

Tartu Ülikool
Matemaatilise statistika instituut

Anne-Mai Parring
Mare Vähi
Ene Käärrik

Statistilise andmetöötuse algõpetus



TARTU ÜLIKOOLI
KIRJASTUS

Raamat on kirjastatud Eesti Teadusfondi granti toetusel

Keeletoimetaja: Leelo Jago

Kaane kujundanud: Michael Walsh

© A.-M. Parring, M. Vähi, E. Käär, 1997

ISBN 9985-56-221-6

Tartu Ülikooli Kirjastuse trükikoda

Tiigi 78, EE-2400 Tartu

Tellimus nr. 39

SISUKORD

SISSEJUHATUS	9
I. ÜLDKOGUM	13
1.1. Jaotustabel	15
1.2. Diskreetsed jaotused	19
1.2.1. Kaheväärtuseline (Bernoulli) jaotus	19
1.2.2. Binoomjaotus	22
1.2.3. Poissoni jaotus	28
1.3. Pidevad jaotused	32
1.3.1. Tihedusfunktsioon	32
1.3.2. Jaotusfunktsioon	33
1.3.3. Normaaljaotus	36
1.3.4. Normaaljaotuse tekkemehhanism	42
1.3.5. Standardiseerimine. Protsentiilid	44
1.4. Jaotuse keskvärtus ja dispersioon	46
Ülesanded 1	51
II. VALIM	53
2.1. Tõenäosus	54
2.2. Valimi korrastamine	55
2.2.1. Variatsioonrida	56
2.2.2. Valimi jaotustabel	57
2.2.3. Valimi arvkarakteristikud	59
2.2.4. Karp-diagramm	63
2.3. Juhusliku valimi vajalikkus	64
2.4. Ühe juhuslikult valitud väärtuse käitumisest	66
2.5. Juhusliku valimi keskvärtuse jaotus	69
Ülesanded 2	74

III. MATEMAATILISE STATISTIKA PÕHIÜLES-	
ANDED	76
3.1. Üldkogumi parameetrite hindamine	76
3.1.1. Üldkogumi keskväärtuse ja standardhälbe	
hindamine	76
3.1.2. Üldkogumi mediaani hindamine	79
3.2. Usaldusintervall	81
3.2.1. Üldkogumi keskväärtuse usaldusintervall	
(suur valim)	81
3.2.2. Protsendi usaldusintervall	85
3.2.3. Normaaljaotuse keskväärtuse usaldusintervall	
(väike valim)	87
3.2.4. Mediaani usaldusintervall	88
3.2.5. Usaldusintervalli laiuse reguleerimine	91
3.3. Statistiliste hüpoteeside kontrollimine	95
3.3.1. Hüpoteesid üldkogumi keskväärtuse kohta	
(suur valim)	101
3.3.2. Hüpoteesid protsendi kohta	107
3.3.3. Hüpoteesid normaaljaotuse keskväärtuse	
kohta (väike valim)	108
3.4. Seos hüpoteeside kontrollimise ja usaldusintervalli	
leidmise vahel	110
3.5. Tolerantsintervall	114
Ülesanded 3	117
IV. KAHE ÜLDKOGUMI VÕRDLEMINE	120
4.1. Sõltumatud valimid: keskväärtuste võrdlus	122
4.1.1. Suured valimid	123
4.1.2. Protsentide võrdlemine (suur valim)	128
4.1.3. T-test	132
4.1.4. Protsentide võrdlemine (väike valim)	137
4.1.5. Mann-Whitney test	140
4.1.6. Wilcoxon test	145
4.2. Sõltuvad valimid: keskväärtuste võrdlus	149
4.2.1. Z- ja T-test	150
4.2.2. Märgitest	154
4.2.3. Wilcoxon astak-märgitest	157
4.3. Universaalne mitteparameetriline test	161

4.4.	Üldkogumite jaotuste võrdlemine	167
4.4.1.	χ^2 -test	167
4.4.2.	Kolmogorov-Smirnovi test	171
	Ülesanded 4	179
V.	KAHE TUNNUSE ÜHINE KÄITUMINE	183
5.1.	Lineaarne korrelatsioonikordaja	183
5.1.1.	Hajuvusdiagramm	183
5.1.2.	Lineaarne korrelatsioonikordaja	187
5.1.3.	Lineaarse korrelatsioonikordaja puudused	195
5.2.	Spearmani korrelatsioonikordaja	201
5.3.	Kendalli korrelatsioonikordaja	206
5.4.	Kahemõõtmeline sagedustabel	211
5.4.1.	Sõltumatud tunnused	215
5.4.2.	Mitmesugused seosekordajad	217
5.5.	Regressioonanalüüs	227
5.5.1.	Regressioonisirge ja regressioonikordajad	227
5.5.2.	Regressiooniseose täpsus	232
5.5.3.	Regressiooniseose kasulikkus	234
5.5.4.	Statistilised otsustused regressioonikordajate kohta	236
5.5.5.	Prognoosi usaldusintervallid	241
5.5.6.	Jääkide analüüs	247
5.5.7.	Osakorrelatsioonikordaja	252
	Ülesanded 5	255
VI.	DISPERSIOONANALÜÜS	258
6.1.	Fikseeritud mõjudega ühefaktoriline mudel	260
6.1.1.	Tasakaalustatud mudel	261
6.1.2.	Tasakaalustamata mudel	270
6.2.	Keskmete mitmene võrdlemine	272
6.2.1.	Fisheri LSD test	273
6.2.2.	Bonferroni test	275
6.2.3.	Tukey test	276
6.2.4.	Scheffe test	277
6.3.	Dispersioonanalüüsi eelduste kontrollimine	285
6.4.	Kruskal-Wallis test	289
6.5.	Kahefaktoriline dispersioonanalüüs	293

6.6. Friedmani test	306
6.7. Juhuslike mõjudega tasakaalustatud mudel	309
6.7.1. Ühe faktoriga mudel	309
6.7.2. Kahe faktoriga mudel	315
6.8. Hierarhiline tasakaalustatud mudel	321
Ülesanded 6	327
KIRJANDUS	331
LISA 1. SPSS/PC 4.1 TEEJUHT	333
1. Mis on SPSS/PC 4.1?	333
2. Minimaalsed teadmised alustamiseks	333
3. Andmete sisestamine	334
3.1. DE (Data Entry)	334
3.2. Data list	336
4. Andmete isendused	338
5. Andmete kontroll	339
6. Kuhu lähevad tulemused	339
7. Näidete lahendused	340
8. Lõpetuseks	374
LISA 2. ANKEEDI ANDMED	375
LISA 3. LUGEMISAJAD	377
TABELID	380
AINEREGISTER	403

SISSEJUHATUS

Tänapäeva teadus toetub võrdsel määral nii sõnalisele kui ka arvulisele informatsioonile. Seetõttu on hariduse vajalikuks osaks oskus töötada arvulise andmestikuga. Vaid niisugune oskus võimaldab kasutada katsetulemusi otstarbekalt ning teha nende põhjal korrektseid järeldusi.

Reeglid katsete kavandamiseks, protseduurid katsetulemuste otstarbekaks kasutamiseks ja nende põhjal korrektsete järelduste tegemiseks töötatakse välja matemaatilises statistikas. Nende protseduuride realiseerimine on töömahukas, seetõttu on paljude aastate jooksul kirjutatud suur hulk programmpakette, mis vabastavad uurija igavast tehnilisest tööst andmete töötlemisel. Pakettide suur arv viitab sellele, et parim neist on siiani veel kirjutamata. Selle raamatu juurde kuulub lisa, mis õpetab kasutama humanitaarteadlastele suunitletud paketti **SPSS**. Pildid selles raamatus on aga joonistatud paketi **S-PLUS** abi kasutades.

Statistikapaketi töötlamine on üsna lihtne. Iga pakett on varustatud mahuka ja üksikasjaliku kasutamishendiga, mis on kättesaadav igale legaalsele kasutajale. Peale mõningat harjutamist võib igaüks üsna väledasti vajutada klahvidele ja trükkida oma andmete kohta käivaid pilte ja arvude tulpi. Kui trükised on käes, selgub aga, et neis ei peegeldugi kogu tõe katse tulemuste kohta. Arvuti on teostanud vaid nõutud arvutused ja esitanud kokkuvõtlikult otsuse langetamiseks vajaliku materjali. Otsuse langetamise vaev ja risk jäävad aga ikkagi uurija kanda.

Samuti jääb ka uurija hooleks protseduuride valik, mida arvuti peab teostama. Oskamatus ja hooletus selles töös võib viia otseselt valede järelduste tegemiseni.

Selle raamatu eesmärgiks ongi matemaatilise statistika nende vahendite tutvustamine, mida kasutatakse otsustuste tegemi-

sel andmete kohta, samuti ka loogika selgitamine, mida tuleb kasutada otsustuste langetamisel. Nii statistikas välja töötatud vahendid kui ka otsustamise reeglid on universaalsed, nad sobivad nii psühholoogidele, majandusteadlastele, sotsioloogidele kui ka meedikutele. Statistika õpetamise erialane suunitlus peitub enamasti näidetes.

Kuna autoritel on tulnud õpetada inimesi mitmesugustelt erialadelt ja ka õpiku kasutajate ringi pole tahetud piirata, on näiteid valitud väga mitmesuguste rakenduste kohta. Tahaksime loota, et see raamat on kasulik kõigile, kes alustavad oma andmete töötlemist. Lugejalt ei nõuta erilisi algteadmisi – enamasti piisab gümnaasiumi matemaatika kursusest. Kuigi esitatakse ka mõningaid mõttekäike matemaatilise statistika kõõgipoolelt, on need esitatud hästi peenes kirjas ja nende vahele jätmine ei takista järgnevast tekstist aru saamist.

Selle õpiku esimeses peatükis esitatakse mudel üldkogumi kirjeldamiseks – tõenäosusjaotus. Teises peatükis põhjendatakse juhusliku valimi kasutamise vajalikkust. Järgmistes peatükkides tutvustatakse matemaatilise statistika põhiülesandeid (hindamine, usalduspiiride leidmine, hüpoteeside kontrollimine) ja nende rakendusi konkreetsetes situatsioonides.

Lähenemine materjalile on mõnevõrra ebatraditsiooniline. Tavaliselt alustatakse niisugust kursust ekskursiooniga tõenäosusteooriasse. Matemaatiline statistika kasutab kahtlemata tõenäosusteoorias välja töötatud mõisteid, kuid lahendatavad ülesanded on teistsugused kui tõenäosusteoorias. Seetõttu ei vii otseteed elementaarse tõenäosusteooria tehnilistelt vilumustelt matemaatilise statistika alusteni. Käesolevas õpikus alustatakse esitust statistika ajalooliselt esimesest töövahendist – jaotustabelist. Tõenäosusjaotust vaadatakse kui matemaatikute poolt välja töötatud ja praktilistes rakendustes ennast õigustanud tüüpilist jaotustabelit. Jaotustabel on vahend üldkogumi kirjeldamiseks. Kui kogu üldkogumit pole võimalik läbi uurida, ei saa jaotustabelit koostada ja tekib vajadus tema ligikaudseks hindamiseks. Tundmatu jaotustabeli ainuvõimaliku objektiivse hinnangu saame juhusliku valimi abil. Miks see nii on, selle mõistmiseks annab

võtme juhusliku sündmuse suhtelise sageduse ja tema tõenäosuse vahelise seose olemasolu tunnetamine. Selle seose olemasolu ongi püütud teises peatükis teadvustada. Järgnevate peatükkide sisu on konkreetsem – kirjeldatakse erinevaid statistikaprotseduure ja nende rakendamise eeldusi. Piirdatakse ühe ja kahe tunnuse analüüsimisega, mitmemõõtmelist statistikat selles raamatus ei käsitleta.

Raamatus kasutatud sümbolite selgituseks tuleb elda, et järgides matemaatilise statistika traditsioone kasutatakse statistikute tähisena üldiselt suuri tähti (Z, T, F jne). Kui aga konkreetse valimi põhjal arvutatakse vastava statistiku väärtus, tähistatakse see vastava väiketähega (z, t, f). Näite lõpu tähistamiseks kasutatakse "südamlikku" sümbolit ♡.

Peatükid 1.– 5. on kirjutanud A.-M.Parring, 6. peatüki – M. Vähi, juhendi paketi **SPSS** kasutamiseks E. Käärrik. Autorid on tänulikud kolleegidele *Säde Koskelile, Eva Saksale, Imbi Traadile* ja professor *Ene-Margit Tiidule* käsikirja läbi lugemise ja kasulike märkuste ning nõuannete eest. Abi eest raamatu tehnilisel vormistamisel täname Elvi Ehasalu ja Pille Paed.

1. ÜLDKOGUM

Igal erialal on oma terminid. Tutvume tähtsamate matemaatilises statistikas kasutusele võetud terminitega.

Andmestik saadakse katse tulemusi registreerides. Katse võib tähendada erinevat konkreetset tegevust. Psühholoogi jaoks tähendab katse enamasti katsealuste – inimeste või loomade – vaatlemist teatud tingimustes ja nende reaktsiooni registreerimist. Järjest rohkem kasutatakse mitmesuguseid isiksuse omadusi kirjeldavaid teste. Testid abistavad arste psüühiliste haiguste diagnoosimisel, keskkoolilõpetajaid elukutse valikul. Testi läbiviimine on katse. Bioloogi, geoloogi või meediku katsekorraldus ja eesmärk võivad olla väga erinevad. Kuid ikka saab uurija oma käsutusse teatava *andmestiku*, teatava hulga katsetulemusi.

Võtame andmestikust rääkides kasutusele järgmised terminid. Nimetame katse käigus mõõdetavat "ühikut" – isikut, looma, aparaati, katselappi, järve jms. – *objektiks*. Näitajat, mida objektil mõõdetakse, nimetame *tunnuseks*. Katse tulemusena saadud andmestikku, mis sisaldab katse käigus mõõdetud tunnuse väärtusi väljavalitud objektidel, nimetame *valimiks*.

Enamasti huvitab aga katsetajat hoopis laiem objektide hulk, kui oli võimalik katse käigus üle mõõta. Nimetame objektide hulka, mis katsetajat tegelikult huvitab, *üldkogumiks*.

Konkreetses katse kavandamist tuleb alustada üldkogumi määratlemisest. Katsetaja peab enda jaoks selgeks tegema, milline on teda huvitav objektide hulk. Vastavalt sellele määratlusele saab moodustada valimi. Kui meedikut huvitab eesti laste tervislik seisund, kõikide laste uurimiseks aga puuduvad aeg ja vahendid, tuleb tal moodustada valim, millesse kuulub lapsi nii maalt kui linnadest. Kui meedikut huvitab eesti maalaste tervislik seisund, tuleb tal moodustada valim, kuhu kuuluvad ai-

nult maalt pärit lapsed. Objektiivse informatsiooni saamiseks peab valim olema juhuslik – igal üldkogumi objektil peab olema võrdne võimalus valimisse sattumiseks.

Valikprotseduure ja hindamismeetodeid objektide mittevõrdse valimisse sattumise tõenäosuse korral uurib valikuteooria. Niisuguste valimite korral standardised statistika meetodid ja paketid ei tööta.

Katse tulemust võib registreerida (mõõta) mitut moodi – märkida see üles arvuna või kirjeldada sõnaliselt. Korrektse andmestiku saamiseks peab katse kavandamisel otsustama, kuidas registreeritakse tunnuse väärtused. Statistikas öeldakse – tuleb valida skaala, millel tunnuse väärtusi mõõdetakse. Vastavalt skaala valikule tekivad erinevad tunnuste *tüübid*. Tunnust, mille väärtusteks on arvud, nimetatakse *arvuliseks*. Tunnust, mille väärtus esitatakse sõna abil, nimetatakse *mittearvuliseks*.

Kui arvuline tunnuse väärtus määratakse valitud mõõtühikuga võrdlemise teel, st tunnus võib omandada väärtusi mingil lõigul, nimetatakse tunnust *pidevaks*. Kui tunnuse väärtused määratakse loendamise teel, st tunnus võib omandada ainult täisarvulisi väärtusi, nimetatakse tunnust *diskreetseks*.

Kui mittearvulise tunnuse väärtused on järjestatavad, nimetatakse tunnust *järjestustunnuseks*. Järjestustunnuse mõtteskaalal puudub ühik, pole võimalik mõõta väärtuste vahelise erinevuse suurust. Kui mittearvulise tunnuse väärtused pole järjestatavad, nimetatakse tunnust *nominaaltunnuseks*.

Uurijat huvitavad objektid on reeglina erinevad, seetõttu koosneb valim erinevatest tunnuse (või tunnuste) väärtustest. Veel suuremat hulka erinevaid tunnuse väärtusi varjab endas üldkogum. Nii on ühe ja sama lihtsa ülesande lahendamiseks kuluv aeg ühes ja samas klassis õppivatel lastel erinev, erinevad inimesed annavad ühele ja samale poliitikule erineva hinnangu jne.

Alustamegi vahendist, mida statistikaskasutatakse suure hulga erinevate andmete ülevaatlikuks esitamiseks ja andmete iseloomulike seaduspärasuste kirjeldamiseks. Peame silmas olukorda, kus vaatluse all on korraga ainult üks tunnus ja see tunnus on arvuline. Sellele vahendile – jaotustabelile – tuginedes

püüame ka mõista mudelit, mida matemaatikud kasutavad üldkogumi kirjeldamiseks.

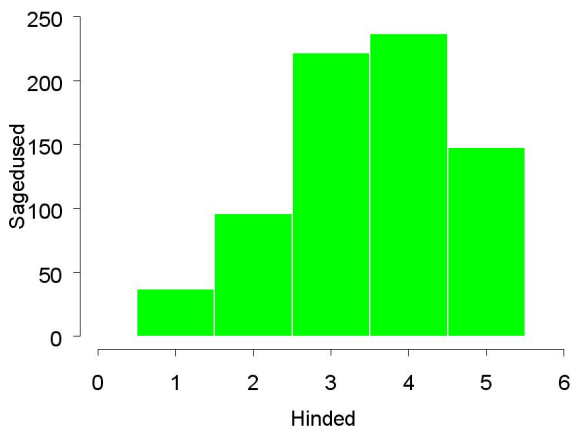
1.1. Jaotustabel

Oletame hetkeks, et aeg ja võimalused lubavad mõõta üle kõik objektid meid huvitavas üldkogumis. Tunnuse väärtuste ülevaatalikuks esitamiseks on otstarbekas koostada *jaotustabel* (e *sagedustabel*). Kui tunnusel on vähe erinevaid väärtusi, loetakse jaotustabelis üles kõik tunnuse erinevad väärtused ja näidatakse ära niisuguste väärtustega objektide arv (sagedus) ja osakaal (suhteline sagedus) üldkogumis. Väärtuste osakaalud esitatakse sagedustabelis sageli protsentides.

Näide 1.1. Ühe linna põhikoolide viiendates klassides viidi läbi ühesugune kontrolltöö matemaatikas (ka kontrolltöö on teatud primitiivne test). Järgnevas on esitatud kontrolltöö kaasa teinud 740 õpilase hinnete jaotustabel. Hinde osakaal (suhteline sagedus) leitakse hinde sageduse jagamisel õpilaste arvuga (osakaalud on ümardatud ja esitatakse kahe koha täpsusega pärast koma).

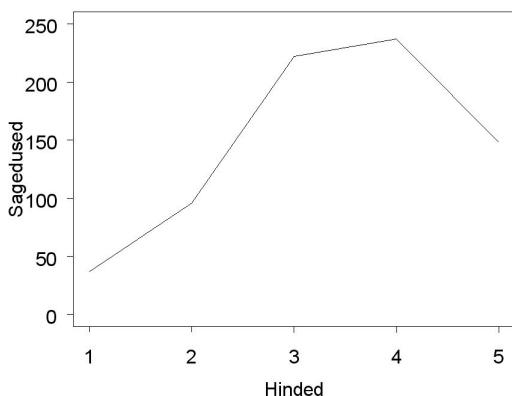
Hinne	1	2	3	4	5
Sagedus	37	96	222	237	148
Osakaal	0.05	0.13	0.30	0.32	0.20
Osakaal (%)	5	13	30	32	20

Jaotustabeli võib esitada ka joonise abil. Niisugune joonis on sageli hoopis kõnekam kui arvudega täidetud tabel. Jaotustabeli esitamisel joonistatakse teljestik, horisontaalteljele kantakse tunnuse väärtused, vertikaalteljele aga osakaalud vi sagedused. Tunnuse iga väärtuse kohale joonistatakse võrdse laiusega ristkülik, mille aluse keskpunktiks on tunnuse väärtus, kõrguseks aga vastava väärtuse osakaal või sagedus üldkogumis. Niisugust joonist nimetatakse *jaotushistogrammiks* (e tulpdiagrammiks).



Joonis 1.1. Jaotushistogramm

Jaotustabeli võib esitada ka teistsuguse joonise abil. Alustatakse samasuguse teljestikuga nagu enne, kuid tunnuse iga väärtuse kohale, selle väärtuse osakaalule vastavale kõrgusele, kantakse punkt. Saadud punktid ühendatakse murdjoonega. Nii-sugust joonist nimetatakse *jaotuspolügooniks* (e jaotusmurdjooneks).



Joonis 1.2. Jaotuspolügoon



Kui tunnusel on palju väärtusi, ei ole kõiki neid kasulik jaotustabelis üles lugeda – jaotustabel muutuks ebaülevaatlikuks. Üksikväärtuste asemel valitakse sobivad väärtuste vahemikud. Sagedustabelis näidatakse ära valitud vahemikud ja nende osa-

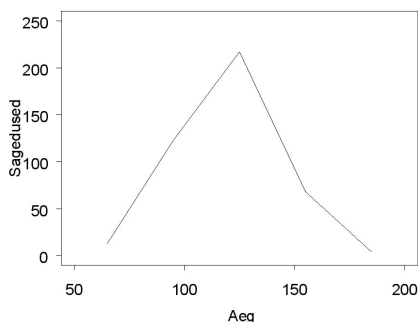
kaalud.

Näide 1.2. Ühe kooli inglise keele klassi võetakse õpilasi vastu konkursi alusel. Esimeseks katseks on lugemistest, mille käigus registreeritakse kindla pikkusega teksti lugemiseks kulunud aeg. Testi läbi teinud 425 lapse tulemused (lugemiseks kulunud aeg sekundites) on esitatud lisas 3. Järgnevas jaotustabelis on esitatud lugemisajad 30 sekundi pikkuste väärtusintervallide kaupa.

Segaduste vältimiseks on intervalli kuuluva otspunkti juurde kirjutatud nurksulg ”[”, intervalli mitte kuuluva otspunkti juurde aga ümmargune sulg ”)”.

Aeg	[50–80)	[80–110)	[110–140)	[140–170)	[170–200)
Sagedus	13	123	217	68	4
Osakaal	0.03	0.29	0.51	0.16	0.01
Osak.(%)	3	29	51	16	1

Joonistame sellele jaotustabelile vastava jaotuspolügooni. Nüüd kantakse punktid iga väärtusintervalli keskpunkti kohale, intervalli osakaalule vastavale kõrgusele. Saadud punktid ühendatakse murdjoonega.



Joonis 1.3. Lugemisaegade jaotuspolügoon



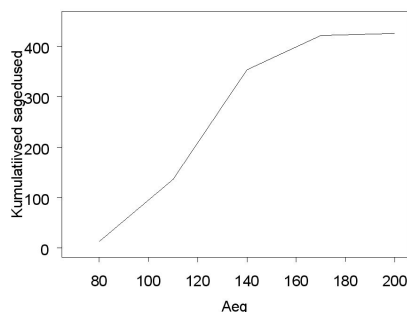
Peame meeles: *igas jaotustabelis on erinevate väärtuste või erinevate väärtusintervallide osakaalude summa võrdne ühega (protsentides esitatud osakaalude summa on 100%).*

Eelnevas tabelis on toodud lõplike intervallide osakaalud. Praktilistes ülesannetes võivad huvi pakkuda ka lõpmatute intervallide $(-\infty, t)$ osakaalud, st intervallide osakaalud, mis sisaldavad etteantud väärtusest t väiksemaid väärtusi, need on *kumulatiivsed osakaalud*.

Näide 1.3. Leiame eelmises näites toodud jaotustabeli jaoks kumulatiivsed osakaalud. Iga intervalli jaoks näitame ära ainult tema ülemise otspunkti, kumulatiivse osakaalu leidmiseks liidame antud intervalli osakaalule kõigi eelnevate intervallide osakaalud. Iga väärtuse alla kirjutatud kumulatiivne osakaal näitab vastavast väärtusest väiksemate väärtuste osakaalu. Nii oli laste osakaal, kellel kulus testi lugemiseks aega alla 110 sek, 32%; laste osakaal, kellel kulus testi lugemiseks aega alla 140 sek, 83% jne.

Aeg	80	110	140	170	200
Kum. sagedus	13	136	353	421	425
Kum. osak.	0.03	0.32	0.83	0.99	1.00
Kum. osak. (%)	3	32	83	99	100

Ka kumulatiivsete osakaalude esitamiseks saab kasutada joonist. Tavaliselt on kasutatav joonis analoogiline jaotuspolügooniga.



Joonis 1.4. Lugemisaegade kumulatiivne jaotuspolügoon



Jaotustabel kirjeldab uuritavat tunnust üldkogumis üsna täpselt. Kahjuks pole tema koostamine praktikas huvi pakkuvate üldkogumite jaoks enamasti võimalik – objekte on liiga palju, nende kõikide vaatlemine ja ülemõõtmine pole lihtsalt võimalik.

Kas jaotustabelit poleks võimalik koostada ilma kõiki üldkogumi objekte üle mõõtmata?

Esimesel silmapilgul tundub küsimus rumalana. Tegelikult ta seda pole. Veel enam – vastus on jaatav. Matemaatikute poolt on kasutusele võetud teatavad standardsed jaotustabelid, mille kuju määrab tunnuse tekkemehhanism. Jaotustabeli väärtuste osakaalud jäävad sõltuma ühest-kahest (vahel harva ka enamast) arvulisest parameetrist, mille väärtusi muutes on võimalik jaotustabelit kohandada väga erinevate üldkogumite kirjeldamiseks. Kuna ühesuguse tekkemehhanismiga võivad olla väga erinevad tunnused, on sellised etalon-jaotustabelid kasutatavad väga erinevates valdkondades.

Kuna terve etalon-jaotustabelite perekond peidetakse ainsasse valemisse, kasutame niisuguse perekonna nimetamisel sõna *jaotus* (jaotusseadus). Tutvume mõne sagedamini kasutatava jaotusega. Tavaliselt esitatakse jaotus võimalike väärtuste ja nende osakaalude abil.

1.2. Diskreetsed jaotused

Diskreetseks nimetatakse niisugust tunnust, mille väärtuste hulk on kas lõplik või loenduv. Kui tunnusel on lõplik arv väärtusi, on jaotustabelis võimalik üles lugeda kõik selle tunnuse erinevad väärtused. Sama võimalust kasutatakse ka diskreetse jaotuse esitamisel – loetletakse kõik tunnuse väärtused ja antakse nende osakaalud.

1.2.1. Kaheväärtuseline (Bernoulli) jaotus

Kaheväärtuseline jaotus on kõige lihtsam jaotus. Ta sobib üldkogumit kirjeldama olukorras, kus tunnusel on ainult kaks väärtust (st uuritavad indiviidid võivad reageerida ainult kahel erineval viisil, võivad kuuluda ainult kahte erinevasse tüüpi). Kaheväärtuseline jaotus on vanim uuritud jaotus, nimetatud Šveitsi matemaatiku Jacob(James) Bernoulli (1654 - 1705) auks, kes seda jaotust esimesena kasutas.

Kaheväärtuselise tunnuse saame näiteks siis, kui registreeritakse katsealuse sugu (võimalikud väärtused "mees" ja "naine") või registreeritakse, kas katsealune vastas teatavale talle esitatud küsimusele õigesti või valesti. Kaheväärtuselise jaotuse jaotustabeli väljakirjutamisel võime tunnuse väärtused alati tähistada sümbolitega "0" ja "1". Üldjuhul on jaotustabelil kuju

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1
Osakaal (p_i)	$1-p$	p

Tähega p on tähistatud väärtuse "1" osakaal üldkogumis. Arv p on jaotustabeli *parameeter*, erinevate üldkogumite korral võib ta omandada erinevaid väärtusi.

Lauset "tunnus X on kaheväärtuselise jaotusega parameetriga p " tähistame edaspidises lühidalt järgmiselt:

$$X \sim B(1, p).$$

Peame meeles: *parameetri p väärtus on tingimata 0 ja 1 vahel, $0 < p < 1$.*

Näide 1.4. Olgu uuritavaks üldkogumiks 1990 aasta sügisel TÜ-s õppimist alustanud üliõpilased. Vaatame selles üldkogumis tunnust "sugu". See tunnus on kaheväärtuseline. Tähistame väärtuse "mees" sümboliga "0", väärtuse "naine" sümboliga "1". Kuna kõikide sisseastujate andmed säilitatakse üldises andmebaasis, saame meid huvitava tunnuse väärtuse iga sisseastuja jaoks teada. Tunnuse jaotustabeli saame lihtsalt kõiki üldkogumi objekte üle mõõtes. Üldse oli sisseastujaid 1236, neist noori daame 757. Kirjutame jaotustabeli välja.

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1
Osakaal (p_i)	0.39	0.61



Teades kaheväärtuselise jaotuse üldkuju ja tunnuse tekkemehhanismi, saame jaotustabeli välja kirjutada ka niisuguse üldkogumi jaoks, mida põhimõtteliselt pole võimalik tervikuna üle mõõta.

Näide 1.5. Viskame münti. Olgu meid huvitavaks üldkogumiks kõikvõimalike visketulemuste hulk. Mündi viskamisel võib saada kaks erinevat tulemust - olgu "kulli" pealelangemisel visketulemuseks "0", "kirja" pealelangemisel aga visketulemuseks "1". Seega on meil tegemist kaheväärtuselise üldkogumiga. Meie üldkogum on põhimõtteliselt lõpmatu, me ei saa kunagi kõiki viskeid ära teha ja kõikvõimalikke katsetulemusi registreerida. Kuid me arutleme järgmiselt: kui münt on korrapärane, peab "kullide" ja "kirjade" osakaal meie üldkogumis olema võrdne. Kuna aga jaotustabelis esinevate osakaalude summa peab olema 1, saab kummagi väärtuse osakaaluks olla vaid arv 0.5. Järelikult kirjeldab meie üldkogumit jaotustabel

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1
Osakaal (p_i)	0.5	0.5

Selles näites on parameetri p väärtuseks 0.5.



Näide 1.6. Vaatame veel ühte lihtsat katset, mis võimaldab kontrollida telepaatilise side olemasolu tavatingimustes. Selleks katseks valmistatakse kaks viiest kaardist koosnevat komplekti, igale kaardile kantakse mingi lihtne kujund. Näiteks võib kasutada kujundeid

$+$, ∇ , $\odot$, $\diamond$ ja $\approx$.

Kumbki katsealune saab ühe komplekti kaarte ja nad isoleeritakse teineteisest. Katsetaja valib huupi ühe kaardi, näitab valitud kaarti katsealusele, kelle ülesandeks on edastada kaardil asuv kujund teisele katsealusele. Viimane peab oma kaartide hulgast valima sama kujundi. Loeme õige valiku korral katsetulemuseks "1", vale valiku korral aga "0". Olgu meid huvitavaks üldkogumiks kõikvõimalike katsetulemuste hulk. See üldkogum on jällegi põhimõtteliselt lõpmatu. Me saame kirja panna, et meid huvitava tunnuse jaotustabel omab kuju

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1
Osakaal (p_i)	$1-p$	p

Selle ülesande korral ei võimalda aga tehtud eeldused määrata jaotustabeli parameetri väärtust. Oleme seisus, mis on väga

tüüpiline katsetulemuste kirjeldamisel – meil õnnestus määrata üldkogumi jaotus kuni *parameetri täpsuseni*. Parameetri väärtuse hindamiseks tuleb meil kas teha katseid ja praktiliselt uurida tunnuse käitumist või lisada täiendavaid eeldusi, millele tuginedes saab määrata parameetri tõelise väärtuse.

Oletame näiteks, et informatsiooni edastamist ei toimu. Sel juhul valib teine katsealune oma kaardi täiesti juhuslikult, õige valiku osakaalu määrab suhe $1/5$ – katsealusel on võimalik valida viie kaardi vahel, millest ainult üks on õige. Meie üldkogumi jaotustabel omandab siis kuju

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1
Osakaal (p_i)	0.8	0.2



1.2.2. Binoomjaotus

Binoomjaotus sobib väga kindlal viisil tekkinud tunnuse kirjeldamiseks. Olgu meil tegemist katsega, millel on kaks võimalikku tulemust. Nimetame ühte neist tulemustest ”eduks”, teist ”eba-eduks” (nimetused on jutumärkides, kuna nad ei ole mingil viisil seotud tulemuste sisulise tähendusega). Vaatame selliste kahetulemuseliste katsete seeriat. Seerias olgu m katset, mis on sõltumatud (st eelneva katse tulemus ei mõjusta mingil viisil järgneva katse tulemust). Sooritame kõik ettenähtud katsed ja loeme ära ”edukate” katsete arvu selles seerias. Nii tekkinud tunnuse käitumist kirjeldabki *binoomjaotus*.

Peame meeles: *binoomjaotus määrab m katse hulgas ”edukaks” osutunud katsete arvu jaotuse.*

Üldkogum, mille jaoks binoomjaotus on määratud, on põhimõtteliselt abstraktne (mõtteline) – ta koosneb kõikvõimalikest tulemustest, mida saaksime oma katseseeriat realiseerides. Me võime sellist üldkogumit küll ette kujutada, kuid ta ei eksisteeri tõelise maailma ühelgi lõplikul ajahetkel. Seda üldkogumit ei saa üle mõõta, kuid tuginedes tehtud eeldustele, saame matemaatika vahenditega määrata binoomjaotusega tunnuse jaotustabeli. Võtame selle tabeli teadmiseks, ta on järgmine:

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1	2	...	m
Osakaal (p_i)	p_0	p_1	p_2	...	p_m

Võimalikeks väärtusteks binoomjaotuse korral on täisarvud nullist kuni m -ni – näitas ju tunnuse väärtus "edukalt" lõppenud katsete arvu m -katselises seerias. Väärtuse " k " osakaal üldkogumis p_k on aga määratud valemiga

$$p_k = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}. \quad (1.2)$$

See on meie esimene keeruline valem. Vaatame ta veelkord rahulikult üle ja püüame selgitada, mis on mis. Tähega " p " on tähistatud väärtuse " 1 " osakaal üksikkatsel (näiteks mündi viskamisel on " p " väärtuseks 0.5). Tähega " m " on tähistatud katseseeria pikkus. Valem ütleb, et väärtuse " k " osakaal on võrdeline korutisega $p^k(1-p)^{m-k}$, võrdeteguriks on aga täisarv C_m^k (loe: kombinatsioonid m elemendist k kaupa). See täisarv näitab ära erinevate valikute arvu m elemendilisest kogust k elemendi kaupa. Väärtuse " k " osakaal sõltub sellest, mitmel erineval viisil võivad k edukat katset m -katselises tulemuste jadas paikneda. Näiteks 3-katselises seerias võib üks edukas katse paikneda kolmel erineval viisil:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{array}$$

4-katselises seerias võivad kaks edukat katset paikneda 6 viisil:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1. \end{array}$$

Kordaja C_m^k (binoomkordaja) arvutatakse valemiga

$$C_m^k = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!},$$

kus $m!$ (loe: m -faktoriaal) tähistab järjestikuste täisarvude kor-
rutist ühest kuni m -ni:

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m.$$

Näiteks

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

ja

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Kokkuvõtteks – binoomjaotusel on kaks erinevat parameetrit:
 m – katseseeria pikkus – ja p – ”edu” võimalikkus üksikkatsel.
Lauset ”tunnus X on binoomjaotusega parameetritega m ja p ”
tähistame edaspidises lühidalt

$$X \sim B(m, p).$$

Peame meeles: *parameetri m väärtuseks on täisarv, parameetri p väärtus on 0 ja 1 vahel, $0 < p < 1$.*

Vaatame mõningaid lihtsaid näiteid tunnuste kohta, mille kirjel-
damiseks sobib binoomjaotus.

Näide 1.7. Viskame korraga kolme münti. Vastaku nagu varase-
maski näites ”kullile” tähistus ”0” ja ”kirjale” tähistus ”1”, loeme
”kirja” pealelangemist ”eduks”. Olgu üldkogumiks kõikvõimalike
visketulemuste hulk, uuritavaks tunnuseks pealelangenud ”kir-
jade” arv.

Meie ülesande korral on katseseeria pikkuseks 3, st $m = 3$. Vaa-
datava tunnuse võimalikeks väärtusteks on arvud 0, 1, 2, 3. Tun-
nuse jaotustabeli saamiseks arvutame valemi (1.2) abil võimalike
väärtuste osakaalud:

$$p_0 = 1 \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^3 = 0.125,$$

$$p_1 = 3 \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^2 = 0.375,$$

$$p_2 = 3 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^1 = 0.375,$$

$$p_3 = 1 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^0 = 0.125$$

ja kirjutame jaotustabeli välja.

Tunnuse väärtus (x_i)	0	1	2	3
Osakaal (p_i)	0.125	0.375	0.375	0.125



Selleks, et kordajaid C_m^k oleks mugavam arvutada, võib üles ehitada arvude kolmnurga

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

jne

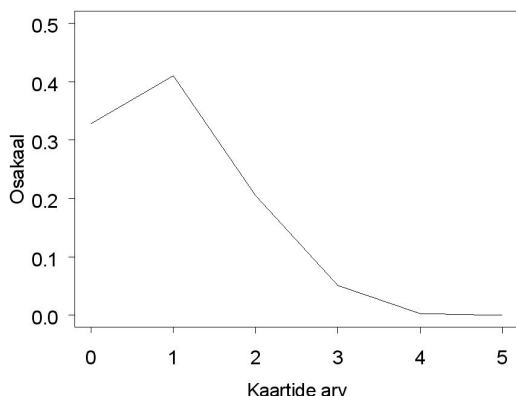
Selle kolmnurga iga rida algab ja lõpeb arvuga "1". Järgmise arvu aga saame, liites kokku tema kaks ülemist naabit. Kolmnurga reas m + 1 asuvad kordajad $C_m^0, C_m^1, \dots, C_m^m$.

Binoomjaotuse osakaalud parameetrite m ja p mõnede väärtuste korral on toodud tabelis A.

Näide 1.8. Vaatame näites 1.6 kirjeldatud katset. Lepime kokku, et kaartide äraarvamist teostatakse katseseeriate kaupa - igas seerias 5 katset. Oletame, et katsete tulemused on sõltumatu- tud. Õigesti ära arvatud kaartide arv on siis binoomjaotusega, $m = 5$, parameetri p väärtus ei ole aga üldjuhul määratud. Vaid siis, kui eeldame, et side katseisikute vahel antud katsetingimuste korral puudub, võime parameetri p väärtuseks valida 0.2. Sel juhul on 5-katselises seerias õigesti ära arvatud kaartide arv kirjeldatud jaotustabeliga

Väärtus (x_i)	0	1	2	3	4	5
Osakaal (p_i)	0.328	0.410	0.205	0.051	0.003	0.000

Jaotustabelile vastab järgneval joonisel esitatud jaotuspolügoon.



Joonis 1.5. Õigesti ära arvatud kaartide jaotuspolügoon

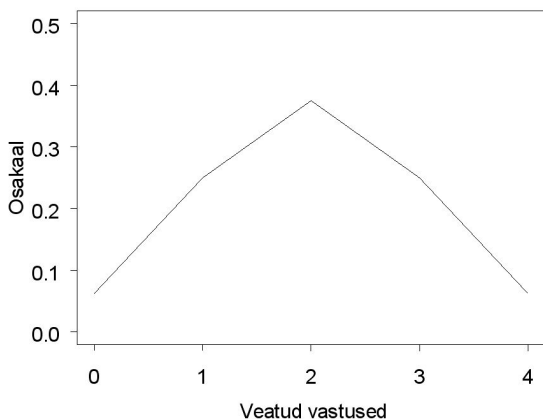


Kuna mitmesugused testid koosnevad sageli võrdse raskusega alamülesannetest, mille tulemused on üksteisest sõltumatud, võib binoomjaotus sobida ka testi hinnete jaotuse kirjeldamiseks. Vaatame veel ühte lihtsat näidet.

Näide 1.9. Oletame, et üliõpilaste teadmiste kontrollimiseks teatud aines soovitakse kasutada testi, milles on neli küsimust, iga küsimuse jaoks on ette nähtud kaks vastusevarianti. Test loetakse sooritatuks, kui üliõpilane vastab vähemalt kolmele testi küsimusele õigesti. Vaatame, kuidas jaotub õigete vastuste arv, kui vastaja ei tunne ainet ja valib vastusevariandid täiesti juhuslikult. Kui üliõpilane valib vastusevariandi täiesti juhuslikult, on testi hinne "edukalt" lõppenud katsete arv 4-katselises seerias, kus "edu" osakaal üksikkatsel on 0.5. Seega õigete vastuste arv $X \sim B(4, 0.5)$ ja me saame jaotustabeli välja kirjutada.

Väärtus (x_i)	0	1	2	3	4
Osakaal (p_i)	0.0625	0.2500	0.3750	0.2500	0.0625

Joonisel 1.6 on ka sellele jaotustabelile vastav jaotuspolügoon.



Joonis 1.6. Testi hinnete jaotuspolügoon



Jaotustabel sisaldab üksikute väärtuste osakaale, kuid nende põhjal saab leida ka väärtuste intervalli (a, b) osakaalu. Osakaalu tähisena oleme siiani kasutanud tähte p , millele vajaduse korral lisame indeksi. Vältimaks liiga pikki indekseid, kirjutame aga intervalli määrava tingimuse sulgudes selle tähe järele. Seega etteantud väärtuste vahemiku (a, b) osakaalu saame arvutada valemiga

$$p(a < X < b) = \sum_{a < x_i < b} p_i, \quad (1.3)$$

st liidame kokku kõikide sellesse vahemikku kuuluvate väärtuste osakaalud.

Näide 1.10. Leiame testi läbinud üliõpilaste osakaalu nende üliõpilaste hulgas, kes ei tunne ainet ja valivad vastusevariandid täiesti juhuslikult. Vastavalt testi sooritamise tingimustele

$$p(3 \leq X) = 0.25 + 0.0625 = 0.3125.$$

Ilmselt on test liiga "leebe" – läbi saab keskmiselt iga kolmas ainet mitte tundev kontrollitav. Test muutub hoopis tähendusrikkamaks, kui nõuda, et vastata tuleb õigesti kõikidele testi küsimustele. Siis on testi läbinute osakaal ainet mitte tundvate üliõpilaste hulgas

$$p_4 = 0.0625$$

ja testi läbib keskmiselt kuus igast sajast lausmitteõppinust.

Testi võib muuta karmimaks ka teisel viisil – suurendada iga küsimuse korral etteantavate vastusevariantide arvu neljani. Sel juhul on "edu" osakaaluks 0.25 ja huupi valitud vastuste korral on õigete vastuste arv binoomjaotusega $B(4, 0.25)$. Selle binoomjaotuse jaotustabel on järgmine

Väärtus (x_i)	0	1	2	3	4
Osakaal (p_i)	0.3164	0.4219	0.2109	0.0469	0.0039

Loeme ikka testi läbinuks üliõpilased, kes annavad kolm või neli õiget vastust. Nende üliõpilaste hulgas, kes ei tunne ainet ja valivad vastusevariandid täiesti juhuslikult, saame nüüd testi läbinute osakaaluks

$$p(3 \leq X) = 0.0469 + 0.0039 = 0.0508$$

ehk umbes 5% testitavatest. Tulemus näitab, et ka see test annab küllalt mõistlikke tulemusi.

Kindlasti tuleb aga pidada meeles, et kõik need arvutused omavad tegelikus elus kajastuvat sisu vaid ühel juhul - siis, kui kõik testi sooritavad üliõpilased on ühesugustes tingimustes - nad ei tea eelnevalt õigete vastusevariantide numbreid, neil puudub igasugune täiendav informatsioon testis kasutatavate küsimuste kohta. Nagu näha, võib pinnas jaotuse kasutamiseks tegelikkuses olla üsna ebakindel.



1.2.3. Poissoni jaotus

Kuigi väikeste valimite korral on osakaalude arvutamine binoomjaotuse valemit kasutades üllatavalt lihtne, muutuvad katseseeria pikkuse m suurenedes arvutused üsna kiiresti tüütuteks. See inspireeris matemaatikuid otsima valemeid, mis võimaldaksid küllalt täpselt arvutada üksikväärtuste osakaale, kuid nõuaksid vähem tööd. Üks lähendusvalemitest osutus sisuliselt nii tähendusrikkaks, et tema abil määrati iseseisev jaotus: *Poissoni jaotus*.

Mida peab siis binoomjaotusega ette võtma, et ta "muutuks" Poissoni jaotuseks?

Selgitame seda ühe praktilise ülesande varal. Oletame, et maanteede talituses registreeritakse õnnetusjuhtumite arv teataval teelõigul kindla ajavahemiku jooksul. Olgu õnnetuse juhtumise risk kõikide autode jaoks võrdne, liikluse intensiivsus aga mitte väga suur – sel korral on avariide tekkimine üksteisest sõltumatu. Kui m on vaatlusalust teelõiku läbinud autode arv, p aga õnnetusjuhtumi tekkimise risk, siis sobib õnnetusjuhtumite arvu kirjeldamiseks kasutada binoomjaotust $B(m, p)$. Aja jooksul muutuvad autod tehniliselt täiuslikumateks, juhtidelt võib nõuda paremat ettevalmistust – seega õnnetuse võimalikkus väheneb. Samal ajal võib aga avariide keskmine arv jääda muutumatuks – seda siis, kui teelõigul liikuvate autode arv oluliselt suureneb.

Poissoni jaotuse saamegi binoomjaotusest siis, kui pikendame piiramatult katseseeriat ja samal ajal vähendame "edu" võimalikkust üksikkatsel.

Matemaatiliselt väljendab niisugust nõuet võrdus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m m = \lambda$$

 $(\lambda - \text{etteantud konstant, } m - \text{katseseeria pikkus, } p_m - \text{"edu" võimalikkus antud pikkusega katseseeria korral). Pole raske veenduda, et niisugusel eeldusel}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m^k p_m^k (1-p)^{m-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Poissoni jaotus sobib haruldaste sündmuste kirjeldamiseks. Poissoni jaotusega tunnuse väärtuseks on haruldaste sündmuste arv teatud ajavahemiku jooksul. Kuna sündmuste arv pole ühegi loogilise tõkkega piiratud, võib Poissoni jaotusega tunnus põhimõtteliselt omandada kuitahes suuri täisarvulisi väärtusi. Suurte väärtuste osakaalud on aga nii väikesed, et suured väärtused tegelikkuses ei esine ja jäävad vaid jaotuse abstraktseks (tegelikkuses mitte realiseeruvaks) võimaluseks. Võtame Poissoni jaotusele vastava jaotustabeli teadmiseks, ta on järgmine:

Väärtus (x_i)	0	1	2	...
Osakaal (p_i)	p_0	p_1	p_2	...

Nagu juba varem öeldud, on see jaotustabel põhimõtteliselt lõputu. Konkreetse jaotustabeli väljakirjutamisel aga jõuame

varem või hiljem olukorrani, kus valitud esitustäpsuse piires muutuvad kõik osakaalud nullideks ja tabeli ülejäänud lahtrite välja-
kirjutamine muutub mõttetuks. Väärtuse k osakaal määratakse valemiga

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \quad (1.4)$$

Tähega λ on siin tähistatud jaotuse parameeter – sisuliselt näitab see parameeter haruldaste sündmuste keskmist arvu vaadeldaval ajavahemikul. Parameeter λ võib omandada mistahes positiivseid väärtusi.

Sümboliga e on tähistatud arv $2.71828\dots$ – naturaallogaritm alus.

Edaspidises tähistame lauset ”tunnus X on Poissoni jaotusega parameetriga λ ” lühidalt

$$X \sim P(\lambda).$$

Ka valem (1.4) määrab terve jaotustabelite perekonna. Andes parameetrile λ erinevaid väärtusi, saame genereerida erinevaid jaotustabeleid.

Näide 1.11. Tuleme tagasi eespool kirjeldatud avariide arvu registreerimise juurde teataval teelõigul. Olgu vaatlusperioodiks aasta ning pikaajalise statistika põhjal olgu teada, et keskmine avariide arv on 1.5. Kui aasta jooksul toimunud avariide arv on Poissoni jaotusega, siis parameetri λ väärtuseks on $\lambda = 1.5$. Kasutades valemit (1.4) saame järgmised üksikväärtuste (vastava avariide arvuga aastate) osakaalud:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.233	0.335	0.251	0.126	0.047	0.014	0.004

Tabel on lõplik, kuna väärtusi, mille osakaalus kolm esimest kohta peale koma on nullid, pole enam tabelisse lisatud. Tabeli täitmine on mugavam, kui kasutada seost

$$p_{k+1} = p_k \frac{\lambda}{(k+1)},$$

mis võimaldab iga järgneva osakaalu avaldada talle eelneva osakaalu kaudu.

See jaotustabel ütleb, et pikas vaatlusaluste aastate reas on umbes veerand (st 23.3%) selliseid, kus antud teelõigul pole ühtegi avariid, umbes viiendik (st 19.1%) selliseid, kus antud teelõigul on kolm või rohkem avariid jne. Hoides jaotustabelit silmade ees, saame silmapilk leida mistahes väärtuse või väärtuste vahemiku osakaalu.



Vaatame ka valemi (1.4) kasutamist binoomjaotuse lähendamisvalemiga. Seda võib teha siis, kui meil on lõplik, kuid küllalt pikk katseseeria, kusjuures "edu" võimalikkus on küllalt väike. Praktilise kriteeriumina selle jaoks, mida tähendab "küllalt", võime kasutada tingimust: katseseeria pikkuse ja "edu" võimalikkuse korrutis peab olema väiksem viiest; $mp < 5$. Lähendamiseks kasutatava Poissoni jaotuse parameetri väärtuseks tuleb valida korrutis mp , $\lambda = mp$.

Näide 1.12. Oletame, et raamatu köitmisel on praagi tekkimise võimalikkus väljendatud arvuga 0.003, köitmise tulemus on iga raamatu korral sõltumatu teiste raamatute köitmise tulemusest. Võtame vaatluse alla praakeksemplaride arvu 1000-lises tiraažis. Vastavalt tehtud eeldustele on praakeksemplaride arv X binoomjaotusega, $X \sim B(1000, 0.003)$. Eespool sõnastatud lähendamisreeglit kasutades on selle binoomjaotuse jaotustabel samasugune nagu Poissoni jaotuse $P(3)$ jaotustabel ($\lambda = 1000 \cdot 0.003 = 3$). Leiamegi meile vajaliku jaotustabeli, kasutades valemit (1.4).

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.050	0.149	0.224	0.224	0.168	0.101

x_i	6	7	8	9	10
p_i	0.050	0.021	0.008	0.003	0.001

Nii on kõikide 1000-eksemplariste tiraažide hulgas vähemalt ühte praakeksemplari sisaldavate tiraažide osakaal

$p(1 < X < \infty) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0.05 = 0.95$
ehk 95%, kolme kuni viit praakeksemplari sisaldavate tiraažide osakaal

$p(3 \leq X \leq 5) = 0.224 + 0.168 + 0.101 = 0.493$
ehk 49,3%.



1.3. Pidevad jaotused

Nende jaotuste korral, mida oleme tundma õppinud, on tunnusel olnud suhteliselt vähe väärtusi – võimalike väärtuste arv on kas lõplik või loenduv.

Tunnust, mille väärtuseks võib olla etteantud lõigu iga punkt, nimetatakse *pidevaks*. Pideval tunnusel on väga palju erinevaid väärtusi. Tema väärtusi on rohkem kui naturaalarve, neid pole enam võimalik loendada (iga kahe väärtuse vahel asub teoreetiliselt lõpmata palju väärtusi).

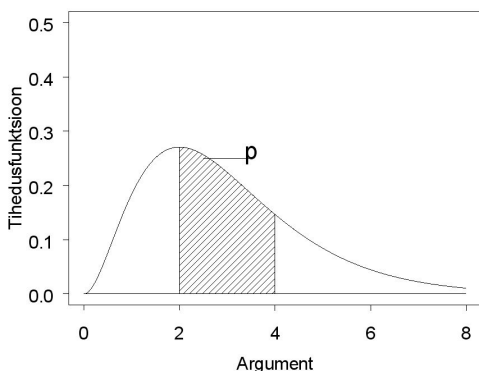
Pideva tunnuse jaotustabeli esitamisel peame tingimata kasutama väärtusintervalle. Siin aga tekib probleem – intervallid jaotustabelis on vabalt valitavad, erinevates olukordades sobivad erinevad intervallid. Pideva tunnuse jaotus tuleks esitada niisuguse vahendi abil, mis kannaks endas kõikvõimalike intervallide osakaale üheaegselt.

1.3.1. Tihedusfunktsioon

Niisuguseks vahendiks on matemaatikute poolt kasutusele võetud tihedusfunktsioon. *Tihedusfunktsioon* on mittenegatiivne funktsioon, mis kannab kaasas kõikvõimalike intervallide osakaale. Mõistmaks, kuidas on see võimalik, heidame pilgu joonisele 1.7. Sellel joonisel viirutatud pindala on võrdne intervalli (2, 4) osakaaluga vastava tihedusfunktsiooni abil kirjeldatud üldkogumis. See ongi tihedusfunktsiooni määrav omadus – intervalli kohale jääv tihedusfunktsiooni alune pindala on võrdne selle intervalli osakaaluga üldkogumis.

Piltlikult öeldes näitab tihedusfunktsioon, millise kihina tunnuse väärtused arvteljele ladestuksid, kui me võlukepikese abil

saaksime muuta kõik tunnuse väärtused arvutlele langevateks helvesteks. Näiteks joonisel 1.7. toodud tihedusfunktsioon erineb nullist ainult argumendi positiivsete väärtuste korral, seega võib vastav tunnus omandada ainult positiivseid väärtusi. Kuna tihedusfunktsioon on väärtuste 1 ja 4 vahel suhteliselt "kõrgel", on tunnuse väärtused sageli selles vahemikus. Mida kaugemale paremale me väärtusest "neli" liigume, seda harvemini me vastavaid väärtusi üldkogumis kohtame.



Joonis 1.7. Tihedusfunktsioon

Tihedusfunktsioon erineb nullist ainult selles piirkonnas, kus vastav pidev tunnus võib väärtusi omandada. Kogu tihedusfunktsiooni alla jääv pindala võrdub ühega, st $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Joonisel kujutatud omadust esitab valem

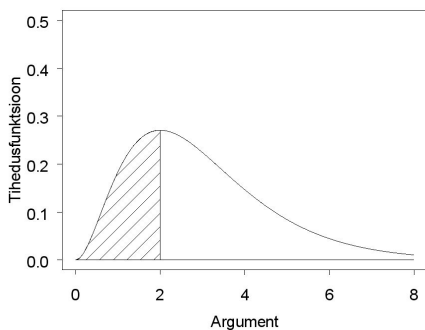
$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

1.3.2. Jaotusfunktsioon

Pideva jaotuse praktiliseks kasutamiseks on tihedusfunktsioonist mugavam jaotusfunktsioon $F(t)$. *Jaotusfunktsioon* on määratud võrdusega

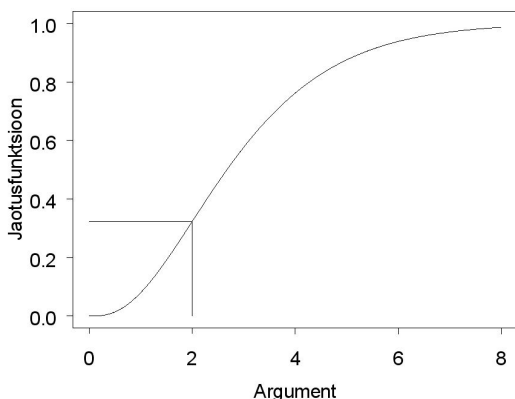
$$F(t) = p(-\infty < X < t),$$

st jaotusfunktsiooni väärtuseks kohal t on kõigi arvust t väiksemate väärtuste osakaal. Seda jaotusfunktsiooni määravat võrdust illustreerib joonis 1.8 – joonisel viirutatud pindala on võrdne ”kaks” väiksemate väärtuste osakaaluga üldkogumis, see pindala määrab jaotusfunktsiooni väärtuse kohal ”kaks”, $F(2)$.



Joonis 1.8. Jaotusfunktsiooni määrav pindala

Sisuliselt on jaotusfunktsioon $F(t)$ kõver, mis iseloomustab intervalli $(-\infty, t)$ osakaalu kasvu argumenti t kasvades. Jaotusfunktsioon kannab endaga kaasas intervallide kumulatiivseid osakaale. Joonisel 1.7 kujutatud tihedusfunktsioonile vastab joonisel 1.9 kujutatud jaotusfunktsioon.

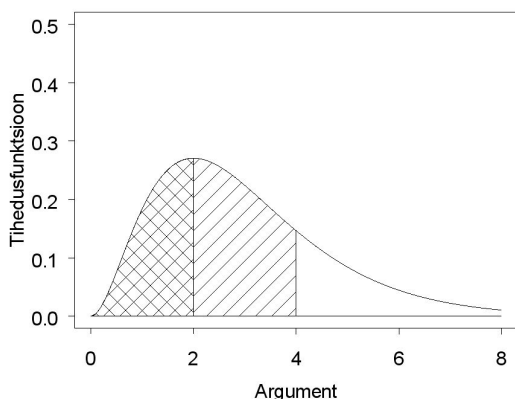


Joonis 1.9. Jaotusfunktsioon

Jaotusfunktsiooni määratlusest järeldub võrdus

$$p(a \leq X < b) = F(b) - F(a), \quad (1.5)$$

st teades jaotusfunktsiooni väärtusi intervalli otspunktides, saame leida intervalli osakaalu. Miks niisugune võrdus kehtib, selgitab joonis 1.10. Tõepoolest, kui lahutame b -st väiksemate väärtuste osakaalust a -st väiksemate väärtuste osakaalu, jääb järele a ja b vahel asuvate väärtuste osakaal.



Joonis 1.10. Lõigu osakaalu arvutamine
jaotusfunktsiooni abil

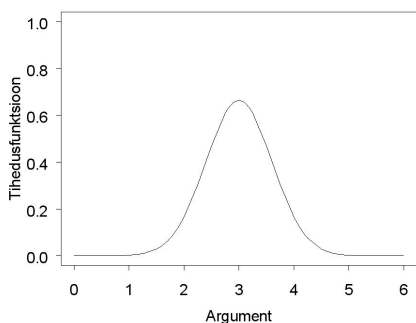
Kui valem tundub keerulisena, võib veel kord üle vaadata näited 1.2 ja 1.3 – teades väärtusklasside kumulatiivseid osakaale, saame arvutada samade väärtusklasside osakaalud.

Jaotusfunktsiooni määrangust järelduvad järgmised omadused:

- 1) $0 \leq F(t) \leq 1$;
- 2) $F(-\infty) = 0$ ja $F(\infty) = 1$;
- 3) $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$;
- 4) $F'(t) = f(t)$.

1.3.3. Normaaljaotus

Tutvume nüüd pideva tunnuse kirjeldamiseks sobiva jaotustabelite perekonnaga – normaaljaotusega. Selle jaotuse nimi avab tema olemuse – jaotus kirjeldab tunnust, mille käitumine on "normaalne". Väga paljude, eriti elusobjekte kirjeldavate tunnuste normaalne käitumine on aga järgmine. Tunnusel on olemas teatav keskmine tase. Selle keskmise taseme lähedased väärtused esinevad tihti, suuri kõrvalekaldeid keskmisest tasemest on harva. Mõlemasuunalised kõrvalekalded keskväärtusest on võrdvõimalikud. Niisuguse käitumise korral on keskmise taseme läheduses asuvate intervallide osakaal suur, keskmisest tasemest kaugel asuvate intervallide osakaal aga väike. Järelikult peab normaaljaotuse tihedusfunktsiooni tüüpkuju olema järgmine



Joonis 1.11. Normaaljaotuse tihedusfunktsioon

Normaaljaotuse tihedusfunktsioon määratakse valemiga

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.6)$$

Nagu varemgi, tähistatakse tähega e naturaalogaritmi alust (irratsionaalarv 2.71828...), tähega π aga ringjoone übermõõdu ja läbimõõdu suhet, irratsionaalarvu 3.1415927....

Tihedusfunktsioon sõltub kahest arvulisest parameetrist μ (jaotuse keskväärtus) ja σ (jaotuse standardhälve). Parameeter μ määrab selle lõigu keskpunkti, millel tunnus praktiliselt väärtusi omandab. Tihedusfunktsioon on punkti μ suhtes

sümmeetriline ja omab selles punktis kõige suuremat väärtust. Parameeter σ määrab tunnuse väärtuse hajutatuse keskvärtuse suhtes. Keskvärtusest μ kaugemal kui 3σ asuvate lõikude osakaal on mikroskoopiline – vahe $(x - \mu)^2$ kasvades läheneb tihedusfunktsiooni väärtus kiiresti nullile.

Peame meeles: *parameetri μ väärtused ei ole kitsendatud, parameetri σ väärtus peab olema positiivne, $\sigma > 0$.*

Edaspidises tähistame lause ”tunnus X on normaaljaotusega parameetritega μ ja σ ” lühidalt

$$X \sim N(\mu, \sigma).$$

Valemiga (1.6) määratud tihedusfunktsiooni nimetatakse ka Gaussi kõveraks. Seda saksa matemaatiku Carl Friedrich Gaussi (1777-1855) järgi, kes esimesena rakendas nimetatud jaotust mõõtmisvigade kirjeldamisel. Nimetuse ”normaaljaotus” võttis kasutusele inglise matemaatik Carl Pearson.

Keskset kohta normaaljaotuste perekonnas omab standardne normaaljaotus, mille korral $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$. Seega on standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon määratud eeskirjaga

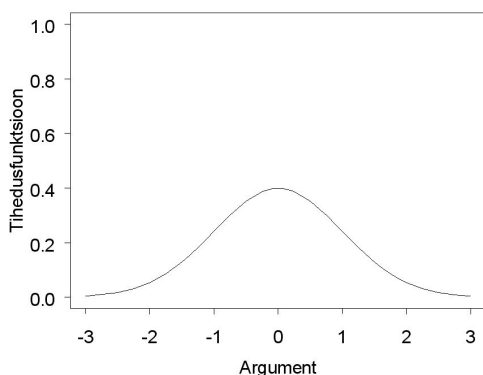
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Joonisel 1.12 asub standardse normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafik.

Standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni jaoks on kasutusel eritähis $\Phi(t)$.

Vastavalt eelmise punkti lõpus toodud valemile on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni väärtus määratud integraaliga

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

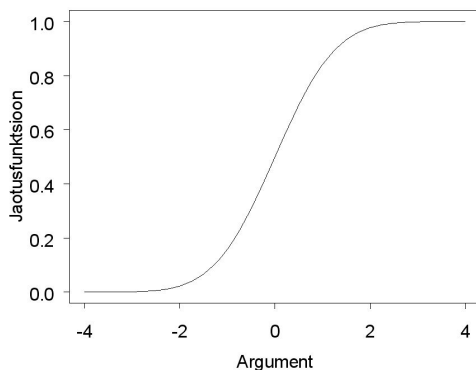


Joonis 1.12. Standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon

Joonisel 1.13 asub standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni graafik. Sellelt jooniselt saaksime iga argumendi väärtuse t jaoks leida vastava jaotusfunktsiooni väärtuse $\Phi(t)$. Praktiliseks kasutamiseks on joonis liialt ebatäpne, valem aga osutub arvutuslikult ebamugavalt keerukaks. Seetõttu esitatakse argumentide t vastav jaotusfunktsiooni väärtus tabelis (vt tabel B). Kuna normaaljaotuse sümmeetrilisuse tõttu kehtib võrdus

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t),$$

on selles tabelis jaotusfunktsiooni väärtused ainult positiivsete argumentide korral.



Joonis 1.13. Standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon

Sama tabel võimaldab ka ükskõik milliste parameetritega normaaljaotuse jaotusfunktsiooni väärtuste leidmist.

Tähistame $N(\mu, \sigma)$ jaotusfunktsiooni sümboliga $F(t)$. See jaotusfunktsioon avaldub standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni kaudu järgmiselt

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right). \quad (1.7)$$

Valemis kasutatud argumendi teisendust $\frac{t - \mu}{\sigma}$ nimetatakse *standardiseerivaks teisenduseks*.

Arvestades valemit (1.5), saame intervalli (a, b) osakaalu normaaljaotuse $N(\mu, \sigma)$ jaoks määrata valemiga

$$p(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right). \quad (1.8)$$

Kuna pideva jaotuse korral iga üksikväärtuse osakaal on null, siis kehtivad võrdused

$$p(a < X < b) = p(a \leq X < b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X \leq b).$$

Standardne normaaljaotus on sümmeetriline 0-punkti suhtes, seetõttu määrab jaotusfunktsiooni väärtuse negatiivse argumendi korral võrdus

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t). \quad (1.9)$$

Nagu kõik varem tundma õpitud jaotused, kannab ka normaaljaotus endas arvutat hulka jaotustabeleid. Jaotustabeli lahti pakkimiseks peame esmalt määrama parameetreid μ ja σ arvulised väärtused ning seejärel intervallid, mida jaotustabelis kasutame.

Näide 1.13. Olgu meil teada, et 5-aastaste poiste pikkust kirjeldab normaaljaotus keskväärtusega 130 cm ja standardhällbega 2 cm. Kirjutame välja selle tunnuse jaotustabeli, kasutades väärtusintervalle $(-\infty, 127]$, $(127, 129]$, $(129, 131]$, $(131, 133]$, ja $(133, \infty)$.

Arvutustöö hõlbustamiseks koondame standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni väärtused meid huvitavate intervallide otspunktides abitabelisse.

x_i	$-\infty$	127	129	131	133	∞
$\frac{(x_i - \mu)}{\sigma}$	$-\infty$	-1.5	-0.5	0.5	1.5	∞
$\Phi\left(\frac{(x_i - \mu)}{\sigma}\right)$	0	0.0668	0.3085	0.6915	0.9332	1

Jaotustabeli välja kirjutamisel kasutame valemit (1.8): intervalli osakaaluks on intervalli otspunktides määratud jaotusfunktsiooni väärtuste vahe.

Δ_i	$(-\infty, 127)$	$[127-129)$	$[129-131)$	$[131-133)$	$[133, \infty)$
p_i	0.067	0.242	0.382	0.242	0.067

Juhul, kui vajame teistsuguseid intervale – näiteks selgub, et valmisriiete kasv määratakse kindlate 4cm pikkuste intervallidega ja me vajaksime igale kasvule vastava intervalli osakaalu üldkogumis – saame jaotustabeli üsna lihtsalt ümber arvutada. Valime uued väärtusintervallid $(-\infty, 124]$, $(124, 128]$, $(128, 132]$, $(132, 136]$, ja $(136, \infty)$. Pakime oma normaaljaotuse lahti uusi intervale kasutavaks jaotustabeliks. Arvutustöö hõlbustamiseks koondame standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni väärtused meid huvitavate intervallide otspunktides abitabelisse.

x_i	$-\infty$	124	128	132	136	∞
$\frac{(x_i - \mu)}{\sigma}$	$-\infty$	-3.0	-1.0	1.0	3.0	∞
$\Phi\left(\frac{(x_i - \mu)}{\sigma}\right)$	0	0.0013	0.1537	0.8413	0.9987	1

Jaotustabeli väljakirjutamisel kasutame valemit (1.8): intervalli osakaaluks on intervalli otspunktides määratud jaotusfunktsiooni väärtuste vahe.

Δ_i	$(-\infty, 124)$	$[124-128)$	$[128-132)$	$[132-136)$	$[136, \infty)$
p_i	0.0013	0.1524	0.6876	0.1524	0.0013

Nii saame ühe ja sama normaaljaotuse jaoks lahti pakkida kuitahes palju erinevaid jaotustabeleid – tarvitseb meil vaid valida tabelis kasutatavad väärtuste intervallid ja edasi täiesti standardsel viisil kasutada valemit (1.8).



Peame meeles: ükskõik, millised oleksid normaaljaotuse parameetrite μ ja σ arvulised väärtused,

intervalli $\mu - \sigma, \mu + \sigma$ osakaal on 0.6826,

intervalli $\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$ osakaal on 0.9544,

intervalli $\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$ osakaal on 0.9974.

Näide 1.14. Olgu meil teada, et Stanford-Binet‘ testi (see on üks esimesi intelligentsusteste) hinnet kirjeldab normaaljaotus $N(100, 16)$. Siis

intervallis 84, 116 asub 68.26% testi hinnetest,

intervallis 68, 132 asub 95.44% testi hinnetest,

intervallis 52, 148 asub 99.74% testi hinnetest.



Praktikas võib aga nende osakaalude teadmisest jääda väheseks. Vaatame ühte pisut üldisemat ülesannet – kuidas leida parameetri μ suhtes sümmeetrilist intervalli, mille osakaaluks on etteantud arv $1 - \alpha$.

Kirjeldagu tunnust normaaljaotus $N(\mu, \sigma)$. Olgu $1 - \alpha$ meie valitud väärtus. Leiame niisuguse k , et intervalli $(\mu - k, \mu + k)$ osakaal oleks parajasti $1 - \alpha$.

Selle intervalli leidmiseks kasutame valemeid (1.8) ja (1.9). Vastavalt neile valemitele

$$p(\mu - k < X < \mu + k) = \Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-k}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - 1,$$

siit aga saame k väärtuse määramiseks tingimuse

$$2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) - 1 = 1 - \alpha,$$

kust jõuame võrduseni

$$\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

See võrdus annab ette jaotusfunktsiooni väärtuse ja nõuab argumenti leidmist, mille korral niisugune väärtus saavutatakse.

Kasutades jaotusfunktsiooni väärtuste tabelit, saab väärtusele $1 - \frac{\alpha}{2}$ vastava argumenti leida. Tähistame ta sümboliga $\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}$. Meile vajaliku k määramiseks saame valemi

$$k = \sigma \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}. \quad (1.10)$$

Näide 1.15. Vaatame eelmises näites nimetatud testi, mida kirjeldas normaaljaotus $N(100, 16)$. Olgu $1 - \alpha = 0.9$, st otsime intervalli, milles asuks 90% testi hinnetest. Siis

$$\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right) = 1 - 0.05 = 0.95,$$

ja kasutades standardiseeritud normaaljaotuse jaotusfunktsiooni tabelit, saame tingimuse

$$\frac{k}{\sigma} = 1.64,$$

kust k väärtuseks saame

$$k = 16 \cdot 1.64 = 26.24.$$

Intervalliks, mille osakaaluks on 0.9 (sisaldab 90% testi hinnetest), on seega intervall $(73.76, 126.24)$.

♡

Jaotus kirjeldab üldkogumit detailselt, nii täpselt, nagu see erinevaid väärtusi omava tunnuse korral on võimalik. Punktis 1.4 tutvume veel mõnede jaotuse arvuliste karakteristikutega, mis iseloomustavad üldkogumit.

1.3.4. Normaaljaotuse tekkemehhanism

Loetleme tingimused, mille täidetuse korral kujuneb tunnuse jaotuseks normaaljaotus:

- 1) tunnuse väärtus kujuneb paljude üksteisest sõltumatult ja nõrgalt mõjuvate faktorite toimel;
- 2) tunnuse väärtuste suurenemine üle keskmise taseme või jäämine alla keskmist taset mõjuvate faktorite toimel on võrdvõimalik.

Vaatame toodud tingimuste illustreerimiseks ühte lihtsat näidet.

Näide 1.16. Olgu meil tegemist testiga, milles on 10 küsimust, igale küsimusele on antud kaks vastusevarianti. Vaatame olukorda, kus vastaja ei orienteeru mitte mingil määral küsimustes ja valib vastused täiesti huupi. Nagu varasemast teame, on sel juhul õigete vastuste arv binoomjaotusega, $X \sim B(10, 0.5)$. Me saame kohe kirjutada selle binoomjaotuse jaotustabeli:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246

x_i	6	7	8	9	10
p_i	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001

Kuna selles jaotustabelis on üsna palju väärtusi, võime ta ümber kirjutada ka väärtusintervalle kasutades:

Δ_i	[0, 1.5)	[1.5, 3.5)	[3.5, 6.5)	[6.5, 8.5)	[8.5, 10]
p_i	0.011	0.161	0.656	0.161	0.011

Tuletame nüüd meelde binoomjaotuse tekkemehhanismi. Binoomjaotusega tunnuse väärtuseks on edukalt lõppenud katsete arv etteantud pikkusega seerias. Üksikkatsete tulemused on sõltumatud ja kui seeria on pikk, üks tulemus mõjutab lõpptulemust vähe. Vaatame binoomjaotust, mille korral nii "edu" kui ka "ebaõnn" on võrdvõimalikud.

Nimetame iga üksikkatse tulemust tunnuse väärtust kujundavaks faktoriks. Loeme nüüd veel kord üle normaaljaotuse tekkimise eeldused. Nad on teatud määral ka meie tunnuse korral täidetud – reservatsiooniga, et kümme on juba palju. Normaaljaotuseks, mis kõige paremini selle jaotustabeliga kokku sobib, on normaaljaotus $N(5, 1.58)$.

Leiame viimasena toodud jaotustabeli väärtusintervallide osakaalud seda normaaljaotust kasutades:

Δ_i	[0, 1.5)	[1.5, 3.5)	[3.5, 6.5)	[6.5, 8.5)	[8.5, 10]
p_i	0.048	0.126	0.652	0.126	0.048

Näeme, et erinevused piirduvad paari sajandikuga. Praktiliselt võime eespool toodud binoomjaotust tõepoolest lähendada valitud normaaljaotusega.

♡

Peame meeles: kui binoomjaotuse parameetrite korrutis pole väiksem viiest, $mp \geq 5$, võime kõikide meid huvitavate intervallide osakaalude arvutamisel kasutada normaaljaotust $N(mp, \sqrt{mp(1-p)})$.

Selle reegli saab esitada ka valemi abil. Kui $X \sim B(m, p)$ ja $mp \geq 5$, siis iga intervalli (a, b) korral

$$p(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}\right).$$

Ka binoomjaotuse üksikväärtuste osakaalud on lähendatavad normaaljaotusega – väärtuse k osakaal p_k on ligikaudu võrdne vastava normaaljaotuse tihedusfunktsiooniga kohal k , $f(k)$,

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi mp(1-p)}} e^{-\frac{(k-mp)^2}{2mp(1-p)}}.$$

Edaspidi vajame mõnedes konkreetsetes ülesannetes ka binoomjaotuse jaoks keskväärtuse suhtes sümmeetrilist intervalli, mille osakaaluks oleks etteantud arv $1 - \alpha$. Olgu $X \sim B(m, 0.5)$. Kasutame soovitava intervalli määramiseks valemit (1.10),

$$k = 0.5 \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{m}, \quad (1.11)$$

kust saame meile vajaliku intervalli

$$\left[\frac{m}{2} \left(1 - \frac{\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{m}}\right), \frac{m}{2} \left(1 + \frac{\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{m}}\right) \right].$$

1.3.5. Standardiseerimine. Protsentiilid

Kuna normaaljaotuse praktilisel kasutamisel minnakse alati üle standardiseeritud normaaljaotusele, kasutatakse ka tunnuste otsestelt mõõdetud väärtuse asemel sageli standardiseeritud väärtust. Kui tegemist on testi hindega, mille väärtust hinnatakse pallides, nimetatakse standardiseeritud väärtust ka standardiseeritud palliks. Kui tunnuse kirjeldamiseks sobib normaaljaotus

$N(\mu, \sigma)$ ja tunnuse esialgse väärtuse tähistame sümboliga x , siis *standardiseeritud väärtus* z määratakse eeskirjaga

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Standardiseerimine teeb omavahel võrreldavateks erinevatel skaaladel mõõdetud suurused.

Näide 1.17. Suure hulga katsetulemuste analüüsimise alusel valiti Stanford-Binet' testi hinde kirjeldamiseks normaaljaotus $N(100, 16)$. Leiame hinnetele 100, 84, 132 ja 150 vastavad standardiseeritud pallid:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{100 - 100}{16} = 0; & z_2 &= \frac{84 - 100}{16} = -1; \\ z_3 &= \frac{132 - 100}{16} = 2; & z_4 &= \frac{150 - 100}{16} = 3.125. \end{aligned}$$



Standardiseeritud palli kumulatiivset osakaalu on väga lihtne leida – see on ju standardiseeritud pallile vastav standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni väärtus. Sisuliselt on see nende vastajate osakaal, kelle standardiseeritud pall on väiksem etteantud väärtusest.

Näide 1.18. Leiame eelmises näites arvutatud standardiseeritud väärtuste kumulatiivsed osakaalud:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0.5 && \text{ehk } 50\%; \\ \Phi(-1) &= 0.1587 && \text{ehk } 15.87\%; \\ \Phi(2) &= 0.9772 && \text{ehk } 97.72\%; \\ \Phi(3.1) &= 0.9990 && \text{ehk } 99.9\%. \end{aligned}$$



Praktikas võib sageli ette tulla ka pöördülesanne – valitakse kumulatiivne osakaal ja tuleb leida sellele vastav standardiseeritud pall. Niisugune ülesanne on sama tabeli abil lihtsalt lahendatav. Kui osakaal esitatakse protsentides, nimetatakse vastavat standardiseeritud väärtust *protsentiilik*s (vastasel juhul aga *kvantii*lik).

Näide 1.19. Leiame 90-, 10- ja 95-protsentiilid (ehk 0.9-, 0.1- ja 0.95- kvantiilid):

$$z_{0.9} = 1.28;$$

$$z_{0.1} = -1.28;$$

$$z_{0.95} = 1.64.$$



1.4. Jaotuse keskväärtus ja dispersioon

Siiani piirdusime keskmise taseme ja hajuvuse intuiitivsete mõistetega. Anname nüüd neile mõistetele konkreetsema sisu. Olgu diskreetne jaotus antud jaotustabeliga $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_m, p_m)$. Selle jaotuse *keskväärtuseks* nimetatakse arvu

$$EX = \sum_{i=1}^m x_i p_i.$$

Keskväärtus näitab keskmist taset, mille ümbruses tunnuse väärtused paiknevad.

Näide 1.20. Olgu tunnus kaheväärtuselise jaotusega, $X \sim B(1, p)$. Arvutame selle jaotuse keskväärtuse

$$EX = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Kui teame parameetri p konkreetset arvulist väärtust, saame keskväärtuse arvulise väärtuse välja kirjutada. Näiteks, kui $p = 0.5$, siis $EX = 0.5$. 

Olgu tunnus X pidev ja kirjeldagu teda tihedusfunktsioon $f(x)$. Tunnuse keskväärtuseks nimetatakse arvu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Seega, kui $X \sim N(\mu, \sigma)$, siis

$$EX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$$

Keskvärtuse määratlusest järelduvad järgmised keskvärtuse omadused:

- 1) $E(aX) = aEX$;
- 2) $E(X + Y) = EX + EY$.

Vaatame näidet nende omaduste kasutamise kohta.

Näide 1.21. Olgu uuritav tunnus binoomjaotusega $B(m, p)$. Binoomjaotusega tunnuse väärtuseks on "edukate" katsete arv m katsest koosnevas seerias. Seame igale katsele vastavusse kaheväärtuselise tunnuse, mille väärtuseks on "1", kui katse on "edukas" ja "0", kui katse pole "edukas". Tähistame i -ndale katsele vastavusse seatud kaheväärtuselise tunnuse sümboliga X_i , siis $X = \sum_{i=1}^m X_i$.

Leiame nüüd keskvärtuse omadustele tuginedes binoomjaotuse keskvärtuse:

$$EX = E\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m EX_i = p + p + \dots + p = mp.$$

Teades binoomjaotuse parameetrite m ja p arvulisi väärtusi, saame tunnuse keskvärtuse arvuliselt leida. Vaatame näiteks binoomjaotust $B(4, 0.5)$. Selle keskvärtuseks on arv

$$EX = 4 \cdot 0.5 = 2.$$

Leiame veel näites 1.8 kirjeldatud kaartide äraarvamise katse korral õigesti mõistatatud kaartide arvu keskvärtuse

$$EX = 5 \cdot 0.20 = 1.$$

Näeme, et viiekatselises seerias on keskmiselt üks juhuslikult õigesti valitud kaart.



Poissoni jaotuse keskvärtuse arvutamine toimub eelpool toodud valemite järgi, kuid nõuab pisut rohkem tehnilist tööd. Peame lihtsalt meeles, et Poissoni jaotuse korral $EX = \lambda$.

Tunnuse väärtuste keskmist taset kirjeldab ka mediaan. Mediaan on väärtus, millest vasakule ja paremale jääva lõpmatu intervalli osakaal on ühesugune, st tähistades mediaani sümboliga M_e ,

$$p(X \leq M_e) = p(M_e \leq X).$$

Mediaani kasutamise teeb ebamugavaks see, et diskreetse jaotuse korral ei ole mediaani väärtused alati üheselt määratud.

Normaaljaotuse mediaaniks on keskvärtus.

Jaotuse hajuvuse näitajaks on keskvärtuse suhtes arvutatud hälbe ruudu keskvärtus. Seda arvu nimetatakse *dispersiooniks* DX ,

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Dispersiooni arvutamiseks saab anda veel teise, praktiliseks kasutamiseks pisut mugavama eeskirja:

$$DX = EX^2 - (EX)^2.$$

Dispersioon on arv, mis näitab, kui hajutatud on tunnuse väärtused keskvärtuse suhtes.

Ruutjuurt tunnuse dispersioonist nimetatakse *standardhälbeks* σ ,

$$\sigma = \sqrt{DX}.$$

Standardhälvet mõõdetakse sama ühikuga nagu tunnuse enda väärtusi, tunnuse dispersiooni aga mõõdetakse selle ühiku ruuduga.

Näide 1.22. Olgu tunnus kaheväärtuselise jaotusega, $X \sim B(1, p)$. Leiame selle jaotuse dispersiooni. Tunnuse ruudu keskvärtuse arvutame samuti nagu diskreetse tunnuse keskvärtuse:

$$EX^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 p_i = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$

ja siit

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Kaheväärtuselise jaotuse standardhälve avaldub jaotuse parameetri kaudu järgmiselt:

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$$

Kui teame parameetri konkreetset arvulist väärtust, saame leida dispersiooni ja standardhälbe väärtused arvuliselt. Kui näiteks $p = 0.5$ (niisugune parameeter esines meil näites 1.5 mündiviske tulemuse kirjeldamisel), siis

$$DX = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

ja

$$\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5.$$



Olgu tunnus pidev ja kirjeldagu teda tihedusfunktsioon $f(x)$.
Tunnuse ruudu keskväärtuseks nimetatakse arvu

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

Olgu näiteks $X \sim N(\mu, \sigma)$. Siis

$$EX^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 + \mu^2$$

ja

$$DX = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Dispersiooni määratlusest järelduvad järgmised dispersiooni omadused:

- 1) kui a on konstant, siis $D(aX) = a^2 DX$;
- 2) kui tunnused X ja Y on sõltumatud, siis

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Kuigi sõltumatusel on täiesti konkreetne matemaatiline sisu, piirdume siin intuitiivse sõltumatuse mõistega – tunnused on sõltumatud, kui see, millise väärtuse omandab üks tunnus ei mõjusta mingil moel seda, millise väärtuse omandab teine tunnus. Vaatame näidet nende omaduste kasutamise kohta.

Näide 1.23. Olgu tunnus X binoomjaotusega, $X \sim B(m, p)$. Leiame dispersiooni. Kasutades näites 1.21 toodud binoomjaotuse esitust ja dispersiooni teist omadust, võime kirjutada

$$DX = D\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m DX_i = mp(1 - p).$$

Binoomjaotuse standardhälve aga avaldub parameetrite kaudu järgmiselt

$$\sigma = \sqrt{mp(1 - p)}.$$

Teades binoomjaotuse parameetrite m ja p arvulisi väärtusi, saame dispersiooni ja standardhälbe arvuliselt leida. Näiteks, kui $X \sim B(5, 0.2)$ (niisuguse binoomjaotuse juurde jõudsime näites 1.5 – kaartide valiku näites), siis

$$DX = 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8$$

ja

$$\sigma = \sqrt{0.8} = 0.894.$$



Poissoni jaotuse dispersiooni arvutamine toimub eespool toodud valemite järgi, kuid nõuab pisut rohkem tehnilist tööd. Peame lihtsalt meeles, et Poissoni jaotuse korral $DX = \lambda$.

