Lehrbuch

der

Elementargeometrie.

Nach Lacroix

für den Schulgebrauch bearbeitet

von

Dr. Carl Hechel.

Erster Theil.

Planimetrie.

Bei *H. Schnakenburg.*

RIGA 1855.

Der Druck wird gestattet unter der Bedingung, dass nach Vollendung desselben die gesetzlich bestimmte Anzahl von Exemplaren dem Rigaschen Censur-Comité vorgestellt werde.

RIGA, den 24. August 1855.

Censor **C. Kästner.**

Vorwort.

Vorliegende Bearbeitung der Elementargeometrie nach Lacroix ist zunächst aus dem Bedürfnisse hervorgegangen, meinen eigenen für höhere Lehranstalten und Universitäten sich vorbereitenden Schülern einen geeigneten Leitfaden zur Wiederholung der vorgetragenen Sätze in die Hände zu geben. Da aber das Lehrbuch von Lacroix auch in sehr vielen Schulen dem Unterrichte in der Geometrie zu Grunde gelegt wird, bei allen Vortrefflichkeiten jedoch, die es darbietet, in mehr als einer Hinsicht den Anforderungen, welche der gegenwärtige Standpunkt der Schulbildung an ein mathematisches Lehrbuch zu machen berechtigt ist, nicht entsprechen kann; so hoffe ich, dass dieses Werkchen, bei dessen Abfassung ich sowol die Fortschritte der Wissenschaft zu berücksichtigen, als auch Klarheit mit Bündigkeit zu vereinigen gestrebt habe, keine unwillkommene Erscheinung zugleich in weiteren Kreisen sein werde. Die bedeutende Vervollkommnung der mathematischen Lehrmethode, welche durch die grosse Menge vortrefflicher, in den letzten Decennien erschienenen Schriften deutscher Mathematiker herbeigeführt worden ist, musste um so gewissenhafter benutzt werden, als gerade in dieser Beziehung die Geometrie von Lacroix manche begründete Ausstellungen gestattet, und ihre Darstellung nicht überall gleichermassen bündig und fasslich ist. Während die bisherigen Uebersetzungen derselben einen grössern Werth für die deutsche mathematische Litteratur überhaupt als für die Schule haben, indem sie den Text wortgetreu wiedergeben und nur in Anmerkungen auf Mängel und Unvollkommenheiten desselben aufmerksam machen, war es meine Absicht, hauptsächlich für die Bedürfnisse der Schule zu arbeiten, welcher Umstand eine freiere Bearbeitung des Originals mit vielfachen Abänderungen im Einzelnen nothwendig machte. Bei möglichst getreuer Beibehaltung des vorgezeichneten Systems erhielten viele Lehrsätze nicht nur eine präcisere und kürzere Form, sondern auch andere Beweise, welche für den Anfänger evidenter und fasslicher erschienen. An die Stelledes zu weilen breiten Räsonnements, bei welchem sich das eigentliche Ziel leicht aus dem Auge verliert, traten meist kurze Sätze und Bemerkungen. Die beständige Rücksicht endlich, die ich auf eine für die Schule ausreichende Vollständigkeit genommen habe, lässt mich hoffen, dass sachkundige Leser von dem, was das Lehrbuch von Lacroix enthält, in diesen wenigen Bogen mit etwaniger Ausnahme solcher Stellen desselben, die blosse Wiederholungen früherer Sätze bilden, nichts vermissen werden.

Der letzte Abschnitt der Stereometrie, welcher von den runden Körpern handelt, kann füglich als ein ganz neuer Entwurf angesehen werden, da derselbe durch die gleichzeitige Betrachtung des schiefen Kegels und des schiefen Cylinders, sowie insbesondere in der Lehre von der Kugel durch die Aufnahme einer ziemlichen Anzahl neuer Lehrsätze eine durchgreifende Aenderung und eine wesentliche Erweiterung erfahren hat. Dass ich hier an Reichaltigkeit des Stoffes weit über das Original hinausgegangen bin, hat seinen Grund zum Theil darin, dass sich die geometrischen Sätze in keinem andern Theile der Elementargeometrie so vielfach concentriren und beständig zur Sprache kommen, als bei der Betrachtung der Kugel, so dass sich dem Schüler, welcher bis zu diesem Schlusssteine der niedern Geometrie gelangt ist, eine treffliche Gelegenheit darbietet, die Lehren der Planimetrie uud der ersten Abschnitte der Stereometrie durch ihre stets sich wiederholende Anwendung in's Gedächtniss zurückzurufen.

RIGA im Juni 1855.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erklärung der Zeichen.

$=$	heisst	gleich.
$>$	"	grösser als.
$<$	"	kleiner als.
$\parallel$	"	parallel.
$\#$	"	gleich und parallel.
$\sim$	"	ähnlich.
$\cong$	"	congruent.
$\measuredangle$	"	Winkel.
$\perp$	"	senkrecht auf.
$\triangle$	"	Dreieck.

Allgemeine Begriffe von der Ausdehnung.

§ 1. Erklärungen.

1. Jeder nach allen Seiten hin vollständig begränzte Raum heisst ein geometrischer Körper. Dieser hat eine Ausdehnuug nach drei Richtungen oder Dimensionen, Länge, Breite und Höhe (Dicke, Tiefe).

Die Gränzen eines Körpers werden Flächen genannt. Die Fläche ist nur nach zwei Richtungen, nach Länge und Breite ausgedehnt.

Die Gränzen der Flächen heissen Linien, und diese sind nur nach einer einzigen Richtung, nach der Länge augedehnt.

Die Gränzen einer Linie heissen Punkte. Ein Punkt hat gar keine Ausdehnung, folglich auch keine Theile.

Linien, Flächen und Körper, welche die drei einzig möglichen räumlichen Gestalten sind, werden unter der allgemeinen Benennung der Raumgrössen zusammengefasst.

2. Kein Theil eines Körpers kann eine Fläche, kein Theil einer Fläche eine Linie und kein Theil einer Linie ein Punkt sein, so wie sich umgekehrt aus aneinander gereihten Punkten keine Linie, aus nebeneinander gelegten Linien keine Fläche, aus übereinander gelegten Flächen kein Körper sammensetzen lässt. Wol aber kann man sich eine Linie auch durch die Bewegung eines Punktes im Raume beschrieben denken, indem man die Linie gewissermassen als die Spur ansieht, welche der Punkt hinter sich zurücklässt, woraus zugleich folgt, dass, weil der Punkt gar keine Ausdehnung hat, die Linie nur nach einer Richtung, nämlich blos nach der Länge ausgedehnt ist. Ebenso kann man sich eine Fläche auch durch die Bewegung einer Linie, so wie endlich einen Körper durch die Bewegung einer Fläche entstanden denken, woraus sich zugleich ergiebt, dass die Fläche nur zwei, der Körper dagegen drei Dimensionen hat.

3. Die Linien werden in gerade und krumme eingetheilt. Eine gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten. Eine krumme Linie ist eine solche, von welcher kein noch so kleiner Theil gerade ist.

Es giebt nur eine Art gerader, aber unzählige Arten krummer Linien.

Zwischen zwei gegebenen Punkten ist nur eine einzige gerade Linie möglich. Deshalb können sich zwei gerade Linien nur in einem einzigen Punkte schneiden, und haben zwei gerade Linien zwei Punkte gemeinschaftlich, so müssen sie ganz zusammenfallen.

Die gerade Linie kann über jeden ihrer beiden Endpunkte hinaus in's Unendliche verlängert werden, ihre Verlängerung ist aber nur auf eine Art möglich.

4. Unter den verschiedenen Flächen bemerken wir zuerst die ebene Fläche oder die Ebene, in welcher sich nach jeder Richtung eine gerade Linie ziehen lässt, so dass also jede durch zwei in ihr angenommene Punkte gezogene gerade Linie ganz in dieselbe hineinfällt. Unter einer krummen Fläche versteht man dagegen eine solche, von welcher auch nicht der kleinste Theil eben ist.

Es leuchtet ein, dass es nur eine Art von Ebenen, dagegen unzählige Arten krummer Flächen geben könne.

5. Die blosse Betrachtung der Ebenen und aller der Linien-Verbindungen, welche sich in einer und derselben Ebene ausführen lassen, bildet die ebene Geometrie oder die Planimetrie, mit der wir uns hier beschäftigen werden.

I. Von den geraden Linien und den Winkeln.

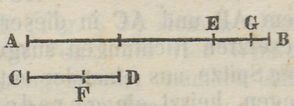
§ 2. Erklärungen.

1. Ausser der geraden Linie, welche schlechthin auch Gerade genannt wird, betrachtet man in der Elementargeometrie von den unendlich vielen krummen Linien nur eine, nämlich die Kreislinie, welche in einer Ebene liegt, und deren sämmtliche Punkte von einem in derselben Ebene befindlichen Punkte, welcher Mittelpunkt oder Centrum genannt wird, gleich weit entfernt sind. Die von dem Mittelpunkte bis zu beliebigen Punkten der Kreislinie gezogenen Geraden heissen Radien oder Halbmesser, und sind nach dem Vorhergehenden alle einander gleich. Unter Kreis versteht man den Theil der Ebene, welcher überall von der Kreislinie eingeschlossen ist, die mit Bezug auf ihn Peripherie oder Umfang heisst. Ein beliebiger Theil der Peripherie wird ein Kreisbogen genannt.

2. Eine gerade Linie messen heisst untersuchen wie oft in derselben eine andere, bekannte und als Einheit angenommene Linie oder das sogenannte Mass enthalten ist. Wenn nun dieses Mass ein genau mehrmals darin enthaltener Theil ist, so dass es 2, 3, 4 . . . Mal genommen, jene Linie giebt, so nennt man dasselbe einen aliquoten Theil der letztern. Das gemeinschaftliche Mass zweier Linien ist ein aliquoter Theil sowol von der einen als von der andern Linie. Die Bestimmung des Zahlenverhältnisses zweier Linien besteht in der Untersuchung, wie oft die eine Linie oder ein aliquoter Theil derselben in der andern enthalten ist, und kommt also mit dem Verfahren überein, das gemeinschaftliche Mass beider Linien zu finden. Wenn zwei Linien ein gemeinschaftliches Mass besitzen, so nennt man sie commensurabel und ihr Verhältniss rational; besitzen sie aber kein gemeinschaftliches Mass, was der weit häufigere Fall ist, so heissen sie incommensurabel und ihr Verhältniss irrational.

§ 3. Aufgabe.

Das Verhältniss zwischen zwei gegebenen geraden Linien AB und CD in Zahlen zu finden.



Aufl. Man trage die kleinere Linie CD so oft es angeht auf die grössere AB, z. B. 2 Mal, so dass AE = 2CD ist, und es bleibe der Rest EB. Diesen Rest trage man auf die Linie CD so oft es angeht, z. B. ein Mal und es bleibe FD als Rest. Diesen zweiten Rest trage man auf den ersten EB so oft es angeht, z. B. ein Mal, und es bleibe der Rest GB. Endlich sei dieser Rest in FD genau 2 Mal enthalten. In diesem Falle ist GB das gem. Mass der Linien AB und CD, deren Zahlenverhältniss sich nun leicht angeben lässt. Es ist

$$FD = 2GB$$
$$EB = FD + GB = 3GB$$
$$CD = EB + FD = 5GB$$
$$AB = 2CD + EB = 13GB.$$

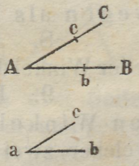
Da also GB in AB dreizehn, und in CD fünf Mal enthalten ist, so hat man

$$AB : CD = 13 : 5, \text{ folglich}$$
$$AB = {}^{13}/_{5}\, CD \text{ oder } CD = {}^{5}/_{13}\, AB.$$

Wären die Linien AB und CD incommensurabel, so könnte das Auftragen des jedesmaligen Restes auf den vorhergehenden ohne Ende fortgesetzt werden, ohne dass ein Aufgehen stattfände. Da aber durch wiederholtes Auftragen die Reste immer kleiner werden, so kann man endlich einen Rest ohne merklichen Fehler ganz vernachlässigen, und wenn man alsdann den zuletzt aufgetragenen Rest als gem. Mass der beiden Geraden annimmt, so erhält man ein genähertes Verhältniss zwischen denselben, welches desto genauer sein wird, je kleiner das Mass genommen ist.

Das hier gelehrte Verfahren ist in Bezug auf die Linien das nämliche, welches die Arithmetik lehrt, den gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen zu finden.

§ 4. Erklärungen.



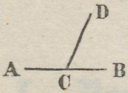
1 Der unbestimmte Flächenraum BAC, welcher zwischen zwei in einem Punkte A sich schneidenden Geraden von beliebiger Länge eingeschlossen ist, wird W i n k e l genannt. Die beiden Geraden, welche den Winkel bilden, heissen seine S c h e n k e l, und der Punkt, in welchem sich beide Linien schneiden, wird die S p i t z e oder der S c h e i t e l des Winkels genannt.

Zwei Winkel A und a sind g l e i c h, wenn sie auf einander gelegt sich völlig decken, d. h. wenn die Spitzen A und a, und die Schenkel auf einander fallen, ac auf AC, ab auf AB. Es ist hierbei nicht nöthig, dass die Schenkel einzeln genommen gleich lang sind; denn es ist klar, dass, wenn die Geraden AB und AC nur in den Theilen Ab und Ac ihrer Länge von ab und ac gedeckt werden, sie es auch weiterhin sein würden, wenn man die letzteren genugsam verlängerte.

2. Die gegenseitige Lage zweier geraden Linien hängt von dem Winkel ab, den sie mit einander bilden. Unter den sehr verschiedenen Lagen, welche die Linie AB gegen AC einnehmen kann, muss es auch eine solche geben, wo AB und AC in einer und derselben geraden Linie liegen, indem AB und AC in dieser Lage von A aus nach einander gerade entgegengesetzten Richtungen ausgehen. Ein solcher Winkel, dessen Schenkel von der Spitze aus einander entgegengesetzt in einer und derselben geraden Linie liegen, heisst ein *gerader und gestreckter Winkel.*

Alle gestreckten Winkel sind einander gleich, weil zwei gerade Linien in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen fallen müssen, sobald sie in einem Theile zusammen fallen.

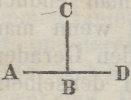
3. Zieht man aus einem beliebigen Punkte C einer geraden Linie AB eine beliebige Gerade CD, so heissen die beiden dadurch entstehenden Winkel ACD und BCD *Nebenwinkel* von einander. Es sind also Nebenwinkel zwei solche Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und deren beide andern Schenkel von der gemeinschaftlichen Spitze aus nach entgegengesetzten Seiten in einer und derselben geraden Linie liegen.



Die Summe jeder zwei Nebenwinkel ist offenbar einem gestreckten Winkel gleich.

4 Hieraus folgt, *dass, wenn zwei Winkel einander gleich sind, jederzeit auch ihre Nebenwinkel einander gleich sind.*

5. Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, wie ABC und DBC, so nennt man jeden derselben einen *rechten Winkel.* Es ist also ein rechter Winkel ein solcher, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist. Der Buchstabe R soll in der Folge immer einen rechten Winkel bezeichnen.



6. Da die Summe jeder zwei zusammen gehörenden Nebenwinkel gleich einem gestreckten Winkel ist, so ist nach der vorhergehenden Erklärung *jeder rechte Winkel die Hälfte eines gestreckten Winkels.*

7. Eine unmittelbare Folge davon ist, *dass alle rechten Winkel einander gleich sind*, weil sie die Hälften von gestreckten Winkeln sind, welche immer dieselbe Grösse haben.

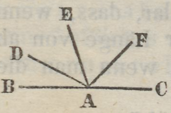
Der rechte Winkel wird seiner beständigen Grösse wegen als Mass aller übrigen Winkel gebraucht.

8. Jeder Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, wird ein *spitzer*, jeder Winkel dagegen, welcher grösser als ein rechter ist, ein *stumpfer* genannt.

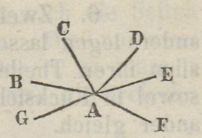
9. *Die Summe jeder zwei Nebenwinkel ist zwei rechten Winkeln gleich*, weil dieselbe einen gestreckten Winkel beträgt, welcher zwei rechten Winkeln gleich ist.

10. Wenn zwei gerade Linien einen rechten Winkel bilden, so sagt man, dass dieselben auf einander *senkrecht* oder *perpendikulär* seien.

11. Die Summe aller Winkel BAD, DAE, EAF, FAC, welche an einer und derselben Seite einer geraden Linie BC um einen auf derselben als Scheitel angenommenen Punkt A liegen, beträgt zwei Rechte, wie gross auch die Anzahl dieser Winkel sein mag.



12. Wenn von einem Punkte A aus nach allen Seiten hin gerade Linien AB, AC, AD . . . in beliebiger Anzahl ausgehen, so ist die Summe aller Winkel BAC, CAD, DAE . . . um den Punkt A herum jedesmal gleich vier Rechten.



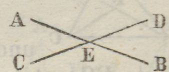
13. Wenn zwei gerade Linie AB und CD (Fig. § 5) sich in einem Punkte E durchschneiden, so bilden sie um diesen Punkt her vier Winkel, von denen je zwei am Scheitel einander entgegengesetzte, nämlich AEC und BED, AED und BEC, Scheitelwinkel genannt werden.

§ 5. Lehrsatz.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Bew. Um z. B. die Gleichheit der Scheitelwinkel AEC und BED zu beweisen, nehme man den Winkel AED, welcher sowol von AEC als BED der Nebenwinkel ist, zu Hilfe, und hat dann (§ 4, 9)

$$AEC + AED = 2\text{ R.}$$
$$BED + AED = 2\text{ R., also}$$
$$AEC + AED = BED + AED,$$



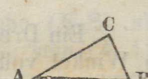
und wenn man auf beiden Seiten AED abzieht, $AEC = BED$.

II. Von den Dreiecken, den senkrechten und schiefen Linien.

§ 6. Erklärungen.

1. Keine Ebene kann durch eine geringere Anzahl gerader Linien als drei eingeschlossen werden. Die von drei geraden Linien vollständig begränzte Ebene wird ein ebenes Dreieck oder schlechtweg Dreieck genannt. In jedem Dreieck unterscheidet man sechs Stücke, nämlich drei Seiten und drei Winkel.

2 In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite. Denn da die gerade Linien AB die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Punkten A und B ist, so folgt dass die Summe der beiden andern Seiten AC und BC des Dreiecks grösser als AB ist.



3. Ein Dreieck heisst gleichseitig, wenn seine drei Seiten unter einander gleich sind; gleichschenklig, wenn nur zwei von seinen Seiten einander gleich sind; ungleichseitig, wenn keine Seite einer andern gleich ist.

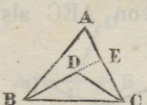
4. Man nennt ferner ein Dreieck rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel, stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel, und spitzwinklig, wenn es lauter spitze Winkel enthält.

5. In einem rechtwinkligem Dreieck heissen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten Katheten, die dritte, dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite wird Hypotenuse genannt.

6. Zwei Dreiecke heissen **congruent**, wenn sie sich so auf einander legen lassen, dass sie ganz mit einander zusammenfallen, oder in allen ihren Theilen sich vollständig decken. Solche Dreiecke sind natürlich sowol in Rücksicht auf die Grösse als in Rücksicht auf die Gestalt einander gleich.

§ 7. Lehrsatz.

Zieht man von irgend einem Punkte D *innerhalb eines Dreiecks* ABC *gerade Linien* DB, DC *nach den Endpunkten einer beliebigen Seite* BC *des Dreiecks, so ist immer die Summe derselben kleiner, als die Summe der sie umschliessenden Seiten des Dreiecks, also* $DB + DC < AB + AC$.



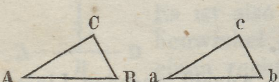
Bew. Verlängert man BD bis E, so ist (§ 6, 2)

$$ED + DB < AB + AE$$
$$DC < ED + EC, \text{ also}$$
$$ED + DB + DC < AB + AE + ED + EC,$$

und wenn man auf beiden Seiten ED abzieht und AC statt $AE + EC$ setzt, $DB + DC < AB + AC$.

§ 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.



Bew. Es sei $AB = ab$, $AC = ac$, $\measuredangle A = a$. Legt man $\triangle$ abc so auf $\triangle$ ABC, dass a auf A und ab auf AB zu liegen kommt, so fällt b auf B, weil $AB = ab$ ist. Da ferner $\measuredangle A = a$ ist, so fällt ac auf AC und wegen Gleichheit dieser Seiten c auf C. Da nun die Endpunkte der bc mit denen der BC zusammen fallen, so decken sich diese Seiten; folglich fallen beide Dreiecke mit allen ihren Gränzen auf einander und sind daher congruent.

§ 9. Zusatz.

Ein Dreieck ist durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt, weil zwei Dreiecke, wenn sie in diesen Stücken übereinstimmen, auch in allen übrigen gleich sind.

Eine ähnliche Bemerkung gilt für die übrigen Fälle, in welchen Dreiecke congruent sind (§ 10, § 13, § 25).

§ 10. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Bew. (Fig. § 8). Ist $AB = ab$, $\measuredangle A = a$, $\measuredangle B = b$, so lege man das $\triangle$ abc so anf ABC, dass die gleichen Seiten AB und ab sich decken. Dann werden wegen Gleichheit der Winkel A und a, B und b auch die Seiten AC und ac, BC und bc in ihren Richtungen zusammen fallen. Weil nun zwei gerade Linien sich nur in e i n e m Punkte schneiden können, so müssen auch die Punkte C und c auf einander zu liegen kommen, also die Dreiecke mit allen ihren Gränzen zusammen fallen.

§ 11. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, aber die von ihnen eingeschlossenen Winkel ungleich sind, so steht dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber. Wenn also $AB = ab$, $BC = bc$, $\measuredangle ABC > b$, so ist $AC > ac$.

Bew. Wenn man das $\triangle$ abc so auf das $\triangle$ ABC legt, dass die gleichen Seiten AB und ab sich decken, so kann der Punkt c entweder auf die Seite AC, oder innerhalb des Dreiecks ABC oder ausserhalb desselben fallen.

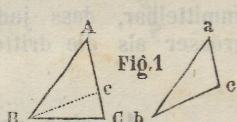


Fig. 1

1. Im ersten Falle ist Ac nur ein Theil von AC, also $AC > Ac$ oder ac.

2. Im zweiten Falle hat man (§ 7)

$$AC + CB > Ac + cB,$$

und weil $CB = cB$, so ist $AC > Ac$ oder ac.

