TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatika teaduskond
Rakendusmatemaatika instituut
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool

Ester Saral

Logaritmiliselt iseärase tuumaga integraalvõrrandi lahendi siledus ja lähislahendi leidmine kollokatsioonimeetodil

Magistritöö

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

TARTU 2005

SISUKORD

Sissejuhatus

Käesolevas magistritöös vaatleme integraalvõrrandit kujul

$$u(t)=\int_0^b K(t,s)u(s)ds+f(t)\,,\qquad 0\le t\le b\,, \tag{1}$$

kus

$$K(t,s)=a(t,s)\theta(t-s)$$

on antud tuum ja $f=f(t)$ antud vabaliige. Eeldame, et funktsioon $a=a(t,s)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, kui $(t,s)\in[0,b]\times[0,b]$ ja funktsioon $\theta=\theta(t)$ on pidevalt diferentseeruv, kui $t\in[-b,b]\setminus\{0\}$ ning iga $t\in[-b,b]\setminus\{0\}$ korral kehtivad järgmised hinnangud:

$$|\theta(t)|\le c(|\ln|t||^m+1)$$

ja

$$|\theta'(t)|\le c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|}+1\right),$$

kus $m\in\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ ning c ja c_1 on mingid positiivsed konstandid. Vabaliikme f kohta eeldame, et $f\in C^2[0,b]$, s.t. ta on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[0,b]$. Tegelikult vaatleme töös juhtu, kus vabaliige f kuulub palju laiemasse funktsioonide klassi $C_m^2[0,b]$, $m\in\mathbb{N}$ (vt. § 1.4).

Magistritöö koosneb kahest peatükist. Esimeses neist uurime integraalvõrrandi (1) lahendi siledust. Teine peatükk on pühendatud võrrandi (1) lähislahendi leidmisele kollokatsioonimeetodil. Magistritöö põhitulemused on toodud teoreemides 1.4.1, 2.5.1 ja 2.6.1.

Teoreemis 1.4.1 saame tulemuse integraalvõrrandi (1) lahendi esimese ja teise tuletise käitumise kohta. Sellest järeldub muuhulgas, et kui $f\in C^2[0,b]$ ja võrrandil (1) on olemas lahend u ning kui $u(0)a(0,0)\neq 0$ ja $u(b)a(b,b)\neq 0$, siis funktsiooni $u'=u'(t)$ iseärasused $t\to 0$ ja $t\to b$ korral on samasugused nagu $\theta(t)$ iseärasus $t\to 0$ korral.

Anname ette võrgu

$$\Delta_n=\{t_0,t_1,...,t_n : 0=t_0<t_1<...<t_n=b\},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Võrrandi (1) lähislahendit otsime kujul

$$u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(t), \tag{2}$$

kus $c_0, c_1, ..., c_n$ on otsitavad kordajad ning $\varphi_j = \varphi_j(t)$ $(j = 0,1,...,n)$ on funktsioonid, mis on lineaarsed igal osalõigul $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0,1,...,n-1)$ ning võrduvad nulliga kõigis sõlmedes, välja arvatud t_j, kusjuures $\varphi_j(t_j) = 1$ (vt. $(2.1.3)$). Võrrandi (1) lähislahendi leidmiseks kasutame kollokatsioonimeetodit. Selleks asetame suuruse u_n võrrandisse (1) otsitava u asemele ja nõuame, et võrrand oleks rahuldatud võrgu Δ_n sõlmedes t_i:

$$u_n(t_i) = \int_0^b K(t_i, s) u_n(s) ds + f(t_i), \qquad i = 0,1,...,n. \tag{3}$$

Tingimused (3) kujutavad endast lineaarset algebralist võrrandisüsteemi kordajate $c_0, c_1, ..., c_n$ suhtes (vt. § 2.1).

Teoreemis 2.5.1 näitame, et kui võrk Δ_n on ühtlane, s.t. sõlmedega

$$\begin{cases} t_i = ih, \quad i = 0,1,...,n, \\ h = \dfrac{b}{n}, \end{cases}$$

siis kehtivad veahinnangud

$$\max_{0 \le t \le b} |u_n(t) - u(t)| \le c |\ln h|^{m-1} h, \qquad n \ge n_0$$

ja

$$\max_{0 \le i \le n} |u_n(t_i) - u(t_i)| \le c_1 |\ln h|^{2m} h^2, \qquad n \ge n_0,$$

kus c, c_1 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest n.

Töös uurime kollokatsioonimeetodi koonduvust ka ebaühtlase võrgu korral, s.t. juhul kui võrgu $\Delta_n = \Delta_n^r$ sõlmed on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{cases} t_i = 2^{r-1} b \left(\dfrac{i}{n} \right)^r, \quad i = 0,1,...,\dfrac{n}{2}, \\ t_{i+\frac{n}{2}} = b - t_{\frac{n}{2}-i}, \quad i = 1,2,...,\dfrac{n}{2}. \end{cases}$$

Sealjuures $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$ ning $r \in \mathbb{R}$. Teoreemis 2.6.1 näitame, et $r > 2$ korral kehtib veahinnang

$$\max_{0 \le t \le b} |u_n(t) - u(t)| \le \frac{c}{n^2}, \qquad n \ge n_0,$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Olgu märgitud, et saadud koonduvuskiirus on parim, mida on lineaarsete splainidega aproksimeerimisel võimalik saavutada ka iseärasusteta funktsioonide $u \in C^2[0,b]$ korral. Seega mitteühtlase võrgu kasutamisel on võimalik korvata lahendi iseärast käitumist lõigu otspunktide juures. Võrdluseks märgime veel, et ühtlase võrgu kasutamisel on koonduvuskiirus peaaegu h järku. Sõlmedes t_i $(i = 0,1,...,n)$ on ka ühtlase võrgu korral koonduvuskiirus peaaegu h^2 järku. Seetõttu on ka ühtlase võrgu kasutamine üsna otstarbekohane.

1. Iseärase tuumaga integraalvõrrandi lahendi siledus

§ 1.1. Põhimõisted ja abitulemused

Selles paragrahvis toome sisse mõningad põhimõisted ja esitame lühidalt väited, mida edaspidi kasutame.

1.1.1. Mõisted ja abitulemused funktsionaalanalüüsist. Kirjutisega $\mathbb{N} =\{1,2,3,...\}$ tähistame naturaalarvude hulka ja kirjutisega $\mathbb{R}$=(-∞,∞) reaalarvude hulka. Tähtedega $c, c_1, c_2,...$ tähistame positiivseid konstante, mis erinevates võrratustes võivad omada erinevaid väärtusi.

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Sümboliga $L(X,Y)$ tähistame tõkestatud lineaarsete operaatorite hulka ruumist X ruumi Y. Hulk $L(X,Y)$ on Banachi ruum normi

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{x\in X, \|x\|\le 1} \|Ax\|, \qquad A \in L(X,Y),$$

suhtes.

Kirjutisega $C(a,b)$ tähistame kõigi vahemikus (a,b) pidevate tõkestatud funktsioonide hulka. Hulk $C(a,b)$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \sup_{a<t<b} |x(t)|, \qquad x = x(t) \in C(a,b).$$

Kirjutisega $C[a,b]$ tähistame kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulka. Hulk $C[a,b]$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|, \qquad x = x(t) \in C[a,b].$$

Kirjutisega $C^n[a,b]$ ($n\in \mathbb{N}$) tähistame kõigi lõigul $[a,b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka. Hulk $C^n[a,b]$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\le t\le b} |x^{(k)}(t)|, \qquad x = x(t) \in C^n[a,b].$$

Kirjutisega $L^p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$ tähistame kõigi funktsioonide $x = x(t)$ hulka, mille korral leidub lõplik Lebesgue`i integraal $\int_a^b |x(t)|^p\, dt$. Hulk $L^p(a,b)$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = x(t) \in L^p(a,b), \qquad 1 \le p < \infty .$$

Definitsioon 1.1.1. Hulka K meetrilises ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktseks, kui igast K elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Definitsioon 1.1.2. Olgu X, Y normeeritud ruumid ja $K \subset X$ mittetühi hulk. Operaatorit $A : K \to Y$ nimetatakse kompaktseks, kui ta hulga K iga tõkestatud osahulga teisendab suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis Y.

Definitsioon 1.1.3. Olgu X vektorruum. Lineaarset operaatorit $P : X \to X$ nimetatakse projektoriks, kui $P^2 = P$.

Lause 1.1.1.(vt. [2], lk. 259) *Kui X on normeeritud ruum ja projektor $P : X \to X$ on pidev, siis $\operatorname{Im} P$ on kinnine ja $P \neq 0$ korral $\|P\| \ge 1$.*

Definitsioon 1.1.4. Hulka $E \subset X$ nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis X, kui $\overline{L(E)} = X$ (s.t. hulga E lineaarne kate on kõikjal tihe).

Definitsioon 1.1.5. Öeldakse, et operaatorite jada $A_n : X \to Y$ koondub punktiviisi ehk kõikjal ruumis X, kui iga $x \in X$ korral jada $A_n x$ koondub ruumis Y.

Teoreem 1.1.1.(Banach-Steinhausi teoreem, vt. [2], lk. 136) *Olgu X Banachi ruum, Y normeeritud ruum ja E põhihulk ruumis X. Jada $A_n \in L(X,Y)$ koondub punktiviisi operaatoriks $A \in L(X,Y)$ parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*

1) $\exists M \in \mathbb{R}, \ \|A_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

2) $A_n x \to Ax \quad \forall x \in E$.

Olgu X Banachi ruum ja $T : X \to X$ lineaarne, kompaktne operaator. Vaatleme operaatorvõrrandit

$$x = Tx + y,$$

kus $y \in X$ on antud vabaliige ning $x \in X$ otsitav.

Teoreem 1.1.2. (Fredholmi alternatiiv, vt. [2], lk. 223) *Võrrand $x = Tx + y$ on iga $y \in X$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeensel võrrandil $x = Tx$ on ainult triviaalne lahend. Sel juhul on võrrand $x = Tx + y$ iga $y \in X$ korral üheselt lahenduv.*

1.1.2. Lagrange`i interpolatsioonivalem. Olgu antud n ($n \in \mathbb{N}$) erinevat interpolatsioonisõlme $x_1, x_2, \dots, x_n$ ja funktsiooni $y = f(x)$ väärtused $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Polünoomi kujul

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \qquad (1.1.1)$$

nimetatakse Lagrange`i interpolatsioonipolünoomiks.

Eeldame, et funktsioon $f \in C^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Interpolatsioonivalemiks nimetatakse seost

$$f(x) = L_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \qquad (1.1.2)$$

kus $a \le x \le b$ ja $a < \xi < b$.

Valemist $(1.1.2)$ saame järgmise veahinnangu (vt. [5], lk. 17):

$$|f(x) - L_{n-1}(x)| \le \frac{M_n}{n!}|x - x_1||x - x_2|\dots|x - x_n|, \qquad a \le x \le b, \qquad (1.1.3)$$

kus

$$M_n = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n)}(x) \right|.$$

1.1.3. Üldine teoreem Galjorkini meetodi koonduvusest. Olgu E Banachi ruum ja $T : E \to E$ lineaarne, kompaktne operaator. Vaatleme operaatorvõrrandeid

$$u = Tu + f \qquad (1.1.4)$$

ja

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \qquad (1.1.5)$$

kus $f \in E$ on antud vabaliige, $u \in E$ otsitav funktsioon ning $P_n : E \to E$ ($n \in \mathbb{N}$) projektorid.

Teoreem 1.1.3. (vt. [7], lk. 59) *Olgu võrrandite* $(1.1.4)$ *ja* $(1.1.5)$ *korral täidetud tingimused:*

1) *võrrandi* $(1.1.4)$ *vastaval homogeensel võrrandil*

$$u - Tu = 0$$

leidub vaid triviaalne lahend $u = 0$*;*

2) *projektorid* P_n *koonduvad* $n \to \infty$ *korral punktiviisi ühikoperaatoriks* I *:*

$$P_n u \to u, \qquad kui\ n \to \infty, \qquad \forall u \in E. \qquad (1.1.6)$$

Siis võrrand $(1.1.4)$ *on iga* $f \in E$ *korral üheselt lahenduv ning leidub selline* n_0, *et* $n \geq n_0$ *korral on ka võrrandid* $(1.1.5)$ *üheselt lahenduvad. Võrrandite* $(1.1.5)$ *lahendid* u_n *koonduvad* $n \to \infty$ *korral võrrandi* $(1.1.4)$ *lahendiks* u. *Lisaks kehtivad veahinnangud*

$$\|u_n - u\|_E \leq c\|u - P_n u\|_E, \qquad n \geq n_0 \tag{1.1.7}$$

ja

$$\|u_n - P_n u\|_E \leq c\|T(u - P_n u)\|_E, \qquad n \geq n_0, \tag{1.1.8}$$

kus konstant c *ei sõltu arvust* n *ega vabaliikmest* f.

Üleminekut võrrandilt $(1.1.4)$ võrrandile $(1.1.5)$ tuntakse kirjanduses kui Galjorkini meetodit. Sealjuures võib operaatori P_n osas olla suvaline projektor. Kollokatsioonimeetod on Galjorkini meetodi erijuht, mille korral projektoriks P_n on interpolatsiooniprojektor (vt. § 2.2).

§ 1.2. Logaritmiliselt iseärase tuumaga integraalvõrrand

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b, \qquad (1.2.1)$$

kus $b > 0$ on mingi konstant. Eeldame, et vabaliige $f = f(t)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[0,b]$ ning tuum $K(t,s)$ on kujul

$$K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s), \qquad (1.2.2)$$

kus funktsioonid $a = a(t,s)$ ja $\theta = \theta(t)$ rahuldavad järgmisi tingimusi:

1) $a(t,s)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, kui $(t,s) \in [0,b] \times [0,b]$;

2) $\theta(t)$ on pidevalt diferentseeruv, kui $t \in [-b,b] \setminus \{0\}$ ning kehtivad hinnangud

$$|\theta(t)| \le c(|\ln|t||^m + 1), \qquad t \in [-b,b] \setminus \{0\} \qquad (1.2.3)$$

ja

$$|\theta'(t)| \le c_1 \left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|} + 1 \right), \qquad t \in [-b,b] \setminus \{0\}, \qquad (1.2.3')$$

kus $m \in \mathbb{N}$.

Seostest $(1.2.2)-(1.2.3)$ näeme, et tuumal $K(t,s)$ on iseärasus diagonaalil $t = s$. Tähistame

$$K_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) K(t,s)$$

ja

$$K_2(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) K_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 K(t,s).$$

Paneme tähele, et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \theta(t-s) = \theta'(t-s) - \theta'(t-s) = 0.$$

Seetõttu

$$K_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) [a(t,s)\theta(t-s)] =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) a(t,s) \right] \theta(t-s) + a(t,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \theta(t-s) \right] =$$

$$= a_1(t,s)\theta(t-s), \qquad (1.2.2')$$

kus

$$a_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)a(t,s).$$

Analoogiliselt saame

$$K_2(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)[a_1(t,s)\theta(t-s)] =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)a_1(t,s)\right]\theta(t-s) + a_1(t,s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)\theta(t-s)\right] =$$

$$= a_2(t,s)\theta(t-s), \qquad (1.2.2'')$$

kus

$$a_2(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)a_1(t,s).$$

Eelduse 1) abil näeme, et $a_1(t,s)$ on üks kord pidevalt diferentseeruv, kui $(t,s) \in [0,b] \times [0,b]$ ning $a_2(t,s)$ on pidev, kui $(t,s) \in [0,b] \times [0,b]$. Seega $K_1(t,s)$ ja $K_2(t,s)$ on sama tüüpi funktsioonid nagu $K(t,s)$, ainult kordajad a_1 ja a_2 on vähem siledad.

Olgu T, T_1 ja T_2 integraaloperaatorid kujul:

$$(Tu)(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b, \qquad (1.2.4)$$

$$(T_1u)(t) = \int_0^b K_1(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b, \qquad (1.2.5)$$

$$(T_2u)(t) = \int_0^b K_2(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b. \qquad (1.2.6)$$

Analoogiliselt töödega [7] ja [3] saab näidata, et kehtivad järgmised tulemused.

Teoreem 1.2.1. *Seostega* $(1.2.4)-(1.2.6)$ *määratud operaatorid* T, T_1 *ja* T_2 *on täielikult pidevad ruumist* $L^p(0,b)$ $(p>1)$ *ruumi* $C[0,b]$.

Järeldus 1.2.1. *Seostega* $(1.2.4)-(1.2.6)$ *määratud operaatorid* T, T_1, T_2 *on täielikult pidevad ruumist* $C[0,b]$ *ruumi* $C[0,b]$.

§ 1.3. Kaaluruum $C_m^2[0,b]$

Vaatleme kaaluruumi $C_m^2[0,b]$ ($m \in \mathbb{N}$), mis koosneb lõigul $[0,b]$ pidevatest ja vahemikus $(0,b)$ kaks korda pidevalt diferentseeruvatest funktsioonidest $u = u(t)$, mille korral

$$\max_{0\le t\le b}|u(t)| + \sup_{0<t<b}\frac{|u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b}\frac{t(b-t)|u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} \le c < \infty .$$

Näeme, et $u \in C_m^2[0,b]$ on samaväärne nõudega $u \in C[0,b]\cap C^2(0,b)$ ning, et kehtivad järgmised hinnangud:

$$|u'(t)| \le c\left(1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right), \qquad 0<t<b$$

ja

$$|u''(t)| \le c_1\left(1+\frac{|\ln t|^{m-1}}{t}+\frac{|\ln(b-t)|^{m-1}}{b-t}\right), \qquad 0<t<b .$$

Näitame, et $C_m^2[0,b]$ on normeeritud ruum normiga

$$\|u\|_{2,m} = \max_{0\le t\le b}|u(t)| + \sup_{0<t<b}\frac{|u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b}\frac{t(b-t)|u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}}.$$

Selleks kontrollime normi aksioomide täidetust.