Nüüd oleme endale selgeks teinud kõik, mida tuleb teada jaotusest.

Ülesanded 1.

1. Lisas 2 on toodud rühma kaugõppepsühholoogide küsitlemisel saadud andmed. Koostada selle rühma jaoks järgmiste tunnuste jaotustabel:
 - a) vanus;
 - b) palk;
 - c) laste arv perekonnas;
 - d) lõpetatud kõrgkool;
 - e) tööstaaž.

Millised neist tunnustest on pidevad, millised diskreetsed? Joonistada jaotustabelitele vastavad jaotushistogrammid või jaotuspolügoonid. Arvutada kumulatiivsed osakaalud ning joonistada kumulatiivsed jaotuspolügoonid.

2. Leida lisas 2 toodud tunnuste hulgast kaheväärtuseline tunnus ja koostada selle jaotustabel.
3. Olgu katseks kaardi tõmbamine 52-kaardilisest kaardipakist. Loeme "eduks" ärtu masti kaardi saamise. Koostada jaotustabel kõikvõimalike katsetulemuste jaoks.
4. Olgu katseks 3 kaardi tõmbamine 52-kaardilisest kaardipakist. (Nõuame, et iga kord enne uue kaardi võtmist pannakse valitud kaart tagasi ja kaardid segatakse – nii on katsetingimused iga kaardi valimisel ühesugused). Loeme "eduks" ärtu masti kaardi saamise. Koostada "edukate" katsete arvu jaotustabel.
5. Olgu $X \sim B(4, 0.3)$. Koostada selle tunnuse jaotustabel.
6. Vaatame kolmelapselisi perekondi. Oletame, et lapse sugu on juhuslik, kusjuures poisi või tütarlapse sündimine on võrdvõimalik. Koostada poiste arvu jaotustabel kolmelapselistes perekondades. Leida nende kolmelapseliste perekondade osakaal, kus on vähemalt üks poeg. Leida nende kolmelapseliste perekondade osakaal, kus pole rohkem kui üks tütar.
7. Kirjutada välja binoomjaotusele $B(3, 0.9)$ vastav jaotustabel.
8. Kirjutada välja Poissoni jaotusele $P(0.3)$ vastav jaotustabel. Leida intervallide $(0, 1]$ ja $[2, 4]$ osakaalud.

9. Leida ülesannetes 3 – 8 nimetatud jaotuste keskväärtused.
10. Pakkida lahti üks standardsele normaaljaotusele vastav jaotustabel, valides väärtusklassid vastavalt oma soovile.
11. Olgu tunnus normaaljaotusega $N(20, 5)$. Kirjutada välja üks sellele tunnusele vastav jaotustabel, intervallid valida vabalt.
12. Suuremahulise antropoloogilise uurimuse põhjal on teada, et 7-aastaste poiste keskmiseks pikkuseks on 138 cm standardhällbega 4 cm. Millise osakaaluga tuleks esimese klassi poiste jaoks valmistada ülikondi, mis on ette nähtud pikkustele 132–136 cm, 136–140 cm, 140–144 cm?
13. Leida lisas 2 toodud tunnuste hulgast tunnus, mille kirjeldamiseks võiks sobida normaaljaotus. Kirjutada välja selle tunnuse jaotustabel ja joonistada jaotuspolügoon. Kas see jaotustabel kinnitab oletust normaaljaotuse kasutatavuse kohta?
14. Koostada binoomjaotusele $B(20, 0.5)$ vastav jaotustabel, lähendades seda jaotust normaaljaotusega. Tabelis kasutatavad väärtusintervallid valida vabalt.
15. Olgu $X \sim B(50, 0.4)$. Leida intervalli (15, 25) osakaal sellise jaotuse korral.
16. Olgu teada, et testi hinde kirjeldamiseks sobib normaaljaotus $N(65, 10)$. Leida hinnetele 50, 70, 45 ja 69 vastavad standardiseeritud pallid.
17. Olgu teada, et testi hinde kirjeldamiseks sobib normaaljaotus $N(65, 10)$. Leida 10-, 25- 50- ja 75-protsentiilid.

2. VALIM

Eelmises peatükis tutvusime mõnede matemaatiliste mudelitega üldkogumi kirjeldamiseks, tunnuse tekkemehhanismi teades võime valida sobiva matemaatilise mudeli. Paraku ei määra aga tunnuse tekkemehhanism enamasti jaotuse parameetrite arvulisi väärtusi. Kõiki üldkogumi objekte üle mõõta pole võimalik. Mida teha?

Sellest olukorrast on ainult üks loomulik väljapääs: mõõta üle niipalju üldkogumi objekte, kui võimalikuks osutub. Mõõtmiseks valitud objektid moodustavad valimi.

Kuidas valida objekte valimisse? Ainus valikumeetod, mis garanteerib objektiivse informatsiooni saamise üldkogumi kohta, on juhuslik valik. *Valimisse kuuluvad objektid tuleb valida juhuslikult.* Igal üldkogumi objektil peab olema võrdne võimalus valitud saada.

Milleks kasutada valimit? Meie põhiliseks huviobjektiks on üldkogum. Valimi põhjal tuleb teha järeldusi üldkogumi kohta. Need järeldused on induktiivsed – osalise informatsiooni põhjal peame taastama tervikliku pildi. Niisugused järeldused ei saa olla vääramatult õiged – informatsiooni on selleks liiga vähe. Matemaatiline statistika töötab välja meetodid kõige ohutumate järelduste tegemiseks. Ohutute selles mõttes, et andmed kasutatakse ära otstarbekalt, risk eksida otsuse tegemisel muudetakse võimalikult väikeseks, seda riski on võimalik arvuliselt hinnata. Otsuse langetamise reeglid on objektiivsed – kõik, kes kasutavad ühtesid ja samu andmeid ning valivad ühesuguse eksimise riski, teevad ühe ja sama järelduse.

Järgnevas tutvume matemaatilise statistika meetoditega järelduste tegemiseks üldkogumi kohta. Nende meetodite olemuse mõistmiseks tuleb meil tundma õppida põhilist vahendit juhusliku katse kirjeldamiseks – tõenäosust.

2.1. Tõenäosus

Juhuslikuks nimetame katset, mille tulemus ei ole katsetingimustega üheselt määratud. Ühe ja sama juhusliku katse kordamisel võib saada erinevaid tulemusi. Juhuslikuks katseks on näiteks mündivise, kaardi valik kaardipakist, tunnuse väärtuse mõõtmine juhuslikult valitud üldkogumi objektil.

Juhusliku katse kirjeldamisel ei lähtuta üksikust katsetulemusest. Aluseks on seaduspärasus, mis ilmneb katse paljukordsel kordamisel: katsetulemuse *suhteline sagedus* on katse paljukordsel kordamisel *stabiilne*. (Suhteline sagedus on vastava tulemuse esinemiste arvu ja katsete arvu suhe.) Selles seaduspärasuses võib igaüks ise veenduda: võtke üks münt, visake seda sada korda (või ka rohkem kordi, kui aega jätkub) ja lugege ära, mitu korda langeb peale vapipool. Korrake niisugust viskeseeriat mõned korrad. Leidke iga seeria jaoks vapipoole pealelangemise suhteline sagedus. Mida pikem on katsete seeria, seda stabiilselt käitub suhteline sagedus.

Nimetame edaspidi väidet juhusliku katse tulemuse kohta *sündmuseks*. Kui pärast juhusliku katse teostamist väide osutub õigeks, siis ütleme, et vastav sündmus toimus.

Sündmuse suhtelise sageduse stabiilsuse teadvustamine toimus väga ammu. Inimkonnal on nimelt katsepolügoon, millel sooritatakse suure põnevusega suurtes kogustes ühesuguseid juhuslikke katseid – hasartmängud. Sealt pärineb ka nimetatud tähelepanek, mis matemaatikute huviorbiiti jõudis XVI sajandil. Loomulikult kerkis kohe küsimus, kuidas leida seda arvu, mille läheduses suhteline sagedus väärtusi omandab. Üsna pea leiti selleks ka sobivad reeglid, mis sajandite vältel on ennast praktikas õigustanud. Vastava reegli põhjal leitud arvu - teoreetilist prognoosi sündmuse toimumise suhtelisele sagedusele - nimetatakse sündmuse *tõenäosuseks*.

Kõige vanem ja kõige lihtsam reegel (meile piisab sellest täiesti) sündmuse tõenäosuse arvutamiseks kõlab järgmiselt: *sündmuse tõenäosuseks on soodsate võimaluste arvu ja kõikide võimaluste arvu suhe*.

Kuna seda reeglit sisuliselt juba mõnes eelmise peatüki ülesandes

kasutasime, ei teki tema lahtimõtestamisel raskusi. Kõikide võimaluste arv – see on meie juhusliku katse võimalike tulemuste arv, soodsate võimaluste arv – juhusliku katse nende võimalike tulemuste arv, mille korral meid huvitav sündmus toimub.

Esitatud reegli kasutamisel on aga üks oluline kitsendus – reegel on kasutatav vaid siis, kui juhusliku katse tulemused on võrdvõimalikud ja nende arv on lõplik.

Näide 2.1. Vaatame eelmise paragrahvi lõpus toodud ülesannet 1.3 – võib-olla osutus ülesande lahendamine intuitsioonile toetudes liiga raskeks. Meie ees on 52-kaardiline pakk, millest valime huupi ühe kaardi. Milline on tõenäosus, et valitud kaart on ärtu masti?

Meie katsel on 52 võimalikku tulemust – igal kaardil on võimalus valitud saada. Soodsaid tulemusi on 13 – pakis on 13 ärtu masti kaarti. Tähistades meid huvitava tõenäosuse sümboliga $P(\check{A})$ (P – tõenäosuse traditsiooniline tähis, $\check{A}$ – ärtu masti saamine), võime kirjutada

$$P(\check{A}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

See arv määrab ka vastava tulemuse (ärtu masti saamise) osakaalu kõikide põhimõtteliselt võimalike katsetulemuste hulgal.



Näide 2.2. Vaatame näites 1.4 kirjeldatud üliõpilaste üldkogumit. Sisseastujaid oli 1236, neist 757 tütarlapsed. Leiame tõenäosuse, et huupi valitud üliõpilane on naissoost

$$P(N) = \frac{757}{1236} = 0.61.$$

Nagu näeme, on meid huvitavaks tõenäosuseks parajasti tütarlaste osakaal üldkogumis.



2.2. Valimi korrastamine

Jätame nüüd korraks tõenäosuse mõiste kõrvale (tõsi küll, mitte kauaks, varsti pöördume selle juurde tagasi) ja vaatame selles punktis valimit – uurija käsutuses olevat katsetulemuste hulka. Õpime võtteid, mida kasutatakse valimi korrastamiseks ja kirjeldamiseks.

Selleks, et neid võtteid oleks mugavam kirjeldada, kasutame ühte konkreetset valimit. Tegemist on küsitlusega, mis viidi läbi esimese kursuse tudengite hulgas. Muude andmete hulgas küsiti ka vastajalt esimese semestri jooksul garanteeritud sissetulekut kuus. Juhuslikult valitud 20 üliõpilase vastused olid järgmised

400, 500, 300, 500, 500, 400, 1000, 500, 300, 50,

500, 500, 300, 200, 150, 500, 200, 400, 500, 500.

Kuna tegemist on vastustega, mida verivärsked tudengid andsid oma õpingute esimesel nädalal, siis on need pigem hinnangud kui tegelikkus ja üsna loomulik, et summad esitatakse täissadades. Lepime kokku tähistada edaspidi valimi i -ndat elementi sümboli-ga x_i . Näiteks antud valimis $x_1 = 400$, $x_7 = 1000$ jne.

2.2.1. Variatsioonrida

Lihtsamaks võtteks valimi elementide korrastamisel on nende järjestamine. Järjestatud valimi elementide jada nimetatakse *variatsioonreaks*. Üaltoodud valimile vastab variatsioonrida

50, 150, 200, 200, 300, 300, 300, 400, 400, 400,

500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 1000.

Variatsioonreaks korrastatud andmed on ülevaatlikumad ja pakuvad pisut rohkem informatsiooni (kuidas hindate *oma* sissetulekut teie ees oleva variatsioonrea taustal?). Kui meil edaspidi on vaja rääkida i -ndast variatsioonrea elemendist, kasutame selle jaoks tähistust $x_{(i)}$. Väärtuse järjekorranumbrit (i) nimetatakse vastava väärtuse *astakuks*. Nii on näiteks väärtuse "150" astakuks 2 ehk $x_{(2)} = 150$. Väärtus "200" esineb variatsioonreas kaks korda, järjekorranumbritega 3 ja 4. Segaduste vältimiseks on korduvate väärtuste astakuks valitud nende järjekorranumbrite aritmeetiline keskmine. Niisiis on väärtuse "200" astakuks

$$\frac{3 + 4}{2} = 3.5.$$

Kirjutame variatsioonrea uuesti välja, lisades valimi iga elemendi alla tema astaku

50 150 200 200 300 300 300 400 400 400
 (1) (2) (3.5) (3.5) (6) (6) (6) (9) (9) (9)

500 500 500 500 500 500 500 500 500 1000.
 (15) (15) (15) (15) (15) (15) (15) (15) (15) (20)

Hiljem, arvkarakteristikute määratlemisel, on meil mugav kasutada veel ühte variatsioonrea elemendiga seotud suurust – variatsioonrea elemendi sügavust. *Sügavus* on sammude arv, mis on vajalik variatsioonrea lähemast otspunktist vastava elemendini jõudmiseks. Kirjutame eelpool toodud variatsioonrea elementide alla nende sügavuse

50 150 200 200 300 300 300 400 400 400
 (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

500 500 500 500 500 500 500 500 500 1000.
 (10) (9) (8) (7) (6) (5) (4) (3) (2) (1)

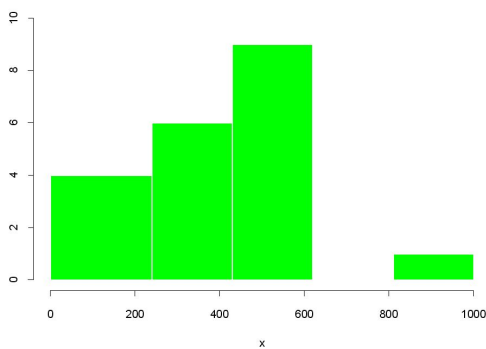
2.2.2. Valimi jaotustabel

Valimi jaotustabel (sagedustabel) kirjeldab tunnuse käitumist valimis. Diskreetse ja mitteamvulise tunnuse korral loetletakse selles tunnuse üksikväärtused, pideva tunnuse korral aga väärtusintervallid, nende sagedused ja suhtelised sagedused (osakaalud valimis). Samuti võib jaotustabelis ära tuua kumulatiivsed sagedused ja kumulatiivsed suhtelised sagedused. Kasutame sageduse tähisena sümbolit m_i , suhtelise sageduse tähisena – sümbolit p_i , $p_i = \frac{m_i}{n}$, kumulatiivse sageduse tähisena – sümbolit k_i ja kumulatiivse suhtelise sageduse tähisena – sümbolit s_i , $s_i = \frac{k_i}{n}$.

Kuigi põhimõtteliselt on kuusissetulek pidev suurus, on tal meie valimis suhteliselt vähe väärtusi. Koostame jaotustabeli lihtsalt üksikväärtusi üles lugedes. Eelpool toodud valimi jaotustabel on järgmine.

Sissetulek	50	150	200	300	400	500	1000
m_i	1	1	2	3	3	9	1
p_i	0.05	0.05	0.10	0.15	0.15	0.45	0.05
k_i	1	2	4	7	10	19	20
s_i	0.05	0.10	0.20	0.35	0.50	0.95	1.00

Joonistame ka sellele sagedustabelile vastava jaotushistogrammi. Ülevaatliskuma joonise saamiseks on histogrammi joonistamisel kasutatud sobivalt valitud intervalle.



Joonis 2.1. Sissetulekute jaotushistogramm

Kirjutame välja ka vastava intervallitud jaotustabeli, oma olemuselt on ju vaadatud tunnus pidev. Kasutame viit väärtuste intervalli. Intervalli laiuse saame, kui valimi suurima ja vähima väärtuse vahe jagame valitud intervallide arvuga

$$\frac{1000 - 50}{5} = 190.$$

Segaduste vältimiseks on nagu varemgi intervalli kuuluva otspunkti juurde kirjutatud nurksulg ”[”, intervalli mitte kuuluva otspunkti juurde aga ümarsulg ”)”. Suhtelise sageduse p_i saamiseks jagame intervalli sageduse valimi elementide arvuga, $p_i = \frac{m_i}{n}$.

Sissetul.	[50 - 240)	[240-430)	[430-620)	[620-810)	[810-1000]
m_i	4	6	9	0	1
p_i	0.20	0.30	0.45	0	0.05

Intervallide arvu valikul tuleb alati olla mõõdukas. Liiga suur intervallide arv muudab jaotustabeli ebaülevaatlikuks. Mõistlik intervallide arv asub enamasti 3 ja 12 vahel. Kui tähistame jaotustabeli intervallide arvu sümboliga l ja valimi elementide arvu sümboliga n , siis orienteeriva reeglina võib kasutada valemit

$$l \approx \log_2 n + 1.$$

Intervallitud jaotustabeli kasutamisel läheb loomulikult osa informatsiooni kaduma. Kui tunnusel on vähe väärtusi, ei oma intervallitud jaotustabeli kasutamine erilist mõtet.

2.2.3. Valimi arvkarakteristikud

Vastavalt sisulisele tähendusele võib valimi arvkarakteristikud jagada kahte rühma: asendikarakteristikud ja hajuvuskarakteristikud. Meie õpime tundma kolme asendikarakteristikut.

Mood on valimis kõige sagedamini esinev väärtus. Meie valimis on kõige sagedasemaks väärtuseks 500 – niisugune kuusissetulek esineb meie valimis 9 korda,

$$m_o = 500kr.$$

Igas valimis pole moodi.

Mediaan on väärtus, mis jagab valimile vastava variatsioonrea kaheks võrdseks osaks. Näites toodud valimis on 20 elementi; kui jagame niisuguse rea pooleks, on kummaski pooles 10 elementi. (Jagamiseks ei saa kasutada aga ühtegi valimisse kuuluvat väärtust.) Mediaaniks valitakse 10-nda ja 11-nda elemendi aritmeetiline keskmine. Mediaani saab paika panna sügavuse kaudu – mediaani sügavus *mes* arvutatakse eeskirjaga

$$mes = \frac{n+1}{2}.$$

Variatsioonrea otspunktist tuleb mediaanini teha $\frac{n+1}{2}$ sammu. Kui mediaani sügavus *mes* pole täisarv, on mediaani väärtuseks kahe lähema variatsioonrea elemendi aritmeetiline keskmine.

Leiame mediaani kuusissetulekute jaoks. Selleks arvutame esmalt mediaani sügavuse

$$mes = \frac{20 + 1}{2} = 10.5.$$

Mediaani väärtuseks on seega nende kahe väärtuse aritmeetiline keskmine, mille sügavuseks on 10,

$$m_e = \frac{400 + 500}{2} = 450kr.$$

Keskväärtus on valimi elementide aritmeetiline keskmine. Kesk-
väärtus arvutatakse valemiga

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Näites toodud valimis

$$\bar{x} = \frac{8200}{20} = 410kr.$$

Kõik kolm asendikarakteristikut annavad informatsiooni selle kohta, kuidas paiknevad valimi elemendid. Mediaan ja keskväärtus esitavad keskmise taseme, mille ümber valimi elemendid väärtusi omandavad. Mood määrab valimi kõige sagedasema, (kõige "moodsama") väärtuse. Kui valimi elemendid paiknevad keskväärtuse suhtes enam-vähem sümmeetriliselt ning valimis pole üksikuid teistest tugevasti erinevaid väärtusi, siis mediaan ja keskväärtus ei erine üksteisest kuigi palju.

Mõned väärtused, mis teistest tugevasti erinevad, võivad aga keskväärtust oluliselt muuta. Mediaan pole nende suhtes tundlik. Kui näiteks eelpool toodud valimis suurim sissetulek 1000 krooni asendada 10 korda suurema väärtusega – 10000 krooni, siis saame uueks keskväärtuseks 860 krooni. Mediaani väärtus aga ei muutu.

Tutvume nüüd kolme hajuvuskarakteristikuga.

Haare on valimi suurima ja vähima elemendi vahe. Meie valimis

$$h = 1000 - 50 = 950kr.$$

Haare arvutatakse valemiga

$$h = x_{(n)} - x_{(1)}.$$

Kvartiilideks nimetatakse arvupaari, mis koos mediaaniga jagavad valimi neljaks võrdseks osaks. Väiksemat selle arvupaari liiget nimetatakse *alumiseks kvartiiliks*, suuremat *ülemiseks kvartiiliks*.

Kvartiili asukoha määramisel lähtutakse mediaani sügavusest *mes*. Kvartiilide sügavus *kvs* leitakse valemiga

$$kvs = \frac{[mes] + 1}{2},$$

kus $[mes]$ tähistab täisosa mediaani sügavusest. Leiame oma näitevalimi jaoks kvartiilide sügavuse

$$kvs = \frac{[10.5] + 1}{2} = \frac{10 + 1}{2} = 5.5.$$

Kui kvartiili sügavus pole täisarv, on kvartiili väärtuseks kahe lähema variatsioonrea elemendi aritmeetiline keskmine. Seega

$$q_a = \frac{300 + 300}{2} = 300kr$$

ja

$$q_{\ddot{u}} = \frac{500 + 500}{2} = 500kr.$$

Valimi hajuvuse kirjeldamiseks kasutatakse kvartiilide vahet. Meie valimis

$$v = q_a - q_{\ddot{u}} = 500 - 300 = 200kr.$$

Kvartiilide vahel asuvad pooled valimi elemendid. Ülemisest kvartiilist suuremaks ja alumisest kvartiilist väiksemaks jääb vee-
rand valimi elementidest.

Valimi dispersioon on (peaaegu) valimi keskväärtuse suhtes arvutatud hälbe ruudu keskväärtus. Valimi dispersioon arvutatakse valemiga

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Meie näiteks kasutatud valimis

$$s^2 = \frac{743000}{19} \approx 39105.26kr^2.$$

Kuna valimi dispersiooni väärtuse mõõtmisel tuleb kasutada esialgse mõõtühiku ruutu, on tema tõlgendamine mõnevõrra ebamugav. Sellest raskusest ülesaamiseks kasutatakse hajuvuse kirjeldamiseks enamasti standardhälvet. Valimi *standardhälve* on ruutjuur valimi dispersioonist

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Meie näiteks kasutatud valimis

$$s = \sqrt{39105.26} \approx 197.7kr.$$

Valimi standardhälbe mõõtühik on sama, mida kasutati esialgse tunnuse väärtuste mõõtmisel.

Kõik hajuvuskarakteristikud annavad informatsiooni sellest, kui hajusalt paiknevad valimi elemendid. Haare näitab intervalli laiust, milles valimi elemendid paiknevad. Dispersioon ja standardhälve iseloomustavad valimi elementide hajutatust keskväärtuse suhtes, kvartiilide vahe määrab intervalli, milles asuvad pooled valimi elemendid. Kui valimiga määratud jaotus on lähedane normaaljaotusele, ei ole standardhälbe ja kvartiilide vahe v erinevus kuigi suur.

Olgu $X \sim N(\mu, \sigma)$. On lihtne veenduda, et selle jaotuse α -kvantiil avaldub standardse normaaljaotuse α -kvantiili z_α kaudu $q_\alpha = \sigma \cdot z_\alpha + \mu$. Järelikult saame kvartiilide vahe jaoks avaldise $v = 2\sigma z_{0.25}$. Kuna $z_{0.25} = 0.675$, siis $v = 1.35\sigma$. Seega normaaljaotuse korral $v/\sigma = 1.35$.

Mõned väärtused, mis teistest tugevasti erinevad, võivad aga standardhälvet oluliselt muuta. Kvartiilide vahe pole nende suhtes tundlik. Kui näiteks eelpool toodud valimis suurim sisetulek 1000 krooni asendada 10 korda suurema väärtusega – 10000 krooni, siis saame uueks standardhällbeks 2155.9 krooni. Kvartiilide vahe aga ei muutu.

2.2.4. Karp-diagramm.

Karp-diagramm (või ka karp-vurrud-diagramm) on joonis, millel esitatakse üheaegselt mitu erinevat valimi arvkarakteristikut. Niisugune joonis võimaldab kiiresti saada ettekujutuse valimit iseloomustavatest seaduspärasustest. Karp-diagrammil esitatakse tunnuse väärtused vertikaalteljel, kvartiilid ja mediaan kujutatakse horisontaaljoontena. Need jooned ühendatakse vertikaaljoontega. Nii moodustub karp. Vurrude tippudeks valitakse valimi suurim ja vähim väärtus, need väärtused ühendatakse karbi serva keskpunktiga. Nii moodustuvadki vurrud.

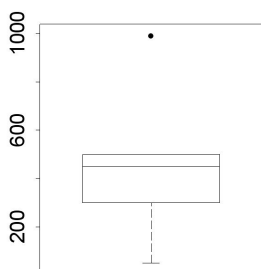
Kui karp-vurrud-diagramm tellitakse arvutilt, ei asu vurrude otspunktid mediaanist kaugemal kui $1.5v$ (poolteist kvartiilide vahet). Valimi elemendid, mis asuvad mediaanist kaugemal kui poolteist kvartiilide vahet, tähistatakse punktidega.

Meie näite valimile vastav karp-vurrud-diagramm on kujutatud joonisel 2.2. Ülespoole sirutatud vurru pole sellel joonisel seetõttu, et kõik ülemisele kvartiilile järgnenud väärtused peale suurima olid sellega võrdsed. Suurim väärtus (1000) aga asub mediaanist (500) kaugemal kui poolteist kvartiilide vahet ($1.5v=300$) ja tema esitatakse üksikpunktina.

Normaaljaotuse puhul $v=1.35\sigma$, kust $1.5v=2.025\sigma$. Intervalli $[\mu - 2.025\sigma, \mu + 2.025\sigma]$ osakaal on 0.957, st selles intervallis asub umbes 95% normaaljaotusega tunnuse väärtustest. Seetõttu tasub alati kontrollida, kas punktiga tähistatud vaatlused pole katsevead.

Kui karp-diagrammi joonistamisel valida tunnuse väärtuste esitamiseks horisontaalteljel, saame analoogilise joonise, vaid karbi

küljed ja vurrud on paralleelsed horisontaalteljega.



Joonis 2.2. Karp-diagramm

2.3. Juhusliku valimi vajalikkus

Päris paragrahvi algul sõnastasime matemaatilise statistika põhinõude: *ainult juhuslik valim on hea valim*. Esimesel silmapilgul on seda nõuet raske mõista. Mis juhtub, kui ühest ja samast üldkogumist teeme mitu juhuslikku valimit? Need valimid on *erinevad*. Iga kord satuvad valimisse erinevad objektid, valimi keskväärtus ja valimi teised arvkarakteristikud omavad erisuguseid väärtusi. Niisugune muutlikkus tekitab sageli võõristust. Tundub loomulikum nõuda, et valim oleks midagi kindlat – alati muutumatu, alati sama jaotustabeliga nagu üldkogum. Muidugi oleks see hea! Kuid kahjuks saavutamatu – me ei tea, milline on üldkogum ja teadlikult ei saa me kuidagi garanteerida ideaalse valimi saamist.

Mis aga juhtub, kui valime objekte täiesti juhuslikult? Hakkab toimima juhuslikule katsele iseloomulik seaduspärasus: katsetulemuste suhteline sagedus on stabiilne, on lähedane selle katsetulemuse *tõenäosusele*. Tunnuse üksikväärtuse (diskreetse tunnuse korral) või intervalli (pideva tunnuse korral) tõenäosuseks on aga tema *osakaal üldkogumis*. Suhtelise sageduse stabiilsuse kaudu on vastav osakaal valimis seotud üldkogumiga. Juhuslik valim esindab tõepoolest üldkogumit!

Meenutame veel, et stabiilsuse ilmnemiseks peavad katsed olema ühesugused ja sõltumatud. Seega ei tohi objekti valimine

mõõtmiseks üldkogumit muuta, objektid peavad olema valitud üksikest sõltumatult. (Suurte üldkogumite korral on see nõue lihtsalt täidetav, väikeste üldkogumite korral aga peab kas valitud objekti alati tagasi panema või arvestama andmete töötlemisel üldkogumi piiratud mahtu.) Kuna suhteline sagedus on seda stabiilsem, mida rohkem on katseid, kirjeldab valim üldkogumit seda täpsemalt, mida suurem ta on.

Kui üldkogum on lõplik, võib juhusliku valimi moodustamiseks kasutada juhuslike arvude tabelit (vt tabel C). Oletame näiteks, et meie üldkogumis on 100 objekti, määrame neile numbrid 00 kuni 99. Valime juhuslikkude arvude tabelist huupi ühe lähtekoha (näiteks teise veeru esimese arvu) ja hakkame kindlas suunas edasi liikuma (näiteks veergu mööda allapoole). Iga vastutulev kahekohaline number määrab üldkogumi objekti, mille me mõõtmiseks valime. Pärast mõõtmist "laseme" objekti alati tagasi üldkogumisse. Kui näiteks valimisse peab kuuluma 6 objekti, siis nende järjekorranumbriteks saame 45, 88, 21, 75, 19, 35. Põhimõtteliselt võiks üks ja sama järjekorranumber ka korduda.

Vaatame veel ühte näidet juhuslike arvude tabeli kasutamisest, juhtimaks tähelepanu kergesti tekkida võivale veale. Oletame, et meie üldkogumis on 300 objekti. Sel juhul valime juhuslike arvude tabelist kolmekohalisi numbreid. Kui me saame numbri, mis ei ole väiksem kolmesajast, lahutame sellest 300 seni, kuni jääb saab arvust 300 väiksemaks. Kui me kasutaksime kõiki kolmekohalisi numbreid, poleks kõikide üldkogumi objektide võimalused valitud saada võrdsed. Tõepoolest, 0-nda objekti valime, kui saame arvud 000, 300, 600, 900; 200-nda objekti valime, kui saame arvud 200, 500, 800. Niisuguse ebavõrdsuse vältimiseks kasutame ära ainult 900st väiksemad arvud, 900 ja temast suuremad arvud jätame lihtsalt kõrvale.

Kui üldkogum on väga suur, on raske selliselt mööda objektide loetelu jalutada. Pisut lihtsam on moodustada *süsteemalist juhuslikku valimit*. Sel juhul valitakse juhuslikult esimese valimi elemendi järjekorranumber, ülejäänud objektid võetakse valimisse, liikudes kindla sammuga mööda üldkogumi objektide nimekirja. Näiteks soovitakse moodustada 100 objektiga juhus-

likku valimit teatava linna elanikest, kusjuures selle linna elanike registris on kirjas 20123 nime. Siis võib valida juhuslike arvude tabeli abil ühe juhusliku arvu vahemikus ühest kuni kahesajani. Olgu see näiteks 83. Saadud arv on esimese valimisse võetava elaniku järjekorranumber registris. Edasi võetakse valimisse registrist numbrit 283, 483, 683 jne kandvad elanikud.

Teatud olukordades võib aga olla mugavam moodustada *klastervalimit*. Olgu näiteks plaanis viia küsitlus läbi ühe suurlinna gümnaasiumide abiturientide hulgas. Sel juhul võib valimi moodustamiseks teha kaks juhuslikku sammu. Valida esmalt välja juhuslikult sobiv arv koole ja seejärel väljavalitud koolide abiturientide hulgast valida juhuslikult sobiv arv õpilasi.

Kahe juhusliku sammuga saadud valimi põhjal järelduste tegemine üldkogumi kohta nõuab sügavamaid teadmisi valikuteooria valdkonnast.

2.4. Ühe juhuslikult valitud väärtuse käitumisest

Olgu meil tegemist tunnusega, mida kirjeldab normaaljaotus, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Määrame juhusliku katsega kindlaks ühe selle tunnuse väärtuse. Nagu teada, pole võimalik ennustada, millise väärtuse me saame. Huvitaval kombel on aga võimalik üsna kindlasti öelda, millist väärtust me *ei saa*. Meenutame, normaaljaotusega tunnuse käitumisloogikat – keskväärtusele lähedased väärtused esinevad sageli, suuri kõrvalekaldeid keskväärtusest esineb harva. Selle seaduspära esitab normaaljaotuse tihedusfunktsioon: keskväärtusest kaugel asuvate intervallide osakaal on väga väike, tõenäosus, et tunnuse väärtus satub sellisesse intervalli, on väga väike. Järelikult esineb sellisesse intervalli kuuluvaid väärtusi harva.

Tähistame tõenäosuse, et tunnuse väärtus langeb intervalli (a, b) , sümboliga $P(a < X < b)$. See tõenäosus on võrdne intervalli (a, b) osakaaluga, st

$$P(a < X < b) = p(a < X < b).$$

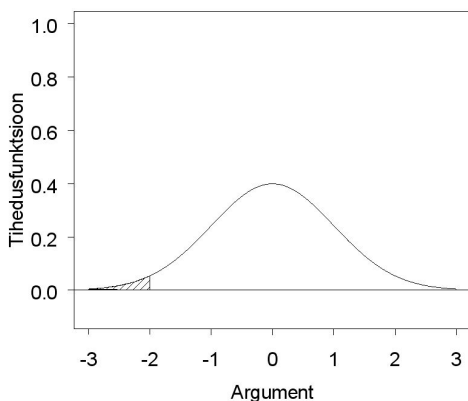
Leiame tõenäosuse, et juhuslikult valitud tunnuse väärtus on keskväärtusest väiksem ühe, kahe ja kolme standardhälbe võrra

$$P(X < \mu - \sigma) = \Phi(-1) = 0.1587,$$

$$P(X < \mu - 2\sigma) = \Phi(-2) = 0.0228,$$

$$P(X < \mu - 3\sigma) = \Phi(-3) = 0.0013.$$

Näeme, et keskväärtusest ühe standardhälbe võrra väiksem väärtus esineb sajalt katsel keskmiselt 16 korda, keskväärtusest kahe standardhälbe võrra väiksem väärtus esineb sajalt katsel keskmiselt 2 korda, keskväärtusest kolme standardhälbe võrra väiksem väärtus esineb tuhandel katsel keskmiselt 1 kord.



Joonis 2.3. Keskväärtusest tunduvalt väiksemate väärtuste osakaal

Niisuguste piirkondade eraldamine, milles tunnus tavaliselt (st küllalt suure tõenäosusega) väärtusi ei omanda, on statistiliste otsustuste tegemisel väga suure tähtsusega. Nende leidmise hõlbustamiseks on kasutusele võetud kvantiili ja täiendkvantiili mõisted.

Punktis 1.9 kirjeldasime, kuidas leida kvantiili standardiseeritud normaaljaotuse jaoks. Anname järgnevalt kvantiili üldise määratluse.

Jaotuse α -kvantiiliks nimetatakse arvu q_α , millest väiksema väärtuse saamise tõenäosus on α , st

$$P(X < q_\alpha) = \alpha.$$

Jaotusfunktsiooni kaudu on see määratlus esitatav järgmiselt:

$$F(q_\alpha) = \alpha.$$

Jaotuse α -täiendkvantiiliks nimetatakse arvu $\bar{q}_\alpha$, millest suurema või võrdse väärtuse saamise tõenäosus on α , st

$$P(\bar{q}_\alpha \leq X) = \alpha.$$

Jaotusfunktsiooni kaudu on see määratlus esitatav järgmiselt:

$$F(\bar{q}_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Kuna edaspidi peame valemities kasutama mitme eri jaotuse kvantiile, tähistame nad erinevate tähtedega. Standardse normaaljaotuse α -kvantiili tähise võtsime kasutusele punktis 1.1.3, kasutame tema jaoks tähistust z_α . Vastavalt α -kvantiili määratlusele leiame ta, kasutades tingimust

$$\Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

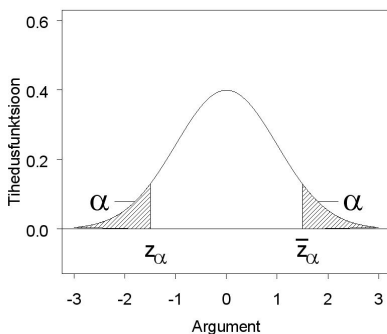
Vastavalt α -täiendkvantiili definitsioonile

$$\Phi(\bar{z}_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Standardse normaaljaotuse sümmeetrilisuse tõttu kehtib võrdus

$$\bar{z}_\alpha = -z_\alpha,$$

st tihedusfunktsiooni "sabade" alla jäävad keskväärtusest võrdse kaugusel asuvatest punktidest paremale ja vasakule võrdsed pindalad. Seda standardse normaaljaotuse omadust illustreerib ka joonis 2.4.



Joonis 2.4. Standardse normaaljaotuse kvantiil ja täiendkvantiil

Kasutades standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni tabelit (tabel B), saame näiteks $z_{0.1} = -1.28$ ja $z_{0.05} = -1.64$, $\bar{z}_{0.1} = 1.28$ ja $\bar{z}_{0.05} = 1.64$.

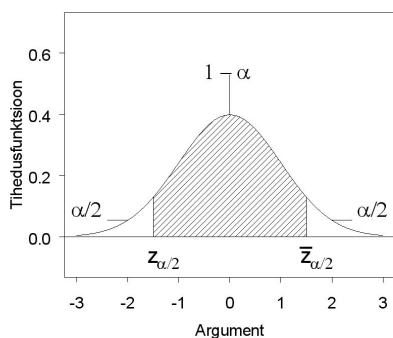
Kui me tahame leida intervalli, milles standardse normaaljaotusega tunnus asub tõenäosusega $1 - \alpha$, võime selle moodustada $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ja $\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}$ abil. Tõepoolest,

$$P(z_{\frac{\alpha}{2}} < X < \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha,$$

mida illustreerib ka joonis 2.5. Nii näiteks

$$P(-1.64 < X < 1.64) = 0.9.$$

Igal pideval jaotusel on olemas kõik kvantiilid. Diskreetsel jaotusel puuduvad mõnele α väärtustele vastavad kvantiilid.



Joonis 2.5. Standardse normaaljaotuse kvantiilidega määratud lõigu tõenäosus

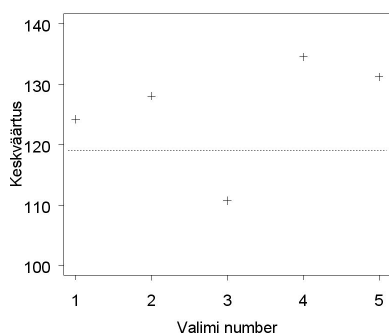
2.5. Juhusliku valimi keskväärtuse jaotus

Kordame veel kord ühte olulist põhitõde – ühest ja samast üldkogumist pärinevate juhuslike valimite elemendid on erinevad. Võttes ühest ja samast üldkogumist erinevaid valimeid, saame erinevad arvulised tulemused. Muutuvad ka valimite arvarakteristikute väärtused. Toome ühe näite selle põhitõde illustreerimiseks.

Näide 2.3. Vaatame lisas 3 toodud andmestikku laste lugemis-aegade kohta. Lepime kokku, et registreeritud ajad moodustavad üldkogumi. Kasutades juhuslike arvude tabelit, teeme sellest üldkogumist viis 6-elementilist juhuslikku valimit. Saame

1. valim : 93, 135, 115, 146, 139, 117 $\bar{x} = 124.2$, $s = 19.6$;
2. valim : 177, 93, 137, 146, 114, 102 $\bar{x} = 128$, $s = 31.5$;
3. valim : 152, 103, 125, 96, 92, 96 $\bar{x} = 110.7$, $s = 23.5$;
4. valim : 147, 161, 144, 115, 125, 115 $\bar{x} = 134.5$, $s = 19.0$;
5. valim : 153, 120, 118, 130, 131, 135 $\bar{x} = 131.2$, $s = 12.6$.

Näeme, et iga konkreetne valim on erinev, samuti muutuvad valimite keskväärtused ja standardhälbed. Kuna valimid on üsna väikesed, muutuvad arvkarakteristikud märgatavalt. Saadud tulemusi illustreerib järgnev joonis, kus igale keskväärtusele vastab punkt, mille esimeseks koordinaadiks on valimi number, teiseks koordinaadiks aga valimi keskväärtus.



Joonis 2.6. Juhuslike valimite keskväärtused

Kuna meil on siin tegemist ainult üldkogum-valim mänguga, teame ka üldkogumi tõelist keskväärtust. See on kantud joonisele punktiiriga.



Õnneks ei ole näites kirjeldatud muutused kaootilised, ka valimi arvkarakteristikute käitumine on määratud üldkogumit kirjeldavate seaduspärasustega.

Milline oleks siis valimi keskväertuse ootuspärane käitumine? Intuiitiivselt ootaks arvatavasti igaüks, et valimi keskväertus omandaks sageli väärtusi üldkogumi keskväertuse läheduses, suuri kõrvalekaldeid esineks suhteliselt harva ja mõlemasuunalised kõrvalekalded üldkogumi keskväertusest oleksid võrdvõimalikud. Tunnete ära: ootuspärane oleks, et valimi keskväertuse käitumist kirjeldaks normaaljaotus.

Vaatame uuesti üle punktis 1.8 loetletud nõuded. Kas need on täidetud? Kirjutame valimi keskväertuse arvutuseeskirja välja järgmiselt:

$$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}.$$

Kui valimi maht on suur, on keskväertuse väärtust määravaid faktoreid (liidetavaid) palju, nad mõjuvad sõltumatult (valimi elementide väärtused määratakse sõltumatult) ja iga faktori mõju (liidetava panus summa väärtuse kujunemisel) on suhteliselt väike (mida suurem on n , seda väiksem on suhe $\frac{x_i}{n}$). Tõepoolest, suurte valimite korral peab *üldkogumi jaotusest olenemata* valimi keskväertuse käitumist kirjeldama *normaaljaotus*. On loomulik, et selle normaaljaotuse parameetrid on kirjeldatud üldkogumi parameetrite poolt.

Väide, et juhuslike liidetavate keskväertuse jaotus läheneb liidetavate arvu piiramatul kasvamisel normaaljaotusele, on ka matemaatiliselt tõestatav. Seda on tehtud mitmetel erinevatel eeldustel, vastavad teoreemid kannavad piirteoreemide nime. Valimi keskväertuse käitumist kirjeldab järgmine piirteoreem: kui $X_1, X_2, X_3, \dots$ on sõltumatud juhuslikud suurused keskväertusega μ ja standardhälbega σ , siis läheneb standardiseeritud keskväertuse

$$\sqrt{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu}{\sigma}$$

jaotus liidetavate arvu piiramatul kasvamisel piiramatult standardsele normaaljaotusele.

Küllalt suure arvu liidetavate korral on standardiseeritud keskväertuse jaotuse erinevus normaaljaotusest niivõrd väike, et seda võib praktiliste ülesannete lahendamisel ignoreerida.

Tähistame üldkogumi keskväertuse tähega μ , standardhälbe aga tähega σ . Suurte valimite korral (orienteeruvalt $n \geq 60$)

võime valimi keskväärtuse jaotuseks lugeda normaaljaotuse keskväärtusega μ ja standardhälbega $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ehk lühidalt

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}). \quad (2.1)$$

Arv $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ on igasuguse üldkogumi korral valimi keskväärtuse standardhälbeks. Lühiduse mõttes nimetatakse teda sageli ka *standardveaks*.

Näide 2.4. Olgu uuritav tunnus normaaljaotusega $N(6, 2)$. Vastavalt valemile (2.1) kirjeldab siis 100-elementiliste valimite keskväärtuse käitumist normaaljaotus $N(6, 0.2)$; 200-elementiliste valimite keskväärtuse käitumist – normaaljaotus $N(6, 0.14)$.

Kui aga uuritav tunnus on näiteks kaheväärtuselise jaotusega $B(1, p)$, siis on $\mu = p$, $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ ja n -elementiliste valimite keskväärtuse käitumist kirjeldab normaaljaotus $N(p, \sqrt{p(1-p)/n})$. Seega, kui $p = 0.2$ ja $n = 200$, kirjeldab valimite keskväärtuse käitumist normaaljaotus $N(0.2, 0.03)$.



Kui valim on väike, võib keskväärtuse jaotus normaaljaotusest tugevasti erineda ja selle jaotuse leidmine võib olla tõsiseks matemaatiliseks probleemiks. Väikeste valimite korral püütakse üldjuhul vältida keskväärtuse täpse jaotuse kasutamist.

Ühel erijuhul pole *suure* valimi nõue keskväärtuste normaalsuse jaoks vajalik. Nimelt, kui uuritav tunnus on üldkogumis normaaljaotusega, kehtib tulemus (2.1) igasuguse valimi mahu korral. Näiteks, kui uuritav tunnus on normaaljaotusega $N(6, 2)$, siis 4-elementiliste valimite keskväärtuste käitumist kirjeldab normaaljaotus $N(6, 1)$.

Me teame, et normaaljaotusega seotud tõenäosuste arvutamine on võimalik vaid siis, kui me läheme üle standardsele normaaljaotusele. Standardse normaaljaotuse juurde jõudsime standardiseeriva teisenduse abil, seega valimi keskväärtuse standardiseerimiseks tuleb sooritada tehted

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}.$$

Standardiseerimiseks on vaja teada üldkogumi standardhälvet. Üldjuhul me selle parameetri väärtust ei tea.

Kui meil on tegemist *suure* valimiga, võime üldkogumi standardhälbe asendada valimi standardhällbega ja seejuures tekkivat ebatäpsust lihtsalt ignoreerida. Seega, kui $n \geq 60$, siis

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim N(0, 1).$$

Kui uuritav tunnus on normaaljaotusega, aga meie käsutuses on *väike* valim, on asendamisel tekkiv ebatäpsus nii suur, et me ei tohi seda ignoreerida. Standardiseerides väikese valimi keskväärtust valimi standardhällbe abil jõuame välja normaaljaotusest mõnevõrra erineva jaotuse juurde. See jaotus kannab nimetust *t*-jaotus (e Studenti jaotus). Jaotuse võttis kasutusele inglise matemaatik William Sealy Gosset (1876-1937) oma 1908. aastal Studenti varjunime all ilmunud töös.

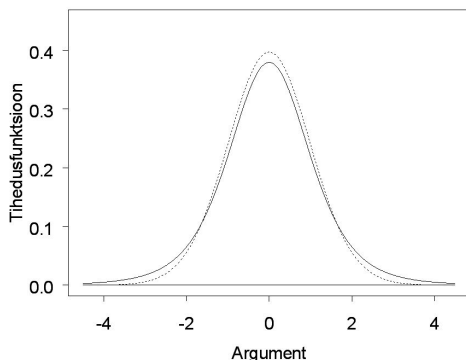
Parameetreid on *t*-jaotusel vaid üks – selle väärtuseks on valimi mahust ühe võrra väiksem arv, $n - 1$. Parameetri väikeste väärtuste korral on *t*-jaotuse tihedusfunktsioon pisut lamedam ja läheneb argumenti absoluutväärtuse kasvades aeglasemalt nullile kui standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon. Joonisel 2.7. on kujutatud *t*-jaotuse tihedusfunktsioon parameetriga 5 (pidev joon) ja parameetriga 60 (punktiiir). Parameetri kasvades läheneb *t*-jaotuse tihedusfunktsioon kiiresti standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioonile. Kui *t*-jaotuse parameeter on suurem kui 60, võib erinevust nende kahe jaotuse vahel praktiliselt ignoreerida.

Valem *t*-jaotuse tihedusfunktsiooni määramiseks on mittematemaatiku jaoks liialt keeruline. Selle jaotuse praktiline kasutamine toimub täiendkvantiilide tabeli abil (vt tabel D).

Peame meeles: *kui tunnus on normaaljaotusega ja meil on väike valim, $n \leq 60$, siis*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n - 1),$$

st keskväärtuse ja standardhällbe ühist käitumist kirjeldava t-jaotuse parameeter on ühe võrra väiksem meie valimi mahust.



Joonis 2.7. t -jaotuse tihedusfunktsioonid

Ülesanded 2.

1. Visatakse täringut. Leida tõenäosus, et peale jääb 6 silma.
2. Kaardipakis on 36 kaarti. Pakist tõmmatakse huupi üks kaart. Milline on ässa valimise tõenäosus?
3. Õpperühmas on 20 inimest, neist 5 tütarlast ja 15 noormeest. Nimekirja järgi valitakse huupi üks õppur. Leida tõenäosus, et valitu on tütarlaps.
4. Lisas 3 toodud lugemistesti aegadest valitakse huupi üks aeg. Milline on tõenäosus, et valitud aeg on väiksem 80-st?
5. Kuulugu valimisse lisas 2 toodud andmestikust kaugõppijate vanused. Moodustada variatsioonrida, koostada jaotustabel ja joonistada sellele vastav jaotushistogramm. Arvutada mood, mediaan, keskväärtus, haare, dispersioon ja standardhälve.
6. Vaatame näidetes 1.4 ja 1.6 kirjeldatud katset telepaatilise side uurimiseks. Kirjeldatud tingimustel viidi läbi 60 kümnest katsest koosnevat seeriat. Seeriates õigesti ära arvatud kaartide arvud on toodud järgnevas tabelis.

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	5	18	19	12	5	1

Joonistada jaotushistogramm. Leida mood, keskväärtus, dispersioon ja standardhälve.

7. Mõõdeti 40 katsealuse testi täitmiseks kulunud aeg (minutites). Saadi järgmised tulemused:

26 19 18 16 14 22 12 16
 16 15 14 16 23 15 11 16
 20 15 17 15 16 21 28 10
 12 12 18 17 8 15 20 22
 15 16 22 21 31 17 17 12

Koostada variatsioonrida, sobivalt valitud intervallidega jaotustabel, joonistada jaotushistogramm. Leida kõik arv-karakteristikud.

8. Kasutades lisas 3 toodud andmestikku kui üldkogumit, koostada 20-elementiline süstemaatiline juhuslik valim. Leida selle valimi arv-karakteristikud.
9. Kasutades lisas 3 toodud andmestikku üldkogumina, moodustada 8 viie-elementilist juhuslikku valimit. Leida iga valimi keskvärtus ja standardhälve.
10. Kasutades tabelit 2, leida standardse normaaljaotuse 0.2-, 0.025-, 0.05- ja 0.10-kvantiilid ning täiendkvantiilid.
11. Olgu uuritav tunnus $X \sim N(20, 2)$. Leida tõenäosus, et ühel huupi valitud objektil mõõdetud tunnuse väärtus satub järgnevasse intervalli
 $(a) (-\infty, 17], (b) (18, 22), (c) (23, \infty), (d) [15, 25]$.
12. Olgu $X \sim N(0, 1)$. Kirjutada kvantiilide abil välja intervallid, millesse sattumise tõenäosus on
 $0.9 \quad 0.95 \quad 0.8 \quad 0.99 \quad 0.1 \quad 0.05$.
13. Olgu valimi maht 100. Leida 100-elementiliste valimite keskvärtuste jaotus iga järgneva üldkogumi jaotuse korral
 $(a) X \sim N(25, 1.2), (b) X \sim N(25, 5), (c) X \sim N(1, 0.5),$
 $(d) X \sim B(1, 0.5), (e) X \sim B(1, 0.7), (f) X \sim B(6, 0.6)$.
14. Olgu $X \sim N(10, 2)$. Leida tõenäosus, et 10-elementilise valimi keskvärtus asub intervallis (9.5; 10.5). Leida tõenäosus, et 100-elementilise valimi keskvärtus asub samas intervallis.
15. Olgu $X \sim B(1, 0.4)$. Leida tõenäosus, et 100-elementilise valimi keskvärtus asub intervallis (0.36; 0.44). Leida tõenäosus, et 600-elementilise valimi keskvärtus asub samas intervallis.

3. MATEMAATILISE STATISTIKA PÕHIÜLESANDED

Praktika seisukohalt ei ole enamus eelmise peatüki lõpul toodud ülesannetest mitte midagi muud, kui harjutused normaaljaotuse tabeli kasutamiseks. Tegelikes ülesannetes me *ei tea* üldkogumi parameetrite *tõelisi väärtusi*.

Selles peatükis tutvume tüüpiliste statistiliste järeldustega, mida on võimalik teha üldkogumi parameetrite kohta valimi põhjal.

3.1. Üldkogumi parameetrite hindamine

Kõige lihtsamaks otsuseks, mida valimi põhjal võib teha, on üldkogumi parameetrite arvuliste hinnangute määramine. Tähistame järgnevas hinnangu sama tähega nagu hinnatava parameetri, kuid lisame sellele tähele "katuse".

3.1.1. Üldkogumi keskväärtuse ja standardhälbe hindamine

Kõige sagedamini huvi pakkuvateks üldkogumi parameetriteks on keskväärtus ja standardhälve. Matemaatiline teooria ja hinnangute kasutamise praktika on näidanud, et kõige otstarbekamad hinnangud määratakse väga lihtsate reeglitega.

Peame meeles: *üldkogumi keskväärtuse hinnanguks tuleb valida valimi keskväärtus,*

$$\hat{\mu} = \bar{x}. \quad (3.1)$$

Üldkogumi standardhälbe hinnanguks tuleb valida valimi standardhälve,

$$\hat{\sigma} = s. \quad (3.2)$$

Need reeglid määravad ka kaheväärtuselise jaotuse parameetri hinnangu. Me teame, et kaheväärtuselise jaotuse korral üldkogumi keskväärtuseks on jaotuse parameeter p . Seega parameetri p hindamiseks saame kasutada esimest reeglit. Kui aga

meie valim koosneb ainult nullidest ja ühtedest, kusjuures üks esineb m korda, siis

$$\bar{x} = \frac{m}{n}$$

ja reegliti jälgides

$$\hat{p} = \frac{m}{n}. \quad (3.3)$$

Näide 3.1. Tuleme tagasi esimeses peatükis näites 1.2 kirjeldatud lugemistesti juurde. Oletame, et testi lugemiseks kulunud aja kirjeldamiseks sobib normaaljaotus. Loeme oma üldkogumisse kuuluvaks kõik lapsed, kes eales seda testi peavad läbima. Meie käsutuses olevad andmed moodustavad valimi sellest üldkogumist, valimi maht $n = 425$. Arvutame selle valimi keskväärtuse ja standardhälbe. Kasutades lisas 1 toodud andmeid, leiame

$$\bar{x} = 119.0, \quad s = 20.9$$

ja seega saame normaaljaotuse parameetritele järgmised hinnangud:

$$\hat{\mu} = 119.0, \quad \hat{\sigma} = 20.9.$$

Kui meie oletus normaaljaotuse sobivusest oli õige, tuleb testi lugemiseks kulunud aja kirjeldamiseks kasutada normaaljaotust $N(119.0, 20.9)$.

Saadud jaotust kasutades leiame hinnangu nende laste osakaalule, kellel testi lugemiseks kulub üle kolme minuti

$$P(180 < X) = 1 - \Phi(2.92) = 0.0017$$

ja nende laste osakaalule, kellel testi lugemiseks kulub alla pooleteise minuti

$$P(X < 90) = \Phi(-1.39) = 0.0823.$$

Jaotus, mille parameetrid on teada, kannab endas tohutult palju informatsiooni. Seda jaotust kasutades saame leida üldkogumi ükskõik millise intervalli osakaalu, saame lahti pakkida ükskõik milliste intervallidega jaotustabeli.



Tasub meeles pidada, et teatava jaotuse kasutuselevõtt annab võimaluse valimis sisalduva informatsiooni väga kompaktselt esitamiseks. Kui muidu peaks alati esitama kõik 425 vaatlust, et olla valmis mistahes intervalli osakaalu hindamiseks, siis tuginedes normaaljaotusele, piisab selle informatsiooni säilitamiseks kahest arvust – valimi keskväärtusest ja standardhälbest.

Vaatame veel ühte näidet kaheväärtuselise jaotuse parameetri hindamise kohta.

Näide 3.2. Ühes tehases läbi viidud sotsioloogilises uurimuses selgus, et 160 küsitletud töolisest 20 on selles tehases töötanud vähem kui aasta. Leiame hinnangu nende tööliste osakaalule, kes on tehases töötanud vähem kui aasta.

Tehases töötamise aja järgi võime töölisel jagada kahte klassi: alla aasta töötanud töölisel ja üle aasta töötanud töölisel. Loeme töötamise kestust kirjeldava tunnuse väärtuseks esimese klassi jaoks "1", teise klassi jaoks "0". Saame kaheväärtuselise tunnuse, mille parameetri väärtuseks on nende tööliste osakaal, kes on töötanud tehases alla aasta. Kasutades hindamise reeglit (3.3), saame

$$\hat{p} = 20/160 = 0.125$$

ehk protsentides

$$\hat{p} = 12.5\%.$$



Parameetri hindamise reegli tuletamisel võib üldjuhul toetuda erinevatele põhimõtetele. Üheks kõige sagedamini kasutatavaks põhimõtteks on suurima tõepära printsiip. Suurima tõepära printsiip nõuab, et üldkogumi parameetrite väärtuseks tuleb valida sellised arvud, mille korral meie käsutuses oleva valimi saamise tõenäosus on kõige suurem. See on väga lihtne, selgele mõistusele tuginev empiiriline printsiip, mis ennast praktikas on suurepäraselt õigustanud. Eelpool toodud hindamisreeglid on saadud sellele printsiibile tuginedes.

Suurima tõepära printsiibi rakendamiseks vajalike tehniliste vahendite kirjelduse võib leida näiteks õpikust [12], lk. 24-29.

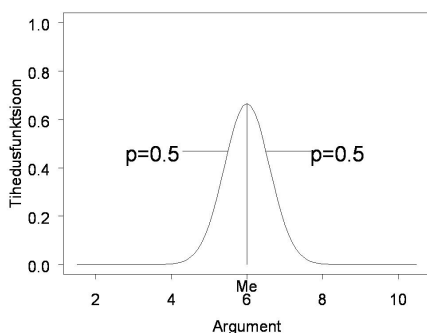
3.1.2. Üldkogumi mediaani hindamine

Erinevalt keskväärtusest ja standardhälbest pole mediaan meile tuntud jaotuste (normaaljaotus, kaheväärtuseline jaotus jt.) parameetriks. Kui aga jaotusel on olemas mediaan (normaaljaotusel on), võime teda valimi põhjal hinnata.

Peame meeles: *üldkogumi mediaani hinnanguks on valimi mediaan*

$$\hat{M}_e = m_e. \quad (3.4)$$

Meenutame, et normaaljaotuse korral on keskväärtus ja mediaan arvuliselt võrdsed – mediaan on väärtus, millest nii vasakule kui ka paremale jääva intervalli tõenäosus on 0.5.



Joonis 3.1. Normaaljaotuse mediaan

Sama väide kehtib ka kõikide teiste pidevate jaotuste kohta, mille tihedusfunktsioon on keskväärtuse suhtes sümmeetriline. Kui tihedusfunktsioon pole sümmeetriline, on jaotuse keskväärtus ja mediaan erinevad.

Võib-olla võiks normaaljaotuse keskväärtuse hinnanguna kasutada ka valimi mediaani?

Põhimõtteliselt muidugi võiks. Kuid see pole eriti otstarbekas. Nimelt saab tõestada, et suurte valimite korral kirjeldab ka valimi mediaani käitumist normaaljaotus. Selle normaaljaotuse keskväärtuseks on μ , standardhälbeks aga $1.253 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. (vt [17], lk 296). Selle standardhälbe väärtuse taha jääbki mediaani kasutamine pidama – valimi keskväärtuse standardhälve on

väiksem, on vaid $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Valimite keskväärtused koonduvad tihedamini tõelise keskväärtuse lähedusse kui sama mahuga valimite mediaanid. Valimite keskväärtuse hajuvus tõelise keskväärtuse suhtes on väiksem. Seetõttu on valimi keskväärtus parameetri μ hindamisel kasulikum valimi mediaanist – tema poolt määratud hinnang on sama mõõtmiste arvu juures täpsem.

Mõnel juhul võib aga valimi mediaani kasutamine olla otstarbekas. Seda näiteks siis, kui valimi elementide hulka võib sattuda nn jämedaid vigu. Üksikud väga suured või väga väikesed tunnuse väärtused mõjutavad mediaani väärtust vähe, küll aga võivad oluliselt muuta valimi keskväärtuse väärtust. Samuti on mediaani kasutamine põhjendatud, kui tunnuse käitumise kirjeldamiseks ei sobi normaaljaotus ja meil pole võimalik kasutada valimi keskväärtuse täpset jaotust.

Näide 3.3. Vaatame, kuidas muutuvad valimi mediaani väärtused näites 2.3 toodud valimite korral. Arvutame:

1. valim: $m_e = 126$,
2. valim: $m_e = 125.5$,
3. valim: $m_e = 99.5$,
4. valim: $m_e = 134.5$,
5. valim: $m_e = 130.5$.

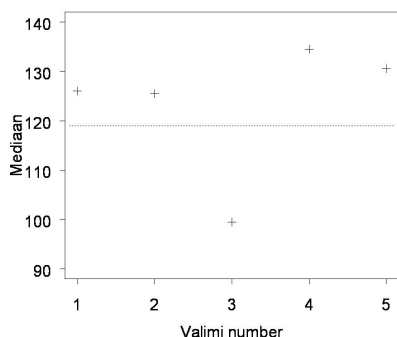
Võrreldes valimite keskväärtuste ja mediaanide muutumise ulatust (haaret), näeme, et valimite keskväärtuste jaoks

$$h_k = 134.5 - 110.7 = 23.8,$$

valimite mediaanide jaoks aga

$$h_m = 134.5 - 99.5 = 35.$$

Esitame nende juhuslike valimite mediaanid ka joonise abil. Kuna valimid on ainult õppe-otstarbelised, on meile teada ka üldkogumi mediaani väärtus. Joonisele 3.2 on kantud selle väärtuse kõrgusele punktiirjoon.



Joonis 3.2. Valimite mediaanid



3.2. Usaldusintervall

Eespool kirjeldatud parameetrite hindamine tekitab algajas statistikus sageli teatava rahulolematuse tunde: kasutades oma hindamisreegleid, saame parameetri väärtuseks arvu, mis peaaegu kindlasti erineb parameetri tõelisest väärtusest. Tõsi küll, see arv on teatud mõttes kõige otstarbekamalt valitud. Valimi mahu suurenedes suureneb ka hinnangu stabiilsus ja täpsus. Kuid ikkagi oleks nagu midagi puudu. Mida teha?

Katsume kirjeldada hindamisel tehtud vea suurust. Statistikas tehakse seda usaldusintervalli abil.

3.2.1. Üldkogumi keskväärtuse usaldusintervall (suur valim)

Kasutades üldkogumi keskväärtuse μ hinnanguna valimi keskväärtust $\bar{x}$, teeme vea suurusega $\bar{x} - \mu$. Seda arvu pole meil võimalik leida – me ei tea parameetri μ väärtust. Õnneks on meil teada vahe $\bar{x} - \mu$ käitumist kirjeldav seaduspärasus.

Olgu meie käsutuses suur valim ($n \geq 60$). Meid huvitavat vahet standardiseerides saame muutuja, mille käitumist kirjeldab standardne normaaljaotus

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim N(0, 1).$$

Standardse normaajaotuse korral aga oskame sobivalt valitud kvantiilide abil välja kirjutada lõigu, mille tõenäosus on võrdne etteantud suurusega $1 - \alpha$:

$$P(-\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \leq \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

ehk

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha. \quad (3.5)$$

Saime tõkke parameetri tõelise väärtuse ja tema hinnangu vahelisele erinevusele, mis kehtib meie määratud tõenäosusega. Täpsemini pole hinnangu viga võimalik kirjeldada.

Traditsiooniliselt aga esitatakse saadud tulemus teistsugusel kujul. Sulgudes oleva võrratuse võime ümber kirjutada nii, et keskele jääks uhkes üksinduses tundmatu parameeter μ ,

$$P(\bar{X} - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Saime valimi põhjal määratud intervalli, mis ette võetud tõenäosusega $1 - \alpha$ sisaldab parameetri tõelist väärtust. Sellist intervalli nimetatakse *usaldusintervalliks*, ette määratud tõenäosust aga *usaldusnivooks*. Usaldusintervalli otspunkte nimetatakse *usalduspiirideks*. Kui meil katse on tehtud ja valimi keskvväärtus ning standardhälve arvutatud, saame usalduspiiride arvulised väärtused välja kirjutada. Vastavalt ülal saadud tulemusele on keskvväärtuse usalduspiirid määratud valemitega

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \bar{x} - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \\ \bar{\mu} &= \bar{x} + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Näide 3.4. Leiame näite 3.1 andmete põhjal usaldusintervalli testi lugemise tegelikule keskmisele ajale, valides usaldusnivoo

väärtuseks 0.9, $1 - \alpha = 0.9$. Sel juhul $\alpha = 0.1$ ja $\frac{\alpha}{2} = 0.05$. Usaldusintervalli väljakirjutamiseks vajame standardse normaaljaotuse 0.05-täiendkvantiili. Tabelist leiame meile vajaliku väärtuse $\bar{z}_{0.05} = 1.64$. Arvutame pool usaldusintervalli laiuselt

$$\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.64 \cdot \frac{20.9}{\sqrt{465}} \approx 1.6$$

ja leiame usalduspiirid

$$\underline{\mu} = 119.5 - 1.6 = 117.9, \quad \bar{\mu} = 119.5 + 1.6 = 121.1.$$

Testi lugemiseks kuluv tegelik keskmine aeg asub üheksal juhul kümnest intervallis [117.9, 121.1].

Meenutades võrdust (3.5) võime tulemuse sõnastada ka teisiti. Kasutades valimi põhjal antud hinnangut 119.5, ei ole tehtud viga üheksal juhul kümnest suurem kui 1.6 sek.

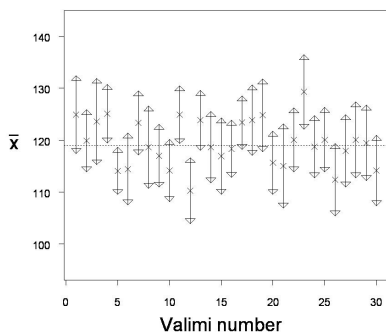


Kordame veel kord joonise abil mõttekäiku, mille kaudu me usaldusintervalli moodustamiseni jõudsime. Olgu meil valitud usaldusnivoo ja olgu meie käsutuses ühest ja samast üldkogumist tehtud juhuslike valimite keskväärtused $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$. Kanname need keskväärtused joonisele punktidenä, mille esimeseks koordinaadiks on valimi number, teiseks koordinaadiks aga valimi keskväärtuse arvuline väärtus. Oletame hetkeks, et ka üldkogumi keskväärtus μ on meile teada ning kanname selle väärtuse oma joonisele punktiirjoonega. Kui joonistame nüüd iga valimi keskväärtusest vasakule ja paremale lõigu pikkusega $\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$, siis suurema osa (umbes $(1 - \alpha) \cdot 100\%$) valimite korral asub tõeline keskväärtus μ selles lõigus.

Üks konkreetne keskväärtuste komplekt on esitatud joonisel 3.3. Selle joonise korral on kasutatud usaldusnivood 0.9, st umbes 90% valimite korral haarab usaldusintervall endasse tõelise keskväärtuse.

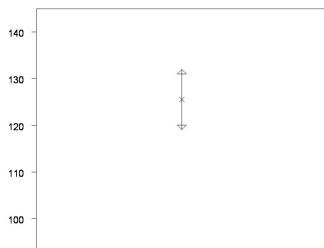
Jooniselt näeme, et väikese osa – umbes 10% – valimite korral paikneb usaldusintervall nii, et ta tõelist keskväärtust ei kata. Sellele seaduspärasusele (mis alati kehtib) toetume ka olukorras,

kus meie käsutuses on ainult üks valim ning μ tõeline väärtus on tundmatu.



Joonis 3.3. Valimite keskväärtused ja nende põhjal määratud usaldusintervallid

Mida usaldusintervalli leides tehakse, on kujutatud järgneval joonisel.



Joonis 3.4. Valimi keskväärtuse põhjal määratud usaldusintervall

Näeme, et valemeid (3.6) järgides sirutatakse meile teada olevast valimi keskväärtusest mõlemale poole "haarmed" pikkusega $\Delta, \Delta = \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$. Kõikvõimalikest valimitest, mis me vaatlusalusest üldkogumist juhuslikult moodustame, on $(1 - \alpha)100\%$ sellised, et tõeline keskväärtus satub sirutatud "haarmete" vahele.

Mis tegelikult juhtus - kas usaldusintervall sisaldab μ tegelikku väärtust või ei sisalda - jääb meile teadmata. Seda toonitab ka eelmisega võrreldes hoopis tühjem joonis – kuna μ õige väärtus on tundmatu, siis vastavat punktiirjoont lihtsalt ei saa joonisele kanda.

Vaatame veel, mis juhtub usaldusintervalliga, kui me muudame usaldusnivood.

Näide 3.5. Leiame näite 3.1 andmete põhjal usaldusintervallid testi lugemise tegelikule keskmisele ajale usaldusnivoodega 0.95 ja 0.99. Võtame tabelist meile vajalikud standardse normaalse jaotuse täiendkvantiilid $z_{0.025} = 1.96$ ja $z_{0.005} = 2.58$. Arvutame poole usaldusintervalli laiuusest mõlema usaldusnivoo jaoks. Saame

$$\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20.9}{\sqrt{465}} \approx 1.90,$$

$$\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{20.9}{\sqrt{465}} \approx 2.50.$$

Näeme, et usaldusnivoole 0.95 vastab usaldusintervall [117.1, 120.9], usaldusnivoole 0.99 aga usaldusintervall [116.5, 121.5].

Usaldusnivoo kasvades usaldusintervalli laius suureneb.



Vaatame veel kord joonist 3.3. Valides ühele lähedase usaldusnivoo, vähendame riski, et tõeline keskvärtus ei asu valimi põhjal leitud usaldusintervallis. Sellel riski vähenemisel on aga ka oma hind. Usaldusnivoo kasvades pikenevad keskvärtusest välja sirutatud haarmed, seetõttu hinnatakse suurema osa valimite korral hinnangu viga hoopis suuremaks, kui ta tegelikult on. Sellest hoidumiseks on kasulik valida usaldusnivoo nii väike, kui antud ülesande korral võimalik.

Sagedamini kasutatavad usaldusnivoo väärtused on **0.9, 0.95 ja 0.99**.

3.2.2. Usaldusintervall protsendile (suur valim)

Suurte valimite korral ($n \geq 60$) võime kasutada valemeid (3.6) ka kaheväärtuselise jaotuse keskvärtuse p usaldusintervalli määramiseks. Kui arvestame, et valimi elementide väärtusteks on

kas "0" või "1", saame valimi keskvaartuse ja standardhälbe arvutamiseks järgmised valemid:

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{m}{n},$$

$$s = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}.$$

(Nagu eespoolgi, tähistame sümboliga m ühtede arvu meie käsutuses olevas valimis.)

Tõepoolest, kuna valimis on ainult nullid ja ühed, siis

$$\sum_{i=1}^n x_i = m,$$

kus x_i on valimi i -s element. Siit $\bar{x} = \hat{p}$. Dispersiooni arvutamisel kasutame võrdust

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2,$$

kust saame

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = m - n\hat{p}^2.$$

Dispersiooni arvutamisel jagame saadud summa valimi mahuga n . (Väikeste valimite korral kasutatakse tegurit $n-1$, kuid eelduse kohaselt on meil suur valim). Seega

$$s^2 = \hat{p} - \hat{p}^2 = \hat{p}(1 - \hat{p}).$$

Valemid on tõestatud.

Usalduspiire määravad valemid aga omandavad kuju

$$\underline{p} = \hat{p} - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}},$$

$$\bar{p} = \hat{p} + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}.$$

Näide 3.6. Leiame näite 3.2. andmete põhjal usaldusintervalli selles tehases alla aasta töötanud tööliste protsendile, valides usaldusnivooks 0.95. Leiame tabelist meile vajaliku standardse normaaljaotuse täiendkvantiili $\bar{z}_{0.025} = 1.96$. Arvutame poole usaldusintervalli laiuusest:

$$\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{160}} \approx 0.051$$

ehk protsentides 5.1%.

Leiame nüüd usalduspiirid:

$$\underline{p} = 12.5 - 5.1 = 7.4\%,$$

$$\bar{p} = 12.5 + 5.1 = 17.6\%.$$

Näeme, et 95 juhul sajast asub tegelik protsent intervallis [7.4, 17.6]. Kui kasutame valimi põhjal saadud hinnangut 12.5%, pole tehtud viga 95 juhul sajast suurem kui 5.1%.



Väikeste valimite korral võib parameetri p usalduspiiride määramiseks kasutada eritabeleid (vt [15], lk 60) või eriteisendust (vt [12], 78-79).

3.2.3. Normaaljaotuse keskväärtuse usaldusintervall (väike valim)

Vaatame veel niisugust, praktikas küllalt sageli esinevat olukorda, kus uuritav tunnus on normaaljaotusega ja meie käsutuses on väike valim ($n < 60$). Sel juhul kirjeldab tõelise keskväärtuse ja valimi keskväärtuse standardiseeritud vahe käitumist t -jaotus,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1).$$

Punktis 3.2.1 kirjeldatud mõttekäiku korrates saame usalduspiiride arvutamiseks järgmised valemid

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \bar{x} - \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \\ \bar{\mu} &= \bar{x} + \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sümbooliga $\bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-1}$ on tähistatud t -jaotuse täiendkvantiil. See tähistus kannab endaga kaasas tabeli aadressi ja võib seetõttu näida keerukana. Tegelikult on ta väga otstarbekas. Vastava väärtuse leiame tabelist D. Esimene indeks määrab meile vajaliku veeru, teine indeks aga vajaliku rea.

Näide 3.7. Olgu tegemist testiga, mille abil hinnatakse vastaja testi täitmise kiirust. Oletame, et testi täitmiseks kuluv aeg on normaaljaotusega. Olgu 36 juhuslikult valitud vastaja korral

$$\bar{x} = 11.5 \text{ min}, \quad s = 1.38 \text{ min}.$$

Leiame usaldusintervalli testi täitmiseks kuluva aja tõelisele kesk-
väärtusele. Kasutame usaldusnivood 0.9. Meile vajaliku t -
jaotuse täiendkvantiili leiame tabelist C,
 $\bar{t}_{0.05;35} = 1.69$. Leiame poole usaldusintervalli laiuselt

$$\bar{t}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.68 \cdot \frac{1.38}{\sqrt{36}} \approx 0.39$$

ning saamegi kätte usalduspiirid

$$\underline{\mu} = 11.5 - 0.39 = 11.11,$$

$$\bar{\mu} = 11.5 + 0.39 = 11.89.$$

Näeme, et üheksal juhul kümnest asub tegelik keskmine aeg inter-
vallis [11.1; 11.9].



3.2.4. Usaldusintervall mediaanile

Vaatame veel, kuidas talitada olukorras, kui me tahame leida
usaldusintervalli üldkogumi keskmisele tasemele, meie käsutuses
on väike valim ja tunnuse jaotus erineb normaaljaotusest. Nii-
sugustel eeldustel võib üldkogumi keskmise taseme hindamiseks
kasutada mediaani. Üldkogumi mediaani hinnanguks on valimi
mediaan.

Usaldusintervalli määramisel üldkogumi mediaanile toetume
mediaani definitsioonile. Eeldame, et uuritav tunnus on pidev.
Võtame kasutusele meie vajalikud tähistused.

Tähistame tõelisest mediaanist M_e väiksemate valimi ele-
mentide arvu tähega N_m . See arv on juhuslik – erinevate va-
limite korral omandab ta erinevaid väärtusi. Tema muutumise
seaduspärasusi kirjeldab aga üldkogumi jaotusest olenemata bi-
noomjaotus $B(n, 0.5)$. Toepoolest, iga valimi elemendi väärtuse

määrab sõltumatu katse, N_m väärtuse määrab n sõltumatust katsest koosnev seeria. "Edu" – mediaanist väiksema väärtuse saamise – tõenäosus on 0.5. Valimi mahtu teades saame leida intervalli, milles N_m asub määratud tõenäosusest $1 - \alpha$ mitte väiksema tõenäosusega. Näiteks, kui $n = 6$, on $N_m \sim B(6, 0.5)$. Sellise binoomjaotuse esitab jaotustabel

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.016	0.094	0.234	0.312	0.234	0.094	0.016

Valime $1 - \alpha = 0.9$. Siis

$$P(1 \leq N_m \leq 5) = 1 - P(X = 0) - P(X = 6) = 0.968,$$

aga

$$P(2 \leq N_m \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.78.$$

Näeme, et meile vajalikuks intervalliks on intervall $[1, 5]$. Keskmiselt 97 juhul sajast asub tõelisest mediaanist väiksemate valimi elementide arv selles intervallis. Kui aga kehtib võrratus

$$1 \leq N_m \leq 5,$$

on tõelise mediaani väärtus suurem kui $x_{(1)}$ (vähemalt üks valimi element peab olema mediaanist väiksem) ja väiksem kui $x_{(6)}$, (mediaanist väiksemaid elemente pole üle viie). Seega

$$P(x_{(1)} < M_e < x_{(6)}) = 0.968$$

ja me olemegi mediaani jaoks välja kirjutanud ettemääratud tõenäosusest mitte väiksema usaldusnivooga usaldusintervalli.

Üldjuhul määrab üldkogumi mediaanile usaldusintervalli variatsioonrea elementide paar $x_{(r)}$ ja $x_{(n-r+1)}$, kus elemendi järjekorranumber r on suurim täisarv, mis rahuldab tingimust

$$P(r \leq N_m \leq n - r) \geq 1 - \alpha, \quad (3.8)$$

st $r + 1$ korral kehtib juba vastupidine võrratus

$$P(r + 1 \leq N_m \leq n - r - 1) < 1 - \alpha. \quad (3.9)$$

Niisuguse r väärtuse saame alati määrata, kasutades vajalikku binoomjaotuse tabelit. Võrratused (3.8) ja (3.9) kehtivad, kui

$$\sum_{i=0}^{r-1} P(N_m = i) \leq \frac{\alpha}{2}$$

ja

$$\sum_{i=0}^r P(N_m = i) > \frac{\alpha}{2}.$$

Kui valimi maht on kümnest suurem, võib r ligikaudse väärtuse määrata standardse normaaljaotuse täiendkvantiili abil. Tuginedes punktis 1.8 saadud valemile (1.11), tuleb r väärtuseks võtta suurim täisarv, mille korral

$$r \leq \frac{n}{2} \left(1 - \frac{\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.10)$$

Näiteks, kui meie käsutuses on 25-elementiline valim ja vajame usaldusintervalli usaldusnivooga 0.95, siis arvutame r määramiseks

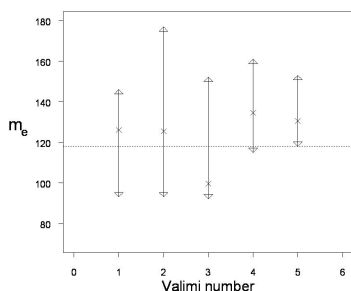
$$12.5 \cdot (1 - 1.96/5) = 7.6$$

ning saame r väärtuseks 7. Meile vajaliku usaldusintervalli määrab variatsioonrea elementide paar $x_{(7)}$ ja $x_{(19)}$.

Näide 3.8. Vaatame näites 2.3 esitatud viit juhuslikku valimit ja leiame iga valimi põhjal usaldusintervalli üldkogumi mediaanile. Varem tehtud arvutustest on meil teada, et iga kuue-elementilise valimi korral määrab üldkogumi mediaani usaldusintervalli variatsioonrea elementide paar $x_{(1)}$ ja $x_{(6)}$. Kirjutame need elemendid iga valimi jaoks välja

valim	$x_{(1)}$	$x_{(6)}$	m_e
1. valim	93	146	126
2. valim	93	177	125.5
3. valim	92	152	99.5
4. valim	115	161	134.5
5. valim	118	153	130.5

Kanname leitud usaldusintervallid ka joonisele 3.5. Kuna meie üldkogum oli deklareeritud üldkogumiks ainult õppeots-tarbel, saame leida ka tõelise üldkogumi mediaani, mis on kantud joonisele punktiirjoonega.



Joonis 3.5. Mediaani usaldusintervallid



3.2.5. Usaldusintervalli laiuse reguleerimine

Nagu eelnevatest valemitest nägime, määrab hinnangu täpsuse usaldusintervalli laius. Üldkogumi parameetrite hindamisel ei pea katsetaja aga olema sugugi passiivne juhuse mängukann. Katset on võimalik planeerida nii, et saaksime meile vajaliku laiusega usaldusintervalli. Usaldusintervalli laiust saame reguleerida katsete arvu abil. Vaatame, kuidas seda teha.

Kui meil on usaldusnivoo fikseeritud ja (teeme hetkeks niisuguse oletuse) üldkogumi standardhälve teada, sõltub keskväärtuse usaldusintervalli laius ainult sooritatud mõõtmiste arvust. Olgu (lähtudes ülesande sisust) valitud tõke usaldusintervalli laiusele. Tähistame selle tõkke sümboliga $2d$, pool usaldusintervalli laiusest ei tohi siis ületada suurust d ,

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

ja lahendades selle võrratuse katsete arvu suhtes, saame

$$n \geq \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{d}\right)^2.$$

Kui üldkogumi standardhälve on tundmatu, muutub asi veidi keerulisemaks. Vaatame lähemalt olukorda, kus uuritava tunnuse kirjeldamiseks sobib normaaljaotus. Esimese sammuna tuleb uuritavast üldkogumist teha proovivalim, mille põhjal määrame üldkogumi tundmatu standardhälbe hinnangu. Olgu proovivalimi maht n_0 , tema standardhälve aga s . Arvestades väikese valimi korral kehtivaid valemeid (3.7), saame meile vajaliku täpsuse saavutamiseks nõutava katsete arvu määrata tingimusest

$$n \geq \left(\bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n_0-1} \frac{s}{d}\right)^2. \quad (3.11)$$

Näide 3.9. Olgu meil tegemist testiga, mis võimaldab hinnata vastaja tähelepanuvõimet ja töökiirust. Huvitagu meid ainult need inimesed, kes kiiresti töötades teevad vähe vigu. Loeme kiiresti töötanuteks need vastajad, kelle testi täitmiseks ei kulunud üle 15 minuti, vigade arvu piiriks aga olgu 9 viga. Testile vastanud 36 inimese hulgas oli 12 sellist, kes ei kulutanud aega üle 15 minuti ja ei teinud üle 9 vea. Nendel vastajatel oli testi täitmiseks kulunud aja keskväärts

$$\bar{x} = 11.5 \text{ min},$$

standardhälve aga

$$s = 1.38 \text{ min}.$$

Oletame, et testile vastamiseks kuluv aeg on normaaljaotusega. Kui palju tuleks teha vaatlusi, et hinnata tõelist keskmist poole minuti täpsusega? Usaldusnivooks määrame 0.9.

Meile sobiv usaldusintervalli laius on siin 1 minut, $2d = 1$ (kui me kasutame hinnanguna ühiku pikkuse lõigu keskpunkti,

siis tehtav viga ei ole üle 0.5), seega $d = 0.5$. Paneme võrratuse (3.11) paremasse poolde arvud. Leiame tabelist meile vajaliku t -jaotuse täiendkvantiili $t_{0.05;11} = 1.796$ ja saame katsete arvu määramiseks võrratuse

$$n \geq (1.796 \cdot \frac{1.38}{0.5})^2 = 24.57.$$

Seega saame soovitava täpsusega hinnangu, kui katsete arv on 25. Kuna 12 mõõtmist on juba tehtud, tuleks testida veel 13 vastajat meid huvitavast täpsete ja kiirete töötajate klassist.

♡

Kirjeldataud lihtsa metoodika kasutamine põhjustab aga enamasti vajalike katsete arvu ülehindamist. Seda sellepärast, et t -jaotuse täiendkvantiil on muutuv – katsete arvu kasvades tema väärtused kahanevad. Ülehindamise vältimiseks võib vajaliku valimi mahu määramisel kasutada mitmesammulist protseduuri. Niisugune protseduur on küll keerukam, kuid kui katsed on kulukad, võib keerulisema protseduuri kasutamine end kuhjaga tasuda.

Alustame sellest, et moodustame üldkogumist väikese valimi mahuga n' ja arvutame selle standardhälbe, olgu see s' . Siis leiame valimi mahu n'' , mille korral

$$n'' \geq (t_{\frac{\alpha}{2}; n''-1} \frac{s'}{d})^2. \quad (3.12)$$

Seejärel moodustame üldkogumist uue valimi mahuga n'' , arvutame selle standardhälbe s'' ja leiame uue valimi mahu tingimusest

$$n''' \geq (t_{\frac{\alpha}{2}; n'''-1} \frac{s''}{d})^2.$$

Nii jätkame, kuni meile vajalik täpsus on saavutatud. Seejuures kasutame igas järgnevas valimis juba olemasolevaid mõõtmisi – teise valimi saamiseks peame tegema ainult $n'' - n'$ mõõtmist, kolmanda valimi saamiseks $n''' - n''$ mõõtmist jne. Kuna aga t -jaotuse kvantiilid jäävad 60 suuremate valimite korral praktiliselt konstantseks, pole tavaliselt palju samme vaja.