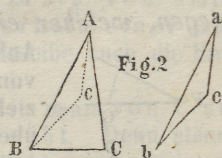


Fig. 2

3. Im dritten Falle ist

$$AD + Dc > Ac$$
$$BD + DC > BC, \text{ also}$$
$$AD + Dc + BD + DC > Ac + BC \text{ oder}$$
$$AC + Bc > Ac + BC,$$

und weil $Bc = BC$, so ist $AC > Ac$ oder ac.

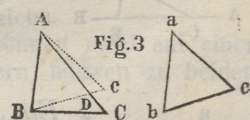


Fig. 3

§ 12. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so steht der grössern Seite auch der grössere Winkel gegenüber. Wenn also (Fig. § 11) $AB = ab$, $BC = bc$, $AC > ac$, so ist $\measuredangle B > b$.

Bew. Wäre $\measuredangle B = b$, so müsste $\triangle ABC \cong abc$ (§ 8), also auch $AC = ac$ sein, und wäre $\measuredangle B < b$, so würde $AC < ac$ sein (§ 11). Da beides gegen die Voraussetzung streitet, so kann nur $B > b$ sein.

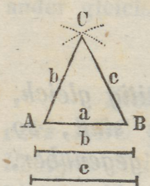
§ 13. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Bew. (Fig. § 8). Wenn $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$ ist, so müssen auch die Winkel des einen Dreiecks denen des andern gleich sein. Denn wäre z. B. $a < A$, so müsste auch $bc < BC$ sein (§ 11), was der Voraussetzung widerspricht. Die beiden Dreiecke sind daher nach § 8 oder § 10 einander congruent.

§ 14. Aufgabe.

Mit drei gegebenen Linien a, b, c *als Seiten ein Dreieck zu beschreiben.*

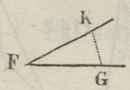


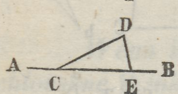
Aufl. Man beschreibe mit b und c als Radien aus den Endpunkten A und B der Linie a zwei Kreise, die sich im Punkte C schneiden. Zieht man nun AC und BC, so ist ABC das verlangte Dreieck, indem seine drei Seiten einzeln den drei gegebenen Linien gleich sind.

Anmerk. Aus dem Satze (§ 6, 2), dass in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite ist, folgt unmittelbar, dass jede zwei der gegebenen Linien zusammengenommen grösser als die dritte sein müssen, wenn die Auflösung möglich sein soll.

§ 15. Aufgabe.

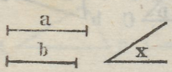
An eine gerade Linie AB *im Punkte* C *einen Winkel anzulegen, welcher einem gegebenen Winkel* F *gleich ist.*



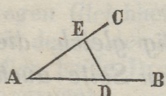


Aufl. Auf den Schenkeln des Winkels F schneide man von der Spitze aus die beliebigen Stücke FG, FK ab, ziehe GK, nehme CE = FG und beschreibe nach § 14 über CE ein $\triangle$ CDE, welches mit dem $\triangle$ FKG gleichseitig ist. Da nun diese Dreiecke congruent sind (§ 13), so ist $\measuredangle$ DCE = F.

§ 16. Aufgabe.



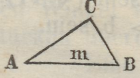
Ein Dreieck zu construiren, zu welchem zwei Seiten a, b *und der eingeschlossene Winkel* x *gegeben sind.*

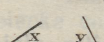


Aufl. Man lege an die unbestimmte Gerade AB einen $\measuredangle$ CAB = x an, mache AD = a, AE = b und ziehe DE, so ist ADE das verlangte Dreieck.

§ 17. Aufgabe.

Ein Dreieck zu construiren, zu welchem eine Seite m *und die beiden anliegenden Winkel* x, y *gegeben sind.*



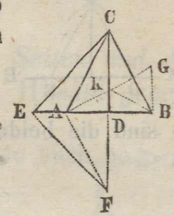


Aufl. Man lege an die Linie m in ihren Endpunkten A und B den Winkel A = x und den Winkel B = y an. Die verlängerten Schenkel dieser Winkel schneiden sich in C, so dass ein Dreieck ABC entsteht, welches den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet.

§ 18. Lehrsatz.

Wenn man von einem beliebigen Punkte C *der auf* AB *senkrechten Geraden* CD *verschiedene schiefe Linien* CB, CA, CE...

zieht, so sind die schiefen Linien CA, CB, *welche gleich weit vom Fusspunkte* D *der Senkrechten abstehen, einander gleich; und von zwei schiefen Linien* CA, CE *ist diejenige die grössere, welche sich weiter von der Senkrechten entfernt.*



Bew. Wenn $AD = BD$, so ist $\triangle ACD \cong BCD$ (§ 8), folglich $CA = CB$. — Wenn man ferner CD um $DF = CD$ verlängert, FA und FE zieht, so ist (§ 7)

$$CE + FE > CA + FA.$$

Da nun $\triangle CAD \cong FAD$ und $\triangle CED \cong FED$ (§ 8), also $CA = FA$ und $CE = FE$ ist, so folgt daraus

$$2CE > 2CA, \text{ oder } CE > CA.$$

§ 19. Zusätze.

1. Die Senkrechte CD ist die kürzeste von allen Linien, die man von einem Punkte C ausserhalb einer Geraden AB nach dieser ziehen kann, weshalb dieselbe auch die Entfernung des Punktes C von der Linie AB genannt wird.

2. Ist die Linie CD die kürzeste, die man von C auf AB ziehen kann, so steht sie auf AB senkrecht. Denn stände auf AB eine andere aus C gezogene Linie CA senkrecht, so würde sie kleiner als CD sein, was der Voraussetzung widerspricht.

3. Zwei einander gleiche schiefe Linien können nicht auf einer und derselben Seite der Senkrechten liegen, sondern müssen zu beiden Seiten von ihr gleich weit entfernt sein.

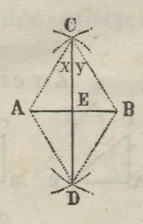
4. Jeder Punkt der Senkrechten hat eine gleiche Entfernung von den Punkten A und B, welche gleich weit von ihrem Fusspunkte D abstehen.

5. Jeder ausserhalb der Senkrechten angenommene Punkt G ist von den Punkten A und B ungleich entfernt. Denn weil $BG < BK + GK$ und $BK = AK$, so ist $BG < AG$.

6. Von einem Punkte lassen sich nicht drei gleich lange Linien nach einer Geraden ziehen.

§ 20. Aufgabe.

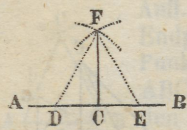
Eine gegebene gerade Linie AB *durch eine Senkrechte zu halbiren.*



Aufl. Aus den Punkten A und B beschreibe man zwei Kreisbogen mit einerlei Halbmesser, der so gross ist, dass sich jene Bogen in C und D schneiden, und ziehe CD, so ist diese Gerade die verlangte Senkrechte. Denn $\triangle ACD \cong BCD$ (§ 13), also $x = y$. Weil nun $\triangle ACE \cong BCE$ (§ 8), so ist $AE = BE$ und $\measuredangle AEC = BEC$, also CE auf AB in ihrer Mitte senkrecht.

§. 21. Aufgabe.

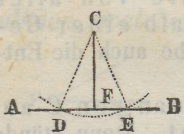
Aus einem gegebenen Punkte C einer Geraden AB eine Senkrechte auf diese zu errichten.



Aufl. Man nehme auf AB zu beiden Seiten des Punktes C die gleichen Entfernungen CD und CE, beschreibe aus D und E mit gleichem Halbmesser zwei Kreisbogen, welche sich in F schneiden, und ziehe FC, so ist diese die verlangte Senkrechte. Denn weil $\triangle$ CDF $\cong$ CEF (§ 13), so sind die beiden Winkel bei C einander gleich, also rechte.

§ 22. Aufgabe.

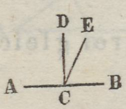
Von einem gegebenen Punkte C ausserhalb einer Geraden AB eine Senkrechte auf diese zu fällen.



Aufl. Aus C beschreibe man einen Kreis mit einem beliebigen Halbmesser, welcher gross genug ist, dass der Kreis die AB in zwei Punkten D und E schneidet, halbire DE in F (§ 20), und ziehe CF, so ist diese die verlangte Senkrechte. Denn weil $\triangle$ CDF $\cong$ CEF (§ 13), also die Winkel bei F einander gleich sind, so sind dieselben rechte, folglich CF auf AB senkrecht.

§ 23. Lehrsatz.

Durch einen Punkt, welcher ausserhalb einer geraden Linie oder in derselben liegt, lässt sich nur eine einzige Senkrechte auf letztere ziehen.

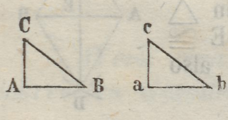


Bew. Von einem ausserhalb der Geraden AB liegenden Punkte D lässt sich nur eine einzige Senkrechte DC auf AB fällen, weil von allen aus D nach AB ziehbaren Linien die Senkrechte die kürzeste ist (§ 19, 1), und nur eine einzige Linie von allen die kürzeste sein kann.

Würden sich ferner durch einen in der Linie AB liegenden Punkt C zwei Senkrechte CD und CE auf AB errichten lassen, so wäre ACD = R, und ACE = R, also ACD = ACE, was unmöglich ist, da ACD nur einen Theil von ACE ausmacht.

§ 24. Zusatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen die Hypotenuse und ein derselben anliegender Winkel gegenseitig gleich sind. Ist nämlich $\sphericalangle$ A = R = a, BC = bc, B = b, und legt man $\triangle$ abc so auf $\triangle$ ABC, dass Punkt b

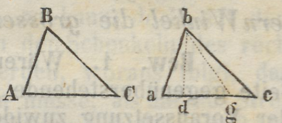


auf B, Punkt c auf C, und ba in die Richtung von BA fällt, so muss auch ca auf CA zu liegen kommen, so dass folglich beide Dreiecke sich vollkommen decken. Denn wenn die Seite ca, deren Endpunkt c in C liegt, nicht auf CA fiele, so gäbe es zwei von dem Punkte C auf die Linie AB gezogene Senkrechte, was nicht möglich ist (§ 23).

§ 25. Lehrsatz.

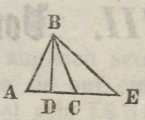
Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der der grösseren von diesen Seiten gegenüberliegende Winkel gegenseitig gleich sind.

Bew. Es sei $AB = ab$, $BC = bc$, $BC > AB$, also auch $bc > ab$, endlich $\measuredangle A = a$. Legt man das $\triangle ABC$ so auf $\triangle abc$, dass die Schenkel der gleichen Winkel A und a auf einander zu liegen kommen, so muss die Spitze A auf a, und B auf b fallen. Nähme man nun an, dass $\measuredangle B < b$ ist und demnach BC innerhalb des Dreiecks abc etwa in der Richtung bg fiele, so wäre $\triangle ABC \cong abg$ (§ 10), also $BC = bg$, woraus folgt, dass $bc = bg$, da diese beiden Geraden gleich BC sind. Dies ist aber nicht möglich; denn fällt man die Senkrechte bd, so sieht man, dass $bg < bc$ sein müsse (§ 18). Da man eben so zeigen kann, dass $\measuredangle B$ nicht grösser als b ist, so muss er ihm gleich, folglich $\triangle ABC \cong abc$ sein (§ 8).



§ 26. Anmerkung.

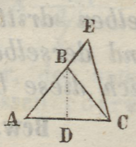
Aus der Gleichheit zweier Seiten und des der kleinern von beiden gegenüberliegenden Winkels lässt sich nicht mit Sicherheit auf die Congruenz zweier Dreiecke schliessen, indem es zwei Dreiecke geben kann, in welchen diese Bedingungen erfüllt sind, ohne dass sie dabei congruent wären. Zieht man nämlich von einem Punkte B der auf AE senkrechten BD nach den gleich weit von D abstehenden Punkten A und C, so wie auch einem entferntern Punkte E die Geraden BA, BC, BE, so ist $BA = BC$ und $BE > BA$ oder BC (§ 18), und die Dreiecke ABE und CBE sind offenbar nicht congruent, obschon in ihnen $AB = CB$, $EB = EB$, $\measuredangle AEB = CEB$ ist, also zwei Seiten und der der kleinern Seite gegenüberliegende Winkel gleich sind.



§ 27. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich, und 2), wenn die Seiten ungleich sind, so steht der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber.

Bew. Wenn in dem $\triangle ABC$ die Seite $AB = BC$ ist, und man sich von B nach der Mitte von AC die Linie BD gezogen denkt, so ist $\triangle ABD \cong CBD$ (§ 13), mithin $\measuredangle A = ACB$.



2. Wenn im $\triangle$ ACE die Seite AE $>$ CE ist, so ist auch Winkel ACE $>$ A. Denn errichtet man aus der Mitte von AC die Senkrechte DB, so ist klar, dass der Punkt E ausserhalb dieser Senkrechten nach der Seite desjenigen Endpunktes von AC liegen muss, dem er am nächsten ist (§ 19, 5). Zieht man nun BC, so ist im $\triangle$ ABC die Seite AB $=$ BC (§ 18), also $\measuredangle$ ACB $=$ A, mithin $\measuredangle$ ACE $>$ A.

§ 28. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch die beiden diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich und 2), wenn die Winkel ungleich sind, so steht dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber.

Bew. 1. Wären die Seiten ungleich, so müsste der der grössern Seite gegenüberstehende Winkel grösser als der andere sein (§ 27), was der Voraussetzung zuwider ist.

2. (Fig. § 27). Wenn $\measuredangle$ A $<$ ACE, so ist CE $<$ AE. Denn wäre CE $=$ AE, so müsste A $=$ ACE sein, und wäre CE $>$ AE, so würde A $>$ ACE sein (§ 27). Beides widerspricht der Voraussetzung; also kann CE nur kleiner als AE sein.

§. 29. Zusätze.

1. In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel einander gleich (§ 27).

2. Wenn in einem Dreiecke alle Winkel einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichseitig (§ 28).

III. Von den Parallellinien, den proportionalen Linien und den ähnlichen Dreiecken.

§ 30. Erklärung.

Zwei gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und sich niemals schneiden, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag, werden Parallellinien genannt.

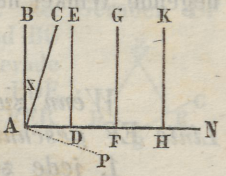
§ 31. Lehrsatz.

Stehen zwei Linien zugleich senkrecht auf einer und derselben dritten Linie, so sind sie parallel; und steht auf einer und derselben Linie eine senkrechte und eine schiefe Linie, so müssen sich diese beiden Linien gehörig verlängert schneiden.

Bew. Würden zwei auf einer dritten Linie senkrecht stehende

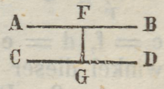
Linien einander schneiden, so könnte man von ihrem Durchschnittspunkte zwei Senkrechte auf jene dritte Linie fällen, was unmöglich ist (§ 23).

Was den zweiten Theil des Lehrsatzes betrifft, so sei auf die beliebig weit verlängerte AN die Linie AB senkrecht und die Linie AC schief gezogen. Der Winkel x kann so viel Mal an einander gelegt werden, dass ein Winkel wie etwa BAP entsteht, welcher über den rechten Winkel BAN hinausgeht. Wenn man nun auf die AN die gleichen Theile AD, DF, FH... aufträgt, und durch sämmtliche Theilpunkte Senkrechte zieht, so werden die Streifen BADE, EDFG... alle unter einander gleich sein, indem leicht gezeigt werden kann, dass sie auf einander gelegt sich decken müssen. Mag aber auch die Anzahl dieser Streifen unendlich gross sein, so kann doch mit denselben offenbar niemals der unbestimmte, zwischen den Schenkeln des rechten Winkels BAN enthaltene Raum ausgefüllt werden, woraus folgt, dass die unbegränzte Ebene des Winkels x grösser sein müsse, als die des Streifens BADE. Es kann demnach der Winkel x nicht von dem Streifen BADE eingeschlossen werden, sondern sein Schenkel AC muss gehörig verlängert aus diesem Raume heraustreten, also die Senkrechte DE schneiden.



§ 32. Zusatz.

Wenn zwei Linien AB und CD parallel sind, so ist jede Linie FG, die auf der einen CD senkrecht steht, auch auf der andern AB senkrecht. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste AB die CD schneiden (§ 31), was gegen die Voraussetzung ist.



§ 33. Lehrsatz.

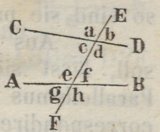
Zwei Linien, von denen jede einer dritten parallel ist, sind einander parallel.

Bew. Da eine Senkrechte auf dieser dritten Linie zugleich senkrecht auf den beiden übrigen ist (§ 32), so müssen diese, da sie auf einer und derselben dritten Linie senkrecht stehen, einander parallel sein (§ 31).

§ 34. Erklärungen.

Wenn zwei einander parallele oder nicht parallele Linien AB, CD von einer dritten Linie EF geschnitten werden, so entstehen an den Durchschnittspunkten acht Winkel, welche besondere Namen erhalten haben.

1. Die vier ausserhalb der beiden durchschnittenen Linien AB und CD liegenden Winkel a, b, g, h heissen äussere, die vier innerhalb der beiden durchschnittenen Linien liegenden Winkel c, d, e, f dagegen innere Winkel.



2. Je zwei an derselben Seite der schneidenden Linie EF liegende Winkel, von denen der eine ein äusserer, der andere ein innerer ist, ohne Nebenwinkel von einander zu sein, heissen correspondirende, wie a und e, c und g, b und f, d und h.

3. Je zwei innere, an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie EF liegende Winkel, welche nicht Nebenwinkel von einander sind, heissen **Wechselwinkel**, wie c und f, d und e.

4. Je zwei innere, an derselben Seite der schneidenden Linie EF liegende Winkel heissen **Gegenwinkel**, wie c und e, d und f.

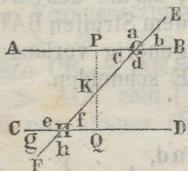
§ 35. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien AB *und* CD *von einer dritten Linie* EF *geschnitten werden, so sind*

1. *jede zwei Wechselwinksl gleich,* c = f, d = e;

2. *jede zwei correspondirende Winkel gleich* a = e, c = g, b = f, d = h;

3. *beträgt die Summe jeder zwei Gegenwinkel zwei Rechte,* c + e = 2 R, d + f = 2 R.



Bew. 1. Wenn man durch die Mitte K der Linie GH auf eine der Parallelen die Senkrechte PQ fällt, so ist diese zugleich auf der andern senkrecht (§ 32) und △ KGP ≌ KHQ (§ 24), also ∠ c = f, folglich als Nebenwinkel dieser beiden Winkel auch d = e (§ 4, 4).

2. Da als Scheitelwinkel f = g, d = a ist, und c = f, d = e wär, so ist auch c = g und a = e. Ferner sind als Nebenwinkel dieser Winkel d = h, b = f.

3. Da a + c = 2 R ist, und a = e war, so ist auch c + e = 2 R. Eben so ist d + f = 2 R.

§ 36. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien AB *und* CD *(Fig. § 35) von einer dritten Linie* EF *geschnitten werden und es sind entweder*

1. *zwei Wechselwinkel gleich,* oder

2. *zwei correspondirende Winkel gleich,* oder

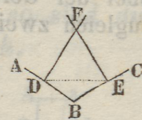
3. *zwei Gegenwinkel betragen zusammen zwei Rechte; so sind die beiden Linien einander parallel.*

Bew. Wenn z. B. Wechselwinkel c = f ist, und man durch die Mitte K von GH die PQ senkrecht auf CD fället, so ist △ KHQ ≌ KGP (§ 10), also der Winkel KPG = KQH, folglich gleich einem Rechten. Da nun beide Linien AB und CD auf derselben Geraden PQ senkrecht stehen, so sind sie parallel (§ 31).

Aus jeder der übrigen Bedingungen, unter welchen AB || CD sein soll, lässt sich die Gleichheit der Wechselwinkel herleiten, also auf den Parallelismus der beiden Linien ein Schluss machen. Denn sind z. B. die correspondirenden Winkel a und e gleich, so sind als deren Nebenwinkel auch c und f gleich, folglich nach dem Vorhergehenden die Linien parallel. Ist ferner c + e = 2 R, so hat man, weil auch e + f = 2 R ist, c + e = e + f, oder c = f, folglich sind die Linien parallel.

§ 37. Zusatz.

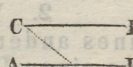
Da zwei parallele Linien immer die gedachten Eigenschaften haben, und zwei Gerade, wenn ihnen diese Eigenschaften zukommen, immer parallel sind, so folgt, dass gerade Linien, denen diese Eigenschaften abgehen, nicht parallel sind. So sind z. B. die Geraden DF und EF, die auf zwei sich schneidenden Geraden AB und BC senkrecht stehen, nicht parallel; denn zieht man die Gerade DE, so sieht man, dass die Summe der Gegenwinkel FDE und FED kleiner ist, als die der beiden Rechten FDB und FEB.



§ 38. Aufgabe.

Zu einer gegebenen Linie AB *durch einen gegebenen Punkt* C *eine Parallele zu ziehen.*

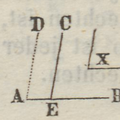
Aufl. Man ziehe durch den Punkt C eine beliebige Gerade, welche die AB in D schneidet, lege den Winkel ADC an die Gerade CD auf der entgegengesetzten Seite im Punkte C an, so ist der so erhaltene Schenkel CE die verlangte Parallele zu AB. Denn CE geht durch den gegebenen Punkt, und die Wechselwinkel ADC und DCE sind zufolge der Construction einander gleich.



§ 39. Aufgabe.

Durch einen Punkt C *ausserhalb einer Geraden* AB *eine gerade Linie nach eben dieser so zu ziehen, dass sie mit ihr einen Winkel bildet, der einem gegebenen Winkel x gleich ist.*

Aufl. In einem beliebigen Punkte A der gegebenen Geraden lege man an dieselbe den Winkel DAB gleich x an, und ziehe durch Punkt C zu DA die Parallele CE (§ 38), so ist Winkel CEB = A, also auch gleich x.



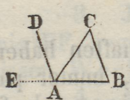
§. 40. Lehrsatz

Zwei Winkel ABC, DEF *sind einander gleich, wenn ihre Schenkel einander parallel und ihre Oeffnungen nach einerlei Richtung gekehrt sind.*

Bew. Verlängert man den Schenkel DE bis G, so sind als correspondirende Winkel DEF = DGC und DGC = ABC, also ABC = DEF.

