valida, siis võrratusest  $|x - 2| < \delta$  järeldub võr-ratus  $|(x^2 + 3) - 7| < \varepsilon$ , tähendab

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 7.$$

Tõestuses kasutatud võrratuse  $2 - \sqrt{4 + \varepsilon} > \sqrt{4 - \varepsilon} - 2$  tõestamiseks paneme tähele, et see kehtib, kui kehtivad järg-mised võrratused:

$$\begin{aligned} 4 - \sqrt{4 + \varepsilon} &> \sqrt{4 - \varepsilon}, \\ (4 - \sqrt{4 + \varepsilon})^2 &> (\sqrt{4 - \varepsilon})^2, \\ 16 - 8\sqrt{4 + \varepsilon} + 4 + \varepsilon &> 4 - \varepsilon, \\ 16 + 2\varepsilon &> 8\sqrt{4 + \varepsilon}, \\ 8 + \varepsilon &> 4\sqrt{4 + \varepsilon}, \\ 64 + 16\varepsilon + \varepsilon^2 &> 64 + 16\varepsilon, \\ \varepsilon^2 &> 0. \end{aligned}$$

Kuid viimase kehtivus on ilmne, sest  $\varepsilon > 0$ .

Harjutus 9. Töötada läbi näide I (P-R, lk. 129).

Harjutus 10 - 11. Lähendada ulesanded 600, 601 ja 602 (P-R, lk. 137)

3. Ünepoolsed piirväärtused. Argument  $x$  võib teatavasti läheneda väärtusele  $a$  kolmel erineval viisil (§2, 1):

$$x \rightarrow a - 0 \quad \text{või} \quad x \rightarrow a + 0 \quad \text{või} \quad x \rightarrow a.$$

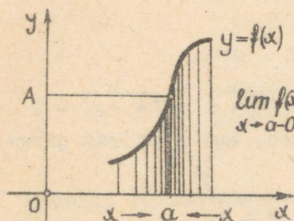
Vastavalt neile lähenemisviisidele saame kolm piirväärtust:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

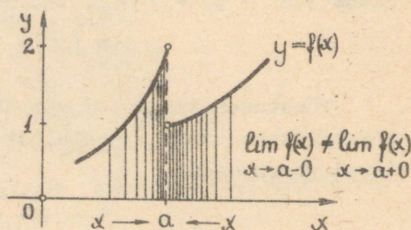
Neid nimetame vastavalt

vasakpoolseks piirväärtuseks  
 parempoolseks piirväärtuseks  
 ja piirväärtuseks  
 argumenti lähenemisel väärtusele  $a$ .

Need piirväärtused võivad olla võrdsed (joon. 4), võivad aga ka erineda (joon. 5). Viimasel joonisel vasakpoolne piirväärtus on 2, parempoolne piirväärtus aga 1 ja piirväärtus  $x$  lähenedes  $a$ -le mistahes viisil hoopis puudub.



Joon. 4.



Joon. 5.

Lähemalt põhjendamata on selge, et

funktsioonil  $f(x)$  on olemas piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  siis ja ainult siis, kui tal on selles punktis olemas mõlemapoolsed piirväärtused ja need on võrdsed, s.t. kui

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

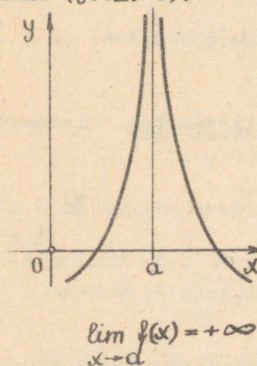
4. Päratud piirväärtused. Jada piirväärtuse käsitlemisel nägime, et liikme järjekorranumbri tõkestamatu kasvamisega liige  $a_n$  võib käituda mitmel erineval viisil. Samu viise võime eritleda ka mistahes funktsiooni  $f(x)$  käitumisel, kui argument  $x$  muutub ühel varem kirjeldatud viisil (§2, 1). Iseloomustame neid  $f(x)$  muutumisviise piirväärtuse mõiste abil.

1. Kui  $f(x) = c = \text{const}$ , siis ka  $\lim f(x) = c$ , muutugu  $x$  funktsiooni määramispiirkonnas kuidas tahes.

