

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Rauno Viin

**Bootstrap-meetod kahjukindlustuse reserve
hindamisel**

Magistritöö

Juhendaja: vanemteadur Meelis Käärik

TARTU 2013

SISUKORD

SISSEJUHATUS	3
1. RESERVIDE HINDAMISE ÜLESANNE	5
1.1 Ahel – redel meetodi idee	7
1.2 Ahel – redel meetod üldistatud lineaarse mudelina (GLM)	9
2. TAASVALIKUMEETODID	11
2.1 Taasvalikumeetodite vajalikkusest ning ajaloost	11
2.2 Jackknife'i meetodi ja Bootstrap-meetodi idee	12
2.3 Jackknife'i meetodi ja Bootstrap-meetodi võrdlus	14
2.4 Erinevaid Bootstrap-meetodi võimalusi	15
3. BOOTSTRAP-MEETODIST RESERVIDE HINDAMISEL	18
3.1 Mudeli valimine	19
3.2 Jääkide valimine	21
3.3 Probleemid Bootstrap-meetodi rakendamisel jääkidele	24
3.4 Null-jääkide probleem	25
4. PROGNOOSIVIGA KOGURESERVI HINNANGULE	28
4.1 Prognoosivea hindamine analüütiliselt	28
4.2 Bootstrap-meetodi hinnangud kogureservi prognoosiveale	30
4.3 Bootstrap-meetodi algoritm kogureservi hindamiseks	33
5. BOOTSTRAP-MEETODI RAKENDAMINE ANDMETELE	35
SUMMARY	47
KASUTATUD KIRJANDUS	49
Lisa 1. R-i kood Bootstrap-meetodi rakendamiseks arengukolmnurgale	51

SISSEJUHATUS

Kahjud toimuvad juhuslikel ajahetkedel ning kahjude suurused on samuti juhuslikud. Seega ei ole tulevikus tekkivate kahjude arvu ning nende suuruseid võimalik täpselt prognoosida ning kindlustusfirmade ülesandeks on leida meetod, millega olemasolevat informatsiooni kasutades saaks tulevikus toimuvaid kahjusid võimalikult täpselt hinnata.

Kahjureservide hindamiseks on välja pakutud erinevaid meetodeid. Paljud populaarsematest meetoditest annavad meile aga vaid punkthinnangu, mis ei ole kindlustusfirma jaoks piisavalt informatiivne ning seega on vaja käsitluse alla võtta meetodid, millega on võimalik leida ka reservi prognoosimisel tehtav viga. Hinnangu standardvea leidmiseks on võimalik kasutada mitmeid erinevaid meetodeid, kuid enamjaolt eeldatakse, et kahjud käituvad mingi konkreetse jaotuse järgi. Juhul, kui me jaotuse eeldust aga teha ei oska, on probleemile võimalik läheneda taasvalikumeetodeid kasutades.

Käesoleva töö eesmärgiks on kirjeldada Bootstrap-meetodi rakendamist reservide hindamisel ning tuua välja ja selgitada erinevaid võimalusi, millele Bootstrap-meetodi kasutamisel võiks tähelepanu pöörata.

Magistritöö on jagatud viieks peatükiks. Esimeses peatükis selgitatakse täpsemalt reservide hindamise vajalikkust ning antakse ülevaade ahel-redel meetodi ideest. Teises peatükis tutvustatakse taasvalikumeetodeid ning keskendutakse Bootstrap-meetodi kirjeldamisele. Kolmas peatükk ühendab endas kahte esimest peatükki, selgitades täpsemalt, kuidas on Bootstrap-meetodit võimalik kahjureservide hindamiseks kasutada. Lisaks tuuakse välja mitmed olulised valikud, mis Bootstrap-meetodiga saadud tulemusi mõjutada võivad. Neljandas peatükis võrreldakse analüütiliselt tuletatud prognoosiviga

Bootstrap-meetodil saadud prognoosiveaga ning viimases peatükis rakendatakse eelnevates peatükkides kirjeldatud Bootstrap-meetodit praktilistele ülesannetele.

Reservide hindamine on hetkel väga aktuaalne teema seoses 2014. aasta algusest jõustuma hakkava Solventsus II direktiiviga, kuna uues riskipõhises Solventsus II mudelis on reserviriski hindamine ja vastavate vahemikhinnangute leidmine üks olulisemaid ülesandeid.

Autor tänab juhendajat mitmete ideede, paranduste ning täienduste eest magistritöö valmimisel.

1. RESERVEDE HINDAMISE ÜLESANNE

Kindlustustehnilised reservid on kindlustusandjal vaja moodustada selleks, et täita oma lepingulisi kohustusi kindlustusvõtjate ees.

On oluline, et vajaminevad reservid oleksid võimalikud täpselt prognoositud. Alahinnangu korral on oht, et kindlustusfirma ei suuda tulevikus oma kohustusi kindlustusvõtja ees täita ning ülehinnangu korral hoiab kindlustusfirma ebaratsionaalselt palju kapitali reservides, kasutamata seda mõneks teiseks otstarbeks (investeeringuteks jne). Kuna reservid moodustavad kindlustusfirma koguvarast küllaltki suure osa, siis ka väiksematel vaelevarvestustel on tegelikult vägagi suur mõju.

Reservide suurus arvutatakse vastavalt portfelli ja teistele kohustustele ning reservid peavad olema kaetud varadega. Reserve on mitut tüüpi ja vastavalt sellele on ka palju erinevaid arvutuseeskirju. Laiemas plaanis võime tehnilised eraldised jagada kolmeks:

- 1) eraldised möödumata riski suhtes (kindlustuspreemiatega seotud reservid):
 - ettemakstud preemiate eraldis;
 - edasilükatud sõlmimiskulud;
- 2) eraldised juhuslikkuse vähendamiseks:
 - tasanduseraldis;
 - katastroofireservid;
- 3) möödunud riskidega seotud eraldised (kahjureservid):
 - rahuldamata nõuete eraldis (RNE);
 - toimunud, aga mitte teatatud riskide eraldis (IBNR).

Kuna kahjud on seotud suurema juhuslikkusega kui preemiavood, siis on kahjureservide hindamine märksa keerulisem ning käesolevas töös keskendutakse just kahjureservide hindamise ülesandele.

Kahjude puhul saame rääkida kolmest olulisest ajamomendist – kahju toimumise aeg, kahjust kindlustusandjale teatamise aeg ning väljamakse aeg ehk lahendusaeg. Esimene neist on juhuslik, ülejäänud aga tugevas sõltuvuses kindlustusliigist, kahju iseloomust, asjaoludest ning suurusest. [Booth jt, 1999]

Kahju toimumisest kuni tegeliku lahenduseni minev aeg võib olla paar päeva kuni mitmeid aastaid. Kui aga kahju on juba toimunud ning kindlustusandjat on sellest teavitatud, tuleb firmal oletatava väljamakse suuruse ulatuses raha reserveerida, et hetkel kui väljamakse toimub, oleks raha olemas. Kahjureservide hindamiseks on võimalik kasutada statistilisi meetodeid (näiteks deterministlikku ahel-redel meetodit) või stohhastilisi meetodeid. Lisaks on võimalik koostöös nimetatud meetoditega kasutada Bootstrap-meetodit, millele keskendutakse käesolevas töös põhjalikumalt.

Ahel-redel meetodist ning tema esitusest üldistatud lineaarse mudelina antakse lühike ülevaade järgnevates alapeatükkides 1.1 ja 1.2. Stohhastilisi meetodeid (üldistatud lineaarseid mudeleid – GLM) koos Bootstrap-meetodiga ning nendega seotud probleeme ning küsimusi käsitletakse ülejäänud peatükkides.

Andmed reservide prognoosimiseks esitatakse tavaliselt tabelis 1 toodud kujul.

Tabel 1. Arengukolmnurk.

	Arenguperiood j					
Algperiood i	0	1	2	...	$J-1$	J
0	C_{00}	C_{01}	C_{02}	...	$C_{0,J-1}$	C_{0J}
1	C_{10}	C_{11}	...		$C_{1,J-1}$	
2	C_{20}	...				
...	...					
$I-1$	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$				
I	C_{I0}					

Tähistagu C_{ij} tabelis 1 üksikute perioodide juurdekasvusi, mis pärinevad perioodist i ja on lahendatud perioodis j . Sõltuvalt kontekstist võib üksiku perioodi juurdekasvuks olla nii kahju suurus kui ka kahjude arv. Lahendusperiood 0 vastab „jooksvale“ perioodile. Ühele algperioodile vastavaid kahjusid nimetatakse kahjukohordiks.

Algperioodiks valitakse tavaliselt kas kahju toimumine, kahjust teatamine või lepingu sõlmimine ning arenguperioodiks kahju väljamaksmine, kahjust teatamine või kahju toimumine [Booth jt, 1999]. Valides algperioodiks näiteks kahju toimumise ning arenguperioodiks kahjust teatamise, näitab C_{ij} kahjude arvu, mis toimusid i -ndal aastal ning millest teatati j -ndal aastal.

Sõltuvalt alg- ja arenguperioodi valikust saab sellise kolmnurgaga kirjeldada erinevate kahjulahendusetappide arengut. Kui arenguperioodiks valida kahjust teatamine, sobib vastav kolmnurk IBNR hindamiseks, kui arenguperioodiks valida väljamakse aeg, sobib kolmnurk RNE kirjeldamiseks.

1.1 Ahel – redel meetodi idee

Ahel-redel meetodi kasutamiseks kogutakse andmed, milleks on teadaolevad kahju suurused või kahjude arvud arengukolmnurka (vt tabel 1). Arengukolmnurga ridadeks on algperioodid ning veergudeks arenguperioodid. Üldiselt on algperioodide arv võrdne arenguperioodide arvuga, kuid see ei pruugi alati nii olla.

Enamjaolt eeldatakse, et kogu informatsioon minevikust on teada ehk teatakse kõiki juurdekasvusi C_{ij} , mille korral $i = 0, 1, \dots, I$ ja $j = 0, 1, \dots, I + 1 - i$. Enne ahel-redel meetodi kasutamist viiakse andmed tabelis tavaliselt kumulatiivsele kujule.

Kuigi ahel-redel meetodil on mitmed puudused, on ta oma lihtsuse tõttu kõige laialdasemalt kasutatav reservi hindamise meetod. Meetod eeldab, et kahjude proportsioonid jäävad ajas muutumatuks, see tähendab, et veeruvektorid on üksteisega proportsionaalsed. Sisuliselt tähendab see seda, et tuleviku kahjud käituvad samamoodi kui mineviku kahjud. Praktikas on seda eeldust aga praktiliselt võimatu kontrollida. Selle eelduse kehtimisel saame tulevaste kahjude käitumist kirjeldada läbi arengu- ehk suhtefaktorite.

Kumulatiivsel kujul andmete korral saab tabeli tühjade väljade (alumise tühja kolmnurga) täitmiseks kasutada järgnevat ahel-redel meetodi seost:

$$C_{i,j+1} = f_j C_{ij} + E_{ij} \quad (i = 1, \dots, I \text{ ja } j = J + 1 - i, \dots, J),$$

kus C_{ij} vastab kahjude koguarvule (või kogusummale), mis on algperioodiga i ning arenguperioodiga j , $C_{i,j+1}$ vastab kahjude koguarvule (või kogusummale), mis on algperioodiga i ja arenguperioodiga $j+1$, f_j on arengufaktor arenguperioodi j ja $j+1$ vahel ja E_{ij} on mudeli viga.

Arengutegurite arvutamine käib läbi kogu saadaval oleva informatsiooni antud (kahe järjestikuse) arenguperioodi kohta:

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}}, \quad j = 0, \dots, J-1.$$

Näiteks juhul kui $I = J = 5$ ning soovitakse hinnata arengutegurit käesolevast perioodist järgmise perioodini, siis näeb arvutus välja järgmine:

$$f_0 = \frac{C_{01} + C_{11} + C_{21} + C_{31} + C_{41}}{C_{00} + C_{10} + C_{20} + C_{30} + C_{40}}$$

ehk j -nda arenguteguri saamiseks jagatakse $(j+1)$. veeru summa j -nda veeru summaga, kust puudub viimane liidetav.

Kui huvi pakub vaid kogureservi (edaspidises tähistuses R) hindamine ning reserve suurused iga aasta kohta eraldi pole olulised, siis piisab vaid kumulatiivse arenguteguri arvutamisest:

$$F_j = \prod_{k=j}^{J-1} f_k, \quad j = 0, \dots, J-1.$$

Kumulatiivne arengutegur kirjeldab j -nda arenguperioodi ning viimase arenguperioodi suhet.

Ahel-redel meetodi miinuseks on asjaolu, et tegu on deterministliku meetodiga, mis annab vaid punkthinnangu. Lisaks on ahel-redel meetodi eeldusi peaaegu võimatu kontrollida ning selge matemaatiline taust meetodile puudub.

1.2 Ahel – redel meetod üldistatud lineaarse mudelina (GLM)

Kahjureservide hindamiseks on lisaks deterministlikule ahel-redel meetodile võimalus kasutada ka stohhastilisi meetodeid. Enamik stohhastilisi mudeleid on võimalik kirja panna üldistatud lineaarsete mudelitena (GLM).

Üldistatud lineaarse mudeli struktuur kahjude arvu hindamiseks on järgmine:

- 1) juurdekasvud C_{ij} on sõltumatud juhuslikud suurused ning kuuluvad eksponentsiaalsesse jaotuste perre,
- 2) $E[C_{ij}] = \mu_{ij}$,
- 3) $\eta_{ij} = g(\mu_{ij})$, kus $g(\cdot)$ tähistab seosefunktsiooni
- 4) $\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$, kus parameetrit c võib vaadelda kui vabaliiget, mis vastab juurdekasvu suurusele algperioodiga 0 ja arenguperioodiga 0. See saadakse lisatingimusega $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ (vältimaks üleparametriseerimist) [Pinheiro jt, 2003].

Hinnangud kirjeldatud mudeli parameetritele saadakse suurima tõepära meetodiga. Hinnatud parameetrite põhjal leitakse prognoosid teadaolevatele mineviku juurdekasvudele ning samuti saab leida prognoosid tuleviku juurdekasvudele \hat{C}_{ij} , kus $i = 1, \dots, I$ ja $j = I + 1 - i, \dots, J$.

Käsitledes Poissoni jaotusega mudelit on meil tegemist logaritmilise seosefunktsiooniga $\eta_{ij} = \log(\mu_{ij})$ ning juurdekasvude arvu C_{ij} keskväärtus avaldub sel juhul järgmiselt:

$$E[C_{ij}] = \mu_{ij} = \exp(c + \alpha_i + \beta_j) = \exp(c) \exp(\alpha_i) \exp(\beta_j).$$

Ülaltoodust järeldub, et algperioodile i vastav mõjutegur on $\exp(\alpha_i)$, arenguperioodile j vastab mõjutegur on $\exp(\beta_j)$ ning hinnang juurdekasvule $C_{00} = \exp(c)$. Juurdekasvu C_{00} saab vaadata kui vabaliiget, mille suhtes algperioodi mõjusid $\exp(\alpha_i)$ ning arenguperioodi mõjusid $\exp(\beta_j)$ hinnatakse.

