

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

I. KULL

REAALMUUTUJA  
FUNKTSIOONIDE  
TEORIA

TARTU 1962

A-24316

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL  
GEOMEETRIA KATEEDER

I.KULL

REAALMUUTUJA  
FUNKTSIOONIDE  
TEOORIA

TARTU 1962

Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

И. Кулл  
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ  
На эстонском языке



Vastutav toimetaja E. Jürimäe  
Korrektor E. Võhandu

-----  
TRÜ rotaprint 1962. Trükiplaanid 9,8.  
Tir. 300 eks. MB 10008. Tell. nr. 636.

Hind 29 kop.

H U L G A T E O O R I A .

§ 1. Hulga mõiste. Hulkade võrdus ja tehtud hulkadega.

Võrreldes mingi teadusala mõisteid nende ulatuse (ma-hu) seisukohalt, jõuame paratamatult mõisteni, millest üldi-semat antud teadusalal ei leidu. Neid mõisteid nimetatakse selle teadusala põhimõisteteks, defineerida pole neid või-malik.

Hulga mõiste ongi matemaatika üks põhimõisteid. Hulga-teooria rajaja G. Cantori definitsiooni<sup>1</sup> "Hulk on meie ku-jutluse või mõtlemise kindlalt piiritletud ja erinevate ob-jektide, mida nimetatakse hulga elementideks, kokkuvõte üheks tervikuks" ei saa pidada definitsiooniks matemaatika mõttes, kuna selles kasutatakse matemaatikasse mittekuulu-vaid mõisteid (kujutus, mõtlemine). Muidugi pole hulga "de-finitatsiooniks" väljend "hulk on kogumik" - selline väljend on tautoloogia.

Hulga mõistet täpsemalt piiritleda on võimalik hulga-teooria aksiomaatika abil.<sup>2</sup> Kuna see käsitlusviis on komp-litseeritud, siis seda ülikoolikursuses tavaliselt ei kasu-tata. Hulgateooria elementaarse käsitluse korral toetutakse lihtsalt hulga mõistele, mis inimestel on välja kujunenud igapäevase elu kogemuste põhjal. Niisugust hulgateooriat ni-metatakse sageli ka "naiivseks" hulgateooriaks.

<sup>1</sup> Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, 46, 1895, 481-512.

<sup>2</sup> К.Гёдель, Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, 3, I, 1948, 96-149.

Esitame nüüd mõningaid hulcade näiteid:

- 1) Tartu linna elanike hulk (mingil ajamomendil),
- 2) naturaalarvust  $\mathbb{I}$  väiksemate naturaalarvude hulk,
- 3) kõikide naturaalarvude hulk,
- 4) võrrandi  $\sin x = 0$  lahendite hulk,
- 5) lõigul  $[0,1]$  asuvate reaalarvude hulk.

Hulga mõiste täpsustamiseks teeme mõned märkused:

1. Hulgas arvestatakse iga elementi ainult ühekordselt.
2. Hulgas ei tarvitse olla "palju" elemente. Võime kõnelda ka näiteks üheelemendilistest hulkadest, nagu seda on võrrandi  $x - 1 = 0$  lahendite hulk. Üheelemendilist hulka ei või samastada tema elemendiga.

3. Otstarbekohane on kasutada isegi tühja hulga mõistet. Tühjaks hulgaks nimetatakse sellist hulka, kus pole ühtegi elementi. Tühja hulga mõiste olemasolu korral võime alati kõnelda mis tahes võrrandi lahendite hulgast, kahe hulga ühiste elementide hulgast jne.

Hulkasid tähistatakse suurte ladina tähtedega  $A, B, C$  jne., tühja hulga tähiseks on  $\emptyset$ . Hulga elemente tähistatakse väikeste tähtedega  $a, b, c$  jne.

Asjaolu, et  $a$  on hulga  $A$  element, tähistatakse järgmiselt:

$$a \in A,$$

asjaolu, et  $b$  pole hulga  $B$  element - selliselt:

$$b \notin B.$$

Kui mingi hulk  $C$  koosneb elementidest  $a, b$  ja  $c$ , siis võime seda üles kirjutada nii:

$$C = \{a, b, c\},$$

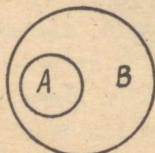
s.t. hulga elemendid asetame loogelistesse sulgudesse, eraldades elemendid üksteisest komadega. Seejuures ülaltoodud kirjutises pole oluline elementide järjekord.

Vaatleme nüüd vahekordi hulkade vahel.

Kui hulk  $A$  iga element on ka hulga  $B$  elemendiks, siis öeldakse, et hulk  $A$  on hulga  $B$  osahulk. Seda vahekorda tähistatakse

$$A \subset B \quad \text{ehk} \quad B \supset A. \quad (1)$$

Tühja hulka  $\emptyset$  loetakse mis tahes hulga osahulgaks<sup>3</sup>.  
Graafiliselt võib vahekorra (1) kujutada järgmiselt:



Joon. 1.

Silmas pidades vahekorra (1) graafilist esitusviisi öeldakse sel juhul ka, et "hulk A sisaldub hulgas B" ehk "hulk B sisaldab hulka A".

Sisalduvuse definitsioonist järeldub selle vahekorra transitiivsus, s.t. et seostest  $A \subset B$  ja  $B \subset C$  tuleneb  $A \subset C$ .

Kaht hulka A ja B nimetatakse võrdseks, kui kehtivad seosed

$$A \subset B \quad \text{ja} \quad B \subset A. \quad (2)$$

Hulkade võrdust tähistatakse

$$A = B.$$

Seoste (2) põhjal võime öelda, et võrdsed hulgad koosnevad ühtedest ja samadest elementidest.

Hulkade võrduse definitsioonist järelduvad järgmised võrduse põhiomadused:

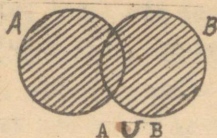
- 1<sup>o</sup>  $A = A$  (hulkade võrduse refleksiivsus);
- 2<sup>o</sup> kui  $A = B$ , siis  $B = A$  (hulkade võrduse sümmeetria);
- 3<sup>o</sup> kui  $A = B$  ja  $B = C$ , siis  $A = C$  (hulkade võrduse transitiivsus).

Defineerime nüüd hulkadega järgmised tehted:

1. Hulkade A ja B summa  $A \cup B$  on hulk, mille elementideks on kõik A ja B elemendid ja ainult need.

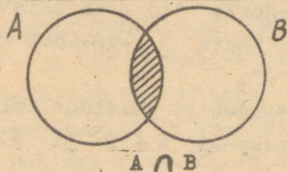
<sup>3</sup> Seega: kui ei leidu elementi a, nii et  $a \in A$  ja  $a \notin B$ , siis ütleme, et A on B osahulk.

Graafiliselt kujutatakse sümmat järgmiselt:



Joon. 2.

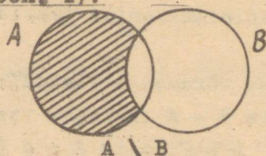
2. Hulkade A ja B ühisosa  $A \cap B$  on hulk, mille elementideks on A ja B ühised elemendid ja ainult need (joon.3).



Joon. 3.

Kui kahe hulga ühisosa on tühi hulk, siis see tähendab, et nendel hulkadel pole ühiseid elemente. Sel korral öeldakse ka, et need hulgad ei lõiku.

3. Hulkade A ja B vahes  $A \setminus B$  on hulk, mille elementideks on need A elemendid, mis hulka B ei kuulu, ja ainult need (joon. 4).

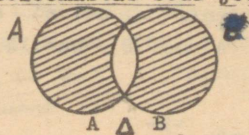


Joon. 4.

4. Hulkade A ja B sümmeetriline vahes  $A \Delta B$  defineeritakse võrdusega

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Graafiliselt iseloomustab seda joon. 5.



Joon. 5.

Näiteks, kui  $A = \{a, b, c, d, e\}$  ja  $B = \{d, e, f\}$ ,  
 siis  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $A \cap B = \{d, e\}$ ,  $A \setminus B =$   
 $= \{a, b, c\}$ ,  $B \setminus A = \{f\}$  ja  $A \Delta B = \{a, b, c, f\}$ .

Kuna tehted hulkadega (summa, ühisosa, vahe) on defi-  
 neeritud teisiti kui vastavad tehted (summa, korrutis, vahe)  
 reaalarvudega, siis ei kehti kõik algebras tuntud seosed te-  
 hete puhul hulkadega. Toome näiteks mõned sellised seosed:

reaalarvude korral

$$a + a = 2a$$

$$a \cdot a = a^2$$

$$b + (a - b) = a$$

hulkade korral

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$B \cup (A \setminus B) = A \cup B$$

$$B \cup (A \Delta B) = A \cup B$$

Seda asjaolu arvestades on vaja eraldi tõestada hulga-  
 teoreetiliste tehete omadused ja nende vahekord. Esitame  
 siin mõningad tähtsamad seosed:

$$1) A \cup B = B \cup A$$

summa ja ühisosa  
 kommutatiivsus;

$$2) A \cap B = B \cap A$$

$$3) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

summa ja ühisosa  
 assotsiatiivsus;

$$4) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$5) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

distributiivsuse  
 seosed.

$$6) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$7) A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

Tõestame näiteks seose 7) kehtivuse. Selleks tuleb  
 näidata (vastavalt võrduse definitsioonile) kahe seose

$$a) A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

ja

$$b) A \cap (B \setminus C) \supset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

kehtivus.

a) Võtame mingi elemendi  $x \in A \cap (B \setminus C)$ . Ühisosa de-  
 finitsiooni kohaselt  $x \in A$  ja  $x \in B \setminus C$ . Viimasest saame  
 vahe definitsiooni põhjal  $x \in B$  ja  $x \notin C$ . Nende tulemuste

alusel võime öelda, et  $x \in A \cap B$  ja  $x \notin A \cap C$ , kust järeldubki, et  $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ , millega seos a) on tõestatud.

b) Võtame mingi elemendi  $y \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ . Vahe definitsiooni põhjal  $y \in A \cap B$  ja  $y \notin A \cap C$ . Ühisosa definitsioonist järeldub siis, et  $y \in A$ ,  $y \in B$  ja  $y \notin C$ , kust omakorda saame, et  $y \in A \cap (B \setminus C)$ , millega seos b) ja ühtlasi ka võrdus 7) on tõestatud.

Analoogiliselt saab tõestada ka teised võrdused.

## § 2. Üks-ühene vastavus.

### Ekvivalentsed hulgad.

Mõnede hulkade puhul on võimalik leida kas või põhimõtteliselt selle hulga elementide arvu, teiste hulkade puhul aga mitte.

Esimesena mainitud hulki nimetatakse lõplikeks, teisi lõpmatuiks. Lõpliku hulga näiteks võib tuua molekulide hulga mingis kristallis, kirjamärkide hulga mingis raamatus; lõpmatu hulga näiteks on kõigi naturaalarvude hulk ja lõigul  $[0,1]$  asuvate reaalarvude hulk.

Võrreldes kaht lõplikku hulka, võime (põhimõtteliselt) elementide ülelugemise teel leida nende hulkade elementide arvu ja seega alati öelda, kas neil hulkadel on samapalju elemente või mitte.

Kuidas aga võrrelda lõpmatuid hulki nende elementide arvukuse seisukohalt? Elementide "ülelugemine" ei ole siin võimalik, kuna elemente pole lõplik hulk. Siin tuleb rakendada üldisemat menetlust - võrreldavate hulkade elementide üks-ühessesse vastavusse seadmist.

Öeldakse, et kahe hulga  $A$  ja  $B$  elementide vahel on korraldatud üks-ühene vastavus, kui on konstrueeritud selline hulk  $C$ , mille elementideks on paarid  $(a,b)$ , kus  $a \in A$  ja  $b \in B$ , nii et on täidetud järgmised tingimused:

1° iga  $a \in A$  puhul leidub üks ja ainult üks paar

$(a, b) \in C$ ,

$2^{\circ}$  iga  $b \in B$  puhul leidub üks ja ainult üks paar

$(a, b) \in C$ .

Elemente  $a$  ja  $b$  ühest paarist  $(a, b)$  nimetatakse teineteisega vastavusse seatud elementideks.

Hulki, mille elementide vahel on võimalik korraldada üks-ühest vastavust, nimetatakse ekvivalentseteks hulkadeks. Hulkade  $A$  ja  $B$  ekvivalentsi tähistatakse  $A \sim B$ .

On kerge veenduda, et lõplikud hulgad on ekvivalentssed siis ja ainult siis, kui neil on võrdne arv elemente. Samuti on ilmne, et lõplik hulk ei saa olla ekvivalentne lõpmatu hulgaga.

Toome nüüd näiteid ekvivalentsete hulkade kohta.

Näide 1. Kõigi naturaalarvude hulk  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  ja kõigi täisarvude hulk  $M = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  on ekvivalentssed.

Tõepoolest, üks-ühese vastavuse  $N$  ja  $M$  elementide vahel saame korraldada näiteks järgmiselt:

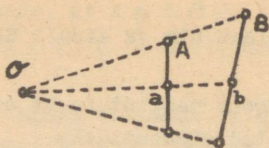
$(1, 0), (2, 1), (3, -1), (4, 2), \dots$ ,

üldiselt

$(2n, n), (2n+1, -n)$ .

Kerge on kontrollida, et üks-ühese vastavuse nõuded  $1^{\circ}$  ja  $2^{\circ}$  on täidetud.

Näide 2. Joonestame tasandil kaks sirglõiku  $A$  ja  $B$ , pikkusega vastavalt  $\ell_1$  ja  $\ell_2$  (kusjuures olgu näiteks  $\ell_1 < \ell_2$ ). Neid sirglõike võib vaadelda kui teatavaid punktihulki tasandil. Hulkade  $A$  ja  $B$  elementide (punktide) vahel võib korraldada üks-ühese vastavuse selliselt, et loeme vastavaiks need punktid  $a$  ja  $b$ , mis asuvad punktiga  $o$  ühel sirgel (vt. joon. 6). On kerge veenduda, et tingimused  $1^{\circ}$  ja  $2^{\circ}$  on täidetud.



Joon. 6.

Nende näidete juures juhime tähelepanu sellele, et hulgad võivad olla ekvivalentset, kuigi üks hulk on teise pärisosahulk (näide 1)<sup>4</sup>. Selline olukord võib esineda ainult lõpmatute hulkade korral. Teiseks, erineva pikkusega lõigud on ekvivalentset (näide 2). Üldiselt - kõik sarnased kujundid kui punktihulgad on ekvivalentset hulgad.

Esitame veel ekvivalentsete hulkade põhilised omadused:

- 1°  $A \sim A$  (refleksiivsus);
- 2° kui  $A \sim B$ , siis  $B \sim A$  (sümmeetria);
- 3° kui  $A \sim B$  ja  $B \sim C$ , siis  $A \sim C$  (transitiivsus).

Kehtib ka järgmine tulemus:

Teoreem 1. Kui  $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ , kus  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )  
ja  $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ , kus  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) ning

$$A_i \sim B_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

siis  $A \sim B$ .<sup>5</sup>

Omadused 1° - 3° ja teoreem 1 tõestada lugejatel.

<sup>4</sup> Hulka  $A$  nimetatakse hulga  $B$  pärisosahulgaks, kui  $A \subset B$  ja hulgas  $B$  leidub vähemalt üks element, mis hulgas  $A$  ei esine.

<sup>5</sup> Summa  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  defineeritakse järgmiselt:  $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ , kui  $x \in A_i$  vähemalt ühe  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) korral.

### § 3. Loenduvad hulgad.

Hulka  $A$ , mis on ekvivalentne kõigi naturaalarvudega hulgaga  $N$ , nimetatakse loenduvaks hulgaks.

Ekvivalentsi omaduse 1<sup>o</sup> põhjal  $N \sim N$ , s.t. et hulk  $N$  on ise ka loenduv. Kõik loenduvad hulgad on omavahel ekvivalentsed, s.t. kui  $A \sim N$  ja  $B \sim N$ , siis ka  $A \sim B$ . Seda saab näidata ekvivalentsi 2<sup>o</sup> ja 3<sup>o</sup> omadust kasutades.

Tõestame nüüd rida tulemusi loenduvate hulkade kohta.

Teoreem 1. Tarvilik ja piisav tingimus hulga  $A$  loenduvuseks on tingimus, et hulk  $A$  oleks esitatav kujul

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \quad (1)$$

ehk teisiti öeldes - esitatav jadana.

Tõestus. Piisavus on ilmne, kuna üks-ühene vastavus  $A$  ja  $N$  elementide vahel on antud indeksitega.

Tarvilikkus. Olgu  $A \sim N$ . Kirjutame välja naturaalarvudele 1, 2, 3, ...,  $n$ , ... vastavusse seatud  $A$  elemendid

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Hulkade  $A$  ja  $N$  elementide üks-ühese vastavuse põhjal peavad selles loetelus esinema kõik  $A$  elemendid, millest nähtubki, et  $A$  on esitatav kujul (1).

Teoreem 2. Iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva osahulga.

Tõestus. Olgu  $A$  lõpmatu hulk. Fikseerime hulgas  $A$  mingi elemendi  $a_1$ . Kuna  $A$  on lõpmatu, siis

$$A \setminus \{a_1\}$$

pole tühi hulk ja selles saame fikseerida omakorda mingi elemendi  $a_2$ . Hulk

$$A \setminus \{a_1, a_2\}$$

pole samuti tühi ja selles saame seega fikseerida mingi elemendi  $a_3$  jne. Sellist protsessi võime lõpmata jätkata, mille tulemusena saame hulga

$$D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\},$$

mis teoreemi 1 põhjal on loenduv. Kuna iga  $D$  element on

ka A element, siis  $D \subset A$ , m. o. t. t.

Teoreem 3. Loenduva hulga iga lõpmatu osahulk on loenduv hulk.

Tõestus. Olgu A loenduv hulk, mille esitame jadana

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}. \quad (2)$$

Olgu B hulga A mingi lõpmatu osahulk. Kontrollime järjekorras läbi kõik A elemendid ja seame igale B elemendile vastavusse tema esinemise järjekorranumbri esituses (2). Kuna B on lõpmatu, omandavad järjekorranumbrid kõiki naturaalarvulisi väärtusi. Seega  $B \sim \mathbb{N}$ , m. o. t. t.

Teoreem 4. Mis tahes lõpliku hulga või loenduva hulga loenduvate hulkade summa on loenduv hulk.

Tõestus. Anname tõestuse loenduva hulga loenduvate hulkade korral. Esitame loenduvad hulgad  $A_1, A_2, A_3, \dots$  jadana

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots\}$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}, \dots\}$$

.....  
.....

Kui kirjutame elemendid üles noolega näidatud järjekorras, on summa  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  järjestatavus jadana, s.t. loendus selge. Korduvate elementide puhul võtame arvesse ainult esimese.

Teoreem 5. Kui hulga A elemendid määratakse n parameetriga, mis omandavad sõltumatult loenduva hulga väärtusi, siis on hulk A loenduv.

Tõestus. Hulga A elemendid on esitatavad eelduse kohaselt kujul

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kus parameeter  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) omandab loenduva hul-

ga väärtusi

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, \dots$$

Teoreemi tõestamiseks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit. Väide kehtib, kui  $n = 1$ , sest siis on hulk  $A$  loenduv:

$$A = \{ a(x_{11}), a(x_{12}), \dots, a(x_{1m}), \dots \}.$$

Eeldame hulga  $A$  loenduvust  $n = k$  korral ja näitame, et ta on loenduv ka  $n = k + 1$  korral. Olgu siis  $A$  element kujul

$$a(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}).$$

Tähistame  $A_j$  abil kõikide  $A$  elementide hulga, kus  $(k + 1)$ -nda parameetri väärtus on  $x_{k+1,j}$ . Eelduse kohaselt on  $A_j$  loenduv, kuna selles hulgas on element määratud  $k$  parameetriga. Kuna aga

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

siis on teoreem 4 põhjal ka hulk  $A$  loenduv.

Teoreemist 5 saab teha mitmeid järeldusi.

1. Kõikide ratsionaalarvude hulk on loenduv.

Tõepoolest, ratsionaalarve võib vaadelda kahest parameetrist sõltuvate suurustena

$$a(p, q) = \frac{p}{q},$$

kus parameetrid omandavad loenduva hulga väärtusi:

$$p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$q = 1, 2, 3, \dots$$

Teoreemi 5 põhjal on selline hulk loenduv.

Mis tähes lõigul  $[a, b]$  asuvate ratsionaalarvude hulk on samuti loenduv kui loenduva hulga lõpmatu osahulk (teoreem 3).

2. Ratsionaalsete koordinaatidega punktide hulk  $n$ -mõõtmelises eukleidilises ruumis on loenduv. Iga punkt  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  määratakse  $n$  parameetriga, mis omandavad

sõltumatult loenduva hulga väärtusi.

3. Täisarvuliste kordajatega algebraliste polünoomide

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

hulk  $P$  on loenduv.

Fikseerides astme  $n$ , saame polünoomide hulga  $P_n$ , mille elemendid määratakse  $n + 1$  parameetriga, kus iga parameeter omandab loenduva hulga väärtusi. Seega on  $P_n$  loenduv. Kuna  $P = \bigcup_{n=0} P_n$ , siis on ka  $P$  loenduv.

4. Algebraliste arvude hulk on loenduv (Cantori teoreem). Algebraliseks nimetame arvu, mida võib esitada täisarvuliste kordajatega algebralise võrrandi lahendina.

Belmise järelduse põhjal võime öelda, et täisarvuliste kordajatega algebraliste võrrandite hulk on loenduv. Kuna igal algebralisel võrrandil on lõplik arv lahendeid, siis saame kõik lahendid järjestada jadana, millega lahendite (s.t. algebraliste arvude) hulga loenduvus on näidatud.

#### § 4. Kontinuumi võimsusega hulgad

Loomulikult tekib küsimus; kas üldse leidub lõpmatuid mitteloenduvaid hulki. Vastuse sellele küsimusele annab alljärgnev teoreem.

Teoreem 1. Reaal arvude hulk lõigul  $[0,1]$  ei ole loenduv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et lõigul  $[0,1]$  asuvate reaal arvude hulk on loenduv ja me oleme need reaal arvud järjestanud jadana (1)

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1n} \dots ;$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots a_{2n} \dots ;$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots a_{3n} \dots ;$$

.....

$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots a_{nn} \dots ;$$

.....

(1)

kus  $a_{1k}$  on mingi kümmandsüsteemi number  $0, \dots, 9$ . Konstrueerime nüüd lõpmatu kümmandmurru

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots, \quad (2)$$

kus  $b_1$  on suvaline number, ainult erinev numbritest  $a_{11}$ ,  $0$  ja  $9$ ,  $b_2$  on suvaline number, erinev numbritest  $a_{22}$ ,  $0$  ja  $9$  jne. Kümmandmurd (2) kujutab mingit reaalarvu lõigul  $[0, 1]$ . Näitame, et kümmandmurd (2) ei esine jadas (1). Tõepoolest, esimesest arvust erineb murd (2) vähemalt esimese koha pooldest, teisest arvust vähemalt teise koha pooldest jne. Märkime, et mõningaid arve nagu näiteks  $\frac{1}{2}$  võib esitada lõpmatu kümmandmurruna kahel viisil

$$\frac{1}{2} = 0,5000 \dots \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2} = 0,4999 \dots$$

Selline olukord esineb aga ainult siis, kui perioodis esineb kas  $0$  või  $9$ . Murrus (2) peale esimese numbrilise numbrilise  $0$  ja  $9$  aga üldse ei esine. Seega reaalarvu (2) jadas (1) tõesti ei esine. Vastuolu oletusega annabki teoreemi tõestuse.

Hulka, mis on ekvivalentne lõigul  $[0, 1]$  asuvate reaalarvude hulga, nimetatakse kontiinuumi võimsusega hulgaks.

Näiteks on kontiinuumi võimsusega hulgaks iga lõik  $[a, b]$ , kus  $a < b$ , kuna lõikude  $[a, b]$  ja  $[0, 1]$  punktide vahel võib korraldada üks-ühese vastavuse geomeetrilise konstruktsiooni teel (nagu näites 2, § 2) või valemiga

$$y = a + (b - a)x,$$

kus  $x \in [0, 1]$  korral  $y \in [a, b]$ .

Näitame, et kõikide reaalarvude hulk on kontiinuumi võimsusega hulk. Selleks on vaja tõestada enne mõned abitulemused, millel on ka iseseisev tähtsus.

Teoreem 2. Kui lõpmatu hulgale  $A$  liita lõplik või loenduv hulk  $B$ , siis

$$A \cup B \sim A.$$

Tõestus. Ilma üldsust kitsendamata võime eeldada, et ükski  $B$  element ei kuulu hulka  $A$ . Teoreemi 2 (§ 3) põhjal sisaldab iga lõpmatu hulk loenduva osahulga, s.t.

$$A = C \cup D,$$

kus  $C \cap D = \emptyset$  ja  $D$  on loenduv,  $A \cup B = (C \cup D) \cup B = C \cup (D \cup B)$ . Kuna  $C \sim C$  ja  $D \cup B \sim D$ , siis saab üksteise vastavuse korraldada ka summade  $C \cup (D \cup B)$  ja  $C \cup D$  ehk  $A \cup B$  ja  $A$  vahel, m.o.t.t.

Teoreem 3, Kui lõpmatu hulk  $A$  ei ole loenduv ja  $B$  on  $A$  lõplik või loenduv osahulk, siis

$$A \setminus B \sim A.$$

Tõestus. Hulk  $M = A \setminus B$  ei saa olla lõplik, sest siis oleks  $A$  kas lõplik või loenduv ( $A = B \cup M$ ).

Siis saame hulga  $M$  korral rakendada teoreemi 2, mille põhjal

$$M \cup B \sim M,$$

ehk

$$A \sim A \setminus B, \text{ m. o. t. t.}$$

Silmas pidades, et iga loenduv hulk on ekvivalentne oma lõpmatu osahulgaga, saame teha teoreemi 3 põhjal üldise järelduse, et iga lõpmatu hulk sisaldab enesega ekvivalentse pärisosahulga. Kuna lõplikul hulgal ei leidu tema enesega ekvivalentset pärisosahulka, siis võib ülaltoodud omadus olla aluseks lõpmatute hulkade defineerimisel. See- ga: hulka nimetame lõpmatuks, kui hulgal on tema enesega ekvivalentne pärisosahulk.

Teoreem 4. Kõikide reaalarvude hulk on kontiinuumi võimsusega hulk.

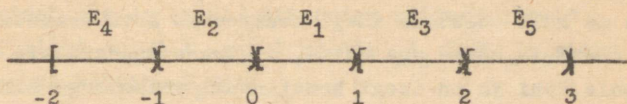
Tõestus. Teoreemist 3 järeldub, et hulgad

$$[a, b), (a, b] \text{ ja } (a, b)$$

on kontiinuumi võimsusega hulgad. Reaalarvude hulka  $Z$  võib avaldada kujul

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

kus  $E_{2k} = [-k, -k + 1)$  ja  $E_{2k-1} = [k - 1, k)$   
 ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ehk graafiliselt



Joon. 7.

Edasi võtame rangelt kasvava jada

$$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots,$$

kus  $\lim c_k = 1$ . Siis  $[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_{k-1}, c_k)$ . Kuna

$$E_k \sim [c_{k-1}, c_k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

ja § 2 toodud teoreemi tingimused on täidetud, siis sellest järeldubki, et

$$Z \sim [0, 1) \sim [0, 1], \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreemidest 3 ja 4 saab teha mõningaid järeldusi:

1) Kõikide irratsionaalarvude hulk on kontinuumi võimsusega. Irratsionaalarvude hulga  $I$  saame, kui reaalarvude hulgast  $Z$  lahutame ratsionaalarvude hulga  $R$

$$I = Z \setminus R.$$

Teoreem 4 põhjal  $Z$  pole loenduv, rakendades teoreemi 3 saame, et

$$Z \setminus R \sim Z,$$

seega

$$I \sim Z \sim [0, 1].$$

2) Kõikide transtsendentsete arvude hulk  $T$  on kontinuumi võimsusega. Transtsendentsete arvude hulga  $T$  saame, kui reaalarvude hulgast  $Z$  lahutame algebraalsete arvude hulga  $A$ . Paragrahvis 3 tõestasime, et algebraalsete arvude hulk on loenduv. Teoreemi 3 põhjal saame

$$T = Z \setminus A \sim Z.$$

See tulemus iseloomustab hulgateooria meetodeid. Va-

rem püüti tõestada üksikute arvude transtsendentsust. 1893.a. tõestas Ch. Hermite arvu e transtsendentsuse, 1882.a. F. Lindemann  $\sqrt[n]{n}$  transtsendentsuse. Hulgateooria meetoditega ei saa me küll tõestada ühegi konkreetse arvu transtsendentsust, seevastu saame aga väita, et transtsendentsete arvude hulk pole tühi ja on isegi kontiinuumi võimsusega hulk.

§ 5. Hulga võimsus. Võimsuste võrdlemine.

Eelmises paragrahvis kõnelesime kontiinuumi võimsusega hulkadest. Mida tähendas sõna "võimsus", jäi seejuures lähemalt selgitamata. Püüame seda teha nüüd.

Jaotame kõik hulgad klassidesse, nii et ühte klassi kuuluvad ekvivalentsed hulgad ja ainult need. Neid klasse nimetame ekvivalentsiklassideks.

On kerge näha, et ekvivalentsiklassid ei lõiku. Kui mingi hulk A kuuluks kahte ekvivalentsiklassi  $\alpha$  ja  $\beta$ , siis A on ekvivalentne kõigi klassi  $\alpha$  ja  $\beta$  hulkadega, millest järeldub, et klassid  $\alpha$  ja  $\beta$  peavad ühtima.

Hulga A võimsust mõistame kui ekvivalentsiklassi, millesse see hulk kuulub. Iga ekvivalentsiklassi tähistame mingi sümboliga, kusjuures erinevad klassid tähistame erinevate sümbolitega. Kui A kuulub ekvivalentsiklassi  $\alpha$ , siis ütleme, et hulga A võimsus on  $\alpha$  ja tähistame seda nii:

$$\bar{A} = \alpha.$$

Nüüd esitame ekvivalentsiklasside tähistused.

Klassi, milles asub hulk	$\oplus$	tähistame sümboliga	0;
" " " "	{a}	" "	1;
" " " "	{a,b}	" "	2;
" " " "	{a,b,c}	" "	3;
.....			
" " " "	N = {1,2,3,...,n,...}	" "	$\aleph_0$ ;
" " " "	[0,1]	" "	$\aleph_0$ ;

( $\aleph$  - loe alef - on heebrea tähestiku esimene täht).

Võimsusi saab ka võrrelda. Mis tahes kahe hulga  $A$  ja  $B$  korral võib a priori üles kirjutada neli juhtu, mis üksteist välistavad (s.t. konkreetsete hulkade  $A$  ja  $B$  puhul esineb üks ja ainult üks neist neljast juhust):

1) mingi  $A_1 \subset A$  puhul kehtib  $A_1 \sim B$  ja mingi  $B_1 \subset B$  puhul kehtib  $B_1 \sim A$ ;

2) mingi  $A_1 \subset A$  puhul kehtib  $A_1 \sim B$ , aga ühegi  $B_1 \subset B$  puhul ei kehti  $B_1 \sim A$ ;

3) ühegi  $A_1 \subset A$  puhul ei kehti  $A_1 \sim B$ , aga mingi  $B_1 \subset B$  puhul kehtib  $B_1 \sim A$ ;

4) ühegi  $A_1 \subset A$  puhul ei kehti  $A_1 \sim B$  ja ühegi  $B_1 \subset B$  puhul ei kehti  $B_1 \sim A$ .

Bernstein tõestab, et juhul 1) on hulgad  $A$  ja  $B$  ise ka ekvivalentsete. Neljanda juhu kohta tõestab Zermelo, et see ei saa esineda mitte ühegi hulkade paari  $A$  ja  $B$  korral.

Seega võime juhul 1) lugeda Bernsteini ülalnimetatud tulemuse põhjal, et hulkade  $A$  ja  $B$  võimsused on võrdsed, s.t.  $\overline{A} = \overline{B}$ ;

Teisel juhul loeme, et

$$\overline{A} > \overline{B}$$

ja kolmandal juhul

$$\overline{A} < \overline{B}.$$

Jääb tõestada Bernsteini teoreem. Zermelo teoreemi tõestuse võib leida näiteks Aleksandrovi õpikust [1], lk. 82-84. Bernsteini teoreemi tõestusel kasutame tulemust:

Teoreem 1. Kui  $A_2 \subset A_1 \subset A$  ja  $A_2 \sim A$ , siis  $A_1 \sim A$ .

Tõestus. Need  $A_2$  elemendid, mis mingis kindlas üks-üheses vastavuses  $A_2 \overset{1}{\sim} A$  on seatud vastavusse  $A_1$  elementidega, moodustavad hulga  $A_3 \subset A_2$ .  $A_3$  definitsiooni

põhjal  $A_3 \overset{1}{\sim} A_1$ . Kuna

$$A = (A \setminus A_1) \cup A_1,$$

$$A_2 = (A_2 \setminus A_3) \cup A_3,$$

ja kehtivad  $A \overset{1}{\sim} A_2$  ning  $A_1 \overset{2}{\sim} A_3$ , siis ka  $A \setminus A_1 \overset{1}{\sim} A_2 \setminus A_3$ .

Vaatleme nüüd üks-ühesest vastavust  $A_3 \overset{1}{\sim} A_1$ . Osa  $A_3$  elemente on seatud vastavusse  $A_2$  elementidega. Tähistame selle  $A_3$  osahulga  $A_4$  abil. Siis

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$$

$$A_3 = (A_3 \setminus A_4) \cup A_4$$

ja kehtivad

$$A_1 \overset{1}{\sim} A_3$$

ning

$$A_2 \overset{1}{\sim} A_4,$$

kust järeldub

$$A_1 \setminus A_2 \overset{1}{\sim} A_3 \setminus A_4.$$

Protsessi jätkates saame hulkade jada

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset \dots, \quad (1)$$

kus

$$A \setminus A_1 \sim A_2 \setminus A_3$$

$$A_1 \setminus A_2 \sim A_3 \setminus A_4$$

$$A_2 \setminus A_3 \sim A_4 \setminus A_5$$

.....

Hulkadel  $A_i \setminus A_{i-1}$  ja  $A_j \setminus A_{j-1}$  ( $i \neq j$ ) pole ühiseid elemente, mis järeldub seosest (1). Tähistame

$$D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

Siis  $A = \underline{(A \setminus A_1)} \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \underline{(A_2 \setminus A_3)} \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots \cup D$

ja  $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots \cup D$   
 (ekvivalentsete hulgaid on ühtmoodi alla kriipsutatud).

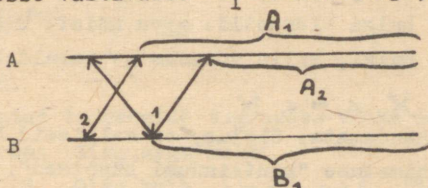
Siit nähtub, et hulkade  $A$  ja  $A_1$  puhul saab rakendada § 2 teoreemi 1, mille põhjal  $A \sim A_1$ .

