

ПЛАНИМЕТРІЯ

К. Гехеля.

ТРЕТЬЕ ИЗДАНИЕ.



РЕВЕЛЬ 1887.

Издание книжного магазина
Франца Клуге.

ПЛАНИМЕТРІЯ

ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ

ВЪ ГИМНАЗІЯХЪ И РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩАХЪ.

Составилъ

Д^{ръ} К. ГЕХЕЛЬ.

Одобрено Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія
какъ учебникъ для гимназій и реальныхъ училищъ.

ТРЕТЬЕ ИЗДАНІЕ.



РЕВЕЛЬ 1887.

Изданіе книжнаго магазина Франца Клуге.

У О. Кранца въ С. Петербургѣ, И. Дейбнера въ Москвѣ, Э. Венде и Ком. въ
Варшавѣ, Э. Лямбека въ Вильнѣ, Г. Лехелина въ Кіевѣ, Э. Берндта въ Одессѣ.

Цѣна 70 коп.

Изъ учебниковъ Дра К. Гехеля, составляющихъ полный курсъ математическихъ наукъ для среднихъ и высшихъ учебныхъ заведеній, изданы до сего времени и на русскомъ языкѣ: Планиметрия и Стереометрія (по системѣ Лежандра) и Плоская Тригонометрія. Впослѣдствіе будутъ переведены и другіе учебники, находящіеся въ употребленіи уже въ продолженіе многихъ лѣтъ какъ въ учебныхъ заведеніяхъ Прибалтійскихъ Губерній, такъ и въ Германіи и другихъ странахъ, именно: Ариметика и Алгебра, задачи ариметическія, алгебраическія и стереометрическія, Сферическая Тригонометрія и Аналитическая Геометрія со включеніемъ коническихъ сѣченій.

Во всѣхъ этихъ учебникахъ главная цѣль изложенія — при полнотѣ и ясности предложеній опростить теоремы и доказательства, на сколько это возможно было согласить со строгой основательностью. Такъ какъ кромѣ того краткость изложенія даетъ возможность, сосредоточить вниманіе учащагося на самомъ существенномъ, не развлекая его длинными выводами и частымъ повтореніемъ пройденнаго, то и всѣ повторенія замѣнены ссылками на предыдущее, — что къ тому-же удобнѣйшій способъ, ознакомиться со строгимъ ходомъ изложенія и при каждой новой теоремѣ призывать въ память и предыдущія во всей ихъ полнотѣ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе	§	1	до	§	3.
I. Основныя предложенія	§	4	,,	§	40.
II. О кругѣ	§	41	,,	§	62.
III. Задачи	§	63	,,	§	84.
IV. Обь отношеніяхъ прямолинейныхъ фигуръ	§	85	,,	§	118.
V. Задачи	§	119	,,	§	133.
VI. О правильныхъ многоугольникахъ и измѣреніи круга	§	134	,,	§	152.
VII. Задачи	§	153	,,	§	155.



Объясненіе знаковъ.

$=$	,,	означаетъ равно.
$<$	,,	менѣе.
$>$	,,	болѣе.
$\parallel$	,,	параллельно.
$\equiv$	,,	равно и параллельно.
$\sim$	,,	подобно.
$\cong$	,,	равно и подобно.
$\angle$	,,	уголъ.
$\perp$	,,	перпендикулярно.
$\triangle$	,,	треугольникъ.
$()$	,,	дуга.



В в е д е н і е.

§ 1. 1) Геометрическимъ тѣломъ называется пространство, ограниченное со всѣхъ сторонъ и имѣющее длину, ширину и высоту (или глубину). Предѣлъ тѣла называется поверхностью; которая имѣетъ два измѣренія: длину и ширину. Предѣлъ поверхности есть линія, имѣющая только одну длину, а предѣлъ линіи — точка, не имѣющая никакого измѣренія.

Изученіе свойствъ тѣлъ, поверхностей и линій составляетъ предметъ Геометріи, независимо отъ вещества, наполняющаго тѣло.

2) Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, а потому между двумя точками можно провести только одну прямую.

Линія, составленная изъ двухъ или нѣсколькихъ прямыхъ, не сливающихся въ одну прямую, называется ломаною. Линія, которая никакою своею частію не можетъ слиться съ прямою, называется кривою.

Двѣ прямыя называются равными, когда при наложеніи одной на другую совпадаютъ своими концами, а потому и всѣми промежуточными точками.

3) Поверхность называется плоскостью въ такомъ случаѣ, когда прямая линія, соединяющая двѣ произвольныя точки поверхности, совпадаетъ съ нею. Кривою поверхностью называется такая, которая никакою своею частію не совпадаетъ съ плоскостью.

4) Разсматриваніе свойствъ плоскости и различныхъ сочетаній линій и точекъ, находящихся въ одной плоскости, составляетъ первую часть Геометріи или Планиметрію.

§ 2. 1) Угломъ называется неопредѣленная часть плоскости, заключенная между двумя прямыми, выходящими изъ одной точки. Прямые, образующія уголъ, называются его сторонами, а точка пересѣченія сторонъ — вершиною угла.

Величина угла не зависитъ отъ величины сторонъ, но отъ ихъ взаимнаго отклоненія. Два угла равны, если при наложеніи совпадаютъ своими вершинами и сторонами.

2) Если два угла ABC и CBD (Фиг. § 6) имѣютъ одну общую сторону BC , а двѣ другія стороны AB и DB составляютъ одну прямую, то такіе углы называются смежными.

Если смежные углы равны между собою, то каждый изъ нихъ называется прямымъ; слѣдовательно прямой уголъ есть одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ. Прямой уголъ будемъ обозначать буквою d .

Уголъ, который меньше прямого, называется острымъ, а который больше прямого, — тупымъ.

3) Если двѣ линіи образуютъ прямой уголъ, то онѣ называются перпендикулярными одна къ другой.

4) Двѣ прямые при пересѣченіи образуютъ 4 угла, изъ которыхъ каждые два противоположные называются вертикальными. Стороны одного изъ двухъ вертикальныхъ угловъ служатъ продолженіемъ сторонъ другаго. (На примѣръ въ § 7 $\sphericalangle AEC$ и $\sphericalangle BED$.)

5) Двѣ прямые называются параллельными, если онѣ, находясь въ одной и той же плоскости, никогда не встрѣчаются, какъ бы ихъ ни продолжали.

§ 3. Всѣ геометрическія заключенія выводятся изъ нѣкоторыхъ истинъ, самихъ собою очевидныхъ; такія истины называются аксіомами.

1) Цѣлое болѣе своей части и равно суммѣ всѣхъ своихъ частей.

2) Двѣ величины, порознь равны ^{ка} третьей, равны между собою,

3) Двѣ прямые могутъ пересѣкаться въ одной только точкѣ; если же онѣ имѣютъ болѣе одной общей точки, то сливаются.

4) Черезъ данную точку можно провести только одну прямую параллельно данной прямой.

I. Основные предложенія.

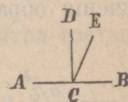
§ 4. Всѣ прямые углы равны.

Если станемъ раздвигать стороны прямого угла ACD (Фиг. § 5, 1) до тѣхъ поръ, пока одна изъ нихъ (CD) сдѣлается продолженіемъ другой (CA), то получимъ уголъ ACB , котораго стороны CA и CB составятъ одну прямую. Изъ самаго опредѣленія прямого угла (§ 2, 2) видно, что онъ равенъ половинѣ угла ACB , и такъ какъ всѣ углы, у которыхъ стороны составляютъ одну прямую, равны между собою, то и всѣ прямые углы должны быть также равны.

Прямой уголъ по причинѣ своей постоянной величины служить мѣрою всѣхъ остальныхъ угловъ. Онъ дѣлится на 90 равныхъ частей, называемыхъ градусами; каждый градусъ (1°) дѣлится на 60 минутъ, а минута ($1'$) на 60 секундъ ($60''$).

§ 5. 1) Сумма двухъ смежныхъ угловъ ACE и ECB равна двумъ прямымъ.

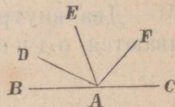
Проведемъ изъ точки C линію $CD \perp AB$, тогда $ACE + ECB = ACD + DCE + ECB = ACD + DCB = 2 \text{ д.}$



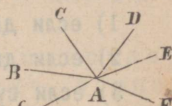
2) Изъ двухъ неравныхъ угловъ больший имѣетъ меньшій смежный уголъ и на оборотъ.

Если одинъ изъ смежныхъ угловъ острый, то другой тупой, и если одинъ прямой, то и другой прямой.

3) Сумма всѣхъ угловъ BAD , DAE , EAF . . . лежащихъ по одну сторону прямой BC и имѣющихъ общую вершину въ точкѣ A , равна двумъ прямымъ, потому что сумма ихъ равна двумъ смежнымъ угламъ BAD и DAC .

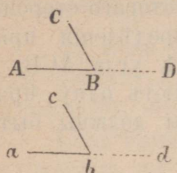


4) Сумма угловъ BAC , CAD , DAE . . ., лежащихъ около точки A , равна четыремъ прямымъ. Стоитъ только провести чрезъ точку A произвольную прямую, тогда



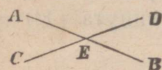
по каждую сторону прямой сумма угловъ равна 2 д., слѣдовательно по обѣ стороны прямой, т. е. около точки А, эта сумма будетъ равняться 4 д.

§ 6. Если два угла ABC и abc равны, то и ихъ смежные углы CBD и cbd равны.



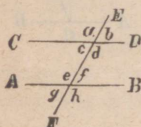
Такъ какъ $ABC + CBD = 2 \text{ д.}$
и $abc + cbd = 2 \text{ д.}$
но $ABC = abc,$
то $CBD = cbd.$

§ 7. Вертикальные углы AEC и BED равны между собою.



Такъ какъ $AEC + AED = 2 \text{ д.}$
и $BED + AED = 2 \text{ д.}$
то $AEC = BED.$

§ 8. Если двѣ прямыя линіи AB и CD (параллельныя или не параллельныя) пересѣкаются третьею EF , то при точкахъ пересѣченія образуется 8 угловъ, которые получаютъ особое названіе.



Четыре угла a, b, g, h называются внѣшними, а четыре угла c, d, e, f внутренними.

Два не смежные угла, лежащіе по одну сторону пересѣкающей прямой, изъ которыхъ одинъ внѣшній, а другой внутренний, называются соотвѣтственными, напр. $a, e; c, g; b, f; d, h.$

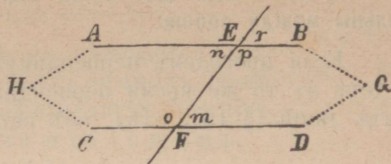
Два внутренніе, не смежные угла, лежащіе по разнымъ сторонамъ сѣкущей, называются углами накрестъ лежащими. Таковы $c, f; d, e.$

Два внутренніе угла, лежащіе по одну сторону сѣкущей, называются односторонними. Таковы $c, e; d, f.$

§ 9. Двѣ линіи AB и CD , пересѣченныя третьею EF , параллельны,

- 1) если два накрестъ лежащіе угла ($m = n$) равны,
- 2) если два соотвѣтственные угла ($m = r$) равны,
- 3) если сумма двухъ одностороннихъ угловъ ($n + o$) равняется двумъ прямымъ.

1) Предположимъ, что AB и CD не параллельны, слѣд. по достаточномъ протяженіи пересѣкутся въ какой нибудь точкѣ G . Представимъ себѣ, что фигура EGF положена такъ по другую сторону линіи EF , что равные углы m и n , o и p по-



кроютъ другъ друга, тогда линія FD пойдетъ по линіи EA , а линія EB по линіи FC , и потому линіи EA и FC должны встрѣтиться въ той точкѣ H , въ которую упадетъ точка G . Въ такомъ случаѣ двѣ прямыя AB и CD будутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ, что невозможно (§ 3, 3), а потому и предположеніе, что линіи AB и CD встрѣтятся, также невозможно, слѣд. эти линіи параллельны.

2) Если $m = r$, тогда и $m = n$ (§ 6), слѣд. $AB \parallel CD$,

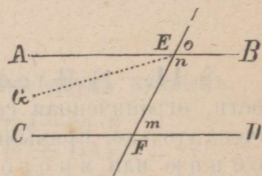
3) Если $n + o = 2$ д., то найдемъ, такъ какъ и $m + o = 2$ д., что $m = n$, слѣд. $AB \parallel CD$.

Слѣдствіе. Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и тойже прямой, параллельны между собою.

§ 10. Если двѣ параллельныя AB и CD пересѣкаются третьею линіею EF , то

- 1) накрестъ лежащіе углы равны,
- 2) соотвѣтственные углы равны,
- 3) сумма двухъ одностороннихъ угловъ равняется двумъ прямымъ.

1) Положимъ, что $\angle AEF$ не равенъ $\angle m$, но болѣе его, такъ что часть $GEF = m$. Тогда линія $GE \parallel CD$ (§ 9), и чрезъ точку E пройдутъ двѣ линіи AE и GE , параллельныя CD , что невозможно (§ 3, 4). По той же причинѣ $\angle AEF$ не можетъ быть меньше $\angle m$, а потому $\angle AEF = m$.



2) Такъ какъ $\angle AEF = m$, $\angle AEF = o$, то $m = o$,

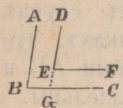
3) Такъ какъ $o + n = 2$ д., но $o = m$, то $m + n = 2$ д.

Слѣдствіе. Прямая линія, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ, перпендикулярна и къ другой.

§ 11. Если двѣ линіи параллельны третьей, то онѣ параллельны между собою.

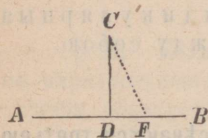
Если проведемъ перпендикуляръ къ третьей линіи, то онъ будетъ въ то же время перпендикуляромъ и къ каждой изъ остальныхъ линій (§ 10), слѣд. обѣ остальные будутъ параллельны (§ 9).

§ 12. Два угла ABC и DEF равны, если ихъ стороны параллельны и отверстія обращены въ одну и ту же сторону.

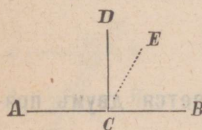


Продолжимъ сторону DE до пересѣченія со стороной BC въ точкѣ G , тогда получимъ $\angle ABC = \angle DGC = \angle DEF$ (§ 10, 2).

§ 13. Изъ данной точки C можно провести только одинъ перпендикуляръ къ линіи AB .



1) Точка C лежитъ внѣ прямой AB . Предположимъ, что кромѣ перпендикуляра CD изъ точки C опущенъ еще перпендикуляръ CF . Тогда CD и CF должны быть параллельны (§ 9); но онѣ пересѣкаются въ точкѣ C , слѣд. наше предположеніе невозможно.



2) Точка C лежитъ на прямой AB . Предположимъ, что чрезъ точку C проходятъ двѣ линіи CD и CE перпендикулярныя къ AB . Тогда $\angle DCB = \angle ECB$, что невозможно (§ 3, 1).

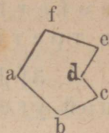
§ 14. 1) Плоскою фигурою называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями. Если фигура ограничена только прямыми линіями, то она называется прямолинейною или многоугольникомъ, а сумма всѣхъ сторонъ периметромъ.

2) Прямая линія, ограничивающія многоугольникъ, образуютъ стороны, а точки пересѣченія двухъ смежныхъ сторонъ — вершины мно—ка.

Двѣ смежныя стороны пересѣкаясь составляютъ внутренніе углы мно—ка. Уголъ, образованный стороною мно—ка и продолженіемъ прилежащей къ ней другой стороны, называется

внѣшнимъ; онъ служить дополненіемъ до 2 д прилежащаго къ нему внутренняго угла мно—ка.

Внутренній уголъ много—ника называется входящимъ, если онъ менѣе двухъ прямыхъ, напр. $\angle abc$; когда же внутренній уголъ болѣе двухъ прямыхъ, какъ уголъ cde , то онъ называется исходящимъ.



3) Мно—къ называютъ равностороннимъ, когда всѣ стороны равны, и правильнымъ, когда кромѣ того и всѣ углы равны.

4) По числу угловъ (или сторонъ) мно — ки раздѣляются на треугольники, четырехугольники и т. д.

5) Треугольникъ называется равностороннимъ, если всѣ стороны его равны; равнобедреннымъ, если двѣ только стороны равны; разностороннимъ, если всѣ стороны различной величины.

Одна какая нибудь изъ сторонъ тре—ника называется основаніемъ, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины противоположнаго ей угла на основаніе или на продолженіе его — высотой тре—ника.

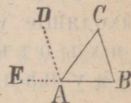
Въ равнобедренномъ тре—никѣ за основаніе принимается обыкновенно неравная сторона.

6) Тре—къ называется прямоугольнымъ, тупоугольнымъ или остроугольнымъ, смотря по тому, имѣетъ ли онъ прямой или тупой уголъ или всѣ острые углы.

Въ прямоугольномъ тре—кѣ сторону, противоположную прямому углу, называютъ гипотенузою, а двѣ другія стороны катетами.

§ 15. Сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ.

Если продолжимъ одну сторону BA тре—ка и проведемъ изъ A прямую $AD \parallel BC$, то $\angle B = \angle DAE$ и $\angle C = \angle DAC$ (§ 10), слѣд. $\angle CAE = \angle B + \angle C$. Но такъ какъ $\angle CAE + \angle BAC = 2$ д, то и $\angle B + \angle C + \angle BAC = 2$ д.



§ 16. Слѣд. 1) Внѣшній уголъ ($\angle CAE$) тре—ка равенъ суммѣ внутреннихъ съ нимъ не смежныхъ угловъ ($\angle B, \angle C$), слѣд. онъ болѣе каждаго изъ послѣднихъ угловъ.

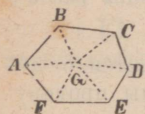
2) Если два угла одного тре—ка, порознь или вмѣстѣ взятые, равны двумъ угламъ другаго, то и третій уголъ равенъ третьему.

3) Если тре—къ имѣетъ одинъ прямой или тупой уголъ, то остальные углы должны быть острыми.

4) Въ прямоугольномъ тре—кѣ каждый острый уголъ дополняетъ другой острый до прямого.

5) Вычтя сумму двухъ угловъ тре—ка изъ 2 д, получаемъ третій уголъ его.

§ 17. Сумма угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ, умноженнымъ на число сторонъ, безъ четырехъ прямыхъ.



Означимъ число сторонъ мно—ка чрезъ n , и проведемъ изъ точки G , внутри его произвольно взятой, прямыя къ вершинамъ всѣхъ угловъ. Тогда образуется n треугольниковъ, сумма угловъ коихъ равна 2 п д. Если мы отнимемъ 4 д около точки G , не принадлежащія къ угламъ мно—ка, то останется $(2n-4)$ д или $(n-2)$ 180° .

§ 18. Слѣд. 1) Сумма угловъ въ четырехъугольникѣ = 4 д, въ пятиугольникѣ = 6 д, и т. д.

2) Если въ мно—кѣ всѣ углы равны, что бываетъ въ правильномъ мно—кѣ, то каждый уголъ равняется суммѣ всѣхъ угловъ, раздѣленной на число угловъ. Слѣд. каждый уголъ

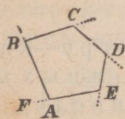
$$\text{въ прав. } n - \text{угольникѣ} = \frac{2n-4}{n} = 2 - \frac{4}{n} \text{ д.}$$

$$\text{въ прав. 4 — угольникѣ} = 1 \text{ д} = 90^\circ$$

$$\text{въ прав. 5 — угольникѣ} = \frac{6}{5} \text{ д} = 108^\circ$$

$$\text{въ прав. 6 — угольникѣ} = \frac{8}{3} \text{ д} = 120^\circ \text{ и т. д.}$$

3) Во всякомъ многоугольникѣ (имѣющемъ только выходящіе углы) сумма внѣшнихъ угловъ, происшедшихъ отъ продолженія всѣхъ сторонъ его по одному направленію, равняется 4 д.



