Anwendung

der

allgemeinen Gesetze der Bewegung

auf das

*Newton*sche Gravitationsgesetz.

Einladungsschrift

zum

Actus im Gymnasium zu Mitau

den 22. December 1845.

Von

G. H. Blaese,

Oberlehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an den Forstklassen der Anstalt,
Candidat der Philosophie.

Mitau.

Gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn.

1845.

Der Druck ist gestattet.

Dorpat, den 30. October 1845. Censor *Fr. Neue.*

Unsere Aufgabe zerfällt ohne Weiteres in zwei Theile; in einen ersten, in welchem die allgemeinen Gesetze der Bewegung hergeleitet, und in einen zweiten, in welchem diese auf das *Newton*sche Gravitationsgesetz in Anwendung gebracht werden.

Ein Körper bewegt sich fort entweder in der geraden Linie oder in einer krummen (Curve). Jede Curve ist aber entweder einfach gekrümmt oder doppelt gekrümmt; im ersten Falle liegen alle Punkte der Curve in einer Ebene, im letztern nicht. Die Lage und Form einer doppelt gekrümmten Curve kann nur bestimmt werden, indem man den Ort eines jeden Punktes derselben auf drei auf einander senkrechte Ebenen bezieht.

Die Ortsveränderung eines Punktes geht, abgesehen von der Curve, die er während seiner Bewegung beschreibt, entweder in *gleichförmiger* oder *ungleichförmiger* Bewegung vor sich. *Gleichförmig* wird die Bewegung genannt, *wenn in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufen werden; ungleichförmig, wenn dieses nicht der Fall ist.* Bei jeder Bewegung also kommt die Zeit in Betracht; von dieser ist der Raum, der durchlaufen wird, abhängig; man kann also immer den Raum als eine Funktion der Zeit betrachten.

Bezeichnet man mit s den Raum oder den Abstand des sich bewegenden Punktes vom Anfangspunkte, welcher letztere in der Curve angenommen wird, in der die Bewegung vor sich geht; mit t die Zeit die er zur Durchlaufung dieses Raumes brauchte, so sprechen sich die verschiedenen Bewegungen aus durch die Gleichung

$$s = \psi(t).$$

Die *gleichförmigen Bewegungen* unterscheiden sich von einander blos durch die Gröfse des Raumes, den die sich bewegenden Körper in der *Einheit der Zeit* zurücklegen. Diese, für jede einzelne gleichförmige Bewegung, constante Gröfse ist es, welche man die *Geschwindigkeit* nennt und sie mit v oder c bezeichnet. — Statt des in der Einheit der Zeit durchlaufenen Raumes kann man auch, um die Geschwindigkeit eines in gleichförmiger Bewegung begriffenen Punktes zu messen, das Verhältnifs des durchlaufenen Raumes und der Zeit, welche verstrich, nehmen:

$$\left(\frac{s}{t} = v\right).$$

Bei der *ungleichförmigen Bewegung* ist die Geschwindigkeit eine veränderliche Gröfse, sie ändert also immer, selbst während einer noch so kleinen Zeit, ihren Werth. Was eine *Aenderung* des Zustandes eines Körpers hervorruft, in Bezug auf Ruhe und Bewegung, nennt man *Kraft*; also nicht nur wenn ein Körper aus der Ruhe in Bewegung und umgekehrt versetzt wird, schreibt man es der Kraft zu, sondern auch wenn sich überhaupt die Bewegung desselben, was *Geschwindigkeit* und *Richtung* anlangt, ändert. — Hiernach ist als Grundsatz anzunehmen, dafs ein in Bewegung begriffener Körper, so lange keine Kraft auf ihn wirkt, sich unaufhörlich mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung fortbewegt, und dieser enthält das *Gesetz der Beharrlichkeit.*

Um die Gröfse der Geschwindigkeit eines in *ungleichförmiger Bewegung* begriffenen Punktes für den Zeitmoment t zu bestimmen, erwäge man zunächst, dafs dieselbe durch die Länge des Weges gegeben ist, welchen der Punkt in der Einheit der Zeit zurücklegen würde, wenn vom Augenblicke t an alle fernere Einwirkung von Kräften auf denselben aufhörte; bezeichnet man dann mit v die Geschwindigkeit für die Zeit t, also auch die Geschwindigkeit mit welcher der Punkt fortlaufen würde, wenn die Kräfte ferner einzuwirken aufhörten, so ist die Geschwindigkeit zur Zeit $t + \triangle t$ durch $v + \triangle v$ zu geben; ist ferner $\triangle s$ der Raum, welchen der sich bewegende Punkt in der Zeit $\triangle t$ mit veränderlicher Geschwindigkeit durchläuft, so ist bei *wachsender Geschwindigkeit*, immer $v \cdot \triangle t < \triangle s$ und $(v + \triangle v) \triangle t > \triangle s$; bei *abnehmender Geschwindigkeit* $v \triangle t > \triangle s$ und $(v + \triangle v) \triangle t < \triangle s$; (die Geschwindigkeit v, wenn nur die Zeit $\triangle t$ hinlänglich klein angenommen wird, wächst entweder beständig während dieser Zeit, oder nimmt beständig ab). In beiden Fällen aber liegt $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ zwischen den beiden Grenzen v u. $v + \triangle v$. — Läfst man nun $\triangle t$ unendlich klein werden, so wird auch die Aenderung der Geschwindigkeit, $\triangle v$, und die Gröfse $\triangle s$ unendlich klein und es fällt also die Geschwindigkeit für die Zeit t mit der für die Zeit $t + \triangle t$, so wie die Zeiten zusammen, und demnach ist das zwischen v und $v + \triangle v$ liegende Verhältnifs $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ in diesem Fall $= v$. — Das Verhältnifs der hier unendlich klein angenommenen Gröfsen $\triangle s$ und $\triangle t$ wird durch die Infinitesimalrechnung gefunden und mit $\frac{ds}{dt}$ ausgedrückt; folglich also

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Durch diese Formel läfst sich die Geschwindigkeit eines Punktes für einen jeden Punkt seiner Bahn berechnen.

Wird $s = \psi(t)$ gesetzt, so ist

$ds = \psi'(t) \, . \, dt$, und folglich

$$\text{I.} \quad \frac{ds}{dt} = \psi'(t) \, .$$

Es ist also die Geschwindigkeit gleich dem ersten Differentialcoefficienten des Raumes in Bezug auf die Zeit.

Gehen wir nun auf eine genauere Untersuchung des Wesens der Kraft und eine nähere Betrachtung des Gesetzes der Beharrlichkeit ein.

Wir haben kurz vorher gesehen, dafs, wenn wir einen Körper in Bewegung gerathen oder einen sich bewegenden Körper stille stehen sehen, dieses jedes Mal einer Kraft zugeschrieben werden mufs. — Die Kraft aber kann nur von einer Materie ausgehen; wo wir also Bewegung wahrnehmen, wo wir Bewegung aufhören sehen, müssen wir die Erscheinung einer andern Materie zuschreiben. Dafs die Körper zur Erde fallen, geschieht nur dadurch, dafs die Materie der Erde auf die Materie der Körper anziehend wirkt. (Materie nennt man Alles, was die Sinne afficirt.)

Wenn eine Kraft auf einen Punkt einwirkt und dann zu wirken aufhört, so wird sich der Punkt *in gerader Linie gleichförmig* bewegen und die Bewegungen *ewig* dauern, vorausgesetzt dafs nach dem Beginn der Bewegung später keine Kraft mehr auf den sich bewegenden Punkt wirksam ist. Geradlinig mufs die Bewegung seyn, denn es ist kein Grund vorhanden, weshalb sie nicht in derselben Richtung, in welcher die Kraft auf den Punkt wirkte, vor sich gehen sollte; sie wird aber auch gleichförmig seyn, weil sich die einmal erlangte Geschwindigkeit nicht wieder ändern kann, ohne dafs eine Kraft diese Aenderung hervorriefe. Die Bewegung endlich mufs ewig dauern, da nach der Annahme keine Kraft auf den sich bewegenden Punkt ferner einwirkt. In der Wirklichkeit kann es nun aber keine völlig gleichförmige, also auch keine ewig währende Bewegung geben, weil immer äufsere Kräfte, wie Friktion, Widerstand des Mediums, die nie ganz beseitigt werden können, ein Hindernifs zur freien Bewegung bleiben.

