TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a Vihik 337 Выпуск ОСНОВАНЫ В 1893.г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПСИХОЛОГИЯ

I

ТАРТУ 1974

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a Vihik 337 Выпуск ОСНОВАНЫ В 1893.г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПСИХОЛОГИЯ

I

ТАРТУ 1974

О т р е д а к ц и и

Настоящим сборником начинается издание новой серии "Ученых записок" Тартуского государственного университета - "М а т е м а т и ч е с к а я п с и х о л о г и я".

Целью данной серии является стимулирование, обобщение и, по возможности, координирование исследований, ведущихся в вышеназванной области в Тартуском университете, а также в других научно-исследовательских учреждениях и учебных заведениях Эстонской ССР. В сборниках данной серии предполагается публикация отдельных работ в упомянутой области, выполненных и за пределами Эстонии.

Общее направление сборников "Математическая психология" определяется их названием.

В данном кратком вступлении редколлегия сборника не ставит себе задачу дать определение рассматриваемой области научных исследований. В этих целях предусмотрены специальные статьи в последующих сборниках нашей серии. Отметим лишь, что по мнению редколлегии понятие "математическая психология" в первую очередь связано с созданием и разработкой средств (методов, формализованных систем и языков и т.п.) логико-математического характера для исследования и моделирования (с использованием также ЭВМ) психических явлений и процессов, в целях раскрытия их закономерностей.

К исследованиям по математической психологии, например, примыкают работы в области инженерной психологии, сущность которой связана с моделированием психической деятельности человека-оператора и ее математическим описанием. Введение и применение количественных характеристик в других отраслях психологии также способствует приближению этих отраслей к математической психологии.

В заключение нам хочется еще отметить, что кроме познавательных функций логико-математических методов моделирования, они содействуют укреплению междисциплинарных связей, которые являются одним из существенных факторов прогресса современной науки.

Редакционная коллегия

О ЗНАЧАЩИХ ПЕРЕЖИВАНИЯХ ЧЕЛОВЕК-ОПЕРАТОРА И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ФОРМАЛИЗАЦИИ

М.А.Котик

К значащим переживаниям как психическому процессу-состоянию, оказывающему огромное влияние на самые разнообразные проявления человеческой деятельности, за последние сто лет обращались с различных идейных позиций и научных платформ ученые многих поколений (К.Д.Кавелин, К.Дильтей, Э.Шпрангер, З.Фрейд, К.Левин, С.Л.Рубинштейн, Н.Д.Добрынин и др.).

В советской психологической науке последних лет, в связи с развитием учения о предметной деятельности, о роли в ней значения и "личностного смысла" (А.Н.Леонтьев) проблема значимости приобрела особую актуальность. Этому способствовали также практические запросы, возникшие в свете данной проблемы в прикладных областях психологии – инженерной и спортивной (работы А.Е.Ольшанниковой, А.Н. Леонтьева и Кричник, К.К.Платонова и Маришука, А.С.Егорова и др.). Свидетельством повышенного интереса философов и психологов, специалистов в области кибернетики к проблеме значащих переживаний явилась бурная дискуссия, развернувшаяся на страницах журнала "Вопросы психологии" в 1972 г. по поводу статей Ф.В.Бассина, который подошел к старой проблеме значащих переживаний с современных материалистических позиций кибернетики и общей теории систем и призвал к разработке специальных концепций для их изучения посредством психологический и непсихологических наук.

Как следует из указанных работ, в настоящее время отсутствует единное мнение о месте проблемы значащих переживаний в психологической науке, о принципиальной формализуемости таких переживаний, а также вообще о роли тенденций формализации в психологии.

Так, существует мнение [1, стр. 105], что формализация ведет к размежеванию психологической науки, что психические закономерности, которые удалось формализовать, этим самым исключаются из категории собственно-психологических.

Однако опыт свидетельствует об обратном. Те психологические феномены, которые оказались формализованными , несмотря на то, что они от этого стали "слугами" не только психологии, но и той другой дисциплины, на языке которой был выражен алгоритм, привлекли к себе еще большее внимание психологов. Ведь формализация психологического феномена далеко не всегда означает и объяснение его внутренней природы. Например, 20 лет назад был установлен так называемый "закон Хика", обнаруживший линейную зависимость между количеством воспринимаемой информации и временем реакции на нее. Так именно сам факт формализации привлек внимание психологов к данному психологическому феномену, обусловил его широкое исследование и породил разнообразные трактовки обнаруженной зависимости.

Как известно, любая формализация является приближенной. Она осуществляется с определенной степенью погрешности (что особенно заметно в психологии), ее результаты применимы только в определенном диапазоне условий. И это обстоятельство привлекает к себе внимание психологов. Так, в приведенном примере именно факторы, искажающие проявление "закона Хика", стали объектом широких психологических исследований. Поэтому можно заключить, что формализация не только не ведет к размежеванию психологической науки, но, напротив, способствует ее углублению и развитию.

В настоящее время принято делить психологические феномены на "формализованные" и "пока не формализованные". Однако существует и весьма распространенное мнение о принципиальной неформализуемости "ситуационных смыслов" и порождаемых ими значимых переживаний. В подтверждение этого мнения Ф.В.Бассин приводит следующее обоснование.

Значащие переживания возникают у человека, как правило, в связи с проекцией на будущее, в связи с "моделью будущего" (в понимании Н.А.Бернштейна, П.К.Анохина). Формализация "ситуационного смысла", вызывающего значащие переживания, в таком случае будет заключаться в построении модели от "модели будущего", отраженной в сознании человека. Формализация такой вторичной модели по мнению Ф.В.Бассина, является невозможной в соответствии с "логическим принципом относительности" Маккэя, определяющим, что "любая прогнозирующая информация, полученная на основе подобной, хотя бы лишь вероятностно организованной "модели - модели будущего" должна вызвать изменение того, что моделируется (т.е. психо-физиологической "модели будущего"), и поэтому должна сразу становиться, как и в схеме Маккэя, недействительной" [2, стр. II2]. Формально автор прав в том, что любая информация, полученная посредством такой вторичной модели, и ставшая известной испытуемому, исказит его первичную модель. Однако результаты моделирования, в принципе, могут и не сообщаться испытуемым и таким путем можно избежать обратного влияния вторичной модели на первичную. Но если эти результаты и станут известны испытуемым, то появится некоторая дополнительная погрешность формализованной модели. И мы не видим оснований считать, что эта погрешность будет столь велика, чтобы сделать полностью недействительной всю формализованную модель. Поэтому с приведенным доказательством принципиальной неформализуемости отдельных психологических феноменов мы не можем согласиться. Ведь формальная модель строится для формализации далеко не всех связей и закономерностей данного явления; она обычно охватывает наиболее существенный в данном рассмотрении круг связей, - связей, обнаруживающих основные закономерности, природу изучаемого явления. Поэтому формализованная модель чаще всего выступает в психологии как основа, "скелет", связующий основополагающие факторы, вокруг которого остается еще много такого, от чего пришлось по тем или иным причинам абстрагироваться при построении формальной модели. Поэтому, вероятно, во многих случаях можно будет без особого ущерба абстрагироваться и от обратного влияния формальной модели на психическую.*)

---

*) Заметим, что любая модель психической деятельности, даже не связанная с "ситуационными смыслами", является вторичной. Применяя подобным образом "логический принцип относительности" Маккэя, можно придти к заключению о принципиальной неформализуемости любых закономерностей мышления, что опровергается практикой.

Каковы же основные причины, препятствующие формализации "ситуационных смыслов"? Если не останавливаться на факторах, обусловленных невниманием к данной проблеме, то можно выделить две причины, объясняющие трудность ее разрешения.

I. Значащие переживания, возникающие в связи с той или иной деятельностью, могут существенно зависеть от множества факторов, начиная от предыстории индивида и кончая самыми, казалось бы, незаметными обстоятельствами этой деятельности. Чрезвычайно сложно усмотреть все эти факторы, охватить их, оценить их влияние, установить связь между ними и все это вместе взятое учесть в формализованной модели.

2. Не менее сложно изыскать путь для выявления и изучения значащих переживаний, анализа закономерностей их формирования, получить объктивные данные об этих переживаниях и дать им правильную трактовку.

Указанные причины создают огромные трудности для изучения "ситуационных смыслов" и связанных с ними переживаний. Задача же формализации этих психологических феноменов, являющаяся производной от назаванной, оказывается, естественно, еще более сложной.

Данную задачу в современных условиях, как нам представляется, целесообразнее решать не в общем виде, не в плане общей психологии, а с позиций решения отдельных частных вопросов, с позиций отдельных отраслей психологии, имеющих более прикладное значение. Б.Ф.Ломов подчеркивал [3] благотворное влияние в современных условиях прикладных областей психологии на развитие всей психологической науки, их вклад в развитие общей психологии.

В данной статье мы попытаемся показать возможность использования инженерной психологии в качестве начальной ступеньки для изучения и формализации значащих переживаний. Использованию инженерной психологии в указанных целях способствуют ряд ее специфических особенностей. Выделим их.

I. Инженерная психология изучает деятельность человека не вообще, а в связи с управлением автоматизированной системой. Поэтому здесь и значащие переживания можно рассматривать только в связи с решением задач по управлению системой.

2. Предыстория подготовленного оператора и различные факторы, не связанные с его управляющей деятельностью, по своему содержанию оказываются сравнительно далекими от тех обстоятельств, которые называют его переживания при управлении системой. Поэтому в инженерной психологии при изучении значащих переживаний оператора допустимо абстрагирование от этих трудно учитываемых факторов.

3. Деятельность человека-оператора в системе управления детерминирована внешними техническими ограничениями, которые выражаются количественно.

4. В инженерной психологии представляется возможность исследования групп лиц со сравнительно сходными личностными и типологическими качествами (с точки зрения влияния этих качеств на работу системы). Так, в частности, исследуя подготовленных летчиков, отобранных по соответствующим психофизиологическим данным, прошедших примерно одинаковую школу воспитания, обучения, тренировки, живущих в одной среде, в примерно равных условиях, мы, в какой-то мере можем не учитывать влияние на результаты их личностных и типологических особенностей.

5. Исследования переживаний человека-оператора в процессе управления системой возможно осуществлять в естественном или лабораторном эксперименте, где, как и в обычных условиях его работы, информация обратной связи поступает к нему от машины. Здесь не обязателен прямой контакт экспериментатора с испытуемым, поэтому может быть исключено их взаимовлияние. Т.о. инженерной психологии представляется возможность изучать значащие переживания человека традиционными путями, на что указывают Л.И.Божович и М.С.Неймарк [4, стр. 134], "обеспечивая в дальнейшем возможности их формализации и математизации".

Перечисленные специфические особенности инженерной психологии существенно облегчают исследования значащих переживаний человека в системе управления и открывают некоторые возможности их формализации. Изложим вкратце один из подходов к разрешению указанной задачи.

Работа любой автоматизированной системы ограничена соответствующими техническими требованями, вытекающими из разрешаемой ею задачи. Требования, налагаемые на систему, в свою очередь, налагают ограничения на работу отдельных ее звеньев. Одним из таких звеньев является человек-оператор. Эти требования выступают для него в виде комплекса соответствующих технических условий, которым должны удовлетворять его действия. Наряду с внешними - техническими ограничениями, у человека существует и комплекс ограничений внутреннего порядка, вытекающих из его психофизиологических возможностей по разрешению задач управления.

В процессе управления системой оператор обычно имеет возможность выбора способов действия. Однако указанный выбор должен осуществляться с непременным выполнением двух условий: эти действия по своевременности и точности должны укладываться в пределах установленных технических ограничений. Причем временные и точностные ограничения будут выступать для человека-оператора в виде внешних-технических и внутренних - психофизиологических границ.

Конфликт между предъявляемыми человеку требованиями и возможностями их удовлетворения является главным источником значащих переживаний оператора. (Если говорить более точно, то следует отметить, что эти переживания возникают на основе отражения указанной конфликтной ситуации в сознании человека-оператора.)

В управляемой системе под воздействием различных факторов периодически возникают отдельные нарушения, проявляющиеся в отклонениях регулируемых параметров от заданных значений. Оператор обязан устранять эти нарушения, не допуская отклонений этих параметров за установленные пределы. О режиме работы системы и значениях ее параметров оператор судит по индикаторным приборам и данным непосредственного визуального контроля. С получением сообщения о появлении нарушения в работе системы, у оператора возникает задача определенного уровня сложности. И, очевидно, чем сложнее для него будет такая задача, чем меньше он будет чувствовать себя способным справиться с ней, тем острее будет конфликтная ситуация, тем выше уровень его переживаний такой ситуации. Сознание необходимости достижения цели и одновременно ограниченности возможностей по нахождению правильного выхода из сложившейся ситуации является главной причиной возникновения значащих переживаний оператора в процессе управления системой.

Наряду с количеством информации в настоящее время принято оценивать и ее качество. В роли такой характеристики в настоящее время используют показатель ее полезности для оператора, для системы - ценности информации. Предложены методы количественной оценки этого показателя (А.А.Харкевич [5], М.М.Бонгард [6] и др.) исходящие в основном из соображения - насколько данная информация облегчает разрешение задачи, способствует достижению цели. Однако, как следует из проведенного рассмотрения, кроме характеристики ценности информации (которая, кстати, применима не только к человеку, но и к машине) существует другая, воздействующая только на человека сторона информации, обусловливающая его переживания в связи с предстоящими трудностями по достижению цели в связи с опасностью недостижения цели вытекающими из этого последствиями. Эта содержательная сторона информации также вызывает значащие переживания человека. Поэтому, наряду с ценностью информации, можно говорить и о тревожности информации. Если значимость-ценность информации определяется по тому, что эта информация дает человеку, то значимость - тревожность информации можно определить по тому, какие трудности и опасности она предвещает для него.

Исходя из изложенного подхода к оценке значимости информации был поставлен лабораторный эксперимент. Закономерности формирования значащих переживаний мы изучали посредством традиционных опытов, которые заключались в предъявлении испытуемым операторам (летчикам) информации о состоянии управляемой системы и выявлении их мнения об уровне значимости этой информации. Информация предъявлялась посредством демонстрации приборной доски с реальными действующими пилотажными приборами. Предварительно испытуемым сообщались условия полета, при которых оценивается предъявлемая информация. При каждом предъявлении приборной доски, а это осуществлялось путем сборса закрывающей ее шторки, демонстрировалось соответствующее нарушение режима полета. Испытуемые оценивали в баллах (по семибальной системе) значимость каждой предъявляемой ситуации.

Можно предвидеть ряд критических замечаний относительно подобного эксперимента. Мы вычленили для лабораторных исследований определенный психологический феномен и этим самым уже исказили его. Но здесь главное, как нам представляется, не исказить основные изучаемые связи. К этому мы стремились, предъявляя испытуемым реальную информационную модель, отображающую, благодаря координированным показаниям приборов, реальную практическую ситуацию. На основе анализа этой ситуации, как мы предполагали, и должны были складываться оценки ее значимости для оператора. Сомнения также может вызвать используемый в эксперименте метод словесных отчетов. Данный эксперимент не был расчитан на то, чтобы вызывать у испытуемых значение переживания.Мы стремились к тому, чтобы испытуемые, на основе своего большого практического опыта по управлению системой, выявили свое отношение к различным задачам управления, возникающим в системе. Выразить же это мнение наиболее естественным было посредством словесного отчета. В данном эксперименте не столь важна форма отчета, как его соответствие реальному отношению испытуемого к данной ситуации.

Следует отметить, что стремление правильно решить поставленную задачу у испытуемых было разносторонне мотивировано: они старались успешно выполнить задание экспериментатора(мотив достижения цели),выполнить его не хуже других (мотив соревнования), доказать свои высокие возможности (мотив престижа). Отметим, что летчики, привыкшие к психофизиологическим экспериментам, проводимым в целях их профессиональной пригодности, и в данном эксперименте усматривали проверку их возможностей, поэтому действовали весьма добросовестно. К.Лагер отмечает, что у летчиков "страх совершить ошибку, быть отставленным или осмеянным играл большую роль, больше беспокоил их, чем физическая опасность" [7, стр. 191]. Все эти факторы,очевидно, способствовали объективности оценок испытуемыми предявляемых ситуаций.

Результаты эксперимента показали, что летчики оценивали значимость ситуации тем выше, чем больше они усматривают в ней вероятность недостижения цели, т.е. оценивали ее значимость - тревожность. В рассматриваемом эксперименте мы имели дело с хорошо подготовленными летчиками, для которых выбор способа управляющих действий и их реа -

лизация с заданной степенью точности не представляли особых трудностей. Главным для них было наличие достаточного времени для выполнения требуемого ответного действия, то есть здесь успех зависил от степении временных ограничений, возникающих у них в данной ситуации.

Степень временных ограничений оператора при решении данной задачи управления может быть выражена определенным показателем - резервным временем. Резервным временем оператора ($t_{res\,i}$), соответствующим i-му состоянию системы, назовем избыток времени (над минимально необходимым), которым располагает оператор для предотвращения отклонений ее параметров за допустимые пределы:

$$t_{res\,i} = T_i - \sum t_i \tag{I}$$

где T_i - время, через которое в данной ситуации любой из регулируемых параметров превысит допустимые ограничения,

$\sum t_i$ - минимальное суммарное время, за которое в рассматриваемых условиях оператор способен обнаружить и предотвратить нарушение.

Таким образом резервное время определяется с учетом как внешних, так и внутренних ограничений деятельности оператора.

Вероятность невыполнения оператором задачи в зависимости от t_{res} характеризуется такими свойствами, которые позволяют предположить, что указанное событие возникает соответственно пуассонновскому потоку. Исходя из этого, была высказана гипотеза - значимость-тревожность ситуации или информации о ней, оцениваемая по вероятности недостижения цели, будет подчиняться следующей закономерности:

$$c_i(t_{res}) = e^{-\lambda t_{res\,i}} \tag{2}$$

где $c_i(t_{res})$ - значимость-тревожность i-ой ситуации, обусловленной временными ограничениями,

$t_{res\,i}$ - резервное время оператора в ситуации i,

λ - интенсивность потока.

Графическая реализация зависимости (2) $c\ (t_{res})$ представлена на рис. I жирной линей. Для каждой ситуации, предъвляемой испытуемым, по формуле (I) было подсчитано значение C, которое сопоставлялось со средней оценкой значимости, данной летчиками по этим ситуациям (C^*). Так была построена уже экспериментальная зависимость $C^*(t_{res})$, представленная на том же рисунке тонкими линиями (соответственно для летчиков I, II и III класса: $C^*_I(t_{res})$, $C^*_{II}(t_{res})$, $C^*_{III}(t_{res})$).

Из сопоставления экспериментальных кривых с теоретической следует, что они совпадают с вероятностью порядка $\beta = 0,9 \div 0,95$, причем наилучшее совпадение было у летчиков I класса. Анализ экспериментальных характеристик, полученных отдельно по различным видам нарушений режима полета,

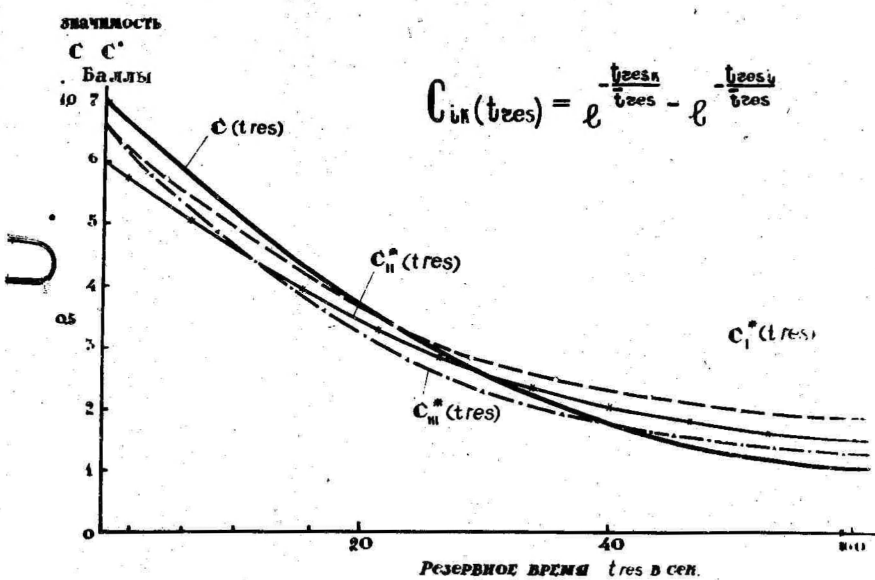


Рис.I. Сопоставление теоретической $C(t_{res})$ и экспериментальных $C^*(t_{res})$ зависимостей значимости-тревожности информации от резерва времени t_{res}. Экспериментальные зависимости для летчиков I, II и III класса обозначены соответственно: $C^*_I(t_{res})$, $C^*_{II}(t_{res})$ и $C^*_{III}(t_{res})$.

показывает, что каждая из характеристик достаточно близка к теоретической кривой. Таким образом эксперимент показал, что зная резервное время, присущее оператору в данной ситуации, возможно априорно по формуле (2) оценить степень значимости для него этой ситуации.

Оператору при управлении системой приходится разрешать и такие задачи, в которых значащие переживания возникают в связи с трудностями достижения требуемой точности. По аналогии с резервным временем, было введень понятие резерва точности - той наибольшей допустимой погрешности (относительно минимально возможной в данных условиях), которую оператор еще вправе допускать, не выводя выходные параметры системы за допустимые пределы. Если предельно допустимая погрешность системы будет $\mathcal{D}_i$, а минимальная общая погрешность управленя, которую способен достигать оператор в данных временных ограничениях будет $\sum \delta_i$, то резерв точности (δ_{resi}) определится:

$$\delta_{resi} = \mathcal{D}_i - \sum \delta_i . \quad (3)$$

На основе рассуждений, подобных изложенным выше, было высказано предположение, что : значимость-тревожность ситуации, обусловленная вероятностью недостижения цели с требуемой точностью, может определяться зависимостью:

$$C_i(\delta_{res}) = e^{-\eta \delta_{resi}} \quad (4)$$

где $C_i(\delta_{res})$ - значимость-тревожность i-той ситуации, вызванная ограничениями по точности,

δ_{resi} - резерв точности, которым располагает оператор в ситуации ,

η - интенсивность потока событий.

Проверка указанного предположения также проводилась путем эксперимента. Испытуемым летчикам для решения предлагалась серия различных задач по управлению системой и ряд предельно допустимых ограничений, с которыми требуется их разрешить на практике. Испытуемые указывали оценку вероятности недостижения цели в каждой из задач при различных ограничениях, т.е. определяли степень трудности, которую представляет для них выполнение этих задач.

По каждому ограничению, налагаемому на задачу, был подсчитан резерв точности и этот показатель соотносился с вероятностью недостижения цели, которой испытуемые оценили указанную ситуацию. Так по отдельным задачам были получены экспериментальные кривые $C^*(\delta_{res})$. Из сопоставления этих экспериментальных кривых с теоретическими $C(\delta_{res})$ построеными по формуле (4). На рис. 2, можно заключить о

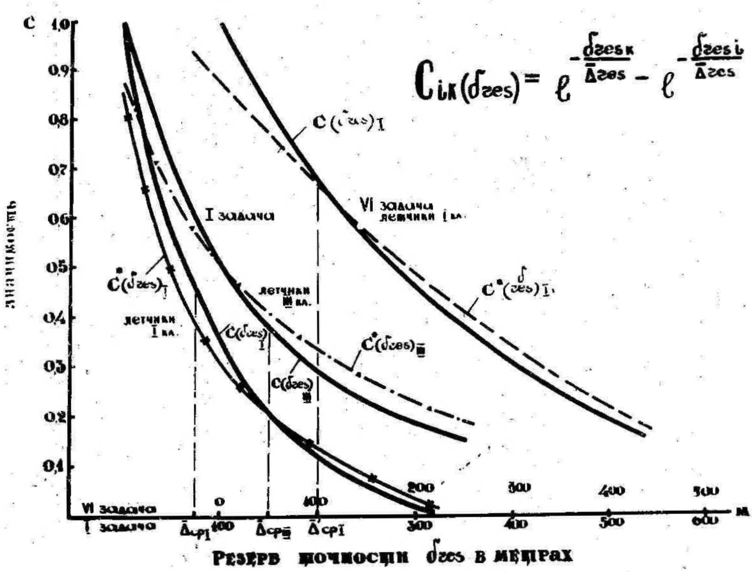


Рис. 2. Сопоставление теоретических $C(\delta_{res})$ и экспериментальных $C^*(\delta_{res})$ зависимостей значимости-тревожности информации от резерва точности δ_{res} .Экспериментальные кривые построены по результатам оценки значимости двух задач.

