EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED 6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Х. КЕРЕС

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ „ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ“ В ОБЩЕМ ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ ПЕАНО

ЭСТОНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED **6** МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Х. КЕРЕС

SUNDEKSEMPLAR

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ „ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ" В ОБЩЕМ ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ ПЕАНО

ЭСТОНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1950 ТАРТУ

TRÜ teoreetilise füüsika kateeder
Juhataja: H. Keres.

В общем поле направлений, заданном уравнением $p=f(x,y)$, для фиксированной начальной точки определяются две системы ломаных линий, каждая из которых сходится к непрерывной предельной кривой. Эти предельные кривые являются графиками двух функций, находящихся с функцией $f(x,y)$ в соотношении, аналогичном соотношению между верхним и нижним интегралами Дарбу и подинтегральной функцией в случае одной независимой переменной. Поэтому эти кривые условно можно назвать верхней и нижней „интегральными кривыми“, несмотря на то, что они могут и не быть интегральными кривыми для дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ в обычном смысле. Пользуясь этими понятиями верхней и нижней интегральных кривых, можно придать доказательству теоремы Пеано сравнительно простой вид. Этот способ доказательства представляет сочетание известного полигонального метода Коши с методом Перрона *), являясь дополнением к теории основ дифференциальных уравнений.

I.

1. Рассмотрим общее поле направлений, данное уравнением

$$p=f(x,y),$$

где через p обозначен угловой коэффициент линейного элемента, проходящего через точку (x,y). Относительно функции $f(x,y)$ мы предположим, что она ограничена и однозначна в некоторой прямоугольной области

$$(R):\ |x-x_0|\leqslant a,\qquad |y-y_0|\leqslant b.$$

Следовательно, существует такое положительное число M, независимое от x и y, что неравенство $|f(x,y)|\leqslant M$ выполняется для всех точек области (R).

Проведём через точку P_0, с координатами x_0 и y_0, две прямые s_1 и s_2, первая из которых имеет угловой коэффициент $+M$, а

---

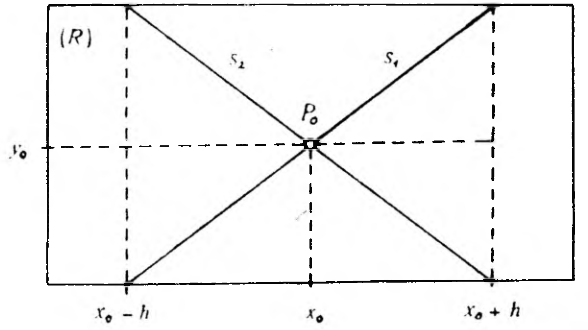
*) Краткий обзор важнейших доказательств теоремы существования можно найти в статье М. Ф. Бокштейна, „Теоремы существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений“, Учёные Записки Московского Госуниверситета, вып. XV (математика), 1939.

вторая — $-M$ (черт. 1). Точки пересечения этих прямых с вертикальными линиями $x = x_0 \pm h$ не будут лежать вне области (R), если через h обозначено наименьшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$.

2. Пусть δ будет произвольное положительное число. Обозначим через $(x_i, y_i; 2\delta)$ круговую область, определённую неравенством

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leqslant 4\delta^2.$$

Пусть $G(x_i, y_i; 2\delta)$ будет верхняя грань значений функции $f(x, y)$ в круге $(x_i, y_i; 2\delta)$.



Черт. 1.

Теперь построим ломаную линию следующим образом: из начальной точки (x_0, y_0) проведём отрезок прямой с угловым коэффициентом равным $G(x_0, y_0; 2\delta)$ и длиной, не превосходящей δ, конец $P_1 = (x_1, y_1)$ которого лежит справа от точки (x_0, y_0), т. е. $x_1 > x_0$; затем из точки P_1 проведём новый отрезок прямой с угловым коэффициентом равным $G(x_1, y_1; 2\delta)$ и длиной, не превосходящей δ; пусть конец его, $P_2 = (x_2, y_2)$, лежит справа от точки P_1, т. е. $x_2 > x_1$, и т. д. Если какой-нибудь из кругов $(x_i, y_i; 2\delta)$ будет частью лежать вне прямоугольника (R), то мы примем за угловой коэффициент отрезка прямой, проведённого из точки (x_i, y_i), вместо $G(x_i, y_i; 2\delta)$ верхнюю грань значений функции $f(x, y)$ только в общей части круга $(x_i, y_i; 2\delta)$ и прямоугольника (R).

Построенная таким образом ломаная линия, с началом в точке (x_0, y_0), лежит полностью между двумя граничными лучами σ_1 и σ_2, проходящими через точку (x_0, y_0) и имеющими угловые коэффициенты, соответственно равные верхней и нижней граням значений функции $f(x, y)$ в области (R), ибо ломаная линия не может отклоняться от горизонтальной больше, чем в том случае, если бы все углы, составляемые её звеньями с осью Ox, постоянно имели наибольшее (или наименьшее) допустимое значение ω_1 (или ω_2), где через ω_1 (ω_2) обозначен угол луча σ_1 (σ_2) с осью Ox. Так как

$$-M \leqslant \operatorname{tg} \omega_2 \leqslant \operatorname{tg} \omega_1 \leqslant M,$$

то лучи σ_1 и σ_2 должны лежать между прямыми s_1 и s_2 (черт. 1), откуда вытекает, что наша ломаная линия, не выходя из прямоугольника (R), всегда достигает вертикальной линии $x = x_0 + h$. Назовём эту полигональную линию *правою верхнею ломаною* с начальною точкою (x_0, y_0) и обозначим её через $\Pi_\delta(P_0)$.

Подобным же образом можно построить *правую нижнюю ломаную* $\pi_\delta(P_0)$ с началом в точке P_0, если мы примем вместо верхней грани $G(x_i, y_i; 2\delta)$ нижнюю грань $g(x_i, y_i; 2\delta)$. Каждой теореме о верхних ломаных будет соответствовать теорема о нижних ломаных и обратно. В дальнейшем мы будем доказывать теоремы только для верхних ломаных, так как соответствующие доказательства для нижних ломаных будут совершенно аналогичны.

3. Фундаментальная лемма. *Если $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, то верхняя ломаная $\Pi_{\delta_1}(P_0)$ не может иметь точек, расположенных выше ломаной $\Pi_\delta(P_0)$.*

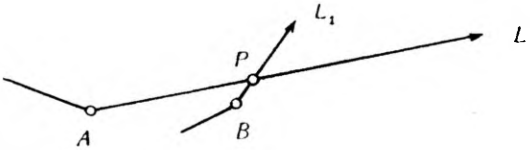
Доказательство. Пусть $y = \varphi_\delta(x)$ и $y = \varphi_{\delta_1}(x)$ будут, соответственно, уравнения ломаных Π_δ и Π_{δ_1}. Следует доказать, что $\varphi_{\delta_1}(x) \leqslant \varphi_\delta(x)$ для всех значений x в промежутке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

Допустим, что существует такое значение $x = a$, $(x_0 < a \leqslant x_0 + h)$, при котором имеет место неравенство $\varphi_{\delta_1}(a) > \varphi_\delta(a)$. Так как $\varphi_\delta(x)$ и $\varphi_{\delta_1}(x)$ являются непрерывными функциями, удовлетворяющими начальному условию $\varphi_\delta(x_0) = \varphi_{\delta_1}(x_0)$, то существует такое крайнее значение $x = \beta$, $(x_0 \leqslant \beta < a)$, для которого $\varphi_\delta(\beta) = \varphi_{\delta_1}(\beta)$, а в интервале $\beta < x \leqslant a$ уже $\varphi_{\delta_1}(x) > \varphi_\delta(x)$. Рассмотрим теперь точку $(x, y) = [\beta, \varphi_\delta(\beta)]$, которая является точкой пересечения ломаных Π_δ и Π_{δ_1} и должна, следовательно, находиться на некотором звене L ломаной Π_δ и на некотором звене L_1 ломаной Π_{δ_1} (черт. 2). Условимся рассматривать звенья ломаной как отрезки без конечных точек, считая угловые точки ломаной только начальными точками её звеньев. Тогда и $P = [\beta, \varphi_\delta(\beta)]$ не будет конечной точкой звена L или L_1, и поэтому, в силу неравенства $\varphi_{\delta_1}(x) > \varphi_\delta(x)$ для значений $\beta < x \leqslant \alpha$, угловой коэффициент звена L_1 должен быть больше, чем угловой коэффициент звена L.

С другой стороны, длина звена L не превосходит значения δ, и длина звена L_1 — значения $\frac{1}{4}\delta$. Поэтому начальная точка B звена L_1 не может находиться ближе к окружности круга $(A; 2\delta)$, чем на $\frac{3}{4}\delta$, так как

$$|AB| \leqslant |AP| + |PB| \leqslant \delta + \frac{1}{4}\delta = \frac{5}{4}\delta.$$

Из этого вытекает, что круг $(B; 2\delta_1)$, $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, должен лежать целиком внутри первого круга $(A; 2\delta)$, и, следовательно, $G(B; 2\delta_1) \leqslant G(A; 2\delta)$, т. е. угловой коэффициент звена L_1 не может быть больше, чем угловой коэффициент звена L. Таким образом, допущение $\varphi_{\delta_1}(a) > \varphi_\delta(a)$ приводит к противоречию. Лемма доказана.



Черт. 2.