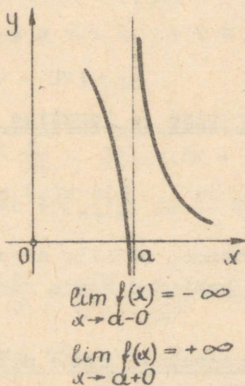
2. Kui  $f(x)$  absoluutväärtus  $x$  antud muutumisel  $x \rightarrow \dots$  tõkestamatult kasvab, siis  $f(x)$  on sel  $x$  muutumisel kas alt või ülalt või mõlemalt poolt tõkestamata ja  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$  puudub. Kokkuleppeliselt märgitakse neid tõkestamatuse juhtumeid vastavalt kujul

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = +\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \infty.$$

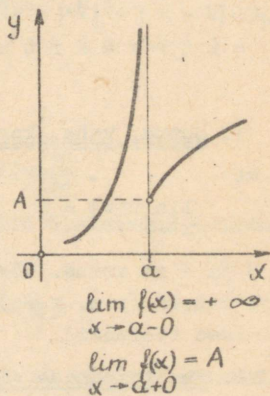
Neid kokkuleppelisi piirväärtusi nimetatakse päratuteks. Kui päratu piirväärtus esineb  $x$  lähenemisel mingile arvule  $a$ , siis kohta  $x = a$  nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  lõpmatusekohaks (joon. 6). Koht  $x = a$  võib osutada  $x$  lähenemisel sellele kohale ühelt poolt üht liiki lõpmatusekohaks, teiselt poolt teist liiki lõpmatusekohaks (joon. 7) või ka mitte lõpmatusekohaks (joon. 8).



Joon. 6.



Joon. 7.



Joon. 8.

Päratute piirväärtuste leidmisel osutub kasulikuks järgmine teoreem:

Kui  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0$ , kuid  $f(x) \neq 0$ , siis  $\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{1}{f(x)} = \infty$ .

Tõestus. Väide on õige, kui  $x$  antud muutumisel  $\frac{1}{|f(x)|} > M > 0$ , olgu  $M$  kuidahes suur. See nõue on rahuldatud, kui  $|f(x)| < \frac{1}{M}$ .

Viimane võrratus on aga rahuldatud, sest  $\lim f(x) = 0$ .

Näiteks  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ , sest  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Analoogiliselt eelmise teoreemiga on kerge tõestada, et

$$\text{kui } \lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \infty, \text{ siis } \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Näiteks  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$  (sest, kui  $x \rightarrow \infty$ , siis  $x^2 \rightarrow +\infty$ ).

### § 3. Põhiteoreemid

piirväärtuste arvutamiseks

1. Summa, vahe, korrutise ja jagatise piirväärtus. Oletame, et

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = U \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} v(x) = V, \quad (*)$$

kus  $U$  ja  $V$  on arvud. Tõestame, et siis argumenti sama muutumisviisi juures (s.o.  $x \rightarrow a$ ) kehtivad nende funktsioonide kohta äärmised teoreemid.

I. Funktsioonide algebraalse summa piirväärtus võrdub liidetavate funktsioonide piirväärtuste summaga:

$$\lim (u \pm v) = \lim u \pm \lim v = U \pm V.$$

(Lihtsuse mõttes jätame  $x \rightarrow a$  kirjutamata.)

Tõestame väite summa kohta. Selleks näitame, et

$$|(u + v) - (U + V)|$$

võib vaadeldavas piirprotsessis saada väiksemaks kui tahes väikesest arvust  $\varepsilon > 0$ . Tõepoolest

$$|(u + v) - (U + V)| = |(u - U) + (v - V)| \leq |u - U| + |v - V|.$$

Eelduste ( $\varepsilon$ ) tõttu  $|u - U|$  ja  $|v - V|$  võivad saada kuitahes väikesteks, seega väiksemaks ka kui  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Kuid siis

$$|(u + v) - (U + V)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

millega väide on tõestatud.

Analoogiliselt saab väidet tõestada vahe kohta.

Teoreem on kergesti üldistatav enam kui kahe liidetava juhule.

II. Funktsioonide korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega:

$$\lim (uv) = \lim u \cdot \lim v = UV.$$

Tõestuseks teisendame avaldist  $|uv - UV|$  järgmiselt:

$$\begin{aligned} |uv - UV| &= |(u - U)(v - V) + uV + vU - UV - UV| = \\ &= |(u - U)(v - V) + (u - U)V + (v - V)U| \leq \\ &\leq |u - U| \cdot |v - V| + |u - U| \cdot |V| + |v - V| \cdot |U|. \end{aligned}$$

Et kehtiks võrratus

$$|uv - UV| < \varepsilon,$$

nõuame, et

$$|u - U| < \frac{\varepsilon}{3A} \quad \text{ja} \quad |v - V| < \frac{\varepsilon}{3A},$$

kus  $A$  on suurim arvudest  $|U|$ ,  $|V|$  ja  $1$ . Siis ülalosaadud tulemuse põhjal

$$|uv - UV| < \frac{\varepsilon^2}{9A^2} + \frac{\varepsilon|V|}{3A} + \frac{\varepsilon|U|}{3A} < \frac{\varepsilon^2}{9A^2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

kui  $\varepsilon < 3A^2$ , mis on alati võimalik. Sellega on väide tõestatud.