§. 41. Lehrsatz.

Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist immer gleich zwei Rechten.



Bew. Verlängert man BA nach E und zieht durch A die AD || BC, so ist als correspondirender Winkel B = DAE, und als Wechselwinkel C = DAC. Es ist daher ∡ EAC der Summe der beiden Winkel B und C des Dreiecks gleich, und wenn man zu EAC den dritten ∡ CAB hinzulegt, so hat man um den Punkt A über der Geraden EB drei Winkel, welche den Winkeln des Dreiecks und zugleich zwei Rechten gleich sind (§ 4, 11).

§ 42. Zusätze.

1. Ein Winkel wie CAE, der durch die Verlängerung einer Seite des Dreiecks entsteht, heisst ein Aussenwinkel, und ist jedesmal den beiden innern, ihm gegenüberliegenden Winkeln des Dreiecks zusammengenommen gleich. Er ist also grösser als jeder einzelne der beiden letztern.

2. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zweien Winkeln eines andern Dreiecks gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreiecks dem dritten des andern gleich.

3. Hiernach lassen sich die Sätze in § 10 und § 24 allgemeiner so aussprechen: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Winkel und eine Seite gegenseitig gleich sind.

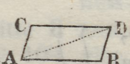
4. Ein Dreieck kann nur einen rechten Winkel und umsomehr nur einen stumpfen Winkel enthalten.

5. Da in einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel grösser ist als jeder der beiden andern Winkel und dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüberliegt (§ 28), so ist immer die Hypotenuse grösser als jede der beiden Katheten.

6. In jedem gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Winkel $^2/_3$ eines Rechten. Denn da die Summe aller drei Winkel gleich zwei Rechten ist, und ein gleichseitiges △ lauter gleiche Winkel hat (§ 29), so ist jeder einzelne ∡ der dritte Theil von 2 Rechten, oder $^2/_3$ eines Rechten.

§ 43. Lehrsatz.

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.



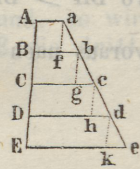
Bew. Wenn AB || CD, AC || BD, und man zieht AD, so ist △ ABD ≅ ACD (§ 10), folglich AB = CD, BD = AC.

§ 44. Zusatz.

Da die Richtigkeit des vorhergehenden Lehrsatzes offenbar auch dann stattfindet, wenn die Geraden AC und BD auf AB und CD senkrecht stehen, indem sie noch immer einander || bleiben, in diesem Falle aber die Geraden AC und BD die Entfernungen der Geraden AB und CD bestimmen, so folgt, dass zwei Parallele überall gleich weit von einander entfernt sind.

§ 45. Lehrsatz.

Wenn man auf der einen von zwei beliebigen geraden Linien AE *und* ae *gleiche Abschnitte* AB, BC, CD... *annimmt, und durch die Endpunkte derselben einander parallele Linien* Aa, Bb, Cc ... *in willkührlicher Richtung bis an die andere Linie zieht, so sind die Theile* ab, bc, cd ... *derselben ebenfalls einander gleich.*



Bew. Zieht man die Geraden af, bg, ch ... zu AE parallel, so sind dieselben, weil sie als Parallele zwischen Parallelen den unter einander gleichen Abschnitten AB, BC ... gleich sind (§ 43), auch einander gleich; ferner sind als correspondirende Winkel fab = gbc = hcd .. und eben so fba = gcb = hdc ..., woraus folgt (§ 42, 3), dass △ abf ≅ bcg ≅ cdh ..., also ab = bc = cd ... ist.

§ 46. Lehrsatz.

Zwei Gerade AE *und* BF *werden durch drei Parallele* AB, CD, EF *allemal in proportionale Theile geschnitten, nämlich so, dass* AC : CE = BD : DF.

Bew. 1. Sind AC und CE commensurabel, und trägt man auf AE das gem. Mass auf, welches in AC m Mal und in CE n Mal enthalten sei, so hat man

AC : CE = m : n.

Legt man nun durch alle Theilungspunkte der AE parallele Linien zu AB, so wird BD ebenfalls in m, und DF in n einander gleiche Theile getheilt (§ 45), und man erhält

BD : DF = m : n.

Aus beiden Proportionen erhält man folgende:

AC : CE = BD : DF.

Hieraus ergeben sich auch folgende Proportionen:

AC : AC + CE = BD : BD + DF, also
AC : AE = BD : BF oder
AE : AC = BF : BD.

2. Sind AC und CE incommensurabel, so lässt sich beweisen, dass sich auch dann verhalten müsse AE : AC = BF : BD, also auch AC : CE = BD : DF. Sollte sich nämlich nicht verhalten AE : AC = BF : BD, so müsste das vierte Glied dieser Proportion kleiner oder grösser sein als BD, während die drei ersten Glieder die nämlichen bleiben. Es sei also zuvörderst

AE : AC = BF : BG,

wo BG < BD ist, so kann man die Gerade AE in so kleine, einander gleiche Theile theilen, dass, wenn man durch alle Theilungspunkte parallele

Linien mit AB zieht, eine derselben cd, zwischen G und D fällt. Dann wird man (nach 1), weil Ac und AE commensurabel sind, haben

$$AE : Ac = BF : Bd.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$AC : Ac = BG : Bd,$$

ein ungereimtes Resultat, indem sich nicht verhalten kann etwas Grösseres zum Kleinern, wie etwas Kleineres zum Grössern. — Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass sich nicht verhalten könne AE : AC = BF : BH, wo BH > BD ist. Es kann sich folglich nur verhalten

$$AE : AC = BF : BD,$$

woraus nach einander folgt

$$AE - AC : AC = BF - BD : BD$$
$$CE : AC = DF : BD$$
$$AC : CE = BD : DF.$$

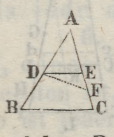
§ 47. Zusatz.

Wenn man durch den Punkt B die Gerade BL || AE zieht, so ist (§ 43) BK = AC, KL = CE, folglich nach § 46

$$BK : KL = BD : DF.$$

Wenn man also in einem Dreieck △ BFL eine Gerade DK zu einer seiner Seiten FL parallel zieht, so werden die beiden andern Seiten durch diese Gerade in proportionale Theile geschnitten.

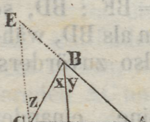
§ 48. Zusatz.



Wenn eine Gerade DE zwei Seiten eines Dreiecks ABC proportional schneidet, so dass AB : AD = AC : AE ist, so ist sie zur dritten Seite BC parallel. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man durch D eine Gerade DF || BC ziehen, und hätte alsdann (§ 47) AB : AD = AC : AF, in welcher Proportion die drei ersten Glieder mit denen der vorhergehenden Proportion übereinstimmen, so dass also AE = AF sein müsste, was unmöglich ist.

§ 49. Lehrsatz.

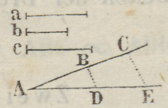
Die Gerade BD, *welche einen Winkel* B *eines Dreiecks* ABC *halbirt, theilt die ihm gegenüberliegende Seite* AC *in zwei Abschnitte, welche sich wie die diesen Winkel einschliessenden Seiten verhalten, also* AD : DC = AB : BC



Bew. Man ziehe CE || DB und verlängere AB, bis sie die CE in E schneidet, so ist AD : DC = AB : BE (§ 47). Nun ist x = y nach der Voraussetzung, ferner x = z und y = E (§ 35), also z = E, mithin BE = BC (§ 28) und daher AD : DC = AB : BC.

§ 50. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien a, b, c *die vierte Proportionallinie zu finden.*



Aufl. Man zeichne sich einen beliebigen Winkel, nehme auf dessen Schenkeln $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, ziehe BD und mit dieser ∥ aus C die CE, so ist DE die gesuchte vierte Proportionale. Denn es ist (§ 47) $AB : BC = AD : DE$, oder $a : b = c : DE$.

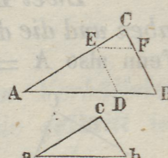
Wenn die beiden Geraden b und c einander gleich sind, so wird die durch die Proportion $a : b = b : DE$ gegebene Linie DE die dritte Proportionale zu den Linien a und b genannt.

§ 51. Erklärung.

Zwei Dreiecke heissen ähnlich, wenn die Winkel des einen einzeln den Winkeln des andern gleich, und die homologen Seiten, d. h. diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, proportional sind.

§ 52. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern gleich sind. Wenn also $A = a$, $B = b$, so ist $\triangle ABC \sim abc$.



Bew. Zuvörderst ist auch der dritte $\measuredangle C = c$ (§ 42, 2). Macht man nun $AE = ac$, $AD = ab$, und zieht DE, so ist $\triangle ADE \cong abc$ (§ 8), mithin $\measuredangle ADE = b$, also auch $= B$, woraus folgt, dass $DE \parallel BC$ ist (§ 36). Daher ist $AD : AB = AE : AC$ (§ 47), also auch

$$ab : AB = ac : AC.$$

Zieht man ferner aus E die $EF \parallel AB$, so erhält man $AE : AC = BF : BC$, und weil $BF = DE$ (§ 43), und $DE = bc$, $AE = ac$ war, so ist

$$ac : AC = bc : BC.$$

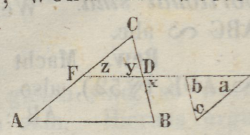
Aus beiden Proportionen folgt

$$ab : AB = ac : AC = bc : BC.$$

Da nun in beiden Dreiecken alle Winkel einzeln gleich, und die homologen Seiten proportional sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

§ 53. Zusatz.

Zwei Dreiecke ABC, abc sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise parallel sind. Wenn $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $AC \parallel ac$, und man die Seite ab so weit verlängert, dass sie zwei Seiten des Dreiecks ABC in D und F schneidet, so ist $\measuredangle b = x$ (§ 35), also auch $\measuredangle b = y$; und weil $\measuredangle y = B$ (§ 35), so ist

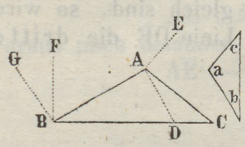


$\measuredangle$ b = B; ferner ist $\measuredangle$ a = z und z = A (§ 35), folglich $\measuredangle$ a = A. Da nun in beiden Dreiecken zwei Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich (§ 52).

Man sieht zugleich, dass die einander parallelen Seiten homologe Seiten der Dreiecke sind.

§ 54. Zusatz.

Zwei Dreiecke ABC, abc sind ähnlich, wenn ihre Seiten paarweise senkrecht auf einander stehen. Wenn ab $\perp$ AB, bc $\perp$ BC, ac $\perp$ AC ist, und man durch A die Gerade AE || ac und AD || ab zieht, so sind die Winkel CAE und BAD rechte. Legt man zu jedem von beiden den $\measuredangle$ CAD hinzu, so ist $\measuredangle$ BAC = DAE, und da $\measuredangle$ DAE = a (§ 40), so ist auch $\measuredangle$ BAC = a.

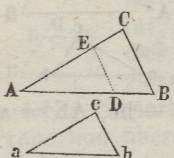


Zieht man ferner durch B die Gerade BF || bc, und BG || ba, so sind als rechte Winkel CBF = ABG, und wenn man von beiden das gemeinschaftliche Stück ABF abzieht, so bleiben die gleichen Winkel CBA und FBG nach, von denen letzterer gleich b ist (§ 40); folglich ist auch $\measuredangle$ CBA = b. Da also beide Dreiecke zwei gegenseitig gleiche Winkel haben, so sind sie einander ähnlich (§ 52).

Zugleich geht hieraus hervor, dass die auf einander senkrecht stehenden Seiten jedesmal homologe Seiten der beiden Dreiecke sind.

§ 55. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel haben und die diesen Winkel einschliessenden Seiten proportional sind. Wenn also A = a, AB : ab = AC : ac, so ist $\triangle$ ABC $\sim$ abc.



Bew. Man mache AE = ac, AD = ab, und ziehe DE, so ist $\triangle$ ADE $\cong$ abc (§ 8), so dass also, wenn man die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ADE beweisen kann, dadurch zugleich die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und abc bewiesen ist. Da nun nach der Voraussetzung

AB : ab = AC : ac, also auch
AB : AD = AC : AE,

so ist BC || DE (§ 48), folglich $\measuredangle$ B = ADE, und weil $\measuredangle$ A beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, so ist (§ 52) $\triangle$ ABC $\sim$ ADE oder $\triangle$ ABC $\sim$ abc.

§ 56. Lehrsatz. (Fig. § 55).

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre drei Seiten proportional sind. Wenn also AB : ab = AC : ac = BC : bc, so ist $\triangle$ ABC $\sim$ abc.

Bew. Macht man AD = ab, und zieht DE || BC, so ist $\triangle$ ABC $\sim$ ADE (§ 52), also

AB : AD = AC : AE = BC : DE.

Dá aber AD = ab ist, so sind alle Verhältnisse dieser Reihe den Verhältnissen der Reihe

$$AB : ab = AC : ac = BC : bc$$

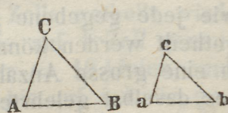
gleich, und weil in beiden Reihen die Vorderglieder identisch sind, so müssen es auch die Hinterglieder sein, so dass also

$$AE = ac,\ DE = bc.$$

Hieraus folgt (§ 13), dass $\triangle$ ADE $\cong$ abc ist, und weil $\triangle$ ABC $\sim$ ADE war, so ist auch $\triangle$ ABC $\sim$ abc.

§ 57. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden ab *ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen Dreieck* ABC *ähnlich sei.*



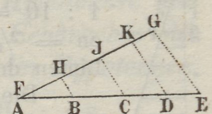
Aufl. Man kann diese Aufgabe auf verschiedene Arten lösen. 1) Zieht man durch die Punkte a und b Linien, welche mit ab Winkel bilden, die den Winkeln A und B einzeln genommen gleich sind, so ist das entstandene $\triangle$ abc $\sim$ ABC (§ 52).

2) Wenn man im Punkte a an die Linie ab einen $\measuredangle$ gleich A anlegt, und den Schenkel ac gleich macht der vierten Proportionalen zu AB, ab, AC, so ist das $\triangle$ abc $\sim$ ABC (§ 55).

3) Wenn man zu den drei Linien AB, ab, AC, so wie zu den drei Linien AB, ab, BC die vierte Proportionale sucht, und aus den beiden gefundenen Linien ac, bc und aus ab das $\triangle$ abc construirt, so ist dieses $\sim$ ABC (§ 56).

§ 58. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie nach eben den Verhältnissen zu theilen, nach welchen eine andere gegebene Linie getheilt ist.



Aufl. Es sei FG die Linie, welche nach denselben Verhältnissen getheilt werden soll, als die in die Theile AB, BC, CD, DE eingetheilte Linie AE. Nachdem man an AE unter einem beliebigen Winkel die FG angelegt hat, verbinde man durch EG die Endpunkte beider Linien und ziehe aus den Punkten B, C, D Parallele zu EG, welche die FG schneiden, so wird diese in Theile zerlegt, welche denen der AE proportional sind. Denn es ist

$$AB : FH = BC : HI \text{ (§ 47), und}$$

$$BC : HI = CD : IK, \text{ sowie } CD : IK = DE : KG \text{ (§ 46).}$$

Also hat man auch

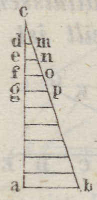
$$AB : FH = BC : HI = CD : IK = DE : KG.$$

§ 59. Zusatz.

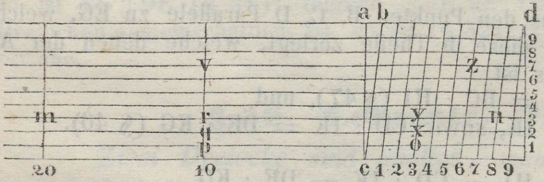
Wenn die Theile der Linie AE einander gleich sind, so werden die Theile der FG ebenfalls unter einander gleich sein. Hieraus ergiebt sich das Verfahren, eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Man legt nämlich die in n gleiche Theile zu theilende Linie und eine andere unbegränzte Linie unter einem beliebigen Winkel an einander, trägt auf die letztere vom Scheitel des Winkels aus n beliebig grosse, aber einander gleiche Theile auf, verbindet den letzten Theilungspunkt mit dem Endpunkte der einzutheilenden Linie durch eine Gerade, und zieht zu dieser parallele Linien aus den übrigen Theilungspunkten. Diese Parallelen werden die gegebene Gerade in die verlangte Anzahl gleicher Theile theilen.

§ 60. Zusatz.

Durch die vorhergehende Aufgabe wird theoretisch nachgewiesen, wie jede gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden könne. Ist nun aber eine sehr kleine Linie zur Eintheilung in eine grosse Anzahl gleicher Theile gegeben, so würden bei Anwendung des daselbst gelehrten Verfahrens die Theile ihrer Kleinheit wegen bald der Ausführung Hindernisse in den Weg legen, und die Theilstriche wegen der Unvollkommenheit der Instrumente zusammenfallen; und doch müssen die Massstäbe, d.i. gerade Linien, die ausser der Längeneinheit mehre Unterabtheilungen derselben enthalten und zum Messen anderer Linien dienen, eine solche Einrichtung haben, dass man selbst die feinsten Theile auf denselben noch genau unterscheiden kann. Um dieses zu erreichen, wendet man die Construction der Transversalen an, welche im Wesentlichen darin besteht, dass die Theile der einzutheilenden Geraden auf mehre neben einander liegende Linien vertheilt werden. Errichtet man nämlich auf die Gerade ab in ihrem Endpunkte die Senkrechte ac, trägt auf diese von a aus z. B. 10 gleiche Theile, und zieht aus dem letzten Theilpunkte c die Transversale cb, so wie durch alle übrigen Theilpunkte Parallele mit ab, so ist $\triangle$ cdm $\backsim$ cab, also cd : ca = dm : ab, oder 1 : 10 = dm : ab, folglich dm = $^1/_{10}$ ab. Eben so findet man en = $^2/_{10}$ ab, fo = $^3/_{10}$ ab u. s. w., so dass diese parallelen Linien der Reihe nach $^1/_{10}$ bis $^9/_{10}$ der Linie ab genau geben.



Die Einrichtung des zehntheiligen Massstabes, dessen man sich am häufigsten bedient, beruht auf dieser eben erklärten Art der Theilung einer Geraden in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und lässt sich aus der beistehenden Figur leicht erkennen. Auf der untersten Linie ist die dem Massstabe zum Grunde liegende Einheit ab zuerst 10 Mal neben einander aufgetragen, und dann die Länge von 10 Einheiten zusammen mehre Mal angegeben, so dass die unterste Linie allein ausreicht, um die Länge einer Linie auf eine Einheit genau zu bestimmen. So ist die Länge von 10 bis 2 gleich 12 Einheiten, von 20 bis 5 gleich 25 Einheiten u. s. w. Um aber die Längen

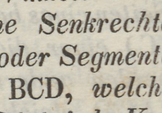


bis auf $^1/_{10}$ der Einheit genau bestimmen zu können, sind in gleichen Abständen zehn Parallele mit der untersten Linie, sowie die unten mit 1, 2, 3 … bezeichneten Transversalen gezogen. Da ab die Einheit ist, so ist der zwischen den Geraden ac und bc liegende Theil der ersten Parallele $= {}^1/_{10}$, der zweiten Parallele $= {}^2/_{10}$, der dritten Parallele $= {}^3/_{10}$ der Einheit u. s. w. und auf diese jedesmalige Anzahl von Zehnteln beziehen sich die rechts neben den Parallelen stehenden Zahlen. Während daher z. B. die Länge von 10 bis 3 gleich 13 Einheiten ist, so ist die Länge von p bis o gleich $13\,^1/_{10}$, von q bis x gleich $13\,^2/_{10}$ von r bis y gleich $13\,^3/_{10}$, ferner die Länge von v bis z gleich $16\,^7/_{10}$ Einheiten u. s. w. Soll umgekehrt eine Länge genommen werden $= 28\,^3/_{10}$, so wird diese wegen der $^3/_{10}$ auf der dritten Parallele gefunden, wenn man den Abstand mn nimmt von der bei 20 errichteten Senkrechten bis zu dem Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der achten Transversale.

Wird ab für 1 Fuss angenommen, der in 10 Zolle getheilt wird, so erhält man mittels dieses Massstabes jede Länge bis auf 1 Zoll genau. Setzt man aber ad = 1 Fuss, so ist ab = 1 Zoll oder = 10 Linien, und man erhält demnach durch diesen Massstab eine Länge bis auf 1 Linie genau. Nimmt man endlich ad für 1 Zoll an, so ist ab = 1 Linie, und der Massstab giebt dann jede Länge bis auf den zehnten Theil einer Linie genau an.

§ 61. Lehrsatz.

Wenn man von dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ABC *auf die Hypotenuse eine Senkrechte* BD *fället, wodurch die Hypotenuse in zwei Abschnitte oder Segmente getheilt wird, so entstehen 1) zwei Dreiecke* ABD, BCD, *welche dem ganzen Dreieck* ABC *und einander ähnlich sind; 2) ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt derselben; 3) ist die Senkrechte die mittlere Proportinale zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse.*



Bew. 1. Es ist $\triangle$ ABC $\sim$ ADB (§ 52), weil $\measuredangle$ A beiden Dreiecken gemein ist, und die Winkel ABC, ADB als rechte gleich sind. Eben so ist $\triangle$ ABC $\sim$ BDC. Endlich ist $\triangle$ ADB $\sim$ BDC, weil die drei Seiten dieser Dreiecke gegenseitig auf einander senkrecht stehen (§ 54).

2. Die Vergleichung der homologen Seiten der ähnlichen Dreiecke ABC und ADB giebt

$$AC : AB = AB : AD.$$

Eben so geben die ähnlichen Dreiecke ABC und BDC

$$AC : BC = BC : CD.$$

3. Endlich giebt die Vergleichung der homologen Seiten der ähnlichen Dreiecke ADB und BDC

$$AD : BD = BD : CD.$$

§ 62. Zusatz. (Pythagoras).