Meenutame, et eksponentsiaalsesse jaotuste perre kuuluvate mudelite korral

$$D[Y] = \phi V[\mu],$$

kus $V(\cdot)$ tähistab dispersioonifunktsiooni (funktsioon keskvaartusest) ning ϕ on skaalaparameeter.

Seosefunktsioon, dispersioonifunktsioon ning seega ka skaalaparameeter võivad erinevate jaotuste puhul olla erinevad. Täpsem ülevaade mõningatest jaotustest, mida reserve hindamisel kasutatakse, antakse peatükis 3.1.

Saab näidata, et juhul, kui juurdekasvud on sõltumatud ja Poissoni (või ülehajuvusega Poissoni) jaotusega ning nende keskmised (prognoosid) modelleerida reaefekti (algperioodi) ning veeruefekti (arenguperioodi) korrutisena, siis suurima tõepära meetodil saadud hinnangud Poissoni mudeli parameetritele ühtivad ahel-redel meetodil saadud hinnangutega.

2. TAASVALIKUMEETODID

2.1 Taasvalikumeetodite vajalikkusest ning ajaloost

Taasvalikumeetodite kasutamise vajadust saab kirjeldada järgnevalt. Olgu juhusliku valimi $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ pealt saadud hinnang $\varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ parameetrile θ (nt keskväärtusele) olemas ning soovitakse teada saada kui täpne see hinnang on ehk milline on selle hinnangu standardviga. [Sawyer, 2005]

Juhul, kui on teada, mis jaotusega huvipakkuvad juhuslikud suurused on (jaotusfunktsioon $\varphi_n(X)$ hinnatava parameetri kohta on teada) või on jaotuse kohta tehtud vaikimisi eeldus, siis on võimalik probleemile analüütiliselt läheneda. Juhul kui aga jaotus $\varphi_n(X)$ teada ei ole või see on keeruline, siis ei ole seda analüütiliselt võimalik teha. See tähendab, et me ei saa $\varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ abil parameetri θ hindamisel tehtavat viga hinnata. Üldisemalt tekib küsimus, et kas ainult andmete X_1, X_2, \dots, X_n põhjal on võimalik leida usaldusvahemik parameetrile θ , või testida näiteks hüpoteesi $H_0: \theta = \theta_0$. [Sawyer, 2005]

Keerulisematele probleemidele (tegemata ebareaalseid või tõestamata eeldusi) lähenemiseks on mõistlik kasutada simuleerimismeetodeid. Simuleerimismeetodeid, mis proovivad hinnata hinnangu $\varphi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nihet ja varieeruvust, kasutades $\varphi_n(X)$ väärtusi valimites, kutsutakse taasvalikumeetoditeks. Tuntumad neist on Jackknife'i meetod ja Bootstrap-meetod. Taasvalikumeetodid ei eelda jaotust, kuna valimit vaadeldakse kui „populatsiooni üldkogumit“. Seega on väga oluline, et olemasolev valim üldkogumit piisavalt hästi kirjeldaks. Uuritava statistiku varieeruvust hinnatakse korduvalt võetud valimite pealt.

Bootstrap-meetodi rajaja Bradley Efron on oma tsitaatides rõhutanud, et lihtsad ideed, nagu seda Jackknife'i ja Bootstrapi taasvalikumeetodid oma olemuselt on, on väga

hinnalised vahendid ning nende meetodite küllaltki lihtsa matemaatilise tausta pärast pole vaja muretseda. Samuti märgib ta, et tänapäeval on võrreldes 1920/1930-ndate aastatega (kui paljud statistilised meetodid välja töötati) võimalus tänu arvutite arengule kasutada märksa suuremat arvutusvõimsust ning seda tuleks uute statistiliste meetodite välja töötamisel kindlasti arvesse võtta. [Efron, 1982]

Jackknife'i meetodit tutvustas esimesena inglise matemaatik Maurice Quenouille aastal 1949. Aastal 1958 täiendas tema tööd ameerika matemaatik John Tukey. Seega kutsutakse seda meetodit ka nimega Quenouille-Tukey Jackknife'i meetod. Jackknife'i („taskunoa“) meetodi nimi pärineb John Tukey'lt, kes võrdles Jackknife'i meetodit toore, kuid valmis instrumendiga, mis on valmis toime tulema igasuguste situatsioonidega.

Bootstrap-meetodit tutvustas esimesena Ameerika statistik Bradley Efron 1979. aastal ilmunud artiklis "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife". Bootstrap-meetodi („saapapaela meetodi“) nimi pärineb Bradley Efronilt: *“Pulling oneself up by one's bootstraps”*, mis peaks tähendama, et välist abi (lisainformatsiooni ning eeldusi jaotuse ja selle parameetrite kohta) ei ole ning tuleb hakkama saada vaid olemasolevate andmetega.

Bootstrap-meetod on oma idee poolest küllaltki sarnane 30 aastat varem tutvustatud Jackknife'i meetodile. Bradley Efron läheneb Jackknife'i meetodile teiselt vaatenurgalt ning proovib seda seletada mõnes mõttes lihtsama ja üldisema meetodi (Bootstrap-meetodi) tähenduses [Ostaszewski, Rempala, 2000].

Mõlemad meetodid on (üldjuhul mitteparameetrilised) taasvalikumeetodid. See tähendab, et hinnangud meid huvitava statistiku jaotuskarakteristikute kohta tehakse korduvalt võetud valimite abil, jaotust eeldamata.

2.2 Jackknife'i meetodi ja Bootstrap-meetodi idee

Jackknife'i meetodi idee on väga lihtne. Olemasoleva valimi pealt moodustatakse uued valimid, jättes igakord ühe (eelmisest väljajäetud elemendist erineva indeksiga) elemendi olemasolevast valimist välja. Meetodis puudub juhuslikkus, mis tähendab, et

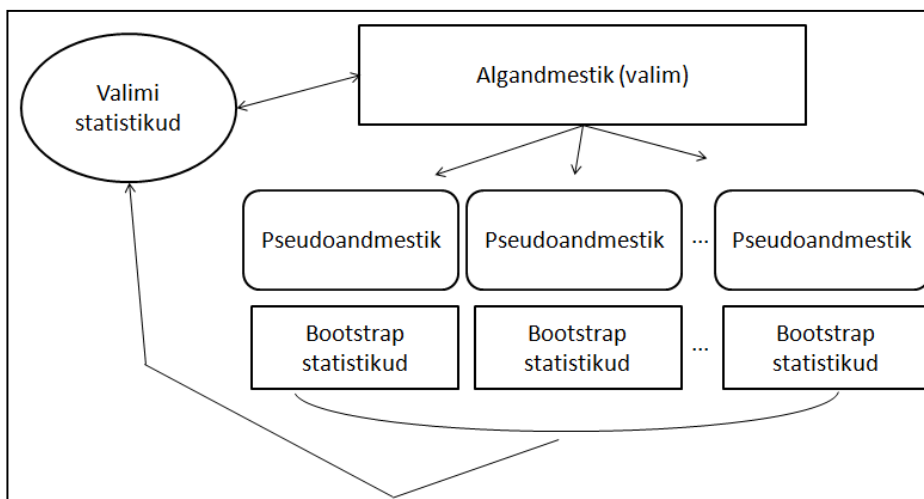
Jackknife'i meetodiga moodustatud valimid ja valimitelt saadud hinnangud uuritava parameetri kohta saadakse alati samasugused. Jackknife'i meetodi algoritm on järgmine:

Olgu meil andmestik (valim), mille suuruseks on n .

- 1) Teeme olemasoleva andmestiku põhjal n uut alamvalimit, jättes igas valimis i -nda mõõtmise välja $i=1, \dots, n$ (uute valimite suurus on $n-1$),
- 2) arvutame iga alamvalimi korral soovitud suuruse keskmise,
- 3) hindame saadud keskmiste põhjal keskmise standardhälbe.

Bootstrap-meetod on lihtne, kuid samas väga võimas meetod. Kogu informatsioon saadakse ning hinnangud parameetri θ kohta tehakse ühe „algse valimi“ X^0 kaudu. Seega eeldatakse Bootstrap-meetodit kasutades, et olemasolev andmestik (valim) kirjeldab üldkogumit (populatsiooni). Üldkogumit kirjeldavast valimist X^0 võetakse lihtsat juhuslikku valikut tagasipanekuga kasutades m uut valimit X_i^* (kus $i=1, \dots, m$). Edaspidises nimetatakse neid valimeid Bootstrap-valimiteks või pseudoandmestikeks. Tagasipanekuga valimi moodustamine tähendab seda, et esialgse andmestiku element võib uues valimis korduda. Niimoodi saadud pseudoandmestikud on samast jaotusest, mis esialgne andmestik.

Iga simuleeritud Bootstrap-valimi põhjal arvutatakse uuritava parameetri (näiteks keskväärtuse) väärtus θ_i^* . Tulemuseks saadakse m väärtust uuritavale parameetrile: $\theta_1^*, \dots, \theta_m^*$. Nendele väärtustele vastav empiiriline jaotus hindab $\hat{\theta}$ („algse valimi“ pealt saadud hinnang parameetrile θ) jaotust üldkogumi jaotuse suhtes. Saadud empiirilist jaotust kutsutakse ka Bootstrap-jaotuseks. Bootstrap-jaotuse põhjal saab arvutada uuritava parameetri keskmise ning standardhälbe üldkogumi jaoks. Bootstrap-meetod põhineb tsentraalsel piirteoreemil: juhuslikult moodustatud pseudoandmestikud on kõik teineteisest sõltumatud ning sama jaotusega ja seetõttu on tsentraalse piirteoreemi eeldused täidetud. Seega teame, et Bootstrap-meetodil hinnatud kogureservi keskmine on ligikaudu normaaljaotusega. Moodustades väärtustest $\theta_1^*, \dots, \theta_m^*$ variatsioonrea saab hinnata $\hat{\theta}$ jaotuse kvantiile.



Joonis 1. Bootstrap-meetodi kirjeldus.

Tähistagu θ uuritavat üldkogumi parameetrit. Olgu antud valim $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ning selle põhjal saadud hinnang uuritavale parameetrile $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X^0)$. Soovitakse leida hinnangu $\hat{\theta}$ jaotust üldkogumi jaotuse suhtes. Selleks defineeritakse Bootstrap-meetodi algoritm järgmiselt:

1. Määratakse Bootstrap-meetodil leitavate valimite arv (tähistatagu seda m). Bootstrap-valimi indeksit tähistatagu i ,
2. simuleeritakse uus valim $X_i^* = (x_{i1}^*, x_{i2}^*, \dots, x_{in}^*)$, võttes n korda juhuslikult ühe elemendi hulgast X^0 . Kuna elemente valitakse tagasipanekuga, siis võib esialgse andmestiku (valimi X^0) element uues valimis X_i^* korduda,
3. simuleeritud Bootstrap-valimi X_i^* põhjal arvutatakse uuritava parameetri θ väärtus $\theta_i^* = \hat{\theta}(X_i^*)$,
4. valimi indeksit suurendatakse ($i=i+1$) ning etappe 2) ja 3) korratakse m korda.

Tulemuseks saadakse m väärtust uuritavale parameetrile: $\theta_1^*, \dots, \theta_m^*$. Nendele väärtustele vastav jaotus hindab $\hat{\theta}$ jaotust üldkogumi jaotuse suhtes.

2.3 Jackknife'i meetodi ja Bootstrap-meetodi võrdlus

Kuigi Jackknife'i meetod ja Bootstrap-meetod on idee poolest küllaltki sarnased ning annavad paljudes olukordades samasugused tulemused, on nad matemaatilise sisu

poolest siiski piisavalt erinevad ning annavad teatud olukordades erinevaid tulemusi. Üks põhilisi praktilisi erinevusi on näiteks see, et analüüsid sama andmestikku korduvalt Bootstrap-meetodiga, saame iga kord mingil määral uue (erineva) tulemuse, analüüsid aga sama valimit korduvalt Jackknife'i meetodiga, saame alati täpselt samad tulemused [Sahinler, 2007]. Kui Jackknife'i meetodis keskendutakse rohkem statistikute standardhälvete arvutamisele, siis Bootstrap-meetodi eesmärgiks on lisaks ka statistiku jaotust hinnata. [Ostaszewski, Rempala, 2000]. Bootstrap-meetod on üldisem ja seega ka laialdasemalt kasutatavam ning mõnes mõttes usaldusväärsem kui Jackknife'i meetod [Efron, 1979].

Jackknife'i meetod kasutab vähem informatsiooni (vähem pseudoandmestikke) kui Bootstrap-meetod. Seetõttu on Bootstrap-meetod ka ressursinõudlikum. Tänapäeval pole see aga enam suureks probleemiks, kuna arvutid on piisavalt kiired. Jackknife'i meetodi miinuseks on näiteks ka asjaolu, et sellega ei ole võimalik mediaani hinnata.

2.4 Erinevaid Bootstrap-meetodi võimalusi

Sõltuvalt olukorrast ja eesmärgist on võimalik kasutada erinevaid Bootstrap-meetodeid. Järgnevalt antakse ülevaade parameetrisest Bootstrap-meetodist, pidevast (silutud) Bootstrap-meetodist ning jääkidele rakendatud Bootstrap-meetodist.

Eelnevas alapeatükis kirjeldatud Bootstrap-meetodit kutsutakse klassikaliseks Bootstrap-meetodiks. Klassikaliselt on Bootstrap-meetod mitteparameetiline ehk me ei tee jaotuse kohta mingeid eelduseid. Juhul kui meil on aga teada, millisesse jaotusesse võiks uuritav tunnus kuuluda, on võimalik kasutada parameetrisest Bootstrap-meetodit.

Parameetrisest Bootstrap-meetodit saab kasutada juhul kui üldkogumi jaotus $P(\theta)$ uuritava tunnuse kohta on teada, aga jaotuse parameeter θ (või parameetervektor θ) on tundmatu. Simuleerimine toimub teoreetilisest teadaolevast jaotusest (näiteks normaaljaotusest) kasutades keskvaartust ja dispersiooni esialgselt olemasolevast valimist. See tähendab, et tundmatule parameetrile θ saadakse valimilt hinnang $\hat{\theta}$ ning valimeid genereeritakse jaotusest $P(\hat{\theta})$.

Pideva (silutud) Bootstrap-meetodi [Utikal, 2012] kasutamist tasub kaaluda juhul, kui üldkogumi jaotuseks on pidev jaotus ning valimimaht on väike. Juhul, kui uuritav tunnus on pideva jaotusega, siis on ka juhuslik valim valitud pidevast jaotusest. Bootstrap-meetodi korral moodustame valimid aga olemasolevast valimist, milleks on diskreetne empiiriline jaotus. Kui valimimaht n on väike, siis tulevad paljud Bootstrap-valimid sarnased. Pideval jaotusel on konkreetse väärtuse saamise tõenäosus aga 0. Pideva (silutud) Bootstrap-meetodi ideeks on väikeses koguses silumismüra lisamine igale Bootstrap-valimile. Tavaliselt on lisatav müra normaaljaotusest või ühtlasest jaotusest (sümmeetrilised jaotused) ning seega jäävad valimi arvkarakteristikud samaks.

Silutud Bootstrap-meetodit soovitakse kasutada eelkõige juhul, kui hinnatavaks parameetrik on mõni „diskreetne“ statistik, näiteks mediaan, kuna on vähe võimalikke erinevaid väärtusi, mida ta saab võtta.