Esiteks veendume, et $\|u\|_{2,m} = 0$ parajasti siis, kui u on kaaluruumi $C_m^2[0,b]$ nullelement.

Tõepoolest, kui $u(t) = 0$ iga $t \in [0,b]$ korral, siis on selge, et

$$\|u\|_{2,m} = \max_{0\le t\le b}|u(t)| + \sup_{0<t<b}\frac{|u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b}\frac{t(b-t)|u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} = 0.$$

Teiselt poolt, tingimus $\|u\|_{2,m} = 0$ on samaväärne sellega, et

$$\max_{0\le t\le b}|u(t)| + \sup_{0<t<b}\frac{|u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b}\frac{t(b-t)|u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} = 0 .$$

Viimasest võrdusest saame

$$\max_{0\le t\le b}|u(t)| = 0 ,$$

mis on samaväärne sellega, et $u(t) = 0$ iga $t \in [0,b]$ korral.

Teiseks näitame, et $\|\lambda u\|_{2,m} = |\lambda| \|u\|_{2,m}$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ ja iga $u \in C_m^2[0,b]$ korral. Tõepoolest,

$$\|\lambda u\|_{2,m} = \max_{0\le t\le b} |\lambda u(t)| + \sup_{0<t<b} \frac{|\lambda u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|\lambda u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} =$$

$$= \max_{0\le t\le b} (|\lambda| |u(t)|) + \sup_{0<t<b} \frac{|\lambda| |u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|\lambda| |u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} =$$

$$= |\lambda| \left(\max_{0\le t\le b} |u(t)| + \sup_{0<t<b} \frac{|u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} \right) =$$

$$= |\lambda| \|u\|_{2,m} .$$

Kolmandaks veendume, et iga $u, v \in C_m^2[0,b]$ korral kehtib kolmnurga võrratus

$$\|u+v\|_{2,m} \le \|u\|_{2,m} + \|v\|_{2,m} .$$

Tõepoolest,

$$\|u+v\|_{2,m} = \max_{0\le t\le b} |u(t)+v(t)| + \sup_{0<t<b} \frac{|u'(t)+v'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} +$$

$$+ \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|u''(t)+v''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} \le$$

$$\le \max_{0\le t\le b} |u(t)| + \max_{0\le t\le b} |v(t)| +$$

$$+ \sup_{0<t<b} \frac{|u'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} + \sup_{0<t<b} \frac{|v'(t)|}{1+|\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} +$$

$$+ \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} + \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|v''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} =$$

$$= \|u\|_{2,m} + \|v\|_{2,m} .$$

Seega $C_m^2[0,b]$ on normeeritud ruum normi $\|u\|_{2,m}$ suhtes.

Osutub, et $C_m^2[0,b]$ on normi $\|u\|_{2,m}$ suhtes ka täielik normeeritud ehk Banachi ruum.

<u>Teoreem 1.3.1</u>. *Kaaluruum $C_m^2[0,b]$ on normi $\|u\|_{2,m}$ suhtes täielik normeeritud ruum.*

T õ e s t u s. Vaatleme suvalist Cauchy jada $(u_\beta) \in C_m^2[0,b]$. Siis piirprotsessi $\alpha, \beta \to \infty$ korral

$$\|u_\alpha - u_\beta\|_{2,m} = \max_{0 \le t \le b} |u_\alpha(t) - u_\beta(t)| + \sup_{0<t<b} \frac{|u'_\alpha(t) - u'_\beta(t)|}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} +$$

$$+ \sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|u''_\alpha(t) - u''_\beta(t)|}{1 + (b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} \to 0,$$

millest

$$\max_{0 \le t \le b} |u_\alpha(t) - u_\beta(t)| \to 0,$$

$$\sup_{0<t<b} \frac{|u'_\alpha(t) - u'_\beta(t)|}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} \to 0$$

ja

$$\sup_{0<t<b} \frac{t(b-t)|u''_\alpha(t) - u''_\beta(t)|}{1 + (b-t)|\ln t|^{m-1} + t|\ln(b-t)|^{m-1}} \to 0.$$

Viimasest kahest seosest saame iga fikseeritud $\varepsilon > 0$ puhul

$$\max_{\varepsilon \le t \le b-\varepsilon} |u'_\alpha(t) - u'_\beta(t)| \to 0,$$

$$\max_{\varepsilon \le t \le b-\varepsilon} |u''_\alpha(t) - u''_\beta(t)| \to 0.$$

Kuna $\max_{0 \le t \le b} |u_\alpha(t) - u_\beta(t)| \to 0$, kui $\alpha, \beta \to \infty$, siis ruumi $C[0,b]$ täielikkuse tõttu (u_β) koondub selles ruumis mingiks pidevaks funktsiooniks u:

$$\max_{0 \le t \le b} |u_\beta(t) - u(t)| \to 0, \qquad \text{kui } \beta \to \infty.$$

Ruumi $C^2[\varepsilon, b-\varepsilon]$ täielikkuse tõttu sama jada koondub lõigul $[\varepsilon, b-\varepsilon]$ kaks korda pidevalt diferentseeruvaks funktsiooniks ja piirväärtuseks on sama funktsioon u:

$$\max_{\varepsilon \le t \le b-\varepsilon} |u'_\beta(t) - u'(t)| \to 0,$$

$$\max_{\varepsilon \le t \le b-\varepsilon} |u''_\beta(t) - u''(t)| \to 0.$$

Arvu $\varepsilon > 0$ suvalisuse tõttu on piirfunktsioon u kaks korda pidevalt diferentseeruv kogu vahemikus $(0,b)$. Ruumi $C(0,b)$ täielikkuse tõttu jadad

$$\frac{u'_\beta(t)}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m}$$

ja

$$\frac{t(b-t)u''_\beta(t)}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}$$

koonduvad ühtlaselt vahemikus $(0,b)$ vastavalt piirfunktsioonideks

$$\frac{u'(t)}{1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m}$$

ja

$$\frac{t(b-t)u''(t)}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}.$$

Nüüd näeme, et

$$\|u_\beta-u\|_{2,m}=\max_{0\le t\le b}|u_\beta(t)-u(t)|+\sup_{0<t<b}\frac{|u'_\beta(t)-u'(t)|}{1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m}+$$

$$+\sup_{0<t<b}\frac{t(b-t)|u''_\beta(t)-u''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}\to 0,$$

kui $\beta\to\infty$ ja $u\in C_m^2[0,b]$.

Niisiis, ruumi $C_m^2[0,b]$ suvaline Cauchy jada (u_β) osutus koonduvaks, kusjuures piirelement $u\in C_m^2[0,b]$. Sellega on ruumi $C_m^2[0,b]$ täielikkus tõestatud.

§ 1.4. Lahendi siledus

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b, \qquad (1.4.1)$$

mille kirjutame kujul

$$u = Tu + f,$$

kus tuum $K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s)$ ja vabaliige $f = f(t)$ rahuldavad paragrahvis 1.2 toodud eeldusi. Oletame, et võrrandi $(1.4.1)$ vastaval homogeensel võrrandil $u = Tu$ eksisteerib ainult null-lahend. Arvestades operaatori T täielikku pidevust ruumis $C[0,b]$ (vt. järeldus 1.2.1), võime teoreemi 1.1.2 kohaselt väita, et vaadeldav võrrand (1.4.1) on iga $f \in C[0,b]$ korral üheselt lahenduv ning saadav lahend on pidev lõigul $[0,b]$. Osutub, et kui $f \in C_m^2[0,b]$, siis ka võrrandi $(1.4.1)$ lahend kuulub kaaluruumi $C_m^2[0,b]$. Sõnastame antud väite võrrandi $(1.4.1)$ lahendi sileduse kohta järgmise teoreemina.

Teoreem 1.4.1. *Olgu integraalvõrrandi* $(1.4.1)$ *korral täidetud järgmised tingimused:*

1) tuum $K(t,s)$ *on kujul* $K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s)$*, kus* $a(t,s)$ *on kaks korda pidevalt diferentseeruv ruudus* $[0,b]\times[0,b]$ *ning* $\theta(t)$ *on pidevalt diferentseeruv hulgal* $[-b,b]\setminus\{0\}$*, kusjuures iga* $t \in [-b,b]\setminus\{0\}$ *korral*

$$|\theta(t)| \le c\left(|\ln|t||^m + 1\right)$$

ja

$$|\theta'(t)| \le c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|} + 1\right),$$

kus $m \in \mathbb{N}$*;*

2) $f \in C_m^2[0,b]$*;*

3) võrrandi $(1.4.1)$ *vastaval homogeensel integraalvõrrandil*

$$u(t) - \int_0^b K(t,s)u(s)ds = 0$$

on pidevate funktsioonide klassis vaid triviaalne lahend $u = 0$*.*

Siis võrrand $(1.4.1)$ *on üheselt lahenduv ja tema lahend* $u \in C_m^2[0,b]$. *Sealjuures* $f \in C^2[0,b]$ *korral on võrrandi* $(1.4.1)$ *lahend* $u(t)$ *esitatav kujul*

$$u(t) = u(0)\int_0^t K(\tau,0)d\tau + u(b)\int_t^b K(\tau,b)d\tau + \omega(t), \qquad 0 \le t \le b, \tag{1.4.2}$$

kus $\omega = \omega(t)$ *on mingi lõigul* $[0,b]$ *üks kord pidevalt diferentseeruv ja vahemikus* $(0,b)$ *kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon ning*

$$|\omega''(t)| \le c_2\left(1 + |\ln t|^{2m} + |\ln(b-t)|^{2m}\right), \qquad 0 < t < b. \tag{1.4.3}$$

Analüüsime teoreemi 1.4.1 väidet võrrandi $(1.4.1)$ lahendi $u(t)$ esituse kohta kujul $(1.4.2)$. Võrduse $(1.4.2)$ diferentseerimisel saame

$$u'(t) = u(0)K(t,0) - u(b)K(t,b) + \omega'(t) =$$

$$= u(0)a(t,0)\theta(t) - u(b)a(t,b)\theta(t-b) + \omega'(t), \qquad 0 < t < b.$$

Diferentseerime saadud seost veel kord:

$$u''(t) = u(0)\frac{\partial K(t,0)}{\partial t} - u(b)\frac{\partial K(t,b)}{\partial t} + \omega''(t) =$$

$$= u(0)\left[\frac{\partial a(t,0)}{\partial t}\theta(t) + a(t,0)\theta'(t)\right] -$$

$$- u(b)\left[\frac{\partial a(t,b)}{\partial t}\theta(t-b) + a(t,b)\theta'(t-b)\right] + \omega''(t), \qquad 0 < t < b.$$

Arvestades funktsiooni $\omega' = \omega'(t)$ pidevust $t \in [0,b]$ korral, suuruse $\omega''(t)$ hinnangut $(1.4.3)$ ja tuuma $K(t,s)$ omadusi, näeme, et $u(0)a(0,0) \ne 0$ ja $u(b)a(b,b) \ne 0$ puhul on $u'(t)$ iseärasused $t \to 0$ ja $t \to b$ korral samasugused nagu $\theta(t)$ iseärasus $t \to 0$ korral, $u''(t)$ iseärasused aga samasugused nagu $\theta'(t)$ iseärasus $t \to 0$ korral. Oluline on, et $u'(t)$ ja $u''(t)$ iseärasused tekivad ka siis, kui $f'(t)$ ja $f''(t)$ on iseärasustest vabad. Märgime, et $m = 2$ korral saame teoreemist 1.1.4 töö [4] põhitulemuse.

T e o r e e m i 1.4.1 t õ e s t u s. Jaotame teoreemi tõestuse neljaks osaks:

1) paragrahvis 1.5 selgitame, kuidas diferentseerida funktsioone kujul

$$v(t) = \int_\alpha^\beta K(t,s)u(s)ds, \qquad t \in [\alpha,\beta] \subseteq [0,b],$$

kus $u(t)$ on mingi pidevalt diferentseeruv funktsioon lõigul $[\alpha,\beta]$ ja tuum $K(t,s)$ rahuldab teoreemi 1.4.1 eeldusi;

2) paragrahvis 1.6 näitame, et $u \in C_m^2[0,b]$ korral ka $Tu \in C_m^2[0,b]$;

3) paragrahvis 1.7 veendume, et integraaloperaator $T : C_m^2[0,b] \to C_m^2[0,b]$ on täielikult pidev. Kui see omadus on kindlaks tehtud, siis järeldub võrrandi $(1.4.1)$ lahendi kuulumine kaaluruumi $C_m^2[0,b]$ suvalise $f \in C_m^2[0,b]$ korral Fredholmi alternatiivist (vt. teoreem 1.1.2), sest võrrandi $(1.4.1)$ vastaval homogeensel võrrandil $u = Tu$ on teoreemi 1.4.1 eelduse kohaselt ainult null-lahend;

4) paragrahvis 1.8 näitame, et võrrandi $(1.4.1)$ lahendi $u(t)$ jaoks kehtib esitus kujul $(1.4.2)$.

§ 1.5. Diferentseerimise valemid

Antud paragrahvis esitame tulemused, kuidas diferentseerida funktsioone kujul

$$v(t) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)u(s)ds, \qquad t \in [\alpha, \beta] \subseteq [0,b],$$

kus tuum $K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s)$ rahuldab järgmisi tingimusi:

1) funktsioon $a = a(t,s)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv ruudus $[0,b] \times [0,b]$;

2) funktsioon $\theta = \theta(t)$ on pidevalt diferentseeruv hulgal $[-b,b] \setminus \{0\}$, kusjuures iga $t \in [-b,b] \setminus \{0\}$ korral

$$|\theta(t)| \le c\left(|\ln|t||^m + 1\right)$$

ja

$$|\theta'(t)| \le c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|} + 1\right),$$

kus $m \in \mathbb{N}$. Järgnevates lemmades 1.5.1 – 1.5.3 eeldame, et tuum $K(t,s)$ rahuldab selle paragrahvi alguses toodud tingimusi 1) ja 2). Analoogiliselt tööga [4] saab näidata, et kehtib järgmine tulemus.

Lemma 1.5.1. *Olgu funktsioon $u = u(t)$ pidevalt diferentseeruv lõigul $[\alpha, \beta]$, kus $0 \le \alpha < \beta \le b$. Siis funktsioon*

$$v(t) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)u(s)ds, \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

on pidevalt diferentseeruv vahemikus (α, β) ja

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)u(s)ds = \int_{\alpha}^{\beta} K_1(t,s)u(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)u'(s)ds +$$
$$+ u(\alpha)K(t,\alpha) - u(\beta)K(t,\beta), \qquad \alpha < t < \beta, \tag{1.5.1}$$

kus

$$K_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s)$$

on, samuti nagu $K(t,s)$, logaritmilise iseärasusega tuum (vt. (1.2.2′)).

Paneme tähele, et lemma 1.5.1 väited jäävad kehtima ka siis, kui $u(t)$ on pidev lõigul $[\alpha, \beta]$ ja pidevalt diferentseeruv vahemikus (α, β), kusjuures $u' \in L^p(\alpha, \beta)$,

$1 < p < \infty$. Viitamise hõlbustamiseks esitame vastava tulemuse omaette lemmana (võttes veel $\alpha = 0$ ja $\beta = b$).

Lemma 1.5.2. *Olgu funktsioon* $u = u(t)$ *pidev lõigul* $[0,b]$ *ja pidevalt diferentseeruv vahemikus* $(0,b)$, *kusjuures* $u' \in L^p(0,b)$, $p > 1$. *Siis funktsioon*

$$v(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b,$$

on pidev lõigul $[0,b]$, *pidevalt diferentseeruv vahemikus* $(0,b)$ *ja*

$$v'(t) = \int_0^b K_1(t,s)u(s)ds + \int_0^b K(t,s)u'(s)ds +$$

$$+ u(0)K(t,0) - u(b)K(t,b), \qquad 0 < t < b, \tag{1.5.2}$$

kus

$$K_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s),$$

on, samuti nagu $K(t,s)$, *logaritmilise iseärasusega tuum* (vt. (1.2.2′)).

Osutub, et lemmas 1.5.2 toodud valem (1.5.2) jääb kehtima ka funktsiooni

$$\int_0^b K_1(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b,$$

diferentseerimisel. Esitame vastava väite lemmana 1.5.3.

Lemma 1.5.3. *Olgu funktsioon* $u = u(t)$ *pidev lõigul* $[0,b]$ *ja pidevalt diferentseeruv vahemikus* $(0,b)$, *kusjuures* $u' \in L^p(0,b)$, $p > 1$. *Siis funktsioon*

$$\int_0^b K_1(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b,$$

on pidev lõigul $[0,b]$, *pidevalt diferentseeruv vahemikus* $(0,b)$ *ja*

$$\frac{d}{dt}\int_0^b K_1(t,s)u(s)ds = \int_0^b K_2(t,s)u(s)ds + \int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds +$$

$$+ u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b), \qquad 0 < t < b, \tag{1.5.3}$$

kus

$$K_1(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)K(t,s)$$

ja

$$K_2(t,s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) K_1(t,s),$$

on, samuti nagu $K(t,s)$, *logaritmilise iseärasusega tuumad* (vt. $(1.2.2'),(1.2.2'')$).