Wenn die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks durch ein und dasselbe Längenmass gemessen werden, so ist das Quadrat der Zahl, welche die Länge der Hypotenuse angiebt, gleich der Summe der Quadrate der beiden Zahlen, welche die Länge der Katheten ausdrücken. Denn hat man durch das Messen mit derselben Längeneinheit gefunden (Fig. § 61) $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, ferner $AD = m$, $CD = n$, so ist (§ 61)

$$a : b = b : m, \text{ also } am = b^2,$$
$$a : c = c : n, \text{ also } an = c^2,$$

folglich durch Addition dieser beiden Gleichungen

$$am + an = b^2 + c^2, \text{ oder } a(m + n) = b^2 + c^2,$$

und da $m + n = a$ ist, so hat man $a^2 = b^2 + c^2$.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich aus je zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte Seite berechnen. Denn aus $a^2 = b^2 + c^2$ folgt

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

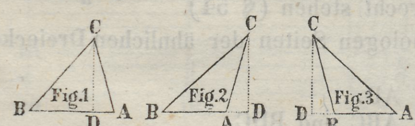
Ist z B. $b = 3$, $c = 4$, so ist $a = 5$; ist gegeben $a = 20$ und $c = 16$, so ist $b = 12$; und aus $a = 10$, $b = 6$ findet man $c = 8$.

§ 63. Lehrsatz.

Wenn man die drei, durch einerlei Längenmass gemessenen Seiten eines beliebigen Dreiecks in Zahlen ansdrückt und vom Endpunkte (C) einer dieser Seiten (AC) eine Senkrechte (CD) auf eine der beiden andern Seiten fällt; so ist das Quadrat der ersten Seite (AC^2) gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ($AB^2 + BC^2$), **weniger** *dem doppelten Produkte aus der Seite (AB), auf welche man die Senkrechte gefällt hat, in die Entfernung (BD) der Senkrechten von dem der ersten Seite gegenüberstehenden Winkel (B), wenn dieser Winkel* **spitz** *ist; oder* **nebst** *diesem Produkte, wenn jener Winkel* **stumpf** *ist.*

Bew. 1. Wenn der Winkel B spitz ist (Fig. 1 und 2), so ist immer, mag die Senkrechte CD innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks fallen,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$$



Denn es ist $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (§62). Da aber $AD = AB - BD$ (Fig. 1) und $AD = BD - AB$ (Fig. 2), also in beiden Fällen

$$AD^2 = AB^2 - 2AB \times BD + BD^2,$$

und weil ferner $CD^2 = BC^2 - BD^2$ ist, so ist

$$AC^2 = AB^2 - 2AB \times BD + BD^2 + BC^2 - BD^2,$$

oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$

2. Wenn der der Seite AC gegenüberliegende Winkel B stumpf ist (Fig. 3), so muss die Senkrechte ausserhalb des Dreiecks fallen und man hat

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD.$$

Denn es ist $AC^2 = CD^2 + AD^2$,
und da $CD^2 = BC^2 - BD^2$,
und $AD = AB + BD$,
also $AD^2 = AB^2 + 2AB \times BD + BD^2$,
so ist $AC^2 = BC^2 - BD^2 + AB^2 + 2AB \times BD + BD^2$,
oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD$.

§ 64. Zusatz.

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks ABC bekannt sind, so lässt sich mit Hilfe der Sätze in § 62 und § 63 bestimmen, ob der irgend einer Seite AC gegenüberstehende Winkel ein rechter, spitzer oder stumpfer ist. Denn im ersten Falle, wo man hat

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

ist das Quadrat jener Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. Im zweiten Falle, wo

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD$$

ist, muss das Quadrat von AC kleiner sein als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. Im dritten Falle endlich, wo man hat

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD,$$

ist das Quadrat von AC grösser als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten.

Sind z. B. die drei Seiten eines Dreiecks 5, 7, 8 Fuss, so muss der der Seite 8 gegenüberstehende Winkel spitz sein, weil $64 < 25 + 49$ ist. Da ferner aus § 27 folgt, dass in einem Dreieck der grössten Seite auch der grösste Winkel gegenüber steht, so muss, weil der der Seite 8 gegenüberliegende Winkel spitz und dabei der grösste im Dreieck ist, jeder der der beiden andern Winkel ebenfalls spitz, mithin das Dreieck, dessen Seiten 5, 7, 8 Fuss sind, spitzwinklig sein.

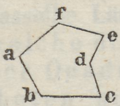
Hieraus geht hervor, wie sich aus der Beschaffenheit des der grössern Seite gegenüberliegenden Winkels erkennen lässt, ob das Dreieck rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig sei.

IV. Von den Vierecken und den Vielecken überhaupt.

§ 65. Erklärungen.

1. Jede nach allen Seiten hin von geraden Linien begränzte Ebene heisst ein Polygon oder Vieleck. Das einfachste von allen Vielecken ist das Dreieck. — Die übrigen Vielecke theilt man nach der Anzahl ihrer Seiten in Vierecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. w., je nach-

dem dieselben vier, fünf, sechs u. s. w. Seiten haben. — Ein neck hat n Seiten und n Winkel.



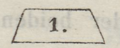
2. Die Figur abcdef stellt ein Sechseck vor. Alle Winkel derselben, deren Oeffnungen einwärts gekehrt sind, werden auswärtsgehende oder ausspringende genannt. Der Winkel cde heisst ein einwärtsgehender oder einspringender, weil seine Oeffnung nach aussen gerichtet ist.

3. Jede gerade Linie, welche zwei beliebige Winkelspitzen eines Vielecks mit einander verbindet, ohne mit einer Seite desselben zusammen zu fallen, heisst eine Diagonale.

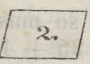
4. Ein Vieleck heiss regelmässig, wenn sowol die Seiten als auch die Winkel unter einander gleich sind.

5. Zwei Vielecke heissen einander congruent, wenn sie sich so auf einander legen lassen, dass sie ganz mit einander zusammen fallen, oder in allen ihren Theilen sich vollständig decken. Es ist klar, dass zwei Vielecke congruent sein werden, wenn sie aus einer gleichen Anzahl congruenter und übereinstimmig liegender Dreiecke zusammengesetzt sind.

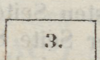
6. Zwei Vielecke nennt man einander ähnlich, wenn bei gleicher Seitenzahl derselben die Winkel in beiden der Reihe nach gegenseitig gleich, und die homologen oder übereinstimmig liegenden Seiten einander proportional sind.



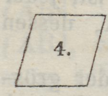
7. Ein Viereck (Fig. 1), in welchem zwei Seiten einander parallel sind, die beiden andern aber nicht, wird ein Trapez genannt.



8. Ein Viereck (Fig. 2), in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten einander parallel sind, heisst Parallelogramm.



9. Ein Parallelogramm (Fig. 3), in welchem die neben einanderliegenden Seiten ungleich, die Winkel aber rechte sind, wird Rechteck oder Oblongum genannt.



10. Ein Rhombus (Fig. 4), ist ein Parallelogramm, welches keinen rechten Winkel, aber lauter gleiche Seiten hat.

11. Das Quadrat (Fig. 5), ist ein Parallelogramm, welches lauter rechte Winkel und lauter gleiche Seiten hat. Es ist also ein regelmässiges Viereck.

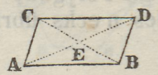
§ 66. Lehrsatz.

In einem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich; auch wird ein Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei einander congruente Dreiecke zerlegt.

Bew. Der erste Theil dieses Satzes ist offenbar der Lehrsatz § 43, dessen Beweis zugleich die Richtigkeit der zweiten Behauptung darthut.

§ 67. Lehrsatz.

Jedes Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten gleich, oder nur zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.



Bew. 1. Wenn $AB = CD$, $AC = BD$, so ist $\triangle ABD \cong ACD$ (§ 13), also $\measuredangle ADB = CAD$ und $\measuredangle BAD = CDA$, folglich $AC \parallel BD$ und $AB \parallel CD$ (§ 36).

2. Wenn $AB \mathrel{\#} CD$, so ist $\triangle ABD \cong ACD$ (§ 8), also $\measuredangle ADB = CAD$, folglich $AC \parallel BD$ (§ 36).

§ 68. Lehrsatz.

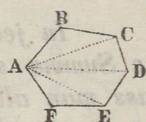
Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander.

Bew. (Fig. § 67). Da $\triangle AEC \cong BED$ ist (§ 10), indem $AC = BD$, $\measuredangle ACE = DBE$, und $CAE = BDE$ ist, so ist $AE = DE$ und $CE = BE$.

§ 69. Lehrsatz.

Wenn man eine Winkelspitze eines Vielecks durch Diagonalen mit allen übrigen verbindet, so ist die Anzahl der Dreiecke, in welche das Vieleck getheilt wird, immer um zwei kleiner als die Anzahl der Seiten des Vielecks. Ein n eck wird also in $n - 2$ Dreiecke getheilt.

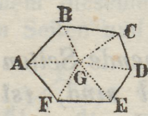
Bew. Die von A aus gezogenen drei Diagonalen theilen z. B. das Sechseck ABCDEF in vier Dreiecke. Man überzeugt sich leicht, dass Nämliches bei jedem Vieleck von beliebiger Seitenzahl stattfindet, wenn man erwägt, dass über jeder Seite des Vielecks ein Dreieck steht, mit Ausnahme der beiden Seiten, welche den Winkel bilden, von dessen Spitze die Diagonalen ausgehen.



§ 70. Lehrsatz.

In einem n eck beträgt die Summe aller innern Winkel $2n - 4$ Rechte, d. h. *in jedem Vieleck beträgt die Summe aller innern Winkel doppelt so viel Rechte als es Seiten hat, weniger vier Rechten.*

Bew. Da durch Ziehung aller Diagonalen aus einer Winkelspitze ein n eck in $n - 2$ Dreiecke zerlegt wird (§ 69), deren Winkel zusammen die innern Winkel des Polygons ausmachen, und jedes Dreieck zwei Rechte enthält (§ 41), so beträgt die Summe der Winkel in einem n eck $2(n - 2)$ R. oder $2n - 4$ Rechte.



Ein anderer Bew. Zieht man von einem innerhalb des n ecks beliebig angenommenen Punkte G gerade Linie nach allen Winkelspitzen, so entstehen n Dreiecke, welche zusammen 2n Rechte enthalten. Zieht man davon die um den Punkt G herumliegenden 4 rechten Winkel ab, indnm sie nicht zum Polygone gehören, so bleiben 2n — 4 Rechte für sämmtliche Winkel des n ecks übrig.

§ 71. Zusätze.

1. Es ist die Summe der innern Winkel
im Viereck $= 2.\ 4 - 4 = 4$ R.
im Fünfeck $= 2.\ 5 - 4 = 6$ R.
im Sechseck $= 2.\ 6 - 4 = 8$ R. u. s. w,

2. Wenn in einem Vieleck alle Winkel gleich sind, wie es in einem regelmässigen der Fall ist, so findet man die Grösse eines seiner Winkel, wenn man die Summe aller Winkel durch die Anzahl dieser dividirt. Es ist also im regelm. n eck jeder Winkel gleich

$$\frac{2n - 4}{n} = 2 - \frac{4}{n} \text{ Rechten.}$$

Demnach beträgt ein Winkel

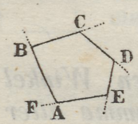
im Quadrat und im Rechteck $= 2 - \frac{4}{4} = 1$ R.,

im regelmässigen Fünfeck $= 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ R.,

im regelmässigen Sechseck $= 2 - \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$ R. u. s. w.

§ 72. Lehrsatz.

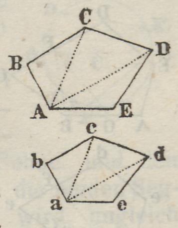
In jedem Vieleck mit lauter auswärtsgehenden Winkeln ist die Summe sämmtlicher Aussenwinkel, welche dadurch entstehen, dass man alle Seiten über die Ecken hinaus nach gleicher Richtung verlängert, gleich 4 Rechten.



Bew. Jeder Aussenwinkel, z. B. ∠FAB, bildet mit dem neben ihm liegenden innern Winkel BAE 2 R; folglich beträgt die Summe aller äussern und innern Winkel in einem n eck 2n R. Wird nun hiervon die Summe aller innern Winkel, nämlich 2n — 4 R (§ 70) abgezogen, so bleibt für die Summe der äussern Winkel $2n - (2n - 4) = 4$ R. übrig.

§ 73. Lehrsatz.

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender Dreiecke zusammengesetzt sind.



Bew. Da $\triangle$ ABC $\sim$ abc, $\triangle$ ACD $\sim$ acd, $\triangle$ ADE $\sim$ ade, so ist erstlich $\measuredangle$ B $=$ b, $\measuredangle$ BCA $=$ bca $\measuredangle$ ACD $=$ acd, also auch $\measuredangle$ BCD $=$ bcd, und eben so $\measuredangle$ CDE $=$ cde, $\measuredangle$ E $=$ e, und $\measuredangle$ BAE $=$ bae; zweitens AB : ab $=$ BC : bc $=$ CA : ca $=$ CD : cd $=$ DA : da $=$ DE : de $=$ EA : ea,

oder AB : ab $=$ BC : bc $=$ CD : cd $=$ DE : de $=$ EA : ea. Da nun beide Vielecke gegenseitig gleiche Winkel und proportionale Seiten haben, so sind sie einander ähnlich (§ 65. 6).

§ 74. Lehrsatz.

Wenn zwei Vielecke ähnlich sind, so sind sie aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender Dreiecke zusammengesetzt.

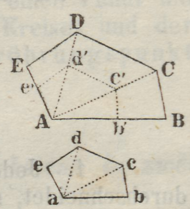
Bew. Wenn (Fig. § 73) ABCDE $\sim$ abcde ist, und man zieht aus den ähnlich liegenden Winkelspitzen A und a alle möglichen Diagonolen, so erhält man in beiden Vielecken g l e i c h v i e l Dreiecke, da sie gleich viel Seiten haben. Wegen Aehnlichkeit der Vielecke ist nun $\measuredangle$ B $=$ b, und Ab : ab $=$ BC : bc, folglich $\triangle$ ABC $\sim$ abc (§ 55), deshalb

$\measuredangle$ BCA $=$ bca, und BC : bc $=$ CA : ca, und da
$\measuredangle$ BCD $=$ bcd, und BC : bc $=$ CD : cd, so ist
$\measuredangle$ ACD $=$ acd, und CA : ca $=$ CD : cd, also
$\triangle$ ACD $\sim$ acd.

Auf diese Art kann man die Aehnlichkeit aller Dreiecke in beiden Vielecken beweisen, wie gross auch ihre Anzahl sein mag.

§ 75. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie ab *ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen* ABCDE *ähnlich sei.*

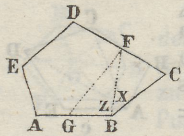


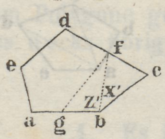
Aufl. Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen aus einem Winkel A in lauter Dreiecke, lege an die Linie ab in a und b die Winkel cab $=$ CAB, und b $=$ B, deren Schenkel sich in c schneiden, so ist $\triangle$ abc $\sim$ ABC (§ 52). Auf dieselbe Art errichte man auf ac ein dem $\triangle$ ACD ähnliches $\triangle$ acd u. s. w., dann ist abcde $\sim$ ABCDE (§ 73).

Man kann die Aufgabe auch so auflösen, dass man ab auf AB von A nach b' aufträgt, und durch b' die Gerade b'c' parallel zu BC, durch c' die Gerade c'd' parallel zu CD u. u. w. zieht, um die den Dreiecken ABC, ACD, ADE ähnlichen Deiecke Ab'c', Ac'd', Ad'e' zu bilden.

§. 76 Lehrsatz.

Wenn man in zwei ähnlichen Vielecken ABCDE, abcde *zwei Gerade* FG *und* fg *in ähnlicher Lage zieht,* d. h., *dass sie in jedem*





Vieleck zwei homologe Seiten AB *und* ab, DC *und* dc *in proportionale Stücke theilen; so sind dieselben den homologen Seiten beider Vielecke proportional.* Wenn also BG : bg = BA : ba, und CF : cf = CD : cd ist, so ist FG : fg = BA : ba.

Bew. Zieht man BF und bf, so ist △ BCF ∾ bcf (§ 55); denn es ist nach der Voraussetzung ∡ C = c und CF : cf = (CD : cd =) BC : bc. Daraus folgt BF : bf = BC : bc = AB : ab = BG : bg, und x = x′, also auch z = z′. Da nun △ BFG ∾ bfg (§ 55), so hat man FG : fg = BG : bg = BA : ba.

Man sieht zugleich, dass die ähnlich liegenden Geraden FG und fg mit den geschnittenen Seiten der Vielecke gleiche Winkel bilden, nämlich CFG = cfg, BGF = bgf.

§ 77. Lehrsatz.

Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander wie zwei beliebige homologe Seiten derselben.

Bew. (Fig. 76). Wenn ABCDE ∾ abcde, so verhält sich
AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae,
folglich auch
AB + BC + CD + DE + AE : ab + bc + cd + de + ae = AB : ab,
d. h. Umfang ABCDE : Umfang abcde = AB : ab,

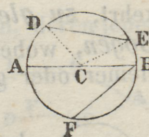
V. Von den geraden Linien und den Winkeln beim Kreise.

§ 78. Erklärungen.

1. Jede Gerade, welche den Umfang des Kreises in zwei Punkten durchschneidet, so dass sie Theile ausserhalb und innerhalb des Kreises hat, wird eine Secante genannt.

Jede gerade Linie, welche zwei Punkte der Peripherie eines Kreises mit einander verbindet, heisst Sehne oder Chorde des Kreises.

2. Wenn eine Sehne durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, so wird sie Durchmesser oder Diameter des Kreises genannt. — Da jeder Durchmesser aus zwei in gerader Linie liegenden Halbmessern besteht, und alle Halbmesser eines Kreises einander gleich sind, so sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich, und jeder Durchmesser ist doppelt so gross als ein Halbmesser.



Der Durchmesser AB ist grösser als jede andere Sehne DE des Kreises, denn es ist DC + CE > DE, also auch AB > DE.

3. Die Kreisfläche wird durch jede Sehne in zwei Theile getheilt, welche man Segmente oder Kreisabschnitte nennt, so dass also ein Segment oder Kreisabschnitt ein Theil der Kreisfläche ist, welcher von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begränzt wird. — Im Allgemeinen sind die beiden Segmente, in welche die Kreisfläche durch eine Sehne getheilt wird, ungleich. Nur wenn die Sehne durch den Mittelpunkt geht, sind diese beiden Segmente einander gleich, und werden Halbkreise genannt. — Dass der Durchmesser AB den Umkreis und die Kreisfläche in zwei gleiche Theile theilt, geht daraus hervor, dass, wenn man die Figur längs AB zusammen faltet, der Theil ADEB des Umkreises auf den Theil AFB fallen muss, weil sonst nicht alle Punkte beider Theile gleich weit vom Mittelpunkte entfernt wären.

4. Dasjenige Stück des Kreises, welches von zwei Radien und einem Kreisbogen begränzt wird, heisst Kreisausschnitt oder Sector.

5. Ein Winkel, der von zwei Halbmessern gebildet wird, dessen Spitze also im Mittelpunkte des Kreises liegt, heisst Centriwinkel.

6. Ein Winkel, der von zwei Sehnen gebildet wird, und dessen Spitze in der Peripherie des Kreises liegt, heisst Peripheriewinkel.

7. Die Schenkel sowol des Centriwinkels als des Peripheriewinkels bestimmen jedesmal zwei Punkte auf dem Umfange des Kreises und theilen hierdurch die ganze Kreislinie in zwei Bogen, von denen der eine der Oeffnung des Winkels gegenüber liegt. — Von diesem letztern Bogen sagt man, dass der Centriwinkel oder Peripheriewinkel auf ihm stehe. So steht der Centriwinkel DCE auf dem Bogen DE, und der Peripheriwinkel ABF auf dem Bogen AF.

8. Einen auf der halben Peripherie stehenden Peripheriewinkel nennt man auch einen Winkel im Halbkreise.

9. Eine unbegränzte gerade Linie, welche nur einen Punkt mit einer Kreislinie gemein hat, wird eine Tangente des Kreises und der Punkt, welchen sie mit der Kreislinie gemein hat, der Berührungspunkt genannt.

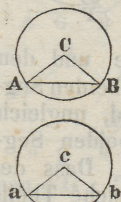
§ 79. Lehrsatz.

Eine gerade Linie kann eine Kreislinie höchstens in zwei Punkten schneiden.

Bew. Könnte eine Gerade den Umfang eines Kreises in drei Punkten schneiden, so würden sich von einem Punkte, nämlich dem Mittelpunkte des Kreises, drei gleiche Linien an die Gerade ziehen lassen, was unmöglich ist. (§ 19).

§ 80. Lehrsatz.

In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel und gleiche Sehnen, und umgekehrt, *zu gleichen Centriwinkeln oder gleichen Sehnen gehören gleiche Bogen,* wobei vorausgesetzt wird, dass beide Bogen zugleich entweder kleiner oder grösser als der halbe Umkreis sind.



Bew. 1. Wenn die beiden um C und c als Mittelpunkte beschriebenen Kreise einander gleich, also mit gleichen Radien beschrieben sind, und Bogen AB = ab ist, so lassen sich die beiden Kreise so aufeinander legen, dass c auf C zu liegen kommt und Bogen ab vollkommen mit AB zusammen fällt, weil alle Punkte des einen und des andern Bogens von den zusammenfallenden Punkten C und c gleich weit entfernt sind. Da nun die drei Winkelspitzen A, B, C des Dreiecks ABC mit den entsprechenden Winkelspitzen des Dreiecks abc zusammenfallen, so ist der Centriwinkel C = c und die Sehne AB = ab.

2. Wenn beide Kreise mit gleichen Radien beschrieben sind, und entweder Winkel C = c, oder Sehne AB = ab ist, so ist $\triangle$ ACB $\cong$ acb, im ersten Fall nach § 8, im andern nach § 13, und die Kreise lassen sich so äuf einander legen, dass c auf C, a auf A, b auf B fällt. — Da also die Endpunkte der beiden Bogen AB und ab auf einander fallen, und sämmtliche Punkte sowol des einen als des andern Bogens gleich weit von den auf einäder liegenden Punkten C und c entfernt sind, so müssen beide Bogen AB und ab ganz mit einander zusammenfallen.

§ 81. Lehrsatz.

In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehört zu dem grösseren Bogen eine grössere Sehne, und umgehrt, *zu der grösseren Sehne gehört ein grösserer Bogen,* vorausgesetzt, dass die mit einander verglichenen Bogen kleiner als der halbe Umkreis sind.

Bew. 1. Wenn Bog. AB > Bog. CD ist, und man von dem grösseren Bogen ein Stück AG = Bog. CD abschneidet, und die Sehne AG zieht, welche gleich CD ist (§ 80), so sind in den Dreiecken ABF und AGF zwei Seiten gegenseitig gleich, der eingeschlossene $\measuredangle$ AFB > AFG, folglich AB > AG oder CD (§ 11).