их совпадении (с вероятностью $\beta = 0,95 \div 0,98$). Т.е. по формуле (4) представляется возможным априорно определять вероятность недостижения цели, которой испытуемые оценивают свою способность справится с данной задачей, а в нашем понимании, степень значимости-требожности для них возникшей ситуации. Используя зависимости (2) и (4), можно рассчитать степень значимости для оператора ситуации, в которой действуют одновременно и временные и точностные ограничения.

При оценке значащих переживаний оператора, вызванных указанными ограничениями, следует учитывать одно важное обстоятельство. Человек располагает большими приспособительными и творческими возможностями, наличие которых он учитывает в практической деятельности. Так допустив ошибку в отдельной операции, он способен ее устранить или парировать в последующей, обеспечивая в целом успешность всего действия. Анализ ряда случаев подобной компенсаторной деятельности был проведен нами [8 стр. 29, 129, 176]. Кроме того в системе могут предусматриваться специальные средства автоматического резервирования действий оператора, фильтрации допущенных ошибок. Указанные обстоятельства, очевидно, отражаются на отношении оператора у отдельным действиям и операциям и снижают уровень переживаний оператора, в связи с опасностью их запоздалого или неточного выполнения.

Однако, наряду с обстоятельствами, способствующими снижению переживаний оператора при управлении системой, существуют факторы способные существенно повысить уровень таких переживаний. Так ошибка в отдельной операции может привести не только к невыполнению действия, но и возникновению тяжелых последствий для оператора, системы и связанных с ней людей. Значимость-тревожность данной цели может существенно усиливаться определенными сверхцелами, достижение которых оказывается зависящим от выполнения рассматриваемой задачи.

Перечисленные факторы, наряду с рассмотренными выше, могут быть формализованы с помощью логических схем событий.

Отдельные задачи, возникающие у оператора в системе управления, обычно разрешаются посредством выполнения ряда последовательных операций. При таком рассмотрении можно вести речь о значимости-требожности для оператора отдельных операций, которая формируется на основании оценки собственных возможностей по ее выполнению в установленных пределах, с учетом влияния операции на достижение цели, вероятности обнаружения и парирования ошибочных действий, их последствий для оператора. Подобная логическая схема событий приведена на рис. 3. Данная схема фактически является модифицированной схемой графов, где каждая узловая точка представлена в виде реле, положение перебрасывающегося контакта которого указывает вероятность данного или обратного события:

t – вероятность невыполнения операции за заданное время,

δ – вероятность невыполнения операции с заданной точностью за установленное время,

a – вероятность ошибки оператора в данной операции, ведущей к срыву цели или аварии,

b – вероятность условий, при которых данная ошибка ведет к срыву цели,

c – вероятность автоматического парирования ошибки,

d – вероятность ручного парирования ошибки за имеющееся время,

f – вероятность ручного парирования ошибки с требуемой точностью за указанное время,

e – вероятность условий, при которых ошибка в операции ведет к тяжелым последствиям,

g – вероятность автоматического парирования тяжелых последствий ошибки в операции,

h – вероятность ручного парирования тяжелых последствий ошибки в операции за имеющееся время,

i – вероятность ручного парирования тяжелых последствий ошибки в операции с требуемой точностью в указанное время,

j – вероятность достижения цели после парирования тяжелых последствий,

k – вероятность недостижения цели из-за тяжелых последствий, вызванных невыполнением операции,

l – вероятность недостижения сверхцели из-за недостижения предлдеуемой цели.

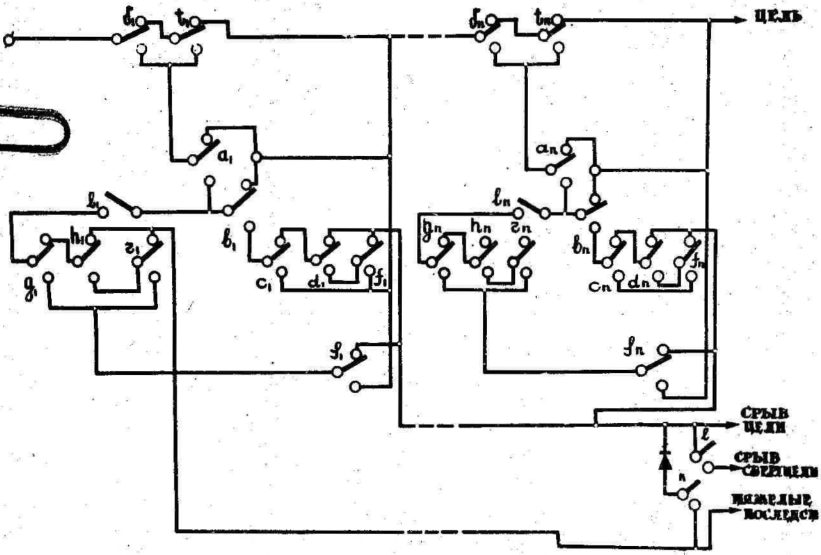


Рис. 3. Логическая схема для учета влиния системотехнических факторов, определяющих значащие переживания человека-оператора.

На основе логической схемы (рис. 3), методами математической логики можно оценить интересующие нас условные вероятности.

Условная вероятность недостижения цели в результате невыполнения операции i $P(\overline{R}/\overline{O}_i)$ определяется:

$$P(\overline{R}/\overline{O}_i)=(\delta_i+t_i-\delta_i t_i)a_i\{b_i(1-c_i)(d_i+f_i-d_i f_i)+e_i[g_i+(1-g_i)h_i r_i](1-s_i)+e_i[(1-g_i)(1-h_i)+(1-g_i)h_i(1-r_i)]k\}. \quad (5)$$

Условная вероятность недостижения сверхцели из-за невыполнения i-ой операции $P(\overline{G}/\overline{O}_i)$ будет:

$$P(\overline{G}/\overline{O}_i)=P(\overline{R}/\overline{O}_i)\cdot l. \quad (6)$$

Условная вероятность наступления тяжелых последствий, в связи с невыполнением операции i, $P(\overline{\Phi}/\overline{O}_i)$ определяется:

$$R\left(\bar{\Phi}/\bar{O}_i\right)=[\delta_i+t_i-\delta_i t_i]a_i e_i[(1-g_i)(1-h_i)+(1-g_i)h_i(1-r_i)]. \quad (7)$$

Можно считать что на основе указанных вероятностных характеристик формируются "ситуационные смыслы", порождающие значащие переживания человека-оператора.

Посредством приведенной логической схемы несложно определить вероятностный показатель ($R_n(\bar{R}/\bar{O})$), обусловливающий значащие перживания в связи с невыполнением всего действия, состоящего из n последовательных операций:

$$R_n\left(\bar{R}/\bar{O}\right)=\sum_{i=1}^{n}\Big[(\delta_i+t_i-\delta_i t_i)a_i\{b_i(1-c_i)(d_i+f_i-d_i f_i)+$$

$$+e_i[g_i(1-g_i)h_i r_i](1-s_i)+e_i[(1-g_i)(1-h_i)+(1-g_i)h_i(1-r_i)]k\}\Big]. \quad (8)$$

Полученные по формулам (5) ÷ (8) показатели определяют реально существующие вероятности рассматриваемых событий. "Ситуационные смыслы" возникают, как уже подчеркивалось, за счет отражения этих вероятностей и их связей в сознании оператора. Естественно, что в субъективном преломлении эти вероятности будут несколько трансформироваться под влиянием личностных, типологических особенностей операторов, их психофизиологических состояний. Однако, вероятно, указанные субъективные оценки будут колебаться относительно реально существующих показателей. Впрочем, в принципе, возможно выявить и учесть соответствующие сдвиги в оценке существующих вероятностей для крайних групп операторов и таким образом выявить диапазон колебаний указанных вероятностей. Однако основываясь на отмеченной выше общности характеристик операторов, можно приближенно говорить о некоторых осредненных показателях, порождающих значащие переживания операторов.

В результате проведенного рассмотрения были выделены три показателя, порождающие "ситуационный смысл" - вероятности недостижения цели, недостижения сверхцели и появления тяжелых последствий в связи с данной операцией. Для удобства практического использования, желательно было бы иметь единственный обобщающий показатель значимости. Это может быть достигнуто путем некоторых дополнительных допущений. Так как тяжелые последствия в результате невыполнения единичной операции возникают не столь уж часто, можно пренебречь этой характеристикой и продолжить рассмотрение только показателей недостижения цели и недостижении сверхцели в данном действии.

Деятельность оператора может быть движима множеством самых разнообразных сверхцелей. В общем случае о сверхцелях можно говорить в двух планах. Во-первых о сверхцелях, связанных с удовлетворением некоторых дополнительных потребностей оператора, выводящих за пределы решаемой технической задачи. Во-вторых, можно говорить о сверхцелях как о недопущении событий, приносящих непосредственный ущерб оператору и управляемой системе (сверх того ущерба, который уже несет само событие недостижения цели).

Продолжим формализацию переживаний только по отношению сверхцелей второй группы, причем применительно к рассматриваемым нами операторам. Выделим, как частный случай основные категории отрицательных последствий, которые может повлечь за собой недостижение цели летчиком в процессе пилотирования самолетом:

$\mathcal{A}$ - наружение безопасности полета,

$\mathcal{B}$ - срыв авиационного рейса,

$\mathcal{C}$ - снижение готовности авиационной техники,

$\mathcal{D}$ - текущий ремонт авиационной техники.

Вероятность появления последствий каждой из категории зависит от многих факторов, среди которых можно выделить основные: место, где произошел срыв цели (на земле или в воздухе), влияние этого события на режим полета, его влияние на технику, наличие на самолете средств резервирования, возможностей летчика по устранению, парированию ошибочных действий и сохранению заданного режима полета.

Учесть указанные события и установить их связь с названнымим категориями последствий возможно с помощью аналогичной рассмотренной выше логической схемы (рис. 4). Условная вероятность появления указанных категорий последствий, в случае недостижения летчиком цели, в данном действий (события $\bar{Q}$) будет соответственно:

$$F(A/\bar{Q}),\ F(B/\bar{Q}),\ F(C/\bar{Q}),\ F(D/\bar{Q}).$$

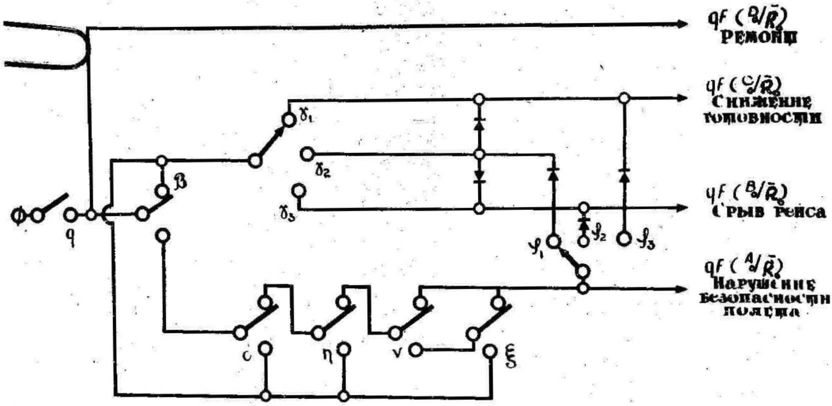


Рис. 4. Логическая схема для учета некоторых последствий недостижения цели при оценке значимости-тревожности информации.

Перечисленные условные вероятности зависят от следующих показателей:

q – вероятности недостижения оператором цели в данной действии,

β – вероятности появления этого события в воздухе,

γ – вероятности появления последствия С (обозначается γ_1), появления совместно последствий В и С (обозначается γ_2), появления последствия В (обозначается γ_3), в связи с невыполнением данного действия,

σ – вероятность появления ошибки оператора не нарушающей безопасность полета,

δ – вероятность появления ошибки оператора не нарушающей безопасность полета,

η – вероятность автоматического парирования нарушения безопасности полета, вызванного невыполнением данного действия,

ν – вероятность парирования летчиком возникшего наруше – ния за заданное время,

ξ – вероятность парирования летчиком возникшего наруше – ния с требуемой точностью за имеющееся время,

φ – вероятность появления последствия А совместно с последствиями С и В (обозначается φ_1), или совместно с В (обозначается φ_2), или совместно с С (обозначается φ_3).

В соответственно с приведенной на рис. 4 схемой, вероятность нарушения безопасности полета будет:

$$F(A/\bar{Q})q = \beta(1-\alpha)(1-\eta)\left[(1-\nu)+\nu(1-\xi)\right]q. \qquad (9)$$

Вероятность срыва рейса определится:

$$F(B/\bar{Q})q = \{(1-\beta)(\gamma_2+\gamma_3)+\beta[(1-\alpha)(1-\eta)(1-\nu)+ $$
$$+(1-\alpha)(1-\eta)\nu(1-\xi)](\varphi_1+\varphi_2)\}q. \qquad (10)$$

Вероятность снижения готовности авиационной техники окажется:

$$F(C/\bar{Q})q = \{(1-\beta)(\gamma_2+\gamma_3)+\beta[(1-\alpha)(1-\eta)(1-\nu)+(1-\alpha)\cdot$$
$$\cdot(1-\eta)\nu(1-\xi)](\varphi_1+\varphi_3)\}q. \qquad (11)$$

Вероятность текущего ремонта будет:

$$F(D/\bar{Q})q = q. \qquad (12)$$

Отметим, что в данной логической схеме учтены возможности оператора не только предупреждения наиболее тяжелых последствий, но и вероятность перевода последствий на менее тяжелый уровень. В данном рассмотрении значимость-тревожность сверхцели оказалась обусловленной рядом различных последствий. Говоря об иерархии уровней этих последствий (с точки зрения их значимости для оператора), на наиболее высокой уровень следует поставить событие нарушения безопасности полета, угрожающее жизни летчика, экипажа, пассажиров, влекущее за собой и большие материальные потери. В исключительных случаях событие срыва рейса, а может быть и снижения готовности может становиться на высший уровень значимости, но, как правило, на этом уровне находится событие нарушения безопасности полета. Для получения однозначности решения, примем еще одно допущение, считая, что значащие переживания, вызванные недостижением сверхцели будет связаны только с главным последствием-нарушением безопасности полета.

В таком случае значимость-тревожность ситуации, возникающая за счет недостижения цели в данном действии и, в результате этого, недостижения и сверхцели, на основе (6), (8), (9) получится из соотношения:

$$\mathcal{A}_n(\bar{G}/\bar{R}) = \mathcal{A}_n(\bar{R}/\bar{O})\ell = \mathcal{A}_n(\bar{R}/\bar{O})F(A/\bar{Q}). \qquad (13)$$

(Остальные последствия, в принципе, могут быть учтены в каждом отдельном случае посредством некоторых нормирующих множителей, дополнительно усиливающих значимость сверхцелей.)

С помощью полученных зависимостей представляется возможным приближенно формализовать "ситуационный смысл", порождающий значащие переживания человека-оператора. Необходимые для такой формализации оценки вероятности своевременных и точных действий оператора, как при выполнении отдельных операций, так и при парировании ошибок или их тяжелых последствий, могут быть получены из завивимостей (2) и (4), остальные вероятности выявляются на основе анализа эксплуатационных характеристик технической части системы.

Из проведенного рассмотрения и сделанных на его основе заключений естественно может возникнуть вопрос: в какой мере полученные по указанным выше формулам (2 ÷ 7) оценки отражают существующие в психологии понятия "значения" и "смысла".

Наиболее четкое разграничение этих понятий дано в работе А.Н.Леонтьева [IO], определившим значение как обобщение действительности, как форму, в которой отдельной человек овладевает обобщенным и страженным человеческим опытом, то есть как общественно-историческое явление. Смысл же А,Н. Леонтьев определял как отражение значения в индивидуальном сознании человека, обусловленное не только объективно существующим общественным значением, но и всей предшествующей жизнью человека. То есть именно личностный смысл определяет отношение человека к реальным предметам и явлениям, осознание которого неизбежно порождает соответствующую эмоциональную реакцию организма на этот смысл. Подобная рефлексия организма на личностный смысл и определяется нами как значащие переживания этого смысла.

Однако каждое явление может восприниматься человеком в множестве аспектов, то есть иметь самые разнообразные смыслы. В настоящем рассмотрении нас интересовал один аспект поступающей информации: ее смысл как свидетельства о вероятности недостижения цели в данной деятельности и вытекающих отсюда последствий. Именно в этом аспекте и оценивали отдельные сообщения испытуемые описанных выше экспериментов.

Таким образом в качестве показатели значащих переживаний здесь использовались личностные прогнозы вероятности недостижения цели и вытекающих отсюда последствий, а приведенные выше формулы являлись математическими моделями, позволяющими априорно оценивать эти прогнозы.

Итак мы приходим к заключению, что значащие переживания оператора могут изучаться и формализоваться на базе анализа динамической взаимосвязи реально существующих явлений, которые с определенной степенью погрешности возможно выявлять и учитывать в формальной модели. Такие реальные явления и их логические связи оказались объединенными в полученной модели значащих переживаний оператора. Данная модель является довольно приближенной. В ней мы не смогли учесть многие "собственно-психологические" факторы, отражающиеся на уровне этих переживаний. В этом погрешность проведенной формализации – погрешность, которую с развитием психологических исследований данной проблемы, можно надеяться, удается постепенно уменьшать.

Человеку свойственно адекватно отражать объективный мир. Более того, свойственно даже устранять те искажения, которые возникают в процессе восприятия. Поэтому можно считать, что явления и связи, порождающие значащие переживания, и учтенные в приведенной выше модели, в общем будут правильно отражаться в сознании оператора.

Выявим, за счет чего же будут возникать искажения при использовании данной модели? Здесь можно выделить две основных причины. Во первых, скажутся личностные, профессиональные и топологические особенности оператора, особенности его состояния, а также другие неучтенные в модели тонкости и нюансы "ситуационного смысла". Эти погрешности возникнут из-за недостатка самой модели. С другой стороны, погрешности будут появляться и в процессе применения модели – за счет ограниченных возможностей человека мысленно охватывать и точно учитывать все входящие в нее факторы. Поэтому учтенные в модели явления, связи, а также их вероятности будут отражены в сознании оператора весьма неточно что породит различие между психической моделью и ее формальным отображем.

Все эти вместе взятые независимые погрешности, вызванные различными причинами, как можно предполагать на основании центральной теоремы статистики, обусловят нормальное распределение общей – результирующей погрешности относительно факторов, учтенных в формализованном описании. Поэтому можно считать, что оценки, полученные посредством указанной модели, в среднем будут правильно отражать уровни значащих переживаний человека-оператора в различных ситуациях управления системой.

Итак, основой для формализации значащих переживаний человека могут служить реально существующие явления и связи. Причем после подобной формализации значащие переживания продолжают оставаться объектом собственно-психологических исследований, ибо, как справедливо указывает М.Г. Ярошевский [9, стр. 121], объективный мир представлен у человека "в сознании в виде содержаний (образов), которые вовсе не является простой проекцией этих форм. Поэтому психологии принадлежит право на изучение этих содержаний, а не только механизмов".

Ф.В.Бассин в своих статьях неоднократно подчеркивает не только теоретическую, но и практическую важность проблемы "значащих переживаний". В прикладном значении данной проблемы мы могли убедиться на практике. Описанную в данной статье формальную модель значащих переживаний мы использовали для исследования влияния фактора значимости на надежность работы человека-оператора. Исследования показали, что указанный фактор играет ведущую роль в процессе саморегуляции деятельности человека-оператора и существенно отражается на надежности его работы, что без его учета нельзя понять и правильно оценить закономерности формирования этой, весьма важной для практики, характеристики.

Литература

1. Бассин Ф.В., О развитии взглядов на предмет психологии. - "Вопросы психологии", 1971, № 4, 101-113.
2. Бассин Ф.В., "Значащие" переживания и проблема собственно-психологической закономерности.-"Вопросы психологии", 1972, № 3, 105-124.
3. Ломов Б.Ф., О роли практики в развитии теории общей психологии. - "Вопросы психологии", 1971, № 1, 26-35.
4. Божович Л.И., Неймарк М.С., "Значащие переживания" как предмет психологии. - "Вопросы психологии" 1972, № 1, 130-134.
5. Харкевич А.А., О ценности информации.-"Проблемы кибернетики", Физматлитгиз, М., 1960, № 4, 53-57.
6. Бонгард М.М., О понятии "полезная информация".- "Проблемы кибернетики", Физматлитгиз, М., 1963, № 9, 71-102.
7. Лагер К., Экспериментальные методы и результаты измерения "стресса" при моделировании условий полета. "Эмоциональный стресс", "Медицина", Л., 1970, 290-295.
8. Котик М.А., Краткий курс инженерной психологии. "Валгус", Таллин, 1971, 308.

9. Ярошевский М.Г., Предмет психологии и ее категориальный строй. -"Вопросы психологии", I97I, № 5, II0--I2I.

I0. Леонтьев А.Н., Психологические вопросы сознательности учения. Изв. АПН РСФСР, вып. 7, М-Л., I974, 5-40.

Operaatori elamuste subjektiivsest olulisusest ja selle formaliseerimise võimalustest

M. Kotik

R e s ü m e e

Inimeste elamuste olulisus sõltub üldjuhul nii suurest hulgast omavahel komplitseeritult seotud faktoritest, et nende samaaegne arvestamine ja hindamine tooks käesoleval ajal kaasa ületamatuid raskusi.

Kuid operaatori tegevuses, mis on jäigalt determineeritud eesmärkide ja tingimustega, võib probleemi sisulist käsitlemist kahjustamata mitmeid psühholoogilisi kõrvaltegureid vaatlusest välja jätta. Sel viisil saab uurida ja formaliseerida elamuste olulisuse seaduspärasusi.

Artiklis põhjendatakse mõiste "olulisus" defineerimise uut lähtekohta, mis vastab paremini operaatori tegevuse iseärasustele. Informatsiooni olulisuse senise käsitluse kõrval, kus see väljendas informatsiooni väärtust püstitatud eesmärgi saavutamise seisukohalt, vaadeldakse informatsiooni olulisuse mõistet kui inimese ees tekkinud situatsiooni häirelisuse näitajat. Informatsiooni olulisust-häirelisust määratakse kvantitatiivselt eesmärgi mittesaavutamise või ohtliku tagajärje oletatava tõenäosuse suurenemisega, mis tuleneb vastava informatsiooni saamisest. Teoreetilise analüüsi ja rea eksperimentaalsete uurimuste alusel selgitatakse välja süstemotehnilised ja isiksusest sõltuvad näitajad, mis määravad elamuse olulisuse operaatoril. Antakse operaatori elamuste olulisuse kujunemise matemaatiline mudel.

The significance of experiences of human operators and possibilities of its formalization

M. Kotik

S u m m a r y

The significance (meaningfulness) of experiences is generally dependent on such a large number of different factors with so complicated an interpendence that their evaluation and simultaneous consideration is not possible at the present state of knowledge. But in the activity of a human operator determined by his goals and the conditions of achieving these goals, where it is possible to abstract from many psychological factors without vital disturbance of the content, new possibilities for the formalization of the regularities of the origin of the significance of experiences can be achieved.

