

TARTU ÜLIKOOL  
Matemaatika-informaatikateaduskond  
Rakendusmatemaatika instituut  
Matemaatika eriala

LENNART KITT  
MUUTUMISPUNKTI LEIDMINE  
AEGREAS

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Peep Miidla

Autor: .....	"....."	mai 2006
Juhendaja: .....	"....."	mai 2006
Instituudi juhataja.....	"....."	mai 2006

Tartu 2006

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>1 Aegrea muutumispunkti mõiste</b>	<b>5</b>
1.1 Aegrida ja sellega seotud parameetrid . . . . .	5
1.2 Muutumispunkti mõiste ja olulisus. . . . .	7
<b>2 Muutumispunkti leidmise algoritmid</b>	<b>10</b>
2.1 Läheneemisviis tõepärameetodiga . . . . .	11
2.2 Läheneemisviis mitteparameetriliselt . . . . .	12
2.3 Muutumispunkti leidmine kumulatiivsete jääkliikmete abil . .	14
<b>3 Muutumispunkti leidmise programm</b>	<b>15</b>
<b>4 Numbrilised eksperimendid</b>	<b>19</b>
<b>Summary</b>	<b>26</b>
<b>Kasutatud kirjandus</b>	<b>27</b>
<b>Lisa 1. Rakendustarkvara <i>Lactate</i> tööleht</b>	<b>28</b>
<b>Lisa 2. Pulsi muutumine ajas</b>	<b>29</b>
<b>Lisa 3. Laktaadi kontsentratsiooni muutumine ajas</b>	<b>30</b>
Lisa 3.1. Rakendustarkvara <i>Lactate</i> poolt genereeritud laktaadi kontsentratsiooni muutumine. Graafikud. . . . .	30
Lisa 3.2. Laktaadi kontsentratsiooni muutumine ajas. Tabelid. . . .	33
Lisa 3.2.1. Laktaadi mõõtmiste arv: 1 . . . . .	33
Lisa 3.2.2. Laktaadi mõõtmiste arv: 2 . . . . .	33
Lisa 3.2.3. Laktaadi mõõtmiste arv: 3 . . . . .	34
Lisa 3.2.4. Laktaadi mõõtmiste arv: 4 . . . . .	34
Lisa 3.2.5. Laktaadi mõõtmiste arv: 5 . . . . .	35
Lisa 3.2.6. Laktaadi mõõtmiste arv: 6 . . . . .	35

<b>Lisa 4. Väljundid</b>	<b>36</b>
Lisa 4.1. Pulsi sageduse iseloomustamine . . . . .	36
Lisa 4.1.1. Iseloomustavate võrrandite hinnangud . . . . .	36
Lisa 4.1.2. Pulsi sagedust iseloomustavad joonised . . . . .	39
Lisa 4.2. Laktaadi kontsentratsiooni iseloomustamine . . . . .	40
Lisa 4.2.1. Iseloomustavate võrrandite hinnangud . . . . .	40
Lisa 4.2.2. Laktaadi kontsentratsiooni iseloomustavad joonised . . .	53

## Sissejuhatus

Käesoleva töö eesmärk on uurida aegridade käitumist. Aegridu iseloomustavaid näitajaid on palju. Alates 1970. aastatest hakati lisaks varem kasutatud meetoditele aegridu uurima kasutades muutumispunkti (Change point) meetodit. Muutumispunkt aegreas on selline koht, millest alates muutub oluliselt aegrea mingi parameeter (keskmine, dispersioon, regressioonikõver). Muutumispunkti uurimisel tuleb aga esmalt üldse tuvastada, kas selliseid punkte leidub(vad) ja nende olemasolul saab täpsemalt leida ka konkreetsete punktide asukohad.

Käesolev töö koosneb neljast peatükist. Töö esimeses peatükis viiakse lugeja kurssi aegrea ja muutumispunktiga seotud põhimõistetega. Töö teises peatükis on kirjeldatud levinumaid muutumispunkti leidmise meetodeid. Pikemalt on kirjeldatud lähenemisviise tõepärameetodiga ja mitteparameetriliselt ning muutumispunkti leidmist kumulatiivsete jääkliikmete meetodi abil. Kolmandas peatükis tuuakse ära autori poolt koostatud programm statistikapaketi *R* tarvis, mille ülesandeks ongi kõnealuse muutumispunkti leidmine kolmel erineval meetodil. Koostatud programmi rakendamise tulemused esitatakse neljandas peatükis. Seal kasutab autor andmete uurimiseks rakendustarkvara *Lactate*.

Algandmeteks on mõned Tartu Ülikooli spordimeedikute poolt paljude aastate jooksul salvestatud andmerekad, mis kujutavad endast sportlaste teatud füsioloogiliste näitajate muutumist treeningute käigus. Läbi on viidud spetsiaalne katse, kus sportlasel on koormuse aega mööda kasvamisel mõõdetud pulsi sagedust ja piimhappe kontsentratsiooni veres. Muutumispunkti leidmise abil üritataksegi tuvastada, kas toimunud muudatuste seas leidub põhimõttelisi muutuseid üldisemast käitumisest ja kas need on kooskõlas varem püstitatud teooriatega.

Töö teoreetilise osa põhineb peamiselt A. N. Pettitt'i 1989. aastal [7] ja P. Hofmann'i, R. Pokan'i ja S. P. Duvillard'i 2000. aastal [2] ilmunud artiklidel ning P. Lõhmuse 2004. aasta kaitsitud bakalaureusetööl "Hüpetega aegrida" [5]. Lisaks sellele on tutvutud värskemate edusammudega antud valdkonna uurimisel. Katsetulemused on mõõdetud Tartu Ülikooli arstiteaduskonna emeriitprofessor Toomas Karu poolt.

# 1 Aegrea muutumispunkti mõiste

## 1.1 Aegrida ja sellega seotud parameetrid

**Definitsioon 1** *Aegreaks nimetatakse kindlatel ajahetkedel saadud mõõtmistulemuste jada.*

Tõenäosusteooria seisukohast on aegrida diskreetse ajaga juhusliku protsessi realisatsioon. Aegridade teoorias arendatakse matemaatilisele statistikale tuginevaid meetodeid aegridade süstemaatilise muutumistendentsi (trendi) analüüsimiseks, perioodilisuse kirjeldamiseks (korrelatsioon, spektraalanalüüs), juhuslikkuse kõrvaldamiseks (silumine) ning aegridade prognoosimiseks. [1]

Ajahetki loetakse aegreas tavaliselt alates ühest, kuid mõnikord ka nullist ning ajamomenti näitab vaatluse indeks:  $X_1, X_2, \dots, X_T$ . Aegrea mudelid on koostatud eeskätt selleks, et ajas kulgevat protsessi seletada ja prognoosida selle käitumist tulevikus.

Aegrea üksikuid vaatlusi nimetatakse aegrea liikmeteks. Liikmete puhul eeldatakse, et nad koosnevad mitmest komponendist:

$$X_t = f_t + p_t + \varepsilon_t,$$

kus  $t$  tähistab ajahetke. Neist esimene,  $f_t$ , on fikseeritud (st mittejuhuslik), mida nimetatakse ka trendiks; teine liidetav,  $p_t$ , on perioodiline või sesoonne, mis muutub ajas mingi fikseeritud (teadaoleva) perioodiga ja kolmas,  $\varepsilon_t$ , on juhuslik komponent. Aegridade analüüsimisel kasutatakse mitmeid mudeleid. Neist enam tuntumad on

- libiseva keskmise tüüpi mudelid, mida kasutatakse näiteks aegrea silumiseks, mille käigus sisuliselt elimineeritakse juhuslik komponent. Selle puhul asendatakse aegrea punkt tema lähiümbruse (ajas eelnevate ja järgnevate) punktide põhjal arvutatud (lihtsamal juhul keskmistatud) väärtustega;
- autoregressiooni tüüpi mudelid, mille korral eeldatakse, et aegrea käitumine on (suuremal või vähemal määral) määratud selle käitumisega lähiminevikus.

Kui korraga on mõõdetud mitut tunnust (näiteks temperatuuri, õhurõhku, tuule kiirust ja suunda, sademete hulka, õhu niiskust), siis on tegemist mitmemõõtmelise aegreaga. Selline andmestik koosneb  $Tm$  järjestatud punktist,

millest igaühes on mõõdetud  $k$  tunnust. Erinevus võrreldes ühemõõtmelise aegreaga seisneb selles, et kõigi prognooside puhul on võimalik kasutada ka teiste aegrea komponentide andmeid. Aegridadevahelisi seoseid mõõdab vastastikune ehk rist-korrelatsioonifunktsioon. [10]

Järgnevalt on uuritud aeg karakteristikuid täpsemalt:

Aegrea, mis sisaldab  $T$  elementi keskmine väärtus leitakse vastavalt valemile

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

ning aegrea standardviga

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}.$$

Valimi korrelatsioonikordaja näitajate  $x$  ja  $y$  vahel on esitatav üldkujul

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2)},$$

kus  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$ , on vastavalt näitajate  $x$  ja  $y$  keskmised väärtused. Analoogiliselt defineeritakse ka autokorrelatsioonikordaja. Kui on antud aegrida  $y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , siis saab moodustada  $T - 1$  arvupaari  $(y_1, y_2), (y_2, y_3), \dots, (y_{T-1}, y_T)$ . Vaadeldes iga paari esimest vaatlust kui üht muutujat ning teist vaatlust teise muutujana, saame defineerida korrelatsioonikordaja näitajate  $y_{t-1}$  ja  $y_t$  vahel vastavalt valemile

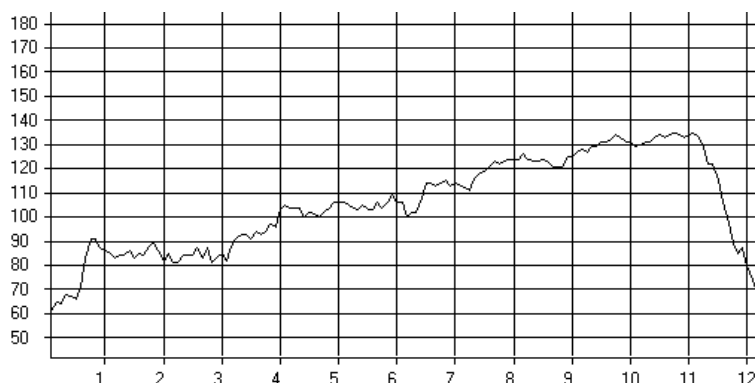
$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})(y_t - \bar{y}_t)}{\sqrt{(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})^2 \sum_{t=2}^T (y_t - \bar{y}_t)^2)},$$

kus  $\bar{y}_t = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T y_t$  ja  $\bar{y}_{t-1} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T y_{t-1}$

Tavaliselt esitatakse korrelatsioonikordaja näitajate  $y_{t-1}$  ja  $y_t$  vahel lihtsustatud kujul valemiga

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \bar{y})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

ning seda nimetatakse 1. järku autokorrelatsioonikordajaks. Esimest järku autokorrelatsioonikordaja mõõdab järjestikuste vaatluste vahelist korrelatsiooni. Sarnaselt tavapärase korrelatsioonikordajaga, jäävad ka autokorrelatsioonikordajate väärtused -1 ja 1 vahele. Kui autokorrelatsioonikordaja väärtus on null, siis aegrea väärtus perioodil  $t$  ei sõltu aegrea väärtusest eelmisel



**Joonis 1** Pulsisagedus (lööki minutis) sõltuvana ajast (minutites)

perioodil.

Analoogiliselt esimest järku autokorrelatsioonikordajale defineeritakse ka  $k$ -ndat järku autokorrelatsioonikordaja kui vaatluste  $y_{t-1}$  ja  $y_t$  vaheline korrelatsioonikordaja [11]

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (y_{t-k} - \bar{y})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

Arvread leiavad uurimist mitmetes eluvaldkondades. Üks uuemaid valdkondi, kus aegridu uuritakse on ökonofüüsika teadusvaldkonnas, mis sai alguse alles üheksakümnendate alguses. See teadusharu uurib majanduslikke fenomene, s.h. aegride käitumist, kasutades selleks statistilise füüsika rakendusi. Selle valdkonna esimese doktoritööni jõuti Eestis alles 2005. aastal [4].

Joonisel 1 on toodud näide tüüpilisest aegreast, kus pulsi sagedust on esitatud sõltuvana ajast (andmed lisas 2).

## 1.2 Muutumispunkti mõiste ja olulisus.

Muutumispunkti ehk murdepunkti (Change point, Breakpoint) probleem kerkib üles ajaliselt või muul viisil järjestatud vaatluste korral. Kui mingite vaatluste jaotus mingis etteteadmata punktis muutub hüppeliselt, siis seda punkti nimetatakse muutumispunktiks. Muutumispunkti ilmselt esimene defineerimine leidis aset 1970. aastal Hinkley poolt. Olgu see toodud ka siinkohal:

**Definitsioon 2** Olgu  $Y_1, \dots, Y_T$  sõltumatud juhuslikud suurused ja avaldugu

$Y_t$  järgnevalt:

$$Y_t = \begin{cases} \theta_0(t) + \varepsilon_t, & \text{kui } t = 1, \dots, \tau; \\ \theta_1(t) + \varepsilon_t, & \text{kui } t = \tau + 1, \dots, T, \end{cases} \quad (1)$$

kus juhuslikud suurused  $\varepsilon_t$  on sõltumatud vead ja  $\tau$  on muutumispunkt.