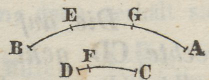
Wenn Sehne AB > Sehne CD ist, so muss auch Bog. AB > Bog. CD sein. Denn wäre Bog. AB = Bog. CD, so wäre Sehne AB = CD (§ 80), und wäre Bog. AB < Bog. CD, so würde nach dem Vorhergenden Sehne AB < CD sein, beides gegen die Voraussetzung.

§ 82. Aufgabe.

Das Zahlenverhältniss zweier mit demselben Radius beschriebener Kreisbogen AB *und* CD *zu finden.*

Aufl. Die Sehne des Bogens CD lege man so oft es angeht als Sehne in den Bogen AB hinein, z. B. 2 Mal, so wird der so bestimmte

Bogen AE aus zwei Theilen AG und GE zusammengesetzt sein, deren jeder dem Bogen CD gleich ist, da zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören (§ 80). Man hat also



$$AB = 2CD + EB.$$

Die Sehne des Bogens EB lege man in den Bogen CD von C nach F ein Mal hinein, wo dann der Bogen FD als Rest bleibt, so dass

$$CD = EB + FD.$$

Wenn nun endlich die Sehne des Bogens FD 4 Mal in den Bogen EB hineingelegt werden kann, so ist

$$EB = 4FD,$$

Hieraus ergiebt sich durch Substitution der gleichen Werthe

$$CD = 5FD \text{ und } AB = 14FD.$$

Da nun das gem. Mass FD in Bog. AB vierzehn Mal und in Bog. CD fünf Mal enthalten ist, so verhält sich

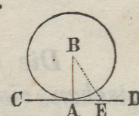
$$\text{Bogen } AB : \text{Bogen } CD = 14 : 5.$$

Die Operation ist beendigt, sobald ein Rest entweder im vorhergehenden genau aufgeht, oder seiner Kleinheit wegen vernachlässigt werden kann, in welchem letztern Falle man ein genähertes Verhältniss zwischen den gegebenen Bogen erhält.

§ 83. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie auf einem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht, so ist sie eine Tangente des Kreises; und umgekehrt: *Eine Tangente steht senkrecht auf dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Radius.*

Bew. 1. Es stehe die Gerade CD senkrecht auf dem Radius BA in A, welches ein Punkt der Peripherie ist, so lässt sich zeigen, dass mit Ausnahme von A jeder Punkt dieser Geraden z. B. der Punkt E ausserhalb des Kreises liegt. Denn die auf CD schief stehende Linie BE ist grösser als die Senkrechte BA (§ 19), also der Punkt E weiter als um den Radius vom Mittelpunkt entfernt. — Da also die Linie CD nur den Punkt A mit der Kreislinie gemein hat, so ist sie eine Tangente des Kreises.



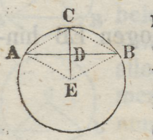
2. Wenn CD nur einen Punkt A mit der Kreislinie gemein hat, also eine Tangente ist, so liegen alle übrigen Punkte derselben ausserhalb des Kreises, also vom Mittelpunkte weiter, als um der Radius BA entfernt, woraus folgt, dass der Radius BA die kürzeste Linie ist, die man vom Mittelpunkt nach der Tangente ziehen kann, und dass er also auf dieser senkrecht steht (§ 19).

§ 84. Zusatz.

Hieraus folgt, dass man durch einen in der Peripherie des Kreises gegebenen Punkt A eine Tangente an den Kreis legt, wenn man auf den nach A gezogenen Radius in seinem Endpunkte eine Senkrechte errichtet.

§ 85. Lehrsatz

Die auf eine Sehne AB *durch ihre Mitte* D *errichtete Senkrechte* CD *geht immer durch den Mittelpunkt* E *des Kreises und halbirt den zur Sehne gehörigen Bogen.*



Bew. Da CD auf der Sehne AB in ihrer Mitte senkrecht steht, so geht sie durch alle von A und B gleich weit entfernten Punkte. Der Mittelpunkt E ist einer derselben, weil AE = BE ist, folglich muss CD durch E gehen. — Da ferner AC = BC (§ 18), so ist auch Bog. AC = Bog. BC (§ 80).

§ 86. Zusätze.

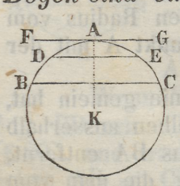
1. Da zwei Punkte die Lage einer Geraden vollkommen bestimmen, und der Mittelpunkt des Kreises, die Mitte einer Sehne und die Mitte des von der Sehne bespannten Bogens immer in derselben Geraden liegen, so muss eine Gerade, welche durch zwei dieser Punkte geht, auch durch den dritten gehen.

2. Da man von einem gegebenen Punkt auf eine Gerade nur eine einzige Senkrechte fällen kann (§ 23), so muss jede aus dem Mittelpunkt eines Kreises oder aus der Mitte eines Bogens auf die zugehörige Sehne gezogene Senkrechte die Mitte dieser Sehne treffen.

3. Um einen Bogen zu halbiren, muss man auf seine Sehne in der Mitte derselben eine Senkrechte ziehen.

§ 87. Lehrsatz.

Die in einem Kreise zwischen zwei parallelen Sehnen, oder zwischen einer Tangente und einer ihr parallelen Sehne liegenden Bogen sind einander gleich.



Bew. Wenn die Sehnen BC, DE und die Tangente FG einander || sind, und der Mittelpunkt K mit dem Berührungspunkte A durch einen Radius verbunden wird, so steht dieser $\perp$ FG (§ 83), folglich auch $\perp$ BC und DE (§ 32), woher Bog. AB = AC, Bog. AD = AE ist (§ 86. 3). Hieraus folgt ferner, dass AB — AD = AC — AE, d. h. BD = CE ist.

§ 88. Lehrsatz.

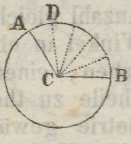
In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Bogen, wie die zu ihnen gehörigen Centriwinkel.

Wenn also die um C und c beschriebenen Kreise gleiche Radien haben, so soll sich verhalten:

$$\measuredangle \text{ ACB} : \measuredangle \text{ acb} = \text{Bog. AB} : \text{Bog. ab}.$$

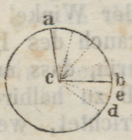
Bew. 1. Es seien die Bogen AB und ab commensurabel, und ihr gem. Mass AD in AB m Mal und in ab n Mal enthalten; dann verhält sich

Bog. AB : Bog. ab = m : n.



Wenn man nun die Theilungspunkte der Bogen mit den Mittelpunkten der Kreise durch Gerade verbindet, so wird $\sphericalangle$ ACB ebenfalls in m und $\sphericalangle$ acb in n Winkel getheilt, welche alle unter einander gleich sind (§ 80). Demnach verhält sich

$\sphericalangle$ ACB : $\sphericalangle$ acb = m : n.



Aus beiden Proportionen ergiebt sich

$\sphericalangle$ ACB : $\sphericalangle$ acb = Bog. AB : Bog. ab.

2. Wenn die Bogen AB und ab incommensurabel sind, und man annehmen wollte, dass diese Bogen ein kleineres oder grösseres Verhältniss zu einander haben, als ihre Centriwinket, z. B.

$\sphericalangle$ ACB : $\sphericalangle$ acb = Bog. AB : Bog. ad,

wo ad > ab ist, so lässt sich AB in eine so grosse Anzahl gleicher Theile theilen, dass jeder einzelne Theil < bd ist, und dass beim Auftragen dieser Theile auf Bogen ad ein Theilungspunkt e zwischen b und d fällt. Da nun die Bogen AB und ae commensurabel sind, so hat man

$\sphericalangle$ ACB : $\sphericalangle$ ace = Bog. AB : Bog ae,

ans welchen beiden Proportionen folgt

$\sphericalangle$ acb : $\sphericalangle$ ace = Bog. ad : Bog. ae,

also ein unmögliches Resultat, indem acb < ace, dagegen ad > ae ist. — Da sich ferner auf dieselbe Art zeigen lässt, dass das vierte Glied der Proportion nicht kleiner als ab sein könne, so folgt daraus, dass auch dann, wenn die Bogen incommensurabel sind, sich verhält

$\sphericalangle$ ACB : $\sphericalangle$ acb = Bog. AB : Bog. ab.

§ 89. Zusatz.

Man theilt den rechten Winkel, welcher wegen seiner beständigen Grösse das natürlichste Mass aller übrigen Winkel ist, in 90 gleiche Theile, die man (Winkel-) Grade nennt; jeden (Winkel-) Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile oder (Winkel-) Minuten, und ebenso jede (Winkel-)Minute in 60 (Winkel-) Secunden. Dem entsprechend theilt man den vierten Theil des ganzen Kreisumfanges oder den Quadranten, welcher von den Schenkeln des rechten Winkels begränzt wird, in 90 gleiche Theile oder (Bogen-) Grade, also den ganzeu Kreisumfang in 360 (Bogen-) Grade, ferner jeden (Bogen-) Grad in 60 (Bogen-) Minuten, und jede (Bogen-) Minute in 60 (Bogen-) Secunden. Da nun (§ 88) ein Centriwinkel eben so viele (Winkel-) Grade enthält, als sein Bogen (Bogen-) Grade hat, so sagt man gewöhnlich, dass das Mass eines Winkels der aus seinem Scheitel zwischen seinen Schenkeln beschriebnen Kreisbogen sei, was aber, da Winkel nur durch Winkel gemessen werden können, immer so zu verstehen ist, dass aus der Zahl von Graden eines Bogens auf die gleiche Zahl von Graden des ihm angehörigen Centriwinkels unmittelbar geschlossen wird, dass also jene dazu dienen, diese zu zählen.

§ 90. Zusatz.

Da zufolge § 88 die Linien, welche einen Bogen in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, auch den von diesem Bogen gemessenen Winkel in eben so viel gleiche Theile zerlegen, so sind die beiden Aufgaben, einen Winkel und einen Bogen in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen, von einander nicht verschieden. — Die Elementargeometrie gewährt im Allgemeinen bloss das Mittel, einen beliebigen Bogen oder Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen, indem sie nur den Gebrauch des Lineals und des Zirkels voraussetzt. — Dieses Mittel besteht darin, dass man, um z. B. (Fig. § 85) den Winkel AEB oder den Bogen AB zu halbiren, auf die Sehne AB durch ihre Mitte eine Senkrechte EC errichtet, welche den Bogen AB (§ 86), mithin auch den Winkel AEB in zwei gleiche Theile theilt. Auch kann man sich von der Gleichheit der beiden Winkel bei E vermittelst der Congruenz der Dreiecke AED und BED überzeugen.

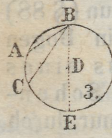
Da man auf dieselbe Weise die erhaltenen Hälften immer wieder von Neuem zu halbiren im Stande ist, so wird die Theilung eines Bogens oder eines Winkels nach den Zahlen 2, 4, 8, 16 ..... 2^n bewerkstelligt werden können. Es ist aber unmöglich, einen jeden Bogen oder Winkel geometrisch, d. h. bloss mit Hilfe des Lineals und des Zirkels in 3, 5, 6, 7, 9 . . ., . gleiche Theile zu theilen.

§ 91. Lehrsatz.

Ein Peripheriewinkel ABC *hat zum Masse die Hälfte des Bogens* AC, *auf welchem er steht.*

Bew. 1. Wenn der eine Schenkel des Peripheriewinkels B durch den Mittelpunkt D des Kreises geht, und man den Durchmesser EF ∥ AB zieht, so ist $\measuredangle$ B = EDC, wlceher vom Bogen EC gemessen wird, und da Bog. EC = BF = AE (§ 80, § 87), also gleich $1/2$ AC ist, so wird auch $\measuredangle$ B von EC oder $1/2$ AC gemessen.

2. Wenn der Mittelpunkt zwischen den Schenkeln des Peripheriwinkels ABC liegt und man zieht aus B den Durchmesser BE, so wird nach dem ersten Fall $\measuredangle$ ABE von $1/2$ AE, und $\measuredangle$ CBE von $1/2$ CE, also $\measuredangle$ ABC von $1/2$ AC gemessen.



3. Wenn der Mittelpunkt ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels ABC liegt, und man zieht aus B den Durchmesser BE, so ist $\measuredangle$ ABC der Unterschied der beiden Winkel ABE und CBE, von welchen der erste zu seinem Masse $1/2$ AE, der zweite $1/2$ CE hat. Hieraus folgt, dass das Mass des $\measuredangle$ ABC der Unterschied dieser beiden Bogen, also $1/2$ AE — $1/2$ CE = $1/2$ (AE — CE) = $1/2$ AC ist.

§ 92. Zusätze.

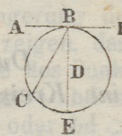
1. Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen oder auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich, wie ABE, ACE, ADE, weil alle von demselben Bogen, nämlich $\frac{1}{2}$ AE, gemessen werden.

2. Der Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreise steht, ist ein rechter, weil er zu seinem Masse die Hälfte des halben Umkreises, oder den vierten Theil des ganzen Umkreises hat.

3. Ein Peripheriewinkel ist halb so gross als ein Centriwinkel, welcher mit ihm auf gleichem Bogen steht.

§ 93. Lehrsatz.

Der von einer Tangente und einer Sehne gebildete Winkel ABC *hat die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens zum Masse.*

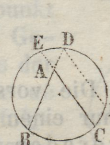


Bew. Zieht man aus dem Berührungspunkt B der Tangente den Durchmesser BE, so hat der $\measuredangle$ ABE als rechter zum Masse den Quadranten oder die Hälfte des halben Umkreises, also $\frac{1}{2}$ BCE, während der $\measuredangle$ CBE durch $\frac{1}{2}$ CE gemessen wird, woraus folgt, dass der $\measuredangle$ ABC als Unterschied jener beiden Winkel von dem Unterschiede ihrer Masse, also von $\frac{1}{2}$ BCE $-$ $\frac{1}{2}$ CE $=$ $\frac{1}{2}$ (BCE $-$ CE) $=$ $\frac{1}{2}$ BC gemessen wird.

Eben so kann man durch Addition der Masse der beiden Winkel CBE und EBF zeigen, dass der $\measuredangle$ CBF von der Hälfte des Bogens CEB gemessen wird.

§ 94. Lehrsatz.

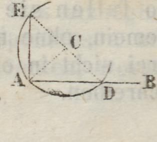
Der Winkel BAC *zweier sich schneidenden Sehnen oder Secanten hat zu seinem Masse bezüglich die halbe Summe oder den halben Unterschied der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen* BC *und* ED, *also* $\frac{1}{2}$ *(*BC $\pm$ ED*).*



Bew. Zieht man vom Punkte D die Sehne DF $\parallel$ AC, so ist das Mass des $\measuredangle$ BDF gleich $\frac{1}{2}$ BF $=$ $\frac{1}{2}$ (BC $\pm$ CF). Da nun aber $\measuredangle$ BDF $=$ BAC (§ 35) und CF $=$ ED (§ 87), so ist auch das Mass des $\measuredangle$ BAC gleich $\frac{1}{2}$ (BC $\pm$ ED).

§ 95. Aufgabe.

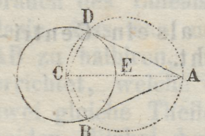
Auf eine gerade Linie AB *durch ihren Endpunkt* A, *ohne dieselbe zu verlängern, eine Senkrechte zu errichten.*



Aufl. Man nehme ausserhalb AB einen beliebigen Punkt C an, beschreibe aus diesem mit dem Radius CA einen Kreis, welcher AB in D schneidet, ziehe aus D durch den Mittelpunkt C den Durchmesser DE, welcher auf dem Umkreise einen Punkt E bestimmen wird, und verbinde diesen Punkt mit A, so ist AE die verlangte Senkrechte, weil EAD als Winkel im Halbkreise ein rechter ist (§ 92).

§ 96. Aufgabe.

Von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Punkt A *eine Tangente an den Kreis zu ziehen.*



Aufl. Man verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkte C des Kreises, und beschreibe über AC als Durchmesser einen Kreis, welcher den Umfang des gegebenen Kreises jederzeit in zwei Punkten B und D schneiden wird, so sind die Geraden AB und AD Tangenten des gegebenen Kreises. Denn zieht man BC und DC, so sind die Winkel ABC und ADC als Winkel im Halbkreise rechte, folglich AB $\perp$ BC, und AD $\perp$ DC, also sind AB und AD Tangenten des um C beschriebenen Kreises (§ 83).

§ 97. Aufgabe.

Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C, *eine Kreislinie zu beschreiben.*

Aufl. Zieht man AB und BC, und errichtet auf diese Linien in ihrer Mitte die Senkrechten DF und EF, so liegt der Mittelpunkt der zu beschreibenden Kreislinie in jeder der beiden Senkrechten (§ 85), und weil diese sich schneiden (§ 37), so kann er sich nur in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte F befinden. Da ferner die Geraden FA, FB, FC paarweise gleich weit von den Senkrechten DF und EF abstehen, also gleich sind (§ 18), so lässt sich mit FA aus F eine Kreislinie durch die drei Punkte A, B, C beschreiben.

§ 98. Zusatz.

1. Die vorstehende Auflösung giebt nur einen Punkt als Mittelpunkt und nur einen Radius, woraus folgt, dass sich durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte eine einzige Kreislinie beschreiben lässt.

2. Die Aufgabe ist nicht lösbar, wenn die drei Punkte A, B, C in einer und derselben geraden Linie liegen, weil alsdann eine Kreislinie mit einer Geraden drei Punkte gemein haben würde, was unmöglich ist (§ 79).

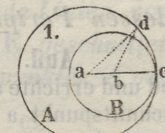
3. Zwei Kreislinien können sich höchstens in zwei Punkten schneiden, und haben sie drei Punkte mit einander gemein, so fallen sie ganz zusammen. Denn hätten zwei Kreislinien drei Punkte gemein, ohne mit einander zusammen zu fallen, so wäre es möglich, durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte zwei Kreislinien zu beschreiben.

4. Da man in der Peripherie eines jeden Kreises oder in jedem beliebigen Bogen immer drei nicht in gerader Linie liegende Punkte annehmen und den Mittelpunkt der durch diese Punkte gehenden Kreislinie bestimmen kann, so lässt sich mittels der Auflösung in § 97 auch zu einem gegebenen Kreise oder zu einem gegebenen Bogen der Mittelpunkt finden.

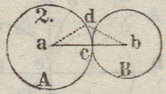
§ 99. Lehrsatz.

Zwei Kreise, welche durch einen und denselben Punkt der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden gehen, berühren sich nur in diesem Punkte; und umgekehrt, *wenn zwei Kreise einander berühren, so liegen ihre Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer geraden Linie.*

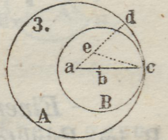
Bew. 1. Wenn die Mittelpunkte a und b der Kreise A und B an einerlei Seite des Punktes c liegen, welcher sich tn der Verlängerung der Geraden ab befindet und beiden Kreisen gemein ist, so lässt sich zeigen, dass jeder beliebige Punkt d der Peripherie A, mit einziger Ausnahme des Punktes c, ausserhalb des andern Kreises liegt. — Es ist nämlich $ab + bd > ad$ und $ad = ac = ab + bc$, also $ab + bd > ab + bc$ oder $bd > bc$, folglich die Entfernung des Punktes D von dem Mittelpunkte des Kreises B grösser als dessen Radius, so dass also der Punkt d ausserhalb des Kreises B liegt.

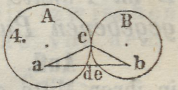


2. Wenn die Mittelpunkte an verschiedenen Seiten des Punktes c liegen, so ist $ad + bd > ac + bc$, also $bd > bc$, d. h. der Punkt d der Kreislinie A liegt ausserhalb des Kreises B.



3. Um den umgekehrten Satz zu beweisen, mögen die um die Mittelpunkte a und b beschriebenen Kreise A und B nur den Punkt c gemein haben. Würde nun der Mittelpunkt des Kreises B nicht in der von a nach c gezogenen Geraden, sondern etwa in der Geraden ad liegen, so dass der Mittelpunkt des Kreises B sich in e befände, so wäre $ae + ec > ac$ oder ad, also $ae + ec > ae + ed$, folglich $ec > ed$, was unmöglich ist, weil ec als vorausgesetzter Radius des Kreises B kleiner als ed sein muss, indem nach der Voraussetzung d als ein Punkt in der Kreislinie A ausserhalb des Kreises B liegt.





4. Wenn die beiden Kreise A und B sich von aussen in c berühren, und ihre Mittelpunkte a und b eine solche Lage hätten, dass die Gerade ab den Berührungspunkt c nicht träfe, so wäre $ac + bc > ab$, also auch $ad + be > ab$, was unmöglich ist. Also giebt es kein Dreieck, dessen Spitzen in den Mittelpunkten a und b beider Kreise und in ihrem Berührungspuskte c liegen könnten, woraus folgt, dass a und b mit c in gerader Linie liegen.

§ 100. Zusätze.

1. Wenn der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise (die Centrallinie) gleich ist der Summe oder der Differenz ihrer Radien, so berühren sich die Kreise bezüglich äusserlich der innerlich.

2. Zwei Kreise können sich nicht berühren und um so weniger einander schneiden, wenn die Summe ihrer Radien kleiner oder der Unterschied ihrer Radien grösser als die Centrallinie ist.

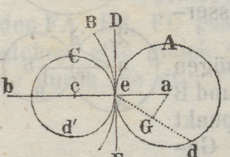
3. Wenn zwei oder mehre Kreise A, B, C . . . . (Fig. § 101) nur einen einzigen Punkt e gemein haben, so ist die auf der Centrallinie im Berührungspunkte e errichtete Senkrechte DF eine Tangente für alle diese Kreise (§ 83).

4. Wenngleich es unmöglich ist, in dem Raume CeD zwischen einem Kreise und seiner Tangente eine gerade Linie an den Berührungspunkt zu ziehen, ohne dass ein Theil derselben ausserhalb dieses Raumes fiele, so können doch unendlich viele verschiedene Kreislinien, wie z. B. die Kreislinie B, dazwischen gezogen werden.

