ARITMETIKA

õperaamat keskkoolidele

Kokkuseadnud **Oskar Perli**
ülemkooliõp. Rostowi D/ä kommerts-koolis

Tartus, 1912
Eesti Kirjastuse-Ühisuse „Postimehe" kirjastus

Hind 1 rubla.

EESTI KIRJANDUSE SELTS

KOOLIKIRJANDUS NR. 2

116 ;9

õ. 675 b

ARITMETIKA

õperaamat keskkoolidele

Kokkuseadnud **Oskar Perli**
ülemkooliõp. Rostowi D/ä kommerts-koolis

11670
5. 135.
921.
I. JÄRGU TÜTARLASTE KOOL. Eesti Nooresoo Kaswatuse Seltsi

Eesti Kirjastuse-Ühisuse „Postimehe“ kirjastus, Tartus 1912

Eesti Kirjastuse-Ühisuse „Postimehe“ trükk, Tartus.

A-5973

2/27701

Sisukord.

Esimene jagu. **Täisarwud.**

Lhk.

I. peatükk: Arwamine 1
II. „ Tehted 11
III. „ Kokkuarwamine 12
IV. „ Maha-arwamine 15
V. „ Kaswatamine 21
VI. „ Jagamine 33
VII. „ Kaswatise ja jaondi muutumine 43
VIII. „ Astmesse tõstmine 48
IX. „ Juure wäljawõtmine 51
X. „ Ülesannete wäljarehkendamine 59

Teine jagu. **Nimega arwud.**

XI. peatükk: Suuruste mõõtmine 69
XII. „ Nimega arwude ümbermuutmine 84
XIII. „ Tehted nimega arwudega 88

Kolmas jagu. **Arwude jagatawus.**

XIV. peatükk: Jagatawuse tunnused ja algteguriteks lahutamine . . 99
XV. „ Kõige suurem ühine jagaja „ . . 113
XVI. „ Kõigewäiksem ühine mitmekordne „ . . 118

Neljas jagu. **Harilikud murrud.**

XVII. peatükk: Alusmõisted 126
XVIII. „ Tehted murdudega 146
XIX. „ Nimega murrud 160

Wiies jagu. **Kümnendmurrud.**

		Lhk.
XX. peatükk:	Alusmõisted	166
XXI. „	Tehted kümnendmurdude kallal	187
XXII. „	Jätkulised kümnendmurrud	185
XXIII. „	Astmesse tõstmine ja juure wäljawõtmine	195
XXIV. „	Meetermõõdustik	204

Kuues jagu. **Wahekorrad ja wõrrendid.**

XXV. peatükk:	Wahekorrad	209
XXVI. „	Wõrrendid	215
XXVII. „	Kolmeliikme arwamine	228
XXVIII. „	Rahakasu arwamine	243
XXIX. „	Weksli diskonto	249
XXX. „	Tähtaja arwamine	257
XXXI. „	Ahelarwamine	260
XXXII. „	Osa arwamine	262
XXXIII. „	Segu ja sulatiste arwamine	271

Et raamatu kirjutaja Rostowis Doni ääres elab ja raamat Tartus kirjastati, siis ei olnud maa kauguse pärast — 2000 w. — wõimalik trükipoognaid enam kui ükskord raamatu kokkuseadjale parandamiseks kätte saata. Seepärast on raamatusse nii mõnigi wiga sisse jäänud, mis muidu oleks wõinud kõrwale saadetud saada. Palume seda lahkesti wabandada ja järgmisi wigasid tingimata enne raamatu tarwitusele wõtmist ära parandada:

Lehekülg.	Rida.		On trükitud:	Peab olema:
10	ülew.	22	järgu üksuseks	järgu üheliseks
10	„	23	Järgu üksus	järgu üheline
16	„	4—6	„Kõigest sellest ilmub“ kuni „=wähendataw—waheng“	Kõik see lause tuleb wälja jätta.
16 (ja mujal)	alt	8	tegewuse	tehte
21	ülew.	22	307-st ühelist	30-st 7 ühelist
23	alt	7	= 7.19 + 3.19 + 3.19	= 7.19 + 3.19 +
32	„	20	4.7.5 = 5.4.7 = 5.4.7,	4.7.5 = 5.4.7 = (5.4).7,
39	„	12	24-st kümnelist	24 kümnelist
44	„	18	17.6).30 = 510.6 ja (17.6). (30:3) = (510.6):3.(510.6): 3 = 510.(6.3) = 510.2.	(17.6).30 = 510.6 ja (17.6). (30:3) = (510.6):3;(510.6): 3 = 510.(6:3) = 310.2.
48	„	20	2 astmete arw	2 astmele tõstetaw arw
50	ülew.	„	astmete näitaja	astmete näitajate
50	„	15	sellesama astmeid	sellesama arwu astmeid
54	„	7	§ 79.	§ 80.
57	alt	16	Et 568-st	Et 1568-st
59 (ja mujal)	ülew.	19	tegewused	tehted
61	alt	17	osa jagaja	osa on jagaja
69	„	4	suuruse hulka	suuruse hulk
78	„	9	(6.25 + 6) : 7	6.25 + 6) : 7
78	„	4	õigetjoont	õgewjoont
82	„	3	iga põranda ruutarsina	põranda iga ruutarsina
84	„	6	mille	milles
85	ülew.	9	(rohkust)	(suuruse hulka)
86	„	17	(8.500 sülda)	(8.500) sülda
87	„	19	= 11520 sol. : 2 sol. = 3840 (loodi)	= (11520 sol. : 3 sol.) l. = 3840 looti
89	„	4	25 „ 0 „ 0 „	25 „ 0 „ 0 „
		5	1069 sülda 6 jalga 24 tolli	1069 sülda 6 jalga 24 tolli
		6	1000 s. = 2 w. 24 t. = 2 j.	1000 s. = 2 w. 24 t. = 2 j.
		7	2 w. 69 sülda 6 jalga 0 tolli.	2 w. 69 sülda 6 jalga 0 tolli
92	alt	9	meie nimeta arwuga	nimeta arwuga meie
93	ülew.	19	meie mitmenimega arwuga	mitmenimega arwuga meie
99	„	13	= 8 + 8 + 9 = 7 =	= 8 + 8 = 9 + 7 =

Lehekülg.	Rida.		On trükitud:	Peab olema:
99	alt	6	kaswatise	kaswatamise
102	ülew.	1 ja 18	kirjutada	kujutada
103	alt	9	$(909 + 1) . 8$	$(999 + 1) . 8$
105	„	15	sest see meid	sest et see meid
107	ülew.	9	jagame 487-ga	jagame 487-t 7-ga
110	„	1	$3600 = 36 . 000$	$3600 = 36 . 100$
111	alt	15	saadud jaond	saadud jaondi
112	ülew.	25	rakenduse	rakendusele
116	alt	19	391 : 131	393 : 131
126	ülew.	4	(ühesuurused jaod)	(ühesuurused) jaod
135	alt	5	$\frac{10+1}{1+1}$	$\frac{10+1}{7+1}$
136	ülew.	9	$\frac{5-1}{8-1} = \frac{4}{7}$; on wähem	$\frac{5-1}{8-1} = \frac{4}{7}$; $\frac{4}{7}$ on wähem
138	„	12	$\frac{6.3}{9.9}$	$\frac{6.3}{9.3}$
140	alt	14	osadena	jagudena
141	ülew.	18	rohkuse	suuruse hulga
142	„	11, 12	§ 161	§ 163.
148	alt	9	ühenimelist	samanimelist
149	ülew.	14	üksust	ühelist
153	alt	13	1 ja 2	2 ja 1
155	„	14	kaswatada	jagada
160 (ja allpool)	„	12	Laotame	Alandame
163	ülew.	11	$3^{40}/_{42}$ naela	$\frac{3^{40}}{43}$ naela
169	alt	15	4 tuhandikku 9 miljondikku	4 tuh. 5 sadatuhandikku 9 miljondikku
185	„	16	2 . 3666	2 , 3666 ....
193	ülew.	12	$\frac{583 \quad 58}{9} : 100$	$\frac{583 - 58}{9} : 100$
197	„	10	(§ 82)	(§ 85)
199	„	1	murrujärgu üheline	murrujärgu üksus
201	„	5	$\sqrt{0,8}$	$\sqrt{0,2}$
201	„	14	$\sqrt{3} = 1,6320$	$\sqrt{3} = 1,7320$
208	„	4	1 m. = 39371 t.	1 m. = 39 , 371 tolli.
215	alt	1	28+15+19+24 a+d=b=c	28+15=19+24 a+d=b+c
232	„	16	nii mitu korda enam	nii mitu korda wähem
259	„	20	Arutus protsentide eest	Arutus : Protsentide eest
268	„	16	$X_4 : X_1 = 3 : 3$	$X_4 : X_1 = 8 : 3$

Esimene jagu.

Täisarwud.

Esimene peatükk: Arwamine.

(Счисленіе).

§ 1. Arwu mõiste.

Nagu inimesesugu algus hallide aegade udusse kaob, nagu inimliku kõne sündimine ennemuinaslooliste aegade pimedusesse wajub, nii on ka arwu mõiste sündimine pilkase pimedusega kaetud.

Meie wõiksime omale arwu sündimisest mõne pildi luua, mis siiski tõest wäga kaugele jääb. Meie wõime omale aega ette kujutada, millal inimesesugu metsades ja kaljukoobastes elades ja ennast marjadest, puuwiljast ja tapetud loomade lihast toites, weel arwudest midagi ei teadnud, ehk ta küll wahet tegi „ü h e“ ja „h u l g a“ wahel. Aegamööda hakkab inimese peas arwu mõiste idanema ja ühel sügisesel päewal tuleb mees õnnelikult jahilt oma kodukoopa tagasi ja teatab rõõmuga oma perele, et ta „k a k s“ karu on tapnud ja et nüüd mõneks ajaks jälle toitu on. Seda päewa peaksime meie suureks ja tähtsaks päewaks, arwu sündimisepäewaks pidama. Mis kindluseta, tumedalt inimese peaajus juba ammu liikunud, oli omale sõna kuju saanud. Selle järele sündisiwad juba kergemalt arwud üks, kolm, neli jne.

Kaua aega oliwad arwud asjade külge seotud ja asju loeti sõrmede peal üles. Sellest annawad weel praegu mõned metsikud suguharud tunnistust, kes arwusid niiwiisi loewad: sõrm (= 1), kaks sõrme (= 2), kolm sõrme (= 3), neli sõrme (= 4), käsi (= 5), käsi ja sõrm (= 6), käsi ja kaks sõrme (= 7), käsi ja kolm sõrme (= 8), käsi ja neli sõrme = 9), kaks kätt (= 10). Arwude hulk, mida niisugused metsikud suguharud tunnewad, ei ole suur.

Aegamööda wabastasiwad sõnad üks, kaks, kolm jne. ennast asja nimedest, mis alati nendega kaasas käisiwad, ja nii sündis puhas (abstrakt) mõiste: a r w.

Üks, kaks, kolm, neli, wiis, kuus jne. on arwud.

Arw (число) on alusmõiste, millest lihtsamat mõistet ei ole, millega teda ära seletada wõiks.

Niisama on a r w a m i n e (arwude lugemine = счетъ), k o k k u a r w a m i n e (сложеніе) ja ü k s u s (единица) alusmõisted. Iga asi eraldi wõetud on üksus.

§ 2. Arwude jaotamine.

Nimetuse järele wõiwad arwud kolmesugused olla:

1) nimeta ehk mõttelised arwud (отвлеченныя, абстрактныя числа) on niisugused arwud, millel mingisugust nimetust kaasas ei ole, näit.: wiis, sada, kaheksateistkümmend;
2) meelelised arwud (предметныя) on niisugused arwud, millel mõne asja nimetus juures on, näit.: kuus hobust, kaheksa püssi;
3) nimega arwud (именованныя) on niisugused arwud, millel mõne mõõdu nimetus juures on, näit.: neli wersta, seitse rubla.

§ 3. Loomulik arwurida.

Kõigi arwude alus on arw „üks". Kui arwule „üks" weel „üks" juure lisada, siis sünnib arw „kaks"; kui arwule „kaks" weel „üks" juure lisada, siis sünnib arw „kolm" jne.

Kui meie igale eelminewale arwule „ühe" juure lisame, siis saame loomuliku arwurea (натуральный рядъ чиселъ): üks, kaks, kolm, neli, wiis, kuus, seitse, kaheksa, jne.

Kõige wäiksem selles arwude reas on arw „üks", kõige suuremat arwu ei olegi, sest kui suure arwu meie ka iganes wõtame, ikka wõime temale weel ‚ühe" juure lisada ja siis saame weel suurema arwu. Sellest järgneb, et arwusid lõpmata palju on.

§ 4. Kahesugune arwamine.

Arwamine wõib olla kas suusõnalik arwude lugemine, wõi kirjalik arwude kirjutamine. Suusõnalik arwamine seisab arwudele nimede andmises, kirjalik arwamine — arwude ülestähendamises kirjamärkide abil. Et arwusid lõpmata palju on, siis on wõimata igale arwule ise nime anda ehk teda ise märgiga tähendada. Iseäraliste juhtide põhjal on wõimalik wäheste nimede ja märkide abil kui suuri tahes arwusid lugeda ja üles kirjutada.

§ 5. Arwude lugemise juhid.

1. juht (правило). *Üks, kaks, kolm, neli, wiis, kuus, seitse, kaheksa, üheksa, kümme on järgimööda esimese kümne arwu nimed.*

2. juht. *Iga kümme samanimelist üksust sünnitawad uue, kõrgema järgu üksuse.*

3. juht. *Iga kolm järku, esimesest peale hakates, ühendatakse üheks klassiks kokku.*

§ 6. Arwude lugemine esimese klassi piirkonnas (tuhandeni).

Teisest arwude lugemise juhist järgneb:

1) Sõna „k ü m m e“ tähendab ühtlasi üksikute üksuste (asjade) arwu, kui ka uut, teise järgu üksust. Kui iseäralist rõhku selle peale tahetakse panna, et meil iseseiswa üksusega tegemist on, siis tarwitatakse nime „kümne“ asemel nime „k ü m n e l i n e“.
2) Kümme on meie arwamisesüstemi alus; sellepärast nimetatakse meie arwamisesüstemi k ü m n e s ü s t e m i k s.
3) Iga järgu üksus on eelminewa järgu üksuse kümnekordne.

Kümme teise järgu üksust, kümnelist, sünnitawad ühe kolmandama järgu üksuse, s a j a l i s e. Ehk: kümme kümmend on s a d a.

Sõna „s a d a“ tähendab, nagu kümmegi, ühtlasi üksikute üksuste (asjade) arwu, kui ka uut, kolmanda järgu üksust. Kui iseäralist rõhku selle peale tahetakse panna, et meil iseseiswa üksusega tegemist on, siis tarwitatakse nime „s a j a l i n e“.

Niiwiisi leiame kolm esimest järku:

Esimene järk on liht ühelised;
teine järk on kümnelised: üks kümneline on kümme ühelist;
kolmas järk on sajalised; üks sajaline on kümme kümnelist.
Need kolm järku sünnitawad esimese — üheliste — klassi.

Kui meie mõne asjade arwu peame lugema, siis eraldame neid ühekaupa teistest ära, selle juures esimeste arwude nimesid nimetades, kuni kümneni. Kümme asja eraldame iseäralise salgana, kümnelisena, teistest ära. Järelejäänud asju hakkame uuesti ühekaupa lugema ja igat kümmend asja iseäralise salgana, kümnelisena, eraldama, ühtlasi ka kümneliste salkasid lugedes. Kümneliste salkasid loeme esimeste kümne arwude abil ühest kuni kümneni.

Kui k ü m n e l i s t e s a l k a s i d kümme saab, siis ütleme „s a d a“ ja eraldame need kümme kümnelist uue, iseäralise salgana, sajalisena, ära. Peale selle hakkame jälle uuesti asju ühekaupa lugema, selle juures kümneliste ja sajaliste salkasid saades ja ka neid lugedes. Ka sajaliste salkasid loeme esimeste arwude abil. Kui kõik asjad ära loetud, siis wõib meil olla sajalisi asjade salkasid, kümnelisi salkasid ja üksikuid asju. Lõpuks nimetame sajaliste, kümneliste ja üksikute asjade arwu. Näituseks: kaheksa sajalist kuus kümnelist kaks ühelist, ehk kaheksasada kuuskümmend kaks. Kui meie üksikute asjade arwu terwes kogus tahame tähendada, siis ütleme: kaheksasada kuuskümmend kaks.

Wõib juhtuda, et meie mõne järgu üksusi ei saa; siis ei nimeta meie ka selle järgu nime mitte, näituseks: kolm sajalist kuus ühelist ehk: kolmsada kuus; kolm sajalist seitse kümnelist ehk:

kolmsada seitsekümmend; wiis kümnelist neli ühelist ehk: wiiskümmend neli. Esimesele kümnele arwule järgnewat üheksa arwu kannawad nimesid: üksteistkümmend, s. t. üks teisest kümnest; kaksteistkümmend, kolmteistkümmend jne. kuni üheksateistkümmend. Lõpp „teistkümmend“ on lühendatud sõnast „teisest kümnest“.

§ 7. Arwude lugemine suuruse peale waatamata.

Kümme kolmanda järgu üksust annawad ühe neljanda järgu üksuse.

Liht üheliste (esimesejärgu üksuste) arw, mis neljanda järgu üksuses olemas on, kannab nime: t u h a t. Sõna „tuhande“ kohta maksab seesama märkus, mis sõnade „kümme“ ja „sada“ kohta eelpool tehtud on. Selle nime abil wõime kolmandat arwude lugemise juhti niiwiisi arendada: „Iga tuhat samanimelist üksust sünnitawad uue, suurema, klassi-üksuse“.

Selle järgi sünnitawad tuhat ühelist ühe tuhandelise,
tuhat tuhandelist sünnitawad ühe miljoni,
tuhat miljoni — ühe biljoni ehk milliardi,
tuhat biljoni — ühe triljoni,
tuhat triljoni — ühe kwadriljoni jne.

Need klasside nimed tuletatakse ladinakeelsetest arwude nimedest lõpu „iljon“ abil (3 — tres, 4 — quattuor, 5 — quinque, 6 — sex, 7 — septem, 8 — octo, 9 — novem, 10 — decem jne.)

Klasside ja esimese kolme järgu nimede abil tuletatakse kergesti järgmiste järkude nimed:

kümme sajalist sünnitawad ühe tuhandelise	4. järgu üksuse	II. tuhandate klass.
kümme tuhandelist sünnitawad ühe kümne-tuhandelise	5. järgu üksuse	
kümme kümne-tuhandelist sünnitawad ühe saja-tuhandelise	6. järgu üksuse	
kümme saja-tuhandelist sünnitawad ühe miljoni	7. järgu üksuse	III. miljonite klass.
kümme miljoni sünnitawad ühe kümne miljonilise	8. järgu üksuse	
kümme kümnemiljonilist sünnitawad ühe saja-miljonilise	9. järgu üksuse	
kümme saja-miljonilist sünnitawad ühe biljoni jne.	10. järgu üksuse	

Järgmine tabel kujutab seda näitlikult:

VI. klass kwadriljon.			V. klass triljonid			IV. klass biljonid			III. klass miljonid			II. klass tuhanded			I. klass ühelised		
18. järk	17. järk	16. järk	15. järk	14. järk	13. järk	12. järk	11. järk	10. järk	9. järk	8. järk	7. järk	6. järk	5. järk	4. järk	3. järk	2. järk	1. järk
saja-kwadriljonilised	kümne-kwadriljonilised	(liht) kwadriljonid	saja-triljonilised	kümne-triljonilised	(liht) triljonid	saja-biljonilised	kümne-biljonilised	(liht) biljonid	saja-miljonilised	kümne-miljonilised	(liht) miljonid	saja-tuhandelised	kümne-tuhandelised	(liht) tuhandelised	sajalised	kümnelised	(liht) ühelised

Inimeste elus läheb wäga harwa enam kui kolme ehk nelja arwude klassi tarwis; näituseks, suurriikide sissetulekud ja wäljaminekud on mitu milliardi (biljoni) rublat suured.

Suuri arwusid loetakse klassi üksuste kaupa, mille juures klassi üksusi järkude, sadade, kümnete ja liht üksuste kaupa loetakse, ühest kuni üheksani, nagu liht ühelisigi. Lugemist hakatakse kõige kõrgemast klassist peale, klassi wiimasele järgule, mis arwus ette tuleb, klassi nime juure lisades.

Niiwiisi saame näit. järgmised arwude nimetused:

1) Seitsekümmend kuus miljoni wiissada kaheksa tuhat üheksasada nelikümmend kolm;
2) Kaks kwadriljoni üheksakümmend üks triljoni seitse sada kolmkümmend biljoni kaheksasada miljoni nelisada kuuskümmend wiis tuhat kaheksasada kaheksakümmend kaks.
3) Neli sada wiiskümmend seitse triljoni seitsekümmend kolm biljoni kuus miljoni kaksteistkümmend tuhat kaheksa sada kümme.

Kui mõne klassi üksusi sugugi ei ole, siis jääb ka selle klassi nimi wälja; näit. seitsesada nelikümmend biljoni ükssada kuuskümmend kaheksa tuhat wiissada.

§ 8. Kirjaliku arwamise ehk arwude kirjutamise juhid.

1. juht: *Arwude kirjutamiseks tarwitatakse kümme kirjamärki: 1 — üks, 2 — kaks, 3 — kolm, 4 — neli, 5 — wiis, 6 — kuus, 7 — seitse, 8 — kaheksa, 9 — üheksa, 0 — null.*

Arwude kirjalikka märkisid nimetatakse numbriteks (цыфра).

Järjelikult on meil kümme numbrit olemas: üheksa esimest nimetatakse „wäärtusega-numbriks“, kuna 0 arwu puudumist tähendab.

2. juht: *Igal numbril on kaks tähendust: ühe tähenduse annab numbrile tema wälimine kuju, teise tähenduse annab numbrile see koht, kus ta seisab.*

3. juht: *Numbrite kohtasid loetakse ristloodis parema käe poolt pahemale poole.*

4. juht: *Iga järgu üksuste arw kirjutatakse nii mitmenda koha peale, mitmenda järgu üksusi ta ilmutab.*

5. juht: *Kui esimese (alama) wôi mône wahelmise järgu üksused üleskirjutatawas arwus täiesti puuduwad, siis kirjutatakse wastawale kohale 0.*

Neljanda juhi põhjal wõime järgmise tabeli üles seada:

18. järk	17. järk	16. järk	15. järk	14. järk	13. järk	12. järk	11. järk	10. järk	9. järk	8. järk	7. järk	6. järk	5. järk	4. järk	3. järk	2. järk	1. järk
18. koht	17. koht	16. koht	15. koht	14. koht	13. koht	12. koht	11. koht	10. koht	9. koht	8. koht	7. koht	6. koht	5. koht	4. koht	3. koht	2. koht	1. koht
sajad kwadr.	kümned kwadr.	kwadriljonid	sajad triljonid	kümned trilj.	triljonid	sajad biljonid	kümned bilj.	biljonid	sajad miilj.	kümned miilj.	miiljonid	sajad tuhand.	kümned tuhand.	tuhanded	sajalised	kümnelised	ühelised
5	4	4	4	6	7	7	0	8	8	2	0	0	0	1	1	9	3
										7	4	4	4	4	6	2	2

Sellest tabelist näeme:

I.

Liht ühelised kirjutatakse esimesel kohal sest nad on 1. järgu üksused
kümnelised „ teisel „ „ 2. „ „
sajalised „ kolmandal „ „ 3. „ „
liht tuhandelised „ neljandal „ „ 4. „ „
kümne-tuhandelised „ wiiendal „ „ 5. „ „
saja-tuhandelised „ kuuendal „ „ 6. „ „
liht miljonid „ seitsmendal „ „ 7. „ „
kümned miljonid „ kaheksandal „ „ 8. „ „
sajad miljonid „ üheksandal „ „ 9. „ „
liht biljonid
(milliardid) „ kümnendal „ „ 10. „ „
j. n. e.

1 kümneline = 10 ühelist
1 sajaline = 10 kümnelist = 100 ühelist
1 tuhandeline = 10 sajalist = 100 kümnelist = 1000 ühelist
1 kümne-tuhadel. = 10 tuhandel. = 100 sajalist = 1000 kümn. = 10000 ühelist.
1 saja-tuhandel. = 10 kümne-tuhand. = 100 tuhandelist = 1000 sajalist = 10000 kümnelist = 100000 ühelist.
1 miljon = 10 saja-tuhandelist = 100 kümne-tuhandelist = = 1000 tuhandelist = 10000 sajalist = 100000 kümnelist = = 1000000 ühelist jne.

§ 9. Arwude kirjutamine esimese klassi piirkonnas.

Et arwusid suurematest klassidest ja kõrgematest järkudest peale hakates loetakse, siis peame ka arwusid pahema käe poolt paremale poole kirjutama õppima. Et klassi nime alles pärast selles klassis ettetulewate järkude nimesid nimetatakse, siis peame klassi piirkonnas, s. o. sajalisi, kümnelisi ja liht üksusi, pahemalt poolt paremale poole kirjutada oskama.

Neljandast juhist järgneb: ühelised kirjutatakse paremalt poolt lugedes esimesel kohal, kümnelised — teisel kohal, sajalised — kolmandal kohal.

Näitus: kirjuta üles: kaheksasada seitsekümmend üks.

Kirjutame esite üheliste numbri 1;
temast pahemale poole kümneliste numbri 7;
sellest pahemale poole sajaliste numbri 8; saab 871.

Sellest näeme, et kui meie kõige esite sajaliste numbri 8 kirjutame, siis peame kümneliste numbri 7 sajaliste numbri 8 kõrwale paremale poole kirjutama ja üheliste numbri 1 kümneliste numbri 7 kõrwale paremale poole.

Kui kümnelisi ehk ühelisi ei ole, siis kirjutatakse, wiiendama juhi põhjal, nende kohtadele 0.

Näitus: kuussada nelikümmend = 640
üheksasada seitse = 907
nelisada = 400

Sadade puudumisel kirjutatakse nende kohale 0, kui kõrgemaid järkusid olemas on; ei ole aga kõrgemaid järkusid olemas, siis ei kirjutata nulli, sest muidu wõiksime wäärtusega arwude ette kui palju tahes nullisid kirjutada. Sellepärast kirjutatakse seitsekümmend neli nii: 74, aga mitte 074.

§ 10. Arwude kirjutamine suuruse peale waatamata.

Kui meie suurt arwu peame üles kirjutama, siis hakkame tema kirjutamist, nagu räägitakse, kõrgematest klassidest, s. o. pahema käe poolt paremale poole, peale. Kirjutamist toimetame klasside kaupa iga klassi sajalisi, kümnelisi ja liht-üksusi üleskirjutades, nagu eelminewas paragrahwis juhatatud. Et kergem kirjutada oleks, eraldatakse üks klass teisest komma läbi ära. Kui arw õigesti on kirjutatud, siis peab igas klassis, peale kõige kõrgema, kolm numbrit olema ja iga järgu arw peab omal kohal olema, nagu seda neljas juht nõuab.

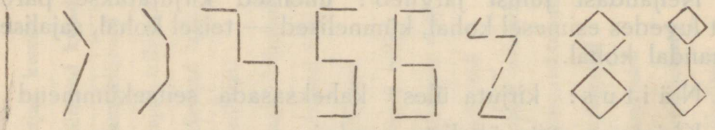
N ä i t u s. Kirjuta üles: 1) seitsekümmend neli miljoni nelisada nelikümmend neli tuhat kuussada kakskümmend kaks — 74,444,622.

2) Wiissada nelikümmend neli kwadriljoni nelisada kuuskümmend seitse triljoni seitsesada kaheksa biljoni kaheksasada kakskümmend miljoni ükstuhat ükssada üheksakümmend kolm — 544,467,708,820,001,193.

Kui mõni klass täiesti puudub, siis kirjutatakse tema kohtadele nullid. N ä i t u s. Kirjuta üles: nelikümmend kaheksa miljoni seitsekümmend wiis — 48,000,075.

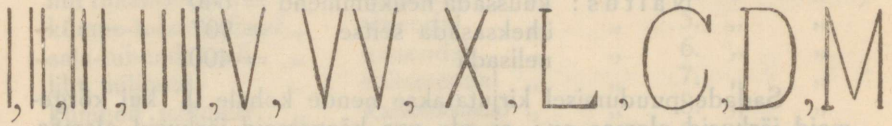
§ 11. Arabia numbrid ja Rooma numbrid.

Numbrid on Hindu rahwas wälja mõtelnud. Iga Hindu rahwa nummer seisis nii mitmest kriipsust koos, kui palju asju ta tähendas:

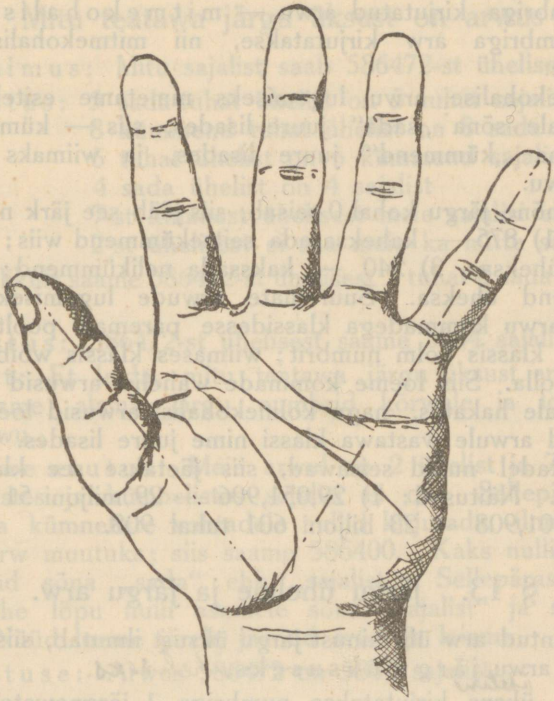


Need nurgelised numbrid muutusiwad ümargusteks, kui inimesed ruttu kirjutama hakkasiwad. Hindu rahwa käest õppisiwad neid wanad hebrealased tundma ja hebrealaste käest läksiwad nad arablaste kätte. Kui arablased Hispania ära wõitsiwad, siis saiwad europlased arablaste läbi nende numbritega tuttawaks ja sellepärast nimetatakse neid numbrid Arabia numbriteks. Peale Arabia arwude tarwitatakse weel seni ajani, näit. tundide tähendamiseks kella numbrilaua peal ja peatükkide tähendamiseks raamatutes, Rooma numbrid, mis niiwiisi on tekkinud:

Nagu kõik looduserahwad, nii arwasiwad ka roomlased sõrmede abil. Et näidata, et 2, 3, 4 on, näitasiwad nad 2, 3, 4 sõrme; kui asju wiis oli, siis näitasiwad nad terwet kätt, kui aga kümme asja oli, siis näitasiwad kahte kätt. Kui roomlased mingit arwu tahwli ehk pergamendi peale üles tähendada tahtsiwad, siis märkisiwad nad seal nii mitu sõrme ehk kätt üles, kui palju tarwis



oli. Terwe käe ülestähendamiseks tegiwad nad kaks joont, mis laiale aetud sõrmi kujutasiwad; kaks kätt tähendasiwad kümme; aga pea hakati kümmend nii kirjutama: X, mis kätt ülespoole ja kätt allapoole tähendab. Wiitkümmend kujutas täht L, sada — täht C, wiissada — täht D, tuhat — täht M.



Nii oli roomlastel arwude üleskirjutamiseks ainult seitse iseseiswat numbrit.

Et teisi arwusid, mis 2000-st wähemad on, saada, peab üleskirjutatud arwud kokku arwatama, wäljaarwatud järgmised juhused:

1) Kui I V-e ees ehk X ees seisab, siis arwatakse ta V-st ehk X-st maha;
2) kui X L- ehk C-ees seisab, siis arwatakse ta L-st ja C-st maha;
3) kui C D ehk M ees seisab, siis arwatakse ta D-st ja M-st maha.

Selle järgi on: IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900.

Wõtame näituseks arwu MCMXLVIII, M = 1000, CM = 900, XL = 40, V = 5 ja III = 3. Sellejärgi tähendab MCMXLVIII — 1948.

Weel mõni näitus: XXIV = 24, LXXXIX = 89, CDLXXVI = 476, CCCIV = 304, MXXIX = 1029.

Et mitu tuhat kirjutada, kirjutatakse tuhandete arwu järele paremale poole alla täht m (esimene täht sõnast mille = tuhat). Näituseks: XX_m CXCIX = 20,199. DCCXLIV$_m$ DXXXII = 744,532.

Et miljoni kirjutada, kirjutati miljonite arwu ette ja taha poole alla täht m (milies milia = 1000 korda tuhat) näit.: $_m$II$_m$ DCXLVII$_m$ CCXXV = 2,647,225.

Numbrit 0 roomlased ei tundnud. Rooma numbritega on wäga raske rehkendada.

§ 12. Kirjutatud arwude lugemine.

Ühe numbriga kirjutatud arwu nimetatakse ühekohaliseks, kahe numbriga kirjutatud arwu — kahekohaliseks,

mitme numbriga kirjutatud arwu — mitmekohaliseks. Kui mitme numbriga arw kirjutatakse, nii mitmekohaliseks teda nimetatakse.

Kolmekohalise arwu lugemiseks nimetame esiteks sadade arwu, temale sõna „sada“ juure lisades, siis — kümnete arwu, temale sõna „kümmend“ juure lisades, ja wiimaks nimetame üheliste arwu.

Kui mõne järgu kohal 0 seisab, siis jääb see järk nimetamata. Näitused: 1) 875 — kaheksasada seitsekümmend wiis; 2) 609 — kuussada üheksa; 3) 240 — kakssada nelikümmend; 4) 29 — kakskümmend üheksa. Suuremate arwude lugemiseks jaotame kirjutatud arwu kommadega klassidesse paremalt poolt pahemale poole, igas klassis kolm numbrit; wiimases klassis wõib ka 1 ehk 2 numbrit olla. Siis loeme kommade wahelisi arwusid kõrgemast klassist peale hakates, nagu kolmekohalisi arwusid loetakse, iga kord loetud arwule wastawa klassi nime juure lisades. Kui mõne klassi kohtadel nullid seisawad, siis jäetakse see klass koguni nimetamata. Näitused: 1) 29,051,906 — 29 miljoni 51 tuhat 906. 2) 23,000,601,908 — 23 biljoni 601 tuhat 908.

§ 13. Järgu üheline ja järgu arw.

Kui antud arw üht ainust järgu üksust ilmutab, siis nimetame meie seda arwu järgu ~~üksuseks~~ üheliseks.

Järgu ~~üksus~~ üheline kirjutatakse numbriga 1 järgnewate nullidega. Näituseks: kümmetuhat — 10,000; sada — 100.

Kui antud arw enam kui ühte ja mitte enam kui üheksat ühe ainsama järgu üksusi ilmutab, siis nimetame meie seda arwu järgu arwuks. Järgu arw kirjutatakse ühe wäärtusega numbriga, millele nullid järgnewad. Järgu ühelisel ja järgu arwul on nii mitu nulli, mitu järku temast alamal seisawad, sest et kõikide alamate järkude üksused puuduwad.

Näitused: kümme — 10; sada — 100; tuhat — 1000; sada-tuhat — 100,000; miljon — 1,000,000; wiissada ehk 5 sajalist 500; nelikümmend tuhat ehk 4 kümne-tuhandelist — 40,000: kaheksa miljoni ehk 8 miljoni — 8,000,000.

Nendest näitustest selgub, et üks null arwu lõpul tähendab sõna „kümme“, „kümneline“; kaks nulli arwu lõpul tähendawad sõna „sada“, „sajaline“; kolm nulli arwu lõpul tähendawad sõna „tuhat“, „tuhandeline“ jne.

§ 14. Antud arwust järgu arwu leidmine.

Küsimus: Kui suur on arwul 28192 tuhandeliste arw?

Arutus: Tuhandelised seisawad neljandal kohal; meie arwus seisab neljandal kohal nummer 8; sellepärast saame kostuse: Meie arwul on 8 tuhandelist.

§ 15. Mitu teatawa järgu üksust on arwus olemas?

Küsimus: Mitu sajalist saab 586472-st ühelisest?

Arutus: 5 sada-tuhat ühelist on 5 tuhat sajalist;
8 kümmend tuhat ühelist on 8 sada sajalist
6 tuhat ühelist on 6 kümmend sajalist
4 sada ühelist on 4 sajalist
7-st kümnest ühelisest meie sajalisi ei saa;
2-st ühelisest ei saa meie ka mitte sajalisi.

Järjelikult saame 586472-st ühelisest 5 tuhat 8 sada 6 kümmend 4 sajalist.

Kostus: 586472-st ühelisest saame 5864 sajalist.

Juht: Et leida, mitu teatawa järgu üksust arwus olemas on, heidame alama järgu numbrid kõrwale ja loeme järele jäänud arwu.

Teine arutus: Meie arwul on 2 ühelist ja 7 kümnelist; neis ühelistes ja kümnelistes sajalisi ei ole. Sellepärast wõime üheliste ja kümneliste kohtadele nullid kirjutada, ilma et otsitaw sajaliste arw muutuks; siis saame 586400. Kaks nulli arwu lõpul tähendawad sõna „sada“ ehk „sajalist“. Sellepärast kirjutame nende kahe lõpu nulli asemele sõna „sajalist“ ja saame 5864 sajalist. Nüüd loeme järele jäänud arwu ja leiame

kostuse: Arwus 586472 on 5864 sajalist.

Teine peatükk: Tehted.

§ 16. Tehe ja saadus.

(Дѣйствіе и результатъ).

Wõtame kaks arwu: 16 ja 2. Nende kahe arwu abil wõime uue, kolmanda arwu leida. Uut arwu wõime mitmel wiisil leida. Näituseks: Lisame 16-le 2 juure, saame 18. Wõtame 16-st 2 ära, jääb 14 järele. Wõtame 2 korda 16, saame 32. Jagame 16 2-ks ühesuuruseks jaoks, saame 8.

Uue arwu leidmine kahe ehk mitme antud arwu abil nimetatakse „aritmetikaliseks tehteks“.

Et näidata, et arwude kallal mõni tehe korda saata tuleb, ühendatakse arwud üksteisega tehte märkide läbi.

Kui meie tehte korda saadame, siis ilmub saadus.

Saaduseks nimetatakse ka kahte arwu, mis üksteisega tehte märgi läbi on ühendatud. Et wahet teha esimese ja teise saaduse wahel, nimetame esimest saadust pärissaaduseks ja teist saadust — ilmumata saaduseks.

Tehete märkidega ühendatud arwude kogu nimetatakse awalduseks.

§ 17. Môned aritmetikas tarwitatawad märgid.

Peale tehete märkide, mida meie igast tehtest üksikult rääkides tundma õpime, tarwitatakse aritmetikas järgmisi märkisid:

1. Ühtlusemärk $=$; teda loetakse: on; on ühtlane; saab; on niisama palju kui; on niisama suur, kui;
2. Märk suurem $>$; teda loetakse: on suurem, kui
3. Märk wähem $<$; teda loetakse: on wähem, kui
4. Klambrid (sulud) ( ); klambrid tarwitatakse siis, kui näidata tahetakse, et saaduse kallal uus tehe toime peab pandama. Ilmumata saadus, mille kallal uus tehe toime peab pandama, wõetakse klambritesse.

Kolmas peatükk: Kokkuarwamine.

(Сложеніе).

§ 18. Môistete seletus.

Juba esimeses paragrahwis oli üteldud, et kokkuarwamine on alusmõiste. Arwud, mis kokku arwata tulewad, nimetatakse k o k k u a r w a t a w a t e k s (слагаемыя). Kokkuarwamise saadus nimetatakse s u m m a k s (сумма).

Kokkuarwamise märk on $+$ (püstrist); teda loetakse: „j a“ ehk „p l u s“. Kaks (ehk mitu) plus-märgiga ühendatud arwu nimetatakse i l m u m a t a s u m m a k s.

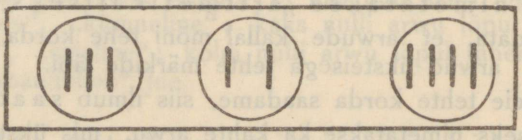
§ 19. Kahe ühekohalise arwu kokkuarwamine.

Kahe ühekohalise arwu summa leitakse edaspidi arwamise abil. Kõik summad, mis ühekohaliste arwude kahekaupa kokkuarwamisel saadakse, peab pähe õpitama.

§ 20. Kokkuarwatawate ümberasendamine.

Summa ei muutu, kui kokkuarwatawad oma järge muudawad.

Näitame, et $3+2+4=2+4+3$.



Tähendagu nelinurk summat, ringid — kokkuarwatawaid ja ringides olewad kriipsud kokkuarwatawates peituwaid üksikuid ühelisi.

Loeme esite esimese ringi kriipsusi, siis teise ringi kriipsusi ja wiimaks kolmanda ringi kriipsusi, saame $3+2+4$;

Loeme esite teise ringi kriipsusi, siis kolmanda ringi kriipsusi ja wiimaks esimese ringi kriipsusi, saame $2+4+3$.

Awalik on, et kriipsude arw, mis neis kolmes ringis kokku olemas on, ei muutu, missugust korda mööda meie neid ka loeme. Sellepärast on :

$$3+2+4=2+4+3.$$

§ 21. Kahekohalise ja ühekohalise arwu kokkuarwamine.

Arwa kokku $42+5$! $42+5=$ 4 kümnel. ja 2 ühel. ja 5 ühel. $=$ 4 kümnel. ja 7 ühel. $=$ 47.

Arwa kokku $48+5$! $48+5=$ 4 kümnel. ja 8 ühel. ja 5 ühel. $=$ 4 kümnelist ja 13 ühelist $=$ 4 kümnel. ja 1 kümnel. ja 3 ühel., sellepärast on $48+5=$ 5 kümnel. ja 3 ühel. $=$ 53.

Juht. *Et kahekohalist ja ühekohalist arwu kokku arwata, peame ühekohalise arwu kahekohalise arwu ühelistele juure lisama; kui selle juures enam kui 9 wälja tuleb, siis ühendame kümme ühelist üheks kümneliseks kokku, järele jäänud ühelised on summa ühelised; saadud kümnelise lisame kahekohalise arwu kümnelisele juure; niiwiisi leiame summa kümnelised. Kui üheliste summa wähem on, kui 10, siis jääb kümneliste arw muutmata.*

§ 22. Mitmekohaliste arwude kokkuarwamine.

Kokku arwata : $3418+7054+2683+5694$!

Meie wõime ainult ühenimelisi üksusi kokku arwata, sellepärast arwame ühelised ühelistega, kümnelised kümnelistega, sajalised sajalistega, tuhandelised tuhandelistega kokku. Et hõlpsam oleks kokku arwata, kirjutame kokkuarwatawad niiwiisi üksteise alla, et ühelised üheliste all, kümnelised kümneliste all, sajalised sajaliste all jne. seisaksiwad. Kokkuarwatawate ette kirjutame plus-märgi ja tõmbame joone alla.

$$\begin{array}{r} 3418 \\ +\ 7054 \\ \ \ 2603 \\ \ \ 9024 \\ \hline 22099 \end{array}$$

Kokkuarwamist hakkame ühelistest peale. Arutame: 8 ühelist ja 4 ühelist on 12 ühelist, 12 ühelist ja 3 ühelist on 15 ühelist, 15 ühelist ja 4 ühelist on 19 ühelist ehk 1 kümneline ja 9 ühelist. 9 (ühelist) kirjutame joone alla üheliste kohale, 1 kümnelise peame meeles, et teda kümnelistele juure arwata (ehk kirjutame joone peale kümneliste kohale, et teda kümnelistega ühes kokku arwata).

Nüüd arwame kümnelised kokku. 1 kümneline ja 5 kümnelist on 6 kümnelist, 6 kümnelist ja 2 kümnelist on 8 kümnelist, 8 kümnelist ja 1 kümneline, mis meeles pidasime, on 9 kümnelist. Kümnelisi meie kuskilt enam ei saa, sellepärast kirjutame 9 (kümnelist) joone alla kümneliste kohale.

Arwame sajalised kokku. 4 sajalist ja 6 sajalist on 10 sajalist ehk 1 tuhandeline.

Sajalisi meie ei saa, sellepärast kirjutame joone alla sajaliste kohale 0 ja 1 tuhandelise peame meeles, et teda tuhandelistele juure arwata.

Arwame tuhandelised kokku. 3 tuhandelist ja 7 tuhandelist on 10 tuhandelist ja 2 tuhandelist on 12 tuhandelist; 12 tuhandelist ja 9 tuhandelist on 21 tuhandelist, 21 tuhandeline ja 1 tuhandeline, mis meeles pidasime, on 22 tuhandelist ehk 2 kümnetuhandelist ja 2 tuhandelist. Et kokkuarwatawaid enam ei ole, siis kirjutame 2 tuhandelist joone alla tuhandeliste kohale ja 2 kümnetuhandelist — kümnetuhandeliste kohale.

§ 23. Mitmekohaliste arwude kokkuarwamise juht.

Kirjutame kokkuarwatawad nii üks teise alla, et ühe ja sellesama järgu numbrid ühes ja sellessamas püstreas seisaksiwad. Wiimase kokkuarwatawa alla tõmbame joone. Kokkuarwamist hakkame üheliste püstreast peale. Ühelised arwame kokku. Kui nende summa suurem ei ole, kui 9, siis kirjutame saadud summa joone alla üheliste kohale. On see summa aga 9-st suurem, siis kirjutame tema ühelised joone alla üheliste kohale, kümnelised aga peame meeles, et neid kümneliste püstreale juure arwata. Niiwiisi arwame ka teiste järkude püstread kokku korda mööda pahemale poole minnes, kuni wiimase püstreani. Selle püstrea arwude ja eelminewast reast meelespeetud arwu summa kirjutame joone alla omale kohale.

§ 24. Paljude kokkuarwatawate summa leidmine.

Kui kokkuarwatawaid õige palju on, siis jaotatakse nad mistahes salkadesse, leitakse iga salga summa eraldi ja saadud summad arwatakse kokku. Näitus: Kokku arwata: 48, 875, 244, 882, 301, 905, 29, 519, 194, 907, 236, 98, 151.

1-ne salk.	2-ne salk.	3-mas salk.	Üleüldine summa.
48			
875	905	907	
244	29	236	2290
822	519	98	1647
301	194	151	1392
2290	1647	1392	5329

Kui meie kõige kolme salga summad kokku arwame, leiame kõikide arwude summa 5329.

§ 25. Missugused ülesanded arendatakse kokkuarwamise abil?

Kokkuarwamise abil arendatakse niisugused küsimused,

1) kus mitme arwu summa otsitakse;
2) kus tarwis on antud arwu mõne ühelise wõrra suurendada;
3) kus uus arw otsitakse, mis antud arwust mõne ühelise wõrra suurem on.

Neljas peatükk: Maha-arwamine.

(Вычитаніе).

§ 26. Wastupidised tehted.

(Обратныя дѣйствія).

Näitus: 7 + 9 = 16.

Selles näituses on antud arwud 7 ja 9, otsitaw arw 16. 7 ja 9 on kokkuarwatawad, 16 on summa.

Kui meie aga küsime, missuguse arwu peame 9-le juure arwama, et 16 saada, siis on 16 ja 9 antud arwud ja 7 on otsitaw arw.

Mõiste äramääramine. Kui mõnes tehtes kaks arwu antud on, millest üks endises tehtes, kus ka kaks antud arwu oli, antud arw ja teine endises tehtes otsitaw arw oli, ja kolmandat arwu, mis endises tehtes antud arw oli, otsitakse, siis nimetatakse seda tehet endise tehte wastupidiseks tehteks.

Et igas liht ülesandes kaks antud arwu ja üks otsitaw arw on, siis wõime wastupidise tehte saamiseks otsitawa arwu niihästi ühe, kui ka teise antud arwuga wahetada ja sellepärast saame igast liht ülesandest kaks wastupidist ülesannet.

Kas meie ka igast tehtest kaks wastupidist tehet saame, seda näeme pärast poole.

§ 27. Maha-arwamise mõiste äramääramine.

1. Näitus: 7 + 9 = 16. 2. Näitus: 7 rubla + 9 rubla = 16 rubla.

Kumbki näitus annab meile kaks wastupidist tehet.

Kui antud arwud on 16 ja 9, siis leiame tagaspidi arwamise abil otsitawa arwu 7;

kui antud arwud on 16 ja 7, siis leiame tagaspidi arwamise abil otsitawa arwu 9.

Kui antud arwud on 16 rubla ja 9 rubla, siis leiame tagaspidi arwamise abil otsitawa arwu 7 rubla;

kui antud arwud on 16 rubla ja 7 rubla, siis leiame tagaspidi arwamise abil otsitawa arwu 9 rubla.

Sellest näeme, et mõlemad kokkuarwamise wastapidised tehted otsitawa arwu leidmise wiisi poolest ühte langewad. Ka oma sisemise mõtte poolest langewad need kaks wastupidist tehet ühte; sest kui antud summa ja antud kokkuarwataw ühelisi ehk rublasid tähendab, siis tähendab ka otsitaw kokkuarwataw ühelisi ehk rublasid, sellepeale waatamata, missugune kokkuarwataw just antud oli ja missugust otsiti.

Sellepärast wõime ütelda, et kokkuarwamisel on ainult üks wastupidine tehe: maha-arwamine. Maha-arwamine on niisugune tehe, mille abil antud summa ja ühe kokkuarwatawa kaudu teine kokkuarwataw leitakse.

Maha-arwamise märk on —, loe: miinus, ehk wähem. Antud summa nimetatakse wähendatawaks, antud kokkuarwataw nimetatakse mahaarwatawaks ja otsitaw kokkuarwataw nimetatakse wahenguks ehk jäänuseks. Kõigest sellest ilmub, et wähendataw = waheng + maha-arwataw, maha-arwataw = wähendataw — waheng. Sellest järgneb: wähendataw = maha-arwataw + waheng, maha-arwataw = wähendataw — waheng.

Näitus: Lullul ja Lollal oli kokku 17 õuna; Lullul oli 9 õuna, mitu õuna oli Lollal?

9 (õuna) + ? (õuna) = 17 (õuna); ? (õuna) = 17 (õuna) — 9 (õuna); ? (õuna) = 8 (õuna).

§ 28. Missugused ülesanded arendatakse maha-arwamise abil?

Maha-arwamise abil arendatakse ülesanded,

1) kus ühest arwust teine arw ära wõtta tuleb;
2) kus teada tahetakse saada, mitme ühelise wõrra suurem arw wähemast arwust suurem on (ehk wähem arw suuremast arwust wähem on);
3) kus tarwis on antud arwu mõne ühelise wõrra wähendada;
4) kus uut arwu otsitakse, mis antud arwust mõne ühelise wõrra wähem on.

§ 29. Ühekohalise arwu maha-arwamine.

Ühekohalise arwu maha-arwamine saadetakse kas

1) tagaspidi arwamise waral toime, ehk
2) katsudes, kokkuarwamise abil.

Näituseks: 14 — 6 = ? Et teada saada, kui palju üle jääb, kui 14-st 6 maha-arwame, loeme 14-t 6 arwu tagaspidi, leiame 8. Ehk katsume 6-le mõnda arwu juure lisada, niikaua, kui niisuguse arwu saame, mis 6-ga kokku arwates 14 annab.

§ 30. Mitmekohaliste arwude maha-arwamine.

1. näitus: 3758-st arwa 2634 maha! Hõlpsuse pärast rakendame tegewuse niisama, kui kokkuarwamise juures:

3758
— 2454
1304

kirjutame maha-arwatawa niiwiisi wähendatawa alla, et ühelised üheliste all, kümnelised kümneliste all, sajalised sajaliste all jne. seisawad. Maha-arwatawa ette kirjutame maha-arwamise märgi — (miinus) ja alla tõmbame joone. Maha-arwamist hakkame ühelistest peale.

4 ühelist 8-st ühelisest maha-arwates jääb 4 ühelist järele;

4 ühelist kirjutame joone alla, wahengusse, üheliste kohale;

5 kümnelist 5-st kümnelisest maha arwates ei jää ühtegi kümnelist järele; sellepärast kirjutame joone alla, kümneliste kohale 0;

4 sajalist 7-st sajalisest — jääb 3 sajalist järele;

3 sajalist kirjutame joone alla sajaliste kohale;

2 tuhandelist 3-st tuhandelisest — jääb 1 tuhandeline järele; 1 tuhandelise kirjutame joone alla tuhandeliste kohale. Nii leiame wahengu 1304.

Kui aga maha-arwatawal mõne järgu arw suurem on, kui sellesama järgu arw wähendatawas, siis on maha-arwamine keerulisem.

2. näitus. 300947-st arwa 29528 maha!

Rakendame tehte, nagu endiseski näituses.

$$\begin{array}{r} \cdot\ 10\ \cdot\ 10\ \ \cdot\ 10 \\ 3\,0\,0\,9\,4\,7 \\ \hline 2\ \ 9\ \ 10\ \ \ 3\ \ 17 \\ -\ \ 2\,9\,5\,2\,8 \\ \hline 2\,7\,1\,4\,1\,9 \end{array}$$

Arutame: 8 ühelist 7-st ühelisest meie maha arwata ei saa, sellepärast laename wähendatawa kümnelistest ühe kümnelise, laotame tema ühelisteks ja arwame 7-le ühelisele juure, saame 17 ühelist. Selle märgiks aga, et meie 4-st kümnelisest ühe oleme ära laenanud, teeme 4-ja kohale üles punkti. 8 ühelist 17-st ühelisest ära, jääb 9 ühelist järele; 9 kirjutame joone alla, wahengusse, üheliste kohale. Nüüd peame kümnelised kümnelistest maha arwama. 4-ja kohal seisab aga punkt, see tuletab meele, et meie ühe kümnelise ära oleme laenanud; sellepärast ei ole meil wähendatawas enam 4 kümnelist, waid ainult 3. 2 kümnelist 3-st kümnelisest ära, jääb 1 kümneline järele; 1 kirjutame joone alla, wahengusse, kümneliste kohale. 5 sajalist 9-st sajalisest ära, jääb 4 sajalist järele; 4 kirjutame joone alla, sajaliste kohale. Tuhandelisi meie mahaarwata ei saa, sest et mahaarwatawas ühtegi tuhandelist ei ole. Sellepärast katsume kümnetuhandelistelt ühe kümnetuhandelise laenata. Aga kümnetuhandelisi ei ole ka. Sellepärast laename sajatuhandelistelt ühe, mille märgiks meie kolme kohta üles punkti teeme, ja laotame tema kümnetuhandelisteks, saame 10 kümnetuhandelist. Nüüd laename kümnetuhandelistelt ühe kümnetuhandelise, mille märgiks meie nulli kohale üles punkti teeme, ja laotame tema tuhandelisteks, saame 10 tuhandelist, kümnetuhandelisi jääb aga 9 järele; sellepärast tähendab punktiga null — 9-t. 9 tuhandelist 10-est tuhandelisest ära, jääb 1 tuhandeline järele; 1 kirjutame joone alla, tuhandeliste kohale. 2 kümnetuhandelist 9-st kümnetuhandelisest jääb 7 kümnetuhandelist; 7 kirjutame joone alla, kümnetuhandeliste kohale. Maha-arwatawas sajatuhandelisi ei ole, wähendatawas on neid aga 2, sest punkt kolme kohal tuletab meele, et meie ühe ära laenanud oleme. 2 sajatuhandelist kirjutame wahengusse sajatuhandeliste kohale.

Nii leiame, et 300947—29528 = 271419.

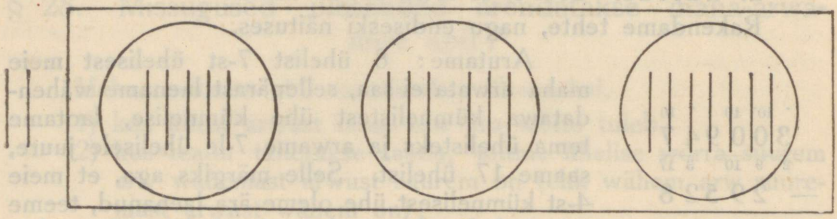
§ 31. Maha-arwamise juht.

Maha-arwatawa kirjutame wähendatawa alla, nii et ühelised üheliste, kümnelised kümneliste, sajalised sajaliste jne. all seisawad.

Maha-arwatawa ette kirjutame maha-arwamise märgi (miinus) —, ja alla tõmbame joone. Siis arwame ühelised ühelistest, kümnelised kümnelistest, sajalised sajalistest j. n. e. maha. Saadud arwud kirjutame joone alla üheliste kohale, kui ühelisi maha-arwame ; kümneliste kohale, kui kümnelisi maha-arwame j. n. e.

Kui mõne järgu üksusi wähendatawas wähem on, kui sellesama järgu üksusi maha-arwatawas, siis laename lähemalt kõrgemalt järgult, mille arw wäärtusega-numbriga kirjutatakse, ühe ûksuse ja lisame temast sellele järgule, kus liig wähe oli, 10 juure ; selle juures muutuwad kõik nende kahe järgu wahel seiswad nullid 9-teks.

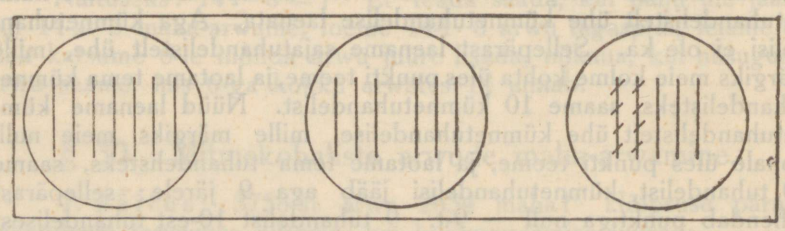
§ 32. Summa muutumine.



Kui meie kaks wäljaspool nelinurka seiswat kriipsu ühe ringi sisse wiime ja sellega ühe ringi sees olewate kriipsude arwu kahe kriipsu wõrra suurendame, siis on awalik, et kõikide nelinurga sees olewate kriipsude arw kahe kriipsu wõrra suureneb.

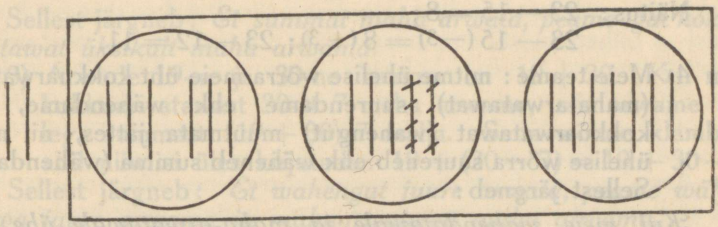
Tähendagu nelinurk summat, ringid kokkuarwatawaid ja kriipsud ühelisi, siis on awalik, et: mitme ühelise wõrra meie ühte kokkuarwatawat suurendame, nii mitme ühelise wõrra suureneb summa.

Näitus: $7+6+5=18$; $7+8+5=20$.



Kui meie ühe ringi seest kaks kriipsu ära wõtame, ja sellega ühe ringi sees olewate kriipsude arwu kahe kriipsu wõrra wähendame, siis on awalik, et kõikide nelinurga sees olewate kriipsude arw kahe kriipsu wõrra wäheneb. Järjelikult: mitme ühelise wõrra meie ühte kokkuarwatawat wähendame, nii mitme ühelise wõrra wäheneb summa.

Näitus: $7+6+5=18$; $7+6+3=16$.



Kui meie kaks wäljapool nelinurka seiswat kriipsu ühe ringi sisse wiime ja sellega ühe ringi kriipsude arwu kahe kriipsu wõrra suurendame, teise ringi seest aga kaks kriipsu ära wõtame ja sellega teise ringi kriipsude arwu kahe kriipsu wõrra wähendame, siis on awalik, et kõikide nelinurga sees olewate kriipsude arw endiseks jääb. Järjelikult: kui meie üht kokkuarwatawat mõne ühelise wõrra suurendame, teist kokkuarwatawat niisama palju üheliste wõrra wähendame, siis jääb summa muutmata.

Näitus: $7+6+5=18$; $7+8+3=18$.

§ 33. Wahengu muutumine.

Wähendataw = maha-arwataw + waheng.

1) Meie teame, et mitme ühelise wõrra meie ühte kokkuarwatawat (wahengut) suurendame ehk wähendame, teist kokkuarwatawat (maha-arwatawat) muutmata jättes, nii mitme ühelise wõrra suureneb ehk wäheneb summa (wähendataw).

Ümberpöördult: Mitme ühelise wõrra meie wähendatawat (summat) suurendame ehk wähendame, nii mitme ühelise wõrra suureneb ehk wäheneb waheng.

Näitus: $23-15=8$;

$23\,(+5)-15=8\,(+5)$ s. o. $28-15=13$.

$23\,(-4)-15=8\,(-4)$ s. o. $19-15=4$.

2) Meie teame, et summa (wähendataw) jääb muutmata, kui meie ühele kokkuarwatawale (maha-arwatawale) mõne ühelise juure lisame, teisest kokkuarwatawast (wahengust) niisama palju ühelisi maha arwame. Sellest järgneb:

Mitme ühelise wõrra meie maha-arwatawat suurendame, nii mitme ühelise wõrra wäheneb waheng.

Näitus: $23-15=8$;

$23-15\,(+3)=8\,(-3)$; $23-18=5$.

3) Summa (wähendataw) jääb muutmata, kui meie ühest kokkuarwatawast (maha-arwatawast) mõne ühelise maha-arwame, teisele kokkuarwatawale (wahengule) niisama palju ühelisi juure lisame. Sellest järgneb:

Mitme ühelise wõrra meie maha-arwatawat wähendame, nii mitme ühelise wõrra suureneb waheng.

Näitus: $23 - 15 = 8$;
$23 - 15(-3) = 8(+3)$; $23 - 12 = 11$.

4) Meie teame: mitme ühelise wõrra meie üht kokkuarwatawat (maha-arwatawat) suurendame ehk wähendame, teist kokkuarwatawat (wahengut) muutmata jättes, nii mitme ühelise wõrra suureneb ehk wäheneb summa (wähendataw). Sellest järgneb:

Kui meie wähendatawale ja maha-arwatawale ühe palju juure lisame, siis jääb waheng muutmata; ning:

Kui meie wähendatawast ja maha-arwatawast ühe palju ära wôtame, siis jääb waheng muutmata.

Näitused: $23 - 15 = 8$;
$23(+7) - 15(+7) = 8$, $30 - 22 = 8$;
$23(-7) - 15(-7) = 8$, $16 - 8 = 8$.

§ 34. Kaks esimest tehet summa ja wahengu kallal.

Summa ja wahengu muutumisest järgnewad juhid:

1) Selle asemel, et mõnda arwu summale juure lisada, wõime teda ühele kokkuarwatawale juure lisada.
2) Selle asemel, et mõnda arwu summast maha arwata, wõime teda ühest kokkuarwatawast maha arwata.
3) Selle asemel, et mõnda arwu wahengule juure lisada, wõime teda kas wähendatawale juure lisada, wõi maha-arwatawast maha arwata.
4) Selle asemel, et mõnda arwu wahengust maha arwata, wõime teda kas wähendatawast maha arwata, wõi maha-arwatawale juure lisada.

---

1) Arwa 25-le juure järgmine summa $19 + 4 + 7 + 8$!
Kui meie 25-le summa $19 + 4 + 7 + 8$ juure peame arwama, siis peame 25-le iga üksiku ühelise, mis summas olemas on, juure arwama; neid üksikuid ühelisi wõime aga nende kogude kaupa, millesse nad juba ühendatud on, s. o. üksikute kokkuarwatawate kaupa juure arwata. Seda kirjutame nii: $25 + (19 + 4 + 7 + 8) = 25 + 19 + 4 + 7 + 8$.

Sellest järgneb: *Et summad juure arwata, peame igat kokkuarwatawat üksikult juure arwama.*

2) Arwa 45-st summa $19 + 4 + 7 + 8$ maha! Kui meie 45-st summa $19 + 4 + 7 + 8$ maha peame arwama, siis peame 45-st iga üksiku ühelise, mis summas olemas on, maha arwama; neid üksikuid ühelisi wõime aga nende kogude kaupa, millesse nad juba ühendatud on, s. o. üksikute kokkuarwatawate kaupa maha arwata. Seda kirjutame nii: $45 - (19 + 4 + 7 + 8) = 45 - 19 - 4 - 7 - 8$.

Sellest järgneb; *Et summat maha arwata, peame igat kokkuarwatawat üksikult maha arwama.*

3) Arwude 19-ne ja 30-ne summa on $19+30$. Kui meie kokkuarwatawast 30-st 7 maha arwame, siis arwame sellega summast $(19+30)$ 7 maha. Seda wõime klambrite abil niiwiisi üles kirjutada: $19+(30-7)=19+30-7$.

Sellest järgneb: *Et wahengut juure arwata, peame wähendatawa juure arwama ja mahaarwatawa maha arwama.*

Sellesama juhi leiame ka järgmisel wiisil arutades: Arwa kokku 19 ja waheng $30-7$! Arwame 19-le 30 juure, saame 49; sellega oleme aga 19-le 7 ühelist enam juure arwanud, kui tarwis oli; sellepärast arwame need üleliigsed 7 ühelist summast maha: $49-7=42$.

4) Arwude 30-ne ja 19-ne waheng on $30-19$. Kui meie maha-arwatawast 19-st 7 maha arwame, siis lisame sellega wahengule $(30-19)$ 7 juure. Seda wõime klambrite abil niiwiisi üles kirjutada: $30-(19-7)=30-19+7$.

Sellest järgneb: *Et wahengut maha arwata, peame wähendatawa maha arwama ja maha-arwatawa juure lisama.*

Sellesama juhi leiame ka järgmisel wiisil arutades: Arwa 30-st maha waheng $19-7$! Arwame 30-st 19 maha, saame 11; sellega oleme aga 307-st ühelist enam maha arwanud, kui tarwis oli; sellepärast lisame need 7 ühelist jälle saadud wahengule juure: $11+7=18$.

Wiies peatükk: Kaswatamine.

(Умноженіе).

§ 35. Kaswatamise mõiste äramääramine.

Olgu kaks rida arwusid kokku arwata antud:

1) $9+4+8+7$

2) $7+7+7+7$.

Kui kokkuarwatawad mitmesuurused on, siis kirjutame selle märgiks, et neid kokku arwama peab, nende wahele kokkuarwamise märgi $+$. Kui aga kõik kokkuarwatawad ühesuurused on, näit. $7+7+7+7$, siis wõime oma ülesannet lühemini kirjutada. Ülesannet $7+7+7+7$ kirjutatakse lühemini nii: kirjutatakse arw, mis kokkuarwatawaks tuleb wõtta, tema järel kirjutatakse põik-rist ehk punkt, ja selle järele arw, mis näitab, mitu korda esimene arw kokkuarwatawana kordub. Selle järele on: 7×4 ehk 7.4 kokkuarwamise ülesande lühendatud kuju ja tähendab, et 7 kordub kokkuarwatawana 4 korda.

$7\times4=7.4=7+7+7+7$.

7×4 ehk 7.4 loetakse nii: seitse kaswatatud neljaga, ehk: kaswata seitset neljaga.

Wõib ka nii kirjutada: kõige esite arw, mitu korda antud arw kokkuarwatawana kordub, siis põik-rist ehk punkt, ja wiimaks arw, mis kokkuarwatawana kordub, näit. 4×7 ehk 4.7. Seda

loetakse nii: neli korda seitse. Harilikult tarwitatakse esimest kirjutusewiisi. Lühendatud kokkuarwamist nimetatakse kaswatamiseks. Sellest näeme, et täisarwude kohta järgmine äramääramine maksab:

Kaswatamine on niisugune aritmetikaline tehe, mille abil üht arwu nii palju korda kokkuarwatawana korratakse, kui palju ühelisi teises arwus olemas on.

Arwu, mida kokkuarwatawana korratakse, nimetatakse kaswatatawaks (множимое); arwu, mis näitab, mitu korda esimest arwu kokkuarwatawana kordama peab, nimetatakse kaswatajaks (множитель). Et näidata, et üht arwu teisega peab kaswatatama, kirjutatakse nende arwude wahele (ehk kaswataja ette) kaswatamise märk. Kaswatamise märgina tarwitatakse põik-risti ehk punkti. Kaswatamise saadust nimetatakse kaswatiseks (произведеніе). Kaswatiseks nimetatakse ka kaks ehk mitu arwu, mis üksteisega kaswatamise märgi läbi on ühendatud. Näit. $6.9 = 54$. 6.9 on ilmumata kaswatis, 54 — on päriskaswatis. 2.3.7.11 on mitme arwu ilmumata kaswatis, 462 on nendesamade arwude päriskaswatis.

Täisarwudega kaswatamist tarwitatakse: 1) kui üht arwu kokkuarwatawana korrata, ja 2) kui üht arwu mitu korda suurendada tuleb.

§ 36. Kaswatamise tôelaused.

I. Näitused: 7 kuuli + 7 kuuli + 7 kuuli = 7 kuuli $\times$ 3 = 3 $\times$ 7 kuuli = 21 kuuli.

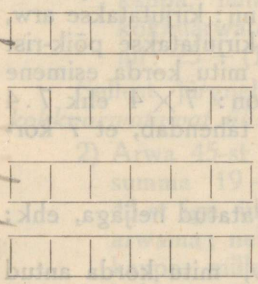
6 naela + 6 naela + 6 naela + 6 naela = 6 naela $\times$ 4 = 4 $\times$ 6 naela = 24 naela.

$9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 9 \times 5 = 5 \times 9 = 45$.

Nendest näitustest näeme, et kokkuarwatawana korduda wõib nii meeleline, kui ka nimega, ehk nimeta arw. Sellest järgneb:

Kaswatataw wõib olla nimeta arw, nimega arw ehk meeleline arw; kaswataja wõib ainult nimeta arw olla, sest ta näitab, mitu korda kaswatataw kokkuarwatawana kordub, ja kaswatis on alati kaswatatawaga samanimeline, sest summa on kokkuarwatawatega samanimeline.

II. Wõtame mõni rida kriipsusid.



Siin on neli ristrida, igas reas 7 kriipsu; järjelikult on meil 4 korda 7 kriipsu. Kui iga kriips üht ühelist tähendab, siis wõime ütelda: meil on 4 korda 7, ja kirjutada: 4×7. Loeme aga püstridasid, siis on meil 7 püstrida, igas reas 4 kriipsu, järjelikult: 7 korda 4 kriipsu. Kui iga kriips üht ühelist tähendab, siis wõime ütelda: meil on 7 korda 4, ja kirjutada 7×4. Et aga kriipsude arw sellepärast ei muutu, kas loeme neid ristridade, wõi püstridade kaupa, siis wõime ütelda ja kirjutada: $4 \times 7 = 7 \times 4$.

Järjelikult: *Kaswatis ei muutu, kui kaswatataw ja kaswataja oma kohte wahetawad.* Et kaswataja ainult nimeta arw wõib olla, siis käib see lause ainult nimeta arwude kohta. Kui aga kaswatataw nimega ehk meeleline arw on, siis wõime küll kaswatatawa ja kaswataja puhtad arwulised wäärtused ära wahetada, ilma et kaswatis muutuks, nimetuse peame aga ikka kaswatatawa juure jätma. Niisugust wahetust wõime seda enam ette wõtta, sest et aritmetika esimene, peaülesanne on õpetada, kuidas tehteid puhtade arwude kallal toime saata. Et kaswatataw ja kaswataja oma kohte wahetada wõiwad ilma, et kaswatis muutuks, siis nimetatakse kaswatatawat ja kaswatajat ühe sõnaga teguriteks (сомножители) ja meie ütleme: Tegurite järg ei muuda kaswatist.

III. Olgu kaswatada antud: $(3+7+11+19).4$.

See tähendab: $(3+7+11+19)+(3+7+11+19)+(3+7+11+19)+(3+7+11+19)=3+7+11+19+3+7+11+19+3+7+11+19+3+7+11+19$.

Summa ei muutu, kui kokkuarwatawad oma kohte wahetawad. Sellepärast wõime eelolewat summat nii kirjutada: $3+3+3+3+7+7+7+7+11+11+11+11+19+19+19+19$, ehk lühemini: $3.4+7.4+11.4+19.4$. Sellepärast on: $(3+7+11+19).4=3.4+7.4+11.4+19.4$.

Sellest järgneb juht: *Et summat mõne arwuga kaswatada, peame iga kokkuarwatawat selle arwuga kaswatama ja saadud kaswatised kokku arwama.*

IV. Olgu kaswatada antud: $4.(9+7+2+5)$.

Et tegurite järg kaswatist ei muuda, siis on $4.(9+7+2+5)=(9+7+2+5).4$; III-da punkti põhjal leiame: $(9+7+2+5).4=9.4+7.4+2.4+5.4$ ehk: $(9+7+2+5).4=4.9+4.7+4.2+4.5$

Järjelikult on: $4.(9+7+2+5)=4.9+4.7+4.2+4.5$.

Sellest järgneb juht: *Et mõnda arwu summaga kaswatada, peame seda arwu iga kokkuarwatawaga eraldi kaswatama ja saadud kaswatised kokku arwama.*

V. Olgu kaswatada antud: $(7+3+9+2).(8+5+6)$.

Arwame wälja, kuipalju on $8+5+6$; $8+5+6=19$.

Nüüd leiame: $(7+3+9+2).(8+5+6)=(7+3+9+2).19$. Ehk: $(7+3+9+2).(8+5+6)=7.19+3.19+3.19+9.19+2.19$. 19 on päris summa, paneme tema asemele endise ilmumata summa $(8+5+6)$, siis leiame: $(7+3+9+2).(8+5+6)=7.(8+5+6)+3.(8+5+6)+9.(8+5+6)+2.(8+5+6)$. Ehk: $(7+3+9+2).(8+5+6)=7.8+7.5+7.6+3.8+3.5+3.6+9.8+9.5+9.6+2.8+2.5+2.6$.

Sellest järgneb juht: *Et summat teise summaga kaswatada, peame igat esimese summa kokkuarwatawat iga teise summa kokkuarwatawaga eraldi kaswatama ja saadud kaswatised kokku arwama.*

§ 37. Ühekohaliste arwude kaswatamine.

Ühekohaliste tegurite kaswatised leitakse kokkuarwamise abil. Need kaswatised õpitakse pähe. Ühekohaliste tegurite kaswatiste tabel kannab nime üks-kord-üks.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Et kahe ühekohalise arwu kaswatist kõrwal seiswa tabeli abil leida, wõtame ühe teguri ristrea ja teise teguri püstrea; missuguse arwu peal need kaks rida kokku jooksewad, see on antud tegurite kaswatis. Näit. $5 . 8 = ?$. 5-es ristrida ja 8-as püstrida jooksewad 40-ne peal kokku; sellest näeme, et $5 . 8 = 40$. Ehk: 8-as ristrida ja 5-es püstrida jooksewad 40-ne peal kokku; sellest näeme jällegi, et $5 . 8 = 40$.

§ 38. Üks tegur on 1. Kaswatamise mõiste laiendamine.

Näitus: Kaswata 1-t 7-ga! $1 \times 7 = ?$

Meie teame, et $1 \times 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Sellepärast on $1 \times 7 = 7$.

Kaswata 7-t 1-ga! $7 \times 1 = ?$

Mis tähendab: 7 kaswatatud 1-ga?

Sel korral kaotab meie kaswatamise mõiste äramääramine oma mõtte, sest 7×1 ei wõi tähendada: 7-t üks kord kokkuarwatawana kordama sel lihtsal põhjusel, et niisugusel lausel mingisugust mõtet sees ei ole. Loeme seda awaldust 7×1 teist wiisi: üks kord seitse. „Üks kord seitse“ on lühendatud lause; täielikult wälja üteldud käib ta nii: „wõta üks kord seitse“. Wiimase lause asemel wõime ka ütelda: „wõta seitse muutmatalt“. Kui meie 7 üks kord wõtame, ehk kui meie 7 muutmatalt wõtame, saame 7. Sellepärast on: $7 \times 1 = 7$.

Neist arutustest selgub:

1) On kaswatamise ülesandeid olemas, mida meie mitte lühendatud kokkuarwamiseks pidada ei wõi ja mille juures warem antud kaswatamise mõiste äramääramine oma mõtte kaotab. Sellepärast saab kaswatamine, ehk

ta küll kokkuarwamisest wälja on kaswanud, iseseiswa tegewuse mõtte. Meie oleme sunnitud kaswatamise mõistet laiendama ja teda teist wiisi ära määrama, nii et kõik juhused, mis kaswatamise juures ette tulewad, selle äramääramise alla sünniksiwad. Sellepärast määratakse kaswatamine järgmiselt ära:

Kaswatamine on niisugune aritmetikaline tehe, mille abil ühest antud arwust uus arw selsamal kombel saadakse, mil kombel teine antud arw arwust „üks" on saadud.

Niisuguse kaswatamise mõiste äramääramise alla mahub ka endine äramääramine. Näitus: 7×4. Seitse kaswatatud neljaga tähendab: 7-st peame uue arwu sel teel leidma, nagu 4 1-st on saadud. Kuidas on 4 1-st saadud? $1 + 1 + 1 + 1 = 4$; 4 saadakse 1-st seda wiisi: 1 korratakse kokkuarwatawana 4 korda. Sellepärast saame otsitawa arwu, kui meie 7-t kokkuarwatawana 4 korda wõtame. Siin näeme: arwu „1 — üks" asemele astub arw 7; 7 saab ise uueks üksuseks. Näitus: Mitme kopika eest markisid läheb 4-ja kirja saatmiseks, kui iga kirja peale 7-me kopikaline mark tuleb panna? Siin ühenewad iga 7 kopikat uueks üksuseks postmargi kujul ja meie leiame 7 kop. $\times$ 4 = 7 kop. + 7 kop. + 7 kop. + 7 kop. = 28 kop. Ka 1-ga kaswatamine mahub uue äramääramise alla. 7 kaswatatud 1-ga tähendab: 7-st peame uue arwu sel teel leidma, nagu 1 1-st on saadud. 1 ei ole aga 1-st kuidagi wiisi saadud, waid 1 on wõetud muutmata.

Sellepärast, et 7-t 1-ga kaswatada, peame 7-t muutmata wõtma. Kui meie aga üht arwu muutmata wõtame, siis saame sellesama arwu.

2) On üks tegur 1, siis on kaswatis teise teguri suurune.

§ 39. Üks tegur on 0.

Näitus: $0 \times 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$;

järjelikult on $0 \times 5 = 0$.
$5 \times 0 = ?$

Wiit nulliga kaswatama tähendab 5-st uut arwu saama, nagu 0 1-st on saadud. Null on 1 selleläbi saadud, et 1 sugugi wõetud ei ole. Kui meie sellepärast 5-t ka sugugi ei wõta, siis ei saa meie ka midagi, see tähendab, meie saame 0. Sellepärast on $5 \times 0 = 0$.

Sellest järgneb: *On üks tegur 0, siis on ka kaswatis 0.*

Tähendus. Ühega ja nulliga kaswatamine näitawad meile, et ka kaswatamise mõiste uue äramääramise korral kaswatamise tõelaused seisma jääwad, sest $1 \times 7 = 7 \times 1 = 7$ ja $0 \times 5 = 5 \times 0 = 0$.

§ 40. Mitmekohalise arwu kaswatamine ühekohalise arwuga.

Olgu kaswatada antud: 947 . 6.

Mitmekohalist arwu wõime järgu arwudeks lahutada, siis on 947 . 6 = (900 + 40 + 7) . 6 ehk: 947 . 6 = 900 . 6 + 40 . 6 + 7 . 6.

900 . 6 ehk 6 korda 9 sajalist annab 54 sajalist ehk 5400
40 . 6 ehk 6 korda 4 kümnelist annab 24 kümnelist ehk 240
7 . 6 ehk 6 korda 7 ühelist annab 42 ühelist ehk 42
Arwame saadud kaswatised kokku, siis leiame: 5682

Harilikult hakatakse ühelistest peale kaswatama ja meie arutame järgmiselt: 947 . 6 = 5682.

6 korda 7 ühelist on 42 ühelist ehk 2 ühelist ja 4 kümnelist; 2 ühelist kirjutame üles, sest ühelisi meie enam kuskilt ei saa, ja 4 kümnelist peame meeles. 6 korda 4 kümnelist on 24 kümnelist ja weel meeles peetud 4 kümnelist, teeb kokku 28 kümnelist, ehk 2 sajalist ja 8 kümnelist: 8 kümnelist kirjutame üles ja 2 sajalist peame meeles.

6 korda 9 sajalist on 54 sajalist ja weel meeles peetud 2 sajalist, teeb kokku 56 sajalist, ehk 6 sajalist ja 5 tuhandelist. Et kaswatamine otsas on, siis kirjutame 6 sajalist ja ka 5 tuhandelist üles. Niiwiisi leiame kaswatise 5682.

Kirjalik tehe rakendatakse nii:

947 . 6 = 5682 ehk 947 . 6 ehk 947
5682 × 6
5682

§ 41. Järgu-ühelisega kaswatamine.

Kaswata 4 . 100-ga!

4 . 100 = 100 . 4, sest tegurite järg ei muuda kaswatist.

Sada on iseseisaw üksus, mis sajaliseks nimetatakse, ja kui meie seda üksust 4 korda kokkuarwatawana wõtame, siis saame 4 niisugust üksust, s. o. 4 sajalist = 400. Järjelikult on: 4 . 100 = 400. Wõtame weel ühe näituse: 284 . 1000! 284 . 1000 = 1000 . 284. Tuhat on iseseisaw üksus, mida tuhandeliseks nimetatakse, ja kui meie seda üksust 284 korda kokkuarwatawana wõtame, siis saame 284 niisugust üksust, ehk 284 tuhandelist ehk 284 tuhat ühelist. Järjelikult on 284 . 1000 = 284000.

Sellest järgneb:

1) *Kui üks tegur järgu-üheline on, siis leiame kaswatise selle läbi, et meie teisele tegurile niipalju nullisid paremale poole otsa kirjutame, kui palju neid järgu-ühelise kujutuses on.*
2) *Kui üks tegur järgu-üheline on, siis saame kaswatises sellesama järgu-ühelisi ja nimelt niipalju, kui palju lihtühelisi teises teguris on.*

Ümberpöördult:

Et $4 . 1000 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4000$, siis on ka $4000 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4 . 1000$.

Sellest järgneb: *Igale järgu-arwule wõime tema tähendaja arwu ja järgu-ühelise kaswatise kuju anda,* näit. $700 = 7 . 100$.

§ 42. Järgu-arwuga kaswatamine.

1. Näitus. Kaswata 236.40!

236.40 tähendab 236-t 40 korda kokkuarwatawana kordama. 40 kokkuarwatawat wõime 10-esse salgasse ühendada, igas salgas 4 kokkuarwatawat.

236	236	236	236	236	236	236	236	236	236
236	236	236	236	236	236	236	236	236	236
236	236	236	236	236	236	236	236	236	236
236	236	236	236	236	236	236	236	236	236
944	944	944	944	944	944	944	944	944	944

Selle asemel, et 236 kokkuarwatawana 4 korda korrata, wõime 236 4-ga kaswatada: $236.4 = 944$; selle asemel, et 944 kokkuarwatawana 10 korda korrata, wõime 944 10-ga kaswatada: $944.10 = 9440$. Sellega on $236.40 = (236.4).10$. Sellest näeme: et ühte arwu 40-ga kaswatada, wõime teda 4-ga kaswatada ja saadud kaswatist weel 10-ga kaswatada (ehk saadud kaswatisele üks null paremale poole otsa kirjutada).

2. Näitus: 1512.7000!

Siin peame 1512 kokkuarwatawana 7000 korda kordama. 7000 kokkuarwatawat wõime 1000-sse salgasse ühendada, igas salgas 7 kokkuarwatawat. Ühe salga summa leiame, kui meie 1512 7-ga kaswatame, $1512.7 = 10584$; kõikide 7000-de kokkuarwatawate summa leiame, kui meie ühe salga summad, 10584, 1000-ga kaswatame, mille jaoks meie 10584-le 3 nulli juure kirjutame. Selle järgi leiame: $1510.7000 = (1512.7).1000 = 10584000$.

Neist kahest näitusest järgneb juht:

Et mõnda arwu järgu-arwuga kaswatada, peame antud arwu kaswataja tähendaja numbriga kaswatama ja saadud kaswatisele paremale poole niipalju nullisid juure kirjutama, kui palju neid kaswatajal on.

Tehe rakendatakse nii: $236 . 40 = 9440$; $1512 . 7000 = 10584000$.

ehk:

236	1512
× 40	× 7000
9440	10584000

s. o., kaswataja kirjutatakse nii kaswatatawa alla, et kaswataja nullid kaswatatawast paremal pool seisawad.

§ 43. Kaswatamine mitmekohaliste arwudega.

Kaswata 19407.2368!

Kaswatajale 2368 wõime summa kuju anda:

$$2368 = 2000 + 300 + 60 + 8.$$

Sellepärast on $19407.2368 = 19407 . (2000 + 300 + 60 + 8)$.

Et mõnda arwu summaga kaswatada, peame seda arwu iga kokkuarwatawaga eraldi kaswatama ja saadud kaswatised kokku arwama. Sellepärast on:

$$19407.2368 = 19307. (2000 + 300 + 60 + 8) =$$
$$19407.2000 + 19407 . 300 + 19407.60 + 19407.8$$

§ 42-da põhjal leiame:

$$19407.2000 = 38814000$$
$$19407. 300 = 5822100$$
$$19407. 60 = 1164420$$
$$19407. 8 = 155256$$

Järjelikult on: $19407.2368 = 45955776$

Sellest järgneb juht:

Et mitmekohalist arwu mitmekohalise arwuga kaswatada, peame kaswatatawat kaswataja iga järgu arwuga kaswatama ja saadud kaswatised kokku arwama.

Need kaswatised, mis siis saadakse, kui meie kaswatawat mõne kaswataja järgu arwuga kaswatame, nimetatakse *erakaswatisteks;* erakaswatiste summa nimetatakse *täiskaswatiseks.* Harilikult hakatakse kaswatamist ühelistest peale ja tehe rakendatakse nii:

19407.2368	ehk:	19407.2368	ehk:	19407	
				× 2368	
155256		155256		155256	1-ne erakaswatis.
+ 1164420		+ 116442		+ 116442	2-ne „
5822100		58221		58221	3-as „
38814000		38814		38814	4-as „
45955776		45955776		45955776	täiskaswatis.

Harilikult ei kirjutata erakaswatistes nullisid, waid hakatakse kohe esimest numbrit selle järgu numbri alla kirjutama, missuguse järgu arwuga kaswatatakse.

§ 44. Kaswatamine arwuga, millel mõne keskmise järgu kohal null on.

Näitus: 1882 kaswata 2004-ga!

Meie teame juba, et 1882 tuleb enne 4-ga kaswatada, siis 0-ga, siis weel 0-ga ja wiimaks 2-ga; lõpuks tulewad kõik erakaswatised kokku arwata. Kui meie aga mõnda arwu nulliga kaswatame, siis on kaswatis 0. Sellepärast wõime 0-idega kaswatamata jätta ja peale 4-ja otsekohe 2-ga kaswatada. Selle juures peame aga meeles

pidama, et 2 kaswataja neljas nummer on ja tuhandelisi tähendab, sellepärast saame ka temaga kaswatades tuhandelisi ja meie peame selle neljandama erakaswatise esimese (parema käe poolt lugedes) numbri esimese erakaswatise neljandama numbri, tuhandeliste, alla kirjutama. Sellest järgneb juht:

Kui kaswatajas mõned keskmised numbrid nullid on, siis ei kaswatata nendega mitte, waid kaswatatakse otsekohe järgmise tähendaja numbriga, mille juures saadud erakaswatist esimese erakaswatise selle järgu numbri alla kirjutama hakatakse, missuguse järgu numbriga kaswatatakse.

Tehe rakendatakse nii:

```
  1882.2004 ehk:      1878
  ------------      × 20905
     7528             ------
  3764                 9390
  -------           16902
  3771528           3756
                    --------
                    39259590
```

§ 45. Kaswatamine arwudega, mis nullidega lõpewad.

1. Näitus. 27000.52!

27000 ühelist on 27 tuhandelist, sellepärast wõime kirjutada: 27000.52 = 27 tuhandelist . 52, s. o. 52 korda 27 tuhandelist ehk (52 korda 27) tuhandelist ehk (27 . 52) tuhandelist = 1404 tuhandelist = 1404000. 1404-le kirjutasime nimetuse „tuhandelist" asemel lõpule kolm nulli juure. Need on aga needsamad nullid, mille asemel meie alguses nimetuse „tuhandelist" kirjutasime. Sellest järgneb juht:

Kui meie üht arwu, mis nullidega lõpeb, teise arwuga kaswatama peame, siis kaswatame seda arwu, lõpu nullisid tähelepanemata jättes, kaswatajaga ja saadud kaswatisele kirjutame kõik kaswatatawa lõpu nullid juure. Tehe rakendatakse nii:

```
  27000
× 52
------
  54
 135
-------
1404000
```

s. o. kaswataja kirjutatakse kaswatatawa alla nii, et nullid kaswatajast paremale poole jääwad.

2. Näitus. 617.4300!

Et tegurite järg kaswatist ei muuda, sellepärast on 617.4300 = 4300.617.

Sellest näeme, et ka siin meie kaswatada wõime kaswataja lõpu nullisid tähelepanemata jättes, ja saadud kaswatisele tähelepanemata jäetud lõpu nullid juure kirjutada.

3. Näitus. 5800.93000!

```
  5800
× 93000
-------
  174
  522
-------
539400000
```

Et 5800 mõne arwuga kaswatada, kaswatatakse 58 selle arwuga ja kaswatisele kirjutatakse 2 nulli juure. Et aga 58 kaswatada 93000-ga, peab 58-t 93-ga kaswatama ja saadud kaswatisele 3 nulli juure kirjutama Sellest näeme, et 5800 kaswatada 93000, peame 58-t kaswatama 93-ga ja saadud kaswatisele 2+3=5 nulli juure kirjutama.

Juht: *Kui kaswatataw ja kaswataja, ehk üks nendest, nullidega lõpeb, siis jäetakse lõpu nullid esiotsa tähelepanemata, saadetakse kaswatamine ilma nendeta toime, ja saadud kaswatisele kirjutatakse nii palju nullisid juure, kui palju neid kaswatatawa ja kaswataja lõpul ühtekokku on.*

§ 46. Kaswatamine sel korral, kui kaswatatawas wähem tähendajaid numbrid on, kui kaswatajas.

Wõtame kaks näitust:

1)
```
   83   kaswatataw.
× 457   kaswataja.
-------
  581
  415
  332
-------
37931
```

2)
```
 8003   kaswatataw.
×  457  kaswataja.
---------
  56021
  40015
  32012
---------
3657371
```

Wahetame tegurid ära; olgu mõlemates näitustes 457 kaswatataw ja 83 esimeses ja 8003 teises näituses kaswatajad. Siiski kirjutame neid endist wiisi, ainult kaswatame ülewalt alla. Meie teame, et kaswatised endisteks jääwad.

3)
```
   83   kaswataja.
× 457   kaswatataw.
-------
  1371
+ 3656
-------
37931
```

4)
```
 8003   kaswataja.
×  457  kaswatataw.
---------
  1371
+ 3656
---------
3657371
```

Esimeses ja teises näituses kaswatasime alt ülesse ja saime kokkuarwamiseks 3 erakaswatist; kolmandas ja neljandas näituses kaswatasime ülewalt alla ja saime kokkuarwamiseks ainult 2 erakaswatist. Muidugi mõista, on wiimane kaswatamine kergem. Sellest näeme, et, *kui kaswatatawas wähem tähendajaid numbrid on, kui kaswatajas, siis on kergem ülewalt alla kaswatada.*

Kui kaswatataw nimega ehk asjaline arw on, siis wõime kaswatatawa nimetuse esiotsa tähelepanemata jätta, kaswatise arwulise suuruse kõige hõlpsamal wiisil leida ja siis alles leitud kaswatisele kaswatatawa nimetuse juure kirjutada. Näitus:

4002 rubla .378 = (4002.378) rubla = (378.4002) rubla.
1512756 rubla. Ehk:

4002 rubla
×378

756
1512

1512756 rubla.

Mitme teguri kaswatis.

§ 47. Mõiste äramääramine.

Olgu meil mitu arwu 7, 5, 3, 4.

Kaswatame esimest arwu, 7-t teisega, 5-ga, saame 35; saadud kaswatist 35 kaswatame kolmanda arwuga, 3-ga, saame 105; uut kaswatist 105, kaswatame neljanda arwuga, 4-ga, saame 420. Arw 420 nimetatakse niisugusel korral nelja teguri 7-me, 5-e, 3-e ja 4-ja kaswatiseks.

Et näidata, et mitu arwu üksteisega kaswatada tulewad, kirjutatakse nemad ühte ritta seda järge mööda, kuidas nemad kaswatada tulewad ja nende wahele kirjutatakse kaswatamise märgid.

Selle järele on: 4.5.8.7 = [(4.5).8].7.

§ 48. Tegurite ümberasendamine.

Mitme teguri kaswatis ei muutu, kui tegurid oma kohte muudawad.

Meie teame juba, et kahe teguri kaswatis ei muutu, kui tegurid oma kohtasid wahetawad. Nüüd näitame, et mitme teguri kaswatis ei muutu, 1) kui kaks kõrwuseiswat tegurit oma kohte wahetawad, 2) kui ülepea kaks tegurit oma kohte wahetawad ja 3) kui mõned ehk kõik tegurid oma kohte muudawad.

1) Wõtame kaswatise 2.3.5 ja näitame, et 2.3.5=2.5.3. Ilmumata kaswatist wõime järgmiselt kujutada:

2+2+2+
+2+2+2+
+2+2+2+
+2+2+2+
+2+2+2

Arwame üleskirjutatud kahed ristridade kaupa kokku, siis saame (2.3).5 = 2.3.5. Arwame nad aga püstiridade kaupa kokku, siis saame (2.5).3 = 2.5.3. Sellepärast on 2.3.5 = 2.5.3.

Wõtame kaswatise 2.5.4.3.7 ja näitame, et 2.5.4.3.7 = 2.5.3.4.7. 2.5.4.3.7 tähendab, et 2 peame 5-ga kaswatama, saadud kaswatist 4-ga, uut kaswatist 3-ga ja wiimast kaswatist 7-ga. Et meie 2 ja 5 kõige enne peame kaswatama, siis kaswatame neid üksteisega tõesti, 2.5 = 10; et meie 7-ga kõige wiimaks kaswatama peame, siis jätame ta esiotsa tähelepanemata ja näitame, et

2.5.4.3 = 2.5.3.4.
2.5.4.3 = 10.4.3.
10.4.3 = 10.3.4. sellega on 2.5.4.3=2.5.3.4.

Kaswatame nüüd kummagit kaswatist 7-ga, siis leiame, et 2.5.4.3.7 = 2.5.3.4.7.

2. Näitame, et 2.5.4.3.7 = 2.7.4.3.5.

Tõepoolest, 2.5.4.3.7 = 2.4.5.3.7 = 2.4.3.5.7 = 2.4.3.7.5 = 2.4.7.3.5 = 2.7.4.3.5. Sellest näeme, et 2.5.4.3.7 = 2.7.4.3.5.

3. Wiimaks näitame, et 2.5.4.3.7 = 3.4.7.2.5.

Et mitme teguri kaswatis ei muutu, kui kaks tegurit oma kohte wahetawad, siis wõime kirjutada:

2 . 5 . 4 . 3 . 7 = 3 . 5 . 4 . 2 . 7 = 3 . 4 . 5 . 2 . 7 = 3 . 4 . 7 . 2 . 5.

Järjelikult on 2 . 5 . 4 . 3 . 7 = 3 . 4 . 7 . 2 . 5.

§ 49. Kaswatisega kaswatamine.

Et mônda arwu kaswatisega kaswatada, wôib teda kaswatise esimese teguriga, saadud kaswatist teise teguriga, uut kaswatist kolmanda teguriga jne. kaswatada.

Näitame, et 5 . (4 . 7) = (5 . 4) . 7.

Meil on siin kaks tegurit: üks tegur on 5, teine tegur on (4 . 7); et tegurite järg kaswatist ei muuda, siis wõime kirjutada: 5 . (4 . 7) = (4 . 7) . 5. § 47-nda järele on (4 . 7) 5 = 4 . 7 . 5. § 48-nda põhjal on 4 . 7 . 5 = 5 . 4 . 7 = (5 . 4) . 7.

Sellega on: 5 . (4 . 7) = (4 . 7) . 5 = 4 . 7 . 5 = 5 . 4 . 7 = 5 . 4.7, ehk 5 . (4 . 7) = (5 . 4) . 7.

Ümberpöördult: Kui 5 . (4 . 7) = (5 . 4) . 7,
siis on ka (5 . 4) . 7 = 5 . (4 . 7);
aga § 47 järgi on (5 . 4) . 7 = 5 . 4 . 7.
Järjelikult on 5 . 4 . 7 = 5 . (4 . 7).

See tähendab: Selle asemel, et üht arwu teise arwuga kaswatada, saadud kaswatist kolmanda arwuga, uut kaswatist neljanda arwuga jne. kaswatada, wõime esimest arwu korraga kõigi teiste arwude kaswatisega kaswatada.

§ 50. Mitme arwu kaswatise kergem wäljaarwamine.

Et mitme arwu kaswatist wälja arwata, wôib tegurid missugustesse tahes salkadesse ühendada, iga salga kaswatis eraldi wälja arwata ja saadud kaswatised üksteisega kaswatada.

Näitame, et 7 . 25 . 3 . 11 . 4 = (7 . 3 . 11) . (25 . 4)
§ 48 järgi on: 7 . 25 . 3 . 11 . 4 = 7 . 3 . 11 . 25 . 4.
§ 47 järgi on: 7 . 3 . 11 . 25 . 4 = 231 . 25 . 4
§ 49 järgi on: 231 . 25 . 4 = 231 . (25 . 4)
aga 231 = 7 . 3 . 11; sellepärast on: 231 . (25 . 4) = (7 . 3 . 11) . (25 . 4)
Järjelikult on: 7 . 25 . 3 . 11 . 4 = (7 . 3 . 11) . (25 . 4)

Selle omaduse põhjal wõime mitme arwu kaswatise wälja-arwamist kergendada. Näitus:

$7 . 25 . 3 . 11 . 4 = 175 . 3 . 11 . 4 = 525 . 11 . 4 = 5775 . 4 = 23100$
$7 . 25 . 3 . 11 . 4 = (7.3.11).(25.4) = (21.11).100 = 23100$

Kuues peatükk: Jagamine.

(Дѣленіе).

