

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Annika Koovit
Interpoleerimine kuupsplainidega
Bakalaureusetöö

Juhendaja : prof. Arvet Pedas

Autor:

Juhendaja:

Lubatud kaitsmisele

Matemaatika instituudi juhataja:.....

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Kuupsplaini definitsioon	4
2 Kuupsplaini esitus	6
3 Kuupsplaini ja tema tuletiste pidevus sisesõlmedes	8
4 Domineeriva peadiagonaaliga maatriksid	11
5 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus	12
5.1 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel I	12
5.2 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel II	13
5.3 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel III	14
6 Veahinnangud	18
6.1 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes	18
6.1.1 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes rajatingimuste I ja II korral	18
6.1.2 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes lisatingimuste III korral	24
6.2 Veahinnang kuupsplaini jaoks	35
7 Näide	42
Kirjandus	45
Summary	46
Lisa 1	47
Lisa 2	48
Lisa 3	49

Sissejuhatus

Funktsioonide lähendamisel jaotatakse vaadeldav lõik sageli väiksemateks osalõikudeks võrgu $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ abil ning lähendatakse antud funktsiooni igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) mingi polünoomiga. Nii moodustub teatav tükiti polünoomiaalne lähend, mis üldiselt võib võrgu sisepunktides olla katkev. Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse funktsioone, mis igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) on kuuppolünoom ning mis on kaks korda pidevalt diferentseeruv kogu lõigul $[a, b]$, sh sisepunktides x_1, \dots, x_{n-1} . Selliseid funktsioone nimetatakse kuupsplainideks.

Töö esimeses osas (peatükid 1-5) esitame kuupsplaini definitsiooni ning konstrueerime võrgule $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ vastava kuupsplaini s_3 , mis rahuldab tingimusi $s_3(x_i) = f_i$ ($i = 0, \dots, n$), kus f_0, \dots, f_n on etteantud arvud. Sellise kuupsplaini s_3 üheseks määramiseks toome täiendavalt sisse kolm komplekti lisatingimusi:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & s'_3(a) = \alpha', \quad s'_3(b) = \beta', \\ \text{II} \quad & s''_3(a) = \alpha'', \quad s''_3(b) = \beta'', \\ \text{III} \quad & \lim_{x \rightarrow x_k^-} s'''_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} s'''_3(x), \quad k = 1, n-1. \end{aligned}$$

Leiame s_3 avaldise, kasutades kuupsplaini esimese tuletise väärtusi $m_i = s'(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$). Suuruste m_0, \dots, m_n leidmiseks tuletame lisatingimuste komplekte arvestades lineaarsed algebraised võrrandisüsteemid. Seejärel veendume, et need on üheselt lahenduvad ning kuupsplaini s_3 avaldis seega üheselt määratud.

Teises osas (peatükk 6) anname ette lõigul $[a, b]$ neli korda pidevalt diferentseeruva funktsiooni f ja hindame viga $\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)|$, kus s_3 on väärtusi $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) interpoleeriv kuupsplain lisatingimustel **I–III**. Seejuures lisatingimuste **I** korral $\alpha' = f'(a)$ ja $\beta' = f'(b)$ ning lisatingimuste **II** korral $\alpha'' = f''(a)$ ja $\beta'' = f''(b)$. Bakalaureusetöö põhieesmärk on leida võimalikult täpne hinnang veale $\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)|$ suuruse $h = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$ kaudu. Töös antakse detailne tõestus monograafias [1] toodud sellekohasele tulemusele lisatingimuste **I** ja **II** korral. Muuhulgas vähendatakse töös [3] saadud vastavas hinnagus esinevat konstanti üle 20 korra (vt teoreemi 3). Lisaks näidatakse, et lisatingimuste **II** korral pole bakalaureusetöös saadud konstanti enam võimalik vähendada. Lisatingimuste **III** korral täpsustatakse varasemas sellekohases töös [4] saadud tulemust (vt. teoreeme 4 ja järeldusi 1, 2).

Viimases osas (peatükk 7) on teoreetilisi tulemusi illustreeritud numbrilise näitega.

1 Kuupsplaini definitsioon

Olgu $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Olgu antud lõik $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $a < b$, ning jaotame selle lõigu punktidega

$$\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \quad (1.1)$$

n osalõiguks $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Hulka Δ_n nimetatakse lõigul $[a, b]$ antud võrguks. Tähistame k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka sümboliga $C^k[a, b]$. Seejuures $k = 0$ korral kirjutame $C^0[a, b] = C[a, b]$.

Definitsioon. Lõigul $[a, b]$ määratud funktsiooni $s_3 = s_3(x)$ nimetatakse võrgule Δ_n vastavaks kuupsplainiks (edaspidi lühidalt ka splainiks), kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

(i) s_3 on igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) kuuppolünoom, s.t.

$$s_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad \text{kui } x \in [x_{i-1}, x_i];$$

(ii) $s_3 \in C^2[a, b]$.

Võrgu Δ_n punkte x_0, \dots, x_n nimetatakse splaini s_3 sõlmedeks. Igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, on s_3 kui kuuppolünoom lõpmata palju kordi diferentseeruv. Võrgu Δ_n sisesõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} võivad splaini kolmandat järku tuletised olla katkevad.

Igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, on splain s_3 määratud nelja parameetriga a_i, b_i, c_i ja d_i . Kuna osalõike on kokku n tükki, siis on splain s_3 konstrueerimiseks vaja $4n$ parameetrit. Nõudest (ii) järeldub, et s_3, s_3', s_3'' peavad olema pidevad ka sisesõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} , mis seab splainile $3(n-1)$ lisatingimust. Seega vabade parameetrite arv, millest splain s_3 sõltuma jääb, on $4n - 3(n-1) = n + 3$.

Nende parameetrite määramiseks seame tingimused, et s_3 interpoleeriks sõlmedes x_0, \dots, x_n etteantud funktsiooni $f = f(x)$ väärtusi f_0, \dots, f_n :

$$s_3(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.2)$$

Tingimusi (1.2) nimetatakse interpolatsioonitingimusteks ning neid rahuldavat splaini s_3 nimetatakse väärtusi f_0, \dots, f_n interpoleerivaks kuupsplainiks. Interpolatsioonitingimused (1.2) seavad splainile $n + 1$ lisatingimust, seega tuleb interpoleeriva splaini s_3 üheseks määramiseks ette anda kaks lisatingimust. Sageli kasutatakse lisatingimustena nn rajatingimusi kujul **I** või **II**:

$$\mathbf{I} \quad s_3'(a) = \alpha', \quad s_3'(b) = \beta',$$

$$\mathbf{II} \quad s_3''(a) = \alpha'', \quad s_3''(b) = \beta'',$$

kus α' , α'' , β' ja β'' on antud arvud. Käesolevas töös vaatleme lisaks rajatingimustele **I** ja **II** lisatingimustena ka kahte tingimust kujul

$$\begin{aligned} \text{III} \quad \lim_{x \rightarrow x_1^-} s_3'''(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1^+} s_3'''(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_{n-1}^-} s_3'''(x) &= \lim_{x \rightarrow x_{n-1}^+} s_3'''(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

2 Kuupsplaini esitus

Olgu antud võrk (1.1) sõlmedega x_0, \dots, x_n ning tähistame $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Otsime tingimusi (1.2) rahuldavat kuupsplaini s_3 kujul

$$s_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

kus a_i, b_i, c_i ja d_i on tundmatud kordajad. Tähistame

$$m_i = s_3'(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Suuruseid m_0, \dots, m_n nimetatakse sageli kuupsplaini esimesteks momentideks. Seosest (2.1) järeldub, et

$$s_3'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Võttes siin $x = x_{i-1}$ ja $x = x_i$, saame võrdused

$$m_{i-1} = b_i$$

ja

$$m_i = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,$$

millest

$$2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = m_i - m_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Võttes seoses (2.1) $x = x_{i-1}$ ja $x = x_i$, saame tingimusi (1.2) arvestades, et

$$f_{i-1} = a_i$$

ja

$$f_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3.$$

Niisiis saame viimase võrduse kirjutada kujul

$$c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i - f_{i-1} - m_{i-1} h_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Võrdused (2.2) ja (2.3) kujutavad endast kahe tundmatuga võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = m_i - m_{i-1}, \\ c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i - f_{i-1} - m_{i-1} h_i, \end{cases} \quad (2.4)$$

kus c_i, d_i ($i = 1, \dots, n$) on otsitavad. Lahendame saadud võrrandisüsteemi asendusvõttega. Avaldades esimesest võrrandist suuruse c_i , saame

$$c_i = \frac{m_i}{2h_i} - \frac{m_{i-1}}{2h_i} - \frac{3d_i h_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Asendame saadud c_i avaldise süsteemi (2.4) teise võrrandisse. Tulemuseks saame, et

$$\frac{m_i h_i}{2} - \frac{m_{i-1} h_i}{2} - \frac{d_i h_i^3}{2} = f_i - f_{i-1} - m_{i-1} h_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Niisiis

$$d_i = \frac{m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{m_i}{h_i^2} + \frac{2(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Asendades leitud d_i avaldise (2.5), saame tulemuseks võrduse

$$c_i = -\frac{2m_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i}{h_i} - \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Seega avalduvad polünoomi (2.1) kordajad järgmiselt:

$$\begin{aligned} a_i &= f_{i-1}, \\ b_i &= m_{i-1}, \\ c_i &= -\frac{2m_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i}{h_i} - \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2}, \\ d_i &= \frac{m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{m_i}{h_i^2} + \frac{2(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3}, \end{aligned}$$

kus $i = 1, \dots, n$. Järelikult

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f_{i-1} + m_{i-1}(x - x_{i-1}) - \left(\frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{m_i}{h_i} + \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} \right) (x - x_{i-1})^2 \\ &\quad + \left(\frac{m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{m_i}{h_i^2} + \frac{2(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3} \right) (x - x_{i-1})^3, \\ &\quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} s'_3(x) &= m_{i-1} - \left(\frac{4m_{i-1}}{h_i} + \frac{2m_i}{h_i} + \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} \right) (x - x_{i-1}) \\ &\quad + \left(\frac{3m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{3m_i}{h_i^2} + \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3} \right) (x - x_{i-1})^2, \\ &\quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} s''_3(x) &= -\frac{4m_{i-1}}{h_i} - \frac{2m_i}{h_i} - \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} \\ &\quad + \left(\frac{6m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{6m_i}{h_i^2} + \frac{12(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3} \right) (x - x_{i-1}), \\ &\quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$s'''_3(x) = \frac{6m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{6m_i}{h_i^2} + \frac{12(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

3 Kuupsplaini ja tema tuletiste pidevus sisesõlmedes

Splaini s_3 definitsioonis nõutakse, et $s_3 \in C^2[a, b]$. Kuna kuuppolünoom s_3 on mistahes arv kordi diferentseeruv igas osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, piisab kontrollida s_3 ja tema tuletiste s'_3 ning s''_3 pidevust vaid sisesõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} .

Kuna s_3 omab lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ kuju (2.6), siis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^-} s_3(x) &= f_{i-1} + m_{i-1}h_i - 2m_{i-1}h_i - m_i h_i - 3(f_{i-1} - f_i) \\ &\quad + m_{i-1}h_i + m_i h_i + 2(f_{i-1} - f_i) \\ &= f_{i-1} - f_{i-1} + f_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Kirjutades võrduse (2.6) välja lõigul $[x_i, x_{i+1}]$, saame

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f_i + m_i(x - x_i) - \left(\frac{2m_i}{h_{i+1}} + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{3(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^2} \right) (x - x_i)^2 \\ &\quad + \left(\frac{m_i}{h_{i+1}^2} + \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{2(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^3} \right) (x - x_i)^3. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} s_3(x) = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Oleme saanud, et

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s_3(x), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

mis ütleb, et s_3 on pidev funktsioon oma sisesõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} .

Analoogiliselt, kuna s'_3 omab lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ kuju (2.7), siis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^-} s'_3(x) &= m_{i-1} - 4m_{i-1} - 2m_i - \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i} + 3m_{i-1} + 3m_i + \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i} \\ &= m_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Kirjutades võrduse (2.7) välja lõigul $[x_i, x_{i+1}]$, saame

$$\begin{aligned} s'_3(x) &= m_i - \left(\frac{4m_i}{h_{i+1}} + \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{6(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^2} \right) (x - x_i) \\ &\quad + \left(\frac{3m_i}{h_{i+1}^2} + \frac{3m_{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{6(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^3} \right) (x - x_i)^2. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} s'_3(x) = m_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Oleme saanud, et

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s'_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s'_3(x), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

mis ütleb, et s'_3 on pidev funktsioon oma sisesõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} .