Die Bewegung wird aber der gleichförmigen, geradlinigen, ewig dauernden um so näher kommen, je mehr diese störend einwirkenden Kräfte aufgehoben werden. Wenn wir also einen Körper sich gleichförmig und in gerader Linie bewegen sähen, so müfsten wir sagen: es wirkt auf den sich bewegenden Körper gar keine Kraft, oder es wirken auf ihn Kräfte, die sich vollkommen aufheben; die Bewegung in die er versetzt ist, die Geschwindigkeit mit der er sich bewegt, verdankt er einer Kraft, die früher auf ihn eingewirkt, nun aber zu wirken aufgehört hat. Bemerken wir dagegen, dafs sich ein Körper ungleichförmig bewegt, so müfsten wir schliefsen, dafs in jedem Augenblick seiner Bewegung eine Kraft auf ihn einwirkt. Es fragt sich jetzt *durch welche Formel, als Funktion der Geschwindigkeit v, die Kraft* für einen jeden Punkt der Bahn gegeben ist.

Ist v, wie früher, die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit t, ist $v + dv$ die Geschwindigkeit zur Zeit $t + dt$, wo dv und dt bekanntlich unendlich kleine Gröfsen bezeichnen, so hat offenbar nur durch die Einwirkung der Kraft die Geschwindigkeit v um ein unendlich Kleines zu oder abgenommen, daher denn auch die Kraft unendlich klein ist. Um sie zu messen, d. h. um ihre Intensität durch eine endliche Zahl auszudrücken, nehme man an, als wirke die Kraft während der Einheit der Zeit mit derselben unveränderlichen Intensität, so würde, wenn die Einheit der Zeit $= n \,.\, dt = 1$ ist, der sich bewegende Punkt, nach Verlauf der Zeiteinheit, die Geschwindigkeit $v + n\,dv$ oder, weil $n = \frac{1}{dt}$, $v + \frac{dv}{dt}$ haben, d. h. die Kraft würde, wenn sie unverändert fortgewirkt hätte, in der Einheit der Zeit, also von t bis $t + 1$, eine Aenderung $\frac{dv}{dt}$ in der Geschwindigkeit hervorgerufen haben; weil nun auf diese Weise durch die Division mit dt die Wirkungen der beschleunigenden Kräfte alle auf eine gleiche Zeit, auf die Zeiteinheit zurückgeführt, also vergleichbar sind, so kann die Kraft $= \frac{dv}{dt}$ gesetzt werden, indem dabei als *Einheit der Kräfte* diejenige Kraft angesehen wird, welche konstant fortwirkend die Geschwindigkeit in der Einheit der Zeit um die Einheit des Raumes ändert.

Wird die Intensität der Kraft durch K bezeichnet, so ist hiernach

$$K = \frac{dv}{dt}\,; \text{ es war aber}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \psi' t\,, \text{ mithin}$$

$$\text{II.} \quad K = \frac{d^2 s}{dt^2} = \psi''(t)$$

Die Kraft ist also gleich dem zweiten Differentialcoefficienten des Raumes in Bezug auf die Zeit.

Die Formeln $v = \psi'(t)$ und $K = \psi''(t)$ sind die Grundlage der ganzen Dynamik; ist eine derselben gegeben so können wir, vermittelst der Differential- und Integralrechnung, alle Gröfsen finden, die überhaupt bei einer Bewegung in Betracht kommen, als z. B. die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke, die Länge der durchlaufenen Bahn, die Zeit, die zur Ortsveränderung nöthig war u. s. w.

Wir haben bisher nur die Gesetze der Bewegung eines Punktes entwickelt, indem wir ganz von der Masse abstrahirten: da wir es aber in der Wirklichkeit immer mit der Bewegung von Körpern zu thun haben, d. h. mit einem System von Punkten, die alle eine Masse haben, also mit sogenannten materiellen Punkten, so fragt es sich, wie die aufgefundenen Formeln für die Bewegung eines Punktes ohne Masse abgeändert werden müssen, um sie auf die Bewegung eines Körpers in Anwendung bringen zu können.

Ein materieller Punkt, welche Masse wir ihm auch geben mögen, kann durch jede, auch die geringste Kraft, in Bewegung gesetzt werden, denn die Materie hat, wie schon früher bemerkt wurde, weder zur Ruhe noch auch zur Bewegung eine Tendenz, sondern folgt willig den Impulsen äufserer Kräfte. — Wenn nun aber ein materieller Punkt, z. B. n Mal so viel Masse, als ein anderer, hat, so mufs nothwendiger Weise, wenn der erste Punkt dieselbe Geschwindigkeit haben soll, wie der zweite, auch die Kraft, welche auf den ersten Punkt wirksam ist, n Mal gröfser seyn, als diejenige, welche den zweiten Punkt bewegt; hiernach also das Verhältnifs bestehen:

$$K_1 : K_2 = M_1 : M_2$$

Wird nun verlangt, dafs die Geschwindigkeit der beiden Punkte nicht gleich sey, so müssen sich die Kräfte, ganz abgesehen von den Massen der Punkte, ja wie die Aenderungen der Geschwindigkeiten verhalten, d. h.

$$K_1 : K_2 = \frac{d\,v_1}{d\,t} : \frac{d\,v_2}{d\,t}\ .$$

Aus den beiden Proportionen aber folgt offenbar diese:

$$K_1 : K_2 = \frac{M_1\ .\ dv_1}{d\,t} : \frac{M_2\ .\ dv_2}{d\,t}$$

und hieraus:

$$K_1 = \frac{M_1\ .\ dv_1}{d\,t}\ .\ f\,,\qquad K_2 = \frac{M_2\ .\ dv_2}{d\,t}\ .\ f\,,$$

f kann $= 1$ gesetzt werden, weil es von der Annahme der Einheit abhängt, und man erhält also für die bei der Bewegung eines materiellen Punktes wirkende Kraft K_1, den Ausdruck

$$\frac{M_1\, d v_1}{d t},$$

so dafs also allgemein

$$K = \frac{M \, . \, d v}{d t} \text{ ist.}$$

Es verhalten sich also zwei Kräfte wie die Produkte aus den Massen, auf welche diese wirken, in die Aenderungen der Geschwindigkeit, die sie erzeugen.

Denkt man sich jetzt einen Körper von beliebiger Masse und Dichtigkeit, und auf die Elemente desselben parallele Kräfte in derselben Richtung wirkend, so können alle Kräfte durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche im Schwerpunkte des Körpers angreift und deren Intensität der Summe der Intensitäten jener besagten Kräfte gleich ist, wie in der Statik gezeigt und hier als bekannt vorausgesetzt wird. Die durch diese Kräfte erzeugte, rein progressive Bewegung ist demnach genau dieselbe, als diejenige, welche hervorgeht, wenn die Summe der parallelen Kräfte im Schwerpunkte und in diesem auch die ganze Masse des Körpers vereinigt wäre.

Es kann also nach dem Vorhergehenden die progressive Bewegung eines Körpers, so lange diese nur von parallelen, in derselben Richtung wirkenden Kräften getrieben wird, auf die Bewegung eines Punktes, des Körpers Schwerpunkt, zurückgeführt werden; die Gesetze der Bewegung eines Körpers also in diesem Falle leicht aus unsern aufgestellten Formeln abgeleitet werden.