§ 101. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine der Lage nach gegebene Gerade DF *in einem gegebenen Punkte* e *berührt, und dessen Peripherie durch einen andern gegebenen Punkt* d *geht.*

Aufl. Man errichte auf DF in e die Senkrechte ea, ziehe die Linie ed und errichte auf dieselbe in ihrer Mitte die Senkrechte Ga, so ist der Durchschnittspunkt a beider Senkrechten der Mittelpunkt und ae der Radius des verlangten Kreises. Denn weil der Mittelpunkt desselben in der, auf der Tangente DF im Berührungspunkte e senkrecht stehenden ae, und ebenso in der auf der Sehne ed in ihrer Mitte senkrecht stehenden Ga liegt (§ 83, § 85), so muss er im Durchschnittspunkte a beider Linien liegen, und ae, der Radius des zu beschreibenden Kreises sein.



§ 102. Aufgabe. (Fig. § 101).

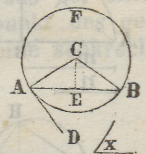
Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis B *im Punkte* e *berührt, und dessen Peripherie durch einen andern gegebenen Punkt* d *geht.*

Aufl. Die auf ed als auf eine Sehne des zu beschreibenden Kreises in ihrer Mitte errichtete Senkrechte Ga geht durch den Mittelpunkt dieses Kreises (§ 85), und zieht man durch den Mittelpunkt b des gegebenen Kreises B und durch e eine Gerade be, so muss sich in ihr oder in ihrer Verlängerung ebenfalls der Mittelpunkt des gesuchten Kreises befinden (§ 99), also muss er in dem Durchschnittspunkt a bieder Linien liegen, und ae der Radius des gesuchten Kreises sein.

Befände sich der gegebene Punkt d in d', innerhalb des Kreises B, so wäre die Construction von der vorhergehenden nur darin verschieden, dass der gesuchte Kreis von dem gegebenen eingeschlossen sein würde.

§ 103. Aufgabe.

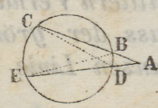
Ueber einer gegebenen geraden Linie AB *als Sehne einen Kreisabschnitt zu beschreiben, in welchem der Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel* x *gleich ist.*



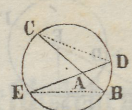
Aufl. An AB lege man im Punkt A einen ∡ BAD = x an, errichte durch A auf AD eine Senkrechte AC, und auf die Linie AB in deren Mitte eine Senkrechte EC; so ist der Durchschnittspunkt C beider Senkrechten der Mittelpunkt, CA der Radius des zu beschreibenden Kreises, und der Kreisabschnitt AFB, welcher nach der entgegengesetzten Richtung von dem gleich x abgetragenen ∡ BAD liegt, der gesuchte. Denn weil AD eine Tangente des Kreises, und ein auf dem Bogen AB stehender Peripheriewinkel = ∡ BAD ist, indem beide die Hälfte des Bogens AB zum Masse haben (§ 91, § 93), so ist derselbe auch gleich ∡ x, also der Kreisabschnitt AFB der gesuchte.

§ 104. Lehrsatz.

Wenn zwei im Punkt A *sich schneidende gerade Linien von einer Kreislinie in je zwei Punkten* B *und* C, D *und* E *geschnitten werden; so sind die Entfernungen ihres Durchschnittspunktes* A *von den Durchschnittspunkten mit der Kreislinie verkehrt proportionirt, so dass* AB : AD = AE : AC.

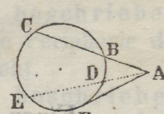


Bew. Der Punkt A kann ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegen, für welche beiden Fälle der Beweis vollkommen derselbe ist. Zieht man BE und CD, so ist △ ABE ∾ ADC, weil ∡ A = A, und Peripheriewinkel E = C als auf einerlei Bogen stehend, folglich AB : AD = AE : AC.



§ 105. Zusatz.

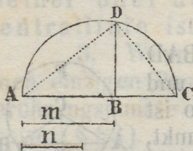
Die von irgend einem Punkte A an den Kreis gezogene Tangente AF ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken AB und AC der Secante, welche von demselben Punkte A ausgeht. Zieht man nämlich aus A die Secante AE, so ist AB : AD = AE : AC. Denkt man sich nun die Secante AE um den Punkt A gegen F zu gedreht, so kommen die Punkte D und E einander immer näher, und weil die obige Proportion richtig bleibt, wie nahe auch diese Punkte zusammenrücken, so wird sie selbst dann noch stattfinden, wenn D und E einander unendlich nahe sind oder zusammen-



fallen, d. h. wenn die Gerade AE sich in die Tangente AF verwandelt, also der äussere Theil AD der ganzen Linie AE gleich wird. Man hat mithin in diesem Fall AB : AF = AF : AC.

§ 106. Aufgabe.

Zwischen zwei gegebenen Linien m *und* n *die mittlere Proportionallinie zu finden.*



Aufl. Man lege AB = m und BC = n in gerader Linie an einander, beschreibe über AC als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte in B auf AC eine bis zu dem Halbkreise verlängerte Senkrechte BD, so ist diese die gesuchte Linie. — Denn zieht man AD und DC, so ist ∡ ADC ein rechter (§ 92), daher in △ ADC (§ 61)

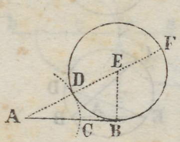
AB : BD = BD : BC oder m : BD = BD : n.

Andere Aufl. Man mache EG gleich der grössern Linie m, beschreibe über EG als Durchmesser einen Halbkreis, schneide von EG die EF = n ab und errichte in F eine Senkrechte, welche die Peripherie in H trifft; zieht man nun EH, so ist diese die gesuchte Linie. Denn in dem bei H rechtwinkligen △ EHG hat man (§ 61).

EG : EH = EH : EF oder m : EH = EH : n.

§ 107. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie AB *nach dem äussern und mittlern Verhältnisse zu theilen, d. h. so in zwei Theile zu theilen, dass der grössere Theil die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Theile sei.*



Aufl. Man errichte auf AB in B die Senkrechte BE = $\frac{1}{2}$ AB, ziehe AE, beschreibe aus E mit EB einen Kreis, und schneide von AB das Stück AC = AD ab, so ist AB in C auf die verlangte Art getheilt. Denn verlängert man AE bis an die Peripherie nach F, so hat man, weil AB eine Tangente des beschriebenen Kreises ist,

AF : AB = AB : AD (§ 105),

also auch AF — AB : AB = AB — AD : AD.

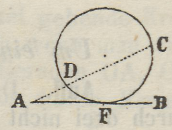
Da nun nach der Construction AD = AC, AB = DF, folglich auch AF — AB = AD = AC und AB — AD = AB — AC = BC ist, so ist

AC : AB = BC : AC oder

AB : AC = AC : BC.

§ 108. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte C, D *geht, und eine unbegränzte, der Lage nach gegebene Gerade* AB *berührt.*



Aufl. Man ziehe die Gerade CD und verlängere dieselbe bis sie die AB in A schneidet, suche zwischen AC und AD die mittlere Proportionale (§ 106), und trage dieselbe auf AB von A nach F, so wird der durch die drei Punkte C, D, F hindurchgelegte Kreis (§ 97) der verlangte sein. — Denn weil nach der Construction AF eine Tangente und AC eine Secante des beschriebenen Kreises ist, so ist

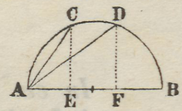
$$AC : AF = AF : AD \text{ (§ 105).}$$

Man muss daher, um auf AB den Berührungspunkt F zu erhalten, AF gleich der mittleren Proportionalen zwischen AC und AD machen.

Wenn die Sehne DC || AB ist, so wird offenbar die aus der Mitte von DC senkrecht gezogene, also (§ 85) durch den Mittelpunkt des gesuchten Kreises gehende Linie, da sie zugleich auf der Tangente senkrecht stehen muss (§ 32), den Berührungspunkt F bestimmen.

§ 109. Lehrsatz.

In einem Halbkreise verhalten sich die Quadrate der Sehnen AC, AD, *welche von einem Endpunkte des Durchmessers aus gezogen sind, wie die Segmente* AE, *AF, die auf dem Durchmesser zwischen dem beiden Sehnen gemeinschaftlichen Endpunkte und den Senkrechten liegen, die von ihren andern Endpunkten auf den Durchmesser gefällt werden.*



Bew. Da die Sehnen AB und AD die mittlern Proportionaleu zwischen dem Durchmesser AB und jedem der Segmente AE und AF sind (§ 106), so hat man

$$AC^2 = AB \,.\, AE \text{ und } AD^2 = AB \,.\, AF, \text{ also}$$

$$AC^2 : AD^2 = AB \,.\, AE : AB \,.\, AF, \text{ oder}$$

$$AC^2 : AD^2 = AE : AF.$$

V. Von den um und in den Kreis geschriebenen Vielecken.

§ 110. Erklärung.

Eine geradlinige Figur heisst in einen Kreis beschrieben, oder ein Kreiss heisst um eine geradlinige Figur beschrieben, wenn alle Seiten der Figur Sehnen des Kreises sind, die Peripherie des letztern also durch alle Winkelspiten der Figur hindurch geht.

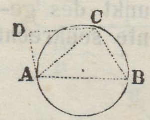
Eine geradlinige Figur heisst um einen Kreis beschrieben oder ein Kreiss heisst in eine geradlinige Figur beschrieben, wenn alle Seiten der Figur Tangenten des Kreises sind.

§ 111. Aufgabe.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Da diese Aufgabe gleichbedeutend ist mit der frühern (§ 97), durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte eine Kreislinie zu beschreiben, so dient die daselbst gegebene Auflösung zugleich für die vorliegende Aufgabe.

§ 112. Zusatz.

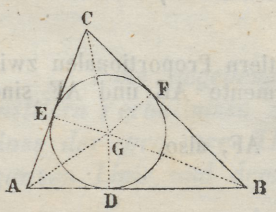


Da man durch die drei nicht in gerader Linie tiegende Punkte A, B, C nur eine Kreislinie beschreiben kann, also die durch jene Punkte gehende Kreislinie ihrer Lage nach vollkommen bestimmt ist, so ist offenbar, dass, wenn man beliebig einen vierten Punkt D annähme, dieser Punkt nicht in der Kreislinie liegen könnte, so dass sich alsdann um das Viereck ABCD keine Kreislinie beschreiben liesse. Noch weniger wird sich um jedes beliebige Viereck von mehr als vier Seiten eine Kreislinie beschreiben lassen.

§ 113. Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck ABC *einen Kreis zu beschreiben.*

Aufl. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, innerhalb des Dreiecks



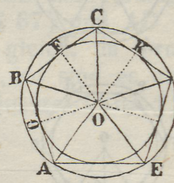
ABC einen Punkt zu finden, der von allen drei Seiten desselben gleich weit entfernt ist. Zu diesem Zwecke halbire man zwei Winkel A und B, so wird der Durchschnittspunkt G der Theilungslinien AG und BG der Mittelpunkt, und die Entfernung dieses Punktes von den Dreiecksseiten der Radius des verlangten Kreises sein. Denn fällt man aus G auf die Seiten des Dreiecks die Senkrechten GD, GE, GF, so ist $\triangle$ ADG $\cong$ AEG (§ 42 3), also GD = GE; ferner $\triangle$ BDG $\cong$ BFG, also GD = GF. Da nun GE = GD = GF ist, so muss der aus G mit einer dieser Senkrechten beschriebene Kreis die Seiten des Dreiecks berühren.

Um sich davon zu überzeugen, dass man auch durch die Halbirung des Winkels C und eines der beiden andern Winkeln denselben Punkt G findet, verbinde man G mit C durch eine Gerade. Alsdann folgt aus der Congruenz der Dreiecke CEG und CFG (§ 25), dass CG auch den $\measuredangle$ C in zwei gleiche Theile theilt.

§ 114 Lehrsatz.

Um und in jedes regelmässige Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben.

Bew. 1. Wenn ABCDE ein regelm. Vieleck ist, also alle seine Winkel A, B, C . . . und alle seine Seiten einander gleich sind, so muss der durch die Scheitel A, B, C irgend dreier seiner Winkel gehende Kreis auch durch die Scheitel aller übrigen Winkel gehen. Denn wenn man vom Mittelpunkte O des durch A, B, C gehenden Kreises die Geraden OA, OB, OC, OD . . . . . zieht, so sind die drei ersten als Radien dieses Kreises einander gleich, und die gleichschenkligen Dreiecke AOB, BOC sind $\cong$ (§ 13). Da mithin die Winkel ABO und CBO gleich sind, so ist jeder die Hälfte des Winkels ABC; der ihnen gleiche $\measuredangle$ BCO wird also ebenfalls die Hälfte von $\measuredangle$ BCD sein, indem nach der Voraussetzung $\measuredangle$ BCD = ABC ist; folglich ist $\measuredangle$ OCD = OCB. — Hieraus folgt, dass $\triangle$ BOC $\cong$ DOC (§ 8), also OC = OD ist, mithin der Punkt D ebenfalls im Umfange des durch A, B, C gehenden Kreises liegt. — Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass alle folgenden Winkelspitzen des Vielecks in dem Umfange dieses Kreises liegen müssen.



2. Wenn man vom Mittelpunkte O des umgeschriebenen Kreises die Senkrechten OG, OF, OK... auf die Seiten des Vielecks fällt, so ist $\triangle$ GOB $\cong$ BOF $\cong$ FOC $\cong$ COK . . . (§ 42,3), also GO = FO = KO . . ., woraus folgt, dass der aus O mit einer dieser Senkrechten beschriebene Kreis die Seites des Vielecks berühren muss,

§ 115. Erklärung.

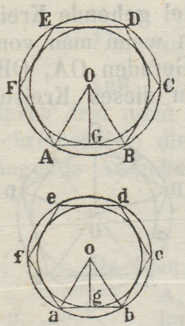
1. In einem regelm. Polygon nennt man jeden von zwei zusammenstossenden Seiten eingeschlossenen Winkel einen Polygonwinkel oder Umfangswinkel, während die Winkel, welche von den aus dem Mittelpunkte des Polygons nach seinen Winkelspitzen gezogenen Geraden gebildet werden, Centriwinkel heissen.

2. Alle Centriwinkel in einem regelm. Polygone sind einander gleich (§ 114), und da ihre Summe vier Rechte beträgt (§ 4, 12), so ist jeder derselben gleich vier Rechten, dividirt durch die Anzahl der Winkel oder der Seiten des Polygons. In einem regelm. n eck ist also jeder Centriwinkel gleich $^4/_n$ R. Jeder Polygonwinkel eines regelm. n ecks ist gleich $2 - \frac{4}{n}$ Rechten (§ 71, 2).

§ 116. Lehrsatz.

Regelmässige Polygone von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich, und ihre Umfänge verhalten sich wie die Radien der umgeschriebenen oder eingeschriebener Kreise.

Bew. 1. Die Winkel solcher Polygone sind gegenseitig gleich, indem in allen regelm. n ecken jeder Polygonwinkel $2 - \frac{4}{n}$ Rechte beträgt (§ 115). Da ausserdem die Seiten des einen so wie des andern



Polygons unter sich gleich sind, also zu einander in gleichem Verhältnisse stehen, so sind die Polygone ähnlich (§ 65, 6).

2. Bezeichnen wir die Umfänge der beiden regelm. n ecke ABCD.... und abcd.... mit U und u, so ist (§ 77)

$$U : u = AB : ab.$$

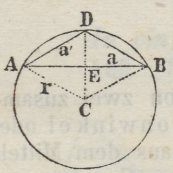
Da nun wegen Gleichheit der Winkel $\triangle$ AOB $\backsim$ aob und $\triangle$ AOG $\backsim$ aog, so ist

$$AB : ab = AO : ao = GO : go, \text{ folglich}$$

$$U : u = AO : ao = Go : go.$$

§ 117. Aufgabe.

Wenn ein regelm. Polygon von irgend einer Anzahl Seiten in einen Kreis eingeschrieben ist, 1) in denselben Kreis ein anderes regelm. Polygon von doppelter Seitenzahl einzuschreiben, und 2) die Seite des letztern aus der Seite des erstern und aus dem Radius des Kreises zu berechnen.



Aufl. 1. Es sei AB eine Seite des gegebenen Polygons und C der Mittelpunkt des Kreises. Halbirt man den Bogen ADB (§ 86, 3), so sind die einander gleichen Sehnen AD und BD offenbar zwei neben einander liegende Seiten des verlangten Polygons.

2. Bezeichnen wir der Kürze wegen AB mit a, AD mit a', AC mit r, so ist (§ 62)

$$a'^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ED^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + (r - CE)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r \cdot CE + CE^2. \text{ Nun ist aber (§ 62)}$$

$$CE^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}, \text{ also } CE = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}, \text{ mithin}$$

$$a'^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r\,\frac{\sqrt{4r^2 - a^2},}{2} + r^2 - \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$a'^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}, \text{ also}$$

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}, \text{ welches die gesuchte Formel ist.}$$

Wenn der Radius r = 1 gesetzt wird, so erhält man

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

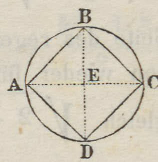
§ 118. Aufgabe. (Fig. § 119).

Ueber einer geraden Linie AB *ein Quadrat zu construiren.*

Aufl. Errichtet man auf AB in A und B die Senkrechten AD und BC, macht dieselben gleich AB, und zieht CD, so ist ABCD das verlangte Quadrat. Denn weil AD $\#$ BC, also auch AB $\#$ DC (§ 67) und AD $=$ AB ist, so sind alle Seiten des Vierecks unter einander gleich, da ferner zufolge der Construction die Winkel A und B Rechte sind, so sind es auch die Winkel C und D (§ 35, 3). Es ist demnach ABCD ein Quadrat (§ 65, 11).

§ 119. Aufgabe.

In einen Kreis die regelm. Polygone von 4, 8, 16.... Seiten einzuschreiben.



Aufl. Auf einen Durchmesser AC errichte man einen andern Durchmesser BD senkrecht, und verbinde die vier Punkte A, B, C, D des Umfangs durch gerade Linien, so ist ABCD das verlangte Quadrat. Denn die Winkel ABC, BCD .... sind alle rechte (§ 92), und die Seiten AB, BC.... sind gleich wegen Congruenz der Dreiecke AEB, BEC .... (§ 8).

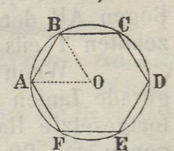
Durch fortgesetzte Halbirung des Qadranten AB erhält man die eingeschriebenen regelm. Polygone von 8, 16, 32.... Seiten.

Zur Berechnung der Seite des eingeschriebenen Quadrats aus dem Radius des Kreises hat man $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2AE^2$, also $AB = AE\sqrt{2}$, und wenn man den Radius für die Einheit nimmt, $AB = \sqrt{2}$. Um die Seite des regem. 8 ecks zu berechnen, setze man in die Formel (§ 117) $a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ für a den Werth $\sqrt{2}$, so ist die Seite des 8ecks $= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Setzt man wieder diesen Ausdruck für a in dieselbe Formel, so ist die Seite des regelm. 16 ecks gleich

$$\sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \text{ u. s. w.}$$

§ 120. Aufgabe.

In einen Kreis die regelm. Polygone von 3, 6, 12, 24 .... Seiten einzuschreiben.



Aufl. Man schreibt in einen Kreis ein regelm. Sechseck ein, wenn man in denselben den Radius sechs Mal als Sehne einträgt, und die auf einander folgenden Theilungspunkte durch gerade Linien verbindet. Ist nämlich AB gleich dem Radius des Kreises, und zieht man die Radien AO und BO, so ist (§ 42,5) in dem gleichseitigen $\triangle$ ABO jeder Winkel $= \frac{2}{3}$ R. $= \frac{4}{6}$ R, woraus folgt, dass der dem Radius als Sehne entsprechende Centriwinkel O der sechste Theil der vier um den Mittelpunk herumliegenden rechten Winkel, also der Radius die Sehne des sechsten Theils der Peripherie ist.

Um ein gleichseitiges Dreieck einzuschreiben, verbinde man im regelm. Sechseck einen Winkel um den andern durch gerade Linien. Die Sehne der Hälfte des Bogens AB ist die Seite des regelm. eingeschriebenen Zwölfecks u. s. w.

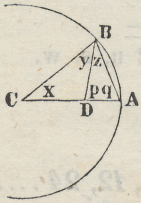
Die Seite des eingeschriebenen regelm. 6 ecks ist = 1, wenn der Radius als Einheit gesetzt wird. Um die Seite des eingeschr. gleichseitigen Dreiecks zu erhalten, denke man sich die Seite AC des Dreiecks, so wie den Durchmesser AD gezogen, so ist das $\triangle$ ACD bei C rechtwinklig (§ 92, 2), also $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{(2AO)^2 - AO^2} = AO\sqrt{3}$, und wenn man AO = 1 setzt, $AC = \sqrt{3}$. Substituirt man in die Formel (§ 117) $a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ für a den Werth 1, so erhält man für die Seite des regelm, 12 ecks den Ausdruck $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Setzt man nun diesen wieder für a in jene Formel, so ist die Seite des regelm. 24 ecks gleich $\sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, u. s. w.

§ 121. Aufgabe.

In einen Kreis die regelm. Polygone von 5, 10, 20, 40... Seiten einzuschreiben.

Aufl. Man findet die Seite des regelm. Zehnecks, wenn man den Radius des Kreises nach dem äussern und mittlern Verhältnisse theilt (§ 107), und das grössere Stück CD desselben nimmt. Denn macht man die Sehne AB = CD, und zieht CB und BD, so ist nach der Construction

$$AC : CD = : AD \text{ oder}$$
$$AC : AB = AB : AD,$$



und weil die Dreiecke ABD und ACB ausserdem den Winkel q gemein haben, so sind sie einander ähnlich (§ 55), also $\angle z = x$; und da $\triangle$ ACB gleichschenklig ist, so muss es auch $\triangle$ ABD sein, so dass BD = AB = CD. Folglich ist $\angle p = q$, $y = x = z$, und weil als Aussenwinkel $p = x + y = 2x$, so ist auch $q = 2x$. Da nun im $\triangle$ ACB

$$x + y + z + q = 2\,R \text{ (§ 41), oder}$$
$$x + x + x + 2x = 2\,R, \text{ also } 5x = 2\,R,$$

so ist $x = \frac{2}{5}\,R = \frac{4}{10}\,R$, also der dem Centriwinkel x entsprechende Bogen AB der zehnte Theil der Peripherie; mithin ist AB die Sehne des zehnten Theils der Peripherie.

Wenn man im regelm. Zehneck einen Winkel um den sndern durch gerade Linien verbindet, so erhält man das regelm. Fünfeck. — Durch fortgesetzte Halbirung des Bogens AB gelangt man zu den regelm. Polygonen von 20, 40 .... Seiten.