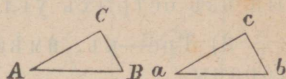
Такъ какъ каждый уголъ вмѣстѣ съ соотвѣтственнымъ ему внутреннимъ угломъ составляетъ 2 д, то сумма всѣхъ внѣшнихъ и внутреннихъ угловъ вмѣстѣ равняется 2 п д; если мы отнимемъ сумму внутреннихъ угловъ, т. е. $(2n-4)$ д, то получимъ 4 д.

§ 19. Плоскія фигуры называются равными ($\cong$), если онѣ при наложеніи другъ на друга совпадаютъ всѣми своими частями.

Изъ этого слѣдуетъ, что въ равныхъ мно—кахъ стороны и углы одного мно—ка порознь равны сторонамъ и угламъ другого. Вершины равныхъ угловъ, также и стороны, которыя совпадаютъ другъ съ другомъ называются соотвѣствующими.

§ 20. (I.) Два треугольника равны, если двѣ стороны и заключенный между ними уголъ одного равны порознь тѣмъ-же частямъ другого.

Пусть $\sphericalangle A = a$, $AB = ab$, $AC = ac$. Наложимъ $\triangle abc$ на $\triangle ABC$ такъ, чтобы точка a упала въ точку A , а линія ab на AB , тогда точка b упадетъ въ точку B , а по равенству угловъ $A = a$ и сторонъ $AC = ac$ точки c и C совпадутъ. Слѣд. стороны bc и BC совмѣстятся, а потому $\triangle abc \cong \triangle ABC$.



Слѣдствіе. Два прямоугольные тре—ка равны, если имѣютъ равные катеты.

§ 21. (II.) Два треугольника равны, если сторона и два прилежащіе къ ней угла одного треугольника равны порознь тѣмъ-же частямъ другого. (Фиг. § 20).

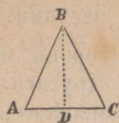
Пусть $AB = ab$, $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle B = b$. Наложимъ сторону ab на AB такъ, чтобы точка a упала въ A , и точка b въ B . Тогда по равенству угловъ стороны ac и bc примутъ направленія AC и BC . Но какъ двѣ прямыя могутъ пресѣкаться только въ одной точкѣ, то точка c упадетъ въ C и посему тре—ки совершенно совмѣстятся.

Слѣдствія. 1) $\triangle ABC \cong abc$, если $AB = ab$, $\sphericalangle A = a$, $\sphericalangle C = c$ (§ 16, 2).

2) Прямоугольные тре—ки равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по равному острому углу, или по равному катету и по равному острому углу.

§ 22. 1) Если въ треугольникѣ двѣ стороны равны, то и противолежащіе имъ углы также равны,

2) если два угла равны, то и противолежащія имъ стороны равны.



1) Если $AB = BC$ и прямая BD дѣлитъ $\sphericalangle ABC$ пополамъ, тогда $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (§ 20), слѣд. $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

2) Если $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, и прямая BD дѣлитъ $\sphericalangle ABC$ пополамъ, тогда $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (§ 21, 1), и потому $AB = BC$.

§ 23. Слѣдствія. 1) Въ равностороннемъ тре—кѣ всѣ углы равны, и потому каждый изъ нихъ $= \frac{2}{3}d = 60^\circ$.

2) Въ равнобедренномъ прямоугольномъ тре—кѣ каждый изъ острыхъ угловъ равенъ $\frac{1}{2}d = 45^\circ$.

3) Тре—кѣ, имѣющій равные углы, имѣеть и равныя стороны.

§ 24. Если въ равнобедренномъ тре—кѣ (фиг. § 22) проведенная изъ вершины линия (BD) удовлетворяетъ одному изъ трехъ условий:

1) дѣлитъ уголь при вершинѣ пополамъ, или

2) дѣлитъ основаніе пополамъ, или

3) перпендикулярна къ основанію,

то она удовлетворяетъ и обоимъ остальнымъ условіямъ.

Пусть въ $\triangle ABC$ сторона $AB = CB$, и потому $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ (§ 22).

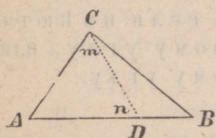
1) Если $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$, то $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (§ 21);

2) Если $AD = CD$, то $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (§ 20);

3) Если $BD \perp AC$, то $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (§ 21, 1).

Изъ этого слѣдуетъ, что при каждомъ изъ нашихъ условій $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, и потому въ одно и тоже время $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$, $AD = CD$, $BD \perp AC$.

§ 25. Въ треугольникѣ ABC 1) большей сторонѣ противолежитъ больший уголь, и обратно, 2) большему углу противолежитъ большая сторона.



1) Если $AB > AC$, то и $\sphericalangle ACB > \sphericalangle B$. Отложимъ на сторонѣ AB линію $AD = AC$, тогда въ равнобедренномъ $\triangle ACD$ будетъ $\sphericalangle m = \sphericalangle n$ (§ 22). Уголь n , какъ внѣшній въ $\triangle CBD$, болѣе угла B , потому и $\sphericalangle m > \sphericalangle B$; слѣд. и $\sphericalangle ACB > \sphericalangle B$.

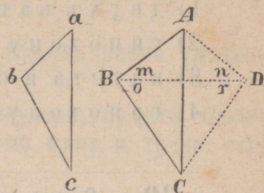
2) Если $\sphericalangle ACB > \sphericalangle B$, то и $AB > AC$. Если бы была сторона $AB \leq AC$, то былъ бы и $\sphericalangle ACB \leq \sphericalangle B$ (§ 22 и § 25, 1). Но такъ какъ это противорѣчитъ нашему условію, то $AB > AC$.

§ 26. Слѣдствія. 1) Гипотенуза прямоугольнаго тре—ка есть самая большая изъ всѣхъ его сторонъ.

2) Въ тупоугольномъ тре—кѣ сторона, противолежащая тупому углу, есть больше каждой изъ двухъ другихъ его сторонъ.

§ 27. (III.) Два треугольника равны, если три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другого.

Пусть $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$. Приложимъ тре—ки другъ къ другу большими ихъ сторонами такъ, чтобы точки a и c упали въ дочки A и C , а уголъ abc принялъ положеніе ADC . Если проведемъ BD , то въ равностороннихъ тре—кахъ BAD и BCD уголъ $m = n$, $o = r$ (§ 22), слѣд. $m + o = n + r$, потому $\triangle ABC \cong \triangle ADC \cong abc$ (§ 20).



§ 28. (IV.) Два треугольника равны, если двѣ стороны и уголъ противолежащій большей изъ этихъ сторонъ одного соответственно равны тѣмъ-же частямъ другого. (Фиг. § 27).

Пусть $ab = AB$, $ac = AC$, $\sphericalangle b = B$ и кромѣ того $ac > ab$, $AC > AB$. Приложимъ оба тре—ка другъ къ другу такъ, чтобы большія изъ данныхъ сторонъ ac и AC совпали своими концами, а уголъ abc принялъ положеніе ADC . Тогда $\sphericalangle ABC = ADC$ и $AB = AD$. Если проведемъ BD , то въ равностороннемъ $\triangle BAD$ уголъ $m = n$, слѣд. $\sphericalangle ABC - m = \sphericalangle ADC - n$ или $o = r$, по этому въ $\triangle BCD$ сторона $BC = DC$ (§ 22, 2), слѣд. (§ 27) $\triangle ABC \cong \triangle ADC \cong abc$.

Если углы A и a , заключающіеся между равными сторонами, будутъ тупые, то прямая BD упадетъ по другую сторону вершины A , и вмѣсто вычитанія равныхъ угловъ изъ равныхъ придется употребить сложеніе.

Слѣдствіе. Два прямоугольные тре—ка равны, если имѣютъ равныя гипотенузы и по равному катету.

§ 29. (A.) Изъ доказанныхъ случаевъ равенства тре—ковъ слѣдуетъ, что тре—къ вполне опредѣляется:

- 1) двумя сторонами и заключающимся между ними угломъ,

- 2) одною стороною и двумя углами,
- 3) тремя сторонами,
- 4) двумя сторонами и угломъ, противолежащимъ
большей изъ этихъ сторонъ.

И такъ тре—къ опредѣляется тремя своими частями, въ числѣ которыхъ должна быть непремѣнно хотя одна сторона.

(В.) Такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ уголъ всегда извѣстенъ, то для опредѣленія прямоугольнаго тре—ка достаточно

- 1) двухъ катетовъ,
- 2) гипотенузы и остраго угла,
- 3) катета и остраго угла,
- 4) гипотенузы и катета.

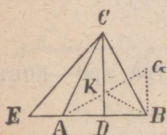
§ 30. Сумма двухъ сторонъ тре—ка всегда болѣе третьей.
(фиг. § 20).

Такъ какъ прямая АВ есть кратчайшее разстояніе между точками А и В, то ломаная $ABC = AC + CB$ должна быть болѣе АВ.

Слѣд. Изъ $AB < AC + CB$ слѣд., что $AB - AC < CB$, т. е. разность между двумя сторонами тре—ка меньше третьей его стороны.

§ 31. Если изъ какой нибудь точки С, внѣ прямой ЕВ, опустимъ на нее перпендикуляръ CD и проведемъ нѣсколько наклонныхъ СВ, СА, СЕ . . . , то

- 1) перпендикуляръ короче всякой наклонной;
- 2) двѣ наклонныя СА и СВ, равно удаленныя ($DA = DB$) отъ основанія (D) перпендикуляра, равны;
- 3) изъ двухъ наклонныхъ СА и СЕ болѣе удаленная отъ основанія (D) длиннѣе другой.



- 1) Въ тре—кахъ CAD и CED сторона $CA > CD$ и $CE > CD$ (§ 26, 1).
- 2) Если $DA = DB$, то $\triangle CAD \cong \triangle CBD$ (§ 20), слѣд. $CA = CB$,
- 3) Такъ какъ $\angle CAD$ острый, то $\angle CAE$ тупой, слѣд. въ $\triangle CAE$ сторона $CE > CA$ (§ 26, 2).

§ 32. Слѣдствія. 1) Изъ одной точки нельзя провести больше двухъ равныхъ линій къ данной прямой.

2) Кратчайшая изъ всѣхъ линій, проведенныхъ изъ точки C къ прямой EB , перпендикулярна къ этой послѣдней и служитъ мѣрою разстоянія точки C отъ прямой EB .

§ 33. (Фиг. § 31.) Если изъ середины прямой AB возставимъ къ ней перпендикуляръ DC , то

1) всякая точка C этого перпендикуляра будетъ равно удалена отъ концовъ прямой AB ;

2) всякая точка G , взятая внѣ перпендикуляра, будетъ ближе къ тому концу его, съ которымъ она лежитъ по одну и ту-же сторону перпендикуляра.

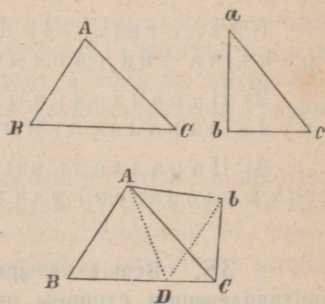
1) Такъ какъ $AD = BD$, то $CA = CB$ (§ 31, 2).

2) Если проведутся AG , GB , KB , тогда $KA = KB$, и такъ какъ $GK + KB > GB$, то и $GA > GB$.

§ 34. Если въ треугольникахъ ABC и abc двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а заключающіеся между ними углы не равны, то большому углу противолежитъ и ббльшая сторона.

Если $AB = ab$, $AC = ac$, $A > a$, то $BC > bc$.

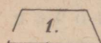
Приложимъ оба тре—ка другъ къ другу такъ, чтобъ стороны AC и ac совпали и $\triangle abc$ принялъ положеніе ACb . Если раздѣлимъ $\angle BAb$ пополамъ прямою AD и проведемъ bD , тогда $\triangle BAD \cong bAD$ (§ 20), слѣд. $BD = bD$. Но такъ какъ $bD + DC > bC$, то и $BD + DC > bC$, т. е. $BC > bc$.



§ 35. (Фиг. § 34.) Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны одного равны порознь двумъ сторонамъ другаго, а третьи стороны не равны, то ббльшей сторонѣ противолежитъ и ббльшій уголъ.

Если $AB = ab$, $AC = ac$, $BC > bc$, то $A > a$.

Положимъ, что $\sphericalangle A = a$, тогда $\triangle ABC \cong abc$ (§ 20), слѣд. $BC = bc$; а если положимъ, что $\sphericalangle A < a$, тогда и $BC < bc$ (§ 34). То и другое противорѣчитъ нашему условію, слѣд. $\sphericalangle A > a$.



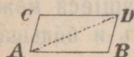
§ 36. 1) Четыреугольникъ, въ которомъ только двѣ стороны параллельны, называется трапеціею (фиг. 1), а въ которомъ каждая двѣ противолежащія стороны параллельны, параллелограмомъ (фиг. 2—5).

Параллелограмъ, имѣющій прямые углы, называется прямоугольникомъ (фиг. 3), имѣющій же равныя стороны, — ромбомъ (фиг. 4).

Параллелограмъ, въ которомъ всѣ углы прямые и всѣ стороны равны, называется квадратомъ (фиг. 5).

2) Прямая линія, соединяющая двѣ вершины многоугольника, и не совпадающая ни съ одною изъ его сторонъ, называется діагональю.

§ 37. Въ параллелограмѣ ABCD противолежащія стороны и углы равны.



Если проведемъ діагональ AD, тогда $\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (§ 10 и § 21), слѣд. $AB = CD$, $BD = AC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB$.

Слѣдствія. 1) Діагональ дѣлитъ параллелограмъ на два равные тре-ка.

3) Параллельныя линіи, заключающіяся между двумя параллельными, равны.

3) Параллельныя линіи во всѣхъ своихъ частяхъ одинаково удалены другъ отъ друга.

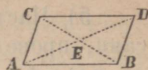
§ 38. Всякій четырехугольникъ, въ которомъ 1) каждая двѣ противолежащія стороны равны, или 2) двѣ противолежащія стороны параллельны и равны, — есть параллелограмъ. (Фиг. § 37.)

1) Если $AB = CD$ и $AC = BD$, то $\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (§ 27), а потому $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA$, слѣд. $AC \parallel BD$, и $AB \parallel CD$ (§ 9).

2) Если $AB \neq CD$, то $\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (§ 20), а потому $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DAC$, слѣд. $AC \parallel BD$.

§ 39. Въ параллелограмѣ $ABDC$ діагонали дѣлятся взаимно пополамъ.

Такъ какъ $AC = BD$, $\sphericalangle ACE = \sphericalangle DBE$,
 $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BDE$, то $\triangle ACE \cong \triangle DBE$, слѣд. $AE = DE$ и $CE = BE$.



§ 40. Діагонали въ прямоугольникѣ равны, въ косоугольномъ параллелограмѣ неравны, въ ромбѣ и квадратѣ перпендикулярны другъ къ другу.

II. О кругѣ.

§ 41. 1) Кругомъ называется плоская фигура, ограниченная кривою линією, всѣ точки которой равно удалены отъ внутренней точки, называемой центромъ.

Кривая, ограничивающая кругъ, называется окружностью или периметромъ.

Если въ плоскости обращается прямая линія около одной изъ ея точекъ, то всякая другая точка этой линіи опишетъ круговую линію.

2) Прямая, проведенная отъ центра круга къ точкѣ, лежащей на окружности, называется радіусомъ или поперечникомъ, а прямая, проходящая чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностью, называется діаметромъ или поперечникомъ. Такъ какъ въ одномъ и томъ же кругѣ всѣ радіусы равны, то и всѣ діаметры, какъ двойные радіусы, равны между собою.

3) Всякая часть окружности называется дугою, а прямая, соединяющая концы ея, хордою. Каждой дугѣ соответствуетъ одна хорда, но каждой хордѣ — двѣ дуги, а именно тѣ, которыя имѣютъ общіе съ хордою концы и взаимно дополняютъ другъ друга до цѣлой окружности.

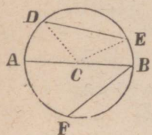
4) Если уголъ образуется двумя радіусами и слѣд. имѣетъ вершину въ центрѣ круга, то его называютъ центральнымъ угломъ; если же уголъ образуется двумя хордами, и вершина его находится на окружности, то онъ называется вписаннымъ угломъ.

Центральные и вписанные углы опираются на соответ-

ствующую имъ дугу, т. е. на ту часть окружности, которая заключается между ихъ сторонами.

5) Часть круга, заключающаяся между дугою и двумя радиусами, проведенными къ концамъ дуги, называется секторомъ или вырѣзкомъ, а часть круга, заключающаяся между дугою и ея хордою — сегментомъ или отрѣзкомъ.

§ 42. Всякій діаметръ АВ дѣлитъ кругъ и окружность на двѣ равныя части.



Представимъ себѣ, что фигура будетъ перегнута по линіи АВ, тогда кривыя ADEB и AFB совпадутъ, потому что всѣ точки ихъ равно удалены отъ центра.

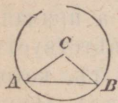
§ 43. Діаметръ АВ болѣе всякой хорды DE (Фиг. 42).

Если проведемъ радиусы CD и CE, тогда $CD + CE > DE$, слѣд. и $AB > DE$.

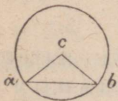
§ 44. Прямая линія можетъ пересѣкать окружность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

Еслибы обѣ линіи имѣли болѣе чѣмъ двѣ общія точки, тогда мы могли бы отъ центра къ прямой провести болѣе чѣмъ двѣ равныя линіи, что невозможно (§ 32.)

§ 45. Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ 1) равнымъ центральнымъ угломъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и хорды; 2) равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равныя центральные углы и хорды.



1) Если $\angle C = c$, то по равенству радиусовъ одинъ кругъ можно такъ наложить на другой, что точки А, В, С совпадутъ съ точками а, b, с, а отъ того хорды и дуги, соотвѣтствующія угламъ С и с, сольются.



2) Если дуга $AB = ab$, то и хорды ихъ также равны и потому $\triangle ABC \cong abc$ (§ 27), слѣд. $\angle C = c$.

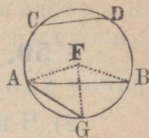
§ 46. Слѣдствія 1) Равныя хорды стягиваютъ равныя дуги, если обѣ дуги больше или обѣ дуги меньше полуокружности.

2) Равнымъ центральнымъ угламъ или равнымъ дугамъ соотвѣствуютъ равные секторы и сегменты.

3) Бóльшему изъ двухъ центральныхъ угловъ соотвѣствуетъ бóльшая дуга и обратно, какъ видно изъ наложенія одной фигуры на другую.

§ 47. Въ кругъ или въ равныхъ кругахъ 1) бóльшей дугѣ соотвѣствуетъ бóльшая хорда, 2) бóльшей хордѣ соотвѣствуетъ бóльшая дуга, — если сравниваемая дуги менѣе полуокружности.

1) Пусть дуга $BGB > AG$. Если проведутся радіусы FA , FB , FG , тогда треугольники AFB и AFG имѣютъ по двѣ равныя стороны, которыя образуютъ неравные углы, $\sphericalangle AFB > AFG$; слѣд. $AB > AG$ (§ 34).

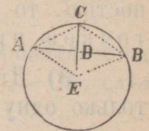


2) Если $AB > AG$, тогда изъ тѣхъ же трехъ слѣдуетъ, что $\sphericalangle AFB > AFG$ (§ 35), и потому дуга $AGB > AG$.

