

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

TEOREETILISE MEHHAANIKA KATEEDER

P. M o o r l a t

VISKOOSSE VEDELIKU VOOLAMINE DEFORMEERUVATE

SEINTEGA TORUDES

Diplomitöö

TRU võistlustööde komisjoni otsusega 24. juunil

1973 a. on määratud käesolevale tööle

II auhind

J. Maarmann TRU Teaduslik sekretär



Tööd juhendasid:

füüs.-mat.kand.dots.kt.

I. V a i n i k k o

füüs.-mat.kand.v.t.t.

S. A. R e g i r e r

TARTU

1973

Sissejuhatus

Energeetiliste kulutuste suurenemine töötavas elundis (lihases, ajukoos jne.) on seotud oksüdatiivse metabolismi intensiivistumisega mis nõuab verevarustuse kasvu. Füsioloogilised uurimused on näidanud, et verevarustuse kohandamine organi vajadustele toimub väga mitmesuguste mehhanismide toimel ([1], [2]). Üheks oluliseks verevarustust reguleerivaks faktoriks on resistiivset tüüpi arterite laienemine ja prekapillaarsete sfinkterite avanemine. Käesoleval ajal toimub intensiivne eksperimentaalne uurimistöö veresooni laiendavate lokaalsete (keemilised ja mehhaanilised) ning tsentraalsete (vasomotoorsete närvikiudude impulsatsioon) koosmõju selgitamiseks. Iseloomulik veresoonte regulatsioonile on paljude faktorite kombineerumine täpse ning antud organi tööle vastava kiire kohanemise saamiseks.

Vaatamata rohketele eksperimentaalsetele andmetele veresoonte valendiku regulatsiooni kohta, puudub viimase kirjeldamiseks üldine matemaatiline lähenemisviis. Seetõttu on käesoleval ajal oluline anda võimalikult paljude lihtsamate erijuhtude hüdrodünaamiline analüüs, mille üldistusena võiks edasises loota veresoonekonna regulatsiooni seaduspärasusi kirjeldava täieliku mudeli loomist.

Käesolev töö seab enesele eesmärgiks uurida veresoone valendiku regulatsiooni teatud erijuhtudel hüdro-mehhaanika seisukohalt.

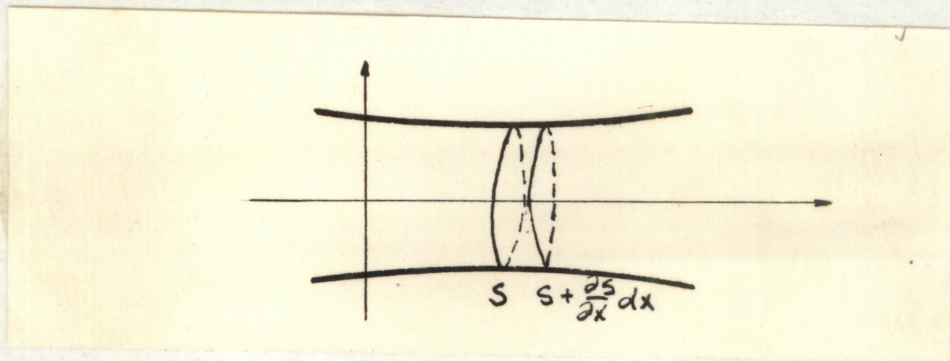
Silmas pidades, et mitmesugused verevarustusega seotud nähtused ja vajadus interpreteerida spetsiaalselt loodud kunstlikes tingimustes läbiviidavate katsete tulemusi, viivad järgmise hüdrodünaamika ülesande seadeni: Vaatleme väikest veresoont, mille otstes hoitakse antud rõhkude vahet $p_1 - p_2$ (võib olla pulseeruv). Veresoon on sise- ja välisrõhkude vahe mõjul staatilise tasakaalu seisundis (väikestes veresoontes võib seinat inertsi mitte arvestada). Toru valendik S olgu mingi antud ajafunktsioon; kasutades hüdrodünaamika võrrandeid vere jaoks ning tuues sisse hüpoteesid S , vere kulu ning vere tarviduse vahelistest seostest, on vaja kirjeldada tüüpilisi hüdrodünaamilisi protsesse.