Tänapäevasemas käsitluses on muutumispunkti eksisteerimine sõnastatud järgneva hüpoteesipaariga:

$$H_0 : \theta(t) = \theta_0(t), \text{ iga } t \in [0, T]$$

ja

$$H_1 : \begin{cases} \theta(t) = \theta_0(t), & 0 \leq t \leq \tau; \\ \theta(t) = \theta_1(t), & \tau < t \leq T, \end{cases}$$

kus üldjuhul  $\theta_0 \neq \theta_1$  ja  $\tau$  on teadmata.

Eeldades, et parameetri  $\theta$  väärtused  $\theta_0$  ja  $\theta_1$  (enne ja pärast muutumispunkti) on teada, lähenetakse probleemile tihti tõenäosuste suhtarvuga

$$s(x) = \ln \frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)}, \quad (2)$$

mida nimetatakse logaritmiliseks tõepärasuhteks (log-likelihood ratio) [6].

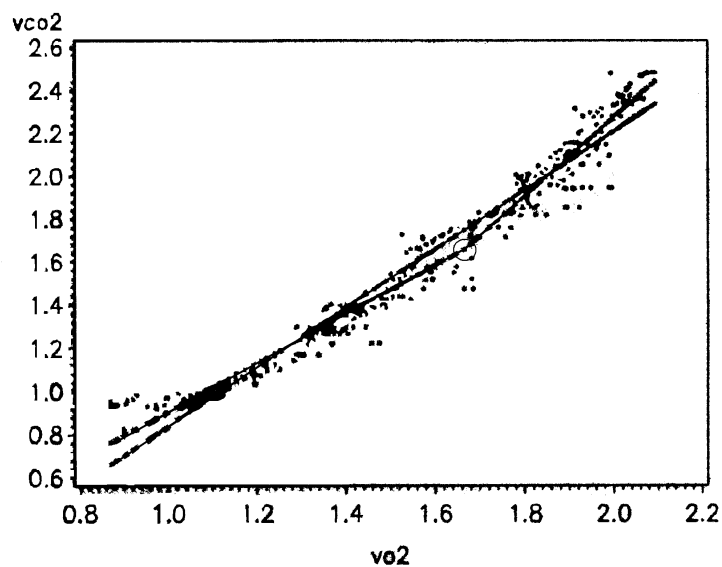
Aegridade muutumispunktide tähtsus seisnebki selles, et aegridade kirjeldamisel ei ole alati kõige täpsem ja kõige parem meetod, kus kogu vaadeldavat perioodi püütakse kirjeldada ühe arvutusfunktsiooni abil. Antud aegrida paremini iseloomustava tulemuseni võiks jõuda näiteks kahe funktsiooni abil. Sellisel juhul iseloomustaks esimene funktsioon antud protsessi kuni teatud ajahetkeni (muutumispunktini) ja sellest hetkest edasi iseloomustab antud aegrida teine funktsioon. Samas on võimalik ka olukord, kus veel parema tulemuseni jõuaksime kahe või enama muutumispunktiga.

Kui mainida muutumispunkti leidmise meetodite kasutusvaldkondi, siis esmajärjekorras tuleks mainida majandust, meditsiini, psühholoogiat, signaalitöötlust, geoloogiat ja meteoroloogiat, kuid see loetelu ei ole ammendav.

Korduvalt on uuritud näiteks seda, kuidas muutub inimese gaasivahetus pingutuse korral. Tüüpiline viis selle uurimiseks on nn. hingetõmbe-katse (breath-by-breath), kus veloergomeetritel treenivate inimeste iga hingetõmbe (mõlemad, nii sisse- kui ka väljahingatud) maht ja koostis analüüsitakse. Seejuures kannavad katsealused üldjuhul vastavaid andureid nii suus kui ninas. On ilmnunud, et üldiselt kajastub lineaarne seos sissehingatava hapniku



ja väljahingatava süsihappegaasi koguse vahel. Teatud mahu hapniku sissehingamisel hakkab aga väljahingatava süsihappegaasi maht oluliselt kiiremini tõusma. Seda punkti, kus kirjeldatud muutus aset leiab, nimetataksegi muutumispunktiks. Antud situatsiooni on kirjeldatud ka alltoodud joonisel 2. Konkreetne näide viidi läbi näitamaks, et töö intensiivsuse kasvades suureneb ka hapniku tarbimine ja sellega kaasnevalt ka süsihappegaasi tootmine. Süsihappegaasi tootmine ei ole hapniku sissehingamisega seotud aga päris lineaarselt, vaid olukorda kirjeldaks võrrandisüsteem, kuhu on sisse toodud ka muutumispunkt (vt. [3]).



**Joonis 2** Süsihappegaasi tootmise kogus ( $\dot{V}CO_2$ ) sõltuvalt sissehingatud hapniku kogusest ( $\dot{V}O_2$ ).

## 2 Muutumispunkti leidmise algoritmid

Muutumispunkti leidmiseks on palju keerukaid ja vähemkeerukaid algoritme. Eelpool nimetatud logaritmilise tõepära suhtel põhineb näiteks Shewharti kontrollgraafikute meetod (Shewhart control charts). See meetod tugineb suuresti indikaatormuutujatele. Sarnaselt toetub kõnealusele tõepära suhtele ka liikuva keskmise algoritm (Moving average algorithm). Selle korral on määravaks statistikuks

$$g_k = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma_t s_{k-1},$$

kus  $s_k$  avaldub valemist (2) ja kaal avaldub valemist

$$\gamma_t = \alpha(1 - \alpha)^t, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Senikäsitletutest pisut enam on levinud nn. kumulatiivsete summade meetod (CUSUM algorithm), mis kujutab endast logaritmiliste tõepärasuhete kumulatiivset summade jada:

$$S_k = \sum_{t=1}^k s_t, \quad s_t = \ln \frac{p_{\theta_1}(x_t)}{p_{\theta_0}(x_t)}.$$

Eeldades, et  $\theta_1 \geq \theta_0$ , on tüüpiline  $S_k$  kõver selline, et enne muutumispunkti see langeb ja pärast muutumispunkti hakkab taas tõusma.

Ülalpool mainitud muutumispunkti leidmise võimalused on tüüpilised seismoloogias, meditsiinis, geoloogias, kvaliteedi kontrollimisel jne. Kuid sageli tuleb ette ka seda, et muutus tuleb avastada ajaliselt piiritletud perioodi jooksul. Näitena võib tuua sinusoidaalsed signaalid raadiosides, impulsi tabamised telekommunikatsioonis, kuid ka näiteks akustiliste võngete puhul. Sellisel juhul muudetakse pisut muutumispunkti leidumise hüpoteesi. Vaadates endiselt juhuslikke suurusi  $x_t$  ajahetkel  $t \in [0, T]$ :

$$H_0 : \theta = \theta_0, \text{ iga } t \in [0, T],$$

ja

$$H_1 : \begin{cases} \theta = \theta_0, & \text{kui } t \in [0, \tau] \cup (\tau + R, T), \\ \theta = \theta_1, & \text{kui } t \in (\tau, \tau + R], \end{cases}$$

kus  $\theta_0 \neq \theta_1$  ja muutumispunkt  $\tau$  ning signaali kestvus  $R$  on tundmatud. [6] Tuleb aga mainida, et enne konkreetse muutumispunkti leidmist aegreast, tuleb siiski esmalt tuvastada, kas muutumispunkt üldse olemas on. Et aga muutumispunkt oma iseloomult ei ole aga väga range definitsiooniga ja sõltub suuresti sellest, kui suurt muutust silmas peetakse, siis on muutumispunkti

leidjal suuresti otsustada, kas antud aegreas leiduvat muutust üldse pidada piisavalt tähelepanuväärseks.

Järgnevalt on lähemalt tutvustatud kolme suhteliselt lihtsat algoritmi muutumispunkti leidmiseks. Nende algoritmide põhjal on järgnevas peatükis koostatud reaalsed programmilõigud, mis väljastavad sobivamad muutumispunktid ja koostavad ka vastavad joonised.

## 2.1 Läheneemisviis tõepärameetodiga

Vaatluse all on seosega (1) kirjeldatud olukord, mille korral saab eeldada, et

$$Y_t = \begin{cases} E[Y_t] = \theta_0(t), & \text{kui } t = 1, \dots, \tau; \\ E[Y_t] = \theta_1(t), & \text{kui } t = \tau + 1, \dots, T, \end{cases} \quad (3)$$

kus  $Y_t$  on normaaljaotusega ja ühikulise dispersiooniga. Me saame defineerida null-hüpoteesi selle kohta, et olulist muutust ei toimu, seega puudub ka muutumispunkt. Sellisel juhul kehtivad samaväärsed võrdused  $\tau = T$  ja  $\theta_0 = \theta_1$ . Siit saame ka nullhüpoteesi kummutamiseks vajalikud võrratused, mis viitavad siiski muutuse toimumisele:  $1 \leq \tau < T$  ja  $\theta_0 \neq \theta_1$ . Ehk kokkuvõtlikult saame hüpoteesipaarid:

$$\begin{matrix} H_0 : \tau = T \\ H_1 : 1 \leq \tau < T \end{matrix} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} H_0 : \theta_0 = \theta_1 \\ H_1 : \theta_0 \neq \theta_1 \end{cases}.$$

Kui avaldada  $S_t = Y_1 + \dots + Y_t$ , siis tõepärasuhete statistik, mille abil saab muutust, või selle puudumist kontrollida, avaldub valemiga

$$M = \max_{1 \leq t < T} \frac{(S_t - \frac{tS_T}{T})^2}{t(1 - \frac{t}{T})}. \quad (4)$$

Eeldades, et meie vaatlused on normaaljaotusega, kuid dispersioon on teadmata ja konstantne, jagatakse statistik  $M$  läbi valimi dispersiooniga. Nullhüpotees  $H_0$  lükatakse ümber, kui statistik (4) on märkimisväärselt suur. Seejuures muutumispunkti hinnanguks  $\hat{\tau}$  on indeksi  $t$  väärtus, miks maksimiseerib statistiku. Maksimiseerimistehe valemis (4) on samaväärne tavalise kahe valimi  $Y_1, \dots, Y_t$  ja  $Y_{t+1}, \dots, Y_T$  keskväärtuste võrdlemisega ühikulise dispersiooni korral. Hawkins leidis ka mooduse statistiku (4) arvutamiseks, iteratsioonimeetodil mis on tõhus küll üksnes piiratud valimimahu ( $T \leq 50$ ) korral.

Mittenormaaljaotusega andmete osas on edusammud muutumispunkti tuvastamiseks oluliselt väiksemad. Küll aga on Pettitt välja töötanud meetodi statistiku sõltumatute binaarsete andmete korral, kus  $Y_i$  väärtusteks saavad

olla vaid 0 ja 1. Kõnealune muutumise testimiseks sobiv statistik avaldub järgnevalt:

$$K = \max_{1 \leq t < T} T \left| S_t - \frac{tS_T}{T} \right|. \quad (5)$$

Sellisel juhul on ka mudel avaldatav lihtsamal kujul avaldudes süsteemina

$$\begin{cases} P(Y_t = 1) = 1 - P(Y_t = 0) = \theta_0, & t = 1, \dots, \tau, \\ P(Y_t = 1) = 1 - P(Y_t = 0) = \theta_1, & t = \tau + 1, \dots, T. \end{cases}$$

Siin  $P$  tähistab selle järel sulgudes oleva sündmuse tõenäosust.

See ja mittenormaaljaotusega juht pakuvad aga käesoleva töö puhul vähem huvi, sest uuritavate andmete puhul keskendutakse siiski ligikaudu normaaljaotusega andmetele. Soovi korral on siin kirjeldatud ja binaarsete andmetega juhu kohta võimalik täpsemalt lugeda Statistika entsüklopeediast [7].

