TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

VARIATSIOONVÕRRATUSED

1985

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Arvutusmatemaatika kateeder

VARIATSIOONVÕRRATUSED

Koostanud Peeter Oja

TARTU 1985

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus
29. aprillil 1985.a.

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА.
Составитель Пеэтер Оя.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja I. Saarniit.
Paljundamisele antud 15.05.1985.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 6,05.
Arvestuspoognaid 4,63. Trükipoognaid 6,5.
Trükiarv 200.
Tell. nr. 557.
Hind 15 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

S i s s e j u h a t u s

Matemaatilise füüsika võrranditega seotud rajaülesannete uurimisel tekib ühe esimese probleemina küsimus lahendi olemasolust ja ühesusest. Selle probleemi lahendamise üks võimalus on vaadelda ülesande nn. variatsioonseadet, mille juures lahendi mõistet on klassikalise lahendiga võrreldes tunduvalt laiendatud. Seejuures küllalt siledate lahendite korral on esialgne rajaülesanne ja tema variatsioonseade ekvivalentsed. Funktsionaalanalüüsi aparatuuri kasutades õnnestub tihti tõestada variatsioonülesande lahendi olemasolu ja ka ühesus. Kui seejärel näidatakse, et variatsioonülesande lahend on küllalt sile, on tõestatud ka klassikalise lahendi olemasolu.

Näiteks piirkonnas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$, antud Poissoni võrrand

$$\Delta u = f,$$

kus $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, koos Dirichlet' rajatingimusega $u|_\Gamma = 0$, kus Γ on piirkonna Ω raja, kirjeldab statsionaarset soojuse levikut, elektrivoolu või vedeliku voolamist; siin u on vastavalt temperatuur, elektrivälja potentsiaal või vedeliku rõhk. Klassikaliselt lahendilt nõutakse traditsiooniliselt, et ta oleks piirkonnas Ω kaks korda pidevalt diferentseeruv ja piirkonna sulundil $\overline{\Omega}$ pidev. Kasutades bilineaarvormi

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx,$$

võib ülesandele anda variatsioonseade: leida $u \in H_0^1(\Omega)$ nii, et

$$a(u,v) = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

mis siledate lahendite korral on ekvivalentne eespool toodud Poissoni võrrandi Dirichlet' ülesandega.

Toodud näide variatsioonülesandest kujutab endast võrrandit, kuid paljud tegelikkusest kerkinud ülesanded viivad tunduvalt üldisema variatsioonseadeni, nn. variatsioonvõrratuste püstitamiseni. Käesolevas õppevahendis käsitletaksegi statsionaarsete variatsioonvõrratuste lahendi olemasolu ja ühesuse küsimusi.

§ 1. Lineaarsete operaatoritega I liiki variatsioonvõrratused Hilberti ruumis

1. Koertsitiivsed bilineaarvormid

Olgu V reaalne Hilberti ruum. Bilineaarvormi a: $V \times V \to \mathbb{R}$ nimetatakse tõkestatuks (ehk pidevaks), kui leidub $M > 0$ nii, et

$$|a(u,v)| \leq M \|u\| \, \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

Bilineaarvormi a nimetatakse koertsitiivseks (ehk positiivselt määratuks ehk elliptiliseks), kui leidub $\alpha > 0$ nii, et

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Lemma 1.1. Olgu a tõkestatud bilineaarvorm. Siis leidub parajasti üks pidev lineaarne operaator $A \in \mathcal{L}(V,V)$ nii, et

$$(Au, v) = a(u,v) \quad \forall u, v \in V.$$

Operaator A on positiivselt määratud parajasti siis, kui bilineaarvorm a on koertsitiivne.

T õ e s t u s. Fikseerime suvaliselt valitud $u \in V$. Siis vastavus $v \to a(u,v)$ on pidev lineaarne funktsionaal (lineaarsus järeldub a lineaarsusest teise argumendi järgi, pidevus aga a tõkestatusest). Rieszi teoreem pideva lineaarse funktsionaali esitusest lubab selle vastavuse esitada kujul $v \to (w, v)$, kus $w \in V$. Defineerime operaatori A seosega $Au = w$. Siis

$$(Au, v) = a(u,v) \quad \forall u, v \in V.$$

Operaatori A lineaarsus järeldub a lineaarsusest esimese argumendi järgi, tõkestatus aga a tõkestatusest järgmiselt:

$$\|Au\| = \|w\| = \sup_{\|v\|=1} |(w,v)| = \sup_{\|v\|=1} |a(u,v)| \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|=1} M\|u\|\|v\| = M\|u\|.$$

Kui ka veel operaator $A_1 \in \mathcal{L}(V,V)$ rahuldab tingimust

$$(A_1 u, v) = a(u,v) \quad \forall u,v \in V,$$

siis

$$(A_1 u, v) = (Au, v) \quad \forall u,v \in V,$$

millest

$$A_1 u = Au \quad \forall u \in V,$$

s.t. $A_1 = A$; sellega on näidatud operaatori A ühesus.

Lemma 1.1 on tõestatud.

Pideva lineaarse funktsionaali $f \in V'$ väärtuse jaoks elemendil $v \in V$ kasutame edaspidi kirjutist $\langle f, v \rangle$.

Lemma 1.2. Tõkestatud bilineaarvormi a korral leidub parajasti üks pidev lineaarne operaator $A \in \mathcal{L}(V,V')$ nii, et

$$\langle Au, v \rangle = a(u,v) \quad \forall u,v \in V.$$

Operaator A on positiivselt määratud parajasti siis, kui bilineaarvorm a on koertsitiivne.

Ülesanne. Tõestada lemma 1.2.

2. Variatsioonvõrratuse püstitus, seos operaatorvõrranditega

Hulka $K \subset V$ nimetatakse kumeraks, kui iga $u, v \in K$ ja iga $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda u + (1-\lambda) v \in K$.

Olgu K kinnine kumer hulk ruumis V. Olgu antud pidev lineaarne funktsionaal $f \in V'$. Esimest liiki variatsioonvõrratuseks nimetatakse ülesannet:

leida $u \in K$ nii, et kehtiks võrratus

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \qquad (1.1)$$

Vaatleme juhtu, kus $K=V$. Olgu bilineaarvorm a tõkestatud. Fikseeritud elemendi $u \in V$ korral $\{v-u : v \in V\}=V$, seega võrratus (1.1) on esitatav

$$a(u,v) \geq \langle f,v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Arvestades võrdust $\{-v : v \in V\}=V$, saame võrratuse (1.1) kirjutada veel

$$a(u,-v) \geq \langle f,-v \rangle \quad \forall v \in V$$

ehk

$$a(u,v) \leq \langle f,v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Kokkuvõttes, võrratus (1.1) on samaväärne variatsioonvõrrandiga

$$a(u,v) = \langle f,v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Kasutades lemmaga 1.2 määratud esitist $a(u,v)=\langle Au,v \rangle$, saame

$$\langle Au,v \rangle = \langle f,v \rangle \quad \forall v \in V,$$

s.t. $Au=f$. Niisiis, kui $K=V$, on variatsioonvõrratus (1.1) samaväärne operaatorvõrrandiga $Au=f$.

3. Sümmeetrilise bilineaarvormiga variatsioonvõrratused

Bilineaarvormi a nimetatakse sümmeetriliseks, kui $a(u,v)=a(v,u)$ iga $u,v \in V$ korral. Bilineaarvormi a nimetame mittenegatiivseks, kui $a(v,v) \geq 0$ iga $v \in V$ korral.

Vaatleme variatsioonvõrratust (1.1). Defineerime funktsionaali

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f,v \rangle, \quad v \in V,$$

teda nimetatakse ruutfunktsionaaliks.

<u>Teoreem 1.1.</u> Kui bilineaarvorm a on sümmeetriline ja mittenegatiivne, siis võrratus (1.1) on samaväärne ülesan-

dega:

leida $u \in K$ nii, et $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$. (1.2)

T õ e s t u s. Olgu u ülesande (1.1) lahend. Siis iga $v \in K$ korral

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v\rangle - \frac{1}{2} a(u,u) + \langle f, u\rangle =$$
$$= \frac{1}{2} a(v-u, v-u) + a(u, v-u) - \langle f, v-u\rangle \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} a(v-u, v-u) \geq 0,$$

sest a on mittenegatiivne. Sellega oleme näidanud, et u on ka ülesande (1.2) lahend.

Vastupidi, olgu u ülesande (1.2) lahend. Kui $v \in K$ ja $\lambda \in (0,1)$, siis K kumeruse tõttu $\lambda u + (1-\lambda) v \in K$ ning $J(u) \leq J(\lambda u + (1-\lambda) v)$. Viimane võrratus on

$$\frac{1}{2} a(u,u) - \langle f, u\rangle \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} a(\lambda u + (1-\lambda) v, \lambda u + (1-\lambda) v) - \langle f, \lambda u + (1-\lambda) v\rangle$$

ehk teisendatuna

$$(1-\lambda)\langle f, v-u\rangle \leq \frac{1}{2}(1-\lambda)^2 a(v,v) + \lambda(1-\lambda) a(u,v) - \frac{1}{2}(1-\lambda^2) a(u,u).$$

Peale jagamist positiivse arvuga $1-\lambda$ saame siit

$$\langle f, v-u\rangle \leq \frac{1}{2}(1-\lambda) a(v,v) + \lambda a(u,v) - \frac{1}{2}(1+\lambda) a(u,u).$$

Piirprotsessis $\lambda \to 1$ on tulemuseks võrratus

$$\langle f, v-u\rangle \leq a(u,v) - a(u,u) = a(u, v-u),$$

s.t. u on võrratuse (1.1) lahend.

Teoreem 1.1 on tõestatud.

<u>Märkus 1.1</u>. Funktsionaali $J(v)$ asemel võiksime vaadelda ka funktsionaali $pJ(v) + q$, kus $p > 0$ ja q on konstandid, sest nende funktsionaalide miinimumülesanded on ekvivalentsed.

4. <u>Projektsioon kinnisele kumerale hulgale</u>

Olgu antud $w \in V$. Defineerime funktsionaali $F(v) = \|v - w\|^2$, $v \in V$. Püstitame antud kinnise kumera hulga K

korral ülesande

leida $u \in K$ nii, et $F(u) = \min_{v \in K} F(v)$. (1.3)

Vaatleme veel ülesannet

leida $u \in K : (u, v-u) \geq (w, v-u) \quad \forall v \in K$. (1.4)

Paneme tähele, et (1.4) on erijuht ülesandest (1.1), siin $a(u,v) = (u,v)$ ja $\langle f, v \rangle = (w, v)$.

Lemma 1.3. Ülesanded (1.3) ja (1.4) on samaväärsed ning neil on iga $w \in V$ korral parajasti üks lahend.

T õ e s t u s. Tuginedes esitusele $F(v) = (v,v) - 2(w,v) + \|w\|^2$, võime teoreemi 1.1 ja märkuse 1.1 põhjal (siin $p=2$, $q = \|w\|^2$) väita ülesannete (1.3) ja (1.4) samaväärsust.

Näitame miinimumülesande (1.3) lahendi olemasolu. Tähistame $d = \inf_{v \in K} \|v - w\|^2$. Olgu $v_n \in K$ minimiseeriv jada, s.t $\|v_n - w\|^2 = d + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$. Näitame, et jada v_n on fundamentaalne. Rööpkülikvõrduse $\|a-b\|^2 + \|a+b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ abil saame

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|(v_n - w) - (v_m - w)\|^2 =$$
$$= 2(\|v_n - w\|^2 + \|v_m - w\|^2) - \|v_n + v_m - 2w\|^2.$$

Et K on kumer, siis $\frac{1}{2}(v_n + v_m) \in K$ ning

$$\|v_n + v_m - 2w\|^2 = 4\|\tfrac{1}{2}(v_n + v_m) - w\|^2 \geq 4d.$$

Seega $\|v_n - v_m\|^2 \leq 2(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \to 0$, kui $n, m \to \infty$. Ruumi V täielikkusest järeldame, et v_n koondub mingiks elemendiks $u \in V$, hulga K kinnisuse tõttu $u \in K$. Nüüd saame võrdusest $\|v_n - w\|^2 = d + \varepsilon_n$ piiril $\|u - w\|^2 = d$, s.t. u on ülesande (1.3) lahend.

Veendume veel lahendi ühesuses. Olgu $u_1, u_2 \in K$ lahendid. Siis

$$(u_1, u_2 - u_1) \geq (w, u_2 - u_1),$$

sest u_1 on ülesande (1.4) lahend, ning

$$(u_2, u_1 - u_2) \geq (w, u_1 - u_2),$$

sest u_1 on ülesande (1.4) lahend. Viimaste võrratuste liitmisel saame $(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \geq 0$ ehk $\| u_1 - u_2 \|^2 \leq 0$, millest $u_1 = u_2$.

Lemma 1.3 on tõestatud.

Lemma 1.3 põhjal võime öelda, et igale elemendile $w \in V$ seatakse vastavusse parajasti üks element $u \in K$, mis asub kõige lähemal elemendile w. Niiviisi on defineeritud operaator $P_K w = u$. Seejuures, kui $w \in K$, siis $P_K w = w$. Operaatorit P_K nimetame projektoriks hulgale K.

Lemma 1.4. Operaator P_K rahuldab tingimust

$$\| P_K w_1 - P_K w_2 \| \leq \| w_1 - w_2 \| \quad \forall w_1, w_2 \in V.$$

T õ e s t u s. Olgu $u_1 = P_K w_1$ ja $u_2 = P_K w_2$. Siis lemma 1.3 põhjal

$$(u_1, u_2 - u_1) \geq (w_1, u_2 - u_1)$$

ja

$$(u_2, u_1 - u_2) \geq (w_2, u_1 - u_2).$$

Nende võrratuste liitmise tulemusena

$$(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \geq (w_1 - w_2, u_2 - u_1).$$

Siit saame

$$\| u_1 - u_2 \|^2 \leq (w_1 - w_2, u_1 - u_2) \leq \| w_1 - w_2 \| \, \| u_1 - u_2 \|,$$

millest

$$\| u_1 - u_2 \| \leq \| w_1 - w_2 \|.$$

Lemma 1.4 on tõestatud.

5. Lahendi olemasolu ja ühesuse teoreem

Teoreem 1.2 (Stampacchia teoreem). Kui bilineaarvorm a on tõkestatud ja koertsitiivne, hulk K kinnine ja kumer, siis iga $f \in V'$ korral on võrratusel (1.1) parajasti üks lahend.

T õ e s t u s. Olgu $A \in \mathcal{L}(V,V)$ bilineaarvormi a poolt seosega $(Au, v) = a(u,v)$, $u, v \in V$, määratud operaator (lemma 1.1). Rieszi teoreemi põhjal funktsionaali esitusest võime öelda, et antud funktsionaali $f \in V'$ korral leidub parajasti üks element $\varphi \in V$ nii, et

$$\langle f, v\rangle = (\varphi, v) \quad \forall u \in V.$$

Ülesanne (1.1) on siis samaväärne järgmisega:

$$u \in K: (Au - \varphi, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

ehk, teisiti kirjutatult

$$u \in K: (u + \rho(Au - \varphi) - u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

kus $\rho = const > 0$. Viimase võrratuse esitame kujul

$$u \in K: (u, v-u) \geq (u - \rho(Au - \varphi), v - u) \quad \forall v \in K.$$

Tähistades $w = u - \rho(Au - \varphi)$, oleme saanud võrratuse (1.4), mis on lemma 1.3 põhjal samaväärne võrdusega

$$u = P_K(u - \rho(Au - \varphi)).$$

Defineerime operaatori

$$G_\rho v = P_K(v - \rho(Av - \varphi)), \quad v \in V.$$

Eelneva aruteluga oleme näidanud, et ülesande (1.1) lahendid ühtivad operaatori G_ρ püsipunktidega hulgas K.

Järgnevas näitame, et sobiva ρ valiku korral on kujutus $G_\rho : K \to K$ ahendav. Suvaliste $v, w \in K$ korral saame

$$\|G_\rho v - G_\rho w\|^2 = \|P_K(v - \rho(Av - \varphi)) - P_K(w - \rho(Aw - \varphi))\|^2 \leq$$

$$\leq \|v - \rho(Av - \varphi) - (w - \rho(Aw - \varphi))\|^2 =$$

$$= \|(v - w) - \varrho A(v - w)\|^2 =$$

$$= \|v - w\|^2 - 2\varrho(A(v - w), v - w) + \varrho^2 \|A(v - w)\|^2 \leq$$

$$\leq (1 - 2\varrho\alpha + \varrho^2 M^2)\|v - w\|^2.$$

Seejuures $1 - 2\varrho\alpha + \varrho^2 M^2 < 1$ parajasti siis, kui $0 < \varrho < \frac{2\alpha}{M^2}$. Valides viimast tingimust rahuldava parameetri ϱ, võime väita, et G_ϱ omab parajasti ühe püsipunkti hulgas K, see on ka ülesande (1.1) ainus lahend.

Teoreem 1.2 on tõestatud.

Esitame mõned Stampacchia teoreemi puudutavad täiendused ja märkused.

1. Ülesande (1.1) lahend sõltub pidevalt vabaliikmest järgmises mõttes: kui u_i on võrratuse (1.1) lahend, mis vastab funktsionaalile $f_i \in V'$, $i = 1, 2$, siis kehtib hinnang

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_1 - f_2\|.$$

Tõepoolest, võrratuste

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq \langle f_1, u_2 - u_1 \rangle$$

ja

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle$$

liitmise tulemusena

$$a(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \geq \langle f_1 - f_2, u_2 - u_1 \rangle,$$

mille abil

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq$$

$$\leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\| \, \|u_1 - u_2\|,$$

siit saamegi nõutava võrratuse.

2. Stampacchia teoreem esitatud kujul on avaldatud 1964. aastal. Juhtu $K = V$ tuntakse Lax—Milgrami teoreemina, see pärineb 1954. aastast ning väidab sisuliselt, et tõkestatud

ja positiivselt määratud operaatoriga võrrand $Au=f$ on üheselt lahenduv iga vabaliikme f korral. Sümmeetrilise bilineaarvormi puhul saadava ruutfunktsionaali minimiseerimisülesande ühene lahenduvus oli teada aga märksa varem.

§ 2. Näiteid I liiki variatsioonvõrratustest

Enne näidete juurde asumist toome hiljem vajalikke tähiseid ja esitame mõned tulemused Sobolevi ruumide kohta.

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk. Mittenegatiivsete täisarvude m korral defineerime Sobolevi ruumid $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \le m\}$, kusjuures D^α tähendab distributsioonide mõttes α järku tuletise võtmist. Ruum $H^m(\Omega)$ on Hilberti ruum, kui temas kasutada normi

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}.$$

Olgu $C^m(\Omega)$ ja $C^m(\bar{\Omega})$ vastavalt hulkadel Ω ja $\bar{\Omega}$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide ruumid. Sümboliga $\mathcal{D}(\Omega)$ tähistame põhifunktsioonide ruumi, sinna kuuluvad lõpmatult diferentseeruvad ja hulgas Ω kompaktse kandjaga funktsioonid. Ruum $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ on hulga $\mathcal{D}(\Omega)$ sulund ruumis $H^m(\Omega)$. Seejuures $H^0(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Ruum $L^\infty(\Omega)$ koosneb hulgal Ω mõõtuvate ja peaaegu kõikjal tõkestatud funktsioonide klassidest. Negatiivsete indeksitega Sobolevi ruumid defineerime kaasruumidena $H^{-m}(\Omega) = (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))'$.

Analoogiliselt defineeritakse ka vastavad ruumid rajal Γ, eeldades, et tükiti sileda Γ korral on ta lokaalselt (hulga Γ peaaegu iga punkti ümbruses) $\mathbb{R}^{n-1}$ struktuuriga, s.t. hulgal Γ määratud funktsioonide jaoks on olemas diferentseeruvuse mõiste.

Lemma 2.1 ([6], lk. 147-150). Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lahtine tõkestatud hulk tükiti sileda rajaga Γ. Avaldis

$$\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Gamma r v^2 d\Gamma\right)^{1/2}$$

on ekvivalentne ruumi $H^1(\Omega)$ normiga, kui $r \in L^\infty(\Gamma), r(x) \geq 0$ ja $\operatorname{mes}\{x \in \Gamma : r(x) > 0\} > 0$.

Tähistame $v \in C^m(\bar{\Omega})$ korral sümboliga γv funktsiooni v ahendi rajale Γ, seega $\gamma v \in C^m(\Gamma)$.

Lemma 2.2 ([4], lk. 34) (teoreem jälgedest). Olgu lahtine hulk $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tõkestatud ning tema raja Γ sile. Siis vastavus $\gamma : C^m(\bar{\Omega}) \to C^m(\Gamma), m \geq 1$, on üheselt jätkatav pidevaks lineaarseks teisenduseks $\gamma : H^m(\Omega) \to$ $\to H^{m-1}(\Gamma)$, seejuures $\gamma(H^m(\Omega)) \supset H^m(\Gamma)$.

Lemma 2.2 mõte seisneb selles, et iga funktsiooni korral ruumist $H^m(\Omega), m \geq 1$, on üheselt määratud tema väärtused rajal Γ kui funktsioon ruumis $H^{m-1}(\Gamma)$, seejuures iga $v \in H^m(\Gamma)$ korral leidub funktsioon ruumis $H^m(\Omega)$ nii, et tema ahend rajale Γ on v.

1. Lõikeülesanne

Olgu $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue'i mõttes mõõtuv hulk. Skalaarkorrutis ruumis $L^2(E)$

$$(u, v) = \int_E u(x) v(x) dx$$

on ühtlasi tõkestatud koertsitiivne bilineaarvorm. Olgu antud $\varphi \in L^2(E)$. Defineerime $K = \{v \in L^2(E) : v \geq \varphi$ p.k. hulgal $E\}$. Hulga K kumerus on kontrollitav vahetult, näitame kinnisust. Olgu $v_n \in K$, $v_n \to v$ ruumis $L^2(E)$. Siis (on teada funktsiooniteooriast) leidub osajada (indeksite hulgaga $N' \subset \mathbb{N}$) nii, et $v_n \to v$, $n \in N'$, p.k.

hulgal E. Seega ka $v \geq \varphi$ p.k. hulgal E, s.t. $v \in K$.

Stampacchia teoreemi põhjal võime väita, et iga $f \in L^2(E)$ korral ülesanne

$$u \in K: \int_E u(v-u)\,dx \geq \int_E f(v-u)\,dx \quad \forall v \in K \qquad (2.1)$$

on üheselt lahenduv.

Veendume selles, et ülesande (2.1) lahendiks on funktsiooni f "lõige" funktsiooniga φ:

$$u = \max\{f, \varphi\} = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \geq \varphi(x), \\ \varphi(x), & \text{kui } f(x) \leq \varphi(x), \end{cases}$$

pidades silmas, et funktsioonide väärtustest räägime siin p.k. hulgal E. Tõepoolest, iga $v \in K$ korral, arvestades, et $v - \varphi \geq 0$, saame

$$\int_E u(v-u)\,dx = \int_{\{f \geq \varphi\}} f(v-f)\,dx + \int_{\{f < \varphi\}} \varphi(v-\varphi)\,dx \geq$$

$$\geq \int_{\{f \geq \varphi\}} f(v-f)\,dx + \int_{\{f < \varphi\}} f(v-\varphi)\,dx = \int_E f(v-u)\,dx,$$

s.t. u rahuldab võrratust (2.1).

2. Tõkkeülesanne

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tõkestatud lahtine sidus hulk tükiti sileda rajaga Γ. Olgu antud funktsioonid $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\dots,n$, nii, et mingi $\alpha_0 > 0$ korral

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{p.k. hulgas } \Omega.$$

Defineerime bilineaarvormi

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx, \quad u,v \in H(\Omega). \qquad (2.2)$$

Võrratusest

$$a(v,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \geq \alpha_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

järeldub bilineaarvormi a koertsitiivsus ruumil $V = H^1_0(\Omega)$, sest sellel ruumil on avaldis $\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$ ekvivalentne ruumi $H^1_0(\Omega)$ normiga

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Põhjenduseks piisab lemmas 2.1 võtta $\wedge(x) \equiv 1$, $x \in \Gamma$, sest kui $v \in H^1_0(\Omega)$, siis $v|_\Gamma = 0$.

<u>Ülesanne</u>. Tõestada bilineaarvormi a tõkestatus ruumil $H^1(\Omega)$.

Olgu antud $\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi \leq 0$ p.k. hulgal Γ (märgime, et lemma 2.2 põhjal $\psi \in L^2(\Gamma)$) ning valime hulga

$$K = \{v \in H^1_0(\Omega) : v \geq \psi \text{ p.k. hulgal } \Omega\}.$$

Seejuures $\max\{\psi, 0\} \in H^1_0(\Omega)$ ([2], lk. 47), seepärast $K \neq \emptyset$.

<u>Ülesanne</u>. Tõestada hulga K kumerus ja kinnisus.

Me võime nüüd Stampacchia teoreemile tuginedes väita, et iga $f \in V' = H^{-1}(\Omega)$ korral on variatsioonvõrratus

$$u \in K : a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K \qquad (2.3)$$

üheselt lahenduv.

Bilineaarvorm a määrab üheselt operaatori $L \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ seosega $\langle Lu, v \rangle = a(u, v)$, $u, v \in H^1_0(\Omega)$. Kui $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, siis $u \in C^2(\bar{\Omega})$ korral $Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)$; arvestades veel a koertsitiivsust, võime öelda, et L on elliptiline diferentsiaaloperaator.