Käesolevas töös vaatleme seatud ülesannet hüdraulilises lähenduses. Töö alguses on esitatud lühidalt hüdraulika võrrandite tuletuskäik ja esitatud viimased dimensioonita kujul. Seejärel lahendatakse ülesanne erijuhtul, kus voolamisel vedeliku osakeste kiirendused on küllalt väikesed, nii et võib jätta arvestamata inertsjõud. Selline olukord leiab aset näiteks väikestes veresoontes. Edasi leitakse ülesande lahend üldjuhul ja ühel erijuhtul, kus seinat aktiivsed deformatsioonid omavad jooksva laine kuju. Selliste ülesannete lahendamine võimaldab vaadelda vere voolu reguleerimist veresoone ristlõike pindala muutmisega. Osutub, et suvaliste deformatsioonide korral on

regulaatorit kirjeldavad võrrandid küllalt keerukad ega ole kvadratvõrrides lahenduvad. Seetõttu on käesoleva töö viimases osas vaadeldud ainult kahte lihtsamat erijuhtu, mille korral vastavad võrrandid osutuvad lahenduvateks. Üldisel on selliste regulatsiooniprotsesside võrrandite üheseks määramiseks vaja omada rohkem andmeid regulatsiooni mehhanismi ja toonuse muutumise dünaamika kohta.

1. Hüdraulika võrrandid

Olgu vaadeldav toru horisontaalasendis. Paigutame x telje piki toru telge. Olgu toru sein oma kujult lähedane ringsilindrile st. toru seina telje sihilised kõverused olgu väikesed. Vaatleme toru kahte lähestikku asetsevat ristlõiget nende vahelise kaugusega dx .



Toome sisse tähistused:

- ρ - vedeliku tihedus,
- P - keskmine rõhk toru ristlõikes,
- S - ristlõike pindala,
- v - vedeliku osakese x telje sihiline kiirus,
- t - aeg.

Kasutades nüüd impulsside teoreemi, saame ([3])

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_S \rho v ds \right] dx + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_S \rho v^2 ds \right] dx =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} (Sp) dx - F_t dx,$$

kus F_t on hüdrauline takistus, mis tehtud kitsenduste korral on avalduv kujul (Poiseuille'i takistus)

$$F_t = \mu \pi \int_S v ds / S,$$

kus μ on vedeliku viskoossus.

Jättes arvestamata väikesed suurused, võime impulsside võrrandi esitada kujul

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} + s \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{8\sqrt{\pi}}{5} q = 0. \quad (1)$$

kus

$$q = \int_0^s v ds.$$

Ei ole raske näha, et mittekokkusurutava vedeliku korral pidevuse võrrand avaldub kujul

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Lisame nüüd veel toodud võrrandele rajatingimused

$$p(0, t) = p_1(t), \quad (3)$$

$$p(L, t) = p_2(t), \quad (4)$$

kus L on toru pikkus. Eeldades, et sise- ja välisrõhu vahe ning rõhu gradient toru sees on väikesed, võime elastsed deformatsioonid jätta arvestamata (reaalsetes arterites on elastne deformatsioon kuni 3%, samal ajal kui aktiivsed deformatsioonid ulatuvad kuni 40% ([1], [2])).

Teisendame nüüd võrrandid (1) ja (2) dimensioonita kujule. Selleks toome sisse tähistused:

$$p_* = \max_{t_1, t_2} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [p_1 - p_2] dt,$$

$$S_* = S_{\max}.$$

Olgu q_* mingi karakteristlik voolu kiirus ja T ristlõikepindala S muutumise mingi karakteristlik aeg.

Toome sisse uued dimensioonita muutujad $S = S^0 S_*$,

$$t = t^{\circ} T, \quad x = x^{\circ} L, \quad q = q^{\circ} q_*, \quad p = p^{\circ} p_*$$

Tähistades

$$\Lambda_1 = \frac{S_* L}{T q_*},$$

$$\Lambda_2 = \frac{q q_* L}{S_* T p_*}$$

ja

$$\Lambda_3 = \frac{8 \mu \pi q_* L}{S_*^2 p_*},$$

võime võrrandid (1) ja (2) esitada kujul

$$-\Lambda_1 \frac{\partial s^{\circ}}{\partial t^{\circ}} + \frac{\partial q^{\circ}}{\partial t^{\circ}} = 0, \quad (5)$$

$$\Lambda_2 \frac{\partial q^{\circ}}{\partial t^{\circ}} + s^{\circ} \frac{\partial p^{\circ}}{\partial x^{\circ}} + \frac{1}{s^{\circ}} \Lambda_3 q^{\circ} = 0. \quad (6)$$

Rajatingimused uutes muutujates avalduvad kujul

$$p^{\circ}(0, t) = p_1^{\circ}(t) = p_1(t) / p_*, \quad (7)$$

$$p^{\circ}(L, t) = p_2^{\circ}(t) = p_2(t) / p_*. \quad (8)$$

Kuna meil edaspidi on tegemist ainult dimensioonita suurustega, siis jätame lihtsuse mõttes indeksi "°" kirjutamata.