## 2.2 Läheneemisviis mitteparameetriliselt

Et alltoodud peatüki mõistmisel ei tekiks arusaamatusi, olgu sõnastatud kaks definitsiooni:

**Definitsioon 3** *Valimi astakuks nimetatakse konkreetse vaatlustulemuse järjekorranumbrit variatsioonreas. Kui valimis on mitu võrdset väärtust loetakse nende ühiseks astakuks vastavate järjekorranumbrite aritmeetiline keskmine.*

**Definitsioon 4** *Variatsioonreaks nimetatakse mittekahanevalt järjestatud valimit.*

Muutuse kontrollimiseks ehk nullhüpoteesi  $H_0$  testimiseks on välja pakutud mitmeid erinevaid meetodeid, kus kasutatakse astakuid. Olgu  $Y_t$  juhusliku suuruse  $y$  jaotusfunktsioon järgmine:

$$\begin{cases} F_0(y), & t = 1, \dots, \tau; \\ F_1(y), & t = \tau + 1, \dots, T. \end{cases}$$

Seejuures nn. mittemuutumishüpotees  $H_0$  vastab võrdusele  $\tau = T$  ehk  $F_0(y) = F_1(y)$  ja sisukas hüpotees võrratusele  $1 \leq \tau < T$  või  $F_0(y) \neq F_1(y)$ . Mann-Whitney-Wilcoxon'i kahe valimi astakute summa statistik  $W$  defineeritakse järgnevalt. Olgu antud kaks aegrida  $X_1, \dots, X_n$  ja  $Y_1, \dots, Y_m$  mis ühendatakse üheks valimiks valimimahuga  $N = (n+m)$ . Olgu  $r_i$  vaatluse  $X_i$  astak kombineeritud valimis ja olgu  $r_1$  seejuures väikseim astak selles valimis. Siis

$$W = \sum_{i=1}^n r_i,$$

mis on tunnuse  $X$  väärtuste astakute summa. Statistikut  $W$  kutsutakse Mann-Whitney-Wilcoxononi statistikuks. Olgu  $W_t$  Mann-Whitney-Wilcoxononi statistik kahe valimi korral, milleks on  $Y_1, \dots, Y_t$  ja  $Y_{t+1}, \dots, Y_T$ . Olgu  $\mu_t$  ja  $\sigma_t^2$  nullhüpoteesi korral vastavalt  $W_t$  keskmine ja dispersioon. Sellisel juhul soovitasid Sen ja Srivastava 1975. aastal nullhüpoteesi kummutamiseks kasutada statistikut

$$SS_T = \max_{1 \leq t < T} \left| \frac{W_t - \mu_t}{\sigma_t} \right| \quad (6)$$

ja Pettitt 1979. aastal statistikut

$$J_T = \max_{1 \leq t < T} |W_t - \mu_t|. \quad (7)$$

Seejuures

$$\frac{W_t - \mu_t}{\sigma_t}$$

on standardiseeritud Mann-Whitney-Wilcoxononi statistik nullhüpoteesi  $F_0(y) = F_1(y)$  kontrollimiseks võrduse  $\tau = T$  korral ja  $SS_T$  on antud avaldise absoluutväärtuse maksimum üle parameetri  $t$ . Seejuures  $t$  väärtus, mis maksimiseerib antud statistiku, ongi muutumispunkti hinnanguks  $\hat{\tau}$ . On märgatav, et statistik  $SS_T$  (6) sarnaneb statistikule  $M$  (4), kuid kasutab astakuid. Statistiku  $SS_T$  arvutamisel on vaja statistiku  $W_t$  keskvaartust  $\mu_t$  ja dispersiooni  $\sigma_t^2$ . D'Abrera ja Lehmanni 1975. aasta raamatu põhjal on Mann-Whitney-Wilcoxononi statistiku keskvaartus

$$EW = \frac{1}{2}(m + n + 1)$$

ja dispersioon

$$DW = \frac{1}{12}nm(n + m + 1).$$

Samas leidis 1979. aastal Pettitt avaldise  $(W_t - \mu_t)$  jaoks suuruste

$$R_t - \frac{T + 1}{2}$$

abil, kus  $R_t$  on  $Y_t$  astak vaatluses  $Y_1, \dots, Y_T$ . Jada

$$T^{-1} \sqrt{\frac{3}{T+1}} J_T$$

koondub nullhüpoteesi kehtimisel Kolmogorov-Smirnovi kooskõlastatistiku  $\sqrt{n}D$  jaotuseks, kuigi aeglaselt. Statistiku  $SS_T$  asümptootiline jaotus on aga teadmata.

Loomulikke *ad hoc* muutumispunkti hinnanguid on soovitatud statistikute põhjal, nagu  $J_T$ , kus avaldist  $|W_t - \mu_t|$  maksimiseeriv indeks  $t$  on muutumispunkti hinnanguks  $\hat{\tau}$ . Suuruse  $W_t - \mu_t$  graafik  $t$  funktsioonina on aga kasulik vahend muutumispunkti avastamiseks *ad hoc* meetodil [5].

### 2.3 Muutumispunkti leidmine kumulatiivsete jääkliikmete abil

Püstitame hüpoteesi, et aegrea ühe osa, näiteks lõpu, keskmine väärtus  $\mu_2$  võib olla erinev ülejäänud aegrea keskmisest  $\mu_1$ . Võetakse kasutusele mudel:

$$Y_i = \begin{cases} \mu_1 + \varepsilon_i, & i \leq \tau, \\ \mu_2 + \varepsilon_i, & i > \tau, \end{cases}$$

kus  $\tau$  on oletatav muutumispunkt ja  $\varepsilon_i$  juhuslik viga. Esmajärjekorras tuleks testida hüpoteesi  $\mu_1 = \mu_2$ . Kui see kummutatakse, võib järgnevalt tegeleda muutumispunkti  $\tau$  leidmisega. Üheks lihtsamaks vahendiks järgneva analüüsi tegemisel on nn. kumulatiivsete jääkliikmete rida, mis avaldub kujul:

$$S_t = \sum_{i=1}^t (Y_i - \bar{Y}), \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (8)$$

kus  $\bar{X}$  on valimi keskmine. Kui  $\mu_1 < \mu_2$ , võib oodata, et vaatluste jääkliikmed enne muutumist on negatiivsed ja pärast muutumispunkti positiivsed. Negatiivsete jääkliikmete kumulatsioon enne muutumispunkti peaks välja tooma  $S_t$  graafikul laskuva tendentsi. Pärast keskväärtuse muutumist kutsuvad positiivsed jäägid esile aga kõvera tõusva tendentsi. Kui  $\mu_1 > \mu_2$ , siis on graafiku kuju vastupidine, st algul on tõus positiivne ja pärast negatiivne. Muutumispunkti analüüs sellisena, nagu ta siin on kirjeldatav, on kasutatav tagantjärele ajaliselt järjestatud andmestiku korral. Seda tuleb eristada muutuste reaajalistest avastamisest, kus muudatuste avastamiseks langetatakse otsus andmete laekumise käigus. See teema kuulub järjendanalüüsi valdkonda. Siinkohal kirjeldatud muutumispunkti analüüsi lähtekohaks võib pidada Chernoffi ja Zacksi 1963. a. artiklit. Eeldades, et vead on sõltumatud ühesuguse normaaljaotusega juhuslikud suurused, tuletasid nad teststatistikust nullhüpoteesi  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  jaoks Bayesi teooria alusel. Varsti pöörati aga peamine tähelepanu tõepärasuhte kasutamisele testimisel ja suurima tõepära meetodile. Suurima tõepärasuhte alusel saadud muutumispunkti hinnang  $\hat{\tau}$  on arv  $k$ , mis maksimiseerib järgneva suhte

$$D_{\hat{\tau}} = \max_{1 \leq t < T} \frac{|S_t|}{[t(T-t)]^{\frac{1}{2}}}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (9)$$

### 3 Muutumispunkti leidmise programm

Alljärgnevalt on toodud eelmises peatükis kirjeldatud muutumispunkti leidmise algoritme realiseeriv programm statistikapaketis *R*<sup>1</sup>.

```
#Andmete sisestamine, kus ette tuleb anda aegrida, mille
elemente eraldab sümbol "," ja komakohti sümbol "."
```

```
y= c(andmestik)
```

```
T=length(y)
```

```
#Statistiku M leidmine vastavalt valemile (4)
```

```
St=rep(NA,T)
```

```
St[1]=y[1]
```

```
for(i in 2:T)
```

```
St[i]=St[i-1]+y[i]
```

```
ST=St[T]
```

```
m=rep(NA,T-1)
```

```
for(t in 1:(T-1))
```

```
m[t]=((St[t]-t*ST/T)^2)/(t*(1-t/T))
```

```
M=max(m)
```

```
M
```

```
Mindeks=0
```

```
for(i in 1:(T-1))
```

```
if(m[i]==M)
```

```
Mindeks=i
```

```
Mindeks
```

```
#Statistiku SST leidmine vastavalt valemile (6)
```

```
astak=rank(y)
```

```
W=rep(NA,T)
```

---

<sup>1</sup>*R* on vabavaraline keskkond ja keel statistiliste arvutuste ja graafikute tegemiseks. *R* pakub laias valikus erinevaid statistilisi tööriistu, näiteks lineaarset ja mittelineaarset modelleerimist, aegridade analüüsimist, erinevaid klassifikatsioone, statistilisi teste jne. *R* ühildub Linuxi, Mac OS X ja Windowsi operatsioonisüsteemidega. *R* kohta saab lisainformatsiooni ja seda saab alla laadida aadressilt [www.r-project.org](http://www.r-project.org)

```

W[1]=astak[1]
for(i in 2:T)
W[i]=W[i-1]+astak[i]

mu=rep(NA,T)
for(t in 1:T)
mu[t]=t*(T+1)/2

disp=rep(NA,T)
for(t in 1:T)
disp[t]=t*(T-t)*(T+1)/12

st=sqrt(disp)
st
SSt=rep(NA,(T-1))
for(i in 1:(T-1))
SSt[i]=abs((W[i]-mu[i])/(st[i]))

SST=max(SSt)
SST
SSTindeks=0
for(i in 1:(T-1))
if(SSt[i]==SST)
SSTindeks=i

SSTindeks

#Jääkliikme leidmine vastavalt valemile (8)
T=length(y)
yk=mean(y)
jaak=y-yk
kumuljaak=rep(NA,T)
for(i in 2:T)
kumuljaak[1]=jaak[1]
kumuljaak[i]=kumuljaak[i-1]+jaak[i]

kumuljaak
#Joonistatakse kumulatiivsete jääkide graafik
plot(kumuljaak, type="l", xlab="indeks", ylab="kumulatiivne jääk")

```



```

#Muutumispunkti leidmine kumulatiivsete jääkliikmetega
vastavalt valemile (9)
Dt=rep(NA,(T-1))
for(t in 1:(T-1))
Dt[t]=abs(kumuljaak[t])/sqrt(t*(T-t))

DT=max(Dt)
DT
DTindeks=0
for(i in 1:(T-1))
if(Dt[i]==DT)
DTindeks=i

DTindeks

#Väljastatakse uuesti kõik otsitud statistikud ja indeksid
m
M
Mindeks
SSt
SST
SSTindeks
Dt
DT
DTindeks

# manuaalselt sisestatav sobivaim punkt muutumispunktiks
# valitud eelnevast kolmest

indeks= i_nr

# genereeritakse indekste jada
indeksjada=seq(1,T,1)
# genereeritakse indekste jada muutumispunktini
indeksjada1=seq(1,indeks,1)
# genereeritakse indekste jada muutumispunktist lõpuni
indeksjada2=rep(NA,T)
for(i in (indeks+1):T)
indeksjada2[i]=indeksjada[i]

# aegrida jaotatakse kaheks iseseisvaks aegreaks y1 ja y2

```

```

y1=rep(NA,indeks)
for(i in 1:indeks)
y1[i]=y[i]

y2=rep(NA,T)
for(i in (indeks+1):T)
y2[i]=y[i]

# genereeritakse aegridasid y, y1 ja y2
# iseloomustavad regressioonsirge
joon=coef(lm(y~indeksjada))[2]*indeksjada
+ coef(lm(y~indeksjada))[1]
joon1=coef(lm(y1~indeksjada1))[2]*indeksjada1
+ coef(lm(y1~indeksjada1))[1]
joon2=coef(lm(y2~indeksjada2))[2]*indeksjada2
+ coef(lm(y2~indeksjada2))[1]

# aegridade y1 ja y2 põhjal moodustatakse uus iseloomustav joon
joonuus=rep(NA,T)
for(i in 1:indeks)
joonuus[i]=joon1[i]

for(i in (indeks+1):T)
joonuus[i]=joon2[i]

# analüüsitakse, kuidas vastavad jooned iseloomustavad aegridu
summary(lm(y~indeksjada))
anova(lm(y~indeksjada))
summary(lm(y1~indeksjada1))
anova(lm(y1~indeksjada1))
summary(lm(y2~indeksjada2))
anova(lm(y2~indeksjada2))
cor(y,joonuus)

# väljastatakse joonis, kus on märgid aegrida, seda iseloomustav
plot(y, pch=".", xlab="indeks")
# joonisele lisatakse regressioonsirge ja uus iseloomustav joon
lines(joon1)
lines(joon2, lty=1)
lines(joon, lty=2)
legend(locator(2), c("uus mudel", "regressioonsirge"), lty=1:2)

```

## 4 Numbrilised eksperimendid

Spordimeditšiinis on olulisel kohal laktaadi koguse jälgimine veres. Laktaadi ehk piimhappe puhul on tegemist sellise ainega, mis tekib lihastes anaeroobse ainevahetuse käigus. Sellise ainevahetuse käigus kulgeb rakkudes energia vabanemine hapniku osavõtuta. Laktaadi kogunemisel lihastesse takistab see ainevahetust, mis on samas kui omamoodi regulaatoriks ülepingutuse eest. Kui koormust organismile suurendada, kasvab ka südamelöökide arv. Loomulikult ei saa pulsisagedus kasvada piiramatult ja see ei ületa maksimaalset südamelöögisagedust<sup>2</sup> Teatud tasemest alates ei suuda organism enam piisavalt kiiresti laktaati lagundada ja kulutatavast energiast enamus saadakse anaeroobse ainevahetuse kaudu. [12] Laktaadi kontsentratsioon tõuseb organismis siis üle nelja millimooli liitri vere kohta. Organismi kohta, mis on jõudnud kirjeldatud olukorda, öeldakse, et ta on ületanud anaeroobse läve. Kui organism saavutab füsioloogilistel põhjustel anaeroobse läve kiiremini või aeglasemini, võib see viidata ka sellele, kas sportlasel on rohkem eeldusi vastavalt sprindi-aladele või vastupidamist nõudvatele aladele.