Silutud Bootstrap-valimi saame lisades Bootstrap-valimile „silumismüra“:

$X_i^{**} = X_i^* + a\varepsilon_i$, kus X_i^* on esialgne Bootstrap-valim ning X_i^{**} silutud Bootstrap-valim; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ on s.s.j.j.s $N(0,1)$ ning $a > 0$. [Utikal, 2012]

Bootstrap-meetodi rakendamist jääkidele (*residuals resampling*) kasutatakse regressioonitüüpi probleemide korral, sest siis sõltuvad uuritava tunnuse väärtused seletavatest tunnustest ning seetõttu ei saa üksikuid vaatlusi vaadata kui sama jaotusega juhuslikke suurusi. Regressioonimudelit (täpsemalt GLM mudelit) kasutatakse ka reserve hindamisel ning järgmises peatükis seletatakse konkreetset probleemi täpsemalt.

Jääkide taasvalimise algoritm:

- 1) Määratakse iteratsioonisammude arv m .
- 2) Hinnatakse mudel algse valimi X^0 pealt ning saadakse prognoositud väärtused $\hat{\mu}_i$ tegelikele väärtustele y_i . Seejärel arvutatakse jäägid $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\mu}_i$. ($i=1, \dots, n$). Saadakse jääkide vektor $(\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n)$.
- 3) Simuleeritakse pseudoandmestik $X_i^* = \hat{\mu}_i + \hat{\varepsilon}_i^*$, kus $\hat{\varepsilon}_i^*$ on lihtsa juhusliku valikuga tagasipanekuga valitud jääk jääkide vektorist $(\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n)$.

- 4) Hinnatakse mudel kasutades simuleeritud Bootstrap-valimit X_i^* ja arvutatakse soovitud suurus.
- 5) Korratakse samme 3) ja 4) m korda.

3. BOOTSTRAP-MEETODIST RESERVIDE HINDAMISEL

Probleemi reservide hindamiseks saab kokku võtta järgmiselt - kuidas hinnata tulevikus toimuvaid makseid (kahjusummasid) võimalikult täpselt olemasoleva informatsiooni (minevikus toimunud kahjusummade) põhjal? Ehk kui suured peaksid olema kahjureservid? Reservide hindamisel võib rääkida kolmest komponendist: punkthinnang, varieeruvus (hinnangu viga) ning prognoosiv jaotus.

Lihtne punkthinnang reservi suurusele ei sisalda piisavalt informatsiooni ning täiendavalt soovitakse teada, kui täpne saadud punkthinnang on, ehk kui suured on piirid, kuhu tegelikult vajaminevad reservid jääda võivad. Teisisõnu soovitakse teada ka prognoosiviga ja seeläbi leida vahemikhinnang kogureservi suurusele.

Hinnangule standardvea (prognoosivea) leidmiseks on tuletatud ka analüütilisi seoseid, kuid neid on tülikas arvutada ning need on vaid tegelikku olukorda lähendavad tulemused, mis põhinevad statistilistel eeldustel ja kehtivad vaid juhul, kui mudel on korrektselt defineeritud. Kui hinnangu standardviga on põhimõtteliselt võimalik analüütiliselt leida, siis uuritava parameetri täpset prognoosivat jaotust analüütiliselt võimalik leida ei ole. Selleks tuleb kasutada simuleerimismeetodit, milleks sobib hästi Bootstrap-meetod.

Bootstrap-meetodi kasutamise eelduseks on asjaolu, et valimisse kuuluvad vaatlused on sõltumatud ja sama jaotusega ning kirjeldavad üldkogumit.

Üldiselt eeldatakse, et arengukolmnurgas (vt tabel 1) olevad üksikud juurdekasvud on omavahel küll enam-vähem sõltumatud, kuid kindlasti ei saa eeldada, et nad on samast jaotusest. Üksikud juurdekasvud sõltuvad algperioodi faktorist (kindlustuslepingute arv ja seega ka kahjunõuete arv võivad näiteks ajas suurenedada) ning arenguperioodi faktorist (kahjunõuded leiavad ajapikku lahendused ning hilisematele arenguperioodidele jääb vähem kahjusid) ja seega ei ole meil tegemist sama jaotusega

juhuslike suurustega. Kahjude arvu ning kahjusummade keskväärtused vähenevad arenguperioodi kasvades ning samuti sõltuvad nii arenguperioodist kui ka algperioodist kahjude arvu ja kahjusummade varieeruvused.

Seetõttu rakendatakse reservide hindamisel Bootstrap-meetodit mitte juurdekasvudele otse, vaid prognoositud mudelist saadud standardiseeritud jääkidele. Standardiseeritud jääkide puhul on meil rohkem alust eeldada, et nad on samast jaotusest. [Pinheiro jt 2003]

Bootstrap-meetodi rakendamisel reservide hindamiseks on mitu tähtsat komponenti, millele tuleks enne meetodi rakendamist tähelepanu pöörata. Järgnevalt keskendutakse mudeli (jääkide jaotuse) valimisele, sobivate jääkide valimisele, „null-jääkide“ probleemile ning tuuakse ülevaade mõningatest teistest probleemidest, mis Bootstrap-meetodi rakendamisel jääkidele võivad esile kerkida.

3.1 Mudeli valimine

Enne kui Bootstrap-meetodit jääkidele rakendada saab, tuleb valida meetod (mudeli struktuur), mille põhjal olemasolevaid andmeid kasutades, tulevikuväärtuseid prognoosida. Mudeli valimist ei käsitleta antud juhul kui jaotuse eelduse tegemist, vaid kui ühte võimalikku meetodit juurdekasvude suuruseid hinnata. Valitud mudeliga saadakse hinnangud olemasolevatele juurdekasvudele ning vastavalt konkreetsele jäägi definitsioonile (millele keskendutakse järgmises alapeatükis 3.2) arvutatakse jääk. Seega on mudeli valimine, selle parameetrite hindamine ning juurdekasvude prognoosimine lihtsalt üks Bootstrap-meetodile eelnev etapp saamaks esialgselt Bootstrap-valimit, millele Bootstrap-meetodit rakendada. [Li, 2006]

Kahjude arvu ning kahjusuuruste näol ei ole tegemist normaaljaotusega tunnustega (mida eeldatakse klassikalise lineaarse mudeli korral) ning seetõttu kasutatakse parameetrite hindamiseks üldistatud lineaarseid mudeleid (GLM), kuna GLM mudeli korral ei pea uuritav tunnus tingimata olema normaaljaotusest vaid ta peab kuuluma eksponentsiaalsesse jaotuste perre.

Kõige sagedasemalt kasutatavateks mudeliteks reservide hindamisel võib lugeda Poissoni mudelit (millest anti ülevaade peatükis 1.2) ja ülehajuvusega Poissoni mudelit, mis annavad täpselt samasugused hinnangud reservile kui ahel-redel meetod. Mõlema mudeli korral eeldatakse, et juurdekasvud on sõltumatud Poissoni (üleahajuvusega Poissoni) jaotusega juhuslikud suurused, mille hinnanguks on kahe faktori (algperioodi i ning arenguperioodi j) korrutis. Kui Poissoni mudel eeldab reservide hindamisel, et juurdekasvude keskvärtused on võrdsed nende dispersiooniga $E[C_{ij}] = D[C_{ij}]$, siis ülehajuvusega Poissoni mudeli korral on keskvärtus dispersiooniga proportsionaalne: $D(C_{ij}) = \phi E[C_{ij}]$, kus ϕ on skaalaparameeter, mis hinnatakse andmetelt. Ülehajuvusega mudel ei muuda parameetrite hinnanguid, kuid nende hinnangute standardvead suurenevad. [England ja Verrall, 2002]. Kuna keskvärtus ja dispersioon on proportsionaalsed, siis on Poissoni (ja ülehajuvusega Poissoni) mudeli korral protsessiviga väga kerge arvutada. Protsessiviga arvutatakse sel juhul kui skaalaparameetri ϕ ja hinnatud kogureservi R korrutis ϕR . Täpsemalt käsitletakse protsessiviga peatükis 4.2.

Ülehajuvusega Poissoni mudeliga sarnaseks mudeliks on negatiivse binoomjaotusega mudel. Negatiivse binoomjaotusega mudelit kasutatakse eelkõige juhul kui ülehajuvus on suur ning seda ei ole võimalik skaalaparameetriga korrigeerida. Kuna negatiivne binoomjaotus on defineeritud läbi kahe parameetri, saab teist parameetrit keskvärtusest sõltumatult kasutada varieeruvuse kirjeldamiseks. Negatiivse binoomjaotusega mudeli korral $E[C_{ij}] = (\lambda_j - 1)D_{i,j-1}$ ning $D[C_{ij}] = \phi \lambda_j (\lambda_j - 1)D_{i,j-1}$, kus λ_j on analoogne ahel-redel meetodi arenguteguriga. Kuna negatiivse binoomjaotusega mudel reservide hindamiseks on tuletatud Poissoni mudelist (algperioodi tegurid on välja integreeritud), siis on nende mudelitega saadud prognoosid, vaatamata sellele, et negatiivse binoomjaotusega mudelis on vaja hinnata vähem parameetreid, identsed [England, Verrall, 2002].

Gammajaotusega mudeli kanooniliseks seosefunktsiooniks on pöördfunktsioon, kuid sagedast kasutamist leiab ka logaritmiline seosefunktsioon. Erinevalt Poissoni jaotuse eeldusest, et keskvärtus on võrdne dispersiooniga, on gammajaotuse korral dispersioon proportsionaalne keskvärtuse ruuduga: $E[C_{ij}] = \mu_{ij}$ ja $D[C_{ij}] = \phi E[C_{ij}]^2 = \phi \mu_{ij}^2$.

Lisaks võib gammajaotusega juhuslik suurus omada vaid positiivseid väärtuseid, kui Poissoni jaotusega juhuslik suurus peab olema mittenegatiivne.

3.2 Jääkide valimine

Jäägid (vt tabel 2) annavad meile informatsiooni selle kohta, kui hästi defineeritud mudel andmetega sobib (kui täpseid prognoose me mudeli abil tuleviku kohta teha oskame). Jääk r_{ij} vastab i -ndale algperioodile ning j -ndale arenguperioodile ning on defineeritud kui tegeliku väärtuse ning prognoositud väärtuse vahe:

$$r_{ij} = C_{ij} - \hat{C}_{ij}$$

Tabel 2. Arengukolmnurga jäägid.

	Arenguperiood j				
Algperiood i	0	1	2	...	J
0	$C_{00} - \hat{C}_{00}$	$C_{01} - \hat{C}_{01}$	$C_{02} - \hat{C}_{02}$...	$C_{0J} - \hat{C}_{0J}$
1	$C_{10} - \hat{C}_{10}$	$C_{11} - \hat{C}_{11}$...		
2	$C_{20} - \hat{C}_{20}$...			
...	...				
I	$C_{I0} - \hat{C}_{I0}$				

Tuletame meelde, et kui klassikalise lineaarse mudeli korral eeldatakse, et mudeli jäägid on sõltumatud normaaljaotusega $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, siis GLM mudeli jäägid sõltuvad uuritava tunnuse jaotusest, mis teeb tavaliste jääkide (*raw residuals*) interpreteerimise keerulisemaks. Eesmärgiks on saada jäägid, mis on keskväertusega 0, konstantse dispersiooniga ja sümmeetrilise jaotusega. Sõltuvalt kontekstist on otstarbekas kasutada erinevaid jääke, mis tähendab, et jäägid ei ole GLM mudeli korral üheselt defineeritud ning seetõttu ei ole ka Bootstrap-meetodi rakendamine jääkidele üheselt defineeritud. See tähendab, et Bootstrap-meetodiga saadud hinnangud kogureservi suurusele sõltuvad jäägi valikust ning seetõttu on oluline defineerida konkreetsele olukorrale sobivad jäägid.

Bootstrap-meetodi rakendamisel jääkidele kasutatakse kõige sagedasemalt Pearsoni jääke, kuna nad on lihtsasti arusaadavad ning neil on mitmed head omadused, mis nende kasutamise mugavaks teevad. Samas on Pearsoni jääkidel ka negatiivseid omadusi, millele tuleks tähelepanu pöörata. Antud peatükis antakse lisaks Pearsoni jääkidele ülevaade ka hälbumusjääkidest ja Anscombe'i jääkidest ning tuuakse välja probleemid, mis võivad Bootstrap-meetodi rakendamisel konkreetsele jäägile aset leida.

Lihtsaim standardiseerimine on jagada jäägid neile mudeli järgi vastavate skaleeritud standardvigadega:

$$r_{iP} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}},$$

kus $V(\hat{\mu}_i)$ tähistab dispersioonifunktsiooni.

Sellisel viisil defineeritud jääke nimetatakse Pearsoni jääkideks.

Pearsoni jääkide nimi tuleneb sellest, et Pearsoni jääkide ruutude summa annab meile Pearsoni hii-ruut statistiku:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (r_{iP})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{V(\hat{\mu}_i)}.$$

Korrektse mudeli korral on Pearsoni jäägid küll keskväertusega 0 ning konstantse varieeruvusega, kuid enamjaolt (kui uuritav tunnus ei ole normaaljaotusest) on nende jaotus asümmeetriline. Alternatiivina kasutatakse hälbumusjääke ning Anscombe'i jääke, mille jaotused on sümmeetrilisemad. [Wood]

Hälbumusel on GLM mudeli korral sarnane roll kui jääkide ruutude summal klassikalises lineaarses mudelis. GLM mudeli jaoks saame hälbumuse D kirja panna kui üksikute hälbumusjääkide r_{iD} ruutude summa:

$$D = \sum_{i=1}^n (r_{iD})^2,$$

kus

$$r_{iD} = \text{sgn}(y_i - \hat{\mu}_i) \sqrt{2(l_i(y_i, y_i) - l_i(y_i, \hat{\mu}_i))}.$$

Ülaloodud valemis tähistab l_i logaritmilist tõepärafunktsiooni. Sisuliselt võrreldakse küllastunud mudeli (kus hinnatakse parameeter iga vaatluse jaoks) maksimiseeritud logaritmilist tõepärafunktsiooni $l_i(y_i, y_i)$ konkreetse uuritava mudeli maksimeeritud logaritmilise tõepärafunktsiooniga $l_i(y_i, \hat{\mu}_i)$. [Davison, Hinkley, 1997]

Juhul kui $V(\hat{\mu}_i) = \hat{\mu}_i$, saame hälbumusjäägi kirja panna järgmiselt:

$$r_{iD} = \text{sgn}(y_i - \hat{\mu}_i) \sqrt{2 \left(y_i \log \left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right)}.$$

Anscombe'i jääkide korral transformeeritakse uuritavat tunnust y_i nii, et saadud jäägid oleksid võimalikult lähedased standardsele normaaljaotusele. Seetõttu kutsutakse Anscombe'i jääke ka normaliseeritud jääkideks. Poissoni jaotuse korral on normaaljaotusele lähedaseimaks transformatsiooniks $y_i^{\frac{2}{3}}$ ja jäägid avalduvad järgmiselt:

$$r_{iA} = \frac{1,5 \left(y_i^{\frac{2}{3}} - \hat{\mu}_i^{\frac{2}{3}} \right)}{\hat{\mu}_i^{\frac{1}{6}}},$$

ning gammajaotuse korral arvutatakse Anscombe'i jäägid valemiga

$$r_{iA} = 3 \left(\left(\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right).$$

Sageli kasutatakse üldistatud lineaarsete mudelite korral standardiseeritud variante eelnevalt kirjeldatud jääkidest. Vastav valem on järgmine:

$$r'_i = \frac{r_i}{\sqrt{\hat{\varphi}(1 - h_{ii})}},$$

kus h_{ii} on „mütsimaatriksi“ H i -s diagonaalelement ning näitab vaatluse mõjukust hinnatavatele parameetritele ning $\hat{\varphi}$ on andmetelt hinnatud skaalaparameetri hinnang . Vaatluste mõjukuste summa on võrdne parameetrite arvuga:

$$\sum_{i=1}^n h_{ii} = p$$

Mütsimaatriks H avaldub GLM mudeli korral kujul:

$$H = X(X^T W X)^{-1} X^T W$$

[Davison, Hinkley, 1997]

3.3 Probleemid Bootstrap-meetodi rakendamisel jääkidele

Selles peatükis on tuginetud allikatele [Hartl, 2010] ning [Davison, Hinkley, 1997].