Uurime järgnevalt variatsioonvõrratuse (2.3) lahendi omadusi. Eeldame, et $u, \psi \in C(\bar{\Omega})$. Hulk $\{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\}$ on lahtine ja $I = I(u) = \{x \in \Omega : u(x) =$

$= \Psi(x)\}$ kinnine hulgas Ω. Hulka I nimetatakse lahendi kointsidentseks hulgaks. Valime vabalt $x_0 \in \Omega \setminus I$. Siis leidub punkti x_0 lahtine ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et $u(x) > \Psi(x)$ iga $x \in \overline{\mathcal{U}}$ korral. Valime vabalt põhifunktsiooni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $v = u + \varepsilon\varphi \geq \Psi$, s.t. $v \in K$. Asetades $v = u + \varepsilon\varphi$ võrratusse (2.3), saame peale jagamist positiivse arvuga ε võrratuse

$$a(u,\varphi) \geq \langle f,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

Põhifunktsiooni φ suvalisuse tõttu kehtib see võrratus ka $-\varphi$ korral, seega

$$a(u,\varphi) = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}),$$

s.t.

$$\langle Lu,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

Sellega oleme näidanud, et $Lu = f$ hulgal $\Omega \setminus I$ distributsioonide mõttes, küllalt sileda u korral on aga tegemist võrrandi $Lu = f$ lahendiga klassikalises mõttes hulgal $\Omega \setminus I$.

3. Elektrivool osaliselt pooljuhtiva rajaga piirkonnas

3.1. Ülesande matemaatiline püstitus. Vaatleme piirkonda $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ elektrit juhtivas keskkonnas. Olgu $g(x), x \in \Omega$, juurdevoolavate laengute ruumtihedus (g kirjeldab piirkonnas Ω paiknevaid täiendavaid vooluallikaid), $u(x)$ elektrivälja potentsiaal, $\sigma(x) > 0$ elektrijuhtivustegur. Eeldame, et $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, s.t. materjal ei muutu kuskil isolaatoriks (kui keskkond on homogeenne, siis $\sigma(x) = \mathrm{const} > 0$). Laengu säilimise võrrand on

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = g, \quad x \in \Omega. \qquad (2.4)$$

Märgime, et kui $\sigma(x) = \mathrm{const}$, siis saame siit Poissoni võrrandi

$$-\Delta u = \frac{q}{\sigma}.$$

Eeldame, et Ω on tõkestatud, tükiti sileda rajaga Γ, mis on jaotatud kaheks osaks $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Edaspidises arutelus teeme veel eeldusi Γ_1 kohta. Olgu osal Γ_0 antud potentsiaal

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0. \tag{2.5}$$

Rajaosa Γ_1 olgu pooljuht, mille paksust me ei arvesta (on niivõrd õhuke), oletame, et Γ_1 laseb voolu läbi Ω suunas. Eeldame, et Γ_1 välisküljel on antud potentsiaal $h(x)$, $x \in \Gamma_1$, seejuures $u(x), x \in \Gamma_1$, tähistab potentsiaali Γ_1 siseküljel.

Kui $u(x) > h(x), x \in \Gamma_1$, siis tekkinud pinge tõttu peaks vool kulgema Ω välisnormaali n suunas, aga pooljuhi takistuse tõttu seda pole, s.t. $J \cdot n = 0$ (siin ja edaspidi punkt tähistab skalaarkorrutist ruumis R^3). Ohmi seaduse põhjal võime voolu avaldada $J = -\sigma \operatorname{grad} u$ (tarvitseb silmas pidada, et $\frac{1}{\sigma} = \varrho$ on eritakistus). Seega, et $\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u \cdot n$, saame

$$J \cdot n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

millest $\sigma \neq 0$ tõttu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Kui aga $u(x) \leq h(x), x \in \Gamma_1$, siis pooljuht ei takista voolu normaalisihis Ω sisse, seega $J \cdot n \leq 0$, millest omakorda $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$. Meenutades, et Γ_1 paksus on lõpmata väike, võime füüsikalistel kaalutlustel öelda, et tingimus $u(x) < h(x)$ ei ole lubatav (vastasel korral muutuks normaalisihiline vool lõpmata suureks).

Selliselt saame rajaosal Γ_1 kokkuvõttes tingimused

$$\left.\begin{aligned} u(x) > h(x) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \\ u(x) = h(x) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \end{aligned}\right\}, \quad x \in \Gamma_1 . \tag{2.6}$$

Kokku saame nähtust kirjeldava ülesande (2.4)-(2-6).

Märgime, et kui $\Gamma_1 = \emptyset$, saame siit erijuhuna Dirichlet' ülesande.

3.2. Ülesande esitamine variatsioonvõrratusena. Siin näitame, et ülesanne (2.4)-(2.6) on taandatav I liiki variatsioonvõrratusele.

Eeldame, et $\sigma \in C^1(\bar\Omega)$, $g \in C(\bar\Omega)$, $h \in C(\Gamma_1)$. Oletame, et ülesandel (2.4)-(2.6) on lahend $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$.

Tähistame

$$K_s = \{ v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega) : v(x) = 0, x \in \Gamma_0 ; v(x) \geq h(x), x \in \Gamma_1 \}.$$

Siis $u \in K_s$, s.t. $K_s \neq \emptyset$. Võrdusest (2.4) saame $v \in K_s$ korral

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)(v-u)\,dx = \int_\Omega g(v-u)\,dx. \tag{2.7}$$

Me kasutame võrduse (2.7) teisendamiseks Gauss—Ostrogradski valemit (n - välisnormaal)

$$\int_\Omega \operatorname{div} v\,dx = \int_\Gamma v \cdot n\,d\Gamma,$$

mille kehtivuseks piisab, et $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$. Võrduse (2.7) vasak pool teiseneb

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)(v-u)\,dx =$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u\,(v-u))\,dx - \int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)\,dx =$$

$$= \int_\Gamma \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,d\Gamma - \int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)\,dx.$$

Võrduse (2.7) võime nüüd kirjutada

$$\int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)\,dx = \int_\Omega g(v-u)\,dx +$$

$$+ \int_\Gamma \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,d\Gamma = \int_\Omega g(v-u)\,dx + \int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,d\Gamma, \tag{2.8}$$

sest $u, v \in K_s$ tõttu $v = u = 0$ hulgal Γ_0. Veendume selles, et võrduses (2.8) esinev pindintegraal on mittenegatiivne. Tõepoolest, kui $x \in \Gamma_1$ korral $u(x) > h(x)$, siis (2.6) põhjal $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$, kui aga $u(x) = h(x)$, siis (2.6) tõttu $\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geq 0$ ning lisaks $v(x) \geq h(x) = u(x)$, s.t. $v(x) - u(x) \geq 0$.

Niisiis oleme näidanud, et kuid ülesandel (2.4)-(2.6) on lahend $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, siis kehtib võrratus

$$\int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)\,dx \geq \int_\Omega g(v-u)\,dx \quad \forall v \in K_s. \tag{2.9}$$

Järgnevas näitame, et kui $u \in K_s$ ja on rahuldatud võrratus (2.9), siis u on ülesande (2.4)-(2.6) lahend. Seejuures tingimus (2.5) sisaldub K_s definitsioonis, seepärast jääb näidata (2.4) ja (2.6) kehtivust.

Võtame $v = u \pm \varphi$, valides vabalt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Siis $v \in K_s$. Võttes $v = u + \varphi$, saame võrratusest (2.9)

$$\int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi\,dx \geq \int_\Omega g\varphi\,dx,$$

aga $v = u - \varphi$ korral

$$-\int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi\,dx \geq -\int_\Omega g\varphi\,dx,$$

seega

$$\int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Teisendame selle võrduse vasakut poolt, kasutades Gauss—Ostrogradski valemit

$$\int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \varphi\,dx =$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u\,\varphi)\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)\varphi\,dx =$$

$$= \int_\Gamma \sigma \operatorname{grad} u \cdot n\,\varphi\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)\varphi\,dx.$$

Et $\varphi = 0$ rajal Γ, siis pindintegraal viimases võrduses on null ning

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u)\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Viimane võrdus tähendab, et $-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = g$ distributsioonide mõttes, aga eeldused g, σ ja u sileduse kohta annavad siin võrduse igas punktis $x \in \Omega$.

Asume tõestama tingimuste (2.6) täidetust. Et u rahuldab võrrandit (2.4) ja $u \in K_1$, siis kehtib ka võrdus (2.8). Kuid (2.8) ja (2.9) kokku annavad, et

$$\int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} (v - u)\, d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K_1. \tag{2.10}$$

Näitame kõigepealt, et siit järeldub võrratus $\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$, $x \in \Gamma_1$. Siin eeldame, et Γ_1 on küllalt sile (normaal n muutub siledalt) ja Γ_1 ei oma isoleeritud rajapunkte hulgas Γ.

Oletame vastuväiteliselt, et $\sigma \frac{\partial u}{\partial n} < 0$ mingis punktis $x_0 \in \Gamma_1$. Et $u \in K_1$, siis u on küllalt sile ja $\sigma \frac{\partial u}{\partial n} < 0$ ka mingis punktis $x_1 \in \operatorname{int} \Gamma_1$ (siin kasutame asjaolu, et x_0 ümbruses leidub Γ_1 sisepunkt x_1). Järelikult $\sigma \frac{\partial u}{\partial n} < 0$ hulgal $S(x_1, \delta) \cap \Gamma_1$ mingi $\delta > 0$ korral ($S(x_1, \delta)$ tähistab siin lahtist kera raadiusega δ ja keskpunktiga x_1) Moodustame $\varphi \in \mathcal{D}(R^3)$ nii, et $\varphi(x) > 0$, $x \in S(x_1, \delta/2)$; $\varphi(x) \geq 0$, $x \in S(x_1, \delta)$ ja $\varphi(x) = 0$, $x \notin S(x_1, \delta)$. Võime väita, et $v = u + \varphi \in K_1$, kui δ on küllalt väike, sest siis $\varphi(x) = 0$, kui $x \in \Gamma_0$. Nüüd saame

$$\int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} (v - u)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_1 \cap S(x_1, \delta)} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\Gamma \leq$$

$$\leq \int_{\Gamma_1 \cap S(x_1, \frac{\delta}{2})} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\Gamma < 0,$$

see on vastuolus tingimusega (2.10). Vastuolu tõestab võrratuse $\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$, $x \in \Gamma_1$, millest ühtlasi $\sigma > 0$ tõttu $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$, $x \in \Gamma_1$.

Järgnevalt vaatleme juhtu, kus punktis $x_0 \in \Gamma_1$ kehtib võrratus $u(x_0) > h(x_0)$. Näitame, et siis $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = 0$. Märgime kõigepealt, et piisab vaadelda juhtu, kus $x_0 \in \operatorname{int} \Gamma_1$. Tõepoolest, kui x_1 on Γ_1 selline rajapunkt, et $u(x_1) > h(x_1)$ ja Γ_1 sisepunktide korral on tõestatud, et $u(x) > h(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, siis küllalt väikese $\delta > 0$ korral $u(x) > h(x)$, $x \in S(x_1, \delta) \cap \Gamma_1$, ning võrdus $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ laieneb eelduse $u \in C^1(\bar{\Omega})$ tõttu punktile x_1, sest tema igas ümbruses leidub Γ_1 sisepunkte.

Niisiis, olgu $x_0 \in \operatorname{int} \Gamma_1$ ning $u(x_0) > h(x_0)$. Kui $\delta > 0$ on küllalt väike, siis $u(x) > h(x), x \in \bar{S}(x_0, \delta) \cap \Gamma_1$. Valime vabalt $\varphi \in \mathcal{D}(S(x_0, \delta))$. Siis küllalt väikese $\varepsilon > 0$ korral

$$v(x) = u(x) \pm \varepsilon \varphi(x) \geq u(x) - \varepsilon |\varphi(x)| \geq h(x), x \in S(x_0, \delta) \cap \Gamma_1.$$

Ka tingimus $v(x) = u(x) = 0, x \in \Gamma_0$, on täidetud, kui δ on küllalt väike. Seega $v \in K_3$. Nüüd saame võrratusest (2.10) $v = u + \varepsilon \varphi$ korral

$$\varepsilon \int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\Gamma \geq 0$$

ning $v = u - \varepsilon \varphi$ korral

$$-\varepsilon \int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\Gamma \geq 0,$$

mis kokku annavad

$$\int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, d\Gamma = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(S(x_0, \delta)).$$

Kui kehtiks $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$, siis mingi $\delta_0 \in (0, \delta)$ korral $\frac{\partial u}{\partial n}(x) > 0$, $x \in S(x_0, \delta_0) \cap \Gamma_1$. Valime $\varphi_0 \in \mathcal{D}(S(x_0, \delta))$ nii, et $\varphi_0(x) \geq 0$, $x \in S(x_0, \delta)$, ja $\varphi_0(x) > 0, x \in S(x_0, \delta_0)$. Siis

$$\int_{\Gamma_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_0 \, d\Gamma \geq \int_{\Gamma_1 \cap S(x_0, \delta_0)} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_0 \, d\Gamma > 0.$$

Saadud vastuolu tõestab, et $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = 0$.

Oleme näidanud, et võrratust (2.9) rahuldav $u \in K_3$ on ülesande (2.4)-(2.6) lahend. Ühtlasi on meil näidatud ka ülesande (2.4)-(2.6) ja võrratuse (2.9) samaväärsus küllalt siledatel funktsioonidel (hulgal K_1). Lahendi olemasolu ja ühesuse probleemi lahendamisel läheme traditsioonilist teed: üldistame võrratust (2.9), loobudes lahendi siiani vaadeldud siledusest, tihti räägitakse siis üldistatud lahendist.

3.3. <u>Variatsioonvõrratuse ühene lahenduvus</u>. Olgu $V = \{v \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \quad \text{p.k.} \quad x \in \Gamma_0\}$, siin lemma 2.2 lubab väita, et $v \in L^2(\Gamma)$, seega saame rääkida võrdumisest nulliga peaaegu kõikjal. Näitame V kinnisust. Kui $v_n \to v$ ruumis $H^1(\Omega)$, $v_n \in V$, siis lemma 2.2 lubab järeldada, et $v_n \to v$ ruumis $L^2(\Gamma)$. Mingi osajada v_n, $n \in N' \subset \mathbb{N}$, koondub elemendiks v p.k. hulgal Γ ning tingimusest $v_n(x) = 0$ p.k. $x \in \Gamma_0$ saame, et $v(x) = 0$ p.k. $x \in \Gamma_0$. Seega $v \in V$. Hulk V on Hilberti ruumi $H^1(\Omega)$ kinnine alamruum, seetõttu täielik.

Eeldame, et $h \in L^\infty(\Gamma_1)$ ja defineerime $K = \{v \in V : v(x) \geq h(x) \quad \text{p.k.} \quad x \in \Gamma_1\}$. Olgu $K \neq \emptyset$.

<u>Ülesanne</u>. Tõestada K kinnisus ja kumerus.

Eeldame veel, et $g \in L^2(\Omega)$, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$, $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ ning vaatleme ülesannet

$$u \in K : \int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}(v-u)\,dx \geq \int_\Omega g(v-u)\,dx \quad \forall v \in K. \qquad (2.11)$$

Defineerime

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \,dx, \quad u, v \in V. \qquad (2.12)$$

Et siin on tegemist erijuhuga bilineaarvormist (2.2), mis oli tõkestatud ruumil $H^1(\Omega)$, siis ka (2.12) on tõkestatud. Bilineaarvormi (2.12) koertsitiivsus järeldub võrratusest

$$a(v,v) \geq \sigma_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^3 dx$$

ning lemmast 2.1, kui võtame seal näiteks $n(x)=1,\ x \in \Gamma_0;$ $n(x)=0,\ x \in \Gamma_1$. Võrdusega

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega g v\, dx, \quad v \in V,$$

määratud lineaarne funktsionaal f on tõkestatud, sest $|\langle f, v\rangle| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V$. Nüüd võime Stampacchia teoreemi põhjal väita, et võrratus (2.11) on üheselt lahenduv.

Meil jääb lahendamata probleem sellest, millal võrratuse (2.11) lahend on küllalt sile, et olla ühtlasi ülesande (2.4)-(2.6) lahendiks. Peab märkima, et see (variatsioonvõrratuse lahendi regulaarsus) on üldiselt raske küsimus.

4. Elastse membraani tõketega läbipaine

Vaatleme õhukest elastset membraani, mis täidab piirkonna $\Omega \subset R^2$ ja on kinnitatud Ω rajal Γ. Olgu $u(x), x \in \Omega$, membraani kõrvalekalle tasakaaluasendist, $f(x), x \in \Omega$, aga membraanile algasendiga risti mõjuva jõu tihedus. Tekkivat läbipainet kirjeldab võrrand

$$-\operatorname{div}(T \operatorname{grad} u) = f, \quad x \in \Omega,$$

ja rajatingimus

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0.$$

Siin $T(x), x \in \Omega$, on pingsus, see on membraani iseloomustav antud funktsioon. Eeldame, et $T \in L^\infty(\Omega)$, $T(x) \geq T_0 > 0$, $x \in \Omega$, ja $f \in L^2(\Omega)$. Märgime, et homogeense ühtlase paksusega mebraani korral $T(x) = const$.

Bilineaarvorm

$$a(u,v) = \int_\Omega T \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

on sümmeetriline ning, olles erijuht bilineaarvormist (2.2), tõkestatud ja koertsitiivne ruumil $V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Funktsionaali $f \in V'$ määrame seosega $\langle f, v \rangle = \int_\Omega f(x) v(x) dx$. Mehaanika kursuses näidatakse, et funktsionaali

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v \rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega T |\operatorname{grad} v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx$$

väärtus on asendis v oleva membraani potentsiaalne energia (siin $|\cdot|$ tähendab eukleidilist normi ruumis $\mathbb{R}^2$).

Vaatleme juhtu, kus membraani läbipaindele on seatud tõkked

$$\varphi(x) \le u(x) \le \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

mille juures eeldame, et $\varphi, \psi \in L^\infty(\Omega)$ ning $\varphi(x) \le 0 \le \le \psi(x)$, $x \in \Omega$. Defineerime

$$K = \{ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) : \varphi(x) \le v(x) \le \psi(x), \text{ p.k. } x \in \Omega \}.$$

Näeme, et $0 \in K$, seepärast $K \ne \emptyset$.

Ülesanne. Näidata, et K on kumer ja kinnine.

Füüsikalistel kaalutlustel võime öelda, et tõketega läbipainde ülesanne on samaväärne energiafunktsionaali J minimiseerimisega hulgal K. Teoreemi 1.1 põhjal aga see miinimumülesanne on samaväärne võrratusega

$$u \in K : a(u, v-u) \ge \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \qquad (2.13)$$

Stampacchia teoreem ütleb, et (2.13) on üheselt lahenduv.

Vaatleme juhtu, kus $u, \varphi, \psi \in C(\bar{\Omega})$. Olgu $I = I(u) = \{ x \in \Omega : u(x) = \varphi(x)$ või $u(x) = \psi(x) \}$.

Ülesanne. Tõestada, et võrratuse (2.13) küllalt sile lahend u rahuldab võrrandit $-\operatorname{div}(T \operatorname{grad} u) = f$, $x \in \Omega \setminus I$.

7

5. Signorini ülesanne

5.1. Ülesande kirjeldus. Olgu $\Omega \subset R^3$ tõkestatud elastne keha tükiti sileda rajaga Γ. Kehale rakendatakse jõud ruumtihedusega $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, $x \in \Omega$, mille tulemusena leiab aset deformatsioon: keha punkt koordinaatidega (a_1, a_2, a_3) teiseneb punktiks (x_1, x_2, x_3), vektorit $u_i = x_i - a_i$, $i = 1,2,3$, nimetatakse nihete vektoriks. Keha deformatsiooni iseloomustab niisiis vektorfunktsioon $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x \in \Omega$.

Deformatsioonitensor defineeritakse võrdusega

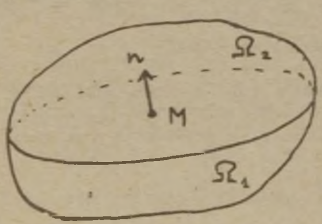
$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right), i,j = 1,2,3.$$

Järgnevas eeldame, et deformatsioonid on väikesed. Seepärast ε_{ij} avaldises osatuletiste korrutised on kõrgemat järku väikesed osatuletiste endiga võrreldes. Niisiis olgu

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

On selge, et deformatsioonitensor on alati sümmeetriline : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Olgu σ_{ij} pingete tensor. Selgitame selle sisu. Oletame, et deformeeritav keha Ω on jaotatud mingi pinnaga kaheks osaks Ω_1 ja Ω_2. Olgu M selle pinna punkt ja n ühiknormaal Ω_2 suunas. Kehad Ω_1 ja Ω_2 mõjutavad teineteist elastsusjõudude toimel, seejuures keha Ω_2 mõjutab keha Ω_1 jõuga, mille tihedus punktis M on komponentidega



$F_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j$, kus $n = (n_1, n_2, n_3)$. Kasutades siin tähistust $F = (F_1, F_2, F_3)$, võime kirjutada $F = \sigma n$, kus $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ on mõeldud maatriksina. Märgime veel tähtsa erijuhu, kus jaotav pind on Ω rajapind, n selle välisnormaal. Siis $F = \sigma n$ on nende jõudude tihedus rajal, millega väliskeskkond mõjutab keha Ω.

Pingete tensor ja deformatsioonitensor on seotud võrdusega

$$\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(u), \tag{2.14}$$

kus $a_{ijkl}(x), x \in \Omega$, on vaadeldava keha nn. elastsuskordajad. Neil on omadused

$$\begin{cases} a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \quad \forall x \in \Omega, \\ \sum\limits_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\, \xi_{kl}\, \xi_{ij} \geq \alpha \sum\limits_{i,j=1}^{3} \xi_{ij}^2 \quad (\alpha > 0) \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

Märgime, et seos (2.14), mis on tegelikult lineaarteisendus, iseloomustab pingete ja deformatsioonitensori vahekorda nn. lineaarses deformatsiooniteoorias. Ühtlasi võime (2.14) ja (2.15) põhjal järeldada, et pingete tensor on sümmeetriline: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Kui keha on jõudude mõjul peale deformatsiooni saavutanud statsionaarse oleku (enam edasi ei deformeeru), siis kehtivad nn. tasakaaluvõrrandid

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0, \; i = 1,2,3, \; x \in \Omega. \tag{2.16}$$

Tundmatute u_i, $i = 1,2,3$, määramiseks on siin kolm teist järku osatuletistega võrrandit, lahendi ühesuseks on vaja lisatingimusi.

Klassikalisteks rajatingimusteks on piirkonna Ω rajal Γ antud nihkevektorid

$$u_i = \varphi_i \,, \quad i = 1,2,3 \,, \quad x \in \Gamma \,,$$

või mõjuvad jõud

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = F_i \,, \quad i = 1,2,3 \,, \quad x \in \Gamma .$$

Rajatingimused võivad olla antud ka järgmiselt:

$$u_i = \varphi_i \,, \quad x \in \Gamma_0 \,,$$

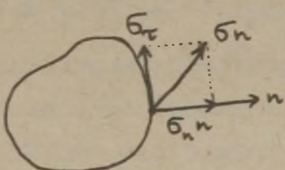
$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = F_i \,, \quad x \in \Gamma_1 \,,$$

kus $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma \,, \; \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset .$

Enne "ühepoolsete" rajatingimuste püstitamist toome mõned mõisted ja tähistused. Olgu

$$\sigma_n = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j n_i \,,$$

nimetame teda normaalpingeks, vektor $\sigma_n n$ on jõu σn ristprojektsioon normaalile n. Olgu $\sigma_\tau = \sigma n - \sigma_n n$, see on puutujasuunaline ehk tangensiaalpinge. Normaalisuunalise ehk normaalnihke defineerime võrdusega



$$u_n = \sum_{i=1}^{3} u_i n_i \,,$$

puutujasuunaline nihe avaldub siis

$$u_\tau = u - u_n n .$$

Vaatleme ühepoolset rajaülesannet, kus elastset keha toetatakse jäiga pinna poolt, seejuures nende vahel puudub hõõrdumine. Seda võib väljendada tingimustega

$$\sigma_\tau = 0 \,, \quad x \in \Gamma \,, \tag{2.17}$$

$$u_n \le 0 \,, \; \sigma_n \le 0 \,, \; \sigma_n u_n = 0 \,, \quad x \in \Gamma . \tag{2.18}$$

Tingimus (2.17) väljendab hõõrdumise puudumist elastse keha ja jäiga pinna vahel. Tõlgendame tingimusi (2.18). Jäik pind ei võimalda liikuda välisnormaali suunas, s.t. $u_n \leq 0$. Kui raja Γ punktis $u_n < 0$, s.t. toimub nihe normaali n vastassuunas, siis jäik keha ei mõjuta selles punktis elastset keha, seepärast $\sigma_n = 0$. Kui raja Γ punkt püüab elastsusjõudude toimel liikuda normaali suunas, siis $u_n = 0$ ja jäiga keha mõju selles punktis iseloomustab tingimus $\sigma_n \leq 0$.

Tingimusi (2.17) ja (2.18) nimetatakse Signorini rajatingimusteks.

Edaspidi vaatleme ühepoolseid tingimusi ainult raja Γ osal, ülejäänud osal olgu antud nihked, loeme nad võrdseks nulliga. Seega vaatleme võrrandeid (2.16) rajatingimustel

$$u_i = 0 \,, \; i = 1,2,3 \,, \; x \in \Gamma_0 \,, \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau = 0 \,, \\ u_n \leq 0 \,, \sigma_n \leq 0 \,, \sigma_n u_n = 0 \,, \end{cases} \quad x \in \Gamma_1 \,, \tag{2.20}$$

kus $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$, $\operatorname{mes} \Gamma_i > 0$, $i = 0,1$.