4. Теорема I. *Если $\varphi_\delta(x)$ есть функция, графически изображаемая верхней ломаной $\Pi_\delta(P_0)$, то предел*

$$\varphi(x) = \lim_{\delta \to 0} \varphi_\delta(x)$$

существует и равен нижней грани всех функций $\varphi_\delta(x)$. Сходимость к пределу $\varphi(x)$ равномерна.

Доказательство. Прежде всего заметим, что все верхние ломаные $\Pi_\delta(P_0)$ заключены между двумя граничными лучами s_1 и s_2 (п. 2). Поэтому, при данном x множество значений функций $\varphi_\delta(x)$ ограничено, откуда вытекает существование конечной нижней грани $\varphi(x)$ этих значений; функция $\varphi(x)$ очевидно удовлетворяет начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, так как $\varphi_\delta(x_0) = y_0$. Остаётся доказать, что функции $\varphi_\delta(x)$ стремятся равномерно к пределу $\varphi(x)$, если $\delta \to 0$.

Для этого разобьём интервал $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ при помощи точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, где

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x_0 + h,$$

на частичные интервалы длины, меньшей $\frac{\varepsilon}{4M}$, где ε — любое сколь угодно малое положительное число. Так как $\varphi(x) = \inf \varphi_\delta(x)$, то для каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно найти функцию $\varphi_{\delta_\nu}(x)$, отличающуюся в этой точке от $\varphi(x)$ меньше, чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$,

$$0 \leqslant \varphi_{\delta_\nu}(x_\nu) - \varphi(x_\nu) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Пусть δ_p будет наименьшее из n чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Возьмём $\bar\delta \leqslant \frac{1}{4}\delta_p$, тогда, на основании фундаментальной леммы, будем иметь

$$\varphi_{\bar\delta}(x) \leqslant \varphi_{\delta_\nu}(x) \text{ для } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

и, следовательно, в силу (1),

$$0 \leqslant \varphi_{\bar\delta}(x_\nu) - \varphi(x_\nu) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что

$$|\varphi_{\delta'}(x_\nu) - \varphi_{\delta''}(x_\nu)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

если $\delta', \delta'' \leqslant \frac{1}{4}\delta_p$, т. е. ординаты соответствующих верхних ломаных $\Pi_{\delta'}$ и $\Pi_{\delta''}$ для каждого x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ отличаются друг от друга меньше, чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда разность ординат этих ломаных для любого x в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ по абсолютной величине будет не больше ε. В самом деле, точки x_ν на оси Ox отстоят друг от друга меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4M}$, а угловые коэффициенты всех звеньев ломаных $\Pi_{\delta'}$ и $\Pi_{\delta''}$ заключены между двумя числами $+M$ и $-M$; следовательно, какова бы ни была разность ординат в начале некоторого частичного интервала $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$ (её максимальное допустимое значение есть $\frac{1}{2}\varepsilon$), разность ординат в этом интервале во всяком случае не может превосходить значения $\frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$. Таким образом, вместо (3) мы получим новое неравенство

$$|\varphi_{\delta'}(x) - \varphi_{\delta''}(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h \quad \text{и} \quad \delta', \delta'' < \delta, \tag{4}$$

где через δ обозначено $\frac{1}{4}\delta_p$. Здесь δ — положительное число, не зависящее от x, которое можно найти для каждого наперёд заданного произвольно малого положительного числа ε. Если это так, то неравенство (4) является признаком равномерной сходимости к некоторому пределу

$$\psi(x) = \lim_{\delta \to 0} \varphi_\delta(x), \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h). \tag{5}$$

Покажем, что $\psi(x) = \varphi(x)$, т. е. $\lim\limits_{\delta \to 0} \varphi_\delta(x) = \inf \varphi_\delta(x)$. Действительно, неравенство $\psi(x) \geqslant \varphi(x)$ очевидно. Допустим теперь, что существует такое значение $x = a$, для которого будет $\psi(a) > \varphi(a)$. Тогда найдётся функция $\varphi_{\delta_1}(x)$, удовлетворяющая условию

$$\psi(a) > \varphi_{\delta_1}(a) \geqslant \varphi(a),$$

ибо $\varphi(a)$ — нижняя грань всех значений $\varphi_\delta(a)$. Но, в силу (5), можно найти такое положительное число δ, что неравенство

$$|\varphi_{\delta_2}(a) - \psi(a)| < \psi(a) - \varphi_{\delta_1}(a) \tag{6}$$

будет выполнено, если только взять $\delta_2 < \delta$. Возьмём δ_2 меньшим, чем наименьшее из двух чисел δ и $\frac{1}{4}\delta_1$. Тогда получим два противоречащие друг другу неравенства

$$\varphi_{\delta_2}(a) \leqslant \varphi_{\delta_1}(a) \text{ (по фундаментальной лемме),}$$

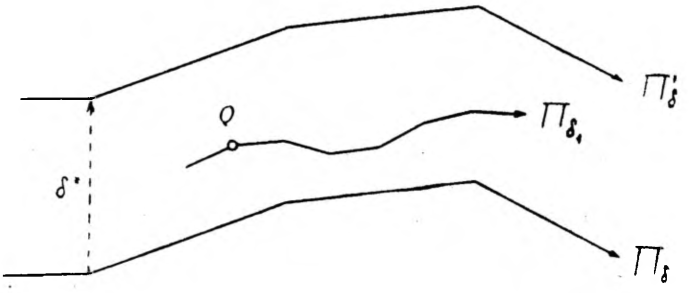
и

$$\varphi_{\delta_2}(a) > \varphi_{\delta_1}(a) \text{ [вследствие (6)].}$$

Из этого противоречия следует, что сделанное выше допущение неправильно и что, поэтому, возможно только равенство $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех значений x в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

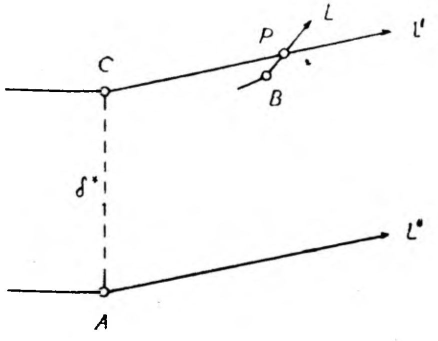
Назовём функцию $\varphi(x)$ *правой верхней предельной функцией*, соответствующей начальной точке P_0, а её график — *верхней предельной кривой*. Функция $\varphi(x)$ непрерывна, потому что её можно рассматривать как предел надлежащим образом выбранной, равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $\varphi_\delta(x)$.

5. Лемма А. *Если Π'_δ обозначает ломаную, полученную из правой верхней ломаной Π_δ путём параллельного перенесения её кверху на отрезок δ^*, где $0 \leqslant \delta^* \leqslant \frac{1}{4}\delta$, и если Π_{δ_1}, $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, обозначает какую-нибудь другую правую верхнюю ломаную, начало которой может и не* *совпасть с началом ломаной Π_δ, но одна из угловых точек которой, Q, лежит ниже или на Π'_δ* (черт. 3), *то та часть ломаной Π_{δ_1}, которая остаётся справа от Q, не может иметь точек выше ломаной Π'_δ.*



Черт. 3.

Доказательство. Для доказательства будем рассуждать от противного. Пусть имеется такая лежащая справа от Q точка ломаной Π_{δ_1}, ордината которой больше ординаты точки ломаной Π'_δ, имеющей с ней общую абсциссу. Здесь, точно так же, как

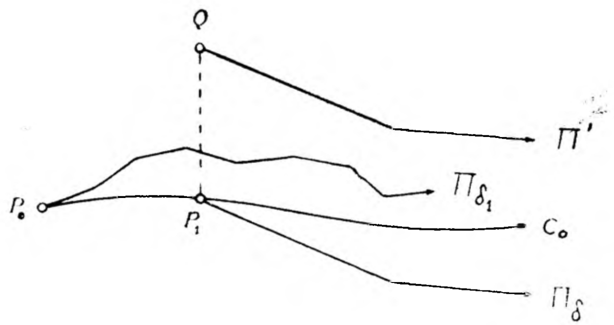


Черт. 4.

в п. 3, мы заключаем, что ломаные Π_{δ_1} и Π'_δ должны пересекаться, т. е. некоторое звено L ломаной Π_{δ_1} должно иметь общую точку P с некоторым звеном L' ломаной Π'_δ, причём угловой коэффициент звена L больше, чем угловой коэффициент звена L' (черт. 4). Но, с другой стороны, начальная точка B звена L не может находиться ближе к окружности круга $(A; 2\delta)$, описанного около начальной точки A звена L'' ломаной Π_δ (из которого получено звено L' путём параллельного перенесения), чем на $\frac{1}{2}\delta$, так как

$$|AB| \leqslant |AC| + |CP| + |PB| \leqslant \frac{1}{4}\delta + \delta + \frac{1}{4}\delta = \frac{3}{2}\delta.$$

Следовательно, круг $(B; 2\delta_1)$, где $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, должен лежать целиком внутри круга $(A; 2\delta)$, так что имеет место неравенство $G(B; 2\delta_1) \leqslant$ $\leqslant G(A; 2\delta)$. Это неравенство выражает то, что угловой коэффициент звена L не может быть больше углового коэффициента звена L'' или — что то же — звена L'. Таким образом, наше первоначальное допущение приводит к противоречию, чем и доказывается утверждение леммы.



Черт. 5.