Die Gröfse $\frac{M \, . \, d v}{d t}$ nennt man die *bewegende Kraft*, zum Unterschiede von der Gröfse $\frac{d v}{d t}$, welche *beschleunigende Kraft* genannt und aus der erstern abgeleitet wird, wenn man selbige durch die Masse, die sich bewegt, dividirt.

Es geht aus dem Bisherigen auch sogleich hervor, dafs sich Körper von den verschiedensten Massen durchaus auf gleiche Weise bewegen werden, wenn bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten die beschleunigenden Kräfte, d. i. die Aenderungen der Geschwindigkeit, dieselben sind, die bewegenden Kräfte im Verhältnifs der Massen stehen.

Bei der *geradlinigen* Bewegung, wo Geschwindigkeit und beschleunigende Kraft in eine Linie fallen, hat man nur die Geschwindigkeit v und die Kraft K für jeden Punkt der Bahn zu finden und dazu dienen unmittelbar die eben aufgestellten Formeln. Bei der *krummlinigen* Bewegung aber, wo die ursprüngliche Geschwindigkeit und die beschleunigende Kraft in verschiedene Linien fallen, oder die Richtung der Kraft sich während der Bewegung ändert, müssen wir aufser Geschwindigkeit und beschleunigende Kraft auch noch die Richtung dieser beiden und die Curve, in welcher sich der Körper bewegt, angeben. Wir wollen jetzt sehen, wie wir dieses erreichen können.

Es seyen x, y, z die Coordinaten des sich in einer Curve bewegenden Punktes, s drücke wie früher den durchlaufenen Raum aus, t die Zeit, so sind gewifs x, y, z, d. h. die Entfernungen des sich bewegenden Punktes resp. von den Hauptebenen YZ, ZX, XY, also auch s, Funktionen der Zeit.

Die Geschwindigkeit v ist in jedem Punkte der Bahn, auch bei der krummlinigen Bewegung, durch das Verhältnifs $\frac{ds}{dt}$ gegeben. ***Die Richtung der Geschwindigkeit*** wird durch die Richtung des Elements der Curve bestimmt, d. h. durch die Richtung der Tangente, also durch die Determinanten derselben, welche bekanntlich sind:

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}.$$

Projiciren wir das Element der Bahn, nämlich ds, in die drei Hauptaxen X, Y, Z, so ist offenbar dx das Stück, um welches sich der bewegende Punkt, in der unendlich kleinen Zeit dt, von der Ebene YZ entfernt hat, dy das Stück um welches er sich in der unendlich kleinen Zeit dt von der Ebene ZX entfernt hat, und dz das Stück um welches er sich in der unendlich kleinen Zeit dt von der Ebene XY entfernt hat, und die Verhältnisse $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ geben also die Geschwindigkeiten, mit welchen sich der Punkt in seiner Bewegung resp. von den Ebenen YZ, ZX, XY entfernt hat. — Multipliciren wir $\frac{ds}{dt}$, die Geschwindigkeit in der Bahn, mit den Determinanten ihrer Richtung, also mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, so erhalten wir die oben gefundenen Ausdrücke $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und hierauf gründet sich die Benennung: die nach den Axen zerlegte Geschwindigkeit.

Was die Kraft in irgend einem Punkte der Bahn anlangt, so wollen wir sie in ihre Componenten nach den drei Hauptaxen X, Y, Z zerlegen, nämlich resp. in die Kräfte K_x, K_y, K_z. — Diese drei Kräfte bewirken dieselbe Bewegung, als die eine Kraft, deren Componenten sie sind; die Kraft K_x, strebt den Körper nach der Axe X zu bewegen, sucht also die Geschwindigkeit nach der Axe X zu ändern, d. h. $\frac{dx}{dt}$, ebenso erzeugen die Kräfte K_y, K_z resp. eine Bewegung nach den Axen Y und Z, bewirken also in diesen Richtungen eine Aenderung der Geschwindigkeiten $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, folglich schliefsen wir nach dem Frühern, dafs:

$$\text{III.}\quad K_x = \frac{d^2x}{dt^2},\quad K_y = \frac{d^2y}{dt^2},\quad K_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

seyn mufs. — Sobald wir demnach K_x, K_y, K_z als Funktion der Coordinaten x, y, z

bestimmt haben, so ist damit die ***Kraft der Gröfse und Richtung nach*** für alle Punkte der Bahn bekannt; ferner ist die ***Geschwindigkeit und ihre Richtung*** für jeden Punkt der Bahn und ***die Bahn*** gegeben, und endlich läfst sich auch der ***Ort des Körpers*** für eine bestimmte Zeit angeben, denn x, y, z sind Funktionen der Zeit.

Die Gleichungen **III.** sind die Fundamentalgleichungen der krummlinigen Bewegung.

Die beschleunigende Kraft ist durch die 2ten Differentialien der Coordinaten in Bezug auf die Zeit gegeben.

Wir gehen jetzt zum zweiten Theil über, zur Anwendung der entwickelten Formeln auf das ***Newton***sche Gravitationsgesetz. — Alle Himmelskörper bewegen sich nach dem ***Newton***schen Gravitationsgesetze, welches in folgenden drei Sätzen gegeben ist.

I. Die Kraft ist beständig gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet. Die bewegende Kraft liegt in der Sonne oder besteht vielmehr in einer Anziehung zwischen Planeten und Sonne.

II. Die Kraft ist indirekt proportional dem Quadrate der Entfernungen.

III. Die Kraft ist für alle dieselbe.

Diese drei Gesetze leitete ***Newton*** aus den von ***Keppler*** aufgestellten her, der sie aus den Beobachtungen des ***Tycho de Brahe*** folgerte, und welche lauten:

1. Die von den Radienvectoren beschriebenen Sectoren verhalten sich direkt wie die Zeiten.
2. Die Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.
3. Die Quadrate der Umlaufungszeiten verhalten sich wie die Cuben der mittlern Entfernungen von der Sonne, oder wie die Cuben der grofsen Axen der beschriebenen Ellipsen.

Aus 1. folgerte ***Newton*** **I.**, aus 2. **II.**, aus 3. **III.**

Das *erste Kepplersche Gesetz* ist durch die Formel

$$S = kt$$

gegeben. — S bedeutet den Flächenraum des Sectors und k den Flächeninhalt der Flächeneinheit. Man kann die Formel $S = kt$ auch durch die Gleichung

$$dS = k\,dt$$

geben, dS ist aber, wenn $d\varphi$ der Winkel ist welcher zwischen den Radienvectoren r u. $r + dr$ liegt, $= \frac{r^2}{2} . d\varphi$, denn der Inhalt des Kreisausschnittes, dessen Winkel $d\varphi$, aus dem Kreise, der den Radius r hat, ist $= \frac{r^2}{2} . d\varphi$; der Inhalt des

Kreisausschnittes, dessen Winkel $d\varphi$, aus dem Kreise mit dem Radius $r + dr$ beschrieben, ist $= \left(\frac{r + dr}{2}\right)^2 d\varphi = \left(\frac{r^2}{2} + r \,.\, dr + \frac{dr^2}{2}\right) d\varphi$; — läfst man nun dr u. $d\varphi$ bis 0 abnehmen, d. h. nimmt man die Grenze, so reducirt sich letzterer Ausdruck auch auf $\frac{r^2}{2} \,.\, d\varphi$, und mithin ist der Inhalt der Differ. des Sectors, weil er immer zwischen den Inhalten der beiden Kreisausschnitte liegt, $= \frac{r^2}{2} \,.\, d\varphi$. Folglich

$$\frac{r^2}{2} \,.\, d\varphi = k \,.\, dt \,.$$

Das zweite Gesetz Keppler's ist in der allgemeinen Polargleichung der Ellipse ausgesprochen. Die Sonne befindet sich im Brennpunkte der Ellipsen.

$$r = \frac{p}{1 + e \,.\, \cos\varphi}\,, \text{ wo } e < 1 \,.$$

Das dritte Gesetz Keppler's ist durch die Formel

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Const. (für alle Planeten)},$$

ausgedrückt, wo T die Umlaufszeit und a die halbe grofse Axe der Ellipse bedeutet.