§ 1.6. Integraaloperaatori tegutsemine kaaluruumis $C_m^2[0,b]$

Selles paragrahvis näitame, et $u \in C_m^2[0,b]$ korral ka $Tu \in C_m^2[0,b]$ ehk integraaloperaator T tegutseb ruumis $C_m^2[0,b]$.

Sisalduvus $u \in C_m^2[0,b]$ tähendab, et $u(t)$ on pidev lõigul $[0,b]$ ja kaks korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,b)$. Lisaks kehtivad hinnangud:

$$|u'(t)| \le c\left(1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right), \qquad 0 < t < b \qquad (1.6.1)$$

ja

$$|u''(t)| \le c_1\left(1 + \frac{|\ln t|^{m-1}}{t} + \frac{|\ln(b-t)|^{m-1}}{b-t}\right), \qquad 0 < t < b, \qquad (1.6.1')$$

kus $m \in \mathbb{N}$.

Peame näitama, et samasugused omadused on ka funktsioonil

$$v(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds .$$

Funktsiooni $v = v(t)$ pidevus lõigul $[0,b]$ on teada paragrahvi 1.2.1 tulemusest. Võrratusest $(1.6.1)$ järeldub u' kuulumine ruumi $L^p(0,b)$ iga $p \in (1,\infty)$ korral.

Tõepoolest, kuna iga $0 < t < b$ ja mistahes fikseeritud $p > 1$ korral leidub

$$\int_0^b \left(1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right)^p dt < \infty ,$$

siis võrratusest $(1.6.1)$ järeldub, et

$$\int_0^b |u'(t)|^p dt < \infty .$$

Funktsioon

$$v(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds$$

on lemma 1.5.2 kohaselt pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,b)$ ning funktsiooni $v = v(t)$ tuletis $v'(t)$ arvutatav valemi $(1.5.2)$ alusel:

$$v'(t) = \int_0^b K_1(t,s)u(s)ds + \int_0^b K(t,s)u'(s)ds + u(0)K(t,0) - u(b)K(t,b) =$$

$$= (T_1u)(t) + (Tu')(t) + u(0)K(t,0) - u(b)K(t,b), \qquad 0 < t < b . \qquad (1.6.2)$$

Võrduse $(1.6.2)$ paremal poolel olevad operaatorid $T_1 : C[0,b] \to C[0,b]$ ja $T : L^p(0,b) \to C[0,b]$ $(p>1)$ on vastavalt järelduse 1.2.1 ning teoreemi 1.2.1 kohaselt täielikult pidevad. Võrduses $(1.6.2)$ esinev liige $u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)$ on pidev vahemikus $(0,b)$. Võrratuse $(1.2.3)$ tõttu

$$\begin{aligned}
|u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)| &= |u(0)a(t,0)\theta(t)-u(b)a(t,b)\theta(t-b)| \le \\
&\le |u(0)||a(t,0)||\theta(t)| + |u(b)||a(t,b)||\theta(t-b)| \le \\
&\le c\left(|\ln|t||^m + 1\right) + c_1\left(|\ln|t-b||^m + 1\right) \le \\
&\le c_2\left(1 + |\ln|t||^m + |\ln|t-b||^m\right).
\end{aligned}$$

Arvestades, et $t>0$ ja $t<b$ korral $|t-b| = b-t$, saame siit hinnangu

$$|u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)| \le c_2\left(1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right), \qquad 0<t<b.$$

Seega funktsioon

$$v(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds$$

on pidev lõigul $[0,b]$, pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,b)$ ja lisaks kehtib hinnang

$$|v'(t)| \le c\left(1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right), \qquad 0<t<b. \qquad (1.6.3)$$

Diferentseerides seost $(1.6.2)$ ning arvestades valemit $(1.5.3)$, saame võrduse

$$\begin{aligned}
v''(t) = \frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds + u(0)\frac{\partial K(t,0)}{\partial t} - u(b)\frac{\partial K(t,b)}{\partial t} + \\
+ \int_0^b K_2(t,s)u(s)ds + \int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds + \\
+ u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b), \qquad 0<t<b. \qquad (1.6.4)
\end{aligned}$$

Integraalsed liikmed $\int_0^b K_2(t,s)u(s)ds$ ja $\int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds$ võrduse $(1.6.4)$ paremal poolel on pidevad lõigul $[0,b]$. Liikmed

$$u(0)\frac{\partial K(t,0)}{\partial t} - u(b)\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}$$

ja

$$u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b)$$

aga pidevad vahemikus $(0,b)$.

Tähistame

$$v_1(t) = \int_0^b K(t,s)u'(s)ds\,, \qquad 0 < t < b$$

ning näitame antud funktsiooni diferentseeruvust. Kuna $u'(t)$ pole pidev lõigul $[0,b]$ ja $u'' \notin L^p(0,b)$ $(p > 1)$, siis ei ole diferentseerimise valem $(1.5.2)$ funktsioonile $v_1 = v_1(t)$ vahetult rakendatav. Paneme tähele, et $v_1(t)$ on vahemikus $(0,b)$ pidevalt diferentseeruv parajasti siis, kui see omadus on funktsioonil $\rho v_1 = \rho(t)v_1(t)$, kus

$$\rho(t) = t(b-t), \qquad 0 < t < b\,.$$

Sealjuures

$$\rho(t)v_1{}'(t) = (\rho(t)v_1(t))' - \rho'(t)v_1(t)\,.$$

Niisiis, peame näitama funktsiooni $\rho v_1 = \rho(t)v_1(t)$ diferentseeruvust. Kõigepealt esitame funktsiooni ρv_1 kujul

$$\rho(t)v_1(t) = \int_0^b [\rho(t) - \rho(s)]K(t,s)u'(s)ds + \int_0^b K(t,s)\rho(s)u'(s)ds\,, \qquad 0 < t < b\,. \qquad (1.6.5)$$

Osutub, et mõlemad liikmed viimase võrduse paremal poolel on pidevalt diferentseeruvad vahemikus $(0,b)$. Esimest liiget võrduse $(1.6.5)$ paremal poolel võib diferentseerida integraali märgi all, sest diferentseerimisel saadav tuum on vaid logaritmilise iseärasusega nagu tuum $K(t,s)$.

Tõepoolest,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{[\rho(t) - \rho(s)]K(t,s)\} = \rho'(t)K(t,s) + [\rho(t) - \rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\,,$$

kus $(t,s) \in (0,b)\times(0,b)$ ja $t \neq s$. Paneme tähele, et hinnangute $(1.2.3)$ ja $(1.2.3')$ tõttu

$$|\rho'(t)K(t,s)| = |\rho'(t)a(t,s)||\theta(t-s)| \le c\left(|\ln|t-s||^m + 1\right)$$

ning

$$\left|[\rho(t) - \rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right| = |\rho(t) - \rho(s)|\left|\frac{\partial a(t,s)}{\partial t}\theta(t-s) + a(t,s)\theta'(t-s)\right| \le$$

$$\le c_1|\rho(t) - \rho(s)|\left(\frac{|\ln|t-s||^{m-1}}{|t-s|} + 1\right) \le$$

$$\le c_2 \max_{0\le\tau\le b}\rho'(\tau)|\ln|t-s||^{m-1} \le c_3|\ln|t-s||^{m-1}\,,$$

kus $(t,s) \in (0,b)\times(0,b)$ ja $t \neq s$.

Seepärast,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{[\rho(t)-\rho(s)]K(t,s)\} \le c_4\left(\left|\ln|t-s|\right|^m+1\right),$$

kus $(t,s)\in(0,b)\times(0,b)$ ja $t\neq s$.

Võrduse $(1.6.5)$ paremal poolel olevas liikmes $\int_0^b K(t,s)\rho(s)u'(s)ds$ on funktsioon

$$u_1(s)=\rho(s)u'(s)$$

jätkatav pidevaks funktsiooniks lõigul $[0,b]$, defineerides $u_1(0)=0$ ja $u_1(b)=0$, sest

$$\lim_{s\to 0}\rho(s)\left|\ln s\right|^m=0$$

ning

$$\lim_{s\to b}\rho(s)\left|\ln(b-s)\right|^m=0.$$

Peale selle $u_1{}' \in L^p(0,b)$ iga $p>1$ korral.

Tõepoolest, kasutades hinnanguid $(1.6.1)$ ja $(1.6.1')$, saame

$$\left|u_1{}'(s)\right| \le \left|\rho'(s)u'(s)+\rho(s)u''(s)\right| \le$$

$$\le c\left(1+\left|\ln s\right|^m+\left|\ln(b-s)\right|^m\right)+c_1 s(b-s)\left(1+\frac{\left|\ln s\right|^{m-1}}{s}+\frac{\left|\ln(b-s)\right|^{m-1}}{b-s}\right)\le$$

$$\le c_2\left(1+\left|\ln s\right|^m+\left|\ln(b-s)\right|^m\right), \qquad 0<s<b.$$

Seega võrduse $(1.6.5)$ teist integraalset liiget $\int_0^b K(t,s)\rho(s)u'(s)ds$ võib diferentseerida valemi $(1.5.2)$ alusel.

Nüüd, diferentseerides seost $(1.6.5)$, saame

$$(\rho(t)v_1(t))' = \int_0^b \rho'(t)K(t,s)u'(s)ds+\int_0^b[\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u'(s)ds+$$

$$+\int_0^b K_1(t,s)\rho(s)u'(s)ds+\int_0^b K(t,s)(\rho(s)u'(s))'\,ds, \qquad 0<t<b.$$

Kuna

$$(\rho(t)v_1(t))' = \int_0^b \rho'(t)K(t,s)u'(s)ds+\rho(t)v_1{}'(t),$$

siis

$$\rho(t)v_1'(t) = \int_0^b [\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u'(s)ds + \int_0^b K_1(t,s)\rho(s)u'(s)ds +$$

$$+\int_0^b K(t,s)(\rho(s)u'(s))' ds, \qquad 0 \le t \le b. \qquad (1.6.6)$$

Saadud võrduses $(1.6.6)$ esinevad integraaloperaatorid tegutsevad iga $p > 1$ korral ruumist $L^p(0,b)$ ruumi $C[0,b]$. Seetõttu on funktsioon $\rho v_1' = \rho(t)v_1'(t)$ pidev lõigul $[0,b]$ ja järelikult ka tõkestatud:

$$\rho(t)\left|v_1'(t)\right| \le c, \qquad 0 \le t \le b.$$

Seega $v_1'(t)$ on pidev vahemikus $(0,b)$ ja

$$\left|v_1'(t)\right| \le \frac{c}{\rho(t)} = \frac{c}{t(b-t)} \le c_1\left(1 + \frac{|\ln t|^{m-1}}{t} + \frac{|\ln(b-t)|^{m-1}}{b-t}\right), \qquad 0 < t < b.$$

Sellega on põhjendatud funktsiooni $v'' = v''(t)$ pidevus vahemikus $(0,b)$. Samuti oleme näidanud võrratuse $(1.6.1')$ kehtivust $v''(t)$ avaldises $(1.6.4)$ oleva liikme

$$v_1'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds$$

tarvis.

Osutub, et analoogiline võrratus on $0 < t < b$ korral täidetud ka ülejäänud liikmete jaoks võrduse $(1.6.4)$ paremal poolel.

Tõepoolest, kasutades hinnanguid $(1.2.3)$ ja $(1.2.3')$, saame võrratused

$$\left|u(0)\frac{\partial K(t,0)}{\partial t} - u(b)\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}\right| \le |u(0)|\left|\frac{\partial a(t,0)}{\partial t}\theta(t) + a(t,0)\theta'(t)\right| +$$

$$+|u(b)|\left|\frac{\partial a(t,b)}{\partial t}\theta(t-b) + a(t,b)\theta'(t-b)\right| \le$$

$$\le c\left(|\ln|t||^m + 1\right) + c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|} + 1\right) +$$

$$+c_2\left(|\ln|t-b||^m + 1\right) + c_3\left(\frac{|\ln|t-b||^{m-1}}{|t-b|} + 1\right) \le$$

$$\le c_4\left(1+\frac{|\ln t|^{m-1}}{t}+\frac{|\ln(b-t)|^{m-1}}{b-t}\right)$$

ning

$$|u(0)K_1(t,0)-u(b)K_1(t,b)| \le |u(0)a_1(t,0)||\theta(t)|+|u(b)a_1(t,b)||\theta(t-b)| \le$$

$$\le c\left(|\ln|t||^m+1\right)+c_1\left(|\ln|t-b||^m+1\right)\le$$

$$\le c_2\left(1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m\right),$$

kus $0<t<b$.

Esitame ka hinnangu võrduses $(1.6.4)$ esinevale integraalsele liikmele $\int_0^b K_2(t,s)u(s)ds$. Võrratuse $(1.2.3)$ kohaselt

$$\left|\int_0^b K_2(t,s)u(s)ds\right| = \int_0^b |a_2(t,s)||\theta(t-s)||u(s)|ds \le$$

$$\le c\left\{\int_0^t\left[|\ln(t-s)|^m+1\right]ds+\int_t^b\left[|\ln(s-t)|^m+1\right]ds\right\}, \qquad 0<t<b.$$

Tehes muutujavahetuse $v=t-s$ ning kasutades integreerimisvalemit (vt. [6], lk. 34)

$$\int(\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}dx, \qquad n\ne -1, \tag{1.6.7}$$

saame

$$\int_0^t|\ln(t-s)|^m ds=\int_0^t|\ln v|^m dv=\begin{cases}(-1)^m\int_0^t(\ln v)^m dv, & kui \quad t<1,\\ \int_0^t(\ln v)^m dv, & kui \quad t\ge 1,\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}(-1)^m\left[t(\ln t)^m-mt(\ln t)^{m-1}+\ldots+(-1)^m m(m-1)\ldots 3\cdot 2\cdot t\right], & kui \quad t<1,\\ t(\ln t)^m-mt(\ln t)^{m-1}+\ldots+(-1)^m m(m-1)\ldots 3\cdot 2\cdot t, & kui \quad t\ge 1.\end{cases}$$

Seega

$$\int_0^t|\ln(t-s)|^m ds\le c_1, \qquad 0<t<b.$$

Analoogiliselt jõuame tulemuseni

$$\int_t^b|\ln(s-t)|^m ds\le c_2, \qquad 0<t<b$$

ning kokkuvõttes

$$\int_0^b K_2(t,s)u(s)ds \le c_3, \qquad 0 < t < b.$$

Hinnangutest $(1.2.3)$ ja $(1.6.1)$ lähtudes näeme, et

$$\left|\int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds\right| = \int_0^b |a_1(t,s)||\theta(t-s)||u'(s)|ds \le$$

$$\le c\int_0^b \left(|\ln|t-s||^m + 1\right)\left[1 + |\ln s|^m + |\ln(b-s)|^m\right]ds,$$

millest

$$\left|\int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds\right| \le c\int_0^b \left[|\ln|t-s||^m + |\ln|t-s||^m|\ln s|^m + |\ln|t-s||^m|\ln(b-s)|^m\right]ds +$$

$$+ c\int_0^b \left[1 + |\ln s|^m + |\ln(b-s)|^m\right]ds,$$

kus $0 < t < b$. Siit saame

$$\left|\int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds\right| \le c\Bigg\{\int_0^t |\ln(t-s)|^m ds + \int_t^b |\ln(s-t)|^m ds + \left|\ln\frac{t}{2}\right|^m \int_0^{\frac{t}{2}} |\ln s|^m ds +$$

$$+ \left|\ln\frac{t}{2}\right|^m \int_{\frac{t}{2}}^t |\ln(t-s)|^m ds + |\ln t|^m \int_t^b |\ln(s-t)|^m ds +$$

$$+ \left|\ln\frac{t}{2}\right|^m \int_0^{\frac{t}{2}} |\ln(b-s)|^m ds + |\ln(b-t)|^m \int_{\frac{t}{2}}^t |\ln(t-s)|^m ds +$$

$$+ \left|\ln\left(\frac{b-t}{2}\right)\right|^m \int_t^{\frac{t+b}{2}} |\ln(s-t)|^m ds + \left|\ln\left(\frac{b-t}{2}\right)\right|^m \int_{\frac{t+b}{2}}^b |\ln(b-s)|^m ds\Bigg\} +$$

$$+ c\int_0^b \left[1 + |\ln s|^m + |\ln(b-s)|^m\right]ds \le$$

$$\le c_1\left[1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right], \qquad 0 < t < b.$$

Niisiis

$$|v''(t)| \le c\left(1 + \frac{|\ln t|^{m-1}}{t} + \frac{|\ln(b-t)|^{m-1}}{b-t}\right), \quad 0 < t < b. \qquad (1.6.8)$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $v = Tu \in C[0,b] \cap C^2(0,b)$ ja v' ning v'' jaoks kehtivad vastavalt hinnangud $(1.6.3)$ ja $(1.6.8)$, s.t. $v \in C_m^2[0,b]$.

§ 1.7. Integraaloperaatori täielik pidevus kaaluruumis $C_m^2[0,b]$

Veendume, et integraaloperaator T on täielikult pidev ruumist $C_m^2[0,b]$ ruumi $C_m^2[0,b]$, $m\in\mathbb{N}$.

Olgu antud suvaline tõkestatud jada u_n ruumis $C_m^2[0,b]$:

$$\|u_n\|_{2,m} \le c, \qquad n=1,2,3,\ldots. \tag{1.7.1}$$

Tõestame, et jada Tu_n on suhteliselt kompaktne ruumis $C_m^2[0,b]$.