Olgu meil Pearsoni standardiseeritud jääkidest moodustatud vektor $(r'_{1P}, r'_{2P}, \dots, r'_{nP})$ ning hälvimuse standardiseeritud jääkidest moodustatud vektor $(r'_{1D}, r'_{2D}, \dots, r'_{nD})$. Kui prognoositud väärtus $\hat{\mu}_i$ vaatlusele y_i on konstantne, siis jääk r_i avaldub funktsioonina tegelikust vaatlusest y_i :

$$r'_{iP} = h(y_i, \hat{\mu}_i).$$

Pseudo-algandmestiku leidmiseks tuleb rakendada pöördfunktsiooni h^{-1} vektori $(r'_{1P}, r'_{2P}, \dots, r'_{nP})$ või $(r'_{1D}, r'_{2D}, \dots, r'_{nD})$ elementidele. Seega pseudo-algandmestiku saame defineerida järgmiselt:

$$y_i^* = h^{-1}(r'_{iP}, \hat{\mu}_i).$$

Näeme, et Pearsoni jäägid avalduvad lineaarse funktsioonina y -st:

$$r'_{iP} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{\hat{\varphi} V(\hat{\mu}_i)(1 - h_{ii})}}$$

ning seetõttu avaldub ka pseudo-algandmestik y_i^* lineaarsel kujul

$$y_i^* = \hat{\mu}_i + r_{iP}' \sqrt{\hat{\phi} V(\hat{\mu}_i)(1 - h_{ii})}.$$

Kuna standardiseeritud jäägid on nullkeskmisega, tähendab see, et piisavalt väikeste prognoositud väärtuste $\hat{\mu}_i$ korral on pseudo-andmestiku väärtuste seas negatiivseid väärtuseid. Logaritmilise seosefunktsiooniga GLM-mudeli jaoks on see aga mudeli eelduste rikkumine, kuna negatiivsest arvust logaritmi võtta ei saa.

Hälbimusjääkide puhul on jääkide ning vaatluste vahel tegemist aga mitte-lineaarse seosega ning saab näidata, et pöördfunktsiooni h^{-1} kasutamine annab alati positiivsete väärtustega pseudo-andmestiku [Hartl, 2010].

Hälbimusjääkide korral, mille saab $V(\hat{\mu}_i) = \hat{\mu}_i$ korral kirja panna järgmiselt:

$$r_{iD} = \text{sgn}(y_i - \hat{\mu}_i) \sqrt{2y_i \ln \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} - (y_i - \hat{\mu}_i)},$$

on probleemiks pöördfunktsiooni leidmine y_i^* arvutamiseks. Ilmutatud kuju y_i^* avaldamiseks ei ole võimalik leida ning selleks tuleb kasutada numbrilisi meetodeid, näiteks Newton-Raphsoni algoritmi kombineerituna „bisection“ meetodiga [Press jt, 1992]. Kuna Bootstrap-meetod on niigi resurssinõudlik, siis lisasammude tegemine igal Bootstrap-meetodi iteratsioonisammul ei ole enamjaolt põhjendatud ning seetõttu rakendatakse Bootstrap-meetodit hälbimusjääkidele praktikas harva. Pearsoni ning Anscombe'i jääkide kasutamisest tulenevaid erinevusi võrreldakse peatükis 5.

3.4 Null-jääkide probleem

Oluline on tähelepanu pöörata asjaolule, et arvutatud jääkide tabelis (vt tabel 3) on väärtused esimese veeru viimases reas ning esimese rea viimases veerus alati võrdsed nulliga. Need jäägid on nullid, kuna hinnangud vastavatele arenguperioodi ja algperioodi parameetritele (*dummy* muutujale) saadakse sel juhul vaid ühe vaatluse pealt. Viimasesse ritta ning viimasesse veergu kuulub vaid üks juurdekasv ning seega määravad need üksikud juurdekasvud neile vastava parameetri üheselt. See tähendab, et

prognoositud väärtus saab täpselt sama väärtuse kui on tegelik väärtus ja jääk on seega 0. Põhjalikumalt seletatakse probleemi järgnevalt.

Kuna arengutegur ahel-redel meetodi korral avaldub suhtena

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}},$$

siis probleemsetel juhtudel (viimane veerg J ja viimane rida I) avalduvad arengutegurid järgmiselt:

$$f_J = \frac{C_{0J}}{C_{0,J-1}},$$

$$f_I = \frac{C_{I0}}{C_{I-1,0}}.$$

Prognoos \hat{C}_{0J} arvutatakse valemiga $\hat{C}_{0J} = C_{0,J-1}f_J = C_{0,J-1}\frac{C_{0J}}{C_{0,J-1}} = C_{0J}$

ning prognoos \hat{C}_{I0} arvutatakse valemiga $\hat{C}_{I0} = C_{I-1,0}f_I = C_{I-1,0}\frac{C_{I0}}{C_{I-1,0}} = C_{I0}$.

Järelikult

$$\hat{C}_{0J} - C_{0J} = 0 \quad \text{ja} \quad C_{I0} - \hat{C}_{I0} = 0.$$

Tabel 3. Jääkide tabel.

	Arenguperiood j				
Algperiood i	0	1	2	...	J
0	$C_{00} - \hat{C}_{00}$	$C_{01} - \hat{C}_{01}$	$C_{02} - \hat{C}_{02}$...	0
1	$C_{10} - \hat{C}_{10}$	$C_{11} - \hat{C}_{11}$...		
2	$C_{20} - \hat{C}_{20}$...			
...	...				
I	0				

Null-jääkide probleem seisneb selles, et Bootstrap-meetodit kasutades eeldatakse, et juhuslikud suurused (antud juhul jäägid) on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud

suurused. Antud juhul on aga kaks jääki alati fikseeritud nullidena ja juhuslikkus seega puudub.

Ühe võimalusena kirjeldatud probleemi arvesse ei võeta ning taasvalikumeetodil saadud valim jääkidest sisaldab ka nulle. Teine võimalus on aga nullid jääkide seast eemaldada ning nende asemele valida juhuslikult jäägid ülejäänud jääkide seast.

4. PROGNOOSIVIGA KOGURESERVI HINNANGULE

4.1 Prognoosivea hindamine analüütiliselt

Stohhastiliste meetodite põhieeliseks võrreldes ahel-redel meetodiga on asjaolu, et nendega on võimalus saada hinnangud kogureservi varieeruvusele. Kõige sagedasemalt kasutatakse selleks prognoosiviga (nimetatakse veel prognoosi standardveaks või ruutkeskmiseks prognoosiveaks). Kogureservi prognoosiviga avaldub kahe komponendi, protsessivea (*process variance, process error*) ning hinnanguvea (*estimation variance, parameter variance*) summana. Protsessiviga vastab loomulikule varieeruvusele andmetes ning hinnangu viga mõõdab parameetrite hindamisel tehtavat viga. [England ja Verrall, 1998]

Prognoosivea saab iga konkreetse tuleviku prognoosi \hat{C}_{ij} , kus $i = 1, \dots, I$ ja $j = I + 1 - i, \dots, J$ jaoks kirja panna järgmiselt:

$$\begin{aligned} E \left[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2 \right] &= (E[C_{ij}] - E[\hat{C}_{ij}])^2 + D[C_{ij} - \hat{C}_{ij}] \approx 0 + D[C_{ij} - \hat{C}_{ij}] = \\ &= D[C_{ij}] + D[\hat{C}_{ij}], \end{aligned}$$

kus $D[C_{ij}]$ vastab protsessiveale ning $D[\hat{C}_{ij}]$ vastab hinnanguveale. Eeldusel, et \hat{C}_{ij} on nihketa (või asümptootiliselt nihketa) hinnangud suurusele C_{ij} , on nihke ruut $(E[C_{ij}] - E[\hat{C}_{ij}])^2 \approx 0$. Kuna tuleviku juurdekasv C_{ij} ja tema prognoos \hat{C}_{ij} (mis on arvutatud mineviku juurdekasvude pealt) on sõltumatud juhuslikud suurused, siis on $D[C_{ij} - \hat{C}_{ij}] = D[C_{ij}] + D[\hat{C}_{ij}]$. [Kaas jt, 2008]

See, kuidas protsessiviga ning hinnanguviga täpselt avalduvad, oleneb hinnatavast mudelist. Käesolevas töös tehakse analüütiline tuletuskäik prognoosivea arvutamiseks Poissoni (üleahajuvusega Poissoni) ja gammajaotusega mudelite jaoks, kuna praktilises osas kasutatakse Bootstrap-meetodis just neid kahte mudelit.

Ülehajuvusega Poissoni mudeli korral on tegu log-seosefunktsiooniga $\log(\mu_{ij}) = \eta_{ij}$ ning uuritava tunnuse (juurdekasvude) keskväärtus ning dispersioon avalduvad järgmiselt:

$$E[C_{ij}] = \mu_{ij} = \exp(\eta_{ij}) \text{ ja } D[C_{ij}] = \phi E[C_{ij}] = \phi \mu_{ij},$$

kus $\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$ ning $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Gammajaotusega mudeli korral on dispersioon proportsionaalne keskväärtuse ruuduga:

$$E[C_{ij}] = \mu_{ij} = \exp(\eta_{ij}) \text{ ja } D[C_{ij}] = \phi E[C_{ij}]^2 = \phi \mu_{ij}^2,$$

kus $\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$ ning $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. [England, Verrall, 1998]

Seega avaldub protsessivea (andmete varieeruvuse) üldine kuju ülehajuvusega Poissoni jaotusega mudeli ning gammajaotusega mudeli kohta ülaltoodud seostest järgmiselt:

$$D[C_{ij}] = \phi \mu_{ij}^p,$$

kus $p = 1$ ülehajuvusega Poissoni ning $p = 2$ gammajaotusega mudeli jaoks.

Hinnanguvea saamiseks paneme tähele, et ülehajuvusega Poissoni ning gammajaotusega mudelite jaoks kehtib $E[C_{ij}] = \mu_{ij}$. Kasutades delta meetodit ning asjaolu, et log-seosefunktsiooni korral $\frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \mu$ avaldub hinnanguviga järgmiselt [Kaas jt, 2008]:

$$D[\hat{C}_{ij}] \cong \left| \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right|^2 D[\eta_{ij}] = \mu_{ij}^2 D[\eta_{ij}].$$

Seega prognoosiviga tulevikuväärtusele \hat{C}_{ij} avaldub kujul:

$$E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2] = \phi \mu_{ij}^p + \mu_{ij}^2 D[\eta_{ij}].$$

Analoogiliselt eelnevale tuletuskäigule saab avaldada erinevate tulevikuprognoside \hat{C}_{ij} ja \hat{C}_{kl} , kus $(i, j) \neq (k, l)$ kovariatsioonid järgmiselt:

$$\text{Cov}[\hat{C}_{ij}, \hat{C}_{kl}] = \hat{\mu}_{ij}\hat{\mu}_{kl} \text{Cov}[\hat{\eta}_{ij}, \hat{\eta}_{kl}].$$

Tähistagu kogureservi hinnangut $\hat{R} = \sum_{i,j \in \Delta} \hat{C}_{ij}$ kogureservile $R = \sum_{i,j \in \Delta} C_{ij}$, kus Δ tähistab prognoositavat alumist kolmnurka ($i = 1, \dots, I$ ja $j = I + 1 - i, \dots, J$). Eelnevalt tuletatud tulemusi arvesse võttes avaldub prognoosiviga järgmiselt:

$$\begin{aligned} E[(R - \hat{R})^2] &= \sum_{i,j \in \Delta} E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2] + 2 \sum_{(i,j) \neq (k,l) \in \Delta} E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})(C_{kl} - \hat{C}_{kl})] \\ &\approx \sum_{i,j \in \Delta} E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2] + 2 \sum_{(i,j) \neq (k,l) \in \Delta} \text{Cov}[(C_{ij} - \hat{C}_{ij}), (C_{kl} - \hat{C}_{kl})] \\ &= \sum_{i,j \in \Delta} E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2] + 2 \sum_{(i,j) \neq (k,l) \in \Delta} \text{Cov}[\hat{C}_{ij}, \hat{C}_{kl}] \\ &= \sum_{i,j \in \Delta} \phi \mu_{ij}^p + \sum_{i,j \in \Delta} \mu_{ij}^2 D[\eta_{ij}] + 2 \sum_{(i,j) \neq (k,l) \in \Delta} \hat{\mu}_{ij}\hat{\mu}_{kl} \text{Cov}[\hat{\eta}_{ij}, \hat{\eta}_{kl}], \end{aligned}$$

kus esimene liige on kogureservi protsessiviga ning teine ja kolmas liige moodustavad hinnangu vea [England ja Verrall, 1998].

Järgnevates peatükkides 4.2 ja 4.3 kirjeldatakse kogureservi prognoosivea hindamist Bootstrap-meetodi korral.

4.2 Bootstrap-meetodi hinnangud kogureservi prognoosiveale.

Bootstrap-meetodit kogureservi prognoosivea leidmiseks saab kasutada ka juhul, kui analüütiliselt seda teha pole võimalik või see on väga keeruline.

Bootstrap-meetodil hinnatav prognoosiviga kogureservile avaldub sarnaselt analüütilisel teel hinnatud prognoosiveale samuti läbi protsessivea ning hinnanguvea summa.

Protsessiviga avaldub täpselt samamoodi kui analüütilisel teel (eelmises alapeatükis tuletatud):

$$\sum_{i,j \in \Delta} \phi \mu_{ij}^p = \phi \sum_{i,j \in \Delta} \mu_{ij}^p.$$

Poissoni (üleahajuvusega Poissoni) mudeli korral ülaltoodud valem lihtsustub:

$$\phi \sum_{i,j \in \Delta} \mu_{ij}^p = \phi \sum_{i,j \in \Delta} \mu_{ij} = \phi R$$

Bootstrap-meetodil tehtav hinnanguviga (tähistatakse $SE_{bs}(R)$) võrdub Bootstrap-meetodil leitud m kogureservi standardveaga. Bootstrap-meetodiga arvatud hinnanguvea ning analüütilise lähendi suurim erinevus on selles, et Bootstrap-meetodil hinnatakse kogureservi hinnanguviga Bootstrap-meetodil saadud kogureservi hinnangute (m hinnangut) standardveana, mitte kasutades teoreetilist lähendust.