Aus diesen in algebraischen Zeichen gegebenen *Kepplerschen* Gesetzen läfst sich das Gesetz *Newton's* über die Attractionskraft der Materie auf nachfolgende Weise ableiten.

Nennen wir K die beschleunigende Kraft, welche einen jeden der Himmelskörper in seiner Bahn treibt, und denken wir uns ein Axensystem durch den Mittelpunkt der Sonne gelegt, dessen Axen X und Y in die Ebene, in welcher der Körper sich fortbewegt, fallen, so mufs nach den vorhergehenden Betrachtungen seyn

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

Nun ist $x = r \,.\, \cos\varphi$, $y = r \,.\, \sin\varphi$, folglich

$$\frac{dx}{dt} = \cos\varphi \,.\, \frac{dr}{dt} - r \,.\, \sin\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt}\,, \quad \frac{dy}{dt} = \sin\varphi \,.\, \frac{dr}{dt} + r\cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt}\,;$$

aus der Gleichung $r = \frac{p}{1 + e \,.\, \cos\varphi}$ aber ergiebt sich die Gleichung

$$dr\,(1 + e \,.\, \cos\varphi) - r \,.\, e \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi = 0\,,$$

also:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r \,.\, e \,.\, \sin\varphi}{1 + e \,.\, \cos\varphi} \,.\, \frac{d\varphi}{dt}\,,$$

mithin
$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{r \,.\, e \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\varphi}{1 + e \,.\, \cos\varphi} - r \,.\, \sin\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt}$$
$$= \frac{r \,.\, \sin\varphi}{1 + e \,.\, \cos\varphi} \,.\, \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2 \,.\, \sin\varphi}{p} \,.\, \frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{r \,.\, e \,.\, \sin^2\varphi}{1 + e \,.\, \cos\varphi} + r\cos\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt}$$
$$= \frac{r\,(\cos\varphi + e)}{1 + e \,.\, \cos\varphi} \,.\, \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2(e + \cos\varphi)}{p} \,.\, \frac{d\varphi}{dt};$$
aus der Gleichung $\frac{r^2 \,.\, d\varphi}{2} = k\,dt$ zieht man;
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2k}{r^2}$$
folglich
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2k \,.\, \sin\varphi}{p}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2k\,(e + \cos\varphi)}{p}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{p} \,.\, \cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2k}{p} \,.\, \sin\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dt}$$
$$= -\frac{4k^2 \,.\, \cos\varphi}{p\,r^2}; \quad = -\frac{4k^2\sin\varphi}{p\,r^2}$$
und hieraus folgt:
$$K = \frac{4k^2}{pr^2} = \frac{k_1}{r^2}, \quad \text{wo } k_1 = \frac{4k^2}{p}.$$
Die Kraft ist also umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernungen. — (Zweiter Satz Newton's).

Die Richtung der Kraft ist durch die Determinanten
$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}} \text{ resp.} = -\cos\varphi, \; -\sin\varphi$$
bestimmt, woraus folgt, *dafs die Linie, in welcher die Kraft wirkt, mit dem Radius-vector zusammenfällt, und, dafs die Kraft gegen die Sonne gerichtet ist; es treibt also den Himmelskörper eine Kraft zur Sonne, man sagt: er wird von der Sonne angezogen. (Erster Satz Newton's.)*

Die Geschwindigkeit in der Bahn ist durch die Formel

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

gegeben, demnach

$$v = \frac{2k}{p} \sqrt{e^2 + 2 \cdot e \cdot \cos\varphi + 1}$$

Die Geschwindigkeit ändert ihren Werth mit dem Winkel φ; sie ist ein Maximum, wenn $\varphi = 0^\circ$, nämlich $v = \frac{2k}{p}(1+e)$, ein Minimum, bei $\varphi = 180^\circ$, nämlich $v = \frac{2k}{p}(1-e)$. — Wenn $\varphi = 0^\circ$ ist, so befindet sich der Himmelskörper in dem, dem Anfangspunkte (Brennpunkte) zunächstliegenden Scheitel der Ellipse; wenn $\varphi = 180^\circ$, so steht er in dem andern Scheitel. Die Entfernungen des Brennpunktes von den Scheiteln sind $a(1-e)$ und $a(1+e)$, also verhalten sich

$$sf : s'f = 1 - e : 1 + e,$$

aber auch die Geschwindigkeiten in den Scheiteln s' u. s verhalten sich wie $1 - e : 1 + e$, folglich sind die Geschwindigkeiten in den Scheiteln s' u. s (dem Aphelium und Perihelium) indirekt *proportional* den Entfernungen derselben vom Brennpunkte.

Der dritte Satz Newton's läfst sich folgendermaafsen aus dem dritten Gesetz ***Keppler***'s herleiten:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Const.}$$

Weil $S = kt$, so ist die ganze Ellipse $= kT$

$$kT = ab \cdot \pi,$$

folglich

$$T = \frac{ab \cdot \pi}{k}, \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{b^2 \cdot \pi^2}{ak} = \text{Const. für alle Himmelskörper.}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}},$$

mithin

$$\frac{k^2}{p\,\pi^2} = \text{Const. für alle Himmelskörper,}$$

also auch

$$\frac{4k^2}{p} = k_1, \quad \text{Const. für alle Himmelskörper;}$$

da nun $K = \frac{k_1}{r^2}$, ***so ist die Kraft nur eine Funktion des Abstandes*** r ***von der Sonne, also für alle Himmelskörper, deren Entfernungen von der Sonne gleich sind, — dieselbe.***

Der dritte Satz *Newton's* ist nicht in aller Strenge wahr, dieses schreibt sich aber daher, dafs *Keppler's* Gleichung $\frac{T^2}{a^3}$ = Const., nicht vollkommen wahr ist; — der Grund ist in der Verschiedenheit der Massen der Planeten zu suchen. *Keppler* leitete seine Gesetze aus den Beobachtungen des *Tycho de Brahe* her, welche, wegen der Mangelhaftigkeit der Instrumente, nie ganz genau ausfallen konnten; — also kleine Differenzen nothwendiger Weise entstehen mufsten.

Wollen wir alle Zweifel über die Richtigkeit des *Newton*schen Gravitationsgesetzes heben, so müssen wir umgekehrt aus diesem die Gesetze *Keppler's* ableiten. Wir werden dadurch auch in den Stand gesetzt zu bestimmen, in wie weit das dritte *Keppler*sche Gesetz von der Wahrheit abweicht.