Niisiis valemiga (2.6) määratud splaini s_3 korral $s_3 \in C^2[a, b]$, kui

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s''_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s''_3(x), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.1)$$

Kuna s''_3 omab lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ kuju (2.8), siis

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^-} s''_3(x) &= -\frac{4m_{i-1}}{h_i} - \frac{2m_i}{h_i} - \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} + \frac{6m_{i-1}}{h_i} + \frac{6m_i}{h_i} + \frac{12(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} \\ &= \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} + \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Kirjutades võrduse (2.8) välja lõigul $[x_i, x_{i+1}]$, saame

$$s''_3(x) = -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{6(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^2} + \left(\frac{6m_i}{h_{i+1}^2} + \frac{6m_{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{12(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^3} \right) (x - x_i).$$

Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} s''_3(x) = -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{6(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^2}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

ning võrdused (3.1) võtavad kuju

$$\frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} + \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} = -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{6(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Viies suurused m_{i-1} , m_i , m_{i+1} ühele poole ja f_{i-1} , f_i , f_{i+1} teisele poole võrdusmärke, saame

$$\begin{aligned} \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \left(\frac{4}{h_i} + \frac{4}{h_{i+1}} \right) m_i + \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} &= \frac{6(f_{i+1} - f_i)}{h_{i+1}^2} + \frac{6(f_i - f_{i-1})}{h_i^2}, \\ i &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Korrutades võrrandi mõlemad pooled läbi suurusega $\frac{h_i h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})}$, saame

$$\begin{aligned} \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} m_{i+1} &= \frac{3h_i(f_{i+1} - f_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} + \frac{3h_{i+1}(f_i - f_{i-1})}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \\ i &= 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Oleme saanud võrrandisüsteemi suuruste m_0, \dots, m_n suhtes. Kuna tundmatuid on $n+1$, võrrandeid aga $n-1$, siis lisame võrranditele (3.2) rajatingimustest **I** või

II või lisatingimustest **III** tulenevad kaks võrrandit. Rajatingimustest **I** saame võrdused

$$m_0 = \alpha' \quad \text{ja} \quad m_n = \beta'. \quad (3.3)$$

Rajatingimustest **II** saame täiendavad võrrandid, kui kirjutame seose (2.8) välja lõikudel $[x_0, x_1]$ ja $[x_{n-1}, x_n]$ ning võtame vastavalt $x = x_0$ ja $x = x_n$:

$$\begin{aligned} -\frac{4m_0}{h_1} - \frac{2m_1}{h_1} - \frac{6(f_0 - f_1)}{h_1^2} &= \alpha'', \\ \frac{2m_{n-1}}{h_n} + \frac{4m_n}{h_n} + \frac{6(f_{n-1} - f_n)}{h_n^2} &= \beta'', \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= \frac{3(f_1 - f_0)}{h_1} - \frac{h_1 \alpha''}{2}, \\ m_{n-1} + 2m_n &= \frac{3(f_n - f_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n \beta''}{2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Lisatingimustest **III** saame esimese võrrandi, kui kirjutame seose (2.9) välja lõikudel $[x_0, x_1]$ ja $[x_1, x_2]$ ning võrdsustame saadud avaldised. Analoogiliselt, teise võrrandi leiame seose (2.9) välja kirjutamisel lõikudel $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ ja $[x_{n-1}, x_n]$ ning saadud avaldiste võrdsustamisel. Seega oleme saanud võrdused

$$\begin{aligned} \frac{6m_0}{h_1^2} + \frac{6m_1}{h_1^2} + \frac{12(f_0 - f_1)}{h_1^3} &= \frac{6m_1}{h_2^2} + \frac{6m_2}{h_2^2} + \frac{12(f_1 - f_2)}{h_2^3}, \\ \frac{6m_{n-2}}{h_{n-1}^2} + \frac{6m_{n-1}}{h_{n-1}^2} + \frac{12(f_{n-2} - f_{n-1})}{h_{n-1}^3} &= \frac{6m_{n-1}}{h_n^2} + \frac{6m_n}{h_n^2} + \frac{12(f_{n-1} - f_n)}{h_n^3}, \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} m_0 + \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) m_1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} m_2 &= \frac{2h_1^2(f_1 - f_2)}{h_2^3} - \frac{2(f_0 - f_1)}{h_1}, \\ -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} m_{n-2} + \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2}\right) m_{n-1} + m_n &= \frac{2h_n^2(f_{n-2} - f_{n-1})}{h_{n-1}^3} - \frac{2(f_{n-1} - f_n)}{h_n}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Järelikult väärtusi f_0, \dots, f_n intepoleeriva kuupsplaini konstrueerimiseks kujul (2.6) tuleb rajatingimuste **I** korral lahendada võrrandisüsteem $\{(3.2), (3.3)\}$, rajatingimuste **II** korral $\{(3.2), (3.4)\}$ ning lisatingimuste **III** korral $\{(3.2), (3.5)\}$.

4 Domineeriva peadiagonaaliga matriksid

Käesolevas peatükis toome välja kaks lemmat, mida kasutame edaspidi.

Definitsioon. Matriksit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nimetatakse regulaarseks, kui $\det(A) \neq 0$.

Definitsioon. Matriksit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nimetatakse domineeriva peadiagonaaliga matriksiks, kui

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Lemma 1. *Domineeriva peadiagonaaliga matriks on regulaarne.*

Tõestus. Lemma tõestust võib leida õpikust [1], lk. 333, teoreem D.1. □

Lemma 2. *Olgu antud lineaarne võrrandisüsteem*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus x_1, \dots, x_n on otsitavad ning $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ domineeriva peadiagonaaliga matriks. Tähistame

$$q := \min_{i=1, \dots, n} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) > 0.$$

Siis antud võrrandisüsteem on üheselt lahenduv ning tema lahendi jaoks kehtib hinnang

$$\max_{j=1, \dots, n} |x_j| \leq \frac{1}{q} \max_{i=1, \dots, n} |b_i|.$$

Tõestus. Lemma 1 põhjal on matriks A regulaarne ning seega leidub võrrandisüsteemil $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \dots, n$, parajasti üks lahend x_1, \dots, x_n . Lemma teise väite tõestust on võimalik leida õpikust [1], lk. 334, järeldus D.1. □

Märkus 1. Lemmade 1 ja 2 tõestusi võib samuti leida töödest [3] ja [4].

5 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus

Käesolevas peatükis näitame, et võrrandisüsteemid $\{(3.2), (3.3)\}$, $\{(3.2), (3.4)\}$ ja $\{(3.2), (3.5)\}$ on üheselt lahenduvad.

5.1 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel I

Kirjutame süsteemi $\{(3.2), (3.3)\}$ kujul

$$\begin{cases} m_0 = \alpha' \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}m_{i+1} = c_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ m_n = \beta' \end{cases} \quad (5.1)$$

kus

$$c_i = \frac{3h_i(f_{i+1} - f_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} + \frac{3h_{i+1}(f_i - f_{i-1})}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.2)$$

Esitame süsteemi (5.1) ka maatrikskujul

$$A_1 m = r_1,$$

kus

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{h_1+h_2} & 2 & \frac{h_1}{h_1+h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{h_2+h_3} & 2 & \frac{h_2}{h_2+h_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_n}{h_{n-1}+h_n} & 2 & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad r_1 = \begin{pmatrix} \alpha' \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ \beta' \end{pmatrix}.$$

Näeme, et maatriks A_1 on domineeriva peadiagonaaliga, sest esimese ja viimase rea korral on see trivaalne ($1 > 0$) ning keskmiste ridade korral

$$|2| - \left(\left| \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \right| + \left| \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \right| \right) = 2 - \frac{h_i + h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 2 - 1 = 1 > 0.$$

Järelikult on A_1 lemma 1 põhjal regulaarne ning süsteem (5.1) on üheselt lahenduv. Seega on kuupsplain kujul (2.6) rajatingimuste **I** korral üheselt määratud.

5.2 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel II

Kirjutame süsteemi $\{(3.2), (3.4)\}$ kujul

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{3(f_1 - f_0)}{h_1} - \frac{h_1\alpha''}{2} \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}m_{i+1} = c_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{3(f_n - f_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n\beta''}{2} \end{cases} \quad (5.3)$$

kus c_i ($i = 1, \dots, n-1$) on defineeritud võrdusega (5.2). Esitame süsteemi (5.3) ka maatrikskujul

$$A_2 m = r_2,$$

kus

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{h_1+h_2} & 2 & \frac{h_1}{h_1+h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{h_2+h_3} & 2 & \frac{h_2}{h_2+h_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_n}{h_{n-1}+h_n} & 2 & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad r_2 = \begin{pmatrix} \frac{3(f_1-f_0)}{h_1} - \frac{h_1\alpha''}{2} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ \frac{3(f_n-f_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n\beta''}{2} \end{pmatrix}.$$

Näeme, et maatriks A_2 erineb maatriksist A_1 äärmiste ridade poolest. Kuna esimese ja viimase rea korral kehtib $2 - 1 > 0$, siis on maatriks A_2 domineeriva peadiagonaaliga, lemma 1 põhjal regulaarne ning süsteem (5.3) üheselt lahenduv. Sellest järeldub, et kuupsplain s_3 kujul (2.6) on rajatingimuste **II** korral üheselt määratud.

5.3 Kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel III

Kirjutame süsteemi $\{(3.2), (3.5)\}$ kujul

$$\begin{cases} m_0 + \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) m_1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} m_2 = \frac{2h_1^2(f_1 - f_2)}{h_2^3} - \frac{2(f_0 - f_1)}{h_1} \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} m_{i+1} = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} m_{n-2} + \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2}\right) m_{n-1} + m_n = \frac{2h_n^2(f_{n-2} - f_{n-1})}{h_{n-1}^3} - \frac{2(f_{n-1} - f_n)}{h_n} \end{cases} \quad (5.4)$$

kus c_i ($i = 1, \dots, n-1$) on defineeritud võrdusega (5.2). Esitame süsteemi (5.4) ka maatrikskujul

$$Am = r,$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} & -\frac{h_1^2}{h_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{h_1+h_2} & 2 & \frac{h_1}{h_1+h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{h_2+h_3} & 2 & \frac{h_2}{h_2+h_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_n}{h_{n-1}+h_n} & 2 & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_n} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} & 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad r = \begin{pmatrix} \frac{2h_1^2(f_1-f_2)}{h_2^3} - \frac{2(f_0-f_1)}{h_1} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ \frac{2h_n^2(f_{n-2}-f_{n-1})}{h_{n-1}^3} - \frac{2(f_{n-1}-f_n)}{h_n} \end{pmatrix}.$$

Paneme tähele, et maatriks A ei ole domineeriva peadiagonaaliga, sest esimese rea korral

$$|1| - \left(\left| 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right| + \left| -\frac{h_1^2}{h_2^2} \right| \right) \leq 0$$

ja viimase rea korral niipea, kui $\frac{h_n}{h_{n-1}} \leq 1$, siis

$$|1| - \left(\left| -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| + \left| 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| \right) \leq 0.$$

Tekitamaks domineeriva peadiagonaaliga kordajate maatriksit, elimineerime võrrandisüsteemist (5.4) suurused m_0 ja m_n . Selleks avaldame süsteemi esimesest ja viimasest võrrandist vastavalt m_0 ja m_n :

$$m_0 = \frac{2h_1^2(f_1 - f_2)}{h_2^3} - \frac{2(f_0 - f_1)}{h_1} - \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) m_1 + \frac{h_1^2}{h_2^2} m_2, \quad (5.5)$$

$$m_n = \frac{2h_n^2(f_{n-2} - f_{n-1})}{h_{n-1}^3} - \frac{2(f_{n-1} - f_n)}{h_n} + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2}m_{n-2} - \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2}\right)m_{n-1}. \quad (5.6)$$

Asendame avaldatud suurused m_0 ja m_n vastavalt võrrandisüsteemi (5.4) võrranditesse $i = 1$ ja $i = n - 1$ korral ehk võrranditesse

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2}m_0 + 2m_1 + \frac{h_1}{h_1 + h_2}m_2 = \frac{3h_1(f_2 - f_1)}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{3h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)}$$

ja

$$\frac{h_n}{h_{n-1} + h_n}m_{n-2} + 2m_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_n}m_n = \frac{3h_{n-1}(f_n - f_{n-1})}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{3h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)}.$$

Viies asendamise järel suurused f_i , $i = 0, 1, 2$, ja f_i , $i = n - 2, n - 1, n$, teisele poole võrdusmärgi, saame

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{h_2}{h_1 + h_2} + \frac{h_1^2 h_2}{h_2^2(h_1 + h_2)}\right)m_1 + \left(\frac{h_1}{h_1 + h_2} + \frac{h_1^2 h_2}{h_2^2(h_1 + h_2)}\right)m_2 \\ &= \frac{3h_1(f_2 - f_1)}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{3h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} - \frac{2h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1^2 h_2(f_2 - f_1)}{h_2^3(h_1 + h_2)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ja

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h_n}{h_{n-1} + h_n} + \frac{h_{n-1}h_n^2}{h_{n-1}^2(h_{n-1} + h_n)}\right)m_{n-2} + \left(2 - \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_n} + \frac{h_{n-1}h_n^2}{h_{n-1}^2(h_{n-1} + h_n)}\right)m_{n-1} \\ &= \frac{3h_{n-1}(f_n - f_{n-1})}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{3h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} - \frac{2h_{n-1}(f_n - f_{n-1})}{h_n(h_{n-1} + h_n)} \\ &+ \frac{2h_{n-1}h_n^2(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}^3(h_{n-1} + h_n)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Korrastame eraldi võrrandite (5.7) ja (5.8) vasakuid ja paremaid pooli. Niisiis lihtsustub võrrandi (5.7) vasak pool järgmiselt:

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{h_2}{h_1 + h_2} + \frac{h_1^2 h_2}{h_2^2(h_1 + h_2)}\right)m_1 + \left(\frac{h_1}{h_1 + h_2} + \frac{h_1^2 h_2}{h_2^2(h_1 + h_2)}\right)m_2 \\ &= \left(2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_2(h_1 + h_2)}\right)m_1 + \frac{h_1(h_1 + h_2)}{h_2(h_1 + h_2)}m_2 \\ &= \left(2 + \frac{h_1}{h_2} - 1\right)m_1 + \frac{h_1}{h_2}m_2 = \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)m_1 + \frac{h_1}{h_2}m_2. \end{aligned}$$

Võrrandi (5.7) parema poole lihtsustamisel saame

$$\begin{aligned}
& \frac{3h_1(f_2 - f_1)}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{3h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} - \frac{2h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1^2 h_2(f_2 - f_1)}{h_2^3(h_1 + h_2)} \\
&= \frac{3h_1 h_2(f_2 - f_1) + 2h_1^2(f_2 - f_1)}{h_2^2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} \\
&= \frac{(3h_1 h_2 + 2h_1^2)(f_2 - f_1)}{h_2^2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} \\
&= \frac{(h_1 h_2 + 2h_1(h_1 + h_2))(f_2 - f_1)}{h_2^2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} \\
&= \frac{h_1 h_2(f_2 - f_1)}{h_2^2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1(h_1 + h_2)(f_2 - f_1)}{h_2^2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} \\
&= \frac{h_1(f_2 - f_1)}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1(f_2 - f_1)}{h_2^2}.
\end{aligned}$$