6. Теорема II. *Если C_0 обозначает правую верхнюю предельную кривую с началом в точке (x_0, y_0), и если (x_1, y_1) — какая-нибудь точка кривой C_0, то правая верхняя предельная кривая C_1, началом которой является точка (x_1, y_1), совпадает с кривой C_0 в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_0 + h$.*

Доказательство. Пусть $y = \varphi_0(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ суть, соответственно, уравнения кривых C_0 и C_1. Обозначим, далее, точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) через P_0 и P_1. Рассмотрим какую-нибудь верхнюю ломаную $\Pi_\delta(P_1)$, уравнением которой является $y = \varphi_{1\delta}(x)$. Сместим эту ломаную параллельным переносом кверху на расстояние $\frac{1}{4}\delta$, обозначая полученную этим путём новую ломаную через Π' и её начальную точку через Q (черт. 5).

Согласно теореме I возможно найти такое положительное число $\bar{\delta}$, что все верхние ломаные $\Pi_{\delta_1}(P_0)$, $\delta_1 \leqslant \bar{\delta}$, пересекают отрезок $P_1 Q$ ниже Q. Если мы возьмём, в частности, $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, то ломаная $\Pi_{\delta_1}(P_0)$, на основании леммы А, не может превышать ломаную Π' ни в одной точке и поэтому должна быть расположена между ломаной Π' и кривой C_0. Отсюда вытекает, что Π' целиком лежит над кривой C_0, и, следовательно, ломаная $\Pi_\delta(P_1)$, проходящая параллельно Π' на расстоянии $\frac{1}{4}\delta$ от неё, не может иметь точек, ординаты которых были бы меньше соответствующих ординат кривой C_0 на величину, превышающую $\frac{1}{4}\delta$.

Это значит, что имеет место неравенство

$$\varphi_{1\delta}(x) \geqslant \varphi_0(x) - \frac{1}{4}\delta, \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_0 + h).$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$, мы получим

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_0(x), \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_0 + h), \tag{1}$$

так как $\lim\limits_{\delta \to 0} \varphi_{1\delta}(x) = \varphi_1(x)$.

Но если мы возьмём новое положительное число δ_2 так, чтобы $\delta_2 \leqslant \frac{1}{4}\delta_1$, то, по лемме А (случай $\delta^* = 0$), верхняя ломаная $\Pi_{\delta_2}(P_1)$ не может превышать ломаную $\Pi_{\delta_1}(P_0)$, и поэтому при $\delta_1 \to 0$ будем также иметь

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_0(x), \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_0 + h). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) \quad \text{для} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_0 + h.$$

7. **Теорема III.** *Пусть $y = \varphi_0(x)$ есть правая верхняя предельная кривая с началом в фиксированной точке (x_0, y_0), и пусть $y = \varphi_1(x)$ — другая правая верхняя предельная кривая, началом которой является переменная точка (x_1, y_1), подчинённая условию $x_1 \geqslant x_0$, $y_1 > \varphi_0(x_1)$. Тогда для каждого произвольно выбранного, положительного числа ε найдётся такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, что*

$$0 \leqslant \varphi_1(x) - \varphi_0(x) < \varepsilon, \quad (\text{при } x_1 \leqslant x \leqslant x_0 + h),$$

если только $0 < y_1 - \varphi_0(x_1) < \eta$.

Другими словами: вертикальное расстояние между точками двух верхних предельных кривых C_0 и C_1, (где кривые $y = \varphi_0(x)$ и

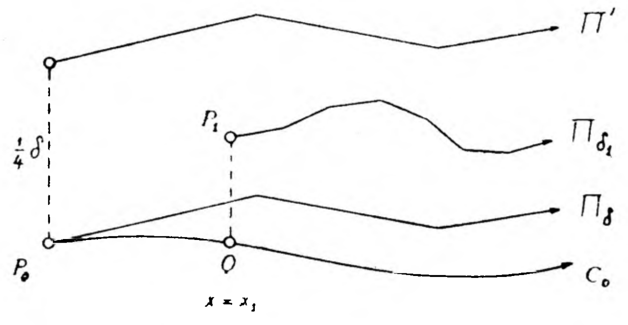
$y=\varphi_1(x)$ обозначены, соответственно, через C_0 и C_1), будет всюду меньше ε, если только начальная точка $P_1(x_1, y_1)$ второй кривой находится достаточно близко к кривой C_0, но не ниже C_0.

Доказательство. Существует, по теореме I, правая верхняя ломаная $\Pi_\delta(P_0)$, данная уравнением $y=\varphi_{0\delta}(x)$, которая удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \varphi_{0\delta}(x)-\varphi_0(x) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h.$$

Положительное число δ, в частности, можно выбрать меньше ε.

Перенесём эту ломаную $\Pi_\delta(P_0)$ параллельно себе кверху на расстояние $\frac{1}{4}\delta$ и обозначим полученную ломаную через Π' (черт. 6).



Черт. 6.

Теперь каждая точка P_1 с координатами x_1 и y_1, где $x_1 \geqslant x_0$ и $0 < y_1-\varphi_0(x_1) < \frac{1}{4}\delta$, окажется в полосе S, ограниченной ломаной Π' и кривой C_0.

Построим какую-нибудь верхнюю ломаную $\Pi_{\delta_1}(P_1)$, $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, исходящую из P_1. Эта ломаная, по лемме А, не может превышать ломаную Π'; но она также не может опуститься ниже кривой C_0. В самом деле, согласно теореме I, можно найти верхнюю ломаную $\Pi_{\delta_2}(P_0)$, $\delta_2 \leqslant \frac{1}{4}\delta_1$, пересекающую вертикальный отрезок P_1Q (черт. 6) ниже P_1, и поэтому, по лемме А, не превышающую ломаную $\Pi_{\delta_1}(P_1)$, т. е. ломаная $\Pi_{\delta_1}(P_1)$ не опускается ниже ломаной $\Pi_{\delta_2}(P_0)$, а тем более ниже кривой C_0. Итак, все ломаные $\Pi_{\delta_1}(P_1)$, $\delta_1 \leqslant \frac{1}{4}\delta$, а вместе с ними и предельная кривая $C_1 = \lim\limits_{\delta_1 \to 0} \Pi_{\delta_1}(P_1)$ заключены в полосе S. Так как ширина полосы S меньше, чем $\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\delta < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon < \varepsilon$, то имеет место неравенство $0 \leqslant \varphi_1(x) - \varphi_0(x) < \varepsilon$, если $0 < y_1 - \varphi_0(x_1) < \eta$, где η обозначает число $\frac{1}{4}\delta$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы III. $\lim\limits_{P_1 \to P_2} C_1 = C_0$ для $x_2 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, где через P_2 обозначена какая-нибудь фиксированная точка (x_2, y_2) на кривой C_0.

8. Рассмотрим верхнюю ломаную $\Pi_\delta(P_0)$, угловыми точками которой являются (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_m, y_m), где $x_m = x_0 + h$. Обозначая $x_{n+1} - x_n = \Delta x_n$, $y_{n+1} - y_n = \Delta y_n$, мы имеем, по самому определению верхней ломаной, равенства:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= G(x_0, y_0; 2\delta)\, \Delta x_0, \\ \Delta y_1 &= G(x_1, y_1; 2\delta)\, \Delta x_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Delta y_n &= G(x_n, y_n; 2\delta)\, \Delta x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1}$$

где $G(x_n, y_n; 2\delta)$ означает, как и в пункте 2, верхнюю грань значений функции $f(x, y)$ в круге $(x_n, y_n; 2\delta)$. Складывая эти равенства, получим

$$y_m - y_0 = \sum_0^{m-1} G(x_n, y_n; 2\delta)\, \Delta x_n. \tag{2}$$

Здесь Δx_n, как проекция звена $P_n P_{n+1}$ на ось Ox, не превосходит δ. Если возьмём вместо верхней грани $G(x_n, y_n; 2\delta)$ нижнюю грань $g(x_n, y_n; 2\delta)$, то получим для правой нижней ломаной $\pi_\delta(P_0)$ подобное же уравнение

$$y_m - y_0 = \sum_0^{m-1} g(x_n, y_n; 2\delta)\, \Delta x_n. \tag{3}$$

Обе суммы, как мы знаем, стремятся при $\delta \to 0$ к определённым пределам.

Допустим теперь, что функция $f(x, y)$ не зависит от y, т. е. что мы имеем дело с функцией $f(x)$ только одной переменной. Тогда $G(x_n, y_n; 2\delta)$ будет равным верхней грани значений функции $f(x)$, $\sup f(x)$, в интервале $x_n - 2\delta \leqslant x \leqslant x_n + 2\delta$, длина которого равна

4δ и середина которого находится в точке x_n. Обозначим эту верхнюю грань через $G(x_n; 2\delta)$ и соответствующую нижнюю грань через $g(x_n; 2\delta)$. Тогда равенства (2) и (3) перепишутся так:

$$y_m - y_0 = \sum_0^{m-1} G(x_n; 2\delta)\, \Delta x_n, \tag{4}$$

и

$$y_m - y_0 = \sum_0^{m-1} g(x_n; 2\delta)\, \Delta x_n. \tag{5}$$

Эти выражения можно рассматривать как обобщённые суммы Дарбу; первое из них не меньше, а второе не больше, чем соответствующая сумма Дарбу, так как в сумме Дарбу вместо $G(x_n, 2\delta)$ — или $g(x_n, 2\delta)$ — находится верхняя — или нижняя — грань значений функции $f(x)$ только в частичном интервале $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$. Обозначая суммы (4) и (5) через $\overline{S}_m$, $\underline{S}_m$, а соответствующие суммы Дарбу через $\overline{S}_m^*$, $\underline{S}_m^*$, мы имеем соответственно:

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{S}_m \geqslant \lim_{\delta \to 0} \overline{S}_m^* = \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(x)\, dx, \tag{6}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \underline{S}_m \leqslant \lim_{\delta \to 0} \underline{S}_m^* = \underline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(x)\, dx, \tag{7}$$

где знак $\overline{\int}$ означает верхний, а знак $\underline{\int}$ нижний интеграл Дарбу. С другой стороны, нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \overline{S}_m$ будет не больше, чем какая угодно наперёд выбранная сумма Дарбу $\overline{S}^*$, а $\lim\limits_{\delta \to 0} \underline{S}_m$ не меньше суммы $\underline{S}^*$. Следовательно, и

$$\lim \overline{S}_m \leqslant \lim \overline{S}_m^*, \quad \lim \underline{S}_m \geqslant \lim \underline{S}_m^*,$$

откуда, совместно с (6) и (7), следует

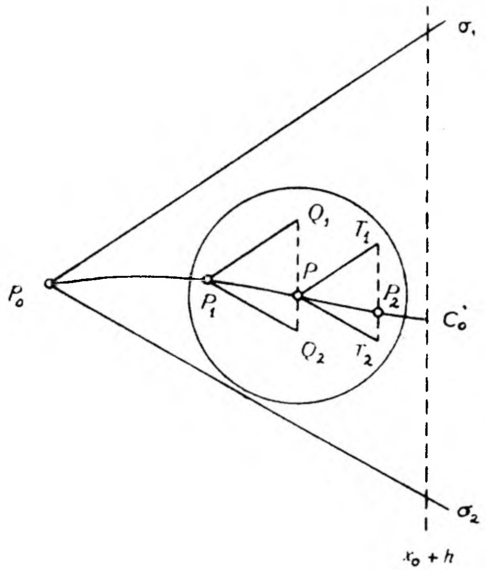
$$\lim_{\delta \to 0} \overline{S}_m = \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(x)\, dx, \qquad \lim_{\delta \to 0} \underline{S}_m = \underline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(x)\, dx.$$

Таким образом пределы сумм (2) и (3) в случае только одной независимой переменной x являются обычными верхним и нижним интегралами Дарбу; поэтому в общем случае, при наличии и другой переменной y, пределы этих сумм следует рассматривать как обобщения интегралов Дарбу. Их графики, т. е. верхняя и нижняя предельные кривые, заслуживают названия верхней и нижней „интегральных кривых“.

9. Теорема IV. *Четыре производных числа* $\overline{D}_-\varphi$, $\underline{D}_-\varphi$, $\overline{D}_+\varphi$, $\underline{D}_+\varphi$ *верхней предельной функции* $\varphi(x)$ *заключены между двумя границами* $\underline{f}(x, \varphi)$ и $\overline{f}(x, \varphi)$, *где*

$$\underline{f}(P) = \varliminf_{X \rightrightarrows P} f(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} g(P; \varepsilon)$$

$$\overline{f}(P) = \varlimsup_{X \rightrightarrows P} f(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} G(P; \varepsilon).$$



Черт. 7.

Доказательство. Обозначим график функции $\varphi(x)$ через C_0. Пусть будет $P(\alpha, \beta)$ какая-нибудь точка на кривой C_0. Выберем на линии C_0 вблизи точки P две новые точки, $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, первую слева от P, а вторую справа от P (черт. 7). По теореме II, дуга кривой C_0 между точками P_1 и P аппроксимируется сверху ломаными $\Pi_\delta(P_1)$, выходящими из точки P_1. Все эти верхние ломаные, как показано в пункте 2, заключены между двумя граничными прямыми, проходящими через P_1 и параллельными к лучам σ_1 и σ_2, т. е. они все расположены внутри треугольника $P_1 Q_1 Q_2$, где через Q_1, Q_2 обозначены точки пересечения упомянутых граничных прямых с вертикальной линией $x = a$. Подобным же образом дугу кривой C_0 между точками P и P_2 можно аппроксимировать сверху ломаными $\Pi_\delta(P)$, которые все расположены внутри некоторого треугольника $PT_1 T_2$.

Теперь опишем около точки P круг достаточно большого радиуса ε так, чтобы все пять точек P_1, Q_1, Q_2, T_1, T_2 находились в этом круге. Тогда маленькие круги радиуса 2δ, описанные около угловых точек ломаных $\Pi_\delta(P_1)$ и $\Pi_\delta(P)$, будут все лежать внутри большого круга $(P; \varepsilon)$, если только взять δ достаточно малым. Следовательно, в выражении разности ординат начальной и конечной точки верхней ломаной $\Pi_\delta(P)$, которое согласно п. 8 (2) напишется так:

$$\bar{y}_m - \beta = \Sigma G(\bar{x}_n, y_n; 2\delta)\, \Delta x_n, \tag{1}$$

угловые коэффициенты звеньев, $G(\bar{x}_n, \bar{y}_n; 2\delta)$, удовлетворяют условию

$$g(a, \beta; \varepsilon) \leqslant G(\bar{x}_n, \bar{y}_n; 2\delta) \leqslant G(a, \beta; \varepsilon). \tag{2}$$

Из (1) и (2), принимая во внимание, что $\Sigma \Delta x_n = x_2 - a$, мы выводим неравенство

$$g(P; \varepsilon)(x_2 - a) \leqslant \bar{y}_m - \beta \leqslant G(P; \varepsilon)(x_2 - a).$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$, мы получим

$$g(P; \varepsilon)(x_2 - a) \leqslant y_2 - \beta \leqslant G(P; \varepsilon)(x_2 - a), \tag{3}$$

так как $\lim\limits_{\delta \to 0} \bar{y}_m = y_2$.

Точно таким же образом для дуги $P_1 P$ кривой C_0 получается аналогичное неравенство

$$g(P; \varepsilon)(a - x_1) \leqslant \beta - y_1 \leqslant G(P; \varepsilon)(a - x_1). \tag{4}$$

Если введём обозначения $x_i - a = \Delta x$, $y_i - \beta = \Delta y$, $(i = 1,2)$, то неравенства (3) и (4) можно написать в общем виде

$$g(P; \varepsilon) \leqslant \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant G(P; \varepsilon). \tag{5}$$

Очевидно, что (5) является справедливым для всех значений Δx, меньших по абсолютной величине, чем $\min(x_2 - a, a - x_1)$. Благодаря этому, предельный переход при $\Delta x \to 0$ возможен и даёт

$$g(P; \varepsilon) \leqslant \overline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant G(P; \varepsilon), \tag{6}$$

где

$$\underline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \min\left[\underline{D}_- \varphi(a),\ \underline{D}_+ \varphi(a)\right],$$

$$\overline{\lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \max\left[\overline{D}_- \varphi(a),\ \overline{D}_+ \varphi(a)\right].$$

Но в равенстве (6) положительное число ε может быть выбрано уже сколь угодно малым, и поэтому, при $\varepsilon \to 0$, получим, окончательно,

$$\underline{f}(a, \beta) \leqslant \overline{\underline{\lim}}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant \bar{f}(a, \beta), \tag{7}$$

где $\beta = \varphi(a)$, что и доказывает теорему.

Следствие из теоремы IV. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в какой-нибудь точке P на верхней предельной кривой C_0, то кривая C_0 имеет в точке P касательную, угловой коэффициент которой равен значению $f(P)$.*

В самом деле, согласно условию, имеет место равенство $\underline{f}(P) = \bar{f}(P) = f(P)$, вследствие чего все четыре производных числа функции $\varphi(x)$, при x равном абсциссе точки P, совпадают и равны значению $f(P)$.

10. Мы уже установили (п. 2) неравенство

$$(x_1 - x_0)\operatorname{tg}\omega_2 \leqslant y_1 - y_0 \leqslant (x_1 - x_0)\operatorname{tg}\omega_1,$$

где (x_1, y_1) есть какая-нибудь точка верхней предельной кривой C_0 с началом в точке (x_0, y_0). Выведем теперь более точные границы для разности $y_1 - y_0$.

Рассмотрим дугу верхней предельной кривой C_0, соответствующую изменению x от ξ_1 до ξ_2, $(\xi_1 < \xi_2)$, и обозначим её через ΔC_0. Опишем около каждой точки дуги ΔC_0 круг радиуса ε. Замкнутую область, составленную из площадей этих кругов, обозначим через $\Omega(\varepsilon)$ (черт. 8). Пусть $H(\varepsilon)$ будет верхней гранью значений $f(x, y)$ в области $\Omega(\varepsilon)$, а S — верхней гранью значений функции $\bar{f}(P)$ на ΔC_0:

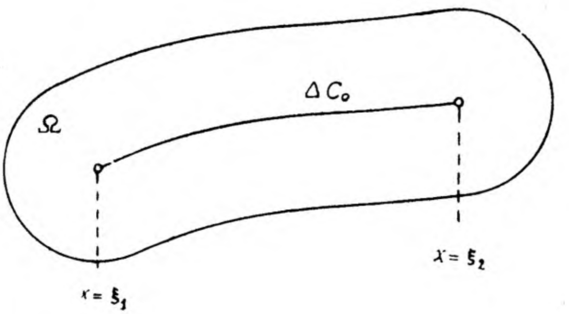
$$H(\varepsilon) = \sup_{P \varepsilon \Omega} f(P), \quad S = \sup_{P \varepsilon \Delta C_0} \bar{f}(P).$$

Лемма В. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} H(\varepsilon) = S.$

Доказательство. Возьмём убывающую последовательность любых положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, причём $\varepsilon_n \to 0$. Для всякого положительного числа λ, (независимого от n), найдётся в каждой области $\Omega(\varepsilon_n)$ такая точка P_n, что

$$H(\varepsilon_n) - \lambda < f(P_n) \leqslant H(\varepsilon_n), \tag{1}$$

т. к. по определению $H(\varepsilon_n)$ — верхняя грань значений $f(P)$ в области $\Omega(\varepsilon_n)$. Последовательность $\{P_n\}$ точек P_n расположена, очевидно, в области $\Omega(\varepsilon_1)$ и, следовательно, должна иметь по крайней мере одну предельную точку P, которая обязательно лежит на ΔC_0, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(\varepsilon_n) = \Delta C_0$.