Um die Seite des regelm. 10 ecks aus dem gleich 1 gesetzten Radius zu berechnen, hat man, wenn das grössere Stück des nach dem äussern und mittlern Verhältnisse getheilten Radius gleich x gesetzt wird, $1 - x : x = x : 1$, also $x^2 + x = 1$. Die Auflösung dieser unreinen quadratischen Gleichung giebt $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, welches die Seite des regelm. 10 ecks ist. Zur Berechnung der Seite des regelm. 5 ecks setze man in die Gleichung (§ 117) $a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ für a' die Seite des 10 ecks, nämlich $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ und forme sie nach a um. Dann ist nach einander

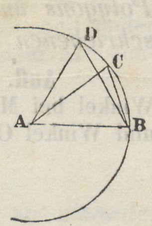
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}, \quad \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = 2 - \sqrt{4 - a^2},$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{4 - a^2}, \quad \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} = 4 - a^2, \text{ also } a^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2},$$

$a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$, welches die Seite des regelm. 5 ecks ist.

§ 122. Aufgabe.

In einen Kreis die regelm. Polygone von 15, 30, 60 .... Seiten zu beschreiben.

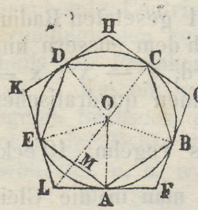


Aufl. Trägt man in die Peripherie des Kreises von einem Punkte B nach derselben Richtung sowol die Seite BD des regelm. Sechsecks als die Seite BC des regelm. Zehnecks als Sehne ein, so ist der Unterschied CD der entsprechenden Bogen der fünfzehnte Theil des ganzen Umfanges, indem nämlich $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$. Die Sehne des Bogens CD ist also gie Seite des regelm. Funfzehnecks. Die Halbirung des Bodens CD führt auf das regelm. 30 eck u. s. w.

§ 123. Aufgabe.

Wenn ein regelmässiges Polygon von irgend einer Seitenzahl in einen Kreis eingschrieben ist, um diesen Kreis ein regelm. Polygon von der nämlichen Seitenzahl zu beschreiben; und umgekehrt, *wenn das umschriebene regelm. Polygon gegeben ist, das eingeschriebene zu construiren.*

Aufl. 1. Es sei ABCDE das gegebene regelm. Polygon. An die Punkte A, B, C, ... ziehe man Tangenten, die sich in F, G, H . , . . schneiden, so ist FGHKL das verlangte umgeschriebene Polygon. Denn die Dreiecke AFB, BGC, CHD ..... sind sämmtlich gleichschenklig und einander $\cong$, weil AB = BC = CD ....., und die Winkel BAF, ABF, CBG ....



ebenfalls einander gleich sind, indem alle von der Hälfte der einander gleichen Bogen AB, BC ... gemessen werden (§ 93). Hieraus folgt, dass $\sphericalangle F = G = H$ ...... und $AF = FB = BG$ ...., also $FG = GH = HK$ .... ist. — Da also das Palygon FGHKL regelmässig und eben so vielseitig wie das eingeschriebene Polygon ist, auch seine Seiten Tangenten des Kreises sind, so ist es das verlangte.

2. Aus dem umgeschriebenen regelm. Polygon kann man das eingeschriebene herleiten, wenn man die Punkte A, B, C ....., welche die Mitten der Seiten des ersteren sind, und in welchen es den Kreis berührt, durch gerade Linien verbindet. Denn die Dreiecke AFB, BGC, CHD .... sind congruent, weil in ihnen zwei Seiten als Hälften der einander gleichen Seiten LF, FG, GH .... und der zwischenliegende Winkel gleich sind. Hieraus folgt, dass $AB = BC = CD$ ....., also die auf diesen Seiten stehenden Bogen ebenfalls gleich sind. — Da nun die Peripheriewinkel ABC, BCD ...., auf Bogen stehen, die aus der nämlichen Anzahl gleicher Bogen zusammengesetzt sind, so sind sie ebenfalls einander gleich. — Das Polygon ABCDE, in welchem alle Seiten und Winkel gleich sind, und dessen Winkelspitzen in dem Kreisumfange liegen, wird das gesuchte sein.

§ 124. Aufgabe. (Fig. § 123).

Aus der Seite AE *eines dem Kreise eingeschriebenen regelm. Polygons und aus dem Radius* r *die Seite des dem Kreise umgeschriebenen regelm. Polygons von gleicher Seitenzahl zu berechnen.*

Aufl. Zieht man OL, so ist $\triangle$ OMA $\sim$ OAL (§ 52), weil der Winkel bei M, was sich leicht zeigen lässt. und ebenso bei A ein rechter, und Winkel O beiden Dreiecken gemein ist. Man hat daher

$$OM : OA = AM : AL, \text{ oder}$$

$$OM : r = \tfrac{1}{2}AE : \tfrac{1}{2}FL, \text{ also } FL = \frac{r \cdot AE}{OM}.$$

Da nun im rechtwinkligen $\triangle$ OMA

$$OM = \sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2}AE)^2} = \sqrt{\frac{4r^2 - AE^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - AE^2}, \text{ so ist}$$

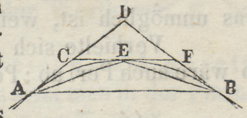
$$FL = \frac{r \cdot AE}{\tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - AE^2}}$$

Wenn man die Seite des eingeschriebenen regelm. Polygons mit a, die des correspondirenden umgeschriebenen mit A bezeichnet, und den Radius des Kreises $= 1$ setzt, so verwandelt sich jene Formel in nachstehende:

$$A = \frac{a}{\tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}}.$$

§ 125. Bemerkung.

Der Umfang des eingeschriebenen Polygons wird desto grösser, je grösser man die Anzahl seiner Seiten nimmt, während der des umgeschriebenen Polygons in diesem Falle abnimmt. — Denn ist AB die Seite irgend eines eingeschriebenen Polygons, und sind AE und BE Seiten des eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl, so ist



$$AE + BE > AB,$$

und da diese Ungleichung offenbar bei jeder Seite des ersten Polygons stattfindet, so folgt daraus, dass der Umfang des zweiten eingeschriebenen Polygons grösser ist, als der des ersten. Wenn ferner AD und BD zwei halbe Seiten des umgeschriebenen Polygons sind, und CF die Seite des umgeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl ist, so hat man

$$CD + DF > CF,$$

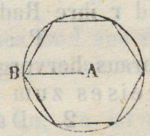
woraus hervorgeht, dass der Umfang des zweiten umgeschriebenen Polygons kleiner als der des ersten ist.

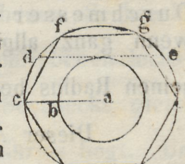
Da man sich durch fortgesetzte Verdoppelung der Seiten des ein und umgeschriebenen Polygons dem Kreisumfange immer mehr nähert, so kann man offenbar zwei Polygone, ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes von der Beschaffenheit finden, dass der Unterschied ihrer Umfänge kleiner als jede noch so kleine gegebene Grösse ist. Der Kreisumfang ist die Gränze, welcher sich die Polygonumfänge bei stets wiederholter Verdoppelung ihrer Seitenzahl von beiden Seiten immer mehr nähern, und es leuchtet ein, dass derselbe von einem jeden der Polygonumfänge weniger verschieden ist, als der eine Polygonumfang von dem andern, so dass sich immer ein Polygon, sei es ein eingeschriebenes oder umgeschriebenes, von der Beschaffenheit finden lässt, dass der Unterschied zwischen seinem Umfange und dem Kreisumfange kleiner als jede noch so kleine gegebene Grösse ist.

§ 126. Lehrsatz.

Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Radien oder Durchmesser.

Bew. Wenn sich nicht verhielte Per. AB : Per. ab = AB : ab, sondern Per. AB : Per. ab = AB : ac, wo ac > ab wäre, so könnte man mit ac einen dem Kreise ab concentrischen Kreis beschreiben, und in diesen ein regelm. Polygon einschreiben, welches den Umfang des Kreises ab nicht erreichte. Denn wie klein auch der Unterschied zwischen beiden Kreisen sein mag, so ist doch klar, dass, wenn man an den innern Kreis die Tangente de legt, und auf der äussern Kreislinie einen aliquoten Theil fg kleiner als den Bogen dfge nimmt, das über der Sehne fg eingeschriebene regelm. Polygon die Peripherie des kleinern Kreises nicht erreichen wird. Bezeichnet man den Umfang dieses Polygons durch u,





und beschreibt in den Kreis AB ein regelm. Polygon von gleicher Seitenzahl, dessen Umfang U sei, so hat man (§ 116)

$U : u = AB : ac$, und da angenommen war

Per. AB : Per. ab $= AB : ac$, so folgt daraus

Per. AB : $U =$ Per. ab : u,

was unmöglich ist, weil Peripherie AB $> U$, während Per. ab $< u$ ist.

Verhielte sich aber Per. AB : Per. ab $= AB : x$, wo $x < ab$ ist, so wäre auch Per. ab : Per. AB $= x : AB$, und nehmen wir an, dass sich verhält

$x : AB = ab : z$,

wo $z > AB$ wäre, weil $x < ab$ angenommen wurde; so erhalten wir

Per. ab : Per. AB $= ab : z$,

d. h. das vierte Glied dieser Proportion wäre grösser als der Radius des zweiten Kreises, wovon die Unmöglichkeit schon im ersten Fall des Beweises dargethan ist. — Hieraus folgt, dass sich nur verhalten kann

Per. AB : Per. ab $= AB : ab$.

Da sich ebenfalls verhält Per. AB : Per. ab $= 2AB : 2ab$, so verhalten sich die Peripherien zweier Kreise zu einander auch wie ihre Durchmesser.

Ein anderer Bew. Da man durch fortgesetzte Verdoppelung der Seiten sowol eines eingeschriebenen als umgeschriebenen regelm. Vielecks die Umfänge dieser Vielecke dem Kreisumfange unendlich nahe bringen kann, d. h. so nahe, dass der Unterschied kleiner wird, als jede noch so kleine denkbare Grösse, so kann man den Kreis als ein regelm. Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten. Stellt man sich nun zwei Kreise als regelmässige Polygone von unendlicher, jedoch gleicher Seitenzahl vor, so lässt sich der Satz (§ 116), dass die Umfänge zweier regelm. Polygone von gleicher Seitenzahl sich wie die Radien der um- oder eingeschriebenen Kreise verhalten, auch auf diese Kreise selbst anwenden, deren Peripherien sich folglich zu einander verhalten müssen, wie ihre Radien oder Durchmesser.

127. Erklärungen.

1. Wenn P und p die Peripherien zweier beliebigen Kreise, R und r ihre Radien bedeuten, so ist (§ 126)

$P : p = 2R : 2r$, also auch $P : 2R = p : 2r$,

woraus hervorgeht, dass in allen Kreisen das Verhältniss des Umkreises zum Durchmesser dasselbe ist.

2. Das constante Verhältniss des Umkreises zu seinem Durchmesser pflegt man durch π zu bezeichnen, so dass also, wenn ganz allgemein p die Peripherie eines beliebigen Kreises und r seinen Radius bedeutet, immer $\frac{p}{2r} = \pi$ ist.

Dieser Ausdruck führt auf die überaus wichtige Formel

$$p = 2r\pi,$$

mittels velcher man die Peripherie eines Kreises aus seinem Radius und aus π berechnen kann.

3. Aus $p = 2r\pi$ folgt $r = \frac{p}{2\pi}$, nach welcher Formel sich der Radius aus der Peripherie berechnen lässt, wenn der Werth von π bekannt ist.

4. Wenn der Durchmesser eines Kreises $= 1$ gesetzt wird, so ist seine Peripherie gleich π. Denn setzt man in der Formel $p = 2r\pi$ den Durchmesser $2r = 1$, so geht sie in $p = \pi$ über.

§ 128. Aufgabe.

Das genäherte Verhältniss des Umkreises zum Durchmesser zu finden, d. h. die Zahl π näherungsweise zu berechnen.

Aufl. Diese Aufgabe lässt sich offenbar auflösen, wenn man im Stande ist, aus dem Radius eines Kreises dessen Peripherie zu berechnen. Hierzu bietet uns der § 125 ein Mittel dar, indem nämlich aus demselben hervorgeht, dass man durch die Berechnung einer Reihe von Umfängen ein- und umgeschriebener regelm. Polygone zwei Reihen von Zahlen erhält, von denen die einen alle kleiner, die andern alle grösser als der Kreisumfang sind, die sich aber bei fortgesetzter Verdoppelung der Seitenzahl der Polygone einander immer mehr nähern, so dass man in der Berechnung stehen bleiben kann, sobald der Unterschied zweier correspondirender Zahlen kleiner ist, als es der Grad von Annäherung erfordert, mit welchem man den Werth der Peripherie zu erhalten wünscht. Der nachfolgenden Berechnung wollen wir die in einen Kreis vom Radius 1 ein- und umgeschriebener regelm. Polygone von 6, 12, 24. . . . Seiten zu Grunde legen, wobei wir uns der Formeln der § 117 und 124 bedienen müssen, nämlich

$$\text{I. } a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

welche aus dem gleich 1 gesetzten Radius des Kreises und aus der Seite des eingeschrieb. regelm. n ecks die Seite des eingeschrieb. regelm. 2n ecks finden lehrt, und

$$\text{II. } A = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}},$$

mittels welcher aus dem gleich 1 gesetzten Radius des Kreises und aus der Seite des eingeschriebenen regelm. n ecks die Seite des umgeschriebenen regelm. n ecks berechnet werden kann.

Fängt man nun mit dem eingeschriebenen Sechseck an, so ist die Seite desselben $a = 1$, und die Seite des umgeschriebenen Sechsecks $A = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks ist also gleich 6, und der des umgeschriebenen Sechsecks gleich $\frac{12}{\sqrt{3}} = 6{,}928\ldots$, zwischen welchen beiden Gränzen der Umkreis liegt. Um engere Gränzen zu erhalten, gehen wir zu den Polygonen von 12, 24..... Seiten über.

Bedeuten a′, a″, a‴ . . . die Seiten der eingeschriebenen Polygone von 12, 24, 48 . . . . Seiten, und A′, A″, A‴ . . . . die Seiten der correspondirenden umgeschriebenen, so wird man mittels der obigen Formeln folgende Tabelle erhalten:

Seiten	Umfänge
$a' = \sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}517638090205$	$12\,a' = 6{,}2116571$
$A' = \dfrac{a'}{\frac{1}{2}\sqrt{4-a'^2}} = 0{,}535898384862$	$12\,A' = 6{,}4307806$
$a'' = \sqrt{2-\sqrt{4-a'^2}} = 0{,}261052384440$	$24\,a'' = 6{,}2652572$
$A'' = \dfrac{a''}{\frac{1}{2}\sqrt{4-a''^2}} = 0{,}263304995174$	$24\,A'' = 6{,}3193199$
$a''' = \sqrt{2-\sqrt{4-a''^2}} = 0{,}130806258460$	$48\,a''' = 6‘2787004$
$A''' = \dfrac{a'''}{\frac{1}{2}\sqrt{4-a'''^2}} = 0{,}131086925633$	$48\,A''' = 6{,}2921724.$

Setzt man die Berechnung in dieser Weise bis zum 12288 eck fort, zu welchem man gelangt, wenn man nach dem Sechseck 11 Mal eine Vordoppelung der Seiten vornimmt, so erhält man

$$a^{XI} = 0{,}000511326924, \text{ und } 12288\; a^{XI} = 6{,}2831852$$
$$A^{XI} = 0{,}000511326940 \text{ und } 12288\; A^{XI} = 6{,}2831854.$$

Aus dieser Tabelle ersieht man, wie die Umfänge der ein- und umgeschriebenen regelm. Polygone sich immer mehr nähern, so dass die der Polygone von 12288 Seiten sich nur noch um ungefähr 2 Zehnmilliontel von einander unterscheiden. Die sieben ersten Ziffern, welche beiden gemein sind, werden offenbar den Umfang des Kreises ausdrücken, dessen Länge folglich 6,283185... ist, wobei jodoch einleuchtet, dass eine noch weiter fortgesetzte Rechnung ein genaueres Resultat geben würde.

Nimmt man für die Peripherie das arithm. Mittel zwischen den Umfängen des ein- und umgeschriebenen Polygons von 12288 Seiten, so hat man 6,2831853. Das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie wird also sein 2: 6,2831853, oder 1: 3,1415926, folglich ist näherungsweise

$$\pi = 3{,}1415926.$$

§ 129. Anmerkung.

Schon Archimedes (im 3ten Jahrh. vor Chr.) hat zur Bestimmung der Grösse π Berechnungen angestellt, und fand das Verhältniss 7 : 22, welches aber in einen Decimalbruch verwandelt schon in der dritten Stelle von π abweicht. Ludolph von Cöln († 1610) hat die ersten 35 Decimalstellen dieser Zahl, die man daher auch die ludolphische Zahl nennt, im Wesentlichen nach der im vorigen § beschriebenen, schon von Archimedes angewandten Methode berechnet, und fand

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

Späterhin hat man die Rechnung mit Hilfe der höhern Analysis noch viel weiter fortgeführt und auch bewiesen, dass π eine Irrationalzahl ist. Jetzt kennt man den Werth von π durch die neuerdings angestellten Berechnungen von dem Engländer Rutherford und Dr. Clausen in Dorpat sogar bis auf 530 Decimalstellen.

Besondere Beachtung verdient das von Adrianus Metius (im 17. Jahrh.) zuerst angeführte Verhältniss 113 : 355, weil es in einen Decimalbruch verwandelt (3,1415929) noch in der sechsten Stelle richtig ist, und sich im Gedächtnisse leicht behalten lässt, indem man nur die drei ersten ungeraden Zahlen doppelt neben einander zu setzen und dann in der Mitte zu trennen braucht, nämlich 113|355. —

VII. Von dem Flächeninhalte der Vielecke und des Kreises.

§ 130. Erklärungen.

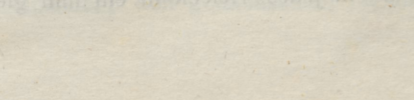
1. Unter Flächeninhalt einer Figur versteht man den Theil der Ebene, der zwischen den diese Figur begränzenden Linien enthalten ist. — Es ist klar, dass zwei Figuren von sehr verschiedener Gestalt gleichen Flächeninhalt haben können.

2. Figuren heissen einander gleich, wenn sie bei ungleicher Gestalt gleiche Flächenräume einschliessen, während Figuren, die einander gleich und zugleich ähnlich sind, congruent genannt werden, indem offenbar solche Figuren so auf einander gelegt werden können, dass sie einander vollkommen decken. (§ 65. 5).

3. In den Dreiecken und Parallelogrammen giebt man einer beliebigen Seite den Namen Grundlinie, und der senkrechte Abstand dieser von der gegenüberliegenden Spitze des Dreiecks oder von der gegenüberliegenden Seite des Parallelogramms heisst die zu der Grundlinie gehörige Höhe.

§ 131. Lehrsatz.

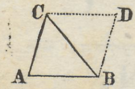
Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.



Bew. Wenn die Parallelogramme ABCD und ABEF gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so lassen sie sich offenbar so aufeinander legen, dass sie über einer und derselben Grundlinie zwischen denselben Parallellinien liegen, und können dabei gegen einander die drei verschiedenen in der Figur dargestellten Lagen haben. Da AD = BC, AF = BE (§ 66), und $\measuredangle$ DAF = CBE (§ 40), so sind die Dreiecke ADF und BCE congruent, oder, was wir hier nur brauchen, einander gleich. — Zieht man nnn von dem Viereck ABED einmal das $\triangle$ ADF, und dann das $\triangle$ BCE ab, so muss man zwei gleiche Grössen erhalten, nämlich die Parallelogramme ABEF und ABCD.

§ 132. Lehrsatz.

Ein jedes Dreieck ABC *ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe.*



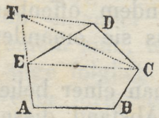
Bew. Wenn man durch die Winkel B und C die Geraden BD und CD den Seiten AC und AB parallel legt, so ist die Figur AD ein Parallelogramm, welches mit dem Dreieck ABC einerlei Grundlinie und Höhe hat. Da nun $\triangle$ ABC $\cong$ BCD (§ 66), so ist $\triangle$ ABC die Hälfte des Parallelogramms AD.

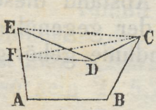
§ 133. Zusatz.

Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich, denn sie sind die Hälften von Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, also einander gleich sind (§ 131).

§ 134. Aufgabe.

Ein gegebenes Vieleck ABCDE *in ein anderes von gleichem Inhalt zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.*





Aufl. Man schneide, wie die erste Figur zeigt, durch die Diagonale EC ein Dreieck CDE ab, ziehe durch D eine Parallele DF mit CE bis zum Durchschnittspunkt F mit der verlängerten AE, und ziehe CF, so ist ABCF das verlangte Vieleck. Denn weil $\triangle$ CDE = CFE ist (§ 133), und man also Gleiches erhalten muss, wenn man jedes dieser Dreiecke zum Viereck ABCE hinzulegt, so ist ABCDE = ABCF. —

Wenn der Winkel bei D des Vielecks ein einspringender ist, wie in der zweiten Figur, so leidet das Verfahren selbst keine Aenderung, für den Beweis aber ist zu merken, dass man durch Subtraction der gleichen Dreiecke CDE und CFE von dem Viereck ABCE zu den gleichen Vielecken ABCDE und ABCF gelangt.

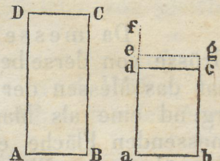
§ 135. Zusatz.

Durch successive Anwendung der vorhergehenden Aufgabe lässt sich ein jedes Vieleck in ein ihm gleiches Dreieck verwandeln.

§ 136. Lehrsatz.