Analoogseid võtteid kasutades teiseneb võrrandi (5.8) vasak pool kujule

$$\frac{h_n}{h_{n-1}} m_{n-2} + \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) m_{n-1}$$

ning parem pool kujule

$$\frac{h_{n-1}(f_n - f_{n-1})}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}^2}.$$

Seega oleme võrrandid (5.7) ja (5.8) esitanud vastavalt kujudel

$$\left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) m_1 + \frac{h_1}{h_2} m_2 = \frac{h_1(f_2 - f_1)}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{h_2(f_1 - f_0)}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1(f_2 - f_1)}{h_2^2}$$

ja

$$\begin{aligned}
\frac{h_n}{h_{n-1}} m_{n-2} + \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) m_{n-1} &= \frac{h_{n-1}(f_n - f_{n-1})}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} \\
&\quad + \frac{2h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}^2}.
\end{aligned}$$

Järelikult oleme suuruste m_0 ja m_n elimineerimise tulemusena saanud võrrandi-süsteemi

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) m_1 + \frac{h_1}{h_2} m_2 = c_1^* \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} m_{i+1} = c_i, & i = 2, \dots, n-2, \\ \frac{h_n}{h_{n-1}} m_{n-2} + \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) m_{n-1} = c_{n-1}^* \end{cases} \quad (5.9)$$

suuruste m_1, \dots, m_{n-1} suhtes, kus c_i on defineeritud võrdusega (5.2),

$$c_1^* = \frac{1}{3}c_1 + \frac{2h_1(f_2 - f_1)}{h_2^2} \quad \text{ja} \quad c_{n-1}^* = \frac{1}{3}c_{n-1} + \frac{2h_n(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-1}^2}.$$

Selle võrrandisüsteemi maatrikskujuks on

$$A_3 m^1 = r_3,$$

kus

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{h_1}{h_2} & \frac{h_1}{h_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_3}{h_2+h_3} & 2 & \frac{h_2}{h_2+h_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_4}{h_3+h_4} & 2 & \frac{h_3}{h_3+h_4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}+h_{n-1}} & 2 & \frac{h_{n-2}}{h_{n-2}+h_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{h_n}{h_{n-1}} & 1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$m^1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad r_3 = \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1}^* \end{pmatrix}.$$

Näeme, et maatriksi A_3 sisemised read kattuvad maatriksi A_1 ridadega $i = 2, \dots, n - 2$ ning äärmiste ridade korral kehtib

$$\left| 1 + \frac{h_1}{h_2} \right| - \left| \frac{h_1}{h_2} \right| = 1 > 0 \quad \text{ja} \quad \left| 1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right| - \left| \frac{h_n}{h_{n-1}} \right| = 1 > 0.$$

Seega on maatriks A_3 domineeriva peadiagonaaliga, lemma 1 põhjal regulaarne ning süsteem (5.9) üheselt lahenduv. Sellest omakorda jäeldub kujul (2.6) esitatud kuupsplaini s_3 ühesus lisatingimuste **III** korral.

6 Veahinnangud

6.1 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes

Käesolevas peatükis leiame hinnangu suurusele $|m_i - f'(x_i)|$, kus $s'_3(x_i) = m_i$ ($i = 0, \dots, n$).

6.1.1 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes rajatingimuste I ja II korral

Teoreem 1. Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu võrgul $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ väärtusi $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) interpoleeriv kuupsplain s_3 esitatud kujul (2.6), kus $m_i = s'_3(x_i)$. Rahuldagu kuupsplain s_3 rajatingimusi **I** või **II**, kus $\alpha' = f'(a)$, $\beta' = f'(b)$, $\alpha'' = f''(a)$ ja $\beta'' = f''(b)$. Siis kehtib hinnang

$$\max_{i=0, \dots, n} |m_i - f'(x_i)| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4,$$

kus

$$h = \max_{i=1, \dots, n} h_i = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Tõestus. Olgu $f \in C^4[a, b]$. Tähistame $q_i = m_i - f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Rahuldagu kuupsplain s_3 rajatingimusi **I** ning eeldame, et $\alpha' = f'(a)$ ja $\beta' = f'(b)$. Asendades $m_i = q_i + f'(x_i)$ võrrandisüsteemi (5.1), saame

$$\begin{cases} q_0 = 0, \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} q_{i-1} + 2q_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} q_{i+1} = \tilde{c}_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ q_n = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

kus

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i &= \frac{3h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} f(x_{i+1}) + \left(\frac{3h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} - \frac{3h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \right) f(x_i) \\ &\quad - \frac{3h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} f(x_{i-1}) - \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} f'(x_{i-1}) - 2f'(x_i) \\ &\quad - \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} f'(x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Võrrandisüsteemi (6.1) kordajate maatriks on domineeriva peadiagonaaliga, mistõttu leidub sellel ühene lahend.

Võrrandisüsteemi (6.1) vabaliikmete \tilde{c}_i , $i = 1, \dots, n-1$, hindamiseks kirjutame välja $f(x_{i-1})$, $f(x_{i+1})$, $f'(x_{i-1})$ ja $f'(x_{i+1})$ arendised punktis x_i Tayloriga valemiga põhjal integraalkujul esitatud jääkliikme korral (vt [5], lk. 224):

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h_i + \frac{f''(x_i)}{2}h_i^2 - \frac{f'''(x_i)}{6}h_i^3 - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_{i-1} - t)^3 dt, \quad (6.3)$$

$$f'(x_{i-1}) = f'(x_i) - f''(x_i)h_i + \frac{f'''(x_i)}{2}h_i^2 - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_{i-1} - t)^2 dt, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)h_{i+1} + \frac{f''(x_i)}{2}h_{i+1}^2 + \frac{f'''(x_i)}{6}h_{i+1}^3 + \\ &+ \int_x^{x_{i+1}} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_{i+1} - t)^3 dt, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$f'(x_{i+1}) = f'(x_i) + f''(x_i)h_{i+1} + \frac{f'''(x_i)}{2}h_{i+1}^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_{i+1} - t)^2 dt. \quad (6.6)$$

Asendades leitud Tayloriga arendised vabaliikmesse \tilde{c}_i , saame

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i &= \frac{3h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}f(x_i) + \frac{3h_i h_{i+1}}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}f'(x_i) + \frac{3h_i h_{i+1}^2}{2h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}f''(x_i) \\ &+ \frac{3h_i h_{i+1}^3}{6h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}f'''(x_i) + \frac{3h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_{i+1} - t)^3 dt \\ &+ \frac{3h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}f(x_i) - \frac{3h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}f(x_i) - \frac{3h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}f'(x_i) \\ &+ \frac{3h_i h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}f'(x_i) - \frac{3h_i^2 h_{i+1}}{2h_i(h_i + h_{i+1})}f''(x_i) + \frac{3h_i^3 h_{i+1}}{6h_i(h_i + h_{i+1})}f'''(x_i) \\ &+ \frac{3h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_{i-1} - t)^3 dt - \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}f'(x_i) + \frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}f''(x_i) \\ &- \frac{h_i^2 h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})}f'''(x_i) + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_{i-1} - t)^2 dt - 2f'(x_i) \\ &- \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}f'(x_i) - \frac{h_i h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}f''(x_i) - \frac{h_i h_{i+1}^2}{2(h_i + h_{i+1})}f'''(x_i) \\ &- \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \int_x^{x_{i+1}} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_{i+1} - t)^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h_i}{2(h_i + h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{IV}(t) \frac{(x_{i+1} - t)^3}{h_{i+1}} dt + \frac{h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^{IV}(t) \frac{(x_{i-1} - t)^3}{h_i} dt \\
&+ \frac{h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^{IV}(t) (x_{i-1} - t)^2 dt - \frac{h_i}{2(h_i + h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{IV}(t) (x_{i+1} - t)^2 dt \\
&= \frac{h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_{i-1} - t)^3}{h_i} + (x_{i-1} - t)^2 \right) dt \\
&+ \frac{h_i}{2(h_i + h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_{i+1} - t)^3}{h_{i+1}} - (x_{i+1} - t)^2 \right) dt.
\end{aligned}$$

Tehes lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ muutujavahetuse $t = x_{i-1} + h_i \tau$ ning lõigus $[x_i, x_{i+1}]$ muutujavahetuse $t = x_i + h_{i+1} \tau$, saame

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_i &= \frac{h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \int_0^1 f^{IV}(x_{i-1} + h_i \tau) \left(-\frac{h_i^3 \tau^3}{h_i} + h_i^2 \tau^2 \right) h_i d\tau \\
&+ \frac{h_i}{2(h_i + h_{i+1})} \int_0^1 f^{IV}(x_i + h_{i+1} \tau) \left(\frac{h_{i+1}^3 (1 - \tau)^3}{h_{i+1}} - h_{i+1}^2 (1 - \tau)^2 \right) h_{i+1} d\tau \\
&= \frac{h_i^3 h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \int_0^1 f^{IV}(x_{i-1} + h_i \tau) (-\tau^3 + \tau^2) d\tau \\
&+ \frac{h_i h_{i+1}^3}{2(h_i + h_{i+1})} \int_0^1 f^{IV}(x_i + h_{i+1} \tau) ((1 - \tau)^3 - (1 - \tau)^2) d\tau.
\end{aligned}$$

Arvestades, et $0 \leq \tau \leq 1$, saame

$$\begin{aligned}
|\tilde{c}_i| &\leq \frac{h_i^3 h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} \left| \int_0^1 f^{IV}(x_{i-1} + h_i \tau) (-\tau^3 + \tau^2) d\tau \right| \\
&+ \frac{h_i h_{i+1}^3}{2(h_i + h_{i+1})} \left| \int_0^1 f^{IV}(x_i + h_{i+1} \tau) ((1 - \tau)^3 - (1 - \tau)^2) d\tau \right| \\
&\leq \frac{h_i^3 h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} M_4 \int_0^1 (-\tau^3 + \tau^2) d\tau + \frac{h_i h_{i+1}^3}{2(h_i + h_{i+1})} M_4 \int_0^1 (\tau - 2\tau^2 + \tau^3) d\tau \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{h_i^3 h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})} M_4 + \frac{1}{12} \cdot \frac{h_i h_{i+1}^3}{2(h_i + h_{i+1})} M_4 = \frac{1}{24} M_4 \frac{h_i h_{i+1} (h_i^2 + h_{i+1}^2)}{h_i + h_{i+1}}.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et kui $h_i \leq h_{i+1}$, siis

$$\frac{h_i h_{i+1} (h_i^2 + h_{i+1}^2)}{h_i + h_{i+1}} \leq \frac{h_i h_{i+1} 2h_{i+1}^2}{2h_i} \leq h_{i+1}^3 \leq h^3.$$

Teiselt poolt, kui $h_i \geq h_{i+1}$, siis

$$\frac{h_i h_{i+1} (h_i^2 + h_{i+1}^2)}{h_i + h_{i+1}} \leq \frac{h_i h_{i+1} 2h_i^2}{2h_{i+1}} \leq h_i^3 \leq h^3.$$

Järelikult

$$|\tilde{c}_i| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Et võrrandisüsteemi (6.1) korral $q = 1$, siis lemma 2 põhjal saame

$$\max_{i=0, \dots, n} |q_i| \leq \max\{0, \tilde{c}_i, 0\} \leq \frac{1}{24} h^3 M_4.$$

Oleme saanud, et rajatingimuste **I** korral kehtib

$$\max_{i=0, \dots, n} |m_i - f'(x_i)| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4.$$

Kontrollime nüüd teoreemi väite kehtivust rajatingimuste **II** korral. Eeldame, et $\alpha'' = f''(a)$ ja $\beta'' = f''(b)$. Asendades $m_i = q_i + f'(x_i)$ võrrandisüsteemi (5.3), saame

$$\begin{cases} 2q_0 + q_1 = \tilde{c}_0 \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} q_{i-1} + 2q_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} q_{i+1} = \tilde{c}_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ q_{n-1} + 2q_n = \tilde{c}_n \end{cases} \quad (6.7)$$

kus \tilde{c}_i ($i = 1, \dots, n-1$) on defineeritud võrdusega (6.2) ja

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 &= \frac{3f(x_1)}{h_1} - \frac{3f(x_0)}{h_1} - \frac{h_1 f''(x_0)}{2} - 2f'(x_0) - f'(x_1), \\ \tilde{c}_n &= \frac{3f(x_n)}{h_n} - \frac{3f(x_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n f''(x_n)}{2} - f'(x_{n-1}) - 2f'(x_n). \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi (6.7) kordajate maatriks on domineeriva peadiagonaaliga, mistõttu leidub sellel ühene lahend.

Kuna võrrandisüsteemi vabaliikmed c_i , $i = 1, \dots, n-1$, on eelnevalt juba hinnatud, siis tulevad leida veel \tilde{c}_0 ja \tilde{c}_n hinnangud. Vabaliikme \tilde{c}_0 hindamiseks kirjutame välja $f(x_1)$ ja $f'(x_1)$ Taylori arendised punktis x_0 , mille saame vastavalt seostest (6.5) ja (6.6) indeksi $i = 0$ korral. Analoogiliselt leiame vabaliikme \tilde{c}_n hindamiseks $f(x_{n-1})$ ja $f'(x_{n-1})$ Taylori arendised punktis x_n , kui võtame seostes (6.4) ja (6.5) indeksiks $i = n$.