5.2. <u>Ülesande esitamine variatsioonvõrratusena</u>. Selle alapunkti põhieesmärgiks on näidata, et ülesanne (2.16), (2.19), (2.20) on taandatav I liiki variatsioonvõrratusele.

Defineerime bilineaarvormi

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx \,, \quad u,v \in (H^1(\Omega))^3 ,$$

kus

$$(H^1(\Omega))^3 = \{ v = (v_1, v_2, v_3) : v_i \in H^1(\Omega), i = 1,2,3 \}$$

ning

$$\|v\|_{(H^1(\Omega))^3} = \left(\|v_1\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_3\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} .$$

Eeldame käesolevas alapunktis, et a_{ijkl} on küllalt siledad, näiteks $a_{ijkl} \in C^1(\bar{\Omega})$, see tagab sileda u kor-

8

ral ka $\sigma_{ij}(u)$ piisava sileduse. Arutluse käigus teeme täiendavaid eeldusi ka Γ_1 kohta.

Lemma 2.3 (Greeni valem). Kui u ja v on küllalt siledad, siis

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) v_i \, dx = a(u,v) - \int_\Gamma (\sigma_\tau(u)\cdot v_\tau + \sigma_n(u) v_n)\, d\Gamma$$

(punktiga tähistame siin skalaarkorrutist ruumis $\mathbb{R}^3$).

Tõestus. Üksikasjadesse laskumata märgime, et esitatavas tõestuses ning seega ka lemma väites piisab, kui $u, v \in (H^2(\Omega))^3$, kuid lihtsuse mõttes võib eeldada ka, et $u, v \in (C^2(\bar\Omega))^3$

Võrduse

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u)\, v_i \, dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)\, v_i)\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx$$

parema poole esimesele liidetavale rakendame Gauss—Ostrogradski valemit, selle tulemusena

$$-\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij}(u) v_i\Big) dx = -\int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij}(u) v_i\Big) n_j \, d\Gamma$$

Saadud pindintegraalialune avaldis teiseneb

$$\sum_{j=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij}(u) v_i\Big) n_j = \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) n_j\Big) v_i =$$

$$= \sigma(u) n \cdot v = (\sigma_\tau(u) + \sigma_n(u) n)\cdot(v_\tau + v_n n) = \sigma_\tau(u)\cdot v_\tau + \sigma_n(u) v_n,$$

see ongi Greeni valemi pindintegraalis. Lisaks saame σ_{ij} sümmeetriale tuginedes

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = a(u,v).$$

Lemma 2.3 on tõestatud.

Defineerime $V = \{ v \in (H^1(\Omega))^3 : v_i(x) = 0$ p.k. $x \in \Gamma_0 \}$.

Ülesanne. Näidata, et V on kinnine alamruum ruumis $(H^1(\Omega))^3$.

Olgu $K = \{ v \in V : v_n(x) \leq 0$ p.k. $x \in \Gamma_1 \}$. Vahetult on kontrollitav, et K on kumer. Võrdusega

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^3 f_i v_i \, dx, \; v \in V,$$

määratakse pidev lineaarne funktsionaal ruumil V, kui näiteks $f_i \in L^2(\Omega)$.

Järgnevalt näitame, et küllalt siledate lahendite korral on ülesanne (2.16), (2.19), (2.20) samaväärne variatsioonvõrratusega

$$u \in K : a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \qquad (2.21)$$

Olgu $u \in (H^2(\Omega))^3$ ülesande (2.16), (2.19), (2.20) lahend. Sellest järeldub, et $u \in K$. Võtame vabalt $v \in K$, korrutame võrdused (2.16) vastavalt vahedega $v_i - u_i$, summeerime i järgi ja integreerime üle piirkonna Ω; kasutades veel Greeni valemit lemmast 2.3, saame

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \Big(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) + f_i \Big)(v_i - u_i) \, dx = a(u, v-u) -$$

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^3 f_i (v_i - u_i) dx - \int_\Gamma \big(\sigma_\tau(u) \cdot (v_\tau - u_\tau) + \sigma_n(u)(v_n - u_n) \big) d\Gamma = 0.$$

Sellest

$$a(u, v-u) = \langle f, v-u \rangle + \int_{\Gamma_1} \big(\sigma_\tau(u) \cdot (v_\tau - u_\tau) + \sigma_n(u)(v_n - u_n) \big) d\Gamma, \qquad (2.22)$$

sest $u, v \in K$ tõttu $u = v = 0$, $x \in \Gamma_0$, millest omakorda järeldub, et $u_n = v_n = 0$, $u_\tau = v_\tau = 0$, $x \in \Gamma_0$. Tingimuse (2.20) põhjal $\sigma_\tau(u) = 0$, $\sigma_n(u) u_n = 0$, $x \in \Gamma_1$, seepärast võrduse (2.22) pindintegraalist säilib $\int_{\Gamma_1} \sigma_n(u) v_n \, d\Gamma$. See pindintegraal on aga mittenegatiivne, sest (2.20) põhjal $\sigma_n(u)\le 0$ ja $v\in K$ tõttu $v_n\le 0$, kui $x\in\Gamma_1$. Seetõttu (2.22) annab võrratuse (2.21).

Olgu nüüd u võrratuse (2.21) sile lahend. Et $u\in K$, siis kehtib (2.19) ja tingimusest (2.20) osa: $u_n\le 0, x\in\Gamma_1$. Suvalise $\varphi\in(\mathcal{D}(\Omega))^3$ korral $v=u\pm\varphi\in K$ ning võrratusest (2.21) saame võrduse $a(u,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle$. Avaldist $a(u,\varphi)$ teisendame Greeni valemi abil; arvestades, et seal esinev pindintegraal on võrdne nulliga, saame

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u)+f_i\Big)\varphi_i\,dx=0 \qquad \forall\varphi\in(\mathcal{D}(\Omega))^3.$$

Võttes φ ossa vastavalt $(\varphi_1,0,0),(0,\varphi_2,0),(0,0,\varphi_3)$, $\varphi_i\in\mathcal{D}(\Omega)$, saame võrdused (2.16). Seega jääb näidata (2.20) täielikku kehtivust.

Võrduste (2.16) täidetuse tõttu on meie kasutada ka võrdus (2.22). Sellest ja võrratusest (2.21) järeldame, et

$$\int_{\Gamma_1}\big(\sigma_\tau(u)\cdot(v_\tau-u_\tau)+\sigma_n(u)(v_n-u_n)\big)d\Gamma\ge 0 \quad \forall v\in K. \tag{2.23}$$

Eeldame, et rajaosa Γ_1 on küllalt sile ja tal ei ole isoleeritud rajapunkte. Tarvitseb tõestada, et $\sigma_\tau(u)=0$, $x\in\operatorname{int}\Gamma_1$, sest Γ_1 rajapunktidele laieneb see võrdus pidevuse tõttu. Oletame vastuväiteliselt, et $\sigma_\tau(u)(x_0)\ne 0$, kus $x_0\in\operatorname{int}\Gamma_1$. Siis pidevuse tõttu $\sigma_\tau(u)(x)\ne 0$, $x\in\Gamma_1\cap S(x_0,\delta)$ mingi $\delta>0$ korral, olgu ta nii väike, et $S(x_0,\delta)\cap\Gamma\subset\Gamma_1$. Valime $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ nii, et $\varphi(x)\le 0$, $x\in S(x_0,\delta)$; $\varphi(x)<0, x\in S(x_0,\delta/2)$; $\varphi(x)=0, x\notin S(x_0,\delta)$. Olgu $\psi=\varphi\tau$, kui $x\in\Gamma_1\cap S(x_0,\delta)$, $\psi=0$ ülejäänud Γ osal, kusjuures ühikulise pikkusega vektor τ määratakse seosest $\sigma_\tau(u)=|\sigma_\tau(u)|\tau$ hulgal $\Gamma_1\cap S(x_0,\delta)$, siin $|\cdot|$ tähendab vektori pikkust ehk eukleidilist normi ruumis $\mathbb{R}^3$. Olgu $w \in (H^1(\Omega))^3$ selline (leidub lemma 2.2 põhjal), et w ahend rajale Γ on ψ. Märgime, et $w_n = 0$, seega $w_\tau = w|_\Gamma$, samuti $v = u + w \in K$. Saame

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_\tau(u) w_\tau \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1 \cap S(x_0,\delta)} \sigma_\tau(u) \varphi\tau \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1 \cap S(x_0,\delta)} |\sigma_\tau(u)| \varphi \, d\Gamma < 0,$$

see on vastuolus võrratusega (2.23). Seepärast $\sigma_\tau(u) = 0$, $x \in \Gamma_1$. Võrratus (2.23) omandab seega kuju

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_n(u)(v_n - u_n) \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K. \qquad (2.24)$$

Näitame, et (2.24) annab võrratuse $\sigma_n(u) \leq 0$, $x \in \Gamma_1$. Kui see võrratus on tõestatud Γ_1 sisepunktide puhul, siis rajapunktidele laieneb ta pidevuse järgi, seepärast oletame vastuväiteliselt, et mingi punkti $x_0 \in \operatorname{int} \Gamma_1$ korral $\sigma_n(u)(x_0) > 0$. Pidevuse tõttu $\sigma_n(u) > 0$ hulgal $S(x_0,\delta) \cap \Gamma_1$ mingi $\delta > 0$ korral. Seejuures olgu δ nii väike, et $S(x_0,\delta) \cap \Gamma \subset \Gamma_1$. Olgu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ selline, et $\varphi(x) < 0$, $x \in S(x_0, \delta/2)$; $\varphi(x) \leq 0$, $x \in S(x_0,\delta)$ ja $\varphi(x) = 0$, $x \notin S(x_0,\delta)$. Moodustame $\psi = \varphi n$ rajal Γ ning valime $w \in (H^1(\Omega))^3$ nii, et $w|_\Gamma = \psi$. Siis $w_n = \varphi$, $w_\tau = 0$ ning $v = u + w \in K$. Lisaks selle v korral

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_n(u)(v_n - u_n) \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1 \cap S(x_0,\delta)} \sigma_n(u) \varphi \, d\Gamma < 0,$$

mis on vastuolus võrratusega (2.24), s.t. $\sigma_n(u) \leq 0$, $x \in \Gamma_1$. Ühtlasi teame nüüd, et $\sigma_n(u) u_n \geq 0$, $x \in \Gamma_1$. Oletame jälle vastuväiteliselt, et leidub $x_0 \in \Gamma_1$, kus $\sigma_n(u) u_n > 0$. Olgu $\Gamma_1^+ = \{ x \in \Gamma_1 : \sigma_n(u) u_n > 0 \}$, seejuures Γ_1 kohta tehtud eelduste tõttu $\operatorname{mes} \Gamma_1^+ > 0$. Võtame $v = \frac{1}{2} u$, siis $v \in K$. Saame

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_n(u)(v_n - u_n)\, d\Gamma = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^+} \sigma_n(u)\, u_n\, d\Gamma < 0,$$

mis on jälle vastuolus võrratusega (2.24). Järelikult $\sigma_n(u)u_n = 0,\ x \in \Gamma_1$, ning (2.20) kehtivus on täielikult näidatud.

5.3. <u>Variatsioonvõrratuse ühene lahenduvus</u>. Eeldame, et kehtivad tingimused (2.15) ning $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$. Bilineaarvorm a, ruum V ja hulk K olgu samad, mis alapunktis 5.2.

<u>Ülesanne</u>. Näidata, et hulk K on kinnine.

<u>Ülesanne</u>. Tõestada, et bilineaarvorm a on tõkestatud ruumis $(H^1(\Omega))^3$. Näpunäide: kasutada asjaolu, et kordajate a_{ijkl} poolt seosega (2.14) määratud lineaarteisendus on $x \in \Omega$ suhtes ühtlaselt tõkestatud ruumis $\mathbb{R}^9$.

Bilineaarvormi a koertsitiivsuse näitamisel kasutame esialgu võrratust (2.15), selle abil

$$a(v,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(v) \Big) \varepsilon_{ij}(v)\, dx \geq \alpha \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(v)\, dx.$$

Edasisel hindamisel kasutame Korni võrratust ([1], lk. 114): leidub $\alpha_0 > 0$ nii, et

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(v)\, dx \geq \alpha_0 \|v\|^2 \qquad \forall v \in V,$$

sellega on tõestatud a koertsitiivsus.

Stampacchia teoreemile tuginedes võime väita, et iga $(f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\Omega))^3$ korral on võrratus (2.21) üheselt lahenduv.

Märgime, et antud juhul on bilineaarvorm a sümmeetriline, seetõttu on võrratus (2.21) teoreemi 1.1 põhjal samaväärne funktsionaali

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle f,v\rangle=\int_{\Omega}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)-\sum_{i=1}^{3}f_i v_i\Big)dx$$

minimiseerimisega hulgal K. Seejuures $J(v)$ on deformeerunud keha potentsiaalne energia, kui see enne deformatsiooni lugeda võrdseks nulliga.

§ 3. Kumerad funktsioonid Banachi ruumidel

1. Kumerusega seotud põhimõisted

Olgu K kumer hulk Banachi ruumis V. Funktsiooni $F : K \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ nimetatakse kumeraks, kui

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) \quad \forall u, v \in K,\ \lambda \in (0,1). \quad (3.1)$$

Selgituseks märgime, et kui võrratuse (3.1) paremal poolel tekib selleks vajadus, siis $x \in \mathbb{R}$ korral olgu $x + \infty = \infty$ ja $\infty + \infty = \infty$, $\lambda > 0$ korral $\lambda \infty = \infty$. Lisame veel, et kasutatakse ka terminit „kumer funktsionaal".

Funktsiooni $F : K \to \overline{\mathbb{R}}$ nimetatakse rangelt kumeraks, kui $u \neq v$ korral (3.1) on range võrratus.

Kumerat funktsiooni nimetatakse pärisfunktsiooniks, kui ta ei ole samaselt $+\infty$. Edaspidi vaatlemegi ainult pärisfunktsioone, seepärast, kui räägime kumeratest funktsioonidest, siis peame silmas pärisfunktsioone.

Hulki $\{v : F(v) \leq a\}$ ja $\{v : F(v) < a\}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, nimetatakse funktsiooni F Lebesgue'i hulkadeks.

Hulka $\mathrm{dom}\, F = \{v : F(v) < +\infty\}$ nimetatakse funktsiooni F efektiivseks hulgaks.

Lemma 3.1. Kumera funktsiooni Lebesgue'i hulgad on kumerad (nende seas ka efektiivne hulk).

T õ e s t u s. Olgu F kumer. Valime vabalt $u, v \in F_a = \{v : F(v) \leq a\}$, seega $F(u) \leq a$ ja $F(v) \leq a$. Nüüd F kumeruse tõttu iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) \leq \lambda a + (1-\lambda)a = a,$$

s.t. $\lambda u+(1-\lambda)v\in F_a$. Analoogiliselt näidatakse ka hulga $\{v: F(v)<a\}$ kumerust.

Lemma 3.1 on tõestatud.

Märgime, et funktsiooni Lebesgue'i hulkade kumerusest ei saa alati järeldada funktsiooni enda kumerust.

Vaatleme funktsiooni $F: A\to \mathbb{R}$, $A\subset V$. Defineerime $\overline{F}: V\to \overline{\mathbb{R}}$ järgmiselt:

$$\overline{F}(v)=\begin{cases} F(v), & v\in A, \\ +\infty, & v\in V\setminus A. \end{cases}$$

<u>Lause 3.1</u>. Funktsioon $\overline{F}$ on kumer parajasti siis, kui A on kumer ja F on kumer hulgal A.

T õ e s t u s. Olgu A kumer ja $F: A\to\mathbb{R}$ kumer. Valime vabalt $u,v\in V$. Kui $u,v\in A$, siis $\overline{F}$ rahuldab võrratust (3.1), sest hulgal A kasutame F kumerust. Kui aga $u\notin A$ või $v\notin A$, siis (3.1) kehtib seetõttu, et tema parem pool on $+\infty$.

Olgu nüüd $\overline{F}$ kumer. Kui A ei ole kumer, siis leiduvad $u,v\in A$ ja $\lambda\in(0,1)$ nii, et $\lambda u+(1-\lambda)v\notin A$. Seejuures $\overline{F}(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq \lambda\overline{F}(u)+(1-\lambda)\overline{F}(v)=\lambda F(u)+(1-\lambda)F(v)\in\mathbb{R}$, kuid $\overline{F}(\lambda u+(1-\lambda)v)=+\infty$. Saadud vastuolu tõttu on A kumer. Funktsiooni F kumerus järeldub nüüd sellest, et ta on kumera funktsiooni ahend kumerale hulgale.

Lause 3.1 on tõestatud.

Märgime, et nüüd näeme üht põhjustest, miks vaadeldakse funktsioone, mille väärtusteks lubatakse $+\infty$. Nimelt, lause 3.1 (täpsemalt, tema tõestuse esimese osa) põhjal on iga kumer funktsioon laiendatav tervel ruumil määratud kumeraks funktsiooniks.

Hulga A indikaatorfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni

$$\chi_A(v) = \begin{cases} 0, & v \in A, \\ +\infty, & v \in V \setminus A. \end{cases}$$

Lause 3.2. Hulk on kumer parajasti siis, kui tema indikaatorfunktsioon on kumer.

Ülesanne. Tõestada lause 3.2.

Hulka

$$\operatorname{epi} F = \{(v, a) \in V \times \mathbb{R} : F(v) \leq a\}$$

nimetatakse funktsiooni F epigraafikuks ehk graafikupealseks.

Lause 3.3. Hulga $\operatorname{epi} F$ projektsioon ruumile V on $\operatorname{dom} F$.

T õ e s t u s. Kui $(v, a) \in \operatorname{epi} F$, siis $F(v) \in \mathbb{R}$, s.t. $v \in \operatorname{dom} F$, millega oleme näidanud, et $P_V \operatorname{epi} F \subset \operatorname{dom} F$. Kui aga $v \in \operatorname{dom} F$, siis $F(v) \in \mathbb{R}$, ning leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et $a \geq F(v)$. Seega $(v, a) \in \operatorname{epi} F$, mille tõttu $\operatorname{dom} F \subset$ $\subset P_V \operatorname{epi} F$.

Lause 3.3 on tõestatud.

Lemma 3.2. Funktsioon $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ on kumer parajasti siis, kui tema epigraafik on kumer.

T õ e s t u s. Olgu F kumer. Valime vabalt $(u, a), (v, b) \in$ $\in \operatorname{epi} F$. Siis $F(u) \leq a < +\infty$ ja $F(v) \leq b < +\infty$. Iga $\lambda \in (0, 1)$ korral

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) \leq \lambda a + (1-\lambda)b < +\infty,$$

mis aga tähendab, et

$$\lambda(u, a) + (1-\lambda)(v, b) = (\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda a + (1-\lambda)b) \in \operatorname{epi} F.$$

Sellega on $\operatorname{epi} F$ kumerus näidatud.

Olgu $\operatorname{epi} F$ kumer. Valime $u, v \in \operatorname{dom} F$ Olgu $a = F(u)$, $b = F(v)$, siis $(u, a), (v, b) \in \operatorname{epi} F$. Hulga $\operatorname{epi} F$ kumeruse tõttu iga $\lambda \in (0, 1)$ korral $(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda a + (1-\lambda)b) \in$ $\in \operatorname{epi} F$, seepärast

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda a + (1-\lambda)b = \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v).$$

Kui aga $u \notin \operatorname{dom} F$ või $v \notin \operatorname{dom} F$, siis $\lambda \in (0, 1)$ korral $\lambda F(u) + (1-\lambda)F(v) = +\infty$ ja kumeruse võrratus kehtib samuti.

Lemma 3.2 on tõestatud.

Märgime, et selles punktis me ei kasutanud ruumi V topoloogilist struktuuri, seepärast kehtib kõik esitatu suvalises vektorruumis V.

2. Alt poolpidevad funktsioonid

Funktsiooni $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ nimetatakse alt poolpidevaks, kui koondumisest $v_n \to v$ ruumis V järeldub, et $\underline{\lim}_{n\to\infty} F(v_n) \geq F(v)$.

Märgime, et jada a_n alumine piirväärtus, mida tähistatakse $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ või $\liminf_{n\to\infty} a_n$, on defineeritud kui $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$ ning ta eksisteerib alati, sest $\inf_{k\geq n} a_k$ on monotoonselt kasvav jada. Analoogiliselt $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$.

Lemma 3.3. Funktsioon $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ on alt poolpidev parajasti siis, kui iga $a \in \mathbb{R}$ korral Lebesgue'i hulk $\{v \in V : F(v) \leq a\}$ on kinnine.

T õ e s t u s. Olgu F alt poolpidev. Valime vabalt $a \in \mathbb{R}$ ning jada $v_n \in F_a = \{v \in V : F(v) \leq a\}$ nii, et $v_n \to v$. Siis $F(v) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} F(v_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} a = a$, seepärast $v \in F_a$ ning F_a kinnisus on tõestatud.

Olgu iga $a \in \mathbb{R}$ korral hulk F_a kinnine. Valime koonduva jada $v_n \to v$. Tähistame $b = \underline{\lim}_{n\to\infty} F(v_n)$. Vaatleme algul võimalust $b = -\infty$. Võtame vabalt $c \in \mathbb{R}$. Siis leidub osajada $v_n, n \in N' \subset \mathbb{N}$ nii, et $F(v_n) \leq c$. Hulga F_c kinnisuse tõttu $F(v) \leq c$. Arvu c suvalisuse tõttu

$F(v) = -\infty$, kuid see pole võimalik ning seepärast uurime juhtu $b \in \mathbb{R}$ (kui $b = +\infty$, siis $F(v) \leq b$, s.t. F alt poolpidevuse võrratus kehtib). Valime $\varepsilon > 0$. Siis mingi osajada $v_n, n \in N' \subset \mathbb{N}$, korral $F(v_n) \leq b + \varepsilon$, $n \in N'$. Hulga $F_{b+\varepsilon}$ kinnisuse tõttu $F(v) \leq b + \varepsilon$. Et ε oli suvaline, siis $F(v) \leq b = \underline{\lim}_{n \to \infty} F(v_n)$, s.t. F on alt poolpidev.

Lemma 3.3 on tõestatud.

<u>Järeldus</u>. Hulk on kinnine parajasti siis, kui tema indikaatorfunktsioon on alt poolpidev.

T õ e s t u s e k s märgime, et hulga A indikaatorfunktsiooni Lebesgue'i hulgaks $\{v \in V : \chi_A(v) \leq a\}$ on $a < 0$ korral $\emptyset$ ja $a \geq 0$ korral A. Et hulk $\emptyset$ on alati kinnine, siis lemma 3.3 põhjal on A kinnisus samaväärne funktsiooni χ_A alt poolpidevusega.

<u>Lemma 3.4</u>. Funktsioon $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ on alt poolpidev parajasti siis, kui $\operatorname{epi} F$ on kinnine.

T õ e s t u s. Defineerime abifunktsiooni $\varphi : V \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ seosega $\varphi(v, a) = F(v) - a$ (seejuures vajaduse korral olgu $\infty - a = \infty$). Funktsiooni φ alt poolpidevus tähendab, et kui $v_n \to v$, $a_n \to a$, siis

$$\varphi(v, a) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \varphi(v_n, a_n)$$

ehk

$$F(v) - a \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} (F(v_n) - a_n) =$$

$$= \underline{\lim}_{n \to \infty} F(v_n) - \lim_{n \to \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \to \infty} F(v_n) - a$$

Sellest on näha, et funktsiooni F alt poolpidevus on samaväärne funktsiooni φ alt poolpidevusega. Funktsiooni φ alt poolpidevus on lemma 3.3 põhjal aga samaväärne hulkade φ_b, $b \in \mathbb{R}$, kinnisusega.

Seega, funktsiooni F alt poolpidevusest järeldub hulga

$$\varphi_0 = \{(v,a) : \varphi(v,a) \le 0\} = \{(v,a) : F(v) \le a\} = \operatorname{epi} F$$

kinnisus.

Teisipidi, kui $\operatorname{epi} F$ on kinnine, siis iga $b \in \mathbb{R}$ korral on hulk

$$\varphi_b = \{(v,a) : \varphi(v,a) \le b\} = \{(v,a) : F(v) - a \le b\} =$$

$$= \{(v,a) : F(v) - b \le a\} = \operatorname{epi} F - (0,b)$$

kinnine kui kinnise hulga nihe, millega oleme näidanud funktsiooni F alt poolpidevuse.

Lemma 3.4 on tõestatud.

Märgime, et käesolevas punktis me ei kasutanud siiani ruumi V lineaarset struktuuri, oleksime V asemel võinud võtta suvalise meetrilise ruumi.

Funktsiooni $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ nimetatakse nõrgalt alt poolpidevaks, kui nõrgast koondumisest $v_n \to v$ ruumis V järeldub, et $\varliminf\limits_{n\to\infty} F(v_n) \ge F(v)$.

Nõrk alt poolpidevus on üldiselt rangem nõue funktsioonile kui alt poolpidevus, sest nõrgalt koonduvaid jadasid on rohkem kui normi järgi koonduvaid, aga näiteks lõplikumõõtmelise ruumi V korral nad ühtivad.

Lemma 3.5. Funktsioon $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ on nõrgalt alt poolpidev parajasti siis, kui iga $a \in \mathbb{R}$ korral on Lebesgue'i hulk $\{v \in V : F(v) \le a\}$ jadaliselt nõrgalt kinnine.