Если разсматриваемыя дуги болѣе полуокружности, то бóльшей дугѣ соотвѣствуетъ меньшая хорда.

§ 48. Радиусъ EC , перпендикулярный къ хордѣ AB , дѣлитъ хорду и дугу ACB пополамъ.

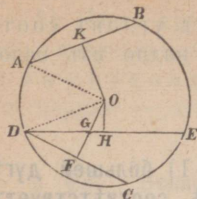
Такъ какъ $\triangle ADE \cong BDE$ (§ 28, слѣд.), то $AD = BD$, а потому $AC = BC$ (§ 31, 2), слѣд. и дуга $AC = BC$ (§ 46, 1).



Слѣдствія. 1) Центръ круга, середина хорды и середина ея дуги лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ хордѣ, такъ что прямая, проходящая чрезъ двѣ изъ этихъ точекъ, должна пройти и чрезъ третью.

2) Перпендикуляръ, возставленный къ хордѣ въ срединѣ ея, пройдетъ чрезъ центръ круга и средину дуги, стягиваемой хордою.

§ 49. 1) Равныя хорды AB и DC равно удалены отъ центра круга. 2) Изъ двухъ неравныхъ хордъ, AB и DE , бóльшая DE ближе къ центру.



1) Возставимъ изъ срединъ хордъ AB и DC перпендикуляры KO и FO, и проведемъ радиусы OA и OD, тогда $\triangle AOK \cong \triangle DOF$ (§ 28), а потому $OK = OF$ (§ 32, 2).

2) Если $AB < DE$, то и дуга $AB < DCE$ (§ 47, 2). Отложимъ на дугѣ DCE часть $DC = AB$, проведемъ хорду DC и опустимъ $OF \perp DC$ и $OH \perp DE$, тогда $OF > OG > OH$ (§ 31, 1), и такъ какъ $DC = AB$, то и $OF = OK$, слѣд. $OK > OH$.

§ 50. Слѣд. 1) Двѣ хорды AB и DC равны, если онѣ равно удалены отъ центра круга. (§ 28, слѣд.)

2) Чѣмъ мѣнѣе разстояние хорды отъ центра, тѣмъ хорда болѣе.

Если $OH < OK$, то $DE > AB$. Принимая $DE \leq AB$ получимъ $OH \geq OK$, что противно нашему условію.

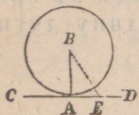
§ 51. 1) Неограниченная прямая, проходящая чрезъ кругъ такъ, что одна часть лежитъ внутри, а другая внѣ круга, называется сѣкущею.

2) Если прямая имѣетъ только одну общую точку съ окружностью, то она называется касательною, а общая точка — точкою прикосновенія.

3) Два круга касаются, если ихъ окружности имѣютъ только одну общую точку.

§ 52. 1) Прямая, перпендикулярная къ радиусу въ его конечной точкѣ, есть касательная къ окружности;

2) Касательная перпендикулярна къ радиусу, проведенному чрезъ точку прикосновенія.



1) Если прямая $CD \perp AB$ въ точкѣ A, лежащей на окружности, то всякая другая точка, напр. E на прямой CD, отстоитъ далѣе отъ центра B, нежели A, потому что $BE > BA$ (§ 31, 1). Слѣд. CD, имѣя только одну точку, общую съ окружностью, будетъ касательною къ кругу.

2) Если CD касательная къ кругу въ точкѣ A, то всѣ другія точки ея находятся внѣ окружности; слѣд. разстояние ихъ отъ

центра болѣе нежели радіусъ BA , напр. $BE > BA$. Такъ какъ BA есть кратчайшее разстояніе центра B отъ CD , то $BA \perp CD$ (§ 32 2).

§ 53. Слѣдствія. 1) Чрезъ данную точку окружности можно провести только одну касательную.

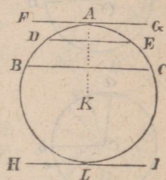
2) Перпендикуляръ, возставленный изъ точки прикосновенія къ касательной, пройдетъ чрезъ центръ круга.

3) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, пройдетъ чрезъ точку прикосновенія.

Доказательства выводятся изъ § 13.

§ 54. Дуги окружности, заключающіяся между параллельными линиями, равны между собою.

Если хорды BC и DE параллельны, то радіусъ KA , проведенный $\perp BC$, также будетъ $\perp DE$, и потому $\frown AB = \frown AC$, $\frown AD = \frown AE$, слѣд. и $\frown BD = \frown CE$ (§ 48).

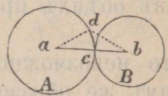


Если касательная $FG \parallel DE$, то проведенный къ точкѣ прикосновенія радіусъ $KA \perp FG$ и $\perp DE$, слѣд. $\frown DA = \frown EA$.

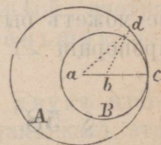
Если касательныя FG и HI параллельны, то проведя хорду $BC \parallel FG$ будемъ имѣть: $\frown BA = \frown CA$ и $\frown BL = \frown CL$, слѣд. и $\frown ABL = \frown ACL$.

§ 55. Если разстояніе ab между центрами двухъ круговъ A и B равно суммѣ или разности ихъ радіусовъ, то окружности насаются соответственно извнѣ или внутри.

1) Если $ab = ac + cb$, то всякая точка d круга A , за исключеніемъ точки c , лежащей на прямой ab , находится внѣ круга B , потому что $ad + bd > ac + bc$, слѣд. $bd > bc$.



2) Если $ab = ac - bc$, то всякая точка d круга A , за исключеніемъ точки c , находится внѣ круга B , потому что $ab + bd > ad$ или $> ac$, слѣд. $bd > ac - ab$, т. е. $bd > bc$.

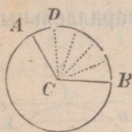


§ 56. Слѣдствія. 1) Если два круга соприкасаются, то ихъ центры и точка соприкосновенія лежатъ на одной прямой.

2) Два круга пересѣкутся, если разстояніе между центрами менѣе суммы и болѣе разности ихъ радіусовъ.

3) Всѣ круги, имѣющіе центры на одной прямой линіи и проходящіе чрезъ одну и ту же точку этой прямой, соприкасаются въ этой точкѣ и имѣютъ въ ней общую касательную.

§ 57. Въ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ центральные углы $\angle ACB$ и $\angle acb$ относятся какъ дуги AB и ab , заключающіяся между ихъ сторонами.



Положимъ, что $\angle ACD$ можно отложить 5 разъ въ $\angle ACB$ и 4 раза въ $\angle acb$. Такъ какъ равнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги (§ 45, 1), то и $\smile AD$ отложится 5 разъ на $\smile AB$ и 4 раза на $\smile ab$. Отсюда видно, что если углы относятся между собою какъ два числа, то и соотвѣтствующія имъ дуги будутъ относиться какъ тѣ же числа.

Каково бы ни было отношеніе между углами, во всякомъ случаѣ они будутъ относиться какъ дуги. Положимъ, что пропорція $\angle ACB : \angle acb = AB : ab$ не существуетъ, а существуетъ пропорція

$$\angle ACB : \angle acb = AB : ad,$$

гдѣ $ad > ab$. Представимъ себѣ, что AB раздѣлена на столь малыя равныя части, что каждая изъ нихъ меньше дуги bd ; тогда при наложеніи этихъ частей на дугу ad какая нибудь точка дѣленія и непременно упадетъ между b и d . Такъ какъ AB и ae относятся какъ цѣлыя числа, то по предыдущему будемъ имѣть

$$\angle ACB : \angle ace = AB : ae.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$\angle acb : \angle ace = ad : ae,$$

что невозможно, потому что $\angle acb < \angle ace$, но $ad > ae$. Точно такимъ же образомъ можно доказать, что четвертый членъ пропорціи не можетъ быть менѣе ab ; слѣд. во всѣхъ случаяхъ существуетъ пропорція $\angle ACB : \angle acb = AB : ab$.

§ 58. 1) Соотвѣтственно раздѣленію прямого угла на 90 угловыхъ градусовъ и четверть окружности, лежащая между сто-

ронами прямого угла, дѣлится на 90 (слѣд. цѣлая окружность на 360) дуговыхъ градусовъ, каждый градусъ на 60 минутъ, а минута на 60 секундъ. Такъ какъ центральный уголъ заключаетъ въ себѣ столько угловыхъ градусовъ, сколько его дуга дуговыхъ, то за мѣру угла принимается дуга, описанная произвольнымъ радіусомъ изъ вершины угла между его сторонами, что однакожъ всегда надобно принимать въ такомъ смыслѣ, что дуга, соответствующая углу, показываетъ, сколько угловыхъ градусовъ заключается въ углу.

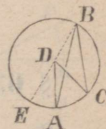
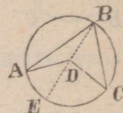
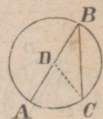
2) Два сектора ACB и acb въ равныхъ кругахъ (фиг. § 57) основаны между собою какъ дуги AB и ab .

§ 59. Вписанный уголъ ABC вдвое менѣе центрального угла ADC , опирающагося на ту же самую дугу.

1) Если центръ D лежитъ на одной изъ сторонъ данного угла, то (§ 22, 1) $\sphericalangle B = C$ и $\sphericalangle ADC = B + C = 2B$ (§ 16, 1), слѣд. $\sphericalangle B = \frac{1}{2} ADC$.

2) Если D лежитъ внутри угла ABC , то проведя діаметръ BE имѣемъ $\sphericalangle ABE = \frac{1}{2} ADE$ и $\sphericalangle CBE = \frac{1}{2} CDE$, слѣд. $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} ADC$.

3) Если D лежитъ внѣ угла ABC , то проведя діаметръ BE получимъ $\sphericalangle CBE = \frac{1}{2} CDE$, и $\sphericalangle ABE = \frac{1}{2} ADE$, слѣд. $CBE - ABE = \frac{1}{2} (CDE - ADE)$ или $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} ADC$.



§ 60. Слѣдствія. 1) Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами.

2) Всѣ углы, вписанные въ одномъ и томъ же кругѣ и опирающіеся на одну и ту же или на равныя дуги, равны между собою. Углы B, C, D измѣряются одной и той же дугою AE .

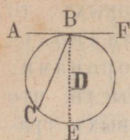


3) Вписанный уголъ, опирающійся на полуокружность, есть прямой.

4) Вписанный уголъ будетъ тупой или острый, смотря по тому, опирается ли онъ на дугу большую или меньшую полуокружности.

5) Во вписанномъ четырехугольникѣ сумма двухъ противоположащихъ угловъ равна двумъ прямымъ, такъ какъ эти углы измѣряются половиною цѣлой окружности.

§ 61. Уголь ABC , образованный касательною и хордою, измѣряется половиною дуги BC , заключающейся между его сторонами.



Если проведемъ изъ точки прикосновенія диаметр BE , тогда $\sphericalangle ABE$ измѣряется дугою $\frac{1}{2} BCE$, а $\sphericalangle CBE$ дугою $\frac{1}{2} CE$, слѣд. $\sphericalangle ABC = ABE - CBE$ будетъ измѣряться дугою $\frac{1}{2} (BCE - CE) = \frac{1}{2} BC$. Подобнымъ образомъ мѣрою для тупаго угла CBF будетъ дуга $\frac{1}{2} CEB$.

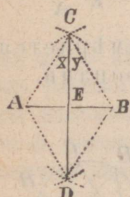
§ 62. Уголь BAC , образованный прямыми, пересѣкающимися внутри круга или внѣ его, измѣряется соответственно полусуммою или полуразностью дугъ, заключающихся между его сторонами, т. е. $\frac{1}{2} (BC \pm ED)$.



Если провести изъ точки D хорду DC , тогда $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC \pm \sphericalangle ECD$ (§ 16. 1). Такъ какъ BDC измѣряется дугою $\frac{1}{2} BC$, а ECD дугою $\frac{1}{2} ED$, то BAC измѣряется дугою $\frac{1}{2} (BC \pm ED)$.

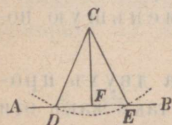
III. Задачи.

§ 63. Раздѣлить прямую AB пополамъ.



Изъ концовъ A и B данной прямой опишемъ двѣ дуги равнымъ радиусомъ, который долженъ быть такъ великъ, чтобъ дуги пересѣкались въ двухъ точкахъ C и D . Прямая CD раздѣлитъ данную линію AB въ точкѣ E пополамъ, потому что $\triangle ACD \cong BCD$ (§ 27), слѣд. $\sphericalangle x = y$ и $\triangle ACE \cong BCE$, а потому $AE = BE$.

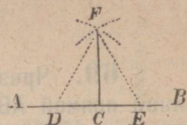
§ 64. Изъ данной точки C , лежащей внѣ прямой AB , опустить на эту прямую перпендикуляръ.



Изъ точки C опишемъ дугу, которая бы пересѣкла прямую AB въ точкахъ D и E . Раздѣлимъ DE пополамъ, тогда прямая CF , соединяющая данную точку съ точкою дѣленія, будетъ искомымъ перпендикуляръ; ибо $\triangle CDF \cong CEF$ (§ 27), слѣд. $\sphericalangle CFD = CFE$, т. е. $CF \perp AB$.

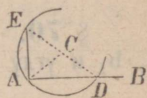
§ 65. Изъ данной точки C , лежащей на прямой AB , возставить къ ней перпендикуляръ.

Возьмемъ двѣ точки D и E въ равномъ разстояніи отъ C , и опишемъ изъ этихъ точекъ радіусомъ, болѣе DC , дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ F , тогда прямая CF будетъ искомымъ перпендикуляръ, потому что $\triangle CDF \cong \triangle CEF$ (§ 27), а посему $\angle FCD = \angle FCE$.



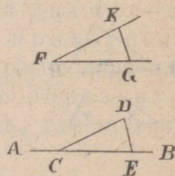
§ 66. Изъ конца прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ, не продолжая прямой.

Изъ произвольной точки C , внѣ прямой AB , опишемъ радіусомъ CA окружность, которая пройдетъ чрезъ точки A и D прямой AB . Если проведемъ чрезъ D и C прямую, и соединимъ точку E пересѣченія ея съ окружностью съ точкою A , тогда EA будетъ требуемый перпендикуляръ, потому что уголъ EAD прямой (§ 60, 3).



§ 67. На прямой AB при данной точкѣ C отложить уголъ, равный данному углу F .

Изъ точки F опишемъ произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ G и K . Опишемъ изъ C тѣмъ же радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ AB въ точкѣ E , и изъ E радіусомъ GK проведемъ вторую дугу, которая пересѣчетъ первую въ точкѣ D , тогда $\angle ECD = \angle F$, потому что $\triangle CDE \cong \triangle FKG$ (§ 27).



§ 68. Раздѣлить данную дугу или уголъ пополамъ (фиг. § 48).

1) Чтобы раздѣлить дугу ACB пополамъ, должно изъ середины ея хорды AB возставить перпендикуляръ DC , тогда $\text{дуга } AC = \text{дуга } BC$ (§ 48, 2).

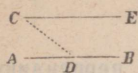
2) Чтобы раздѣлить уголъ AEB пополамъ, опишемъ изъ вершины E дугу ACB , отыщемъ ея середину C и проведемъ CE , тогда $\angle AEC = \angle BEC$ (§ 45).

Слѣдствіе. Повторивъ подобное строеніе надъ каждою половиною, можно раздѣлить уголъ на 4, 8, 16, . . . равныхъ частей.

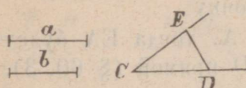
Но способами элементарной геометрии, т. е. только с помощью линейки и циркуля, нельзя дѣлать произвольный уголъ на 3, 5, 6, 7, 9 . . . равныхъ частей.

§ 69. Черезъ данную точку C провести прямую, параллельную данной прямой AB .

Проведемъ черезъ C прямую CD , пересекающую AB , и отложимъ на ней при точкѣ C уголъ ECD равный CDA , тогда сторона CE будетъ искома параллельная линия (§ 9, 1).

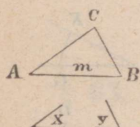


§ 70. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ a , b , и углу C , лежащему между ними.



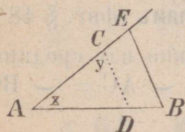
На сторонахъ угла C отложимъ $CD = a$, $CE = b$ и проведемъ DE ; CDE будетъ искомый тре—къ. (§ 20).

§ 71. Построить треугольникъ по данной сторонѣ m и прилежащимъ къ ней угламъ x и y .



Отложимъ на сторонѣ m при ея концахъ углы $A = x$, $B = y$. Если продолжимъ стороны этихъ угловъ, сумма которыхъ должна быть $< 2d$, то онѣ пересѣкутся въ точкѣ C и дадутъ требуемый тре—къ ABC (§ 21).

§ 72. Построить тре—никъ по данной сторонѣ AB , прилежащему къ ней углу x и противолежащему ей углу y .

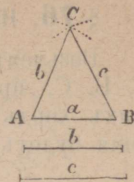


Отложимъ на AB уголъ $BAE = x$, и на сторонѣ AE въ произвольной точкѣ уголъ $ACD = y$. Если проведемъ изъ точки B прямую $BE \parallel DC$, то ABE будетъ искомый треугольникъ.

Эту задачу можно рѣшить и такъ, что вычтя $x + y$ изъ $2d$ опредѣлимъ сперва третій уголъ треугольника, а потомъ построимъ тре—къ по § 71.

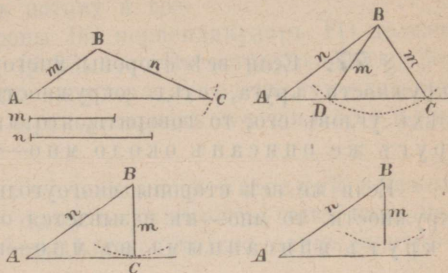
§ 73. Построить треугольникъ по даннымъ тремъ сторонамъ a , b , c .

Изъ концовъ прямой a опишемъ радіусами b и c дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ C , и проведемъ AC и BC , тогда ABC будетъ искомый треугольникъ (§ 27).



§ 74. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ сторонамъ m и n , неравнымъ между собою, и углу A , противолежащему одной изъ этихъ сторонъ.

1) Если уголъ A , противолежитъ болѣеи сторонѣ n , то сдѣлаемъ, какъ видно въ первой фигурѣ, одну сторону AB даннаго угла A равною m , и изъ точки B радіусомъ равнымъ n опишемъ дугу, которая пересѣчетъ другую сторону въ точкѣ C . Тре—къ ABC будетъ требуемый.



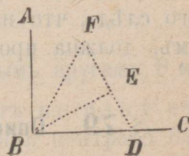
2) Если уголъ A противолежитъ меньшей сторонѣ m , то при построении тре—ка стоитъ только переимѣнить m на n . Смотри по величинѣ линіи m , могутъ образоваться или два тре—ка ABD и ABC , какъ во второй фигурѣ, или одинъ прямоугольный тре—къ, какъ въ третьей фигурѣ, гдѣ m равно перпендикуляру BC изъ B на линію AC , или наконецъ не образуется ни одного тре—ка, какъ въ четвертой фигурѣ, гдѣ m меньше перпендикуляра BC .

Изъ рѣшенія втораго случая задачи видно, что двѣ стороны и противолежащій меньшей изъ сихъ сторонъ уголъ не опредѣляютъ вполнѣ тре—ка, такъ какъ изъ равенства этихъ частей не слѣдуетъ всегда равенство тре—ковъ.

Равны же всегда будутъ два тре—ка, если имѣютъ по двѣ равныя стороны и по равному углу, противолежащему болѣеи изъ этихъ сторонъ (§ 28).

§ 75. Раздѣлить прямой уголъ ABC на три равныя части.