Kirjeldatud põhjusel ongi sportlaste füüsilise vormi jälgimisel küllaltki tähtis osa pingutuse korral jälgida laktaadi konsentratsiooni suurenemiskiirust. Nii viiakse mitmetes spordiklubides läbi igaaastaseid kõiki sportlasi hõlmavaid teste. Esindusvõistlejad läbivad vormi kontrollimiseks testi isegi mitu korda aastas.

Üks moodus sellise spordimeditšiinilise koormustesti läbiviimiseks toimub veloergomeetritega. Testi otsene eesmärk on mõõta organismi koormustaluvuse (töövõime) ja töö efektiivsuse (maksimaalse hapnikutarbimise<sup>3</sup>) teadasaamiseks, kusjuures põhikoormus antakse jalalihastele. Samas on üpris levinud ka antud testi käigus laktaadi kontsentratsiooni määramine veres. Käesoleva töö tarvis viidi üks konkreetne katse läbi 11. aprillil 2006. aastal Tartus, Tamme staadionil. Testimisobjektiks oli 19 aastane jalgpallur. Testi täpsem kirjeldus on järgmine:

---

<sup>2</sup>Maksimaalne südamelöögisagedus (HRmax, SLSmax) – organismi poolt saavutatav maksimaalne südamelöögisagedus, mis saavutatakse ilma patoloogiliste muutusteta organismis. Maksimaalne südamelöögisagedus tehakse kindlaks maksimaalse pingutuse testi käigus. Arvestusliku maksimaalse südamelöögisageduse võib leida ka valemi 220-vanus abil. Maksimaalne südamelöögisagedus reeglina väheneb vanusega. Tegelik südamelöögisagedus võib ületada ka maksimaalse südamelöögisageduse, sel juhul on tegemist tahhükardiaga, mis viitab südame ebanormaalsele tööle. Südame löögisagedus üle 200 löögi minutis on vereringe seisukohalt ebaefektiivne, sest nii suure sageduse juures ei jõua vatsakesed löökide vahel verega täielikult täituda. [12]

<sup>3</sup>Maksimaalne hapnikutarbimine ( $\dot{V}O_2max$ ) – maksimaalne hapniku hulk, mida organism on võimeline omastama. Mõõdetakse liitrites minutis või milliliitrites minutis kilogrammi kohta (ml/min/kg). [12]

Pulsi mõõtmiseks paigutati katse eel sportlase rinna ümber Polar Electro OY poolt valmistatud pulsi mõõtja, mis väljastas testitava sportlase pulsisageduse iga viie sekundi tagant. Testitav pidi sõitma ühtlase tempoga velogeromeetril. Iga minuti tagant suurendati koormust 25 vati võrra. Shvartzi ja Karu poolt 2003. aastal välja töötatud metoodika alusel tuvastati, et antud sportlase maksimaalne hapniku tarbimine oli *väga heal* tasemel. Lisaks pulsi sagedusele mõõdeti iga kahe minuti tagant parema käe neljanda sõrme otsast laktaadi kontsentratsiooni veres. Laktaadi mõõtmise eesmärgiks oli koostada kõver, millelt leitava muutumispunkti abil saaks tuvastada, kus muutub laktaadi ümbertöötlemise võimekus.

Et parimal moel tuvastada, kus toimub oluline muutus laktaadi kontsentratsiooni muutumisel, oleks vaja sooritada võimalikult palju mõõtmisi. Taolisi eksperimente, kus mõõdetakse erinevate ainete kontsentratsioone veres, nende koguse olulist muutust, samuti ka erinevate ainete koguse sõltuvust sellest, palju on teisi aineid on läbi viidud ohtralt. Sealhulgas on uuritud näiteks hematokriti (erütrotsüütide ja vereplasma suhe) taset, hemoglobiini kontsentratsiooni, erütrotsüütide arvu, leukotsüütide arvu, naatrium- ja kaaliumioodide ning kreatiini kontsentratsiooni veres. [8] [14] [13]

Mainitud ülitäpsete katsete uurimistulemuste probleemiks on aga see, et need on tohutult kallid ning suhteliselt keerulise läbiviimiskorraga. Seega ei ole need kättesaadavad spordiklubidele, mille rahalised võimalused on piiratud, kuigi neile antud katsetulemused on olulised. Samas ei ole spordiklubidel tarvidust, et need andmed peaksid olema väga täpsed. Erinevates rahvusvahelistes teadusajakirjades on püütud tõestada, et südamerütmi ja selle muutumise ning laktaadi kontsentratsiooni vahel võib leiduda tugev seos [2]. Eeldusel, et selline seos eksisteerib on püütud koostada erinevaid algoritme laktaaditaseme väljaarvutamiseks. Perioodi 1995-2000 käigus töötasid professor Toomas Karu ja programmeerija Georgi Slavin asutuse Humanix Ltd juures välja rakendustarkvara nimega *Lactate*, mis võtab sisendandmeteks eelpool kirjeldatud viisil saadud pulsid. Lisaks sellele soovib programm saada ka mõnel ajahetkel mõõdetud laktaadi hulka veres. Tulemuseks väljastab programm pulsi ja laktaadi kontsentratsioonigraafiku vastavalt löökides minutites ja millimoolides liitri vere kohta. Rakendustarkvara *Lactate* töölehte on võimalik näha joonisel 3 (Lisa 1). Laktaadikõvera moodustamiseks on seejuures kasutatud tüüpilisi laktaadikõvera käitumisiseärasid, mille põhjal moodustatud diferentsiaalvõrranditele on vaja ette anda vastavad parameetrid. Paraku ei olnud aga võimalik arvutustes kasutatavaid võrrandeid teada saada. Küsimus, mis vajab aga vastamist, on selles, kas pulsi ja laktaadikõverates eksisteerivad muutumispunktid ja kas need asuvad samas kohas. Kui need kokku ei lange, tuleks sellele leida ka põhjus.

Selle kontrollimiseks on kasutatud kirjeldatud 11. aprillil tehtud katsetule-

musi.

Lähtuvalt sellest, et antud katses tõsteti koormust organismile ühtlaste vaheagadega (iga minuti tagant) ja koormuse suurendamine toimus konstantsete väärtuste kaupa (25 vatti võrra), võib eeldada, et pulss ja laktaadi kontsentratsioon suurenevad lineaarselt. Sellest lähtuvalt ongi püütud edaspidi kirjeldada vaatlusi lineaarsete seoste abil. Eelpool kirjeldatud anaeroobse läve ületamisel, pulsi sagedust kirjeldava sirge tõus peaks aga vähendama ja laktaadi kontsentratsiooni kirjeldav sirge tõus suurenema [2]. Sellest lähtuvalt on püütud saadud tulemusi iseloomustada ka kahe sirge abil, millest esimene iseloomustaks olukorda kuni muutumispunktini ja teine pärast muutumispunkti.

Iseloomustavate statistikutena on uuritud determinatsioonikordajat  $R^2$ , mille väärtus näitab, kui suure osa sõltuva tunnuse hajuvusest kirjeldab mudel. Sellega on uuritud, kuidas kirjeldab mõõdetud vaatlustulemusi ettepakutud mudel kui kogu vaatlusperioodi vaadelda ilma muutumispunktita ja kuidas kirjeldavad vaatlustulemusi enne ja pärast muutumispunkti nende osade kirjeldamiseks pakutud lineaarsed mudelid. Moodustades kahest viimasest mudeli, mis omandab teatud hetkeni väärtusi ühest mudelist ja pärast seda teisest, saadakse uus mudel. Selle ja mõõdetud tulemuste vahel saadud Peasoni korrelatsioonikordaja ruutu on kõrvutatud vaatlust tervikuna käsitleva lineaarse mudeli determinatsioonikordajaga  $R^2$ . Mudelite täpsemaks analüüsiks on uuritud ka jääkhajuvust ( $SSE$ ). Kui muutumispunkti sissetoomine on otstarbekas, siis on selle mudeli, mis kirjeldab vaatlust enne muutumispunkti ja teise mudeli, mis kirjeldab vaatlust pärast muutumispunkti jääkhajuvused kokku väiksemad kui mudeli jääkhajuvus, mis kirjeldab kogu vaatlust ühe lineaarse mudeliga.

Kuna pulsi muutumise juures pakub meile vaid huvi see osa, kus katsealusele rakendati koormust ja mitte taastumisosa ning et ka viimane laktaadi kontsentratsiooni mõõtmise toimus viimasel koormuse rakendamise hetkel, siis on edaspidi uuritud ja kirjeldatud aegridasid testi algusest kuni koormuse rakendamise lõpuni ehk 11. minutini. Seega kestis testperiood 660 sekundit. See on ka hetk, kus pulss saavutas oma kõrgeima väärtuse üle 13 minuti kestnud vaatlusperioodi jooksul. Siis lõi testija süda 135 lööki minutis. Esmalt on uuritud pulsi muutumist. Empiirilise vaatluse käigus selgus, pulsi graafiku lõpuosa on algusega võrreldes laugema tõusuga. Seega võis oletada, et muutumispunkt leidub. Koostatud programmist selgus, et sobilikemaks muutumispunktideks sobiksid aegrea 76 või 77 kohal olevad elemendid, ehk ajahetked, mil eksperiment oli kestnud 375 või 380 sekundit. Kumulatiivse jääkliikme (valem 8) graafik on seejuures toodud ka Joonisel 10 [Lisa 4.1.2.]. Graafikult on näha, jääkliimete summa graafik on langeva tendentsiga kuni 77. indeksini ja pärast seda hakkab aegamööda tõusma. See viitab sel-

lele, et pulssi võiks kirjeldada kahes osas, kusjuures teise osa keskväärtus on kõrgem esimesest, mis on loogiline ka arvestades katse sisu. Et kaks statistikut kolmest pakkusid sobivamaks muutumispunkti asukohaks ajahetke 380 sekundit eksperimendi algusest, siis lähtutakse edaspidistes arvutustes sell-est.

Kui vaadata kogu aegrida ühe tervikuna, siis saadud regressioonsirge deter- minatsioonikordaja  $R^2$  väärtus on 0.948. Seega antud mudel kirjeldab 94.8% sõltuva tunnuse (pulsi sageduse) hajuvusest. Kui vaadata edasi mudelit muu- tumispunktiga, siis selgub, et muutumispunktini mudelit kirjeldava regre- sioonsirge kirjeldavus on 0.802 ja pärast muutumispunkti 0.898. Pannes vii- mati kirjeldatud kaks sirget kokku, saame mudeli, mille korrellatsioonikor- daja ruut on 0.950. Seega võib öelda, et muutumispunkti sissetoomine an- tud andmestiku iseloomustamiseks parandab siiski antud mudeli kirjeldavust. Ka jääkhajuvuste analüüsimine viitab muutumispunkti kasutamise otstar- bekusele. Ilma muutumispunktita lineaarse mudeli jääkhajuvus on 2562. Enne ja pärast muutumispunkti aegridu iseloomustavate mudelite jääkha- juvused on kokku 2473.8. Koostatud mudelid on toodud ära ka lisas oleval joonisel 11. Lisas 4.1.1 on ära toodud ka programmilõigu väljund, milles ka- jastub mudeli analüüs.

Et ka laktaadi kontsentratsiooni muutumine ei näi empiirilise vaatluse järgi ühtlane ja eksperimendi lõpu osas hakkab kontsentratsioon tõusma kiiremini, siis on alust arvata, et ka laktaadi kontsentratsiooni kirjeldaval aegreal eksis- teerib muutumispunkt. Järgnevalt testitaksegi, milliseid ajahetki pakutakse muutumispunktideks, kui aegrida iseloomustab laktaadi kontsentratsiooni veres. Siinkohal alustatakse olukorrast, kus rakendustarkvarale *Lactate* an- takse ette vaid üks punkt, millal laktaadi kontsentratsiooni määrati. Et pro- gramm nõuab, et laktaati oleks mõõdetud kindlasti maksimaalse pingutuse korral, määrati vastav näitaja 11. minutil. Rakendustarkvara *Lactate* poolt genereeritud laktaadi kontsentratsiooni kõver on toodud joonisel 4 (Lisa 3.1.) ja vastavad arvud lisas 3.2.1. Saadud andmete põhjal saadi sobivamate muu- tumispunktideks indeksid 13 ja 16, mis viitavad ajahetkedele, mil katse al- gusest oli möödunud vastavalt 180 ja 225 sekundit. Et taaskord olid kaks statistikut kolmandast erineval arvamusel, siis on mudelid koostatud lähtu- valt ajahetkest, mil eksperimendi algusest oli möödunud 180 sekundit. Selle pakkusid välja statistikud  $M$  ja  $D_{\hat{\tau}}$ . Ilmnes, et kui kogu katseperioodi peaks iseloomustama üks regresioonsirge, siis oleks selle kirjeldavus 0.674. Sirge jääkhajuvuseks on sellisel juhul 0.452. Kui otsitaks iseloomustavat sirget vaid muutumispunktini, siis oleks see selle kirjeldavus olnud antud juhul 0.536. Pärast muutumispunkti oleks see number olnud aga vaid 0.341. Vastavate regresioonsirgete jääkhajuvused on vastavalt 0.096 ja 0.260, mis kokkuliide- tuna annavad tulemuseks 0.357, mis jääb 0.095 võrra väiksemaks kogu prot-

sessi iseloomustava sirge jääkhajuvusest. Pannes protsessi algust ja lõppu iseloomustavad sirged kokku üheks mudeliks, on iseloomustava joone korrelatsioonikordaja ruut 0.743.