Analüütiliselt saadud hinnanguviga ning Bootstrap-meetodil saadud hinnanguviga ei ole võrreldavad kuna Bootstrap-meetodiga saadud standardviga (hinnanguviga) ei võta arvesse mudeli hindamisel kasutatud parameetrite arvu. [England ja Verrall, 1998]

Analüütilised hinnangud hinnanguveale võtavad arvesse ka parameetrite arvu, kuna nad sisaldavad dispersiooni ja kovariatsiooni liikmeid, mis vaikimisi sisaldavad skaalaparameetrit ϕ . Skaalaparameetri ϕ hindamiseks on võimalik kasutada kas mudeli hälbumust D või Pearsoni hii-ruut statistikut χ^2 .

Hälbumuse skaalaparameeter avaldub mudeli hälbumuse ning vabadusastmete arvu $n-p$ suhtega

$$\phi_D = \frac{\sum_{i=1}^n r_D^2}{n-p}$$

ning Pearsoni skaalaparameeter avaldub hii-ruut statistiku χ^2 ning vabadusastmete arvu $n-p$ suhtega

$$\phi_P = \frac{\sum_{i=1}^n r_P^2}{n-p},$$

kus n tähistab olemasolevate andmete (vaatluste) arvu ning p tähistab hinnatud parameetrite arvu.

Selleks, et analüütiline hinnanguviga ning Bootstrap-meetodil leitud hinnanguviga oleksid võrreldavad, tuleb Bootstrap-meetodil saadud hinnanguviga läbi korrutada teguriga $\frac{n}{n-p}$.

Bootstrap-meetodiga saadud prognoosiviga (tähistatakse $PE_{bs}(R)$) hinnatud kogureservile on seega järgmine:

$$PE_{bs}(R) = \sqrt{\phi_p R + \frac{n}{n-p} (SE_{bs}(R))^2},$$

kus protsessiviga avaldub valemiga $\phi_p R$, hinnanguviga on tähistatud $SE_{bs}(R)$ ning kus R on punkthinnang kogureservile (esialgse kolmnurktabeli põhjal).

Eelnevalt kirjeldatud hinnang, mida edaspidi nimetame ka SEP-meetodil saadud hinnanguks kogureservi prognoosiveale põhineb suuresti tsentraalsel piirteoreemil. Prognoosivea leidmiseks on aga ka alternatiivne võimalus.

Alternatiivne lähenemine (edaspidises nimetuses PPE-meetod) nõuab rohkem arvutiressurssi, kuna ühe Bootstrap-meetodi iteratsioonisammu sees tehakse kaks taasvaliku protseduuri. Idee on defineerida sobiv prognoosiviga funktsioonina Bootstrap-meetodi hinnangust kogureservile ja Bootstrap-meetodi prognoosist tuleviku reaalsuse kohta ja talletada saadud prognoosiviga iga Bootstrap-meetodi iteratsioonisammu jaoks.

Selleks simuleeritakse lisaks pseudo-algandmestikule (ülemisele kolmnurgale) iga iteratsioonisamm ka tuleviku juurdekasvude pseudo-prognoosid (alumise kolmnurk). Prognoosiviga arvutatakse igal iteratsioonisammul kui algandmestikult saadud tuleviku prognooside ning pseudo-prognooside vahe. Saadud prognoosiviga talletatakse igal iteratsioonisammul ning lõpuks valitakse saadud prognoosivigade seast soovitud kvantiilile (nt 95%-kvantiilile) vastav prognoosiviga, mille kaudu (esialgse punkthinnanguga kombineerides) arvutatakse kogureservi ülemine piir. Selleks, et kaks meetodit omavahel paremini võrreldavad oleksid, kirjeldatakse järgmises alapeatükis täpsemalt, millised etapid Bootstrap-meetodi korral kindlasti läbida tuleb ning millised lisaetapid tuleb teha juhul kui soovitakse leida ka alternatiivne hinnang prognoosiveale.

4.3 Bootstrap-meetodi algoritm kogureservi hindamiseks

Bootstrap-meetodi etapid: [Pinheiro jt, 2003]

1. Sammud enne Bootstrap-meetodi tsükli:

- 1) Valitakse ja kirjeldatakse mudel, mille järgi reserve hinnatakse.
- 2) Valitakse vastavalt olukorrale sobivad jäägid. Võimalikest jääkidest tehti kokkuvõtte peatükis 3.2.
- 3) Hinnatakse esimesel sammul kirjeldatud mudeli parameetrid algse valimi X^0 pealt.
- 4) Hinnatud parameetreid kasutades arvutatakse prognoositud juurdekasvud \hat{C}_{ij} tegelikele juurdekasvudele C_{ij} . Seejärel arvutatakse vastavalt teisel sammul defineeritud jäägile mudelijäägid $r_{ij} = C_{ij} - \hat{C}_{ij}$, kus ($i = 0, 1, \dots, I$ ja $j = 0, 1, \dots, I + 1 - i$). Eeldatakse, et saadud jäägid on s.s.j.j.s. Hinnatud parameetreid kasutades arvutatakse ka tuleviku juurdekasvude prognoosid \hat{C}_{ij} , kus ($i = 1, \dots, I$ ja $j = J + 1 - i, \dots, J$) ning nende põhjal hinnanguline kogureserv \hat{R} .
- 5) Määratakse Bootstrap-meetodi iteratsioonisammude arv m .

2. Järgnevad sammud 6) – 8) tehakse Bootstrap-meetodi tsükli, kus $b = 1, \dots, m$.

2.1 Bootstrap-meetodi etapid tavalises Bootstrap-meetodi protseduuris:

- 6) Simuleeritakse Bootstrap-meetodil (tagasipanekuga) sammul 4) saadud jääkide seast n pseudo-jääki r_{ij}^* , kus n võrdub ülemises kolmnurgas olevate juurdekasvude arvuga.
- 7) Saadud pseudo-jääkidele r_{ij}^* rakendatakse pöördfunktsiooni $C_{ij}^* = h^{-1}(r_{ij}^*, \hat{C}_{ij})$, saamaks pseudo-andmestikku C_{ij}^* , kus ($i = 0, 1, \dots, I$ ja $j = 0, 1, \dots, I + 1 - i$).
- 8) Moodustatud pseudo-kolmnurkade põhjal hinnatakse eelnevalt valitud mudeliga uued mudeli parameetrid ning nende põhjal arvutatakse alumine kolmnurk ning kogureservi hinnang \hat{R}^b , kus b tähistab Bootstrap-meetodi tsükli indeksit. Kogureservi hinnang \hat{R}^b talletatakse Bootstrap-jaotuse saamiseks.

2.2 Lisaetapid 9) – 11) alternatiivse meetodi jaoks (*pseudo reality* simuleerimine):

- 9) Simuleeritakse Bootstrap-meetodil (tagasipanekuga) sammul 4) saadud jääkide seast k pseudo-jääki r_{ij}^{**} , kus k võrdub alumises kolmnurgas olevate prognoositavate tuleviku juurdekasvude arvuga.
- 10) Saadud pseudo-jääkidele r_{ij}^{**} rakendatakse pöördfunktsiooni $C_{ij}^{**} = h^{-1}(r_{ij}^{**}, \hat{C}_{ij})$, saamaks tuleviku juurdekasvude pseudo-prognoosid (*pseudo-reality*) C_{ij}^{**} , kus ($i = 1, \dots, I$ ja $j = J + 1 - i, \dots, J$). Juurdekasvude \hat{C}_{ij} puhul on tegemist algandmestiku pealt tehtud tuleviku juurdekasvude prognoosidega.
- 11) Arvutatakse prognoosivead $r_{.b} = C_{.}^{**} - \hat{R}^b$, kus $r_{.b}$ tähistab kogureservi tegemisel tehtavat prognoosiviga (summa üle kõigi tuleviku juurdekasvude prognoosivigade), $C_{.}^{**}$ võrdub tuleviku juurdekasvude pseudo-prognooside summaga ning \hat{R}^b tähistab kogureservi hinnangut b -ndal Bootstrap-meetodi iteratsioonisammul. Saadud prognoosiviga talletatakse.

3. Bootstrap-meetodil saadud tulemuste analüüs:

3.1 „Tavalise“ (SEP) meetodi jaoks:

Saadud hinnangud \hat{R}^b ($b = 1, \dots, m$) koguresevile moodustavad Bootstrap-jaotuse (prognoosiva jaotuse) reservihinnangute keskmisele. Selle jaotuse pealt on lihtne arvutada meid huvitavad karakteristikud kogureservi keskmisele. Hinnanguveaks on pseudoandmestike tulemuste põhjal saadud standardviga.

3.2 Alternatiivse (PPE) meetodi jaoks:

Valitakse olulisusnivoo α . Valitud olulisusnivood kasutades leitakse Bootstrap-meetodi käigus saadud m prognoosivea seast $(1 - \alpha)\%$ kvantiilile vastav prognoosiviga (näiteks suuruselt 950. prognoosiviga 1000 seast) ning selle prognoosivea abil arvutatakse pöördfunktsiooni $C_{.,k}^* = h^{-1}(r_{.,k}^{**}, \hat{R})$ kasutades prognoosivea ülemine $(1 - \alpha)$ usalduspiir, kus \hat{R} on originaalandmestiku pealt (sammul 4) saadud hinnang koguresevile.

5. BOOTSTRAP-MEETODI RAKENDAMINE ANDMETELE

Teoreetilises osas püstitati mitmed probleemid, mis Bootstrap-meetodi rakendamisel jääkidele võivad esineda ning näidati, et erinevaid valikuid, mis enne Bootstrap-meetodi rakendamist tuleb teha, on üsna palju. Käesoleva töö praktilise osa eesmärk on analüüsida, kuidas ja kui palju Bootstrap-meetodil saadud reserve hinnangud ning hinnangute prognoosivead nendest valikutest sõltuvad.

Selleks, et Bootstrap-meetodi omapärad reserve hindamisel paremini välja tuleksid, rakendatakse Bootstrap-meetodit kahele andmestikule. Esimeses kahjukolmnurgas (vt tabel 4) on juurdekasvude suurused enam-vähem samas suurusjärgus: minimaalseks juurdekasvu suuruseks on 67948 ning maksimaalseks 1562400, mis on 23 kordne erinevus. Teises kahjukolmnurgas (vt tabel 9), kus on kasutatud reaalseid Euroopa Liidu kindlustusfirma andmeid, on juurdekasvude suurused aga selgelt erinevates suurusjärgudes: minimaalseks juurdekasvu suuruseks on 1022 ning maksimaalseks 10660074, mis on 10430 kordne erinevus. Interpreteerimise huvides oletatakse, et juurdekasvude suurused mõlemas arengukolmnurgas on toodud eurodes.

Bootstrap-meetodi algoritmi kasutades on kõige problemaatilisemaks etapiks pseudo-andmestiku moodustamine. Juhul, kui juurdekasvude suurusjärgud erinevad oluliselt, on üsna tõenäoline, et olemasolevatest jääkidest simuleeritud jäägi väärtus on võrreldes prognoositud juurdekasvu suurusega piisavalt suur, et tekiks olukord, kus pöördfunktsiooni kasutades saadakse pseudo-andmestikku negatiivne väärtus. Kuna reserve hindamiseks kasutatakse üldjuhul jaotusi, mille korral juhusliku suuruse väärtus sellest jaotusest võib omandada vaid mittenegatiivseid (või positiivseid) väärtuseid, siis tuleb tekkinud negatiivne väärtus vaatluse all olevale jaotusele sobivale kujule viia. Poissoni jaotuse korral võrdsustakse negatiivne juurdekasvu väärtus praktikas sageli nulliga.

Kaht erinevat kahjukolmnurka on mõistlik analüüsida ka seepärast, sest siis on võimalik võrrelda, kas mudeli ning jäägi valikul on prognoosivigadele, olenemata uuritava andmestiku valikust, samasugune mõju.

Tabelis 4 toodud andmetele rakendatakse peatükis 4.3 kirjeldatud algoritmi ning leitakse reservide hinnangud ning hinnangutele vastavad prognoosivead. Olenevalt mudeli ning jääkide valikust saadakse küllaltki erinevad prognoosivead.

Tabel 4. Üksikute juurdekasvude arengukolmnurk (esimene uuritav andmestik).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	357 848	766 940	610 542	482 940	527 326	574 398	146 342	139 950	227 229	67 948
1	352 118	884 021	933 894	1 183 289	445 745	320 996	527 804	266 172	425 046	
2	290 507	1 001 799	926 219	1 016 654	750 816	146 923	495 992	280 405		
3	310 608	1 108 250	776 189	1 562 400	272 482	352 053	206 286			
4	443 160	693 190	991 983	769 488	504 851	470 639				
5	396 132	937 085	847 498	805 037	705 960					
6	440 832	847 631	1 131 398	1 063 269						
7	359 480	1 061 648	1 443 370							
8	376 686	986 608								
9	344 014									

Tabelites 5, 6, 7 ja 8 on võrreldud, kuidas muutuvad reservihinnangud ning nende prognoosivead sõltuvalt sellest, mis mudeliga me juurdekasvuid prognoosime. Meenutame, et ülehajuvusega Poissoni mudelit on Bootstrap-meetodi juures mõistlik kasutada, sest hinnatud juurdekasvud võrduvad ahel-redel meetodil saadud hinnangutega. Teise variandina kasutatakse käesolevas töös algandmestikult esmaste prognoosimiste tegemiseks gammajaotusega mudelit (edaspidi gamma-mudel).

Prognoosivigu võrreldakse ka sõltuvalt jäägi valikust ja sellest, kas ja kuidas me jääke oleme korrigeerinud. Üheks võimaluseks on jääkide seast eemaldada null-jäägid (tabelites tähistatud „Eemalda nullid“) ning lisaks on jäägid võimalik ka standardiseerida (tabelites tähistatud „Mõjukus“), kasutades valemit $r_i' = \frac{r_i}{\sqrt{\hat{\varphi}(1-h_{ii})}}$.

Lisaks on kõikides tabelites võrreldud peatükis 4.2 kirjeldatud „tavalise“ Bootstrap-meetodiga saadud prognoosivigu (SEP) alternatiivse (pseudo-realsust kasutava) Bootstrap-meetodi protseduuriga saadud prognoosivigadega (PPE). PPE prognoosivead

on toodud vaid kogureservi hinnangule. Reservide punkthinnangud, nende prognoosivead (SEP) ning ülemine 95%-line usalduspiir on toodud ka iga aasta kohta eraldi. SEP ja PPE prognoosivigu võrreldes tuleb arvestada sellega, et nad on erinevates ühikutes. SEP prognoosiviga vastab ühele standardhälbele ja PPE viga vastab umbes 1,645 standardhälbele (normaaljaotuse 95%-kvantiil). See tähendab seda, et kogureservile ülemise piiri saamiseks tuleb SEP meetodi korral kogureservi keskmisele juurde liita 1,645-ga läbi korrutatud SEP prognoosiviga. PPE meetodi korral saame ülemise usalduspiiri liites PPE-meetodil leitud prognoosivea otse keskväärtusele juurde.