Vaatame näidet kirjeldatud mitmesammulise metoodika rakendamise kohta meile vajaliku täpsuse saavutamisel nõutava valimi mahu planeerimiseks.

Näide 3.10. Vaatame eelmises näites kirjeldatud probleemi. Jämedat hinnangut kasutades tuleb meil juurde teha veel 13 mõõtmist. Kuna mitte kõik testitavad ei kuulu meid huvitavasse täpsete ja kiirete töötajate klassi, peab tegelikult testitavaid olema mõnevõrra rohkem. Arvestades eelmises näites esinenud vahekorda, võib neid vaja minna umbes kolm korda rohkem, seega 40 ringis. Vaatame, kas mitmesammulise protseduuriga õnnestub meil ähvardavat töömahtu vähendada. Valime usaldusnivooks jällegi 0.9.

Kasutame ära näites 3.9 toodud andmed. Esimeses valimis on 12 mõõtmist (st $n' = 12$) ja valimi standardhälve on 1.38 (st $s' = 1.38$). Proovime esmalt n'' jaoks väärtust 18. Tabelist D leiame, et $\bar{t}_{0.05;17} = 1.740$ ja

$$\bar{t}_{\frac{\alpha}{2};n''-1} \frac{s'}{d} = 1.740 \cdot \frac{1.38}{0.5} \approx 4.802,$$

Näeme, et tingimus (3.12) pole veel täidetud, sest

$$18 < (4.802)^2 \approx 23.063.$$

Proovime n'' jaoks väärtust 23. Tabelist leiame, et $t_{0.05;22} = 1.717$ ja

$$t_{\frac{\alpha}{2};n''-1} \frac{s'}{d} = 1.717 \cdot \frac{1.38}{0.5} \approx 4.740.$$

Näeme, et tingimus (3.12) on täidetud, sest

$$23 > (4.740)^2 \approx 22.46.$$

Kontrollime, kas 23 on kõige väiksem väärtus, mis meile vajalikku tingimust rahuldab. Selleks vaatame veel väärtust 22. Leiame tabelist $t_{0.05;21} = 1.721$ ja

$$t_{\frac{\alpha}{2};n''-1} \frac{s'}{d} = 1.721 \cdot \frac{1.38}{0.5} \approx 4.749,$$

näeme, et tingimus (3.11) pole veel täidetud, sest

$$22 < (4.739)^2 = 22.56.$$

Väärtus 23 on tõepoolest kõige väiksem meie tingimust rahuldav väärtus.

Vajalikku täpsust tagava valimi saamiseks peame tegema veel 11 vaatlust, selleks tuleb testida umbes 33 inimest. Kui andmed on käes, kontrollime, kas vajalik täpsus on saavutatud. Vajaduse korral võime testimist jätkata.



Võtame kokku moraali, mis pingelise arvutustöö käigus võis ununeda. Kumba võtet katsete arvu planeerimiseks kasutada, oleneb sellest, kui kulukad on mõõtmised. Suhteliselt odavate mõõtmiste korral ei ole keeruka protseduuri rakendamisel valimi mahu vähendamiseks mõtet. Suhteliselt kallite ja töömahukate mõõtmiste korral on arvutused mõõtmiste arvu vähendamiseks omal kohal.

3.3. Statistiliste hüpoteeside kontrollimine

Siiani vaadatud võtted järelduste tegemiseks üldkogumi keskmise taseme kohta sobivad siis, kui meid huvitab keskmise taseme arvuline väärtus. Praktikas esineb aga väga sageli teistsugune ülesande püstitus: meid ei huvita mitte niivõrd keskmise taseme arvuline väärtus, kuivõrd tahame kontrollida, kas üldkogumi keskväärtus rahuldab teatavat loogilist tingimust. Näiteks võime esitada küsimuse, kas kõrgharidusega inimese keskmine palk ületab keskharidusega inimese keskmise palga? Või oletame, et testi täitmiseks on kehtestatud teatav normatiivne aeg – näiteks 15 min – ja soovime kontrollida, kas uuritavas üldkogumis on keskväärtus vähemalt ühe minuti võrra väiksem sellest normatiivist.

Niisuguse ülesande püstituse korral ei ole vastuseks mitte arvuline, vaid hoopis sõnaline otsustus: meie vaatlustulemused võivad olla kooskõlas tehtud oletusega ja me loeme selle oma üldkogumi korral kehtivaks või vastupidi – meie oletuse kehtivuse korral on saadud vaatlustulemused väga ebatõenäolised ja meil tuleb tehtud oletus lugeda oma üldkogumi jaoks mittekehtivaks.

Üldkogumi kohta esitatud oletust nimetatakse *statistiliseks hüpoteesiks*. Otstarbekas on kontrollimiseks esitada alati statistiliste hüpoteeside paar. Need hüpoteesid peavad olema üksteist välistavad, üks neist peab kindlasti kehtima. Väga sageli on üks kontrollitavatest hüpoteesidest lihtsalt teise eitis, kuid alati ei pruugi see nii olla – meie käsutuses võib olla sellist täiendavat informatsiooni, mis olulisest ahendab loogiliselt võimalike alternatiivide hulka. Seetõttu on vähemalt algajal andmetöötlejal kasulik mõlemad kontrollitavad hüpoteesid välja kirjutada.

Hüpoteesi, mis määrab üldkogumile võimalikult lihtsa struktuuri, mille sisuks on üldkogumi vastavus teatavale standardile, nimetatakse *nullhüpoteesiks*. Edaspidi tähistame nullhüpoteesi sümboliga H_0 . Teist hüpoteesi, mille sisuks on väide, mida me soovime tõestada, nimetatakse *sisukaks hüpoteesiks*. Edaspidises tähistame sisukat hüpoteesi sümboliga H_1 .

Eelpool toodud oletused testi täitmise keskmise aja kohta võib toodud määratlusi silmas pidades esitada järgmiselt:

$$H_0 : \mu \geq 14,$$

$$H_1 : \mu < 14.$$

Otsus hüpoteeside kohta langetatakse valimi põhjal. Loomulik on otsuse langetamisel kasutada sama statistikut, mida kasutati üldkogumi keskväärtuse hindamisel – valimi keskväärtust $\bar{x}$. Ka otsuse langetamise loogika on läbi nähtav: kui valimi keskväärtus langeb standardsetest väärtustest küllalt kaugele, lükkame otsuse üldkogumi vastavusest standardile tagasi.

Kuna meie valim on juhuslik, on ka langetatud otsus juhuslik ja seetõttu võib olla ekslik. Otsustusreegli headust kirjeldab eksimuste sagedus tema paljukordsel kasutamisel. Seda karakteristikut aga ei saa kahjuks esitada ühe arvu abil, ta on pisut keerulisem. Püüame selgitada joonise abil, millest see keerukus tuleneb.

Olgu kontrollimiseks esitatud hüpoteeside paar $H_0 : \mu = \mu_0$ ja $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Kuna siinkohal räägime ainult põhimõttelistest probleemidest, siis me hüpoteesidega sisulist probleemi ei seo. Selle tõttu pole meil aga ka võimalust arvuliselt määrata standardset väärtust μ_0 .

Piir "küllalt kaugel standardsest väärtusest" sõltub üldkogumi standardhälbest – mida suurem on üldkogumi standardhälve σ , seda muutlikumad on valimite keskväärtused. Meie otsustusreegel peab aga sobima igasugusele üldkogumile. Standardhälbe mõjust vabanemiseks normeerime valimi keskväärtuse ja standardse väärtuse vahe. Tähistame normeeritud vahe sümboliga Z ,

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$

Nüüd saame valida piiri Δ , mis sobib igas olukorras. Otsustuse langetamise eeskiri omandab kuju

$$\begin{aligned} \text{kui } |Z| \leq \Delta, \text{ siis võtta vastu } H_0, \\ \text{kui } |Z| > \Delta, \text{ siis võtta vastu } H_1. \end{aligned}$$

Otsustuse langetamise eeskirja nimetatakse lühidalt *testiks* (mõnes õpikus ka kriteeriumiks).

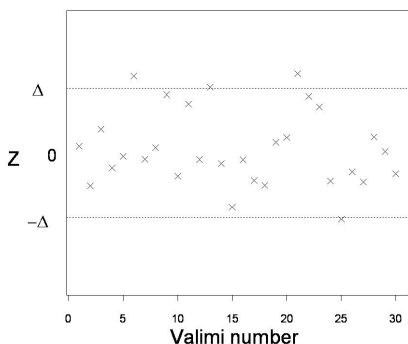
Valimi põhjal arvutatavat suurust, mille põhjal langetatakse otsus, nimetatakse *teststatistikuks* (või lihtsalt statistikuks).

Teststatistiku väärtuste piirkonda, milles võetakse vastu sisukas hüpotees, nimetatakse *kriitiliseks piirkonnaks*.

Eespool toodud testi korral on Z teststatistikuks, kriitiline piirkond on aga kaheosaline piirkond $(-\infty, -\Delta)$ ja (Δ, ∞) . Testi töökindluse uurimiseks olgu meil võimalus ühest ja samast üldkogumist teha terve hulk juhuslikke valimeid. Kujutame kolmel järgneval joonisel teststatistiku Z käitumist üldkogumi tegeliku keskväärtuse μ ja standardse väärtuse μ_0 kolme erineva vahekorra puhul. Nagu usaldusintervalli uurimisel, kanname ka nüüd vertikaalteljele teststatistiku arvulise väärtuse Z , horisontaalteljele aga valimi numbri.

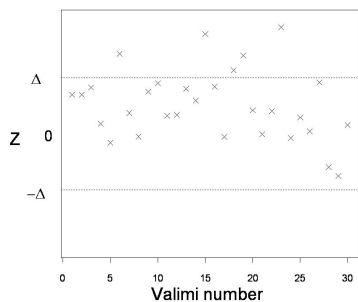
Oletame esmalt, et üldkogumi tõeline keskväärtus μ langeb kokku standardse väärtusega μ_0 . Standardiseeritud vahe käitumist ühesuguse mahuga valimite korral kirjeldab siis joonis 3.6.

Sisuka hüpoteesi – antud juhul vale otsustuse – võtame vastu siis, kui valimi põhjal leitud teststatistiku väärtus jääb väljapoole punktiirjoontega tähistatud piirkonda. Kui piir Δ on valitud mõistlikult, on sisuka hüpoteesi eksliku vastuvõtmise sagedus küllalt väike.



Joonis 3.6. Teststatistiku väärtused H_0 kehtivuse korral

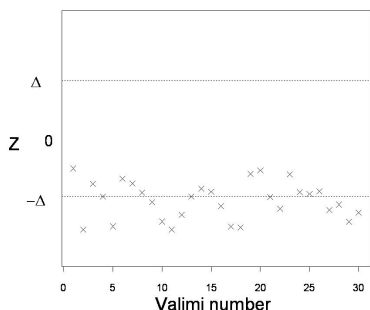
Oletame nüüd, et üldkogumi tõeline keskvärtus on natuke suurem standardsest väärtusest μ_0 . Standardiseeritud vahe käitumist ühesuguse mahuga valimite korral kirjeldab siis joonis 3.7.



Joonis 3.7. Teststatistiku väärtused H_1 kehtivuse korral

Nüüd on valeks otsustuseks nullhüpoteesi H_0 vastuvõtmine – üldkogumi tõeline keskvärtus on standardsest väärtusest μ_0 erinev. Vale otsustuse langetame siis, kui valimi põhjal leitud teststatistiku väärtus jääb punktiirjoontega tähistatud piirkonda. Nagu pildilt näeme, on eksimise sagedus hoopis teistsugune, kui eelneval joonisel näidatud olukorras. Kui üldkogumi tõeline keskvärtus on standardsele väärtusele väga lähedane, võib nullhüpoteesi eksliku vastuvõtmise sagedus olla väga suur.

Oletame lõpuks, et üldkogumi tõeline keskväärts on palju väiksem standardsest väärtusest μ_0 . Standardiseeritud vahe käitumist ühesuguse mahuga valimite korral kirjeldab siis järgnev joonis.



Joonis 3.8. Teststatistiku väärtused H_1 kehtivuse korral

Jälle on valeks otsustuseks nullhüpoteesi H_0 vastuvõtmine – üldkogumi tõeline keskväärts on standardsest väärtusest μ_0 erinev. Vale otsustuse langetame nende valimite korral, mille teststatistiku väärtus langeb punktiirjoonte vahele. Nagu pildilt näeme, on nüüd eksimise sagedus hoopis väiksem kui eelneval joonisel näidatud olukorras.

Statistiliste hüpoteeside kohta otsust langetades on võimalik eksida kahel erineval viisil:

- 1) üldkogumi keskväärts vastab standardile, kuid valimi keskväärts langeb meie poolt määratud piiridest välja ja me tunnistame üldkogumi mittestandardseks;
- 2) üldkogumi keskväärts ei vasta standardile, kuid valimi keskväärts langeb meie poolt määratud piiridesse ja me tunnistame üldkogumi standardseks.

Erinevatele eksimustele on antud eri nimed: esimest nimetatakse *1. liiki veaks* (mittekehtiva sisuka hüpoteesi vastuvõtmine), teist aga *2. liiki veaks* (mittekehtiva nullhüpoteesi vastuvõtmine).

Vigade tekkimise sagedused on silmanähtavalt erinevad, kuid paraku omavahel seotud. Esimest liiki vea sagedust saaksime vähendada piiri Δ suurendades, kuid siis suureneb automaatselt teist liiki vea tegemise risk. Selles on lihtne veenduda, kui

vaatame uuesti kolme eelnevat joonist ja nihutame mõttes punktiirjooned pisut laiemale. Kumba viga on kasulikum vältida?

Praktika on näidanud, et esimest liiki viga on raskemate tagajärgedega. Seetõttu valitakse otsuse langetamiseks vajalik kriitiline piir nii, et esimest liiki vea tegemise tõenäosus ei ületaks meie valitud tõket. Peame meeles, et uurija poolt ette määratud tõket esimest liiki vea tõenäosusele nimetatakse *olulisuse nivooks*. Kõikjal edaspidises kasutame olulisuse nivoo tähistamiseks sümbolit α .

Eksliku otsuse langetamise sagedus sõltub oluliselt sellest, milline on tegelikult üldkogumi parameeter. Meie näites on teist liiki vea tegemise tõenäosus muutuv, selle vea võimalikkus üldkogumi parameetri erinevate väärtuste korral on erinev. Tõke esimest liiki vea tõenäosusele määrab kindlaks ka tõe teist liiki vea tõenäosusele. Kui sisuka hüpoteesi kehtivuse korral on lubatavad standardsele väärtusele väga lähedased väärtused, siis on teist liiki vea tegemise tõenäosuse tõkkeks arv $1 - \alpha$. Tõenäosust vastu võtta õige otsus etteantud, standardist erineva parameetri väärtuse korral, nimetatakse *võimsuseks*.

Testi olulisuse nivoo väärtus määratakse, lähtudes konkreetse ülesande sisust, esimest ja teist liiki vea tagajärgedest. Kõige sagedamini kasutatakse väärtusi *0.1, 0.05 ja 0.01*. Tõkkeks teist liiki vea tegemise tõenäosusele kujunevad siis väärtused 0.9, 0.95 ja 0.99.

Elu on näidanud, et hüpoteeside kontrollimise loogika ei ole algajale eriti hästi vastu võetav. Võib-olla aitab sellest paremini aru saada emotsionaalne näide õigusriigi kohtupraktikast. Nullhüpoteesi (üldkogumi vastavust standardile) võib võrrelda eeldusega kaebealuse süütuse kohta. Me lähtume selle eelduse õigsusest, sellest eeldusest loobume ainult kaalukate tõendite esitamise korral. Esimest liiki viga tähendaks niisugusel juhul süütu kaebealuse süüdimõistmist, teist liiki viga aga – süüdi oleva kaebealuse karistamata jätmist. Kui süü on tegelikult väike, (üldkogum erineb standardist vähe) võibki lubada küllalt suurt riski seda mitte avastada. Vähendada seda riski, kui sellega kaasneb süütu süüdi mõistmise riski suurenemine, ei ole mõistusepärane.

3.3.1. Hüpoteesid üldkogumi keskväärtuse kohta (suur valim)

Kirjutame üles kolm praktikas kõige sagedamini esinevat hüpoteeside paari üldkogumi keskväärtuse kohta. Nagu varemgi on sümboliga μ_0 tähistatud ülesande sisust tulenev üldkogumi keskväärtuse standardne väärtus. Ka esitatav hüpoteeside paar sõltub ülesande sisust.

Kui pole teada, millises suunas üldkogumi keskväärtus võib standardist kõrvale kalduda, esitatakse hüpoteesid

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= \mu_0, \text{ üldkogumi keskväärtus on võrdne} \\ &\text{etteantud väärtusega,} \\ H_1 : \mu &\neq \mu_0, \text{ üldkogumite keskväärtus erineb} \\ &\text{etteantud väärtusest.} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Kui on põhjust oodata kindlasuunalist kõrvalekallet standardsest väärtusest, valitakse üks järgnevatest hüpoteesidest

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &\leq \mu_0, \text{ üldkogumi keskväärtus ei ole} \\ &\text{suurem etteantud väärtusest,} \\ H_1 : \mu &> \mu_0, \text{ üldkogumi keskväärtus on} \\ &\text{suurem etteantud väärtusest.} \end{aligned} \tag{3.12}$$

või

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &\geq \mu_0, \text{ üldkogumi keskväärtus ei ole} \\ &\text{väiksem etteantud väärtusest,} \\ H_1 : \mu &< \mu_0, \text{ üldkogumi keskväärtus on} \\ &\text{väiksem etteantud väärtusest.} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Erikujulistele hüpoteesidele on antud ka eri nimetused. Hüpoteesi, mis lubab mõlemasuunalisi kõrvalekaldeid standardsest väärtusest (st on esitatud kujul $\mu \neq \mu_0$), nimetatakse *kahepoolseks hüpoteesiks*. Hüpoteesi, mis lubab ainult ühesuunalisi kõrvalekaldeid standardsest väärtusest (st on esitatud kujul $\mu < \mu_0$ või $\mu > \mu_0$), nimetatakse *ühepoolseks hüpoteesiks*.

Testid ülal loetletud hüpoteeside kontrollimiseks esitame mitmesugustel erinevatel eeldustel üldkogumi ja valimi kohta.

Lepime kokku, et kõikide järgnevate testide esitamisel loeme valitud olulisuse nivoo tähiseks α , konkreetsetes ülesannetes asendame selle tähistuse meie poolt määratud arvuga. Testi esitame alati järgmiste sammude kaupa:

- 1) määrame kindlaks otsuse langetamiseks vajaliku statistiku, leiame tema jaotuse H_0 kehtivuse korral;
- 2) kirjeldame statistiku oodatavat käitumist H_0 kehtivuse korral ja määrame kindlaks kriitilise piirkonna, mis jääb sõltuma valitud olulisuse nivoost;
- 3) esitame otsuse langetamise reegli (üldjuhul tuleb vastu võtta sisukas hüpotees, kui meie valimi põhjal leitud statistiku väärtus satub kriitilisse piirkonda; muidu jääme nullhüpoteesi juurde).

Olgu meie käsutuses suur valim ("rusikareeglina" $n \geq 60$). Sel juhul *ei ole* meie käsutuses oleva üldkogumi *jaotusel* mingit tähtsust. Kõikide eelpool loetletud hüpoteeside kontrollimiseks kasutame ühte ja sama statistikut – valimi keskväärtuse $\bar{X}$ ja standardse väärtuse μ_0 standardiseeritud vahet Z ,

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}. \quad (3.14)$$

Kui üldkogumi keskväärtuse tõeliseks väärtuseks on μ_0 , kirjeldab statistiku käitumist suurte valimite korral standardne normaaljaotus, $Z \sim N(0, 1)$. Sellele asjaolule tuginedes saab määrata hüpoteeside (3.11)–(3.13) kontrollimiseks vajalikud kriitilised piirkonnad ja esitada otsuse langetamise eeskirjad.

Esitame hüpoteesidele vastavad testid kokkuvõtlikus tabelis 1. Kriitiline piirkond jääb samaks ka siis, kui me igas paaris esitame nullhüpoteesi kujul $\mu = \mu_0$.

Tabel 1

Vastu võetud hüpotees	Kontrollitav hüpoteesipaar		
	(3.11)	(3.12)	(3.13)
H_1	$ Z \geq \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z \geq \bar{z}_{\alpha}$	$-Z \geq \bar{z}_{\alpha}$
H_0	$ Z < \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z < \bar{z}_{\alpha}$	$-Z < \bar{z}_{\alpha}$

Vaatame esimest hüpoteeside paari. Nullhüpotees määrabki statistiku Z jaotuseks standardse normaaljaotuse, selle kehtivuse korral on haruldased tugevasti nullist erinevad statistiku väärtused. Sisuka hüpoteesi kehtivuse korral on aga oodatavad just kõrvalekalded nullist, kusjuures võimalikud on mõlemasuunalised kõrvalekalded. Kriitiliseks piirkonnaks on sobiv valida kahest osast koosnev piirkond $(-\infty, -\Delta)$ ja (Δ, ∞) . Kui valime $\Delta = \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}$, vastab kriitiline piirkond olulisuse nivoole α .

Vaatame teist hüpoteeside paari. Nullhüpotees lubab siin üldkogumi keskvärtusele terve hulga võimalikke väärtusi. Selgitame esmalt, kuidas käitub statistik Z , kui üldkogumi keskvärtuseks on μ_0 . Loomulikult – haruldased on tugevasti nullist erinevad statistiku väärtused. Sisuka hüpoteesi kehtivuse korral on aga oodatavad ainult kindlasuunalised kõrvalekalded nullist, oodatavad on statistiku suured positiivsed väärtused. Sellele suunale asetamegi lõksu – kriitiliseks piirkonnaks on sobiv valida ühest osast koosnev piirkond (Δ, ∞) . Kui valime $\Delta = \bar{z}_{\alpha}$, vastab kriitiline piirkond olulisuse nivoole α väärtuse μ_0 korral.

Mis aga juhtub, kui $\mu < \mu_0$? Sel korral on statistik Z samuti normaaljaotusega, $Z \sim N(\mu - \mu_0, 1)$, tema keskvärtus on väiksem nullist ja suured positiivsed kõrvalekalded muutuvad haruldasemaks kui keskvärtuse "0" korral. Järelikult, esimest liiki vea tõenäosus muutub väiksemaks kui α . Kuna olulisuse nivoo on tõke esimest liiki vea tegemise tõenäosusele, vastab kriitiline piirkond $(\bar{z}_{\alpha}, \infty)$ olulisuse nivoole α kõigi H_0 poolt lubatud üldkogumi keskvärtuste korral.

Analoogilistele kaalutlustele tuginedes valime kolmanda hüpoteesipaari korral kontrollimiseks kriitilise piirkonna $(-\infty, z_{\alpha})$.

Vaatame näidet testi rakendamise kohta.

Näide 3.10. Olgu pikaajalise kasutamise käigus selgunud, et teatava intelligentsustesti keskmine hinne 10-12 aasta vanustel õpilastel on 110 palli. Sama testi soovitakse kasutada ka teises riigis. On aga võimalik, et mitmesuguste asjaolude tõttu on testi keskmine hinne samavanustel õpilastel seal mõnevõrra erinev.

Esitame võimalikud oletused testi keskmise hinde kohta uues üldkogumis järgmise statistiliste hüpoteeside paarina

$H_0 : \mu = 110$, üldkogumi keskväärtus on 110,

$H_1 : \mu \neq 110$, üldkogumi keskväärtuseks pole 110.

Kuna meil puudub igasugune informatsioon, mis suunas uus keskväärtus eelnevast standardsest väärtusest kõrvale võiks kalduda, peame sisuka hüpoteesina kindlasti kasutama kahepoolset hüpoteesi. Määrame olulisuse nivoo, olgu $\alpha = 0.05$.

Vaatlusalust testi rakendati 80 juhuslikult valitud 10-12 aastasele õpilasele, arvatati saadud valimi keskväärtus ja standardhälve. Need olid järgmised

$$\bar{x} = 108.2, \quad s = 9.4.$$

Kas võib lugeda tõestatuks, et uue üldkogumi keskväärtus erineb teise riigi normatiivist?

Otsuse langetamiseks arvutame esmalt statistiku Z väärtuse z ,

$$z = \sqrt{80} \frac{108.2 - 110}{9.4} \approx -1.71.$$

Leiame tabelist meile otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $z_{0.025} = 1.96$ ja võrdleme neid. Kuna

$$|-1.76| < 1.96,$$

peame jääma nullhüpoteesi juurde. Kuigi valimi keskväärtus erineb standardsest väärtusest, on erinevus tunnuse hajuvust arvestades nii väike, et loeme loomulikuks niisuguse erinevuse juhuslikku tekkimist. Saadud tõend ei olnud küllalt kaalukas nullhüpoteesist loobumiseks.

Kui me võtame vastu nullhüpoteesi, on meil võimalik teha ainult teist liiki viga. Praegusel juhul on teist liiki vea tegemise tõenäosuse tõkkeks 0.95, st me oskame öelda, et eksimise risk niisugust otsust vastu võttes pole suurem kui 95%. See aga tähendab, et üsna suure tõenäosusega jäi suhteliselt väike erinevus standardsest väärtusest lihtsalt avastamata.



Suure eksimiseriski tõttu ei peeta vastu võetud nullhüpoteesi tõestatuks. On võimalik, et tehes rohkem mõõtmisi ja uurides tunnuse käitumist täpsemalt, õnnestuks nullhüpotees kummutada.

Näide 3.11. Olgu uuritavaks tunnuseks ühe teatava detaili valmistamiseks kulunud aeg. Normatiivne aeg selle detaili valmistamiseks on ette antud, olgu see 35 sekundit. Oletame, et ühe ratsionaliseerija poolt on välja pakutud võtted, mille abil ta loodab lühendada detaili valmistamiseks kulunud aega. Eesmärk saavutatakse, kui detaili valmistamiseks kulunud keskmine aeg on etteantud normatiivist väiksem. Kontrollimaks, kas eesmärk on saavutatud, viiakse läbi katse, mille käigus registreeritakse (varjatud vaatluse abil) 70 juhuslikult valitud detaili valmistamiseks kulunud aeg. Kas katsetulemused tõestavad uute võtete kasulikkust?

Esitame esmalt kontrollitavad hüpoteesid. Vastavalt ülesande sisule huvitab meid ainult see, kas töövõtete muutmine tõi kaasa detaili valmistamiseks kuluva aja keskväärtuse vähenemise, seetõttu kasutame ühepoolset hüpoteesi. Valime kontrollimiseks hüpoteesipaari

$H_0 : \mu = 35$, üldkogumi keskväärtus on 35,

$H_1 : \mu < 35$, üldkogumi keskväärtus on väiksem 35.

Määrame testi olulisuse nivoo, olgu $\alpha = 0.1$. Kriitilise väärtuse leiame normaaljaotuse tabelist, $\bar{z}_{0.1} = 1.28$. Olgu katse tulemusena saadud valimi keskväärtus ja standardhälve järgmised:

$$\bar{x} = 32.5 \text{ sek} \quad s = 10.2 \text{ sek.}$$

Arvutame otsuse langetamiseks vajaliku statistiku väärtuse

$$z = \sqrt{70} \frac{32.5 - 35}{10.2} = -2.05,$$

muudame vastavalt tabelis 1 toodud eeskirjale statistiku väärtuse märgi vastupidiseks ja võrdleme saadud väärtust tabelist võetud väärtusega:

$$2.05 > 1.28.$$

Peame vastu võtma sisuka hüpoteesi. Sisukat hüpoteesi vastu võttes võime teha aga ainult esimest liiki vea, tõenäosus eksida ei ole seejuures suurem kui 0.10 ehk – eksimise risk ei ole suurem kui 10%. Kuna sisuka hüpoteesi vastuvõtmisega kaasnev risk on meie poolt ette määratud, loetakse vastu võetud sisukas hüpotees tõestatuks.

Hinnangut esimest liiki vea tegemise riskile võime aga veelgi täpsustada, otsides vähimat olulisuse nivood, mille korral me *oma valimi põhjal* saaksime veel vastu võtta sisuka hüpoteesi. Kasutades normaaljaotuse tabelit leiame

$$\bar{z}_{0.021} = 2.04,$$

$$\bar{z}_{0.020} = 2.06.$$

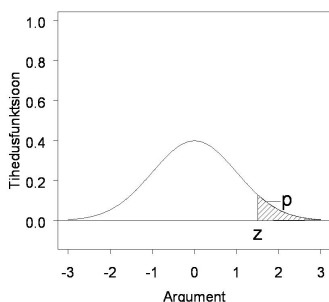
Seega vähim olulisuse nivoo, mille korral me saaksime veel oma valimi põhjal võtta vastu sisuka hüpoteesi, on 0.021. Tõepoolest, valimi põhjal leitud statistiku väärtus on suurem olulisuse nivoole 0.021 vastavast kriitilisest väärtusest, $2.05 > 2.04$, kuid väiksem olulisuse nivoole 0.020 vastavast kriitilisest väärtusest, $2.05 < 2.06$. Valides olulisuse nivoo väärtuseks 0.020 pole enam võimalik sisukat hüpoteesi tõestada.



Vähimale olulisuse nivoole, mille korral me oma valimi põhjal saame veel vastu võtta sisuka hüpoteesi, on antud erinimetus – *olulisuse tõenäosus*. Olulisuse tõenäosus iseloomustab konkreetset valimit. See on vähim risk, mida kasutades saaksime oma valimi korral sisuka hüpoteesi tõestada. Enamus arvutil realiseeritud statistikapakette lisab statistiku väärtusele olulisuse tõenäosuse p , vabastades nii kasutaja statistiliste tabelite lehitsemise vaevast. Otsuse langetamiseks tuleb vaid võrrelda valitud olulisuse nivood α ja olulisuse tõenäosust p .

Peame meeles: Kui $\alpha \leq p$, tuleb lugeda tõestatuks sisukas hüpotees, kui $\alpha > p$, tuleb jääda nullhüpoteesi juurde.

Olulisuse tõenäosuse leidmist näites 3.11 kasutatud testi korral on illustreeritud ka joonisel 3.9. Kui nullhüpotees kehtib, kirjeldab teststatistiku Z käitumist standardne normaaljaotus. Olulisuse tõenäosuse leidmisel võetakse kriitilise piirkonna rajaks valimi põhjal arvutatud teststatistiku väärtus z . Olulisuse tõenäosus on võrdne väärtuse z abil määratud piirkonna tõenäosusega. Pindala, mis määrab olulisuse tõenäosuse, on joonisel viirutatud.



Joonis 3.9. Olulisuse tõenäosuse p määramine

3.3.2. Hüpoteesid protsendi kohta

Nagu juba teame, sobib suurte valimite keskvärtuse kirjeldamiseks alati normaaljaotus, ükskõik, milline oleks üldkogumi jaotus. Seetõttu on eelpool toodud testid kasutatavad ka otsuse langetamiseks kaheväärtuselise jaotuse keskvärtuse p kohta. Veidi lihtsamaks muutub ainult statistiku Z arvutamise eeskiri. Kui $\hat{p}$ on ühtede osakaal meie käsutuses olevas valimis ja p_0 nullhüpoteesi sõnastamisel kasutatud standardne väärtus, siis

$$Z = \sqrt{n} \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}.$$

Otsus langetatakse vastavalt esitatud hüpoteesidele tabelis 1 toodud reeglitele põhjal.

Näide 3.12. Ühes tehases uuriti enne palgasüsteemi muudatuste läbiviimist tööliste suhtumist kavatsetavatesse muudatusesse. Küsitletud 120 töölisest 65 toetas muudatusi. Kas võib lugeda tõestatuks, et tegelik toetajate osakaal on üle 50%?

Sisukaks hüpoteesiks valime väite, mida tahame tõestada. Seega

$$H_0 : p \leq 0.5,$$

$$H_1 : p > 0.5.$$

Määrame olulisuse nivoo, olgu see 0.05. Leiame normaaljaotuse tabelist otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse, $\bar{z}_{0.05} = 1.64$. Arvutame muutmist toetavate tööliste osakaalu valimis,

$$\hat{p} = \frac{65}{120} = 0.54.$$

Seejärel leiame otsuse langetamiseks vajaliku statistiku väärtuse

$$z = \sqrt{120} \frac{0.54 - 0.50}{\sqrt{0.50 \cdot 0.50}} \approx 0.88$$

ja võrdleme saadud väärtust tabelist võetud kriitilise väärtusega:

$$0.88 < 1.64.$$

Me peame vastu võtma nullhüpoteesi: ümberkorraldusi pool-davaid töölisi pole rohkem kui 50%. Nullhüpoteesi vastu võttes on võimalik teha ainult teist liiki viga. Tõenäosus eksida polnud niisugust otsust vastu võttes suurem kui 0.95 ehk 95%.

See tõenäosus on kahtlemata suur. Aga arvestades seda, et ka tegeliku toetajate osakaalu 0.50001 korral me eksime nullhüpoteesi vastu võttes, võib suure eksimise tõenäosusega viga olla väga tühine.



3.3.3. Hüpoteesid normaaljaotuse keskväärtuse kohta (väike valim)

Kui meil on tegemist väikese valimiga, sõltub valimi keskväärtuse jaotus sellest, milline on üldkogumi jaotus. Vaatame eraldi juhtu, kus üldkogumi kirjeldamiseks sobib normaaljaotus. Väikese valimi standardiseeritud keskväärtuse käitumist kirjeldab siis t -jaotus. Hüpoteeside kohta otsuse langetamiseks kasutame statistikut (3.14) nagu varem, väikeste valimite korral aga tähistatakse traditsiooniliselt seda statistikut sümboliga T ,

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$

Otsuse langetamise eeskirjas peame normaaljaotuse täiendkvantiilid asendama t -jaotuse täiendkvantiilidega. Uued eeskirjad on esitatud tabelis 2.

Vaatame näidet niisuguse otsustuse kohta.

Näide 3.13. Reklaami kohaselt läbib teatavat marki auto linnas sõites 10 liitri bensiiniga keskmiselt 100 kilomeetrit. Omanik soovis kontrollida, kas tema auto ökonoomsus pole reklaamis lubatust väiksem. Viiel katsel suutis ta 10 liitri bensiiniga läbida järgmise hulga kilomeetreid: 94.3, 102.5, 96.4, 101.1, 95.0. Kas need andmed kinnitavad omaniku kahtlust? Esitame kontrollitavad hüpoteesid. Uuritavaks tunnuseks on siin 10 liitri bensiiniga läbitud kilomeetrite arv. Sisukaks hüpoteesiks valime väite, et auto ökonoomsus on väiksem reklaamis lubatust, st kilomeetrite arvu keskvärtus on väiksem kui 100. Nullhüpoteesiks valime väite, et auto ökonoomsus on standardne, st kilomeetrite arvu keskvärtus on 100.

$$H_0 : \mu = 100,$$

$$H_1 : \mu < 100.$$

Määrame olulisuse nivoo, $\alpha = 0.1$. Leiame t -jaotuse tabelist meie olulisuse nivoole ja katsete arvule vastava kriitilise väärtuse $\bar{t}_{0.1;4} = 1.533$. Arvutame valimi keskvärtuse ja standardhälbe

$$\bar{x} = 97.86 \text{ km} \quad s = 3.7 \text{ km}$$

ning leiame otsuse langetamiseks vajaliku statistiku väärtuse

$$t = \sqrt{4} \frac{97.86 - 100}{3.7} = -1.16.$$

Kirjutame saadud väärtusele ette vastasmärgi ja võrdleme teda tabelist leitud statistiku väärtusega

$$1.16 < 1.533.$$

Peame vastu võtma nullhüpoteesi: uuritava auto ökonoomsus vastab reklaamis lubatule. Risk eksida niisugust otsust vastu võttes pole suurem kui 0.9 ehk 90%. Nii suur on see tõke sellepärast, et tegelik keskvärtus võis olla näiteks 99.9 km. Sel juhul kehtiks sisukas hüpotees, kuid nii väikese erinevuse avastamiseks viie katsega on vähe lootust. Suuremate erinevuste avastamata

jätmise tõenäosus on tunduvalt väiksem sellest tõkkest. (Võimalusi teist liiki vea tõenäosuse arvutamiseks ja selle reguleerimiseks katsete arvu muutmise teel on kirjeldatud õpikus [12], lk 119-121.)



Tabel 2

Vastu võetud hüpotees	Kontrollitav hüpoteesipaar		
	(3.11)	(3.12)	(3.13)
H_1	$ T \geq \bar{t}_{\frac{\alpha}{2};n-1}$	$T \geq \bar{t}_{\alpha;n-1}$	$-T \geq \bar{t}_{\alpha;n-1}$
H_0	$ T < \bar{t}_{\frac{\alpha}{2};n-1}$	$T < \bar{t}_{\alpha;n-1}$	$-T < \bar{t}_{\alpha;n-1}$

3.4. Seos hüpoteeside kontrollimise ja usaldusintervalli leidmise vahel

Võtame veel kord vaatluse alla hüpoteesipaari $H_0 : \mu = \mu_0$ ja $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Kordame üle loogilise skeemi, millele tugines test niisuguse hüpoteesipaari kontrollimiseks ja võrdleme seda usaldusintervalli väljakirjutamisel kasutatud loogilise skeemiga.

Suurte valimite korral kasutasime testi esitamisel standardset väärtust μ_0 ja valimi standardiseeritud keskväärtust

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$

Sisuka hüpoteesi vastuvõtmise tingimuse olulisuse nivool α ,

$$|Z| > \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}},$$

võime esitada ka kujul

$$| \bar{X} - \mu_0 | > \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (3.17)$$

Usaldusintervalli määramisel üldkogumi keskvärtusele suurte valimite korral ($n \geq 60$) usaldusnivooga $1 - \alpha$ lähtusime analoogilisest võrratusest. Usaldusintervalli kuuluvad kõik väärtused μ , mille korral

$$| \bar{X} - \mu | < \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Tähistades pool usaldusintervalli laiuusest sümboliga Δ ,

$$\Delta = \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

saame need kaks otsustuseeskirja sõnastada silmatorkavalt sarnaselt. Nullhüpotees tuleb vastu võtta iga μ_0 korral, kui

$$| \bar{X} - \mu_0 | < \Delta.$$

Usaldusintervalli kuulub iga väärtus μ_0 , mille korral

$$| \bar{X} - \mu_0 | < \Delta.$$

Siit näemegi seost kahepoolse sisuka hüpoteesi kontrollimise ja usaldusintervalli leidmise vahel. Sisukat hüpoteesi saame tõestada ainult siis, kui väärtus μ_0 ei sisaldu usaldusintervallis. Nullhüpoteesi peaksime vastu võtma kõikide niisuguste standardsete väärtuste korral, mis kuuluvad antud valimi põhjal leitud usaldusintervalli.

Kahe otsustuseeskirja samaväärsus seisneb piltlikult järgmises: kahepoolseid hüpoteese kontrollides sirutame haarmed pikkusega Δ välja standardsest väärtusest μ_0 ja võtame nullhüpoteesi vastu siis, kui $\bar{x}$ jääb haarmete vahele. Usaldusintervalli konstrueerides sirutame haarmed pikkusega Δ välja valimi keskvärtusest ja loeme μ_0 usaldatavaks siis, kui ta jääb haarmete vahele.

See seos on üldise iseloomuga ja võimaldab igasugustel eeldustel ning igasuguse parameetri korral tuletada usaldusintervalli abil testi kahepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks.

Rakendame saadud tulemust üldkogumi mediaani kohta esitatud hüpoteeside kontrollimiseks. Olgu esitatud hüpoteeside paar $H_0 : M_e = m_0$ ja $H_1 : M_e \neq m_0$, kus m_0 on sisulistel kaalutlustel valitud üldkogumi mediaani standardne väärtus. Eeldame nagu ka punktis 3.6, et uuritav tunnus on pidev. Toetume samale statistikule, mida kasutasime mediaani usaldusintervalli konstrueerimisel – see oli statistik N_m , mediaanist väiksemate valimi elementide arv. Me teame, et $N_m \sim B(n, 0.5)$ ja oskame leida väärtused r ja $n - r$ nii, et

$$P(r \leq N_m \leq n - r) \geq 1 - \alpha.$$

See aga tähendab, et iga usaldusintervalli kuuluva väärtuse m_0 korral kehtib sama võrratus,

$$P(r \leq N_{m_0} \leq n - r) \geq 1 - \alpha.$$

Olemegi saanud testi kahepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks üldkogumi mediaani kohta.

Esitatud hüpoteeside kontrollimisel jätame ära saadud võrratuse ümber kirjutamise variatsioonrea elementide abil. Otsuse langetamiseks leiame nullhüpoteesis näidatud mediaani väärtusest väiksemate valimi elementide arvu N_{m_0} . Otsuse langetamise eeskiri:

kui $r \leq N_{m_0} \leq n - r$, jääme H_0 juurde,

kui $N_{m_0} < r$ või $n - r < N_{m_0}$, võtame H_1 vastu.

Kui valimis esineb mediaani "standardse" väärtusega m_0 võrdseid mõõtmistulemusi, jäetakse need lihtsalt kõrvale. Kui näiteks võrdsete väärtuste arv on s , siis valimi elementide arvuks saab n' , $n' = n - s$. Kriitiliste piiride leidmiseks tuleb kasutada binoomjaotust $B(n', 0.5)$.

Kui valim on küllalt suur ($n' > 10$), võib kasutusele võtta standardiseeritud statistiku

$$Z = \frac{2N_{m_0} + 1 - n'}{\sqrt{n'}}.$$

Statistiku standardiseerimisel tuleb lahutada temast keskväär-
tus (praegu $\frac{n'}{2}$) ja jagada saadud vahe standardhällbega (praegu
 $\frac{\sqrt{n'}}{2}$). Lugejale liidetakse veel nn "pidevuse parandus" $\frac{1}{2}$. See
on vahend, mis vähendab diskreetse jaotuse lähendamisel pideva
jaotusega tekkivat viga. Niisuguse paranduse kasutuselevõtmise
aluseks on lihtne idee – diskreetse jaotuse korral määratud kon-
reetse väärtuse omandamise tõenäosus $P(X = k)$ asendatakse
pideva jaotuse korral määratud intervalli tõenäosusega $P(k - \frac{1}{2} \leq$
 $X \leq k + \frac{1}{2})$. Arvestades binoomjaotuse lähenemist normaaljao-
tusele võime selle statistiku ligikaudseks jaotuseks lugeda stan-
dardse normaaljaotuse, $Z \sim N(0, 1)$. Otsuse langetamisel võime
kasutada tabelis 1 toodud tulemusi. Vaatame näidet niisuguse
testi rakendamise kohta.

Näide 3.14. Oletame, et esimese aasta üliõpilaste kuusisse-
tuleku mediaaniks on õppelaenuga garanteeritud 300 kr. Kasu-
tame otsuse langetamiseks valimit

400, 500, 300, 300, 500, 400, 1000, 500, 300, 50,

500, 500, 300, 200, 150, 500, 200, 400, 500, 500.

Esitame kontrollitavad hüpoteesid:

$$H_0 : M_e = 300,$$

$$H_1 : M_e \neq 300.$$

Määrame olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Loeme kokku sissetulekud,
mis on väiksemad kui 300 kr. Saame $N_{300} = 4$. Valimis esines
neli väärtust, mis olid võrdsed hüpoteetilise mediaaniga. Neid
vaatlusi kõrvale jättes saame valimi mahuks $n' = 20 - 4 =$
16. Kuna valim on küllalt suur, kasutame normaalset lähendit.
Leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse, $\bar{z}_{0.025} =$
1.96. Arvutame standardiseeritud statistiku väärtuse

$$z = 2 \frac{4 + \frac{1}{2} - 8}{\sqrt{16}} = -1.75.$$

Kuna statistiku absoluutväärtus on väiksem kriitilisest väärtusest, tuleb jääda nullhüpoteesi juurde.



3.5. Tolerantsintervall

Kui üldkogumi täpne jaotus on teada, saab leida iga intervalli osakaalu üldkogumis. Seda oskust kasutasime ju korduvalt eelmistes punktides. Eriti keeruline pole ka lahendada vastupidist ülesannet: võtame ette osakaalu ja leiame intervalli, mis omab niisugust osakaalu. Vastupidise ülesande lahendus pole enamasti ühene – on võimalik konstrueerida lõpmata palju etteantud osakaaluga intervalle. Kui aga lisame nõude, et otsitav intervall peab keskväärtuse suhtes olema sümmeetriline, on ka vastupidise ülesande lahend üheselt määratud. Niisuguseid intervalle õppisime leidma punktis 1.1.3.

Olgu tunnus normaaljaotusega, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Leiame keskväärtuse suhtes sümmeetrilise intervalli, mille osakaal oleks $1 - \gamma$. Kasutades valemit (1.10) saame

$$P(\mu - \bar{z}_{\frac{\gamma}{2}}\sigma \leq X \leq \mu + \bar{z}_{\frac{\gamma}{2}}\sigma) = 1 - \gamma. \quad (3.18)$$

Meile vajalik intervall on määratav standardse normaaljaotuse kvantiile ja üldkogumi parameetreid kasutades. Leitud intervalli nimetatakse tolerantsintervalliks nivooga $1 - \gamma$, selle intervalli otspunkte aga tolerantspiirideks.

Näide 3.15. Olgu uuritav tunnus normaaljaotusega, $X \sim N(20, 5)$. Leiame tolerantsintervalli nivooga 0.95. Meile vajaliku täiendkvantiili saame tabelist B, $\bar{z}_{0.05} = 1.96$. Vastavalt valemile (3.18) on tolerantsintervalli otspunktide väärtused

$$\underline{t} = 20 - 1.96 \cdot 5 = 10.2$$

$$\bar{t} = 20 + 1.96 \cdot 5 = 29.8,$$

seega

$$P(10.2 \leq X \leq 29.8) = 0.9.$$

Tolerantsintervalliks nivooga 0.9 on intervall $[10.2, 29.8]$.



Praktilistes ülesannetes on üldkogumi parameetrid meile tundmatud ja tolerantsintervalli pole võimalik leida. Me võime aga leida hinnangu tolerantsintervallile – määrata valimi põhjal sellise intervalli, mis ettevõetud usaldatavusega p oleks tolerantsintervalliks nivooga $1 - \gamma$.

Vaatame esmalt juhtu, kus uuritav üldkogum on normaaljaotusega, kuid jaotuse parameetrid on tundmatud. Loomulik on tolerantspiiride määramisel lähtuda valemist (3.18), asendades üldkogumi parameetrite väärtused μ ja σ nende valimhinnangutega $\bar{x}$ ja s . Kordaja $\bar{z}_{\frac{\gamma}{2}}$ aga peame asendama arvuga, mis sõltuks valimi mahust, valitud usaldatavusest p ja tolerantsnivoost $1 - \gamma$. Vastavad kordajad $\lambda_{n,p,1-\gamma}$ on toodud tabelis E.

Näide 3.16. Olgu meil tegemist testi hinnetega, mille kirjeldamiseks sobib normaaljaotus, $X \sim N(\mu, \sigma)$, uuritavaks üldkogumiks aga pealinna koolide teatavas vanuses õpilased. Olgu meil vaja leida tolerantsintervall nivooga 0.95 ja usaldatavusega 0.9. Meie käsutuses on 50 õpilase andmed, kusjuures

$$\bar{x} = 70.5, \quad s = 18.1.$$

Leiame tabelist E meie andmetele vastava kordaja

$$\lambda_{n,p,1-\gamma} = 2.28$$

ja arvutame tolerantspiirid

$$\bar{t} = 70.5 - 2.28 \cdot 18.1 = 29.3,$$

$$\underline{t} = 70.5 + 2.28 \cdot 18.1 = 111.8.$$

Leitud intervall sisaldab vähemalt 95% kõikide pealinna koolide selles eas olevate õpilaste hinnetest. Risk, et meie väide pole õige – tegelikult sisaldab see intervall väiksema protsendi kõikidest hinnetest – on 0.1 ehk 10%.



Kui uuritav tunnus ei ole normaaljaotusega, võib etteantud usaldatavusega tolerantsintervalli leidmiseks kasutada variatsioonrea

elemente. Olgu meie käsutuses oleva valimi maht n , etteantud usaldatavus p ja tolerantsnivoo $1 - \gamma$. Meile vajaliku tolerantsintervalli määravad siis variatsioonrea elemendid $x_{(r)}$ ja $x_{(n-r-1)}$, kusjuures r on suurim täisarv, mille korral tingimus

$$4\left(n + \frac{1}{2} - r\right) \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \geq \bar{h}_{1-p, 4r}$$

on veel täidetud. Valemis esinev konstant $\bar{h}_{1-p, 4r}$ on $\chi^2(4r)$ -jaotuse (hii-ruut-jaotuse) $1 - p$ -täiendkvantiil, mille saab leida tabelist H.

Hii-ruut-jaotust me varem kasutanud ei ole. See on pidev jaotus ja sõltub ainult hest täisarvulisest parameetrist. Lauset "statistik on hii-ruut-jaotusega parameetriga n " tähistame lühidalt

$$X \sim \chi^2(n).$$

Hii-ruut-jaotus võeti kasutusele kui juhuslike liidetavate ruutude summa jaotus, kus liidetavad on sõltumatud ja standardse normaaljaotusega. Jaotuse parameetri väärtuseks on sõltumatute liidetavate arv. Siit ka selle jaotuse parameetri kohta kasutatav nimetus – vabadusastmed.

Näide 3.17. Vaatame lisas 1 toodud lugemisaegu, kasutame valimina andmestiku esimest lõiku, milles on 108 lapse andmed. Leiame selle tunnuse jaoks tolerantsintervalli nivooga 0.8 ja usaldatavusega 0.95. Proovime r väärtusi 6, 7 ja 8. Arvutame teguri

$$\frac{4(1 - \gamma)}{1 + \gamma} \approx 0.444.$$

Koondame vajalikud arvutused järgnevasse tabelisse

r	$\bar{h}_{4r, 0.05}$	$4\left(n + \frac{1}{2} - r\right) \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$
6	36.41	45.56
7	41.34	45.11
8	46.19	44.67

Peame valima $r = 7$ ning usaldatavusega 0.95 on tolerantsintervall määratud variatsioonrea elementidega $x_{(7)}$ ja $x_{(102)}$. Kuna $x_{(7)} = 83$ ja $x_{(102)} = 152$, saame tolerantsintervalliks tolerantsnivooga 0.8 intervalli $[83, 152]$. Selles intervallis asuvad

vähemalt 80% laste lugemisajad, kusjuures väide on õige usaldatavusega 0.95.



Nagu näidetest näha, võib tolerantsintervalli kasutada teatud mõttes normintervallina: see on intervall, kus peaksid asuma suurema osa õpilaste hinded või suurema osa laste lugemisajad. Riski selle suurema osa alahindamiseks võib ette valida. Tuleb aga hoiatada tolerantsintervalli (eriti väikese valimi põhjal määratud tolerantsintervalli) liiga kergekäelise kasutamise eest. Risk, et tegelik tolerantsnivoo ületab meie kasutatud väärtust (risk ülehindamiseks), ei ole meie kontrolli all, see võib osutuda küllalt suureks. Seetõttu on võimalik, et määratud intervall osutub liiga tolerantseks – tema tegelik osakaal on meie määratud nivoost suurem.

Ülesanded 3.

1. Uuriti reaktsioonიაega, mis kulub teatavale valgussignaalile vastamiseks. Sooritati 17 mõõtmist, saadi järgmised tulemused (tuhandiksekundites e millisekundites):
223, 184, 200, 183, 180, 168, 215, 172, 200,
191, 197, 188, 174, 176, 155, 165, 163.
(a) Leida hinnang üldkogumi keskväärtusele ja standardhälbele.
(b) Hinnata tõenäosust, et reaktsioonიაeg on pikem kui 190 msek; lühem kui 160 msek.
(c) Leida valimi mediaan. Millisele üldkogumi parameetrile määrab see hinnangu?
2. Uuritavaks tunnuseks on vigade arv tähelepanu kontrollivas testis. 20 abituriendi testimisel saadi järgmised tulemused:
28, 21, 14, 17, 24, 18, 22, 21, 16, 26,
20, 19, 23, 22, 20, 24, 21, 19, 17, 15.
(a) Hinnata üldkogumi keskväärtust ja standardhälvet.
(b) Leida hinnang nende isikute osakaalule, kellel on alla 20 vea.
(c) Leida hinnang üldkogumi mediaanile.
3. Uuriti NNN erakonna toetajate osakaalu N riigi valijate hulgas. Küsitletud 93 hääleõiguslikust kodanikust toetas NNN erakonda 38. Leida hinnang toetajate osakaalule.

4. Leida ülesande 1 andmete põhjal usaldusintervall üldkogumi keskväärtusele. Usaldusnivooks valida 0.9, 0.95 ja 0.99.
 5. Leida ülesande 2 andmete põhjal usaldusintervall üldkogumi mediaanile ($1 - \alpha = 0.95$).
 6. Leida ülesande 3 andmete põhjal usaldusintervall NNN erakonna toetajate osakaalule N riigi hääleõiguslike kodanike hulgas ($1 - \alpha = 0.99$).
 7. Uuriti ühe intelligentsustesti tulemusi. 75 vastaja hinnete keskväärtus oli 54.5, standardhälve aga -10.2 . Leida usaldusintervall tegelikule keskmisele testi hindele.
 8. Kasutades ülesandes 2.7 toodud andmeid leida usaldusintervall testi täitmise aja keskväärtusele (valida usaldusnivooks 0.9). Leida usaldusintervall tegelikule mediaanile.
 9. Seemnete idanemisvõime kontrollimiseks külvati maha 90 seemet, neist tärkas 72. Leida usaldusintervall seemnete idanemisprotsendile ($1 - \alpha = 0.95$).
 10. N linna 127 küsitletud elanikust toetas linnavalitsuse ehituspoliitikat 34. Leida usaldusintervall tegelikule toetajate protsendile (usaldusnivoo valida ise).
 11. Leida üldkogumi mediaanile usalduspiire määravad järkstatistikute järjekorranumbrid, kui meie käsutuses on
 - (a) 8-elemendiline valim;
 - (b) 16-elemendiline valim;
 - (c) 35-elemendiline valim.
- Kõikida valimite korral kasutada usaldusnivoosid 0.9 ja 0.95.
12. Kasutades ülesandes 2.7 toodud andmeid määrata vaatluste arv, mis on vajalik, et tegelikku keskmist hinnata 0.5 minuti täpsusega.
 13. Uuriti reaktsioonიაega, mis kulub teatavale helisignaalile vastamiseks. Sooritati 20 mõõtmist, saadi järgmised tulemused (millisekundites):
 181, 194, 173, 153, 168, 176, 163, 152, 155, 155,
 178, 160, 164, 169, 155, 122, 144, 172, 167, 152.
 Olgu reaktsioonიაeg normaaljaotusega. Määrata vaatluste arv, mis on vajalik keskmise reaktsioonიაja hindamiseks vähemalt 3 msek täpsusega. Usaldusnivooks valida 0.9.
 14. Kui elukeskkonna temperatuur langeb küllalt madalale, alustab

- teatavat liiki väike näriline toidutagavarade kogumist. Varasemast uurimusest on teada, et kindla varustatuse taseme juures on keskmine varu looma kohta 9 g. Sooviti kindlaks teha, kas looma toitumuse tase mõjustab kogutud varude keskmist kaalu. Katses osalevat 8 looma hoiti kahe nädala jooksul minimaalsel eluks vajalikul ratsioonil ja sunniti siis temperatuuri muutmisega looma toidutagavarasid. Katse tulemusena saadi keskmiseks varu kaaluks 9.7g standardhällbega 0.95g. Kas nälgutamine avaldas mõju varude keskmisele kaalule?
15. Kas ülesande 1 andmete põhjal võib pidada tõestatuks, et keskmine reaktsiooniaeg on üle 170msek? ($\alpha = 0.05$)
 16. Seemnepartii loetakse kvaliteetseks, kui idanevusprotsent pole väiksem kui 90. Kas võib pidada tõestatuks, et üheksandas ülesandes kirjeldatud seemnepartii on kvaliteetne? Usaldusnivoo valida iseseisvalt.
 17. Kas ülesande 3 andmete põhjal võib pidada tõestatuks, et NNN erakonna toetajate osakaal on kõikide valijate hulgas alla 50%? Olulisuse nivoo valida vabalt.
 18. Vaatame ülesandes 2 esitatud andmeid. Kas võib pidada tõestatuks, et vigade arvu mediaaniks pole 24?
 19. Leida kriitilised piirkonnad üldkogumi mediaani oletatava väärtuse sobivuse kontrollimiseks, kui meie käsutuses on
 - (a) 10-elementiline valim;
 - (b) 19-elementiline valim;
 - (c) 25-elementiline valim.
 Kasutada olulisuse nivoo 0.1 ja 0.05.
 20. Kasutades ülesandes 4 leitud usaldusintervalli tegelikule keskmisele reaktsiooniajale, kirjutada välja vähemalt 3 erinevat nullhüpoteesi, mis meie käsutuses oleva valimi põhjal tuleks olulisuse nivool 0.05 vastu võtta.
 21. Leida lisas 1 toodud andmete põhjal usaldatavusega 0.7 ja nivoo 0.9 tolerantsintervall laste lugemisaegadele.
 - (a) Kasutada eeldust, et tunnus on normaaljaotusega;
 - (b) loobudes normaaljaotuse eeldusest.

4. KAHE ÜLDKOGUMI VÕRDLEMINE

Praktikas esineb väga sageli olukord, kus mingi (kas tahtliku või tahtmatu) tegevuse tulemusena muutuvad tingimused tunnuse väärtuse kujunemiseks. Uurijat huvitab, kas muutunud tingimused mõjustavad tunnuse jaotust üldkogumis. Niisugune probleemi asetus tähendab sisuliselt vajadust kahe üldkogumi võrdlemiseks.

Põhimõtteliselt võib võrdlemisel uurida, kas muutunud tingimused muudavad:

- 1) uuritava tunnuse keskmist taset,
- 2) uuritava tunnuse jaotust.

Kuna sagedamini pakuvad huvi muudatused tunnuse keskmises tasemes, on ka suur osa meetodeid kahe üldkogumi võrdlemiseks suunatud just niisuguste muudatuste avastamisele.

Järgnevates punktides annamegi ülevaate erinevatel eeldustel rakendatavatest üldkogumite *keskmise taseme* võrdlemise meetoditest. Keskväärtuste võrdlemisel esitatakse kontrollimiseks tavaliselt järgmine hüpoteeside paar:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused on} \\ \text{võrdsed,} \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2, \text{ üldkogumite keskväärtused} \\ \text{erinevad.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sümboolitega μ_1 ja μ_2 on siin tähistatud võrreldavate üldkogumite keskväärtusi. Kui võrreldavad tunnused on järjestustunnused, võib hüpoteesid esitada üldkogumite mediaanide kohta.

Lisainformatsiooni olemasolu korral – kui uurija teab, mis suunas tingimuste muudatus keskväärtusi võib muuta – saab kontrollimiseks esitada ühepoolsed hüpoteesid:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \mu_2, & \text{ üldkogumite keskväärtused on} \\ & \text{võrdsed,} \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2, & \text{ esimese üldkogumi keskväärtus} \\ & \text{on suurem} \end{aligned} \tag{4.2}$$

või

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \mu_2, & \text{ üldkogumite keskväärtused on} \\ & \text{võrdsed,} \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2, & \text{ esimese üldkogumi keskväärtus} \\ & \text{on väiksem.} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Loomulikult võib vajaduse korral ka nullhüpoteesi esitada võrratuse abil: $\mu_1 \leq \mu_2$ või $\mu_1 \geq \mu_2$, otsuse langetamise eeskiri sellest ei muutu.

Üldkogumite võrdlemiseks peab uurija käsutuses olema üks valim kummastki üldkogumist. Test, mida tunnuse keskväärtuste võrdlemisel kasutada, sõltub katse korraldusest, vaatluste arvust, tunnuse tüübist, tunnuse jaotuse kohta tehtud eeldustest.

Katse korraldus määrab, kas uurija saab oma käsutusse sõltuvad või sõltumatud valimid. Kui valimid sisaldavad erinevaid objekte, nimetatakse valimeid *sõltumatuteks*. Kui aga mõlemas valimis kasutatakse ühtesid ja samu objekte – asetades nad algul ühtedesse tingimustesse, tehes mõõtmised ja asetades nad siis teistesse tingimustesse – on tegemist *sõltuvate* valimitega. Sõltuvad valimid tekivad ka siis, kui ei kasutata füüsiliselt samu objekte, vaid spetsiaalselt valitud võimalikult sarnaseid objektide paare, millest üks asetatakse ühtedesse tingimustesse, teine – teistesse tingimustesse.

Alustame keskväärtuste võrdlemise meetoditest sõltumatute valimite korral.

4.1. Sõltumatud valimid: keskväärtuste võrdlus

Püstitades eesmärgiks kahe üldkogumi keskmise taseme võrdlemise, võib katsetajal olla kaks võimalust katse organiseerimiseks.

On võimalik, et üldkogumid eksisteerivad tegelikkuses. Siis uusi probleeme ei teki – katsetaja peab standardsel viisil moodustama mõlemast üldkogumist juhusliku valimi, need valimid on lähtematerjaliks hüpoteeside kontrollimisel. Näiteks soovitakse ülikoolis võrrelda nais- ja meesüliõpilaste keskmisi hindeid; lähtevalimina tuleb kasutada juhuslikult valitud naisüliõpilaste ja juhuslikult valitud meesüliõpilaste andmeid.

Kui valim pole juhuslik, võib informatsioon üldkogumite kohta olla tendentslik ja langetatud otsus vale hoopis suurema riskiga kui uurija sooviks kasutada. Mittejuhuslik valim kirjeldab pigem valikuprintsiibi tagajärjel tekkivaid erinevusi kui annab objektiivse pildi uuritavatest üldkogumitest. Eriti ohtlik on siinjuures asjaolu, et halva valimi mahu kasvades suureneb risk teha vale järeldust. Juhusliku valimi korral on lood vastupidised – valimi mahu kasvades muutub informatsioon üldkogumi kohta täpsemaks.

On aga võimalik, et katsetaja käsutuses on mingi hulk (juhuslikult valitud) katsealuseid ühest ja samast üldkogumist. Need katsealused peab ta ise jagama kahte rühma ja siis teatava töötlemise teel tekitama võrreldavates üldkogumites valitsevad tingimused. Siin on korrektse tulemuse saamiseks vaja ettevaatust. Reeglina pole katsealused päris ühesugused. Ebaõnnestunud rühmadesse jaotamise reegel võib oluliselt võimendada katsealuste erinevust ja nii täielikult maskeerida töötlustest tingitud efekti, mis uurijat tegelikult huvitab. Niisuguse tendentslikkuse vältimiseks tuleb rühmadesse jaotada juhuslikult. Seda võib teha lihtsalt loosimise teel. Kui katsealuseid on näiteks 20, siis tuleks nad nummerdada, kirjutada 20 sedelit numbritega 1 kuni 20, asetada need urni (või mütsi, kui urni pole) ja valida nende hulgast huupi 10 sedelit. Katsealused, kelle (või mille) numbrid on välja valitud, võib lugeda kuuluvaks esimesse rühma, ülejäänud teise. Võimaluse korral tuleks valida ühesuured rühmad. Kui aga katsealuseid on 21, ei tasuks siiski ühesuureste rühmade

saamiseks ühte neist poolitama hakata, õigem on moodustada 10 ja 11 liikmeline rühm. Soovi korral võib muidugi objektide rühmitamiseks kasutada rafineeritumaid võtteid – juhuslike arvude tabelit (vt punkt 2.3) või arvuti abi.

Kui katse eesmärgiks on uurida mingi töötluse mõju, jagatakse katsealuste rühm samuti kaheks. Üks rühm läbib töötluse, teine rühm jääb esindama töötlemata üldkogumit. Seda rühma nimetatakse sageli kontrollrühmaks.

4.1.1. Suured valimid

Olgu uuritav tunnus arvuline ja olgu meie käsutuses kaks sõltumatut valimit, mille maht on suur – kokku olgu tehtud vaatluste arv 60 läheduses. Esimene valim olgu mahuga n_1 , keskväärtusega $\bar{x}_1$ ja standardhällbega s_1 , teine mahuga n_2 , keskväärtusega $\bar{x}_2$ ja standardhällbega s_2 . Loomulikuks hinnanguks üldkogumite keskväärtuste erinevusele on valimite keskväärtuste vahe $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

Saab näidata, et suurte valimite keskväärtuste vahe käitumist kirjeldab normaaljaotus, ükskõik milline oleks ka uuritava tunnuse jaotus. Küllalt suurte valimite korral võib selle normaaljaotuse standardhällbe lugeda võrdseks valimite põhjal määratud hinnanguga – ruutjuurega valimite keskväärtuste dispersioonide summast

$$s_* = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

See valem peaks intuiitiivselt olema üsna hästi vastuvõetav – veaga mõõdetud suuruste vahe arvutamisel tegurite vead liituvad. Seega on väide

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, s_*)$$

suurte valimite korral üsna lähedane tõe. Seda tulemust saab kasutada nii usaldusintervalli konstrueerimisel keskväärtuste vahele kui ka hüpoteeside (4.1)-(4.3) kontrollimiseks.

Usaldusintervalli määramiseks kasutame varem kirjeldatud ideoloogiat (vt punkt 3.2), kust saame valemid usalduspiiride jaoks

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} s_*, \\ \overline{\mu_1 - \mu_2} &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} s_*.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Hästi läbi nähtav on ka strateegia hüpoteeside kontrollimiseks. Kui valimite keskväärtuste vahe on "suur" tuleks lugeda tõestatuks sisukas hüpotees. Tunnuste hajuvust arvestamata pole aga võimalik kindlaks määrata, mida tähendab "suur". Seda väidet selgitab järgnev näide.

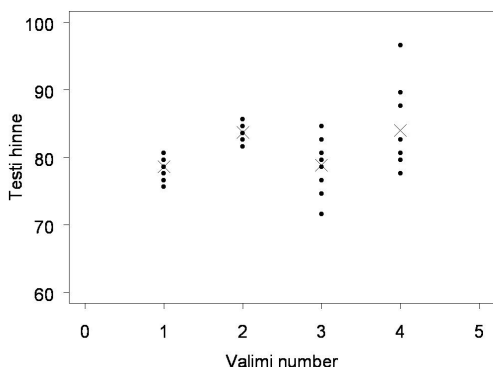
Näide 4.1. Olgu vaatluse all kaks erinevat keskkooli. Mõlemas keskkoolis on 2 abiturientide klassi. Mõlemast klassist valitakse huupi 10 õpilast, kellega viiakse läbi intelligentsustest. Saadud hinded on järgmised:

1. kool		2.kool	
A klass	B klass	A klass	B klass
78	86	75	80
77	83	75	80
77	82	81	78
78	84	77	88
76	85	85	80
81	86	83	90
80	83	79	81
81	82	80	83
79	82	81	83
79	84	72	97

Esitame need andmed joonisel. Punktidega on tähistatud valimi elementide väärtused (korduvad väärtused sulavad kokku üheks punktiks), ristikesega vastava valimi keskväärtus. Valimi numbriks joonisel 4.1 on tabeli veeru number, milles vastav valim paikneb.

Intuiitiivselt on selge, et vasakul kujutatud valimite korral võib valimite keskväärtuste erinevuse lugeda "suureks", paremal kujutatud valimite korral aga mitte. Esimese kooli ühes klassis on enam-vähem ühesuguse tasemega lapsed. Seetõttu, tunnuse väikese varieeruvuse taustal võib arvata, et klasside tõelised keskmised on samuti erinevad. Teises koolis on mõlemas paralleelklassis väga erineva tasemega lapsi. Kuigi valimi keskväär-

tuste erinevus on peaaegu sama suur, on intelligentsustaseme suurt varieeruvust arvestades riskantne teha järeldust klasside tõeliste keskväärtuste vahekorra kohta.



Joonis 4.1. Testi hinded erinevates klassides

Mida suurem on tunnuste hajuvus, seda suuremad võivad olla ühest ja samast üldkogumist pärinevate valimite keskväärtuste erinevused.



Hajuvuse arvesse võtmiseks kasutatakse otsuse langetamiseks standardiseeritud keskväärtuste vahet

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_*}. \quad (4.5)$$

Kui H_0 kehtib, on selle statistiku jaotuseks standardne normaaljaotus, $Z \sim N(0, 1)$. Seega võime hüpoteeside kontrollimise eeskirjad leida tabelist 1.

Vajaduse korral võib hüpoteesid esitada ka kujul

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \quad \text{ja} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta,$$

kus δ on teatav konstant, mille väärtus määratakse sisuliste kaalutlustele tuginedes. Sel juhul tuleb keskväärtuste vahe ka tsentreerida, st kasutada otsuse langetamiseks statistikut

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S_*},$$

kusjuures otsuse langetamise eeskiri on esitatud tabelis 1.

Näide 4.2. Olgu eesmärgiks võrrelda detaili valmistamiseks kulunud keskmist aega kahe erineva töökorralduse juures (töökorraldused A ja B). Katses on võimalik kasutada kahe kutsekooli õpilasi, kummastki 40. Mõlema kutsekooli rühmad jagati pooleks, kasutades juhuslikku valikut. Ühte poolt õpetati töötama vastavalt töökorraldusele A, teist vastavalt töökorraldusele B. Niisugune võte on kasulik seetõttu, et võimaldab vältida kutsekoolide õpetustasemetes erinevuse mõju, kui see on märgatav.

Mitmel põhjusel ei saanud töökorraldust B kasutavas rühmas 5 õpilast katses osaleda, seega tekkisid erineva mahuga valimid. Otsuse langetamiseks korraldati kontrollkatse. Kontrollkatses pidid õpilased töötama 4 tundi, kusjuures igal neist loendati juhuslikult valitud tunni jooksul valmistatud detailide arv. Säilitamiseks normaalset töösse suhtumist, valiti kontrolltund ja teostati vaatlus õpilasele märkamatuks. Jagades 3600 sekundit valmistatud detailide arvuga, saadi iga õpilase jaoks hinnang ühe detaili valmistamise ajale.

Seega on töökorralduse A korral meie käsutuses 40 tulemust, kusjuures $\bar{x}_1 = 32.5$ ja $s_1 = 10.2$ ja töökorralduse B korral 35 tulemust, kusjuures $\bar{x}_2 = 34.6$ ja $s_2 = 12.4$. (Detailide valmistamisajad on mõõdetud sekundites.)

Leiame esmalt hinnangu keskmiste aegade vahele

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = 32.5 - 34.6 = -2.1.$$

Näeme, et hinnang on negatiivne: valimite keskväärtuste vahe erineb nullist, kusjuures korralduse A puhul saavutatakse mõnevõrra lühem keskmine aeg kui korralduse B puhul. Saadud hinnangu täpsust iseloomustab usaldusintervall. Selle välja kirjutamiseks leiame esmalt keskväärtuste vahe standardhälbe:

$$s_* = \sqrt{\frac{10.2}{40} + \frac{12.4}{35}} \approx 2.72,$$

valime usaldusnivoo $1 - \alpha = 0.95$ ja arvutame usalduspiirid:

$$\underline{\mu_1 - \mu_2} = -2.1 - 1.96 \times 2.72 \approx -7.40$$

$$\overline{\mu_1 - \mu_2} = -2.1 + 1.96 \times 2.72 \approx 3.23.$$

Seega tegelik keskväärtuste vahe asub intervallis $[-7.40, 3.23]$. Kuna saadud intervall sisaldab nulli (null on keskväärtuste vahe usaldatavaks väärtuseks), pole kummalgi töökorraldusel nii olulist mõju detaili valmistamiseks kulunud keskmisele ajale, et meil seda oma katsega õnnestuks tõestada.

Kahepoolset hüpoteesi pole enam mõtet kontrollida – on ju see ülesanne samaväärne usaldusintervalli leidmisega (vt punkt 3.12). Oletame aga, et töökorraldus A on spetsiaalselt mõeldud selleks, et vähendada detaili valmistamiseks kuluvat aega. Tulemusele hinnangu andmiseks esitame ühepoolsed hüpoteesid

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ja} \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2.$$

Nende hüpoteeside kontrollimisel on mõtet. On võimalik, et me oma valimi põhjal ei saa kahepoolset sisukat hüpoteesi tõestada, lisades aga valimis sisalduvale informatsioonile täiendava teadmise, mis suunas muutust on oodata, võib ühepoolse sisuka hüpoteesi tõestamine õnnestuda.

Võtame olulisuse nivoo väärtuseks 0.05. Leiame kriitilise väärtuse $\bar{z}_{0.05} = 1.64$. Arvutame standardiseeritud vahe

$$z = \frac{-2.1}{2.72} \approx -0.77.$$

Kuna saadud statistiku väärtus ei ületa absoluutväärtuselt kriitilist väärtust, $0.77 < 1.64$, siis peame jääma nullhüpoteesi juurde: meil ei õnnestunud tõestada, et töökorralduse muutmine võimaldaks vähendada keskmist detaili valmistamiseks kulunud aega. Seejuures on muidugi võimalik, et väike muutus keskväärtuses jäi avastamata – meie valimi maht ei võimaldanud seda tunnuse suure varieeruvuse taustal kindlaks teha. On ju nullhüpoteesi vastu võttes võimalik teha teist liiki viga, mille tegemise risk on tõkestatud arvuga $1 - \alpha$, praegu on seega tõkkeks arv 0.95.

Rõhutame veel kord, et nii suur on risk suhteliselt väikeste keskväärtuse muudatuste avastamata jätmiseks. Keskväärtuste erinevuse suurenedes risk seda avastamata jätta väheneb.

Kui soovitakse suurendada väikese muudatuse avastamise tõenäosust, tuleks katset korrata suuremate valimitega. Siis võib juhtuda, et uurijal õnnestub ka väike muudatus avastada. Ei

loeta ju vastu võetud nullhüpoteesi tõestatuks – katsete arvu suurenedes võib tema kummutamine osutuda võimalikuks.



4.1.2. Protsentide võrdlemine (suur valim)

Kui valimid on küllalt suured, on eelmises punktis toodud valemid kasutatavad ükskõik millise jaotusega arvulise tunnuse korral. Vaatame eraldi siiski ühte jaotust – Bernoulli jaotust. Selle jaotuse korral võib tunnus omandada ainult kaks erinevat väärtust: 0 ja 1. Jaotuse parameetriks p on väärtuse 1 omandamise tõenäosus.

Niisugune lihtne jaotus on statistilistes uuringutes väga sageli kasutatav – nimelt siis, kui uuritakse teatava omaduse või hoiaku objektide osakaalu üldkogumis. Vastava omaduse või hoiaku esinemisel loetakse tunnuse väärtuseks "üks". Seega on Bernoulli jaotus teatav indikaator, mis pole seotud konkreetse sisuga, vaid võimaldab formaliseerida iga osakaalu hindamise ülesande.

Esimeses peatükis näitasime, et parameeter p on ka Bernoulli jaotuse keskväärtuseks. Seetõttu on selle jaotuse korral keskväärtuste võrdlemine esitatav hüpoteeside

$$\begin{aligned} H_0 : p_1 &= p_2, \text{ osakaalud üldkogumites võrduvad,} \\ H_1 : p_1 &\neq p_2, \text{ osakaalud üldkogumites erinevad} \end{aligned} \quad (4.6)$$

abil. Kui lisainformatsiooni olemasolu võimaldab kontrollida ühepoolseid hüpoteese, omavad nad kuju

$$\begin{aligned} H_0 : p_1 &= p_2, \text{ osakaalud üldkogumites} \\ &\text{on võrdsed,} \\ H_1 : p_1 &> p_2, \text{ osakaal esimeses üldkogumis} \\ &\text{on suurem,} \end{aligned} \quad (4.7)$$

või

$$\begin{aligned} H_0 : p_1 &= p_2, \text{ osakaalud üldkogumites} \\ &\text{on võrdsed,} \\ H_1 : p_1 &< p_2, \text{ osakaal esimeses üldkogumis} \\ &\text{on väiksem.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nagu ikka, võib nullhüpoteesi esitada ka mitterange võrratuse abil. Otsuse langetamise eeskiri sellest ei muutu.

Kasutades nüüd lihtsaid algebralisi teisendusi ja tunnuse omapäraseid väärtusi – ainult 0 ja 1 – on lihtne veenduda, et

$$\bar{x}_i = \hat{p}_i, \quad s_i = \sqrt{\hat{p}_i(1 - \hat{p}_i)},$$

$i = 1, 2$. Siin $\hat{p}_i = m_i/n_i$ ja sümboliga m_i on tähistatud ühtede arv i -ndas valimis. Statistiku $\hat{p}_i$ väärtuseks on seega ühtede osakaal i -ndas valimis.

Analoogiliselt eelnevaga saame parameetrite vahe hinnangu dispersiooni

$$s_{p*} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}. \quad (4.9)$$

Valemid usalduspiiride arvutamiseks omandavad kuju:

$$\begin{aligned} \underline{p_1 - p_2} &= \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} s_{p*}, \\ \overline{p_1 - p_2} &= \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} s_{p*}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hüpoteeside (4.6)–(4.8) kontrollimiseks kasutatakse eelmises punktis kirjeldatud statistikule Z analoogilist statistikut, kuid jaotuse omapära tõttu muutub pisut tema arvutuseeskiri. Segadustest hoidumiseks kasutame protsentide võrdlemisel statistiku tähisena sümbolit Z_p . Nimelt võivad normaaljaotuse korral jaotuse keskväärts ja dispersioon muutuda üksteisest täiesti sõltumatult. Bernoulli jaotuse korral on asi teisiti – nii keskväärts kui ka dispersioon avalduvad jaotuse parameetri p kaudu. Kuna nullhüpotees väidab, et $p_1 = p_2$, siis leitakse statistiku Z_p normeerimisel esmalt parameetrile p mõlemat valimit kasutades ühine hinnang

$$\hat{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2},$$

kust

$$\hat{s}_{p*} = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}.$$

Statistik Z_p normeeritakse selle ühise hinnangu abil

$$Z_p = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\hat{s}_{p*}}. \quad (4.11)$$

Kui nullhüpotees kehtib, on selle statistiku jaotus väga lähedane standardsele normaaljaotusele,

$$Z_p \sim N(0, 1).$$

Hüpoteeside kohta otsuse langetamise eeskirjad võib nüüd leida tabelist 1.

Näide 4.3. Olgu tegemist NN erakonnaga, kes hoides parajasti enda käes täitevvõimu, soovib jälgida oma populaarsuse muutust. Seda tehakse küsitluste seeria abil, küsitledes korraga juhuslikult valitud sadat valijat. Iga küsitluse jaoks moodustatakse uus juhuslik valim. Sajast vastanust pooldas erakonda esimesel küsitlusel 23 vastajat, teisel – 19. Kas muudatus on oluline? Kui p_1 tähistab NN erakonna pooldajate osakaalu kõikide valijate hulgas esimese küsitluse hetkel ja p_2 – teise küsitluse hetkel, siis esitatud probleem taandub järgnevate statistiliste hüpoteeside kontrollimiseks

$H_0 : p_1 = p_2$: toetus NN erakonnale pole muutunud,

$H_1 : p_1 \neq p_2$: toetus NN erakonnale on muutunud.

Valime olulisuse nivooks 0.1 – esimest liiki vea (erakonna populaarsus pole muutunud, kuid võetakse vastu sisukas hüpotees) tagajärjed pole eriti rasked. Leiame tabelist B valitud olulisuse nivoole vastava kriitilise väärtuse, $\bar{z}_{0.05} = 1.64$ ning arvutame valimhinnangud

$$\hat{p}_1 = 0.23, \quad \hat{p}_2 = 0.19, \quad \hat{p} = 42/200 = 0.21,$$

ja

$$\hat{s}_{p*} = \sqrt{0.21 \cdot 0.79 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} \right)} \approx 0.0576.$$

Näeme, et esimeses küsitluses toetas erakonda 23% vastajatest, teises – ainult 19%. Toimunud on 4% muutus.

Leiame teststatistiku väärtuse

$$z_p = \frac{0.23 - 0.19}{0.0576} \approx 0.694.$$

Võrdleme leitud statistiku väärtust kriitilise väärtusega, $0.694 < 1.64$. Tuleb jääda nullhüpoteesi juurde – erakonna toetajate osakaalu muutust kahe küsitluse vahel ei õnnestunud tõestada.

Selles ülesandes on lihtne leida ka olulisuse tõenäosust – vähimat olulisuse nivood, mille korral katse andmete põhjal saaks vastu võtta sisuka hüpoteesi. Selleks otsime tabelist B tõenäosuse $\frac{\alpha}{2}$, mille korral $\bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} = 0.694$. Saame $\frac{\alpha}{2} \approx 0.245$, kust $\alpha = 0.490$. Kui oleksime valinud olulisuse nivooks 0.490, oleksime saanud tõestada sisuka hüpoteesi. Nii suurt riski sisuka hüpoteesi tõestamisel ei kasutata.

Leiame veel usaldusintervalli toetajate osakaalu muutusele. Selleks arvutame esmalt valemiga (4.9) määratud standardhälbe hinnangu

$$s_{p*} = \sqrt{\frac{0.23 \cdot 0.77}{100} + \frac{0.19 \cdot 0.81}{100}} \approx 0.058$$

ja leiame nüüd valemiga (4.10) määratud usalduspiirid, kasutades usaldusnivood 0.9. Saame

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 0.04 - 1.64 \cdot 0.058 \approx 0.04 - 0.095 \approx -0.055, \\ \overline{p_1 - p_2} &= 0.04 + 1.64 \cdot 0.058 \approx 0.04 + 0.095 \approx 0.135. \end{aligned}$$

Seega võib toetajate osakaalu muutus asuda intervallis $[-0.055, 0.135]$. Avaldades intervalli otspunktid protsentides võime kirjutada: erakonna toetajate protsendi muutus asub intervallis $[-5.5\%, 13.5\%]$. Saadud tulemuse põhjal võib järeldada, et 100 inimese küsitluse põhjal tehtud järeldus on üsna ebatäpne – kasutades saadud hinnangut "toetajate protsent on vähenenud 4% võrra", teeme vea, mis 9 juhul 10 pole suurem kui 9.5%. Kui soovitakse muutust hinnata täpsemini, tuleb küsitleda rohkem inimesi.



Näitest jäi lahtiseks probleem – kui me anname ette soovitava hinnangu täpsuse, kuidas määrata siis vajalik katsete arv? Üldjuhul ja täpselt on sellele küsimusele üsna raske vastata. Küll aga saame anda ligikaudse hinnangu eeldusel, et kasutatakse võrdse

mahuga valimeid. Olgu soovitava usaldusintervalli laius $2l$, kasutatav usaldusnivoo $1-\alpha$, mõlemas valimis olgu n vaatlust. Siis

$$s_{p*} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1) + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}$$

ja katsete arvu määramiseks saame võrratuse

$$\bar{z} \frac{\alpha}{2} s_{p*} \leq l.$$

Võrratuse vasakul poolel asuvad aga tundmatud valimhinnangud $\hat{p}_1$ ja $\hat{p}_2$. Neist vabanemiseks kasutame järgmist võtet – leiame $\max s_{p*}$. Standardsel viisil saame, et maksimum saavutatakse, kui $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{1}{2}$ ja siis

$$\max s_{p*} = \sqrt{\frac{1}{2n}}.$$

Kuna võrratusest

$$\bar{z} \frac{\alpha}{2} \max s_{p*} \leq l.$$

järeldub võrratus

$$\bar{z} \frac{\alpha}{2} s_{p*} \leq l,$$

siis lähtume katsete arvu hindamisel esimesest võrratusest. Saame

$$\frac{\bar{z} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2n}} \leq l,$$

kust

$$n \geq \left(\frac{\bar{z} \frac{\alpha}{2}}{l\sqrt{2}} \right)^2.$$

Näiteks, kui valida $l=0.01$ ja $\alpha=0.1$, siis saame katsete arvu jaoks orienteeriva tingimuse

$$n \geq 13612.5.$$

Muudatuse hindamiseks 1% täpsusega tuleks küsitleda rohkem kui kümmet tuhatet valijat. Kui aga valida $l=0.03$, siis

$$n \geq 1512.5.$$

Muudatuse hindamiseks 3% täpsusega tuleks küsitleda rohkem kui poolteisttuhatet valijat. Tegelikult vajalik katsete arv on muidugi mõnevõrra väiksem – hinnangu saamiseks lähtuti valimhinnangutest, mille korral vahe varieeruvus on maksimaalne.