In the article, a new approach to the definition of the term "significance" that is more appropriate for the human operator is suggested. Simultaneously with the existing postulation of "significance" of information as its value to the person in the process of goal achievement, the term "significance" as an indicator of anxiety caused by the situation is postulated. "Significance-anxiety" is quantitatively defined by the growth of expectancy for non-achievement of the goal or for dangerous outcomes of the received information. On the basis of theoretical analysis and a number of experimental investigations systems-technical and personality measures that account for "significance of experiences" of the human operator were ascertained and a mathematical model of the formation of "significance of experiences" was built.

О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ПСИХОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

И.Г.Кулль

В данной статье рассматривается класс т.н. психометрических (в частном случае социометрических) задач и некоторая общая методика для обработки данных соответствующих экспериментов (тестов). С математической точки зрения, методы базируются на многоступенчатых процессах итерации (см. формулы (3) и (4)) в функциональных пространствах. Так как упомянутые методы позволяют, в информационном плане, описать процесс формирования общих (суммарных) оценок, исходя из первичных (более специальных) оценок, то для них вполне обосновано использование терминов "модель" или "класс моделей".

I. Прежде чем математически сформулировать психометрическую задачу, мы приводим основные признаки для самих оценок:

$П_I$ – на основе некоторого фиксированного критерия оцениваются непосредственно отдельные объекты (т.н. прямые оценки);

$\overline{П}_I$ – на основе некоторого критерия сравниваются два объекта (т.н. оценки парных сравнений);

$П_2$ – оценки детерминированные;

$\overline{П}_2$ – оценки вероятностные, даются при помощи некоторого закона распределения.

Так, если мы имеем оценки типа $П_I П_2$, то они могут быть представлены, например, в виде вещественных чисел на отрезке $[0;I]$. Если мы имеем оценки типа $\overline{П}_I П_2$, то они даются парами, и их можно рассматривать, например, как пары вещественных чисел (a,b), где $a,b \geq 0$ и $a+b=1$. Если же мы имеем оценки типа $П_I\overline{П}_2$ или $\overline{П}_I\overline{П}_2$, то они могут быть даны, например, в виде дискретного закона распределения

$(x_i; p(x_i))$ $(i=1,2,\ldots,n$ или $i=1,2,\ldots,n,\ldots)$, где $x_i \geqslant 0$ – возможные значения оценок, а $p(x_i) \geqslant 0$ – их вероятности, причем $\sum_i p(x_i)=1$. В случае непрерывного распределения, оценки могут быть даны в виде функции плотности распределения $\varphi(x) \geqslant 0$ $(x \in [0;1]$ или $x \in [0;+\infty))$, где $\int_0^\infty \varphi(t)dt=1$ и $P(\alpha \leqslant x < \beta)=\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt$ $(0 \leqslant \alpha < \beta)$. Конечно, оценки могут иметь и иную конкретную форму, например они могут быть представлены в виде векторов, матриц и т.д., вообще – как элементы специальных функциональных пространств. В принципе мы придерживаемся мнения, что оценки должны соответствовать структуре оцениваемых оьъектов.

Притом возникает вопрос, на каком конкретном "языке" фиксировать свои оценки испытуемым. По нашему мнению, вряд ли будет целесообразно давать числовые оценки непосредственно в числовом виде. Удобнее такие оценки изображать, например, графически, в виде отметки точки деления прямолинейного отрезка, или отметки существенных точек графики функции плотности.

2. Далее сформулируем следующую психометрическую задачу. От испытуемого (эксперта) требуется оценить ряд объектов O_1, O_2, ... , O_m на основе некоторого общего свойства (критерия) $\mathcal{K}$. Но иметь только общие оценки предложенных объектов, вообще говоря, малоинформативно, так как нам часто необходимо знать и психометрические причины формирования этих оценок. Чтобы узнать такие причины, нам необходимо применить еще ряд более специальных критериев $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$, которые все должны иметь (по интуитивным соображениям) некоторое значение на формирование общей оценки по критерию $\mathcal{K}$. Тогда, впрочем, можно и вообще не оценивать объекты непосредственно по общему критерию $\mathcal{K}$, так как общие оценки можно вычислить с некоторой точностью уже на основе специальных оценок (в предположении, что модель соответствует действительности), или же использовать общие оценки для проверки самой модели.

Если мы имеем оценки объектов O_i $(i=1,2,\ldots,m)$ по критериям $\mathcal{K}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ типа $\Pi_1\Pi_2$ или $\Pi_1\overline{\Pi}_2$, то их можно обработать по методу, описанному в п. 4.

Если же мы имеем оценки объектов O_i по критерию K_k типа $\overline{\Pi}_1\Pi_2$ (оценки парных сравнений), то составим из них матрицу

$$H^{(k)} = (h_{ij}^{(k)}), \qquad \begin{matrix}(i,j=1,2,\ldots,m;\\ k=1,2,\ldots,n)\end{matrix} \tag{I}$$

где $h_{ij}^{(k)}$ означает оценку i-того объекта в сравнения с j-том объектом по к-тому критерию ($h_{ij}^{(k)} \geq 0$, $h_{ij}^{(k)} + h_{ji}^{(k)} = 1$). Матрицу $H^{(k)}$ можно рассмотреть как некоторую абстрактную турнирную таблицу, где первое приближенное значение оценок объектов O_i (по критерию K_k) можно получить сложением элементов матрицы $H^{(k)}$ по строкам, т.е.

$$h_i^{(k)} = \sum_j h_{ij}^{(k)}, \qquad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots,m;\\ k=1,2,\ldots,n)\end{matrix} \tag{2}$$

Однако, если принимать вполне естественный принцип, что оценки объекта O_i неравнозначны, а их весы пропорциональны оценкам объектов O_j, то вместо формулы (2) мы должны применить итерационный процесс:

$$H^{(k)} Z_\ell = \lambda_{\ell+1} Z_{\ell+1} \qquad (\ell = 0,1,\ldots), \tag{3}$$

где $\lambda_{\ell+1}$ $(\ell=0,1,\ldots)$ скалярный множитель, получаемый из требования нормированности вектора $Z_{\ell+1} = (z_1^{(\ell+1)}, z_2^{(\ell+1)}, \ldots, z_m^{(\ell+1)})$. Требование нормированности означает, что $\sum_i z_i^{(\ell+1)} = 1$ или же $\max_i |z_i^{(\ell+1)}| = 1$ в зависимости от определения нормы. Компоненты вектора Z_0 могут быть в виде $z_i^{(0)} = \frac{1}{m}$ или $z_i^{(0)} = 1$ $(i=1,2,\ldots,m)$ в зависимости от нормы, хотя такое видоизменение $z_i^{(0)}$ на процесс (3) не воздействует. В формуле (3), и в некоторых последующих формулах пропущены при обозначениях Z_ℓ и λ_ℓ индексы k (номер критерия K_k).

Полученная процессом (3) последовательность Z_ℓ сходится в достаточно широких условиях и дает нам оценки объектов O_i $(i=1,2,\ldots,m)$ по критерию K_k, т.е. $Z^{(k)} = \lim_\ell Z_\ell$.

3. В случае оценок типа $\overline{\Pi}_1\overline{\Pi}_2$ элементы матрицы $H^{(k)} = (h_{ij}^{(k)})$ являются законами распределения или функциями плотности и возникает вопрос, как определить умножение

$H^{(K)}Z_\ell$ в формуле (3) в этом случае.

В данном случае имеются, например, следующие возможности:

а) Заменим (3) на (3')

$$H^{(K)}\tilde{Z}_\ell = Z_{\ell+1}, \quad (\ell = 0,1,\ldots) \tag{3'}$$

где $\tilde{z}_i^{(0)} = \frac{1}{m}$ (или $\tilde{z}_i^{(0)} = 1$), $z_i^{(\ell)} = (x_r; p_i^{(\ell)}(x_r))$ $(r = 1,2,\ldots)$ и $\tilde{z}_i^{(\ell)} = \frac{1}{\lambda_\ell}\sum_r p_i^{(\ell)}(x_r)x_r$, причем λ_ℓ определяется из требования нормированности вектора $\tilde{Z}_\ell$.

В случае непрерывного распределения можно определить $\tilde{z}_i^{(\ell)}$ по формуле $\tilde{z}_i^{(\ell)} = \frac{1}{\lambda_\ell}\int_0^\infty t\varphi_i^{(\ell)}(t)\,dt$.

б) Формулу (3) можно модифицировать и так:

$$\sum_j (h_{ij}^{(K)} \cdot z_j^{(\ell)})\, h_{ij}^{(K)} = \lambda_{\ell+1}\, z_i^{(\ell+1)}, \tag{3''}$$

где $h_{ij}^{(K)} \cdot z_j^{(\ell)}$ можно понимать как, например, коэффициент корреляции или скалярное произведение, или вообще,как функцию $f(h_{ij}^{(K)}, z_j^{(\ell)})$ определяющую "близость" элементов $h_{ij}^{(K)}$ и $z_j^{(\ell)}$. Так, в случае нормированных пространств, можно эту функцию определить следующим выражением $f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$, $(x, y \neq 0)$. Вообще, учитывая содержательное истолкование этой функции, целесообразно определить ее именно в виде неотрицательной функции, где большей "близости" аргументов соответствуют и большие значения функции.

в) Умножение $h_{ij}^{(K)} \cdot z_j^{(\ell)}$ в случае двух законов распределений $(x_i; p(x_i))$ и $(x_j'; p(x_j'))$ можно определить как распределение $(x_t''; p(x_t''))$ где $p(x_t'') = \sum_{i,j} p(x_i)p(x_j')$, причем должно выполняться условие $x_t'' = x_i x_j'$. В данном случае предполагаем, что для любых x_i и x_j' найдется такой x_t'', что $x_i x_j' = x_t''$ (хотя бы приблизительно).

В случае же двух функций плотности распределения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ $t \in [0;\infty)$ их произведение можно определить по формуле $\Psi(t)=\int\limits_0^\infty \varphi_1(t/\tau)\varphi_2(\tau)d\tau$.

4. Если мы имеем оценки объектов O_i $(i=1,2,\ldots,m)$ по всем критериям K_k $(k=1,2,\ldots,n)$, то можно из них составить матрицу

$$G=(g_{ik}),\qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,m;\\ k=1,2,\ldots,n\end{pmatrix}$$

где g_{ik} означает оценку объекта O_i по критерию K_k. Теперь возникает проблема о нахождении общей оценки i-того объекта. Простое сложение $\sum\limits_k g_{ik}$, конечно, опять не обосновано, так как отдельные критерии вряд ли имеют равное значение при определении общей оценки.

Для определения коэффициентов (удельных весов) критериев для нахождения общей оценки нужно получить от испытуемых (экспертов) дополнительные оценки, например

а) прямые оценки коэффициентов для критериев (типа $П_1П_2$) по всей совокупности объектов O_i $(i=1,2,\ldots,m)$;

б) прямые оценки коэффициентов для критериев (типа $П_1П_2$) отдельно для каждого объекта O_i ;

в) оценки парных сравнений коэффициентов для критериев (типа $\overline{П}_1П_2$) по всей совокупности объектов O_i $(i=1,2,\ldots,m)$;

г) оценки парных сравнений коэффициентов для критериев (типа $\overline{П}_1П_2$) отдельно для каждого объекта O_i.

В случае а) нужно просто умножить матрицу G на вектор оценок коэффициентов Q , что в результате дает вектор общих оценок объектов $R=GQ$

В случае б), хотя мы имеем оценки коэффициентов, они относительные и непосредственно не применимы. Но такие относительные оценки можно превращать в "абсолютные". Это можно сделать исходя из принципа: оценки коэффициентов критериев, которые даются на основе более значимого объекта, имеют большой удельный вес. Так, если мы имеем матрицу

$$F=(f_{ki}),\qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,n;\\ i=1,2,\ldots,m\end{pmatrix}$$

где f_{ki} означает оценку коэффициента k-того критерия на основе i-того объекта, то мы должны применить итерационный процесс

5

$$GX_\ell = \lambda_{\ell+1} Y_{\ell+1}, \qquad (4)$$
$$FY_{\ell+1} = \mu_{\ell+1} X_{\ell+1},$$

где X_ℓ ℓ-тое приближение вектора оценок для коэффицентов критериев (причем $x_i^{(0)} = \frac{1}{k}$ или $x_i^{(0)} = 1$) и Y_ℓ – ℓ-тое приближение вектора общих оценок для объектов. Из формулы (4) получим формулы

$$(FG)X_\ell = \nu_{\ell+1} X_{\ell+1}, \qquad (5.1)$$

$$(GF)Y_\ell = \varkappa_{\ell+1} Y_{\ell+1}, \qquad (5.2)$$

которые, как и исходные формулы (4) можно взять за основу для вычисления пределов $X = \lim_\ell X_\ell$ и $Y = \lim_\ell Y_\ell$. Можно применить также формулы (5.I) и $GX = \lambda Y$ или (5.2) и $FY = \mu X$.

В случае оценок парных сравнений для K_k мы должны, во первых, применить итерационный процесс по формуле (3), а затем, в случае в) использовать формулу $R = GQ$, а в случае г) использовать формулы (4) или эквивалентные им формулы.

Впрочем, оценки коэффициентов можно дать и типа $\overline{\Pi}_2$. Тогда мы должны использовать, кроме других формул, и конструкции п. 3.

5. Групповые оценки.

Если имеется некоторая группа оценивающих (экспертов), где надо выяснить определенные оценки со стороны этой группы (такая ситуация является типичной, например, в работе разных жюри), то непременно возникает проблема о применяемых процедурах для определения таких оценок. Конечно, в подбирании и модификации таких процедур имеется много возможностей. В данной статье мы исходим из следующих принципов:

I) групповая оценка должна складываться из соответствующих индивидуальных оценок отдельных членов группы;

2) индивидуальные оценки отдельных членов группы, вообще говоря, не имеют одинакового удельного веса;

3) удельный вес отдельных индивидуальных оценок определяется теми же оценивающими на втором этапе эксперимента (опроса).

деляется теми же оценивающими на втором этапе эксперимента (опроса).

Итак, допустим, что имеется s экспертов $E_j\ (j=1,2,\ldots,s)$ и каждый из них фиксировал свои оценки

$$a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{rj} \qquad (j=1,2,\ldots,s) \tag{6}$$

на предлагаемые r вопросов $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Эти индивидуальные оценки могут буть получены разными способами, описанными в п. 2-4. Из этих индивидуальных оценок составляем матрицу:

$$A=(a_{ij}), \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,r; \\ j=1,2,\ldots,s \end{pmatrix}$$

где a_{ij} - оценка эксперта E_j на i-той вопрос. Так как оценки более компетентного или объективного эксперта имеют больший удельный вес, то мы должны определить эти веса.

Для этой цели каждый эксперт E_j на основе столбцов матрицы А (матрица А представлена анонимно) оценивает компетентность (объективность) каждого эксперта $E_i\ (i=1,2,\ldots,s)$. Эти оценки можно опять получить разными способами (см. п. 2-4), что в данном случае имеет второстепенное значение. Таким образом, получается матрица:

$$B=(b_{ij}) \qquad (i,j=1,2,\ldots,s)$$

где b_{ij} - оценка компетентности (объективности) эксперта E_i, даваемая экспертом E_j. Так как для компетентности оценок (6) и b_{ij} требования, предъявленные к экспертам, по существу одинаковые, то мы приходим к следующему итеративному процессу

$$BY_l=\lambda_{l+1}Y_{l+1}, \qquad (l=0,1,\ldots)$$

где $Y_0=(\frac{1}{s},\frac{1}{s},\ldots,\frac{1}{s})$. Предел $Y=\lim\limits_{l} Y_l$ определяет коэффициенты (удельные веса) компетентности (объективности) экспертов E_j. Нужные групповые оценки X можем теперь вычислить по формуле

$$AY=\mu X.$$

Оценки компетентности можно дать не только по всей совокупности признаков $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$, но и по отдельным подмножествам M. Впрочем, разделить признаки по подмножествам иногда даже желательно, если, например, мно -

жество M имеет много элементов, или оно составляется из признаков достаточно различного характера, или же имеется цель повысить надежность и точность нахождения коэффициентов.

Если совокупность M всех признаков разделяется на q подмножеств M_i $(i=1,2,\dots,q)$, где $M_i \cap M_j = \phi$ (если $i \neq j$) и $\bigcup_i M_i = M$, то мы должны применить для определения коэффициентов компетентности вышеприведенную процедуру отдельно для любого подмножества M_i $(i=1,2,\dots,q)$.

6. Социометрическая задача

Рассмотрим следующую социометрическую задачу. Пусть имеется коллектив индивидуумов $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_m$, которые должны оценить друг-друга на основе некоторого общего критерия K (напр., – общий социометрический статус членов коллектива), который составляется из более элементарных или специальных свойств (критериев) $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$.

Каждый индивидуум оценивает всех членов коллектива (и самого себя) на основе каждого критерия $\mathcal{K}_k$ $(k=1,2,\dots,n)$. Оценки можно дать типа $\text{П}_1\text{П}_2$, $\overline{\text{П}}_1\text{П}_2$, $\text{П}_1\overline{\text{П}}_2$ или $\overline{\text{П}}_1\overline{\text{П}}_2$, от чего зависить обработка данных (см. п. 2 и 3).

Допустим теперь, что мы имеем оценки всех индивидуумов по некоторому критерию $\mathcal{K}_k$:

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) , \qquad \begin{pmatrix} i,j=1,2,\dots,m; \\ k=1,2,\dots,n \end{pmatrix}$$

где $a_{ij}^{(k)}$ обозначает оценку i-тому индивидуумому со стороны j-ого индивидуума по критерию $\mathcal{K}_k$.

Далее, мы должны все критерии $\mathcal{K}_k$ разделить на два класса. Один из них предполагают у оценивающего то же свойство и чем в большей мере это свойство имеется у индивидуума, тем точнее и весомее его соответствующие оценки. Назовем такие свойства (критерии) самопредполагающими, другие же – несамопредполагающими. В качестве примеров самопредполагающих свойств можно привести – информированность и компетентность в любой области, свойства, связанные знаниями или навыками. Примерами несамопредполагающих свойств будут свойства, связанные с физическими параметрами людей (физическая сила, красота).

В случае самопредполагающих критериев $\mathcal{K}_K$ имеется полное основание для нахождения соответствующих групповых оценок применить исходя из матрицы $A^{(K)}$ итерационный процесс по формуле (3). В случае же несамопредполагающих критериев $\mathcal{K}_K$ мы такого основания не имеем, и для нахождения групповых оценко по $\mathcal{K}_K$ мы должны просто суммировать оценки по строкам матрицы $A^{(K)}$.

Если применить соответствующие процедуры для каждого критерия, то получим матрицу $B = (b_{ij})$ $(i=1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$, где b_{ij} обозначает групповую оценку, даваемую i-тому индивидууму на основе j-того критерия.

Так как групповые оценки по отдельным критериям $\mathcal{K}_K$ не имеют одинакового значения в определении общего статуса $\mathcal{K}$, то нам надо определить и соответствующие веса критериев $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$. Такие оценки можно получить от индивидуумов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_m$ разными способами. Оценки критериев могут быть также т.н. относительные (см. матрицу F в п. 4), где нужные абсолютные оценки от j-того индивидуума вычисляются по формулам (4), заменяя матрицу G через $A_j = (a_{ij}^{(K)})$ $(i=1,2,\dots,m;\ K=1,2,\dots,n$; где j фиксировано). После нахождения всех индивидуальных оценок критериев составляется матрица

$$C = (c_{ij}) \qquad (i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m)$$

где c_{ij} означает оценку значимости i-того критерия в отношении оценки общего критерия $\mathcal{K}$ в рамках коллектива $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_m$, даваемую со стороны j-того индивидуума.

Теперь применим принцип, что оценки критериев c_{ij} имеют тем больший вес, чем больший общий статус $\mathcal{K}$ у j-того индивидуума. Итак, получаем итерационный процесс:

$$B X_\ell = \lambda_{\ell+1} Y_{\ell+1},$$

$$C Y_{\ell+1} = \mu_{\ell+1} X_{\ell+1},$$

где X_ℓ ℓ-тое приближение вектора групповых оценок критериев, Y_ℓ ℓ-тое приближение вектора групповых оценок (вычисленного на основе критериев $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$) общего (суммарного) критерия $\mathcal{K}$ для индивидуумов коллектива. Искомые пределы X и Y можно получить как в п. 4.

7. Пример

Для иллюстрации приведенных математических рассуждений рассмотрим следующий конкретный психометрический (искусствометрический) эксперимент. Для оценки выберем произведения изобразительного искусства, а именно, некоторые акварели К. Бурмана (см. [5] акв. I, 2, 5, 8 и II). Общий критерий $\mathcal{K}$ – общее художественное (эстетическое) впечатление, частные критерии:

$\mathcal{K}_1$ – колорит (общее цветовое впечатление произведения);

$\mathcal{K}_2$ – композиция (оценка впечатления произведения после мысленной элиминации цвета);

$\mathcal{K}_3$ – близость к натуре (оценка меры обобщения и модификации естественных форм, а также цвета; притом близость к натуре понимается как противоположное к вышеназванным модификациям);

$\mathcal{K}_4$ – мотив произведения (оценка того, как нравится мотив произведения – пейзаж или другие изображенные на акварели объекты в действительности);

$\mathcal{K}_5$ – эмоциональное воздействие (оценка того, в какой мере воздействует данное произведение на оценивающего с эмоциональной стороны (чувства , воспоминания и.т. д.));

$\mathcal{K}_6$ – интеллектуальное воздействие (оценка того, в какой мере стимулирует данное произведение оценивающего с интеллектуальной стороны (напр., эстетические проблемы)).

Пусть оценки даются при помощи парных сравнений (типа $\bar{\Pi}_1\Pi_2$). На основе критерия $\mathcal{K}_1$ (колорит) получаем следующие оценки

$$H^{(1)} = (h_{ij}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,52 & 0,48 & 0,48 & 0,46 \\ 0,48 & 0,50 & 0,44 & 0,50 & 0,43 \\ 0,52 & 0,56 & 0,50 & 0,54 & 0,50 \\ 0,52 & 0,50 & 0,46 & 0,50 & 0,48 \\ 0,54 & 0,57 & 0,50 & 0,52 & 0,50 \end{pmatrix}$$

На основе этих данных проводим итерационный процесс (3) и получаем следующие оценки для объектов (акварелей) $O_1 - O_5$:

0,195; 0,188; 0,209; 0,197; 0,210.

Аналогичные процедуры оценки и вычисления надо провести по каждому критерию, что дает нам матрицу G

$$G=(g_{ik})=\begin{pmatrix} 0,195 & 0,216 & 0,252 & 0,154 & 0,147 & 0,215 \\ 0,188 & 0,163 & 0,162 & 0,168 & 0,196 & 0,204 \\ 0,209 & 0,210 & 0,202 & 0,212 & 0,186 & 0,193 \\ 0,197 & 0,184 & 0,182 & 0,248 & 0,245 & 0,184 \\ 0,210 & 0,227 & 0,202 & 0,218 & 0,226 & 0,204 \end{pmatrix}$$

Теперь мы должны найти оценки для самых критериев. Фиксируем такие оценки в виде матрицы F (см. п. 4).

$$F=(f_{ki})=\begin{pmatrix} 0,193 & 0,174 & 0,212 & 0,187 & 0,195 \\ 0,174 & 0,138 & 0,170 & 0,139 & 0,194 \\ 0,150 & 0,137 & 0,129 & 0,131 & 0,130 \\ 0,150 & 0,184 & 0,191 & 0,196 & 0,165 \\ 0,163 & 0,192 & 0,170 & 0,217 & 0,173 \\ 0,170 & 0,175 & 0,128 & 0,130 & 0,143 \end{pmatrix}$$

Теперь мы должны применить итерационный процесс по формулам (4) или (5), исходя из конкретных матриц G и F. В результате итерации получаем оценки для объектов O_1 - O_5 (акварелей):

0,193; 0,181; 0,202; 0,209; 0,215 (7)

и оценки значимости для критериев

0,193; 0,164; 0,135; 0,177; 0,183; 0,148.