Sind die Coordinaten eines Punktes der Bahn, in Bezug auf ein durch den Mittelpunkt der Sonne gehendes Axensystem, x, y, z, so hat man, weil die Kraft, welche den Himmelskörper treibt, $= \frac{k_1}{r^2}$ ist, und die Determinanten der Richtung der Kraft die Werthe $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$ haben, indem die Richtung der Kraft stets der Richtung des Radiusvectors entgegengesetzt ist, folgende Gleichungen:

$$1)\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad 2)\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k_1}{r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad 3)\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k_1}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

Multipliciren wir nun Gleichung 2) mit z und 3) mit y, Gleichung 3) mit x und 1) mit z, Gleichung 1) mit y und 2) mit x, so erhalten wir leicht die für centrale Bewegungen allgemein gültigen drei Gleichungen:

$$\frac{y\,.\,d^2z - z\,.\,d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{z\,.\,d^2x - x\,.\,d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{x\,.\,d^2y - y\,.\,d^2x}{dt^2} = 0$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind resp.:

$$\frac{y\,.\,dz - z\,.\,dy}{dt} = A, \quad \frac{z\,.\,dx - x\,.\,dz}{dt} = B, \quad \frac{x\,.\,dy - y\,.\,dx}{dt} = C$$

Aus diesen folgt, dafs $Ax + By + Cz = 0$. *Demnach liegen alle Punkte der Bahn in einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch das Centrum der Sonne, geht.*

Die Determinanten der Ebene sind offenbar

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

oder, wenn man $A^2 + B^2 + C^2 = L^2$ setzt,

$$\frac{A}{L}, \quad \frac{B}{L}, \quad \frac{C}{L}.$$

Die Grösen $ydz - zdy$, $zdx - xdz$, $xdy - ydx$ drücken resp. den doppelten Inhalt der Projection, des Differentials des Sectors dS in den Hauptebenen YZ, ZX, XY aus, wie sich folgendermafsen darthun läfst; — Das Differential des Sectors wird gebildet durch die Radienvectoren r und $r + dr$ und dem Differential des Bogens, nämlich ds.

Wenn nun P der Anfangspunkt der Coordinaten, die Ebene des Papiers die Ebene XY, der Punkt Q die Projection des Punktes (x, y, z) in die Ebene XY, der Punkt R die Projection des Punktes $(x + dx, y + dy, z + dz)$ in die Ebene XY ist, so ist PQR die Projektion von dS in die Ebene XY, und wird QR, die Projection von ds, in die Ebene XY als gerade Linie betrachtet, so hat man

$$\begin{aligned} 2PQR &= 2\triangle PNR - 2\triangle PNQ - 2\triangle QNR \\ &= (x + dx)\,dy - y\,.\,dx - dx\,.\,dy\,. \end{aligned}$$

Eben so leicht läfst sich die Richtigkeit der Behauptung für die Grösen $ydz - zdy$, $zdx - xdz$ erweisen.

Es sey bemerkt, dafs die drei gedachten Grösen positiv zu nehmen sind, wenn die Projectionen in die Hauptebenen YZ, ZX, XY von y nach z, von z nach x, von x nach y hin wachsen für zunehmende Werthe der resp. Argumente y, z, x.

Da $ydz - zdy$, $zdx - xdz$, $xdy - ydx$ resp. gleich $A\,.\,dt$, $B\,.\,dt$, $C\,.\,dt$ ist, so folgt nach einem Satze aus der Geometrie im Raume:

$$(A^2 + B^2 + C^2)\,dt^2 = 4\,(dS)^2\,,$$

$$L^2\,.\,dt^2 = 4\,(dS)^2\,,$$

$$L\,.\,dt = 2\,dS\,,\ \text{also}$$

$$dS = \frac{L}{2}\,dt$$

d. h. ***die Sectoren sind der Zeit direct proportional***, wie es ***Keppler***'s erstes Gesetz angiebt.

Die fernern Operationen lassen sich leichter machen, wenn der Winkel φ eingeführt wird, welchen der bewegliche Radiusvector r mit einem der Lage nach festen bildet; wir haben nämlich dann, wie auch schon früher gezeigt worden,

$$dS = \frac{r^2}{2}\,d\varphi,\ \text{u. also}\ r^2\,.\,d\varphi = L dt\,.$$

Jetzt müssen wir suchen noch eine zweite Gleichung zwischen r u. φ oder r u. t oder auch zwischen r, φ u. t aufzustellen, um aus den beiden die Gleichung der Bahn, dann den Radiusvector und endlich den Winkel φ für eine bestimmte Zeit angeben zu können. — Zu diesem Zwecke wollen wir zu unsern Fundamentformeln für die

Attractionskraft zurückkehren. Multipliciren wir jene Formeln resp. mit dx, dy, dz und addiren sie, so ergiebt sich:

$$\frac{dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y + dz\,.\,d^2z}{dt^2} = -k_1\left(\frac{x\,.\,dx + y\,.\,dy + z\,dz}{r^3}\right);$$

Nun ist aber $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

also $$ds\,.\,d^2s = dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y + dz\,.\,d^2z\,;$$

ferner $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

daher $$x\,.\,dx + y\,.\,dy + z\,dz = r\,dr\,,$$

folglich $$\frac{ds\,.\,d^2s}{dt^2} = -\frac{k_1 r\,.\,dr}{r^3} = -\frac{k_1 dr}{r^2}\,,$$

und integrirt: $$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2k_1}{r} + \text{Const.}$$

Aus dieser Formel geht hervor, dafs wenn der Radiusvector wächst, die Geschwindigkeit abnimmt. — Um die Const. zu bestimmen, wollen wir annehmen:

$$v = c \text{ wenn } r = \varrho\,,$$

dann ist $$c^2 = \frac{2k_1}{\varrho} + \text{Const., also Const.} = c^2 - \frac{2k_1}{\varrho}\,,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2k_1}{r} - \frac{2k_1}{\varrho} + c^2.$$

Eine einfache geometrische Betrachtung giebt die Beziehung

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,(d\varphi)^2$$

mithin

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2\,(d\varphi)^2}{dt^2} = \frac{2k_1}{r} - \frac{2k_1}{\varrho} + c^2\,,$$

welches die andere zu findende Formel zwischen r, φ u. t ist. Es kann nun folgendermafsen aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad L\,.\,dt = r^2\,.\,d\varphi$$

und $$2)\quad \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2\,(d\varphi)^2}{dt^2} = \frac{2k_1}{r} - \frac{2k_1}{\varrho} + c^2$$

die Polargleichung der Bahn abgeleitet werden.

Aus 1) haben wir:

$$dt = \frac{r^2\,.\,d\varphi}{L}\,,$$

dieses in Gleichung 2) gesetzt, giebt:

$$\frac{L^2 \cdot d r^2}{r^4 (d \varphi)^2} + \frac{L^2}{r^2} = \frac{2 k_1}{r} - \frac{k_1}{\varrho} + c^2$$

$$\frac{d \varphi}{d r} = \frac{L}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{2 k_1}{r} - \frac{L^2}{r^2}}}$$

$$\varphi = \int \frac{L}{r^2} \cdot \frac{d r}{\sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{2 k_1}{r} - \frac{L^2}{r^2}}}$$

$$= - \int \frac{L \cdot d \frac{1}{r}}{\sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2} - \left(\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L}\right)^2}}$$

$$= - \int \frac{d \left(\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L}\right)}{\sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2} - \left(\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L}\right)^2}}$$

Nun ist aber $- \int \frac{d \gamma}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}} = Arc \cdot \cos \frac{\gamma}{a}$,

also $\varphi = \text{Arc} \cdot \cos \left[\frac{\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L}}{\sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2}}} \right] + \text{Const.}$

Bezeichnet man die Constante mit ψ, so haben wir:

$$\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L} = \sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2}} \cdot \cos (\varphi - \psi)$$

$$r = \frac{L}{\frac{k_1}{L} + \sqrt{c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2}} \cdot \cos (\varphi - \psi)}$$

$$= \frac{\frac{L^2}{k_1}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2 L^2}{k_1 \varrho} + \frac{c^2 L^2}{k_1^2}} \cdot \cos (\varphi - \psi)}$$

oder, wenn wir $\frac{L^2}{k_1} = p$, $\sqrt{1 - \frac{2L^2}{k_1 . \varrho} + \frac{c^2 L^2}{k_1^{\,2}}} = e$ und $\varphi - \psi = \mu$ setzen:

$$r = \frac{p}{1 + e . \cos \mu},$$

demnach bewegen sich die **Himmelskörper** *in* **Bahnen**, *welche unter dem Namen* **Kegelschnitte** *begriffen sind, und zwar in* **Ellipsen** *wenn* $e < 1$, *in* **Parabeln** *wenn* $e = 1$, *in* **Hyperbeln**, *wenn* $e > 1$ *ist;* hierin spricht sich ***Keppler's zweites Gesetz*** aus. Zugleich geht hervor, dafs der feste Radiusvector, von dem aus der Winkel φ gezählt wird, so liegt, dafs die grofse Axe des Kegelschnittes um den Winkel ψ zurückliegt.