4.1.3. T-test

Vaatame esmalt olukorda, kus uuritava tunnuse käitumist mõlemas üldkogumis kirjeldab *normaaljaotus*. Selle normaaljaotuse keskväärtus võib erinevates üldkogumites olla erinev, kuid tunnuse hajuvus – st tunnuse standardhälve – olgu mõlemas üldkogumis *ühesugune*. Niisuguste eelduste täidetuse korral tuleb keskväärtuste vahe standardhälbe arvutamisel kasutada mõlema valimi põhjal määratud ühist standardhälbe hinnangut

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

kust saame keskväärtuste vahe standardhälbe hinnangu

$$s_{u*} = \sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}} = s\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1n_2}}.$$

Väikeste valimite korral ei tohi ignoreerida ebatäpsust, mis tekib, kui tõelise standardhälbe asemel kasutada tema hinnangut. Seetõttu jõuame välja teise jaotuse juurde. Tehtud eeldustel on keskväärtuste standardiseeritud vahe *t-jaotusega* parameetriga $n_1 + n_2 - 2$,

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{u*}} \sim t(n_1 + n_2 - 2). \tag{4.12}$$

Üldkogumite keskväärtuste vahe uurimiseks võib nüüd kasutada esimeses alapunktis kirjeldatutega analoogilisi võtteid.

Usaldusintervalli määramiseks usaldusnivool $1 - \alpha$ kasutame valemeid

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{t}_{\alpha/2, n_1 + n_2 - 2} s_{u*}, \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{t}_{\alpha/2, n_1 + n_2 - 2} s_{u*}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Hüpoteeside kontrollimise eeskirjad on aga toodud tabelis 3. Tabelis on kasutatud tähistust $v = n_1 + n_2 - 2$.

Tabel 3

Vastu võetud hüpotees	Kontrollitav hüpoteesipaar		
	(4.1)	(4.2)	(4.3)
H_1	$ T \geq \bar{t}_{\alpha/2;v}$	$T \geq \bar{t}_{\alpha;v}$	$-T \geq \bar{t}_{\alpha;v}$
H_0	$ T < \bar{t}_{\alpha/2;v}$	$T < \bar{t}_{\alpha;v}$	$-T < \bar{t}_{\alpha;v}$

Näide 4.4. Ühes uuringus, kus küsitleti bakalaureusekraadiga ülikooli lõpetanud psühholooge, oli üheks tunnuseks küsitletava palk. Muude küsimuste kõrval sooviti kontrollida, kas mees- ja naispsühholoogide keskmised palgad on erinevad. Otsuse langetamiseks olgu meie käsutuses 12 naise ja 10 mehe andmed.

Naised: 1801 1702 1496 1370 1680 1420 1700 1404 1680
1220 2300 2005

Mehed: 2035 1486 1807 2100 2050 1870 1680 1825 1200
2200

Kuna puudub täiendav informatsioon, kumb keskväärtus võiks olla suurem, esitati kontrollimiseks hüpoteeside paar:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$: mees- ja naispsühholoogide
keskmised palgad on võrdsed,

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$: mees- ja naispsühholoogide
keskmised palgad on erinevad.

Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Leiame tabelist D otsuse langetamiseks vajaliku t -jaotuse kriitilise väärtuse, $\bar{t}_{0.025;20} = 2.086$.

Arvutame valimite arvkarakteristikud. Saame

$$\bar{x}_1 = 1648.2, \quad s_1 = 298.3, \quad \bar{x}_2 = 1825.3, \quad s_2 = 305.5.$$

Arvutame standardhälbe ühishinnangu,

$$s = \sqrt{\frac{11 \cdot 88974.7 + 9 \cdot 93321.6}{20}} \approx 301.5.$$

Leiame palgade keskväärtuste vahe

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -177.1$$

ja otsuse langetamiseks vajaliku palgade keskväärtuste standardiseeritud vahe ehk T -statistiku väärtuse

$$t = \frac{-177.1}{301.5} \sqrt{\frac{120}{22}} \approx -1.37.$$

Kuna statistiku absoluutväärtus ei ületa meie poolt valitud kriitilist väärtust, peame vastu võtma nullhüpoteesi: nende andmete põhjal pole võimalik tõestada mees- ja naispsühholoogide keskmiste palgade erinevust.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Eelpool toodud valemid kehtivad täiendava eelduse korral: üldkogumite standardhälbed on võrdsed. Seetõttu tekib vajadus ka selle eelduse kontrollimiseks. Olgu sümbolitega σ_1 ja σ_2 tähistatud võrreldavate üldkogumite standardhälbed. Võrreldavate üldkogumite dispersioonid on siis σ_1^2 ja σ_2^2 . Vaatame, kuidas kontrollida hüpoteese

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ ja } H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad (4.14).$$

Kuna üldkogumi dispersiooni hinnanguks on valimi dispersioon, on loomulik kasutada nende hüpoteeside testimiseks valimi dispersioonide vahet või suhet. Kuna lihtsam on leida valimi dispersioonide suhte jaotust, võeti esitatud hüpoteeside kontrollimiseks kasutusele statistik

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \quad (4.15).$$

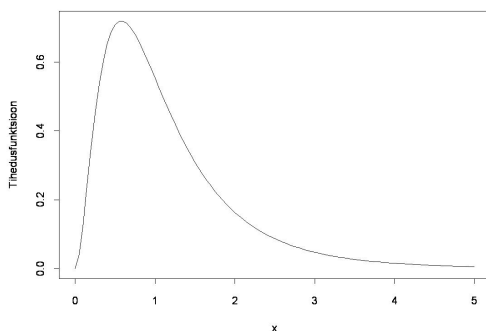
Selle statistiku jaotuseks on nullhüpoteesi kehtivuse korral F -jaotus parameetritega $n_1 - 1$ ja $n_2 - 1$, $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

F -jaotuse võttis kasutusele inglise matemaatik, kaasaegse matemaatilise statistika üks rajajatest sir Ronald Alymer Fisher (1890 - 1962). Ta publitseeris 1922. a. artikli, milles kasutas F -statistiku analoogi regressioonimudeli sobivuse kirjeldamiseks ning leidis selle jaotuse. 1925. a. kirjeldas Fisher F -jaotuse kasutamisevõimalusi dispersioonanalüüsis – see jaotus sobib kahe valimi dispersiooni suhte kirjeldamiseks eeldusel, et üldkogumte dispersioonid on võrdsed ja uuritav tunnus on normaaljaotusega.

F -jaotusel on kaks täisarvulist parameetrit, tihedusfunktsioon erineb nullist ainult mittenegatiivsete argumentide korral. F -jaotus on ebasümmeetriline. Ühe F -jaotuse tihedusfunktsioon on esitatud joonisel 4.2.

Hüpoteeside (4.13) kohta otsuse langetamise eeskiri olulisuse nivool α on järgmine:

kui $F \leq f_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1}$ või $\bar{f}_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1} \leq F$, siis võtta vastu H_1 ,
 kui $f_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1} < F < \bar{f}_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1}$, siis jääda H_0 juurde.



Joonis 4.2. F-jaotuse tihedusfunktsioon

Kuna tabelis F on toodud F -jaotuse jaoks vaid täiendkvantiilide väärtused ja kvantiilide väärtuste leidmine on jaotuse ebasümmeetrilisuse tõttu pisut tülikas, kasutatakse F -statistiku välja kirjutamiseks kavalust. Lugejasse valitakse alati suurem valimidispersioon, st nummerdatakse valimid nii, et $s_1^2 \geq s_2^2$. Sel korral omandab otsuse langetamise eeskiri kuju

kui $F \geq \bar{f}_{\alpha; n_1-1; n_2-1}$, siis vastu võtta H_1 ,
 kui $F < \bar{f}_{\alpha; n_1-1; n_2-1}$, siis vastu võtta H_0 .

Näide 4.5 Kontrollime, kas näite 4.4 andmete põhjal võib eelduse, et üldkogumite dispersioonid on võrdsed, täidetuks lugeda. Selleks esitame kontrollimiseks hüpoteeside paari:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$: mees- ja naispsühholoogide palkade
 hajuvus on võrdne

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$: mees- ja naispsühholoogide palkade
 hajuvus on erinev.

Valime olulisuse nivooks $\alpha = 0.05$. Leiame tabelist F otsuse langetamiseks vajaliku F-jaotuse kriitilise väärtuse, $\bar{f}_{0.05; 9; 11} = 2.90$.

Arvutame valimite dispersioonide suhte

$$F = \frac{305.5^2}{298.3^2} \approx 1.05.$$

Kuna statistiku väärtus ei ületa meie poolt valitud kriitilist väärtust, peame vastu võtma nullhüpoteesi – mees- ja naispsühholoogide palkade hajuvuse erinevust ei saa nende andmete põhjal tõestada. Seega pole ka põhjust kahtluse alla seada eelmises näites kasutatud metoodika lubatavust.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Kui võetakse vastu sisukas hüpotees – üldkogumite dispersioonid pole võrdsed – ei kehti enam tulemus (4.12) (teststatistiku jaotuseks H_0 kehtides pole $t(n_1 + n_2 - 2)$ -jaotus) ja tabelis 3 toodud eeskirjad hüpoteeside (4.1) – (4.3) kontrollimiseks ei sobi. Sel juhul võib kasutada mõnda järgnevates punktides kirjeldatud mitteparameetrilistest meetoditest või leida T -statistiku käitumist kirjeldav ligikaudne t -jaotus (vt [11], lk 169). Selle ligikaudse jaotuse parameetrid arvutatakse hoopis teisiti kui võrdse dispersiooniga üldkogumite korral.

4.1.4. Protsentide võrdlemine (väike valim)

Vaatame Bernoulli jaotuse parameetrite võrdlemist väikeste valimite korral. Kuigi sel juhul hinnangu $\hat{p}_i$ käitumise kirjeldamiseks ei sobi normaaljaotus – see lähend hakkab ”tööle”, kui valimite summaarne maht on 60 lähedal – leidub selline $\hat{p}_i$ funktsioon, mille jaotus läheneb valimi mahu kasvades normaaljaotusele hoopis kiiremini. See on nn *Fisheri φ -teisendus*, määratud eeskirjaga

$$\varphi = 2\arcsin\sqrt{\hat{p}}. \quad (4.16)$$

Saab näidata, et kui valimi maht ei ole väiksem kui 10, võib lugeda ligikaudu kehtivaks tulemuse

$$\varphi \sim N(2\arcsin\sqrt{p}, \frac{1}{\sqrt{n-3}}). \quad (4.17)$$

Seda tulemust arvestades võib Bernoulli jaotuse parameetrite võrdlemiseks, st hüpoteeside (4.6) - (4.8) kontrollimiseks kasutada statistikut

$$Z_a = (\varphi_1 - \varphi_2) \sqrt{\frac{(n_1 - 3)(n_2 - 3)}{n_1 + n_2 - 6}}, \quad (4.18)$$

kus φ_1 ja φ_2 on Fisheri statistikud esimese ja teise valimi korral. Kui nullhüpotees kehtib, võib selle statistiku jaotuseks lugeda standardse normaaljaotuse,

$$Z_a \sim N(0, 1).$$

Otsuse langetamiseks võib kasutada tabelis 1 toodud eeskirju. Tulemus on rakendatav, kui mõlema valimi maht ei ole palju väiksem kümnest.

Näide 4.6. Olgu tegemist psühholoogiga, kes uurib alaealiste kuritegevusega seotud probleeme. Muude küsimuste hulgas huvitab teda perekonna mõju seadusega pahuksisse läinud nooruki edasisele käekäigule. Ta valib 20 noorukit, kes on pärit enam-vähem ühesugusest sotsiaalsest keskkonnast ja karistatud esmakordselt tingimisi enam-vähem ühesuguste õigusrikkumiste eest. Neist 12 omab mõlemat vanemat, 8 – ainult ema. Psühholoog vaatab noorukeid 5 aasta möödudes. Täielikest perekondadest pärinevatel noorukitel on kahel olnud uuesti probleeme, ainult ema omavatest noorukitest on neljal olnud uuesti probleeme. Kas võib lugeda tõestatuks, et mittetäielikest perekondadest pärit noorukitel on risk retsidiivideks suurem?

Probleemi võib esitada hüpoteesidena

$H_0 : p_1 = p_2$: risk retsidiivideks on mõlemas grupis ühesugune,
 $H_1 : p_1 < p_2$: risk retsidiivideks on teises grupis suurem.

Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{z}_{0.05} = 1.64$.

Arvutame statistiku (4.18). Selleks leiame esmalt retsidiivide osakaalud mõlemas valimis

$$\hat{p}_1 = \frac{2}{12} \approx 0.17, \quad \hat{p}_2 = \frac{4}{8} = 0.50$$

ja arvutame φ -statistikud

$$\varphi_1 = 2 \arcsin \sqrt{\hat{p}_1} \approx 0.841,$$

$$\varphi_2 = 2 \arcsin \sqrt{\hat{p}_2} \approx 1.571.$$

Nüüd saame leida otsuse langetamiseks vajaliku statistiku Z_a väärtuse

$$z_a = \frac{0.841 - 1.571}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{5}}} \approx -1.31.$$

Kuna statistiku absoluutväärtus ei ületa kriitilist väärtust, $1.31 < 1.64$, peame jääma nullhüpoteesi juurde. Kuigi retsidiivide osakaal oli teises valimis kolm korda suurem, ei õnnestunud nii väikese vaatluste arvu korral nullhüpoteesi valitud riskiga kummutada.

Kasutades tabelit B leiame oma valimite jaoks olulisuse tõenäosuse. Saame $p \approx 0.19$, nii suurt riski praktilistes ülesannetes tavaliselt ei kasutata.

Teeme veel ühe mõttelise eksperimendi. Vaatame, kas erinevus oleks olnud oluline, kui psühholoog oleks saanud kasutada mõlemast rühmast 20 lapse andmeid, retsidiivide osakaalud aga poleks muutunud. Arvutame

$$z_a = -0.73 \sqrt{\frac{17 \cdot 17}{34}} \approx -2.13.$$

Nii suurte valimite korral oleks eelpool leitud erinevus osutunud oluliseks, nullhüpoteesi oleks saanud kummutada.

Aga rahvatarkus ütleb, et "oleks" pole kuigi hea mees.



4.1.5. Mann-Whitney test

Vaatame nüüd mitteparameetrilist testi, mille rakendamiseks on vajalik vaid üks eeldus – uuritav tunnus peab olema pidev või omama küllalt palju väärtusi.

Mitteparameetrilised testid ei kasuta otseselt vaatlustulemusi, nende teststatistikute väärtus määratakse vaatlustulemuste astakuid kasutades.

Selles punktis vaadatavate mitteparameetriliste statistikute määramisel on aluseks väga lihtne ja leidlik idee: kui tunnuse jaotused võrreldavates üldkogumites on ühesugused, siis järjestades mõlema valimi elemendid ühiselt, saame variatsioonrea, mis on hästi segunenud. "Segunenud" selles mõttes, et mõlema valimi elemendid asuvad vaheldumisi, nende koondumine suurematesse rühmadesse variatsioonrea algusesse või lõppu on väga ebatõenäoline. Niisugune segunemine toimub ühesuguse jaotusega üldkogumite korral alati, ükskõik, millise konkreetse jaotusega oleks uuritav tunnus.

Mann-Whitney testis võetakse "segunemise" arvuliseks kirjeldamiseks kasutusele kaks summaarset näitajat. Esimese saamiseks loetakse esimese valimi iga elemendi jaoks temast *väiksema või temaga võrdsete* teise valimi elementide arv. Teise valimi elemendi korral, mis on võrdne vastava esimese valimi elemendiga, suurendatakse seda arvu $1/2$ võrra. Valimite segunemise iseloomustamiseks liidetakse kõikide esimese valimi elementide jaoks saadud arvud kokku. Olgu see summa tähistatud sümboliga U_- . Mida suurem on U_- , seda sagedamini on esimeses valimis suuri väärtusi. Teise näitaja saamiseks leitakse samal viisil esimese valimi iga elemendi jaoks temast *suurema või temaga võrdsete* teise valimi elementide arv. Kõik esimese valimi elementide jaoks leitud arvud liidetakse. Olgu see summa tähistatud sümboliga U_+ . Mida suurem on U_+ , seda sagedamini on teises valimis suuri väärtusi. Nimetame U -statistikuks neist kahest arvust väiksemat,

$$U = \min(U_-, U_+).$$

Kumba valimit nimetada esimeseks, kumba teiseks, sellest U -statistiku väärtus ei sõltu. Arvutuste kontrollimiseks tasub pidada meeles, et

$$U_- + U_+ = n_1 n_2.$$

Enne, kui kirjeldada U -statistikute kasutamist, vaatame näidet nende leidmise kohta.

Näide 4.7. Olgu tegemist kalakasvatuse spetsialistiga, kes soovib võrrelda kahe erineva söötmisviisi efektiivsust. Katses kasutatakse

kahte tiiki, milles tingimused ja kasvatatavate kalade hulk on lähedased. Kalade söötmine aga toimub erinevates tiikides erinevalt. Hindamaks tulemusi, püütakse mõlemast tiigist 10 kala ja kaalutakse nad üle. Tulemused on järgmised:

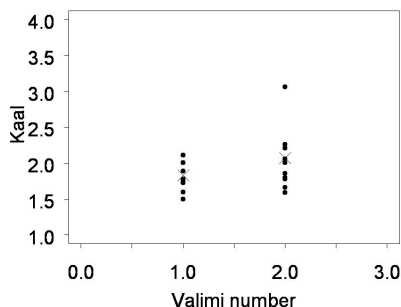
1. tiik: 1.78 1.54 1.77 1.82 2.10 1.64 2.15 1.81 1.79 1.93
2. tiik: 1.82 1.63 2.25 1.70 3.10 1.90 2.05 2.30 2.16 1.84

Vaadates andmeid tähelepanelikult, võib märgata, et teisest tiigist on püütud üks teistest oluliselt suurem kala. Tuletades meelde, kui tundlik on standardhälve ühe teistest tugevasti erineva väärtuse suhtes võib arvata, et nende valimite korral tuleks standardhälvete võrdsuse eeldusest loobuda. (Kontrollige vastavaid hüpoteese iseseisvalt!) Sellele võimalusele viitab ka joonisel 4.3 esitatud andmete hajuvusdiagramm, mille horisontaalteljele on kantud valimi number, vertikaalteljele aga kala kaal.

Statistikute U_- ja U_+ välja kirjutamise hõlbustamiseks järjestame mõlemad valimid ja täidame järgneva abitabeli. Esimese valimi iga elemendi taha on kirjutatud n_+ – temast suuremate teise valimi elementide arv ja n_- – temast väiksemate teise valimi elementide arv. Tulemused on järgmised

1. tiik	n_+	n_-	2. tiik
1.54	10	0	1.63
1.64	9	1	1.70
1.77	8	2	1.82
1.78	8	2	1.84
1.79	8	2	1.90
1.81	8	2	2.05
1.82	7.5	2.5	2.10
1.93	5	5	2.25
2.05	4.5	5.5	2.30
2.15	3	7	3.10

Siit saame $U_- = 29$, $U_+ = 71$ ning $U = \min(29, 71) = 29$. Kuna $n_1 n_2 = 100$ ja $U_- + U_+ = 100$, on arvutuste õigsuse kontrolli tingimus rahuldatud.



Joonis 4.3. Kalade kaalud



Otsuse langetamiseks võib kasutada U_- , U_+ , või U -statistikut. Hoidmaks algajat statistikut rumalatest vigadest on mõistlik erinevate hüpoteeside kontrollimiseks kasutada erinevaid statistikuid. Otsuse langetamisel vajalikud kriitilised väärtused on toodud tabelis G. Otsuse langetamise eeskirjad erinevate hüpoteeside korral on aga toodud tabelis 4.

Kriitilise väärtuse valikul tasub tähele panna, et ühes tabelis on kriitilised väärtused ühepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks olulisuse nivool α ja kahepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks olulisuse nivool 2α . Tabelis G on toodud kriitilised väärtused ühepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks olulisuse nivool 0.025 ja 0.05 ning kahepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks olulisuse nivool 0.05 ja 0.1.

U -statistiku jaotus on lihtsalt leitav, kui eeldada mõlemas üldkogumis tunnuse ühesugust jaotust ja lugeda võrdsete väärtuste esinemise tõenäosus mõlemas valimis nulliks. Tugineme asjaolule, et kõik vaatlustulemuste järjestused on võrdvõimalikud. Erinevaid võimalusi esimese valimi elementide paigutamiseks on nii palju, kui mitmel erineval viisil saame valida n_1 kohta $n_1 + n_2$ elemendilises variatsioonireas, so $C_{n_1 + n_2}^{n_1}$. Olgu näiteks $n_1 = n_2 = 2$. Siis on erinevaid võimalusi esimese ja teise valimi elementide järjestamiseks

$$C_{n_1 + n_2}^{n_1} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} = \frac{4!}{2! 2!} = 6.$$

Kirjutame need eristatavad järjestused välja, tähistades esimese valimi elemendid tähega a , teise valimi elemendid tähega b ning lisades iga järjestuse lõpu statistikute U_- ja U_+ väärtused.

				U_-	U_+
a	a	b	b	0	4
a	b	a	b	1	3
b	a	a	b	2	2
a	b	b	a	2	2
b	a	b	a	3	1
b	b	a	a	4	0

Kuna iga järjestuse esinemise tõenäosus on üldkogumite ühe-
suguse jaotuse korral $1/6$, saame statistiku U_- jaoks jaotus-
tabeli

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

U_- väärtusteks on täisarvud nullist kuni $n_1 n_2$ -ni. Paneme tä-
hele, et see jaotus on sümmeetriline – tabeli äärtest võrdsel
kaugusel olevate väärtuste tõenäosused on võrdsed. Seepärast
on ka statistiku U_+ jaotustabel täpselt samasugune. Jaotuse
sümmeetrilisuse tõttu on U -statistikute keskvaärtuseks $\frac{n_1 n_2}{2}$.
Niisugusele jaotustabelile tuginedes ongi leitud tabelis E toodud
kriitilised väärtused. Tabelis on antud suurim arv $\bar{u}$ ja vähim
arv $\underline{u}$, mille korral $P(U_- \leq \underline{u}) \leq \alpha$ ja $P(U_+ \geq \bar{u}) \leq \alpha$. Loomulikult
kehtib siis võrdus $P(U \leq \underline{u}) \leq 2\alpha$.

Nagu näha ka eelpool toodud näitest, ei pruugi väikeste valimi
mahtude korral niisuguseid kriitilisi väärtusi leiduda.

Tabel 4

Vastu võetud hüpo- tees	Kontrollitav hüpoteesipaar		
	(4.1)	(4.2)	(4.3)
H_1	$U \leq \underline{u}_{\frac{\alpha}{2}}$	$U_- \geq \bar{u}_{\alpha}$	$U_- \leq \underline{u}_{\alpha}$
H_0	$U > \underline{u}_{\frac{\alpha}{2}}$	$U_- < \bar{u}_{\alpha}$	$U_- > \underline{u}_{\alpha}$

Kui mõlemas valimis on palju võrdseid väärtusi, sobiks Mann-Whitney testi asemel kasutada hoopis mõnda teist testi – näiteks χ^2 -testi sagedustabelite võrdlemiseks.

Näide 4.8. Vaatame näites 4.7 esitatud andmestikku. Esiatame kahepoolseid hüpoteese, mille kontrollimine annab vastuse kalakasvataja ees seisvale probleemile.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$: erinevates tiikides on kalade kaalude keskvärtused võrdsed,

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$: erinevates tiikides on kalade kaalude keskvärtused erinevad.

Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Otsuse langetamiseks kasutame U -statistikut, kus $U = 29$. Leiame tabelist G kahepoolse hüpoteesi korral olulisuse nivoole 0.05 ja valimi mahtudele 10 ja 10 vastava kriitilise väärtuse $\underline{u}_{0.025} = 23$. Kuna $29 > 23$, peame vastu võtma nullhüpoteesi H_0 . Erinevate söötmisviiside erinevat efektiivsust ei õnnestunud tõestada.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Kui mõlema valimi mahud on suuremad kaheksast, võib otsuse langetamiseks kasutada standardiseeritud U -statistikut

$$Z_U = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}. \quad (4.20)$$

Kaheksast suuremate valimi mahtude korral on nullhüpoteesi kehtides selle statistiku ligikaudseks jaotuseks standardne normaaljaotus, $Z_U \sim N(0, 1)$. Seega võib otsuse langetamiseks kasutada tabelit 1.

Näide 4.9. Vaatame näites 4.7 esitatud andmestikku ja kontrollime hüpoteese

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$: erinevates tiikides on kalade kaalude keskvärtused võrdsed,

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$: erinevates tiikides on kalade kaalude keskvärtused erinevad.

Kuna mõlema valimi maht on suurem kaheksast, võime otsuse langetamiseks kasutada ka standardiseeritud statistikut – tulemus peaks olema sama, mis U –statistiku kasutamisel. Valime olulisuse nivooks 0.05 ja leiame tabelist A kriitilise väärtuse $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Arvutame standardiseeritud statistiku

$$z_U = \frac{29 - 50}{\sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot 21}{12}}} \approx -1.59$$

Otsuse langetamiseks võrdleme leitud statistiku absoluutväärtust kriitilise väärtusega. Kuna $1.59 < 1.96$, peame vastu võtma nullhüpoteesi – söötmisviiside erinevat efektiivsust pole selle valimi põhjal võimalik tõestada.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Tähelepanelikul lugejal võib nüüd tekkida küsimus, milleks on vaja üldse eelpool kirjeldatud T –statistikut, kui U –statistik on kasutatav iga pideva jaotusega tunnuse korral. On ju U –statistik kasutatav siis ka normaaljaotusega tunnuse korral.

Põhjus, miks T –test on säilitanud oma populaarsuse, peitub testi võimsuses. Testi *võimsus* on tõenäosus vastu võtta sisukas hüpotees, kui see tegelikult kehtib. See tõenäosus on reeglina tõeliste keskväärtuste vahe funktsioon, mida suurem on see vahe, seda suurem on ka tõenäosus õige otsuse langetamiseks, st sisuka hüpoteesi vastu võtmiseks. On niisuguseid valimi mahte, mille korral on normaaljaotusega tunnuse jaoks T –testi võimsus suurem kui U –testil. Reeglina pole aga erinevus suur, enamasti annab U –test sama tulemuse, mis T –testki.

4.1.6. Wilcoxon'i test

Valimite "segunemist" saab arvuliselt mõõta ka teisiti, kui U –statistikuga. Nimelt võib otseste vaatlustulemuste asemel võtta kasutusele nende astakud. Astakute leidmiseks tuleb mõlemad valimid järjestada ühisesse variatsioonritta. Vaatlustulemuse astakuks on tema järjekorranumber ühises variatsioonreas. Võrdsed vaatlustulemused saavad ühise astaku – nende järjekorranumbrite keskväärtuse.

Segunemise kirjeldamiseks sobib kasutada valimite astakute summasid, neid statistikuid nimetataksegi *Wilcoxon'i statistikuteks*. Kasutame esimese valimi astakute summa tähistamiseks sümbolit W_1 , teise valimi astakute summa tähistamiseks sümbolit W_2 . Kui valimid on hästi segunenud, on nende astakute kesk-
väärtused lähedased. Võrdse mahuga valimite korral võib võrrelda ka astakute summasid.

Arvutuste õigsust saab kontrollida tingimusega

$$W_1 + W_2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2},$$

moodustavad ju astakute väärtused aritmeetilise progressiooni.

Vaatame näidet Wilcoxon'i statistikute arvutamise kohta.

Näide 4.10. Kasutame näites 4.7 esitatud andmestikku kahest tiigist püütud kalade kohta. Ühendame mõlemad valimid ja leiame vaatlustulemuste astakud selles ühendatud valimis. Tulemused on järgmises tabelis.

1. tiik	Astak	2.tiik	Astak
1.54	1	1.63	2
1.64	3	1.70	4
1.77	5	1.82	9.5
1.78	6	1.84	11
1.79	7	1.90	12
1.81	8	2.05	14.5
1.82	9.5	2.10	16
1.93	13	2.25	18
2.05	14.5	2.30	19
2.15	17	3.10	20

Leiame valimite astakute summad

$$W_1 = 84, \quad W_2 = 126$$

ja valimite keskmised astakud

$$\bar{W}_1 = 8.4, \quad \bar{W}_2 = 12.6.$$

Valimite astakute summad on küllalt erinevad. See viitab sellele, et valimid ei ole tugevasti "segunenud". Teise valimi suurem astakute summa viitab asjaolule, et teisest tiigist püütud kalad on mõnevõrra raskemad. Kuna praegu

$$\frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} = 210$$

ja

$$W_1 + W_2 = 55 + 155 = 210,$$

siis arvutused on teostatud õigesti. Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



On lihtne näha, et U -statistikud avalduvad astakute summade kaudu järgnevalt

$$\begin{aligned} U_- &= W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}, \\ U_+ &= W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{12}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Vaatame esmalt olukorda, kus valimites pole võrdseid elemente. Olgu r_i esimese valimi i -nda elemendi astak. Tähistame sümboli t_i sellest elemendist väiksemate teise valimi elementide arvu, sümboli e_i sellest elemendist väiksemate esimese valimi elementide arvu. Kehtib võrdus

$$r_i = t_i + e_i + 1.$$

Üldjuhul me ei tea, mitmest oma valimi elemendist on i -s vaatlus suurem. Aga tingimata omandab liidetav $e_i + 1$ mingi väärtuse 1 ja n_1 vahel, kusjuures tehtud eelduse tõttu iga i korral on see väärtus erinev, järelikult saame võrduse

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n_1} t_i + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2},$$

millest järeldubki meile vajalik avaldis. Analooiliselt viisil saab leida ka eeskirja U_+ arvutamiseks.

Kui valimis on antud elemendiga võrdseid elemente (olgu neid w_i esimeses valimis ja v_i teises valimis), siis kehtib võrdus

$$r_i = (t_i + \frac{v_i}{2}) + (e_i + \frac{w_i}{2}) + 1.$$

ja lihtne on näha, et ka nüüd valem (4.19) kehtib.

Väikeste valimite jaoks on olemas tabelid kriitiliste väärtustega, mis on vajalikud otsuse langetamiseks Wilcoxon'i statistikute põhjal. Kui aga neid tabeleid pole käepärast, võib üle minna U -statistikule ja langetada otsuse selle statistiku põhjal.

Näide 4.11. Vaatame näite 4.7 andmestikku, mille jaoks eelmises näites leidsime Wilcoxon'i statistikud. Kuna meil pole tabelit vajalike kriitiliste väärtustega, läheme üle U -statistikule,

$$u_- = 84 - \frac{10 \cdot 11}{2} = 29 \quad u_+ = 126 - \frac{10 \cdot 11}{2} = 71$$

ja

$$u = \min(29, 71) = 29.$$

Otsus nende statistikute põhjal on langetatud näites 4.8. Kalade keskmiste kaalude erinevust erinevates tiikides ei õnnestunud olulisuse nivool 0.05 tõestada.



Wilcoxon'i statistikut võib ka standardiseerida. Kui kasutame esimese valimi astakute summat W_1 , on selle statistiku kesk- väärtuseks $\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}$, standardhälve on aga $\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}$. Seega standardiseeritud kujul

$$Z_W = \frac{W_1 - \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}}. \quad (4.21)$$

Kui mõlema valimi maht pole väiksem kaheksast ja nullhüpotees kehtib, on standardiseeritud statistiku jaotus lähedane standard- sele normaaljaotusele, $Z_W \sim N(0, 1)$. Otsuse langetamiseks saab sel juhul kasutada tabelis 1 toodud eeskirju.

Näide 4.12. Standardiseerime näites 4.10 leitud astakute summa W_1 .

$$z_W = \frac{84 - 105}{\sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot 21}{12}}} \approx -1.59.$$

Saime täpselt sama väärtuse, mille leidsime näites 4.9 U -statistiku standardiseerimisel.



4.2. Sõltuvad valimid: keskväärtuste võrdlus

Samadest (või sarnastest) objektidest koosnevad, kuid erinevale töötlusele allutatud valimid *onsõltuvad valimid*. Näiteks ravimi mõju kontrollimisel mõõdetakse ühtedel ja samadel patsientidel teatavat näitajat enne ja pärast ravimi manustamist; küsitletakse ühtede ja samade valijate arvamust teatud poliitiku kohta erinevatel ajahetketel jne.

Nagu ikka, peavad kasutatavad objektid olema valitud üldkogumist juhuslikult. Järeldusi soovitakse aga teha mõtteliste, töötlusele allutatud üldkogumite kohta.

Sõltuvate valimite korral ei ole järelduste tegemisel aluseks otsesed vaatlustulemused. Esimese sammuna leitakse iga valimi objekti jaoks enne ja pärast töötlust saadud vaatlustulemuste vahe. Tähistame i -nda objekti esimese vaatlustulemuse $x_i^{(1)}$, teise vaatlustulemuse aga $x_i^{(2)}$, siis i -s vaatlustulemuste vahe on

$$v_i = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}.$$

Nüüd on järelduste tegemiseks olemas ainult üks valim – vaatlustulemuste vahede valim. Kui töötlemine ei muuda üldkogumi keskväärtust, on vaatlustulemuste vahede keskväärtuseks null. Tähistame vaatlustulemuste vahede keskväärtuse sümboliga μ . Siis tähendab üldkogumite keskväärtuste võrdlemine järgmiste hüpoteeside kontrollimist vaatlustulemuste vahede keskväärtuse kohta

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 0 : \text{üldkogumite keskväärtused} \\ &\text{on võrdsed,} \\ H_1 : \mu &\neq 0 : \text{üldkogumite keskväärtused} \\ &\text{on erinevad.} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Need hüpoteesid on samaväärsed kolmandas peatükis toodud kahepoolsete hüpoteesidega (3.11). Kui üldkogumite kohta on

olemas täiendavat informatsiooni, mis võimaldab esitada ühepoolsed hüpoteesid (4.2) või (4.3), saame vahede keskväärtuse kohta esitada ühepoolsed hüpoteesid

$$\begin{aligned} H_0 : \mu = 0 : & \text{ üldkogumite keskväärtused} \\ & \text{on võrdsed,} \\ H_1 : \mu > 0 : & \text{ esimese üldkogumi keskväärtus} \\ & \text{on suurem,} \end{aligned} \tag{4.23}$$

või

$$\begin{aligned} H_0 : \mu = 0 : & \text{ üldkogumite keskväärtused} \\ & \text{on võrdsed,} \\ H_1 : \mu < 0 : & \text{ teise üldkogumi keskväärtus} \\ & \text{on suurem.} \end{aligned} \tag{4.24}$$

4.2.1. Z- ja T-test

Vahede keskväärtuse uurimiseks võib kasutada kõiki meetodeid, mis sobivad järelduste tegemiseks ühe üldkogumi keskväärtuse kohta. Keskväärtuse μ hinnanguks on vahede valimi keskväärtus $\bar{v}$,

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i.$$

Kui uurija käsutuses on suur valim, siis võib selle statistiku ligikaudseks jaotuseks lugeda normaaljotuse ja μ usalduspiirid usaldusnivool $1 - \alpha$ määrata valemitega

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \bar{v} - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_v}{\sqrt{n}}, \\ \bar{\mu} &= \bar{v} + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_v}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

kus sümboliga s_v on tähistatud vahede valimi standardhälve,

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}.$$

Hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse vahede standardiseeritud keskväärtust

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{V}}{S_v}.$$

Selle statistiku ligikaudseks jaotuseks võib nullhüpoteesi kehtides lugeda standardse normaaljaotuse, $Z \sim N(0, 1)$. Otsuse langetamiseks võib kasutada tabelis 1 toodud eeskirju, arvestades, et samaväärsed on hüpoteesid (4.1) ja (4.22), (4.2) ja (4.23) ning (4.3) ja (4.24).

Kui uurija käsutuses on väike valim ja võib eeldada, et uuritav tunnus on normaaljaotusega, siis on standardiseeritud vahe jaotuseks t -jaotus parameetriga $n - 1$. Seetõttu saame väikeste valimite korral usalduspiiride määramiseks järgmised eeskirjad

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \bar{v} - \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_v}{\sqrt{n}}, \\ \bar{\mu} &= \bar{v} + \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s_v}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Tähistades väikeste valimite jaoks

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{V}}{S_v}$$

ja arvestades, et nullhüpoteesi kehtides $T \sim t(n - 1)$, võib otsuse langetamiseks kasutada tabelis 2 toodud eeskirju.

Näide 4.13. Sooviti uurida füüsilise pingutuse mõju üliõpilase tähelepanuvõimele. Selleks valiti juhuslikult 10 katsealust ja lasti neil täita spetsiaalne test. Pärast tunniajalist kehalist koormust tuli uuesti täita analoogiline test. Testide hinded olid järgmised.

Enne koormust	74	36	41	67	96	69	57	76	71	90
Pärast koormust	69	41	40	51	80	66	53	73	66	82

Esimese sammuna leiame testi hinnete vahed kõikide katsealuste jaoks

$$5 \quad -5 \quad 1 \quad 16 \quad 16 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 8.$$

ja arvutame hinnangu testi hinde muutuse keskväärtusele

$$\bar{v} = \frac{56}{10} = 5.6.$$

See hinnang on positiivne – kehaline koormus alandas vaadatavas valimis mõnevõrra testi keskmist hinnet. Arvutame ka vahede valimi standardhälbe

$$s_v = \sqrt{\frac{372.4}{9}} \approx 6.43.$$

Leiame usaldusintervalli testi hinde muudu keskväärtuse jaoks. Oletame, et testi hinded on normaaljaotusega. Mõõtmistulemuste diskreetsus ei ole siin põhimõtteliseks takistuseks – see tuleneb vaid kasutatud hindamiskaalast, mitte tunnuse tekkemehhanismist. Võtame usaldusnivooks 0.9 ja leiame tabelist D vajaliku t -jaotuse täiendkvantiili $\bar{t}_{0.05,9} = 1.833$. Saame

$$\underline{\mu} = 5.6 - \frac{1.833 \cdot 6.43}{\sqrt{10}} \approx 5.7 - 3.7 \approx 1.9$$

$$\bar{\mu} = 5.7 + \frac{1.833 \cdot 6.43}{\sqrt{10}} \approx 5.7 + 3.7 \approx 9.4.$$

Usaldusintervall näitab, et kehaline koormus vähendas tõepoolest testi hinde tegelikku keskväärtust. Teiste sõnadega – pärast kehalist koormust saadakse tähelepanu kontrolliva testi eest mõnevõrra madalamaid hindeid, keskväärtuse muutus asub 1.9 ja 9.4 palli vahel.

Põhimõtteliselt sama tulemuse oleksime saanud ka kahepoolsete hüpoteeside kontrollimisel, ainult muutuse suurus oleks jäänud hindamata. Vaatame siiski ka hüpoteeside kontrollimist. Esitame kahepoolsed hüpoteesid

$H_0 : \mu = 0$ kehaline koormus ei põhjusta testi
keskmise hinde muutust,
 $H_1 : \mu \neq 0$ kehaline koormus põhjustab
testi keskmise hinde muutust,

Valime olulisuse nivoo $\alpha=0.1$. Otsuse langetamiseks vajame t -jaotuse kriitilist väärtust $\bar{t}_{0.05,9} = 1.833$. See on sama väärtus, mida kasutasime usalduspiiride määramisel. Arvutame T -statistiku väärtuse

$$t = \sqrt{10} \frac{5.6}{6.43} \approx 2.75.$$

Kuna saadud statistiku väärtus ületab kriitilise väärtuse, $2.75 > 1.833$, peame vastu võtma sisuka hüpoteesi – kehaline koormus põhjustab tähelepanu kontrolliva testi keskmise hinde olulise muudatuse.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Näitamaks, kui oluline on arvestada vaatlustulemuste sõltuvust, teeme veel ühe lisaaarvutuse. Vaatame, mis juhtub, kui ignoreerime testi hinnete sõltuvust ning otsuse langetamiseks esitatud hüpoteeside kohta kasutaksime sõltumatute valimite T -statistikut. Leiame valimite keskväärtused ja standardhälbed

ja $\bar{x}_1=67.7 \quad s_1=19.0$

$\bar{x}_2=62.1 \quad s_1=15.1.$

Näeme, et valimite standardhälvete hinnangud on lähedased, pole põhjust kahelda eelduses, et üldkogumite hajuvus on ühesugune. Leiame standardhälbe ühise hinnangu

$$s = \sqrt{\frac{9 \cdot 19.0^2 + 9 \cdot 15.1^2}{18}} \approx 17.2$$

ja arvutame T -statistiku väärtuse

$$t = \frac{67.7 - 62.1}{17.2} \sqrt{\frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} \approx 0.73.$$

Saadud väärtus ei ületa olulisuse nivoole 0.05 vastavat kriitilist väärtust, $0.73 < 1.83$, tuleb jääda nullhüpoteesi juurde. Sõltuvuse arvestamata jätmine oleks oluliselt muutnud tulemust.

Vaatame veel oma arvutusi. Mis on niisuguse erinevuse põhjus? Seda on kerge mõista, kui vaatame testi hinnete vahesid. Muutus testi hinde on süstemaatiline – peaaegu kõigil katsealustel testi hinne vähenes. Kuid reeglina on muutus üsna väike. Kui võrdleme testi hinnete standardhälvet $s=17.2$ ja vahede standardhälvet $s_v=6.4$, näeme, et viimane on oluliselt väiksem. Tunnuse suur varieeruvus, mis tuleneb katseisikute erinevusest, lihtsalt varjutab väikesed

süsteemilise muutuse, see ei tule tunnuse suure varieeruvuse taustal esile. Arvestades vaatlustulemuste sõltuvust ja tuues eraldi välja vaatlustulemuste vahed, muudame oma järelduste tegemise mehhanismi täpsemaks.

4.2.2. Märgitest.

Kui on tegemist väikese valimiga, võib otsuse langetamiseks kasutada mõnda mitteparameetrilist meetodit. Lihtsaim neist on märgitest. See test on kasutatav ka siis, kui tunnus pole arvuline, vaid tegemist on järjestustunnusega. Nagu ikka sõltuvate valimite korral tuleb lähtuda vaatlustulemuste vahedest. Märgitest ei kasuta vahede arvulisi väärtusi, vaid ainult vahe märki. Kui tegemist on järjestustunnusega, fikseeritakse ainult vaatlustulemuste vahed – kui $x_i^{(1)} > x_i^{(2)}$, loetakse tulemuseks "+", kui $x_i^{(1)} < x_i^{(2)}$, loetakse tulemuseks "-". Järelduse tegemisel arvestatakse ainult neid vaatlusi, millel töötlus muutis tunnuse väärtust. Tähistame nende vaatluste arvu sümboliga n_0 .

Nagu ikka mitteparameetriliste meetodite korral on märkitesti aluseks lihtne ja leidlik idee. Kui töötluse tulemusena tunnuse keskmine tase ei muutu, on märkide "+" ja "-" esinemine vahede valimis võrdvõimalik — sel eeldusel põhjustavad tunnuse väärtuse muudatuse vaid juhuslikud mõjutused. Seega on ootuspärane, et positiivseid ja negatiivseid vahesid on enam-vähem ühepalju. Kui töötluse tulemusena tunnuse keskväärus muutub, on ootuspärane, et need arvud tugevasti erinevad. Selle idee formeerimiseks etteantud olulisuse nivool kasutatavaks testiks vajame sobivat statistikut ja tema jaotust nullhüpoteesi kehtivuse korral.

Olgu N_+ positiivsete väärtuste arv vahede valimis. Kui nullhüpoteesi korral on positiivsed ja negatiivsed vahed võrdvõimalikud, siis on N_+ binoomjaotusega, $N_+ \sim B(n_0, 0.5)$. Otsuse langetamiseks olulisuse nivool α vajalikud kriitilised väärtused saab leida binoomjaotuse $B(n_0, 0.5)$ tabelist. Kui kontrollimist vajab kahepoolne hüpotees (4.22), siis – arvestades kasutatava jaotuse sümmeetrilisust – määrab kriitilised väärtused suurim r , mille korral nullhüpoteesi kehtides

$$P(N_+ < r) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Otsuse langetamise eeskiri on siis järgmine

kui $r \leq N_+ \leq n_0 - r$, siis jääda H_0 juurde,

kui $N_+ < r$ või $N_+ > n_0 - r$, siis võtta vastu H_1 .

Näide 4.14. Vaatame näites 4.13 toodud testi hindeid. Kui oletus, et testi hinded on normaaljaotusega, ei pea paika, pole T -statistiku kasutamine õigustatud. Vaatame, millise tulemuse saame, kui neile andmetele rakendame märgitesti.

Esitame kontrollimiseks hüpoteesid

$H_0 : \mu = 0$: kehaline koormus ei põhjusta testi keskmise hinde muutust,

$H_1 : \mu \neq 0$: kehaline koormus põhjustab testi keskmise hinde muutust.

Valime otsuse langetamiseks olulisuse nivoo 0.05. Vaatame üle testi hinnete muutuste märgid ja loeme kokku positiivsed vahed. Saame $N_+ = 9$. Kuna kõikide katsealuste hinded mõnevõrra muutusid, siis saab märgitestis kasutada kõiki vahesid, $n_0 = 10$. Leiame binoomjaotuse $B(10, 0.5)$ tabelist kriitilised väärtused. Kuna kasutatav binoomjaotus on sümmeetriline, tuleb meil leida suurim r , mille korral

$$P(N_+ < r) \leq 0.025.$$

Saame

$$P(N_+ < 2) = 0.011,$$

$$P(N_+ < 3) = 0.055,$$

kust valime $r=2$. Saame kriitliste väärtuste paari 2 ja 8. Kuna statistiku N_+ leitud väärtus on suurem kriitilisest väärtusest $n - r$, ($9 > 8$), siis tuleb vastu võtta sisukas hüpotees. Seega jõuame sama tulemuse juurde, mis T -testi kasutamisel – kehaline koormus vähendab tähelepanu-testi keskmist hinnet.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Antud näites andsid T -test ja märgitest ühe ja sama tulemuse. Üldjuhul see ei pruugi nii olla. Märgitesti võimsus on väiksem kui T -testil ja üsna tihti võib leida andmeid, mille korral T -test lubab vastu võtta sisuka hüpoteesi, märgitest aga mitte.

Kui informatiivsete vaatluste arv n_0 on suurem kümnest, siis võib statistiku N_+ standardiseerida,

$$Z_+ = \frac{N_+ - \frac{n_0}{2}}{\sqrt{\frac{n_0}{4}}}$$

ja otsuse langetamisel kasutada asjaolu, et nullhüpoteesi kehtides on statistiku Z_+ ligikaudseks jaotuseks standardne normaaljaotus, $Z_+ \sim N(0, 1)$. Otsuse langetamise eeskiri on sel juhul antud tabelis 1.

Näide 4.15. Keskastme juhtide koolitamist on võimalik organiseerida kahel erineval viisil (viis A ja viis B). Sooviti uurida, kumb koolitusviis on efektiivsem. Selleks planeeriti järgmine katse. Moodustati kaks rühma, kummaski 25 inimest. Nende hulgast otsiti välja paarid, kelle vanus, eelnev töökäik ja mõned muud oluliseks peetavad omadused olid ühesugused. Niisuguseid erinevatesse rühmadesse kuuluvaid paare õnnestus leida 13. Kuue kuu möödudes koolituse lõpust hinnati teatavate kriteeriumide alusel vaatlusaluste tegevuse edukust. Selgus, et 10 paaris oli edukamaks koolitusviisi A läbi teinud isik, kahes paaris koolitusviisi B läbi teinud isik ja üks paar tuli tunnistada võrdsest edukaks. Kas võib otsustada, et koolitusviis A on efektiivsem?

Tunnus, mida uuritakse, on sisuliselt järjestustunnus. Võib küll öelda, kumb vaatlusalustest oli edukam, kuid raske on mõõta, milline oli edukuse erinevus arvuliselt.

Tõlgime meid huvitava oletuse statistiliste hüpoteeside keelde. Kui koolitusviisid on ühesuguse efektiivsusega, sõltub ühesuguste eelduste korral edukus ainult juhuslikest asjaoludest ja paari mõlemal liikmel on ühesugune võimalus edukaks osutada. Kui üks koolitusviis on teisest efektiivsem, siis avab see koolitusviis suurema võimaluse eduks. Kuna uuritav tunnus on oma loomuselt järjestustunnus, võib edukuse keskmise taseme näitajaks lugeda mediaani. Sõnastame hüpoteesid

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$: koolitusviisid on ühesuguse efektiivsusega,

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$: koolitusviisi A on efektiivsem.

Valime olulisuse nivoo 0.1. Kasutatavaid vaatlusi on 12, $n_0 = 12$. Otsuse langetamiseks võime kasutada standardset normaaljaotust. Leiame vajaliku kriitilise väärtuse, $\bar{z}_{0.1} = 1.28$.

Tähistame paari, kus koolituse A läbi teinud isik oli edukam, sümboliga "+", paari, kus koolituse B läbi teinud isik oli edukam sümboliga "-". Plusse oli 10, $N_+ = 10$, seega

$$z_+ = \frac{10 - 6}{\sqrt{\frac{12}{4}}} \approx 2.31.$$

Kuna statistiku väärtus ületab kriitilise väärtuse, $2.31 > 1.28$, tuleb vastu võtta sisukas hüpotees: koolitusviisi A suurem efektiivsus on tõestatud.



4.2.3. Wilcoxon astak-märgitest.

Kui vaatluste arv on väike, võib märgitesti efektiivsus olla üsna madal. Märgitest ei kasuta vahede arvulisi väärtusi, seega arvuliste tunnuste korral jääb osa andmetes sisalduvat informatsiooni kasutamata. Andmete täielikum kasutamine suurendab alati testi võimsust. Vaatame järgnevalt mitteparameetrilist testi, mis arvuliste tunnuste korral võimaldab arvestada ka vaatlustulemuste vahede väärtusi.

Olgu meie käsutuses arvuliste vaatlustulemuste vahede valem $v_1, v_2, \dots, v_n$. Moodustame vahede absoluutväärtuste variatsioonirea, jättes nulliga võrdsed vahed vaatluse alt välja. Olgu nullist erinevate vahede arv n_0 . Leiame iga vahe jaoks astaku. Olgu positiivsete vahede astakute summa W_+ ja negatiivsete vahede astakute summa W_- . Nagu kõik astakute summasid kasutavad statistikud, kannavad ka niisuguses kontekstis arvutatud statistikud *Wilcoxon statistikute* nime.

Testi formuleerimisel on aluseks üsna lihtne idee. Kui töötlus ei muuda tunnuse keskvaartust, on positiivsete ja negatiivsete vahede esinemine võrdvõimalik, samuti muutub nende absoluutväärtus enam-vähem samades piirides. Kui tunnuse keskvaartus muutub, aga see muutus on väike, võib positiivsete ja negatiivsete vahede esinemine olla ikkagi üsna võrdvõimalik, muutub aga vahemik, milles erineva märgiga vahed väärtusi omandavad. Wilcoxon statistikud on niisuguse muutuse suhtes tundlikud.

Kuna $W_+ + W_- = \frac{n(n+1)}{2}$, piisab ainult ühe statistiku arvutamisest. Wilcoxon astak-märgitest kasutab neist kahest sum-

mast väiksemat, nimetame seda W -statistikuks,

$$W = \min(W_+, W_-).$$

Otsuse langetamiseks vajalikud väärtused on toodud tabelis J.

Igale valimi mahule vastab kaks arvu: kriitiline väärtus d_{α, n_0} (suurim väärtus, mille korral H_0 kehtides $P(W < d_{\alpha, n_0}) < \alpha$) ja pseudokriitiline väärtus d'_{α, n_0} (vähim väärtus, mille korral H_0 kehtides $P(W < d'_{\alpha, n_0}) > \alpha$).

Kuna ühes ja samas tabeli veerus asuvad kriitilised väärtused, mis vastavad ühepoolse hüpoteesi korral olulisuse nivoole α ja kahepoolse hüpoteesi korral olulisuse nivoole 2α , siis sõnastame otsuse langetamise eeskirja kahepoolse sisuka hüpoteesi kontrollimisel järgmiselt

kui $W \leq d_{\frac{\alpha}{2}, n_0}$, võtta vastu sisukas hüpotees,

kui $W > d_{\frac{\alpha}{2}, n_0}$, võtta vastu nullhüpotees.

Ühepoolse sisuka hüpoteesi kontrollimisel on otsuse langetamise eeskiri järgmine

kui $W \leq d_{\alpha, n_0}$, võtta vastu sisukas hüpotees,

kui $W > d_{\alpha, n_0}$, võtta vastu nullhüpotees.

Näide 4.16. Uurimise all oli teatava ravimi toime vere suhkrusisaldusele. Katseloomadena kasutati 16 laboratooriumirotti. Igal neist mõõdeti vere suhkrusisaldus, süstiti siis uuritavat ravimit ja mõõdeti teatava aja möödudes uuesti vere suhkrusisaldus. Mõõtmistulemused ja nende vahed(%-des) on esitatud allpool toodud tabelis.

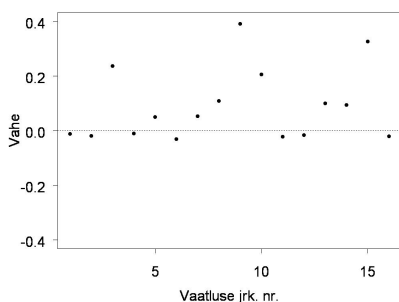
Kuna teoreetiliselt ravim pidi alandama vere suhkrusisaldust, esitati kontrollimiseks hüpoteesid

$H_0 : \mu = 0$: ravim ei mõjusta vere suhkrusisaldust,

$H_1 : \mu > 0$: ravim alandab vere suhkrusisaldust.

Enne	Pärast	Vahe	Enne	Pärast	Vahe
0.115	0.120	-0.0105	0.604	0.205	0.399
0.102	0.114	-0.012	0.323	0.110	0.213
0.374	0.130	0.244	0.093	0.108	-0.015
0.147	0.150	-0.003	0.127	0.136	-0.009
0.199	0.142	0.057	0.318	0.210	0.108
0.079	0.102	-0.023	0.284	0.183	0.101
0.250	0.190	0.060	0.574	0.240	0.334
0.276	0.160	0.116	0.213	0.226	-0.013

Esitame vere suhkrusisalduse muutused ka hajuvusdiagrammil, kus x-teljele kantakse katselooma number.



Joonis 4.4. Vere suhkrusisalduse muutused

Negatiivseid vahesid on seitse. Märgitesti rakendamisel peaksime jääma nullhüpoteesi juurde. Vahede absoluutväärtuste uurimine aga näitab, et reeglina on positiivsete vahede absoluutväärtus suur, negatiivsete vahede absoluutväärtus aga väike. Sisuliselt tähendab see, et kui vere suhkrusisaldus langes, oli muutus suur, kui aga tõusis – väike. Seda tendentsi illustreerib ka joonis 4.4. Arvutame W -statistiku väärtuse. Selleks moodustame vahede absoluutväärtustest variatsioonirea, tõmbame negatiivsetele vahedele joone alla, leiame kõikide vahede astakud ning arvutame astakute summad.

<u>0.003</u>	<u>0.005</u>	<u>0.009</u>	<u>0.012</u>	<u>0.013</u>	<u>0.015</u>	<u>0.023</u>	0.057
1	2	3	4	5	6	7	8
0.060	0.101	0.108	0.116	0.213	0.244	0.334	0.339
9	10	11	12	13	14	15	16

Saame

$$W_- = 28 \quad ja \quad W_+ = 108,$$

kust

$$W = \min(28, 108) = 28.$$

Kuna nulliga võrdseid vahesid ei esinenud – kõikidel loomadel andsid esimene ja teine mõõtmine erineva tulemuse – siis on informatiivsete vahede arv 16. Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.01$.

Leiame tabelist J valitud olulisuse nivoole ja vahede valimi mahule vastava kriitilise väärtuse $d_{0.01,16} = 23$. (Sisukas hüpotees oli ühepoolne, hoidumaks rumalast veast kontrollime veel, kas ikka $W_- < W_+$. Kui see võrratus ei kehtiks, poleks sisukat hüpoteesi võimalik tõestada.) Kuna statistiku väärtus on suurem kriitilisest väärtusest, tuleb jääda nullhüpoteesi juurde.

Vaatame, milline oleks olnud tulemus siis, kui me oleks kasutanud suuremat olulisuse nivood. Valime suurima väärtuse, mida tabel J lubab, olgu $\alpha=0.05$. Sel juhul on meie vahede valimi mahule vastav kriitiline väärtus $d_{0.05,16} = 35$. Kuna statistiku väärtus on väiksem sellele olulisuse nivoole vastavast kriitilisest väärtusest, siis loeme sisuka hüpoteesi tõestatuks.

Nagu ikka, ei anna statistika vastust küsimusele, kumba olulisuse nivood siis tegelikult kasutada. See on statistikaväline probleem, mille peab lahendama iga uurija iseseisvalt, arvestades tagajärgi, mis kaasnevad esimest ja teist liiki vigadega.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Sobival viisil standardiseeritud W -statistiku jaotus läheneb üsna kiiresti standardsele normaaljaotusele. Kui informatiivsete vahede arv on suurem kui 15, võib seda lähendit kasutada. Jõudmaks standardse normaaljaotuse kasutamiseni, standardiseerime statistiku W_+ järgmiselt.

$$Z_W = \frac{W_+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}.$$

Otsuse langetamise eeskirjad on toodud tabelis 1.

Näide 4.17. Kasutame standardiseeritud statistiku arvutamiseks eelmise näite andmeid. Kuna informatiivsete vahede arv oli 16, võib kasutada täpse statistiku asemel standardiseeritud lähendit. Kontrollime olulisuse nivool 0.01 eelmises näites esitatud hüpoteese standardiseeritud statistiku abil,

$$z_W = \frac{108 - \frac{16 \cdot 17}{4}}{\sqrt{\frac{16 \cdot 17 \cdot 33}{24}}} \approx 2.07.$$

Kuna meie poolt valitud olulisuse nivoole 0.01 vastav kriitiline väärtus $\bar{z}_{0.01} = 2.33$ on suurem arvutatud statistiku väärtusest, siis tuleb jääda nullhüpoteesi juurde. Kui aga kasutame olulisuse nivood 0.05, on kriitiliseks väärtuseks 1.65. Kuna statistiku väärtus on suurem, $2.07 > 1.65$, siis sellel olulisuse nivool saame sisuka hüpoteesi lugeda tõestatuks – otsustame, et ravimil on vere suhkrusisaldust alandav toime.

Tulemused on ootuspäraselt samad, mis tabelis J toodud täpsete kriitiliste väärtuste kasutamise korral.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



4.3. Universaalne mitteparameetriline test

Selles punktis vaatame populaarset mitteparameetrilist testi (nn seeriatesti), mida võib – sobivalt andmeid ette andes – kasutada keskvaartuste vrdlemiseks nii sõltuvate kui ka sõltumatute valimite korral.

Seeriatest on rakendatav igasuguse kaheväärtuselise tunnuse korral. Ta võimaldab kontrollida, kas eristatavad väärtused paiknevad etteantud tunnuse väärtuste jadas juhuslikult või mitte. Testi tuletamisel on aluseks järgmine lihtne idee. Kui uuritava tunnuse väärtused "A" ja "B" paiknevad juhuslikult, ei asu jadas väga palju ühesuguseid väärtusi kõrvuti. Näiteks järjestuse

A A A A A B B B B B

juhuslik tekkimine on üsna ebatõenäone. Samuti ei ole juhuslikus jadas tunnuse väärtuste sagedast korrapärasest vahetumist. Nii on järjestus

A B A B A B A B A B

samuti väga ebatõenäone.

Nimetame ühesuguseid kõrvuti asuvaid väärtusi *seeriaks*. Jada juhuslikkuse kirjeldamiseks sobib seeriade arv, tähistame selle sümboliga N . Vaatame näiteks jada

$$\underbrace{AA}_1 \underbrace{BBB}_2 \underbrace{A}_3 \underbrace{BB}_4 \underbrace{A}_5 \underbrace{B}_6 \underbrace{AA}_7.$$

Seeriat moodustavad väärtused on selles ühendatud loogelise suluga, jadas on seitse seeriat, $N = 7$.

Kui tegemist on jadaga, milles on n elementi, siis seeriade arv N võib muutuda kahest kuni n -ni. Ilmselt viitavad statistiku N "liiga suured" ja "liiga väikesed" väärtused sellele, et jada pole juhuslik. Statistiku N abil saab kontrollida hüpoteese

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{jada on juhuslik,} \\ H_1 &: \text{jada pole juhuslik.} \end{aligned}$$

Otsuse langetamise eeskiri olulisuse nivool α ja erinevat tüüpi elementide arvu n_1 ja n_2 korral on aga järgmine:

$$\begin{aligned} &\text{kui } N \leq n_{\alpha, n_1, n_2} \text{ või } N \geq \bar{n}_{\alpha, n_1, n_2} \text{ võtta vastu } H_1, \\ &\text{kui } n_{\alpha, n_1, n_2} < N < \bar{n}_{\alpha, n_1, n_2}, \text{ jätta } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Otsuse langetamiseks vajalikud kriitilised väärtused võib leida tabelist I.

Kui analüüsitav juhuslik jada on küllalt pikk, võib seeriade arvu sobivalt standardiseerides kasutada tema kirjeldamiseks standardset normaaljaotust. Saab näidata, et nullhüpoteesi kehtivuse korral on seeriade arvu keskväertus

$$m_N = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

ja seeriade arvu standardhälve

$$s_N = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}.$$

Seega võib statistiku

$$Z_N = \frac{N - m_N}{s_N}$$

ligikaudseks jaotuseks nullhüpoteesi kehtides lugeda standardse normaaljaotuse, $Z_N \sim N(0, 1)$. Selleks, et saada paremini lähendavat statistikut, lahutatakse lugejas olevast avaldisest sageli veel 0.5 — nn "pidevuse parandus", seega kasutatakse statistikut

$$Z_N = \frac{N - m_N - 0.5}{s_N}.$$

Otsuse langetamiseks võib kasutada tabelis 1 toodud eeskirju.

Seeriatesti võimsus on üldiselt väike, kuid tema eeliseks on avar rakendamisvaldkond. Vaatame näidet seeriatesti rakendamise kohta.

Näide 4.18. Olgu tegemist keskkonnakaitse spetsialistiga, kes analüüsib suure liiklusmagistraali ääres kasvavate puude seisundit. Seisundile antakse kaheväärtuseline määratlus – terve (T) või haige (H). Vaadates läbi 12 järjestikku kasvavat puud, saab ta järgmised tulemused:

T T T H T T T H T T T H.

Esitame kontrollitavad hüpoteesid.

H_0 : jada on juhuslik,
 H_1 : jada pole juhuslik.

Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Kuna vaatluste arv on väike – erinevate sümbolite arvud on kolm ja üheksa – leiame kriitilised väärtused tabelist I. Kriitilised väärtused on 2 ja 8.

Vaadatavas jadas on kuus seeriat, $N = 6$. Kuna statistiku väärtus ei kuulu kriitilisse piirkonda, võtame vastu nullhüpoteesi – pole põhjust loobuda oletusest, et haigete ja tervete puude vaheldumine on juhuslik.

Oletame nüüd, et keskkonnauuriija jätkab puude läbivaatamist. Kontrollinud üle veel 28 puud, saab ta järgmise rea

T T T H T T T H T T T H T T T H T T T H
T T T H T T T H T T T H T T T H T T T H.

Kontrollitavad hüpoteesid ja olulisuse nivoo jäägu endisteks. Leiame seeriade arvu, $N=20$. Erinevate elementide arvud on siin 30 ja 10. Need on küllalt suured kasutamaks normaalset lähendit. Kuna mittejuhusliku jada korral on võimalikud nii väikesed kui ka suured seeriade arvud, peab kriitiline piirkond olema kahepoolne. Leiame tabelist kriitilise väärtuse $\bar{z}_{0.025} = 1.96$. Arvutame standardiseerimiseks vajalikud suurused

$$m_N = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10}{30 + 10} + 1 = 16$$

ja

$$\begin{aligned}s_N &= \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 30 \cdot 10 - 30 - 10)}{(30 + 10)^2(30 + 10 - 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{336000}{62400}} \approx 2.32.\end{aligned}$$

Leiame standardiseeritud statistiku väärtuse

$$z_N = \frac{20 - 16.5}{2.32} \approx 1.51.$$

Kuna statistiku absoluutväärtus ei ületa kriitilist väärtust, $1.51 < 1.96$, peame jääma nullhüpoteesi juurde.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.

Lõpetanud formaalsed arvutused vaatame esitatud jada veidi terasemalt. Igaüks peaks märkama, et raske on uskuda niisuguse jada juhuslikkust – süstemaatiliselt kordub kindel ”muster”, iga neljas puu on haige. Võib-olla peitub põhjus siin kasutatud puu liigis, istikute päritolus või milleski muus sellises. Seeriastest aga pole orienteeritud niisuguse korduse avastamisele.

Tasub meenutada, et vastu võetud nullhüpoteesi ei loeta kunagi tõestatuks – eksimise risk nullhüpoteesi vastu võttes on tõkestatud suurusega $1 - \alpha$, praegusel juhul suurusega 0.95. Alati jääb võimalus, et asja täpsemini uurides osutub võimalikuks nullhüpotees kummutada.



Andmeid sobivalt esitades saab seeriastesti rakendada ka üldkogumite keskväärtuste võrdlemiseks sõltumatute valimite põhjal. Niisuguse kasutusviisi korral nimetatakse testi ka *Wald-Wolfofitzi testiks*.

Näide 4.19. Olgu tegemist kirjaliku eksami hinnetega, hindamisel kasutati sajapallist skaalat. Eksam toimus kahes erinevas ruumis, olgu need ruum A ja ruum B. Soovitakse kontrollida, kas eksamihinnete keskmine tase pole erinevates ruumides erinev. Tulemused olid järgmised:

Ruum A: 64 38 72 75 69 27 50 44 80 25

Ruum B: 59 68 73 16 28 65 80 77 56 74

Sõnastame kahtluse statistiliste hüpoteesidena

H_0 : eksamihinnete jaotus mõlemas ruumis on sama,

H_1 : eksamihinnete jaotus mõlemas ruumis erineb.

Moodustame eksamihinnetest ühise variatsioonrea, milles hinde alla kirjutame selle ruumi tähe, kus hinne on saadud:

16 25 27 28 38 44 50 56 59 64 65 68 69 72 73 74 75 77 80 80
B A A B B A A B B A B B A A B B A B A A

Nii teisendame esialgse hinnete rea kahe väärtuse jadaks, mis nullhüpoteesi kehtivuse korral on juhuslik. Saame seeriatega arvuks 12, $N=12$. Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Leiame tabelist I otsuse langetamiseks vajalikud kriitilised väärtused. Arvestades, et $n_1 = n_2 = 10$, saame kriitilisteks väärtusteks 6 ja 16. Kuna $6 < N < 16$, peame jääma nullhüpoteesi juurde – pole põhjust loobuda oletusest, et hinnete jaotus on mõlemas ruumis ühesugune.

Põhimõtteliselt oleks võinud nende hüpoteeside testimiseks rakendada ka Mann-Whitney testi, mille võimsus on üldiselt suurem, st võib leida andmestikke, mille korral Mann-Whitney test võimaldab sisuka hüpoteesi tõestada, seeriatega aga mitte.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Seeriatega on rakendatav iga probleemi korral, kus andmed võib ühest aspektist lähtudes klassifitseerida kahte erinevasse klassi ja mingist teisest aspektist lähtudes järjestada. See test annab võimaluse leida, kas need kaks aspekti on sõltumatud – sel juhul saame juhusliku kahe väärtuse jada – või on nende vahel olemas mingi seos. Sobival viisil andmeid esitades võib seeriatega rakendada ka kahe sõltuva valimi analüüsimiseks.

Näide 4.20. Vaatame näites 4.16 toodud andmeid ravimi toime analüüsimise kohta. Vahede absoluutväärtused võime järjestada, negatiivsed vahed tähistada sümboliga "–", positiivsed vahed tähistada sümboliga "+". Nii saame kahe väärtuse jada, mis juhul, kui uuritava tunnuse keskväärtus ei muutunud, peaks olema täiesti juhuslik. Seega võime ravimi mõju kontrollimise taandada järgmiste hüpoteeside kontrollimisele

H_0 : positiivsete ja negatiivsete vahede jaotus
on ühesugune,

H_1 : positiivsete ja negatiivsete vahede jaotus
on erinev.

Vahede absoluutväärtuste põhjal saame järgmise jada:

----- + + + + + + + + .

Seeriade arv selles jada on minimaalne, $N = 2$. Leiame tabelist I sümboolite arvudele 7 ja 9 vastavad kriitilised väärtused, need on 4 ja 14. Kuna seeriade arv N on väiksem alumisest kriitilisest väärtusest, $2 < 4$, peame ka selle meetodiga vastu võtma sisuka hüpoteesi: loeme tõestatuks, et positiivsete ja negatiivsete vahede jaotus on erinev. See aga tähendab, et ravim toimib.



Sageli kasutatakse seeriatesti trendi – teatava ühesuunalise muutuse – avastamiseks andmestikus. Seda eriti siis, kui tegemist on spetsiaalse andmestikuga, nn aegreaga. *Aegreaks* nimetatakse andmestikku, mis on saadud ühe ja sama objekti mõõtmisel erinevatel ajahetketel. Niisugused mõõtmised on üldiselt sõltuvad ja seetõttu standardsete meetodite rakendamine problemaatiline. Vaatame näidet niisuguse rakenduse kohta.

Näide 4.21. Olgu vaatluse all USA kullavarud (miljonites untsides) 12 järjestikuse aasta jooksul:

274.71 274.68 277.5 276.41 264.60 264.32 264.11
264.03 263.39 262.70 262.65 262.04

Leiame selle andmestiku mediaani, see on variatsioonrea kuunda ja seitsmenda elemendi keskvärtus, $m_e = 264.225$. Teisendame nüüd esialgse vaatluste rea kaheväärtuseliseks, tähistades mediaanist suuremad väärtused märgiga "+" ja mediaanist väiksemad väärtused märgiga "-". Saame rea

+ + + + + + - - - - - .

Kui kullavarude süstemaatilist muutust ei toimu, peaksid mediaanist suuremad ja väiksemad väärtused paiknema täiesti juhuslikult ja olema hästi segunenud. Kontrollitavad hüpoteesid võiks sõnastada järgmiselt:

H_0 : mediaanist suuremad ja väiksemad väärtused paiknevad juhuslikult,

H_1 : mediaanist suuremad ja väiksemad väärtused ei paikne juhuslikult.

Saadud jada pole ilmselt juhuslik. Seeriade arv on minimaalne, $N=2$. Tabelist I leiame olulisuse nivoole 0.05 ja sümbolite arvule 6 ja 5 vastavad kriitilised väärtused 3 ja 10. Kuna statistiku N väärtus on väiksem alumisest kriitilisest piirist, $2 < 3$, võtame vastu sisuka hüpoteesi: andmete põhjal võib lugeda tõestatuks, et mediaanist suuremad ja väiksemad väärtused ei paikne juhuslikult. Selles andmestikus on olemas selgelt väljendunud trend – ilmne tendents kullavarude süstemaatiliseks vähenemiseks.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



4.4. Üldkogumite jaotuste võrdlemine

Eelmistes punktides kirjeldatud testid on suunatud eeskätt üldkogumite keskmiste tasemete võrdlemisele. Niisugused testid on kasutatavad arvuliste tunnuste korral, mõned ka järjestustunnuste korral. Selles punktis vaatame teste, mis on tundlikud igasuguste erinevuste suhtes üldkogumite jaotuses.

4.4.1. χ^2 -test

See test lähtub sõltumatute valimite põhjal moodustatud sagedustabelitest. Test on rakendatav nii arvuliste, järjestatud kui ka nominaaltunnuste korral.

Olgu mõlemas võrreldavas üldkogumis vaadatud ühte ja sama tunnust ning olgu uurija käsutuses sõltumatud valimid. Olgu esimeses valimis n_1 mõõtmist, teises valimis n_2 mõõtmist. Määrame kindlaks kasutatavad tunnuse väärtusklassid, olgu need $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$. Tähistame nende sagedused esimeses valimis $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_k^{(1)}$ ja teises valimis $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_k^{(2)}$. Need on katses saadud sagedused, nimetame neid edaspidises *vaadeldud*

sagedusteks. Leiame nüüd väärtusklasside "teoreetilised" sagedused, toetudes eeldusele, et võrreldavad üldkogumid on ühesuguse jaotusega. Sel juhul pole põhjust valimite eristamiseks, nad on tegelikult pärit ühest ja samast üldkogumist ning järelikult on j -nda väärtusklassi sageduseks $t_j = v_j^{(1)} + v_j^{(2)}$ ning suhteliseks sageduseks

$$f_j = \frac{t_j}{n_1 + n_2}.$$

See suhteline sagedus on mõlema valimi põhjal määratud hinnang tõenäosusele, et tunnus omandab väärtuse just nimelt selles väärtusklassis. Nüüd on võimalik arvutada väärtusklasside "teoreetilised" *sagedused* kummaski valimis iga väärtusklassi jaoks

$$e_j^{(1)} = n_1 f_j, \quad e_j^{(2)} = n_2 f_j,$$

$j = 1, 2, \dots, k$.

Võtame kasutusele statistiku, mis mõõdab vaadeldud sageduste $v_j^{(i)}$ ja "teoreetilise" eelduse kohaste sageduste $e_j^{(i)}$ erinevust. Selleks arvutame mõlemas valimis iga väärtusklassi jaoks suhte

$$\frac{(v_j^{(i)} - e_j^{(i)})^2}{e_j^{(i)}}$$

ning liidame saadud arvud kokku üle mõlema valimi kõikide väärtusklasside. Saadud statistikut nimetatakse χ^2 -statistikuks:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(v_j^{(1)} - e_j^{(1)})^2}{e_j^{(1)}} + \sum_{j=1}^k \frac{(v_j^{(2)} - e_j^{(2)})^2}{e_j^{(2)}}. \quad (4.25)$$

Statistiku käitumise loogika on hästi läbi nähtav. Kui üldkogumid on tõepoolest ühesuguse jaotusega, on erinevused eeldatavate ja vaadeldud sageduste vahel enamasti väikesed, oodata on suhteliselt väikest statistiku väärtust. Kui aga üldkogumite jaotused on erinevad, on oodata statistiku suhteliselt suurt väärtust.

Sõnastame χ^2 -statistiku abil kontrollitavad hüpoteesid.

H_0 : üldkogumid on ühesuguse jaotusega,

H_1 : üldkogumid on erineva jaotusega.

Kui nullhüpotees kehtib, saab näidata, et χ^2 -statistiku ligikaudseks jaotuseks on hii-ruut-jaotus (χ^2 -jaotus) parameetriga $k-1$, $\chi^2 \sim \chi^2(k-1)$, k on väärtusklasside arv. Lähendi kasutatavuse tagab järgmiste tingimuste täidetud – ei tohi kasutada väärtusklasse, mille teoreetilised sagedused on väga väikesed, väärtusklasside arvu k ja vaatluste arvu n_1+n_2 suhe peab olema väike.

Otsuse langetamiseks saame järgmise eeskirja

kui $\chi^2 \geq \bar{h}_{\alpha, k-1}$, siis võtta vastu sisukas hüpotees,
kui $\chi^2 < \bar{h}_{\alpha, k-1}$, siis võtta vastu nullhüpotees.

Otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{h}_{\alpha, k-1}$ leiame tabelist H. Vaatame näidet selle testi rakendamise kohta.

Näide 4.22. Teatavas ülikoolis sooviti uurida esimese aasta üliõpilaste enesehinnangu ja bakalaureusekraadi taotleva üliõpilaste enesehinnangu vahekorda. Selleks koostati test, mille tulemus määras vastaja enesehinnangu 10-pallises skaalas. Testiti 200 esimese aasta üliõpilast ja 150 bakalaureusekraadi taotlejat, testitavad valiti kõiki juhusliku valimi moodustamise reegleid silmas pidades. Muude probleemide kõrval sooviti kindlaks teha, kas enesehinnangute jaotus mõlemas üldkogumis on ühesugune. Esitame testide tulemused järgmises jaotustabelis

| Väärtusklass | 1-2 | 3-4 | 5-6 | 7-8 | 9-10 | Kokku |
|---------------|-----|-----|-----|-----|------|-------|
| Esimene aasta | 24 | 55 | 72 | 29 | 20 | 200 |
| Bak. taotl. | 3 | 22 | 58 | 53 | 14 | 150 |

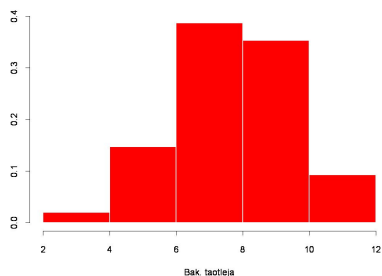
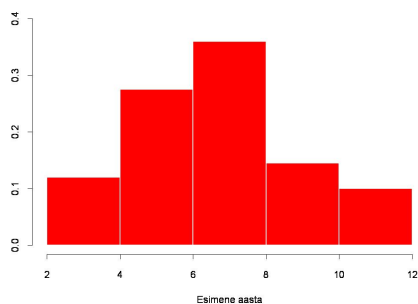
Esitame kontrollitavad hüpoteesid

H_0 : esimese aasta üliõpilaste ja bakalaureusekraadi taotlejate enesehinnangud on sama jaotusega,

H_1 : esimese aasta üliõpilaste ja bakalaureusekraadi taotlejate enesehinnangud on erineva jaotusega.

Valime olulisuse nivoo, olgu $\alpha = 0.1$. Leiame tabelist H otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse, $\bar{h}_{0.1, 4} = 7.77$. Enne arvutustesse sukeldumist uurime jaotuste vahekorda. Kuna valimite mahud on erinevad, ei ole väärtusklasside sagedused otsestelt võrreldavad. Leiame mõlema valimi jaoks väärtusklasside suhtelised sagedused ja joonistame jaotushistogrammid.

| Väärtuskl. | 1-2 | 3-4 | 5-6 | 7-8 | 9-10 | Summa |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Esim. aasta | 0.120 | 0.275 | 0.360 | 0.145 | 0.100 | 1.000 |
| Bak. taotl. | 0.020 | 0.147 | 0.387 | 0.353 | 0.093 | 1.000 |



Joonis 4.5. Enesehinnangute jaotushistogrammid

Võime täheldada, et enesehinnangute jaotused valimites on mõnevõrra erinevad. χ^2 -test võimaldab objektiivselt otsustada, kas erinevused on küllalt suured, et valitud olulisuse nivool nullhüpotees kummutada.

Leiame väärtusklasside ühised sagedused ja suhtelised sagedused.

| Väärtuskl. | 1-2 | 3-4 | 5-6 | 7-8 | 9-10 | Summa |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sagedus | 27 | 77 | 130 | 82 | 34 | 1.000 |
| Suht. sag. | 0.077 | 0.220 | 0.371 | 0.235 | 0.097 | 1.000 |

Koondame χ^2 -statistiku leidmiseks vajalikud arvutused järgmisesse tabelisse. Liites kolmanda ja kuuenda veeru summa, saame kätte χ^2 -statistiku väärtuse

$$\chi^2 = 33.609.$$

| $e_j^{(1)}$ | $v_j^{(1)} - e_j^{(1)}$ | $\frac{(v_j^{(1)} - e_j^{(1)})^2}{e_j^{(1)}}$ | $e_j^{(2)}$ | $v_j^{(2)} - e_j^{(2)}$ | $\frac{(v_j^{(2)} - e_j^{(2)})^2}{e_j^{(2)}}$ |
|-------------|-------------------------|---|-------------|-------------------------|---|
| 15.429 | 8.571 | 4.761 | 11.571 | -8.571 | 6.349 |
| 44.000 | 11.000 | 2.750 | 33.000 | -11.000 | 3.667 |
| 74.286 | -2.286 | 0.070 | 55.714 | 2.286 | 0.094 |
| 46.857 | -17.857 | 6.805 | 35.143 | 17.857 | 9.073 |
| 19.429 | 0.571 | <u>0.017</u> | 14.571 | -0.571 | <u>0.022</u> |
| | | 14.404 | | | 19.206 |

Kuna statistiku väärtus on tunduvalt suurem tabelist leitud kriitilisest väärtusest, $33.609 > 7.77$, peame vastu võtma sisuka hüpoteesi: enesehinnangute jaotus esimese aasta üliõpilastel ja bakalaureusekraadi taotlejatel on oluliselt erinev. Joonise ja χ^2 -statistiku arvutamiseks koostatud abitabeli lähem analüüsimine võimaldab ka sõnastada, milles erinevus seisneb. Nimelt on esimese aasta üliõpilaste hulgas madalate enesehinnangute osakaal suurem ja kõrgete enesehinnangute osakaal väiksem kui bakalareusekraadi taotlejate hulgas. Ülikõrgeid hinnanguid on huvitaval kombel mõlemas valimis enam-vähem võrdselt.

Arvestades statistiku väärtuse ja kriitilise väärtuse suurt erinevust on üsna selge, et valimi olulisuse tõenäosus on üsna lähedane nullile, sisukat hüpoteesi oleks võimalik tõestada ka hoopis väiksema olulisuse nivoo korral, kui näites kasutatud.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiiga SPSS.



4.4.2. Kolmogorov-Smirnovi test

Kolmogorov-Smirnovi test sobib samuti kahe üldkogumi jaotuse võrdlemiseks, vajalik lähteinformatsioon on sama: uurija käsutuses peavad olema valimid mõlemast üldkogumist. Erinevalt χ^2 -testist võivad aga kasutatavad valimid olla suhteliselt väikesed. Võrdluse aluseks on valimi põhjal leitud empiirilised jaotusfunktsioonid (vt [11], lk 109). Empiirilise jaotusfunktsiooni väärtuseks punktis x on sellest väärtusest väiksemate väärtuste osakaal antud valimis. Empiirilise jaotusfunktsiooni graafik meenutab treppi. Kui valimis on n elementi, mis kõik on erinevad, siis on sellel trepil iga valimi elemendi kohal üks aste kõrgusega $\frac{1}{n}$. Empiirilise jaotusfunktsiooni saab leida ka jaotustabeli põhjal, tema

väärtusteks on kumulatiivsed suhtelised sagedused. Kui jaotustabel on intervallitud, siis empiirilise jaotusfunktsiooni väärtus muutub vaid intervalli ülemise otspunkti kohal.

Tähistame esimese ja teise valimi empiirilise jaotusfunktsiooni vastavalt $G_1(x)$ ja $G_2(x)$. Vaatame näiteid empiirilise jaotusfunktsiooni leidmise kohta.

Näide 4.23. Vaatame näites 4.1 toodud andmeid kahe kooli õpilaste kohta. Kasutame mõlema kooli B klassi õpilaste andmeid. Seega on võrreldavad valimid järgmised:

1. kool 86 83 82 84 85 86 83 82 82 84

2. kool 80 80 78 88 80 90 81 83 83 97

Järjestame valimid:

1. kool 82 82 82 83 83 84 84 85 86 86

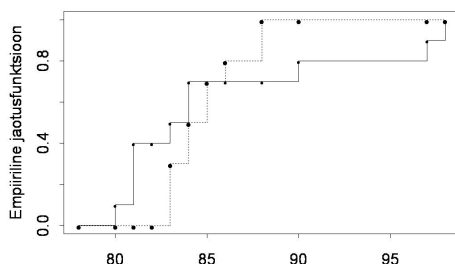
2. kool 78 80 80 80 81 83 83 88 90 97.

Kirjutame välja mõlema valimi jaotusfunktsioonid, kasutades neid argumendi väärtusi, mille korral vähemalt üks jaotusfunktsioonidest teeb hüppe.

| x_i | $G_1(x_i)$ | $G_2(x_i)$ |
|-------|------------|------------|
| 78 | 0 | 0 |
| 80 | 0 | 0.1 |
| 81 | 0 | 0.4 |
| 82 | 0 | 0.5 |
| 83 | 0.3 | 0.5 |
| 84 | 0.5 | 0.7 |
| 85 | 0.7 | 0.7 |
| 86 | 0.8 | 0.7 |
| 88 | 1.0 | 0.7 |
| 90 | 1.0 | 0.8 |
| 97 | 1.0 | 0.9 |
| 98 | 1.0 | 1.0 |

Nende valimite empiirilised jaotusfunktsioonid on esitatud joonisel 4.6. Empiirilise jaotusfunktsiooni väärtused peegeldavad teise valimi elementide suuremat hajutatust – algul kasvab teise valimi empiiriline jaotusfunktsioon kiiremini, siis aga tema kasv aeglustub. Kuna esimese valimi elemendid paiknevad kitsamas intervallis, saavutab selle valimi jaotusfunktsioon kiiremini ühega

võrdse väärtuse.