Для проверки всей процедуры оценки и вычисления можно непосредственно оценить общее художественное впечатление произведений, и для большей объективности - при помощи парных сравнений. Приводим данные сравнений в виде матрицы H

$$H=(h_{ij})=\begin{pmatrix} 0,50 & 0,52 & 0,47 & 0,49 & 0,48 \\ 0,48 & 0,50 & 0,46 & 0,48 & 0,46 \\ 0,53 & 0,54 & 0,50 & 0,49 & 0,49 \\ 0,51 & 0,52 & 0,51 & 0,50 & 0,49 \\ 0,52 & 0,54 & 0,51 & 0,51 & 0,50 \end{pmatrix}$$

Применяя итерационный процесс по формуле (3), получаем оценки тех же объектов по общему художественному впечатлению. Эти оценки следующие:

0,197; 0,190; 0,204; 0,202; 0,206,

которые хорошо согласуются с найденными по описанному комплексному методу оценками (7) (коэффициент корреляции τ =

= 0,95). Интересно отметить, что в данном случае комплексный метод лучше дифференцировал объекты, чем способ непосредственных парных сравнений общего впечатления. Можно предполагать, что и оценки первого способа более объективные (в матрице H заметное влияние самого значимого критерия – колорита).

8. О некоторых математических проблемах, связанных с моделью.

а) Если элементы матрицы $H = (h_{ij})$ (соответственно $H^{(K)} = (h_{ij}^{(K)})$, или других матриц) являются законами распределения, то мы должны модифицировать итерационный процесс (3) (см. п. 3). Покажем, что модифицированный процесс (3') можно свести к процессу (3).

В случае дискретного закона распределения элементы h_{ij} можно представить как множества пар $(x_v; p_{ijv})$, где x_v – возможные значения оценок, а p_{ijv} – их вероятности. Из п. 3 а) получаем

$$\tilde{x}_i^{(\ell+1)} = \frac{1}{\lambda_{\ell+1}} \sum_v p_i^{(\ell+1)}(x_v) x_v = \frac{1}{\lambda_{\ell+1}} \sum_v \Big(\sum_j p_{ijv} \tilde{x}_j^{(\ell)}\Big) x_v =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{\ell+1}} \sum_j \Big(\sum_v p_{ijv} x_v\Big) \tilde{x}_j^{(\ell)} .$$

Обозначая $\sum_v p_{ijv} x_v$ через $\tilde{h}_{ij}$, получаем

$$\sum_j \tilde{h}_{ij} \tilde{x}_j^{(\ell)} = \lambda_{\ell+1} \tilde{x}_i^{(\ell+1)} ,$$

т.е. процесс в виде (3), на основе модифицированной матрицы $\tilde{H} = (\tilde{h}_{ij})$ Получив величины $\tilde{x}_i = \lim_\ell \tilde{x}_i^{(\ell)}$, вычисляем по формуле

$$\sum_j h_{ij} \tilde{x}_j = x_i . \qquad (8)$$

В случае непрерывного распределения элементы h_{ij} являются функциями плотности $\varphi_{ij}(t)$ и мы получаем процесс в виде (3) на основе матрицы $\tilde{H} = (\tilde{h}_{ij}) = (\int_0^\infty t\, \varphi_{ij}(t) dt)$.

В случае 3. б) и 3. в) соответствующие итерационные процессы уже более сложные и к процессу с вещественными элементами (3) не сводятся.

б) Рассмотрим теперь вопрос о сходимости итерационного процесса (3). Имеется следующая теорема.

Теорема I. Если матрица H (в общем, с комплексными элементами) имеет простое характеристическое число λ_1, превосходящее модули всех других характеристических чисел H, т.е.

$$\lambda_1 > |\lambda_j| \quad , \qquad (j=2,3,\dots,m) \tag{9}$$

то итерационный процесс (3) сходится к собственному вектору, соответствующему характеристическому числу λ_1.

Доказательство. Как известно, матрица H приводима к жордановой нормальной форме, т.е. $H=Q\mathcal{Y}Q^{-1}$, где матрица $\mathcal{Y}$ имеет вид

$$\mathcal{Y}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \mathcal{U}\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{U}=(u_{ij})=\begin{pmatrix}\lambda_2 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1} & \varepsilon_{m-1}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_m\end{pmatrix}$$

и $\varepsilon_i = 0$ или 1 $(i=2,3,\dots,m-1)$. При этом, на основе $HQ= = Q\mathcal{Y}$ легко проверить, что первый столбец матрицы $Q=(q_{ij})$ является собственным вектором матрицы H, соответствующим характеристическому числу λ_1. Учитыва, что $\mathcal{Y}^t=\begin{pmatrix}\lambda_1^t & 0\\ 0 & \mathcal{U}^t\end{pmatrix}$ и $H^t=Q\mathcal{Y}^tQ^{-1}$ получаем

$$z_t' = H^t z_0 = Q\mathcal{Y}^t Q^{-1} z_0$$

(вектор z_t' не нормирован, $Q^{-1}=(\tilde{q}_{lk})$, где i-тый компонент выражается

$$z_i^{(t)} = \lambda_1^t\Big[q_{i1}\sum_k \tilde{q}_{1k} + \sum_{j\geq 2}\sum_{l\geq 2}\sum_k q_{ij}\tilde{q}_{lk}\,\frac{u^{(t)}_{j-1,l-1}}{\lambda_1^t}\Big].$$

Можно показать, что элементы матрицы $\mathcal{U}^t=(u_{ij}^{(t)})$ или равны 0, или имеют вид $\binom{t}{k}\lambda_\mu^{t-k}$ $(\mu \geq 2)$, откуда в силу (9) находим $\lim\limits_t \dfrac{u_{ij}^{(t)}}{\lambda_1^t}=0$. Тогда $\lim\limits_t \dfrac{z_i^t}{\lambda_1^t} = q_{i1}\sum\limits_k \tilde{q}_{1k}$, что в случае $\sum\limits_k \tilde{q}_{1k}\neq 0$ и следовало доказать. Если же $\sum\limits_k \tilde{q}_{1k}=0$, то ввиду погрешностей округления в коде вычислений, по существу $\sum\limits_k \tilde{q}_{1k}=\varepsilon$ (где $|\varepsilon|$ - малое число). Итак и в этом случае получаем тот же самый результат (ср. напр.

[7]).

Предпосылки теоремы 1 имеют место в случае матриц с положительными элементами (теорема Перрона, см. напр., [1], стр. 323).

В случае же матриц с неотрицательными элементами мы должны различать разложимые и неразложимые матрицы. Разложимыми матрицами будут такие, которые перенумерацией индексов элементов можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

где A и C - квадратные матрицы порядка n_1 и n_2 соответственно. В случае разложимых матриц надо применять итерационный процесс (3) отдельно для подматриц A и C, так как при совместной итерации n_2 последних компонентов вектора z равны нулю.

Среди неразложимых же матриц встречаются и такие, для которых последовательность

$$z_0, z_1, \ldots, z_e, \ldots, \tag{10}$$

полученная в результате процесса (3), не сходится (является осциллирующей). Тогда, впрочем, нетрудно выбрать подходящие методы суммирования, которые определяют т.н. обобщенный предел последовательности (10). Но в психометрических задачах, для этих случаев более естественным и целесообразным является другой способ - заменить в соответствующей матрице все нулевые элементы малыми положительными числами, что дает нам вышеупомянутый случай положительных матриц.

9. Некоторые общие замечания

Предлагаемый метод может быть применен во многих областях и случаях - при различных конкурсах, в работе жюри, в изучении проблем эстетического восприятия и этики, в социологических, психолингвистических и педагогических исследованиях. Для применения метода надо выбрать подходящий (достаточно полный) набор специальных критериев $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$ исходя из объектов $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_m$ и целей исследования (напр. какой общий критерий $\mathcal{K}$ выбран). На основе набора специальных критериев можно тогда, кроме нахождения общей оценки (по $\mathcal{K}$), найти и т.н. психометрические основы этой оценки (напр., низкие оценки по большинству специальных критериев, или же - высокие оценки по малозначимым критериям и низкие оценки по значимым критериям). Такие данные ценны, так как позволяют более точно определить, например, эффективные процедуры в улучшении социометрического статуса в коллективе, или же оптимальные параметры (объем для тем и т.п.) в процессе эстетического воспитания и развития молодежи и т.д.

К положительнам сторонам метода относится возможность проверки результатов с помощью сравнения, например, общих оценок, полученных двумя различными способами (вычисленных по специальным критериям $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$ и полученных непосредственно). Надо отметить, что в случае, когда специальные критерии не достаточно полно отражают общий критерий $\mathcal{K}$, общие оценки, полученные вышеупомянутыми двумя способами, могут также существенно различаться.

Отметим еще, что хотя оценки парных сравнений более надежны чем прямые оценки, применять их всюду в большом эксперименте не всегда целесообразно. Причина понятная - трудоемкость метода парных сравнений. Удобнее применять компромиссные варианты: парные сравнения - для более существенных случаев (критериев), напр., для оценки по общему критерию $\mathcal{K}$, или для оценки значимости самых критериев; или же применить оценки парных сравнений не для всех пар в матрице $H^{(K)}$ (1), а для некоторой связанной совокупности таких пар - аналогично тому, как в турнире вычисляются очки игроков после трети туров.

Отметим еще одно характерное явление, которое обнаруживается в таких экспериментах. Это - влияние оценок, даваемых по отдельным критериям, хотя критерии логически (учитывая их точно сформулированное содержание) никаких явных связей даже не имеют. Для объяснения вышесказанного можем сослаться на пример в п. 7, где обнаруживалось увеличенное действие колорита на непосредственные оценки общего художественного впечатления. Более типичными и частыми являются, однако, случаи, где друг на друга влияют оценки по специальным критериям (напр., оценки колорита на оценки композиции) или, еще чаще, влияние общей оценки на оценки по специальным критериям (см.,напр., [3], стр. 283).

Устранить такое влияние критериев полностью, по-видимому, невозможно. Но уменьшить такой "побочный эффект" можно при соответствующем планировании и проведении эксперимента (напр., достаточный временной запас для проведения эксперимента, достаточные временные интервалы между оценками по отдельным критериям, подходящее упорядочение для оценки критериев и т. д.).

В конце отметим, что рассмотренный метод дает хорошие возможности для дополнительного применения других математических и психометрических методов (корреляционный и факторный анализ, метод семантического дифференциала др.).

Литература

1. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., 1953, 491 стр.
2. Кулль И.Г., О некотором классе психометрических моделей, VI симпозиум по кибернетике [материалы], ч. III. Тбилиси, 1972, 106-107.
3. Осгуд Ч., Суси Дж., Танненбаум П., Приложение методики семантического дифференциала к исследованиям по эстетике и смежным проблемам, сб. Семиотика и искусствометрия. М., 1972, 278-297.
4. Фрумкина Р.М., Василевич А.П., Применение психометрических методов в лингвистических исследованиях, Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, Труды по знаковым системам V, 1971, 396-414.
5. Karl Burman, 12 reproduktsiooni. Tallinn, 1970.
6. Guilford, J.P., Psychometric methods. New York, 1954.
7. Võhandu L,, Tamme, E., Luht, L., Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1971, 373 стр.

Teatavast psühhomeetriliste mudelite klassist

I. Kull

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis vaadeldakse teatavat iteratsioonimenetluste klassi, mis võimaldab (informatsioonilises plaanis) modelleerida mitmete kriteeriumide alusel teostatavat objektide hindamist ja annab meetodid ka vastavate psühhomeetriliste eksperimentide andmete töötlemiseks.

Vahekorrad hinnangute vahel (resp. eksperimentaalandmete töötlemise skeemid) määratakse põhijuhul (p. 2-4) valemitega (3) ja (4). Punktis 5 käsitletakse ekspertide rühma koondhinnangute leidmist. Punktis 6 vaadeldakse sotsiomeetrilisi eksperimente. Punktis 7 esitatakse näide esteetiliste hinnangute leidmise kohta. Punktis 8 käsitletakse mõningaid matemaatilisi küsimusi (protsessi (3) koonduvus). Punktis 9 käsitletakse mõningaid üldisi küsimusi seoses vastavate eksperimentide planeerimisega.

On a class of psychometric models

I. Kull

S u m m a r y

In the present paper we shall consider a class of iterative mathematical methods which enable us to model certain judgement situations and process the data of similar psychometric experiments.

The paper will deal with the following judgement problem: the observer has to estimate the objects $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_m$ on the basis of certain criteria - $\mathcal{K}$ (general criterion of estimate), and $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$ (special criteria, of which, in an intuitive sense, $\mathcal{K}$ is composed). Estimates may be of the type $\Pi_1\Pi_2$, $\overline{\Pi}_1\Pi_2$, $\Pi_1\overline{\Pi}_2$ or $\overline{\Pi}_1\overline{\Pi}_2$ (where Π_1 denotes direct estimates of separate objects, $\overline{\Pi}_1$ - estimates of pair comparison, Π_2 - determined estimates, $\overline{\Pi}_2$ - stochastic esti-

mates (pt 1)).

The relations between the estimates are determined in the principal case (pts 2-4) by formulas (3) and (4). Pt 5 deals with the problem of summary estimates of a group of experts. Pt 6 considers sociometric experiments. Pt 7 presents an example of measuring esthetic perceptions. Pt 8 discusses the convergence of the process (3) and some other mathematical problems. Pt 9 treats of some problems related to the design of the experiments.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕЙ СИЛЫ ЗАДАНИЯ

Я.А.Микк

Индивидуализация обучения, выбор профессий, установление эффективности методов обучения нуждаются в измерении уровня знаний и развития способностей [4]. Это измерение производится при помощи контрольных работ и тестов, которые должны быть безупречными. Хорошие средства измерения можно получить, если очень тщательно составить задания [2] и по данным пробного испытания выбрать наилучшие. В этом выборе существенную роль играет дифференцирущая сила заданий.

Способы вычисления дифференцирующей силы сложились давно, но наиболее применимые из них, по-видимому, обладают довольно серьезными недостатками. Поэтому в настоящей статье анализируются способы вычисления дифференцирующей силы заданий. Целью анализа является нахождение такого способа вычислений, который лучше всего соответствовал бы психологическим требованиям относительно дифференцирующей силы.

Дифференцирующая сила задания показывает в какой степени это задание позволяет различить уровни измеряемых знаний или способностей. Если задание различает испытуемых правильно, то его дифференцирующая сила высока. Если задание, в некоторых случаях выполняется более слабыми испытуемыми и не выполняется более сильными, то дифференцирующая сила задания мала. В таком случае успех выполнения задания зависит не только от измеряемого свойства, но и от других свойств. Такое задание не совсем подходит для установления уровня намеченного свойства.

Данное определение дифференцирующей силы приравнивает ее к валидности [I]. Тем самым вычисление дифференцирующей силы задания наталкивается на те же трудности, что и вычисление валидности теста. На путях преодоления этих трудностей мы коротко остановимся в конце статьи. Теперь же предположим, что точные значения знаний или способности нам известны и по ним мы сможем вычислить дифференцирующую силу заданий.

Дифференцирующая сила задания обыкновенно выражается корреляцией между результатами выполнения задания и уровнем знаний или способностей. Почти всегда применяется линейная корреляция или формулы, позволяющие оценить его величину. Из последних формул часто применяется формула точечно-бисериальной корреляции [10, стр. 380]

$$r_{p,bis} = \frac{M_p - M_q}{\sigma} \sqrt{pq} ,$$

где

$r_{p,bis}$ – точечно-бисериальная корреляция,

M_p – средний уровень свойства у испытуемых, которые правильно выполнили задание,

M_q – средний уровень свойства остальных испытуемых,

σ – дисперсия свойства во всей группе испытуемых, которые пытались решить задание,

p – доля испытуемых, правильно выполнивших задание,

$q = 1 - p.$

Точечно-бисериальной корреляцией можно пользоваться, если выполнение задания оценивается дихотомно: правильно-неправильно. Если в измеряемом свойстве различают только два уровня, то дифференцирующую силу задания можно выразить ϕ-коэффициентом [10, стр. 387-389]:

$$\phi = \frac{AD - BC}{\sqrt{(A+B)(C+D)(B+D)(A+C)}}$$

В этой формуле буквы обозначают количества испытуемых в соответствии с таблицей I.

Таблица I

Обозначения в четырехпольной таблице

Решение задания \ Уровень знаний или способности	Низкое	Высокое
неправильное	A	B
правильное	C	D

Линейная корреляция и формулы, позволяющие определить ее величину, широко применяются для определения дифференцирующей силы заданий [8]. Тем не менее она обладает одним существенным недостатком: величина линейной корреляции зависит не только от тесноты связи между заданием и свойством, но и от трудности задания [7]. Самую высокую корреляцию имеют задания со средней трудностью, легкие и трудные задания имеют меньшую корреляцию, несмотря на то, что они тоже правильно различают учащихся по уровню знаний или способностей. Это иллюстрируется данными таблицы 2.

В этой таблице задания a, b и c одинаково хорошо подходят для измерения данного свойства - ни один из испытуемых не получит меньше баллов, чем кто-либо из испытуемых с более низким уровнем свойства. Или другими словами: эти три задания различают всех учащихся только правильно. Но эта равноценность заданий не вытекает из корреляций между выполнением задания и уровнем свойства - корреляции отличаются друг от друга. Причиной различий в корреляциях является неодинаковая трудность заданий. Наибольшую корреляцию имеет задание средней трудности, чем больше трудность отличается от средней, тем меньше становится корреляция.

Зависимость дифференцирующей силы задания от его трудности ведет к тому, что для теста или контрольной работы выбираются задания со средней трудностью. Ведь исследователь желает, чтобы дифференцирующая сила заданий была высокой, но она является такой только у заданий со средней трудностью. Но составлять средства измерения только из за-

Таблица 2

Сравнение $r_{p,bis}$ и d_v в качестве показателей дифференцирующей силы заданий

№ испытуемого	Выполнение задания								Уровень свойства
	a	b	c	d	e	f	q	h	
I	0	0	0	0	0	0	I	0	I
2	0	0	0	0	0	0	I	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	I	3
4	0	0	0	0	0	0	0	I	4
5	0	0	0	0	0	0	0	2	5
6	0	0	0	0	0	0	0	2	6
7	0	I	0	0	0	I	I	0	7
8	0	I	0	I	I	I	I	0	8
9	0	I	0	I	I	I	0	I	9
I0	I	I	0	0	I	1	0	I	I0
II	I	I	0	0	I	I	2	3	II
I2	I	I	0	I	I	I	2	3	I2
I3	I	I	0	I	I	2	I	I	I3
I4	I	I	0	I	I	2	I	I	I4
I5	I	I	0	I	I	2	2	3	I5
I6	I	I	I	I	I	2	2	3	I6
I7	I	I	I	I	0	2	2	2	I7
I8	I	I	I	I	0	2	2	2	I8
$r_{p,bis}$	0,87	0,82	0,64	0,8I	0,48	–	–	–	
Правильных различений	8I	72	45	77	63	I08	88	92	
неправильных различений	0	0	0	4	I8	0	20	28	
d_v	I	I	I	0,90	0,56	I	0,63	0,53	

даний со средней трудностью нецелесообразно. В контрольной работе должны быть легкие задания для слабо подготовленных учащихся и трудные задания для сильных. Если имеются задания лишь средней трудности, то испытуемых можно разбить только на две группы по уровню знаний или способности. Если же мы желаем определить их уровень развития подробней, то задания должны быть нескольких уровней трудности. Каждому уровню развития должен соответствовать уровень трудности заданий. Если испытуемый справится с заданиями определенного уровня трудности, значит он имеет соответствующий уровень развития свойства.

Итак, задания должны иметь различную трудность, но трудность влияет на дифференцирующую силу задания, вычисленную как корреляция. Зависимость дифференцирующей силы от трудности заданий мешает исследователю при выборе наилучших заданий. Это видно из таблицы 2. Задание d имеет корреляцию со свойством 0,81, которая значительно больше корреляции задания с ($r = 0,64$). Поэтому исследователь предпочитает задание d, но фактически оно хуже задания с. Ведь задание d показывает двух испытуемых более сильными, чем двое испытуемых, которые действительно являются более сильными (см. в таблице 2 испытуемых 8 - 11). Задание с не делает таких неправильных различий, более сильные испытуемые решают ее лучше, чем менее сильные. Действительная дифференцирующая сила задания c лучше, чем у задания d, но корреляция показывает обратное.

То, что трудность задания искажает дифференцирующую силу, осознано учеными ([11], [13]). Х.М.Джонсон [11] предлагает в качестве дифференцирующей силы использовать не корреляцию, а отношение корреляции к ее максимальному значению при данной трудности задания. В случае четырехпольной таблицы соответствующая формула следующая:

$$\frac{\Phi}{\Phi_{max}} = \frac{AD - BC}{[A + \min(B,C)][D + \min(B,C)]}.$$

Эта формула применима, если $BC < AD$ [6, стр. 256].

Вычисление линейной корреляции или точечно-бисериальной корреляции предполагает нормальное распределение учащихся по измеряемому свойству [10, стр. 375]. На практике это условие редко выполняется. Ведь большей частью уровень свойства определяется как сумма сырых пунктов испытания, а эти сырые пункты, как правило, не образуют интервальную шкалу [3]. Такую шкалу следует построить и только тогда можно применить корреляцию.

ϕ-коэффициент не предполагает нормального распределения, но соответствующую формулу навряд ли можно распространить на общий случай, т.е. на случай, когда в свойстве и в правильности решения задания выделяется более двух уровней.

Дифференцирующую силу задания можно вычислить по ответам испытуемых в сильной и слабой группах [12], [9].

Формула следующая [9]:

$$\mathcal{D} = \frac{R_u - R_L}{f},$$

где

R_u - сумма баллов при выполнении задания в группе сильных испытуемых,

R_L - сумма баллов при выполнении задания в группе слабых испытуемых,

f - количество испытуемых в сильной группе.

Вычисленная таким образом дифференцирующая сила имеет хорошее содержательное объяснение. А именно, она показывает какую долю составляют правильные различения испытуемых среди всех различений. Или точнее, она равна отношению разницы между количеством правильных различений и неправильных различений к общему количеству возможных различий между сильной и слабой группами [9]. Это положительная сторона данного показателя. Но он обладает и недостатками. Во-первых, величиной сильной (и слабой) группы выбирают обыкновенно 27% из общего количества испытуемых, но это справедливо лишь в случае нормального распределения [5]. Во-вторых, этот показатель не учитывает различия между испытуемыми, которые остаются вне сильной и слабой групп. Они составляют примерно половину от общего количества испытуемых. Задания должны отличать не только учащихся сильной группы от учащихся слабой группы, но и других учащихся. В-третьих, этот показатель не применим, когда из-за трудности задания его решает менее 27% испытуемых. Ведь в таком случае неправильные решения в сильной группе правомерны, а формула принимает их за недостаток дифференцирующей силы задания.

Анализ предыдущего способа вычисления дифференцирующей силы навел на мысль, что в основу вычислений следует брать различения, которые задание позволяет делать между испытуемыми. Правомерность такого подхода вытекает также из принятого определения дифференцирующей силы.