Asendades leitud Taylori arendised vabaliikmesse \tilde{c}_0 , saame

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_0 &= \frac{3}{h_1}f(x_0) + \frac{3h_1}{h_1}f'(x_0) + \frac{3h_1^2}{2h_1}f''(x_0) + \frac{3h_1^3}{6h_1}f'''(x_0) \\
&+ \frac{3}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_1-t)^3 dt - \frac{3}{h_1}f(x_0) - \frac{h_1}{2}f''(x_0) - 2f'(x_0) \\
&- f'(x_0) - h_1f''(x_0) - \frac{h_1^2}{2}f'''(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_1-t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2h_1} \int_{x_0}^{x_1} f^{IV}(t)(x_1-t)^3 dt - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_1-t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_1-t)^3}{h_1} - (x_1-t)^2 \right) dt.
\end{aligned}$$

Tehes muutujavahetuse $t = x_0 + h_1\tau$, saame

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau) \left(\frac{h_1^3(1-\tau)^3}{h_1} - h_1^2(1-\tau)^2 \right) h_1 d\tau \\
&= \frac{h_1^3}{2} \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau)(1-\tau)^2(-\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
|\tilde{c}_0| &\leq \frac{h_1^3}{2} \int_0^1 |f^{IV}(x_0 + h_1\tau)| \cdot |(1-\tau)^2| \cdot |-\tau| d\tau \leq \frac{h_1^3}{2} M_4 \int_0^1 (1-\tau)^2 \tau d\tau \\
&\leq \frac{h_1^3}{2} M_4 \int_0^1 (\tau - 2\tau^2 + \tau^3) d\tau = \frac{1}{12} \cdot \frac{h_1^3}{2} M_4 = \frac{1}{24} h_1^3 M_4.
\end{aligned}$$

Analoogselt toimime vabaliikme \tilde{c}_n korral:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n &= \frac{3}{h_n} f(x_n) - \frac{3}{h_n} f(x_n) + \frac{3h_n}{h_n} f'(x_n) - \frac{3h_n^2}{2h_n} f''(x_n) + \frac{3h_n^3}{6h_n} f'''(x_n) \\
&+ \frac{3}{h_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_{n-1} - t)^3 dt + \frac{h_n}{2} f''(x_n) - f'(x_n) + h_n f''(x_n) \\
&- \frac{h_n^2}{2} f'''(x_n) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_{n-1} - t)^2 dt - 2f'(x_n) \\
&= \frac{1}{2h_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^{IV}(t) (x_{n-1} - t)^3 dt + \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^{IV}(t) (x_{n-1} - t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_{n-1} - t)^3}{h_n} + (x_{n-1} - t)^2 \right) dt.
\end{aligned}$$

Tehes muutujavahetuse $t = x_{n-1} + h_n \tau$, saame

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n \tau) \left(-\frac{h_n^3 \tau^3}{h_n} + h_n^2 \tau^2 \right) h_n d\tau \\
&= \frac{h_n^3}{2} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n \tau) (-\tau^3 + \tau^2) d\tau.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
|\tilde{c}_n| &\leq \frac{h_n^3}{2} \int_0^1 |f^{IV}(x_{n-1} + h_n \tau)| \cdot |\tau^2 - \tau^3| d\tau \leq \frac{h_n^3}{2} M_4 \int_0^1 (\tau^2 - \tau^3) d\tau \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{h_n^3}{2} M_4 = \frac{1}{24} h_n^3 M_4.
\end{aligned}$$

Järelikult oleme saanud, et

$$\max \left\{ |\tilde{c}_0|, \max_{i=1, \dots, n-1} |\tilde{c}_i|, |\tilde{c}_n| \right\} \leq \frac{1}{24} h^3 M_4.$$

Et võrrandisüsteemi (6.7) korral $q = 1$, siis lemma 2 põhjal saame

$$\max_{j=0, \dots, n} |q_j| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4$$

ehk rajatingimuste **II** korral kehtib

$$\max_{j=0, \dots, n} |m_j - f'(x_j)| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4.$$

□

6.1.2 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes lisatingimuste III korral

Tähistame

$$\eta = \max \left\{ 1, \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right), \frac{h_n}{h_{n-1}} \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) \right\}, \quad (6.8)$$

$$\mu = \max \left\{ \left| 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right| + \frac{h_1^2}{h_2^2}, \left| 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right\}, \quad (6.9)$$

kus $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, n-1, n$.

Teoreem 2. Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu võrgul $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ väärtusi $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) interpoleeriv kuupsplain s_3 esitatud kujul (2.6), kus $m_i = s'_3(x_i)$. Rahuldagu kuupsplain s_3 lisatingimusi III kujul (1.3). Siis kehtib hinnang

$$\max_{i=0, \dots, n} |m_i - f'(x_i)| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4 (4 + \eta \mu),$$

kus suurused η ja μ on defineeritud võrdustega (6.8) ja (6.9) ning

$$h = \max_{i=1, \dots, n} h_i = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Tõestus. Kehtigu teoreemi eeldused ning tähistame $q_i = m_i - f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Teoreemi tõestus toimub kahes etapis. Esimeses etapis leiame hinnangu vahedele $|q_i|$ sisesõlmedes x_i , $i = 1, \dots, n-1$, tuginedes võrrandisüsteemile (5.9). Teises etapis leiame hinnangud vahedele $|q_0|$ ja $|q_n|$, tuginedes võrdustele (5.5) ja (5.6).

Asendades $m_i = q_i + f'(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, võrrandisüsteemi (5.9), saame

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) q_1 + \frac{h_1}{h_2} q_2 = \tilde{c}_1^* \\ \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} q_{i-1} + 2q_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} q_{i+1} = \tilde{c}_i, & i = 2, \dots, n-2, \\ \frac{h_n}{h_{n-1}} q_{n-2} + \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) q_{n-1} = \tilde{c}_{n-1}^* \end{cases} \quad (6.10)$$

kus \tilde{c}_i , $i = 2, \dots, n-2$, on defineeritud võrdustega (6.2) ja

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1^* &= \left(\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1}{h_2^2} \right) f(x_2) + \left(\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} - \frac{2h_1}{h_2^2} \right) f(x_1) \\ &\quad - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} f(x_0) - \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) f'(x_1) - \frac{h_1}{h_2} f'(x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_{n-1} &= - \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) f'(x_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{h_n(h_{n-1} + h_n)} f(x_n) \\
&+ \left(\frac{h_n}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} - \frac{h_{n-1}}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n}{h_{n-1}^2} \right) f(x_{n-1}) \\
&- \left(\frac{h_n}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n}{h_{n-1}^2} \right) f(x_{n-2}) - \frac{h_n}{h_{n-1}} f'(x_{n-2}).
\end{aligned}$$

Süsteemi (6.10) kordajate maatriks on domineeriva peadiagonaaliga, mistõttu leidub sellel ühene lahend.

Kuna võrrandisüsteemi vabaliikmed \widetilde{c}_i , $i = 2, \dots, n-2$, on eelnevalt juba hinnatud, siis jäävad leida veel \widetilde{c}_1^* ja \widetilde{c}_{n-1}^* hinnangud. Vabaliikme \widetilde{c}_1^* hindamiseks kirjutame välja $f(x_0)$, $f(x_2)$ ja $f'(x_2)$ Taylori arendised punktis x_1 , mille saame vastavalt seostest (6.3), (6.5) ja (6.6) indeksi $i = 1$ korral. Analoogiliselt leiame vabaliikme \widetilde{c}_{n-1}^* hindamiseks $f(x_n)$, $f(x_{n-2})$ ja $f'(x_{n-2})$ Taylori arendised punktis x_{n-1} , kui võtame vastavalt seostes (6.5), (6.3) ja (6.4) indeksiks $i = n-1$.

Asendades leitud Taylori arendised vabaliikmesse \widetilde{c}_1^* , saame

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_1^* &= \left(\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1}{h_2^2} \right) f(x_1) + \left(\frac{h_1 h_2}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1 h_2}{h_2^2} \right) f'(x_1) \\
&+ \left(\frac{h_1 h_2^2}{2h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1 h_2^2}{2h_2^2} \right) f''(x_1) + \left(\frac{h_1 h_2^3}{6h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1 h_2^3}{6h_2^2} \right) f'''(x_1) \\
&+ \left(\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2h_1}{h_2^2} \right) \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_2 - t)^3 dt \\
&+ \left(\frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} - \frac{2h_1}{h_2^2} \right) f(x_1) - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} f'(x_1) \\
&+ \frac{h_1 h_2}{h_1(h_1 + h_2)} f'(x_1) - \frac{h_1^2 h_2}{2h_1(h_1 + h_2)} f''(x_1) + \frac{h_1^3 h_2}{6h_1(h_1 + h_2)} f'''(x_1) \\
&+ \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_0 - t)^3 dt - \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) f'(x_1) - \frac{h_1}{h_2} f'(x_1) \\
&- \frac{h_1 h_2}{h_2} f''(x_1) - \frac{h_1 h_2^2}{2h_2} f'''(x_1) - \frac{h_1}{h_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_2 - t)^2 dt \\
&= \frac{h_2}{6h_1(h_1 + h_2)} \int_{x_0}^{x_1} f^{IV}(t) (x_0 - t)^3 dt - \frac{h_1}{2h_2} \int_{x_1}^{x_2} f^{IV}(t) (x_2 - t)^2 dt \\
&+ \left(\frac{h_1}{6h_2(h_1 + h_2)} + \frac{h_1}{3h_2^2} \right) \int_{x_1}^{x_2} f^{IV}(t) (x_2 - t)^3 dt.
\end{aligned}$$

Tehes lõigus $[x_0, x_1]$ muutujavahetuse $t = x_0 + h_1\tau$ ja lõigus $[x_1, x_2]$ muutuja-
vahetuse $t = x_1 + h_2\tau$, saame

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_1^* &= \frac{h_2}{6(h_1 + h_2)h_1} \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau)(-h_1\tau)^3 h_1 d\tau \\
&\quad - \frac{h_1}{2h_2} \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau)h_2^2(1 - \tau)^2 h_2 d\tau \\
&\quad + \left(\frac{h_1}{6(h_1 + h_2)h_2} + \frac{h_1}{3h_2^2} \right) \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau)h_2^3(1 - \tau)^3 h_2 d\tau \\
&= \frac{h_1^3 h_2}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau)(-\tau)^3 d\tau - \frac{h_1 h_2^2}{2} \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau)(1 - \tau)^2 d\tau \\
&\quad + \left(\frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} + \frac{h_1 h_2^2}{3} \right) \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau)(1 - \tau)^3 d\tau \\
&= \frac{h_1^3 h_2}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau)(-\tau^3) d\tau \\
&\quad + \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau)(1 - \tau)^2 \left((1 - \tau) \left(\frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} + \frac{h_1 h_2^2}{3} \right) - \frac{h_1 h_2^2}{2} \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
(1 - \tau) \left(\frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} + \frac{h_1 h_2^2}{3} \right) - \frac{h_1 h_2^2}{2} &= \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} - \frac{h_1 h_2^2}{6} - \tau \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} - \tau \frac{h_1 h_2^2}{3} \\
&= \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} \left(1 - \frac{h_1 + h_2}{h_2} - \tau \left(1 + \frac{2(h_1 + h_2)}{h_2} \right) \right) \\
&= \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} \left(-\frac{h_1}{h_2} - \tau \frac{h_2 + 2h_1 + 2h_2}{h_2} \right) \\
&= -\frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} \left(\frac{h_1}{h_2} + \tau \left(3 + \frac{2h_1}{h_2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1^* &= \frac{h_1^3 h_2}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 f^{\mathbf{IV}}(x_0 + h_1 \tau)(-\tau^3) d\tau \\ &\quad - \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 f^{\mathbf{IV}}(x_1 + h_2 \tau)(1 - \tau)^2 \left(\frac{h_1}{h_2} + \tau \left(3 + \frac{2h_1}{h_2} \right) \right) d\tau.\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}|\tilde{c}_1^*| &\leq \frac{h_1^3 h_2}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 |f^{\mathbf{IV}}(x_0 + h_1 \tau)| \cdot |(-\tau^3)| d\tau \\ &\quad + \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 |f^{\mathbf{IV}}(x_1 + h_2 \tau)| \cdot |(1 - \tau)^2| \cdot \left| \frac{h_1}{h_2} + \tau \left(3 + \frac{2h_1}{h_2} \right) \right| d\tau \\ &\leq \frac{h_1^3 h_2 M_4}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 \tau^3 d\tau + \frac{h_1 h_2^3 M_4}{6(h_1 + h_2)} \int_0^1 (1 - 2\tau + \tau^2) \left(\frac{h_1}{h_2} + \tau \left(3 + \frac{2h_1}{h_2} \right) \right) d\tau \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{h_1^3 h_2}{6(h_1 + h_2)} M_4 \\ &\quad + \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} M_4 \int_0^1 \left(\frac{h_1}{h_2} + 3\tau - \tau^2 \left(6 + \frac{3h_1}{h_2} \right) + \tau^3 \left(3 + \frac{2h_1}{h_2} \right) \right) d\tau \\ &= \frac{h_1^3 h_2}{24(h_1 + h_2)} M_4 + \frac{h_1 h_2^3}{6(h_1 + h_2)} M_4 \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2h_1}{h_2} \right) \\ &= \frac{1}{24} M_4 \left(\frac{h_1^3 h_2}{h_1 + h_2} + \frac{h_1 h_2^3}{h_1 + h_2} + \frac{2h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2} \right) \\ &= \frac{1}{24} M_4 \frac{h_1 h_2 (h_1 + h_2)^2}{h_1 + h_2} = \frac{1}{24} M_4 h_2^3 \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) \\ &\leq \frac{1}{24} h^3 M_4 \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right).\end{aligned}$$