Lemma 3.5 tõestus on täiesti analoogiline lemma 3.3 tõestusega, jadade koonduvus ruumis V tuleb asendada jadade nõrga koonduvusega.

3. Alt poolpidevate kumerate funktsioonide miinimumülesanded

Teoreem 3.1. Kumera funktsiooni korral on alt poolpidevus ja nõrk alt poolpidevus samaväärsed.

T õ e s t u s. Lemmade 3.3 ja 3.5 põhjal on funktsiooni F vaadeldavad omadused samaväärsed Lebesgue'i hulkade F_α vastavalt kinnisuse ja jadalise nõrga kinnisusega. Lemmas 3.1 näitasime, et kumera funktsiooni Lebesgue'i hulgad on kumerad. Kumerate hulkade korral on aga kinnisus ja isegi nõrk kinnisu samaväärsed.

Teoreem 3.1 on tõestatud.

Teoreem 3.2. Olgu $F: V \to \overline{\mathbb{R}}$ kumer ja alt poolpidev. Siis leiduvad $\ell \in V'$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et

$$F(v) \geq \langle \ell, v \rangle + \alpha \qquad \forall v \in V.$$

T õ e s t u s. Võtame $u \in \operatorname{dom} F$ ja $a < F(u)$. Siis $(u,a) \notin \operatorname{epi} F$. Lemmade 3.2 ja 3.4 põhjal on funktsiooni F kumeruse ja alt poolpidevuse tõttu $\operatorname{epi} F$ kumer ja kinnine Järeldusena Hahn—Banachi teoreemist võib väita, et hulga $\operatorname{epi} F$ ja punkti (u,a) saab rangelt eraldada hüpertasandiga s.t. leidub $\Phi \in (V \times \mathbb{R})'$ nii, et mingi fikseeritud reaalarvu β korral

$$\langle \Phi, (u,a) \rangle < \beta < \langle \Phi, (v,b) \rangle \qquad \forall (v,b) \in \operatorname{epi} F.$$

(Märgime, et hüpertasandiks on hulk $\{(v,b) \in V \times \mathbb{R} : \langle \Phi, (v,b) \rangle = \beta \}$). Meile piisab sellest, et kehtib võrratus

$$\langle \Phi, (u,a) \rangle < \beta \leq \langle \Phi, (v,b) \rangle \qquad \forall (v,b) \in \operatorname{epi} F.$$

Pidevale lineaarsele funktsionaalile Φ võib anda esituse $\langle \Phi, (v,b) \rangle = \langle f, v \rangle + \gamma b$, kus $f \in V'$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$. Siis

$$\langle f,u\rangle + \gamma a < \beta \leq \langle f,v\rangle + \gamma b \quad \forall (v,b) \in \operatorname{epi} F.$$

Võtame $v = u$ ja $b = F(u)$. Siis võrratusest $\langle f,u\rangle + \gamma a <$ $< \langle f,u\rangle + \gamma F(u)$ teisendatud kujul $\gamma(F(u) - a) > 0$ saame $F(u) > a$ tõttu, et $\gamma > 0$. Nüüd võrratuses

$$\langle f,v\rangle + \gamma b \geq \beta \qquad \forall (v,b) \in \operatorname{epi} F$$

võtame $b = F(v)$ ning saame

$$\langle f,v\rangle + \gamma F(v) \geq \beta \qquad \forall v \in \operatorname{dom} F$$

ehk peale positiivse arvuga γ jagamist

$$F(v) \geq -\frac{1}{\gamma}\langle f,v\rangle + \frac{\beta}{\gamma} \qquad \forall v \in \operatorname{dom} F.$$

Valides nüüd $l = -\frac{1}{\gamma} f$ ja $\alpha = \frac{\beta}{\gamma}$, saame teoreemi väites toodud võrratuse iga $v \in \operatorname{dom} F$ korral. Kui aga $v \notin \operatorname{dom} F$, siis $F(v) = +\infty$ ja võrratus kehtib ikkagi.

Teoreem 3.2 on tõestatud.

Teoreem 3.3. Olgu $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ kumer, alt poolpidev, V refleksiivne Banachi ruum. Kui tingimusest $\|v_n\| \to \infty$ järeldub, et $F(v_n) \to \infty$ (koertsitiivsus), siis ülesande

$$\inf_{v \in V} F(v)$$

lahendite hulk on kinnine, kumer ja mittetühi.

T õ e s t u s. Tähistame $a = \inf_{v \in V} F(v)$. Seejuures $a < +\infty$, sest me vaatleme pärisfunktsioone. Olgu u_n minimiseeriv jada, s.t. $F(u_n) \to a$. Jada u_n on tõkestatud, sest vastasel juhul leiduks osajada $u_n, n \in N' \subset \mathbb{N}$, kus $\|u_n\| \to \infty$, $n \in N'$, millest järelduks, et $F(u_n) \to \infty$, $n \in N'$. See oleks aga vastuolus tingimusega $a < +\infty$. Ruumi V refleksiivsuse tõttu leidub jada $u_n, n \in \mathbb{N}$, nõrgalt koonduv osajada $u_n \to u \in V$, $n \in N'$. Näitame, et u on miinimumülesande lahend.

Et funktsioon F on kumer ja alt poolpidev, siis teore mi 3.1 põhjal on ta nõrgalt alt poolpidev. Seepärast $F(u) \leq \leq \varliminf_{n \in N'} F(u_n) = a$. Jääb ainult võimalus, et $F(u) = a$.

Lahendite hulk $\{u \in V : F(u) \leq a\}$ on funktsiooni F üks Lebesgue'i hulkadest, seepärast kumer ja kinnine.

Teoreem 3.3 on tõestatud.

<u>Teoreem 3.4</u>. Olgu K kumer kinnine mittetühi hulk refleksiivses Banachi ruumis V. Olgu $F : K \to \overline{\mathbb{R}}$ alt poolpidev kumer funktsioon. Kui on täidetud üks tingimustest

1) hulk K on tõkestatud;

2) funktsioon F on koertsitiivne, s.t. kui $\|v_n\| \to \infty$, $v_n \in K$, siis $F(v_n) \to \infty$,

siis miinimumülesande

$$\inf_{v \in K} F(v)$$

lahendite hulk on kinnine, kumer ja mittetühi.

Selgituseks lisame, et lemmale 3.4 järgneva märkuse põhjal on alt poolpidevuse mõiste kasutatav funktsiooni korral, mis on määratud ruumi V osahulgal K.

Teoreemi 3.4 t õ e s t u s. Defineerime funktsiooni

$$\overline{F}(v) = \begin{cases} F(v), & v \in K, \\ +\infty, & v \in V \setminus K. \end{cases}$$

Näitame järgnevalt, et $\overline{F} : V \to \overline{\mathbb{R}}$ rahuldab teoreemi 3.3 eeldusi.

Lauses 3.1 näitasime, et funktsiooni F kumerusest järeldub funktsiooni $\overline{F}$ kumerus.

Asume tõestama $\overline{F}$ alt poolpidevust. Olgu $v_n \to v$. Vaatleme algul juhtu $v \in K$. Jaotame jada v_n, $n \in \mathbb{N}$, osadeks v_n, $n \in N'$, kus $v_n \in K$, ja v_n, $n \in N''$, kus $v_n \in V \setminus K$, seejuures $N' \cup N'' = \mathbb{N}$. Kui nüüd N' on lõplik, siis

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \bar{F}(v_n) = \lim_{n\in N''} \bar{F}(v_n) = +\infty \geq \bar{F}(v).$$

Kui aga N' on lõpmatu, siis

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \bar{F}(v_n) = \lim_{n\in N'} \bar{F}(v_n) = \lim_{n\in N'} F(v_n) \geq F(v) = \bar{F}(v).$$

Juhul $v \notin K$ on $V \setminus K$ lahtisuse tõttu mingist kohast alates jada v_n tervenisti selles hulgas, seepärast siis $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{F}(v_n) = +\infty = \bar{F}(v)$.

Funktsiooni $\bar{F}$ koertsitiivsuse tõestamiseks valime $\|v_n\| \to \infty$. Kui K on tõkestatud, siis mingist kohast alates $v_n \in V \setminus K$ ja $\bar{F}(v_n) = +\infty$. Vaatleme juhtu, kus F on koertsitiivne. Jaotame jada $v_n, n \in \mathbb{N}$, osadeks indeksite hulkadega N' ja N'' nagu ülalpool. Lõpliku N' korral mingist kohast alates $v_n \in V \setminus K$ ja $\bar{F}(v_n) = +\infty$. Kui aga N' on lõpmatu, siis $\|v_n\| \to \infty$, $n \in N'$, ning $\bar{F}(v_n) = F(v_n) \to \infty$, $n \in N'$. Seega alati $\bar{F}(v_n) \to \infty$.

Teoreemi 3.3 põhjal võime nüüd väita, et ülesande $\inf\limits_{v\in V} \bar{F}(v)$ lahendite hulk on kinnine, kumer ja mittetühi. Näitame veel, et selle ülesande ja ülesande $\inf\limits_{v\in K} F(v)$ lahendid ühtivad.

Kui $\bar{F}(u) \leq \bar{F}(v)$ iga $v \in V$ korral, siis $u \in \operatorname{dom} \bar{F} \subset K$. Seepärast $\bar{F}(u) = F(u)$ ning järelikult $F(u) \leq F(v)$ iga $v \in K$ korral. Teisipidi, kui $u \in K$ on selline, et $F(u) \leq F(v)$ iga $v \in K$ korral, siis tegelikult $F(u) \leq \bar{F}(v)$ iga $v \in V$ korral. Seda võib väljendada ka nii, et $\bar{F}(u) \leq \bar{F}(v)$ iga $v \in V$ korral.

Teoreem 3.4 on tõestatud.

__Teoreem 3.5__. Kui funktsioon $F : K \to \bar{\mathbb{R}}$ on rangelt kumer, siis ülesandel

$$\inf_{v\in K} F(v)$$

ei saa olla rohkem kui üks lahend.

T õ e s t u s. Olgu $u_1, u_2 \in K$ sellised, et $F(u_1) = F(u_2) = \inf_{v \in K} F(v)$. Kui oletada, et $u_1 \neq u_2$, siis funktsiooni F range kumeruse tõttu

$$F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2} F(u_1) + \frac{1}{2} F(u_2) = \inf_{v \in K} F(v),$$

mis oleks vastuolu.

Teoreem 3.5 on tõestatud.

§ 4. L i n e a a r s e t e o p e r a a t o r i t e g a II l i i k i v a r i a t s i o o n v õ r r a t u s e d H i l b e r t i r u u m i s

1. Ülesande püstitus ja seos I liiki variatsioonvõrratustega

Olgu a bilineaarvorm Hilberti ruumil V, $\varphi : V \to \overline{\mathbb{R}}$ alt poolpidev kumer funktsioon. Olgu antud $f \in V'$. Teist liiki variatsioonvõrratuseks nimetatakse ülesannet

leida $u \in V$ nii, et

$$a(u, v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in V. \tag{4.1}$$

Vaatame, kuidas on see ülesanne seotud I liiki variatsioonvõrratusega

$$u \in K : a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K, \tag{4.2}$$

kus $K \subset V$ on kinnine, kumer ja mittetühi.

Hulga K kumerus, kinnisus ja mittetühjus lubavad väita, et tema indikaatorfunktsioon χ_K on kumer, alt poolpidev pärisfunktsioon. Seepärast on variatsioonvõrratus

$$u \in V : a(u, v-u) + \chi_K(v) - \chi_K(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in V \tag{4.3}$$

erijuht võrratusest (4.1). Näitame, et ülesanded (4.2) ja (4.3) on samaväärsed.

Olgu u ülesande (4.2) lahend. Siis $\chi_K(u)=0$. Kui $v\in K$, siis $\chi_K(v)=0$ ja võrratus (4.3) on võrratus (4.2). Kui aga $v\notin K$, siis $\chi_K(v)=+\infty$ ning võrratus (4.3) on samuti rahuldatud.

Olgu nüüd u võrratuse (4.3) lahend. Kui kehtiks $u\notin K$, siis $\chi_K(u)=+\infty$, aga $v\in K$ korral $\chi_K(v)=0$ ning võrratus (4.3) ei saaks olla rahuldatud. Seepärast $u\in K$. Nüüd iga $v\in K$ korral $\chi_K(v)=0$ ning võrratus (4.3) ühtib võrratusega (4.2), seega u on (4.2) lahend.

2. Abiülesande ekvivalentsus miinimumülesandega ja selle ühene lahenduvus

Vaatleme ülesande (4.1) erijuhtu, milles $a(u,v)=(u,v)$, s.t. ülesannet

$$u\in V:(u,v-u)+\varphi(v)-\varphi(u)\geq\langle g,v-u\rangle \quad \forall v\in V, \tag{4.4}$$

kus antud on $g\in V'$.

Lemma 4.1. Olgu $\varphi:V\to\overline{\mathbb{R}}$ alt poolpidev kumer funktsioon. Siis ülesanne (4.4) on ekvivalentne funktsiooni $F(v)=$ $=\frac{1}{2}\|v\|^2+\varphi(v)-\langle g,v\rangle$, $v\in V$, miinimumülesandega

$$\inf_{v\in V} F(v) \tag{4.5}$$

ning omab ühese lahendi.

Formuleerime ülesandena mõned lemma 4.1 tõestuses vajaminevad abitulemused.

Ülesanne. Tõestada, et

1) normeeritud ruumis funktsioon $v\to\|v\|^2$ on kumer ja Hilberti ruumis rangelt kumer;

2) kumerate funktsioonide summa on kumer ja positiivse konstandiga korrutamine jätab (rangelt) kumera funktsiooni (rangelt) kumeraks;

3) kumerate funktsioonide summa on rangelt kumer, kui vähemalt üks liidetav on rangelt kumer;

4) alt poolpidevate funktsioonide summa on alt poolpidev.

<u>Lemma 4.1</u> t õ e s t u s. Näitame esialgu ülesannete (4.4) ja (4.5) samaväärsust.

Olgu u ülesande (4.4) lahend. Võrratuse (4.4) võime kirjutada kujul

$$(u,v)-\frac{1}{2}\|u\|^2+\varphi(v)-\langle g,v\rangle \geq \frac{1}{2}\|u\|^2+\varphi(u)-\langle g,u\rangle .$$

Liites selle vasemale poolele $\frac{1}{2}\|u-v\|^2$, saame

$$F(v)\geq F(u) \quad \forall v\in V,$$

s.t. u on ülesande (4.5) lahend.

Olgu nüüd u ülesande (4.5) lahend. Siis kehtib

$$F(u)\leq F(u+\lambda(v-u)) \quad \forall v\in V, \ \forall\lambda\in(0,1),$$

ehk

$$\frac{1}{2}\|u\|^2+\varphi(u)-\langle g,u\rangle \leq \frac{1}{2}\|u+\lambda(v-u)\|^2+$$
$$+\varphi(\lambda v+(1-\lambda)u)-\langle g,u+\lambda(v-u)\rangle .$$

Kasutades siin parema poole edasiseks hindamiseks φ kumerust, saame

$$\lambda(u,v-u)+\frac{1}{2}\lambda^2\|v-u\|^2+\lambda(\varphi(v)-\varphi(u))\geq\lambda\langle g,v-u\rangle .$$

Peale positiivse arvuga λ jagamist teostame piirprotsessi $\lambda\to 0$ ning jõuame võrratuseni (4.4).

Järgnevalt näitame ülesande (4.5) lahendi olemasolu, kontrollides selleks teoreemi 3.3 eelduste täidetust. Pidades silmas, et funktsioon $v\to\frac{1}{2}\|v\|^2$ ja lineaarne funktsionaal $-g$ on kumerad, võime väita funktsiooni F kumerust. Ta on ka alt poolpidev, sest tema liidetavad $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ ja $-g$ on isegi pidevad. Veendume veel funktsiooni F koertsitiivsuses. Et φ on kumer ja alt poolpidev, siis teoreemi 3.2 põhjal leiduvad $\ell \in V'$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et $\varphi(v) \geq \langle \ell, v \rangle + \alpha$ iga $v \in V$ korral. Seepärast

$$F(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \varphi(v) - \langle g, v \rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|v\|^2 + \langle \ell, v \rangle + \alpha - \langle g, v \rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \|\ell - g\| \|v\| + \alpha ,$$

millest järeldub funktsiooni F koertsitiivsus.

Lahendi ühesus järeldub teoreemi 3.5 põhjal funktsiooni F rangest kumerusest, sest temas liidetav $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ on rangelt kumer.

Lemma 4.1 on tõestatud.

3. Lahendi olemasolu ja ühesuse teoreem

Vaatleme uuesti ülesannet

$$u \in V: a(u, v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in V. \qquad (4.1)$$

Teoreem 4.1. Olgu bilineaarvorm a tõkestatud ja koertsitiivne, $\varphi: V \to \overline{\mathbb{R}}$ alt poolpidev kumer funktsioon. Siis ülesandel (4.1) on iga $f \in V'$ korral parajasti üks lahend.

T õ e s t u s. Fikseerime $w \in V$, valime $\rho > 0$ ja moodustame abiülesande

$$u \in V: (u, v-u) + \rho\varphi(v) - \rho\varphi(u) \geq$$

$$\geq (w, v-u) + \langle \rho f, v-u \rangle - \rho\, a(w, v-u) \quad \forall v \in V. \qquad (4.6)$$

Defineerime pideva lineaarse funktsionaali $g \in V'$ seosega

$$\langle g, v \rangle = (w, v) + \langle \rho f, v \rangle - \rho\, a(w, v), \quad v \in V.$$

Ülesanne (4.6) on nüüd esitatav

$$u \in V: (u, v-u) + \rho\varphi(v) - \rho\varphi(u) \geq \langle g, v-u \rangle \quad \forall v \in V. \qquad (4.7)$$

Funktsioon $\rho\varphi$ on kumer, alt poolpidev, seepärast on ülesanne (4.7) ehk (4.6) lemma 4.1 põhjal üheselt lahenduv. Defineerime fikseeritud $\rho > 0$ korral operaatori G_ρ, mis igale elemendile $w \in V$ seab vastavusse ülesande (4.6) lahendi: $u = G_\varrho w$.

Operaatori G_ϱ püsipunkt $u = G_\varrho u$ on parajasti võrratuse (4.6) lahend $w = u$ korral, s.t.

$$(u, v-u) + \varrho\varphi(v) - \varrho\varphi(u) \geq$$
$$\geq (u, v-u) + \langle \varrho f, v-u\rangle - \varrho a(u, v-u) \quad \forall v \in V,$$

mis peale positiivse arvuga ϱ jagamist on võrratus (4.1). Seega ülesande (4.1) lahendid on parajasti operaatori G_ϱ püsipunktid.

Järgnevalt näitame, et ϱ sobiva valiku korral on G_ϱ ahendav ruumis V. Valime vabalt $w_1, w_2 \in V$, olgu $u_1 = G_\varrho w_1$, $u_2 = G_\varrho w_2$. Et u_1 on ülesande (4.6) lahend, mis vastab valitud elemendile $w = w_1$, siis võttes seal $v = u_2$, saame

$$(u_1, u_2 - u_1) + \varrho\varphi(u_2) - \varrho\varphi(u_1) \geq$$
$$\geq (w_1, u_2 - u_1) + \langle \varrho f, u_2 - u_1\rangle - \varrho a(w_1, u_2 - u_1).$$

Analoogiliselt

$$(u_2, u_1 - u_2) + \varrho\varphi(u_1) - \varrho\varphi(u_2) \geq$$
$$\geq (w_2, u_1 - u_2) + \langle \varrho f, u_1 - u_2\rangle - \varrho a(w_2, u_1 - u_2).$$

Märgime, et $\varphi(u_1)$ ja $\varphi(u_2)$ on lõplikud, sest u_1 ja u_2 on ülesande (4.7) lahendid. Viimaste võrratuste liitmise tulemusena

$$-\|u_1 - u_2\|^2 \geq -(w_1 - w_2, u_1 - u_2) + \varrho a(w_1 - w_2, u_1 - u_2).$$

Pidades silmas, et bilineaarvorm a määrab üheselt operaatori $A \in \mathcal{L}(V,V)$ seosega $a(u,v) = (Au, v)$, $u, v \in V$, saame edasi

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq (w_1 - w_2, u_1 - u_2) - \varrho(A(w_1 - w_2), u_1 - u_2) \leq$$
$$\leq \|(I - \varrho A)(w_1 - w_2)\| \, \|u_1 - u_2\|.$$

Me näitasime teoreemi 1.2 tõestamisel, et

$$\|I-\rho A\| \leq (1-2\rho\alpha+\rho^2 M^2)^{1/2},$$

seepärast on G_ρ ahendav, kui $0<\rho<\frac{2\alpha}{M^2}$.

Viimast tingimust rahuldava parameetri ρ korral omab G_ρ parajasti ühe püsipunkti, see on ülesande (4.1) ainus lahend.

Teoreem 4.1 on tõestatud.

Lisame mõned märkused ja täiendused.

1. Ülesande (4.1) lahend sõltub pidevalt vabaliikmest samuti nagu ülesande (1.1) lahend: kui u_i on võrratuse (4.1) lahend, mis vastab funktsionaalile $f_i \in V'$, $i=1,2$, siis kehtib hinnang

$$\|u_1-u_2\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_1-f_2\|.$$

Tõestus on sama, mis ülesande (1.1) korral.

2. Teoreem 4.1 on üldistuseks Stampacchia teoreemile 1.1.

§ 5. Näiteid II liiki variatsioonvõrratustest

1. Elastse keha kontaktülesanne

Siin on meil tegemist Signorini ülesandega sarnase ülesandega, muutuvad ainult rajatingimused.

1.1. Ülesande püstitus. Vaatleme jälle elastse keha deformatsiooni ülesannet, statsionaarset olekut kirjeldavad tasakaaluvõrrandid

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}+f_i=0,\quad i=1,2,3,\ x\in\Omega. \tag{5.1}$$

Sõltuvust $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(u)$, kus $u=(u_1,u_2,u_3)$ on otsitav deformatsioon, kirjeldasime § 2 alapunktis 5.1. Piirkonna Ω raja Γ osal Γ_0 loeme antuks nihke

$$u_i = 0, \ i = 1,2,3, \ x \in \Gamma_0. \tag{5.2}$$

Vaatleme olukorda, kus rajaosal $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ on uuritav keha kontaktis mingi teise kehaga. Seejuures teda mõjutatakse jõuga, mille normaalsihiline komponent on teada

$$\sigma_n = F_n, \ x \in \Gamma_1, \tag{5.3}$$

ning kehade vahel esineb hõõrdumine. Tähistades hõõrdejõu $g(x) = \kappa(x)\,|F_n(x)|, x \in \Gamma_1$, kus $\kappa(x) > 0$ on hõõrdetegur, võib hõõrdetingimusi (neid nimetatakse Coulomb'i seadusteks) väljendada

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| < g \Rightarrow u_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_\tau = -\lambda \sigma_\tau, \end{cases} \quad x \in \Gamma_1. \tag{5.4}$$

(Meenutame, et $|\cdot|$ tähendab siin nagu tavaliselt eukleidilist normi ruumis $\mathbb{R}^3$). Tingimuste (5.4) selgituseks lisame, et esimene neist väljendab olukorda, kus puutujasuunaline pinge kehas on väiksem kui hõõrdejõud ning seetõttu keha ei liigu. Teine tingimus aga näitab, et kui puutujasuunaline pinge saab hõõrdejõuga võrdseks, siis keha võib liikuda pinge vastassuunas. Viimast võib võrrelda klassikalisest mehhaanikast tuntud olukorraga, kus horisontaalsel alusel asetsevat keha tõmmatakse jõuga, mida tasakaalustab kehas tekkiv pinge. Kui mõjutav jõud võrdsustub absoluutväärtuselt hõõrdejõuga, toimub liikumine tõabava jõu suunas, s.t. pinge vastassuunas. Märgime, et $\lambda = \lambda(x), x \in \Gamma_1$, iseloomustab tekkiva nihke suurust.

Niisiis, uuritavaks ülesandeks on (5.1)–(5.4).

1.2. <u>Ülesande esitus variatsioonvõrratusena</u>. Nagu Signorini ülesandes olgu $V = \{v \in (H^1(\Omega))^3 : v_i(x) = 0, \text{ p.k. } x \in \Gamma_0\}$, bilineaarvorm a määratud võrdusega

$$a(u,v)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u)\,\varepsilon_{ij}(v)\,dx\,,\quad u,v\in (H^1(\Omega))^3.$$

Eeldame, et $g\in L^\infty(\Gamma_1)$ ja $g(x)\geq g_0>0$ ning $F_n\in L^2(\Gamma_1)$.

Defineerime

$$\varphi(v)=\int_{\Gamma_1} g\,|v_\tau|\,d\Gamma,$$

$$\langle f,v\rangle=\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} f_i v_i\,dx+\int_{\Gamma_1} F_n v_n\,d\Gamma,\quad v\in V.$$

Märgime selgituseks, et kuna $v_i\in H^1(\Omega)$, siis lemma 2.2 põhjal $v_i\in L^2(\Gamma)$, seepärast $v_\tau\in (L^2(\Gamma))^3$ ning funktsioon φ omandab lõplikke väärtusi. Samuti on funktsionaali f avaldises esinev pindintegraal lõplik, sest $v_n\in L^2(\Gamma)$.