Остановимся подробней на различениях, которые задание позволяет делать между испытуемыми. Допустим, что задание было решено группой испытуемых, у которых мы знаем уровень измеряемого свойства. По результатам решения задания мы можем узнать относительно каждой пары испытуемых, что это задание: а) различает одного испытуемого от другого правильно, б) различает одного испытуемого от другого неправильно или в) не различает этих испытуемых. Приведем примеры. В таблице 2 задание k различает испытуемого № I от испытуемого № 3 правильно, испытуемого № 4 от испытуемого № I7 правильно, - в этих парах испытуемый с более высоким уровнем свойства решил задание лучше, чем его напарник. Это же задание различает испытуемого № 4 неправильно от испытуемого № 7, испытуемого № 6 неправильно от испытуемого № 9, - в этих случаях испытуемый с более низким уровнем свойства решил задание лучше, чем его напарник с более высоким уровнем свойства. Задание k не различает испытуемого № I от испытуемого № 2, испытуемого № 5 от испытуемого № I8 - в этих парах оба испытуемые решили задание одинаково.

Дифференцирующая сила задания будет тем больше, чем больше это задание делает правильных различений. Дифференцирующая сила будет тем меньше, чем больше она делает неправильных различений. И наконец, дифференцирующую силу задания следует вычислить так, чтобы она не зависела от количества пар испытуемых, которые остались неразличимыми. Ведь это количество зависит от трудности задания. Больше всего различений дает задание со средней трудностью. Если задание является трудным или легким, то она делает меньше различений между испытуемыми. Тем самым учет количества неразличенных пар испытуемых привело бы к зависимости дифференцирующей силы от трудности задания. Но этой зависимости мы желаем избежать. Незачем учитывать в дифференцирующей силе и трудность задания, она выражается особым показателем [I4].

Итак, в основе вычисления дифференцирующей силы задания, таким образом, останется два числа: количество правильных различений и количество неправильных различений, которые задание делает между испытуемыми. Зададимся целью по этим числам вычислить показатель, который изменяется в пределах от -I до +I, как и коэффициент корреляции. В таком случае д и ф ф е р е н ц и р у ю щ а я с и л а з а д а н и я р а в н а о т н о ш е н и ю р а з н о с т и к о л и ч е с т в п р а в и л ь н ы х и н е п р а в и л ь н ы х р а з л и ч и й к и х с у м м е. Это отношение показывает, какую долю составляют правильные минус неправильные различения среди всех различений.

Данная простая и содержательная схема вычисления дифференцирующей силы может подходить для электронно-вычислительной машины. Человек нуждается в менее объемистых способах вычислений. Для их разработки начнем с простейшего случая, когда испытуемые распределены по способности в две группы и правильность решения задания оценивается тоже дихотомически. Распределение испытуемых показано в таблице I. В этой таблице буквой A обозначено количество испытуемых, которые не решили задания и имеют низкий уровень свойства. Все эти испытуемые правильно различены от испытуемых, которые правильно решили задание и имеют высокий уровень свойства. Количество этих испытуемых обозначено через D. Значит задание делает AD правильных различений.

Буквой C обозначено количество учащихся, которые имеют низкий уровень способности, но решили задание правильно. Задание различает их неправильно от испытуемых, которые не решили задания, но имеют высокий уровень способности. Количество последних испытуемых обозначено буквой B. Значит задание делает BC неправильных различений.

Испытуемые A не различаются от испытуемых B заданием, также испытуемые C и испытуемые D выполнили задание одинаково. Испытуемые A не отличаются от испытуемых C и испытуемые B от испытуемых D по их уровню свойства. Значит общее количество пар испытуемых, которые различаются одновременно заданием и свойством, равно $AD+BC$. Тем самым дифференцирующая сила вычисляется по формуле:

$$d_r = \frac{AD - BC}{AD + BC}$$

Полученная формула используется в статистике для вычисления тесноты связи между двумя величинами [6]. Ею можно пользоваться, если величины измерены в порядковой шкале.

Приступим теперь к рассмотрению более общего случая. Пусть испытуемые распределены на три группы как по правильности решения задания, так и по свойству. Обозначения количеств испытуемых даны в таблице 3. Здесь и в дальнейшем увеличение первого индекса свидетельствует о более правильном решении задания и увеличение второго индекса свидетельствует о более высоком уровне свойства.

Таблица 3

Обозначения количеств испытуемых в девятипольной таблице

Правильность решения задания \ Уровень свойства	I	2	3
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Испытуемые a_{11} правильно различаются от испытуемых a_{22}, a_{23}, a_{32} и a_{33}. Количество этих различений равно $a_{11} \cdot (a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33})$. Испытуемые a_{12} правильно различены от испытуемых a_{23} и a_{33}, испытуемые a_{21} от испытуемых a_{32} и a_{33} и испытуемые a_{22} правильно различены от испытуемых a_{33}. Общее количество правильных различений равно $a_{11}(a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33}) + a_{12}(a_{23} + a_{33}) +$ $+ a_{21}(a_{32} + a_{33}) + a_{22}a_{33}$.

Испытуемые a_{12} неправильно различены от испытуемых a_{21} и a_{31}, потому что первые имеют более высокий уровень способности, но задание решили хуже. Неправильно различены еще испытуемые a_{13} от испытуемых a_{21}, a_{22}, a_{31} и a_{32}, испытуемые a_{22} от испытуемых a_{31} и испытуемые a_{23} от испытуемых a_{31} и a_{32}. Общее количество неправильных различений равно $a_{12}(a_{21} + a_{31}) + a_{13}(a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}) + a_{22}\, a_{31} + a_{23}(a_{31} + a_{32})$.

Дифференцирующую силу задания можно теперь вычислить, если от количества правильных различений вычесть количество неправильных различений и полученную разность разделить на суммарное количество правильных и неправильных различений.

Общую формулу для вычисления дифференцирующей силы задания по многопольной таблице можно коротко записать так:

$$d_v = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{m,n} \sum\limits_{k,l=1}^{m,n} \varkappa_{ijkl}\, a_{ij}\, a_{kl}}{\sum\limits_{i,j=1}^{m,n} \sum\limits_{k,l=1}^{m,n} |\varkappa_{ijkl}|\, a_{ij}\, a_{kl}},$$

где

m - число уровней измеряемого свойства,

n - число уровней правильности решения задания и

$$\varkappa_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{если } i<k \text{ и } j<l, \\ -1, & \text{если } i<k \text{ и } j>l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сущность предыдущей формулы можно выразить тремя правилами.

I. Количество правильных различений равно сумме произведений, в которых каждое число таблицы умножается на сумму чисел, находящихся в таблице ниже и правее его.

2. Количество неправильных различений равно сумме произведений, в которых каждое число умножается на сумму чисел, находящихся в таблице ниже и левее его.

3. Дифференцирующая сила задания равна отношению суммы и разницы количества правильных и количества неправильных различений.

Применим эти правила для вычисления дифференцирующей силы задания y в таблице 2. Распределение испытуемых для этого случая приведено в таблице 4.

Таблица 4

Количества испытуемых в разных группах по данным решения задания g (таблица 2)

Задание g \ Свойство	I-2	3-6	7-8	9-I0	II-I2	I3-I4	I5-I8
0	0	4	0	2	0	0	0
I	2	0	2	0	0	2	0
2	0	0	0	0	2	0	4

Правильных различий имеется $4(- + 2 + 2 + 4) + 2(2 + 2 + 4) + 2(2 + 4) + 2(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 88$. Неправильных различений имеется $4 \cdot 2 + 2(2 + 2) + 2 \cdot 2 = 20$.

$$d_r = \frac{88 - 20}{88 + 20} = 0,63.$$

Итак, мы разобрали новый показатель дифференцирующей силы d_r. Он зависит только от того, измеряет ли задание данного свойство или нет. И раз все задания должны измерять намеченное свойство, то и дифференцирующая сила должна быть по возможности авсокой. Удовлетворительными можно, по-видимому, считать задания у которых $d_r > 0,50$, у хороших заданий $d_r > 0,70$ и у отличных заданий $d_r > 0,90$. Если задание вообще не позволяет различать уровни измеряемого свойства, тогда различения являются случайными и количество правильных различений равно количеству неправильных различений. В таком случае $d_r \approx 0$. Отрицательная дифференцирующая сила свидетельствует о том, что более сильные испытуемые дали больше неправильных ответов, чем менее сильные испытуемые. Дифференцирующая сила задания может, таким образом, приблизиться к минус единице. Такие задания хорошо различают уровень измеряемого свойства и подходят в тест, если исследователь считает возможным изменить принципы оценки правильности решения задания.

До того, как подвести итоги сказанному в статье, хотелось бы остановиться еще на одном вопрос. В течение всего изложения мы исходили из того, что нам известен уровень знаний или способностей испытуемых. На практике это обыкновенно не так. Уровень знаний или способностей определяется по данным того же испытания, по которым вычисляется дифференцирующая сила заданий. Тем самым исследователь оказывается перед порочным кругом: для определения дифференцирующей силы заданий следует знать уровень измеряемого свойства, но чтобы определить эти уровни, следует знать, насколько хорошо каждое задание измеряет данное свойство.

Не существует идеального решения указанной проблемы. Наилучшим выходом из затруднения являются методы постепенных приближений. При этом I) первоначальный уровень способности определяется как сумма сырых пунктов, 2) вычисляется дифференцирующая сила заданий, 3) определяется уровень способностей с учетом полученных значений дифференцирующей силы заданий, 4) вычисляются новые дифференцирующие силы и т.д. до тех пор, пока изменения в дифференцирующей силе будут достаточно малы [3, стр. 80-89]. Вторым методом является факторный анализ, идеи которого, по-видимому, применимы также к d_v. Ведь этот показатель можно вычислить не только между заданием и свойством, но и между любыми двумя заданиями.

Все вышесказанное показывает, что высоко-качественного показателя дифференцирующей силы нельзя достичь с помощью одной математики. Этот показатель зависит от того, насколько хорошо составлены задания, положенные в основу анализа. Содержательный анализ измеряемого свойства имеет первостепенное значение.

Итак, мы рассмотрели способы вычисления дифференцирующей силы заданий. Из этих способов часто применяется корреляция, но она зависит от трудности заданий и поэтому вводит исследователя в заблуждение относительно истинной дифференцирующей силы заданий. Дифференцирующая сила, вычисленная на основе сильной и слабой групп, не учитывает различий в самых группах и среди испытуемых вне этих групп. Предложенная в настоящей статье дифференцирующая сила d_v свободна от этих недостатков. Она не предполагает нормального распределения испытуемых. Кроме того, d_v сравнительно легко вычисляется и имеет хорошее содержательное объяснение. Она показывает, какую долю составляет количество правильных минус неправильных различений среди всех различений испытуемых, сделанных заданием.

ЛИТЕРАТУРА

I. Белый Ю.А., Раппопорт И.А., Тесты как инструмент и как объект педагогических исследований, -"Объективные характеристики, критерии, оценки и измерения педагогических явлений и процессов", Тезисы докладов к семинару по методологии, педагогики и методике педагогических исследований, УI сессия I3--I6 марта I973. М., I973, 3II-320.

2. Бернштейн М.С., К методике составления и проверки тестов, - "Вопросы психологии", I968, № I, 5I-66.

3. Битинас Б., Многомерный анализ в педагогике и педагогической психологии. Вильнюс, I97I, 347 стр.

4. Гильбух Ю.З., О разработке и применении интеллектуальных тестов в США, - "Советская педагогика", I970, № II, I20-I33.

5. Левин А.В., Проблемы определения дифференцирующей силы заданий, - "Объективные характеристики, критерии, оценки и измерения педагогических явлений и процессов", Тезисы докладов к семинару по методологии педагогики и методике педагогических исследований, УI сессия, I3-I6 марта I973, М., I973, 334-336.

6. Clauss, G.,Ebner, H., Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Sociologen. Berlin, 1967, 367 S.

7. Davis, F.B., Item Selection Techniques. "Educational Measurement", ed. by E.F.Lindquist, Washington, 1951, 820 pp.

8. Engelhard, M.D., A Comparison of Several Item Discrimination Indices. "Principles of Educational and Psychological Measurement", ed. by W.A.Mehrens and R.L. Ebel, Chicago, 1967.

9. Findley, W.G., A Rationale for Evaluation of Item Discrimination Statistics. "Principles of Educational and Psychological Measurement", ed. by W.A. Mehrens and R.L. Ebel, Chicago, 1967.

10. Garrett, H.E., Statistics in Psychology and Education, New York - London, 1960, 478 pp.

11. Johnson, H.M., Maximal Selectivity, Correctivity and Correlation Obtainable in 2×2 Contingency Tables, "American Journal of Psychology", vol. 58, 1945, 65-68.

12. Koemets, E., Kuidas kontrollida õppetööd koolis, "Nõukogude Kool", 1962, nr. 4, 260-269.

13. Loevinger, J.A., A Systematic Approach to the Construction and Evaluation of Tests of Ability. "Psychological Monographs", vol. 61, 1947, nr. 4.

14. Mikk, J., Testi annuse raskus, "Nõukogude Kool", 1971, nr. 12, 949-952.

TESTIÜLESANDE DIAGNOSTILISE VÄÄRTUSE ARVUTAMINE

J. Mikk

R e s ü m e e

Testiülesannete ja küsimuste diagnostilist väärtust väljendatakse tavaliselt korrelatsioonina testi tulemuste ja ülesande vahel. Korrelatsiooni suurus sõtlub aga ülesannete raskusest ja seetõttú võib korrelatsioon uurijat eksiteele viia parimate ülesannete valikul. Artiklis tehakse ettepanek ülesande sellise diagnostilise väärtuse arvutamiseks, mis on vaba mainitud puudusest. Nende arvutuste aluseks on eristamised, mida ülesanne võimaldab õpilaste vahel teha. Ülesande diagnostiliseks väärtuseks võetakse õigete ja väärade eristamiste vahe ja summa jagatis.

CALCULATION OF THE DIAGNOSTIC VALUE OF QUESTIONS

J. Mikk

S u m m a r y

The diagnostic value of questions is one of the grounds for the selection of questions. As a rule, the value is calculated as a product moment correlation or point biserial correlation. But the correlation depends not only on correct discriminations among the subjects. It depends also on the amount of the discriminations, i.e. on the difficulty of the question. The last relationship may mislead the investigator if he chooses the best questions. A new indicator of diagnostic value is proposed to avoid these mistakes. The indicator is based on the correct and incorrect discriminations that the question enables us to make among the subjects. The indicator is equal to the quotient of the difference and sum of the mentioned discriminations. Such an index of diagnostic value indicates the difference between the numbers of correct and incorrect discriminations as compared with the total number of discriminations.

О КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОЦЕССА ПОИСКА

Т.И.Саксакулм

I. Введение

Настоящая статья является попыткой определить некоторые количественные характеристики процесса поиска, осуществляемого человеком. Последний рассматривается как многошаговый процесс принятия решения (выбора) на основе информации, которая поступает в результате собственных действий (проб) человека. С такой точки зрения показатели процесса поиска можно подразделить на локальные и глобальные (интегральные). Первые определяют эффективность одного шага поиска, вторые характеризуют весь процесс от начала до конца. К числу интегральных характеристик принадлежит, очевидно, число шагов (проб), сделанных человеком до нахождения искомого объекта (или, вообще, до нахождения определенной цели).

В данной статье рассматривается возможность сопоставления на основе критерия числа проб стратегии человека с т.н. слепым поиском. Как известно, эффективность слепого поиска является по этому критерию наименьшей по сравнению с любой другой стратегией поиска. Замысел исследования заключался в формализации экспериментальной ситуации, с тем чтобы на основе указанного критерия получить некоторую количественную характеристику соотношения стратегий человека и слепого поиска.

2. Описание экспериментальной ситуации

Для определения количественных характеристик процесса поиска рассмотрим следующую экспериментальную ситуацию. Пусть имеется некоторое конечное множество X (множество решений, вариантов действия и т.п.). Задача испытуемого состоит в нахождении из множества $\mathfrak{X}$ элемента x^*, обладающего определенным признаком. Будем считать, что процесс решения этой задачи подразделяется на этапы. Каждый этап – это выбор и испытание отдельного элемента $x_j \in \mathfrak{X}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$). После каждого выбора испытуемый получает информацию о том, достигнута ли цель ($x_j = x^*$) или нет ($x_j \neq x^*$). В последнем случае выдается и некоторая оценка y выбранного элемента множества $\mathfrak{X}$. Каждому $x \in \mathfrak{X}$ соответствует, разумеется, только один элемент $y \in \mathcal{Y}$. Таким образом, на множестве $\mathfrak{X}$ определена некоторая (однозначная) функция $y = f(x)$ (т.н. оценочная функция). Функцию $f(x)$ имеет смысл определить так, чтобы ее значения характеризовали степень различия между x и x^*. Это можно делать следующим образом. Рассмотрим $\mathcal{Y}$ как некоторое подмножество множества вещественных чисел, причем x^* соответствует минимальное значение (глобальный минимум) $f(x)$

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathfrak{X}} f(x). \tag{I}$$

В качестве $\mathfrak{X}$ рассмотрим в дальнейшем связное ограниченное подмножество точек n-мерного евклидова пространства E^n. В таком случае экспериментальную ситуацию можно сформулировать в виде статической экстремальной задачи: нахождения точки $x^* \in \mathfrak{X} \subset E^n$ так, чтобы выполнялось условие (I), где

x – n-мерный вектор,

$f(x)$ – некоторая вещественная функция от x.

Благодаря такой формализации экспериментальной ситуации (задачи поиска) можно определить, какую априорную (начальную) информацию нужно дать человеку, чтобы исключался слепой характер поиска. Как отмечается в (2), предпосылкой целенаправленного поиска (в отличие от слепого поиска) является возможность установления человеком связи между точками $x \in \mathfrak{X}$. В (4) показано, что этот процесс протекает либо на локальном, либо на глобальном уровнях, причем в качестве априорной информации, наличие которой необходимо для установления локальной связи, можно рассмотреть свойство непрерывности $f(x)$. Знание этого свойства позволяет испытуемому оценивать результат своих дей-

действий и корректировать направление движения к искомой точке.

3. Количественная характеристика процесса поиска на основе критерия числа проб

В качестве количественной характеристики процесса поиска минимума некоторой вещественной функции $f(x)$ рассмотрим отношение длины поиска (числа проб, необходимых для нахождения точки минимума $f(x)$) к длине слепого поиска. Длина поиска, осуществляемого человеком, является случайной величиной, зависящей, очевидно, от числа точек в области поиска. По выборке экспериментальных данных найдем уравнение регрессии

$$a = g(N), \tag{2}$$

где

a - математическое ожидание длины поиска,

N - число точек в области поиска.

При количественной оценке длины слепого поиска допустим сперва, что оценочная функция имеет в допустимой области поиска единственный минимум. Как известно, слепой поиск заключается в просматривании точек области поиска одной за другой в определенном порядке (сканированием) или путем случайного поиска, когда отдельные точки задаются в области поиска случайно. В обоих случаях задачу количественной оценки числа проб, требуемых для случайного попадания на точку минимума, можно свести к известной задаче поиска требуемого шара из урны без возращения уже выбранных шаров. При этом будем предполагать, что испытуемый запоминает уже выбранные значения аргумента (координаты точки) и соответствующие значения оценочной функции (например, благодаря наличию письменной памяти). Этим исключается повторный выбор одной и той же точки.

В таком случае вероятность завершения поиска на первом, втором и т.д. шагах является постоянной и равна

$$p_i = \frac{1}{N}, \tag{3}$$

где

N – число точек в области поиска,

i – число шагов до нахождения точки минимума.

Учитывая, что $i = 1, 2, \ldots, N$ и распределение значений является равновероятным, математическое ожидание числа шагов, требуемых для случайного попадания в цель, равно

$$\bar{i} = \sum_{i=1}^{N} i p_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N} = \frac{N+1}{2} . \qquad (4)$$

Итак, получаем, что отношение ожидаемой длины поиска, осуществляемого человеком, к длине слепого поиска равно

$$k = \frac{a}{\bar{i}} = \frac{2g(N)}{N+1} . \qquad (5)$$

Эту формулу можно обобщить на случай, когда целью испытуемого является нахождение хотя бы одного элемента удовлетворяющего условию

$$f(x) < q , \qquad (6)$$

где

q – наперед заданное число.

Условие (6) определяет, очевидно, некоторое множество $\mathfrak{X}_q \subset \mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X}_q = \{ x \mid x \in \mathfrak{X},\ f(x) < q \} ;$$

причем необходимо найти хотя бы один элемент этого множества. Как показано в (I), математическое ожидание числа шагов, требуемых для нахождения $x \in \mathfrak{X}_q$, выражается при соблюдении определенных условий в виде

$$\bar{i} = \frac{N+1}{M+1} , \qquad (7)$$

где

M – число элементов $\mathfrak{X}_q$,

N – число элементов $\mathfrak{X}$.

Итак, для более общего случая получаем

$$K = \frac{(N+1)\,k(N)}{M+1} , \qquad (8)$$

где

$k(N)$ – регрессия длины поиска.

4. Пример.

В качестве примера конкретно-психологического применения вышеизложенных теоретических соображений рассмотрим следующий несложный эксперимент. Цель данного эксперимента состояла в обнаружении структурных сдвигов в стратегии поиска при изменении числа точек в области поиска. С этой целью определялись значения коэффициента K при разных значениях N.

Эксперимент был поставлен следующим образом. На ЭВМ "Мир" испытуемые (студенты Таллинского политехнического института) решали ряд задач типа (I): задачей испытуемого было нахождение точки из квадратной области двумерного пространства с декартовыми координатами при условии, что некоторая непрерывная функция, имеющая в рассматриваемой области единственный минимум, достигла этого в искомой точке. Область поиска образовали точки x, координаты которых x_1 и x_2 удовлетворяли условиям

$$0 \leq x_1 \leq x_m; \; 0 \leq x_2 \leq x_m,$$

где

x_1 и x_2 - целые положительные числа,

$x_m = 10;\ 25;\ 50;\ 100.$

При переходе к решению очередной задачи, предусмотренной программой эксперимента, изменялось значение x_m. Таким образом, изменялось и число точек в допустимой области поиска при переходе от одной задачи к другой ($N =$ $= 100,\ 625,\ 2500,\ 10000$).

Перед началом опыта испытуемому сообщали цель задачи, свойство непрерывности оценочной функции, границы изменения координат x_1 и x_2, а также дискретный характер их изменения. Неизвестным было аналитическое выражение $f(x)$, которое, кстати, и не имело обозримого аналитического выражения и определялось при помощи несложного вычислительного алгоритма. Задачи, различающиеся значением x_m, были представлены испытуемому в случайном порядке (при переходе от решения одной задачи к решению другой изменялось случайным образом и место расположения искомой точки).

Посредством пишущей машинки испытуемый сообщал ЭВМ значения координат выбранной им точки, в ответ на которое ЭВМ вычисляла и печатала соответствующее значение $f(x)$. Так, шаг за шагом, развертывался процесс поиска минимума $f(x)$.

Обсуждение результатов

Регрессионный анализ полученных данных (3) позволял записать уравнение (2) в виде:

$$a = 3{,}9 \log_2 N - 15. \tag{9}$$

Можно отметить, что начальное состояние поиска характеризуется, очевидно, какой-то начальной неопределенностью H_0 в отношении места расположения искомой точки. Если априорная информация об этом отсутствует (как и было в данном случае) и у испытуемого нет поэтому никакого основания предпочитать одну точку другой, то теоретико-информационную меру H_0 можно выражать логарифмической функцией от N:

$$H_0 = \log_2 N. \tag{10}$$

Таким образом, получаем, что зависимость a от H_0 является линейной:

$$a = 3{,}9 H_0 - 15. \tag{11}$$

Поставив выражение a из (9) в формулу (5) получаем

$$K = \frac{7{,}8 \log_2 N - 30}{N+1}. \tag{12}$$

Зависимость K от N (по логарифмической шкале) выражена графически на рис. I. Начальный участок кривой не поддается аппроксимации формулой (I2) и обозначен поэтому пунктиром.

Как видно из рис. I отношение длины поиска человека к длине слепого поиска быстро уменьшается при возрастании числа точек в области поиска и в пределе оно равно нулю[1].