Analoogiliselt, asendades eespool leitud Taylori arendised vabaliikmesse $\widetilde{c_{n-1}^*}$, saame

$$\begin{aligned}
\widetilde{c_{n-1}^*} &= \frac{h_{n-1}f(x_{n-1})}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{h_{n-1}h_n}{h_n(h_{n-1} + h_n)}f'(x_{n-1}) + \frac{h_{n-1}h_n^2}{2h_n(h_{n-1} + h_n)}f''(x_{n-1}) \\
&+ \frac{h_{n-1}h_n^3}{6h_n(h_{n-1} + h_n)}f'''(x_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{h_n(h_{n-1} + h_n)} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_n - t)^3 dt \\
&+ \left(\frac{h_n}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} - \frac{h_{n-1}}{h_n(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n}{h_{n-1}^2} \right) f(x_{n-1}) \\
&- \left(\frac{h_n}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n}{h_{n-1}^2} \right) f(x_{n-1}) \\
&+ \left(\frac{h_{n-1}h_n}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_{n-1}h_n}{h_{n-1}^2} \right) f'(x_{n-1}) \\
&- \left(\frac{h_{n-1}^2h_n}{2h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_{n-1}^2h_n}{2h_{n-1}^2} \right) f''(x_{n-1}) \\
&+ \left(\frac{h_{n-1}^3h_n}{6h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_{n-1}^3h_n}{6h_{n-1}^2} \right) f'''(x_{n-1}) \\
&+ \left(\frac{h_n}{h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n}{h_{n-1}^2} \right) \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{f^{IV}(t)}{6}(x_{n-2} - t)^3 dt \\
&- \frac{h_n}{h_{n-1}}f'(x_{n-1}) + \frac{h_{n-1}h_n}{h_{n-1}}f''(x_{n-1}) - \frac{h_{n-1}^2h_n}{2h_{n-1}}f'''(x_{n-1}) \\
&+ \frac{h_n}{h_{n-1}} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{f^{IV}(t)}{2}(x_{n-2} - t)^2 dt - \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) f'(x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Koondades liikmeid $f(x_{n-1})$, $f'(x_{n-1})$, $f''(x_{n-1})$ ja $f'''(x_{n-1})$ järgi, saame nimetatud suuruste kordajateks 0 ning seega

$$\begin{aligned}
\widetilde{c_{n-1}^*} &= \left(\frac{h_n}{6h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{2h_n}{6h_{n-1}^2} \right) \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f^{IV}(t)(x_{n-2} - t)^3 dt \\
&+ \frac{h_n}{2h_{n-1}} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f^{IV}(t)(x_{n-2} - t)^2 dt + \frac{h_{n-1}}{6h_n(h_{n-1} + h_n)} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^{IV}(t)(x_n - t)^3 dt.
\end{aligned}$$

Tehes lõigus $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ muutujavahetuse $t = x_{n-2} + h_{n-1}\tau$ ja lõigus $[x_{n-1}, x_n]$ muutujavahetuse $t = x_{n-1} + h_n\tau$, saame

$$\begin{aligned}
\widetilde{c_{n-1}^*} &= \left(\frac{h_n}{6h_{n-1}(h_{n-1} + h_n)} + \frac{h_n}{3h_{n-1}^2} \right) \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau)(-h_{n-1}\tau)^3 h_{n-1} d\tau \\
&+ \frac{h_n}{2h_{n-1}} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau) h_{n-1}^2 \tau^2 h_{n-1} d\tau \\
&+ \frac{h_{n-1}}{6h_n(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau) h_n^3 (1 - \tau)^3 h_n d\tau \\
&= \left(\frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} + \frac{h_{n-1}^2 h_n}{3} \right) \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau)(-\tau)^3 d\tau \\
&+ \frac{h_{n-1}^2 h_n}{2} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau) \tau^2 d\tau \\
&+ \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau)(1 - \tau)^3 d\tau \\
&= \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau) \tau^2 \left(\frac{h_{n-1}^2 h_n}{2} - \tau \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} - \tau \frac{h_{n-1}^2 h_n}{3} \right) d\tau \\
&+ \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau)(1 - \tau)^3 d\tau.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
&\frac{h_{n-1}^2 h_n}{2} - \tau \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} - \tau \frac{h_{n-1}^2 h_n}{3} \\
&= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} \left(\frac{3(h_{n-1} + h_n)}{h_{n-1}} - \tau - \tau \frac{2(h_{n-1} + h_n)}{h_{n-1}} \right) \\
&= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} \left(3 + \frac{3h_n}{h_{n-1}} - \tau \left(1 + \frac{2(h_{n-1} + h_n)}{h_{n-1}} \right) \right) \\
&= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} \left(3 + \frac{3h_n}{h_{n-1}} - \tau \left(3 + \frac{2h_n}{h_{n-1}} \right) \right) \\
&= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} \left(3(1 - \tau) + \frac{h_n}{h_{n-1}}(3 - 2\tau) \right).
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_{n-1}^* &= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau) \tau^2 \left(3(1-\tau) + \frac{h_n}{h_{n-1}}(3-2\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau) (1-\tau)^3 d\tau.\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}|\widetilde{c}_{n-1}^*| &\leq \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 |f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau)| \cdot |\tau^2| \cdot \left| 3(1-\tau) + \frac{h_n}{h_{n-1}}(3-2\tau) \right| d\tau \\ &\quad + \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} \int_0^1 |f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau)| \cdot |(1-\tau)^3| d\tau \\ &\leq \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} M_4 \int_0^1 \tau^2 \left(3(1-\tau) + \frac{h_n}{h_{n-1}}(3-2\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} M_4 \int_0^1 (1-\tau)^3 d\tau \\ &= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} M_4 \int_0^1 \left(3\tau^2 - 3\tau^3 + \frac{3h_n}{h_{n-1}}\tau^2 - \frac{2h_n}{h_{n-1}}\tau^3 \right) d\tau \\ &\quad - \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} M_4 \int_0^1 (1-\tau)^3 d(1-\tau) \\ &= \frac{h_{n-1}^3 h_n}{6(h_{n-1} + h_n)} M_4 \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2h_n}{h_{n-1}} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{h_{n-1} h_n^3}{6(h_{n-1} + h_n)} M_4 \\ &\leq \frac{1}{24} h^3 M_4 \frac{h_n}{h_{n-1}} \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right)\end{aligned}$$

Järelikult oleme saanud tähistust (6.8) arvestades, et

$$\max \left\{ \max_{i=2, \dots, n-2} |\widetilde{c}_i^*|, |\widetilde{c}_1^*|, |\widetilde{c}_{n-1}^*| \right\} \leq \frac{1}{24} h^3 M_4 \eta.$$

Et võrrandisüsteemi (6.10) korral $q = 1$, siis lemma 2 põhjal kehtib

$$\max_{i=1, \dots, n-1} |q_i| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4 \eta, \quad (6.11)$$

kus η on defineeritud võrdusega (6.8).

Hindamaks splaini ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahet $|m_i - f'(x_i)|$ kõikides sõlmedes x_i , $i = 0, \dots, n$, jäävad leida veel hinnangud suurustele $|q_0|$ ja $|q_n|$.

Vahe $|q_0|$ hindamiseks toimime järgnevalt. Esmalt asendame $m_i = q_i + f'(x_i)$ ($i = 0, 1, 2$) võrrandisse (5.5), millest järeldub, et

$$q_0 = -f'(x_0) - \frac{2}{h_1}f(x_0) + \left(\frac{2h_1^2}{h_2^3} + \frac{2}{h_1}\right)f(x_1) - \frac{2h_1^2}{h_2^3}f(x_2) \\ - \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right)(q_1 + f'(x_1)) + \frac{h_1^2}{h_2^2}(q_2 + f'(x_2)).$$

Leiame $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f(x_2)$ ja $f'(x_2)$ Taylori arendised punktis x_1 , mille saame vastavalt seostest (6.3), (6.4), (6.5) ja (6.6) indeksi $i = 1$ korral, ning asendame need eelnevasse võrrandisse:

$$q_0 = -f'(x_1) + h_1 f''(x_1) - \frac{h_1^2}{2} f'''(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_0 - t)^2 dt - \frac{2}{h_1} f(x_1) \\ + \frac{2h_1}{h_1} f'(x_1) - \frac{2h_1^2}{2h_1} f''(x_1) + \frac{2h_1^3}{6h_1} f'''(x_1) + \frac{2}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_0 - t)^3 dt \\ + \left(\frac{2h_1^2}{h_2^3} + \frac{2}{h_1}\right) f(x_1) - \frac{2h_1^2}{h_2^3} f(x_1) - \frac{2h_1^2 h_2}{h_2^3} f'(x_1) - \frac{2h_1^2 h_2^2}{2h_2^3} f''(x_1) \\ - \frac{2h_1^2 h_2^3}{6h_2^3} f'''(x_1) - \frac{2h_1^2}{h_2^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_2 - t)^3 dt - q_1 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) - f'(x_1) \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) \\ + q_2 \frac{h_1^2}{h_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} f'(x_1) + \frac{h_1^2 h_2}{h_2^2} f''(x_1) + \frac{h_1^2 h_2^2}{2h_2^2} f'''(x_1) + \frac{h_1^2}{h_2^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_2 - t)^2 dt \\ = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_0 - t)^2 dt + \frac{1}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{IV}(t)}{3} (x_0 - t)^3 dt - \frac{h_1^2}{h_2^3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{IV}(t)}{3} (x_2 - t)^3 dt \\ - q_1 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) + q_2 \frac{h_1^2}{h_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_2 - t)^2 dt \\ = \int_{x_0}^{x_1} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_0 - t)^2}{2} + \frac{(x_0 - t)^3}{3h_1}\right) dt \\ + \frac{h_1^2}{h_2^2} \int_{x_1}^{x_2} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_2 - t)^2}{2} - \frac{(x_2 - t)^3}{3h_2}\right) dt - q_1 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) + q_2 \frac{h_1^2}{h_2^2}.$$

Tehes lõigus $[x_0, x_1]$ muutujavahetuse $t = x_0 + h_1\tau$ ning lõigus $[x_1, x_2]$ muutuja-
vahetuse $t = x_1 + h_2\tau$, saame

$$\begin{aligned}
q_0 &= \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau) \left(\frac{(-h_1\tau)^2}{2} + \frac{(-h_1\tau)^3}{3h_1} \right) h_1 d\tau \\
&\quad + \frac{h_1^2}{h_2^2} \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau) \left(\frac{h_2^2(1-\tau)^2}{2} - \frac{h_2^3(1-\tau)^3}{3h_2} \right) h_2 d\tau \\
&\quad - q_1 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) + q_2 \frac{h_1^2}{h_2^2} \\
&= \frac{h_1^3}{6} \int_0^1 f^{IV}(x_0 + h_1\tau) \tau^2 (3 - 2\tau) d\tau \\
&\quad + \frac{h_1^2 h_2}{6} \int_0^1 f^{IV}(x_1 + h_2\tau) (1-\tau)^2 (1 + 2\tau) d\tau - q_1 \left(1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) + q_2 \frac{h_1^2}{h_2^2}.
\end{aligned}$$

Arvestades hinnangut (6.11) ja $0 \leq \tau \leq 1$, saame

$$\begin{aligned}
|q_0| &\leq \frac{h_1^3}{6} \int_0^1 |f^{IV}(x_0 + h_1\tau)| \cdot |\tau^2| \cdot |3 - 2\tau| d\tau \\
&\quad + \frac{h_1^2 h_2}{6} \int_0^1 |f^{IV}(x_1 + h_2\tau)| \cdot |(1-\tau)^2| \cdot |1 + 2\tau| d\tau + |q_1| \left| 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right| + |q_2| \frac{h_1^2}{h_2^2} \\
&\leq \frac{h_1^3}{6} M_4 \int_0^1 (3\tau^2 - 2\tau^3) d\tau + \frac{h_1^2 h_2}{6} M_4 \int_0^1 (1 - 3\tau^2 + 2\tau^3) d\tau \\
&\quad + \max_{i=1, \dots, n-1} |q_i| \cdot \left| 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right| + \max_{i=1, \dots, n-1} |q_i| \cdot \frac{h_1^2}{h_2^2} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{6} M_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{6} M_4 + \frac{1}{24} h^3 M_4 \eta \left(\left| 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right| + \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{24} h^3 M_4 \left(4 + \eta \left(\left| 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} \right| + \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt, hindamaks vahet $|q_n|$, asendame $m_i = q_i + f'(x_i)$, $i = n-2, n-1, n$,
võrrandisse (5.6), millest

$$\begin{aligned}
q_n &= -f'(x_n) + \frac{2}{h_n} f(x_n) - \left(\frac{2h_n^2}{h_{n-1}^3} + \frac{2}{h_n} \right) f(x_{n-1}) + \frac{2h_n^2}{h_{n-1}^3} f(x_{n-2}) \\
&\quad + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} (q_{n-2} + f'(x_{n-2})) - \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right) (q_{n-1} + f'(x_{n-1})).
\end{aligned}$$

Leiame $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(x_{n-2})$ ja $f'(x_{n-2})$ Taylori arendised punktis x_{n-1} , mille saame vastavalt seostest (6.5), (6.6), (6.3) ja (6.4) indeksi $i = n - 1$ korral, ning asendame need eelnevasse võrrandisse:

$$\begin{aligned}
q_n &= -f'(x_{n-1}) - h_n f''(x_{n-1}) - \frac{h_n^2}{2} f'''(x_{n-1}) - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_n - t)^2 dt \\
&+ \frac{2}{h_n} f(x_{n-1}) + \frac{2h_n}{h_n} f'(x_{n-1}) + \frac{2h_n^2}{2h_n} f''(x_{n-1}) + \frac{2h_n^3}{6h_n} f'''(x_{n-1}) \\
&+ \frac{2}{h_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_n - t)^3 dt - \left(\frac{2h_n^2}{h_{n-1}^3} + \frac{2}{h_n} \right) f(x_{n-1}) + \frac{2h_n^2}{h_{n-1}^3} f'(x_{n-1}) \\
&- \frac{2h_{n-1}h_n^2}{h_{n-1}^3} f'(x_{n-1}) + \frac{2h_{n-1}^2h_n^2}{2h_{n-1}^3} f''(x_{n-1}) - \frac{2h_{n-1}^3h_n^2}{6h_{n-1}^3} f'''(x_{n-1}) \\
&- \frac{2h_n^2}{h_{n-1}^3} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{f^{IV}(t)}{6} (x_{n-2} - t)^3 dt + q_{n-2} \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} f'(x_{n-1}) \\
&- \frac{h_{n-1}h_n^2}{h_{n-1}^2} f''(x_{n-1}) + \frac{h_{n-1}^2h_n^2}{2h_{n-1}^2} f'''(x_{n-1}) - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_{n-2} - t)^2 dt \\
&- q_{n-1} \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right) - f'(x_{n-1}) \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right).
\end{aligned}$$