Kui rakendustarkvarale *Lactate* anti ette kahel ajahetkel (lisaks eelnevale ka 9. minutil) mõõdetud laktaadi kontsentratsiooni väärtused, siis oli tulemuseks täpselt samasugune graafik, kui ühe punkti ette andmisel (joonis 5, lisa 3.2.2.). Sellest lähtuvalt olid samasugused ka väljapakutavate muutumispunktide indeksid ja nende põhjal moodustatud joonte iseloomustavad parameetrid. Seepärast pole siinkohal ka seda juhtu rohkem kirjeldatud

Edasi on uuritud juhtu, kus rakendustarkvarale *Lactate* anti ette laktaadi kontsentratsiooni väärtused veres mõõdetuna kolmel erineval ajahetkel – 7, 9 ja 11 minuti möödumisel eksperimendi algusest. Saadud tulemuse põhjal (joonis 6, lisa 3.2.3.) pakuvad erinevad statistikud välja muutumispunktiks indekseid vastavalt 34, 31 ja 34. Ajahetkeni, kui testi algusest oli möödunud 495 sekundit (indeks 34), kirjeldas laktaadikõverat regresioonsirge, mille determinatsioonikordaja oli 0.643. Pärast muutumispunkti vastav näitaja mõnevõrra vähenes langedes 0.581. Pannes need mudelid aga vastavusse muutumispunkti definitsiooniga, kus muutumispunktini iseloomustab muutust üks võrrand ja pärast seda teine funktsioon, saadakse aga joon, mille korrelatsioonikordaja ruut on 0.844. See iseloomustab aga oluliselt paremini antud situatsiooni, sest kogu perioodi iseloomustava regressioonsirge kirjeldavus oli vaid 0.735. Muutumispunkti sissetoomise vajadust näitavad ka jääkhajuvused, sest kirjeldatud muutumispunktiga mudeli jääkhajuvus oli 0.164 võrra parem muutumispunktita mudeli jääkhajuvusest.

Andes mõõdetud kuuest laktaadi kontsentratsioonist ette 4 (5., 7., 9. ja 11. minutil mõõdetud), viitavad saadud tulemused (joonis 7, lisa 3.2.4.) sellele, et muutumispunkt võiks toimuda 315 või 450 sekundi möödumisel eksperimendi algusest (indeksid vastavalt 31, 22 ja 31). Võttes aluseks 31. indeksi, tuleb taaskord märkida, et muutumispunkti kaasamine parandab kirjeldavust. Ilma muutumispunktita oli determinatsioonikordaja väärtus 0.856 ja koos muutumispunktiga oli korrelatsiooni ruut 0.964, seega kasv on 0.108. Seejuures lõigud, mis on enne ja pärast muutumispunkti on kirjeldavustega vastavalt 0.874 ja 0.827. Ka jääkhajuvuse mõõtmine annab sama tulemuse, sest see vähenes 0.336 võrra langedes 0.453-lt 0.336-le.

Andes lisaks eelpool mainitud punktidele ette lisaks veel ka 3. minutil mõõdetud tulemused (joonis 8, lisa 3.2.5.), pakuvad statistikud välja täpselt samad indeksid. Seega uuriti ka siin saadud regresioonsirgete kirjeldavust võttes aluseks, et muutumispunkt võiks toimuda ajahetkel, kui katse algusest on möödunud 450 sekundit (indeks 31). Siinkohal on kogu vaatlusperioodi iseloomustava regressioonsirge jääkhajuvus 0.418 ja determinatsioonikordaja väärtus 0.861. Muutumispunktiga joone puhul võrreldavateks suurusteks vas-

tavalt 0.279 ja 0.954. Muutumispunkti eel ja järel oli  $R^2$  väärtusteks vastavalt 0.864 ja 0.830.

Lõpuks antakse rakendustarkvarale *Lactate* ette kõik kuus mõõdetud laktaadi kontsentratsiooni väärtust, mis mõõdeti – 1, 3, 5, 7, 9 ja 11 minuti möödumisel testi algusest (joonis 9, lisa 3.2.6.). Ka siin pakkusid kaks arvutatud statistikut, et muutumispunkt võiks leida aset 31. indeksi juures. Mitteparameetrilisel viisil leitud statistik  $SS_T$ , et see võiks asuda 24. indeksi ümbruses. Kuna ka eelnevalt on korduvalt muutumispunktiks pakutud 31. indeksi, jääb vaid vaadata, kas ka siin paraneb mudel kui vaadata laktaadi kontsentratsiooni muutumist muutumispunkti abil. Tõepoolest, kui otsida kogu testi iseloomustavat regreesionsirget, siis see kirjeldaks 0.804 suuruse osa laktaadi kontsentratsiooni hajuvusest. Tuues sisse muutumispunkti, on mudeli esimese osa kirjeldavus 0.694 ja pärast muutumispunkti 0.866. Vaadates aga kahte viimast sirget kokkupanduna üheks mudeliks on selle korrelatsioonikordaja ruut laktaadi kontsentratsiooniga 0.953. Muutumispunkti tähtsusele viitavad ka jääkhajuvuste võrdlused, sest saadud kaheosalise mudeli jääkhajuvus on kokku 0.396, samas kui tervet protsessi kirjeldava regreesioonsige jääkhajuvus on 0.521.

Ülalmainitud statistikute väärtusi on võimalik jälgida ka lisas 4.2.1. toodud väljundites ja kokkuvõtlikes tabelites.

Sooritatud statistilise analüüsi abil saab konkreetsete andmete põhjal teha järgnevad järeldused:

Võib öelda, et kui rakendustarkvarale *Lactate* ette anda vähemalt neljal ajahetkel mõõdetud laktaadi kontsentratsiooni väärtused, siis suudab see programm koostada kõvera, mille iseloomustamiseks sobib küllaltki hästi regreesionsirge. Samuti ilmneb, et väemalt nelja kontsentratsiooni etteandmisel genereeritud kõvera sobivaimaks muutumispunktiks pakutakse sama ajahetke. Sellest lähtuvalt võibki oletada, et laktaadi kontsentratsioonikõver saadakse alates nelja punkti etteandmisest suhteliselt sarnane ja see võiks olla ka minimaalne etteantud andmete arv.

Jääkhajuvuse vähenemine ja kirjeldavuse suurenemine igal vaadeldud juhul viitavad sellele, et kõnealuste andmete iseloomustamisel tuleks kindlasti käsitleda muutumispunkti. Konkreetsete andmete puhul ilmes, et laktaadi kontsentratsiooni muutumispunkt leidis läbiviidud katses aset 450 sekundit (indeks 31) pärast katse läbiviimise algust. Sellest lähtuvalt on kolmandas peatükis toodud programmi abil saadud väljundi põhjal võimalik koostada laktaadi kontsentratsiooni iseloomustamiseks veres kergesti interpreteeritav mudel, mis antud juhul on toodud kuuel ajahetkel määratud kontsentratsiooni etteandmisel:

$$La = \begin{cases} 2,0065 + 0,0005 \cdot t, & 0 \leq t \leq 450; \\ 1,0374 + 0,0027 \cdot t, & 451 \leq t \leq 660, \end{cases} \quad (10)$$



kus  $t$  on eksperimendi algusest kulunud aeg sekundites. Laktaadi kontsentratsioon avaldub siin millimoolides liitri vere kohta.

Järgnevalt olgu ära toodud ka analoogselt koostatud võrrandisüsteem pulsisageduse iseloomustamiseks ajas:

$$HR = \begin{cases} 73,289 + 0,096 \cdot t, & 0 \leq t \leq 380; \\ 81,057 + 0,084 \cdot t, & 381 \leq t \leq 660, \end{cases} \quad (11)$$

kus  $t$  on taaaskord eksperimendi algusest kulunud aeg ja tulemuseks on keskmine südamelööki arv minutis.

Mudelitest (11) ja (10) ning joonistelt 11 ja 13 on näha, et kui pärast muutumispunkti pulsisagedust kirjeldav regressioonsirge tõus väheneb, siis laktaadi kontsentratsiooni kirjeldav sirge tõus aga suureneb.

Jääb vaid uurida seda, kas konkreetse katse puhul kõnealused kaks muutumispunkti olid samaaegsed. Ilmneb, et pulsisageduse muutumispunkt leidis aset 380 sekundil pärast eksperimendi algust ja laktaadi kontsentratsiooni muutus toimus 450 pärast testi algust. Seega on kahe muutumispunkti vahel 70 sekundit. Esmapilgul suurena tunduv number ei olegi tegelikult väga imeks pandav, sest katsed, millele tugineb nn. ühise muutumispunktiteooria, on sooritatud vereproovidega, mis on võetud veenidest, milles igasugune vere koostise muutumised avalduvad palju kiiremini. Teisalt tuleb arvestada ka seda, et peamiselt jalalihastes tekkiva piimhappe transportiks sõrmeotstes kulub samuti aega. Keskmiselt arvestatakse vereringe ühe tsükli kestvuseks 21-23 sekundit [9]. Oluline faktor on ka see, et kuna jalgadest südamet poole kulgev veri käib läbi ka maksast, mis puhastab verd muuhulgas ka laktaadist, siis on sõrmed antud ühendi suhtes vähemtundlikumad. Seega võib oletada, et muutumispunktid leidsid aset siiski üpris samal ajal.

Selline füsioloogiliste parameetrite käitumine on kooskõlas ka teooriaga, mis väidab, et pulsisageduse ja laktaadi kontsentratsiooni muutumine on tugevalt seotud

Seega võib kokkuvõtlikult konkreetse katse põhjal öelda, et käesoleva töö tarvis läbiviidud testis toimunud füsioloogiliste muutuste kirjeldamiseks on otstarbekas kasutada muutumispunkti meetodit. Toimunud katse kinnitas ka varem püstitatud teooriat, et pulsisageduse ja laktaadi kontsentratsiooni kirjeldavate aegridade muutumispunktid leiavad aset samal ajahetkel või lähestikku.

# CHANGE POINT DETECTION IN TIME SERIES

Bachelor's thesis

LENNART KITT

## SUMMARY

The aim of the present work is to characterize time series. Among other possible ways, during last few decades it has been tried to describe time series using change point method. The change point is defined as a moment where some character of time series changes remarkably.

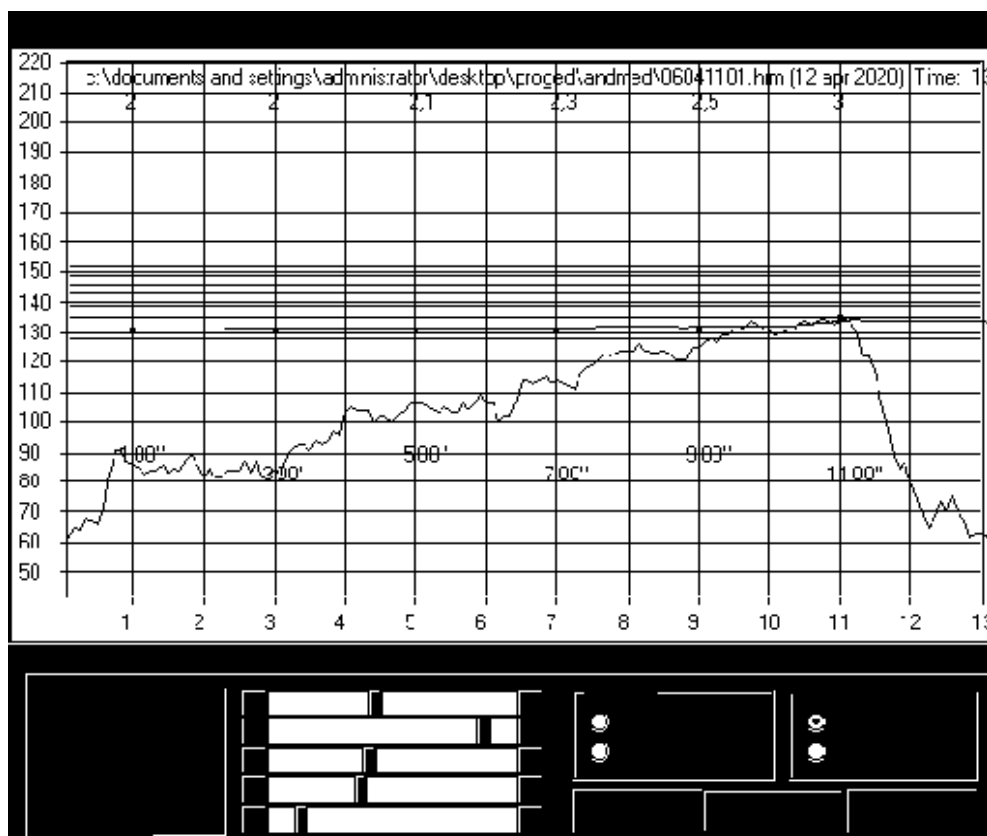
The change point is described in the first chapter. The second chapter contains introduction to far-spread algorithms of finding the change point. More has been expatiated on frequents likelihood approaches, nonparametric approach and the method of cumulative residuals. Those algorithms are used in the third chapter where a script for statistical computing program *R* is composed. The script provides suitable places for change points and generates models to describe time series and generates graphs of time series and generated models. The script also analyzes the quality of the model. In the fourth chapter the script is used on practical cases.