Järeldus. Jääva teguri võib tuua piirväärtuse märgi alt selle ette, sest kui  $c = \text{const}$ , siis  $\lim c = c$  ja seega

$$\lim (cu) = \lim c \cdot \lim u = c \lim u.$$

Teoreem on kehtiv ka, kui tegureid on enam kui kaks (kuid lõplik arv).

III. Jagatise piirväärtus võrdub jagatava ja jagaja piirväärtuste jagatisega, kui jagaja piirväärtus ei ole null:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{U}{V}, \quad \text{kui } V \neq 0.$$

Tõestuseks näitame esmalt, et

$$\lim \frac{1}{v} = \frac{1}{\lim v} = \frac{1}{V}$$

$$\left| \frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right| = \frac{|v - V|}{|v| \cdot |V|} = \frac{|v - V|}{|v - V + V| \cdot |V|} \leq \frac{|v - V|}{(|V| - |v - V|) \cdot |V|},$$

sest  $|v - V + V| = |V + (v - V)| \geq |V| - |v - V|$ .

Saadud murd saab väiksemaks etteantud arvust  $\varepsilon$ , kui võtta

$$|v - V| < \varepsilon [ |V| - |v - V| ] \cdot |V|.$$

Sellest võrratusest saame, et

$$|v - V| < \varepsilon \cdot v^2 - \varepsilon \cdot |v - V| \cdot |V|$$

ehk

$$|v - V| + \varepsilon \cdot |v - V| \cdot |V| < \varepsilon \cdot v^2,$$

millest

$$|v - V| < \frac{\varepsilon \cdot v^2}{1 + \varepsilon \cdot |V|}.$$

Kui  $V \neq 0$ , siis viimast võrratust saab rahuldada iga  $\varepsilon > 0$  puhul. Lugesdes võrratusi altpoolt ülespoole, saame lõpuks, et

$$\left| \frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right| < \varepsilon.$$

Sellega on tõestatud, et  $\lim \frac{1}{v} = \frac{1}{\lim v}$ . Rakendades seda tulemust ja teoreemi 2, saame

$$\begin{aligned} \lim \frac{u}{v} &= \lim \left( u \cdot \frac{1}{v} \right) = \lim u \cdot \lim \frac{1}{v} = \lim u \cdot \frac{1}{\lim v} = \\ &= \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{U}{V}. \end{aligned}$$

2. Kahe funktsiooniga tõkestatud funktsiooni piirväärtus.

Kui mingi vahemiku igas punktis funktsioonide  $u(x)$ ,  $f(x)$  ja  $v(x)$  väärtused on sellised, et

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x),$$

ja sellesse vahemikku kuuluvas punktis  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = A,$$

siis ka

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Tõestus. Et eelduse järgi

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x),$$

siis ka

$$u(x) - A \leq f(x) - A \leq v(x) - A \quad \dots\dots\dots (*).$$

Et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$  ja  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = A$ , siis küllalt väikese

$|x - a|$  korral  $|u(x) - A| < \varepsilon$  ja  $|v(x) - A| < \varepsilon$ , olgu  $\varepsilon$  kuitahes väike. Sellest nähtub, et

$$-\varepsilon < u(x) - A \quad \text{ja} \quad v(x) - A < \varepsilon.$$

Kasutades viimaseid võrratusi, saame võrratuseid (\*) anda nüüd kujul

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$$

ehk

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

millega väide on tõestatud.