Vaatleme nüüd variatsioonvõrratust

$$u\in V:\ a(u,v-u)+\varphi(v)-\varphi(u)\geq\langle f,v-u\rangle\quad \forall v\in V. \tag{5.5}$$

Järgnevalt näitame, et siledate lahendite korral on ülesanne (5.1)-(5.4) samaväärne võrratusega (5.5).

Olgu u ülesande (5.1)-(5.4) sile lahend. On selge, et $u\in V$, sest rahuldatud on tingimus (5.2). Valides vabalt $v\in V$, moodustame (5.1) ja $v-u$ skalaarkorrutise (ruumis R^3), seejärel integreerime üle piirkonna Ω

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u)(v_i-u_i)\,dx+\int_\Omega\sum_{i=1}^{3} f_i(v_i-u_i)\,dx=0.$$

Kasutades Greeni valemit (lemma 2.3), saame

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u)(v_i-u_i)\,dx=$$

$$=-a(u,v-u)+\int_\Gamma\big(\sigma_\tau(u)\cdot(v_\tau-u_\tau)+\sigma_n(u)(v_n-u_n)\big)\,d\Gamma,$$

kusjuures pindintegraali võime võtta üle Γ_1, sest $v=u=0$, $x\in\Gamma_0$. Niisiis, saime võrduse

$$a(u,v-u)-\int_{\Gamma_1}\big(\sigma_\tau(u)\cdot(v_\tau-u_\tau)+\sigma_n(u)(v_n-u_n)\big)\,d\Gamma-$$

$$-\int_\Omega\sum_{i=1}^{3} f_i(v_i-u_i)\,dx=0. \tag{5.6}$$

Arvestades, et $\sigma_n(u)=F_n$ rajaosal Γ_1, saame siit

$$a(u, v-u)+\varphi(v)-\varphi(u)-\langle f, v-u\rangle=$$

$$=\int_{\Gamma_1}\big(\sigma_\tau(u)\cdot(v_\tau-u_\tau)+g(|v_\tau|-|u_\tau|)\big)d\Gamma.$$

Näitame järgnevas, et

$$\int_{\Gamma_1}\big(\sigma_\tau(u)\cdot(v_\tau-u_\tau)+g(|v_\tau|-|u_\tau|)\big)d\Gamma\geq 0. \qquad (5.7)$$

Kõigepealt saame Cauchy—Bunjakovski võrratust ja tingimust $|\sigma_\tau(u)|\leq g$ kasutades, et

$$-\sigma_\tau(u)\cdot v_\tau\leq|\sigma_\tau(u)||v_\tau|\leq g|v_\tau|.$$

Sellest

$$\sigma_\tau(u)\cdot v_\tau+g|v_\tau|\geq 0,\ x\in\Gamma_1. \qquad (5.8)$$

Kui $|\sigma_\tau(u)|<g$ mingis punktis $x\in\Gamma_1$, siis $u_\tau=0$ ja (5.8) põhjal on (5.7) integraalialune avaldis selles punktis mittenegatiivne. Kui aga $|\sigma_\tau(u)|=g$ punktis $x\in\Gamma_1$, siis $u_\tau=-\lambda\sigma_\tau(u)$, millest

$$-\sigma_\tau(u)\cdot u_\tau=|\sigma_\tau(u)\cdot u_\tau|=|\sigma_\tau(u)||u_\tau|;$$

me kasutasime siin veel seda, et Cauchy—Bunjakovski võrratus on võrdus, kui vektorid on lineaarselt sõltuvad. Seega saime

$$\sigma_\tau(u)\cdot u_\tau+|\sigma_\tau(u)||u_\tau|=0,$$

mille võib võrduse $|\sigma_\tau(u)|=g$ abil kirjutada

$$-\sigma_\tau(u)\cdot u_\tau-g|u_\tau|=0.$$

Liites siia võrratuse (5.8), saame ka nüüd, et (5.7) integraalialune avaldis on mittenegatiivne. Sellega on tõestatud võrratus (5.7) ja ühtlasi näidatud, et u rahuldab võrratust (5.5).

Olgu nüüd u variatsioonvõrratuse (5.5) küllalt sile lahend. Rahuldatud on tingimus (5.2), sest $u\in V$. Võrratusse (5.5), mis on kirjutatav

$$a(u, v-u) + \int_{\Gamma_1} g(|v_\tau| - |u_\tau|)\, d\Gamma -$$
$$- \int_\Omega \sum_{i=1}^3 f_i (v_i - u_i)\, dx - \int_{\Gamma_1} F_n (v_n - u_n)\, d\Gamma \geq 0,$$

asetame $v = u \pm \psi$, kus $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$. Siis $v = u$ rajal Γ ning vaadeldavas võrratuses esinevad pindintegraalid on võrdsed nulliga. Avaldist $a(u, v-u)$ teisendame veel Greeni valemiga (lemma 2.3), ka seal võrdub pindintegraal nulliga, tulemusena

$$\pm \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) \psi_i + \sum_{i=1}^3 f_i \psi_i \Big)\, dx \geq 0,$$

s.t.

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \Big(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) + f_i \Big) \psi_i\, dx = 0 \quad \forall \psi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3.$$

Siit järeldub võrrandite (5.1) kehtivus ning jääb näidata tingimuste (5.3) ja (5.4) täidetust.

Et (5.1) on rahuldatud, siis kehtib ka (5.6), mille kirjutame kujul (olgu lühiduse mõttes $\sigma(u) = \sigma$)

$$a(u, v-u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^3 f_i (v_i - u_i)\, dx - \int_{\Gamma_1} F_n (v_n - u_n)\, d\Gamma + \varphi(v) - \varphi(u) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} g(|v_\tau| - |u_\tau|)\, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \big(\sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) + (\sigma_n - F_n)(v_n - u_n) \big)\, d\Gamma.$$

Siit ja võrratusest (5.5) saame

$$\int_{\Gamma_1} \big(\sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) + g(|v_\tau| - |u_\tau|) \big)\, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\sigma_n - F_n)(v_n - u_n)\, d\Gamma \geq 0$$
$$\forall v \in V. \qquad (5.9)$$

Valime vabalt $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ nii, et $\operatorname{supp} \varphi \subset \Gamma_1$. Olgu $\psi = \varphi n$ ning $w \in (H^1(\Omega))^3$ selline (leidub lemma 2.2 põhjal), et tema ahend rajale Γ on ψ. Valime $v = u + w$, siis $v_n = u_n + \varphi$ ja $v_\tau = u_\tau$. Võrratusest (5.9) saame

$$\int_{\Gamma_1} (\sigma_n - F_n) \varphi\, d\Gamma \geq 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma_1),$$

millest omakorda $\sigma_n = F_n, x \in \Gamma_1$, s.t. kehtib (5.3).

Võrratus (5.9) teiseneb nüüd kujule

$$\int_{\Gamma_1} \left(\sigma_\tau \cdot (v_\tau - u_\tau) + g(|v_\tau| - |u_\tau|) \right) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in V. \qquad (5.10)$$

Valides kõigepealt siin $v = 0$, saame

$$\int_{\Gamma_1} \left(\sigma_\tau \cdot u_\tau + g|u_\tau| \right) d\Gamma \leq 0. \qquad (5.11)$$

Vaatleme hulka

$$\Psi = \{ \psi \in (H^1(\Gamma))^3 : \operatorname{supp} \psi \subset \Gamma_1 \}.$$

Lemmale 2.2 tuginedes võime väita, et $\gamma(V) \supset \Psi$, sest kui $\psi \in \Psi$, siis $\psi_i(x) = 0$, $x \in \Gamma_0$. Seepärast võime võrratuses (5.10) valida $v = \psi \in \Psi$, pidades silmas, et siin on tegemist rajaosal Γ_1 määratud funktsioonidega. Arvestades esitust $\psi = \psi_\tau + \psi_n n$ ja sellest järelduvat võrdust $\sigma_\tau \cdot \psi_\tau = \sigma_\tau \cdot \psi$, samuti võrratust $|\psi_\tau| \leq |\psi|$, võime (5.10) kirjutada

$$\int_{\Gamma_1} \left(\sigma_\tau \cdot \psi + g|\psi| \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left(\sigma_\tau \cdot u_\tau + g|u_\tau| \right) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \psi \in \Psi.$$

Asendades siin ψ funktsiooniga $\pm \lambda \psi, \lambda > 0$, väljume hulgast Ψ ning saame

$$\lambda \int_{\Gamma_1} \left(\pm \sigma_\tau \cdot \psi + g|\psi| \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left(\sigma_\tau \cdot u_\tau + g|u_\tau| \right) d\Gamma \geq 0.$$

Jagades selle võrratuse positiivse arvuga λ, saame piiril $\lambda \to \infty$

$$\int_{\Gamma_1} \left(\pm \sigma_\tau \cdot \psi + g|\psi| \right) d\Gamma \geq 0$$

ehk

$$\pm \int_{\Gamma_1} \sigma_\tau \cdot \psi \, d\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} g|\psi| \, d\Gamma,$$

s.t.

$$\left| \int_{\Gamma_1} \sigma_\tau \cdot \psi \, d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_1} g|\psi| \, d\Gamma \quad \forall \psi \in \Psi. \qquad (5.12)$$

Vaatleme hulka Ψ vektoralamruumina ruumis $(L^1(\Gamma_1))^3$, milles kasutatakse normi $\psi \to \int_{\Gamma_1} g|\psi| d\Gamma$. Võrratus (5.12) tähendab siis, et lineaarne funktsionaal $\psi \to \int_{\Gamma_1} \sigma_\tau \cdot \psi \, d\Gamma =$

$= \int_{\Gamma_1} (g^{-1}\sigma_\tau)\cdot g\psi\, d\Gamma$ on tõkestatud. Et Ψ on kõikjal tihe ruumis $(L^1(\Gamma_1))^3$, siis vaadeldav funktsionaal kuulub ruumi $(L^\infty(\Gamma_1))^3$, ühtlasi annab võrratus (5.12) hinnangu $\|g^{-1}\sigma_\tau\|_{(L^\infty(\Gamma_1))^3} \le 1$, millest

$$|\sigma_\tau| \le g \quad \text{p.k.} \quad x \in \Gamma_1 .$$

Sellest saame analoogiliselt võrratusele (5.8)

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + g\,|u_\tau| \ge 0 \,, \quad x \in \Gamma_1 . \tag{5.13}$$

Nüüd (5.11) ja (5.13) kokku annavad, et

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau + g\,|u_\tau| = 0 \quad \text{p.k.} \quad x \in \Gamma_1 . \tag{5.14}$$

Kui $|\sigma_\tau| < g$, siis (5.14) ja Cauchy—Bunjakovski võrratuse abil juhul $u_\tau \ne 0$

$$g\,|u_\tau| = -\sigma_\tau \cdot u_\tau \le |\sigma_\tau|\,|u_\tau| < g\,|u_\tau| , \tag{5.15}$$

saaksime vastuolu, seepärast $u_\tau = 0$. Kui aga $|\sigma_\tau| = g$, siis hinnangus (5.15) on viimane võrratus võrdus, mis näitab, et Cauchy—Bunjakovski võrratuses $-\sigma_\tau \cdot u_\tau \le |\sigma_\tau|\,|u_\tau|$ leiab aset võrdus. See aga on võimalik ainult siis, kui σ_τ ja u_τ on lineaarselt sõltuvad, seejuures neid siduva kordaja märk järeldub võrdusest (5.14). Sellega on näidatud ka tingimuse (5.4) kehtivus, s.t. u on ülesande (5.1)-(5.4) lahend.

1.3. Variatsioonvõrratuse ühene lahenduvus. Vaatleme variatsioonvõrratust (5.5), milles a, φ, f, samuti ruum V on toodud alapunktis 1.2.

Teoreem 5.1. Olgu $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ sellised, et on täidetud tingimused (2.15), $g \in L^\infty(\Gamma_1)$, $g(x) \ge 0$. Siis variatsioonvõrratus (5.5) omab iga $f_i \in L^2(\Omega)$ ja $F_n \in L^2(\Gamma_1)$ korral ühese lahendi.

T õ e s t u s. Näitame, et on täidetud teoreemi 4.1 eeldused.

Bilineaarvormi a tõkestatust ja koertsitiivsust kontrollisime § 2 alapunktis 5.3.

Ülesanne. Näidata, et kui $f_i \in L^2(\Omega)$ ja $F_n \in L^2(\Gamma_1)$, siis $f \in V'$.

Funktsiooni $\varphi(v) = \int_{\Gamma_1} g|v_\tau| d\Gamma$ kumerus järeldub normi kumerusest. Veel saame

$$|\varphi(v) - \varphi(u)| \le \|g\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_{\Gamma_1} \big||v_\tau| - |u_\tau|\big| d\Gamma,$$

seejuures lemmale 2.2 toetudes

$$\int_{\Gamma_1} \big||v_\tau| - |u_\tau|\big| d\Gamma \le \int_{\Gamma_1} |v_\tau - u_\tau| d\Gamma \le \int_{\Gamma_1} |v - u| d\Gamma \le$$

$$\le (\operatorname{mes} \Gamma_1)^{1/2} \|v - u\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \le \operatorname{const} \|v - u\|_{(H^1(\Omega))^3}.$$

Oleme näidanud, et φ rahuldab Lipschitzi tingimust, seepärast on ta pidev, ammugi siis alt poolpidev. Teoreemi 4.1 põhjal on võrratus (5.5) üheselt lahenduv.

Teoreem 5.1 on tõestatud.

2. Temperatuuri juhtimine piirkonnas

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \le 3$, piirkond soojust juhtivas keskkonnas, Γ olgu Ω raja. Piirkonna Ω sees paiknevad lisaks looduslikele veel juhitavad soojusallikad, mille võimsust saab teatud piirides reguleerida. Neid kasutatakse selleks, et püüda hoida temperatuuri piirkonnas Ω antud piirides. Märgime, et kõrvuti käesolevas punktis vaadeldava ülesandega esineb veel temperatuuri juhtimine rajal, kus asuvad juhitavad soojusallikad ([1], lk. 28).

2.1. Ülesande matemaatiline püstitus. Statsionaarset olekut kirjeldav soojusjuhtivusvõrrand on

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x), \; x \in \Omega,$$

siin u on temperatuur, f piirkonnas Ω paiknevate soojusallikate tihedus, a_{ij} on antud kordajad, mis iseloomustavad soojust juhtivat keskkonda. Märgime, et kui keha on isotroopne, s.t. juhib soojust igas suunas ühtemoodi, siis $a_{ij} = a^2 \delta_{ij}$ ning temperatuuri jaotust kirjeldab Laplace'i võrrand $-\Delta u = f/a^2$.

Kirjeldame temperatuuri juhtimist piirkonnas Ω. Antakse ette kaks temperatuuri jaotust $h_1(x)$ ja $h_2(x)$, $x \in \Omega$, nii, et $h_1(x) \le h_2(x)$. Kui kehtib võrratus $h_1(x) \le u(x) \le$ $\le h_2(x), x \in \Omega$, siis juhtimiseks ette nähtud soojusallikaid tööle ei rakendata. Kui aga see võrratus ei kehti, siis pannakse tööle täiendavad soojusallikad soojustihedusega $g \in [g_1, g_2]$, kusjuures $0 \in [g_1, g_2]$. Märgime, et kui $0 \in (g_1, g_2)$, siis on võimalik soojust nii lisada kui neelata. Reguleeriv soojustihedus $g = g(u; x)$ määratakse järgmiselt:

1) kui $u \in [h_1, h_2]$, siis $g = 0$;

2) kui $u \notin [h_1, h_2]$, siis lisatakse või juhitakse ära soojushulk, mis on võrdeline u kaugusega lõigust $[h_1, h_2]$:

kui $u < h_1$, siis

$$g = \begin{cases} -g_1, & \text{kui } \kappa_1(u-h_1) < g_1, \\ -\kappa_1(u-h_1), & \text{kui } \kappa_1(u-h_1) \ge g_1; \end{cases}$$

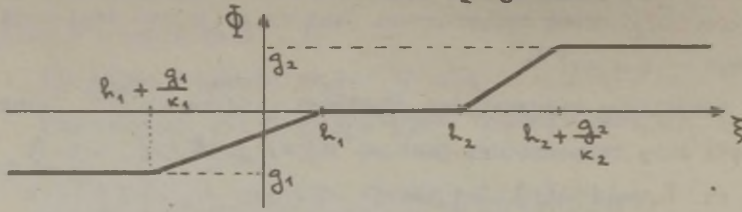
kui $u > h_2$, siis

$$g = \begin{cases} -g_2, & \text{kui } \kappa_2(u-h_2) > g_2, \\ -\kappa_2(u-h_2), & \text{kui } \kappa_2(u-h_2) \le g_2, \end{cases}$$

seejuures κ_1 ja κ_2 on konstandid. Tingimused 1) ja 2) ühendame järgmiselt, defineerides ühtlasi funktsiooni Φ:

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi; x) = -g(\xi; x) = \begin{cases} g_1, & \text{kui } \xi \le h_1 + g_1/\kappa_1, \\ \kappa_1(\xi - h_1), & \text{kui } h_1 + g_1/\kappa_1 \le \xi \le h_1, \\ 0, & \text{kui } h_1 \le \xi \le h_2, \\ \kappa_2(\xi - h_2), & \text{kui } h_2 \le \xi \le h_2 + g_2/\kappa_2, \\ g_2, & \text{kui } \xi \ge h_2 + g_2/\kappa_2. \end{cases}$$

Iga fikseeritud $x \in \Omega$ korral on Φ graafik



Temperatuuri jaotust vaadeldava juhtimise korral kirjeldab võrrand

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f - \Phi(u),\ x \in \Omega, \tag{5.16}$$

kusjuures siin f on mittejuhitavate soojusallikate tihedus. Lisame veel rajatingimuse

$$u(x) = 0\ ,\ x \in \Gamma. \tag{5.17}$$

2.2. <u>Ülesande esitus variatsioonvõrratusena</u>. Valime $V = H_0^1(\Omega)$, olgu

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\ ,\ u,v \in V.$$

<u>Lemma 5.1</u> (Greeni valem). Kehtib võrdus

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) v\,dx = a(u,v) \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

T õ e s t u s. Vabalt valitud $u, v \in H_0^1(\Omega)$ korral

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) v\,dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} v\right) dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

Esimest integraali paremal poolel teisendame Gauss—Ostrogradski valemi abil (kui $n=2$, siis see üleminek kannab Greeni valemi nime, $n=1$ korral aga on Newton—Leibnizi valem), saame

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} v\right)dx = \int_\Gamma \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} v\right)n_i \, d\Gamma = 0,$$

sest $v = 0$, kui $x \in \Gamma$.

Lemma 5.1 on tõestatud.

Defineerime veel

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f v \, dx, \quad x \in V,$$

$$\Psi(\eta) = \Psi(\eta; x) = \int_0^\eta \Phi(\xi; x)\, d\xi,$$

$$\varphi(v) = \int_\Omega \Psi(v)\, dx = \int_\Omega \Psi(v(x); x)\, dx, \quad v \in V,$$

ja vaatleme variatsioonvõrratust

$$v \in V: \ a(u, v-u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in V. \qquad (5.18)$$

Näitame, et küllaldaselt siledatel lahenditel on ülesanne (5.16), (5.17) ja võrratus (5.18) samaväärsed.

Olgu u ülesande (5.16), (5.17) lahend. Tingimus (5.17) annab, et $u \in V$. Valides vabalt $v \in V$, korrutame võrduse (5.16) vahega $v-u$ ja integreerime üle Ω, tulemusena

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(v-u)\, dx = \int_\Omega f(v-u)\, dx - \int_\Omega \Phi(u)(v-u)\, dx.$$

Arvestades siin Greeni valemit lemmast 5.1, saame, et võrratus (5.18) on samaväärne võrratusega

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \int_\Omega \Phi(u)(v-u)\, dx. \qquad (5.19)$$

Seejuures

$$\varphi(v) - \varphi(u) = \int_\Omega (\Psi(v) - \Psi(u))\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_0^v \Phi(\xi)\, d\xi - \int_0^u \Phi(\xi)\, d\xi\right) dx = \int_\Omega \int_u^v \Phi(\xi)\, d\xi\, dx.$$

<u>Ülesanne</u>. Näidata, et kui funktsioon f on monotoonselt kasvav, siis

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq f(a)(b-a).$$

Et funktsioon Φ on monotoonselt kasvav, siis äsjateedud ülesande põhjal

$$\int_u^v \Phi(\xi)\,d\xi \geq \Phi(u)(v-u),$$

millest saamegi peale integreerimist üle piirkonna Ω võrratuse (5.19).

Olgu u variatsioonvõrratuse (5.18) sile lahend. Tingimus (5.17) on täidetud, sest $u \in V$. Valime $v = u + \lambda w$, $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda > 0$. Võrratusest (5.18) järeldub nüüd

$$\lambda\, a(u,w) + \varphi(u+\lambda w) - \varphi(u) \geq \lambda \langle f, w\rangle. \qquad (5.20)$$

Võrratuse (5.20) (mis järeldub ainult funktsiooni Φ monotoonsest kasvust) abil saame

$$\varphi(u) - \varphi(u+\lambda w) \geq -\lambda \int_\Omega \Phi(u+\lambda w)\, w\, dx. \qquad (5.21)$$

Liidame (5.20) ja (5.21) ning jagame seejärel positiivse arvuga λ, tulemuseks on

$$a(u,w) \geq \langle f, w\rangle - \int_\Omega \Phi(u+\lambda w)\, w\, dx =$$

$$= \langle f, w\rangle - \int_\Omega \Phi(u)\, w\, dx + \int_\Omega (\Phi(u) - \Phi(u+\lambda w))\, w\, dx.$$

Funktsioon Φ rahuldab tingimust

$$|\Phi(\xi) - \Phi(\eta)| \leq \max\{\kappa_1, \kappa_2\}\, |\xi - \eta|,$$

seepärast

$$\left|\int_\Omega (\Phi(u) - \Phi(u+\lambda w))\, w\, dx\right| \leq \max\{\kappa_1,\kappa_2\}\, \lambda \int_\Omega w^2\, dx \to 0,$$

kui $\lambda \to 0$. Selle piirprotsessi tulemusena seega

$$a(u,w) \geq \langle f, w\rangle - \int_\Omega \Phi(u)\, w\, dx \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Arvestades, et siin võime w asemel võtta ka $-w$, kehtib tegelikult

$$a(u,w) = \langle f, w\rangle - \int_\Omega \Phi(u)\, w\, dx \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Greeni valem lemmast 5.1 annab

$$a(u,w) = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) w\, dx,$$

mis eelneva võrdusega kokku lubab väita, et (5.16) kehtib.

2.3. <u>Variatsioonvõrratuse ühene lahenduvus.</u>

<u>Teoreem 5.2</u>. Kui $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ja leidub $\alpha > 0$ nii, et

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega,$$

samuti $h_1, h_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \in L^\infty(\Omega)$, siis iga $f \in H^{-1}(\Omega)$ (muuseas ka $f \in L^2(\Omega)$) korral on võrratus (5.18) üheselt lahenduv.

T õ e s t u s. Tugineme teoreemile 4.1. Bilineaarvormi a tõkestatus ja koertsitiivsus kordajate a_{ij} kohta tehtud eeldustel on saadud § 2 punktis 2.

Ülesanne. Tõestada, et kui funktsioon f on monotoonselt kasvav, siis $g(x)=\int_a^x f(s)ds$ on kumer.

Selle ülesande põhjal on iga fikseeritud x korral funktsioon $\psi(\eta;x)$ kumer argumendi η järgi, sellest järeldub ka funktsiooni φ kumerus. Funktsiooni φ alt poolpidevuse järeldame sellest, et ta rahuldab isegi Lipschitzi tingimust: vabalt valitud $u, v \in V$ korral

$$|\varphi(u)-\varphi(v)| = \left|\int_\Omega \int_v^u \Phi(\xi)\,d\xi\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left|\int_v^u |\Phi(\xi)|\,d\xi\right| dx \leq \max_{1\leq i\leq 2} \|g_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|u-v\|_{L^1(\Omega)};$$

meile vajaliku hinnangu saab siit, kasutades võrratusi

$$\|\cdot\|_{L^1(\Omega)} \leq (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2} \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \leq (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2} \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}.$$

Teoreem 5.2 on tõestatud.

§ 6. Mittelineaarsete monotoonsete operaatoritega I liiki variatsioonvõrratused

1. Monotoonsed operaatorid ja nende pidevusomadused

Olgu V reaalne refleksiivne Banachi ruum, V' tema kaasruum. Nagu varemgi, kui $v \in V$ ja $f \in V'$, siis $\langle f, v\rangle$ tähendab funktsionaali f väärtust elemendil v. Ruumis V' kasutame kaasnormi, s.t. $\|f\| = \sup_{v\in V, \|v\|=1} \langle f, v\rangle$.

Operaatorit $A : V \to V'$ nimetatakse monotoonseks, kui

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V.$$

Märgime, et see on üldistuseks monotoonselt kasvava funktsiooni $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mõistele, mida võib väljendada: iga $s, t \in \mathbb{R}$ korral $(\varphi(s) - \varphi(t))(s - t) \geq 0$.

Kui operaator A on lineaarne, siis monotoonsuse tingimuse võib kirjutada $\langle Av, v\rangle \geq 0$ iga $v \in V$ korral, seega lineaarse operaatori monotoonsus tähendab positiivsust.