Teoreem 2. (Bernsteini teoreem). Kui kahe hulga  $A$  ja  $B$  puhul leiduvad osahulgad  $A_1 \subset A$  ja  $B_1 \subset B$  nii, et

$$A \overset{1}{\sim} B_1 \text{ ja } B \overset{2}{\sim} A_1,$$

siis  $A \sim B$ .

Tõestus. Need  $A_1$  elemendid, mis on seatud vastavuses 2 üks-ühesesse vastavusse  $B_1$  elementidega, moodustavad hulga  $A_2$ .



Joon. 8.

Kehtib vahetõde  $A_2 \subset A_1 \subset A$  ja  $A_2 \overset{2}{\sim} B_1$ . Arvestades eeldust  $A \overset{1}{\sim} B_1$ , saame  $A_2 \sim A$ . Kasutades teoreemi 1, saame  $A_1 \sim A$ , mis ühes eeldusega  $B \overset{2}{\sim} A_1$  annabki  $A \sim B$ .

Näiteid võimsuste võrdlemise kohta.

Näide 1. Olgu võrreldavad hulgad  $A = \{a, b, c\}$  ja  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ . Võtame  $N_1 = \{1, 2, 3\} \subset N$ , mille puhul ilmselt  $N_1 \sim A$ . Teiselt poolt näeme, et pole võimalik leida  $A_1 \subset A$ , nii et  $A_1 \sim N$ . Seega on tegemist juhuga 3)

$$\overset{=}{A} < \overset{=}{N} \text{ ehk } 3 < \aleph_0.$$

Samal viisil saab näidata, et loenduva hulga võimsus on suurem mis tahes lõpliku hulga võimsusest.

Näide 2. Olgu võrreldavad hulgad  $[0, 1]$  ja  $N$ . Võta-

me lõigul  $[0,1]$  asuvate ratsionaalarvude hulga

$R_{[0,1]} \subset 0,1$ . Kuna see hulk on loenduv, siis  $R_{[0,1]} \sim N$ .

Kuna  $N$  iga osahulk on kas lõplik või loenduv, siis ei leidu sellist  $N_1 \subset N$ , mis oleks ekvivalentne hulgaga  $[0,1]$ .

Seega

$$\aleph_0 < \aleph$$

Kergesti võib veenduda, et lõplike hulkade võimsuste võrdlemisel kehtib tavaline suurusjärjestus naturaalarvude vallas. Seega järjestuvad võimsused selliselt:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < n < \dots < \aleph_0 < \aleph$$

Kõige siintoodu põhjal võime öelda, et hulga võimsuse mõiste on lõpliku hulga elementide arvu mõiste üldistus. Küsimus, kas leidub hulki, mille võimsus  $\aleph$  rahuldab tingimust

$$\aleph_0 < \aleph < \aleph$$

on tänapäevani lahendamata. Oletus, et selliseid hulki pole, on saanud endale nimetuse "kontiinuumi hüpotees".

Kuid kas leidub hulki, mille võimsus on suurem "kontiinuumi võimsusest"? Vastuse sellele annab järgmine teoreem.

Teoreem 3. Olgu  $A$  mis tahes hulk ja  $T$  tema kõigi osahulkade hulk. Siis kehtib

$$\overline{T} > \overline{A}$$

Tõestus. Teoreem kehtib ilmselt, kui  $A = \emptyset$ . Seega peame tõestuse andma juhul  $A \neq \emptyset$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $A \sim T$ . Siis saab igale elemendile  $a \in A$  seada üks-üheselt vastavusse mingi  $A_a \in T$  ( $A_a \subset A$ ). Nimetame elementi  $a$  korrapäraseks, kui  $a \in A_a$ , mittekorrapäraseks, kui  $a \notin A_a$ . Olgu  $M$  kõikide mittekorrapärase elementide hulk. Märgime, et  $M$  pole tühi hulk, kuna ta sisaldab elementi  $a_0$ , millele on vastavusse seatud  $\emptyset$ . Kuna  $M$  on  $T$  element, siis peab talle olema vastavusse seatud mingi  $A$  element  $m$ . Kas  $m$  on korrapärane või mitte?

Oletame, et  $m$  on korrapärane, s.t. et  $m \in M$ .  $M$  on

aga mittekorrapärase elementide hulk, nüüd aga sisaldab ta üht korrapärast elementi. Jõudsimine vastuoluni.

Oletame, et  $m$  on mittekorrapärase, s.t. et  $m \notin M$ . Hulka  $M$  kuuluvad kõik mittekorrapärase elemendid, nüüd aga leidsime, et üks mittekorrapärase element  $m$  sinna ei kuulu. Jõudsimine jälle vastuoluni.

Saadud vastuolu näitab, et  $A$  ja  $T$  pole ekvivalent-  
sed, seega on tegemist kas 2) või 3) juhuga.

Võtame hulga  $A$  kõik ühest elemendist koosnevad osa-  
hulgad. Nende summa moodustab hulga  $T_1 \subset T$ . On ilmne, et

$$T_1 \sim A,$$

millega võrreldes

$$\overline{A} < \overline{T}$$

on tõestatud.

Tõestatud teoreemile tuginedes võime konstrueerida järjest suurema võimsusega hulki.

Näide 3. Olgu hulk  $A = \{a, b, c\}$ . Kirjutame välja hulga  $A$  kõik osahulgad

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Neid on 8. Seega tõesti  $\overline{T} > \overline{A}$ , kuna  $8 > 3$ .

Kerge on näidata, et kui lõplik hulk koosneb  $n$  elemendist, siis on tema kõikide osahulkade arv  $2^n$ .

Kokkuleppeliselt kasutatakse seda seost ka lõpmatute hulkade korral, s.t. kui hulga  $A$  võimsus on  $\alpha$  ja tema kõikide osahulkade hulga  $T$  võimsus on  $\tau$ , siis kirjutatakse

$$\tau = 2^\alpha.$$

## II peatükk.

### MEETRIILISED RUUMID.

#### § 6. Meetrilise ruumi mõiste.

Matemaatilise analüüsi kursus ehitatakse üles piirväärtuse mõiste abil: tuletis, määratud integraal jne., ning defineeritakse selle kaudu. Piirväärtuse enese defineerimisel kasutame aga kauguse mõistet, sest  $|x_n - a|$  tähendab geomeetriliselt interpreteerides  $x_n$  ja  $a$  vahelist kaugust. Järelikult: kui mingis hulgas on defineeritud mis tahes kahe elemendi vaheline kaugus, siis on selles hulgas võimalik defineerida ka piirprotsess ja ühes sellega üles ehitada abstraktse analüüsi kursus. Kauguse defineerimisel peab aga nõudma, et kaugusel oleks eukleidilise ruumi kauguse põhilised omadused. Nii jõuamegi meetrilise ruumi mõiste juurde.

Hulka  $X$  nimetatakse meetriliseks ruumiks, kui selle hulga igale kahele elemendile  $x$  ja  $y$  on vastavusse seatud mittenegatiivne reaalarv  $\varrho(x, y)$ , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$1^{\circ} \varrho(x, y) = 0 \text{ siis ja ainult siis, kui } x = y;$$

$$2^{\circ} \varrho(x, y) = \varrho(y, x) \text{ (sümmeetria aksioom);}$$

$$3^{\circ} \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z) \text{ (kolmnurga aksioom).}$$

Elemente  $x, y, z, \dots \in X$  nimetatakse selle meetrilise ruumi punktideks. Reaalarvu  $\varrho(x, y)$  - punktide  $x$  ja  $y$  vaheliseks kauguseks. Seoseid  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$  ja  $3^{\circ}$  nimetatakse meetrika aksioomideks.

Toome mõningaid näiteid meetriliste ruumide kohta.

Näide 1.  $n$ -dimensionaalne eukleidiline ruum  $E_n$  on meetriline ruum. Punktid selles ruumis on määratud  $n$  reaalarvulise koordinaadiga

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

$$z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n).$$

Kahe punkti vahelise kauguse defineerime järgmiselt:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \xi_i)^2}$$

Selleks, et näidata, et ruum  $E_n$  on meetriline ruum, tuleb näidata meetrika aksioomide kehtivus. Aksioomide 1<sup>o</sup> ja 2<sup>o</sup> kehtivus on ilmne. Aksioomi 3<sup>o</sup> kehtivuse näitamiseks kasutame Cauchy-Bunjakovski võrratust

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Tähistame  $\eta_i - \xi_i = a_i$  ja  $\eta_i - \zeta_i = b_i$ , siis  $\eta_i - \xi_i = a_i + b_i$ . Seega saame

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Rakendades keskmisele liikmele ruutjuure märgi all Cauchy-Bunjakovski võrratust, saame

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

millega ka 3<sup>o</sup> aksioomi kehtivus on tõestatud.

Jääb veel tõestada Cauchy-Bunjakovski võrratus. Selleks vaatleme funktsiooni

$$y = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2.$$

Arendades saame

$$y = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Kuna funktsioon on mittenegatiivne, siis peab ruutkolmliikme diskriminant olema mittepositiivne, mis annabki Cauchy-Bunjakovski võrratuse.

Näide 2. Kõikide reaalarvuliste liikmetega jadade hulk on meetriline ruum. Punktid selles ruumis on jadad

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots),$$

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots),$$

$$z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots).$$

Kahe punkti vahelise kauguse defineerime järgmiselt:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \xi_i|}{1 + |\eta_i - \xi_i|}.$$

Märgime, et see rida koondub alati, kuna selle liikmed on väiksemad koonduva rea  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$  vastavatest liikmetest.

Kauguse aksioomid  $1^\circ$  ja  $2^\circ$  kehtivad ilmselt.

$3^\circ$  aksioomi kehtivus järeldeb võrratusest

$$\frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \xi_i|}{1 + |\eta_i - \xi_i|} \leq \frac{1}{2^i} \frac{|\zeta_i - \xi_i|}{1 + |\zeta_i - \xi_i|} + \frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \zeta_i|}{1 + |\eta_i - \zeta_i|}.$$

Võrratuse enese kehtivus on aga kergesti kontrollitav pärast nimetajate kaotamist.

Näide 3. Vaatleme kõiki lõigul  $[a, b]$  defineeritud pidevaid funktsioone  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$ , ...,  $t \in [a, b]$ . Nende funktsioonide hulka võib vaadelda kui meetrilist ruumi, kus kaugus defineeritakse järgmiselt:

$$\rho(f, g) = \sup_t |g(t) - f(t)|.$$

Meetrika aksioomide  $1^\circ$  ja  $2^\circ$  kehtivus on ilmne. Aksioomi  $3^\circ$  kehtivuse näitamiseks kasutame võrratust

$$|g(t) - f(t)| \leq |g(t) - h(t)| + |h(t) - f(t)|.$$

Võttes vahede absoluutväärtustest ülemise raja  $t$  järgi, saamegi

$$\varrho(f, g) \leq \varrho(h, g) + \varrho(f, h).$$

Lõigul  $[a, b]$  defineeritud pidevate funktsioonide ruumi tähistatakse  $C[a, b]$ .

Läheme nüüd jada piirväärtuse defineerimise juurde.

Meetrilise ruumi  $X$  punktide jada  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  piirväärtuseks nimetame elementi  $a \in X$ , kui igale  $\varepsilon > 0$  leidub vastav naturaalarv  $N$ , nii et

$$\varrho(x_n, a) < \varepsilon, \text{ kui } n > N.$$

Seda asjaolu, et jadal  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on piirväärtus  $a$ , tähistame samuti nagu matemaatilises analüüsis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ ehk } x_n \rightarrow a.$$

Lihtsalt saab näidata, et kui jada koondub (s.t. emab piirväärtuse), siis saab tal olla ainult üks piirväärtus. Oletame, et jadal  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  on kaks piirväärtust  $a$  ja  $b$ , s.t. et

$$\varrho(x_n, a) < \varepsilon, \text{ kui } n > N_1(\varepsilon);$$

ja

$$\varrho(x_n, b) < \varepsilon, \text{ kui } n > N_2(\varepsilon).$$

Kui võtame  $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ , siis  $n > N(\varepsilon)$  korral kehtivad mõlemad võrratused. Seega saame

$$\varrho(a, b) \leq \varrho(a, x_n) + \varrho(x_n, b) < 2\varepsilon,$$

kui  $n > N(\varepsilon)$ . Siis peab aga  $\varrho(a, b) = 0$ , kust meetrika  $l^0$  aksioomi põhjal  $a = b$ .

Koonduva jada mõistega on tihedalt seotud fundamentaaljada mõiste. Meetrilise ruumi punktide jada  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  nimetatakse fundamentaalkadaks, kui igale  $\varepsilon > 0$

leidub vastav naturaalarv  $N$ , nii et

$$\varphi(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ kui } m, n > N.$$

Peaaegu vahetult järeldub, et iga koonduv jada peab tingimata olema fundamentaaljada. Tõepoolest, võrratusest

$$\varphi(x_m, x_n) \leq \varphi(x_m, a) + \varphi(a, x_n)$$

järeldub  $m, n > N$  korral (kuna siis  $\varphi(x_m, a) < \varepsilon$  ja

$$\varphi(a, x_n) < \varepsilon) \text{ võrratus}$$

$$\varphi(x_m, x_n) < 2\varepsilon.$$

Vastupidine väide aga üldiselt ei kehti. Vaatleme näiteks kõikide ratsionaalarvude ruumi, kus kaugus on defineeritud võrdusega  $\varphi(x, y) = |x - y|$ . Irratsionaalarvu  $\sqrt{2}$  ratsionaalsete lähendmurdude jada on fundamentaaljada, aga see jada ei koonu selle ruumi elemendiks.

Fundamentaalgadade ja koonduvate jadade vahekorra järgi saame kõik meetrilised ruumid jaotada kahte rühma. Täielikeks nimetame neid ruume, kus iga fundamentaaljada koondub mingiks selle ruumi elemendiks. Kõiki teisi ruume nimetame mittetäielikeks.

Ruumid  $E_n$  ja  $C[a, b]$  on täielikud ruumid. Näitame seda  $C[a, b]$  puhul. Võtame mingi ruumi  $C[a, b]$  fundamentaaljada

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \dots$$

Jada fundamentaalsuse tõttu igale  $\varepsilon > 0$  leidub vastav  $N(\varepsilon)$ , nii et

$$\sup_t |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon, \text{ kui } m, n > N(\varepsilon).$$

Kuid siis kehtib ka

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon, \text{ kui } m, n > N(\varepsilon)$$

iga  $t \in [a, b]$  puhul. See on aga funktsionaalgada ühtlase koonduvuse tarvilik ja piisav tingimus. Analüüsist teame, et kui pidevate funktsioonide jada koondub mingil lõigul ühtlaselt, siis on piirfunktsioon sellel lõigul pidev funkt-

sioon. Sellega on tõestatud, et fundamentaaljada koondub ruumi  $C[a, b]$  elemendiks, seega ruum  $C[a, b]$  on täielik.

Lõpuks esitame veel lineaarse normeeritud ruumi mõiste, mis on kitsam kui meetrilise ruumi mõiste. Lineaarne normeeritud ruum peab olema kõigepealt lineaal ( ehk lineaarne hulk). Lineaalsiks nimetame hulka  $X$ , kui iga kahe selle hulga elemendi  $x$  ja  $y$  korral on defineeritud summa  $x + y$ , mis on sellesama hulga element ja teiseks, kui iga elemendi  $x$  ja reaalarvu  $\lambda$  korral on defineeritud korrutis  $\lambda x$ , mis on hulga  $X$  element, kusjuures peavad olema täidetud järgmised tingimused (lineaali aksioomid):

$$1^{\circ} \quad x + y = y + x \quad (\text{summa kommutatiivsus});$$

$$2^{\circ} \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{summa assotsiatiivsus});$$

$$3^{\circ} \quad \text{leidub element } 0 \in X, \text{ mida nimetatakse hullelemendiks, nii et } x + 0 = x \text{ iga } x \in X \text{ puhul};$$

$$4^{\circ} \quad \text{iga elemendi } x \in X \text{ puhul leidub element } -x \in X, \text{ mida nimetatakse elemendi } x \text{ vastandelemendiks, nii et } x + (-x) = 0;$$

$$5^{\circ} \quad (\lambda \mu)x = \lambda(\mu x) \quad (\text{assotsiatiivsus reaalarvudega korrutamisel});$$

$$6^{\circ} \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad (\text{distributiivsus})$$

$$7^{\circ} \quad 1 \cdot x = x.$$

Teiseks peab lineaarses normeeritud ruumis olema defineeritud norm, s.t. et igale elemendile  $x \in X$  peab olema vastavusse seatud mittenegatiivne reaalarv, mida tähistatakse  $\|x\|$ , kusjuures peavad olema täidetud järgmised tingimused (normi aksioomid):

$$1^{\circ} \quad \|x\| = 0 \text{ siis ja ainult siis, kui } x = 0;$$

$$2^{\circ} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

$$3^{\circ} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Märgime, et normi mõiste on absoluutväärtuse mõiste üldistus.

Kui lineaarses normeeritud ruumis defineerida kaugus võrdusega

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|,$$

siis osutub see meetriliseks ruumiks, kuna meetrika aksiomid on täidetud. Seega näeme, et iga lineaarset normeeritud ruumi võib triviaalsel viisil metriseerida. Vastupidist aga väita ei saa: iga meetrilist ruumi ei saa vaadelda lineaarse normeeritud ruumina. Nii saab ruume  $E_n$  ja  $C[a, b]$  vaadelda lineaarsete normeeritud ruumidena, defineerides normid vastavalt

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

ja

$$\|f\| = \sup_t |f(t)|,$$

kõikide jadade ruumi aga lineaarse normeeritud ruumina vaadelda pole võimalik.

Lugejail anda koonduva jada, fundamentaaljada ja täieliku ruumi definitsioon lineaarse normeeritud ruumi korral.

## § 7. Tuletishulk ja sulund.

Tuletishulka ja sulundit käsitleme üldiselt mis tahes meetrilises ruumis asuvate hulkade korral. Kõigepealt on vaja defineerida mõned mõisted.

Kinniseks sfääriks meetrilises ruumis  $X$  nimetame kõikide selliste punktide  $x \in X$  hulka, mis rahuldavad tingimust

$$\varrho(x, x_0) \leq r,$$

kus  $r > 0$ .

Fikseeritud punkti  $x_0$  nimetatakse sfääri keskpunktiks, arvu  $r$  - selle sfääri raadiuseks. Kinnist sfääri tähistatakse  $\bar{S}(x_0, r)$ .

Lahtiseks sfääriks nimetame kõikide selliste punktide

$x \in X$  hulka, mis rahuldavad tingimust

$$\rho(x, x_0) < r,$$

kus  $r > 0$ .

Lahtist sfääri tähistatakse  $S(x_0, r)$ . Lahtist sfääri  $S(x_0, r)$  nimetatakse ka punkti  $x_0$  ümbruseks (olenemata  $r$  suurusest). Siis tähistatakse seda  $U(x_0, r)$ .

Kolmedimensionaalses eukleidilises ruumis vastab kinnisele sfäärile kera, lahtisele sfäärile kera ilma teda piirava kerapinnata, millest vastavad hulgad on oma nimetuse saanudki. Kahedimensionaalses eukleidilises ruumis vastab kinnisele sfäärile ring, lahtisele sfäärile ring ilma teda piirava ringjooneta. Ühedimensionaalses eukleidilises ruumis vastab kinnisele sfäärile lõik, lahtisele sfäärile vahemik.

Nüüd defineerime kuhjumispunkti ja puutepunkti mõistet.

Meetrilise ruumi  $X$  punkti  $x$  nimetatakse hulga  $A$  kuhjumispunktiks, kui punkti  $x$  mis tahes ümbruses asub lõpmata palju hulga  $A$  punkte.<sup>6</sup>

Meetrilise ruumi  $X$  punkti  $x$  nimetatakse hulga  $A$  puutepunktiks, kui punkti  $x$  mis tahes ümbruses asub vähemalt üks hulga  $A$  punkt.

Nendest definitsioonidest võib järeldada järgmist:

- 1) selleks, et hulgal oleks üldse kuhjumispunkt, peab ta tingimata olema lõpmatu;
- 2) iga kuhjumispunkt on ühtlasi ka puutepunkt;
- 3) hulga  $A$  iga punkt on ühtlasi ka selle hulga puutepunktiks.

---

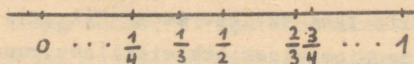
<sup>6</sup> Kuhjumispunkti võib defineerida ka nii: meetrilise ruumi  $X$  punkti  $x$  nimetatakse hulga  $A$  kuhjumispunktiks, kui punkti  $x$  mis tahes ümbruses asub vähemalt üks punktist  $x$  erinev hulga  $A$  punkt.

Mõlemad kuhjumispunkti definitsioonid on samaväärsed.

Näiteid kuhjumis- ja puutepunktide kohta.

Näide 1. Olgu  $X = E_1$  ja

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots \right\}$$



Joon. 9.

Kuhjumispunktideks on punktid 0 ja 1. Puutepunktideks on peale nende punktide veel kõik hulga  $A$  punktid.

Näide 2. Olgu  $X = E_1$  ja  $A = R_{[0,1]}$  (s.t. lõigul  $[0,1]$  asuvate ratsionaalsete punktide hulk). Kuhjumispunktideks on iga reaalarv lõigul  $[0,1]$ , samad punktid on ka puutepunktideks.

Näidete vaatlemine viib meid tuletishulga ja sulundi mõiste juurde.

Hulga  $A$  kõikide kuhjumispunktide hulka nimetame selle hulga tuletishulgaks. Tuletishulka tähistatakse  $A'$ .

Hulga  $A$  kõikide puutepunktide hulka nimetame selle hulga sulundiks. Sulundit tähistatakse  $[A]$ .

Hulkade  $A$ ,  $A'$  ja  $[A]$  puhul kehtivad järgmised seosed:

- 1)  $A' \subset [A]$ ,
- 2)  $A \subset [A]$ ,
- 3)  $A \cup A' = [A]$ .

Seosed 1) - 3) sõnastada lugejail!

Esimesed kaks seost järelduvad vahetult kuhjumis- ja puutepunkti definitsioonist. Tõestame seose 3):

Seoste 1) ja 2) liikmeti liitmisel saame

$$A \cup A' \subset [A].$$

Seega tuleb tõestada, et  $A \cup A' \supset [A]$ . Võtame mingi punkti  $x \in [A]$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $x \notin A \cup A'$ .

Siis  $x \notin A$  ja  $x \notin A'$ . Viimasest kirjutisest järeldub, et leidub selline  $x$  ümbrus  $U(x, r)$ , kus asub ainult lõplik arv  $A$  punkte

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

kusjuures  $x \notin A$  tõttu saame väita, et  $x \neq x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Seega on kaugused

$$\varphi(x, x_1), \varphi(x, x_2), \dots, \varphi(x, x_n)$$

positiivsed reaalarvud. Võtame  $r_1 > 0$ , nii et

$$r_1 < \min_i \varphi(x, x_i).$$

Ümbruses  $U(x, r_1)$  ei asu nüüd enam ühtegi  $A$  punkti. Järelikult pole  $x$  hulga  $A$  puutepunkt. Saadud vastuolu ütleb, et  $x \in A \cup A'$ , millega seos 3) on tõestatud.

Hulkade omaduste selgitamisel on oluline hulga  $A$  ja tema tuletishulga vahekord. Võivad esineda järgmised juhud:

1)  $A' \subset A$

sel korral nimetatakse hulka  $A$  kinniseks;

2)  $A \subset A'$

sel korral nimetatakse hulka  $A$  endas tihedaks

3)  $A = A'$

sel korral nimetatakse hulka  $A$  perfektseks.

Perfektne hulk on niisiis kinnine ja endas tihe.

Näiteid.

1. Hulk  $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$

on kinnine, kuna  $A' = \{1\}$  ja  $A' \subset A$ .

2. Lõigul  $[0, 1]$  asuvate ratsionaalarvude hulk on endas tihe, kuna tuletishulgaks on lõik  $[0, 1]$  (reaalarvude hulk) ja  $R_{[0, 1]} \subset [0, 1]$ .

3. Lõigul  $[0, 1]$  asuvate reaalarvude hulk on perfektne hulk.

Peab märkima, et selline hulkade jaotus pole ei üks-

teist välistav ega ka kõiki juhte ammendav. Näiteks hulga

$$A' = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots \right\}$$

puhul on  $A' = \{0, 1\}$  ja kumbki seostest  $A \subset A'$  ega  $A' \subset A$  ei kehti. Hulk  $A$  ei kuulu ühessegi neist kolmest rühmast.

Tõestame nüüd mõningad tuletishulkade omadused.

Teoreem 1. Kui  $A \subset B$ , siis  $A' \subset B'$ .

Tõestus. Võtame  $x \in A'$ . Definitsiooni kohaselt asub selle punkti  $x$  mis tahes ümbruses lõpmata palju  $A$  punkte, aga  $A \subset B$  tõttu ka lõpmatu palju  $B$  punkte. Järelikult  $x \in B'$ , m. o. t. t.

Teoreem 2. Hulkade summa tuletishulk on võrdne liidetavate hulkade tuletishulkade summaga

$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

Tõestus. Tõestame kõigepealt väite kahe hulga korral. Lähtudes filmsetest seostest

$A \subset A \cup B$  ja  $B \subset A \cup B$ ,  
saame teoreemi 1 põhjal

$$A' \subset (A \cup B)' \text{ ja } B' \subset (A \cup B)'.$$

Nende seoste liikmeti liitmisel saame

$$A' \cup B' \subset (A \cup B)'.$$

Seega tuleb tõestada veel vastupidise sisalduvusseose kehtivus.

Võtame  $x \in (A \cup B)'$  ja oletame vastuväiteliselt, et  $x \notin A' \cup B'$ , s.t.  $x \notin A'$  ja  $x \notin B'$ . Viimased kirjutised tähendavad, et leidub üks  $x$  ümbrus  $U(x, r_1)$ , kus on ainult lõplik arv  $A$  punkte ja mingi teine  $x$  ümbrus  $U(x, r_2)$ , kus on ainult lõplik arv  $B$  punkte. Võtame  $r = \min(r_1, r_2)$  ja konstrueerisime  $x$  ümbruse  $U(x, r)$ . Selles on lõplik arv summa  $A \cup B$  punkte ja seega ei saa  $x$  olla  $A \cup B$  kuhjumispunktiks, s.t.  $x \notin (A \cup B)'$ . Saadud vastuolu põh-

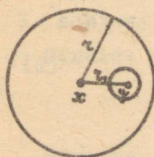
jal võime väita, et  $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ , millest järeldub võrdus. Matemaatilist induktsiooni rakendades on kerge näidata, et tulemus kehtib mis tahes lõplikku arvu liidetavate hulkade korral.

Teoreem 3. Mis tahes hulga tuletishulk on kinnine hulk.

Tõestus. Kinnise hulga definitsiooni arvestades on seega tarvis näidata

$$A'' \subset A'.$$

Võtame  $x \in A''$ . Punkti  $x$  mis tahes ümbruses on siis lõpmata palju  $A'$  punkte, s.t.  $A$  kuhjumispunkte. Võtame ühe sellise kuhjumispunkti  $y$ , mis asub vaadeldavas  $x$  ümbruses. Leiame nüüd sellise  $y$  ümbruse, mis tervikuna asub esimeses ümbruses. Selles  $y$  ümbruses on lõpmata palju  $A$  punkte. Kuid siis on ka esialgses  $x$  ümbruses lõpmata palju  $A$  punkte ja seega  $x \in A'$ .



Joon. 10.

Tuleb ainult näidata, et sellist  $y$  ümbrust, mis tervikuna asub esimeses ümbruses, on alati võimalik leida. Olgu esimene ümbrus  $U(x, r)$ . Tähistame  $\rho(x, y) = r_1$ . Kuna  $y \in U(x, r)$ , siis  $r_1 < r$ . Kui nüüd võtta  $r_2 > 0$  ja  $r_2 < r - r_1$ , siis  $U(y, r_2) \subset U(x, r)$ .

Tõesti, kui võtta  $z \in U(y, r_2)$ , s.t.  $\rho(z, y) < r_2$ , siis  $\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < r_2 + r_1 < r - r_1 + r_1 = r$ . Seega on teoreem täielikult tõestatud.

Tuginedes äsja tõestatud teoreemidele ja võrdusele

$$[A] = A \cup A'$$

on kerge tõestada järgmised sulundi omadused:

- 1)  $[A \cup B] = [A] \cup [B]$ ,
- 2)  $[[A]] = [A]$ ,
- 3)  $[\emptyset] = \emptyset$ .

4) hulk on kinnine siis ja ainult siis, kui ta ühtib oma sulundiga.

Omadused 1) - 4) sõnastada ja tõestada lugejail!

### § 8. Kinnised ja lahtised hulgad.

Kinnisi ja lahtisi hulki käsitleme jälle üldiselt mis tahes meetrilises ruumis.

Kinniste hulkade kohta tõestame järgmised teoreemid.

Teoreem 1. Lõpliku hulga kinniste hulkade summa on kinnine hulk.

Tõestus. Olgu

$$F = \bigcup_{k=1}^n F_k,$$

kus hulgad  $F_k$  on kinnised, s. t.

$$F'_k \subset F_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Tuleb näidata, et  $F' \subset F$ . Kasutame summa tuletise kohta käivat teoreemi (teoreem 2 §7). Saame

$$F' = \left( \bigcup_{k=1}^n F_k \right)' = \bigcap_{k=1}^n F'_k. \quad (2)$$

Seose (1) põhjal

$$\bigcup_{k=1}^n F'_k \subset \bigcup_{k=1}^n F_k,$$

kust saame (2) tõttu

$$F' \subset F, \text{ m. o. t. t.}$$

Märgime, et loenduva hulga kinniste hulkade summa ei tarvitse olla kinnine hulk. Näiteks

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right] \cup \dots = [0, 1),$$

mis pole kinnine hulk, kuna ta ei sisalda üht oma kuhjumispunkti 1.

Teoreem 2. Mis tahes hulga kinniste hulkade ühisosa on kinnine hulk.

Tõestus. Olgu

$$F = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha},$$

(indeksite  $\alpha$  hulk on kui tahes suure võimeusega hulk), kus hulgid  $F_\alpha$  on kinnised, s.t.  $F'_\alpha \subset F$  (iga  $\alpha$  puhul).

Kuna  $F \subset F_\alpha$  (iga  $\alpha$  puhul), siis ka  $F' \subset F'_\alpha \subset F_\alpha$  (iga  $\alpha$  puhul).  $F'$  peab sisalduma siis ka hulkade  $F$  ühisosas, s.t.

$$F' \subset \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 3. Kõigu ruum  $X$  ja tühi hulk  $\emptyset$  on kinnised hulgid.

Tõestus. Hulga kuhjumispunkt on teatava ruumi  $X$  punkt. Ka ruumi  $X$  enese kuhjumispunktid peavad siis sisalduma ruumis  $X$ . Seega  $X' \subset X$ , millega  $X$  on kinnine.

Kuna  $\emptyset$  pole lõpmatu hulk, pole tal kuhjumispunkte, s.t.  $\emptyset' = \emptyset$ . Siis aga kehtib  $\emptyset' \subset \emptyset$ , millega  $\emptyset$  on kinnine hulk.

Edasi läheme lahtiste hulkade käsitlemise juurde.

Vahet  $X \setminus A$  nimetame hulga  $A$  täiendiks (kogu ruumi  $X$  suhtes) ja tähistame seda  $C(A)$ .

Kinnise hulga täiendit nimetatakse lahtiseks hulgaks, s.t.

$$C(C(A)) = A. \quad (1)$$

Märgime, et mis tahes hulga  $A$  puhul kehtib järgmine võrdus

$$C(C(A)) = A. \quad (2)$$

Võtame täiendi võrduse (1) mõlemast poolest

$$C(C(F)) = C(G).$$

Rakendades võrdust (2) saame

$$F = C(G),$$

s.t. lahtise hulga täiend on kinnine hulk. Seega kinnise hulga täiend on lahtine ja lahtise hulga täiend kinnine hulk. Toome mõned näited lahtiste hulkade kohta.

Näide 1. Vahemik  $(a, b)$  ruumis  $E_1$  on lahtine, kuna

$$(a, b) = E_1 \setminus ((-\infty, a] \cup [b, +\infty))$$

ja hulk  $F = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$  on kinnine, sisaldades kõik oma kuhjumispunktid.

Näide 2. Iga lahtine sfäär  $S(x, r)$  meetrilises ruumis  $X$  on lahtine hulk, sest

$$F = X \setminus S(x, r)$$

on kinnine, sisaldades kõik oma kuhjumispunktid. Tõesti, kui hulk  $X \setminus S(x, r)$  ei sisaldaks mingit oma kuhjumispunkti  $y$ , siis peaks  $y \in S(x, r)$ . Siis saaksime aga leida sellise  $y$  ümbruse, mis tervikuna asub sfääris  $S(x, r)$ . Kuid selles  $y$  ümbruses ei ole ühtegi  $F$  punkti ja järelikult pole  $y$  hulga  $F$  kuhjumispunktiks. Saadud vastuolu näitab, et  $F$  sisaldab kõik oma kuhjumispunktid.

Lahtiste hulkade omaduste tõestamisel kasutame kaht võrdust

$$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = C\left(\bigcap_{\alpha} C(A_{\alpha})\right), \quad (3)$$

$$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = C\left(\bigcup_{\alpha} C(A_{\alpha})\right). \quad (4)$$

Tõestame näiteks võrduse (4).

1. Võtame  $x \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ , siis  $x \in A_{\alpha}$  iga  $\alpha$  puhul. Edasi kehtib  $x \notin C(A_{\alpha})$  iga  $\alpha$  puhul ja seega ka  $x \notin \bigcup_{\alpha} C(A_{\alpha})$ . Siis aga  $x \in C\left(\bigcup_{\alpha} C(A_{\alpha})\right)$ , millega ühepoolne sisalduvusvahetuskord  $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \subset C\left(\bigcup_{\alpha} C(A_{\alpha})\right)$  on tõestatud.

2. Võtame nüüd  $y \in C\left(\bigcup_{\alpha} C(A_{\alpha})\right)$ , siis  $y \notin \bigcup_{\alpha} C(A_{\alpha})$  ja järelikult ka  $y \notin C(A_{\alpha})$  iga  $\alpha$  korral. Siis aga  $y \in A_{\alpha}$  iga  $\alpha$  korral ning  $y \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ , millega on tõestatud teistpidine sisalduvusvahetuskord ja seega ka võrdus (4).

Võrduse (3) tõestus on analoogiline äsja tooduga.

Teoreem 4. Mis tahes hulga lahtiste hulkade summa on lahtine hulk.