Koondades liikmeid $f(x_{n-1})$, $f'(x_{n-1})$, $f''(x_{n-1})$ ja $f'''(x_{n-1})$ järgi, saame nimetatud suuruste kordajateks 0 ning seega

$$\begin{aligned}
q_n &= -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^3} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{f^{IV}(t)}{3} (x_{n-2} - t)^3 dt - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_n - t)^2 dt \\
&+ \frac{1}{h_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f^{IV}(t)}{3} (x_n - t)^3 dt + q_{n-2} \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} - q_{n-1} \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right) \\
&- \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \frac{f^{IV}(t)}{2} (x_{n-2} - t)^2 dt \\
&= -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_{n-2} - t)^2}{2} + \frac{(x_{n-2} - t)^3}{3h_{n-1}} \right) dt \\
&+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f^{IV}(t) \left(\frac{(x_n - t)^3}{3h_n} - \frac{(x_n - t)^2}{2} \right) dt + q_{n-2} \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} - q_{n-1} \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right).
\end{aligned}$$

Tehes lõigus $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ muutujavahetuse $t = x_{n-2} + h_{n-1}\tau$ ning lõigus $[x_{n-1}, x_n]$ muutujavahetuse $t = x_{n-1} + h_n\tau$, saame

$$\begin{aligned}
q_n &= -\frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau) \left(\frac{(-h_{n-1}\tau)^2}{2} + \frac{(-h_{n-1}\tau)^3}{3h_{n-1}} \right) h_{n-1} d\tau \\
&\quad + \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau) \left(\frac{h_n^3(1-\tau)^3}{3h_n} - \frac{h_n^2(1-\tau)^2}{2} \right) h_n d\tau \\
&\quad + q_{n-2} \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} - q_{n-1} \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right) \\
&= -\frac{h_{n-1}h_n^2}{6} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau) \tau^2(3-2\tau) d\tau \\
&\quad - \frac{h_n^3}{6} \int_0^1 f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau) (1-\tau)^2(1+2\tau) d\tau + q_{n-2} \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} - q_{n-1} \left(1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right).
\end{aligned}$$

Arvestades seost (6.11) ja $0 \leq \tau \leq 1$, saame

$$\begin{aligned}
|q_n| &\leq \frac{h_{n-1}h_n^2}{6} \int_0^1 |f^{IV}(x_{n-2} + h_{n-1}\tau)| \cdot |\tau^2| \cdot |3-2\tau| d\tau \\
&\quad + \frac{h_n^3}{6} \int_0^1 |f^{IV}(x_{n-1} + h_n\tau)| \cdot |(1-\tau)^2| \cdot |1+2\tau| d\tau \\
&\quad + |q_{n-2}| \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} + |q_{n-1}| \left| 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| \\
&\leq \frac{h_{n-1}h_n^2}{6} M_4 \int_0^1 (1-3\tau^2+2\tau^3) d\tau + \frac{h_n^3}{6} M_4 \int_0^1 (3\tau^2-2\tau^3) d\tau \\
&\quad + \max_{i=1, \dots, n-1} |q_i| \cdot \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} + \max_{i=1, \dots, n-1} |q_i| \cdot \left| 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{6} M_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{6} M_4 + \frac{1}{24} h^3 M_4 \eta \left(\left| 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{24} h^3 M_4 \left(4 + \eta \left(\left| 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right| + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Tuginedes hinnagutele (6.11), $|q_0|$ ja $|q_n|$, järeldub, et lisatingimuste **III** korral kehtib hinnang

$$\max_{i=0, \dots, n} |m_i - f'(x_i)| \leq \frac{1}{24} h^3 M_4 (4 + \eta \mu),$$

kus suurused η ja μ on defineeritud võrdustega (6.8) ja (6.9). □

6.2 Veahinnang kuupsplaini jaoks

Olgu f neli korda pidevalt diferentseeruv. Vea $s_3(x) - f(x)$ hindamiseks toome sisse Hermite'i interpolatsiooni polünoomi $P_3(x)$ kahekordsete sõlmede korral.

Definitsioon. Lõigul $[a, b]$ määratud funktsiooni $P_3(x)$ nimetatakse võrgule Δ_n kujul (1.1) vastavaks Hermite'i interpoleerivaks kuuppolünoomiks, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

- (i) P_3 on igas osalõiguis $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) kuuppolünoom;
- (ii) $P_3(x_i) = f(x_i)$, $P_3'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Osutub, et Hermite'i interpoleeriv kuuppolünoom on üheselt määratud ning esitatav kujul (vt [2], lk. 34–37)

$$P_3(x) = (1-t)^2(1+2t)f(x_{i-1}) + t^2(3-2t)f(x_i) \\ + t(1-t)^2h_i f'(x_{i-1}) - t^2(1-t)h_i f'(x_i),$$

kus

$$t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Seejuures

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} (x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2,$$

kus $\xi \in (a, b)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Arvestades, et $t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$, saame

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \cdot \frac{h_i^2 (x - x_{i-1})^2}{h_i^2} (x - x_{i-1} + x_{i-1} - x_i)^2 \\ = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \cdot \frac{h_i^2 (x - x_{i-1})^2}{h_i^2} (x - x_{i-1} - h_i)^2 \\ = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \cdot \frac{h_i^2 (x - x_{i-1})^2}{h_i^2} h_i^2 \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} - 1 \right)^2 \\ = \frac{f^{IV}(\xi)}{24} h_i^4 t^2 (1-t)^2, \quad \xi \in (a, b).$$

Seega

$$|f(x) - P_3(x)| = \left| \frac{f^{IV}(\xi)}{24} h_i^4 t^2 (1-t)^2 \right| \leq \frac{t^2(1-t)^2}{24} h^4 M_4,$$

kus

$$h = \max_{i=1, \dots, n} h_i, \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Kuna funktsioon $t^2(1-t)^2$ omandab lõigus $[0, 1]$ maksimaalse väärtuse punktis $t = \frac{1}{2}$, siis kehtib

$$\max_{x \in [0,1]} t^2(1-t)^2 = \frac{1}{16}$$

ning saame

$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{24} h^4 M_4 = \frac{1}{384} h^4 M_4, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Järelikult

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_3(x)| = \max_{i=1, \dots, n} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |P_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 M_4. \quad (6.12)$$

Järgnevalt hindame kuupsplaini s_3 ja Hermite'i kuuppolünoomi P_3 vahet $|s_3(x) - P_3(x)|$, kui $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Selleks esitame kõigepealt kuupsplaini s_3 kujul

$$s_3(x) = (1-t)^2(1+2t)f(x_{i-1}) + t^2(3-2t)f(x_i) + t(1-t)^2 h_i m_{i-1} - t^2(1-t) h_i m_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.13)$$

Esituse (6.13) saamiseks koondame avaldises (2.6) olevaid liikmeid $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, m_{i-1} ja m_i järgi:

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f(x_{i-1}) + m_{i-1}(x - x_{i-1}) \\ &\quad - \left(\frac{2m_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i}{h_i} - \frac{3(f(x_{i-1}) - f(x_i))}{h_i^2} \right) (x - x_{i-1})^2 \\ &\quad + \left(\frac{m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{m_i}{h_i^2} + \frac{2(f(x_{i-1}) - f(x_i))}{h_i^3} \right) (x - x_{i-1})^3 \\ &= \left(1 - \frac{3(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} + \frac{2(x - x_{i-1})^3}{h_i^3} \right) f(x_{i-1}) \\ &\quad + \left(\frac{3}{h_i^2} (x - x_{i-1})^2 - \frac{2(x - x_{i-1})^3}{h_i^3} \right) f(x_i) \\ &\quad + \left(x - x_{i-1} - \frac{2(x - x_{i-1})^2}{h_i} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_i^2} \right) m_{i-1} \\ &\quad + \left(-\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_i^2} \right) m_i. \end{aligned}$$

Arvestades, et $t = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}$, saame

$$\begin{aligned}
s_3(x) &= (1 - 3t^2 + 2t^3)f(x_{i-1}) + (3t^2 - 2t^3)f(x_i) \\
&\quad + \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} - 2\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_i^3} \right) h_i m_{i-1} \\
&\quad - \left(\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} - \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_i^3} \right) h_i m_i \\
&= (1 - t)^2(1 + 2t)f(x_{i-1}) + t^2(3 - 2t)f(x_i) + t(1 - t)^2 h_i m_{i-1} \\
&\quad - t^2(1 - t)h_i m_i, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Teades s_3 ja P_3 avaldisi, saame leida vahe

$$\begin{aligned}
s_3(x) - P_3(x) &= (1 - t)^2(1 + 2t)f(x_{i-1}) + t^2(3 - 2t)f(x_i) + t(1 - t)^2 h_i m_{i-1} \\
&\quad - t^2(1 - t)h_i m_i - (1 - t)^2(1 + 2t)f(x_{i-1}) - t^2(3 - 2t)f(x_i) \\
&\quad - t(1 - t)^2 h_i f'(x_{i-1}) + t^2(1 - t)h_i f'(x_i) \\
&= h_i t(1 - t)^2(m_{i-1} - f'(x_{i-1})) - h_i t^2(1 - t)(m_i - f'(x_i)).
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
|s_3(x) - P_3(x)| &\leq h_i |t(1 - t)^2| \cdot |m_{i-1} - f'(x_{i-1})| + h_i |t^2(1 - t)| \cdot |m_i - f'(x_i)| \\
&\leq ht(1 - t)^2 \max_{k=0, \dots, n} |m_k - f'(x_k)| + ht^2(1 - t) \max_{k=0, \dots, n} |m_k - f'(x_k)| \\
&= ht(1 - t) \max_{k=0, \dots, n} |m_k - f'(x_k)|(1 - t + t) \\
&= ht(1 - t) \max_{k=0, \dots, n} |m_k - f'(x_k)|,
\end{aligned}$$

kus

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Kuna $t(1 - t) = t - t^2$ on lõigus $[0, 1]$ parabool haripunktiga $t = \frac{1}{2}$, siis kehtib

$$t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$$

ning saame

$$|s_3(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4}h \max_{k=0, \dots, n} |m_k - f'(x_k)|, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.14)$$

Kui kuupsplain rahuldab rajatingimusi **I** või **II**, siis hinnangu (6.14) ja teoreemi 1 põhjal leiame

$$|s_3(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24}h^4 M_4 = \frac{1}{96}h^4 M_4,$$

kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Järelikult

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - P_3(x)| = \max_{i=1, \dots, n} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |s_3(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{96} h^4 M_4. \quad (6.15)$$

Tuginedes võrratustele (6.12) ja (6.15), saame iga $x \in [a, b]$ korral

$$\begin{aligned} |s_3(x) - f(x)| &= |P_3(x) - f(x) + s_3(x) - P_3(x)| \\ &\leq |P_3(x) - f(x)| + |s_3(x) - P_3(x)| \\ &\leq \frac{1}{384} h^4 M_4 + \frac{1}{96} h^4 M_4 = \frac{5}{384} h^4 M_4. \end{aligned}$$

Võtame tulemuse kokku järgmise teoreemina.

Teoreem 3. Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu võrgul $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ väärtusi $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) interpoleeriv kuupsplain s_3 esitatud kujul (2.6), kus $m_i = s'_3(x_i)$. Rahuldagu kuupsplain s_3 rajatingimusi **I** või **II**, kus $\alpha' = f'(a)$, $\beta' = f'(b)$, $\alpha'' = f''(a)$ ja $\beta'' = f''(b)$. Siis kehtib hinnang

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 M_4, \quad (6.16)$$

kus

$$h = \max_{i=1, \dots, n} h_i = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Märkus 2. Osutub, et rajatingimuste **II** korral hinnangus (6.16) olev konstant $\frac{5}{384}$ ei ole vähendatav, s.t. leidub funktsioon $f \in C^4[a, b]$, mille korral kehtib võrdus

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| = \frac{5}{384} h^4 M_4.$$

Tõepoolest, olgu lõigul $[a, b]$ antud ühtlane võrk Δ_{2N} sõlmpunktidega

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, 2N, \quad h = \frac{b - a}{2N}.$$

Olgu $\varphi = \frac{1}{24}(x^4 - 2hx^3 + h^3x)$. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x - x_{2k}), & \text{kui } x \in [x_{2k}, x_{2k+1}], \\ -\varphi(x - x_{2k+1}), & \text{kui } x \in [x_{2k+1}, x_{2k+2}], \end{cases}$$

kus $k = 0, \dots, N - 1$.