---

[1] Хотя мы договорились, что N является конечным, допустимым является и переход к пределу. В этом случае легко доказать, что

$$\lim_{N \to \infty} K = 0.$$

Это обусловлено, по-видимому, следующим обстоятельством.

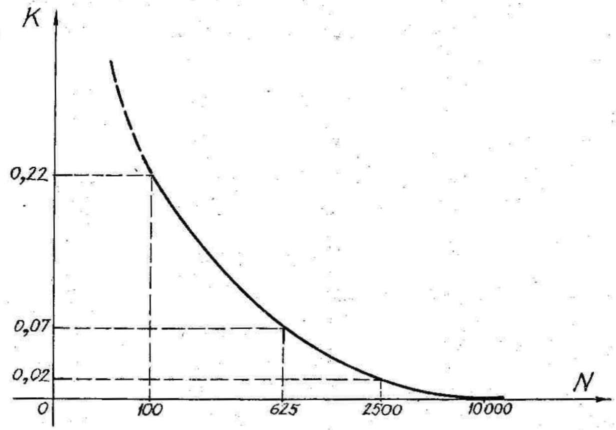


Рис. 1

В окрестности точки минимума поверхность отклика, соответствующая $f(x)$, имеет пологий участок, на котором испытуемые относительно часто получают одинаковые значения $f(x)$ в ответ на разные значения аргумента x. Поэтому, если испытуемый приблизился к этому участку, он лишается возможности установить связь между отдельными точками области поиска и вынужден пользоваться методом слепого поиска.

Площадь рассматриваемого участка вокруг точки минимума $f(x)$ не зависит, очевидно, от площади области поиска, т.е. от значения N. Следовательно, с увеличением N доля слепого поиска в общем числе проб, сделанных до нахождения искомой точки, быстро уменьшается. Таким образом, на основе изучения зависимости K от N можно действительно обнаружить некоторые сдвиги в стратегии поиска, обусловленные изменением числа точек в области поиска.

5. Выводы.

1) Представляется целесообразным предварительное формализованное описание экспериментальной ситуации, с тем чтобы выявить количественные характеристики процесса поиска определенной цели.

2) В качестве количественной характеристики процесса поиска можно рассмотреть отношение длины поиска, осуществляемого человеком, к длине слепого поиска. В частности, подтверждается возможность обнаружения на основе этого показателя структурных сдвигов в стратегии поиска.

Литература

1. Березкин Б.С., Зинченко В.П., Исследование информационного поиска, В сб.: Проблемы инженерной психологии. М., 1967, 90-117.

2. Оганесян Э.В. и др., О случайном и целенаправленном поиске. Биологический журнал Армения, 1971, т. 34, № 3, 19-23.

3. Саксакулм Т., Исследование поиска оптимального решения, Автореф. дисс., Тарту, 1972, 19 стр.

4. Саксакулм Т., К исследованию поиска оптимального решения человеком. VI симпозиум по кибернетике (Тбилиси, 1-3 ноября 1972 г.), ч. IV, Тбилиси, 1972, 120-124.

OTSINGUPROTSESSI KVANTITATIIVSEST ISELOOMUSTAMISEST

T. Saksakulm

Resümee

Artiklis vaadeldakse inimese otsinguprotsessi kvantitatiivse iseloomustamise võimalusi spetsiaalses laboratoorses situatsioonis. Vastava situatsiooni formaliseerimine võimaldas määrata inimese otsingustrateegiat iseloomustava kvantitatiivse näitaja - otsingu pikkuse (sammude arvu) suhte pimeotsingu pikkusesse. Esimene leitakse eksperimentaalsete andmete, teine arvutatakse teoreetilise mudeli alusel. Vaadeldakse saadud näitaja kasutamist psühholoogilises eksperimendis.

ON THE QUANTITATIVE CHARACTERISTIC OF SEARCH PROCESS

T. Saksakulm

Summary

The paper investigates a possibility of quantitative analysis of the human search process in a special laboratory situation. The formalisation of the situation permitted the author to define a quantitative characteristic of the human search process through the relation of its length (number of search trials) to the length of the blind search process. The former is given as a statistic of experimental data, the latter is calculated on the basis of a theoretical (mathematical) model. An example is given to illustrate.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАПОМИНАНИЯ ЧИСЕЛ

Я.Ф. Хуйк

I. Введение

Под математической моделью мы понимаем текст на некотором формализованном языке (напр., на алгоритмическом языке моделирования или на языке некоторого логико-математического исчисления-метода). При точном определении моделей (класса моделей) имеется возможность исследовать их как самостоятельные объекты.

Для некоторых понятий, переменных и т.д. модели должна быть возможность интерпретировать их, т.е. должна быть возможность поставить их в соответствие с понятиями, величинами и т.д. некоторой содержательной (неформализованной) теории. Это значит, что предложения, выражаемые в психологии естественным языком, заменяются в модели их точными формулировками на некотором формализованном языке.

Для выработки математических моделей используются различные дисциплины, например, дифференциальное и интегральное исчисление, теория вероятности, математическая статистика, математическая логика, матричная алгебра, теория множеств и т.д. При таком большом разнообразии возникает проблема систематизации моделей. За основу классификации математических моделей можно взять методы составления моделей [3] и исходя из этого выделить 4 типа математических моделей: индуктивные, дедуктивные, гипотетико-дедуктивные и кибернетические. Каждый из перечисленных методов математического моделирования психической деятельности и поведения есть продвижение вперед по сравнению с предыдущим. Ценность математического моделирования психической деятельности и поведения состоит главным образом в том, что позволяет осуществлять логический контроль психологической теории и предсказывать результаты некоторых психологических экспериментов [I, 3, 6 и др.].

Кроме того, при математическом моделировании психической деятельности возникли и развились некоторые специальные методы математической статистики, например, корреляционный и факторный анализ (Э.Спирмен, Л.Терстон и др.).

В настоящее время одной из наиболее развитых моделей с математической теорией является стохастическая модель обучения [2]. Краткий обзор практического использования этой модели при описывании экспериментальных данных обучения дан в следующем разделе.

2. Стохастическая модель обучаемости

2.I. Вступление

Исходя из классификации, приведенной в разделе I, стохастическая модель обучаемости относится ко второму типу.

При описывании процесса обучения рассматриваются только стимулы, реакции и последствия реакций. Субъект рассматривается как "черный ящик". Это значит, что нас не интересует структура психических процессов. Схематически процесс обучения можно представить так:

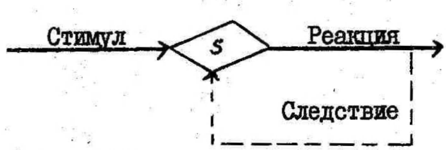


Рис. 2.I.

S – обозначение субъекта.

Стимулами могут быть все изменения или состояния внешней среды, которые человек способен воспринять, как, например, слова, предложения, лампочки и т.д. Реакция есть деятельность человека (включая и бездействие) после стимуляции. Изменения, происходившие во время и после реакции как в субъекте, так и во внешней среде называются следствием. Ими могут быть награждения, внутренняя удовлетворенность при успешном ответе, проприоцептивные стимуляции и т.д.

2.2. Общая стохастическая модель обучаемости

Обозначим всевозможные реакции буквами $A_1, \ldots, A_r$, а принадлежность реакции к соответствующему классу вероятности соответственно буквами $p_1, \ldots, p_r$.

Предположим, что

$$A_i \cap A_j = \phi \tag{2.2.I}$$

при каждой i и j $(i \neq j)$ и

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i = J, \tag{2.2.2}$$

где J достоверное событие.

Реакции, которые удовлетворяют условиям (2.2.I) и (2.2.2), называются полной системой несовместных реакций. При ней имеет место формула

$$\sum p_j = 1 \,. \tag{2.2.3}$$

Обозначим следствия буквами $O_1, \ldots, O_t$. Каждое следствие (включая и нулевое воздействие) оказывает некоторое воздействие на множество, состоящее из r вероятностей, соответствующих r реакциям. Предположим, что это воздействие не зависит от предыдущих событий и определено однозначно.

Допустим, что воздействие следствия O_i в реальном процессе обучения равноценно модели, умноженной на одностолбцовую матрицу P

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_r \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

на матрицу T_i ($i = 1, 2, \ldots, t$) порядка r.

$$T_i = \begin{pmatrix} u_{11}^{(i)} & \ldots & u_{1r}^{(i)} \\ u_{21}^{(i)} & \ldots & u_{22}^{(i)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r1}^{(i)} & \ldots & u_{rr}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{2.2.5}$$

Ю

где $i = 1,2,\dots,t$.

После умножения матриц получим:

$$T_i P = \begin{pmatrix} \sum_j \alpha_{1j}^{(i)} p_j \\ \dots\dots \\ \sum_j \alpha_{rj}^{(i)} p_j \end{pmatrix}. \qquad (2.2.6)$$

Элементы новой одностолбцовой матрицы (2.2.6) дают вероятности появлений реакций $A_1,\dots,A_r$ после воздействия следствия O_i.

Для того, чтобы можно было рассматривать каждый элемент новой одностолбцовой матрицы (2.2.6) как вероятность, нужно элементы $\alpha_{kj}^{(i)}$ ($k,j = 1,2,\dots,r$) матрицы T_i выбрать так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$0 \le \sum_j \alpha_{kj}^{(i)} p_j \le 1 \qquad (2.2.7)$$

при каждой $i = 1,2,\dots,t$.

По условиям (2.2.1) и (2.2.2) реакция образует полную систему событий, из чего следует второе ограничивающее условие на элементы $\alpha_{kj}^{(i)}$ матрицы T_i:

$$\sum_k \sum_j \alpha_{kj}^{(i)} p_j = 1 \qquad (2.2.8)$$

при каждой $i = 1,2,\dots,t$.

Нетрудно показать, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы (2.2.8) имело место, есть

$$\sum_k \alpha_{kj}^{(i)} = 1 \qquad (2.2.9)$$

при каждой $j = 1,2,\dots,r$.

Матрицу T_i, где сумма элементов каждого столбца равна 1, называют стохастической матрицей. Отсюда и название "стохастические модели обучаемости".

2.3. Частный случай стохастической модели обучаемости: $r = 2$.

В данном случае есть только 2 класса реакции, A_1 и A_2. Пусть вероятность появления реакции $R \in A_1$ есть p и вероятность появления $R \in A_2$ есть q. Одностолбцовая матрица

(2.2.4) принимает тогда вид:

$$P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \qquad (2.3.1)$$

По предложениям (2.2.1) и (2.2.2) имеет место правило полной вероятности

$$p + q = 1. \qquad (2.3.2)$$

Сумма вероятностей равна единице и она не изменяется, изменяются только p и q соответственно появлению реакции $R \in A_1$ и $R \in A_2$.

После первого испытания (которое включает следствие) имеем в общем случае уже другие вероятности появления реакций $R \in A_1$ и $R \in A_2$. Обозначим их соответственно буквами $p^{(1)}$ и $q^{(1)}$. Из определения (2.2.5) получим для матрицы T_i следующий вид:

$$T_i = \begin{pmatrix} u_{11}^{(i)} & u_{12}^{(i)} \\ u_{21}^{(i)} & u_{22}^{(i)} \end{pmatrix}. \qquad (2.3.3)$$

Для многократного применения матрицы T_i определим новые константы α_i и λ_i. Их замысел будет объяснен в дальнейшем.

$$\alpha_i = 1 - u_{12}^{(i)} - u_{21}^{(i)}, \qquad (2.3.4)$$

$$\lambda_i = \frac{u_{12}^{(i)}}{1 - \alpha_i}. \qquad (2.3.5)$$

Заменив $u_{11}^{(i)}$, $u_{12}^{(i)}$, $u_{21}^{(i)}$ и $u_{22}^{(i)}$ в (2.3.3) через α_i и λ_i, можно легко найти новые вероятности $p^{(1)}$ и $q^{(1)}$.

$$T_i P = \alpha_i \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + (1 - \alpha_i) \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 - \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ q^{(1)} \end{pmatrix} = P_1. \qquad (2.3.6)$$

В общем случае

$$T_i^n P = \alpha_i^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + (1 - \alpha_i^n) \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 - \lambda_i \end{pmatrix}. \qquad (2.3.7)$$

Формула (2.3.7) дает простую закономерность для нахождения новых вероятностей.

2.4. Условия, ограничивающие параметры α_i и λ_i.

Из равенства (2.3.6) получим значение $p^{(1)}$.

$$p^{(1)} = \alpha_i p + (1-\alpha_i)\lambda_i . \qquad (2.4.1)$$

Так как $p^{(1)}$ есть вероятность $R \in A_1$ после первого опыта, то

$$0 \leq p^{(1)} \leq 1 . \qquad (2.4.2)$$

Неравенство (2.4.2) имеет место при любом значении p и q в отрезке $[0;1]$. Беря $p = 0$, λ_i из (2.3.5) и заменяя эти значения в равенстве (2.4.1), получим

$$p^{(1)} = \omega_{12}^{(i)} \qquad (2.4.3)$$

из чего следует, что

$$0 \leq \omega_{12}^{(i)} \leq 1 . \qquad (2.4.4)$$

Если $p = 1$, тогда из равенства (2.4.1) получим

$$p^{(1)} = 1 - \omega_{21}^{(i)} , \qquad (2.4.5)$$

из чего следует, что

$$0 \leq \omega_{21}^{(i)} \leq 1 . \qquad (2.4.6)$$

Так как $\alpha_i = 1 - \omega_{12}^{(i)} - \omega_{21}^{(i)}$, то принимая в счет неравенства (2.4.4) и (2.4.6) получим

$$-1 \leq \alpha_i \leq 1 . \qquad (2.4.7)$$

Но этого недостаточно. В дальнейшем, чтобы избежать колебания, должен α_i удовлетворять следующее условие:

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \qquad (2.4.8)$$

По определению (2.3.5) $\lambda_i = \dfrac{\omega_{12}^{(i)}}{1-\alpha_i}$, тогда получим для λ_i следующее ограничивающее условие

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad , \qquad (\text{если } \alpha_i \neq 1) \ (2.4.9)$$

Найдем теперь $\lim\limits_{n\to\infty} T_i^n P$.

Из выражений (2.3.7) при условии, что $|\alpha_i| < 1$, следует

$$\lim_{n\to\infty} T_i^n P = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1-\lambda_i \end{pmatrix} . \qquad (2.4.10)$$

λ_i – это предельное значение, к которому приближается вероятность $R \in A_i$ при безграничном увеличении количества опытов. Из уравнения (2.3.7) видно, что от величины α_i зависит скорость приближения к предельному значению λ_i. Величину α_i можно интерпретировать как скорость обучения, λ_i - как степень обучаемости.

3. Применение стохастической модели при моделировании запоминания чисел

3.I. Вступление

Для проверки пригодности вышепредставленной модели автором был проведен эксперимент. Изучали запоминание двухзначных чисел. Испытуемый находился в отдельной кабине. За его поведением наблюдали через окно в стене. Испытуемому прочитали по микрофону 32 двухзначных числа. Интервал между двумя прочитанными числами был четыре секунды. Испытуемый повторял каждое прочитанное число вслух. Благодаря этому экспериментатор мог постоянно проверять планомерное протекание опыта и верность восприятия чисел. После прочтения чисел испытуемый записал в свободном порядке эти числа на бумаге и отдал экспериментатору. Опыт продолжался до тех пор пока испытуемый смог репродуцировать все числа. До опыта испытуемого инструктировали и допускали к работе лишь после того, как экспериментатор убедился, что испытуемый понял инструкцию.

Данные опыта приведены в таблице I. Пропущенная клетка означает, что число не запомнилось. Запоминание обозначено цифрой. Для четкого выявления числа запоминаний они обозначены рядом нарастающих натуральных чисел.

Для каждого опыта был составлен новый порядок представленных чисел, который был найден в таблице случайных чисел.

Таблица I

Числа	Номер испытания											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
II		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
I3		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
I4	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
I6	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
22					I	2	3	4	5	6	7	8
26				I		2	3	4			5	6
28				I	2	3			4	5	6	7
32			I							2	3	4
34		I		2	3	4	5	6	7	8	9	I0
37						I			2	3	4	5
42				I					2	3	4	5
45				I	2	3	4	5	6	7	8	9
46					I	2	3	4	5	6	7	8
47	I	2		3	4	5	6	7	8	9	I0	II
49			I				2	3		4	5	6
5I		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
52			I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
54	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
58	I	2			3	4	5	6	7	8	9	I0
63		I				2	3	4	5	6	7	8
67	I		2		3	4	5	6	7	8	9	I0
68		I		2		3	4	5	6	7	8	9
73				I	2	3	4	5	6	7	8	9
75		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
77		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
79							I	2	3	4	5	6
83				I	2	3	4	5		6	7	8
87	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0		II
89		I			2			3		4	5	6
9I			I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
92		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
94	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2

3.2. Установление соответствия между моделью и экспериментом

Запоминанию числа в опыте соответствует в модели реакция $R \in A_1$, а незапоминанию – реакция $R \in A_2$.

Сделаем следующие допущения [2]:

I. Запоминание данного числа не зависит от запоминания других чисел;

2. Все числа имеют одинаковую начальную вероятность запоминания p и одинаковые параметры α_i и λ_i;

3. Все числа одинаково трудно запомнить и порядок их предъявления не имеет значения;

4. Если число не запомнилось в n опыте, тогда его запоминание в $n+1$ опыте $p^{(n+1)} = p^{(n)}$. Это значит, что α_2 и λ_2 не вычисляется;

5. Если число запомнилось в n опыте, тогда вероятность его запоминания в $n+1$ опыте $p^{(n+1)} = \alpha_1 p^{(n)} + (1-\alpha_1)\lambda_1$.

6. Испытуемый может выучить все числа наизусть. В таком случае $\lambda_1 = 1$ и $p^{(n+1)} = \alpha_1 p^{(n)} + (1-\alpha_1)$.

Вышеперечисленные шесть допущений заметно упрощают проверку пригодности модели, так как нужно найти только два параметра: p и α_1.

Как выяснилось позже шесть вышеперечисленных допущений вполне оправдывают себя.

3.3. Оценка параметров p и α_1

Параемтр p есть запоминание чисел в первом опыте. Если учитывать только данные первого опыта, тогда запомнилось 8 чисел. Отсюда

$$p = \frac{8}{32} = 0{,}25. \qquad (3.3.I)$$

Дисперсию (3.3.I) этой оценки вычисляют по следующей формуле:

$$S^2(p) = \frac{p(1-p)}{N} = 0{,}0059 \qquad (3.3.2)$$

Но мы не учли следующих испытаний. Используем те данные, при которых число ни разу не запомнилось.

$$p = \frac{N}{N_0}, \qquad (3.3.3)$$

где $N = 32$ и N_0 есть при всех числах сумма тех испытаний, когда число первый раз запомнилось.

Из таблицы 3.I. находим, что $N_0 = 32 + 24 + 14 + 10 + 4 + 2 + 1 = 87$.

$$p = \frac{32}{87} = 0{,}37. \qquad (3.3.4)$$

Дисперсия оценки (3.3.3) по максимуму правдоподобия

$$s^2(p) = \frac{p^2(1-p)}{N} \qquad (3.3.5)$$

Вычисляя, получим

$$s^2(p) = 0{,}0027. \qquad (3.3.6)$$

Найденная последняя оценка p_1 смещенная, потому что единственная несмещенная оценка p по [4]

$$p = \frac{N-1}{N_0-1}. \qquad (3.3.7)$$

Вычисляя несмещенную оценку p и ее дисперсию, получаем

$$p = \frac{31}{86} = 0{,}36 \qquad (3.3.8)$$

и

$$s^2(p) = 0{,}0026. \qquad (3.3.9)$$

Для оценки параметра α_1 используем несмещенную оценку p (3.3.8). При оценке α_1 исходим из уравнения [2].

$$\overline{\overline{T}}_2 = \frac{-\ln p}{1-\alpha_1} \qquad (3.3.10)$$

откуда

$$\alpha_1 = 1 - \frac{-\ln p}{\overline{\overline{T}}_2} \qquad (3.3.11)$$

$\overline{\overline{T}}_2$ – математическое ожидание незапоминания чисел. Из таблицы 3.I

$$\overline{\overline{T}}_2 = \frac{94}{32} = 2{,}937 \qquad (3.3.12)$$

и

$$\alpha_1 = 1 - \frac{-\lg 0{,}361}{2{,}937 \cdot 0{,}434} = 0{,}65 \qquad (3.3.13)$$

3.4. Репродуцирование данных опыта при помощи модели

Запоминание чисел по гипотезе происходит в реальном опыте так же, как и в модели с параметрами

$$
\begin{aligned}
p &= 0{,}36, \\
\alpha_1 &= 0{,}65, \qquad\qquad (3.4.\mathrm{I}) \\
\lambda_1 &= \mathrm{I}.
\end{aligned}
$$

Для имитации при помощи модели реального процесса запоминания чисел нужно выполнить ряд определенных операции. Исходным материалом является модель (параграф 2.3) со значениями параметров (3.4.I) и таблица случайных чисел [5], откуда берутся подряд двухзначные числа.

Если при значении параметра $p = 0{,}36$ модели случайное число входит в множество $\{00, 0\mathrm{I}, \ldots, 34, 35\}$, тогда $p^{(n+1)} = \alpha_1 p^{(n)} + (1 - \alpha_1)$. Если выбранное случайное двухзначное число входит в множество $\{37, 38, \ldots, 98, 99\}$, тогда $p^{(n+1)} = p^{(n)}$. В реальном опыте соответствующим событием является запоминание и незапоминание. Если случайное двухзначное числа равно 36, тогда, если первая цифра следующего случайного числа входит в множество $\{\mathrm{I}, 2, 3, 4, 5\}$, найдём $p^{(n+1)} = \alpha_1 p^{(n)} + (1 - \alpha_1)$ и если входит в множество $\{6, 7, \ldots, 9, 0\}$, тогда $p^{(n+1)} = p^{(n)}$.

Работу модели иллюстрирует следующая таблица

Таблица 2

№№ опыта	Случайное число		Ответ
I	84	0,36	0
2	29	0,36	I
3	35	0,73	2
4	69	0,82	3
5	53	0,89	4
6	37	0,93	5
7	05	0,95	6
8	50	0,97	7
9	60	0,99	8
I0	55	0,99	9
II	58	0,99	I0

В первом опыте случайное число входит во второе множество и $p^{(1)} = p$. В реальном опыте это соответствует незапоминанию. Во втором опыте случайное число входит в первое множество. Поэтому $p^{(2)} = 0{,}065 \times 0{,}36 + (\mathrm{I} - 0{,}65)$. Это соответствует в реальном опыте запоминанию. В дальнейшем в таблице все случайные числа входят в первое множество, что соответствует запоминанию.

Для того, чтобы модель отражала запоминание всех 32 чисел, нужно проделать 32 таких же циклов "работы".

Полученные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

Числа	Номер испытания											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II	I2
II		I	2	3	4	5	6	7	8	8	IO	II
I3		I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II
I4	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II	I2
I6	I	2	3		4	5	6	7	8	9	IO	II
22				I		2	3	4	5	6	7	8
26				I				2	3	4	5	6
28					I	2	3	4	5	6	7	8
32												I
34		I		2	3	4	5	6	7	8	9	IO
37			I	2			3			4	5	6
42			I	2	3			4	5	6	7	8
45				I	2	3	4	5	6	7	8	9
46					I	2	3	4	5	6	7	8
47	I	2		3	4	5	6	7	8	9	IO	II
49			I			2	3	4	5	6	7	8
5I		I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II
52			I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO
54	I	2		3	4	5	6	7	8	9	IO	II
58	I	2		3	4		5	6	7	8	9	IO
63		I				2	3	4	5	6	7	8
67	I		2		3	4	5	6	7	8	9	IO

Числа	Номер испытания											
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II	I2
68		I		2		3	4	5	6	7	8	9
73			I	2		3	4	5	6	7	8	9
75		I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II
77	I		2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II
79	I	2	3	4		5	6	7	8	9	IO	II
83			I		2	3	4	5	6	7	8	9
87	I	2	3	4	5		6	7	8	9	IO	II
89		I			2	3		4	5	6	7	8
9I		I		2	3	4	5	6	7	8	9	IO
92	I		2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II
94	I		2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II

3.5. Оценка использованной модели

Для оценки модели сравниваем статистические характеристики, которые полученны из опытов, проведённых с человеком и моделью.