Tõestus. Olgu

$$G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha},$$

(indeksite  $\alpha$  hulk on kui tahes suure võimsusega hulk), kus

$G_\alpha$  on iga  $\alpha$  korral lahtine hulk. Hulgad  $C(G_\alpha)$  on seega iga  $\alpha$  puhul kinnised, teoreem 2 põhjal on kinnine siis ka hulk  $\bigcap_\alpha C(G_\alpha)$ . Viimase hulga täiend  $C(\bigcap_\alpha C(G_\alpha))$  on siis aga lahtine hulk. Võrduse (3) põhjal see ongi  $\bigcup_\alpha G_\alpha$ .

Teoreem 5. Lõpliku hulga lahtiste hulkade ühisosa on lahtine hulk.

Tõestus. Olgu

$$G = \bigcap_{k=1}^n G_k,$$

kus hulgad  $G_k$  on iga  $k = 1, 2, \dots, n$  korral lahtised hulgad. Hulgad  $C(G_k)$  on seega kinnised, teoreem 1 põhjal on kinnine ka hulk  $\bigcap_{k=1}^n C(G_k)$ . Selle täiend, mis võrduse (4) põhjal ongi  $\bigcap_{k=1}^n G_k$ , on seega lahtine hulk.

Märgime, et loenduva hulga lahtiste hulkade ühisosa ei tarvitse olla lahtine hulk. Näiteks

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = \{0\}$$

on kinnine hulk.

Teoreem 6. Kogu ruum  $X$  ja tühi hulk  $\emptyset$  on lahtised hulgad.

Tõestus. Teoreem 3 põhjal võime öelda, et kogu ruum  $X$  ja tühi hulk on kinnised hulgad. Seega on nende täiendid lahtised. Nende täiendid on

$$C(\emptyset) = X \setminus \emptyset = X,$$

$$C(X) = X \setminus X = \emptyset.$$

Seega  $X$  ja  $\emptyset$  on lahtised hulgad.

Lahtiste ja kinniste hulkade kohta peab tegema veel järgmisi märkusi:

1. Lahtised ja kinnised hulgad ei ammenda kõiki võimalikke hulki. Näiteks ruumis  $E_1$  pole hulk  $[0, 1)$  ei lahtine ega ka kinnine.

2. Mõisted "lahtine" ja "kinnine" pole vastandid. Näi-

teks  $X$  ja  $\odot$  on samaaegselt nii kinnised kui ka lahtised hulgad:

3. Hulga kinnisus ja lahtisus oleneb oluliselt ruumist  $X$ , milles me seda hulka vaatleme. Näiteks vahemik  $(a, b)$  on ruumis  $E_1$  lahtine hulk, ruumis  $E_2$  pole see hulk aga enam lahtine, kuna selle täiend pole kinnine.

Lahtist hulka on võimalik defineerida ka ilma kinnise hulga mõiste kasutamiseta. Kõigepealt anname hulga sisepunkti mõiste.

Punkti  $x \in A$  nimetame hulga  $A$  sisepunktiks, kui sellel punktil leidub niisugune ümbrus, mis tervikuna asub hulgas  $A$ .

Teoreem 7. Selleks, et hulk oleks lahtine, on tarvilik ja piisav, et kõik selle hulga punktid oleksid sisepunktid.

Tõestus. Piisavus. Oletame, et hulga  $A$  punktid on kõik sisepunktid. Siis  $x \in A$  jaoks leidub ümbrus  $U(x, r) \subset A$ , s.t. et  $U(x, r)$  ei sisalda ühtki  $C(A)$  punkti. Punkt  $x$  ei ole siis  $C(A)$  kuhjumispunktiks. Kuna ükski  $A$  punkt ei saa olla  $C(A)$  kuhjumispunktiks, siis  $C(A)$  kuhjumispunktid peavad asuma hulgas  $C(A)$  eneses. Seega on  $C(A)$  kinnine ja  $A$  lahtine hulk.

Tarvilikkus. Oletame, et  $A$  on lahtine,  $C(A)$  on siis kinnine, sisaldades kõik oma kuhjumispunktid. Ükski  $A$  punkt ei ole siis  $C(A)$  kuhjumispunktiks. Seega peab mis tahes  $x \in A$  jaoks leiduma ümbrus, kus on ainult lõplik arv  $C(A)$  punkte

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Võttes raadiuse  $r < \min_1 \rho(x, x_1)$  konstrueerime ümbruse  $U(x, r)$ . Selles ei ole enam ühtegi  $C(A)$  punkti. Järelikult sisaldub see tervikuna hulgas  $A$ . Teoreem on tõestatud.

Seega võime lahtist hulka defineerida kui hulka, milles kõik punktid on sisepunktid. Teoreem 7 põhjal on äsja

esitatud lahtise hulga definitsioon samaväärne lahtise hulga definitsiooniga seose  $C(F) = G$  abil.

Esitame veel ühe teoreemi kinniste ja lahtiste hulka-de kohta, mida kasutame hiljem (III peatükis).

Teoreem 8. (Hulkade eralduvusest). Mis tahes kahel mittetühjal ja mittelõikuval kinnisel hulgal leiduvad lah-tised ülemhulgad, mis samuti ei lõiku.<sup>7</sup>

Tõestus. Olgu  $F_1$  ja  $F_2$  kinnised, mittetühjad ja mittelõikuvad hulgad. Võtame  $x \in F_1$  ja arvutame



$$\inf \varphi(x, y) = \varphi(x, F_2).$$

$$y \in F_2$$

Suurust  $\varphi(x, F_2)$  nimetame punkti  $x$  kauguseks hulgast  $F_2$ . See kaugus peab antud ju-

Joon. 11.

hul olema suurem kui 0. Tõe-

poolest, kui  $\varphi(x, F_2) = 0$ , siis on  $x$  hulga  $F_2$  kuhjumis-punkt ja peaks kuuluma hulka  $F_2$  (kinnine hulk!). See on aga vastuolus eeldusega.

Analoogiliselt

$$\inf \varphi(y, x) = \varphi(y, F_1) > 0.$$

$$x \in F_1$$

Konstrueerime nüüd sfäärid iga punkti  $x \in F_1$  ja  $y \in F_2$  jaoks

$$S(x, \frac{\varphi(x, F_2)}{2}) \quad \text{ja} \quad S(y, \frac{\varphi(y, F_1)}{2})$$

ja moodustame summad, mis on teoreem 4 põhjal lahtised hulgad:

<sup>7</sup> Hulka  $A$  nimetame  $B$  ülemhulgaks, kui  $B \subset A$ .

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} S(x, \frac{\rho(x, F_2)}{2}) \quad \text{ja} \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} S(y, \frac{\rho(y, F_1)}{2}).$$

Ilmselt kehtivad seosed  $F_1 \subset G_1$  ja  $F_2 \subset G_2$ . Näitame, et  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Oletame, et neil hulkaudel on ühine punkt  $z$ . Olgu  $z \in S(x, \frac{\rho(x, F_2)}{2})$  ja  $z \in S(y, \frac{\rho(y, F_1)}{2})$ . Kauguse  $\rho(x, y)$  ülemine tõke tuleb  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\rho(x, F_2)}{2} + \frac{\rho(y, F_1)}{2}$ . Oletades näiteks, et  $\rho(x, F_2) \geq \rho(y, F_1)$  saame  $\rho(x, y) < \rho(x, F_2) = \inf_{u \in F_2} \rho(x, u)$ . Saadud vastuolu  $\rho(x, F_2)$  definitsiooniga ütlebki, et  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , millega teoreem on tõestatud.

### § 9. Lahtised ja kinnised hulgad sirgel.

Lahtiste ja kinniste hulcade struktuur suvalises meetrilises ruumis võib olla üsnagi keeruline. Ruumis  $E_1$  avaldub see aga lihtsalt. Seamegi nende hulcade struktuuri selgitamise käesoleva paragrahvi eesmärgiks.

Vahenikku  $(a, b)$  nimetame lahtise hulga  $G \subset E_1$  struktuurivahemikuks, kui

- 1)  $(a, b) \subset G$
- 2)  $a \notin G$  ja  $b \notin G$ .

Teoreem 1. Lahtise hulga iga punkt asub üheselt määratavas struktuurivahemikus.

Tõestus. Võtame  $x \in G$ . On kaks võimalust: kas  $[x, +\infty) \subset G$  või  $[x, +\infty) \not\subset G$ . Esimesel juhul on punkti  $x$  sisaldava struktuurivahemiku ülemine otspunkt  $+\infty$ . Vaatleme üksikasjalikumalt teist juhtu. Moodustame hulga

$$F = [x, +\infty) \cap C(G).$$

See on kinnine hulk kui kahe kinnise hulga ühisosa. Hulk  $F$  on alt tõkestatud (arvuga  $x$ ), järelikult on tal alumine raja

$$\inf F = b.$$

Kuna  $F$  on kinnine, siis  $b \in F$ . Sellest järeldub, et  $b \in C(G)$  ja  $b \notin G$ . Kerge on näha, et  $x < b$ , kuna võrdus  $x = b$  ei saa kehtida  $x \in G$  ja  $b \notin G$  tõttu. Edasi, kuna  $[x, b)$  ükski punkt ei kuulu hulka  $F$ , aga  $[x, b) \subset [x, +\infty)$ , siis ei tohi  $[x, b)$  ükski punkt kuuluda hulka  $C(G)$ , millest järeldub, et  $[x, b) \subset G$ . Seega punkt  $b$  on  $x$ -ga määratud struktuurivahemiku ülemine otspunkt.

Analoogiliselt saab määrata struktuurivahemiku alumise otspunkti  $a$  ( $a < x$ ). Seega punktist  $x \in G$  lähtudes leidsime üheselt struktuurivahemiku  $(a, b)$ , milles see punkt asub.

Teoreem 2. Kui kaks struktuurivahemikku omavad ühise punkti, siis nad ühtivad.

Tõestus. Võtame  $x \in G$  ja oletame, et see punkt kuulub kahte struktuurivahemikku  $(a, b)$  ja  $(c, d)$ . Punktide  $a$  ja  $c$  puhul on 3 võimalust

$$1) a > c \quad 2) a < c \quad \text{ja} \quad 3) a = c.$$

Kui  $a > c$ , siis  $c < a < x$  ja punkt  $a$  on teise struktuurivahemiku sisepunkt, seega  $a \in G$ , mis on vastuolus struktuurivahemiku definitsiooniga. Analoogiliselt saame teisel juhul, et  $c \in G$ . Seega jääb ainukene võimalus, et  $a = c$ . Samal viisil saab näidata, et  $b = d$ , millega struktuurivahemikud ühtivad.

Teoreem 3. Lahtise hulga struktuurivahemikke on ülimalt loenduv hulk.

Tõestus. Märgime, et igas vahemikus leidub ratsionaalarvulisi punkte. Valime igast struktuurivahemikust mingi ratsionaalarvulise punkti ja seame iga struktuurivahemiku vastavusse selle väljavalitud punktiga. Kuna väljavalitud ratsionaalarvude hulk on ülimalt loenduv (s.t. kas lõplik

või loenduv), siis on ka struktuurivahemike hulk ülimalt loenduv.

Kokkuvõttes võib öelda järgmist: iga mittetühi lahtine hulk avaldub ülimalt loenduva hulga struktuurivahemike summana, kus struktuurivahemikud on üheselt määratavad ja mittelõikuvad:

$$G = \bigcup_i (a_i, b_i),$$

$$(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, \text{ kui } i \neq j.$$

Kuna kinnine hulk on lahtise hulga täiend, siis

$$F = (-\infty, +\infty) \setminus G = (-\infty, +\infty) \setminus \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Vaatleme, kuidas aga avaldub tõkestatud kinnine hulk. Tõkestatud hulgaks nimetame niisugust hulka, mida saab sulgeda lõpliku raadiusega sfääri. Ruumis  $E_1$  tähendab hulga tõkestatus seda, et hulk peab asuma lõpliku pikkusega vahemikus või lõigus. Sellisel korral

$$\sup F = b \quad \text{ja} \quad \inf F = a$$

on lõplikud suurused, mis kuuluvad hulka  $F$  (kinnine hulk!). Seega, iga tõkestatud kinnise hulga  $F$  jaoks leidub selline vähim lõik  $[a, b]$ , mis teda sisaldab. Vahemikud  $(-\infty, a)$  ja  $(b, +\infty)$  ei sisalda siis ühtegi  $F$  punkti. Seega kuuluvad vahemikud  $(-\infty, a)$  ja  $(b, +\infty)$  hulga  $C(F)$  struktuurivahemike  $(a_i, b_i)$  hulka ja hulka  $F$  saab esitada kujul

$$F = (-\infty, +\infty) \setminus \left( \bigcup_j (a_j, b_j) \cup (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \right) = [a, b] \setminus \bigcup_j (a_j, b_j).$$

Seega: tõkestatud mittetühi kinnine hulk avaldub teatava üheselt määratava vähima lõigu ja ülimalt loenduva hulga struktuurivahemike summa vahena, kus struktuurivahemikud on üheselt määratavad ja mittelõikuvad.

Vaatleme nüüd veel perfektse tõkestatud hulga struktuuri. Kuna perfektne hulk on kinnine, siis peab see olema

esitatav kujul

$$P = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Kuna  $P \subset P'$ , siis iga perfektse hulga punkt on ühtlasi ka kuhjumispunkt. Perfektses hulgas pole isoleeritud punkte, s.t. punkte, mis pole kuhjumispunktideks. Tõestame, et isoleeritud punkt võib tekkida siis ja ainult siis, kui kaks struktuurivahemikku omavad ühise otspunkti või ühel struktuurivahemikul on ühine otspunkt lõiguga  $[a, b]$ .

Et isoleeritud punkt nendel juhtudel tekib, on ilmne:



Joon. 12.

Tõestame tingimuse tarvilikkuse. Oletame, et punkt  $c$  on hulga  $F$  isoleeritud punkt. Näitame, et kui  $c$  ei ole lõigu  $[a, b]$  otspunktiks, peab ta olema kahe struktuurivahemiku ühine otspunkt. Kuna  $c$  pole hulga kuhjumispunkt, siis peab leiduma ümbrus, milles on ainult lõplik arv hulga  $F$  punkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ja  $c$ . Võtame raadiuse nii väikese, et saame ümbruse  $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ , milles pole ühtegi hulga  $F$  punkti peale  $c$ . Siis ei sisalda  $(c, \beta)$  ühtegi  $F$  punkti ja

$$(c, \beta) \subset \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Kuna  $(c, \beta)$  ei saa sisalduda kahes ega enamuses struktuurivahemikus, siis leidub  $(a_1, b_1)$ , nii et

$$(c, \beta) \subset (a_1, b_1). \quad (1)$$

Kui  $c < a_1$ , ei kehtiks seos (1); kui  $c > a_1$ , sisaldaks struktuurivahemik  $(a_1, b_1)$  punkti  $c$  ja siis ei saaks  $c$  olla  $F$  punkt. Ainuke võimalus on  $c = a_1$ .

Analoogiliselt saame, et leidub  $j \neq i$  nii, et

$$(\alpha, c) \subset (a_j, b_j),$$

kust järeldub  $c = b_j$ . Sellega on  $c$  struktuurivahemike

$(a_j, b_j)$  ja  $(a_1, b_1)$  ühine otspunkt.

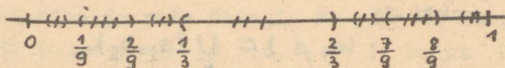
Kui  $c = a$  või  $c = b$ , siis on tõestus analoogiline eespool tooduga.

Kokkuvõttes: iga mittetühi tõkestatud perfektne hulk saadakse teatavast minimaalsest lõigust ülimalt loenduva hulga struktuurivahemike eraldamise teel, kus struktuurivahemikud on üheselt määratud, mittelõikuvad ja ei oma omavahel ega selle minimaalse lõiguga ühiseid otspunkte.

Vaatleme näitena Cantori perfektset hulka  $P_0$ .

Selle konstruktsioon on järgmine. Võetakse lõik  $[0, 1]$  ja lahutatakse sellest hulk  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , s.t. keskmine kolmandik. Esimesest ja kolmandast kolmandikust lahutame jälle keskmise kolmandiku, s.t. hulgad  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  ja  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  jne. Üldiselt lahutame järelejäänud lõikudest järgneval sammul keskmised kolmandikud. Sellise konstruktsiooni puhul isoleeritud punkte ei teki, kuna väljaeraldavatel hulkadel, mis on struktuurivahemikeks, ei ole ühiseid otspunkte omavahel ega ka lõiguga  $[0, 1]$ . Seega

$$P = [0, 1] \setminus [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup \dots]$$



Joon. 13.

Cantori perfektne hulk  $P_0$  on kontinuumi võimsusega hulk. Seda saame näidata järgmiselt: avaldame  $P_0$  elemendid kolmendsüsteemis

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots, \quad (\text{kus } a_k = 0, 1, 2). \quad (2)$$

Arvud  $\frac{1}{3}$  ja  $\frac{2}{3}$  avalduvad kolmendsüsteemis kahel viisil

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} 0,1000\dots \\ 0,0222\dots \end{cases} \quad \frac{2}{3} = \begin{cases} 0,2000\dots \\ 0,1222\dots \end{cases}$$

Vahemiku  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  punktide esituses peab aga esimesel kohal peale koma olema kindlasti number 1. Samal viisil võib veenduda, et vahemike  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  ja  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  punktide esituses peab teisel kohal olema number 1 jne. Nii võib öelda, et  $P_0$  punktide hulk on ekvivalentne kujul (2) antud esitiste kõikvõimalike hulgaga, kus esituses ei esine ühtegi numbrit 1.

Teiseks saame lõigul  $[0,1]$  asuvad reaalarvud esitada kahendsüsteemis

$$y = 0, b_1 b_2 \dots b_k \dots \quad (\text{kus } b_k = 0,1) \quad (3)$$

Esituste hulk on lõigul  $0,1$  reaalarvude hulgast suurem, kuna mõningaid reaalarve (nagu  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ) võib esitada kahel viisil. Kuna aga kahesel viisil esitatavate reaalarvude hulk on loenduv (nendele reaalarvudele vastavad esitused numbritega 0 resp. numbriga 1 perioodis), siis on esituste hulk ikka kontinuumi võimsusega.

Esituste (2) ( $a_k \neq 1$ ) ja (3) vahel on üks-ühese vastavuse konstrueerimine lihtne vastavate numbrikohtade järgi.  $a_k = 0$  seatakse vastavusse  $b_k = 0$  ja  $a_k = 2$  seatakse vastavusse  $b_k = 1$ .

### III peatükk.

## MÕÕDUTEORIA.

#### § 10. Hulga mõõdu mõiste.

Hulga mõõdu mõiste on lõigu pikkuse, tasandilise kujundi pindala ja ruumilise kujundi ruumala mõiste üldistuseks. Hulkade mõõduteooria tekkis ja arenes peamiselt sees integraali mõiste üldistamisega. Tänapäeval rakendatakse mõõduteooriat veel tõenäosusteoorias, matemaatilises statistikas, funktsionaalanalüüsis ja mujal. Erinevaid hulga mõõdu mõisteid on antud mitmete matemaatikute, nagu C. Jordani, E. Boreli, H. Lebesgue'i j.t. poolt.

Käesolevas kursuses käsitleme üksikasjalikult Lebesgue'i mõõduteooriat ruumis  $E_1$ . Enne seda anname aga lühikäsitlust Jordani mõõduteooriast ruumis  $E_1$ , mis aitab paremini mõista ka Lebesgue'i mõõduteooria ülesehitust.

Jordani mõõduteoorias vaadeldakse tõekestatud hulki. Tõekestatud hulga  $A$  korral saab alati leida vähima lõigu  $[a, b]$ , milles see hulk  $A$  asub. Jaotame lõigu  $[a, b]$   $n$  ( $n \geq 2$ ) võrdseks osaks, mida nimetame lõigu  $[a, b]$  esimest järku osalõikudeks. Jaotades esimest järku osalõigud omakorda  $n$  võrdseks osaks, saame teist järku osalõigud jne.

Vaatleme esimest järku osalõike. Fikseerime need osalõigud, mis asuvad tervikuna hulgas  $A$  ja leiame nende lõikude kogupikkuse. Tähistame selle  $l_1$  abil. Teiselt poolt fikseerime need osalõigud, milles leidub vähemalt üks hulga  $A$  punkt. Nende lõikude kogupikkuse tähistame  $L_1$  abil.

Analoogilise protseduuri teeme läbi teist, kolmandat jne. järku osalõikudega. Seega saame jada

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_k, \dots \quad (1)$$

ja

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_k, \dots, \quad (2)$$

kus jada (1) on monotoonselt kasvav, jada (2) monotoonselt kahanev ja kehtib võrratus  $0 < l_k \leq L_k$  iga  $k = 1, 2, \dots$  korral. Seega eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = l \quad \text{ja} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} L_k = L,$$

kusjuures

$$l \leq L.$$

Suurusi  $l$  ja  $L$  nimetame hulga  $A$  Jordani sise-mõõduks või vastavalt välismõõduks. Kui hulga  $A$  puhul kehtib võrdus

$$l = L,$$

siis titleme, et hulk  $A$  on mõttuv Jordani mõttes ja tema mõõt<sup>8</sup>.

$$\text{mes } A = l = L.$$

Kerge on veenduda, et iga lõik on mõttuv Jordani mõttes, kusjuures lõigu mõõt on võrdne lõigu pikkusega.

Esitame ilma tõesusteta Jordani mõõdu põhilised omadused.<sup>9</sup>

- 1° hulga mõõt on mittenegatiivne;
- 2° hulga  $A$  mõõt ei sõltu hulga  $A$  hõlmava alglõigu  $[a, b]$  ega arvu  $n$  valikust;
- 3° kui  $A \subset B$  ja mõlemad hulgad on mõttuvad, siis
 
$$\text{mes } A \leq \text{mes } B;$$
- 4° kui mõttuvad hulgad  $A$  ja  $B$  ei lõiku, siis
 
$$\text{mes } (A \cup B) = \text{mes } A + \text{mes } B;$$
- 5° kui hulgad  $A$  ja  $B$  on mõttuvad, siis on mõttuvad ka hulgad  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ .

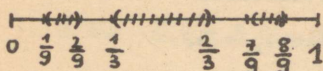
<sup>8</sup> Tähis "mes" on lühend prantsuskeelsest sõnast *measure*, mis tähendab mõõtu.

<sup>9</sup> И.П.Макаров, Теория функций действительного переменного, Москва, 1953 [14] ja В.Немыцкий, М.Службская, А.Черкасов, Курс математического анализа, т. II, 1957.

Vaatleme paari näidet hulcade Jordani mõõdu kohta.

Näide 1. Arvutame Cantori perfektse hulga  $P_0$  mõõdu. Võ-

tame siin  $n = 3$  ja arvestame suuruste  $L_k$  leidmisel neid osalõike, mille sisepunktiks on vähemalt üks  $P_0$  punkt. Siis saame järgmised jadad



Joon. 13a.

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad \dots, \quad l_k = 0, \quad \dots,$$

$$L_1 = \frac{2}{3}, \quad L_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad \dots, \quad L_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad \dots$$

Kuna hulga  $P_0$  sise- ja välismõõt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

on võrdsed, siis on  $P_0$  mõõttuv Jordani mõttes ja mes  $P_0 = 0$ .

Näide 2. Selgitame, kas hulk  $R_{[0,1]}$ , s.t. lõigul  $[0,1]$

asuvate ratsionaalarvude hulk, on mõõttuv Jordani mõttes. Võtame siin näiteks  $n = 2$ . Kerge on veenduda, et saame järgmised jadad

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad \dots, \quad l_k = 0, \quad \dots$$

ja

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 1, \quad \dots, \quad L_k = 1, \quad \dots$$

Kuna  $\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0$  ja  $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = 1$ , siis pole hulk  $R_{[0,1]}$  Jordani mõttes mõõttuv.

Asjaolu, et sellised lihtsad hulgad nagu  $R_{[0,1]}$  pole mõõttuvad Jordani mõttes, põhjustaski üldisemate mõõduteooriate loomise. Lebesgue'i poolt antud mõõduteoorias ongi üks selliseid üldisemaid mõõduteooriaid.

Lebesgue'i mõõduteooria ülesehitus on üldjoontes järgmine:

1) defineeritakse tõkestatud lahtise ja tõkestatud kinnise hulga m tt ning uuritakse nende hulkade m ttude omadusi;

2) mis tahes tõkestatud hulga  $A$  korral vaadeldakse  $A$  lahtisi  lemhulki ja defineeritakse  $A$  v lism tt:

$$\overline{\text{mes}} A = \inf \text{mes } G;$$

$$G \supset A$$

hulga  $A$  kinniste alamhulkade abil defineeritakse  $A$  sise-  
m tt:

$$\text{mes} A = \sup \text{mes } F.$$

$$F \subset A$$

Hulga  $A$  sise- ja v lism ttude vahel kehtib võrratus

$$\text{mes} A \leq \overline{\text{mes}} A.$$

Võrduse  $\text{mes} A = \overline{\text{mes}} A$  kehtimise korral öeldakse, et hulk  $A$  on mõttuv Lebesgue'i mõttes, kusjuures hulga  $A$  m tt defineeritakse kui sise- ja v lism ttude ühine v artus

$$\text{mes} A = \text{mes} A = \overline{\text{mes}} A.$$

Omadused  $1^{\circ}$ ,  $3^{\circ}$ ,  $4^{\circ}$  ja  $5^{\circ}$  kehtivad ka Lebesgue'i m ttude korral.

Peale Lebesgue'i m ttuteooriat vaatleme veel m ttuteooria abstraktse ülesehituse teid (§ 13).

### § 11. L a h t i s t e j a k i n n i s t e h u l k a d e m   t t .

Tõkestatud lahtise ja kinnise hulga Lebesgue'i m tt ruumis  $E_1$  defineeritakse nende struktuurivalemite

$$G = \bigcup_i (a_i, b_i)$$

ja

$$F = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i)$$

abil järgmiselt:

$$\text{mes } G = \sum_i \text{mes}(a_i, b_i), \quad (1)$$

$$\text{mes } P = \text{mes } [a, b] - \sum_i \text{mes}(a_i, b_i), \quad (2)$$

kus lõigu ja vahemiku mõõt defineeritakse kui nende pikkus:

$$\text{mes } [a, b] = \text{mes}(a, b) = b - a. \quad (3)$$

Definitsioonidest (1), (2) ja (3) järeldub, et lahtise ja kinnise hulga mõõt on mittenegatiivne. Lahtise hulga puhul on see ilmne, kinnise hulga puhul (oletades, et  $a_1 < a_{1+1}$ ) kasutame võrdust

$$(a_1 - a) + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) + \dots = b - a,$$

kus kõik sulgavaldised on mittenegatiivsed. Jättes ära paarituurvalised liikmed, saamegi

$$\sum_i \text{mes}(a_i, b_i) \leq \text{mes}[a, b], \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 1. (Lahtise hulga mõõdu monotoonsus)

Kui  $G_1 \subset G_2$ , siis  $\text{mes } G_1 \leq \text{mes } G_2$ .

Tõestus. Olgu  $G_1 = \bigcup_i (a_i^1, b_i^1) = \bigcup_i \delta_i^1$  ja  $G_2 = \bigcup_k (a_k^2, b_k^2) = \bigcup_k \delta_k^2$ , kus  $\delta_i^1$  ja  $\delta_k^2$  on hulkade  $G_1$  ja  $G_2$  struktuurivahemikud. Siis  $\delta_i^1$  peab kuuluma mingisse struktuurivahemikusse  $\delta_k^2$ , kuid vahemikusse  $\delta_k^2$  võib kuuluda mitu  $G_1$  struktuurivahemikku. Seega võime kirjutada

$$G_1 = \bigcup_i \delta_i^1 = \bigcup_k \bigcup_{\delta_i^1 \subset \delta_k^2} \delta_i^1$$

ja

$$\text{mes } G_1 = \sum_i \text{mes } \delta_i^1 = \sum_k \sum_{\delta_i^1 \subset \delta_k^2} \text{mes } \delta_i^1. \quad (4)$$

Kuna

$$\sum_{\delta_i^1 \subset \delta_k^2} \text{mes } \delta_i^1 \leq \text{mes } \delta_k^2, \quad (5)$$

siis saamegi võrdustest (4) ja (5)

$$\text{mes } G_1 = \sum_K \sum_{\sigma_i^1 \subset \sigma_k^2} \text{mes } \sigma_i^1 \leq \sum_K \text{mes } \sigma_k^2 = \text{mes } G_2, \text{ m.o.t.t.}$$

Teoreem 2. (Lahtise hulga mõõdu täisaditiivsus).

Kui  $G = \bigcup_K G_k$ ,  $G_i \cap G_k = \emptyset$  ( $i \neq k$ ), siis

$$\text{mes } G = \sum_K \text{mes } G_k.$$

Tõestus. Olgu  $G_k = \bigcup_i \sigma_i^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), kus  $\sigma_i^k$  on hulga  $G_k$  struktuurivahemik. Näitame, et  $\sigma_i^k$  on hulga  $G$  struktuurivahemik. Kuna vahekõrd  $\sigma_i^k \subset G$  on ilmne, tuleb näidata, et  $\sigma_i^k$  otspunktid ei kuulu hulka  $G$ . Oletame vastuväiteliselt, et näiteks  $\sigma_i^k = (\alpha, \beta)$  otspunkt  $\alpha$  kuulub hulka  $G$ . Siis peab  $\alpha$  asuma mingis hulgas  $G_\ell$  ( $\ell \neq k$ ). Kuna  $G_\ell$  on lahtine hulk, peab leiduma  $\alpha$  teatav ümbrus, nii et

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G_\ell.$$

Kuid siis on hulkadel  $G_k$  ja  $G_\ell$  ühiseid punkte, mis on vastuolus eeldusega. Seega  $\alpha \notin G$ . Analoogiliselt näidatakse, et  $\beta \notin G$ , millest tuleneb, et  $\sigma_i^k$  ( $i, k = 1, 2, \dots$ ) on  $G$  struktuurivahemik. Võrdusest

$$G = \bigcup_{i,k} \sigma_i^k$$

saame, et

$$\text{mes } G = \sum_K \sum_i \text{mes } \sigma_i^k = \sum_K \text{mes } G_k, \text{ m. o. t. t.}$$

Märgime, et kui

$$G = \bigcup_K G_k,$$

kus kitsendus  $G_i \cap G_k = \emptyset$  ( $i \neq k$ ) üldiselt ei kehti, siis

$$\text{mes } G \leq \sum_K \text{mes } G_k. \quad (6)$$

Seda näeme juba lihtsast näitest:  $G_1 = (1,3)$ ,  $G_2 = (2,4)$ ,  $G = G_1 \cup G_2 = (1,4)$ . Mõeldud on mes  $G_1 = 2$ , mes  $G_2 = 2$ , mes  $G = 3$ , kusjuures näeme, et

$$3 < 2 + 2 =$$

Võrratuse põhjuseks on asjaolu, et hulkaadel  $G_1$  ja  $G_2$  on ühine piirkond  $(2,3)$ , mille mõõt on 1. Sama olukord põhjustab võrratuse märgi ka seose 6 puhul.

Teoreem 3. Kui kinnine tõkestatud hulk  $F$  sisaldab vahemikus  $\Delta$ , siis

$$\text{mes } F = \text{mes } \Delta - \text{mes } C_{\Delta}(F)$$

( $F$  suhteline täiend  $\Delta$  suhtes defineeritakse võrdusega  $C_{\Delta}(F) = \Delta \setminus F$ ).

Tõestus. Hulga  $F$  struktuurivalem on

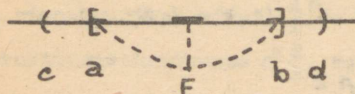
$$F = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i)$$

ja mõõt

$$\text{mes } F = \text{mes } [a, b] - \sum_i \text{mes } (a_i, b_i).$$

Kuna  $[a, b] \subset \Delta = (c, d)$ , siis  $C_{\Delta}(F) =$

$$= (\bigcup_i (a_i, b_i)) \cup (c, a) \cup (b, d). \quad (7)$$



Joon. 14.

Kehtivad võrdused

$$\text{mes } \Delta = d - c \quad \text{ja}$$

$$\text{mes } C_{\Delta}(F) = \sum_i \text{mes } (a_i, b_i) - a + c - d + b.$$

Lahutades leiame, et

$$\begin{aligned} \text{mes } \Delta - \text{mes } C_{\Delta}(F) &= (b - a) - \sum_i \text{mes } (a_i, b_i) = \\ &= \text{mes } F, \quad \text{m. o. t. t.} \end{aligned}$$

Teoreem 4. (Kinnise hulga mõõdu monotoonsus). Kui  $F_1 \subset F_2$ , siis  $\text{mes } F_1 \leq \text{mes } F_2$ .

Tõestus: Võtame vahemiku  $\Delta$ , nii et  $F_2 \subset \Delta$ . Hulgad  $C_{\Delta}(F_1)$  ja  $C_{\Delta}(F_2)$  on lahtised (vt. võrdust (7)), kus-

juures

$$C_{\Delta}(F_1) \supset C_{\Delta}(F_2).$$

Teoreemi 1 põhjal

$$\text{mes } C_{\Delta}(F_1) \gg \text{mes } C_{\Delta}(F_2). \quad (8)$$

Lahutades võrratuse (8) liikmed suurusest  $\text{mes } \Delta$ , saame teoreem 3 põhjal

$$\text{mes } F_1 \leq \text{mes } F_2.$$

Teoreem 5. Kui  $F \subset G$ , siis  $\text{mes } F \leq \text{mes } G$ .

Tõestus. Olgu  $\Delta$  vahemik, mis sisaldab hulka  $G$ . Kergeti näeme, et  $\Delta = G \cup C_{\Delta}(F)$ , kus võrduse paremal pool esinevad lahtised hulgad ühiste punktidega (hulga  $G \setminus F$  punktid on liidetavatel ühised). Siis

$$\text{mes } \Delta \leq \text{mes } G + \text{mes } C_{\Delta}(F).$$

Viies viimase liikme vasakule poole, saame

$$\text{mes } \Delta - \text{mes } C_{\Delta}(F) \leq \text{mes } G,$$

mis teoreemi 3 põhjal annabki  $\text{mes } F \leq \text{mes } G$ , m. o. t. t.