3. Näiteid piirväärtuste arvutamisest. Eelmiste teoreemide rakendustena vaatleme järgmisi näiteid.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} x =$$

$= a \cdot a \dots a = a^n.$   $\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ tegurit}}$

Siin kasutasime teoreemi korrutise piirväärtustest.

$$2) \lim_{x \rightarrow k} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + fx + g) = \lim_{x \rightarrow k} (ax^n) + \lim_{x \rightarrow k} (bx^{n-1}) +$$

$\dots + \lim_{x \rightarrow k} (fx) + \lim_{x \rightarrow k} g = a \lim_{x \rightarrow k} x^n + b \lim_{x \rightarrow k} x^{n-1} + \dots$

$$+ f \lim_{x \rightarrow k} x + \lim_{x \rightarrow k} g = ak^n + bk^{n-1} + \dots + fk + g.$$

Siin kasutasime teoreemi summa ja korrutise piirväärtuse kohta ja eelmise näite tulemust. Näite 2 tulemust on kasulik meeles pidada järgmise teoreemina:

polünoomi piirväärtus  $x$  lähenemisel arvule  $a$  võrdub polünoomi väärtusega  $x$ -i väärtusel  $a$ .

Näiteks  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 4x^2 + 2x - 9) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 9 = -10.$

3) Leiame  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ . Siin nimetaja piirväärtus on 0, kui

$x \rightarrow 3$ , mistõttu ei saa kasutada teoreemi jagatise piirväärtusest. Lahutades lugeja teguriteks, näeme, et murdu saab taandada  $x - 3$ -ga, mis on lubatav, sest kui  $x$  läheneb 3-le, siis  $x - 3 \neq 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$$

4) Leiame  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{2x - 1}$ . Siin ei saa rakendada teoreemi jagatise piirväärtusest, sest nii jagataval kui ka jagajal (lõplik) piirväärtus puudub. Piirväärtuse leidmiseks jagame lugeja ja nimetaja enne  $x$ -ga ja siis rakendame teoreemi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x})} = \frac{4}{2} = 2.$$

5) Leiame  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$ . Selleks joonestame ühikringis kesknurga  $\angle AOB = x$ , kus  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , külge AB ja siinuslõigu DB (joon. 9). Siis DB =  $\sin x$  ja  $\widehat{AB} = x$ , sest raadius on 1. Et siinuslõik on väiksem küljest AB, kaar AB aga küljest pikem, siis

$$0 < \sin x < x.$$

Kui  $x \rightarrow 0$ , siis punktis 2 toodud teoreemi järgi ka  $\sin x \rightarrow 0$ . Sama tulemuse saaksime, kui oleks  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . Seega alati

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

6) Leiame  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ . Et  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , siis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin^2 \frac{x}{2}) = \\ &= 1 - 2 \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 1 - 2 \cdot 0 = 1, \end{aligned}$$

sest kui  $x \rightarrow 0$ , siis ka  $\frac{x}{2} \rightarrow 0$ .

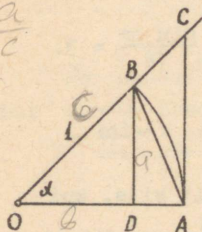
## § 4. Mõned tähtsad piirväärtused

1. Funktsiooni  $\frac{\sin x}{x}$  piirväärtus, kui  $x \rightarrow 0$ . Leiame

piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Et teoreem jagatise piirväärtusest pole rakendatav (miks?), siis proovime sulgeda  $\frac{\sin x}{x}$  kahe tükke vahel ja rakendada teoreemi 2 eelmisest paragrahvist. Selleks joonestame ühikringis kesknurga  $\angle AOB = x$ , kus  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , kõõlu AB, siinuslõigu DB ja tangenslõigu AC (joon. 9). Et



Joon. 9.

$\Delta AOB$  pindala < sektori  $AOB$  pindala <  $\Delta AOC$  pindala ja  $DB = \sin x$ ,  $\widehat{AB} = x$ ,  $AC = \tan x$  (sest  $OA = 1$ ), siis

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2},$$

millest järeldub, et

$$\sin x < x < \tan x. \quad (\&)$$

Tulemusel on lihtne geomeetriline tähendus:

lõik  $BD <$  kaar  $AB <$  lõik  $AC$ .

Jagades võrratuste (&) pooled  $\sin x$ -ga ja võttes tulemuste pöördväärtused, saame:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ehk

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Kui  $x \rightarrow 0$ , siis  $\cos x \rightarrow 1$  ja eelmise paragrahvi pt. 2 järgi ka  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ . Seega väide on õige, kui  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

Näitame, et väide on õige ka siis, kui  $x$  on negatiivne.