Tabel 5. Reservide hinnangud ning prognoosivead kasutades Poissoni mudelit ja Pearsoni jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	94 634	105 233	267 742	107 915	272 154	72 290	213 550
3	469 511	216 702	825 987	219 822	831 118	191 388	784 344
4	709 638	262 257	1 141 051	265 395	1 146 212	242 750	1 108 961
5	984 889	296 835	1 473 183	306 514	1 489 103	290 795	1 463 246
6	1 419 459	376 490	2 038 785	383 995	2 051 132	367 305	2 023 676
7	2 177 641	490 209	2 984 035	504 077	3 006 847	478 695	2 965 094
8	3 920 301	791 018	5 221 526	820 562	5 270 126	750 844	5 155 440
9	4 278 972	1 075 091	6 047 497	1 115 070	6 113 262	898 486	5 756 982
10	4 625 811	2 158 843	8 177 107	2 171 328	8 197 645	859 657	6 039 946
Kokku	18 680 856	3 125 371	23 822 091	3 201 647	23 947 565	2 097 186	22 130 727
PPE		4 791 819	23 472 675	5 088 363	23 769 218	2 716 989	21 397 844
PPE/SEP		1,533	0,985	1,589	0,993	1,296	0,967

Esimene veerg tabelites 5-8 näitab punkthinnangut. Punkthinnangud reservidele saadakse otse defineeritud mudelist (ilma Bootstrap meetodit kasutamata) ning seega on punkthinnangud sõltumata jäägi valikust ning selle korrigeerimisest muutumatud.

Tabeleid 5 ning 6 tabelitega 7 ja 8 võrreldes on näha, et (üleahajuvusega) Poissoni jaotusega mudelit kasutades saame kogureservile võrreldes gamma-mudeliga mõnevõrra kõrgemad hinnangud.

Poissoni jaotuse korral on kogureservi punkthinnanguks 18,68 miljonit eurot, mis on 3,29% enam kui gamma-mudeliga hinnatud kogureservi punkthinnang (18,09 miljonit eurot).

Tabel 6. Reserve hinnangud ning prognoosivead kasutades Poissoni mudelit ja Anscombe'i jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	94 634	99 050	257 571	100 856	260 542	71 650	212 499
3	469 511	200 976	800 117	199 609	797 867	180 493	766 423
4	709 638	242 322	1 108 258	241 704	1 107 241	226 406	1 082 076
5	984 889	276 465	1 439 673	281 804	1 448 457	270 369	1 429 645
6	1 419 459	347 203	1 990 608	349 276	1 994 018	338 168	1 975 745
7	2 177 641	446 205	2 911 647	451 861	2 920 951	435 109	2 893 394
8	3 920 301	701 147	5 073 687	710 006	5 088 260	662 796	5 010 601
9	4 278 972	915 852	5 785 548	938 469	5 822 754	781 730	5 564 918
10	4 625 811	1 772 652	7 541 823	1 777 720	7 550 160	740 835	5 844 484
Kokku	18 680 856	2 605 404	22 966 745	2 647 696	23 036 316	1 788 260	21 622 543
PPE		3 686 243	22 367 099	3 802 979	22 483 834	2 235 303	20 916 159
PPE/SEP		1,415	0,974	1,436	0,976	1,250	0,967

Kui võrrelda Poissoni jaotusega mudeliga ning gamma-mudeliga saadud punkthinnanguid aastate lõikes, siis kõige rohkem (16%) erineb Poissoni jaotusega mudeliga saadud hinnang gamma-mudeliga saadud hinnangust neljanda aasta korral. Poissoni jaotuse korral on ka prognoosivead suuremad ning sellest tulenevalt ka ülemine piir kogureservile kõrgem. Poissoni jaotusega mudeli korral kõiguvad kogureservi prognoosivead (SEP) sõltuvalt jäägi valikust ning selle korrigeerimisest vahemikus 1,79 miljonit eurot kuni 3,20 miljonit eurot. Gamma-mudeli korral jäävad kogureservi prognoosivead vahemikku 1,89 kuni 2,89 miljonit eurot.

Tabelit 5 tabeliga 6 ning tabelit 7 tabeliga 8 võrreldes on näha, et Pearsoni jääke kasutades on prognoosiviga (SEP) tunduvalt suurem kui Anscombe'i jääke kasutades. Poissoni jaotust ning Pearsoni jääke kasutades on prognoosivead (sõltuvalt jäägi korrigeerimisest) 1,17 kuni 1,21 korda suuremad kui Poissoni jaotust ja Anscombe'i

jääke kasutades. Gammaajaotuse korral on vastavaks erinevuseks (sõltuvalt jäägi korrigeerimisest) 1,19 kuni 1,21 korda. See tähendab, et ülemine usalduspiir kogureservi keskmisele on Pearsoni jääkide korral võrreldes Anscombe'i jääkidega samuti tunduvalt kõrgem, erinedes korrigeerimata jääkide korral kõige rohkem (855346 euro võrra).

Tabel 7. Reservide hinnangud ning prognoosivead kasutades gamma-mudelit ja Pearsoni jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	93 316	46 896	170 460	46 777	170 265	33 613	148 609
3	446 507	162 038	713 059	163 129	714 854	153 037	698 252
4	611 147	182 077	910 663	184 931	915 359	176 075	900 790
5	992 027	259 369	1 418 690	261 049	1 421 453	255 967	1 413 093
6	1 453 086	358 016	2 042 023	361 137	2 047 157	357 105	2 040 523
7	2 186 162	532 475	3 062 082	543 958	3 080 973	536 742	3 069 102
8	3 665 072	970 378	5 261 343	992 863	5 298 332	955 332	5 236 593
9	4 122 405	1 181 045	6 065 224	1 232 796	6 150 354	1 083 188	5 904 249
10	4 516 082	1 778 313	7 441 407	1 797 599	7 473 132	825 501	5 874 031
Kokku	18 085 805	2 820 004	22 724 711	2 893 319	22 845 314	2 254 601	21 794 623
PPE		4 216 820	22 302 624	4 642 611	22 728 416	3 074 599	21 160 404
PPE/SEP		1,495	0,981	1,605	0,995	1,364	0,971

Tabeleid 5-8 analüüsid on näha, et null-jääkide eemaldamine vähesel määral küll prognoosiviga suurendab, kuid erinevused on küllaltki väikesed (prognoosivea muutuseks sõltuvalt jäägist ning mudelist on 1,9% kuni 3,1%). Oluliselt mõjutab prognoosivea suurust juurdekasvude mõjukuse arvesse võtmine. Mõjukusega korrigeerimata jääkide korral on prognoosivead 1,31 kuni 1,49 korda suuremad kui korrigeeritud jääkide puhul. Prognoosivigu aastate lõikes vaadates on näha, et kõige rohkem erinevad korrigeerimata ning korrigeeritud jääkide prognoosivead viimasel aastal. Tabelite analüüsis tuleb välja, et Poissoni mudeli korral on PPE-meetodiga saadud ülemised usalduspiirid kogureservi keskmisele sõltuvalt jäägist 0,7% kuni 3,4% võrra madalamad kui SEP-meetodi korral.

Tabel 8. Reserve hinnangud ning prognoosivead kasutades gamma-mudelit ja Anscombe'i jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	93 316	41 651	161 832	41 619	161 779	32 389	146 597
3	446 507	147 906	689 813	148 764	691 224	141 563	679 377
4	611 147	163 892	880 750	165 673	883 680	159 187	873 009
5	992 027	231 803	1 373 343	233 103	1 375 482	228 930	1 368 617
6	1 453 086	316 565	1 973 836	318 432	1 976 907	314 695	1 970 759
7	2 186 162	465 290	2 951 564	473 529	2 965 117	467 024	2 954 416
8	3 665 072	839 413	5 045 907	854 620	5 070 922	824 699	5 021 701
9	4 122 405	1 003 126	5 772 547	1 040 551	5 834 111	927 219	5 647 681
10	4 516 082	1 459 987	6 917 761	1 472 788	6 938 818	733 928	5 723 393
Kokku	18 085 805	2 338 651	21 932 886	2 391 397	22 019 653	1 893 677	21 200 903
PPE		3 366 909	22 302 624	3 687 466	22 728 416	2 579 234	21 160 404
PPE/SEP		1,440	1,017	1,542	1,032	1,362	0,998

Tabelite analüüsist tuleb välja, et Poissoni mudeli korral on PPE-meetodiga saadud ülemised usalduspiirid kogureservi keskmisele sõltuvalt jäägist 0,7% kuni 3,4% võrra madalamad kui SEP-meetodi korral. Gamma-mudeli korral on PPE-meetodiga ning SEP-meetodiga leitud usalduspiiride erinevused väiksemad.

Eelpool toodud võrdlev arutelu näitab selgesti, et Bootstrap-meetodiga saadud hinnangud kogureservi prognoosiveale sõltuvad suuresti nii mudeli valikust, jäägi valikust, kui ka jäägi korrigeerimisest. Kõige olulisemalt mõjutavad hinnangut mudeli valik, jäägi valik ning jäägi korrigeerimine, arvestades juurdekasvude mõjukust parameetrite hindamisel. Gammajaotusega mudeliga saadud hinnangud reservi suuruse kohta on üldjuhul mõnevõrra väiksemad kui Poissoni mudeliga saadud hinnangud. Anscombe'i jääkide kasutamine annab väiksemad prognoosivead kui Pearsoni jääkide kasutamine ning mõjukuse arvestamine annab samuti väiksemad prognoosivead kogureservi hinnangule.

Et saadud tulemusi kontrollida, analüüsitakse järgnevalt ühe Euroopa Liidu kindlustusfirma andmeid. Üksikute juurdekasvude suurused on toodud kahjukolmnurgana tabelis 9. Reservide hindamiseks ning prognoosivigade saamiseks rakendatakse jällegi peatükis 4.3 kirjeldatud algoritmi ning leitakse reservide hinnangud ning hinnangutele vastavad prognoosivead.

Tabel 9. Üksikute juurdekasvude arengukolmnurk (teine uuritav andmestik).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4 734 994	1 885 305	281 240	504 341	524 449	365 049	100 761	32 449	3 697	56 901
1	4 344 093	1 783 774	243 849	339 985	49 975	178 961	8 272	78 125	1 022	
2	5 288 867	1 795 855	303 246	351 320	316 038	15 127	88 774	31 102		
3	5 357 617	2 548 383	336 749	403 501	348 378	236 017	12 982			
4	5 737 732	2 574 724	971 320	280 140	226 212	152 127				
5	5 635 064	2 758 392	241 734	268 113	429 503					
6	6 629 504	3 045 252	356 119	200 420						
7	6 824 829	2 669 579	166 400							
8	8 116 439	3 428 535								
9	10 660 074									

Kuna juurdekasvude suurusjärgud on väga erinevad, siis gamma-mudeli korral Pearsoni jääkidega tekkisid pseudo-andmestikku negatiivsed juurdekasvud (negatiivsed juurdekasvud võrdsustati probleemi vältimiseks ka ühega, kuid siis meetod parameetrite leidmiseks ei koondunud) ning seega ei olnud võimalik gamma-mudelit Pearsoni jääkidega reservide hindamiseks selle konkreetse andmestiku puhul kasutada. Gamma-mudeli kasutamisel Anscombe'i jääkidega seda probleemi ei tekkinud. Tabelid 10, 11 ning 12 on moodustatud samasuguse loogika alusel kui esimest arengukolmnurka analüüsides ning keskendutakse samadele küsimustele.

Võrreldes Poissoni mudeliga saadud tulemusi gamma-mudeliga leitud tulemustega, on näha, et Poissoni mudeliga saadud hinnangud reservi suurustele on (sarnaselt esimeselt andmestikult saadud tulemustele) suuremad kui gamma-mudeliga saadud hinnangud. Poissoni jaotuse korral on kogureservi punkthinnanguks 13,41 miljonit eurot, mis on 10,5% võrra suurem kui gamma-mudeliga hinnatud kogureservi punkthinnang 12,14 miljonit eurot. Kui võrrelda Poissoni mudeliga ja gamma-mudeliga saadud punkthinnanguid aastate lõikes, siis kõige rohkem (55,8%) erineb Poissoni mudeliga

saadud hinnang gamma-mudeliga saadud hinnangust teisel aastal. Kuigi Poissoni mudeliga saadud hinnang kogureservi suurusele on suurem kui gamma-mudeliga saadud hinnang, siis Poissoni mudeliga saadud prognoosivead on selle andmestiku puhul väiksemad kui prognoosivead, mis leiti gamma-mudelit ja Anscombe'i jääke kasutades. Poissoni mudeli korral kõiguvad kogureservi prognoosivead (SEP) sõltuvalt jäägi valikust ning selle korrigeerimisest vahemikus 1,47 miljonit eurot kuni 1,94 miljonit eurot. Gamma-mudeli ning Anscombe'i jääkide korral jäävad kogureservi prognoosivead (SEP) vahemikku 3,35 kuni 5,04 miljonit eurot. See tähendab, et Poissoni mudeliga saadud kogureservi ülemine piir jääb sõltuvalt jäägi valikust ning korrigeerimisest vahemikku 15,82 kuni 16,60 miljonit eurot ning gamma-mudeli korral küündib kogureservi ülemine piir 20,43 miljoni euroni.

Tabel 10. Reserveride hinnangud ning prognoosivead kasutades Poissoni mudelit ja Pearsoni jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	50 796	90 377	199 466	89 795	198 509	69 858	165 713
3	57 837	97 791	218 702	97 051	217 485	74 943	181 117
4	120 029	135 467	342 872	135 571	343 043	115 039	309 268
5	348 993	220 918	712 403	225 328	719 658	207 318	690 031
6	552 215	271 860	999 425	270 829	997 728	259 708	979 434
7	1 024 516	374 459	1 640 501	381 686	1 652 389	361 525	1 619 225
8	1 406 290	441 811	2 133 069	444 127	2 136 879	421 587	2 099 800
9	2 283 616	576 547	3 232 037	578 861	3 235 843	549 794	3 188 028
10	7 560 816	1 264 024	9 640 136	1 249 066	9 615 530	979 054	9 171 360
Kokku	13 405 108	1 944 083	16 603 125	1 944 997	16 604 628	1 603 405	16 042 710
PPE		3 182 150	16 587 258	3 082 305	16 487 413	1 625 348	15 030 456
PPE/SEP		1,637	0,999	1,585	0,993	1,014	0,937

Tabelit 10 tabeliga 11 võrreldes on näha, et Poissoni jaotust ja Pearsoni jääke kasutades on prognoosivead (sõltuvalt jäägi korrigeerimisest) 1,09 kuni 1,12 korda suuremad kui Poissoni jaotust ja Anscombe'i jääke kasutades. Sarnaselt esimese andmestiku analüüsist tehtud järeldustele on ka tabelitest 10-12 näha, et null-jääkide eemaldamine hinnangute vigu olulisel määral ei mõjuta. Küll aga on näha, et kasutades juurdekasvude

mõjukusega korrigeeritud jääke, tehakse oluliselt väiksem prognoosiviga kui korrigeerimata jääke kasutades.