Joonis 4.6. Testi hinnete jaotusfunktsioonid



Näide 4.24. Kasutame näites 4.22 toodud andmestikku üliõpilaste enesehinnagute kohta. Lisame jaotustabelitesse kumulatiivsed sagedused. Esimese aasta üliõpilaste enesehinnangute jaotustabel on siis järgmine:

| Väärtuskl. | 1-2 | 3-4 | 5-6 | 7-8 | 9-10 | Summa |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sagedus | 24 | 55 | 72 | 29 | 20 | 200 |
| Kum. sag. | 24 | 79 | 151 | 180 | 200 | |
| Kum. suht.sag. | 0.120 | 0.395 | 0.755 | 0.900 | 1.000 | |

Bakalaureusekraadi taotlejate enesehinnangute tabel on järgmine:

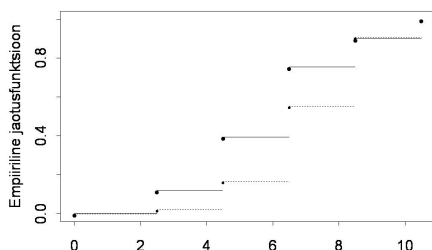
| Väärtuskl. | 1-2 | 3-4 | 5-6 | 7-8 | 9-10 | Summa |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sagedus | 3 | 22 | 58 | 53 | 14 | 150 |
| Kum. sag. | 3 | 25 | 83 | 136 | 150 | |
| Kum. suht.sag. | 0.020 | 0.167 | 0.553 | 0.907 | 1.000 | |

Põhimõtteliselt on vaadatav tunnus pidev, kuna enesehinnang väljendub täisarvuna ainult valitud hindamise skaala tõttu. Tun-nuse tegelikke väärtusi jaotustabelis antud intervalli sees me ei

tea, kuid ükski intervalli kuuluv väärtus ei ületa intervalli ülemist raja. Valime jaotustabeli intervalle lahutavateks väärtusteks 2.5, 4.5, 6.5 ja 8.5. Kirjutame mõlema valimi jaoks empiirilise jaotusfunktsiooni välja, lugedes selle jaotustabelis toodud intervalli sees konstantseks. Igas intervalle lahutavas punktis teeb funktsioon hüppe, mille kõrguseks on vasakule jääva intervalli suhteline sagedus. Esitame empiiriliste jaotusfunktsioonide väärtused.

| x_i | $G_1(x_i)$ | $G_2(x_i)$ |
|-------|------------|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 2.5 | 0.120 | 0.020 |
| 4.5 | 0.395 | 0.167 |
| 6.5 | 0.755 | 0.553 |
| 8.5 | 0.900 | 0.907 |
| 10.5 | 1.000 | 1.000 |

Tabeli esimeses veerus asuvad argumentid – punktid, mis me valisime jaotustabeli väärtusintervallide rajapunktideks. Tabeli järgmistes veergudes on antud empiiriliste jaotusfunktsioonide väärtused nende argumentide korral. Intervallis, mis asub kahe argumenti vahel, loetakse empiirilised jaotusfunktsioonid konstantseteks. Funktsioonide graafikud on kujutatud järgneval joonisel.



Joonis 4.7. Enesehinnangute jaotusfunktsioonid



Kolmogorov-Smirnovi testiga kontrollitavad hüpoteesid on sõnastatavad üldkogumite jaotusfunktsioonide kohta. Jaotusfunktsiooni väärtuseks kohal x on tõenäosus, et tunnus omandab

sellest argumendist väiksema väärtuse. Tähistame üldkogumite jaotusfunktsioonid $F_1(x)$ ja $F_2(x)$. Kui jaotusfunktsioonide vahekorra kohta pole täiendavat informatsiooni, tuleb sisukas hüpotees sõnastada kahepoolsena

$$\begin{aligned} H_0 : F_1(x) &= F_2(x), \text{ üldkogumite jaotused} \\ &\text{on samad,} \\ H_1 : F_1(x) &\neq F_2(x), \text{ üldkogumite jaotused} \\ &\text{on erinevad.} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Otsuse langetamiseks kasutatakse empiiriliste jaotusfunktsioonide maksimaalse erinevuse absoluutväärtust,

$$D = \max | G_1(x) - G_2(x) | .$$

Kui jaotusfunktsioonide vahekorra kohta on täiendavat informatsiooni, võib sisuka hüpoteesi sõnastada ühepoolsena. Näiteks

$$\begin{aligned} H_0 : F_1(x) &= F_2(x), \text{ üldkogumite jaotused} \\ &\text{on samad,} \\ H_1 : F_1(x) &> F_2(x), \text{ esimeses üldkogumis on} \\ &\text{väiksemad väärtused sagedasemad kui teises.} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Niisuguste hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse esimese ja teise valimi empiirilise jaotusfunktsiooni vahe maksimaalset väärtust

$$D_+ = \max(G_1(x) - G_2(x)).$$

Loomulikult võib vajaduse korral sisukas hüpoteesis kasutada ka teistpidist võrratust

$$\begin{aligned} H_0 : F_1(x) &= F_2(x), \text{ üldkogumite jaotused} \\ &\text{on samad,} \\ H_1 : F_1(x) &< F_2(x), \text{ esimeses üldkogumis on} \\ &\text{suuremad väärtused sagedasemad kui teises.} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Niisuguste hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse teise ja esimese valimi empiirilise jaotusfunktsiooni vahe maksimaalset väärtust

$$D_- = \max(G_2(x) - G_1(x)).$$

Kui nullhüpotees kehtib ning mõlemad üldkogumid on pideva jaotusega, saab leida kõikide nende statistikute täpsed jaotused. Selle jaotuse parameetriteks on kasutatud valimite mahud. Täpse jaotuse olemasolu lubab seda kriteeriumi rakendada ka üsna väikeste valimite korral. Sel juhul on aga testi võimsus – tõenäosus avastada tegelikult eksisteerivat erinevust tõeliste jaotuste vahel – väike.

D-statistikute käitumise loogika on kõikide hüpoteesipaaride korral hästi läbi nähtav: kui nullhüpotees kehtib, on oodata suhteliselt väikesi väärtusi; kui sisukas hüpotees kehtib, on oodata suhteliselt suuri väärtusi.

Tabel 5

| Vastu võetud hüpotees | Kontrollitav hüpoteesipaar | | |
|-----------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | (4.26) | (4.27) | (4.28) |
| H_1 | $D \geq \bar{k}''_{\alpha;n_1,n_2}$ | $D_+ \geq \bar{k}'_{\alpha;n_1,n_2}$ | $D_- \geq \bar{k}'_{\alpha;n_1,n_2}$ |
| H_0 | $D < \bar{k}''_{\alpha;n_1,n_2}$ | $D_+ < \bar{k}'_{\alpha;n_1,n_2}$ | $D_- < \bar{k}'_{\alpha;n_1,n_2}$ |

Otsuse langetamiseks vajalikud eeskirjad on toodud tabelis 5. Otsuse langetamiseks vajalikud kriitilised väärtused valimite jaoks, mille maht pole suurem kui 20, võib leida tabelist K. Tabel K koosneb viiest osast, eraldi on toodud olulisuse nivoole 0.05 ja 0.01 vastavad kriitilised väärtused ühepoolsete ($\bar{k}'_{\alpha;n_1,n_2}$) ja kahepoolsete ($\bar{k}''_{\alpha;n_1,n_2}$) hüpoteeside jaoks võrdse ja erineva mahuga valimite korral. Tabeli viimases alajaotuses on antud suurte valimite korral kasutatavad kriitilised väärtused ($\bar{k}_\alpha$).

Näide 4.25. Kasutades näites 4.23 toodud andmeid kontrolime, kas intelligentsustesti hinnete jaotuse erinevust saab tõestada. Kuna täiendav informatsioon puudub, esitame kahepoolse sisuka hüpoteesi.

$H_0 : F_1(x) = F_2(x)$, üldkogumite jaotused on samad,

$H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$, üldkogumite jaotused on erinevad.

Kasutades näites 4.23 välja kirjutatud jaotusfunktsioone leiame D-statistiku. Vajalikud abitulemused on toodud järgnevas tabelis.

| x_i | $G_1(x_i)$ | $G_2(x_i)$ | $G_1(x_i) - G_2(x_i)$ |
|-------|------------|------------|-----------------------|
| 78 | 0 | 0 | 0 |
| 80 | 0 | 0.1 | -0.1 |
| 81 | 0 | 0.4 | -0.4 |
| 82 | 0 | 0.5 | -0.5 |
| 83 | 0.3 | 0.5 | -0.2 |
| 84 | 0.5 | 0.7 | -0.2 |
| 85 | 0.7 | 0.7 | 0 |
| 86 | 0.8 | 0.7 | 0.1 |
| 88 | 1.0 | 0.7 | 0.3 |
| 90 | 1.0 | 0.8 | 0.2 |
| 97 | 1.0 | 0.9 | 0.1 |
| 98 | 1.0 | 1.0 | 0 |

Saame $D = 0.5$. Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$. Leiame tabelist K otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{k}_{0.05;10,10} = 0.7$. Kuna leitud statistiku väärtus ei ületa valitud olulisuse nivoole vastavat kriitilist väärtust, peame jääma nullhüpoteesi juurde – jaotuste erinevust ei õnnestunud tõestada.



Kui valimi maht on suurem kui 20, võib otsuse langetamisel kasutada statistiku cD ligikaudset jaotust, kus konstant c sõltub kasutatud valimite mahtudest,

$$c = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Otsuse langetamise eeskiri kahepoolse sisuka hüpoteesi korral on järgmine:

kui $cD \geq \bar{k}_{\frac{\alpha}{2}}$ võtta vastu sisukas hüpotees,

kui $cD < \bar{k}_{\frac{\alpha}{2}}$ jääda nullhüpoteesi juurde.

Otsuse langetamise eeskiri ühepoolse sisuka hüpoteesi (4.27) korral on järgmine:

kui $cD_+ \geq \bar{k}_\alpha$ võtta vastu sisukas hüpotees,

kui $cD_+ < \bar{k}_\alpha$ jääda nullhüpoteesi juurde.

Otsuse langetamisel ühepoolse sisuka hüpoteesi (4.28) korral tuleb kasutada statistikut cD_- .

Valik ligikaudse jaotuse kvantiile on esitatud tabelis K.

Vaatame näidet Kolmogorov-Smirnovi testi kasutamise kohta suurte valimite korral.

Näide 4.26. Kasutame näites 4.22 toodud andmestikku üliõpilaste enesehinnangute kohta. Arvutame empiiriliste jaotusfunktsioonide vahed.

| x_i | $G_1(x_i)$ | $G_2(x_i)$ | $G_1(x_i) - G_2(x_i)$ |
|-------|------------|------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2.5 | 0.120 | 0.020 | 0.100 |
| 4.5 | 0.395 | 0.167 | 0.228 |
| 6.5 | 0.755 | 0.553 | 0.202 |
| 8.5 | 0.900 | 0.907 | 0.007 |
| 10.5 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

Kuna esialgne täiendav informatsioon puudus (ühepoolset hüpoteesi ei esitata kunagi selle andmestiku põhjal, mille kohta järeldusi soovitakse teha), siis esitame kontrollimiseks kahepoolsete hüpoteeside paari

$H_0 : F_1(x) = F_2(x)$, üldkogumite jaotused on samad,

$H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$, üldkogumite jaotused on erinevad.

Valime olulisuse nivoo $\alpha=0.10$. Otsuse langetamisel kasutame statistikut D , $D = 0.228$. Arvutame otsuse langetamiseks vajaliku korrutise

$$cD = \sqrt{\frac{150 \cdot 200}{350}} 0.228 \approx 2.111.$$

Kriitilise väärtuse leiame tabelist K, $\bar{k}_{0.05} = 1.358$. Kuna kriitiline väärtus on väiksem leitud korrutisest cD , $1.358 < 2.111$, siis võtame vastu sisuka hüpoteesi – loeme enesehinnangute jaotuse erineva aasta üliõpilastel erinevaks.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Ülesanded 4.

1. Uuritakse abiellumisvanust kahes etnilises rühmituses. Kummastki rühmast saab kasutada 100 mehe andmeid. Need on järgmised:

| Rühmitus | $\bar{x}$ | s |
|----------|-----------|-----|
| A | 18.5 | 5.8 |
| B | 20.1 | 6.3 |

(a) Kas keskmine abiellumisvanus on erinevates rühmitustes erinev ($\alpha = 0.05$)?

(b) Millised on eeldused testi rakendamiseks?

(c) Leida tõeliste keskväärtuste vahe usaldusintervall.

2. Soovitakse uurida teatava töötamise mõju seemnete idanemisvõimele. Selleks valitakse kaks 250 seemnest koosnevat partiidi, ühe partiiga tehakse läbi töötamine, teine jääb kontrollpartiiks. Seejärel kuumutatakse mõlemat partiidi teatud temperatuurini ja pannakse seemned idanema. Töödeldud seemnetest ei idanenud 10%, töötlemata seemnetest aga 25%.

(a) Kas töötamise positiivse mõju võib lugeda tõestatuks ($\alpha = 0.01$)?

(b) Leida idanevusprotsentide vahe usaldusintervall töödeldud ja töötlemata seemnete korral.

3. Teatava õpetamismetoodika efektiivsuse kontrollimiseks viidi läbi katse, milles osales 30 katsealust, kes jaotati juhuslikult kahte rühma. Kummaski rühmas oli 15 inimest. Kontrollrühma õpetati traditsioonilisel viisil, eksperimentaalarühma uue metoodika järgi. Õppeaja lõpul viidi mõlemas rühmas läbi ühesugune test. Mõlema rühma jaoks arvutati testi

hinnete keskväärtused ja standardhälbed. Need on toodud järgnevas tabelis:

| Rühm | $\bar{x}$ | s |
|--------------------|-----------|------|
| Kontrollrühm | 79.6 | 12.4 |
| Eksperimentaalrühm | 84.2 | 12.2 |

- Kas uue meetoodika efektiivsuse võib lugeda tõestatuks?
- Millised eeldused on vajalikud testi kasutamisel?
- Leida tõeliste keskmiste hinnete vahe usaldusintervall.

- Veostega tegelev firma võib oma autojuhtidele soovitada teatava linna läbimiseks kahte erinevat marsruuti. Neist lühem läheb otse läbi linna, pikem aga ringteed mööda ümber linna. Firma soovitaks meelsasti marsruuti, mille läbimiseks kulub vähem aega. Selle välja selgitamiseks registreeritakse mõlemal marsruudil kümnel erineval juhul kulunud aeg. Tulemused (minutites):

Läbi linna 52 70 67 75 79 76 63 100 82 86

Ümber linna 70 44 52 66 57 69 55 62 60 75.

- Kas marsruutide läbimise keskmised ajad erinevad oluliselt?
 - Leida usaldusintervall tõelisele keskväärtuste vahele.
 - Kas üldkogumite dispersioonid võib lugeda võrdseteks?
- Teatava operatsiooni järel võib rakendada kahte erinevat järelravi. Kontrollimaks, kas komplikatsioonide tekkimise risk on erinev, oli arstil kasutada 25 algselt enam-vähem ühesuguses seisundis olnud patsiendi andmed. Neist 9 sai järelravi A, komplikatsioonid tekkisid kolmel, ja 16 järelravi B, komplikatsioonid tekkisid neljal. Mida otsustada?
 - Rakendada ülesande 4 andmetele Mann-Whitney testi.
 - Ühe suure firma personalitalitus soovib võrrelda kahe osakonna telefonikõnede keskmist pikkust. Juhuslikult valitud 8 kõnet kummastki osakonnast on järgmise pikkusega (min)

I osakond 3.5 8.0 2.5 4.0 12.0 9.0 5.0 8.5

II osakond 10.5 12.5 5.5 3.5 3.5 2.0 8.5 7.0

Kas saab tõestada, et erinevates osakondades on kõne keskmine pikkus erinev?

8. Soovitakse kontrollida süstoolset vererõhku mõjustava ravimi efektiivsust. Kümnel juhuslikult valitud patsiendil määratakse vererõhk enne ja pärast ravimi manustamist. Tulemused:
- | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Enne | 120 | 136 | 160 | 98 | 115 | 110 | 180 | 190 | 138 | 128 |
| Pärast | 118 | 122 | 143 | 105 | 98 | 98 | 180 | 175 | 105 | 112 |
- Kas ravimi mõju võib lugeda tõestatuks? (Kasutada otsuse langetamisel nii parameetrilist kui ka mitteparameetrilist testi.)
9. Teatavas üliõpilaste rühmas uuriti enesehinnangute ja kaaslaste hinnangute vahekorda. Sobivalt valitud metoodika võimaldas hinnangud esitada 10-pallises skaalas. Järgnevalt on esitatud tulemused 12 katsealuse kohta:
- | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|
| Enesehinnang | 2 | 4 | 4 | 5 | 7 | 9 | 8 | 8 | 10 | 5 | 6 | 4 |
| Kaaslaste hinnang | 4 | 3 | 7 | 5 | 4 | 3 | 5 | 6 | 2 | 6 | 8 | 9 |
- Kas võib lugeda tõestatuks, et enesehinnangute ja kaaslaste hinnangute keskmine tase on erinev?
10. Sooviti kontrollida, kas teatavas õppeaines läbi viidava kontrolltesti keskmine tulemus sõltub küsimuste esitamise järjekorrast. Selleks korraldati järgnev katse. Õpperühm, milles oli 17 üliõpilast, jaotati juhuslike arvude tabeli abil kaheks – 8- ja 9-liikmeliseks alarühmaks. Mõlemas alarühmas tehti üks ja sama kontrolltest, kuid esimeses alarühmas (rühm A) järjestati küsimused nii, et nende raskus kahaneks, teises alarühmas (rühm B) aga nii, et nende raskus kasvaks. Tulemused olid järgmised:
- | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Rühm A | 66 | 78 | 75 | 50 | 60 | 46 | 80 | 78 |
| Rühm B | 83 | 81 | 91 | 95 | 65 | 90 | 75 | 71 |
- Esitada statistilised hüpoteesid. Valida olulisuse nivoo. Langetada otsus sobivat testi kasutades ja sõnastada sisuline tulemus.
11. Ühes ülikoolis viidi läbi uurimus, mille eesmärgiks oli analüüsida erinevate erialade bakalaureusekraadiga lõpetajate edasist käekäiku. Üheks uuritavaks tunnuseks oli lõpetanu palk esimesel tööaastal. Andmete kogumiseks saadeti laiali küsitluslehed, analüüsi lähteandmeteks olid laekunud

vastused. (Kas saadud valimit võib pidada juhuslikuks?)
Tulemused (juhuslikult valitud osa laekunud andmestikust)
kahe eriala lõikes olid järgmised (tabelis on toodud aasta-
palk dollarites):

| Insenerid | Haridustöötajad |
|-----------|-----------------|
| 21800 | 15500 |
| 25100 | 13100 |
| 14800 | 5000 |
| 13700 | 7800 |
| 21500 | 9300 |
| 22500 | 6800 |
| 12000 | 7300 |
| 22100 | 18600 |

Kas võib lugeda tõestatuks, et keskmine aastapalk vaadel-
dud erialadel on oluliselt erinev?

12. Psühhiaater uurib enesesugestsiooni mõju. Muude katsete
hulgas teostab ta ka järgmise. Patsiendile, kes kaebab une-
puudust, annab ta pärast pikemat vestlust mõjutud tabletid,
mille aga väidab olevat rahusti. Registreeritakse magatud
tundide arv enne ja pärast väidetava ravimi kasutamist:

Enne 6 3 4 5 6 5 5 3 2 3

Pärast 5 6 6 7 8 8 3 8 6 2

Kas keskmine magatud tundide arv muutus?

13. Vaatluse all on 20 eelkooliealist last. Vaadeldes laste vaba
mängu määras vilunud psühholoog hinnangu iga lapse sot-
siaalsele arengule. Mõne aja möödudes korraldati hindamist
teise psühholoogi poolt. Tulemused olid järgmised:

I hinne 32 35 33 36 44 44 32 38 37 35

II hinne 36 34 34 40 42 40 35 40 38 35

I hinne 29 34 50 40 39 31 47 41 30 35

II hinne 35 32 51 38 42 33 46 42 29 35

Kas erinevate psühholoogide keskmised hinded erinevad oluliselt?

5. KAHE TUNNUSE ÜHINE KÄITUMINE

Väga sageli on praktilist huvi pakkuvaks ülesandeks kahe tunnuse ühise käitumise uurimine. Siin on kõige esmalt vajalik selgitada, kas tunnused pole sõltumatud. *Sõltumatuteks* nimetatakse tunnuseid, mis omandavad väärtusi üksteist mõjutamata: see, millise väärtuse omandab üks tunnus, ei avalda mingit mõju sellele, millise väärtuse omandab teine tunnus. Sõltumatute tunnuste ühisel uurimisel ei ole mõtet, see ei anna mingit lisa-informatsiooni, võrreldes nende tunnuste eraldi uurimisega.

Kui tunnused pole sõltumatud, siis nimetatakse neid *sõltuvateks*. Sõltuvate tunnuste korral tekib vajadus mõõta nende vahelise sõltuvuse tugevust, kirjeldada seda sõltuvust. Selleks on olemas mitmesuguseid vahendeid. Sobiva vahendi valikul peab arvestama uuritavate tunnuste tüüpi, samuti mitmesuguseid täiendavaid eeldusi.

Järgnevates punktides annamegi ülevaate kahe tunnuse sõltuvuse kirjeldamise võimalustest.

5.1. Lineaarne korrelatsioonikordaja

Vaatame esmalt, kuidas kirjeldada sõltuvust arvuliste tunnuste vahel. Seda võib teha nii joonise abil kui ka sobivalt valitud arvulist kordajat kasutades.

5.1.1. Hajuvusdiagramm.

Olgu vaatluse all kaks pidevat arvulist tunnust, tunnus X ja tunnus Y . Selleks, et uurida kahe tunnuse ühist käitumist, peab meie käsutuses olema valim, mille igal objektil on mõõdetud mõlema tunnuse väärtused. Niisugune valim koosneb mõõtmistulemuste paaridest

| | |
|---------|---------|
| X | Y |
| x_1 | y_1 |
| x_2 | y_2 |
| $\dots$ | $\dots$ |
| x_n | y_n |

Paar x_i, y_i moodustub i -ndal objektil mõõdetud tunnuste väärtustest.

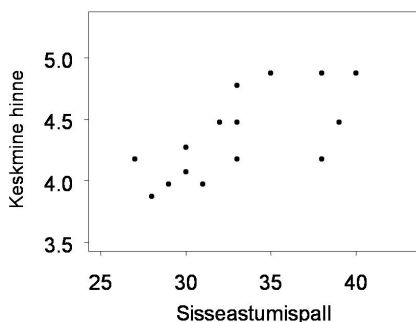
Lihtsaim võimalus niisuguse valimi visualiseerimiseks on *hajuvusdiagramm*. Hajuvusdiagramm (e korrelatsiooniväli) on joonis, millele kantakse punktidenä kõik valimi objektid. Objekti x -koordinaadiks on tunnuse X väärtus, y -koordinaadiks – tunnuse Y väärtus. Vaatame näidet.

Näide 5.1. Olgu meie käsutuses andmestik, milles on 16 üliõpilase keskkooli lõputunnistuse keskmine hinne (tunnus KK) ja ülikooli sisseastumisel saadud summaarne hindepall (tunnus SP).

| SP | KK | SP | KK |
|----|-----|----|-----|
| 35 | 4.9 | 31 | 4.0 |
| 32 | 4.5 | 32 | 4.5 |
| 38 | 4.2 | 33 | 4.5 |
| 30 | 4.3 | 38 | 4.9 |
| 33 | 4.8 | 33 | 4.2 |
| 27 | 4.2 | 29 | 4.0 |
| 30 | 4.1 | 40 | 4.9 |
| 28 | 3.9 | 39 | 4.5 |

Valimi moodustavad väärtuste paarid – mõlemad hinded iga üliõpilase jaoks. Tunnuste ühise käitumise uurimisel ei tohi väärtuspaare kunagi lahutada.

Joonistame hajuvusdiagrammi. Kanname joonisele ristteljed, x -teljel esitame tunnuse KK väärtused, y -teljel aga tunnuse SP väärtused. Seejärel valime telgedel mõõtühiku, erinevatel telgedel võib kasutada erinevat mõõtühikut. Ülevaatliku joonise saamiseks lõigatakse tavaliselt mõlema telje algusest välja sobiva pikkusega tükid, nii et valimi objektidele vastavad punktid täidavad mõistlikul viisil kogu joonise. Selle andmestiku korral on horisontaalteljele kantavaks esimeseks väärtuseks sobiv väärtus 3.5, vertikaalteljele kantavaks esimeseks väärtuseks aga 25. Edasi kantakse joonisele igale üliõpilasele vastav punkt.



Joonis 5.1. Hinnete hajuvusdiagramm

Vaadates joonist, võime täheldada, et punktid paiknevad vasakult paremale tõusva pikerguse pilvena. Niisugune pilt viitab teatavale ühisele tendentsile tunnuste käitumises – üsna sageli esinevad koos mõlema tunnuse suured või väikesed väärtused. Lõputunnistuse keskmises hinde kokku võetud edukus keskkoolis mõjustab ülikooli sisseastumise edukust, edukamad keskkoolis osutuvad sageli ka edukamateks ülikooli sisseastumiseksamitel.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.

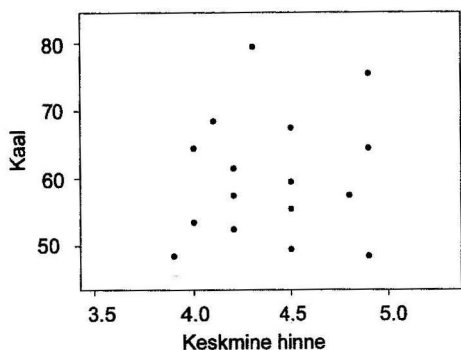


Näide 5.2. Vaatame teist andmestikku, milles mõõdetud tunnuste kohta võib intuiitiivselt eeldada sõltumatust. Mõõdetavateks on samad üliõpilased, mõõdetud tunnusteks aga kehakaal (KAAL) ja keskkooli lõputunnistuse keskmine hinne (KK). Andmed on järgmised:

| KK | KAAL | KK | KAAL |
|-----|------|-----|------|
| 4.9 | 76 | 4.0 | 54 |
| 4.5 | 60 | 4.5 | 56 |
| 4.2 | 58 | 4.5 | 50 |
| 4.3 | 80 | 4.9 | 65 |
| 4.8 | 58 | 4.2 | 62 |
| 4.2 | 53 | 4.0 | 65 |
| 4.1 | 69 | 4.9 | 49 |
| 3.9 | 49 | 4.5 | 68 |

Nüüd paiknevad üliõpilasi esitavad punktid hoopis teisiti, moodustades igas suunas enam-vähem ühtlaselt hajutatud pilve. Min-

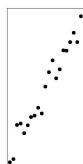
git tunnuste ühise käitumise tendentsi sellel pildil ootuspäraselt ei peegeldu.



Joonis 5.2. Hinnete ja kaalude hajuvusdiagramm



Hajuvusdiagramm annab esimese ettekujutuse tunnuste ühise käitumise tendentsidest. Sisukate järelduste tegemiseks konkreetse tunnuspaari kohta tasuks meelde jätta kolm tüüpilist hajuvusdiagrammi.



5.3.a.



5.3.b.



5.3.c.

Joonis 5.3. Tüüpilised hajuvusdiagrammid

Joonisel 5.3.a on kujutatud tunnused, millede vahel on tugev kasvav seos – tunnuste suured ja väikesed väärtused esinevad sageli koos. Joonisel 5.3.b on kujutatud tunnused, millede vahel on tugev kahanev seos – ühe tunnuse väike väärtus esineb sageli koos teise tunnuse suure väärtusega. Joonisel 5.3.c on kujutatud tunnused, mis on sõltumatus – see, milline on ühe tunnuse väärtus, ei mõjuta mingil moel teise tunnuse käitumist.

Joonise põhjal saab anda ainult subjektiivse hinnangu tunnuste vahelise seose tugevusele. Objektiivse hinnangu saamiseks tuleb kasutusele võtta kordaja, mis mõõdaks arvuliselt kahe tunnuse vahelise seose tugevust. Teeme seda järgmises punktis.

5.1.2. Lineaarne korrelatsioonikordaja

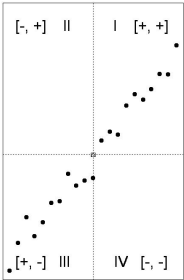
Tunnuste vahelise seose tugevust mõõtev kordaja peab ära kasutama hajuvusdiagrammil esitatud informatsiooni. Loomulik on, et kordaja väärtus oleks seose "suunast" – kasvava seose korral võiks selle märk olla "+", kahaneva korral "-". Mida väljavenitatum on punktipilv, seda tugevam on seos tunnuste vahel. Informatsiooni seose tugevuse kohta võiks anda kordaja absoluutväärtus – mida tugevam on seos, seda suurem võiks olla kordaja absoluutväärtus.

Niisuguse omadusega on *lineaarne korrelatsioonikordaja* e Pearsoni korrelatsioonikordaja, mis määratakse valemiga

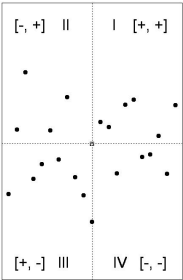
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (5.1)$$

Püüame lahti mõtestada, miks selles valemis kasutatakse selliseid – esmapilgul üsna keerulisi – summasid? Vaatame esmalt lugejas esinevat summat, mille liikmeteks on tunnuste keskväärtuse suhtes arvutatud hälvete korrutised. Joonisel 5.4.a on kujutatud tunnuste hajuvusdiagramm, mille vahel on tugev kasvav seos. Mõõtmistulemustele vastavad punktid paiknevad sellel tugevasti väljavenitatud pilvena. Joonisele on teistest pisut "rasvasemana" kantud ka punkt, mille koordinaatideks on tunnuste keskväärtused. Nihutame nüüd mõttes koordinaatide alguspunkti sellesse "rasvasesse" punkti. Joonisele 5.4.a on uued koordinaatteljed kantud punktiirjoonena. Nihke tulemusena muutuvad kõikide punktide koordinaadid – nendeks on nüüd paarid $(x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y})$. Koordinaatteljestik jagab tasandi neljaks veerandiks, veerandid nummerdatakse traditsiooniliselt kellaosuti liikumisele vastupidises suunas. Veerandite numbrid ja uute

koordinaatide märgid on kantud joonisele. Paneme tähele, et esimeses ja kolmandas veerandis on keskvärtuse suhtes arvatud hälbed ühesuguste märkidega, nende korrutis on positiivne arv. Teises ja neljandas veerandis on keskvärtuse suhtes arvatud hälbed vastupidiste märkidega, nende korrutis on negatiivne arv. Kui hajuvusdiagrammi moodustav punktivarv on tugevasti välja venitatud, on meid huvitavas summas palju ühesuguse märgiga liidetavaid – kasvava seose korral on liidetavad enamasti positiivsed, kahaneva seose korral aga enamasti negatiivsed. Igal juhul on tugeva seose korral summa absoluutväärtus suur. Kui aga hajuvusdiagrammi moodustav punktivarv on igas suunas enam-vähem ühtlaselt hajutatud, on igas veerandis punkte ligikaudu ühepalju, summas on positiivsete ja negatiivsete liidetavate arv lähedane. Kuna erinevate märkidega liidetavad koonduvad, on ka summa väärtus lähedane nullile. Niisugune olukord on esitatud joonisel 5.4.b.



5.4.a



5.4.b.

Joonis 5.4. Vaatlustulemuste uued koordinaadid.

Sellise lihtsa mehhanismi abil ”tunnetabki” valemis (5.1) esitatud murru lugeja hajuvusdiagrammi kuju.

Nimetajasse kirjutatud summad on aga vajalikud korrelatsioonikordaja normeerimiseks, tema väärtuse surumiseks -1 ja $+1$ vahele. Tuletame meelde, et keskvärtuse suhtes arvatud hälvetest ruutude summat kasutati tunnuse hajuvuse kirjeldamiseks. Kui normeerivaid summasid ei kasutataks, sõltuks lugejas oleva summa väärtus ka tunnuste hajuvusest – mida suurem on tunnuste väärtuste hajutus keskvärtuse suhtes, seda suu-

remad on ka keskväertuse suhtes arvutatud hälbed, seda suurem on korrelatsioonikordaja lugejasse kirjutatud summa absoluutväertus. Erinevate tunnuspaaide korral ei ole lugejas oleva summa väärtused omavahel võrreldavad.

Niisugused lihtsad kaalutlused olidki lineaarse korrelatsioonikordaja kasutusele võtmisel aluseks.

Lineaarsel korrelatsioonikordajal on järgmised omadused.

- 1) Lineaarse korrelatsioonikordaja väärtus asub -1 ja 1 vahel, $-1 \leq r \leq 1$.
- 2) Kui tunnuste vahel on kasvav seos, on korrelatsioonikordaja positiivne, $r > 0$.
- 3) Kui tunnuste vahel on kahanev seos, on korrelatsioonikordaja negatiivne, $r < 0$.
- 4) Kui tunnuste vahel on lineaarne funktsionaalne seos, $y = a + bx$, on korrelatsioonikordaja absoluutväertus võrdne ühega, $|r| = 1$.
- 5) Kui tunnused on sõltumatud, on nende korrelatsioonikordaja võrdne nulliga, $r = 0$.

Näide 5.3. Leiame lineaarse korrelatsioonikordaja väärtuse näites 5.1 toodud hinnete jaoks. Arvutame keskväertuse sisseastumispalli ja keskkooli keskmise hinde jaoks

$$\overline{SP} = 33, \quad \overline{KK} = 4.4.$$

Valemis (5.1) kasutatud summade leidmiseks vajalikud arvutused on kasulik koondada järgnevasse abitabelisse, mille kahes esimeses veerus on hälbed keskväertustest.

| $y_i - \bar{y}$ | $x_i - \bar{x}$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |
|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| 2 | 0.5 | 4 | 0.25 | 1.0 |
| -1 | 0.1 | 1 | 0.01 | -0.1 |
| 5 | -0.2 | 25 | 0.04 | -1.0 |
| -3 | -0.1 | 9 | 0.01 | 0.3 |
| 0 | 0.4 | 0 | 0.16 | 0.0 |
| -6 | -0.2 | 36 | 0.04 | 1.2 |
| -3 | -0.3 | 9 | 0.09 | 0.9 |
| -5 | -0.5 | 25 | 0.25 | 2.5 |
| -2 | -0.4 | 4 | 0.16 | 0.8 |
| -1 | -0.1 | 1 | 0.01 | -0.1 |
| 0 | 0.1 | 0 | 0.01 | 0.0 |
| 5 | 0.5 | 25 | 0.25 | 2.5 |
| 0 | -0.2 | 0 | 0.04 | 0.0 |
| -4 | -0.4 | 16 | 0.16 | 1.6 |
| 7 | 0.5 | 49 | 0.25 | 3.5 |
| <u>6</u> | <u>0.1</u> | <u>36</u> | <u>0.01</u> | <u>0.6</u> |
| 0 | 0 | 240 | 1.74 | 13.7 |

Arvutuste kontrollimiseks on kasulik leida ka esimese ja teise veeru summad – keskväärtuse suhtes arvutatud hälvete summa peab alati võrduma nulliga. Ülejäänud veergude summad on vajalikud korrelatsioonikordaja arvutamiseks. Saame

$$r = \frac{13.7}{\sqrt{240 \cdot 1.74}} \approx 0.67.$$

Korrelatsioonikordaja väärtus on ootuspäraselt positiivne, võime öelda, et tunnuste vahel on keskmise tugevusega kasvav seos. Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Millal nimetada tunnuste vahelist seost nõrgaks, millal keskmiseks, millal tugevaks? See on tegelikult kokkuleppe küsimus. Üsna sageli kasutatakse järgnevaid piire

- nõrk seos – korrelatsioonikordaja absoluutväärtus pole suurem kui 0.3, $|r| \leq 0.3$;
- keskmine seos – korrelatsioonikordaja absoluutväärtus on 0.3 ja 0.7 vahel, $0.3 < |r| < 0.7$;
- tugev seos – korrelatsioonikordaja absoluutväärtus pole väiksem kui 0.7, $|r| \geq 0.7$.

Korrelatsioonikordaja arvulise väärtuse saame leida konkreetse valimi põhjal. Nagu ikka, on olemas aga ka üldkogumi korrelatsioonikordaja. Lepime kokku kasutada selle suuruse tähistamiseks sümbolit ρ . Üldkogumi korrelatsioonikordaja väärtuse leidmiseks tuleks kasutada kõiki üldkogumi objekte või tunnuste tegelikku tõenäosusjaotust, mis aga on praktiliselt teostamatu. Valimi põhjal leitud korrelatsioonikordaja r on üldkogumi korrelatsioonikordaja ρ hinnanguks. Nagu igasuguse hinnangu korral võib ka siin tunda huvi, milline on hinnangu täpsus. Sellele küsimusel vastamiseks tuleks leida korrelatsioonikordaja usalduspiirid.

Anname eeskirja korrelatsioonikordaja usalduspiiride leidmiseks eeldusel, et *uuritavad tunnused on normaaljaotusega*. Ka niisuguse eelduse korral on praktikas kasutatavaid tulemusi saadud vaid suurte valimite jaoks, kuna usalduspiiride leidmisel kasutatakse asümptootilist jaotust – suurte valimite korral ligikaudselt kehtivat jaotust. Huvitaval kombel tekib statistikas üsna tihti olukord, kus statistiku sobivalt valitud funktsiooni asümptootiline jaotus on kasutatav väiksemate valimite korral kui selle statistiku enda asümptootiline jaotus. Ka lineaarse korrelatsioonikordaja jaoks eksisteerib selline funktsioon, mille ligikaudseks jaotuseks võib lugeda normaaljaotuse, sel ajal kui korrelatsioonikordaja enda jaotust lähendaks normaaljaotus veel üsna halvasti. See funktsioon on määratud eeskirjaga

$$z = \operatorname{arctanh} r = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Statistikut Z nimetatakse Fisheri Z -statistikuks, tema arvutus-eeskirja Fisheri z -teisenduseks. Kui valimi maht on 30 läheduses, võib Z ligikaudseks jaotuseks lugeda normaaljaotuse,

$$Z \sim N\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right).$$

Kuna z -teisendus on üksühene, eksisteerib tal ka pöördteisendus,

$$r = \tanh z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}. \quad (5.2)$$

Mõlemad teisendused võib teostada taskuarvuti abil, kuid nende teostamiseks on olemas ka spetsiaalne tabel. Selle tabeli tun-nustäheks tabelite lisa on L.

Korrelatsioonikordaja usalduspiiride määramisel talitatakse nüüd järgmiselt. Arvutatakse esmalt olemasolevale korrelatsioonikor-daja väärtusele vastav Fisheri Z -statistiku väärtus z . Seejärel leitakse saadud väärtuse abil usaldusnivoole $1 - \alpha$ vastavad usal-duspiirid selle statistiku tõelise keskväärtuse jaoks:

$$\underline{z} = z - \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

$$\bar{z} = z + \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}}.$$

Saadud usalduspiirid teisendatakse pöördteisenduse abil üldkogu-mi korrelatsioonikordaja usalduspiirideks,

$$\underline{\rho} = \frac{e^{2\underline{z}} - 1}{e^{2\underline{z}} + 1}$$

$$\bar{\rho} = \frac{e^{2\bar{z}} - 1}{e^{2\bar{z}} + 1},$$

mis määravad usaldusintervalli $[\underline{\rho}; \bar{\rho}]$.

Loogika, millel tugineb kirjeldatud kahe sammu kasutamine usaldus-piiride leidmiseks, on hästi läbipaistev. Rahuldavad ju esimesel sam-mul leitud usalduspiirid Z -statistiku keskväärtuse jaoks tingimust

$$P(z \leq \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \leq \bar{z}) = 1 - \alpha.$$

Sulgudes esitatud sündmuse võime asendada samaväärse sündmu-sega, mille kirjeldamiseks rakendame sulgudes oleva võrratuse igale liikmele z -teisenduse pöördfunktsiooni. Võrratus jääb kehtima:

$$P(\underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}) = 1 - \alpha,$$

leidsime ρ jaoks usalduspiirid usaldusnivooga $1 - \alpha$.

Näide 5.4. Valim, mille põhjal eelmises näites korrelatsiooni-kordaja arvutati, on liiga väike asümptootiliste usalduspiiride leidmiseks.

Oletame, et õnnestus andmeid juurde hankida ja 29 juhuslikult valitud üliõpilase jaoks oli korrelatsioonikordaja väärtuseks 0.49. Leiame 95% usalduspiirid keskkooli lõputunnistuse keskmise hinde ja sisseastumispalli vahelisele tõelisele korrelatsioonikordajale. Selleks arvutame esmalt (või leiame tabeli L seest väärtuse 0.49 ja loeme tabeli äärtelt vastava z väärtuse)

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0.49}{1 - 0.49} \approx 0.5361 \approx 0.54$$

ja leiame Z -statistiku keskvväärtusele 95% usalduspiirid

$$\underline{z} = 0.54 - 1.96 \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0.16$$

$$\bar{z} = 0.54 + 1.96 \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0.92.$$

Korrelatsioonikordaja usalduspiiride leidmiseks peame $\underline{z}$ ja $\bar{z}$ kirjutama funktsiooni (5.2) argumentiks ning seejärel leidma selle funktsiooni väärtuse. Arvutame (või leiame tabeli L äärtelt väärtused 0.16 ja 0.92 ja loeme tabeli seest neile vastavad ρ väärtused)

$$\underline{\rho} = \frac{e^{2 \cdot 0.16} - 1}{e^{2 \cdot 0.16} + 1} = 0.16$$

$$\bar{\rho} = \frac{e^{2 \cdot 0.92} - 1}{e^{2 \cdot 0.92} + 1} = 0.73.$$

Seega tõeline korrelatsioonikordaja asub lõigus $[0.16, 0.73]$. Kuna usaldusintervall ei sisalda nulli, võib seose olemasolu nende tunnuste vahel lugeda tõestatuks. Seose tugevuse kohta on aga väikese valimi põhjal raske midagi öelda – usaldusintervall on nii lai, et seose tugevuse astet (nõrk, keskmine või tugev) pole võimalik määrata.



Vaatame ka, kuidas kontrollida hüpoteese korrelatsioonikordaja kohta. Esitame kõige sagedamini kontrollitava hüpoteeside paari

$H_0 : \rho = 0$, tunnused on mittekorreleeritud,

$H_1 : \rho \neq 0$, tunnused on korreleeritud.

Nende hüpoteeside kontrollimist nimetatakse ka korrelatsioonikordaja olulisuse kontrollimiseks.

Kui mõlemad tunnused on normaaljaotusega, võib otsuse langetamiseks kasutada F -statistikut,

$$F = \frac{(n-2)r^2}{(1-r^2)}.$$

Nullhüpoteesi kehtides on selle statistiku jaotuseks F -jaotus parameetritega 1 ja $n-2$, $F \sim F(1, n-2)$. Arvestades, et ruutjuur F -jaotusega juhuslikust suurusel, mille esimeseks parameetriks on 1, on t -jaotusega, võime otsuse langetamiseks kasutada ka statistikut

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

mille jaotuseks on nullhüpoteesi kehtivuse korral t -jaotus parameetriga $n-2$, $T \sim t(n-2)$. Otsuse langetamiseks olulisuse nivool α saame järgmise eeskirja

*kui $|T| \geq \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$, võtta vastu sisukas hüpotees;
kui $|T| < \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$, jääda nullhüpoteesi juurde.*

Kui on olemas täiendav informatsioon, et tegu on kas kasvava või kahaneva seosega, võib esitada ühepoolsed hüpoteesid. Nende kontrollimiseks kasutada eelmise peatüki tabelis 2 toodud eeskirju.

Näide 5.5. Vaatame näites 5.3 esitatud andmeid, kus meie käsutuses on 16 üliõpilase tulemused ja kontrollime, kas seos keskkooli lõputunnistuse keskmise hinde ja sisseastumisballi vahel on oluline. Esitame kontrollitavad hüpoteesid

$H_0 : \rho = 0$, tunnused on mittekorreleeritud,
 $H_1 : \rho \neq 0$, tunnused on korreleeritud.

Arvutame otsuse langetamiseks vajaliku T -statistiku väärtuse

$$t = \frac{\sqrt{14} \cdot 0.67}{\sqrt{1 - 0.67^2}} \approx 3.38.$$

Valime otsuse langetamisel olulisuse nivooks 0.05. Tabelist D leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{t}_{0.025, 14} = 2.145$. Kuna statistiku väärtus on suurem kriitilisest väärtusest,

$3.38 > 2.145$, tuleb vastu võtta sisukas hüpotees. Seose olemasolu hinnete vahel võib lugeda tõestatuks.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Kirjeldatud test on täpne, see on rakendatav ka väikeste valimite korral, kui vaid mõlemad tunnused on normaaljaotusega.

5.1.3. Lineaarse korrelatsioonikordaja puudused.

Kuna lineaarse korrelatsioonikordaja kasutusele võtmisel on aluseks küllalt lihtsad loogilised kaalutlused, jääbki see kordaja pisut "lihtsameelseks". Teatavate andmestike korral võivad selle kordaja põhjal tehtud otsustused osutuda mitteadekvaatseteks. Selles veendumiseks vaatame kahte näidet.

Näide 5.6. Vaatame suhteliselt väikest andmestikku, mille põhjal bioloog soovib uurida seost teatavat liiki hiirte pikkuse (P) ja kaalu (K) vahel. Andmed 13 hiire kohta on järgmised

| P | K | P | K |
|------|----|------|----|
| 10.5 | 22 | 10.2 | 23 |
| 10.0 | 25 | 11.6 | 22 |
| 10.6 | 23 | 10.6 | 25 |
| 9.8 | 20 | 12.0 | 25 |
| 10.2 | 20 | 11.1 | 22 |
| 11.5 | 28 | 10.5 | 21 |
| 15.9 | 36 | | |

Arvutame nende andmete põhjal lineaarse korrelatsioonikordaja. Leiame esmalt tunnuste keskväärtused

$$\bar{P} = 11.1, \quad \bar{K} = 24.$$

Täidame korrelatsioonikordaja arvutamiseks vajaliku abitabeli.

| $P_i - \bar{P}$ | $K_i - \bar{K}$ | $(P_i - \bar{P})^2$ | $(K_i - \bar{K})^2$ | $(P_i - \bar{P})(K_i - \bar{K})$ |
|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| -0.6 | -2 | 0.36 | 4 | 1.2 |
| -0.9 | -1 | 0.80 | 1 | 0.9 |
| -1.1 | 1 | 1.21 | 1 | -1.1 |
| 0.5 | -2 | 0.25 | 4 | -1.0 |
| -0.5 | -1 | 0.25 | 1 | 0.5 |
| -0.5 | 1 | 0.25 | 1 | -0.5 |
| -1.3 | -4 | 1.69 | 16 | 5.2 |
| 0.9 | 1 | 0.81 | 1 | 0.9 |
| 0.4 | 4 | 0.16 | 16 | 1.6 |
| -0.9 | -4 | 0.81 | 16 | 3.6 |
| 0.0 | -2 | 0.00 | 4 | 0.0 |
| -0.8 | -3 | 0.64 | 9 | 2.4 |
| <u>4.8</u> | <u>12</u> | <u>23.04</u> | <u>144</u> | <u>57.6</u> |
| 0 | 0 | 30.28 | 218 | 71.3 |

Arvutame korrelatsioonikordaja

$$r = \frac{71.3}{\sqrt{30.28 \cdot 218}} \approx 0.87.$$

Esmapilgul võib tunduda, et tegemist on tugeva kasvava seosega. Mõelik pilk abitabelile aga võib tekitada kõhedust – kõikide summade väärtusi mõjustab väga oluliselt viimane mõõdetud hiir. Vaatame selle andmestiku põhjal koostatud hajuvusdiagrammi, mis on esitatud joonisel 5.5.

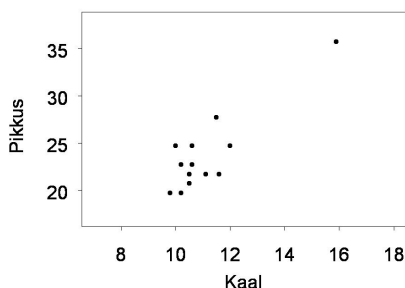
Hajuvusdiagrammil torkab silma üks teistest tugevasti erinev punkt – erind. Tegemist on hiirega, kes oli ülejäänutest tunduvalt suurem ja raskem. Ülejäänud loomad on enam-vähem ühes suurusjärgus. Saamaks ettekujutust selle ühe, teistest tugevasti erineva vaatluse mõjust, jätame ta kõrvale ja arvutame korrelatsioonikordaja kasutades ülejäänud vaatlusi. Erindi kõrvale jätmine muudab ka tunnuste keskvärtusi ja hajuvust. Iseseisvalt võib kontrollida järgmiste tulemuste õigsust

$$\bar{P} = 10.7, \quad \bar{K} = 23,$$

$$r = \frac{15.3}{5.32 \cdot 62} \approx 0.47.$$

Korrelatsioonikordaja väärtus muutus peaaegu kaks korda väiksemaks. Seose näiline tugevus oli genereeritud ühe, teistest tugevasti erineva vaatluse poolt. Kas vaatlust võib kõrvale jätta?

See oleneb olukorrast. Kui näiteks bioloog avastab loomi põhjalikumalt uurides, et suur hiir on hoopis teisest liigist, on selle vaatluse kõrvale jätmine ainuvõimalik.



Joonis 5.5. Hiirte kaalud ja pikkused

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.

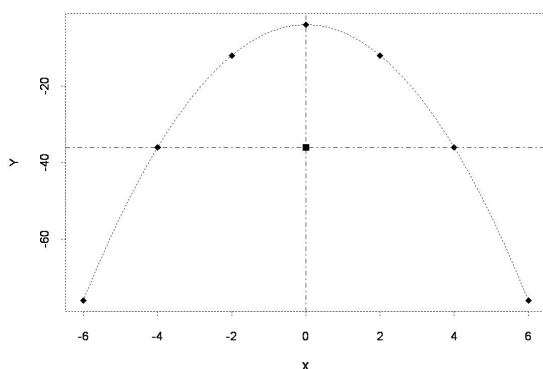


Sellest näitest tasub meeles pidada, et lineaarne korrelatsiooni-kordaja on "kergesti mõjutatav" – paar erindit suhteliselt väikeses andmestikus võivad tema väärtust oluliselt muuta. Seetõttu tuleks, eriti väikse andmestiku korral, koos korrelatsioonikordaja leidmisega vaadata ka hajuvusdiagrammi. Iga erindit tuleks tähelepanelikult analüüsida ja kaaluda, kas ta tõepoolest on pärit samast üldkogumist, milllest pärinevad ülejäänud vaatlused.

Lineaarset korrelatsioonikordajat võib aga eksitada ka "teises suunas" – tunnuste vahel võib olla väga tugev seos, kuid lineaarne korrelatsioonikordaja ei viita selle olemasolule.

Näide 5.7. Vaatame kunstlikku andmestikku, kus tunnuste X ja Y vahel on funktsionaalne seos, $Y = -2X^2 - 4$. Olgu vaatlustulemused järgmised:

| X | Y | X | Y |
|----|-----|---|-----|
| -6 | -76 | 2 | -12 |
| -4 | -36 | 4 | -36 |
| -2 | -12 | 6 | -76 |
| 0 | -4 | | |



Joonis 5.6. Andmestiku hajuvusdiagramm

Selle andmestiku hajuvusdiagramm on esitatud joonisel 5.6, kusjuures tunnuste vahelist seost määrav funktsioon on joonisele kantud punktiirjoone abil.

Leiame tunnuste keskväärtused

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -36$$

ja täidame korrelatsioonikordaja arvutamiseks vajaliku abitabeli

| $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(y_i - \bar{y})^2$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ |
|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|
| -6 | -40 | 36 | 1600 | 240 |
| -4 | 0 | 16 | 0 | 0 |
| -2 | 24 | 4 | 576 | -48 |
| 0 | 32 | 0 | 1024 | 0 |
| 2 | 24 | 4 | 576 | 48 |
| 4 | 0 | 16 | 0 | 0 |
| 6 | -40 | 36 | 1600 | -240 |
| 0 | 0 | 112 | 5376 | 0 |

Näeme, et korrelatsioonikordaja avaldises lugejas asuv summa on võrdne nulliga, korrelatsioonikordaja väärtuseks on null!



Sellest näitest tasub meele pidada, et täiend "lineaarne" on oluline. Lineaarne korrelatsioonikordaja on konstrueeritud nii, et ta tunneks ära punktipilve, mis on välja venitatud piki sirget,

piki lineaarset funktsiooni. Kui punkt pilv on välja venitatud piki mingi keerulisema kujuga kõverat, võib tekkida olukord, kus keskvaartustest lähtuva koordinaadistiku igas veerandis on enam-vähem ühepalju punkte ja lineaarne korrelatsioonikordaja omandab nullile lähedase väärtuse. Seda isegi siis, kui tunnuste vahel on funktsionaalne seos.

Mõlemat korrelatsioonikordaja "eksitust" on võimalik avastada hajuvusdiagrammi uurides. Kuid loomulikult on kasutusele võetud ka teisi seosekordajaid, mis "kahtlastes" olukordades on lineaarsest korrelatsioonikordajast töökindlamad. Erindite mõju võimaldab vähendada Spearmani korrelatsioonikordaja. Tutvume sellega järgmises punktis.

Vaatame aga veel ühte andmestikku, mis on lineaarse korrelatsioonikordaja jaoks "petlik".

Näide 5.8. Olgu tegemist kahe testiga, millest üks mõõdab lapse verbaalset võimekust (tunnus T1), teine aga aritmeetilist võimekust (tunnus T2). Katsealuseks on lapsed vanuses 8 ja 12 aastat. Testimisel saadud andmed 24 lapse kohta on esitatud allpool toodud tabelis.

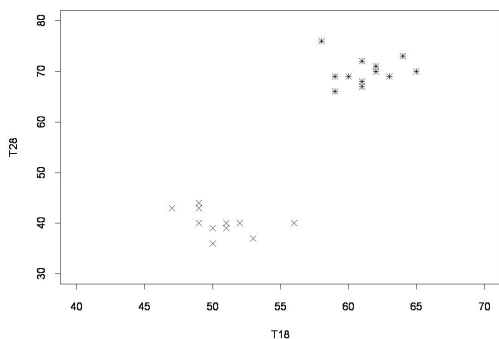
| T1 | T2 | Vanus | T1 | T2 | Vanus |
|----|----|-------|----|----|-------|
| 49 | 43 | 8 | 61 | 72 | 12 |
| 49 | 40 | 8 | 60 | 69 | 12 |
| 49 | 43 | 8 | 58 | 76 | 12 |
| 51 | 39 | 8 | 64 | 73 | 12 |
| 52 | 40 | 8 | 59 | 66 | 12 |
| 50 | 36 | 8 | 63 | 69 | 12 |
| 49 | 44 | 8 | 62 | 70 | 12 |
| 53 | 37 | 8 | 61 | 67 | 12 |
| 47 | 43 | 8 | 65 | 70 | 12 |
| 56 | 40 | 8 | 61 | 68 | 12 |
| 50 | 39 | 8 | 59 | 69 | 12 |
| 51 | 40 | 8 | 62 | 71 | 12 |

Arvutame nende andmete põhjal lineaarse korrelatsioonikordaja väärtuse. Saame

$$r \approx 0.90.$$

Saadud väärtus viitab tugevale seosele testi hinnete vahel. Heidame aga nüüd pilgu hajuvusdiagrammile, mis on toodud joonisel 5.7. Hajuvusdiagrammil saab anda informatsiooni ka kolmanda tunnuse kohta. Praegu on selleks tunnuseks vanus – 8-aastaste laste punktid on esitatud sümboli "×" abil, 12-aastaste laste hinded aga sümboli "*" abil.

Näeme, et erinevas vanuses laste hinded moodustavad kaks eraldi asuvat punktipilve, kaks erinevat klastrit. Ilmselt viitab niisugune pilt sellele, et testid pole õnnestunud – ühele vanuserühmale on nad tunduvalt raskemad kui teisele.



Joonis 5.7. Testi hinnete hajuvusdiagramm

Arvutame korrelatsioonikordajad kummagi vanuserühma jaoks eraldi. Saame 8-aastaste laste jaoks

$$r \approx -0.48$$

ja 12-aastaste laste jaoks

$$r \approx 0.02.$$

Näeme, et tunnuste vahelise seose genereeris erinevate vanuserühmade hinnete keskväärtuste erinevus. Erinevate vanuserühmade jaoks eraldi arvutatud korrelatsioonikordajad osutuvad tunduvalt väiksemateks.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



5.2. Spearmani korrelatsioonikordaja

Spearmani korrelatsioonikordaja e astakkorrelatsioonikordaja kasutab otseste mõõtmistulemuste asemel nende astakuid. Spearmani korrelatsioonikordajat sobib kasutada niisuguste tunnuste korral, mis pole normaaljaotusega – siis on erindite esinemise tõenäosus enamasti suurem. Vaadeldavad tunnused peavad aga olema pidevad – sel juhul on ühesuguste väärtuste esinemise tõenäosus väike. Põhimõtteliselt on Spearmani korrelatsioonikordaja arvutatav ka järjestustunnuste korral.

Selle kordaja leidmiseks tuleb mõlema tunnuse väärtused järjestada omaette variatsiooniritta ja määrata nende astakud. Olgu i -nda objekti tunnuse X väärtuse x_i astakuks s_i , tunnuse Y väärtuse y_i astakuks aga t_i . Saadud astakuid kasutatakse nagu tavalisi mõõtmistulemusi ja leitakse valemit (5.1) kasutades nende lineaarne korrelatsioonikordaja. Astakute omadusi arvestades – juhul, kui kõik mõõtmistulemused erinevad, on astakud järjestikused täisarvud – saab valemit (5.1) mõnevõrra lihtsustada.

Tähistame i -nda mõõtmistulemuse astakute vahe sümboliga d_i ,

$$d_i = s_i - t_i.$$

Spearmani korrelatsioonikordaja määratakse valemiga

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}. \quad (5.3)$$

Kui lineaarne korrelatsioonikordaja mõõdab tunnuste vahelise lineaarse seose tugevust, siis Spearmani korrelatsioonikordaja sisuline tähendus on erinev. Nimelt mõõdab see kordaja tunnuste vahelise monotoonse seose tugevust. Sõltuvust nimetatakse **monotoonseks**, kui ühe tunnuse muutus mingis kindlas suunas toob endaga kaasa teise tunnuse muutuse kindlas suunas. Erinevalt lineaarsest sõltuvusest võib aga teise tunnuse muutuse suurus oleneda esimese tunnuse väärtusest. Nii näiteks on monotoonne sõltuvus $y = x^3$. Argumendi x muutmine ühiku võrra toob erinevate x väärtuste korral kaasa erineva suurusega muutuse y väärtuses.

Sellele vaatamata on Spearmani korrelatsioonikordaja omadused analoogilised lineaarse korrelatsioonikordaja omadustega.

- 1) Spearmani korrelatsioonikordaja väärtus asub -1 ja 1 vahel, $-1 \leq r_S \leq 1$.
- 2) Kui tunnuste vahel on kasvav monotoonne seos, on Spearmani korrelatsioonikordaja positiivne, $r_S > 0$.
- 3) Kui tunnuste vahel on kahanev monotoonne seos, on Spearmani korrelatsioonikordaja negatiivne, $r_S < 0$.
- 4) Kui tunnuste vahel on funktsionaalne monotoonne seos, on Spearmani korrelatsioonikordaja absoluutväärtus võrdne ühega, $|r_S| = 1$.
- 5) Kui tunnused on sõltumatud, on korrelatsioonikordaja võrdne nulliga, $r_S = 0$.

Eeldame, et mõlema tunnuse kõik väärtused on erinevad. Veen-dume, et astakute vaheline korrelatsioonikordaja arvutatakse valemiga (5.3). Kui võrdseid mõõtmistulemusi pole, ei ole vaja astakute keskmistamist ja mõlema tunnuse väärtuste astakuteks on järjestikused täisarvud $1, 2, \dots, n$. Astakute keskvaartuse leidmiseks võime kasutada aritmeetilise progressiooni summa valemit, mistõttu saame

$$\bar{s} = \bar{t} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

Arvestades, et

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2,$$

ja kasutades asjaolu, et järjestikuste täisarvude ruutude summa avaldub valemiga

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

võime kirjutada

$$\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Korrelatsioonikordajat määrava valemi lugejas olev summa avaldub nüüd järgmiselt

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}.$$

Selle välja kirjutamiseks astakute korral tuleb meil leida esimeseks liidetavaks olev summa. Selle summa jaoks ei ole valmis valemit. Tuletame selle. Astakute vahede ruutude summale võime anda kuju

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (s_i - t_i)^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

kust saame

$$\sum_{i=1}^n s_i t_i = \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2 - \sum_{i=1}^n d_i^2).$$

Arvestades astakute ruutude summa valemit võime kirjutada

$$\sum_{i=1}^n s_i t_i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2.$$

Asendades saadud tulemused astakute jaoks valemisse (5.1) saame talle anda kuju

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)}.$$

Olemegi jõudnud valemmini, mille abil määrati Spearmani korrelatsioonikordaja.

Näide 5.9. Olgu meie käsutuses 10 juhuslikult valitud maa meeste ja naiste 100m jooksu rekordid. Need on järgmised

| Mehed | Astak | Naisted | Astak | d_i | d_i^2 |
|-------|-------|---------|-------|----------|----------|
| 10.39 | 7 | 10.51 | 1 | 6 | 36 |
| 10.31 | 4 | 11.20 | 3 | 1 | 1 |
| 10.44 | 8 | 11.43 | 6 | 2 | 4 |
| 10.35 | 6 | 11.41 | 5 | 1 | 1 |
| 10.28 | 3 | 11.46 | 7 | -4 | 16 |
| 10.22 | 2 | 11.31 | 4 | -2 | 4 |
| 10.54 | 10 | 12.14 | 10 | 0 | 0 |
| 10.17 | 1 | 11.00 | 2 | -1 | 1 |
| 10.34 | 5 | 12.00 | 9 | -4 | 16 |
| 10.51 | 9 | 11.55 | 8 | <u>1</u> | <u>1</u> |
| | | | | 0 | 80 |

Iga tulemuse kõrvale on tabelis lisatud selle tulemuse astak. Eelviimases veerus asub meeste ja naiste rekordi astakute vahe, viimases veerus – astakute vahe ruut. Arvutuste kontrollimiseks tasub meeles pidada, et astakute vahede summa on alati võrdne nulliga.

Leiame Spearmani korrelatsioonikordaja väärtuse

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot 80}{10 \cdot 99} \approx 0.52.$$

Meeste ja naiste rekordite vahel on keskmise tugevusega kasvav monotoonne seos.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Kui valimis esineb võrdseid mõõtmistulemusi, määratakse kõikidele võrdsetele väärtustele sama astak, arvuliselt on see võrdne vastavate astakute keskväärtusega.

Näide 5.10. Vaatame näites 5.6 toodud andmestikku hiirte kohta. Leiame selle valimi jaoks Spearmani korrelatsioonikordaja väärtuse. Esimese sammuna tuleb leida mõlema tunnuse – nii kaalu kui ka pikkuse – astakud. Selleks tuleb mõlema tunnuse väärtused järjestada omaette variatsioonritta. Järgmises tabelis ongi toodud tunnuste väärtused koos vastavate astakutega.

| Pikkus | Astak | Kaal | Astak | d_i | d_i^2 |
|--------|-------|------|-------|----------|----------|
| 10.5 | 5.5 | 22 | 5 | 0.5 | 0.25 |
| 10.2 | 3.5 | 23 | 7.5 | -4 | 16 |
| 10.0 | 2 | 25 | 10 | -8 | 64 |
| 11.6 | 11 | 22 | 5 | 6 | 36 |
| 10.6 | 7.5 | 23 | 7.5 | 0 | 0 |
| 10.6 | 7.5 | 25 | 10 | -2.5 | 6.25 |
| 9.8 | 1 | 20 | 1.5 | -0.5 | 0.25 |
| 12.0 | 12 | 25 | 10 | 2 | 4 |
| 11.5 | 10 | 28 | 12 | -2 | 4 |
| 10.2 | 3.5 | 20 | 1.5 | 2 | 4 |
| 11.1 | 9 | 22 | 5 | 4 | 16 |
| 10.5 | 5.5 | 21 | 3 | 2.5 | 6.25 |
| 15.9 | 13 | 36 | 13 | <u>0</u> | <u>0</u> |
| | | | | 0 | 155.5 |

Nüüd arvutame valemit (5.3) kasutades Spearmani korrelatsioonikordaja väärtuse.

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot 155.5}{13 \cdot 168} \approx 0.57.$$

Siin on kasulik esitada ka leitud korrelatsioonikordaja väärtus nelja koha täpsusega, $r_S = 0.5686$. Võrreldes saadud tulemust seitsmendas peatükis esitatud lahendusega arvutil, näeme, et seal saadakse veidi teistsugune väärtus, nimelt 0.5657. Põhjuseks on siin asjaolu, et võrdsete astakute olemasolu korral ei anna valem (5.3) ja astakute asendamine valemisse (5.1) päris ühesugust tulemust.

Võrreldes tulemust näites 5.5 leitud lineaarse korrelatsioonikordajaga näeme, et see viitab hoopis nõrgemale seosele hiire pikkuse ja kaalu vahel. Selle näite korral tuleks küll Spearmani korrelatsioonikordaja poolt antud hinnangut seose tugevusele lugeda usaldusväärsemaks. Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Arvulise väärtuse astakkorrelatsioonikordajale saame leida valimi põhjal. See arv on hinnanguks üldkogumi korrelatsioonikordaja väärtusele, mille tähistamiseks kasutame sümbolit ρ_S . Vaatame kõige sagedamini kontrollitavat hüpoteeside paari

$H_0 : \rho_S = 0$, tunnuste vahel pole monotoonset seost,

$H_1 : \rho_S \neq 0$, tunnuste vahel on monotoonne seos.

Kui tegemist on väikeste valimitega, tuleb otsuse langetamiseks kasutada statistiku r_S täpset jaotust. Kui nullhüpotees kehtib, on see leitav, tuginedes eeldusele, et sõltumatute tunnuste korral on astakute kõikvõimalikud järjestused võrdvõimalikud. Erinevatele olulisuse nivooale vastavad korrelatsioonikordaja kriitilised väärtused võib leida tabelist M. Kui valimi maht on suurem kui 30, võib otsuse langetamiseks kasutada sama T -statistikut, mida kirjeldasime punktis 5.2,

$$T = \frac{r_S \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_S^2}},$$

kusjuures ka otsuse langetamise eeskiri jääb täpselt samaks.

Näide 5.11. Vaatame eelmises näites kasutatud andmestikku hiirte kaalu ja pikkuse kohta. Kontrollime, kas seose olemasolu

nende tunnuste vahel võib lugeda tõestatuks. Esitame kontrollitavad hüpoteesid

$H_0 : \rho_S = 0$, tunnuste vahel pole monotoonset seost,

$H_1 : \rho_S \neq 0$; tunnuste vahel on monotoonne seos.

Valime olulisuse nivooks – riskiks eksida, kui seose olemasolu nende tunnuste vahel loeme tõestatuks – 0.05. Kuna valimi maht on väike, kasutame otsuse langetamiseks tabelist M leitud kriitilist väärtust 0.566. (Kahepoolse hüpoteesi kontrollimisel vastab valitud olulisuse nivoole veerg, mille peale on kirjutatud pool olulisuse nivoo, antud juhul 0.025.) Kriitiline väärtus valitakse reast, mille ette on kirjutatud valimi maht 13.

Kuna valimi põhjal leitud korrelatsioonikordaja väärtus ületab kriitilist väärtust, $0.5686 > 0.566$, tuleb vastu võtta sisukas hüpotees – seose olemasolu hiire pikkuse ja kaalu vahel tuleb valitud olulisuse nivool lugeda tõestatuks.



5.3. Kendalli korrelatsioonikordaja

Tutvume veel ühe sagedasti kasutatava seosekordajaga, mis ei ole tundlik erindite suhtes. Selle kordaja kasutamiseks on vajalik, et uuritavad tunnused oleksid vähemalt järjestustunnused. Rohkem eeldusi Kendalli korrelatsioonikordaja kasutamisel ei pea silmas pidama.

Kendalli korrelatsioonikordaja määramisel on aluseks lihtne idee – tabada tunnuste üheaegse muutumise tendentsi, ilma seda arvuliselt kirjeldamata. Ka Kendalli korrelatsioonikordaja kirjeldab monotoonse seose tugevust.

Kuna uuritavad tunnused ei pea olema arvulised, ei saa "suure" või "väikese" mõõdupuuna kasutada hälvet tunnuse keskväärusest – mitteamvulise tunnuse väärtustega ei tohi sooritada aritmeetilisi tehteid. Tunnuste ühise käitumistendentsi avastamiseks võetakse vaatluse alla kõikvõimalikud objektide paarid. Võtame kasutusele järgmised nimetused: vaatluste paari nimetatakse *samasuunaliseks* (inverteerimata paariks), kui tunnuse Y ja tunnuse X väärtuste vahetamine on ühesugune; vaatluste paari nimetatakse *vastassuunaliseks* (inverteeritud paariks), kui tun-

nuse Y ja tunnuse X väärtuste vahetamine on vastupidine. Oletame, et parajasti soovitakse määrata i -nda ja j -nda objekti vahetada. Kuna tunnused on vähemalt järjestustunnused, siis konkreetse paari korral on võimalik öelda, milline on tunnuse X väärtuste vahetamine. Oletame näiteks, et $x_i < x_j$. Sama moodi saab öelda, milline on tunnuse Y väärtuste vahetamine. Kui nüüd $y_i > y_j$, nimetatakse paari vastassuunaliseks, vastassuunalisel paaril on tunnuste väärtused vastupidises järjestuses. Kui aga $y_i < y_j$, on tegemist samasuunalise paariga. Nii saab kõikvõimalike paare omavahel võrreldes leida antud valimi jaoks vastassuunaliste paaride arvu, olgu selle tähtsuseks n_v , ja samasuunaliste paaride arvu, olgu selle tähtsuseks n_s . Eeldame järgnevas, et tunnustel pole korduvaid väärtusi. Kõikvõimalike erinevate paaride arv n -elemendilise valimi jaoks on $\frac{n(n-1)}{2}$. Tähistame selle arvu tähega N , $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Kendalli korrelatsioonikordaja väärtuseks on samasuunaliste paaride ja vastassuunaliste paaride suhteliste sageduste vahe,

$$\tau = \frac{n_s}{N} - \frac{n_v}{N}. \quad (5.4)$$

Kendalli korrelatsioonikordaja arvutuseeskirja võib esitada ka kujul

$$\tau = 1 - \frac{2n_v}{N}.$$

Kuna tehtud eeldusel $N = n_s + n_v$, on see eeskiri eelmisega samaväärne.

Kui mõlemal tunnusel on tendents ühehäälselt omandada suuri või väikesi väärtusi, on Kendalli korrelatsioonikordaja positiivne, kui ühe tunnuse suurte väärtustega kaasnevad teise tunnuse väikesed väärtused, on ta negatiivne. Sõltumatute tunnuste korral on vastassuunalise ja samasuunalise paari esinemise tõenäosus võrdne. Järelikult on ka samasuunaliste ja vastassuunaliste paaride suhtelised sagedused lähedased ja seetõttu peab Kendalli korrelatsioonikordaja väärtus olema lähedane nullile.

Kendalli korrelatsioonikordajal on järgmised omadused:

- 1) Kendalli korrelatsioonikordaja väärtus asub -1 ja 1 vahel, $-1 \leq \tau \leq 1$.
- 2) Kui tunnuste vahel on kasvav monotoonne seos, on Kendalli korrelatsioonikordaja positiivne, $\tau > 0$.

- 3) Kui tunnuste vahel on kahanev monotoonne seos, on Kendalli korrelatsioonikordaja negatiivne, $\tau < 0$.
- 4) Kui tunnuste vahel on funktsionaalne monotoonne seos, on Kendalli korrelatsioonikordaja absoluutväärtus võrdne ühega, $|\tau| = 1$.
- 5) Kui tunnused on sõltumatud, on korrelatsioonikordaja võrdne nulliga, $\tau = 0$.

Vaadates Kendalli ja Spearmanni korrelatsioonikordajaid kui teatavaid "kooskõlakriteeriume", peab rõhutama, et nende kordajate väärtusi mõjustavad mõnevõrra erinevad "ebakõlad". Arvutades r_S , kasutatakse vaatlustulemuste astakute vahede ruute. Arvutades τ , on iga vastassuunaline paar "ebakõla" signaalliks. Kuigi niisugused lähenemisviisid pole vastandlikud, on nad erinevad. Astakute vahede ruudud annavad igale muudatusele tunnuste väärtuste järjestuses mõnevõrra erineva kaalu, τ arvutamisel on aga kõik muudatused tunnuste väärtuste järjestuses ühesuguse kaaluga. Kui vaadata suurt hulka erinevaid valimeid ühest ja samast üldkogumist, võib täheldada, et Spearmanni ja Kendalli korrelatsioonikordajad on omavahel korreleeritud, kuid kordaja muutumisulatus sõltub niisugustest asjaoludest nagu valimi maht ja tunnuste vahelise seose tugevus. Saab aga näidata mitmesuguseid võrratusi, mida nende kordajate väärtused peavad rahuldama. Näiteks

$$-1 \leq 3\tau - 2r_S \leq 1.$$

Kendalli korrelatsioonikordajal on otsene sisuline tähendus – ta näitab samasuunaliste ja vastassuunaliste paaride suhtelise sageduse erinevust antud valimis.

Näide 5.12. Olgu tegemist kahe kohtunikuga, kes peavad kindlaks määrama seitsme sportlase järjestuse. Olgu kohtunike poolt määratud järjestused esitatud järgnevas tabelis (kohakuti on ühele ja samale sportlasele antud hinded)

| | | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|
| sportlane | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| I kohtunik | 3 | 1 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| II kohtunik | 1 | 3 | 5 | 2 | 6 | 4 | 7 |

Vastassuunaliste paaride arvu leidmiseks alustame esimese sportlase kohanumbrite paarist ja võrdleme seda kõikide ülejäänud sportlaste kohanumbrite paaridega. Esimese paari suhtes osutuvad vastassuunalisteks teine ja kolmas kohanumbrite paar – võrreldes esimese sportlasega, andsid erinevad kohtunikud teisele ja kolmandale sportlasele vastupidise paremusjärjestuse. Esimene kohtunik pidas neid sportlasi esimesest paremaks, teine kohtunik aga esimesest halvemaks. Teisest sportlasest lähtudes leiame ühe täiendava (me ei vaatle enam esimest sportlast) vastassuunalise paari – neljanda sportlase kohanumbrite paari. Kolmandast sportlasest lähtudes leiame kaks vastassuunalist paari – neljanda ja kuuenda sportlase kohanumbrite paarid. Neljandast, viiendast ja kuuendast sportlasest lähtudes leiame iga ühe jaoks ühe vastassuunalise paari. Niisiis on kokku kaheksa inversiooni.

Võrreldud paarid on koondatud abitabelisse, milles võrdluse aluseks olev väärtuste paar on trükitud poolpaksult, temaga vastassuunalised paarid aga alla kriipsutatud.

| | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 3 1 | | | | | |
| <u>1 3</u> | 1 3 | | | | |
| <u>2 5</u> | 2 5 | 2 5 | | | |
| 5 2 | <u>5 2</u> | <u>5 2</u> | 5 2 | | |
| 4 6 | <u>4 6</u> | <u>4 6</u> | <u>4 6</u> | 4 6 | |
| 7 4 | 7 4 | <u>7 4</u> | 7 4 | <u>7 4</u> | 7 4 |
| 6 7 | 6 7 | 6 7 | 6 7 | 6 7 | <u>6 7</u> |

Arvutame Kendalli korrelatsioonikordaja

$$\tau = 1 - \frac{2 \cdot 8}{21} \approx 0.24.$$

Tulemust võime tõlgendada järgnevalt: kui anda vaatlusalustele kohtunikele hinnata kahte juhuslikult valitud sportlast, siis tõenäosus, et nad järjestavad sportlased ühte moodi on 0.24 võrra suurem tõenäosusest, et nad järjestavad sportlased vastupidiselt.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Kendalli korrelatsioonikordaja on tuletatud olukorra jaoks, kus tunnustel pole võrdseid väärtusi. Kui neid siiski esineb, tuleb korrelatsioonikordaja arvutamise eeskirja mõnevõrra muuta.

Vaatame seda võimalust pärast tutvumist kahemõõtmelise sagedustabeliga.

Kendalli korrelatsioonikordaja olulisuse kontrollimiseks on mugav kasutada selle statistiku asümptootilist jaotust. Sõltumata tunnuste korral läheneb τ jaotus üsna kiiresti normaalarjotusele, $\tau \sim N(0, \sigma_\tau)$, kus

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2(2N + 5)}{9N(N - 1)}.$$

Kendalli korrelatsioonikordaja olulisuse kontrollimine on siis esitatav järgmise hüpoteeside kontrollimise ülesandena

$H_0 : \tau = 0$, monotoonne seos tunnuste vahel puudub,

$H_1 : \tau \neq 0$, tunnuste vahel on monotoonne seos.

Otsuse langetamiseks võib kasutada statistikut

$$Z = \frac{\tau}{\sigma_\tau},$$

mille jaotuseks nullhüpoteesi kehtides on standardne normaaljaotus, $Z \sim N(0, 1)$.

Kui $|Z| \geq \bar{z}_{\frac{\alpha}{2}}$, tuleb olulisuse nivool α vastu võtta sisukas hüpotees, vastasel juhul pole nullhüpoteesi võimalik kummutada.

Täiendava info olemasolu korral seose suuna kohta võib esitada sisuka hüpoteesi ühepoolsena. Sobiva otsuse langetamise eeskirja Z -statistiku põhjal võib leida eelmises peatükis toodud tabelist 1.

Näide 5.13. Kontrollime eelmises näites leitud Kendalli korrelatsioonikordaja olulisust. Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$, kriitiliseks väärtuseks on siis $\bar{z}_{0.025} = 1.96$. Kontrollitavad hüpoteesid:

$H_0 : \tau = 0$, monotoonne seos tunnuste vahel puudub,

$H_1 : \tau \neq 0$, tunnuste vahel on olemas monotoonne seos.

Leiame Z -statistiku

$$z = \frac{0.24}{\sqrt{\frac{2 \cdot 47}{9 \cdot 21 \cdot 20}}} \approx 1.52.$$

Kuna statistiku väärtus on väiksem kriitilisest väärtusest, $1.52 < 1.96$, siis peab jääma nullhüpoteesi juurde – kooskõla olemasolu kohtunike hinnete vahel ei saa lugeda tõestatuks.



5.4. Kahemõõtmeline sagedustabel.

Kui tegemist on nominaaltunnustega või diskreetsete tunnustega, millel on vähe erinevaid väärtusi, ei sobi eelpool kirjeldatud vahendid tunnuste vahelise seose uurimiseks. Sel korral võiks esimese abivahendina kasutada kahemõõtmelist sagedustabelit.

Olgu vaatluse all tunnus X , millel on m erinevat väärtust $x_1, x_2, \dots, x_m$ ja tunnus Y , millel on k erinevat väärtust $y_1, y_2, \dots, y_k$. Olgu meie käsutuses n -elemendiline valim. Valimi igal objektil on mõõdetud mõlema tunnuse väärtus, seega valim koosneb saadud väärtuspaaridest. Nende tunnuste jaoks koostatud kahemõõtmeline sagedustabel omab siis m veergu – iga veerg vastab erinevale tunnuse X väärtusele ja k rida – iga rida vastab erinevale tunnuse Y väärtusele. Nii tekib $m \times k$ lahtrit, millest igaüks vastab tunnuste väärtuste erinevale kombinatsioonile. Igasse lahtrisse kirjutatakse vastava väärtuspaari esinemise sagedus n_{ij} . Tavaliselt "kleebitakse" tabeli äärtele veel mõlema tunnuse sagedustabelid – rida ja veerg, milles näidatakse ära mõlema tunnuse jaoks erinevate väärtuste esinemise sagedused. Vastavat rida ja veergu nimetatakse *ääresagedusteks* e. *marginaalsagedusteks*.

Sagedustabeli viimane rida ja viimane veerg saadakse reasagedusi või veerusagedusi kokku liites. Sellele viitavad ka tähistused $n_{i.}$ ja $n_{.j}$,

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^k n_{ij}, \quad n_{.j} = \sum_{i=1}^m n_{ij}.$$

Punktiga tähistatakse need indeksid, üle mille käis vastava suuruse arvutamisel liitmine.

Sagedustabeli alumises parempoolses lahtris esitatakse tavaliselt valimi maht n . Kuna see arvutatakse ääresageduste summeerimise teel,

$$n = \sum_{j=1}^k n_{.j} = \sum_{i=1}^m n_{i.},$$

siis võib vastava suuruse tähistamiseks kasutada ka sümbolit $n_{..}$.

Kahemõõtmelise sagedustabeli üldkuju on järgmine

| $X \backslash Y$ | y_1 | y_2 | $\dots$ | y_k | $n_{i.}$ |
|------------------|----------|----------|---------|----------|----------|
| x_1 | n_{11} | n_{12} | $\dots$ | n_{1k} | $n_{1.}$ |
| x_2 | n_{21} | n_{22} | $\dots$ | n_{2k} | $n_{2.}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| x_m | n_{m1} | n_{m2} | $\dots$ | n_{mk} | $n_{m.}$ |
| $n_{.j}$ | $n_{.1}$ | $n_{.2}$ | $\dots$ | $n_{.k}$ | n |

Kahemõõtmelises sagedustabelis esitatakse sageli ka väärtuspaaride sageduste kõrval suhtelisi sagedusi. Suhtelisi sagedusi on võimalik arvutada kolmel erineval viisil.

Jagades läbi lahtrite sagedused vastava rea ääresagedusega, saame *rea suhtelised sagedused*

$$u_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}.$$

Need suhtelised sagedused määravad tunnuse Y tingliku jaotuse antud reale vastava X väärtuse korral.

Jagades läbi lahtrite sagedused vastava veeru ääresagedusega, saame *veeru suhtelised sagedused*

$$s_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}}.$$

Need suhtelised sagedused määravad tunnuse X tingliku jaotuse antud veerule vastava Y väärtuse korral.

Jagades läbi lahtrite sagedused valimi mahuga, saame *tabeli suhtelised sagedused*

$$t_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}.$$

Kõik kolm suhtelist sagedust on üldjuhul erinevad.

Näide 5.14. Vaatame näidet kahemõõtmelise sagedustabeli koostamise kohta. Olgu meie käsutuses andmestik hooaja jooksul

esinevad vigastustest mäesuusatajatel. Registreeritud on vigastuse raskus (eristatakse kolme astet – kerge, keskmine, raske) ja suusataja kvalifikatsioon (algaja, edasijõudnu, meister). Andmed 160 vigastuse kohta on esitatud järgmises tabelis.

| $X \backslash Y$ | kerge | keskmine | raske | $n_{i.}$ |
|------------------|-------|----------|-------|----------|
| algaja | 55 | 4 | 1 | 60 |
| edasijõudnu | 30 | 29 | 11 | 70 |
| meister | 11 | 7 | 12 | 30 |
| $n_{.j}$ | 96 | 40 | 24 | 160 |

Tabeli koostamisel kasutatud andmestik oli esitatud väärtuste paaridena

| Kvalifikatsioon | Vigastus |
|------------------------|-----------------|
| algaja | kerge |
| edasijõudnu | kerge |
| edasijõudnu | raske |
| meister | kerge |
| meister | raske |
| algaja | keskmine |
| | jne |

Niisuguse tabeli korral pakub huvi eelkõige küsimus, kas tunnuste vahel on olemas seos. Kui tunnused on sõltumatud, ei tohiks vigastuse raskus olla seotud suusataja kvalifikatsiooniga, see aga tähendab, et erineva kvalifikatsiooniga suusatajatel peaks teatava raskusega vigastusi esinema enam-vähem ühesuguse sagedusega. Kuidas seda kontrollida? Kui igas kvalifikatsiooni astmes oleks registreeritud ühesugune arv vigastusi, võiks võrrelda erinevate ridade sagedusi. Paraku aga on igas kvalifikatsiooni astmes registreeritud erinev arv vigastusi. Seetõttu pole sagedused otseselt võrreldavad. Tuleb üle minna kas rea või veeru suhtelistele sagedustele. Toome rea suhtelised sagedused ära järgmises tabelis.

| $X \backslash Y$ | kerge | keskmine | raske | $n_{i.}/n$ |
|------------------|-------|----------|-------|------------|
| algaja | 0.92 | 0.07 | 0.01 | 1.00 |
| edasijõudnu | 0.43 | 0.41 | 0.16 | 1.00 |
| meister | 0.37 | 0.23 | 0.40 | 1.00 |
| $n_{.j}/n$ | 0.6 | 0.25 | 0.15 | 1.00 |

Kõrvutades ridade suhtelisi sagedusi omavahel näeme, et nad on erinevad. Algajatel esinevad enamasti kerged vigastused. Kõige suurem on raskete vigastuste osakaal meistrite klassis. Oma probleemi võime uurida ka veergude suhteliste sageduste abil. Kui vigastuse raskus ei sõltu suusataja kvalifikatsioonist, peaks suusatajate kvalifikatsiooni suhtelised sagedused iga vigastuse raskuse korral olema enam-vähem ühesugused ja sarnanema suusatajate kvalifikatsiooni suhteliste sagedustega valimis, s.o. vastavate äärejaotuse suhteliste sagedustega. Toome veergude suhtelised sagedused ära järgnevas tabelis.

| $X \backslash Y$ | kerge | keskmine | raske | $n_{i.}/n$ |
|------------------|-------|----------|-------|------------|
| algaja | 0.57 | 0.10 | 0.04 | 0.37 |
| edasijõudnu | 0.31 | 0.72 | 0.46 | 0.44 |
| meister | 0.12 | 0.18 | 0.50 | 0.19 |
| $n_{.j}/n$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Kui tunnused on sõltumatud, peaksid ridade suhtelised sagedused võrduma marginaalsete suhteliste sageduste reaga ja veergude suhtelised sagedused – marginaalsete suhteliste sageduste veeruga. Näites see nii ei ole. Näeme, et ka veergude suhtelised sagedused erinevad marginaalsete suhteliste sageduste veerust. Analüüsides veergude suhtelisi sagedusi selgub, et kergeid vigastusi saanute hulgas on kõige rohkem algajaid, raskeid vigastusi saanute hulgas on enamasti meistrid ja edasijõudnud, algajaid väga vähe.