Võrrandisüsteem (5), (6), seob omavahel kolme funktsiooni $s(x, t)$, $q(x, t)$, $p(x, t)$, Selleks et süsteemi oleks võimalik lahendada, anname vabalt ette $s(x, t)$, nõudes ainult tema pidevust mõlema argumendi suhtes ja tema kõigi vajalike tuletiste eksisteerimist.

2. Kvaasistatsionaarne ülesanne

Vaatleme juhtu, kus vedeliku voolamisel kiirendused on nii väikesed, et inertsjõud võib jätta arvestamata. Võrrandsüsteemi (5) - (6) võib sel korral esitada kujul

$$\Lambda_1 \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$s^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \Lambda_3 q = 0. \quad (10)$$

Saadud võrrandsüsteemi integreerimiseks diferentseerime viimast võrrandit x järgi ja asendame pidevuse tingimusse. Saame võrrandi

$$\frac{\partial}{\partial x} s^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \Lambda_1 \Lambda_3 \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (11)$$

Integreerides saadud võrrandit x järgi, saame tulemuseks

$$s^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \Lambda_1 \Lambda_3 \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx + c_1(t) \quad (12)$$

Jagades teguriga s^2 ja integreerides veel kord x järgi, saame p jaoks avaldise

$$p = \Lambda_1 \Lambda_3 \int_0^x \frac{1}{s^2} \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx dx + c_1(t) \int_0^x \frac{1}{s^2} dx + c_2(t). \quad (13)$$

Arvestades rajatingimusi (7) - (8) saame integreerimiskonstantide c_1 ja c_2 jaoks valemid

$$c_1(t) = \frac{p_2 - p_1 - \Lambda_3 \Lambda_1 \int_0^1 \frac{1}{s^2} \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx dx}{\Lambda_3 \int_0^1 \frac{1}{s^2} dx}$$

ja

$$c_2(t) = p_1(t).$$

Arvestades nüüd võrrandeid (10) ja (12), saame
jaoks valemi

$$q = \frac{p_1 - p_2 - \Lambda_3 \Lambda_1 \int_0^1 \frac{1}{s^2} \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx dx}{\Lambda_3 \int_0^1 \frac{1}{s^2} dx} - \Lambda_1 \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx. (14)$$

3. Mittestatsionaarne ülesanne

Vaatleme nüüd ülesannet (5) - (8) ilma eelmises punktis tehtud kitsendusteta inertsjõududele. Integreerides võrrandit (5) x järgi, saame q jaoks avaldise

$$q = -\Lambda_1 \int_0^x \frac{\partial S}{\partial t} dx - \psi_1(t). \quad (15)$$

Vaatleme nüüd võrrandit (6) kui võrrandit p suhtes. Integreerides x järgi, saame avaldise

$$p(x,t) = -\Lambda_2 \int_0^x \frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial t} dx - \Lambda_3 \int_0^x \frac{q}{S^2} dx + p_1(t). \quad (16)$$

Arvestades avaldist (15) ja rajatingimusi (7), (8), saame $x=1$ korral võrrandi ψ_2 jaoks

$$\begin{aligned} & \Lambda_2 \psi_2' \int_0^1 \frac{1}{S} dx + \Lambda_3 \psi_2 \int_0^1 \frac{1}{S^2} dx = \\ & = - (p_1(t) - p_2(t) - \Lambda_1 \Lambda_2 \int_0^1 \frac{1}{S} \int_0^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx dx - \\ & - \Lambda_1 \Lambda_3 \int_0^1 \frac{1}{S^2} \int_0^x \frac{\partial S}{\partial t} dx dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Saadud võrrandi integreerimiseks korrutame tema mõlemat poolt määramata kordajaga $\varphi(t)$ ja nõuame et oleks rahuldatud tingimus

$$\frac{d}{dt} \Lambda_2 \varphi \int_0^1 \frac{1}{s} dx = \Lambda_3 \varphi \int_0^1 \frac{1}{s^2} dx.$$

Selle võrrandi integreerimine ei valmista raskusi ja tema üldlahendi võime esitada kujul

$$\varphi = c \exp \left[\int_0^t \left[\frac{\Lambda_3}{\Lambda_2} \frac{\int_0^1 \frac{1}{s^2} dx}{\int_0^1 \frac{1}{s} dx} - \frac{\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{s} dx}{\int_0^1 \frac{1}{s} dx} \right] dt \right]. \quad (18)$$