§ 51. Kaswatamise wastapidised tehted.

Eelpool oli üteldud, et igal tehtel kaks wastapidist tehet on, ja näidatud, et kokkuarwamisel tõesti kaks wastapidist tehet on, mis aga üheks tehteks, maha-arwamiseks, kokku langewad.

Waatame nüüd, kas kaswatamise kaks wastapidist tehet ka üheks kokku langewad, wõi ei.

§ 52. Jaotamise môiste äramääramine.

Ülesanne: Kirikumõisa toodi 7-st wallast 42 sülda põletispuid. Kui palju toodi igast wallast, kui kõik wallad ühe palju tõiwad?

Wäljaarwamine: Awalik on, et iga wald seitsmenda jao neist 42-st süllast saatis. Et teada saada, kui suur seitsmes jagu 42-st süllast on, peaksime 42 sülda seitsmesse jaosse jagama.

Tegelikult 42 sülda puid 7-sse jaosse jagada on tülikas, sest meie peaksime ühe sülla puid wõtma ja ise paika panema, teise sülla teise paika ja nii wiisi kuni 7-da süllani. Kaheksanda sülla peaksime esimese sülla juure panema, üheksanda — teise sülla juure jne., kuni kõik 42 sülda puid jälle niiwiisi ärajaotatud on, nagu neid toodi. Katsume aga teistwiisi wälja arwata, kui suur on 7-es jagu 42-süllast. Kui meie kõik 7-me walla saadetud puud kokku arwame, saame 42 sülda. Et aga kõik 7 kokkuarwatawat, igast wallast saadetud puu süldade arw, ühesuurused on, siis wõime kokkuarwamise asemel ühe walla puu süldade arwu 7-ga kaswatada ja meie saame 42 sülda. Sellest näeme, et teada saada, mitu sülda iga wald saatis, peame niisugust arwu otsima, mis 7-ga kaswatades 42 (sülda) annab.

Sellest arutusest näeme, et 42 sülda on kaswatis, 7 on kaswataja ja igast wallast saadetud ja meile weel teadmata puu süldade arw on kaswatataw.

Ükskordühest teame, et niisugune arw 6 on; järjelikult saatis iga wald 6 sülda põletispuid.

Niisugune aritmetikaline tehe, kus antud kaswatise ja kaswataja kaudu kaswatatawat otsitakse, nimetatakse jaotamiseks (дѣленіе на равныя части). Antud kaswatis nimetatakse *jagatawaks*, antud kaswataja nimetatakse *jagajaks* ja otsitaw kaswatataw — *jaondiks*.

Jagataw, kui antud kaswatataw, wõib kas meeleline wõi nimega, wõi nimeta arw olla; jagaja, kui antud kaswataja, wõib ainult nimeta arw olla, ta näitab ühtlasi ka, mitmeks ühesuuruseks jaoks meie jagatawat jagama peame; jaond, kui otsitaw kaswatataw, on jagatawaga samanimeline; ta näitab ühtlasi iga jao suurust.

Tähendus: Siin kohal olgu tähendatud, et kui meie ühe arwu mitmesse jaosse, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 1000 jne. jaosse, jagame, siis nimetatakse saadud jaondit jagatawa mitmendikuks (mitmendik = аликвотная часть = aliquoter Teil).

§ 53. Mahutamise mõiste äramääramine.

Ülesanne: Kirikumõisa toodi mitmest wallast kokku 42 sülda põletispuid. Mitmest wallast toodi puid, kui iga wald 6 sülda saatis?

Wäljaarwamine: Puid toodi nii mitmest wallast, mitu korda 6 sülda 42-he sülla sisse mahub. 6 sülda mahub 42-he sülla sisse nii mitu korda, mitu korda 6 sülda wõtma peab, et 42 sülda saada. Siin on awalik, et 42 sülda on kaswatis, 6 sülda on kaswatataw, ja otsitaw arw on kaswataja.

Ükskordühest teame, et 6 sülda 7 korda wõtma peame, et 42 sülda saada. Sellega leiame, et 6 sülda 42 sülla sisse 7 korda mahub, see tähendab: puid toodi 7-st wallast.

Niisugune aritmetikaline tehe, kus antud kaswatise ja kaswatataw kaudu kaswataja otsitakse, nimetatakse mahutamiseks (деление по содержанию). Antud kaswatis nimetatakse *jagatawaks*, antud kaswatataw — *jagajaks*, ja otsitaw kaswataja — *jaondiks*.

Jagataw, kui antud kaswatis, wõib kas meeleline wõi nimega, wõi nimeta arw olla; jagaja, kui antud kaswatataw, on jagajaga ühenimeline, ja jaond, kui otsitaw kaswataja, on nimeta arw; ta näitab ühtlasi, mitu korda jagaja jagatawa sisse mahub.

§ 54. Jagamise mõiste äramääramine.

Ette toodud näitustest selgub, et jaotamise ja mahutamise wahel sisemise mõtte poolest suur wahe on: jaotamise juures otsitakse jagatawa mitmendiku suurust, jagaja on nimeta arw, jaond on jagatawaga samanimeline; mahutamise juures otsitakse, mitu korda jagaja jagatawa sisse mahub, jagaja on jagatawaga samanimeline ja jaond on nimeta arw. Jaotamise korral antakse kaswatis ja kaswataja, otsitakse kaswatatawat. Mahutamise korral antakse kaswatis ja kaswatataw, otsitakse kaswatajat. On kaswatataw, sellega ka kaswatis, meeleline ehk nimega arw, siis jääb wahe kaswatatawa ja kaswataja wahel seisma. Sellega jääb ka wahe kaswatamise wastupidiste tehete, jaotamise ja mahutamise, wahel kindlaks. On aga kaswatataw nimeta arw, siis muutuwad kaswatataw ja kaswataja (§ 36 II põhjal) üheõiguslisteks teguriteks ja ka wahe kaswatamise wastupidiste

tehete, jaotamise ja mahutamise wahel peab langema. Tehte toimesaatmisel peame mõlematel kordadel niisugust arwu otsima, mis ühe antud arwuga kaswatades, selle peale waatamata, kumb neist teguritest kaswatataw, kumb kaswataja on, teise antud arwu annab.

Sellest järgneb, et nii jaotamise, kui ka mahutamise juures tehe ühel ja sellelsamal wiisil korda saadetakse. Pealegi on aritmetikas puhta arwu leidmine peaasi ja esimene eesmärk. Sellepärast peame tehte toimesaatmisele sisemise mõtte ees eesõiguse andma.

Nimetatud põhjustel sulawad jaotamine ja mahutamine üheks tehteks, jagamiseks, (дѣленіе) kokku ja jagamise mõistet wõime järgmiselt ära määrata:

Jagamine on aritmetikaline tehe, mille abil antud kaswatise ja ühe teguri kaudu teine tegur leitakse. Antud kaswatis nimetatakse jagatawaks, (дѣлимое), antud tegur — jagajaks, (дѣлитель) otsitaw tegur — jaondiks (частное).

Jagamise märkidena tarwitatakse 1) kahte punkti : 2) poolristi | — 3) nurka |_

Tehe kirjutatakse ja loetakse järgmiselt:

24 : 8 = 3 24-ja 8-as jagu on 3. ehk:

$$\begin{array}{r|l} 1908 & 53 \\ \hline & 36 \end{array}$$ 1908 jagatud 53-ga on 36 ehk:

$$\begin{array}{r|l} 1908 & 12 \\ \hline & 159 \end{array}$$ 12 mahub 1908 sisse 159 korda.

Igat kolme kirjutusewiisi wõib kolmel wiisil lugeda.

Kaks arwu, mis üksteisega jagamisemärgi läbi ühendatud on, nimetatakse ka jaondiks (ilmumata jaond).

§ 55. Millal tarwitatakse jagamist?

Jagamist tarwitatakse 1) kui ühe arwu mitmendikku (аликвотная часть) leida tahetakse; 2) kui üht arwu mitu korda wähendada tahetakse; 3) kui teada tahetakse saada, mitu korda wähem arw suurema sisse mahub; 4) kui teada tahetakse saada, mitu korda suurem arw wähemast arwust suurem, ehk wähem arw suuremast arwust wähem on.

§ 56. Jagamine jäänusega.

Wõib ette tulla, et meie jagamise juures niisugust arwu ei leia, mis jagajaga kaswatatult jagatawa annaks, näit. 67 : 9. Ükskordühest teame, et 9 . 7 = 63, aga 9 . 8 = 72.

Niisugusel korral lepime meie kokku nõuet 67 jagada 9-ga nii mõistma: 9-ga peab jagatama 67, kui see võimalik on, ehk 67-me kõige suurem osa, mida 9-ga ülepea jagada võib. 67-me kõige suurem osa, mida 9-ga jagada võib, on 63. Just seda arwu, 63, peame 9-ga jagama, kui 67-t 9-ga jagada tahetakse.

Niisuguse jagamise juures jääb meil jagada antud arwust üks wäike osa üle, mida enam jagada ei saa. See ülejäänud arw nimetatakse jäänuseks. Awalik on, et jäänus wähem peab olema, kui jagaja. Kui jagamise juures jäänus olemas on, siis nimetatakse saadud jaondit — ligijaondiks.

Näit. 67-t 9-ga jagades leiame ligijaondi 7, jäänus on 4.

See kirjutatakse nii: $67 : 9 = 7$ (jäänus 4).

Paljudes ülesannetes on meil ligijaondiga tegemist.

I. Ülesanne. Emal oli tükk linast riiet, 22 küünart pikk. Sellest tükist tegi ta pojale särkisid. Mitu särki sai poeg, kui iga särgi peale 5 küünart läks?

Kostus: Poeg sai 4 särki ja 2 küünart jäi üle.

II. Ülesanne: Kirikust tulles tõi isa 10 kringlit ja jagas nad terwelt 3-le lapsele ära, igale ühele ühe palju. Mitu kringlit sai iga laps?

Kostus: Iga laps sai 3 kringlit ja 1 kringel jäi üle.

Ülesandes ei ole üteldud, kas just kõik kringlid lastele ära jagati, selle wastu on aga üteldud, et nad ühtlaselt ja terwelt ära jagati.

§ 57. Jagatawa leidmine jagaja, jaondi ja jäänuse kaudu.

Kui jagamine jäänuseta sünnib, siis leiame jagatawa, kui meie jagajat jaondiga kaswatame, sest jagaja ja jaond on tegurid, jagataw on kaswatis. Näit. $54 : 6 = 9$. $54 = 6 \cdot 9$.

Sünnib aga jagamine jäänusega, siis leiame jagatawa, kui meie ligijaondit jagajaga kaswatame ja kaswatisele jäänuse juure arwame, sest ligijaondit jagajaga kaswatades leiame jagatawast selle osa, mis meie ära jagasime; kui meie sellele osale weel jäänuse juure arwame, leiame täie jagatawa. Näit. $76 : 9 = 8$ (jäänus 4); $76 = 9 \cdot 8 + 4$.

Lühendatult nimetatakse ligijaondit lihtsalt jaondiks.

§ 58. Kuidas teada saada, kas jaond ühekohaline wõi mitmekohaline arw on.

Et teada saada, kas jaond ühekohaline wõi mitmekohaline arw on, kaswatame jagajat 10-ga, mille tarwis meie jagajale ühe nulli juure kirjutame, ja wõrdleme saadud arwu jagajaga. Kui saadud arw jagatawast suurem on, siis peab jaond 10-st wähem

olema ja on sellepärast ühekohaline arw; on aga saadud arw jagatawast wähem, siis peab jaond 10 ehk 10-st suurem olema ja on sellepärast mitmekohaline arw.

Näit. $284:71 = ?$ $71 . 10 = 710$. 710 on suurem kui 284, sellepärast on jaond ühekohaline arw.

$286:13 = ?$ $13 . 10 = 130$. 130 on wähem kui 286, sellepärast on jaond mitmekohaline arw.

§ 59. Jagaja ja jaond on mõlemad ühekohalised arwud.

Kui jagaja ja jaond mõlemad ühekohalised arwud on, siis on jagataw kas ühe-, ehk kahekohaline arw. Niisugusel korral leiame jaondi ükskordühe abil. Näit. $48:6 = 8$, sest et $6 . 8 = 48$. $47:8 = 5$ (jäänus 7), sest et $8 . 5 = 40$. aga $8 . 6 = 48$. Sellepärast on jaond 5 ja 7 jääb üle, jagamata.

§ 60. Jagaja on mitmekohaline, jaond — ühekohaline arw.

Kui jagaja mitmekohaline, jaond ühekohaline arw on, siis leitakse jaond katsumise abil.

Näitus: $41734:7842 = ?$

Jaond on ühekohaline arw, sest $7842 . 10$ on suurem kui 41734. Kui suur on aga jaond? Katsume arwu 3. Selleks kaswatame jagajat 3-ga. $7842 . 3 = 23526$; leiame jäänuse: $41734 - 23526 = 18208$. Jäänus 18208 on suurem, kui jagaja 7842; see tähendab, et 3 jaondiks liig wäike on. Katsume 4-ga. $7842 . 4 = 31368$; jäänus on $41734 - 31368 = 10366$. Jäänus 10366 on suurem kui jagaja 7842, sellepärast peab jaond suurem olema, kui 4. Katsume arwu 6. $7842 . 6 = 47052$. Saadud arw 47052 on suurem, kui jagataw 41734. See tähendab, et 6 jaondiks liig suur on. Katsume arwu 5. $7842 . 5 = 39210$; $41734 - 39210 = 2524$. Jäänus 2524 on wäiksem kui jagaja. See tähendab, et meie õige arwu leiduud oleme ja $41734:7842 = 5$ (jäänus 2524). Jaondi leidmist wõime järgmisel wiisil kiirendada: Näitus: $24817:4235 = ?$ Jätame ajutiselt jagajas kõik teiste järkude, peale kõige ülema järgu, numbrid tähelepanemata ehk kustutame nad koguni maha, ja wõtame jagajast ainult 4 (tuhat). Jagatawas kustutame ka nende samade järkude numbrid maha, mis meie jagajaski maha kustutasime, jääb 24 (tuhat) järele. Jagame 24 4-ga, saame 6. Sellest näeme, et o t s i t u d j a o n d s u u r e m e i w õ i o l l a k u i 6. Ta wõib küll wähem olla, kui 6 ia on ka, nimelt sel korral kui jagajas mahakustutatud arwu 235 kaswatis 6-ga suurem on sellest jäänusest, mis jagatawa 24817 agamisel 4 tuhandega üle jääb.

Et teada saada, missugusest arwust jaond wähem ei wõi olla, kustutame jälle jagajas kõik alamate järkude numbrid maha, wõtame ainult kõige ülema järgu numbri ja lisame temale 1 juure, saame 5 (tuhat). Kustutame ka jagatawas nendesamade järkude numbrid maha, mis meie jagajasgi maha kustutasime; jääb 24 (tuhat) järele. Jagame 24 5-ga, saame 4. Sellest näeme, et otsitud jaond wähem ei wõi olla kui 4, sest kui 5000 juba 24000 sisse 4 korda mahub, siis mahub 4235 24817-e sisse kõige wähemalt 4 korda, kui mitte enam.

Enne leidsime, et jaond ei wõi suurem olla, kui 6, nüüd leidsime, et ta wähem ei wõi olla, kui 4. Nendes piirides peame jaondit otsima; ta wõib olla kas 4, 5 ehk 6. Katsume neid arwusid.

1) $4235 \times 4 = 16940$; $24817 - 16940 = 7877$;
jäänus on 7877 on jagajast 4235 suurem, sellepärast on 4 jaondiks liig wäike.

2) $4235 \times 5 = 21185$; $24817 - 21185 = 3632$;
jäänus 3632 on jagajast 4235 wähem, sellepärast on 5 jaondiks paras ja $24817 : 4235 = 5$ (jäänus 3632).

Järjelikult on 6 jaondiks liig suur. Tõepoolest, $4235 \times 6 = 25410$ on jagatawast suurem.

Tähendus: Mahutamise korral wõib jaondit ka mahaarwamise ehk kokkuarwamise abil leida; see on aga tülikam kui katsumise abil kaswatamise läbi.

§ 61. Mitmekohalise jaondi leidmine.

Näitus: $301046 : 47 = ?$

Et jagataw suurem on, kui 10-ga kaswatatud jagaja, siis on jaond mitmekohaline arw.

Jagamise märgiks wõtame poolristi; jagatawa kirjutame loodjoone ette, jagaja kirjutame kaaljoone peale nurka ja kaaljoone alla nurka kirjutame jaondi järkude numbrid sedamööda, kuida meie neid leiame.

Arutame nii, nagu peaksime meie 301026 47-sse jaosse jaotama.

301046	47
— 282	6405
190	
— 188	
246	
— 235	
11 (jäänus).	

Kõige enne määrame jaondi kõige ülema järgu ära.

Jagatavas on kõige ülem järk sajatuhandelised; neid on seal 3. 3-e sajatuhandelist 47-sse jakku jagades ei saa meie ühtegi sajatuhandelist. Sellepärast jaondis sajatuhandelisi ei ole. Laotame 3 sajatuhandelist kümnetuhandelisteks, saame 30 kümnetuhandelist. 30 kümnetuhandelist 47-sse jakku jagades ei saa meie ühtegi kümnetuhandelist. Sellepärast ei ole jaondis kümnetuhan-

delisi ka mitte. Laotame 30 kümnetuhandelist tuhandelisteks, saame 300 tuhandelist, peale selle on meil jagatawas weel 1 tuhandeline, kokku 301 tuhandelist. Kui meie 301 tuhandelist 47-sse jakku jagame, saame igas jaos küll mõne tuhandelise. *Sellepärast on jaondi kõige ülem järk — tuhandelised.*

Sellest näeme, et jaondi kõige kõrgema järgu äramääramiseks peame jagatawas pahema käe poolt paremale poole nii palju numbrid ära eraldama, et äraeraldatud arw suurem oleks, kui jagaja, aga wäiksem, kui 10-ga kaswatatud jagaja.

Niisuguse arwu saame, kui meie jagatawas niisama palju numbrid, ehk ühe numbri wõrra enam ära eraldame, kui palju numbrid jagajas on.

Mitu tuhandelist saame jaondis? Jagame 301 tuhandelist 47-sse jakku, saame igas jaos 6 tuhandelist. Leitud numbri 6 kirjutame jaondisse ja peame meeles, et ta tuhandelisi tähendab. Et teada saada, mitu tuhandelist juba ära jaotatud on, kaswatame 6 (tuhandelist) 47-ga, ehk 47-t 6-ga, sest see on kergem, ja leiame, et 282 (tuhandelist) ära jaotatud on. Peale selle waatame järele, mitu tuhandelist weel jagamata jäi. Selle tarwis arwame saadud kaswatise 282 äraeraldatud arwust — 301-st — maha. Jääb järele jagamata 19 tuhandelist.

Mitu sajalist on jaondis? 19 tuhandelist laotame sajalisteks, saame 190 sajalist. Selle tarwis kirjutame jäänuse 19 kõrwale jagatawa järgmise numbri 0, ehk, nagu räägitakse, tõmbame jagatawa järgmise numbri alla. 190 sajalist 47-sse jakku jagades saame igas jaos 4 sajalist. Leitud arwu 4 kirjutame jaondisse 6 tuhandelise kõrwale paremat kätt ja peame meeles, et ta sajalisi tähendab. Katsume järele, mitu sajalist juba ärajaotatud on; selleks kaswatame 47-t 4-ga ja leiame 188 (sajalist). 188 arwame 190-st maha, jääb 2 järele. Sellega jääb 2 sajalist järele jagamata.

Mitu kümnelist on jaondis? 2 jagamata jäänud sajalist laotame kümnelisteks, saame 20 kümnelist; peale selle on jagatawas weel 4 kümnelist, kokku on 24 kümnelist. Et sajalisi kümnelisteks laotada ja saadud arwule weel jagatawa kümnelised juure arwata, on küllalt, kui meie sajaliste jäänuse kõrwale jagatawa järgmise (kümneliste) numbri alla tõmbame. 24-st kümnelist 47-sse jakku jagades ei saa meie ühtegi kümnelist, sellepärast kirjutame jaondisse 4 sajalise kõrwale paremat kätt 0 ja peame meeles, et ta kümnelisi tähendab. Kõik 24 kümnelist jääwad üle, jagamata.

Mitu ühelist on jaondis? 24 kümnelist laotame ühelisteks ja saadud arwule arwame jagatawa ühelised, 6, juure, selle tarwis tõmbame 6 jagajast 24-ja kõrwale alla, saame 246. 246 ühelist 47-sse jakku jagades saame igas jaos 5 ühelist. Leitud arwu 5 kirjutame jaondisse 0 kümnelise kõrwale paremat kätt; ta tähendab ühelisi. 47 kaswatame 5-ga, saame 235; selle kaswatise arwame 246-st maha, leiame jäänuse 11, mida enam jagada ei saa. Jaond on sellega 6705.

Wõtame weel mõne näituse:

781274	26	155400	42	245796	6200
78	30049	126	3700	18600	39 (jäänus 3996)
127		294		59796	
104		294		55800	
234		00		3996 (jäänus).	
234					

„„„

§ 62. Arutamine mahutamise korral.

Näitus: 396592 : 56 = ?

Et kümnekordne jagaja wäiksem on, kui jagataw, siis on jaond mitmekohaline arw.

396592	56
392	7082
459	
448	
112	
112	

„„„

Missugune on jaondi kõige ülem järk? Kõige ülem järk jagatawas on saja-tuhandelised. 396592-e sisse ei mahu 56 sada-tuhat korda, muidu peaks jagatawas 56 saja-tuhandelist olema, aga neid on seal ainult 3.

Ka kümmetuhat korda ei mahu 56 antud jagatawasse, sest muidu peaks jagatawas 56 kümnetuhandelist olema, kuna neid seal ainult 39 on. Aga tuhat korda mahub küll jagaja 56 jagatawa 396592-e sisse, sest tuhat korda 56 on 56 tuhandelist, kuna tuhandelisi jagatawas 396 on. **Järjelikult on jaondi kõige kõrgem järk tuhandelised.**

Sellest näeme, et jaondi kõige kõrgema järgu äramääramiseks peame jagatawas pahema käe poolt paremale poole nii palju numbrid ära eraldama, et jagaja äraeraldatud arwu sisse mahuks, aga mitte enam, kui 9 kord. Niisuguse arwu saame, kui meie jagatawas niisama palju numbrid, ehk ühe numbri wõrra enam, äraeraldame, kui palju numbrid jagajas on.

Mitu tuhandelist on jaondis? ehk mitu tuhat korda mahub jagaja 56 jagatawa 396592-e sisse?

Awalik on, et 56 ainult jagatawa tuhandete sisse mõni tuhat korda mahub. Sellepärast jätame alamad järgud tähelepanemata ja küsime ainult, mitu tuhat korda mahub jagaja 56 jagatawa 396 tuhande sisse? 56 mahub 1 tuhat korda 56-e tuhande sisse; sellepärast mahub 56 396-e tuhande sisse nii mitu tuhat korda, mitu korda 56 tuhat 396 tuhande, ehk mitu korda 56 396-e sisse mahub.

Sellest näeme: et jaondi kõige kõrgema järgu (meie näituses tuhandeliste) arwu leida, peame äraeraldatud arwu jagajaga jagama.

56 mahub 396-e sisse 7 korda; sellepärast mahub 56 396 tuhande sisse 7 tuhat korda ja 7 on jaondi tuhandeliste nummer. Meie kirjutame 7 jaondi sisse ja peame meeles, et ta tuhandelisi tähendab.

Omas näituses tahame teada saada, mitu korda 56 396592-e sisse mahub, ehk, teiste sõnadega, mitu korda peame 56 wõtma, et 396592 saada. Sellepärast katsume järele, kui palju meie siis saame, kui meie 56 7 tuhat korda wõtame; selleks kaswatame 56-t 7-e tuhandega.

7 tuhat korda 56 on 392 tuhat. Kirjutame 392 tuhat jagatawa tuhandete alla ja arwame maha. 396-st tuhandest jääb 4 tuhat järele, aga kõigest jagatawast need 4 tuhat ja weel 592, s. o. 4592. Selle arwu sisse ei mahu 56 mitte enam tuhat korda, sest: 1) 4592 on wäiksem, kui 56 tuhat ja 2) muidu oleks meie juba enne 7-e tuhande asemel 8 ehk 9 tuhat wõtnud.

Et jaondi sajaliste numbrit leida, on meil tarwis jäänusest ainult sajaliste arwu wõtta. Selleks tõmbame jäänuse 4-ja tuhande kõrwale jagatawa järgmise numbri 5 alla. Saame 45 sajalist. 56 ei lähe 45-e sajalise sisse mitte ükssada kordagi. Sellepärast kirjutame jaondisse 7 kõrwale paremale poole, s. o. sajaliste kohale, 0. Sajalistest jääwad kõik 45 sajalist järele ja kõigest jagatawast 4592.

Et jaondi kümneliste arwu leida, wõtame jäänusest ainult 459 kümnelist, mille tarwis meie jäänuse 45-e kõrwale jagatawa järgmise numbri 9 alla tõmbame. 56 mahub kümme korda 56-e kümnelise sisse; 459-a kümnelise sisse mahub 56 nii mitu kümmend korda, mitu korda 56 kümnelist 459 kümnelise, ehk 56 459-a sisse mahub. 56 mahub 459-a sisse 8 kord; sellepärast mahub 56 459-a kümnelise sisse 8 kümmend korda ja jaondi kümneliste nummer on 8. Numbri 8 kirjutame jaondisse 0-i kõrwale paremale poole, s. o. kümneliste kohale. Kaswatame jagajat 56 8 kümnelisega, saame 448 kümnelist ja arwame 448 kümnelist 459-st kümnelisest maha. Kümnelistest jääb 11 kümnelist järele ja kõigest jagatawast need 11 kümnelist ja weel 2 ühelist, s. o. 112. Et seda jäänust leida, tõmbame kümneliste jäänuse 11-e kõrwale jagatawa wiimase numbri 2 alla. Nüüd leiame wiimaks üheliste numbri jäänust 112-nd 56-ga jagades. 56 mahub 112-e sisse 2 korda. Saadud numbri 2 kirjutame jaondisse 8 kõrwale paremale poole, s. o. üheliste kohale. Kaswatame 56 2-ga, saame 112 ja näeme, et midagi järele ei jää. Et kõik jaondi numbrid leitud on, siis on jagamine lõpetatud ja jaond on 7082.

§ 63. Jagamise juht.

Jagatawas eraldatakse pahemalt poolt paremale poole nii palju numbrid ära, et jagaja selle arwu sisse, mida äraeraldatud numbrid awaldawad, wähem kui 10 korda mahuks.

Äraeraldatud arwu jagatakse jagajaga.

Ilmunud nummer kirjutatakse jaondisse.

Jagajat kaswatatakse ilmunud numbriga ja kaswatis arwatakse jagatawas äraeraldatud arwust maha. Jäänuse kõrwale tõmmatakse jagatawa järgmine nummer alla.

Sel teel saadud arwu jagatakse jagajaga.

Sellest jagamisest saadud nummer kirjutatakse jaondisse enne saadud numbri kõrwale paremale poole.

Jagajat kaswatatakse wiimati ilmunud jagaja numbriga ja kaswatis arwatakse sellest arwust maha, mida jaondi wiimati ilmunud numbri leidmiseks jagajaga jagati.

Jäänuse kõrwale tõmmatakse jagatawa järgmine nummer alla ja sel teel saadud arwu jagatakse jagajaga Tehet jätkatakse nii kaua, kuni kõik jagatawa numbrid alla tõmmatud on.

Kui jäänuses pärast jagatawa wastawa numbri allatõmbamist jagajast wäiksem arw saadakse, siis kirjutatakse jaondisse 0 ja selle jäänuse kõrwale tõmmatakse weel järgmine jagatawa nummer alla.

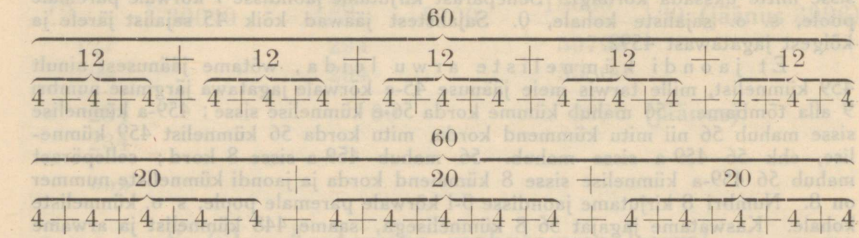
§ 64. Jagamine mitme arwu kaswatisega.

Näitus: 60 : (3 . 5)!

Selles näituses peame 60-nd jagama 3-e ja 5-e kaswatisega, s. o. 15-ga. Awalik on, et see ükskõik on, kas meie 60 otsekohe 15-sse jakku jaotame, ehk kas meie 60 enne 3-e jakku, ja pärast iga kolmanda jao uueste 5-de jakku jaotame, ehk kas meie 60 enne 5-de jakku, ja pärast iga wiienda jao uuesti 3-e jakku jaotame. Igatahes saame 15 ühesuurust jagu, igas ühes jaos 4 ühelist.

Sellepärast on: $60 : (3 . 5) = (60 : 5) : 3. = (60 : 3) : 5.$

Piltlikult wõib seda nii kujutada:



Sellest järgneb: *Et mônda arwu kahe arwu kaswatisega jagada, wôib seda arwu enne ühe teguriga jagada ja saadud jaondit teise teguriga.*

See juht jääb ka siis makswaks, kui jagaja mitme teguri kaswatis on.

Tarwis tõeks teha, et

$$420 : (5 . 2 . 3 . 7) = \{[(420 : 5) : 2] : 3\} : 7$$

Tõeks tegemine: Kaswatisele $5 . 2 . 3 . 7$ wõime niisuguse kuju anda: $5 . 2 . 3 . 7 = 5 . (2 . 3 . 7)$, kus 5 üks tegur ja $(2 . 3 . 7)$ teine tegur on; sellepärast leiame: $420 : (5 . 2 . 3 . 7) = (420 : 5) : (2 . 3 . 7)$.

Kaswatisele $2 . 3 . 7$ wõime niisuguse kuju anda: $2 . 3 . 7 = 2 . (3 . 7)$, kus 2 üks tegur, ja $(3 . 7)$ teine tegur on. Sellepärast leiame: $420 : (5 . 2 . 3 . 7) = [(420 : 5) : 2] : (3 . 7)$

Eelpool nimetatud juhi põhjal leiame:

$$[(420 : 5) : 2] : (3 . 7) = \{[(420 : 5) : 2] : 3\} : 7$$

Sellest järgneb juht: *Et mônda arwu mitme arwu kaswatisega jagada, wôib seda arwu enne ühe teguriga jagada, saadud jaondit teise teguriga, uut jaondit kolmanda teguriga jne.*

Näitus: $1526 : 14 = 1526 : (2 . 7) = (1526 : 2) : 7 = 763 : 7 = 109.$

Selle juhi põhjal wõib mõni kord jagamist kergendada ja teda tarwitatakse peast jagamise juures

Näitus: $1860 : 30 = (1860 : 10) : 3 = 186 : 3 = 62.$

Ümberpöördult: *Selle asemel, et mônda arwu esiteks ühe arwuga jagada ja saadud jaondit teise arwuga jagada, wôib antud arwu korraga kahe wiimase arwu kaswatisega jagada.*

Näitus: $(60 : 3) : 5 = 60 : (3 . 5).$

Seitsmes peatükk: Kaswatise ja jaondi muutumine.

§ 65. Kaswatise muutumine ühe teguri muutmisega.

Selle asemel, et kaswatist ühe arwuga kaswatada, wôime ühte tegurit selle arwuga kaswatada.

Olgu antud: $5 . 3 = 15$.

Näitame, et $(5 . 2) . 3 = 15 . 2$.

Meie teame (§ 47 põhjal), et $(5 . 2) . 3 = 5 . 2 . 3$.

Et tegurite järg kaswatist ei muuda, siis on $(5 . 2) . 3 = 5 . 3 . 2 = 15 . 2$.

Sellest on näha, et kui meie ühte tegurit mõne arwuga kaswatame, sellega meie kaswatame kaswatist selle arwuga ehk:

Mitu korda meie üht tegurit suurendame, nii mitu korda suureneb kaswatis.

Näitus: kui $15 . 8 = 120$, siis on $(15 . 3) . 8 = 120 . 3$.

Ümberpöördult: kui $(15 . 3) . 8 = 120 . 3$, siis on ka $15.8 = 120$.

Meie wähendasime tegurit $(15 . 3)$ kolm korda, saime 15, sellega wähenes ka kaswatis $(120 . 3)$ kolm korda, saime 120.

Sellepärast on awalik: Mitu korda wähemaks meie üht tegurit teeme, nii mitu korda wähemaks saab kaswatis.

Sellest järgneb: *Selle asemel, et kaswatist mône arwuga jagada, wôime üht tegurit selle arwuga jagada.*

Näitus: $(17 . 15) : 3 = 17 . (15 : 3) = 17 . 5 = 85$.

§ 66. Kaswatise muutumine mõlemate tegurite muutmisega.

I. Kui meie ühe ja sellesama arwuga üht tegurit kaswatame, ja teist tegurit jagame, siis jääb kaswatis muutmata.

Olgu antud: $17 . 15 = 255$.

Näitame, et $(17 . 3) . (15 : 3) = 255$.

Kaswatame üht tegurit, 17-nd, 3-ga siis leiame § 65 põhjal, et $(17 . 3) . 15 = 255 . 3$.

Loeme $(17 . 3)$ üheks teguriks, 15 teiseks teguriks ja $(255 . 3)$ kaswatiseks ja jagame nüüd teist tegurit, 15-nd, 3-ga, siis leiame § 65 põhjal, et $(17 . 3) . (15 : 3) = (255 . 3) : 3$.

Niisama leiame § 65 põhjal, et $(255 . 3) : 3 = 255 . (3 : 3) = 255 . 1 = 255$; sellepärast on $(17 . 3) . (15 : 3) = 255$.

II. Kui meie üht tegurit ühe arwuga, teist tegurit teise arwuga kaswatame, siis kaswatame sellega tegurite kaswatist nende kahe arwu kaswatisega.

Olgu antud: $17 . 15 = 255$ ja $3 . 2 = 6$.

Näitame, et: $(17 . 3) . (15 . 2) = 255 . 6$.

Mitme teguri kaswatise wäljaarwamise põhjal (§ 50) leiame: $(17 . 3) . (15 . 2) = 17 . 3 . 15 . 2 = (17 . 15) . (3 . 2) = 255 . 6$.

III. Kui meie üht tegurit ühe arwuga, teist tegurit teise arwuga jagame, siis jagame sellega tegurite kaswatist nende kahe arwu kaswatisega.

Olgu antud: $21 . 10 = 210$ ja $3 . 2 = 6$.

Näitame, et: $(21 : 3) . (10 : 2) = 210 : 6$.

§ 65 põhjal wõime kirjutada: $(21 : 3) . 10 = 210 : 3$.

Loeme $(21 : 3)$ üheks teguriks, 10 teiseks teguriks ja $(210 : 3)$ kaswatiseks, siis wõime sellesama paragrahwi põhjal kirjutada: $(21 : 3) . (10 : 2) = (210 : 3) : 2$. Aga § 64 (lõpp) põhjal teame, et $(210 : 3) : 2 = 210 : (3 . 2) = 210 : 6$, sellepärast leiame tõesti, et $(21 : 3) . (10 : 2) = 210 : 6$.

IV. Kui meie üht tegurit ühe arwuga kaswatame ja teist tegurit teise arwuga jagame, siis kaswatame sellega tegurite kaswatist nende kahe arwu jaondiga, kui kaswataja arw jagajast arwust suurem on.

Olgu antud: $17 . 30 = 510$ ja $6 : 3 = 2$.

Näitame, et: $(17 . 6) . (30 : 3) = 510 . 2$.

Tõe poolest, § 65 põhjal leiame:

$17.6).30 = 510.6$ ja $(17.6).(30:3) = (510.6):3.(510.6):3 = 510.(6.3) = 510.2$.

V. Kui meie üht tegurit ühe arwuga kaswatame ja teist tegurit teise arwuga jagame, siis jagame sellega tegurite kaswatist nende kahe arwu jaondiga, kui jagaja arw kaswatajast arwust suurem on.

Olgu antud: $17 . 30 = 510$ ja $6 : 3 = 2$ ehk $6 = 3 . 2$.

Näitame, et: $(17 . 3) . (30 : 6) = 510 : 2$.

Tõe poolest, $(17 . 3) . 30 = 510 . 3$.

ja $(17 . 3) . (30 : 6) = (510 . 3) : 6 = (510 . 3) : (3 . 2)$ sest $6 = 3 . 2$

Järjelikult $(17.3).(30:6) = (510.3):(3.2) = [(510.3):3]:2 = [(510.(3:3)]:2$.

Ehk $(17 . 3) . (30 : 6) = (510 : 1) : 2 = 510 : 2$

§ 67. Jaondi muutumine jagatawa ehk jagaja muutmisega.

I. Mitu korda meie jagatawat suurendame, nii mitu korda suureneb ka jaond.

Sellega, et meie jagatawat mitu korda suurendame, ühtlasi jagajat muutmata jättes, suurendame kaswatist ja jätame ühe teguri

muutmata; see on aga ainult siis wõimalik, kui teine tegur, s. o. jaond, nii mitu korda suuremaks saab.

Näit.: $15:3=5$. $(15.4):3=5.4$ s. o. $60:3=20$.

Ümberpöördult: Mitu korda meie jagatawat wähendame, nii mitu korda wäheneb ka jaond.

II. Mitu korda meie jagajat suurendame, nii mitu korda wäheneb jaond, sest et ainult siis kaswatis (jagataw) muutmata jääb, kui meie üht tegurit (jaondit) nii mitu korda wähendame, mitu korda meie teist tegurit (jagajat) suurendame. Näit.: $60:3=20$ $60:(3.4)=20:4$ ehk $60:12=5$.

Ümberpöördult: Mitu korda meie jagajat wähendame, nii mitu korda suureneb jaond.

§ 68. Jaondi muutumine jagatawa ja jagaja muutmisega.

I. Kui meie jagatawat ja jagajat ühtlasi ühe ja sellesama arwuga kas kaswatame ehk jagame, siis jääb jaond muutmata, sest kaswatis (jagataw) suureneb ehk wäheneb siis nii mitu kord, mitu kord meie üht tegurit (jagajat) suurendame ehk wähendame, kui meie ühtlasi teise teguri (jaondi) muutmata jätame.

Näit.: $360:30=12$; $(360.2):(30.2)=12$ ehk $720:60=12$
$(360:2):(30:2)=12$ ehk $180:15=12$

II. Kui meie jagatawat ja jagajat ühtlasi mitu korda suurendame ehk wähendame, siis wõib jaond kas suureneda ehk wäheneda (ehk ka muutmata jääda).

Et teada saada, mis jaondiga sünnib, muudame enne jagatawat ja pärast jagajat, ehk ümberpöördult.

Näitused: **$360:30=12$.**

I. $(360.2):30=12.2$ (×2)
$360:(30:3)=12.3$ (×3)
$(360.2):(30:3)=12.6$ (×(2.3))
$720:10=72$

II. $(360:2):30=12:2$ (:2)
$360:(30.3)=12:3$ (:3)
$(360:2):(30.3)=12:6$ (:(2.3))
$180:90=2$

III. $(360.6):30=12.6$ (×6)
$360:(30.3)=12:3$ (:3)
$(360.6):(30.3)=12.2$ (×(6:3))
$2160:90=24$

IV. $(360.3):30=12.3$ (×3)
$360:(30.6)=12:6$ (:6)
$(360.3):(30.6)=12:2$ (:(6:3))
$1080:180=6$

V. $(360:3)\ 30 = 12 \overset{:3}{:} 3$

$360:(30:6) = 12.6 \overset{\times 6}{\times}$

$(360:3):(30:6) = 12.2 \overset{\times(6:3)}{\times}$

$120:5 = 24$

VI. $(360:6):30 = 12 \overset{:6}{:} 6$

$360:(30:3) = 12.6 \overset{\times 3}{\times}$

$(360:6):30:3 = 12:2 \overset{:(6:3)}{:}$

$60:10 = 6$

§ 69. Mõned kergendused kaswatamise juures.

I. Kaswatamine 5-ga.

Meie teame. et $5 . 2 = 10$; sellepärast on kaswatises niipalju kümnelisi, kui palju kord 2 kaswatatawa sisse mahub. Sellepärast, et üht arwu 5-ga kaswatada, jagame seda arwu 2-ga; jaond näitab, mitu kümnelist kaswatises on; kui aga jäänus olemas on, mis ainult 1 wõib olla, siis peame saadud kümnelistele weel 5 juure lisama.

Näitus: $39 . 5 = (38 + 1) . 5 = (19 . 2 . + 1) . 5 = 19 . 2 . 5 + 5 = 19 . 10 + 5 = 190 + 5 = 195.$

$38 . 5 = 19 . 2 . 5 = 19 . 10 = 190.$

Ehk: Selle asemel, et üht arwu 5-ga kaswatada, kaswatame teda 10-ga ja saadud kaswatist jagame 2-ga. Kui aga arw ennast ilma jäänuseta 2-ga jagada laseb, siis on kergem enne 2-ga jagada ja pärast 10-ga kaswatada.

II. Kaswatamine 25-ga.

Meie teame, et $25 . 4 = 100$; sellepärast on kaswatises niipalju sajalisi, kui palju kord 4 kaswatatawa sisse mahub. Sellest järgneb: Et üht arwu 25-ga kaswatada, jagame seda arwu 4-ga; jaond näitab meile, mitu sajalist kaswatises on, jäänus aga näitab, mitu korda 25 weel saadud sajalistele juure tuleb lisada. Jäänus wõib ainult olla 1, 2 ehk 3; sellepärast tuleb juure lisada kas 25, 50 ehk 75.

Näitus: $739 . 25 = (736 + 3) . 25 = [(736 : 4) . 4 + 3] . 25 = (184 . 4 + 3) . 25 = 184 . 4 . 25 + 3 . 25 = 184 . 100 + 75.$

$739 : 4 = 184$ (jäänus 3) $739 . 25 = 184$ sajalist $+ 75 = 18475.$

III. Kaswatamine 11-ga.

I. näitus: $\begin{array}{r} 26 . 11 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 286 \end{array}$

Siin näeme, et sajaliste ja üheliste numbrid needsamad numbrid on, mis kaswatatawas oliwad (2 ja 6), kümneliste nummer on aga nende summa. Sellepärast, et kahekohalist arwu, mille ristsumma 9-st suurem ei ole, 11-ga kaswatada, kirjutame antud numbrite wahele nende summa. $43 \times 11 = 473.$

II. näitus: 85 . 11 = 935

Kui aga ristsumma 9-ast suurem on, siis kirjutame antud numbrite wahele ainult ristsumma üheliste numbri, kümneliste numbri (1) lisame järgmisele numbrile juure. 47 . 11 = 517.

Kaswatame mitmekohalist arwu 11-ga.

II. näitus: 42518 × 11 = 467698

Siin näeme, et kaswatise äärmised numbrid needsamad on, mis kaswatatawaski. Teised numbrid saame kordamööda, kui meie kaks kõrwu seiswat numbrit kokku arwame.

IV. näitus: 3587 × 11 = 39457

Kui aga mõne paari kõrwu seiswate numbrite summa 9-st suurem on, siis peame selle summa üheliste numbri kirjutama, kümneliste numbri (1) aga järgmisele summale juure arwama.

IV. Kaswatamine 37-ga.

Et 3 . 37 = 111, siis wõime mõnikord kaswatamist 37-ga selle läbi kergendada, et meie kaswatatawat 3-ga jagame ja saadud jaondit 111-ga kaswatame. Näitus: 24 . 37 = X; 24 : 3 = 8; 111 . 8 = 888; 24 . 37 = 888. Kui 3-ga jagades jäänus jääb, siis peame kaswatisele kas 37 ehk 74 juure arwama, selle järele, kas jäänus 1 ehk 2 on. Näitus: 19 . 37 = X; 19 : 3 = 6 (jäänus 1); 111 . 6 = 666; 19 . 37 = 666 + 37 = 703.

V. Kaswatamine kahekohalise arwuga, mis 9-ga lõpeb.

Näitus: 34.19 = 34.(20—1) = 34.20 — 34.1 = 680—34 = 646.

Selle asemel, et 34 kokkuarwatawana 19 korda korrata, kordame teda kokkuarwatawana 20 korda ja saadud kaswatisest arwame üleliigse 34 maha.

Weel mõned näitused: 76.29=76.30—76=2280—76=2204.
38.99=38.100—38=3800—38=3762.

Sarnasel wiisil wõime ka kolmekohalise arwuga, mis 99-ga lõpeb, neljakohalise arwuga, mille lõpul 999 on, kaswatada.

Näitused: 258.399 = 258.400—258 = 103200—258 = 102942.
84.4999 = 84.5000—84 = 420000 - 84 = 419916.

Ülepea, kui kaswatajal järgmisest suuremast järgu-arwust 1 puudub, siis kaswatame kaswatatawat selle järgmise suurema järgu-arwuga ja saadud kaswatisest arwame kaswatatawa maha. Need kaswatamise kergendused on wäga tarwilised peast arwamise juures ja ülepea kiirendawad nad palju ülesannete wäljaarwamist.

Kaheksas peatükk: Astmele tôstmine (Potentseerimine).

§ 70. Astmele tôstmise môiste äramääramine.

Nagu kokkuarwamise ülesannet niisugusel korral, kui kõik kokkuarwatawad ühesuurused on, lühemalt kirjutatakse ja selle läbi uus aritmetikaline tehe saadakse, nii kirjutatakse ka kaswatamise ülesannet sel korral, kui kõik tegurid ühesuurused on, lühemalt ja saadakse uus aritmetikaline tehe. Wõtame mitme teguri kaswatise: $5.2.3.7.11 = 2310$. Teeme kõik tegurid ühesuuruseks: $2.2.2.2.2 = 32$. Niisugust kaswatamise ülesannet kirjutatakse lühemalt nii: $2^5 = 32$. Kirjutatakse arw, mis tegurina mitu korda kordub, tema kohale, paremale poole üles kirjutatakse wäiksemal kujul see arw, mis näitab, mitu korda esimene arw tegurina kordub; pärast kirjutatakse ühtlusemärk ja selle järele kaswatis.

Tehe, mille abil üht antud arwu nii mitu korda tegurina korratakse, mitu ühelist teises antud arwus on, nimetatakse astmele tõstmiseks (potentseerimiseks = возвышеніе въ степень). Ühtlaste tegurite kaswatis nimetatakse astmeks (= степень). See arw, mis tegurina kordub, nimetatakse astmele tõstetawaks arwuks, aluseks ehk põhjaks (возвышаемое число). Arw, mis näitab, mitu korda alus tegurina kordub, nimetatakse astme näitajaks (Exponent = показатель степени).

Meie näituses on 2 astmete arw, alus ehk põhi, 5 on astme näitaja ja 32 on aste.

Kaks arwu, kellest üks alus ja teine astme näitaja on, nimetatakse ühtekokku ka astmeks. $2^5 = 32$; 2^5 on ilmumata aste, 32 on pärisaste. $2^5 = 32$ loetakse nii: 2-he wiies aste on 32; 2 wiiendal astmel on 32, ehk: 2 5-ga potentseeritud on 32, ehk: 2 wiiendale astmele tõstetud on 32.

Weel mõni näitus: $3^4 = 81$, sest et $3^4 = 3.3.3.3 = 81$
$4^3 = 64$, sest et $4^3 = 4.4.4 = 64$
$5^2 = 25$, sest et $5^2 = 5.5 = 25$

Teist astet nimetatakse ruutarwuks ehk ruuduks ja kolmandat astet nimetatakse kantarwuks.

§ 71. Nulli astmed.

Tõstame 0-i mõnele astmele, näit. $0^4 = ?$

0^4 tähendab, et null kaswatajana neli korda kordub: $0^4 = 0.0.0.0$. Kui üks tegur 0 on, siis on kaswatis 0; sellepärast on $0^4 = 0$. Sellest ilmub juht: Kõik nulli astmed on nullid.

§ 72. Ühe astmed.

Tõstame ühe mõnele astmele, näit. 5-dale, leiame: $1^5 = 1.1.1.1.1 = 1$.

Mitu korda meie ka ühte ühega kaswatame, ikka saame 1. Sellest järgneb: Kõik 1-e astmed on 1.

§ 73. Kümne astmed.

$10^2 = 10 . 10 = 100.$
$10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000.$
$10^4 = 10 . 10 . 10 . 10 = 10000.$
$10^7 = 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 10000000$ jne. Sellest järgneb: Igaüks 10-e aste kirjutatake numbriga 1 ja nii mitme järgnewa nulliga, mitu ühelist astme näitajas on.

§ 74. Järgu-üheliste astmed.

Tõstame järgu-ühelised mõnele astmele:
$100^3 = 100 . 100 . 100 = 1000000.$
$10000^2 = 10000 . 10000 = 100000000.$
$1000^5 = 1000 . 1000 . 1000 . 1000 . 1000 = 1000000000000000.$
Meie näeme: 100 kirjutatakse 2-he nulliga, tema 3-as aste — 6-e nulliga, s. t. 3-al astmel on 3 korda enam nullisid; 10000 kirjutatakse 4-ja nulliga, tema teine aste = 8 nulliga, s. t. 2-el astmel on 2 korda enam nullisid; 1000 kirjutatakse 3-e nulliga, tema 5-es aste — 15 nulliga, s. t. 5-al astmel on 5 korda enam nullisid. Ülepea: Et järgu ühelist mõnele astmele tõsta, peame tema nullide arwu nii mitu korda suurendama, mitu ühelist astmenäitajas on.

§ 75. Kaswatise aste.

Wõtame kaswatise $(2 . 5 . 7)$ ja tõstame tema 4-asse astmesse: $(2 . 5 . 7)^4 = (2 . 5 . 7) . (2 . 5 . 7) . (2 . 5 . 7) . (2 . 5 . 7)$. § 49-st teame; et mõnda arwu $(2 . 5 . 7)$ kaswatisega kaswatada, wõib teda kaswatise esimese teguriga saadud kaswatist teise teguriga, uut kaswatist kolmanda teguriga jne. kaswatada. Sel põhjal leiame $(2 . 5 . 7) . (2 . 5 . 7) . (2 . 5 . 7) . (2 . 5 . 7) = (2 . 5 . 7) . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 = 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7$. § 50-st teame, et mitme arwu kaswatist $(2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7)$ wälja arwata, wõib tegurid missugustesse tahes salkadesse ühendada, iga salga kaswatis eraldi wälja arwata ja saadud kaswatised üksteisega kaswatada. Sellepärast leiame: $2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 . 2 . 5 . 7 = (2 . 2 . 2 . 2) . (5 . 5 . 5 . 5) . (7 . 7 . 7 . 7) = 2^4 . 5^4 . 7^4$. Sellest järgneb juht: *Et kaswatist astmele tôsta, peab igat tegurit eraldi tähendatud astmele tôstma, ja saadud astmed üksteisega kaswatama.*

Järeldus: Et $(2 . 3 . 5 . 7)^4 = 2^4 . 3^4 . 5^4 . 7^4$,
siis on ka, $2^4 . 3^4 . 5^4 . 7^4 = (2 . 3 . 5 . 7)^4$.
See tähendab: Selle asemel, et mitme arwu ühesuguseid astmeid üksteisega kaswatada, wõime

neid arwusid üksteisega kaswatada ja saadud kaswatise antud astmele tõsta.

§ 76. Ühe ja sellesama arwu astmete kaswatamine.

$2^3 . 2^5 = ?$

Meie teame, et $2^3 = 2 . 2 . 2$ ja $2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2$.
Sellepärast leiame, et $2^3 . 2^5 = (2 . 2 . 2) . (2 . 2 . 2 . 2 . 2)$

ehk $2^3 . 2^5 = \overbrace{2 . 2 . 2}^{3 \text{ korda}} . \overbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2}^{5 \text{ korda}}$

ehk $2^3 . 2^5 = \overbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2}^{3+5 \text{ kord}} = 2^{3+5} = 2^8.$

Juht: *Selle asemel, et ühe ja sellesama arwu astmeid üksteisega kaswatada, wõime seda arwu niisugusele astmele tõsta, mille näitaja antud astmete näitaja summa on.*

§ 77. Astme uuele astmele tõstmine.

$(2^3)^5 = ?$

$(2^5)^3$ tähendab sedasama, mis $2^5 . 2^5 . 2^5$. Et ühe ja sellesama astmeid üksteisega kaswatada, arwame astmenäitajad kokku ja leiame: $(2^5)^3 = 2^{5+5+5} = 2^{5.3} = 2^{15}$.

Juht: *Et astet uuele astmele tõsta, peame astme näitajaid üksteisega kaswatama.*

§ 78. Järgu-arwude astmed.

$400^3 = (4 . 100)^3 = 4^3 . 100^3 = 64 . 1000000 = 64000000.$
$70^4 = (7 . 10)^4 = 7^4 . 10^4 = 2401 . 10000 = 24010000.$

Neist näitustest järgneb: *Et järgu-arwu astmele tõsta, peame tema tähendajat numbrit antud astmele tõstma ja nullide arwu nii mitu korda suurendama, mitu ühelist astme näitajas on.*

§ 79. Ruutarwude ja kantarwude tabel.

Tingimata tarwilik on teada esimeste 9 arwude **ruutarwusid** ja **kantarwusid**; ka on wäga kasulik esimese kolmekümne **arwu ruutarwusid** teada.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$1^3 = 1$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$2^3 = 8$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$3^3 = 27$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$4^3 = 64$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$5^3 = 125$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$6^3 = 216$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$7^3 = 343$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$8^3 = 512$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$9^3 = 729$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$10^3 = 1000$

§ 80. Kahekohaliste arwude ruutarw.

Kahekohalise arwu ruutarw seisab koos: kümneliste ruutarwust, kümneliste ja üheliste kahekordsest kaswatisest ja üheliste ruutarwust.

$47^2 = 47 \cdot 47 = (40 + 7) \cdot (40 + 7) =$ (4 kümnelist + 7 ühelist) . (4 kümnelist + 7 ühelist). Meie teame, et summat teise summaga kaswatada, peame igat esimese summa kokkuarwatawat iga teise summa kokkuarwatawaga kaswatama ja saadud kaswatised kokku arwama. Sellepärast kaswatame järgmist wiisi:

× 40 + 7	Ehk:	4 kümn. + 7 ühel.	Ehk:	47
40 + 7		4 „ + 7 „		× 47
+ 280 + 49		28 kümn. + 49 ühel.		49 üheliste ruutarw
1600 + 280		16 sajal. + 28 „		28 .) üheliste ja kümneliste
1600 + 2.280 + 49		16 sajal. + 2.28 kümn. + 49 ühel.		28 .) kaswatis (kaks kord)
				16 . . kümneliste ruutarw.
				2209

Sellest näeme, et kümneliste ruutarw meile ainult sajalisi (ja kõrgemaid järkusid) annab; kümneliste ja üheliste kahekordne kaswatis annab meile kümnelisi (ja kõrgemaid järkusid); üheliste ruutarw annab meile ühelisi (ja kümnelisi).

See juht kergendab meil ruutarwude peast wäljaarwamist. Kahekohaliste arwude, mis 5-ga lõpewad, ruutarwusid on kerge leida. Selleks kaswatame kümneliste arwu järgmise, loomulikus arwujärjes järgnewa, arwuga; sellega saame otsitawa ruutarwu sajalised, millele 25 ühelist juure lisame.

Näit. $85^2 = 8 . 8$ sajalist + $2 . 5 . 8$ kümnelist + $5 . 5$ ühelist
$= 8 . 8$ „ + $10 . 8$ „ + 25 „
$= 8 . 8$ „ + $8 . 10$ „ + 25 „
$= 8 . 8$ „ + 8 sajalist + 25 „
= 8 sajalist wõetud (8 + 1) kord + 25 ühelist = (8 . 9) sajalist + 25 ühelist = 7225.

Weel näitus: $35^2 = (3 . 4)$ sajalist + 25 = 1225. Teised astmesse tõstmise seadused jätame algebra hooleks.

Üheksas peatükk: Juure wäljawõtmine.

(Извлеченіе корней).

§ 81. Juure wäljawõtmise mõiste äramääramine.

Nagu teada, on kokkuarwamise ülesandel 2 wastupidist ülesannet, mis nii oma sisemise mõtte, kui ka tehte toimesaatmise poolest ühte langewad; sellepärast on kokkuarwamisel üks wastupidine tehe — mahaarwamine. Kaswatamise ülesandel on ka 2 wastupidist ülesannet, mis oma sisemise mõtte poolest lahku lähewad, tehte toimesaatmise poolest aga ühte

langewad. Et aga aritmetikas tehte toimesaatmisel eesõigus on, siis on ka kaswatamisel üksainus wastupidine tehe — jagamine.

Ka astmele tõstmise ülesandel on 2 wastupidist ülesannet, mis niihästi oma sisemise mõtte, kui ka tehte toimesaatmise poolest täiesti lahku lähewad. Sellepärast on astmele tõstmisel 2 wastupidist tehet — juure wäljawõtmine (извлеченіе корней — raditseerimine) ja logaritmeerimine.

Olgu meil kolm arwu 2, 5, 32, milledest 2 — alus, 5 — astmenäitaja ja 32 — aste on. Kui alus (2) ja astmenäitaja (5) antud on, siis leitakse kolmas arw, aste 32, astmele tõstmise abil; kui aste (32) ja astmenäitaja (5) antud on, siis leitakse alus (2) juure wäljawõtmise abil; kui aste (32) ja alus (2) antud on, siis leitakse astmenäitaja (5) logaritmeerimise abil.

Sellega on juure wäljawõtmine niisugune tehe, mille abil antud astme ja astmenäitaja kaudu alus leitakse.

Antud aste nimetatakse juurealuseks arwuks (подкоренное число, radikand), astmenäitaja — juure näitajaks (ehk juure eksponendiks) ja otsitaw alus — juureks. Juure wäljawõtmise märgina tarwitatakse märki „$\sqrt{\ }$“; seda märki nimetatakse juure märgiks ehk „radikaliks“. Kirjutamise wiis on järgmine: juure märgi ristjoone alla kirjutatakse juurealune arw, awausesse kirjutatakse juure näitaja, paremale poole juure märgi kõrwale kirjutatakse ühtluse-märk ja selle järele juur, näit. $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[3]{125} = 5$. Seda loetakse nii: 5-nda astme juur 32-st on 2; 3-nda astme juur 125-st on 5. (Ehk lühidalt: 5-es juur 32-st on 2; 3-as juur 125-st on 5.)

Teise astme juurenäitaja (2) jäetakse harilikult kirjutamata. Näitus: $\sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = 8$.

Teise astme juurt nimetatakse ruutjuureks ja kolmandama astme juurt — kantjuureks.

$\sqrt{49} = 7$ loetakse nii: 49-sa ruutjuur on 7.

$\sqrt[3]{64} = 4$ loetakse nii: 64-ja kantjuur on 4.

Kaks arwu, kellest üks juure märgi alla ja teine juure märgi awausesse on kirjutatud, nimetatakse ka juureks.

§ 82. Ligijuur ja umbarwud.

Juure wäljawõtmise mõistet wõime weel järgmist wiisi äramäärata: Juure wäljawõtmine on niisugune tehe, mille abil niisugune arw otsitakse, mis juure näitaja astmele tõstetult juurealuse arwu annab.

Näit. $\sqrt{49}$ 49-st teise astme juur wälja wõtta tähendab niisugust arwu leida, mille teine aste 49 on.

$\sqrt[6]{729} = 3$; 729-st kuuenda astme juur wälja wõtta tähendab niisugust arwu leida, mille 6. aste 729 on.

Aga nagu jagamise juures mitte igakord wõimalik ei ole niisugust arwu leida, mis jagajaga kaswatatult jagatawa annaks, nii ei ole ka juure wäljawõtmise juures mitte igakord wõimalik niisugust arwu leida, mille antud aste juurealune arw oleks. Nagu meie jagamise juures niisugusel korral ainult ligijaondi leidsime, nii peame ka juure wäljawõtmise juures niisugustel kordadel ligijuurega leppima ja jäänus jääb järele. Kui meie siiski niisuguse arwu, millest juurt wälja wõtta wõimalik ei ole, juure märgi alla paneme, siis nimetatakse niisugust arwu umbarwuks. Näitus: $\sqrt{9} = 3$ (täisarw), $\sqrt{7}$ — umbarw. Weel mõned umbarwud: $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{8}$.

§ 83. Kahekohalise ruutjuure leidmine.

Et mitte igast arwust wõimalik ei ole ruutjuurt wälja wõtta, siis leppime kokku nõuet „ruutjuurt wälja wõtma“ nii mõistma: meie peame juure wälja wõtma antud arwust, kui tema kindel ruutarw on, ehk, kui tema kindel ruutarw ei ole, kõige suuremast ruutarwust, mis temas peitub.

Tuletame meelde ühekohaliste arwude ja järgu-üheliste ruutarwud:

1) $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$.
2) $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; $1000^2 = 1000000$ jne.

Näitus: $\sqrt{4489} = X$.

Arutame nõnda:

1) Juurealune arw on suurem kui 100, sellepärast on juur suurem kui 10; juurealune arw on wäiksem kui 10000,

sellepärast on juur wäiksem kui 100. Järjelikult on juur kahekohaline arw ja seisab koos kümnelistest ja üheliste st.

Juure kümneliste leidmine.

2) Kahekohalise arwu ruutarw seisab koos: kümneliste ruutarwust, kümneliste ja üheliste kahekordsest kaswatisest ja üheliste ruutarwust. § 79 põhjal teame, et kümneliste ruutarw ainult sajalistes peituda wõib. Sellepärast wõtame juurealusest arwust ainult sajalised.

3) Juurealuses arwus on 44 sajalist. Nendes 44-jas sajalises peituwad kümneliste ruutarw ja ehk weel mõni sajaline, mis kümneliste ja üheliste kahekordsest kaswatisest wõiwad saadud olla. Sellepärast on kümneliste ruutarw kas 44, kui 44 ise kindel ruutarw on, ehk, kui 44 kindel ruutarw ei ole, 44-le lähem wäiksem ruutarw.

4) 44 ise kindel ruutarw ei ole, nagu eelpool olewast tabelist teame; temale lähem wäiksem kindel ruutarw on 36. Sellepärast on 36 juure kümneliste ruutarw. Juure kümneliste arw on järjelikult 36-e ruutjuur: $\sqrt{36} = 6$. Nõnda leiame, et meie juurel 6 kümnelist on.

Juure üheliste leidmine.

5) Wõtame kümneliste ruutarwu 36 (sajalist) ja arwame tema juurealusest arwust 4489-st maha. Jääb meile 889 järele.

6) Kui meie kahekohalise arwu ruutarwust kümneliste ruutarwu maha arwame, siis jääb meile kümneliste ja üheliste kahekordne kaswatis ja üheliste ruutarw järele. Sellepärast peitub jäänuses 889 kümneliste ja üheliste kaswatis ja üheliste ruutarw.

7) Et kümneliste ja üheliste kahekordne kaswatis ainult kümnelistes peituda wõib, sellepärast wõtame jäänusest ainult kümnelised. Neid on 88.

8) Kui meie kümnelisi enne kahega kaswatame ja saadud kaswatist ühelistega, siis saame ka kümneliste ja üheliste kahekordse kaswatise. Sellepärast on kahekordsete kümneliste kaswatis ühelistega seesama, mis kümneliste ja üheliste kahekordne kaswatis.

9) Jäänuse kümnelistes 88 peitub kahekordsete kümneliste, 12-ne, kaswatis ühelistega ja ehk weel mõni kümneline, mis üheliste ruutarwust wõib saadud olla.

10) Sellepärast, et juure üheliste arwu leida, jagame jäänuse kümnelisi 88 juure kahekordsete kümnelistega 12-ga, ja saame 7.

11) Jaondis saadud arw 7 wõib aga juure ühelisteks liig suur olla, kui tema kaswatis kahekordsete juure kümnelistega ja tema ruutarw ühtekokku enam wälja teewad, kui jäänuses olemas on. Sellepärast peame seda arwu 7 järele katsuma.

12) Selleks kaswatame juure kahekordseid kümnelisi 12 katsutawa arwuga 7, saame 84 kümnelist, wõtame katsutawa arwu 7 ruutarwu 49 ja arwame nad kokku. 84 kümnelist + 49 ühelist = 840 + 49 = 889. Jäänus on ka 889. Sellepärast on üheliste arw 7. Järjelikult on juurel 6 kümnelist ja 7 ühelist, ehk $\sqrt{4489} = 67$.

1. Tähendus. Kui 7 üheliste arwuks liig suur oleks olnud, siis oleks meie pidanud järgmist wähemat arwu 6 niisamuti katsuma.

2. Tähendus. Jäänuse kümnelisi juure kahekordsete kümnelistega jagades saame jaondis mõnikord 10 ehk enam. Sellegipärast ei wõi meie üheliste arwuks kahekohalist arwu wõtta, ei ka juure kümnelistele ühte juure lisada, waid meie peame lihtsalt üheliste arwuks 9 wõtma. Näit. $\sqrt{841} = 29$.

§ 84. Tehte rakendus.

I. Kahekordsete kümneliste ja üheliste ruutarwu summat wõime rutemine wälja arwata.

Selle asemel, et kahekordseid kümnelisi ühelistega ja ühelisi ühelistega eraldi kaswatada ja saadud kaswatised kokku arwata, wõime kahekordsed kümnelised ühelistega kokku arwata ja saadud summad ühelistega kaswatada. Kahekordsete kümneliste ja üheliste kokkuarwamine on kerge. Kahekordsed kümnelised kirjutatakse tähendajate numbritega ja lõpul üks null. Kui meie nüüd kahekordsed kümnelised ja ühelised kokku arwame, siis astub lõpunulli asemele üheliste nummer, kümneliste numbrid jääwad puutumata.

Näitus. Selle asemel, et 12 kümnelist 7-ga kaswatada ja 7-t 7-ga kaswatada ja saadud kaswatised kokku arwata, wõime 12 kümnelist ja 7 ühelist kokku arwata ja saadud summad 127-t 7-ga kaswatada. 12 kümnelist . 7 + 7 . 7 = 120 . 7 + 7 . 7 = (120 + 7) . 7 = 127 . 7 = 889.

Sellepärast rakendatakse kirjalik tehe järgmiselt:

II. $\sqrt{44'89} = 67$

36

127 | 88'9

7 | 889

1) Kirjutatakse juure märk; juure märgi ristjoone alla kirjutatakse juurealune arw ja tema kõrwale ühtlusemärk.

2) Juurealuses arwus eraldatakse kommaga sajalised alammatest järkudest ära (sest kümneliste ruutarw peitub sajalistes).

3) Sajaliste arwust ehk temale lähemast wäiksemast kindlast ruutarwust wõetakse ruutjuur wälja. Saadud arw on juure kümnelised. Ta kirjutatakse ühtluse-märgi kõrwale paremale poole.

4) Juure kümneliste arw kaswatatakse iseenesega ja saadud arw kirjutatakse juurealuse arwu sajaliste alla. Tema alla tõmmatakse joon.

5) Juure kümneliste ruutarw arwatakse juurealusest arwust maha ja jäänus kirjutatakse joone alla. (Selles jäänuses peituwad kahekordsete kümneliste kaswatis ühelistega ja üheliste ruutarw.)

6) Jäänuse ette tõmmatakse püstjoon nii, et ta jäänusest ainult ühe rea wõrra allapoole ulatab.

7) Siis kaswatatakse juure kümnelisi 2-ga ja saadud kahekordsete kümneliste nummer (ehk numbrid) kirjutatakse jäänusega ühe rea peale püstjoonest pahemale poole ja temast nii kaugele, et kirjutatud arwu ja püstjoone wahel weel ühele numbrile ruumi oleks.

8) Jäänuses eraldatakse kümnelised ühelistest ära (sest kahekordsete kümneliste kaswatis ühelistega peitub ainult kümnelistes.)

9) Jäänuse kümneliste arwu jagame (tema ette püstjoonest pahemale poole kirjutatud) juure kahekordsete kümneliste arwuga (et juure ühelisi leida). Saadud jaond ehk on juure üheliste arw.

10) Saadud jaondi kirjutame (esiteks õrnemalt ja ettewaatlikumalt, sest meie peame teda katsuma ja ehk ka weel muutma) kolm korda: 1) juure kahekordsete kümneliste ja püstjoone wahele, esimeste kõrwale; niiwiisi leiame juure kahekordsete kümneliste ja üheliste summa; 2) esimest korda kirjutatud jaondi alla — niiwiisi kirjutame juure ühelised kaswatajaks juure kahekordsete kümneliste ja üheliste summa alla; 3) juure kümneliste taha.

11) Püstjoone ees olewat arwu — juure kahekordsete kümneliste ja üheliste summad — kaswatame tema allakirjutatud — juure üheliste — arwuga. Saadud kaswatise kirjutame jäänuse alla.

12) Kaswatajaks kirjutatud arwu ja kaswatise alla tõmbame joone ja arwame kaswatise jäänusest maha.

13) On saadud kaswatis jäänusest suurem, siis on meie jaond juure ühelisteks liiga suur ja meie peame järgmist wäiksemat arwu katsuma; on ta jäänusega ühtlane, siis oleme kindla ruutjuure leidnud; on ta jäänusest wähem, siis jääb jäänus järele.

Weel näitused: $\sqrt{57'29} = 75$ (jäänus 104)

	49
145	82'9
5	72 5

$\sqrt{8'41} = 29$

	4
49	44'1
9	44 1

§ 85. Mitmekohalise ruutjuure leidmine.

$\sqrt{156816} = ?$ Ehk küll meie juurealune arw 10000-st suurem ja sellepärast juur 100-st suurem on, siiski arutame meie, nagu oleks meil juures ainult kümnelised ja ühelised olemas. Kümneliste ruutarw peitub ainult sajalistes. Eraldame juurealuses arwus sajalised ära. Neid on 1568. Et juure kümnelisi leida, peame 1568-st ruutjuure wälja wõtma. Pärast 1568-st ruutjuure wäljawõtmist leiame, et 1568-a ruutjuur 39 on ja jäänus 47. Nüüd läheme esimese juure juure tagasi ja otsime ühelisi juba tuntud wiisil. Kaswatame leitud juure kümnelisi 39 iseenesega, $39 \cdot 39 = 1521$ ja arwame ta juurealusest arwust maha. Jääb järele 4716. Kaswatame juurel kümnelisi 39 2-ga, saame 78. 78 kirjutame jäänuse 4716 ette tõmmatud püstjoonest pahemale poole. Eraldame jäänusest kümnelised ära, saame 471. Jagame 471 juure kahekordsete kümnelistega 78-ga, saame 6. 6 kirjutame 3 korda ja kaswatame 786-t 6-ga. Kaswatise 4716 arwame jäänusest maha. Ei jää midagi järele. Nii leiame, et $\sqrt{156816} = 396$.

$\sqrt{15'68} = 39$

	9
69	66'8
9	62 1
	4 7

$\sqrt{1568'16} = 396$

	1521
786	471'6
6	471 6

$39 \cdot 39$

351

$+ \ 117$

1521

Meie wõime aga kergemalt otsitawa juure leida.

1) Et 568-st ruutjuurt wälja wõtta, ei pruugi meil mitte uut rakendust kirjutada, waid jätame 16 ühelist koguni tähelepanemata ja wõtame 1568-st sealsamas ruutjuure wälja, nagu ei oleks numbrisid 16 sugugi olemas. Saame 39 (kümnelist) ja jäänuses 47.

$\sqrt{1568'16} = 396$

	9
69	66'8
9	62 1
786	471'6
6	471 6

2) Et 39-a ruutarwu leida, ei pruugi meie mitte 39-t iseenesega kuskil kõrwal kaswatada, waid see ruutarw on meil teisel näol juba olemas, nimelt 9 sajalist + 621 = 900 + 621.

3) Kümneliste ruutarwu ei pruugi meie enam juurealusest arwust maha arwata — ta on juba maha arwatud ja jäänuse sajalised 47 on ka juba joone alla kirjutatud. Et täit jäänust leida, kirjutame ainult nende 47 kõrwale enne tähelepanemata jäetud 16 ühelist, saame jäänuses 4716.

4) Selles jäänuses eraldame kümnelised 471 ära ja tema ette tõmbame püstjoone, mille ette juure kahekordsed kümnelised kirjutada tulewad.

5) Et juure kahekordseid kümnelisi leida, ei pruugi meie 39-t 2 ga kaswatada, waid selle asemel arwame eelpool seiswa 69 ja 9 kokku, sest $69 + 9 = 60 + 9 + 9 = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 9 = 2 \cdot (30 + 9) = 2 \cdot 39$. Need kaks arwu on juba üksteisele alla kirjutatud ja kui meie nad sealsamal kohal kokku arwame, siis tuleb nende summa 78, s. o. juure kahekordsed kümnelised, just omale kohale jäänuse ette ja temaga ühe rea peale.

6) Nüüd jagame jäänuse kümnelisi 471 juure kahekordsete kümnelistega 78-ga ja leitud jaondit katsume.

Rakendus on eespool näha.

Üleüldse, et ühest arwust ruutjuur wälja wõtta, peame esiteks selle arwu sajalistest ruutjuure wälja wõtma. Kui sajalisi enam kui 100 on, siis peame sajaliste sajalistest, s. o. antud arwu kümnetuhandelistest ruutjuure wälja wõtma. Kui ka see arw suurem on, kui 100, siis peame nende kümnetuhandeliste sajalistest, s. o. antud arwu miljonidest ruutjuure wälja wõtma j. n. e. Lühidalt: Et antud arwust ruutjuurt wälja wõtta, peame teda parema käe poolt pahemale poole kahe numbri kaupa salkadesse jagama, wiimases salgas wõib ka üks nummer olla. Et juure esimest arwu leida, peame esimesest (pahema käe poolt lugedes) salgast juure wälja wõtma, Et juure teist numbrit leida, arwame esimesest salgast juure esimese numbri ruutarwu maha, jäänuse kõrwale toome teise salga alla ja niiwiisi saadud arwu kümnelisi jagame juure leitud arwu kahekordsega. Saadud jaondit peame proowima. Juure järgmised numbrid leitakse sellelsamal kombel. Näitused:

1) $\sqrt{7'94'78'88'64} = 28192$.

4	
48 | 39'4	
8 | 384	
561 | 107'8	
1 | 561	
5629 | 5178'8	
9 | 50661	
56382 | 11276'4	
2 | 112764	

2) $\sqrt{16'70'35'69} = 4087$

16	
808 | 7'03'5	
8 | 6 46 4	
8167 | 57 169	
7 | 57 169	

Ülesanded: Järgmistest arwudest ruutjuured wälja wõtta: 1) $\sqrt{2401}$; 2) $\sqrt{80656}$; 3) $\sqrt{84100}$; 4) $\sqrt{4297329}$; 5) $\sqrt{42810849}$; 6) $\sqrt{550564}$; 7) $\sqrt{654481}$; 8) $\sqrt{676}$; 9) $\sqrt{3249}$; 10) $\sqrt{6724}$;

Ruutjuure wäljawõtmise wiisist selgub, et ruutjuurel nii mitu numbrit on, mitu salka meil juurealuses arwus on. Kui juurealusel arwul paarisarw numbrid on, siis on juurel 2 korda wähem numbrid; on juurealusel arwul paarita arw numbrid, siis suu-

rendame juurealuse arwu numbrite arwu ühe wõrra ja saadud arwu jagame kahega.

Logaritmeerimise jätame algebra hooleks.

Kümnes peatükk: Ülesannete wäljarehkendamine.

§ 86. Tehete jaotus.

Kõige lihtsam ja ühtlasi ka alustehe on kokkuarwamine. Tema wastupidine tehe on maha-arwamine. Sellepärast on kokkuarwamine ja mahaarwamine ühe ja sellesama, alama, järgu tehted.

Kokkuarwamisest kaswab kaswatamine wälja. Tema wastupidine tehe on jagamine. Sellepärast on kaswatamine ja jagamine ühe ja sellesama, keskmise, järgu tehted.

Kaswatamisest kaswab astmele tõstmine wälja. Tema wastupidised tehted on juure wäljawõtmine ja logaritmeerimine. Sellepärast on astmele tõstmine ja juure wäljawõtmine ühe ja sellesama, ülema, järgu tehted.

Tehete ärarippuwust üksteisest wõime näitlikult järgmisel wiisil kujutada:

<table>
<tr><th>Järgud.</th><th colspan="2">Otsekohesed tegewused.</th><th colspan="2">Wastupidised tegewused.</th></tr>
<tr><td rowspan="3">I. järk.</td><td rowspan="3">Kokkuarwamine.</td><td>5 rbl. + 3 rbl. = 8 rbl.
5 + 3 = 8</td><td>8r.—3r.=5r.
8 — 3 = 5</td><td>8r.—5r.=3r.
8 — 5 = 3</td></tr>
<tr><td>5 r. + 3 r. + 7r. = 15 r.
5 + 3 + 7 = 15</td><td colspan="2" rowspan="2">Maha-arwamine.</td></tr>
<tr><td>5 r. + 5 r. + 5 r. = 15 r.
5 + 5 + 5 = 15</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II. järk.</td><td rowspan="3">Kaswatamine.</td><td>5 rbl. × 3 = 15 rbl.
5 . 3 = 15</td><td>15 r. : 3 = 5r.
15 : 3 = 5</td><td>15 r. : 5 r. = 3
15 : 5 = 3</td></tr>
<tr><td>5 . 3 . 7 = 105</td><td>Jaotamine.</td><td>Mahutamine.</td></tr>
<tr><td>5 . 5 . 5 = 125</td><td colspan="2">Jagamine.</td></tr>
<tr><td>III. järk.</td><td colspan="2">$5^3 = 125$
Potentseerimine ehk astmesse tõstmine.</td><td>$\sqrt[3]{125} = 5$
Juure wäljawõtmine.</td><td>$\lg_5 125 = 3$
Logaritmeerimine.</td></tr>
</table>

§ 87. Wäljaarwamise näitused ja päris ülesanded.

Ülesandeks nimetatakse iga küsimus, kus kahe ehk mitme antud arwu kaudu uus arw peab leitama. Ülesandes seletatakse antud arwude tähendus ära; niisuguseid seletusi nimetatakse ülesande tingimisteks (условіе). Ülesanne seisab koos tingimistest ja küsimustest. Kui ülesande tingimised selles seisawad, et nad otsekohe ära tähendawad, missugused tehted antud arwude kallal toime saata tulewad, et otsitawat arwu leida, siis nimetatakse niisugust ülesannet wäljaarwamise näituseks (примѣръ на вычисленіе). „Päris ülesande“ ehk lihtsalt ülesande all mõistame meie niisuguseid küsimusi, kus tingimised kordasaadetawaid tehteid mitte otsekohe kätte ei juhata, waid ülesande wäljaarwaja ise tarwilised tehted tingimiste põhjal ära määrab. Näitused: 1) Kui suur on jaond, mis 24 ja 31 summa jagamisest 5-ga saadakse? See küsimus on wäljaarwamise näitus. 2) Lootsikuga sõitjad jõuawad seiswas wees 5 wersta tunnis edasi; jõe woolu kiirus on 3 wersta tunnis. Mitu wersta jõuawad lootsikuga sõitjad tunnis peripidi wett edasi? See küsimus on ülesanne, sest et temas ei ole ära tähendatud, missugune tehe otsitawa arwu leidmiseks toime tuleb panna.

§ 88. Awaldus ja walem.

Wälja arwamise näituses sõnadega wälja üteldud tingimisi wõib ka ilma sõnadeta, tehete märkide abil ära tähendada. Sagedasti peab selle tarwis ka klambrid appi wõtma. Tehete märkidega ühendatud arwude kogu nimetatakse awalduseks. Üleüldsuse pärast nimetatakse awalduseks ka iga üksikut arwu. Kaks awaldust, mis ühtluse märgi läbi (ehk ka märkide $>$, $<$ läbi) ühendatud on, nimetatakse walemiks. Otsitawat arwu tähendatakse sagedasti ladina keelse tähe x-iga (iks). Kui meie wäljaarwamise näituses sõnadega wäljaüteldud tingimised ilma sõnadeta üles kirjutame, siis wõime iga kord saadud awaldust ja otsitawa arwu märki X ühtluse-märgi läbi ühendada. Selles mõttes tarwitatakse enamaste sõna „awalduse“ asemel sõna „walem“. Ka meie tarwitame edaspidi sõna walem selles mõttes.

Näitus. 11-ne ja 12-ne kaswatisest maha arwata jaond, mis 412-e jagamisest 4-ga saadakse. Ilma sõnadeta wõime seda nõuet järgmiselt üles kirjutada: $11 \cdot 12 - (412 : 4)$. Meie wõime seda küsimust ka weel nii kirjutada: $11 \cdot 12 - (412 : 4) = X$. $11 \cdot 12 - (412 : 4)$ on awaldus, $11 \cdot 12 - (412 : 4) = X$ on walem. Aga ka $11 \cdot 12 - (412 : 4)$ nimetatakse walemiks.

§ 89. Klambrid ja klambrite juhid.

Eelpool oli juba üteldud, et kui mõne tehte ilmumata saaduse (формальный результатъ) kallal uut tehet toime tahetakse panna, siis sulutakse see ilmumata saadus klambritesse.

Harilikult tarwitatakse 3 liiki klambrid: wäikesi ehk ümargusi klambrid ( ), nurgelisi ehk keskmisi klambrid [ ] ja suuri ehk murtuid klambrid { }. Kui ühe tehte ilmumata saaduse kallal uut tehet toime tahetakse panna, siis sulutakse see ilmumata saadus wäikestesse klambritesse. Tahetakse teise tehte saaduse kallal kolmandat tehet toime panna, siis sulutakse teise tehte saadus nurgelistesse klambritesse. Tahetakse kolmanda tehte saaduse kallal neljandat tehet toime panna, siis sulutakse see kolmandama tehte saadus suurtesse klambritesse.

Näitused: $\{[(51:3)+25].8\}-300=?$

$\{[(51:3).25]^2\}:10625=?$

Et aga liig palju klambrid walemi kirjuks teewad ja klambrite liikisid meil ka wähe on, siis jäetakse klambrid kirjutamata, kui tehete järg ka ilma klambriteta selge ja kindel on. Klambritesse sulgumise ja klambrite awamise — walemi wäljaarwamise — juures käidakse järgmiste juhtide järele:

I. Juht: *Tehted pannakse seda korda mööda toime, mida tehete märgid pahema käe poolt paremale poole lugedes näitawad, kui iseäralised juhid meile teist korda ei määra.*

II. Juht: *Klambritesse sulutud arwude kallal wõib ainult neid tehteid toime panna, mis klambrites näidatud on ja alles ilmunud saaduse kallal wõib neid tehteid toime panna, mida pahemal ehk paremal pool klambrid olewad märgid näitawad.*

III. Juht: *Kui kahest kõrwuseiswast ilma klambriteta ülestähendatud tehetest üks ülema, teine alama järgu tehe on, siis on ülema järgu tehtel eesõigus alama järgu tehte ees.*

IV. Juht: *Kui jagamise märgina kaaljoont tarwitatakse, siis on joone peale kirjutatud walemi osa — jagataw ja peab eraldi wälja arwatama; joone alla kirjutatud walemi osa jagaja ja peab ka eraldi wälja arwatama; lõpuks peab esimest neist saadud arwudest teisega jagatama.*

§ 90. Walemi wäljaarwamine.

1. Näitus: Kui palju on $24.11:12-3+5$?

Walemit wälja arwama tähendab walemis äratähendatud tehteid korda mööda toime panema. Arw, mis walemi wäljaarwamise lõpul ilmub, nimetatakse walemi arwuliseks suuruseks. Otsime eelseiswa walemi arwulist suurust. Klambrid selles walemis ei ole ja ainult ühes kohas on ülema järgu tehe — jagamine — alama järgu tehtega — mahaarwamisega — kõrwu. Et aga ülema järgu tehe enne on näidatud, kui alama järgu tehe, siis käib siin II. juht I. juhiga kokku ja meie põhjendame oma wäljaarwamise ainult I-se juhi peale. 1) $24.11=264$

2) $264:12=22$

3) $22-3=19$

4) $19+5=24$

2. Näitus: $\{[(236+908):11-43].4+37\}.25=x$

I-se ja II-se juhi põhjal leiame 1) $236+908=1144$
I-se ja III-nda „ „ „ 2) $1144:11=104$
I-se ja II-se „ „ „ 3) $104-43=61$
I-se ja III-nda „ „ „ 4) $61.4=244$
I-se ja II-se „ „ „ 5) $244+37=281$
Wiimaks leiame 6) $281.25=7025$ $x=7025$.

3. Näitus:

$$[1000:2-(36.15-120:6.5)]:\{213-[2685:15+120:(6.5)]\}=x$$

Kui walemis mitmesugused klamrid ette tulewad, siis peame esite wäikeste, siis keskmiste, ja wiimaks suurte klambrite arwulise wäärtuse leidma.

I-se juhi põhjal leiame: 1) $1000:2=500$
II-se ja I-se „ „ „ : 2) $36.15=540$
III-da ja II-se „ „ , : 3) $120:6=20$
III-da ja II-se „ „ „ : 4) $20.5=100$
II-se „ „ „ : 5) $540-100=440$
I-se ja II-se „ „ „ : 6) $500-440=30$ (jagataw)
II-se „ „ „ : 7) $6.5=30$
II-se ja I-se „ „ „ : 8) $2685:15=179$
III-da „ „ „ : 9) $120:30=4$
II-se „ „ „ : 10) $179+4=183$
II-se „ „ „ : 11) $213-183=30$ (jagaja).
Wiimaks leiame : 12) $60:30=2$. $X=2$.

Seda walemi wäljaarwamist wõib ka teisiti rakendada:

$$[1000:2-(36.15-120:6.5)]:\{213-[2685:15+120:(6.5)]\}=X.$$
$$[500-(540-20.5)]:[213-(179+120:30)]=X$$
$$[500-(540-100)]:[213-(179+4)]=X$$
$$(500-440):(213-183)=X$$
$$60:30=X$$
$$2=X \quad X=2.$$

Kui wäikesed klambrid ära jääwad, siis kirjutatakse harilikult nurgeliste klambrite asemele wäikesed, ja suurte klambrite asemele nurgelised klambrid.

Eelseiswat walemit wõib ka ilma suurte klambriteta kirjutada, kui jagamise märgina kaaljoont tarwitada:

$$\frac{1000:2-(36.15-120:6.5)}{213-[2685:15+120:(6.5)]}=X.$$

§ 91. Lihtülesanded ja keerdülesanded.

Kui ülesandes otsitawa arwu leidmiseks üksainus tehe toime panna tuleb, siis nimetatakse ülesannet l i h t ü l e s a n d e k s; kui selle tarwis mitu tehet toime panna tuleb, siis nimetatakse ülesannet k e e r d ü l e s a n d e k s.

Et lihtülesannet wälja arwata, selleks peame õige tehte walima ja seda tehet korda saatma. Et tehet õigesti walida, peame waatama, missuguse tehteid karakteriseeriwa üleüldise küsimuse alla meie eraküsimus käib. Need üleüldised küsimused on iga nelja esimese tehte juures nimetatud.

§ 92. Keerdülesannete wäljaarwamine.

Iga keerdülesannet wõib lihtülesanneteks lahutada. Näitus: Kaupmees sai Messinast mõne kasti apelsiinisid, millest iga kast talle 6 rubla maksma tuli. 5-e kasti osa apelsiinisid oli hukka läinud ja ei tulnud müügile. Ülejäänud apelsiinidest müüs ta iga kasti 9 rubla eest ära. Nii wiisi ei saanud ta neist apelsiinidest ei kasu, ega kahju. Mitu kasti apelsiinisid saadeti Messinast kaupmehele? Seda keerdülesannet wõime järgmisteks 4-ks lihtülesandeks lahutada:

1) Teades, et iga kast apelsiinisid kaupmehele 6 rubla maksma tuli ja et 5-e kasti osa hukka läks, wõime teada saada, kui palju kahju kaupmees nende 5-e kasti pealt sai; selle tarwis kaswatame 6 rbl. 5-ga ja saame 30 rbl.
2) Need 30 rbl. kahju kattis kaupmees selle kasuga kinni, mis ta teiste kastide pealt sai, neid 6 rbl. asemel 9 rbl. eest müües. Sellest wõime teada saada, kui palju kasu ta iga äramüüdud kasti pealt wõttis. Selleks tarwis 9-st rbl. 6 rbl. maha arwata. 9 rbl. — 6 rbl. = 3 rbl.
3) Et saadud kasu kahju kinni kattis, siis sai ta müüdud kastide pealt 30 rbl. kasu. Teades, kui palju ta kõikide müüdud kastide pealt ja kui palju ta ühe kasti pealt kasu sai, wõime teada saada, mitu kasti ta ära müüs. Selleks jagame 30 rbl. 3 rublaga. 30 rbl: 3 rbl. = 10.
4) Teades, mitu kasti apelsiinisid ära müüdi ja mitu kasti rikki läks, wõime teada saada, mitu kasti apelsiinisid kaupmehele saadeti. Selleks on tarwis 10 kasti ja 5 kasti kokku arwata. 10 kasti + 5 kasti = 15 kasti.

Sellest näeme, et keerdülesande wäljaarwamiseks meie teda lihtülesanneteks lahutama ja need lihtülesanded wälja arwama peame. Keerdülesande lihtülesanneteks lahutamine ja selle järje äramääramine, milles lihtülesanded wälja arwata tulewad, nimetame meie keerdülesande arendamiseks, ja lihtülesannete wäljaarwamist — keerdülesande wäljaarwamiseks.

§ 93. Sünteetiline arendamise wiis.

Keerdülesandeid arendatakse kahel wiisil: sünteetiliselt ja analüütiliselt. Ettetoodud keerdülesande lihtülesanneteks lahutamisel läksime ülesandes antud arwudest wälja. Meie wõtsime

ülesandes antud arwudest kaks arwu (kast apelsiinisid maksis 6 rubla ja 5 kasti oli rikki läinud) ja nende järele panime küsimuse (kui palju kahju sai kaupmees 5-e kasti pealt), mida ühe tehte abil wälja arwata wõib. Peale selle wõtsime jälle kaks ülesandes antud arwu (ühe kasti apelsiinisid müüs ta 9 rubla eest, ostis aga 6 rubla eest) ja nende järele panime uue küsimuse (kui palju kasu wõttis ta iga müüdud kasti pealt), mida jälle ühe tehte abil wälja arwata wõib. Siis wõtsime kaks lihtülesannetes leitud arwu (30 rbl. sai ta kahju ja 3 rbl. sai ta kasu ühe kasti pealt) ja nende järele panime jällegi küsimuse (mitu kasti apelsiinisid müüs ta ära), mida ühe tehte abil wälja arwata wõib. Wiimaks wõtsime ühe leitud arwu (10 kasti müüs kaupmees ära) ja ühe ülesandes antud arwu (5 kasti oli rikki läinud) ja nende kahe arwu abil läks meil korda sedasama küsimust ette panda ja wälja arwata, mis ülesandes pandud oli. Niisugust arendamise wiisi nimetatakse s ü n t e e t i l i s e k s. Sellest selgub, et sünteetilise arendamise juures meie ülesandes antud ehk endistes lihtülesannetes leitud arwusid wõtame ja neile sündsaid küsimusi otsime. Meie peame niikaua lihtülesandeid kokku seadma ja neid wälja arwama, kuni meil korda läheb seda küsimust panna, mis keerdülesandes pandud on. Sünteetilise arendamise juures kaalume alati järele, mis on meil teada, kas ülesande tingimistest ehk juba wäljaarwatud lihtülesannetest, ja mis wõime meie ü h e tehte abil teada saada.

Eelminewas paragrahwis ettetoodud ülesande sünteetilist arendamist ja wäljaarwamist wõime järgmiselt kujutada:

Teades:	Wõime teada saada:	Wälja arwamine
1. Et iga kast apelsiinisid kaupmehele 6 rbl. maksis. 2. Et 5 kasti rikki läks.	Kui palju kahju kaupmees nende 5 kasti pealt sai.	6 rbl. . 5 = 30r.
1. Et kast apelsinisid 6 rbl. maksis ja 2. Et ta kasti 9 rbl. eest ära müüs.	Kui palju kasu sai kaupmees iga kasti pealt.	9r. — 6r. = 3r.
1. Et kaupmees müüdud kastide pealt 30 rbl. kasu sai, ja 2. Et iga kasti pealt 3 rbl. kasu sai.	Mitu kasti apelsinisid müüs kaupmees ära.	30 r. : 3 r. = 10
1. Et kaupmees 10 kasti apelsiinisid ära müüs. 2. Et wiis kasti rikki läks.	Mitu kasti apelsiinisid kaupmehele Messinast saadeti.	10 kasti + 5 „ 15 kasti

§ 94. Analütiline arendamise wiis.

Ülesanne: Poepidaja segas 3 naela 70-ne kopikalist kohwi 45-e kopikalise kohwiga. Segu müüs ta 55 kop. eest nael ära ja sai kõige segu pealt 85 kop. kasu. Mitu naela 45 kopikalist kohwi pani ta segusse?

Et analütiliselt seda ülesannet wälja arwata, katsume niisuguseid arwusid leida, et meie ühe tehte abil ülesandes ettepandud küsimuse peale wõime wastuse anda.

Sest et segu müümise juures esimese sordi pealt kahju ja teise sordi pealt kasu saadi ja üleüldse 85 kop. kasu saadi, siis kattis teise sordi kasu esimese sordi pealt saadud kahju kinni ja 85 kop. puhast kasu jäi weel üle. Sellepärast leiame ülesande küsimuse peale wastuse, kui meie teame, 1) kui palju kasu üleüldse teise sordi pealt pidi saadama ja 2) kui palju kasu iga nael andis. Kui meil wastused nende küsimuste peale käes on, siis jagame kõike kasu, mis teise sordi pealt saadi, selle kasuga, mis ühe naela pealt saadi ja jaond näitab meile, mitu naela teist sorti kohwi segusse oli pandud. Sellega oleme küll lihtülesande kokku seadnud ja ka tehte äramääranud, mille abil teda wälja arwata, aga wäljaarwamiseks puuduwad meil tarwilised arwud. Sellepärast peame enne prageu kokkuseatud lihtülesande wäljaarwamist teada saama: 1) Kui palju kasu üleüldse teise sordi pealt saadi ja 2) kui palju kasu saadi ühe naela teise sordi kohwi pealt. Kummagi küsimuse peale neist kahest katsume jälle üheainsa tehte abil wastust leida. Esimese küsimuse peale leiame kokkuarwamise abil wastuse, kui meie teame 3) kui palju kahju saadi üleüldse esimese sordi pealt ja 4) kui palju puhast kasu saadi terwe segu pealt. Sellega oleme uue lihtülesande kokku seadnud ja tehte äramääranud, mille abil teda wälja arwata wõib. Ka üks tarwilik arw, puhaskasu, on meil teada; teist arwu, esimese sordi pealt saadud kahju, peame otsima.

Teise küsimuse peale leiame wastuse, kui meie teame, 5) kui kallis tuli poepidajale enesele üks nael teise sordi kohwi maksma ja 6) kui kallilt müüs ta ühe naela segu. Wastuse leidmiseks peame segu hinnast teise sordi hinna maha arwama. Sellega oleme weel ühe lihtülesande leidnud ja tehte ära määranud, mille abil teda wõib wälja arwata. Ka tarwilised arwud on meil keerdülesande tingimistest teada. Nüüd otsime wastust kolmanda küsimuse peale, wastus neljanda küsimuse peale on ülesandes antud.

Katsume kolmanda küsimuse peale: „kui palju kahju saadi kõige esimese sordi pealt?“ jällegi ühe tehte abil wastust leida. Et teada saada, kui palju kahju saadi kõige esimese sordi pealt, peame teadma 7) kui palju pandi esimest sorti segusse ja 8) kui palju kahju saadi iga naela pealt. Iga naela pealt saadud kahju peame segusse pandud esimese sordi naelte arwuga kaswatama.

Sellega oleme weel ühe uue lihtülesande kokku seadnud ja tehte äramääranud, mille abil teda wälja arwata wõib. Ka üks tarwilik arw, segusse pandud esimese sordi kohwi naelte arw, wastus seitsmenda küsimuse peale, on meil keerdülesandest teada. Puudub wastus k a h e k s a n d a küsimuse peale.

Et teada saada, kui palju kahju saadi iga naela esimese sordi kohwi pealt, peame teadma: 9) kui kallis tuli iga nael esimest sorti kohwi maksma ja 10) kui kallilt müüdi üks nael segu ja siis esimese sordi hinnast segu hinna maha arwama. Sellega oleme jällegi ühe uue lihtülesande kokku seadnud ja tehte ära määranud, mille abil meie tema wälja arwame. Kui meie selle ülesande wälja arwame, siis on meil wastused 8-da ja 7-da küsimuse peale teada. Wastuseid 7-da ja 8-da küsimuse peale teades wõime 3-da küsimuse peale wastuse saada.

Wastuseid 3-da ja 4-da küsimuse peale teades wõime 1-se küsimuse peale wastuse leida.

Wastuseid 5-da ja 6-da küsimuse peale teades wõime 2-se küsimuse peale wastuse leida.

Wastuseid 1-se ja 2-se küsimuse peale teades wõime keerdülesandes pandud küsimuse peale wastuse anda ja meie keerdülesanne on wälja arwatud. Sellega peame oma keerdülesande järgmisteks lihtülesanneteks lahutama:

1) Kui palju kahju saadi iga naela esimese sordi kohwi pealt? 70 kop.—55 kop. = 15 kop.

2) Kui palju kahju saadi kõige esimese sordi pealt? 15 kop. 3 = 45 kop.

3) Kui palju kasu saadi üleüldse teise sordi pealt? 45 kop. + 85 kop. = 130 kop.

4) Kui palju kasu saadi ühe naela teise sordi kohwi pealt? 55 kop.—45 kop. = 10 kop.

5) Mitu naela teist sorti kohwi pandi segusse? 130 kop.: 10 kop. = 13 (naela).