Черт. 8.

Пусть $\{P_{r_n}\}$ означает какую-нибудь подпоследовательность, выбранную из $\{P_n\}$ и сходящуюся к предельной точке P. Тогда будет

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(P_{r_n}) \leqslant \bar{f}(P), \tag{2}$$

так как, согласно определению (п. 9), $\bar{f}(P) = \varlimsup\limits_{X \geqq P} f(X)$. Из (1) и (2) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} H(\varepsilon_{r_n}) - \lambda \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f(P_{r_n}) \leqslant \bar{f}(P) \leqslant S,$$

или, так как $H(\varepsilon)$ не возрастает при убывании ε,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H(\varepsilon) - \lambda \leqslant S.$$

Это неравенство выполняется при любом положительном λ, откуда следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H(\varepsilon) \leqslant S. \tag{3}$$

С другой стороны, функция $G(P;\varepsilon)$ при убывании ε также не возрастает, причём $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G(P;\varepsilon)=\bar{f}(P)$, (п. 9), откуда вытекает, что $G(P;\varepsilon)\geqslant\bar{f}(P)$, и поэтому также

$$\sup_{P\varepsilon\Delta C_0} G(P;\varepsilon)\geqslant\sup_{P\varepsilon\Delta C_0}\bar{f}(P)=S.$$

Но легко проверить, что

$$\sup_{P\varepsilon\Delta C_0} G(P;\varepsilon)=\sup_{P\varepsilon\Omega} f(P)=H(\varepsilon),$$

в силу чего из последнего неравенства получается $H(\varepsilon)\geqslant S$ и вместе с тем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H(\varepsilon)\geqslant S. \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H(\varepsilon)=S$.

То же рассуждение повторится и в том случае, если вместо верхних граней будем рассматривать нижние грани. Мы имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon)=J, \tag{5}$$

где

$$h(\varepsilon)=\inf_{P\varepsilon\Omega} f(P) \quad \text{и} \quad J=\inf_{P\varepsilon\Delta C_0}\underline{f}(P).$$

11. Пусть ξ_1, η_1 — координаты начальной точки дуги ΔC_0, а ξ_2, η_2 — координаты её конечной точки. Зададим сколь угодно малое положительное число ε. Теперь разобьём интервал $\xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2$ на конечное число достаточно малых частей, n-ая из которых имеет длину Δx_n, так что, при выбранном нами числе ε, для каждого частичного интервала было бы применимо неравенство 9. (3). Складывая почленно все эти неравенства, будем иметь

$$\Sigma g(P_n;\varepsilon)\,\Delta x_n\leqslant\eta_2-\eta_1\leqslant\Sigma G(P_n;\varepsilon)\,\Delta x_n, \tag{1}$$

где P_n обозначает точку на дуге ΔC_0, соответствующую началу частичного интервала Δx_n. Так как все круги $(P_n;\varepsilon)$ расположены в области $\Omega(\varepsilon)$, то, очевидно, справедливо неравенство

$$h(\varepsilon)\leqslant g(P_n;\varepsilon)\leqslant G(P_n;\varepsilon)\leqslant H(\varepsilon).$$

Подставляя в (1) вместо $g(P_n;\varepsilon)$ значение $h(\varepsilon)$ и вместо $G(P_n;\varepsilon)$ значение $H(\varepsilon)$, получим:

$$h(\varepsilon)(\xi_2-\xi_1)\leqslant\eta_2-\eta_1\leqslant H(\varepsilon)(\xi_2-\xi_1),$$

откуда, при $\varepsilon \to 0$, на основании леммы B, вытекает

$$J(\xi_2-\xi_1) \leqslant \eta_2-\eta_1 \leqslant S(\xi_2-\xi_1). \tag{2}$$

12. Рассмотрим отрезок верхней предельной кривой C_0 между начальной точкой (x_0, y_0) и какой-нибудь другой её точкой (x_1, y_1). Разобьём интервал $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ на несколько частей и применим затем к каждому частичному интервалу неравенство 11. (2). Складывая все эти неравенства почленно, находим, что

$$\Sigma J_n \Delta x_n \leqslant y_1 - y_0 \leqslant \Sigma S_n \Delta x_n. \tag{1}$$

Но J_n, как видно из его определения в п. 10, означает нижнюю грань значений функции $\underline{f}[x, \varphi(x)]$ одной переменной x в частичном интервале Δx_n, а S_n — верхнюю грань значений функции $\bar{f}[x, \varphi(x)]$ в интервале Δx_n. Следовательно, обе суммы в (1) являются суммами Дарбу, так что можем написать

$$\underline{\int_{x_0}^{x_1}} \underline{f}(x, \varphi)\, dx \leqslant y_1 - y_0 \leqslant \overline{\int_{x_0}^{x_1}} \bar{f}(x, \varphi)\, dx. \tag{2}$$

Это и есть границы для $y_1 - y_0$, упомянутые в начале пункта 10.

13. Теорема V. *Если интеграл Лебега*

$$(L)\int_{x_0}^{x} [\bar{f}(x, \varphi) - \underline{f}(x, \varphi)]\, dx$$

равен нулю, то верхняя предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi)\, dx,$$

правая часть которого содержит интеграл Римана.

Доказательство. Как известно, верхний интеграл Дарбу $\overline{\int_{x_0}^{x_1}} \bar{f}(x, \varphi)\, dx$ можно написать в виде интеграла Лебега $(L)\int_{x_0}^{x_1} \bar{\bar{f}}(x, \varphi)\, dx$, где

$$\bar{\bar{f}}[\xi, \varphi(\xi)] = \overline{\lim_{x \to \xi}}\, \bar{f}[x, \varphi(x)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|x-\xi| \leqslant \varepsilon} \bar{f}[x, \varphi(x)].$$

Из последнего определения функции $\bar{\bar{f}}$ вытекает, что

$$\bar{\bar{f}}[\xi, \varphi(\xi)] \geqslant \bar{f}[\xi, \varphi(\xi)],$$

так как $\sup\limits_{|x-\xi| \leqslant \varepsilon} \bar{f}(x, \varphi) \geqslant f[\xi, \varphi(\xi)]$.

С другой стороны, обозначая точку $[\xi, \varphi(\xi)]$ через P, мы можем утверждать, что

$$\bar{\bar{f}}(P) \leqslant \overline{\lim_{Q \rightrightarrows P}}\ \bar{f}(Q).$$

В самом деле, предел в правой части этого неравенства является наибольшим из всех предельных значений, которые возможно получить при любом способе приближения точки Q к точке P, а предел в левой части получен при приближении точки Q к P только определённым специальным образом, именно вдоль кривой C_0.

Но функция $\bar{f}(Q)$ сверху полунепрерывна; поэтому

$$\overline{\lim_{Q \rightrightarrows P}}\ \bar{f}(Q) = \bar{f}(P),$$

и следовательно, в силу последнего неравенства, $\bar{\bar{f}}(P) \leqslant \bar{f}(P)$. Значит, $\bar{\bar{f}}(P) = \bar{f}(P)$, и вместе с тем

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} \bar{f}(x, \varphi)\, dx = (L) \int_{x_0}^{x_1} \bar{f}(x, \varphi)\, dx.$$

Подобным же образом нижний интеграл Дарбу $\underline{\int_{x_0}^{x_1}} \underline{f}(x, \varphi)\, dx$ можно написать в виде интеграла Лебега $(L) \int_{x_0}^{x_1} \underline{f}(x, \varphi)\, dx$, где

$$\underline{\underline{f}}(P) = \underline{\lim_{x \rightrightarrows \xi}}\ \underline{f}(x, \varphi) = \underline{f}(P).$$

Отсюда вытекает, что в п. 12 (2) интегралы Дарбу можно заменить интегралами Лебега, так что

$$(L) \int_{x_0}^{x_1} \underline{f}(x, \varphi)\, dx \leqslant y_1 - y_0 \leqslant (L) \int_{x_0}^{x_1} \bar{f}(x, \varphi)\, dx. \tag{1}$$

Далее, в силу неравенства $\underline{f}(P) \leqslant f(P) \leqslant \bar{f}(P)$, имеем

$$(L)\int_{x_0}^{x_1} \underline{f}(x, \varphi)\, dx = \underline{\int_{x_0}^{x_1}} \underline{f}(x, \varphi)\, dx \leqslant \underline{\int_{x_0}^{x_1}} f(x, \varphi)\, dx \leqslant \overline{\int_{x_0}^{x_1}} f(x, \varphi)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\int_{x_0}^{x_1}} \bar{f}(x, \varphi)\, dx = (L)\int_{x_0}^{x_1} \bar{f}(x, \varphi)\, dx.$$

Если теперь допустим, что

$$(L)\int_{x_0}^{x_1} \underline{f}(x, \varphi)\, dx = (L)\int_{x_0}^{x_1} \bar{f}(x, \varphi)\, dx,$$

то, как видно,

$$\underline{\int_{x_0}^{x_1}} f(x, \varphi)\, dx = \overline{\int_{x_0}^{x_1}} f(x, \varphi)\, dx = y_1 - y_0,$$

т. е. интеграл Римана $\int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi)\, dx$ существует и равен разности $y_1 - y_0$.