Tähistame

$$v_n = Tu_n, \qquad n=1,2,3,\ldots. \tag{1.7.2}$$

Kaaluruum $C_m^2[0,b]$ on teoreemi 1.3.1 kohaselt Banachi ruum. Näitame, et (v_n) on Cauchy jada ruumis $C_m^2[0,b]$. Ruumi $C_m^2[0,b]$ normi $\|u_n\|_{2,m}$ definitsioonist (vt. § 1.3) ja võrratusest $(1.7.1)$ saame

$$\|u_n\|_{2,m} = \max_{0\le t\le b}|u_n(t)| + \sup_{0<t<b}\frac{|u_n'(t)|}{1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m} +$$

$$+\sup_{0<t<b}\frac{t(b-t)|u_n''(t)|}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}} \le c<\infty, \tag{1.7.3}$$

millest

$$\max_{0\le t\le b}|u_n(t)| \le c, \qquad n=1,2,3\ldots. \tag{1.7.4}$$

Kuna iga $t\in(0,b)$ korral

$$|u_n'(t)| \le c\left(1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m\right),$$

siis $(u_n')\in L^p(0,b)$ mistahes $p>1$ puhul ja

$$\|u_n'\|_{L^p} \le c_1, \qquad n=1,2,3,\ldots. \tag{1.7.5}$$

Olgu

$$\rho(t)=t(b-t), \qquad 0<t<b.$$

Näitame, et $(\rho u_n')'\in L^p(0,b)$ mistahes $p>1$ korral ja

$$\left\|(\rho u_n')'\right\|_{L^p} \le c_2, \qquad n=1,2,3,\ldots. \tag{1.7.6}$$

Tõepoolest, võrratuse $(1.7.3)$ tõttu

$$|u_n''(t)| \le \frac{c\left[1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}\right]}{t(b-t)}, \qquad 0<t<b.$$

Nüüd aga

$$\left|(\rho u_n')'(t)\right| = |(b-2t)u_n'(t)+t(b-t)u_n''(t)| \le$$

$$\le c|b-2t|\left[1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m\right]+c\left[1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}\right]$$

iga $t\in(0,b)$ korral. Järelikult

$$\int_0^b \left|(\rho u_n')'(t)\right|^p dt \le c_3 < \infty$$

mistahes $p>1$ korral.

Järelduse 1.2.1 kohaselt on võrdusega $(1.7.2)$ defineeritud integraaloperaator T täielikult pidev ruumist $C[0,b]$ ruumi $C[0,b]$. Seetõttu (v_n) osajada koondub piirprotsessi $n\to\infty$ korral ühtlaselt lõigul $[0,b]$:

$\exists N_1 \subseteq \mathbb{N}$ ja $\varphi\in C[0,b]$ nii, et

$$\max|v_n(t)-\varphi(t)|\to 0,$$

kui $n\to\infty$, $n\in N_1$.

Kuna $(u_n')\in L^P(0,b)$ iga $p>1$ korral, siis lemma 1.5.2 põhjal saame, et $v_n(t)=Tu_n(t)$ on pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,b)$ ning tuletis arvutatav valemi $(1.5.2)$ alusel:

$$v_n'(t)=\int_0^b K_1(t,s)u_n(s)ds+\int_0^b K(t,s)u_n'(s)ds + u_n(0)K(t,0)-u_n(b)K(t,b) =$$

$$=(T_1u_n)(t)+(Tu_n')(t)+u_n(0)K(t,0)-u_n(b)K(t,b), \qquad n=1,2,3,\ldots. \qquad (1.7.7)$$

Võrduse $(1.7.7)$ paremal poolel olevad operaatorid $T_1: C[0,b]\to C[0,b]$ ja $T: L^p(0,b)\to C[0,b]$, kus $p>1$, on järelduse 1.2.1 ning teoreemi 1.2.1 kohaselt täielikult pidevad. Seega saab võrratuste $(1.7.4)$ ja $(1.7.5)$ tõttu vastavalt jadadest $\int_0^b K_1(t,s)u_n(s)ds$ ning $\int_0^b K(t,s)u_n'(s)ds$ välja eraldada lõigul $[0,b]$ ühtlaselt koonduvad osajadad:

$\exists N_2 \subseteq N_1$ nii, et

$$\left\{ \int_0^b K_1(t,s)u_n(s)ds \right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n \to \infty$, $n \in N_2$;

$\exists N_3 \subseteq N_2$ nii, et

$$\left\{ \int_0^b K(t,s)u_n'(s)ds \right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n \to \infty$, $n \in N_3$.

Nüüd, kui $n \in N_3$, siis piirprotsessi $n \to \infty$ korral jada

$$\frac{(T_1u_n)(t) + (Tu_n')(t)}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$.

Paneme tähele, et jada

$$\frac{u_n(0)K(t,0) - u_n(b)K(t,b)}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m}$$

koondub vahemikus $(0,b)$, kui koonduvad arvjadad $u_n(0)$ ja $u_n(b)$. Viimane on samuti saavutatav sobiva osajada võtmisega, sest vastavalt võrratusele $(1.7.4)$ on $|u_n(0)| \le c$ ja $|u_n(b)| \le c$. Niisiis,

$\exists N_4 \subseteq N_3$ nii, et $(u_n(0))$, $n \in N_4$, koondub, kui $n \to \infty$ ja siis ka

$$\left\{ \frac{u_n(0)K(t,0)}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} \right\}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$, kui $n \to \infty$, $n \in N_4$;

$\exists N_5 \subseteq N_4$ nii, et $(u_n(b))$, $n \in N_5$, koondub, kui $n \to \infty$ ja siis ka

$$\left\{ \frac{u_n(b)K(t,b)}{1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m} \right\}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$, kui $n \to \infty$, $n \in N_5$.

Kui nüüd võtta $n \in N_5$, kus

$$N_5 \subseteq N_4 \subseteq N_3 \subseteq N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N},$$

siis piirprotsessi $n \to \infty$ korral

$$\left\{\frac{v_n'(t)}{1+|\ln t|^m+|\ln(b-t)|^m}\right\}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$.

Arvestades valemit $(1.5.3)$, saame seose $(1.7.7)$ diferentseerimisel avaldise

$$v_n''(t)=\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u_n'(s)ds+\int_0^b K_2(t,s)u_n(s)ds+\int_0^b K_1(t,s)u_n'(s)ds+$$

$$+u_n(0)\left[K_1(t,0)+\frac{\partial K(t,0)}{\partial t}\right]-u_n(b)\left[K_1(t,b)+\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u_n'(s)ds+(T_2u_n)(t)+(T_1u_n')(t)+$$

$$+u_n(0)\left[K_1(t,0)+\frac{\partial K(t,0)}{\partial t}\right]-u_n(b)\left[K_1(t,b)+\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}\right],\quad n=1,2,3,\ldots. \qquad (1.7.8)$$

Võrduse $(1.7.8)$ paremal poolel olevad operaatorid $T_2 : C[0,b]\to C[0,b]$ ja $T_1 : L^p(0,b)\to C[0,b]$ $(p>1)$ on täielikult pidevad. Seega saab võrratuste $(1.7.4)$ ja $(1.7.5)$ tõttu jadadest $\int_0^b K_2(t,s)u_n(s)ds$ ning $\int_0^b K_1(t,s)u_n'(s)ds$ välja eraldada lõigul $[0,b]$ ühtlaselt koonduvad osajadad:

$\exists N_6 \subseteq N_5$ nii, et

$$\left\{\int_0^b K_2(t,s)u_n(s)ds\right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n\to\infty$, $n\in N_6$;

$\exists N_7 \subseteq N_6$ nii, et

$$\left\{\int_0^b K_1(t,s)u_n'(s)ds\right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n\to\infty$, $n\in N_7$.

Seega, kui $n\in N_7$, siis piirprotsessi $n\to\infty$ korral jada

$$\frac{t(b-t)[(T_2u_n)(t)+(T_1u_n')(t)]}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$.

Paneme tähele et, jada

$$\frac{t(b-t)\left\{u_n(0)\left[K_1(t,0)+\frac{\partial K(t,0)}{\partial t}\right]-u_n(b)\left[K_1(t,b)+\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}\right]\right\}}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}$$

koondub vahemikus $(0,b)$, kui koonduvad arvjadad $u_n(0)$ ja $u_n(b)$. Võrratuse $(1.7.4)$ tõttu $|u_n(0)|\le c$ ja $|u_n(b)|\le c$. Seepärast,

$\exists N_8\subseteq N_7$ nii, et $(u_n(0))$, $n\in N_8$, koondub, kui $n\to\infty$ ja siis ka

$$\left\{\frac{t(b-t)u_n(0)\left[K_1(t,0)+\frac{\partial K(t,0)}{\partial t}\right]}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}\right\}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$, kui $n\to\infty$, $n\in N_8$;

$\exists N_9\subseteq N_8$ nii, et $(u_n(b))$, $n\in N_9$, koondub, kui $n\to\infty$ ja siis ka

$$\left\{\frac{t(b-t)u_n(b)\left[K_1(t,b)+\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}\right]}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}\right\}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$, kui $n\to\infty$, $n\in N_9$.

Seega, kui $n\in N_9$, siis piirprotsessi $n\to\infty$ korral jada

$$\frac{t(b-t)\left\{u_n(0)\left[K_1(t,0)+\frac{\partial K(t,0)}{\partial t}\right]-u_n(b)\left[K_1(t,b)+\frac{\partial K(t,b)}{\partial t}\right]\right\}}{1+(b-t)|\ln t|^{m-1}+t|\ln(b-t)|^{m-1}}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$.

Tähistame

$$\rho(t)\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u_n'(s)ds=\int_0^b[\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u_n'(s)ds+\int_0^b K_1(t,s)\rho(s)u_n'(s)ds+$$

$$+\int_0^b K(t,s)[\rho(s)u_n'(s)]'\,ds=$$

$$=\int_0^b[\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u_n'(s)ds+(T_1\rho u_n')(t)+\left[T(\rho u_n')'\right](t),\qquad n=1,2,3,\ldots,\qquad(1.7.9)$$

kus

$$\rho(t)=t(b-t),\qquad 0<t<b.$$

Võrduse $(1.7.9)$ paremal poolel olevad integraaloperaatorid tegutsevad ruumist $L^p(0,b)$ ruumi $C[0,b]$ $(p>1)$ ja on teoreemi 1.2.1. kohaselt täielikult pidevad. Seega saab võrratuste $(1.7.5)$ ja $(1.7.6)$ tõttu jadadest $\int_0^b [\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u_n'(s)ds$, $\int_0^b K_1(t,s)\rho(s)u_n'(s)ds$ ja $\int_0^b K(t,s)[\rho(s)u_n'(s)]' ds$ välja eraldada lõigul $[0,b]$ ühtlaselt koonduvad osajadad:

$\exists N_{10} \subseteq N_9$ nii, et

$$\left\{\int_0^b [\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u_n'(s)ds\right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n\to\infty$, $n\in N_{10}$;

$\exists N_{11} \subseteq N_{10}$ nii, et

$$\left\{\int_0^b K_1(t,s)\rho(s)u_n'(s)ds\right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n\to\infty$, $n\in N_{11}$;

$\exists N_{12} \subseteq N_{11}$ nii, et

$$\left\{\int_0^b K(t,s)[\rho(s)u_n'(s)]' ds\right\}$$

koondub ühtlaselt lõigul $[0,b]$, kui $n\to\infty$, $n\in N_{12}$.

Seega, kui $n\in N_{12}$, siis piirprotsessi $n\to\infty$ korral jada

$$\frac{\left\{\int_0^b [\rho(t)-\rho(s)]\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u_n'(s)ds+(T_1\rho u_n')(t)+\left[T(\rho u_n')'\right](t)\right\}}{1+(b-t)|\ln t|+t|\ln(b-t)|}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$.

Kui nüüd võtta $n\in N_{12}$, kus

$$N_{12}\subseteq N_{11}\subseteq N_{10}\subseteq N_9\subseteq N_8\subseteq N_7\subseteq N_6\subseteq N_5\subseteq N_4\subseteq N_3\subseteq N_2\subseteq N_1\subseteq \mathbb{N},$$

siis piirprotsessi $n\to\infty$ korral

$$\left\{\frac{t(b-t)v_n''(t)}{1+(b-t)|\ln t|+t|\ln(b-t)|}\right\}$$

koondub ühtlaselt vahemikus $(0,b)$.

Nii oleme näidanud, et (v_n), $n \in N_{12}$, on Cauchy jada ruumis $C_m^2[0,b]$. Sellega on ka tõestatud integraaloperaatori T täielik pidevus kaaluruumis $C_m^2[0,b]$.

§ 1.8. Lahendi asümptootiline esitus

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(t)=\int_0^b K(t,s)u(s)ds+f(t),\qquad 0\le t\le b, \tag{1.8.1}$$

mille kirjutame kujul

$$u=Tu+f,$$

kus tuum $K(t,s)=a(t,s)\theta(t-s)$ ja vabaliige $f=f(t)$ rahuldavad teoreemi 1.4.1 eeldusi. Paragrahvis 1.7 näitasime, et operaator T on täielikult pidev ruumis $C_m^2[0,b]$. Sellega oleme tõestanud teoreemi 1.4.1 esimese väite: kui $f\in C_m^2[0,b]$, siis integraalvõrrandi $(1.8.1)$ lahend $u=(I-T)^{-1}f$ kuulub ruumi $C_m^2[0,b]$. Tõestame nüüd teoreemi 1.4.1 teise väite, mis ütleb, et $f\in C^2[0,b]$ korral on integraalvõrrandi $(1.8.1)$ lahend esitatav kujul

$$u(t)=u(0)\int_0^t K(\tau,0)d\tau+u(b)\int_t^b K(\tau,b)d\tau+\omega(t),\qquad 0\le t\le b, \tag{1.8.2}$$

kus $\omega=\omega(t)$ on mingi lõigul $[0,b]$ üks kord pidevalt diferentseeruv ja vahemikus $(0,b)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon ning

$$|\omega''(t)|\le c\left(1+|\ln t|^{2m}+|\ln(b-t)|^{2m}\right),\qquad 0<t<b. \tag{1.8.3}$$

Niisiis, olgu $f\in C^2[0,b]$. Seost $(1.8.2)$ võib käsitleda kui funktsiooni $\omega=\omega(t)$ definitsiooni. Võrduse $(1.8.2)$ diferentseerimisel saame

$$u'(t)=u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)+\omega'(t).$$

Teiselt poolt, võrduse $u=Tu+f$ diferentseerimisel saame valemi $(1.5.2)$ kohaselt

$$u'(t)=u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)+\int_0^b K_1(t,s)u(s)ds+\int_0^b K(t,s)u'(s)ds+f'(t).$$

Seega

$$u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)+\omega'(t)=u(0)K(t,0)-u(b)K(t,b)+$$
$$+\int_0^b K_1(t,s)u(s)ds+\int_0^b K(t,s)u'(s)ds+f'(t),$$

millest

$$\omega'(t) = \int_0^b K_1(t,s)u(s)ds + \int_0^b K(t,s)u'(s)ds + f'(t). \qquad (1.8.4)$$

Saadud võrduse $(1.8.4)$ paremal poolel olevate integraalsete liikmete pidevus lõigul $[0,b]$ on teada paragrahvist 1.2. Funktsioon $f' = f'(t)$ on pidev lõigul $[0,b]$ eelduse $f \in C^2[0,b]$ tõttu. Siit näeme, et $\omega'(t)$ on tõepoolest pidev lõigul $[0,b]$.

Diferentseerides seost $(1.8.4)$, saame valemi $(1.5.3)$ põhjal

$$\omega''(t) = \frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds + \int_0^b K_2(t,s)u(s)ds + \int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds +$$

$$+ u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b) + f''(t), \qquad 0 < t < b. \qquad (1.8.5)$$

Saadud võrduse $(1.8.5)$ integraalsed liikmed $\int_0^b K_2(t,s)u(s)ds$ ja $\int_0^b K_1(t,s)u'(s)ds$ on lõigul $[0,b]$ pidevad. Funktsiooni $f'' = f''(t)$ pidevus vahemikus $(0,b)$ on täidetud eelduse $f \in C^2[0,b]$ tõttu. Võrduse $(1.8.5)$ paremal poolel olev liige $u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b)$ on pidev vahemikus $(0,b)$. Funktsiooni $\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds$ pidevust vahemikus $(0,b)$ oleme näidanud paragrahvis 1.6. Seega $\omega''(t)$ on tõepoolest pidev vahemikus $(0,b)$.

Iseärasustega liikmeteks avaldises $(1.8.5)$ on $u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b)$ ja $\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds$. Kasutades hinnangut $(1.2.3)$, saame võrratused

$$|u(0)K_1(t,0) - u(b)K_1(t,b)| \le c\left(|\ln|t||^m + 1\right) + c_1\left(|\ln|t-b||^m + 1\right) \le$$

$$\le c_2\left(1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right), \qquad 0 < t < b.$$

Funktsiooni $\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds$ hinnang hetkel puudub. Alljärgnevas näitame, et

$$\left|\frac{d}{dt}\int_0^b K(t,s)u'(s)ds\right| \le c\left(1 + |\ln t|^{2m} + |\ln(b-t)|^{2m}\right), \qquad 0 < t < b, \qquad (1.8.6)$$

millega saame ka võrratuse $(1.8.3)$.