Võrrandi (17) lahendi võime nüüd esitada kujul

$$\psi = \frac{-4}{\Lambda_2 \varphi \int_0^1 \frac{1}{s} dx} \int_0^t \left[p_1 - p_2 + \Lambda_1 \Lambda_2 \int_0^1 \frac{1}{s} \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx dx - \Lambda_1 \Lambda_3 \int_0^1 \frac{1}{s^2} \int_0^x \frac{\partial s}{\partial t} dx dx \right] \varphi(t) dt.$$

(19)

4. Jooksvad lained

Vaatleme erijuhtu, kus seina aktiivsetel deformatsioonidel on jooksva laine kuju. Selline deformatsiooni tüüp on omane nn. toonuse muutustele. On teada, et toonuse muutused levivad vastupidi vere voolu suunale arterites kiirusega 10 cm/sek ([1]). Sellisel juhul võime toru seina jaoks kirjutada valemi kujul

$$S(x, t) = S_0(t - ax),$$

kus $1/a$ on laine leviku dimensioonita faasikiirus. Olgu $S_0(t)$ perioodiline funktsioon ja laine pikkus avaldub kujul $1/k$, kus k on mingi naturaalarv. Sel korral võrrandis (17) S ja tema tuletisi sisaldavad integraalid ei sõltu ajast.

Tähistame

$$A_1 = \Lambda_1 \int_0^1 \frac{1}{S} dx$$

$$A_2 = \Lambda_3 \int_0^1 \frac{1}{S^2} dx$$

$$A_3 = -\Lambda_1 \Lambda_2 \int_0^1 \frac{1}{S} \int_0^x \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dx dx - \\ - \Lambda_1 \Lambda_3 \int_0^1 \frac{1}{S} \int_0^x \frac{\partial S}{\partial t} dx dx.$$

Võrrand (17) avaldub nüüd kujul

$$A_1 \psi_1' + A_2 \psi_1 = - (p_1 - p_2) + A_3$$

ja tema üldlahendiks on

$$\psi_1 = \left[\psi_0 + \frac{A_3}{A_2} e^{\frac{A_2}{A_1} t} - \int_0^t e^{\frac{A_2}{A_1} \tau} (p_1(\tau) - p_2(\tau)) d\tau \right] e^{-\frac{A_2}{A_1} t} \quad (20)$$

Suurte aegade korral võib vaadelda algtingimusteta ülesannet, mille lahendiks on

$$\psi_2 = \frac{A_3}{A_2} - \int_{-\infty}^t e^{\frac{A_2}{A_1} (\tau - t)} (p_1(\tau) - p_2(\tau)) d\tau \quad (21)$$

Juhul, kui $p_1 - p_2$ on perioodiline funktsioon, siis suurte aegade korral on seda ka ψ_i .

5. Vedeliku kulu reguleerimine deformeeruvate seintega torudes

Piirdume siinkohal lihtsuse mõttes juhuga, kus $S = S(t)$ ja inertsjõud on väikesed. Sel korral valemi (14) põhjal

$$q = \frac{S^2}{\Lambda_1 - 3} (p_1 - p_2) + \left[\frac{\Lambda_1}{2} - \Lambda_1 x \right] \frac{\partial S}{\partial t} \quad (22)$$

Regulaatorit võib vaadelda näiteks kujul

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} S = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i}{dt^i} [q - q_0]_{x=1} \quad (23)$$

kus q_0 on mingi vajalik vedeliku kulu lõikes $x=1$.

Võrrand (23) on mittelineaarne. Oletades, et S muutub vähe ja tähistades \hat{S} mingis mõttes keskmise S väärtuse, võime S^2 jaoks kasutada ligikaudset valemit

$$S^2 = 2 S_0 S - S_0^2$$

Sellise asendusega on võimalik lineariseerida võrrand (23) ja seejärel on talle rakendatavad tuntud meetodid tema omaduste uurimiseks. Samuti võib võrrandi lahendamiseks kasutada Laplace'i või Fourieri teisendusi.