14. Выведем ещё общие границы для вертикального расстояния $D(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ между правой верхней и правой нижней предельными кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, исходящими из общей начальной точки (x_0, y_0).

Если функция $f(x, y)$ ограничена в прямоугольнике (R), (п. 1), то всегда найдётся два таких положительных, не зависящих от x и y, числа A и N, что в (R) выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant A + N|y_1 - y_2|. \tag{1}$$

Например, выбор $N = 0$, $A = 2M$ всегда возможен. Если, в частности, будет возможным взять $A = 0$, то неравенство (1) приводится к условию Липшица.

Пусть, далее, $\varepsilon(\xi)$ будет верхней гранью абсолютных величин разностей

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)|, \quad |x_1 - x_2| \leqslant \xi,$$

составленных для всех пар точек (x_1, y) и (x_2, y) в прямоугольнике (R), которые отстоят друг от друга не больше, чем на расстояние ξ. Она не возрастает при убывании ξ и стремится при $\xi \to 0$ к некоторому неотрицательному пределу ε_0. Если $\varepsilon_0 = 0$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике (R) относительно x.

Рассмотрим прямоугольник, вертикальная сторона которого имеет длину η, а горизонтальная — длину ξ (черт. 9). Возьмём в этом прямоугольнике две произвольные точки $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$; тогда третья точка $P_3 = (x_2, y_1)$ будет лежать также в прямоугольнике, так что, согласно (1), будет иметь место неравенство

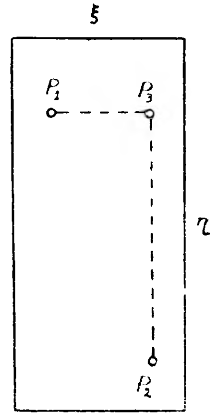
$$|f(P_3) - f(P_2)| \leqslant A + N|y_1 - y_2| \leqslant A + N\eta,$$

а, кроме того, и неравенство

$$|f(P_1) - f(P_3)| \leqslant \varepsilon(\xi).$$

Отсюда вытекает

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leqslant A + \varepsilon(\xi) + N\eta. \tag{2}$$



Черт. 9.

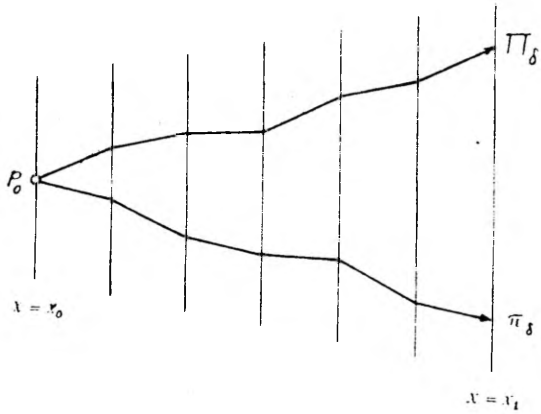
15. Возьмём теперь произвольное положительное число δ. Пусть x_1 является каким-нибудь значением в области существования функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_0 + h$. Разделим отрезок $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ на m равных частей, взяв m столь большим, чтобы было удовлетворено неравенство

$$k = \frac{x_1 - x_0}{m} < \delta \cos\alpha, \quad \text{где } \operatorname{tg}\alpha = M.$$

Через точки деления проведём вертикальные прямые.

Построим теперь верхнюю ломаную $\Pi_\delta(P_0)$, с началом в точке (x_0, y_0), так, чтобы концы каждого звена, расположенного между вертикальными линиями $x = x_0$ и $x = x_1$, находились на вертикальных прямых, проходящих через две последовательные точки деления (черт. 10). Построение такой ломаной возможно, так как длина горизонтальной проекции каждого звена равна k, и поэтому длина самого звена не превосходит $\frac{k}{\cos\alpha} < \delta$. Таким же образом построим нижнюю ломаную $\pi_\delta(P_0)$, обладающую подобными же свойствами.

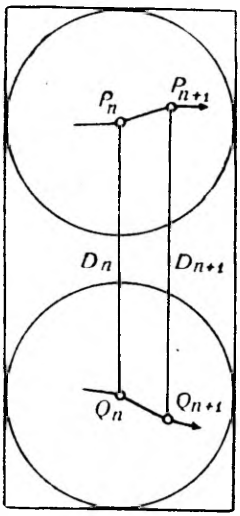
Рассмотрим звено $P_n P_{n+1}$ ломаной Π_δ и соответствующее ему звено $Q_n Q_{n+1}$ ломаной π_δ, лежащее между теми же самыми прямыми, что и $P_n P_{n+1}$. Угловой коэффициент звена $P_n P_{n+1}$ равен $\sup f(x, y)$ в круге $(P_n; 2\delta)$, а угловой коэффициент звена $Q_n Q_{n+1}$ равен $\inf f(x, y)$ в круге $(Q_n; 2\delta)$. Отсюда вытекает, что разность Θ_n этих угловых коэффициентов не может превосходить $\sup|f(P_1)-f(P_2)|$, где P_1, P_2 — любые точки в прямоугольнике с длиной горизонтальной стороны 4δ и вертикальной стороны



Черт. 10.

$D_n+4\delta$, заключающем оба круга, причём D_n означает вертикальное расстояние между точками P_n и Q_n (черт. 11). Поэтому, на основании п. 14 (2), можем написать

$$\Theta_n \leqslant A+\varepsilon(4\delta)+N(D_n+4\delta). \tag{1}$$



Черт. 11.

Подставив выражение правой части (1) в равенство

$$D_{n+1}=D_n+k\Theta_n, \tag{2}$$

получим рекуррентное неравенство

$$D_{n+1}\leqslant(1+kN)\,D_n+kN\frac{A+\varepsilon+4\delta N}{N}, \tag{3}$$

из которого следует

$$D_n\leqslant(1+kN)^n D_0+ \\ +\frac{A+\varepsilon+4\delta N}{N}[(1+kN)^n-1]. \tag{4}$$

Действительно, если возьмём в (3) $n=0$, то увидим, что неравенство (4) верно для $n=1$; а если (4) справедливо для n, то, в силу (3), оно оказывается справедливым также для $n+1$, как это легко проверить.

16. В рассматриваемом нами случае ломаные Π_δ и π_δ имеют одинаковые начала, т. е. $D_0 = 0$. Вследствие этого неравенство п. 15 (4), при $n = m$, принимает вид

$$D_m \leqslant \frac{A + \varepsilon + 4\delta N}{N}[(1 + kN)^m - 1]; \tag{1}$$

оно даёт нам оценку расстояния D_m при $x = x_1$.

Пусть теперь $\delta \to 0$; тогда Π_δ приближается к верхней предельной кривой $y = \varphi(x)$, и π_δ к нижней предельной кривой $y = \psi(x)$, в то время как $D_m \to \varphi(x_1) - \psi(x_1) = D(x_1)$. Так как $\delta \to 0$ влечёт за собою $m \to \infty$ (п. 15), то

$$\lim_{\delta \to 0}(1 + kN)^m = \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{x_1 - x_0}{m}N\right)^m = e^{N(x_1 - x_0)},$$

и из (1) следует

$$D(x_1) \leqslant \frac{A + \varepsilon_0}{N}[e^{N(x_1 - x_0)} - 1], \quad (x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_0 + h). \tag{2}$$

II.

17. В этом разделе мы приведём некоторые применения понятий верхней и нижней интегральных кривых в теории дифференциальных уравнений. Прежде всего докажем одну теорему существования решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, чтобы затем, в качестве примеров применения вышеприведённых методов, привести доказательства некоторых известных результатов, связанных с теоремой Пеано.

Теорема VI (Пеано). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), то через точку (x_0, y_0) проходит, по крайней мере, одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$.*

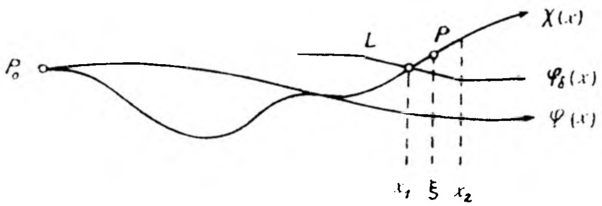
Это утверждение равносильно следствию из теоремы IV (п. 9). Вообще говоря, можно утверждать существование, по крайней мере, двух интегральных кривых, проходящих через точку (x_0, y_0). Одна из них составлена из правой и левой верхних предельных кривых, а другая — из правой и левой нижних предельных кривых. Итак, обе интегральные кривые определены в интервале $|x - x_0| \leqslant h$.

Возможно также привести очень простое прямое доказательство теоремы Пеано. Возьмём какую-нибудь убывающую последовательность положительных чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, так чтобы $\delta_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\delta_n$ и $\delta_n \to 0$. Этой последовательности $\{\delta_n\}$ соответствует последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ верхних полигональных функций, которая оказывается также убывающей при всяком x и, кроме того, ограниченной снизу, а потому имеющей предел $\varphi(x)$. Легко показать, что этот предел является решением данного дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальному условию: $\varphi(x_0)=y_0$.

18. Теорема VII. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), то существует одна максимальная и одна минимальная интегральная кривая дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, проходящая через точку (x_0, y_0), и вся область между ними заполнена другими интегральными кривыми, проходящими также через точку (x_0, y_0).*

Это расширенный вид теоремы Пеано.