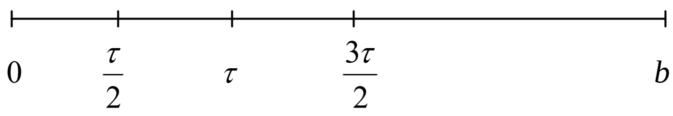
Fikseerime suvalise $\tau \in (0,b)$ rajapunktide 0 või b läheduses. Konkreetsuse mõttes olgu τ rajapunkti 0 läheduses. Esitame funktsiooni

$$v_1(t) = \int_0^b K(t,s)u'(s)ds$$

kolme integraali summana:

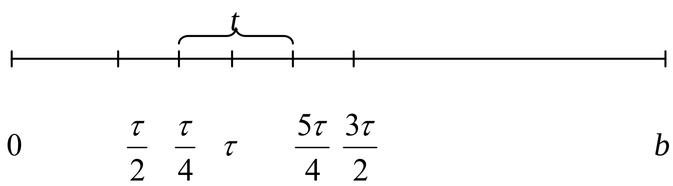
$$v_1(t) = \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} + \int_{\frac{3\tau}{2}}^{b} \right) K(t,s)u'(s)ds, \qquad 0 < t < b. \qquad (1.8.6')$$

Öeldut illustreerib joonis 1.8.1.



Joonis 1.8.1

Olgu t selline, et $|t-\tau| \leq \frac{\tau}{4}$ (vt. joonis 1.8.2).



Joonis 1.8.2

Siis võrduses $(1.8.6')$ esinevates integraalides $\int_0^{\frac{\tau}{2}} K(t,s)u'(s)ds$ ja $\int_{\frac{3\tau}{2}}^{b} K(t,s)u'(s)ds$ on

$|s-t| \geq \frac{\tau}{4}$. Seega vaadeldavaid integraale võib diferentseerida integraali märgi all.

Funktsioonid $u' = u'(t)$ ja $u'' = u''(t)$ on lõigul $\left[\frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{2}\right]$ pidevad. Seetõttu teist integraali

$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} K(t,s)u'(s)ds$ avaldises $(1.8.6')$ võib diferentseerida lemma 1.5.1. alusel. Tulemuseks

saame võrduse

$$v_1'(t) = \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} + \int_{\frac{3\tau}{2}}^{b} \right) \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u'(s)ds + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} K_1(t,s)u'(s)ds + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} K(t,s)u''(s)ds +$$

$$+u'\left(\frac{\tau}{2}\right)K\left(t,\frac{\tau}{2}\right)-u'\left(\frac{3\tau}{2}\right)K\left(t,\frac{3\tau}{2}\right).$$

Võttes $t=\tau$, saame nullpunktile lähedaste t korral

$$v_1'(t)=\left(\int_0^{\frac{t}{2}}+\int_{\frac{3t}{2}}^{b}\right)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u'(s)ds+\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}}K_1(t,s)u'(s)ds+\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}}K(t,s)u''(s)ds+$$

$$+u'\left(\frac{t}{2}\right)K\left(t,\frac{t}{2}\right)-u'\left(\frac{3t}{2}\right)K\left(t,\frac{3t}{2}\right). \qquad (1.8.7)$$

Hindame võrduse $(1.8.7)$ paremal poolel olevaid liikmeid. Kõigepealt meenutame, et kuna $u\in C_m^2[0,b]$, siis kehtivad võrratused

$$|u'(s)|\le c\left(1+|\ln s|^m+|\ln(b-s)|^m\right), \qquad 0<s<b$$

ja

$$|u''(s)|\le c_1\left(1+\frac{|\ln s|^{m-1}}{s}+\frac{|\ln(b-s)|^{m-1}}{b-s}\right), \qquad 0<s<b.$$

Punkti $s=0$ lähistel võime kasutada lihtsustatud hinnanguid

$$|u'(s)|\le c_2|\ln s|^m,$$

$$|u''(s)|\le c_3\frac{|\ln s|^{m-1}}{s}.$$

Hinnangute $(1.2.3)$ ja $(1.2.3')$ kohaselt kehtivad järgmised võrratused:

$$\left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|=\left|\frac{\partial a(t,s)}{\partial t}\theta(t-s)+a(t,s)\theta'(t-s)\right|\le c\left(\frac{|\ln|t-s||^{m-1}}{|t-s|}+1\right),$$

$$|K(t,s)|=|a(t,s)||\theta(t-s)|\le c_1\left(|\ln|t-s||^m+1\right)$$

ning

$$|K_1(t,s)|=|a_1(t,s)||\theta(t-s)|\le c_2\left(|\ln|t-s||^m+1\right).$$

Paneme ka tähele, et väikeste $|t-s|$ korral

$$\left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|\le c_3\left(\frac{|\ln|t-s||^{m-1}}{|t-s|}\right),$$

$$|K(t,s)|\le c_4|\ln|t-s||^m$$

ja

$$\left|K_1(t,s)\right| \le c_5 \left|\ln|t-s|\right|^m .$$

Valemi $(1.8.7)$ paremal poolel oleva kahe viimase liikme hinnanguks saame

$$\left|u'\left(\frac{t}{2}\right)K\left(t,\frac{t}{2}\right)-u'\left(\frac{3t}{2}\right)K\left(t,\frac{3t}{2}\right)\right| \le \left|u'\left(\frac{t}{2}\right)\right|\left|K\left(t,\frac{t}{2}\right)\right| + \left|u'\left(\frac{3t}{2}\right)\right|\left|K\left(t,\frac{3t}{2}\right)\right| \le$$

$$\le c\left|\ln\frac{t}{2}\right|^m \left|\ln\left|t-\frac{t}{2}\right|\right|^m + c_1\left|\ln\frac{3t}{2}\right|^m \left|\ln\left|t-\frac{3t}{2}\right|\right|^m \le$$

$$\le c_2\left|\ln\frac{t}{2}\right|^{2m} \le c_3\left|\ln t\right|^{2m}.$$

Valemis $(1.8.7)$ esinevate integraalsete liikmete $\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K_1(t,s)u'(s)ds$ ja $\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K(t,s)u''(s)ds$

hinnanguks on

$$\left|\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K_1(t,s)u'(s)ds + \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K(t,s)u''(s)ds\right| \le c\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left|\ln|t-s|\right|^m \left|\ln s\right|^m ds + c_1\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left|\ln|t-s|\right|^m \frac{\left|\ln s\right|^{m-1}}{s} ds,$$

millest integreerimisvalemit $(1.6.7)$ kasutades saame

$$\left|\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K_1(t,s)u'(s)ds + \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K(t,s)u''(s)ds\right| \le$$

$$\le c_2\left(\left|\ln\frac{t}{2}\right|^m + \frac{\left|\ln\frac{t}{2}\right|^{m-1}}{\frac{t}{2}}\right)\left[\int_{\frac{t}{2}}^{t} \left|\ln(t-s)\right|^m ds + \int_{t}^{\frac{3t}{2}} \left|\ln(s-t)\right|^m ds\right] \le$$

$$\le c_2\left(\left|\ln\frac{t}{2}\right|^m + \frac{\left|\ln\frac{t}{2}\right|^{m-1}}{\frac{t}{2}}\right) t\left(\left|\ln\frac{t}{2}\right|^m + \left|\ln\frac{t}{2}\right|^{m-1} + \ldots + \left|\ln\frac{t}{2}\right| + 1\right).$$

Siit tuleneb, et

$$\left|\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K_1(t,s)u'(s)ds + \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} K(t,s)u''(s)ds\right| \le$$

$$\le c_3\left(t\left|\ln t\right|^{2m} + t\left|\ln t\right|^{2m-1} + \ldots. + t\left|\ln t\right|^m + \left|\ln t\right|^{2m-1} + \left|\ln t\right|^{2m-2} + \ldots. + \left|\ln t\right|^{m-1} + 1\right) \le$$

$$\leq c_4 \left|\ln t\right|^{2m-1}.$$

Võrduse $(1.8.7)$ paremal poolel olevate integraalsete liikmete $\int\limits_0^{\frac{t}{2}} \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u'(s) ds$ ja $\int\limits_{\frac{3t}{2}}^{b} \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u'(s) ds$ hinnanguks saame

$$\left| \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u'(s) ds + \int\limits_{\frac{3t}{2}}^{b} \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u'(s) ds \right| \leq c \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \frac{\left|\ln(t-s)\right|^{m-1}}{(t-s)} \left|\ln s\right|^m ds +$$

$$+ c_1 \int\limits_{\frac{3t}{2}}^{b-\frac{t}{2}} \frac{\left|\ln(s-t)\right|^{m-1}}{s-t} \left(\left|\ln s\right|^m + \left|\ln(b-s)\right|^m + 1 \right) ds + c_2 \int\limits_{b-\frac{t}{2}}^{b} \frac{\left|\ln(s-t)\right|^{m-1}}{s-t} \left|\ln(b-s)\right|^m ds \leq$$

$$\leq c \frac{\left|\ln \frac{t}{2}\right|^{m-1}}{\frac{t}{2}} \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \left|\ln s\right|^m ds + c_1 \left(2\left|\ln \frac{t}{2}\right|^m + 1 \right) \left|\ln \frac{t}{2}\right|^{m-1} \int\limits_{\frac{3t}{2}}^{b-\frac{t}{2}} \frac{ds}{s-t} + c_2 \frac{\left|\ln \frac{t}{2}\right|^{m-1}}{\frac{t}{2}} \int\limits_{b-\frac{t}{2}}^{b} \left|\ln(b-s)\right|^m ds \leq$$

$$\leq c_3 \left(\left|\ln t\right|^{2m} + \left|\ln t\right|^{2m-1} + \ldots + \left|\ln t\right|^m + 1 \right) \leq c_4 \left|\ln t\right|^{2m}.$$

Kokkuvõttes võime öelda, et kui $t > 0$ on nullpunkti lähedal, siis kehtib hinnang

$$\left|v_1'(t)\right| \leq c \left|\ln t\right|^{2m}.$$

Analoogiliselt saab näidata ka hinnangu

$$\left|v_1'(t)\right| \leq c \left|\ln(b-t)\right|^{2m}$$

kehtivust, kui $t \in (0,b)$ on punkti b ligidal. Sellega on võrratus $(1.8.6)$ põhjendatud. Ühtlasi oleme lõpetanud teoreemi 1.4.1 tõestuse.

2. Kollokatsioonimeetod iseärase tuumaga integraalvõrrandi jaoks

§ 2.1. Meetodi kirjeldus

Vaatleme lineaarset integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b, \qquad (2.1.1)$$

kus $b > 0$ on mingi konstant. Kirjutame võrrandi $(2.1.1)$ kujul

$$u = Tu + f,$$

kus

$$(Tu)(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds, \qquad 0 \le t \le b. \qquad (2.1.2)$$

Eeldame, et vabaliige $f \in C[0,b]$ ja tuum $K(t,s)$ on pidev, kui $(t,s) \in [0,b]$, $t \ne s$.

Lihtsad, aga küllaltki efektiivsed meetodid võrrandi $(2.1.1)$ ligikaudseks lahendamiseks saadakse lineaarsplainide kasutamise teel. Selleks katame lõigu $[0,b]$ võrguga

$$\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Toome sisse väljavalitud võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid φ_j, $j = 0,1,\dots,n.$ Funktsioonid $\varphi_j = \varphi_j(t)$ defineerime järgmiselt:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \dfrac{t_1 - t}{t_1}, & kui\ [0,t_1], \\ 0, & kui\ [t_1,b], \end{cases}$$

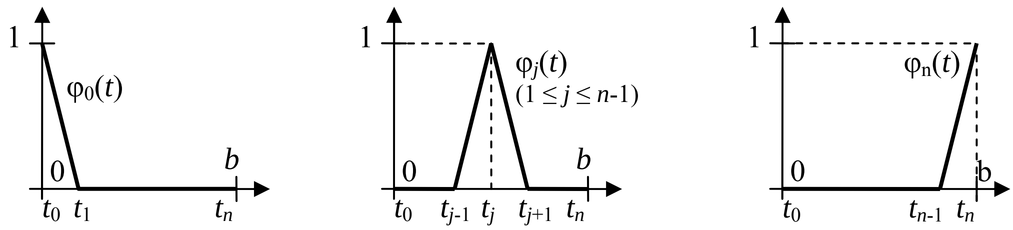
$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & kui\ t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \dfrac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j}, & kui\ t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0, & kui\ t \in [0, t_{j-1}] \vee [t_{j+1}, b], \end{cases} \qquad j = 1,2,\dots,n-1, \qquad (2.1.3)$$

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\dfrac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}, & kui\ t\in[t_{n-1},b]\ ,\\ 0, & kui\ t\in[0,t_{n-1}]\ .\end{cases}$$

Seostest $(2.1.3)$ näeme, et

$$\varphi_j(t_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & kui \quad i\neq j,\\ 1, & kui \quad i=j,\end{cases} \qquad i,j=0,1,\ldots,n \qquad (2.1.4)$$

ning funktsioonid $\varphi_j=\varphi_j(t)$ kuuluvad ruumi $C[0,b]$. Esitame ka funktsioonide $\varphi_j=\varphi_j(t)$ $(j=0,1,\ldots,n)$ graafikud (vt. joonis 2.1.1).



Joonis 2.1.1

Integraalvõrrandi $(2.1.1)$ lähislahendit otsime kujul

$$u_n(t)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(t), \qquad (2.1.5)$$

kus $c_0,c_1,\ldots,c_n$ on otsitavad kordajad. Kordajate $c_0,c_1,\ldots,c_n$ määramiseks asetame suuruse $(2.1.5)$ võrrandisse $(2.1.1)$ ning nõuame, et võrrand $(2.1.1)$ oleks rahuldatud sõlmedes $t_0,t_1,\ldots,t_n$:

$$u_n(t_i)=\int_0^b K(t_i,s)u_n(s)ds+f(t_i), \qquad i=0,1,\ldots,n\,. \qquad (2.1.6)$$

Arvestades seost $(2.1.4)$ näeme, et

$$u_n(t_i)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(t_i)=c_i, \qquad i=0,1,\ldots,n\,. \qquad (2.1.6')$$

Seetõttu võime tingimused $(2.1.6)$ kirjutada kujul

$$c_i=\sum_{j=0}^{n}k_{ij}c_j+f(t_i), \qquad i=0,1,\ldots,n\,, \qquad (2.1.7)$$

milles

$$k_{ij} = \int_0^b K(t_i, s)\varphi_j(s)ds, \qquad i, j = 0,1,\ldots,n. \qquad (2.1.8)$$

Näeme, et võrdused $(2.1.7)$ kujutavad endast lineaarset algebralist võrrandisüsteemi otsitavate $c_0, c_1, \ldots, c_n$ suhtes. Suuruste $(2.1.8)$ maatriksi väljaarvutamist hõlbustab asjaolu, et

$\varphi_0(s) = 0$, kui $s \geq t_1$;

$\varphi_j(s) = 0$, kui $s \leq t_{j-1}$ ja $s \geq t_{j+1}$, $\qquad j = 1,2,\ldots,n-1$;

$\varphi_n(s) = 0$, kui $s \leq t_{n-1}$.

Arvestades viimaseid tingimusi saame suuruste $(2.1.8)$ leidmiseks järgmised valemid:

$$k_{i0} = \int_0^{t_1} K(t_i, s)\frac{t_1 - s}{t_1}ds;$$

$$k_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_i, s)\frac{s - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_i, s)\frac{t_{j+1} - s}{t_{j+1} - t_j}ds, \qquad j = 1,2,\ldots,n-1;$$

$$k_{in} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} K(t_i, s)\frac{s - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}ds;$$

kus $i = 0,1,\ldots,n$.

Kollokatsioonimeetodi $\{(2.1.5),(2.1.6)\}$ abil on võrrandi $(2.1.1)$ lähislahend leitav, kui võrrandisüsteem $(2.1.7)$ osutub üheselt lahenduvaks. Meie edaspidise käsitluse eesmärk on uurida süsteemi $(2.1.7)$ lahenduvust ning kollokatsioonimeetodi koonduvuskiirust.

§ 2.2. Kollokatsioonimeetod kui Galjorkini meetod

Toome sisse operaatori P_n ($n \in \mathbb{N}$), mis suvalisele funktsioonile $u \in C[0,b]$ seab vastavusse tükiti lineaarse funktsiooni

$$(P_n u)(t) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t), \qquad 0 \le t \le b, \tag{2.2.1}$$

kus $\varphi_j(t)$ $(j = 0,1,\dots,n)$ on defineeritud seostega $(2.1.3)$. Ilmselt funktsioon $P_n u = (P_n u)(t)$ on pidev lõigul $[0,b]$. Osutub, et operaator $P_n \in L(C[0,b], C[0,b])$, s.t. P_n on lineaarne ja tõkestatud.

Tõepoolest, suvaliste funktsioonide $u, v \in C[0,b]$ ja parameetri $\lambda \in \mathbb{R}$ korral saame, et operaator P_n on aditiivne ja homogeenne:

$$(P_n(u+v))(t) = \sum_{j=0}^{n} \left(u(t_j) + v(t_j)\right)\varphi_j(t) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t) + \sum_{j=0}^{n} v(t_j)\varphi_j(t) =$$

$$= (P_n u)(t) + (P_n v)(t);$$

$$(P_n(\lambda u))(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda u(t_j)\varphi_j(t) = \lambda \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t) = \lambda (P_n u)(t).$$

Edasi, olgu $u \in C[0,b]$. Siis

$$\|P_n u\|_{C[0,b]} = \max_{0 \le t \le b} \left| \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t) \right| \le \max_{0 \le t \le b} \sum_{j=0}^{n} |u(t_j)| |\varphi_j(t)| \le$$

$$\le \|u\|_{C[0,b]} \max_{0 \le t \le b} \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(t)|.$$

Kuna

$$\max_{0 \le t \le b} \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(t)| = \max_{j=0,1,\dots,n-1} \max_{t_j \le t \le t_{j+1}} \varphi_j(t) = 1,$$

siis saame, et

$$\|P_n u\|_{C[0,b]} \le \|u\|_{C[0,b]}. \tag{2.2.2}$$

Seega $P_n : C[0,b] \to C[0,b]$ on tõkestatud.