Teoreem 6. Tõkestatud lahtise hulga  $G$  mõõt on tema kinniste alamhulkade  $F$  mõõtude ülemine raja, s.t.

$$\sup \text{mes } F = \text{mes } G.$$

$$F \subset G$$

Tõestus. Kui  $F \subset G$ , siis  $\text{mes } F \leq \text{mes } G$ . Tuleb näidata, et iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $F \subset G$ , nii et

$$\text{mes } F > \text{mes } G - \varepsilon.$$

Valime suvalise  $\varepsilon > 0$ . Olgu hulgal  $G$  loenduv hulk struktuurivahemikke  $(a_i, b_i)$ . Siis

$$\text{mes } G = \sum_i \text{mes}(a_i, b_i).$$

Võtame nüüd  $n$  nii suure, et

$$\sum_{i=1}^n \text{mes}(a_i, b_i) > \text{mes } G - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Leiame iga  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) puhul lõigu  $[\alpha_i, \beta_i] \subset (a_i, b_i)$ , nii et

$$\text{mes} [\alpha_1, \beta_1] > \text{mes}(a_1, b_1) - \frac{\varepsilon}{2n}. \quad (10)$$

Konstrueerime kinnise hulga

$$F = \bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i] \quad (\text{oletame, et } \alpha_1 < \alpha_{i+1}).$$

Ilmselt kehtib seos  $F \subset G$ . Kuna  $F = [\alpha_1, \beta_n] \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} (\beta_i, \alpha_{i+1})$ ,

siis

$$\text{mes } F = (\beta_n - \alpha_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \beta_i) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$$

Kasutades võrratusi (10) ja (9), saame jätkates

$$\text{mes } F > \sum_{i=1}^n \text{mes}(a_i, b_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \text{mes } G - \varepsilon, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 7. Tõkestatud kinnise hulga  $F$  mõõt on kõi-  
kide tema lahtiste tõkestatud ülemhulkade  $G$  mõõtude alumi-  
ne raja, s.t.

$$\text{mes } F = \inf \text{mes } G.$$

$$G \supset F$$

Tõestus. Kui  $G \supset F$ , siis  $\text{mes } G \geq \text{mes } F$ . Tuleb näida-  
ta, et iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $G \supset F$ , nii et

$$\text{mes } G < \text{mes } F + \varepsilon.$$

Võtame lahtise vahemiku  $\Delta \supset F$ . Hulk  $C_{\Delta}(F)$  on lah-  
tine. Võtame  $\varepsilon > 0$  ja leiame kinnise hulga  $\mathfrak{F}$ , nii et

$$\mathfrak{F} \subset C_{\Delta}(F) \quad (11)$$

ja

$$\text{mes } \mathfrak{F} > \text{mes } C_{\Delta}(F) - \varepsilon. \quad (12)$$

Teoreemi 6 põhjal on see võimalik. Seosest (11) jä-  
reldub, et  $\mathfrak{F} \subset \Delta$ . Võtame  $C_{\Delta}(\mathfrak{F}) = G$ . Seosest (11) saame,  
st

$$G = C_{\Delta}(\mathfrak{F}) \supset F.$$

Hindame  $G$  mõõtu, kasutades teoreemi 3 ja võrra-  
tust (12). Saame

$$\text{mes } G = \text{mes } \Delta - \text{mes } \mathfrak{F} < \text{mes } \Delta - \text{mes } C_{\Delta}(F) + \varepsilon$$

ehk

mes  $G < \text{mes } F + \varepsilon$ , m. o. t. t.

Teoreem 8. Kui  $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ , kus  $F_i \cap F_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ),  
siis  $\text{mes } F = \sum_{k=1}^n \text{mes } F_k$ .

Tõestus. Anname tõestuse juhul  $n = 2$ , mida saab üldistada matemaatilise induktsiooni abil mis tahes lõplikule arvule  $n$ .

1. Võtame lahtised tõkestatud hulgad  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ), nii et  $F_1 \subset G_1$  ja

$$\text{mes } G_1 < \text{mes } F_1 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (i = 1, 2)$$

Defineerime  $G = G_1 \cup G_2$ . Siis  $F = F_1 \cup F_2 \subset G$

ja

$$\text{mes } F \leq \text{mes } G \leq \text{mes } G_1 + \text{mes } G_2 <$$

$$< \text{mes } F_1 + \text{mes } F_2 + \varepsilon.$$

Teostades piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , saame

$$\text{mes } F \leq \text{mes } F_1 + \text{mes } F_2.$$

2. Võtame lahtised hulgad  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ), nii et  $F_1 \subset B_1$  ja  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Eralduvusteoreemi põhjal on see võimalik. Edasi võtame  $G \supset F$ , nii et

$$\text{mes } G < \text{mes } F + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Teoreemi 7 põhjal on see võimalik. Seosest  $F_1 \subset B_1 \cap G$  järeldeb võrratus  $\text{mes } F_1 \leq \text{mes } (B_1 \cap G)$ . Hulgad  $B_1 \cap G$  ja  $B_2 \cap G$  on lahtised, tõkestatud ja mittelõikuvad hulgad (kuna juba  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ). Seetõttu võime kasutada teoreemi 2.

Seega saame

$$\begin{aligned} \text{mes } F_1 + \text{mes } F_2 &\leq \text{mes } (B_1 \cap G) + \text{mes } (B_2 \cap G) = \\ &= \text{mes} [(B_1 \cap G) \cup (B_2 \cap G)] = \text{mes} [G \cap (B_1 \cup B_2)] \leq \\ &\leq \text{mes } G < \text{mes } F + \varepsilon. \end{aligned}$$

Teostades piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , saame

$$\text{mes } F_1 + \text{mes } F_2 \leq \text{mes } F.$$

Kahte võrratust kõrvutades saame

$$\text{mes } F = \text{mes } F_1 + \text{mes } F_2, \text{ m. o. t. t.}$$

§ 12. Mis tahes tõkestatud  
hulkade mõõt.

Mis tahes tõkestatud hulga  $A$  korral defineeritakse hulga  $A$  välismõõt

$$\overline{\text{mes}} A = \inf_{G \supset A} \text{mes } G$$

ja sisemõõt

$$\underline{\text{mes}} A = \sup_{F \subset A} \text{mes } F$$

Nendest definitsioonidest nähtub vahetult, et igal tõkestatud hulgal on mittenegatiivne sise- ja välismõõt.

Mis tahes tõkestatud hulga  $A$  sise- ja välismõõdu vahel kehtib seos

$$\underline{\text{mes}} A \leq \overline{\text{mes}} A.$$

Tõepoolest, mis tahes tõkestatud  $F$  ja  $G$  korral, kus  $F \subset A \subset G$ , saame

$$\text{mes } F \leq \text{mes } G.$$

Võttes vasakult poolt ülemise ja paremalt poolt alumise raja, peab võrratus jääma kehtima. Seega

$$\sup_{F \subset A} \text{mes } F \leq \inf_{G \supset A} \text{mes } G$$

ehk

$$\underline{\text{mes}} A \leq \overline{\text{mes}} A, \text{ m. o. t. t.}$$

Kui hulga  $A$  välis- ja sisemõõt on võrdsed:

$$\overline{\text{mes}} A = \underline{\text{mes}} A,$$

siis nimetame hulka  $A$  mõõtuvaks, kusjuures hulga  $A$  mõõ-

duks loeme sise- ja välismõõdu ühise väärtuse, s.t.

$$\overline{\text{mes } A} = \overline{\text{mes } A} = \underline{\text{mes } A}.$$

Tuleb märkida, et äsjaesitatud üldine mõõdu definitsioon on kooskõlas paragrahvis 11 antud lahtise ja kinnise hulga mõõdu definitsiooniga. See tähendab, et kõik tõkestatud lahtised ja kinnised hulgad on mõõduvad ka paragrahvis 12 esitatud definitsiooni kohaselt ja nende mõõdud, mis on defineeritud paragrahvides 11 ja 12, on võrdsed.

Näitame seda lahtiste hulkade korral.

Välismõõdu definitsioonist saame

$$\overline{\text{mes } G} = \inf (\text{mes } \Gamma) \quad \text{\$11}$$
$$\Gamma \supset G$$

Kuna hulkade  $\Gamma$  klassi kuulub ka  $G$  ise ja

$$(\text{mes } G) \quad \text{\$11} \leq (\text{mes } \Gamma) \quad \text{\$11}, \quad \text{kui } G \subset \Gamma,$$

siis

$$\overline{\text{mes } G} = (\text{mes } G) \quad \text{\$11}.$$

Sisemõõdu definitsioonist saame

$$\underline{\text{mes } G} = \sup (\text{mes } F) \quad \text{\$11}$$
$$F \subset G$$

Teoreem 6 (§11) põhjal kehtib võrdus

$$\sup (\text{mes } F) \quad \text{\$11} = (\text{mes } G) \quad \text{\$11},$$
$$F \subset G$$

mis annab

$$\underline{\text{mes } G} = (\text{mes } G) \quad \text{\$11}.$$

Seega

$$\overline{\text{mes } G} = \underline{\text{mes } G} = (\text{mes } G) \quad \text{\$11}.$$

Kinnise hulga puhul on tõestus analoogiline, kusjuures kasutame teoreemi 7 (§11).

Teoreem 1. (Sisemõõdu, välismõõdu ja mõõdu monotoon-

suse omadus). Kui  $A$  ja  $B$  on tõkestatud hulgad, kus  $A \subset B$ , siis

$$\underline{\text{mes}} A \leq \underline{\text{mes}} B \quad \text{ja} \quad \overline{\text{mes}} A \leq \overline{\text{mes}} B.$$

Kui peale selle hulgad  $A$  ja  $B$  on mõttuvad, siis kehtib võrratus

$$\text{mes } A \leq \text{mes } B.$$

Tõestus. Tõestame esimese väite ainult sisemõõtude jaoks, kuna välimõõtude korral on tõestus analoogiline. Sisemõõdu definitsiooni kohaselt

$$\underline{\text{mes}} A = \sup \text{mes } F,$$

$$F \subset A$$

$$\underline{\text{mes}} B = \sup \text{mes } \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{F} \subset B$$

Kuna  $A \subset B$ , siis on  $A$  iga kinnine osahulk ka  $B$  kinniseks osahulgaks, ehk

$$\{F\} \subset \{\mathcal{F}\}$$

Nende hulkade mõõtude puhul kehtib sama seos:

$$\{\text{mes } F\} \subset \{\text{mes } \mathcal{F}\}.$$

Ülemiste rajade puhul peab seega kehtima võrratus

$$\begin{array}{ccc} \sup \text{mes } F & \leq & \sup \text{mes } \mathcal{F} \\ F \subset A & & \mathcal{F} \subset B \end{array}$$

ehk

$$\underline{\text{mes}} A \leq \underline{\text{mes}} B.$$

Kui nüüd  $A$  ja  $B$  on peale selle mõttuvad, siis

$$\underline{\text{mes}} A = \overline{\text{mes}} A = \text{mes } A \quad \text{ja} \quad \underline{\text{mes}} B = \overline{\text{mes}} B = \text{mes } B.$$

Asendades võrratuses

$$\underline{\text{mes}} A \leq \underline{\text{mes}} B$$

sisemõõdud mõõtudega, saamegi

$$\text{mes } A \leq \text{mes } B.$$

Teoreem 2. (Mõõdu aditiivsuse omadus). Kui  $A = \bigcup_k A_k$ ,

kus hulki  $A_k$  on ülimalt loenduv hulk, kusjuures nad on mõõ-  
 tavad ja mittelõikuvad ning hulk  $A$  on tõkestatud, siis on  
 ka hulk  $A$  mõõtuva ning kehtib võrdus

$$\text{mes } A = \sum_k \text{mes } A_k.$$

Tõestus. Teoreemi tõestamisel kasutame võrratusei

$$1) \overline{\text{mes}} A \leq \sum_k \overline{\text{mes}} A_k,$$

$$2) \underline{\text{mes}} A \geq \sum_k \underline{\text{mes}} A_k$$

(juhul 2) tuleb eeldada, et

$$A_i \cap A_k = \emptyset, \text{ kui } i \neq k).$$

Võrratuse 1) tõestus. Rea  $\sum_k \overline{\text{mes}} A$  hajuvuse kor-  
 ral on võrratuse 1) kehtivus ilmne. Oletame rea  $\sum_k \overline{\text{mes}} A_k$   
 koonduvust. Fikseerime suvalise  $\varepsilon > 0$  ja valime  $G_k \supset A_k$   
 ( $k = 1, 2, \dots$ ), nii et

$$\text{mes } G_k < \overline{\text{mes}} A_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Võtame vahemiku  $\Delta \supset A$ . Siis  $A \subset \Delta \cap (\bigcup_k G_k)$ , kusjuures  
 $\Delta \cap (\bigcup_k G_k)$  on tõkestatud ja lahtine hulk. Vahemiku  $\Delta$  ka-  
 sutuselevõtt oli tingitud sellest, et saada tõkestatud hulka,  
 kuna  $\bigcup_k G_k$  võinuks olla ka tõkestamata. Toetudes välismõõdu  
 definitsioonile, saame

$$\begin{aligned} \overline{\text{mes}} A &\leq \text{mes} [\Delta \cap (\bigcup_k G_k)] = \text{mes} [\bigcup_k (\Delta \cap G_k)] \leq \\ &\leq \sum_k \text{mes} (\Delta \cap G_k) \leq \sum_k \text{mes } G_k \leq \sum_k \overline{\text{mes}} A_k + \varepsilon. \end{aligned}$$

Teostades piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , saamegi võrratuse 1).

Võrratuse 2) tõestus. Vaatleme  $n$  esimest hulka  
 $A_1, \dots, A_n$ . Mis tahes  $\varepsilon > 0$  puhul eksisteerivad kinnised  
 hulgad  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), nii et

$$F_k \subset A_k$$

ja

$$\text{mes } F_k > \underline{\text{mes}} A_k - \frac{\varepsilon}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Kuna hulgad  $A_k$  ei lõiku, ei lõiku ka hulgad  $F_k$ .

Hulk  $\bigcup_{k=1}^n F_k$  on kinnine. Kasutades sisemõõdu definitsiooni ja teoreemi 8 (§11), saame

$$\underline{\text{mes}} A \geq \underline{\text{mes}} \left[ \bigcup_{k=1}^n F_k \right] = \sum_{k=1}^n \text{mes } F_k > \sum_{k=1}^n \underline{\text{mes}} A_k - \varepsilon.$$

Teeostades piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , saame

$$\underline{\text{mes}} A \geq \sum_{k=1}^n \underline{\text{mes}} A_k.$$

Kuna  $n$  oli suvaline, kehtib saadud võrratus iga  $n$  korral. Seega on rida  $\sum_K \underline{\text{mes}} A_k$  koonduv ja kehtib võrratus 2).

Märgime, et võrratus 2) ei tarvitse kehtida, kui hulkael  $A_k$  on ühiseid punkte. Mainitud olukorra selgitamiseks sobib näide teoreemi 2 (§11) juures.

Kui mõned hulgad  $A_k$  on mõõtuvad ja mittelõikuvad ning  $A$  on tükkestatud, siis kehtivad võrratused 1) ja 2) ning võrkus  $\overline{\text{mes}} A_k = \underline{\text{mes}} A_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Seega saame

$$\overline{\text{mes}} A \leq \sum_K \overline{\text{mes}} A_k = \sum_K \underline{\text{mes}} A_k \leq \underline{\text{mes}} A.$$

Arvestades, et alati kehtib

$$\overline{\text{mes}} A \geq \underline{\text{mes}} A,$$

järeldubki nendest võrdus

$$\overline{\text{mes}} A = \underline{\text{mes}} A,$$

kusjuures  $\underline{\text{mes}} A = \overline{\text{mes}} A = \underline{\text{mes}} A = \sum_K \underline{\text{mes}} A_k$ .

Teoreem 3. Kui  $A$  on tükkestatud hulk ja  $\Delta$  vahemik, mis sisaldab hulka  $A$ , siis kehtib

$$\overline{\text{mes}} A + \underline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) = \text{mes } \Delta. \quad (1)$$

Kui  $A$  on mõõtuv, siis on mõõtuv ka  $C(A)$  ja ümberpöördult, kusjuures kehtib võrdus

$$\text{mes } A + \text{mes } \Delta(A) = \text{mes } \Delta. \quad (2)$$

Tõestus. 1) Võtame suvalise  $\varepsilon > 0$  ja leiame kinnise hulga  $F$  nii et

$$F \subset C_{\Delta}(A) \quad (3)$$

ning

$$\text{mes } F > \underline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) - \varepsilon. \quad (4)$$

Neid tingimusi saab rahuldada sisemõõdu definitsiooni põhjal.

Tähistame  $G = C_{\Delta}(F)$ . Seose (3) mõlemast poolest täiendi võtmisel saame  $G = C_{\Delta}(F) \supset A$ . Viimasest seosest, võrratusest (4) ja teoreemist 3 (§11) saame

$\overline{\text{mes}} A \leq \text{mes } G = \text{mes } \Delta - \text{mes } F < \text{mes } \Delta - \text{mes } C_{\Delta}(A) + \varepsilon$ ,  
kust  $\varepsilon \rightarrow 0$  korral järeldub

$$\overline{\text{mes}} A + \underline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) \leq \text{mes } \Delta. \quad (5)$$

2) Vastupidise võrratuse näitamiseks võtame jälle suvalise  $\varepsilon > 0$  ja lahtise hulga  $G_0$ , nii et

$$A \subset G_0$$

ning

$$\text{mes } G_0 < \overline{\text{mes}} A + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu  $\Delta = (c, d)$ . Konstrueerime vahemiku  $(a, b) \subset \Delta$ , nii et  $a - c < \frac{\varepsilon}{3}$  ja  $d - b < \frac{\varepsilon}{3}$ . Siis võtame

$$G = (\Delta \cap G_0) \cup (c, a) \cup (b, d).$$

$G$  on lahtine hulk,  $A \subset G$  ja

$$\text{mes } G \leq \text{mes } G_0 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \overline{\text{mes}} A + \varepsilon.$$

Tähistame  $F = C_{\Delta}(G)$ . See on kinnine hulk, kuna

$F = [a, b] \cap C(G)$  (kontrollida!). Seose  $A \subset G$  mõlemast poolest täiendit võttes, saame  $C_{\Delta}(A) \supset C_{\Delta}(G) = F$ . Hinnaates  $C_{\Delta}(A)$  sisemõõtu, leiame, et

$\underline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) \geq \text{mes } F = \text{mes } \Delta - \text{mes } G > \text{mes } \Delta - \overline{\text{mes}} A - \varepsilon$ .  
Teostades piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$ , saame

$$\underline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) + \overline{\text{mes}} A \geq \text{mes } \Delta. \quad (6)$$

Kahe vastupidise võrratusega (5) ja (6) ongi võrdus (1) tõestatud.

Kuna hulcade  $A$  ja  $C(A)$  osad ülaltoodud tõestuskäigus on vahetatavad, siis kehtib ka võrdus

$$\overline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) + \underline{\text{mes}} A = \text{mes } \Delta. \quad (7)$$

Kaht analoogilist võrdust (1) ja (7) liikmeti lahutades saame

$$\overline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) - \underline{\text{mes}} C_{\Delta}(A) = \overline{\text{mes}} A - \underline{\text{mes}} A.$$

Kui  $A$  on mõõtv, on võrduse parem ja seega ka vasak pool võrdne nulliga. Sellest järeldub, et ka  $C(A)$  on mõõtv. Samuti järeldub  $C(A)$  mõõtuvusest  $A$  mõõtvus. Silmas pidades hulcade  $A$  ja  $C(A)$  mõõtuvust, järeldub võrdus (2) vahetult võrdusest (1).

Teoreem 4. Lõpliku arvu mõõtuvate hulcade summa on mõõtv hulk.

Tõestus. Olgu  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ , kus hulgad  $A_k$  on mõõtuvad. Võtame suvalise  $\varepsilon > 0$  ja konstrueerime iga  $k$  kinnise hulga  $F_k$  ja lahtise hulga  $G_k$ , nii et

$$F_k \subset A_k \subset G_k,$$

$$\text{mes } G_k - \text{mes } F_k < \frac{\varepsilon}{n}. \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Moodustame hulgad  $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$  ja  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ , siis

$$F \subset A \subset G.$$

Hulk  $G \setminus F = G \cap C(F)$  on tõkestatud ja lahtine, seega mõõtv. Kuna

$$G = F \cup (G \setminus F), \quad \text{kus } F \cap (G \setminus F) = \emptyset$$

siis teoreemi 2 põhjal

$$\text{mes } G = \text{mes } F + \text{mes}(G \setminus F),$$

kust

$$\text{mes}(G \setminus F) = \text{mes } G - \text{mes } F.$$

Analoogiliselt saame, et

$$\text{mes}(G_k \setminus F_k) = \text{mes } G_k - \text{mes } F_k.$$

Kehtib seos

$$G \setminus F \subset \bigcup_{k=1}^n (G_k \setminus F_k).$$

Siis

$$\text{mes}(G \setminus F) \leq \sum_{k=1}^n \text{mes}(G_k \setminus F_k) = \sum_{k=1}^n (\text{mes } G_k - \text{mes } F_k) < \varepsilon.$$

Seosest

$$\text{mes } F \leq \underline{\text{mes}} A \leq \overline{\text{mes}} A \leq \text{mes } G$$

saame

$$\overline{\text{mes}} A - \underline{\text{mes}} A \leq \text{mes } G - \text{mes } F < \varepsilon,$$

kust piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$  teostades jõuamegi võrduseni

$$\overline{\text{mes}} A = \underline{\text{mes}} A, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 5. Lõpliku arvu mõõtuvate hulcade ühisosa on mõõtuv hulk.

Tõestus. Olgu  $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$ , kus hulgad  $A_k$  on mõõtuvad. Olgu  $\Delta$  vahemik, mis sisaldab kõik hulgad  $A_k$ . Hulgad  $C_{\Delta}(A_k)$  on teoreemi 3 põhjal mõõtuvad. Võrdusest

$$\bigcup_{k=1}^n C_{\Delta}(A_k) = C_{\Delta}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = C_{\Delta}(A)$$

saame teoreemi 4 põhjal, et  $\bigcup_{k=1}^n C_{\Delta}(A_k)$  on mõõtuv. Kuid siis on mõõtuv  $C_{\Delta}(A)$  ja samuti  $A$ , m.o.t.t.

Teoreem 6. Kahe mõõtva hulga vahe  $A = A_1 \setminus A_2$  on mõõtuv hulk. Kui  $A_2 \subset A_1$ , siis  $\text{mes } A = \text{mes } A_1 - \text{mes } A_2$ .

Tõestus. Olgu  $A = A_1 \setminus A_2$ , kus  $A_1$  ja  $A_2$  on mõõtuvad hulgad. Siis  $A = A_1 \cap C_{\Delta}(A_2)$ , kus  $\Delta$  on vahemik, mis sisaldab  $A_1$  ja  $A_2$ . Täiendi ja ühisosa mõõtuvuse tõttu on  $A$  mõõtuv.

Kui  $A_2 \subset A_1$ , siis  $A_1 = A \cup A_2$ , kusjuures  $A \cap A_2 = \emptyset$ .

Siis teoreemi 2 põhjal

$$\text{mes } A_1 = \text{mes } A + \text{mes } A_2$$

ehk

$$\text{mes } A = \text{mes } (A_1 \setminus A_2) = \text{mes } A_1 - \text{mes } A_2.$$

Teoreem 7. Kui tškestatud hulk  $A$  on lõpliku vöi loenduva hulga mõõtuvate hulkade summa, siis  $A$  on ka mõõtuv hulk.

Tõestus. Olgu

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

kus hulgad  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) on mõõtuvad. Defineerime hulgad  $E_k$ :

$$E_1 = A_1, E_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, E_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \dots \cup A_{k-1}).$$

On kergesti tšestatatav, et

$$A = \bigcup_k E_k, \quad (8)$$

kusjuures hulkadel  $E_k$  pole ühiseid punkte (kontrollida!). Hulgad  $E_k$  on mõõtuvad lõpliku arvu mõõtuvate hulkade summa mõõtuvuse ja mõõtuvate hulkade vahe mõõtuvuse tõttu.

Võrdusest (8) saame teoreem 2 põhjal järeldada, et  $A$  on mõõtuv.

Teoreem 8. Loenduva hulga mõõtuvate hulkade ühisosa on mõõtuv hulk.

Tõestus. Olgu

$$A = \bigcap_k A_k,$$

kus kõik hulgad  $A_k$  on mõõtuvad. Kuna  $A \subset A_k$ , siis on hulk  $A$  tškestatud. Valime vahemiku  $\Delta$ , mis sisaldab hulka  $A$ . Tähistame

$$E_k = \Delta \cap A_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Hulgad  $E_k$  on mõõtuvad teoreemi 5 põhjal. Saame kirjutada

$$A = \Delta \cap A = \Delta \cap \left( \bigcap_k A_k \right) = \bigcap_k (\Delta \cap A_k) = \bigcap_k E_k.$$

ja

$$C_{\Delta}(A) = C_{\Delta} \left( \bigcap_k E_k \right) = \bigcup_k (C_{\Delta}(E_k)).$$

$E_k$  mõõtuvusest järeldub hulkade  $C_{\Delta}(E_k)$  ja nende loenduva summa mõõtuvus, seega  $C_{\Delta}(A)$  mõõtuvus, milles järeldub teoreemi 3 põhjal omakorda  $A$  mõõtuvus.

Tõestame veel paar tulemust mõistuvate hulcade kohta, mida edaspidi kasutame.

Lemma 1. Kui hulga  $A$  mõõt on null, siis hulga  $A$  iga osahulk on mõistuv ja selle mõõt on null.

Tõestus. Olgu  $B \subset A$ . Kuna alati kehtib

$$0 \leq \text{mes } B \leq \overline{\text{mes}} B,$$

siis lemma tõestuseks piisab, kui näidata, et  $\overline{\text{mes}} B \leq 0$ .

Seosest  $B \subset A$  järeldub, et

$$\overline{\text{mes}} B \leq \overline{\text{mes}} A.$$

$A$  mõistuvuse korral

$$\overline{\text{mes}} A = \underline{\text{mes}} A = \text{mes } A = 0,$$

millest  $\overline{\text{mes}} B \leq 0$ .

Lemma 2. Iga tüketatud loendav hulk on mõistuv ja tema mõõt on null.

Tõestus. Olgu

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

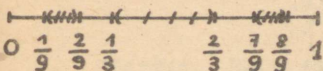
Tähistame  $A_k = \{x_k\}$ . Siis  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , kusjuures hulkadel  $A_k$  pole ühiseid punkte. Kuna üht punkti saame ümbritseda kui tahes väikese vahemikuga, siis  $\text{mes } A_k = 0$ , seega ka  $\text{mes } A_k = 0$ . Seosest

$$\text{mes } A = \sum_k \text{mes } A_k$$

saamegi, et  $\text{mes } A = 0$ .

Toome veel mõned näited.

Näide 1. Arvutame Cantori perfektse hulga  $P_0$  mõõdu Lebesgue'i mõttes.



$$P_0 = [0, 1] \setminus \left( \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \cup \left( \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left( \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \cup \dots \right)$$

Joon. 15.

Arvutame väljaeraldavate vahemike pikkuste summa

$$\text{mes } G_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

mes  $P_0 = \text{mes } [0,1] - \text{mes } G_0 = 1 - 1 = 0$ .

Näide 2. Lõigul  $[0,1]$  asuvate irratsionaalarvude hulga mõõt on 1, kuna täiendhulga  $R_{[0,1]}$  mõõt kui loenduva hulga mõõt on 0. Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga näide vt. [2] lk. 89-91.

### § 13. Abstraktsesest mõõduteooria ülesehitusest.

Mingis ruumis  $X$  on võimalik mõõduteooriat käsitleda ka abstraktselt, analoogiliselt sellele, nagu näiteks võib käsitleda analüüsi küsimusi mis tahes meetrilises ruumis.

Moodustame ruumi  $X$  osahulkade klassi  $K$ , mis rahuldagu järgmisi tingimusi:

1° kui  $A, B \in K$ , siis  $A \cup B \in K$ ;

2° kui  $A, B \in K$ , siis  $A \setminus B \in K$ ;

Teiste sõnadega, klass  $K$  peab olema kinnine hulkade summa ja vahe suhtes.

Eeldustest (aksioomidest) 1° ja 2° lähtudes saab näidata, et

1.  $\emptyset \in K$ .

Võttes  $A \in K$ , saame, et  $A \setminus A = \emptyset \in K$ .

2. Kui  $A, B \in K$ , siis  $A \Delta B \in K$ .

Tulemus nähtub sellest, et

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

3. Kui  $A, B \in K$ , siis  $A \cap B \in K$ .

Tulemus nähtub sellest, et

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B).$$

4. Kui  $A_i \in K$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), siis

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in K \quad \text{ja} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i \in K.$$

Tulemused järelduvad vastavalt eeldusest 1° ja omadusest

3) matemaatilise induktsiooni teel.

Funktsiooni  $\int^m$  nimetatakse mõõduks, kui see seab

klassi  $K$  igale hulgale  $A$  vastavusse mittenegatiivse reaalarvu  $\mu(A)$ , kusjuures on täidetud järgmised tingimused:

$$3^{\circ} \mu(\emptyset) = 0,$$

4<sup>o</sup> kui  $A_1 \in K$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) ja

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K, \text{ siis}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Nagu kerge veenduda, on äsjatoodud mõõdudefinitatsioon Lebesgue'i definitiooni üldistus.

Selle üldise mõõdu definitiooni korral võib tõesstada rida tulemusi.

1. Mõõdu monotoonsus, Kui  $A \subset B$  ja  $A, B \in K$ , siis  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . Tähistades  $B \setminus A = C$ , saame, et  $B = A \cup C$  ja  $A \cap C = \emptyset$ . Siis omadusest 3<sup>o</sup> järeldub

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(C).$$

Kuna  $\mu(C) \geq 0$ , siis

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

2. Eelmisest omadusest järeldub, et  $A \subset B$ ,  $A, B \in K$  korral

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

3. Kui  $A_1, A_2, A_3, \dots$  kuuluvad klassi  $K$ , kusjuures

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

ja summa  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  kuulub klassi  $K$ , siis kehtib seos

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Tõestus. Hulga  $A$  saab esitada kujul

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_k \setminus A_{k-1}) \cup \dots,$$

kus liidetavail  $(A_k \setminus A_{k-1})$  pole ühiseid punkte. Arvestades nende kuuluvust klassi  $K$ , saame

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) = \\
&= \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [\mu(A_{k+1}) - \mu(A_k)] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [\mu(A_{k+1}) - \mu(A_k)] \right\} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n), \text{ m. o. t. t.}
\end{aligned}$$

4. Kui  $A_1, A_2, A_3, \dots$  kuuluvad klassi  $K$ , kusjuures

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

ja  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  kuulub klassi  $K$ , siis kehtib seos

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Tõestus. Võtame täiendid  $A_1$  suhtes:  $C_{A_1}(A_k)$

$= C(A_k)$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Need kuuluvad klassi  $K$ . Täiendite vahel kehtib sisalduvusvahekerd

$$C(A_1) \subset C(A_2) \subset C(A_3) \subset \dots$$

Võrduse  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  mõlemast poolest täiendi võtmisel saame

$$C(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C(A_k).$$

Kasutades omadust 3)

$$\mu(C(A)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C(A_n)),$$

$$\mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$$

ehk

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A_1) - \mu(A_n)],$$

kust saame

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Tulemused 3. ja 4. kehtivad muidugi ka Lebesgue'i mõõdu-teoorias.

#### IV peatükk.

### MÕÕTUVAD FUNKTSIOONID.

#### § 14. Mõõtuva funktsiooni mõiste.

Kui igale elemendile  $x$  mingist hulgast  $A$  on seatud vastavusse mingi element  $y$ , siis ütleme, et hulgal  $A$  on defineeritud funktsioon, mida tähistame

$$y = f(x).$$

Funktsiooni väärtused  $y$  moodustavad hulga  $B$ , mida nimetame funktsiooni väärtuste hulgaks.

Funktsiooni mõiste ei nõua hulkade  $A$  ja  $B$  konkretiseerimist. Nii vaadeldakse näiteks funktsionaalanalüüsi kursuses funktsioone, kus  $A$  ja  $B$  on hulgad mis tahes lineaarses normeeritud ruumis.

Käesolevas kursuses käsitletakse ainult reaalmutuaja funktsioone, s.t. funktsioone, kus hulgad  $A$  ja  $B$  on reaalarvude hulgad. Reaalmutuaja funktsioonide käsitlemisel on otstarbekohane reaalarvude hulka täiendada kahe päratu arvuga  $-\infty$  ja  $+\infty$ , kusjuures need arvud on seotud mis tahes lõpliku reaalarvuga  $a$  järgmiselt:

$$-\infty < a < +\infty.$$

Nende päratute arvude ning päratute ja lõplike arvude vahel defineeritakse tehted järgmiselt:

$$+\infty + a = +\infty, \quad +\infty + (+\infty) = +\infty, \quad +\infty - (-\infty) = +\infty,$$

$$-\infty + a = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad -\infty - (+\infty) = -\infty,$$

$$+\infty \cdot a = a(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{kui } a > 0, \\ -\infty, & \text{kui } a < 0; \end{cases}$$

$$-\infty \cdot a = a(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{kui } a > 0, \\ +\infty, & \text{kui } a < 0; \end{cases}$$

$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{a}{+\infty} = 0$$

ja

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

Kirjutised

$$+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty),$$

$$+\infty + (-\infty), \quad -\infty + (+\infty),$$

$$\frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{ja} \quad \frac{a}{0}$$

jäävad defineerimata.

Tehete defineerimisel päratute arvude ning päratute ja lõplike arvude vahel on silmas peetud vastavaid tulemusi kindla määrgiga lõpmatute piirväärtuste kohta.

Käesolevas peatükis uurime lähemalt mõõtuvaid funktsioone.

Enne, kui anda mõõtuva funktsiooni definitsiooni, peame leppima kokku mõningates tähistustes.

Kui funktsioon  $f(x)$  on defineeritud hulgal  $A$ , siis kirjutisega

$$A(f > a)$$

tähistatakse nende punktide  $x \in A$  hulka, kus  $f(x) > a$ .

Analoogiliselt mõistame kirjutisi

$$A(f \geq a), A(f = a), A(f \leq a), A(f < a), A(a < f < b) \text{ jne.}$$

Funktsiooni  $f(x)$ , mis on defineeritud hulgal  $A$ , nime-tame mõõtuvaks sellel hulgal, kui

1° hulk  $A$  on mõõtuv,

2° hulk  $A(f > a)$  on mõõtuv iga lõpliku  $a$  korral.

Teeme veel mõningad märkused seoses tingimusega 2°.

Nimelt kehtivad lemmad 1 ja 2.

Lemma 1. Kui  $f(x)$  on mõõtuv funktsioon hulgal  $A$ , siis on hulgad  $A(f \geq a)$ ,  $A(f = a)$ ,  $A(f \leq a)$  ja  $A(f < a)$  mõõtuvad iga lõpliku  $a$  korral.

Tõestus. Kehtib võrdus

$$A(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(f > a - \frac{1}{n}),$$

mida saab kergesti tõestada kahepoolse sisalduvuse abil (kontrollida!). Võrdusest järeldub, et  $A(f \geq a)$  on m stuv iga lõpliku  $a$  korral.

Teiste hulcade m stuvus järeldub võrdustest

$$A(f = a) = A(f \geq a) \setminus A(f > a),$$

$$A(f \leq a) = A \setminus A(f > a),$$

$$A(f < a) = A \setminus A(f \geq a).$$

Lemma 2. Kui  $A$  m stuvuse korral kas  $A(f \geq a)$ ,  $A(f < a)$  või  $A(f \leq a)$  on m stuv iga lõpliku  $a$  korral, siis on  $f(x)$  m stuv hulgal  $A$ .