Operaatorit $A : V \to V'$ nimetatakse rangelt monotoonseks kui

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

Operaatorit $A : V \to V'$ nimetatakse

1) radiaalselt pidevaks, kui iga $u, v \in V$ korral funktsioon $t \to \langle A(u + tv), v\rangle$ on pidev punktis 0, s.t. $\lim_{t\to 0} \langle A(u + tv), v\rangle = \langle Au, v\rangle$;

2) hemipidevaks, kui iga $u, v, w \in V$ korral funktsioon $t \to \langle A(u + tv), w\rangle$ on pidev punktis 0;

3) demipidevaks, kui koondumisest $v_n \to v$ ruumis V järeldub, et $Av_n \to Av$ nõrgalt ruumis V' (ruumi V refleksiivsuse tõttu tähendab see, et $\langle Av_n, w\rangle \to \langle Av, w\rangle$ iga $w \in V$ korral).

<u>Ülesanne</u>. Näidata, et radiaalse pidevuse ja hemipidevuse korral on vastavalt funktsioonid $t \to \langle A(u + tv), v\rangle$ ja $t \to \langle A(u + tv), w\rangle$ pidevad tervel reaalsirgel.

<u>Lause 6.1</u>. Operaatori demipidevusest järeldub hemipidevus, sellest omakorda radiaalne pidevus.

T õ e s t u s. On selge, et tõestust vajab ainult demipidevusest hemipidevuse järeldamine. Seepärast, olgu A demipidev. Valime koonduva jada $t_n \to t$, $t_n, t \in \mathbb{R}$. Siis iga $u, v \in V$ korral $u + t_n v \to u + tv$ ruumis V. Operaatori A demipidevuse tõttu $\langle A(u+t_n v), w\rangle \to \langle A(u+tv), w\rangle$ iga $w \in V$ korral. Me oleme näidanud, et funktsioon $t \to \langle A(u+tv), w\rangle$ on pidev terval reaalteljel, seega siis punktis 0.

Lause 6.1 on tõestatud.

Lisame, et lineaarne operaator on alati hemipidev, sest funktsioon $t \to \langle A(u+tv), w\rangle = \langle Au, w\rangle + t\langle Av, w\rangle$ on pidev.

Meie järgmiseks eesmärgiks on tõestada, et monotoonne radiaalselt pidev operaator on demipidev.

Lemma 6.1. Monotoonne operaator $A : V \to V'$ on lokaalselt tõkestatud, s.t. iga $u \in V$ korral leiduvad $\varepsilon > 0$ ja M nii, et kui $\|v - u\| \le \varepsilon$, siis $\|Av\| \le M$.

T õ e s t u s. Oletame vastuväiteliselt, et A ei ole lokaalselt tõkestatud, s.t. leidub jada $u_n \to u$ ruumis V nii, et $\|Au_n\| \to \infty$. Tähistame

$$\alpha_n = 1 + \|Au_n\| \, \|u_n - u\| .$$

Valime vabalt $v \in V$. Tuginedes A monotoonsusele, saame hinnangu

$$\frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v\rangle = \frac{1}{\alpha_n}\big(\langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle Au_n, v + u - u_n\rangle\big) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_n}\big(\langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle Au_n - A(v+u), (v+u) - u_n\rangle +$$

$$+ \langle A(v+u), v + u - u_n\rangle\big) \le \frac{1}{\alpha_n}\big(\langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle A(v+u), v + u - u_n\rangle\big)$$

$$\le 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|A(v+u)\|\big(\|v\| + \|u - u_n\|\big) \le M_v ,$$

kus M_v sõltub elemendist v (ja elemendist u), aga ei sõltu indeksist n, sest $\alpha_n \geq 1$ ja $\|u_n - u\| \to 0$. Samasugune hinnang kehtib ka, kui asendada v elemendiga $-v$, muutuda võib ainult konstant, seega

$$\left| \frac{1}{\alpha_n} \langle A u_n, v \rangle \right| \leq \max \{ M_v, M_{-v} \} .$$

Ühtlase tõkestatuse printsiibi põhjal võime öelda, et

$$\frac{1}{\alpha_n} \| A u_n \| \leq M ,$$

kus M ei sõltu elemendist v. Sellest

$$\| A u_n \| \leq M \alpha_n = M \left(1 + \| A u_n \| \| u_n - u \| \right)$$

ehk

$$\| A u_n \| \left(1 - M \| u_n - u \| \right) \leq M .$$

Alates mingist kohast ($n \geq n_0$) kehtib $M \| u_n - u \| \leq 1/2$, sellest omakorda järeldub, et $\| A u_n \| \leq 2M$, kui $n \geq n_0$. See aga on vastuolus oletusega, et $\| A u_n \| \to \infty$.

Lemma 6.1 on tõestatud.

Ülesanne. Tõestada, et lineaarse operaatori lokaalne tõkestatus tähendab tema tõkestatust.

Lemma 6.2. Monotoonne radiaalselt pidev operaator on demipidev.

T õ e s t u s. Olgu $A : V \to V'$ monotoonne ja radiaalselt pidev. Valime suvalise koonduva jada $u_n \to u$ ruumis V. Lemma 6.1 põhjal on operaator A lokaalselt tõkestatud, seepärast on jada $A u_n$ tõkestatud ruumis V'. Ruumi V refleksiivsuse tõttu on ka V' refleksiivne, seepärast saame eraldada osajada $N' \subset \mathbb{N}$ nii, et $A u_n \to f$ nõrgalt, $n \in N'$. Näitame järgnevalt, et $f = A u$.

Iga $v \in V$ korral

$$\langle f - A v, u - v \rangle = \lim_{n \in N'} \langle A u_n - A v, u - v \rangle =$$

$$= \lim_{n\in N'} (\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle + \langle Au_n - Av, u - u_n\rangle) =$$

$$= \lim_{n\in N'} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0,$$

me kasutasime siin jada Au_n tõkestatust ja A monotoonsust. Võtame $v = u + tw$, kus $w\in V, t > 0$. Siis $\langle f - A(u+tw), -tw\rangle \geq 0$, millest peale arvuga t jagamist saame $\langle f, w\rangle - \langle A(u+tw), w\rangle \leq 0$. Tuginedes A radiaalsele pidevusele, jõuame piirprotsessis $t\to 0$ võrratuseni $\langle f - Au, w\rangle \leq 0$ iga $w\in V$ korral. Sellest aga järeldame, et $\langle f - Au, w\rangle = 0$ iga $w\in V$ korral, s.t. $f = Au$.

Me oleme niisiis tõestanud, et $Au_n \to Au$ nõrgalt, $n\in N'$. Näitame, et tegelikult $Au_n \to Au$ nõrgalt. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad $\varepsilon > 0$, osajada $N'' \subset \mathbb{N}$ ja element $v\in V$ nii, et

$$|\langle Au_n, v\rangle - \langle Au, v\rangle| \geq \varepsilon, \quad n\in N''. \tag{6.1}$$

Tehes nüüd jadaga $u_n, n\in N''$, läbi sama arutelu, mis ülalpool jadaga u_n, saame, et leidub osajada $N''' \subset N''$ nii, et $Au_n \to Au$ nõrgalt, $n\in N'''$. See on aga vastuolus võrratusega (6.1).

Lemma 6.2 on tõestatud.

2. Lineariseerimislemma

Lemma 6.3 (Minty lemma, lineariseerimislemma). Olgu $A: V\to V'$ monotoonne radiaalselt pidev operaator, K kumer hulk ruumis V ja $f\in V'$. Siis variatsioonvõrratused

$$u\in K: \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in K, \tag{6.2}$$

$$u\in K: \langle Av, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in K \tag{6.3}$$

on samaväärsed.

T õ e s t u s. Olgu u võrratuse (6.2) lahend. Siis iga $v \in K$ korral saame A monotoonsust kasutades

$$\langle Av, v-u\rangle = \langle Au, v-u\rangle + \langle Av - Au, v-u\rangle \geq$$
$$\geq \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle,$$

s.t. on rahuldatud võrratus (6.3).

Olgu u võrratuse (6.3) lahend. Valime vabalt $w \in K$. Kui $t \in (0,1)$, siis $v = u + t(w-u) = tw + (1-t)w \in K$. Sellise v korral võrratus (6.3) annab

$$\langle A(u+t(w-u)), t(w-u)\rangle \geq \langle f, t(w-u)\rangle$$

ehk peale positiivse arvuga t jagamist

$$\langle A(u+t(w-u)), w-u\rangle \geq \langle f, w-u\rangle.$$

Tuginedes A radiaalsele pidevusele saame siit protsessis $t \to 0$

$$\langle Au, w-u\rangle \geq \langle f, w-u\rangle \quad \forall w \in K,$$

millega on näidatud (6.2) kehtivus.

Lemma 6.3 on tõestatud.

Juhime tähelepanu sellele, et lemma 6.3 tõestamisel kasutasime esimeses osas ainult A monotoonsust, teises osas ainult A radiaalset pidevust ja K kumerust. Seejuures ei olnud meil kuskil vaja V refleksiivsust ning K kinnisust ja tõkestatust.

Lemmat 6.3 nimetatakse lineariseerimislemmaks, sest (6.3) on u suhtes lineaarne võrratus.

<u>Lemma 6.4.</u> Kui hulk K on kumer, siis võrratuse (6.3) lahendite hulk on kumer, kui aga K on kinnine, siis (6.3) lahendite hulk on kinnine.

T õ e s t u s. Olgu u_1 ja u_2 võrratuse (6.3) lahendid. Valime $\lambda \in (0,1)$. Siis $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in K$ ning iga $v \in K$

korral

$$\langle Av, v-(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\rangle =$$

$$=\lambda\langle Av, v-u_1\rangle+(1-\lambda)\langle Av, v-u_2\rangle\geq\lambda\langle f, v-u_1\rangle+(1-\lambda)\langle f, v-u_2\rangle=$$

$$=\langle f, v-(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\rangle,$$

s.t. $\lambda u_1+(1-\lambda)u_2$ on samuti (6.3) lahend.

Olgu $u_n\to u$, kus u_n on võrratuse (6.3) lahendid. Et $u_n\in K$ ja K on kinnine, siis $u\in K$. Võrratusest (suvalise $v\in V$ korral)

$$\langle Av, v-u_n\rangle\geq\langle f, v-u_n\rangle$$

saame piirprotsessi $n\to\infty$ tulemusena

$$\langle Av, v-u\rangle\geq\langle f, v-u\rangle,$$

mis ütleb, et u on (6.3) lahend.

Lemma 6.4 on tõestatud.

Nagu näeme, ei nõuta lemmas 6.4 operaatorilt $A:V\to V'$ mingeid monotoonsuse ega pidevuse omadusi.

<u>Järeldus 6.1</u>. Lemma 6.3 eeldustel on võrratuse (6.2) lahendite hulk kumer ja kinnise K korral ka kinnine.

<u>Märkus 6.1</u>. Varem vaadeldud I liiki variatsioonvõrratus

$$u\in K:\ a(u, v-u)\geq\langle f, v-u\rangle\quad\forall v\in K \tag{6.4}$$

on erijuht võrratusest (6.2), sest pidev bilineaarvorm a Hilberti ruumil V defineerib pideva lineaarse operaatori $A\in\mathcal{L}(V,V')$ seosega $\langle Au, v\rangle=a(u,v)$, $u,v\in V$. Seega, kui A on positiivne, siis lemma 6.3 põhjal on (6.4) samaväärne võrratusega

$$u\in K:\ a(v, v-u)\geq\langle f, v-u\rangle\quad\forall v\in K.$$

3. <u>Monotoonsete operaatoritega I liiki variatsioonvõrratused lõplikumõõtmelises ruumis</u>

Olgu V lõplikumõõtmeline ruum, K kinnine kumer tõkestatud mittetühi hulk ruumis V. Järgnevas me tugineme

Schauderi püsipunkti printsiibile ([5], lk. 287,502), meile piisab tema järgmisest erijuhust.

Teoreem 6.1 (Bohl—Brouweri püsipunkti printsiip). Olgu $T: K \to K$ pidev. Siis operaatoril T leidub püsipunkt, s.t. element $u \in K$ nii, et $Tu = u$.

Lõplikumõõtmelises ruumis on teatavasti kõik normid ekvivalentsed, nende hulgas leidub ka selline, mis määratakse skalaarkorrutise poolt. Seepärast vaatleme ruumis V skalaarkorrutist $(\cdot, \cdot)$.

Antud operaatori $A: K \to V$ korral vaatleme variatsioonvõrratust

$$u \in K : (Au, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K. \qquad (6.5)$$

Lemma 6.5. Kui mittetühi hulk K on kinnine kumer tõkestatud ruumis V ja $A: K \to V$ on pidev, siis variatsioonvõrratusel (6.5) leidub lahend.

T õ e s t u s. Valime vabalt $w \in K$. Moodustame ülesande

$$u \in K : (u, v-u) \geq (w - Aw, v-u) \quad \forall v \in K. \qquad (6.6)$$

Lemma 1.3 põhjal on võrratus (6.6) üheselt lahenduv, seejuures (6.6) lahend esitub $u = P_K(w - Aw)$, kus P_K on projektor hulgale K. Defineerime operaatori $T: K \to K$ seosega $Tw = P_K(w - Aw), w \in K$, s.t. $T = P_K(I - A)$, sisuliselt seab operaator T igale elemendile $w \in K$ vastavusse variatsioonvõrratuse (6.6) lahendi. Operaatorite A ja P_K pidevuse tõttu (P_K rahuldab isegi Lipschitzi tingimust — lemma 1.4) on T pidev. Bohl—Brouweri püsipunkti printsiibi põhjal leidub element $u \in K$ nii, et $Tu = u$. Selle u korral

$$(u, v-u) \geq (u - Au, v-u) \quad \forall v \in K$$

ehk

$$(Au, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

s.t. u on võrratuse (6.5) lahend.

Lemma 6.5 on tõestatud.

Järeldus 6.2. Lemma 6.5 eeldustel iga $f \in V$ korral võrratus

$$u \in K: (Au, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \tag{6.7}$$

omab lahendi.

T õ e s t u s. Defineerime operaatori $A_f : K \to V$ seosega $A_f v = Av - f, v \in K$. Võrratus (6.7) on kirjutatav kujul

$$u \in K: (A_f u, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

sellel on aga lemma 6.5 põhjal lahend, sest A_f on pidev.

4. Monotoonsete operaatoritega I liiki variatsioonvõrratused tõkestatud hulgal

Olgu V refleksiivne Banachi ruum, olgu antud operaator $A: V \to V'$, pidev lineaarne funktsionaal $f \in V'$ ja mittetühi hulk $K \subset V$. Vaatleme variatsioonvõrratust

$$u \in K: \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \tag{6.8}$$

Teoreem 6.2. Olgu operaator $A: V \to V'$ monotoonne ja radiaalselt pidev, hulk K kumer, kinnine ja tõkestatud. Siis variatsioonvõrratus (6.8) omab lahendi.

T õ e s t u s. Olgu $V_0 \subset V$ lõplikumõõtmeline alamruum ning $K_0 = V_0 \cap K$ mittetühi. Hulk K_0 on seejuures kumer, kinnine ja tõkestatud. Vaatleme variatsioonvõrratust

$$u_0 \in K_0 : \langle Au_0, v-u_0 \rangle \geq \langle f, v-u_0 \rangle \quad \forall v \in K_0. \tag{6.9}$$

Varustame ruumi V_0 skalaarkorrutisega $(\cdot, \cdot)$. Iga $f \in V'$ korral funktsionaal $v \to \langle f, v \rangle$ on pidev ka ruumil V_0, Rieszi teoreemi põhjal leidub parajasti üks element $w \in V_0$ nii, et

$$\langle f, v \rangle = (w, v) \quad \forall v \in V_0 .$$

Defineerime operaatori π seosega $\pi f = w$. Vahetult on kontrollitav, et π on lineaarne. Kasutades asjaolu, et ruumis V_0 on skalaarkorrutise $(\cdot\,,\cdot)$ poolt määratud norm $\|\cdot\|_{V_0}$ ja ruumist V indutseeritud norm ekvivalentsed, saame lineaarse operaatori $\pi : V' \to V_0$ tõkestatuse (c_0 on konstant):

$$\|\pi f\|_{V_0} = \sup_{\substack{v \in V_0 \\ \|v\|_{V_0} = 1}} (\pi f, v) = \sup_{\substack{v \in V_0 \\ \|v\|_{V_0} = 1}} \langle f, v \rangle \leq$$

$$\leq c_0 \sup_{\substack{v \in V_0 \\ \|v\|_V = 1}} \langle f, v \rangle \leq c_0 \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} \langle f, v \rangle = c_0 \|f\|_{V'} .$$

Kirjutame võrratuse (6.9) ekvivalentsel kujul

$$u_0 \in K_0 : (\pi A u_0, v - u_0) \geq (\pi f, v - u_0) \quad \forall v \in K_0 . \qquad (6.10)$$

Tõestame järgnevas, et operaator πA on pidev. Et operaator A on monotoonne ja radiaalselt pidev, siis lemma 6.2 põhjal on ta demipidev, s.t. teisendab ruumis V koonduva jada nõrgalt koonduvaks ruumis V'. Selle jada teisendab pidev lineaarne operaator π omakorda ruumis V_0 nõrgalt koonduvaks. Ruumi V_0 lõplikumõõtmelisuse tõttu on seal nõrk ja tugev koonduvus samaväärsed, seega πA teisendab koonduva jada koonduvaks, s.t. on pidev. Järelduse 6.2 põhjal leidub nüüd võrratusel (6.10) ja seega ka võrratusel (6.9) lahend. Võrratuse (6.9) võib lineariseerimislemma 6.3 põhjal kirjutada samaväärsena

$$\langle A v, v - u_0 \rangle \geq \langle f, v - u_0 \rangle \quad \forall v \in K_0 , \qquad (6.11)$$

me oleme tõestanud, et tal leidub lahend.

Valime $v \in K$ ja defineerime hulga $S(v) = \{u \in K : \langle Av, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle\}$. Vahetult on kontrollitav, et hulk $S(v)$ on nõrgalt kinnine. Näitame, et hulkade süsteem $S(v), v \in K$, on tsentreeritud, s.t.

$$S(v_1) \cap \ldots \cap S(v_m) \neq \emptyset \tag{6.12}$$

igasuguste elementide $v_1, \ldots, v_m \in K$ korral.

Olgu V_0 vektorite $v_1, \ldots, v_m$ lineaarne kate ja $K_0 = V_0 \cap K$. Seejuures $K_0 \neq \emptyset$, sest $v_1, \ldots, v_m \in K_0$. Eespool tootud arutelu põhjal omab võrratus (6.11) lahendi u_0, võrratuse kehtivusest saame, et $\langle A v_i, v_i - u_0\rangle \geq \langle f, v_i - u_0\rangle$, $i = 1, \ldots, m$, seega $u_0 \in S(v_i), i = 1, \ldots, m$, ning (6.12) kehtivus on näidatud.

Et hulk K on tõkestatud ja nõrgalt kinnine refleksiivses ruumis V, siis ta on nõrgalt kompaktne (hulga kompaktsus tähendab siin, et tema igast lahtisest kattest saab eraldada lõpliku osakatte, nõrk kompaktsus aga tähendab kompaktsust ruumi V nõrgas topoloogias). Kompaktse hulga tsentreeritud kinniste hulkade ühisosa on alati mittetühi, seepärast $\bigcap_{v \in K} S(v) \neq \emptyset$, s.t. leidub $u \in \bigcap_{v \in K} S(v)$. Selle elemendi korral

$$\langle A v, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K$$

ning uuesti lineariseerimislemmat 2.3 kasutades võime väita, et u on ka võrratuse (6.8) lahend.

Teoreem 6.2 on tõestatud.

<u>Teoreem 6.3.</u> Kui operaator A on rangelt monotoonne, siis variatsioonvõrratusel (6.8) ei saa olla rohkem kui üks lahend.

T õ e s t u s. Olgu võrratusel (6.8) lahendid u_1 ja u_2. Siis võttes $v = u_2$, saame sellest, et u_1 on lahend

$$\langle Au_1, u_2 - u_1\rangle \geq \langle f, u_2 - u_1\rangle .$$

Analoogiliselt

$$\langle Au_2, u_1 - u_2\rangle \geq \langle f, u_1 - u_2\rangle .$$

Nende võrratuste liitmise tulemusena

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \leq 0,$$

millest A range monotoonsuse tõttu $u_1 = u_2$.

Teoreem 6.3 on tõestatud.

Juhime tähelepanu sellele, et teoreemis 6.3 me ei tee operaatori A kohta mingeid muid eeldusi, samuti ei nõua midagi hulgalt K.

Vaatleme lõpuks juhtu, kus $K = V$. Võttes võrratuses (6.8) $v = u \pm w$, kus $w \in V$, saame

$$\langle Au, w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V,$$

mis aga tähendab, et $Au = f$. Seega on variatsioonvõrratus (6.8) antud juhul samaväärne operaatorvõrrandiga $Au = f$.

5. Monotoonsete operaatoritega I liiki variatsioonvõrratused tõkestamata hulgal

Vaatleme variatsioonvõrratust

$$u \in K : \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K, \qquad (6.13)$$

kus hulk K on tõkestamata.

Defineerime hulga $K_R = K \cap \{v \in V : \|v\| \leq R\}$. Kui K on kumer ja kinnine, siis need omadused on ka hulgal K_R. Kui R on küllalt suur, siis juhul $K \neq \emptyset$ kehtib ka $K_R \neq \emptyset$. Vaatleme veel variatsioonvõrratust

$$u \in K_R : \langle Au_R, v - u_R\rangle \geq \langle f, v - u_R\rangle \quad \forall v \in K_R. \qquad (6.14)$$

Lemma 6.6. Olgu K kumer hulk. Siis selleks, et võrratus (6.13) omaks lahendi, on tarvilik ja piisav, et leiduks $R>0$ nii, et vähemalt üks võrratuse (6.14) lahend rahuldaks tingimust $\|u_R\|<R$.

T õ e s t u s. T a r v i l i k k u s. Olgu u võrratuse (6.13) lahend. Võttes $R>0$ nii, et $R>\|u\|$, saame vajalikku tingimust rahuldava võrratuse (6.14) lahendi.

P i i s a v u s. Olgu $R>0$ korral võrratusel (6.14) lahend u_R, mis rahuldab tingimust $\|u_R\|<R$. Valime vabalt $w\in K$. Siis iga $\lambda\in(0,1)$ korral $v=\lambda w+(1-\lambda)u_R\in K$. Seejuures $v=u_R+\lambda(w-u_R)$, millest $\|v\|\leq\|u_R\|+ +\lambda\|w-u_R\|$. Siit on näha, et küllalt väikese $\lambda>0$ korral $\|v\|\leq R$. Asetades taolise elemendi v võrratusse (6.14), saame peale arvuga λ jagamist

$$\langle Au_R, w-u_R\rangle\geq\langle f, w-u_R\rangle.$$

Elemendi $w\in K$ suvalisuse tõttu on u_R võrratuse (6.13) lahend.

Lemma 6.6 on tõestatud.

Märgime, et operaatorile A ei seadnud me siin mingeid monotoonsuse ega pidevuse nõudeid.

Lemma 6.7. Olgu K kumer kinnine hulk, operaator $A: V\to V'$ radiaalselt pidev ja monotoonne. Kui leidub $v_0\in K$ ja $R_0>\|v_0\|$ nii, et

$$\langle Av, v_0-v\rangle<\langle f, v_0-v\rangle \quad \forall v\in K\cap\{v\in V:\|v\|=R_0\}, \qquad (6.15)$$

siis võrratusel (6.13) on lahend.

T õ e s t u s. Olgu u_{R_0} võrratuse (6.14) lahend hulgas K_{R_0}, selle olemasolu järeldub teoreemist 6.2. Võttes võrratuses (6.14) $v=v_0$, saame

$$\langle A u_{R_0}, v_0 - u_{R_0}\rangle \geq \langle f, v_0 - u_{R_0}\rangle .$$

Kui $\|u_{R_0}\| = R_0$, siis on see vastuolu tingimusega (6.15). Seepärast $\|u_{R_0}\| < R_0$ ning lemma 6.6 põhjal leidub võrratusel (6.13) lahend.

Lemma 6.7 on tõestatud.

<u>Teoreem 6.4.</u> Olgu K kumer kinnine hulk, operaator $A: V \to V'$ radiaalselt pidev, monotoonne ja koertsitiivne: leidub $v_0 \in K$ nii, et

$$\frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{\|v\|} \longrightarrow \infty, \text{ kui } \|v\| \to \infty .$$

Siis variatsioonvõrratus (6.13) omab lahendi.

T õ e s t u s. Valime $\alpha > \|f\|$, olgu $M = 2\alpha$ ning $R_M > 0$ selline (leidub A koertsitiivsuse tõttu), et

$$\frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{\|v\|} \geq M, \text{ kui } \|v\| \geq R_M .$$

Olgu veel $R = \max\{R_M, \|v_0\| + \delta\}$, kus $\delta > 0$ on mingi reaalarv; sellega garanteeritakse, et $R > \|v_0\|$. Kui nüüd $\|v\| \geq R$, siis arvestades võrratust $\|v - v_0\| \leq \|v\| + R$, saame

$$\langle Av, v - v_0\rangle \geq M\|v\| \geq \alpha R + \alpha\|v\| \geq \alpha\|v - v_0\| .$$

Kui nüüd $v \in K \cap \{v \in V : \|v\| = R\}$, siis

$$\langle Av, v - v_0\rangle + \langle f, v_0 - v\rangle \geq \alpha\|v - v_0\| - \|f\|\,\|v_0 - v\| \geq$$
$$\geq (\alpha - \|f\|)(\|v\| - \|v_0\|) > 0 ,$$

s.t. on täidetud tingimus (6.15). Seega on lemma 6.7 põhjal võrratusel (6.13) lahend.