Paneme tähele, et iga sõlmpunkti x_i korral $f(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, 2N$ ja $f''(x_0) = f''(x_{2N}) = 0$. Neid võrdusi arvestades näeme, rajatingimuste **II** puhul on iga $i = 0, \dots, 2N$ korral võrrandisüsteemi (5.3) vabaliikmed võrdsed nulliga ning süsteemi (5.3) lahendiks $m_i = 0$, $i = 0, \dots, 2N$. Seega on funktsiooni f

interpoleeriv kuupsplain iga $x \in [a, b]$ korral nullfunktsioon, s.t. $s_3(x) = 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Järelikult

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Arvestades, et funktsioon $|f(x)|$ on perioodiline, kus ühe perioodi pikkuseks on $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, \dots, 2N$, ning tähistades $s = x - x_0$, saame

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f(x)| = \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |\varphi(x - x_0)| = \max_{s \in [0, h]} |\varphi(s)|.$$

Kuna funktsioon $\varphi(s)$ omandab lõigus $[0, h]$ maksimaalse väärtuse punktis $s = \frac{h}{2}$, siis kehtib

$$\max_{s \in [0, h]} |\varphi(s)| = \left| \varphi\left(\frac{h}{2}\right) \right| = \frac{1}{24} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^4}{2} \right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{5h^4}{16} = \frac{5}{384} h^4.$$

Arvestades, et $\max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)| = 1$, siis olemegi näidanud, et kehtib võrdus

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| = \frac{5}{384} h^4.$$

Kui kuupsplain rahuldab lisatingimusi **III**, siis hinnangu (6.14) ja teoreemi 2 põhjal leiame

$$\begin{aligned} |s_3(x) - P_3(x)| &\leq \frac{1}{4} h \max_{k=0, \dots, n} |m_k - f'(x_k)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} h^4 M_4 (4 + \eta \mu) \\ &= \frac{1}{96} h^4 M_4 (4 + \eta \mu), \end{aligned}$$

kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, ning suurused η ja μ defineeritud võrdustega (6.8) ja (6.9). Järelikult

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - P_3(x)| = \max_{i=1, \dots, n} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |s_3(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{96} h^4 M_4 (4 + \eta \mu). \quad (6.17)$$

Tuginedes võrratustele (6.12) ja (6.17), saame iga $x \in [a, b]$ korral

$$\begin{aligned} |s_3(x) - f(x)| &= |P_3(x) - f(x) + s_3(x) - P_3(x)| \\ &\leq |P_3(x) - f(x)| + |s_3(x) - P_3(x)| \\ &\leq \frac{1}{384} h^4 M_4 + \frac{1}{96} h^4 M_4 (4 + \eta \mu) = \frac{1}{384} h^4 M_4 (17 + 4 \eta \mu). \end{aligned}$$

Võtame tulemuse kokku järgmise teoreemina.

Teoreem 4. Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu võrgul $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ väärtusi $f_i = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) interpoleeriv kuupsplain s_3 esitatud kujul (2.6), kus $m_i = s_3'(x_i)$. Rahuldagu kuupsplain s_3 lisatingimusi III kujul (1.3). Siis kehtib hinnang

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 M_4 (17 + 4\eta\mu), \quad (6.18)$$

kus suurused η ja μ on defineeritud võrdustega (6.8) ja (6.9) ning

$$h = \max_{i=1, \dots, n} h_i = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Järeldus 1. Olgu täidetud teoreemi 4 eeldused. Kui osalõikude pikkused $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, n-1, n$, rahuldavad tingimusi $\frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) \leq 1$ ja $\frac{h_n}{h_{n-1}} \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) \leq 1$, siis kehtib hinnang

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{21}{384} h^4 M_4.$$

Tõestus. Kehtigu $\frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) \leq 1$ ja $\frac{h_n}{h_{n-1}} \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right)$. Arvestades, et $\frac{h_1}{h_2} > 0$, jõuame võrrandit $\frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) = 1$ lahendades tulemuseni $\frac{h_1}{h_2} \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Analoogiliselt toimides saame $\frac{h_n}{h_{n-1}} \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Nüüd leiame võrduste (6.8) ja (6.9) põhjal

$$\eta = \max \left\{ 1, \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right), \frac{h_n}{h_{n-1}} \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}}\right) \right\} = 1,$$

$$\mu = \max \left\{ 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2}, 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right\} = 1,$$

ning seega saame (6.18) alusel hinnagu

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 M_4 (17 + 4 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{21}{384} h^4 M_4.$$

□

Järeldus 2. Olgu täidetud teoreemi 4 eeldused. Kui osalõikude pikkused $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, n-1, n$, rahuldavad tingimusi $\frac{h_1}{h_2} \leq 1$ ja $\frac{h_n}{h_{n-1}} \leq 1$, siis kehtib hinnang

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{25}{384} h^4 M_4. \quad (6.19)$$

Tõestus. Kehtigu $\frac{h_1}{h_2} \leq 1$ ja $\frac{h_n}{h_{n-1}} \leq 1$. Nüüd leiame võrduste (6.8) ja (6.9) põhjal

$$\eta = \max \left\{ 1, \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right), \frac{h_n}{h_{n-1}} \left(1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \right) \right\} = 2,$$

$$\mu = \max \left\{ 1 - \frac{h_1^2}{h_2^2} + \frac{h_1^2}{h_2^2}, 1 - \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} + \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \right\} = 1,$$

ning seega saame (6.18) alusel hinnangu

$$\max_{x \in [a,b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 M_4 (17 + 4 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{25}{384} h^4 M_4.$$

□

Märkus 3. Järelduse 2 hinnang kehtib ka ühtlase võrgu korral.

Märkus 4. Töös [3] on käsitletud kuupsplainidega interpoleerimist vaid rajatingimustel **I** ja **II** ning näidatud, et teoreemi 3 eeldustel kehtib hinnang

$$\max_{x \in [a,b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{3} h^4 M_4.$$

Selles olev konstant $\frac{1}{3}$ on üle 20 korra suurem käesolevas töös saadud hinnangus

$$\max_{x \in [a,b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 M_4 \quad (6.16)$$

olevast konstandist $\frac{5}{384}$.

Märkus 5. Töös [4] on käsitletud kuupsplainidega interpoleerimist vaid lisatingimustel **III**. Seejuures on teoreemi 4 eeldustel ühtlase võrgu korral saadud hinnang

$$\max_{x \in [a,b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{33}{64} h^4 M_4. \quad (6.20)$$

Käesolevas töös on ühtlase võrgu korral saadud hinnang

$$\max_{x \in [a,b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{25}{384} h^4 M_4, \quad (6.19)$$

milles olev konstant $\frac{25}{384}$ on üle 7 korra väiksem hinnangus (6.20) olevast konstandist $\frac{33}{64}$.

7 Näide

Käesolevas peatükis toome teoreetiliste hinnangute illustreerimiseks mõningad testülesande lahendamisel saadud tulemused.

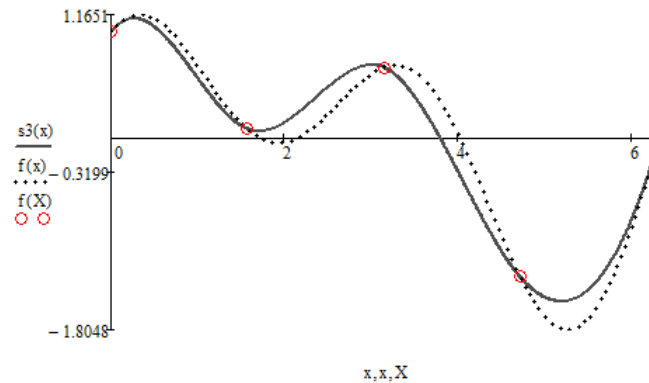
Olgu interpoleeritavaks funktsiooniks

$$f(x) = \sin x + \cos(\sqrt{3}x). \quad (7.1)$$

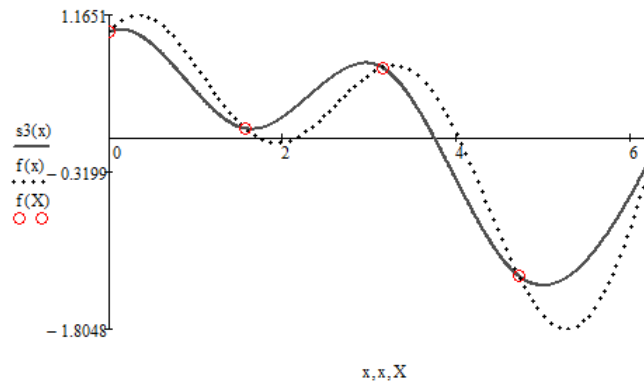
Olgu lõigul $[0, 2\pi]$ antud ühtlane võrk Δ_n sõlmpunktidega $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h = \frac{2\pi}{n}$.

Rajatingimusi **I**, **II** või lisatingimusi **III** rahuldava interpoleeriva kuupsplai-
ni konstrueerimiseks kujul (2.6) leiame esmalt funktsiooni (7.1) väärtused $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Seejärel leiame vastavalt võrrandisüsteeme (5.1), (5.3) ja (5.9) lahendades tundmatute m_0, \dots, m_n väärtused.

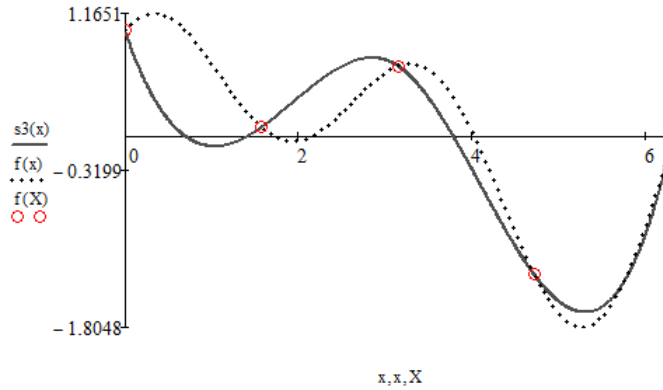
Joonistel 1, 2 ja 3 on katkendliku joonega kujutatud funktsioon (7.1) ning pi-
deva joonega teda interpoleeriv kuupsplain $n = 4$ korral vastavalt lisatingimustele **I**, **II** või **III**. Ringidega on tähistatud punktid $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, 4$.



Joonis 1. Funktsiooni (7.1) interpoleerimine kuupsplainiga s_3 rajatingimustel **I**



Joonis 2. Funktsiooni (7.1) interpoleerimine kuupsplainiga s_3 rajatingimustel **II**



Joonis 3. Funktsiooni (7.1) interpoleerimine kuupsplainiga s_3 lisatingimustel **III**

Kuna funktsiooni (7.1) korral $f \in C^4[0, 2\pi]$, $b - a = 2\pi$, $h = \frac{2\pi}{n}$ ja Mathcadi vahenditega oleme leidnud, et $M_4 = 9,7538$, siis teoreemi 3 põhjal kehtib rajatingimustel **I** ja **II** veahinnang

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5 \cdot (2\pi)^4 \cdot 9,7538}{384n^4} \quad (7.2)$$

ning järelduse 2 põhjal kehtib lisatingimustel **III** veahinnang

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{25 \cdot (2\pi)^4 \cdot 9,7538}{384n^4}. \quad (7.3)$$

Paneme tähele, et arvutades võrratuste (7.2) ja (7.3) paremal poolel olevate suuruste väärtused n ja $2n$ korral, saame leida suhted

$$\frac{5 \cdot (2\pi)^4 \cdot 9,7538}{384n^4} = 2^4 = 16 \quad \text{ja} \quad \frac{25 \cdot (2\pi)^4 \cdot 9,7538}{384n^4} = 2^4 = 16.$$

Võrratuste (7.2) ja (7.3) vasakul poolel oleva maksimumi asemel arvutame suurused

$$\epsilon_n = \max_{\substack{i=0, \dots, n \\ k=0, \dots, 30}} |s(x_{ik}) - f(x_{ik})|,$$

kus

$$x_{ik} = x_i + \frac{kh}{30}, \quad i = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, 30.$$

Tabelis 1 on esitatud vead ϵ_n , suhted $\frac{\epsilon_n}{\epsilon_{2n}}$ ja võrratuse (7.2) parema poole väärtused (teoreetilised vead) erinevate n väärtuste korral rajatingimustel **I**, **II**. Tabelis 2 on esitatud samad näitajad lisatingimustel **III**, teoreetilised vead on arvutatud hinnangu (7.3) parema poole põhjal.

Tabel 1:

n	Teoreetiline viga	Rajatingimustel I		Rajatingimustel II	
		ϵ_n	ϵ_n/ϵ_{2n}	ϵ_n	ϵ_n/ϵ_{2n}
4	0,7732	0,3572		0,5524	
8	0,0483	0,014	25,51	0,0249	22,18
16	$3,0203 \times 10^{-3}$	$6,4934 \times 10^{-4}$	21,56	$1,4512 \times 10^{-3}$	17,16
32	$1,8877 \times 10^{-4}$	$3,8758 \times 10^{-5}$	16,75	$8,8567 \times 10^{-5}$	16,39
64	$1,1798 \times 10^{-5}$	$2,3725 \times 10^{-6}$	16,34	$5,4948 \times 10^{-6}$	16,12
128	$7,3738 \times 10^{-7}$	$1,4772 \times 10^{-7}$	16,06	$3,4259 \times 10^{-7}$	16,04
256	$4,6086 \times 10^{-8}$	$9,220 \times 10^{-9}$	16,02	$2,1392 \times 10^{-8}$	16,01
512	$2,8804 \times 10^{-9}$	$5,7614 \times 10^{-10}$	16,00	$1,3365 \times 10^{-9}$	16,01
1024	$1,8002 \times 10^{-10}$	$3,6006 \times 10^{-11}$	16,00	$8,3519 \times 10^{-11}$	16,00
2048	$1,1252 \times 10^{-11}$	$2,2506 \times 10^{-12}$	16,00	$5,2196 \times 10^{-12}$	16,00

Tabel 2:

n	Teoreetiline viga	Rajatingimustel III	
		ϵ_n	ϵ_n/ϵ_{2n}
4	3,8660	1,0104	
8	0,2416	0,1014	9,96
16	0,0151	$4,8402 \times 10^{-3}$	20,95
32	$9,4385 \times 10^{-4}$	$3,6278 \times 10^{-4}$	13,34
64	$5,8991 \times 10^{-5}$	$2,3518 \times 10^{-5}$	15,43
128	$3,6869 \times 10^{-6}$	$1,4791 \times 10^{-6}$	15,90
256	$2,3043 \times 10^{-7}$	$9,2456 \times 10^{-8}$	16,00
512	$1,4402 \times 10^{-8}$	$5,7747 \times 10^{-9}$	16,01
1024	$9,0012 \times 10^{-10}$	$3,6073 \times 10^{-10}$	16,01
2048	$5,6258 \times 10^{-11}$	$2,2539 \times 10^{-11}$	16,00

Tabelitest 1 ja 2 näeme, et osalõikude arvu n suurendamisel suurus ϵ_n vähe-
neb ning suhe $\frac{\epsilon_n}{\epsilon_{2n}}$ läheneb arvule 16. Vastavad Mathcadi programmid on toodud
lisades 1, 2 ja 3.