Если построимъ на одной сторонѣ равносторонній тре—къ BDF и раздѣлимъ уголъ FBD прямою BE пополамъ, то три угла при точкѣ B равны между собою (§ 23, 1).



§ 76. Найти центръ даннаго круга или данной дуги (фиг. § 79).

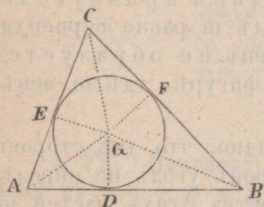
Возьмемъ на окружности или на дугѣ три произвольныя точки A, B, C , проведемъ хорды AB и BC и возставимъ изъ срединъ этихъ хордъ перпендикуляры DO и FO , тогда точка ихъ пересѣченія будетъ составлять искомый центръ (48, 2).

Слѣдствія. То же самое построение служить рѣшеніемъ задачи: Провести окружность чрезъ три данныя точки A, B, C , не лежащія на одной прямой.

§ 77. Если всѣ стороны многоугольника составляютъ хорды окружности круга, слѣд. окружность проходитъ чрезъ вершины всѣхъ угловъ его, то говорятъ, что мно—къ вписанъ въ кругъ, кругъ же описанъ около мно—ка.

Если же всѣ стороны многоугольника будутъ касательными къ окружности, то мно—къ называется описаннымъ около круга, а кругъ вписаннымъ въ мно—къ.

§ 78. Вписать кругъ въ данный треугольникъ ABC .

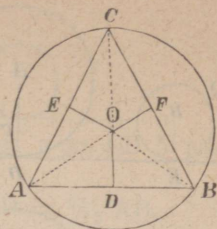


Если два угла A и B тре—ка раздѣлятся пополамъ прямыми AG и BG , то точка G пересѣченія ихъ будетъ центромъ, а разстояніе этой точки отъ какой-нибудь стороны треугольника радіусомъ требуемаго тре—ника. — Если проведемъ $GD \perp AB$, $GE \perp AC$, $GF \perp BC$, тогда $\triangle ADG \cong \triangle AEG$ и $\triangle BDG \cong \triangle BFG$ (§ 21, 2), $GE = GD = GF$, а потому описанная изъ точки G радіусомъ GD окружность должна касаться сторонъ тре—ка.

Слѣд. Три линіи, раздѣляющія углы тре—ка пополамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно удаленной отъ трехъ сторонъ треугольника. — Если проведемъ CG , то и $\triangle CEG \cong \triangle CFG$, и потому $\angle ECG = \angle FCG$, изъ чего слѣд., что на оборотъ и прямая, раздѣляющая уголъ C пополамъ, должна пройти чрезъ точку G .

§ 79. Описать окружность около даннаго треугольника ABC .

Возставленные из срединъ двухъ сторонъ треугольника перпендикуляры DO и EO опредѣляютъ центръ O искомаго круга, потому что $BO = AO = CO$ (§ 31, 2).



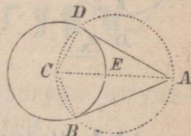
§ 80. Слѣд. 1) Три перпендикуляра, возставленные изъ срединъ сторонъ тре—ка, пересѣкаются въ одной точкѣ. Если изъ срединъ двухъ сторонъ AB и AC возставимъ перпендикуляры, то $AO = BO = CO$, а потому и возставленный изъ срединъ стороны BC перпендикуляръ FO долженъ пройти чрезъ ту же точку O (§ 33, 1). Въ остроугольномъ треугольникѣ эта точка O лежитъ внутри его, въ тупоугольномъ треугольникѣ внѣ его, въ прямоугольномъ на гипотенузѣ (§ 60, 3 и 4).

2) Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну окружность, такъ какъ перпендикулярами DO , EO , FO опредѣляется только одинъ центръ и одинъ радіусъ.

3) Двѣ окружности могутъ пересѣкаться только въ двухъ точкахъ; если бы онѣ имѣли три общія точки, то онѣ совсѣмъ совмѣстившись представляли бы только одну окружность.

§ 81. Изъ точки A , лежащей внѣ круга, провести къ нему касательную.

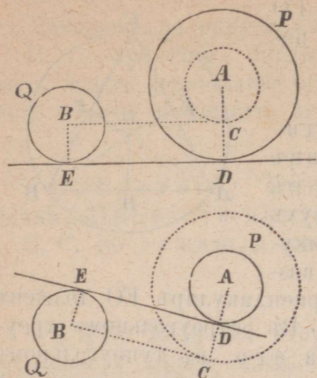
Соединимъ точку A съ центромъ C даннаго круга, и изъ срединъ E линіи AC опишемъ окружность, пересѣкающую данный кругъ въ точкахъ B и D , тогда прямая AB и AD будутъ искомыми касательными. — Если проведемъ линіи CB и CD , то $\angle ABC = d = \angle ADC$ (§ 60, 3), слѣд. AB и AD — касательныя.



Если двѣ касательныя пересѣкаются, то ихъ отрѣзки (AB и AD), лежащія между точкою пересѣченія и точками прикосновенія, равны между собою (§ 28, слѣд.)

§ 82. Провести касательную къ двумъ даннымъ кругамъ P и Q .

Если центры обоихъ круговъ должны лежать по одну сторону касательной, какъ въ первой фигурѣ, то изъ центра A большаго круга



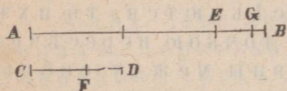
касательную. Так как $BE \parallel CD$ и $\angle BCD = d$ (§ 52, 2), то BCDE есть прямоугольник, слѣд. DE должна быть касательною обоихъ круговъ (§ 52, 1).

§ 83. На данной линіи AB описать сегментъ, вмѣщающій даннѣйшій уголъ x.



При точкѣ A на прямой AB отложимъ уголъ $BAD = x$, и проведемъ изъ A линію $AC \perp AD$, и изъ середины E прямой AB линію $EC \perp AB$. Точка пересѣченія C обеихъ перпен.—въ будетъ центромъ, а CA радиусомъ круга, въ которомъ сегментъ AFB есть искомый, потому что AD — касательная и всѣ въ AFB вписанные углы, опирающіеся на концы линіи AB, равны углу $BAD = x$ (§ 61).

§ 84. Найти отношеніе между двумя данными прямыми AB и CD.



Будемъ накладывать меньшую линію CD на большую AB столько разъ, сколько она умѣстится; положимъ что она отложилась 2 раза, и за тѣмъ получилъ еще остатокъ EB. Этотъ остатокъ будемъ накладывать на меньшую линію CD столько разъ, сколько это будетъ возможно, напр. одинъ разъ съ остаткомъ FD. Наложимъ потомъ второй остатокъ FD на первый EB, напр. одинъ разъ съ остаткомъ GB. Если наконецъ положимъ, что GB умѣстится на FD ровно 2 раза, тогда GB будетъ общемою мѣрою между

данными линиями AB и CD, отношеніе коихъ теперь легко можно опредѣлить.

$$\begin{aligned} FD &= 2 GB \\ EB &= FD + GB = 3 GB \\ CD &= EB + FC = 5 GB \\ AB &= 2 CD + EB = 13 GB. \end{aligned}$$

Такъ какъ GB содержится въ AB 13 разъ, а въ CD 5 разъ, то получимъ:

$$AB : CD = 13 : 5 \text{ или } AB = 13/5 CD, CD = 5/13 AB.$$

Здѣсь мы разсматривали случай, когда двѣ данныя линіи имѣютъ общую мѣру и потому называются соизмѣримыми. Но могутъ быть линіи, при которыхъ, сколько бы мы ни продолжали наложеніе послѣдовательныхъ остатковъ другъ на друга, никогда не получимъ такого остатка, который бы уложился въ предшествующемъ цѣлое число разъ. Такія линіи называются несоизмѣримыми, и отношеніе между ними не можетъ быть выражено ни цѣлымъ числомъ, ни дробью, а есть величина несоизмѣримая съ единицею. Но такъ какъ остатки будутъ становиться все менѣе и менѣе, то при достаточномъ продолженіи вышеизложеннаго приѣма мы можемъ съ незначительною погрѣшностію отбросить послѣдній остатокъ и предшествующій ему принять за общую мѣру. Такимъ образомъ получимъ приближенное отношеніе, и оно тѣмъ точнѣе, чѣмъ дальше будетъ продолженъ описанный приѣмъ.

IV. Объ отношеніяхъ прямолинейныхъ фигуръ.

§ 85. 1) Подъ площадью какой нибудь фигуры разумѣется часть плоскости, ограниченная сторонами фигуры.

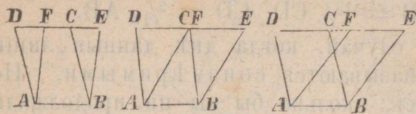
2) Фигуры равновелики или равномѣрны, если онѣ имѣютъ равныя площади, независимо отъ ихъ вида, такъ что напр. тре—къ можетъ быть равновеликъ четырехугольнику.

3) Въ тре—кѣ каждую сторону можно принять за его основаніе. Перпендикуляръ, опущенный изъ противолежащей вершины на основаніе или его продолженіе, называется высотой тре—ка.

Въ параллелограмѣ перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь его стороны на противолежащую, называютъ высотой, а обѣ стороны, перпендикулярныя къ высотѣ, принимаютъ за основанія.

Въ трапеціяхъ параллельныя стороны называются основаніями, а перпендикуляръ, опущенный изъ одного основанія на другое — высотой трапеціи.

§ 86. Параллелограммы $ABCD$ и $ABEF$, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

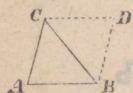


Оба параллелограмма могутъ быть наложены другъ на друга такъ, что нижнія основанія совпадутъ, а верхнія составятъ одну прямую, при чемъ они могутъ принять три различныя положенія. Во всякомъ случаѣ $AD = BC$, $AF = BE$ (§ 37) и $\angle DAF = \angle CBE$ (§ 12), а потому $\triangle ADF \cong \triangle BCE$, слѣд.

$$ABCD = ABED - \triangle BCE = ABED - \triangle ADF = ABEF.$$

Слѣд. Параллелограммъ равновеликъ прямо—нику, имѣющему съ нимъ то же основаніе и ту же высоту.

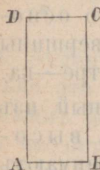
§ 87. Всякій тре—никъ ABC есть половина параллелограмма, имѣющаго съ нимъ то же основаніе и ту же высоту.



Проведемъ изъ B и C прямыя $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$, тогда получимъ парал—мъ AD , имѣющій одинаковыя съ тре—комъ основаніе и высоту. Такъ какъ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (§ 21), то $\triangle ABC = \frac{1}{2} AD$.

Слѣдствіе. Треугольники, имѣющіе равныя основанія и высоты, равновелики.

§ 88. Два прямо—ника $ABCD$ и $abcd$, имѣющіе равныя основанія AB и ab , относятся между собою какъ и къ высоты AD и ad .



Если высоты AD и ad соизмѣримы, и ихъ общая мѣра содержится m разъ въ AD , и n разъ въ ad , тогда получимъ $AD : ad = m : n$. Представимъ себѣ, что чрезъ всѣ точки дѣленія, образовавшіяся отъ наложенія общей мѣры на высотахъ AD и ad , будутъ проведены линіи, параллельныя основанію, тогда $ABCD$ раздѣлится на m , а $abcd$ на n равныхъ прямоугольниковъ (§ 86), такъ

что $ABCD : abcd = m : n$. Изъ обѣихъ пропорцій слѣдуетъ, что $ABCD : abcd = AD : ad$.

Если высоты AD и ad несоизмѣримы, то всё-таки эта пропорція будетъ справедлива. Предположимъ, что

$$ABCD : abcd = AD : af,$$

гдѣ $af > ad$, и раздѣлимъ высоту AD на столько равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была меньше df . Если части эти станемъ откладывать по af , начиная отъ точки a , то одна точка дѣленія должна упасть между d и f . Проведя чрезъ e прямую $eg \parallel ab$, получимъ

$$ABCD : abge = AD : ae,$$

потому что высоты AD и ae соизмѣримы. Изъ обѣихъ пропорцій слѣдуетъ, что

$$abcd : abge = af : ae.$$

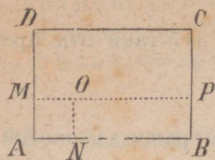
Но это невозможно, потому что $abcd < abge$, а $af > ae$. Равнымъ образомъ четвертый членъ пропорціи не можетъ быть меньше ad , а потому пропорція $ABCD : abcd = AD : ad$ всегда должна быть справедлива.

Слѣдствіе. Два прямоугольника, имѣющіе равныя высоты, относятся между собою какъ ихъ основанія, такъ какъ каждая изъ сторонъ прямо—ка можетъ быть принята за основаніе и за высоту.

§ 89. Измѣрить какую нибудь фигуру, значитъ опредѣлить, сколько разъ въ площади ея заключается другая извѣстная площадь, принятая за единицу мѣры. За эту единицу принимають квадратъ, котораго сторона есть какая нибудь линейная мѣра, напр. футъ, въ какомъ случаѣ квадратъ называется квадратнымъ футомъ.

Измѣреніе площади производится не чрезъ непосредственное наложеніе квадрата, а съ помощію измѣренія линіи, отъ которыхъ зависитъ величина площадей. Въ вычисленіе площади вмѣсто линіи входятъ числа, такъ что подъ произведеніемъ двухъ линій нужно подразумѣвать произведеніе чиселъ, которыя показываютъ величину этихъ линій, выраженныхъ въ однихъ и тѣхъ же единицахъ длины.

§ 90. Площадь прямоугольника AC равняется произведенію его основанія на высоту, т. е., если какая нибудь линейная мѣра заключается въ основаніи m разъ, а въ высотѣ n разъ, то соотвѣтствующая квадратная мѣра будетъ заключаться въ прямоугольникѣ mn разъ.



Положимъ, что линейная мѣра заключается m разъ въ AB , и n разъ въ AD , гдѣ m и n могутъ быть цѣлыя, дробныя или ирраціональныя числа. Если сдѣлаемъ AM и AN равными линейной мѣрѣ и проведемъ $MP \parallel AB$, и $NO \parallel AM$, то MN будетъ квадратъ, котораго сторона равна единицѣ. Такъ какъ (§ 88)

$$AC = n \cdot AP \text{ и } AP = m \cdot MN, \text{ то}$$

$$AC = n \cdot m \cdot MN \text{ или } \frac{AC}{MN} = mn.$$

Это значить, что число квадратныхъ единицъ, заключающихся въ $ABCD$, равняется произведенію основанія на высоту. Если напр. $AB = 5$, $AD = 3$ ф., то $ABCD = 15$ квадратнымъ футамъ.

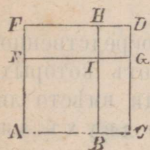
§ 91. Слѣдствія. 1) Площади прямо—ковъ относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

2) Площадь квадрата равна второй степени числа, выражающаго длину его стороны.

3) Площадь всякаго параллелограмма равна произведенію его основанія на высоту (§ 86, слѣд.)

4) Площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту (§ 87).

5) Тре—ники, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ высоты, а имѣющіе равныя высоты, какъ ихъ основанія.



6) Квадратъ $ACDE$, построенный на суммѣ двухъ линій $AB = a$ и $BC = b$, равенъ суммѣ квадратовъ AI и DI , построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, сложенной съ двойнымъ прямоугольникомъ BC , составленнымъ изъ тѣхъ же линій; соотвѣтственно алгебраическому выраженію

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

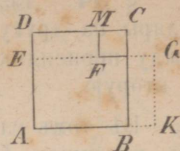
7) Квадратъ $ABIF$, построенный на разности двухъ линій $AC = a$ и $BC = b$, равенъ суммѣ квадратовъ AD и DI , построенныхъ на каждой изъ данныхъ линій, безъ двойнаго прямоугольника BD , составленнаго изъ тѣхъ же линій; соотвѣтственно выраженію

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

8) Прямоугольникъ AG , основаніе котораго (AK) есть

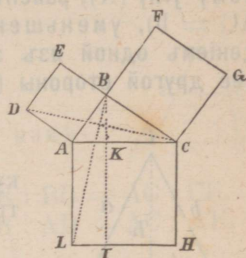
сумма $(AB + BK)$, а высота (AE) разность $(AD - DE = AB - BK)$ двухъ данныхъ линій, равенъ разности квадратовъ $(AC - FC)$, построенныхъ на этихъ линіяхъ $(AB = a, BK = b)$, соответственно предложенію

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$



§ 92. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ, т. е. $AN = AE + CF$. (Пифагоръ).

Если проведемъ изъ вершины прямого угла B прямую $BI \perp AC$, потомъ проведемъ DC и BL , тогда $\triangle DAC = \frac{1}{2} AE$ и $\triangle BAL = \frac{1}{2} AI$ (§ 87). Такъ какъ $\angle DAC = \angle BAL$, $AD = AB$, $AC = AL$, то $\triangle DAC \cong \triangle BAL$, т. е. $\frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} AI$, слѣд. $AE = AI$. Такимъ же образомъ можно доказать, что $CF = KN$, слѣд. $AI + KN = AN = AE + CF$ или $AC^2 = AB^2 + BC^2$.



§ 93. Слѣд. 1) Квадратъ одного катета равенъ квадрату гипотенузы безъ квадрата другого катета.

Означая гипотенузу чрезъ a , и катеты чрезъ b и c , имѣемъ

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad b^2 = a^2 - c^2, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

2) Квадратъ гипотенузы относится къ квадрату одного катета, какъ гипотенуза къ своему отрѣзку, прилежащему къ этому катету.

Такъ какъ (§ 88) $AN : AI = AC : AK$, и $AI = AE$, то и $AN : AE = AC : AK$.

3) Квадраты катетовъ относятся какъ прилежащія къ нимъ отрѣзки гипотенузы.

Такъ какъ $AI : HK = AK : CK$, то и $AE : CF = AK : CK$.

4) Квадратъ, построенный на діагонали другого квадрата, вдвое болѣе послѣдняго.

5) Діагональ квадрата несоизмѣрима со стороною его.

Пусть a будетъ стороною, d діагональю квадрата, то

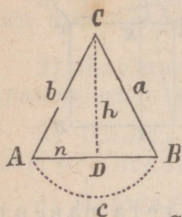
$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \text{ и потому } \frac{d^2}{a^2} = 2 \text{ или } \frac{d}{a} = \sqrt{2}, \text{ слѣд.}$$

отношеніе между d и a ирраціональное.

§ 94. Если из концов прямой линии опустим перпендикуляры на другую линию, то часть второй линии, заключающаяся между перпендикулярами, называется проекцією первой линии на вторую.

Въ томъ случаѣ, когда конецъ первой линіи лежитъ на второй, проекціею будетъ разстояніе этого конца отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ другого конца.

§ 95. Въ треугольникѣ ABC квадратъ какой либо стороны ($BC = a$), смотря по тому, противолежитъ ли она острому или тупому углу (A), равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ ($AB = c$, $AC = b$), уменьшенной или увеличенной удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ (AB) и проекціи ($AD = n$) на нее другой стороны (AC), т. е. $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cn$.

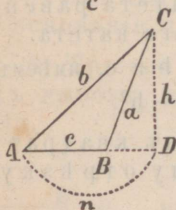


1) Если уголъ A острый, то перпендикуляръ $CD = h$ можетъ упасть внутри или внѣ тре—ка, такъ что

на первой фигурѣ $BD = c - n$

на второй $BD = n - c$, слѣд.

въ обоихъ случаяхъ $BD^2 = c^2 - 2cn + n^2$.