Teoreem 6.4 on tõestatud.

6. Erijuhud lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemidest

6.1. Olgu võrratuses (6.13) $K=V$. Teoreemi 6.4 ja lemma 6.4 ning tema järelduse 6.1 abil oleme tõestanud Browder—Minty teoreemi: kui operaator $A: V \to V'$ on radiaalselt pidev, monotoonne ja koertsitiivne, siis iga $f \in V'$ korral on võrrandi $Au=f$ lahendite hulk mittetühi, kumer ja kinnine.

6.2. Olgu V Hilberti ruum, a tõkestatud ja koertsitiivne bilineaarvorm, $K \subset V$ kumer, kinnine mittetühi hulk. Lemma 1.2 põhjal määratakse üheselt pidev lineaarne operaator $A \in \mathcal{L}(V,V')$ seosega $\langle Au, v\rangle = a(u,v)$, $u, v \in V$.

Ülesanne. Näidata, et teoreemidest 6.3 ja 6.4 järeldub Stampacchia teoreem 1.2.

§ 7. Näide monotoonse operaatoriga I liiki variatsioonvõrratusest: plaadi elastne-plastne läbipaine, ühepoolse tõkkega šarniirne kinnitus

1. Plaadi läbipainet kirjeldav võrrand

Vaatleme õhukest homogeenset plaati, mis kujutab kahemõõtmelist piirkonda $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Olgu Ω raja Γ tükiti sile. Mõjugu plaadile puutujatasandiga risti jõud tihedusega $f(x)$, $x \in \Omega$. Tekkivat deformatsiooni iseloomustab normaalisihiline läbipaine $u(x)$, $x \in \Omega$, selle loeme otsitavaks.

Järgnevas eeldame, et vaadeldavad funktsioonid on küllalt siledad. Defineerime bilineaarvormi

$$H(u,v)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right),$$

sellega on määratud ka vastav ruutvorm

$$H(u,u)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Edaspidi kasutame veel lühendatud tähistust $H(u,u)=$ $=H(u)=H$. Märgime, et $H(u,u)\geq 0$, sest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\leq\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2\right).$$

Elastset-plastset deformatsiooni kirjeldab võrrand

$$Lu=f,\ x\in\Omega, \tag{7.1}$$

kus

$$Lu\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(g(H)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(g(H)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(g(H)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right).$$

Siin $g(\xi)$ on funktsioon, mis iseloomustab plaadi materjali. Kui toimub ainult elastne deformatsioon, siis $g(\xi)=$ $=\mathrm{const}>0$, plastse deformatsiooni korral aga g ei ole konstantne ja võrrand (7.1) on mittelineaarne.

<u>Ülesanne</u>. Näidata, et konstantse g korral võrrand (7.1) on $\Delta^2 u=f/g$.

2. Greeni valem

Käesolev punkt sisaldab eeltööd järgnevaks rajaülesande ja variatsioonvõrratuse uurimiseks, samuti esitame vajaminevaid mõisteid ja tähistusi.

Võtame kasutusele tähistused

$$M_{11} = -M_{22} = \frac{1}{2} g(H) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$M_{12} = g(H)\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right),$$

$$M_{21} = -g(H)\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right),$$

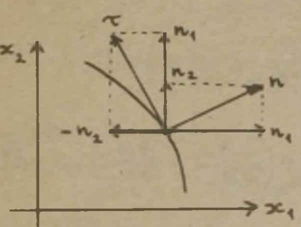
neid suurusi nimetatakse pingete momentideks.

Defineerime

$$a(u,v) = \int_\Omega g(H(u))\, H(u,v)\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(-M_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + M_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2 M_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right) dx .$$

Siin a on v suhtes lineaarne, u suhtes üldiselt mitte. Olgu $n = (n_1, n_2)$ ühikulise pikkusega välisnormaal raja Γ



punktides, τ aga puutujasuunaline ühikvektor, mis on saadud vektorist n pöördega nurga $\pi/2$ võrra, s.t. $\tau = (-n_2, n_1)$, seejuures muidugi $n \cdot \tau = 0$, kus punkt tähistab skalaarkorrutist ruumis $\mathbb{R}^2$. Tähistame veel

$$M_n = M_{11} n_1^2 + (M_{12} + M_{21}) n_1 n_2 + M_{22} n_2^2,$$

$$M_\tau = -M_{11} n_1 n_2 - M_{12} n_2^2 + M_{21} n_1^2 + M_{22} n_1 n_2,$$

viimast neist nimetatakse pinge momendiks puutuja τ suhtes. Märgime, et kui määrata vektor M võrdusega

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

siis $M_n = M \cdot n$ ja $M_\tau = M \cdot \tau$. Olgu veel

$$R = -\left(-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} n_1\right),$$

$$F = R - \frac{\partial M_n}{\partial \tau} .$$

Lemma 7.1 (Greeni valem). Kehtib võrdus

$$a(u,v)=\int_\Omega Lu\,v\,dx-\int_\Gamma M_\tau \frac{\partial v}{\partial n}\,d\Gamma+\int_\Gamma Fv\,d\Gamma. \tag{7.2}$$

T õ e s t u s. Saame

$$\int_\Omega Lu\,v\,dx=\int_\Omega\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}M_{21}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}M_{12}+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(M_{11}-M_{22})\Big)v\,dx=$$

$$=\int_\Omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}M_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}M_{22}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}M_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}M_{11}\Big)\Big)v\,dx=$$

$$=\int_\Omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}M_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}M_{22}\Big)v\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}M_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}M_{11}\Big)v\Big)\Big)dx-$$

$$-\int_\Omega\Big(\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}M_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}M_{22}\Big)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}M_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}M_{11}\Big)\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)dx.$$

Kasutades Greeni valemit (Gauss—Ostrogradski valemi analoog kahe muutuja funktsioonide jaoks)

$$\int_\Omega\Big(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}\Big)dx_1dx_2=\int_\Gamma(Pn_1+Qn_2)\,d\Gamma,$$

saame edasi

$$\int_\Omega Lu\,v\,dx=\int_\Gamma\Big(\Big(-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}\Big)vn_1+\Big(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}\Big)vn_2\Big)d\Gamma-$$

$$-\int_\Omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(-M_{21}\frac{\partial v}{\partial x_1}+M_{11}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(-M_{22}\frac{\partial v}{\partial x_1}+M_{12}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)\Big)dx+$$

$$+\int_\Omega\Big(-M_{21}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+M_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}-M_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+M_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\Big)dx.$$

Tähistades siin keskmise integraali sümboliga I, oleme saanud võrduse

$$\int_\Omega Lu\,v\,dx=-\int_\Gamma Rv\,d\Gamma-I+a(u,v).$$

Pidades silmas, et

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial v}{\partial x_2}n_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=-\frac{\partial v}{\partial x_1}n_2+\frac{\partial v}{\partial x_2}n_1$$

ning neist järelduvad seosed

$$\frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau} n_1 = \frac{\partial v}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau} n_2 = \frac{\partial v}{\partial x_1},$$

saame integraali I edasisel teisendamisel Greeni valemi abil

$$I = \int_\Gamma \Big(\Big(-M_{21}\Big(\frac{\partial v}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau} n_2\Big) + M_{11}\Big(\frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau} n_1\Big)\Big) n_1 +$$

$$+ \Big(-M_{22}\Big(\frac{\partial v}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v}{\partial \tau} n_2\Big) + M_{12}\Big(\frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial \tau} n_1\Big)\Big) n_2\Big) d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \Big(\big(-M_{21} n_1^2 + M_{11} n_1 n_2 - M_{22} n_1 n_2 + M_{12} n_2^2\big)\frac{\partial v}{\partial n} +$$

$$+ \big(M_{21} n_1 n_2 + M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + M_{12} n_1 n_2\big)\frac{\partial v}{\partial \tau}\Big) d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \Big(-M_\tau \frac{\partial v}{\partial n} + M_n \frac{\partial v}{\partial \tau}\Big) d\Gamma .$$

Oleme saanud võrduse

$$\int_\Omega L u\, v\, dx = \int_\Gamma (-R v)\, d\Gamma + \int_\Gamma M_\tau \frac{\partial v}{\partial n}\, d\Gamma - \int_\Gamma M_n \frac{\partial v}{\partial \tau}\, d\Gamma + a(u,v). \quad (7.3)$$

Suvalise küllalt sileda funktsiooni u korral

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} u\, d\Gamma = \int_\Gamma \Big(-\frac{\partial u}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_1\Big) d\Gamma =$$

$$= \int_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\, \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(-\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\Big) dx_1 dx_2 = 0 .$$

Seepärast võrdusest

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(M_n v) = \frac{\partial M_n}{\partial \tau} v + M_n \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

saame

$$\int_\Gamma \frac{\partial M_n}{\partial \tau} v\, d\Gamma + \int_\Gamma M_n \frac{\partial v}{\partial \tau}\, d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \tau}(M_n v)\, d\Gamma = 0,$$

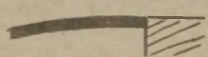
mis koos võrdusega (7.3) annab (7.2).

Lemma 7.1 on tõestatud.

3. Läbipainet kirjeldav ühepoolne ülesanne

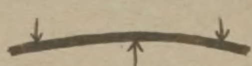
Läbipainet kirjeldav võrrand (7.1) on neljandat järku osatuletistega võrrand, seepärast on lahendi üheseks määramiseks vaja kahte rajatingimust. Rajal Γ on võimalik ette anda plaadi nihked, s.o. u väärtused, jõudude tihedus F, plaadi kalle $\frac{\partial u}{\partial n}$, samuti M_τ — pinge moment puutuja suhtes. Nende andmete kombineerimisel saadakse mitmeid klassikalisi ülesandeid, loetleme neist mõned:

1) jäigalt kinnitatud servaga plaati iseloomustavad rajatingimused $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $x \in \Gamma$;

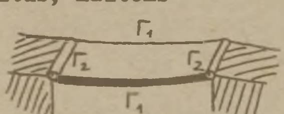


2) hõõrdeta šarniirse kinnituse korral $u = M_\tau = 0$, $x \in \Gamma$;

3) vaba rajaga plaadi puhul $F = 0$, $M_\tau = 0$, $x \in \Gamma$;



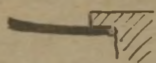
4) osa rajast on vaba, osal on hõõrdeta šarniirne või jäik kinnitus, näiteks



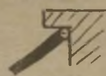
$$F = 0,\ M_\tau = 0,\ x \in \Gamma_1,$$
$$u = M_\tau = 0,\ x \in \Gamma_2.$$

Toodud rajatingimustega ülesanded viivad operaatorvõrrandite juurde. Meie aga vaatleme nn. ühepoolseid rajatingimusi, kus šarniirselt kinnitatud plaadile on hõõrdeta pöörlemisel seatud ühepoolne tõke, seda kirjeldavad rajatingimused

$$u = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \; M_\tau \leq 0, \; \frac{\partial u}{\partial n} M_\tau = 0, \qquad x \in \Gamma.$$

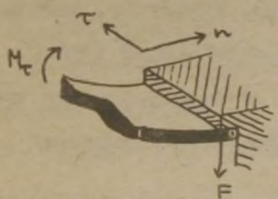


$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, M_\tau \leq 0$$



$$\frac{\partial u}{\partial n} > 0, M_\tau = 0$$

Kui vaadelda vektori τ suunast, siis kellaosuti liikumise



suunas mõjuv moment loetakse positiivseks. Antud juhul aga elastsusjõudude mõjul tekkiv pinge, mis tasakaalustab plaadile tõkke poolt mõjuva jõu F, annab mittepositiivse momendi, seepärast meil alati $M_\tau \leq 0$.

Ühepoolse rajatingimuse seame osal rajast, ülejäänud osal olgu jäik kinnitus. Seega vaatleme võrrandit (7.1) rajatingimustel

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \; x \in \Gamma_0, \tag{7.4}$$

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \; M_\tau \leq 0, \; \frac{\partial u}{\partial n} M_\tau = 0, \qquad x \in \Gamma_1, \tag{7.5}$$

kus $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Eeldame, et $\operatorname{mes} \Gamma_i > 0, i = 0,1$.

4. Rajaülesande esitus variatsioonvõrratusena

Valime põhiruumi $V = \{ v \in H^2(\Omega) : v = 0, x \in \Gamma; \frac{\partial v}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_0 \}$, kasutame temas tavalist $H^2(\Omega)$ normi

$$\| v \|_{H^2(\Omega)} = \Big(\sum_{k=0}^{2} \sum_{|\lambda| \leq k} \| D^\lambda v \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}.$$

Ülesanne. Tõestada, et V on kinnine ruumis $H^2(\Omega)$. Näpunäide: kasutada teoreemi jälgedest (lemma 2.2).

Defineerime $K=\{v\in V: \frac{\partial v}{\partial n}\geq 0, x\in\Gamma_1\}$.

Ülesanne. Tõestada K kumerus ja kinnisus.

Eeldame edaspidi, et $g\in L^{\infty}(0,\infty)$. Siis iga fikseeritud $u\in V$ korral vastavus $v\to a(u,v)$ on lineaarne funktsionaal. Tema tõkestatus järeldub hinnangust

$$|a(u,v)|\leq \frac{3}{2}\|g\|_{L^{\infty}(0,\infty)}\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u,v\in V. \tag{7.6}$$

Ülesanne. Tõestada hinnang (7.6). Näpunäide: kasutada Cauchy—Bunjakovski võrratust $|H(u,v)|\leq\sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)}$.

Pideva lineaarse funktsionaali $v\to a(u,v)$ seame vastavusse elemendile u, sellega on defineeritud operaator $A:V\to V'$ ning kehtib seos

$$\langle Au,v\rangle = a(u,v),\quad u,v\in V.$$

Olgu veel $\langle f,v\rangle=\int_\Omega f v\,dx, v\in V$. Vaatleme variatsioonvõrratust

$$u\in K: \langle Au, v-u\rangle\geq\langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in K. \tag{7.7}$$

Järgnevas näitame, et küllalt siledatel lahenditel on ülesanne (7.1), (7.4), (7.5) samaväärne võrratusega (7.7).

Olgu u ülesande (7.1), (7.4), (7.5) lahend. Tingimustest (7.4) ja (7.5) saame, et $u\in K$. Valime vabalt $v\in K$ ning rakendame võrduse

$$\int_\Omega Lu(v-u)\,dx=\int_\Omega f(v-u)\,dx$$

vasakule poolele Greeni valemit (lemma 7.1). Arvestades, et $v=u=0,\ x\in\Gamma$, ja $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0, x\in\Gamma_0$, saame

$$\langle Au, v-u\rangle+\int_{\Gamma_1} M_\tau\frac{\partial(v-u)}{\partial n}\,d\Gamma=\langle f, v-u\rangle. \tag{7.8}$$

Tingimuse (7.5) põhjal $M_\tau\frac{\partial u}{\partial n}=0$ ja $M_\tau\leq 0,\ x\in\Gamma_1$, ning $v\in K$ tõttu $\frac{\partial v}{\partial n}\geq 0, x\in\Gamma_1$, seepärast on pindintegraal võrduses (7.8) mittepositiivne, mis annabki võrratuse (7.7).

Olgu u võrratuse (7.7) küllalt sile lahend. Sisalduvus $u \in K$ annab tingimuse (7.4) ja tingimusest (7.5) osa: $u=0, \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, x \in \Gamma_1$. Valime vabalt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, siis $v = u \pm \varphi \in K$. Sellise v korral võrratus (7.7) annab $\langle Au, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ ehk $a(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$. Lemma 7.1 põhjal $a(u,\varphi) = \int_\Omega Lu\,\varphi\,dx$, sest selles Greeni valemis esinevad pindintegraalid võrduvad nulliga, kuna $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, $x \in \Gamma$. Võrdusest $\int_\Omega Lu\,\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx$ iga $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ korral aga järeldub (7.1). Seega jääb näidata tingimuse (7.5) täielikku täidetust.

Võrduse (7.1) täidetusest järeldub ka (7.8) kehtivus, koos võrratusega (7.7) saame sellest, et

$$\int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial (v-u)}{\partial n}\, d\Gamma \leq 0 \quad \forall v \in K. \tag{7.9}$$

Oletame, et $M_\tau > 0$ punktis $x_0 \in \Gamma_1$ (me võime eeldada, et $x_0 \in \operatorname{int} \Gamma_1$, tehes eelduse, et rajaosal Γ_1 ei ole isoleeritud rajapunkte; siis Γ_1 sisepunktide kohta tõestatud võrratus $M_\tau \leq 0$ laieneb pidevuse järgi ka Γ_1 rajapunktidele). Pidevuse tõttu $M_\tau > 0$, $x \in \mathcal{U}$, kus $\mathcal{U}$ on punkti x_0 ümbrus hulgas Γ_1. Valime $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ nii, et $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x_0) > 0$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{U}$. Kasutame järgnevas teoreemi jälgedest ([4], lk. 55), mille põhjal hulgal $\overline{\Omega}$ siledate funktsioonide korral määratud vastavus $\gamma v = \{ v|_\Gamma, \frac{\partial v}{\partial n}|_\Gamma \}$ on laiendatav pidevaks lineaarseks operaatoriks ruumilt $H^2(\Omega)$ ruumi $H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, kusjuures $\gamma(H^2(\Omega)) \supset$ $\supset H^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$. Sellele teoreemile tuginedes leiame $v \in H^2(\Omega)$ nii, et $v|_\Gamma = 0$ ja $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi$. Seejuures saame ka, et $v \in K$. Selle v korral

$$\int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial(v-u)}{\partial n} d\Gamma = \int_{u} M_\tau \varphi \, d\Gamma = \int_{\operatorname{supp}\varphi} M_\tau \varphi \, d\Gamma > 0,$$

mis on vastuolus võrratusega (7.9). Seepärast $M_\tau \leqslant 0$, $x \in \Gamma_1$. Valime veel $v = 0$ võrratuses (7.9), tulemusena

$$\int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \geqslant 0.$$

Samal ajal $M_\tau \leqslant 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$, $x \in \Gamma_1$, tõttu on integraalialune funktsioon mittepositiivne. Seepärast $M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $x \in \Gamma_1$, millega on (7.5) kehtivus täielikult tõestatud.

5. Variatsioonvõrratuse lahendi olemasolu

Eeldame, et funktsioon g rahuldab tingimusi:

1) $g: \mathbb{R}_+ \to [0, c_1]$ on pidev, siin $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $c_1 = \mathrm{const}$;

2) funktsioon $g(\xi^2)\xi$ on monotoonselt kasvav, s.t.

$$\left(g(\xi^2)\xi - g(\eta^2)\eta\right)(\xi - \eta) \geqslant 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}_+;$$

3) $g(\xi) \geqslant c_0 > 0$, kui ξ on küllalt suur.

Teoreem 7.1. Kui funktsioon g rahuldab tehtud eeldusi, siis variatsioonvõrratus (7.7) omab iga $f \in V'$ (muuseas ka $f \in L^2(\Omega)$) korral lahendi.

T õ e s t u s. Teoreemi 6.4 põhjal piisab näidata, et operaator A on radiaalselt pidev, monotoonne ja koertsiivne.

Valime $u, v \in H^2(\Omega)$ ja näitame, et funktsioon $t \to \langle A(u+tv), v \rangle$ on pidev. Seejuures

$$\langle A(u+tv), v \rangle = a(u+tv, v) = \int_\Omega g(H(u+tv)) H(u+tv, v) dx.$$

Valime koonduva jada $t_n \to t_0$. Siis

$$H(u + t_n v) = H(u + t_n v, u + t_n v) =$$
$$= H(u,u) + 2t_n H(u,v) + t_n^2 H(v,v) \to H(u + t_0 v)$$

p.k. $x \in \Omega$ (me saame rääkida funktsioonidest $H(u,u), H(u,v)$ ja $H(v,v)$ määratuna peaaegu kõikjal, nende ühisel määramispiirkonnal toimubki koondumine). Analoogiliselt

$$H(u+t_n v, v) \to H(u+t_0 v, v) \quad \text{p.k.} \quad x \in \Omega .$$

Funktsiooni g pidevuse tõttu

$$g(H(u+t_n v))H(u+t_n v, v) \to g(H(u+t_0 v))H(u+t_0 v, v)$$

p.k. $x \in \Omega$. Lisaks saame hinnangu

$$|g(H(u+t_n v))H(u+t_n v, v)| \leq c_1 |H(u+t_n v, v)| \leq$$
$$\leq c_1(|H(u,v)| + M\,H(v,v)),$$

kus $|t_n| \leq M$. Seejuures $H(u,v), H(v,v) \in L^1(\Omega)$. Lebesgue'i teoreemi põhjal võime nüüd väita, et

$$\langle A(u+t_n v), v\rangle \to \langle A(u+t_0 v), v\rangle,$$

millega on tõestatud A radiaalne pidevus.

Vabalt valitud $u, v \in V$ korral

$$\langle Au - Av, u-v\rangle = \langle Au, u-v\rangle - \langle Av, u-v\rangle =$$

$$= \int_\Omega \big(g(H(u))H(u, u-v) - g(H(v))H(v, u-v)\big)dx =$$

$$= \int_\Omega \big(g(H(u))H(u) + g(H(v))H(v) - (g(H(u)) + g(H(v)))H(u,v)\big)dx .$$

Tähistades $\sqrt{H(u)} = \xi$, $\sqrt{H(v)} = \eta$ ning kasutades Cauchy—Bunjakovski võrratust $H(u,v) = \sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)}$, saame edasi

$$\langle Au - Av, u-v\rangle \geq$$

$$\geq \int_\Omega \big(g(\xi^2)\xi^2 + g(\eta^2)\eta^2 - (g(\xi^2) + g(\eta^2))\xi\eta\big)dx =$$

$$= \int_\Omega (g(\xi^2)\xi - g(\eta^2)\eta)(\xi - \eta)\,dx \geq 0$$

funktsiooni g omaduse 2) tõttu. Sellega on näidatud operaatori A monotoonsus.

Järgnevas näitame, et

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} \to \infty, \text{ kui } \|v\| \to \infty$$

(antud juhul teoreemi 6.4 eeldustes esinev $v_0 = 0 \in K$).
Funktsiooni g omadus 3) ütleb, et $g(\xi) \geq c_0 > 0$, kui $\xi \geq \xi_0 > 0$. Olgu $\Omega_1(v) = \{x \in \Omega : H(v) \leq \xi_0\}$, $\Omega_2(v) = \Omega \setminus \Omega_1(v)$. Märgime, et hulk Ω_1 on mõõtuv, sest $H(v)$ on mõõtuv. Saame hinnangu

$$\langle Av, v\rangle = \int_\Omega g(H(v))H(v)dx \geq \int_{\Omega_2} g(H(v))H(v)dx \geq$$
$$\geq c_0 \int_{\Omega_2} H(v)dx = c_0\Big(\int_\Omega H(v)dx - \int_{\Omega_1} H(v)dx\Big) \geq$$
$$\geq c_0\Big(\int_\Omega H(v)dx - \xi_0 \operatorname{mes} \Omega_1(v)\Big) \geq c_0\Big(\int_\Omega H(v)dx - \xi_0 \operatorname{mes} \Omega\Big).$$

On teada ([1], lk. 207–208), et ruumil $H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ on $\left(\int_\Omega H(v)dx\right)^{1/2}$ ekvivalentne ruumi $H^2(\Omega)$ normiga. Meil $V \subset H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, seepärast jõuame hinnanguni ($c = \text{const}$)

$$\langle Av, v\rangle \geq c\|v\|_V^2 - c_0 \xi_0 \operatorname{mes} \Omega \quad \forall v \in V,$$

millest järeldub A koertsitiivsus.

Teoreem 7.1 on tõestatud.

6. Variatsioonvõrratuse lahendi ühesus

Teoreem 7.2. Kui funktsioon $g(\xi^2)\xi$ on rangelt kasvav, siis võrratusel (7.7) ei ole rohkem kui üks lahend.

T õ e s t u s. Funktsiooni $g(\xi^2)\xi$ range kasvamine tähendab, et

$$\big(g(\xi^2)\xi - g(\eta^2)\eta\big)(\xi - \eta) > 0, \text{ kui } \xi \neq \eta. \qquad (7.10)$$

Sellest järeldub, et $g(\xi) > 0$, kui $\xi > 0$ (tarvitseb võtta võrratuses (7.10) $\eta = 0$).

Teoreemi tõestamiseks piisab näidata, et operaator A

on rangelt monotoonne. Juhime tähelepanu sellele, et operaatori A monotoonsuse tõestamisel kasutasime funktsiooni g omadustest ainult $g(\xi^2)\xi$ monotoonset kasvu, seepärast võime lugeda operaatori A monotoonseks. Niisiis, vastuväiteks A rangele monotoonsusele on, et leiduvad $u, v \in V$, kus $u \neq v$ ning

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = 0.$$

Alati kehtivast võrratusest

$$2\sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)} \leq H(u) + H(v)$$

järeldub, et (integraali tähis olgu I)

$$I = \int_\Omega \left(H(u) + H(v) - 2\sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)}\right)dx \geq 0.$$

Vaatleme algul võimalust $I = 0$. Siis $H(u) + H(v) - 2\sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)} = \left(\sqrt{H(u)} - \sqrt{H(v)}\right)^2 = 0$ p.k. $x \in \Omega$, s.t. $H(u) = H(v)$ p.k. $x \in \Omega$.