Sel juhul  $x = -|x|$  ja

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-|x|)}{-|x|} = \frac{-\sin|x|}{-|x|} = \frac{\sin|x|}{|x|}$$

Tulemusest nähtub, et ka negatiivse  $x$  korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tulemust saab kasutada mitmete teiste piirväärtuste leidmisel:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

2. Funktsiooni  $(1 + \frac{1}{x})^x$  piirväärtus, kui  $x \rightarrow \infty$ .

Funktsioon  $(1 + \frac{1}{x})^x$  on defineeritud ainult siis, kui  $1 + \frac{1}{x} > 0$  ehk  $\frac{1}{x} > -1$ , s.t.  $-1 < \frac{1}{x} < 0$  või  $\frac{1}{x} > 0$ , nii et

$$x < -1 \quad \text{või} \quad x > 0.$$

Kui  $x > 0$  on täisarv  $n$ , siis (§1, pt. 6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Olgu nüüd  $x$  murdarv  $n < x < n + 1$ . Siis

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n},$$

seega

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

sest arvust 1 suurema arvu astendamisel suuremale astendajale vastab suurem aste. Tähistades keskmist avaldist neis võrratustes sümboliga  $f(x)$ , saame need võrratused kirjutada kujul

$$\frac{f(n+1)}{1 + \frac{1}{n+1}} < f(x) < f(n) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (*)$$

Kui  $x \rightarrow +\infty$ , siis ka  $n \rightarrow +\infty$  ja  $n + 1 \rightarrow +\infty$ , seega  $f(n+1) \rightarrow e$ ,  $1 + \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ ,  $f(n) \rightarrow e$ ,  $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$  ja võrratuste (\*) vasak ning parem pool lähenevad ühele ja samale arvule  $e$ . Teoreemi (§3, 2) järgi siis ka  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$ .

Kui  $x < -1$ , nii et  $x = -|x|$ , siis

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1 + \frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|}$$

ehk

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right).$$

Kui  $x \rightarrow -\infty$ , siis  $|x|-1 \rightarrow +\infty$  ja viimane korrutis läheneb arvule  $e \cdot 1 = e$ . Niisiis alati

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Kui saadud valemis teha asendus  $x = \frac{1}{u}$ , siis  $x \rightarrow \infty$  puhul  $u \rightarrow 0$ . Seega saame piirväärtuse

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(1 + u\right)^{\frac{1}{u}} = e.$$

3. Lõpmatult vähenevad suurused. Funktsiooni  $y = y(x)$ , mille piirväärtus  $x \rightarrow a$  või  $x \rightarrow \infty$  puhul on null, nimetatakse lõpmatult vähenevaks suuruseks selles piirprotsessis.

Näiteks  $y = (x-5)^2$ , kui  $x \rightarrow 5$ , on lõpmatult vähenev suurus. Niisamuti on seda  $\sin x$ , kui  $x \rightarrow 0$ ;  $\cos x$ , kui  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  jne.

Teoreem. Kui  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , siis funktsiooni  $f(x)$  saab avaldada kujul  $f(x) = A + \alpha(x)$ , kus  $\alpha(x)$  on  $x \rightarrow a$  puhul lõpmatult vähenev suurus, ja ümberpöörduvalt: kui  $f(x) = A + \alpha(x)$ , kus  $A$  on konstantne ja  $\alpha(x)$  on  $x \rightarrow a$  puhul lõpmatult vähenev suurus, siis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

Tõestus. 1) Kui  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , siis summa piirväärtuse

teoreemi põhjal

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - A] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - A = A - A = 0,$$

seega  $f(x) - A$  on mingi lõpmatult vähenev suurus  $\alpha(x)$  ja  $f(x) = A + \alpha(x)$ .

2) Kui  $f(x) = A + \alpha(x)$ , siis  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [A + \alpha(x)] = A + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = A + 0 = A$ .

Lõpmatult vähenevaid suurusi võrreldakse nende väiksusejärgu järgi, nimelt järgmise reegli kohaselt (mis sisult on definitsioon):

Kui  $\alpha$  ja  $\beta$  on antud piirprotsessis lõpmatult vähenevad suurused ja eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = A,$$

siis

1)  $A = 0$  puhul  $\beta$  loetakse kõrgemat järku lõpmatult vähenevaks suuruseks võrreldes  $\alpha$ -ga;

2)  $A \neq 0$  puhul  $\beta$  ja  $\alpha$  loetakse sama järku lõpmatult vähenevateks suurusteks;

2') erijuhtumil  $A = 1$  nimetatakse  $\alpha$  ja  $\beta$  ekvivalentseteks lõpmatult vähenevateks suurusteks.

Igas piirprotsessis võib lõpmatult väheneva suuruse asendada temaga selles protsessis ekvivalentse lõpmatult väheneva suurusega.