Järgmised tabelid näitawad meie arendamist ülewaatlikult:

Et teada saada:	Peame teadma:	Wälja arwamine:
1. Mitu naela teist sorti kohwi pandi segusse?	1. Kui palju kasu saadi üleüldse teise sordi pealt? 2. Kui palju kasu saadi iga n. teist sorti kohwi pealt?	130 k.: 10 k. = 13 (naela).
2 Kui palju kasu saadi üleüldse teise sordi pealt?	1. Kui palju kahju saadi üleüldse esimese sordi pealt? 2. Kui palju puhast kasu saadi terwe segu pealt? (85 kop.)	45k.+85k.=130k.
3. Kui palju kasu saadi iga naela teise sordi kohwi pealt?	1. Kui kallis tuli poepidajale enesele üks nael teise sordi kohwi maksma?(45k.) 2. Kui kallilt müüs ta ühe naela segu? (55 k.)	55k.—45k.=10k.
4. Kui palju kahju saadi üleüldse esimese sordi pealt?	1. Kui palju kahju saadi ühe naela esimese sordi pealt? 2. Kui palju pandi esimest sorti segusse? (3 n.)	15 k. . 3 = 45 k.
5. Kui palju kahju saadi ühe naela esimese sordi pealt?	1. Kui palju tuli poepidajale enesele 1 nael esimese sordi kohwi maksma?(70k.) 2. Kui kallilt müüs ta ühe naela segu? (55 kop.)	70k.—55k.=15k.

Mitu naela teist sorti kohwi pandi segusse? V

1. Kui palju kasu saadi üleül. II s.pealt?III 2. Kui palju kasu saadi iga II s. n. pealt? IV

3. Kui palju kahju saadi üleül. I sordi pealt?II 4. Kui palju puhast kasu saadi terwe segu pealt? (85 k.) 5. Kui kallilt müüdi 1 nael segu? (55 k.) 6. Kui kallis oli II sordi nael? (45k.)

7. Kui palju pandi I-st sorti segusse? (3 n.) 8. Kui palju kahju saadi ühe naela I sordi pealt? I

9. Kui kallis oli I sordi nael? (70k.) — 10. Kui kallilt müüdi 1 nael segu? (55 k.)

Sellest on näha, et analütilise arendamise juures meie ettepandud küsimust ühe tehte abil wälja arwata püüame. Selleks küsime meie: Mis on tarwis teada, et küsimust ühe tehte abil

wälja arwata? Selle küsimuse peale wastame uute küsimustega. Kui meie uuesti ettepandud küsimuste peale keerdülesande tingimistest wastust ei saa, siis küsime jällegi: Mis on tarwis teada, et arutatawa küsimuse peale ühe tehte abil wastata? Selle küsimuse peale wastame jällegi uute küsimustega. Kui meie ka nende peale keerdülesande tingimistest wastust ei saa, siis küsime jällegi: Mis on tarwis teada, et arutatawa küsimuse peale ühe tehte abil wastata? Nii küsime ikka edasi, kuni meie wiimaks niisuguste küsimuste juure jõuame, mille peale wastus ülesande tingimistes antud on. Niiwiisi saame terwe rea lihtülesandeid, mida meie, wiimastest peale hakates, wälja arwame.

Teine jagu.

Nimega arwud.

Üheteistkümnes peatükk: Suuruste mõõtmine.

§ 95. Suuruse mõiste.

Suurus, (величина, Grösse, grandeur) on algusmõiste, mida weel lihtsama mõistega ära seletada ei saa, sest et lihtsamat mõisei ole. Kõik, mis suureneda ehk wäheneda wõib, nimetame meie **suuruseks.** Näituseks: üks puu on teisest pikem, üks kirikutorn on teisest kõrgem, üks kiwi on teisest raskem, raudteerongi kiirus on hobuse jooksu kiirusest suurem, üks maakoht on teisest ilusam, üks inimene on teisest targem. Pikkus, kõrgus, raskus, kiirus, iludus, tarkus on suurused. Suuruse mõistega lahutamatalt ühendatud on ettekujutus suuruse **hulgast** (количество величины, Grössenquantität, quantité de la grandeur) ja just hulk on suuruses see, mis ennast muudab, suurenedes ehk wähenedes. Suuruse hulka nimetatakse sagedaste suuruse **wäärtuseks** (значеніе величины, Grössenwert, valeur). Näituseks: Teekonna kaugus Tartust Wologdasse on üks pikkuse wäärtus ehk hulk; teekonna kaugus Wõrust Tomskisse on teine pikkuse wäärtus, Tallinna Olewiste kiriku torni kõrgus on kolmas pikkuse wäärtus jne. Kui meie suuruse hulkadest kindlaste ja selgeste aru tahame saada, siis peame teda ära mõõtma ja arwuna awaldama. Äramõõdetud ja arwuna awaldatud suuruse hulka nimetatakse suuruse **arwuliseks wäärtuseks.** Näituseks: 2 aastat on üks aja arwulistest wäärtustest, 7 jalga on üks pikkuse arwulistest wäärtusest, 30 rubla on üks hinna arwulistest wäärtustest.

Tähendus:

Harilikus kõnes tarwitatakse sõnade „suuruse hulka, suuruse wäärtus“ ja „suuruse arwuline wäärtus“ asemel lihtsalt sõna „suurus“. Ka meie tarwitame edaspidi selles raamatus sagedaste sõna „suurus“ kõigis kolmes mõttes: 1) päris mõttes, 2) sõnade „suuruse hulk, suuruse wäärtus“ asemel ja 3) sõna

„suuruse arwuline wäärtus“ asemel. Sellepärast peab teadma ja wahet teha oskama, missuguses mõttes just seda sõna „suurus“ tarwitatakse. Niisuguse kokkuleppimise põhjal, sõna „suurus“ kolmes mõttes tarwitada, nimetatakse ühe ja sellesama suuruse hulkasid **ühehõimulisteks suurusteks** (однородныя величины — gleichartige Grössen).

§ 96. Matematikalised suurused.

Mõnedest suurustest wõime ütelda, mitu korda üks tema hulkadest tema teisest hulgast suurem on, aga teistest suurustest ei wõi meie seda mitte ütelda. Näit., meie wõime ütelda, et jahukott on tubakapakist 40 korda raskem, lambi walgus on küünla walgusest 7 korda heledam, aga mitu korda Segewoldi iludus Rõuge iludusest suurem on, seda ei wõi meie ära määrata, sest raskust ja walguse heledust oskame meie mõõta, aga iludust meie mõõta ei oska.

Niisugust suurust, mille kohta meie ära määrata wõime, mitu korda üks tema hulkadest tema teisest hulgast suurem ehk wähem on, nimetatakse matematikalisteks suurusteks.

Järgmised suurused tulewad harilikus elus kõige enam ette ja on sellepärast kõikidele tuttawad:

1) Pikkus; teda nimetatakse ka tarwiduse järele laiuseks, kõrguseks, sügawuseks, kauguseks, paksuseks.

2) Wäljasuurus (pinnasuurus, площадь).

3) Kogu- ehk kehasuurus (kantsisu, объемъ).

4) Raskus, 5) Aeg, 6) Hind, 7) Soojus.

§ 97. Mõõtmine, üksus, mõõt, üksuseline wahekord.

Kui meie mõnda suuruse hulka mõõta tahame, siis walime kõige esite ühe teise sellesama suuruse hulga wälja ja ütleme, et meie temaga antud hulka mõõta tahame. Siis mahutame walitud hulga antud hulga sisse ja loeme ära, mitu korda esimene teise sisse mahub. See sissemahutamine ja äralugemine ongi mõõtmine. Olgu, näit., tarwis toa pikkust mõõta. Meie walime tema mõõtmiseks teise pikkuse hulga „jala“. Jalga mahutame toa pikkusesse ja loeme ära, mitu korda ta sinna sisse mahub. Kui jalg toa pikkusesse just 20 korda mahub, siis on toa pikkus 20 jalga. Olgu tarwis suhkrupea raskust mõõta. Walime tema mõõtmiseks teise raskuse hulga „naela“. Kaalude abil saame teada, mitu korda nael suhkrupea raskusesse mahub. Mahtugu ta sinna sisse just 17 korda, siis on suhkrupea raskus 17 naela. Suuruse hulk, mis teiste sellesama suuruse hulga mõõtmiseks wälja on walitud, nimetatakse suuruse üksuseks ehk mõõduks. Suuruse üksuseks wõib missugune tahes suuruse hulk walitud saada. Et aga teised inimesed meie mõõtmisest aru ja kasu saaksiwad, selleks peab meie üksus neile tuttaw olema. Näit. jalg on pikkuse üksus, nael — raskuse üksus, rubla — hinna üksus.

Iga suuruse jaoks walitakse mitu üksust wälja — ühed suuremad, teised wäiksemad. Selleks on kaks põhjust: 1) Suuri hulkasid mõõdetakse suurte üksustega ja wäikesi hulkasid wäikeste üksustega; 2) kui walitud üksust mõõdetawasse hulgasse mahutamise juures jäänus järele jääb, siis mõõdetakse ülejäänud hulga osa wäiksema üksusega. Näit.: Tahaksime meie Tartu ja Wõru wahet tolliga mõõta, siis oleks see liiga tülikas ja saadud arwust, 2835000 tolli, oleks meil raske aru saada. Kui meie aga Tartu ja Wõru wahet werstaga mõõdame, siis saame 67 wersta ja üks osa, mis werstast wähem on, jääb mõõtmata. Et seda ülejäänud osa mõõta, wõtame wäiksema üksuse, sülla, ja sellega mõõdame ülejäänud osa. Niiwiisi leiame, et Tartu ja Wõru wahet on 67 wersta 250 sülda. Kirja ümbriku laiust mõõdame tolli ja liiniga; selle juures wõime, näit., leida, et ümbriku laius 3 tolli 5 liini on.

Sellest selgub: *Üht suuruse hulka mõõtma, tähendab seda hulka teise sellesama suuruse hulgaga, mis üksuseks on wõetud, wõrdlema ära määrates, mitu korda üksus ehk tema mitmendik jagu* (*аликвотная часть, w. § 52*) *mõõdetawasse hulgasse mahub.*

Arw, mis näitab, mitu korda mõõt mõõdetawa hulga sisse mahub, nimetatakse mõõdetawa hulga m õ õ t a r w u k s (Maasszahl = численное значеніе). See arw, mis näitab, mitu wähemat üksust suuremas üksuses peitub, nimetatakse nende (mõõtude) üksuste ü k s u s e l i s e k s w a h e k o r r a k s. Üksuseline wahekord ei ole muud midagi, kui suurema üksuse mõõtarw, mille juures wähem üksus mõõduks on.

§ 98. Mõõtmise abinõud.

Igal suurusel on omad mõõdud ja mõõtmise abinõud, mis mõnikord wäga kallid ja keerulised on. Näituseks: pikkuse mõõtmiseks tarwitatakse mõõdupuud, ketti ehk paela, raskuse mõõtmiseks — kaalusid, aja mõõtmiseks — kella, soojuse mõõtmiseks — termomeetrit.

Kui teadus weel niikaugele ei olnud jõudnud, kui ta praegu on, ei osanud inimesed nii kindlaste, karwapealt, mõõta, nagu nüüd; ka ei osanud nad kõiki neid suurusi mõõta, mis meie praegu mõõta oskame, näit. walguse heledust, soojust, elektriwoolu jõudu ja kiirust. See annab põhjust loota, et ajajooksul inimesed nii mõnelegi suurusele, millel weel praegu mõõtu ei ole, mõõdu leiawad ja sedawiisi uue loodusejõu oma alla heidawad.

Enne, kui weel ühiselu ja riikline sisseseade küllalt korraldatud ei olnud, tarwitati pea igas maanurgas ühe ja sellesama suuruse mõõtmiseks iseäralisi mõõtusid, näit.:

1 Riia	nael	kaalus	100	nüüdset	solotnikku,
1 Tallinna	„	„	98½	„	„
1 Kuura	„	„	98	„	„

1 Poola nael kaalus 95 nüüdset solotnikku, ehk:
1 setwert = 3 endist Riia wakka
1 setwert = 5 endist Tallinna wakka.

Et niisugune mitmekesidus kaubanduslisele läbikäimisele tülikas oli ja wahest ka pettust sünnitas, sellepärast hakkasiwad walitsused selle eest hoolt kandma, et terwes riigis ühesugused mõõdud oleksiwad. Praegused Wene riigis tarwitusel olewad mõõdud on Peeter Suur seaduslisteks kinnitanud. Peterburis on asutus olemas, mis mõõtude üle walwab, et nad õiged oleks. Seda asutust kutsutakse „mõõtude ja kaalude kojaks“ (Палата мѣръ и вѣсовъ). Selles „mõõtude ja kaalude kojas“ hoitakse heast materjalist (platinast) tehtud mõõtude eeskujud, mida normal-mõõtudeks nimetatakse, ilusates tuppedes ja niisugusel kohal alles, kus nende peale ei soojus, ega külm, ega niiskus ei mõju. Wäga peenikeste masinate ja riistade abil tehakse normal-mõõtude järele brongsist uued mõõdud, mida **„etalonideks“** nimetatakse, ja saadetakse laiale linnadesse, kus „mõõtude ja kaalude kojal“ omad abi-asutused (пробирныя палатки) on Kes omale õiged mõõdud tahab muretseda, see peab omad mõõdud niisuguses abitalituses järele waadata laskma ehk juba läbiwaadatud mõõdud ostma.

Et aga inimene kõige oma parema tahtmise juures ka masinate abil kahte täieste ühesugust asja walmistada ei saa, siis ei ole ka inimestel mitte wõimalik kahte karwapealt ühesuurust mõõtu walmistada. Ehk küll silmaga näha mingisugust wahet ei ole, siiski wõib wäga peenikeste masinate ja riistade abil seda wahet ilmsiks teha. Sellepärast loetakse seaduslikult õigeks niisugused mõõdud, mille juures etalonist kõrwalekaldumine seaduslisest piirist üle ei lähe. Näit. Weneriigi seaduste järele loetakse puust tehtud arsin seaduslikuks, kui ta etalonist mitte enam kui 1 liin pikem ehk lühem ei ole. Rauast, wasest ehk teisest metallist tehtud arsin ei tohi enam kui pool liini etalonist pikem ehk lühem olla. Puudane kaal ei tohi enam kui 1 solotniku wõrra, naelane kaal — mitte enam kui 1 doli wõrra etaloni wastu eksida. Kõik mõõdud, mille kõrwalekaldumine seaduses äramääratud piirist üle käib, loetakse seadusewastalisteks ja kaupmehed, kes neid tarwitawad, langewad pettuse eest seaduslise wastutuse alla.

§ 99. Wene riigis tarwitatawad mõõdud.

A. Pikkusemõõdud.

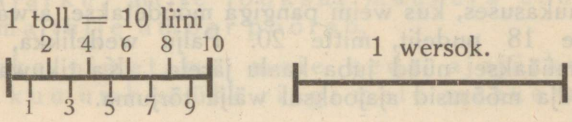
1 penikoorm	=	7	wersta;	nende	üksusel.	wahekord	on	7.
1 werst	=	500	sülda;	„	„	„	„	500.
1 süld	=	3	arsinat;	„	„	„	„	3.
1 arsin	=	16	wersokit;	„	„	„	„	16.

1 süld	=	7	jalga;	nende	üksusel.	wahekord	on	7.
1 jalg	=	12	tolli;	„	„	„	„	12.
1 toll	=	10	liini;	„	„	„	„	10.
1 arsin	=	28	tolli;	„	„	„	„	28.

1 sõlm ehk merepenikoorm = 1 werst 375 sülda = 875 sülda.

Baltimaadel on weel järgmised pikkusemõõdud tarwitusel:

1 küünar = 21 tolli = 12 wersokit; 4 küünart = 3 arsinat.
1 maasüld = 6 jalga.
7-me jalalist sülda nimetatakse ka raudsüllaks ehk Wene süllaks.



B. Raskuse mõõdud (ehk kaalud).

1 perkowits (kaal)	=	10	puuda;	nende	üksusel.	wahekord	on	10
1 puud	=	40	naela;	„	„	„	„	40
1 nael	=	32	looti;	„	„	„	„	32
1 loot	=	3	solotn.;	„	„	„	„	3
1 solotnik	=	96	doli;	„	„	„	„	96
1 puud	=	2	leisikat (punda);	„	„	„		2
1 leisik (pund)	=	20	naela;	„	„	„		20
1 nael	=	96	solotnikku;	„	„	„		96
1 solotn.	=	20	karati (umbes);	„	„	„		20

1. Tähendus. Nael on niisuguse puhta wee kogu raskus, mis karbi sisse, mille pikkus ja laius 4 tolli ja kõrgus natuke wähem kui 1 toll 6 liini on, ära mahub; niisuguse karbi kantsisu (ruumisuurus) on 25 kanttolli ja 19 kantliini.

2. Tähendus. Kõige wäiksemat raskuse mõõtu — doli tarwitatakse ainult kallite metallide — kulla, platina ja hõbeda raskuse mõõtmiseks.

3. Tähendus. Karati tarwitatakse ainult kallite kiwide (pärlite teemantide ja teiste) kaalumiseks. Karat on wana Egiptuse mõõt.

C. Ôônesmôôdud.

I. Wilja môôdud.

1 setwert = 8 setwerikku; nende üksuseline wahekord on 8
1 setwerik = 8 karnitsat; „ „ „ „ 8

Baltimaadel oliwad wanaste ja paiguti weel praegugi järgmised wilja mõõdud tarwitusel: 1 wakk = 3 mõõtu.

1 setwert = 3 Riia wakka;
1 Riia wakk = 6 külimittu;
1 külimit = 9 toopi;

1 setwert = 5 Tallinna wakka;
1 Tallinna wakk = 3 külimittu;
1 külimit = 12 toopi;

II. Wedelikkude mõõdud.

1 aam (waat) = 40 pangi; nende üksuseline wahekord on 40
1 pang = 10 toopi; „ „ „ „ 10
1 toop = 2 pudelit;

Seadusliselt kindlaksmääratud pang on umbes 750 kanttolli suur ja temasse mahub just 30 naela puhast wett. Kroonu pangiga (wedroga) müüakse nüüd weel joowastawaid jookisid, peaasjalikult (monopoli) wiina ja mõnesuguseid apteegist ja rohukauplustest müüdawaid wedelikka. Aami ei tarwitata mõõduna enam kuskil. Toobiga mõõdetakse Baltimaadel, Peterburis ja Moskwas piima. Kaukasuses, kus weini pangiga mõõdetakse, arwatakse ühe pangi peale 18 pudelit, mitte 20. Palju wedelikka, näit. petroleumi, müüakse nüüd juba kaalu järele. Ka tikuwad raskuse mõõdud wilja mõõtusid ajajooksul wälja tõrjuma.

D. Paberi mõõdud.

1 riis = 20 raamatut; nende üksuseline wahekord on 20
1 raamat = 24 poognat (kirjutuspaberit); „ „ „ 24
1 raamat = 25 poognat (trükipaberit); „ „ „ 25

E. Raha. (Hinna mõõt).

1 rubla = 100 kopikat; rubla ja kopika üksuseline wahekord on 100.

Wene kuldrahasid on 4-ja sorti:

15 rublaline kuldraha kaalub 3 solotnikku 2,4 doli,
10 „ „ „ 2 „ 1,6 „
7½ „ „ „ 1 „ 49,2 „
5 „ „ „ 1 „ 0,8 „

Need kuldrahad tehakse kulla ja (enamiste) wase sulatisest, kus 900 jagu kulda ja 100 odawamaid metallisid (waske) sees on, sest kuld üksi on liig pehme, õõrduks ära, kaotaks oma raskust ja sellega ka wäärtust.

Hõbeda sulatisest, kus 900 jagu hõbedat ja 100 jagu odawamaid metallisid (waske) on, lüüakse järgmised rahad:

1 rubla — kaalub 4 solotnikku 21 doli
50 kopikat — „ 2 „ 10½ „
25 „ — „ 1 „ 5¼ „

Hõbeda sulatisest, kus 500 jagu hõbedat ja 500 jagu odawamaid metallisid sees on, lüüakse järgmised rahad: 20 kop., 15 kop., 10 kop., 5 kop. Wenemaa waskrahad on: 5 kop., 3 kop., 2 kop., 1 kop., ½ kop. ja ¼ kop.

P a b e r i r a h a. Paberirahal iseenesest wäärtust ei ole, waid ta on riigi wõlatäht. Oma wäärtuse saab ta sellest, et riik

paberi raha omanikule sinna peale trükitud raha wäärtuse esimese nõudmise peale takistamata puhtas kullas wälja maksab. Wene riigis on järgmised paberirahad käimas: 1 rubla (nüüd weel harwa leida), 3 rbl., 5 rbl., 10 rbl., 25 rbl., 50 rbl., 100 rbl., 500 rbl.

§ 100. Aja mõõdud.

Loodus ise annab meile aja mõõtmiseks tarwilikud üksused: öö-päewa, kuu ja aasta.

Ööks-päewaks, ehk lihtsalt päewaks, nimetame meie seda ajajärku, mille jooksul maakera ennast ühe korra oma telje ümber pöörab.

Kuuks nimetame meie seda ajajärku, mille jooksul kuu umbes ühe ringi meie maakera ümber teeb.

Aastaks nimetame meie seda ajajärku, mille jooksul maakera ühe ringi päikese ümber teeb.

1 aastasada = 100 aastat.
1 aasta = 12 kuud = 52 nädalat = 365 ehk 366 päewa.
1 nädal = 7 päewa.
1 päew = 24 tundi, 1 tund = 60 minutit.
1 minut = 60 sekundit.

Päewa alguseks loetakse kesköödi ja tundisid loetakse kesköösst kuni lõunani 1-st kuni 12-ni ja lõunast kuni kesköödni jälle 1-st kuni 12-ni. Mõnes riigis, näit. Belgias, on juba tundide arwamine 1-st kuni 24-ni sisse seatud. Ka Wenemaal on mõnes raudteewaksalis kella numbrilaua peal tunnid 1-st kuni 24-ni ära tähendatud.

Aastas on 12 kuud; kuud kannawad igaüks iseäralist nime ja nende pikkus on mitmesugune:

1. kuu on jaanuar, temal on 31 päewa;
2. „ „ weebruar, „ „ 28 ehk 29 päewa;
3. „ „ märts, „ „ 31 päewa;
4. „ „ april, „ „ 30 „
5. „ „ mai, „ „ 31 „
6. „ „ juuni, „ „ 30 „
7. „ „ juuli, „ „ 31 „
8. „ „ august, „ „ 31 „
9. „ „ september, „ „ 30 „
10. „ „ oktober, „ „ 31 „
11. „ „ nowember, „ „ 30 „
12. „ „ detsember, „ „ 31 „

Need kuude nimed on Roomast pärit. Roomlaste kalendril oli esialgu ainult 10 kuud ja aastat algasiwad nemad märtsi kuuga. See esimene kuu oli sõjajumalale Marsile pühendatud ja kandis tema nime — Marsi kuu „Martius“.

Teine kuu sai oma nime sellest, et tema jooksul „puu pungad puhkewad", lahti lööwad, sest ladinakeele tähendab puhkema, lahti lööma — aperire, sellest nimi „Aprilis". Kolmas kuu oli lillede jumalanale Mayale pühendatud, sellest nimi „Majus". Neljas kuu oli pea-jumalanale, Jupiteri abikaasale Junole, pühendatud ja kandis tema nime „Junius". Teisi kuusid loeti korda mööda: wiies kuu — Quintilis, kuues kuu — Sextilis, seitsmes kuu — Septembris, kaheksas kuu — Octobris, üheksas kuu — Nowembris, kümnes kuu — Decembris. Kui kuningas Numa Pompilius kalendrit parandada laskis, lisas tema weel kaks kuud juure. Ühte neist nimetas ta jumala Januse auks jaanuariks, teist sellel kuul pühitsetawate puhastamise pühade „februalia" järele weebruariks. Pärast poole nimetati wiies kuu „Quintilis" Julius Caesari auks juuli kuuks ja kuues kuu Sextilis keiser Oktavianuse Augustuse auks augusti kuuks.

§ 101. Julianuse kalender.

Niipalju kui meie praegu teame, oli esimene rahwas, kellel oma kalender ehk ajaarwamise süsteem oli, Babiloni rahwas.

Babiloni rahwas arwas oma aastaid kuu järele ja neil oli aastas 353—355 päewa. Et aga niisugune aasta tõsisest päikese aastast lahku läbeb, siis lisati aegajalt mõnele aastale 13-nes kuu juure. Babilonlaste käest läks kalender teiste rahwaste kaudu roomlaste kätte, kelle käest meie ta oleme saanud.

Et päikesel, kuul ja taewa tähtedel wäga suur mõju oli kõige Babiloni elu kohta, siis auustati neid jumalustena. Babiloni ja Kaldea jumalateenistus oli looduse, iseäranis tähtede kumardamine. Sellepärast oliwad Babiloni ja Kaldea preestrid targad tähetundjad ja agarad täheteaduse uurijad ja nende hoole all seisis ka kalender. Ka Roomas jäi kalendrite eest hoolitsemine preestrite — augurite — kätte. Et aga Rooma augurid täheteadusest liiga wähe hoolisiwad ja sagedaste ka omakasu pärast pettust tegiwad, siis tuliwad Rooma kalendris suured segadused ette, kuni Rooma riigi walitseja Julius Caesar Egiptuse tähetundjate juhatusel aastal 45 e. K. s. kalendri ära parandada laskis.

Et maakera oma ringjooksuks päikese ümber ligi 365 päewa ja 6 tundi tarwitab, aga elu tarwidus nõuab, et aasta algus päewa algusega ühte langeks, siis määrati hariliku ehk lihtaasta pikkus 365 päewa peale kindlaks. Et aga need 6 tundi mitte kaduma ei läheks ja nendest 4-ja aasta jooksul üks päew kogub, siis lisatakse see üks päew igale neljandamale aastale, ja nimelt weebruari kuule, millel siis 29 päewa on, juure. Selle pärast on iga neljas aasta 366 päewa pikk ja teda nimetatakse liigaastaks.

Seda kalendrit nimetatakse wanaks kalendriks ehk, Julius Caesari järele, Julianuse kalendriks. Julianuse kalender pandi Rooma riigis, mis sel ajal haritud ilma üle walitses, 45-al aastal e. K. s. maksma. Järgmised kolm aastat, aastad 44, 43 ja 42 e. K. s. loeti liht-aastateks. Nii saiwad liigaastateks aastad 41, 37, 33 j. n. e. ja ka see aasta, mis Jeesuse Kristuse sündimise aastaks loetakse. Nii sündis siis, et aastad 4, 8, 12 j. n. e., pärast Kris-

tuse sündimist, liigaastateks saiwad. Selle pärast, kui ühe aasta arw ennast jäänuseta 4-ga jagada laseb, siis on ta liigaasta. Näituseks: 1892, 1908 oliwad liigaastad, 1912, 1916, 1976 on jälle liigaastad, aga aastad 1875, 1882, 1907 oliwad lihtaastad.

§ 102. Gregorianuse kalender.

Meie elutalitused nõuawad, et meie ajaarwamine ja pühad aastaaegadega ja loodusega kokkukõlas oleks. Selleks peab meil wõimalikult õige kalender olema. Julianuse kalender ei ole aga mitte küllalt õige. Põhjus on selles, et maakera ei tarwita mitte täit 365 päewa 6 tundi omaks ringijooksuks päikese ümber, waid ainult 365 päewa 5 tundi 48 min. 46 sek. Sellepärast jääme meie, Julianuse kalendri järele aega arwates, aasta jooksul 11 min. 14 sek. ja 4-ja aasta jooksul 44 min. 56 sek. loodusest maha. Ütleme näituseks, et 1909. aasta algus päewa algusega ühte langes. Julianuse kalendri järele arwates peaks nelja aasta pärast aasta algus jälle päewa algusega ühte langema. See tähendab, kui 31-sel detsembril 1912 öösel kell 12 löönud on ja meie 1-st jaanuari 1913 kirjutama hakkame, siis peaks sel silmapilgul maakera oma 5-at ringreisi päikese ümber peale hakkama. Aga ei! Sel silmapilgul on maakera juba hea tüki omast wiiendamast ringreisist ära teinud, ja on juba peaaegu kolmweerand tundi uuel reisil. Rehkendame wälja! Meie arwame aasta peale 365 päewa 6 tundi; 4 aastat on sellega 4 × 365 päewa 6 tundi = 1461 päewa. 4-ks ringreisiks päikese ümber tarwitab maakera aga 4 korda 365 päewa 5 tundi 48 min. 46 sek., s. o. 1460 päewa 23 tundi 15 m. 4 sek. Sellepärast algab maakera oma wiiendat ringreisi 44 min. 56 sek. enne peale, kui meie 1. jaanuari 1913 arwama hakkame. Niiwiisi jääme meie 4-ja aasta jooksul loodusest 44 min. 56 sek. ehk 1-he aasta jooksul, nagu eelpool oli üteldud, 11 min. 14 sek. maha. 128 aasta jooksul jääme umbes 1 päew, 400 aasta jooksul — 3 päewa, 4000 aasta jooksul 31 päewa, 12000 aasta jooksul 3 kuud loodusest maha, nii et kui wäljas juba kewade kätte tulema hakkab, meie toas alles jõulusid pühitseme.

Sellest weast saadi pea aru ja kui Nikea koosolekul a. 325 p. K. ristiusu piiskopid Julianuse kalendri wastu wõtsiwad, siis parandasiwad nad ka tekkinud wea selle läbi ära, et nad kalendri 3 päewa edasi lükkasiwad, näit. 19-ma aprilli järele kohe 23. aprilli arwata käskisiwad, 20-mat, 21-st ja 22-st aprilli wahele jättes. Aga wea põhjust ei saatnud nad kõrwale. Seda tegi Rooma paawst Gregorius XIII a. 1582. Selle ajani olime juba umbes 10 päewa õigest arwamisest maha jäänud. Sellepärast käskis paawst Gregorius XIII kohe 10 päewa kalendrist wälja jätta ja peale 4. oktobrit kohe 15-at oktobrit arwata. Et enam niisugust wiga ei koguks, ja meie ajaga sammu pidada jõuaks,

käskis ta edaspidi iga 400 aasta jooksul 3 liigpäewa wälja jätta ja sellega 3 liigaastat lihtaastateks teha. Nimelt pidi 29. weebruar nende aastasadade wiimasel aastal wälja jääma, mille aastasadade arw ennast 4-ga jagada ei lase. Parandatud kalendrit nimetatakse uueks ehk Gregorianuse kalendriks. Selle kalendri wõtsiwad kõik Rooma-katoliku usulised riigid wastu, kuna Greeka-katoliku usulised riigid, Wenemaa, Greekamaa, Bulgaria, ja Serbia wana Julianuse kalendri juure jäiwad. Sellega kaswis aastal 1582 wahe uue ja wana kalendri wahel kohe 10 päewa peale. 1600 aasta oli liigaasta nii uue kui wana kalendri järele. 1700 aasta oli wana kalendri järele liigaasta, uue järele lihtaasta. Sellepärast kaswis 1700-al aastal wahe 11 päewa peale, 1800 aasta oli jällegi wana kalendri järele liigaasta, uue järele lihtaasta, ja wahe kaswis 12 päewa peale. Weel hiljuti, a. 1900 kaswis see wahe 13 päewa peale, sest see aasta oli Gregorianuse kalendri järele lihtaasta, Julianuse kalendri järele aga liigaasta.

L i s a. Olgu siin kohal ka näidatud, kuidas wana kalendri järele lihawõtte pühade kuupäewa wälja arwata. Jaga aasta arwu 19-ga ja jäänus nimeta a; jaga aasta arwu 4-ga ja jäänus nimetai b; jaga aastaarwu 7-ga ja jäänus nimeta c. Kaswata arwu **a** 19-ga, kaswatisele lisa 15 juure, summad jaga 30-ga ja jäänus nimeta d. Kaswata arwu **b** 2-ga, arwu **c** 4-ga, arwu **d** 6-ga, saadud kaswatised ja arw 6 arwa kokku, summad jaga 7-ga ja jäänus nimeta e. Lihawõtte esimene püha on siis 22-ne + d + e märts, ehk kui see arw suurem on kui 31, d + e — 9 april. I. Näitus 1909 1909 : 19 = 100 (jäänus **a** = 9); 1909 : 4 = 477 (jäänus **b** = 1). 1909:7=272 (jäänus c=5). 19. a. + 15=19.9+15=186; 186:30=6 (jäänus **d** = 6); 2 b + 4 c + 6 d = 2. 1 + 4. 5 + 6. 6 + 6 = 64. 64 : 7 = 9 (jäänus e = 1). Lihawõtte esimene püha oli 22-ne + d + e = 22-ne + 6 + 1 = **29. märts.** II. Näitus. 1910. 1) 1910 : 19 = 100 (jäänus **a** = **10**) 2) 1910 : 4 = 477 (jäänus **b** = 2) 3) 1910 : 7 = 272 (jäänus **c** = 6) 4) [19a + 15] : 30 = 205 : 30 = 6 jäänus d = 25) 5) (2 b + 4 c + 6 d + 6) : 7 = (2 . 2 + 4 . 6 + (6 . 25 + 6) : 7 = 184 : 7 (jäänus e = 2).

Lihawõtte püha on 25 + 2 — 9-al = 18-al aprillil.

Selle juhi on Saksa matematikus Gauss wälja mõtelnud.

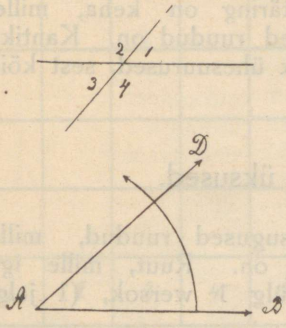
Pinna ja ruumi mõõtmine.

§ 103. Ettewalmistawad teated.

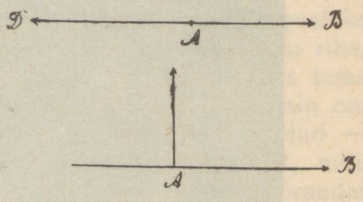
Kui meie õigetjoont mõlemale poole otsata pikendatult enestele ette kujutame, siis nimetame teda o t s a t a õ g e w j o o n e k s ehk lihtsalt õ g e w j o o n e k s. Kui õgewjoonele ühelt poolt piir on pandud ja teda teisele poole wõib pikendada, siis nime-

tame niisugust õgewjoont kiireks. Tema piiri nimetame otsa punktiks. Kui õgewjoonele mõlemalt poolt piir on pandud, siis nimetame seda õgewjoone õgewjoone jupiks (отрѣзокъ прямой — Strecke, Abschnitt).

Kui kaks õgewjoont üksteisest risti üle lähewad, siis sünnitawad nad neli nurka, nagu kõrwalseisaw joonis näitab. Nurk on iseseisaw suurus. Nurga wõime ka teisel wiisil saada. Wõtame ühe kiire. Tema peale paneme teise kiire nii, et mõlemate kiirte otsa punktid ühte langewad ja teine kiir ise ka esimese kiire peale langeb. Siis hakkame wiimast kiirt otsapunkti ümber keerama. Selle läbi sünnib nurk. Teise kiire mitmesugused seisukohad sünnitawad esimese kiirega mitmesuurused nurgad. Kiirte ühine otsapunkt nimetatakse nurgatipuks ja kiiresid endid nimetatakse nurga harudeks. Kui meie teist kiirt (sirkli abil) nii kaugele keerame, et tema esimese kiirega wastassihis on, temaga otsata õgewjoone sünnitab, siis saame sirge nurga (gestreckter Winkel) BAD.



Sirge nurga pool nimetatakse täisnurgaks (прямой уголъ — rechter Winkel) EAB. Täisnurga harudest räägitakse, et nad wastastikku püsti seisawad. Nurgad, mis täisnurgast suuremad on, nimetatakse tõmpnurkadeks, mis täisnurgast wähemad on, terawnurkadeks.



Täisnurk jaotatakse 90-sse jaosse, iga jagu nimetatakse kraadiks.

1 täisnurk = 90 kraadi (90°)
1 kraad = 60 minutit (60′)
1 minut = 60 sekundit (60″).

Tasapinna osa, mis igalt poolt õgewjoontega ümberpiiratud on, nimetatakse hulknurgaks. Õgewjoonte juppisid, mis hulknurgal piirideks on, nimetatakse hulknurga külgedeks. Kui hulknurgal 4 külge, sellega ka 4 nurka on, siis nimetatakse teda nelinurgaks. Kui nelinurgal kõik nurgad täisnurgad on (90° suured) siis nimetatakse niisugust nelinurka täisnelinurgaks. Niisuguse nelinurga wastasküljed on ühepikkused. Kui täisnelinurgal kõik küljed ühepikkused on, siis nimetatakse teda ruuduks.

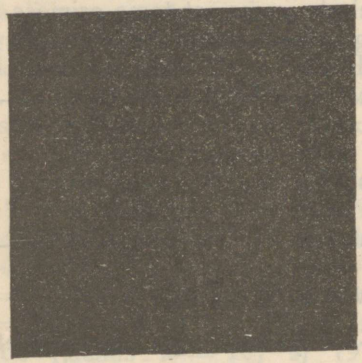
Täisnelinurgal on 2 mõõdangut (измѣреніе): pikkus ja laius (ehk alus ja kõrgus). Ruudul on mõlemad mõõdangud ühesuurused.

Neljakandiline tulp on keha, millel 4 tasast külgtahku ja 2 tasast otstahku on, mis kõik täisnelinurgad. Neljakandilisel tulbal on 3 mõõdangut: pikkus, laius, kõrgus. Neljakandilise tulba mõõdanguteks wõetakse tema kolm serwa, mis kõik ühest tipust wälja lähewad. Neljakandilise tulba mõõdanguid mõõdetakse ühest tema nurgatipust wäljaminewaid serwasid mööda.

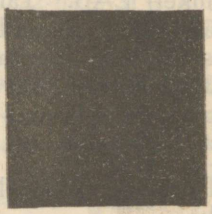
Kantik, kuubik, (kuubus), täring on keha, millel 6 tasast tahku on ja mis kõik ühesuurused ruudud on. Kantiku mõõdangud pikkus, laius, kõrgus on kõik ühesuurused, sest kõik kantiku serwad on ühesuurused.

§ 104. Pinna mõõtude üksused.

Pinna mõõtude üksusteks on niisugused ruudud, mille küljed pikkuse üksused (joonüksused) on. Ruut, mille iga külg 1 toll on, on ruuttoll; ruut, mille külg 1 wersok, (1 jalg,



1 ruutwersok.



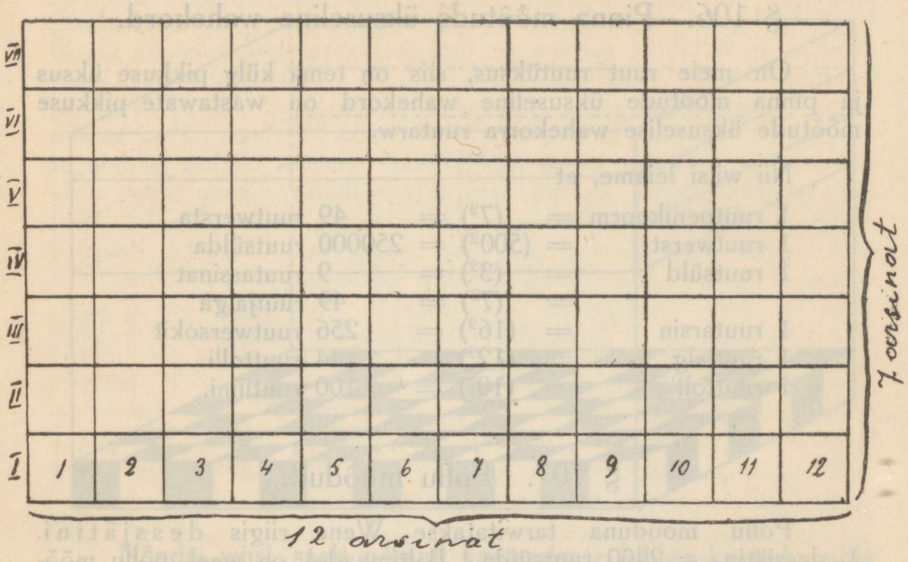
1 ruuttoll.

1 süld, 1 werst) on, on ruutwersok, (ruutjalg, ruutsüld, ruutwerst). Üleüldise nimega nimetame meie neid ruutüksusteks.

§ 105. Täisnelinurga ja ruudu wäljasuuruse mõõtmine.

Kui meie mõnda pikkust mõõta tahame, siis peame mõõduüksust tegelikult mõõdetawa pikkuse sisse mahutama. Wäljasuuruse mõõtmiseks ei ole aga mitte tarwis mõõdetawat pinda ruutüksusega katma hakata, waid meie leiame otsitawa wäljasuuruse kergemalt.

Näitus. Toa pikkus on 12 arsinat ja laius 7 arsinat. Kui palju maksab põranda wärwimine, kui maaler iga ruutarsina pealt 5 kop. wõtab? Mitu ruutarsinat on põrand suur?



Jaotame (mõttes) põranda tema pikkust mööda niisugusteks ribadeks, et iga riba laius 1 arsin on. Siis saame nii mitu riba, mitu arsinat tuba lai on, s. o. 7 riba. Iga riba jaotame tema pikkust mööda ruutudeks nii, et iga ruudu pikkus 1 arsin on. Et ruudu laius juba isegi 1 arsin on, siis on saadud ruudud — ruutarsinad. Sellepärast on igas ribas nii mitu ruutarsinat, mitu joonarsinat tuba pikk on, s. o. 12 ruutarsinat. Terwes põrandas on 7 riba, sellepärast on temas 7 korda 12 ruutarsinat = 12 ruutarsinat × 7 = (12 × 7) ruutarsinat = 84 ruutarsinat. Siin näeme, et kui meie toa pikkust ja laiust arsinaga, toa põranda pinnasuurust wastawa ruutüksusega, s. o. ruutarsinaga mõõdame, siis on 12 ja 7 toa pikkuse ja laiuse mõõtarwud, 84 = 12 × 7 on põranda pinnasuuruse mõõtarw.

Sellest järgneb: *Täisnelinurga pinnasuuruse mõõtarwu leiame, kui meie tema pikkuse ja laiuse mõõtarwusid üksteisega kaswatame.*

Tahame teada saada, kui palju niisuguse põranda wärwimine maksma tuleb, kui maalder iga ruutarsina pealt 5 kop. wõtab, siis peame 5 kopikat 84-ga kaswatama. 5 kop. × 84 = 420 kop.

Et ruudu pikkus ja laius ühesuurused on, siis saame meie ruudu pinnasuuruse mõõtarwu otsimisel kahe ühesuuruse arwu kaswatise, mida teiseks astmeks ehk ruutarwuks nimetatakse.

Sellest järgneb: *Ruudu pinnasuuruse mõõtarw on tema külje mõõtarwu ruutarw.*

§ 106. Pinna mõõtude üksuseline wahekord.

On meie ruut ruutüksus, siis on tema külg pikkuse üksus ja pinna mõõtude üksuseline wahekord on wastawate pikkuse mõõtude üksuselise wahekorra ruutarw.

Nii wiisi leiame, et

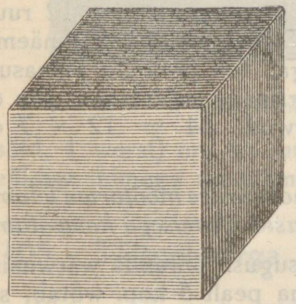
1 ruutpenikoorm	=	(7^2) =	49 ruutwersta
1 ruutwerst	=	(500^2) =	250000 ruutsülda
1 ruutsüld	=	(3^2) =	9 ruutarsinat
	=	(7^2) =	49 ruutjalga
1 ruutarsin	=	(16^2) =	256 ruutwersokit
1 ruutjalg	=	(12^2) =	144 ruuttolli
1 ruuttoll	=	(10^2) =	100 ruutliini.

§ 107. Põllu mõõdud.

Põllu mõõduna tarwitatakse Wene riigis dessjätini. 1 dessjätin = 2400 ruutsülda. Baltimaadel on weel põllu mõõduna tarwitusel wakamaa. 1 dessjätin = 3 wakamaad.

§ 108. Ruumi mõõtude üksused.

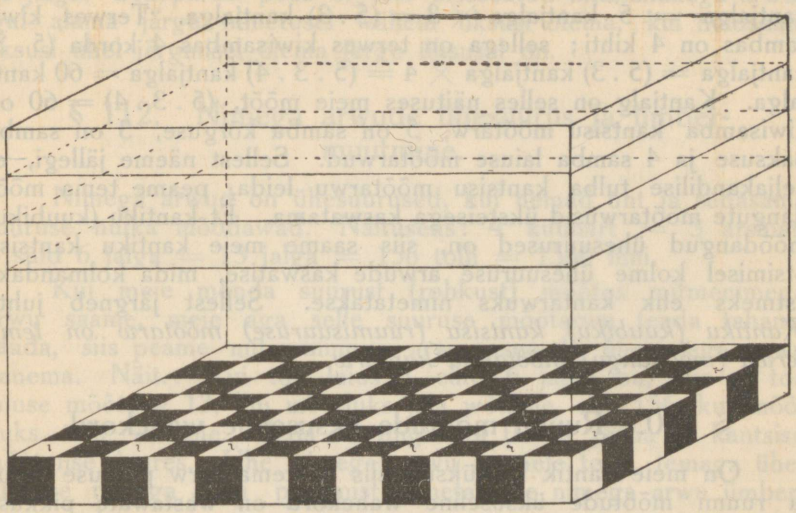
Ruumi mõõtude üksusteks on niisugused kantikud, millede serwad pikkuse üksused on. Niisuguste kantikute nimetused wastawad oma serwade nimetustele, näit. on kantiku serw üks toll, siis nimetatakse kantikut kanttolliks; on kantiku serw üks jalg ehk 1 süld, siis nimetatakse kantikut kantjalaks ehk kantsüllaks. Üleüldise nimega nimetatakse neid kantikuid kantüksusteks.



Kanttolli suurus.

§ 109. Neljakandilise tulba ja kantiku kantsisu leidmine.

1. Näitus: Toa pikkus on 12 arsinat, laius 7 arsinat ja kõrgus 8 arsinat. Mitu kantarsinat õhku on toas? Et toa pikkus 12 arsinat ja laius 7 arsinat on, siis wõime toa põranda (12 . 7) = 84-ks ruutarsinaks jagada; et kantarsinal iga tahk ruutarsin on, siis mahub iga põranda ruutarsina peale üks kantarsin ja põranda peale mahub nii palju kantarsinaid, mitu ruutarsinat põranda pind mõõdab, s. o. (12 . 7) kantarsinat.



Nõnda wiisi saab põrand kantarsinate kihiga kaetud, mille kõrgus 1 arsin on.

Et kihi kõrgus 1 arsin on, siis wõib niisuguseid kihtisid toa ruumisse nii palju mahutada, mitu arsinat tuba kõrge on, s. o. 8 kihti.

Igas kihis on (12 . 7) kantarsinat, kihtisid mahub toa ruumisse 8, sellega mahub toa ruumisse 8 korda (12 . 7) kantarsinat = (12.7.8) kantarsinat = 672 kantarsinat õhku. Siin näeme, et kui meie mõõduks kantarsina wõtame, siis on 12 . 7 . 8 = 672 meie toa kantsisu mõõtarw, kus juures 12 pikkuse mõõtarw, 7 laiuse mõõtarw ja 8 kõrguse mõõtarw on.

Sellest järgneb juht: *Neljakandilise tulba kantsisu mõõtarw on tema mõõdangute mõõtarwude kaswatis.*

2. Näitus: Neljakandiline kiwisammas on 5 jalga kõrge, 4 jalga lai ja 3 jalga paks. Kui suur on selle kiwisamba kantsisu?

Et neljakandilise tulba kantsisu leida, peame tema pikkuse, laiuse ja kõrguse mõõtarwusid üksteisega kaswatama.

Lõikame selle kiwisamba tema laiust mööda kihtideks, nii et iga kihi laius 1 jalg on. Siis saame nii mitu kihti, mitu jalga kiwisammas lai on, s. o. 4 kihti. Iga kihi lõikame tema paksust mööda tulpadeks, nii et iga tulp 1 jalg paks on, laius ongi juba 1 jalg. Siis saame igas kihis nii mitu tulpa, mitu jalga kiwi paks on, s. o. 3 tulpa. Iga tulba lõikame kantikuteks, millede kõrgus 1 jalg on, paksus ja laius on juba kumbki 1 jalg. Iga niisugune kantik on 1 kantjalg, sest et tema mõõdangud igaüks 1 jalg on. Niisuguseid kantjalgasid on igas tulbas nii mitu, mitu jalga kiwisammas kõrge on, s. o. 5 kantjalga. Igas kihis on 3 tulpa; sellega on igas kihis 3 korda 5

kantjalga = 5 kantjalga × 3 = (5 . 3) kantjalga. Terwes kiwisambas on 4 kihti; sellega on terwes kiwisambas 4 korda (5 . 3) kantjalga = (5 . 3) kantjalga × 4 = (5 . 3 . 4) kantjalga = 60 kantjalga. Kantjalg on selles näituses meie mõõt, (5 . 3 . 4) = 60 on kiwisamba kantsisu mõõtarw, 5 on samba kõrguse, 3 on samba paksuse ja 4 samba laiuse mõõtarwud. Sellest näeme jällegi, et neljakandilise tulba kantsisu mõõtarwu leida, peame tema mõõdangute mõõtarwusid üksteisega kaswatama. Et kantiku (kuubiku) mõõdangud ühesuurused on, siis saame meie kantiku kantsisu otsimisel kolme ühesuuruse arwude kaswatise, mida kolmandaks astmeks ehk kantarwuks nimetatakse. Sellest järgneb juht: *Kantiku (kuubiku) kantsisu (ruumisuuruse) mõõtarw on tema serwa (mõõdangu) mõõtarwu kantarw.*

§ 110. Ruumi mõõtude üksuseline wahekord.

On meie kantik kantüksus, siis on tema serw pikkuse üksus ja ruumi mõõtude üksuseline wahekord on wastawate pikkuse mõõtude üksuselise wahekorra kantarw (kolmas aste). Nii wiisi näeme, et

1 kantsüld = 3^3 ehk 27 kantarsinat
1 kantarsin = 16^3 ehk 4096 kantwersokit
1 kantsüld = 7^3 ehk 343 kantjalga
1 kantjalg = 12^3 ehk 1728 kanttolli
1 kanttoll = 10^3 ehk 1000 kantliini.

Kantpenikoorm ja kantwerst ei tule harilikus elus kunagi ette.

Kaheteistkümnes peatükk: Nimega arwude ümbermuutmine.

§ 111. Nimega arwude jaotus.

Suuruste mõõtmise juures tarwitame mõnikord ühteainust mõõtu, mõnikord mitut mõõtu. Näitus: Kui meie toa pikkust mõõtes sülda tarwitame ja leiame, et süld toa pikkusesse just 3 korda mahub, siis on toa pikkus 3 sülda; kui meie toa laiust süllaga mõõtes leiame, et süld toa laiusesse täit 2-ht korda ei mahu, aga ükskord mahutades jääb jäänus üle, siis mõõdame jäänust wäiksema mõõduga, jalaga, ja leiame, et jalg jäänusesse 6 korda mahub. Nõnda leiame, et toa pikkus on 3 sülda ja laius — 1 süld 6 jalga.

Arw, mille ühe mõõdu nimetus ette tuleb, nimetatakse ü h e n i m e g a a r w u k s (3 sülda), milles mitme mõõdu nimetused ette tulewad — m i t m e n i m e g a a r w u k s (1 süld 6 jalga). Awalik on, et õige mõõtmise juures meie niisuguseid mitmenimega arwusid ei saa, milles mõnel alama järgu nimetusel enam üksusi on, kui neidsamu üksusi ühel järgmise ülema järgu üksusel on, näit. 2 sülda

10 jalga. Sellepärast peab õigeste ülesseatud mitmenimega arwus igal alama järgu nimetusel wähem üksusi olema, kui neidsamu üksusi ühel järgmisel ülema järgu üksusel on.

§ 112. Nimega arwude ühesuurus ja ümbermuutmine.

Nimega arwud on ühesuurused, kui nemad üht ja sedasama suuruse hulka mõõdawad. Näituseks: 4 küünart = 3 arsinat, 1 süld 6 jalga = 13 jalga = 156 tolli = 1560 liini.

Kui meie mõnda suurust (rohkust) mõõtes mitmenimega arwu saame, meie aga selle suuruse mõõtarwu teada tahame saada, siis peame mitmenimega arwu asemele ühenimega arwu panema. Näit.: Kui toa laius 1 süld 6 jalga on, siis on toa laiuse mõõtarw 13, kui mõõduks jala wõtame, ehk 156, kui mõõduks tolli wõtame. Seda on tingimata tarwis pinna ja kantsisu mõõtmise juures. Ühe nimega arwu asemele teise, temaga ühesuuruse nimega arwu panemist nimetatakse nimega arwu ümbermuutmiseks.

Nimega arwude ümbermuutmist ei loeta tehete hulka; ta ei ole muud, kui nimega arwule teisesuguse kuju andmine ehk juba mõõdetud suuruse uueste mõõtmine. On kahte sugu ümbermuutmist olemas: alandamine (laotamine) ja ülendamine (tarimine).

§ 113. Alandamine (laotamine).

Alandamine (laotamine = раздробленіе) on suuremate mõõtude asemele wäiksemate mõõtude panemine.

1. Näitus: Mitu minutit on 3-s nädalas?

Wäljaarwamine: 1-s nädalas on 7 päewa, 3-s nädalas on 3 korda 7 päewa = 7 päewa × 3 = 21 päewa; 1-s päewas on 24 tundi, 21-s päewas on 21 korda 24 tundi = 24 tundi × 21 = 504 tundi; 1 tunnis on 60 minutit, 504-s tunnis on 504 korda 60 minutit = 60 min. × 504 = 30240 min.

Tehe rakendatakse nii:

$$3 \text{ nädalat} = \frac{7 \text{ päewa} \times 3}{21 \text{ päewa}} = \frac{24 \text{ tundi} \times 21}{24} = \frac{60 \text{ minutit} \times 504}{30240 \text{ minutit.}}$$

48

504 tundi.

2. Näitus: Alanda tollideks 8 wersta 237 sülda 4 jalga.

Wäljaarwamine: 1-s werstas on 500 sülda, 8-s werstas on 8 korda 500 sülda = 500 sülda × 8 = 4000 sülda; peale selle on meil weel 237 sülda, see teeb kokku 4237 sülda. 1-s süllas on 7 jalga, 4237 süllas on 4237 korda 7 jalga = 7 jalga × 4237 = 29659 jalga; peale selle on meil weel 4 jalga, see teeb

kokku 29663 jalga. 1-s jalas on 12 tolli, 29663 jalas on 29663 korda 12 tolli = 12 tolli × 29663 = 355956 tolli.

Sellega on **8 wersta 237 sülda 4 jalga = 355956 tolli.**

Tehe rakendatakse nii:

8 wersta	237 sülda	4 jalga
500 sülda	7 jalga	12 tolli
× 8	× 4237	× 29663
4000	29659	+ 59326
+ 237	+ 4	29663
4237 sülda	29663 jalga	355956 tolli.

Neist näitustest ilmub, et alandamine kaswatamise abil toime saadetakse. Alandamise abil saame mitmenimega arwust ühenimega arwu.

T e i n e a r u t a m i s e w i i s a l a n d a m i s e j u u r e s. Alanda tollideks 8 wersta 237 sülda 4 jalga. Süld on werstast 500 korda wähem, sellepärast on 8 werstas süldasid 500 korda rohkem ja 8 wersta = (8 . 500 sülda) = 4000 sülda. Peale selle on meil weel 237 sülda, sellega on 8 wersta 237 sülda = (8 . 500 sülda) + 237 sülda = 4237 sülda.

Jalg on süllast 7 korda wähem, sellepärast on 4237 süllas jalgasid 7 korda rohkem; 4237 sülda = (4237 . 7) jalga = 29659 jalga. Peale selle on meil weel 4 jalga, kõiges kokku on 8 wersta 237 sülda 4 jalga = 29663 jalga.

Toll on jalast 12 korda wähem, sellepärast on 29663 jalas tollisid 12 korda rohkem. 29663 jalga = (29663 . 12) tolli = 355956 tolli.

Tehet wõime nii rakendada:

8 wersta 237 sülda 4 jalga = (8 . 500) sülda + 237 sülda 4 jalga =

4000
\+ 237
4237 sülda

= (4237 . 7) jalga + 4 jalga = (29663 . 12) tolli

29659 | 59326
\+ 4 | + 29663
29663 jalga | 355956 tolli

Ehk nii:

8 wersta 237 sülda 4 jalga
× 500
4000 sülda 8 werstas
\+ 237
4237 sülda 8 werstas 237 süllas
× 7
29659 jalga 8 werstas 237 süllas

26659 jalga 8 werstas 237 süllas
\+ 4
29663 jalga 8 werstas 237 süllas 4 jalas
× 12
59326
\+ 29663
355956 tolli = 8 wersta 237 sülda 4 jalga.

Sellest näeme, et ülema nimelist mõõtarwu alama nimeliseks laotada, peame teda wastawa üksuselise wahekorraga kaswatama. Kui antud arw mitmenimeline on, siis peab saadud kaswatisele samanimeline mõõtarw juure arwatama.

§ 114. Ülendamine (tarimine).

Ülendamine (tarimine = превращение) on wäiksemate mõõtude asemele suuremate mõõtude panemine.

1. Näitus: 11520 solotnikku suuremates mõõtudes awaldada!

Wäljaarwamine: 3 solotnikku annawad 1 loodi, 11520 sol. annawad nii miitu looti, mitu korda 3 sol. 11520 sol. sisse mahub. 11520 sol. = 11520 sol. : 3 sol. = 3840 (loodi).

32 loodi annawad 1 naela, 3840 loodi annawad nii mitu naela, mitu korda 32 loodi 3840 loodi sisse mahub. 3840 loodi : 32 loodi = 120 (naela).

40 naela annawad 1 puuda, 120 naela annawad nii mitu puuda, mitu korda 40 naela 120 naela sisse mahub. 120 naela : 40 naela = 3 (puuda).

Järjelikult on 11520 solotniku = 3 puuda.

Rakendus on järgmine:

11520 sol.	3 sol.		
9	3840 (looti)	32 (looti)	
25	32	120 (naela)	40 (naela)
24	64	120	3 (puuda).
12	„ „	„	
„ „			

11520 sol. = 3 puuda.

2 Näitus: Ütle 392440 sekundi suuremates mõõtudes wälja!

Wäljaarwamine: 60 sekundi annawad 1 minuti; 392440 sek. annawad nii mitu minutit, mitu korda 60 sek. 392440 sek. mahub. 392440 sek. : 60 sek. = 6540 (minutit, jäänus 40 sek.).

60 minutit annawad 1 tunni; 6540 minutit annawad nii mitu tundi, mitu korda 60 min. 6540 min. sisse mahub. 6540 min. : 60 min. = 109 (tundi).

24 tundi annawad 1 päewa, 109 tundi annawad nii mitu päewa, mitu korda 24 tundi 109 tunni sisse mahuwad. 109 tundi: 24 tundi = 4 (päewa, jäänus **13** tundi).

Sellega on **392440 sek. = 4 päewa 13 tundi 40 sek.**

Rakendus on järgmine:

392440 sek.	60 sek.		
360	6540 (min.)	60 (min.)	
324	540	109 (tundi)	24 (tundi)
300	540	96	**4 (päewa)**
244	**0 min.**	**13 tundi.**	
240			
40 sek.			

392440 sek. = 4 päewa 13 tundi — min. 40 sek.

Neist näitustest ilmub, et ülendamine jagamise (mahutamise) abil toime saadetakse. Ülendamise juures saame meie ühenimega arwust mõni kord mitmenimega arwu, mõnikord ühenimega arwu.

Kolmeteistkümnes peatükk: Tehted nimega arwudega.

§ 115. Kokkuarwamine.

Awalik on, et meie ainult ühehõimulisi suurusi kokkuarwata wõime: raskust raskusega, pikkust pikkusega, aega ajaga.

1. Näitus. Arwa kokku: 2 puuda 13 naela 10 loodi, 1 puud 16 naela 8 loodi, 2 puuda 8 naela 12 loodi.

Kirjutame ühenimelised arwud ühenimeliste alla.

1) Arwame loodid (10 + 8 + 12) kokku, saame 30 loodi. 2) Arwame naelad (13+16+8) kokku, saame 37 naela. 3) Arwame puudad (2+1+2) kokku, saame 5 puuda.

2	puuda	13	naela	10	loodi.
1	„	16	„	8	„
2	„	8	„	12	„

Järjelikult on otsitaw summa: 5 puuda 37 naela 30 loodi.

2. Näitus. Arwa kokku: 407 sülda 6 jalga 7 tolli, 394 sülda 9 tolli, 243 sülda 5 jalga 8 tolli ja 25 sülda.

Kui meie siin kokkuarwatawaid üksteise alla kirjutama hakkame, siis näeme, et teises kokkuarwatawas puuduwad jalad ja neljandamas — jalad ja tollid; sellepärast kirjutame nende kohtadele nullid.

		2			
407	sülda	3	jalga	7	tolli
394	„	0	„	9	„
243	„	1	„	8	„
25	„	0	„	0	„
1069	sülda	6	jalga	24	tolli

1000 s. = 2 wersta 24 t. = 2 j.

2 wersta 69 sülda 6 jalga 0 tolli.

Kokkuarwamist hakkame meie kõige wäiksematest mõõtudest peale. (7+9+8) tolli = 24 tolli. Ühes jalas on aga 12 tolli, meil on aga tollisid enam; sellepärast peame tollid jalgadeks ülendama; saame 2 jalga, mida meie jalgadele juure arwame; et kergem meelespidada oleks, kirjutame need 2 jalga jalgade kohale üles. Jalgadeks ülendatud 24 tolli arwame summast 24-st tollist maha, ei jää ühtegi tolli järele. Arwame jalad kokku. (2 + 3 + 0 + 1 + 0) jalga. Ühes süllas on 7 jalga, meil on aga jalgasid wähem; sellepärast meie siit süldasid ei saa ja 6 jalga jääwad muutmata. Arwame süllad kokku. (407 + 394 + 243 + 25) sülda = 1069 sülda. Ühes werstas on 500 sülda, meil on süldasid enam; sellepärast peame süllad werstadeks ülendama; saame 2 wersta. Werstadeks ülendatud 1000 sülda arwame süldade summast 1069 maha, jääb 69 sülda järele. Nüüd tõmbame teise joone alla, mille alla meie lõpuliku summa kirjutame: 2 wersta 69 sülda 6 jalga. Rakendus on eespool näha. Kui arwud wäiksed ja ülendamine kerge teha on, siis wõime ülendamise ka peast teha ja lõpuliku summa kohe esimese joone alla kirjutada. On aga arwud suured ja ülendamine peast teha raske, siis kirjutame kokkuarwatawad laiemalt ja teeme ülendamise täiesti kirjalikult. Tehe rakendatakse nõnda:

2		3					
1906	kantsülda	14	kantarsinat			2541	kantwersokit
1882	„	6	„			3784	„
321	„	8	„			309	„
0	„	25	„			46	„
599	„	0	„			3908	„
4700	„	19	„			3000	„
9410	kantsülda	75	kantars.	27	kantars.	13588	4096 kantw.
		—54	„	2	(kantsüld)	—12288	3 (kantars.)
9410	kantsülda	21	kantarsinat			1300	kantwersokit

Neist näitustest näeme, et mitmenimega arwude kokkuarwamise juures meie kokkuarwama ja ülendama peame.

§ 116. Mahaarwamine.

Ka maha arwata wõime, nagu kokku arwatagi, ainult ühehõimulisi suurusi. Nagu kokkuarwamise juures, nii kirjutame ka mahaarwamise juures samanimelised arwud samanimeliste alla.

1. Näitus: 7 riisi 18 raamatut 12 poognat
−4 „ 0 „ 8 „
3 riisi 18 raamatut 4 poognat

Mahaarwamist hakkame ka alamatest mõõtudest peale. 12 poognat −8 poognat = 4 poognat; 18 raamatut −0 raamatut = 18 raamatut; 7 riisi −4 riisi = 3 riisi. Rakendus on ülewalpool näha.

Kui wähendatawas mõne mõõdu arwusid sugugi ei ole, ehk neid wähem on, kui samanimelisi arwusid mahaarwatawas, siis peame järgmise ülema mõõdu arwudest ühe laenama ja teda alama järgu nimeliseks alandama, nagu meie seda ka nimeta arwude mahaarwamise juures tegime.

2. Näitus: 4 nädalat 7 0 päewa 16 tundi 60 32 minutit
7 9·2
−2 „ 5 „ 9 „ 47 „
1 nädal 2 päewa 6 tundi 45 minutit.

Meie arutame nii: 47 minutit 32 minutist maha arwata meie ei saa, sellepärast laename 1 tunni, 1 tund on 60 minutit, meil oli 32 minutit, kokku 92 minutit. 92 min. −47 min. = 45 minutit. Tundisid ei ole meil enam 16, waid ainult 15. 15 tundi −9 tundi = 6 tundi. Wähendatawas päewi ei olegi; sellepärast laename 1 nädala, saame 7 päewa; 7 päewa −5 päewa = 2 päewa.

Nädalaid jäi meil 3. 3 näd. −2 näd. = 1 nädal.

Jääb järele 1 nädal 2 päewa 6 tundi 45 min.

3. Näitus:

30 wersta 400 sülla ja 16 wersta 275 sülla 1 ars. 9 wers. waheng leida!

	3	16
30 wersta 400 sülda	0	0
−16 ——— 275 ——	1 arsin	9 wersokit
14 wersta 124 sülda	1 arsin	7 wersokit.

Et wähendatawas ei wersokid ega arsinaid ei ole, siis laename 400-st süllast 1 sülla, ja alandame tema arsinateks, saame 3 arsinat; 3-st arsinast laename 1 arsina ja alandame wersokiteks, saame 16 wersokit. 16 wers. −9 wers. = 7 wers.; 2 ars. −1 ars. = 1 ars.; 399 sülda −275 sülda = 124 sülda; 30 wersta −16 wersta = 14 wersta. Jääb järele 14 wersta 124 sülda 1 ars. 7 wersokit.

Neist näitustest näeme, et mitmenimega arwude mahaarwamise juures meie alandama ja maha arwama peame.

§ 117. Kaswatamine.

Mitmenimega arw wõib ainult kaswatatawaks olla, kaswataja peab nimeta arw olema. Sellepärast wõime meie ainult mitmenimega arwu kaswatamisest nimeta arwuga rääkida. Et kaswata-

mine lühendatud kokkuarwamine on, siis kaswatame iga järgu mõõtusid kaswatajaga ja saadud kaswatises ülendame alamate järkude mõõdud ülemate järkude mõõtudeks, nagu meie seda kokkuarwamise juures tegime.

Kirjutame kaswatatawa laiemalt, sest et meile ülendamise juures ruumi tarwis läheb.

1. Näitus:

4 päewa	19 tundi	16 min.	43 sek.
			× 6
24 päewa	114 tundi	96 min.	258 sek.
+ 4 päewa	+ 1 tund	+ 4 min.	—240 sek.=4m.
28 päewa	115 tundi	100 min.	
— 28 päewa=4näd.	96 t. = 4 p.	—60 min.	= 1 t.
4 näd. 0 päewa	**19 tundi**	**40 min.**	**18 sek.**

2. Näitus:

3 puuda	23 naela	0 loodi	2 solotn.
			× 82
246 puuda	46 naela	~~0 loodi~~	164 sol. | 3 s.
+ 47 „	184	54 „	14 | 54 (l.)
293 puuda	1886 naela	54 loodi | 32 l.	**2 sol.**
	+ 1 „ | 40 naela	**22 l.** | 1 (n.)	
	1887 naela | 47 (p.)		
	287		
	7 naela		
293 puuda	**7 naela**	**22 loodi**	**2 sol.**

§ 118. Jagamine.

Mitmenimega arwude jagamise juures oleme sunnitud jaotamise ja mahutamise wahel kindlat wahet tegema. Jaotamise juures on meil jagajaks nimeta arw, mahutamise juures — nimega arw. Sellepärast waatame 1) kuidas mitmenimega arwu nimeta arwuga jagada; 2) kuidas nimega arwu nimega arwuga jagada.

§ 119. Jaotamine.

1. Näitus: 376 sülda 2 jalga 9 tolli jaga 15-ga!

Jagame 376 sülda 15-ga, saame 25 sülda ja 1 süld jääb jagamata. Alandame 1 sülla jalgadeks, saame 7 jalga; siia juure arwame jagatawast 2 jalga, saame 9 jalga; 9 jalga 15-ga jagades

meie jalgasid ei saa ja kõik 9 jalga jääwad jagamata. Alandame need 9 jalga tollideks, saame 108 tolli, siia juure arwame jagatawast 9 tolli, saame 117 tolli; 117 tolli 15-ga jagades saame 7 tolli ja 12 tolli jääwad jagamata. 12 tolli alandame liinideks, saame 120 liini; 120 liini 15-ga jagades saame 8 liini. Sellega on: 376 sülda 2 jalga 9 tolli : 15 = 25 sülda 7 tolli 8 liini.

Tehet wõib nii rakendada:

376 sülda 2 jalga 9 tolli | 15

30 + 7 „ + 108 120 l. | 25 s. 0 j. 7 t. 8 l.

76 9×12 t.=108 t. 117 t. −120 „

75 − 105 „ „

1×7 j.=7 j. 12×10 l.=120 l.

(120 „)

2. Näitus: 7 puuda : 24 = 11 naela 21 loodi 1 solotnik

× 40

280 (naela)

− 24

40

− 24

16 (naela)

× 32

32

+ 48

512 (loodi)

− 48

32

− 24

8 (loodi)

× 3

24 solotn.)

− 24

„„

Neist näitustest selgub, et nimega arwude jagamise juures meie nimeta arwuga jagama ja siis alandama peame.

§ 120. Mahutamine.

1. Näitus: 11 päewa 17 tundi 38 min. 17 sek. jagada 3 tunni 51 min. 29 sekundiga!

Jagajas, kui ka jagatawas, on sekundid kõige wäiksemad mõõdud, sellepärast alandame niihästi jagaja kui ka jagatawa sekundideks ja saadud arwude kallal paneme jagamise toime. Tehte wõime nii rakendada:

11 päewa	17 tundi	38 min.	17 sek.	3 t. 51 min. 29 s. = 73
24 t.	60 min.		60 sek.	60 min. 60 sek.
× 11	×281		×16898 „	×3 ×231 sek.
264 t.	16860 m.		1073880 sek.	180 min. 13860 sek.
+ 17 „	+ 38 „		+ 17	+51 +29
281 t.	16898 m.		1083897	231 min. 13889 sek.
			—97223	73
			41677	
			41677	
			„ „	

Jagatawa alla kirjutame jagatawa alandamise, jagaja alla — jagaja alandamise; saadud lõpuarwele tõmbame kaks joont alla, et nad teiste arwude seast wälja paistawad ja siis jagame neid, nagu ühenimega ehk nimeta arwusid. Jaondi kirjutamiseks teeme antud jagaja taha ühtlusemärgi ja kirjutame jaondi ühtlusemärgi taha, ehk tõmbame alandatud jagaja alla joone ja kirjutame jaondi selle joone alla.

Sellest näitusest selgub, et mitmenimega arwu jagamise juures meie mitmenimega arwuga alandama ja siis jagama peame.

2. Näitus: 17 naela 10 loodi 1 sol. 45 dooli jagada 19 loodi 2 solotnikuga!

Jagajas on solotnikud kõige wäiksemad mõõdud, jagatawas aga doolid; et solotnikud doolide sisse ei mahu, siis peawad jagatawa 45 dooli jäänusesse jääma. Sellepärast alandame jagaja kui ka jagatawa ainult solotnikkudeks, jagatawa 45 dooli tähelepanemata jättes ja saadud arwud jagame. Rakendus — nagu esimeses näituses.

Ajaarwamise ülesanded.

§ 121. Kalendri arw ja kolmesugused ajaarwamise ülesanded.

Aja kohta käiwad küsimused wõiwad kahesugused olla:

1) Millal (missugusel aastal, kuul, päewal, tunnil)?

2) Kui kaua (mitu aastat, kuud, päewa, tundi)?

Näit.: Millal awati esimene Wene riigi-wolikogu? 27-mal aprillil 1906 kell 1 pärast keskpäewa.

Kui kaua kestis Wene-Jaapani sõda? 1 aasta 8 kuud 4 päewa.

Arw, mis küsimise peale „millal“ wastab, nimetatakse kalendri arwuks.

Küsimise peale „kui kaua“ wastab ühe- ehk mitmenimega arw.

Kalendri arw on kas aja järgu, aasta, kuu, päewa . . . . ehk silmapilgu nimi, nagu näit. — Eduard inimese nimi, Rõuge — maakoha nimi on.

Kalendri arw wastab küsimuse peale sündmuse alguse ja lõpu järele, nimega arw — küsimuse peale sündmuse wältuse järele.

Ajaarwamise ülesanded wõiwad kolmesugused olla:

1) Ülesanded, kus sündmuse algust ja lõppu teades sündmuse wältust otsitakse.

2) Ülesanded, kus sündmuse algust ja wältust teades sündmuse lõppu otsitakse.

3) Ülesanded, kus sündmuse lõppu ja wältust teades sündmuse algust otsitakse.

§ 122. Kalendri arwu nimega arwuks muutmine ja wastupidine küsimus.

Et kalendri arw ainult nimi on ja mingisugust aja hulka ei awalda, siis ei wõi meie tema kallal ka mingisugust tehet toime panna. Meie peame ülesannete wäljaarwamise juures kalendri arwu asemele nimega arwu panema. Et kalendri arwu asemele nimega arwu panna, wastame küsimuse peale: „Kui palju aega — aastaid, kuusid, päewi, tundisid jne. — on meie aja arwamisest saadik tähendatud ajani mööda läinud?“ Oma aega arwame meie Jeesuse Kristuse sündimisest saadik. Kui sündmuse algus ja lõpp liig lähedal üksteisest on, näit. ühe ja sellesama aasta, kuu ehk nädala sees, siis on hõlpsam aega lähemast aja punktist saadik — aasta, kuu, nädala algusest arwata.

Näitused:

1) Küsimus: Kui palju aega läks mööda Kristuse sündimisest kuni 29. maini 1906 kella 1-ni lõuna ajal?

Arutus: Kui aastat 1906 kirjutati, oli 1905 täit aastat Kristuse sündimisest mööda. Käes oli maikuu; maikuu on 5-es kuu, sellepärast oli 1906-ast aastast 4 täit kuud mööda läinud. Oli 29-as päew maikuust käes, sellega 28 täit päewa maikuust mööda läinud. Kui räägitakse „kell 1 lõunaajal“ siis on päewa algusest (29-ast maist) kuni keskpäewani 12 tundi mööda ja peale keskpäewa weel 1 tund, kokku on 13 tundi mööda.

Wastus: Kristuse sündimisest kuni 29. maini 1906 kell 1 lõunaajal oli mööda läinud 1905 aastat 4 kuud 28 päewa 13 tundi.

2) Küsimus: Kui palju aega läks mööda aasta algusest kuni 3. juunini kell 10, 46 min. õhtu?

Arutus: Juunikuu on 6-es kuu, sellega oli aasta algusest juba 5 kuud mööda läinud. Juunikuu 3-as päew oli käes; sellega oli juunikuust 2 päewa mööda läinud. Kui õhtu kell 10, 46 min. näitab, siis on päewa algusest kuni keskpäewani 12 tundi ja keskpäewast saadik weel 10 tundi 46 min. mööda läinud, kokku 22 tundi 46 min.

Wastus: Aasta algusest kuni 3. juunini kell 10, 46 min. õhtu läks mööda 5 kuud 2 päewa 22 tundi 46 min.

3) Küsimus: Kui palju aega läks mööda nädala algusest kuni neljapäewa kella 7-ni, 23 min. hommiku?

Arutus: Neljapäew on nädalas 5-es päew, sellega oli nädalast 4 päewa mööda läinud; kell näitas 7, 23 min. hom., sellega oli päewa algusest 7 tundi 23 min. mööda läinud.

Wastus: Nädala algusest kuni neljapäewa kella 7-ni, 23 min. hom. läks mööda 4 päewa 7 tundi 23 min.

Küsimuste peale wastuse andmisel peame sagedaste mitmenimega arwu asemele kalendri arwu panema.

Näitused:

1) Küsimus: Millal oli Kristuse sündimisest saadik 1906 aastat 3 kuud 18 päewa 16 tundi 25 min. mööda?

Arutus: Kui 1906 aastat mööda oli, siis oli 1907-es aasta käes. Kui 3 kuud mööda oli, siis oli 4-jas kuu käes, 4-jas kuu on april. Kui aprillikuust 18 päewa mööda oli, siis oli aprillikuu 19-nes päew käes. Päewa algusest oli 16 tundi 25 min. mööda; see annab meile 12 ennelõunast tundi ja 4 tundi 25 min. pealelõunat.

Wastus: 19-al aprillil 1907 kell 4, 25 min. p. l.

2) Küsimus: Millal oli 1908-nda aasta algusest 5 kuud 22 päewa 2 tundi 37 min. mööda?

Arutus: Kui aasta algusest 5 kuud mööda oli, siis oli 6-es kuu käes; 6-es kuu on juuni. Kui juunikuust 22 päewa mööda oli, siis oli juunikuu 23-as päew käes. Kui päewa algusest 2 tundi 37 min. mööda oli, siis oli kell 2, 37 min. hom.

Wastus: 23-al juunil kell 2, 37 min. hom.

3) Küsimus: Millal oli nädala algusest 3 päewa 19 tundi 15 min. mööda?

Arutus: Nädala algusest oli 3 päewa mööda, sellega oli 4-jas päew käes; 4-jas nädalapäew on kolmapäew. Päewa algusest oli 19 tundi 15 min. mööda; see annab meile 12 ennelõunast tundi ja 7 tundi 15 min. peale lõunat.

Wastus: Kolmapäewal kell 7, 15 min. õhtu, ehk nagu räägitakse, weerand 8 õhtu.

§ 123. I. tüüpus: Sündmuse algus ja lôpp antud, otsitakse wältust.

Charles Robert Darwin sündis 12-al weebruaril 1809 ja suri 19-al aprillil 1882. Kui wanaks sai Darwin?

Kristuse sündimisest kuni Darwini surmani läks mööda	1881	aastat	3	kuud	18 päewa
Kristuse sündimisest kuni Darwini sündimiseni läks mööda	1808	aastat	1	kuu	11 päewa
	73	aastat	2	kuud	9 päewa

Awalik on, et kui meie sellest ajajärgust, mis Kristuse sündimisest Darwini surmani mööda läks, ajajärgu Kristuse sündimisest Darwini sündimiseni maha arwame, siis leiame Darwini eluea.

Juht: *Sündmuse wältsuse leidmiseks peame lõpust alguse maha arwama.*

Carl Robert Jakobson sündis 14. juulil 1841 ja suri 7. märtsil 1882. Kui wanaks sai C. R. Jakobson?

Paneme kalendriarwu asemele mitmenimega arwu:

			11			28	
1881·	aastat	2·	kuud		6	päewa	
		13			34		
1840	„	6	„		13	„	
40	aastat	7	kuud		21	päewa	

Mahaarwamise juures leiame, et 23 päewa 6-st päewast maha arwata ei saa; laename ühe kuu; see kuu, mida meie laenata wõime on 2-ne kuu s. o. weebruar. Weebruaril on mõnikord 28 päewa, mõnikord 29 päewa. See kuu, mida meie laename, on 1882-se aasta weebruar. 1882 aasta oli lihtaasta, sellega weebruaril 28 päewa. Nõnda saame 1 kuud laenates 28 päewa. Kui laenataw weebruari kuu liigaasta kuu on, siis saame teda päewadeks alandates 29 päewa.

§ 124. II. tüüpus: Sündmuse algus ja wältus antud, otsitakse lôppu.

23-al aprillil 1343 oli eestlaste wiimane wabadusewõitlus; 475 aastat 11 kuud 3 päewa kestis pilkane öö, millal eestlased wabadusest undki näha ei tohtinud. Millal saiwad eestlased linnu-priiuse?

Kristuse sündimisest kuni wiimase wabadusewõitluseni läks mööda	1342	aastat	3	kuud	22 päewa
siis weel	+ 475	„	11	„	3 „
	1818	aastat	2	kuud	25 päewa

läks Kristuse sündimisest mööda.

Wastus: 26-al märtsil 1819.

Juht: *Sündmuse lõpu leidmiseks peame algusele wältuse juure arwama.*

N. N. sündis 29-al mail 1878 kell 8, 30 min. õhtu; tema eluiga oli 2 aastat 9 kuud 20 päewa 6 tundi 7 min. Millal suri N. N.?

	1877	aastat	4	kuud	28	päewa	20	tundi	30	min.
+	2	„	9	„	20	„	6	„	7	„
	1880	„	1	„	49	„	2	„	37	„

1880 aastat 2 kuud 21 päewa 2 tundi 37 min.

Wastus: 22-el märtsil 1881, kell 2, 37 min. hom.

Kokkuarwamise juures ülendame kohe tunnid päewadeks ja kuud aastateks, aga päewad jätame esiotsa ülendamata, sest meie ei tea, mitu päewa 1 kuu peale wõtta. Meie saame 1880 aastat 1 kuu 49 päewa. Sellest on näha, et nende 49 päewa sees 1881-se aasta weebruari kuu peitub. 1881-sel aastal oli weebruaril 28 päewa, sellepärast saame summas 1880 aastat 2 kuud 21 päewa 2 tundi 37 min.

§ 125. III. Tüüpus: Sündmuse lõpp ja wältus antud, algust otsitakse.

15-dal detsembril 1908 kell pool 6 õhtu oli M. M. 26 aastat 7 kuud 20 päewa 22 tundi wana. Millal sündis M. M.?

	1907	aastat	11	kuud	14	päewa	17	tundi	30	min.
					30		24			
					43		41			
—	26	aastat	7	kuud	20	päewa	22	tundi	0	min.
	1881	aastat	3	kuud	23	päewa	19	tundi	30	min.

Wastus: 24-dal aprillil 1882 kell pool 8 õhtu.

Tundide ja päewade mahaarwamisel pidime laenama. 1 päewa laenates ja tundideks alandades saame alati 24 tundi; aga 1 kuu laenates peame enne järele waatama, mitu päewa meie saame. Meie laenasime 11-nda kuu, s. o. nowembri, nowembril on 30 päewa; sellepärast saame seda kuud päewadeks alandades 30 päewa.

Juht: *Sündmuse alguse leidmiseks peame lõpust wältuse maha arwama.*

Italia mõttetark Giordano Bruno põletati Roomas 16-al weebr. 1600 (uue kalendri järele) paawsti käsu peale tuleriidal ära. Bruno

oli siis 51 aastat 11 kuud 18 päewa wana. Millal sündis Giordano Bruno?

						31		
1599·	aastat	1·	kuu	15	päewa			
						46		
— 51	„	11	„	18	„			
1547	aastat	1	kuu	28	päewa			

Wastus: 29-al weebruaril 1548. a. uue kalendri ärele ehk 19-al weebr. 1548. a. wana kalendri järele. Et aga Giordano Bruno eluajal uus kalender maksma pandi, siis peame tema sündimisepäewa wana kalendri järele arwama.

I TÄRGU TÜTARLASTE KOOL. Eesti Nooresoo Kaswatuse Seltsi

Kolmas jagu.

Arwude jagatawus.

Neljasteistkümnes peatükk: Jagatawuse tunnused ja algteguriteks lahutamine.

§ 126. Algarwud ja kordarwud.

Wõtame, näituseks, arwud 7, 10 ja 16. Lahutame nad kokkuarwatawateks.

$7 = 2+2+2+1 = 3+3+1 = 4+3 = 5+2 =$ jne.

$10 = 2+2+2+2+2 = 3+3+3+1 = 4+4+2 =$
$= 5+5 = 6+4 = 7+3 =$ jne.

$16 = 2+2+2+2+2+2+2+2 = 3+3+3+3+$
$3+1 = 4+4+4+4 = 5+5+5+1 = 6+6+$
$4 = 7+7+2 = 8+8+9 = 7 = 10+6 =$ jne.

Meie näeme, et kuidas meie 7-t ka kokkuarwatawateks lahutame, ikkagi ei saa meie niisugust summat, kus kõik kokkuarwatawad ühesugused oleksiwad, kuna 10 ja 16 meile niisugused summad annawad.

10 seisab koos 5-st kahelisest ehk 2-st wiielisest;

16 seisab koos 8-st kahelisest ehk 4-st neljalisest ehk 2-st kaheksalisest.

Kui kõik kokkuarwatawad ühesuurused on, siis saame kokkuarwamisest kaswatise: $10 = 2 \cdot 5$; $16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$.

Arwud, mida teistest arwudest kaswatamise läbi saada ei wõi, nimetatakse **algarwudeks** (простыя числа, первоначальныя числа, Primzahlen), mida saada wõib — **kordarwudeks** (составныя числа, zusammengesetzte Zahlen).

§ 127. Kordarwu tegurid.

Arwud, mille kaswatisena antud arw ilmub, nimetatakse tema teguriteks. Kui tegur algarw on, siis nimetatakse teda algteguriks. Näitus: 7 . 8 = 56; 7 ja 8 on 56-e tegurid, nendest on 7 algtegur, 8 ei ole algtegur.

Kui mõni arw kahes ehk mitmes arwus tegurina ette tuleb, siis on ta nende arwude ühine tegur. Näitus: 63 = 7 . 9; 14 = 2 . 7.

7 on 14-ne ja 63-e ühine tegur. Arwud, milledel ühiseid tegurid ei ole (peale 1), on wastastikku algarwud. Näitus: 14 ja 15; 14 = 2 . 7; 15 = 3 . 5.

Wastastikku algarwud ei pruugi ise mitte algarwud olla, nagu meie sellest näitusest näeme.

§ 128. Arwude jagajad ja arwude jagatawus.

Kui meie mõnda arwu tema teguriga jagame, siis on awalik, et jäänust järele ei jää ja jaondina teine tegur ilmub. Kui üht arwu teisega jagades jäänust järele ei jää, siis öeldakse, et esimene arw teisega jagataw on ehk: ta laseb ennast teisega jagada.

Näitus: 63 on 7-ga jagataw, 63 laseb ennast 7-ga jagada. 57 ei ole 7-ga jagataw, 57 ei lase ennast 7-ga jagada. Arw, millega antud arw ennast jagada laseb, on tema jagaja; antud arw ise on oma jagaja mitmekordne ehk jagataw. Näitus: 7 on 63-e jagaja, 63 on 7-e mitmekordne, nimelt — üheksakordne. Awalik on, et arwu tegurid ühtlasi ka tema jagajad on. Arwude omadus ennast teiste läbi (ilma jäänuseta) jagada lasta, nimetatakse arwude jagatawuseks.

Awalik on, et algarwud peale 1 ja iseenese teistega jagatawad ei ole.

§ 129. Tôelaused, mille peal jagatawuse tunnused pôhjenewad.

I. Kui iga kokkuarwataw antud arwuga jagataw on, siis on ka summa selle arwuga jagataw.

Olgu meile arwud 15, 25 ja 60 antud, millest igaüks 5-ga jagataw on; nende summa on 100. Need arwud 15, 25 ja 60 wõime wiielisteks lahutada, nimelt: 15 — 3-ks wiieliseks, 25 — 5-ks wiieliseks ja 60 — 12-ks wiieliseks. Selle juures waatame iga wiielise, kui iseseiswa üksuse peale. Kui meie need arwud kokku arwame, siis on nende summa ka wiielisteks lahutatud ja summas on nimelt 3 + 5 + 12 = 20 wiielist. Sellepärast

on antud arwude summa ka 5-ga jagataw. Näitus: Kui ühes taskus 15 kop., teises 25 kop. ja kolmandas 60 kop. on, siis wõime nii hästi 15 kop., kui ka 25 kop. ja 60 kop. wiie-kopikalisteks rahadeks wahetada. Kui meie need rahad ühtekokku paneme, siis on 15 kopika, 25 kopika ja 60 kop. summa, 100 kopikat wiie-kopikalisteks wahetatud.

II. Kui üks kokkuarwataw antud arwuga jagataw on, teine kokkuarwataw selle arwuga jagataw ei ole, siis ei ole ka nende summa selle arwuga jagataw.

Tõestamine. Olgu meile arwud 15 ja 20 antud, millest 15 3-ga jagataw on, 20 aga ei ole 3-ga jagataw; nende summa on 35. 15 wõime kolmelisteks lahutada, ja lahutades saame 5 kolmelist; 20 kolmelisteks lahutades saame 6 kolmelist ja ühe kahelise. Kui meie 15 ja 20 kokku arwame, siis seisab nende summa, 35, 11-st kolmelisest ja ühest kahelisest koos. Sellepärast jääb 35-t 3-ga jagades jäänus 2 järele ja 35 ei ole 3-ga jagataw.

Tähendus: Kui kokkuarwatawatest kõik ehk mitu antud arwuga jagatawad ei ole, siis ei järgne sellest weel, et summa selle arwuga jagataw ei ole. Näitus: 13 ei ole 7-ga jagataw, 15 ei ole 7-ga jagataw, nende summa 28 aga on 7-ga jagataw.

III. Kui kahe arwu summa ja üks neist kokkuarwatawatest antud arwuga jagatawad on, siis on ka teine arw selle antud arwuga jagataw, sest wastasel korral ei wõiks summa selle arwuga jagataw olla. Sellest järgneb: Kui wähendataw ja maha-arwataw antud arwuga jagatawad on, siis on ka waheng selle arwuga jagataw.

IV. Kui üks tegur antud arwuga jagataw on, siis on ka kaswatis selle arwuga jagataw, sest kaswatis on ühesuuruste kokkuarwatawate summa.

Jagatawuse tunnused.

§ 130. Järgu ühelistega jagatawuse tunnused.

10-ga jagataw on iga arw, mis täis kümnelistest koos seisab, s. o. mis 1 nulliga lõpeb.

100-ga jagataw on iga arw, mis täis sajalistest koos seisab, s. o. mis 2 nulliga lõpeb.

1000-ga jagataw on iga arw, mis tuhandelistest koos seisab, s. o. mis 3 nulliga lõpeb jne.

§ 131. 2-ga ja 5-ga jagatawuse tunnused.

$10 = 2 \cdot 5$. Sellepärast on 10 niihästi 2-ga, kui 5-ga jagataw ja kõik täis kümnelised on 2-ga ja 5-ga jagatawad.

Iga arwu wõime kümneliste ja üheliste summana kirjutada, näit. 1882 = 1880 + 2. Kümnelised on niihästi 2-ga, kui ka 5-ga jagatawad, sellepärast ripub iga arwu 2-ga ja 5-ga jagatawus ühelistest ära. Sellest järgneb: iga arw on 2-ga jagataw, kui tema ühelised 2-ga jagatawad on; iga arw on 5-ga jagataw, kui tema ühelised 5-ga jagatawad on. Arwud, mis 2-ga jagatawad on, nimetatakse paarisarwudeks. Ühelised on siis 2-ga jagatawad, kui nende arw numbritega 0, 2, 4, 6, 8 kirjutatakse. Need numbrid nimetatakse paarisnumbriteks. Ühelised on siis 5-ga jagatawad, kui nende arw numbritega 0 ehk 5 kirjutatakse. Niiwiisi leiame järgmised jagatawuse tunnused: Arw on 2-ga jagataw, kui tema paarisnumbriga lõpeb. Arw on 5-ga jagataw, kui tema 0-ga ehk 5-ga lõpeb. Näitused: 1882 on 2-ga jagataw, aga 5-ga ei ole; 1875 on 5-ga jagataw, 2-ga ei ole.

§ 132. 4-ga ja 25-ga jagatawuse tunnused.

100 = 4 . 25. Sellepärast on 100 niihästi 4-ga, kui ka 25-ga jagataw ja kõik täis sajalised on 4-ga ja 25-ga jagatawad. Igat arwu wõime kahe kokkuarwatawa summana kirjutada, mille juures esimene kokkuarwataw antud arwu sajalistest koos seisab, teine aga tema kümnelistest ja ühelistest, näit. 1868 = 1800 + 68. Sajalised on niihästi 4-ga kui ka 25-ga jagatawad, sellepärast ripub iga arwu 4-ga ja 25-ga jagatawus tema kümnelistest ja ühelistest ära, ehk nagu öeldakse, tema kahest wiimasest numbrist. Sellest järgneb:

Arw on 4-ga jagataw, kui tema kaks wiimast numbrit arwu kujutawad, mis 4-ga jagataw on.

Arw on 25-ga jagataw, kui tema kaks wiimast numbrit arwu kujutawad, mis 25-ga jagataw on, s. o. kui tema 00-ga, 25-ga, 50-ga ehk 75-ga lõpeb.

Näitused: 1868 on 4-ga jagataw, aga 25-ga ei ole;
1875 on 25-ga jagataw, aga 4-ga ei ole;

§ 133. 8-ga ja 125-ga jagatawuse tunnused.

1000 = 8 . 125. Sellepärast on 1000 niihästi 8-ga, kui ka 125-ga jagataw. Igat arwu wõime kahe kokkuarwatawa summana kujutada, millest esimene antud arwu tuhandelistest ja kõrgematest järkudest koos seisab, teine tema sajalistest, kümnelistest ja ühelistest. Näitus: 24750 = 24000 + 750. Tuhandelised on nii 8-ga, kui ka 125-ga jagatawad, sellepärast ripub iga arwu 8-ga ja 125-ga jagatawus tema sajalistest, kümnelistest ja ühelistest ära, ehk, nagu öeldakse, tema kolmest wiimasest numbrist. Sellest järgneb:

Arw on 8-ga jagataw, kui tema kolm wiimast numbrit arwu kujutawad, mis 8-ga jagataw on.

Arw on 125-ga jagataw, kui tema kolm wiimast numbrit arwu kujutawad, mis 125-ga jagataw on, s. o. kui tema 000-ga, 125-ga, 250-ga, 375-ga, 500-ga, 625-ga, 750-ga ja 875-ga lõpeb.

Näitused: 24750 on 125-ga jagataw, aga 8-ga ei ole;
33408 on 8-ga jagataw, aga 125-ga ei ole.

§ 134. 9-ga ja 3-ga jagatawuse tunnused.

Keerulisem, kui eelpool olewaid jagatawuse tunnuseid, on 9-ga ja 3-ga jagatawuse tunnuseid leida. Sellepärast peame natuke kaugemalt peale hakkama.

Wõtame järgu-ühelised ja lahutame nad järgmisel wiisil kokkuarwatawateks:

$10 = 9 + 1$,	mille juures	$9 : 9 =$	1 ja	$9 : 3 =$	3
$100 = 99 + 1$,	„ „	$99 : 9 =$	11 ja	$99 : 3 =$	33
$1000 = 999 + 1$,	„ „	$999 : 9 =$	111 ja	$999 : 3 =$	333
$10000 = 9999 + 1$,	„ „	$9999 : 9 =$	1111 ja	$9999 : 3 =$	3333

Sellest on näha, et meie igat järgu-ühelist kaheks kokkuarwatawaks lahutada wõime, millest üks nii mitme 9-ga kirjutatakse, mitme nulliga wastaw järgu-üheline kirjutatakse ja sellepärast 9-ga ja 3-ga jagataw on ja teine 1 on.

Et teada saada, missugused arwud 9-ga ja 3-ga jagatawad on, wõtame näituseks ühe arwu, olgu 78624, ja lahutame tema järgu-arwudeks: $78624 = 70000 + 8000 + 600 + 20 + 4$. Iga järgu-arwu lahutame järgu-ühelise ja tema tähendaja numbri [1]) kaswatiseks: $70000 = 10000 \cdot 7$; $8000 = 1000 \cdot 8$; $600 = 100 \cdot 6$; $20 = 10 \cdot 2$.

Iga järgu-ühelise lahutame kahe kokkuarwatawa summaks, nagu eelpool näidatud, ja siis kaswatame summa wastawa arwuga. Kõik need toimetused rakendame weergudesse, et neid ülewaatlikumaks teha:

$$\begin{aligned}
70000 &= 10000 \cdot 7 = (9999 + 1) \cdot 7 = 9999 \cdot 7 + \mathbf{7} \\
8000 &= 1000 \cdot 8 = (\ 999 + 1) \cdot 8 = \ 999 \cdot 8 + \mathbf{8} \\
600 &= \ 100 \cdot 6 = (\ \ 99 + 1) \cdot 6 = \ \ 99 \cdot 6 + \mathbf{6} \\
20 &= \ \ 10 \cdot 2 = (\ \ \ 9 + 1) \cdot 2 = \ \ \ 9 \cdot 2 + \mathbf{2} \\
4 &= \qquad\qquad\qquad\quad = \qquad\quad \mathbf{4}
\end{aligned}$$

1) See kõnekään ei ole mitte õige, sest kaswatada wõib ainult arwuga, mitte numbriga. Meie tarwitame teda siiski kõne lühendamiseks järgmise kõnekäänu asemel: Iga järgu-arwu lahutame järgu-ühelise ja järgu-arwu tähendaja numbriga kirjutatawa ühekohalise arwu kaswatiseks.

Nüüd arwame äärmised weerud isekeskes kokku:

$$78624 = \underbrace{9999 \cdot 7 + 999 \cdot 8 + 99 \cdot 6 + 9 \cdot 2}_{\text{esimene salk, 9-ga ja 3-ga jagataw}} + \underbrace{7 + 8 + 6 + 2 + 4}_{\text{teine salk.}}.$$

Paremal pool ühtlusemärki seiswad kokkuarwatawad ühendame kaheks salgaks kokku, nagu siin näidatud, nii et antud arw 78624 kahe kokkuarwatawa summa on: $78624 = (9999 \cdot 7 + 999 \cdot 8 + 99 \cdot 6 + 9 \cdot 2) + (7 + 8 + 6 + 2 + 4)$. Esimeses salgas on iga kokkuarwataw nii 9-ga, kui ka 3-ga jagataw, sest et üks tegur 9-ga ja 3-ga jagataw on. Sellepärast on esimese salga summa nii 9-ga, kui ka 3-ga jagataw ja antud arwu jagatawus ripub teise salga summast ära. Meie näeme, et teise salga kokkuarwatawad ühekohalised arwud on, mida antud arwu numbritega kirjutatakse. Ühekohaliste arwude summat, mida antud arwu numbrid kujutawad, nimetatakse selle arwu ristsummaks. Sellepärast on teise kokkuarwatawate salga summa, millest antud arwu jagatawus 9-ga ja 3-ga ära ripub, selle arwu ristsumma. Sellest järgneb:

Arw on 9-ga jagataw, kui tema ristsumma 9-ga jagataw on.

Arw on 3-ga jagataw, kui tema ristsumma 3-ga jagataw on.

Awalik on, et kui arw 9-ga jagataw on, siis on tema ka 3-ga jagataw.