Saadud järeldused on ootusjärgselt samad, mis saime ridade suhteliste sageduste analüüsimisel, ainult veidi teisiti sõnastatud.

Sagedustabeli analüüsimisel tasub alati proovida, kuidas õnnestub järeldusi selgemini sõnastada – kas ridade, veergude või tabeli suhtelisi sagedusi kasutades.

Tekib küsimus, kas erinevused on küllalt suured, et lugeda neid olulisteks. Või on nad nii väikesed, et võime lugeda neid tingituks juhusest.

5.4.1. Sõltumatud tunnused

Vaatame, milline peaks olema ideaalne sagedustabel sõltumatute tunnuste korral. Kui tunnused on sõltumatud, peavad ühe tunnuse igasuguse fikseeritud väärtuse korral teise tunnuse väärtuste esinemise suhtelised sagedused olema ühesugused. Kahemõõtmelises sagedustabelis saab see käitumismall kajastuda rea ja veeru suhtelistes sagedustes. Ideaalses sõltumatute tunnustega sagedustabelis peavad ridade suhtelised sagedused olema ühesugused ja langema kokku marginaalsete suhteliste sageduste reaga. Samuti peavad olema ühesugused veergude suhtelised sagedused ja langema kokku marginaalsete suhteliste sageduste veeruga. On üsna lihtne veenduda, et selle tingimuse täidetuseks peavad lahtrite sagedused rahuldama tingimust

$$n_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}. \quad (5.5)$$

Kui oleme nii määratlenud ideaalse sõltumatute tunnuste sagedustabeli antud äärejaotuste korral, saab ka kasutusele võtta mõõdu hindamiseks tegeliku sagedustabeli erinevust sellest ideaalist. Niisuguseks mõõduks sobib meile juba varasemast tuttav χ^2 -statistik. Saame ju iga lahtri jaoks arvutada tuttava teguri

$$\frac{(v_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}, \quad (5.6)$$

kus v_{ij} – vaadeldud sagedus – on väärtuspaari sagedus n_{ij} valimis, e_{ij} – eelduse kohane sagedus – aga ideaalse sõltumatuse eelduse kohaselt arvutatud sagedus $\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$. Seega võib kasutada statistikut

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{(n \cdot n_{ij} - n_{i.}n_{.j})^2}{n \cdot n_{i.}n_{.j}}.$$

On võimalik näidata, et sõltumatute tunnuste korral läheb selle statistiku jaotus valimi mahu kasvades üsna kiirest χ^2 -jaotusele parameetriga $(m-1)(k-1)$. Sealjuures ei tohi aga

tabelis olla väikese sagedusega või tühje ruute. Sageli kasutatakse tingimuseks on tingimus, et ühegi ruudu eelduse kohane sagedus ei tohi olla väiksem viiest.

Tunnuste sõltumatuse kontrollimiseks tuleb esitada hüpoteesid:

H_0 : tunnused on sõltumatud,

H_1 : tunnused on sõltuvad.

Otsuse langetamiseks olulisuse nivool α saame järgmise eeskirja

Kui $\chi^2 \geq \bar{h}_{\alpha;(m-1)(k-1)}$, võtta vastu hüpotees H_1 ,

Kui $\chi^2 \leq \bar{h}_{\alpha;(m-1)(k-1)}$, võtta vastu hüpotees H_0 .

Otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse leiame tabelist H.

Näide 5.15. Kontrollime, kas eelnevas näites toodud sagedustabeli põhjal saab tõestada tunnuste sõltuvuse. Esitame kontrollitavad hüpoteesid

H_0 : tunnused on sõltumatud,

H_1 : tunnused on sõltuvad.

Olgu olulisuse nivoo väärtuseks 0.05. Leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse, $\bar{h}_{0.05;4} = 9.49$.

Edasi tuleb arvutada χ^2 -statistik. Tema arvutamisel on kasulik vormistada kaks abitabelit. Esimesse neist kirjutame sõltumatuse eelduse kohaselt arvutatud sagedused, mis on määratud valemiga (5.5). (Paneme tähele, et ääresagedused on samad, mis esialgses tabelis!)

| $X \backslash Y$ | kerge | keskmine | raske | $n_{i.}/n$ |
|------------------|-------|----------|-------|------------|
| algaja | 36 | 15.37 | 8.63 | 60 |
| edasijõudnu | 42 | 17.94 | 10.06 | 70 |
| meister | 18 | 7.69 | 4.31 | 30 |
| $n_{.j}/n$ | 96 | 41 | 23 | 160 |

Teise aga kirjutame igasse ruutu suuruse, mis on määratud valemiga (5.6).

| $X \backslash Y$ | kerge | keskmine | raske |
|------------------|-------|----------|-------|
| algaja | 10.03 | 8.41 | 6.47 |
| edasijõudnu | 3.43 | 6.82 | 0.09 |
| meister | 2.72 | 0.06 | 13.72 |

Liites kokku viimase tabeli ruutudes olevad arvud, saame χ^2 -statistiku väärtuse,

$$\chi^2 = 52.02.$$

Kuna statistiku väärtus on suurem tabelist leitud kriitilisest väärtusest, $52.02 > 9.49$, peame vastu võtma sisuka hüpoteesi – vigastuse raskus ja suusataja kvalifikatsioon on seotud. Ridade ja veergude suhteliste sageduste abil kirjeldasime seose olemust näites 5.14. Selles näites toodud viimane abitabel võimaldab näha, milliste ruutude sagedused erinevad kõige tugevamini sõltumatus korral oodatavast sagedusest. Näeme, et kõige olulisemad on meistrite raskete vigastuste sagedused, samuti algajate kergete ja keskmiste vigastuste sagedused. Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



5.4.2. Mitmesugused seosekordajad

Kuigi χ^2 -statistiku abil saab kontrollida tunnuste sõltuvuse hüpoteesi, ei sobi see statistik kirjeldama kahe tunnuse vahelise seose tugevust. χ^2 -statistiku muutumise piirkond sõltub tabeli mõõtmetest ja seetõttu pole erinevate tabelite põhjal leitud χ^2 -statistikud võrreldavad. Sõltuvuse tugevuse kirjeldamiseks oleks vaja normeeritud seosekordajat, mille väärtused asuksid teataval lõigul. Kui meil on tegu nominaaltunnustega, pole võimalik rääkida seose suunast, normeeritud kordaja väärtused asuvad lõigul $[0,1]$. Järjestustunnuse korral omab seose suund tähendust, normeeritud kordaja väärtused asuvad lõigul $[-1, 1]$.

Niisuguseid normeeritud kordajaid on kahemõõtmelise sagedustabeli jaoks kasutusel terve plejaad. See asjaolu viitab muidugi sellele, et nende kordajate hulgas pole ühte ja parimat – erinevatel eelduste osutuvad sobivamateks erinevad kordajad ning võib karta, et üksi neist pole laitmatu.

Tutvume esmalt seosekordajatega, mis tuginevad χ^2 -statistikule.

• **Kordaja ϕ , Crameri V ja Tšuprovi kordaja.**

Kordaja ϕ on kasutatav 2×2 -sagedustabeli korral. Ta määratakse valemiga

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}.$$

Selle kordaja väärtused asuvad lõigul $[0, 1]$. Kui tunnused on sõltumatud, on kordaja väärtuseks null. Kui ühe tunnuse iga väärtus saab esineda ainult koos teise tunnuse ühe kindla väärtusega, on kordaja väärtuseks 1.

Kui sagedustabelis on ridu või veerge rohkem kui kaks, pole ϕ enam normeeritud, tema väärtus võib osutuda ühest suuremaks. Sel korral kasutatakse kordajat Crameri V , mis on määratud eeskirjaga

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot l}},$$

kus l on ühe võrra väiksem tabeli väiksemast mõõtmest,

$$l = \min(m - 1, k - 1).$$

Kui sagedustabelis on ridade ja veergude arv võrdne, asub kordaja V väärtus lõigul $[0, 1]$. Kui aga sagedustabelis on ridade ja veergude arv erinev, võib selle kordaja väärtus olla ühest suurem.

Tšuprovi seosekordaja on määratud eeskirjaga

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \sqrt{(m - 1)(k - 1)}}}.$$

Selle kordaja väärtused asuvad alati lõigul $[0, 1]$. Võrdse ridade ja veergude arvuga sagedustabeli (so ruudukujulise sagedustabeli) korral on V ja T alati võrdsed.

Kõikidele loetletud kordajatele ei saa anda mingit täiendavat sisulist tähendust. Nad on lihtsalt indeksid, mis mõõdavad seose tugevust – mida suurem on kordaja väärtus, seda tugevam on seos. Nende kordajate olulisuse kontrollimiseks saab kasutada χ^2 -statistikut.

Näide 5.16. Leiame eelmises näites toodud sagedustabeli jaoks Crameri V ja Tšuprovi seosekordaja.

$$V = \sqrt{\frac{51.75}{160 \cdot 2}} \approx 0.40.$$

Kuna tegemist on ruudukujulise tabeliga, on Tšuprovi seosekordaja väärtus täpselt sama. Näeme, et tegemist on keskmise tugevusega seosega. Seose iseloomu kirjeldasime näites 5.14, seosekordaja väärtuse arvutamine siin mingit täiendavat informatsiooni ei lisa.



Vaatame teist seosekordajate rühma, mida ühendab idee kasutada muutust ühe tunnuse väärtuse prognoositavuses, kui teise tunnuse väärtus on teada. Prognoosimiseks nimetatakse tunnuse väärtuse ennustamist, oletust, millise väärtuse omandab see tunnus katse sooritamisel. Prognoosimisel kasutatakse tunnuseid ebasümmeetriliselt – ühe tunnuse väärtust prognoositakse, teise tunnuse väärtust aga kasutatakse täiendava informatsioonina prognoosi täpsustamiseks. Seetõttu on ka vastavad seosekordajad ebasümmeetrilised – vahetades prognoositava tunnuse (nn funktsioontunnuse) ja täiendavat infot andva tunnuse (nn argumenttunnuse), saame seosekordajale üldjuhul erineva väärtuse.

• Guttmani λ

Guttmani λ määramisel kasutatakse prognoosimiseks kindlat strateegiat, mis teatud mõttes on optimaalne ja kasutatav igat tüüpi tunnuste korral. Funktsioontunnuse väärtuseks prognoositakse alati see väärtus, mille esinemise sagedus on antud sagedustabeli ja kasutatava info korral suurim. See seosekordaja on leitav nii nominaaltunnuste kui ka järjestustunnuste korral.

Olgu funktsioontunnuse Y võimalikud väärtused $y_1, y_2, \dots, y_k$. Olgu y_* selle tunnuse mood – väärtus, mille veerusagedus $n_{.*}$ on maksimaalne,

$$n_{.*} = \max_{1 \leq j \leq k} n_{.j}.$$

Kui olemasoleva valimi korral kasutada eelpool toodud prognoosimise strateegiat, siis on valesti prognoositud väärtuste arv E_1

määratud valemiga

$$E_1 = n - n_{*}.$$

Olgu nüüd enne funktsioontunnuse Y prognoosimist teada ka argumenttunnuse X väärtus. Kasutades sama prognoosimise strateegiat tuleb Y väärtuseks määrata nüüd selline väärtus, mille esinemissagedus on antud argumenttunnuse väärtuse korral suurim. Olgu selle väärtuse sageduse tähiseks n_{i*} ,

$$n_{i*} = \max_{1 \leq j \leq k} n_{ij}.$$

Prognoosides nüüd kõiki antud valimis esinevaid Y väärtusi niisugust strateegiat kasutades, saame vigade arvu täiendava informatsiooni korral E_2 ,

$$E_2 = n - \sum_{i=1}^m n_{i*}.$$

Guttmani kordaja määratakse nüüd eeskirjaga

$$\lambda = \frac{E_1 - E_2}{E_1},$$

tema väärtuseks on täiendava info kasutamisel tekkiv prognoosivigade vähenemise osakaal.

Kui argumenttunnuse väärtuse kasutamine ei võimalda prognoosivigade arvu vähenemist, on λ väärtuseks null. Kui argumenttunnuse väärtuse kasutamine võimaldab funktsioontunnuse väärtuse täpselt määrata, on λ väärtuseks üks. Sel juhul vastab igale argumenttunnuse väärtusele üks kindel funktsioontunnuse väärtus. Kuna täiendav informatsioon võib prognoosimise täpsust ainult suurendada, ei saa λ olla negatiivne. Vaatame näidet selle seosekordaja kasutamise kohta.

Näide 5.17. Olgu meie käsutuses tabel hääletustulemustega teatavas seadusandlikus kogus. Hääletamisest võttis osa 98 saadikut, kes võisid kuuluda kolme erinevasse erakonda – olgu need KK, II ja MM erakonnad. Iga saadik võis valida ühe kolmest võimalikust suhtumisest – olla esitatud otsuse poolt, olla esitatud

otsuse vastu või jääda erapooletuks. Tabel hääletustulemustega on järgmine.

| $X \backslash Y$ | poolt | vastu | erapooletu | $n_{i.}$ |
|------------------|-------|-------|------------|----------|
| KK | 20 | 2 | 14 | 36 |
| I I | 25 | 4 | 4 | 33 |
| MM | 9 | 18 | 2 | 29 |
| $n_{.j}$ | 54 | 24 | 20 | 98 |

Leiame edasisteks arvutusteks vajalikud prognoosivigade arvud

$$E_1 = 98 - 54 = 44,$$

$$E_2 = 98 - (20 + 25 + 18) = 35$$

ja arvutame kordaja λ ,

$$\lambda = \frac{44 - 35}{44} \approx 0.20.$$

Saadiku erakondliku kuuluvuse teadmine võimaldab tema hääletustulemuse prognoosimisel vähendada vigade arvu 20% võrra.

Kui erakonnad oleksid enne hääletamist pidanud nõu ja valinud ühise suhtumise, mis oleks olnud kohustuslik igale erakonna liikmele, oleks tulemuste tabel olnud hoopis teistsugune. Kui kooskõlastatud suhtumine oleks olnud näiteks järgmine – KK – poolt, II – vastu, MM – erapooletu, oleks igas veerus erinenud nullist ainult ühe lahtri sagedus. Sel korral oleks λ väärtus olnud üks. Erakondliku kuuluvuse teadmine oleks võimaldanud veatult hääletustulemuse ette öelda.

Minimaalse väärtuse null oleks λ omandanud juhul, kui kõikides erakondades oleks kõige eelistatum hääletustulemus olnud ühesugune. Toome niisuguse olukorra illustreerimiseks järgneva tabeli.

| $X \backslash Y$ | poolt | vastu | erapooletu | $n_{i.}$ |
|------------------|-------|-------|------------|----------|
| KK | 18 | 9 | 9 | 36 |
| I I | 16 | 9 | 8 | 33 |
| MM | 15 | 7 | 7 | 29 |
| $n_{.j}$ | 49 | 25 | 24 | 98 |

Sellise tabeli korral

$$E_1 = 98 - 49 = 49, E_2 = 98 - 18 - 16 - 15 = 49$$

ja

$$\lambda = \frac{49 - 49}{49} = 0.$$



• γ , Somersi d ja Kendalli τ .

Järgnevate seosekordajate arvutamiseks peavad mõlema tunnuse väärtused olema järjestatavad. Kendalli korrelatsioonikordaja üldistatakse siin juhule, kus valimis on korduvaid väärtusi. Nende seosekordajate määramisel on aluseks idee, mida kirjeldasime Kendalli kordajaga tutvumisel – püütakse tabada tunnuste ühise muutumise tendentsi vaatluste kõikvõimalike paaride võrdlemise teel.

Kasutame samu nimetusi nagu punktis 5.5: vaatluste paari nimetame samasuunaliseks, kui tunnuse Y ja tunnuse X väärtuste vahekord on ühesugune ja vastassuunaliseks, kui tunnuse Y ja tunnuse X väärtuste vahekord on vastupidine. Olgu samasuunaliste paaride arv n_s ja vastassuunaliste paaride arv n_v . Peale samasuunaliste ja vastassuunaliste paaride on aga vaatluste paare, millede ühe või mõlema tunnuse väärtused on võrdsed. Erinevate kordajate korral kasutatakse neid nn mittejärjestatud väärtuste paare erinevalt. Kordaja γ arvutamisel jäetakse niisugused paarid lihtsalt arvesse võtmata. Kordaja γ määratakse valemiga

$$\gamma = \frac{n_s - n_v}{n_s + n_v}.$$

Selle kordaja väärtus annab meile samasuunaliste ja vastassuunaliste paaride suhteliste sageduste vahe järjestatud paaride hulgas.

Näide 5.18. Olgu tegemist psühholoogiga, kes uurib ”läbipõlemissündroomi”. Tal on andmed 100 õpetaja kohta. Teada on

õpetaja töötamise aeg (sellel eristab psühholoog kolme taset – lühike, keskmine, pikk) ja uurija eksperthinnang sündroomi avaldumise tugevusele (puudub, märgatav, tugev). Andmestik on esitatud järgnevas kahemõõtmelises sagedustabelis

| $X \backslash Y$ | puudub | märgatav | tugev | $n_{i.}$ |
|------------------|--------|----------|-------|----------|
| lühike | 20 | 10 | 8 | 38 |
| keskmine | 6 | 15 | 11 | 32 |
| pikk | 4 | 5 | 21 | 30 |
| $n_{.j}$ | 30 | 30 | 40 | 100 |

Arvutame selle tabeli jaoks esmalt kõikvõimalike paaride arvu, millel tunnuste väärtused on samasuunalised, suure n_s . Alustame tabeli ülemisest vasakpoolsest lahtrist. Sellele lahtrile vastab väärtuspaar "lühike, puudub". Väärtuspaarid, millele vastavad lahtrid asuvad samas reas või samas veerus, arvesse ei saa tulla, kuna ühe tunnuse väärtus on kindlasti võrdne vaadeldava paari ühe tunnuse väärtusega. Liigume sagedustabelis ühe sammu võrra paremale ja alla. Jõuame lahtrisse, millele vastab väärtuspaar "keskmine, märgatav". Muutus tunnuste väärtustes on samasuunaline. Muutus tunnuse väärtustes jääb samasuunaliseks kõikides lahtrites, mis jäävad vaadeldud lahtrist ("lühike", "puudub") paremale ja alla. Seega kõikide samasuunaliste paaride arvu saame, liites kokku fikseeritud paarist paremale ja alla jäävate väärtuspaaride sagedused. Vaadates esimest väärtuspaari "lühike, puudub", leiame $15 + 11 + 5 + 21$ väärtuspaari, mis on samasuunalised. Kuna fikseeritud väärtuspaarile vastas 20 erinevat vaatlust, oleme kokku leidnud

$$20 \cdot (15 + 11 + 5 + 21) = 1040$$

samasuunalist paari. Iga lahtri poolt genereeritud samasuunaliste vaatluspaaride leidmiseks tuleb sellele lahtrile vastav sagedus korrutada sellest lahtrist paremale ja alla jäävate väärtuspaaride sageduste summaga. Nii saame antud tabeli korral järgmised tulemused:

- "lühike, märgatav"

$$10 \cdot (11 + 21) = 320,$$

- "keskmine, puudub"

$$6 \cdot (5 + 21) = 156,$$

- ”keskmine, märgatav”

$$15 \cdot 21 = 315.$$

Rohkem erinevaid samasuunalisi paare ei ole. Lõppkokkuvõttes saame

$$n_s = 1040 + 320 + 156 + 315 = 1831.$$

Analoogiliselt saame leida vastassuunaliste paaride arvu. Selleks tuleb iga vastasuunalisi paare genereeriva lahtri jaoks selle lahtri sagedus korrutada lahtrist paremale ja üles jäävate lahtrite sageduste summaga. Saame

- ”keskmine, puudub”

$$6 \cdot (10 + 8) = 108,$$

- ”keskmine, märgatav”

$$15 \cdot 8 = 120,$$

- ”pikk, puudub”

$$4 \cdot (10 + 8 + 15 + 11) = 176,$$

- ”pikk, märgatav”

$$5 \cdot (11 + 8) = 95.$$

Rohkem erinevaid vastassuunalisi paare ei ole. Lõppkokkuvõttes saame

$$n_v = 108 + 120 + 176 + 95 = 499.$$

Nüüd saame arvutada kordaja γ väärtuse

$$\gamma = \frac{1831 - 499}{1831 + 499} \approx 0.57.$$

Võib teha järelduse, et ”läbipõlemissündroomi” avaldumise aste on positiivselt seotud õpetaja töötamise kestusega. Kui vaatluse all on õpetajatepaarid, kelle töötamise kestus on erinev, on 57%

võrra rohkem neid paare, kellel pikema töötamise kestusega kaasneb tugevamini väljendunud sündroom. Või ka vastupidi – kui vaatluse all on õpetajapaarid, kellel ”läbipõlemissündroomi” avaldub erineva tugevusega, siis on 57% võrra rohkem neid paare, kelle ka töötamise kestus on erinev.

Kordaja γ arvutamisel kasutatakse tunnuseid täiesti sümmeetriliselt.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Somersi d ja Kendalli τ on samuti kasutatavad järjestustunnuste vahelise seose kirjeldamiseks. Kordajast γ erinevad nad vaid selle poolest, kuidas kasutatakse paare, millel ühe tunnuse väärtused langevad kokku, nn mittejärjestatud paare. Kordaja γ arvutamisel jäetakse need paarid lihtsalt kõrvale.

Somersi d arvutamisel kasutatakse tunnuseid erinevalt. Ühte neist loetakse funktsioontunnuseks (olgu see tunnus Y), teist argumenttunnuseks (olgu see tunnus X). Selle kordaja määramisel võetakse arvesse paarid, mille puhul funktsioontunnuse väärtused langevad kokku – olgu nende arv n_y . Somersi d arvutatakse valemiga

$$d = \frac{n_s - n_v}{n_s + n_v + n_y}.$$

Kendalli τ (so Kendalli korrelatsioonikordaja korduvate väärtustega valimi jaoks) arvutamisel võetakse lisaks arvesse ka need paarid, millel argumenttunnuse väärtused langevad ühte, olgu nende arv n_x . Kendalli τ on sümmeetriline tunnuste X ja Y suhtes.

Kendalli τ arvutatakse valemiga

$$\tau = \frac{n_s - n_v}{\sqrt{(n_s + n_v + n_y)(n_s + n_v + n_x)}}.$$

Kirjeldame nende kordajate arvutamist näites.

Näide 5.19. Arvutame eelmises näites toodud sagedustabeli jaoks ka Somersi d ja Kendalli τ . Lähtusime järgmisest tabelist

| $X \backslash Y$ | puudub | märgatav | tugev | $n_{i.}$ |
|------------------|--------|----------|-------|----------|
| lühike | 20 | 10 | 8 | 38 |
| keskmine | 6 | 15 | 11 | 32 |
| pikk | 4 | 5 | 21 | 30 |
| $n_{.j}$ | 30 | 30 | 40 | 100 |

Uute kordajate arvutamiseks leiame esmalt n_y . Selleks tuleb iga lahtri jaoks kokku liita temast allapoole samasse veergu jäävad sagedused ja summa korrutada vastava lahtri sagedusega. Nii saame

$$n_y = 20(6 + 4) + 6 \cdot 4 + 10(15 + 5) + 15 \cdot 5 + 8(11 + 21) + 11 \cdot 21 = 986$$

ja

$$\begin{aligned} n_x &= 20(10 + 8) + 10 \cdot 8 + 6(15 + 11) + 15 \cdot 11 \\ &\quad + 4(5 + 21) + 5 \cdot 21 = 970. \end{aligned}$$

Arvutame meid huvitavad kordajad

$$d = \frac{1831 - 499}{1831 + 499 + 986} \approx 0.40,$$

$$\tau = \frac{1831 - 499}{\sqrt{(1831 + 499 + 986)(1831 + 499 + 970)}} \approx 0.40.$$

Selles näites omandasid mõlemad kordajad meie arvutustäpsuse raamides ühe ja sama väärtuse. See näitab, et paare, milles X on konstant ja paare, kus Y on konstant, on ligikaudu võrdselt. Üldjuhul see ei tarvitse nii olla.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



5.5. Regressioonanalüüs

Eelmises punktis nägime, et nominaaltunnuste korral võib eristada funktsioontunnust ja argumenttunnust. Kui tunnused on seotud, võib argumenttunnuse väärtuse abil enam või vähem täpsemalt prognoosida (so ennustada) funktsioontunnuse väärtust. Põhimõtteliselt samuti võib läheneda ka pidevate arvuliste tunnuste paarile – ühte neist nimetada funktsioontunnuseks e sõltuvaks tunnuseks ja teist argumenttunnuseks e sõltumatuks tunnuseks ning prognoosida argumenttunnuse väärtuse abil sõltuva tunnuse väärtust. Pidevate tunnuste korral aga pole prognoosimine võimalik tunnuste üksikväärtusi ja nende sagedusi arvestades – pidevatel tunnustel on selleks liiga palju väärtusi. Pidevate tunnuste prognoosimisel tuleb kasutada valemit $y = f(x)$, so eeskirja, mis igale tunnuse X väärtusele seab vastavusse ühe tunnuse Y väärtuse.

Prognoosimiseks kasutatava valemi täpne kuju määratakse sisulistest kaalutlustest lähtudes, see valik tuleb teha uurijal. Olemasolevate andmetega sobitamiseks sõltub funktsioon $f(x)$ parameetritest, mille väärtust tuleb hinnata valimi põhjal.

5.5.1. Regressioonisirge ja regressioonikordajad

Kui tunnuste vaheline lineaarne korrelatsioonikordaja erineb oluliselt nullist, võib prognoosimiseks kasutada lineaarset funktsiooni

$$y = b_0 + b_1x.$$

See funktsioon sõltub kahest parameetrist, igasuguse b_0 ja b_1 valiku korral määrab ta sirge võrrandi.

Ühest küljest on see funktsioon lihtne, ta sõltub ainult kahest parameetrist, mille väärtused tuleb määrata valimi põhjal. Teisest küljest on tema kasutamine loomulik – on ju teada, et lineaarne korrelatsioonikordaja mõõdab punkt pilve väljavenitatust piki teatavat sirget.

Sirget, mis kirjeldab kahe pideva tunnuse vahelist korrelatiivset sõltuvust, nimetatakse *regressioonisirgeks*.

Valinud valemi, tuleb leida arvulised hinnangud parameetritele b_0 ja b_1 . Parameetrite arvuliste väärtuste teadmine võimaldab saadavat võrrandit praktiliselt kasutada. Kordajaid b_0 ja b_1 nimetatakse *regressioonikordajateks*.

Regressioonikordajate arvutamisel lähtutakse kõige sagedamini *vähimruutude printsiibist*. See on lihtne, tervel mõistusel tuginev ja end praktikas õigustanud printsiip. Vähimruutude printsiibi võttis möödunud sajandil kasutusele saksa matemaatik Carl Friedrich Gauss, rakendades seda astronoomiliste andmete töötlemisel.

Vähimruutude printsiip nõuab: kordajate b_0 ja b_1 väärtused tuleb valida sellised, et erinevused katse käigus mõõdetud sõltuva tunnuse väärtuste ja valemi abil prognoositud sõltuva tunnuse väärtuste vahel oleksid minimaalsed.

Printsiibi realiseerimiseks võetakse kasutusele sobiv erinevuse mõõt. Tähistame sümboliga $\hat{y}_i$ valemi abil prognoositud sõltuva tunnuse väärtuse,

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i.$$

Sõltuva tunnuse katses mõõdetud väärtuse ja prognoositud väärtuse vahe on *hälve* e *jääk*, tähistame ta sümboliga e_i ,

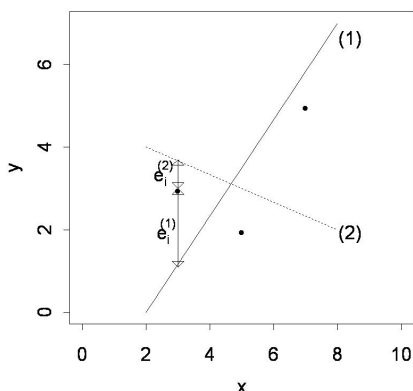
$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Hälbe suurus sõltub sellest, millised olid kordajate a ja b väärtused. Erinevate sirgete suhtes arvutatud hälbed on erinevad. Joonisel 5.8 on kujutatud erinevate sirgete (sirge (1) ja sirge (2)) suhtes arvutatud hälbeid ($e_i^{(1)}$ ja $e_i^{(2)}$) punktis (x_i, y_i) .

Kuna hälbe märk ei oma sirge sobitamisel tähtsust, valitakse erinevuse summaarseks mõõduks *hålvete ruutude summa*. See summa sõltub prognoosimisel kasutatud valemi kordajatest b_0 ja b_1 , tähistame ta sümboliga $S^2(b_0, b_1)$,

$$S^2(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2.$$

Låhtudes hålvete ruutude summa minimiseerimise nõudest, saab leida valemid vähimruutude printsiipi rahuldavate kordajate leidmiseks.



Joonis 5.8. Erinevate sirgete suhtes arvutatud hälbed

Tõepoolest, vähimruutude printsiipi rahuldavad kordajad $\hat{b}_0$ ja $\hat{b}_1$ peavad andma hälvete ruutude summale minimaalse väärtuse,

$$S^2(\hat{b}_0, \hat{b}_1) = \min_{b_0, b_1} S^2(b_0, b_1).$$

Seega taandub kordajate leidmise ülesanne matemaatikas hästi tuntud miinimumi leidmise ülesandele. Leidmaks argumenti, mille korral realiseerub funktsiooni minimaalne väärtus, tuleb leida selle funktsiooni osatuletised vastavate argumentide järgi ja võrdsustada need nulliga. Saame võrrandisüsteemi, mille üheks lahendiks osutub miinimumi realiseeriv argument. Seda muidugi sel juhul, kui vastaval funktsioonil on miinimum olemas. Üldjuhul annab vastava süsteemi lahend funktsiooni ekstreemumpunkti.

Kordajate leidmisel puutume kokku ka tavalisest pisut erineva tähistusega. Kui tavaliselt b_0 ja b_1 tähistavad konstante, siis siin on nad muutuvad suurused, mis võivad omandada erinevaid väärtusi. Kui tavaliselt y ja x tähistavad muutuvaid suurusi, siis praegu on nad konstandid – valimi elemendid, mille põhjal hinnatakse regressioonikordajaid. Arvutame hälvete ruutude summa osatuletised

$$\frac{\partial S^2(b_0, b_1)}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i),$$

$$\frac{\partial S^2(b_0, b_1)}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - b_0 - b_1 x_i).$$

Võrdsustades need osatuletised nulliga ja korrastades saadud võrrandisüsteeni jõuame tulemuseni

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y} \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

Avaldame sellest süsteemist tundmatud kordajad b_0 ja b_1 .

Regressioonikordajad määratakse valemitega

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (5.6)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

On lihtne veenduda, et eeskirja kordaja b arvutamiseks võime kirjutada ümber kujul

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

mis praktilistes arvutustes osutub sageli otstarbekamaks.

Näide 5.20. Vaatame näites 5.1 toodud andmestikku üliõpilaste keskkooli keskmise hinde ja sisseastumispalli kohta. Nende tunnuste korrelatsioonikordajaks saime 0.67 ja näitest 5.5 on teada, et tunnuste vahel on oluline seos. Korrelatsioonikordaja arvutamisel oli tunnuste kasutamine sümmeetriline. Regressioonisirge leidmisel on tunnustel erinevad rollid. Esimese sammuna tuleb määrata kindlaks, kumba tunnust kasutada funktsioontunnusena, kumba argumenttunnusena. Siin on otstarbekas valida argumentiks keskkooli keskmine hinne. Selle tunnuse väärtus on alati varem teada kui sisseastumispall. Funktsioontunnuseks jääb sisseastumispall.

Valime valemi, mis võimaldaks prognoosida sisseastumispalli väärtust keskkooli keskmise hinde järgi,

$$SP = b_0 + b_1 \cdot KK.$$

Arvutame regressioonikordajate vähimruutude hinnangud. Arvutusteks vajalikud summad leiame näite 5.3 abitabelist

$$b_1 = \frac{13.7}{1.74} \approx 7.87,$$

$$b_0 = 33 - 7.87 \cdot 4.4 \approx -1.64.$$

Esitades kordajad kahe kümnendkoha täpsusega, saame otsitavaks regressiooniseoseks

$$SP = -1.64 + 7.87 \cdot KK.$$

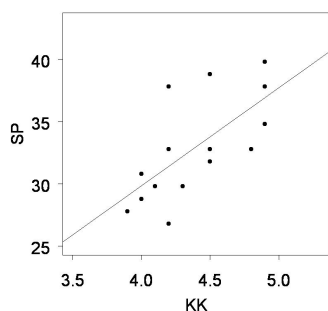
Regressioonisirge graafik koos tunnuste hajuvusdiagrammiga on esitatud joonisel 5.9.

Kasutades seda valemit, prognoosime üliõpilaskandidaadi sisseastumispalli, kui tema keskkooli keskmine hinne on 3.8,

$$SP = -1.64 + 7.87 \cdot 3.8 = 28.27.$$

Leiame veel prognoosi üliõpilaskandidaadi jaoks, kelle keskmine hinne on 4.8,

$$SP = -1.64 + 7.87 \cdot 4.8 = 36.14.$$



Joonis 5.9. Regressioonisirge.

Võrreldes neid kaht hinnet (viimane on 7.87 võrra esimesest suurem) saame mõtestada ka regressioonikordaja b_1 sisulise tähenduse. Selle kordaja väärtus määrab muutuse prognoosi väärtuses, mille põhjustab argumenttunnuse väärtuse suurendamine ühiku võrra.

Pisut ebamäärasem on kordaja b_0 sisuline tähendus. Vaadates regressioonisirge valemit võiks öelda, et kordaja b_0 määrab prognoosi väärtuse, kui argumenttunnuse väärtuseks on null. See lause omab mõtet aga ainult siis, kui null kuulub argumenttunnuse võimalike väärtuste piirkonda. Praegu see ilmselt nii ei ole – keskkooli pole võimalik lõpetada, kui lõputunnistusel on keskmiseks hindeks null.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Regressioonivõrrandi kasutamisel tuleks meeles pidada, et ta kehtib kindlasti ainult selles argumenti väärtuste piirkonnas, mis oli esindatud kasutatud valimis. Tema kehtivuse kohta väljaspool seda piirkonda puudub informatsioon, seega tema kasutamine väljaspool võib viia ekslikele tulemustele.

Heidame veel pilgu korrelatsioonikordajat määravale valemile (5.1). Kui võtame kasutusele tähistused

$$v_y^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad v_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

on seos korrelatsioonikordaja ja regressioonikordaja b vahel esitatav järgmise valemiga

$$b_1 = r \frac{v_y}{v_x}.$$

Näeme, et korrelatsioonikordaja ja regressioonikordaja on alati ühe ja sama märgiga. Tuletades meelde regressioonikordaja sisulise tähenduse ja korrelatsioonikordaja omadused 2 ja 3, on selge, et just nii see peabki olema.

5.5.2. Regressiooniseose täpsus

Siiani vaatasime regressioonivõrrandit kui abivahendit prognoosimisel. Tal võib olla aga ka sügavam sisuline tähendus – teda võib käsitleda kui tegelikkuses eksisteerivat struktuurset seost, mis kirjeldab uuritavat üldkogumit. Niisugune seos ei ole täpne, ta määrab vaid sõltuva tunnuse keskmise taseme antud argumenttunnuse väärtuse korral. Iga konkreetse mõõtmisega kaasnevad mitmesugustest põhjustest tingitud juhuslikud vead. Seega on üldkogumit kirjeldav regressiooniseos esitatav valemiga

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

milles ε tähistab juhuslikku kõrvalekallet (juhuslikku viga) argumenti x poolt määratud keskmisest tasemest, α ja β aga regressioonikordajate tõelisi väärtusi üldkogumis. Vähimruutude meetodil määratud kordajad on nende tõeliste kordajate hinnanguteks.

Juhuslike vigade kohta eeldatakse tavaliselt, et:

- 1) nad on erinevate vaatluste korral sõltumatud,
- 2) nende keskvärtus on null,
- 3) nende standardhälve σ on konstantne.

Viimane eeldus tähendab, et sõltuva tunnuse väärtuste hajutatus regressiooniseosega määratud keskmise taseme suhtes ei sõltu argumenttunnuse väärtusest, on iga väärtuse korral sama. Kuna regressiooniseose täpsus sõltub ainult juhusliku vea muutumisolulusest, on juhusliku vea standardhälve σ samuti väga oluliseks regressiooniparameetriks. Selle parameetri hindamiseks arvutatakse esmalt juhusliku vea dispersiooni hinnang

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{S^2(b_0, b_1)}{n-2},$$

(seda suurust nimetatakse ka *keskmiseks ruutveaks*). Ruutjuur sellest arvust

$$s = \sqrt{s^2}$$

kannab nimetust *mudeli standardviga*. See suurus on hinnanguks juhusliku vea standardhälbele. Kui niisugune tähendus tundub meespidamiseks liialt keerukas, võib jätta meelde, et mudeli standardviga iseloomustab funktsioontunnuse kõrvalekallet regressioonivõrrandiga määratud väärtusest.

Ka keskmise ruutvea saab avaldada korrelatsioonikordaja kaudu,

$$s^2 = \frac{1}{n-2} (1 - r^2) v_y^2.$$

Tõepoolest, võtame vaatluse alla regressioonisirge suhtes arvutatud hälvete ruutude summa

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2.$$

Asendame nüüd kordaja b_0 tema arvutamise eeskirjaga. Liikmeid sobivalt kokku võttes saame

$$\sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - b_1 (x_i - \bar{x}))^2.$$

Kasutades viimases avaldises ruutude summa valemit ja muutes liidetavate järjekorda, võime kirjutada

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - b_1(x_i - \bar{x}))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2b_1 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Kuna

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = r v_y v_x$$

ja

$$b_1 = r \frac{v_y}{v_x},$$

saame

$$\sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = v_y^2 (1 - r^2),$$

millest tulenebki ülal toodud valem.

Näide 5.21. Arvutame eelmises näites toodud regressiooniseose jaoks mudeli standardvea. Kuna $r = 0.67$, siis $r^2 \approx 0.45$.

Arvutame nüüd keskmise ruutvea

$$s^2 = \frac{1}{14} (1 - 0.67^2) \cdot 240 \approx 9.44$$

ja leiame mudeli standardvea

$$s = \sqrt{9.45} \approx 3.0724 \approx 3.07.$$

Sisseastumispalli keskmine hälbumis regressioonisirgega määratud keskmisest tasemest on umbes kolm palli.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



5.5.3. Regressiooniseose kasulikkus

Enne regressioonivõrrandi praktilist kasutamist tuleks alati kontrollida, kas see seos on oluline: see tähendab, kas argument-tunnuse X teadmine võimaldab funktsioontunnuse Y väärtust täpsemalt ennustada. Kui seos pole oluline, on sõltuva tunnuse parimaks prognoosiks tema keskvärtus $\bar{y}$.

Seda väidet on väga lihtne kontrollida. Selleks tuleb meil vastava konstandi määramiseks kasutada vähimruutude tingimust. Kui kasutame sõltuva tunnuse väärtuse prognoosimiseks konstanti, on hälvetes ruutude summa sellest konstandist

$$S^2(c) = \sum_{i=1}^n (y_i - c)^2.$$

Parim prognoos $\hat{c}$ on konstant, mis rahuldab tingimust

$$S^2(\hat{c}) = \min_c S^2(c).$$

Leiame minimiseeritava avaldise osatuletise

$$\frac{\partial S^2(c)}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - c)$$

ja võrdsustame selle nulliga. Lahendades saadud võrrandi saame

$$\hat{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}.$$

Hälvetes ruutude summa konstantse prognoosi suhtes on v_y^2 , hälvetes ruutude summa regressioonisirge suhtes aga $v_y^2(1 - r^2)$. Argumenttunnuse väärtuse kasutamine prognoosimisel vähendas konstantse prognoosi suhtes arvutatud hälvetes ruutude summat, kusjuures muudatus V avaldub järgmiselt,

$$V = S^2(\bar{y}) - S^2(b_0, b_1) = v_y^2 - (1 - r^2)v_y^2 = r^2 v_y^2.$$

Seega r^2 näitab, millise osa funktsioontunnuse muutlikkusest kirjeldab regressiooniseos,

$$r^2 = \frac{\text{regressiooni poolt kirjeldatud muutlikkus}}{\text{funktsioontunnuse muutlikkus}}.$$

Niisuguse ilusa sisulise tähenduse tõttu on antud suurusele r^2 erinimetus, teda nimetatakse *determinatsioonikordajaks*.

Näide 5.22. Arvutame näites 5.19 toodud regressiooniseose jaoks determinatsioonikordaja. Kuna $r = 0.67$, siis $r^2 \approx 0.45$. Keskkooli keskmine hinne kirjeldab 45% sisseastumispalli muutlikkusest.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



5.5.4. Statistilised otsustused regressioonikordajate kohta

Kuna me valimi põhjal saame hinnata tõelisi regressioonikordajaid, tekib ka kohe vajadus kirjeldada nende hinnangute täpsust. Selleks aga peame kasutusele võtma ühe lisaelduse – eeldama, et juhuslik viga ε mudelis

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

on *normaaljaotusega*, $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$. Kui niisugune eeldus kehtib ja valimisse kuuluvaid argumenttunnuse väärtusi võime käsitleda konstantidena, siis on ka regressioonikordajate hinnangud b_0 ja b_1 normaaljaotusega,

$$b_0 \sim N(\beta_0, \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{v_x^2}}), \quad b_1 \sim N(\beta_1, \sigma \sqrt{\frac{1}{v_x^2}}).$$

Nagu näeme, sõltub hinnangute täpsus juhusliku vea varieeruvusest (σ on juhusliku vea standardhälve) ja ka kasutatud argumenttunnuste väärtustest. Mida suurem on argumenttunnuse varieeruvus v_x^2 valimis, seda täpsemad hinnangud saadakse.

Kordajate standardhälvete hindamiseks valimi põhjal kasutatakse mudeli standardviga – juhusliku vea standardhälbe hinnangut s . Seega saame regressioonikordajate standardhälvete s_{b_0} ja s_{b_1} arvutamiseks järgmised valemid

$$s_{b_0} = s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{v_x^2}},$$

$$s_{b_1} = s \sqrt{\frac{1}{v_x^2}}.$$

Nagu ikka normaaljaotuse keskväärtuse korral, määratakse regressioonikordaja β_0 usalduspiirid usaldusnivool $1 - \alpha$ järgmiste valemitega

$$\underline{\beta}_0 = b_0 - \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_{b_0},$$

$$\bar{\beta}_0 = b_0 + \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_{b_0}$$

ja hoopis sagedamini kasutust leidvad usalduspiirid regressiooni-kordaja β_1 jaoks valemitega

$$\begin{aligned}\underline{\beta}_1 &= b_1 - \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_{b_1}, \\ \overline{\beta}_1 &= b_1 + \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_{b_1}.\end{aligned}$$

Näide 5.23. Leiame sisseastumispalli ja keskkooli keskmise hinde jaoks arvutatud regressioonikordajate usalduspiirid 95% usaldusnivool. Vajalik tabeliväärtus on $\bar{t}_{0.025; 14} = 2.145$. Arvutame regressioonikordajate standardhälbed

$$s_{b_0} = 3.07 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4.4^2}{1.74}} \approx 10.28,$$

$$s_{b_1} = 3.07 \sqrt{\frac{1}{1.74}} \approx 2.33.$$

Võrreldes saadud hinnanguid näeme, et kordaja β_1 – regressiooniseose tõus – on hinnatud täpsemini, kui kordaja β_0 – vabaliige.

Arvutame usaldusintervallid

$$\begin{aligned}\underline{\beta}_0 &= -1.64 - 2.14 \cdot 10.28 \approx -23.64, \\ \overline{\beta}_0 &= -1.63 + 2.14 \cdot 10.28 \approx 20.36,\end{aligned}$$

kordaja β_0 tõeline väärtus asub lõigul $[-23.64, 20.36]$;

$$\begin{aligned}\underline{\beta}_1 &= 7.87 - 2.14 \cdot 2.33 \approx 2.88, \\ \overline{\beta}_1 &= 7.87 + 2.14 \cdot 2.33 \approx 12.86,\end{aligned}$$

kordaja β_1 tõeline väärtus asub lõigul $[2.88, 12.86]$.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Kui argumenttunnusel pole mõju, on tõeline regressioonikordaja β_1 võrdne nulliga. Seega taandub ühe argumenttunnuse korral seose olulisuse kontrollimine hüpoteeside

$$H_0 : \beta_1 = 0,$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

kontrollimisele. Arvestades aga eespool toodud seost regressioonikordaja ja korrelatsioonikordaja vahel, on niisuguste hüpoteeside kontrollimine samaväärne korrelatsioonikordaja olulisuse kontrollimisega, mida on kirjeldatud punktis 5.1.2. Kuna sisukas hüpotees on kahepoolne, pole regressioonikordaja märk oluline ja reeglina kasutatakse otsuse langetamisel F -statistikut.

Nüüd on aga võimalik lahti mõtestada F -statistiku,

$$F = \frac{(n-2)r^2}{(1-r^2)}$$

sisulist tähendust. Selle statistiku kasutusele võtmisel oli lähtepunktiks järgmine väga lihtne idee – tuleb võrrelda muudatust hälvete ruutude summas, mille põhjustab argumenttunnuse lisamine, selle argumendi kasutamise korral saadava hälvete ruutude summaga. Esitame selle idee valemite abil. Kui me ei kasuta prognoosimisel argumenttunnust, on hälvete ruutude summa

$$S^2(\bar{y}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = v_y^2.$$

Kui me kasutame prognoosimisel argumenttunnust, on hälvete ruutude summa

$$S^2(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = v_y^2(1 - r^2).$$

Muudatus, mille põhjustas argumenttunnuse kasutamine, on siis

$$V = S^2(\bar{y}) - S^2(b_0, b_1) = r^2 v_y^2.$$

Suhe, mida soovitakse kasutada, omab siis kuju

$$\frac{V}{S^2(b_0, b_1)} = \frac{r^2}{1 - r^2}.$$

Leidmaks niisuguse suhte jaotust osutus vajalikuks mõlemad summad läbi jagada sobivalt valitud arvuga. Sisulistel kaalutlustel nimetatakse jagajat selle summa *vabadusastmete arvuks*. Vabadusastmete arvuga läbi jagatud hälvete ruutude summat nimetame lühidalt *keskruuduks*. Kuna muudatuse hälvete ruutude summas põhjustas loobumine ühest parameetrist, on V vabadusastmete arvuks 1. Nimetajas olev hälvete ruutude summa $S^2(b_0, b_1)$ saadakse, mõõtes n vaatlustulemuse hajutatust kahe parameetriga määratud sirge suhtes, seetõttu on tema vabadusastmete arvuks $n - 2$. Tavaliselt esitatakse statistikapaketide trükises kõik hälvete ruutude summad ja vabadusastmed, mis on vajalikud F -statistiku arvutamiseks, ühes koondtabelis. Kuna tegemist on hajuvuse (dispersiooni) muutumise uurimisega, kannab tabel nime dispersioonanalüüsi tabel.

Kui argumenttunnus ei oma mõju, ($\beta_1=0$) on juhuslike vigade kohta tehtud eelduste täidetuse korral F -statistiku jaotuseks F -jaotus, mille parameetriteks on ülal toodud vabadusastmete arvud, $F \sim F(1, n - 2)$. Mida täpsemaks muudab argumenttunnuse kasutamine prognoosi, seda suurem on muudatus hälvete ruutude summas ja seda suuremad on F -statistiku väärtused.

Neid asjaolusid arvestades saame eelpool toodud hüpoteeside kohta järgmise otsuse langetamise eeskirja :

*kui $F \geq \bar{f}_{\alpha;1,n-2}$, siis võtta vastu H_1 ;
 kui $F < \bar{f}_{\alpha;1,n-2}$, siis jääda H_0 juurde.*

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vab.-ast-med | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|--------------|---------------------------------|---------------------|
| Regr. seos | V | 1 | V | $F = \frac{V}{s^2}$ |
| Juh. viga | $S^2(b_0, b_1)$ | $n - 2$ | $s^2 = \frac{S^2(a, b)}{n - 2}$ | |
| Üldvar. | v_y^2 | $n - 1$ | | |

Vaatame näidet regressiooniseose olulisuse kontrollimise kohta.

Näide 5.24. Kontrollime, kas regressiooniseos sisseastumispalli ja keskkooli keskmise löpuhinde vahel on oluline.

Kahjuks on see olulisuse kontrollimine praegu meetoodiliselt vales kohas – niisugusest kontrollimisest tuleks regressiooniseose uurimist alustada.

Esitame kontrollitavad hüpoteesid

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_1 &= 0, \\ H_1 : \beta_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

ja valime otsuse langetamiseks vajaliku olulisuse nivoo, olgu $\alpha = 0.05$. Kasutades ära näites 5.3 saadud tulemused

$$v_y^2 = 240, \quad r = 0.67$$

ja näites 5.21 saadud tulemuse

$$s^2 = 9.44,$$

täidame dispersioonanalüüsi tabeli.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vab.-ast-med | Keskmistatud hälvete ruutude summa | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|--------------|------------------------------------|--------|
| Regr. seos | 107.74 | 1 | 107.74 | 11.40 |
| Juh. viga | 132.26 | 14 | 9.45 | |
| Üldvar. | 240 | 15 | | |

Viimasel real selles tabelis on rohkem ajalooline tähtsus – selle abil on võimalik arvutusi kontrollida. Kui kõik esimeses veerus olevad summad on arvutatud üksteisest sõltumatult, siis kahte esimest arvu kokku liites peame saama kolmanda.

Leiame tabelist F valitud olulisuse nivoole vastava kriitilise väärtuse, $\bar{f}_{0.05;1,14} = 4.60$. Kuna statistiku väärtus on suurem, $11.40 > 4.60$, peame vastu võtma sisuka hüpoteesi. Tulemus on kooskõlas näites 5.6 saadud tulemusega.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



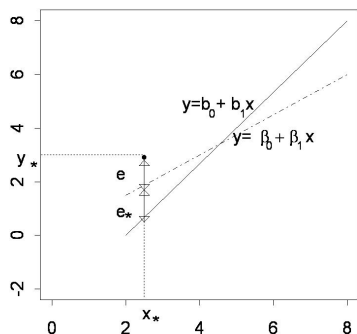
5.5.5. Usaldusintervallid prognoosile

Regressioonisirget kasutatakse enamasti prognoosimiseks, seetõttu on väga vajalik ka prognoosi täpsuse kirjeldamine. Olgu x_* etteantud argumenti väärtus, mis ei pea kuuluma regressioonikordajate hindamiseks kasutatud andmestikku. *Prognoosiks* nimetame väärtust y_* ,

$$\hat{y}_* = b_0 + b_1 x_*,$$

so argumenti x_* korral regressioonivõrrandi põhjal arvutatud väärtus. Prognoosimisel tehtav viga pärineb kahest allikast. Esiteks – pole teada tõeliste regressioonikordajate väärtusi, prognoosimisel saame kasutada ainult nende hinnanguid, seetõttu on

prognoos ebatäpne. Teiseks – prognoos määrab hinnangu funktsioontunnuse keskmisele tasemele $\beta_0 + \beta_1 x_*$ etteantud argumendi korral, igal konkreetsel katsel lisandub sellele keskväär- tusele juhuslik viga, tegelik mõõtmistulemus asub ka tõelisest regressioonisirgest mõnevõrra eemal. Neid kahte prognoosiga seonduvat viga illustreerib joonis 5.10.



Joonis 5.10. Prognoosiga seonduvad vead

Joonisel tähistab e_* prognoosi ebatäpsusest tekkivat viga, e aga sõltuva tunnuse tegeliku väärtuse erinevust tõelise regressiooniseosega määratud väärtusest. Katkendliku joonega on esitatud tõeline regressioonisirge (selle kordajad on tundmatud, seda ei saa tegelikult joonistada, joonisel on ta viirastusliku punktiirjoonena). Pideva joonega on esitatud valimi põhjal hinnatud regressioonisirge.

Prognoosiga seotakse kaks usaldusintervalli. Esimene neist arvestab ainult regressioonikordajate hinnangute kasutamisest tekkivat viga. Nimetame seda edaspidi *prognoosi usaldusintervalliks*. Teine usaldusintervall arvestab aga ka juhuslikku kõrvalekallet prognoosist, nimetame seda *üksikväärtuse usaldusintervalliks*. Kui juhuslikud vead on normaaljaotusega, siis on ka prognoos $\hat{y}_*$ normaaljaotusega,

$$\hat{y}_* \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_*, \sigma_*),$$

kus $\sigma_* = \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{v_x^2}}$. Selle vea tegelikuks kasutamiseks tuleb juhusliku vea tundmatu standardhälve σ asendada tema valimi põhjal määratud hinnanguga s , saame

$$s_* = s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{v_x^2}}.$$

Kuna regressioonikordajad b_0 ja b_1 pole sõltumatud, on prognoosi standardhälbe leidmiseks kasulik prognoosi arvutuseeskiri teisendada kujule

$$y_* = \bar{y} + b_1(x_* - \bar{x}).$$

Vahe $x_* - \bar{x}$ on meile teada olev konstant, saab näidata, et $\bar{y}$ ja b_1 on sõltumatud. Kuna $D\bar{y} = \sigma^2/n$ ja $Db_1 = \sigma^2/v_x^2$, siis saadaksegi dispersiooni omadustele tuginedes eelpool toodud valem prognoosi sagedustabelbe jaoks.

Nagu näeme, sõltub prognoosi standardhälve tema arvutamisel kasutatud argumenti väärtusest. Mida kaugemal asub argument x_* sõltumatu tunnuse keskväärtusest $\bar{x}$, seda ebatäpsem on prognoos.

Prognoosi usaldusintervall leitakse nagu ikka usaldusintervall normaalkaotuse keskväärtuse jaoks. Olgu $1 - \alpha$ valitud usaldusnivoo. Siis

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_* &= \hat{y}_* - \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_*, \\ \bar{\mu}_* &= \hat{y}_* + \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_*.\end{aligned}$$

Sõltuva tunnuse üksikväärtuse kohta on samuti võimalik näidata, et tehtud eeldusel on ta normaaljaotusega,

$$y_* \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_*, \sigma_{y_*}),$$

$$\text{kus } \sigma_{y_*} = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{s_x^2}}.$$

Selline vea avaldis tuleneb otseselt dispersiooni omadustest. Kuna juhuslik viga ja prognoosiviga on sõltumatud, siis nende dispersioonid liituvad.

Selle vea kasutamiseks tuleb juhusliku vea tundmatu standardhälve σ asendada tema valimi põhjal määratud hinnanguga s , saame

$$s_{y_*} = s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_* - \bar{x})^2}{s_x^2}}.$$

Üksikväärtuse usaldusintervall usaldusnivooga $1 - \alpha$ määratakse analoogiliselt prognoosi usaldusintervalliga,

$$\begin{aligned}\underline{y}_* &= \hat{y}_* - \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_{y_*}, \\ \bar{y}_* &= \hat{y}_* + \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2} s_{y_*}.\end{aligned}$$

Võib-olla on erinevate vigade tähendust kergem meeles pidada, kui vaatame nende ligikaudseid väärtusi suure valimi mahu n ja keskväertuse $\bar{x}$ lähedal valitud argumendi x_* korral. Siis $s_* \approx \frac{s}{\sqrt{n}}$, aga $s_y \approx s$. Vahekord on sama nagu punktis 2.5 käsitletud vahekord tunnuse üksikväärtuse ja tunnuse keskväertuse standardhälvete vahel.

Näide 5.25. Olgu tegemist üliõpilaskandidaadiga, kelle kesk-kooli keskmine hinne oli 4.3. Arvutame prognoosi, 95% usaldus-intervalli prognoosile ja usaldusintervalli üksikväärtusele. Kasu-tades eelmistes näidetes saadud tulemusi, leiame

$$y_* = -1.64 + 7.87 \cdot 4.3 \approx 32.20.$$

Usaldusintervalli määramiseks vajalik konstant on sama, mis ka-sutasime eelmises näites, $\bar{t}_{0.025;14} = 2.14$. Arvutame prognoosi standardhälbe

$$s_* = 3.07 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{(4.3 - 4.4)^2}{1.74}} \approx 0.80.$$

Asendades leitud arvud eelpool toodud valemitesse, saame usal-dusintervalli prognoosile

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_* &= 32.20 - 2.145 \cdot 0.80 \approx 30.49, \\ \bar{\mu}_* &= 32.20 + 2.145 \cdot 0.80 \approx 33.91.\end{aligned}$$

Seega kõikide üliõpilaskandidaatide jaoks, kelle keskkooli lõputunnistuse keskmine hinne on 4.3, asub sisseastumispalli kesk-väärtus lõigul [30.5, 33.9]. Keskmiselt on niisuguse keskkooli keskmise hinde korral oodata üsna head tulemust.

Usaldusintervall sõltuva tunnuse üksikväärtusele on hoopis laiem. Arvutame üksikväärtuse standardhälbe

$$s_{y_*} = 3.07 \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{(4.3 - 4.4)^2}{1.74}} \approx 3.17,$$

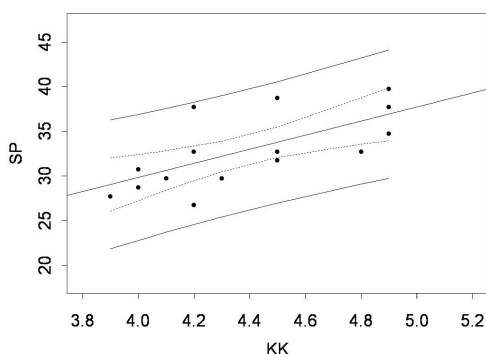
kust saame

$$\underline{y}_* = 32.20 - 2.145 \cdot 3.17 \approx 25.41,$$

$$\overline{y}_* = 32.20 + 2.145 \cdot 3.17 \approx 38.99.$$

Seega sisseastumispalli tegelik väärtus asub intervallis [25.41, 38.99]. Nagu näeme, on siin hinde varieeruvus hoopis suurem, võimalik on nii väga tagasihoidlik tulemus kui ka edu.

Väga sageli võimaldavad arvutipaketid tellida joonise, millel on kogu vaatluspiirkonna jaoks (iga argumendi jaoks vahemikust (x_{min}, x_{max})) kantud nii prognoosi kui ka üksikväärtuse usalduspiirid. Antud näite korral on see joonis järgmine:



Joonis 5.11. Prognoosi ja üksikväärtuse usalduspiirid .

Sisemised, kitsamad jooned määravad piirkonna, kus asub tõeline regressioonisirge $\beta_0 + \beta_1 x$. Välimised, laiemad, jooned määravad piirkonna, kus tehtud eeldustel peaks asuma 95% tegelikest sõltuva tunnuse väärtustest.



Loomulikult võib kontrollida ka statistilisi hüpoteese regressiooniparameetrite kohta. Näiteks võib vabaliikme kohta esitada hüpoteesid:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_0 &= 0, \text{ vabaliige on võrdne nulliga,} \\ H_1 : \beta_0 &\neq 0, \text{ vabaliige erineb nullist.} \end{aligned}$$

Otsuse langetamiseks tuleb kasutada statistikut t ,

$$t = \frac{b_0}{s_{b_0}},$$

mille jaotuseks on nullhüpoteesi kehtivuse korral t -jaotus parameetriga $n-2$, $t \sim t(n-2)$. Otsuse langetamiseks olulisuse nivool α saame siis järgneva eeskirja.

$$\begin{aligned} \text{Kui } |t| &\geq \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2}, \text{ võtta vastu sisukas hüpotees,} \\ \text{kui } |t| &< \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; n-2}, \text{ jääda nullhüpoteesi juurde.} \end{aligned}$$

Analoogilised hüpoteesid võib esitada ka regressioonisirge tõusu β_1 kohta, ka statistik nende kontrollimiseks on analoogiline. Kuna kasutatud sirge võrrandi korral võrdused $\beta_1 = 0$ ja $\rho = 0$ saavad esineda ainult üheaegselt, siis peaksid ka otsuse langetamiseks kasutatavad statistikud olema samad. Veendume selles,

$$t = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{r \cdot v_y \cdot v_x}{v_x \cdot s} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Näide 5.26. Kontrollime regressioonikordajate olulisust näites 5.20 leitud valemis, mis kirjeldas seost keskkooli keskmise hinde ja sisseastumispalli vahel. Valime olulisuse nivoo, $\alpha = 0.05$. Leiame tabelist sellele olulisuse nivoole vastava kriitilise väärtuse, $\bar{t}_{0.025, 14} = 2.14$. Esitame hüpoteesid

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_0 &= 0, \\ H_1 : \beta_0 &\neq 0. \end{aligned}$$

Leiame t-statistiku väärtuse,

$$t = \frac{-1.63}{10.27} \approx -0.16.$$

Kuna statistiku absoluutväärtus on väiksem kriitilisest tabeliväärtusest, $0.16 < 2.14$, peame jääma nullhüpoteesi juude. See tähendab, et mõeldav oleks sisseastumispalli ja keskkooli keskmist hinnet siduvat võrrandit otsida kujul

$$SP = \beta KK.$$

Niisuguse võrrandi korral muutub ka eeskiri kordaja β hindamiseks, sest tema arvutuseeskirja leidmine tähendab eelnevast erineva minimiseerimisülesande lahendamist. Jätame aga praegu uue kordaja arvutamata, peame ainult meeles, et regressioonivõrrandi muutmine toob endaga kaasa kõikide parameetrite ümberhindamise.



5.5.6. Jääkide analüüs

Statistiliste järelduste tegemiseks regressiooniseose kohta peavad olema täidetud kolm eeldust juhuslike vigade kohta:

- 1) juhuslikud vead on sõltumatud;
- 2) juhuslike vigade keskväärtus on null ja standardhälve konstantne;
- 3) juhuslikud vead on normaaljaotusega, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$.

Juhusliku vea hinnanguks i -nda vaatluse korral on tegeliku mõõtmistulemuse ja prognoosi vahe, nn *jääk* e *hälve*

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i,$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Eelduste täidetuse uurimiseks on kõige lihtsam kasutada jääkide graafikuid.

Jääkide graafikuks nimetatakse hajuvusdiagrammi, kus vertikaalteljele kantakse jääkide või standardiseeritud jääkide väärtused, horisontaaltelje võib aga valida kolmel erineval viisil. Horisontaalteljele võib kanda

1. sõltumatu argumendi väärtused x_i ;

2. sõltuva tunnuse prognoosid $\hat{y}_i$;
3. vaatluse järjekorranumbrid.

Kui regressioonanalüüsi eeldused on täidetud, peaksid kõik jääkide graafikud kujutama endast ühtlase laiusega riba täitvat punktisarve.

Standardiseerimiseks tuleb jääki jagada tema standardhälvega $s_{y_i - \hat{y}_i}$. Jäägi sagedustabelve sõltub argumenttunnuse väärtusest. Tähistame esmalt sümboliga h_i väärtuse, millega oli võrdeline argumentile x_i vastava prognoosi standardhälbe,

$$h_i = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{v_x^2}.$$

Suurus h_i on vaatluse *mõjukus*.

Jäägi standardhälve määratakse eeskirjaga

$$s_{y_i - \hat{y}_i} = s\sqrt{1 - h_i},$$

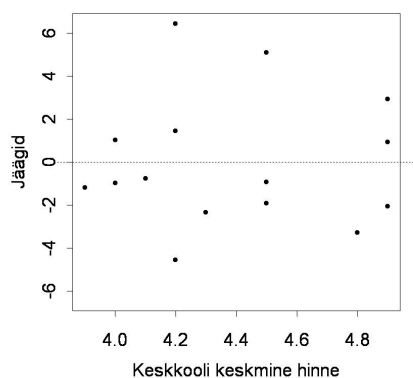
kus s on mudeli standardviga. Standardiseeritud jääkide hajutusdiagramm peaks regressioonanalüüsi eelduste täidetuse korral rahuldama järgmisi nõudeid:

- 1) positiivsete ja negatiivsete jääkide arv on ligikaudu võrdne;
- 2) Vastavalt standardse normaaljaotuse iseloomule peab vahemikus $(-1, 1)$ asuma umbes 68% standardiseeritud jääkidest, vahemikus $(-2, 2)$ – umbes 95% standardiseeritud jääkidest ja vahemikus $(-3, 3)$ – umbes 99% standardiseeritud jääkidest;
- 3) jääkide varieeruvus on konstantne.

Näide 5.27. Arvutame eelmistes näidetes kasutatud andmestiku jäägid, vaatluste mõjukused ja standardiseeritud jäägid.

| nr. | y_i | x_i | $\hat{y}_i$ | e_i | h_i | $e_i/(s\sqrt{1-h_i})$ |
|-----|-------|-------|-------------|-------|-------|-----------------------|
| 1 | 35 | 4.9 | 36.94 | -1.94 | 0.21 | -0.71 |
| 2 | 32 | 4.5 | 33.79 | -1.79 | 0.07 | -0.60 |
| 3 | 38 | 4.2 | 31.43 | 6.57 | 0.09 | 2.24 |
| 4 | 30 | 4.3 | 32.21 | -2.21 | 0.07 | -0.75 |
| 5 | 33 | 4.8 | 36.15 | -3.15 | 0.15 | -1.11 |
| 6 | 27 | 4.2 | 31.43 | -4.43 | 0.09 | -1.51 |
| 7 | 30 | 4.1 | 30.64 | -0.64 | 0.11 | -0.22 |
| 8 | 28 | 3.9 | 29.06 | -1.06 | 0.21 | -0.39 |
| 9 | 31 | 4.0 | 29.85 | 1.15 | 0.15 | 0.41 |
| 10 | 32 | 4.5 | 33.79 | -1.79 | 0.07 | -0.60 |
| 11 | 33 | 4.5 | 33.79 | -0.79 | 0.07 | -0.27 |
| 12 | 38 | 4.9 | 36.94 | 1.06 | 0.21 | 0.39 |
| 13 | 33 | 4.2 | 31.43 | 1.57 | 0.09 | 0.54 |
| 14 | 29 | 4.0 | 29.85 | -0.85 | 0.15 | -0.30 |
| 15 | 40 | 4.9 | 36.94 | 3.06 | 0.21 | 1.12 |
| 16 | 39 | 4.5 | 33.79 | 5.21 | 0.07 | 1.76 |

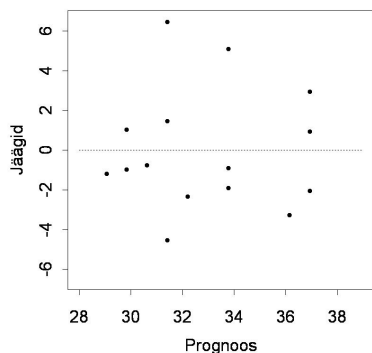
Joonisel 5.12 on jääkide graafik, kus horisontaalteljel kasutatakse sõltumatu tunnuse "Keskkooli keskmine hinne" väärtusi.



Joonis 5.12. Jääkide graafik

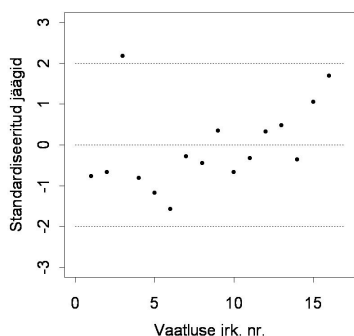
Joonisel 5.13 on jääkide graafik, kus horisontaalteljel kasu-

tatakse sõltuva tunnuse "Sisseastumispall" prognoose.



Joonis 5.13. Jääkide graafik

Viimasel joonisel on kujutatud standardiseeritud jäägid, horisontaalteljele on aga kantud vaatluse järjekorra number.



Joonis 5.14. Standardiseeritud jääkide graafik

Standardiseeritud jääkide graafikul võib tähele panna, et üks standardiseeritud jääk – kolmandale vaatlusele vastav – asub väljaspool ootuspärast vahemikku $(-2, 2)$. See on vaatlus, mille korral mudel töötas halvasti. Andmeid vaadates näeme, et tegemist oli üliõpilasega, kes sai tagasihoidlikku keskmise hinde (4.2) korral kõrge sisseastumispalli (38). Niisugune asi võib juhtuda. Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Üldjuhul esineb standardiseeritud jäägi suur väärtus nende vaatluste korral, kus mudel töötab halvasti. Mõistlik on vastavad vaatlused üle kontrollida ja püüda mõista, kas tegemist on juhusega või vastava vaatluse erilise iseloomuga.

Teistest erinevat vaatlust nimetatakse *erindiks*. Erindeid võib otsida nii standardiseeritud jäägi kui ka mõjukuse järgi.

Tuleme tagasi punktis 5.1.3 toodud näidete juurde ja vaatame, kuidas andmestiku iseärasused peegelduvad jääkide graafikul.

Näide 5.28. Vaatame andmestikku hiirte kohta. Leiame regressiooniseose, mis võimaldab kirjeldada kaalu sõltuvust pikkusest,

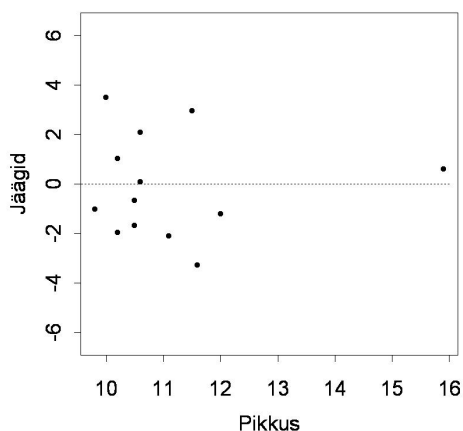
$$K = -2.20 + 2.36 \cdot P,$$

kusjuures mudeli standardviga $s=2.16$. Koondame kõik jääkide analüüsiks vajalikud suurused tabelisse.

Nagu varasemast teame, on selles andmestikus üks erind – eriline vaatlus, üks eriti suur hiir, kes genereerib umbes poole korrelatsioonikordaja väärtusest. Jääkide graafikuid analüüsides võib see erind kahe silma vahele jääda, kuna jäägid on selle vaatluse korral väikesed. Mudel töötab hästi, vaatlus oli nii mõjukas, et ta "mugandas" mudeli enda jaoks hästi töötama.

Vaadatavale andmestikule vastav jääkide graafik on toodud joonisel 5.15.

| nr. | y_i | x_i | $\hat{y}_i$ | e_i | h_i | $e_i/(s\sqrt{1-h_i})$ |
|-----|-------|-------|-------------|-------|-------|-----------------------|
| 1 | 22 | 10.5 | 22.55 | -0.55 | 0.09 | -0.27 |
| 2 | 25 | 10.0 | 21.37 | 3.63 | 0.12 | 1.79 |
| 3 | 23 | 10.6 | 22.79 | 0.21 | 0.09 | 0.10 |
| 4 | 20 | 9.8 | 20.90 | -0.90 | 0.13 | -0.45 |
| 5 | 20 | 10.2 | 21.84 | -1.84 | 0.10 | -0.90 |
| 6 | 23 | 10.2 | 21.84 | 1.16 | 0.10 | 0.57 |
| 7 | 22 | 11.6 | 25.14 | -3.14 | 0.08 | -1.52 |
| 8 | 25 | 10.6 | 22.79 | 2.21 | 0.09 | 1.07 |
| 9 | 25 | 12.0 | 26.08 | -1.08 | 0.10 | -0.53 |
| 10 | 22 | 11.1 | 23.96 | -1.96 | 0.08 | -0.95 |
| 11 | 28 | 11.5 | 24.91 | 3.09 | 0.08 | 1.49 |
| 12 | 21 | 10.5 | 22.55 | -1.55 | 0.09 | -0.75 |
| 13 | 36 | 15.9 | 35.28 | 0.72 | 0.84 | 0.84 |



Joonis 5.15. Jääkide graafik

Vaatluse erilisuse juhib tähelepanu temale vastav mõjukus $h_{13}, h_{13} = 0.84$. See on vähemalt kaheksa korda suurem kui ülejäänud vaatluste mõjukuse näitajad.

Vaatluse mõjukuse h_i järgi saab leida erindeid ilma hajuvusdiagrammi uurimata. Ühele lähedased mõjukuse väärtused viitavad sellele, et vastav vaatlus on erind. Orienteerivalt võib lugeda erindiks neid vaatlusi, mille korral $h_i > \frac{4}{n}$.

Huvitav on leida ka regressioonivõrrand ilma vaatlust 13 kasutamata. Kasutades tavalisi valemeid esimese 12 vaatluse jaoks saame

$$K = 5.47 + 1.64 \cdot P,$$

kusjuures mudeli standardviga $s = 2.19$. Näeme, et erindi kõrvale jätmine mõjutas regressioonikordajate väärtusi üsna tugevasti.



5.5.7. Osakorrelatsioonikordaja

Jääkide abil saab korrigeerida veel ühte lineaarse korrelatsioonikordaja nõrka kohta. Meenutame näites 5.8 toodud andmestikku, kus uuriti kahe testi hinde vahelist seost, hajuvusdiagrammi uurimine aga võimaldas selgitada, et testi hinnete vaheline korrelatsioon on põhjustatud kolmanda tunnuse – vanus – mõjust. Kui seost genereerival tunnusel on palju väärtusi, pole tema mõju avastamine hajuvusdiagrammi abil alati võimalik. Kirjeldame võtet, mis lubab ka sel juhul avastada kolmanda tunnuse mõju.

Olgu tunnusteks, millede vahelist seost tuleb kirjeldada, tunnused X ja Y , tunnuseks, mille mõju tahame elimineerida aga tunnus Z . Valime tunnuse X sõltuvaks tunnuseks, tunnuse Z sõltumatuks tunnuseks, leiame regressioonisirge ja arvutame jäägid. Olgu need $e_1^{(x)}, \dots, e_n^{(x)}$. Seejärel leiame teise regressioonisirge, valides sõltuvaks tunnuseks tunnuse Y , sõltumatuks tunnuseks aga tunnuse Z ning arvutame uuesti jäägid, olgu need $e_1^{(y)}, \dots, e_n^{(y)}$. Tunnuse Z mõju tunnustele X ja Y on arvesse võetud regressiooniseoses. Leides nüüd jääkide vahelise korrelatsioonikordaja, saame hinnata tunnuste X ja Y vahelise seose tugevust, olles vabastanud selle tunnuse Z mõjust. Nimetame jääkide vahelist korrelatsioonikordajat *osakorrelatsioonikordajaks* ja tähistame ta sümboliga $r_{xy.z}$. On võimalik näidata, et osakorrelatsioonikordaja leidmiseks sobib järgmine valem

$$r_{xy.z} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}.$$

Näide 5.29. Leiame näite 5.8 andmete põhjal osakorrelatsioonikordaja $r_{xy.z}$. Arvutame esmalt selleks vajalikud korrelatsioonikordajad. Näitest 5.8 saame, et $r_{xy} = 0.90$. Ülejäänud korrelatsioonikordajad aga arvutame valemi (5.1) järgi,

$$r_{xz} = 0.93 \quad \text{ja} \quad r_{yz} = 0.99.$$

Asendades korrelatsioonikordajate väärtused osakorrelatsioonikordajat määravasse valemisse saame

$$r_{xy.z} = \frac{0.90 - 0.93 \cdot 0.99}{\sqrt{(1 - 0.93^2)(1 - 0.99^2)}} = -0.27.$$

Saadud väärtus kinnitab, et testi hinnete vahelise korrelatsiooni põhjustas suurel määral vanuse mõju.



Ülesanded 5.

1. Kinnisvara müügiga tegelev büroo analüüsib oma tegevuse efektiivsust. Muude näitajate hulgas on registreeritud iga müüdud maja korral omaniku poolt määratud miinimumhind ja maja tegelik müügihind. Seitsme maja jaoks olid need (tuhandetes kroonides) järgmised

| | | | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|------|------|-----|------|
| miinimum | 835 | 900 | 705 | 1008 | 1102 | 946 | 1200 |
| tegelik | 880 | 912 | 762 | 1070 | 1110 | 990 | 1180 |

Joonistada nende tunnuste hajuvusdiagramm. Leida miinimumhinna ja maja tegeliku müügihinna vaheline lineaarne korrelatsioonikordaja, kontrollida selle olulisust.

2. Uurimaks lisandite mõju vee maitsele lasti katsealustel hinnata 100 pallises skaalas joogivee maitset. Kasutati 8 erineva magneesiumisisaldusega veeproovi. (Magneesiumi mõõdeti milligrammides liitri kohta). Veeproovi hindena kasutati katsealuste poolt määratud hinde keskväärtust. Tulemused olid järgmised

| | | | | | | | | |
|------------|-----|----|----|-----|-----|----|------|----|
| magneesium | 8.7 | 9 | 11 | 8.5 | 9.2 | 12 | 12.5 | 18 |
| hinnang | 20 | 25 | 26 | 48 | 65 | 87 | 90 | 97 |

Joonistada nende tunnuste hajuvusdiagramm. Leida tunnuste lineaarne korrelatsioonikordaja, Spearmanni korrelatsioonikordaja ja Kendalli korrelatsioonikordaja. Kontrollida Kendalli korrelatsioonikordaja olulisust.

3. Vaatluse all on 20 eelkooliealist last. Vaadeldes laste vaba mängu määras vilunud psühholoog hinnangu iga lapse sotsiaalsele arengule. Mõne aja möödudes korrati hindamist teise psühholoogi poolt. Tulemused olid järgmised:

I hinne 32 35 33 36 44 44 32 38 37 35

II hinne 36 34 34 40 42 40 35 40 38 35

I hinne 29 34 50 40 39 31 47 41 30 35

II hinne 35 32 51 38 42 33 46 42 29 35

Leida hinnangute vaheline Spearmani korrelatsioonikordaja. Kontrollida seose olemasolu erinevate hindajate hinnangute vahel.

4. Olgu tegemist testiga, mis väidetavalt koosneb kahest sõltumatust alamtestist. Iga testitu saab kaks hinnet – esimese ja teise alamtesti koondhinne. Uurija soovis kontrollida, kas väide alamtestide sõltumatuse kohta peab paika ja arvutas 95 hindepaaari põhjal alamtesti hinnete korrelatsioonikordaja. Selle väärtus oli 0.28. Leida usalduspiirid tõelise korrelatsioonikordaja jaoks. Kas alamtestid on sõltumatud?
5. Ühe televisiooniprogrammi vaatajaskonna uurimiseks viidi läbi ankeetküsitlus, kus muude andmete hulgas registreeriti ka vastaja haridustase ja see, kas ta jälgib antud programmi pidevalt või mitte. Tulemuse põhjal koostati kahemõõtmeline sagedustabel.

| Haridus\Jälgimine | Pidev | Juhuslik |
|------------------------|-------|----------|
| Lõpetamata keskharidus | 51 | 241 |
| Keskharidus | 64 | 136 |
| Lõpetamata kõrgem | 102 | 198 |
| Kõrgem haridus | 76 | 124 |

- (a) Leida selle tabeli äärejaotused.
- (b) Kas uuritavad tunnused on sõltumatud?
- (c) Valida tunnuste vahelise seose kirjeldamiseks sobiv kordaja ja arvutada tema väärtus.
6. On olemas test, mis võimaldab arvuliselt hinnata küsitletava stressiindeksit. Ühe arsti poolt on kogutud andmestik, mis kirjeldab stressiindeksi väärtust ja patsiendi südame seisundit. Tulemused on kokku võetud järgnevas kahemõõtmelises sagedustabelis.

| Stress\Süda | Haige | Terve |
|------------------|-------|-------|
| Indeks > 30 | 32 | 965 |
| Indeks ≤ 30 | 41 | 2230 |

- (a) Kas südame seisund ja stressi olemasolu on sõltumatud tunnused?
- (b) Kui tunnused pole sõltumatud, leida tabeli tinglikud reasagedused ja veerusagedused. Milles väljendub tunnuste sõltuvus?
- (c) Leida kordaja ϕ ja Tväärtussuprovi seosekordaja
7. Ühes reklaamifirma poolt tellitud sotsioloogilises uuringus esitati ka küsimus peamise uudisteallika kohta. Tulemused on toodud järgmises kahemõõtmelises sagedustabelis.

| Allikas\Sots. seis. | Tööline | Teenistuja |
|---------------------|---------|------------|
| Ajaleht | 140 | 200 |
| Televisioon | 25 | 40 |
| Raadio | 85 | 100 |

Arvutada selle sagedustabeli põhjal Guttmani λ .

8. Vaatluse all oli ühe riigi 150 linna, mis elanike arvu järgi jaotati kolme klassi – suur, keskmine ja väike. Igas linnas hinnati kuritegevuse taset kaheastmelises skaalas – kõrge, madal. Tulemused on kokku võetud järgnevas sagedustabelis.

| Linn\Kurit. tase | Kõrge | Madal |
|------------------|-------|-------|
| Suur | 44 | 6 |
| Keskmine | 32 | 18 |
| Väike | 29 | 21 |

Arvutada selle sagedustabeli põhjal kolm seosekordajat – γ , Somersi d ja Kendalli τ .

9. Sooviti kirjeldada seost monteerimisliini liikumiskiiruse (jalga/minutis) ja kontrollimisel avastatud defektsete toodete arvu vahel. Andmed olid järgmised

| | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| liini kiirus | 10 | 10 | 30 | 20 | 50 | 30 |
| praaktoodete arv | 21 | 19 | 15 | 16 | 14 | 17 |

Leida regressioonikordajad, korrelatsioonikordaja ja mudeli standardviga. Kontrollida regressiooniseose olulisust.

10. On teada, et valguse levimiskiirus teatavas lahuses sõltub lineaarselt lahuse kontsentratsioonist. On olemas seitse mõõtmistulemust, kus teadaoleva kontsentratsiooniga lahuses on määratud valguse levimiskiirus.

| | | | | | | | |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|
| kontsentr. | 0.40 | 0.70 | 1.00 | 1.20 | 1.40 | 1.70 | 2.00 |
| levimiskiirus | 0.23 | 0.34 | 0.42 | 0.55 | 0.61 | 0.77 | 0.84 |

- (a) Leida lineaarse seose välja kirjutamiseks vajalikud regressioonikordajad.
- (b) Kuidas muutub valguse levimiskiirus, kui lahuse kontsentratsioon kasvab ühe ühiku võrra?
- (c) Leida regressioonikordajate usaldusintervallid ja kontrollida regressioonikordajate olulisust.
- (d) Prognoosida valguse levimiskiirust, kui lahuse kontsentratsioon on 1.30. Leida usaldusintervall prognoosile ja üksikväärtusele.
- (e) Arvutada jäägid ja joonistada jääkide graafik.

6. DISPERSIOONANALÜÜS

Neljandas peatükis vaatasime võimalusi kahe üldkogumi võrdlemiseks. Võrdlemaks enam kui kahe üldkogumi keskväärtust on kasutatav statistiline meetod, mida nimetatakse *dispersioonanalüüsiks*. Meetodile pani aluse inglise statistik sir Ronald A. Fisher, kasutades seda peamiselt põllumajanduslike andmete analüüsimisel.