Lähtudes seosest $(2.1.4)$ näeme, et mistahes funktsiooni $u \in C[0,b]$ korral

$$(P_n u)(t_i) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t_i) = u(t_i), \qquad i = 0,1,\dots,n$$

ning seepärast

$$(P_n(P_n u))(t) = \sum_{j=0}^{n} (P_n u)(t_i)\varphi_j(t) = \sum_{j=0}^{n} u(t_i)\varphi_j(t) = (P_n u)(t), \qquad 0 \le t \le b.$$

Seega $P_n^{\,2} = P_n$ ning definitsiooni 1.1.3 põhjal on operaator P_n projektor.

Edasi, võrratuse $(2.2.2)$ kohaselt

$$\|P_n\|_{L(C[0,b],C[0,b])} \le 1.$$

Teiselt poolt lause 1.1.1 järgi

$$\|P_n\|_{L(C[0,b],C[0,b])} \ge 1.$$

Kokkuvõttes saame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|P_n\|_{L(C[0,b],C[0,b])} = 1. \tag{2.2.3}$$

Osutub, et seosega $(2.2.1)$ defineeritud operaatorid P_n ($n \in \mathbb{N}$) koonduvad punktiviisi ühikoperaatoriks I . Sõnastame antud väite järgmise lemmana.

Lemma 2.2.1. *Olgu võrk Δ_n ($n \in \mathbb{N}$) selline, et*

$$h_n = \max_{j=0,1,\ldots,n-1} (t_{j+1} - t_j) \to 0, \qquad kui\ n \to \infty. \tag{2.2.4}$$

Siis seosega $(2.2.1)$ defineeritud operaatorid $P_n \in L(C[0,b],C[0,b])$ koonduvad punktiviisi ühikoperaatoriks $I \in L(C[0,b],C[0,b])$:

$$\|u - P_n u\|_{C[0,b]} \to 0, \qquad kui\ n \to \infty, \qquad \forall u \in C[0,b]. \tag{2.2.5}$$

Tõestus. Olgu $u \in C^2[0,b]$. Siis valemi $(1.1.3)$ kohaselt

$$\|u - P_n u\|_{C[0,b]} = \max_{j=0,1,\ldots,n-1} \max_{t_j \le t \le t_{j+1}} |u(t) - P_n u(t)| \le \frac{1}{2} \max_{0 \le t \le b} |u''(t)| \max_{j=0,1,\ldots,n-1} (t_{j+1} - t_j)^2.$$

Seega $u \in C^2[0,b]$ korral

$$\|u - P_n u\|_{C[0,b]} \le c h_n \to 0, \qquad \text{kui } n \to \infty.$$

Kuna $C^2[0,b] \subset C[0,b]$ on kõikjal tihe ja operaatorite P_n normid on ühtlaselt tõkestatud (vt. $(2.2.3)$), siis teoreemi 1.1.1 põhjal saame koondumise $(2.2.5)$. Sellega on lemma 2.2.1 tõestatud.

Paneme tähele, et $P_n u = 0$ parajasti siis, kui iga $i = 0,1,\ldots,n$ korral $u(t_i) = 0$. Seetõttu kollokatsioonitingimused $(2.1.6)$, mis võime kirjutada kujul

$$u_n(t_i) - \int_0^b K(t_i, s) u_n(s)\,ds - f(t_i) = 0, \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

on samaväärsed nõudega

$$P_n\left(u_n - Tu_n - f\right) = 0\,, \qquad (2.2.6)$$

kus operaator T on defineeritud seosega $(2.1.2)$. Operaatori P_n lineaarsuse tõttu võime võrduse $(2.2.6)$ esitada kujul

$$P_n u_n = P_n T u_n + P_n f\,. \qquad (2.2.7)$$

Lähtudes seostest $(2.2.1)$, $(2.1.6')$ ja $(2.1.5)$ saame

$$(P_n u_n)(t) = \sum_{j=0}^{n} u_n(t_j)\varphi_j(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(t) = u_n(t), \qquad 0 \le t \le b\,,$$

s.t. $P_n u_n = u_n$. Seepärast tingimused $(2.2.7)$ võtavad kuju

$$u_n = P_n T u_n + P_n f\,. \qquad (2.2.8)$$

Paneme ka tähele, et kui võrrand $(2.2.8)$ on lahenduv, siis tema lahendid on kujuga $(2.1.5)$.

§ 2.3. Tükiti lineaarse interpolandi veahinnangud iseärasustega funktsioonide korral

Kogu selle paragrahvi ulatuses eeldame, et $u \in C_m^2[0,b]$, s.t. $u = u(t)$ on lõigul $[0,b]$ pidev ja vahemikus $(0,b)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv ning lisaks kehtivad järgmised hinnangud:

$$|u'(t)| \le c\left(1 + |\ln t|^m + |\ln(b-t)|^m\right), \qquad 0 < t < b \qquad (2.3.1)$$

ja

$$|u''(t)| \le c_1\left(1 + \frac{|\ln t|^{m-1}}{t} + \frac{|\ln(b-t)|^{m-1}}{b-t}\right), \qquad 0 < t < b, \qquad (2.3.1')$$

kus $m \in \mathbb{N}$.

Katame lõigu $[0,b]$ võrguga

$$\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_n : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (2.3.2)$$

Eeldame, et

$$h_n = \max_{j=0,1,...,n-1}(t_{j+1} - t_j) \to 0, \qquad kui\ n \to \infty.$$

Olgu P_n ($n \in \mathbb{N}$) interpolatsiooniprojektor, mis funktsioonile $u \in C_m^2[0,b]$ seab vastavusse tükiti lineaarse interpolandi

$$(P_n u)(t) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t), \qquad 0 \le t \le b. \qquad (2.3.3)$$

Võrduses $(2.3.3)$ esinevad funktsioonid $\varphi_j = \varphi_j(t)$ $(j = 0,1,...,n)$ on defineeritud seostega $(2.1.3)$. Käesoleva paragrahvi eesmärgiks on hinnata interpolandi $(2.3.3)$ viga. Püstitatud küsimus taandub lineaarse interpolatsiooni vea hindamisele igal osalõigul $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0,1,...,n-1$.

2.3.1. <u>Veahinnang sisemistel osalõikudel</u>. Vaatleme siselõike $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 1,2,...,n-2$. Rakendame siin valemit $(1.1.2)$:

$$u(t) - (P_n u)(t) = \frac{1}{2}u''(\tau)(t - t_j)(t - t_{j+1}), \qquad t_j \le t \le t_{j+1}, \qquad (2.3.4)$$

kus $\tau \in (t_j, t_{j+1})$. Suurus $u''(\tau)$ on võrratuse $(2.3.1')$ kohaselt hinnatav järgmiselt:

$$|u''(\tau)| \le c_1\left(1+\frac{|\ln t_j|^{m-1}}{t_j}+\frac{|\ln(b-t_{j+1})|^{m-1}}{b-t_{j+1}}\right), \qquad t_j \le \tau \le t_{j+1}, \qquad j=1,2,\dots,n-2 .$$

Seega

$$|u(t)-(P_n u)(t)| \le c_2\left(1+\frac{|\ln t_j|^{m-1}}{t_j}+\frac{|\ln(b-t_{j+1})|^{m-1}}{b-t_{j+1}}\right)(t_{j+1}-t_j)^2, \quad t_j \le t \le t_{j+1}, \qquad (2.3.5)$$

kus $j=1,2,\dots,n-2$.

2.3.2. <u>Veahinnang esimesel ja viimasel osalõigul</u>. Osalõikudel $[0,t_1]$ ja $[t_{n-1},t_n]$ ei ole hinnang $(2.3.5)$ rakendatav. Esitame uue hinnangu osalõigul $[0,t_1]$. Eeldame, et $n\in\mathbb{N}$ on küllalt suur, s.t. leidub selline $n_0\in\mathbb{N}$, et $n\ge n_0$ korral $h_n<1$. Kirjutiste lühendamiseks tähistame ajutiselt $t_1=h$.

Niisiis, peame hindama lineaarse interpolandi $(P_n u)(t)$ viga lõigul $[0,h]$. Teisendame vea $u(t)-(P_n u)(t)$ avaldist:

$$u(t)-P_n u(t)=u(t)-u(0)\frac{h-t}{h}-u(h)\frac{t}{h}=$$

$$=\frac{h-t}{h}[u(t)-u(0)]+\frac{t}{h}[u(t)-u(h)]=\frac{h-t}{h}\int_0^t u'(s)ds-\frac{t}{h}\int_t^h u'(s)ds, \quad 0\le t\le h .$$

Kasutades ositi integreerimise valemit, saame

$$\frac{h-t}{h}\int_0^t u'(s)ds-\frac{t}{h}\int_t^h u'(s)ds=$$

$$=\frac{h-t}{h}\left[su'(s)\Big|_0^t-\int_0^t su''(s)ds\right]-\frac{t}{h}\left[(s-h)u'(s)\Big|_t^h-\int_t^h (s-h)u''(s)ds\right]=$$

$$=-\frac{h-t}{h}\int_0^t su''(s)ds-\frac{t}{h}\int_t^h (h-s)u''(s)ds, \qquad 0\le t\le h .$$

Seega

$$|u(t)-(P_n u)(t)| \le \frac{h-t}{h}\int_0^t s|u''(s)|ds+\frac{t}{h}\int_t^h (h-s)|u''(s)|ds, \qquad 0\le t\le h .$$

Võrratuse $(2.3.1')$ kohaselt võime suurust $u''(t)$ hinnata järgmiselt:

$$|u''(s)| \le c\frac{|\ln s|^{m-1}}{s}, \qquad 0<s\le h .$$

Seetõttu

$$|u(t)-(P_nu)(t)|\le c\left[\frac{h-t}{h}\int_0^t|\ln s|^{m-1}ds+t\int_t^h\frac{|\ln s|^{m-1}}{s}ds-\frac{t}{h}\int_t^h|\ln s|^{m-1}ds\right]\le$$

$$\le c\left[\frac{h-t}{h}\int_0^t|\ln s|^{m-1}ds+\int_t^h|\ln s|^{m-1}ds-\frac{t}{h}\int_t^h|\ln s|^{m-1}ds\right].$$

Kasutades integreerimisvalemit $(1.6.7)$ saame

$$|u(t)-(P_nu)(t)|\le c\Big\{2\Big[t|\ln t|^{m-1}+t(m-1)|\ln t|^{m-2}+\ldots+(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2|t|\Big]+$$

$$+\frac{2}{h}\Big[t^2|\ln t|^{m-1}+t^2(m-1)|\ln t|^{m-2}+\ldots+(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2|t|^2\Big]+$$

$$+h|\ln h|^{m-1}+h(m-1)|\ln h|^{m-2}+\ldots+(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2|h|+$$

$$+t|\ln h|^{m-1}+t(m-1)|\ln h|^{m-2}+\ldots+(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2|h|\Big\}\ .$$

Kokkuvõttes saame hinnangu

$$|u(t)-(P_nu)(t)|\le c_1|\ln h|^{m-1}h$$

ehk

$$|u(t)-(P_nu)(t)|\le c_1|\ln t_1|^{m-1}t_1,\qquad 0\le t\le t_1. \tag{2.3.6}$$

Osutub, et analoogiline hinnang kehtib ka viimasel osalõigul $[t_{n-1},t_n]$:

$$|u(t)-(P_nu)(t)|\le c_2|\ln(b-t_{n-1})|^{m-1}(b-t_{n-1}),\qquad t_{n-1}\le s\le t_n. \tag{2.3.6$'$}$$

Tõepoolest, hinnang $(2.3.6')$ järeldub võrratusest

$$|u''(s)|\le c\frac{|\ln(b-s)|^{m-1}}{b-s},\qquad t_{n-1}\le s\le b,$$

ja integreerimisvalemist $(1.6.7)$.

2.3.3. <u>Hinnangute analüüs ühtlase võrgu korral</u>. Analüüsime punktides 2.3.1 ja 2.3.2 saadud hinnanguid juhul, kui $u\in C_m^2[0,b]$ ning võrk $(2.3.2)$ on ühtlane, s.t. sõlmedega

$$t_j=jh,\qquad j=0,1,\ldots,n,\qquad n\in\mathbb{N},\qquad n\ge n_0$$

ja sammuga

$$h=\frac{b}{n}.$$

Osutub, et sel korral

$$\|u-P_n u\|_{C[0,b]} \le c|\ln h|^{m-1} h \tag{2.3.7}$$

ja

$$\|u-P_n u\|_{L(0,b)} \le c_1 |\ln h|^{m} h^2 . \tag{2.3.8}$$

Tõepoolest, olgu $u \in C_m^2[0,b]$. Siis

$$\|u-P_n u\|_{C[0,b]} = \max_{0\le t\le t_1} |u(t)-(P_n u)(t)| + \max_{j=1,2,\dots,n-2} \max_{t_j \le t\le t_{j+1}} |u(t)-(P_n u)(t)| + \max_{t_{n-1}\le t\le t_n} |u(t)-(P_n u)(t)| .$$

Lähtudes võrratustest $(2.3.5)$, $(2.3.6)$ ja $(2.3.6')$, näeme, et hinnang $(2.3.7)$ kehtib:

$$\|u-P_n u\|_{C[0,b]} \le c|\ln t_1|^{m-1} t_1 + \max_{j=1,2,\dots,n-2} c_1 \left(1+\frac{|\ln t_j|^{m-1}}{t_j} + \frac{|\ln(b-t_{j+1})|^{m-1}}{b-t_{j+1}}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 +$$

$$+ c_2 |\ln(b-t_{n-1})|^{m-1} (b-t_{n-1}) \le$$

$$\le c|\ln h|^{m-1} h + c_1\left(1+2\frac{|\ln h|^{m-1}}{h}\right)h^2 + c_2|\ln h|^{m-1} h \le c_3 |\ln h|^{m-1} h .$$

Tõestame nüüd võrratuse $(2.3.8)$. Olgu $u \in C_m^2[0,b]$. Siis saame:

$$\|u-P_n u\|_{L(0,b)} = \int_0^b |u(t)-(P_n u)(t)| dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |u(t)-(P_n u)(t)| dt \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1} h \max_{jh\le t\le (j+1)h} |u(t)-(P_n u)(t)| .$$

Hinnangute $(2.3.5)$, $(2.3.6)$ ja $(2.3.6')$ tõttu

$$\|u-P_n u\|_{L(0,b)} \le h\left\{c|\ln h|^{m-1} h + c_1 \sum_{j=1}^{n-2}\left[1+\frac{|\ln jh|^{m-1}}{jh} + \frac{|\ln(n-j-1)h|^{m-1}}{(n-j-1)h}\right]h^2 + c_2 h |\ln h|^{m-1}\right\}.$$

Paneme tähele, et

$$\sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{|\ln jh|^{m-1}}{j} + \frac{|\ln(n-j-1)h|^{m-1}}{n-j-1}\right) = 2\sum_{j=1}^{n-2} \frac{|\ln jh|^{m-1}}{j} \le c_3 |\ln h|^{m-1} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{j} .$$

Seetõttu

$$\|u-P_n u\|_{L(0,b)} \le h\left[c_4 |\ln h|^{m-1} h + c_1 (n-2) h^2 + c_5 h |\ln h|^{m-1} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{j}\right]. \tag{2.3.9}$$

Kuna (vt. [1], lk. 469)

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \ln n + A_n ,$$

kus

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0{,}57722\ldots,$$

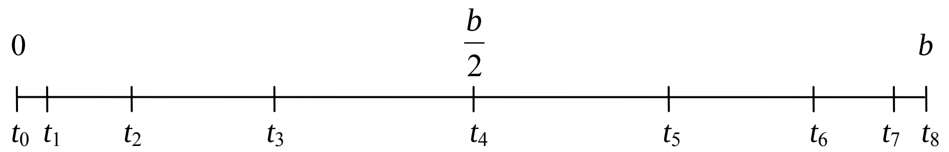
saamegi võrratusest $(2.3.9)$ hinnangu $(2.3.8)$.

Nii oleme näidanud, et integraalses normis on veahinnang „peaaegu" h^2-järku.

2.3.4. <u>Hinnangute analüüs mitteühtlase võrgu puhul</u>. Olgu $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$ ning $r \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$. Vaatleme mitteühtlast võrku $\Delta_n = \Delta_n^r$, mille sõlmed defineerime järgmiselt:

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{b}{2}\left(\frac{j}{p}\right)^r = 2^{r-1} b \left(\frac{j}{n}\right)^r, \qquad && j = 0,1,\ldots,\frac{n}{2}, \\ t_{\frac{n}{2}+j} &= b - t_{\frac{n}{2}-j}, && j = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Seega võrgu Δ_n^r esimesed $\frac{n}{2}+1$ sõlme paiknevad lõigul $\left[0,\frac{b}{2}\right]$, ülejäänud $\frac{n}{2}$ sõlme aga poollõigul $\left(\frac{b}{2},b\right]$. Viimased on saadud peegeldusteisendusega lõigu $[0,b]$ keskpunkti $\frac{b}{2}$ suhtes. Sõlmed $(2.3.10)$ paiknevad tihedamalt lõigu otspunktide lähistel, lõigu keskel aga hõredamalt. Joonisel 2.3.1 on kujutatud mitteühtlane võrk Δ_8^2.