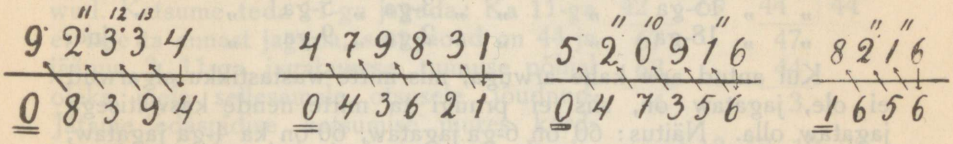
Näitused:

78624; $7 + 8 + 6 + 2 + 4 = 27$; 78624 on 9-ga ja 3-ga jagataw.
1905; $1 + 9 + 0 + 5 = 15$; 1905 on 3-ga jagataw, 9-ga ei ole.
1882; $1 + 8 + 8 + 2 = 19$; 1882 ei ole 3-ga ega 9-ga jagataw.

§ 135-a. Kuidas teada saada, kas antud arw 11-ga jagataw on.

Tuletame meele, kuidas meie 11-ga kaswatasime. Siis on kergem teada saada, kas arw 11-ga jagataw on. Wõtame näituseks arwu 92334. Kui 92334 11-ne kaswatis mõne teise arwuga on, siis on teise teguri üheliste nummer 4. Kaswatises on kümnelisi 3. 11-ga kaswatades saame kaswatise kümneliste numbri siis, kui teise teguri üheliste ja kümneliste numbri kokku arwame. Kui üks kokkuarwataw 4 on, siis ei wõi summa 3 olla. Summa wõis küll 13 olla, millest 3 meie kaswatise kümnelisena üleskirjutasime ja 1 järgmise summale, kaswatise sajaliste numbrile juure lisasime. Sellepärast wõtame selle 1 sajalistelt jälle tagasi, alandame ta kümnelisteks ja arwame kaswatise kümnelistega kokku, saame 13. Need 13 on nüüd otsitawa teguri üheliste ja kümneliste numbri summa. Arwame temast üheliste numbri maha, jääb kümneliste nummer 9 järele. Nüüd on kaswatise sajaliste nummer 2,

sest 1 laenasime ära. Selle numbri saime otsitawa teguri kümneliste ja sajaliste numbrite summast. Arwame temast kümneliste, numbri 9 maha, mille tarwis meie tuhandelistelt 1 tuhandelise laename ja sajalisteks laotame, saame $12 - 9 = 3$. Otsitawa teguri sajaliste nummer on 3. Niisama arutades leiame tuhandeliste numbri $11 - 3 = 8$ ja kümnetuhandeliste numbri $8 - 8 = 0$. Järjelikult on $92334 : 11 = 08394$ ehk, nulli eestpoolt ära jättes, 8394. Wiimase maha-arwamise juures saadud waheng 0 näitab, et jagamine ilma jäänuseta sünnib ja et arw 11-ga jagataw on. Et seda arutust ülewaatlikumaks teha, rakendame tema nagu allpool näidatud ja toome weel mõne näituse: Kirjutame antud arwu:



tema alla tõmbame joone. Joone alla üheliste kohale kirjutame antud arwu üheliste numbri muutmata. Selle üheliste numbri arwame antud arwu kümneliste numbrist maha ja wahengu kirjutame joone alla kümneliste kohale. Saadud wahengu arwame antud arwu sajaliste numbrist maha ja wahengu kirjutame joone alla sajaliste kohale jne., mille juures meie tarwilisel korral niisama laename, nagu hariliku maha-arwamise juures.

Kui wiimane waheng 0 on, siis on arw 11-ga jagataw ja joone alla kirjutatud arw on otsitaw tegur ehk jaond; ei ole aga wiimane waheng 0, siis ei ole ka arw 11-ga jagataw, ja joone alla kirjutatud arw ei ole ka jaond.

Toome weel ühe 11-ga jagatawuse tunnuse ette, ilma et meie teda lähemalt selgitama hakkaks, sest see meid liiga kaugele wiiks.

Et teada saada, kas arw 11-ga jagataw on, arwame tema paaris kohtadel seiswad numbrid üheks summaks ja paarita kohtadel seiswad numbrid teiseks summaks kokku; ühest summast arwame teise summa maha. Kui waheng 11-ga jagataw ehk 0 on, siis on arw 11-ga jagataw.

§ 136. Jagatawus kordarwudega.

Kui antud arw kahe wastastikku algarwuga eraldi jagataw on, siis on ta nende arwude kaswatisega jagataw.

Olgu, näituseks, 684 see antud arw, mis 3-ga ja 4-ga eraldi jagataw on. Olgu 684 juba 4-ga jagatud ja jaond leitud; siis on $684 = \text{jaond} \times 4$. Tegurit 4 wõime kaheks kokkuarwatawaks lahutada, (milledest üks 3-ga jagataw on, teine aga 3-st wähem

on), nimelt $4 = 3 + 1$. Sellepärast leiame: $684 =$ jaond $\times (3+1)$ ehk $684 =$ jaond $\times 3 +$ jaond. Kolmekordne jaond on, iseenesest mõista, 3-ga jagataw; peale selle on meile ütelduud, et 684 ka 3-ga jagataw on. Kui aga summa ja üks kokkuarwataw (jaond$\times$3) 3-ga jagatawad on, siis on ka teine kokkuarwataw (jaond) 3-ga jagataw. Niiwiisi leiame, et 684 on 4-ga jagataw ja sellest jagamisest saadud jaond on 3-ga jagataw. Selle asemel aga, et arwu 4-ga ja saadud jaondit 3-ga jagada, wõime teda korraga nende kahe arwu kaswatisega, s. o. 12-ga jagada. Järjelikult on 684 12-ga jagataw. Sellest leiame järgmised jagatawuse tunnused:

Arw on 6-ga jagataw, kui ta 2-ga ja 3-ga jagataw on.
„ „ 15-ga „ „ „ 3-ga „ 5-ga „ „
„ „ 18-ga „ „ „ 2-ga „ 9-ga „ „ jne.

Kui antud arw kahe arwuga, mis mitte wastastikku algarwud ei ole, jagataw on, siis ei pruugi ta mitte nende kaswatisega jagataw olla. Näitus: 60 on 6-ga jagataw, 60 on ka 4-ga jagataw, aga 6×4 s. o. 24-ga ei ole 60 mitte jagataw. 54 ei ole mitte sellepärast 18-ga jagataw, et ta 3 ja 6-ga jagataw on, waid sellepärast et ta 2 ja 9-ga jagataw on.

§ 137. Kuidas teada saada, kas antud arw algarw ehk kordarw on.

Mõistet „algarw“ ja „kordarw“ määratakse sagedaste natuke teistwiisi ära, nagu meie alguses seda tegime. „Arw, mis ainult 1-ga ja iseenesega jagataw on, nimetatakse algarwuks“.

„Arw, mis peale 1 ja iseenese weel teiste arwudega jagataw on, nimetatakse kordarwuks“. Jagatawuse tunnused kergitawad meil palju küsimuse arendamist, kas antud arw algarw ehk kordarw on.

Wäikeste arwude kohta on kerge ütelda, kas nad algarwud wõi kordarwud on. Esimese 30 arwu piirkonnas on järgmised algarwud olemas: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Kui meie mõne suurema arwu kohta teada tahame saada, kas ta algarw on, wõi mitte, siis peame katsuma, kas ta ennast mõne wäiksema arwuga jagada ei lase. Wõtame näituseks arwu 487. Katsume, kas ta 2-ga jagataw ei ole. Jagatawuse tunnuse põhjal wõime ütelda, et ta 2-ga jagataw ei ole, sest wiimane nummer on 7. Kas ei ole ta 3-ga jagataw? Jällegi wõime jagatawuse tunnuse põhjal ütelda et ta 3-ga jagataw ei ole, sest tema ristsumma on 19. 4-ga jagatawusest ei wõi juttugi olla, sest 4 ise on kordarw ja 2-ga jagataw. Sellepärast, kui 487 ennast 4-ga jagada laseks, siis laseks ta ennast ka 2-ga jagada; aga meie nägime, et ta ennast 2-ga jagada ei lase. Jagatawuse tunnuse põhjal wõime ütelda, et ta ennast ka 5-ga jagada ei lase. 6-ga

jagatawusest ei maksa jälle rääkidagi, sest 6 on kordarw, 2-ga jagataw, kui 487 ennast 2-ga jagada ei lase, siis ei lase ennast 6-ga ammugi jagada. Üleüldse peame tähendama, et kordarwudega ei maksa katsudagi jagada, sest kui 487 ennast nende algarwudega jagada ei lase, mille kaswatis kordarw on, siis ei lase ta ennast nende algarwude kaswatisega, kordarwuga, ammugi jagada.

Kas ei ole ta 7-ga jagataw? 7-ga jagatawuse tunnust meie ei tea, sellepärast jagame 487-ga. 487 ei lase ennast 7-ga jagada, sest jaond on 69 ja jäänus 4. 8-ga, 9-ga, 10-ga ei maksa katsudagi, nad on kordarwud. Katsume teda 11-ga jagada: Ka 11-ga ei lase ta ennast jagada, sest jaond on 44 ja jäänus 3. 11-ga jagatawuse tunnuse põhjal oleks meie sellesamale otsusele jõudnud. Jätame edaspidise katsumise juures kordarwud koguni wahele ja katsume ainult algarwusid 13, 17, 19, 23.

487	7	487	11
42	69	44	44
67		47	
63		44	
4		3	

487	13	487	17	487	19	487	23
39	37	34	28	38	25	46	21
97		147		107		27	
91		136		95		23	
6		11		12		4	

Neid jagamisi läbi waadates näeme, et jagaja suurenemisega jaond wäheneb. Teisiti ta ka olla ei wõi, sest mida enam jagusid meie ühest arwust tahame saada, seda wähem peab iga jagu olema. 487 23-ga jagades oleme niikaugele jõudnud, et jaond (21) jagajast (23) wähem on. Edasi ei pruugi meie enam katsudagi jagada: 487 ei lase ennast peale iseenese ja 1 ühegi teise arwuga jagada, ta on algarw.

Et seda selgeks teha ütleme, et 487 ennast näituseks 31-ga jagada laseb; siis on jaond weel wäiksem: näituseks 17. Sellepärast wõime kirjutada: $487 : 31 = 17$ ehk $487 = 31 . 17$. Wiimane awaldus näitab, et 487 ka 17-ga jagataw peab olema (jaond on 31).

Aga meie nägime juba, et 487 17-ga jagataw ei ole. Sellest järgneb, et kui 487 ühe suurema arwuga, kui 23, jagataw on, siis on ta ka 23-st wäiksema arwuga jagataw; aga kõik arwud, mis wäiksemad on, kui 23, oleme juba läbi katsunud ja leidnud, et 487 ennast nendega jagada ei lase. Järjelikult ei lase ta ennast ka 23-st suuremate arwudega jagada ja on sellepärast algarw.

Juht.: *Et teada saada, kas antud arw algarw ehk kordarw on, peab katsuma teda kõikide algarwudega (2, 3, 5, 7, 11, 13 jne.) järgi mööda jagada, kuni meie jaondi saame, mis jagajast wähem ehk temaga ühesuurune on. Kui tema ennast ühegi nende arwudega jagada ei lase, siis on ta algarw; wastasel korral on ta kordarw.*

§ 138. Algarwude tabel.

Et mitte igakord nii pikki wäljaarwamisi toime panna, on algarwude tabel kokku seatud. Burckhardti tabelis on kõik algarwud kuni 303600.

Toome siin algarwude tabeli 1000-de piirkonnas:

1	41	101	167	239	313	397	467	569	643	733	823	911
2	43	103	173	241	317	401	479	571	647	739	827	919
3	47	107	179	251	331	409	487	577	653	743	829	929
5	53	109	181	257	337	419	491	587	659	751	839	937
7	59	113	191	263	347	421	499	593	661	757	853	941
11	61	127	193	269	349	431	503	599	673	761	857	947
13	67	131	197	271	353	433	509	601	677	769	859	953
17	71	137	199	277	359	439	521	607	683	773	863	967
19	73	139	211	281	367	443	523	613	691	787	877	971
23	79	149	223	283	373	449	541	617	701	797	881	977
29	83	151	227	293	379	457	547	619	709	809	883	983
31	89	157	229	307	383	461	557	631	719	811	887	991
37	97	163	233	311	389	463	563	641	727	821	907	997

Aleksandria matematikuse Eratostenese järele, kes 3-al aastasajal e. K. s. elas, seatakse algarwude tabel järgmisel wiisil kokku:

Kirjutame arwud, kui palju tahes, loomulikus arwujärjes üles:

1, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~,
17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ...

1 on algarw; temaga meie jagama ei hakka, sest kõik arwud on 1-ga jagatawad ja 1-ga jagatawus ei ole weel mingisugune tunnus. 2 on algarw. Kustutame kõik 2-ga jagatawad arwud maha; selleks tõmbame järgmistele arwudele, ikka üht wahele jättes, kriipsud peale: 3 jätame wahele, 4-le tõmbame kriipsu peale, 5 jätame wahele, 6-le tõmbame kriipsu peale jne.

3 on algarw. Kustutame kõik 3-ga jagatawad arwud maha, selleks tõmbame järgmistest arwudest arwudele igale kolmandamale ikka kaht arwu wahele jättes, kriipsu peale: 4 ja 5 jätame wahele, 6-le tõmbame kriipsu peale. 6-le on aga juba kriips peale tõmmatud, sest ta on 2-ga jagataw. Sellepärast läheme edasi. 7 ja 8 jätame wahele, 9-le tõmbame kriips peale jne. 4 on juba maha kustutatud. Järgmine mahakustutamata arw on 5. 5 on sellepärast algarw. Sedasama wiisi, nagu ennegi, tõmbame igale wiiendale arwule kriipsu peale jne.

Seda algarwude tabeli kokkuseadmise wiisi nimetatakse Eratostenese sõelaks.

Nagu arwusid lõpmata palju on, nii on ka algarwusid lõpmata palju.

§ 139. Algteguriteks lahutamise mõiste äramääramine.

Kordarwuks nimetasime niisugust arwu, mida teistest arwudest kaswatamise läbi wõib saada. Olgu neid „teisi arwusid" kaks. Awalik on, et ükski nendest ei wõi antud arwuga ei ühesuurune ega temast suurem olla. Järjelikult peawad mõlemad tegurid, mille kaswatisena antud kordarw ilmub, temast wähemad olema. Ükski neist kahest tegurist ei wõi ka 1 olla, sest muidu peaks teine tegur meie antud arw olema. Sellest selgub: *iga kordarw on kahe arwu kaswatis, millest kumbki temast enesest wähem ja 1-st suurem on.* Näitused: $77 = 7.11$ ehk $60 = 6.10$ ehk $45 = 5.9$. Kui meie ettetoodud näitusi ligemalt waatame, siis näeme, et need arwud (tegurid), mille kaswatisena antud kordarw ilmub, omalt kohalt kas algarwud ($77 = 7.11$) ehk kordarwud ($60 = 6.10$) wõiwad olla; ehk üks tegur wõib algarw, teine kordarw olla ($45 = 5 . 9$).

Kui üks ehk mõlemad antud kordarwu tegurid kordarwud on, siis wõime neid jälle kumbagit kahe wäiksema arwu kaswatisena kujutada. Kui mõni nõnda wiisi saadud teguritest jälle kordarw on, siis wõime teda jällegi kahe teguri kaswatisena kujutada jne. Sedawiisi arutades wõime nii kaugele jõuda, et kõik tegurid algarwud on.

Näitus: $720 = 72.10 = 8.9 . 2.5 = 4.2.3.3.2.5 = 2.2.2.3.3.2.5.$

Sellest järgneb: *Igat kordarwu wõib algarwude kaswatisena kujutada. Kordarwu algarwude ilmumata kaswatisena kujutamist nimetatakse kordarwu algteguriteks lahutamiseks.*

§ 140. Esimene algteguriteks lahutamise wiis.

Eelminewast paragrahwist on kerge näha, kuidas wiisi mõnda kordarwu algteguriteks wõib lahutada. „Ükskordühe" ehk jagatawuse tunnuste põhjal wõime enamasti igakord kõige wähemalt ühe teguri leida. Antud arwu leitud teguriga jagades, leiame teise teguri. Kui mõni leitud teguritest kordarw on, siis lahutame teda, nagu antud arwugi, kaheks teguriks. Niiwiisi arutades jõuame wiimaks nii kaugele, et kõik tegurid algarwud on. Sellega oleme antud arwu algteguriteks lahutanud.

Näitus: Lahuta algteguriteks 3600!

Otsekohe on silma paistew, et $3600 = 36 . 100$.

Üks kord ühest teame, et $36 = 4 . 9$ ja $100 = 10 . 10$.

Sellepärast on: $3600 = \underline{\underline{36.000}} = \underline{4.9}.\underline{\underline{10.10}}$.

Edasi teame ükskord ühest, et $4 = 2.2$, $9 = 3.3$, $10 = 2.5$.

Sellepärast leiame:

$$3600 = 4.9.10.10 = 2.2.3.3.2.5.2.5 = 2^4.3^2.5^2.$$

Et seda algteguriteks lahutamist ülewaatlikumalt kujutada, kirjutame tema nii:

$$3600 = \underline{36} \times \underline{\underline{100}} = \underline{4.9} \times \widehat{\underline{\underline{10.10}}} = \underline{2.2}.\underline{3.3}.\widehat{2.5}.\widehat{2.5} = 2.^4 3.^2 5.^2$$

Ehk nii:

$$\overbrace{\overbrace{36} \times \overbrace{100}}^{3600}$$

$$\overbrace{\overbrace{4.9} \times \overbrace{10.10}}^{3600}$$

$$2.2.3.3 \times 2.5.2.5 = 2.2.2.2.3.3.5.5 = 2.^4 3.^2 5.^2$$

Tähelepanemise wäärt on järgu-üheliste lahutamine algteguriteks.

$10 = 2.5.$ $= 2.5$	$10 = 2.5$
$100 = 10.10 = 2.5.2.5$ $= 2^2.5^2$	$100 = 10^2 = (2\,5)^2 = 2^2.5^2$
$1000 = 10.10.10 = 2.5.2.5.2.5$ $= 2^3\,5^3$	$1000 = 10^3 = (2.5)^3 = 2^3.5^3$
$10000 = 10.10.10.10 = 2.5.2.5.2.5.2.5$ $= 2^4.5^4$	$10000 = 10^4 = (2.5)^4 = 2.^4 5.^4$
jne.	jne.

Sellest selgub; et igat järgu-ühelist algteguriteks 2 ja 5 lahutada wõib, mille juures mõlemaid tegurid ühe wõrra saab, ja nimelt nii palju, kui palju nullisid järgu-ühelisel on. Järgu-üheliste lahutamist wõime nullidega lõppewate arwude algteguriteks lahutamise kergendamiseks tarwitada.

Näitus. Lahuta 1680000 algteguriteks!

Otsekohe wõime kirjutada $1680000 = 168.10000$. Meie teame, et $10000 = 2.^4 5^4$, sellepärast jääb meile ainult 168 algteguriteks lahutada. $168 = \underset{\smile}{8}.\underset{\smile}{21} = \underset{\smile}{2.^3}\,\underset{\smile}{3.7}$.

Niiwiisi leiame $1680000 = 2^3.3.7.2^4.5^4 = 2^7.3.5.^4 7.$

Juht. *Arwu, mis nullidega lõpeb, wõime kohe kaheks teguriks lahutada; ühe neist teguritest saame, kui meie antud arwus lõpu nullid kõrwale jätame; teise teguri saame, kui meie lõpu nullidele 1 ette kirjutame.*

Sagedaste wõime antud arwu algteguriteks lahutamise koguni peas teha ja ainult saaduse üles kirjutada.

1. Näitus. Lahuta 420 algteguriteks!

Jagatawuse tunnuste põhjusel leiame, et 420 3-ga, 5-ga ja 4-ga jagataw on (selle juures peame meeles, et $4 = 2.2$), sellepärast on 420 ka 3-e, 4-ja ja 5-e kaswatisega s. o. 60-ga jagataw ja esimesed tegurid on 3, 5 ja 4 (ehk 2.2); wiimse teguri leiame,

kui meie 420 60-ga jagame; otsitaw jaond on 7; 7 on algarw, sellepärast wõime kirjutada:

$$420 = \underbrace{2 . 2}_{4} . 3 . 5 . 7.$$

Näitus. Lahuta algteguriteks 26400!

Jätame nullid esiotsa koguni tähele panemata ja hakkame 264 lahutama. Meile paistab otsekohe silma, et äärmiste numbrite summa keskmise numbri annab, selle pärast on üks tegur 11 ja teise teguri saame, kui meie äärmised numbrid kõrwu kirjutame, nimelt 24. 11 on algarw, 24 on aga 8.3 ehk $2^3.3$. Sellepärast on $264 = 2^3.3.11$. Et lõpul weel 2 nulli on, siis kirjutame leitud kaswatisele kaks 2 ja kaks 5 teguritena juure. Niiwiisi arutades wõime otsekohe kirjutada:

$$26400 = 11 . 2^3 . 3 . 2^2 . 5^2 . = 2^5 . 3 . 5^2 . 11.$$

§ 141. Teine algteguriteks lahutamise wiis.

Esimene algteguriteks lahutamise wiis wiib meid küll ruttu ja kaunis kergelt sihile, kui antud arwu algtegurid wäiksed arwud 2, 3, 5, 7, 11 on, aga ta tarwitab harjunemist.

Teine lahutamise wiis wiib meid aga igakord kindlalt sihile, ehk ta küll enam aega wõtab.

Teine algteguriteks lahutamise wiis seisab selles, et meie jagatawuse tunnuste põhjal antud arwu kõige wäiksema algteguri leiame ja leitud algteguriga antud arwu jagame. Saadud jaond on teine tegur; ta wõib aga kordarw olla. Sellepärast leiame jälle jagatawuse tunnuste põhjal saadud jaond kõigewäiksema algteguri, mis antud arwule teiseks algteguriks on, ja jagame sellega esimest jaondit. Uus jaond on esimese jaondi teine tegur; ta ja wõib aga jällegi kordarw olla. Sellepärast toimetame temaga just niisamati, nagu meie antud arwu ja esimese jaondiga toimetasime. Niisugust algteguri otsimist ja arwu jagamist kordame nii kaua, kuni meie jaondina algarwu saame. Kui tuttawad jagatawuse tunnused meile otsitawat algtegurit ei anna, siis tõuseb meil kohe kahtlus, kas ei ole kõne all olew arw algarw? Et seda kahtlust kõrwale saata, waatame algarwude tabelisse ehk tuleme omal jõul, nagu § 137 juhatab, otsusele.

Näitus.

2. Rakendus.

$$8316 = 2.4158 = 2.2.2079 = 2.2.3.693 = 2.2.3.3.231 =$$

1. Rakendus.

$$= 2.2.3.3.3.77 = 2.2.3.3.3.7.11 = 2^2.3^3.7.11$$

8316	2
4158	2
2079	3
693	3
231	3
77	7
11	11
1	—

$8316 = 2.2.3.3.3.7.11$

Ehk: $8316 = 2^2.5^2.7.11$

Seletus.

Kirjutame antud arwu 8316 ja temast pahemale poole tõmbame püstjoone. Püstjoone taha kirjutame algtegurid seda mööda, kuidas meie neid leiame.

Jagatawuse tunnuste põhjal wõime ütelda, et 8316 ennast 2-ga jagada laseb. Sellepärast on esimene algtegur 2.

Kirjutame tema joone taha 8316 kõrwale. Jagame 8316 2-ga Jagamise teeme peas (ehk kuskil kõrwal), ainult saadud jaondi kirjutame 8316 alla. Jaond on 4158. Nüüd peame 4158 algteguriteks jagama. 4158 on jällegi 2-ga jagataw ja $4158:2 = 2079$. Leitud teguri 2 kirjutame püstjoone taha 4158 kõrwale ja jaondi 2079 4158 alla. 2079 ei ole enam 2-ga jagataw, aga ta laseb ennast 3-ga jagada, sest 2079 ristsumma on 18. Sellepärast on 3 uus tegur, mille meie joone taha 2079 kõrwale kirjutame ja jaond on 693; selle kirjutame 2079 alla. Niiwiisi edasi arutades jõuame jaondi 77 juure. Ta ei lase ennast ei 3-e ega 5-ga jagada. Aga silma paistew on, et ta ennast 7-ga jagada laseb ja jaond on 11, mille meie 77 alla kirjutame. 11 on algarw. Järjelikult oleme kõik algtegurid leidnud. Et aga omale rakendusele lõpu kuju anda, kirjutame ka 11 teiste tegurite alla, jagame jaondis olewat 11-nd tegurite alla kirjutatud 11-ga, saadud jaondi 1 kirjutame jaondi 11 alla, siis tõmbame kõigele rakenduse joone alla ja kirjutame kostuse: $8316 = 2.2.3.3.3.7.11$ ehk $8316 = 2.2^3.3^3.7.11$.

Wõtame weel paar näitust:

8874	2
4437	3
1479	3
493	17
29	29
1	—

$8874 = 2.3.^2 17.29$

3798	2
1899	3
633	3
211	211
1	—

$3798 = 2.3.^2 211$

Endist wiisi arutades, jõuame jaondi 493 (211) juure. Meil on raske ütelda, missuguse arwuga ta jagataw on, wõi ehk on ta algarw. Niisugustel kordadel waatame algarwude tabelisse. Kui seal raskusi sünnitaja arw olemas on, siis on ta iseenesega jagataw, jaond on 1 ja lahutamine on lõpetatud. (211 on tabelis olemas, sellepärast on $3798 = 2.3^2.211$). Aga 493 ei ole tabelis, see tähendab, et ta kordarw on. Hakkame teda 7-ga, 11-ga, 13-ga jne. jagama. Wiimaks leiame, et ta 17-ga jagataw on ja jaond on 29. 29 on algarw. Nii wiisi leiame $8874 = 2.3.^2 17.29$.

Wõtame weel ühe näituse. Lahuta algteguriteks 7122! Jaondi 1187 algteguriteks lahutamine sünnitab meile raskusi. Ka meie algarwude tabelis ei ole nii suuri arwusid.

7122	2
3561	3
1187	1187
1	

7122 = 2.3.1187.

Sellepärast hakkame ise wälja arwama, nagu § 137 juhatab. 1187-t arwudega 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 jagades leiame, et ta ühegagi nendest jagataw ei ole; aga 37-ga jagades saame jaondi, mis jagajast wähem on. Sellepärast peab 1187 algarw olema ja 7122 = 2.3.1187.

Wiiesteistkümnes peatükk: Kôige suurem ühine jagaja.

§ 142. Kordarwu tegurite ja jagajate leidmine.

8316 lahutasime järgmisel wiisil algteguriteks:

8316=2.4518=2.2.2079=2.2.3.693= 2.2.3.3.231=2.2.3.3.3.77= 2.2.3.3.3.7.11.

Meie näeme, et 8316 teguritena ilmuwad arwud on 2, 3, 7, 11, 77, 231, 693, 2079, 4518. Arwud 2, 3, 7, 11 on antud arwu algteguritena üksikult wõetud; 77 on 7 ja 11 kaswatis; 231 on 3, 7 ja 11 kaswatis; 693 on 3, 3, 7 ja 11 kaswatis; 2079 on 3, 3, 3, 7 ja 11 kaswatis, 4518 on 2, 3, 3, 3, 7 ja 11 kaswatis.

Sellest näitusest selgib: *Antud arwu teguritena ilmuwad tema algtegurid üksikult ja tema algtegurite kaswatised, mille juures need algtegurid kahe, kolme, nelja jne., kaupa üksteisega kaswatada tulewad.*

Ette toodud näituses ei ole weel kõik arwud olemas, millede kaswatisena kordarw 8316 ilmuda wõib. Otsime nad kõik üles.

8316 = 2.2.3.3.3.7.11.

Wõtame algtegurid üksikult: 2, 3, 7, 11.

Kaswatame neid kahe kaupa:

2.2 = 4, 2.3 = 6, 2.7 = 14, 2.11 = 22;
3.3 = 9, 3.7 = 21, 3.11 = 33; 7.11 = 77.

Kaswatame neid kolme kaupa: 2.2.3 = 12, 2.2.7 = 28, 2.2.11 = 44; 2.3.3 = 18, 2.3.7 = 42, 2.3.11 = 66, 2.7.11 = = 154; 3.3.3 = 27, 3.3.7 = 63, 3.3.11 = 99; 3.7.11 = 231.

Kaswatame neid nelja kaupa: 2.2.3.3 = 36, 2.2.3.7 = 84, 2.2.3.11 = 132, 2.2.7.11 = 308, 2.3.3.3 = 54, 2.3.3.7 = 126, 2.3.3.11 = 198, 2.3.7.11 = 462, 3.3.3.7 = 189, 3.3.3.11 = = 297, 3.3.7.11 = 693.

Kaswatame neid wiie kaupa: 2.2.3.3.3 = 108, 2.2.3.3.7 = 252, 2.2.3.3.11 = 396, 2.2.3.7.11 = 924, 2.3.3.3.7 = 378, 2.3.3.3.11 = 594, 2.3.3.7.11 = 1386, 3.3.3.7.11 = 2079.

Kaswatame neid kuue kaupa: 2.2.3.3.3.7 = 756, 2.2.3.3.3.11 = 1188, 2.2.3.3.7.11 = 2772, 2.3.3.3.7.11 = 4158.

Kaswatame neid seitsme kaupa: $2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 7 . 11 = 8316$.

Ka arw 1 wõib teguriks loetud saada. Niiwiisi leiame, et 8316-el 48 isesugust tegurit on.

Et arwu tegurid ühtlasi ka tema jagajad on, siis on siin leitud arwud ka 8316 jagajad ja jagajate otsimise kohta maksab ka juht: *Antud arwu jagajad ilmuwad, kui antud arw algteguriteks lahutatakse ja need algtegurid kas üksikult wõetakse ehk kahe, kolme, nelja jne. kaupa üksteisega kaswatatakse.*

Sellest on ka näha, mispärast üks arw siis kahe arwu kaswatisega, millega tema eraldi ennast jagada laseb, jagataw on, kui wiimased wastastikku algarwud on, ja mispärast ta kahe arwu kaswatisega jagataw ei pruugi olla, ehk ta küll kummagi arwuga eraldi jagataw on, kui wiimastel mõni ühine jagaja (tegur) olemas on.

Näitus: $756 = \underbrace{2 . \overbrace{2 . 3}^{6}}_{12} . \underbrace{\overbrace{3 . 3}^{9}}_{27} . 7$

756 on 6-ga ja 9-ga eraldi jagataw, 756 on ka 6 ja 9 kaswatisega, s. o. 54-ga jagataw, sest et kõik neli 6 ja 9 algtegurit, $6 = 2 . 3$ ja $9 = 3 . 3$, 756-es olemas on. 756 on küll 12-ga ja 27-ga eraldi jagataw, aga 12 ja 27 kaswatisega, s. o. 324-ga, ei ole ta jagataw, sest et mitte kõik kuus 12 ja 27 algtegurit, $12 = 2 . 2 . 3$ ja $27 = 3 . 3 . 3$, 756-es olemas ei ole.

§ 143. Kôige suurem ühine jagaja ja tema esimene leidmisewiis.

Leiame arwude 210 ja 126 jagajad.

210-ne jagajad on:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 ja 210.

126-e jagajad on:

1, 2, 3, — 6, 7, 9, 14, 18, 21, — — 42, 63 ja 126.

Ühised jagajad on, nagu näha: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

Sellest näitusest selgub: *Et kahe ehk mitme arwu ühiseid jagajaid leida, lahutame antud arwud algteguriteks ja wõtame ühiseid algtegurid kas ühe kaupa, ehk kaswatame neid kahe, kolme jne. kaupa üksteisega.*

Ühistest jagajatest on iseäranis tähtis kõige suurem ühine jagaja (общій наибольшій дѣлитель); lühendatult kirjutame seda sõna: Ks. Ü. J.

Kahe ehk mitme arwu kõige suurem ühine jagaja on kõige suurem neist arwudest, millega kõik antud arwud jagatawad on.

Näitus: 210-ne ja 126-e kõige suurem ühine jagaja on 42, nagu see ülewal pool ette toodud näitusest selgub. Lühendatult kirjutame seda nii: Ks. Ü. J. (210, 126) = 42.

Sellest näitusest selgub ka juht:

Kõige suurema ühise jagaja leidmiseks peame antud arwud algteguriteks lahutama ja kõik ühised algtegurid üksteisega kaswatama. Näitus:

$$
\begin{array}{rl}
864 = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^3 \\
972 = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^5 \\
1512 = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \\
1620 = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5. \\
\hline
\text{Ks. Ü. J.} = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3 = 108.
\end{array}
$$

Selle näituse põhjal wõime oma juhti teiste sõnadega wälja ütelda:

Kõige suurema ühise jagaja leidmiseks kaswatame nende algarwude, mis igas antud arwus teguritena ette tulewad, kõige alamaid astmeid, milledes nemad ette tulewad, üksteisega.

Kõige suurema ühise jagaja leiame rutemine, kui meie tema otsimise järgmisel wiisil rakendame:

864, 972, 1512, 1620	2
432, 486, 756, 810	2
216, 243, 378, 405	3
72, 81, 126, 135	3
24, 27, 42, 45	3
8, 9, 14, 15	—
Ks. Ü. J. (864, 972, 1512, 1620) $= 2^2 \cdot 3^3 =$	108.

Kirjutame kõik antud arwud ritta; wiimase arwu taha tõmbame püstjoone. Antud arwudest wõtame ühise algteguri, mida jagatawuse tunnuste põhjal kerge leida on, wälja ja kirjutame tema püstjoone taha. Selle algteguriga jagame kõiki antud arwusid ja saadud jaondid kirjutame, nagu algteguriteks lahutamise puhul, wastawa arwu alla. Saadud jaonditega toimetame nõndasama, nagu antud arwudega, kuni jaondites kõikidele ühist algtegurit enam ei ole. Püstjoone taga ilmunud arwude kaswatis ongi otsitaw Ks. Ü. J. Niisugusel rakendusel on weel see paremus, et meie ühtlasi ka jaondid leiame, mis iga antud arwu jagamisel Ks. Ü. J.-ga ilmuwad.

Meie wõime ka mitu ühist algtegurit ühekorraga wälja wõtta, siis saame weel rutem sihile. Selleks jagame antud arwusid silma paistwate ühiste algtegurite kaswatisega, s. o. üle pea ühiste teguritega, ja selle kaswatise kirjutame püstjoone taha.

Näituseks:

864,	972,	1512,	1620	$4=2^2$
216,	243,	378,	405	$9=3^2$
24,	27,	42,	45	$3=3^1$
8,	9,	14,	15	—

Ks. Ü. J. (864, 972, 1512, 1620)$=4.9.3=2^2.3^3=108$.

1500,	600,	900	100
15,	6,	9	3
5,	2,	3	

Ks. Ü. J. (1500, 600, 900)$=300$

Wastastikku algarwude kõige suurem ühine jagaja on 1.

§ 144. Teine kôige suurema ühise jagaja leidmise wiis järkjärgulise jagamise abil:

See wiis põhjeneb järgmiste kõige suurema ühise jagaja omaduste peal:

I. Kui kahest antud arwust suurem wähemaga jagataw on, siis on wähem arw nende kahe arwu kõige suurem ühine jagaja.

See on iseenesest awalik.

Näitus: Et $391:131=3$, siis on Ks. Ü. J. $(393, 131)=131$.

II. Kui suurem arw kahest antud arwust wähemaga jagataw ei ole, siis on nende kõige suuremaks ühiseks jagajaks seesama arw, mis wähema arwu ja jäänuse, mis suurema arwu jagamisel wähemaga üle jääb, kõige suuremaks ühiseks jagajaks on.

Olgu meil kaks arwu 165 ja 45. Jagame 165-t 45-ga, leiame: $165:45=3$ (jäänus 30). Seepärast on $165=45.3+30$.

Missuguste arwudega 45 ja 30 jagatawad on, nendega on ka summa $45.3+30$, s. o. 165 jagataw. Seepärast on kõik 45-e ja 30-e ühised jagajad ühtlasi ka 165-e ja 45-e ühised jagajad. Et $165=45.3+30$, siis on ka, $165-(45.3)=30$. Missuguste arwudega 165 ja 45 jagatawad on, nendega on ka waheng $165-(45.3)$, s. o. 30 jagataw. (§129). Seepärast on kõik 165-e ja 45-e ühised jagajad ka ühtlasi 45-e ja 30-ne ühised jagajad.

Sellest näeme meie, et ühelgi paaril arwudel ühtgi niisugust ühist jagajat ei ole, mis ühtlasi ka mitte teise paari arwude ühine agaja ei oleks; see tähendab, et neil kahel paaril arwudel

165 ja 45 ja 45 ja 30 ühed ja needsamad ühised jagajad on. Seepärast peab neil ka üks ja seesama kõige suurem ühine jagaja olema, s. o.

Ks. Ü. J. (165; 45) = Ks. Ü. J. (45; 30).

Nende kahe omaduse põhjal otsime Ks. Ü. J. (10611; 4847).

Esite katsume, kas 4847 ei ole kõige suurem ühine jagaja, selleks jagame 10611-nd 4847-ga; — saame jaondis 2 ja jäänuses 917. Järjelikult ei ole 4847 mitte Ks. Ü. J. Selle asemel, et Ks. Ü. J. (10611; 4847) otsida, otsime II-se omaduse põhjal Ks. Ü. J. (4847; 917). Katsume, kas wähem neist kahest, s. o. 917, mitte kõige suurem ühine jagaja ei ole; selleks jagame 4847 917-ga. Aga ei, ka siin jääb jäänus 262 järele. Siiski, on meie tegewus lihtsamaks läinud, sest II-se omaduse põhjal on Ks. Ü. J. (4847; 917) = Ks. Ü. J. (917; 262). Seepärast otsime nüüd Ks. Ü. J. (917; 262). Selleks otstarbeks katsume jälle, kas 262 kõige suurem ühine jagaja ei ole. Jagame 917 262-ga, leiame jäänuse 131. Otsime nüüd Ks. Ü. J. (262; 131). Jällegi katsume, kas ei ole 131 kõige suurem ühine jagaja. I omaduse põhjal leiame, et 131 on kõige suurem ühine jagaja.

Nii wiisi leiame nende arutuste põhjal, et

Ks. Ü. J. (10611;4847) = Ks. Ü. J. (4847;917) = Ks. Ü. J.(917;262) = Ks. Ü. J. (262; 131) = 131.

Selle pärast on Ks. Ü. J. (10611; 4847) = 131.

Tehe rakendatakse nii:

```
4847 | 10611 | 2
     |  9694 |
     |-------|
     |   917 | 4847 | 5
     |       | 4585 |
     |       |------|
     |       |  262 |  917 | 3
     |       |      |  786 |
     |       |      |------|
Ks. Ü. J. =  |      |  131 |  262 | 2
             |      |      |  262 |
             |      |      |------|
             |      |      |    — |
```

Ehk:

	2	5	3	2	
10611	4847	917	262	**131**	Ks. Ü. J.
9694	4585	786	262		
917	262	131			

Juht: *Et kahe arwu kõige suuremat ühist jagajat leida, jagame suuremat arwu wähema arwuga, wähemat arwu esimese jäänusega, esimest jäänust teise jäänusega, teist jäänust kolmandaga jne., kuni jäänust järele ei jää. Wiimane jagaja on antud arwude kõige suurem ühine jagaja.*

Niisugust jagamist nimetatakse järkjärguliseks jagamiseks (послѣдовательное дѣленіе).

§ 145. Järkjärgulise jagamise tarwitamine mitme arwu kõige suurema ühise jagaja leidmiseks.

Selle juures toimetatakse nõnda: Järkjärgulise jagamise abil leitakse kahe arwu kõige suurem ühine jagaja. Siis leitakse niisamuti selle ühise jagaja ja kolmanda arwu kõige suurem ühine jagaja. Kui weel neljas arw olemas on, siis leitakse uueste saadud kõige suurema ühise jagaja ja neljanda arwu kõige suurem ühine jagaja jne. Selle juures on kasulikum neist kahest arwust peale hakata, millede waheng kõige wähem on.

Näitus: Ks. Ü. J. (348, 580, 754, 899) = ?

		1	1	2			6	2			15		
1)	580	348	232	**116**	754	116	**58**		899	58	**29**	Ks. Ü. J.
	348	232	232		696	116			319	58		
	232	116	0		58	0			29	0		

		1	5	5		20			12		
2)	899	754	145	**29**	580	**29**		348	**29**	Ks. Ü. J.
	754	725	145		580			348		
	145	29	0		0			0		

Kuuesteistkümnes peatükk: Kõige wäiksem ühine mitmekordne (jagataw).

§ 146. Mõiste äramääramine.

Wõtame 6 kaks korda, saame 12; 12 on 6-e kahekordne : 6×2=12; wõtame 6 kolm korda, saame 18; 18 on 6-e kolmekordne: 6×3=18; wõtame 6 seitse korda, saame 42; 42 on 6-e seitsmekordne:6×7=42. 12, 18 ja 42 on üleüldse 6-e mitmekordsed (кратныя). Sellest on awalik, et kui meie ühe arwu mitmekordset saada tahame, siis peame teda mitu korda wõtma (kokkuarwatawana), s. o. teda mõne teise arwuga kaswatama.

Järjelikult, et üks arw teise arwu mitmekordne oleks, peab teine arw esimeses tegurina ette tulema; ehk, kui meie mõlemad arwud algteguriteks lahutame, siis peawad kõik antud arwu algtegurid tema mitmekordses algteguritena ette tulema.

Näituseks: 6 = 2.3.; 6-e ühekordne 6 = 2.3. 1;
6-e kahekordne 12 = 2.3.2; 6-e kolmekordne 18 = 2.3.3;
6-e seitsmekordne 42 = 2.3.7; 6-e kümne kordne 60 = 2.3.2.5.

See arw, millega meie antud arwu kaswatame, et tema mitmekordset leida, nimetatakse antud arwu täiendusteguriks (дополнительный множитель) tema mitmekordseni, näit. 2 on 6-e täiendustegur 12-ni 3 on 8-a täiendustegur 24-ni.

Mitmekordset nimetatakse ka antud arwu jagatawaks, sest et mitmekordne, kui antud arwu ja täiendusteguri kaswatis, ennast antud arwuga ilma jäänuseta jagada laseb.

Kahel ehk mitmel arwul wõiwad ühised mitmekordsed (jagatawad) olla. Näituseks kirjutame siin 6-e ja 8-a mitmekordsed (jagatawad) üles, mille juures ühised mitmekordsed (jagatawad) jämedalt on trükitud:

6 | 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78 .....
8 | 8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; .....

Awalik on, et kahel ehk mitmel arwul lõpmata palju ühiseid mitmekordseid (jagatawaid) olla wõib. Üks nendest, ette toodud näituses 24, on kõige wäiksem, kõige suuremat ei olegi. See kõige wäiksem ühine mitmekordne (jagataw) on iseäranis tähtis.

Kahe ehk mitme arwu kõige wäiksemaks mitmekordseks (jagatawaks, общее наименьшее кратное) nimetatakse kõige wäiksem arw, mis kõikide antud arwudega jagataw on.

Kõige wäiksemat ühist mitmekordset (jagatawat) kirjutame lühidalt nõnda: Kw. Ü. M. Näitus: Kw. Ü. M. (6; 8) = 24.

§ 147. Esimene kõige wäiksema ühise mitmekordse (jagatawa) leidmise wiis.

Eelminewast paragrahwist teame, et antud arwu algtegurid tema mitmekordses (jagatawas) algteguritena ette peawad tulema. Sellest järgneb, et mitme arwu ühises mitmekordses (jagatawas) kõikide antud arwude algtegurid ette peawad tulema.

Kui meie aga antud arwude kõige wäiksemat ühist mitmekordset (jagatawat) otsime, siis peawad küll kõikide antud arwude algtegurid otsitawas arwus ette tulema, üleliigseid tegurid ei tohi mitte olla. Sellepärast, kui meie ühest arwust ühe teguri juba wõtnud oleme, seesama tegur aga teises arwus ka ette tuleb, siis ei tohi meie teda sealt enam wõtta. Tuleb ta aga sellessamas, ehk ka teises arwus weel kord ette, siis peame teda uueks teguriks lugema.

Näituseks leiame Kw. Ü. M. (720; 675 ja 750)!

720 =	2.	2.	2.	2.	3.	3.		5.			$=2.^{4}3.^{2}5.$
675 =					3.	3.	3.	5.	5.		$= 3.^{3}5^{2}.$
750 =				2.	3.			5.	5.	5.	$=2.\ 3.\ 5^{3}.$
Kw. Ü. M.	2.	2.	2.	2.	3.	3.	3.	5.	5.	5.	$=2.^{4}3.^{3}5^{3}. = 54000.$

Seletus. Et otsitaw arw ennast 720-ga jagada peab laskma, siis peawad temas kõik 720-ne algtegurid ette tulema. Sellelsamal põhjusel peawad ka kõik 675-e ja kõik 750-e algte-

gurid ette tulema. Esimeses arwus kordub 2 algtegurina 4 korda, teises ei ole 2 sugugi ja kolmandas tuleb ta ainult 1 kord ette. Sellepärast peab otsitawas arwus 2 neli korda tegurina ette tulema. Wähem kordasid ta ette tulla ei tohi, sest muidu ei oleks otsitaw arw 720-ga jagataw; enam kui 4 korda meie teda wõtta ei wõi, sest muidu saame küll ühise mitmekordse (jagatawa), aga mitte kõige wäiksema. Algtegur 3 tuleb esimeses arwus 2 korda ette, teises — 3 korda ja kolmandas — 1 kord. Sellelsamal põhjusel, mispärast 2 otsitawas arwus 4 korda algtegurina korduma peab, peab 3 otsitawas arwus 3 korda algtegurina ette tulema. Niisama leiame ka, et 5 otsitawas arwus 3 korda algtegurina korduma peab.

Niiwiisi leiame:

Kw. Ü. M. (720; 675; 750) $= 2.^{4}3.^{3}5.^{3} = (2.3.^{3})\,(2.^{3}5^{3}) = 54000.$

Et kergem oleks kaswatada, kirjutasime 2^{3} ja 5^{3} eraldi lõpule, sest meie teame (§ 140), et $1000 = 2^{3}.\,5^{3}$.

Juht.: *Et kahe ehk mitme arwu kõige wäiksemat ühist mitmekordset (jagatawat) leida, peame antud arwud algteguriteks lahutama ja kõikide ette tulewate algtegurite kõige kõrgemad astmed, milledes nemad ette tulewad, üksteisega kaswatama.*

Meie wõime ka pärast algteguriteks lahutamist ühele arwule temas puuduwad algtegurid teistest arwudest juure kirjutada ja siis kaswatada.

Näitus: $720 = 2^{4}.3^{2}.5. = 2.2.2.2.3.3.\ \ 5.$
$675 = \ \ 3^{3}.5^{2} = \ \ \ \ \ \ 3.3.3.\ 5.5$
$750 = 2.3.5^{3} = \ \ \ \ \ \ 2.3.\ \ \ 5.5.5.$

720-es puudub üks algtegur 3 ja kaks algtegurit 5; need kirjutame 720-le juure, saame:

Kw. Ü. M. (720, 675, 750) $= 720.\ 3.5.5. = 54000.$

§ 148. Tehte rakendus ja mõned lühendused.

Tehe rakendatakse nii:

720, 675, 750	2
360, 675, 375	2
180, 675, 375	2
90, 675, 375	2
45, 675, 375	3
15, 225, 125	3
5, 75, 125	3
5, 25, 125	5
1, 5, 25	5
— 1, 5	5
— — 1	—

Kw.Ü.M. $= 2^{4}.3^{3}5^{3} = 54000.$

Kirjutame kõik arwud ritta; nende taha tõmbame püstjoone.

Jagawuse tunnuste põhjal näeme, et 2 mõnes esimese rea arwus tegurina ette tuleb; wõtame tema wälja. Selleks kirjutame ta püstjoone taha ja jagame temaga neid arwusid, mis temaga jagatawad on, teised arwud kirjutame muutmata ümber.

Teise rea arwudest tuleb 2 ühes arwus tegurina ette — wõtame tema endist wiisi wälja. Niisama wõtame 2 ka ühest kolmanda ja neljanda rea arwust wälja.

Nüüd on kõik 2-ed kõikidest arwudest wälja wõetud.

Jagatawuse tunnused näitawad, et kõik wiienda rea arwud 3-ga jagatawad on. Wõtame algteguri 3 kõigist arwudest wälja. Selleks kirjutame tema püstjoone taha ja jagame kõiki arwusid 3-ga. Kuuendamas reas on kaks arwu ja seitsmendas reas üks arw 3-ga jagataw. Nagu meie esimesest ja teisest reast 2-e wälja wõtsime, nii wõtame neist ridadest nüüd 3-e wälja. Kaheksama rea arwud ei ole enam 3-ga jagatawad, aga nad on kõik 5-ga jagatawad. Järgmistest ridadest wõtame 5-ed niisama wälja, nagu meie enne kolmedki wälja wõtsime.

Püstjoone taha on kõik algtegurid kirjutatud; nende kaswatis ongi otsitaw Kw. Ü. M.

Kui meie ülewal seiswat rakendust lähemalt tähele paneme, siis wõime rutemine eesmärgile jõuda.

Kui meie, nagu ülewalpool näidatud, neist arwudest 2 wälja wõtame, saame teise rea arwud. Teise rea arwudest tuleb ainult ühes, 360-es, 2 algtegurina ette. Ta ei tule mitte ainult üks kord, ta tuleb koguni kolm korda selles arwus ette, sest 360 on 8-ga jagataw. Sellepärast wõime, selle asemel, et kolm korda järgi mööda ühestainsast arwust 2 wälja wõtta ja teisi arwusid ilma muutmata ümber kirjutada, korraga 360-st 8 wälja wõtta. Siis läheme teise rea juurest otsekohe wiienda rea juure. Wiiendas reas lasewad kõik arwud ennast 3-ga jagada ja kaks nendest, 45 ja 675, on 9-ga jagatawad. Meil ei ole aga sel korral mitte õigust korraga 9 wälja wõtta, sest kolmas arw, 375, ei ole 9-ga jagataw, meie peaksime tema muutmatalt ümber kirjutama ja sellega jääks 375-es peituw algtegur 3 sisse; niiwiisi sisse jäänud algtegur wõib meile sel korral, kui üheski teises teguris, kust 9 wälja wõeti, enam niisugust algtegurit sisse ei jäänud, üleliigse algteguri meie otsitawasse arwusse tuua ja meie leiame küll ühise, aga mitte kõige wäiksema mitmekordse (jagatawa). Selles näituses seda küll ette ei tule, sest 675 on 27-ga jagataw ja temas jääb peale 9-a wäljawõtmise weel 3 järele. Sellel samal põhjusel ei wõinud meie ka esimese rea arwudest mitte 16 wälja wõtta, ehk küll 720 16-ga jagataw on; siin oleks üleliigne algtegur 2 arwus 750 sisse jäänud ja meie oleks wiimati otsitawas arwus wiis algtegurit 2 saanud, kuna neid ainult 4 peab olema. Kaheksandat rida waadeldes, näeme, et kõik 5-s ja 25-es ette tulewad algtegurid kolmandamas arwus 125 olemas on. Sellepärast wõime 5 ja 25 maha kustutada ja korraga 125 joone taha wiia. Nii samuti oleks meie ka wiiendas reas 45 maha kustutada wõinud, sest tema mahub jäänuseta 675-e sisse.

Peale selle oleks meie wiiendas reas 15 wõinud wälja wõtta, sest kõik arwud on 3-ga ja 5-ga jagatawad. Ehk weel: kui meie wiiendas, reas 45 maha kustutame, siis wõime 675-st ja 375-st korraga 75 wälja wõtta, sest mõlemad arwud on 3-ga ja 25-ga jagatawad.

Paneme siin näituseks mõne kiire wäljaarwamise wiisi üles.

720, 675, 750	2
360, 675, 375	8
~~45~~, 675, 375	75
9, 5	9
1, 5	5
1	

Kw. Ü. M. $=2.75.8.5.9$

720, 675, 750	2
360, 675, 375	8
45, 675, 375	3
15, 225, 125	3
5, 75, 125	3
~~5~~, ~~25~~, 125	125

Kw. Ü. M. $= 2.125.8.3.33.$

48, 64, ~~27~~, ~~33~~, 110, 165, 81	2
24, 32, — — ~~55~~, 165, 81	8
~~3~~, 4, — — —, 165, 81	3
— 4, — — —, 55, 27	4.55.27

Kw. Ü. M. (48,64,27,33,110,165,81) = $2.8.3.4.55.27. = 2^6.3^4.5.11. = 285120.$

Et 27 81-e sees ja 33 165-e sees olemas on, siis ei pruugi meie neile kõige wäiksemat ühist mitmekordset otsida, sest missuguse arwu sisse 81 ilma jäänuseta mahub, selle sisse mahub ka 27 ilma jäänuseta ja missuguse arwu sisse 165 ilma jäänuseta mahub, selle sisse mahub ka 33 ilma jäänuseta. Sellepärast kustutame 27 ja 33 maha. Niisamasugusel põhjusel kustutame teises reas 55 ja kolmandas reas 3 maha.

Neljandas reas saame 4, 55, ja 27. Ei ole ühtegi tegurit, mis kas wõi kahelegi neist arwudest ühine oleks, nad on paari kaupa wastastikku algarwud. Sellepärast oleks ilmaaegne töö neid arwusid ehk koguni nende tegurid ükshaawal joone taha kirjutada. Kirjutame nad kõik korraga ilmutamata kaswatise näol joone taha, sest kõik nendes peituwad algtegurid peawad otsitawas kõige wäiksemas mitmekordses ette tulema.

Nii wiisi leiame

Kw. Ü. M. (48,64,27,33,110,165,81) = 2.8.3.4.55.27 = 285 120.

Neist näitustest selgiwad järeldused:

I. Kui üks antud arwudest teistega jagataw on, siis ongi tema kõikide antud arwude kõige wäiksem ühine mitmekordne (jagataw).

Näit. Kw. Ü. M. (10,15,12,30,60) = 60.

II. Kui antud arwud kõik paari kaupa wastastikku algarwud on siis ilmub nende kõige wäiksema ühise mitmekordsena (jagatawana) nende kaswatis. Näit. Kw. Ü. M. (4,5,7) = 4.5.7 = 140.

§ 149. Teine kõige wäiksema ühise mitmekordse (jagatawa) leidmise wiis: järkjärgulise jagamise abil.

I. Kahe arwu kõige wäiksem ühine mitmekordne otsitakse. Kw. Ü. M. (675; 750) leida!

Leiame järkjärgulise jagamise abil antud arwude (675-e ja 750-e) kõige suurema ühise jagaja (75) — see on antud arwude ühine tegur; jagame üht antud arwu (750) leitud kõigesuurema ühise jagajaga (75-ga) — saadud jaond (10) on teises arwus (675-es) puuduw tegur; selle jaondiga (10-ga) kaswatame teist antud arwu (675-t); ilmuw kaswatis (670) on antud arwude kõige wäiksem ühine mitmekordne (jagataw).

Wälja arwamine.

1) 675 | 750 | 1
675

75 | 675 | 9
675

2) 750 : 75 = 10.
3) 675 × 10 = 6750.
Kw. Ü. M. (675;750) = 6750.

Tõestamine.

675, 750 | 75
9, 10 |

Kw. Ü. M. = 75.9.10 = (75.9) × 10 = 675 × 10.

II. Kui mitme arwu kõige wäiksemat ühist mitmekordset otsitakse, siis leiame esite näidatud wiisil kahe arwu Kw. Ü. M.; peale selle — leiame selsamal wiisil leitud kõige wäiksemale ühisele mitmekordsele ja kolmandale arwule Kw. Ü. M.; siis leiame sel samal wiisil teisele leitud kõige wäiksemale ühisele mitmekordsele ja neljandale arwule Kw. Ü. M. jne.

Näitus. Kw. Ü. M. (675; 750; 720) leida!

Meie teame juba ülewalpool seiswast näitusest et Kw. Ü. M. (675; 750) = 6750. Nüüd otsime edasi.

1) 720 | 6750 | 9
6480

270 | 720 | 2
540

180 | 270 | 1
180

90 | 180 | 2
180

0

2) 720 : 90 = 8
3) 6750 × 8 = 54.000
Kw. Ü. M. (675; 750; 720) = 54000.

Tähendus. Järkjärgulise jagamise abil on siis kasulik kõige wäiksemat ühist mitmekordset (jagatawat) otsida, kui antud arwud suured on ja kui neid wähe on.

On aga antud arwud wäiksed, siis on kõige kergem nende kõige wäiksemat ühist mitmekordset katsumise teel leida: antud arwudest wõtame kõige suurema, kaswatame teda 2-ga ja katsume, kas kõik teised antud arwud saadud kaswatisesse ilma jäänuseta ära mahuwad. Kui ei, siis jätame 2 kõrwale, kaswatame wõetud arwu 3-ga ja katsume uueste. Pärast wõime 4-ga, 5-ga jne. kaswatada, kuni meie niisuguse arwu leiame, millesse kõik antud ilma jäänuseta mahuwad.

Jagatawuse tunnused näitawad meile, missugused tegurid teistes arwudes ette tulewad ja see kergitab meil kaswataja wäljawalikut.

Näit. Kw. Ü. M. (3, 5, 6, 10, 12, 15) = 15.4 = 60.

§ 150. Täiendustegurite leidmine.

Ühe arwu täiendusteguriks (дополнительный множитель) teise arwuni nimetatakse niisugust arwu, millega meie esimest arwu kaswatama peame, et teist saada

Näit. 3 on 4-ja täiendustegur 12-ni, sest $4 \times 3 = 12$.

Awalik on, et täiendustegur jagamise abil leitakse.

Näit. Et 15-ne täiendustegurit 120-ni leida, jagame 120-nd 15-ga.
$120 : 15 = 8$; 8 on 15-ne täiendustegur 120-ni.

Antud arwude täiendustegurid nende kõige wäiksema ühise mitmekordseni (jagatawani) leitakse kas 1) jagamise wõi 2) algtegurite wõrdlemise abil.

Näitus.

36, 45, 48, 80, 96, 120	$4=2^2$.
9, 45, 12, 20, 24, 30	2
9, 45, 6, 10, 12, 15	2
9, 45, 3, 5, 6, 15	2
9, 45, 3, 5, 3, 15	3
3, 15, 1, 5, 1, 5	3
1, 5, —, 5, —, 5	5
—, 1, —, 1, —, 1	—

1) Leiame täiendustegurid jagamise abil:

1440 : 36 = 40
1440 : 45 = 32
1440 : 48 = 30
1440 : 80 = 18
1440 : 96 = 15
1440 : 120 = 12

Kw. Ü. M. (36, 45, 48, 80, 96, 120) $= 2^5.3^2.5 = 1440$.

2) Leiame täiendustegurid algtegurite wõrdlemise abil.

Ülewal pool seiswast kõige wäiksema mitmekordse (jagatawa) otsimise tabelist on ka iga arwu algtegurid kergeste näha.

36 = — — — 2 . 2 . 3 . 3 . —	2 . 2 . 2 . 5 = 40
45 = — — — — — — 3 . 3 . 5	2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32
48 = — 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . — —	2 . 3 . 5 . = 30
80 = — 2 . 2 . 2 . 2 . — — 5	2 . 3 . 3 . = 18
96 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . — —	3 . 5 . = 15
120 = — — 2 . 2 . 2 . 3 . — 5	2 . 2 . 3 . = 12

Tühjad kohad arwu wastu ja neil kohtadel seiswad numbrid teiste arwude wastu näitawad puuduwaid täiendustegurid.

Ka tabelist ise on kohe näha, missugused tegurid ühegil arwul puuduwad. Näituseks: 45 ei ole esimese nelja rea pealt järgmiste ridade peale minnes sugugi muutunud; see tähendab, et temas puuduwad kõik need tegurid, mis esimese nelja rea seest wälja on wõetud ja püstjoone taha kirjutatud, s. o. $4 . 2 . 2 . 2 = 32$; 80-ne all seisew 5 ei ole 3 rea jooksul, nimelt neljanda rea pealt wiienda rea peale, wiienda rea pealt kuuenda ja kuuenda pealt seitsmenda peale minnes sugugi muutunud; see tähendab, et temas puuduwad kõik need tegurid, mis teiste arwude seest

nende ridade pealt wälja on wõetud ja joone taha kirjutatud s. o. 2 . 3 . 3 = 18.

48 all seisew 3 ei ole neljanda rea pealt wiienda peale minnes muutunud; see tähendab et temas puudub neljas joone taha kirjutatud arw 2.

Pealegi seisab 48 all juba kuuenda joone peal 1; see tähendab, et kõik tegurid 48-st juba wälja on wõetud ja kõik järgmised, sellest reast peale hakates joone taha kirjutatud tegurid puuduwad 48-al. s o. 3.5. Niiwiisi puuduwad 48-al tegurid 2.3.5=30.

Kui meie nii iga arwu weeru läbi waatame, ja arutame, leiame kõikide arwude täiendustegurid. 1440 = 36 × 2 . 2 . 2 . 5; 1440=96×3 . 5; 1440=120×2 . 2 . 3; 1440=45 . 4 . 2 . 2.2=45.32; 1440 = 48 . 2 . 3 . 5; 1440 = 80 × 2 . 3 . 3.

Neljas jagu.

Harilikud murrud.

Seitsmesteistkümnes peatükk: Alusmõisted.

§ 151. Terwe üksuse (ühesuurused jaod) ja nende nimetused.

Kui meie ühe terwe õuna kahe poisikese wahel ühtlaselt ära peame jagama, siis lõikame selle õuna kaheks ühesuuruseks jaoks ja kummalegi poisikesele anname ühe niisuguse jao.

Kumbki neist jagudest kannab nime „p o o l“ (ja kirjutatakse $^1/_2$). Kui meie ühe terwe õuna nelja poisikese wahel ühtlaselt peame ära jagama, siis lõikame tema neljaks ühesuuruseks jaoks selle läbi, et meie teda enne pooleks ja siis iga poole weel pooleks lõikame, ja igale poisikesele anname ühe niisuguse jao.

Iga neljas jagu terwest õunast kannab nime „w e e r a n d“ ehk „n e l j a n d i k“ (kirjutakse $^1/_4$).

W. mõisas antakse iga kolme moonamehe peale 1 wakamaa kartuli maad ja iga kuue moonamehe peale 1 wakamaa aiamaad. Selle järgi saab iga moonamees ühe kolmanda jao wakamaast omale kartuli maaks ja ühe kuuenda jao wakamaast — aiamaaks.

Kolmas jagu ühest terwest (wakamaast) kannab nime „kolmandik“ (ja kirjutatakse $^1/_3$) ja kuues jagu ühest terwest kannab nime „kuuendik“ (ja kirjutatakse $^1/_6$).

Perenaene tegi terwest linasest kangast 18 käterätikut. Selle tarwis pidi tema terwe kanga kaheksaksteistkümneks ühesuuruseks jaoks lõikama. Iga üks neist kaheksastteistkümnest ühesuurusest jaost nimetatakse „kaheksateistkümnendikuks“ (ja kirjutatakse $^1/_{18}$). Jga käterätik oli üks kaheksateistkümnendik terwest kangast.

Õue pikkust süllaga mõõtes jäi meil üks tükk üle, mida meie enam süllaga mõõta ei saanud. Sellepärast jagasime terwe sülla kahekümneks ühesuuruseks jaoks ja hakkasime ülejäänud pikkust ühe niisuguse jaoga mõõtma. Iga kahekümnes jagu terwest (süllast) nimetatakse „kahekümnendikuks“.

Neist näitustest selgub:

1) meil ei ole mitte alati wõimalik terwete üksustega, terwete õuntega, terwete kangastega, terwete wakamaadega, terwete süldadega rehkendada, waid meie peame oma terweid üksusi ühesuurusteks jagudeks jagama ja siis nende üksuste jagudega rehkendama; 2) iga ühesuurune jagu saab oma nime sellest arwust, mis näitab, mitmeks ühesuuruseks jaoks terwe üksus jaotati (murti).

Nagu terwetele üksustele täisarwud wastawad, nii on ka arwud olemas, mis terwe üksuse ühesuurustele jagudele wastawad.

§ 152. Esimene murru sündimise wiis ja murru môiste äramääramine.

1. Näitus. Ühes perekonnas tarwitatakse nädala jooksul puud leiba ära. Kui palju leiba tarwitatakse 5-e päewa jooksul ära, kui iga päew ühe wõrra ära kulub?

Et nädalas, s. o. 7-e päewa jooksul, 1 puud leiba ära tarwitatakse, siis tarwitatakse 1-el päewal seitsmes jagu puudast ehk üks seitsmendik puuda leiba ära. Esimesel päewal tarwitatakse üks seitsmendik puuda leiba ära, teisel päewal — teine seitsmendik, kolmandal päewal — kolmas seitsmendik, neljandal päewal — neljas seitsmendik ja wiiendal päewal — wiies seitsmendik; üle wiie päewa kokku tarwitatakse niiwiisi wiis seitsmendikku puuda leiba ära.

2. Näitus. Ühes perekonnas tarwitatakse nädala jooksul puud leiba ära. Kui palju leiba tarwitatakse 9-a päewa jooksul ära, kui iga päew ühe wõrra ära kulub?

Niisama arutades, nagu esimeses näituses, jõuame otsusele, et 9-a päewa jooksul üheksa seitsmendikku puuda leiba ära tarwitatakse.

3. Näitus. Teekäija jõuab 13-es minutis 1 werst maad edasi. Kui palju maad käib ta 10-ne minuti jooksul ära?

Ühe minuti jooksul jõuab teekäija kolmeteistkümnenda jao werstast ehk ühe kolmeteistkümnendiku wersta edasi; 10-ne minuti jooksul jõuab tema kümme kolmeteistkümnendikku wersta ära käia.

4. Näitus. Teekäija jõuab 13-es minutis 1 werst maad edasi. Kui palju maad käib ta 45-e minuti jooksul ära?

Ühe minuti jooksul jõuab teekäija kolmeteistkümnenda jao werstast ehk ühe kolmeteistkümnendiku wersta edasi; 45-e minuti jooksul jõuab tema nelikümmend wiis kolmeteistkümnendikku.

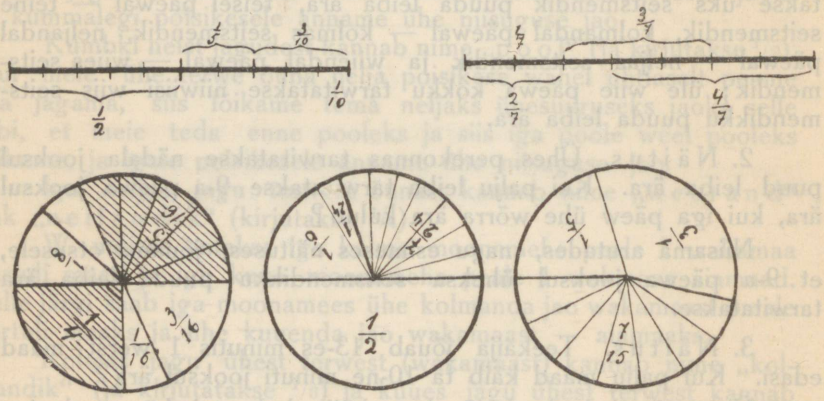
5. Näitus. Tunnikella minuti näitaja teeb 60-ne minuti jooksul ühe ringi a) Kui palju jõuab tema 47-e minuti jooksul ära käia? b) Kui palju jõuab tema 135-e minuti jooksul ära käia?

Kui minuti näitaja 60-ne minuti jooksul ühe ringi teeb, siis teeb ta ühe minuti jooksul ühe kuuekümnendiku jao ringist. a) Sellega teeb tema 47-e minuti jooksul nelikümmend seitse kuuekümnendikku terwest ringist. b) Aga 135-e minuti jooksul teeb tema ükssada kolmkümmend wiis kuuekümnendikku terwest ringist.

Et neis näitustes küsimuste peale kosta, jagasime terwe üksuse (1 puuda, 1 wersta, 1 ringi) mitmesse ühesuurusesse jakku ja niisuguseid jagusid wõtsime mitu. Niiwiisi saime arwud, mis terwe üksuse ühesuurustele jagudele wastawad; meie saime wiis seitsmendikku, üheksa seitsmendikku, kümme kolmeteistkümnendikku, nelikümmend wiis kolmeteistkümnendikku, nelikümmend seitse kuuekümnendikku, ükssada kolmkümmend wiis kuuekümnendikku.

Eelminewas paragrahwis jagasime ka terwe üksuse mitmesse ühesuurusesse jakku, aga meie wõtsime ainult ühe niisuguse jao.

Üks ehk mitu terwe üksuse ühesuurust jagu nimetatakse murruks (дробь)[1]. Iga üksik terwe üksuse ühesuurustest jagudest nimetatakse ka murruks. Nagu ette toodud näitustest selgib, sünnib murd selle läbi, et meie terwe üksuse mitmesse ühesuurusesse jaosse jaotame ja ühe ehk mitu niisugust jagu wõtame.



§ 153. Murru liikmed ja murru kirjutamine.

Murru mõistes on kaks arwu olemas: üks arw nimetab meile, mitmesse ühesuurusesse jakku terwe üksus jagatud on, teine arw loeb, mitu niisugust jagu wõetud on.

See arw, mis näitab, mitmesse ühesuurusesse jaosse terwe üksus jagatud on, on nimetaja;

1) Murruks nimetatakse iga arw terwe üksuse ühesuuruseid jagusid, kui selle arwu kaasas nimetus on, mis näitab, mitmesse ühesuurusesse jakku terwe üksus jagatud on. (Киселевъ).

(знаменатель) see arw, mis näitab mitu niisugust jagu wõetud on, on lugeja (числитель) Nimetaja ja lugeja on murru liikmed (члены дроби).

Et murru nimetuses kaks arwu olemas on, siis on ka murru kujutuses kaks arwu olemas: lugeja ja nimetaja. Murru kirjutamiseks tõmmatakse ristjoon (murrujoon = черта дроби), joone peale kirjutatakse lugeja, joone alla nimetaja. Murrusid loetakse järgmiselt: esite loetakse jagude arw — lugeja, siis jagude nimetus — nimetaja kaudu.

Näitused: $^{5}/_{16}$ = wiis kuueteistkümnendikku; $^{4}/_{7}$ = neli seitsmendikku. $^{135}/_{60}$ = ükssada kolmkümmend wiis kuuekümnendikku. $^{10}/_{13}$ = kümme kolmeteistkümnendikku.

Awalik on, et algmurru lugeja 1 on. Sellepärast räägitakse ka, et algmurd on niisugune murd, kelle lugeja 1 on.

§ 154. Teine murru sündimise wiis ja teistsugune murru mõiste äramääramine.

Meie oleme kõige 6-e tegewusega täisarwude kallal tutwaks saanud ja teame, et meil igatahes wõimalik on peripidiste tegewuste, kokkuarwamise, kaswatamise ja astmesse tõstmise kindlaid saadusi täisarwudena kujutada ja neid ka leida [1]). Wastupidiste tegewuste, maha-arwamise, jagamise ja juure wäljawõtmise kindlaid saadusi wõisime ainult siis leida, kui mõned iseäralised tingimised täidetud oliwad, nimelt: maha-arwamise juures pidi wähendataw suurem olema, kui maha-arwataw, jagamise juures pidi jagataw jagaja mitmekordne olema ja (ruut-) juure wäljawõtmise juures pidi juurealune arw kindel (ruutarw) aste olema. Peale selle oleme lähemalt tundma õppinud, missugustel tingimistel üks arw teisega jagataw on. Et maha-arwamise, jagamise ja juure wäljawõtmise mõistet laiendada, üleüldisemaks teha, ja ka nende tegewuste kindlaid saadusi igatahes leida, peame mõned uued tingimised wastu wõtma.

Jätame maha-arwamise ja juure wäljawõtmise mõiste laiendamise algebra hooleks ja teeme ainult jagamisega tegemist.

Teeme näituste waral selgeks, et igakord täisarwu jagamisel täisarwuga kindel jaond olemas on ja et seda jaondit leida wõib, ehk meie teda küll täisarwuna kujutada ei saa.

1. Näitus. Tarwis 3 ühesuurust õuna 4-ja lapse wahel ühtlaselt ära jagada. Kuidas seda teha ja kui palju saab iga laps?

Jagame (lõikame) ühe õuna neljaks ühesuuruseks jaoks ja anname igale lapsele ühe niisuguse jao s. o. ühe neljandiku õuna.

---

1) Suurte arwude kõrgeid astmeid, näit. 473857^{296}, ei ole meil tõeste wõimalik leida, aga ainult aja puuduse pärast; arwuteadlisi takistusi ei ole olemas. Sarnaste arwude wäljaarwamine tarwitab sadandeid, tuhandeid aastaid.

Siis jagame teise õuna neljaks ühesuuruseks jaoks ja anname igale lapsele jälle ühe neljandiku; wiimaks jagame kolmanda õuna ka neljaks ühesuuruseks jaoks ja anname igale lapsele jälle ühe neljandiku. Niiwiisi saab iga laps kolm neljandikku õuna.

Sellest näeme meie, et 3 õuna : 4 = $^3/_4$ õuna ehk 3 : 4 = $^3/_4$.

2. Näitus. 5-e reisikorwi kinniköitmiseks tarwitati 12 sülda nööri ära. Kui palju nööri läks iga korwi kinniköitmiseks, kui iga korwi jaoks ühe wõrra nööri ära kulus?

Jaotame iga sülla wiieks ühesuuruseks jaoks, siis on iga jagu üks wiiendik sülda. Ühe korwi jaoks wõtame nüüd igast süllast ühe wiiendiku, saame kaksteistkümmend wiiendikku = $^{12}/_5$ sülda. Nii arutades saame teada, et iga korwi kinniköitmiseks $^{12}/_5$ sülda nööri ära kulub ja et 12 sülda : 5 = $^{12}/_5$ sülda ehk 12 : 5 = $^{12}/_5$.

Kui meie teada oleme saanud, et iga korwi jaoks $^{12}/_5$ sülda nööri tarwis on, siis mõõdame wiiendiku süllaga 12 wiiendikku ära ja lõikame terwe nööri otsast $^{12}/_5$ sülda pika nööri jupi ära.

Neist näitustest selgub:

1) Kui ka jagataw jagajaga ennast ilma jäänuseta jagada ei lase, olgu jagataw jagajast wähem ehk suurem, siiski on kindel jaond olemas, mida meil ka wõimalik leida on. Seda kindlat jaondit kujutame murruna, mille juures jagataw — lugejaks ja jagaja nimetajaks on.

2) Murd sünnib seeläbi, et meie mitu terwet üksust mitmesse ühesuurusesse jaosse jagame ja ühe niisuguse jao wõtame.

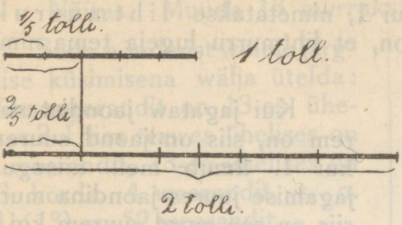
3) Murd on kahe arwu jaond, mille juures lugeja — jagatawaks ja nimetaja jagajaks on.

Sellepärast tarwitatakse ka sagedaste murru joont jagamise märgina, näit. 12 : 3 = 4 ehk $^{12}/_3$ = 4. ja $^4/_5$ wõime lugeda kas neli wiiendikku ehk neli jagatud wiiega; igatahes on 4 : 5 = $^4/_5$.

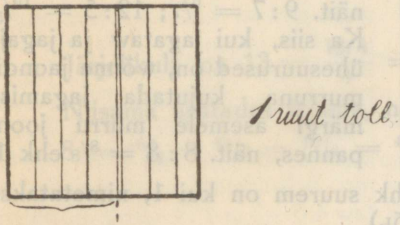
§ 155. Murru sündimise wiis ei mõju murru wäärtuse peale.

Ette toodud näitustest selgub, et ülesande sisu, mille kostusena murd ilmub, murru sündimise wiisi ära määrab.

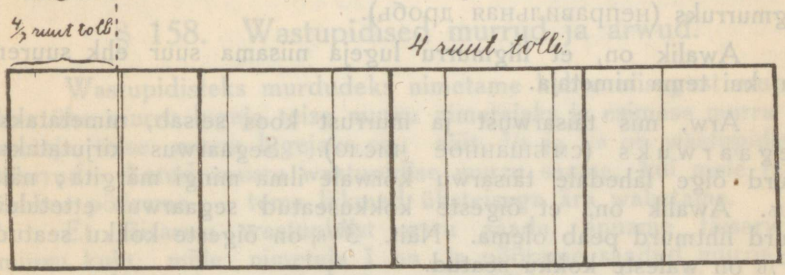
Kui meile aga mõni murd antud on, mille sündimise wiisist meile midagi üteldud ei ole, siis wõime niisuguse murru sündimist mõlemal wiisil seletada. Näit. murd $^2/_5$ tolli wõib olla kas 2 wiiendat jagu ühest tollist, ehk üks wiies jagu kahest tollist.



Kõrwal seisaw joonistus näitab, et 2 wiiendat jagu ühest tollist ja 1 wiies jagu kahest tollist ühesuurused pikkused on.



Kõrwal seisaw joonistus näitab, et 4 seitsmendat jagu ühest ruuttollist ja 1 seitsmes jagu neljast ruuttollist ühesuurused on.



Nende näituste waral jõuame järgmistele otsustele:

1) Iga murru saamist wõime mõlematel wiisidel seletada;
2) Murru wäärtuse ja sisu peale ei mõju murru sündimise wiis.

§ 156. Lihtmurd, liigmurd ja segaarw.

Kui meie ühe terwe kaheks ühesuuruseks jaoks jaotame, siis nimetatakse iga saadud jagu pooleks; sellepärast on ühes terwes 2 poolt. Jagame ühe terwe kolmeks ühesuuruseks jaoks, siis nimetatakse iga jagu kolmandikuks; sellepärast on ühes terwes 3 kolmandikku. Niisama leiame ka, et ühes terwes on 4 neljandikku, 5 wiiendikku jne.

Wõtame ühest terwest wähem osasid, kui neid temas olemas on, siis saame murru, mis ühest terwest wähem on; näit. $^{5}/_{6}$, $^{4}/_{7}$, $^{10}/_{21}$.

Kui meie wähemat arwu suuremaga jagame, siis on awalik, et saadaw jaond wähem on, kui 1. Niisugusest jagamisest saadawat jaondit ei saa meie täisarwuna kujutada, meie kujutame teda murruna, näit. $5:6 = {}^{5}/_{6}$; $4:7 = {}^{4}/_{7}$. Niisugune murd on wähem kui 1.

Murd, mis wähem on, kui 1, nimetatakse lihtmurruks (правильная дробь). Awalik on, et lihtmurru lugeja tema nimetajast wähem on.

Wõtame ühest terwest just niipalju jagusid, kui temas neid olemas on, siis saame murru, mis niisama suur on, kui üks terwe, näit. $^{8}/_{8} = 1$.

Wõtame murru jaoks enam jagusid, kui neid ühes terwes olemas on, siis saame murru, mis ühest suurem on; näit. $^{9}/_{7}$, $^{12}/_{5}$, $^{135}/_{60}$.

Kui jagataw jaondist suurem on, siis on jaond suurem, kui 1. Ilmub meil niisuguse jagamise juures jaondina murd, siis on see murd suurem kui 1; näit. $9:7 = {}^{9}/_{7}$; $12:5 = {}^{12}/_{5}$. Ka siis, kui jagataw ja jagaja ühesuurused on, wõime jaondit murruna kujutada jagamise märgi asemele murru joont pannes, näit. $8:8 = {}^{8}/_{8}$ ehk 1.

Murd, mis niisama suur ehk suurem on kui 1, nimetatakse liigmurruks (неправильная дробь).

Awalik on, et liigmurru lugeja niisama suur ehk suurem on, kui tema nimetaja.

Arw, mis täisarwust ja murrust koos seisab, nimetatakse segaarwuks (смѣшанное число). Segaarwus kirjutatakse murd õige lähedale täisarwu kõrwale ilma mingi märgita; näit. $3^{2}/_{5}$. Awalik on, et õigeste kokkuseatud segaarwus ettetulew murd lihtmurd peab olema. Näit. $3^{5}/_{6}$ on õigeste kokku seatud, $2^{11}/_{6}$ on waleste kokku seatud.

§ 157. Täisarwule murru kuju andmine.

1) Igat täisarwu wõime murruna kujutada, mille lugejaks antud arw ja nimetajaks 1 on.

Waatame murru peale, kui jaondi peale, siis on awalik, et iga arw 1-ga jagatud sellesama arwu annab.

Sellepärast on $^{5}/_{1} = 5:1 = 5$ ja ümberpöördult: $5 = {}^{5}/_{1}$. $8 = 8:1 = {}^{8}/_{1}$; $12 = {}^{12}/_{1}$, $23 = {}^{23}/_{1}$ jne.

2) Arwu 1 wõime niisuguse murruna kujutada, mille lugeja ja nimetaja missugused tahes, aga ühesuurused arwud on.

Et ühes terwes 2 poolt, 3 kolmandikku jne. on ja et iga arw iseenesega jagatud 1 annab, siis wõime kirjutada

$$1 = {}^{1}/_{1} = {}^{2}/_{2} = {}^{3}/_{3} = {}^{4}/_{4} = {}^{5}/_{5} = {}^{6}/_{6} = {}^{7}/_{7} = {}^{8}/_{8} = \ldots \text{ jne.}$$

3) Igale täisarwule wõime murru kuju anda, mille juures murru nimetaja missugune tahes wõib olla — selle tarwis peame täisarwu antud nimetajaga kaswatama ja saadud kaswatise murru lugejaks panema.

Näitus. Muuda 13 murruks, mille nimetaja 4 on.

Seda nõudmist wõime järgmise küsimisena wälja ütelda: Mitu weerandit on 13-es ühelises? Ühes terwes ühelises on 4 weerandit, 13-es ühelises on 13 korda 4 weerandit, s. o. $(4 \times 13) = 52$ weerandit.

Waatame murru peale, kui jaondi peale, siis on nimetaja 4—jagaja, 13 on jaond ja otsitaw lugeja on jagataw. Jagatawa leiame, kui meie jaondit jagajaga kaswatame; sellepärast on otsitaw lugeja $13 \times 4 = 52$.

Järjelikult on $13 = \frac{13.4}{4} = {}^{52}/_{4}$.

Niisama arutades leiame, näit., et:

$8 = {}^{16}/_{2} = {}^{24}/_{3} = {}^{32}/_{4} = {}^{40}/_{5} = {}^{48}/_{6} = {}^{56}/_{7} = \ldots$ jne.

§ 158. Wastupidised murrud ja arwud.

Wastupidisteks murdudeks nimetame kahte niisugust murdu, kus ühe murru lugeja teise murru nimetajaks ja esimese murru nimetaja teise murru lugejaks on; näit. ${}^{3}/_{5}$ ja ${}^{5}/_{3}$ on wastupidised murrud. Antud murru wastupidise murru saame, kui meie tema ümber pöörame — tema liikmed üksteisega ära wahetame.

Et täisarwu wastupidist arwu saada, anname täisarwule murru kuju, mille nimetaja 1 on ja pöörame saadud murru siis ümber. Näit. 7-me ehk ${}^{7}/_{1}$-ku wastupidine murd on ${}^{1}/_{7}$; ${}^{1}/_{7}$-ku wastupidine arw on ${}^{7}/_{1}$ ehk 7. Täisarwu wastupidiseks arwuks on algmurd, mille nimetajaks antud arw on. Algmurru wastupidiseks arwuks on tema nimetaja.

§ 159. Liigmurru segaarwuks muutmine.

(Liigmurrust täisarwu wäljawõtmine).

Näitus. Muuda ${}^{47}/_{9}$ segaarwuks! (Wõta ${}^{47}/_{9}$ täisarw wälja).

9 üheksandikku annawad ühe terwe; 47 üheksandikku annawad nii mitu terwet, mitu korda 9 47-me sisse mahub. 9 mahub 47-me sisse 5 korda, 2 jääb üle. Sellepärast ühendame 5 korda 9 üheksandikku s. o. 45 üheksandikku 5-ks terweks üheliseks ja 2 üheksandikku jääb murruks.

Niiwiisi leiame, et ${}^{47}/_{9} = 5{}^{2}/_{9}$.

Waatame murru peale, kui ilmutamata jaondi peale, siis on 47—jagataw ja 9 on jagaja. Jagame 47-t 9-ga, saame 5 terwet ühelist ja 2 jääb järele. 47-st oleme 45 juba 9-ga ära jaganud; jagame 2 ka weel 9-ga, saame ${}^{2}/_{9}$.

Järjelikult on ${}^{47}/_{9} = 5{}^{2}/_{9}$.

Juht: *Et liigmurdu segaarwuks muuta (liigmurrust täisarwu wälja wõtta), jagame lugejat nimetajaga; ilmunud jaond on segaarwu terwed ühelised, jäänus on segaarwus murru lugeja, kuna nimetajaks endine nimetaja jääb.*

§ 160. Segaarwu liigmurruks muutmine.

Muuda segaarw $4^5/_8$ liigmurruks!

$4^5/_8$ liigmurruks muuta tähendab teda kaheksandikkudena awaldada. Ühes terwes on 8 kaheksandikku, 4-s terwes on 4 kord 8 kaheksandikku, s. o. $4 \times 8 = 32$ kaheksandikku; peale selle on meil weel 5 kaheksandikku, see teeb kokku 37 kaheksandikku ehk $^{37}/_8$.

Üles kirjutada wõime seda järgmisel wiisil:

$$4^5/_8 = 4 + {}^5/_8 = \frac{8.4}{8} + {}^5/_8 = \frac{8.4+5}{8} = {}^{37}/_8.$$

$4^5/_8$ on ilmutatud jaond, mille juures 4 täisarwuline ligijaond, 5 jäänus ja 8 jagaja on, kuna jagatawat otsitakse. Jagatawa leiame, kui meie ligijaondit jagajaga kaswatame ja saadud kaswatisele jäänuse juure arwame. Sellepärast on otsitaw jagataw $4.8+5$ ja $4^5/_8 = (4.8+5):8 = 37:8 = {}^{37}/_8$.

Järjelikult on $4^5/_8 = {}^{37}/_8$.

Juht: *Et segaarwu liigmurruks muuta, kaswatame segaarwus olewat täisarwu nimetajaga ja kaswatisele arwame lugeja juure; saadud summa on liigmurru lugeja, kuna nimetaja endiseks jääb.*

§ 161. Murdude wõrdlemine.

I. Wõrreldatawatel murdudel on ühesugused nimetajad.

Kumb murd on suurem, kas $^5/_9$ wõi $^7/_9$?

Mõlemates murdudes on terwest üksusest ühesuurused jaod, üheksandikud, wõetud; $^7/_9$-kus on neid jagsuid enam, kui $^5/_9$, sellepärast on $^7/_9$ suurem kui $^5/_9$.

Mõlemates jaondites on jagajad ühesugused, aga $^7/_9$-kus on jagataw suurem, kui $^5/_9$-kus; sellepärast on $^7/_9$ suurem kui $^5/_9$.

Kahest murrust, millel ühesuurused nimetajad, on see suurem, millel suurem lugeja on.

II. Wõrreldatawatel murdudel on ühesuurused lugejad.

Kumb murd on suurem, kas $^3|_{11}$ wõi $^3|_{10}$?

Mõlemates murdudes on ühewõrra üksuse jagusid, aga $^3/_{11}$-kus on wõetud jaod pisemad, kui $^3/_{10}$-kus, sellepärast on $^3/_{11}$ wähem, kui $^3/_{10}$, ehk $^3/_{10}$ on suurem kui $^3/_{11}$.

Awalik on, et kümnes jagu 3-st suurem on, kui üksteistkümnes jagu 3-st; sellepärast on ka $^3/_{10}$ suurem, kui $^3/_{11}$.

Kahest murrust, millel ühesuurused lugejad on, on see suurem, millel wähem nimetaja on.

III. Wõrreldatawatel murdudel on mitmesugused nimetajad, kui ka lugejad.

Et niisuguseid murdusid, mille nimetajad ja lugejad mitmesugused on, wõrrelda, peame neid ühe nimetaja alla panema. Kuidas seda teha, seda õpime allpool tundma. Mõnikord on siiski wõimalik niisuguseid murdusid ka ilma ühise nimetaja alla panenemata wõrrelda. Näitused:

1) Kumb murd on suurem, kas $^{15}/_{22}$ ehk $^{13}/_{24}$?

Kostus: $^{15}/_{22}$ on suurem, kui $^{13}/_{24}$, sest tema lugeja on suurem ja pealegi on tema nimetaja wähem, kui $^{13}/_{24}$-kus.

2) Kumb murd on suurem kas $^{7}/_{8}$, ehk $^{8}/_{9}$?

$^{7}/_{8}$-kul puudub 1-st $^{1}/_{8}$, $^{8}/_{9}$-kul puudub 1-st $^{1}/_{9}$; $^{1}/_{8}$ on suurem kui $^{1}/_{9}$.

Sellest on näha, et $^{8}/_{9}$-kul 1-st wähem puudub, kui $^{7}/_{8}$-kul ja sellepärast on $^{8}/_{9}$ suurem, kui $^{7}/_{8}$.

3) Kumb murd on suurem, kas $^{8}/_{15}$, ehk $^{11}/_{18}$?

$^{8}/_{15}$-kul puudub 1-st $^{7}/_{15}$, $^{11}/_{18}$-kul puudub 1-st $^{7}/_{18}$; $^{7}/_{18}$ on wähem, kui $^{7}/_{15}$. Sellest on näha, et $^{11}/_{18}$-kul 1-st wähem puudub, kui $^{8}/_{15}$-kul ja sellepärast on $^{11}/_{18}$ suurem, kui $^{8}/_{15}$.

Murdude wõrdlemise kaudu jõuame järgmistele otsustele:

1. Lugeja suurenemisega suureneb murd.
2. Lugeja wähenemisega wäheneb murd.
3. Nimetaja suurenemisega wäheneb murd.
4. Nimetaja wähenemisega suureneb murd.

§ 162 Murru muutumine tema liikmete muutmisega.

1. Kui meie murru lugejale ja nimetajale ühe wõrra juure lisame, siis suureneb selle läbi lihtmurd, aga liigmurd wäheneb selle läbi ja mõlemad lähenewad 1-le.

Wõtame lihtmuru $^{6}/_{11}$ ja liigmurru $^{10}/_{7}$.

Lisame (kummasgi) murrus lugejale ja nimetajale 1 juure.

$\frac{6+1}{11+1} = \frac{7}{12}$; $\frac{7}{12}$ on suurem, kui $\frac{6}{11}$, sest $\frac{7}{12}$-kul puudub 1-st terwest $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{11}$-kul puudub aga $\frac{5}{11}$. $\frac{10+1}{1+1} = \frac{11}{8}$, $\frac{11}{8}$ on wähem, kui $\frac{7}{10}$, sest $\frac{11}{8} = 1^{3}/_{8}$, aga $^{10}/_{7} = 1^{3}/_{7}$ ja $1^{3}/_{8}$ on wähem, kui $1^{3}/_{7}$. Et lihtmurd suurenenud on, sellega on ta 1-le lähenenud; aga 1-ks ehk 1-st suuremaks ta ialgi ei saa, sest lugeja on ikka 5-e ühelise wõrra nimetajast wähem.

Et liigmurd wähenenud on, sellega on ta 1-le lähenenud, aga 1-ks ehk 1-st wähemaks ta kunagi ei saa, sest lugeja on ikka 3-e ühelise wõrra nimetajast suurem.

2. Kui meie murru lugejast ja nimetajast ühe wõrra maha arwame, siis wäheneb selle läbi lihtmurd, liigmurd aga suureneb selle läbi.

Wõtame lihtmurru $^5/_8$ ja liigmurru $^{12}/_7$.

Arwame kummaski murrus lugejast ja nimetajast 1 maha. $\frac{5-1}{8-1}=\frac{4}{7}$; on wähem kui $^5/_8$, sest $^4/_7$ puudub 1-st $^3/_7$, $^5/_8$-kul puudub aga $^3/_8$. $\frac{12-1}{7-1}=\frac{11}{6}$; $^{11}/_6$ on suurem kui $^{12}/_7$, sest $^{11}/_6=1^5/_6$, aga $^{12}/_7=1^5/_7$ ja $1^5/_6$ on suurem kui $1^5/_7$.

§ 163. Murru suurendamine ja wähendamine mitu korda.

1) Mitu korda meie lugejat suurendame, nii mitu korda suureneb murd.

Suurendame $^4/_{17}$-ku lugejat 3 korda, saame $^{12}/_{17}$.

$^{12}/_{17}$ on 3 korda suurem, kui $^4/_{17}$, sest et mõlemates murdudes on üksuse jaod ühesuurused, aga $^{12}/_{17}$-kus on neid jagusid 3 korda enam, kui $^4/_{17}$.

Waatame murru peale, kui jaondi peale ja lugeja peale, kui jagatawa peale, siis on awalik, et mitu korda meie jagatawat suurendame, nii mitu korda suureneb ka jaond.

2) Mitu korda meie murru lugejat wähendame, nii mitu korda wäheneb ka murd.

Wähendame $^4/_{17}$-ku lugejat 2 korda, saame $^2/_{17}$.

$^2/_{17}$ on 2 korda wähem, kui $^4/_{17}$, sest et temas 2 kord wähem üksuse jagusid on, kuna need jaod ise ühesuurused on.

Waatame murru peale kui jaondi peale ja lugeja peale, kui jagatawa peale, siis on awalik, et mitu korda meie jagatawat wähendame, nii mitu korda wäheneb ka jaond.

3) Mitu korda meie murru nimetajat suurendame, nii mitu korda wäheneb murd.

Suurendame $^5/_{12}$-ku nimetajat 2 korda, saame $^5/_{24}$.

Kaheteistkümnendikudest saame kahekümneneljandikud kui meie kaheteistkümnendikud weel pooleks jagame.

Sellepärast on 24-ndikud 2 korda pisemad, kui 12-ndikud ja $^5/_{24}$ on 2 korda wähem, kui $^5/_{12}$, sest et $^5/_{24}$-kus üksikud jaod 2 korda wähemad on, kui $^5/_{12}$-kus, kuna jagusid mõlematcs murdudes ühepalju on.

Waatame murru peale, kui jaondi peale ja nimetaja peale kui jagaja peale, siis on awalik, et mitu korda meie jagajat suurendame, nii mitu korda wäheneb jaond.

4) Mitu korda meie murru nimetajat wähendame, nii mitu korda suureneb murd.

Wähendame $^{5}/_{12}$ nimetajat 2 korda, saame $^{5}/_{6}$.

Kaheteistkümnendikkudest jagudest saame kuuendikud selle läbi, et meie iga 2 kaheteistkümnendikku üheks jaoks kokku liidame. Sellepärast on kuuendikud 2 korda suuremad kui kaheteistkümnendikud ja $^{5}/_{6}$ on 2 korda suurem, kui $^{5}/_{12}$, sest et $^{5}/_{6}$-kus on üksikud jaod 2 korda suuremad, kui $^{5}/_{12}$-kus, kuna jagusid mõlemates murdudes ühepalju on.

Waatame murru peale, kui jaondi peale ja nimetaja peale kui jagaja peale, siis on awalik, et mitu korda meie jagajat wähendame, nii mitu korda suureneb jaond.

Neist murdude omadustest järgnewad juhid:

1. Juht: *Mitu korda meie murdu suurendada tahame, nii mitu korda peame kas tema lugejat suurendama ehk tema nimetajat wähendama.*

Ehk: *Et murdu täisarwuga kaswatada, peame selle täisarwuga kas murru lugejat kaswatama ehk tema nimetajat jagama.*

2. Juht: *Mitu korda meie murdu wähendada tahame, nii mitu korda peame kas tema lugejat wähendama ehk tema nimetajat suurendama.*

Ehk: *Et murdu täisarwuga jagada, peame selle täisarwuga kas murru nimetajat kaswatama ehk tema lugejat jagama.*

§ 164. Ühesuurused murrud ja arwud.

On arwusid olemas, millel mitmesugune wäline kuju on, mis aga siiski ühesuurused on, näit. $4^{5}/_{8} = {}^{37}/_{8}$; $^{3}/_{3} = {}^{4}/_{4}$ jne. Olgu meil kaks ühesuurust murdu $^{4}/_{4}$ ja $^{6}/_{6}$; $^{4}/_{4} = {}^{6}/_{6}$. Kui meie neist pooled wõtame, siis saame ka kaks ühesuurust murdu: $^{2}/_{4}$ ja $^{3}/_{6}$; $^{2}/_{4} = {}^{3}/_{6}$.

Kaks murdu, ehk ülepea kaks arwu, on ühesuurused, kui nad üht ja sedasama suuruse hulka awaldawad; näit. $^{1}/_{2}$ rubla $= 50$ kop.; $^{3}/_{4}$ puuda $= 30$ naela; $^{5}/_{5} = 1$; $^{2}/_{4} = {}^{3}/_{6}$.

Kui ühest murrust teine murd saadakse, mis esimesega ühesuurune on, siis öeldakse, et murd oma wäärtust ei muutnud.

§ 165. Murru pea-omadus.

Kui meie murru lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame, siis jääb murru wäärtus muutmata.

Wôtame murru $^{6}/_{9}$.

1) Murru nimetajat ja ühtlasi ka lugejat, näituseks, 3-ga kaswatades teeme üksuse jaod, millest murd koos seisab, 3 korda pisemaks; selle wastu wôtame neid ka 3 korda enam; seepärast jääb murru wäärtus muutmata ja $^{6}/_{9} = \frac{6 \cdot 3}{9 \cdot 9}$ ehk $^{6}/_{9} = {}^{18}/_{27}$.

2) Murru nimetajat ja ühtlasi ka lugejat, näituseks, 3-ga jagades teeme üksuse jaod, millest murd koos seisab, 3 korda suuremaks, selle wastu wôtame neid aga 3 korda wähem; seepärast jääb murru wäärtus muutmata ja $\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3}$ ehk $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Waatame murru peale, kui jaondi peale, siis on lugeja — jagataw ja nimetaja on jagaja.

Meie teame aga, et kui jagatawat ja jagajat ühe ja sellesama arwuga kaswatada ehk jagada, siis jääb jaond muutmata. Sellepärast jääb ka murru wäärtus muutmata, kui meie tema lugejat ja nimetajat ühtlasi ühe ja sellesama arwuga kas kaswatame ehk jagame ja

$\frac{6}{9} = \frac{6 \cdot 3}{9 \cdot 3}$ ehk $\frac{6}{9} = \frac{18}{27}$

$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3}$ ehk $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

§ 166. Murdude koondamine.