Zwei Rechtecke AC *und* ac *von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.*

Bew. 1. Die Höhen AD und ad seien commensurabel, und ihr gem. Mass sei m Mal in AD und n Mal in ad enthalten, so dass



$$AD : ad = m : n.$$

Zieht man nun in beiden Rechtecken durch die Theilungspunkte, welche durch das Auftragen des gem. Masses auf ihren Höhen entstehen, parallele Linie zur Grundlinie, so theilt man das Rechteck AC in m, und das Rechteck ac in n einander gleiche Rechtecke (§ 131), so dass

$$AC : ac = m : n.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$AC : ac = AD : ad.$$

2. Wenn AD und ad incommensurabel sind, so lässt sich beweisen, dass das Verhältniss der Rechtecke weder kleiner noch grösser als das ihrer Höhen sein könne. Denn verhielte sich

$$AC : ac = AD : af,$$

wo af $>$ ad wäre, so kann man AD in eine so grosse Anzahl gleicher Theile theilen, dass, wenn man dieselben von a nach f hinträgt, ein Theilungspunkt e zwischen d und f fiele. Zieht man nun durch e die eg $\parallel$ ab, so würde man für die beiden Rechtecke AC und ag, weil ihre Höhen commensurabel sind, nach 1) haben

$$AC : ag = AD : ae.$$

Aus beiden Proportionen erhielte man

$$ac : ag = af : ae,$$

was nicht stattfinden kann, indem ac $<$ ag, dagegen af $>$ ae ist.

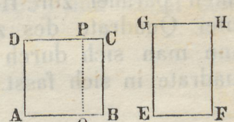
Da sich ferner auf dieselbe Weise zeigen lässt, dass das vierte Glied der Proportion AC : ac = AD : x nicht kleiner als ad sein kann, so muss sich verhalten

$$AC : ac = AD : ad.$$

§ 137. Lehrsatz.

Jede zwei Rechtecke AC *und* EH *verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien in ihre Höhen.*

Bew. Wenn man auf der Grundlinie des Rechtecks AC einen Theil AQ der Grundlinie EF des Rechtecks EH gleich nimmt, und QP $\parallel$ BC zieht, so ist (§ 136)



$$AP : EH = AD : EG.$$

Betrachtet man nun AD als die Grundlinie der Rechtecke AC und AP, also AB und AQ als ihre Höhen, so ist

$$AC : AP = AB : AQ.$$

Multiciplirt man beide Proportionen in einander, den gemeinsamen Factor

AP weglassead, und statt der Geraden AQ die ihr gleiche EF setzend, so erhält man

$$AC : EH = AB \times AD : EF \times EG.$$

§ 138. Erklärung.

Da messen soviel heisst, als eine Grösse mit einer bekannten Grösse von derselben Art, welche das Mass genannt wird, vergleichen, so hat das Messen der Flächen offenbar den Zweck, zu bestimmen, wie oft irgend eine als Mass angenommene Fläche in einer andern, der auszumessenden Fläche enthalten ist. Zur Einheit des Flächenmasses hat man das über der Einheit des Längenmasses beschriebene Quadrat gewählt, und nennt ein Quadrat, dessen Seite einen Faden, einen Fuss, einen Zoll u. s. w. lang ist, einen Quadratfaden, einen Quadratfuss, einen Quadratzoll u. s. w. Die Ausmessung einer Fläche kann jedoch nicht durch wirkliches Auftragen des Quadratfadens, Quadratfusses u. s. w. geschehen, weil ein solches Verfahren nicht nur sehr schwierig, sondern auch in den meisten Fällen gar nicht ausführbar wäre; sie muss vielmehr mittels der Vergleichung von geraden Linien stattfinden, so dass man statt die Flächen selbst zu messen nur gerade Linien misst, welche die Grösse der bezüglichen Figur bedingen.

§ 139. Lehrsatz.

Wenn die Grundlinie und die Höhe eines Rechtecks durch irgend ein Längenmass gemessen die Zahlen m *und* n *geben*, *so giebt das Rechteck durch das Quadrat jenes Längenmasses gemessen die Zahl* mn, was man gewöhnlich kurz so ausdrückt: *Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte seiner Grundlinie in seine Höhe.*

Bew. Bezeichnet R ein Rechteck, in dessen Grundlinie die Einheit des Längenmasses m Mal, und in dessen Höhe sie n Mal enthalten ist, bedeutet ferner Q das über der Einheit desselben Längenmasses beschriebene Quadrat, so ist (§ 137)

$$R : Q = mn : 1.1 = mn : 1, \text{ also}$$

$$R = mn.Q, \text{ oder } \frac{R}{Q} = mn.$$

Sind in einem Rechtecke m und n ganze Zahlen, etwa 6 und 4, und zieht man durch alle Theilungspunkte, welche durch das Auftragen des Längenmasses auf der Grundlinie und der Höhe entstehen, gerade Linien parallel zur Höhe und zur Grundlinie, wodurch das Rechteck in lauter Quadrate des zu Grunde gelegten Längenmasses zerlegt wird, so kann man sich durch blosses Zählen überzeugen, dass dasselbe 24 jener Quadrate in sich fasst. —

§ 140. Zusätze.

1. Wenn die beiden in einer Ecke zusammenstossenden Seiten eines Rechtecks einander gleich sind, in welchem Falle es sich in ein Quadrat verwandelt, so wird sein Flächeninhalt durch die zweite Potenz der Zahl

ausgedrückt, welche die Länge seiner Seite angiebt. Daher kommt es, dass man die zweite Potenz einer Zahl auch ihr Quadrat nennt. —

2. Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe; denn ein Parallelogramm hat denselben Flächeninhalt wie ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§ 131).

3. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produktes aus seiner Grundlinie und Höhe, weil jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogramms angesehen werden kann, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. —

4. Da jedes Vieleck in Dreiecke getheilt werden kann, so lässt sich sein Flächeninhalt finden, wenn man alle Dreiecke berechnet, und die erhaltenen Resultate zu einer Summe vereinigt. —

§ 141. Aufgabe.

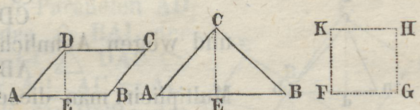
Ein gegebenes Parallelogramm AC, *oder ein Dreieck* ABC *in ein Quadrat zu verwandeln.*

Aufl. 1. Man suche zwischen der Grundlinie AB und der Höhe DE des Parallelogramms AC die mittlere Proportionale FG, so ist das über der letztern construirte Quadrat FH gleich dem gegebenen Parallelogramm. Denn weil

$AB : FG = FG : DE$, so ist

$AB \,.\, DE = FG^2$,

d. h. der Flächeninhalt des Parallelogramms AC ist gleich dem Quadrate FH.



2. In Betreff des Dreiecks ABC muss man zwischen der Grundlinie AB und der halben Höhe CE die mittlere Proportionale FG nehmen, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats, weil alsdann

$$AB : FG = FG : \tfrac{1}{2}\, CE,$$

$$\text{also } \frac{AB \,.\, CE}{2} = FG^2,$$

d. h. $\triangle$ ABC ist gleich dem Quadrat FH.

§ 142. Zusatz.

Jedes beliebige Vieleck kann man in ein Quadrat verwandeln, indem man es zuvor in ein Dreieck (§ 135) und darauf dieses in ein Quadrat verwandelt.

§ 143. Lehrsatz.

Der Flächeninhnlt eines Trapezes ABCD *ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der beiden parallelen Seiten* AB CD *in den senkrechten Abstand derselben* EF.

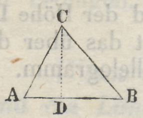
Bew. Zieht man die Diagonale BD, so zerfällt das Trapez in die beiden Dreiecke ABD und BCD, deren gemeinschaftliche Höhe CF ist, und da

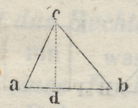
$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \times EF$, $\triangle BCD = \frac{1}{2} CD \times EF$, so ist $ABCD = \frac{1}{2} AB \times EF + \frac{1}{2} CD \times EF = \frac{1}{2}(AB + CD) EF$.

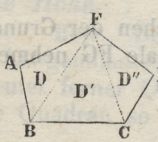
Bemerkung. Wenn man aus der Mitte G einer der nicht parallelen Seiten des Trapezes die Gerade GK parallel zu AB zieht, wodurch auch BC in zwei gleiche Theile getheilt wird (§ 46), so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und GHD, CBD und KBH, dass $GH = \frac{1}{2} AB$, $KH = \frac{1}{2} CD$, also $GK = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Also ist $ABCD = GK \times EF$, d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der Verbindungslinie der Mitten beider nicht parallelen Seiten in die Höhe desselben.

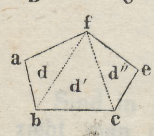
§ 144. Lehrsatz.

Die Flächenräume ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.









Bew. 1. Wenn die vorgelegten Figuren zwei ähnliche Dreiecke ABC und abc sind, so sind die durch die Höhen derselben gebildeten Dreiecke BDC und bdc einander ähnlich (§ 52), also

$$CD : cd = BC : bc,$$

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und abc

$$AB : ab = BC : bc.$$

Multiplicirt man diese Proportionen in einander, und dividirt die beiden Glieder des ersten Verhältnisses der zusammengesetzten Proportion durch 2, so erhält man

$$\frac{AB \,.\, CD}{2} : \frac{ab \,.\, cd}{2} = BC^2 : bc^2,$$

d. h. $\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2$.

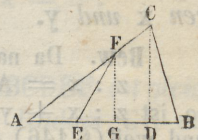
2. Hat man zwei ähnliche Vielecke ABCEF und abcef, so lassen sie sich durch Diagonalen in gleich viel ähnliche und übereinstimmig liegende Dreiecke zerzerlegen (§ 74), so dass $D \backsim d$, $D' \backsim d'$, $D'' \backsim d''$ ist. Folglich hat man nach dem Vorhergehenden

$$D : d = AB^2 : ab^2$$
$$D' : d' = BC^2 : bc^2 = AB^2 : ab^2$$
$$D'' : d'' = CE^2 : ce^2 = AB^2 : ab^2, \text{ also}$$
$$D + D' + D'' : d + d' + d'' = AB^2 : ab^2,$$

d. h. $BBCEF : abcef = AB^2 : ab^2$.

§ 145. Lehrsatz.

Die Flächen zweier Dreiecke ABC *und* AEF, *welche einen gleichen Winkel* A *haben, verhalten sich zu einander, wie* *die Produkte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschliessen.*



Bew. Zieht man auf AB die Senkrechten CD und FG, so ist $\triangle$ ACD $\sim$ AFG (§ 52), folglich

CD : FG = AC : AF, ferner

$$\triangle ABC : \triangle AEF = \frac{AB \,.\, CD}{2} : \frac{AE \,.\, FG}{2} \quad (\S 140{,}3).$$

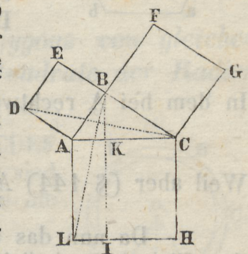
Multiplicirt man diese beiden Proportionen in einander, und lässt den Factor CD, der den beiden Vordergliedern, und den Factor FG, der den beiden Hintergliedern der zusammengesetzten Proportion gemein ist, weg, so erhält man

$$\triangle ABC : \triangle AEF = AB \,.\, AC : AE \,.\, AF.$$

§ 146. Lehrsatz.

Das über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC *construirte Quadrat* AH *ist gleich der Summe der über den beiden Katheten construirten Quadrate* AE *und* CF.

Bew. Wenn man vom rechten $\measuredangle$ B auf die Hypotenuse die Senkrechte BK fällt, sie bis I verlängert und DC und BL zieht, so ist das $\triangle$ DAC gleich der Hälfte des Quadrats AE, weil es mit ihm einerlei Grundlinie AD hat, und zwischen denselben Parallelen AD und CE liegt (§ 132). Eben so ist das $\triangle$ BAL der Hälfte des Rechtecks AI gleich. Nun ist $\triangle$ DAC $\cong$ BAL, weil $\measuredangle$ DAC = BAL und AD = AB, AC = AL. Es ist also die Hälfte des Quadrats AE der Hälfte des Rechtecks AI, folglich das Quadrat AE dem Rechteck AI gleich. Da sich ebenso beweisen lässt, dass das Quadrat CF dem Rechteck KH gleich ist, so muss das aus den beiden Rechtecken AI und KH zusammengesetzte Quadrate AH der Summe der Quadrate AE und CF gleich sein.



§ 147. Zusatz.

Da die Rechtecke AI und KH einerlei Grundlinie AL haben, so verhalten sie sich zu einander wie ihre Höhen (§ 136), also

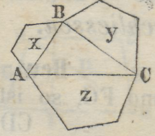
AI : KH = AK : CK, folglich auch

AE : CF = AK : CK,

d. h. die Quadrate der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die anliegeuden Abschnitte der Hypotenuse. —

§ 148. Lehrsatz.

Wenn man auf den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC *drei beliebige einander ähnliche Figuren construirt, so* *ist die auf der Hypotenusė construirte Figur* z *gleich der Summe beider auf den Katheten errichteten Figuren* x *und* y.



Bew. Da nach § 144

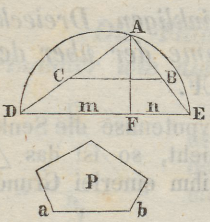
$z : x = AC^2 : AB^2$ und $z : y = AC^2 : BC^2$,

so ist $z : x + y = AC^2 : AB^2 + BC^2$,

und weil (§ 146) $AC^2 = AB^2 + BC^2$, so ist auch $z = x + y$.

§ 149. Aufgabe.

Ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen Vieleck P *ähnlich ist, und sich zu demselben verhält, wie sich zwei gegebene Linien* m *und* n *zu einander verhalten.*



Aufl. Man lege DF = m und FE = n in gerader Linie an einander, beschreibe über D einen Halbkreis, errichte die Senkrechte FA, ziehe AD und AE, trage auf AD von A nach C eine Seite ab des gegebenen Vielecks, ziehe CB parallel zu DE, so ist AB die der ab homologe Seite, über welcher man (§ 75) ein dem Vieleck P ähnlisces Vieleck x construiren muss. Denn es ist (§ 47)

$AD : AE = AC : AB$ oder

$AD^2 : AE^2 = AC^2 : AB^2$.

In dem bei A rechtwinkligen Dreiehk ADE hat man ferner (§ 147)

$AD^2 : AE^2 = DF : EF = m : n$ also auch

$AC^2 : AB^2 = m : n$.

Weil aber (§ 144) $AC^2 : AB^2 = P : x$, so verhält sich auch

$P : x = m : n$.

Da nun das über AB errichtete Vieleck x der Construction zufolge dem Vieleck P ähnlich ist, und zu demselben in dem gegebenen Verhältnisse steht, so ist es das gesuchte.

Wenn ab > AD sein sollte, so müsste man AD verlängern, und es würde die Parallele CB unterhalb DE zu liegen kommen. Die übrige Construction und der Beweis würden aber keine Aenderung erleiden.

§ 150. Aufgabe.

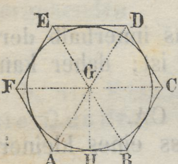
Ein Vieleck zu construiren welches einem gegebenen Vieleck P *ähnlich und zugleich einem gegebenen Quadrate* N^2 *gleich ist.*

Aufl. Man verwandle (§ 142) das Vieleck P in ein Quadrat M^2 und suche zu M, N und einer Seite ab des Vielecks P die vierte Proportionale AB, so ist das über AB dem Vieleck P ähnlich beschriebene Vieleck x das verlangte. Denn es ist (§ 144)

$P : x = ab^2 : AB^2$, und da nach der Construction
$M : N = ab : AB$ oder $M^2 : N^2 = ab^2 : AB^2$, so ist
$P : x = M^2 : N^2$, und da $P = M^2$, so ist $x = N^2$.

§ 151. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines regelm. Vielecks ABCDEF *ist gleich dem halben Produkte aus seinem Umfange in den Radius* GH *des eingeschriebenen Kreises.*



Bew. Verbindet mau den Mittelpunkt G des eingeschriebenen Kreises mit allen Ecken des Vielecks durch gerade Linien, so entstehen so viele einander congruente Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Man findet daher den Flächeninhalt dieses regelm. Vielecks, wenn man den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke, z. B. AGB mit der Anzahl der Seiten des Vieleck multiplicirt. Da nun $\triangle\ AGB = \frac{AB \cdot GH}{2}$, so ist das Vieleck, wenn es n Seiten hat, gleich $\frac{n \cdot AB \cdot GH}{2}$, wo $n.AB$ den Umfang des Vielecks giebt.

§ 152. Lehrsatz.

Die Flächeninhalte zweier regelm. Polygone von gleicher Seitenzahl verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Radien ihrer umgeschriebenen oder eingeschriebenen Kreise.

Bew. Da die beiden regelm. Polygone ABCDEF und abcdef von gleicher Seitenzahl einander ähnlich sind (§ 116), so verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate ihrer Seiten (§ 144), also

$$ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2.$$

Zieht man nun in dem ersten Polygone die Radien OA und OB des umgeschriebenen, und nach der Mitte von AB den Radius OG des eingeschriebenen Kreises, so werden die dadurch entstehenden Dreiecke denen ähnlich, welche durch dieselbe Construction in dem andern Polygon entstehen, woraus folgt

$$AB : ab = OA : oa = OG : og,\text{ also auch}$$
$$AB^2 : ab^2 = OA^2 : oa^2 = OG^2 : og^2.$$

Man hat daher $ABCDEF : abcdef = OA^2 : oa^2 = OG^2 : og^2$.

§ 153. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus seiner Peripherie in den Radius, also Kreisfläche $CA = \frac{1}{2}\ CA \times$ Peripherie CA.

Bew. Wäre $\frac{1}{2}$ CA$\times$Per. CA nicht gleich der Kreisfläche CA, sondern das Mass eines grössern Kreises, so sei (Fig. 1)

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA = \text{Kreisfläche } CB$$

Beschreibt man um den kleinern Kreis ein regelm. Polygon, dessen Seiten den grössern Kreis nicht erreichen (§ 126), und bezeichnet den Umfang desselben mit U, so ist (§ 151)

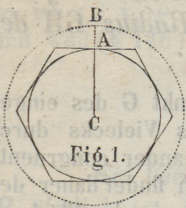


Fig. 1.

$$\text{Das Polygon} = \tfrac{1}{2}\ CA \times U. \text{ Da nun}$$

$$Per.\ CA < U, \text{ so ist}$$

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA < \tfrac{1}{2}\ CA \times U, \text{ also auch}$$

$$\text{Kreisfl. } CB < \tfrac{1}{2}\ CA \times U,$$

d. h. die Kreisfläche CB ist kleiner als das innerhalb derselben liegende Polygon, was unmöglich ist; daher kann nicht sein

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA > \text{Kreisfläche } CA.$$

Wäre ferner $\frac{1}{2}$ CA$\times$Per. CA das Mass eines kleinern Kreises, so dass man hätte (Fig. 2)

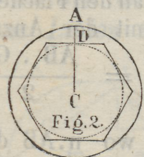


Fig. 2.

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA = \text{Kreisfl. } CD,$$

und beschreibt man wie vorhin um den kleinern Kreis ein regelm. Polygon, dessen Umfang wir mit u bezeichnen, so ist das Polygon $= \frac{1}{2}$ CD$\times$u. Da nun Per. CA $>$ u und Radius CA $>$ CD, so ist

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA > \tfrac{1}{2}\ CD \times u, \text{ also auch}$$

$$\text{Kreisfl. } CD > \tfrac{1}{2}\ CD \times u,$$

d. h. die Kreisfläche CD ist grösser als das um dieselbe beschriebene Polygon, was unmöglich ist, so dass also uicht sein kann

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA < \text{Kreisfl. } CA.$$

Da nun bewiesen ist, dass $\frac{1}{2}$ CA$\times$Per. CA weder grösser noch kleiner als die Kreisfläche CA sein könne, so muss sein

$$\tfrac{1}{2}\ CA \times Per.\ CA = \text{Kreisfl. } CA.$$

Ein anderer Bew Betrachtet man den Kreis als ein regelm. Polygon von unendlich vielen Seiten (§. 126 Bew. 2), so lässt sich der Satz (§ 151), dass der Flächeninhalt eines regelm. Vielecks gleich ist dem halben Produkte aus seinem Umfange in den Radius des eingeschriebenen Kreises, auch auf den Kreis anwenden, dessen Inhalt demnach dem halben Produkte aus seiner Peripherie in den Radius gleich sein muss. —

§ 154. Zusatz.

1. Bezeichnet F den Flächeninhalt, r den Radius und p die Peripherie eines Kreises, so ist (§ 153) $F = \frac{1}{2}pr$ und (§ 127) $p = 2r\pi$; mithin erhält man durch gehörige Substitution die äusserst wichtige Formel

$$F = r^2\pi,$$

mittels welcher der Flächeninhalt eines Kreises aus seinem Radius und aus der Zahl π berechnet werden kann.

2. Bedeutet d den Durchmesser jenes Kreises, und substituirt man in vorstehende Gleichung $\frac{d}{2}$ für r, so ergiebt sich

$$F = \tfrac{1}{4}\ d^2\pi,$$

welche Formel den Flächeninhalt eines Kreises durch den Durchmesser ausdrückt. —

Ist der Flächeninhalt F eines Kreises gegeben, so findet man den Radius mittels der Formel

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

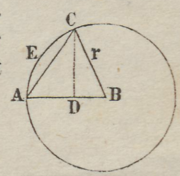
3. Wenn F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, R und r ihre Radien, D und d ihre Durchmesser vorstellen, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$F = R^2\pi = \tfrac{1}{4}\, D^2\pi \text{ und } f = r^2\pi = \tfrac{1}{4}\, d^2\pi, \text{ also}$$
$$F : f = R^2 : r^2 = D^2 : d^2,$$

d. h. die Flächen zweier Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

§ 155. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ABCE *ist gleich dem halben Produkte aus seinem Bogen* AC *in den Radius* r.



Bew. Da sich der Flächeninhalt des Kreisausschnittes zur ganzen Kreisfläche offenbar so verhält, wie der ihm entsprechende Bogen zur ganzen Peripherie, so hat man

$$ABCE : r^2\pi = \text{Bog. } AC : 2r\pi, \text{ folglich}$$
$$ABCE = \frac{r^2\pi \,.\, \text{Bog. } AC}{2r\pi} = \tfrac{1}{2}r \,.\, \text{Bog. } AC.$$

§ 156. Zusatz.

Um den Flächeninhalt des Segments ACE zu finden, ziehe man vom Kreisausschnitte ABCE das Dreieck ABC ab. Da nun $ABCE = \tfrac{1}{2}\, r \,.\, \text{Bog. } AC$ und $\triangle\, ABC = \tfrac{1}{2}\, AB \,.\, CD = \tfrac{1}{2}\, r \,.\, CD$, wenn $CD \perp AB$ steht, so ist Segment $ACE = \tfrac{1}{2}\, r \,.\, \text{Bog. } AC - \tfrac{1}{2}\, r \,.\, CD = \tfrac{1}{2}\, (\text{Bog. } AC - CD)\, r.$