Tähistame võrreldavate üldkogumite arvu tähega k , nende keskväärtused aga $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Mitme keskväärtuse võrdlemisel on kõige lihtsam esitada kontrollimiseks järgmine hüpoteeside paar:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k, & \text{ üldkogumite kesk-} \\ & \text{väärtused on võrdsed,} \\ H_1 : \text{leidub } \mu_i \neq \mu_j, & \text{ üldkogumite keskväär-} \\ & \text{tuste seas on erinevaid.} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Olgu edaspidises uuritava tunnuse tähiseks Y , sageli nimetatakse seda tunnust ka *sõltuvaks tunnuseks*. Üldkogumite võrdlemiseks peab uurija käsutuses olema igast üldkogumist üks valim. Tähistame uuritava tunnuse väärtused sümboliga y_{ij} , kus esimene indeks näitab, millisest üldkogumist mõõtmine pärineb, teine indeks aga – mitmenda mõõtmisega on tegemist. Uurija käsutuses on seega järgmine andmestik:

| valimi number | mõõtmistulemused |
|---------------|------------------------------------|
| 1. valim | $y_{11} \ y_{12} \ \dots \ y_{1n}$ |
| 2. valim | $y_{21} \ y_{22} \ \dots \ y_{2n}$ |
| $\dots$ | $\dots$ |
| k . valim | $y_{k1} \ y_{k2} \ \dots \ y_{kn}$ |

Oletame näiteks, et on võimalik kasutada kolme võõrkeele õpetamise meetodikat. Meid huvitab, kas need tagavad ühesuguse keskmise teadmiste taseme. Otsuse langetamiseks vajaliku andmestiku saamiseks tuleb kolme, võimalikult ühesuguste algteadmistega rühma õpetada eri meetodikaid kasutades. Teadmiste mõõtmiseks tuleks õpingute lõpuks igas rühmas teha test. Iga rühma testi tulemused määravad erineva valimi.

Erinevate keskväärtustega mõõtmistulemused saame esitada mudeliga:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad (6.2)$$

kus μ_i tähistab sõltuva tunnuse keskväärtust i -ndas üldkogumis, ε_{ij} on juhuslik viga, mis võib olla põhjustatud väga mitmesugustest teguritest.

Niisugune lihtne mudel aga ei võimalda hästi analüüsida keskväärtuste erinevuse põhjuseid. Otstarbekaks osutub siin kasutusele võtta faktortunnused, mille mõju põhjustab keskväärtuste erinevusi. *Faktortunnus* iseloomustab katsetingimusi konkreetse valimi saamisel. See on enamasti nominaaltunnus, mille väärtust nimetatakse *faktori tasemeks* (*nivooks*). Keskväärtuste erinevuse põhjuste selgitamiseks võib üheaegselt kasutada mitut faktortunnust.

Ülal toodud näites võib kasutada ühte faktortunnust, milleks on loomulik valida õpetamise meetodika. Sellel faktortunnusel on kolm erinevat taset: katses kasutatud erinevad õpetamise meetodikad.

Faktortunnuste mõju uurimiseks muudetakse katsetulemusi kirjeldav mudel pisut keerulisemaks: üldkogumi keskväärtus μ_i jagatakse osadeks — üldkeskmiseks ja faktortunnuste mõjudest (või koosmõjudest) põhjustatud kõrvalekalleteks sellest üldkeskmisest. Ühe faktortunnuse korral jagatakse üldkogumi keskväärtus μ_i kaheks liidetavaks,

$$\mu_i = \mu + \alpha_i,$$

kus μ tähistab fiktiivset üldkeskmist,

α_i on faktortunnuse i -nda taseme põhjustatud muutus.

Dispersioonanalüüsi võimalused ja vahendid olenevad oluliselt vaadeldavast mudelist ja kasutatud katsekorraldusest.

Kavandades katset keskväärtuste võrdlemiseks tuleks esmalt määrata huvipakkuvate faktortunnuste arv ja seejärel nende kombineerimise viis. Hästi planeeritud katse korral on võimalik saada kogu vajalik informatsioon minimaalse katsete arvuga. Matemaatilises statistikas on spetsiaalne valdkond — katsete planeerimise teooria — mis tegeleb katseplaanide kavandamisega.

Sõltuvalt kasutatud faktorite arvust eristatakse ühe-, kahe- ja kolmefaktorilist dispersioonanalüüsi. (Suurema faktortunnuste arvu korral öeldakse tavaliselt, et tegemist on mitmefaktorilise dispersioonanalüüsiga.) Kahe faktori korral eristatakse sõltuvalt faktorite tasemete kombineerimise viisist ristmudelit ja hierarhilist mudelit. *Ristmudeli* korral on katseid tehtud kõikvõimalikel faktorite tasemete kombinatsioonidel. *Hierarhilise* mudeli korral on esimese faktori iga tase seotud teise faktori erinevate tasemetega. Kui igal faktortunnusel on igal tasemel teostatud ühepalju katseid, nimetatakse mudelit *tasakaalustatuks*, vastasel korral on tegemist *tasakaalustamata* mudeliga.

Faktori tasemed võivad olla antud katse jaoks spetsiaalselt valitud. Kui järeldusi tahetakse teha ainult nende tasemete kohta, nimetatakse mudelit *fikseeritud mõjudega mudeliks* (ka I liiki mudeliks). Kui faktortunnusel on palju erinevaid väärtusi ja katses kasutatud tasemeid vaadatakse juhusliku valimina faktori võimalike tasemete hulgast, nimetatakse mudelit *juhuslike mõjudega mudeliks* (ka II liiki mudeliks). Selle mudeli korral tehakse järeldusi kõigi tasemete kohta, ükskõik kas nad olid katses esindatud või mitte.

6.1. Fikseeritud mõjudega ühefaktoriline mudel

Vaatame esmalt olukorda, kus mudelis kasutatakse ainult ühte faktortunnust ja mõjud on fikseeritud. Katsetulemuste esitamiseks võib siis kasutada mudelit (6.2). Keskväärtuste võrdlemise meetod sõltub eeldustest, mida tehakse juhuslike vigade kohta.

Olgu täidetud samad eeldused, mida tegime regressioonanalüüsi korral:

- 1) juhuslikud vead ε_{ij} on sõltumatud,
- 2) juhuslike vigade keskvärtus on null ja dispersioon on faktori kõikidel tasemetel ühesugune,
- 3) juhuslikud vead on normaaljaotusega.

Kokkuvõtlikult võime öelda, et $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$.

Nende eelduste täidetuse korral kasutatakse faktori mõju kontrollimiseks klassikalist ühefaktorilist dispersioonanalüüsi. Kui mõni neist eeldustest pole täidetud, on sobiv kasutada mõnda mittepameetrilist dispersioonanalüüsi meetodit.

6.1.1. Tasakaalustatud mudel

Olgu vaatluse all üks faktor, millel on k erinevat taset, igal tasemel on tehtud n mõõtmist. Uurija käsutuses on seega k valimit. Kõikides valimites kokku on N elementi, $N = k \cdot n$.

Mõõtmistulemusi kirjeldab mudel

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad (6.3)$$

kus μ on fiktiivne üldkeskmine,
 α_i on faktori i -ndast tasemest põhjustatud muutus,
 ε_{ij} on juhuslik viga.

Lihtne on taibata, et niisugune mudel pole üheselt määratud. Tõepoolest, objektiivset informatsiooni saame ainult üldkogumi keskvärtuse μ_i kohta. Liidetavad selle suuruse esitamiseks võime aga valida mitmel viisil. Näiteks võime ülaltoodud mudeli (6.3) asemel kasutada mudelit

$$\mu_i = (\mu - c) + (\alpha_i + c),$$

kus c on suvaline konstant. Nii üldkeskmise kui faktori mõju kirjeldava parameetri väärtused muutusid, kuid ainus objektiivselt hinnatav parameeter μ_i jäi samaks. Mudeli ühese määratuse tagamiseks võetakse tavaliselt kasutusele lisakitsendus

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0,$$

mis on loomulik, kui arvestada, et parameeter α_i on sisuliselt kõrvaletalle üldkeskmisest.

Mudelit (6.3) võib vaadata kui eelmistes punktides uuritud regressioonanalüüsi mudeli üldistust. Tõepoolest, kui tahaksime prognoosida sõltuva tunnuse väärtust etteantud faktortunnuse tasemel i , siis mudelit

$$y = a + bx$$

pole võimalik kasutada. Pole ju nüüd argumendiks olev faktortunnus enam arvuline ja tema kasutamine niisuguses võrrandis oleks kohatu. Küll aga võime oletada, et faktortunnuse iga tase põhjustab üldkeskmise kindla suurusega muudatuse. Faktori iga taseme jaoks võime võtta kasutusele teatava indikaatori, mis näitab, kas sõltuva tunnuse väärtus on mõõdetud just sellel tasemel. Selle indikaatori väärtuseks on üks, kui mõõtmine oli tehtud faktortunnusel vastaval tasemel, ja null, kui ei olnud. Seega, kui oletame näiteks, et faktoril on kolm taset ja igas valimis on kaks vaatlust, saame andmete kirjeldamisel kasutada järgmist mudelit:

$$y_{11} = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{11}$$

$$y_{12} = \mu + \alpha_1 + \varepsilon_{12}$$

$$y_{21} = \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{21}$$

$$y_{22} = \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{22}$$

$$y_{31} = \mu + \alpha_3 + \varepsilon_{31}$$

$$y_{32} = \mu + \alpha_3 + \varepsilon_{32}$$

Niisuguste fiktiivsete argumentide kasutamine viib meid mitmemõõtmelise regressioonanalüüsi juurde, mida käesolevas raamatus pole käsitletud. Kõik dispersioonanalüüsis vajalikud valemid ja testid saadakse, lähtudes eespool toodud mudelist. Kuna meil aga niisugune üldisem käsitlus puudub, toetume nende tuletamisel intuiitsetele kaalutlustele.

Arvestades parameetri α_i tähendust — see on faktorite mõjust tingitud muutus üldkeskmises — võime hüpoteesid (6.1) asendada hüpoteeside paariga

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0, \\ H_1 : \text{leidub } \alpha_i \neq 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Väite kõigi üldkogumite keskvaartuste võrdsusest võime asendada väitega faktori mõju puudumisest.

Nagu kahe üldkogumi keskvaartuse võrdlemisel on ka siin otsuse langetamisel aluseks valimite keskvaartused. Kuna dispersioonanalüüs opereerib reeglina mitme erineva keskvaartusega,

tähistatakse segadustest hoidumiseks indeks, mille järgi vaatlustulemusi liidetakse, punktiga. Jälgides seda traditsiooni tähistame faktori i -ndal tasemel tehtud vaatlustulemuste keskväärtuse $\bar{y}_{i.}$,

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}$$

ja kõigi vaatlustulemuste keskväärtuse — üldkeskmise — $\bar{y}_{..}$,

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}.$$

Leides parameetrite μ ja α_i hinnangud vähimruutude meetodil, saame

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}, \quad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

Seega vähimruutude mudel omab kuju

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{i.}$$

Näeme, et saadud mudel prognoosib faktori i -ndal tasemel tehtud iga vaatlustulemuse väärtuseks vastava valimi keskväärtuse.

Sarnaselt regressioonanalüüsiga saame leitud mudelist arvutada hälvetate ruutude summa S^2 ,

$$S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2, \quad (6.5)$$

ja juhusliku vea ε_{ij} dispersiooni hinnangu,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{N - k}.$$

Hüpoteeside (6.4) kontrollimiseks — parameetrite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ olulisuse kontrollimiseks — kasutame punktis 5.5.4 kirjeldatud F -statistikut. Statistiku väärtust määrava murru lugejas peab

olema hälvetate ruutude summa muudatus, mille põhjustab faktori mõju arvestamine, nimetajas aga hälvetate ruutude summa vähimruutude mudelist (6.5).

Määramaks hälvetate ruutude summa muudatust, mille põhjustab faktori mõju arvestamine, tuleb leida esmalt hälvetate ruutude summa mudelist, mis ignoreerib faktortunnuse mõju. Kui faktori mõju puudub, on kõikide üldkogumite keskvaartused võrdsed ja mõõtmistulemusi saab esitada mudeliga

$$y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}.$$

Niisuguse mudeli korral on üldkeskmise μ vähimruutude hinnang $\hat{\mu}$ endine, $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$. Hälvetate ruutude summa sellest mudelist on S_y^2 ,

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2.$$

Lihtne on veenduda, et kehtib järgmine seos:

$$S_y^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2. \quad (6.6)$$

Tõepoolest, vaatluse erinevuse üldkeskmisest saame avaldada kahe liidetava kaudu:

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.}).$$

Tõstes selles seoses mõlemad pooled ruutu ja summeerides üle kõikide valimite ning üle kõikide vaatluste, saame:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2. \end{aligned}$$

Viimases avaldises saab keskmise liikme avaldada kujul

$$2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) = 2 \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.}).$$

Kuna

$$\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) = \sum_{j=1}^n y_{ij} - n\bar{y}_{i.} = \sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n \bar{y}_{i.} = 0,$$

siis on keskmine liidetav null.

Seega oleme saanud vajaliku tulemuse.

Siit saamegi avaldise hälvete ruutude summas faktori mõju arvestamise tõttu tekkinud muudatuse jaoks, mille tähistame S_A^2 :

$$S_A^2 = S_y^2 - S^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2. \quad (6.7)$$

Selleks, et arvutatud hälvete ruutude summad oleksid võrreldavad, tuleb nad F -statistiku arvutamisel läbi jagada neile vastavate vabadusastmetega.

Hälvete ruutude summas S_A^2 on k liidetavat, kuid nende liidetavate summa võrdub nulliga. Seega on "vabu liidetavaid" $k - 1$ ja summa vabadusastmete arv on $k - 1$. Hälvete ruutude summal S^2 on $N - k$ vabadusastet, kuna ta mõõdab N vaatluse varieeruvust k valimi keskmise ümber. Kuna valimite mahud on võrdsed, siis $N - k = k(n - 1)$.

Vabadusastmete arvuga läbi jagatud hälvete ruutude summasid

$$MS_A^2 = \frac{S_A^2}{k - 1} \quad \text{ja} \quad MS^2 = \frac{S^2}{k(n - 1)}$$

nimetatakse lühidalt *keskruutudeks*.

Hüpotheside (6.4) kontrollimiseks kasutatakse F -statistikut,

$$F = \frac{MS_A^2}{MS^2}.$$

Tavaliselt koondatakse F -statistiku arvutamiseks vajalikud suurused tabelisse, mida nimetatakse dispersioonanalüüsi tabeliks.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | $\bar{F}$ -suhe |
|----------------------|---|---------------|------------------------------|---------------------------|
| Faktor | $S_A^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$ | $k-1$ | $MS_A^2 = \frac{S_A^2}{k-1}$ | $F = \frac{MS_A^2}{MS^2}$ |
| Viga | $S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ | $k(n-1)$ | $MS^2 = \frac{S^2}{k(n-1)}$ | |
| Üldine | $S_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$ | $N-1$ | | |

Viimane rida selles tabelis on arvutuste kontrollimiseks. Kui hälvete ruutude summad on arvutatud õigesti, siis peab kehtima võrdus (6.6). Samuti peab vabadusastmete summa võrduma viimases reas oleva väärtusega $N - 1$.

Nullhüpoteesi kehtides on F -statistiku jaotuseks F -jaotus, mille parameetriteks on kasutatud hälvete ruutude summade vabadusastmed,

$$F \sim F(k-1, k(n-1)).$$

Kui kasutame olulisuse nivood α , on otsuse langetamise eeskiri järgmine:

kui $F \geq \bar{f}_{\alpha; k-1, k(n-1)}$, vastu võtta H_1 ,

kui $F < \bar{f}_{\alpha; k-1, k(n-1)}$, jääda H_0 juurde.

Vaatame näidet dispersioonanalüüsi tabeli väljakirjutamise kohta.

Näide 6.1. Keeltekoolis õpetatakse inglise keelt kolme metoodika põhjal. Kolmkümmend ühesuguste algteadmistega õppurit jagatakse juhusliku valiku alusel kolme rühma, igasse 10 õppurit. Kursuse lõpus tehakse kõigile ühesugune test, mille tulemused on järgmised:

meetod A: 72 97 33 55 64 82 81 99 84 63

meetod B: 77 26 38 29 20 75 46 35 46 26

meetod C: 16 24 28 30 40 19 31 41 20 45

Kas saab tõestada, et keskmine teadmiste tase on erinevate metoodika kasutamise korral erinev? Olulisuse nivooks valime 0.05.

Faktortunnuseks on õpetamise meetod, faktoril on 3 taset ($k = 3$). Igas grupis on 10 õpilast, seega $n = 10$. Kontrollitav hüpoteeside paar on järgmine:

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, kõigi metoodikate puhul on keskmised hinded võrdsed,

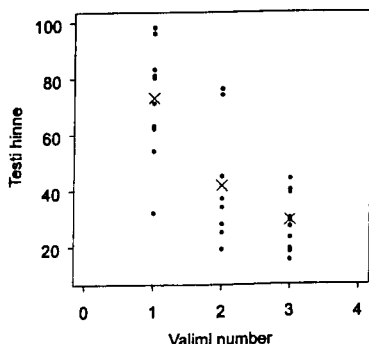
$H_1 : \text{leidub } \alpha_i \neq 0$, vähemalt ühe metoodika keskmine erineb teisest.

Leiame tabelist F valitud olulisuse nivoole ja kasutatud vabadusastmetele vastava kriitilise väärtuse, $\bar{f}_{0.05;2,27} = 3.35$.

Arvutame kõigepealt vajalikud keskmised:

$$\bar{y}_{..} = 48.1, \bar{y}_{1.} = 73, \bar{y}_{2.} = 41.8, \bar{y}_{3.} = 29.4.$$

Tulemuste näitlikustamiseks võib nad esitada hajuvusdiagrammil, kus horisontaalteljel näidatakse faktori taseme number, vertikaalteljel aga testi hinne. Valimite keskvväärtused on joonisele kantud ristikesega, üldkeskmise väärtuse kohal on punktiirjoon.



Joonis 6.1. Testi hinnete hajuvusdiagramm

Näeme, et valimite keskväärtused on küllalt erinevad. Hindamaks, kas tunnuse varieeruvuse taustal on need erinevused olulised, täidame dispersioonanalüüsi tabeli ja arvutame F -statistiku väärtuse.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F -suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|-----------|
| Õpetamismeetod | 10093.8 | 2 | 5046.9 | 16.823 |
| Viga | 8100.0 | 27 | 300.0 | |
| Üldine | 18193.8 | 29 | | |

Arvutatud F -statistiku väärtus on suurem kui tabelist leitud kriitiline väärtus, $16.823 > 3.35$. Võtame vastu sisuka hüpoteesi: võime pida tõestatuks, et erinevad õpetamise meetodikad annavad erineva keskmise tulemuse. Risk eksida ei ole seejuures suurem kui 5%.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Paremini mõistmaks kasutatud testi olemust on kasulik veenduda, et nullhüpoteesi kehtides hindavad mõlemad keskrüüdnud ühte ja sama mudeli parameetrit — juhusliku vea dispersiooni σ^2 . Arvutame keskrüüdnud keskväärtused.

Keskväärtuse arvutamiseks on vaja hälvete ruutude summad S^2 ja S_y^2 avaldada juhuslike vigade kaudu. Lähtume mudelist (6.4)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$

ja avaldame siit juhusliku vea

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu - \alpha_i.$$

Tähistades

$$\bar{\varepsilon}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \quad \text{ja} \quad \bar{\varepsilon}_{.} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij},$$

saame need formaalsed keskmised avaldada ülejäänud mudeli elementide kaudu,

$$\bar{\varepsilon}_{i.} = \bar{y}_{i.} - \mu - \alpha_i \text{ ja } \bar{\varepsilon}_{..} = \bar{y}_{..} - \mu.$$

Valimite keskväärtuste ja üldkeskmise jaoks saame siis esitused

$$\bar{y}_{i.} = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} \text{ ja } \bar{y}_{..} = \mu + \bar{\varepsilon}_{..}$$

Kuna $y_{ij} - \bar{y}_{i.} = \varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.}$, saame hälvetate ruutude summa (6.6) esitada kujul

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\varepsilon_{ij}^2 - 2\varepsilon_{ij} \bar{\varepsilon}_{i.} + \bar{\varepsilon}_{i.}^2) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 - 2n \sum_{i=1}^k \bar{\varepsilon}_{i.}^2 + n \sum_{i=1}^k \bar{\varepsilon}_{i.}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k n \bar{\varepsilon}_{i.}^2. \end{aligned}$$

Arvestades, et kehtib seos

$$E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2\right) = \frac{1}{n} \sigma^2,$$

saame leida mudeli suhtes arvatud hälvetate ruutude summa keskväärtuse:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n E(\varepsilon_{ij}^2) - \sum_{i=1}^k n E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) = N\sigma^2 - k\sigma^2 \\ &= \sigma^2(N - k). \end{aligned}$$

Siit

$$E(MS^2) = \frac{E(S^2)}{(N - k)} = \sigma^2,$$

juhuslikule veale vastava keskrõu keskväärtuseks on σ^2 .

Arvutame nüüd faktortunnusele vastava keskrõu keskväärtuse. Kuna $\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} = \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}$, saame hälvetate ruutude summa (6.7) esitada kujul

$$S_A^2 = n \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2.$$

Leiame keskväärtuse:

$$\begin{aligned} E(S_A^2) &= n \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 + 2n \sum_{i=1}^k \alpha_i E(\bar{\varepsilon}_{i.}) - 2n \sum_{i=1}^k \alpha_i E(\bar{\varepsilon}_{..}) \\ &\quad + n \sum_{i=1}^k E(\bar{\varepsilon}_{i.}^2) - 2n E\left(\sum_{i=1}^k \bar{\varepsilon}_{i.} \bar{\varepsilon}_{..}\right) + n \sum_{i=1}^k E(\bar{\varepsilon}_{..}^2), \end{aligned}$$

$$\text{kus } E\left(\sum_{i=1}^k \bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i\right) = E\left(\bar{\varepsilon}_i, \sum_{i=1}^k \bar{\varepsilon}_i\right) = E(\bar{\varepsilon}_i^2)$$

ja kuna ε_{ij} on sõltumatud juhuslikud suurused keskväärtusega 0 ja dispersiooniga σ^2 , siis kehtivad võrdused:

$$\text{Seega } E(\bar{\varepsilon}_i^2) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad E(\bar{\varepsilon}_i^2) = \frac{\sigma^2}{nk}, \quad E(\bar{\varepsilon}_i) = 0.$$

$$E(S_A^2) = n \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 + k\sigma^2 - \sigma^2 = (k-1)\sigma^2 + n \sum_{i=1}^k \alpha_i^2$$

ja

$$E(MS_A) = \sigma^2 + \frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i^2.$$

Kui nullhüpotees kehtib, on teine liidetav võrdne nulliga ja faktorile vastava keskruudu keskväärtuseks on samuti σ^2 .

Dispersioonanalüüsi keerulisemate mudelite korral on keskruutude keskväärtuste leidmine olulise tähtsusega. See võimaldab kindlaks määrata, milliste keskruutude suhet teatavate parameetrite olulisuse kontrollimiseks tuleb kasutada.

6.1.2. Tasakaalustamata mudel

Kui faktori igal tasemel ei õnnestu teha ühesugust arvu mõõtmisi, muutuvad arvutusvalemid pisut keerukamaks. Olgu esimese valimi maht n_1 , teise valimi maht n_2 jne. Vaatluste koguarv N avaldub nüüd teisiti:

$$N = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Valimite keskväärtuste ja üldkeskmise arvutamisel tuleb arvestada erinevaid valimimahte:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij},$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}.$$

F -statistiku arvutamiseks vajalikud hälvete ruutude summad on leitavad järgmiste valemite abil:

$$S_A^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2,$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2,$$

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2.$$

Juhusliku vea vabadusastmete arvuks on nagu varemgi $N - k$.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F -suhe |
|----------------------|---|---------------|--------------------------------|---------------------------|
| Faktor | $S_A^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$ | $k - 1$ | $MS_A^2 = \frac{S_A^2}{k - 1}$ | $F = \frac{MS_A^2}{MS^2}$ |
| Viga | $S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ | $N - k$ | $MS^2 = \frac{S^2}{N - k}$ | |
| Üldine | $S_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$ | $N - 1$ | | |

Kasutades olulisuse nivood α , on otsuse langetamise eeskiri järgmine:

kui $F \geq \bar{f}_{\alpha; k-1, N-k}$, vastu võtta H_1 ,
 kui $F < \bar{f}_{\alpha; k-1, N-k}$, jääda H_0 juurde.

6.2. Keskmiste mitmene võrdlemine

Näites 6.1 õnnestus olulisuse nivool 0.05 vastu võtta sisukas hüpotees: erinevate õpetamismeetodite korral on testi hinde keskväärts erinev. Vaadates testi hinnete keskväärtsi erinevate valimite korral võib arvata, et kaks äärmuslikke tulemusi andnud meetodid — meetod A ja meetod C — tagavad oluliselt erineva keskmise hinde. Nende meetodite vahekorra hindamiseks meetodiga B pole aga otsuse langetamiseks eeskirja. Küsimusele, millised keskväärtsed tegelikult erinevad, jäi vastus andmata.

Sellele küsimusele annab vastuse keskmiste mitmese võrdlemise protseduur. Otsuse langetamisel on siin aluseks keskväärtsuste paariviisiline võrdlemine. Vaatame esmalt, millised vead on seotud mitmese võrdlemisega. Olgu uuritava faktoril lihtsuse mõttes kolm taset. Siis on vaja võrrelda kolme keskväärtsust.

Kolme keskväärtsuse võrdlemiseks on vaja testida kolme hüpoteeside paari:

| I | II | III |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ | $H_0 : \mu_1 = \mu_3$ | $H_0 : \mu_2 = \mu_3$ |
| $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ | $H_1 : \mu_1 \neq \mu_3$ | $H_1 : \mu_2 \neq \mu_3$ |

Otsuse langetamiseks valime olulisuse nivoo, olgu see α iga paari puhul. Olulisuse nivoo määrab tõenäosuse esimest liiki vea tegemiseks: tegelikult võrdsete keskväärtsuste oluliselt erinevaks tunnistamiseks. Üksiku testi korral tehtud esimest liiki viga nimetatakse mitmesel võrdlemisel *võrdlusviisiliseks veaks*. Tõenäosus, et sisuka hüpoteesi vastuvõtmisel ei tehtud viga (so tõenäosus, et võrdlusviisilist viga ei tekkinud) on $1 - \alpha$.

Mitmene võrdlemine tähendab terve hüpoteeside seeria kontrollimist. Otsustuste seeriat kui tervikut iseloomustab spetsiifiline viga – eksimus, mis seisneb selles, et *vähemalt* ühe hüpoteesipaari korral tehti esimest liiki viga. Niisugust viga nimetatakse mitmesel võrdlemisel *katseviisiliseks veaks*. Saab näidata, et kui keskväärtsuste vahekorra selgitamiseks tuleb teha g võrdlust ja võrdlusviisilise vea tõenäosus on α , siis katseviisilise vea tõenäosus p_g on tõkestatud,

$$p_g \leq 1 - (1 - \alpha)^g. \quad (6.8)$$

Seega, kui ülal toodud kolme hüpoteesipaari testida olulisuse nivool 0.05, siis katseviisilise vea tõenäosus on $1 - 0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.95 = 1 - 0.8574 = 0.1426$.

Näeme, et katseviisilise vea tõenäosus võib olla tunduvalt suurem võrdlusviisilise vea tegemise tõenäosusest. Võrdluste arvu g kasvades kasvab katseviisilise vea tõenäosus üsna kiiresti.

Kui võrrelda tuleb k keskväärtust, siis kõikide tehtavate paariviisiliste võrdluste arvuks on C_k^2 — kombinatsioonide arv k elemendist kahekupa. Seega k keskmise võrdlemisel on vaja teha g võrdlust, kus

$$g = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Näiteks viie üldkogumi keskväärtuse võrdlemisel tuleb teha 10 paariviisilist võrdlust, kaheksa üldkogumi keskväärtuse võrdlemisel aga juba 28 paariviisilist võrdlust. Paariviisiliste võrdluste arv kasvab võrreldavate keskväärtuste arvu kasvades üsna kiiresti. Sama kiiresti kasvab ka katseviisilise vea tõenäosus. Kui võrdlusviisilise vea tõenäosus on 0.05, siis viie üldkogumi keskväärtuse võrdlemisel on katseviisilise vea tõenäosus $1 - 0.599 = 0.401$. Kaheksa keskväärtuse võrdlemisel on aga katseviisilise vea tõenäosus juba $1 - 0.238 = 0.762$.

Mitmese võrdlemise meetodeid on väga palju, kusjuures kontroll erinevate vigade üle on nende meetodite korral erinev. Tutvume mõne mitmese võrdlemise meetodiga.

6.2.1. Fisher'i *LSD*-test

Nimetatud meetod on üks vanemaid protseduure keskväärtuste paariviisiliseks võrdlemiseks. Kui F -statistikut kasutades õnnestub keskväärtuste erinevus tõestada, siis võetakse vaatluse alla hüpoteeside paarid

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_i &= \mu_j, \\ H_1 : \mu_i &\neq \mu_j; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$i = 1, 2, \dots, k-1; j = i+1, \dots, k$.

Otsuse langetamisel on aluseks punktis 4.1.3 kirjeldatud T -statistik. Erinevalt varasemast kasutatakse keskväärtuste vahe $\bar{y}_i - \bar{y}_j$ standardhälbe arvutamisel kõikide valimite põhjal arvutatud ühist dispersiooni hinnangut, milleks on juhuslikule veale vastav keskruut MS^2 . Ka otsuse langetamise eeskiri esitatakse pisut teisel kujul, nimelt ei ole kriitiliseks väärtuseks tabelist

võetud konstant, vaid kriitiline väärtus korrutatakse keskväärtuste vahe standardhällbega. Saadud korrutist nimetatakse *vähimaks oluliseks vaheks LSD*. Niisiis *LSD* määratakse eeskirjaga

$$LSD = \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; N-k} \sqrt{MS^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)},$$

kus n_i, n_j on vastavate valimite mahud, $\bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; N-k}$ on t -statistiku kriitiline väärtus olulisuse nivool α ja vabadusastmete arvul $N - k$ ning MS^2 on juhuslikule veale vastav keskruut. Otsuse langetamise eeskiri on aga järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| &\geq LSD, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| &< LSD, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Kui aga valimite mahud on võrdsed, $n_i = n_j = n$, siis saab *LSD* leida valemiga

$$LSD = \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; N-k} \sqrt{\frac{2MS^2}{n}}.$$

Näide 6.2. Jätkame näites 6.1 esitatud ülesande lahendamist. Keeletesti hinnete analüüsimisel läks korda nullhüpotees kummutada ja võtta vastu sisukas hüpotees: kõikide õpetamismeetodite korral ei saada ühesugust keskmist tulemust. Püüame nüüd paariviisiliste võrdluste abil vastata küsimustele:

Kas meetodi A keskmine hinne erineb meetodi B keskmisest hinnest?

Kas meetodi B keskmine hinne erineb meetodi C keskmisest hinnest?

Kas meetodi A keskmine hinne erineb meetodi C keskmisest hinnest?

Arvutame vähima olulise erinevuse:

$$LSD = \bar{t}_{\frac{\alpha}{2}; 27} \sqrt{\frac{2MS^2}{10}} = 2.05 \sqrt{\frac{300}{5}} \approx 15.88,$$

st loeme oluliselt erinevateks need keskmised, millede vahe on suurem kui 15.88.

Järgmiseks arvutame valimite keskväärtuste vahed ja võrdleme neid vähima olulise vahega:

$$\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} = 73 - 29.4 = 43.6 > 15.88,$$

$$\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} = 73 - 41.8 = 31.2 > 15.88,$$

$$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} = 41.8 - 29.4 = 12.4 < 15.88.$$

Näeme, et meetodi A puhul erineb testi hinde keskmine tase oluliselt teiste meetodite poolt tagatud tasemest. Erinevust meetodite B ja C vahel aga ei õnnestunud tõestada.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



LSD-meetodi korral ei ole katseviisilise vea tõenäosus kontrolli all. Võrdlemisel antakse ette võrdlusviisilise vea tõenäosus.

6.2.2. Bonferroni test

Bonferroni testi konstrueerimisel võetakse kontrolli alla katseviisilise vea tõenäosus. Itaalia matemaatik Bonferroni tõestas, et iga g korral kehtib võrratus

$$1 - (1 - \alpha)^g \leq g\alpha,$$

kui α on 0 ja 1 vahel. Seega on g paariviisilise võrdluse korral katseviisilise vea tegemise tõenäosus tõkestatud suurusega $g\alpha$,

$$p_g \leq g\alpha,$$

kus α on võrdlusviisilise vea tõenäosus.

Kui soovime, et katseviisiline viga poleks suurem kui α , tuleb võrdlusviisilise vea suuruseks määrata $\frac{\alpha}{g}$. Sellele tingimusele tuginedes saame vähima olulisuse erinevuse statistiku asendada Bonferroni statistikuga:

$$BSD = \bar{t}_{\frac{\alpha}{2g}; N-k} \sqrt{MS^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}.$$

Eeskiri hüpoteeside (6.9) kohta otsuse langetamiseks on siis järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| &\geq BSD, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| &< BSD, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Näide 6.3. Kasutades näites 6.1 toodud andmeid, tuleb teha kolm paariviisilist võrdlust. Kui soovime katseviisilise vea tõenäosuse tõkestada arvuga 0.05, tuleks paariviisilised võrdlused teha olulisuse nivool $\alpha = \frac{0.05}{3} \approx 0.0167$. Vastava t -statistiku väärtus oleks $\bar{t}_{0.0083;27} \approx \bar{t}_{0.01;27} = 2.47$. Bonferroni olulise erinevuse statistiku väärtuseks saame:

$$BSD = \bar{t}_{\frac{\alpha}{2g}; N-k} \sqrt{MS^2 \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 2.47 \sqrt{\frac{300}{5}} \approx 19.13.$$

Kuigi oluline vahe on suurem kui Fisheri testi korral, otsustused keskmiste erinevuse kohta selles näites ei muutu. Katseviisilise vea tõenäosuseks on aga nüüd 0.05. Olulise vahe väärtuse suurenemine garanteerib, et kõigi paariviisiliste võrdluste tegemisel risk eksida ühe või enama erinevuse oluliseks tunnistamisel pole suurem kui 5%.

♥

6.2.3. Tukey test

Tukey test kontrollib samuti võrdlusviisilist viga. See protseduur põhineb haarde jaotusel. Protseduur on mõeldud võrdsete mahtudega valimite jaoks, olgu nagu tavaliselt valimi mahu tähiseks n . Vaatame valimite keskväärtusi. Tähistagu $\bar{y}_{max}$ suurimat keskväärtust ja $\bar{y}_{min}$ väikseimat keskväärtust. Valimite keskväärtused moodustavad omakorda valimi, keskväärtuste valimi, mille haare on $\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}$. Kui nullhüpotees kehtib, on niisuguse valimi sobivalt normeeritud haarde jaotust võimalik leida.

Keskväärtuste võrdlemisel tuginetakse Tukey olulise erinevuse statistikule, mis kasutab nn studentiseeritud haarde (so standardvea abil normeeritud haarde) kriitilist väärtust $\bar{q}_{\alpha; k, N-k}$,

$$TSD = \bar{q}_{\alpha; k, N-k} \sqrt{\frac{MS^2}{n}}.$$

Eeskiri hüpoteeside (6.9) kohta otsuse langetamiseks on siis järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| &\geq TSD, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } |\bar{y}_i - \bar{y}_j| &< TSD, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Näide 6.4. Leiame näite 6.1 andmetel Tukey olulise vahe. Valime katseviisilise vea tõenäosuseks 0.05 ja leiame tabelist P kolmele valimile ja vabadusastmete arvule 27 vastava kriitilise väärtuse, $\bar{q}_{\alpha; k, N-k}$,

$$\bar{q}_{0.05; 3, 27} \approx \bar{q}_{0.05; 3, 30} = 3.49.$$

Asendades valemisse vajalikud arvud saame

$$TSD = 3.49 \sqrt{\frac{300}{10}} \approx 19.12.$$

Leitud oluline vahe on lähedane eelmises näites leitud Bonferroni olulise vahega. Ka järeldused, mida saame keskväärtuste erinevuste kohta teha, on samasugused.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



6.2.4. Scheffe test

Scheffe mitmese võrdluse protseduuriga leitakse üheaegsete usaldusintervallide pere, mis etteantud usaldusnivooga $1 - \alpha$ kaatab iga keskväärtuste lineaarkombinatsiooni $\sum c_i \mu_i$. Vaatame esmalt, milleks üldse peaksime tegelema keskväärtuste lineaarkombinatsioonidega.

Kui soovime võrrelda näiteks faktori teisele ja kolmandale tasemele vastavaid keskväärtusi, siis tähendab see hüpoteeside

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_2 &= \mu_3, \\ H_1 : \mu_2 &\neq \mu_3 \end{aligned}$$

kontrollimist. Need hüpoteesid võib sõnastada ka keskväärtuste vahe $\mu_2 - \mu_3$ abil:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_2 - \mu_3 &= 0, \\ H_1 : \mu_2 - \mu_3 &\neq 0. \end{aligned}$$

Kui tahame aga teada, kas faktori esimese ja kolmanda taseme keskväärtuste keskmine erineb teise ja neljanda taseme keskväärtuste keskmisest, siis võiks hüpoteesid sõnastada järgmiselt:

$$H_0 : \mu_1 + \mu_3 = \mu_2 + \mu_4,$$

$$H_1 : \mu_1 + \mu_3 \neq \mu_2 + \mu_4.$$

Siin võime nullhüpoteesi avaldada keskväärtuste lineaarkombinatsiooni abil:

$$\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 = 0.$$

Üldjuhul on keskväärtuste *lineaarkombinatsioon* l teatavate kordajatega (need võivad olla ka negatiivsed) läbi korrutatud keskväärtuste summa,

$$l = \sum_{i=1}^k c_i \mu_{i..} \quad (6.10)$$

Lineaarkombinatsiooni, mille kordajate summa võrdub nulliga,

$$\sum_{i=1}^k c_i = 0, \quad (6.11)$$

nimetatakse *kontrastiks*.

Kontrasti kordajate c_i väärtused valitakse tuginedes vaadatava ülesande sisulisele tähendusele. Näiteks kliinilises katses, kus uuritakse kahe uue ravimi mõju vererõhule, osaleb kolm rühma. Ühele rühmale antakse üht ravimit, teisele teist. Kolmas on kontrollrühm, kellele antakse (psühholoogilise efekti kindlakstegemiseks) ravimi asemel toimet ainet (*placebo*). Sel juhul võiksid huvi pakkuvad kontrastid olla järgmised:

$$l_1 = 1\mu_1 + 1\mu_2 - 2\mu_3,$$

$$l_2 = 1\mu_1 - 1\mu_2 + 0\mu_3.$$

Kontrast l_1 kordajatega 1, 1 ja -2 võrdleb faktori keskmist taset (st ravimite mõjul saadud vererõhu keskväärtust) kontrollrühma keskväärtusega. Teine kontrast l_2 , mille kordajad on 1, -1 ja

0, võrdleb faktori kahe taseme keskväärtusi (kahe ravimi mõju) omavahel.

Kontrast avardab erinevatele faktori tasemetele vastavate keskväärtuste võrdlemise võimalusi.

Scheffe usalduspiirid on üheaegsed selles mõttes, et tõenäosusega $1 - \alpha$ sisalduvad kõikvõimalikud keskväärtuste lineaarkombinatsioonid oma usaldusintervallides. Olulisteks — oluliselt nullist erinevateks — loetakse need kontrastid, mille üheaegne usaldusintervall ei sisalda nulli.

Tähistame uurijat huvitava kontrasti sümboliga l ,

$$l = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots + c_k\mu_k,$$

vajagu kontrollimist hüpoteeside paar:

$$H_0 : l = 0,$$

$$H_1 : l \neq 0.$$

Tingimuse, et selle kontrasti usaldusintervall ei sisalda nulli, saab jällegi esitada sobivalt valitud olulise erinevuse SSD kaudu. Olgu

$$SSD = \sqrt{(k-1)MS^2 \bar{f}_{\alpha; k-1, N-k} \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i}}$$

ja

$$\hat{l} = c_1\bar{y}_{1.} + c_2\bar{y}_{2.} + \dots + c_k\bar{y}_{k.}.$$

Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

$$\begin{aligned} &\text{kui } |\hat{l}| \geq SSD, \text{ vastu võtta } H_1, \\ &\text{kui } |\hat{l}| < SSD, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Scheffe mitmese võrdlemise protseduur kontrollib katseviisilist viga. Kuna peetakse silmas kõikvõimalikke kontraste, on selle protseduuri võimsus suhteliselt väike. Protseuur ei nõua aga võrdsete mahtudega valimite kasutamist.

Näide 6.5. Tööstööbüro saab inimesi müügiagentide kursustele. Valida on võimalik kolme koolitusfirma vahel, kus kasutatakse erinevaid programme. Kursuste jaoks komplekteeriti ühesuguse arvukusega rühmad gümnaasiumi lõpetanutest. Kursuste lõpetamise järel valiti katsesse need inimesed, kes esimesel töökohal sattusid enam-vähem ühesugustesse tingimustesse ja registreeriti nende kolme esimese nädala keskmine läbimüük (tuhandetes kroonides). Lisaks moodustati kontrollrühm analoogilistes tingimustes töötavatest kogenud müügiagentidest, kelle registreeriti samuti keskmine läbimüük (tuhandetes kroonides). Tulemused olid järgmised:

| grupp | läbimüük |
|-----------|-----------------------------|
| kontroll | 6.5 8.7 7.3 7.9 8.1 6.9 |
| I grupp | 7.5 6.9 8.3 8.1 7.2 7.9 9.0 |
| II grupp | 5.9 7.8 6.7 6.2 8.3 7.6 |
| III grupp | 9.4 8.9 8.0 8.8 |

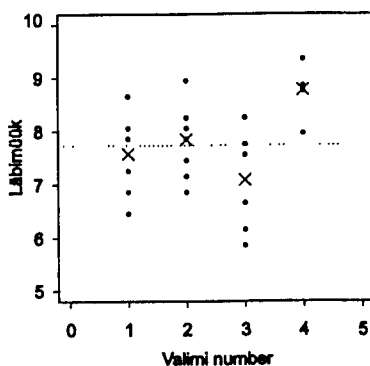
Arvutame rühmade keskvärtused (olgu rühmad nummerdatud tabelis esitamise järjekorras)

$$\bar{y}_1. = 7.57 \quad \bar{y}_2. = 7.84 \quad \bar{y}_3. = 7.08 \quad \bar{y}_4. = 8.77$$

ja üldkeskmise

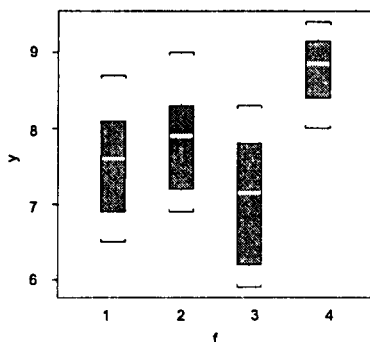
$$\bar{y}_{..} = 7.73.$$

Esitame ka sellele andmestikule vastava hajuvusdiagrammi, kus horisontaalteljel näidatakse faktori taseme number, vertikaalteljel läbimüük. Valimite keskvärtused on joonisele kantud ristikesega, üldkeskmise väärtuse kohal on punktiirjoon.



Joonis 6.2. Läbimüügi hajuvusdiagramm

Andmestikku saame illustreerida ka nii, et kanname ühele joonisele kõikide valimite karpdiagrammid.



Joonis 6.3. Läbimüügi karpdiagrammid

Otsustamaks, kas keskväärtuste vahel on olulisi erinevusi, st kontrolimaks hüpoteese

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4,$$

$$H_1 : \text{leidub paar } \alpha_i \neq \alpha_j$$

määrame olulisuse nivoo väärtuseks 0.05 ja täidame dispersioonanalüüsi tabeli.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|--------|
| Ettevalmistus | 7.126 | 3 | 2.375 | 3.771 |
| Viga | 11.966 | 19 | 0.630 | |
| Üldine | 19.092 | 22 | | |

Leiame tabelist F otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{f}_{0.05;3;19} = 3.13$. Kuna F -statistiku väärtus on kriitilisest väärtusest suurem, $3.771 > 3.13$, siis võtame vastu sisuka hüpoteesi: läbimüügi keskmine tase sõltub oluliselt müügiagendi ettevalmistusest. Püüame täpsustada, milles see sõltuvus väljendub.

Esitame esmalt kaks küsimust:

1. Kas kursustel ettevalmistatud müügiagentide keskmine läbimüük erineb oluliselt kogemustega agentide keskmisest läbimüügist?
2. Koolitusfirmas, kus sai ettevalmistuse kolmas grupp, oli kursuste tasu kõige kallim. Kas selle kursuse lõpetanud müügiagentide keskmine läbimüük erineb oluliselt teistes firmades ettevalmistuse saanud müügiagentide omast?

Küsimused võime esitada hüpoteesidena sobivalt valitud kontrastide l_1 ja l_2 kohta. Olgu

$$l_1 = \mu_1 - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$$

ja

$$l_2 = \mu_4 - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3).$$

Vastamaks esimesele küsimusele kontrollime hüpoteeside paari

$$H_0 : l_1 = 0,$$

$$H_1 : l_1 \neq 0.$$

Kuna kontrasti võrreldakse nulliga, jääb esitatud hüpoteeside tähendus samaks ka siis, kui kontrasti kordajaks valida täisarvud, st vaadata kontrasti $l'_1 = 3\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$. Arvuti kasutamisel muudetakse kontrasti kordajad tavaliselt täisarvudeks, tagamaks kontrasti kordajate summa võrdumist nulliga.

Valime olulisuse nivooks 0.05. Kriitilise piiri arvutamisel vajalik täiendkvantiil on sama mis dispersioonanalüüsi hüpoteeside kontrollimisel, $\bar{f}_{0.05;3;19} = 3.13$. Arvutame kontrastile l_1 vastava kriitilise piiri SSD :

$$SSD = \sqrt{3 \cdot 0.630 \cdot 3.13} \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{9 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 6} + \frac{1}{9 \cdot 4}}$$

$$\approx 2.432 \cdot 0.478 \approx 1.164,$$

ja leiame oma valimi põhjal kontrastile hinnangu:

$$\hat{l}_1 = 7.57 - \frac{1}{3}(7.84 + 8.77 + 7.08) \approx -0.327.$$

Kuna hinnangu absoluutväärtus ei ületa kriitilist piiri, $0.327 < 1.164$, jääme nullhüpoteesi juurde: läbimüügi keskmine tase üle kõikide kursuslaste ei erine oluliselt kogenud müügiagentide keskmisest läbimüügi tasemest. See aga ei tähenda veel, et kõik koolitusfirmad annavad ühesuguse ettevalmistuse.

Vastamaks teisele küsimusele, kontrollime hüpoteeside paari

$$\begin{aligned} H_0 : l_2 &= 0, \\ H_1 : l_2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Olgu olulisuse nivoo 0.05, kriitiline väärtus jääb samaks. Arvutame kontrastile vastava kriitilise piiri:

$$\begin{aligned} SSD &= \sqrt{3 \cdot 0.630 \cdot 3.13} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 6}} \\ &\approx 2.432 \cdot 0.572 \approx 1.392, \end{aligned}$$

ja arvutame oma valimi põhjal kontrasti hinnangu:

$$\hat{l}_2 = 8.77 - \frac{1}{2}(7.84 + 7.08) \approx 1.310.$$

Kuna hinnang ei ületa kriitilist piiri, $1.310 < 1.392$, jääme nullhüpoteesi juurde: olulist erinevust kõige kallima kursuse lõpetanute ja ülejäänud kursuse lõpetanute keskmise läbimüügi vahel ei õnnestunud tõestada.

Võrdleme Scheffe testiga veel kõikvõimalikke keskväärtuste paare. Olulisuse nivoo olgu ikka 0.05. Koondame vajalikud tulemused — keskväärtuste vahed, kriitilised piirid — järgnevasse abitabelisse:

| Keskväärtuste vahed | Valimhinnang | Kriitiline piir |
|---------------------------|--------------|-----------------|
| $\bar{y}_1. - \bar{y}_2.$ | -0.27 | 1.353 |
| $\bar{y}_1. - \bar{y}_3.$ | 0.49 | 1.404 |
| $\bar{y}_1. - \bar{y}_4.$ | -1.2 | 1.569 |
| $\bar{y}_2. - \bar{y}_3.$ | 0.76 | 1.353 |
| $\bar{y}_2. - \bar{y}_4.$ | -0.93 | 1.524 |
| $\bar{y}_3. - \bar{y}_4.$ | -1.69 | 1.569 |

Näeme, et katseviisilise vea tõenäosuse 0.05 korral erinevad oluliselt ainult kolmandale ja neljandale faktori tasemele vastavad keskväärtused. Tulemus võib tunduda mõnevõrra vastuoluline. Parema

ülevaate saamiseks esitame selle järgmises tabelis, kus rühmad on järjestatud keskvaartuse (vähenemise) järgi:

| Rühm | Keskvaartus | Kett |
|--------------|-------------|------|
| III rühm | 8.77 | * |
| I rühm | 7.84 | * * |
| Kontrollrühm | 7.57 | * * |
| II rühm | 7.08 | * |

Viimases veerus asuvate kettidega on ühendatud need faktori tasemed, mille keskvaartuste erinevust ei õnnestunud tõestada. Seega oleme tõestanud, et kõige kallimad kursused, kus sai ettevalmistuse kolmas rühm, tagasid suurema keskmise läbimüügi kui esimese koolitusfirma kursused (kus sai ettevalmistuse I rühm). Teise koolitusfirma tagatud läbimüügi keskmise taseme ja kogemustega saavutatud läbimüügi keskmise taseme erinevust kõige kallimate kursuste keskmisest tasemest või esimese koolitusfirma poolt tagatud keskmisest tasemest ei õnnestunud tõestada.

Kui kordame endale, et vastu võetud nullhüpotees pole tõestatud, ei tundu tulemus enam vastuolulisena. Meie käsutuses oleva väikese andmestiku põhjal saime tõestada faktori kolmandale ja neljandale tasemele vastavate keskvaartuste erinevuse. Milline on esimesele ja teisele faktori tasemele vastava keskvaartuse vahекord nende kahe äärmusliku keskvaartusega, jäi tegelikult lahtiseks — meil ei õnnestunud nende keskvaartuste kohta midagi tõestada. Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Võib tekkida küsimus, milline protseduuridest on parim. Universaalset järjestust siin määrata pole võimalik. Erinevates olukordades võivad sobida erinevad protseduurid. Kui paariviisiliste võrdluste arv ja samuti α on väike, siis võiks soovitada Bonferroni testi, suure võrdluste arvu puhul aga Tukey testi. Kui eesmärgiks on ainult edasiste uuringute suuna määramine, siis võib kasutada Fisheri *LSD* testi, kuna hüpoteeside kummutamiseks (st väitmiseks, et kahe üldkogumi keskmised on erinevad) kasutatakse väiksemat erinevust kui teiste testide puhul. Kui huvi pakuvad lisaks paariviisilistele võrdlustele ka komplitseeritumad hüpoteesid, ei saa kasutamata jätta Scheffe meetodit.

6.3. Dispersioonanalüüsi eelduste kontrollimine

Statistiliste otsustuste langetamiseks dispersioonanalüüsis tehakse kaks eeldust:

- 1) juhuslikud vead on sõltumatud ja normaaljaotusega,
- 2) juhuslike vigade keskväärtsus on null ja dispersioon on kõiki del faktori tasemetel ühesugune.

Esimese eelduse kontrollimisel lähtutakse jääkidest $y_{ij} - \bar{y}_i$. Kõige lihtsam on uurida jääkide graafikut, kasutades punktis 5.5.6. kirjeldatud võtteid. Märgime vaid, et suur erinevus normaaljaotusest võib viia järelduste tegemisel tõsiste vigadeni, eriti väikeste valimite korral. Mõõdukas kõrvalekalle normaalsusest mõjutab fikseeritud mõjudega mudeli korral järeldusi suhteliselt vähe. Palju rohkem mõjutab eelduste rikutus juhuslike mõjudega mudelit.

Teise eelduse kontrollimiseks tuleb võrrelda üldkogumite dispersioone. Üldkogumite dispersioonide võrdlemine tähendab hüpoteeside

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2,$$

$$H_1 : \text{leiduvad üldkogumid } i \text{ ja } j, \text{ et } \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$$

kontrollimist.

Kõik dispersioonide võrdsust kontrollivad testid eeldavad, et üldkogumid on normaaljaotusega. Kui kõigist üldkogumitest on võetud võrdse suurusega valimid, st $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$, võib kasutada *Hartley testi*, kus leiakse suurima ja vähima valimidispersiooni suhe:

$$G = \frac{\max s_i^2}{\min s_i^2}.$$

Statistiku G jaotus sõltub üldkogumite arvust k ja valimi suurus-
 sest n . Jaotuse kriitilised väärtused $\bar{g}_{\alpha;k,n}$ on toodud tabelis N. Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

$$\begin{aligned} &\text{kui } G \geq \bar{g}_{\alpha;k,n-1}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ &\text{kui } G < \bar{g}_{\alpha;k,n-1}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Näide 6.6. Kontrollime, kas näites 6.1 kasutatud valimite puhul võib öelda, et eeldus dispersioonide võrdsusest on täidetud?

Leiame valimite dispersioonid:

$$s_1^2 = 402.7, \quad s_2^2 = 397.3, \quad s_3^2 = 100.0.$$

Suurim dispersioon on esimeses valimis ja vähim dispersioon kolmandas valimis, seega

$$G = \frac{402.7}{100.0} = 4.027.$$

Leiame tabelist N kriitilise väärtuse $\bar{g}_{0.05;3,9} = 5.34$.

Kuna $4.027 < 5.34$, siis jääme nullhüpoteesi juurde, st loeme dispersioonid võrdseteks. Järelikult on eeldus täidetud.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.

♡

Kui valimid ei ole võrdse suurusega, tuleks kasutada *Bartletti testi*. Olgu k üldkogumit, kusjuures i -ndast üldkogumist on võetud valim mahuga n_i . Bartletti statistik arvutatakse valemiga

$$B = \frac{m}{q},$$

kus m tähistab valimi dispersioonide ja mahtude abil arvutatud suurust,

$$m = (N - k) \ln \left(\frac{1}{N - k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2 \right) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln s_i^2,$$

q aga sõltub ainult kasutatud valimite arvust ja nende mahtudest,

$$q = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - k} \right).$$

Sümbol N tähistab, nagu tavaliselt, kõikide vaatluste arvu,

$$N = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Nullhüpoteesi kehtides on statistik B ligilähedaselt χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $k - 1$.

Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } B &\geq \bar{h}_{\alpha; k-1}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } B &< \bar{h}_{\alpha; k-1}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Näide 6.7. Kontrollime üldkogumite dispersioonide võrdsust näites 6.5 kasutatud andmete põhjal. Katses osales 23 inimest ($N = 23$) ja vaadeldi 4 üldkogumit ($k = 4$).

Arvutame esmalt iga valimi dispersiooni:

$$s_1^2 = 0.67, \quad s_2^2 = 0.51, \quad s_3^2 = 0.92, \quad s_4^2 = 0.34.$$

Arvutame avaldiste m ja q väärtused,

$$\begin{aligned} m &= 19 \ln 0.63 - (5 \ln 0.67 + 6 \ln 0.51 + 5 \ln 0.92 \\ &\quad + 3 \ln 0.34) = 0.917 \end{aligned}$$

ja

$$q = 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{19} \right) = 1.094.$$

Leiame statistiku B väärtuse:

$$B = \frac{0.917}{1.094} = 0.832.$$

Leiame tabelist H olulisuse nivoole 0.05 vastava kriitilise väärtuse $\bar{h}_{0.05; 3} = 7.815$. Kuna statistiku väärtus ei ületa kriitilist väärtust, $0.832 < 7.815$, siis jääme nullhüpoteesi juurde: loeme võrreldavate üldkogumite dispersioonid võrdseteks.

♡

Ühe, teistest palju suurema dispersiooni suhtes on tundlik *Cochrani test*, mille teststatistik C määratakse valemiga

$$C = \frac{\max(s_i^2)}{\sum_{i=1}^k s_i^2}.$$

Statistiku kriitilised väärtused $\bar{c}_{\alpha; n-1, k}$ tabelis R on toodud vaid võrdse suurusega valimite jaoks.

Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } C &\geq \bar{c}_{\alpha;n-1,k}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } C &< \bar{c}_{\alpha;n-1,k}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Näide 6.8. Instituut soovib osta tekstitöötlusprogrammi, mis oleks kergesti omandatav. Kaalumisel on paketid Microsoft Word, Word Perfect ja TEX. Kõigist pakettidest on olemas näidiseksemplarid. Otsuse langetamiseks korraldatakse katse. Moodustatakse juhuslik valim 18 inimesest, kes ei ole varem neid programme kasutanud ja kellel on enam-vähem ühesugune arvutiga töötamise kogemus. Loosimise teel jagatakse katsealused kolme võrdsesse rühma, iga süsteemi asub õppima 6 inimest. Fikseeritakse aeg päevades, mis kulub igal inimesel paketi kasutamisoskuse omandamiseks. Tulemused on toodud järgmises tabelis:

| Microsoft Word | Word Perfect | TEX |
|----------------|--------------|-----|
| 28 | 61 | 56 |
| 21 | 30 | 45 |
| 22 | 20 | 59 |
| 19 | 37 | 54 |
| 18 | 51 | 60 |
| 40 | 25 | 52 |

Küsimus: kas iga paketi professionaalseks omandamiseks kuluv keskmine aeg on erinev?

Kontrollime esmalt, kas klassikalise dispersioonanalüüsi kasutamine on selle ülesande puhul korrektne.

Kontrollime hüpoteese:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{üldkogumite dispersioonid on võrdsed,} \\ H_1 &: \text{üldkogumite dispersioonid ei ole võrdsed.} \end{aligned}$$

Arvutame valimite põhjal dispersioonid:

$$s_1^2 = 68.67, \quad s_2^2 = 250.67, \quad s_3^2 = 29.87,$$

ja leiame statistiku väärtuse:

$$C = \frac{250.67}{349.21} = 0.718.$$

Kriitiliseks väärtuseks on olulisuse nivool $0.05 \bar{c}_{0.05;n-1,k} = 0.707$. Kuna statistiku väärtus on suurem kriitilisest väärtusest, $0.72 > 0.71$, peame vastu võtma sisuka hüpoteesi: üldkogumite dispersioonid ei ole võrdsed. Klassikalise dispersioonanalüüsi üks eeldus pole täidetud. Järelikult on faktori mõju kontrollimiseks parem kasutada mõnd mitteparameetrilist meetodit.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Fikseeritud mõjudega tasakaalustatud mudeli korral mõjutab dispersioonide võrdsuse eelduse rikkumine F -statistikut vähe. Tasakaalustamata mudeli korral või juhul, kui üks dispersioon on teistest palju suurem, on probleem tõsisem. Juhuslike mõjudega mudeli puhul mõjutab dispersioonide erinevus järeldusi isegi tasakaalustatud mudeli korral.

6.4. Kruskal-Wallise test

Kui dispersioonanalüüsi klassikalised eeldused ei ole täidetud, siis tuleb kasutada mitteparameetrilist meetodit.

Kruskal-Wallise test on mitteparameetriline alternatiiv ühefaktorilisele dispersioonanalüüsile. Selle testi korral on ainsaks nõudeks, et sõltuv tunnus oleks pidev või omaks küllalt palju väärtusi. Nagu ka kahe valimi korral (vt 4.1.6) kasutatakse sellegi testi puhul otseste andmete asemel nende astakuid. Eeldatakse, et kasutatavad valimid on juhuslikud ja sõltumatud. Valimite mahud võivad olla erinevad ning nagu eespoolgi, tähistame neid

$n_1, n_2, \dots, n_k$. Kogu andmestiku maht on N , $N = \sum_{i=1}^k n_i$.

Kontrollitakse hüpoteeside paari:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k,$$

$$H_1 : \text{leidub paar } \mu_i \neq \mu_j.$$

Kruskal-Wallise test on kasutatav ka järjestustunnuse korral. Sel juhul esitatakse hüpoteesid üldkogumite mediaanide kohta.

Astakutele üleminekuks järjestatakse kõik andmed ühisesse variatsioonritta ja määratakse tavalisel viisil vaatlustulemuste astakud. Testi konstrueerimisel on aluseks sama idee mis kahe

üldkogumi võrdlemisel: kui nullhüpotees kehtib, peavad valimite elemendid ühises variatsioonreas hästi segunema. Segunemise kirjeldamiseks leitakse iga valimi jaoks astakute summa R_i ja astakute keskvärtus $\bar{R}_i$. Kui valimid on variatsioonreas hästi segunenud, peavad astakute keskvärtused olema lähedased.

Teststatistiku saamiseks asendatakse astakud valemisse (6.7), mida kasutati F -statistiku määramiseks. Arvestades, et astakud on järjestikused täisarvud, saab tulemuse teisendada kujule

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1).$$

Kui igas valimis on vähemalt viis objekti, siis on nullhüpoteesi kehtides teststatistik H ligikaudu χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga $k - 1$. (Väga väikeste valimite korral, kui $n_i < 5$, kasutatakse statistiku täpseid jaotustabeleid.)

Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } H &\geq \bar{h}_{\alpha; k-1}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } H &< \bar{h}_{\alpha; k-1}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Näide 6.9. Vaatame uuesti tekstitöötlussüsteemide ostmise ülesannet. Näites 6.8 selgus, et klassikalise dispersioonanalüüsi kasutamine ei ole olemasoleva andmestiku puhul korrektne. Ülesandes püstitatud küsimus: kas iga paketi kasutamise omandamiseks kuluv keskmine aeg on ühesugune, on ikka veel vastuseta. Lahendame ülesande Kruskal-Wallise meetodiga. Valime olulisuse nivoo $\alpha = 0.01$. Esiateme katse tulemused ja lisatud astakud järgmises tabelis:

| Microsoft Word | | Word Perfect | | TEX | |
|----------------|-------|--------------|-------|-----|-------|
| aeg | astak | aeg | astak | aeg | astak |
| 28 | 7 | 61 | 18 | 56 | 15 |
| 21 | 4 | 30 | 8 | 45 | 11 |
| 22 | 5 | 20 | 3 | 59 | 16 |
| 19 | 2 | 37 | 9 | 54 | 14 |
| 18 | 1 | 51 | 12 | 60 | 17 |
| 40 | 10 | 25 | 6 | 52 | 13 |

Kontrollitavad hüpoteesid on järgmised:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, st kõigi süsteemide omandamiseks kulub ühepalju aega,

$H_1 : \text{leidub paar } \mu_i \neq \mu_j$, st on kaks süsteemi, mille omandamiseks kuluv aeg on erinev.

Esitame joonisel 6.4 andmestiku hajuvusdiagrammi.

Ka jooniselt on näha, et teise valimi haare on peaaegu kaks korda suurem esimese ja kolmanda valimi omast, mis viitab sellele, et dispersioonide võrdsuse eeldus on rikutud. See oletus õnnestus olulisuse nivool 0.05 tõestada eelmises näites.

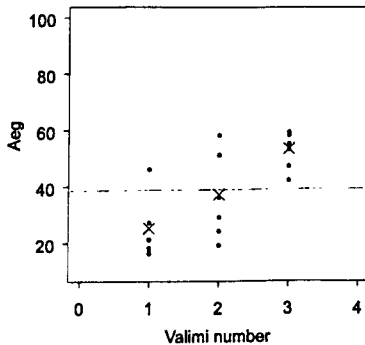
Leiame valimite astakute summad:

$$R_1 = 29, \quad R_2 = 56, \quad R_3 = 86,$$

ja valimite astakute keskväärtused:

$$\bar{R}_1 = 4.83, \quad \bar{R}_2 = 9.33, \quad \bar{R}_3 = 14.33.$$

Astakute summad (võrdsete valimi mahtude korral on nad võrreldavad) viitavad sellele, et valimid ei ole eriti hästi segunenud.



Joonis 6.4. Aja hajuvusdiagramm

Arvutame teststatistiku:

$$H = \frac{12}{18 \cdot 19} \left(\frac{29^2 + 56^2 + 86^2}{6} \right) - 3 \cdot 19 = 9.51.$$

Leiame tabelist H kriitilise väärtuse, mis vastab olulisuse nivoole 0.01, $\bar{h}_{0.01;2} = 9.21$. Kuna statistiku väärtus on suurem kriitilisest väärtusest, $9.51 > 9.21$, loeme sisuka hüpoteesi tõestatuks: teksti-töötlusprogrammide omandamiseks kuluv aeg on erinev.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketiga SPSS.



Näites kummutasime nullhüpoteesi, kuid jälle jääb lahtiseks, miliste keskväärtuste erinevust saab tõestada. Otsuse langetamiseks kasutame Tukey mitmese võrdlemise testile sarnast protseduuri. Iga võrreldava keskväärtuste paari jaoks arvutame valimite keskmiste astakute vahe:

$$D = | \bar{R}_i - \bar{R}_j |,$$

ja kriitilise piiri:

$$Kr = \sqrt{\bar{h}_{\alpha; k-1} \frac{N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)},$$

kus $\bar{h}_{\alpha; k-1}$ on Kruskal-Wallise testis kasutatud kriitiline väärtus. Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } D &\geq Kr, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } D &< Kr, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Võrreldes statistikut D kriitilise väärtusega Kr iga üldkogumite paari korral, saame teostada kõik paariviisilised võrdlused samal olulisuse nivool α , mida kasutasime ka Kruskal-Wallise testi puhul.

Näide 6.10. Jätkame eelmist näidet. Kuna meil on võrdse mahuga valimid $n_1 = n_2 = n_3 = 6$, siis on olulisuse nivool 0.01 suurus Kr kõigi võrdluste jaoks ühesugune:

$$Kr = \sqrt{9.21 \cdot \frac{18 \cdot 19}{12} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)} = 9.35.$$

Koondame võrdlemiseks vajalikud astakute keskväärtuste vahed järgnevasse abitabelisse:

| | Vahe hinnang | Kriitiline piir |
|-----------------------------|--------------|-----------------|
| $ \bar{R}_1 - \bar{R}_2 $ | 4.5 | 9.35 |
| $ \bar{R}_1 - \bar{R}_3 $ | 9.5 | 9.35 |
| $ \bar{R}_2 - \bar{R}_3 $ | 5 | 9.35 |

Näeme, et ainult esimese ja kolmanda rühma astakute keskväärtuste vahe ületab kriitilise piiri. Saadud tulemuse põhjal võime järelda, et oluline erinevus on süsteemide Microsoft Word ja TEX omandamise keskmiste aegade vahel. TEX õppimise keskmine aeg on pikem, järelikult on tema omandamine keerukam. Süsteemi Word Perfect omandamiseks kuluva keskmise aja vahetegur on ülejäänud keskmistega jäi lahtiseks.



6.5. Kahefaktoriline dispersioonanalüüs

Mitte alati ei saa uuritava tunnuse muutlikkust seletada ühe faktori mõjuga. Oletame, et on kool, kus on kaks matemaatikaõpetajat (R ja T), kes valdavad kaht meetodikat (E ja G) aritmeetika õpetamiseks. Nad õpetavad kumbki kaht gruppi (grupid on moodustatud juhusliku valiku reegleid arvestades) ja kasutavad eri rühmades erinevat meetodikat. Kursuse lõppedes tehakse kõigile õpilastele ühesugune test. Millest sõltub õpilaste teadmisteoskuste tase? Kas see sõltub kasutatavast meetodikast või õpetajast või korraga nii õpetajast kui ka meetodikast? Selles ülesandes on kaks faktortunnust: “õpetaja” ja “meetodika”, kummalgi kaks taset. Faktori “õpetaja” mõju tähendaks seda, et õpetaja R käe all õppinute keskmine testi tulemus on erinev õpetaja T juures õppinute omast. Sellist mõju nimetatakse faktori “õpetaja” peamõjuks. Faktori “meetodika” mõju tähendaks, et meetodika E järgi õppinutel on testi tulemused oluliselt teistsugused kui meetodika G järgi õppinutel. Seda nimetatakse faktori “meetodika” peamõjuks. Kui ühe meetodika järgi õppinute tulemused on paremad, sõltumata sellest, kumma õpetaja juures õpiti, siis öeldakse, et õpetaja ja meetodika koosmõju puudub. Kui aga õpetaja R saavutab meetodika E järgi õpetades paremad tulemused kui õpetaja T ja õpetaja T saab paremad tulemused meetodikat G järgides, siis on faktoritel “õpetaja” ja “meetodika” koosmõju.

Üldisemalt öeldes tähendab koosmõju olulisus seda, et uuritava tunnuse keskmiste erinevus ühe faktori tasemete järgi on teise faktori erinevate tasemete korral erinev. Koosmõju puudumine seevastu tähendab, et erinevus ühe faktori tasemete vahel on teise faktori iga taseme korral ühesugune.

Olgu katses kaks faktortunnust A ja B ning olgu neil vastavalt a ja b taset. Katse on korraldatud selliselt, et faktorite tasemete kõigil kombinatsioonidel on tehtud võrdne arv mõõtmisi, olgu see n . Vaatlusi on seega kokku $N = abn$.

Mõõtmistulemused saab esitada mudeliga

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad (6.12)$$

kus μ on uuritava tunnuse üldkeskmine,

α_i — faktori A taseme mõju ($i = 1, \dots, a$),

β_j — faktori B taseme mõju ($j = 1, \dots, b$),

γ_{ij} — faktori A taseme ja faktori B taseme koosmõju,

ε_{ijk} — juhuslik viga.

Juhuslike vigade kohta teeme samasugused eeldused nagu punktis 6.1:

- 1) juhuslikud vead ε_{ijk} on sõltumatud,
- 2) juhuslike vigade keskvärtus on null ja dispersioon on kõikidel faktori tasemetel ühesugune,
- 3) juhuslikud vead on normaaljaotusega.

Mudeli üheseks määramiseks võtame kasutusele lisakitsendused:

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^a \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^b \gamma_{ij} = 0.$$

Kuna soovime uurida nii faktorite A ja B peamõjusid kui ka koosmõju, siis on kontrollitavaid hüpoteeside paare kolm:

- 1) faktori A mõju hindamiseks:

$H_0(A) : \alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0$, faktori A mõju puudub,

$H_1(A) : \text{leidub } \alpha_i \neq 0$, faktoril A on mõju;

- 2) faktori B mõju hindamiseks:

$H_0(B) : \beta_1 = \dots = \beta_b = 0$, faktori B mõju puudub,

$H_1(B) : \text{leidub } \beta_j \neq 0$, faktoril B on mõju;

- 3) faktorite A ja B koosmõju hindamiseks:

$H_0(AB) : \gamma_{11} = \dots = \gamma_{ab} = 0$, faktorite koosmõju puudub,

$H_1(AB) : \text{leidub } \gamma_{ij} \neq 0$, faktoritel on koosmõju.

Nagu varemgi, iseloomustab faktori mõju olulisust tema poolt põhjustatud hälvete ruutude summa muudatus. Seega taandub hüpoteeside paari kontrollimine dispersiooni hinnangute võrdlemisele.

Tähistame faktori A i -nda taseme keskmise

$$\bar{y}_{i..} = \frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk},$$

faktori B j -nda taseme keskmise

$$\bar{y}_{.j.} = \frac{1}{an} \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk},$$

faktori A i -nda ja faktori B j -nda taseme kombinatsiooni keskmise

$$\bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$

ja üldkeskmise

$$\bar{y}_{...} = \frac{1}{abn} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}.$$

Üldise hälvete ruutude summa S_y^2 saame avaldada kujul:

$$\begin{aligned} S_y^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \\ &+ an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2. \end{aligned}$$

Seega on üldine hälvete ruutude summa jagatav osadeks, mis vastavad faktorite peamõjudele ja koosmõjule ning veale. Tähistades vastavad liikmed

$$S_A^2 = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2,$$

$$S_B^2 = an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2,$$

$$S_{AB}^2 = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2,$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2,$$

võime kirjutada:

$$S_y^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_{AB}^2 + S^2.$$

Jagades hälvete ruutude summad vastavate vabadusastmete arvudega, leitakse keskmistatud hälvete ruutude summad ehk keskruidud:

$$MS_A^2 = \frac{S_A^2}{a-1},$$

$$MS_B^2 = \frac{S_B^2}{b-1},$$

$$MS_{AB}^2 = \frac{S_{AB}^2}{(a-1)(b-1)},$$

$$MS^2 = \frac{S^2}{ab(n-1)}.$$

Keskruidu MS_A^2 keskväärus avaldub kujul:

$$E(MS_A^2) = E\left(\frac{S_A^2}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}. \quad (6.13)$$

Kui nullhüpotees $H_0(A)$ kehtib, st faktori A mõju puudub, siis on $\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 = 0$ ja keskväärus $E(MS_A^2)$ võrdub σ^2 . See aga tähendab, et faktortunnusele A vastav keskruid on sel juhul üldkogumi dispersiooni hinnanguks.

Leides ka teiste keskruutude keskväärtused:

$$E(MS_B^2) = E\left(\frac{S_B^2}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1},$$

$$E(MS_{AB}^2) = E\left(\frac{S_{AB}^2}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \gamma_{ij}^2}{(a-1)(b-1)},$$

$$E(MS^2) = E\left(\frac{S^2}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2.$$

näeme, et kui nullhüpoteesid $H_0(A)$, $H_0(B)$ ja $H_0(AB)$ kehtivad, siis on kõik neli keskruutu üldkogumi dispersiooni hinnanguks. Kui mudel (6.12) on õige ja eeldused $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma)$ täidetud, siis on suhted:

$$F_A = \frac{MS_A^2}{MS^2}, \quad F_B = \frac{MS_B^2}{MS^2}, \quad F_{AB} = \frac{MS_{AB}^2}{MS^2}$$

F -jaotusega, mille parameetriteks on vastavate keskruutude vabadusastmete arvud.

F -statistiku arvutamiseks vajalikud suurused esitatakse tavaliselt dispersioonanalüüsi tabelis.

Tähistades F -suhte lugejas oleva keskruudu vabadusastmete arvu tähega f ja valides olulisuse nivooks α , on otsuse langetamise eeskiri hüpoteeside 1)–3) korral järgmine:

$$\begin{aligned} &\text{kui } F \geq \bar{f}_{\alpha;f,ab(n-1)}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ &\text{kui } F < \bar{f}_{\alpha;f,ab(n-1)}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|------------------|-------------|----------|
| Faktor A | S_A^2 | $a - 1$ | MS_A^2 | F_A |
| Faktor B | S_B^2 | $b - 1$ | MS_B^2 | F_B |
| Koosmõju | S_{AB}^2 | $(a - 1)(b - 1)$ | MS_{AB}^2 | F_{AB} |
| Viga | S^2 | $ab(n - 1)$ | MS^2 | |
| Üldine | S_y^2 | $N - 1$ | | |

Näide 6.11. Tarkpea koolis õpetavad aritmeetikat kaks õpetajat: õpetaja T ja õpetaja S, kes tunnevad aine õpetamise kaht meetodikat, olgu need K ja R. Kummalgi õpetajal on kaks juhusliku valikuga moodustatud gruppi õpilasi ja mõlemad kasutavad erinevates gruppides erinevat meetodikat. Kevadel sooritasid kõik õpilased ühesuguse testi, mille tulemused on järgmised:

| meetod | õpetaja | | | | | | | | | | | |
|--------|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | T | | | | | | S | | | | | |
| K | 72 | 97 | 33 | 55 | 64 | 82 | 81 | 99 | 84 | 63 | 77 | 26 |
| R | 20 | 75 | 46 | 35 | 46 | 26 | 16 | 24 | 28 | 30 | 40 | 19 |

Kas võib väita, et sõltumata õpetamise meetodikast on teadmiste keskmine tase ühesugune? Kas erinevate õpetajate juures õppinutel

on ühesugune teadmiste tase? Kas õpetajatele sobivad mõlemad meetodid ühtviisi hästi? Olulisuse nivoo valime 0.05.

Kontrollime hüpoteese:

1) meetodika olulisus:

$H_0(A)$: meetodikate K ja R järgi õppinute keskmised hinded on võrdsed,

$H_1(A)$: meetodikate K ja R järgi õppinute keskmised hinded ei ole võrdsed;

2) õpetaja olulisus:

$H_0(B)$: õpetajate T ja S õpilaste keskmised hinded on võrdsed,

$H_1(B)$: õpetajate T ja S õpilaste keskmised hinded ei ole võrdsed;

3) koosmõju:

$H_0(AB)$: õpetajal T on meetodikate K ja R keskmiste hinnete erinevus sama kui õpetajal S,

$H_1(AB)$: õpetajal T on meetodikate K ja R keskmiste hinnete erinevus teistsugune kui õpetajal S.

Faktortunnusteks on tunnused "õpetaja", kahe väärtusega ($a = 2$) ja tunnused "meetodika", samuti kahe tasemega ($b = 2$). Katses on vaadatud kõiki faktorite tasemete kombinatsioone, kõikidel faktorite tasemete kombinatsioonidel on valimi suurused võrdsed ($n = 7$).

Arvutame keskmised, esitades tulemused tabeli kujul:

| | õpetaja | | |
|----------|---------|------|------|
| | T | S | |
| meetod K | 69.1 | 59.4 | 64.3 |
| meetod R | 37.7 | 30.4 | 34.1 |
| | 53.4 | 44.9 | 49.2 |

Täidame dispersioonanalüüsi tabeli.

Kuna antud andmete korral on kõigil mõjudel võrdne vabadusastmete arv, siis vajame otsuse langetamiseks vaid üht kriitilist väärtust $\bar{f}_{0.05;1,24}$, mille leiame tabelist F, $\bar{f}_{0.05;1,24} = 4.26$. Võrdleme arvutatud F-statistikute väärtusi tabelist leitud kriitilise väärtusega. Kuna esimese faktori puhul statistiku väärtus on suurem kriitilisest väärtusest, $F_A = 14.67 > 4.26$, võtame vastu sisuka hüpoteesi: testi tulemus sõltub õpetamismetoodikast.

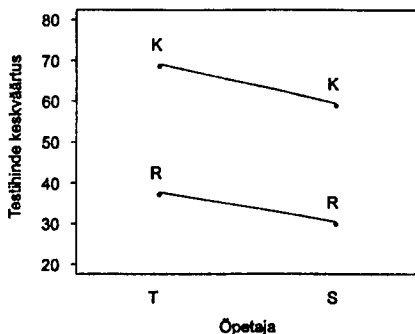
Teise faktori — õpetaja — mõju kontrollimisel kasutame teststatistikut F_B . Kuna teststatistiku väärtus on väiksem kriitilisest väärtusest, $F_B = 1.16 < 4.26$, jääme nullhüpoteesi juurde — õpetajate T ja S juures õppides saadakse ühesuguse tasemega teadmised.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|--------|
| Meetod | 6390.3 | 1 | 6390.32 | 14.67 |
| Õpetaja | 505.8 | 1 | 505.75 | 1.16 |
| Koosmõju | 10.3 | 1 | 10.32 | 0.02 |
| Viga | 10455.7 | 24 | 435.65 | |
| Üldine | 17362.1 | 27 | | |

Faktorite koosmõju kontrollimisel kasutame teststatistikut $F_{AB} = 0.02$. Kuna teststatistiku väärtus on väiksem kriitilisest väärtusest, $0.02 < 4.26$, jääme nullhüpoteesi juurde: faktortunnuste koosmõju puudub.

Koosmõju puudumine tähendab seda, et kui õpetajal T on keskmine testi tulemus metoodikate K ja R kasutamisel erinev, siis samasugune erinevus keskmises testi tulemuses on ka õpetajal S. Saadud tulemust illustreerib joonis 6.5.



Joonis 6.5. Metoodika ja õpetaja mõju hindepunktiledele.

On näha, et õpetaja T saavutab parema tulemuse metoodikat K järgides, kuid niisama palju parema tulemuse saab ka õpetaja S, kui ta kasutab metoodikat K. Kuna vahed on peaaegu võrdsed, siis on jooned praktiliselt paralleelsed. Seega ei saa öelda, et ühele õpetajale sobiks paremini üks metoodikatest. Õpilased omandavad materjali paremini, kui mõlemad õpetajad kasutavad metoodikat K.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Õpetlik on veel vaadata, mis juhtuks, kui katse oleks korraldatud teisiti: kumbki õpetaja oleks kasutanud ainult üht metoodikat, näiteks õpetaja T metoodikat R ja õpetaja S metoodikat K. Lihtsuse mõttes jätame koosmõjud kõrvale, osutusid ju need mitteolulisteks.

Õpetaja T rühmades oleksid siis tulemused esitatavad järgmiselt:

$$y_{12k} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \varepsilon_{ijk},$$

õpetaja S poolt õpetatud rühmades aga järgmiselt:

$$y_{21k} = \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon_{ijk}.$$

Puuduksid keskväärtsed, mis võimaldaksid eraldi hinnata õpetaja ja metoodika mõju.

Näeme, et õpetaja ja metoodika efekt oleksid “kokku kleepunud”, neid poleks võimalik eristada. See võib aga viia ebaõigete järeldusteni.

Näide 6.12. Psühholoog uurib gümnaasiumiõpilaste enesehinnanguid. Vaatluse all on 15 esimese aasta õpilast ja 15 abiturienti. Vastavalt õpilase aktiivsusele on uuritavad jaotatud kolme rühma: passiivsed, ühiskondlikult aktiivsed, sportlikult aktiivsed. Igast rühmast on vaatluse all viis juhuslikult valitud õpilast.

Faktortunnusteks on tunnused “aktiivsus”, millel on kolm erinevat väärtust ($a = 3$) ja kahe tasemega ($b = 2$) tunnused “õppimisaasta”. Valimi suurused faktorite erinevatel väärtuste kombinatsioonidel on võrdsed ($n = 5$).

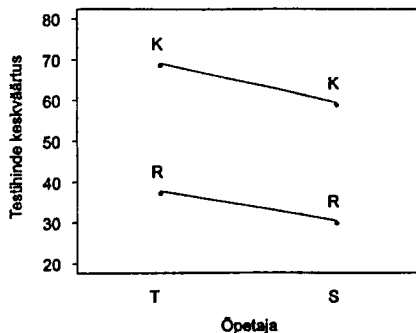
Kas võib väita, et enesehinnang on kõigil aktiivsusrühmadel ühesugune? Kas esimese ja viimase aasta õpilaste enesehinnang on erinev?

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|--------|
| Meetod | 6390.3 | 1 | 6390.32 | 14.67 |
| Õpetaja | 505.8 | 1 | 505.75 | 1.16 |
| Koosmõju | 10.3 | 1 | 10.32 | 0.02 |
| Viga | 10455.7 | 24 | 435.65 | |
| Üldine | 17362.1 | 27 | | |

Faktorite koosmõju kontrollimisel kasutame teststatistikut $F_{AB} = 0.02$. Kuna teststatistiku väärtus on väiksem kriitilisest väärtusest, $0.02 < 4.26$, jääme nullhüpoteesi juurde: faktortunnuste koosmõju puudub.

Koosmõju puudumine tähendab seda, et kui õpetajal T on keskmine testi tulemus metoodikate K ja R kasutamisel erinev, siis samasugune erinevus keskmises testi tulemuses on ka õpetajal S. Saadud tulemust illustreerib joonis 6.5.



Joonis 6.5. Metoodika ja õpetaja mõju hindepunktile.

On näha, et õpetaja T saavutab parema tulemuse metoodikat K järgides, kuid niisama palju parema tulemuse saab ka õpetaja S, kui ta kasutab metoodikat K. Kuna vahed on peaaegu võrdsed, siis on jooned praktiliselt paralleelsed. Seega ei saa öelda, et ühele õpetajale sobiks paremini üks metoodikatest. Õpilased omandavad materjali paremini, kui mõlemad õpetajad kasutavad metoodikat K.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Õpetlik on veel vaadata, mis juhtuks, kui katse oleks korraldatud teisiti: kumbki õpetaja oleks kasutanud ainult üht metoodikat, näiteks õpetaja T metoodikat R ja õpetaja S metoodikat K. Lihtsuse mõttes jätame koosmõjud kõrvale, osutusid ju need mitteolulisteks.

Õpetaja T rühmades oleksid siis tulemused esitatavad järgmiselt:

$$y_{12k} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \varepsilon_{ijk},$$

õpetaja S poolt õpetatud rühmades aga järgmiselt:

$$y_{21k} = \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \varepsilon_{ijk}.$$

Puuduksid keskvaartused, mis võimaldaksid eraldi hinnata õpetaja ja metoodika mõju.

Näeme, et õpetaja ja metoodika efekt oleksid “kokku kleepunud”, neid poleks võimalik eristada. See võib aga viia ebaõigete järeldusteni.