Tõestus. Kehtivad võrdused

$$A(f > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f \geq a + \frac{1}{n}),$$

$$A(f \geq a) = A \setminus A(f < a),$$

$$A(f > a) = A \setminus A(f \leq a),$$

millest nähtubki väita tõesus.

Lemmade 1 ja 2 põhjal võime asendada tingimuse 2<sup>o</sup> m stuva funktsiooni definitioonis nõudega kas hulga  $A(f \geq a)$ ,  $A(f < a)$  või  $A(f \leq a)$  m stuvuse kohta iga lõpliku  $a$  korral.

Näide 1. Defineerime lõigul  $[0,1]$  -  $A$  järgmise funktsiooni  $y = D(x)$ :

$$y = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne.} \end{cases}$$

Funktsiooni  $y = D(x)$  nimetatakse Dirichlet' funktsiooniks. Näitame, et see on m stuv funktsioon.

- 1) hulk  $A = [0,1]$  on m stuv (mes  $[0,1] = 1$ );
- 2)  $A(D > a)$  m stuvuse selgitamiseks piisab antud juhul  $a$  v artuste  $a = 1$ ,  $a = 0$  ja  $a = -1$  vastlemisest.

$A(D > 1) = \ominus$ , s.t. mõttuv hulk;

$A(D > 0) = R_{[0,1]}$ , s.t. loenduv, seega mõttuv hulk;

$A(D > -1) = [0,1]$ , s.t. mõttuv hulk.

Näide 2. Kinnisel hulgal  $F$  pidev funktsioon  $f(x)$  on mõttuv funktsioon.

Funktsiooni pidevus punktis defineeritakse järgmiselt: funktsioon  $f(x)$  on pidev punktis  $x_0$ , kui

1)  $f(x_0) \neq \pm \infty$ ,

2) piirväärtusest  $x_n \rightarrow x_0$ , kus  $x_n \in A$  ( $A$  on  $f(x)$  määramispiirkond) järeljub  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Kui  $x_0$  on  $A$  isoleeritud punkt, loetakse tingimus 2) täidetuks.

Antud juhul on funktsiooni määramispiirkond  $F$  kinnine hulk. Seega on mõttuva funktsiooni tingimus 1° täidetud. Tingimuses 2° võime asendada  $F(f > a)$  mõttuvuse  $F(f \geq a)$  mõttuvusega iga lõpliku  $a$  puhul. Hulga  $F(f \geq a)$  mõttuvuseks näitame, et  $F(f \geq a)$  on kinnine, s.t. sisaldab kõik oma kuhjumispunktid. Olgu  $x_0$  hulga  $F(f \geq a)$  kuhjumispunkt. Siis leidub jada  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in F(f \geq a)$ , nii et  $x_n \rightarrow x_0$ . Seega  $f(x_n) \geq a$ , millest pidevuse tõttu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \geq a.$$

Seega

$$x_0 \in F(f \geq a), \text{ m. o. t. t.}$$

## § 15. Mõttuvate funktsioonide omadused.

Selle paragrahvi eesmärgiks on näidata, et mitmesugused tehted mõttuvate funktsioonidega annavad tulemuseks jälle mõttuva funktsiooni.

Kõigepealt toome mõned abimõisted, mida kasutame ka

edaspidi.

Kui mingi omadus  $S$  kehtib hulga  $A$  igas punktis, välja arvatud osahulgal  $B \subset A$  punktid, kusjuures  $\text{mes } B = \emptyset$ , siis ütleme, et omadus  $S$  kehtib peaaegu kõikjal hulgal  $A$ .

Nii on näiteks Dirichlet' funktsioon võrdne nulliga peaaegu kõikjal lõigul  $[0,1]$ .

Kui kaks funktsiooni  $f(x)$  ja  $g(x)$  on defineeritud ühel ja samal hulgal  $A$  ja nad on võrdsed peaaegu kõikjal sellel hulgal, siis ütleme, et funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  on ekvivalentsed. Funktsioonide ekvivalentsi tähistame

$$f(x) \sim g(x).$$

Funktsiooni nimetame lõplikuks, kui

$$f(x) \neq \pm \infty \quad (x \in A)$$

ja tõkestatuks, kui

$$m \leq f(x) \leq M, \quad (x \in A)$$

kus  $m$  ja  $M$  on lõplikud reaalarvud.

Teoreem 1. Iga funktsioon, mis on defineeritud hulgal mõõduga null, on mõõtuv funktsioon.

Tõestus. Olgu  $f(x)$  defineeritud hulgal  $A$  ja  $\text{mes } A = 0$ . Tuleb näidata, et  $A(f > a)$  on mõõtuv iga lõpliku  $a$  korral. Kuna  $A(f > a) \subset A$ , siis lemma 1 (§12) põhjal ka  $\text{mes } A(f > a) = 0$ , m. o. t. t.

Teoreem 2. Kui  $f(x)$  on mõõtuv funktsioon hulgal  $A$ ,  $g(x) \sim f(x)$  hulgal  $A$ , siis  $g(x)$  on mõõtuv hulgal  $A$ .

Tõestus. Tuleb näidata, et  $A(g > a)$  on mõõtuv hulk iga lõpliku  $a$  korral. Tähistame

$$B = A(f = g), \quad C = A(f \neq g).$$

Siis  $A = B \cup C$ , kus  $B \cap C = \emptyset$  ja kus  $C = \emptyset$ . Kuna  $B = A \setminus C$  ja  $A$  ning  $C$  on mõõtuvad, siis on ka  $B$  mõõtuv hulk.

Kuna  $f(x)$  oli mõõtuv hulgal  $A$ , siis on ta mõõtuv ka selle mõõtuval osahulgal  $B$ , seet hulk

$$B(f > a) = A(f > a) \setminus C$$

on mõõtuv iga lõpliku  $a$  korral. Kehtib võrdus

$A(g > a) = B(g > a) \cup C(g > a)$ ,  
 kus võrduse  $B(g > a) = B(f > a)$  tõttu saame

$$A(g > a) = B(f > a) \cup C(g > a). \quad (1)$$

Kuna  $B(f > a)$  on eespool öeldu põhjal mõistetav iga lõpliku  $a$  korral ja mes  $C(g > a) = 0$ , siis on ka summa (1) mõistetav iga lõpliku  $a$  korral.

Teoreem 3. Kui  $f(x)$  on mõistetav funktsioon hulgal  $A$ , siis on seda ka  $f(x) + c$ .

Tõestus. Tuleb näidata, et  $A(f + c > a)$  on mõistetav iga lõpliku  $a$  korral. Kuid

$$A(f + c > a) = A(f > a - c).$$

Kuna hulgad  $A(f > a)$  on mõistetavad iga lõpliku  $a$  korral, siis on seda ka hulgad  $A(f > a - c)$ , m. o. t. t.

Lemma 1. Kui hulgal  $A$  on defineeritud kaks mõistetavat funktsiooni  $f(x)$  ja  $g(x)$ , siis on hulk  $A(f > g)$  mõistetav.

Tõestus. Järjestame kõik ratsionaalarvud jadana

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

Kehtib võrdus

$$A(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A(f > r_k) \cap A(g < r_k)), \quad (2)$$

mida on lihtne tõestada tavalisel viisil. Kuna hulgad  $A(f > r_k)$  ja  $A(g > r_k)$  on mõistetavad iga  $k$  korral, siis on võrduse (2) paremal pool esitatud hulk mõistetav. Seega on mõistetav ka  $A(f > g)$ , m. o. t. t.

Teoreem 4. Kui  $f(x)$  on mõistetav funktsioon hulgal  $A$ , siis on seda ka  $kf(x)$ , kus  $k$  on mis tahes konstant.

Tõestus. Kui  $k = 0$ , on väide ilmne, sest  $kf(x) = 0$  ja konstant on mõistetav funktsioon. Kui  $k > 0$ , siis järeldub  $kf(x)$  mõistetavus võrdusest

$$A(kf > a) = A(f > \frac{a}{k}),$$

kui  $k < 0$ , siis võrdusest

$$A(kf > a) = A(f < \frac{a}{k}),$$

kuna paremal pool võrdusmärki kirjutatud hulgad peavad  $f(x)$

mõttuvuse korral olema iga  $a$  korral mõttuvad.

Teoreem 5. Kui  $f(x)$  on hulgal  $A$  mõttuv funktsioon, siis on mõttuvad ka funktsioonid  $|f(x)|$ ,  $f^2(x)$  ja  $\frac{1}{f(x)}$ , kusjuures viimasel juhul eeldame, et  $f(x) \neq 0$  ( $x \in A$ ).

Tõestus.

1. Funktsiooni  $|f(x)|$  mõttuvus järeldub võrdusest

$$A(|f| > a) = \begin{cases} A, & \text{kui } a < 0, \\ A(f > a) \cup A(f < -a), & \text{kui } a \geq 0. \end{cases}$$

2. Funktsiooni  $f^2(x)$  mõttuvus järeldub võrdusest

$$A(f^2 > a) = \begin{cases} A, & \text{kui } a < 0, \\ A(f > \sqrt{a}) \cup A(f < -\sqrt{a}), & \text{kui } a \geq 0. \end{cases}$$

3. Funktsiooni  $\frac{1}{f(x)}$  mõttuvus järeldub võrdusest

$$A\left(\frac{1}{f} > a\right) = \begin{cases} A(f > 0), & \text{kui } a = 0, \\ A(f > 0) \cap A\left(f < \frac{1}{a}\right), & \text{kui } a > 0, \\ A(f > 0) \cup A\left(f < \frac{1}{a}\right), & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

Teoreem 6. Kui  $f(x)$  ja  $g(x)$  on lõplikud ja mõttuvad funktsioonid hulgal  $A$ , siis on mõttuvad ka funktsioonid  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  ja  $g(x) \neq 0$  korral ka  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

Tõestus.

1. Funktsiooni  $f(x) - g(x)$  mõttuvus järeldub võrdusest

$$A(f - g > a) = A(f > g + a),$$

kusjuures tuleb rakendada teoreemi 3 ja lemmat 1.

2. Funktsiooni  $f(x) + g(x)$  mõttuvus järeldub võrdusest

$$f(x) + g(x) = f(x) - [-g(x)] ,$$

teoreemist 4 ja funktsioonide vahe mõtlevusest.

3. Funktsiooni  $f(x) \cdot g(x)$  mõtlevus järgeldub võrdusest

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4} \left\{ (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \right\} ,$$

funktsiooni ruudu, funktsioonide summa ja vahe mõtlevusest ja teoreemist 4.

4. Funktsiooni  $\frac{f(x)}{g(x)}$  mõtlevus järgeldub võrdusest

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

ja teoreemist 5.

Teoreem 7. Olgu hulgal  $A$  defineeritud mõtlevad funktsioonid

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Kui iga  $x \in A$  puhul eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

siis on piirfunktsioon  $f(x)$  mõtlev.

Tõestus. Näitame, et kehtib võrdus

$$A(f > a) = \bigcup_{m, n=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A(f_k > a + \frac{1}{n}). \quad (3)$$

Võtame  $x \in A(f > a)$ . Siis  $f(x) > a$  ja leidub  $n$ , nii et  $f(x) > a + \frac{1}{n}$ . Kuna  $f_k(x) \rightarrow f(x)$ , siis leidub  $m$ , nii et iga  $k \geq m$  korral kehtib võrratus  $f_k(x) > a + \frac{1}{n}$ . Seega

$$x \in \bigcup_{m, n=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A(f_k > a + \frac{1}{n}).$$

Võtame  $x \in \bigcup_{m, n=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A(f_k > a + \frac{1}{n})$ . Siis leiduvad  $m$  ja

$n$ , nii et iga  $k \geq m$  korral kehtib  $f_k(x) > a + \frac{1}{n}$ . Teostades piirprotsessi  $k \rightarrow \infty$ , saame  $f(x) \geq a + \frac{1}{n}$ . Siit järgeldub  $f(x) > a$ , ehk  $x \in A(f > a)$ .

Võrdusest (3) järeldub, et  $A(f > a)$  on iga  $a$  puhul mõõtvu hulka, millega teoreem on tõestatud.

Kehtib isegi üldisem teoreem.

Teoreem 8. Olgu hulgal  $A$  defineeritud mõõtvu funktsioonid  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  ja mingi funktsioon  $\mathfrak{F}(x)$ . Kui võrdus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \mathfrak{F}(x) \quad (4)$$

kehtib peaaegu kõikjal hulgal  $A$ , siis funktsioon  $\mathfrak{F}(x)$  on mõõtvu hulgal  $A$ .

Tõestus. Tähistame nende punktide  $x \in A$  hulka, kus kehtib seos (4),  $B$  abil ja  $A \setminus B = C$ . Eelduse põhjal meil  $C = \emptyset$ . Funktsioonid  $f_k(x)$  on mõõtvu ka hulgal  $B$ , kuna  $B$  on mõõtvu ( $B = A \setminus C$ ). Hulga

$$B(f_k > a) = A(f_k > a) \setminus C$$

on mõõtvu iga  $k$  ja  $a$  korral. Teoreemi 7 põhjal on  $\mathfrak{F}(x)$  mõõtvu hulgal  $B$ , teoreemi 1 põhjal ka hulgal  $C$ . Võrdusest

$$A(\mathfrak{F} > a) = B(\mathfrak{F} > a) \cup C(\mathfrak{F} > a)$$

järeldub, et  $\mathfrak{F}(x)$  on mõõtvu ka hulgal  $A$ .

### § 16. Koonduvus mõõdu järgi.

Kui  $f(x)$  ja  $g(x)$  on defineeritud hulgal  $A$ , siis kirjutis

$$A(|f - g| \geq \sigma), \quad (\text{kus } \sigma \geq 0)$$

tähistab nende punktide  $x \in A$  hulka, mille puhul kehtib võrratus

$$|f(x) - g(x)| \geq \sigma,$$

kusjuures hulka  $A(|f - g| \geq \sigma)$  loeme ka punktid  $x$ , kus  $f(x) = g(x) = +\infty$ . Selle kokkuleppe puhul

$$A = A(|f - g| \geq \sigma) \cup A(|f - g| < \sigma).$$

Teoreem 1. (Lebesgue'i teoreem). Olgu antud hulgal  $A$  mõõtvu ja peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide jada

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

mis koendub peasegu kõikjal hulgal  $A$  peasegu kõikjal lõp-  
likuks funktsiooniks  $f(x)$ . Siis mis tahes  $\epsilon > 0$  korral  
kehtib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{mes } A(|f_n - f| \geq \epsilon)] = 0. \quad (1)$$

Tõestus. Märgime kõigepealt, et teoreemi 8 (§15)  
põhjal on  $f(x)$  mõistuv ja mõistuvad on ka hulgad

$$A_n(\epsilon) = A(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

iga  $n$  ja  $\epsilon > 0$  puhul. Seega omab kirjutis mes  $A_n(\epsilon)$   
mõtet.

Tähistame

$$B = A(|f| = +\infty),$$

$$B_n = A(|f_n| = +\infty),$$

$$C = A(f_n \nrightarrow f).$$

Eelduse põhjal on mes  $B = 0$ , mes  $B_n = 0$ , mes  $C = 0$ .

Edasi tähistame  $Q = B \cup C \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$ .

Hulk  $Q$  on mõistuv kui mõistuvate hulkade loenduv sum-  
ma ja mes  $Q = 0$  (teoreemi 2 §12 põhjal).

Tähistame

$$R_n(\epsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k(\epsilon)$$

ja

$$M(\epsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\epsilon).$$

Märgime, et hulgad  $R_n(\epsilon)$  ja  $M(\epsilon)$  on mõistuvad. Kuna

$$R_1(\epsilon) \supset R_2(\epsilon) \supset \dots \supset R_n(\epsilon) \supset \dots,$$

siis § 13 punkt 4) põhjal saame

$$\text{mes } M(\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } R_n(\epsilon). \quad (2)$$

Näitame nüüd, et  $M(\epsilon) \subset Q$ . Selleks näitame, et kui  
 $x \notin Q$ , siis  $x \notin M(\epsilon)$ . Tõepoolest, kui  $x \notin Q$ , siis  
kehtib

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x),$$

kuusjuures suurused  $f_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ja  $f(x)$  on lõplikud. Seega leidub  $n$ , nii et iga  $k \geq n$  korral kehtib

$$|f_k(x) - f(x)| < \epsilon,$$

ehk teisiti  $x \notin A_k(\epsilon)$  iga  $k \geq n$  korral. Siis kehtivad seosed

$$x \notin R_n(\epsilon)$$

ja

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\epsilon) = M(\epsilon).$$

Seega  $M(\epsilon) \subset Q$ , milles järeldub

$$\text{mes } M(\epsilon) = 0$$

ehk seose (2) põhjal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } R_n(\epsilon) = 0. \quad (3)$$

Kuna  $A_n(\epsilon) \subset R_n(\epsilon)$ , siis  $\text{mes } A_n(\epsilon) \leq \text{mes } R_n(\epsilon)$  ja võrdusest (3) järeldub (1), m. o. t. t.

Teoreemi tõestuse käigus saadud tulemus (3) on teoreemi väitest tugevam väide. Seda kasutame teoreemi 4 (Jegorovi teoreemi) tõestamisel.

Defineerime nüüd mõõdu järgi koonduvuse.

Olgu mõõtuval hulgal  $A$  defineeritud mõõtuvad ja peaaegu kõikjal lõplikud funktsioonid

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Peaaegu kõikjal lõplikku ja mõõtuvat funktsiooni  $f(x)$  nimetame selle jada piirfunktsiooniks mõõdu järgi koonduvuse mõttes, kui mis tahes  $\epsilon > 0$  korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } A(|f_n - f| \geq \epsilon) = 0.$$

Mõõdu järgi koonduvust tähistame:

$$f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

Mõõdu järgi koonduvuse mõistet kasutades saab Lebesgue'i teoreemi formuleerida nii: Kui mõõtuvate ja peaaegu

kõikjal lõplike funktsioonide jada koondub peaaegu kõikjal peaaegu kõikjal lõplikuks funktsiooniks  $f(x)$ , siis koondub ta ka mõõdu järgi samaks funktsiooniks.

Nende mõistete vahekorra täielikuks määramiseks toome järgmise näite.

Näide. Defineerime lõigul  $[0,1]$  - A funktsioonid

$$f_{mn}(x), \quad (m = 1, 2, \dots; n \leq m)$$

$$f_{mn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \left[ \frac{n-1}{m}, \frac{n}{m} \right], \\ 0, & \text{kui } x \notin \left[ \frac{n-1}{m}, \frac{n}{m} \right], \end{cases}$$

ja järjestame nad jadana

$$f_{11}(x), f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{m1}(x), f_{m2}(x), \dots, f_{mm}(x), \\ f_{m+1,1}(x), \dots \quad (4)$$

Jada (4) koondub mõõdu järgi nulliks, sest mis tahes  $\sigma > 0$  korral

$$\text{mes } A (|f_{mn}(x)| \geq \sigma) = \text{mes } \left[ \frac{n-1}{m}, \frac{n}{m} \right] = \frac{1}{m}$$

ja  $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ , kui  $m \rightarrow \infty$ .

Jada (4) ei koondu aga nulliks mitte üheski lõigu  $[0,1]$  punktis. Võttes mingi  $x \in [0,1]$  leidub iga  $m$  korral  $n$ , nii et

$$x \in \left[ \frac{n-1}{m}, \frac{n}{m} \right]$$

ja seega  $f_{mn}(x) = 1$ . Järelikult jada (4) ei saa koonduda nulliks. Muide, vaadeldav jada ei koondu üldse üheski lõigu  $[0,1]$  punktis. Seega on koonduvus mõõdu järgi üldisem mõiste kui koonduvus peaaegu kõikjal (ja kõikjal).

Toome nüüd mõned mõõdu järgi koonduvuse omadused.

Teoreem 2. Kui jada  $f_n(x)$  koondub mõõdu järgi funktsiooniks  $f(x)$  ja  $g(x) \sim f(x)$ , siis koondub see jada mõõdu järgi ka funktsiooniks  $g(x)$ .

Tõestus. Mis tahes  $\sigma > 0$  korral kehtib

$$A(|f_n - g| \geq \epsilon) \subset A(f \neq g) \cup A(|f_n - f| \geq \epsilon),$$

kust, arvestades võrdust  $\text{mes } A(f \neq g) = 0$ , saame

$$\text{mes } A(|f_n - g| \geq \epsilon) \leq \text{mes } A(|f_n - f| \geq \epsilon).$$

Kuna võrratuse parem pool läheneb  $n \rightarrow \infty$  korral nullile, siis peab nullile lähenema ka vasak pool, millega teoreem on tõestatud.

Teoreem 3. Kui funktsioonide jada  $f_n(x)$  koondub mõõdu järgi funktsioonideks  $f(x)$  ja  $g(x)$ , siis  $f(x) \sim g(x)$ .

Tõestus. Suvalise  $\epsilon > 0$  korral kehtib seos

$$A(|f - g| \geq \epsilon) \subset A(|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}) \cup A(|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}),$$

sest punkt, mis ei kuulu parempoolsesse hulka, ei saa kuuluda ka vasakpoolsesse. Kuna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } A(|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0$$

ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes } A(|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0,$$

siis

$$\text{mes } A(|f - g| \geq \epsilon) = 0.$$

Kasutades seost

$$A(f \neq g) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A(|f - g| \geq \frac{1}{n})$$

ja arvestades, et  $\text{mes } A(|f - g| \geq \frac{1}{n}) = 0$  iga  $n$  korral, saame

$$\text{mes } A(f \neq g) = 0,$$

s.t. et  $f(x) \sim g(x)$ .

Mõõdu järgi koonduvuse ja peaaegu kõikjal koonduvuse vahetõelise iseloomustab järgmine teoreem.

Teoreem 4. (F. Riesz) Olgu hulgal  $A$  antud funktsioonide jada  $\{f_n(x)\}$ , mis koondub mõõdu järgi funktsiooniks  $f(x)$ . Siis leidub osajada

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots),$$

mis koondub funktsiooniks  $f(x)$  peaaegu kõikjal hulgal  $A$ .

Tõestus. Võtame positiivsete liikmetega jadaid  $\{\epsilon_n\}$  ja  $\{\eta_n\}$ , sellised, et  $\epsilon_n > \epsilon_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$  ja  $\sum_n \eta_n < +\infty$ . Näitame indeksite jada

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

konstrueerimisel tugineme sellele, et mõõdu järgi koonduvuse korral kehtib

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes } A(|f_{n_k} - f| \geq \epsilon_k) = 0.$$

Seega saame iga  $\epsilon_k$  ja  $\eta_k$  korral leida  $n_k$ , et

$$\text{mes } A(|f_{n_k} - f| \geq \epsilon_k) < \eta_k \text{ ja } n_k > n_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots)$$

Näitame nüüd, et peaaegu kõikjal hulgal  $A$  kehtib

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x). \quad (5)$$

Tähistame

$$R_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(|f_{n_k} - f| \geq \epsilon_k) \text{ ja } Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Kuna

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots,$$

siis §13 punkt 4) põhjal saame

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{mes } R_i = \text{mes } Q.$$

Kehtib võrratus

$$\text{mes } R_1 < \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes } A(|f_{n_k} - f| \geq \epsilon_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k,$$

millest järeldub, et  $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{mes } R_i = 0$ . Seega  $\text{mes } Q = 0$ .

Näitame, et võrdus (5) kehtib hulgal  $A \setminus Q$ . Võtame suvalise  $x_0 \in A \setminus Q$ . Siis  $x_0 \notin R_{i_0}$ . Seega, kui  $k \geq i_0$ ,

siis

$$x_0 \notin A(|f_{n_k} - f| \geq \epsilon_k)$$

ja järelikult

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \epsilon_k, \text{ kui } k \geq i_0.$$

Kuna  $\delta_k \rightarrow 0$ , siis tõepoolest  $f_{n_k}(x_0) \rightarrow f(x_0)$ .

Teoreem 5. (Jegorovi teoreem). Olgu antud hulgal  $A$  mõistuvate ja peaaegu kõikjal lõplike funktsioonide jada

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

mis koondub peaaegu kõikjal hulgal  $A$  peaaegu kõikjal lõplikuks funktsiooniks  $f(x)$ :

$$\lim f_n(x) = f(x).$$

Siis leidub iga  $\delta > 0$  korral hulk  $A_\delta \subset A$ , nii et

1)  $\text{mes } A_\delta > \text{mes } A - \delta$ ,

2) hulgal  $A_\delta$  koondub jada  $f_n(x)$  funktsiooniks  $f(x)$  ühtlaselt.

Tõestus. 1)  $A_\delta$  konstrueerimine. Pikseerime suvalise  $\delta > 0$ . Võtame positiivsete liikmetega jadasid  $\{\delta_n\}$  ja  $\{\eta_n\}$  sellised, et  $\delta_n > \delta_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  ja  $\sum_n \eta_n < +\infty$ .

Nüüd kasutame Lebesgue'i teoreemi tõestamisel saadud tulemust (3). Selle põhjal võime leida iga  $i$  korral  $n_i$ , nii et

$$\text{mes } R_{n_i}(\delta_i) < \eta_i.$$

Leiame nüüd indeksi  $i_0$ , nii et

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta$$

( $\delta$  on arv, mis esineb teoreemi sõnastuses). Seejärel tähistame

$$E = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} R_{n_i}(\delta_i),$$

kusjuures  $\text{mes } E \leq \sum_{i=i_0}^{\infty} \text{mes } R_{n_i}(\delta_i) < \sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta$ .

Nüüd tähistame

$$A_\delta = A \setminus E,$$

kus

$$\text{mes } A_{\delta} > \text{mes } A - \delta.$$

2) Näitame, et hulgal  $A_{\delta}$  koondub jada  $\{f_n(x)\}$  funktsiooniks  $f(x)$  ühtlaselt. Võtame  $\varepsilon > 0$  ja leiame indeksi  $m$ , nii et

$$m \geq i_0 \quad \text{ja} \quad \delta_m < \varepsilon$$

Võttes mingi punkti  $x \in A_{\delta}$ , saame  $x \notin E$  ehk  $x \in R_{n_i}(\delta_i)$ , kui  $i \geq i_0$ . Järelikult kehtib ka  $x \in R_{n_m}(\delta_m)$ , ehk

$$x \notin \bigcup_{k=n_m}^{\infty} A(|f_k - f| \geq \delta_m).$$

Edasi saame

$$x \notin A(|f_k - f| \geq \delta_m), \quad \text{kui } k \geq n_m$$

ehk

$$|f_k(x) - f(x)| < \delta_m, \quad \text{kui } k \geq n_m.$$

Sellest tuleneb aga

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{kui } k \geq n_m.$$

Viimane võrratus kehtib iga  $x \in A_{\delta}$  korral, millega ühtlane koonduvus on tõestatud.

§ 17. Mõõtuvate funktsioonide  
vahekorrd pidevate  
funktsioonidega.

Mõõtuvate ja pidevate funktsioonide vahekorra selgitavad Luzini teoreem ja selle pöördteoreem. Enne, kui nende teoreemide juurde asuda, tuleb aga tõestada mõned abitulemused.

Teoreem 1. Olgu hulgal  $A$  defineeritud mõõtuv ja peaaegu kõikjal lõplik funktsioon  $f(x)$ . Siis mis tahes  $\varepsilon > 0$  korral leidub mõõtuv ja tõkestatud funktsioon  $g(x)$ , mis on defineeritud hulgal  $A$ , nii et

$$\text{mes } A(f \neq g) < \varepsilon.$$

Tõestus. Tähistame

$$A_k = A(|f| > k), \quad Q = A(|f| = +\infty).$$

Eelduse kohaselt mes  $Q = 0$ . Kehtivad seosed  $\infty$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \quad \text{ja} \quad Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Siis punkt 4) (§13) põhjal

$$\lim \text{mes } A_k = \text{mes } Q = 0.$$

Seega leidub indeks  $n$ , nii et mes  $A_n < \varepsilon$ .

Defineerime nüüd hulgal  $A$  funktsiooni  $g(x)$  järgmiselt:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in A \setminus A_n, \\ 0, & \text{kui } x \in A_n. \end{cases}$$

See funktsioon on mõõtv ja tõkestatud, kuna

$$|g(x)| \leq n.$$

Peale selle

$$A(f \neq g) = A_n,$$

millega teoreem on tõestatud.

Lemma 1. Olgu kinnisel hulgal  $F$  defineeritud pidev funktsioon  $f(x)$ . Siis saab hulgal  $A \supset F$  defineerida funktsiooni  $\psi(x)$ , nii et

1) kui  $x \in F$ , siis  $\psi(x) = f(x)$ ,

2)  $\sup_A |\psi(x)| = \sup_F |f(x)|$ ,

3)  $\psi(x)$  on pidev hulgal  $A$ .

Tõestus. Olgu  $[a, b]$  vähim lõik, mis sisaldab hulka  $F$ . Hulga  $F$  struktuurivalem on seega

$$F = [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Defineerime nüüd funktsiooni  $\psi(x)$  järgmiselt:

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in F, \\ f(a), & \text{kui } x \in (-\infty, a) \cap A, \\ f(b), & \text{kui } x \in (b, +\infty) \cap A, \\ \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} (x - a_1) + f(a_1), & \text{kui } x \in (a_1, b_1) \cap A. \end{cases}$$

Tingimuse 1) kehtivus on ilmne. Tingimuste 2) ja 3) kehtivus järeldub sellest, et  $\psi(x)$  on hulgal  $(-\infty, a) \cap A$  ja  $(b, +\infty) \cap A$  vastavalt võrdne väärtusega  $f(a)$  ja  $f(b)$ , hulgal  $(a_1, b_1) \cap A$  on aga defineeritud lineaarselt, kusjuures  $\psi(x)$  väärtused on tükete  $f(a_1)$  ja  $f(b_1)$  vahel.

Teoreem 2. (E. Borel). Olgu hulgal  $A$  defineeritud mõõtv ja peaaegu kõikjal lõplik funktsioon  $f(x)$ . Siis mis tahes  $\delta > 0$  ja  $\varepsilon > 0$  puhul leidub hulgal  $A$  pidev funktsioon  $\psi(x)$ , nii et

$$\text{mes } A (|f - \psi| \geq \delta) < \varepsilon.$$

Tõestus. Vaatleme esiteks juhtu, kus  $|f(x)| \leq K$ . Fikseeritud  $\delta > 0$  ja  $\varepsilon > 0$  korral leiame naturaalarvu  $m$ , nii et

$$\frac{K}{m} < \delta.$$

Konstrueerime hulgad

$$A_1 = A\left(\frac{1-1}{m} K \leq f < \frac{1}{m} K\right),$$

kus  $1 = 1 - m, 2 - m, \dots, m - 1$  ja

$$A_m = A\left(\frac{m-1}{m} K \leq f \leq K\right).$$

Hulgad  $A_1^*$  on mõõtvavad ja ei lõiku omavahel ning

$$A = \bigcup_{i=1-m}^m A_i.$$

Leiame kinnised hulgad  $F_1 \subset A_1$  ( $1 = 1 - m, 2 - m, \dots, m$ ), nii et

$$\text{mes } F_1 > \text{mes } A_1 - \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Moodustame hulga  $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ . Kehtib seos

$$A \setminus F = \bigcup_i (A_1 \setminus F_i),$$

millest

$$\text{mes } A - \text{mes } F < \varepsilon. \quad (1)$$

Nüüd defineerime hulgal  $F$  funktsiooni  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{m} K, \text{ kui } x \in F_i \quad (i = 1 - m, 2 - m, \dots, m).$$

Kuna hulgad  $F_i$  ei lõiku ja  $\varphi(x)$  on hulgal  $F_i$  pidev (konstantne), siis on  $\varphi(x)$  ka hulgal  $F$  pidev. Siis  $x \in F$  korral

$$|f(x) - \varphi(x)| < \delta.$$

Kasutades lemmat 1, saame konstrueerida hulgal  $A$  pideva funktsiooni  $\psi(x)$ , nii et  $\psi(x) = \varphi(x)$  hulgal  $F$ . Kuna

$$A(|f - \psi| \geq \delta) \subset A \setminus F,$$

siis võrratuse (1) põhjal võime väita, et  $\psi(x)$  rahuldab teoreemi tingimusi.

Vaatleme nüüd juhtu, kus  $f(x)$  pole tõkestatud. Teoreem 1 põhjal võib konstrueerida tõkestatud ja mõõtuva funktsiooni  $g(x)$ , nii et

$$\text{mes } A(f \neq g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rakendades äsja tõestatud osa teoreemist 2, võime leida pideva funktsiooni  $\psi(x)$ , nii et

$$\text{mes } A(|g - \psi| \geq \delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kehtib seos

$$A(|f - \psi| \geq \delta) \subset A(f \neq g) \cup A(|g - \psi| \geq \delta),$$

millest nähtub, et funktsioon  $\psi(x)$  rahuldab teoreemi 2 tingimusi. Sellega on teoreem tõestatud.

Teoreem 3. (M. Frechet). Mis tahes mõõtuval hulgal  $A$  defineeritud mõõtva ja peaaegu kõikjal lõpliku funktsiooni  $f(x)$  jaoks leidub pidevate funktsioonide jada, mis koondub funktsiooniks  $f(x)$  peaaegu kõikjal hulgal  $A$ .

Tõestus. Võtame kaks mittenegatiivsete liikmetega monotoonselt kahanevat jada  $\epsilon_n \rightarrow 0$  ja  $\xi_n \rightarrow 0$ . Teoreemi 2 põhjal leiduvad pidevad funktsioonid  $\psi_n(x)$ , nii et

$$\text{mes } A(|f - \psi_n| \geq \epsilon_n) < \xi_n. \quad (2)$$

Edasi võtame  $\delta > 0$  ja leiame naturaalarvu  $n_0$ , nii et  $n \geq n_0$  korral  $\epsilon_n < \delta$ . Siis

$$A(|f - \psi_n| \geq \delta) \subset A(|f - \psi_n| \geq \epsilon_n).$$

Kuna parempoolsete hulkade mõõdud võrratuse (2) põhjal lähenevad nullile, siis lähenevad nullile ka vasakpoolsete hulkade mõõdud, s. t.

$$\psi_n(x) \Rightarrow f(x).$$

F. Riesz'i teoreemi põhjal saab piirprotsessi  $\psi_n(x) \Rightarrow f(x)$  korral jadast  $\psi_n(x)$  eraldada osajada  $\psi_n(x)$ , mis koondub funktsiooniks  $f(x)$  peaaegu kõikjal<sup>k</sup> hulgal  $A$ .

Teoreem 4. (N. Luzin). Olgu  $f(x)$  hulgal  $A$  defineeritud mõõtuv ja peaaegu kõikjal lõplik funktsioon. Siis mis tahes  $\delta > 0$  puhul leidub pidev funktsioon  $\varphi(x)$ , nii et

$$\text{mes } A(f \neq \varphi) < \delta.$$

Seejuures, kui  $|f(x)| \leq K$ , siis ka  $|\varphi(x)| \leq K$ .