For this work a special test has been done: heart rate ( $b \cdot \text{min}^{-1}$ ) and concentration of lactate in blood ( $\text{mmol} \cdot \text{l}^{-1}$ ) during physical exercises was measured. The results were analyzed by computer program *Lactate* (created by prof. T. Karu and G. Slavin, 1995-2000) and different statistical tests. According to this, new models were composed to describe time series, but this time with a change point. It also came out that the discovered change points are quite concurrent. This refers to validity of the theory that says that heart rate beating and concentration of lactate in blood are connected. After the common change point heart rates do not speed up so quickly and on the other hand, the concentration of Lactate goes up faster. Since the program gives different results for Lactate concentration depending on the count of measures, according to particular test it was suggested to give for the program at least four measure points, because after that proposed time series were quite similar.

## Kasutatud kirjandus

- [1] Eesti Nõukogude Entsüklopeedia, **1**, Tallinn, (1985), lk 66.
- [2] Hofmann, P., Pokan, R., von Duvillard, S. P. *Acta Kinesiologiae Universitas Tartuensis*, **5**, Tartu, (2000), lk 23-43.
- [3] Kelly, G. E. *European Journal of Applied Physiology*, **85**, Berlin/Heidelberg, (2001), lk 586-592.
- [4] Kitt, R. Doktoritöö: *Generalised Scale-Invariance in Financial Time Series - Üldistatud mastaabi-invariantsus majanduslikes aegridades*, Tallinn, (2005), lk 41-42.
- [5] Lõhmus, P. Bakalaureusetöö: *Hüpetega aegrida*, Tartu, (2004), lk 4-19.
- [6] Moskvina, V. Doktoritöö: *Application of the Singular Spectrum Analysis for Change-Point Detection in Time Series*, Cardiff, (2001), 14-24.
- [7] Pettitt, A. N. *Encyclopedia of Statistical Science*, **Supplement**, New York, (1989), lk 26-31.
- [8] Zoladz, J. A., Szkutnik, Z., Majerczak, J. ja Duda K. *European Journal of Applied Physiology*, **78**, Berlin/Heidelberg, (1998), lk 369-377.
- [9] <http://biomedicum.ut.ee/arfs/opetamine/arstiteadus/programm/>, 22.05.2006.
- [10] <http://lepo.it.da.ut.ee/enek/AA2L7.pdf> 10.05.2006.
- [11] <http://infutik.mtk.ut.ee/www/kodu/riqk/ee/oppetoo/konspektid/>, 10.05.2006.
- [12] <http://www.hot.ee/sporter/Sonastik.html>, 03.05.2006.
- [13] <http://www.inimene.ee/>, 04.05.2006.
- [14] <http://www.kliinikum.ee/>, 04.05.2006.

## Lisa 1. Rakendustarkvara *Lactate* tööleht



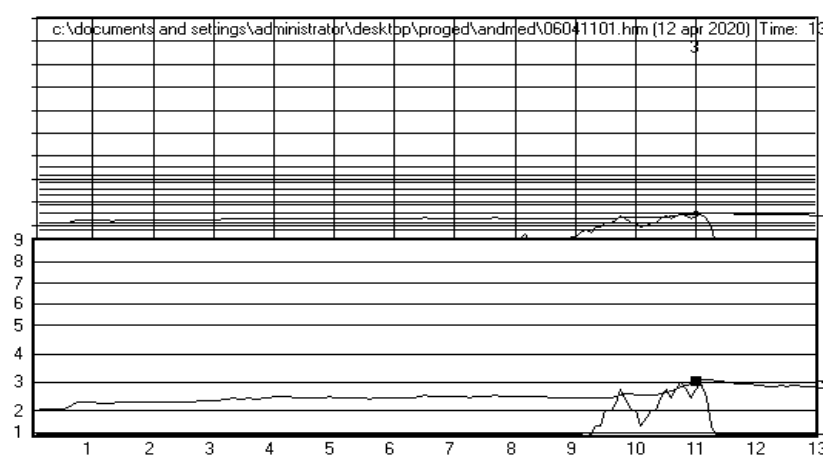
**Joonis 3** Rakendustarkvara *Lactate* tööleht, kus on näha pulsi sagedust ja kuuel ajahetkel mõõdetud laktaadi kontsentratsiooni väärtused.

## Lisa 2. Pulsi muutumine ajas

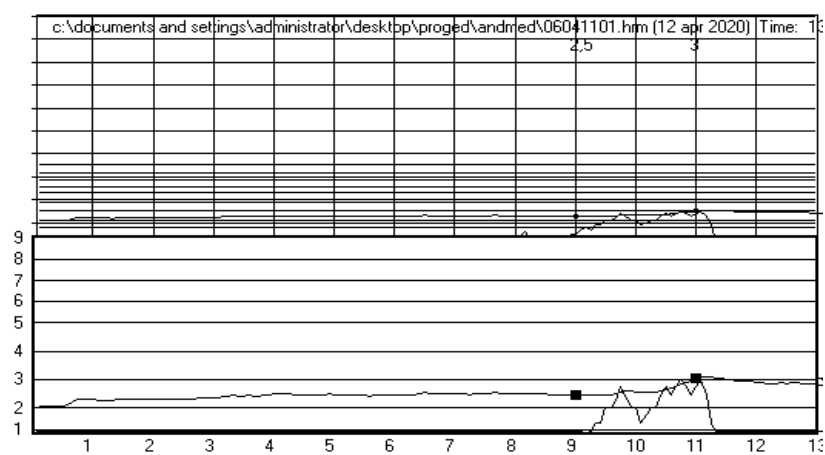
nr	Aeg	Pulss	nr	Aeg	Pulss	nr	Aeg	Pulss	nr	Aeg	Pulss
1	0	61	41	200	93	81	400	114	121	600	129
2	5	65	42	205	91	82	405	115	122	605	130
3	10	64	43	210	94	83	410	113	123	610	131
4	15	68	44	215	93	84	415	114	124	615	131
5	20	67	45	220	94	85	420	113	125	620	133
6	25	66	46	225	97	86	425	112	126	625	134
7	30	71	47	230	96	87	430	111	127	630	133
8	35	83	48	235	103	88	435	116	128	635	134
9	40	91	49	240	105	89	440	118	129	640	135
10	45	91	50	245	104	90	445	119	130	645	134
11	50	87	51	250	104	91	450	121	131	650	133
12	55	86	52	255	104	92	455	123	132	655	134
13	60	85	53	260	100	93	460	122	133	660	135
14	65	83	54	265	102	94	465	123	134	665	133
15	70	84	55	270	101	95	470	124	135	670	129
16	75	84	56	275	100	96	475	124	136	675	122
17	80	86	57	280	102	97	480	124	137	680	122
18	85	83	58	285	104	98	485	126	138	685	115
19	90	85	59	290	106	99	490	124	139	690	106
20	95	84	60	295	106	100	495	123	140	695	100
21	100	88	61	300	106	101	500	123	141	700	89
22	105	90	62	305	105	102	505	124	142	705	85
23	110	86	63	310	104	103	510	123	143	710	87
24	115	82	64	315	103	104	515	121	144	715	80
25	120	85	65	320	105	105	520	121	145	720	74
26	125	81	66	325	103	106	525	121	146	725	69
27	130	81	67	330	103	107	530	125	147	730	65
28	135	84	68	335	106	108	535	125	148	735	67
29	140	84	69	340	104	109	540	127	149	740	73
30	145	84	70	345	106	110	545	128	150	745	70
31	150	87	71	350	109	111	550	127	151	750	75
32	155	83	72	355	106	112	555	129	152	755	70
33	160	87	73	360	106	113	560	129	153	760	67
34	165	81	74	365	100	114	565	131	154	765	62
35	170	83	75	370	102	115	570	131	155	770	63
36	175	85	76	375	102	116	575	132	156	775	63
37	180	82	77	380	108	117	580	134	157	780	62
38	185	88	78	385	114	118	585	133	158	785	68
39	190	91	79	390	114	119	590	131	159	790	70
40	195	93	80	395	113	120	595	131			

## Lisa 3. Laktaadi kontsentratsiooni muutumine ajas

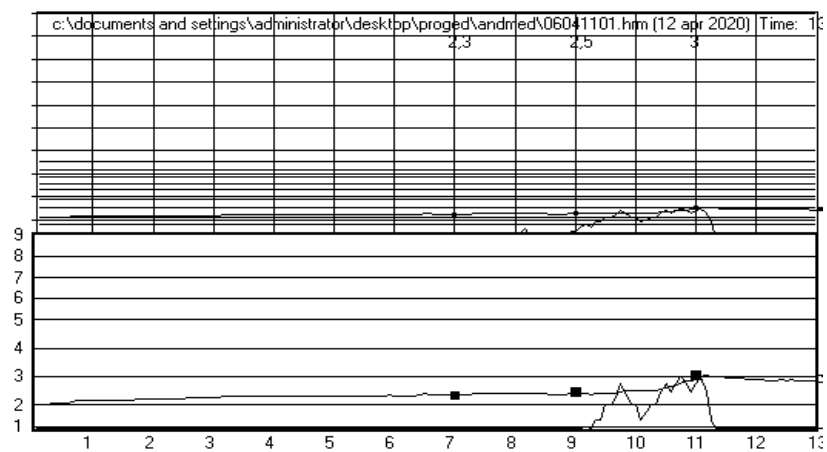
Lisa 3.1. Rakendustarkvara *Lactate* poolt genereeritud laktaadi kontsentratsiooni muutumine. Graafikud.



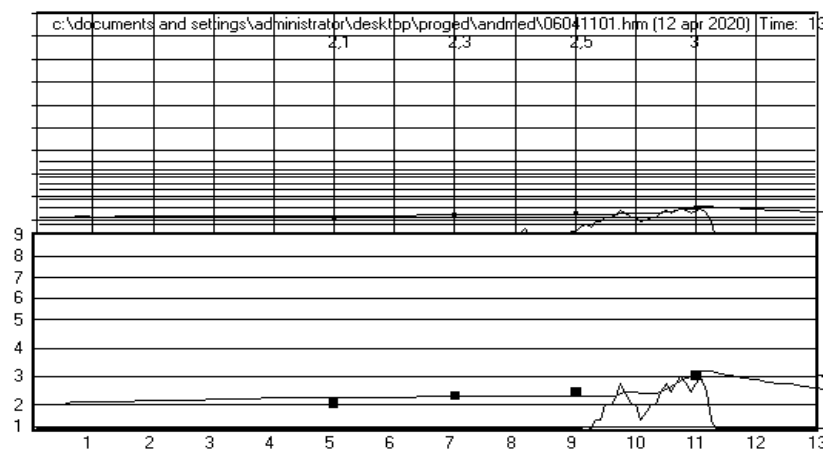
Joonis 4 Rakendustarkvara *Lactate* poolt genereeritud kõver, mis kajastab laktaadi kontsentratsiooni veres, kui laktaati on mõõdetud 1 kord.



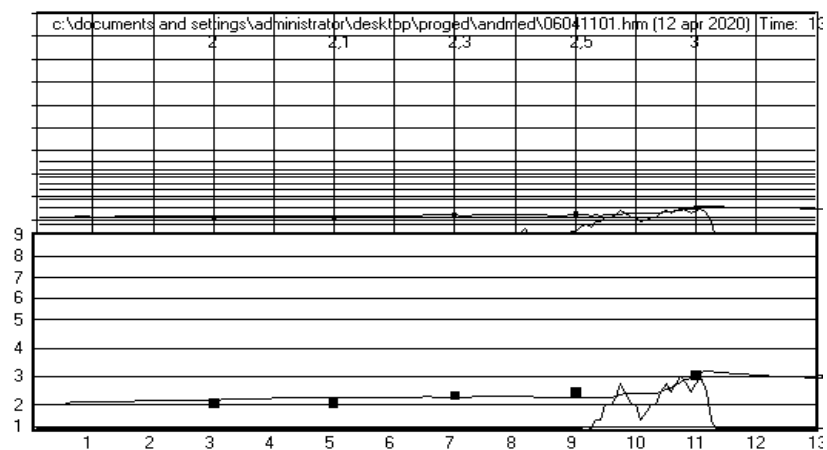
Joonis 5 Rakendustarkvara *Lactate* poolt g, kui laktaati on mõõdetud 2 korda.