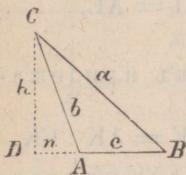
Такъ какъ (§ 93, 1)

$$a^2 = h^2 + BD^2 = h^2 + c^2 - 2cn + n^2,$$

но $h^2 = b^2 - n^2$, то

$$a^2 = b^2 - n^2 + c^2 - 2cn + n^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn.$$



2) Если A тупой, какъ на третьей фигурѣ, то CD упадетъ внѣ тре—ка, такъ что

$$BD = c + n, \text{ слѣд. } BD^2 = c^2 + 2cn + n^2.$$

$$a^2 = h^2 + BD^2 = h^2 + c^2 + 2cn + n^2,$$

но $h^2 = b^2 - n^2$, слѣд.

$$a^2 = b^2 - n^2 + c^2 + 2cn + n^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cn.$$

§ 96. Если въ тре—кѣ ABE соединимъ вершину B съ серединою C противолежащей стороны линіею BC, то сумма квадратовъ двухъ другихъ сторонъ равна удвоенному квадрату проведенной линіи и удвоенному квадрату половины раздѣленной стороны.

Проведя $BD \perp AE$ получимъ (§ 95) изъ тре—ковъ BAC и BEC

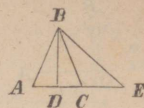
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \cdot DC$$

$$BE^2 = CE^2 + BC^2 + 2 CE \cdot DC,$$

$$\text{слѣд. } AB^2 + BE^2 = AC^2 + CE^2 + 2 BC^2;$$

такъ какъ $AC = CE$, то

$$AB^2 + BE^2 = 2 BC^2 + 2 AC^2.$$



§ 97. Линія DE , проведенная въ тре—кѣ ABC параллельно одной сторонѣ BC , дѣлитъ другія стороны на части пропорціональныя.

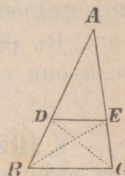
Если проведемъ CD и BE , то (§ 91, 5)

$$\triangle ADE : \triangle BDE = AD : BD$$

$$\triangle ADE : \triangle CDE = AE : CE$$

$$\triangle BDE = \triangle CDE \text{ (§ 87), слѣд.}$$

$$AD : BD = AE : CE.$$



Выведенную пропорцію можно измѣнить такъ:

$$AD + BD : BD = AE + CE : CE, \text{ т. е. } AB : BD = AC : CE.$$

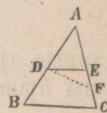
$$AD + BD : AD = AE + CE : AE, \text{ т. е. } AB : AD = AC : AE.$$

§ 98. Линія DE , дѣляющая двѣ стороны тре—ника ABC на пропорціональныя части, параллельна третьей сторонѣ BC .

По нашему условію $AB : DB = AC : EC$. Положимъ, что DE не $\parallel BC$, тогда изъ точки D можно провести $DF \parallel BC$, такъ что (§ 97) будетъ

$$AB : DB = AC : FC.$$

По причинѣ равенства первыхъ трехъ членовъ обѣихъ пропорціи, должно бы быть $EC = FC$, что невозможно, слѣд. $DE \parallel BC$.



§ 99. Двѣ прямыя AB и CD дѣлятся нѣсколькими параллельными AC , EF , GH . . . на пропорціональныя части.

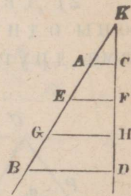
Если AB и CD пересѣкнутся въ K , то (§ 97)

$$KE : KF = AE : CF,$$

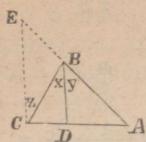
$$KE : KF = EG : FH, \text{ слѣд.}$$

$$AE : CF = EG : FH.$$

Подобнымъ образомъ $EG : FH = GB : HD$.



§ 100. Прямая BD , дѣлящая въ тре—кѣ ABC уголъ B пополамъ, дѣлитъ противоположающую сторону AC на части, пропорціональныя прилежащимъ сторонамъ тре—ка.



Если проведем $CE \parallel BD$ и продолжим AB до пересечения съ CE , то (§ 97) будетъ

$$AD : DC = AB : BE.$$

Но такъ какъ $\angle z = x = y = E$ (§ 10), то (§ 22, 2),

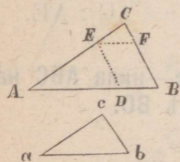
$$BE = BC, \text{ слѣд. } AD : DC = AB : BC.$$

§ 101. Двѣ прямолинейныя фигуры подобны, если углы одного, порознь взятые, равны угламъ другого, и одинаковымъ образомъ расположены, а соответствующія стороны пропорціональны.

Двѣ равныя фигуры всегда и равновелики и подобны, но двѣ подобныя фигуры могутъ быть и не равновелики.

Въ равныхъ кругахъ дуги, секторы и сегменты подобны, если они соответствуютъ равнымъ центральнымъ угламъ.

§ 102. (I.) Два треугольника подобны, если они имѣютъ по два равные угла.



Если $\angle A = a$, $\angle B = b$, то $\triangle ABC \sim abc$.

Уголъ $C = c$ (§ 16, 2). Отложимъ $AD = ab$ и проведемъ $DE \parallel BC$, то $AD : AB = AE : AC$ (§ 97), или, такъ какъ $\triangle ADE \cong abc$ (§ 21),
 $ab : AB = ac : AC$.

Проведя изъ E прямую $EF \parallel AB$, получимъ $AE : AC = BF : BC$, и такъ какъ (§ 37)

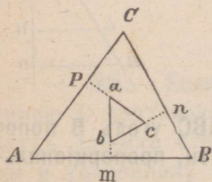
$$BF = DE = bc, \text{ то } ac : AC = bc : BC$$

$$\text{слѣд. } ab : AB = ac : AC = bc : BC.$$

Данные треугольники подобны, потому что углы ихъ равны и стороны пропорціональны.

§ 103. Слѣдствія. 1) Два тре—ка подобны, если ихъ стороны попарно параллельны, потому что въ такомъ случаѣ ихъ углы равны (§ 12.)

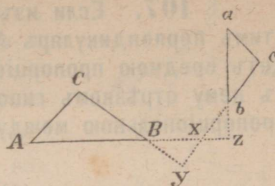
2) Два тре—ника ABC и abc подобны, если стороны одного попарно перпендикулярны къ сторонамъ другого.



Пусть $ab \perp AB$, $ac \perp AC$, $bc \perp BC$.

Если въ первой фигурѣ продолжимъ стороны треугольника abc , тогда въ четырехугольникѣ $Amar$ сумма угловъ равна $4d$, и такъ какъ $\angle p + m = 2d$, то и $\angle A + \text{рам} = 2d$, но такъ какъ и $\angle bac + \text{рам} = 2d$, то $\angle A = bac$. Точно также можно доказать, что $\angle B = abc$, слѣд. $\triangle ABC \sim abc$.

Если во второй фигурѣ продолжаются стороны, то $\triangle Bxy \sim bxz$, слѣд. $\angle yBx = \angle zbx$, и потому $\angle ABC = \angle abc$. Подобнымъ образомъ $\angle A = \angle a$, откуда слѣдуетъ, что $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

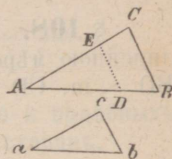


3) Параллельныя или взаимно перпендикулярныя стороны двухъ подобныхъ треугольнѣ — соотвѣтствующія.

§ 104. (II.) Два тре—на подобны, когда имѣютъ по равному углу, заключающемуся между пропорціональными сторонами.

Если $\angle A = \angle a$, $AB : ab = AC : ac$, то $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Отложимъ $AD = ab$, $AE = ac$, то $AB : AD = AC : AE$, слѣд. $DE \parallel BC$ (§ 98) и $\angle B = \angle ADE$, а потому (§ 102) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Такъ какъ $\triangle ADE \cong \triangle abc$ (§ 20), то и $\triangle ABC \sim \triangle abc$,



§ 105. (III.) Два тре—на подобны, если ихъ стороны пропорціональны. (фиг. § 104.)

Если $AB : ab = AC : ac = BC : bc$, то $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Отложимъ $AD = ab$, $AE = ac$, тогда будемъ имѣть $AB : AD = AC : AE$, слѣд. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (§ 104), а потому

$AB : AD = BC : DE$. Но такъ какъ

$AB : ab = BC : bc$, и $AD = ab$, то и $DE = bc$,

слѣд. $\triangle ADE \cong \triangle abc$ (§ 27), а посему и $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

§ 106. Площадь трапеціи ABCD равняется произведенію высоты EF на полусумму параллельныхъ сторонъ AB и CD или на линію GK, соединяющую середины непараллельныхъ сторонъ.

Проведемъ діагональ BD, тогда

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot EF$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} CD \cdot EF,$$

$$ABCD = \frac{1}{2} EF (AB + CD).$$

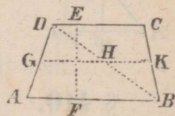
Если изъ середины G стороны AD проведена будетъ прямая $GK \parallel AB$, то и сторона BC раздѣлится пополамъ (§ 99). Такъ какъ

$$\triangle ABD \sim \triangle GHD, \triangle CBD \sim \triangle KHB, \text{ то}$$

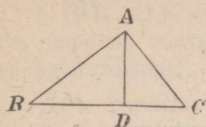
$$GH = \frac{1}{2} AB, KH = \frac{1}{2} CD, \text{ слѣд.}$$

$$GK = \frac{1}{2} (AB + CD) \text{ и посему}$$

$$ABCD = \frac{1}{2} EF (AB + CD) = EF \cdot GK.$$



§ 107. Если изъ вершины прямого угла тре—ника ABC опустим перпендикуляр AD на гипотенузу, то 1) каждый катетъ будетъ среднею пропорціоальною между гипотенузою и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ гипотенузы, 2) перпендикуляръ будетъ среднею пропорціоальною между отрѣзками гипотенузы.



Тре—къ $ABC \sim DBA$, потому что $\sphericalangle B$ общій, $\sphericalangle BAC = d = BDA$; точно также $\triangle ABC \sim DAC$, слѣд. и $\triangle DBA \sim DAC$.

По подобію этихъ тре—ковъ

$$1) BC : AB = AB : BD \text{ и } BC : AC = AC : CD,$$

$$2) BD : AD = AD : CD.$$

§ 108. Слѣд. Если посредствомъ измѣренія какою нибудь линейною мѣрою найдено будетъ, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = m$, $CD = n$, то получимъ

$$a : b = b : n, \text{ слѣд. } b^2 = an$$

$$a : c = c : m, \text{ слѣд. } c^2 = am, \text{ посему}$$

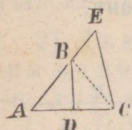
$$b^2 + c^2 = a(m + n) = a^2, \text{ слѣд.}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Такимъ образомъ зная двѣ стороны прямоугольнаго тре—ка можно опредѣлить третью сторону.

Прямоугольные тре—ки, которыхъ стороны измѣряются цѣлыми числами линейной мѣры, называются Пифагоровыми. Таковы числа 3, 4, 5 или 5, 12, 13 или 8, 15, 17 и т. д.

§ 109. Площади двухъ тре—ковъ ABD и AEC, имѣющія по равному углу A, относятся какъ произведенія ихъ сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ.



Если проведемъ BC, то (§ 91. 5) будетъ

$$\triangle ABC : \triangle ABD = AC : AD$$

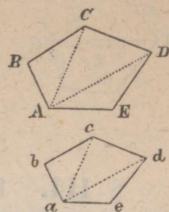
$$\triangle AEC : \triangle ABC = AE : AB, \text{ слѣд.}$$

$$\triangle AEC : \triangle ABD = AC : AE : AD : AB.$$

§ 110. 1) Два многоугольника подобны, если они состоятъ изъ равнаго числа подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ.

2) Если два много—ника подобны, то ихъ можно раздѣлить на равное число подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ треугольниковъ.

1) Пусть $\triangle ABC \sim abc$, $\triangle ACD \sim acd$, $\triangle ADE \sim ade$. Из этого условия слѣдуетъ, что углы обоихъ много—ковъ попарно равны, и такъ какъ $AB : ab = BC : bc (= CA : ca) = CD : cd (= DA : da) = DE : de \dots$, то $ABCDE \sim abcde$.



2) Если $ABCDE \sim abcde$, то проводя изъ угловъ A и a диагонали, мы раздѣлимъ оба мно—ка на равное число тре—ковъ. Изъ подобія мно—ковъ слѣдуетъ, что $\angle B = b$ и $AB : ab = BC : bc$, слѣд. $\triangle ABC \sim abc$. Изъ подобія этихъ тре—ковъ слѣдуетъ

$\angle BCA = bca$ и $BC : bc = CA : ca$, и такъ какъ

$\angle BCD = bcd$ и $BC : bc = CD : cd$, то и

$\angle ACD = acd$ и $CA : ca = CD : cd$,

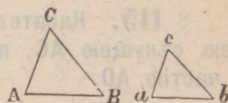
слѣд. $\triangle ACD \sim acd$. Подобнымъ образомъ $\triangle ADE \sim ade$.

§ 111. Площади подобныхъ тре—ковъ, а также и подобныхъ мно—ковъ, относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.

1) Если $\angle A = a$, то (§ 109)

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB \cdot AC}{ab \cdot ac}$$

$$\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab}, \text{ то } \frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB \cdot AB}{ab \cdot ab} = \frac{AB^2}{ab^2}$$



2) Если (Фиг. § 110) $ABCDE \sim abcde$, то изъ подобія отдѣльныхъ тре—ковъ выходитъ, что

$$ABC : abc = AB^2 : ab^2$$

$$ACD : acd = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$$

$$ADE : ade = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2.$$

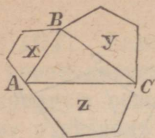
Сложивъ всѣ эти тре—ки, получимъ

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$$

§ 112. Периметры подобныхъ много—ковъ относятся какъ двѣ сходственные стороны (фиг. § 110).

Такъ какъ $AB : ab = BC : bc = CD : cd \dots$, то и $(AB + BC + CD \dots) : (ab + bc + cd \dots) = AB : ab$.

§ 113. Если сходственные стороны подобныхъ многоугольниковъ x , y , z , равны сторонамъ прямоугольнаго тре—ха ABC , то мно—къ z , построенный на гипотенузѣ, равенъ суммѣ двухъ прочихъ мно—ковъ x , y .



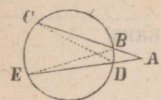
По § 111 $\frac{x}{z} = \frac{AB^2}{AC^2}$, $\frac{y}{z} = \frac{BC^2}{AC^2}$

Сложивъ эти два равенства, получимъ

$$\frac{x+y}{z} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}.$$

Но $AB^2 + BC^2 = AC^2$, слѣд. $x + y = z$.

§ 114. Если двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ А, будутъ пересѣкаться кругомъ въ четырехъ точкахъ В, С, D, Е, то разстоянія точки А отъ этихъ точекъ пересѣченія обратно пропорціональны, т. е.



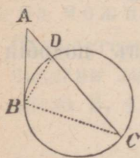
$$AB : AD = AE : AC.$$



Точка А можетъ быть внѣ или внутри круга. Проведемъ BE и CD, тогда $\triangle ABE \sim \triangle ADC$, потому что $\angle A = \angle A$, $\angle E = \angle C$ (§ 60, 2); слѣдовательно

$$AB : AD = AE : AC.$$

§ 115. Касательная АВ есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею АС, проведенною изъ той же точки А, и внѣшнюю ея частію AD.



Если проведемъ BC и BD, тогда $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, потому что $\angle A = \angle A$ и $\angle ABD = \angle C$ (§ 60 и § 61); слѣд. $AC : AB = AB : AD$.

§ 116. Площадь тре—ника ABC равна его периметру, умноженному на половину радіуса вписаннаго круга (фиг. § 78).

Тре—ки AGB, AGC, BGC имѣютъ общую высоту радіусъ (r) круга вписаннаго, слѣд.

$$ABC = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} = \frac{1}{2} r (AB + AC + BC).$$

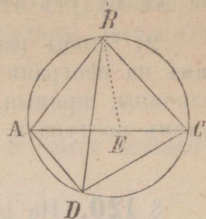
§ 117. Въ вписанномъ четырехугольникѣ ABCD произведение діагоналей равно суммѣ произведеній противоположащихъ сторонъ, т. е.

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Возьмемъ $\angle CBE = \angle ABD$. Такъ какъ и $\angle ADB = \angle BCA$ (§ 60, 2), то $\triangle ABD \sim \triangle BCE$, откуда

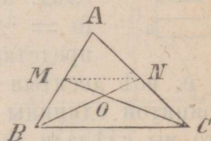
$AD : CE = BD : EC$ или $AD \cdot EC = CE \cdot BD$.
 Далѣ $\angle ABE = \angle DBC$, $\angle BAC = \angle BDC$, слѣд.
 $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, откуда
 $AB : BD = AE : CD$ или $AB \cdot CD = AE \cdot BD$.
 Сложивъ оба равенства, получимъ
 $AD \cdot EC + AB \cdot CD = (CE + AE) BD = AC \cdot BD$.

Пифагорова теорема (§ 92) составляетъ только частный случай выведенной нами теоремы. Положимъ что $ABCD$ прямоугольникъ, тогда $AB = CD$, $AD = BC$, $AC = BD$ и тре—къ ABD прямоуголенъ при A , слѣд. полученное нами выше уравненіе приметъ видъ: $AD^2 + AB^2 = BD^2$.



§ 118. Три прямая, проведенныя изъ вершинъ угловъ тре—ка (ABC) къ срединѣ противоположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ (O), удаленной отъ каждой вершины на $\frac{2}{3}$ линіи, соответствующей вершинѣ.

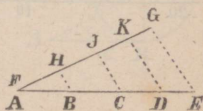
Пусть будутъ BN и CM двѣ такимъ образомъ проведенныя линіи, и O точка ихъ пересѣченія, то линія $MN \parallel BC$ (§ 98), слѣд. (§ 102) $\triangle BOC \sim \triangle NOM$, $\triangle ABC \sim \triangle AMN$, такъ что $BO = 2 NO$, и $CO = 2 MO$, потому что $AB = 2 AM$. Изъ сего видно, что прямая, проведенная изъ двухъ вершинъ тре—ка ABC къ срединѣ противоположныхъ сторонъ пересѣкаются въ точкѣ, удаленной отъ вершины вдвое дальше какъ отъ середины стороны. Такъ какъ это предложеніе остается справедливымъ и тогда, если изъ вершины A и изъ вершины B проведутся прямая къ срединѣ сторонъ BC и AC , то и прямая, проведенная изъ A должна пройти чрезъ точку O , опредѣленную прямыми BN и CM . (Эта точка называется въ механикѣ центромъ тяжести тре—ка.)



В. Задачи.

§ 119. Раздѣлитъ прямую AE на части, которыя относились бы какъ данныя линіи.

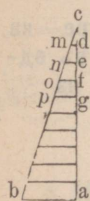
1) Проведемъ чрезъ конецъ A линіи AE неограниченную прямую FG , отложимъ на ней данныя линіи FH , HI , IK , KG , соединимъ точки G и E , потомъ, изъ точекъ K ,



I, H проведемъ линіи, параллельныя прямой GE, тогда части прямой AE будутъ относиться, какъ данныя линіи (§ 99).

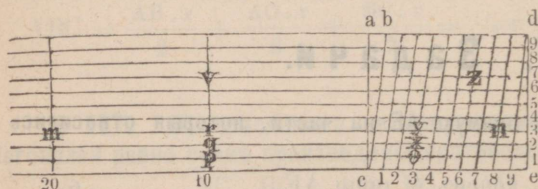
2) Чтобы раздѣлить AE напр. на 4 равныя части, отложимъ на неограниченную прямую FG четыре равныя, произвольной величины, прямыя, соединимъ конецъ четвертой прямой съ E, и будемъ поступать какъ въ первомъ случаѣ.