Из таблицы 3 сможем найти следующие новые оценки параметров:

$$P_m = \frac{N-1}{N_o-1} = \frac{31}{80} = 0{,}39 \qquad (3.5.I)$$

$$S^2(P_m) = 0{,}0029 \qquad (3.5.2)$$

$$\alpha_m = 1 - \frac{-\ln P_m}{\bar{\bar{T}}_{2m}} \qquad (3.5.3)$$

$$\bar{\bar{T}}_{2m} = \frac{93}{32} = 2{,}91 \qquad (3.5.4)$$

$$\alpha_m = 1 - \frac{-\ln 0{,}388}{2{,}91} = 0{,}67 \qquad (3.5.5)$$

В нижеследующей таблице 4 приведены сравниваемые статистические характеристики.

Таблица 4

Статистическая характеристика	Значение параметра из опыта	
	с человеком	с моделью
p	0,36	0,39
α_1	0,65	0,67
Среднее число опытов до первого запоминания	2,69	2,53
Среднее число опытов до второго запоминания	3,94	4,12

При 95 % уровня достоверности эти предъявленные статистические характеристики не отличаются значимо друг от друга.

Предъявленная модель достаточно хорошо описывает запоминание чисел в реальном опыте с человеком. Модель описывает данные опыта с малом числом параметров. В данном случае только с двумя-p и α_1. При помощи этих параметров можно репродуцировать данные, которые статистически равноценны данным реального опыта. При помощи этих двух параметров можно найдти большое количество других статистических характеристик.

Значение модели для психологии состоит в возможности исследовать тонкие психологические процессы и явления.

Литература

1. Аткинсон Р., Бауер Г., Кротерс Э., Введение в математическую теорию обучения. М., 1968, 486 стр.

2. Буш Р., Мостеллер Ф., Стохастические модели обучаемости. М., 1962, 483 стр.

3. Ительсон Л.Б., Математическое моделирование в психологии и педагогике.-"Вопросы философии", 1965, № 3, 58-68.

4. Крамер Г., Математические методы статистики. М., 1948, 631 стр.

5. Пустыльник Е.И., Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., 1968, 288 стр.

6. Фридман Л.М., О путях развития математической психологии.-"Вопросы психологии", 1970, № 4, 13-24

ARVUDE MEELDEJÄTMISE MATEMAATILISEST MODELLEERIMISEST

J. Huik

R e s ü m e e

Matemaatilise mudeli all mõistame mingis formaliseeritud keeles esitatud teksti. Tema peamine väärtus psüühiliste protsesside ja käitumise modelleerimisel seisneb selles, et ta võimaldab kontrollida psühholoogilise teooria loogilisust ja ennustada vastavate psühholoogiliste eksperimentide tulemusi. Üheks üksikasjalikumalt uuritud matemaatiliseks mudeliks nimetatud valdkonnas on R. Bushi ja F. Mostelleri õppimise stohhastiline mudel, mida kasutatakse käesolevas artiklis arvude meeldejätmise kirjeldamiseks.

ON THE MATHEMATICAL MODELLING OF STORING NUMERICAL SYMBOLS

J. Huik

S u m m a r y

A mathematical model is understood to be a text presented in any formal language. Its main value for the modelling of psychical processes and behaviour consists in the possibility of proving the logic of the theory and to predict the results of some experiments. The stochastic model of R. Bush and F. Mosteller represents a type of learning model that have a well-developed mathematical theory. This article presents a realisation of the model for describing the process of storing numerical symbols.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СТРУКТУРЫ ИГРЫ "5" И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ

А.М. Емельянов

Игра "5" является вариантом известной математической игры "I5". Цель игры заключается в переходе от некоторой исходной ситуации к заданной конечной, посредством последовательного перемещения фишек (элементов) ходом ладьи на свободную позицию игрового поля. Конкретность задачи игры "5" и доступность для обозрения и анализа числа возможных ситуаций позволили использовать эту игры для анализа закономерностей мышления.

В известных нам работах, посвященных изучению игры "5" [I], [3], [4], специально не ставилась цель проведения структурного анализа этой игры. Данное исследование направлено на установление некоторых общих закономерностей в структуре данной игры, связывающих все возможные в ней ситуации, для их дальнейшего использования в целях обучения.

Известно, что из всех 720 возможных ситуаций, лишь половина допускает перевод имеющейся исходной ситуации к заданной конечной. В данной статье мы будем рассматривать лишь те 360 ситуаций, которые могут быть сведены к избранной нами для примера ситуации $T^{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

В работе В.Н. Пушкина [I, стр. 43] все эти ситуации были разбиты на три типа: тип A, тип $Б$ и тип $В$. В основу этого разделения автор положил степень их организованности относительно конечной ситуации T^{κ}. Ситуации типа A отличались наибольшей организованностью, так как содержали в себе по существу готовое расположение элементов с точностью до перемещения их по циклу. В качестве примера может служить ситуация $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ & 3 & 2 \end{pmatrix}$, которая переводится в конечную $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \end{pmatrix}$ циклическим перемещением "дырки" (свободной позиции на игровом поле).

Ситуации типа $Б$ включали в себя две готовых подструктуры элемнтов. Примером является ситуация $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ & 5 & 1 \end{pmatrix}$, в которой элементы 2 и 3, а также 4,5 стоят рядом в той же последовательности, в какой они должны стоять в конечной ситуации $T^к$.

Ситуации типа $В$ характеризовались наибольшей разобщённостью элементов, сюда относились все остальные ситуации, не вошедшие в тип $А$ и $Б$.

Соотнесению степени упорядоченности различных типов ситуаций и успешности их разрешения посвящена работа В. Дияновой [2]. В этом исследовании в качестве экспериментальных задач использовались задачи указанных выше типов. Вводился коэффициент оптимальности как отношение числа ходов в оптимальном варианте к числу ходов, сделанных испытуемыми. Средние коэффициенты оптимальности решения задач различного типа оказались следующими:

$$K_А = 0{,}92\ , \quad K_Б = 0{,}74\ , \quad K_В = 0{,}57.$$

Приведенные данные свидетельствуют о прямой связи уровня организованности задачи с коэффициентом её оптимальности.

В нашем рассмотрении мы несколько изменим и дополним описанную выше классификацию.

Пусть $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}$ – произвольная сводимая $(к\, T^к)$ ситуация. Выпишем в направлении по часовой стрелке соседние пары элементов α_i $(i = 1,2,\dots,5)$, при этом игнорируя пустой позицией("дыркой"): (α_1, α_2), (α_2, α_3), (α_3, α_5), (α_5, α_4), (α_4, α_1). Т.о. с точностью до положения " дырки" каждая ситуация характеризуется пятью соседними парами.

Теперь возьмём какую-то другую сводимую ситуацию T_1. Обозначим через p_1 число одинаковых пар у ситуаций T и T_1. Тогда может быть доказана

<u>Лемма I</u> $p_1 = 0$, либо $p_1 = 2$, либо $p_1 = 5$.

Для доказательства приведём пример сводимой ситуации, у которой не будет ни одной одинаковой пары с ситуацией T: : $T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ & \alpha_1 & \alpha_5 \end{pmatrix}$. Теперь покажем, что если имеется одна одинаковая пара у ситуаций T и T_1, то существует, по крайней мере ещё одна общая пара. Пусть к примеру (α_1, α_2) является общей парой. Тогда ситуация T_1 обязана иметь один из следующих видов:

$$T_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_5 \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \\ \alpha_3 \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \\ \alpha_4 \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$T_1^{(4)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \\ \alpha_5 \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(5)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \\ \alpha_3 \alpha_5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что из всех ситуаций $T_1^{(i)}$ $(i = 1,2,\dots,5)$ лишь ситуации $T_1^{(2)}$ и $T_1^{(4)}$ сводятся к ситуации T. Остальные три ситуации не допускают подобной сводимости, т.к. каждая из них отличается от T только одной транспозицией элементов. А известно, что нечётное число транспозиций, от отличающее рассматриваемые ситуации, свидетельствует о невозможности такого сведения. Отметим далее что $T_1^{(2)}$ имеет ещё одинаковую с T пару $-(\alpha_5, \alpha_4)$, а $T_1^{(4)} - (\alpha_3, \alpha_5)$. Т.о. ситуации $T_1^{(2)}$ и $T_1^{(4)}$ имеют две одинаковых пары с ситуацией T. И, наконец, убедимся в том, что если ситуация T_1 имеет три одинаковые пары с ситуацией T, то у них обязательно имеются ещё две одинаковые пары. Рассмотрим один из случаев (остальные - аналогичны) когда одинаковыми у T и T_1 являются пары (α_1, α_2), (α_3, α_5), (α_5, α_4). Тогда T_1 обязана иметь вид: $T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix} = T$, т.е. лемма I доказана.

При делении ситуаций на типы В.Н. Пушкин учитывал расположение "дырки" в конечной ситуации и элементы I, 4, разделённые "дыркой", не считал соседними. В нашем анализе удобнее (это станет ясным из дальнейшего изложения) эти элементы считать соседними; в таком случае получим следующее разделение сводимых ситуаций на несколько иные три типа относительно ситуации T, для которого характерно:

ситуации типа A' будут иметь пять общих пар,
ситуации типа $Б'$ будут иметь две общие пары,
ситуации типа $В'$ не будут иметь общих пар.

Очевидно, что тип A' объединит те же ситуации, что и тип A. Тип $Б'$ включит в себя большее число ситуаций, чем тип $Б$, т.к. в него перейдут из типа B те ситуации, где имеется пара (4,I). Последние ситуации были наиболее простыми в типе B , поэтому их переход мог только увеличит сложность ситуаций типа $Б'$ и в той же мере увеличить сложность ситуаций типа B'. Исходя из сказанного, следует, что и для наших типов ситуаций по-видимому будет справедлива связь коэффициентов оптимальности, подобная указанной выше, а именно $K_{A'} > K_{Б'} > K_{B'}$.

Продолжим анализ выделенных нами типов ситуаций. В дальнейшем пару (α_i, α_j) будем называть парой противоположной паре (α_j, α_i). Рассмотрим произвольную сводимую ситуацию T_2 и через p_2 обозначим число противоположных пар у ситуаций T и T_2 .

Аналогично лемме I, доказывается

<u>Лемма 2</u> $p_2 = 0$, либо $p_2 = 2$, либо $p_2 = 5$.

Далее заметим, что у ситуации T и любой другой сводимой ситуации T_3 одновременно не может быть одинаковых и противоположных пар. Действительно, если у них имеется две одинаковые пары, то отсутствие противоположных пар следует из рассмотрения ситуаций $T_1^{(2)}$ и $T_1^{(4)}$ из первой части доказательства леммы I. В случае пяти одинаковых пар отсутствие противоположных пар очевидно. Заметим также, что у ситуаций T и T_3 не могут отсутствовать одновременно и одинаковые и противоположные пары. Доказательство последнего факта будет следовать из дальнейшего изложения.

Итак из лемм I и 2, а также из замечаний к ним следует

<u>Теорема</u> Пусть T и T' две произвольные сводимые сиситуации. Тогда они могут иметь только либо две, либо пять одинаковых пар, либо две, либо пять противоположных пар.

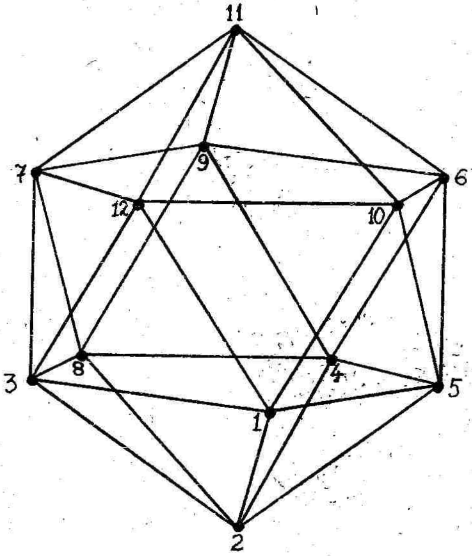
Теорема позволяет продолжить классификацию ситуаций, а именно уточнить, что мы будем понимать под ситуациями типа B'. Это, во-первых, ситуации типа B_1' , содержащие две противоположные пары, и, во-вторых, ситуации типа B_2', содержащие пять противоположных пар. Очевидно и для этих типов ситуаций можно экспериментально получить некоторые коэффициенты оптимальности $K_{B_1'}$ и $K_{B_2'}$.

Т.о. на основании предложенного нами разделения, можно все 360 ситуаций разбить по указанным признакам на четыре типа: A', $Б'$, B_1', B_2'.

Проведём более детальное рассмотрение этих типов ситуаций посредством теории графов.

Нами был построен граф $Г_1$, в вершинах которого находились сводимые ситуации игры "5", а ребра его соответствовали всевозможным переходам от одной ситуации к другой. Рисунок графа $Г_1$ не приводится в виду его громоздкости.

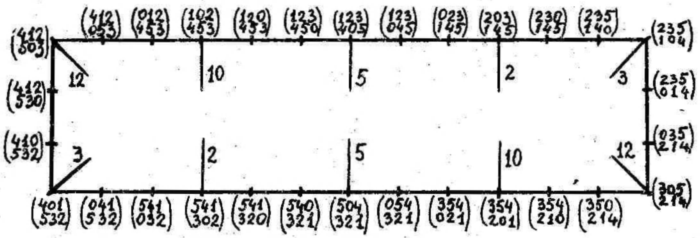
Для удобства дальнейшего анализа целесообразно рассмотреть граф $Г_2$, гомоморфный графу $Г_1$; в вершинах графа $Г_2$ помещены не отдельные ситуации, а целые их классы (по 30 ситуаций в вершине). Все ситуации одного класса переводились друг в друга циклическим маршрутом "дырки". Каждому ребру графа $Г_2$ соответствовало два ребра графа $Г_1$.



Р и с. I.

На рис. I изображен граф Γ_2, представляющий собой правильный многогранник - икосаэдр.

Все ситуации, соответствующие одной вершине (пусть вершине I), представлены на рис. 2. Цифрами, которыми обозначены ребра, указаны номера вершин, на которые осуществляется переход по данным ребрам. Для обозначения "дырки" введен фиктивный элемент "0".



Р и с. 2.

Приведем некоторые результаты, полученные при исследовании графа Γ_2.

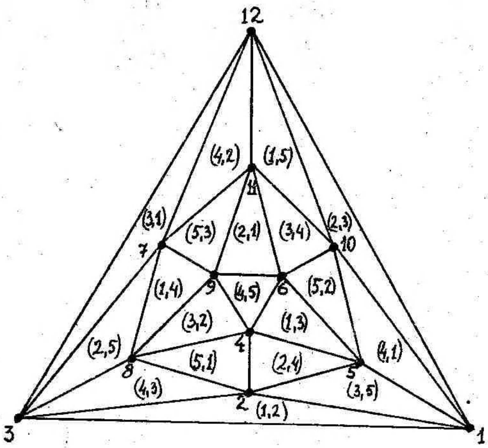
I. Ситуации из одной вершины характеризуются пятью парами элементов, однаковыми для всех ситуаций данной вершины, причём каждая вершина имеет один из двенадцати допустимых наборов пар. Так вершина I характеризуется набором: (I,2); (2,3); (3,5); (5,4); (4,I);

2. Ситуации, принадлежащие соседним вершинам, т.е. вершинам, расстояние между которыми равно I, имеют две одинаковые пары элементов. Каждое ребро графа оказывается связанным с определёнными двумя парами элементов, являющимися общими для его вершин. А все 30 ребер исчерпают все 30 возможных бинарных соединений пар. Например, ребро, соединяющее вершины I и 2, будет определяться двумя парами (I,2); (3,5).

3. Тройки соседних вершин объединяют ситуации, имеющие только одну одинаковую пару элементов. Так как тройки вершин образуют грани икосаэдра и каждая тройка характеризуется своей определенной парой, отличной от остальных, то

эту пару можно приписать соответствующей грани. Тогда все 20 граней исчерпают все 20 вариантов возможных пар. На рис. 3 изображена проекция икосаэдра на плоскость; каждой грани приписана соответствующая ей пара элементов.

4. Выделим какую-либо одну вершину икосаэдра в качестве исходной и рассмотрим пять опирающихся на неё граней. Получим, что исходная вершина будет характеризоваться пятёркой пар, соответствующих указанным граням. Примечательно, что эти же пары будут определяющими для класса ситуаций, расположенных в данной вершине. Например, на вершину II, для ситуаций которой характерны пары: (I,5); (5,3); (3,4); (4,2); (2,I) будут опираться грани, обозначенные теми же парами (рис. 3).



Р и с. 3.

5. Каждой вершине можно сопоставить лишь одну такую вершину, расстояние до которой равно 3. Такие вершины будем называть взаимно противоположными. В графе будет шесть пар подобных вершин:

I и 9, 3 и 6, 8 и I0, 4 и I2, 5 и 7, 2 и II.

Любые две противоположные вершины обладают в некотором смысле противоположными свойствами. Противоположные вершины будут содержать ситуации с набором противоположных пар. К примеру, ситуации вершины I характеризуются парами (I,2) (I,2); (2,3); (3,5); (5,4); (4,I); а ситуации противоположной нершины 9 характеризуются набором соответственно противоположных пар. Кроме того, граням икосаэдра, образованным соответственно противоположными вершинами, будут приписаны противоположные пары. Так грани икосаэдра, образованной вершинами II, 6, 9 будет приписана пара (2,I), а к грани, образованной соответственно противоположными вершинами 2, 3, I будет относиться противоположная пара (I,2).

6. Ситуации в вершинах, удалённых на расстоянии 2, не будут иметь общих пар, но будут содержать по две противоположные пары. Доказательство этого факта проведём на примере вершин I и 7. Вершина 7 находится на расстоянии 2 от вершины I, в то же время, вершина 7 удалена на расстояние I от вершины 9 (противоположной вершине I). Поэтому ситуации вершины 7 должны иметь те же, что и у вершины 9, две протиоположные пары, относительно пар вершины I. Но так как у любых двух ситуаций не могут существовать одновременно и одинаковые противоположные пары (это доказывалось выше), то в ситуациях вершины 7 не может быть общих пар с ситуациями вершины I. Подобное доказательство может быть проведено для любых двух вершин графа, удалённых на расстояние 2.

7. Из проведенного анализа следует , что существует связь между удалённостью вершин в графе и наличием в ситуациях этих вершин общих и противоположных пар:

- ситуации одной вершины имеют пять одинаковых пар,
- ситуации соседних вершин имеют две одинаковые пары,
- ситуации из вершин, удаленных на расстояние 2 имеют две противоположные пары,
- ситуации из вершин, удаленных на расстояние 3 (противоположных), имеют пять противоположных пар.

Так как перечисленные варианты исчерпывают все связи, возможные между двумя ситуациями, то такой вариант, когда у двух ситуаций отсутствуют одновременно и одинаковые и противоположные пары, невозможен. Это заключение было использовано выше при доказательстве теоремы.

Применим результаты, полученные в проведённом исследовании, для рассмотрения различных типов ситуаций:

В игре "5" в качестве конечной ситуации принималась ситуация $T^K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Эта ситуация принадлежит вершине I графа Γ_2. Заметим, что все остальные ситуации этой вершины будут ситуациями типа A'. Соседние с вершиной I вершины 3, I2, I0, 5, 2 будут объединять ситуации типа $Б'$. В вершинах 8, 7, II, 6, 4, находящихся на расстоянии 2 от вершины I, будут ситуации типа B_1'. И, наконец, вершина 9 будет содержать ситуации типа B_2'.

Для коэффициентов оптимальности, соответствующих указанным четырем типам ситуаций, можно написать следующую последовательность неравенств: $K_{A'} > K_{Б'} > K_{B_1'} > K_{B_2'}$.

Последняя пара неравенств следует из рассмотрения графа Γ_2. Действительно для перевода ситуации типа B_1' в ситуацию T^K требуется пройти через ситуацию типа Б'. Аналогично, чтобы перевести ситуацию типа B_2' в T^K необходимо пройти через ситуацию типа B_1'.

Как же можно использовать сделанные выше обобщения по структуре ситуаций игры "5" в целях обучения этой игре?

С помощью графа Γ_2, изображённого на рис. I, представилось возможным установить строго формальные типы связей всевозможных ситуаций, возникающей в игре "5" с искомой - конечной ситуацией. Полученные нами типы связей оказались несколько отличными от типов связи, выделенных в этой игре В.Н. Пушкиным [I].

Тип связи между исходной и конечной ситуацией является показателем уровня сложности переходов, которые должен преодолеть человек при решении задачи в рассматриваемой игре. Это заключение следует из логического сопоставления выделенных нами типов связи с экспериментальными оценками уровня сложности подобных типов задач, полученных В. Дияновой [2]. Поэтому можно теперь вести речь не просто о переводах ситуаций одного типа в ситуации другого типа, а о переводе ситуаций одного уровна сложности в другой, т.е. о последовательном упрощении ситуаций. Именно в этом и должна заключаться цель обучения игре "5" - научиться последовательно переводить ситуацию большего типа сложности к ситуации более простого типа, вплоть до получения конечной.

Очевидно установление уровней сложности ситуаций позволит разделять также и уровни сложности задач, возникающих в данной игре. В таком случае процесс обучения игре "5" можно свести к последовательным тренировкам решения задач возрастающих уровней сложности.

Следует специально оговорить, что в основу оценки уровня сложности задач в рассматриваемой игре нельзя брать только число ходов, потребных для перевода исходной ситуации в конечную. Может оказаться, что перевод исходной ситуации в ситуацию того же типа сложности потребует большего числа ходов, чем перевод той же исходной ситуации к ситуации юолее простого типа. К тому же и психологически решение многоходовой задачи может оказаться более очевидным, чем решение задачи с меньшим числом ходов.

Использованный нами при анализе структуры игры "5" граф позволил формально выделить четыре типа ситуаций, возникающих в этой игре. В принципе, вероятно, возможна более тонкая дифференциация типов ситуаций, возникающих в данной игре, и использование для анализа ее структуры других графов.

В заключение заметим, что изложенный в данной статье подход к анализу структуры игры "5" может быть применен и к игре "I5", а также к любым другим разновидностям данного типа игр, вплоть до игры общего случая - игры "$m \times n - 1$".

Литература

I. Поспелов Д.А., Пушкин В.Н., Мышление и автоматы, М., "Советское радио", I972, 223 стр.

2. Пушкин В.Н., Психология мышления и принципы эвристического программирования,-"Вопросы психологии", I967, № 6, I0I-II7.

3. Завалишина Д.Н., Пушкин В.Н., О механизмах оперативного мышления. -"Вопросы психологии", 1964, № 3, 87-100.

4. Клыков Ю.И., Рыбакова Т.К., Модель решения игры "5". Доклады НТК по итогам НИР за 1966-1967 гг., Подсекция применения средств вычислительной техники, МЭИ, 1967.