Tõestus. Olgu

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

funktsioonide jada, mis koondub funktsiooniks  $f(x)$  peaaegu kõikjal hulgal  $A$ . Fréchet' teoreemi põhjal on sellist jada võimalik konstrueerida.

Jegorovi teoreemi põhjal saame leida hulga  $A_\delta$  ( $\delta > 0$ ), nii et

$$\text{mes } A_\delta > \text{mes } A - \frac{\delta}{2},$$

kusjuures hulgal  $A$  koondub jada  $f_n(x)$  funktsiooniks  $f(x)$  ühtlaselt. Leiame kinnise hulga  $F \subset A_\delta$ , nii et

$$\text{mes } F > \text{mes } A_\delta - \frac{\delta}{2}.$$

Ka hulgal  $F$  koondub jada  $f_n(x)$  funktsiooniks  $f(x)$  ühtlaselt ja piirfunktsioon  $f(x)$  on hulgal  $F$  pidev funktsioon<sup>10</sup>. vt. Pichtenholts, II köide, 16. ptk. § 2.

Kasutades lemmat 1, saame konstrueerida funktsiooni  $\varphi(x)$ , mis ühtib funktsiooniga  $f(x)$  hulgal  $F$ . Seega

$$A(f \neq \varphi) \subset A \setminus F.$$

Kuna  $\text{mes } A \setminus F = \text{mes } A - \text{mes } F < \text{mes } A - \text{mes } A_\delta + \frac{\delta}{2} < \delta$ , siis  $\varphi(x)$  ongi otsitav funktsioon.

Lemma 1 põhjal võime väita, et kui  $|f(x)| \leq K$ , siis ka  $|\varphi(x)| \leq K$ , millega teoreem on tõestatud.

Teoreem 5. (Luzini teoreemi pöördteoreem). Olgu mõistaval hulgal  $A$  defineeritud funktsioon  $f(x)$ . Kui iga  $\delta > 0$  puhul leidub hulgal  $A$  pidev funktsioon  $\varphi_\delta(x)$ , nii et

---

10 Г.М.Фихтенгольц, Основы математического анализа, II köide, 16.ptk., § 2.

$$\text{mes } A(f \neq \varphi_\delta) < \delta,$$

siis on  $f(x)$  hulgal  $A$  mõõtv funktsioon.

Tõestus. Tähistame

$$A_\delta = A \setminus A(f \neq \varphi_\delta) = A(f = \varphi_\delta).$$

Leiame kinnise hulga  $F_\delta$ , nii et

$$F_\delta \subset A_\delta \quad \text{ja} \quad \text{mes } F_\delta > \text{mes } A_\delta - \varepsilon \quad (0).$$

Hulgal  $F_\delta$  on  $\varphi_\delta(x)$  pidev ja järelikult mõõtv (§14, näide 2). Seega on hulgal  $F$  mõõtv ka  $f(x)$ . Võtame nüüd  $\delta$  ja  $\varepsilon$  jaoks jada väärtusi:  $0 \leq \delta_1 \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \varepsilon_1 \rightarrow 0$ .

Kuna  $f(x)$  on mõõtv igal  $F_{\delta_1}$ , siis on ta mõõtv ka nende summal  $F = \bigcup_i F_{\delta_1}$ , sest  $F(f > a) = \bigcup_i F_{\delta_1}(f > a)$ . Hindame  $F$  mõõtu

$$\text{mes } F \geq \text{mes } F_{\delta_1} > \text{mes } A_{\delta_1} - \varepsilon_1 = \text{mes } A - \delta_1 - \varepsilon_1.$$

Teostades piirprotsessi  $1 \rightarrow \infty$ , saame

$$\text{mes } F \geq \text{mes } A.$$

Teiselt poolt, kuna  $F \subset A$ , siis  $\text{mes } F \leq \text{mes } A$ . Seega

$$\text{mes } F = \text{mes } A$$

ja järelikult  $\text{mes}(A \setminus F) = 0$ .

Hulgal  $F$  on  $f(x)$  mõõtv, hulgal  $A \setminus F$  on mõõtv iga funktsioon. Järelikult on  $f(x)$  mõõtv ka nende kahe hulga summal, s.t. hulgal  $A$ .

Teoreemide 4 ja 5 põhjal võib mõõtuvaid funktsioone iseloomustada pidevate funktsioonide abil. Osutub, et need on sellised funktsioonid, mis sobivalt valitud kui tahes väikese positiivse mõõduga määramispiirkonna osahulga eraldamisel ülejäänud hulgal  $A$  on pidevad funktsioonid.

V peatükk.

LEBESGUE' I INTEGRAAL.

§ 18. Lebesgue'i integraali mõiste.

Lõigul  $[a, b]$  defineeritud tõkestatud funktsiooni  $f(x)$  Riemanni integraal defineeritakse teatavasti järgmiselt: lõik  $[a, b]$  jaotatakse punktidega  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

osalõikudeks, igast osalõigust valitakse punkt  $\xi \in [x_k, x_{k+1}]$  ja moodustatakse integraalsumma

$$G = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Kui summa  $G$  läheneb alajaotuse piiramatul peenendamisel (s.t. piirprotsessis  $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$ ) piirväärtusele, mis ei sõltu alajaotuse viisist ega punktide  $\xi_k$  valikust, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni  $f(x)$  Riemanni integraaliks lõigul  $[a, b]$  ja tähistatakse teda

$$(R) \int_a^b f(x) dx.$$

Selleks, et summa  $G$  piirväärtus ei sõltuks  $\xi_k$  valikust, peab  $\xi_k$  lähedastele väärtustele vastama ka  $f(\xi_k)$  lähedased väärtused. Selline olukord kehtib pidevate funktsioonide korral, ei kehti aga näiteks Dirichlet' funktsiooni korral. Tõepoolest, valides punktid  $\xi_k$  ratsionaalsed, saame  $D(\xi_k) = 1$  ja  $G = 1$ , valides  $\xi_k$  irratsionaalsed, saame  $D(\xi_k) = 0$  ja  $G = 0$ . Järelikult pole integraalsummal Dirichlet' funktsiooni puhul ühest piirväärtust. Seega on Riemanni integraali rakendamine täiesti loomulik ainult pidevate funktsioonide puhul, kuna mittepidevad funktsioonid

ei tarvitse olla integreeruvad Riemanni mõttes.<sup>11</sup>

Lebesgue'i integraali korral eeldatakse funktsiooni  $f(x)$  mõttuvust hulgal  $E$ , kusjuures integraali defineerimisel tuleb eristada kolm juhtu:

- $f(x)$  on tõkestatud hulgal  $E$ ,
- $f(x)$  on tõkestamata ja mittenegatiivne hulgal  $E$ ,
- $f(x)$  on tõkestamata ja omandab vähemalt ühe negatiivse väärtuse hulgal  $E$ .

Juhul a) leiduvad lõplikud reaalarvud  $m$  ja  $M$ , nii et

$$m < f(x) < M, \quad \text{kui } x \in E.$$

Erinevalt Riemanni integraalist teostatakse siin alajaotus  $y$ -teljel

$$y_0 = m < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M$$

ja moodustatakse hulgad  $e_k$

$$e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1}) \quad (k=0,1,\dots,n-1).$$

Hulgad  $e_k$  on funktsiooni  $f(x)$  mõttuvuse tõttu mõttuvad.

Nüüd defineerime Lebesgue'i integraali integraalsumma

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k \text{ mes } e_k, \quad \eta_k \in [y_k, y_{k+1}].$$

Kui summa  $S$  läheneb piirprotsessis  $\lambda = \max(y_{k+1} - y_k) \rightarrow 0$  piirväärtusele, mis ei sõltu alajaotuse viisist ega punktide  $\eta_k$  valikust, siis nimetame seda piirväärtust funktsiooni  $f(x)$  Lebesgue'i integraaliks üle hulga  $E$  ja tähistame seda

$$(L) \int_E f(x) dx.$$

<sup>11</sup> Selleks, et lõigul  $[a, b]$  tõkestatud funktsioon oleks integreeruv sellel lõigul Riemanni mõttes, on tarvilik ja piisav selle funktsiooni pidevus peaaegu kõikjal sellel lõigul.

Kui  $E$  on lõik, s.t.  $E = [a, b]$ , siis kirjutame

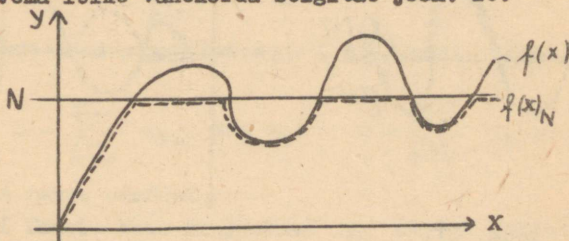
$$(L) \int_a^b f(x) dx.$$

Kuna peatükkides V ja VI käsitleme ainult Lebesgue'i integraali, võime tähise (L) jätta märkimata. Ette rutates märgime, et tõkestatud ja mõõtv funktsioon on alati integreeruv Lebesgue'i mõttes.

Juhul b) moodustame funktsiooni

$$f(x)_N = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \leq N, \\ N, & \text{kui } f(x) > N, \end{cases}$$

mida nimetame funktsiooni  $f(x)$  lõikeks arvuga  $N$ . Funktsiooni ja tema lõike vahekorda selgitab joon. 16.



Joon. 16.

Funktsiooni lõige on tõkestatud ja mõõtv funktsioon. Viimane asjaolu tuleneb võrdusest

$$E(f_N > a) = \begin{cases} E(f > a), & \text{kui } a < N, \\ \ominus, & \text{kui } a \geq N. \end{cases}$$

Sel juhul defineeritakse Lebesgue'i integraal piirväärtuse abil:

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f(x)_N dx.$$

Märgime, et kõik integraalid  $\int_E f(x)_N dx$  eksisteerivad, kuna  $f(x)_N$  on tõkestatud ja mõõtv funktsioon.

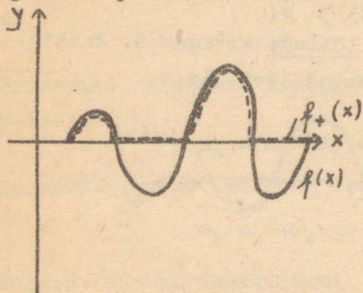
Juhul c) moodustame funktsioonid

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases}$$

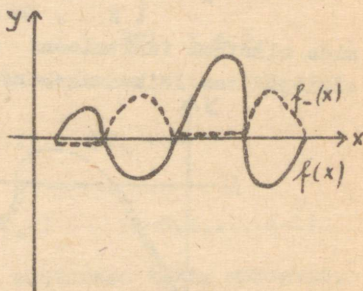
ja

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases}$$

mida nimetame vastavalt funktsiooni  $f(x)$  positiivseks ja negatiivseks osaks. Nende vahetada funktsiooniga  $f(x)$  selgitavad joonised.



Joon. 17.



Joon. 18.

Funktsioonid  $f_+(x)$  ja  $f_-(x)$  on mittenegatiivsed ja mõõtvad, kui  $f(x)$  on mõõtuv. Viimane asjaolu tuleneb võrdustest

$$E(f_+ > a) = \begin{cases} E(f > a), & \text{kui } a \geq 0, \\ E, & \text{kui } a < 0, \end{cases}$$

ja

$$E(f_- > a) = \begin{cases} E(f < -a), & \text{kui } a \geq 0, \\ E, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

On kerge veenduda, et iga  $x \in E$  puhul

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

mida arvestades defineeritakse Lebesgue'i integraal juhul

c) nii:

$$\int_E f(x) dx = \int_E f_+(x) dx - \int_E f_-(x) dx.$$

Märgime, et juhul c) võib esineda olukord, kus

$\int_E f_+(x) dx = +\infty$  ja  $\int_E f_-(x) dx = +\infty$ . Kuna  $+\infty - (+\infty)$  pole defineeritud, ei eksisteeri ka integraal  $\int_E f(x) dx$ .

Näitame nüüd, et hulgal  $E$  tõkestatud ja mõõtv funktsioon  $f(x)$  on sellel hulgal integreeruv Lebesgue'i mõttes.

Kõigepealt märgime, et hulkade  $e_k$  puhul kehtivad seosed:

$$1) e_k \cap e_l = \emptyset, \text{ kui } k \neq l,$$

$$2) E = \bigcup_{k=0}^{n-1} e_k$$

$$3) \text{ mes } E = \sum_{k=0}^{n-1} \text{ mes } e_k.$$

Edasi moodustame Lebesgue'i integraali ülem- ja alam-summad

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \text{ mes } e_k, \quad s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{ mes } e_k$$

ja uurime nende omadusi.

1° Ühe ja sama alajaotuse  $y_k$  korral kehtib võrratus

$$s \leq S \leq s.$$

Võrratuse kehtivus järeldub vahetult seosest  $y_k \leq \eta_k \leq y_{k+1}$  ja integraalsumma ning ülem- ja alamsumma definitsioonist.

2° Kehtib võrratus

$$S - s \leq \lambda \text{ mes } E.$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \text{ mes } e_k - \sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{ mes } e_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) \text{ mes } e_k \leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \text{ mes } e_k = \lambda \text{ mes } E. \end{aligned}$$

3° Alajaotuse peenendamisel ei saa ülemsumma kasvada ja alamsumma kahaneda.

Piisab, kui vaatleme ühe jaotuspunkti juurdevõtmist.

Tõestuse anname alamsumma jaoks.

Olgu esialgsed jaotuspunktid  $y_1$ , juurde võtame jaotuspunkti  $\tilde{y}$ ,  $y_k < \tilde{y} < y_{k+1}$ .

Hulgaga  $e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1})$  kõrvuti tuleb meil vaadelda hulki

$$e'_k = E(y_k \leq f < \tilde{y}) \text{ ja } e''_k = E(\tilde{y} \leq f < y_{k+1}),$$

kusjuures kehtivad seosed 1)  $e'_k \cap e''_k = \emptyset$ , 2)  $e_k = e'_k \cup e''_k$  ja 3)  $\text{mes } e_k = \text{mes } e'_k + \text{mes } e''_k$ . Kuna kehtib võrratus

$y_k \text{mes } e_k = y_k \text{mes } e'_k + y_k \text{mes } e''_k$   $y_k \text{mes } e'_k + \tilde{y} \text{mes } e''_k$ ,  
siis sellest nähtubki, et

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{mes } e_k \leq \sum_{k=0}^{k-1} y_k \text{mes } e_k + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i \text{mes } e_i + y_k \text{mes } e'_k + \tilde{y} \text{mes } e''_k.$$

4° Ükski alamsumma pole suurem ühestki ülesummast.

Ühe ja sama alajaotuse puhul on see vahekord kehtiv (omadus 1). Näitame, et see vahekord kehtib mis tahes kahe alajaotuse I ja II puhul. Vaatleme alajaotust III, mis on saadud I ja II alajaotuse jaotuspunktide liitmisel. Omaduse 1° ja 3° põhjal saame

$$s_I \leq s_{III} \leq s_{III} \leq s_{II},$$

mis annabki väite tõestuse.

5° Ülemsummade alumine raja ja alamsummade ülemine raja on võrdsed.

Võrratuse

$$s_\alpha \leq S_\beta$$

paremast poolest alumise raja ja vasakust poolest ülemise raja võtmisel saame

$$\sup s_\alpha \leq \inf S_\beta.$$

Arvestades ilmset võrratust

$$s \leq \sup s_\alpha \leq \inf S_\beta \leq S,$$

saame omaduse 2° põhjal

$$0 \leq \inf S_\beta - \sup s_\alpha \leq S - s \leq \lambda \text{ mes } E,$$

kust  $\lambda \rightarrow 0$  korral saame  $\sup s_\alpha = \inf S_\beta$ .

Sama alajaotuse puhul kehtivad võrratused

$$s \leq I \leq S \quad \text{ja} \quad s \leq \sigma \leq S,$$

kus  $I = \sup s_\alpha = \inf S_\beta$ . Ülaltoodud võrratustest ja omadusest 2° järeldub

$$|I - \sigma| \leq S - s \leq \lambda \text{ mes } E,$$

kust  $\lambda \rightarrow 0$  korral saame

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I, \text{ m. o. t. t.}$$

Ülaltoodud tulemusi arvestades võib Lebesgue'i integraali defineerida muidugi ka teisiti. Nimelt kui ülemsummade alumist raja või kui alamsummade ülemist raja, sest äsja tõestatu põhjal annavad need rajad sama tulemuse.

Näide 1. Arvutame Dirichlet' funktsiooni

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \text{ on ratsionaalne,} \\ 0, & \text{kui } x \text{ on irratsionaalne,} \end{cases}$$

Lebesgue'i integraali lõigul  $[0,1]$ . Tõketeks  $m$  ja  $M$  võime võtta vastavalt arvud  $-1$  ja  $2$ . Jaotame lõigu  $[m, M]$  osalõikudeks jaotuspunktidega  $y_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Integraali võime arvutada näiteks alamsummade

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{ mes } e_k, \quad e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1})$$

ülemise raja kaudu. On kerge näha, et hulgad  $e_k$  on tühjad, väljaarvatud  $e_{k_1}$  ja  $e_{k_2}$ , kus

$$y_{k_1} \leq 0 < y_{k_1+1},$$

$$y_{k_2} \leq 1 < y_{k_2+1}.$$

Hulk  $e_{k_1}$  on lõigul  $[0,1]$  asuvate irratsionaalarvude hulk ja mes  $e_{k_1} = 1$ . Hulk  $e_{k_2}$  on lõigul  $[0,1]$  asuvate ratsionaalarvude hulk ja mes  $e_{k_2} = 0$ . Seega  $s = y_{k_1}$ . Kuna alajäätuse peenendamisel  $y_{k_1} \rightarrow 0$ , siis

$$\sup_{\{y_n\}} s = \sup_{0 > y > 0} y_{k_1} = 0,$$

kust saame, et

$$\int_0^1 D(x) dx = 0.$$

### § 19. Lebesgue'i integraali põhiomadused

(tõkestatud funktsiooni juhtum).

Lebesgue'i integraali põhiomadused (aditiivsus, distributiivsus jt.) on paljuski analoogilised Riemanni integraali omadustega, kuid esineb ka olulisi erinevusi: tõkestatud ja mõõtv funktsioon on alati integreeruv Lebesgue'i mõttes, mõõtv funktsioon ja tema absoluutväärtus on samaaegselt integreeruvad või mitteintegreeruvad jms. Seega võib öelda, et Lebesgue'i integraal pole mitte ainult üldisem Riemanni integraal, vaid tal on ka mitmeid "häid" omadusi, mis Riemanni integraalil puuduvad.

Teoreem 1. (Lebesgue'i integraali keskäärtusteoreem). Kui hulgal  $E$  mõõtv funktsioon  $f(x)$  rahuldab võrratust

$$a \leq f(x) \leq b, \quad (x \in E),$$

siis

$$a \text{ mes } E \leq \int_E f(x) dx \leq b \text{ mes } E \quad (1)$$

ehk teisiti: leidub arv  $\mu$  ( $a \leq \mu \leq b$ ), nii et

$$\int_E f(x) dx = M \text{ mes } E. \quad (2)$$

Tõestus. Rangete tükete saamiseks (vt. definitsiooni juhul a) võtame suvalise  $\varepsilon > 0$  ja arvutame

$$m = a - \varepsilon \quad \text{ja} \quad M = b + \varepsilon.$$

Siis kehtib

$$m < f(x) < M.$$

Mis tahes alajaotuse puhul kehtib võrratus

$$m \sum_{k=0}^{n-1} \text{mes } e_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k \text{ mes } e_k \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \text{mes } e_k.$$

kust  $\lambda \rightarrow 0$  korral saame

$$(a - \varepsilon) \text{ mes } E \leq \int_E f(x) dx \leq (b + \varepsilon) \text{ mes } E. \quad (3)$$

Kuna võrratus (3) kehtib iga  $\varepsilon > 0$  korral, siis piirprotsessi  $\varepsilon \rightarrow 0$  teostamisel saamegi võrratuse (1), millest järeldub omakorda võrdus (2).

Tõestatud keskvärtusvalemitest saab teha mitmeid järeldusi.

Järeldus 1. Kehtib võrdus

$$\int_E c dx = c \text{ mes } E. \quad (4)$$

Tõestuseks võtame  $a = b = c$  ja kasutame valemit (2).

Järeldus 2. Kui  $f(x) \geq 0$  hulgal  $E$ , siis

$$\int_E f(x) dx \geq 0. \quad (5)$$

Tõestusel tuleb vaadelda kaht juhtu. Kui  $f(x)$  on tõkestatud, rakendame võrratuse (1) vasakpoolset osa, kus  $a = 0$ .

Kui  $f(x)$  on tõkestamata (arvestades, et  $0 \leq f(x) \leq M$  iga  $N$  korral), saame esimese juhu põhjal

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f(x)_N dx \geq 0.$$

Järeldus 3. Kui mes  $E = 0$ , siis  $\int_E f(x) dx = 0$ .  
Tõestusel tuleb vaadelda kolme juhtu.

Kui  $f(x)$  on tõkestatud, kasutame võrdust (2), kusjuures  $\int$  on lõplik suurus. Saame

$$\int_E f(x) dx = \int^M \text{mes } E = 0.$$

Kui  $f(x) \geq 0$  ja tõkestamata, saame

$$\int_E f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f(x)_N dx = \lim_{N \rightarrow \infty} (\int^M_N \text{mes } E) = 0.$$

Kui  $f(x)$  on tõkestamata ja omandab negatiivseid väärtusi, siis

$$\int_E f(x) dx = \int_E f_+(x) dx - \int_E f_-(x) dx = 0,$$

kuna integraalid  $\int_E f_+(x) dx$  ja  $\int_E f_-(x) dx$  on võrdsed nulliga eelmise juhu põhjal.

Alljärgnevad põhiomadused 1 - 5 sõnastame üldkujul. Tõestused anname selles paragrahvis aga ainult tõkestatud funktsioonide puhul (s.t. juhul a).

Omatus 1. (Integraali aditiivsus). Kui hulgal  $E$  on antud integreeruv funktsioon  $f(x)$ , kusjuures

$$E = \bigcup_k E_k, \quad E_k \cap E_l = \emptyset \quad (k \neq l)$$

ja hulgad  $E_k$  on mõõtvad, siis

$$\int_E f(x) dx = \sum_k \int_{E_k} f(x) dx.$$

Tõestus. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus

$$E = E_1 \cup E_2 \quad (E_1 \cap E_2 = \emptyset).$$

Kuna  $f(x)$  on tõkestatud, siis leiduvad lõplikud arvud  $m$  ja  $M$ , nii et

$$m < f(x) < M \quad (x \in E).$$

Lõigu  $[m, M]$  jaotame punktidega  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) osalõikudeks. Moodustame hulgad

$$e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1}),$$

$$e_k^1 = E_1(y_k \leq f < y_{k+1}),$$

$$e_k^2 = E_2(y_k \leq f < y_{k+1}).$$

Kehtivad võrdused  $e_k = e_k^1 \cup e_k^2$ ,  $e_k^1 \cap e_k^2 = \emptyset$  ja mes  $e_k =$   
 $=$  mes  $e_k^1 +$  mes  $e_k^2$ . Viimase põhjal võime kirjutada

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{ mes } e_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{ mes } e_k^1 + \sum_{k=0}^{n-1} y_k \text{ mes } e_k^2.$$

Teostades piirprotsessi  $\lambda \rightarrow 0$ , saame

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

Matemaatilise induktsiooni abil saab seda tulemust üldistada mis tahes lõplikule arvule liidetavatele hulkadele.

Olgu nüüd  $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ ,  $E_k \cap E_l$  ( $k \neq l$ ). Kuna

mes  $E = \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes } E_k$ , siis  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \text{mes } E_k = 0$ . Tähistades

$R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$ , saame kirjutada, et

$$E = \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \cup R_n.$$

Arvestades, et aditiivsus kehtib lõpliku arvu liidetavate hulkade korral, saame

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x) dx + \int_{R_n} f(x) dx. \quad (6)$$

Keskvärtusteoreemi põhjal võime kirjutada

$$m \cdot \text{mes } R_n \leq \int f(x) dx \leq M \cdot \text{mes } R_n .$$

Kuna  $\lim_n \text{mes } R_n = 0$ , siis

$$\lim_n \int_{R_n} f(x) dx = 0$$

Teostades võrduses (6) piirprotsessi  $n \rightarrow \infty$ , saamegi

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx.$$

Omadus 2. (Integraali distributiivsus). Kui hulgal  $E$  on defineeritud kaks integreeruvat funktsiooni  $f(x)$  ja  $g(x)$ , siis

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Tõestus. Olgu  $f(x)$  ja  $g(x)$  tüked vastavalt  $m_1, M_1$  ja  $m_2, M_2$ :

$$m_1 < f(x) < M_1, \quad m_2 < g(x) < M_2.$$

Lõigu  $[m_1, M_1]$  jaotuspunktid tähistame  $y_k$ -ga,  $[m_2, M_2]$  jaotuspunktid  $y'_k$ -ga. Saame

$$e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1}),$$

$$e_k^1 = E(y'_k \leq g < y'_{k+1}).$$

Moodustame hulga  $e_{ik} = e_i \cap e_k^1$ . Ilmselt kehtib  $E = \bigcup_{i,k} e_{ik}$ , kus hulgad  $e_{ik}$  ei oma ühiseid punkte.

Adiitiivsust kasutades saame siis

$$\int_E (f + g) dx = \sum_{i,k} \int_{e_{ik}} (f + g) dx.$$

Hulgal  $e_{ik}$  kehtib võrratus

$$y_1 + y'_k \leq f(x) + g(x) < y_{i+1} + y'_{k+1},$$

millest keskvärtusteoreemi abil järeldub

$$(y_1 + y'_k) \text{ mes } e_{ik} \leq \int_{E_{ik}} (f + g) dx \leq (y_{1+1} + y'_{k+1}) \text{ mes } e_{ik}.$$

Andes 1 ja k kõikvõimalikud väärtused ja liites saadud võrratused liikmeti, saame

$$\sum_{l, k} (y_1 + y'_k) \text{ mes } e_{ik} \leq \int_E (f + g) dx \leq \sum_{l, k} (y_{1+k} + y'_{k+1}) \text{ mes } e_{ik} \quad (7)$$

Võrratuse vasakut osa saab kirjutada ka kujul  $\sum_{l, k} y_1 \text{ mes } e_{ik} + \sum_{l, k} y'_k \text{ mes } e_{ik}$ . Teisendame summat  $\sum_{l, k} y_1 \text{ mes } e_{ik}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{l, k} y_1 \text{ mes } e_{ik} &= \sum_l y_1 \left( \sum_k \text{mes } e_{ik} \right) = \sum_l y_1 \text{mes} \left( \bigcup_k (e_1 \cap e'_k) \right) = \\ &= \sum_l y_1 \text{mes} (e_1 \cap \left( \bigcup_k e'_k \right)) = \sum_l y_1 \text{mes} (e_1 \cap E) = \sum_l y_1 \text{mes } e_1 = s(f). \end{aligned}$$

Analoogiliselt teiseneb summa  $\sum_{l, k} y'_k \text{ mes } e_{ik}$  ja võrratuse (7) parempoolne osa. Seega saame

$$s(f) + s(g) \leq \int_E (f + g) dx \leq S(f) + S(g).$$

Alajaotuse piiramatul peenendamisel lähenevad parem- ja vasakpoolne osa samadele piirväärtustele - vastavatele integraalidele. Seega

$$\int_E (f + g) dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Omadus 3. (Konstantse teguri toomine integraali märgi ette). Kui funktsioon  $f(x)$  on integreeruv hulgal  $E$ , siis on integreeruv ka  $cf(x)$  ja

$$\int_E cf(x) dx = c \int_E f(x) dx \quad (8)$$

Tõestus. Tulemus kehtib ilmselt juhul, kui  $c = 0$ . Vaatleme nüüd juhtu, kus  $c > 0$ . Olgu funktsiooni väärtuste tšketeks  $m$  ja  $M$ . Lõigu  $[m, M]$  jaotame osadeks jaotuspunktidega  $y_k$  ja defineerime hulgad

$$e_k = E(y_k \leq f < y_{k+1}).$$

Aditiivsuse omaduse põhjal saame

$$\int_E cf(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{e_k} cf(x) dx.$$

Hulgal  $e_k$  kehtib võrratus

$$y_k \leq f(x) < y_{k+1}$$

ja ka võrratus

$$cy_k \leq cf(x) < cy_{k+1}.$$

Keskvärtusteoreemi põhjal saame

$$cy_k \text{ mes } e_k \leq \int_{e_k} cf(x) dx \leq cy_{k+1} \text{ mes } e_k; \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (9)$$

Ljites iga  $k$  korral võrratused (9) liikmeti, saame

$$cs \leq \int_E cf(x) dx \leq cs.$$

Kui  $\lambda \rightarrow 0$ , siis  $s$  ja  $S$  lähenevad ühisele piirväärtusele

$$\int_E f(x) dx \text{ ja me saame võrduse 8.}$$

Kui  $c < 0$ , siis

$$\begin{aligned} 0 &= \int_E [cf(x) + (-c)f(x)] dx = \\ &= \int_E cf(x) dx + (-c) \int_E f(x) dx, \end{aligned}$$

kust saame jälle võrduse (6).

Omadus 4. (Integraali monotoonsus). Kui  $f(x) \leq g(x)$  hulgal  $E$ , siis

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx. \quad (10)$$

Tõestus. Hulgal  $E$  kehtib võrratus

$$g(x) - f(x) \geq 0.$$

Keskvärtusteoreemi põhjal võime kirjutada

$$\int_E [g(x) - f(x)] dx \geq 0.$$

Kasutades omadusi 2 ja 3, saame

$$\int_E g(x) dx - \int_E f(x) dx \geq 0,$$

kust järeldubki seos 10.

Kui  $f(x)$  on integreeruv hulgal  $E$ , siis on integreeruv ka  $|f(x)|$  ja kehtib võrratus

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx. \quad (11)$$

Tõestus. Kui  $f(x)$  on tõkestatud ja mõõtv funktsioon, siis on seda ka  $|f(x)|$  ja ühes sellega on see ka integreeruv.

Kuna kehtib ilme võrratus

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad (x \in E)$$

siis keskvärtusteoreemi põhjal saame

$$-\int_E |f(x)| dx \leq \int_E f(x) dx \leq \int_E |f(x)| dx,$$

mis ongi samaväärne võrratusega (11).

## § 20. Lebesgue'i integraali põhiomadused

(mittetõkestatud funktsiooni juhtum).

Põhiomaduste tõestused mittenegatiivsete ja tõkestamata funktsioonide korral (juht b).

Omadus 1. Kasutame võrdust

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_E f(x) dx + \int_{R_n} f(x) dx,$$

kus asendame  $f(x)$  funktsiooni lõikega  $f(x)_N$  ja jätame

ära integraali  $\int_{R_n} f(x)_N dx$ , mis antud juhul on mittenegatiivne. Saame

$$\int_E f(x)_N dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x)_N dx.$$

Teostades piirprotsessi  $N \rightarrow \infty$ , saame

$$\int_E f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x) dx,$$

mis kehtib iga  $n$  kerral. Seega  $n \rightarrow \infty$  puhul

$$\int_E f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx, \quad (1)$$

Vastupidise võrratuse tõestamisel kasutame asjaolu, et

$$f(x)_N \leq f(x)_M, \quad \text{kui } N \leq M.$$

Omadusest 4 (a) saame

$$\int_E f(x)_N dx \leq \int_E f(x)_M dx,$$

kust  $M \rightarrow \infty$  puhul

$$\int_E f(x)_N dx \leq \int_E f(x) dx.$$

Viimane seos kehtib muidugi iga  $E_k$  puhul. Siis saame

$$\sum_K \int_{E_k} f(x)_N dx \leq \sum_K \int_{E_k} f(x) dx.$$

Võrratuse vasaku poole puhul võime kasutada omadust 1 (a), mille põhjal

$$\int_E f(x)_N dx \leq \sum_K \int_{E_k} f(x) dx.$$

Lastes  $N \rightarrow \infty$ , saame

$$\int_E f(x) dx \leq \sum_K \int_{E_k} f(x) dx. \quad (2)$$

Võrratused (1) ja (2) annavadki võrduse.

Omadus 2. Kasutame funktsioonide  $f(x)$  ja  $g(x)$  läi-  
gete korral kehtivat võrratust

$$f(x)_N + g(x)_N \leq [f(x) + g(x)]_{2N} \leq f(x)_{2N} + g(x)_{2N}.$$

Omadusi 2 (a) ja 4 (a) kasutades saame

$$\int_E f(x)_N dx + \int_E g(x)_N dx \leq \int_E [f(x) + g(x)]_{2N} dx \leq \int_E f(x)_{2N} dx + \int_E g(x)_{2N} dx$$

Teostades piirprotsessi  $N \rightarrow \infty$  ja arvestades  $\int_E f(x) dx$

ja  $\int_E g(x) dx$  eksisteerimist, saame

$$\int_E [f(x) + g(x)] dx = \int_E f(x) dx + \int_E g(x) dx.$$

Omadus 4. Eeldades, et kehtib võrratus

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

saame sama võrratuse ka lõigete vahel

$$f(x)_N \leq g(x)_N.$$

Siis omaduse 4 (a) põhjal

$$\int_E f(x)_N dx \leq \int_E g(x)_N dx.$$

Teostades piirprotsessi  $N \rightarrow \infty$ , saame

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

Omadus 3. Siin tuleb vaadelda erijuhte  $c$  kohta.

Kui  $c = 0$ , on seos

$$\int_E cf(x) dx = c \int_E f(x) dx$$

kehtiv.

Kui  $c = m$  (naturaalarv), taandub tõestus juhule 2 (b).

Kui  $c = \frac{1}{m}$  ( $m$  naturaalarv), saame

$$f(x) = \frac{m}{1} f(x)$$

$$\int_E f(x) dx = m \int_E \frac{1}{m} f(x) dx$$

$$\frac{1}{m} \int_E f(x) dx = \int_E \frac{1}{m} f(x) dx.$$

Kui  $c$  on irratsionaalne, leiame ratsionaalarvud  $r_1$  ja  $r_2$ ,  $0 < r_1 < c < r_2$ . Omadust 4 (b) kasutades, saame

$$r_1 \int_E f(x) dx \leq \int_E cf(x) dx \leq r_2 \int_E f(x) dx.$$

Teostades piirprotsessi  $r_1, r_2 \rightarrow c$ , saamegi nõutava tulemuse.

Omadus 5. Kuna antud juhul  $|f(x)| = f(x)$ , siis vaadeldav omadus kehtib.

Põhiomaduste tõestused tõkestamata ja negatiivseid väärtusi omandavate funktsioonide korral (juht c).