Awalik on, et wäikeste arwudega kergem rehkendada on, kui suurte arwudega. Et murru wäärtus ei muutu, kui meie lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama arwuga jagame, siis on meil sagedaste wõimalik murrule lihtsamat wälimist kuju anda, ilma et tema wäärtus muutuks.

Murrule lihtsama kuju andmist selle läbi, et meie tema lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama arwuga jagame, nimetatakse murru koondamiseks.

Awalik on, et ainult niisugust murdu koondada wõib, mille lugejal ja nimetajal ühiseid jagajaid olemas on. Et murdu koondada, leiame jagatawuse tunnuste põhjal lugeja ja nimetaja ühise jagaja ja jagame sellega lugejat ja nimetajat. Näitus: Koonda $^{84}/_{126}$!

84 ja 126 on 2-ga jagatawad, sellepärast koondame $^{84}/_{126}$-kku 2-ga ja saame $^{42}/_{63}$; 42 ja 63 on 3-ga jagatawad, sellepärast koondame $^{42}/_{63}$-kku 3-ga ja saame $^{14}/_{21}$; 14 ja 21 on 7-ga jagatawad, sellepärast koondame $^{14}/_{21}$-kku 7-ga ja saame $^{2}/_{3}$.

Need koondamised kirjutatakse nii:

$$\frac{84}{126} = \frac{42}{63} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

Mida rutem meie eesmärgile jõuame, seda parem. Meie oleks otsekohe $^{84}/_{126}$-kku 6-ga koondada wõinud, sest jagatawuse tunnuste põhjal wõime kohe ära näha, et 84 ja 126 6-ga jagatawad on.

Kõige rutemini jõuame eesmärgile, kui meie lugeja ja nimetaja kõige suurema ühise jagaja üles otsime ja temaga lugejat ja nimetajat jagame. Näituseks, 84 ja 126 kõige suurem ühine jagaja on 42; sellepärast on

$$\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$$

Kui lugeja ja nimetaja õige suured arwud on, ehk kui jagatawuse tunnuste abil kõige suuremat ühist jagajat kerge leida ei ole, siis on parem kõige suuremat ühist jagajat järkjärgulise jagamise abil leida.

Näitus: koonda $\frac{571428}{999999}$!

571428	999999	1
	571428	
	428571	

571428	571428	1
	428671	
	142857	

428571	428571	3
	428571	

$$\frac{571428}{999999} = \frac{4}{7}$$

Peale selle, kui meie murru lugejat ja nimetajat nende kõige suurema ühise jagajaga jaganud oleme, ei ole saadud murru lugejal ja nimetajal enam ühiseid jagajaid (peale 1) ja meie ei wõi seda murdu enam koondada. Mitte-koondatawa murru lugeja ja nimetaja on wastastiku algarwud, näit. $^{24}/_{35}$.

Tähendus: Kui meie murdu koondada wôime, siis peame teda koondama; ainult harwa on kasulik murdu koondamata jätta ehk mitte täielikult koondada.

§ 167. Ühise nimetaja alla panemine.

Kui meil mitu murdu on ja meie murru pea-omadust tarwitades, murdude lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama, igale murrule iseäralise arwuga kaswatame, siis wõime nii kaugele jõuda, et kõikidel antud murdudel üks ja seesama nimetaja on. Et aga nimetajad meile näitawad, mitmeks ühesuuruseks jaoks terwe üksus jagatud on, siis wõime ütelda, et antud murdusid ühise nimetaja alla panema tähendab neid murdusid terwe üksuse ühesuguste jagudena awaldama.

Kui meie poole weel kaheks ühesuuruseks jaoks jaotame, siis saame neljandikud; $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$

Kui meie poole weel kolmeks ühesuuruseks jaoks jaotame, siis saame kuuendikud; $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{6}$

Kui meie poole weel wiieks ühesuuruseks jaoks jaotame, siis saame kümnendikud; $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{2.5} = \frac{1}{10}$

Kui meie poole üheteistkümneks ühesuur. jaoks jaot., siis saame kahekümne-kahendikud; jne. $\frac{1}{2} : 11 = \frac{1}{2.11} = \frac{1}{22}$ jne.

Kui meie kolmandiku kaheks ühesuuruseks jaoks jagame, siis saame kuuendikud; $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3.2} = \frac{1}{6}$

Kui meie kolmandiku kolmeks ühesuuruseks jaoks jaotame, siis saame üheksandikud; $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3.3} = \frac{1}{9}$

Kui meie kolmandiku neljaks ühesuur. jaoks jaot., siis saame kaheteistkümnendikud; jne. $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{3.4} = \frac{1}{12}$ jne.

Kui meie seitsmendiku kaheks ühesuuruseks jaoks jaot., siis saame neljateistkümnendikud; $\frac{1}{7} : 2 = \frac{1}{7.2} = \frac{1}{14}$

Kui meie seitsmendiku kolmeks ühesuur. jaoks jaot., siis saame kahekümne-ühendikud; jne. $\frac{1}{7} : 3 = \frac{1}{7.3} = \frac{1}{21}$ jne.

Neist nähtustest selgub, et meie igat murdu ainult niisuguste terwe üksuse jagudena awaldada wõime, millede arw terwes üksuses antud murru nimetajale mitmekordne on.

Näitused: Poolt wõime neljandikudena, kuuendikudena, kaheksandikudena, kümnendikudena jne. awaldada, mille juures 4, 6, 8, 10 jne. 2-he mitmekordsed on. Kolmandikku wõime kuuendikkudena, üheksandikkudena, kaheteistkümnendikkudena, jne. awaldada, mille juures 6, 9, 12 jne. 3-e mitmekordsed on.

Wiiendiku wõime kümnendikkudena, wiieteistkümnendikkudena, kahekümnendikkudena jne. awaldada, mille juures 10, 15, 20 jne. 5-e mitmekordsed on. Kui meie nüüd mitut murdu, näit. $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$ ühise nimetaja alla panna, s. o. üksuse ühesuguste osadena awaldada tahame, siis peab uus, ühine nimetaja antud murdude nimetajate ühine mitmekordne olema. Kõige kasulikum on antud nimetajate k õ i g e w ä i k s e m ühine mitmekordne uueks nimetajaks wõtta. Antud murdude nimetajate 3, 4 ja 6 kõige wäiksem ühine mitmekordne on 12. Sellepärast on antud murdude $^2/_3$, $^3/_4$ ja $^5/_6$ uus, kõige wäiksem ühine nimetaja 12. Nüüd peame igale murrule uut lugejat otsima.

Wõtame esimese murru $^2/_3$. Kui meie nimetaja 3-e asemel 12 nimetajaks paneme, siis oleme selle läbi endist nimetajat, 3-e, niisuguse arwuga kaswatanud, mis 3-le täiendusteguriks on 12-ni. Et murru wäärtus ei muutuks, peame ka lugejat, 2-te, sellesama täiendusteguriga kaswatama. Sellest on näha, et nimetaja täiendustegur ka lugeja täiendustegur on. Sellepärast nimetatakse seda

täiendustegurit ka kõige murru täiendusteguriks. Sel korral on $^2/_3$-ku täiendusteguriks 4. Kaswatame lugejat 2-te täiendusteguri 4-ga, saame 8. Järjelikult leiame, et $^2/_3 = {}^8/_{12}$. Niisamuti arutame ka teiste murdude $^3/_4$-ku ja $^5/_6$-ku kohta.

$^3/_4$-ku täiendustegur on 3 ja $^3/_4 = {}^9/_{12}$.

$^5/_6$-ku täiendustegur on 2 ja $^5/_6 = {}^{10}/_{12}$.

Meie võime ka teist wiisi arutada.

1 terwe $= {}^{12}/_{12}$ 1 terwe $= {}^{12}/_{12}$ 1 terwe $= {}^{12}/_{12}$

$^1/_3 = {}^{12}/_{12} : 3 = {}^4/_{12}$ $^1/_4 = {}^{12}/_{12} : 4 = {}^3/_{12}$ $^1/_6 = {}^{12}/_{12} : 6 = {}^2/_{12}$

$^2/_3 = {}^4/_{12} \times 2 = {}^8/_{12}$ $^3/_4 = {}^3/_{12} \times 3 = {}^9/_{12}$ $^5/_6 = {}^2/_{12} \times 5 = {}^{10}/_{12}$

Juht: *Et antud murdusid kõige wäiksema ühise nimetaja alla panna, otsime nimetajate kõige wäiksema ühise mitmekordse üles; see on kõikide murdude uus, kõige wäiksem ühine nimetaja. Siis otsime iga murru täiendusteguri üles ja kaswatame igat lugejat wastawa täiendusteguriga, ilmunud kaswatised on wastawate murdude uued lugejad.*

§ 168. Murrulise jao leidmine.

Kui meie ühe arwu ehk rohkuse mitmeks ühesuuruseks jaoks jaotame ja mitu niisugust jagu wõtame, siis nimetame wõetud jagu — murruliseks jaoks.

1. Ülesanne. Aednik wiis 480 õuna turule; $^5/_8$ nendest läks temal korda ära müüa. Mitu õuna müüs tema ära?

Kõik kaup (1) ehk $^8/_8$ kõigest kaubast on 480 õuna.
$^1/_8$ kõigest kaubast on 8-as jagu 480-st õunast, s. o. 480 õuna : 8 = 60 õuna.
$^5/_8$ „ „ „ 5 korda enam kui 60 õuna, s. o. 60 õuna : 5 = 300 õuna.

Rakendus:

1 ehk $^8/_8$ kõigest kaubast = 480 õuna
$^1/_8$ „ „ = 480 „ : 8 = 60 õuna.
$^5/_8$ „ „ = 60 „ $\times$ 5 = 300 õuna.

Kostus: Aednik müüs 300 õuna ära.

2. Ülesanne. Talu peremehel oli aias 450 kapsapead; $^5/_9$ nendest müüs ta ära. Kui palju jäi talle enesele?

1. Kui suur jagu jäi talle enesele?

Kõik aia täis kapsaid on 1 terwe ehk $^9/_9$; kui tema $^5/_9$ ära müüs, jäi talle 9 üheksandikku — 5 üheksandikku = 4 üheksandikku järele; $1 - {}^5/_9 = {}^9/_9 - {}^5/_9 = {}^4/_9$.

2. Kui palju kapsapäid jäi talle enesele?

1 terwe ehk $^9/_9$ kõigist kapsapeadest = 450
$^1/_9$ „ „ = 450 : 9 = 50
$^4/_9$ „ „ = 50 $\times$ 4 = 200

Kostus: 200 kapsapead jäi peremehele enesele.

3. Ülesanne. Mõisa walitseja wõttis laadale hobust ostma minnes 231 rubla kaasa. Hobuse eest maksis tema $^{7}/_{10}$ kõigest kaasawõetud summast. Kui palju maksis hobune?

1 terwe (kõik) summa ehk $^{10}/_{10}$ kaasawõetud summast = 231 rbl.

$^{1}/_{10}$ kaasawõetud summast = 231 rbl. : 10 = $^{231}/_{10}$ rubla

$^{7}/_{10}$ „ „ = $\frac{231}{10}$ rubla $\times 7 = \frac{231 \cdot 7}{10}$ rubla = $\frac{1617}{10}$ rubla = $161^{7}/_{10}$ rubla.

Kostus: Hobune maksis $161^{7}/_{10}$ rubla.

4. Ülesanne. $^{14}/_{33}$-kust $^{3}/_{7}$-kku jagu leida!

1 terwe (kõik) antud arw ehk $^{7}/_{7}$ antud arwust = $^{14}/_{33}$.

$^{1}/_{7}$ antud arwust = $\frac{14}{33} : 7 = \frac{14:7}{33} = \frac{2}{33}$ (§ 161, 2-ne juht)

$^{3}/_{7}$ „ „ = $\frac{2}{33} \times 3 = \frac{2}{33:3} = \frac{2}{11}$ (§ 161, 1-ne juht).

Kostus: $^{3}/_{7}$-kku $^{14}/_{33}$-kust on $^{2}/_{11}$.

5. Ülesanne. Aed oli $28^{4}/_{7}$ sülda pikk. Ühel päewal jõudis maaler $^{11}/_{32}$-kku sellest aiast ära wärwida. Kui palju jäi temal sel päewal wärwimata?

Enne kui meie seda ülesannet wälja arwama hakkame, muudame segaarwu liigmurruks. $28^{4}/_{7} = \frac{28 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{200}{7}$

1. Kui suur jagu terwest aiast jäi sel päewal wärwimata? Kõik aed on 1 terwe ehk $^{32}/_{32}$; kui maaler ühel päewal $^{11}/_{32}$ ära wärwis, siis jäi weel 32 kolmekümne-kahendiku — 11 kolmekümne-kahendiku = 21 kolmekümne-kahendiku s. o. $^{32}/_{32} - {}^{11}/_{32} = {}^{21}/_{32}$ jagu wärwimata.

2. Kui palju aeda jäi wärwimata?

1 terwe aed ehk $^{32}/_{32}$ kõigest aiast = $^{200}/_{7}$ sülda;

$\frac{1}{32}$ kõigest aiast = $\frac{200}{7}$ s. : 32 = $\frac{200}{7 \cdot 32}$ s. = $\frac{200}{224}$ s. = $\frac{25}{28}$

$\frac{21}{32}$ „ „ = $\frac{25}{28}$ s. $\times 21 = \frac{25 \cdot 21}{28}$ s. = $\frac{525}{28}$ s. = $18^{21}/_{28}$ s. = $18^{3}/_{4}$ sülda.

Kostus: Wärwimata jäi $18^{3}/_{4}$ sülda.

§ 169. Wäljaarwamiste kergendamine.

Wiimases ülesandes pidime $^{200}/_{7}$ sülda 32-ga jagama. Lugeja 200 ei lase ennast 32-ga jagada, sellepärast peame nimetajat 32 kaswatama, saame $\frac{200}{7 \cdot 32}$. Meie wõime seda murdu koon-

dada enne weel, kui meie kaswatamise korda saadame, sellepärast, et meie teame: kui üks tegur mõne arwuga jagataw on, siis on kõik kaswatis selle arwuga jagataw, ja selle asemel, et kaswatist mõne arwuga jagada, wõime ühte tegurit selle arwuga jagada.

Meie nimetaja on kahe arwu, 7-e ja 32-e kaswatis; üks neist teguritest, 32, on 8-ga jagataw, sellepärast on terwe nimetaja 8-ga jagataw; et lugeja, 200, ka 8-ga jagataw on, siis wõime kõiki murdu 8-ga koondada. Lugeja 200 8-ga jagatud annab 25; selle asemel aga, et kõike nimetajat 8-ga jagada, jagame ühte tegurit, mis ennast jagada laseb, s. o. 32-e, 8-ga, saame 7.4. Nii wiisi leiame, et $\frac{200}{7.32} = \frac{25}{7.4} = \frac{25}{28}$. Kui meie $^{25}/_{28}$-kku 21-ga kaswatame, siis wõime ka enne kaswatamise korda saatmist koondada. Lugeja 25×21 on kahe arwu kaswatis; üks nendest, 21, on 7-ga jagataw, sellepärast on ka terwe lugeja 7-ga jagataw; ka nimetaja 28 on 7-ga jagataw, sellepärast wõime kõike murdu $\frac{25.21}{28}$ 7-ga koondada. Selle asemel, et kõike lugejat, 25.21 7-ga jagada, wõime üht tegurit, mis ennast jagada laseb, s. o. 21-e, 7-ga jagada, saame 25.3; nimetaja 28 7-ga jagatud annab 4. Nii wiisi leiame, et $\frac{25.21}{28} = \frac{25\ 3}{4} = \frac{75}{4} = 18^{3}/_{4}$

Sellest näeme, et meile kasulik on, et meil wäiksemate arwudega tegemist oleks, lugeja ja nimetaja kaswatamist ainult tehte märgi abil ära tähendada, siis seda kaswatise omadust, et terwe kaswatise asemel ühte tema tegurit jagada wõib, tarwitades, lugejat ja nimetajat koondada ja alles pärast koondamist kaswatamine toime saata.

Kõige kasulikum on, kui meie kõik tehted enne ainult ära tähendame, pärast koondame ja alles lõpuks kaswatamise toime saadame.

Sellepärast tuleb 5-da ülesande wäljaarwamine nii rakendada:

1 terwe aed ehk $\frac{32}{32}$ kõigest aiast $= \frac{200}{7}$ sülda

$\frac{1}{32}$ „ „ $= \frac{200}{7.32}$ sülda

$\frac{21}{32}$ „ „ $= \frac{\overset{25}{\cancel{200}}\ \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{7}}\ \underset{4}{\cancel{32}}}$ sülda $= {}^{75}/_{4}$ sülda $= 18^{3}/_{4}$ sülda.

4-nda ülesande wäljaarwamisel jagasime lugejat ja nimetajat, sest et see wõimalik oli. Aga ka seal on parem, kui meie selle asemel, et lugejat jagada, nimetajat kaswatame ja selle asemel, et nimetajat jagada, lugejat kaswatame, selle kaswatamise ainult ära-tähendame, siis koondame ja alles lõpuks tarwilised kaswatamised toime paneme.

Siis tuleks 4-nda ülesande wälja arwamine nii rakendada:

1 terwe (kõik) antud arw ehk $\frac{7}{7}$ antud arwust $= \frac{14}{33}$

$\frac{1}{7}$ „ „ $= \frac{14}{33.7}$

$\frac{3}{7}$ „ „ $= \frac{\overset{2}{\cancel{14}}.\overset{1}{3}}{\underset{11}{\cancel{33}}.\underset{1}{7}} = \frac{2}{11}$.

Selle asemel, et kirjutada $\frac{14}{33} : 7$ ja sellega näidata, et $\frac{14}{33}$-kku 7-ga jagatama peab, kirjutame jagaja otsekohe joone alla, sest 1) murru joont wõime ka jagamise märgiks pidada ja 2) meie teame, et murdu selle läbi jagatakse, kui tema nimetajat kaswatatakse.

Kergeste arusaadaw on ka, et meie $\frac{14}{33.7} \times 3 = \frac{14.3}{33.7}$ otsekohe $\frac{14.3}{33.7}$ kirjutada wõime.

§ 170. Tundmata arwu leidmine, kui tema murruline jagu teada on.

(Kõige arwu leidmine tema murrulise jao kaudu).

1. Ülesanne. $^4/_7$ jagu tundmata arwust on 100.

Kui suur on see arw?

Arutus.

4 seitsmendikku jagu tundmata arwust $= 100$;

1 „ „ „ „ $=$ 4-jas jagu 100-st, s. o. $100:4=25$.

7 „ „ „ „ ehk kõik tundmata arw on 7 korda suurem omast seitsmendikust jaost, s. o. $25 \times 7 = 175$.

Kirjutame sõna „tundmata arwu“ asemele tähe x, siis wõime oma wäljaarwamist nii rakendada:

$\frac{4}{7} x = 100$ ehk: $\frac{4}{7} x = 100$

$\frac{1}{7} x = 100:4 = 25$ $\frac{1}{7} x = \frac{100}{4}$

$1 x = \frac{7}{7} x = 25 \times 7 = 175$ $\frac{7}{7} x = \frac{\overset{25}{\cancel{100}}.7}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 175$. Kostus: Otsitaw arw on 175.

Wõtame keerulisema näituse ja tarwitame eelminewas paragrahwis juhatatud kergendusi.

2. Ülesanne. Missuguse arwu $\frac{10}{27}$ jagu on $2\frac{7}{9}$?

$\frac{10}{27} x = \frac{25}{9}$

$\frac{1}{27} x = \frac{25}{9.10}$

$1 x = \frac{27}{27} x = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}.\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{9}}.\underset{2}{\cancel{10}}} = 15|_2 = 7^1|_2$. Kostus: Otsitaw arw on $7^1|_2$.

3. Ülesanne. Mina ostsin 55-e kop. eest raamatu ja kulutasin selle peale $^5/_{12}$ kõigest omast rahast, mis mul kaasas oli. Kui palju raha jäi mul järele?

1) Kui palju raha oli mul kaasas enne raamatu ostmist?

$\frac{5}{12}$ kõigest minu rahast = 55 kop.	$\frac{5}{12}x = 55$ kop.
$\frac{1}{12}$ „ „ „ = 55 kop. : 5 = 11 kop.	$\frac{1}{12}x = \frac{55}{5}$ kop.
1 ehk $\frac{12}{12}$ „ „ „ = 11 kop. × 12 = 132 kop.	$1x = \frac{12}{12}x = \frac{\overset{11}{\cancel{55}} \cdot 12}{\cancel{5}}$ k. = 132 k.

2) Kui palju raha jäi mul järele?

132 kop. — 55 kop. = 77 kop.

Kostus: Järele jäi 77 kop.

4. Ülesanne. Keegi ostis $1\frac{13}{20}$ rubla eest taskunoa ja temale jäi $\frac{24}{35}$-ku kõigest rahast, mis temal oli, järele. Kui palju oli temal alguses raha?

1) Kui suure jao kõigest rahast maksis ta noa eest?

$$1 - \frac{24}{35} = \frac{35}{35} - \frac{24}{35} = \frac{11}{35}$$

2) Kui palju raha oli temal alguses?

$\frac{11}{35}$ kõigest rahast = $\frac{33}{20}$ rubla	
$\frac{1}{35}$ „ „	$\frac{33.}{20 \cdot 11}$ rubla.
$\frac{35}{35}$ „ „	$\frac{\overset{3}{\cancel{33}} \cdot \overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{4}{\cancel{20}} \cdot \underset{1}{\cancel{11}}}$ rubla = $21/4$ rubla = $5\,1/4$ rubla.

Kostus: Alguses oli temal $5\,1/4$ rubla.

Kaheksasteistkümnes peatükk: Tehted murdudega. Kokkuarwamine.

§ 171. Murdude kokkuarwamine, milledel ühesugused nimetajad on.

Arwa kokku $\frac{2}{15}+\frac{11}{15}+\frac{7}{15}+\frac{4}{15}$!

$\frac{2}{15}+\frac{11}{15}+\frac{7}{15}+\frac{4}{15}=$
= 2 wiieteistkümnendikku + 11 wiieteistkümnendikku + 7 wiieteistkümnendikku + 4 wiieteistkümnendikku = (2+11+7+4) wiieteistkümnendikku =

$\frac{2+11+7+4}{15}=\frac{24}{15}=1\frac{9}{15}=1\frac{3}{5}$.

Sellest näitusest on arusaadaw, et murdude kokkuarwamise juures nimetajal seesama tähendus on, mis nimetusel nimega arwude kokkuarwamise juures. Tõepoolest ei ole ka murru nimetaja muud midagi, kui üksuse üksikute jagude nimi.

Meie teame: et summad ühe arwuga jagada, wõib iga kokkuarwatawat eraldi selle arwuga jagada ja saadud jaondid kokku arwata.

Näitus: (40+15+35+55) : 5 = 40 : 5 + 15 : 5 + 35 : 5 + 55 : 5 = 8 + 3 + 7 + 11 = 29.

Jagamise märgina - ristjoont- tarwitades wõime seda ka nii kirjutada:

$(40+15+35+55):5=$
$\frac{40+15+35+55}{5}=\frac{40}{5}+\frac{15}{5}+$
$\frac{35}{5}+\frac{55}{5}=8+3+7+9=29$

Kui kokkuarwatawad ennast jagajaga jagada ei lase, siis tarwitame jagamise märgina ristjoont, sest üksikute jaonditena ilmuwad murrud, näit. $(2+11+7+4):15=\frac{2+11+7+4}{15}=$
$\frac{2}{15}+\frac{11}{15}+\frac{7}{15}+\frac{4}{15}$.

Et $\frac{2+11+7+4}{15}=\frac{2}{15}+$
$\frac{11}{15}+\frac{7}{15}+\frac{4}{15}$ on, siis on ka
$\frac{2}{15}+\frac{11}{15}+\frac{7}{15}+\frac{4}{14}=$
$\frac{2+11+7+4}{15}=\frac{24}{15}=1\frac{3}{5}$.

Sellest näitusest järgneb juht: *Et murdusid, millel ühesugused nimetajad on, kokku arwata, peab lugejad kokku arwama ja nimetajaks kokkuarwatawate ühine nimetaja wõtma.*

§ 172. Murdude kokkuarwamine, millel mitmesugused nimetajad on.

Arwa kokku $\frac{5}{12}+\frac{8}{9}+\frac{17}{24}$!

Paneme kokkuarwatawad ühise nimetaja alla ja siis toimetame nendega, nagu eelminewas paragrahwis juhatatud on.

$$\frac{5}{12}+\frac{8}{9}+\frac{17}{24}=\frac{30}{72}+\frac{64}{72}+\frac{51}{72}=\frac{30+64+51}{72}=\frac{145}{72}=2\frac{1}{72}$$

Lühidalt rakendatakse nii: $\frac{15}{12}+\frac{8}{9}+\frac{17}{24}=\frac{30+64+51}{72}=\frac{145}{72}=2\frac{1}{72}$

Ühise nimetaja alla panemise peame peas tegema, kui see wõimalik ja kerge on; on aga antud arwud liiga suured, siis kuskil kõrwal. Näitus:

$$\frac{13}{18}+\frac{8}{45}+\frac{3}{10}+\frac{17}{40}=\frac{260+64+108+153}{360}=\frac{585}{360}=1\frac{225}{360}=1\frac{5}{8}$$

18, 45, ~~10,~~ 40 | 2
~~9,~~ 45, 20 | 5
9, 4 | 4.9

Kw. Ü. M. = 360

§ 173. Segaarwude kokkuarwamine.

Arwa kokku $3\frac{5}{12}+2\frac{8}{15}+1\frac{11}{20}$!

Arwame täisarwud isekeskes kokku, saame $3+2+1=6$; murrud arwame isekeskes kokku, siis saame

$$\frac{5}{12}+\frac{8}{15}+\frac{11}{20}=\frac{25+32+33}{60}=\frac{90}{60}=1\frac{1}{2}$$

Siin on otsekohe näha, et murdu $^{90}/_{60}$ 10-ga koondada wõib ja 10-ga koondada on kerge: selleks kriipsutame lõpunullid maha; pärast koondame weel 3-ga.

Nüüd arwame saadud terwete ja murdude summad kokku: $6+1^1/_2=7^1/_2$.

Tehe rakendatakse nii:

$$3\frac{5}{12}+2\frac{8}{15}+1\frac{11}{20}=6\frac{25+32+33}{60}=6\frac{90}{60}=7\frac{1}{2}$$

Järgmised näitused on ka ilma seletamata arusaadawad:

1) $3+\frac{2}{7}=3\frac{2}{7}$
2) $3+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=3\frac{5}{7}$
3) $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$
4) $\frac{24}{25}+\frac{14}{25}+\frac{12}{25}=2.$
5) $\frac{15}{37}+1\frac{18}{37}+1\frac{4}{37}=3$

§ 174. Murdude maha-arwamine, millel ühesugused nimetajad on.

$\frac{7}{8}$-kust arwa maha $\frac{3}{8}$-kku! $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = ?$

$\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ = 7 kaheksandikku — 3 kaheksandikku = (7—3) kaheksandikku = $\frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Sellest näitusest on arusaadaw, et ka maha-arwamise juures murdude nimetajal seesama tähendus on, mis nimetusel nimega arwude maha-arwamise juures.

Nagu kokkuarwamise juures, wõib ka maha-arwamise juures ütelda: Et wahengut ühe arwuga jagada, wõib wähendatawat ja maha-arwatawat eraldi selle arwuga jagada ja esimesest jaondist teine maha-arwata. Näitus: (200—56) : 8 = 200 : 8 — 56 : 8 = 25 — 7 = 18. Jagamise märgina ristjoont tarwitades wõime seda nii kirjutada: $(200-56) : 8 = \frac{200-56}{8} = \frac{200}{8} - \frac{56}{8}$ = 25 — 7 = 18. Kui wähendataw ja maha-arwataw ennast jagajaga jagada ei lase, siis tarwitame jagamise märgina ristjoont, sest üksikute jaonditena ilmuwad murrud; näit. $(7-3) : 8 = \frac{7-3}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}$.

Et $\frac{7-3}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ on, siis on ka $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Juht: *Et ühest murrust teist ühenimelist murdu maha arwata, peame wähendatawa lugejast maha-arwatawa lugeja maha arwama ja jäänuse nimetajaks endise nimetaja panema.*

§ 175. Murdude maha-arwamine, millel mitmesugused nimetajad on.

Paneme antud murrud ühise nimetaja alla ja siis saadame maha-arwamise toime. Näituseks:

$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{7}{35} - \frac{5}{35} = \frac{7-5}{35} = \frac{2}{35}$; lühemalt: $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{7-5}{35} = \frac{2}{35}$

$\frac{11}{12} - \frac{5}{18} = \frac{33}{36} - \frac{10}{36} = \frac{33-10}{36} = \frac{23}{36}$; " $\frac{11}{12} - \frac{5}{18} = \frac{33-10}{36} = \frac{23}{36}$

§ 176. Murru maha-arwamine täisarwust.

Näitused:

$1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}$; lühemalt: $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

$5 - \frac{8}{17} = 4\frac{17}{17} - \frac{8}{17} = 4\frac{17-8}{17} = 4\frac{9}{17}$; „ $5 - \frac{8}{17} = 4\frac{9}{17}$

Tuletame meele, et meie täisarwude maha-arwamist kõige alamast järgust, ühelistest, peale hakkame. Maha-arwatawa alamaks järguks ei ole siin mitte ühelised, waid üksuse jaod, nimelt seitsmeteistkümnendikud (teises näituses). Sellepärast peame ka mahaarwamist neist üksuse jagudest, seitsmeteistkümnendikkudest, peale hakkama. Et wähendatawas ainult terwed ühelised olemas on, siis laename neist terwetest ühe, lahutame tema samanimelisteks üksuse jagudeks, seitsmeteistkümnendikkudeks, saame 17 seitsmeteistkümnendikku ja nüüd arwame maha-arwatawa $^{8}/_{17}$ maha; jääb $^{9}/_{17}$ üksuse jagu ja 4 terwet üksust järele.

§ 177. Segaarwude maha-arwamine.

1. Näitus: Arwa maha: $45\frac{7}{8} - 32\frac{5}{12}$!

Arwame täisarwu täisarwust ja murru murrust maha, siis leiame: $47 - 32 = 15$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$$

Sellepärast on $47\frac{7}{8} - 32\frac{5}{12} = 15\frac{11}{24}$

2. Näitus. Arwa maha $16\frac{2}{9} - 7\frac{5}{6}$!

Arwame täisarwu täisarwust maha: 16—7=9.

Arwame murru murrust maha; selleks paneme nad ühise nimetaja alla: $\frac{2}{9} - \frac{5}{6} = \frac{4}{18} - \frac{15}{18}$

$^{2}/_{9}$-kku ja $^{5}/_{6}$-kku ühise nimetaja alla pannes näeme, et meie $^{5}/_{6}$-kku $^{2}/_{9}$-kust maha arwata ei saa, sest $^{5}/_{6}$ ehk $^{15}/_{18}$ on enam kui $^{2}/_{9}$ ehk $^{4}/_{18}$. Et meil aga 9 terwet järele jäi, siis laename neist terwetest ühe, laotame tema kaheksateistkümnendikkudeks, saadud $^{18}/_{18}$ arwame wähendatawale murrule $^{4}/_{18}$-kule juure, saame $^{22}/_{18}$ ja siis arwame saadud summast $^{15}/_{18}$ maha.

$$\frac{22}{18} - \frac{15}{18} = \frac{7}{18}$$

Terweid ühelisi jäi meil 8 järele; sellepärast on $16\frac{2}{9} - 7\frac{5}{6} = 8\frac{7}{18}$

Tehe rakendatakse nii:

$$16\frac{2}{9} - 7\frac{5}{6} = 9\frac{4-15}{18} = 8\frac{22-15}{18} = 8\frac{7}{18}$$

3. Näitus: $7\frac{3}{10} - 3 = 4\frac{3}{10}$

Kaswatamine.

§ 178. Murdudega kaswatamise tähendus.

Kui meie üht arwu täisarwuga 2, 3, 4 jne. kaswatame, siis wõtame meie seda arwu 2, 3, 4 jne. korda, „kokkuarwatawaks"; kui meie üht arwu 1-ga kaswatame, siis wõtame seda arwu 1 kord ehk: meie wõtame selle arwu ilma muutmata. Kui meie aga üht arwu lihtmurruga kaswatame, siis ei wõta meie kõike arwu mitte ükski kord, waid meie wõtame antud arwust ühe murrulise jao; näit. 15-nd $^3/_8$-kuga kaswatades wõtame 15-st $^3/_8$-kku jagu.

Juba 1-ga ja 0-ga kaswatades olime sunnitud kaswatamise mõistet laiendama. Siis (§ 38) nimetasime kaswatamiseks niisugust tehet, mille abil ühest antud arwust — kaswatatawast — uus arw selsamal teel leitakse, nagu teine antud arw — kaswataja — 1-st saadakse.

See kaswatamise mõiste äramääramine sünnib ka murdudega kaswatamise kohta.

Näit. $15 \times {}^3/_8$ tähendab 15-st uus arw leida, nagu $^3/_8$-kku 1-st on saadud. Et 1-st $^3/_8$-kku saada, peame 1 terwe kaheksaks ühesuuruseks jaoks jagama ja 3 niisugust jagu wõtma. Sellepärast, et 15-nd $^3/_8$-kuga kaswatada, peame 15-nd 8-ks ühesuuruseks jaoks jagama ja 3 niisugust jagu wõtma; see tähendab: meie peame 15-st $^3/_8$-kku jagu wõtma.

Näit. $12 \times 3^5/_6$ tähendab, et 12 peab 3 korda kokkuarwatawaks wõetama ja saadud summale weel $^5/_6$-kku jagu 12-st juure lisatama. Ehk, kui meie $3^5/_6$ liigmurruks muudame, siis tähendab $12 \times {}^{23}/_6$, et 12 peab 6-ks ühesuuruseks jaoks jagatama ja 23 niisugust jagu peab wõetama; ehk lühidalt: $12 \times {}^{23}/_6$ tähendab, et 12-st peab $^{23}/_6$-kku jagu wõetama.

Järjelikult: Üht arwu murruga kaswatada, tähendab temast murruline jagu leida.

Niisugusest murruga kaswatamise mõiste äramääramisest järgneb:

1) Antud arwust leitakse tema murruline jagu kaswatamise abil.

2) Lihtmurruga kaswatamise läbi wäheneb kaswatataw arw, sest et temast wähem ühesuuruseid jagusid wõetakse, kui ühes terwes olemas on; liigmurruga kaswatamise läbi suureneb arw, sest et temast enam ühesuuruseid jagusid wõetakse, kui ühes terwes olemas on.

§ 179. Murru kaswatamine murruga.

Kaswata $\frac{8}{9}$-kku $\frac{3}{10}$-kuga!

$^{8}/_{9}$-kku kaswatada $^{3}/_{10}$-kuga tähendab $^{8}/_{9}$-kust uus arw sel teel saada, nagu $^{3}/_{10}$-kku 1-st saadud on. $^{3}/_{10}$ on 1-st nii saadud: 1 on jagatud 10-sse ühesuurusesse jaosse ja niisuguseid jagusid on wõetud 3. Seepärast peame ka $^{8}/_{9}$-kku 10-sse jaosse jagama ja niisuguseid jagusid 3 wõtma. Järjelikult on:

$$\frac{8}{9} \times \frac{3}{10} = \left(\frac{8}{9} : 10\right) \times 3 = \frac{8}{9.10} \times 3 = \frac{8.3}{9.10}$$

Ehk:
$^{8}/_{9}$-kku kaswatada $^{3}/_{10}$-kuga tähendab $^{8}/_{9}$-kust $^{3}/_{10}$-kku jagu wõtta.

Waatame murru peale, kui jaondi peale, siis on jagataw 3 10 korda suurem, kui jaond $^{3}/_{10}$. Kui meie $^{8}/_{9}$-kku $^{3}/_{10}$-kku asemel 3-ga kaswatame, saame kaswatise $\frac{8}{9} \times 3 = \frac{8.3}{9}$, mis 10 korda suurem on, kui otsitaw kaswatis. Et õiget kaswatist leida, peame saadud kaswatist $\frac{8.3}{9}$ 10 korda wähemaks tegema.

Siis leiame:

$$\frac{8}{9} \times \frac{3}{10} = \left(\frac{8}{9} \times 3\right) : 10 = \frac{8.3}{9} : 10 = \frac{8.3}{9.10}.$$

Kõik antud arw ehk $\frac{10}{10}$kku antud arwust $= \frac{8}{9}$

$\frac{1}{10}$ " " " $= \frac{8}{9.10}$

$\frac{3}{10}$ " " " $= \frac{8.3}{9.10}$

Sellest näitusest näeme (juht): *Et murdu murruga kaswatada, peame lugejat lugejaga ja nimetajat nimetajaga kaswatama; lugejate kaswatis on kaswatise lugeja ja nimetajate kaswatis on kaswatise nimetaja.* Enne kaswatamise toime panemist peame koondama, kui see wõimalik on.

§ 180. Kaswatamine täisarwudega ja segaarwudega.

Meie teame, et ka täisarwule wõimalik on murru kuju anda, temale nimetajaks 1 alla kirjutades, ja segaarwu wõime liigmurruks muuta.

Sellepärast, kui üks tegur täisarw on ehk kui üks ehk mõlemad tegurid segaarwud on, siis anname neile teguritele murru kuju ja kaswatame nagu murdudega.

Näitused:

1) $\frac{5}{9} \times 6 = \frac{5}{9} \times \frac{6}{1} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot 1} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

2) $\frac{4}{7} \times 2\frac{4}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{14}{5} = \frac{4 \cdot \overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot 5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

3) $2\frac{2}{9} \times 1\frac{7}{8} = \frac{20}{9} \times \frac{15}{8} = \frac{\overset{5}{\cancel{20}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$

4) $9 \times 2\frac{7}{12} = \frac{9}{1} \times \frac{31}{12} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 31}{1 \cdot \underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{93}{4} = 23\frac{1}{4}$

Segaarwudega kaswatamist võib ka sel wiisil toime panna, et kaswatatawat enne täisarwuga ja pärast murruga kaswatatakse ja saadud kaswatised kokku arwatakse.

Näit. 1) $6 \times 5\frac{2}{3} = 6 \cdot \left(5 + \frac{2}{3}\right) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot \frac{2}{3} = 30 + 4 = 34$

2) $10\frac{3}{4} \times 8\frac{2}{5} = 10\frac{3}{4} \cdot \left(8 + \frac{2}{5}\right) = 10\frac{3}{4} \cdot 8 + 10\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \left(10 + \frac{3}{4}\right) \cdot 8 + \left(10 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} = 10 \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 8 + 10\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = 80 + 6 + 4 + \frac{3}{10} = 90\frac{3}{10}$

Niisugust kaswatamist tarwitatakse harilikult peast kaswatamise juures siis, kui antud arwud wäikesed on.

§ 181. Mõned iseäralised kaswatamise ülesanded.

1) Wastupidiste arwude kaswatis on alati 1.

$$\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{\underset{1}{1}} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

2) Kui meie murdu tema nimetajaga kaswatame, siis saame tema lugeja.

$$\frac{5}{7} \times 7 = \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot 1} = 5$$

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$

§ 182. Mitme teguri kaswatis, mille juures teguriteks ka murrud on.

Kaswata $\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times 9 \times 3\frac{3}{11}$!

W ä l j a a r w a m i n e. Anname täisarwule ja segaarwule murru kuju, siis wõime oma ülesannet nii kirjutada:

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times \frac{9}{1} \times \frac{36}{11} = ?$$

Kaswata enne $^{15}/_{28}$-kku $^{22}/_{27}$-kuga, kaswatamist ainult tehte märkide abil ära tähendades, siis leiame

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} = \frac{15.22}{28.27}$$

Saadud kaswatist kaswatame kolmanda teguri $^{9}/_{1}$-kuga, kaswatamist ka ainult tehte märkide abil ära tähendades, siis leiame

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times 9 = \frac{15.22.9}{28.27.1}$$

Niisama kaswatame uut kaswatist neljanda teguri $^{36}/_{11}$-kuga, siis leiame

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times 9 \times 3\frac{3}{11} = \frac{15.22.9.36}{28.27.1.11}$$

Et saadud kaswatist lühendada, peame lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama arwuga jagama.

Lugejas, kui ka nimetajas on nelja arwu kaswatis. Et kaswatist mõne arwuga jagada, peame üht tema tegurit selle arwuga jagama.

Sellepärast koondame kaswatist $\frac{15.22.9.36}{28.27.1.11}$ järgmiselt:

9-t ja 27-t jagame 9-ga, saame 1 ja 3.
36-t ja 28-t „ 4-ga, „ 9 ja 7.
22-te ja 11-nd „ 11-ga, „ 1 ja 2.

Pärast koondamist saab meie kaswatis järgmise kuju:

$$\frac{15.22.9.36}{28.27.1.11} = \frac{15.2.1.9}{7.3.1.1}$$

Wiimases kaswatises koondame weel 9-t ja 3-e 3-ga, saame 3 ja 1 ja kaswatise kuju muutub järgmiseks:

$$\frac{15.22.9.36}{28.27.1.11} = \frac{15.2.1.9}{7.3.1.1} = \frac{15.2.1.3}{7.1.1.1}$$

Enam meie koondada ei saa, sellepärast saadame kaswatamise toime; siis saame $\frac{90}{7}$.

Sellest liigmurrust wõtame täisarwud wälja; $\frac{90}{7} = 12\frac{6}{7}$

Niiwiisi leiame, et

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times 9 \times 3\frac{3}{11} = 12\frac{6}{7}$$

Arusaadaw on, et koondamine enne kaswatamise toime saatmist kaswatise wäljaarwamist palju kergendab.

Tehe rakendatakse nii:

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times 9 \times 3\frac{3}{11} = \frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times \frac{9}{1} \times \frac{36}{11} = \frac{\overset{2}{\cancel{15}}\ \overset{1}{\cancel{22}}\ \overset{3}{\cancel{9}}\ \overset{}{\cancel{36}}}{\underset{7}{\cancel{28}}\ \underset{1}{\cancel{27}}\ 1\ \underset{1}{\cancel{11}}} = \frac{90}{7} = 12\frac{6}{7}$$

Ehk lühemalt:

$$\frac{15}{28} \times \frac{22}{27} \times 9 \times 3\frac{3}{11} = \frac{\overset{2}{\cancel{15}}\ \overset{1}{\cancel{22}}\ \overset{3}{\cancel{9}}\ \overset{}{\cancel{36}}}{\underset{7}{\cancel{28}}\ \underset{1}{\cancel{27}}\ 1\ \underset{1}{\cancel{11}}} = \frac{90}{7} = 12\frac{6}{7}$$

Antud arwud kirjutame üksteise kõrwale neid kaswatamise märgiga ühendades; nende taha kirjutame ühtluse-märgi ja ühtluse märgi taha kaunis pika murru-joone.

Murru-joone peale kirjutame teguriteks tegurite lugejad, ühtlasi täisarwudele murru kuju andes ja segaarwusid liigmurdudeks muutes; murru-joone alla kirjutame teguriteks tegurite nimetajad.

Siis koondame ikka üht lugeja ja üht nimetaja tegurit ühe ja sellesama arwuga jagades. Selle juures wõib iga-üht lugeja tegurit iga ühe nimetaja teguri wastu koondada.

Alles pärast arwude koondamist saadame kaswatamise toime ja wõtame täisarwu wälja, kui saadud kaswatis liigmurd on.

Wõtame weel paar näitust:

1) $$\frac{3}{8} \times 7\frac{2}{9} \times 12 \times \frac{6}{13} \times \frac{4}{5} \times 2\frac{1}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\ \overset{1}{\cancel{5}}\ \overset{1}{\cancel{4}}\ \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{8}}\ \underset{1}{\cancel{9}}\ 1\ \underset{1}{\cancel{13}}\ \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{28}{1} = 28.$$

$$15\frac{7}{12} \times \frac{5}{32} \times \frac{10}{11} \times \frac{9}{34} \times 4 \times 1\frac{13}{15} \times \frac{2}{11} = \frac{\overset{1}{\cancel{17}}\ 1\ \overset{1}{\cancel{5}}\ \overset{1}{\cancel{3}}\ 1\ 7\ 1}{\underset{1}{\cancel{4}}\ \underset{4}{\cancel{8}}\ 1\ \underset{1}{\cancel{17}}\ 1\ \underset{1}{\cancel{3}}\ 11} = \frac{35}{44}.$$

Jagamine.

§ 183. Môiste äramääramine.

Nagu täisarwudega jagamine, nii on ka murdudega jagamine kaswatamise wastupidine tehe, nimelt: jagamine on niisugune tehe, mille abil meie antud kaswatise ja ühe teguri kaudu teise teguri leiame. Antud kaswatis on jagataw, antud tegur on jagaja ja otsitaw tegur on jaond. Näitus: $^5/_8$ ars. siidi riiet maksawad $^3/_4$ rbl., kui palju

maksab 1 arsin? Awalik on, et kui meie 1-e arsina hinda $^5/_8$-kuga kaswatame, s. o. temast $^5/_8$-kku wõtame, siis saame $^5/_8$-ku arsina hinna. Järjelikult on $^5/_8$ ars. hind, $^3/_4$ rbl., kaswatis, ostetud arsina jagude arw, $^5/_8$, on üks tegur ja teise teguri, 1-e arsina hinna leiame jagamise abil.

§ 184. Murdudega jagamine.

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = ?$$

Et $^4/_7$ antud teguri $^3/_5$-ku ja otsitawa jaondi kaswatis on, siis on $^3/_5$-kku otsitawast arwust $^4/_7$.

$^3/_5$ otsitawast arwust $= {}^4/_7$.

$^1/_5$ otsit. arw. on $\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7.3}$

$^5/_5$ otsit. arw. on $\frac{4}{7.3} \times 5 = \frac{4.5}{7.3}$

Ehk: $\frac{3}{5} . X = \frac{4}{7}$

$\frac{1}{5} . X = \frac{4}{7.3}$

1 X ehk $\frac{5}{5} . X = \frac{4.5}{7.3}$

Meie teame, (§ 163), et murdu täisarwuga jagada, peame tema nimetajat selle täisarwuga kaswatama; seepärast on

$$\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7.3}$$

Kui meie jagajat, 3-me, 5 korda wähendame teda 5-ga jagades, siis suureneb jaond 5 korda; seepärast on

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{4}{7.3} \times 5 = \frac{4.5}{7.3}$$

Järjelikult on $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{4.5}{7.3}$

Niisamasuguse saaduse leiame siis, kui meie $^4/_7$-kku $^5/_3$-kuga kaswatame; $^5/_3$ on aga jagaja, $^3/_5$-ku wastupidine arw: Sellest järgneb juht: *Et murdu murruga kaswatada, peab jagatawa lugejat jagaja nimetajaga, ja jagatawa nimetajat jagaja lugejaga kaswatama; esimene kaswatis on jaondi lugeja, teine on jaondi nimetaja.* Ehk lühemalt: *Et murdu murruga jagada, peab jagatawat jagajale wastupidise arwuga kaswatatama.*

§ 185. Segaarwudega jagamine.

Kui jagamise juures segaarwud ette tulewad, siis muudame nad liigmurdudeks ja toimetame nagu murdudega. Ka täisarwudele wõime murru kuju anda nimetajaks 1 alla kirjutades ja neid ka nagu murdusid jagada. Näitused:

1) $2\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{15}{4} = \frac{5.4.}{2.15} = \frac{2}{3}$

2) $3 : \frac{4}{5} = \frac{3}{1} : \frac{4}{5} = \frac{3.5}{1.4} = 3\frac{3}{4}$

3) $4\frac{2}{5} : 6 = \frac{22}{5} : \frac{6}{1} = \frac{22.1}{5.6} = \frac{11}{15}$

4) $5 : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{7}{4} = \frac{5.4}{1.7} = 2\frac{6}{7}$.

§ 186. Jagamise tähendused.

I. Antud jagaja tähendab kaswatajat.

1-ne ülesanne. 5 arsinat willast riiet maksawad 17 rbl.; kui palju maksab 1 arsin? Awalik on, et kui meie 1-e arsina hinda 5-ga kaswatame, siis saame 5-e arsina hinna 17 rbl.; seepärast leiame 1-e arsina hinna, kui meie kõikide 5-e arsinate hinna 17 rbl. arsinate arwuga, 5-ga, jagame.

2-ne ülesanne. $^3/_4$ arsinat sametit maksawad $^3/_5$ rbl.; kui palju maksab 1 arsin? Awalik on, et kui meie 1-e arsina hinda $^3/_4$-ga kaswatame, s. o. temast $^3/_4$ jagu wõtame, siis saame $^3/_4$ arsina hinna $^3/_5$ rbl.; seepärast leiame 1-e arsina hinna, kui meie kõikide arsina jagude hinna $^3/_5$ rbl. arsina jagude arwuga, $^3/_4$-ga, jagame. Mõlemates näitustes otsitakse 1-e arsina hinda ja teda leitakse seeläbi, et kõige ostetud kauba hinda ostetud kauba hulgaga jagatakse.

Nimetame 1-e arsina hinda täisjaoks, siis on 5-e ars. hind 5 täisjagu ja $^3/_4$ ars hind on murruline jagu. Seepärast selgub neist näitustest, et kui antud jagaja kaswatajat tähendab, siis leitakse *täisarwuga jagades ühe täisjao suurust mitme täisjao kaudu, murruga jagades — täisjao suurust murrulise jao kaudu.* Kui jagaja segaarw on, siis wõidakse niisugusele jagamisele mõlemad tähendused anda. Näitus: $3^3/_4$ ars. maksab $4^1/_2$ rbl., kui palju maksab 1 arsin? Wõidaks ütelda: „meie ostsime mitme ($3^3/_4$) jao kaudu ühe täisjao suurust", kui täisarwu peale enam rõhku tahetakse panna, ehk: „meie otsime murrulise ($^{15}/_4$) jao kaudu täisjao suurust", kui segaarwu liigmurruks muudetakse.

Tähendus: Neist arutustest järgneb: *liht murruga jagades kaswab arw, liig murruga jagades kahaneb arw.*

II. Antud jagaja tähendab kaswatatawat.

a) jagataw on jagajast mitu korda suurem.

3-as ülesanne. 1 arsin kalewit maksab 7 rbl., mitu arsinat saab 28 rbl. eest?

4-as ülesanne. 1 puud heinu maksab $^3/_{10}$ rbl., mitu puuda saab $^9/_{10}$ rbl. eest?

Awalik on, et 28 rbl. eest nii mitu arsinat saab, mitu korda 7 rbl. wõtma peab, et 28 rbl. saada ja $^9/_{10}$ rbl. eest saab nii mitu puuda heinu, mitu korda $^3/_{10}$ rbl. wõtma peab, et $^9/_{10}$ rbl. saada; seepärast saame arsinate arwu teada, kui meie teame, mitu korda 7 rbl. 28 rbl. sisse mahub, ja puudade arwu, kui meie teame, mitu korda $^3/_{10}$ rbl. $^9/_{10}$ rbl. sisse mahub.

Neist näitustest selgub: Kui antud jagaja kaswatatawat tähendab ja jagataw jagajast suurem on, siis on murdudega jagamisel seesama tähendus, mis täisarwudega jagamisel, nimelt: niisuguse

jagamise läbi leitakse, *mitu korda jagaja jagatawasse mahub, ehk mitu korda jagataw jagajast suurem on.*

b) jagataw on jagajast wähem.

5-es ülesanne. 1 süld puid maksab 6 rbl., kui palju puid saab 4 rbl. eest? Awalik on, et 4 rbl. eest täit sülda puid ei saa, waid ainult niisuguse jao süllast, mitmes jagu 6 rublast 4 rbl. on. Et 4 rbl. 6-e rubla murruline jagu on, siis on 4 rbl. kaswatis, 6 rbl. on kaswatataw otsitaw lihtmurd on kaswataja ja see ülesanne rehkendatakse jagamise abil wälja. 4 r. : 6 r. = $^2/_3$ (süld).

6-es ülesanne. 1 puud heinu maksab $^3/_{10}$ rbl., kui palju heinu saab $^6/_{25}$ rbl. eest? Neid murdusid ühise nimetaja alla pannes, $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ ja $\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$, näeme, et $^6/_{25}$ rbl. wähem on kui 1-e puuda hind $^3/_{10}$ rbl., seepärast ei saa meie $^6/_{25}$ rbl. eest mitte täit puuda heinu, waid ainult niisuguse jao puudast, mitmes jagu $^3/_{10}$-kust rublast $^6/_{25}$ rbl on. Et $^6/_{25}$ rbl. $^3/_{10}$-ku rubla murruline jagu on, siis on $^6/_{25}$ rbl. kaswatis, $^3/_{10}$ rbl. on kaswatataw, otsitaw lihtmurd on kaswataja ja see ülesanne rehkendatakse jagamise abil wälja. $\frac{6}{25}$ rbl. : $\frac{3}{10}$ rbl. = $\frac{6 \cdot 10}{25 \cdot 3} = \frac{4}{5}$.

Neist kahest näitusest selgub: Kui antud jagaja kaswatataw on ja jagataw jagajast wähem on, see peale waatamata, kas jagataw ja jagaja täisarwud ehk murrud on, siis *saadakse jagamise abil teada, mitmes jagu ehk missugune murruline jagu jagajast on jagataw.*

Neljast wiimasest näitusest selgub, et kui antud jagaja kaswatatawat tähendab, siis ei ole jagamise tähendus mitte see külge seotud, kas jagataw ja jagaja täisarwud, murrud wõi segaarwud on, waid see külge, kas jaond täisarw ehk lihtmurd on. On jaond aga segaarw, siis wõidakse niisugusele jagamisele mõlemad tähendused anda, sedamööda, kas enam rõhku täisarwu peale pandakse, ehk muudetakse segaarw liigmurruks. Näit.: $4\frac{2}{5} : 1\frac{3}{5} = 2\frac{3}{4}$

Räägitakse: $4\frac{2}{5}$ on $2\frac{3}{4}$ korda suurem, kui $1\frac{3}{5}$,

ehk ka: $4\frac{2}{5}$ on $\frac{11}{4}$-kku jagu $1\frac{3}{5}$-kust.

§ 187. Millal tarwitatakse jagamist.

Jagamise tähendustest järgneb, et jagamist siis tarwitatakse, kui tarwis on:

1) antud arwu mitmesse ühesuurusesse jaosse jagada ja selle jao suurust leida (mitme täisjao kaudu ühe täisjao suurust leida),

2) antud arwu mitu korda wähendada,

3) ühe arwu murrulise jao kaudu kõike seda arwu leida (murrulise jao kaudu täisjao suurust leida),

4) teada saada, mitu korda wähem arw suurema arwu sisse mahub,

5) mitmes jagu (missugune murruline jagu) suuremast arwust on wähem arw.

§ 188. Môned iseäralised jagamise ülesanded.

1) Selle asemel, et kahte murdu, kellel ühised nimetajad on, jagada, wõime nende lugejaid jagada,

näit.: $\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4.5}{5.3} = \frac{4}{3} = 4 : 3.$

2) Kui meie 1-t mõne arwuga jagame, saame jagaja wastupidise arwu, näit. 1) $1 : 5 = \frac{1}{5}$; 2) $1 : \frac{3}{4} = \frac{1.4}{3} = \frac{4}{3}$;

3) $1 : 2\frac{2}{5} = 1 : \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$.

§ 189. Murrud, kellede liikmed jällegi murrud on.

Wõiwad niisugused awaldused ette tulla, kus murdude liikmed jällegi murrud on.

$$\frac{3}{^2/_5}, \quad \frac{^5/_6}{4}, \quad \frac{^3/_8}{^4/_7}, \quad \frac{2^1/_2}{3^3/_4}$$

Niisugustes murdudes peab üks murru joon kas jämedam ehk pikem olema, kui teised, ehk üks murrujoon kirjutatakse ristloodis, teised wiltu. Niisugust jämedamat, pikemat ehk ristloodis kirjutatud murru joont peame jagamise märgiks tunnistama, siis leiame kergeste niisuguse murru tähenduse.

1) $\frac{3}{^2/_5} = 3 : \frac{2}{5} = \frac{15}{2} = 7^1/_2.$

2) $\frac{^5/_6}{4} = \frac{5}{6} : 4 = \frac{5}{24}$

3) $\frac{^3/_8}{^4/_7} = \frac{3}{8} : \frac{4}{7} = \frac{21}{32}$

4) $\frac{2^1/_2}{3^3/_4} = 2\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{15}{4} = \frac{2}{3}$

5) $\frac{\frac{5}{6} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) = \frac{19}{12} : \frac{1}{12} = 19$

§ 190. Murdude astmesse tôstmine.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = ?$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4.4.4.}{7.7.7.} = \frac{4^3}{7^3} = \frac{64}{343}.$$

Juht: *Et murdu astmesse tôsta, peame tema lugejat ja nimetajat eraldi antud astmesse tôstma.*

Kui meie segaarwu astmesse tahame tõsta, siis peame teda enne liigmurruks muutma.

Näitus: $\left(2\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16} = 39\frac{1}{16}$.

§ 191. Murdudest juure wäljawôtmine.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = ?$$

$^{64}/_{343}$-kust kolmanda astme juurt wälja wõtta, tähendab niisugust arwu leida, mille kolmas aste $^{64}/_{343}$ on. Otsitaw arw peab murd olema, sest et täisarwu astmesse tõstes meie alati täisarwu saame. Et murru astmesse tõstmise juures aga lugeja eraldi ja nimetaja eraldi astmesse tõstetakse, siis on 64 otsitawa murru lugeja ja 343 on tema nimetaja kolmas aste. Sellepärast, et otsitawa murru lugejat leida, peame antud murru lugejast kolmanda astme juure wälja wõtma ja et tema nimetajat leida, peame antud murru nimetajast kolmanda astme juure wälja wõtma.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{4}{7}$$

Juht.: *Et murrust juurt wälja wõtta, peame juure lugejast ja nimetajast eraldi wälja wõtma.*

Et segaarwust juurt wälja wõtta, muudame tema liigmurruks ja toimetame temaga siis, nagu murruga. Täisarwudest juure wälja wõtmise juures õppisime meie ainult ruutjuure wälja wõtmist tundma. Sellepärast toome siin ka ainult niisuguseid näitusi ette, kus ruutjuure wäljawõtmine ette tuleb.

1) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{5}{9}$; 2) $\sqrt{\frac{169}{400}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{400}} = \frac{13}{20}$;

3) $\sqrt{\frac{54756}{148225}} = \frac{\sqrt{54756}}{\sqrt{148225}} = \frac{234}{385}$, sest $\sqrt{54756} = 234$ ja $\sqrt{148225} = 385$.

Üheksasteistkümnes peatükk: Nimega murrud.

§ 192. Nimega murru sündimine ja õigeste kokku seatud nimega murd.

Murd võib sündida ka mõõtmise juures. Võtame niisuguse näituse: Meie mõõdame kirja ümbriku pikkust wersokiga ja leiame, et wersok selle pikkusesse 3 korda mahub, mille juures üks tükk üle jääb, mis wersokist wäiksem on. Et ülejäänud tükki mõõta, otsime niisugust wersoki jagu, mis sinna sisse ilma jäänuseta ära mahuks. Olgu niisugune wersoki jagu üks kaheksandik wersokist ($^1/_8$ wersokit) ja mahtugu ta ülejäänud tüki sisse 5 korda, siis ütleme, et kirja ümbriku pikkus on $3^5/_8$ wersokit.

Kui meil toa pikkust süllaga mõõtes tükk üle jääb, mis süllast wäiksem on, siis ei pruugi meie mitte igakord sülda 7-sse ühesuurusesse jaosse jagada, et ülejäänud tükki jalaga mõõta, waid meie võime ka sel korral niisugust sülla jagu leida, mis ülejäänud tüki sisse ilma jäänuseta ära mahub. Nii võime leida, et toa pikkus $3^8/_{15}$ sülda on.

Kui meie toa pikkust juba süllaga ja tema wiieteistkümnendiku jaoga mõõtsime, siis on awalik, et meie ühtegi jagu toa pikkusest enam sülla seitsmendama jaoga, s. o. jalaga mõõtma ei hakka.

Sellepärast on awalik, et õigeste kokkuseatud mitme nimega arwus murd ainult ühe ja nimelt kõige alama nimetuse juures ette wõib tulla.

Näitus:

2 puuda $17^3/_4$ naela on õigeste kokku seatud;

2 puuda $17^3/_4$ naela 4 loodi on waleste kokku seatud,

sest kui meie raskust naela kolmekümne kahendiku jaoga, s. o. loodiga, mõõdame, siis ei ole meil tarwis teda naela weerandikuga mõõtma hakata.

§ 193. Alandamine.

Alanda $^7/_9$ puuda solotnikkudeks!

Laotame $^7/_9$ puuda enne naeladeks ja pärast naelad solotnikkudeks.

1 puud on 40 naela, $^7/_9$ puuda on $^7/_9$ jagu 40-st naelast, s. on $^7/_9 . 40$ naela $= {}^{280}/_9$ naela.

1 nael on 96 solotnikku, $^{280}/_9$ naela on $^{280}/_9$ jagu 96-st solotnikust, s. o. $^{280}/_9 . 96$ solotn. $= {}^{8960}/_3$ solotn. $= 2986^2/_3$ solotnikku.

Sellest näitusest selgub, et nimega murtud arwude laotamine niisama toime pannakse, nagu nimega täisarwude laotamine, nimelt üksuselise wahekorraga kaswatamise abil.

Näitus. Laota sekundideks 1 tund $45^2/_3$ min.!

1 tund $45^2/_3$ min. $= (60 + 45^2/_3)$ min. $= 105^2/_3$ min. $= {}^{317}/_3$ min. $=$

$$= \frac{317 \cdot \overset{20}{\cancel{60}}}{\cancel{3}} \text{ sek.} = 6340 \text{ sek.}$$

§ 194. Ülendamine.

Muuda $^5/_8$ arsinat werstadeks!

See tähendab, meie peame teada saama, mitmes jagu ühest werstast on $^5/_8$ arsinat.

Enne muudame $^5/_8$ arsinat süldadeks, pärast süllad werstadeks.

1) Muuda $^5/_8$ arsinat süldadeks! Et teada saada, mitmes jagu süllast, s. o. 3-st arsinast, on $^5/_8$ arsinat, peame $^5/_8$ ars. jagame 3-arsinaga (w. § 186).

$$^5/_8 \text{ ars.} : 3 \text{ ars.} = {}^5/_8 : 3 = \frac{5 \,.\, 1}{8 \,.\, 3} = {}^5/_{24}.$$

Järjelikult on $^5/_8$ ars. $^5/_{24}$ jagu süllast, s. o. $^5/_{24}$ sülda.

2) Muuda $^5/_{24}$ sülda werstadeks! Et teada saada, mitmes jagu 1-st werstast, s. o. 500-st süllast $^5/_{24}$ sülda on, peame $^5/_{24}$ sülda 500 süllaga jagama.

$$^5/_{24} \text{ sülda} : 500 \text{ sülda} = {}^5/_{24} : 500 = \frac{5}{24 \,.\, 500} = \frac{1}{2400}$$

Sellest näitusest selgub, et nimega murtud arwude ülendamine niisamuti sünnib, nagu nimega täisarwude ülendamine, nimelt üksuselise wahekorraga jagamise läbi.

Näitus: Muuda päewadeks 10 tundi 17 min. $8^4/_7$ sek.!

Täielik wälja arwamine:

10 tundi 17 min. $8^4/_7$ sek. = 10 tundi 17 min. $^{60}/_7$ sek. =

10 tundi 17 min. $+ \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{1}{\cancel{7}\,\cancel{60}}}$ min. = 10 tundi $17^1/_7$ min. = 10 tundi

$\frac{120}{7}$ min. = 10 tundi $+ \frac{\overset{2}{\cancel{120}}}{\underset{1}{\cancel{7}\,\cancel{60}}}$ tundi = $10^2/_7$ tundi = $^{72}/_7$ tundi =

$\frac{\overset{3}{\cancel{72}}}{\underset{1}{7\,\cancel{24}}}$ päewa = $^3/_7$ päewa.

Nobedam wälja arwamine:

10 tundi 17 min. $8^4/_7$ sek. = 10 tundi 17 min. $+ \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{\underset{1}{\cancel{7}\,\cancel{60}}}$ min. =

10 tundi $+ \frac{\overset{2}{\cancel{120}}}{\underset{1}{\cancel{7}\,\cancel{60}}}$ tundi $= \frac{\overset{3}{\cancel{72}}}{\underset{1}{7\,\cancel{24}}}$ päewa = $^3/_7$ päewa.

§ 195. Tehted nimega murdude kallal.

Nimega murdude kokkuarwamist, maha-arwamist, kaswatamist ja jagamist, peale mahutamise, wõime kahte wiisi toime saata.

1) Meie wõime kõik antud nimega arwud üheainsa nimetuse alla panna ja saadud arwudega, nagu nimeta murdudega, toimetada. Selle juures ei ole sugugi tarwis, et meie antud arwud kõige kõrgema ehk kõige alama nimetuse alla paneme; meie wõime neid ka mõne keskmise mõõdu nimeliseks teha.

2) Meie wõime antud arwud mitmenimega arwudeks muuta ja siis toimetame nendega, nagu mitmenimega täisarwudega toimetati. Selle juures peame aga selle peale waatama, et murrud ainult kõige alama mõõdu nimelistes arwudes, millega meil tegemist on, ette tulewad.

Mahutamise juures wõime ainult esimest tehete toimesaatmise wiisi tarwitada.

§ 196. Kokkuarwamine.

3 jalga $1^5/_8$ tolli + 6 jalga $8^3/_4$ liinit + 1 süld $5^{17}/_{36}$ jalga + 2 jalga $2^1/_6$ tolli = ?

1) Muudame kõik antud arwud tollideks.

3 jalga $1^5/_8$ tolli = $(3.12+1^5/_8)$ tolli = $37^5/_8$ tolli.

6 jalga $8^3/_4$ liini = $(6.12 + \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{2}{\cancel{4.10}}})$ tolli = $72^7/_8$ tolli

1 süld $5^{17}/_{36}$ jalga = $12^{17}/_{36}$ jalga = $(12.12+\frac{17\overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{36}}})$ tolli = $149^2/_3$ tolli.

2 jalga $2^1/_6$ tolli = $(2.12+2^1/_6)$ tolli = $26^1/_6$ tolli.

$37^5/_8$ tolli + $72^7/_8$ tol. + $149^2/_3$ tol. + $26^1/_6$ tol. = $284\ \frac{15+21+16+4}{24}$ tolli =

= $284\ ^{56}/_{24}$ tolli = $286^1/_3$ tolli = 3 sülda 2 jalga $10^1/_3$ tolli.

2) Muudame antud arwudes ettetulewad murrud liinideks (ehk tollideks).

3 jalga $1^5/_8$ tolli = 3 jalga 1 toll $\frac{\overset{5}{\cancel{5.10}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$ liini = 3 jalga 1 toll $6^1/_4$ liini.

6 jalga $8^3/_4$ liini = 6 „ 0 „ $8^3/_4$ „

1 süld $5^{17}/_{36}$ jalga = 1 süld 5 jalga $\frac{17\overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{36}}}$ tolli = 1 süld 5 jalga $5^2/_3$ tolli =

= 1 süld 5 jalga 5 tolli $\frac{2.10}{3}$ liini = 1 süld 5 jalga 5 tolli $6^2/_3$ liini.

2 jalga $2^1/_6$ tolli = 2 jalga 2 tolli $\frac{1.10}{6}$ liini = 2 jalga 2 tolli $1^2/_3$ liini.

	3	jalga	1	toll	$6^1/_4$	liini			
	6	„	0	„	$8^3/_4$	„			
1 sülg	5	„	5	„	$6^2/_3$	„	ehk:	1 sülg	5 „ $5^2/_3$ „
	2	„	2	„	$1^2/_3$	„			2 „ $2^1/_6$ „
2			2		2			2	2
3 sülda	2	jalga	10	toll	$3^1/_3$	liini		3 sülda	2 jalga $10^1/_3$ tolli.

	3	jalga	$1^5/_8$	tolli.
	6	„	$^7/_8$	„
1 sülg	5	„	$5^2/_3$	„
	2	„	$2^1/_6$	„
2			2	
3 sülda	2	jalga	$10^1/_3$	tolli.

§ 197. Maha-arwamine.

4 puuda 3 naela $26^2/_3$ loodi — 2 puuda $9^3/_5$ naela = ?

1) Muudame $^3/_5$ naela loodideks!

2 puuda $9^3/_5$ naela = 2 puuda 9 naela $\frac{3.32}{5}$ loodi = 2 puuda 9 naela $19^1/_5$ loodi.

4	puuda	$^{40}3/_{42}$	naela	$26^2/_3$	loodi	
2	„	9	„	$19^1/_5$	„	
1	puud	34	naela	$7^7/_{15}$	loodi	

Kõrwalised tehted:

$^2/_3 - {}^1/_5 = \frac{10-3}{15} = {}^7/_{15}$.

2) Muudame $26^2/_3$ loodi naeladeks!

4 puuda 3 naela $26^2/_3$ loodi = 4 puuda + $(3 + \frac{\overset{5}{\cancel{80}}}{\underset{2}{\cancel{3.32}}})$ naela = 4 puuda $3^5/_6$ naela.

	4	puuda	$^{40}3^5/_6$	naela		
—	2	„	$9^3/_5$	„		
1	puud	34	$^7/_{30}$	naela		

Kõrwalised tehted

$^5/_6 - {}^3/_5 = \frac{25-18}{30} = {}^7/_{30}$

§ 198. Kaswatamine.

6 sülda 2 ars. $9^1/_7$ wers. $\times$ $^{21}/_{32}$!

1) Kaswatame antud arwu enne 21-ga, kaswatist jagame 32-ga.

6 sülda	2 ars.	$9^1/_7$ wers.		
		$\times$ 21		
126 sülda	42 ars.	192 wers.		
144 sülda	^{48} ars.	^{256} wers.	32	
128 „	32 „	256 „	4 s. 1 a. 8 w.	
16 s. = 48 a.	16 a. = 256 w.	— wers.		

Kõrwal. tehted.

$^1/_7 \times 21 = 3$.
192 w. = 12 a.
42 a. + 12 a. = = 18 s.
126 s. + 18 s. = = 144 s.

Ehk: 6 sülda 2 ars. $9^1/_7$ wers.
$\times$ 21

126 sülda 42 ars. 192 wers.

144 sülda : 32 = $4^1/_2$ sülda = 4 sülda 1 ars. 8 wers.
128
16
16

2) Muudame wersokid ja arsinad süldadeks, ehk süllad ja arsinad wersokiteks ja siis kaswatame $^{21}/_{32}$-ga.

$$6 \text{ sülda } 2 \text{ ars. } 9\tfrac{1}{7} \text{ wers.} = 6 \text{ sülda} + \left(2 + \frac{\overset{4}{\cancel{64}}}{\underset{1}{7}\cancel{16}}\right) \text{ars.} =$$

$$= \left(6 + \frac{\overset{6}{\cancel{18}}}{\underset{1}{7}\cancel{3}}\right) \text{sülda} = 6\tfrac{6}{7} \text{ sülda.}$$

$$6\tfrac{6}{7} \text{ sülda} \times \frac{21}{32} = \frac{\overset{3}{\cancel{48}} \cdot \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \quad \underset{2}{\cancel{32}}} \text{ sülda} = \frac{9}{2} \text{ sülda} = 4\tfrac{1}{2} \text{ sülda.}$$

Ehk:

6 sülda 2 ars. $9^1/_7$ wers = (6. 3+2) ars. $9^1/_7$ wers =

= (20. 16+$9^1/_7$) wers. = $329^1/_7$ wers.

$$329^1/_7 \text{ wers} \times {}^{21}/_{32} = \frac{\overset{72}{\cancel{2304}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{32}} \text{ wers.} = 216 \text{ w.} = 4 \text{ s. } 1 \text{ ars. } 8 \text{ w}$$

§ 199. Jagamine.

Et murdudega jagamise juures meie antud arwu wastupidise jagajaga kaswatame, siis rakendatakse jaotamine niisamati, nagu kaswatamine.

Näitused:

6 sülda 2 ars. $9^1/_7$ wers. : $1^{11}/_{21}$ = 6 s. 2 ars. $9^1/_7$ w. : $^{32}/_{21}$ = $4^1/_2$ s.

1 päew 13 tundi $42^6/_7$ min. : $^{11}/_{21}$ = ?

1 päew 13 tundi $42^6/_7$ min.

× 21

21 päewa 273 tundi 900 min.

33 päewa „ tundi „ min. : 11 = 3 päewa.

1 päew 13 tundi $42^6/_7$ min. = $2262^6/_7$ min.

$$2262\tfrac{6}{7} \text{ min.} : \frac{11}{21} = \frac{\overset{1440}{\cancel{15840}} \cdot \overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{7} \quad \cancel{11}} \text{ min.} = 4320 \text{ min.} = 3 \text{ päewa.}$$

Ehk:

$$1 \text{ p. } 13 \text{ t. } 42^6/_7 \text{ m.} = 1 \text{ p.} \left(13 + \frac{\overset{5}{\cancel{300}}}{\underset{1}{7}\cancel{60}}\right) \text{tundi} = \left(1 + \frac{\overset{4}{\cancel{96}}}{7\cancel{24}}\right) \text{p.}$$

$$1^4/_7 \text{ päewa} : {}^{11}/_{21} = \frac{\overset{1}{\cancel{11}} \cdot \overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \quad \underset{1}{\cancel{11}}} \text{ päewa} = 3 \text{ päewa.}$$

Nimega arwu nimega arwuga jagades, s. o. mahutamise korral peame jagatawa ja jagaja samanimelisteks ühe nimega arwudeks muutma, selle peale waatamata, kas antud arwud täisarwud ehk murrud on. Pärast seda tuleb toimetada, nagu nimeta murdude jagamise juures.

Näitus:

2 aami $34^1/_3$ pange : 17 pange $1^1/_2$ toopi = ?

2 aami $34^1/_3$ pange = (2. 40 + $34^1/_3$) p. = $114^1/_3$ p. = $1143^1/_3$ t.

17 pange $1^1/_2$ toopi = $171^1/_2$ toopi.

$$1143\frac{1}{3} \text{ toopi} : 171\frac{1}{2} \text{ toopi} = \frac{3430}{3} : \frac{343}{2} = \frac{\overset{10}{\cancel{3430}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{343}} \cdot 3} = 6\frac{2}{3}.$$

Ehk:

$$2 \text{ aami } 34\frac{1}{3} \text{ pange} = \left(2 + \frac{103}{3.\,40}\right) \text{aami} = 2\frac{103}{120} \text{ aami.}$$

$$17 \text{ pange } 1\frac{1}{2} \text{ toopi} = \left(17 + \frac{3}{2.\,10}\right) \text{p.} = \left(17\frac{3}{20} : 40\right) \text{aami} = \frac{343}{800} \text{ aami.}$$

$$2\frac{103}{120} \text{ aami} : \frac{343}{800} \text{ aami} = \frac{343}{120} : \frac{343}{800} = \frac{\cancel{800}}{\cancel{120}} = 6\frac{2}{3}.$$

Wiies jagu.

Kümnendmurrud.

Kakskümnes peatükk: Alusmôisted.

§ 200. Arwamise süsteemi laiendamine.

Arwude lugemine ja kirjutamine põhjeneb selle peal, et meie iga kümme ühesugust üksust uueks, kõrgema järgu üksuseks kokku wõtame, nii wiisi arwude järkusid ja klassisid sünnitades. Igasühes ülema järgu üksuses on selle järgi 10 järgmise alama järgu üksust olemas, ehk igaühe ülema järgu üksus on järgmise alama järgu üksusest 10 korda suurem, näit. 1-s kümnetuhandelises on 10 liht tuhandelist, 1-s liht miljonis on 10 sajatuhandelist jne.

Ümberpöördult, igaühe alama järgu üksus on järgmise ülema järgu üksuse kümnes jagu ($^1/_{10}$), ehk iga ühe alama järgu üksus on järgmise ülema järgu üksusest 10 korda wähem; näit. 1 kümnetuhandeline on 1-he sajatuhandelise kümnes jagu, ta on 1-st sajatuhandelisest 10 korda wähem; 1 sajaline on 1-e tuhandelise kümnes jagu, ta on 1-st tuhandelisest 10 korda wähem jne.

Niisugusel alusel seadsime järkude ja klasside tabeli kokku. Tuletame teda meele:

	IV. klass.			III. klass.			II. klass.			I. klass.		
	Biljonid ehk milliardid.			Miljonid.			Tuhanded.			Ühelised.		
j. n. e.	Sajad-	Kümned-	Liht-	Sajad-	Kümned-	Liht-	Sajad-	Kümned-	Liht-tuhanded	Sajalised	Kümnelised	Liht-ühelised
	3-as järk	2-ne järk	1-ne järk	3-as järk	2-ne järk	1-ne järk	3-as järk	2-ne järk	1-ne järk	3-as järk	2-ne järk	1-ne järk
	12-es koht (järk)	11-es koht (järk)	10-es koht (järk)	9-as koht (järk)	8-as koht (järk)	7-es koht (järk)	6-es koht (järk)	5-es koht (järk)	4-as koht (järk)	3-as koht (järk)	2-ne koht (järk)	1-ne koht (järk)

Et klassisid ära-arwamata palju wõib olla, sellepärast wõime seda tabelit pahemale poole ilma otsata jätkata. Sellest järgneb küsimus: kas ei wõiks seda tabelit ka paremale poole jätkata?

Kui meie ainult täisarwusid tundsime, siis ei olnud mitte wõimalik seda teha, sest meie ei tundnud arwusid, mis ühelistest wähemad oleksiwad olnud. Nüüd kus meie ühelise mitmesuguseid jagusid tundma oleme õppinud, wõime wähemaid järkude üksusi leida ja sellepärast wõime eelpool olewat tabelit ka paremale poole jätkata.

Lihtühelistele paremal pool järgnew järk peab üleüldise arwamise süsteemi põhjal niisugustest üksustest koos seisma, mis lihtühelistest 10 korda wähemad on. Kui meie lihtühelist 10 korda wähendame, teda selle tarwis kümneks ühesuuruseks jaoks jagades, siis saame ühe kümnendiku jao ($^1/_{10}$) ühelisest. Sellepärast järgneb ühelistele paremal pool kümnendikkude järk.

Et järgmist alamat järku saada, peame üht kümnendikku weel 10 korda wähemaks tegema, teda selle tarwis jällegi kümneks ühesuuruseks jaoks jagades; siis saame sajandiku ($^1/_{100}$).

Niiwiisi edasi arutades saame tuhandikkude, kümnetuhandikkude, sadatuhandikkude, miljondikkude, jne. järgud.

Nüüd wõime arwamise tabelit, teda murdude järkudega täiendades, ka paremale poole ilma otsata jätkata.

Et täisarwusid murdudest silmapaistwalt eraldada, tõmbame täisarwude ja murdarwude järkude wahele jämeda joone.

Et murdude järkusid klassideks ei jaotata, siis jätame ka täisarwud klassideks jaotamata.

jne. ilma otsata	sajadmiljonid	kümnedmiljonid	miljonid	sajatuhandelised	kümnetuhandelised	tuhandelised	sajalised	kümnelised	lihtühelised	kümnendikud	sajandikud	tuhandikud	kümnetuhandikud	sajatuhandikud	miljondikud	kümnemiljondikud	sajamiljondikud	miljardikud ehk biljondikud	jne. ilma otsata
	9-as koht	8-as koht	7-es koht	6-es koht	5-es koht	4-as koht	3-as koht	2-ne koht	1-ne koht	1-ne koht	2-ne koht	3-as koht	4-as koht	5-es koht	6-es koht	7-es koht	8-as koht	9-as koht	

Tabelis lahutasime täisarwude järgud murdarwude järkudest jämeda joone läbi ära; harilikus kirjas lahutatakse nemad üksteisest koma läbi ära. Seda koma nimetatakse murru komaks.

Tähendus. Alguses, kui meie ainult täisarwusid tundsime, tarwitasime komad suuremate arwude lugemise juures arwude klassideks jaotamiseks. Nüüd ei tohi meie komat mitte enam selleks tarwitada, waid peame ka ilma komata oskama õige suuri arwusid lugeda.

§ 201. Kümnend-jaod ja kümnend-murrud.

Kui meie ühe terwe nii mitmesse jaosse, mitu ühelist 10-el ehk 10-e astmetel on, s. o. 10-sse, 100-sse, 1000-sse jne. jaosse jagame, siis nimetatakse saaduid jagusid kümnend-jagudeks (десятичныя доли).

Awalik on, et kümnend-jagusid üleskirjutades meie murrud saame, mille nimetajateks 10 ehk 10-e astmed on, näit. $^{3}/_{10}$, $^{47}/_{100}$, $^{681}/_{1000}$. Laiendatud arwamise süsteemi põhjal wõime meie aga neid murdusid ilma nimetajata üles kirjutada kümnend-jagusid terwetest ühelistest murru-koma läbi ära lahutades.

Arwud, mille murruline osa kümnend-jagudest koos seisab ja ilma nimetajata üleskirjutatud on, nimetatakse kümnend-murdudeks (десятичная дробь).

Numbrid, mis murru komast paremal pool seisawad nimetatakse murru kohtadeks (R. Kallas) ehk kümnend kohtadeks (десятичные знаки).

§ 202. Kümnendmurdude lugemine.

I-ne Lugemise wiis: Loe 345,6789!

Numbrid, mis pahemal pool komat seisawad, tähendawad täisarwude järkusid; et meil endine arwamise süsteem on, siis peame neid ka nagu täis-arwusid kunagi lugema: kolmsada nelikümmend wiis. Esimesel kohal paremal pool komat seisawad kümnendikud, neid on meil 6; teisel kohal sajandikud, neid on 7; kolmandal kohal tuhandikud, neid on 8; neljandal kohal — kümnetuhandikud, neid on 9.

Et 345 täisarw, terwed ühelised on, siis üteldakse nende järel ka sõna „terwet“.

Selle järgi peaks meie arwu 345,6789 järgmiselt lugema: 345 terwet 6 kümnendikku 7 sajandikku 8 tuhandikku 9 kümnetuhandikku. Niisugune lugemise wiis on pikaldane ja tülikas: teda wõime järgmiste arutuste põhjal lühendada: 1-hes kümnendikus on 1000 kümnetuhandikku, 6-es kümnendikus on 6000 kümnetuhandikku; 1-es sajandikkus on 100 kümnetuhandikku, 7-es sajandikus on 700 kümnetuhandikku, 1-es tuhandikus on 10 kümnetuhandikku, 8-s tuhandikus on 80 kümnetuhandikku; peale selle on meil weel 9 kümnetuhandikku; kõiges kokku on antud arwus $6000 + 700 + 80 + 9 = 6789$ kümnetuhandikku. Sellepärast loeme meie arwu 345,6789 järgmiselt: 345 terwet, 6789 kümnetuhandikku.

Weel üks näitus: 24,040082!

Täisarwud loeme nagu harilikult: 24 terwet, peale selle on meil: 0 kümnendikku, 4 sajandikku, 1 tuhandik, 8 kümnetuhandikku, 8 sadatuhandikku, 2 miljondikku.

0 kümnendikku ei anna meile ühtegi miljondikku;
4 sajandikku annawad meile 40000 miljondikku,
0 tuhandikku ei anna meile ühtegi miljondikku,
0 kümnetuhandikku ei anna meile ühtegi miljondikku,
8 sadatuhandikku annawad meile 80 miljondikku ja
peale selle on meil weel 2 miljondikku.

See teeb kokku 40082 miljondikku ja meie peame antud arwu 24,040082 järgmiselt lugema: 24 terwet 40082 miljondikku. Meie näeme, et paremal pool komale otsekohe järgnew null wälja langeb.

Neist kahest näitusest selgub, et laiendatud arwamise süsteemi põhjal üleskirjutatud kümnendmurdu järgmiselt tuleb lugeda: *Esmalt üteldakse terwed wälja, siis üteldakse murru numbrid, nagu täisarw kokku ja temale lisatakse wiimase murrujärgu nimetus juure; kui murrukomale paremalpool otsekohe üks ehk mitu nulli järgnewad, siis jäetakse nad wälja.*

Weel näitus: 0,0019 = 0 terwet 19 kümnetuhandikku ehk lihtsalt 19 kümnetuhandikku.

II-ne lugemise wiis: Esmalt üteldakse terwed, siis iga nummer üksikult: 715,2059 loetakse nii: 715 koma kaks null wiis üheksa.

§ 203. Kümnend-murdude kirjutamine.

Kui murdusid järkude kaupa wälja räägitakse, siis peab neid niisama kirjutama, nagu täisarwusid, iga nummer oma järgu kohale, näit.: kirjuta üles 7 terwet 2 kümnendikku 8 sajandikku 4 tuhandikku 9 miljondikku:

7 terwet lahutame murru järkudest komaga ära; järgmised numbrid kirjutame komast paremale poole — 2 kümnendikku esimesele kohale, nende kõrwale teisele kohale 8 sajandikku, kolmandale kohale — 4 tuhandikku; kümnetuhandikka ei ole, sellepärast kirjutame nende asemele neljandale kohale 0; wiiendale kohale — 5 sadatuhandikku ja 9 miljondikku kuuendale kohale. Niiwiisi saame 7,284059.

Weel kergem on kümnendmurdusid üles kirjutada, kui neid üksikute numbrite kaupa wälja üteldakse; siis tuleb kirjutada, nagu räägitakse, näit. kakskümmend kolm koma null seitse wiis = 23,075.

Waatame, kuidas kümnendmurdu siis üles kirjutada, kui teda esimesel wiisil wälja räägitakse.

Kirjuta üles 42 terwet 7085 miljondikku!

Esimene arutus:

42 terwet 7085 miljondikku = 42 terwet + 7085 miljondikku = 42 terwet + (7000 + 80 + 5) miljondikku = 42 terwet + 7000 miljondikku + 80 miljondikku + 5 miljondikku = 42 terwet + 7 tuhandikku + 8 sadatuhandikku + 5 miljondikku.

Seda arwu on meil kergem üles kirjutada: 42 terwet lahutame komaga murdudest ära; kümnendikka antud arwus ei ole, nende asemele esimesele kohale kirjutame 0; sajandikka ka ei ole, nende asemele teisele kohale kirjutame ka 0; tuhandikka on 7, need kirjutame kolmandale kohale 7; kümnetuhandikka ei ole nende asemele neljandale kohale kirjutame 0; sadatuhandikka on 8, need kirjutame wiiendale kohale 8; miljondikka on 5, need kirjutame kuuendale kohale 5.

Niiwiisi leiame, et 42 terwet 7086 miljondikku järgmiselt üles kirjutatakse: 42,007085.

Teine arutus:

42 terwet kirjutame üles, tema järele koma; 7085 kirjutame komast paremale poole üles; nimetust miljondikku meie muidugi üles ei kirjuta, aga selle asemel waatame järele, kas wiimane nummer 5 ka omale õigele, miljondikkude, s. o. kuuendale kohale sai. Et wiimane nummer kuuendal kohal peab seisma, siis peab meil 6 kümnendkohta olema. Meil on neid ainult 4. See tähendab, et meie arwu wäljaütlemise juures komale järgnewad nullid wälja oleme jätnud ja nemad ongi need 2 puuduwat kohta. Sellepärast peame kohe koma taha kaks nulli kirjutama.

Siis saame 42,007085.

Meie näeme, *et kümnendmurdu üles kirjutada, eraldame täisarwu murru lugejast komaga ära, kirjutame murru lugeja üles, waatame järele, kas wiimane murru nummer õigel kohal seisab ja kui mõni kümnend koht puudub, siis kirjutame murru koma ja lugeja wahele puuduwa arwu nullisid. Kui täisarwusid ei ole, siis kirjutatakse koma ette null.*

§ 204. Kümnend-murru harilikuks murruks ja hariliku murru kümnend-murruks muutmine, kui tema nimetaja 1 järgnewate nullidega on.

Kui meie kümnendmurdu 3,02054 sõnadega wälja ütleme, saame 3 terwet 2054 sajatuhandikku; 0,0081076 = null terwet 81076 kümnemiljondikku. Kui meie järgmise segaarwu, milles harilik murd ette tuleb, $3\frac{2054}{100000}$ wälja ütleme, saame ka 3 terwet 2054 sajatuhandikku; $\frac{81076}{10000000} = 81076$ kümnemiljondikku.

Sellest järgneb, et $3{,}02054 = 3\frac{2054}{100000}$ ja $0{,}0081076 = \frac{81076}{10000000}$.

Sellepärast: *Et kümnend-murdu harilikuks murruks muuta, peame teda hariliku murruna (ehk segaarwuna) nii üleskirjutama, kuidas teda wälja räägitakse ja saadud murdu, kui wõimalik, koondama.*

Null terwet, nagu teada, hariliku murru ette ei kirjutata. Ümberpöördult: $3\frac{2054}{100000} = 3{,}02054$ ja $\frac{81076}{10000000} = 0{,}0081076$.

Sellepärast: *Et harilikku murdu, mille nimetajaks 10 ehk 10-ne astmed on, kümnend-murruks muuta, peame teda kümnend-murruna nii üles kirjutama, kuidas teda wälja räägitakse. Kui antud harilikus murrus terwed puuduwad, siis kirjutatakse kümnendmurrus terwete kohale 0.*

Kasulik on neid juhtisid weel teisiti wälja ütelda. Muudame 3.02054 liigmurruks, saame

$$3{,}02054 = 3\frac{2054}{100000} = \frac{302054}{100000}; \quad 0{,}0081076 = \frac{81076}{10000000}$$

Juht: *Et kümnend-murdu harilikuks murruks muuta, kaotatakse murru koma ära, saadud täisarw tehakse otsitawa murru lugejaks ja tema nimetajaks kirjutatakse nummer 1 nii mitme järgnewa nulliga, mitu murru kohta antud kümnend-murrul oli.*

Ümberpöördult: $3\frac{2054}{100000} = \frac{302054}{100000} = 3{,}02054; \frac{81075}{10000000} = 0{,}0081076$.

Juht: *Et harilikku liht- ehk liig-murdu, mille nimetajaks nummer 1 järgnewate nullidega on, kümnendmurruks muuta, jäetakse nimetaja kirjutamata ja lugejas eraldatakse koma läbi nii mitu murrukohta paremalt poolt pahemale poole ära, mitu nulli nimetajal oli; kui lugejas kümnendkohtasid puudus tuleb, siis kirjutatakse lugeja ette puuduwatele kohtadele nullid ja täisarwu kohale, koma ette ka üks null.*

Kahe wiimase juhi abil wõib kümnendmurdusid ka lugeda ja kirjutada.

§ 205. Kümnendmurrule nullide juure kirjutamine.

Meie teame, et täisarwule pahemale poole ette otsa nullide juure kirjutamine selle arwu wäärtust ei muuda, näit. 0008074 = 8074.

Ka kümnendmurrule pahemale poole, ette otsa, nullide juure kirjutamine ei muuda selle arwu wäärtust, sest et nad täisarwu ette on kirjutatud, näit. 8,75 = 0008,75 ehk 0,24 = 0000,24.

Wõtame kümnendmurru 51,243. Selles arwus on 5 kümnelist, 1 üheline, 2 kümnendikku, 4 sadandikku, 3 tuhandikku.

Kirjutame wõetud arwule paremale poole otsa ühe nulli, siis saame 51,2430. Selles arwus on 5 kümnelist, 1 üheline, 2 kümnendikku, 4 sajandikku, 3 tuhandikku. Meie näeme, et uus arw nendest samadest järkudest, millest endinegi arw, koos seisab. Endises arwus ei olnud kümnetuhandikka, uues arwus ei ole neid ka mitte, ehk küll meie nende kohale nulli kirjutasime; ülepea — uusi järkusid ei ole juure tulnud ja endistest ei ole ka ükski kaduma läinud. Sellest järjeldame, et need arwud ühesuurused on. Niiwiisi on siis

$$51{,}243 = 51{,}2430$$

Awalik on, et kui meie weel teise, kolmanda jne. nulli paremale poole otsa kirjutame, siis ka arwu wäärtus muutmata jääb, s. o. $51{,}243 = 51{,}2430 = 51{,}24300 = 51{,}243000 = \ldots\ldots$ jne.

Sellest jõuame otsusele, *et kümnendmurrule paremale poole, lõpule nullide juure kirjutamine ei muuda kümnendmurru wäärtust.*

Ümberpöördult, *kui meil kümnendmurd on, mis nullidega lõpeb, siis wõime need nullid maha kustutada, ilma et murru wäärtus muutuks,* sest uus murd seisab neistsamadest järkudest koos, millest endinegi näit. $51{,}2430 = 51{,}243$.

Kui meie aga koma kõrwale, koma ja murru ehk täisarwu wahele ühe ehk mitu nulli kirjutame, siis muutub küll kümnendmurru wäärtus. Näituseks: 3,75 ei ole mitte niisama suur nagu 3,075 ehk 30,75 ehk 30,075.

§ 206. Kümnendmurdude ühise nimetaja alla panemine ja koondamine.

Wõtame mõne kümnendmurru:

34,5 0,67 57,389

Kui meie esimese murrule kaks ja teisele murrule ühe nulli paremale poole juure kirjutame, siis saame arwud

34,500 0,670 57,389

milles igasühes ühewõrra murrukohte ja millel sellepärast ühine nimetaja on; murdude wäärtus ei ole, nagu meie teame, muutunud.

Kümnendmurdudele nullide juurekirjutamist paremale-poole nii, et kõigis antud arwudes ühewõrra murrukohte saab, nimetatakse kümnendmurdude ühise nimetaja alla panemiseks.

Kui kümnendmurd nullidega lõpeb, siis wõime lõpunullid maha kustutada; murd ei muuda, nagu teada, selle läbi oma wäärtust, saab aga lihtsama kuju. Näitus: $2{,}3400 = 2{,}34$. Kümnendmurrus lõpunullide mahakustutamist nimetatakse kümnendmurru koondamiseks.

§ 207. Kümnend murru muutumine koma edasi-tagasi nihutamisega.

I. Wõtame, näituseks, kümnendmurru

4, 2 9 8

Nihutame murrukoma ühe koha wõrra paremale poole, saame,

4 2, 9 8.

Et järkude kohtasid komast peale paremale ja pahemale poole hakatakse lugema, siis nihkus koma ühe koha wõrra paremale poole nihutamisega iga nummer ühe koha wõrra pahemale poole ja hakkas sellega 10 korda suuremaid üksusi tähendama, nimelt: 4 tähendas enne ühelisi, nüüd tähendab tema kümnelisi; tema wäärtus on sellega 10 korda suuremaks saanud; 2 tähendas enne kümnendikka, nüüd tähendab ta terweid ühelisi, tema wäärtus on sellega 10 korda suuremaks saanud; 9 tähendas enne enne sajandikka, nüüd tähendab ta kümnendikka, tema wäärtus on sellega 10 korda suuremaks saanud; 8 tähendas enne tuhandikka, nüüd tähendab ta sajandikka; tema wäärtus on sellega 10 korda suuremaks saanud. Iga numbri wäärtus on 10 korda suuremaks kaswanud, sellega on ka kõige arwu wäärtus 10 korda suuremaks kaswanud.

Nihutame murru koma kahe, kolme jne. koha wõrra paremale poole, näit. 8,3925 asemel kirjutame 839,25 ehk 8392,5 siis nihkub iga nummer kahe, kolme jne. koha wõrra pahemale poole ja hakkab sellega 100, 1000 jne. korda suuremaid üksusi tähendama, kui ta enne tähendas ja sellega kaswab ka kõige arwu wäärtus 100, 1000 jne. korda suuremaks.

Sellest selgub õpetus: *Komat 1-he, 2-he, 3-e jne. koha wõrra paremale poole nihutamisega kaswab meie arw 10, 100, 1000* jne. korda suuremaks; ehk teiste sõnadega: *Komat kümnendmurrus mône koha wõrra paremale poole nihutades kaswatame antud arwu niisuguse järgu ühelisega, mille kujutuses nii mitu nulli on, mitme koha wôrra meie komat edasi nihutasime.*

II. Wõtame, näituseks, kümnendmurru

7361,5.

Nihutame murrukoma ühe koha wõrra pahemale poole, saame

736,15.

Et järkude kohtasid komast peale paremale ja pahemale poole hakatakse lugema, siis nihkus koma ühe koha wõrra pahemale poole nihutamisega, iga number ühe koha wõrra paremale poole ja hakkas sellega 10 korda wähemaid üksusid tähendama. Seda mööda on iga numbri wäärtus 10 korda wähemaks kahanenud ja sellega on ka kõik arw 10 korda wähemaks kahanenud. Nihutame murrukoma kahe, kolme jne. koha wõrra pahemale poole, siis kahaneb iga numbri wäärtus 100, 1000 jne. korda wähemaks ja sellega kahaneb ka kõik arw 100, 1000 jne. korda wähemaks.

Sellest selgub õpetus: *Koma 1-he, 2-he, 3-e jne. koha wõrra pahemale poole nihutamise läbi kahaneb arw, 10, 100, 1000 jne. korda wähemaks;* ehk teiste sõnadega:

Komat kümnendmurrus mône koha wõrra pahemale poole nihutades jagame antud arwu niisuguse järgu ühelisega, mille kujutuses nii mitu nulli on, mitme koha wõrra meie koma tagasi nihutasime.

III. Esimesest õpetusest järgneb otsekohe juht:

Et kümnendmurdu järgu-ühelisega kaswatada, peame murrukoma nii mitme koha wõrra paremale poole nihutama, mitu nulli järgu-ühelise kujutuses on. Ei ole aga kümnendmurrus küllalt murrukohtasid olemas, siis kirjutame temale enne koma nihutamist tarwiline osa nullisid otsa.

Näitused: $0{,}52 \times 10 = 5{,}2$. $0{,}0735 \times 1000000 = 0{,}073500 \times 1000000 = 73500$. $3{,}498 \times 1000 = 3498$.

Kahes wiimases näituses saame täisarwud ilma murdudeta, sellepärast jätame seal komad kirjutamata.

IV. Teisest õpetusest järgneb otsekohe juht:

Et kümnendmurdu järgu-ühelisega jagada, peame murrukoma nii mitme koha wõrra pahemale poole nihutama, mitu nulli järgu-ühelise kujutuses on. Ei ole aga antud arwus küllalt täisarwu kohtasid olemas, siis kirjutame temale enne koma nihutamist tarwiline osa nullisid ette.

Näitused: $4703{,}69 : 100 = 47{,}0369$; $0{,}7 : 10 = 0{,}07$.
$85{,}29 : 1000 = 0{,}08529$.

T ä h e n d u s: Iga täisarwu peale wõime waadata, kui kümnendmurru peale, sest meie wõime täisarwu taha koma kirjutada ja komast paremele poole kui palju tahes nullisid, näit. $437 = 437{,}000$.