Joonis 2.3.1

Osutub, et $u \in C_m^2[0,b]$ ja mitteühtlase võrgu Δ_n^r korral

$$\|u - P_n u\|_{C[0,b]} \leq c \begin{cases} \dfrac{|\ln n|^{m-1}}{n^r}, & 1 \leq r \leq 2\ , \\ \dfrac{1}{n^2}, & r > 2\ . \end{cases} \tag{2.3.11}$$

Tõepoolest, olgu $u \in C_m^2[0,b]$. Siis

$$\|u-P_nu\|_{C[0,b]} = \max_{0\le t\le t_1}|u(t)-(P_nu)(t)| + \max_{j=1,2,\ldots,n-2}\max_{t_j\le t\le t_{j+1}}|u(t)-(P_nu)(t)| + \max_{t_{n-1}\le t\le t_n}|u(t)-(P_nu)(t)|.$$

Võrratustest $(2.3.5)$, $(2.3.6)$ ja $(2.3.6')$ saame

$$\|u-P_nu\|_{C[0,b]} \le c|\ln t_1|^{m-1}t_1 + \max_{j=1,2,\ldots,n-2} c_1\left(1+\frac{|\ln t_j|^{m-1}}{t_j}+\frac{|\ln(b-t_{j+1})|^{m-1}}{b-t_{j+1}}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 +$$

$$+c_2|\ln(b-t_{n-1})|^{m-1}(b-t_{n-1}). \tag{2.3.12}$$

Vaatleme võrratuse $(2.3.12)$ liidetavaid eraldi. Seose $(2.3.10)$ kohaselt

$$|\ln t_1|^{m-1}t_1 = \left|\ln\frac{2^{r-1}b}{n^r}\right|^{m-1}\frac{2^{r-1}b}{n^r} = |\ln 2^{r-1}+\ln b - r\ln n|^{m-1}\frac{2^{r-1}b}{n^r} \le \frac{c|\ln n|^{m-1}}{n^r}.$$

Siit näeme, et kui hinnata

$$|\ln n|^{m-1} \le c_1 n^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0,$$

siis $r = 2+\varepsilon$ korral

$$|\ln t_1|^{m-1}t_1 \le \frac{c_5}{n^2}.$$

Seega

$$|\ln t_1|^{m-1}t_1 \le c_3\begin{cases}\dfrac{|\ln n|^{m-1}}{n^r}, & 1\le r\le 2,\\[2mm] \dfrac{1}{n^2}, & r>2.\end{cases} \tag{2.3.13}$$

Analoogiliselt saame, et

$$|\ln(b-t_{n-1})|^{m-1}(b-t_{n-1}) \le c_4\begin{cases}\dfrac{|\ln n|^{m-1}}{n^r}, & 1\le r\le 2,\\[2mm] \dfrac{1}{n^2}, & r>2.\end{cases} \tag{2.3.14}$$

Edasi vaatleme siselõike

$$[t_j, t_{j+1}] \subset \left(0,\frac{b}{2}\right], \qquad j=1,2,\ldots,\frac{n}{2}. \tag{2.3.15}$$

Kõige pealt paneme tähele, et

$$\frac{1}{t_j} \le \frac{1}{2^{-r}t_{j+1}}, \qquad j=1,2,\ldots,\frac{n}{2}, \tag{2.3.16}$$

kus $r\ge 1$, $r\in \mathbb{N}$. Siis aga seoste $(2.3.15)$ ja $(2.3.16)$ tõttu

$$\left(1+\frac{\left|\ln t_j\right|^{m-1}}{t_j}+\frac{\left|\ln(b-t_{j+1})\right|^{m-1}}{(b-t_{j+1})}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 \le c\left(1+\frac{2\left|\ln t_j\right|^{m-1}}{t_j}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 \le$$

$$\le c_1\left(1+\frac{2^{r+1}\left|\ln t_j\right|^{m-1}}{t_{j+1}}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 .$$

Lähtudes seosest $(2.3.10)$ näeme, et

$$\left(1+\frac{2^{r+1}\left|\ln t_j\right|^{m-1}}{t_{j+1}}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 \le c_2\left(1+\frac{\left|\ln 2^{r-1}b\left(\frac{j}{n}\right)^r\right|^{m-1}}{\left(\frac{j+1}{n}\right)^r}\right)\frac{\left[(j+1)^r-j^r\right]^2}{n^{2r}} .$$

Lagrange`i keskväärtuse valemist saame

$$(j+1)^r - j^r = rj^{r-1}\Big|_{j=\xi}(j+1-j),$$

kus $\xi \in (j, j+1)$. Järelikult

$$\left[(j+1)^r - j^r\right]^2 \le r^2 (j+1)^{2(r-1)} .$$

Seega

$$\left(1+\frac{\left|\ln 2^{r-1}b\left(\frac{j}{n}\right)^r\right|^{m-1}}{\left(\frac{j+1}{n}\right)^r}\right)\frac{\left[(j+1)^r-j^r\right]^2}{n^{2r}} \le c_3\frac{\left|\ln\left(\frac{j}{n}\right)\right|^{m-1}}{\left(\frac{j+1}{n}\right)^r}\frac{(j+1)^{2(r-1)}}{n^{2r}n^2n^{-2}} \le$$

$$\le c_4\left|\ln\left(\frac{j+1}{n}\right)\right|^{m-1}\left(\frac{j+1}{n}\right)^{r-2}\frac{1}{n^2} .$$

Nii oleme siselõikude $(2.3.15)$ korral saanud, et

$$\left(1+\frac{\left|\ln t_j\right|^{m-1}}{t_j}+\frac{\left|\ln(b-t_{j+1})\right|^{m-1}}{b-t_{j+1}}\right)(t_{j+1}-t_j)^2 \le c_4\begin{cases}\dfrac{\left|\ln n\right|^{m-1}}{n^r}, & 1\le r\le 2,\\[2mm] \dfrac{1}{n^2}, & r>2.\end{cases} \qquad (2.3.17)$$

Võrratusega $(2.3.17)$ analoogiline hinnang kehtib ka siselõikude

$$\left[t_j, t_{j+1}\right] \subset \left[\frac{b}{2}, b\right), \qquad j=\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1,\dots,n-2 ,$$

korral, sest sõlmed $t_0, t_1, ..., t_n$ paiknevad sümmeetriliselt lõigu $[0, b]$ keskpunkti $\frac{b}{2}$ suhtes.

Kokkuvõttes seostest $(2.3.13)$, $(2.3.14)$ ja $(2.3.17)$ järeldubki hinnang $(2.3.11)$.

§ 2.4. Kollokatsioonimeetodi koonduvus

Paragrahvis 2.1 vaatlesime kollokatsioonimeetodit lineaarse integraalvõrrandi

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b,$$

ligikaudseks lahendamiseks. Selles paragrahvis näitame, et kirjeldatud kollokatsioonimeetod koondub küllalt avaratel tuumale $K(t,s)$ ja vabaliikmele f seatud tingimustel.

Teoreem 2.4.1. *Olgu integraalvõrrandi*

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b, \qquad (2.4.1)$$

korral täidetud tingimused:

1) tuum $K(t,s)$ *on kujul* $K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s)$, *kus* $a(t,s) \in C([0,b],[0,b])$ *ning* $\theta(t)$ *on pidev hulgal* $[-b,b]\setminus\{0\}$, *kusjuures iga* $t \in [-b,b]\setminus\{0\}$ *korral*

$$|\theta(t)| \le c(|\ln|t||^m + 1),$$

kus $m \in \mathbb{N}$;

2) $f \in C[0,b]$;

3) võrrandi $(2.4.1)$ *vastaval homogeensel integraalvõrrandil*

$$u(t) - \int_0^b K(t,s)u(s)ds = 0$$

on pidevate funktsioonide klassis vaid null-lahend $u = 0$;

4) kollokatsioonimeetodis

$$u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(t), \qquad 0 \le t \le b, \qquad (2.4.2)$$

$$u_n(t_i) = \int_0^b K(t_i,s)u_n(s)ds + f(t_i), \qquad i = 0,1,\dots,n, \qquad (2.4.3)$$

on kasutusel võrk

$$\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

kus

$$h_n = \max_{j=0,1,\dots,n-1}(t_{j+1} - t_j) \to 0, \qquad kui\ n \to \infty.$$

Siis leidub selline n_0, *et* $n \ge n_0$ *korral on kollokatsioonimeetodi võrrandisüsteem* $(2.1.7)$ *üheselt lahenduv ning*

$$\max_{0\le t\le b}|u_n(t)-u(t)| \to 0, \qquad \text{kui } n\to\infty, \tag{2.4.4}$$

kus funktsioon $u = u(t)$ *on võrrandi* $(2.4.1)$ *lahend.*

T õ e s t u s. Võrrandi $(2.4.1)$ kirjutame kujul

$$u = Tu + f, \tag{2.4.5}$$

kus operaator T on defineeritud valemiga $(2.1.2)$. Järelduse 1.2.1 põhjal operaator $T: C[0,b]\to C[0,b]$ on täielikult pidev. Kuna $f \in C[0,b]$ ning võrrandi $(2.4.5)$ vastaval homogeensel võrrandil $u = Tu$ leidub ainult triviaalne lahend $u = 0$, siis teoreemi 1.1.2 kohaselt võrrand $(2.4.5)$ on üheselt lahenduv ning tema lahend $u = (I-T)^{-1} f \in C[0,b]$.

Võrrandid $(2.4.3)$ esitame kujul

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \tag{2.4.6}$$

kus P_n ($n \in \mathbb{N}$) on projektorid (vt. def. 1.1.3). Lemma 2.2.1 põhjal operaatorid P_n koonduvad ruumis $C[0,b]$ punktiviisi ühikoperaatoriks I (vt. $(2.2.5)$). Nüüd aga, teoreemi 1.1.3 kohaselt leidub selline n_0, et $n \ge n_0$ korral on võrrandid $(2.4.6)$ üheselt lahenduvad ning

$$\|u_n - u\|_{C[0,b]} \le c\|u - P_n u\|_{C[0,b]}, \qquad n \ge n_0,$$

kus $u = u(t)$ on võrrandi $(2.4.1)$ täpne lahend. Kuna $u \in C[0,b]$, siis koondumine $(2.4.4)$ leiab aset. Sellega on teoreem 2.4.1 tõestatud.

§ 2.5. Kollokatsioonimeetodi koonduvuskiirus ühtlase võrgu korral

Antud paragrahvis püüame hinnata kollokatsioonimeetodi koonduvuskiirust ühtlase võrgu korral.

Teoreem 2.5.1. *Olgu integraalvõrrandi*

$$u(t)=\int_0^b K(t,s)u(s)ds+f(t), \qquad 0\le t\le b, \qquad (2.5.1)$$

korral täidetud tingimused:

1) tuum $K(t,s)$ on kujul $K(t,s)=a(t,s)\theta(t-s)$, kus $a(t,s)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv ruudus $[0,b]\times[0,b]$ ning $\theta(t)$ on pidevalt diferentseeruv hulgal $[-b,b]\setminus\{0\}$, kusjuures iga $t\in[-b,b]\setminus\{0\}$ korral

$$|\theta(t)|\le c\left(|\ln|t||^m+1\right)$$

ja

$$|\theta'(t)|\le c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|}+1\right),$$

kus $m\in\mathbb{N}$;

2) $f\in C_m^2[0,b]$;

3) võrrandi $(2.5.1)$ vastaval homogeensel integraalvõrrandil

$$u(t)-\int_0^b K(t,s)u(s)ds=0$$

on pidevate funktsioonide klassis vaid null-lahend $u=0$;

4) kollokatsioonimeetodis

$$u_n(t)=\sum_{j=0}^n c_j\varphi_j(t), \qquad 0\le t\le b, \qquad (2.5.2)$$

$$u_n(t_i)=\int_0^b K(t_i,s)u_n(s)ds+f(t_i), \qquad i=0,1,...,n, \qquad (2.5.3)$$

on kasutusel ühtlane võrk Δ_n sõlmedega

$$t_j=jh, \qquad j=0,1,...,n, \qquad n\in\mathbb{N}$$

ja sammuga

$$h=\frac{b}{n}.$$

Siis leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ korral on kollokatsioonimeetodi võrrandisüsteem $(2.1.7)$ üheselt lahenduv. Lisaks kehtivad järgmised veahinnangud:

$$\max_{0 \le t \le b} |u_n(t) - u(t)| \le c |\ln h|^{m-1} h, \qquad n \ge n_0, \tag{2.5.4}$$

$$\max_{0 \le i \le n} |u_n(t_i) - u(t_i)| \le c_1 |\ln h|^{2m} h^2, \qquad n \ge n_0, \tag{2.5.5}$$

kus funktsioon $u = u(t)$ on võrrandi $(2.5.1)$ lahend ja c, c_1 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest n.

T õ e s t u s. Võrrandi $(2.5.1)$ kirjutame kujul

$$u = Tu + f, \tag{2.5.6}$$

kus operaator T on defineeritud valemiga $(2.1.2)$. Teoreemi 2.4.1 kohaselt on võrrand $(2.5.6)$ on üheselt lahenduv ning tema lahend $u = (I - T)^{-1} f \in C[0,b]$. Teoreemist 1.4.1 järeldub, et võrrandi $(2.5.6)$ lahend $u \in C_m^2[0,b]$.

Võrrandid $(2.5.3)$ esitame kujul

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \tag{2.5.7}$$

kus P_n ($n \in \mathbb{N}$) projektorid (vt. def. 1.1.3). Teoreemi 2.4.1 kohaselt leidub selline n_0, et $n \ge n_0$ korral on võrrandid $(2.5.7)$ üheselt lahenduvad ning

$$\|u_n - u\|_{C[0,b]} \le c \|u - P_n u\|_{C[0,b]}, \qquad n \ge n_0. \tag{2.5.8}$$

Kuna $u \in C_m^2[0,b]$ siis veahinnang $(2.5.4)$ on vahetu järeldus hinnangust $(2.5.8)$.

Edasi, teoreemist 1.1.3 järeldub, et kehtib järgmine veahinnang:

$$\|u_n - P_n u\|_{C[0,b]} \le c \|T(u - P_n u)\|_{C[0,b]}, \qquad n \ge n_0. \tag{2.5.9}$$

Paneme tähele, et

$$\|u_n - P_n u\|_{C[0,b]} = \max_{0 \le i \le n} |u_n(t_i) - u(t_i)|,$$

sest $u_n - P_n u$ on murdjoon ning seega $u_n - P_n u$ saavutab oma maksimaalse väärtuse mingis sõlmes $t_0, t_1, ..., t_n$. Võrratusest $(2.5.9)$ saame, et

$$\max_{0 \le i \le n} |u_n(t_i) - u(t_i)| \le c \max_{0 \le t \le b} \int_0^b |K(t,s)| |u(s) - (P_n u)(s)| ds =$$

$$= c \max_{0 \le t \le b} \left(\int_{[0,b] \cap (t-h, t+h)} + \int_{[0,b] \setminus (t-h, t+h)} \right) |K(t,s)| |u(s) - (P_n u)(s)| ds.$$

Eeldusest tuuma $K(t,s)$ kohta järeldub siit

$$\max_{0\le i\le n}|u_n(t_i)-u(t_i)| \le c_1 \max_{0\le t\le b}\Bigg[\int\limits_{[0,b]\cap(t-h,t+h)}\left(1+|\ln|t-s||^m\right)|u(s)-(P_nu)(s)|ds +$$

$$+\int\limits_{[0,b]\setminus(t-h,t+h)}\left(1+|\ln|t-s||^m\right)|u(s)-(P_nu)(s)|ds\Bigg].$$

Edasi toome saadud võrratuse paremal pool olevas esimeses liikmes integraali märgi alt välja funktsiooni $|u-P_nu|$ maksimumi. Samuti arvestame, et iga $t\in[0,b]$ korral

$$|t-s|\ge h,$$

kui $s\in[0,b]\setminus(\mathrm{t-h,t+h})$. Seetõttu

$$\max_{0\le i\le n}|u_n(t_i)-u(t_i)| \le c_1\left[\|u-P_nu\|_{C[0,b]}\max_{0\le t\le b}\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(1+|\ln|t-s||^m\right)ds+\left(1+|\ln h|^m\right)\|u-P_nu\|_{L(0,b)}\right].$$

Eeldame, et n_0 on nii suur, et hinnangud $(2.3.7)$ ja $(2.3.8)$ kehtivad. Siis

$$\max_{0\le i\le n}|u_n(t_i)-u(t_i)| \le c_2|\ln h|^{m-1}h\max_{0\le t\le b}\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(1+|\ln|t-s||^m\right)ds+c_3\left(1+|\ln h|^m\right)|\ln h|^m h^2.$$

Vaatleme viimase võrratuse integraalset liiget $\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(1+|\ln|t-s||^m\right)ds$. Tehes siin muutujavahetuse $v=t-s$ näeme, et

$$\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(1+|\ln|t-s||^m\right)ds = 2h+\int\limits_{-h}^{h}|\ln|v||^m dv = 2h+2\int\limits_0^h|\ln v|^m dv \le ch|\ln h|^m.$$

Kokkuvõttes

$$\max_{0\le i\le n}|u_n(t_i)-u(t_i)| \le c|\ln h|^{2m-1}h^2+c_1\left(1+|\ln h|^m\right)|\ln h|^m h^2,$$

millest saamegi hinnangu $(2.5.5)$. Sellega on teoreem 2.5.1 tõestatud.