Omadus 1. Omaduse 1 (b) põhjal kehtivad võrdused

$$\int_E f_+(x) dx = \sum_k \int_{E_k} f_+(x) dx,$$

$$\int_E f_-(x) dx = \sum_k \int_{E_k} f_-(x) dx,$$

kus parempoolsed read on koonduvad (eeldame  $f(x)$  integreeruvust hulgal  $E$ ). Siis

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_E f_+(x) dx - \int_E f_-(x) dx = \sum_k \int_{E_k} f_+(x) dx - \sum_k \int_{E_k} f_-(x) dx = \\ &= \sum_k \left( \int_{E_k} f_+(x) dx - \int_{E_k} f_-(x) dx \right) = \sum_k \int_{E_k} f(x) dx. \end{aligned}$$

Omadus 3. Tõestamisel tuleb vaadelda erijuhte  $c$  kohta. Kui  $c = 0$ , siis kehtib seos

$$\int_E cf(x)dx = c \int_E f(x)dx$$

ilmselt.

Kui  $c > 0$ , siis

$$(cf(x))_+ = c f_+(x)$$

$$(cf(x))_- = c f_-(x)$$

ja

$$\begin{aligned} \int_E cf(x)dx &= \int_E (cf(x))_+ dx - \int_E (cf(x))_- dx = c \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx = \\ &= c \int_E f(x)dx. \end{aligned}$$

Kui  $c = -1$ , siis

$$(-f(x))_+ = f_-(x) \quad \text{ja} \quad (-f(x))_- = f_+(x)$$

ning

$$\int_E [-f(x)] dx = \int_E f_-(x)dx - \int_E f_+(x)dx = - \int_E f(x)dx.$$

Seega: teguri  $-1$  võib integraali märgi ette tuua.

Kui nüüd  $c$  on suvaline negatiivne arv, siis saame

$$\int_E cf(x) = - \int_E |c|f(x)dx = -|c| \int_E f(x)dx = c \int_E f(x)dx,$$

millega omadus 3 on tervikuna tõestatud.

Omadus 4. Võrratuse

$$f(x) \leq g(x)$$

võime kirjutada kujul

$$f_+(x) - g_-(x) \leq g_+(x) - g_-(x).$$

Saadud võrratus on samaväärne võrratusega

$$f_+(x) + g_-(x) \leq g_+(x) + f_-(x),$$

kus kõik liidetavad on mittenegatiivsed. Rakendades nüüd omadusi 2 (a) ja 4 (a), saame

$$\int_E f_+(x) dx + \int_E g_-(x) dx \leq \int_E g_+(x) dx + \int_E f_-(x) dx$$

ehk sellega samaväärse võrratuse

$$\int_E f_+(x) dx - \int_E f_-(x) dx \leq \int_E g_+(x) dx - \int_E g_-(x) dx,$$

mis ongi

$$\int_E f(x) dx \leq \int_E g(x) dx.$$

Omatus 5. Kehtivad võrdused

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x).$$

Funktsiooni integreeruvuse korral peavad integraalid

$\int_E f_+(x) dx$  ja  $\int_E f_-(x) dx$  olema lõplikud. Kuid siis on lõplik ka nende summa. Kuid

$$\int_E |f(x)| dx = \int_E f_+(x) dx + \int_E f_-(x) dx,$$

millest järeldub  $|f(x)|$  integreeruvus. Kerge on näha, et

$|f(x)|$  integreeruvusest järeldub ka  $f(x)$  integreeruvus.

Omatus 2. Kui  $f(x)$  ja  $g(x)$  on integreeruvad funktsioonid hulgal  $E$ , siis on hulgal  $E$  integreeruv ka nende funktsioonide summa  $f(x) + g(x)$ . See asjaolu järeldub võrratusest

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

absoluutväärtuse integreeruvusest ja monotoonsuse omadusest mittenegatiivsete funktsioonide korral.

Edasi moodustame hulgad

$$E_1 = E(f \geq 0, g \geq 0),$$

$$E_2 = E(f < 0, g < 0),$$

$$E_3 = E(f \geq 0, g < 0, f + g \geq 0),$$

$$E_4 = E(f \geq 0, g < 0, f + g < 0),$$

$$E_5 = E(f < 0, g \geq 0, f + g \geq 0),$$

$$E_6 = E(f < 0, g \geq 0, f + g < 0),$$

kus  $E = \bigcup_{i=1}^6 E_i$  ja  $E_i \cap E_k = \emptyset$  ( $i \neq k$ ).

Omaduse 2 tõestamiseks piisab, kui näidata seose

$$\int_{E_i} (f(x) + g(x)) dx = \int_{E_i} f(x) dx + \int_{E_i} g(x) dx \quad (i=1,2,\dots,6)$$

kehtivus. Iga  $i$  puhul on tõestus analoogiline. Viime läbi selle näiteks  $i = 4$  puhul. Samasuse

$$[f(x) + g(x)] = f(x) + g(x)$$

teisendame kujule

$$-g(x) = f(x) + [-f(x) - g(x)],$$

kus kõik liidetavad on mittenegatiivsed. Kasutades omadust 2b, saame:

$$\int_{E_4} -g(x) dx = \int_{E_4} f(x) dx + \int_{E_4} [-f(x) - g(x)] dx.$$

Edasi arvestades konstandi ( $c = -1$ ) ettetõstmise lubatavust, saamegi

$$\int_{E_4} [f(x) + g(x)] dx = \int_{E_4} f(x) dx + \int_{E_4} g(x) dx.$$

## § 21. Lebesgue'i integraali teisi omadusi.

Teoreem 1. Kui funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  on ekvivalentsed hulgal  $E$  ja  $f(x)$  on integreeruv sellel hulgal, siis on ka  $g(x)$  integreeruv sellel hulgal ning

$$\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx.$$

Tõestus. Moodustame hulga

$$A = E(f = g),$$

$$B = E(f \neq g).$$

Kuna  $B$  on mõõduga  $0$ , siis peab ka  $A$  olema mõõtuva hulka.  
Edasi saame integraali põhiomadusi kasutades

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx = \int_A f(x) dx - \\ &= \int_A g(x) dx + \int_B g(x) dx = \int_E g(x) dx. \end{aligned}$$

Järeldus. Integreeritavat funktsiooni võib muuta hulgal mõõduga  $0$ , kuna sellest ei sõltu integreeruvus ega integraali väärtus.

Teoreem 2. (Lebesgue'i integraali absoluutne pidevus). Olgu  $f(x)$  integreeruv hulgal  $E$ . Siis leidub igale  $\varepsilon > 0$  vastavalt selline  $\delta > 0$ , nii et iga mõõtuva hulga  $e < E$  korral, kus mes  $e < \delta$ , kehtib võrratus

$$\left| \int_e f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Tõestus. Samaaegselt funktsiooniga  $f(x)$  on integreeruv ka  $|f(x)|$ . Kui  $|f(x)|$  on tükestatunud, s.t.  $|f(x)| \leq K$ , siis võime võtta  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ . Tõepoolest  $\left| \int_e f(x) dx \right| \leq$

$$\int_e |f(x)| dx \leq K \text{ mes } e < \delta.$$

Kui  $|f(x)|$  pole tükestatunud, siis peab leiduma selline  $N_0$ , nii et

$$\int_E |f(x)| dx - \int_E |f(x)|_{N_0} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Võtame  $\delta = \frac{\varepsilon}{2N_0}$  ja näitame, et see sobibki otsitavaks

$\delta$ -ks. Funktsioon  $|f(x)| - |f(x)|_{N_0} \geq 0$  hulgal  $E$ .

Saame

$$\int_e \{|f(x)| - |f(x)|_{N_0}\} dx \leq \int_E \{|f(x)| - |f(x)|_{N_0}\} dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

kust

$$\int_e |f(x)| dx - \int_e |f(x)|_{N_0} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Edasi saame

$$\int_e |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_e |f(x)|_{N_0} dx.$$

Silmas pidades, et  $|f(x)|_{N_0} \leq N_0$  saame võrratust jätkata

$$\int_e |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \text{mes } \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \frac{\varepsilon}{2N_0} = \varepsilon.$$

Kuna

$$\left| \int_e f(x) dx \right| \leq \int_e |f(x)| dx,$$

siis

$$\left| \int_e f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ p. o. t. t.}$$

Teoreem 3. (Piirile üleminek Lebesgue'i integraali märgi all). Olgu hulgal  $E$  antud mõistuvate funktsioonide jada, mis koondub mõõdu järgi funktsiooniks  $f(x)$

$$f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

Kui leidub integreeruv funktsioon  $F(x) \geq 0$ , nii et iga  $n$  ja  $x$  puhul

$$|f_n(x)| \leq F(x),$$

siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Tõestus. Kasutades F. Riesz'i teoreemi, võib leida osajada  $f_{n_k}(x)$ , mis koondub funktsiooniks  $f(x)$  peaaegu kõikjal hulgal  $E$ . Seega kehtib

$$|f(x)| \leq F(x)$$

peaaegu kõikjal hulgal  $E$ , millest järeldub  $f(x)$  integreeruvus.

Võtame  $\delta > 0$  ja moodustame hulgad

$$A_n(\delta) = E(|f_n - f| \geq \delta), \quad B_n(\delta) = E(|f_n - f| < \delta).$$

Siis

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_{n_k}(x) dx - \int_E f(x) dx \right| &\leq \int_E |f_{n_k} - f| dx = \\ &= \int_{A_{n_k}(\delta)} |f_{n_k} - f| dx + \int_{B_{n_k}(\delta)} |f_{n_k} - f| dx. \end{aligned}$$

Võrratus

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2F(x)$$

kehtib peaaegu kõikjal hulgal  $E$ . Seega

$$\int_{A_n(\delta)} |f_n - f| dx \leq 2 \int_{A_n(\delta)} F(x) dx.$$

Teiselt poolt

$$\int_{B_n(\delta)} |f_n - f| dx < \delta \text{ mes } B_n(\delta) \leq \delta \text{ mes } E.$$

Kokku saame

$$\left| \int_E f_n(x) dx - \int_E f(x) dx \right| \leq 2 \int_{A_n(\delta)} F(x) dx + \delta \text{ mes } E.$$

Nüüd võtame suvalise  $\varepsilon > 0$  ja fikseerime  $\delta > 0$  nii, et

$\delta \text{ mes } E < \frac{\varepsilon}{2}$ . Arvestades, et mõõdu järgi koonduvuse korral  $\lim_n \text{mes } A_n(\delta) = 0$ , leiame  $n_0$ , nii et iga  $n \geq n_0$  korral

$$\text{mes } A_n(\delta) < \delta,$$

kus  $\delta > 0$  on valitud integraali absoluutse pidevuse omaduse põhjal, nii et iga mõõtuva hulga  $e \subset E$  puhul, kus  $\text{mes } e < \delta$ , kehtib võrratus

$$2 \int_e F(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega, kui  $n \geq n_0$ , siis

$$\left| \int_E f_n(x) dx - \int_E f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 4. (P. Fatou). Kui mõõtuvate ja mittenegatiivsete funktsioonide jada

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

koondub peaaegu kõikjal hulgal  $E$  funktsiooniks  $f(x)$ , siis

$$\int_E f(x) dx \leq \sup_n \int_E f_n(x) dx. \quad (1)$$

Tõestus. Kõigepealt kasutame asjaolu, et kui

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{peaaegu kõikjal hulgal } E,$$

siis ka

$$[f_n(x)]_N \rightarrow [f(x)]_N \quad \text{peaaegu kõikjal hulgal } E.$$

Jäägu selle asjaolu tõestamine lugejale.

Kuna  $[f_n(x)]_N$  ja  $[f(x)]_N$  on tõkestatud, siis saame kasutada Lebesgue'i teoreemi piirile ülemineku kohta. Seega võime kirjutada

$$\int_E f(x)_N dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f_n(x)]_N dx. \quad (2)$$

Suvalise  $N$  ja  $n$  korral kehtib võrratus

$$\int_E f_n(x)_N dx \leq \int_E f_n(x) dx \leq \sup_n \int_E f_n(x) dx,$$

seega ka piiril

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)_N dx \leq \sup_n \int_E f_n(x) dx.$$

Asendades võrratuse vasaku poole võrdusest (2), saame

$$\int_E f(x)_N dx \leq \sup_n \int_E f_n(x) dx.$$

Teostades piirprotsessi  $N \rightarrow \infty$ , saamegi (1).

Järeldus 1. Kui mõõtuvate ja mittenegatiivsete funktsioonide kasvav jada

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$$

koondub piirfunktsiooniks  $f(x)$  peaaegu kõikjal hulgal  $E$ , siis

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx.$$

Tõestus. Silmas pidades võrratust

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

saame

$$\int_E f_n(x) dx \leq \int_E f_{n+1}(x) dx,$$

s.t. integraalide jada on  $n$  suhtes monotoonselt kasvav jada. Seega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \sup_n \int_E f_n(x) dx.$$

Fatou teoreemi põhjal saame siis

$$\int_E f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx \quad (3)$$

Teiselt poolt

ja

$$f_n(x) \leq f(x)$$

$$\int_E f_n(x) dx \leq \int_E f(x) dx.$$

Piirile üle minnes  $n$  järgi (piirväärtus on olemas)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx \leq \int_E f(x) dx. \quad (4)$$

Seosed (3) ja (4) annavadki meile võrduse.

Järeldus 2. Kui hulgal  $E$  on defineeritud mõõtivate ja mittenegatiivsete funktsioonide jada

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

kus rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = f(x)$$

koondub peaaegu kõikjal hulgal  $E$ , siis

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x) dx.$$

Selle järelduse kehtivuse näitamiseks on vaja võtta

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

ja kasutada järeldust 1.

Märgime, et kui rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x) dx$$

koondub, siis peab  $f(x)$  olema lõplik peasegu kõikjal hulgal  $E$  (muidu tuleks integraali väärtuseks  $+\infty$ ); millest omakorda järeldub rea  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  koonduvus peasegu kõikjal hulgal  $E$ .

## VI peatükk.

### INTEGREERUVA RUUDUGA FUNKTSIOONID.

#### § 22. Integreeruva ruuduga funktsioonide hulk kui lineaarne normeeritud ruum.

Selles peatükis vaatleme funktsioone, mis on defineeritud mingil mõõtuval hulgal  $E$ , mille mõõt mes  $E > 0$ . Kuna käsitlus ei sõltu sellest hulgast  $E$ , siis jätame selle hulga lähemalt määramata.

Funktsiooni  $f(x)$ , mis on defineeritud hulgal  $E$ , nimetame integreeruva ruuduga funktsiooniks, kui  $f^2(x)$  on integreeruv hulgal  $E$ , s.t. kui

$$(L) \int_E f^2(x) dx < +\infty.$$

Hulgal  $E$  integreeruva ruuduga funktsioonid moodustavad hulga, mida tähistame  $L_2(E)$ . Kuna me aga erinevate määramispiirkondadega integreeruva ruuduga funktsioone ei vaatle, siis võime hulga  $E$  ka märkimata jätta ja kirjutada lihtsalt  $L_2$ .

Esitame nüüd mõned lihtsad aga olulised tulemused integreeruva ruuduga funktsioonide kohta.

1. Võrratusest

$$|f(x)| \leq \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

järeldub, et iga integreeruva ruuduga funktsioon on integreeruv (Lebesgue'i mõttes).

2. Võrratusest

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

Järeldub, et kahe integreeruva ruuduga funktsiooni korrutis on integreeruv.

3. Võrdusest

$$[f(x) \pm g(x)]^2 = f^2(x) \pm 2f(x)g(x) + g^2(x)$$

Järeldub, et integreeruva ruuduga funktsioonide summa ja vahe on integreeruva ruuduga funktsioonid.

4. Võrdusest

$$\int_E [kf(x)]^2 dx = k^2 \int_E f^2(x) dx$$

nähtub, et kui  $f(x) \in L_2$ , siis ka  $kf(x) \in L_2$ , kui  $k$  on lõplik reaalarv.

5. Kehtib võrratus

$$\left[ \int_E f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_E f^2(x) dx \cdot \int_E g^2(x) dx$$

(Cauchy-Bunjakovski võrratus).

Tõestus. Vaatleme ruutkolmliiget

$$\begin{aligned} \Psi(u) = \int_E [uf(x) + g(x)]^2 dx &= u^2 \int_E f^2(x) dx + 2u \int_E f(x)g(x) dx + \\ &+ \int_E g^2(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Kuna ruutkolmliige on mittenegatiivne, peab tema diskriminant olema mittepositiivne. Viimane tingimus ongi samaväärne Cauchy-Bunjakovski võrratusega.

Järeldus. Võttes  $g(x) = 1$  ja asendades  $f(x)$

$f(x)$  -ga, saame Cauchy-Bunjakovski võrratusest võrratuse

$$\left[ \int_E |f(x)| dx \right]^2 \leq \text{mes } E \cdot \int_E f^2(x) dx$$

ehk

$$\int_E |f(x)| dx \leq \sqrt{\text{mes } E} \sqrt{\int_E f^2(x) dx}.$$

Tähendame, et hulga  $L_2$  elemendid on reaalarvuliste väärtustega funktsioonid. Seoste 3. ja 4. põhjal võime

õelda, et  $L_2$  elementide summa ja vahe ning  $L_2$  elemendi ja reaalarvu korrutis on  $L_2$  element. Kuna ülalnimetatud tehete taanduvad tehetele reaalarvudega, viimaste puhul kehtivad aga lineaali aksioomid (vt. § 6), siis on ka  $L_2$  puhul täidetud lineaali aksioomid.

Selleks, et hulka  $L_2$  saaks käsitleda lineaarse normeeritud ruumina, tuleb defineerida selles hulgas veel elemendi norm. Elemendi  $f(x) \in L_2$  normi defineerime võrdusega

$$\|f\| = \sqrt{\int_E f^2(x) dx}.$$

Normi mittenegatiivsus järeldub vahetult normi definitsioonist.

Kontrollime normi aksioomide kehtivust.

1°  $\|f\| = 0$  siis ja ainult siis, kui  $f(x)$  on nullfunktsioon.

Kuna mittenegatiivse funktsiooni integraal positiivse määrduga hulgal on võrdne nulliga parajasti siis, kui funktsioon on null peaaegu kõikjal sellel hulgal, siis tuleb aksioomi 1° kehtivuseks mõista elementide võrdust ruumis  $L_2$  kui funktsioonide võrdust peaaegu kõikjal hulgal  $E$ . Võrdust ruumis  $L_2$  tähistame

$$f \sim g$$

(ilma argumendi tähiseta).

$$2^\circ \text{ Võrdus } \|kf\| = |k| \|f\|$$

järeldub ilmest seosest

$$\sqrt{\int_E k^2 f^2(x) dx} = |k| \sqrt{\int_E f^2(x) dx}.$$

3° Kolmnurga aksioomi

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

kehtivuse saab näidata järgmiselt.

Lähtume samasusest

$$\int_E f^2(x) dx + \int_E g^2(x) dx = \left( \sqrt{\int_E f^2(x) dx} \right)^2 + \left( \sqrt{\int_E g^2(x) dx} \right)^2$$

Cauchy-Bunjakovski võrratusest saame

$$\int_E f(x)g(x) dx \leq \sqrt{\int_E f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_E g^2(x) dx}.$$

Korrutades viimase võrratuse kahega ja liites ülaltoodud võrdusele, saame

$$\int_E [f(x) + g(x)]^2 dx \leq \left( \sqrt{\int_E f^2(x) dx} + \sqrt{\int_E g^2(x) dx} \right)^2,$$

kust pärast ruutjuure võtmist saamegi kolmurga aksioomi.

### § 23. Keskmine koonduvus.

Mis tahes lineaarses normeeritud ruumis saab jada piirväärtuse mõistet defineerida normi mõiste abil järgmiselt: punkti  $x$  nimetame jada  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) piirväärtuseks, kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

See üldine definitsioon on rakendatav muidugi ka ruumi  $L_2$  korral. Kuna normil ruumis  $L_2$  on konkreetne tähendus, siis saab siin ka normi järgi koonduvus konkreetsele sisule anda. Seejärel on otstarbekohane sellele koonduvuse mõistele anda ka eri nime - keskmine koonduvus. On selge, et

$$\|f_n - f\| = \sqrt{\int_E [f_n(x) - f(x)]^2 dx}$$

läheneb nullile, läheneb nullile ka selle avaldise ruut ja vastupidi. Seega võib keskmist koonduvust defineerida ka nii: ütleme, et jada  $f_n(x) \in L_2$  koondub keskmiselt funktsiooniks  $f(x) \in L_2$ , kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Asjaolu, et mingi jada  $f_n(x)$  koondub keskmiselt funktsiooniks  $f(x)$ , tähistame

$$f_n \rightarrow f$$

(ilma argumendi tähiseta), kuna kirjutis

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

tähendab koondumist igas punktis  $x \in E$ .

Selgitame nüüd keskmise koonduvuse vahekorda teiste koonduvuse mõistetega.

1. Ühtlasest koonduvusest järeldub keskmine koonduvus.

Kui  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  ühtlaselt  $x \in E$  suhtes, siis iga-  
le  $\varepsilon > 0$  vastab  $N$ , nii et iga  $x \in E$  korral kehtib

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

kui aga  $n > N$ .

Siis

$$\int_E [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon^2 \text{ mes } E,$$

kui  $n > N$ . See aga tähendabki, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0,$$

m. o. t. t.

2. Koondumisest igas punktis ei järeldu aga keskmine koonduvus. Seda tõestab järgmine näide. Defineerime lõigul  $[0,1]$  funktsioonid  $f_n(x)$ :

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{kui } x \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0, & \text{kui } x \in [0,1] \setminus (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Ilmselt  $f_n(x) \rightarrow 0$  iga  $x \in [0,1]$  korral.

See funktsioonide jada aga ei koonu keskmiselt null-funktsiooniks, kuna

$$\int_0^1 f_n^2(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n,$$

mis läheneb  $n \rightarrow \infty$  korral mitte nullile, vaid lõpmatusele.

3. Kui jada koondub keskmiselt, ei tarvitse ta koonduda üheski punktis. Seda väidet kinnitab järgmine näide. Defineerime funktsioonid

$$f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \dots, f_k^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

hulgal  $[0, 1]$ :

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), \\ 0, & \text{kui } x \in [0, 1] \setminus \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right). \end{cases}$$

Moodustame nüüd jada

$$f_1^{(1)}(x), f_1^{(2)}(x), f_2^{(2)}(x), \dots, f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \dots, f_k^{(k)}(x), \dots$$

Kerge on näha, et see jada ei koondu üheski  $[0, 1]$  punktis. Teiselt poolt näeme, et see jada koondub keskmiselt null-funktsiooniks. Tõepoolest

$$\int_0^1 [f_1^{(k)}(x)]^2 dx = \frac{1}{k},$$

mis läheneb nullile, kui  $k \rightarrow \infty$ .

Seega keskmine koonduvus ja koonduvus igas punktis pole võrreldavad.

4. Keskmisest koonduvusest järeldub koonduvus mõõdu järgi.

Koonduvus mõõdu järgi tähendab seda, et iga  $\epsilon > 0$  korral hulga

$$A_n(\epsilon) = E(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

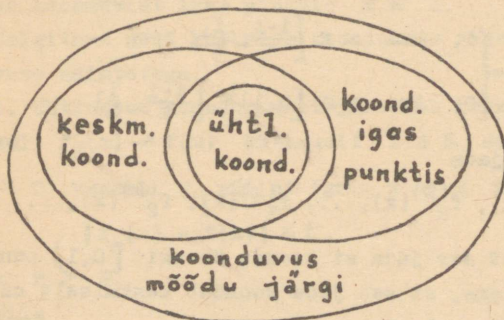
mõõt läheneb nullile.

Kehtib võrratus

$$\int_E [f_n(x) - f(x)]^2 dx \geq \int_{A_n(\epsilon)} (f_n - f)^2 dx \geq \epsilon^2 \text{mes } A_n(\epsilon).$$

Kui võrratuse vasak pool läheneb nullile, siis peab ka  $\epsilon^2$  mes  $A_n(\epsilon) \rightarrow 0$ , s.t. mes  $A_n(\epsilon) \rightarrow 0$ , mis tähendabki  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ , m. o. t. t.

Ülevaatlikult võib neid koonduvuse vahekorði iseloomustada järgmise joonise abil



Joon. 19.

Lineaarsete normeeritud ruumide käsitlemisel tähendasime, et iga koonduv jada on tingimata fundamentaaljada. Teiselt poolt leidub aga lineaarseid normeeritud ruume, kus kõik fundamentaaljadad ei koondu selle ruumi punktideks. Niisuguseid ruume nimetatakse mittetäielikeks ruumideks.

Näitame, et ruum  $L_2$  on täielik ruum, s.t. et iga selle ruumi fundamentaaljada koondub mingiks selle ruumi punktiks.

Olgu  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  ruumi  $L_2$  fundamentaaljada. Siis iga  $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$  puhul leidub  $N(k)$ , nii et

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k},$$

kui  $m, n \geq N(k)$ . Ilmselt kehtib  $N(k) \leq N(k+1)$  iga  $k$  puhul.

Võtame nüüd indeksid  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$

$$n_1 \geq N(1),$$

$$n_2 \geq N(2), \quad n_2 \neq n_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$n_k \geq N(k), \quad n_k \neq n_i \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

$\dots\dots\dots$

Siis

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad (1)$$

kuna  $n_{k+1}, n_k \geq N(k)$ .

Summeerides võrratused (1), saame

$$\sum_K \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < +\infty \quad (2)$$

Kasutame võrratust (järeldus Cauchy-Bunjakovski võrratusest)

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \leq \sqrt{\text{mes } E} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|,$$

kust seose (2) abil saame

$$\sum_K \int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx < +\infty.$$

Kasutades järeldust Fatou teoreemi juures, saame väita, et rida

$$\sum_K |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

koondub peaaegu kõikjal hulgal  $E$ . Kuid siis koondub peaaegu kõikjal hulgal  $E$  ka rida

$$f_{n_1}(x) + \sum_{K=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)].$$

Kuna selle rea osasumma tuleb  $f_{n_m}(x)$ , siis järelikult

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x)$$

koondub ja omab lõpliku piirväärtuse peaaegu kõikjal hulgal E. Defineerime nüüd funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x), & \text{kui piirväärtus eksisteerib} \\ & \text{ja on lõplik,} \\ 0 & \text{, teistel juhtudel.} \end{cases}$$

Näitame, et see  $f(x)$  on ruumi  $L_2$  element ja  $f_m \rightarrow f$ .

Selleks valime suvalise  $\varepsilon > 0$  ja leiame  $N(\varepsilon)$ , nii et kehtib

$$\|f_m - f_{n_k}\| < \varepsilon,$$

kui  $m, n_k > N(\varepsilon)$ . Viimane võrratus on samaväärne võrratusega

$$\int_E [f_m(x) - f_{n_k}(x)]^2 dx < \varepsilon^2.$$

Vaatleme nüüd funktsioone

$$F_k(x) = [f_m(x) - f_{n_k}(x)]^2,$$

kus indeksi  $m$  loeme fikseerituks. See funktsioonide jada koondub peaaegu kõikjal hulgal E piirfunktsiooniks

$$[f_m(x) - f(x)]^2.$$

Kasutades Fatou teoreemi, saame

$$\int_E [f_m(x) - f(x)]^2 dx \leq \sup_{n_k > N(\varepsilon)} \int_E [f_m(x) - f_{n_k}(x)]^2 dx \leq \varepsilon^2$$

$$\|f_m - f\| \leq \varepsilon, \quad \text{kui } m > N(\varepsilon).$$

Saadud tulemus tähendabki, et  $f(x)$  on ruumi  $L_2$  element ja  $f_m \rightarrow f$ .

Esitame veel ühe vajaliku teoreemi.

Teoreem 1. Kui  $f_k \rightarrow f$ , siis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g(x) f_k(x) dx = \int_E g(x) f(x) dx, \quad (3)$$

kus  $g(x)$  on mis tahes ruumi  $L_2$  element.

Tõestus. Lähtume avaldisest

$$\left| \int_E g(x) f_k(x) dx - \int_E g(x) f(x) dx \right| = \left| \int_E g(x) [f_k(x) - f(x)] dx \right|,$$

millele rakendame Cauchy-Bunjakovski võrratust. Saame

$$\begin{aligned} \left| \int_E g(x) [f_k(x) - f(x)] dx \right| &\leq \sqrt{\int_E g^2(x) dx} \sqrt{\int_E [f_k(x) - f(x)]^2 dx} \\ &= \|g\| \|f_k - f\|. \end{aligned}$$

Kui  $f_k \rightarrow f$ , siis  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ , millega võrdus (3) on tõestatud.

#### § 24. Ortogaalsed süsteemid.

Käesolevas paragrahvis selgitame ruumi  $L_2$  funktsioonide aproksimeerimise võimalusi teatavate  $L_2$  funktsioonide abil. Kõigepealt esitame mõned vajalikud mõisted.

Ruumi  $L_2$  funktsioone  $f(x)$  ja  $g(x)$  nimetame ortogonaalseteks, kui

$$\int_E f(x) g(x) dx = 0.$$

Ruumi  $L_2$  funktsiooni  $f(x)$  nimetame normeeritud funktsiooniks, kui

$$\int_E f^2(x) dx = 1,$$

mis on samaväärne tingimusega  $\|f\| = 1$ .

Ruumi  $L_2$  funktsioonide  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  süsteemi (hulka) nimetame ortonormeeritud süsteemiks,

kui

$$\int_E \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = l, \\ 0, & \text{kui } k \neq l, \end{cases}$$

s.t. kõik selle süsteemi funktsioonid on normeeritud ja mis tahes kaks erinevat süsteemi funktsiooni on ortogonaalsed.

Ortonormeeritud süsteemi näiteks on trigonomeetriline süsteem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

lõigul  $[-\pi, \pi]$

Olgu meile antud mingi ortonormeeritud süsteem  $\{\varphi_n(x)\}$

ja mingi funktsioon  $f(x)$ , mis on defineeritud järgmiselt:

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x) + \dots + c_n \varphi_n(x). \quad (1)$$

Korrutades selle avaldise  $\varphi_k(x)$ -ga ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) ja integreerides üle hulga  $E$ , saame

$$\int_E f(x) \varphi_k(x) dx = c_k. \quad (2)$$

Siit näeme, et kordajad  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) arendises (1) määratakse üheselt valemil (2) abil, mis on analoogiline Fourier' rea kordajate arvutamise valemitega. Suurusi  $c_k$  nimetataksegi funktsiooni  $f(x)$  Fourier' kordajateks süsteemis  $\{\varphi_n(x)\}$ , Rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

kus kordajad  $c_k$  on arvatatud valemist (2), nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  Fourier' reaks süsteemis  $\{\varphi_n(x)\}$ .

Võib näidata, et Fourier' rea osasummadel on nn. minimaalsuse omadus, s.t. mingi  $f(x) \in L_2$  ja  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(x)$  (n. on fikseeritud) korral on

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|$$

minimaalne täpselt siis, kui kordajad  $\lambda_k$  on võrdsed funktsiooni  $f(x)$  Fourier' kordajatega.

On ilmne, et kordajad  $\lambda_k$ , mis minimiseerivad normi, minimiseerivad ka normi ruudu ja ümberpöörduvalt. Seepärast võime uurida

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|^2$$

minimaalsuse tingimusi. Saame

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|^2 &= \int_E \left[ f(x) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_E f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_E f(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{k, \ell=1}^n \lambda_k \lambda_\ell \int_E \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx, \end{aligned}$$

kust arvestades  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormeeritust ja  $c_k$  definitsiooni, saame

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 + \sum_{k=1}^n (c_k - \lambda_k)^2.$$

Viimasest seosest nähtubki, et  $\left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \right\|^2$  on minimaalne täpselt siis, kui  $\lambda_k = c_k$ .

Äsjatõestatust järeldub, et funktsiooni  $f(x)$  ja tema Fourier' rea osasumma  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$  puhul kehtib võrdus

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2. \quad (3)$$

Võrdust (3) nimetatakse Besseli samasuseks. Võrduse (3) vasaku poole mittenegatiivsusest järeldub

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^n c_k^2. \quad (4)$$

Kuna võrratus (4) kehtib iga  $n$  korral, siis teostades piirprotsessi  $n \rightarrow \infty$ , saame

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \quad (5)$$

Võrratus (5) ütleb, et iga funktsiooni  $f(x) \in L_2$  Fourier' kordaja ruutudest moodustatud rida koondub. Mõne funktsiooni  $f(x) \in L_2$  puhul võib esineda võrdus

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \quad (6)$$

Sel juhul öeldakse, et selle funktsiooni  $f(x)$  puhul kehtib kinnisuse tingimus. Seosest (3) on näha kinnisuse tingimuse tähendus: sel korral

$$\|f - S_n\|^2 \rightarrow 0,$$

s.t. et funktsiooni  $f(x)$  Fourier' rida koondub keskmiselt selleks funktsiooniks.

Kui kinnisuse tingimus kehtib iga  $f(x) \in L_2$  puhul, siis ütleme, et vastav ortonormeeritud süsteem  $\{\varphi_n(x)\}$  on kinnine. Sel korral iga  $f(x) \in L_2$  Fourier' rida koondub keskmiselt selleks funktsiooniks.

Vaatleme nüüd lähemalt, kuidas kindlaks teha mingi ortonormeeritud süsteemi kinnisust.

Hulka  $A$  mingis lineaarses normeeritud ruumis  $X$  nimetame kõikjal tihedaks selles ruumis  $X$ , kui iga  $x \in X$  ja  $\varepsilon > 0$  puhul leidub  $y \in A$ , nii et

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

Teisiti võime öelda, et hulk  $A$  on ruumis  $X$  kõikjal tihe, kui  $A' = X$ .

Teoreem. (Steklov-Severini) Olgu hulk  $A$  ruumis  $L_2$  kõikjal tihe. Kui kinnisuse tingimus on täidetud hulga  $A$  iga funktsiooni puhul, siis kehtib ta ruumi  $L_2$  iga funktsiooni korral, s.t. siis on  $\{\varphi_k(x)\}$  kinnine.

Tõestus. Kõigepealt tähendame, et kehtivad järgmised seosed:

$$1) S_n(kf) = kS_n(f),$$

$$2) S_n(f + g) = S_n(f) + S_n(g),$$

$$3) \|S_n(f)\| \leq \|f\|,$$

kus  $S_n(f)$  tähendab funktsiooni  $f(x)$  Fourier' rea osasummat. Võrdused 1) ja 2) on ilmsed, võrratust 3) võib aga tuletada järgmiselt:

$$\|S_n(f)\|^2 = \int_E S_n^2(f) dx = \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Kinnisuse tingimus on samaväärne tingimusega, et iga  $f(x) \in L_2$  korral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\| = 0.$$

Hindamegi vastavat normi, kasutades normi omadust 3°:

$$\|f - S_n(f)\| \leq \|f - g\| + \|g - S_n(g)\| + \|S_n(g) - S_n(f)\|.$$

Valime  $g(x) \in A$ , nii et  $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$ , ning aga nii et

$$\|g - S_n(g)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \text{ Arvestades asjaolu, et } \|S_n(g) - S_n(f)\| =$$

$$= \|S_n(g - f)\| \leq \|g - f\|, \text{ on ka see liige väiksem kui}$$

$\frac{\varepsilon}{3}$ . Seega

$$\|f - S_n(f)\| < \varepsilon,$$

kui aga  $n$  on küllalt suur. Teoreem on tõestatud.