Доказательство. Покажем, прежде всего, что из двух упомянутых в пункте 17 интегральных кривых одна максимальная, а



Черт. 12.

другая минимальная. Рассмотрим, например, правую верхнюю предельную кривую $y=\varphi(x)$ с началом в точке (x_0, y_0). Допустим, что существует другая интегральная кривая $y=\chi(x)$, исходящая из точки (x_0, y_0) и проходящая полностью или частично выше первой кривой (черт. 12). Тогда, очевидно, в области между этими кривыми находятся куски верхних ломаных $\Pi_\delta(P_0)$, аппроксимирующих сверху кривую $y=\varphi(x)$. Если $y=\varphi_\delta(x)$ есть одна из этих ломаных, то, в силу начального условия $\varphi_\delta(x_0)=\chi(x_0)$, найдётся такой интервал $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, где $\varphi_\delta(x_1)=\chi(x_1)$, а $\varphi_\delta(x)<\chi(x)$ для $x_1<x\leqslant x_2$. Обозначая разность $\chi(x)-\varphi_\delta(x)$ через $\Phi(x)$, применим к ней теорему о конечном приращении:

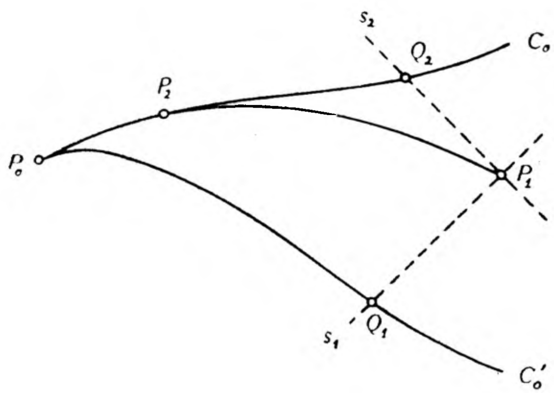
$$\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi'(\xi)(x_2-x_1),$$

где $x_1<\xi<x_2$, что законно, если только x_2 взято достаточно близко к x_1, так чтобы проекция звена L ломаной $\Pi_\delta(P_0)$, пересекающего кривую $y=\chi(x)$ при $x=x_1$ покрывала отрезок $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, и потому функция $\Phi'(x)$ была бы непрерывна в интервале $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

Так как, по предположению, $\Phi(x_1)=0$, а $\Phi(x_2)>0$, то $\Phi'(\xi)>0$, т. е. $\chi'(\xi)-\varphi'_\delta(\xi)>0$. Здесь $\chi(x)$ есть решение дифференциального уравнения, поэтому $\chi'(\xi)=f(P)$, где P означает точку с координатами ξ, $\chi(\xi)$, а $\varphi'_\delta(\xi)$ есть угловой коэффициент σ звена L. Таким образом получим неравенство

$$f(P)-\sigma>0. \tag{1}$$

С другой стороны, σ равно $\sup f(x, y)$ в круге радиуса 2δ, описанном около начальной точки звена L (длина которого, как мы знаем, не превосходит δ). Ясно, что точка P на кривой $y=\chi(x)$ будет внутренней точкой этого круга, если только x_2-x_1 доста-



Черт. 13.

точно мало. А тогда из неравенства (1) явствует, что одно из частных значений функции $f(x, y)$, а именно $f(P)$ больше, чем верхняя грань σ её значений, что очевидно невозможно. Это противоречие показывает, что наше первоначальное допущение о существовании интегральной кривой $y=\chi(x)$ неверно, т. е. $y=\varphi(x)$ есть максимальная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0).

Подобным же образом можно доказать, что нижняя предельная кривая является минимальной интегральной кривой.

Теперь перейдём к доказательству второй части нашей теоремы. Рассмотрим, для определённости, опять-таки только правые ветви интегральных кривых, проходящих через начальную точку (x_0, y_0). Пусть C_0 обозначает правую верхнюю, а C_0' правую нижнюю предельную кривую. Возьмём произвольно точку P_1, лежащую в области (R) между C_0 и C_0' (черт. 13). Через P_1 проведём два луча s_1 и s_2 с угловыми коэффициентами, равными $+M$ и $-M$; эти лучи пересекут кривые C_0 и C_0' в точках Q_2 и Q_1.

Всякая левая верхняя ломаная с началом в точке P_1, лежащая обязательно между лучами s_1 и s_2, может быть, очевидно, продолжена до одной из кривых C_0 или C_0'. Поэтому левая верхняя предельная кривая, исходящая из точки P_1, также достигнет одной из двух дуг P_0Q_1 или P_0Q_2, скажем, например, дуги P_0Q_2 в точке P_2. Но теперь мы получили состоящую из двух дуг P_1P_2 и P_2P_0 интегральную кривую, соединяющую точки P_0 и P_1. Итак, можно действительно утверждать, что через всякую точку P_1, находящуюся в области между кривыми C_0 и C_0', проходит интегральная кривая $y=y(x)$, которая удовлетворяет данному начальному условию: $y(x_0)=y_0$. Теорема VII доказана.

19. Теорема VIII. *Если в прямоугольнике* (R), $|x-x_0|\leqslant a$, $|y-y_0|\leqslant b$, *функция* $f(x, y)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y, *то через точку* (x_0, y_0) *проходит одна и только одна интегральная кривая дифференциального уравнения* $y'=f(x, y)$.

Действительно, в п. 16 (2), по условию, следует взять $A=0$ и $\varepsilon_0=0$, так что из п. 16 (2) вытекает $D(x)=0$ для $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$. Это, очевидно, верно также для $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0$. Итак, верхняя и нижняя предельные кривые, или максимальная и минимальная интегральные кривые, совпадают.

20. Осветим ещё один вопрос: какое влияние оказывает малая вариация в правой части уравнения $y'=f(x, y)$ на его решение? Относительно функции $f(x, y)$ предположим, что она в прямоугольнике (R) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|.$$

Сопоставим для нашей цели два уравнения

$$y'=f(x, y) \quad \text{и} \quad y'=f(x, y)+\vartheta(x, y),$$

где функция $\vartheta(x, y)$ в области (R) непрерывна и по абсолютной величине меньше, чем некоторое положительное число λ, независимое от x и y:

$$|\vartheta(x, y)|<\lambda.$$

Построим теперь, указанным в пункте 15 способом, две верхние ломаные с одинаковой начальной точкой (x_0, y_0), одна из которых соответствует уравнению $y'=f(x, y)$, а другая — уравнению $y'=f(x, y)+\vartheta(x, y)$. А именно, зададим положительное число δ;

затем разделим интервал $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, где $x_0 < x_1 \leqslant x_0 + h$, на m равных частей, взяв m столь большим, чтобы

$$k = \frac{x_1 - x_0}{m} < \delta \cos\beta, \quad \text{где } \operatorname{tg}\beta = M + \lambda.$$

Для угловых точек (x_n, y_n) первой ломаной получим рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + kG(x_n, y_n; 2\delta), \\ x_n = x_0 + kn, \end{gathered}$$

а для угловых точек второй ломаной —

$$\begin{gathered} \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + kG(x_n, \bar{y}_n; 2\delta) + kH(x_n, \bar{y}_n; 2\delta), \\ x_n = x_0 + kn, \end{gathered}$$

где через $H(P; 2\delta)$ обозначено $\sup \vartheta(x, y)$ в круге $(P; 2\delta)$. Вычитая и обозначая $\bar{y}_n - y_n = D_n$, получим

$$D_{n+1} = D_n + k[G(\bar{P}_n; 2\delta) - G(P_n; 2\delta)] + kH(\bar{P}_n; 2\delta),$$

и отсюда

$$|D_{n+1}| \leqslant |D_n| + k|G(\bar{P}_n; 2\delta) - G(P_n; 2\delta)| + k\lambda. \tag{1}$$

Но разность $|G(\bar{P}_n; 2\delta) - G(P_n; 2\delta)|$ очевидно не больше, чем $\sup|f(P_1) - f(P_2)|$ в прямоугольнике с горизонтальной стороной длиною 4δ и вертикальной стороной длиною $|D_n| + 4\delta$, содержащем оба круга $(\bar{P}_n; 2\delta)$ и $(P_n; 2\delta)$. Поэтому, согласно п. 14 (2) и пользуясь обозначениями, введёнными в пункте 15, имеем

$$|G(\bar{P}_n; 2\delta) - G(P_n; 2\delta)| \leqslant \varepsilon(4\delta) + N(|D_n| + 4\delta),$$

где постоянная A принята равной нулю, так как условие Липшица выполнено. Подставив правую часть последнего неравенства в (1), найдём

$$|D_{n+1}| \leqslant (1 + kN)|D_n| + k(\varepsilon + \lambda + 4\delta N). \tag{2}$$

Отсюда, точно так же, как в пункте 15, вытекает

$$|D_n| \leqslant (1 + kN)^n |D_0| + \frac{\lambda + \varepsilon + 4\delta N}{N}[(1 + kN)^n - 1]. \tag{3}$$

Рассмотрим разность D_n при $x = x_1$, т. е. величину D_m. Пусть $\delta \to 0$, а следовательно, и $m \to \infty$. Тогда одна из двух верхних ломаных приближается к единственной интегральной кривой $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, а другая —

к максимальной интегральной кривой дифференциального уравнения $y' = f(x, y) + \vartheta(x, y)$. Итак D_m приближается к вертикальному расстоянию $D(x_1)$ между точками этих интегральных кривых при $x = x_1$. Так как $D_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = 0$, то для $D(x_1)$ из (3) следует неравенство:

$$|D(x_1)| = \lim_{m \to \infty} |D_m| \leqslant \frac{\lambda}{N}[e^{N(x_1 - x_0)} - 1], \quad (x_0 < x_1 \leqslant x_0 + h). \tag{4}$$

То же самое неравенство, очевидно, остаётся в силе и для расстояния между кривой $y = \varphi(x)$ и минимальной интегральной кривой дифференциального уравнения $y' = f(x, y) + \vartheta(x, y)$. Таким образом все интегральные кривые последнего уравнения, проходящие через точку (x_0, y_0), заключены между двумя граничными линиями

$$y = \varphi(x) \pm \frac{\lambda}{N}[e^{N(x - x_0)} - 1], \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h). \tag{5}$$

Если $\vartheta(x, y) \to 0$, то интегральные кривые уравнения $y' = f + \vartheta$ непрерывно переходят в интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$. Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ непрерывно зависит от правой части.