Märkus 2.5.1. Olgu $f\in C^2[0,b]$. Siis võrrandi $(2.5.1)$ lahend $u=u(t)$ on teoreemi 1.4.1. kohaselt esitatav kujul

$$u(t)=u(0)\int\limits_0^t K(\tau,0)d\tau+u(b)\int\limits_t^b K(\tau,b)d\tau+\omega(t), \qquad 0\le t\le b, \qquad (2.5.10)$$

kus $\omega=\omega(t)$ on mingi lõigul $[0,b]$ üks kord pidevalt diferentseeruv ja vahemikus $(0,b)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon ning lisaks kehtib hinnang

$$|\omega''(t)|\le c\left(1+|\ln t|^{2m}+|\ln(b-t)|^{2m}\right), \qquad 0<t<b. \qquad (2.5.11)$$

Saadud asümptootilist avaldist $(2.5.10)$ saab kasutada võrrandi $(2.5.1)$ lähislahendi $u_n = u_n(t)$ täpsustamiseks sõlmede $t_0, t_1, ..., t_n$ vahel.

Olgu $\omega_n = \omega_n(t)$ murdjoon sõlmväärtustega

$$\omega_n(t_i) = u_n(t_i) - u_n(0)\int_0^{t_i} K(\tau,0)d\tau - u_n(t_n)\int_{t_i}^{b} K(\tau,b)d\tau, \quad i = 0,1,...,n, \tag{2.5.12}$$

kus $u_n = u_n(t)$ on võrrandi $(2.5.1)$ lähislahend.

Osutub, et

$$\max_{0\le i\le n}|\omega_n(t_i) - \omega(t_i)| \le c|\ln h|^{2m} h^2. \tag{2.5.13}$$

Tõepoolest, võrdusest $(2.5.10)$ saame, et

$$\omega(t) = u(t) - u(0)\int_0^{t} K(\tau,0)d\tau - u(b)\int_{t}^{b} K(\tau,b)d\tau, \quad 0 \le t \le b. \tag{2.5.14}$$

Nüüd aga, seoseid $(2.5.12)$ ja $(2.5.14)$ kasutades saame

$$\max_{0\le i\le n}|\omega_n(t_i) - \omega(t_i)| =$$

$$\le \max_{0\le i\le n}\left| u_n(t_i) - u(t_i) - [u_n(0) - u(0)]\int_0^{t_i} K(\tau,0)d\tau - [u_n(t_n) - u(t_n)]\int_{t_i}^{b} K(\tau,b)d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{0\le i\le n}|u_n(t_i) - u(t_i)| + |u_n(0) - u(0)|\max_{0\le i\le n}\int_0^{t_i}|K(\tau,0)d\tau| +$$

$$+ |u_n(t_n) - u(t_n)|\max_{0\le i\le n}\int_{t_i}^{b}|K(\tau,b)d\tau|.$$

Meenutades tuuma $K(t,s)$ kohta käivaid teoreemi 2.5.1 eeldusi ning hinnangut $(2.5.5)$ näeme, et

$$\max_{0\le i\le n}|\omega_n(t_i) - \omega(t_i)| \le c|\ln h|^{2m} h^2 + c_1|\ln h|^{2m} h^2 \max_{0\le i\le n}\int_0^{t_i}\left(|\ln|\tau||^m + 1\right)d\tau +$$

$$+ c_2|\ln h|^{2m} h^2 \max_{0\le i\le n}\int_{t_i}^{b}\left(|\ln|\tau - b||^m + 1\right)d\tau,$$

millest saamegi võrratuse $(2.5.13)$.

Osutub, et

$$\max_{0\le t\le b}|\omega_n(t) - \omega(t)| \le c|\ln h|^{2m} h^2. \tag{2.5.15}$$

Tõepoolest,

$$\max_{0\le t\le b}|\omega_n(t)-\omega(t)| = \max_{j=0,1,\dots n-1}\max_{t_j\le t\le t_{j+1}}|\omega_n(t)-\omega(t)| \le$$

$$\le c|\ln h|^{2m}h^2 + \max_{j=0,1,\dots n-1}\max_{t_j\le t\le t_{j+1}}|\omega_n(t)-\widetilde{\omega}(t)|,$$

kus

$$\widetilde{\omega}(t)=\omega(t_j)\frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j}+\omega(t_{j+1})\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \qquad t_j\le t\le t_{j+1}, \qquad j=0,1,\dots,n-1.$$

Sisemistel osalõikudel $[t_j,t_{j+1}]$ $(j=1,2,\dots,n-2)$ rakendame valemit $(1.1.2)$.

Nii saame

$$\omega(t)-\widetilde{\omega}(t)=\frac{1}{2}\omega''(\tau)(t-t_j)(t-t_{j+1}) \qquad t_j\le t\le t_{j+1},$$

kus $\tau\in(t_j,t_{j+1})$. Suurus $\omega''(\tau)$ on võrratuse $(2.5.11)$ kohaselt hinnatav järgmiselt:

$$|\omega''(\tau)|\le c_1\left(1+|\ln t_j|^{2m}+|\ln(b-t_{j+1})|^{2m}\right), \qquad t_j\le\tau\le t_{j+1}, \qquad j=1,2,\dots,n-2.$$

Seega

$$|\omega(t)-\widetilde{\omega}(t)|\le c_2\left(1+|\ln t_j|^{2m}+|\ln(b-t_{j+1})|^{2m}\right)(t_{j+1}-t_j)^2, \qquad t_j\le t\le t_{j+1}, \qquad (2.5.16)$$

kus $j=1,2,\dots,n-2$.

Saadud hinnang $(2.5.16)$ ei ole rakendatav osalõikudel $[0,t_1]$ ja $[t_{n-1},t_n]$. Seetõttu esitame uue hinnangu osalõigul $[0,t_1]$. Kirjutiste lühendamiseks tähistame $t_1=h$. Teisendame $\omega(t)-\widetilde{\omega}(t)$ $(0\le t\le h)$ avaldist:

$$\omega(t)-\widetilde{\omega}(t)=\omega(t)-\omega(0)\frac{h-t}{h}-\omega(h)\frac{t}{h}=$$

$$=\frac{h-t}{h}[\omega(t)-\omega(0)]+\frac{t}{h}[\omega(t)-\omega(h)]=\frac{h-t}{h}\int_0^t\omega'(s)ds-\frac{t}{h}\int_t^h\omega'(s)ds.$$

Kasutades ositi integreerimise valemit, saame

$$\frac{h-t}{h}\int_0^t\omega''(s)ds-\frac{t}{h}\int_t^h\omega'(s)ds=$$

$$=\frac{h-t}{h}\left[s\omega'(s)\Big|_0^t-\int_0^t s\omega''(s)ds\right]-\frac{t}{h}\left[(s-h)\omega'(s)\Big|_t^h-\int_t^h(s-h)\omega''(s)ds\right]=$$

$$=-\frac{h-t}{h}\int_0^t s\omega''(s)ds-\frac{t}{h}\int_t^h(h-s)\omega''(s)ds.$$

Seetõttu

$$|\omega(t)-\tilde{\omega}(t)| \le \frac{h-t}{h}\int_0^t s|\omega''(s)|ds + \frac{t}{h}\int_t^h (h-s)|\omega''(s)|ds\,, \qquad 0 \le t \le h\,.$$

Võrratuse $(2.5.11)$ kohaselt võime suurust $\omega''(t)$ hinnata järgmiselt:

$$|\omega''(s)| \le c|\ln s|^{2m}\,, \qquad 0 < s \le h\,.$$

Seepärast

$$|\omega(t)-\tilde{\omega}(t)| \le c\left[\frac{h-t}{h}\int_0^t s|\ln s|^{2m} ds + \frac{t}{h}\int_t^h (h-s)|\ln s|^{2m} ds\right], \qquad 0 \le t \le h\,.$$

Olgu $0 < t \le h$. Siis

$$\frac{t}{h}\int_t^h (h-s)|\ln s|^{2m} ds \le c\frac{t|\ln t|^{2m}}{h}\int_t^h (h-s)ds \le c_1|\ln h|^{2m} h^2\,.$$

Kasutades integreerimisvalemit (vt. [6], lk. 34)

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1} dx\,, \quad m \ne -1\,, \quad n \ne -1\,. \qquad (2.5.17)$$

näeme, et

$$\frac{h-t}{h}\int_0^t s|\ln s|^{2m} ds \le c_2|\ln h|^{2m} h^2\,, \qquad 0 \le t \le h\,.$$

Kokkuvõttes saame hinnangu

$$|\omega(t)-\tilde{\omega}(t)| \le c_3|\ln h|^{2m} h^2\,, \qquad 0 < t \le t_1\,. \qquad (2.5.18)$$

Analoogilise hinnangu saame viimasel osalõigul $[t_{n-1}, t_n]$:

$$|\omega(t)-\tilde{\omega}(t)| \le c_4|\ln h|^{2m} h^2\,, \qquad t_{n-1} \le t < b\,. \qquad (2.5.19)$$

Hinnangutest $(2.5.16), (2.5.18)$ ja $(2.5.19)$ järeldub nüüd võrratus $(2.5.15)$:

$$\max_{0\le t\le b}|\omega_n(t)-\omega(t)| \le c|\ln h|^{2m} h^2 + c_1\left(1+2|\ln h|^{2m}\right)h^2 \le c_2|\ln h|^{2m} h^2\,.$$

Edasi defineerime täpsustatud lähendi

$$\tilde{u}_n(t) = u_n(0)\int_0^t K(\tau,0)d\tau + u_n(t_n)\int_t^b K(t,b)d\tau + \omega_n(t)\,, \qquad 0 \le t \le b\,, \qquad (2.5.20)$$

kus $u_n = u_n(t)$ on võrrandi $(2.5.1)$ lähislahend. Sealjuures

$$\tilde{u}_n(t_i) = u_n(t_i)\,, \qquad i = 0,1,\ldots,n\,.$$

Tõepoolest, seostest $(2.5.20)$ ja $(2.5.12)$ saame, et

$$\tilde{u}_n(t_i) = u_n(0)\int_0^{t_i} K(\tau,0)d\tau + u_n(t_n)\int_{t_i}^b K(t,b)d\tau + u_n(t_i) -$$

$$-u_n(0)\int_0^{t_i} K(\tau,0)d\tau - u_n(t_n)\int_{t_i}^b K(\tau,b)d\tau = u_n(t_i),$$

kus $i = 0,1,...,n$. Osutub, et kehtib veahinnang

$$\max_{0\le t\le b}|\tilde{u}_n(t) - u(t)| \le c|\ln h|^{2m} h^2. \qquad (2.5.21)$$

Tõepoolest, seostest $(2.5.20)$ ja $(2.5.10)$ järeldub

$$\tilde{u}_n(t) - u(t) = u_n(0)\int_0^t K(\tau,0)d\tau - u(0)\int_0^t K(\tau,0)d\tau +$$

$$+ u_n(t_n)\int_t^b K(t,b)d\tau - u(b)\int_t^b K(\tau,b)d\tau + \omega_n(t) - \omega(t).$$

Võrratusi $(2.5.5)$ ja $(2.5.15)$ kasutades saame siit hinnangu $(2.5.21)$:

$$\max_{0\le t\le b}|\tilde{u}_n(t) - u(t)| \le c|\ln h|^{2m} h^2 \max_{0\le t\le b}\int_0^t |K(\tau,0)|d\tau +$$

$$+ c_1|\ln h|^{2m} h^2 \max_{0\le t\le b}\int_t^b |K(\tau,b)|d\tau + c_2|\ln h|^{2m} h^2 \le c_3|\ln h|^{2m} h^2.$$

Märkus 2.5.2. Teoreemis 2.5.1 saadud hinnangust $(2.5.4)$ näeme, et ühtlase võrgu korral on kollokatsioonimeetodi $\{(2.5.2),(2.5.3)\}$ koonduvuskiirus peaaegu h järku. Võrratuse $(2.5.5)$ kohaselt on sõlmedes t_i $(i = 0,1,...,n)$ koonduvuskiirus peaaegu h^2 järku.

Defineerides lähendi kujul $(2.5.20)$ saame koonduvuskiiruse peaaegu h^2 järku. Sel põhjusel on ka ühtlase võrgu kasutamine üsna otstarbekas.

§ 2.6. Kollokatsioonimeetodi koonduvuskiirus mitteühtlase võrgu korral

Selles paragrahvis hindame kollokatsioonimeetodi koonduvuskiirust ebaühtlase võrgu korral. Järgmine teoreem on vahetu järeldus teoreemist 2.4.1 ja punkti 2.3.4 tulemustest.

Teoreem 2.6.1. *Olgu integraalvõrrandi*

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b, \qquad (2.6.1)$$

korral täidetud tingimused:

1) tuum $K(t,s)$ on kujul $K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s)$, kus $a(t,s)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv ruudus $[0,b]\times[0,b]$ ning $\theta(t)$ on pidevalt diferentseeruv hulgal $[-b,b]\setminus\{0\}$, kusjuures iga $t \in [-b,b]\setminus\{0\}$ korral

$$|\theta(t)| \le c\left(|\ln|t||^m + 1\right)$$

ja

$$|\theta'(t)| \le c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|} + 1\right),$$

kus $m \in \mathbb{N}$;

2) $f \in C_m^2[0,b]$;

3) võrrandi $(2.6.1)$ vastaval homogeensel integraalvõrrandil

$$u(t) - \int_0^b K(t,s)u(s)ds = 0$$

on pidevate funktsioonide klassis vaid null-lahend $u = 0$.

4) kollokatsioonimeetodis

$$u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(t), \qquad 0 \le t \le b \qquad (2.6.2)$$

$$u_n(t_i) = \int_0^b K(t_i,s)u_n(s)ds + f(t_i), \qquad i = 0,1,\ldots,n, \qquad (2.6.3)$$

on kasutusel mitteühtlane võrk Δ_n^r ($n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$) sõlmedega

$$t_j = 2^{r-1}\left(\frac{j}{n}\right)^r, \qquad j = 0,1,\dots,\frac{n}{2},$$

ja

$$t_{j+\frac{n}{2}} = b - t_{\frac{n}{2}-j}, \qquad j = 1,2,\dots,\frac{n}{2},$$

kus $r \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$.

Siis leidub selline n_0, *et* $n \geq n_0$ *korral on kollokatsioonimeetodi võrrandisüsteem* $(2.1.7)$ *üheselt lahenduv. Lisaks kehtib veahinnang*

$$\max_{0 \leq t \leq b}\left|u_n(t) - u(t)\right| \leq c \begin{cases} \dfrac{|\ln n|^{m-1}}{n^r}, & 1 \leq r \leq 2, \\ \dfrac{1}{n^2}, & r > 2, \end{cases} \qquad n \geq n_0, \tag{2.6.4}$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Olgu märgitud, et kui $r > 2$, siis saadav koonduvuskiirus $(2.6.4)$ on parim, mida lineaarsete splainidega aproksimeerimisel on võimalik saavutada ka iseärasusteta funktsioonide $u \in C^2[0,b]$ korral.

THE SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF AN INTEGRAL EQUATION WITH A LOGARITHMIC SINGULAR KERNEL AND COLLOCATION METHOD

Ester Saral

Summary

In this paper we consider the integral equation

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad 0 \le t \le b, \tag{1}$$

where

$$K(t,s) = a(t,s)\theta(t-s).$$

We assume that f is a twice continuously differentiable function on the interval $[0,b]$, $a(t,s)$ is a twice continuously differentiable function in the square $0 \le t,s \le b$ and $\theta(t)$ is a continuously differentiable function on the set $[-b,b]\setminus\{0\}$ such that for all $t \in [-b,b]\setminus\{0\}$ the following estimations hold:

$$|\theta(t)| \le c\left(|\ln|t||^m + 1\right),$$

$$|\theta'(t)| \le c_1\left(\frac{|\ln|t||^{m-1}}{|t|} + 1\right).$$

Here c and c_1 are some positive constants and $m \in \mathbb{N}$. In fact, we deal with a situation, where f belongs to a class of functions $C_m^2[0,b]$ (see section 1.4).

In the first part (chapter 1) of this work we study the behavior of the first and the second derivative of the solution to equation (1) (Theorem 1.1.4).

We then (chapter 2) use these results in the analysis of a collocation method for the solution of such equations numerically. Using linear splines we derive global and local error estimates on uniform and special non uniform grids (Theorems 2.5.1 and 2.6.1).

Kirjandus

1. Kangro, G. Matemaatiline analüüs I. Teine, parandatud ja täiendatud trükk. – Tallinn: „Valgus”, 1982. – 504 lk.
2. Oja, E., Oja, P. Funktsionaalanalüüs. - Tartu: TÜ trükikoda, 1991. - 308 lk.
3. Rada, E. Logaritmiliselt iseärase tuumaga integraalvõrrandi lahendi siledus: semestritöö / TÜ, rakendusmatemaatika instituut. - Tartu, 2002. - 25 l.
4. Rada, E. Logaritmiliselt iseärase tuumaga integraalvõrrandi lahendi siledus: bakalaureusetöö / TÜ, rakendusmatemaatika instituut. - Tartu, 2003. - 40 l.
5. Tamme, E., Võhandu, L., Luht, L. Arvutusmeetodid I. Teine, ümbertöötatud trükk. – Tallinn: „Valgus”, 1986. – 312 lk.
6. Tõnnov, M. Integraalide tabelid. – Tartu: TRÜ trükikoda, 1985. – 46 lk.
7. Vainikko, G. Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavaid peatükke. - Tartu: TÜ trükikoda, 1990. - 92 lk.