Tõestame, et trigonomeetriline süsteem on ruumis  $L_2[-\pi, \pi]$  kinnine. Steklov-Severini teoreemi kohaselt piisab kinnisuse tingimuse kehtivuse näitamisest mingi hulga  $A$  puhul, kus  $A' = L_2$ . Näitame, et hulgaks  $A$  võib võtta trigonomeetriliste polünoomide hulga. Tõestuse esitame sammude kaupa.

1. On ilmne, et  $f(x) \in L_2$  võib omada väärtusi  $\pm \infty$  ainult hulgal mõõduga 0. Sellel hulgal funktsiooni väärtusi muutes ei muutu üldse integraali väärtus. Nii et leidub alati lõplik funktsioon  $g(x) \in L_2$ , mille puhul

$$\|f - g\|_2^2 = \int_E [f(x) - g(x)]^2 dx = 0.$$

2. Mis tahes lõpliku funktsiooni  $g(x) \in L_2$  puhul kehtivad seosed

$$E(|g| > 1) \supset E(|g| > 2) \supset \dots \supset E(|g| > k) \supset \dots$$

ja

$$E(g = \pm \infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(|g| > k) = \emptyset,$$

millest järeldub § 13 punkt 4) põhjal

$$\lim_k \text{mes } E(|g| > k) = 0.$$

Konstrueerime funktsioonid ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$g_k(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kui } |g(x)| \leq k, \\ 0, & \text{kui } |g(x)| > k, \end{cases}$$

mis on mõõtuvad ja tõkestatud hulgal  $E$ . Kehtib võrdus

$$E(g \neq g_k) = E(|g| > k),$$

millest järeldub

$$\lim_k \text{mes } E(g \neq g_k) = 0.$$

Kasutades integraali absoluutset pidevust, saame vastavalt suvalisele  $\varepsilon > 0$  leida  $\delta > 0$ , nii et mes  $e < \delta$  korral

$$\int_E g^2(x) dx < \varepsilon^2.$$

Siis

$$\|g - g_k\|^2 = \int_E [g(x) - g_k(x)]^2 dx = \int_E g^2(x) dx \leq \varepsilon^2.$$

$E(g \neq g_k)$

Viimane samm on põhjendatud sellega, et alati saame  $k$  valida nii, et mees  $E(g \neq g_k) < \delta^2$ . Seega

$$\|g - g_k\| < \varepsilon.$$

3. Olgu nüüd  $h(x) \in L_2$  tõkestatud funktsioon, kus  $|h(x)| \leq K$ . Luzini teoreemi põhjal leidub pidev ja tõkestatud funktsioon  $\varphi(x)$ , nii et

$$\text{mes } E(h \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{4K^2} \quad \text{ja} \quad |\varphi(x)| \leq K.$$

Siis

$$\|h - \varphi\|^2 = \int_E [h(x) - \varphi(x)]^2 dx = \int_{E(h \neq \varphi)} [h(x) - \varphi(x)]^2 dx < 4K^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4K^2} = \varepsilon^2.$$

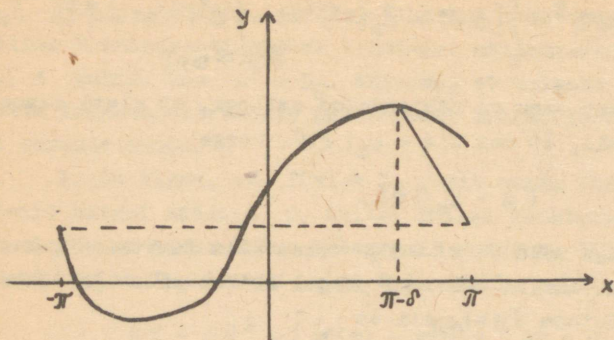
Seega

$$\|h - \varphi\| < \varepsilon$$

4. Olgu meil hulgaks  $E$  nüüd lõik  $[-\pi, \pi]$ . Konstrueerime vastavalt pidevale funktsioonile  $\varphi(x)$  pideva ja perioodilise funktsiooni  $\psi(x)$

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{kui } x \in [-\pi, \pi - \delta] \\ \frac{\varphi(\pi - \delta) - \varphi(-\pi)}{\delta} (\pi - x) + \varphi(-\pi), & \text{kui} \\ & x \in [\pi - \delta, \pi] \end{cases}$$

On selge, et kui  $|\varphi(x)| < K$ , siis ka  $|\psi(x)| < K$ . Konstruktiooni iseloomustab joonis 20:



Joon. 20.

Siis saame

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x) - \psi(x)]^2 dx \leq \int_{\pi-\delta}^{\pi} 4K^2 dx \leq 4K^2 \delta < \varepsilon^2,$$

kui  $\delta < \frac{\varepsilon^2}{4K^2}$ . Seega

$$\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$$

5. Kasutame Weierstrassi teoreemi.<sup>12</sup> Lõigul  $[-\pi, \pi]$  pideva ja perioodilise funktsiooni  $\psi(x)$  puhul leidub trigonomeetriline polünoom  $T(x)$ , nii et

$$|\psi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \pi, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Siis saame  $\|\psi - T\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [\psi(x) - T(x)]^2 dx \leq \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \cdot 2\pi = \varepsilon^2$

Seega kehtib

$$\|\psi - T\| < \varepsilon.$$

<sup>12</sup> Г.М.Фихтенгольц, Основы математического анализа, II кбиде, 24. ptk.

Kasutades punktides 1) - 5) saadud tulemisi, võime kirjutada

$$\|f - T\| \leq \|f - g\| + \|g - h\| + \|h - \varphi\| + \|\varphi - \psi\| + \|\psi - T\| < 4\varepsilon$$

mis ütleb, et trigonomeetriliste polünoomide hulk on ruumis  $L_2[-\pi, \pi]$  kõikjal tihe. Seega võib kinnisuse tingimust kontrollida ainult trigonomeetriliste polünoomide puhul, kus ortonormeeritud süsteemiks on trigonomeetriline süsteem.

Võib üldiselt näidata, et mis tahes ortonormeeritud süsteemi  $\{\varphi_n(x)\}$  korral on funktsioonide

$$S(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$$

puhul kinnisuse tingimus täidetud. Tõepoolest

$$\|S\|^2 = \int_E \left[ \sum c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \sum_{k, \ell=1}^n c_k c_\ell \int_E \varphi_k(x) \varphi_\ell(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k^2$$

Erijuhul saame siit soovitud tulemuse ka trigonomeetriliste polünoomide jaoks. Steklov-Severini teoreemi põhjal järeldub sellest aga trigonomeetrilise süsteemi kinnisus.

## § 25. Fischer-Riesz'i teoreem.

Teoreem 1. (E. Fischer, F. Riesz). Olgu ruumis  $L_2$  antud mingi ortonormeeritud süsteem  $\{\varphi_n(x)\}$  ja olgu antud arvud  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), nii et

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty.$$

Siis leidub funktsioon  $f(x) \in L_2$ , mis rahuldab tingimusi:

- 1) arvud  $c_k$  on selle funktsiooni Fourier' kordajad,
- 2) funktsiooni  $f(x)$  puhul on täidetud kinnisuse tingimus.

Tõestus. Võtame

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x).$$

Näitame, et jada  $S_n(x)$  on ruumi  $L_2$  fundamentaaljada. Eel-  
dades, et  $m > n$ , saame

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|^2 &= \int_E [S_m(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_E \left[ \sum_{k=n+1}^m c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \sum_{k=n+1}^m c_k^2. \end{aligned}$$

Kuna rida  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$  on eelduse põhjal koonduv, siis läheneb  
selle rea jätkliige nullile, s.t.  $\sum_{k=n+1}^m c_k^2$  saab kui tahes  
väikeseks, kui  $n$  on küllalt suur (mis tahes  $m > n$  kor-  
ral). Seega on jada  $\{S_n(x)\}$  fundamentaaljada. Kuna ruum  
 $L_2$  on täielik, siis

$$S_n \rightarrow f.$$

Arvutame selle funktsiooni Fourier' kordajad, kasuta-  
des teoreemi 1 piirile ülemineku kohta keskmise koondumi-  
se korral (§ 22).

$$\int_E f(x) \varphi_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E S_n(x) \varphi_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \int_E \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} c_k = c_k$$

Funktsiooni  $f(x)$   $k$ -ndaks Fourier' kordajaks tuleb  $c_k$ ,  
millega esimene teoreemi tingimus on täidetud.

Teiseks, funktsioon  $f(x)$  oli defineeritud kui jada  
 $S_n(x)$  piirfunktsioon keskmise koonduvuse mõttes, kusjuu-

res  $S_n(x)$  on  $f(x)$  Fourier' rea osasumma. Kuna nüüd  $f(x)$  Fourier' rida koondub keskmiselt selleks funktsiooniks, siis on kinnisuse tingimus  $f(x)$  jaoks täidetud.

Teoreemi võib täiendada märkusega, et selliseid funktsioone, mis rahuldavad Fischer-Riesz'i teoreemi mõlemaid tingimusi, võib olla ainult üks (ruumi  $L_2$  võrdsuse mõttes).

Tõepoolest, kui oletada, et neid funktsioone on kaks:  $f(x)$  ja  $g(x)$ , siis saame kinnisuse tingimusest, et  $S_n(x)$  koondub keskmiselt nii funktsiooniks  $f(x)$  kui ka  $g(x)$ . Seega

$$\|f - g\| \leq \|f - S_n\| + \|S_n - g\| < \varepsilon,$$

kust  $\varepsilon \rightarrow 0$  korral saame  $\|f - g\| = 0$ , millest normi mitteinegatiivsuse tõttu saame

$$\|f - g\| = 0.$$

Normi omaduse  $1^\circ$  põhjal järeldub sellest

$$f = g.$$

Et selgitada, millistel tingimustel Fourier' kordajate jada määrab ruumi  $L_2$  funktsiooni üheselt, on otstarbekohane kasutada ortogonaalse süsteemi täielikkuse mõistet.

Ortogonaalset süsteemi  $\{\varphi_n(x)\}$  nimetatakse täielikuks, kui seostest

$$c_k = \int_E f(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

järeldub

$$f = 0.$$

Seega täieliku süsteemi korral on ainult nullfunktsioon ortogonaalne kõigi funktsioonidega  $\varphi_k(x)$ .

Teoreem 2. Selleks, et antud Fourier' kordajate jada dale  $c_k$ , kus  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ , vastaks üksainus  $f(x)$ ,

on tarvilik ja piisav, et vaadeldav ortonormeeritud süsteem oleks täielik.

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et igale jadale  $\{c_k\}$ , kus  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ , vastab täpselt üks funktsioon  $f(x)$ . Tulemus kehtib ka jada  $c_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) puhul. Sellised Fourier' kordajad on aga funktsioonil  $f = 0$ . Ühesuse tõttu võimegi väita, et kui  $c_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), siis vastav funktsioon  $f = 0$ .

Piisavus. Eeldame, et süsteem on täielik. Oletame, et mingile  $c_k$  jadale ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ ) vastab kaks funktsiooni  $f(x) \in L_2$  ja  $g(x) \in L_2$ , mille Fourier' kordajad on need arvud  $c_k$ . Moodustame funktsiooni  $f(x) - g(x)$  ja arvutame selle funktsiooni Fourier' kordajad

$$\int_E [f(x) - g(x)] \varphi_k(x) dx = \int_E f(x) \varphi_k(x) dx - \int_E g(x) \varphi_k(x) dx = c_k - c_k = 0.$$

Kuna  $f(x) - g(x)$  Fourier' kordajad tulevad nullid, siis peab ortonormeeritud süsteemi täielikkuse tõttu see funktsioon olema null, s.t.

$$f - g = 0$$

ehk

$$f = g.$$

Tuleb märkida, et ruumi  $L_2$  puhul on ortonormeeritud süsteemi kinnisus ja täielikkus samaväärsed mõisted, s.t. süsteemi kinnisusest järeldub täielikkus ja vastupidi.

Kinnisusest järeldub täielikkus. Võtame funktsiooni  $f(x) \in L_2$ , nii et  $c_k = \int_E f(x) \varphi_k(x) dx = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Kinnisuse tingimus on kõikide  $L_2$  funktsioonide puhul on täidetud, seega

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = 0.$$

Normi omaduse tõttu järeldub võrdusest  $\|f\| = 0$  aga  $f = 0$ .

Seega on süsteem täielik.

Täielikkusest järeldub kinnisus. Oletame vastuväiteliselt, et mingi funktsiooni  $f(x)$  puhul pole kinnisuse tingimus täidetud. Seega

$$\|f\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \text{kus } c_k = \int_E f(x) \varphi_k(x) dx.$$

Fischer-Riesz'i teoreemi põhjal saame leida sellise funktsiooni  $g(x) \in L_2$ , nii et selle funktsiooni Fourier' kordajad on samad  $c_k$  ja selle funktsiooni jaoks on täidetud kinnisuse tingimus, s.t.

$$c_k = \int_E g(x) \varphi_k(x) dx \quad \text{ja} \quad \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Kuid siis on vahe  $f(x) - g(x)$  Fourier' kordajad võrdsed nulliga. Süsteemi täielikkuse tõttu

$$f - g = 0$$

s.t.

$$f = g.$$

Sellest järeldub aga, et

$$\|f\| = \|g\|.$$

Teiselt poolt saime aga, et

$$\|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|f\|^2,$$

mis on vastuolus normide võrdusega.

Seadud vastuolu näitab, et kinnisuse tingimus peab

kehtima iga funktsiooni  $f(x) \in L_2$  puhul.

Süsteemi kinnisust ja täielikkust on võimalik interpreteerida  $n$ -dimensionaalses eukleidilises ruumis  $E_n$ .

Funktsiooni normile  $f$  vastab vektori pikkus  $|\vec{a}|$ , ortonormeeritud süsteemile vastavad telgede ühikvektorid, Fourier' kordajatele  $c_k$  vastavad vektori koordinaadid  $a_i$ .

Kinnisuse tingimusele vastab võrdus

$$|\vec{a}|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

süsteemi täielikkus tähendab, et koordinaatidele  $a_i = 0$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) vastab nullvektor ja ainult see. Süsteemi mittetäielikkus tähendab aga seda, et vaatluse all pole mitte kõik telgede ühikvektorid, vaid ainult osa neist.

## VII peatükk.

### TÕKESTATUD MUUDUGA FUNKTSI- OONID. STIELTJESI INTEGRAL.

#### § 26. Tõkestatud muuduga funktsi- oonid.

Käesolevas paragrahvis käsitleme tõkestatud muuduga funktsioone, mis kuuluvad mõtivate funktsioonide hulka.<sup>13</sup>

Olgu lõigul  $[a, b]$  antud lõplik funktsioon  $f(x)$ .  
Jaotame lõigu  $[a, b]$  punktidega  $x_1$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

osadeks ja moodustame summa

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \dots$$

Summade  $v$  ülemist raja nimetame funktsiooni  $f(x)$  täismuuduks lõigul  $[a, b]$  ja tähistame seda

$$\text{var}(f) \\ [a, b]$$

Kui  $\text{var}(f) < +\infty$ , siis ütleme, et funktsioon  $f(x)$  on  
 $[a, b]$  tõkestatud muuduga.

Näide 1. Lõigul on monotoonne funktsioon tõkesta-  
tud muuduga.

<sup>13</sup> Tõkestatud muuduga funktsioone nimetatakse sageli ka tõkestatud variatsiooniga funktsioonideks. Sellest ka sümbol "var".

Vaatleme näiteks lõigul  $[a, b]$  monotoonselt kasvavat funktsiooni. Kuna  $x_k < x_{k+1}$ , siis

$$f(x_k) \leq f(x_{k+1}) \quad \text{ehk} \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0$$

ja

$$v = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = f(b) - f(a).$$

Seega summa  $v$  ei sõltu üldse alajaotusest, mistõttu

$$\begin{aligned} \text{var}(f) &= f(b) - f(a) \\ &[a, b] \end{aligned}$$

Teoreem 1. Iga tõekestatud muuduga funktsioon on tõekestatud.

Tõestus. Olgu  $f(x)$  lõigul  $[a, b]$  tõekestatud muuduga. Võtame alajaotuse  $x_0 = a < x_1 < x_2 = b$  ja moodustame summa  $v$ .

$$v = |f(x_1) - f(a)| + |f(b) - f(x_1)| \leq \text{var}(f) \quad (1) \\ [a, b]$$

Võrratusest

$$|f(x_1)| - |f(a)| \leq |f(x_1) - f(a)|$$

ja seosest (1) järeldub

$$|f(x_1)| \leq |f(a)| + \text{var}(f), \quad \text{m. o. t. t.} \\ [a, b]$$

Teoreem 2. Tõekestatud muuduga funktsioonide summa, vahe ja korrutis on tõekestatud muuduga funktsioon.

Tõestus. Olgu funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  lõigul  $[a, b]$  tõekestatud muuduga. Tähistame  $s(x) = f(x) + g(x)$ . Võrratusest

$$|s(x_{k+1}) - s(x_k)| \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$$

järeldub

$$\text{var}(s) \leq \text{var}(f) + \text{var}(g), \\ [a, b] \quad [a, b] \quad [a, b]$$

millest nähtub, et  $s(x)$  on lõigul  $[a, b]$  tõkestatud muuduga.

Funktsioonide vahe jaoks on tõestus analoogiline.

Olgu  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ . Tähistame

$$M_1 = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{ja} \quad M_2 = \sup_{x \in [a, b]} g(x)$$

Kehtib võrratus

$$\begin{aligned} |p(x_{k+1}) - p(x_k)| &\leq |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_{k+1})| + \\ &\quad + |f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \leq \\ &\leq M_2 |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + M_1 |g(x_{k+1}) - g(x_k)|, \end{aligned}$$

mille põhjal

$$\text{var}_{[a, b]}(p) \leq M_2 \text{var}_{[a, b]}(f) + M_1 \text{var}_{[a, b]}(g).$$

Täienduseks märgime, et kui  $f(x)$  ja  $g(x)$  on tõkestatud muuduga funktsioonid, kus  $g(x) \gg \epsilon > 0$ , siis on ka jagatis  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tõkestatud muuduga funktsioon.

Teoreem 3. Olgu lõigul  $[a, b]$  defineeritud lõplik funktsioon  $f(x)$ . Mis tahes punkti  $c$  ( $a < c < b$ ) korral kehtib võrdus

$$\text{var}_{[a, b]}(f) = \text{var}_{[a, b]}(f) + \text{var}_{[c, b]}(f).$$

Tõestus. Jaotame lõigud  $[a, c]$  ja  $[c, b]$  jaotuspunktidega  $y_k$  ja  $z_k$ :

$$y_0 = a < y_1 < \dots < y_m = c,$$

$$z_0 = c < z_1 < \dots < z_n = b$$

ning moodustame summad

$$v_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|,$$

$$v_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|.$$

Punktid  $y_k, z_k$  jaotavad osadeks ka kogu lõigu  $[a, b]$ .

Tähistame nendele jaotuspunktilele vastavat summat  $v$  abil.

Kehtib võrdus

$$v = v_1 + v_2, \quad (2)$$

millest järeldub

$$\text{var}(f) \underset{[a, b]}{\geq} v_1 + v_2$$

ja edasi

$$\text{var}(f) \underset{[a, b]}{\geq} \text{var}(f) \underset{[a, c]}{+} \text{var}(f) \underset{[c, b]}{.} \quad (3)$$

Teiselt poolt lähtudes võrdusest (2), saame

$$v \underset{[a, c]}{\leq} \text{var}(f) \underset{[c, b]}{+} \text{var}(f),$$

millest omakerda järeldub

$$\text{var}(f) \underset{[a, b]}{\leq} \text{var}(f) \underset{[a, c]}{+} \text{var}(f) \underset{[a, b]}{.} \quad (4)$$

Võrratused (3) ja (4) annavadki võrduse.

Teoreem on üldistatav mis tahes lõpliku arvu osalõikude  $[a, c_1], [a, c_2], \dots, [c_k, b]$  juhule.

Järeldus 1. Kui funktsioon  $f(x)$  on tõkestatud muuduga lõigul  $[a, b]$ , siis on ta tõkestatud muuduga selle mis tahes osalõigul.

Järeldus 2. Kui funktsioon  $f(x)$  on tõkestatud muuduga kõikidel osalõikudel  $[a, c_1], \dots, [c_k, b]$ , siis on ta tõkestatud muuduga ka kogu lõigul  $[a, b]$ .

Teoreem 5. Selleks, et funktsioon  $f(x)$  oleks läigul  $[a, b]$  tõkestatud muuduga, on tarvilik ja piisav, et ta oleks esitatav kahe monotoonselt kasvava funktsiooni vahena.

Tõestus. Tingimuse piisavus järeldub näitest 1 ja teoreemist 2.

Tarvilikkus. Defineerime funktsiooni

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \text{var } (f), & \text{kui } x \neq a, \\ [a, x] & \\ 0, & \text{kui } x = a. \end{cases}$$

Funktsioon  $(x)$  on monotoonselt kasvav.

Tõepoolest, võttes  $a < x_1 < x_2 < b$ , saame teoreemi 3 põhjal

$$\text{var } (f) + \text{var } (f) = \text{var } (f), \\ [a, x_1] \quad [x_1, x_2] \quad [a, x_2]$$

kust  $\text{var } (f) \gg 0$  tõttu järeldub

$$[x_1, x_2]$$

$$\text{var } (f) \leq \text{var } (f) \\ [a, x_1] \quad [a, x_2]$$

ehk

$$\mathcal{F}(x_1) \leq \mathcal{F}(x_2).$$

Nüüd defineerime funktsiooni

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{F}(x) - f(x), \quad (5)$$

mis on samuti monotoonselt kasvav. Et seda näidata, võtame  $x_1$  ja  $x_2$ , kus  $a < x_1 < x_2 < b$ , ja uurime vahet  $\mathcal{V}(x_2) - \mathcal{V}(x_1)$ , kasutades teoreemi 3 ja võrratust

$$\text{var } (f) \gg f(x_2) - f(x_1). \quad (6) \\ [x_2, x_1]$$

Saame

$$\begin{aligned} \vartheta(x_2) - \vartheta(x_1) &= [J(x_2) - f(x_2)] - [J(x_1) - f(x_1)] = \\ &= \text{var}(f) - \text{var}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] = \\ &= \text{var}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geq 0. \end{aligned}$$

Võrdusest (5) saame nüüd

$$f(x) = J(x) - \vartheta(x), \quad \text{m. o. t. t.}$$

Kuna lõigul monotoonne funktsioon on mõõtv (tõestada!) ja mõõtuvate funktsioonide vahe on mõõtv, siis saame teoreemi 5 põhjal väita, et tõkestatud muuduga funktsioonid on mõõtuvad.

Tõkestatud muuduga funktsioonid on olulised eriti Stieltjesi integraali käsitlemisel.

### § 27. Stieltjesi integraal.

Stieltjesi integraal, samuti nagu Lebesgue'i integraal, on Riemanni integraali üldistuseks. Allpool defineeritav Stieltjesi integraal ja Lebesgue'i integraal pole aga võrreldavad.

Olgu lõigul  $[a, b]$  antud kaks lõplikku funktsiooni  $f(x)$  ja  $g(x)$ . Jaotame lõigu  $[a, b]$  punktidega  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

osalõikudeks. Valime igast osalõigust punkti  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  ja moodustame summa

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \quad (1)$$

Kui summa  $\sigma$  läheneb piirprotsessis  $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$  piirväärtusele, mis ei sõltu alajaotuse viisist ega punktide  $\{k\}$  valikust, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni  $f(x)$  Stieltjesi integraaliks funktsiooni  $g(x)$  järgi lõigul  $[a, b]$  ja tähistatakse

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad \text{ehk} \quad \int_a^b f(x) dg(x).$$

Kergesti näeme, et Riemanni integraal on Stieltjesi integraali erijuht, mille saame, kui  $g(x) = x$ .

Esitame nüüd Stieltjes'i integraali põhiomadused.

Omadus 1.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x).$$

Omadus 2.

$$\int_a^b f(x) d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) + \int_a^b f(x) dg_2(x).$$

Omadus 3.

Kui  $k$  ja  $l$  on konstandid, siis

$$\int_a^b kf(x) dl g(x) = kl \int_a^b f(x) dg(x).$$

Omaduste 1-3 puhul järeldub parempoolse integraali eksisteerimisest vasakpoolse integraali eksisteerimine.

Omadus 4.

Kui  $a < c < b$  ja eksisteerivad kõik kolm järgnevat integraali, siis kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x). \quad (2)$$

Tõestus. Võtame vaatlusele lõigu  $[a, b]$  alajaotuse, kus  $c$  on jaotuspunktiks. Siis kehtib integraalsummade vahel võrdus

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3)$$

Kuna  $\sigma$  läheneb  $\lambda \rightarrow 0$  korral piirväärtusele iga alajaotuse puhul, siis ka juhul, kui  $c$  on jaotuspunktiks. Teostades võrduses (3) piirprotsessi  $\lambda \rightarrow 0$ , saamegi võrduse (2).

Oluline on märkida, et integraalide  $\int_a^b f(x)dg(x)$  ja  $\int_c^b f(x)dg(x)$  eksisteerimisest ei järeldu  $\int_a^b f(x)dg(x)$  eksisteerimine. Selle asjaolu illustreerimiseks toome järgmise näite.

Näide 1. Olgu  $f(x)$  defineeritud lõigul  $[-1, +1]$  järgmiselt

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{kui } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ja  $g(x) = f(x)$ . Kergesti näeme, et integraalid

$$\int_{-1}^0 f(x)dg(x) \quad \text{ja} \quad \int_0^1 f(x)dg(x)$$

on võrdsed nulliga. Integraal

$$\int_{-1}^1 f(x)dg(x)$$

aga ei eksisteeri. Tõepoolest, kui punkt 0 on jaotuspunktiks, saame  $\sigma = 0$ . Kui punkt 0 pole jaotuspunktiks, jääb summas (1) ainult üks liige, s.t.

$$\sigma = f(\xi_1) [g(x_{1+1}) - g(x_1)],$$

kus  $x_i < 0 < x_{i+1}$ . Olenevalt sellest, kas  $\xi_i > 0$  või

$\xi_i < 0$  saame  $\delta = 1$  või  $\delta = 0$ . Seega summal  $\delta$  pole ühest piirväärtust.

Omadus 5. (Ositi integreerimine). Integraali  $\int_a^b f(x)dg(x)$  eksisteerimisest järeldub  $\int_a^b g(x)df(x)$  eksisteerimine ja vastupidi, kusjuures kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (4)$$

Tõestus. Eeldame näiteks  $\int_a^b g(x)df(x)$  eksisteerimist.

Teostame lõigul  $[a, b]$  alajaotuse ja moodustame integraalsumma

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

Liites ja lahutades summast  $\delta$  suuruse  $f(b)g(b) - f(a)g(a)$  ja rühmitades liikmed, saame

$$\begin{aligned} \delta &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) [f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\} \end{aligned} \quad (5)$$

Loogelistes sulgudes seisev avaldis on integraali

$\int_a^b g(x)df(x)$  integraalsumma, kus jaotuspunktid on  $\xi_k$ . Kui

$\max(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$ , siis ka  $\max(\xi_{k+1} - \xi_k) \rightarrow 0$ , see-

ga  $\delta$  ja  $\{ \dots \}$  lähenevad samaaegselt piirväärtustele -

vastavalt integraalidele  $\int_a^b f(x)dg(x)$  ja  $\int_a^b g(x)df(x)$ , kus-

juures seosest (5) järeldub vahetult võrduse (4) kehtivus.

Stieltjesi integraali eksisteerimise kohta esitame järgmise teoreemi.

Teoreem 1. Integraal

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dg(x)$$

eksisteerib, kui funktsioon  $f(x)$  on lõigul  $[a, b]$  pidev ja  $g(x)$  on sellel lõigul tõkestatud muuduga.

Tõestus. Kuna iga tõkestatud muuduga funktsioon on esitatav kahe monotoonselt kasvava funktsiooni vahena, siis võime tõestuse läbi viia juhul, kus  $g(x)$  on monotoonselt kasvav.

Jaotame lõigu  $[a, b]$  punktidega  $x_k$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

osalõikudeks. Tähistame

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

ja moodustame Stieltjesi integraali alam- ja ülemsumma

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)], \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

Ühe ja sama alajaotuse puhul kehtib ilmselt

$$s \leq \bar{S} \leq S. \quad (6)$$

Kergesti saab kontrollida, et alajaotuse peenendamisel alamsumma  $s$  ei saa väheneda ja ülemsumma  $S$  ei saa kasvada. Seega kehtib mis tahes alam- ja ülemsumma puhul võrratus

$$s_1 \leq S_2.$$

Edasi tähistades

$$I = \sup s$$

võime kirjutada, et

$$s \leq I \leq S$$

ja arvestades võrratust (6) ka

$$|G - I| \leq S - s$$

Võtame nüüd suvalise  $\varepsilon > 0$  ja leiame  $\delta > 0$ , nii et  $|x'' - x'| < \delta$  järeldeb  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ . Siis kehtib võrratus

$$M_k - m_k < \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

iga alajaotuse puhul, kus  $\lambda < \delta$ .

Saame

$$|G - I| \leq S - s < \varepsilon [g(b) - g(a)],$$

millest järeldeb  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} G = I$ , s.t. integraal  $\int_a^b f(x) dg(x)$  eksisteerib.

Teoreem 2. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev lõigul  $a, b$  ja  $g(x)$  on sellel lõigul tõkestatud muuduga, siis

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M \text{ var } (g), \quad (7)$$

$[a, b]$

kus  $M = \max |f(x)|$ .

Tõestus. Lõigul  $[a, b]$  mis tahes alajaotuse ja punktide  $\xi_k$  valiku puhul kehtib

$$|G| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \right| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq M \text{ var } (g), \text{ m. o. t. t. } [a, b]$$

Teoreem 3. (Piirile üleminek Stieltjes'i integraali märgi all). Kui lõigul  $[a, b]$  defineeritud pidevate funktsioonide  $f_n(x)$  jada koondub ühtlaselt funktsiooniks  $f(x)$  ja  $g(x)$  on sellel lõigul tõkestatud muuduga, siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x). \quad (8)$$

Tõestus. Märgime kõigepealt, et antud eeldustel on piirfunktsioon  $f(x)$  lõigul  $[a, b]$  pidev. Tähistame

$$M_n = \max_x |f_n(x) - f(x)|.$$

Rakendades võrratust (7), saame

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M_n \text{ var } (g)_{[a, b]} \quad (9)$$

Ühtlase koonduvuse tõttu  $M_n \rightarrow 0$ , millest järeldub võrratuse (9) vasaku poole lähenemine nullile, millega võrdus (8) on tõestatud.

Põhiline kirjandus.

1. Александров П.С., Введение в общую теорию множеств и функций, Москва-Ленинград, 1948.
2. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.
3. Колмогоров А.Н. и Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, I-1954, II-1960.
4. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.У, Москва, 1959.

Täiendav kirjandus.

5. Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles, Paris 1905.
6. Fraenkel, A., Einleitung in die Mengenlehre, Berlin 1923.
7. Хаусдорф Ф., Теория множеств, Москва-Ленинград, 1937.
8. Халмош П., Теория меры, Москва, 1953.
9. Сакс С., Теория интеграла, Москва, 1949.
10. Гохман Э.Х., Интеграл Стильтьеса и его приложения, Москва, 1958.
11. Канже Е., Интеграл Лебега-Стильтьеса, Москва, 1959.
12. Лузин Н.Н., Собрание сочинений I, Москва, 1953.

Kirjandus pedagoogilistele instituutidele.

13. Александров П.С. и Колмогоров А.Н., Введение в теорию функций действительного переменного, Москва-Ленинград, 1933.
14. Макаров И.П., Теория функций действительного переменного, Москва, 1958.
15. Фролов Н.А., Теория функций действительного переменного, Москва, 1953.

## S i s u k o r d .

I peatükk.	<b>H U L G A T E O O R I A .</b>	
	§ 1. Hulga mõiste. Hulkade võrdus ja tehted hulkadega . . . . .	3
	§ 2. Üks-ühene vastavus. Ekvivalentsete hulgad . . . . .	8
	§ 3. Loenduvad hulgad . . . . .	11
	§ 4. Kõtiinuumi võimsusega hulgad. . . . .	14
	§ 5. Hulga võimsus. Võimsuste võrdlemine. . . . .	18
II peatükk.	<b>M E E T R I L I S E D R U U M I D .</b>	
	§ 6. Meetrilise ruumi mõiste . . . . .	24
	§ 7. Tuletishulk ja sulund . . . . .	30
	§ 8. Kinnised ja lahtised hulgad . . . . .	36
	§ 9. Lahtised ja kinnised hulgad sirgel . . . . .	42
III peatükk.	<b>M Õ Õ D U T E O O R I A .</b>	
	§ 10. Hulga mõõdu mõiste . . . . .	48
	§ 11. Lahtiste ja kinniste hulkade mõõt. . . . .	51
	§ 12. Mis tahes tõkestatud hulkade mõõt. . . . .	58
	§ 13. Abstraktsest mõõduteooria ülesehitusest . . . . .	68
IV peatükk.	<b>M Õ Õ T U V A D F U N K T S I O O N I D .</b>	
	§ 14. Mõõduva funktsiooni mõiste . . . . .	71
	§ 15. Mõõduvate funktsioonide omadused . . . . .	74
	§ 16. Koonduvus mõõdu järgi . . . . .	79
	§ 17. Mõõduvate funktsioonide vahekord pidevate funktsioonidega . . . . .	86
V peatükk.	<b>L E B E S G U E ' I I N T E G R A A L .</b>	
	§ 18. Lebesgue'i integraali mõiste . . . . .	93
	§ 19. Lebesgue'i integraali põhiomadused (tõkestatud funktsiooni juhtum). . . . .	100

	§ 20. Lebesgue'i integraali põhiomadused (mittetõkestatud funktsiooni juhtum).	107
	§ 21. Lebesgue'i integraali teisi omadusi .	113
VI peatükk.	I N T E G R E E R U V A R U U D U G A F U N K T S I O O N I D .	
	§ 22. Integreeruva ruuduga funktsioonide hulk kui lineaarne normeeritud ruum .	120
	§ 23. Keskmine koonduvus . . . . .	123
	§ 24. Ortogonaalsed süsteemid . . . . .	129
	§ 25. Fischer-Riesz'i teoreem . . . . .	137
VII peatükk.	T Õ K E S T A T U D M U U D U G A F U N K T S I O O N I D . S T I E L T - J E S I I N T E G R A A L	
	§ 26. Tõkestatud muuduga funktsioonid . . .	143
	§ 27. Stieltjesi integraal . . . . .	148
	K I R J A N D U S . . . . .	155

Hind 29 kop.

A  
24316

501776

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00501776 1