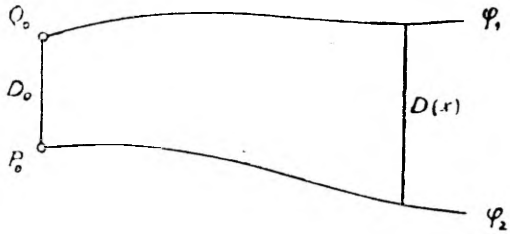
21. Если функция $f(x, y)$ в прямоугольнике (R) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, так что проходящая через заданную точку интегральная кривая определена единственно, то из теоремы III (п. 7) и из аналогичной теоремы для нижних предельных кривых следует, что вертикальное расстояние $D(x)$ между двумя интегральными кривыми дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ будет всюду меньше, чем сколь угодно малое произвольно выбранное положительное число, если только это расстояние при некотором частном значении $x = x_0$ будет взято достаточно малым. Это значит, что интегральная кривая непрерывно зависит от ординаты y_0 начальной точки P_0.

Нетрудно установить, что то же самое вытекает и из неравенства п. 15 (4). Допустим, что расстояние $D_0 = \varphi_1(x_0) - \varphi(x_0)$ между начальными точками P_0 и Q_0 двух интегральных кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ отлично от нуля (черт. 14). Принимая $n = m$ и полагая $\delta \to 0$, на основании п. 15 (4) мы приходим к следующей оценке для $D(x)$:

$$D(x) \leqslant D_0 e^{N(x - x_0)}, \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h), \tag{1}$$

так как следует взять $A=0$ и $\varepsilon_0=0$. Отсюда видно, что $D(x)$ стремится к нулю при $D_0 \to 0$. В частности, если левый предел существует, то

$$\lim_{D_0 \to 0} \frac{D}{D_0} \leqslant e^{N(x-x_0)}. \tag{2}$$



Черт. 14.

22. Но предел этот в 21 (2) существует в том случае, если в прямоугольнике (R) функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f_y(x, y)$. Тогда можно применить теорему Лагранжа и написать

$$D'(x) = \varphi_1'(x) - \varphi'(x) = f(x, \varphi_1) - f(x, \varphi) = f_y(\bar{P}) \cdot D(x),$$

где $\bar{P}$ означает точку с координатами x и $\varphi + \theta D$, $(0 < \theta < 1)$. Отсюда вытекает

$$\frac{dD}{dx} = f_y(\bar{P}) \cdot D. \tag{1}$$

Существование непрерывной производной $f_y(x, y)$ влечёт за собой выполнение условия Липшица в прямоугольнике (R), вследствие чего интегральная кривая определена начальной точкой однозначно. Поэтому пересечение двух интегральных кривых невозможно, и если $D_0 > 0$, то и $D(x) > 0$ всюду в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$. А тогда из (1) видно, что $f_y(\bar{P})$ — непрерывная функция от x, потому что $f_y(\bar{P})$ является отношением двух непрерывных функций $D'(x) = f(x, \varphi_1) - f(x, \varphi)$ и $D(x) = \varphi_1(x) - \varphi(x)$, причём знаменатель D не обращается в нуль. Следовательно, из (1) получается

$$\frac{D}{D_0} = \exp \int_{x_0}^{x} f_y(\bar{P})\, dx.$$

к максимальной интегральной кривой дифференциального уравнения $y' = f(x, y) + \vartheta(x, y)$. Итак D_m приближается к вертикальному расстоянию $D(x_1)$ между точками этих интегральных кривых при $x = x_1$. Так как $D_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = 0$, то для $D(x_1)$ из (3) следует неравенство:

$$|D(x_1)| = \lim_{m \to \infty} |D_m| \leqslant \frac{\lambda}{N} [e^{N(x_1 - x_0)} - 1], \quad (x_0 < x_1 \leqslant x_0 + h). \tag{4}$$

То же самое неравенство, очевидно, остаётся в силе и для расстояния между кривой $y = \varphi(x)$ и минимальной интегральной кривой дифференциального уравнения $y' = f(x, y) + \vartheta(x, y)$. Таким образом все интегральные кривые последнего уравнения, проходящие через точку (x_0, y_0), заключены между двумя граничными линиями

$$y = \varphi(x) \pm \frac{\lambda}{N} [e^{N(x - x_0)} - 1], \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h). \tag{5}$$

Если $\vartheta(x, y) \to 0$, то интегральные кривые уравнения $y' = f + \vartheta$ непрерывно переходят в интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$. Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ непрерывно зависит от правой части.

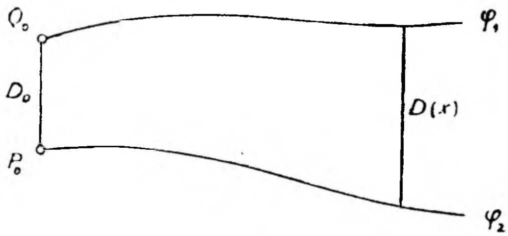
21. Если функция $f(x, y)$ в прямоугольнике (R) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, так что проходящая через заданную точку интегральная кривая определена единственно, то из теоремы III (п. 7) и из аналогичной теоремы для нижних предельных кривых следует, что вертикальное расстояние $D(x)$ между двумя интегральными кривыми дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ будет всюду меньше, чем сколь угодно малое произвольно выбранное положительное число, если только это расстояние при некотором частном значении $x = x_0$ будет взято достаточно малым. Это значит, что интегральная кривая непрерывно зависит от ординаты y_0 начальной точки P_0.

Нетрудно установить, что то же самое вытекает и из неравенства п. 15 (4). Допустим, что расстояние $D_0 = \varphi_1(x_0) - \varphi(x_0)$ между начальными точками P_0 и Q_0 двух интегральных кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ отлично от нуля (черт. 14). Принимая $n = m$ и полагая $\delta \to 0$, на основании п. 15 (4) мы приходим к следующей оценке для $D(x)$:

$$D(x) \leqslant D_0 e^{N(x - x_0)}, \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h), \tag{1}$$

так как следует взять $A=0$ и $\varepsilon_0=0$. Отсюда видно, что $D(x)$ стремится к нулю при $D_0 \to 0$. В частности, если левый предел существует, то

$$\lim_{D_0 \to 0} \frac{D}{D_0} \leqslant e^{N(x-x_0)}. \tag{2}$$



Черт. 14.

22. Но предел этот в 21 (2) существует в том случае, если в прямоугольнике (R) функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f_y(x, y)$. Тогда можно применить теорему Лагранжа и написать

$$D'(x) = \varphi_1'(x) - \varphi'(x) = f(x, \varphi_1) - f(x, \varphi) = f_y(\bar{P}) \cdot D(x),$$

где $\bar{P}$ означает точку с координатами x и $\varphi + \Theta D$, $(0 < \Theta < 1)$. Отсюда вытекает

$$\frac{dD}{dx} = f_y(\bar{P}) \cdot D. \tag{1}$$

Существование непрерывной производной $f_y(x, y)$ влечёт за собой выполнение условия Липшица в прямоугольнике (R), вследствие чего интегральная кривая определена начальной точкой однозначно. Поэтому пересечение двух интегральных кривых невозможно, и если $D_0 > 0$, то и $D(x) > 0$ всюду в интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$. А тогда из (1) видно, что $f_y(\bar{P})$ — непрерывная функция от x, потому что $f_y(\bar{P})$ является отношением двух непрерывных функций $D'(x) = f(x, \varphi_1) - f(x, \varphi)$ и $D(x) = \varphi_1(x) - \varphi(x)$, причём знаменатель D не обращается в нуль. Следовательно, из (1) получается

$$\frac{D}{D_0} = \exp \int_{x_0}^{x} f_y(\bar{P})\, dx.$$

Согласно п. 21 (1) имеем $\lim\limits_{D_0 \to 0} D = 0$, и поэтому также $\lim\limits_{D_0 \to 0} \bar{P} = (x, \varphi)$, откуда вытекает

$$\lim_{D_0 \to 0} f_y(\bar{P}) = f_y(x, \varphi),$$

так как $f_y(x, y)$ непрерывна, и отсюда

$$\lim_{D_0 \to 0} \frac{D}{D_0} = \exp \int_{x_0}^{x} f_y(x, \varphi)\, dx.$$

Vastutav toimetaja H. Jaakson.
Keeleline toimetaja B. Pravdin.
Tehniline toimetaja H. Seletus.

Ladumisele antud 27. I 1950. Trükkimisele antud 13. III 1950. Trükiarv 2000. Paber 67×95, $^1/_{16}$. Trükipoognaid 2. MB-01667. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi tänav 4. Tellimise nr. 355.

Hind rbl. 1.70