Ka täisarwu ette wõime kui palju tahes nullisid kirjutada, ilma et arwu wäärtus muutuks. Sellepärast saadetakse täisarwu jagamine ja kaswatamine 10-ga ja tema astmetega niisamuti toime, nagu kümnendmurru jagamine ja kaswatamine 10-ga ja tema astmetega. Näitused: $27 \times 1000 = 27{,}000 \times 1000 = 27000$.

$27 : 1000 = 0027 : 1000 = 0{,}027$.

§ 208. Kümnendmurdude wõrdlemine.

Wõtame kaks kümnendmurdu ja wõrdleme neid, et teada saada, kumb neist suurem, kumb wäiksem on.

6,827 ja 6,824995.

Paneme need arwud ühise nimetaja alla:

6,827000 ja 6,824995.

Esimeses arwus on 6 terwet 8 kümnendikku 2 sajandikku ja 7000 miljondikku; teises arwus on 6 terwet 8 kümnendikku 2 sajandikku ja 4995 miljondikku. Et 7000 suurem on kui, 4995, siis on ka 7000 miljondikku suurem, kui 4995 miljondikku. Terweid ühelisi, kümnendikka ja sajandikka on mõlemates arwudes ühepalju; teised kümned jaod muutsime meie miljondikkudeks ja neid miljondikka on esimeses arwus enam, kui teises. Sellepärast on esimene arw suurem, teine on wäiksem. Sellest järgneb: *Kahest kümnendmurrust on see suurem, mille täisarw suurem on; kui täisarwud ühesuurused on, ehk neid sugugi ei ole, siis on see suurem, mille kümnendikkude arw suurem on, kui kümnendikka ühewõrra on, ehk neid sugugi ei ole, siis peame sajandikka wõrdlema jne.*

§ 209. Ligikaudsed kümnendmurrud.

Wõtame kümnendmurru 0,746328.

Eelminewa paragrahwi põhjal teame et:

0,746328 on suurem, kui 0,7 ja 0,746328 on wähem, kui 0,8; seda kirjutame nii: $0{,}8 > 0{,}746328 > 0{,}7$

0,746328 on suurem, kui 0,74 ja 0,746328 on wähem, kui 0,75; seda kirjutame nii: $0{,}75 > 0{,}746328 > 0{,}74$

0,746328 on suurem, kui 0,746 ja 0,746328 on wähem kui 0,747; seda kirjutame nii: $0{,}747 > 0{,}749328 > 0{,}746$.

Need kolm paar murdusid 0,8 ja 0,7, 0,75 ja 0,74, 0,747 ja 0,746 nimetatakse kümnendmurru 0,746328 ligikaudseteks wäärtusteks (приближенныя значенія).

Ligikaudsed wäärtused 0,8, 0,75 ja 0,747, mis antud murrust suuremad on, nimetatakse ligikaudseteks wäärtusteks liianguga (приближенныя значенія съ избыткомъ).

Ligikaudsed wäärtused 0,7, 0,74 ja 0,746, mis antud murrust wähemad on, nimetatakse ligikaudseteks wäärtusteks wajanguga (съ недостаткомъ).

Esimese paari ligikaudsete wäärtuste 0,8 ja 0,7 waheng on 0,1; kummagi ligikaudse wäärtuse ja antud murru waheng on wähem, kui 0,1; sellepärast üteldakse nendest: 0,8 ja 0,7 on 0,746328 ligikaudsed wäärtused, *kindlad kuni 0,1-ni* (съ точностью до 0,1). Murrud 0,75 ja 0,74, mille waheng üksteisega wõrreldes 0,01, aga antud arwuga wõrreldes wähem, kui 0,01 on, on antud arwu ligikaudsed wäärtused, *kindlad kuni 0,01*. Kolmas paar 0,747 ja 0,746 on antud arwu ligikaudsed wäärtused, *kindlad kuni 0,001-ni.*

Kui ligikaudne wäärtus kindel on kuni 0,1-ni, 0,01-ni, 0-001-ni jne., siis räägitakse ka, et ta kindel on kuni 1-se, 2-se, 3-nda jne. murrukohani. Awalik on, kui ligikaudne wäärtus kindel on kuni 1-se, 2-se, 3-nda jne. murrukohani, siis on temal 0, 1, 2 ne. kindlat murrukohta.

Äramääramine: kümnendmurru ligikaudseteks väärtusteks, kindlad kuni 0,1 (ühe kümnendikuni) — (0,01; 0,001; 0,0001 jne.) — nimetatakse kaks kümnendmurdu, milledel 1 murrukoht — (2, 3, 4 jne. murrukohta) — on, mille waheng üksteisega võrreldes 0,1 — (0,01; 0,001; 0,0001 jne.) — on ja millest üks — antud arwust suurem, teine — antud arwust wähem on.

Kümnendmurru ligikaudseid väärtusi nimetame meie ka lihtsalt ligikaudseteks murdudeks ehk ligimurdudeks (приближенныя дроби).

Waheng antud murru ja tema ligikaudse murru wahel nimetatakse wigaduseks = ошибка = погрѣшность. Awalik on, mida enam numbrid ligikaudses murrus võtame, seda wähem on wigadus ja seda ligemal on täpipealsus. Nendest arutustest järgneb juht:

Et antud arwu ligikaudset murdu, kindlat kuni 0,1-ni, 0,01-ni, 0,001-ni jne. saada, peame antud arwust täisarwu ja nii palju murrukohte võtma, mitu murrukohte kindluse äramäärajal murrul on. Sellejuures wõime wiimasele võetud numbrile 1 juure lisada.

Kui meie wiimasele numbrile 1 juure lisame, siis on võetud ligikaudne murd antud arwust suurem ja meie saame ligikaudse murru liianguga; kui meie aga wiimase numbri muutmata jätame, siis on võetud ligikaudne murd antud arwust wähem ja meie saame ligikaudse murru wajanguga.

Näituseks võtame murru 0,58407936124873 ligikaudsed murrud:

0,5	ja	0,6	on	antud	murru	ligikaudsed	murrud,	kindlad	kuni	0,1
0,58	„	0,59	„	„	„	„	„	„	„	0,01
0,484	„	0,585	„	„	„	„	„	„	„	0,001
0,5840	„	0,5841	„	„	„	„	„	„	„	0,0001
0,58407	„	0,58408	„	„	„	„	„	„	„	0,00001
0,584079	„	0,584080	„	„	„	„	„	„	„	0,000001

Waatame selle näituse kallal, millal ligikaudset murdu tarwis wajanguga võtta, millal teda liianguga võtta.

Esimese paari ligikaudsete murdude 0,5 ja 0,6 waheng = 1 kümnendik. 0,5 on antud arwust wäiksem, enam kui 8 sajandikku, s. o. enam kui $^1/_2$ kümnendikku (1 kümnendik = 10 sajandikku, $^1/_2$ kümnendikku = **5** sajandikku) võrra.

Sellepärast, kui meie antud arwu asemel 0,6 võtame, siis teeme wea, mis wäiksem wähem on, kui 1 kümnendik, ja ka wähem, kui $^1/_2$ kümnendikku. Järjelikult on kasulikum antud arwu asemel 0,6 võtta, sest selle juures teeme wähema wea, kui antud arwu asemel 0,5 võttes.

Teise paari ligikaudsete murdude 0,58 ja 0,59 waheng = 1 sajandik. 0,58 on antud arwust wäiksem, enam kui 4-ja tuhandiku, aga siiski wähem kui 5-e tuhandiku wõrra, s. o. 0,58 on antud arwust wäiksem, wähem kui $^1/_2$ sajandiku wõrra (1 sajandik = 10 tuhandikku, $^1/_2$ sajandikku = **5** tuhandikku.) Sellepärast, kui meie antud arwu asemel 0,58 wõtame, siis teeme wea, mis wähem on, kui $^1/_2$ sajandikku. 0,59 on antud arwust suurem, wähem kui 6-e tuhandiku, aga siiski enam kui 5-e tuhandiku wõrra, s. o. 0,59 on antud arwust enam kui $^1/_2$ sajandiku wõrra suurem. Sellepärast, kui meie antud arwu asemel 0,59 wõtame, teeme wea, mis suurem on, kui $^1/_2$ sajandikku.

Järjelikult on kasulikum antud arwu asemel 0,58 wõtta, sest selle juures teeme wähema wea, kui siis, kui meie 0,59 wõtame.

Sellest järgneb juht:

Ligikaudse murru saamiseks wõetud arwus on siis kasulik wiimasele wõetud numbrile 1 juure lisada, kui selle wiimasele numbrile 5-st suurem nummer (ehk 5) järgneb; järgneb temale aga 5-st wähem nummer, siis jäetakse ta muutmata.

Selle juhi põhjal kokkuseatud murrud nimetatakse kindlateks kuni kümnendjao pooleni ehk kuni wiimase wõetud murru koha pooleni.

Meie näitustest on:

0,6	kindel	kuni	poole	kümnendikuni		ehk	kuni	1-se	murru	koha	pooleni.
0,58	„	„	„	sajandikuni		„	„	2-se	„	„	„
0,584	„	„	„	tuhandikuni		„	„	3-nda	„	„	„
0,5841	„	„	„	kümnetuhandikuni		„	„	4-nda	„	„	„
0,58408	„	„	„	sajatuhandikuni		„	„	5-nda	„	„	„

Ülesanded: Antud on murrud 2,142857; 6,723509286174. Kirjutage nende ligikaudsed wäärtused, kindlad kuui 0,1-ni; 0,01-ni; 0,001-ni; 0,000001-ni.

Antud on kümnendmurrud 42,427351928067; 0,3175175175; 3,14159265; 2,7182818.

Kirjutage nende ligikaudsed murrud, kindlad kuni $^1/_2$-e kümnendikuni, $^1/_2$-e sajandikuni, $^1/_2$-e tuhandikuni, $^1/_2$-e miljondikuni!

Kakskümnes esimene peatükk: Tehted kümnendmurdude kallal.

§ 210. Kümnendmurdude kokkuarwamine.

Et kümnendmurdusid sellesama arwamise süstemi järele kirjutatakse, mille järele täisarwudki, siis peame kümnendmurdusid just niisama kokku arwama, nagu täisarwusidki. Selleks kirjutame

kokkuarwatawad üksteise alla, nii et täisarwud täisarwude, komad komade, kümnendikud kümnendikkude, sajandikud sajandikkude, tuhandikud tuhandikkude j. n. e. kohtadele tulewad ja hakkame kokkuarwamist kõige alamast järgust peale.

0,83507	0,83507
51,072	51,07200
+ 103,96093	+ 103,96093
59,67	59,67000
9,2	9,20000
1 2 2 2 1 1	224,73800
224,73800	

Et selgem oleks kokku arwata ja et järkudes mitte eksida, wõime tühje murrukohte nullidega täita; see on aga üleliigne, kui arwud korrapäraliselt üles on kirjutatud ja kokkuarwamise juures tähele panelik oldakse.

Kokkuarwatawates on kõige alam järk sajatuhandikud. Ühes kokkuarwatawas on neid 7, teises on neid 3, teistes kokkuarwatawates neid ei olegi; kokku arwates saame 10 sajatuhandikku, s. o. 1 kümnetuhandiku ja 0 sajatuhandikku; 0 sajatuhandikku kirjutame sajatuhandikkude alla summasse ja 1 kümnetuhandiku lisame kümnetuhandikkude juure. Kümnetuhandikka on ühes kokkuarwatawas 9, teistes neid ei olegi, peale selle on meil weel 1 kümnetuhandik, mis meie sajatuhandikkude summast saime; see teeb kokku 10 kümnetuhandikku, s. o. 1 tuhandiku ja 0 kümnetuhandikku; 0 kümnetuhandikku kirjutame kümnetuhandikkude alla summasse ja 1 tuhandiku lisame tuhandikkude juure. Tuhandikka on meil 5 ja 2 ja weel 1, mis kümnetuhandikkude summast saime; see teeb kokku 8 tuhandikku; 8 tuhandikku kirjutame tuhandikkude alla summasse. Sajandikka on meil 3 ja 7 ja 6 ja 7, kokku 23 sajandikku ehk 2 kümnendikku ja 3 sajandikku; 3 sajandikku kirjutame sajandikkude alla summasse ja 2 kümnendikku lisame kümnendikkude juure. Kümnendikka on meil 8, 9, 6, 2 ja weel 2, mis sajandikkude summast saime; see teeb kokku 27 kümnendikku, s. o. 2 terwet ja 7 kümnendikku; 7 kümnendikku kirjutame kümnendikkude alla summasse, tema ette kirjutame koma ja 2 terwet lisame üheliste juure. Nüüd arwame täisarwud kokku ja nende summa 224 kirjutame koma ette. Niiwiisi leiame summa 224,73800. Selles summas kustutame kaks lõpunulli maha, siis saame summa 224 738.

§ 211. Kümnendmurdude maha-arwamine.

Kümnendmurdude maha-arwamist toimetatakse nagu kokkuarwamistki, niisamuti nagu täisarwude mahaarwamist.

1. Näitus: 57,60847 — 42,87495 = ?

$$\begin{array}{r} \overset{.10.10}{57,60847} \\ \overline{15\,10\;\;14} \\ -\;42,87495 \\ \hline 14,73352 \end{array}$$

Mõnikord näeb wälja, nagu ei oleks wõimalik harilikul wiisil mahaarwamist toime panna, aga lähemal tutwusel saab selgeks, et meie harjunud wiisist sugugi kõrwale ei astu. Wõtame mõned näitused.

2. Näitus: 3,506128 — 0,4759 = ?

$$\begin{array}{r} \overset{.10.10}{3,506128} \\ \overline{10\;\;11} \\ -\;0,4759 \\ \hline 3,030228 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,\dot{5}0\dot{6}128 \\ -\;0,275900 \\ \hline 3,230228 \end{array}$$

Hakkame, nagu ikka, kõige alamast järgust peale maha arwama. 8-st miljondikust ei ole midagi maha arwata, jääb 8 miljondikku üle. 2-st sajatuhandikust ei ole midagi maha arwata, jääb 2 sajatuhandikku üle. 9 kümnetuhandikku 1-st kümnetuhandikust mahaarwata ei saa; laename ühe tuhandiku ja laotame tema kümnetuhandikkudeks, saame 10 kümnetuhandikku; meil oli enne ka 1 kümnetuhandik, saab kokku 11 kümnetuhandikku, nüüd wõtame 11-st kümnetuhandikust 9 kümnetuhandikku ära, jääb 2 kümnetuhandikku järele. Tuhandikka oli wähendatawas enne 6, meie laenasime 1 ära, nüüd on neid ainult 5; 5-st tuhandikust 5 tuhandikku ära, jääb 0 tuhandikku järele. Sajandikka wähendatawas ei ole, laename ühe kümnendiku ja laotame tema sajandikkudeks, saame 10 sajandikku. 10-st sajandikust 7 sajandikku ära, jääb 3 sajandikku järele. 4-st kümnendikust 2 kümnendikku ära, jääb 2 kümnendikku järele. 3-st terwest ei ole midagi maha arwata, jääb 3 terwet järele. Jäänus on 3,230228. Kui jäänuse numbrid kirjutatakse, siis ei tohita mitte ära unustada kümnendikkude numbri ette koma kirjutada.

Mahaarwatawas wõib tühje murrukohte nullidega täita, aga nagu meie arutusest näha on, ei ole see sugugi tarwilik. Kui wähendatawas wähem murrukohte on, kui mahaarwatawas, siis on küll parem, kui meie neid nullidega täidame.

3. Näitus:

$$\begin{array}{r} \overset{10\;10\;10\;10\;10}{\dot{2}\dot{1},3000} \\ \overline{10\;12\;10\;\dot{0}\;1\dot{0}} \\ -\;18,4578 \\ \hline 2,8422 \end{array}$$

Wähendatawas ei ole meil kümnetuhandikka, ei tuhandikka, ei sajandikka; sellepärast, et wõimalik oleks 8 kümnetuhandikku maha arwata, laename ühe kümnendiku ja laotame tema sajandikkudeks, saame 10 sajandikku; neist laename ühe sajandiku ja laotame tuhandikkudeks, saame 10 tuhandikku; neist laename ühe tuhandiku ja laotame tema

kümnetuhandikkudeks, saame 10 kümnetuhandikku. Nüüd on meil

21 terwet $\overset{10}{2}$ kümnendikku 9 sajand. 9 tuhand. 10 kümnetuhand.; kui meie neist

18 „ $\overset{12}{4}$ „ 5 „ 7 „ 8 „ maha arwame, saame

2 „ 8 „ 4 „ 2 „ 2 „ = 2,8422.

Sarnaselt peame ka toimetama, kui meie täisarwust kümnendmurdu maha arwame.

4. Näitus:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle .\,10\,10\,10\,10\,10} \\ 5{,}00000 \\ {\scriptstyle 10\,10\,10\,10\,10} \\ -\ 2{,}47162 \\ \hline 2{,}52838 \end{array}$$

5. Näitus:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle .\,10\,10\,10\,10\,10\,10} \\ 1{,}000000 \\ {\scriptstyle 10\,10\,10\,10\,10\,10} \\ -\ 0{,}384155 \\ \hline 0{,}615845 \end{array}$$

6. Näitus:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle .\,10\,10\,10} \\ 7{,}000 \\ {\scriptstyle 10\,10\,10} \\ -\ 0{,}749 \\ \hline 6{,}251 \end{array}$$

Neist näitustest selgub juht: *Et täisarwust kümnendmurdu maha arwata, arwame kõik kümnendmurru numbrid 9-st maha, peale wiimase, mille meie 10-st maha arwame*; täisarwud arwatakse harilikult maha. Sellepärast wõime endised näitused järgmiselt kirjutada:

$$\begin{array}{rr} 5{,}9999^{10} & \text{ehk } 7{,}000 \\ & {\scriptstyle 9\,9\,10} \\ -\ 2{,}47162 & -\ 0{,}749 \\ \hline 2{,}52838 & 6{,}251 \end{array}$$

ehk wõime jäänuse ka otsekohe üleskirjutada 1 — 0,384155 = 0,615845.

§ 212. Kümnendmurdude kaswatamine.

Kaswata 23,907-t 8,54-ga!

Heidame kaswatatawas ja kaswatajas murrukomad kõrwale, siis saawad kaswatataw ja kaswataja täisarwudeks.

$$\begin{array}{r} 23{,}907 \\ \times\ 8{,}54 \\ \hline 95628 \\ 119535 \\ 191256 \\ \hline 204{,}16578 \end{array}$$

Nüüd kaswatame kaswatatawat ja kaswatajat, nagu täisarwusid kaswatatakse; kaswatises saame 20416578.

Aga kaswatatawas murrukomad kõrwale heites nihutasime seda koma 3-e murrukoha wõrra paremale poole ja niiwiisi kaswatasime kaswatatawat 1000-ga. Selle läbi kaswatasime ka otsitawat kaswatist 1000-ga.

Kaswatajas murrukomad kõrwale heites nihutasime seda koma 2-he murrukoha wõrra paremale poole ja niiwiisi kaswatasime kaswatajat 100-ga. Selleläbi kaswatasime aga ka otsitawat kaswatist 100-ga.

Selleläbi, et meie otsitawat kaswatist esiteks 1000-ga, siis 100-ga kaswatasime, kaswatasime teda 1000×100-ga, s. o. 100000-ga. Sellepärast on saadud kaswatis 20416578 otsitawast kaswatisest 1000×100=100000 korda suurem.

Järjelikult, et otsitawat kaswatist leida, peame saadud kaswatist 20416578-t 1000×100=100000-ga jagama; selleks eral-

dame kaswatises 20416578 esite 3, ja siis weel 2, ehk korraga 3+2=5 murrukohta paremalt poolt pahemale poole lugedes ära. Siis saame otsitawa kaswatise 204,16578.

Komade kõrwaleheitmiseks ei pruugi meie neid just mitte maha kustutada, waid meie jätame nad küll seisma, aga ei pane neid sugugi tähele ja kaswatame antud arwusid, nagu oleks nad täisarwud.

Juht: *Et kümnendmurdusid kaswatada, kaswatame antud arwusid, nagu täisarwusid, murrukomasid täiesti tähele panemata jättes, ja saadud kaswatises eraldame koma läbi parema käe poolt pahemale poole nii mitu murrukohta ära, mitu murrukohta kaswatajas ja kaswatatawas ühtekokku on.*

See juht on ka sel korral maksew, kui meie kümnendmurdu täisarwuga kaswatame, sest täisarwu peale wõime wa-data, kui kümnendmurru peale, millel 0 murrukohta on.

Näitused:

1)	2)	3)	4)
0,375	8,75	0,43	2,69
× 0,16	× 4,8	× 0,052	× 37
2250	7000	86	1883
375	3500	215	807
0,06000	42,000	0,02236	99,53

Ka teise harutamise wiisi kaudu jõuame sellesama kaswatamise juhi juure. Wõtame endise näituse ja muudame kümnendmurrud harilikkudeks murdudeks:

$$23{,}907 \times 8{,}54 = \frac{23907}{1000} \times \frac{854}{100} = \frac{23907.854}{1000.100} = \frac{20416578}{100000} = 204{,}16578.$$

Kümnendmurdudega jagamine.

§ 213. Kümnendmurru jagamine täisarwuga.

1. Näitus: Jaga 297,36 14-ga!

Tehte rakendame niisamuti, nagu täisarwude jagamise juures, ja harutame nii, nagu peaksime 297,36 14-ks ühesuuruseks jaoks jaotama.

297,36	14
28	21,24.
17	
14	
33	
28	
56	
56	
0.	

Jaotame esite 297 terwet 14-ks ühesuuruseks jaoks; saame igas jaos 21 terwet ja 3 ühelist jääb järele. 21 terwet kirjutame jaondisse ja tema järele teeme koma. Järele jäänud 3 ühelist laotame kümnendikkudeks ja saadud kümnendikkudele arwame jagatawa 3 kümnendikku juure, selle tarwis wiime jagatawast järgmise, kümnendikkude, numbri 3 alla jäänuse numbri 3-e kõrwale, saame 33 kümnendikku. Jaotame 33 kümnendikku 14-ks ühesuuruseks jaoks, saame igas jaos 2 kümnen-

dikku ja 5 kümnendikku jääb järele. 2 kümnendikku kirjutame jaondisse koma taha. Ülejäänud 5-e kõrwale wiime jagajast järgmise numbri 6 alla, saame 56; selleläbi laotame 5 kümnendikku sajandikkudeks ja arwame saadud 50-le sajandikule jagatawa 6 sajandiku juure.

56 sajandikku 14-ks jaoks jaotades saame igas jaos 4 sajandikku, mida meie jaondisse sajandikkude kohale kirjutame, ja midagi ei jää järele.

Sellega on jagamine lõpetatud ja jaond on 21,24.

Sellest näitusest selgub, *et kümnendmurdusid täisarwudega niisama jagatakse, nagu täisarwusidki. Selle juures peame aga iseäranis seda tähele panema, et jaondis üheliste järele murru koma mitte ära ei unustataks.*

2. Näitus: Jaga 0,47 8-ga!

Rakendame tehet ja harutame endist wiisi!

```
0,47 | 8
 40  | 0,05875.
 70
 64
 60
 56
 40
 40
  0.
```

Terweid ühelisi meie jaondis ei saa, sest neid ei ole jagatawaski olemas.

Sellepärast kirjutame jaondisse (terwete kohale) 0 ja tema järele koma.

4 kümnendikku 8-ks jaoks jaotatud ei anna meile jaondis kümnendikka; sellepärast kirjutame jaondisse kümnendikkude kohale 0.

4 kümnendikku laotame sajandikkudeks, saame 40 sajandikku, ja saadud arwule lisame jagatawa 7 sajandikku juure; siis saame 47 sajandikku. 47 sajandikku 8-ks jaoks jaotades saame igas jaos 5 sajandikku ja 7 sajandikku jääb üle. 5 sajandikku kirjutame jaondisse ja ülejäänud 7 sajandikku laotame tuhandikkudeks; saame 70 tuhandikku. 70 tuhandikku 8-ks jaoks jaotades saame igas jaos 8 tuhandikku, mida meie jaondisse kirjutame, ja 6 tuhandikku jääb üle. Ülejäänud 6 tuhandikku laotame kümnetuhandikkudeks, saame 60 kümnetuhandikku. 60 kümnetuhandikku 8-ks jaoks jaotades saame igas jaos 7 kümnetuhandikku, mida meie jaondisse kirjutame, ja 4 kümnetuhandikku jääb üle. Laotame 4 kümnetuhandikku sadatuhandikkudeks, saame 40 sadatuhandikku. 40 sadatuhandikku 8-ks jaoks jaotades saame igas 5 sadatuhandikku, mida meie jaondisse kirjutame, ja üle ei jää midagi.

Sellega on jagamine lõpetatud ja jaond on 0,05875.

Sellest näitusest selgub: *kui ka kõik jagatawa numbrid ära lõpewad, meil aga weel jäänus olemas on, siis et ole meie jagamine weel mitte lõpnud. Et jagamist jätkata ja kindlat jaondit leida, kirjutame igale jäänusele ühe nulli juure, teda sellega järgmise alama järgu üksusteks laotades, ja nii wiisi saadud arwu jagame jagajaga. Sedawiisi toimetame nii kaua, kuni jäänust enam järele ei jää.*

Niisamuti wõime ka täisarwu jagamise juures täisarwuga toimetada.

Näitused:

1) 111 | 24
96 | 4,625
150
144
60
48
120
120
0.

2) 111 | 125
1110 | 0,888
1000
1100
1000
1000
1000
0.

3) 3 | 8
30 | 0,375
24
60
56
40
40
0.

§ 214. Kümnendmurruga jagamine.

Näitus: Jaga 0,423 0,15-ga!

0,42,3 | 0,15,
30 | 2,82
123
120
30
30
0.

Teeme jagaja täisarwuks. Selle tarwis nihutame temas koma arwu lõpule, s. o. kahe murrukoha wõrra paremale poole. Selle läbi kaswatame jagajat 100-ga. Et jaond muutmata jääks, peame ka jagatawat 100-ga kaswatama. Selle tarwis peame ka jagatawas komad kahe murrukoha wõrra paremale poole nihutama. Siis wõime jagada, nagu kümnendmurdu täisarwuga jagatakse. Niisamuti jagatakse ka täisarwu kümnendmurruga.

Näitused: 1) 28 : 1.75 = 2800 | 175
175 | 16
1050
1050
0.

2) 3 : 0,48 = 300 | 0,48
288 | 6,25
120
96
240
240
0.

Juht: *Et kümnendmurdu ehk täisarwu kümnendmurruga jagada, jäetakse jagajas koma ära ja jagatawat suurendatakse ka nii mitu korda, mitu korda jagajat koma ärajätmisega suurendati. Tehe rakendatakse nagu täisarwudega jagamise juures.*

§ 215. Lôputa jagamine.

Jaga 42,6 18-ga!

```
42,6 | 18
36   |-----------
---  | 2,3666 . . .
 66
 54
 ---
 120 } . . . tehte
 108 } korduw jagu.
 ---
  120
  108
  ---
   120
   108
   ---
    12
```

42,6 jagades 18-ga näeme, et teine jäänus 12 korduma hakkab, sest kui meie 12-le 0 juure kirjutame ja saadud 120 jagame 18-ga, siis saame jälle jäänuse 12, mis pärast nulli juure kirjutamist ja (18-ga) jagamist 18-ga uuesti jäänuse 12 annab. Sellest on näha, et kui kaua meie ka jagaksime, teist jäänust meie ikka ei saa ja meie jagamisel ei tule iialgi lõppu: jäänuses kordub arw 12 ja jaondis — nummer 6.

Jäänuses wõiwad ka mitu arwu ja jaondis mitu numbrit korduda, näituseks:

```
1)  tehte korduw jagu {
    0,1820 | 0,231
    1617   |-------
    ----   | 0,7878 . . .
     2030
     1848
     ----
      1820
      1617
      ----
       2030
       1848
       ----
        182
```

```
2)  93 | 37
    74 |-----------
    ---| 2,513513 . . .
    190
    185
    ---
     50
     37
     ---
     130
     111
     ---
      19
```

Neis näitustes saime jaondina kümnendmurrud, millel lõppu ei ole. Neid nimetatakse sellepärast l õ p u t a k ü m n e n d m u r d u d e k s (безконечная десятичная дробь). Kümnendmurd, millel kindel arw murrukohte on, nimetatakse selle wastu l õ p u l i s e k s (конечная) kümnendmurruks.

Kui meie jaondina lõputa kümnendmurru saame, meie aga jaondit siiski lõpulise arwuna awaldada tahame, siis peame jaondiks ligikaudse kümnendmurru wõtma ehk hariliku murruna awaldama.

Et jaondit hariliku murruna awaldada, muudame jagatawa ja jagaja harilikkudeks murdudeks ja paneme siis jagamise toime.

Näitused:

$$42{,}6 : 18 = \frac{426}{10} : \frac{18}{1} = \frac{426.1}{10.18} = \frac{71}{30} = \underline{2\,\frac{11}{30}}.$$

$$0{,}182 : 0{,}231 = \frac{182}{1000} : \frac{231}{1000} = \frac{182}{231} = \underline{\frac{26}{33}}.$$

$$93 : 37 = \frac{93}{37} = \underline{2\,\frac{19}{37}}.$$

Kakskümnes teine peatükk: Jätkulised kümnendmurrud.

§ 216. Selgejätkulised ja segajätkulised murrud.

Kümnendmurdudes 2,36666...; 0,787878...; 2,513513513..., mis eelminewas paragrahwis jaonditena ilmusiwad, korduwad üks ehk mitu numbrit ühes ja sellessamas järjekorras ilma otsata.

Kümnendmurd, milles mõnest murrukohast peale, üks ehk mitu numbrit ühes ja sellessamas kindlas järjekorras ilma otsata korduwad, nimetatakse jätkuliseks kümnendmurruks (періодическая дробь) ja korduwate numbrite kogu nimetatakse jätkuks (періодъ).

On ka lõputa kümnendmurdusid olemas, mis mitte jätkulised ei ole. Murrus 0,747744777444... korduwad numbrid 7 ja 4 küll kindlas, aga mitte ühes ja sellessamas järjekorras; murdudes 2,7182818284179420 58... ja 1,7320508075... seisawad numbrid ilma mingisuguse korrata.

Jätkulised murrud wõiwad olla selgejätkulised (чистыя періодическія дроби) ehk segajätkulised (смѣшанныя періодическія дроби). Kümnendmurd on selgejätkuline, kui jätk kohe koma järele peale hakkab; kui koma ja jätku wahel weel mõni nummer on, siis on murd segajätkuline. Arwu, mis koma ja esimese jätku wahel seisab, nimetatakse eesliigiks (число стоящее до періода).

Näitused: 0,787878... ja 2,513513513... on selgejätkulised murrud; esimese murrujätk on 78 ja teise jätk on 513. 2.3666... ja 0,47872872... on segajätkulised murrud; esimese murru jätk on 6 ja eesliik on 3, teise jätk on 872 ja eesliik on 47.

Jätkulised murrud kirjutatakse nii, et jätku mitu korda kirjutatakse ja siis mitu punkti tehtakse, ehk nii, et jätk kirjutatakse üks kord ja wõetakse klambritesse, näit. 0,787878... = 0,(78); 2,513513513... = 2,(513); 2,3666... = 2,3(6); 1,41161616... = 1,41(16).

Jätkulisi murdusid loetakse järgmiselt:

0,(78)... 0 koma 78 jätkuna;
2,(513)... 2 koma 513 jätkuna;
2,3(6)... 2 koma 3, 6 jätkuna;
1,41(16)... 1 koma 41, 16 jätkuna.

Esiteks loetakse täisarw ja lisatakse sõna „koma“ juure; siis loetakse eesliik ja wiimaks loetakse jätk ja lisatakse sõna „jätkuna“ juure.

§ 217. Jätku ja eesliigi wiimane nummer.

Segajätkulises murrus eilõpe jätk iialgi selle-sama numbriga, millega eesliik lõpeb. Wastalisel korral korduks see eesliigi wiimane nummer iga jätku eel, see tähendab, ta korduks ühes ja sellessamas järjekorras ja oleks sellega jätku nummer, ja nimelt esimene. Wõtame näituseks arwu 6,281818...

Wõtaksime meie jätkuks 18 ja kirjutaksime 6,281818... = 6,28(18), siis oleks jätku wiimane nummer 8 ja eesliigi wiimane nummer oleks ka 8; aga jätk oleks walesti wõetud, sest nummer 8 kordub ka ühes ja sellessamas järjekorras ja nimelt numbri 1-e eel. Sellepärast hakkab jätk juba 8-st peale ja meie peame kirjutama: 6,281818... = 6,2(81).

§ 218. Jagamise läbi saadud lõputa kümnendmurd on alati jätkuline.

Kui meil üht arwu teisega jagades jagatawas kõik numbrid otsa lõpewad, siis kirjutame jäänusele 0 juure ja niiwiisi saadud arwu jagame jagajaga. Et meil lõputa jagamisest juttu on, siis saame wiimase jagamise juures jälle jäänuse, millele meie jälle 0 juure kirjutame, et uuesti saadud arwu jagajaga jagada. Selle jagamise juures saame jälle jäänuse, millele meie jälle 0 juure kirjutame jne. ilma otsata. Et jäänuseid ilmotsata palju on, et kõigis nendes jagamistes jagaja üks ja seesama on, ja et jäänus alati jagajast wähem on, siis wõib mitmesuguseid jäänuseid ainult kindlasti äramääratud arw olla; nimelt, neid mitmesuguseid jäänuseid peab wähem olema, kui ühelisi jagajas. Näituseks, 37-t 13-ga jagades ei wõi meie enam, kui 12 mitmesugust jäänust saada (tõepoolest on neid 6, nagu kõrwalseiswast tehtest näha on).

```
37 | 13
26 | 2,846153...
110
104
 60
 52
  80
  78
   20
   13
    70
    65
     50
     39
     110...
```

Sellepärast peab mõne jagamise tagant üks jäänus korduma. Sellega hakkab aga kõik tehe, järjelikult ka jaondi numbrid, sellest jäänusest peale, endises järjekorras korduma, sest kui meie sellele korduwale jäänusele 0 juure kirjutame, saame sellesama jagatawa, pärast jagamist jaondis sellesama numbri, ja jäänuses sellesama (teise) jäänuse, mis meie siis ka saime, kui meil esimest korda sellele jäänusele 0 juure kirjutasime. Sellest on awalik, et kui jaondina lõputa kümnendmurd ilmub, siis on ta alati jätkuline.

§ 219. Kümnendmurdude tähtsus.

1) Et tehted kümnendmurdude kallal peaaegu niisama toimetatakse, nagu täisarwude kallal, siis on kümnendmurdudega arwamine lihtsam ja kergem, kui harilikkude murdudega.

2) Kui meie sunnitud oleme ligikaudsete murdudega arwama, siis on kümnendmurdudega meil palju kergem arwata kui harilikkude murdudega, ja kümnendmurdudega arwates on meil enam wõimalust teada saada, kui harilikkude murdudega arwates, kui suure wigaduse meie oma arwamise juures teeme.

Sellepärast tarwitawad teadusemehed oma wäljaarwamistes palju sagedamini kümnendmurdusid, kui harilikka.

§ 220. Harilikkude murdude kümnendmurdudeks muutmine murru laiendamise abil.

Murru laiendamiseks nimetatakse tema lugeja ja nimetaja kaswatamist ühe ja sellesama arwuga. Nagu teada, ei muutu murru wäärtus seeläbi mitte. Kuidas harilikku murdu, mille nimetajaks nummer 1 järgnewate nullidega on, kümnendmurruks muuta, teame juba § 204-st: nimetaja jäetakse kirjutamata ja lugejas eraldatakse komaga paremalt poolt nii mitu murrukohta ära, mitu nulli nimetajal oli; kui lugejas murrukohte puudus tuleb, siis kirjutatakse lugeja ja koma wahele puuduwatele kohtadele nullid.

Waatame nüüd, kuidas teisi murdusid kümnendmurdudeks muuta. Wõtame, näituseks, murru $^{17}/_{40}$ ja muudame ta kümnendmurruks. Kümnendmurru nimetaja peab 10 ehk 10-e aste olema. Et 10 algteguriteks 2 ja 5 lahkub, siis peab igal 10-e astmel ühewõrra tegurid 2 ja 5 olema ja nimelt nii palju, mitu nulli antud 10-e astmel on, ehk mitmes 10-e aste antud on.

Waatame nüüd, kas meie ka oma murru nimetajat 10-e astmeks muuta ei saa. Selleks otstarbeks lahutame tema algteguriteks:

$$40 = 2.2.2.5.$$

Meie näeme, et tegurid 2 on enam, kui tegurid 5; nimelt kahel teguril 2 puuduwad wastawad tegurid 5. Seepärast, kui meie oma murru nimetajat 40 kahe teguri 5-ga täiendame, siis saame 10-e astme, nimelt kolmanda astme ja uus nimetaja on 1 kolme järgnewa nulliga: $40.\mathbf{5}.\mathbf{5} = 1000$. Et murru wäärtus ei muutuks, siis peame ka lugejat $5 \times 5 = 25$-ga kaswatama. Seda mööda leiame:

$$\frac{17}{40} = \frac{17}{2.2.2.5} = \frac{17.\mathbf{5}.\mathbf{5}}{2.2.2.5.\mathbf{5}.\mathbf{5}} = \frac{425}{1000} = 0{,}425.$$

Näitused:

1) $\frac{11}{16} = \frac{11}{2.2.2.2} = \frac{11.5.5.5.5}{2.2.2.2.5.5.5.5} = \frac{6875}{10000} = 0{,}6875.$

2) $\frac{23}{125} = \frac{23}{5.5.5} = \frac{23\ 2.2.2}{5.5.5.2.2.2} = \frac{184}{1000} = 0{,}184.$

3) $\frac{7}{20} = \frac{7}{2.2.5} = \frac{7.5}{2.2.5.5} = \frac{35}{100} = 0{,}35.$

4) $4\frac{19}{250} = 4 + \frac{19.2.2}{2.5.5.5.2.2} = 4\frac{76}{1000} = 4{,}076.$

Kui meie seda harilikkude murdude kümnendmurdudeks muutmise wiisi lähemalt waatame, siis jõuame järgmistele otsustele:

1) Harilikku murdu, mille nimetajas peale 2-e ja 5-e teisi algtegurid ei ole, on wõimalik kümnendmurruks muuta.

2) Harilikust murrust saadud kümnendmurrul on nii mitu murrukohta, mitu korda arw 2 ehk 5 hariliku murru nimetajas tegurina kordub, seda mööda, kumb neist enam kordasid nimetajas ette tuleb.

Näitus: $40 = 2.2.2.5$; 2 tuleb enam kordasid ette kui 5, sellepärast peame murrukohtasid 2-e järele arwama; 2 kordub tegurina 3 korda, sellepärast muutub iga murd, mille nimetaja 40 on, kolme murrukohaga kümnendmurruks.

3) Harilikku, mitte koondatawat murdu, mille nimetajas 2-st ja 5-st lahkuminew algarw tegurina ette tuleb, ei ole wõimalik (murru laiendamise abil) kümnendmurruks muuta.

Näitus: $^2/_3$ ei ole wõimalik (murru laiendamise abil) kümnendmurruks muuta, sest et niisugust täisarwu olemas ei ole mis 3-ga kaswatades 10 ehk 10-ne astme annaks. $^{21}/_{28}$ näikse ka wõimata olewat kümnendmurruks muuta, sest et nimetajas tegur 7 ette tuleb; kui meie aga seda murdu 7-ga koondame, siis kaob nimetajast tegur 7 ära ja meie leiame $\frac{21}{28} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

§ 221. Hariliku murru kümnendmurruks muutmine jagamise abil.

Et meie hariliku murru peale kui jaondi peale wõime waadata, kus lugeja jagatawaks ja nimetaja jagajaks on, ja et meie igat täisarwu iga täisarwuga jagada wõime, jaondit selle juures

kümnendmurruna kujutades, siis seisab hariliku murru kümnendmurruks muutmine selles, et meie lugejat nimetajaga jagame.

Näitused:

$$1)\ \frac{3}{8} = 30 : 8 = 0{,}375;$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2)\ \frac{9}{96}\overset{3}{\smile} = \frac{3}{32} = 3 : 32 = 0{,}09375 \quad \text{ehk} \quad \frac{9}{96} = 9 : 96 = 0{,}09375;$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ 288 \\ \hline 120 \\ 96 \\ \hline 240 \\ 224 \\ \hline 160 \\ 160 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 900 \\ 864 \\ \hline 360 \\ 288 \\ \hline 720 \\ 672 \\ \hline 480 \\ 480 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3)\ 2\frac{13}{25} = \frac{63}{25} = 63 : 25 = 2{,}52 \quad \text{ehk} \quad 2\frac{13}{25} = 2 + 13 : 25 = 2{,}52;$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \hline 130 \\ 125 \\ \hline 50 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 130 \\ 125 \\ \hline 50 \\ 50 \\ \hline 0 \end{array}$$

Pea meeles: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$.

Neis näitustes oliwad antud murrud niisugused, et nende nimetajates, pärast koondamist, algteguritena ainult 2 ja 5 ehk ainult üks nendest ette tuli. Kui aga peale 2-e ja 5-e weel teised algarwud, ehk kui need teised algarwud ükski ilma 2-e ja 5-ta, antud mitte koondatawa murru nimetajas teguritena ette tulewad, siis teame, et niisugune murd ennast kümnendmurruks muuta ei lase. Aga meie teame ka, et meie iga hariliku murru lugejat tema nimetajaga jagada ja saadud jaondit kümnendmurruna ilmutada wõime.

Et seda nähtawat wastukäiwust selgitada, wõtame näituse ja katsume $^{13}/_{44}$-kku kümnendmurruks muuta, tema lugejat nimetajaga jagades.

$\frac{13}{44} = 13 : 44 = 0{,}29545454\ldots$

130
88
420
396
240
220
200
176
240
220
200
176
24

Nüüd näeme meie, et harilik mitte koondataw murd, mille nimetajas 2-st ja 5-st lahkuminewad algarwud teguritena ette tulewad, ennast küll mitte lõpuliseks kümnendmurruks muuta ei lase, aga lõputa kümnendmurruks wõime teda alati muuta; selletarwis peame meie tema lugejat nimetajaga jagama.

Ilmuw lõputa kümnendmurd on, nagu meie § 218-st teame, alati jätkuline.

Seepärast: *harilik mitte koondataw murd, mille nimetajas 2-st ja 5-st lahkuminewad algarwud teguritena ette tulewad, wõib ainult jätkuliseks murruks muutuda.*

Jätkuliste murdude muutmine harilikkudeks murdudeks.

§ 222. Ettewalmistawad tähendused.

Et jätkulistel murdudel otsata palju murrukohte on, siis on raske nende kallal tehteid toime panna. Sellepärast peawad jätkulised murrud alati, kui nendega rehkendada tahetakse, harilikkudeks murdudeks muudetama.

Kuidas lõpulisi kümnendmurdusid harilikkudeks murdudeks muuta, oleme juba § 204 näinud: murrukohad kirjutatakse lugejaks ja wiimase murrukoha nimetaja — nimetajaks.

Enne kui meie jätkulisi murdusid harilikkudeks murdudeks muutma hakkame, peame tundma õppima, missugusteks jätkulisteks muutuwad niisugud harilikud algmurrud, mille nimetajad numbri 9-ga, ükskord wõetud ehk mitu korda järgimööda korratud, kirjutatakse.

$\frac{1}{9} = ?$

$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}111\ldots$

10
9
10
9
10
9
1

$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots = 0{,}(1)$

$\frac{1}{99} = ?$

$\frac{1}{99} = 1 : 99 = 0{,}010101\ldots$

100
99
100
99
100
99
1

$\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots = 0{,}(01)$

$\frac{1}{999} = ?$

$\frac{1}{999} = 1 : 999 = 0{,}001001001\ldots$

1000
999
1000
999
1000
999
1

$\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots = 0{,}(001).$

Sarnaduse põhjal jõuame otsusele, et harilikud algmurrud, mille nimetaja ainult 9-ategа kirjutatakse, niisugusteks jätkulisteks murdudeks muutuwad, mille jätkul nii mitu numbrit on, mitu 9-at nimetajas, kuna jätku wiimane nummer 1, teised numbrid nullid on. Selle järele on:

$$\frac{1}{9999} = 0{,}00010001\ldots = 0{,}(0001);$$

$$\frac{1}{99999} = 0{,}0000100001\ldots = 0{,}(00001);$$

$$\frac{1}{999999} = 0{,}000001000001\ldots = 0{,}(000001);$$ jne.

§ 223. Selgejätkulise murru harilikuks murruks muutmine.

Muuda 0,(47) harilikuks murruks!

Wõrdleme antud murdu kõige lihtsama jätkulise murruga, mille jätkul niisama palju numbrid on. Kõige lihtsam niisugustest murdudest on 0,(01). Sellepärast

wõrdleme murdu $0{,}474747\ldots = 0{,}(47)$
murruga $0{,}010101\ldots = 0{,}(01)$.

Esimeses murrus on: 47 sajandikku 47 kümnetuhandikku 47 miljondikku jne., teises murrus on 1 sajandik 1 kümnetuhandik 1 miljondik jne. Et esimeses murrus wastawaid kümnendjagusid ikka 47 korda enam on, kui teises, siis on ka esimene murd 47 korda suurem ja meie wõime kirjutada: $0{,}(47) = 47 \times 0{,}(01)$.

Meie teame aga eelminewast paragrahwist, et $0{,}(01) = \frac{1}{99}$.

Sellepärast on $0{,}(47) = 47 \times \frac{1}{99}$ ehk $0{,}(47) = \frac{47}{99}$.

Et meie nii wiisi iga selgejätkulise murru kohta harutada wõime, siis järgneb sellest näitusest:

1) Juht: *Et selgejätkulist murdu harilikuks murruks muuta, teeme jätku lugejaks ja nimetajaks kirjutame nii mitu 9-at, mitu numbrit jätkus on.*

2) Järeldus: *Selgejätkulisest murrust saadud hariliku murru nimetajas ei tule ei 2 ega 5 teguritena ette.*

Tõe poolest, enne koondamist kirjutatakse see nimetaja 9-tega ja sellepärast ei ole ta ei 2-ga ega 5-ga jagataw; järjelikult ei ole ta ka pärast koondamist nende arwudega jagataw.

§ 224. Segajätkulise murru harilikuks murruks muutmine.

Et murdude ümbermuutmise juures täisarw ikka täisarwuks jääb, siis wõtame näituseks lihtmurru.

Muuda 0,4(87) harilikuks murruks!

Muudame antud segajätkulise murru selgejätkuliseks; selle tarwis tõstame murrukoma eesliigist üle jätku ette, siis saame: 4,(87).

Selleläbi kaswatasime antud murdu niisuguse järgu ühelisega, millel nii mitu nulli on, mitu numbrit eesliigil on — wõetud näituses 10-ga. Et aga antud murru wäärtus ei muutuks, peame saadud arwu 4,(87) sellesama järgu ühelisega jagama. Siis on:

$$0{,}4(87) = 4{,}(87) : 10.$$

Nüüd muudame saadud selgejätkulise murru harilikuks murruks, selle tarwis kirjutame jätku lugejaks ja nimetajaks kirjutame nii mitu 9-at, mitu numbrit jätkus on. Sellepärast leiame, et

$$0.4(87) = 4\frac{87}{99} : 10.$$

Et saadud segaarwu jagada, peame tema liigmurruks muutma. Selle tarwis kaswatame tema täisarwu, s. o. antud murru eesliiki, murru nimetajaga ja kaswatisele lisame lugeja, s. o. antud murru jätku, juure. Siis saame:

$$0{,}4(87) = \frac{4.99 + 87}{99} : 10.$$

Selle asemel aga, et üht arwu teise arwuga, mis ainult 9-tega kirjutatakse, kaswatada, wõime kergem esimest arwu teisele arwule järgnewa järgu ühelisega kaswatada ja saadud kaswatisest üks kord wõetud esimene arw maha arwata. Sellepärast on:

$$0{,}4(87) = \frac{4.(100-1)+87}{99} : 10 = \frac{400-4+87}{99} : 10.$$

Igal järgu ühelisel on nii mitu nulli, mitme 9-ga eelminew arw kirjutatakse. Seepärast on meie kaswatajal järgu ühelisel, järjelikult ka saadud kaswatisel, nii mitu nulli, mitu numbrit jätkul on. Kui meie aga saadud kaswatisele enne murru lugeja, s. o. jätku, juure arwame ja alles pärast summast ükskord wõetud täisarwu, s. o. eesliigi, maha arwame, siis täidawad jätku numbrid nullide kohad ära ja jäänusena ilmub arw, mis meie siis saame, kui meie eesliigist ja jätkust eesliigi maha arwame. Seepärast on:

$$0{,}4(87) = \frac{400+87-4}{99} : 10 = \frac{487-4}{99} : 10.$$

Et jagaja täisarw on, siis jääb jagatawa liigmurru lugeja puutumatalt otsitawa hariliku murru lugejaks.

Järjelikult saame otsitawa hariliku murru lugeja, kui meie eesliigist ja jätkust eesliigi maha arwame.

Et harilikku murdu täisarwuga jagada, peame tema nimetajat selle täisarwuga kaswatama. Meie murru nimetajaks on nii mitu 9-at, mitu numbrit jätkus on, sest see murd saadi selgejätkulisest murrust, ja jagajaks on järgu üheline, millel nii mitu nulli

on, mitu numbrit eesliigil, sest et meie antud segajätkulist murdu alguses niisuguse järgu ühelisega kaswatasime. Seepärast on:

$$0{,}4(87) = \frac{487-4}{99 \cdot 10} = \frac{487-4}{990}.$$

Järjelikult on otsitawa hariliku murru nimetajaks arw, mis nii mitme 9-ga kirjutatakse, mitu numbrit jätkul on, ja nii mitme nulliga, mitu numbrit eesliigil. Niiwiisi leiame:

$$0{,}4(87) = \frac{487-4}{99} = \frac{483}{990}.$$

Seda murdu wõib koondada.

Wõtame weel näituse ja harutame endist wiisi:

$$0{,}58(3) = [0{,}58(3) \cdot 100] : 100 = 58{,}(3) : 100 = 58\tfrac{3}{9} : 100 =$$

$$= \frac{58.9+3}{9} : 100 = \frac{58.(10-1)+3}{9} : 100 = \frac{580-58+3}{9} : 100 =$$

$$= \frac{580+3-58}{9} : 100 = \frac{583}{9}\,\frac{58}{} : 100 = \frac{583-58}{9 \cdot 100} =$$

$$= \frac{533-58}{900} = \frac{525}{900}.$$ Seda murdu wõib koondada.

Neist näitustest selgub:

1) Juht: *Segajätkulise murru muudame harilikuks murruks, kui meie eesliigist ja jätkust eesliigi maha arwame, saadud jäänuse lugejaks paneme ja nimetajaks nii mitu üheksat, mitu numbrit jätkus ja nii mitu nulli, mitu numbrit eesliigis on, kirjutame.*

Näitused:

1) $0{,}69(4) = \frac{694-69}{900} = \frac{625^{\cdot 5}}{900} = \frac{25}{36}.$

2) $0{,}341(49) = \frac{34149-341}{99000} = \frac{33808^{\cdot 8}}{99000} = \frac{4226}{12125}.$

3) $0{,}7(8) = \frac{78-7}{90} = \frac{71}{90}.$

2) I. järeldus. *Segajätkulisest murrust saadud hariliku murru nimetajas tulewad 2 ehk 5 ehk mõlemad teguritena ette.*

Enne koondamist lõpeb see nimetaja nulliga ja on sellepärast 2-ga ja 5-ga jagataw. Lugeja ei lõpe aga nulliga, sest tema saadakse eesliigist ja jätkust eesliigi maha arwamise läbi, eesliik ei lõpe aga sellesama numbriga, millega jätk lõpeb (kui jätk õigesti wõetud on). Sellepärast ei wõi meie saadud murdu 2-ga ja 5-ga ühtlasi, s. o. 10-ga ehk 10-ne astmega koondada ja üks neist arwudest, 2 ehk 5, ehk ka mõlema, jääb ikka nimetajasse tegurina seisma.

3) II. järeldus. *Segajätkulise murru wäärtus ei muutu, kui meie ka jätku walesti wõtame, mõnda jätku numbrit eesliigi uure arwates.*

Niisugusel korral on eesliigil ja jätkul nii mitu ühesugust wiimast numbrit, mitu numbrit meie jätkust eesliigi juure arwasime. Harilikuks murruks muutes saame lugejas niisama palju lõpunullisid ja nimetajas ka niisama palju üleliigseid nullisid. Sellepärast on sellest segajätkulisest murrust saadud harilik murd wastawa järgu ühelisega koondataw ja pärast koondamist saame niisamasuguse hariliku murru, nagu siis, kui jätk õigesti oleks wõetud.

Näitus:

$$0{,}57823823823\ldots = 0{,}578(238) = \frac{578138 - 578}{999000} = \frac{577660}{999000} = \frac{57766}{99900}$$

$$0{,}57823823823\ldots = 0{,}57(823) = \frac{57823 - 57}{99900} = \frac{57766}{99900}.$$

§ 225. Missugused harilikud murrud muutuwad selgejätkulisteks, missugused segajätkulisteks murdudeks?

1) Kui hariliku, mitte koondatawa, murru nimetajas ei 2, ega 5 teguritena ette ei tule, siis muutub see murd selgejätkuliseks murruks.

Niisugune murd muutub jätkuliseks murruks, seda teame § 221-st. Segajätkuliseks ta muutuda ei wõi, sest muidu saaks meie pärast segajätkulise murru harilikuks murruks tagasi muutmist niisuguse mitte koondatawa hariliku murru, mille nimetajas 2 ehk 5, ehk mõlemad teguritena ette tulewad, kuna antud murru nimetajas neid ei ole.

2) Kui hariliku, mitte koondatawa, murru nimetajas peale teiste algarwude ka 2 ehk 5, ehk mõlemad, teguritena ette tulewad, siis muutub see murd segajätkuliseks murruks.

Niisugune murd muutub jätkuliseks murruks, seda teame § 221-st. Selgejätkuliseks ta muutuda ei wõi, muidu saaks meie pärast selgejätkulise murru harilikuks murruks tagasimuutmist niisuguse mitte koondatawa hariliku murru, mille nimetajas ei 2, ega 5 teguritena ette ei tule, kuna kõige wähemalt üks nendest antud murru nimetajas ette tuleb.

§ 226. Eesliigi numbrite arwu teadasaamine.

Kui meie murdu $^{17}/_{74}$ kümnendmurruks muuta tahame, siis wõime tema nimetajat algteguriteks lahutades ($74 = 2 \cdot 37$) kohe ütelda, et meie segajätkulise murru saame. Et teada saada, mitu numbrit eesliigis on, harutame järgmiselt:

Anname oma murrule kahe murru kaswatise kuju:

$$\frac{17}{74} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{37};$$

esimese murru lugeja olgu 1, teise murru lugejaks olgu antud murru lugeja; esimese murru nimetajaks olgu nende kõikide 2-ede ja 5-ede kaswatis, mis antud nimetajas teguritena ette tulewad, teise murru nimetajaks olgu kõikide teiste tegurite kaswatis.

Nüüd kaswatame esimese murru nimetajat puuduwate teguritega 2 ehk 5 nii, et see nimetaja 10-ks ehk 10-ne astmeks muutuks; et aga murru wäärtus ei muutuks, kaswatame teise murru lugejat nendesamade teguritega:

$$\frac{17}{74} = \frac{1}{2.5} \cdot \frac{17.5}{37} \text{ ehk } \frac{17}{74} = \frac{1}{10} \cdot \frac{85}{37}.$$

Kui meie nüüd teise murru kümnendmurruks muudame, saame selgejätkulise murru, mille juures terweid ühelisi ka wõib olla, aga ka mitte olla.

$$\frac{85}{37} = 2{,}(297). \quad \text{Seepärast on: } \frac{17}{74} = \frac{1}{10} \cdot 2{,}(297).$$

Et saadud selgejätkulist murdu esimese murruga kaswatada, jagame teda selle murru nimetajaga, sest lugeja on 1.

Esimese murru nimetajaks on meil 1 niimitme nulliga, mitu algtegurit 2 ehk 5 antud murru nimetajas oli, seda mööda, missuguseid tegurid enam oli. Meie näituses on 1 ühe nulliga. Et meie selgejätkulist murdu [2,(297)] niisuguse arwuga jagada, nihutame komad nii mitme koha (1 koha) wõrra pahemale poole, mitu nulli jagajal on. Need numbrid, mis enne terweid ühelisi tähendasiwad, nüüd aga kümnendjagusid tähendawad, ongi eesliigi numbrid.

$$\frac{17}{74} = 0{,}\mathbf{2}(297).$$

Sellest näeme, et eesliigis nii mitu numbrit on, mitu tegurit 2 ehk 5 antud murru nimetajas (pärast koondamist) on, sedamööda, kumbe tegurid enam on.

Näitused:

$$\frac{53}{60} = \frac{1}{20} \cdot \frac{53}{3} = \frac{1}{2.2.5} \cdot \frac{53}{3} = \frac{1}{2.2.5.5} \cdot \frac{53.5}{3} = \frac{1}{100} \cdot \frac{265}{3} = \frac{1}{100} \cdot 88{,}(3) = 0{,}88(3).$$

$$\frac{29}{1375} = \frac{29}{5.5.5.11} = \frac{1}{5.5.5} \cdot \frac{29}{11} = \frac{1}{5.5.5.2.2.2} \cdot \frac{29.2.2.2}{11} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{232}{11} =$$

$$= \frac{1}{1000} \cdot 21{,}(09) = 0{,}\mathbf{021}(09).$$

Kakskümnes kolmas peatükk: Astmesse tõstmine ja juure wäljawõtmine.

§ 227. Kümnendmurdude astmesse tõstmine.

Arwusid astmesse tõstes peame neid iseenesega kaswatama. Lühendada ehk kergendada meie seda tehet ei saa.

Näitused:

1) $(0{,}347)^2 = 0{,}347 \times 0{,}347$

	2429
	1388
	1041
	0,120409

$(0{,}4)^3 = 0{,}4 \times 0{,}4$

	0,16
×	0,4
	0,064

$(2{,}18)^4 = 2{,}18 \times 2{,}18$

	1744
	218
	436
	4,7524
×	2,18
	380192
	47524
	95048
	10,360232
×	2,18
	82881856
	10360232
	20720464
	22,58530576

Kümnendmurdu teisesse astmesse tõstes kaswatame teda iseenesega. Sellepärast on kaswatatawal ja kaswatajal ühe palju murrukohte.

Et kaswatisel nii palju murrukohte peab olema, kui kaswatatawal ja kaswatajal ühtekokku, siis on kümnendmurru ruutarwul 2 korda enam murru kohte, kui astmesse tõstetawal kümnendmurrul.

Järeldus: *Kümnendmurru ruutarwul on alati paarisarw murrukohte.*

Kümnendmurdu kolmandasse astmesse tõstes kaswatame antud kümnendmurru ruutarwu antud arwuga. Ruutarwul on 2 korda niipalju murru kohte, kui antud arwul, ja kui meie pärast kaswatamist kaswatises komaga niipalju murrukohte ära eraldame, kui palju neid kaswatatawas ja kaswatajas kokku on, siis saame kaswatises 3 korda nii palju murrukohte, kui astmesse tõstetawas arwus. Niisamati wõime 4-da, 5-da jne. astme kohta harutada.

Sellepärast järgneb:

Kümnendmurru astmel on nii mitu korda enam murrukohte, kui astmesse tõstetawal kümnendmurrul, mitu ühelist tema astme näitajas on.

§ 228. Kümnendmurdudest ruutjuure wäljawõtmine.

Et kümnendmurrud sellesama arwamise süstemi ja nendesamade seaduste järele kirjutatakse, mille järele täisarwudki, ja et kõik teised tehted kümnendmurdude kallal just niisamati toime saadetakse, nagu täiasrwude kallal (ainult selle järele peab waatama, kuhu koma panna), siis wõime sarnaduse põhjal ütelda, et juure wäljawõtmine kümnendmurdudest niisama toime saadetakse, nagu juure wäljawõtmine täisarwudest. Ka koma kohta ei ole raske ära määrata. Et täisarwude ruutarw täisarw ja kümnendmurdude ruutarw kümnendmurd on, siis on awalik, et koma juurealusest täisarwust wäljawõetud ruutjuure taha tuleb panna. Wõtame näituse.

$\sqrt{1903{,}31529} = ?$

$\sqrt{1903{,}315129} = 43{,}627$

16	
83 | 303	
3 | 249	
866 | 5431	
6 | 5196	
8722 | 23551	
2 | 17444	
87247 | 610729	
7 | 610729	
0	

Wõtame täisarwust ruutjuure wälja, nagu § 80—85 juhatawad. Meie leiame, et $\sqrt{1903} = 43$, jäänus 54. Enam ühelisi, kui 43, meie juures ei saa; sellepärast kirjutame 43-e taha koma. Nüüd on meil juures koma koht ära määratud ja meie wõime oma tehet jätkata, nagu seda mitmekohalise ruutjuure leidmise juures (§ 82) tehtakse. Selleks on meil seda enam õigust, sest et kõik juure arwu järgud üheõiguslised on.

Tähendus: Et kümnendmurru ruutarwul alati paarisarw murrukohte on, siis peab ka juurealusel arwul paarisarw murrukohte olema. Peaks seal üks koht puuduma, siis kirjutame lõpule ühe nulli, mis arwu wäärtust ei muuda, ja alles pärast seda jagame juurealuse arwu kahe numbri kaupa salkadesse parema käe poolt pahemale poole.

Wõtame weel paar näitust ja nimelt niisugused, kus juurealune arw lihtmurd on.

1) $\sqrt{0{,}2209} = ?$

$\sqrt{0{,}2209} = 0{,}47$

16
87 | 609
7 | 609
0

Juurealuses arwus terweid ei ole, seepärast ei saa meie juures terweid ja meie peame juuresse terwete kohale 0 kirjutama. Nulli taha kirjutame koma. Et kümnete ruutarw sajandikkudes peitub, siis eraldame sajandikud, neid on 22, alamatest järkudest ja wõtame temast ruutjuure wälja, saame kümnendikkude numbriks 4. Edasi harutame ja toimetame nagu ennegi, kui meie täisarwust ruutjuurt wälja wõtsime. Ka koma jätame koguni tähele panemata.

2) $\sqrt{0{,}00087616} = ?$

$\sqrt{0{,}00087616} = 0{,}0296$

4
49 | 476
9 | 441
586 | 3516
6 | 3516
0

Selles näituses ei ole ka terweid. Sellepärast kirjutame juuresse terwete kohale 0 ja nulli järele koma. Juure all ei ole sajandikka ka mitte, sellepärast kirjutame juures kümnendikkude kohale ka 0. Kõige kõrgem järk juure all on kümnetuhandikud. Sellepärast saame juures sajandikka. Edasi harutame nagu harilikult.

§ 229. Ligijuur, kindel kuni 1-ni.

Mõiste äramääramine. Ligijuureks, kindlaks kuni 1-ni, nimetatakse kaks täisarwu, mille waheng 1 on ja mille ruutarwude (meie räägime siin ainult ruutjuurest) wahe peal juurealune arw on. Wäiksem arw nimetatakse ligijuureks wajanguga, suurem arw — ligijuureks liianguga.

Näit. $\sqrt{57} = 7$ (kindlalt kuni 1-ni wajanguga)

ja $\sqrt{57} = 8$ (kindlalt kuni 1-ni liianguga),

sest $8 - 7 = 1$ ja $8^2 > 57 > 7^2$.

Juht. *Et mõnest arwust ruutjuurt kindlalt kuni 1-ni wälja wõtta, jäetakse juure wäljawõtmine seisma, kui üheliste nummer leitud on; jäänus ja murd jääwad tähele panemata.*

Ruutjuure wajanguga saame, kui meie wiimase jaondi muutmata wõtame, ruutjuure liianguga saame, kui meie wiimasele jaondile 1 juure lisame.

Tõepoolest, $\sqrt{3456} = 58$ (wajanguga) ehk 59 (liianguga), sest $58^2 = 3364$ ja $59^2 = 3481$; järjelikult on 58 ruutjuureks liig wäike, 59 aga liig suur; ühe nendest peame aga wõtma, sest 58 ja 59 wahel ei ole ühtegi täisarwu; mõlemad aga täidawad nõutud tingimisi, sest $59^2 > 3456 > 58^2$ ja $9 - 8 = 1$. Kui jäänus wäiksema ruutjuure suurune ehk wäiksem on, siis on kasulikum ruutjuurt wajanguga wõtta, wastasel korral on kasulikum teda liianguga wõtta.

Näitus: $\sqrt{1561} = 39$ ehk 40.

	9
69	661
	621
	40 (jäänus).

Kasulikum wõtta on 40, sest $40^2 - 1561 = 39$, kuna $1561 - 39^2 = 40$. (Algebras näidatakse, et kahes loomulikus arwujärjes järgnewate arwude ruutarwude wahe nende arwude summaga ühesuurune on.)

$\sqrt{42568} = 206$ ehk 207 (jäänus 132); parem on 206 wõtta Murd jäetakse tähele panemata, sest kui meie mitmest terwest ühelisest, mis jäänuses on, ei hooli, siis ei ole ka põhjust ühelise jagudest hoolida.

§ 230. Ligijuur, kindel kuni antud murrukohani.

Mõiste äramääramine. Ligijuureks, kindlaks kuni antud murrukohani, nimetatakse kaks kümnendmurdu, milledel antud arw

murrukohte on, millede waheng antud murrujärgu üheline on ja mille ruutarwude wahe peal juurealune arw on.

Ehk:

Ligijuureks, kindlaks kuni 0,1-ni, 0,01-ni, 0,001-ni jne., nimetatakse kaks kümnendmurdu, millel 1, 2, 3 jne. murrukohta on, mille waheng 0,1; 0,01; 0,001 jne. on ja mille ruutarwude wahe peal juurealune arw seisab.

Enne, § 228, oli meil juttu ruutjuure wäljawõtmisest peaasjalikult niisugustest kümnendmurdudest, mis kindlad ruutarwud oliwad. Kümnendmurdudel, mis kindlad ruutarwud on, on alati paarisarw murrukohte.

Aga juure märgi all wõib meil ka kümnendmurd paarita arwu murrukohtadega olla. Niisugune arw ei wõi kindel ruutarw olla ja temast wõime ainult ligijuure wälja wõtta. Igatahes peame aga juurealuse kümnendkohtade arwu paarisarwuks tegema, kui neid paarita arw peaks olema, mille tarwis meie 0 lõpule juure kirjutame. Sellepärast hakatakse juurealust kümnendmurdu komast peale paremale ja pahemale poole paari kaupa salkadesse jagama, wiimases salgas paremal pool peab ikka kaks numbrit olema, kuna wiimases salgas pahemal pool üks nummer olla wõib.

On juurealune arw õigesti salkadesse jagatud, siis hakkame temast ruutjuurt wälja wõtma, nagu § 228 juhatab.

Juht: *Et mõnest arwust ruutjuurt kindlalt kuni antud murrukohani wälja wõtta, jäetakse juure wälja wõtmine seisma, kui nõutud murru koha nummer leitud on.*

1) Juurealusel arwul on enam murrukohte, kui tarwis.

Näitus: Leida $\sqrt{0{,}75468256}$ kindlalt kuni 0,001-ni.

Jagame juurealuse arwu salkadesse komast peale hakates, ja paneme tehte toime:

$$\sqrt{0{,}75468256} = 0{,}868 \text{ ehk } 0{,}869,$$

64

166 | 1146	
6 | 996	
1728 | 15082	
8 | 13824	
	1258

8 on tuhandikkude numbriks wäike, 9 on suur, sellepärast on $(0{,}868)^2 < 0{,}75468256 < (0{,}869)^2$, $0{,}869 - 0{,}868 = 0{,}001$.

edasi ei ole meil tarwis teha, sest 3 murrukohta on käes.

2) Juurealusel arwul on wähem murrukohtasid, kui tarwis.

I. näitus: Leida $\sqrt{11{,}245}$ kindlalt kuni 0,01.

Juures peab 2 murrukohta olema, sellepärast peab juure-aluses arwus 4 murrukohta olema; neid on aga 3 — kirjutame lõpule ühe nulli ja paneme tehte toime.

$$\sqrt{11{,}2450} = 3{,}35 \text{ ehk } 3{,}36.$$

	9
63	224
	189
665	3550
	3275
	275 (jäänus).

II. näitus: Leida $\sqrt{0{,}1}$ kindlalt kuni 0,001.

Juures peab 3 murrukohta olema, juure all on neid ainult üks; sellepärast kirjutame lõpule 5 nulli.

$$\sqrt{0{,}1} = \sqrt{0{,}100000} = 0{,}316 \text{ ehk } 0{,}317.$$

	9
61	100
1	61
626	3900
6	3756
	144 (jäänus).

3) Täis arwust ruutjuurt wälja wõtta, kindlalt kuni mõne murru kohani.

Näitus: Leida $\sqrt{21}$ kindlalt kuni 0,0001.

Juures peab 4 murrukohta olema, sellepärast peab juure all neid 8 olema; neid ei ole aga ühtegi. Kirjutame siis täis arwu taha koma ja kõikidele murrukohtadele nullid.

$$\sqrt{21} = \sqrt{21{,}00000000} = 4{,}5825 \text{ ehk } 4{,}5826.$$

	16
85	500
5	425
908	7500
8	7264
9162	23600
2	18324
91645	527600
5	458225
	69375

Tähendus: Kahes wiimases näituses ei pruugi meie terweid nullide salkasid sugugi juure alla kirjutada, waid meie wõime igale uuele jäänusele nii kaua kaks nulli juure kirjutada, kuni juures nõuetud arw kümnend kohtasid ilmub. Ühe nulli, mis salga täienduseks läheb, peame ikka kirjutama.

Näitused: 1) $\sqrt{0,8} = \sqrt{0,20} = 0,4472$ (kuni 0,0001).

		16
84	400	
4	336	
887	6400	
7	6209	
8942	19100	
2	17884	
		1216

2) $\sqrt{3} = 1,6320$ ehk $1,7321$ (kuni 0,001).

		1
27	200	
7	189	
343	1100	
3	1029	
3462	7100	
2	6924	
34640	17600	

4) Liigijuur lõputa kümnendmurrust.

Kui juure all lõputa kümnendmurd on, siis toodakse nullide asemel jäänuse kõrwale murru numbrid järgi mööda alla. On murd jätkuline, siis toodakse jätku numbrid kahe kaupa korda mööda alla; kui murru numbrid ilma mingi seaduseta üks teisele järgnewad, siis toodakse nad selles korras alla, kuidas nad üksteisele järgnewad.

Näitused: $\sqrt{7,3(297)} = \sqrt{7,329729\ldots} = 2,70734\ldots$

		4
47	332	
7	329	
5407	39729	
7	37849	
54144	188072	
3	162429	
541464	2564397	
4		jne.

$$\sqrt{3{,}14159265\ldots} = 1{,}7724\ldots$$

1		
27	214	
7	189	
347	2515	
7	2429	
3542	8692	
2	7084	
3544	160865	
4		jne.

5) Liigijuur harilikust murrust, kindlalt kuni antud murru kohani.

Hariliku murru muudame kümnendmurruks ja siis toimetame, nagu ülewal juhatatud.

Näitus:

$$\sqrt{5\tfrac{4}{7}} = \sqrt{5{,}(571428)} = 2{,}3603 \text{ — ehk } 2{,}3604 \text{ (kuni } 0{,}0001).$$

4	
43	157
3	129
466	2814
6	2796
47203	182857
3	141609

§ 231. Ligijuur, kindel kuni antud algmurruni.

M õ i s t e ä r a m ä ä r a m i n e. Ühe arwu ligijuureks, kindlaks kuni antud algmurruni, nimetatakse kahte murdu, mille nimetajateks antud algmurru nimetaja, mille wahenguks antud algmurd ja millede ruutarwude wahe peal juurealune arw on.

Näitus: ligijuur $\sqrt{7}$ kindel kuni $\frac{1}{6}$-ni on $\frac{15}{6}$ ja $\frac{16}{6}$,

sest: 1) nende murdude nimetaja on 6, 2) nende murdude waheng $\frac{16}{6} - \frac{15}{6}$ on $\frac{1}{6}$, ja $\left(\frac{15}{6}\right)^2 < 7 < \left(\frac{16}{6}\right)^2$.

J u h t: *Et ühest arwust ligiruutjuurt, kindlalt kuni antud algmurruni leida, kaswatame juurealust arwu antud algmurru nimetaja ruutarwuga, kaswatisest wõtame ruutjuure, kindlalt kuni 1-ni, wälja ja saadud arwusid jagame algmurru nimetajaga.*

Wõtame näituse: Leida $\sqrt{15}$ kindlalt kuni $\frac{1}{8}$-ni!

Kaswatame ja jagame juurealust arwu antud algarwu nimetaja ruutarwuga; niisugune kaswatamine ja jagamine arwu wäärtust ei muuda, meie aga saame:

$$\sqrt{15} = \sqrt{\frac{15 \cdot 64}{64}} = \sqrt{\frac{960}{64}}$$

Et murrust ruutjuurt wälja wõtta, peame lugejast ja nimetajast eraldi ruutjuure wälja wõtma. Seepärast leiame:

$$\sqrt{15} = \sqrt{\frac{960}{64}} = \frac{\sqrt{960}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{960}}{8}$$

Meie ligijuure nimetajaks on juba antud algmurru nimetaja 8; kui meie nüüd lugejast ligijuure, kindlalt kuni 1-ni wälja wõtame, $\sqrt{960} = 30$ ehk 31, siis on lugejate waheng 1 ja sellega saadud murdude $^{30}/_{8}$ ja $^{31}/_{8}$ waheng antud algmurd $^{1}/_{8}$ ja nende kahe murru wahe peal on juure alune arw 15 ehk $^{960}/_{64}$, sest 30 on liig wäike, 31 natuke suur 960-ne ruutjuureks.

Tehet wõib järgmiselt rakendada:

$$\sqrt{15}\ (\text{kindlalt kuni } {}^{1}/_{8}) = {}^{1}/_{8} \cdot \sqrt{15 \cdot 64} = {}^{1}/_{8} \cdot \sqrt{960} = {}^{30}/_{8} \text{ ehk } {}^{31}/_{8}$$

960 | 60
9

Kui juure all murd ehk segaarw on, siis peab ka teda antud algmurru nimetaja ruutarwuga kaswatama, saadud kaswatisest täisarw wälja wõtma, murrulise osa wõime kõrwale heita, ja siis edasi toimetada.

Näitused:

1) $\sqrt{17\frac{5}{11}}$ (kindlalt kuni $\frac{1}{12}$) $= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{17\frac{5}{11} \cdot 144} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{27648}{11}} =$

$= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2513\frac{5}{11}} = \frac{50}{12}$ ehk $\frac{51}{12} = 4\frac{1}{6}$ ehk $4\frac{1}{4}$.

2) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ (kindlalt kuni $\frac{1}{24}$) $= \frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{7} \cdot 576} = \frac{1}{24}\sqrt{\frac{3456}{7}} =$

$= \frac{1}{24}\sqrt{493\frac{5}{7}} = \frac{22}{24}$ ehk $\frac{23}{24}$.

3) $\sqrt{2{,}3}$ (kindlalt kuni $\frac{1}{15}$) $= \frac{1}{15} \cdot \sqrt{2{,}3.225} = \frac{1}{15}\sqrt{517{,}5} =$

$= \frac{22}{15}$ ehk $\frac{23}{15} = 1\frac{7}{15}$ ehk $1\frac{8}{15}$.

4) $\sqrt{0{,}46}$ (kindlalt kuni $\frac{1}{37}$) $= \frac{1}{37} \cdot \sqrt{0{,}46.1369} =$

$= \frac{1}{37}\sqrt{629{,}74} = \frac{25}{37}$ ehk $\frac{26}{37}$.

Kakskümnesneljas peatükk: Meetermôôdustik.

§ 232. Môôdustiku lühike ajalugu.

Juba enne (§ 98) oleme tähendanud, et mõõtude mitmekesidus ühiselus ja kaubanduses palju raskusi sünnitab. Seepärast hakati ühiselu ja riiklise elu edenemisega ka mõõtusid korraldama. 1788. ja 1789. aastate jooksul awaldasiwad mitu Prantsusemaa linna oma riigiwalitsusele palwet ühtainust mõõtude süstemi seaduslikuks tunnistada ja maksma panna. Sel ajal oli suur Prantsuse rewolutsion alanud ja Prantsusemaal walitses „rahwusline kongress“. 8-al mail 1790 tegi rahwusline kongress otsuseks teadusemeestest üht kommisjoni kokku seada ja selle kommisjoni kätte asja harutada anda. Selles kommisjonis oliwad kõige tähtsamad tolleaegsed teadusemehed, nagu Coulomb, Delambre, Lagrange, Laplace, Lavoisier, Méchain j. t. See kommisjon arwas kõige kohasemaks pikkuse mõõdu alusüksuseks üht kümnemiljondikku Parisi meridiani weerandist wõtta ja selle peal kõike mõõtude süstemi üles ehitada. Rahwusline kongress kiitis selle eelnõu heaks ja kohustas kommisjoni tarwilisi maakera mõõtmisi ette wõtta. 1792 mõõdeti Arago, Biot, Delambre ja Méchain'i juhatusel üks jagu Parisi meridianist — Dünkirchenist kuni Formentera saareni — ära ja selle järele rehkendati meridiani pikkus põhjanabast kuni ekwatorini endistes Prantsuse mõõtudes — tuase'des — wälja. Saadud arwust wõeti üks kümnemiljondik jagu ja selle järele tehti platina ja iridiumi sulatisest mõõt. 10-al detsembril 1800 kuulutati kümnemiljondik Parisi meridiani weerandist, millele „meeter“ nimeks anti, seaduslikuks mõõduks.

Weel ligi 40 aastat tarwitati Prantsusemaal meetri kõrwal ka teisi mõõtusid, aga 1-sest jaanuarist 1840 saadik sai Prantsusemaal meetermõõdustik ainukeseks seaduslikuks mõõtude süstemiks. Sellest ajast saadik on ta üle terwe haritud ilma laiale lagunenud.

§ 233. Meetermôôdustik.

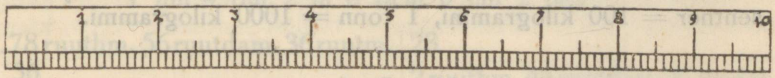
Alusmõõduks on pikkuse-mõõt m e e t e r. Meeter on, nagu enne juba üteldud, üks kümnemiljondik Parisi meridiani weerandist. Sõna „meeter“ on Greeka keelest wõetud ja tähendab „mõõt“.

Kõikide teiste suuruste, peale aja, mõõdud on meetriga ühenduses. Kõikide mõõtude, peale pinna- ja ruumi-mõõtude, üksuseline wahekord on 10, nagu meie arwamise-süstemis. Iga suuruse alusmõõdu nimetusest saadakse suuremate mõõtude nimetused selle läbi, et sellele nimetusele arwude 10, 100, 1000 Greeka keelsetest nimedest deka (= 10), hekaton (= 100), hilioi (= 1000) tuletatud sõnad deka-, hekto-, kilo- ette pandakse.

Wäiksemate mõõtude nimetuste saamiseks pandakse nendesamade arwude ladina-keelsetest nimetustest decem (= 10), centum (= 100), mille (= 1000) tuletatud sõnad deci-, senti-, milli-, alusmõõdu nimetusele ette.

I. Pikkuse-mõõdud:

1 kilomeeter = 10 hektomeetrit = 100 dekameetrit = 1000 meetrit
1 hektomeeter = 10 dekameetrit = 100 meetrit
1 dekameeter = 10 meetrit
1 detsimeeter = $^1/_{10}$ meetrit
1 sentimeeter = $^1/_{10}$ detsimeetrit = $^1/_{100}$ meetrit
1 millimeeter = $^1/_{10}$ sentimeetrit = $^1/_{100}$ detsimeetrit = $^1/_{1000}$ meetrit



1 detsimeeter sentimeetriteks ja millimeetriteks jagatud.

Teaduses tarwitatakse weel mikroni, 1 mikron on tuhandik jagu millimeetrist. Tegelikus elus tarwitatakse hektomeetrit ja dekameetrit wähem. Tee pikkust mõõdetakse kilomeetriga. Harilikult tarwitatakse järgmisi lühendusi: kilomeeter — km, hektomeeter — hm, dekameeter — dam, meeter — m, detsimeeter — dcm, sentimeeter — cm, millimeeter — mm.

II. Pinna-mõõdud.

Pinna-mõõtudeks on: ruutmeeter, ruutdekameeter, ruuthektomeeter jne. Nende üksuseline wahekord on 100.

Põllumõõtudeks tarwitatakse aret ja hektari.

Ar on 1 ruutdekameeter.

1 hektar = 100 aret = 100 ruutdekameetrit = 1 ruuthektom.

III. Ruumi mõõdud.

Ruumi mõõtudeks on; kantmeeter, kantdetsimeeter, kantsentimeeter jne.

Nende üksuseline wahekord on 1000.

Puid, liiwa, süsa jne. mõõdetakse sterega.

Ster on 1 kantmeeter.

IV. Wilja ja õõnes-mõõdud.

Õõnesmõõtudena tarwitatakse liitrit. Liiter (l) on 1 kantdetsimeeter. Eelsõnade abil wõime suuremate ja wäiksemate mõõtude nimetusi saada.

1 kiloliiter = 10 hektoliitrit = 100 dekaliitrit = 1000 liitrit = 10000 detsiliitrit jne.

Kõige enam tarwitatakse liitrit ja hektoliitrit (hl). 1 hektoliiter = 100 liitrit.

V. Raskuse mõõdud.

Raskuse mõõtude alusmõõduks on gramm (lühendatult gr. ehk g.). Gramm on ühe kantsentimeetri puhta (destilleritud) wee raskus, siis kui see wesi 4° Celsiuse järele soe on. Eelsõnade abil saame suuremate ja wäiksemate mõõtude nimetused.

1 kilogramm (kg) = 10 hektogrammi (hg) = 100 dekagrammi (dg) = 1000 grammi (g), 1 gramm = 10 detsigrammi (dcg) = 100 centigrammi (cg) = 1000 milligrammi (mg).

Suuremate raskuste mõõtmiseks tarwitatakse sentneri ja tonni. 1 sentner = 100 kilogrammi, 1 tonn = 1000 kilogrammi.

VI. Raha.

Wäärtuse mõõduks on frank. Frank on 5-grammiline raha, milles 900 jagu hõbedat ja 100 jagu segu on.

1 frank = 20 suu (sou) = 100 santimet.

§ 234. Tehted.

Alandamine. Et mõõtude üksuseline wahekord 10 (ehk 100 ja 1000) on, siis seisab laotamine selles, et meie kõik nimetused antud ülemast nimetusest kuni ette tulewa alama nimetuseni üleskirjutame, tarwilise nimetuse asemele koma kirjutame, teised nimetused kõrwale jätame ja saadud arwule nõutud nimetuse juure kirjutame. Näituseks:

1) 3 km 7 m 6 dcm muuda sentimeetriteks, meetriteks.

3 km 7 m. 6 dcm = 3 km 0 hm 0 dm 7 m 6 dcm 0 cm = 300760 cm.

3 km 7 m 6 dcm = 3 km 0 hm 0 dm 7 m 6 dcm = 3007,6 m.

2) 56 ha 45 aret = 5645 aret.

Ülendamine. Koma kohale paneme antud nimetuse, järgnewate numbrite kõrwale antud nimetusele järgnewad nimetused. Näituseks:

1) 4076,085 grammi = 4 kgr 7 dgr. 6 gr 8 cgr. 5 mgr.

2) 7l 2 dl 5 h l = 7,25 hl.

Neli tehet pandakse just nagu täisarwude kallal toime.

1)	17	tonni	8	sentneri	46	kilogr.	5	hektogr.	4	dekagr.	6	gr.
+	5	„	3	„	12	„	1	„	0	„	4	„
	0	„	2	„	57	„	4	„	8	„	9	„
	1		1		11	„	1		1			
	23	tonni	4	sentneri	16	kilogr.	1	hektogr.	3	dekagr.	9	gr.

2) 4 hl. $\overset{10}{5}$ dekal. 7 liitrit
2 „ $\overset{14}{9}$ „ $\overset{17}{8}$ „
1 hl. 5 dekal. 9 liitrit = 1 hl. 59 l.

3) 3 m 6 dcm 5 cm 8 mm × 39

	3	2	9	2	2
1	0	9	7	4	

1 hm 4 dm 2 m 6 dcm 6 cm 2 mm

4) a. 78 ruuthm. 56 ruutdam. 36 ruutm. | 28
56 | 2 ruuthm. 44 ruutdam. 87 ruutm.
125
112
136 b. 42 ruuthm. 8 ruutdam. 4 ruutm. : 12 =
112 = 42 ruuthm. 08 ruutdam. 04 ruutm. 12 =
= 3 ruuthm. 50 ruutmdam. 67 ruutm.
243
224 c. 29 ruuthm. 60 ruutdam. 8 ruutm. : 7 ruuthm. 40 ruutdam. 2 ruutm. =
= 29 ruuthm. 60 ruutdam. 08 ruutm. : 7 ruuthm. 40 ruutdam. 02 ruutm. = 4.
196
196

Meie näeme, et meetermõõdustikku tarwitades nimega arwude kallal wäga kerge on tehteid toime panna. Peale selle on meetermõõdustikul mitu muud head omadust. Kõige ilma teaduse mehed tarwitawad ainult neid mõõtusid. Ehk küll Wene riigis weel need mõõdud seaduslikult maksma ei ole pandud, siiski tarwitawad neid juba apteekrid, mehanikerid ja rätsepad. Wõib kindlaste loota, et aeg tuleb, millal nad ka Wene riigis harilikus elus maksma pannakse ja aega mööda wõidawad need mõõdud terwe ilma oma alla. Siis saab tõeks see uhke lipukiri, mis esimese meetri peale graweeriti:

„A tous les temps,
à tous les peuples!“

Igaweseks ajaks kõikidele rahwastele.

§ 235. Wôrdlemise tabel.

I. Pikkuse mõõdud.

1 werst = 1,067 km.
1 süld = 2,13356 m.
1 jalg = 30,479 cm.
1 wersok = 4,445 cm.
1 toll = 25,4 mm.

1 kilomeeter = 0,937 wersta = 468,7 sülda
1 m. = 1,406 ars. = 22,498 wers. = 39371 t.
1 sentim. = 3937 l. = 0,394t. = 0,225 wers.
1 millim. = 0,022 wersokit = 0,039 tolli = 0,393 liinit.

II. Pinna mõõdud.

1 dessätin = 1.093 hcktari
1 ruutsüld = 4,5521 ruutmeetrit
1 ruutjalg = 9,29 ruutdetsim.
1 ruutwers. = 19,757 ruutsentim.

1 hektar = 0,915 dess. = 2196,8 ruuts.
1 ar = 21,968 ruuts. = 1076,43 ruutj.
1 ruutm. = 0,22 ruuts. = 10,764 ruutj.

III. Ruumi mõõdud.

1 kantsüld = 9,712 kantmeetrit = 97,215 hl.
1 kantjalg = 0,028 kantmeetr. = 8,315 liitr.
1 kantarssin = 0,3597 kantmeetr. = 359,71 liitr.
1 kanttoll = 16,386 kantsentim. = 16,386 sentiliitr.

1 kantm. = 0,103 kants. = 35,317 kantj. = 2,78 kantars.

IV. Wilja mõõdud.

1 setwert = 2,099 hektoliitrit
1 setwerik = 2,627 dekaliitrit
1 karnits = 3,28 liitrit.

1 hektoliiter = 0,476 setwerti = 3,811 setweriku = 30,48 karnist
1 liiter = 0,038 setw. = 0,305 karn.

V. Õõnesmõõdud.

1 aam = 4,92 hektoliitrit
1 pang = 12,3 liitrit
1 toop = 1,23 liitrit

1 hektoliiter = 8,131 pange
1 liiter = 0,813 toopi.

VI. Raskuse mõõdud.

1 puud = 16,38 kilogrammi
1 nael = 409,5 grammi = 0,41kgr
1 lood = 12,797 grammi
1 solotnik = 4,266 grammi

1 tonn = 61,051 puuda
1 sentner = 6,105 puuda
1 kilogramm = 2,442 naela
1 gramm = 0,234 sol. = 22,51 d.
1 milligramm = 0,623 doli.

VII. Raha.

1 rubla = 2,667 franki
1 kopik = 2,667 santimet

1 frank = 37,5 kop.
1 suu = 1,875 kop.
1 santime = 0,375 kop.

Kuues jagu.

Wahekorrad ja wôrrendid.

Kakskümneswiies peatükk: Wahekorrad.

§ 236. Wôrdlemine, wahekord, wahekorra liikmed.

Wõrrelda wõime ainult ühe ja sellesama suuruse hulkasid, ehk, nagu räägitakse, ühehõimulisi suuruseid, näit. pikkust pikkusega, raskust raskusega, aega ajaga jne.

Et matematikalisi suuruseid wõrrelda, awaldatakse neid enamalt jaolt arwudena. Waatame siis arwude wõrdlemist.

Wõrdlemise saadust nimetatakse wahekorraks (отношеніе). Wõrdlemiseks antud arwusid nimetatakse wahekorra liikmeteks (члены отношенія). See arw, mis enne kirjutatakse, on esiliige (предыдущій членъ), mis pärast kirjutatakse, on tagaliige (послѣдующій членъ).

Kahte arwu, näit. 24 ja 6 wõrreldes wõime küsida:

1) mitme ühelise wõrra on 24 suurem, kui 6?

2) mitu korda on 24 suurem kui 6?

Et wõrdlemise juures kahesuguseid küsimusi ette wõib panna, siis on ka kahesuguseid wahekordasid olemas.

Kui meie wõrdlemise juures küsime: mitme ühelise wõrra on üks arw suurem, kui teine, siis saame aritmetilise wahekorra; kui meie aga küsime: mitu korda on üks arw suurem, kui teine siis saame geometrilise wahekorra.

§ 237. Aritmetiline wahekord.

Et teada saada, mitme ühelise wõrra üks arw teisest suurem on, näit. mitme ühelise wõrra 24 suurem on kui 6, peame suuremast arwust, 24-st, wäiksema arwu, 6, maha arwama.

$$24 - 6 = 18.$$

Sellesama tehte abil saame teada, mitme ühelise wõrra wäiksem arw suuremast arwust wähem on. Selle järgi nimetatakse aritmetiliseks (wahenguliseks) wahekorraks (ариѳметическое отношеніе) kahe arwu wahengut.

Enamasti nimetatase aritmetiliseks wahekorraks ilmutamata wahengut, näit. 24—6, kuna ilmunud wahengut, näit. 18, wahekorra wahenguks (разность отношенія) nimetatakse.

Aritmetilise wahekorra esiliikmeks on wähendataw ja tagaliikmeks on maha-arwataw.

Sellepärast seisawad aritmetilise wahekorra esiliige, tagaliige ja waheng üksteisega niisamasuguses ühenduses, nagu maha-arwamise juures wähendataw, maha-arwataw ja waheng, ja missugused omadused wiimastel on (§ 27), niisugused on ka esimestel, nimelt:

1) Esiliige = tagaliige + waheng.

2) Tagaliige = esiliige — waheng.

3) Mitme ühelise wõrra meie esiliiget suurendame (wähendame), nii mitme ühelise wõrra suureneb (wäheneb) waheng.

4) Mitme ühelise wõrra meie tagaliiget suurendame (wähendame), nii mitme ühelise wõrra wäheneb (suureneb) waheng.

5) Waheng jääb muutmata, kui meie esiliiget ja tagaliiget ühtlasi ühewõrra suurendame ehk wähendame.

Harilikult ei tarwitata sõna „aritmetiline wahekord“, waid selle asemel tarwitatakse sõna „waheng“. Sõna „wahekord“ jäetakse ainuüksi geometrilise wahekorra jaoks.

§ 238. Geometriline wahekord.

Et teada saada, mitu korda suurem arw, näit. 24, wäiksemast arwust, näit. 6-st, suurem on, jagame suuremat arwu wäiksemaga:

$$24 : 6 = 4.$$

Siis leiame, et 24 on 6-st 4 korda suurem. Niisama palju korda on 6 wähem, kui 24. Wõrdlemise juures wõime ka küsida: missugune jagu suuremast arwust on wäiksem arw? Et niisuguse küsimuse peale wastata, peame wäiksemat arwu suuremaga jagama, näituseks:

$$15 : 25 = \frac{3}{5}.$$

Et neid kahte küsimust, mille peale wahekord (geometriline) wastab, üheks ühendada, määratakse geometrilise wahekorra mõiste järgmiselt ära:

Kahe arwu geometriline (jaondiline, геометрическое) wahekord on nende arwude jaond. Selle juures on esiliige jagatawaks ja tagaliige on jagajaks.

Enamalt jaolt nimetatakse ilmutamata jaondit, näit. 24 : 6 ja 15 : 25, wahekorraks, kuna ilmunud jaondit, 4 ja $^3/_5$, wahekorra nimetajaks (знаменатель отношенія) nimetatakse. Et meie ainult ühehõimulisi suuruseid võrrelda võime, siis on wahekord (wahekorra nimetaja) alati nimeta (puhas) arw.

Wahekorra märgina tarwitatakse arusaadawal põhjusel jagamise märki : ehk murrujoont.

Näitused: 24 : 6 = 4 ehk $\frac{24}{6} = 4$; 15 : 25 = 0,6 ehk $\frac{15}{25} = 0{,}6$.

Neid wahekordasid loetakse järgmiselt: 24-ja ja 6-e wahekord on 4, ehk: 24 on 6-st 4 korda suurem, ehk: 24 6-e wastu on 4; 15-ne ja 25-e wahekord on 0,6, ehk: 15 on 25-st 0,6-kku jagu, ehk: 15 25-e wastu on 0,6.

Tähendus: Täisarwudega jagamise juures pidime sagedasti ligijaondiga leppima. Et meie igat suuruse rohkust kui paljuks tahes jagudeks jagada wõime, siis saame jaotamise kindlalt läbiwiimise tagajärjena murru. Et murdudega tutwuse põhjal meie igat jagatawat iga ühehõimulise suuruse kaswatisena mõne arwuga saada wõime, siis on meil wõimalik ka mahutamist lõpuni läbi wiia ja mahutamise kindlalt läbiwiimise tagajärjena ilmub wahekord.

§ 239. Nimega arwude wahekorra asemele nimeta arwude wahekorra panemine.

Näitus: 1 puud 11 naela : 1 nael 19 loodi = ?

Teeme antud mitme nimega arwud samanimelisteks, neid selle tarwis loodideks laotades, siis saame:

1 puud 11 naela : 1 nael 19 loodi = 1632 loodi : 51 loodi.

Awalik on, et 51 loodi niisama palju kordasid 1632 loodi sisse mahub, mitu korda puhas arw 51 puhta arwu 1632-e sisse.

Sellepärast on:

1 puud 11 naela : 1 nael 19 = 1632 loodi : 51 loodi = 1632 : 51 = 32.

Ehk: $\frac{1 \text{ puud } 11 \text{ naela}}{1 \text{ nael } 19 \text{ loodi}} = \frac{3632 \text{ loodi}}{51 \text{ loodi}} = \frac{1632}{51} = 32.$

Juht: *Et nimega arwude wahekorra asemele nimeta arwude wahekorda panna, muudame antud arwud ühenimega samanimelisteks arwudeks ja heidame nimetuse kõrwale.*

Näitused:

1 wersok : 1 toll = $^1/_{48}$ sülda : $^1/_{84}$ sülda = $^1/_{48} : {}^1/_{84} = 1{}^3/_4$.

1 arsin : 7 tolli = $^1/_3$ sülda : $^1/_{12}$ sülda = $^1/_3 : {}^1/_{12} = 4$.

Et nimega arwude wahekorra asemele alati nimeta arwude wahekorra panna wõib, siis waatame ainult nimeta arwude wahekorda lähemalt.

§ 240. Wahekorra liikmete omadused.

1) Wahekorra nimetaja saame, kui meie esiliiget tagaliikmega jagame. See selgib § 238-st.

2) Esiliikme saame, kui meie tagaliiget wahekorra nimetajaga kaswatame, sest jagatawa saame, kui meie jagajat jaondiga kaswatame.

3) Tagaliikme saame, kui meie esiliiget wahekorra nimetajaga agame, sest jagaja saame, kui meie jagatawat jaondiga jagame.

4) Mitu korda meie esiliiget (= jagatawat) suurendame ehk wähendame, nii mitu korda suureneb ehk wäheneb wahekorra nimetaja (= jaond).

5) Mitu korda meie tagaliiget (= jagajat) suurendame ehk wähendame, nii mitu korda wäheneb ehk suureneb wahekorra nimetaja (= jaond).

6) Kui meie esiliiget (= jagatawat) ja tagaliiget (= jagajat) ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame, siis jääb wahekorra nimetaja (= jaond) muutmata.

§ 241. Wahekorra koondamine.

Kui mõlemad wahekorra liikmed ühe ja sellesama arwuga jagatawad on, siis wõime neid, 6-nda omaduse põhjal, selle arwuga koondada; näit.:

Wahekorda 21 : 35 wõime 7-ga koondada, saame wahekorra 3 : 5.

§ 242. Murdude wahekorra asemele täisarwude wahekorra panemine.

Wõtame wahekorra $^3/_4 : {}^5/_6$. Kui meie esi- ja tagaliiget ühe ja sellesama arwuga kaswatame, siis wahekord ei muutu. Kaswatame neid nimetajate kõige wäiksema mitmekordsega, 12-ga.

$$\left(\frac{3}{4} \cdot 12\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot 12\right) = 9 : 10.$$

Niiwiisi saame murdarwude wahekorra asemel lihtsama, täisarwude wahekorra.

Kui üks liige täisarw on, siis wõime temale murru kuju anda nimetajaks 1 kirjutades.

Näitus. $\frac{44}{7} : 5 = \frac{44}{7} : \frac{5}{1} = \left(\frac{44}{7} \cdot 7\right) : \left(\frac{5}{1} \cdot 7\right) = 44 : 35.$

§ 243. Wahekorra tundmata liikme leidmine.

Kui wahekorras nimetaja ja üks liige teada on, siis wõime 2-se ja 3-nda omaduse põhjal tundmata liiget leida. Tähendame

nüüd ja edaspidi otsitawat arwu ladinakeelse tähe X-iga (iks-iga) ja waatame, kuidas mõnda ülesannet rehkendatakse.