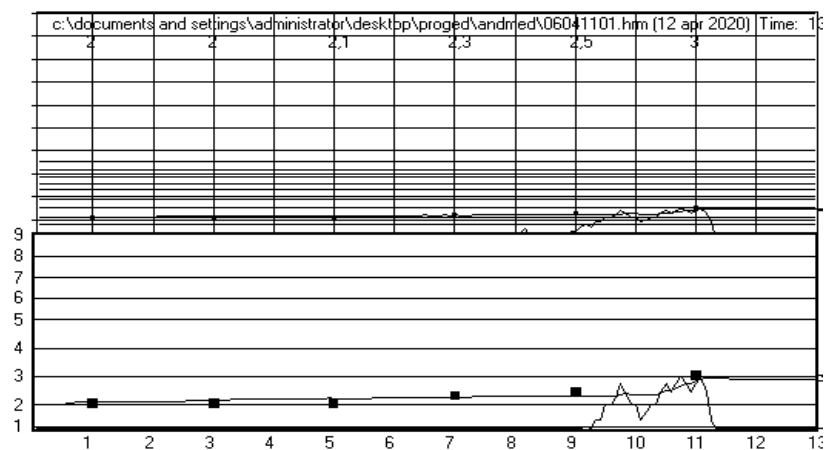
**Joonis 6** Rakendustarkvara Lactate poolt g, kui laktaati on mõõdetud 3 korra.



**Joonis 7** Rakendustarkvara Lactate poolt g, kui laktaati on mõõdetud 4 korra.



**Joonis 8** Rakendustarkvara Lactate poolt g, kui laktaati on mõõdetud 5 korra.



**Joonis 9** Rakendustarkvara Lactate poolt g, kui laktaati on mõõdetud 6 korra.



**Lisa 3.2. Laktaadi kontsentratsiooni muutumine ajas.  
Tabelid.**

**Lisa 3.2.1. Laktaadi mõõtmiste arv: 1**

nr	Aeg	La	nr	Aeg	La	nr	Aeg	La
1	0	2	16	225	2.4	31	450	2.5
2	15	2	17	240	2.5	32	465	2.5
3	30	2	18	255	2.5	33	480	2.5
4	45	2.3	19	270	2.5	34	495	2.5
5	60	2.3	20	285	2.5	35	510	2.5
6	75	2.3	21	300	2.5	36	525	2.5
7	90	2.3	22	315	2.5	37	540	2.5
8	105	2.3	23	330	2.5	38	555	2.5
9	120	2.3	24	345	2.5	39	570	2.5
10	135	2.3	25	360	2.5	40	585	2.5
11	150	2.3	26	375	2.5	41	600	2.5
12	165	2.3	27	390	2.5	42	615	2.5
13	180	2.3	28	405	2.5	43	630	2.7
14	195	2.4	29	420	2.5	44	645	2.8
15	210	2.4	30	435	2.5	45	660	3

**Lisa 3.2.2. Laktaadi mõõtmiste arv: 2**

nr	Aeg	La	nr	Aeg	La	nr	Aeg	La
1	0	2	16	225	2.4	31	450	2.5
2	15	2	17	240	2.5	32	465	2.5
3	30	2	18	255	2.5	33	480	2.5
4	45	2.3	19	270	2.5	34	495	2.5
5	60	2.3	20	285	2.5	35	510	2.5
6	75	2.3	21	300	2.5	36	525	2.5
7	90	2.3	22	315	2.5	37	540	2.5
8	105	2.3	23	330	2.5	38	555	2.5
9	120	2.3	24	345	2.5	39	570	2.5
10	135	2.3	25	360	2.5	40	585	2.5
11	150	2.3	26	375	2.5	41	600	2.5
12	165	2.3	27	390	2.5	42	615	2.5
13	180	2.3	28	405	2.5	43	630	2.7
14	195	2.4	29	420	2.5	44	645	2.8
15	210	2.4	30	435	2.5	45	660	3

**Lisa 3.2.3. Laktaadi mõõtmiste arv: 3**

nr	Aeg	La	nr	Aeg	La	nr	Aeg	La
1	0	2	16	225	2.3	31	450	2.3
2	15	2	17	240	2.3	32	465	2.4
3	30	2	18	255	2.3	33	480	2.4
4	45	2.2	19	270	2.3	34	495	2.4
5	60	2.2	20	285	2.3	35	510	2.5
6	75	2.2	21	300	2.3	36	525	2.5
7	90	2.2	22	315	2.3	37	540	2.5
8	105	2.2	23	330	2.3	38	555	2.5
9	120	2.2	24	345	2.3	39	570	2.5
10	135	2.2	25	360	2.3	40	585	2.5
11	150	2.3	26	375	2.3	41	600	2.5
12	165	2.3	27	390	2.3	42	615	2.5
13	180	2.3	28	405	2.3	43	630	2.7
14	195	2.3	29	420	2.3	44	645	2.8
15	210	2.3	30	435	2.3	45	660	3

**Lisa 3.2.4. Laktaadi mõõtmiste arv: 4**

nr	Aeg	La	nr	Aeg	La	nr	Aeg	La
1	0	2	16	225	2.1	31	450	2.3
2	15	2	17	240	2.1	32	465	2.4
3	30	2	18	255	2.1	33	480	2.4
4	45	2	19	270	2.1	34	495	2.5
5	60	2	20	285	2.1	35	510	2.5
6	75	2	21	300	2.1	36	525	2.5
7	90	2	22	315	2.1	37	540	2.5
8	105	2	23	330	2.2	38	555	2.5
9	120	2	24	345	2.2	39	570	2.5
10	135	2	25	360	2.2	40	585	2.6
11	150	2	26	375	2.2	41	600	2.6
12	165	2	27	390	2.2	42	615	2.7
13	180	2.1	28	405	2.2	43	630	2.8
14	195	2.1	29	420	2.3	44	645	2.9
15	210	2.1	30	435	2.3	45	660	3

**Lisa 3.2.5. Laktaadi mõõtmiste arv: 5**

nr	Aeg	La	nr	Aeg	La	nr	Aeg	La
1	0	2	16	225	2.1	31	450	2.3
2	15	2	17	240	2.1	32	465	2.4
3	30	2	18	255	2.1	33	480	2.4
4	45	2	19	270	2.1	34	495	2.4
5	60	2	20	285	2.1	35	510	2.4
6	75	2	21	300	2.1	36	525	2.5
7	90	2	22	315	2.1	37	540	2.5
8	105	2	23	330	2.2	38	555	2.5
9	120	2	24	345	2.2	39	570	2.5
10	135	2	25	360	2.2	40	585	2.5
11	150	2	26	375	2.3	41	600	2.6
12	165	2	27	390	2.3	42	615	2.7
13	180	2.1	28	405	2.3	43	630	2.8
14	195	2.1	29	420	2.3	44	645	2.9
15	210	2.1	30	435	2.3	45	660	3

**Lisa 3.2.6. Laktaadi mõõtmiste arv: 6**

nr	Aeg	La	nr	Aeg	La	nr	Aeg	La
1	0	2	16	225	2.1	31	450	2.3
2	15	2	17	240	2.1	32	465	2.4
3	30	2	18	255	2.1	33	480	2.4
4	45	2	19	270	2.1	34	495	2.4
5	60	2.1	20	285	2.1	35	510	2.4
6	75	2.1	21	300	2.1	36	525	2.5
7	90	2.1	22	315	2.1	37	540	2.5
8	105	2.1	23	330	2.1	38	555	2.5
9	120	2.1	24	345	2.1	39	570	2.5
10	135	2.1	25	360	2.2	40	585	2.6
11	150	2.1	26	375	2.2	41	600	2.6
12	165	2.1	27	390	2.2	42	615	2.7
13	180	2.1	28	405	2.3	43	630	2.8
14	195	2.1	29	420	2.3	44	645	2.8
15	210	2.1	30	435	2.3	45	660	3

## Lisa 4. Väljundid

### Lisa 4.1. Pulsi sageduse iseloomustamine

#### Lisa 4.1.1. Iseloomustavate võrrandite hinnangud

indeks: 34

```
> summary(lm(y~indeksjada))
```

Call:

```
lm(formula = y ~ indeksjada)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-12.26372	-2.56591	0.07947	2.68608	13.81382

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	72.773411	0.771323	94.35	<2e-16 ***
indeksjada	0.490308	0.009989	49.09	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.423 on 131 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9484, Adjusted R-squared: 0.948

F-statistic: 2410 on 1 and 131 DF, p-value: < 2.2e-16

```
> anova(lm(y~indeksjada))
```

Analysis of Variance Table

Response: y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada	1	47129	47129	2409.5	< 2.2e-16 ***
Residuals	131	2562	20		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> summary(lm(y1~indeksjada1))
```

Call:

```
lm(formula = y1 ~ indeksjada1)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-12.2897	-2.8083	0.3622	3.4338	13.8478

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	72.80690	1.24174	58.63	<2e-16 ***
indeksjada1	0.48281	0.02766	17.45	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.395 on 75 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.8024, Adjusted R-squared: 0.7998

F-statistic: 304.6 on 1 and 75 DF, p-value: < 2.2e-16

```
> anova(lm(y1~indeksjada1))
```

Analysis of Variance Table

Response: y1

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada1	1	8866.7	8866.7	304.62	< 2.2e-16 ***
Residuals	75	2183.1	29.1		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> summary(lm(y2~indeksjada2))
```

Call:

```
lm(formula = y2 ~ indeksjada2)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-6.10308	-1.41815	0.04381	1.53066	4.32276

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	80.63800	2.04735	39.39	<2e-16 ***
indeksjada2	0.41914	0.01918	21.85	<2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.32 on 54 degrees of freedom  
 Multiple R-Squared: 0.8984, Adjusted R-squared: 0.8965  
 F-statistic: 477.4 on 1 and 54 DF, p-value: < 2.2e-16

```
> anova(lm(y2~indeksjada2))
Analysis of Variance Table
```

Response: y2

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada2	1	2570.16	2570.16	477.43	< 2.2e-16 ***
Residuals	54	290.70	5.38		

---

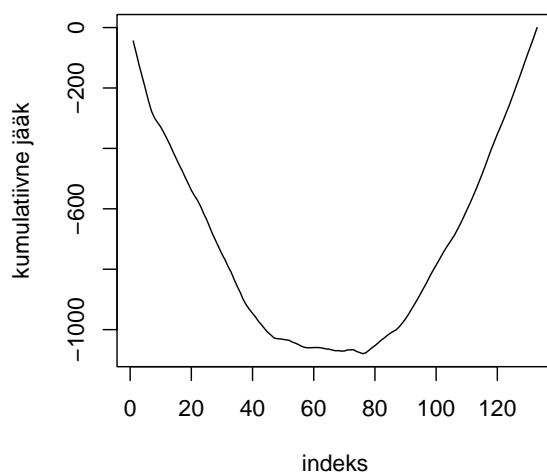
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> cor(y,joonuus)
```

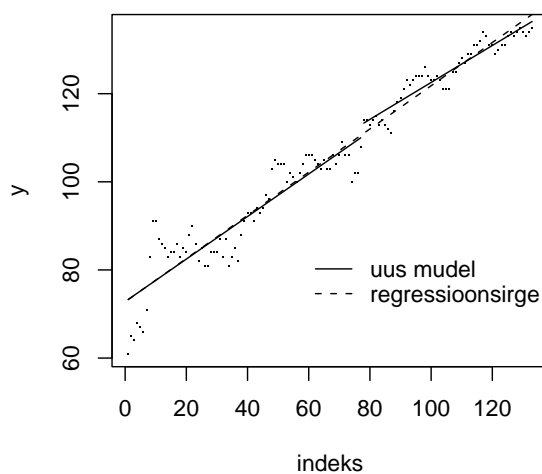
```
[1] 0.9747908
```

```
>
```

### Lisa 4.1.2. Pulsi sagedust iseloomustavad joonised



Joonis 10 *Pulsi kumulatiivne jääkliige*



Joonis 11 *Pulsi muutumine ja seda iseloomustavad jooned*

## Lisa 4.2. Laktaadi kontsentratsiooni iseloomustamine

### Lisa 4.2.1. Iseloomustavate võrrandite hinnangud

Ühe ja kahe punkti korral (indeks: 13)

```
> summary(lm(y~indeksjada))
```

Call:

```
lm(formula = y ~ indeksjada)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.21591	-0.05981	0.01753	0.06191	0.31816

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2.182626	0.031074	70.24	< 2e-16 ***
indeksjada	0.011094	0.001176	9.43	4.97e-12 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1025 on 43 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.674, Adjusted R-squared: 0.6665

F-statistic: 88.92 on 1 and 43 DF, p-value: 4.974e-12

```
> anova(lm(y~indeksjada))
```

Analysis of Variance Table

Response: y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada	1	0.93408	0.93408	88.92	4.974e-12 ***
Residuals	43	0.45170	0.01050		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> summary(lm(y1~indeksjada1))
```

Call:

```
lm(formula = y1 ~ indeksjada1)
```

Residuals:



	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.131868	-0.079121	-0.004945	0.069231	0.143407

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2.05769	0.05509	37.354	6.11e-13 ***
indeksjada1	0.02473	0.00694	3.563	0.00445 **