Um nun auch in jedem Augenblick den Ort eines Planeten angeben zu können, müssen wir Gleichungen zwischen r, t und φ, t entwickeln. — Wir fanden oben

$$d\varphi = \frac{L . dr}{r^2 \sqrt{c^2 - \frac{2k_1}{\varrho} + \frac{2k_1}{r} - \frac{L^2}{r^2}}}$$

$$r^2 . d\varphi = L . dt;$$

hieraus aber ergiebt sich:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{c^2 - \frac{2k_1}{\varrho} + \frac{2k_1}{r} - \frac{L^2}{r^2}}},$$

oder, wenn $\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L} = x$ gesetzt wird, weil dann $dr = \frac{-L dx}{\left(x + \frac{k_1}{L}\right)^2}$

$$dt = -\frac{L . dx}{\left(x + \frac{k_1}{L}\right)^2 \sqrt{c^2 - \frac{2k_1}{\varrho} + \frac{k_1^{\,2}}{L^2} - x^2}}$$

$$= -\frac{L . dx}{\left(x + \frac{k_1}{L}\right)^2 \sqrt{u^2 - x^2}}, \quad \text{wo } u^2 = c^2 - \frac{2k_1}{\varrho} + \frac{k_1^{\,2}}{L^2}$$

Um die Integration ausführen zu können, müssen wir suchen letztern Ausdruck rational zu machen. — Wir erreichen dieses, wenn wir setzen:

$$\sqrt{u^2 - x^2} = (u + x)\, z,$$

dann ist

$$z = \sqrt{\frac{u - x}{u + x}}, \quad x = u . \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad u + x = u . \frac{2}{1 + z^2}$$

$$dx = -u \cdot \frac{4\,z\,dz}{(1+z^2)^2}, \quad \sqrt{u^2 - x^2} = u \cdot \frac{2\,z}{1+z^2}$$

$$\left(x + \frac{k_1}{L}\right)^2 = \frac{\left(u + \frac{k_1}{L} + \left(\frac{k_1}{L} - u\right) z^2\right)^2}{(1+z^2)^2}$$

$$dt = \frac{2\,L\,.\,dz\,(1+z^2)}{\left(\frac{k_1}{L} + u + \left(\frac{k_1}{L} - u\right) z^2\right)^2}$$

$$t + \text{Const.} = 2\,L\,.\int \frac{dz\,(1+z^2)}{(m+n\,z^2)^2}$$

Die Form der Partialbrüche, in welche $\frac{1+z^2}{(m+n\,z^2)^2}$ zu zerlegen ist, damit integrirt werden kann, hängt davon ab, ob m und n gleiches oder verschiedenes Zeichen haben; für die Ellipse, wo $e < 1$, welchen Fall wir vorzugsweise betrachten wollen, weil alle Himmelskörper sich in geschlossenen Bahnen bewegen, ist

$$m\,.\,n = \frac{k_1^{\,2}}{L^2} - u^2 = \frac{k_1^{\,2}}{L^2}(1 - e^2),$$

also stets positiv, demnach sind m u. n qualitativ gleich, und es ist zu setzen, um reelle Ausdrücke zu erhalten:

$$\frac{1+z^2}{(m+n\,z^2)^2} = \frac{A}{(m+n\,z^2)^2} + \frac{B}{m+n\,z^2},$$

dann ist

$$A = 1 - \frac{m}{n}, \quad B = \frac{1}{n}$$

$$\frac{(1+z^2)\,dz}{(m+n\,z^2)^2} = \frac{(n-m)\,dz}{n\,(m+n\,z^2)^2} = \frac{dz}{n\,(m+n\,z^2)} \quad \text{und also}$$

$$t + \text{Const.} = 2\,L\,.\,\frac{n-m}{n}\int \frac{dz}{(m+n\,z^2)^2} + \frac{2\,L}{n}\int \frac{dz}{m+n\,z^2}$$

Nun ist aber, wie sich leicht zeigen läſst,

$$\int \frac{dz}{(m+n\,z^2)^2} = \frac{z}{2\,m\,(m+n\,z^2)} + \frac{1}{2\,m}\int \frac{dz}{m+n\,z^2}, \quad \text{daher:}$$

$$t + \text{Const.} = \frac{L\,.\,(n-m)\,.\,z}{m\,.\,n\,(m+n\,z^2)} + \frac{L\,(n-m)}{m\,.\,n}\int \frac{dz}{m+n\,z^2} + \frac{2\,L}{n}\int \frac{dz}{m+n\,z^2}$$

$$= \frac{L\,(n-m)}{m\,.\,n}\,.\,\frac{z}{m+n\,z^2} + \frac{L\,(n+m)}{m\,.\,n}\int \frac{dz}{m+n\,z^2}$$

$$= \frac{L\,(n-m)}{m\,.\,n}\,.\,\frac{z}{m+n\,z^2} + \frac{L\,(n+m)}{m\,.\,n\sqrt{m\,.\,n}}\,.\,\text{Arc}\,.\,\text{tg}\left(z\sqrt{\frac{n}{m}}\right),$$

und weil

$$2 \,\text{Arc} \,.\, \text{tg} \left(z \sqrt{\frac{n}{m}} \right) = \text{Arc} \,.\, \sin \left(\frac{2 z \sqrt{m \,.\, n}}{m + n z^2} \right), \quad \text{so ist}$$

$$t + \text{Const.} = \frac{L\,(n - m)}{2 m \,.\, n \sqrt{m \,.\, n}} \,.\, \frac{2 z \sqrt{m \,.\, n}}{m + n z^2} + \frac{L\,(n + m)}{2 m \,.\, n \sqrt{m \,.\, n}} \,.\, \text{Arc} \,.\, \sin \left(\frac{2 z \sqrt{m \,.\, n}}{m + n z^2} \right);$$

wird

$$\text{Arc} \,.\, \sin \left(\frac{2 z \,.\, \sqrt{m \,.\, n}}{m + n z^2} \right) = E$$

gesetzt, so haben wir

$$t + \text{Const.} = \frac{L\,(m + n)}{2 m \,.\, n \sqrt{m \,.\, n}} \left[E - \left(\frac{m - n}{m + n} \right) \sin E \right].$$

Es war

$$m = \frac{k_1}{L} + u, \quad n = \frac{k_1}{L} - u, \quad \text{also } m + n = \frac{2 k_1}{L}$$

$$m - n = 2 u, \quad \frac{m - n}{m + n} = \frac{L \,.\, u}{k_1}, \quad m \,.\, n = \frac{k_1^2}{L^2} - u^2,$$

da aber

$$u^2 = c^2 - \frac{2 k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2} = \frac{k_1^2}{L^2} \left[1 - \frac{L^2}{k_1^2} \left(\frac{2 k_1}{\varrho} - c^2 \right) \right] = \frac{k_1^2}{L^2} e^2;$$

so ist

$$\frac{m - n}{m + n} = e, \quad m + n = \frac{2 k_1}{L}, \quad m \,.\, n = \frac{k_1^2}{L^2} (1 - e^2);$$

folglich

$$t + \text{Const.} = \frac{L^3}{k_1^2 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} (E - e \,.\, \sin E)$$

$$z = \sqrt{\frac{u - x}{u + x}}, \quad x = \frac{L}{r} - \frac{k_1}{L} = u \,.\, \cos (\varphi - \psi)$$

also

$$z = \sqrt{\frac{1 - \cos (\varphi - \psi)}{1 + \cos (\varphi - \psi)}} = \text{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right).$$