Näiteid: 1)  $\sin x$  ja  $x$  on  $x \rightarrow 0$  puhul ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused, sest

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

2)  $\sin 2x$  ja  $x$  on  $x \rightarrow 0$  puhul sama järku lõpmatult vähenevad suurused, sest

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

3) Et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$  (vt. §4, pt. 1, näide 2), siis

$1 - \cos x$  on  $x \rightarrow 0$  puhul kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus võrreldes  $x$ -ga.

## § 5. Funktsiooni pidevus

1. Funktsiooni pidevus punktis ja vahemikus. Definitsioon: funktsiooni  $f(x)$  nimetatakse antud punktis  $x = x_0$  pidevaks, kui tema väärtus selles punktis võrdub piirväärtusega  $x$ -i lähenemisel sellele punktile, s.t. kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Sellele pidevuse definitsioonile saab anda teise (praktiliselt kasulikuma) kuju. Selleks tähistame argumendi juurdekasvu  $x - x_0$  (mis võib olla positiivne või negatiivne) sümboliga  $\Delta x$  ja sellele vastavat funktsiooni  $y = f(x)$  juurdekasvu  $f(x) - f(x_0)$  sümboliga  $\Delta y$ :

$$x - x_0 = \Delta x, \quad f(x) - f(x_0) = \Delta y,$$

$$x = x_0 + \Delta x, \quad f(x) = f(x_0) + \Delta y.$$

Pidevuse definitsiooni saame kirjutada nüüd kujul

$$\lim_{\substack{x_0 + \Delta x \rightarrow x_0 \\ \text{ehk } \Delta x \rightarrow 0}} [f(x_0) + \Delta y] = f(x_0).$$

Rakendades teoreemi summa piirväärtusest, saame

$$f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = f(x_0)$$

ehk

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Ümberpöörduvalt, viimasest võrdusest järeldub ülalantud definitsioon. Tulemuse sõnastame järgmise pidevuse tunnusena:

funktsioon on antud punktis pidev, kui selles punktis argumendi juurdekasvu nullile lähenemisel ka funktsiooni juurdekasv läheneb nullile.

Tõestame seda tunnust kasutades, et  $y = x^3$  on igas punktis pidev. Siin

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] \Delta x.$$

Seega

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \\ = 3x^2 \cdot 0 = 0,$$

mis näitab, et  $x^3$  on argumendi igal väärtusel pidev.

Seda tulemust oleksime võinud ette öelda, sest varem nägime (vt. §3, pt. 2, näide 2), et polünoomi piirväärtus  $x$ -i lähenemisel  $x_0$ -le võrdub polünoomi väärtusega punktis  $x_0$ , s.t. polünoom on argumendi igal väärtusel pidev.

Kui funktsioon on pidev mingi vahemiku (piirkonna) igas punktis, siis nimetatakse teda pidevaks selles vahemikus (piirkonnas).<sup>1</sup> Näiteks ruutfunktsioon  $ax^2 + bx + c$  on pidev vahemikus  $-\infty < x < +\infty$ .

2. Funktsiooni katkevuskohad. Argumendi väärtusi, mille puhul funktsioon ei ole pidev, nimetatakse funktsiooni katkevuskohtadeks. Vaatleme kolme liiki katkevuskohti:

1) Kui eksisteerib  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , kuid see ei võrdu funktsiooni

väärtusega  $f(x_0)$ , siis katkevuskohta nimetatakse kõrvaldatavaks (sest funktsiooni definitsiooni muutmisega saab selle katkevuse kõrvaldada).

Näiteks funktsioonil  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  on kohal  $x = 1$  kõrvaldatav katkevuskoht:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2,$$

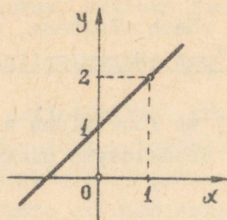
kuid  $f(1)$  puudub (sest funktsioon pole defineeritud selles punktis). Täiendades funktsiooni definitsiooni kujul

$$f(x) = 2, \text{ kui } x = 1,$$

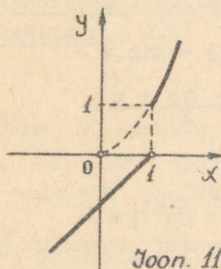
saame pideva funktsiooni.

Antud kujul funktsiooni graafikuks on sirge  $y = x + 1$ , millest on kõrvaldatud punkt  $(1; 2)$  (joon. 10).

2) Kui kohal  $x_0$  eksisteerivad vasakpoolne ja parempoolne piirväärtus, kuid need pole võrdsed, siis funktsioon pole kohal  $x_0$  pidev. (sest  $\lim f(x)$  puudub):



Joon. 10.