§ 120. На раздѣленіи прямыхъ линій на равныя части основывается устройство масштабъ или размѣровъ, служащихъ къ измѣренію прямыхъ и точнѣйшему опредѣленію отношеній между ними. Ихъ устрояють такъ, что части данной къ дѣленію прямой распределяются на нѣсколько параллельныхъ между собою прямыхъ. Возьмемъ напр. ab за единицу мѣры и



изъ ея конца возставимъ неопредѣленную $ac \perp ab$, и отложимъ на ней отъ точки a десять равныхъ частей, то, проведя прямую bc , и изъ точекъ дѣленія параллельныя $dm, en \dots$ къ ab , получимъ $\triangle cdm \sim cab$, и посему $cd : ca = dm : ab$, то есть, $1 : 10 = dm : ab$, слѣд. $dm = \frac{1}{10} ab$. Подобнымъ образомъ $en = \frac{2}{10} ab$, $fo = \frac{3}{10} ab$ и т. д., такъ что параллельныя прямыя представляютъ отъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{9}{10}$ частей данной прямой ab . т. е. всѣ десятия части этой прямой. Чтобы найти сотыя части принятой единицы ab , нужно только съ линіею dm сдѣлать то же, что мы сдѣлали съ ab .

Такимъ образомъ производится построение масштаба десятичнаго, который болѣе всѣхъ употребляется. На обоихъ сторонахъ прямоугольной линейки откладываютъ 10 разъ принятую за единицу мѣры линію ab , такъ что $ad = ce = 10 ab$; потомъ отложена на тѣхъ же сторонахъ нѣсколько разъ линія ad , такъ что длина между c и числомъ 10, и между 10 и 20 и т. д. равна $10 ab$. Но чтобы прямая линія опредѣлить точно въ десятихъ частяхъ

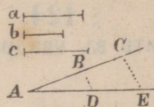


мѣры ab , проводятся въ равныхъ разстояніяхъ девять прямыхъ, параллельныхъ сторонамъ линейки, и сверхъ того десять поперечныхъ линій, обозначенныхъ чрезъ c и 1, 2, 3... (напр. $cb, 9d$). Изъ сего ясно что напр. длина $po = 13\frac{1}{10} ab$, $qx = 13\frac{3}{10} ab$,

$гу = 13^{3/10} ab$, $вз = 16^{7/10} ab$. — Если $ад$ принимается за единицу мѣры, то этимъ масштабомъ можно опредѣлить прямая съ точностію въ сотыхъ частяхъ принятой единицы, напримѣръ $mn = 2,83 ad$, $вз = 1,67 ad$.

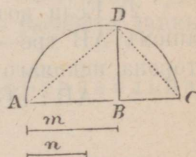
§ 121. Къ тремъ даннымъ линіямъ a , b , c найти четвертую пропорціональную.

На сторонахъ произвольнаго угла A отложимъ $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, проведемъ BD и изъ C линію $CE \parallel BD$, тогда DE будетъ искомая 4ая пропорціональная, потому что (§ 97) $AB : BC = AD : DE$ или $a : b = c : DE$.

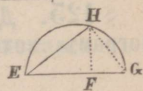


§ 122. Найти среднюю пропорціональную между данными линіями m и n .

1) На неограниченной прямой откладываемъ $AB = m$, $BC = n$, и описываемъ на AC , какъ на діаметръ, полуокружность; тогда перпендикуляръ BD , возставленный изъ точки B къ AC и продолженный до окружности, искомая пропорціональная, потому что (§ 107, 2) $AB : BD = BD : BC$ или $m : BD = BD : n$.

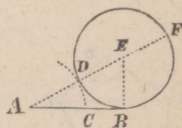


2) Можно также отложить на большей линіи $EG = m$ меньшую $EF = n$, потомъ на EG описать полуокружность и провести изъ F линію $FH \perp EG$, тогда хорда EH будетъ искомая пропорціональная, потому что (§ 107, 1) $EG : EH = EH : EF$ или $m : EH = EH : n$.



§ 123. Раздѣлить данную линію AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т. е. на такія двѣ части, что бы большая была среднею пропорціональною между всею линією и ея меньшею частью. (Sectio aurea.)

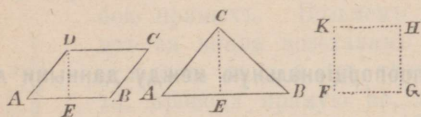
Возставимъ на AB въ B перпендикуляръ $BE = \frac{1}{2} AB$, опишемъ изъ E окружность радиусомъ EB , проведемъ чрезъ точки A и E прямую AF и отсѣчемъ отъ AB часть $AC = AD$, тогда C будетъ искомая точка дѣленія. Такъ какъ AB есть касательная къ кругу, то (§ 115)



$$\begin{aligned}
 &AF : AB = AB : AD, \text{ а потому} \\
 &AF - AB : AB = AB - AD : AD \text{ или} \\
 &AF - DF : AB = AB - AC : AC, \text{ т. е.} \\
 &AC : AB = BC : AC \text{ или } AB : AC = AC : BC.
 \end{aligned}$$

Слѣдствіе. Сѣкущая AF въ точкѣ D дѣлится въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Такъ какъ $AB = DF$, то $AF : DF = DF : AD$.

§ 124. Данный параллелограмъ AC , или тре—къ ABC обратить въ квадратъ.

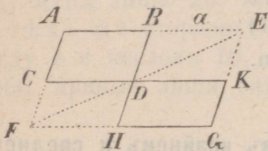


1) Найдѣмъ среднюю пропорціонную FG между основаніемъ AB и высотой DE параллелограмма, тогда квадратъ, построенный на FG будетъ равновеликъ параллелограму AC , потому что $AB : FG = FG : DE$ или $AB \cdot DE = FG^2$.

2) Если возьмемъ среднюю пропорціонную FG между основаніемъ AB тре—ка ABC и половиною высоты CE , то она будетъ сторона искомага квадрата, потому что

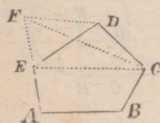
$$AB : FG = FG : \frac{1}{2} CE \text{ или } \frac{1}{2} CE \cdot AB = FG^2.$$

§ 125. Данный параллелограмъ $ABCD$ обратить въ другой параллелограмъ, котораго одна сторона была бы равна данной прямой a .



Если продолжимъ AB такъ, что $BE = a$, и проведемъ чрезъ E и D прямую до пересѣченія ея съ продолженною линіею AC въ точкѣ F , потомъ $EG \parallel AF$, $FG \parallel AE$, и продолжимъ CD и BD , то DG будетъ искомый параллелограмъ. Такъ какъ $\triangle AEF \cong GFE$, $\triangle BDE \cong KED$, $\triangle CDF \cong HFD$, то $ABCD = DHGK$.

§ 126. Данный много—къ $ABCDE$ обратить въ треугольникъ.



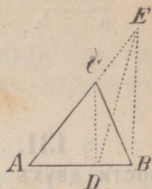
Отрѣжемъ отъ много—ка діагоналю CE тре—къ CDE и проведемъ изъ точки D прямую $DF \parallel CE$ до пересѣченія съ продолженіемъ стороны AE въ точкѣ F . Если проведемъ CF , то $\triangle CDE = CFE$ (§ 87 слѣд.), и прикладывая къ каждому изъ этихъ тре—ковъ фигуру $ABCE$, по-

лучимь $ABCDE = ABCF$. Точно также можно обратить четырехгольникъ $ABCF$ въ тре—къ.

Такъ какъ всякій мно—къ можно обратить въ тре—къ, а всякій тре—къ въ квадратъ, то и всякій мно—къ можно обратить въ квадратъ.

§ 127. Треугольникъ ABC обратить въ тре—къ, котораго одна сторона равна была бы данной прямой AD .

Если продолжимъ AC и проведемъ DC , потомъ $BE \parallel DC$ и DE , то ADE требуемый тре—къ.



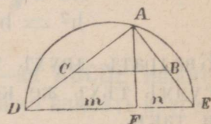
§ 128. Построить квадратъ, равный суммѣ или разности двухъ данныхъ квадратовъ.

Построимъ прямоугольный тре—къ, у котораго въ 1омъ случаѣ оба катета, во 2омъ гипотенуза и одинъ катетъ равнялись бы сторонамъ данныхъ квадратовъ, тогда квадратъ гипотенузы будетъ равенъ суммѣ, а квадратъ другаго катета равенъ разности данныхъ квадратовъ.

Такимъ образомъ можно найти сумму произвольнаго числа квадратовъ или мно—ковъ.

§ 129. Построить квадратъ, который бы относился къ данному квадрату P^2 , какъ линія m къ линіи n .

На прямой линіи возьмемъ $DF = m$, $FE = n$, опишемъ на DE полуокружность, возставимъ изъ точки F перпендикуляръ FA , проведемъ хорды AD и AE , отложимъ на AE или на ея продолженіи линію AB равную сторонѣ P даннаго квадрата, и проведемъ $BC \parallel ED$, тогда AC будетъ сторона искомаго квадрата. — Такъ какъ



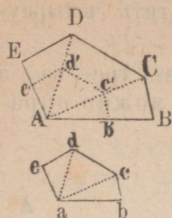
$$AD : AE = AC : AB \text{ или}$$

$$AD^2 : AE^2 = AC^2 : AB^2,$$

$$AD^2 : AE^2 = m : n \text{ (§ 93, 3), то и}$$

$$AC^2 : AB^2 = m : n \text{ или } AC^2 : P^2 = m : n.$$

§ 130. На данной линіи ab построить много—къ, подобный данному много—ку $ABCDE$.



Проведемъ діагонали AC и AD, отложимъ при точкѣ a уголъ $bac = BAC$, и при точкѣ b уголъ $abc = ABC$, тогда $\triangle abc \sim ABC$. Точно также построимъ на ac тре—къ $acd \sim ACD$ и т. д., тогда $abcde \sim ABCDE$ (§ 110, 1).

Можно рѣшить эту задачу и такъ, что отложится на AB часть $Ab' = ab$, потомъ проведутся изъ b' прямая $b'e' \parallel BC$, изъ c' прямая $c'd' \parallel CD$ и т. д., чтобы получить тре—ки $Ab'e'$, $Ac'd'$, $Ad'e'$ подобные тре—камъ ABC, ACD, ADE.

§ 131. Построить фигуру, подобную и равную суммѣ или разности двухъ данныхъ подобныхъ фигуръ.

Построимъ прямоугольный тре—къ, въ которомъ одинъ катетъ равенъ одной сторонѣ одной изъ фигуръ, а другой катетъ или гипотенуза равна соотвѣтственной сторонѣ другой фигуры, то можно (§ 130) построить на гипотенузѣ или на другомъ катетѣ фигуру, которая будетъ подобна каждой изъ данныхъ фигуръ и (§ 113) равна суммѣ или разности ихъ.

§ 132. По даннымъ тремъ сторонамъ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ тре—на ABC найти высоту h и площадь F тре—на. (Фиг. § 95)

Въ § 95 мы нашли, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn, \text{ слѣд.}$$

$$n = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ или } \frac{-b^2 - c^2 + a^2}{2c},$$

$$n^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2 = \left(\frac{-b^2 - c^2 + a^2}{2c} \right)^2.$$

Такъ какъ $h^2 = b^2 - n^2$, то

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

Квадратъ двухъ количествъ, $(2bc)^2$ и $(b^2 + c^2 - a^2)^2$, равняется суммѣ тѣхъ же количествъ, умноженной на ихъ разности (§ 91, 8), и такъ

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}, \text{ или (§ 91, 6 и 7)}$$

$$h^2 = \frac{[(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2]}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} (a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c),$$

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}$$

Такъ какъ $F = \frac{1}{2} ch$, то

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}.$$

Площадь тре—ка равняется четверти квадратнаго корня изъ произведенія периметра на разности, которыя получимъ, вычитая изъ периметра порознь двойное число каждой стороны. (Нап. $b + c - a = a + b + c - 2a$.)

Если $a = 36$, $b = 29$, $c = 25$ футъ, то $h = 28\frac{1}{2}$ футъ, и $F = 360 \square$ футъ,

§ 133. Слѣдствія. 1) Выраженіе для площади тре—ка можно представить короче въ другомъ видѣ, означивъ периметръ тре—ка чрезъ $2s$, т. е.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2s, & \text{слѣд. } b + c - a &= 2(s - a) \\ a + c - b &= 2(s - b), & a + b - c &= 2(s - c), \text{ и потому} \\ F &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

Площадь тре—ка равняется квадратному корню изъ произведенія полупериметра на разности между полупериметромъ и каждой изъ сторонъ тре—ка.

Пусть $a = 10$, $b = 6$, $c = 12$ футъ, то

$$F = \sqrt{14 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2} = \sqrt{896} = 29,93326 \square \text{ футъ.}$$

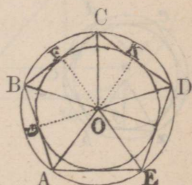
2) Въ равностороннемъ тре—кѣ $a = b = c$, слѣд.

$$F = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

VI. О правильныхъ многоугольникахъ и измѣреніи круга.

§ 134. 1) Около всякаго правильнаго мно—ка $ABCDE$ можно описать кругъ. 2) Во всякій правильный мно—къ можно вписать кругъ.

1) Чрезъ три точки A, B, C опишемъ кругъ, коего центръ будетъ O , проведемъ прямыя $AO, BO, CO \dots$, и опустимъ изъ O на стороны мно—ка перпендикуляры $OF, OK \dots$. Такъ какъ $AB = CD, BF = CF$ (§ 24), $\angle ABF = \angle DCF$, $\angle BFO = \angle CFO$, то четырехугольникъ $ODCF \cong OABF$, слѣд. $OD = OA$ и точка D будетъ лежать на окружности, проходящей чрезъ A, B, C . Точно также можно доказать, что и точка E лежитъ на той же окружности.



2) Всѣ стороны $AB, BC, CD \dots$ какъ равныя хорды, равно удалены отъ центра O (§ 49), потому и кругъ, описанный изъ точки O радіусомъ OF , коснется каждой стороны мно—ка.

Примѣчаніе. Точка o , общій центръ описаннаго и вписаннаго круга, можетъ быть разсматриваема какъ центръ мно—ка.

Всѣ центральные углы $AOB, BOC \dots$ мно—ка равны между собою. Въ правильномъ n —угольникѣ каждый изъ нихъ $= \frac{4}{n} \cdot 90^\circ$.

§ 135. Площадь правильного мно—ка $ABCDE$ равняется половинѣ произведенія изъ его периметра на радіусъ круга вписаннаго (фиг. § 134.)

Площадь каждого изъ тре—ковъ $AOB, BOC \dots$ равна половинѣ произведенія основанія на апоемеу правильного мно—ка, т. е. на радіусъ круга вписаннаго, наприм. $\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot GO$, слѣд. сумма всѣхъ тре—ковъ, т. е.

$$ABCDE = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DE + EA) GO.$$

§ 136. 1) Правильные мно—ки $ABCDEF$ и $abcdef$ одинакового числа сторонъ подобны.

2) Въ двухъ такихъ мно—кахъ периметры относятся какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ,

3) площади относятся какъ квадраты этихъ радіусовъ.



1) Углы такихъ мно—ковъ равны, потому что въ правильномъ n —угольникѣ каждый уголъ $= 2 - \frac{4}{n} d$ (§ 18, 2), пропорціональность же сторонъ слѣдуетъ изъ того, что въ каждомъ мно—кѣ всѣ стороны равны, слѣд. мно—ки подобны (§ 101).

2) Обозначимъ периметры мно—ковъ чрезъ U и u , тогда (§ 112) $U : u = AB : ab$. Пусть AO и ao будутъ радіусы описанныхъ, GO и go радіусы вписанныхъ круговъ, то по равенству угловъ $\triangle AOB \sim aob$ и $\triangle AOG \sim aog$, слѣд.

$$AB : ab = AO : ao = GO : go, \text{ и такъ}$$

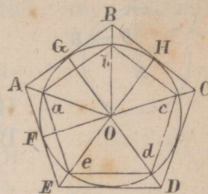
$$U : u = AO : ao = GO : go.$$

3) Площади мно—ковъ относятся (§ 111) какъ $AB^2 : ab^2$, слѣд. и какъ $AO^2 : ao^2$ или $GO^2 : go^2$.

§ 137. 1) По данному правильному мно—ку вписанному описать около круга подобный ему мно—къ,

2) По данному описанному мно—ку найти подобный ему вписанный мно—къ.

1) Пусть $abcde$ будет данный вписанный мно—къ. Если чрезъ середины $F, G, H \dots$ дугъ $ae, ab, bc \dots$ проведемъ касательныя $AE, AB \dots$, то онѣ образуютъ требуемый мно—къ $ABCDE$. — Прямая OG перпендикулярна къ AB и къ ab (§ 48, 1), слѣд. $AB \parallel ab$. Точно также $BC \parallel bc, CD \parallel cd$ и т. д. По этому въ много—кахъ $ABCDE$ и $abcde$ всѣ углы равны. Изъ равенства треугольн. теперь легко доказать, что $AB = BC = CD \dots$. Слѣдовательно мно—къ $ABCDE$ правильный и имѣетъ одинаковое съ $abcde$ число сторонъ, откуда ясно, что $ABCDE \sim abcde$ (§ 136, 1).



2) Если $ABCDE$ будетъ правильный описанный мно—къ, то для полученія подобнаго ему вписаннаго мно—ка стоитъ только провести прямыя $OA, OB, OC \dots$, и соединить точки пересѣченія этихъ линий съ кругомъ. Всѣ углы мно—ка $abcde$ равны, потому что они измѣряются полусуммою равнаго числа равныхъ дугъ, а равенство сторонъ слѣдуетъ изъ равенства треугольн. aob, sob , и т. д.

Можно также получить вписанный мно—къ, соединяя точки касанія F и G, G и H и т. д.

§ 138. По данному радіусу ($AB = r$) круга и сторонѣ ($BC = a$) правильнаго вписаннаго мно—ка вычислить сторону ($EF = A$) подобнаго ему мно—ка описаннаго.

Проведемъ $AG \perp EF$, тогда $BD = \frac{1}{2}a, EG = \frac{1}{2}A$. и

$$AD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Такъ какъ $\triangle EAG \sim BAD$, то

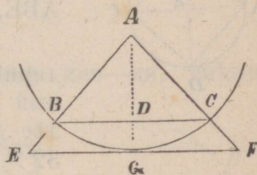
$$AD : BD = AG : EG \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} : \frac{1}{2}a = r : \frac{1}{2}A, \text{ слѣд.}$$

$$A = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

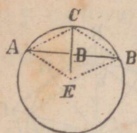
Если $r = 1$, то

$$A = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$



§ 139. По данному радиусу ($AE = r$) круга и сторонъ ($AB = a$) вписаннаго правильнаго мно—ка вычислить сторону ($AC = b$) вписаннаго правильнаго же мно—ка, имѣющаго вдвое болѣе сторонъ.

Положимъ, что дуга AB раздѣлена въ точкѣ C пополамъ, тогда $AD = \frac{1}{2}a$ и линия $AC (= BC)$ будетъ сторона b искомаго мно—ка. Изъ тре—ка ACD имѣемъ



$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + CD^2 \text{ или}$$

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + (r - DE)^2,$$

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2r \cdot DE + DE^2.$$

Но $DE^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$, слѣд. $DE = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Вставивъ эту величину въ выраженіе b^2 , получимъ

$$b^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} + r^2 - \frac{1}{4}a^2,$$

$$b^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}, \text{ слѣд.}$$

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Слѣдствія. 1) Если $r = 1$, то

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

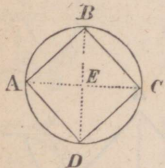
2) Эта формула, рѣшенная относительно a , даетъ

$$a = b\sqrt{4 - b^2}.$$

Посредствомъ этого выраженія по данной сторонѣ вписаннаго мно—ка можно найти сторону вписаннаго же мно—ка, имѣющаго вдвое менѣе сторонъ.