Nüüd võime kirja panna võrduse

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega \left(g(H(u))H(u, u-v) - g(H(v))H(v, u-v)\right)dx$$

$$= 2\int_\Omega g(H(u))\left(H(u) - H(u,v)\right)dx = 0. \qquad (7.11)$$

Arvestades võrratusi $g(H(u)) \geq 0$ ja $H(u,v) \leq \sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)} = H(u)$, saame võrdusest (7.11) järeldada, et

$$g(H(u))\left(H(u) - H(u,v)\right) = 0 \quad \text{p.k. } x \in \Omega.$$

Olgu $\Omega_+ = \{x \in \Omega : H(u) > 0\}$. Siis $g(H(u)) > 0$, kui $x \in \Omega_+$, seepärast $H(u) - H(u,v) = 0$ p.k. $x \in \Omega_+$, s.t.

$$H(u-v) = H(u) + H(v) - 2H(u,v) = 0 \quad \text{p.k. } x \in \Omega_+.$$

Samal ajal $H(u) = 0$ p.k. $x \in \Omega \setminus \Omega_+$, millest $|H(u,v)| \leq \sqrt{H(u)}\sqrt{H(v)}$ tõttu $H(u,v) = 0$ p.k. $x \in \Omega \setminus \Omega_+$, s.t. $H(u-v) = 0$ p.k. $x \in \Omega \setminus \Omega_+$. Niisiis $\int_\Omega H(u-v)dx = 0$ millest saame $\|u - v\|_V = 0$ ehk $u = v$.

Järgnevalt vaatleme juhtu $I > 0$. Olgu $\Omega^+ = \{x \in \Omega : (\sqrt{H(u)} - \sqrt{H(v)})^2 > 0\}$. Funktsiooni $(\sqrt{H(u)} - \sqrt{H(v)})^2$ mõõtuvuse tõttu on Ω^+ mõõtuv ning $I > 0$ annab veel, et $\operatorname{mes} \Omega^+ > 0$. Kasutades jälle tähiseid $\xi = \sqrt{H(u)}$, $\eta = \sqrt{H(v)}$, saame nüüd (7.10) abil

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega (g(\xi^2)\xi - g(\eta^2)\eta)(\xi - \eta)\,dx =$$

$$= \int_{\Omega^+} (g(\xi^2)\xi - g(\eta^2)\eta)(\xi - \eta)\,dx > 0.$$

Teoreem 7.2 on tõestatud.

Märgime, et elastsete läbipainete korral, kui g on konstantne, on funktsioon $g(\xi^2)\xi$ rangelt kasvav, seega lahend ühene.

§ 8. Monotoonsete operaatoritega II liiki variatsioonvõrratused

Olgu antud refleksiivne Banachi ruum V, operaator $A : V \to V'$, funktsioon $\varphi : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Vaatleme II liiki variatsioonvõrratust

$$u \in V : \langle Au, v - u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in V. \tag{8.1}$$

Kui on antud hulk $K \subset V$, siis vaatleme ka võrratust

$$u \in K : \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K \tag{8.2}$$

ning erijuhtu võrratusest (8.1)

$$u \in V : \langle Au, v - u\rangle + \chi_K(v) - \chi_K(u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in V, \tag{8.3}$$

kus χ_K on hulga K indikaatorfunktsioon.

<u>Ülesanne</u>. Tõestada, et ülesanded (8.2) ja (8.3) on samaväärsed.

<u>Lemma 8.1</u> (lineariseerimislemma). Kui A on monotoonne

ja radiaalselt pidev, φ kumer, siis ülesanne (8.1) on samaväärne võrratusega

$$u \in V : \langle Av, v-u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in V. \quad (8.4)$$

Ülesanne. Tõestada lemma 8.1.

Lemma 8.2. Kui A on monotoonne, radiaalselt pidev, φ kumer ja alt poolpidev, siis võrratuse (8.4) lahendite hulk on kumer ja kinnine.

Ülesanne. Tõestada lemma 8.2.

Järeldus 8.1. Lemma 8.2 eeldustel on võrratuse (8.1) lahendite hulk kumer ja kinnine.

Defineerime ruumi $\bar V = V \times \mathbb{R}$, hulga $\bar K = \operatorname{epi} \varphi = \{\bar v = (v, \alpha) \in \bar V : \varphi(v) \leq \alpha\}$ ja operaatori $\bar A : \bar V \to \bar V'$, $\bar V' = V' \times \mathbb{R}$, seosega

$$\bar A \bar v = (Av, 0), \quad \bar v \in \bar V.$$

Olgu veel $\bar f = (f, -1) \in \bar V'$, mis vastab funktsionaalile $f \in V'$.

Vaatleme variatsioonvõrratust

$$\bar u \in \bar K : \langle \bar A \bar u, \bar v - \bar u\rangle \geq \langle \bar f, \bar v - \bar u\rangle \quad \forall \bar v \in \bar K, \quad (8.5)$$

kus $\langle \cdot , \cdot \rangle$ tähistab duaalsust ka ruumide $\bar V$ ja $\bar V'$ vahel.

Lemma 8.3. Võrratused (8.1) ja (8.5) on samaväärsed.

T õ e s t u s. Võrratuse (8.5) võime esitada

leida (u, α): $u \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(u) \leq \alpha$,

$$\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle - 1\cdot(\beta - \alpha) \quad \forall v \in V, \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq \varphi(v). \quad (8.6)$$

Vahetu kontrolliga saab veenduda, et võrratus

$$\langle Au, v-u\rangle + (\beta - \alpha) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in V, \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq \varphi(v)$$

on samaväärne võrratusega

$$\langle Au, v-u\rangle + \varphi(v) - \alpha \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in V,$$

seepärast on ülesanne (8.6) kirjutatav

leida $(u,\alpha): u\in V, \alpha\in\mathbb{R}, \varphi(u)\le\alpha,$

$$\langle Au, v-u\rangle+\varphi(v)-\alpha \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in V. \tag{8.7}$$

Kui võtta siin $v=u$, siis saame $\varphi(u)\geq\alpha$, seepärast (8.7) lahendi korral tingimata $\varphi(u)=\alpha$. Seepärast on (8.7) samaväärne võrratusega

$$u\in V: \langle Au, v-u\rangle+\varphi(v)-\varphi(u)\geq\langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in V.$$

Lemma 8.3 on tõestatud.

<u>Teoreem 8.1</u>. Olgu $A: V\to V'$ monotoonne ja radiaalselt pidev, $\varphi: V\to\overline{\mathbb{R}}$ kumer ja alt poolpidev. Kehtigu järgmine koertsitiivsuse tingimus: leidub $v_0\in V$ nii, et $\varphi(v_0)<\infty$ ja

$$\frac{\langle Av, v-v_0\rangle+\varphi(v)}{\|v\|}\to\infty, \text{ kui } \|v\|\to\infty. \tag{8.8}$$

Siis variatsioonvõrratusel (8.1) leidub lahend.

T õ e s t u s. Tuginedes lemmale 8.3 tõestame võrratuse (8.5) lahendi olemasolu.

Funktsiooni φ kumerusest järeldub hulga $\overline{K}=\operatorname{epi}\varphi$ kumerus (lemma 3.2), φ alt poolpidevus annab aga $\overline{K}$ kinnisuse (lemma 3.4). Märgime, et $\overline{K}$ ei ole tõkestatud, sest φ on pärisfunktsioon.

Defineerime $R>0$ korral hulga

$$\overline{K}_R=\{\bar v=(v,\beta)\in\overline{K}: \|v-v_0\|+|\beta-\varphi(v_0)|\le R\},$$

kus v_0 on koertsitiivsuse tingimuses (8.8) esinev element. Seejuures $(v_0,\varphi(v_0))\in\overline{K}_R$, seepärast $\overline{K}_R\neq\emptyset$. On selge, et hulk $\overline{K}_R$ on tõkestatud.

<u>Ülesanne</u>. Näidata, et $\overline{K}_R$ on kumer.

Vaatleme variatsioonvõrratust

$$\bar u_R\in\overline{K}_R: \langle\bar A\bar u_R, \bar v-\bar u_R\rangle\geq\langle\bar f, \bar v-\bar u_R\rangle \quad \forall\bar v\in\overline{K}_R. \tag{8.9}$$

Võttes aluseks lemma 6.6, piisab näidata, et mingi $R>0$ korral on võrratusel (8.9) selline lahend $\bar{u}_R$, mis rahuldab tingimust $\|\bar{u}_R\| < R$.

Ülesanne. Näidata, et operaator $\bar{A}$ on monotoonne ja radiaalselt pidev, kui need omadused on operaatoril A.

Teoreemi 6.2 põhjal võib nüüd väita, et võrratus (8.9) omab lahendi. Järgnevas näitame, et võrratuse (8.9) lahendid on ühtlaselt tõkestatud R suhtes.

Vaatleme võrratuse (8.9) lahendeid $\bar{u}_R = (u_R, \alpha_R)$. Valime võrratuses (8.9) $\bar{v} = (v_0, \varphi(v_0))$, tulemusena

$$\langle A u_R , v_0 - u_R \rangle \geq \langle f , v_0 - u_R \rangle - (\varphi(v_0) - \alpha_R)$$

ehk

$$\langle A u_R , u_R - v_0 \rangle + \alpha_R \leq \varphi(v_0) + \langle f, u_R - v_0 \rangle . \qquad (8.10)$$

Arvestades, et $\varphi(u_R) \leq \alpha_R$, sest $(u_R, \alpha_R) \in \operatorname{epi} \varphi$, saame edasi

$$\langle A u_R, u_R - v_0 \rangle + \varphi(u_R) \leq \varphi(v_0) + \langle f, u_R - v_0 \rangle ,$$

millest $u_R \neq 0$ korral

$$\frac{\langle A u_R , u_R - v_0 \rangle + \varphi(u_R)}{\| u_R \|} \leq \| f \| + \frac{\varphi(v_0) - \langle f, v_0 \rangle}{\| u_R \|} . \qquad (8.11)$$

Tõkestamata u_R korral saame võrratusest (8.11) vastuolu, sest kui $\| u_R \| \to \infty$, siis (8.11) vasak pool on koertsitiivsuse tingimuse (8.8) tõttu tõkestamata, parem pool aga tõkestatud. Niisiis, u_R on tõkestatud. Jääb näidata α_R tõkestatust

Võrratuse (8.10) kirjutame kujul

$$\alpha_R \leq \varphi(v_0) + \langle f, u_R - v_0 \rangle - \langle A u_R , u_R - v_0 \rangle . \qquad (8.12)$$

Arvestades, et

$$\langle f, u_R - v_0 \rangle \leq \| f \| \| u_R \| - \langle f, v_0 \rangle ,$$

samuti A monotoonsusest järelduvat võrratust

$$\langle Au_R, u_R - v_0\rangle = \langle Au_R - Av_0, u_R - v_0\rangle + \langle Av_0, u_R - v_0\rangle \geq$$

$$\geq \langle Av_0, u_R - v_0\rangle \geq - \|Av_0\| \|u_R\| - \langle Av_0, v_0\rangle,$$

saame hinnangust (8.12) $\|u_R\|$ tõkestatusele tuginedes α_R ülalt tõkestatuse. Et $\bar{u}_R = (u_R, \alpha_R) \in \text{epi}\, \varphi$, siis $\alpha_R \geq \varphi(u_R)$ ning α_R alt tõkestatuseks piisab tõestada, et $\varphi(u_R)$ on alt tõkestatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub jada $R_n, n \in \mathbb{N}$, nii, et $\varphi(u_{R_n}) \to -\infty$. Jada u_{R_n} on tõkestatud ning V refleksiivsuse tõttu leidub osajada $N' \subset \mathbb{N}$ nii, et $u_{R_n} \to w \in V$ nõrgalt, $n \in N'$. Funktsiooni φ kumerusest ja alt poolpidevusest järeldub tema nõrk alt poolpidevus (teoreem 3.1), seepärast $\varphi(w) \leq$
$\leq \varliminf_{n \in N'} \varphi(u_{R_n}) = -\infty$, mis ei ole võimalik. Seepärast on $\varphi(u_R)$ alt tõkestatud ning α_R tõkestatud.

Nüüd tarvitseb valida nii suur $R > 0$, et võrratuse (8.9) mingi lahendi $\bar{u}_R$ korral $\|\bar{u}_R\| < R$, teoreemi väide järeldub lemmast 6.6.

Teoreem 8.1 on tõestatud.

__Märkus 8.1__. Kui operaator A rahuldab koertsitiivsuse tingimust (8.8), siis võrratuse (8.1) lahendite hulk on tõkestatud.

Põhjenduseks valime võrratuses (8.1) $v = v_0$, saame lahendite $u \neq 0$ jaoks võrratuse (8.11) analoogi

$$\frac{\langle Au, u - v_0\rangle + \varphi(u)}{\|u\|} \leq \|f\| + \frac{\varphi(v_0) - \langle f, v_0\rangle}{\|u\|}.$$

Siit on aga (8.8) põhjal selge lahendite u tõkestatus.

__Teoreem 8.2__. Kui operaator A on rangelt monotoonne või operaator A monotoonne ja funktsioon φ rangelt kumer, siis variatsioonvõrratusel (8.1) ei ole üle ühe lahendi.

T õ e s t u s. Oletame, et võrratusel (8.1) on lahendid u_1 ja u_2, s.t.

$$\langle Au_1, v-u_1\rangle + \varphi(v) - \varphi(u_1) \geq \langle f, v-u_1\rangle \quad \forall v \in V,$$

$$\langle Au_2, v-u_2\rangle + \varphi(v) - \varphi(u_2) \geq \langle f, v-u_2\rangle \quad \forall v \in V.$$

Valime neis võrratustes $v = \frac{u_1+u_2}{2}$ ja seejärel liidame, tulemusena

$$\frac{1}{2}\langle Au_1 - Au_2, u_2-u_1\rangle + 2\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) - \varphi(u_1) - \varphi(u_2) \geq 0.$$

Operaatori A monotoonsuse tõttu

$$\langle Au_1 - Au_2, u_2 - u_1\rangle \leq 0,$$

seepärast

$$\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\varphi(u_1) + \frac{1}{2}\varphi(u_2).$$

Kui aga $u_1 \neq u_2$, siis φ range kumeruse põhjal

$$\varphi\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\varphi(u_1) + \frac{1}{2}\varphi(u_2).$$

Saadud vastuolu tõttu $u_1 = u_2$.

Ülesanne. Tõestada lahendi ühesus, kui operaator A on rangelt monotoonne.

Teoreem 8.2 on tõestatud.

§ 9. N ä i d e m o n o t o o n s e o p e r a a t o r i g a II l i i k i v a r i a t s i o o n v õ r r a t u s e s t: p l a a d i e l a s t n e - p l a s t n e l ä b i p a i n e, h õ õ r d e g a š a r n i i r n e k i n n i t u s

1. Läbipainet kirjeldav ülesanne hõõrdega šarniirse kinnituse korral

Vaatleme § 7 punktis 1 esitatud plaadi läbipainde võrrandit

$$Lu = f, \quad x \in \Omega. \tag{9.1}$$

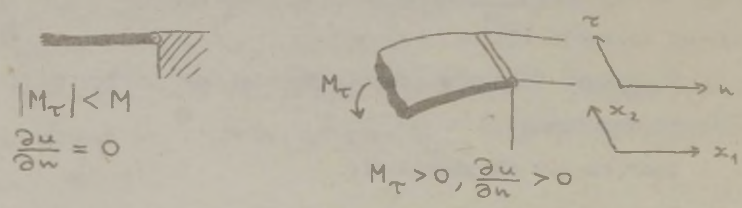
Olgu piirkonna Ω rajaosal Γ_0 jäik kinnitus

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_0, \tag{9.2}$$

rajaosal $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ aga šarniirne kinnitus, kusjuures esineb hõõrdumine. See on väljendatav tingimustega

$$
\begin{aligned}
&|M_\tau| < M \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \\
&|M_\tau| = M \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda M_\tau,
\end{aligned}
\qquad x \in \Gamma_1 . \qquad (9.3)
$$

Meenutame, et M_τ oli pöördemoment raja Γ puutevektori $\tau = (-n_2, n_1)$ suhtes, kui $n = (n_1, n_2)$ on ühikulise pikkusega välisnormaal. Tingimuse (9.3) esimene osa väljendab seda, et kui pöördemoment M_τ on küllalt väike, siis hõõrdumise tõttu pööret ei toimu. Teine osa aga näitab, et kui $|M_\tau|$ saavutab teatava piiri, siis võib toimuda pööre, mille suuna määrab M_τ ja suurust iseloomustab peale M_τ ka λ.



<u>Ülesanne</u>. Parempoolsel joonisel toodud olukorras $n = (n_1, 0)$ ja $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} < 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$, samuti $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ šarniirse kinnituse punktides. Leida M_τ.

2. <u>Rajaülesande esitus variatsioonvõrratusena</u>

Ruum V, operaator $A : V \to V'$ ja funktsionaal $f \in V'$ olgu samad, mis paragrahvis 7. Olgu $M \in L^\infty(\Gamma_1)$, $M(x) \geq M_0 > 0$, $x \in \Gamma_1$. Defineerime funktsiooni φ seosega

$$\varphi(v) = \int_{\Gamma_1} M \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| d\Gamma , \quad v \in V.$$

Vaatleme variatsioonvõrratust

$$u \in V : \langle Au, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in V. \quad (9.4)$$

Järgnevas näitame, et siledatel lahenditel on ülesanne (9.1)-(9.3) samaväärne võrratusega (9.4).

Olgu u ülesande (9.1)-(9.3) lahend. Vabalt valitud $v \in V$ korral saame võrdusest (9.1)

$$\int_\Omega Lu(v-u)\,dx = \int_\Omega f(v-u)\,dx,$$

selle vasakule poolele rakendame Greeni valemit (lemma 7.1)

$$\int_\Omega Lu(v-u)\,dx = a(u,v-u)+\int_\Gamma M_\tau \frac{\partial(v-u)}{\partial n}\,d\Gamma - \int_\Gamma F(v-u)\,d\Gamma.$$

Arvestades, et $v = u = 0$, $x \in \Gamma$, ja $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $x \in \Gamma_0$, jõuame veel ka seost $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ kasutades võrduseni

$$\langle Au, v-u\rangle + \int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial(v-u)}{\partial n}\,d\Gamma = \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in V. \qquad (9.5)$$

Tähistame $\Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 : \frac{\partial u}{\partial n} \neq 0\}$, sellel hulgal tingimuse (9.3) põhjal $M = |M_\tau|$ ning $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda M_\tau$, $\lambda \geq 0$. Seepärast

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma_1} M \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| d\Gamma = \int_{\Gamma_{11}} M \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| d\Gamma = \int_{\Gamma_{11}} \lambda\, |M_\tau|^2\, d\Gamma$$

ning

$$\int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma = \int_{\Gamma_{11}} M_\tau \frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma = \int_{\Gamma_{11}} \lambda M_\tau^2\,d\Gamma,$$

mis kokku annavad, et

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma.$$

Kasutades ka hinnangut

$$\int_{\Gamma_1} M_\tau \frac{\partial v}{\partial n}\,d\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} |M_\tau| \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} M \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| d\Gamma = \varphi(v),$$

järeldame võrdusest (9.5) võrratuse (9.4).

Olgu nüüd u võrratuse (9.4) lahend. Et $u \in V$, siis on täidetud (9.2). Valime vabalt $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ning $v = u \pm \varphi$, ilmselt $v \in V$. Siis $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}$, $x \in \Gamma$, seepärast $\varphi(v) = \varphi(u)$

Asetades taolise v võrratusse (9.4), jõuame täpselt nagu § 7 punktis 4 nüüd võrduseni (9.1). Sellest omakorda järeldub veel (9.5), mis koos võrratusega (9.4) annab

$$\int_{\Gamma_1}\left(M\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|-M_\tau\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left(M\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|-M_\tau\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma\geq 0 \quad \forall v\in V. \tag{9.6}$$

Defineerime hulga $W=\{w\in H^1(\Gamma):\operatorname{supp} w\in\Gamma_1\}$. Me võime vajaduse korral arvestada ka, et kui $w\in W$, siis $w\in H^1(\Gamma_1)$. Valides $w\in W$, lubab § 7 punktis 4 esitatud teoreem jälgedest leida funktsiooni $v\in H^2(\Omega)$ nii, et $v|_\Gamma = 0$, $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = w$; me saame ühtlasi, et $v\in V$. Seega järeldub võrratusest (9.6)

$$\int_{\Gamma_1}(M|w|-M_\tau w)d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left(M\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|-M_\tau\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma\geq 0 \quad \forall w\in W. \tag{9.7}$$

Funktsioonid $\pm\lambda w$, $\lambda>0$, annavad võrratusse (9.7) asetamisel

$$\lambda\int_{\Gamma_1}(M|w|\pm M_\tau w)d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\left(M\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|-M_\tau\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma\geq 0.$$

Siit saame peale jagamist arvuga λ protsessis $\lambda\to\infty$

$$\int_{\Gamma_1}(M|w|\pm M_\tau w)d\Gamma\geq 0,$$

millest

$$\pm\int_{\Gamma_1}M_\tau w\, d\Gamma\leq\int_{\Gamma_1}M|w|d\Gamma$$

ehk

$$\left|\int_{\Gamma_1}M_\tau w\, d\Gamma\right|\leq\int_{\Gamma_1}M|w|d\Gamma \quad \forall w\in W. \tag{9.8}$$

Hulk W on vektoralamruum ruumis $L^1(\Gamma_1)$; kasutame seal standardse normiga ekvivalentset normi $w\to\int_{\Gamma_1}M|w|d\Gamma$. Võrratus (9.8) tähendab, et lineaarne funktsionaal

$w\to\int_{\Gamma_1}M_\tau w\, d\Gamma=\int_{\Gamma_1}(M^{-1}M_\tau)Mw\, d\Gamma$, $w\in W$, on tõkestatud. Hulga W kõikjal tihedus ruumis $L^1(\Gamma_1)$ võimaldab väita, et vaadeldav funktsionaal kuulub ruumi $L^{\infty}(\Gamma_1)$. Ühtlasi annab võrratus (9.8) hinnangu $\| M^{-1} M_\tau \|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le 1$, millest $|M_\tau| \le M$, $x \in \Gamma_1$.

Valides võrratuses (9.7) $v = 0$ (või võrratuses (9.6) $v = 0$) saame

$$\int_{\Gamma_1} \left(M \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| - M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \le 0. \tag{9.9}$$

Võrratuse $|M_\tau| \le M$, $x \in \Gamma_1$, tõttu

$$M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} \le |M_\tau| \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \le M \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|, \quad x \in \Gamma_1,$$

seega

$$M \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| - M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} \ge 0, \quad x \in \Gamma_1.$$

See koos võrratusega (9.9) annab

$$M \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| - M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1. \tag{9.10}$$

Kui $|M_\tau| < M$, siis (9.10) annaks juhul $\frac{\partial u}{\partial n} \ne 0$

$$M \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| = M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} \le |M_\tau| \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| < M \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|, \tag{9.11}$$

see vastuolu näitab, et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Kui aga $|M_\tau| = M$, siis (9.11) näitab, et seal kasutatud Cauchy—Bunjakovski võrratuses leiab aset võrdus $M_\tau \frac{\partial u}{\partial n} = |M_\tau| \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|$, seepärast M_τ ja $\frac{\partial u}{\partial n}$ on lineaarselt sõltuvad, ühtlasi selgub sellest ka seoses $\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda M_\tau$ oleva kordaja λ märk. Sellega on (9.3) täidetus näidatud.

3. Variatsioonvõrratuse lahendi olemasolu ja ühesus

Näitame, et variatsioonvõrratuse (9.4) lahendi olemasolu saab järeldada teoreemist 8.1. Funktsiooni g kohta § 7 punktis 5 tehtud eeldustel on operaator A radiaalselt pidev ja monotoonne.

__Ülesanne__. Tõestada, et funktsioon φ on kumer.

Funktsioon φ rahuldab isegi Lipschitzi tingimust: kui $u, v \in V$, siis hinnangust

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| = \int_{\Gamma_1} M\left(\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| - \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|\right) d\Gamma \leq$$

$$\leq \|M\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_{\Gamma_1} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| - \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|\right| d\Gamma \leq \|M\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\partial (u-v)}{\partial n}\right| d\Gamma$$

saame teoreemi jälgedest (lemma 2.2) kasutades

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \mathrm{const}\, \|u - v\|_{H^2(\Omega)} .$$

Sellest muidugi järeldub φ alt poolpidevus.

Koertsitiivsuse nõue (8.8) on rahuldatud, sest meil on tõestatud operaatori A iseseisev koertsitiivsus $(v_0 = 0)$

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} \to \infty, \quad \text{kui } \|v\| \to \infty,$$

ning $\varphi(v) \geq 0$, $v \in V$.

Sellega on näidatud teoreemi 8.1 kõigi eelduste täidetus ning tõestatud võrratuse (9.4) lahendi olemasolu.

Kui funktsioon $g(\xi^2)\xi$ on rangelt kasvav, siis operaator A on rangelt monotoonne, see aga lubab teoreemi 8.2 põhjal väita, et võrratuse (9.4) lahend on ühene.

__Märkus 9.1__. Funktsioon φ ei ole rangelt kumer.

Põhjenduseks valime $u, v \in V$ nii, et $u - v \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, aga $u \neq v$. Siis $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}$, $x \in \Gamma$, seepärast iga $\lambda \in (0,1)$ korral

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda) v) = \lambda \varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v).$$

Kirjandus

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М., "Наука", 1980.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М., "Мир", 1983.
3. Лапин А.В. Введение в теорию вариационных неравенств. Казань, Из-во Казанского университета, 1981.
4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., "Мир", 1971.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., "Наука", 1965.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., "Наука", 1976.

S i s u k o r d