Tabel 11. Reservide hinnangud ning prognoosivead kasutades Poissoni mudelit ja Anscombe'i jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	50 796	85 484	191 418	87 509	194 748	69 751	165 536
3	57 837	91 878	208 975	94 369	213 073	75 139	181 440
4	120 029	129 886	333 690	133 400	339 471	114 032	307 612
5	348 993	211 456	696 839	216 857	705 723	200 673	679 101
6	552 215	260 652	980 988	262 344	983 771	250 894	964 937
7	1 024 516	357 010	1 611 798	364 678	1 624 412	347 598	1 596 314
8	1 406 290	415 877	2 090 406	421 084	2 098 972	406 742	2 075 380
9	2 283 616	542 459	3 175 961	544 458	3 179 249	522 033	3 142 361
10	7 560 816	1 124 403	9 410 459	1 109 368	9 385 726	934 009	9 097 261
Kokku	13 405 108	1 727 161	16 246 288	1 758 340	16 297 578	1 469 680	15 822 732
PPE		2 029 479	15 434 588	2 004 348	15 409 456	1 275 538	14 680 646
PPE/SEP		1,175	0,950	1,140	0,946	0,868	0,928

PPE-meetodiga saadud ülemised usalduspiirid kogureservi keskmisele on sarnaselt esimese andmestiku analüüsist saadud tulemustele madalamad kui SEP-meetodi korral.

Ülevaade selle kohta, milline on hinnanguvea ja protsessivea suhe (tabelites 13-15 tähistatud $suhe = \frac{hinnanguvea}{protsessi\ vea}$) sõltuvalt mudelist ning valitud jääkidest, on toodud tabelites 13-15. Tabelid 13 ja 14 näitavad esimese andmestiku analüüsimisel saadud tulemusi ning tabelis 15 on toodud tulemused teise arengukolmnurga kohta. Lisaks on tabelites 13-15 ära toodud ka negatiivsete väärtuste arv (tabelites tähistatud „negatiivne“) pseudoandmestikus 1000 iteratsioonisammu jooksul. Tabelites 13-18 on korrigeerimata jääke tähistatud numbriga 1, nullidega korrigeeritud jääke numbriga 2 ning standardiseeritud jääke numbriga 3.

Tabel 12. Reservide hinnangud ning prognoosivead kasutades gamma-mudelit ja Anscombe'i jääke.

Aasta	Hinnang	Korrigeerimata		Eemalda nullid		Mõjukus	
		SEP	95%	SEP	95%	SEP	95%
2	50 012	38 160	112 785	39 008	114 180	30 965	100 950
3	37 119	26 904	81 376	27 827	82 895	22 081	73 442
4	93 433	48 396	173 045	49 667	175 135	44 190	166 126
5	332 152	159 500	594 530	162 956	600 215	161 306	597 501
6	454 013	193 496	772 314	197 412	778 756	198 066	779 831
7	782 169	329 614	1 324 384	324 932	1 316 682	324 997	1 316 788
8	1 031 664	423 941	1 729 046	438 924	1 753 693	429 318	1 737 892
9	2 090 955	945 444	3 646 210	974 441	3 693 911	879 649	3 537 977
10	7 270 705	4 520 261	14 706 534	4 810 081	15 183 288	3 060 442	12 305 132
Kokku	12 142 220	4 692 325	19 861 095	5 038 337	20 430 285	3 356 603	17 663 832
PPE		7 586 523	19 728 743	6 993 945	19 136 166	2 839 397	14 981 617
PPE/SEP		1,617	0,993	1,388	0,937	0,846	0,848

Näeme, et esimesele andmestikule Bootstrap-meetodit rakendades tekkis negatiivseid pseudo-andmestiku väärtuseid tunduvalt vähem kui teise andmestiku korral. Kui esimest kahjukolmnurka analüüsid tekkis negatiivne pseudo-juurdekasv umbes igal kümnendal Bootstrap-meetodi iteratsioonisammul, siis teise andmestiku korral tekkis igal iteratsioonisammul ligikaudu 1-2 negatiivset pseudo-juurdekasvu. See on ka oodatav ning loogiline tulemus, kuna teises andmestikus on juurdekasvude suurusjärgud väga erinevad. Tabelitest on näha, et Pearsoni jääke kasutades tekib rohkem negatiivseid juurdekasvuid kui Anscombe'i jääke kasutades.

Tabel 13. Hinnanguvea ja protsessivea suhe ning negatiivsete pseudo-juurdekasvude arv 1000 iteratsioonisammu jooksul Poissoni mudeliga esimese kahjukolmnurga korral.

	Poisson ja Pearson		Poissoni ja Anscombe	
	Negatiivne	suhe	Negatiivne	suhe
1	129	8,94	42	5,91
2	139	9,43	42	6,13
3	66	3,48	0	2,25

Hinnangu- ning protsessivigu analüüsid, on näha, et Poissoni mudeli korral on hinnanguviga suurem kui gamma-mudeli korral ning Pearsoni jääkide korral on hinnanguviga suurem kui Anscombe'i jääkide korral.

Tabel 14. Hinnanguvea ja protsessivea suhe ning negatiivsete pseudo-juurdekasvude arv 1000 iteratsioonisammu jooksul gamma-mudeliga esimese kahjukolmnurga korral.

	Gamma ja Pearson		Gamma ja Anscombe	
	Negatiivne	suhe	Negatiivne	suhe
1	0	6,06	0	3,85
2	0	6,43	0	4,07
3	0	3,51	0	2,18

Tabel 15. Hinnanguvea ja protsessivea suhe ning negatiivsete pseudo-juurdekasvude arv 1000 iteratsioonisammu jooksul teise kahjukolmnurga korral.

	Poisson ja Pearson		Poisson ja Anscombe		Gamma ja Anscombe	
	Negatiivne	suhe	Negatiivne	suhe	Negatiivne	suhe
1	2 281	1,96	1 132	1,34	0	1,94
2	2 314	1,96	1 172	1,42	0	2,39
3	2 207	1,01	912	0,69	0	0,51

Eespool võrreldud prognoosivead näitavad kogureservi keskmise varieeruvust. Selleks, et teada saada, mis on kogureservi üldine ülemine usalduspiir, leitakse igal iteratsioonisammul kogureservi prognoos ning kasutatakse seda keskvaertusena Poissoni jaotusest juhusliku suuruse genereerimisel. Genereeritud väärtus korrutatakse läbi skaalaparameetriga ϕ ning saadakse juhuslik kogureservi (väljamakse) suurus. Kvantiilid juhuslikule kogureservi suurusele Poissoni jaotusest ning kvantiilid kogureservi keskmisele on toodud tabelites 16 ja 17. Tabelitest on näha, et kogureservi keskmise usalduspiirid on oodatult madalamad kui juhusliku väljamakse usalduspiirid.

Mudeli ning jääkide valik ning korrigeerimine mõjutasid mõlema uuritud andmestiku pealt saadud hinnanguid üsna sarnaselt. Gamma-mudeliga leitud hinnangud kogureservile on üldiselt madalamad ning prognoosivead väiksemad kui Poissoni

mudelit kasutades saadud hinnangud. Anscombe'i jäägid andsid mõlema andmestiku puhul väiksemad prognoosivead ning samuti saadi oluliselt väiksem prognoosiviga kui arvestati vaatluse mõjukust hinnatavale parameetritele.

Tabel 16. Ülemised usalduspiirid kogureservile ning kogureservi keskmisele Poissoni mudeli ning Pearsoni jääkidega.

		90%	95%	99%
1	Reservile	16 189 247	17 046 324	18 476 692
	Keskmisele	15 893 535	16 603 125	17 934 822
2	Reservile	16 284 477	17 712 940	18 570 018
	Keskmisele	15 894 705	16 604 628	17 936 951
3	Reservile	15 903 554	17 141 555	17 712 940
	Keskmisele	15 457 467	16 042 710	17 141 042

Tabel 17. Ülemised usalduspiirid kogureservile ning kogureservi keskmisele Poissoni mudeli ning Anscombe'i jääkidega.

		90%	95%	99%
1	Reservile	15 903 554	17 427 248	18 094 816
	Keskmisele	15 615 874	16 246 288	17 429 394
2	Reservile	16 189 247	17 332 017	18 285 278
	Keskmisele	15 655 784	16 297 578	17 502 041
3	Reservile	15 617 861	16 760 632	17 143 460
	Keskmisele	15 286 299	15 822 732	16 829 463

Kommenteeritud R-i kood, mida Bootstrap-meetodi rakendamiseks kasutati on toodud lisa 1.

Bootstrap method for calculating reserves in non-life insurance

Master Thesis

Rauno Viin

SUMMARY

The prediction of an adequate amount to face the responsibilities is a major subject in non-life insurance. It is important that the claims reserve is carefully calculated. If the reserve is underestimated, the insurance company will not be able to fulfill its undertakings and if the reserve is overestimated, the insurance company unnecessarily holds the extra capital instead of using it for other purposes.

There are several methods to predict or estimate the future reserves. Despite the fact that Chain-Ladder Method has many well-known limitations, it is still the most widely applied claim reserving method. The Chain-Ladder Method gives us no information about the variability of the estimation. Prediction errors can be found using a variety of stochastic chain-ladder models, but they are usually based on different assumptions. If the assumptions are not fulfilled, we can use the Bootstrap Method to approach the problem.

The standard ideas of the resampling methods and especially the Bootstrap Method are described in the second chapter. In the second chapter it is explained that in claims reserving, the data is usually assumed to be independent, but is not identically distributed since the means and also the variances depend on covariates. Therefore in claims reserving it is common to bootstrap residuals, rather than the data themselves, since the residuals are approximately independent and identically distributed or can be made so. In the third chapter different possibilities that we can choose between, before applying Bootstrap Method to the data, are discussed. First of all we can choose the

model from which the predictions are made, secondly we can define the residual that we are going to use and thirdly we can correct the defined residuals by taking out zero-residuals or use standardized residuals. In the fourth chapter two Bootstrap procedures are introduced and their differences are explained.

In the last chapter we use Bootstrap Method to find the estimated reserves and their prediction errors for two different datasets. We see that Gamma Model usually produces smaller estimated reserves and prediction errors than Poisson Model. Using Anscombe residuals usually gives us smaller prediction error than using Pearson residuals and using standardized residuals also produces smaller prediction errors.

We can conclude that there are many different possibilities that we have to take in count before applying Bootstrap Method as the prediction errors obtained by using different combinations of possible options are quite different.

KASUTATUD KIRJANDUS

- 1) **Booth P., Chadburn, R., Cooper, D., Haberman, S., James, D.** Modern Actuarial Theory and Practice. London: Chapman & Hall/CRC, 1999.
- 2) **Davison, A. C., Hinkley, D.V.** Bootstrap Methods and their Application. – Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 1997, lk 271-273 & 327-332.
- 3) **Efron, B.** Bootstrap methods: Another look at the jackknife. – Annals of Statistics, 1979, Volume 7, lk 1-26.
- 4) **Efron, B.** The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans. – CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1982, lk 1-3.
- 5) **England, P. D., Verrall R. J.** Standard Errors of Prediction in Claims Reserving: A Comparison of Methods. – General Insurance Convention and Astin Colloquium, 1998, lk 460-478.
- 6) **England, P. D., Verrall R. J.** Stochastic Claims Reserving in General Insurance. 2002. [<http://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/sm0201.pdf>]. 20.05.2013.
- 7) **Hartl, T.** Bootstrapping Generalized Linear Models for Development Triangles Using Deviance Residuals. – Casualty Actuarial Society E-Forum, 2010, lk 1-21.
- 8) **Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M.** Modern Actuarial Risk Theory. Berlin: Springer, 2008, 381 lk.
- 9) **Li, J.** Comparison of Stochastic Reserving Methods. Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne, 2006, 16 lk.
- 10) **Ostaszewski, K., Rempala, G. A.** Parametric and Nonparametric Bootstrap in Actuarial Practice. 2000. [http://www.actuarialfoundation.org/research_edu/parametic.pdf]. 20.05.2013.

- 11) **Pinheiro, P. J. R., Andrade e Silva, J. M., Centeno, M. L.** Bootstrap Methodology in Claim Reserving. – The Journal of Risk and Insurance, 2003, lk 701-714.
- 12) **Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.** Numerical Recipes in C. – The Art of Scientific Computing, 1992, lk 362-369.
- 13) **Sahinler, S., Topuz, D.** Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithms for Estimation of Regression Parameters. – Journal of Applied Quantitative Methods, 2007, lk 188-199.
- 14) **Sawyer, S.** Resampling Data: Using a Statistical Jackknife. 2005. Washington University. [<http://www.math.wustl.edu/~sawyer/handouts/Jackknife.pdf>]. 20.05.2013.
- 15) **Utikal, K.** Smooth Bootstrap. Bonn University. [<http://www.unibonn.de/~kutikal/SS12/compStat/Boots/smoothboot/smoothboot.pdf>]. 20.05.2013.
- 16) **Wood, S.** Generalized Linear Models. [<http://people.bath.ac.uk/sw283/MA20227/glm.pdf>]. 20.05.2013.