Joon. 11.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Seda katkevuskohhta nimetatakse funktsiooni hüppekohaks. Näiteks funktsioonil

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x < 1 \\ x^2, & \text{kui } x \geq 1 \end{cases}$$

on kohal  $x = 1$  hüppekoht (joon. 11).

3) Kui  $x \rightarrow x_0$  puhul funktsiooni  $f(x)$  absoluutväärtus kasvab tõkestamatult, siis  $x = x_0$  on funktsiooni lõpmatusekoht (joonised 6, 7 ja 8).

3. Pidevate funktsioonide summa, korrutise, jagatise ja liitfunktsiooni pidevus. Kui funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  on mingis piirkonnas, näiteks vahemikus  $a < x < b$  pidevad, siis selles piirkonnas on pidevad ka

1) nende summa  $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ ,

2) nende korrutis  $\psi(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,

3) nende jagatis  $\chi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , välja arvatud punktid, kus  $g(x) = 0$ ;

4) neist moodustatud liitfunktsioon  $F(x) = f[g(x)]$ .

Neist väidetest esimesed kolm järelduvad kergesti teoreemidest summa, korrutise ja jagatise piirväärtuste kohta, kuna viimase väite võtame kasutusele tõestuseta.

Näiteks esimese väite tõestamiseks leiame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \\ &= f(x_0) + g(x_0) = \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Peale teoreemi summa piirväärtusest kasutasime eeldust, et  $f(x)$  ja  $g(x)$  on punktis  $x_0$  pidevad, s.t.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

4. Elementaarfunktsioonide pidevus. Saab tõestada, et iga elementaarne põhifunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas kõigis punktides.

Näitena sellest tõestusest tõestame, et funktsioon  $\sin x$  on pidev. Selleks rakendame tunnust: kui vaadeldavas punktis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

siis selles punktis on  $y = f(x)$  pidev.

Antud funktsiooni puhul

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Et } \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < \left| \frac{\Delta x}{2} \right| \quad \text{ja} \quad \left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leq 1,$$

siis

$$-2 \cdot \left| \frac{\Delta x}{2} \right| < 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) < 2 \left| \frac{\Delta x}{2} \right|$$

ehk

$$-|\Delta x| < \Delta y < |\Delta x|,$$

millest järeldub, et kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis ka  $\Delta y \rightarrow 0$ . See näitab, et  $\sin x$  on pidev  $x$ -i igal väärtusel.

Funktsiooni  $\sin x$  pidevusest järeldub kergesti  $\cos x$  pidevus (sest  $\cos x = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$ ) ja nende pidevusest omakorda  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  pidevus kõigis neis punktides, kus  $\cos x \neq 0$  ja  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$  pidevus kõigis neis punktides, kus  $\sin x \neq 0$ .

Elementaarsete põhifunktsioonide pidevusest järeldub elementaarfunktsiooni definitsiooni ja eelmises punktis toodud teoreemi põhjal, et

iga elementaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonnas kõigis punktides.

Näiteks  $f(x) = \ln \sin x$  on pidev kõigis punktides, kus  $\sin x > 0$ , s.o. vahemikes  $\dots, -2\pi < x < -\pi, 0 < x < \pi, 2\pi < x < 3\pi, \dots$  ehk vahemikes  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ , kus  $k$  on suvaline täisarv.

Punktides, kus elementaarfunktsioon pole defineeritud, on

ta katkev. Näiteks funktsioon

$$r(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

pole defineeritud, kui  $x^2 - 1 = 0$  ehk  $x = \pm 1$ . Neist  $x = -1$  on kõrvaldatav katkevuskoht ja  $x = 1$  on lõpmatusekoht.

Funktsiooni pidevusest mingis punktis  $x_0$  järeldub piirväärtuste arvutamiseks praktiline reegel:

kui funktsioon on pidev punktis  $x_0$ , siis tema piirväärtus  $x$ -i lähenemisel sellele punktile võrdub funktsiooni väärtusega punktis  $x_0$ , s.o.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

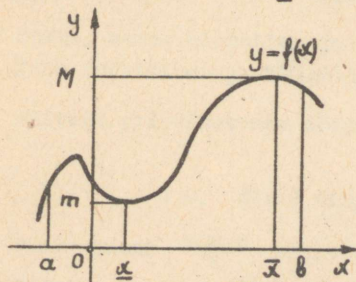
Edasi on soovitatav läbi töötada näited II, III, IV ja V (P-R, lk. 130 - 132) ja lahendada võimalikult palju ülesandeid arvujada ja funktsiooni piirväärtuse leidmisele.