Kirjandus

- [1] Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л., Методы сплайн-функций, Москва, 1980.
- [2] Tamme, E., Võhandu, L., Luht, L., Arvutusmeetodid I, Tallinn, 1986.
- [3] Raun, E., Interpoleerimine kuupsplainidega splaini esimese tuletise väärtusi kasutava esituse korral, Tartu, 2008.
- [4] Vikerpuur, M., Interpoleerimine kuupsplainidega splaini teise ja eelviimase sõlmega seotud rajatingimuste korral, Tartu, 2009.
- [5] Pedas, A., Vainikko, G., Harilikud diferentsiaalvõrrandid, Tartu Ülikool, Tartu, 2011.

Cubic spline interpolation

Annika Koovit

Summary

In the current bachelor's work cubic spline interpolation with some error estimations is studied. Let $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ be fixed nodes on the interval $[a, b]$, let f_0, \dots, f_n be given values and let $m_i = s'_3(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. We have constructed a cubic spline $s_3(x)$ in the form of

$$s_3(x) = f_{i-1} + m_{i-1}(x - x_{i-1}) - \left(\frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{m_i}{h_i} + \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2} \right) (x - x_{i-1})^2 \\ + \left(\frac{m_{i-1}}{h_i^2} + \frac{m_i}{h_i^2} + \frac{2(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3} \right) (x - x_{i-1})^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

which satisfies interpolation conditions $s_3(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$.

Let f be a four times continuously differentiable function on the interval $[a, b]$ and let $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ be values of the function at the nodes. Let

$$h = \max_{i=1, \dots, n} h_i = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}), \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Firstly, we have proved that if the cubic spline s_3 is satisfying the interpolation conditions $s_3(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) and one of the limiting conditions at the endpoints

$$s'_3(a) = f'(a), \quad s'_3(b) = f'(b), \quad \text{or} \quad s''_3(a) = f''(a), \quad s''_3(b) = f''(b),$$

then the following estimate holds:

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 M_4.$$

Secondly, we have proved that if the cubic spline s_3 is satisfying the interpolation conditions $s_3(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, \dots, n$) and the limiting conditions

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} s'''_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} s'''_3(x), \quad i = 1, n - 1,$$

then the estimate (6.16) holds.

Finally, we have provided a numerical example to illustrate the theoretical results.

Lisa 1

Kuupsplaini konstruktsioon ja veahinnang rajatingimustel I

Lõigu otspunktid $a := 0$ $b := 2\pi$
 Osalõikude arv ja pikkus $N := 4$ $h := \frac{b-a}{N}$
 Sõlmed $i := 0, 1..N$ $X_i := a + i \cdot h$

Interpoleeritav funktsioon f $f(x) := \sin(x) + \cos(\sqrt{3}x)$

Funktsiooni f esimest järku tuletis $d1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \cos(x) - \sqrt{3} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot x)$

Maatriksi $A1$ ja vabaliikmete vektori $r1$ täitmine vastavalt peatükile 5.1

$A1_{0,0} := 1$ $A1_{N,N} := 1$ $r1_0 := d1(a)$ $r1_N := d1(b)$
 $i := 1, 2..N - 1$
 $A1_{i,i-1} := \frac{1}{2}$ $A1_{i,i} := 2$ $A1_{i,i+1} := \frac{1}{2}$ $r1_i := \frac{3 \cdot f(X_{i+1})}{2 \cdot h} + \frac{3 \cdot f(X_{i-1})}{2 \cdot h}$

Süsteemi lahendame funktsiooni *lsolve* abil $m := \text{lsolve}(A1, r1)$

Kuupsplaini konstruktsioon kujul (2.6)

$c_i := -\frac{2 \cdot m_{i-1}}{h} - \frac{m_i}{h} - \frac{3 \cdot (f(X_{i-1}) - f(X_i))}{h^2}$ $d_i := \frac{m_{i-1}}{h^2} + \frac{m_i}{h^2} + \frac{2 \cdot (f(X_{i-1}) - f(X_i))}{h^3}$

$s3(x) := \text{for } i \in 1..N$

$$f(X_{i-1}) + m_{i-1} \cdot (x - X_{i-1}) + c_i \cdot (x - X_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - X_{i-1})^3 \text{ if } X_{i-1} \leq x \leq X_i$$

Vea $\max|s3(x)-f(x)|$ hinnang kolmkümmend korda tihedama võrgu sõlmedes

```
viga := |
max ← 0
for i ∈ 0..N - 1
  for k ∈ 0..30
    x ← Xi +  $\frac{k \cdot h}{30}$ 
    ε ← |s3(x) - f(x)|
    max ← ε if ε ≥ max
max
```

viga = 0.5714

Teoreetiline viga $M_4 := 9.753!$ $\frac{5 \cdot h^4 M_4}{384} = 0.7732$

Lisa 2

Kuupsplaini konstruktsioon ja veahinnang rajatingimustel II

Lõigu otspunktid $a := 0$ $b := 2\pi$
 Osalõikude arv ja pikkus $N := 4$ $h := \frac{b-a}{N}$
 Sõlmed $i := 0, 1..N$ $X_i := a + i \cdot h$
 Interpoleeritav funktsioon f $f(x) := \sin(x) + \cos(\sqrt{3}x)$

Funktsiooni f teist järku tuletis $d2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow -3 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot x) - \sin(x)$

Maatriksi $A2$ ja vabaliikmete vektori $r2$ täitmine vastavalt peatükile 5.2

$A2_{i,i} := 2$ $r2_0 := \frac{3(f(X_1) - f(X_0))}{h} - \frac{h \cdot d2(a)}{2}$
 $A2_{0,1} := 1$ $A2_{N,N-1} := 1$ $r2_N := \frac{3(f(X_N) - f(X_{N-1}))}{h} + \frac{h \cdot d2(b)}{2}$
 $i := 1, 2..N-1$
 $A2_{i,i-1} := \frac{1}{2}$ $A2_{i,i+1} := \frac{1}{2}$ $r1_i := \frac{3 \cdot f(X_{i+1})}{2 \cdot h} + \frac{3 \cdot f(X_{i-1})}{2 \cdot h}$

Süsteemi lahendame funktsiooni *lsolve* abil

Kuupsplaini konstruktsioon kujul (2.6)

$c_i := -\frac{2 \cdot m_{i-1}}{h} - \frac{m_i}{h} - \frac{3 \cdot (f(X_{i-1}) - f(X_i))}{h^2}$ $m := \text{lsolve}(A2, r2)$
 $d_i := \frac{m_{i-1}}{h^2} + \frac{m_i}{h^2} + \frac{2 \cdot (f(X_{i-1}) - f(X_i))}{h^3}$
 $i := 1..N$

$s3(x) := \text{for } i \in 1..N$

$$f(X_{i-1}) + m_{i-1} \cdot (x - X_{i-1}) + c_i \cdot (x - X_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - X_{i-1})^3 \text{ if } X_{i-1} \leq x \leq X_i$$

Vea $\max|s3(x)-f(x)|$ hinnang kolmkümmend korda tihedama võrgu sõlmedes

```
viga := |
max ← 0
for i ∈ 0..N - 1
  for k ∈ 0..30
    x ← Xi +  $\frac{k \cdot h}{30}$ 
    ε ← |s3(x) - f(x)|
    max ← ε if ε ≥ max
max
```

viga = 0.6273

Teoreetiline viga $M_4 := 9.753!$

$$\frac{5 \cdot h^4 M_4}{384} = 0.7732$$

Lisa 3

Kuupsplaini konstruktsioon ja veahinnang rajatingimustel III

Lõigu otspunktid	$a := 0$	$b := 2\pi$
Osaldõikude arv ja pikkus	$N := 4$	$h := \frac{b-a}{N}$
Sõlmed	$i := 0, 1..N$	$X_i := a + i \cdot h$
Interpoleeritav funktsioon f	$f(x) := \sin(x) + \cos(\sqrt{3}x)$	

Maatriksi A3 ja vabaliikmete vektori r3 täitmine vastavalt peatükile 5.3

$$\begin{aligned}
 A3_{0,0} &:= 2 & A3_{N-2,N-2} &:= 2 & r3_0 &:= \frac{f(X_1) - f(X_0)}{2 \cdot h} + \frac{5 \cdot (f(X_2) - f(X_1))}{2 \cdot h} \\
 A3_{0,1} &:= 1 & A3_{N-2,N-3} &:= 1 & r3_{N-2} &:= \frac{f(X_N) - f(X_{N-1})}{2 \cdot h} + \frac{5 \cdot (f(X_{N-1}) - f(X_{N-2}))}{2 \cdot h} \\
 i &:= 1..N-3 & A3_{i,i} &:= 2 & & \\
 A3_{i,i-1} &:= \frac{1}{2} & A3_{i,i+1} &:= \frac{1}{2} & r3_i &:= \frac{3 \cdot (f(X_{i+2}) - f(X_{i+1}))}{2 \cdot h} + \frac{3 \cdot (f(X_{i+1}) - f(X_i))}{2 \cdot h}
 \end{aligned}$$

Süsteemi lahendame funktsiooni *lsolve* abil $m := \text{stack}(0, \text{lsolve}(A3, r3), 0)$

Väärtuste m_0 ja m_N arvutamine võrduste (5.5) ja (5.6) põhjal

$$\begin{aligned}
 m_0 &:= \frac{2 \cdot (f(X_1) - f(X_2))}{h} - \frac{2 \cdot (f(X_0) - f(X_1))}{h} + m_2 \\
 m_N &:= \frac{2 \cdot (f(X_{N-2}) - f(X_{N-1}))}{h} - \frac{2 \cdot (f(X_{N-1}) - f(X_N))}{h} + m_{N-2}
 \end{aligned}$$

Kuupsplaini konstruktsioon kujul (2.6)

$$\begin{aligned}
 i &:= 1..N \\
 c_i &:= -\frac{2 \cdot m_{i-1}}{h} - \frac{m_i}{h} - \frac{3 \cdot (f(X_{i-1}) - f(X_i))}{h^2} & d_i &:= \frac{m_{i-1}}{h^2} + \frac{m_i}{h^2} + \frac{2 \cdot (f(X_{i-1}) - f(X_i))}{h^3}
 \end{aligned}$$

$s3(x) := \text{for } i \in 1..N$

$$f(X_{i-1}) + m_{i-1} \cdot (x - X_{i-1}) + c_i \cdot (x - X_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - X_{i-1})^3 \text{ if } X_{i-1} \leq x \leq X_i$$

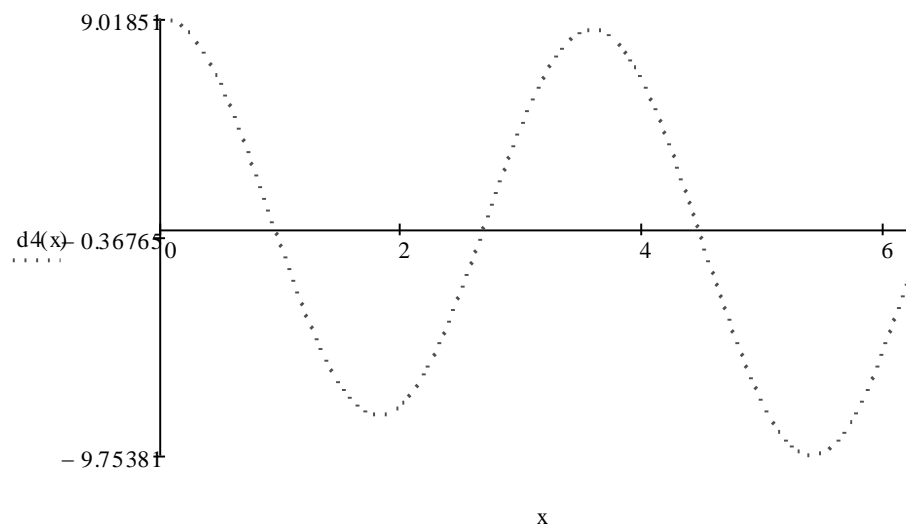
Vea $\max|s_3(x)-f(x)|$ hinnang kolmkümmend korda tihedama võrgu sõlmedes

```
viga :=
  max ← 0
  for i ∈ 0..N - 1
    for k ∈ 0..30
      x ← Xi +  $\frac{k \cdot h}{30}$ 
      ε ← |s3(x) - f(x)|
      max ← ε if ε ≥ max
  max
```

viga = 1.0104

Suuruse M_4 leidmine

Funktsiooni f neljandat järku tuletis $d_4(x) := \frac{d^4}{dx^4} f(x) \rightarrow 9 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot x) + \sin(x)$



Teoreetiline viga $M_4 := 9.7538$; $\frac{25 \cdot h^4}{384} \cdot M_4 = 3.866$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Annika Kõivik
(autori nimi)
(sünnikuupäev: 10. august 1989)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Interpeleerimine kuupsplainidega

(lõputöö pealkiri)

mille juhendaja on Arvid Pedas
(juhendaja nimi)

- 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
- 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, 4. juuli 2013 (kuupäev)