Lisa 1. R-i kood Bootstrap-meetodi rakendamiseks arengukolmnurgale

Koodi kirjutamisel on kasutatud [Kaas jt, 2008, lk 285-287]

```
#####
# 1.SAMM: Andmestiku sisselugemine, ning õigele kujule viimine #
#####
#####
# Andemstik 1 #####
#####
Cij <- scan(n=55)
357848 766940 610542 482940 527326 574398 146342 139950 227229 67948
352118 884021 933894 1183289 445745 320996 527804 266172 425046
290507 1001799 926219 1016654 750816 146923 495992 280405
310608 1108250 776189 1562400 272482 352053 206286
443160 693190 991983 769488 504851 470639
396132 937085 847498 805037 705960
440832 847631 1131398 1063269
359480 1061648 1443370
376686 986608
344014
#####
# Andemstik 2 #####
#####
Cij <- scan(n=55)
4734994 1885305 281240 504341 524449 365049 100761 32449 3697 56901
4344093 1783774 243849 339985 49482 178961 508272 78125 1022
5288867 1795855 303246 351320 316038 33501 88774 31102
5357617 2548383 336749 403501 348378 236017 12982
5737732 2574724 971320 280140 226212 152127
5635064 2758392 241734 268113 429503
6629504 3045252 356119 200420
6824829 2669579 166400
8116439 3428535
10660074
#####
#####
##### FUNKTSIOONI defineerimine #####
# funktsiooni nimeks on Bootstrap_reservid #####
#####
# esimene parameeter: valida saab gamma ja poissoni mudeli vahel ###
# teine parameeter: ning Pearsoni ja Anscombe jääkide vahel ###
# kolmas parameeter: valides "eemalda", eemaldatakse nulljäägid ###
# neljas parameeter: valides "jah" kasutatakse standardiseeritud jääke ###

Bootstrap_reservid <- function(vali_mudel=c("gamma", "poisson"),j22k=c("Pearson", "Anscombe"),nullid,standardiseeri){
n <- length(Cij);          ## saame olemasolevate juurdekasvude vektori pikkuse
laius <- trunc(sqrt(2*n))  ## saame kolmnurga laiuse
m <- laius*(laius-1)/2     ## tuleviku juurdekasvude arv (vaja PPE jaoks)
p=2*laius-1               ## parameetrite arv
i <- rep(1:laius, laius:1);
i <- as.factor(i) ## reanumbrid ## algperiood faktorina
j <- sequence(laius:1);
j <- as.factor(j) ## veerunumbrid ## arenguperiood faktorina

#####
##### MUDELI VALIMINE #####
```

```

#####
if(vali_mudel=="gamma"){mudel <- glm(Cij~i+j, Gamma(link = "log"))}
else if(vali_mudel=="poisson"){mudel <- glm(Cij~i+j, quasipoisson)}
#####
##### MUDELI VALIMINE #####
#####
##### PARAMEETRITE HINDAMINE #####
#####
koefid <- exp(as.numeric(coef(mudel)))
alfa <- c(1, koefid[2:laius]) * koefid[1]

beeta <- c(1, koefid[(laius+1):(2*laius-1)])
hinnangud <- alfa %>% t(beeta)
#####
##### PARAMEETRITE HINDAMINE #####
#####
### TULEMUSED IGA AASTA KOHTA ERALDI ###
reserv=matrix(NA,(laius-1),1)
for(aasta in 1:(laius-1)){
reserv[aasta]=sum(hinnangud[aasta+1,(laius-aasta+1):laius])
}
reserv_ruut=matrix(NA,(laius-1),1)
for(aasta in 1:(laius-1)){
reserv_ruut[aasta]=sum((hinnangud[aasta+1,(laius-aasta+1):laius])**2)
}
#####
tulevik <- row(hinnangud) + col(hinnangud) - 1 > laius
## tulevikuväärtusteks saavad need väärtused, mille korral reanumbrid + (veerunumbrid - 1) on suuremad kui n
hinnanguline_reserv <- sum(hinnangud[tulevik])
hinnanguline_reserv # HINNANGULINE KOGURESERV (punkthinnang algandmete pealt)
hinnanguline_reserv_ruut <- sum((hinnangud[tulevik])**2) # gammajaotusega protsessivea arutamiseks..
#####
##### JÄÄGI VALIMINE #####
#####
if(j22k=="Pearson" && vali_mudel == "poisson"){jaak <- ((Cij-fitted(mudel))/sqrt(fitted(mudel)))*sqrt(n/(n-p)))}
else if(j22k=="Pearson" && vali_mudel == "gamma"){jaak <- (((Cij-fitted(mudel))/fitted(mudel))*sqrt(n/(n-p)))}
else if(j22k=="Anscombe" && vali_mudel == "poisson"){jaak <- (1.5*(Cij**(2/3)-fitted(mudel)**(2/3))/fitted(mudel)**(1/6))}
else if(j22k=="Anscombe" && vali_mudel == "gamma"){jaak <- 3*((Cij/fitted(mudel))**(1/3)-1)}
#####
##### JÄÄGI VALIMINE #####
#####
fii <- summary(mudel)$dispersion # fii arvutamine
#fii <- sum(jaak**2)/(n-p) # annab sama tulemuse
#####
##### JÄÄKIDE STANDARDISEERIMINE #####
# standardiseerimise on kirjutatu nii, et ta samuti vaikimisi eemaldab nullid
# vastasel juhul tuleb probleem ühe parameetriga hinnatud juurdekasvude puhul, mis on mõjukusega 1
#####
if(standardiseeri=="jah"){jaak <- jaak/(sqrt(summary(mudel)$dispersion*(1-hatvalues(mudel))))}
jaak <- jaak[abs(jaak)<1000]
}
else{jaak <- jaak}
#####
#####
##### NULLIDE EEMALDAMINE #####
#####
if(nullid=="eemalda"){jaak <- jaak[0.001<abs(jaak)] }
else{jaak <- jaak}
#####
#####
#####
# 5. Bootstrap protseduur # #####
#####

```

```

#####
set.seed(6345789)
n_valimit <- 1000; # TEEME 1000 BOOTSTRAP VALIMIT
reserv_aasta=matrix(NA,(laius-1),n_valimit) ### reservi suurused iga-aasta kohta.
uus <- reservid_ruut <- prognoosiviga <- prognoosiviga2 <- maksed <- reservid <- numeric(n_valimit)
for (valim in 1:n_valimit){ ## BOOTSTRAP TSÜKLI ALGUS
## VALIME JÄÄGI ###
Ps.Cij <- sample(jaak, n, replace=TRUE) # võtame n elementi tagasipanekuga kohandatud Pearsoni jääkide seast

# PSEUDO-AJALOO (andmestiku) TEGEMISEKS
##### PÕÖRDFUNKTSIOONI KASUTAMINE #####
if(j22k=="Pearson" && vali_mudel == "poisson" && standardiseeri=="ei"){Ps.Cij <- Ps.Cij * sqrt(fitted(mudel)) + fitted(mudel)}
else if(j22k=="Pearson" && vali_mudel == "poisson" && standardiseeri=="jah"){Ps.Cij <- Ps.Cij *
sqrt(fitted(mudel)*summary(mudel)$dispersion*(1-hatvalues(mudel))) + fitted(mudel)}
else if(j22k=="Pearson" && vali_mudel == "gamma" && standardiseeri=="ei"){Ps.Cij <- Ps.Cij * fitted(mudel) + fitted(mudel)}
else if(j22k=="Pearson" && vali_mudel == "gamma" && standardiseeri=="jah"){Ps.Cij <- Ps.Cij *
fitted(mudel)*sqrt(summary(mudel)$dispersion*(1-hatvalues(mudel))) + fitted(mudel)}
else if(vali_mudel=="poisson" && j22k=="Anscombe" && standardiseeri=="ei"){Ps.Cij <-
((Ps.Cij*fitted(mudel)**(1/6)+1.5*fitted(mudel)**(2/3))/1.5)**1.5}
else if(vali_mudel=="poisson" && j22k=="Anscombe" && standardiseeri=="jah"){Ps.Cij <-
(((Ps.Cij*fitted(mudel)**(1/6))*sqrt(summary(mudel)$dispersion*(1-hatvalues(mudel)))+1.5*fitted(mudel)**(2/3))/1.5)**1.5}
else if(vali_mudel=="gamma" && j22k=="Anscombe" && standardiseeri=="ei"){Ps.Cij <- (Ps.Cij/3+1)**3*fitted(mudel)}
else if(vali_mudel=="gamma" && j22k=="Anscombe" && standardiseeri=="jah"){Ps.Cij <-
(Ps.Cij*sqrt(summary(mudel)$dispersion*(1-hatvalues(mudel)))/3+1)**3*fitted(mudel)}

##### PÕÖRDFUNKTSIOONI KASUTAMINE #####
Ps.Cij[is.na(Ps.Cij)]=0 # lõpmatusse läinud juurdekasvud (tekivad Anscombe jääkidega) on võrdsustatud samuti 0-ga
Ps.Cij <- pmax(Ps.Cij, 0) # nullist v2iksemad paneme 0-ks
uus2=sum(Ps.Cij==0) # nullide loendamiseks

if(vali_mudel=="gamma"){Ps.mudel <- glm(Ps.Cij~i+j, Gamma(link = "log"))} # pseudoandmestiku pealt teeme uued prognoosid
else if(vali_mudel=="poisson"){Ps.mudel <- glm(Ps.Cij~i+j, quasipoisson)}

koefid <- exp(as.numeric(coef(Ps.mudel))) # arvutame koefitsiendid (alfa ja beeta)
Ps.alfa <- c(1, koefid[2:laius]) * koefid[1] # alfa
Ps.beeta <- c(1, koefid[(laius+1):(2*laius-1)]) # beeta
Ps.prognoosid <- Ps.alfa %*% t(Ps.beeta) # PROGNOOSID
Ps.reservid <- sum(Ps.prognoosid[tulevik]) # HINNANGULINE KOGURESERV(tulevikuväärtuste
prognooside summa)

Ps.kogumaksed <- fii * rpois(1, Ps.reservid/fii) # POISSONI JAOTUSEST keskväertusega hinnatud
kogureserv/fii
reservid[valim] <- Ps.reservid # BOOTSTRAPiga saadud reservid (saame neid 1000
tükki)
maksed[valim] <- Ps.kogumaksed #

aasta2=sum(Ps.prognoosid[2,laius])
aasta3=sum(Ps.prognoosid[3,(laius-1):laius])
aasta4=sum(Ps.prognoosid[4,(laius-2):laius])
aasta5=sum(Ps.prognoosid[5,(laius-3):laius])
aasta6=sum(Ps.prognoosid[6,(laius-4):laius])
aasta7=sum(Ps.prognoosid[7,(laius-5):laius])
aasta8=sum(Ps.prognoosid[8,(laius-6):laius])
aasta9=sum(Ps.prognoosid[9,(laius-7):laius])
aasta10=sum(Ps.prognoosid[10,(laius-8):laius])
reserv_aasta[valim]=t(c(aasta2,aasta3,aasta4,aasta5,aasta6,aasta7,aasta8,aasta9,aasta10))
uus[valim] <- uus2 ## NULLIDE LOENDAMISEKS

#####
#### ALTERNATIIVSE PSEUDOREAALSUSEGA PROGNOOSIVEA JAOKS ####
#####
Ps.Cij <- sample(jaak, m, replace=TRUE) # valim m jääki, kus m on tuleviku
juurdekasvude arv

```

```

Ps.Cij <- Ps.Cij * sqrt(hinnangud[tulevik]) + hinnangud[tulevik] #pseudoreaalsus
proгноosiviga[valim]=(sum(Ps.Cij)-Ps.reservid)/sqrt(Ps.reservid)

} ## BOOTSTRAPI TSÜKLI LÕPP

#####
#####
## TULEMUSTE VÄLJATRÜKK ##
#####
#####
print("SEP aastate kaupa on:")
if(vali_mudel=="poisson"){
print(sqrt(fii*reserv[1] + sd(reserv_aasta[1,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[2] + sd(reserv_aasta[2,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[3] + sd(reserv_aasta[3,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[4] + sd(reserv_aasta[4,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[5] + sd(reserv_aasta[5,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[6] + sd(reserv_aasta[6,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[7] + sd(reserv_aasta[7,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[8] + sd(reserv_aasta[8,])**2))
print(sqrt(fii*reserv[9] + sd(reserv_aasta[9,])**2))
}
if(vali_mudel=="gamma"){
print(sqrt(fii*reserv_ruut[1] + sd(reserv_aasta[1,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[2] + sd(reserv_aasta[2,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[3] + sd(reserv_aasta[3,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[4] + sd(reserv_aasta[4,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[5] + sd(reserv_aasta[5,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[6] + sd(reserv_aasta[6,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[7] + sd(reserv_aasta[7,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[8] + sd(reserv_aasta[8,])**2))
print(sqrt(fii*reserv_ruut[9] + sd(reserv_aasta[9,])**2))
}
#for(k in 1:(laius-1)){
#tulemused_1=cbind(mean(reserv_aasta[k,]))
#}
#print(tulemused_1)
print("Punkthinnangud aastate kaupa on:")
print(reserv)
print(paste("Kogureservi punkthinnang:",round(hinnanguline_reserv)))
print(paste("Bootstrap meetodil saadud keskmine reservile:",round(mean(reservid))))
if(vali_mudel=="poisson"){PEbs <- sqrt(fii*hinnanguline_reserv + sd(reservid)**2)}
else if(vali_mudel=="gamma"){PEbs <- sqrt(fii*hinnanguline_reserv_ruut + sd(reservid)**2)}
print(paste("Bootstrap meetodi prognoosiviga:",round(PEbs)))
print(paste("PPE meetodil saadud prognoosiviga on:",round(quantile(prognoosiviga, 0.95)*sqrt(hinnanguline_reserv)))) ###
PROGNOOSIVIGA alternatiivsel meetodil
SEP=quantile(reservid, 0.95)
SEP2=hinnanguline_reserv+1.645*PEbs
PPE=quantile(prognoosiviga, 0.95)*sqrt(hinnanguline_reserv)+hinnanguline_reserv
print(paste("SEP 95%:",round(SEP)))
print(paste("PPE 95%:",round(PPE)))
print(paste("SEP2 95%:", round(SEP2)))
print(paste("fii:", fii))
print(paste("VarR:",sd(reservid)**2))
print(min(reservid))
print(max(reservid))
#maksed = maksed/1e6
print(paste("Keskmine väljamakse suurus:",round(mean(maksed))))
print(paste("Väljamakse standardviga:",round(sd(maksed))))
print(paste("Kui suure osa moodustab standardviga keskväärtusest:", round(100*sd(maksed)/mean(maksed),3)))

print("Maksete kvantiilid on:")
print(quantile(maksed, c(0.01,0.05,0.1,0.5,0.9,0.95,0.975,0.99)))

```

```

print("SEP kvantiilid on:")
print(quantile(reservid, c(0.01,0.05,0.1,0.5,0.9,0.95,0.975,0.99)))
print("PPE kvantiilid on:")
print(quantile(proгноosiviga, c(0.01,0.05,0.1,0.5,0.9,0.95,0.975,0.99))*sqrt(hinnanguline_reserv)+hinnanguline_reserv)
if(vali_mudel=="poisson"){
print(paste("Hinnangu viga jagatud protsessi viga (SEP):",round(sd(reservid)**2 / (fii * hinnanguline_reserv),2)))}
if(vali_mudel=="gamma"){
print(paste("Hinnangu viga jagatud protsessi viga (SEP):",round(sd(reservid)**2 / (fii * hinnanguline_reserv_ruut),2)))}
print(paste("Tekkinud nulle:",sum(uus))
}
#####
##### FUNKTSIOONI LÕPP #####
#####
# FUNKTSIOONI VÄLJAKUTSUMINE:
# mudelite valikuks valikud "poisson" ja "gamma"                                1.paraameeter
# jaotuste valikuks valikud "Pearson" ja "Anscombe"                            2.paraameeter
# nullide eemaldamiseks valik "eemalda", vastasel korral ei eemalda            3.paraameeter
# skaalaparaameetri ning mõjukuste arvestamiseks vali "jah"                    4.paraameeter
#####
# POISSONI MUDEL JA PEARSONI JÄÄGID.
#####
#Bootstrap_reservid("poisson","Pearson","ei","ei")
#Bootstrap_reservid("poisson","Pearson","eemalda","ei")
#Bootstrap_reservid("poisson","Pearson","eemalda","jah")
#####
# POISSONI MUDEL JA ANSCOMBE JÄÄGID.
#####
#Bootstrap_reservid("poisson","Anscombe","ei","ei")
#Bootstrap_reservid("poisson","Anscombe","eemalda","ei")
#Bootstrap_reservid("poisson","Anscombe","eemalda","jah")
#####
# GAMMA MUDEL JA PEARSONI JÄÄGID.
#####
#Bootstrap_reservid("gamma","Pearson","ei","ei")
#Bootstrap_reservid("gamma","Pearson","eemalda","ei")
#Bootstrap_reservid("gamma","Pearson","eemalda","jah")
#####
# GAMMA MUDEL JA ANSCOMBE JÄÄGID.
#####
#Bootstrap_reservid("gamma","Anscombe","ei","ei")
#Bootstrap_reservid("gamma","Anscombe","eemalda","ei")
#Bootstrap_reservid("gamma","Anscombe","eemalda","jah")

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Rauno Viin

sünnikuupäev: 17.01.1989

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Bootstrap-meetod kahjukindlustuse reservide hindamisel,

mille juhendaja on Meelis Käärik,

- 1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **20.05.2013**