§ 140. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 4, 8, 16 . . . сторонъ.

Проведемъ два перпендикулярные діаметра AC и BD и соединимъ ихъ оконечности, тогда $ABCD$ будетъ требуемый квадратъ, потому что углы $ABC, BCD \dots$ прямые (§ 60, 3), а стороны $AB, BC \dots$ равны по равенству тре—ковъ $ABE, CBE \dots$



Раздѣлимъ пополамъ дуги $AB, BC \dots$ и соединимъ точки дѣленія, тогда получимъ правильный 8—угольникъ. Если будемъ продолжать далѣе дѣленіе, то получимъ мно—ки, имѣющіе 16, 32 . . . сторонъ.

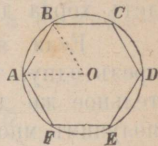
Слѣдствія. 1) Для выраженія стороны квадрата въ единицахъ радиуса круга описаннаго имѣемъ $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 2AE^2$, слѣд. $AB = AE\sqrt{2}$. Если радиусъ $AE = 1$, то $AB = \sqrt{2}$.

2) Если мы вставимъ въ формулу § 139, 1 вмѣсто a величину $\sqrt{2}$, то получимъ сторону 8—угольника вписаннаго, выраженную въ единицахъ радіуса, $= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

3) Вставивъ эту послѣднюю величину вмѣсто a въ ту же самую формулу, получимъ сторону 16—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

§ 141. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 3, 6, 12, сторонъ.

Засѣчемъ на окружности 6 разъ хорду, равную радіусу AO , и соединимъ точки дѣленія $A, B, C, \dots$, тогда получимъ правильный шестиугольникъ $ABCDEF$. Въ равностороннемъ тре—кѣ AOB каждый уголъ равенъ $\frac{2}{3}d$ или $\frac{4}{6}d$, т. е. уголъ AOB измѣряется шестою частью цѣлой окружности, потому и радіусъ $AO = AB$ составляетъ хорду шестой части цѣлой окружности, слѣд. отложится на этой послѣдней 6 разъ. Всѣ углы $ABC, BCD, \dots$ равны, какъ измѣряемые полусуммою равнаго числа равныхъ дугъ.



Ex bibl. univ. Tart.

Если проведемъ линіи AC, CE, EA , то получимъ правильный тре—кѣ. Хорда, соответствующая половинѣ дуги AB , будетъ сторона правильного 12—угольника и т. д.

Слѣдствія. 1) Если принять радіусъ за единицу, то сторона 6—угольника вписаннаго $= 1$.

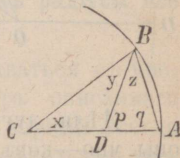
2) Положивъ $b = 1$ въ формулѣ § 139, 2, получимъ сторону прав. тре—ка вписаннаго $= \sqrt{3}$.

3) Положивъ $a = 1$ въ формулѣ § 139, 1, получимъ сторону 12—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

4) Если это послѣднее выраженіе вставимъ опять въ ту же формулу вмѣсто a , то получимъ сторону прав. 24—угольника $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

§ 142. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 5, 10, 20 сторонъ.

Если раздѣлимъ радіусъ CA въ среднемъ и крайнемъ отношеніи въ точкѣ D (§ 123) и возьмемъ хорду AB , равную большому отрѣзку CD , то AB будетъ сторона десятиугольника. Проведемъ CB и BD , тогда имѣемъ



$$\begin{aligned} AC : CD &= CD : AD \text{ или} \\ AC : AB &= AB : AD, \end{aligned}$$

и такъ какъ тре—ки ABD и ACB кромѣ того имѣютъ уголъ q общій, то они подобны (§ 104), слѣд. $\sphericalangle z = x$. Но какъ $\triangle ACB$ есть равнобедренный, то и въ $\triangle ABD$ должно быть $BD = AB = CD$, а посему $\sphericalangle p = q$, $y = x = z$. Внешній уголъ $p = x + y = 2x$, слѣд. и $\sphericalangle q = 2x$. Въ $\triangle ACB$ имѣемъ (§ 15)

$$\begin{aligned} x + y + z + q &= 2d \text{ или} \\ x + x + x + 2x &= 2d, \text{ т. е. } 5x = 2d, \end{aligned}$$

слѣд. $x = \frac{2}{5}d = \frac{4}{10}d$. Изъ этого слѣдуетъ, что соотвѣтствующая углу x дуга AB есть $\frac{1}{10}$ цѣлой окружности и потому и AB будетъ хорда десятой части окружности.

Если въ правильномъ 10—угольникѣ соединимъ вершины чрезъ одну, то получимъ прав. 5—угольникъ. Чрезъ послѣдовательное же дѣленіе дугъ, стягиваемыхъ сторонами 10—угольника, получимъ мно—ки о 20, 40, 80 сторонахъ.

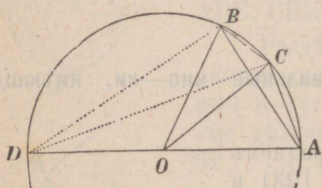
Слѣдствія. 1) Чтобы выразить сторону прав. 10—угольника въ единицахъ радіуса, стоитъ найти большій отрѣзокъ радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. (§ 123.) Положивъ, что большій отрѣзокъ $= x$ и радіусъ $= 1$, получимъ

$$1 : x = x : 1 - x, \quad x^2 + x = 1, \quad \text{слѣд. } x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

2) Если въ формулу § 139, 2 вставимъ вмѣсто b выраженіе $\frac{1}{2}(5 - 1)$, то сторона прав. 5—угольника,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})} &= \sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}. \end{aligned}$$

§ 143. Въ кругѣ вписать правильные мно—ки, имѣющіе 15, 30, 60 . . . сторонъ.



Засѣчемъ на кругѣ отъ точки A по одному и тому же направленію хорду AB, равную сторонѣ прав. 6—угольника, и хорду AC, равную сторонѣ прав. 10—угольника; тогда разность соотвѣтствующихъ дугъ равняется $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ цѣлой окружности, слѣд. хорда BC будетъ сторона прав. 15—угольника.

Дѣля дугу BC послѣдовательно пополамъ мы найдемъ стороны мно—ковъ, имѣющихъ 30, 60 сторонъ.

Слѣд. Для выраженія стороны BC прав. 15-угольника въ единицахъ радіуса ($AO = 1$) имѣемъ (§ 117)

$$AD \cdot BC + AC \cdot BD = AB \cdot CD.$$

Но $AD = 2$, $AB = 1$; (§ 142, 1) $AC = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$; (§ 141, 3) $BD = \sqrt{3}$;
 $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$,

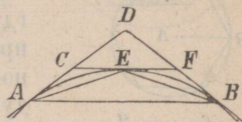
слѣд. $2 BC = CD - AC \cdot BD$,

$$2 BC = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{3},$$

$$BC = \frac{1}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}) = 0,4158234.$$

§ 144. Съ умноженіемъ числа сторонъ периметръ вписаннаго прав. мно—ка увеличивается, а описаннаго уменьшается.

Пусть будетъ AB сторона какого—нибудь вписаннаго прав. мно—ка, а AE и BE стороны вписаннаго мно—ка двойнаго числа сторонъ, тогда $AE + BE > AB$, изъ чего слѣдуетъ, что периметръ втораго вписан. мн—ка болѣе периметра перваго. Далѣе, если AD и BD будетъ половины двухъ сторонъ описан. мно—ка, а CF сторона описан. мн—ка двойнаго числа сторонъ, то $CD + DF > CF$, слѣд. периметръ втораго описаннаго мн—ка менѣе периметра перваго.

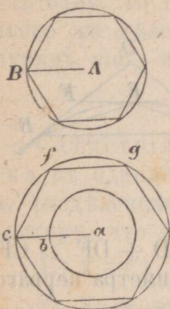


Такъ какъ съ умноженіемъ числа сторонъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ ихъ периметры все болѣе и болѣе приближаются къ окружности, то можно получить такіе два мн—ка, одинъ вписанный, а другой описанный, что разность ихъ периметровъ будетъ менѣе всякой данной величины, какъ бы мала она ни была. Слѣдовательно величина окружности, заключающейся между периметрами соотвѣтствующихъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ, ещё менѣе будетъ различаться отъ периметра одного изъ этихъ мн—ковъ, нежели периметры самыхъ мн—ковъ между собою. Посему всегда возможно будетъ найти такой вписанный или описанный мн—къ, что разность между его периметромъ и окружностью будетъ менѣе всякой данной по произволу величины.

§ 145. Окружности круговъ относятся какъ ихъ радіусы или діаметры.

Периметръ вписаннаго мно—ка будетъ увеличиваться съ увеличеніемъ его сторонъ, между тѣмъ какъ периметръ описаннаго мно—ка въ томъ же случаѣ будетъ уменьшаться, но первый всегда менѣе, а второй болѣе окружности. Чрезъ послѣдовательное уве-

личеніе числа сторонъ одного изъ этихъ мно—ковъ величину его периметра можно такъ приблизить къ величинѣ окружности, что разность между ними можетъ быть сдѣлана менѣ всякой данной величины; потому кругъ можно разсматривать какъ правильный мно—къ съ бесконечно большимъ числомъ бесконечно малыхъ сторонъ. Если мы представимъ два круга какъ два правильные мно—ка одинаковаго числа сторонъ, то къ нимъ можно приложить теорему (§ 136, 2), что периметры правильныхъ мно—ковъ одинаковаго числа сторонъ относятся какъ радіусы круговъ вписанныхъ или описанныхъ, слѣд. и круги будутъ относиться какъ ихъ радіусы, или ихъ діаметры.



Другое доказательство. Положимъ, что пропорція окр. $AB : \text{окр. } ab = AB : ab$ не справедлива, а будетъ существовать пропорція окр. $AB : \text{окр. } ab = AB : ac$,

гдѣ $ac > ab$. Впишемъ въ кругъ радіуса ac прав. мно—къ по какому нибудь вышеописанному способу. Чрезъ послѣдовательное дѣленіе дугъ, стягиваемыхъ сторонами, можно наконецъ получить мно—къ съ такими малыми сторонами, что онъ не будетъ достигать круга ab . Обозначимъ периметръ этого мно—ка чрезъ p и впишемъ въ кругъ AB подобный ему мно—къ, котораго периметръ назовемъ чрезъ P , тогда будемъ имѣть (§ 136, 2)

$$P : p = AB : ac.$$

Изъ этихъ двухъ пропорцій слѣдуетъ, что окр. $AB : P = \text{окр. } ab : p$, что невозможно, потому что окр. $AB > P$, а окр. $ab < p$, слѣд. и наше предположеніе, что четвертый членъ пропорціи окр. $AB : \text{окр. } ab = AB : ab$ болѣе ab , не возможно. Точно также можно доказать, что этотъ членъ не можетъ быть менѣ ab .

Слѣдствіе. Дуги AB и ab разныхъ круговъ соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ, относятся какъ ихъ радіусы AO и ao (фиг. § 136).

По § 57 $\sphericalangle AOB : 4d = \text{дуга } AB : \text{окр. } AO$
и $\sphericalangle aob : 4d = \text{дуга } ab : \text{окр. } ao$,
но такъ какъ $\sphericalangle AOB = \sphericalangle aob$, то
дуга $AB : \text{дуга } ab = \text{окр. } AO : \text{окр. } ao = AO : ao$.

§ 146. Площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ.

Если будемъ разсматривать кругъ какъ прав. мно—къ безчисленнаго множества безконечно малыхъ сторонъ, то предложеніе § 135, по которому площадь прав. мно—ка равняется половинѣ произведенія его периметра на радіусъ вписан. круга, можетъ быть примѣнено и къ самому кругу, коего площадь слѣд. будетъ равняться половинѣ произведенія окружности на радіусъ.

Другое доказательство.

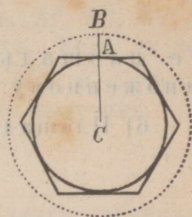
Пусть $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } CA$ не будетъ выраженіемъ площади круга CA , а мѣрою бѣльшаго круга CB , такъ что

$$\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } CA = \text{пл. кр. } CB.$$

Опишемъ около круга CA прав. мно—къ съ такимъ числомъ сторонъ, чтобы онѣ не касались круга BC , и обозначимъ периметръ этого мно—ка чрезъ P , тогда площадь его будетъ равна $\frac{1}{2} AC \times P$. Такъ какъ $\text{окр. } CA < P$, то

$$\frac{1}{2} CA \times \text{окр. } CA < \frac{1}{2} CA \times P \text{ слѣд. и } \text{пл. кр. } CB < \frac{1}{2} CA \times P,$$

т. е. площадь круга CB менѣ площади мно—ка, заключающагося внутри его, что невозможно, а потому не можетъ быть, чтобы $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } CA$ была болѣе площади круга CA . Подобнымъ образомъ можно доказать, что $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } CA$ не можетъ быть меньше площади круга CA , а потому $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } CA = \text{пл. кр. } CA$.



§ 147. Площадь сектора AOB равняется половинѣ произведенія его дуги AB на радіусъ AO . (фиг. § 141).

Такъ какъ секторъ относится къ площади круга, какъ его дуга къ цѣлой окружности, то мы имѣемъ

$$\text{сек. } AOB : \frac{1}{2} AO \times \text{окр. } OA = \text{дуга } AB : \text{окр. } OA,$$

$$\text{слѣд. сект. } AOB = \frac{1}{2} AO \times \text{дуга } AB.$$

§ 148. 1) Во всѣхъ кругахъ отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная.

Означивъ окружности двухъ круговъ чрезъ P и p , ихъ радіусы чрезъ R и r , будемъ имѣть (§ 145)

$$P : p = 2R : 2r, \text{ слѣд. и } P : 2R = p : 2r.$$

2) Постоянное отношеніе окружности p къ діаметру d или къ удвоенному радіусу $2r$ обозначается чрезъ π , т. е.

$$\pi = \frac{p}{d} = \frac{p}{2r}$$

3) Изъ сего слѣдуетъ формула

$$p = 2r\pi$$

т. е. окружность круга равна удвоенному радіусу, умноженному на величину π .

4) Если діаметръ $d = 1$, или $r = 1/2$, то окружность $p = \pi$.

5) Такъ какъ (§ 146) площадь круга $F = 1/2 pr$ и $p = 2r\pi$, то

$$F = r^2 \pi$$

т. е. площадь круга равняется квадрату радіуса умноженному на величину π .

6) Площадь круга опредѣляется діаметромъ такъ:

$$F = \frac{1}{4} d^2 \pi.$$

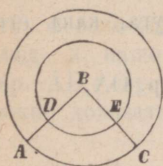
7) Радиусъ круга опредѣляется окружностью или площадью круга такъ:

$$r = \frac{p}{2\pi} = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

§ 149. Площади (F , f) круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ (R , r) или діаметровъ (D , d).

Такъ какъ $F = R^2\pi = 1/4 D^2\pi$, $f = r^2\pi = 1/4 d\pi$, то

$$F : f = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$



§ 150. Секторы ABC и DBE равныхъ круговъ, имѣющіе равные центральные углы, относятся какъ квадраты радіусовъ круговъ.

Такъ какъ $ABC : DBE = 1/4 AB \times AC : 1/4 DB \times DE$,
но $\sphericalangle AC : \sphericalangle DE = AB : DB$, (§ 145, слѣд.)
то $ABC : DBE = AB^2 : DB^2$.

§ 151. Найти приближенное отношеніе π окружности къ діаметру.

Вычисляя послѣдовательно периметры вписанныхъ и описанныхъ прав. мно—ковъ все съ бѣльшимъ и бѣльшимъ числомъ сторонъ въ единицахъ радіуса, мы получимъ два ряда чиселъ, изъ которыхъ одни будутъ менѣе, а другія болѣе окружности. Съ увеличеніемъ числа сторонъ мно—ковъ эти ряды сближаются все болѣе и болѣе. Если начнемъ съ прав. 6—угольника, то

сторона вписаннаго 6—ника = 1

сторона описаннаго 6—ника $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (§ 138)

периметръ вписаннаго 6—ника = 6

периметра описаннаго 6—ника $= \frac{12}{\sqrt{3}} = 6,928 \dots$

Между этими числами, 6 и 6,928... содержится величина окружности. Чтобы получить болѣе тѣсныя предѣлы, перейдемъ къ мно—камъ о 12, 24... сторонахъ. Пусть будутъ a' , a'' , $a''' \dots$ стороны вписанныхъ 12, 24, 48... угольниковъ, A' , A'' , $A''' \dots$ стороны соотвѣствующихъ мно—ковъ описанныхъ. Если въ формулу § 139 вставимъ $a = 1$, тогда $a' = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, и когда эта величина будетъ вставлена въ формулу § 138, то получимъ

$$A' = \frac{2a'}{\sqrt{4 - a'^2}}$$

Продолжая такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующую таблицу:

Стороны.		Периметры.
$a' = \sqrt{2} - \sqrt{3}$	= 0,51763809	12 $a' = 6,2116571$
$A' = \frac{2a'}{\sqrt{4 - a'^2}}$	= 0,53589384	12 $A' = 6,4307806$
$a'' = \sqrt{2} - \sqrt{4 - a'^2}$	= 0,26105238	24 $a'' = 6,2652572$
$A'' = \frac{2a''}{\sqrt{4 - a''^2}}$	= 0,26330499	24 $A'' = 6,3193199$

Продолжая вычисленіе такимъ образомъ напр. до 12288—угольника, найдемъ, что периметръ вписан. 12288—ка = 6,2831852
периметръ описан. 12288—ка = 6,2831854.

Изъ этого видно, что разность между периметрами вписанныхъ и описанныхъ мно—ковъ становится менѣе и менѣе, такъ что периметры 12288—ка различаются между собою только двумя десяти—милліонными долями. Первые семь цифръ 6,283185, общія обѣмъ числамъ, будутъ выражать самую окружность въ единицахъ радіуса. При этомъ ясно, что продолжая вычисленіе еще далѣе, мы могли бы опредѣлить величину окружности гораздо точнѣе.

Взявъ за окружность среднее ариметическое между периметрами 12288—угольниковъ вписанныхъ и описанныхъ, мы получимъ для нея 6,2831853. Такъ какъ мы приняли радіусъ круга = 1, то діаметръ круга = 2; слѣд. приблизительно $\pi = 6,2831853 : 2$, т. е.

$$\pi = 3,1415926.$$

§ 152. Число π есть число ирраціональное и потому можетъ быть опредѣлена только приближенная величина его.

Архимедъ сперва вычислилъ π и нашелъ

$$\pi = \frac{22}{7}, \text{ т. е. } 3,14_{23} \dots$$

которое отношеніе уже въ четвертой цифрѣ оказывается невѣрнымъ, слѣд. вѣрно до $\frac{1}{100}$.

Послѣ того было опредѣлено гораздо точнѣе

$$\pi = \frac{355}{113}, \text{ т. е. } 3,141592_{92} \dots$$

вѣрно въ семи цифрахъ, или до $\frac{1}{1000000}$. Эти отношенія во многихъ приложеніяхъ имѣютъ достаточную точность.

Теперь π вычислено даже до 530 десятичныхъ цифръ,

$$\pi = 3,141592653589793 \dots$$

VII. Задачи.

§ 153. (I—III, § 4 — § 84).

1) Черезъ точку А провести линію, которая бы пересѣкла данную прямую подъ даннымъ угломъ.

2) Построить тре—къ по данной высотѣ и двумъ даннымъ угламъ при основаніи.