MÄNGU "5" STRUKTUURI MÕNINGATEST ISEÄRASUSTEST JA NENDE KASUTAMISEST ÕPPEPROTSESSIS

A. Jemeljanov

R e s ü m e e

Mängu "5" (analoogiline mänguga "15", kuid 2×3-ruudulisel väljal) struktuuri on otstarbekohane uurida graafide abil, kus graafi tippudeks on situatsioonid (seisud) või nende klassid, kaarteks aga üleminekud nende vahel. Võttes aluseks teatava tsüklilise ümberpaigutuse (määrab ekvivalentsivahekorra), võib kõik situatsioonid liigitada 12 klassi. Vaadeldes neid klasse graafi tippudena, ilmneb, et nendevaheline kaugus (minimaalne kaarte arv) on kas 1, 2 või 3 ühikut. Seega on otstarbekohane jaotada kõik situatsioonid mingi kindla lõppsituatsiooni suhtes 4 tüüpi (töös [2] on 3 tüüpi) - olenevalt vastava klassi kaugusest lõppsituatsiooni klassist. Situatsiooni teisendamist lõppsituatsiooniks võib vaadelda üleminekutena klasside vahel ja üleminekutena klassi enese raames.

Mäng "5" on sobiv vahend õppeprotsessi mitmete psühholoogiliste aspektide eksperimentaalseks uurimiseks, kus samaaegselt võib arvesse võtta ka mängu enese struktuuri (vt. näit. [1], [3], [4]).

ON SOME PROPERTIES OF THE STRUCTURE OF GAME "5" AND THEIR USE IN THE LEARNING PROCESS

A. Yemelyanov

S u m m a r y

It is convenient to study the structure of the game "5" (similar to game "15", but on a 2×3 field matrix) with the help of graphs where the points (vertices) of the graph represent situations or their classes, and the edges represent transfers between them. On the basisof a certain cyclic transposition (defines the equivalene relation),all

all situations can be classified into 12 classes. If considered as the points of the graph, it appears that the distance between these classes (minimal number of edges) is 1, 2 or 3 units. Thus it is convenient to divide all situations on the basis of their relations to some distinct final situation into 4 types (in [2] a division into 3 types is used) depending on the distance of the corresponding class from the class of the final situation. The transfer of a situation into a final situation may be thus regarded both as a transfer inside a class and as a transfer between classes.

The game "5" is a convenient means for the experimental study of various psychological aspects of the learning process while the structure of game itself can be taken into account simultaneously (cf. [1], [3], [4]).

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ТРАНСФОРМАЦИОННОГО АНАЛИЗА АХМАВААРА В ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Г.А. Вукс

I. Введение

Трансформационный анализ (сокращенно будем называть его ТРАФ) относится к методам качественного сравнения факторных исследований над различными популяциями в том случае, когда экспериментатор ставит перед собой задачу выделения общей структуры факторов, объясняющих те или иные изменения одних и тех же признаков.

Поиском такого качественного анализа занимались очень многие исследователи, начиная с Тэрстона в 1938 г. И только в 1954 г. Ахмаваара сумел не только точно сформулировать задачу идентификации факторных исследований над различными популяциями, но и найдти логически обоснованную математическую модель идентификации.

С помощью метода, предложенного Ахмаваара, удалось достичь значительных результатов при исследовании способностей методиками Фрэнча. Сам Фрэнч сравнения своих факторных исследований проводил интуитивно с тем, чтобы выявить часто повторяющиеся или достоверно различающиеся факторы (Фрэнч, 1951).

Идея Ахмаваара покоится на подтвердившейся практикой гипотезе о наличии инвариант в результатах факторных исследований с различными популяциями, которые управляются батареей одинаковых тестов (или частично одинаковых).

В основу математической модели ТРАФ-анализа легла хорошо разработанная теория "закона линейной трансформации", которая оказалась логически согласованной с идеей инвариантов в факторных исследованиях.

ТРАФ-анализ является продолжением факторных исследований над различными популяциями одинаковыми или частично одинаковыми тестами в том случае, когда ставится вопрос поиска идентичных факторов или идентичных факторных структур и поэтому, естественно, выполняется над факторными матрицами после факторных исследований.

Метод Ахмаваара позволяет находить не только идентичные факторны структуры.

Второй вариант его приложения: интерпретация сходства в группе признаков.

Дело в том, что существует множество методов классификации объектов по сходству, подобию. Каждый из методов обладает своей собственной "классифицирующей силой". И поэтому применение различных классификационных методов на базе одного материала приводит к различным решениям, вплоть до альтернативных. В каком случае можно полагаться на интерпретацию сходства?

С одной идеей решения этого вопроса можно познакомиться в сборнике [2] (см. [2], стр. 74).

ТРАФ-анализ, потребность в нем, полная разработка метода - все это возникло в области психологических исследований и разработано психологами.

Однако область этого анализа не ограничивается лишь психологией.

В каждой научной области исследования, где поставлен вопрос поиска идентичных факторных структур в различных популяциях, ТРАФ-анализ может быть успешно применен. Им могут пользоваться медики, биологи, социологи, сельскохозяйственники и т.д.

II Метод трансформационного анализа

Разберем метод ТРАФ на примере, приводимом Ахмаваарой в его статье [I].

Имеется батарея из 8 тестов, управляемых группой индивидов. Корреляция между этими тестами подвергалась факторному исследованию. Результаты его представлены факторной матрицей в следующей таблице:

Таблица I

Факторная матрица первого исследования

Тесты \ Факторы	g_1	s_1	n_1
I. Разумность	0,65	0,I0	0,25
2. Номер последовательности	0,43	-0,03	0,25
3. Память	0,34	0,54	0,05
4. Сложение	0,35	-0,03	0,55
5. Письмо шифром	0,56	0,I2	0,24
6. Восьмеричная система	0,36	0,09	0,3I
7. Умозаключения	0,3I	0,32	0,24
8. Флажки	0,I9	0,45	0,03

Первый выделенный фактор Ахмаваара называет "g_1 - интеллект", т.к. дает высокие нагрузки с тестами I, 2, 5.

Второй фактор Ахмаваара называет " s_1 - зрительное мышление", и следующий, третий " n_1 - числовой", т.к. имеет высокие нагрузки с тестами 4, 6 и 2.

Следующая батарея из I0 тестов управляется другой группой индивидов. Результаты корреляции этих тестов подвергнуты факторному анализу и получена такая факторная матрица, представленная таблицей:

Таблица 2

Факторная матрица второго исследования

Тесты \ Факторы	g_2	s_2	n_2
I. Умножение	0,28	0,II	0,46
2. Сходство слов	0,59	0,I8	-0,26
3. Сходство изображений	0,3I	0,23	0,28

4.	Восьмеричная система	0,30	0,03	0,3I
5.	Сложение	0,2I	-0,04	0,52
6.	Восстановление рисунка	0,03	0,4I	-0,I2
7.	Номер последовательности	0,26	-0,06	0,43
8.	Умозаключения	0,32	0,28	0,25
9.	Письмо шифром	0,40	-0,0I	0,I9
I0.	Флажки	0,3I	0,2I	0,20

Первый фактор Ахмаваара также называет "g_2 - интеллект", второй пока оставляет без интерпретации, т.к. по одному тесту это сделать трудно и третий фактор "r_2 - числовой".

Анализируя эти два исследования Ахмаваара ставит вопрос: являются ли факторы "g_1, r_1" из первого исследования точно такими, как во втором? Ведь название факторам дается интуитивно, а сделать это иногда бывает очень трудно. К тому же, Ахмаваару интересует и другой вопрос: является ли неинтерпретированный фактор второго исследования тем же фактором "s_1" из первого исследования, или это два различных фактора?

Выписываются матрицы нагрузок в одинаковых тестах двух исследований:

Таблица 3

Матрица $\mathcal{X}$

Тесты \ Факторы		g_1	s_1	r_1
I.	Письмо шифром	0,56	0,I2	0,24
2.	Номер последовательности	0,43	-0,03	0,25
3.	Умозаключения	0.3I	0,32	0,24
4.	Восьмеричная система	0,36	0,09	0,3I
5.	Сложение	0,35	-0,03	0,55

Таблица 4

Матрица $\mathcal{Y}$

Тесты \ Факторы	g_2	s_2	n_2
I. Письмо шифром	0,40	–0,0I	0,I9
2. Номер последовательности	0,26	–0,06	0,43
3. Умозаключения	0,32	0,28	0,25
4. Восьмеричная система	0,30	0,03	0,3I
5. Сложение	0,2I	–0,04	0,52

Затем факторы как I-го, так и 2-го исследования изображаются системой ортогональных векторов-осей $ox_1x_2x_3$ и $oy_1y_2y_3$.

Обнаруживается, что векторы тестов в системе $ox_1x_2x_3$ развернуты в том же порядке, что и векторы тестов в системе $oy_1y_2y_3$.

Здесь похожесть конфигурации векторного веера не ограничивается частным примером, а является, по предположению Ахмаваара, главным правилом того, что при изменении одной экспериментальной группы в другую, взаимное расположение векторов в конфигурации векторов-тестов в факторном пространстве остается неизменным. Это и есть тот факт, который позволил Ахмаваара обобщить результаты исследований в различных экспериментальных группах.

То обстоятельство, что взаимное расположение векторов-тестов остается инвариантным, представляет собой хорошую иллюстрацию "закона линейной трансформации", происходящего из алгебраических теорий методов трансформации.

В терминах закона линейной трансформации настоящий пример формулируется Ахмаваарой так: векторы тестов системы $oy_1y_2y_3$ получаются из векторов-тестов системы $ox_1x_2x_3$ линейной трансформацией.

В общем, для определения трансформационных коэффициентов Ахмаваара пользуется матричной формулой:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{X}'\mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}'\mathcal{Y} \qquad (I)$$

Следует иметь в виду: число общих тестов не должно быть меньше числа сравниваемых факторов.

Число общих тестов должно быть или равно числу сравниваемых факторов (случай квадратных матриц $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$) или число общих тестов должно быть больше числа сравниваемых факторов (случай прямоугольных матриц $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$). В случае квадратных матриц $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ задача трансформации чрезвычайно проста.

Проделав вычисления по приведенной матричной формуле (I), Ахмаваара получает матрицу трансформации:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0,6421 & -0,3222 & -0,1318 \\ 0,3959 & 1,0285 & 0,1649 \\ 0,0046 & 0,1986 & 1,0237 \end{pmatrix}$$

С тем, чтобы элементы матрицы $\mathcal{L}$ привести в интервал $[-1, 1]$, матрица $\mathcal{L}$ нормализуется: каждая i-ая строка матрицы $\mathcal{L}$ умножается на нормализующий множитель $1/\ell_i$, где $\ell_i^2 = \sum_{j=1}^{m} \ell_{ij}$ и $i = 1,2,\ldots,K$.

Так получена матрица сравнения $\mathcal{L}_n$, где индекс n указывает на нормализованность матрицы $\mathcal{L}$.

В примере:

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} 0,8791 & -0,4411 & -0,1804 \\ 0,3553 & 0,9230 & 0,1480 \\ 0,0044 & 0,1905 & 0,9817 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathcal{L}_n$ есть окончательный результат сравнения 2-х факторных исследований. Элементы её главной диагонали есть меры идентичности факторов двух исследований.

Меры идентичности находятся в интервале $[-1, 1]$. Отрицательные величины не интерпретируются, т.к. если положительные величины указывают на идентичность, то в таком случае негативные величины должны обозначать величину, обратную идентичности.

Идентичными следует считать факторы, мера идентичности между которыми приближается к единице.

В приведенном примере факторы g_1, r_1, s_1 идентичны факторам g_2, r_2, s_2, т.к. соответствующие меры достаточно высоки: мера идентичности факторов g_1 и g_2 равна

0,879I; мера идентичности факторов r_1 и r_2 равна 0,9230; мера идентичности факторов s_1 и s_2 равна 0,98I7, в силу чего фактор s_2 называется также, как и фактор s_1 из первого исследования. Названия факторов g_1 и g_2 одинаковы т.к. они идентичны; по той же причине совпадают и названия факторов r_1 и r_2.

Наглядную картину точности сравнения можно получить графически, построением каждого элемента $X\mathcal{L}$ против каждого соответствующего элемента y.

III Опыт применения ТРАФ-анализа при исследовании вкусовой чувствительности дегустаторов

Переходя к обсуждению применения метода ТРАФ-анализа на материалах исследования вкусовой чувствительности дегустаторов пищевой промышленности, следует оговорить то, что обсуждение носит лишь характер первой попытки применить ТРАФ и именно поэтому здесь приводится материал, лишь непосредственно касающийся ТРАФ.

Самой общей была проблема выбора дегустаторов, но наряду с этим нас интересовали и некоторые частности, например: зависимость реакций на вкусовые раздражители от пола.

Как отмечает д-р Пикельна ([3], стр. I9), опыты по отбору и обучению дегустаторов легко стандартизировать и именно это является той причиной, что по проблеме отбора дегустаторов имеются очень обширные, но противоречивые данные.

В нашей работе по отбору дегустаторов, пожалуй, новой идеей является применение понятия "эффективность метода отбора", что аналогично понятию "эффективность дозы" у Сепетлиева ([4], стр. II3).

Эффективность наших методик в общем составляла 75 %, т.е. это означает, что они позволили нам выбрать 75 % из участвующих в испытаниях.

На водных растворах было проведено две серии экспериментов.

Методикой первого была оценена правильность обнаружения: I) соленого, 2) кислого, 3) сладкого, 4) горького вкусов.

Отметим использованные наименьшие концентрации растворов: поваренной соли - I,5 г/л, лимонной кислоты - I60 мг/л, реактив сахарозы - 5 г/л, солянокислого хинина - 2,0 мг/л.

Из I6-ти зашифрованных проб испытуемому надо было выделить 4 основные вкуса 4-х различных концентраций и упорядочить их в порядке уменьшения интенсивности вкуса.

Методикой следующего эксперимента оценивалась различительная вкусовая чувствительность на 8-ми различных концентрациях каждого основного вкуса 5) соленого, 6) кислого, 7) сладкого, 8) горького.

Наименьшие концентрации растворов: поваренной соли - 0,5 г/л, лимонной кислоты - 75 мг/л, реактив сахарозы - I,0 г/л, солянокислого хинина - 0,5 мг/л.

В экспериментах приняло участие 98 человек. Возрастной диапазон учавствующих достаточно широк: от 23 лет до 6I года. Женщин было 70, мужчин 28. Из 70-ти женщин курящих - I5, из 28 мужчин курящих - I6.

Влияние возраста и курения исследовалось после того, как был проведен анализ различий в результатах женщин и мужчин.

Сравнение средних арифметических результатов обоих групп выявило, что женщины и мужчины различно реагируют на одноименные основные вкусы как в случае их обнаружения, так и в случае упорядочивания: например, женщины с меньшими ошибками определяют соленый, кислый вкус и сравнительно большими, чем у мужчин, ошибками упорядочивают сладкий и горький вкус.

Корреляционный анализ, проведенный между результатами 2-х экспериментов показал отсутствие зависимости между ними как в группе женщин, так и в группе мужщин. Это означает, что если испытуемый обладает развитой остротой вкусовой чувствительности и в силу этого легко определяет качество вкуса даже в малых концентрациях, то в то же время он может быть не способен различить и упорядочить более 2-3 различных концентраций вкуса.

Этот небольшой предварительный анализ дал основание предположить, что как в группе женщин, так и в группе мужчин тесты I–8 управляются 2-мя различными факторами: один из них связан с остротой обнаружения вкуса, а другой – только с различительной вкусовой чувствительностью.

ТРАФ–анализом мы можем установить, можно ли считать идентичными факторы, связанные с остротой обнаружения вкуса у мужчин и женщин, а также идентичны ли факторы, связанные с различительной вкусовой чувствительностью у мужчин и женщин.

Факторным анализом было выделено 2 значимых фактора в группе женщин и 2 значимых фактора в группе мужчин.

Таблица 5

Нагрузки факторов на тесты I–8 в группе женщин

Факторы / Тесты	x_1	y_1
I.	0,733	0,027
2.	0,820	0,I09
3.	0,409	0,083
4.	0,572	0,5I0
5.	-0,0I2	0,753
6.	0,I28	0,I89
7.	-0,004	0,I69
8.	0,042	0,334

Таблица 6

Нагрузки факторов на тесты I–8 в группе мужчин

Факторов / Тесты	x_2	y_2
I.	0,892	0,327
2.	0,979	0,035
3.	0,640	-0,275

4.	0,833	-0,068
5.	-0,045	0,709
6.	0,264	0,75I
7.	-0,026	0,068
8.	0,046	0,080

Когда число выделенных факторов не превышает 3-х, то удобно, как это делал Ахмаваара, изобразить конфигурации вееров векторов-тестов графически, взяв за оси координат факторы.

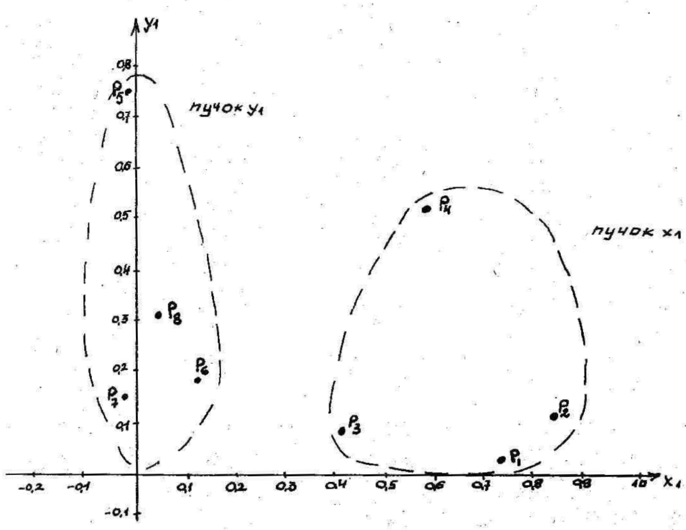


Рис. 1

Конфигурация вееров (пучков) значений тестов на рис. I и 2 одинакова тем, что в обоих случаях наблюдается два самостоятельных пучка векторов.

Для этих пучков характерным является то, что на графиках один из них как бы непосредственно примыкает к оси у - признаки P_5, P_6, P_7, P_8; а другой расположен от него на отдалении и больше прижат к оси x – признаки P_1, P_2, P_3, P_4.

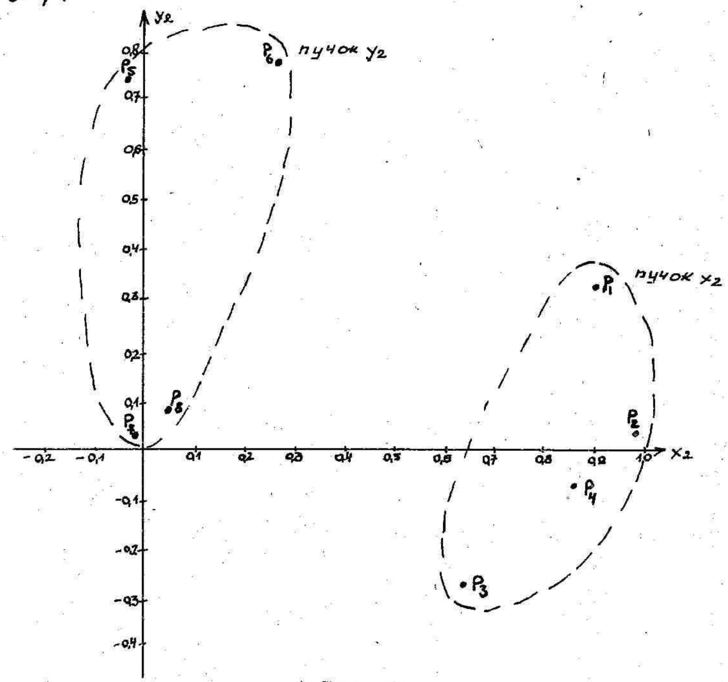


Рис. 2

Внутри же пучка x_1 и x_2, а также внутри пучка y_1 и y_2, одноимённые векторы-тесты направлены не одинаково.

Матрица сравнения факторных исследований получена методом ТРАФ и для нашего случая такова:

$$\mathcal{L}_n = \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0{,}999 & -0{,}049 \\ 0{,}058 & 0{,}998 \end{array}\right) & \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \end{array}$$

Т.е. ТРАФ доказывает идентичность факторов x_1 и x_2 – мера идентичности очень высока 0,999. Поэтому факторы x_1 и x_2 – в сущности – один фактор, который можно обозначить $\mathfrak{X}$ и назвать именно остротой обнаружения вкуса.

Факторы y_1 и y_2 - также идентичны. Мера их идентичности равна 0,998. Поэтому эти факторы - собственно один фактор $\mathcal{Y}$, который можно назвать фактором различительной вкусовой чувствительности.

Таким образом, мы получили доказательство того, что острота обнаружения вкуса у мужчин и женщин связывается в наших экспериментах только с одним фактором $\mathcal{X}$, а различительная вкусовая чувствительность - с фактором $\mathcal{Y}$.

Литература

1. Ahmavaara J., Transformation Analysis of Factorial Data. Suomalainen Tiedeakatemia, Sarja B. Helsinki, 1954, 15-149.

2. Пенза Г.А., Об использовании методов классификации. Вопросы экспериментального исследования скорости реагирования. Тарту, 1971, 74-77.

3. Пикельна Н.Б., Подбор и обучение дегустаторов. Органолептическая оценка качества пищевых продуктов (материалы Международного симпозиума по органолептической оценке пищевых продуктов). М., ЦИНТИ Пищепром. 1968, 19-20.

4. Сепетлиев Д., Статистических методы в научных медицинских исследованиях. М., "Медицина", 1968, 419 стр.

AHMAVAARA TRANSFORMATSIOONANALÜÜSI MEETODI RAKENDAMISEST PSÜHHOLOOGILISTES UURIMUSTES

G. Vuks

R e s û m e e

Käesolevas töös tutvustatakse lühidalt transformatsioonanalüüsi meetodit, mille esitas soome psühholoog J. Ahmavaara 1954.a.

Kasutades Ahmavaara meetodit degustaatorite maitsetundlikkuse uurimisel, ônnestus tôestada, et nii maitsetundlikkuse teravust kui ka eristav maitsetundlikkust kirjeldavad meestel ja naistel vastavad identsed faktorid.

THE USE OF AHMAVAARA'S TRANSFORMATION ANALYSIS IN PSYCHOLOGICAL STUDIES

Galina Vuks

S u m m a r y

In the present paper a transformation analysis is briefly described which was suggested by the Finnish psychologist J. Ahmavaara in 1954.

Using the method of Ahmavaara in our research into the taste sensitivity of degustators it was possible to prove that the corresponding identical factors describe the threshold of taste sensitivity as well as the distinguishing taste sensitivity of man and woman degustators.

Авторы I сборника "Математическая психология"

Котик Михаил Аркадьевич –
доцент кафедры логики и психологии Тартуского гос. ун-та, канд. техн. наук.

Кулль Ивар Георгиевич –
доцент кафедры математической статистики и программирования Тартуского гос. ун-та, канд. физ.-мат. наук.

Микк Яан Арнольдович –
старший преподаватель кафедры педагогики Тартуского гос. ун-та, канд. педагогических наук.

Саксакулм Тийт Иоханнесович –
младший научный сотрудник сектора автоматики Института кибернетики АН ЭССР, канд. психологических наук.

Хуйк Яан Фердинандович –
старший преподаватель кафедры логики и психологии Тартуского гос. ун-та.

Емельянов Александр Михайлович –
студент факультета вычислительной техники и кибернетики Московского гос. ун-та им. М.В. Ломоносова.

Вукс Галина Альбертовна –
старший инженер лаборатории промышленной психологии Тартуского гос. ун-та.

С о д е р ж а н и е

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПСИХОЛОГИЯ
I
На русском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор И. Кулль
Корректор Н.Чикалова

Сдано в печать 27/УI I974 г. Бумага печатная № 2. 30x45.
I/4. Печ. листов 7,25 (условных 6,74). Учетно-издат.6,23.
Тираж 500. Зак. № 79I. МВ 00458.
Ротапринт ТГУ. ЭССР, г. Тарту, ул.Пялсони, I4.
Цена 42 коп.