Ülesanne 1. $X : 2{,}6 = 5$; 2-se omanduse põhjal leiame: $X = 2{,}6 \cdot 5 = 13$.

Ülesanne 2. $4{,}5 : X = 0{,}75$; 3-nda omanduse põhjal leiame: $X = 4{,}5 : 0{,}75 = 6$.

Ülesanne 3. $30 : 3X = 2$.

Antud wahekorras ei ole tagaliikmeks mitte otsitaw arw, waid otsitawa arwu kolmekordne (otsitawa arwu kaswatis 3-ga). Enne kui meie otsitawa arwu leiame, peame tagaliikme üles otsima: $3X = 30 : 2 = 15$.

Otsitawa arwu kolmekordne on 15, sellepärast on otsitaw arw $X = 15 : 3 = 5$.

Ülesande rakendus.

$$30 : 3X = 2.$$

$$3X = 30 : 2 = 15.$$

$X = 15 : 3 = 5$. Kostus: $X = 5$.

Seda ülesannet wõime ka weel teisiti wälja rehkendada.

Koondame wahekorda 3-ga,

saame $10 : X = 2$

ja $X = 10 : 2 = 5$.

Ülesanne 4. $\frac{4}{7}X : 8 = 5$.

Esiliikmeks ei ole mitte otsitaw arw, waid tema $^4/_7$-kku jagu. Sellepärast leiame enne esiliikme, s. o. $^4/_7\,x$.

$$\frac{4}{7}x = 8 \cdot 5 = 40.$$

Et x leida, peame niisuguse arwu leidma, mille $^4/_7$-kku jagu 40 on.

$$x = 40 : \frac{4}{7} = 70.$$ Kostus: $x = 70$.

Seda ülesannet wõime ka weel teisiti wälja rehkendada.

Wabastame wahekorra murdudest, selleks kaswatame esi- ja tagaliiget 7-ga, siis saame:

$$4x : 56 = 5.$$

Koondame wahekorda 4-ga:

$$x : 14 = 5.$$

Nüüd on otsitaw arw esiliige, mida meie leida wõime:

$x = 14 \cdot 5 = 70$. Kostus: $x = 70$.

Ülesande rakendus.

I. $\frac{4}{7}x : 8 = 5$

$\frac{4}{7}x = 8 . 5 = 40$

$x = 40 : \frac{4}{7} = 70.$

II. $\frac{4}{7}x : 8 = 5$

$4x : 56 = 5$

$x : 14 = 5$

$x = 14 . 5 = 70.$

Kostus: $x = 70.$

§ 244. Wastupidine wahekord.

Kui ühe wahekorra esiliige teise wahekorra tagaliikmeks ja esimese wahekorra tagaliige teise wahekorra esiliikmeks on, siis nimetatakse neid wahekordasid wastupidisteks wahekordadeks.

Näitus: 14 : 6 ja 6 : 14 on wastupidised wahekorrad.

Kui meie 14 : 6 peripidiseks nimetame, siis on 6 : 14 wastupidine wahekord ja ümberpöördult.

Peripidiste arwude peripidine wahekord ja wastupidiste arwude wastupidine wahekord on ühtlased.

Olgu 5 ja 3 antud arwud ja 5 : 3 nende peripidine wahekord. Siis on $^1/_5$ ja $^1/_3$ nende arwude wastupidised arwud ja $^1/_3 : {}^1/_5$ on wastupidiste arwude wastupidine wahekord.

Näitame, et $5 : 3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$. Tõepoolest, $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = \frac{1.5}{3.1} = \frac{5}{3}$.

See ongi wahekord 5 : 3, ainult jagamise märgi asemel on murrujoon wahekorra märgiks.

Wõtame weel näituse: Olgu $\frac{4}{7}$ ja $\frac{5}{6}$ antud arwud ja $\frac{4}{7} : \frac{5}{6}$ nende peripidine wahekord, siis on: $\frac{4}{7} : \frac{5}{6} = \frac{6}{5} : \frac{7}{4}$, sest nii hästi $\frac{4}{7} : \frac{5}{6}$, kui ka $\frac{6}{5} : \frac{7}{4}$ on $\frac{24}{35}$.

Peripidiste arwude wastupidine wahekord ja wastupidiste arwude peripidine wahekord on ühtlased.

Olgu 5 ja 8 antud arwud ja 5 : 8 nende peripidine wahekord. Siis on 8 : 5 nende wastupidine wahekord, $^1/_5$ ja $^1/_8$ nende wastupidised arwud ja $^1/_5 : {}^1/_8$ on wastupidiste arwude peripidine wahekord.

Näitame, et $8 : 5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{8}$. Tõepoolest, $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} = \frac{1.8}{5.1} = \frac{8}{5}$.

Wõtame weel näituse: Olgu antud arwud $^2/_5$ ja $^3/_7$ ja $^2/_5 : {}^3/_7$ nende peripidine wahekord, siis on $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{5}{2} : \frac{7}{3}$, sest nii hästi $\frac{3}{7} : \frac{2}{5}$, kui ka $\frac{5}{2} : \frac{7}{3}$ on $\frac{15}{14}$.

Kakskümneskuues peatükk: Wôrrendid.

§ 245. Wôrrendi môiste, kahesugused wôrrendid, wôrrendi liikmed.

Wõrrend (пропорція) on kahe samasuguse wahekorra ühesuurdus.

Aritmetiline [wahenguline] wõrrend on kahe aritmetilise [wahengulise] wahekorra ühesuurdus.

Geometriline [jaondiline] wõrrend on kahe geometrilise [jaondilise] wahekorra ühesuurdus.

Nagu geometrilist wahekorda lihtsalt wahekorraks nimetatakse, nii nimetatakse ka geometrilist wõrrendit lihtsalt wõrrendiks. Näitused:

$28 - 19 = 24 - 15 \ldots$ on aritmetiline wõrrend.

$28 : 7 = 24 : 6 \ldots$ on geometriline wõrrend.

Aritmetilist wõrrendit sünnitawates aritmetilistes wahekordades on nende wahekordade wahengud ühesuurused, geometrilist wõrrendit sünnitawates geometrilistes wahekordades on nende wahekordade nimetajad ühesuurused.

Tõepoolest, $28-19=9$ ja $24-15=9$; sellep. on: $28-19=24-15$.

$28 : 7 = 4$ ja $24 : 6 = 4$; sellep. on: $28 : 7 = 24 : 6$.

Wahekordade liikmeid nimetatakse wõrrendi liikmeteks. Neid nimetatakse järgimööda esimeseks, teiseks, kolmandaks, neljandaks liikmeks.

Esimest ja neljandat liiget nimetatakse wälimisteks (крайніе), teist ja kolmandat sisemisteks liikmeteks (средніе члены).

Et kergem oleks wõrrendite omadusi ülesleida, tähendame wõrrendi esimest liiget ladinakeelse tähe a-ga
teist „ „ „ b-ga
kolmandat „ „ „ c-ga
neljandat „ „ „ d-ga.

Aritmetilist wõrrendit sünnitawate aritmetiliste wahekordade ühist wahengut tähendame r-ga ja geometrilist wõrrendit sünnitawate geometriliste wahekordade ühist nimetajat tähendame q-ga.

Aritmetiline wôrrend.

§ 246. Aritmetilise wôrrendi pea-omadus.

Igas aritmetilises wôrrendis on wälimiste liikmete summa ja sisemiste liikmete summa ühesuurused.

Wõtame wõrrendi $28 - 19 = 24 - 15$ [= 9] $a - b = c - d$ [= r]

ja näitame, et $28 + 15 + 19 + 24$ $a + d = b = c$.

Tõepoolest, kui meie wälimiste liikmete summas esimese wahekorra esiliikme kaheks kokkuarwatawaks, millest üks esimese wahekorra tagaliige ja teine wahekorra waheng on, lahutame ja wahengu teise wahekorra tagaliikme juure arwame, siis saame wälimiste liikmete summa asemel esimese wahekorra tagaliikme ja teise wahekorra esiliikme, s. o. sisemiste liikmete summa:

$$\mathbf{28+15}=(19+9)+15=19+9+15=19+(9+15)=\mathbf{19+24}.$$

$$\mathbf{a+d}=(b+r)+d=b+r+d=b+(r+d)=\mathbf{b+c}.$$

§ 247. Aritmetilise wôrrendi tundmata liikme leidmine.

1. ülesanne: $37-x=14-8$: | 2. ülesanne: $x-3{,}5=4{,}7-2{,}2$.

Aritmetilise wõrrendi pea-omaduse põhjal wõime kirjutada:

	$x+14=37+8$;	$x+2{,}2=4{,}7+3{,}5$;
Järjelikult on:	$x=37+8-14$;	$x=4{,}7+3{,}5-2{,}2$;
ehk:	$x=31$.	$x=6$.

Neist ülesannete wäljarehkendamistest järgneb:

Otsitawa sisemise (wälimise) liikme leiame, kui meie wälimiste (sisemiste) liikmete summast antud sisemise (wälimise) liikme maha arwame.

§ 248. Pidew aritmetiline wôrrend ja jaond-keskarw.

Aritmetiline wõrrend, mille sisemisteks ehk wälimisteks liikmeteks üks ja seesama arw on, nimetatakse pidewaks aritmetiliseks wõrrendiks [непрерывная ариѳметическая пропорція].

Näit. $81-\underline{78}=\underline{78}-75$ $\underline{43}-36=50-\underline{43}$.

Pidewa aritmetilise wõrrendi korduw liige nimetatakse teiste liikmete jaond-keskarwuks.

Wõtame pidewad wõrrendid:

$$86-x=x-34 \qquad x-59=87-x.$$

Aritmetilise wõrrendi pea-omaduse põhjal leiame:

$$2x=86+34 \qquad 2x=59+87$$

ja: $$x=\frac{86+34}{2}=60 \qquad x=\frac{59+87}{2}=73.$$

Järjelikult: *Kahe arwu jaond-keskarw on pool nende arwude summast.*

Mitme arwu jaond-keskarwuks nimetatakse nii mitmendat jagu nende arwude summast, mitu arwu antud on.

Näitus: Arwude 75, 78, 86, 94 ja 107 jaond-keskarw on

$$\frac{75+78+86+94+107}{5} = 88.$$

Tähendus jaond-keskarwude tähtsuse kohta. Iga aasta peawad 21-e aastased nooredmehed, nekrutid, sõjawäe teenistuse kommisjoni ilmuma, kus tohtrid nende terwise seisu, pikkust, rinna jämedust, keha raskust jne. läbi waatawad ja sõjawäe-teenistuseks kõlblikuks leitud antakse soldatiks. Kui meie need pikkuse mõõtmised wõtame, mis 1880-st kuni 1885 aastani, missuguse aja jooksul umbes $1^1/_2$ miljoni nekruti soldatiks on wõetud, saadud on ja nende arwude jaondkeskarwu wõtame, siis wõib kindlaks teha, et Wene nekruti keskmine pikkus ligi 2 ars. 5 wers. on.

Geometriline wõrrend.

§ 249. Geometrilise wõrrendi lugemine.

Wõrrendit $23 : 7 = 92 : 28$ loetakse nii:

23 on 7-e wastu, nagu 92 28-a wastu; ehk mitu korda 23 suurem on, kui 7, nii mitu korda on 92 suurem, kui 28; ehk 23 on nii mitu korda 7-st suurem, mitu korda 92 28-st suurem on.

§ 250. Wõrrendi liikmete muutmine ilma wõrrendi rikkumata.

Kui wõrrendi liikmete muutmisega wõrrendit sünnitawad wahekorrad ühesuurusteks jääwad, nii et neid ühtluse märgiga ühendada wõib, nagu ennegi, siis räägitakse, et wahekord jääb rikkumata ehk makswaks.

1) Wõrrend jääb rikkumata, kui meie esimese ehk teise wahekorra liikmeid ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame, sest selle juures jääb wahekorra näitaja muutmata.

Näitus: $15 : 3 = 40 : 8 \ldots$ (wahekorra näitaja 5).

$(15 \cdot 4) : (3 \cdot 4) = 40 : 8 \ldots$ (w. n. 5) $\ldots$ **60 : 12** $= 40 : 8$
$(15 : 2) : (3 : 2) = 40 : 8 \ldots$ (w. n. 5) $\ldots$ **7,5 : 1,5** $= 40 : 8$
$15 : 3 = (40 \cdot 7) : (8 \cdot 7) \ldots$ (w. n. 5) $\ldots$ $15 : 3 =$ **280 : 56**
$15 : 3 = (40 : 4) : (8 : 4) \ldots$ (w. n. 5) $\ldots$ $15 : 3 =$ **10 : 2.**

2) Wõrrend jääb rikkumata, kui meie esimese wahekorra liikmeid ühe arwuga ja teise wahekorra liikmeid teise arwuga kaswatame ehk jagame, sest selle juures jääb ühine wahekorra näitaja muutmata. Näitus:

$15 : 3 = 40 : 8 \ldots$ (w. n. 5).

$(15 \cdot 6) : (3 \cdot 6) = (40 \cdot 7) : (8 \cdot 7) \ldots$ (w. n. 5) $\ldots$ **90 : 18 = 280 : 56**
$(15 : 2) : (3 : 2) = (40 : 10) : (8 : 10) \ldots$ (w. n. 5) $\ldots$ **7,5 : 1,5 = 4 : 0,8**

(15 . 3) : (3 . 3) = (40 : 4) : (8 : 4)... (w. n. 5)... **45 : 9 = 10 : 2**
(15 : 4) : (3 : 4) = (40.5) : (8.5)... (w. n. 5)... **3,75 : 0,75 = 200 : 40.**

3) Wõrrend jääb rikkumata, kui meie kõiki wõrrendi liikmeid ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame, sest selle juures jääb ühine wahekorra näitaja muutmata.

Näitus: 15 : 3 = 40 : 8... (w. n. 5)
(15.11) : (3.11) = (40.11) : (8.11)... (w. n. 5)... **165 : 33 = 440 : 88**
(15 : 2) : (3 : 2) = (40 : 2) : (8 : 2)... (w. n. 5)... **7,5 : 1,5 = 20 : 4.**

4) Wõrrend jääb rikkumata, kui meie esimese ja teise wahekorra esiliikmeid ehk tagaliikmeid ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame, sest mitu korda selle läbi esimese wahekorra näitaja suureneb ehk wäheneb, nii mitu korda suureneb ehk wäheneb ka teise wahekorra näitaja ja mõlemad wahekorra näitajad jääwad ühesuurusteks.

Näitus: 420 : 70 = 168 : 28... (w. n. 6).
(420 . 5) : 70 = (168 . 5) : 28... (w. n. 30)... **2100 : 70 = 840 : 28**
(420 : 4) : 70 = (168 : 4) : 28... (w. n. $1^1/_2$)... **105 : 70 = 42 : 28**
420 : (70 . 3) = 168 : (28 . 3)... (w. n. 2)... 420 : **210** = 168 : **84**
420 : (70 : 7) = 168 : (28 : 7)... (w. n. 42)... 420 : **10** = 168 : **4.**

5) Wõrrend jääb rikkumata, kui üht sisemist (wälimist) liiget mõne arwuga kaswatada ja teist sisemist (wälimist) liiget sellesama arwuga jagada, sest mitu korda selle läbi esimese wahekorra näitaja suureneb ehk wäheneb, nii mitu korda suureneb ehk wäheneb ka teise wahekorra näitaja.

Näitus: 420 : 70 = 168 : 28... (w. n. 6).
420 : (70 . 3) = (168 : 3) : 28... (w. n. 2)... 420 : **210** = **56** : 28
420 : (70 : 10) = (168.10) : 28... (w. n. 60)... 420 : **7** = **1680** : 28
(420 . 2) : 70 = 168 : (28 . 2)... (w. n. 12)... **840** : 70 = 168 : **14**
(420 : 3) : 70 = 168 : (28 . 3)... (w. n. 2)... **140** : 70 = 168 : **84.**

Sedawiisi jõuame otsusele, et wõrrend jääb rikkumata, kui meie:

1) üht sisemist ja üht wälimist liiget ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame,

2) kõiki wõrrendi liikmeid ühe ja sellesama arwuga kaswatame ehk jagame,

3) üht sisemist ehk wälimist liiget ühe arwuga kaswatame, teist sisemist ehk wälimist liiget sellesama arwuga jagame.

Nende wõrrendi omaduste peal põhjeneb wõrrendi koondamine ja wõrrendi wabastamine murdudest.

§ 251. Wõrrendi koondamine.

Wõrrendi koondamiseks nimetatakse wõrrendile lihtsama kuju andmist selle läbi, et meie üht sisemist ja üht wälimist liiget (ehk kõiki liikmeid) ühtlasi nende ühise jagajaga jagame.

Näitus: $420 : 60 = 168 : 4\,x.$
Koondame 4-ga: $\mathbf{105 : 15 = 42 : x.}$
Koondame 21-ga: $\mathbf{5 : 15 = 2 : x.}$
Koondame 5-ga: $\mathbf{1 : 3 = 2 : x.}$

§ 252. Wõrrendi wabastamine murdudest.

Esimene juhus: wõrrendis tuleb üksainus murd ette.

Näitus: $x : 14 = \frac{3}{7} : 6.$

Et kolmas liige täisarwuks saaks, peame teda 7-ga kaswatama. Et wõrrend makswaks jääks, peame üht wälist liiget, sest $^3/_7$ on sisemine liige, ka 7-ga kaswatama.

Kaswatame siis kolmandat ja neljandat liiget 7-ga, siis leiame

$$x : 14 = \mathbf{3 : 42}.$$

Selle asemel, et ühte wälimist liiget 7-ga kaswatada, wõime teist sisemist liiget 7-ga jagada, kui ta ülepea 7-ga jagataw on. Selles näituses on teine sisemine liige (14) 7-ga jagataw. Järjelikult wõime sel korral wõrrendit selle läbi murrust wabastada, et meie murrulist sisemist liiget murru nimetajaga kaswatame ja teist sisemist liiget sellesama nimetajaga jagame. Siis saame:

$$x : (14 : 7) = (\frac{3}{7} \cdot 7) : 6$$

$$x : \mathbf{2} = \mathbf{3} : 6.$$

Teine juhus: üks sisemine ja üks wälimine liige on murrud.

$$\frac{3}{4} : x = \frac{7}{6} : 28.$$

Kaswatame mõlemaid murrulisi liikmeid nende nimetajate kõige wäiksema mitmekordsega — 12-ga, siis jääb wõrrend makswaks, aga murruliste liikmete asemele astuwad täisarwud.

$$\mathbf{9} : x = \mathbf{14} : 28.$$

Kolmas juhus: murrud tulewad ette kas mõlemates sisemistes, ehk mõlemates wälimistes liikmetes, ehk kolmes, ehk kõikides neljas liikmes.

Niisugusel korral wabastame wõrrendi ühe korraga murdudest selle läbi, et meie kõiki liikmeid kõikide murdude nimetajate ühise kõige wäiksema mitmekordsega kaswatame.

Näitused:

1) $\frac{5}{6} : X = 2 : \frac{3}{4}$ Kaswatame kõiki liikmeid 12-ga
2) $8 : \frac{7}{12} X = \frac{13}{8} : 3$ „ „ „ 24-ga
3) $1\frac{7}{10} : \frac{2}{5} = 1\frac{8}{15} : \frac{1}{6} X$ „ „ „ 30-ga
4) $1{,}6 : 2{,}4 = 0{,}2\,X : 1{,}5$ „ „ „ 10-ga

} siis saame:

1) $\left(\frac{5}{6}.12\right):\left(X.12\right)=\left(2.12\right):\left(\frac{3}{4}.12\right)$ ehk $10:12X=24:9$

2) $\left(8.24\right):\left(\frac{7}{12}X.24\right)=\left(\frac{13}{8}.24\right):\left(3.24\right)$ ehk $192:14X=39:72$

3) $\left(\frac{17}{10}\cdot 30\right):\left(\frac{2}{5}\cdot 30\right)=\left(\frac{23}{15}\cdot 30\right):\left(\frac{1}{6}X.30\right)$ ehk $51:12=46:5X$

4) $16:24=2X:15$

Wõib ju ka aegamööda võrrendit murdudest wabastada ikka üht wälimist ja üht sisemist liiget paraja arwuga kaswatades.

Näitus: $\frac{5}{6}:X=2:\frac{3}{4}$.

Kaswatame I-st ja III-at liiget 6-ga: $5:X=12:\frac{3}{4}$.

„ IV-at ja III-at „ 4-ga: $5:X=48:3$.

§ 253. Geometrilise wõrrendi pea-omadus.

Igas geometrilises võrrendis on wälimiste liikmete kaswatis sisemiste liikmete kaswatisega ühesuurused.

Wõtame wõrrendi:

$a:b=c:d$ (wahekorra näitaja q) $42:7=24:4$ (wahekorra näitaja 6), ja näitame, et:

$$a.d=b.c \qquad 42.4=7.24.$$

Meie teame, et iga wahekorra esiliige on tagaliikme ja wahekorra näitaja kaswatis:

$$a=b.q \qquad 42=7.6$$
$$\text{ja } c=d.q \qquad 24=4.6$$

Seepärast on wälimiste liikmete kaswatis nendesamade kolme tegurite kaswatis, millede kaswatis sisemiste liikmete kaswatis on, nimelt:

$$\underline{a}.d=\underline{b.q}.d \qquad \underline{42}.4=\underline{7.6}.4$$

$$\underline{c}.b=\underline{d.q}.b \qquad \underline{24}.7=\underline{4.6}.7.$$

Kui kõik tegurid ühtlased on, siis on ka kaswatised ühtlased; sellepärast on:

$$a.d=b.c \qquad 42.4=7.24.$$

Ümberpöördult: Kui kahe arwu kaswatis teise kahe arwu kaswatisega ühesuurune on, siis võin neist neljast arwust võrrendi üles seada ühe kaswatise tegurid wälimisteks, teise kaswatise tegurid sisemisteks liikmeteks wõttes.

Olgu: $k.m=n.p \qquad 35.9=15.21.$

Wõtame ühest kaswatisest ühe ja teisest kaswatisest teise teguri ja nende kaswatisega jagame mõlemaid kaswatisi; siis saame:

$$\frac{k \cdot m}{m \cdot n} = \frac{k \cdot p}{m \cdot n} \qquad \frac{35 \cdot 9}{9 \cdot 15} = \frac{15 \cdot 21}{9 \cdot 15}.$$

Pärast koondamist saame:

$$\frac{k}{n} = \frac{p}{m} \qquad \frac{35}{15} = \frac{21}{9} \quad \text{ehk} \quad k : n = p : m \qquad 35 : 15 = 21 : 9.$$

§ 254. Wôrrendi järelkatsumine.

Wõrrendi pea-omaduse põhjal wõime järele katsuda, kas wõrrend õige on, nimelt: kui wälimiste liikmete kaswatis seesama arwu annab, mis sisemiste liikmete kaswatis, siis on wõrrend õige, muidu mitte.

Näit.:

$75 : 60 = 35 : 28$ $\qquad$ $45 : 18 = 85 : 36$

$75 \cdot 28 = 35 \cdot 60$ $\qquad$ $45 \cdot 36 = 85 \cdot 18$

$2100 = 2100$; wõrrend on õige. $\qquad$ $1620 = 1530$; wõrrend ei ole õige.

Wõrrendit wõime ka selle läbi järele katsuda, et meie kummagi wahekorra nimetaja wälja arwame.

Näit.:

$75 : 60 = 35 : 28$ $\qquad$ $45 : 18 = 85 : 36$

$75 : 60 = \frac{75}{60} \overset{15}{=} \frac{5}{4} = 1{,}25$ $\qquad$ $45 : 18 = \frac{45}{18} \overset{9}{=} \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$35 : 28 = \frac{35}{28} \overset{7}{=} \frac{5}{4} = 1{,}25$, õige. $\qquad$ $85 : 36 = \frac{85}{36} = 2\frac{13}{36}$, ei ole õige.

§ 255. Wôrrendi tundmata liikme leidmine.

1. ülesanne: $24 : 12 = X : 29$. | 2. ülesanne: $17 : 7 = 51 : X$.

Et sisemiste liikmete kaswatis wälimiste liikmete kaswatisega ühtlased on, siis leiame:

$$12 \cdot X = 24 \cdot 29 \qquad 17 \cdot X = 7 \cdot 51.$$

Tundmata teguri leiame, kui meie kaswatist tuntud teguriga jagame:

$$X = \frac{24 \cdot 29}{12} = 58 \qquad X = \frac{7 \cdot 51}{17} = 21.$$

Neist ülesannete wäljarehkendamistest järgneb juht:

Geometrilises wôrrendis leiame otsitawa sisemise (wälimise) liikme, kui meie wälimiste (sisemiste) liikmete kaswatist antud sisemise (wälimise) liikmega jagame.

3. ülesanne. $75 : 4X = 60 : 16$. Leida X!

1) Leiame tundmata sisemise liikme!

$$4X = \frac{^{5}\cancel{75} \cdot \cancel{16}^{4}}{\cancel{60}_{\cancel{15}_{1}}} = 20.$$

2) Leiame otsitawa arwu X!

$$X = 20 : 4 = 5.$$

1) Koondame 2-st ja 4-at liiget 4-ga!

$$75 : X = 60 : 4.$$

2) Leiame otsitawa arwu X!

$$X = \frac{^{5}\cancel{75} \cdot \cancel{4}}{\cancel{60}_{\cancel{15}_{1}}} = 5.$$

4. ülesanne. $\frac{3}{5}X : 44 = 9 : 11$. Leida X!

1) Leiame tundmata wälimise liikme;

$$\frac{3}{5}X = \frac{^{4}\cancel{44} \cdot 9}{\cancel{11}_{1}} = 36.$$

2) Leiame otsitawa arwu X!

$$\frac{3}{5}X = 36$$

$$\frac{1}{5}X = 36 : 3 = 12$$

$$X = 12 \times 5 = 6$$

ehk: $X = 36 : \frac{3}{5} = \frac{36 \cdot 5}{3} = 60.$

1) Kaswatame 1-st ja 3-at liiget 5-ga:

$$3X : 44 = 45 : 11.$$

2) Koondame 1-st ja 3-at liiget 3-ga:

$$X : 44 = 15 : 11.$$

3) Leiame otsitawa arwu X:

$$X = \frac{^{4}44 \cdot 15}{11_{1}} = 60.$$

§ 256. Wõrrendi liikmete ümberseadmine.

Igas wõrrendis wõime: 1) wälimised liikmed isekeskes, 2) sisemised liikmed isekeskes ümberasendada ja 3) wälimised liikmed sisemiste ja sisemised liikmed wälimiste asemele panna. Niisugustest ümberasendamistest hoolimata jääb wõrrend makswaks, sest nii wälimiste, kui ka sisemiste liikmete kaswatised jääwad endisteks.

Olgu järgmine wõrrend antud:

1) $42 : 18 = 7 : 3$.

Asendame wälimised liikmed isekeskes ümber, siis saame:

2) $3 : 18 = 7 : 42$.

Asendame kummagis wõrrendis sisemised liikmed isekeskes ümber, siis saame 2 uut wõrrendit:

3) $42 : 7 = 18 : 3$

4) $3 : 7 = 18 : 42$.

Paneme saadud wõrrendites wälimised liikmed sisemiste asemele ja sisemised wälimiste asemele, siis saame 4 uut wõrrendit:

5) $18:42=3:7$
6) $18:3=42:7$
7) $7:42=3:18$
8) $7:3=42:18.$

Meie wõiksime neis wõrrendites teise wahekorra esimeseks ja esimese wahekorra teiseks panna, aga kerge on ära näha, et meie uusi wõrrendid enam ei saa. Järjelikult on kõigesuguste ümberasendamiste abil wõimalik 1-st wõrrendist 8 wõrrendit saada.

Järeldus: Ühtlaste wahekordade wastupidised wahekorrad on ka ühtlased.

Näit.: Kui $42:18=7:3$, siis on ka $18:42=3:7$.

§ 257. Pidew wõrrend.

Wõrrend, mille sisemisteks ehk wälimisteks liikmeteks üks ja seesama arw on, nimetatakse pidewaks wõrrendiks.

Näit.: $98:14=14:2$ $\qquad$ $15:5=45:15.$

Pidewa (geometrilise) wõrrendi korduw liige nimetatakse teiste liikmete juur-keskarwuks.

Wõtame pidewad wõrrendid:

$$18:X=X:2. \qquad X:7=63:X.$$

Wõrrendi pea-omaduse põhjal leiame:

$$X^2=18.2 \qquad X^2=7.63$$

ja: $X=\sqrt{18.2}$ $\qquad$ $X=\sqrt{7.63}$

ehk: $X=\sqrt{36}=6.$ $\qquad$ $X=\sqrt{441}=21.$

Järjelikult: *Kahe arwu juur-keskarw on nende arwude kaswatise ruutjuur.*

Mitme arwu juur-keskarwuks nimetatakse nii mitmendama astme juurt nende arwude kaswatisest, mitu arwu antud on.

Näitused:

Arwude 3, 4, 18 juur-keskarw on: $\sqrt[3]{3.4.18}=\sqrt[3]{216}=6;$

arwude 5, 9, 25, 45 juur-keskarw on: $\sqrt[4]{5.9.25.45}=\sqrt[4]{50625}=15$

§ 258. Kokkuwõetud wõrrendid.

Wõtame kaks wõrrendit:

1) $84:14=144:24$, ehk, teisiti kirjutatult: $\frac{84}{14}=\frac{144}{24}$, (wahek. n. 6)

2) $21:7=18:6$, „ „ „ $\frac{21}{7}=\frac{18}{6}$, (wahek. n. 3).

I. Kaht (ehk mitut) wõrrendit wõib wastawate liikmete kaupa üksteisega kaswatada; selle läbi ilmub uus wõrrend.

Waatame antud wõrrendites ettetulewate wahekordade peale kui murdude peale, siis on murd $\frac{84}{14}$ niisama suur, kui murd $\frac{144}{24}$,

„ $\frac{21}{7}$ „ „ „ „ $\frac{18}{6}$.

ja murdude kaswatis $\frac{84}{14}\cdot\frac{21}{7}$ on niisama suur, kui murdude kaswatis $\frac{144}{24}\cdot\frac{18}{6}$.

Järjelikult on: $\frac{84}{14}\cdot\frac{21}{7}=\frac{144}{24}\cdot\frac{18}{6}$.

Murdude kaswatamist toime pannes leiame:

$\frac{84.21}{14.7}=\frac{144.18}{24.6}$, ehk, teisiti kirjutatult; $(84.21):(14.7)=(144.18):(24.6)$.

s. o. $1764:98=2592:144$.

Ühtlus $\frac{84}{14}\cdot\frac{21}{7}=\frac{144}{24}\cdot\frac{18}{6}$ näitab, et uues wõrrendis wahekordade nimetaja endiste wahekordade nimetajate kaswatis on, sest ühtlus $\frac{84}{14}\cdot\frac{21}{7}=\frac{144}{24}\cdot\frac{18}{6}$ ei ole muud midagi, kui $6\,.\,3=6\,.\,3\,(=18)$.

II. Kaht wõrrendit wõib wastawate liikmete kaupa üksteisega jagada; selle läbi ilmub uus wõrrend.

Waatame antud wõrrendites ettetulewate wahekordade peale kui murdude peale, siis on murd $\frac{84}{14}$ niisama suur, kui murd $\frac{144}{24}$,

ja „ $\frac{21}{7}$ on „ „ „ „ $\frac{18}{6}$,

ja murdude jaond $\frac{84}{14}:\frac{21}{7}$ on niisama suur, kui murdude jaond $\frac{144}{24}:\frac{18}{6}$.

Järjelikult $\frac{84}{14}:\frac{21}{7}=\frac{144}{24}:\frac{18}{6}$.

Murdude jagamist toime pannes leiame:

$$\frac{84\,.\,7}{14\,.\,21}=\frac{144\,.\,6}{24\,.\,18}$$

Seda wõime nii kirjutada: $\frac{84}{21} \cdot \frac{7}{14} = \frac{144}{18} \cdot \frac{6}{24}$,

ehk: $\frac{84}{21} : \frac{14}{7} = \frac{144}{18} : \frac{24}{6}$,

ehk, kui meie murdude peale, kui ilmutamata jaondite peale waatame,

$$(84 : 21) : (14 : 7) = (144 : 18) : (24 : 6)$$

ehk: $4 : 2 = 8 : 4$.

Ühtlus $\frac{84}{14} : \frac{21}{7} = \frac{144}{24} : \frac{18}{6}$ näitab, et uues wõrrendis wahekordade nimetaja endiste wahekordade nimetajate jaond on, sest ühtlus $\frac{84}{14} : \frac{21}{7} = \frac{144}{24} : \frac{18}{6}$ ei ole muud midagi, kui $6 : 3 = 6 : 3 (= 2)$.

Liikme kaupa kaswatamise ehk jagamise läbi kahest ehk mitmest wõrrendist saadud wõrrendit nimetatakse kokkuwõetud wõrrendiks (сложная пропорція).

§ 259. Tuletatud wõrrendid.

Wõrrendid, mis ühest ainust wõrrendist saadakse, on tuletatud wõrrendid (производныя пропорціи).

Wõtame wõrrendi:

$$\frac{42}{6} = \frac{28}{4} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Kui meie kummagile wõrrendit sünnitawale wahekorrale 1 juure lisame, ehk kui meie kummagist wahekorraat 1 maha arwame, siis suureneb (kokkuarwamise puhul) ehk wäheneb (mahaarwamise puhul) wahekorra näitaja 1-e wõrra, ühtlus aga jääb makswaks ja meie wõime kirjutada:

$$\frac{42}{6} + 1 = \frac{28}{4} + 1 \quad \Big| \quad \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \quad \Big| \quad \frac{42}{6} - 1 = \frac{28}{4} - 1 \quad \Big| \quad \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

Anname 1-le murru kuju, siis saame:

$$\frac{42}{6} + \frac{6}{6} = \frac{28}{4} + \frac{4}{4} \quad \Big| \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \quad \Big| \quad \frac{42}{6} - \frac{6}{6} = \frac{28}{4} - \frac{4}{4} \quad \Big| \quad \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$$

Murdude kokkuarwamise ja mahaarwamise juhtide põhjal leiame:

I. $\frac{42+6}{6} = \frac{28+4}{4} \quad \Big| \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ | II. $\frac{42-6}{6} = \frac{28-4}{4} \quad \Big| \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Kui antud wõrrendis wahekordade esiliikmed nende tagaliikmetest wäiksemad on, wahekorra näitaja sellega 1-st wähem on, siis ei arwa meie mitte wahekorrast 1-e maha, waid meie arwame 1-st wahekorra maha, mis ka lubatud on.

Näitus:

Olgu antud võrrend:

$\frac{7}{35} = \frac{2}{10}$; siis leiame: $1 - \frac{7}{35} = 1 - \frac{2}{10}$ ehk $\frac{35-7}{35} = \frac{10-2}{10}$

Igatahes on võimalik neid tuletatud võrrendid järgmiselt lugeda:

I. Esimese wahekorra liikmete summa on oma tagaliikme wastu, nagu teise wahekorra liikmete summa oma tagaliikme wastu.

II. Esimese wahekorra liikmete waheng on oma tagaliikme wastu, nagu teise wahekorra liikmete waheng oma tagaliikme wastu.

Paneme antud võrrendis wälimised liikmed sisemiste asemele ja ümberpöördult, siis saame:

$$\frac{6}{42} = \frac{4}{28} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Esimese ja teise tuletatud võrrendite põhjal võime kirjutada:

III. $\frac{42+6}{42} = \frac{28+4}{28} \mid \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ IV. $\frac{42-6}{42} = \frac{28-4}{28} \mid \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Neid võrrendid loetakse nii:

III. Esimese wahekorra liikmete summa on oma esiliikme wastu, nagu teise wahekorra liikmete summa oma esiliikme wastu.

IV. Esimese wahekorra liikmete waheng on oma esiliikme wastu, nagu teise wahekorra liikmete waheng oma esiliikme wastu.

Wõtame kõik neli tuletatud võrrendit:

$\frac{42+6}{6} = \frac{28+4}{4} \mid \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \mid \frac{42-6}{6} = \frac{28-4}{4} \mid \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$\frac{42+6}{42} = \frac{28+4}{28} \mid \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \mid \frac{42-6}{42} = \frac{28-4}{28} \mid \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Asendame sisemised liikmed isekeskes ümber:

V. $\frac{42+6}{28+4} = \frac{6}{4} \mid \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$ VI. $\frac{42-6}{28-4} = \frac{6}{4} \mid \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$

VII. $\frac{42+6}{28+4} = \frac{42}{28} \mid \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$ VIII. $\frac{42-6}{28-4} = \frac{42}{28} \mid \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}$

Neist võrreditest on näha, et kõik neli ettetulewat wahekorda isekeskes ühtlased on ja meie võime kirjutada:

$\frac{42+6}{28+4} = \frac{42-6}{28-4} = \frac{42}{28} = \frac{6}{4}$. $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Need ühtlused näitawad meile, et:

Esimese wahekorra liikmete summa on teise wahekorra liikmete summa wastu, nagu esimese wahekorra liikmete waheng teise wahekorra liikmete wahengu wastu, ehk nagu esiliige esiliikme, ehk nagu tagaliige tagaliikme wastu.

Wõtame neist ühtlastest wahekordadest kaks esimest ja asendame sisemised liikmed isekeskes ümber, siis saame:

IX. $\frac{42+6}{42-6}=\frac{28+4}{28-4}$ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Seda wõrrendit loetakse järgmiselt:

Esimese wahekorra liikmete summa on oma wahengu wastu, nagu teise wahekorra liikmete summa oma wahengu wastu.

§ 260. Ühtlaste wahekordade rida.

Wõtame terwe rea ühtlasi wahekordasid:

$\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{15}{5}=\frac{21}{7}=\frac{36}{12}$ (wahekorra nim. 3). $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{k}{m}$ (wahekorra nim. q).

Wõtame esiliikmete summa:

$6+9+15+21+36$ $a+c+e+g+k$

Iga esiliige on oma tagaliikme ja wahekorra näitaja kaswatis; sellepärast wõime kirjutada:

$$6+9+15+21+36=2.3+3.3+5.3+7.3+12.3.$$
$$a+c+e+g+k=b.q+d.q+f.q+h.q+m.q.$$

See asemel, et igat kokkuarwatawat mõne arwuga kaswatada, wõime nende kokkuarwatawate summad selle arwuga kaswatada; siis leiame:

$$6+9+15+21+36=(2+3+5+7+12).3$$
$$a+c+e+g+k=(b+d+f+hm).q$$

Kui meie kaswatist üke teguriga jagame, siis saame teise teguri; seepärast on:

$\frac{6+9+15+21+36}{2+3+5+7+12}=3.$ $\frac{a+c+e+g+k}{b+d+f+h+m}=q.$

Waatame saadud awalduse peale, kui wahekorra peale, aiis näeme, et uue wahekorra esiliikmeks on antud wahekordade esiliikmete summa, tema tagaliikmeks on antud wahekordade tagaliikmete

summa, aga wahekorra näitaja on seesama, mis antud wahekordadel. Järjelikult on saadud wahekord antud wahekordadega ühtlane ja meie wõime kirjutada:

$$\frac{6+9+15+21+36}{2+3+5+7+12} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = \frac{36}{12}$$

$$\frac{a+c+e+g+k}{b+d+f+h+m} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{k}{m}$$

ja ütelda:

Ühtlaste wahekordade reason esiliikmete summa tagaliikmete summa wastu, nagu iga esiliige oma tagaliikme wastu.

Ühtlaste wahekordade rida kirjutatakse ka teisiti:

$6:9:15:21:36 = 2:3:5:7:12$ $\qquad$ $a:c:e:g:k = b:d:h:f:m$

Kakskümnesseitsmes peatükk: Kolmeliikme arwamine.

§ 261. Wõrrendilised suurused.

On põhjust arwata, et inimene kuni oma 25-nda eluaastani kaswada wõib, pärast 25-ndat eluaastat jääb kasw kinni. Meie wõime läbisegi ütelda, et mida wanemaks inimene kuni 25-nda eluaastani läheb, seda pikemaks kaswab tema. Kui inimene juba 25 aastat wana on, siis wõime ütelda, et kui tema ka wanemaks läheb, tema kasw jääb siiski muutmata.

Selles näituses on juttu kahest suurusest — ajast ja pikkusest, ehk, lähemalt ära määrates, inimese elueast ja inimese kaswust. Kuni 25-e aastani (umbes) on nende kahe suuruste wahel side olemas; pärastpoole ei ole seda sidet enam.

Üleüldse: kahe suuruse wahel wõib side olemas olla, wõib aga ka igasugune side puududa.

Wõtame weel mõne näituse: Elunähtustest teame, et kui 5 arsina riiet 11 rubla maksawad, siis maksawad 15 arsina sedasama riiet 33 rubla. Selles näituses on juttu kahest suurusest: riide tüki pikkusest ja tema hinnast, ja meie näeme, et pikkuse muutmisega ka hind muutub.

Kui 3 niitjat ühe luha 4-ja päewaga maha niidawad, siis niidawad 6 niitjat samasugustel tingimistel selle luha 2-e päewaga maha. Jällegi näeme, et ühe suuruse tööliste arwu — muutmisega muutub ka teine suurus — tööpäewade arw.

Järelkatsumised näitawad, et kui lamp 6-e jala kauguselt, raamatu lehekülgi niisama heledalt walgustab, nagu 2 küünalt 1-e jala kauguselt, siis walgustab seesama lamp 3 jala kauguselt neid

raamatu lehekülgi niisamasuguse heledusega, nagu 8 endist küünalt 1-e jala kauguselt.

Siin on ka juttu kahest suurusest: walguse hallika kaugusest walgustatud pinnast ja walgustuse heledusest ja meie näeme, et walguse hallika kauguse muutmisega walgustatawast pinnast ka walgustuse heledus muutub.

Niiwiisi näeme, et see asjaolu, et kahe suuruse wahel side olemas on, ennast selles ilmutab, et ühe suuruse hulga muutmisega ka teise suuruse hulk muutub.

Kahe suuruse wahel olew side wõib wäga mitmesugune olla; mõnede suuruste wahel on see side õige lihtne, mõnede wahel on ta keeruline, mõnede wahel on ta meile tundmata.

Inimese eluea ja inimese kaswu wahel olewat sidet meie ei tea.

Walgustuse heleduse ja walguse hallika kauguse wahel walgustatud pinnast on see side niisugune, et kui nimetatud kaugus 2 korda suureneb (ehk wäheneb), siis wäheneb (suureneb) walgustuse heledus 4 ($=2^2$) korda; kui see kaugus 3 korda suureneb (wäheneb), siis wäheneb (suureneb) walgustuse heledus 9 ($=3^2$) korda j. n. e.

Töötegijate arwu ja tööaja wahel, mis ühe ja sellesama töö tegemiseks ära kulub, on harilikult[1]) niisugune side olemas, et kui meie töötegijate arwu 2 korda suurendame (3-me niitja asemel 6 niitjat tööle paneme), siis wäheneb selle töö ärategemiseks tarwiline aeg 2 korda (4-ja päewa asemel on ainult 2 päewa tarwis). Kauba hulga ja tema hinna wahel on niisugune side, et mitu korda kauba hulk suureneb, nii mitu korda suureneb ka tema eest maksetaw hind: kui meie 3 korda enam riiet ostame (5 arsina asemel 15 arsina), siis peame ka 3 korda rohkem raha maksma (11 rubla asemel 33 rubla).

Kui kahe suuruse wahel selge ja kindel side olemas on, siis wastab igale ühe suuruse arwulisele wäärtusele teise suuruse kindel arwuline wäärtus.

Ettetoodud näitustes wastab 6-e jala kaugusele 2 küünla heledus, 3-me jala kaugusele wastab 8 küünla heledus; 5-le arsinale wastawad 11 rubla, 15-le arsinale wastawad 33 rubla; 3-le niitjale wastawad 4 päewa, 6-le niitjale wastawad 2 päewa.

Kui meie ühe suuruse kahest arwulisest wäärtusest (hulgast) ja neile wastawatest teise suuruse arwulistest wäärtustest (hulkadest) wõrrendi wõime saada, siis on nende kahe suuruse wahel olew side — wõrrendiline side (пропорціональная зависимость), ja suuruseid endid nimetatakse wõrrendilisteks suurusteks (пропорціональныя величины).

Meie teame: mitu korda 15 arsina 5-st arsinast enam on, nii mitu korda on 15-ne arsina hind 5-e arsina hinnast suurem.

---

1) On töösid olemas, mida üks töötegija kuidagi wiisi üksi teha ei saa ja mitte iga töö juures ei saa üks inimene teist aidata.

Aritmetikas tarwitusele wõetud märkide abil wõime seda järgmiselt üles kirjutada:

$$\frac{\text{15 ars.}}{\text{5 ars.}} = \frac{\text{15-e arsina hind}}{\text{5-e arsina hind}}$$

Järjelikult on kauba hulk ja tema hind wõrrendilised suurused. Meie teame: mitu korda 6 niitjat enam on, kui 3 niitjat, nii mitu korda on aeg, mis 6 niitjat luha maha niitmiseks tarwitawad, wähem kui aeg, mis 3 niitjat selle luha mahaniitmiseks tarwitawad; ehk: aeg, mis 3 niitjat luha maha niitmiseks tarwitawad, on nii mitu korda suurem ajast, mis 6 niitjat tarwitawad, mitu korda 6 niitjat enam on, kui 3 niitjat. Sellest saame wõrrendi:

$$\frac{\text{aeg, mis 3 niitjat luha mahaniitmiseks tarwitawad}}{\text{aeg, mis 6 niitjat luha mahaniitmiseks tarwitawad}} = \frac{\text{6 niitjat}}{\text{3 niitjat}}$$

ehk endiseid näitusi silmas pidades:

$$\frac{\text{4 päewa}}{\text{2 päewa}} = \frac{\text{6 niitjat}}{\text{3 niitjat}}$$

Järjelikult on töötegijate arw ja ühe töö jaoks ära kuluw aeg wõrrendilised suurused.

Neist näitustest selgub ka ühtlasi, et kahe suuruse wahel olew wõrrendiline side kahesugune wõib olla, ehk, et wõrrendilised suurused wõiwad kahesugused olla.

Riidetüki pikkuse mitu (3) korda suurenemisega suureneb ka niisama palju kordasid (3 korda) riide tüki hind; aga niitjate arwu suurenemisega mitu (2) korda wäheneb luha mahaniitmiseks tarwiline aeg niisama palju kordasid (2 korda).

Kui ühe suuruse hulga mitu korda suurenemisega temale wastaw teise suuruse hulk niisama palju korda suureneb ja wähenemisega niisama palju korda wäheneb, siis nimetatakse neid suuruseid periwõrrendilisteks (прямопропорціональныя величины).

Näit., kauba hulk ja tema hind on periwõrrendilised suurused.

Kui ühe suuruse hulga mitu korda suurenemisega temale wastaw teise suuruse hulk niisama palju korda wäheneb, ja wähenemisega niisama palju korda suureneb, siis nimetatakse neid suuruseid wastuwõrrendilisteks (обратно-пропорціональныя величины).

Näit., aeg ja kiirus on wastuwõrrendilised suurused, sest mitu korda suurema kiirusega üks keha liigub, niipalju korda wähema ajaga käib ta ühe ja sellesama tee ära.

Periwõrrendiliste suurustega rehkendades tarwitame arutamise juures sõnu: mitu korda enam (wähem) — nii mitu korda enam (wähem), näit. mitu korda enam kaupa, nii

mitu korda enam raha tuleb tema eest maksta; mitu korda wähem kaupa, nii mitu korda wähem raha tuleb tema eest maksta.

Wastuwõrrendiliste suurustega rehkendades tarwitame arutamise juures sõnu: mitu korda enam (wähem) — nii mitu korda wähem (enam), näit: mitu korda enam töölisi, nii mitu korda wähem aega kulub ühe ja sellesama töö tegemiseks ära; mitu korda wähem töölisi, nii mitu korda enam aega kulub ühe ja sellesama töö tegemiseks ära.

Liht kolmeliikme arwamine.

§ 262. Môiste äramääramine.

Meie teame, et kaks paari kahe suuruse üksteisele wastawaid wäärtusi wõrrendi sünnitawad. Sellepärast, kui meil ühest suurusest kaks wäärtust ja teisest suurusest üks wäärtus, mis ühele esimese suuruse wäärtusele wastab, antud on, siis wõime seda teise suuruse wäärtust leida, mis esimese suuruse teisele wäärtusele wastab. Lühidalt räägitakse: kolme antud suuruse (sõna „suurus“ tarwitatakse siin kohal mõttes: suuruse arwuline wäärtus) kaudu on wõimalik neile neljandat wõrrendilist leida. See rehkendamise wiis, kuidas kolme antud suuruse kaudu neile neljas wõrrendiline otsitakse, nimetatakse liht kolmeliikme arwamiseks (простое тройное правило). Ülesanded, kus kolme antud suuruse kaudu neile neljas wõrrendiline otsitakse, on liht kolmeliikme arwamise ülesanded. Nimetame seda suurust, millest kaks wäärtust on antud, siduwaks suuruseks, ja seda suurust, millest üks wäärtus antud on ja teine otsitatse, seotud suuruseks.

§ 263. Liht kolmeliikme arwamine wõrrendi abil.

a) Antud suurused on periwõrrendilised.

1-ne ülesanne: Suhkrupea, mis 18 naela kaalub, maksab 2 rbl. 16 kop.; kui palju maksab suhkrupea, mis 22 naela kaalub?

Rakendus.

18 naela suhkrut maksawad 216 kop.
22 „ „ „ X „

Arutus: Otsitawa arwu tähendame X-ga. Mitu korda enam meie suhkrut ostame, nii mitu korda enam peame ka maksma. Et 22 naela enam on kui 18 naela, siis on X kop. nii mitu korda 216-st kopikast enam, mitu korda 22 naela 18-st naelast enam on. Seda kirjutame järgmise wõrrendina üles: $X : 216 = 22 : 18$.

Wäljarehkendamine:

$X : 216 = 22 : 18.$

$$X = \frac{\overset{12}{\cancel{216}} \cdot 22}{\underset{1}{\cancel{18}}} = 264. \text{ (kop.)}$$

Kostus: 22 naela maksawad 2 rbl. 64 kop.

2-ne ülesanne. Jalakäija käib 4 tunni 20 minutiga 20 wersta 400 sülda ära; kui palju maad käib ta $2^1/_2$ tunniga ära?

Ettewalmistawad ümbermuutmised:

4 tundi 20 minutit $= 4\frac{1}{3}$ tundi $= \frac{13}{3}$ tundi;

20 wersta 400 sülda $= 20\frac{4}{5}$ wersta $= \frac{104}{5}$ wersta;

$2\frac{1}{2}$ tundi $= \frac{5}{2}$ tundi.

Rakendus.

$\frac{13}{3}$ tunniga käib jalakäija $\frac{104}{5}$ wersta ära.

$\frac{5}{2}$ „ „ „ X „ „

Arutus:

Mitu korda aega enam on, nii mitu korda enam maad wõib ära käia; mitu korda aega wähem on, nii mitu korda enam maad wõib ära käia.

$\frac{5}{2}$ tundi ehk $2\frac{1}{2}$ tundi on wähem, kui $\frac{13}{3}$ tundi ehk $4\frac{1}{3}$ tundi. Seepärast on X nii mitu korda $\frac{104}{5}$ = kust wähem, mitu korda $\frac{5}{2}$ wähem on, kui $\frac{13}{3}$. Seda wõime järgmise wõrrendina üles kirjutada:

Wäljarehk. $X : \frac{104}{5} = \frac{5}{2} : \frac{13}{3}$

$$X = \left(\frac{104}{5} \cdot \frac{5}{2}\right) : \frac{13}{3}$$

$$X = \frac{104 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 13} = 12. \quad \text{Kostus: 12 wersta.}$$

b) Antud suurused on wastuwõrrendilised.

3-as ülesanne: Sõidurong, mille kiirus 42 wersta tunnis on, jõuab A. linnast W. linna 20-ne tunniga; mitme tunniga jõuab kiirrong, mille kiirus 56 wersta tunnis on, W. linnast A. linna?

Rakendus:

Kui rongi kiirus 42 wersta on, siis tarwit. rong A. ja W wahel 20 tundi;

„ „ „ 56 „ „ „ „ „ „ „ „ „ X „

Arutus: Kiirrongi kiirus, 56 wersta, on suurem, kui sõidurongi kiirus 42 wersta. Mida suurema kiirusega rong sõidab, seda

wähema ajaga jõuab ta teatawa maa ära sõita. Sellepärast on X (tundi) nii mitu korda 20-st (tunnist) wähem, mitu korda 42 (wersta) wähem on, kui 56 (wersta). Seepärast

Wäljarehkendamine:

$X : 20 = 42 : 56.$ $X = \frac{20.42}{56} = 15$ Kostus: 15 tunniga.

4-jas ülesanne. Ühe ülikonna jaoks läheb riiet, mis 2 arsinat lai on, 4,5 arsinat; mitu arsinat läheb niisamasuguse ülikonna jaoks, kui riie 1,8 arsinat lai on?

Rakendus.

Kui riie 2 arsinat lai on, siis läheb teda 4,5 arsinat;
„ „ 1,8 „ „ „ „ „ „ X „

Arutus: Et teine riie laiuse poolest ahtam on, kui esimene, siis läheb teda pikkuse poolest enam. Sellepärast on X nii mitu korda suurem, kui 4,5, mitu korda 2 suurem on kui 1,8. Järjelikult leiame wõrrendi: $X : 4,5 = 2 : 1,8.$

Wäljarehkendamine.

$X : 4,5 = 2 : 1,8.$ $X = \frac{4,5 \cdot 2}{1,8} = 5.$ Kostus: 5 arsinat.

5-es ülesanne: Isa saab ühe tööga 8 päewa jooksul walmis; mitu päewa tarwitaks poeg selle töö ära tegemiseks, kui poja jõud isa jõu wastu on nagu 4 : 5 wastu?

Arutus: Et pojal wähem jõudu on, kui isal, siis on pojal enam päewi selle töö ärategemiseks tarwis ja nende tööpäewade arw on nende jõuga wastupidises wahekorras. Seepärast, kui meie poja töö päewade arwu X-ga tähendame, siis saame:

$X : 8 = 5 : 4.$ $X = \frac{8.5}{4} = 10.$ Kostus: Poeg tarwitab 10 päewa.

Rakendust meie siia ei kirjutanud, sest et jõudude wahekord juba antud oli ja et rakenduse kirjutamine sel korral keerulisem on, kui ülesande wäljarehkendamine ilma rakenduseta. Siiski wõime ka rakenduse kirjutada. Ütleme, et pojal on 4 mingisugust jõudu, siis on isal 5 niisugust jõudu; ja meie wõime seda ülesannet järgmiselt rakendada:

5 jõuga töötamise korral saab töö 8 päewa jooksul walmis;
4 „ „ „ „ „ X „ „ „

Waatame neid ülesandeid ja nende wäljarehkendamist lähemalt. Et ülesanne alati selgesti silmade ees oleks, rakendatakse ta kahesse reasse: esimese rea peale kirjutatakse ülesande tingimine, teise peale küsimus. Ühehõimulised suurused kirjutatakse ühehõimuliste alla ja harilikult nii, et siduwa suuruse wäärtused esimesesse weerusse ja seotud suuruse wäärtused teisesse weerusse. Nii wiisi tuleb X wiimase koha peale.

Enne kui rakendust üles seadma hakatakse, on kasulik mitmenimega arwud ühenimega arwudeks, segaarwud liigmurdudeks muuta ja teised tarwilised ümbermuutmised toime panna. Pärast rakendust asume ülesande wäljaarwamise kallale. Esite wõrdleme siduwa suuruse teist wäärtust tema esimese wäärtusega ja siis teeme selle wõrdlemise ja elunähtuste põhjal selle üle otsuse, kas otsitaw arw X seotud suuruse esimesest wäärtusest suurem ehk wähem on. Elunähtused ja meie oma mõistus ütlewad meile, kas antud suurused periwõrrendilised wõi wastuwõrrendilised on. Wiimaks teeme kindlaks, mitu korda otsitaw arw (X) seotud suuruse esimesest wäärtuset suurem ehk wähem on: Kui X seotud suuruse antud wäärtusest suurem on, siis on tema wahekord seotud suuruse esimese wäärtuse wastu niisama suur, nagu siduwa suuruse suurema wäärtuse wahekord wähemat wäärtust wastu; kui X seotud suuruse antud wäärtusest wäiksem on, siis on tema wahekord seotud suuruse antud wäärtust wastu niisama suur, nagu siduwa suuruse wäiksema wäärtuse wahekord siduwa suuruse suuremat wäärtust wastu.

Teiste sõnadega: on ülesandes ettetulewad suurused periwõrrendilised, siis on ühe suuruse wäärtuste wahekord niisama suur, nagu teise suuruse wastawate wäärtuste wahekord; on need suurused wastuwõrrendilised, siis on ühe suuruse wäärtuste wahekord niisama suur, nagu teise suuruse wastawate wäärtuste wastupidine wahekord.

Wäljarehkendamiseks kirjutame arutuste põhjal saadud kaks ühtlast wahekorda wõrrendina üles. Sellest wõrrendist leiame X, kui meie wõrrendi pea-omaduse põhjal kahe tuntud liikme kaswatist kolmandama tuntud liikmega jagame. Jagamise märgiks wõtame murrujoone. On kõik teised tuntud liikmed täisarwud, siis on wäljaarwamine iseenesest silmapaistew. On mõned neist ehk kõik murrud, siis toimetame nendega, nagu murdude kaswatamise ja jagamise juures toimetatakse, meelespidades, et murruga jagamise asemel wastupidise murruga kaswatada wõib.

On antud arwude seas mõni kümnendmurd, siis on sagedasti kasulik murrukoma ära kaotada murrujoone peal ja murrujoone all olewat arwu ühe ja sellesama järgu-ühelisega kaswatades.

Sedawiisi wõime niikaugele jõuda, et murrujoone peal ja murrujoone all ettetulewad tegurid ainult täisarwud on. Enne aga, kui meie joone peal ja joone all olewate arwude kaswatiseid hakkame wälja arwama, on tingimata tarwilik kõik koondada, mis aga koondada wõib.

§ 264. Liht kolmeliikme arwamine ühe kaudu.

Wõtame needsamad ülesanded, mis meie wõrrendi abil wälja rehkendasime, ja näitame, kuidas neid teist wiisi wälja rehkendatakse.

a) Suurused on periwõrrendilised.

1-ne ülesanne.

Rakendus.

18 naela suhkrut maksawad 216 kop.
22 „ „ „ ? „

Wäljarehkendamine.

18 naela suhkrut maksawad . . . . . 216 kop.
1 „ „ maksab 18 korda wähem, s. o. $\frac{216}{18}$ kop.
22 „ „ maksawad 22 „ enam, s. o. $\frac{\overset{12}{216.22}}{\underset{1}{18,}}$ k. = 264 k.

2-ne ülesanne.

Rakendus.

$\frac{13}{3}$ tunniga käib jalakäija $\frac{104}{5}$ wersta ära.
$\frac{5}{2}$ „ „ „ ? „ „

Wäljarehkendamine.

$\frac{13}{3}$ tunniga käib jalakäija . . . . . $\frac{104}{5}$ wersta.
$\frac{1}{3}$ „ „ „ 13 korda wähem ära, s.o. $\frac{104.}{5.13.}$ wersta.
1 „ „ „ 3 „ enam „ „ $\frac{104.3}{5.13}$ wersta.
$\frac{1}{2}$ „ „ „ 2 „ wähem „ „ $\frac{104.3.}{5.13.2.}$ wersta.
$\frac{5}{2}$ „ „ „ 5 korda enam ära, s. o. $\frac{104.3.5}{5.13.2}$ wersta =
= 12 wersta.

Sellesama ülesande wäljarehkendamist toimetatakse ka weel nii:

$\frac{13}{3}$ tunniga käib jalakäija . . . . . $\frac{104.}{5}$ wersta.
1 „ „ „ $\frac{13}{3}$ korda wähem, s. o. $\frac{104.3.}{5.13}$ „
$\frac{5}{2}$ „ „ „ $\frac{5}{2}$ korda enam, s. o. $\frac{104.3.5}{5.13.2}$ „ = 12 wersta.

b) Suurused on wastuwõrrendilised.

3-as ülesanne.

Rakendus.

Kui rongi kiirus 42 wersta on, siis tarwitab rong A. ja W. wahel 20 tundi,
„ „ „ 56 „ „ „ „ „ „ „ „ ? „

Wäljarehkendamine.

Kui rongi kiirus 42 wersta on, siis tarwitab rong teatawa maa ärasõitmiseks 20 tundi. Kui rongi kiirus 1 werst on, siis tarwitab rong teatawa maa ärasõitmiseks 42 korda enam aega, s. o. 20.42 tundi. Kui rongi kiirus 56 wersta on, siis tarwitab rong teatawa maa ärasõitmiseks 56 korda wähem aega, s. o. $\frac{20.42}{56}$ tundi = 15 tundi.

4-as ülesanne.

Rakendus.

Kui riie 2 arsina lai on, siis läheb teda 4,5 arsinat,
„ „ 1,8 „ „ „ „ „ „ ? „

Wäljarehkendamine.

Kui riie 2 ars. lai on, siis läheb teda . . . . . 4,5 ars.
„ „ 1 „ „ „ „ „ „ 2 korda enam, s.o. 4,5.2 ars.
„ „ 1,8 „ „ „ „ „ „ 1,8 „ wähem, s.o. $\frac{4,5.2}{1.8}$ ars. = 5 ars.

5-es ülesanne.

Rakendus.

5-e jõuga töötades tarwitab inimene ühe töö jaoks 8 päewa,
4-a „ „ „ „ „ „ „ ? „

Wäljarehkendamine.

5-e jõuga töötades tarwitab inimene ühe töö jaoks 8 päewa. 1-e jõuga töötades tarwitab inimene sellesama töö jaoks 5 korda enam aega, s. o. 8.5 päewa. 4-a jõuga töötades tarwitab inimene sellesama töö jaoks 4 korda wähem aega, s. o. $\frac{8.5}{4}$ päewa = 10 päewa.

Waatame lähemalt, milles seisab liht kolmeliikme arwamise ülesannete rehkendamine ühe kaudu.

Ülesande rakendamine kujuneb niisamuti, nagu wõrrendi abil rehkendamise juures.

Wäljarehkendamise juures arutame järgmiselt:

Siduwa suuruse tingiwa arwulise wäärtuse pealt läheme 1-e peale üle ja otsime, missugune seotud suuruse arwuline wäärtus wastab siduwa suuruse 1-le. On antud suurused periwõrrendilised, siis peame seotud suuruse antud wäärtust siduwa suuruse esimese arwuga jagama, on suurused wastuwõrrendilised, siis peame kaswatama.

1-e pealt läheme siduwa suuruse küsiwa wäärtuse peale üle ja otsime, missugune seotud suuruse arwuline wäärtus temale wastab. On antud suurused periwõrrendilised, siis peame 1-le wasta-

wat seotud suuruse wäärtust siduwa suuruse teise arwuga kaswatama, on suurused wastuwõrrendilised, siis peame jagama.

Kaswatamist ja jagamist ei pane meie mitte otsekohe toime, waid meie tähendame kõik tehted murru joone külles ära. Et mitte ilmaasjata aega wiita, kirjutame ainult ühe murrujoone ja kõik arwud wiime selle murrujoone külge. Kõige parem on murru joont keskmise rea kohale kirjutada. Wäljaarwamine kujuneb siis järgmiselt:

Rakendus:

18 naela suhkrut maksawad 216 kop.
22 „ „ „ ? „

Wäljarehkendamine.

18 naela suhkrut maksawad . . . . . .
1 „ „ maksab 18 korda wähem, s. o. $\frac{216 \cdot 22}{18}$ k. = 264 k.
22 „ „ maksawad 22 „ enam, s. o.

Kostus: 2 rbl. 64 kop.

Weel lühemalt wõime oma ülesannet rakendada, kui meie arutades antud arwusid enam teist korda ei kirjuta, 1 aga siduwa suuruse wäärtuste kohale üles kirjutame.

Ülesande rakendus kujuneb siis järgmiselt, arutus jääb endiseks.

Rakendus.

1
Kui rongi kiirus 42 wersta on, siis tarwitab ta A. ja W. wahet sõites 20 t.
„ „ „ 56 „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ X „

$$X = \frac{20 \cdot 42}{56} \text{ tundi} = 15 \text{ tundi.}$$

Tähendus 1. Peastrehkendamise juures arwame alati ühe kaudu.

Tähendus 2. On ülesandeid olemas, mida mitte küllalt sünnis ei ole ühe kaudu wälja arwata.

Näituseks:

Kui 30-e wersoki laia riiet ülikonna jaoks 5 arsinat läheb, siis ei ole mitte õige, et 1-e wersoki laia riiet (30×5) arsinat läheb, sest 1 wersoki laiast paelast ei õmmelda riideid.

Kui 5 meest küüni 12 päewaga walmis ehitawad, siis ei wõi weel ütelda, et 1 mees küüni (12 . 5) päewaga walmis ehitaks, sest et palkisid tarwilisele kõrgusele üks mees üksi tõsta ei jõua. Niisuguste ülesannete juures on kohasem wõrrendit tarwitada.

Mitmekordne kolmeliikme arwamine.

§ 265. Môiste äramääramine.

Ühel suurusel wõib sidet olla mitte ainult ühe, waid mitme wõrrendilise suurusega. Ülesanded kus 5-e, 7-e, 9-a jne. antud

suuruse[1]) kaudu neile 6-s, 8-as, 10-es jne. võrrendiline otsitakse, nimetatakse mitmekordse kolmeliikme arwamise ülesanneteks ja niisuguste ülesannete wäljaarwamise wiisi mitmekordseks kolmeliikme arwamiseks.

Kui ülesandes 3 suurust[2]) ettetulewad, siis on 2 neist siduwad suurused;
„ „ 4 „ „ „ „ 3 „ „ „
„ „ 5 „ „ „ „ 4 „ „ „ jne;
seotud suurusi on alati 1 ainus.

Siduwad suurused ei ole üksteisega mitte ühenduses, waid igaüks mõjub iseseiswalt seotud suuruse peale.

§ 266. Mitmekordne kolmeliikme arwamine ühe kaudu.

Ülesanne. Peremees maksis 3-le päiwilisele 10-e päewa eest 21 rbl.; mitu päewa tegiwad 5 päiwilist seesama päewa-palga eest tööd, kui peremees neile 28 rubla wälja maksis?

Rakendus:

21 rubla maksetakse 3-le päiwilisele 10 päewa eest;
28 „ „ 5-le „ ? „ „

Lahutame selle ülesande liht kolmeliikme arwamise ülesanneteks.

1) 21 rubla maksetakse 10-ne päewa eest (3-le päiwilisele)
28 „ „ ? „ „ (3-le päiwilisele).

21 rubla maksetakse . . . . . .
1 „ „ 21 kord lühema aja eest $\frac{10.28}{21}$ p. eest $= \frac{40}{3}$ p. eest.
28 „ „ 28 „ pikema „ „

2) 3-le päiwilisele makstakse teataw summa $\frac{40}{3}$ päewa eest
5-le „ „ seesama „ ? „ „

3-le päiwilisele maksetakse teataw summa

1-le päiwilisele maksetakse seesama s-ma
3 korda pikema aja eest, s. o. . . . . $\frac{40.3}{3.5}$ p. eest. $= 8$ p. eest.

5-le päiwilisele maksetakse seesama s-ma
5 korda lühema aja eest, s. o. . . . .

Nii leidsime, et 5-le päiwilisele makseti 28 rubla 8 päewa eest.

---

1) Siin kohal tarwitatakse sõna „suurus“ mõttes „suuruse arwuline wäärtus“.
2) Siin kohal tarwitatakse sõna suurus oma päris mõttes.

Nagu sellest näitusest selgub, rakendatakse mitmekordse kolmeliikme arwamise ülesanne niisamuti, nagu liht kolmeliikme arwamise ülesanne. Wäljarehkendamise juures wõetakse enne üks siduw suurus käsile, teised siduwad suurused jäetakse kõrwale; minnakse tema tingiwa wäärtuse pealt 1 peale ja 1 pealt küsiwa wäärtuse peale. Siis wõetakse korda mööda teised suurused käsile ja talitatakse nendega just niisamuti. Selle juures ei pruugi meie oma ülesannet sugugi liht kolmeliikme ülesandeks lahutada. Meie ülesande wäljaarwamine kujuneb siis nii:

Rakendus.

21 rubla maksetakse 3-le päiwilisele 10 päewa eest
28 „ „ 5-le „ ? „ „

21 rubla maksetakse 3-le päiwilisele . . . . . .
1 „ „ (3-le „) 21 kord wähema aja eest, s. o.
28 „ „ (3-le „) 28 „ enama „ „ s. o. $\frac{10 \cdot 28 \cdot 3}{21 \cdot 5}$ p. e. = 8 päewa eest.
(28 „ „) 1-le „ 3 „ enama „ „ s. o.
(28 „ „) 5-le „ 5 „ wähema „ „ s. o.

Kui meie rublade kohta arutades klambritesse wõetud päiwiliste arwu sugugi ei kirjuta, siis wõime päiwiliste kohta arutades rublade arwud ka kirjutamata jätta, päiwiliste arwud aga klambrite asemele päiwiliste kohta kirjutada. Siis saab ülesande rakendus lühema kuju:

21 rubla maksetakse 3-le päiwilisele 10 päewa eest;
28 „ „ 5-le „ ? „ „

21 rubla maksetakse 3-le päiwilisele
1 „ „ 1-le „ $\frac{10 \cdot 28 \cdot 3}{21 \cdot 5}$ p. eest = 8 p. eest.
28 „ „ 5-le „

Weel lühemalt wõime oma ülesannet rakendada, kui meie harilikult arutades ainult 1-ed wastawate suuruste wäärtuste kohale üles kirjutame;

Rakendus:

$\overset{1}{21}$ rubla maksetakse $\overset{1}{3}$-le päiwilisele 10 päewa eest;
28 „ „ 5-le „ X „ „

$$X = \frac{10 \cdot 28 \cdot 3}{21 \cdot 5} = 8 \text{ (päewa eest).}$$

II-ne ülesanne. Tartu majaperemees tarwitab 5-e kuu jooksul oma maja jaoks, kus 4 kollet on, 6 sülda kuusepuid.

Kui palju kasepuid peab Peterburi majaperemees sügisel ostma, et 45-t tema majas olewat kollet 6 kuu 20 päewa jooksul kütta, kui $7\frac{1}{2}$ sülda kasepuid niisama palju soojust annawad, kui 9 sülda kuusepuid ja kui meie arwame, et iga kolle läbisegi ühepalju soojust peab andma?

Ettewalmistamine:

Et $7^1/_2$ sülda kasepuid niisama palju soojust annawad, kui 9 sülda kuusepuid, siis wõime ütelda, et kasepuude soojendamise jõud on 9, kuusepuude oma $7^1/_2$ ehk $^{15}/_2$.

Rakendus:

Kui puude soojendam. jõud $\frac{15}{2}$ on, siis tarwitawad 4 kollet 5 kuu jooksul 6 sülda puid

„ „ „ „ 9 „ „ „ 45 „ $\frac{20}{3}$ „ „ ? „ „

Täieline arutus.

Kui soojendamise jõud $\frac{15}{2}$ on, siis tarwitawad 4 kollet 5 kuu jooksul 6 s. puid,

„ „ „ 1 „ „ „ (4 „ 5 „ „ „)
„ „ „ 9 „ „ „ (4 „ 5 „ „ „)
(„ „ „ 9 „ „) „ 1 „ (5 „ „ „)
(„ „ „ 9 „ „) „ 45 „ (5 „ „ „)
(„ „ „ 9 „ „ „ 45 „) 1 „ „
„ „ „ 9 „ „ „ 45 „) $\frac{20}{3}$ „ „

$\frac{15}{2}$ korda enam puid, s. o. $\frac{6.15}{2}$ sülda puid

9 „ wähem „ s o. $\frac{6.15}{2.9}$ „ „

4 „ wähem „ s. o. $\frac{6.15}{2.9.4}$ „ „

45 „ enam „ s. o. $\frac{6.15.45}{2.9.4}$ „ „

5 „ wähem „ s. o. $\frac{6.15.45}{2.9.4.5}$ „ „

$\frac{20}{3}$ „ enam „ s. o. $\frac{6.15.45.20}{2.9.4.5.3}$ „ „ = 75 s. p.

Lühem wäljarehkendamise wiis:

Kui puude soojendam. jõud $\frac{15}{2}$ on, siis tarwit. $\overset{1}{4}$ kollet $\overset{1}{5}$ kuu jooksul 6 sülda;

„ „ „ „ 9 „ „ „ 45 „ $\frac{20}{3}$ „ „ X „

$$X = \frac{6.15.45.20}{2.9.4.5.3} = 75 \text{ (sülda).}$$

§ 267. Mitmekordne kolmeliikme arwamine wõrrendite abil.

Ülesanne. 12 kangrut kuduwad 50 kangast á 48 küünart pikk, 6-e nädala sees walmis, kui nad nädalas 6 päewa, á 10 tundi tööd teewad; mitu 40 küünra pikkust kangast kuduwad 36 kangrut 4-ja nädala sees, kui nad iga nädala 5 päewa á 12 tundi tööd teewad (R. Kallas, Mõistlik rehk.)?

Rakendus:

Kui näd. 6 tööp. päewas 10 t. tööd teha ja iga kangas 48 küünart pikk, siis kuduwad 12 kangrut 6 nädalaga 50 kangast;
„ „ 5 „ „ 12 „ „ „ „ „ „ 40 „ „ „ „ 36 „ 4 „ x „

Täieline arutus ja wäljarehkendamine: Lahutame selle ülesande liht kolmeliikme arwamise ülesanneteks. Et meie ülesandes otsitawa arwu X-ga tähendasime, siis peame liht ülesannetes otsitawad arwud teiste tähtedega ära tähendama; selleks tarwitame Ladina (Prantsuse) keele abd wiimaseid tähti.

1) Kui nädalas 6 tööpäewa, siis jõutakse 50 kangast kududa
„ „ 5 „ „ „ „ Y „ „

Mida enam tööpäewi, seda enam kangaid jõutakse kududa; mida wähem tööpäewi, seda wähem kangaid jõutakse kududa. Sel korral on tööpäewi wähem, seepärast jõutakse ka wähem kangaid kududa. Järjelikult on y wähem kui 50; nimelt y on wähem kui 50 nii mitu korda, mitu korda 5 (tööpäewa) wähem on, kui 6 (tööpäewa). Seda kirjutame wõrrendina järgmiselt:

$$Y : 50 = 5 : 6 \quad Y = \frac{50.5}{6} = \frac{250}{6}$$

2) Kui päewas 10 tundi tööd teha, siis jõutakse $\frac{250}{6}$ kangast kud.
„ „ 12 „ „ „ „ „ Z „ „

Mida pikem tööpäew, seda enam kangaid jõutakse kududa; mida lühem tööpäew, seda wähem kangaid jõutakse kududa. Sel korral on tööpäew pikem, seepärast jõutakse enam kangaid kududa. Järjelikult on Z suurem kui $\frac{250}{6}$ nimelt Z on suurem ku: $\frac{250}{6}$ nii mitu korda, mitu korda 12 (tundi) suurem on kui 10 (tundi). Seda kirjutame wõrrendina järgmiselt:

$$Z : \frac{250}{6} = 12 : 10 \qquad Z = \frac{250.12}{6.10} = 50$$

3) Kui iga kangas 48 küünart pikk, siis jõutakse 50 kangast k.
„ „ „ 40 „ „ „ „ U „ „

Mida pikem kangas, seda wähem kangaid jõutakse kududa; mida lühem kangas, seda enam kangaid jõutakse kududa. Sel korral on kangas lühem; seepärast jõutakse enam kangaid kududa. Järjelikult on U suurem kui 50; nimelt: U on suurem kui 50 nii mitu korda, mitu korda 48 suurem on, kui 40. Seda kirjutame wõrrendina järgmiselt:

$$U : 50 = 48 : 40 \qquad U = \frac{50.48}{40} = 60$$

4) 12 kangrut kuduwad 60 kangast
36 „ „ V „

Mida enam kangruid, seda enam kangaid jõutakse kududa; mida wähem kangruid, seda wähem kangaid jõutakse kududa. Sel korral on kangruid enam; seepärast jõutakse e n a m kangaid kududa. Järjelikult on V s u u r e m kui 60; nimelt: V on nii mitu korda s u u r e m kui 60, mitu korda 36 s u u r e m on, kui 12. Seda kirjutame wõrrendina järgmiselt:

$$V : 60 = 36 : 12 \qquad V = \frac{60.36}{12} = 180$$

---

5) 6 nädalaga jõutakse 180 kangast kududa

4 „ „ X „ „

Mida enam aega, seda enam kangaid jõutakse kududa; mida wähem aega, seda wähem kangaid jõutakse kududa. Sel korral on aega wähem; seepärast jõutakse ka w ä h e m kangaid kududa. Järjelikult on x w ä h e m kui 180; nimelt: x on nii mitu korda w ä h e m kui 180, mitu korda 4 w ä h e m on, kui 6. Seda kirjutame wõrrendina järgmiselt:

$$X : 180 = 4 : 6 \qquad X = \frac{180.4}{6} = 120$$

Kui meie arutusi üles ei kirjuta, ja ülesande wäljarehkendamist see läbi lühendame, et meie Y, Z, U, V mitte wälja ei arwa, waid selle asemel kokkupandud wõrrendit tarwitame, nagu allpool näha, siis kujuneb ülesande wäljarehkendamine järgmiselt:

R a k e n d u s.

Kui näd. 6 tööp. päewas 10 t. tööd teha ja iga kangas 48 küünart pikk, siis kuduwad 12 kangrut 6 nädalaga 50 kangast;
„ „ 5 „ „ 12 „ „ „ „ „ „ 40 „ „ „ „ 36 „ 4 „ x „

---

1) Kui nädal. 6 tööp. siis jõutakse 50 kangast kududa,
„ „ 5 „ „ „ Y „ „

2) Kui päewas 10 tundi tööd t. siis jõut. Y kang. kududa,
„ „ 12 „ „ „ „ „ Z „ „

3) Kui iga kangas 48 küünart pikk, siis jõut. Z kang. kud.,
„ „ „ 40 „ „ „ „ U „ „

4) 12 kangrut kuduwad U kangast
36 „ „ V „

5) 6 nädalaga jõutakse V kangast kududa,
4 „ „ X „ „

Kui teised tingimised needsamad on, mis eelminewas lihtülesandes. Nüüd seame iga lihtülesande jaoks wastawa wõrrendi üles:

$\frac{Y}{50} = \frac{5}{6}$ (periwõrr.)

$\frac{Z}{Y} = \frac{12}{10}$ (periwõrr.)

$\frac{U}{Z} = \frac{48}{40}$ (wastuw.)

$\frac{V}{U} = \frac{36}{12}$ (periwõrr.)

$\frac{X}{V} = \frac{4}{6}$ (periwõrr.)

Saadud wõrrendid kaswatame liikme kaupa üksteisega: $\frac{Y.Z.U.V.X}{50.Y.Z.U.V} = \frac{5.12.48.36.4}{6.10.40.12.6.}$

Lühendame esimest wahekorda, siis kaduwad Y, Z, U, V, ära: $\frac{X}{50} = \frac{5.12.48.36.4}{6.10.40.12.6.}$

Leiame X: $X = \frac{50.5.12.48.36.4}{6.10.40.12.6} = 120$ (kangast).

§ 268. Protsent.

Protsent on Ladina keele sõna ja tähendab „saja eest", „sajast", „saja pealt" (pro = eest, centum = 100).

Näit.: 1896-al aastal oli kirjaoskamataid nekrutisid Wenemaa sisemistes (semstwo) kubermangudes 55 protsenti, Läänemere kubermangudes — 5 protsenti; see tähendab: sisemistes kubermangudes ei oskanud 100-st nekrudist 55 nekruti ei lugeda ega kirjutada, 45 oskasiwad; Läänemere kubermangudes ei oskanud 100-st nekrudist 5 nekruti ei lugeda ega kirjutada, 95 oskasiwad.

Lühidalt kirjutatakse „protsent": %; see märk on arwust 100 tuletatud.

1-ne ülesanne: Talu on 250 wakamad suur; 2% kõigest maast on õuna aia all. Mitu wakamaad on õuna aed suur?

2% tähendab: 100 wakamaast on 2 wakamaad õuna aia all;
1 „ „ 2:100 = 0,02 „ „ „
250 „ „ 0,02×250=5 „ „ „

2-ne ülesanne. Majaomanik tahab oma maja 14,200 rbl. eest ära müüa ja lubab maaklerile (sellele, kes ostja muretseb) 2% müügi hinnast. Kui palju saab maakler? 2% tähendab:

100 rbl. pealt saab maakler 2 rbl.
1 „ „ „ „ (2 : 100) rbl. = 0,02 rbl.
14200 „ „ „ „ (0,02 × 14200) rbl. = 284 rbl.

Neist näitustest selgub, et antud arwust 2% leidmiseks, peame meie antud arwu $0,02 = \frac{2}{100}$-ga kaswatama. Niisama peame ka toimetama, kui meie antud arwust $\frac{2}{100}$ jagu leida tahame. Niiwiisi arutades leiame, et kui meie antud arwust kas 3%, 4%, 5% jne., ehk $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$ jne. leida tahame, meie ikka antud arwu $\frac{3}{100}$-ga, $\frac{4}{100}$-ga, $\frac{5}{100}$-ga jne. kaswatama peame. Seepärast räägitakse:

Protsent on sajandikkude jagude arw.

Näitused: 1) 3% 2400-st = $\frac{3}{100}$-kku 2400-st = $\frac{2400 \cdot 3}{100} = 72$

2) Linnas on 50000 elanikku; 32% nendest on sakslased. Kui palju on linnas sakslasi?

1% 50000-st = 50000 : 100 = 500
32% 50000-st = 500 × 32 = 16000 (saksl.).

Juht: Et mingist arwust antud protsenti leida, peame seda arwu 100-ga jagama ja jaondit antud protsendi arwuga kaswatama.

Mõnikord kergendame protsendi leidmist, kui meie protsendi teise jagudena awaldame. Selleks on kasulik meeles pidada:

$5\% = \frac{1}{20}$ antud arw. $10\% = \frac{1}{10}$ antud arw. $12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$ antud arw.

$20\% = \frac{1}{5}$ „ „ $25\% = \frac{1}{4}$ „ „ $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$ „ „

$40\% = \frac{2}{5}$ „ „ $50\% = \frac{1}{2}$ „ „ $60\% = \frac{3}{5}$ „ „

$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ „ „ $75\% = \frac{3}{4}$ „ „ $80\% = \frac{4}{5}$ „ „

100% = kõik antud arw.

3-as ülesanne. Põllumees pani 40 rukitera idanema; neist ajasiwad 34 tera idu, teised ei ajanud. Kui suur oli idanemise protsent?

1) 40-st terast idanes 34
100-st „ „ X

100-st terast wõiksiwad nii mitu korda rohkem idaneda, mitu korda 100 enam on kui 40; X: 34 = 100: 40.

$X = \frac{34 \cdot 100}{40} = 85\ (\%)$.

(2 40 tera on 100%
1 „ „ $\frac{100}{40}\%$
34 „ „ $\frac{100 \cdot 34}{40}\% = 85\%$

3) 34 tera on
40-st $\frac{34}{40}$-kku
jagu $= \frac{17}{20} =$
$\frac{85}{100}$ j. $= 0{,}85$.
0,85 j. tähendab 85%

4-as ülesanne. Liiwimaa (ilma Saaremaata) on 37241 □ wersta suur; Wõru maakond on 3552 □ wersta suur. Mitu protsenti Liiwimaast (ilma Saaremaata) wõtab Wõru maakond oma alla?

37241 □ werst. tuleb 3552 □ w. Wõru maak. jaoks;
1 „ „ $\frac{3552}{37241}$ „ „ „ „
100 „ „ $\frac{3552 \times 100}{37241}$ „ „ „ 10. 9,5 (%)

37241 □ w. on 100%
1 „ „ $\frac{100}{37241}\%$
3552 „ „ $\frac{100 \cdot 3552}{37241}\% = 9{,}5\%$

Juht: Et leida, mitu protsenti ühest arwust teine on, peame teist arwu 100-ga kaswatama ja kaswatist esimese arwuga jagama.

Wõtame weel mõne protsendi kohta käiwa ülesande:

5-es ülesanne:

Tulekahju korral sai kaupmehel üks jagu kalewit rikutud; seda kalewit müüs ta 35% kahjuga ära ja nii lunastas ta selle kalewi eest 819 rbl. Kui palju maksis rikutud kalew ja kui palju sai kaupmees kahju?

1) Mitu % kalewi hinnast sai kaupmees?

$$100\% - 35\% = 65\%.$$

2) Kui palju maksis kalew?

65 rbl. lunastas ta 100 rbl. asemel
819 „ „ „ X „ „

$$X = \frac{100 \cdot 819}{65} = 1260 \text{ rbl.}$$

3) Kui palju sai kaupmees kahju?

1260 rbl. — 819 rbl. = 441 rbl.

6-es ülesanne. Paar kalossi tähti maksab kaupmehele enesele 3 kop., ta müüb neid aga 10 kop. eest paar ära. Mitu protsenti ostuhinnast on müügi hind ja mitu protsenti wõtab kaupmees kasu?

3 kop asemel wõtab kaupmees 10 kop.
1 „ „ „ „ $\frac{10}{3}$ „
100 „ „ „ „ $\frac{10 \cdot 100}{2}$ „ $= 333^1/_3$ kop.

3 kop. on 100%.
1 „ „ $\frac{100}{3}\%$.
10 „ „ $\frac{100 \cdot 10}{3}\% =$
$= 333^1/_3\%$.

s. o. $333^1/_3\%$.

2) $333^1/_3\% - 100\% = 233^1/_3\%$ (kasu).

Iseäranis tähtis on protsent raha-asjanduses.

§ 269. Rahakasu arwamises ettetulewad suurused.

Kui üks inimene teise käest raha laenab, siis on see, kes raha laenuks annab, laenuandja (wõla uskuja — кредиторъ) ja see, kes raha laenuks wõtab, — laenuwõtja (wõlgnik — должникъ). Raha laenamise korral wõtab laenuandja laenuwõtja käest tasu. See tasu määratakse protsentides ära. See tähendab: laenuandja ja laenuwõtja leppiwad kokku, mitu rubla aasta kohta iga sada rubla eest (mitu kopikat iga sada kopika eest) laenuwõtja laenuandjale maksab. Järjelikult on protsent (protsendi kõrgus, protsendi määr — процентъ, процентная такса) ühel aastal 100 rbl. eest maksetaw rublade arw. Protsent wõib ka teise ajajärgu, näit. kuu, kohta äramääratud saada; näit. Weneriigis on seaduse poolt ära keelatud laenu eest enam kui 1% kuus wõtta, kes enam wõtab, langeb liiakasu wõtmise eest wastutuse alla. Kui protsent mitte aasta kohta arwatud ei ole, siis peab ajajärk nimetatud olema. Kui protsent kindlaks on määratud, siis on sellega ka tasu suurus kõige laenatud summa ja kõige aja eest ära määratud. Tasu, mis kõige laenatud summa ja kõige laenu aja eest maksetakse, on kasud (protsendid, intressid — прибыль, протцент-

ныя деньги, проценты). Laenuks ehk hoiukassasse (panka) kasude peale antud raha-summa on kapital (капиталъ). Kapital ühes kasudega on lõpukapital (нараще́нный капиталъ); selle wastu on kasude peale antud kapital — alguskapital (первоначальный капиталъ). Näitus: Kask laenas Rüütli käest 300 rbl. 2-ks aastaks 8% protsendi peale. Kui palju peab Kask Rüütlile tagasi maksma?

1-e saja rbl. eest aastas — 8 rbl.; 3-e saja eest 1-s aastas — 3.8 rbl. = 24 rbl.
3-e „ „ „ „ — 24 „ 3-e „ „ 2-s „ — 2.24 „ = 48 „
300 rbl. + 48 rbl. = 348 rbl.

Rahakasu arwamises tulewad 5 suurust ette:

1) Alguskapital (300 rbl.); 2) aeg (2 aastat); 3) protsendi kõrgus (8%); 4) kasud ehk intressid (48 rbl.); 5) lõpukapital (348 rbl.).

Kasud on alguskapitaliga, ajaga ja protsendi kõrgusega periwõrrendilised, sest kui meie neist ühte, alguskapitali ehk aega ehk protsendi kõrgust, 2, 3, 4 jne. korda suurendame, siis suurenewad ka kasud 2, 3, 4 jne. korda.

Alguskapital, aeg ja protsendi kõrgus on isekeskes wastuwõrrendilised, sest ühewõrra kasusid saame 2, 3, 4 jne. korda wähema kapitali juures ainult 2, 3, 4 jne. korda pikema aja sees ehk 2, 3, 4 jne. korda kõrgema protsendi läbi, ja ühest ja sellestsamast kapitalist saame ühewõrra kasusid 2, 3, 4 jne. korda madalama protsendi juures ainult 2, 3, 4 jne. korda pikema aja sees.

Lõpukapital = alguskapital + kasud.

Et lõpukapital 2, 3, 4 jne. korda suureneks, peab kumbki kokkuarwataw, nii hästi alguskapital kui ka kasud, 2, 3, 4 jne. korda suurenema.

Kui meie ainult aega, ehk protsendi kõrgust ehk kasusid 2, 3, 4 jne. korda suurendame, siis ei suurene seepärast weel mitte alguskapital; lõpukapital suureneb küll, aga mitte 2, 3, 4 jne. korda. Suurendame meie aga alguskapitali 2, 3, 4 jne. korda, siis suurenewad ka kasud 2, 3, 4 jne. korda ja sellega suureneb ka lõpukapital niisama palju korda. Järjelikult on lõpukapital ainult alguskapitaliga periwõrrendiline, teiste suurustega ei ole ta sugugi wõrrendiline.

Et lõpukapital = alguskapital + kasud, siis wõime 3-e suuruse kaudu, milledest üks tingimata aeg ehk protsendi kõrgus peab olema, teised suurused leida.

Rahakasu arwamise juures loetakse harilikult 1 kuu = 30 päewa, 1 aasta = 360 päewa.

§ 270. Rahakasu arwamise ülesannete aluskujud.

I. aluskuju: Antud on: alguskapital, aeg ja protsendi kõrgus; otsitakse: kasud ja lõpukapital.

N. laenas M. käest 375 rbl. 1 aasta 4 kuu peale ja maksab 6%. Kui palju saab M. kasu ja kui suur on ta lõpukapital?

Rakendus:

100 rbl. toowad 12 kuu jooksul 6 rbl. kasu
375 „ „ 16 „ „ X „ „

100 rbl. toowad 12 kuu jooksul
1 „ „ (12 „ „) 100 kord wähem kasu s. o. $\frac{6 \cdot 375 \cdot 6}{100 \cdot 12}$ rbl. = 30 r.
375 „ „ (12 „ „) 375 „ enam „ „ s. o.
(375 „ „) 1 „ „ 12 „ wähem „ „ s. o.
(375 „ „) 16 „ „ 16 „ enam „ „ s. o.
lõpukapital = 375rbl. + 30 rbl. = 405 rbl.

II a. aluskuju. Antud: alguskapital, aeg ja kasud; otsitakse protsent. 4200 rbl. tõiwad 7-e kuu jooksul 134 rbl. 75 kop. kasu, mitme protsendi peal oliwad nad kasu kandmas?

Rakendus:

4200 rbl. toowad 7 kuu jooksul 134,75 rbl.
100 „ „ 12 „ „ X „

4200 rbl. toowad 7 kuu jooksul
1 „ „ (7 „ „) 4200 kord wähem kasu, s. o.
100 „ „ (7 „ „) 100 „ enam „ „ s. o.
(100 „ „) 1 „ „ 7 „ wähem „ „ s. o.
(100 „ „) 12 „ „ 12 „ enam „ „ s. o.

$$\frac{134{,}75 \cdot 100 \cdot 12}{4200 \cdot 7} \text{ rbl.} = 5\frac{1}{2} \text{ rbl.}$$

Kostus: $5\frac{1}{2}$ %.

II b. Antud: alguskapital, aeg ja lõpukapital; leida protsendi kõrgus.

A. laenas B-le 480 rbl. $2\frac{1}{2}$ aasta peale ja sai 528 rubla tagasi. Mitu protsenti wõttis A.? Lõpukapital — alguskapital = kasud: 528 rbl. — 480 rbl. = 48 rbl. Edasi nagu II a.

II c. Antud: lõpukapital, aeg ja kasud; leida protsendi kõrgus.

P. maksis S-le 1 aasta 9 kuu pärast oma wõla kasudega ära, kõik kokku 221 rbl., mitu protsenti sai S., kui ta 21 rubla kasu sai?

Alguskapital = lõpukapital — kasud: 221 rbl. — 21 rbl. = 200 rbl. Edasi nagu II a.

III a. aluskuju. Antud: alguskapital, kasud ja protsent; leida aeg.

Kui kaua aja sees toowad 640 rbl. $4\frac{1}{2}$ % peale arwatud 36 rbl. kasu?

Rakendus:

100 rbl. tarw. 4,5 rbl. kasu kandm. 12 kuud
640 „ „ 36 „ „ „ X „

100 rbl. tarw. 4,5 rbl. kasu kandm.

1 „ „ (4,5 „ „ „) 100 k. enam aega, s. o.
640 „ „ (4,5 „ „ „) 640 „ wähem „ s. o. $\frac{12 \cdot 100 \cdot 36}{640 \cdot 4,5}$ kuud
(640 „ „) 1 „ „ „ 4,5 „ „ „ s. o.
(640 „ „) 36 „ „ „ 36 „ enam „ s. o.

= 15 kuud.

III b. Antud: alguskapital, lõpukapital ja protsendi kõrgus: leida aeg.

Kui palju aja sees kaswab 475 rbl. 489 rbl. 25 kop. peale, kui 4% maksetakse?

Kasud = lõpukapital — alguskapital: 489,25 rbl. — 475 rbl. = 14,25 rbl. Edasi, nagu III a.

III c. Antud: lõpukapital, kasud ja protsendi kõrgus; leida aeg.

H. sai oma raha eest 4,8% juures 86 rbl. 40 kop. kasu; kui kaua aja sees kaswis tema kapital see läbi 806 rubla 40 kop. peale? Alguskapital = lõpukapital — kasud: 806,4 rbl. — 86,4 rbl. = 720 rbl. Edasi nagu III a.

IV-as aluskuju. Antud: kasud, aeg, protsendi kõrgus; leida alguskapital.

Missugune kapital toob 5% peal olles 5 kuu 12 päewa jooksul 405 rubla kasu?

5 rbl. kasu saab 360 p. jooksul 100 r. pealt,
405 „ „ „ 162 „ „ X „ „

5 rbl. kasu saab 360 p. jooksul

1 „ „ „ (360 „ „) 5 kord wäh. kapit. s. o.
405 „ „ „ (360 „ „) 405 „ suur. „ s. o. $\frac{100 \cdot 405 \cdot 360}{5 \cdot 162}$ r. pealt =
(405 „ „) „ 1 „ „ 360 „ suur. „ s. o.
(405 „ „) „ 162 „ „ 162 „ wäh. „ s. o

= 18000 r. pealt.

V-es aluskuju. Antud: lõpukapital, aeg, protsent; leida alguskapital. Et lõpukapitali ja aja ning protsendi wahel wõrrendilist sidet ei ole, siis ei ole wõimalik niisuguseid ülesandeid mitmekordse kolmeliikme arwamise waral rehkendada.

Missugune kapital kaswab 5,5% peal olles $7\frac{1}{2}$ aasta jooksul 5650 rubla suureks?

1) Kui palju kasu toob 100 rbl. $7\frac{1}{2}$ aasta jooksul?

12 kuu jooksul toob 5,5 rbl.
90 „ „ „ X „

$$X = \frac{5,5 \cdot 90}{12} = \frac{165}{4} \text{ rbl.}$$

2) Kui suureks kaswab 100 r. $7\frac{1}{2}$ a. sees? 100 r. + $\frac{165}{4}$ r. = $\frac{565}{4}$ r.

3) Missugune kapital kaswab 5650 rublaks $7^1/_2$ aasta jooksul?

$\frac{565}{4}$ rbl. lõpukapitali saadakse 100 rbl. pealt,

5650 „ „ „ Y „ „

$$Y = \frac{100 \cdot 4 \cdot 5650}{565} \text{ rbl.} = 4000 \text{ rbl.}$$

Kostus: 4000 rbl.

Kakskümnesüheksas peatükk: Weksli diskonto.

§ 271. Weksel.

Weksel on seaduses määratud korra järele iseäralikul maksulisel paberil allkirjaga antud rahamaksu tõotus. Wekslis peab ülespandud olema: 1) nimetus, et ta weksel on; 2) wäljaandmise koht ja aeg (aasta, kuu, päew); 3) weksli andja maksukohustus; 4) wekslisaaja nimi; 5) weksli summa; 6) maksu tähtaeg; 7) wekslisaaja allkiri. Weksli summa peab tähtedega kirjutatud olema. Maksukohaks on wekslil wäljaandmise koht, kui wäljaandja oma allkirja ees teist maksukohta ära ei ole tähendanud.

Proow:

Pihkwas, 28. apr. 1911. Weksel 500 rubla peale.

28. oktobril 1911. aastal olen mina kohustatud selle weksli järele Pihkwa kaupmehele Peep Niklanile wiissada rubla maksma.

Wõru kaupmees Paap Mõttus.

Wene keeli:

Псковъ, 28 апрѣля 1911. Вексель на 500 рублей.

28 октября 1911 года повиненъ я по сему векселю заплатить Псковскому купцу Пепу Никлану пятьсотъ рублей,

Верроскій купецъ Папъ Мэттусъ.

Ei täida weksel ülewalnimetatud nõudeid mitte, siis puudub temal weksli wõim. Et weksel oma jõusse saaks tõusta, peab tema õiguse teel weksli andjalt wekslisaaja kätte läinud olema. Wekslil on liht wõlatähe ees see tähtis eesõigus, et wekslisaaja wekslit teistele isikutele edasi anda wõib, kuna wõla tähte edasi anda ei saa. Wõtame näituseks ettetoodud weksli proowi. Ütleme, et Niklanile on 1. septembril 1911 seda 500 rubla, mis Mõttus temale wõlgneb, tarwis, Mõttus ei ole aga kohustatud enne 28. oktobrit raha maksma. Siis wõib Niklan tema käes olewa Mõttuse

weksli edasi anda, s. o. ära müüa. Seesama õigus on ka järgmistel weksli saajatel. Weksli edasiandmine sünnib weksli pidaja poolt weksli peale tehtawa pealekirjutuse waral, näituseks: „Minu asemel makske Walgas Walga kaupmehele Paul Karlsonile. Peep Niklan.“ Selle pealekirjutuse põhjal on maksukohaks Walga linn määratud ja iseenesest on mõista, et Niklan Mõttusele seda teada annab.