3) Опредѣлить уголъ, котораго стороны раздѣляютъ пополамъ внутренние односторонніе углы двухъ параллельныхъ линій.

4) Сколько сторонъ имѣетъ многоугольникъ, сумма угловъ котораго равна 30 прям. угламъ?

5) Найти сумму внѣшнихъ угловъ, много—ка, имѣющаго n входящихъ угловъ. — Отв. $2(2 + n)$ прям.

6) Найти на линіи АВ такую точку, чтобы прямая, проведенная изъ этой точки къ даннымъ двумъ точкамъ Р и Q составили съ прямой АВ равные углы.

7) Въ равнобедренномъ тре—кѣ одинъ уголъ равенъ $67^{\circ} 25' 4''$; опредѣлить неравный ему уголъ тре—ка.

8) Раздѣлить равносторонній тре—къ на четыре равныя тре—ка.

9) Найти на прямой АВ точку, равно отстоящую отъ двухъ пересѣкающихся линій MN и PQ.

10) Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ точекъ А и В.

11) Въ прямоугольномъ тре—къ ABC вписать квадратъ, такъ чтобъ онъ имѣлъ съ тре—комъ одинъ общій уголъ, а вершина противолѣжащаго угла упала на гипотенузу AC .

12) Чрезъ точку A провести сѣкущую къ двумъ параллельнымъ линіямъ такъ, чтобы часть ея, заключающаяся между ними, равнялась данной линіи m .

13) На данной прямой начертить квадратъ.

14) Определить длину линіи, соединяющей вершину прямого угла съ серединою гипотенузы a .

15) Чрезъ точку A , лежащую внутри круга, провести хорду, которая въ точкѣ A дѣлилась бы пополамъ.

16) Начертить окружность, проходящую чрезъ данную точку A , и касающуюся данной прямой въ точкѣ B .

17) Внутри круга радіуса R дана точка A ; описать радіусомъ r окружность, которая проходила бы чрезъ точку A и касалась даннаго круга внутри.

18) Найти отношеніе между двумя данными углами.

19) Радіусомъ r описать окружность такъ, чтобы она отстояла отъ точки A на разстояніе m , и отъ точки B на разстояніе n .

20) Построить прямоугольный тре—къ по данной гипотенузѣ AB и условію, чтобы одинъ изъ острыхъ угловъ былъ вдвое болѣе другаго.

21) Построить равнобедренный тре—къ по данному периметру p и высотѣ h .

22) Построить тре—къ по двумъ даннымъ сторонамъ a, b , и перпендикуляр r изъ конца первой стороны на другую.

23) Построить ромбъ по даннымъ діагоналямъ.

24) Чрезъ данную точку M въ прямой AB провести линію, которая бы съ прямою AB составила уголъ, равный m .

25) Между сторонами даннаго угла A описать радіусомъ r окружность, касающуюся сторонъ угла.

26) Провести чрезъ точку P прямую, составляющую одинакіе углы со сторонами даннаго угла ABC .

27) Составить уголъ, равный а) суммѣ, б) разности двухъ угловъ.

28) Построить параллелограмъ по двумъ даннымъ діагоналямъ и одной изъ сторонъ его.

29) Построить тре—къ а) по данной гипотенузѣ a , и острому углу m ; б) по данной гипотенузѣ a и катету b .

30) При какомъ условіи можно описать окружности чрезъ четыре данныя точки A, B, C, D ?

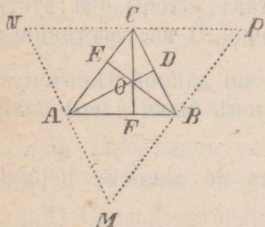
31) Вписать кругъ въ данный секторъ ACB .

32) Даны двѣ непараллельныя линіи, которыя не могутъ быть продолжены до пересѣченія по недостатку мѣста. Провести линію такъ, чтобы она по достаточномъ продолженіи дѣлила пополамъ образуемый этими прямыми уголъ.

33) Провести къ кругу касательную, которая составила бы уголъ m съ прямою AB .

34) Провести къ данному кругу двѣ касательныя, которыя бы пересѣкались подѣ даннымъ угломъ m .

35) Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, а) проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки A, B ; б) касательныхъ къ прямой AB въ данной точкѣ ея M .



36) Доказать, что три перпендикуляра, AD, BE, CF , проведенные изъ вершинъ тре—ка ABC на противоположныя стороны, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ O .

37) Описать кругъ радиусомъ r такъ, чтобы онъ отсѣкалъ отъ сторонъ даннаго угла A хорды, равныя линіи m .

38) Чрезъ точку A внѣ даннаго круга провести сѣкущую такъ, чтобы внутренній ея отрѣзокъ равнялся прямой m .

39) Чрезъ двѣ данныя точки описать такую окружность, чтобы всѣ вписанные углы, которыхъ стороны проходятъ чрезъ эти точки, были равны данному углу m .

40) Построить тре—къ по данному основанію b , высотѣ h и углу A при вершинѣ.

41) Построить равнобедренный тре—къ по данному основанію и углу при вершинѣ.

42) Чрезъ точку A провести прямую, которая бы отрѣзала въ данномъ кругѣ дугу, вмѣщающую уголъ m .

43) Внутри даннаго тре—ка найти такую точку, чтобы три прямыя, проведенныя изъ нея къ вершинамъ тре—ка, образовали три равные угла около этой точки.

§ 154. (IV—V, § 85 — § 133.)

44) Построить равнобедренный тре—къ, равномѣрный данному тре—ку.

45) Площадь прямоугольника равна 80 $\square$ ф., разность основанія и высоты его 11 ф.; найти числовыя величины этихъ двухъ линій. —

46) По данной сторонѣ а равносортоннаго тре—ка найти выраженіе для его высоты.

47) Обратить данный квадратъ въ равнобедренный тре—къ.

48) Найти площадь тре—ка по данному периметру р и радіусу г круга вписаннаго.

49) Стороны тре—ка равны 2, 3, 4 ф.; какого вида уголь, лежащій противъ болѣеи стороны?

50) Найти на данной прямой АВ точку, чтобы проведенная изъ нея касательная къ данному кругу радіуса г равнялась линіи т.

51) Построить квадратъ, который былъ бы равновеликъ а) половинѣ даннаго квадрата, б) вдвое болѣе послѣдняго.

52) Периметръ прямоугольнаго тре—ка равенъ $p = 24$ ф., и одинъ изъ катетовъ равенъ $a = 8$ ф.; построить тре—къ и опредѣлить величину гипотенузы.

$$\text{Отв. } \frac{(p - a)^2 + a^2}{2(p - a)} = 10 \text{ ф.}$$

53) По даннымъ сторонамъ а, b, с тре—ка опредѣлить длину линіи, соединяющей средину основанія (с) съ вершиною тре—ка.

54) Построить тре—къ по данному основанію а, противолежащему ему углу А, и отношенію $m : n$ между другими сторонами.

55) Трапецію обратить въ параллелограмъ той же высоты.

56) Параллельныя стороны трапеціи содержатъ 10 и 16 ф., а площадь равна 52 $\square$ ф.; найти ея высоту.

57) Найти параллельныя стороны трапеціи, если площадь ея 96 $\square$ ф., высота 8 ф. и болѣеи изъ параллельныхъ сторонъ втрое болѣе менѣеи.

58) Параллельныя стороны трапеціи $a = 4$, $b = 10$ ф., а каждая изъ другихъ сторонъ равна $c = 5$ ф.; опредѣлить площадь трапеціи.

$$\text{Отв. } \frac{a + b}{4} \sqrt{4c^2 - (a - b)^2} = 28 \square \text{ ф.}$$

59) Найти геометрическое мѣсто точекъ такого свойства, чтобы касательныя, проведенныя отъ нихъ къ данному кругу радіуса г, имѣли бы одинаковую длину а.

60) Одна сторона тре—ка содержит 30 ф.; опредѣлить длину линии, которая проходя параллельно этой сторонѣ дѣлитъ тре—къ пополамъ. — Отв. 21,2132 ф.

61) Діаметръ разсѣкается хордою на части, относящіяся какъ 3 : 5; длина же отрѣзковъ самой хорды 10 и 18 ф. — Требуется опредѣлить длину діаметра.

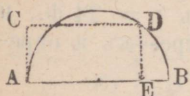
62) Черезъ точку, взятую внутри даннаго угла, провести прямую такъ, чтобы она дѣлилась въ этой точкѣ пополамъ.

63) Раздѣлить тре—къ проведенными изъ вершины линиями на двѣ части, которыя относились бы между собою какъ m къ n .

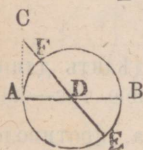
64) Въ данномъ тре—кѣ вписать квадратъ, коего основаніе находилось бы на основаніи тре—ка.

65) Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному прямо—ку, и чтобы его основаніе было равно линіи m .

66) Построить тре—къ на данномъ основаніи m , и опредѣлить его высоту, такъ чтобы онъ былъ равновеликъ тре—ку, имѣющему основаніе a и высоту h . — Высота $\frac{ah}{m}$.



67) Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному квадрату, такъ чтобы а) сумма, б) разность смежныхъ сторонъ прямо—ка была равна данной линіи АВ.



68) Отношеніе двухъ квадратовъ представить двумя линіями.

69) Отношеніе двухъ прямоугольниковъ, которыхъ стороны a и b , m и n , представить двумя линіями.

70) На которое разстояніе отъ вершины тре—ка должно перерѣзать высоту h параллелью къ основанію, чтобы раздѣлить тре—къ пополамъ? — Отв. $\frac{h}{\sqrt{2}}$

71) Раздѣлить данный тре—къ на три равномѣрныя части прямыми, проведенными параллельно основанію.

72) Найти сторону квадрата, равновеликаго данному треугольнику.

73) Въ данную полуокружность вписать квадратъ, такъ чтобы одна сторона его совпала съ діаметромъ.

74) Описать кругъ, который бы проходилъ чрезъ двѣ данныя точки А и В, и касался данной прямой CD.

75) Данный тре—къ раздѣлить на три равномѣрныя части прямыми, проведенными изъ точки, взятой на одной сторонѣ.

76) Построить тре—къ, который бы былъ подобенъ данному тре—ку ABC и имѣлъ высоту a.

77) Стороны тре—ка $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$ ф.; найти перпендикуляры, опущенные изъ трехъ вершинъ тре—ка къ противоположнымъ сторонамъ.

$$\text{Отв. } \frac{168}{a} = 11\frac{1}{5}, \frac{168}{b} = 12, \frac{168}{c} = 12\frac{12}{13} \text{ ф.}$$

78) Тре—къ ABC, имѣющій стороны $a = 21$, $b = 20$, $c = 13$ ф., раздѣляется прямыми, проведенными изъ внутренней точки къ вершинамъ угловъ, на три равновеликіе тре—ки; опредѣлить перпендикуляры, опущенные изъ этой точки къ сторонамъ. —

$$\text{Отв. } \frac{84}{a} = 4, \frac{84}{b} = 4\frac{1}{5}, \frac{84}{c} = 6\frac{6}{13} \text{ ф.}$$

79) Опредѣлить площадь трапеціи, если параллельныя стороны $a = 10$, $b = 6$ ф., а другія $c = 3$, $d = 5$ ф.

$$\text{Отв. } \frac{a+b}{4(a-b)} \sqrt{(c+d+a-b)(d+a-b-c)(c+a-b-d)(c+d-a+b)} = 24 \square \text{ ф.}$$

80) По данной сторонѣ $= 10$ ф. равносторонняго тре—ка найти его площадь. — Отв. $43,30127 \square$ ф.

81) Опредѣлить сторону равносторонняго тре—ка, равномѣрнаго тре—ку, котораго стороны равны 5, 12, 13 ф. —

$$\text{Отв. } 8,323582 \text{ ф.}$$

82) Одна вершина равносторонняго тре—ка лежитъ въ центрѣ, обѣ другія стороны лежатъ на окружности круга, котораго радіусъ $r = 4$ ф.; опредѣлить сегментъ, т. е. часть круга, заключающаяся между дугою и хордою. —

$$\text{Отв. } \frac{r^2}{2} (1/3\pi - 1/2 \sqrt{3}) = 1,4493768 \square \text{ ф.}$$

§ 155. (VI, § 134 — § 152.)

83) Раздѣлить уголъ, равный двумъ прямымъ, на три равныя части (§ 141).

84) По данной сторонѣ $a = 42,4264$ ф. квадрата, вписаннаго въ кругъ, найти сторону описаннаго квадрата. — Отв. $a\sqrt{2} = 60$ ф.

85) Найти отношеніе площади правильнаго вписаннаго въ кругъ 12—угольника къ площади описаннаго квадрата. — Отв. $3 : 4$.

86) Какъ относятся между собою стороны двухъ равностороннихъ тре—ковъ, изъ которыхъ одинъ описанный около круга, а другой вписанный въ кругъ? — Отв. $2 : 1$.

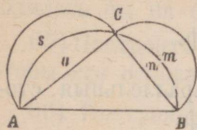
87) Определить площадь правильного 12—угольника, вписанного въ кругъ радіуса r . — Отв. $3r^2$.

88) По данной сторонѣ a правильного 5—угольника, 10—угольника, 12—угольника определить площади этихъ много—ковъ.

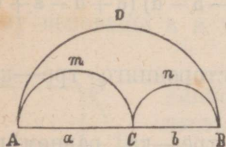
а) $\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$; б) $\frac{5a^2}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$; в) $3a^2(2 + \sqrt{3})$.

89) Площадь тре—ка $54 \square$ ф., стороны же его относятся какъ $3 : 4 : 5$; найти длину каждой изъ нихъ. — Отв. 9, 12, 15 ф.

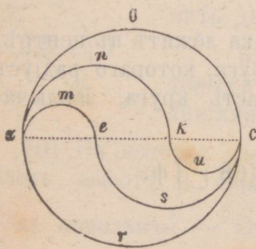
90) По данной площади круга, $132,7326 \square$ ф., найти его радіусъ. — Отв. 6,5 ф.



91) На сторонахъ прямоугольнаго тре—ка ABC описаны полуокружности. Доказать что ограниченные дугами плоскости s и m на катетахъ (Гипократовы луночки) вмѣстѣ равны площади тре—ка.



92) На цѣлой прямой AB и на ея отрѣзкахъ $AC = a$, $BC = b$ описаны полуокружности. Найти величину плоскости ADBnCm, заключающейся между тремя полуокружностями. — Отв. $\frac{1}{4}ab\pi$.



93) Диаметръ ac круга раздѣленъ на три равныя части ae , ek , kc , и по одной сторонѣ его построены полуокружности на ae и на ak , и также по другой сторонѣ на sk и на se , такъ что цѣлый кругъ раздѣляется на три части, $arcs m$, $amscun$, $aosun$. Доказать, что эти части равновелики между собою.

94) Вычислить площадь сектора, котораго радіусъ 10 ф., а дуга 24° . —

Отв. $20,94395 \square$ ф.

95) Уголъ сектора равенъ $43^\circ 3' 18''$, а площадь равна $10000 \square$ ф.; определить радіусъ. — Отв. $163,141$ ф.

96) Въ кругѣ діаметра $d = 20$ ф.; дуга имѣетъ $b = 12^\circ$; вычислить длину дуги и площадь сектора.

Отв. $\frac{bd\pi}{360} = 2,094395$ ф.; $\frac{bd^2\pi}{4 \cdot 360} = 10,471975 \square$ ф.

97) Найти радіусъ круга, равновеликаго разности двухъ круговъ, которыхъ радіусы $R = 17$, $r = 15$ ф. — Отв. $\sqrt{R^2 - r^2} = 8$ ф.

98) Въ кругѣ радіуса $r = 42$ ф. опредѣлить а) длину дуги, содержащей $n = 54^\circ 28' 20''$; б) число градусовъ дуги, которой длина $b = 7,986044$ ф.

$$\text{Отв. а} = \frac{n r \pi}{180} = 39,93022 \text{ ф.}; \text{ б) } \frac{180b}{r\pi} = 10^\circ 53' 40''.$$

99) Опредѣлить отношеніе двухъ центральныхъ угловъ, которыхъ дуги $B = 91$, $b = 13$ ф., а радіусы $R = 7$, $r = 49$ ф.

$$\text{Отв. } \frac{Br}{bR} = 49 : 1.$$

100) Площадь круга равна $2464 \square$ ф.; найти его окружность. — Отв. $175,9646$ ф.

101) Опредѣлить радіусъ круга, котораго площадь увеличивается на $100 \square$ ф., когда радіусъ его увеличивается на одинъ футъ. — Отв. $15,41549$ ф.

102) Длина каждаго градуса круга равна $75,782$ метрамъ; опредѣлить радіусъ круга. — Отв. $4941,989$ М.

103) Изъ одной точки окружности проведены къ концамъ діаметра двѣ хорды, которыхъ длина 17 и 23 ф.; опредѣлить площадь круга. — Отв. $642,4754 \square$ ф.

104) Опредѣлить площадь круга, котораго окружность равна $84,6$ ф. — Отв. $569,548 \square$ ф.

105) Опредѣлить діаметръ круга, равновеликаго квадрату, котораго сторона равна 60 ф. — Отв. $67,70274$ ф.

106) Найти радіусъ круга, равновеликаго суммѣ круговъ, которыхъ радіусы $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ ф.

$$\text{Отв. } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 5,4772256 \text{ ф.}$$

107) Опредѣлить радіусы двухъ круговъ, которыхъ сумма равна кругу радіуса r , и которыхъ радіусы относятся между собою какъ $m : n$.

$$\text{Отв. } \frac{mr}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \frac{nr}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

108) Секторъ, котораго уголъ прямой, превратить въ полукругъ.

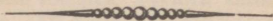
109) Даны двѣ концентрическихъ окружности радіусами $R = 61$, $r = 60$ ф.; найти радіусъ круга, равновеликаго площади, заключенной между данными окружностями.

110) Найти радіусы концентрическихъ окружностей, раздѣляющихъ данный кругъ радіуса r на n равныхъ частей.

111) По данной площади, 272 $\square$ ф., равносторонняго тре—ка опредѣлить его сторону. — Отв. 25,06305 ф.

112) Построить тре—къ по тремъ перпендикулярамъ а, б, с, опущеннымъ изъ вершинъ тре—ка на противолежащія стороны.

113) Построить тре—къ по тремъ прямымъ а, б, с, соединяющимъ вершины тре—ка съ серединами противолежащихъ сторонъ.



Изданія книжнаго магазина Ф. Клуге въ Ревелѣ.

Голотузовъ, Нѣмецкая азбука приспособленная къ методѣ
одновременнаго обученія письму и чтенію. Цѣна 30 коп.

— — Русская хрестоматія. Книга для переводовъ съ рус-
скаго языка на нѣмецкій. Часть II, 2. изд. 1 р. 20 к.

Мериновъ, Хрестоматія для употребленія въ младшихъ и
среднихъ классахъ училищъ прибалтійскихъ губер-
ній. 1873. 1 р.

Пилеманъ, книга для переводовъ съ нѣмецкаго языка на
русскій. 1887. 7. изд. 1 р.

Шафрановъ и Николичъ, Русская хрестоматія для употре-
бленія въ училищахъ прибалтійскихъ губерній. Часть I.
Проза. 3. изд. 1872. 1 р. 20 к.

Святой, Русская хрестоматія, или избранныя мѣста изъ
русскихъ прозаиковъ и стихотворцевъ, съ нѣмецкими
объясненіями словъ и предметовъ. Курсъ I 80 к.;
курсъ II 1 р. 35 к.

Черешевичъ, Хрестоматія для перевода съ нѣмецкаго языка
на русскій. 4. изд. 1 р.