### 5. Kinnises vahemikus pidevate funktsioonide omadusi. Kin-

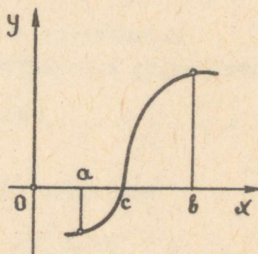
nises vahemikus  $a \leq x \leq b$  pideval funktsioonil  $f(x)$  on järgmised tähtsamad omadused.

1. Funktsioon  $f(x)$  on vahemikus  $a \leq x \leq b$  tõkestatud, s.t. leidub selline arv  $T > 0$ , et  $|f(x)| < T$ .

2. Funktsioonil  $f(x)$  leidub vahemikus  $a \leq x \leq b$  suurim väärtus  $M$  ja vähim väärtus  $m$ , s.t.  $m \leq f(x) \leq M$ , kusjuures leidub vähemalt üks punkt  $x = \bar{x}$  selline, et  $f(\bar{x}) = M$ , ja vähemalt üks punkt  $x = \underline{x}$  selline, et  $f(\underline{x}) = m$  (joon. 12).



Joon. 12.



Joon. 13.

Kui  $f(a) = f(b)$  ja  $f(x)$  on vahemikus  $a \leq x \leq b$  konstantne, siis  $M = m$ , nii et igas punktis  $f(x) = M = m$ .

3. Funktsioon  $f(x)$  omandab vahemikus  $a \leq x \leq b$  iga väärt-

tuse oma suurima väärtuse  $M$  ja vähima väärtuse  $m$  vahelt (kui  $M \neq m$ ). Graafiliselt tähendab see, et funktsiooni  $f(x)$  väärtused täidavad  $y$ -teljel lõigu punktide  $m$  ja  $M$  vahel (joon. 12).

4. Eelmisest omadusest järeldub, et kui funktsiooni  $f(x)$  väärtused vahemiku otspunktides on erinevate märkidega, näiteks  $f(a) < 0$  ja  $f(b) > 0$ , siis leidub vahemikus vähemalt üks punkt  $x = c$ , milles funktsiooni väärtus on 0:  $f(c) = 0$  (joon. 13).

Neid omadusi me ei tõesta.

P-R, näited VII ja VIII (lk. 134 - 136), üles. 648 -680.

## S i s u k o r d

Saateks . . . . .lk. 3

### § 1. Arvujada piirväärtus

1. Arvujada mõiste . . . . .	3
2. Kasvav jada ja kahanev jada . . . . .	5
3. Tõkestatud jada ja tõkestamata jada . . . . .	6
4. Arvujada piirväärtuse mõiste . . . . .	8
5. Monotoonse jada piirväärtuse olemasolu tunnus . . . . .	11
6. Arv e . . . . .	13
7. Naturaallogaritmid . . . . .	15

### § 2. Funktsiooni piirväärtus

1. Argumendi muutumisviisidest . . . . .	16
2. Funktsiooni piirväärtuse mõiste . . . . .	17
3. Ühepoolised piirväärtused . . . . .	21
4. Päratud piirväärtused . . . . .	22

### § 3. Põhiteoreemid piirväärtuste arvutamiseks

1. Summa, vahe, korrutise ja jagatise piirväärtus . . . . .	24
2. Kahe funktsiooniga tõkestatud funktsiooni piirväärtus . . . . .	26
3. Näiteid piirväärtuste arvutamisest . . . . .	27

### § 4. Mõned tähtsad piirväärtused

1. Funktsiooni $\frac{\sin x}{x}$ piirväärtus, kui $x \rightarrow 0$ . . . . .	29
2. Funktsiooni $(1 + \frac{1}{x})^x$ piirväärtus, kui $x \rightarrow \infty$ . . . . .	30
3. Lõpmatult vähenevad suurused . . . . .	31

## § 5. Funktsiooni pidevus

1. Funktsiooni pidevus punktis ja vahemikus . . . . .	33
2. Funktsiooni katkevuskohad . . . . .	34
3. Pidevate funktsioonide summa, korrutise, jagatise ja liitfunktsiooni pidevus . . . . .	35
4. Elementaarfunktsioonide pidevus . . . . .	36
5. Kinnises vahemikus pidevate funktsioonide omadusi .	37



Hind 8 kop.

A-28099

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00411136 7