Es war

$$\text{Arc} \sin \left(\frac{2 z \sqrt{m \,.\, n}}{m + n z^2} \right) = E = 2 \,\text{Arc} \,.\, \text{tg} \left(z \sqrt{\frac{n}{m}} \right), \quad \frac{E}{2} = \text{Arc} \,.\, \text{tg} \left(z \sqrt{\frac{n}{m}} \right),$$

aber es ist

$$\sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}, \quad \text{daher } \text{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \,.\, \text{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right),$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin (\varphi - \psi)}{1 + e \,.\, \cos (\varphi - \psi)}, \quad \text{und also}$$

$$E = 2\,\text{Arc}\,.\,\text{tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\;\text{tg}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right) = \text{Arc}\,.\,\sin\left[\frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin(\varphi-\psi)}{1+e\,.\cos(\varphi-\psi)}\right]$$

Nehmen wir an, dafs die Zeit $= 0$, wenn der Planet im Perihelium sich befindet, also wenn $\varphi - \psi = 0$, so ist, bei $t = 0$, auch $E = 0$, und also

$$t = \frac{L^3}{k_1^2\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\,(E - e\,\sin E).$$

Man nennt in der Astronomie den Winkel $(\varphi - \psi)$ *die wahre Anomalie*, E die *excentrische* und die Gröfse $(E - e\,.\,\sin E)$ die *mittlere* Anomalie.

Setzen wir $\dfrac{L^3}{k_1^2\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{N}$ und $E - e\,\sin E = M$, so ist

$$t = \frac{M}{N},\quad N t = M$$

d. h. *die mittlere Anomalie ist der Zeit direkt proportional.*

Mit Leichtigkeit lassen sich auf ähnliche Art die Formeln für t finden, wenn die Bahn eine Parabel oder Hyperbel, wenn e also $= 1$ oder > 1 ist. Wir wollen uns jedoch hiebei nicht aufhalten, sondern zur Herleitung des dritten *Kepplerschen* Gesetzes aus dem *Newtonschen* übergehen.

Wir fanden oben

$$t = \frac{L^3}{k_1^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\,M$$

oder da

$$l^2 = pk_1 \text{ (Pag. 18 Zeile 1.)}$$

$$t = \frac{1}{k_1^{\frac{1}{2}}}\,.\left(\frac{p}{1-e^2}\right)^{\frac{3}{2}}\,.\,M$$

weil nun für die Umlaufszeit T, $M = 2\,\pi$, wie man bald einsieht, so mufs seyn

$$T = \frac{1}{k_1^{\frac{1}{2}}}\,.\left(\frac{p}{1-e^2}\right)^{\frac{3}{2}}.\;2\,\pi = \frac{2\,\pi}{k_1^{\frac{1}{2}}}\,.\,a^{\frac{3}{2}}$$

also $$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{k_1}\,.\,a^3$$

folglich $$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k_1}{4\,\pi^2}$$

Wenn also k_1 eine Constante ist, so ist Keppler's drittes Gesetz in aller Strenge wahr.

Wenden wir uns jetzt zur nähern Bestimmung unserer Constanten und beginnen wir mit k_1, von welchem alle andern Functionen sind.

Aus den *Kepplerschen* Gesetzen ging hervor, dafs zwischen der Sonne und den andern Himmelskörpern eine Kraft besteht, welche die Körper einander näher zu bringen strebt und im Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen abnimmt. Eine solche Kraft, Anziehungskraft genannt, ist der Materie überhaupt eigen, und die Annahme, dafs sie der Sonne allein zukäme, wäre wider alle Gesetze der Mechanik. Wenn wir also der Sonne eine anziehende Kraft beilegen, so müssen wir eine solche, freilich bedeutend geringere, auch den übrigen Weltkörpern zuschreiben. Daraus aber folgt, dafs die Sonne nicht stille stehen kann. Das durch die Sonne gelegte Axensystem, auf welches bezogen, die Bahnen der Himmelskörper Ellipsen sind, steht daher auch nicht fest; nehmen wir nun ein zweites an, welches dem ersten $\#$ und dessen Anfangspunkt fest ist, und nennen die Coordinaten der Bahn der Sonne in Bezug auf dieses zweite

$$x'\ y'\ z',$$

des Planeten

$$x''\ y''\ z'',$$

so haben wir, wenn, wie bisher, x, y, z die Coordinaten der Bahn des Planeten in Bezug auf das erste sind,

$$x = x'' - x'$$

$$y = y'' - y'$$

$$z = z'' - z'$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x''}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y''}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z''}{dt^2} - \frac{d^2z'}{dt^2}$$

Drückt Θ die Anziehungskraft in der Entfernung 1 aus zwischen zwei einander gleichen Massen, welche die Einheit der Massen seyen, so ist die Anziehungskraft zwischen einer Masse m und der Einheit der Massen, in der Entfernung 1, $m\Theta$; die Anziehungskraft zwischen zwei Massen M und m offenbar $\Theta . m . M$, und in der Entfernung r, $\frac{\Theta . m . M}{r^2}$ Dieses ist der Ausdruck für die *bewegende* Kraft.

Wenden wir dieses auf Sonne und Planeten an, indem wir M die Masse der Sonne, m die Masse des Planeten nennen, so ist die *beschleunigende* Kraft für die Sonne $\frac{\Theta . m}{r^2}$, für den Planeten $\frac{\Theta . M}{r^2}$.

Die Determinanten der Richtung der beschleunigenden Kraft für die Sonne sind, weil die Kraft von der Sonne zum Planeten hinwirkt,

$$\frac{x'' - x'}{r}, \quad \frac{y'' - y'}{r}, \quad \frac{z'' - z'}{r},$$

für den Planeten offenbar

$$\frac{x' - x''}{r}, \quad \frac{y' - y''}{r}, \quad \frac{z' - z''}{r}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{\Theta . m\,(x'' - x')}{r^3}; \quad \frac{d^2x''}{dt^2} = \frac{\Theta . M\,(x' - x'')}{r^3}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{\Theta . m\,(y'' - y')}{r^3}; \quad \frac{d^2y''}{dt^2} = \frac{\Theta . M\,(y' - y'')}{r^3}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{\Theta . m\,(z'' - z')}{r^3}; \quad \frac{d^2z''}{dt^2} = \frac{\Theta . M\,(z' - z'')}{r^3}$$

Mithin:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\Theta\,(x' - x'')\,(M + m)}{r^3} = \frac{\Theta\,(M + m)\,x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Theta\,(y' - y'')\,(M + m)}{r^3} = -\frac{\Theta\,(M + m)\,y}{r^3}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\Theta\,(z' - z'')\,(M + m)}{r^3} = -\frac{\Theta\,(M + m)\,z}{r^3}.$$

Folglich ist $k_1 = \Theta\,(M + m) = M . \Theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)$

Wir sehen hieraus, dafs k_1 wohl für einen jeden Planeten, für sich betrachtet, eine Constante ist, nicht aber, wenn die Planeten unter einander verglichen werden; daher ist auch das drittete ***Kepplersche*** Gesetz eigentlich nicht in aller Strenge wahr, denn wir finden

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k_1}{4\pi^2}$$

Diese Constante k_1 steht, bei zwei Planeten, deren Massen m und m_1, im Verhältnifs

$$1 + \frac{m}{M} : 1 + \frac{m_1}{M}$$

Bedenkt man nun aber wie klein die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist, da m und m_1 fast gleish sind und M sehr grofs ist, so sieht man ein, dafs ***Keppler's*** drittes Gesetz, indem er seine Gesetze überhaupt aus Beobachtungen ableitete, die nie ganz vollkommen seyn konnten, sich als wahr bestätigt.