Vaatleme siinkohal veel kahte erijuhtu:

a) $\frac{dS}{dt} = A (q - q_0)_{x=1}; \quad (24)$

$$b) \quad \varepsilon \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{dS}{dt} = \lambda_1 (q - q_0)_{x=1} \quad (25)$$

A. Tähistame

$$K^2 = \frac{\lambda_3 q}{p_1 - p_2}$$

Arvestades nüüd valemit (22), võime võrrandi (24) esitada kujul

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2\lambda}{2 + \lambda\lambda_1} (S^2 - K^2) \frac{p_1 - p_2}{\lambda_3}$$

Saadud võrrand on eralduvate muutujatega; tema üldlahendiks on

$$\int \frac{1}{S^2 - K^2} dS = \frac{2\lambda}{2 + \lambda\lambda_1} \int (p_1 - p_2) dt + c$$

Pärast lihtsaid teisendusi võime lahendi kirjutada kujul

$$S = \frac{2K - K(1 - c \exp(2KM \int_0^t (p_1 - p_2) dt))}{1 - c \cdot \exp(2KM \int_0^t (p_1 - p_2) dt)}, \quad (26)$$

kus

$$M = 2\lambda / \lambda_3 (2 + \lambda\lambda_1)$$

Võrrandi (24) on kaks statsionaarset lahendit $S = \pm K$. Sõltuvalt kordaja M märgist on üks neist asümptootiliselt stabiilne ja teine ebastabiilne. Reaalsete arterite korral on loomulik nõuda et lahend $S = K$ oleks stabiilne. Selleks on vaja et kordaja M rahuldaks võrratust

$$M < 0.$$

B. Oletame lihtsuse mõttes, et $p_1 - p_2 = \Delta p = \text{const.}$

Sel korral arvestades valemit (22) võime võrrandi (25) esitada kujul

$$\varepsilon \frac{d^2 s}{dt^2} + \left(1 + \frac{\lambda_1 \Lambda_1}{2}\right) \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda_1 \Delta p}{\Lambda_3} (s^2 - k^2). \quad (27)$$

Kasutame nüüd ligikaudset võrdust

$$s^2 = 2s_0 s - s_0^2 \quad (s > \frac{s_0}{2}).$$

Siis võrrand (27) omandab kuju

$$\varepsilon \frac{d^2 s}{dt^2} + \left(1 + \frac{\lambda_1 \Lambda_1}{2}\right) \frac{ds}{dt} - \frac{2s_0 \lambda_1 \Delta p}{\Lambda_3} s = -\frac{\lambda_1 \Delta p k^2}{\Lambda_3}. \quad (28)$$

Olgu μ_1, μ_2 võrrandi

$$\varepsilon \mu^2 + \left(1 + \frac{\lambda_1 \Lambda_1}{2}\right) \mu - \frac{2s_0 \lambda_1 \Delta p}{\Lambda_3} = 0$$

lahendid. Võrrandi (28) lahendid avalduvad siis kujul

$$s = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + \frac{k^2}{2s_0}.$$

Konstandid c_1 ja c_2 määratakse algtingimustest.

6. Lõpetuseks.

Hüdrodünaamika võrrandid, mida harilikult kasutatakse vere voolu uurimisel, ei ole üldjuhul kvadratuurides lahenduvad. Eelpool nägime, et kuigi hüdraulilises lähenduses on need võrrandid kvadratuurides lahenduvad, on need lahendid küllalt keeruka kujuga. Lisades siia veel regulatsioon protsessi kirjeldavad võrrandid, muutub ülesanne juba analüütiliselt lahendamatuks. Seega oleks vaadeldava ülesande lahendamiseks vaja kasutada numbrilisi meetodeid. Käesolevas töös ei ole seda tehtud, kuna esialgu puudub igasugune alus regulatsiooni kirjeldava konkreetse võrrandi välja valimiseks. Et jõuda selliste võrranditeni, oleks vaja eelkõige kirjeldada matemaatilisi vahendeid kasutades töötavas lihas toimuvaid protsesse ja seejärel sõltuvalt konkreetsest mudelist välja valida regulaatorit kirjeldav võrrand.

Kirjandus

1. Хаутин В.М. - Сосудодвигательные рефлексы. М., "Наука", 1964.
2. Корреляция кровоснабжения с метаболизмом и функцией. Труды международного симпозиума. Тбилиси, "Мецниереба", 1969.
3. Чарный И.А. - Неустановившиеся движение реальной жидкости в трубах. М.-Л., Госиздат техн.-теор. лит., 1951.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается течение вязкой ньютоновой жидкости в трубах с активно деформирующимися стенками в гидравлическом приближении. Постановка такого рода задач представляет интерес в приложениях к физиологии.

Sisukord

Sissejuhatus	2
1. Hüdraulika võrrandid	5
2. Kvaasistatsionaarne ülesanne	8
3. Mittestatsionaarne ülesanne	10
4. Jooksvad lained	12
5. Vedeliku kulu reguleerimine deformeeruvate seintega torudes	14
6. Lõppsõna	17
Kirjandus	18
Resümee	19