Pealekirjutus, kus uus wekslisaaja ära on tähendatud, on „nimeline pealekirjutus“. Harilikult ei tähendata aga uut wekslisaajat mitte ära, waid wekslipidaja kirjutab weksli edasiandmiseks ainult oma nime, näit. „Peep Niklan“, peale, mida paljas- ehk blanko-pealekirjutuseks kutsutakse. Niisuguse pealekirjutuse läbi wõtab pealekirjutaja (Niklan) wastutuse weksli andja (Mõttuse) eest oma peale. Kui Mõttus õigel ajal wekslit ära ei maksa, siis wõib Karlson Niklani käest seda raha nõuda. Weksli edasiandjal on ka õigus, muidugi uue wekslisaaja nõusolemisel, kitsendawat pealekirjutust teha: „ilma minu wastutuseta“ (безъ оборота на меня). See weksli edasiandmise õigus teeb weksli wäga hõlpsaks kauplemise abinõuks, sest suuremad kaupmehed maksawad harwa wõetud kauba puhta rahaga kinni; enamasti annawad nad kauba wastu weksli, harilikult 3 kuu peale.

Teine tähtis weksli eesõigus liht wõlatähe ees on see, et weksli järele palju kergem on raha sissenõuda, kui wõlatähe järele. Kui weksli allakirjutaja raha tähtajal ära ei maksa, siis protesteeritakse weksel. Weksli protest seisab selles, et wekslipidaja maksu tähtpäewal ehk kahel järgmisel äripäewal, maksukohas weksli notariusele ette näitab ja notarius saadab weksli wäljaandjale ehk ühele pealekirjutajale nõudmise weel selsamal päewal (ehk järgmisel äripäewal) wekslisummat tema (notariuse) kätte sisse maksta. Ei ole notariuse nõudmine täidetud, siis teeb notarius weksli peale protesti märkuse. Kui wekslimaksu tasumata jätmise pärast protesti on tõstetud, siis wõib wekslipidaja weksli wäljaandjalt ehk pealekirjutajalt nõuda: 1) tasumata wekslisumma ühes 6 prots. maksutähtpäewast kuni maksuni, 2) protesti kulud, 3) terwest maksmata summast 1/4 prots. tasukulu. Kui maksmata jäänud weksel mitte ei ole protesteeritud, siis on kõik pealekirjutajad protesti tõstmata jätmise läbi oma wekslikohustustest wabastatud, weksli wäljaandja kohustus jääb aga kestma ja weksli pidajal on õigus temalt maksmata summa ühes 6 protsendiga, sissekaebamise päewast arwates, nõuda. Wekslipidaja wõib weksli wäljaandjat 5 aasta jooksul ja, kui weksel protesteeritud on, pealekirjutajaid ja käemehi ühe aasta jooksul kohtusse kaebata.

On maksmata weksel kohtusse kaebatud, siis ei ole wastutajal õigust muid wastuwaidlemisi ette tuua, kui ainult 1) tema, wastutaja, allkiri on wõltsitud, ehk 2) weksel ei ole õiguslisel teel nõudja kätte läinud. Niisuguste wastuwaidlemiste põhjal peab aga kohe uurimine ette wõetama. Ei wõi wastutaja niisuguseid wastu-

waidlemisi ette tuua, siis mõistab kohus wiibimata wõlgnewa summa nõudjale wälja.

Kui wekslipidajal wõimalust ei ole isiklikult wekslit protesteerida ja wekslisummat sisse nõuda, siis wõib ta teist isikut wolitada, kes „wolituse-pealekirjutuse“ põhjal kõiki tarwilikka toimetusi ette wõib wõtta.

§ 272. Weksli oodustamine (diskonteerimine).

Enne tähtaega weksli edasiandmise ehk äramüümise korral ei makseta weksli eest mitte kõike summat, mis weksli peale kirjutatud on, sest et wekslil weel seda wäärtust ei ole.

Kui, näit., Kask Kõiwu käest 300 rbl. 6-e kuu peale laenab, siis maksab Kask kõige summa ja kõige aja eest protsendi raha Kõiwule ette ära ja annab weksli 300 rbl. peale wälja. Tahab aga Kõiw Kase käest saadud wekslit 2 kuud enne tähtaega Uibopuule edasi anda, siis peaks ta Kase käest saadud 2-e kuu protsendid Uibopuule ette ära maksma. Nii umbes sünnib ka.

Wahe wõib ainult protsendi kõrguses olla, sest: 1) weksli peale ei kirjutata, mitme protsendi eest raha laenatud on; 2) ei wõi wekslisaaja teada, mitme protsendi eest see, kellele ta pärast weksli ehk edasi annab, oma raha walmis on 2 kuu pääle laenuks andma; 3) ei pruugi sugugi teada olla, kas weksel puhta raha, wõi kauba wastu wälja on antud. Seepärast lepiwad weksli edasiandja Kõiw ja uus wekslisaaja Uibopuu isekeskes kokku, mitu protsenti Uibopuu weksli summast oma kasuks maha arwab. Ütleme, et K. ja U. lepiwad 7% peale kokku. See tähendab: ostaks U. selle weksli 1 aasta enne tähtpäewa, siis arwaks ta 100-st rublast 7 rbl. oma kasuks maha, 300-st rublast seega 21 rbl., aga 2 kuud enne tähtpäewa arwab ta 6-da jao 21-st rublast, s. o. $3^1/_2$ rbl. maha ja 300 rbl. asemel maksab U. K-le 296 rbl. 50 kop. Niisugune oodusearwamine nimetatakse äriliseks oodusearwamiseks. Weksli peal kirjutatud summa on weksli waluuta (tõsine hind); weksli edasiandmise puhul waluutast mahaarwataw summa on weksli oodus ehk diskonto ja weksli waluutast diskonto (ooduse) mahaarwamine on weksli oodustamine ehk diskonteerimine.

Weksli diskonteerimise juures tulewad järgmised suurused ette: 1) waluuta; 2) aeg, mis tähtajani weel ülejääb; 3) diskonto protsent; 4) diskonto ja 5) weksli eest maksetaw summa.

Weksli diskontosse puutuwad ülesanded on rahakasu ülesannete sarnased.

§ 273. Ärilik ooduse arwamine.

Ärilik ooduse arwamine seisab selles, et ooduse (diskonto) protsendid waluuta iga saja rubla kohta arwatakse ja neist maha tõmmatakse. Niisugune ooduse arwamine põhjeneb selle peal, et

raha laenamise juures weksli wastu wõlawõtja wõlauskujale kasud ette ära maksab ja weksli peale ainult laenatud summa üleskirjutab. Järgmised näitused on ühtlasi ka äriliku oodusearwamise ülesannete aluskujud.

I. aluskuju. Antud: waluuta aeg ja protsendi kõrgus; otsitakse oodus ja maksetaw summa. N. tahab M. käest oma raha 500 rbl., mis M. temale weksli järele wõlgneb, 3 kuud enne tähtpäewa kätte saada. M. on sellega nõus, kui N. wekslit 8%-ga oodustab. Kui palju peab M. oma weksli eest N.-le maksma?

Rakendus:

12 kuud enne tähtp. arw. 100-st rublast 8 rbl. maha;
3 „ „ „ „ 500-st „ X „ „

12 k. e. t. arw. 100-st rbl. maha
1 „ „ „ „ (100-st „) „ 12 kord wähem, s. o.
3 „ „ „ „ (100-st „) „ 3 „ enam, s. o. $\frac{8 \cdot 3 \cdot 500}{12 \cdot 100}$ r. = 10 r
(3 „ „ „) „ 1-st „ „ 100 „ wahem, s. o.
(3 „ „ „) „ 500-st „ „ 500 „ enam, s. o.

500 rbl. — 10 rbl. = 490 rbl.

Kostus: M. maksab oma weksli eest 490 rbl.

II. aluskuju. Antud: waluuta, aeg ja oodus (diskonto); otsitakse protsendi kõrgus. Mitme protsendiga oodustati wekslit, kui tema waluutast, mis 475 rbl. suur oli, 4 kuud enne tähtaega 9 rbl. 50 kop. mahaarwati?

Rakendus:

4 kuud enne tähtpäewa arwatakse 475 rbl-st 9,5 rbl maha;
12 „ „ „ „ 100 „ X „ „

4 k. e. t. arw. 475 rbl-st
1 „ „ „ „ (475 „) 4 korda wähem maha, s. o. $\frac{9{,}5 \cdot 12 \cdot 100}{4 \cdot 475}$ r. = 6 r.
12 „ „ „ „ (475 „) 12 „ enam „ s. o.
12 „ „ „ „ 1 „ 475 „ wähem „ s. o.
12 „ „ „ „ 100 „ 100 „ enam „ s. o. Kostus: 6%.

Kui ooduse (diskonto) ehk waluuta asemel weksli eest maksetaw summa on antud, siis wõib ülesannet IIe aluskuju järele rehkendada, sest oodus = waluuta — maksetaw summa ja waluuta = oodus + maksetaw summa.

III. aluskuju. Antud: waluta, oodus ja protsendi kõrgus; otsitakse aeg.

Kui palju aega enne tähtpäewa oodustati 4.200-rublalist wekslit, $5^1/_2{}^0/_0$-ga, kui temast 92 rbl. 40 kop. mahaarwati?

Rakendus ja wäljaarwamine:

Et 100-st r. 5,5 rbl. maha arw. peab weks. 360 p. e. tp. oodust.
„ 4200-st „ 92,4 „ „ „ „ „ X „ „ „ „

Et 100-st r. 5,5 rbl. maha arw., peab weks. 360 p. e. tp. oodust. [1])
„ 4200-st „ niisamapalju „ „ „ Y „ „ „ „

Suurema waluuta juures peab wekslit wähem aega, wähema waluuta juures pikemat aega enne tähtpäewa oodustama. Sel korral on waluuta suurem, see pärast peab wekslit wähem aega enne tähtpäewa oodustama; nimelt Y on wähem, kui 360 nii mitu korda, mitu korda 100 wähem on, kui 4200 —

$$Y : 360 = 100 : 4200.$$

Et (4200-st r.) 5,5 maha arw., peab weks. Y päewa e. tp. oodust.
„ (4200-st „) 92,4 „ „ „ „ X „ „ „ „

Et ühest ja sellestsamast waluutast enam maha arwata, peab wekslit enam aega enne tähtpäewa oodustama, et wähem maha arwata, peab wekslit wähem aega enne tähtpäewa oodustama. Sel korral peab enam maha arwama; seepärast peab wekslit enam aega enne tähtpäewa oodustama; nimelt X on enam kui Y nii mitu korda, mitu korda 92,4 enam on, kui 5,5 — $X : Y = 92,4 : 5,5$.

Kaswatame wõrrendid liikme kaupa: $\frac{360Y}{XY} = \frac{100 \cdot 92,4}{4200 \cdot 5,5}$

Lühendame $\frac{X}{360} = \frac{924}{42 \cdot 55}$

Leiame X: $X = \frac{360 \cdot 924}{42 \cdot 55}$ p. = 144 päewa = 4 kuud 24 p.

Nagu II-e aluskuju ülesannetes, nii wõib ka siin waluuta ja ooduse (diskonto) asemel weksli eest maksetaw summa antud olla.

IV. aluskuju. Antud: oodus (diskont), aeg, protsendi kõrgus; otsitakse waluuta.

Weksel oodustati 7%-ga 5 kuud enne tähtpäewa ja temast arwati 14 rbl. maha. Kui suur on weksli waluuta?

Rakendus:

Kui 12 kuud enne tähtpäewa 7 r. maha arwatakse, siis peab waluuta olema 100 r.
„ 5 „ „ „ 14 „ „ „ „ „ „ „ X „

Kui 12 kuud e. t. p. 7 r. maha arw., siis peab wal. olema
„ 1 „ „ „ „ (7 „) „ „ „ „ „ „ 12 kord suurem s. o.
„ 5 „ „ „ „ (7 „) „ „ „ „ „ „ 5 „ wähem s. o. $\frac{100 \cdot 12 \cdot 14}{5 \cdot 7}$ r. =
(„ 5 „ „ „ „) 1 „ „ „ „ „ „ „ 7 „ wähem s. o,
„ 5 „ „ „ „) 14 „ „ „ „ „ „ „ 14 „ suurem s. o. = 480 rbl.

[1]) Seda ülesannet ei ole soowitaw ühekaudu arwamise abil wälja rehkendada, sest muidu saame wõimata lause: et 1-st rublast waluutast 5,5 rbl. maha arwata, peab wekslit nii ja nii mitu päewa enne tähtpäewa oodustama.

V. aluskuju. Antud: aeg, protsendi kõrgus; maksetaw summa; otsitakse waluuta. Kui suur on weksli waluuta, kui tema eest $4^1/_2$ kuud enne tähtpäewa, teda 5%-ga oodustades, 1099 rbl. maksetakse?

1) Kui palju arwatakse 100-st rublast $4^1/_2$ kuud enne tähtpäewa maha?

$\overset{1}{12}$ kuud enne tähtpäewa arwatakse 5 rbl maha.
$\frac{9}{2}$ „ „ „ „ Y „ „

$$Y = \frac{5 \cdot 9}{12 \cdot 2} \text{ rbl.} = \frac{15}{8} \text{ rbl.}$$

2) Kui palju maksetakse 100 rbl. asemel $4^1/_2$ kuud enne tähtpäewa?

$$100 \text{ rbl.} - \frac{15}{8} \text{ rbl.} = \frac{800-15}{8} \text{ rbl.} = \frac{785}{8} \text{ rbl.}$$

3) Kui suur on weksli waluuta?

$\frac{\overset{1}{785}}{8}$ rubla maksetakse 100 rbl. asemel;
1099 „ „ X „ „

$$X = \frac{100 \cdot 8 \cdot 1099}{785} \text{ rbl.} = 1120 \text{ rbl.}$$

§ 274. Weksli maksu tähtpäewa ja tähtaja wäljaarwamine.

Weksli oodustamise juures peab maksu tähtpäew teada olema. Kui weksli peale maksu tähtpäew kirjutatud ei ole, waid ainult päew, millal weksel wälja on antud ja kui kaua aja peale weksel wälja on antud, siis peab weksli oodustamise juures kõige esite maksu tähtpäew wälja arwatama.

I. Maksu tähtpäewa wäljaarwamine.

1) Kui weksel ainult kuude peale — ilma päewadeta — wälja on antud, siis arwatakse wäljaandmise päewast selle päewa arwu mööda nii mitu kuud edasi, mitu kuud wekslis nimetatud on. Ei ole wiimasel kuul niipalju päewi, kui arwamist mööda wälja tuleb, siis wõetakse maksu tähtpäewaks selle kuu wiimane päew, üleliigsed päewad heidetakse kõrwale.

Näitus:

Weksel on wäljaantud 19-al aprillil — 8 kuu peale — tähtp. on 19. detsember.
„ „ „ 30-al aug. 1910—6 „ „ — „ „ 28. weebr. 1911

2) Kui weksel kuude ja päewade peale wälja on antud, siis arwatakse enne wäljaandmise päewa arwu mööda kuud edasi, nagu

punkt 1. juhatab, ja siis hakatakse saadud päewast päewi edasi arwama. Näit. Weksel on wälja antud 24-al aprillil 1910 8 kuu 10 päewa peale. 24-st aprillist 8 kuud edasi on 24-s detsember; 24-st detsembrist 10 päewa edasi arwates saame 3-nda jaanuari 1911. Weksel on wälja antud 29-al augustil 6 kuu 5 päewa peale. 29-st augustist 6 kuud edasi arwates saame 29-nda (ehk 28-nda) weebruari: wiimasest weebruari kuu päewast 5 päewa edasi arwates saame 5-nda märtsi.

II. Oodustamise tähtaja wäljaarwamine. Pärast tähtpäewa kindlaks määramist arwatakse see aeg, mis oodustamise päewast kuni maksutähtpäewani jääb, wälja ja nimelt **päewades**. Nimetame seda aega, mis oodustamise päewast kuni maksu tähtpäewani jääb, oodustamise t ä h t a j a k s. Riigipank arwab oodustamise tähtajasse ka oodustamise päewa, mõned erapangad seda päewa ei arwa.

Seda mööda arwatakse oodustamise tähtaeg järgmiselt wälja:

1) Oodustamise päew.

2) Päewad peale oodustamise päewa kuni kuu lõpuni; selle juures arwatakse igas kuus 30 päewa.

3) Järgmised täis kuud, igas kuus 30 päewa.

4) Selle kuu päewad, mille sees maksu tähtpäew on, mille juures maksu tähtpäew ka ühes arwatakse.

Näit. 1) Weksli maksu tähtpäew on 4. jaanuar; teda oodustatakse 27-al oktobril. Tähtaeg on:

$$\underset{1)}{1} + \underset{2)}{3} + \underbrace{30 + 30}_{3)} + \underset{4)}{4} = 68 \text{ (päewa).}$$

Maksu tähtpäew on 29. weebruar 1912; weksel oodustatakse 30-al oktoobril 1911. Tähtaeg on:

$$\underset{1)}{1} + \underset{2)}{0} + \underbrace{30 + 30 + 30}_{3)} + \underset{4)}{29} = 120 \text{ (päewa).}$$

Näitused:

Weksel wälja antud:	Kui kaua aja peale:	Maksu tähtp.	Oodustamise p.	Tähtaeg:
17 deets. 1909	5 kuu peale.	17 mai 1910	21 jaanuar 1910	117 p.
3 nowbr. 1909	4 kuu 28 päewa p.	31 märt. 1910	8 weebr. 1910	54 „
13 weebr. 1910	3 „ 15 „ „	28 mai 1910	7 märts 1910	82 „
30 sept. 1910	5 „ 11 „ „	11 märt. 1911	31 okt. 1910	132 „

§ 275. Matematikalik oodusearwamine.

On weel teine oodusearwamise wiis olemas, mida m a t e m a t i k a l i k u k s o o d u s e a r w a m i s e k s kutsutakse.

Matematikalik oodusearwamine seisab selles, et weksli eest niisugune summa maksetakse, mis ooduse protsendi peale arwatud, ühes oma kasudega oodustamise päewast kuni maksu-tähtpäewani weksli waluuta wälja teeb. Mate-

matikalik oodusearwamine põhjeneb selle peal, et laenu tegemise juures ka nii talitada wõidakse, et laenuwõtja laenuandjale kasusid mitte otsekohe kätte ei maksa, waid alles laenuaja lõpul maksta lubab ja sellepärast weksli peale waluutaks laenatud summa ühes tema peale kaswawate kasudega kirjutab. Nagu rahakasu ehk äriliku oodusearwamise juures, nii tuleb ka matemaatikaliku oodusearwamise juures wiis suurust ette ja on wiis ülesannete aluskuju olemas:

I. aluskuju: Antud: waluuta, aeg, protsendi kõrgus; otsitakse weksli eest maksetaw summa ja oo dus (diskonto).

Kui palju peab weksli eest, mille waluuta 500 rbl. on, 3 kuud enne tähtpäewa maksma, kui teda 8%-ga matemaatikalikult oodustatakse ja kui suur on diskonto?

Wäljarehkendamine. Et meil siin matemaatikaliku oodusearwamisega tegemist on, siis otsitakse selles ülesandes niisugust summat, mis 8% peale arwatud 3-e kuu jooksul 500 rbl. peale kaswab.

1) $\begin{matrix}100 \text{ rbl.} \\ 100 \text{ „}\end{matrix}$ toob 12 kuu jooksul 8 rbl. kasu
$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$
„ 3 „ „ y „ „

$$y = \frac{8.3}{12.} \text{ rbl.} = 2 \text{ rbl.}$$

2) Sellega kaswab 100 rbl. 3 kuu jooksul, 100 rbl. + 2 rbl. = 102 rbl. peale.

3) 102 rbl. peale kaswab 100 rbl.
500 „ „ „ X „
$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$X = \frac{100 . 500}{102} \text{ rbl.} = 490 \text{ rbl. } 19^{31}/_{51} \text{kop.}$$

ehk 490 rbl. 20 kop.

4) Diskonto on sellega 500 rbl. — 490 rbl. 20 kop. = 9 rbl. 80 kop.

3) 102-st rbl. arwatakse 2 rbl. maha
500-st „ „ X „ „
$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$X = \frac{2 . 500}{102} \text{ rbl.} = 9 \text{ rbl. } 80^{20}/_{51} \text{ kop.}$$

ehk 9 rbl 80 kop.

4) Sellega maksetakse weksli eest 500 rbl. — 9 rbl. 80 kop. = 490 rbl. 20 k.

II. aluskuju. Antud: waluuta, aeg ja diskonto; otsitakse protsendi kõrgus. Mitme protsendiga oodustati wekslit (matemaatikalikult), kui tema waluutast, mis 561 rbl. suur oli, 4 kuud enne tähtaega 11 rbl. maha arwati?

1) Kui palju makseti weksli eest? 561 rbl. — 11 rbl. = 550 rbl.

2) 550 rbl. toowad 4 kuu jooksul 11 rbl. kasu;
100 „ „ 12 „ „ x „ „
$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$X = \frac{11 . 100 . 12}{550 . 4} \text{ rbl.} = 6 \text{ rbl.}$$

Kostus: 6%-ga.

III. aluskuju. Antud: waluuta, diskonto ja protsendi kõrgus; otsitakse aeg. Kui palju aega enne tähtpäewa oodustati (matemaatikalikult) weksel, mille waluuta 727 rbl. 20 kop. oli, 4,8%-ga, kui tema waluutast 7 rbl. 20 kop. maha arwati?

1) Kui palju makseti weksli eest? 727 rbl. 20 kop. — 7 rbl. 20 kop. = 720 rbl.

2) Missuguse aja jooksul toowad 720 rbl. 4,8% — peal olles 7 rbl. 20 kop. kasu?

$$\begin{matrix} 1 & & 1 & & \\ 100 \text{ rbl. toob} & & 4{,}8 \text{ rbl. kasu} & & 12 \text{ kuu jooksul} \\ 720 \text{ „ „} & & 7{,}2 \text{ „ „} & & X \text{ „ „} \end{matrix}$$

$$X = \frac{12 . 100 : 7{,}2}{720 . 4{,}8} \text{ (kuud)} = 2^1/_2 \text{ (kuud).}$$

Kostus: Weksel oodustati $2^1/_2$ kuud enne tähtpäewa.

IV. aluskuju. Antud: diskonto, aeg, protsendi kõrgus, otsitakse waluuta. Kui suur on weksli waluuta, kui temast weksli oodustamise juures $4^1/_2$%-ga 4 kuud 5 päewa enne tähtaega 15 rbl. maha arwatakse?

Wäljarehkendamine. Antud oodus 15 rbl. on tundmata kapitali, s. o. weksli eest maksetud summa, kasud 4 kuu 5 päewa eest $4^1/_2$% juures. Seepärast otsime weksli eest maksetud summa enne üles ja siis waluuta.

4,5 rbl. kasu saadakse 360 päewa jooksul 100 rbl. eest
15 „ „ „ 125 „ „ X „ „

$$X = \frac{100 \cdot 15 \cdot 360}{4{,}5 \cdot 125} \text{ rbl.} = 960 \text{ rbl.}$$

Waluuta on: 960 rbl. + 15 rbl. = 975 rbl.

V. aluskuju. Antud: aeg, protsendi kõrgus, maksetaw summa; otsitakse waluuta. Wekslit oodustati $4^1/_2$ kuud enne tähtpäewa (matemat.) $5^1/_3$%-ga ja makseti 420 rbl. Kui suur oli waluuta?

Teiste sõnadega tähendab see: Kui suureks summaks kaswawad 420 rbl. $4^1/_2$ kuu jooksul $5^1/_3$% peal olles?

100 rbl. toob 12 kuu jooksul $^{16}/_3$ rbl. kasu;
420 „ „ 4,5 „ „ X „ „

$$X = \frac{16 \cdot 420 \cdot 4{,}5}{3 \cdot 100 \cdot 12} \text{ rbl.} = 8{,}4 \text{ rbl.}$$

Waluuta on: 420 rbl. + 8 rbl. 40 kop. = 428 rbl. 40 kop.

Kolmaskümnes peatükk: Tähtaja arwamine.

(Правило сроковъ).

§ 276. Tähtaja arwamise sisu ja juhtmõtted.

Tähtaja arwamises otsustatakse küsimusi, kuidas: 1) mitme maksu-tähtaja asemele üht tähtaega panna; 2) ühe maksu-tähtaja asemele mitu, tähtaega panna; 3) mitme maksu-tähtaja asemel mitu uut tähtaega panna.

See juures ei tohi: 1) wõla summa mitte muutuda ja 2) ei wõlawõtja ega wõlauskuja ei tohi kahju saada. Et wõlasumma mitte muutuda ei tohi, siis on awalik, et uue weksli waluuta (uute wekslite waluutade summa) endiste wekslite waluutade summa (endise weksliwaluuta) peab olema. Et ei wõlawõtja ega wõlauskuja mitte kahju saada ei tohi, siis peab uus maksu-tähtaeg nii ära määratama, et uue weksli (uute wekslite) eest maksetawad protsendid (kasud) endiste wekslite (endise weksli) eest maksetud protsentide läbi tasutud saaks, ilma, et midagi üle jääks ehk puudus tuleks.

§ 277. Ülesannete esimene aluskuju: mitme tähtaja asemele pannakse üks tähtaeg.

L. peab S.-le maksma ühe weksli järele 800 rbl. 5 kuu pärast, teise weksli järele 400 rbl. 7 kuu pärast ja kolmanda weksli järele 300 rbl. 11 kuu pärast Nad lepiwad kokku, et L. kõige wõla ühekorraga ära maksab. Millal peab L. maksma, et kumbki kahju ega kasu ei saa? Arutus: Uus tähtpäew peab, pärast kõige waremat tähtpäewa olema, muidu saaks L. kahju, sest ta oleks protsentisid ka selle aja eest maksnud, millal ta wõõrast kapitali oma käes ei pidanud; uus tähtpäew peab enne kõige hiljemat tähtpäewa olema, muidu tarwitaks L. wõõrast kapitali ka selle aja jooksul, mille eest ta protsentisid ei ole maksnud ja saaks seega kasu, kuna kapitali omanik S. kahju saaks.

Järjelikult peab uus tähtpäew kõige warema ja kõige hiljema tähtpäewa wahepeal olema. Teda nimetatakse (endiste wekslite) **kesktähtpäewaks**. See aeg, mis kõne all olewast päewast kuni kesktähtpäewani jääb, on **kesktähtaeg** (средній срокъ).

Selle kesktähtaja leiame järgmiselt arutates:

1) Protsendid 800 r. pealt 5 kuu eest = prots. 100 r. p. 8 × 5 kuu (=40 kuu) eest;
„ 400 „ „ 7 „ „ = „ 100 „ „ 4 × 7 kuu (=28 kuu) „ ;
„ 300 „ „ 11 „ „ = „ 100 „ „ 3 × 11 kuu (=33 kuu) „ ;

Järjelikult:

Protsendid (kasud) 800 r. p. 5 kuu e. + 400 r. p. 7 kuu e. + 300 r. p. 11 kuu e. = = protsendid 100 rbl. p. 40 kuu e. + 100 r. p. 28 kuu e. + 100 r. p. 33 kuu e.

2) Awalik on, et meie protsentisid ühe wõrra saame, kas paneme ühe 100 rbl. 40 kuu peale, teise 100 rbl. 28 kuu peale ja kolmanda 100 rbl. 33 kuu peale kasu kandma, wõi paneme 100 rbl. 40 kuu peale, pärast needsamad 100 rbl. weel 28 kuu peale ja wiimaks needsamad 100 rbl. weel 33 kuu peale, s. o. üle kõige 101 kuu peale, kasu kandma. Järjelikult: protsendid: 100 rbl. p. 40 kuu eest + 100 rbl. p. 28 e. + 100 rbl. 33 kuu e. = protsendid 100 rbl. p. (40+28+33) kuu eest.

3) Uus wõlasumma on 1500 rbl., ja protsendid 100 rbl. pealt 101 kuu e. = protsendid 1500 rbl. pealt $\frac{101}{15}$ kuu eest. Järjelikult wõib L. kõige wõla, 1500 rbl., $\frac{101}{15}$ kuu = 6 kuu 22 päewa pärast ära maksa. Sellest arutusest selgib, et tähtaja arwamise ülesanded järgmiste tõdede põhjal rehkendatakse:

I. (Arutus, punkt 1.). **Kasud ei muutu, kui aega nii mitu korda suurendatakse (wähendatakse), mitu korda kapitali wähendatakse (suurendatakse), sest kapital ja aeg on wastuwõrendilised suurused.**

II. (Arutus, punkt 2.). **Kui mitu ühesuurust kapitali mitmesuguste ajajärkude peale kasu kandma on pandud, siis saadakse kõikide nende kapitalide pealt niisama palju kasu, kui ühe niisuguse kapitali pealt kõikide ajajärkude eest ühtekokku.**

Ülesande wäljaarwamise rakendame järgmiselt:

Protsendid	800	rbl.	pealt	5	kuu	e.	=	protsendid	100	rbl.	p.	40	kuu eest;
„	400	„	„	7	„	„	=	„	100	„	„	28	„ „
„	300	„	„	11	„	„	=	„	100	„	„	33	„ „
„	1500	„	„	X	„	„	=	„	100	„	„	101	„ „
„	100	„	„	101	„	„	=	„	1500	„	„	$\frac{101}{15}$	„ „

$$X = \frac{101}{15} \text{ (kuud)} = 6 \text{ kuud } 22 \text{ päewa.}$$

Kostus: Uus weksel peab 6 kuu 22 päewa pääle wälja antama. Ettetoodud arutuste põhjal on ka järgmine wäljaarwamine arusaadaw:

Protsendid	800	r.	pealt	150	päewa	e.	=	prot.	1	rbl.	pealt	800 × 150	päewa eest
„	400	„	„	210	„	„	=	„	1	„	„	400 × 210	„ „
„	300	„	„	330	„	„	=	„	1	„	„	300 × 330	„ „
„	(800+400+300)	.	X	„		„	=	„ 1 r. p.	(800×150+400×210+300×330) p. e				

$$X = \frac{800 \times 150 + 400 \times 210 + 300 \times 330}{800 + 400 + 300} \text{ (päewa).}$$

Juht: Mitme weksli kesktähtaja leiame, kui meie iga weksli tähtaega tema waluutaga (rublades awaldatud) kaswatame ja saadud kaswatiste summad waluutade summaga jagame.

Ülesanne. K. oodustas kolm wekslid: 700 rublalise 50 päewa, 1000 rublalise 75 päewa ja 1500 rublalise 12 päewa enne aega; diskonto kõige kolme weksli pealt ühtekokku oli 16 rbl. Kui kõrge oli keskmine diskonto protsent?

Wäljaarwamine.

1) Leiame wekslite kesktähtaja X päewa:

$$X = \frac{50.700 + 75.1000 + 12.1500}{700 + 1000 + 1500} = 40 \text{ (päewa).}$$

2) Leiame keskmise diskonto protsendi:

3200 rubla pealt maksetakse 40 päewa enne tähtpäewa 16 rubla diskontot,
100 „ „ „ 360 „ „ „ Y „ „

$$Y = \frac{16 \cdot 100 \cdot 360}{3200 \cdot 40} = \underline{4,\ 5\ (\%)}.$$

§. 278. Ülesannete teine aluskuju: ühe tähtaja asemele pannakse mitu tähtaega.

K. tahab oma weksli-wõlga 1250 rbl., mille tähtaeg 200 päewa on, kolmel korral maksta: 400 rbl. 75 päewa pärast ja 250 rbl. 120 päewa pärast. Millal peab tema ülejäänud summa maksma?

Arutus protsentide eest, mis K. 1250 rbl. pealt 200 päewa eest maksab, wõib ta 10 rbl. enese käes pidada 125 × 200 päewa (= 25000 päewa). Sellega, et K. enese käes peab:

400 rbl. 75 päewa, tehakse tasa prots. 10 rbl. pealt 40 × 75 p. (=3000 p.) eest
250 „ 120 „ „ „ „ 10 „ „ 25 × 120 p. (=3000 p.) eest

Järjel. kahe esim. weksl. tehakse tasa prots. 10 rbl. p. (75×40+120×25=6000)p. e., ja kolmanda weksliga, mille waluuta [1250—(400+250)] rbl. on, jääb tasa teha protsendid 10 rbl. pealt (25000 - 6000=19000) päewa eest.

Protsendid 10 rubla pealt 19000 päewa eest = protsendid 600 rubla $\frac{19000}{60}$ päewa eest s. o. $316^2/_3$ päewa eest.

Arusaadaw on, et murdudel siin kohal tähendust ei wõi olla, ja et K. ülejäänud 600 rubla 316 ehk 317 päewa pärast (kokkuleppimise järele) maksma peab.

Ülesande wäljaarwamise wõime nii rakendada:

Protsendid 1250 rbl. pealt 200 p. eest = protsendid 10 r. pealt 25000 p. eest

„ + 400 „ „ 75 „ „ = „ 10 „ „ + 3000 „ „
„ + 250 „ „ 120 „ „ = „ 10 „ „ + 3000 „ „
— 650 — 6000

„ 600 „ „ X „ „ = „ 10 „ „ 19000 „ „
„ 10 „ „ 19000 „ „ = „ 600 „ „ 19000 „ „
60

$$X = \frac{19000}{60} \text{ päewa} = 316^2/_3 \text{ p.} = \text{umbes } 317 \text{ päewa.}$$

Kostus:

Ülejäänud 600 rubla peab 317 (ehk 316) päewa pärast maksetama.

§ 279. Ülesannete kolmas aluskuju: mitme tähtaja asemele pannakse mitu uut tähtaega.

A. pidi B. le maksma: I-se weksli järele 400 rbl. $2^1/_2$ kuu pärast, II-se weksli järele 450 rbl. 4 kuu pärast ja III-nda weksli järele 1000 rbl. 1 aasta pärast. Ta arwab aga paremaks 4 kuu pärast 250 rbl. ja 7 kuu 6 päewa pärast 700 rbl. maksta. Millal peab ta ülejäädawa summa maksma?

W ä l j a a r w a m i n e.

1) Leiame kolme esimese weksli kesktähtaja x päewa, nagu § 277 juhatab:

$$X = \frac{75.400 + 120.450 + 360.1000}{400 + 450 + 1000} = 240 \text{ (päewa)}$$

2) Paneme kesktähtaja asemele kolm uut tähtaega; nagu § 278 juhatab:

Protsendid 1850 r. pealt 240 päewa eest = protsendid 10 r. pealt 44400 p. eest

„	+	250	„	„	120	„	„ =	„	10	„	„
„		700	„	„	216	„	„ =	„	10	„	„
		— 950									

$$+ \begin{cases} 3000 \text{ „ „} \\ 15120 \text{ „ „} \end{cases}$$

— 18120

„	900	„	„	X	„	„ =	„	10	„	„	26280 „ „
„	10	„	„	26280	„	„ =	„	900	„	„	26280 „ „

90

$$X = \frac{26280}{90} = 292 \text{ (päewa).}$$

Kostus: Ülejäädawa summa 900 rbl. peab A. 292 päewa pärast maksma.

Kolmaskümnes esimene peatükk: Ahelarwamine.

(Цѣпное правило).

§ 280. Ahel.

Kahte ühewäärilist suurust wõime ühtluse märgi (=) abil üksteisega ühendada; siis sünnitawad nad ühtluse. Kumbki ühtlust sünnitaw suurus on ühtluse liige. Harilikult on ühtluse liikmete nimetused mitmesugused. Näit. 2 Soome marka = 75 kop. Igast ülesande küsimusest wõime ühtluse saada; selle tarwis peame otsitawa arwu x-ga (ehk teise tähega) ära tähendama ja teda ülesande küsimuses antud arwuga ühtluse märgi läbi ühendama. Näit. Mitu rubla maksab 75 wakamaad põldu? x rbl. = 75 wakamaad põldu.

Kui mitu ühtlust üksteisele nii järgnewad, et iga järgnew ühtlus niisuguse nimetusega algab, missugusega eelminew ühtlus lõpeb, siis sünnitawad need ühtlused a h e l a. Ahel on k i n n i n e, kui ta sellesama nimetusega lõpeb, millega ta algab; wastasel korral on ta lahtine.

Näit. kinnine ahel:	1 süld	= 7 jalga	lahtine ahel:	1 süld	= 7 jalga
	1 jalg	= 12 tolli		1 jalg	= 12 tolli
	28 tolli	= 1 arsin		28 tolli	= 1 arsin
	3 ars.	= 1 süld		1 ars.	= 16 wers.

Mõne ülesande tingimisi ja küsimust wõime kinnise ahelana kujutada. Niisuguseid ülesandeid on iseäralise juhi abil kerge wälja arwata.

§ 281. Ülesanne.

Mitu rubla maksawad Shanghai's (Hiina maal) 6 (Wene) naela teed, kui teada on, et 720 Wene naela on $4^7/_8$ Hiina pikulit, 2,5 pikulit maksawad Hiina raha järele 180 taeli, 9 taeli on aga Wene raha järele 10 rbl?

Wäljaarwamine.

Kujutame seda ülesannet kinnise ahelana, mille esimeseks liikmeks otsitaw arw on:

x rbl. = 6 n.	x rbl. = 6 n.
720 n. = $4^7/_8$ pikulit	720 n. = $4^7/_8$ pikulit
2,5 pikul. = 180 taeli	2,5 pikulit = 180 taeli
9 taeli = 10 rbl.	9 taeli = 10 rbl.

Mitu r. 6 n. maksawad, saame siis teada, kui meie teame, mitu r. 720 n. maksawad;
„ „ 720 n. ehk $4^7/_8$ pikul. maks., saame siis t., kui meie t., mitu r. 2,5 pikul. „
„ „ 2,5 pikulit „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 180 taeli on;
„ „ 180 taeli on, wõime seepärast teada saada, et meie teame mitu r. 9 taeli on.

$$9 \text{ taeli} = 10 \text{ rbl.}$$

$$1 \text{ taeli} = \frac{10 \text{ rbl.}}{9}$$

$$180 \text{ taeli} = \frac{10 \text{ rbl. } 180}{9} = 10 \text{ rbl.} \cdot \frac{180}{9}$$

$$2{,}5 \text{ pikulit} = 180 \text{ taeli} = \frac{10 \text{ rbl. } 180}{9}$$

$$1 \text{ „} = \frac{10 \text{ rbl. } 180}{9 \,.\, 2{,}5}$$

$$4^7/_8 \text{ „} = \frac{10 \text{ rbl. } 180 \,.\, 4^7/_8}{9 \,.\, 2{,}5} = 10 \text{ rbl.} \cdot \frac{180}{9} \cdot \frac{4^7/_8}{2{,}5}$$

$$720 \text{ n.} = 4^7/_8 = \frac{10 \text{ rbl. } 180 \,.\, 4^7/_8}{9 \,.\, 2{,}5}$$

$$1 \text{ „} = \frac{10 \text{ rbl. } 180 \,.\, 4^7/_8}{9 \,.\, 2{,}5 \,.\, 720}$$

$$6 \text{ „} = \frac{10 \text{ r. } 180 \,.\, 4^7/_8 \,.\, 6}{9 \,.\, 2{,}5 \,.\, 720} = 10 \text{ r.} \frac{180}{9} \cdot \frac{4^7/_8}{2{,}5} \cdot \frac{6}{720} =$$

$$= \frac{10 \,.\, 180 \,.\, 4^7/_8 \,.\, 6}{9 \,.\, 2{,}5 \,.\, 720} \text{ r.} = 3^1/_4 \text{ rbl.}$$

Seda ülesande wäljaarwamist ligemalt waadates näeme meie, et otsitawa arwu — ahela esimese liikme — leidmiseks kaswatatakse temaga ühenimelist arwu — ahela wiimast liiget — wahekordadega, millede esiliikmeteks paremal pool ja tagaliikmeteks pahemal pool ühtluse märkisid seiswad arwud on.

Kui meie wahekordade peale kui murdude peale waatame, siis wõime murdudega kaswatamise juhi põhjal järgmise juhi ülesseada:

Et ahela-arwamise ülesandes otsitawat arwu leida, seame ahela üles, mille esimeseks liikmeks otsitaw arw on ja jagame paremal pool ühtluse märki seiswate arwude kaswatist pahemal pool seiswate arwude kaswatisega.

Ülesanne. Peterburi kaupmees tellis Parisist kaupa ja pidi Parisi kaupmehele 10000 franki maksma. Peterburi kurs[1]) Parisi peale on 37 rbl. 50 kopi 100 franki eest; Peterburi kurs Berlini peale on 46 rbl. 30 kop. 100 marga eest; Parisi kurs Peterburi peale on 266,5 franki 100 rbl. eest; Parisi kurs Berlini peale on 122,75 franki 100 marga eest. Kuidas on Peterburi kaupmehel kõige kasulikum (odawam) oma wõlga ära maksta?

Wäljaarwamine. Peterburi kaupmees wôib oma wôlga mitmel teel tasuda, waatame neist tasumise wiisidest kolme.

1) Kaupmees ostab Peterburis frankisid ja saadab nad Parisi:

$$\begin{array}{r} x \text{ rbl.} = 10000 \text{ frc.} \\ 100 \text{ frc.} = 37{,}5 \text{ rbl.} \end{array} \quad \left| \quad x = \frac{10000 \cdot 37{,}5}{100} = 3750 \text{ (rbl.)} \right.$$

2) Kaupmees saadab rublad Parisi ja müüb nad seal ära:

$$\begin{array}{r} y \text{ rbl.} = 10000 \text{ frc.} \\ 266{,}5 \text{ frc.} = 100 \text{ rbl.} \end{array} \quad \left| \quad y = \frac{10000 \cdot 100}{266{,}5} = 3752{,}35 \text{ (rbl.)} \right.$$

3) Kaupmees ostab Peterburis Saksamaa raha — markasid, saadab nad Parisi ja müüb nad seal ära:

$$\begin{array}{r} z \text{ rbl.} = 10000 \text{ frc.} \\ 122{,}75 \text{ frc.} = 100 \text{ marka} \\ 100 \text{ marka} = 46{,}3 \text{ rbl.} \end{array} \quad \left| \quad z = \frac{10000.100 \cdot 46{,}3 \cdot}{122{,}75 \cdot 100} = 3771{,}89 \text{ (rbl.)} \right.$$

Nagu näha, tuleb kaupmehel 10000 franki eest kõige wähem rublasid siis maksta, kui ta Peterburis Wene raha Prantsuse rahaks — frankideks wahetab ja siis frankid Parisi saadab; seepärast on niisugune tasumise wiis temale kõige kasulikum.

Kolmaskümnes teine peatükk: Osa arwamine.

(Пропорціональное дѣленіе и правило товарищества.)

§ 282. Wahenguline ja wôrrendline jagamine.

I-ne ülesanne. Jaan peab laua peal olewad 87 pähkelt oma kuue taskutesse nii ära mahutama, et paremas taskus 15 pähkelt enam on, kui pahemas. Mitu pähkelt saab tal pahemas, mitu paremas taskus?

Wäljaarwamine: Jaan wõtab kõige enne laua pealt 15 pähkelt ära ja paneb nad paremasse taskusse. Järele jäänud $87 - 15 = 72$ pähkelt jagab ta pooleks $72 : 2 = 36$ ja paneb kummagisse taskusse ühe poole, s. o. 36 pähkelt.

Niiwiisi saab pahemas taskus 36 pähkelt ja paremas taskus $15 + 36 = 51$ pähkelt.

2-ne ülesanne. Isa pärandas oma talu, mis 240 wakamaad suur oli, kahele pojale; noorema poja osa pidi 3 korda suurem olema, kui wanema poja osa. Mitu wakamaad sai kumbki poeg.

---

1) Kurs on ühe riigi raha hind teises riigis. See hind on mitme põhjuse pärast kõikuw ja wôib iga päewaga muutuda. „Peterburi kurs Parisi peale on 37 rbl. 50 kop. 100 franki eest“ tähendab: „Peterburis maksetakse 100 franki eest 37 rbl. 50 kop.“ ja „Parisi kurs Peterburi peale on 266,5 franki 100 rbl. eest“ tähendab: „Parisis maksetakse 100 rbl. eest 266,5 franki“.

Wäljaarwamine. Tehku wanema poja osa 1 jagu[1]) wälja, siis teeb noorema poja osa 3 niisugust jagu wälja ja kõik 240 wakamaad teewad sellega (1 + 3 =) 4 ühesuurust jagu wälja.

Järjelikult on

1 jagu = 240 wakamaad : 4 = 60 wakamaad (wanema poja osa),
ja 3 jagu = 60 wakamaad × 3 = 180 wakamaad (noorema poja osa).

Neist kahest ülesandest on esimene wahengulise jagamise (разностное дѣленіе) ja teine wõrrendilise jagamise (пропорціональное дѣленіе) ülesanne.

Wahengulise jagamise juures peab antud arwu kahesse (ekk mitmesse) osasse jagatama, nii et üks osa teisest mõne ühelise wõrra suurem on; wõrrendilise jagamise juures peab antud arwu kahesse (ehk mitmesse) osasse jagatama, nii et üks osa teisest mitu kord suurem, ehk et kaks osa üksteisega antud wahekorras on. Nagu ainult geometrilist wahekorda wahekorraks ja geometrilist wõrrendit wõrrendiks loetakse, nii loetakse ka ainult wõrrendilist jagamist osa arwamiseks.

§ 283. Osa arwamise alusülesanne.

3-as ülesanne. Arw 350 kolmesse osasse jagada wõrrendiliselt arwudele 2, 5 ja 7.

See tähendab: 350 tuleb kolmesse osasse niiwiisi jagada, et esimene osa teise osa wastu nii on, nagu 2 5-e wastu, et teine osa kolmanda wastu on, nagu 5 7-e wastu ja järjelikult ka esimene osa kolmanda wastu, nagu 2 7-e wastu. Nimetame arwusid 2, 5, 7, milledele wõrrendiliselt jagada tuleb, wõrrendilisteks arwudeks.

Wäljaarwamine. Olgu esimeses osas X_1 ühelist; teises osas X_2 ühelist ja kolmandas osas X_3 ühelist; siis wõime järgmised wõrrendid kirjutada:

$X_1 : X_2 = 2 : 5$ (1-ne wõrrend)
$X_2 : X_3 = 5 : 7$ (2-ne wõrrend)

(Wõrrend $X_1 : X_3 = 2 : 7$ on üleliigne, ta tuleneb kahest esimesest).

Peitugu esimeses osas 2 mingisugust ühesuurust jagu, siis peitub, esimese wõrrendi põhjal, teises osas 5 niisugust jagu ja, teise wõrrendi põhjal, kolmandamas osas 7 niisugust jagu.

Et esimeses osas 2, teises osas 5 ja kolmandas osas 7 ühesuurust jagu peitub, siis kirjutatakse ülewal ettetoodud wõrrendid lühendatud kujul järgmiselt:

$$X_1 : X_2 : X_3 = 2 : 5 : 7$$

---

1) Osad ei pruugi mitte ühesuurused olla, jaod peawad ühesuurused olema.

Kõiges jagatawas arwus 350 peitub aga $2+5+7=14$ jagu. Sellega on 1 jagu $= 350 : 14 = 25$.

X_1-es on 2 jagu, sellega on $X_1 = 25 . 2 = 50$ (I-ne osa).
X_2-es „ 5 „ „ „ $X_2 = 25 . 5 = 125$ (II-ne osa).
X_3-as „ 7 „ „ „ $X_3 = 25 . 7 = 175$ (III-as osa).

Wäljarehkendamise rakendame nii:

$$\frac{350}{X_1 : X_2 : X_3 = 2 : 5 : 7}$$

1) 2 jagu 2) $350 : 14 = 25$ 3) $X_1 = 25 . 2 = 50$
$+ 5$ „ $X_2 = 25 . 5 = 125$
$+ 7$ „ $X_3 = 25 . 7 = 175$
14 jagu

ehk:

$$\frac{350}{X_1 : X_2 : X_3 = 2 : 5 : 7}$$

$$X_1 = \frac{350 . 2}{2+5+7} = 50$$

$$X_2 = \frac{350 . 5}{2+5+7} = 125$$

$$X_3 = \frac{350 . 7}{2+5+7} = 175$$

Proow: $X_1 + X_2 + X_3 = 350$

Juht: *Et üht arwu wõrrendiliselt antud arwudele mitmesse osasse jagada, peame selle arwu wõrrendiliste arwude summaga jagama ja jaondit iga wõrrendilise arwuga eraldi kaswatama.*

§ 284. Tarwitatud osa arwamine.

4-as ülesanne: Kolm kaupmeest awasiwad üheskoos äri: Grünberg andis 15000 rbl., Pütsepp 17000 rbl. ja Tode 8000 rbl. Aasta jooksul saiwad nemad ärist puhast kasu 6000 rbl. Kui palju peab iga äriosanik puhtast kasust omale saama?

Wäljaarwamine. Et kasud ja kapital periwõrrendilised suurused on, siis peab puhas kasu 6000 rbl. kapitalidele wõrrendiliselt ära jaotatud saama.

Tähendame Grünbergi osa puhtast kasust X_G-ga, Pütsepa osa X_P-ga ja Tode osa X_T-ga, siis on:

$$\frac{6000 \text{ rbl.}}{X_G : X_P : X_T = 15000 : 17000 : 8000}$$

Awalik on, et meie paremal pool ühtluse märki seiswaid arwusid ühe ja seesama arwuga jagada wõime ilma, et nende wastastikune wahekord muutuks. Seepärast lühendame neid wahekordasid 1000-ga, siis saame:

$$\frac{6000 \text{ rbl.}}{X_G : X_P : X_T = 15 : 17 : 8}$$

$$X_G = \frac{6000 \text{ rbl.} 15}{15+17+8} = 2250 \text{ rbl.}$$

$$X_P = \frac{6000 \text{ rbl.} 17}{15+17+8} = 2550 \text{ rbl.}$$

$$X_T = \frac{6000 \text{ rbl.} 8}{15+17+8} = 1200 \text{ rbl.}$$

§ 285. Wôrrendilised arwud on murrud.

5-es ülesanne: Majaomanik jagas oma krundi, mis 2002 ruutsülda suur oli, nelja osasse, mille suurus üksteise wastu oli, nagu arwud $1^1/_3$; 1,5; 1,75; $1^5/_6$ üksteise wastu. Kui suur sai iga uus krunt?

Wäljaarwamine. Olgu esimeses krundis X_1, teises X_2, kolmandas X_3 ja neljandas X_4 ruutsülda, siis wõime kirjutada:

$$\overline{X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 1^1/_3 : 1{,}5 : 1{,}75 : 1^5/_6} \quad \text{2002 ruutsülda}$$

Et murdudega keerulisem rehkendada on, siis paneme murdude wahekordade asemele täisarwude wahekorrad, antud arwusid ühe ja seesama arwuga — 12-ga kaswatades; arwude wahekorrad jääwad see juures muutmata. Siis leiame

$$\overline{X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 16 : 18 : 21 : 22} \quad \text{2002 ruutsülda}$$

1) Olgu X_1-ses 16 mingisug jagu
siis on X_2-ses 18 niisugust „
X_3-das 21 „ „
X_4-das 22 „ „
Kokku on 77 ühesuurust jagu

2) Ühe jao suurus on sellega:
2002 rts : 77 = 26 rts
462

3) $X_1 = 26$ rts $\times 16 = 416$ rts
$X_2 = 26$ rts $\times 18 = 468$ rts
$X_3 = 26$ rts $\times 21 = 546$ rts
$X_4 = 26$ rts $\times 22 = 576$ rts

§ 286. Osade summa asemel on kahe osa wahe antud.

6-es ülesanne: Jürihanni talu aias kaswawate õunapuude, pirnide, ploomide ja kirside arwud on üksteise wastu, nagu arwud 15, 11, 8 ja 6 üksteise wastu. Mitu puud on igast liigist, kui õunapuid 56 tükki enam on, kui ploomisid?

Wäljaarwamine. Olgu õunapuude arw X_1, pirnide arw X_2, ploomide arw X_3 ja kirside arw X_4. Siis wõime kirjutada:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 15 : 11 : 8 : 6.$$

Olgu õunapuid 15 mingisugust jagu, siis on pirnisid 11, ploomisid 8 ja kirsisid 6 niisamasugust jagu.
misid.

Seega on õunapuid 15 — 8 = 7 jagu enam, kui ploo-

Need 7 jagu teewad 56 puud wälja; järjelikult on 1 jagu = 56 puud : 7 = 8 puud ja $X_1 = 8 . 15 = 120$ (õunapuud);

$X_2 = 8 . 11 = 88$ (pirni);
$X_3 = 8 . 8 = 64$ (ploomi);
$X_4 = 8 . 6 = 48$ (kirsipuud).

§ 287. Osade wahekorrad on antud.

7-es ülesanne. Arw 860 kolmesse osasse jagada nii, et esimene osa teise wastu on, nagu 4 : 7 ja teine osa kolmanda wastu, nagu 2 : 3.

Wäljaarwamine. Olgu esimene osa X_1, teine osa X_2, ja kolmas osa X_3, siis wõime kirjutada:

860

$X_1 : X_2 = 4 : 7$ I-ne wõrrend
$X_2 : X_3 = 2 : 3$ II-ne wõrrend.

Kui meie esimese wõrrendi järgi ütleme, et X_1-ses 4 jagu on, siis on X_2-es 7 jagu. See ei käi aga teise wõrrendiga kokku, sest teine wõrrend nõuab, et X_2-es 2 jagu oleks. See pärast peame meie omas wõrrendites paremal pool ühtluse märki seiswatele wahekordadele niisuguse kuju andma, et esimene neist wahekordadest seesama arwuga lõpeb, millega teine algab. Selleks otstarbeks kaswatame esimese wahekorra liikmeid teise wahekorra esiliikmega — 2-ga ja teise wahekorra liikmeid esimese wahekorra tagaliikmega — 7-ga (kaswatajad kirjutame püstjoonte wahele):

$$\begin{array}{l|l|l} X_1 : X_2 = 4 : 7 & \times 2 & = 8 : 14 \\ X_2 : X_3 = 2 : 3 & \times 7 & = 14 : 21. \end{array}$$

Nüüd wõime neid wõrrendid lühendatud kujul kirjutada:

$$X_1 : X_2 : X_3 = 8 : 14 : 21$$

ja ütelda, et kui X_1-ses 8 mingisugust jagu on, siis on X_2-ses 14 ja X_3-ndas 21 niisugust jagu. Seepärast leiame;

$$X_1 = \frac{860 \cdot 8}{8+14+21} = 160\,;\; X_2 = \frac{860 \cdot 14}{8+14+21} = 280\,;\; X_3 = \frac{860 \cdot 21}{8+14+21} = 420.$$

8-as ülesanne. Arw 6540 nii nelja osasse jagada, et kolmas osa teise wastu on, nagu 3 : 7, neljas osa esimese wastu on, nagu 8 : 3 ja neljas osa teise wastu on, nagu 5 : 2.

Wäljaarwamine. Olgu esimeses osas X_1 ühelist, teises osas X_2, kolmandas osas X_3 ja neljandas osas X_4 ühelist; siis on:

6540

$X_3 : X_2 = 3 : 7$ I-ne wõrrend
$X_4 : X_1 = 8 : 3$ II-ne „
$X_4 : X_2 = 5 : 2$ III-as „

Et meie nende arwude wastastikku wahekordasid lühemalt kirjutada ja otsekohe ütelda wõiksime, mitu jagu igas osas on, peame oma wõrrenditele niisuguse kuju andma, et nii hästi pahemal, kui ka paremal pool ühtluse märki seiswatest wahekordadest iga järgmine wahekord seesama arwuga algaks, millega eelminew wahekord lõpeb, et wõrrendite korduwad liikmed nagu ahela lülid üht

võrrendit teisega ühendaksiwad. Et pahemal pool ühtluse märki seiswaid wahekordasid soowitawal wiisil korraldada, asendame III-nda võrrendi liikmed nii ümber, et antud võrrendites kaks kord ettetulewad liikmed X_2 ja X_4 üks kord wälimiste, teist kord sisemiste liikmetena ette tuleksiwad:

$$X_2 : X_4 = 2 : 5 \quad \text{III-as võrrend.}$$

Nüüd wahetame teise ja kolmanda võrrendi kohad ära, siis saame:

$$X_3 : X_2 = 3 : 7 \quad \text{I-ne võrrend}$$

$$X_2 : X_4 = 2 : 5 \quad \text{II-ne} \quad „$$

$$X_4 : X_1 = 8 : 3 \quad \text{III-as} \quad „$$

Waatame nüüd paremal pool ühtluse märkisid seiswaid wahekordasid. Et esimest ja teist wahekorda soowitawal wiisil üksteise külge köita, kaswatame, nagu 7-ndas ülesandes juhatatud, esimese wahekorra liikmeid 2-ga ja teise wahekorra liikmeid 7-ga:

$$\begin{array}{l} X_3 : X_2 = 3 : 7 \mid \times 2 \\ X_2 : X_4 = 2 : 5 \mid \times 7 \end{array}$$

Et teist ja kolmandat wahekorda niisamuti üksteise külge köita, kaswatame teise wahekorra liikmeid 8-ga ja kolmanda wahekorra liikmeid 5-ga:

$$\begin{array}{l} X_2 : X_4 = 2 : 5 \mid \times 8 \\ X_4 : X_1 = 8 : 3 \mid \times 5 \end{array}$$

Meie näeme, et teise wahekorra liikmeid kahe arwuga, eelminewa wahekorra tagaliikmega ja järgnewa wahekorra esiliikmega, kaswatada tuleb:

$$\begin{array}{l} X_3 : X_2 := 3 : 7 \mid \times 2 \\ X_2 : X_4 := 2 : 5 \mid \times 7 \times 8 \\ X_4 : X_1 := 8 : 3 \mid \quad \times 5 \end{array}$$

Kaswatame esimese wahekorra liikmeid 2-ga ja teise wahekorra liikmeid 7-ga, siis on esimese wahekorra tagaliikme ja teise wahekorra esiliikme wahel ühtlus jalale seatud.

Tahame pärast seda teise wahekorra tagaliikme ja kolmanda wahekorra esiliikme wahel ka ühtlust jalale seada, siis näeme kohe, et teise wahekorra tagaliikmele uus tegur 7 juure on tekkinud. Seepärast ei saa küllalt, kui meie kolmanda wahekorra liikmeid 5-ga kaswatame, waid meie peame neid kõige pealt selle uue teguri 7-ga, ja siis 5-ga kaswatama.

Kui meie nüüd teise wahekorra liikmeid 8-ga kaswatame, siis saab teise wahekorra tagaliikme ja kolmanda wahekorra esiliikme wahel ühtlus tõesti jalale seatud, aga ühtlus teise wahekorra esiliikme ja esimese wahekorra tagaliikme wahel saab jälle rikutud, sest et teise wahekorra esiliikmele uus tegur 8 juure tekkib. Et

seda ühtlust uuesti jalale seada peame esimese wahekorra liikmeid ka uue teguri 8-ga kaswatama. Järjelikult saame:

$$X_3 : X_2 = 3 : 7 \mid \times 2 \,.\, \mathbf{8} \mid = 48 : 112$$
$$X_2 : X_4 = 2 : 5 \mid \times 7 \,.\, 8 \mid = 112 : 280$$
$$X_4 : X_1 = 8 : 3 \mid \times \mathbf{7} \,.\, 5 \mid = 280 : 105$$

Nüüd wõime neid wõrrendisid lühemalt kirjutada ja ülesande harilikult wälja arwata.

$$X_3 : X_2 : X_4 : X_1 = \overset{6540}{48 : 112 : 280 : 105}$$

III-das osas 48 jagu	Kui suur on 1 jagu?	$X_3 = 12 \,.\, 48 = 576$
II-ses „ 112 „	$6540 : 545 = 12$	$X_2 = 12 \,.\, 112 = 1344$
IV-das „ 280 „	545	$X_4 = 12 \,.\, 280 = 3360$
I-ses „ 105 „	1090	$X_1 = 12 \,.\, 105 = 1260$
Kokku 545 jagu	1090	Proow: Kokku 6540

Juhi asemel: Selles ülesandes kirjutasime wõrrendid nii üles, et pahemal pool ühtluse märki seiswatest wahekordadest iga järgmine niisuguse liikmega algas, missugusega eelminew lõppes; paremal pool ühtluse märki seiswatest wahekordadest kaswatasime iga wahekorra liikmeid nende arwudega, mis tema esiliikme all ja tagaliikme peal seisawad.

Teine wäljaarwamise wiis. $X_3 : X_2 = 3 : 7$; $X_4 : X_1 = 3 : 3$; $X_4 : X_2 = 5 : 2$.

Olgu kolmandas osas 3 jagu, siis on, I-se wõrrendi põhjal, teises osas 7 niisugust jagu.

Kolmanda wõrrendi põhjal wõime leida, mitu niisugust jagu neljandas osas on.

Tähendame 4-nda osa jagude arwu y-ga, siis saame wõrrendi:

$$y : 7 = 5 : 2.$$

Siit leiame: $y = \frac{7 \,.\, 5}{2} = 17^1/_2$ (jagu).

Teise wõrrendi põhjal wõime leida, mitu niisugust jagu esimeses on.

Tähendame 1-se osa jagude arwu z-ga, siis saame wõrrendi:

$$17^1/_2 \cdot z = 8 : 3.$$

Siit leiame: $z = \frac{17^1/_2 \,.\, 3}{8} = 6^9/_{16}$ (jagu).

Kui murruliste jagudega rehkendada ei taheta, siis on nüüd wõimalik murdude asemele täisarwusid panna.

Et meil teada on, mitu jagu igas osas on, siis wõime kirjutada:

$X_3 : X_2 : X_4 : X_1 = 3 : 7 : 17^1/_2 : 6^9/_{16}$ | 16-ga kaswatades saame:

$$X_3 : X_2 : X_4 : X_1 = 48 : 112 : 280 : 105.$$

§ 288. Osad on wastuwõrrendilised antud arwudele.

9-as ülesanne. Arw 380 neljasse osasse jagada wastuwõrrendiliselt arwudele 12, 18, 20 ja 45.

Väljaarwamine. Olgu 1-ne osa X_1, 2-ne osa X_2, 3-as osa X_3, 4-as osa X_4. Siis nõuab meie ülesanne:

et X_1 oleks X_2 wastu mitte nagu 12 : 18, waid nagu 18 : 12 — $X_1 : X_2 = 18 : 12$
et X_2 oleks X_3 wastu mitte nagu 18 : 20, waid nagu 20 : 18 — $X_2 : X_3 = 20 : 18$
et X_3 oleks X_4 wastu mitte nagu 20 : 45, waid nagu 45 : 20 — $X_3 : X_4 = 45 : 20$

Meie teame aga, et peripidiste arwude wastupidine wahekord on niisamasugune, nagu wastupidiste arwude peripidine wahekord.

Seepärast leiame:

$$\left.\begin{aligned} X_1 : X_2 &= 18 : 12 = \frac{1}{12} : \frac{1}{18} \\ X_2 : X_3 &= 20 : 18 = \frac{1}{18} : \frac{1}{20} \\ X_3 : X_4 &= 45 : 20 = \frac{1}{20} : \frac{1}{45} \end{aligned}\right\} \quad \text{ehk:} \quad \begin{aligned} X_1 : X_2 &= \frac{1}{12} : \frac{1}{18} \\ X_2 : X_3 &= \frac{1}{18} : \frac{1}{20} \\ X_3 : X_4 &= \frac{1}{20} : \frac{1}{45} \end{aligned}$$

Nüüd on awalik, et meie neid wõrrendid lühendatult kirjutada wõime:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \frac{1}{12} : \frac{1}{18} : \frac{1}{20} : \frac{1}{45}.$$

Edasi wäljaarwamine on kerge ja iseenesest arusaadaw. Kaswatame 180-ga:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 15 : 10 : 9 : 4.$$

$$X_1 = \frac{380 \cdot 15}{15+10+9+4} = 150$$

$$X_2 = \frac{380 \cdot 10}{15+10+9+4} = 100$$

$$X_3 = \frac{380 \cdot 9}{15+10+9+4} = 90$$

$$X_4 = \frac{380 \cdot 4}{15+10+9+4} = 40$$

Juht: *Et üht arwu wastuwõrrendiliselt antud arwudele jagada, peame teda periwõrrendiliselt antud arwude wastupidistele arwudele jagama.*

§ 289. Osad on wõrrendilised mitmele arwude reale.

10-es ülesanne. Kaupmees S. awas 3000 rublaga äri; ühe kuu pärast heitis R. äriosaliseks 3600 rublaga; $2^1/_2$ kuu pärast tuli uus äriosanik P. 4800 rublaga ja 4 kuu pärast K. 5000 rublaga juure. Kui 1 aasta äriawamisest mööda oli, tehti arwet ja nähti, et äri 4030 rbl. puhast kasu oli andnud. Kui palju peab iga äriosanik sellest puhtast kasust saama?

Väljaarwamine. Et kasud nii kapitaliga, kui ka ajaga periwõrrendilised on, siis peab 4030 rbl. kahele arwudè reale, kapitalidele ja ajale, periwõrrendiliselt ära jagatama.

S. kapital oli käimas — 12 kuud, R. kapital — 11 kuud, P. kapital — $9^1/_2$ kuud ja K. kapital 8 kuud.

Tähendame S. osa puhtast kasust X_S-ga, R. osa — X_R-ga, P. osa — X_P-ga ja K. osa — X_K-ga.

Et meie 4030 rbl. kahele arwude reale wõrrendiliselt ära peame jagama ja et arwud X_S, X_R, X_P, X_K kahele arwude reale periwõrrendilised on, seda kirjutame järgmiselt üles:

$$\frac{4030 \text{ rbl.}}{X_S : X_R : X_P : X_K} = \begin{cases} 3000 : 3600 : 4800 : 5000 \\ 12 : 11 : 9^1/_2 : 8 \end{cases}$$

Et kahele arwude reale wôrrendiliselt ärajagamise asemele ühele arwude reale wõrrendiliselt ärajagamist panna, peame ühe rea arwud ühesuurusteks tegema. Seepärast küsime, kui suur peaks igaühe kapital olema, kui tema sedasama kasu 1 kuu jooksul saada tahaks? Et lühema aja sees üht ja sedasama kasu saada, peab kapital nii mitu korda suurem olema, mitu kord aeg lühem on. S. kapital peab olema (3000.12) rbl., R. kapital — (3600.11) rbl., P. kapital — (4800.$9^1/_2$) rbl. ja K. kapital — (5000.8) rbl. Nüüd ei pruugi meie aega enam arwesse wõtta ja wõime puhta kasu 4030 rbl. ära jagada wõrrendiliselt arwudele (3000.12) (3600.11), (4800.$9^1/_2$) ja (5000.8). Järjelikult leiame:

$$X_S : X_R : X_P : X_K = (3000.12) : (3600.11) : (4800.9^1/_2) : (5000.8).$$

Ehk: $X_S : X_R : X_P : X_K = 90 : 99 : 114 : 100$

Siit leiame: $X_S = \frac{4030.\ 90}{90+99+114+100} = 900$ (rbl).

$X_R = \frac{4030.\ 99}{90+99+114+100} = 990$ (rbl).

$X_P = \frac{4030.\ 114}{90+99+114+100} = 1140$ (rbl).

$X_K = \frac{4030.\ 100}{90+99+114+100} = 1000$ (rbl).

Juht: *Et ühte arwu periwõrrendiliselt kahele (mitmele) arwude peale ära jagada, peame teda wõrrendiliselt wastawate arwude kaswatisele jagama.*

11-nes ülesanne. K. pidas ühes äris, mis 30% aastas kasu andis, ühe kapitali 7 kuud ja teises äris, mis 19% aastas kasu andis, teise kapitali 10 kuud. Mõlemate kapitalide summa oli 10000 rbl. Kui palju oli temal kummagis äris, kui ta mõlematest äridest ühepalju kasu sai?

Wäljaarwamine. Kapital ja protsendi kõrgus, niisamuti ka kapital ja aeg on wastuwõrrendilised suurused. Et kasud ühesuurused on, siis peame kapitali 10000 rbl. ära jagama wastuwõrrendiliselt nii hästi ajale, kui ka protsendi kõrgusele.

Olgu esimeses äris X_1 rubla ja teises äris X_2 rubla, siis on:

$$\frac{10000 \text{ rbl.}}{X_1 : X_2} = \begin{cases} \frac{1}{30} : \frac{1}{19} \\ \frac{1}{7} : \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$X_1 : X_2 = \frac{1}{30.7} : \frac{1}{19.10} = 19 : 21.$$

$$X_1 = \frac{10\ 00.\ 19}{19+21} = 4750 \text{ (rbl.)}$$

$$X_2 = \frac{10000.\ 21}{19+21} = 5250 \text{ (rbl.)}$$

12-nes ülesanne. N. andis 5000 rbl. kasu peale wälja ja sai mõne aja pärast 700 rbl. kasu, mis juures ta kapitali tagasi sai. Otsekohe andis ta teise kapitali — 9000 rbl. suur — kasu peale wälja ja sai mõne aja pärast 1575 rbl. kasu, mis juures ka kapital tagasi makseti. Kui kaua oli kumbki kapital kasu kandmas, kui nad ühte kokku $1^1/_2$ aastat wäljas oliwad ja protsendi kõrgus üks ja seesama oli?

Wäljaarwamine. Kapital ja aeg on wastuwõrrendilised suurused, kasud ja aeg on periwõrrendilised suurused. Et protsent mõlematel kordadel ühekõrge oli, siis peame aja, $1^1/_2$ aastat = 18 kuud, wastuwõrrendiliselt kapitalidele ja periwõrrendiliselt kasudele ära jagama. Kui esimene kapital X_1 kuud ja teine kapital X_2 kuud kasu kandmas oli, siis on:

$$\begin{array}{l} 18 \text{ kuud} \\ X_1 : X_2 = \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5000} : \frac{1}{9000} \\ 700 : 1575 \end{array} \right.$$

$$X_1 : X_2 = \frac{700}{5000} : \frac{1575}{9000} = \frac{7}{50} : \frac{7}{40} = \frac{1}{50} : \frac{1}{40} = 4 : 5.$$

$$X_1 = \frac{18 . 4}{4+5} = 8 \text{ (kuud)}$$

$$X_1 = \frac{18 . 5}{4+5} = 10 \text{ (kuud)}.$$

Kolmaskümnes kolmas peatükk: Segu ja sulatiste arwamine.

§ 290. Esimese liigi ülesanded.

Esimese liigi ülesannetes antakse segatawate kaupade hulk ja nende hind (hulga üksuse pealt) ja otsitakse segu hind (hulga üksuse pealt).

1-ne ülesanne. Kaupmees segas kohwi ube: 2 naela à[1]) 85 kop. nael, 6 naela à 65 kop. nael ja 4 naela à 40 kop. nael. Kui kallis tuleb 1 nael segu maksma?

Rakendus ja wäljaarwamine:

2	naela	kohwi ube,	à	85	kop.,	maksawad	170 kop.
6	„	„	„ à	65	„	„	390 „
4	„	„	„ à	40	„	„	160 „
12	naela	segatud kohwi ube				maksawad	720 kop.
1	„	„	„			„	720 kop. : 12 = 60 k.

2-ne ülesanne. Kaupmees segas 15 naela teed à 3 rbl. nael, 5 naela à 2 rbl. nael ja 20 naela à 1 rbl. 60 kop. nael. Kui kallilt peab ta 1 nael segu müüma, kui ta 13 rbl. kasu tahab saada?

---

1) à tähendab: iga hulga üksus maksab, siin kohal tähendab à: millest iga nael maksab.

Rakendus ja wäljaarwamine:

15 naela teed,	à 3 rbl.	= 45 rbl.	
5 „ „	à 2 „	= 10 „	
20 „ „	à 1 rbl. 60 kop.	= 32 „	
+ kasu		13 „	
40 naela segatud teed	müüb ta	100 rbl. eest,	
1 „ „	„ „	100 rbl. : 40 = $2^1/_2$ rbl. eest	

3-as ülesanne. Kaupmees segas tubakat, 7 naela à 4 rbl. nael, 15 naela à 1 rbl. nael ja 13 naela à 2 rbl. nael. Kui kallilt müüs ta 1 naela segu, kui ta selle tubaka müümise juures 2 rbl. 50 kop. kahju sai?

Rakendus ja wäljaarwamine:

7 naela tubakat,	à 4 rbl.	= 28 rbl.	
15 „ „	à 1 rbl.	= 15 „	
13 „ „	à 2 rbl.	= 26 „	
35 naela segatud tub. maks.		69 „	
maha arw. tuleb saadud kahju		2,5 „	
35 naela seg. tub. müüs kaupm.		66,5 rbl. eest ära;	
1 „ „ „	„ „	66,5 rbl. : 35 = 1,90 rbl. eest.	

§ 291. Teise liigi ülesanded.

Teise liigi ülesannetes antakse (harilikult) segu hulk, segu hind ja segatawate kaupade hind (üksuse pealt), otsitakse segatawate kaupade hulk.

1-ne ülesanne. Kahest sordist tubakast, à 2 rbl. 40 kop. nael ja à 1 rbl. 50 kop. nael, tahab kaupmees 135 naela tubakat segada, mille nael, ilma kasuta ja kahjuta, 1 rbl. 84 kop. maksab. Kui palju peab ta kummagist sordist wõtma.

Wäljaarwamine. Segus saab kaupmees 1 naela kõrgema sordi pealt (2 rbl. 40 kop. — 1 rbl. 84 kop. =) 56 kop. kahju, 1 naela alama sordi pealt (1 rbl. 84 kop. — 1 rbl. 50 kop. =) 34 kop. kasu. Meil on aga tähtis teada saada, kui palju peab kaupmees kummagist sordist wõtma, ilma et ta kasu ehk kahju saaks.

56 kop. kahju saab kaupmees 1 naela kõrgema sordi pealt
1 „ „ „ „ $^1/_{56}$ „ „ „ „
34 kop. kasu saab kaupmees 1 naela alama sordi pealt.
1 „ „ „ „ $^1/_{34}$ „ „ „ „

See 1 kopik kahju, mis kaupmees $^1/_{56}$ naela kõrgema sordi pealt saab, kaetakse selle 1 kopika kasuga, mis ta $^1/_{34}$ naela alama sordi pealt saab, kinni ja seepärast peab kaupmees iga $^1/_{56}$ naela

kõrgema sordi peale $^1/_{34}$ naela alamat sorti wõtma. See tähendab: 135 naela peawad periwõrrendiliselt arwudele $^1/_{56}$ ja $^1/_{34}$, ehk, mis üks ja seesama on, wastuwõrrendiliselt kahju ja kasu näitawatele arwudele 56 ja 34 ära jagatama.

$$X_{240} : X_{150} = {}^1/_{56} : {}^1/_{34} = 34 : 56 = 17 : 28.$$

$$X_{240} = \frac{135 \cdot 17}{17 + 28} = 51 \text{ (naela).}$$

$$X_{150} = \frac{135 \cdot 28}{17 + 28} = 84 \text{ (naela).}$$

Juht: Segus, mis kahest kauba sordist kokku on pandud, on sortide hulgad kahju-kasu arwudele wastuwõrrendilised.

Ülesande wäljaarwamise rakendame meie nii:

Segu hulk.	Sortide hinnad.	Segu hind.	Kahju ja kasu.	Wõrrend.	Wälja arwamine.
	240 kop.		— 56 kop.		$X_{240} : X_{150} = 34 : 56 = 17 : 28$
135 naela		184 kop.		$X_{240} : X_{150} = {}^1/_{56} : {}^1/_{34}$	$X_{240} = \frac{135 \cdot 17}{17 + 28} = 51$ (naela)
	150 kop.		+ 34 kop		$X_{150} = \frac{135 \cdot 28}{17 + 28} = 84$ (naela).

Teine arutamise wiis. Kui kaupmees kõrgemast sordist nii mitu (34) naela wõtab, mitu kopikat ta alama sordi pealt kasu saab ja alamast sordist nii mitu (56) naela wõtab, mitu kopikat ta kõrgema sordi pealt kahju saab, siis on saadud kahju ja kasu ühesuurused, sest mõlemad ilmuwad ühe ja nendesamade arwude kaswatistena (kahju on 56 kop. × 34 ja kasu on 34 kop. × 56), ja nad häwinewad wastastikku ära. Seepärast peab iga 34 naela esimese sordi tubaka kohta 56 naela teise sordi tubakat wõetama. See tähendab, et segus 135 naela periwõrrendiliselt arwudele 34 ja 56, ehk, mis seesama on, wastuwõrrendiliselt kahju-kasu arwudele 56 ja 34 ära peab jaotatud olema.

Kolmas arutamise wiis. Ütleme, et kõrgemast sordist x naela ja alamast sorstist y naela peab wõetama, et kaupmees segu naela 184 kop. eest müües kahju ega kasu ei saaks. 1 naela kõrgema sordi pealt saab kaupmees 56 kop. kahju, x naela pealt — 56. x kop. 1 naela alama sordi pealt saab kaupmees 34 kop. kasu, y naela pealt 34. y kop. Et kasu kahju tasa teeb, siis on 56. x (kop.) = 34. y (kop.).

Meie teame aga (§ 253), et kui kahe arwu kaswatis teise kahe arwu kaswatisega ühesuurune on, siis wõib neist neljast arwust wõrrendi üles seada ühe kaswatise tegurid wälimisteks, teise kaswatise tegurid sisemisteks liikmeteks wõttes.

Seepärast leiame $x : y = 34 : 56$.

See võrrend näitab meile, et esimese sordi hulk segus on teise sordi hulga wastu, nagu teise sordi naela pealt saadud kasu esimese sordid naela pealt saadud kahju wastu, ehk: Segus, mis kahest sordist kokku on pandud, on sortide hulgad kahju-kasu arwudele wastuwõrrendilised.

§ 292. Alkoholiliste wedelikkude segamine.

Puhas alkohol tuleb harwa ette; harilikult on ta weega segatud. Mida wähem wett wiinas, seda kangem on wiin. Wiina kangust arwatakse kraadide järele.

Alkoholi kraadid näitawad, mitu jagu alkoholi 100 jao alkoholilise wedeliku sees on. Järjelikult tähendab kraad sedasama, mis protsent. Näit. harilik monopoli wiin on 40 kraadi kange, s. t 100 jao wiina sees on 40 jagu alkoholi ja 60 jagu wett, ehk: monopoli wiinas on 40 protsenti alkoholi ja 60 protsenti wett. Kraadi tähendatakse märgiga ^{0}, mis arwule paremal pool üles kõrwale kirjutatakse, näit. kõige kangem piiritus, mis müügis ette tuleb on 95^0 (95 kraadi) kange.

Peale selle antakse wiinawabrikutes ja aktsiisi walitsuses kraadile wedelikkude mõõdu tähendus, nimelt kraad tähendab $^1/_{100}$ pangi ($^1/_{100}$ ведра). Näit. „W. mõisas põletati talwel $19^{09}/_{10}$ aastal 1200000 kraadi piiritust“ tähendab: „piirituses, mis W. mõisas talwel $19^{09}/_{10}$ põletati, oli 1.200.000 sajandikku pangi = 12000 pangi selget alkoholi.

Alkoholiliste wedelikkude segamisesse puutuwad ülesanded on, nagu teisedki segu arwamiste ülesanded, esimest ja teist liiki ja nad rehkendatakse, niisamuti, nagu teisedki segu arwamiste ülesanded wälja. Näitused. 1-se liigi ülesanne. Segati 2 toopi 65-e kraadilist ja 9 toopi 40-ne kraadilist wiina 3-e toobi weega. Kui kange sai segu?

Wäljaarwamine. Et kraad $^1/_{100}$ pangi tähendab, siis peame kõik pangide peale rehkendama:

2-s toobis = 0,2 pangi 65-e kraad. wiinas on $0{,}2 \times 65^0 = 13^0$ puhast alk.;
9-s „ = 0,9 „ 40-e „ „ „ $0{,}9 \times 40^0 = 36^0$ „ „
3-s „ = 0,3 „ wees ei ole sugugi alkoh. $= 0^0$ „ „

1,4-s pangis segus on seega 49^0 puhast alk.
1-s „ „ „ „ $49^0 : 1{,}4 = 35^0$ p. alk.

Kostus: Segu sai 35-e kraadiline.

2-se liigi ülesanne. Mitu toopi 95-e kraadilist piiritust ja mitu toopi 40-ne kraadilist wiina peab wõetama, et $5^1/_2$ toopi segu saada, mis 55^0 kange on?

Wäljaarwamine.

1-s pangis 95-e kraadilises piirituses on 40^0 üleliigsed,
1-s „ 40-e „ wiinas „ 15^0 puudu.

Et üleliigsed kraadid puuduwate kraadide aseme ära täidaksiwad, peab üleliigseid ja puuduwaid kraadisid ühewõrra olema. Ühewõrra saame aga üleliigseid ja puuduwaid kraadisid siis, kui meie 95-e kraadilist piiritust nii mitu pangi wõtame, mitu kraadi 1-s pangis 40-e kraadilises wiinas puudu on, s. o. 15 pangi, ja 40-e kraadilist wiina nii mitu pangi, mitu kraadi 1-s pangis 95-e kraadilises piirituses üleliiga on, s. o. 40 pangi. Siis katawad üleliigsed 15×40^0 puuduwad 40×15^0 kinni. See teeks aga kokku 55 pangi segu wälja, kuna meile ainult $5^1/_2$ toopi tarwis on. Meie ei pruugi aga mitte just 15 pangi ja 40 pangi wõtta, waid wõime ka kas wähem, ehk enam wõtta, aga ikka nii, et 15-ne pangi 95-e kraadilise piirituse kohta 40 pangi 40-ne kraadilist wiina tuleks; teiste sõnadega: wahekord piirituse ja wiina wahel peab olema nagu 15: 40. Wahekord 15: 40 on liiangut ja puudust näitawate arwude 40-e ja 15-ne wastupidine wahekord. Sellest järgneb, et ka kahe alkoholilise wedeliku segamise juures endine juht kindlaks jääb: Segus, mis kahest alkoholilisest wedelikust kokku on pandud, on segatawate wedelikkude hulgad liiangut ja puudust näitawatele arwudele wastuwõrrendilised.

Wäljaarwamine rakendatakse nagu ennegi.

Segu hulk.	Segat. wed. kangus	Segu kangus	L. ja p. näit. arwud.	Wôrrend.	Wäljaarwamine.
	95^0		$+ 40^0$		$X_{95} : X_{40} = 15 : 40 = 3 : 8$
$5^1/_2$ toopi		55^0		$X_{95} : X_{40} = {}^1/_{40} : {}^1/_{15}$	$X_{95} = \frac{5^1/_2 \cdot 3}{3 + 8} = 1^1/_2$ (toopi)
	40^0		$- 15^0$		$X_{40} = \frac{5^1/_2 \cdot 8}{3 + 8} = 4$ (toopi).

§ 293. Sulatiste arwamine.

Kallid metallid kuld ja hõbe on liig pehmed, et neid selgelt harilikus elus tarwitada. Puhtast kullast ehk hõbedast tehtud asjad hõõruks liig ruttu ära ja kaotaks palju omast wäärtusest. Seepärast sulatatakse neile kõwemat metalli — harilikult waske — juure. Kullale ja hõbedale juure lisatud metall nimetatakse juuresulatiseks (лигатура). Mida walkjam kuld, seda wähem on waske sees, mida punakam kuld, seda rohkem on waske sees.

Sulatises ettetulew selge kulla ehk hõbeda hulk awaldatakse (Wene riigis) üheksakümne kuuendikkudena.

See arw, mis näitab, mitu üheksakümne kuuendikku (raskuse järele) sulatises kulda ehk hõbedat on, nimetatakse proowiks (проба). Et 1 nael = 96 solotnikku ja 1 solotnik = 96 doli on, siis võib ka ütelda, et proow näitab mitu solotnikku selget kulda ehk hõbedat 1-s naelas, ehk mitu dolit 1-s solotnikkus sulatises on?

Kuld on harilikult 56-e, 72-e, 82-e, 92-e ja 94-ja proowiline; lehtkuld on 87-e kuni 96-e proowiline; hõbe on harilikult 84-ja, 88-a ja 91-e proowiline.

Igale hõbe- ja kuldasjale peawad kuldsepad kroonu poolt proowi peale lüüa laskma.

1-se liigi ülesanne. Kuldsepp sulatas 31 loodi puhast hõbedat, 2 naela 84-ja proowilist ja 1 nael 91-e proowilist hõbedat ja 1 loot waske kokku. Mitme proowiline sai sulatis?

Wäljarwamine:

31 loodis = $^{31}/_{32}$ n. puht. hõbedas on $^{31}/_{32}$. 93 sol. = 93 sol. puh. hõb.
2-s n. 84-ja proow. hõb. on 2×84 „ = 168 „ „ „
1-s „ 91-e „ „ „ 1×91 „ = 91 „ „
1 loodis = $^{1}/_{32}$ „ wases „ 0 „ „

4-s naelas sulatises on 352 solotn. puhast hõbedat.
1-s „ „ „ 352 solotn. : 4 = 88 sol. p. h.

Kostus: Sulatis sai 88-sa proowiline.

2-se liigi ülesanne. Kui palju 92-e proowilist ja kui palju 56-e proowilist kulda peab võetama, et 1 nael 22 loodi 82-e proowilist kulda saada?

Wäljaarwamine:

10 solotn. puh. kulda on üleliiga 1-s naelas 92-e proowil. kullas,
1 „ „ „ „ „ $^{1}/_{10}$-s „ 92-e „ „
26 solotn. puh. kulda on puudu 1-s naelas 56-e proowil. kullas,
1 „ „ „ „ „ $^{1}/_{26}$-s „ 56-e „ „

See 1 solotn. puhast kulda, mis $^{1}/_{26}$-kus naelas 56-e proowilises kullas puudu on, saadakse $^{1}/_{10}$-kust naelast 92-e proowilisest kullast, kus ta üleliiga on. Seepärast, kui meie iga $^{1}/_{10}$-ku naela 92-e proowilise kulla kohta $^{1}/_{26}$ naela 56-e proowilist kulda võtame, siis saab sulatis just 82-proowiline. See tähendab: 1 nael 22 loodi (ehk 54 loodi) peame periwõrrendiliselt ära jagama arwudele $^{1}/_{10}$ ja $^{1}/_{26}$, ehk, mis seesama on, wastuwõrrendiliselt arwudele 10 ja 26, s. o. liiangut ja puudust näitawatele arwudele.

$$X_{92} : X_{56} = {}^{1}/_{10} : {}^{1}/_{26} = 26 : 10 = 13 : 5$$

$$X_{92} = \frac{54 \cdot 13}{13 + 5} = 39 \text{ (loodi)}$$

$$X_{56} = \frac{54 \cdot 5}{13 + 5} = 15 \text{ (loodi).}$$

Sellest järgneb, et kahest kulla ehk hõbeda sordist saadud sulatises kokku sulatawate metallide hulgad liiangut ja puudust näitawatele arwudele wastuwõrrendilised on. Wäljaarwamine rakendatakse, nagu ennegi:

	92-proow.	+ 10		$X_{92} : X_{56} = 26 : 10 = 13 : 5$
54 loodi	82-pr.		$X_{92} : X_{56} = {}^1/_{10} : {}^1/_{26}$	$X_{92} = \frac{54 \cdot 13}{13 + 5} = 39$ (loodi)
	56-proow.	− 26		$X_{56} = \frac{54 \cdot 5}{13 + 5} = 15$ (loodi).

§ 294. Teise liigi ülesanded, kus segatawaid kaubasortisid enam kui kaks on.

Kolmest ehk enamast teatawa hinnalistest kauba sortidest on wõimalik wäga mitmel wiisil teatawa hinnalist segu saada. Seepärast on ülesanded, kus kolme ehk enama kauba sortide hinnad antud on ja otsitakse, kui palju igast sordist peab wõetama, et teataw hulk teatawa hinnalist segu saada, kindluseta ja niisugustel ülesannetel on määramata palju kostuseid. Näitus:

Ülesanne: Üks sort kohwiube maksab 80 kop., teine sort 55 kop. ja kolmas sort 45 kop nael. Kui palju peab igast sordist wõetama, et 1 puud kohwi ube saada, mis 65 kop. nael maksab?

I. segamise wiis.

I-se sordi naela pealt saame 15 kop. kahju.
II-se „ „ „ „ 10 „ kasu.
III-nda „ „ „ „ 20 „ „

Kui meie igast sordist 1-e naela wõtame, saame 15 kop. kahju ja 30 kop. kasu + s. o. 15 kop. kasu; et aga ei kahju ega kasu saada, wõtame I-st sordist 2 naela.

Seepärast peame kohwi oad järgmises wahekorras segama:

$X_{80} : X_{55} : X_{45} = 2 : 1 : 1$. $X_{80} = 20$ n.; $X_{55} = 10$ n.; $X_{45} = 10$ n.

II. segamise wiis.

Segame I-se ja II-se sordi nii, et segu 65-e kopikaline wälja tuleks:

I. sort — 80 kop.	Segu hind 65 kop.	− 15	$X_{80} : X_{55} = {}^1/_{15} : {}^1/_{10} = 2 : 3$	Järjelikult: I. sorti 2 jagu.
II. s. — 55 kop.		+ 10		II. „ 3 jagu.

Segame nüüd I-se ja III-nda sordi nii, et segu 65-e kopikaline wälja tuleks.

I. sort — 80 kop.	Segu hind	— 15		Järjelikult:
	65 kop.		$X_{80} : X_{45} = {}^1/_{15} : {}^1/_{20} = 4 : 3$	I. sorti 4 jagu
III. s. — 45 kop.		+ 20		III. „ 3 jagu.

Neid kahte segu wõime kuida tahes segada, sest nad on ühehinnalised, ikka tuleb 65 kopikuline segu wälja. Sagedaste rehkendatakse nii (kui kummagist segust pool wõtta):

2 jao I-se sordi peale tuleb 3 jagu II-st sordist,
4 „ I-se „ „ „ 3 „ III-dast „

6 jao I-se sordi peale tuleb 3 jagu II-st sordist ja 3 jagu III-dast.

Sordid on üksteisega järgmises wahekorras:

$X_{80} : X_{55} : X_{45} = 6 : 3 : 3 = 2 : 1 : 1$ (nagu meie juba leidsime).

Wõtame esimesest segust 5 korda enam kui teisest segust, siis saame:

10 jao I-se sordi peale tuleb 15 jagu II-st sordist
4 „ I-se „ „ „ 3 „ III-st „

14 jao I-se sordi peale tuleb 15 jagu II-st sordist ja 3 jagu III-st s.

Sortide wahekord on järgmine:

$X_{80} : X_{55} : X_{45} = 14 : 15 : 3$; $X_{80} = 17{}^1/_2$ n.; $X_{55} = 18{}^3/_4$ n.; $X_{45} = 3{}^3/_4$ n.

III. segamise wiis.

Segame enne I-se ja III-nda sordi wahekorras 3 : 1 ja siis saadud segu II-se sordiga.

1) 3 n. I. sorti kohwi = 240 k.	2) Segu à $71{}^1/_4$ k.		— $6{}^1/_4$		
1 n. III. s. „ = 45 „		65 k.		$X_{segu} : X_{55} = {}^4/_{25} : {}^1/_{10}$	
4 n. segu = 285 k.	II. sort à 55 kop.		+ 10	$X_{segu} : X_{55} = 8 : 5.$	
1 n. „ = $71{}^1/_4$ k.					

8 jao segu peale tuleb 5 jagu II-se sordi kohwi. Need 8 jagu tulewad aga I-se ja III-nda sordi wahel ära jagada wahekorras 3 : 1. Siis leiame:

$X_{80} : X_{55} : X_{45} = 6 : 5 : 2.$

$$X_{80} = \frac{40 \cdot 6}{13} \text{ n.}; \quad X_{55} = \frac{40 \cdot 5}{13} \text{ n.}; \quad X_{45} = \frac{40 \cdot 2}{13} \text{ n.}$$

Nagu näha, on segamise wiisisid otsatu palju olemas.

On aga peale sortide hindade ja segu hulga ja hinna weel tarwiline arw kitsendawaid tingimisi antud, siis on wõimalik ka enam kui kahe sordi juures kindlat kostust leida. Näit.

Ülesanne: Neljast sordist tubakast, I. sort à 4 rbl., II. sort à 3,2 rbl., III. sort à 2,2 rbl. ja IV. sort à 1,5 rbl. on

tarwis 79 naela tubakat saada, mille nael 2,5 rbl maksab. Kui palju peab igast sordist wõtma, et I. sort II. sordi wastu oleks, nagu 3 : 5 ja III. sort IV. sordi wastu, nagu 3 : 2.

Wäljaarwamine.

1) Kui kalli hinnalise segu saame meie, kui I-se ja II-se sordi üksteisega segame wahekorras 3 : 5 ?

I. sort	3 naela	à 4 rbl.	= 12 rbl.
II. „	5 „	à 3,2 „	= 16 „
	8 naela segu		= 28 rbl.
	1 „	„	= 3,5 „

2) Kui kalli hinnalise segu saame meie, kui III-nda ja IV-nda sordi üksteisega segame wahekorras 3 : 2 ?

III-as sort	3 naela	à 2,2 rbl.	= 6,6 rbl.
IV-as „	2 „	à 1,5 „	= 3,0 „
	5 naela segu		= 9,6 rbl.
	1 „	„	= 1,92 „

3) Kui palju peame kummagist segust wõtma ?

3,5 rbl. | 2,5 rbl. | — 1 | $X_{3,5} : X_{1,92} = 1 : \frac{100}{58}$ | $X_{3,5} = \frac{79 \cdot 58}{158} = 29$ naela.

1,92 rbl. | | + 0,58 | $X_{3,5} : X_{1,92} = 58 : 100$ | $X_{1,92} = \frac{79 \cdot 100}{158} = 50$ naela.

4) Nüüd peame weel 29 naela ära jagama I-se ja II-se sordi wahel wõrrendiliselt arwudele 3 ja 5 ja 50 naela III-nda ja IV-nda sordi wahel wõrrendliselt arwudele 3 ja 2.

29 naela

$X_I : X_{II} = 3 : 5$

$X_1 = \frac{29 \text{ naela} \cdot 3}{8} = 10^7/_8$ naela.

$X_2 = \frac{29 \text{ naela} \cdot 5}{8} = 18^1/_8$ naela.

50 naela

$X_{III} : X_{IV} = 3 : 2$

$X_{III} = \frac{50 \text{ naela} \cdot 3}{5} = 30$ naela.

$X_{IV} = \frac{50 \text{ naela} \cdot 2}{5} = 20$ naela.

Lõpuks wõiksime ka weel nii rehkendada:

Nagu wõrrend $X_{3,5} : X_{1,92} = 58 : 100$ näitab peame kahest esimesest sordist 58 jagu ja kahest wiimasest sordist 100 jagu wõtma. 58 jagu tulewad esimese ja teise sordi wahel ära jagada wõrrendiliselt 3 : 5 ja 100 jagu tulewad kolmanda ja neljanda sordi wahel ärajagada wõrrendiliselt 3 : 2.

58 jagu

$X_I : X_{II} = 3 : 5.$

$X_I = \frac{58 \cdot 3}{8} = {}^{87}/_4$ (jagu).

$X_{II} = \frac{58 \cdot 5}{8} = {}^{145}/_4$ (jagu).

100 jagu.

$X_{III} : X_{IV} = 3 : 2$

$X_{III} = \frac{100 \cdot 3}{5} = 60$ (jagu).

$X_{IV} = \frac{100 \cdot 2}{5} = 40$ (jagu).

Järjelikult tuleb I-sest sordist $^{87}/_{4}$, II-sest sordist $^{145}/_{4}$, III-ndast sordist 60 ja IV-st sordist 40 jagu wõtta; ehk sortide wahekord on järgmine :

$$X_I : X_{II} : X_{III} : X_{IV} = {}^{87}/_{4} : {}^{145}/_{4} : 60 : 40 = 87 : 145 : 240 : 160$$

Siis leiame :

$$X_I = \frac{79 \cdot 87}{632} = 10^{7}/_{8} \text{ (naela)}$$

$$X_{II} = \frac{79 \cdot 145}{632} = 18^{1}/_{8} \text{ (naela)}$$

$$X_{III} = \frac{79 \cdot 240}{632} = 30 \text{ (naela)}$$

$$X_{IV} = \frac{79 \cdot 160}{632} = 20 \text{ (naela)}$$

Rostowis D/ä 28. augustil 1910.

A
5973
27701

E. K. Ü.

„Postimehe“

kirjastus soowitab järgmisi raamatuid:

Terwis. Arstiteadusline ajakiri. 7 aastakäiku. II. aastakäik à 90 kop., teised à 60 kop.

Nooresooleht. 1909. ja 1910. aastakäik, à 30 k.

Lasteleht. Eesti nooresoo õpetlik ja ilukirjandusline hulga piltidega kaunistatud kuukiri. 1901. a. alates. Iga aastakäik kahes jaos à 30 kop.

Eesti Kultura I. Korraldanud W. Reimann. Hind 1 rbl. 50 kop.

Eisen. Kalewala I. Hind 80 kop.

Gansberg, F. Kuidas inimesed wanast elasid. Piltidega. Eesti keelde Anna Haawa. Hind 40 k.



Jung, A. Emakeele õpetus ja kirjalikud harjutused Eesti alguskoolidele. H. 40 k., köid. 48 k.

Kurrik, J. Terwise raamat (daanlase Mülleri järele). Hind 50 kop.

Oma Maa. Korraldanud E. Wirgo. Hind 1 rbl.

Pitka, staabikapt. P. Wõimlemise ehk gümnastika õpetus kooliõpetajatele, koolidele ja iseharjutamiseks. Hind 35 kop., kõwas köites 50 kop.

Schalk, G. Rooma muinaskaugelased. Piltidega. Gustaw Schalki järel Anna Haawa. H. 1 r.

Uniwer, M. Kodulaste rehkenduse raamat. Rehkenduse ülesanded ja harjutused esimese kümne piiris, 65 pildiga. Hind 40 kop.

Jõgewer, J. Lühikene emakeele õpetus. Hind 35 k.

Kann, N. Pildid Lääne-Europa kirjandusest. Hind 70 kop.

Kappel, J. Kooli laulmise raamat. H. 35 k., kõwade kaantega 40 kop.

Kuusk, A. Keemia algõpetus. Hind 60 kop.