In Betreff der Constanten L gilt Folgendes. Wir nahmen pag. 16 an, dafs für $r = \varrho$ die Geschwindigkeit $= c$ sey; ist für diesen bestimmten Punkt der Bahn $x = \alpha$, $y = \beta$,

$z = \gamma$, so dafs also $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, ferner die Richtung der Geschwindigkeit durch die Determinanten ξ, η, ζ gegeben, so haben wir

$$\frac{dx}{dt} = \xi . c, \quad \frac{dy}{dt} = \eta . c, \quad \frac{dz}{dt} = \zeta . c\,,$$

demnach

$$A = c\,(\beta\zeta - \gamma\eta), \quad B = c\,(\gamma\xi - \alpha\zeta), \quad C = c\,(\alpha\eta - \beta\zeta)$$

aber

$$L = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

folglich

$$L = c\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)^2}$$

$$= c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} . \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} . \xi + \frac{\beta}{\sqrt{}} . \eta + \frac{\gamma}{\sqrt{}} . \zeta\right)^2}$$

$$= c . \varrho . \sin\omega$$

wo $\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} . \xi + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} . \eta + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} . \zeta\right)^2}$

der Winkel ist, welchen die Richtung der Geschwindigkeit in dem Punkten (α, β, γ) mit dem zugehörigen Radiusvector ϱ bildet.

Der Parameter p der Bahn ist

$$\frac{L^2}{k_1} = \frac{\varrho^2 . c^2 . \sin^2 . \omega}{\Theta\,(M + m)} = \frac{\varrho \sin^2\omega}{D}, \quad \text{wo } D = \Theta\,\frac{(M + m)}{c^2\varrho}$$

Die Determinanten der Ebene, in welcher der Kegelschnitt liegt, sind, wie aus pag. 14 hervorgeht, durch die Gröfse A, B, C gegeben.

Die Excentricität ist auch leicht gefunden. Es war pag. 18

$$e = \sqrt{1 + \frac{L^2}{k_1^{\,2}}\left(c^2 - \frac{2k_1}{\varrho}\right)}$$

daher auch

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\varrho . c^2 \sin^2\omega}{\Theta^2(M+m)^2}\right)\Big[c^2\varrho - 2\,\Theta\,(M+m)\Big]} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega}{D^2} - \frac{2\sin^2\omega}{D}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\omega}{D^2}(2D - 1)}$$

Aus Parameter und Excentricität können die Axen berechnet werden.

Um die Lage des Kegelschnitts in der Ebene zu kennen, müssen wir die Lage einer festen Linie in derselben bestimmen, z. B. die Lage des Radiusvectors zum Perihelium; hiezu dient die Constante ψ. Der Winkel φ wurde von einem festen Radiusvector aus gezählt, der Winkel $(\varphi - \psi)$ vom Perihelium, so dafs ψ der Winkel ist, um welchen das Perihelium vom festen Radiusvector absteht. Am natürlichsten ist es den Radiusvector zum sogenannten aufsteigenden Knoteu (Ω) d. h. zu dem Punkte hin, wo die

Bahn die Ebene $X\,Y$ durchschneidet, und zwar wo sie zur positiven Seite der Axe Z übergeht, als fest anzunehmen und von ihm aus den Winkel φ zu zählen. Dann gilt Nachstehendes

$$\varphi - \psi = \text{Arc. cos}\left(\frac{\frac{L}{r} - \frac{k_1}{L}}{\sqrt{c^2 - \frac{2k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2}}}\right)$$

wird in dieser Formel für r ϱ gesetzt, so ist damit der Winkel zwischen dem Radiusvector zum Perihelium und dem Radiusvector ϱ, wo die Geschwindigkeit c ist, gegeben und zwar durch den Ausdruck

$$\text{Arc. cos}\left(\frac{\frac{L}{\varrho} - \frac{k_1}{L}}{\sqrt{c^2 - \frac{2\,k_1}{\varrho} + \frac{k_1^2}{L^2}}}\right)$$

$$= \text{Arc. cos}\left(\frac{c\,.\,\sin\omega - \frac{\Theta\,(M + m)}{c\,.\,\varrho\,.\,\sin\omega}}{\sqrt{c^2 - \frac{2\,\Theta\,(M + m)}{\varrho} + \frac{\Theta^2\,(M + m)^2}{c^2\,\varrho^2\,\sin^2\omega}}}\right)$$

$$= \text{Arc. cos}\left(\frac{c^2\,.\,\varrho\,.\,\sin^2\omega - \Theta\,(M + m)}{\sqrt{c^4\,\varrho^2\,\sin^2\omega - 2c^2\,.\,\varrho\,\sin^2\omega\,.\,\Theta\,(M + m) + \Theta^2\,(M + m)^2}}\right)$$

$$= \text{Arc. sin}\left(\frac{c^2\,.\,\varrho\,\sin\omega\,.\,\cos\omega}{\sqrt{c^4\varrho^2\sin^2\omega - 2c^2.\,\varrho\,.\,\sin^2\omega\,.\,\Theta(M+m) + \Theta^2(M+m)^2}}\right)$$

$$= \text{Arc. sin}\left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{1 - \frac{2\,.\,\Theta\,(M + m)}{c^2\varrho} + \frac{\Theta^2\,(M + m)^2}{c^4\,.\,\varrho^2\,.\,\sin^2\omega}}}\right)$$

$$= \text{Arc. sin}\left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{1 - 2\,D + \frac{D^2}{\sin^2\omega}}}\right)$$

$$= \text{Arc. sin}\left(\frac{\cos\omega}{+\sqrt{(D-1)^2 + D^2\cot\!g^2\omega}}\right)$$

Um das Vorzeichen $(+)$ in der letzten Formel zu rechtfertigen, wollen wir nachstehende Betrachtungen anstellen. Wir bezeichneten den Winkel, welchen der Radiusvector ϱ mit der Richtung der Geschwindigkeit c im Punkte $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ macht mit w; ist dieser spitz, so liegt der Punkt $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ vor dem Perihelium, d. h. der Art, dafs der

Himmelskörper bei seiner Bewegung zuerst in's Perihelium und dann in den Punkt gelangt; ist derselbe stumpf, so liegt der Punkt (α, β, γ) hinter dem Perihelium, d. h. der Art, dafs der Himmelskörper bei seiner Bewegung zuerst in den Punkt (α, β, γ) kommt und dann in's Perihelium; liegt nun aber der Punkt (α, β, γ) vor dem Perihelium, so ist der Winkel, der von den Radienvectoren zum Perihelium und zum Punkte hin eingeschlossen wird, positiv, liegt er hinter dem Perihelium, so ist der Winkel negativ. Hieraus aber folgt, dafs die Wurzelgröfse das Vorzeichen $+$ haben mufs, damit im ersten Falle, der Winkel zwischen den beiden besagten Radienvectoren positiv sey, weil $\cos \omega$ positiv ist, im zweiten Fall der Winkel zwischen jenen beiden Radienvectoren negativ sey, weil $\cos \omega$ negativ ist.

Hiemit wären die Constanten bestimmt. Werfen wir auf die Hauptergebnisse schliefslich nochmals unsern Blick, so geht hervor, *dafs Keppler's erstes und zweites Gesetz* sich nach dem *Newton*schen Gravitationsgesetz *als wahr erweist und auch das dritte Gesetz mit vollem Rechte von ihm aufgestellt werden konnte*, weil es sich, *wenn auch nicht als vollkommen wahr*, so doch als der Wahrheit *sehr nahe kommend* herausstellt. Unstreitig ist das *Newton*sche Gravitationsgesetz umfassender; aus diesen folgte unter andern auch, dafs die Sonne nicht stille steht, sondern dafs sie durch die anziehende Kraft des Planeten bewegt wird, wie der Planet durch die der Sonne; diese Bewegung der Sonne aber wird bei der Berechnung der Bahnen der Himmelskörper auf die Planeten geworfen, und die Sonne als durchaus feststehend betrachtet.