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09363 on 11 degrees of freedom  
Multiple R-Squared: 0.5357, Adjusted R-squared: 0.4935  
F-statistic: 12.69 on 1 and 11 DF, p-value: 0.004452

```
> anova(lm(y1~indeksjada1))
Analysis of Variance Table
```

Response: y1

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada1	1	0.111264	0.111264	12.692	0.004452 **
Residuals	11	0.096429	0.008766		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> summary(lm(y2~indeksjada2))
```

Call:

lm(formula = y2 ~ indeksjada2)

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.10962	-0.05522	-0.01572	0.03253	0.36932

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2.314791	0.055123	41.993	< 2e-16 ***
indeksjada2	0.007020	0.001783	3.936	0.000455 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09314 on 30 degrees of freedom  
Multiple R-Squared: 0.3406, Adjusted R-squared: 0.3186

F-statistic: 15.5 on 1 and 30 DF, p-value: 0.0004546

```
> anova(lm(y2~indeksjada2))
```

Analysis of Variance Table

Response: y2

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada2	1	0.134429	0.134429	15.496	0.0004546 ***
Residuals	30	0.260258	0.008675		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> cor(y,joonuus)
```

```
[1] 0.8617475
```

```
>
```

Kolme punkti korral (indeks: 34)

```
> summary(lm(y~indeksjada))
```

Call:

```
lm(formula = y ~ indeksjada)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.13898	-0.06641	-0.01155	0.05130	0.39169

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	2.064040	0.029222	70.63	< 2e-16 ***
indeksjada	0.012095	0.001106	10.93	5.39e-14 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09638 on 43 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.7354, Adjusted R-squared: 0.7293

F-statistic: 119.5 on 1 and 43 DF, p-value: 5.386e-14

```
> anova(lm(y~indeksjada))
```

Analysis of Variance Table

```

Response: y
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada  1 1.11031  1.11031   119.52 5.386e-14 ***
Residuals  43  0.39947  0.00929
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm(y1~indeksjada1))

```

```

Call:
lm(formula = y1 ~ indeksjada1)

```

```

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.14678 -0.02718  0.01202  0.03659  0.08978

```

```

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.122995   0.020980 101.191 < 2e-16 ***
indeksjada1  0.007930   0.001046   7.583 1.23e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

Residual standard error: 0.05982 on 32 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.6425,    Adjusted R-squared:  0.6313
F-statistic:  57.5 on 1 and 32 DF,  p-value: 1.226e-08

```

```

> anova(lm(y1~indeksjada1))
Analysis of Variance Table

```

```

Response: y1
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada1  1 0.205776  0.205776    57.5 1.226e-08 ***
Residuals  32 0.114518  0.003579
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm(y2~indeksjada2))

```

```

Call:
lm(formula = y2 ~ indeksjada2)

```

```

Residuals:

```

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.169091	-0.071364	-0.008182	0.059091	0.213636

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	1.02727	0.44360	2.316	0.04580 *
indeksjada2	0.03909	0.01106	3.536	0.00635 **

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.116 on 9 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.5814, Adjusted R-squared: 0.5349

F-statistic: 12.5 on 1 and 9 DF, p-value: 0.006355

&gt; anova(lm(y2~indeksjada2))

Analysis of Variance Table

Response: y2

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada2	1	0.168091	0.168091	12.503	0.006355 **
Residuals	9	0.121000	0.013444		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

&gt; cor(y,joonuus)

[1] 0.9186974

&gt;

Nelja punkti korral (indeks: 31)

&gt; summary(lm(y~indeksjada))

Call:

lm(formula = y ~ indeksjada)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.14982	-0.06868	-0.01951	0.03705	0.32966

Coefficients:

Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
----------	------------	---------	----------

```
(Intercept) 1.821919 0.031123 58.54 <2e-16 ***
indeksjada 0.018854 0.001178 16.00 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.1027 on 43 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8562,    Adjusted R-squared: 0.8529
F-statistic: 256 on 1 and 43 DF, p-value: < 2.2e-16
```

```
> anova(lm(y~indeksjada))
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada 1 2.69797 2.69797 256.02 < 2.2e-16 ***
Residuals 43 0.45314 0.01054
```

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm(y1~indeksjada1))
```

```
Call:
lm(formula = y1 ~ indeksjada1)
```

```
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-6.169e-02 -2.571e-02  4.403e-18  2.571e-02  6.633e-02
```

```
Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.935484    0.013289 145.64 < 2e-16 ***
indeksjada1 0.010282    0.000725 14.18 1.41e-14 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.0361 on 29 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.874,    Adjusted R-squared: 0.8696
F-statistic: 201.1 on 1 and 29 DF, p-value: 1.413e-14
```

```
> anova(lm(y1~indeksjada1))
Analysis of Variance Table
```

```

Response: y1
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada1  1 0.262198 0.262198  201.14 1.413e-14 ***
Residuals    29 0.037802 0.001304
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm(y2~indeksjada2))

Call:
lm(formula = y2 ~ indeksjada2)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.120 -0.055  0.010  0.055  0.140

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.060000    0.204246   5.190 0.000226 ***
indeksjada2  0.040000    0.005276   7.581 6.49e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.07958 on 12 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.8273,    Adjusted R-squared:  0.8129
F-statistic: 57.47 on 1 and 12 DF,  p-value: 6.492e-06

> anova(lm(y2~indeksjada2))
Analysis of Variance Table

Response: y2
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada2  1 0.36400 0.36400  57.474 6.492e-06 ***
Residuals    12 0.07600 0.00633
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> cor(y,joonuus)
[1] 0.9817764
>

```

Viie punkti korral (indeks: 31)

```
> summary(lm(y~indeksjada))
```

```
Call:
```

```
lm(formula = y ~ indeksjada)
```

```
Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.13707	-0.06313	-0.02616	0.02929	0.33778

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	1.830404	0.029881	61.26	<2e-16 ***
indeksjada	0.018485	0.001131	16.34	<2e-16 ***

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.09856 on 43 degrees of freedom
```

```
Multiple R-Squared: 0.8613,    Adjusted R-squared: 0.8581
```

```
F-statistic: 267 on 1 and 43 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
> anova(lm(y~indeksjada))
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada	1	2.59342	2.59342	266.99	< 2.2e-16 ***
Residuals	43	0.41769	0.00971		

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> summary(lm(y1~indeksjada1))
```

```
Call:
```

```
lm(formula = y1 ~ indeksjada1)
```

```
Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-0.079355	-0.030645	0.001935	0.028710	0.074194

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
--	----------	------------	---------	----------

```
(Intercept) 1.9238710 0.0156828 122.67 < 2e-16 ***
indeksjada1 0.0116129 0.0008556 13.57 4.29e-14 ***
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.04261 on 29 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.864,      Adjusted R-squared: 0.8593
F-statistic: 184.2 on 1 and 29 DF,  p-value: 4.294e-14
```

```
> anova(lm(y1~indeksjada1))
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y1
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada1	1	0.33445	0.33445	184.24	4.294e-14 ***
Residuals	29	0.05265	0.00182		

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> summary(lm(y2~indeksjada2))
```

```
Call:
```

```
lm(formula = y2 ~ indeksjada2)
```

```
Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-1.429e-01	-5.000e-02	4.163e-17	5.000e-02	1.429e-01

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.928571	0.216907	4.281	0.00107 **
indeksjada2	0.042857	0.005603	7.649	5.94e-06 ***

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.08452 on 12 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8298,      Adjusted R-squared: 0.8156
F-statistic: 58.5 on 1 and 12 DF,  p-value: 5.938e-06
```

```
> anova(lm(y2~indeksjada2))
Analysis of Variance Table
```



```

Response: y2
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada2  1 0.41786 0.41786    58.5 5.938e-06 ***
Residuals   12 0.08571 0.00714
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> cor(y,joonuus)
[1] 0.976755
>

```

Kuue punkti korral (indeks: 31)

```
> summary(lm(y~indeksjada))
```

Call:

```
lm(formula = y ~ indeksjada)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.18124	-0.08045	-0.01563	0.07073	0.36599

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	1.878081	0.033382	56.26	<2e-16 ***
indeksjada	0.016798	0.001264	13.29	<2e-16 ***

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Residual standard error: 0.1101 on 43 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.8042, Adjusted R-squared: 0.7997

F-statistic: 176.7 on 1 and 43 DF, p-value: < 2.2e-16

```
> anova(lm(y~indeksjada))
```

Analysis of Variance Table

Response: y

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada	1	2.14180	2.14180	176.66	< 2.2e-16 ***
Residuals	43	0.52131	0.01212		

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm(y1~indeksjada1))
```

```
Call:
lm(formula = y1 ~ indeksjada1)
```

```
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.084516 -0.030000 -0.006452  0.035484  0.084516
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.9987097   0.0174995  114.215 < 2e-16 ***
indeksjada1  0.0077419   0.0009547   8.109 6.08e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.04754 on 29 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.694,    Adjusted R-squared:  0.6834
F-statistic: 65.76 on 1 and 29 DF,  p-value: 6.079e-09
```

```
> anova(lm(y1~indeksjada1))
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y1
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
indeksjada1  1 0.148645  0.148645   65.764 6.079e-09 ***
Residuals    29 0.065548  0.002260
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(lm(y2~indeksjada2))
```

```
Call:
lm(formula = y2 ~ indeksjada2)
```

```
Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.09912 -0.03885 -0.01077  0.03341  0.15429
```

```
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
(Intercept) 0.996264    0.180411    5.522 0.000131 ***
indeksjada2 0.041099    0.004661    8.819 1.37e-06 ***
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.0703 on 12 degrees of freedom
```

```
Multiple R-Squared: 0.8663,    Adjusted R-squared: 0.8552
```

```
F-statistic: 77.77 on 1 and 12 DF,  p-value: 1.368e-06
```

```
> anova(lm(y2~indeksjada2))
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: y2
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
indeksjada2	1	0.38427	0.38427	77.766	1.368e-06 ***
Residuals	12	0.05930	0.00494		

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> cor(y,joonuus)
```

```
[1] 0.976279
```

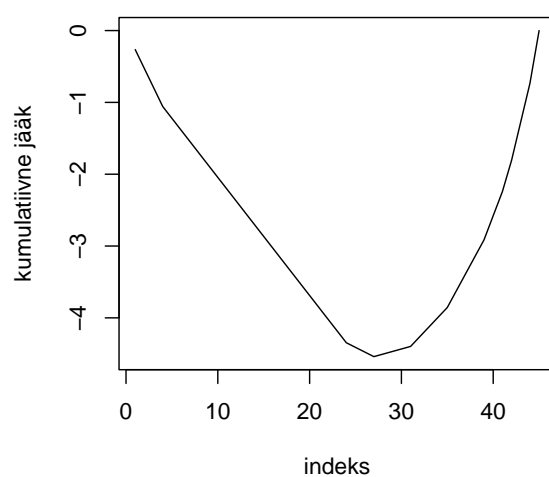
```
>
```

Kokkuvõtvad tabelid väljundite põhjal

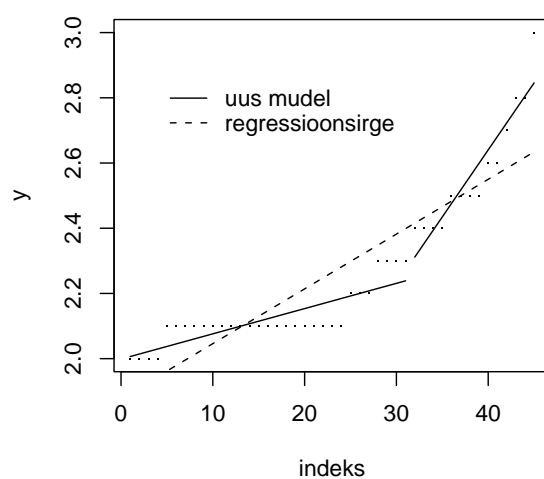
punktide arv	valitud indeks k	esialgse mudeli $R^2$	$R^2$ kuni k	$R^2$ pärast k	$cor(y, joonuuus)^2$
1	13	0.674	0.536	0.341	0.743
2	13	0.674	0.536	0.341	0.743
3	34	0.735	0.643	0.581	0.844
4	31	0.856	0.874	0.827	0.964
5	31	0.861	0.864	0.830	0.954
6	31	0.804	0.694	0.866	0.953

punktide arv	esialgne $SSE$	$SSE_1$ kuni k	$SSE_2$ pärast k	$SSE_\Sigma =$ $SSE_1 + SSE_2$	$SSE -$ $SSE_\Sigma$
1	0.452	0.096	0.260	0.357	0.095
2	0.452	0.096	0.260	0.357	0.095
3	0.399	0.115	0.121	0.236	0.164
4	0.453	0.038	0.076	0.114	0.339
5	0.418	0.053	0.086	0.138	0.279
6	0.521	0.066	0.059	0.125	0.396

### Lisa 4.2.2. Laktaadi kontsentratsiooni iseloomustavad joonised



**Joonis 12** *Laktaadi kontsentratsiooni kumulatiivne jääkliige*



**Joonis 13** *Laktaadi kontsentratsioon ja seda iseloomustavad jooned*