Näide 6.12. Psühholoog uurib gümnaasiumiõpilaste enesehinnanguid. Vaatluse all on 15 esimese aasta õpilast ja 15 abiturienti. Vastavalt õpilase aktiivsusele on uuritavad jaotatud kolme rühma: passiivsed, ühiskondlikult aktiivsed, sportlikult aktiivsed. Igast rühmast on vaatluse all viis juhuslikult valitud õpilast.

Faktortunnusteks on tunnused “aktiivsus”, millel on kolm erinevat väärtust ($a = 3$) ja kahe tasemega ($b = 2$) tunnused “õppimisaasta”. Valimi suurused faktorite erinevatel väärtuste kombinatsioonidel on võrdsed ($n = 5$).

Kas võib väita, et enesehinnang on kõigil aktiivsusrühmadel ühesugune? Kas esimese ja viimase aasta õpilaste enesehinnang on erinev?

Kas enesehinnang sõltub õppimisaastast ja aktiivsusrühmast üheaegselt, st kas nendel tunnustel on koosmõju? Olulisuse nivoo valime 0.05. Testimise tulemused:

| õppimisaasta | aktiivsus | | |
|---------------|-----------|-------------|-----------|
| | sportlik | ühiskondlik | passiivne |
| esimene aasta | 9 | 10 | 7 |
| | 14 | 6 | 12 |
| | 11 | 8 | 7 |
| | 6 | 7 | 6 |
| | 15 | 12 | 8 |
| viimane aasta | 17 | 15 | 10 |
| | 12 | 18 | 8 |
| | 14 | 16 | 4 |
| | 18 | 13 | 2 |
| | 11 | 15 | 7 |

Kontrollitavad hüpoteesid on järgmised:

1) õppimisaasta mõju kohta:

$H_0(A)$: esimese ja viimase aasta õppurite enesehinnang on ühesugune,

$H_1(A)$: esimese ja viimase aasta õppurite enesehinnang on erinev;

2) aktiivsuse mõju kohta:

$H_0(B)$: erineva aktiivsustasemega õpilaste enesehinnang on ühesugune,

$H_1(B)$: erineva aktiivsustasemega õpilaste enesehinnang ei ole ühesugune;

3) koosmõju kohta:

$H_0(AB)$: koosmõju puudub, st esimese aasta õppurite enesehinnangud erinevates aktiivsusrühmades muutuvad samamoodi nagu abiturientidel,

$H_1(AB)$: koosmõju on oluline, st esimese aasta õppurite enesehinnangud erinevates aktiivsusrühmades muutuvad teisiti kui abiturientidel.

Arvutame keskmised:

| | aktiivsus | | | |
|---------------|-----------|-------------|-----------|------|
| õppimisaasta | sport | ühiskondlik | passiivne | |
| esimene aasta | 11.0 | 8.6 | 8.0 | 9.2 |
| viimane aasta | 14.4 | 15.4 | 6.2 | 12.0 |
| | 12.7 | 12.0 | 7.1 | 10.6 |

Täidame dispersioonanalüüsi tabeli:

Dispersioonanalüüsi tabel

| Variee-
ruvuse
allikas | Hälvete
ruutude
summa | Vaba-
dus-
astmed | Kesk-
ruut | F -suhe |
|------------------------------|-----------------------------|-------------------------|---------------|-----------|
| Õppimise aasta | 58.8 | 1 | 58.8 | 7.41 |
| Aktiivsus | 186.2 | 2 | 93.1 | 11.74 |
| Koosmõju | 93.8 | 2 | 46.9 | 5.91 |
| Viga | 190.4 | 24 | 7.9 | |
| Üldine | 529.2 | 29 | | |

Leiame tabelist F kriitilised väärtused:

$$\bar{f}_{0.05;1,24} = 4.26, \quad \bar{f}_{0.05;2,24} = 3.40.$$

Võrreldes arvutatud F -statistiku väärtusi tabelist leitud kriitiliste väärtustega, näeme, et esimese faktori puhul on arvutatud väärtus suurem kui kriitiline väärtus, $F_A = 7.41 > 4.26$, seega võtame vastu sisuka hüpoteesi: esimese ja viimase aasta õppurite enesehinnang ei ole ühesugune. Samuti on teise faktori korral F -statistiku väärtus suurem kui kriitiline väärtus, $F_B = 11.74 > 3.40$, tuleb vastu võtta sisukas hüpotees: erineva aktiivsustasemega õpilaste enesehinnang ei ole ühesugune. Ka koosmõju puhul võtame vastu sisuka hüpoteesi, sest $F_{AB} = 5.91 > 3.40$, st aktiivsuse ja vanuse erinevad kombinatsioonid määravad erineva enesehinnangu.

Seega on vaadeldavas mudelis kõik mõjud olulised.

1) õpilaste enesehinnang sõltub sellest, kas nad on esimese või viimase aasta õpilased. Võrdlemine toimub üle kõigi aktiivsusrühmade. Kuna vaadeldakse vaid kahe vanuserühma hinnanguid, võime keskmiste tabeli põhjal öelda, et abiturientide enesehinnang on kõrgem.

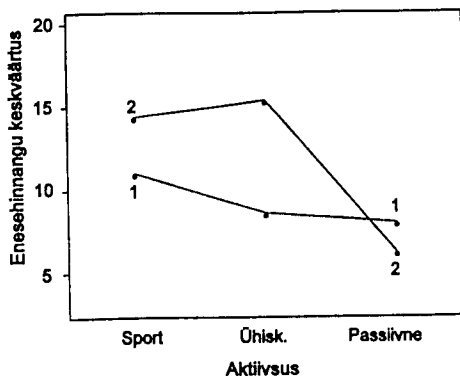
2) õpilaste enesehinnang sõltub aktiivsusest. Võrreldakse kolme aktiivsusest, arvestamata õpilaste vanust. Kasutades näiteks *LSD*-testi, saame öelda, et aktiivsete (kas ühiskondlikult või sportlikult) ja passiivsete õpilaste enesehinnangud erinevad oluliselt (olulisuse nivool 0.05).

| Rühmad | Vahe | Kriitiline piir | Otsus |
|--------|------|-----------------|----------|
| 1 – 2 | 0.7 | 3.27 | ei erine |
| 1 – 3 | 5.6 | 3.27 | erinevad |
| 2 – 3 | 4.9 | 3.27 | erinevad |

3) Vanusel ja aktiivsusel on koosmõju enesehinnangule, st aktiivsuse muutudes ei ole enesehinnangute erinevus vanuserühmades ühesugune.

Koosmõju olemuse mõistmiseks vaatame joonist 6.6. Sellele on kantud kõik kuus (faktorite tasemete erinevatel kombinatsioonidel) saadud keskvaartust. Ühele ja samale õppimisaastale vastavad keskvaartused on ühendatud murdjoonega.

Näeme, et erineva aktiivsusega õpilaste enesehinnangud muutuvad erinevalt. Kui sportlikult või ühiskondlikult aktiivsetel õpilastel vanuse kasvades enesehinnang kasvab, siis passiivsetel õpilastel on muutus vastupidine: vanuse kasvades enesehinnang langeb.



Joonis 6.6. Vanuse ja aktiivsusrühma mõju enesehinnangule

Kui koosmõju on oluline, võib vahel osutada kasulikuks nn lihtmõjude analüüs. Selleks vaatame eraldi esimese aasta õppureid ja abituriente, tehes kummaski grupis ühe faktoriga dispersioonanalüüsi. Faktortunnuseks on aktiivsusgrupp.

Mõlemas grupis kontrollime hüpoteese:

H_0 : erineva aktiivsuseastmega õpilaste enesehinnang on ühesugune,
 H_1 : erineva aktiivsuseastmega õpilaste enesehinnang ei ole ühesugune.

Täidame dispersioonanalüüsi tabelid:

1) esimese aasta õppurid:

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|--------|
| Aktiivsus | 25.2 | 2 | 12.60 | 1.52 |
| Viga | 99.2 | 12 | 8.27 | |
| Üldine | 124.4 | 14 | | |

2) abiturientid:

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|--------|
| Aktiivsus | 254.8 | 2 | 127.4 | 16.76 |
| Viga | 91.2 | 12 | 7.6 | |
| Üldine | 346.0 | 14 | | |

Näeme, et esimese aasta õpilaste puhul peame jääma nullhüpoteesi juurde ($1.52 < 3.88$): aktiivsusklass ei mõjuta enesehinnangut. Abiturientide puhul aga võtame vastu sisuka hüpoteesi ($16.76 > 3.88$):

erineva aktiivsuseastmega õpilaste enesehinnang ei ole ühesugune. Kasutades klasside keskmiste võrdlemiseks Fisheri *LSD*-testi, saame öelda, et aktiivsete õpilaste enesehinnang on passiivsete omast kõrgem, kusjuures ei ole tähtis, kas õpilane on sportlikult või ühiskondlikult aktiivne.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



6.6. Friedmani test

Uue filmi edu tagamiseks soovitakse peaosatäitjaks leida vaatajate maitsele vastavat näitlejat. Selleks moodustatakse juhuslik valim potentsiaalsetest vaatajatest, kellele näidatakse proovikatkendit uuest filmist nelja peaosalisega. Iga hindajale näidatakse katkendeid erinevas järjestuses. Vaataja peab asetama näitlejad pingeritta, kus ühega märgib tema arvates kõige vähem sobiva ja neljaga sobivaima osatäitja. Nii tekib mudel, kus faktortunnuseks on näitleja, faktortunnusel on neli väärtust — taset. Iga vaataja on seotud faktortunnuse kõigi tasemetega. Seega on tegemist sõltuvate valimitega. Eesmärgiks on kontrollida faktori mõju olulisust.

Kontrollitavad hüpoteesid on järgmised:

H_0 : faktoril pole mõju,

H_1 : faktoril on mõju.

Saadud vastused — andmed — esitatakse tavaliselt tabelina, kus read vastavad objektidele (neid on n) ja veerud faktortunnuse tasemetele (k). Igas reas on seega arvud (astakud) ühest kuni k -ni. Nullhüpoteesi kehtimise korral peaks kõigis ridades arvude järjestus olema juhuslik.

| objekt | 1. tase | 2. tase | ... | k. tase |
|-----------|----------|----------|-----|----------|
| 1. objekt | r_{11} | r_{12} | ... | r_{1k} |
| 2. objekt | r_{21} | r_{22} | ... | r_{2k} |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| n. objekt | r_{n1} | r_{n2} | ... | r_{nk} |

Kui kõigi üldkogumite keskmine tase on ühesugune, siis ei tohiks veergude (tasemete) astakute summad üksteisest palju erineda. Erinevusi astakute summade vahel mõõdab Friedmani teststa-

tistik W^2 :

$$W^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k R_j^2 - 3n(k+1),$$

kus n on objektide arv,

k — faktori tasemete arv,

R_j — j -nda taseme astakute summa, $R_j = \sum_{i=1}^n r_{ij}$.

Kui nullhüpotees kehtib, siis on statistiku W^2 jaotuseks ligilähedaselt χ^2 -jaotus vabadusastmete arvuga $k-1$. Lähend sobib hästi suurte n väärtuste korral, kuid annab rahuldava tulemuse juba siis, kui $n \geq 10$ ja $k \geq 4$. Väikeste n ja k väärtuste jaoks on arvatud ka täpsed jaotustabelid ja nende järgi otsuste vastuvõtmisel võib nullhüpoteesi kummutada kergemini kui χ^2 -jaotuse tabelit kasutades. Otsuse langetamise eeskiri:

kui $W^2 \geq \bar{h}_{\alpha; k-1}$, vastu võtta H_1 ,

kui $W^2 < \bar{h}_{\alpha; k-1}$, jääda H_0 juurde.

Näide 6.13. Filmigrupp soovib leida uue filmi peaosatäitjaks menukaimat näitlejat. Valik on vaja teha nelja näitleja vahel, olgu nende nimed A, B, C ja D. Selleks palutakse kümnel juhuslikul kinokülastajal hinnata näitlejate sobivust rolli ühe ja sama katkendi põhjal. Katkendid esitatakse igale vaatajale juhuslikus järjekorras. Hindaja peab järjestama näitlejad rolli sobivuse järgi, tähistades ühega kõige vähem sobiva ja neljaga parima osatäitja.

Kontrollida soovitakse järelikult hüpoteese:

H_0 : kõik neli näitlejat sobivad ossa ühtviisi,

H_1 : mitte kõiki näitlejaid ei pea vaatajad võrdselt sobivaks.

Saadakse järgmine hinnangute tabel:

| näitleja | | | | | näitleja | | | | |
|----------|---|---|---|---|----------|---|---|---|---|
| vaataja | A | B | C | D | vaataja | A | B | C | D |
| 1. | 3 | 1 | 2 | 4 | 6. | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2. | 4 | 1 | 3 | 2 | 7. | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 3. | 3 | 2 | 4 | 1 | 8. | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 4. | 4 | 3 | 1 | 2 | 9. | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 5. | 2 | 4 | 1 | 3 | 10. | 3 | 2 | 4 | 1 |

Arvutame näitlejatele antud järjestuse (astakute) summad:

$$R_1 = 32, \quad R_2 = 20, \quad R_3 = 25, \quad R_4 = 23.$$

Leiame teststatistiku väärtuse:

$$W^2 = \frac{12}{10 \cdot 4 \cdot 5} (32^2 + 20^2 + 25^2 + 23^2) - 3 \cdot 10 \cdot 5 = 4.68.$$

Võrreldes saadud väärtust tabelist H leitud kriitilise väärtusega $\bar{h}_{0.05;3} = 7.815$, peame jääma nullhüpoteesi juurde: küsitluse põhjal pole alust väita, et vaatajate hinnangud jaotuksid erinevate näitlejate korral erinevalt.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



Kui õnnestub vastu võtta sisukas hüpotees: faktori tasemed mõjuvad erinevalt, siis võib edasiseks analüüsiks kasutada *LSD* testiga sarnast protseduuri. Võrreldavate tasemete p ja q jaoks arvutatakse astakute summade R_p ja R_q vahe

$$V = R_p - R_q$$

ja kriitiline väärtus

$$K = \bar{t}_{\alpha; (k-1)(n-1)} \sqrt{\frac{n^2 k(k+1)(2k+1) - 6 \sum_{j=1}^k R_j^2}{3(k-1)(n-1)}}.$$

Otsuse langetamise eeskiri on järgmine:

kui $|V| \geq K$, on tasemed oluliselt erinevad,
 kui $|V| < K$, ei ole tasemete erinevus oluline.

6.7. Juhuslike mõjudega tasakaalustatud mudel

Kui katsesse saab valida vaid juhusliku osa faktortunnuse võimalikest tasemetest, siis öeldakse, et faktor on juhuslik. Kasutatavat mudelit nimetatakse juhuslike mõjudega mudeliks. Kuigi kasutatavad tasemed moodustavad vaid osa vaadeldava faktori tasemete hulgast, tehakse järeldusi kogu tasemete üldkogumi kohta.

Soovitagu näiteks uurida rongiliiklust. Üheks huvipakkuvaks küsimuseks on, kas reisijate arv sõltub rongi väljumisajast või on kõigis rongides ühepalju reisijaid. Raudteevalitsusel pole aga nii palju raha, et saata loendajaid kõigisse rongidesse. Seepärast saabki kasutada vaid mõningates rongides tehtud vaatlusi, kuid järelduse reisijate hulga kohta tahame siiski teha kõigi rongide jaoks. Niisugusel juhul on meil juhuslike mõjudega mudel, kus keskmiste võrdlemisel ei ole enam mõtet. Mõttekas on määrata see osa reisijate arvu hajuvusest, mille põhjustab erinev väljumisaeg.

Eeldused, mis mudeliga seotakse, on samasugused nagu fikseeritud mõjudega mudeligi korral:

- 1) juhuslikud vead ε_{ij} on sõltumatud, normaaljaotusega, keskväärtusega null;
- 2) juhuslike vigade dispersioon on kõikidel faktorite tasemetel ühesugune.

6.7.1. Ühefaktoriline mudel

Uuritakse ühe faktortunnuse mõju. Olgu võimalik kaasata katsesse faktori k taset ja igale tasemele vastavast üldkogumist võetakse valim suurusega n .

Juhuslike mõjudega mudeli kuju on samasugune kui fikseeritud mõjudega mudeli puhul:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad (6.14)$$

kus μ on üldkeskmine,

α_i — faktori i -nda taseme juhuslik mõju, kusjuures kõik mõjud α_i on sõltumatud ning normaaljaotusega keskväärtusega 0 ja dispersiooniga σ_α^2 , st $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha)$,

ε_{ij} — juhuslikud vead, mis on sõltumatud ja normaaljaotusega, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$.

Tuleb meeles pidada, et α_i on siin teistsuguse tähendusega kui fikseeritud mõjudega mudelis. Kuna mõjud α_i on juhuslikud, siis ei saa kasutada kitsendust $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ nagu fikseeritud mõjudega mudeli korral.

Juhuslike mõjudega mudeli korral ei paku huvi konkreetsete keskväärtuste võrdlemine. Selle asemel kontrollitakse, kas faktor suurendab uuritava tunnuse hajuvust.

Kui α_i on dispersiooniga σ_α^2 ja ε_{ij} dispersiooniga σ^2 ning mõlemad suurused on sõltumatud, siis iga vaatlustulemuse dispersioon avaldub kujul:

$$D(y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma^2.$$

Võrduse paremal pool olevaid liikmeid nimetatakse *dispersiooni komponentideks* (sellest tulenevalt nimetatakse ka mudelit vahel dispersiooni komponentide mudeliks).

Faktori mõju hindamiseks kontrollitakse hüpoteese

$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0,$$

$$H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0.$$

Seega väidab nullhüpotees, et valimid on võetud üldkogumist, mille jaotus on $N(0, \sigma)$ — st faktori erinevad tasemed ei põhjusta andmete erinevat hajuvust. Seega on nullhüpoteesid nii fikseeritud mõjude kui ka juhuslike mõjude korral tegelikult väga sarnased: fikseeritud mõjude korral oletame, et kõigi tasemete mõjud on võrdsed nulliga, ja juhuslike mõjudega mudeli puhul, et nii mõõdetud kui ka kõigi teiste tasemete mõjud on võrdsed nulliga. Sisukas hüpotees on samuti sarnane: fikseeritud mõjudega mudeli korral väidame, et vähemalt üks tasemetest avaldab teistest erinevat mõju, juhuslike mõjudega mudeli korral, et kõikide tasemete mõjud ei ole võrdsed.

Mõõtmistulemuste üldist hajuvust kirjeldav hälvete ruutude summa S_y^2 on jagatav kaheks komponendiks: faktori mõjust tingitud hajuvus S_A^2 ja juhuslikule veale vastav hajuvus S^2 . Arvutusvalemid vastavate suuruste leidmiseks on samasugused nagu fikseeritud mõjudega mudeli korral:

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = S_A^2 + S^2,$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2,$$

$$S_A^2 = S_y^2 - S^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2.$$

Keskruutude leidmiseks jagatakse hälvete ruutude summad vabadusastmete arvudega.

Fikseeritud mõjudega mudeli korral nägime, et vealiikmele vastav keskruut MS^2 ja faktorile vastav keskruut MS_A^2 olid nullhüpoteesi kehtimise korral vea dispersiooni hinnanguks. Ka juhuslike mõjudega mudeli korral kehtib võrdus:

$$E(MS^2) = \sigma^2,$$

faktorile vastava keskruudu MS_A^2 keskväärus avaldub järgmiselt:

$$E(MS_A^2) = \sigma^2 + n\sigma_\alpha^2.$$

Mudelist (6.14) avaldame suurused $\bar{y}_{i.}$ ja $\bar{y}_{..}$.

$$\bar{y}_{i.} = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.}, \text{ kus } \bar{\varepsilon}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij},$$

$$\bar{y}_{..} = \mu + \bar{\alpha}_{..} + \bar{\varepsilon}_{..}, \text{ kus } \bar{\alpha}_{..} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{ ja } \bar{\varepsilon}_{..} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}.$$

Seega saame ruutude summa S_A^2 kirjutada kujul

$$\begin{aligned} S_A^2 &= n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \\ &= n \sum_{i=1}^k [(\alpha_i - \bar{\alpha}_{..}) + (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})]^2. \end{aligned}$$

Arvestades, et $E(\alpha_i \varepsilon_{ij}) = 0$, saame

$$\begin{aligned} E(S_A^2) &= n \sum_{i=1}^k E[(\alpha_i - \bar{\alpha}_{..})^2 + (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2] = \\ &= nk\sigma_\alpha^2 + n\sigma_\alpha^2 - 2n\sigma_\alpha^2 + k\sigma^2 + -\sigma^2 - 2\sigma^2 \\ &= (k-1)\sigma^2 + n(k-1)\sigma_\alpha^2. \end{aligned}$$

Kuna $E(MS_A^2) = \frac{E(S_A^2)}{k-1}$, olemegi saanud eespool toodud seose.

Arvutustulemused koondatakse nagu fikseeritud mõjudegi korral dispersioonanalüüsi tabelisse, kus juhuslike mõjudega mudeli puhul on viimases veerus keskrutude keskvaartused.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | Keskruudu keskvaartus |
|----------------------|-----------------------|---------------|------------------------------|-------------------------------|
| Faktor | S_A^2 | $k - 1$ | $MS_A^2 = \frac{S_A^2}{k-1}$ | $\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2$ |
| Viga | S^2 | $k(n - 1)$ | $MS^2 = \frac{S^2}{k(n-1)}$ | σ^2 |
| Üldine | S_y^2 | $N - 1$ | | |

Otsuse langetamiseks kasutatakse F -statistikut,

$$F = \frac{MS_A^2}{MS^2}.$$

Eelduste täidetuse ja nullhüpoteesi õigsuse korral on F -statistik F -jaotusega vabadusastmete arvudega $k - 1$ ja $k(n - 1)$. Tabeli viimasest veerust on näha, et kui nullhüpotees ei kehti, siis on MS_A^2 keskvaartus suurem kui MS^2 keskvaartus. Seega on faktortunnuse mõju olemasolu korral oodata teststatistiku suuri väärtusi.

Kasutades olulisuse nivood α , on otsuse langetamise eeskiri järgmine:

kui $F \geq \bar{f}_{\alpha; k-1, k(n-1)}$, vastu võtta H_1 ,
 kui $F < \bar{f}_{\alpha; k-1, k(n-1)}$, jääda H_0 juurde.

On võimalik hinnata ka dispersiooni komponentide väärtust. Kuna MS_A^2 on suuruse $\sigma^2 + n\sigma_\alpha^2$ ja MS^2 suuruse σ^2 hinnanguks, siis saame:

$$\hat{\sigma}^2 = MS^2,$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{MS_A^2 - MS^2}{n}.$$

Näide 6.14. Psühholoogid kasutavad oma töös mitmesuguseid teste, kusjuures neid teste võivad teha erinevad intervjuerijad. Soovitakse uurida, kas intervjuerija isik mõjutab testi tulemusi. Ei ole otstarbekohane uurida kõikide küsitajate saadud tulemusi. Võetakse juhuslik valik küsitajatest (olgu neid neli ja tähistame nad A, B, C ning D), kellest igaühe juurde saadetakse juhusliku valiku alusel 7 katsealust testi täitma. Saadud tulemused on esitatud tabelis:

| A | B | C | D |
|----|----|----|----|
| 74 | 84 | 85 | 76 |
| 75 | 72 | 79 | 81 |
| 73 | 78 | 79 | 76 |
| 72 | 84 | 84 | 78 |
| 72 | 76 | 78 | 83 |
| 69 | 79 | 77 | 76 |
| 69 | 87 | 78 | 82 |

Kontrollida soovitakse järelilikult hüpoteese:

H_0 : intervjuerija isik ei mõjuta testi tulemusi,

H_1 : intervjuerija isik mõjutab testi tulemusi.

Kuna meid ei huvita mitte niivõrd konkreetse küsitaja juures saadud punktide summa, vaid see, kas küsitaja mõjutab testi tulemust, siis kasutame juhuslike mõjudega mudelit.

Esmalt arvutame iga küsitaja jaoks hindepallide keskmised:

$$\bar{y}_A. = 72, \bar{y}_B. = 80, \bar{y}_C. = 80, \bar{y}_D. = 79.$$

Leiame ka kõikide vaatluste üldkeskmise

$$\bar{y}_{..} = 77.75.$$

Täidame dispersioonanalüüsi tabeli.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | Keskruudu keskväärtsus |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|-------------------------------|
| Testija | 313.25 | 3 | 104.42 | $\sigma^2 + 7\sigma_\alpha^2$ |
| Viga | 310 | 24 | 12.92 | σ^2 |
| Üldine | 623.25 | 27 | | |

Arvutame F -statistiku,

$$F = \frac{104.42}{12.92} = 8.08,$$

ja leiame tabelist F kriitilise väärtuse, $\bar{f}_{0.05;3,24} = 3.01$. Kuna statistiku väärtus on suurem kui tabelist leitud kriitiline väärtus, võtame vastu sisuka hüpoteesi – küsitajale isik mõjutab testi tulemusi.

Arvutame ka dispersiooni komponentide väärtused,

$$\sigma^2 = 12.92,$$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{104.42 - 12.92}{7} = 13.07.$$

Vaatluste üldine dispersioon on σ_y^2 ,

$$\sigma_y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma^2 = 13.07 + 12.92 = 25.99,$$

seega määrab küsitajale 50.29% tulemuste hajuvusest ning 49.71% üldisest hajuvusest on põhjustatud juhuslikust veast.

Meenutame, et meid ei huvita praegu üksikküsitajate poolt saadud keskmised testi punktide summad ja nende võrdlemine, vaid soovime üldiselt hinnata küsitaja mõju testide tulemustele. Olemasoleva andmestiku põhjal võtame vastu sisuka hüpoteesi: küsitaja isik mõjutab testi tulemusi.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



6.7.2. Kahefaktoriline mudel

Olgu uurimisel kahe faktori A ja B mõju. Mõlemad faktorid on juhuslikud, olgu katses võimalik kasutada faktori A puhul a taset ja faktori B jaoks b taset. Kõigil faktorite tasemete kombinatsioonidel on tehtud võrdne arv vaatlusi — olgu see n .

Mudeli saab esitada kujul:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

kus μ on üldkeskmise,

α_i — faktori A i -nda taseme juhuslik mõju,

β_j — faktori B j -nda taseme juhuslik mõju,

γ_{ij} — juhuslik koosmõju, mis vastab faktori A i -ndale ja faktori B j -ndale tasemele,

ε_{ijk} — juhuslik viga.

Mõõtmistulemuste üldise dispersiooni saab avaldada järgmiselt:

$$D(y_{ijk}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2 + \sigma^2.$$

Erinevatele mõjudele vastava dispersiooni komponendi olulisuse hindamiseks kontrollitakse hüpoteese:

1) faktori A mõju hindamiseks:

$H_0(A) : \sigma_\alpha^2 = 0$; faktori A mõju puudub,

$H_1(A) : \sigma_\alpha^2 \neq 0$; faktoril A on mõju;

2) faktori B mõju hindamiseks:

$H_0(B) : \sigma_\beta^2 = 0$; faktori B mõju puudub,

$H_1(B) : \sigma_\beta^2 \neq 0$; faktoril B on mõju;

3) faktorite A ja B koosmõju hindamiseks:

$H_0(AB) : \sigma_\gamma^2 = 0$; faktorite koosmõju puudub,

$H_1(AB) : \sigma_\gamma^2 \neq 0$; faktoritel on koosmõju.

Vaatluste üldist hajuvust kirjeldava hälvete ruutude summa saame jagada komponentideks nagu fikseeritud mõjudega mudeli juures:

$$S_y^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_{AB}^2 + S^2.$$

Hälvete ruutude summad arvutatakse samuti nagu kahefaktorilise fikseeritud mõjudega mudeli korral:

$$S_A^2 = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}...)^2,$$

$$S_B^2 = an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}...)^2,$$

$$S_{AB}^2 = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}...)^2,$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2.$$

Jagades hälvete ruutude summad vastavate vabadusastmete arvudega, leitakse keskmistatud hälvete ruutude summad ehk keskruudud:

$$MS_A^2 = \frac{S_A^2}{a-1},$$

$$MS_B^2 = \frac{S_B^2}{b-1},$$

$$MS_{AB}^2 = \frac{S_{AB}^2}{(a-1)(b-1)},$$

$$MS^2 = \frac{S^2}{N-ab}.$$

Saab näidata, et keskruutude keskvärtused avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} E(MS_A^2) &= \sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + nb\sigma_\alpha^2, \\ E(MS_B^2) &= \sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + na\sigma_\beta^2, \\ E(MS_{AB}^2) &= \sigma^2 + n\sigma_\gamma^2, \\ E(MS^2) &= \sigma^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Mõjude hindamiseks ja nende olulisuse kontrollimiseks vajalike suuruste arvutused koondatakse dispersioonanalüüsi tabelisse.

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | Keskruudu keskvärtus |
|----------------------|-----------------------|---------------|-------------|---|
| Faktor A | S_A^2 | $a - 1$ | MS_A^2 | $\sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + bn\sigma_\alpha^2$ |
| Faktor B | S_B^2 | $b - 1$ | MS_B^2 | $\sigma^2 + n\sigma_\gamma^2 + an\sigma_\beta^2$ |
| Koosmõju | S_{AB}^2 | $(a-1)(b-1)$ | MS_{AB}^2 | $\sigma^2 + n\sigma_\gamma^2$ |
| Viga | S^2 | $N - ab$ | MS^2 | σ^2 |
| Üldine | S_y^2 | $N - 1$ | | |

Nullhüpoteeside kehtimise korral on kõik keskruudud juhusliku vea dispersiooni σ^2 hinnanguks. Kui nullhüpotees ei kehti, siis on keskruudu keskvärtus vastava mõju poolt põhjustatud dispersiooni komponendi võrra suurem.

Näeme, et koosmõju olulisust saab hinnata statistikuga

$$F_{AB} = \frac{MS_{AB}^2}{MS^2},$$

sest kui nullhüpotees ei kehti, siis iseloomustab see suhe koosmõju suurust. Samal põhjusel tuleb faktorite A ja B peamõjude hindamiseks kasutada statistikuid

$$F_A = \frac{MS_A^2}{MS_{AB}^2} \quad ja \quad F_B = \frac{MS_B^2}{MS_{AB}^2}.$$

Olgu f_1 F -statistiku lugejas oleva keskruudu vabadusastmete arv ja f_2 nimetajas oleva keskruudu vabadusastmete arv. Kasutades olulisuse nivood α , on otsuse langetamise eeskiri kõikide mõjude olulisuse kontrollimisel järgmine:

$$\begin{aligned} \text{kui } F &\geq \bar{f}_{\alpha; f_1, f_2}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ \text{kui } F &< \bar{f}_{\alpha; f_1, f_2}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Arvestades seoseid (6.15) saame dispersiooni komponentide hinnangute leidmiseks järgmised valemid:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= MS^2, \\ \hat{\sigma}_\gamma^2 &= \frac{MS_{AB}^2 - MS^2}{n}, \\ \hat{\sigma}_\beta^2 &= \frac{MS_B^2 - MS_{AB}^2}{an}, \\ \hat{\sigma}_\alpha^2 &= \frac{MS_A^2 - MS_{AB}^2}{bn}. \end{aligned}$$

Näide 6.15. Psühholoogilises testis esitab testija igale katsealusele kümme pilti, mille kohta katsealune ütleb nii palju assotsiatsioone, kui ta suudab. Testi juurutajal on tekkinud arvamus, et vastuste hulk sõltub piltide esitamise järjekorrast. Kui oletus on õige, siis tuleb otsida optimaalne piltide järjestus. Oma hüpoteesi kontrollimiseks korraldab ta katse, kus piltide esitamise järjekord on kindlaks määratud.

Testimisel abistavad psühholoogi vastava instruksiooni läbinud abilised ja seetõttu võib loota, et testija ei mõjuta testi tulemusi. Siiski otsustatakse tehtava katse käigus ka selle hüpoteesi paikapidavust kontrollida. Katses on seega kaks faktorit: piltide järjestus ja testija. Kümne pildi järjestamiseks on 3 628 800 võimalust. Sellise katse korraldamine, kus kontrollitakse kõiki järjestusi, läheks väga kulukaks. Ka testijaid oleks palju. Seepärast moodustatakse katse korraldamiseks juhuslik valim mõlema faktortunnuse tasemetest. Osalegu katses neli testijat (A, B, C, D) ja kasutagu igaüks neist viit piltide esitamise järjestust (I, II, III, IV, V). Iga järjestust rakendatakse kuue katsealuse puhul. Olgu olulisuse nivoo 0.05.

Kontrollitavad hüpoteesid on seega järgmised:

- 1) faktori "järjestus" mõju hindamiseks:

$$H_0(A) : \sigma_\alpha^2 = 0; \text{ katsetulemus ei sõltu piltide järjekorrast,}$$

$$H_1(A) : \sigma_\alpha^2 \neq 0; \text{ katsetulemus sõltub piltide järjekorrast;}$$

- 2) faktori "testija" mõju hindamiseks:

$$H_0(B) : \sigma_\beta^2 = 0; \text{ katsetulemus ei sõltu testijast,}$$

$$H_1(B) : \sigma_\beta^2 \neq 0; \text{ katsetulemus sõltub testijast;}$$

- 3) faktorite A ja B koosmõju hindamiseks:

$$H_0(AB) : \sigma_\gamma^2 = 0; \text{ katsetulemus ei sõltu sellest, millist järjestust keegi testijatest kasutab,}$$

$$H_1(AB) : \sigma_\gamma^2 \neq 0; \text{ katsetulemus sõltub sellest, millist järjestust keegi testijatest kasutab.}$$

Katses saadud tulemused on esitatud tabelis:

| Järjestus | A | B | C | D |
|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| I | 28 29 25
29 36 31 | 31 29 26
30 33 25 | 26 35 29
28 33 29 | 23 25 27
32 26 24 |
| II | 25 26 24
28 17 23 | 25 24 27
26 29 33 | 28 27 22
29 26 27 | 24 26 33
30 26 31 |
| III | 29 27 27
21 27 22 | 32 28 24
22 19 23 | 22 26 32
28 20 29 | 24 23 31
33 25 30 |
| IV | 29 21 23
22 25 18 | 22 17 23
20 20 28 | 26 20 21
17 20 23 | 20 18 29
23 17 28 |
| V | 27 32 30
21 22 22 | 22 14 28
32 20 25 | 30 29 32
21 27 29 | 29 19 31
23 25 23 |

Täidame dispersioonanalüüsi tabeli. Arvutame F -statistikute väärtused:

$$F_A = 8.12, \quad F_B = 0.43, \quad F_{AB} = 1.08.$$

Leiame tabelist F kriitilised väärtused:

$$\bar{f}_{0.05;4,12} = 3.26, \quad \bar{f}_{0.05;3,12} = 3.49, \quad \bar{f}_{0.05;12,100} = 1.85.$$

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | Keskruudu kesk-
väärtus |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|---|
| Järjestus | 548.72 | 4 | 138.18 | $\sigma^2 + 6\sigma_\gamma^2 + 24\sigma_\alpha^2$ |
| Testija | 21.80 | 3 | 7.27 | $\sigma^2 + 6\sigma_\gamma^2 + 30\sigma_\beta^2$ |
| Koosmõju | 204.28 | 12 | 17.02 | $\sigma^2 + 6\sigma_\gamma^2$ |
| Viga | 1574.67 | 100 | 15.75 | σ^2 |
| Üldine | 2349.47 | 119 | | |

Arvutatud väärtusi kriitiliste väärtustega võrreldes saame teha järgmised järeldused:

- 1) piltide järjekord mõjutab testi tulemust,
- 2) ei ole alust arvata, et testi läbiviija mõjutab testi tulemust,
- 3) ei saa väita faktortunnuste koosmõju olulisust, st testi tulemus ei sõltu sellest, kas testitav satub intervjueri A juurde, kui viimane kasutab piltide järjestust II või satub ta intervjueri C juurde, kes kasutab järjestust V.

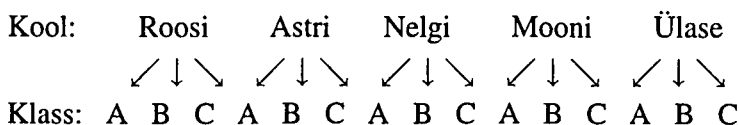
Kuna ainult piltide järjekorra mõju osutus oluliseks, siis vajaks testimisel kasutatav piltide järjekord põhjalikumat uurimist.

Lisas 1 on toodud selle näite lahendus paketi SPSS.



6.8. Hierarhiline tasakaalustatud mudel

Huvitugu Lillede linna haridusjuhid üldhariduskoolide lõpetajate inglise keele oskusest. Neid huvitab küsimus, kas õpetamise tase kõigis koolides on ühesugune. Selleks korraldatakse abituuriumi-klassides ühesugune test. Kui linnas on viis gümnaasiumi ja igas kolm lõpuklassi, saame katset skemaatiliselt kujutada järgmiselt:



Kuigi koolides tähistatakse klasse sarnaselt: igas koolis on klass 12A, klass 12B ja klass 12C, siis tegelikult ei saa me kahte A-klassi samastada: Roosi kooli A-klassis ja Mooni kooli A-klassis ei õpi samad õpilased. Nii on meil mõtet igat klassi vaadata vaid koos vastava kooliga. Võime öelda, et faktor “klass” on allutatud faktorile “kool”. Niisugust mudelit nimetatakse hierarhiliseks mudeliks.

Kahe faktoriga ristmudelis kontrollisime hüpoteese mõlema faktori peamõjude ja faktorite koosmõju kohta. Ütlesime, et koosmõju puudub, kui faktori *A* ühel tasemel on faktori *B* kahe taseme vaheline erinevus sama suur kui faktori *A* teisel tasemel. Kuid hierarhilises mudelis ei ole faktori *A* (“kool”) kõik tasemed seotud faktori *B* (“klass”) kõigi tasemetega. Seepärast ei ole siin võimalik määrata, kuidas muutub faktori *B* (“klass”) tasemete vaheline erinevus faktori *A* (“kool”) tasemete muutudes. Allutatud faktori peamõju võib esmapilgul tunduda hinnatav, sest me saame faktori kõigi tasemete korral arvutada keskmised ja võiksime kontrollida hüpoteesi, et vastavate üldkogumite keskmised on võrdsed. Kuid faktori “klass” esimesed kolm taset esinevad ainult koos faktori “kool” esimese tasemega ja faktori “klass” järgmised kolm taset ainult koos faktori “kool” teise tasemega. Seepärast on faktori “klass” mõju seotud faktori “kool” mõjuga. Faktori “klass” peamõju on hinnatav vaid faktori “kool” iga taseme sees.

Olgu katses kaks faktortunnust *A* ja *B*, kusjuures faktor *B* allub faktorile *A* ja faktori *A* igale tasemele allub *b* faktori *B*

taset. Faktori B igal tasemel olgu tehtud ühepalju mõõtmisi, olgu neid n . Seega on meil tasakaaluline andmestik, kus kokku on $N = abn$ vaatlust.

Katsetulemused saab esitada mudeliga

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}, \quad (6.16)$$

kus y_{ijk} on k -s vaatlus faktori A i -ndal ja sellele vastaval faktori B j -ndal tasemel,

μ on üldkeskmine,

α_i on faktori A i -nda taseme mõju ($i = 1, \dots, a$),

$\beta_{j(i)}$ on faktori B j -nda taseme mõju faktori A i -nda taseme korral ($j = 1, \dots, b$),

ε_{ijk} on juhuslik viga.

Olgu täidetud järgmised eeldused:

- 1) juhuslikud vead on sõltumatud ja normaaljaotusega,
- 2) juhuslike vigade keskväärus on null ja dispersioon on kõiki-del faktori tasemetel ühesugune.

Võtame erinevate keskmiste märkimiseks kasutusele juba tut-tavad tähistused:

$$\bar{y}_{i..} = \frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk},$$

$$\bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk},$$

$$\bar{y}_{...} = \frac{1}{abn} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}.$$

Hälvete ruutude summa S_y^2 mudelist (6.16) saame avaldada ku-jul:

$$\begin{aligned} S_y^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + \\ &+ n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2. \end{aligned}$$

Seega on üldine hälvetate ruutude summa jagatav osadeks, kus esimene liidetav võrduse paremal pool iseloomustab faktori A osa, teine liige vastab faktorile B faktori A alluvuses ning kolmas liige veale. Tähistades vastavad liikmed järgmiselt:

$$S_A^2 = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2,$$

$$S_{B(A)}^2 = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2,$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2,$$

saab ülaltoodud seose kirjutada kujul:

$$S_y^2 = S_A^2 + S_{B(A)}^2 + S^2.$$

Jagades ruutude summad nende vabadusastmetega, mis on vastavalt $N - 1$, $a - 1$, $a(b - 1)$ ja $ab(n - 1)$, saame keskrutud. Kui eeldused on täidetud, siis ühe keskrutudu jagamisel teiega saame F -jaotusega statistiku, mida kasutame faktorite mõju hindamisel. Millist statistikut faktorite A ja B mõju hindamiseks kasutada, sõltub sellest, kas faktorid on fikseeritud või juhuslike mõjudega.

Kui faktorid on fikseeritud mõjudega, siis võtame kasutusele kitsenduse $\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$ ja $\sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} = 0$. Kui faktorid on juhuslike mõjudega, siis kasutame eeldust, et faktori mõjud on sõltumatud ning normaaljaotusega keskvärtusega 0 ja ühesuguse dispersiooniga, st $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha)$ ja $\beta_{j(i)} \sim N(0, \sigma_\beta)$.

Kontrollitavad hüpoteesid faktorite erinevate mõjude korral on järgmised:

| Mõju laad | Hüpoteesid | |
|---------------|--------------------------------|-------------------------------|
| | faktor A | faktor B |
| A fikseeritud | $H_0 : \alpha_i = 0$ | $H_0 : \beta_{j(i)} = 0$ |
| B fikseeritud | $H_1 : \alpha_i \neq 0$ | $H_1 : \beta_{j(i)} \neq 0$ |
| A fikseeritud | $H_0 : \alpha_i = 0$ | $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ |
| B juhuslik | $H_1 : \alpha_i \neq 0$ | $H_1 : \sigma_\beta^2 \neq 0$ |
| A juhuslik | $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ | $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$ |
| B juhuslik | $H_1 : \sigma_\alpha^2 \neq 0$ | $H_1 : \sigma_\beta^2 \neq 0$ |

Otsustamaks, millist F -statistikut mõjude hindamiseks kasutada, peame teadma keskrutude keskväärtusi. Faktorite erinevate mõjude korral on keskrutude keskväärtused järgmised:

| Kesk-
väärtus | A fikseeritud
B fikseeritud | A fikseeritud
B juhuslik | A juhuslik
B juhuslik |
|------------------|--|--|--|
| $E(MS_A^2)$ | $\sigma^2 + \frac{b_n \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$ | $\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + \frac{b_n \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$ | $\sigma^2 + n\sigma_\beta^2 + bn\sigma_\alpha^2$ |
| $E(MS_{B(A)}^2)$ | $\sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$ | $\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$ | $\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$ |
| $E(MS^2)$ | σ^2 | σ^2 | σ^2 |

Kui mõlemad faktorid on fikseeritud, saab faktori A mõju hinnata statistiku $F_A = \frac{MS_A^2}{MS^2}$ abil ning faktori B mõju statistiku $F_B = \frac{MS_{B(A)}^2}{MS^2}$ abil. Teistel juhtudel tuleb statistik faktori A mõju kontrollimiseks arvutada teisiti, seosest $F_A = \frac{MS_A^2}{MS_{B(A)}^2}$. Faktori B mõju olulisust kontrolliv statistik ei muutu, $F_B = \frac{MS_{B(A)}^2}{MS^2}$.

Nagu eespool öeldud, on eelduste täidetuse ja nullhüpoteesi kehtimise korral keskruutude suhe F -jaotusega, mille parameetriteks on kasutatud keskruutude vabadusastmete arvud. Tähistades F -statistiku lugejas oleva keskruudu vabadusastmete arvu f_1 -ga ja nimetajas oleva keskruudu vabadusastmete arvu f_2 -ga ning valides olulisuse nivooks α , on otsuse langetamise eeskiri mõju olulisuse kontrollimisel järgmine:

$$\begin{aligned} &\text{kui } F \geq \bar{f}_{\alpha; f_1, f_2}, \text{ vastu võtta } H_1, \\ &\text{kui } F < \bar{f}_{\alpha; f_1, f_2}, \text{ jääda } H_0 \text{ juurde.} \end{aligned}$$

Hierarhilise mudeli dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut |
|--|--|---------------|---------------|
| Faktor A | $S_A^2 = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$ | $a - 1$ | MS_A^2 |
| Faktor B
faktori A
alluvuses | $S_{B(A)}^2 = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2$ | $a(b - 1)$ | $MS_{B(A)}^2$ |
| Viga | $S^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$ | $ab(n - 1)$ | MS^2 |
| Üldine | $S_y^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$ | $N - 1$ | |

Näide 6.16. Lille linna haridusosakond tahab teada, kas linna gümnaasiumides on inglise keele õpetamise tase ühesugune. Selleks korraldatakse kõigi viie kooli abituriumiklassides ühesugune test. Igas

koolis on kolm lõpuklassi, igast klassist võetakse juhusliku valiku alusel 10 õpilast.

Kontrollime hüpoteese:

$H_0(A) : \alpha_i = 0$, keskmine hinne on kõigis koolides ühesugune,

$H_1(A) : \alpha_i \neq 0$, keskmine hinne kõigis koolides ei ole ühesugune;

$H_0(B) : \beta_{j(i)} = 0$, kooli kõigis klassides on keskmine hinne ühesugune,

$H_1(B) : \beta_{j(i)} \neq 0$, kooli kõigis klassides ei ole keskmine hinne ühesugune.

Õpilaste sooritatud testide tulemused:

| Kool | Klass | Testi punktid | | | | | | | | | |
|-------|-------|---------------|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| | | | | | | | | | | | |
| Roosi | A | 80 | 82 | 71 | 74 | 83 | 71 | 85 | 77 | 82 | 85 |
| | B | 74 | 62 | 60 | 80 | 78 | 75 | 61 | 100 | 65 | 57 |
| | C | 68 | 100 | 100 | 65 | 100 | 75 | 100 | 100 | 82 | 100 |
| Astri | A | 37 | 61 | 45 | 70 | 76 | 64 | 56 | 58 | 56 | 87 |
| | B | 69 | 67 | 100 | 88 | 100 | 65 | 63 | 100 | 96 | 100 |
| | C | 66 | 69 | 73 | 100 | 75 | 71 | 100 | 76 | 100 | 73 |
| Nelgi | A | 73 | 58 | 71 | 21 | 58 | 89 | 66 | 46 | 50 | 38 |
| | B | 88 | 100 | 90 | 93 | 100 | 63 | 85 | 72 | 81 | 100 |
| | C | 86 | 69 | 52 | 73 | 58 | 52 | 66 | 60 | 68 | 56 |
| Mooni | A | 71 | 100 | 94 | 78 | 72 | 82 | 54 | 79 | 34 | 52 |
| | B | 64 | 67 | 65 | 79 | 66 | 72 | 65 | 73 | 80 | 66 |
| | C | 74 | 94 | 100 | 92 | 70 | 60 | 60 | 71 | 51 | 85 |
| Ülase | A | 90 | 94 | 72 | 79 | 95 | 97 | 69 | 65 | 90 | 86 |
| | B | 69 | 81 | 41 | 65 | 60 | 59 | 51 | 90 | 81 | 43 |
| | C | 69 | 71 | 38 | 74 | 80 | 81 | 44 | 69 | 100 | 57 |

Arvutame keskmised ja esitame tulemused tabeli kujul:

| Kool | Klassi keskmine | | | Kooli keskmine |
|-------|-----------------|------|------|----------------|
| | A | B | C | |
| Roosi | 79 | 71.2 | 89 | 79.73 |
| Astri | 61 | 84.8 | 80.3 | 75.37 |
| Nelgi | 57 | 87.2 | 64 | 69.4 |
| Mooni | 71.6 | 69.7 | 75.7 | 72.3 |
| Ülase | 83.7 | 64 | 68.3 | 72 |

üldkeskmine: 73.76

Täidame dispersioonanalüüsi tabeli:

Dispersioonanalüüsi tabel

| Varieeruvuse allikas | Hälvete ruutude summa | Vabadusastmed | Keskruut | F-suhe |
|----------------------|-----------------------|---------------|----------|--------|
| Kool | 1872.13 | 4 | 468.03 | 2.2 |
| Klass(koolis) | 12121.00 | 10 | 1212.10 | 5.7 |
| Viga | 28725.70 | 135 | 212.78 | |
| Üldine | 42718.83 | 149 | | |

Saadud tulemustele tuginedes peame kooli puhul jääma nullhüpoteesi juurde (sest $2.2 < 5.66$), st kõigis koolides on keskmine hinne ühesugune. Faktori "klass" korral aga võtame vastu sisuka hüpoteesi (sest $5.7 > 2.59$): klasside keskmised hinded koolides ei ole võrdsed. Seega võime öelda, et koolid annavad keskmiselt ühesuguse keeleoskuse, kuid kooli sees on keeleõpetuse tase erinevates klassides erinev.



Ülesanded 6

1. Ühe sotsiaalse uuringu raames uuriti töötajate rahulolu oma tööga. Sooviti selgitada, kas tehases töötamise staaž mõjustab rahulolu. Töötajad jagati vastavalt staažile kolme rühma: kuni 5 aastat, 5–10 aastat ja üle 10 aasta. Igas rühmas küsitleti 12 inimest. Tulemused olid järgmised:

| staaž | rahulolu |
|-----------|---------------------------------------|
| kuni 5 a. | 64 65 68 65 65 61 60 64 68 63 59 63 |
| 5 – 10 a. | 77 81 81 82 78 85 78 81 79 80 76 76 |
| üle 10 a. | 97 93 96 95 90 100 93 93 100 95 93 92 |

- (a) Kas staažil on mõju rahulolu keskmisele tasemele?

- (b) Kontrollida kontrasti $l = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3$ olulisust: kas rohkem kui kümme aastat ettevõttes töötanute keskmine rahulolu on võrdne väiksema staažiga kolleegide omaga?
2. Firma, kus korraldatakse mitmesuguseid avaliku arvamuse uuringuid, soovis selgitada küsitluslehtede värvi mõju saadavate vastuste arvule. Küsitluslehed jagati välja 18 kohas. Iga värvi jaoks valiti neist juhuslikult 6 kohta. Fikseeriti tagastatud (täidetud) küsimustike protsent.
- | värv | täidetud küsimustike % |
|----------|------------------------|
| sinine | 29 25 31 27 30 26 |
| punane | 25 27 26 32 28 25 |
| roheline | 31 29 34 28 27 29 |
- (a) Kas juhusliku vea dispersiooni võib lugeda konstantseks?
- (b) Kas keskmine vastanute protsent on erinevate värvide korral oluliselt erinev?
- (c) Kas sinist värvi küsitluslehtedele vastanute keskmine protsent erineb punastele ja rohelistele küsitluslehtedele vastanute keskmisest protsendist? Kasutada Tukey testi ja olulisuse nivood $\alpha = 0.01$.
3. Uuriti noorte teadmisi suguhaigustest. Teadmiste kontrollimiseks kasutati 15-punktilist testi. Noored jagati kolme gruppi: seksuaalselt mitteaktiivsed, seksuaalselt aktiivsed, kellel on üks kindel partner, ja seksuaalselt aktiivsed, kellel on rohkem kui üks partner. Kas erineva seksuaalse aktiivsusega kaasneb erinev teadmiste keskmine tase?
- | grupp | testi punktid |
|----------------|----------------------------|
| mitteaktiivsed | 10 12 8 10 8 5 3 8 10 11 |
| ühe partneriga | 12 11 6 5 15 10 11 9 14 11 |
| mitu partnerit | 12 12 10 4 3 15 14 7 9 15 |
4. Sageli tuleb töölesoovijail saata töökoha otsingul asutusele oma foto. Inimene võib teha foto, kus ta vaatab otse objektiivi, või foto, kus tema vaade ei ole otse kaamerasse. Psühholoog uuris, kas kandidaadi vaade fotol ja otsustaja rollis oleva personalijuhil sugu mõjutavad töö saamist. Töölepürgija fotot näidati kümnele mees- ja kümnele naissoost personalijuhile ja paluti neil hinnata fotol olija sobivust 20-pallisel skaalal (0 — täielik sobimatus, 20 — täielik sobivus). Pooltele kummastki soost hindajatest näidati fotot, kus pildistatav vaatab otse kaamerasse, ja pooltele fotot, kus ta vaatab kõrvale. Hinnangud on järgmised:

| hindaja | vaade fotol | | | | | | | | | |
|---------|-------------|----|----|----|----|---------|----|----|----|----|
| | otse | | | | | kõrvale | | | | |
| mees | 11 | 7 | 12 | 6 | 10 | 12 | 16 | 10 | 13 | 14 |
| naine | 15 | 12 | 14 | 11 | 16 | 14 | 17 | 13 | 20 | 18 |

Kas töötsija vaate suund fotol ja hindaja sugu mõjutavad töö saamise võimalust?

5. Uuriti kolme dieedi efektiivsust kehakaalu vähendamisel. Katsealused jagati ülekaalulisuse põhjal kahte gruppi: kuni 10 kg üle normi ja rohkem kui 10 kg üle normi. Fikseeriti kaalukaotus pärast dieedi lõppu. Tulemused olid järgmised:

| ülekaal | dieet | | | | | | | | | | | |
|------------|-------|---|---|---|----|---|----|---|-----|----|----|----|
| | I | | | | II | | | | III | | | |
| kuni 10 kg | 0 | 2 | 1 | 7 | 1 | 5 | 1 | 3 | 3 | 2 | 10 | 15 |
| | 4 | 0 | 0 | 4 | 3 | 6 | 0 | 7 | 0 | 9 | 9 | 3 |
| üle 10 kg | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 3 | 7 | 15 | 16 |
| | 5 | 3 | 6 | 0 | 8 | 1 | 12 | 5 | 15 | 20 | 30 | 5 |
| | | | | | | | | | | | 3 | 25 |
| | | | | | | | | | | | 27 | |

Millise dieedi teie vajaduse korral valiksite? Põhjendage oma valikut dispersioonanalüüsi tulemustele tuginedes.

6. Uuriti maakoolide algklassiõpilaste IQ taset. Maakonna koolidest valiti juhuslikult 7 kooli, igast koolist juhusliku valiku alusel 10 kolmanda klassi õpilast.

| kool | testi tulemused | | | | | | | | | |
|------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| I | 88 | 98 | 82 | 91 | 103 | 90 | 95 | 100 | 92 | 95 |
| II | 103 | 96 | 75 | 111 | 87 | 110 | 107 | 98 | 89 | 91 |
| III | 96 | 86 | 77 | 91 | 97 | 108 | 88 | 76 | 77 | 96 |
| IV | 124 | 143 | 125 | 122 | 118 | 106 | 98 | 126 | 115 | 108 |
| V | 83 | 126 | 104 | 98 | 90 | 90 | 102 | 82 | 89 | 107 |
| VI | 74 | 78 | 79 | 76 | 100 | 108 | 101 | 106 | 91 | 106 |
| VII | 81 | 112 | 110 | 102 | 119 | 94 | 116 | 104 | 97 | 89 |

Kas maakonna koolide kolmandate klasside õpilaste keskmine IQ tase on erinev (olulisuse nivoo $\alpha = 0.01$)?

7. Uuriti perekondade seltskondlikkust. Hinnati 10-pallisel skaalal (madalam hinne näitab väiksemat seltskondliku lävimise valmidust). Pered on jagatud kolme gruppi: pered, kus vaid mees käib tööle; pered, kus mõlemad abikaasad töötavad, ja pered, kes ei ole ametlikult abielus (vabaabielu), sõltumata suhtest tööle käimisse.

| pere tüüp | hinnang |
|------------------|-------------------|
| mees töötab | 7 8 2 5 7 6 5 |
| mõlemad töötavad | 8 5 4 4 5 5 5 8 2 |
| vabaabielu | 2 1 3 4 1 2 1 1 2 |

Kas erinevate peretüüpide keskmine valmidus seltskonnaeluks on erinev?

8. Ettevõtte kaugekõnede arved on märgatavalt suurenenud. Põhjuste uurimise ühe osana fikseeriti kõnede hinnad kolmes osakonnas kümne nädala jooksul. Osakonnad on: klienditeenindus (1), tootmine (2), teadus- ja arendusosakond (3).

| osakond | kõnede hind kroonides | | | | | | | | | |
|---------|-----------------------|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 | 666 | 495 | 602 | 920 | 1499 | 960 | 796 | 343 | 894 | 813 |
| 2 | 488 | 362 | 152 | 546 | 216 | 542 | 345 | 291 | 516 | 126 |
| 3 | 391 | 450 | 609 | 910 | 705 | 472 | 645 | 496 | 763 | 1309 |

Kas võib kasutada klassikalist dispersioonanalüüsi? Kas osakondade kaugekõnede arvete keskmised tasemed on oluliselt erinevad (kasutada Kruskal-Wallise meetodit)? Olulisuse nivooks valida $\alpha = 0.05$.

9. Firma korraldas konkursi osakonnajuhataja koha täitmiseks. Lõpliku otsuse langetamiseks võeti kolm kandidaati lühikeseks katseajaks tööle. Kõigi kolme alluvuses töötanud inimeste hulgast valiti juhuslikult 9 töötajat, kes pidid järjestama kandidaadid omapoolse hinnangu põhjal (1 — parim).

| kandidaat | tööline | | | | | | | | |
|-----------|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| I | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| II | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| II | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |

Kas kandidaatide keskmine eelistatuse tase on erinev?

10. Parfüüme tootev firma korraldas uute toodete esitluse, kus 12 juhuslikult valitud külastajal paluti järjestada neli lõhnaõli. Tulemused olid järgmised:

| lõhnaõli | järjestus | | | | | | | | | | | |
|----------|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| II | 4 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| III | 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 2 |
| IV | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 |

Kas keskmine eelistatuse tase on erinev?

KIRJANDUS

1. Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, I. A. Introduction to Statistics. St. Paul etc.: West Publishing Company, 1981
2. Clarke, G. M. Statistics and Experimental Design. London: Arnold, 1984
3. Dixon, W. J., Massey, Jr. Introduction to Statistical Analysis. New York: McRraw-Hill Book Company, Inc., 1957
4. Hamilton, L. C. Modern Data Analysis. Belmont, California: Brooks/Cole Publishing Company, by Wadsworth, Inc., 1990
5. Hartung, J., Eplett, B., Klösner, K.-H. Statistik. München, Wien, Oldenburg, 1987
6. Healey, J. F. Statistics: A Tool for Social Research. Belmont, California: Wadsworth Publishing Company, 1990
7. Montgomery, D. C. Design and Analysis of Experiments. New York etc.: John Wiley & Sons, 1991
8. Ott, L. An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis. Belmont, California: Wadsworth Publishing Company, 1977
9. Pratt, J. W., Gibbons, J. D. Concepts of Nonparametric Theory. New York etc.: Springer-Verlag, 1981
10. Sprent, P. Applied Nonparametric Statistical Methods. London etc.: Chapman & Hall, 1993
11. Pollard, J. H. Handbook of Numerical and Statistical Techniques. Cambridge University Press, 1977
12. Parring, A.-M. Sissejuhatus matemaatilisse statistikasse. Tartu, 1989
13. Parring, A.-M. Statistilise andmetöötluse algõpetus I. Tartu, 1991
14. Põhilisi statistikatabeleid. Koost. T. Kollo, Tartu, 1989
15. Tiit, E. Matemaatilise statistika tabelid I. Tartu, 1977
16. Tiit, E. Tõenäosusteooria lühikursus. Tallinn: Avita, 1995
17. Tiit, E., Parring, A., Möls T. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tallinn: Valgus, 1977

LISA 1

SPSS/PC 4.1 TEEJUHT

1. Mis on SPSS/PC 4.1

Täheühend SPSS/PC on lühend ingliskeelsest nimetusest "Statistical Package for the Social Sciences (for Personal Computer)". Seega on tegemist eeskätt humanitaarteadlastele mõeldud statistikatarkvara paketiga. Numbrid 4.1 näitavad versiooni, mis pole küll kõige uuem, aga meil laialt levinud ning kättesaadav, mistõttu piirdume selle versiooni kirjeldamisega.

Paketi SPSS on loonud ja täiendanud mitu autorit: Nie 1975, Beutel 1980, Hull 1981, Norusis 1982, Thaller 1982.

2. Minimaalsed teadmised alustamiseks

Käivitamiseks valida klaviatuurilt tähekombinatsioon SPSS või SPSSPC ja vajutada klahvile **Enter**.

Paketi tööd juhitakse lausega. Lause moodustatakse käskudest. Pakett on tööks valmis, kui ekraani ülemisse poolde on ilmunud paketi põhimenüü (MAIN MENU) koos seletavate märkustega (nn abi/help) ja alumisel poolel vilgub kursor, oodates käskude sisestamist.

Ekraan on seega jagatud kolmeks aknaks: menüüaken, abiteabeaken (soovitav alati lugeda!) ja nn redaktoriaken. Kursori liigutamine menüü- ja redaktoriakna vahel toimub klahvidega **Alt E** (redaktorisse) ja **Alt M** (menüüsse). Lause paketi juhtimiseks tuleb kirjutada redaktoriaknasse.

Selleks vajalikke käske võib kopeerida menüüst (vaikimisi on kursor menüü aknas) või kirjutada ise redaktoriaknasse (selleks tuleb eelnevalt minna redaktoriaknasse valikuga **Alt E**). NB! Lause lõpeb punktiga. Käsk valitakse menüüst valikuakna abil. Selle liigutamine toimub nooleklahvidega **↑** **↓**, kusjuures samaaegselt vahetub alati menüü reale vastav seletav tekst abiteabeaknas.

Menüü on mitmekihiline. Allmenüüdele vastavad read lõpevad märgiga ▷. Liikumine menüü ja tema allmenüüde vahel toimub nooltega: **→** (allmenüüsse) ja **←** (tagasi). Sammu võrra tagasi saame liikuda ka klahviga **Esc**.

Valitud käsu kirjutamiseks redaktoriaknasse tuleb vajutada klahvi **Enter**.

Lause täitmiseks tuleb vajutada klahvidele **F10** ja **Enter** (täidetakse käsuread alates kursorist).

Töö lõpetamiseks ja väljumiseks paketest on käsk FINISH. Selle täitmiseks vajutada samuti klahvidele **F10** ja **Enter**.

Nüüd on meil põhiline oskus paketi juhtimiseks olemas.

3. Andmete sisestamine

Kõigepealt peame sisestama andmed. Selleks valida põhimenüüst allmenüü:

Read and write data.

Siseneme sinna, st vajutame **Enter**, ilmub uus allmenüü. Kogu alljärgnev töö toimub nüüd selles allmenüüs.

Andmete sisestamiseks on kaks võimalust:

3.1. DE. (Data Entry)

See sisestusviis on eriti sobiv sisestamiseks andmeid otse ankeedist ja on realiseeritud iseseisva protseduurina, mille käsitlemine on pisut erinev ülejäänud paketest. Käskude valik mitmekihilistest menüüdest toimub siin mitte valikuakna vaid nn võtmeklahvide abil (st klahvidega F1–F10).

TÖÖ KÄIK:

1) *Andmefailile nime andmine*

Valime **F2** (Files), ilmub allmenüü, valida **F4** (Define New File), seejärel küsitakse faili nime (New File:___). Anda mingi nimi, laiendiks on soovitatav kirjutada SYS (see on SPSS andmefailide standardne täiend). Seejärel liigume tagasi protseduuri põhimenüüsse (klahviga **Esc**).

Nüüd oleme oma andmetele reserveerinud tühja faili.

2) *Tunnuste nimetamine*

Valime **F4** (Dictionary), ilmub allmenüü, valida **F2** (Define Variable). Ilmub aken, milles saab anda tunnusele lühikese ja pika nime, määrata tüübi ja pikkuse ning puuduva väärtuse koodi. Kui tunnuse kohta on kõik vajalik sisestatud, vajutada **Ctrl F10**. Ilmub tühi aken järgmise tunnuse jaoks jne. Kui kõik tunnused on kirjeldatud, valida **Esc**. Me näeme oma tunnuste nimekirja. Veelkord vajutades **Esc** oleme algmenüüs tagasi.

Nüüd oleme oma tunnustele andnud nimed.

3) *Andmemaatriksi sisestamine*

Valime **F5** (Data), ilmub allmenüü, mille all paistab tühi tabel. Sinna pääsemiseks tuleb vajutada tühikuklahvi. Sisestame andmemaatriksi ja kui see on tehtud, vajutame klahvile **Esc**.

Märkus: Andmete sisestamiseks otse ankeedist (st objektide kaupa) peaksime andma tabelile teise kuju. Selleks tuleb enne andmetabeli sisestamist valida **F3** (Forms), selle alt **F2** (Generate Default Form), siis **Esc** (kaks korda, et oleksime peamenüüs tagasi) ja alles nüüd algab andmemaatriksi sisestamine.

Nüüd ärge kiirustage! Andmed tuleb salvestada, muidu olete teinud tühja tööd.

4) Andmete salvestamine

Protseduuri peamenüüst valida võti **F2** (Files) ja seejärel ilmunud allmenüüst võti **F3** (Save Files). Pärast salvestamist (selle käigus ilmnenu küsimustele võib vastata vajutusega klahvile **Enter**), vajutada klahvi **Esc**, et minna protseduuri peamenüüsse tagasi. Sealt viib vajutus klahvile **F10** SPSS-i peamenüü aknasse.

3.2. DATA LIST.

a) See sisestusviis on eriti sobiv ASCII failina esitatud andmete sisestamiseks. Valida käsk FILE ja teatada olemasoleva faili nimi. Kõige lihtsam on sisestada andmeid nn vabas formaadis, kus eraldajaks arvude vahel on tühik. Selliste andmete korral kasutame käsku FREE/{tunnuse nimede loetelu}. Sümboltunnuse (st tunnuse, mille väärtus pole esitatud arvuna) nime järele tuleb kirjutada (Aw), kus w on sümboltunnuse laius.

NÄIDE 1

Oletame, et rühmal inimestel on määratud sugu, vanus, kasv ja kaal. Tunnused on kettal failis PALM.DAT kujul:

| | | | |
|-------|----|-----|----|
| m | 23 | 170 | 68 |
| m | 21 | 175 | 70 |
| n | 20 | 168 | 61 |
| m | 22 | 178 | 75 |
| | | | |
| n | 21 | 167 | 59 |

Nende sisestamiseks pakatile SPSS sobival kujul tuleks täita lause:
DATA LIST FILE 'a:palm.dat'/FREE sugu (A1) vanus kasv kaal.

b) See sisestusviis sobib ka andmete sisestamiseks klaviatuurilt. Andmed tuleb kirjeldada käsuga

DATA LIST FREE /{tunnuste nimede loetelu}.

Edasi valida menüüst käsk BEGIN DATA ja seejärel sisestada klaviatuurilt oma andmed. Andmed lõpevad käsureaga END DATA.

NÄIDE 2

Kui tahame eelmises näites toodud andmeid sisestada klaviatuurilt, tuleks täita lause:

```
DATA LIST FREE/sugu (A1) vanus kasv kaal.
BEGIN DATA
```

```
m   23   170   68
m   21   175   70
n   20   168   61
m   22   178   75
.....
n   21   167   59
```

```
END DATA.
```

Ka nüüd ei tohi kiirustada! Mõlemal juhul tuleb andmed lõpuks ka salvestada! Selleks valida menüüst käsk SAVE/OUTFILE ja anda failile nimi (soovitav jällegi laiendiga SYS).

NÄIDE 3

Salvestame nüüd eelmises näites (või näites 1) sisestatud andmed SPSS-i andmefailina:

```
SAVE/OUTFILE 'palm.sys'.
```

Märkused:

1. Pakett SPSS loeb andmeid ka teistest pakettidest, nagu LOTUS, SYMPHONY, MULTIPLAN EXCEL, dBASE. Selleks kasutada käsku TRANSLATE.

2. Kui on vaja SPSS-st väljastada andmeid ASCII koodis, et neid mujal kasutada, siis selleks on käsk WRITE (andmed kirjutatakse vaikimisi faili SPSS.PRC)

Nüüd oskame andmeid sisestada ja seda koguni mitmel viisil.

Enne andmefaili kasutamist tuleb see aktiveerida. Selleks on käsk GET.

NÄIDE 4

Alustame tööd näites 3 salvestatud andmetega:

GET 'palm.sys'.

Harjutamiseks mõned ülesanded.

ÜLESANNE 1

Sisestada näiteülesannete 4.1, 4.4, 4.10, 4.13 andmed.

Näpunäide: näiteülesandes 4.1 tuleb sisestada kolm tunnust: hinne, klass, kool ja igal neist 40 väärtust.

4. Andmeteisendused

Sageli on vaja enne andmete analüüsimist olemasolevaid andmeid teisendada. Näiteks tuleb sisestatud tunnuste põhjal arvutada tihti uusi tunnuseid. Selleks valime põhimenüüst allmenüü:

Modify data or files.

Sellest allmenüüst valime allmenüü:

Modify data values.

Siin on terve rida erinevaid käske andmeteisendusteks, vaatame lähemalt ainult paari olulisemat. Kõigepealt uue tunnuse arvutamine — käsk COMPUTE. Selle struktuur:

COMPUTE < *tunnuse nimi* > = < *arvutuseeskiri* > .

NÄIDE 5

Selleks, et näites 1 toodud andmetes esitada kasvu meetrites, tuleks täita käsurida

COMPUTE mkasv = kasv / 100.

Selle käsuga lisandub andmetele uus tunnus — mkasv (kasv meetrites).

Tihti on vaja andmeid ümber kodeerida. Selleks kasutatakse käsku RECODE, mille struktuur on järgmine:

RECODE < *tunnuse nimi* > (vana kood = uus kood) ...

(vana kood = uus kood).

NÄIDE 6

Oletame, et tahame tunnuse "sugu" väiketähtedega esitatud koodid asendada suurtähtedega. Selleks sisestame käsurea:

RECODE sugu ('m'='M') ('n'='N').

Nagu panite tähele, tuleb sümboltunnuse koodid panna ülakomade vahele. Arvuliste koodide korral pole see vajalik, näiteks lause

RECODE hinne (1=5) (2=4) (3=3) (4=2) (5=1).

asendab hinded 1 → 5 hinnetega 5 → 1.

5. Andmete kontroll

Pärast andmete sisestamist tuleb neid kontrollida ja parandada jämedad vead. Seda saab teha mitmel viisil.

1. Kasutame mitmesuguseid esmasanalüüsi meetodeid. Näiteks võib leida iga arv tunnuse miinimumi ja maksimumi ning karpdiagrammi.

Valime põhimenüüst allmenüü Analyze Data ja sellest Descriptive Statistics. Soovitud tegevuse saab täita lausega:

EXAMINE/VARIABLES tunnuste nimed
/PLOT BOXPLOT
/STATISTICS EXTREME.

2. Sisestatud andmeid võib vaadata käsuga LIST. See käsk väljastab objektide kaupa ekraanile kogu andmestiku. Saab tellida ka ainult teatud tunnuste väljastamise

LIST VARIABLES={tunnuste nimed}
või ka ainult teatud objektide väljastamise
LIST ALL/CASES = FROM < objekti nr > TO < objekti nr >.

6. Kuhu lähivad tulemused?

Pakett SPSS moodustab töötamise ajal kaks faili, mille nimed on vaikimisi SPSS.LIS ja SPSS.LOG. *NB! Paketti uuesti käivitades kustuvad eelmisel seansil saadud tulemused!* Failis SPSS.LIS on kogu see info, mis paketi töötamise ajal ekraanil on olnud, st nii valitud käsud kui ka tule-

mused. Failis SPSS.LOG on ainult valitud käsud. Korrektsete trükitud tulemuste saamiseks tuleks faili SPSS.LIS mingi tekstiredaktoriga siluda (eemaldada ülearused read jne), suurepäraselt sobib selleks NE (Norton Editor).

7. Näidete lahendused

Lahendame paketi SPSS abil 4., 5. ja 6. peatüki näiteülesanded. Ülesannete lahendamiseks peavad muidugi kõigepealt olema sisestatud andmed. Kellel see on tegemata, peab alustama uuesti punktist 3, muidu ei saa edasi minna.

Näiteülesannete lahendused esitame ühise skeemi järgi. Kõigi ülesannete korral anname lause, millega on võimalik lahenduseni jõuda, ja seejärel SPSS-i väljundi. Väljund on saadud failist SPSS.LIS ja seda on täiendatud, et algajal oleks vajalikku informatsiooni parem leida. Tärnidega (arvu all) on märgitud vastavas näites arvutatud suurused ja sulgudes on toodud vajalike mõistete tõlked.

Otsustuse vastuvõtmine toimub tavaliselt olulisuse tõenäosuse p abil: kui $p \leq \alpha$ (kus α on meie valitud olulisuse nivoo), siis võtame vastu meid huvitava sisuka hüpoteesi H_1 , vastasel juhul jääme nullhüpoteesi juurde.

SPSS arvutab alati olulisuse tõenäosuse p ja esitab selle koos teststatistiku väärtusega.

Kogu andmete analüüs toimub allmenüüs Analyze Data Kahe üldkogumi võrdlemiseks klassikalise t-testiga on allmenüü Comparing group means. Mitteparameetrilised testid leiame allmenüüst Other, seal on esimesel kohal NPAR TESTS.

Näidete 4.4 ja 4.5 lahendused

Lahenduse saame järgmise lausega:

T-TEST /GROUPS SUGU ('n','m') /VARIABLES PALK.

SPSS annab väljundiks:

Independent samples of SUGU

Group 1: SUGU EQ n

Group 2: SUGU EQ m

t-test for: PALK

| | Number
of Cases | Mean
(aritm.
keskmine) | Standard
Deviation
(st.halve) | Standard
Error
(st.viga) |
|---------------------|--------------------|------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| Group 1
(naised) | 12 | 1648.1667
***** | 298.286
***** | 86.108 |
| Group 2
(mehed) | 10 | 1825.3000
***** | 305.486
***** | 96.603 |

| Pooled Variance Estimate
(ühine dispersioon) | | | | Separate Variance Estimate
(erinevad dispersioonid) | | | |
|---|--|----------------|-----------------------------|--|-------|-----------------------------|-----------------|
| F | 2-Tail
Value Prob.
(disp. (p)
suhe) | t | Degrees of
Value Freedom | 2-Tail
Prob. (p) | t | Degrees of
Value Freedom | 2-Tail
Prob. |
| 1.05
***** | .925
***** | -1.37
***** | 20 | .185
***** | -1.37 | 19.11 | .187 |

Arvuti antud tulemused ümardame alati mõistlikult, arvestades andmete täpsust. Niisiis on naispsühholoogide keskmine palk $\bar{x}_1 = 1648.2$, meespsühholoogide keskmine palk $\bar{x}_2 = 1825.3$, palkade standardhälbed $s_1 = 298.3$ ja $s_2 = 305.5$, vastav T-statistik (t value) $T = -1.37$. Olulisuse tõenäosus $p = 0.185$, et $0.185 > 0.05$, siis jääme nullhüpoteesi juurde (mees- ja naispsühholoogide palkade erinevust ei saa tõestada).

Samuti saame samast väljundist näite 4.5 lahenduse. Dispersioonide suhe $F = 1.05$ ja vastav olulisuse tõenäosus $p = 0.925$. Et $0.925 > 0.05$, siis jääme nullhüpoteesi juurde (palkade hajuvuse erinevust ei saa tõestada). Dispersioonide võrdlemise tulemusest sõltub, kumba olulisuse tõenäosust kasutada keskväärtuste võrdlemisel. Kui jäädakse nullhüpoteesi juurde (dispersioonid on võrdsed), tuleb keskväärtuste kohta langetada otsus olulisuse tõenäosuse põhjal jaotusest *Pooled Variance Estimation* (ühine

dispersioon). Kui õnnestus tõestada sisukas hüpotees (dispersioonid on erinevad), tuleb otsus keskväärtuste kohta langetada olulisuse tõenäosuse põhjal jaotusest *Separate Variance Estimate* (erinev dispersioon). Järelikult oli õige ka valida tabelist ühise dispersiooni alt otsustus keskmiste palkade erinevuse kohta.

Näidete 4.8, 4.9 ja 4.10 lahendused

Kalade kaalude keskväärtuste võrdlemiseks erinevates tiikides kasutame Manni-Withney testi ja moodustame lause:

NPART TESTS /MANN-WHITNEY HINNE BY KL (1,2).

Tulemused:

- - - Mann-Whitney U - Wilcoxon Rank Sum W Test

KAAL by TIIK

| Mean Rank
(keskmine astak) | Cases | |
|-------------------------------|-------|-------------|
| 8.40 | 10 | TIIK = 1.00 |
| ***** | | |
| 12.60 | 10 | TIIK = 2.00 |
| ***** | -- | |
| 20 | Total | |

| U | W | EXACT
2-tailed P | Corrected for Ties
Z | 2-tailed P |
|-------|-------|---------------------|-------------------------|------------|
| 29.0 | 84.0 | .1230 | -1.5886 | .1121 |
| ***** | ***** | | ***** | ***** |

Siin arvutatakse keskmised astakud 8.4 (esimese tiigi jaoks) ja 12.6 (teise tiigi jaoks). Nii U - kui ka W -statistiku ($U = 29.0$ $W = 84.0$) jaoks arvutatud standardiseeritud statistiku Z väärtus on $Z = -1.5886$ ja vastav olulisuse tõenäosus on $p = 0.1121$. Kuna $0.1121 > 0.05$, peame jääma nullhüpoteesi juurde. Erinevate söötmisviiside erinevat efektiivsust ei õnnestunud tõestada.

Näite 4.13 lahendus

Siin on meil tegemist keskväärtuste võrdlemisega sõltuvate valimite korral. Moodustame lause:

T-TEST /PAIRS HINNE_E HINNE_P.

Tulemus:

Paired samples t-test: HINNE_E (enne koormust)
HINNE_P (prast koormust)

Statistikud kummagi valimi jaoks:

| Variable | Number
of Cases | Mean | Standard
Deviation | Standard
Error |
|----------|--------------------|------------------|-----------------------|-------------------|
| HINNE_E | 10 | 67.7000
***** | 19.009
***** | 6.011 |
| HINNE_P | 10 | 62.1000
***** | 15.103
***** | 4.776 |

Statistikud vahe jaoks:

| (Difference)
Mean | Standard
Deviation | Standard
Error | Corr. | t
Value | Degrees of
Freedom | 2-Tail
Prob. |
|----------------------|-----------------------|-------------------|-------|---------------|-----------------------|-----------------|
| 5.6000
***** | 6.433
***** | 2.034 | .955 | 2.75
***** | 9 | .022
***** |

Väljundis on esitatud kummagi valimi hinnete keskmised ($\bar{x}_1 = 67.7$, $\bar{x}_2 = 62.1$) ning standardhälbed ($s_1 = 19.9$, $s_2 = 15.1$), otsustus tehakse aga hinnete vahe järgi. Hinnete vahe keskväärtus on $\bar{v} = 5.6$ ja standardhälve $s_v = 6.43$, teststatistik $T = 2.75$ ja olulisuse tõenäosus kahepoolse sisuka hüpoteesi korral $p = 0.022$. Olulisuse nivooks α oli selles ülesandes valitud 0.1. Et $0.022 < 0.1$, siis peame vastu võtma sisuka hüpoteesi (kehaline koormus põhjustab testi hinde keskväärtuse olulisi muutusi). Näeme, et selle otsuse võime vastu võtta ka olulisuse nivool $\alpha = 0.05$, sest $0.022 < 0.05$.

Näite 4.14 lahendus

Lahendame eelmise ülesande ka märgitesti abil:

NPART TESTS /SIGN HINNE_P HINNE_E.

Saadud tulemus:

- - - - Sign Test

HINNE_P (hinne prast)
with HINNE_E (hinne enne)

Cases

```

1 - Diffs (HINNE_E > HINNE_P) (negatiivsed vahed)
***
9 + Diffs (HINNE_E < HINNE_P) (positiivsed vahed)
***
0 Ties (muutuseta)                2-tailed P =      .0215
--                                  *****
10 Total

```

Näeme, et positiivsete vahede arv (N_+) on 9 ja negatiivsete vahede arv 1. Arvutatud olulisuse tõenäosus on $p = 0.0215$. Järelikult saame sama tulemuse: võtame vastu sisuka hüpoteesi.

Märkus: Tulemus ei sõltu sellest, millises järjekorras tunnused esitatakse, st kas võrdleme hinnet pärast koormust hindegaga enne koormust või vastupidi. Antud juhul tuleks vastupidisel korral negatiivsete vahede arvuks 9 ja positiivsete vahede arvuks 1, olulisuse tõenäosus aga ei muutu.

Näidete 4.16 ja 4.17 lahendus

Võrdleme vere suhkrusisaldust enne ja pärast ravi manustamist Wilcoxon'i astakmärgitestiga:

NPARTESTS /WILCOXON SUHKUR.E SUHKUR.P.

Tulemuseks saame:

- - - - Wilcoxon Matched-pairs Signed-ranks Test

SUHKUR_E (suhkrusisaldus enne ravi)
with SUHKUR_P (suhkrusisaldus p\arast ravi)

```

Mean Rank    Cases
12.00        9 - Ranks (SUHKUR_P < SUHKUR_E)
4.00         7 + Ranks (SUHKUR_P > SUHKUR_E)
0            0 Ties (SUHKUR_P = SUHKUR_E)
--
16           Total

```

```

Z =      -2.0684                2-tailed P =      .0386
*****                          *****

```

Olulisuse tõenäosuseks saame $p = 0.039$. See on olulisuse tõenäosus kahepoolse sisuka hüpoteesi korral. Ühepoolsele sisukale hüpoteesile vastava olulisuse tõenäosuse saame, kui jagame kahepoolsele hüpoteesile vastava olulisuse tõenäosuse kahega, $p = 0.0195$. Järelikult, olulisuse nivool $\alpha = 0.05$ saame tõestada sisuka hüpoteesi ($0.0195 < 0.05$): ravimil on suhkrusisaldust alandav toime. Olulisuse nivool $\alpha = 0.01$ peame jääma nullhüpoteesi juurde ($0.0195 > 0.01$).

Näite 4.18 lahendus

Uurime haigete ja tervete puude vaheldumist. Moodustame tunnuse PUU, mis vastab uuritavale puude reale ja tema väärtusteks on ühed ja nullid (üks vastab tervele ja null haigele puule). Jada juhuslikkuse kontrollimiseks moodustame lause:

NPART TESTS /RUNS (1) PUU.

```

- - - - - Runs Test
      PUU
      Runs:   20          Test Value = 1.00
            ****
      Cases:  10   Lt 1.00
              30   Ge 1.00          Z =  1.5083
              --                      *****
              40   Total   2-tailed P =  .1315
                               *****

```

Seeriade arvaks (*runs*) on 20. Statistiku kriitiliseks väärtuseks saame $z = 1.5083$. See erineb mõnevõrra käsitsi arvutatust, sest väikeste valimite korral arvestab SPSS teatud parandusliiget. Tulemus on aga sama, peame jääma nullhüpoteesi juurde (olulisuse tõenäosus on suur $p = 0.1315$).

Näite 4.19 lahendus

Kontrollime, kas eksamihinnete jaotus erinevates ruumides on erinev või sama. Andmed sisestame kahe väärtuse jadana, näiteks ühtede (vastab näites tähele B) ja nullide (vastab tähele A) jadana. Seega on tunnusel RUUM järgmised väärtused:

1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0.

Kontrolli teostamiseks moodustame lause:

NPAR TESTS /RUNS (1) RUUM.

Tulemuseks saame:

- - - - - Runs Test

RUUM

| | | | |
|--------|------|-------------------|--------------------|
| Runs: | 12 | Test Value = 1.00 | |
| | **** | | |
| Cases: | 10 | Lt 1.00 | |
| | 10 | Ge 1.00 | Z = .2297 |
| | -- | | |
| | 20 | Total | 2-tailed P = .8183 |
| | | | ***** |

Seeriade arvuks (*runs*) saame 12. Olulisuse tõenäosus on aga väga suur ($p = 0.8183$), seega peame jääma nullhüpoteesi juurde (hinnete jaotus on mõlemas ruumis ühesugune).

Näite 4.21 lahendus

Analüüsime süstemaatilise muutuse olemasolu USA kullavarudes 12 aasta jooksul. Selleks kontrollime, kas variatsioonireas mediaanist väiksemad ja suuremad väärtused paiknevad juhuslikult.

Pärast andmete sisestamist moodustame lause:

NPAR TESTS /RUNS (MEDIAN) KULD.

Tulemuseks on

- - - - - Runs Test

KULD

| | | | |
|--------|----|-------------------------------|--------------------|
| Runs: | 2 | Test Value = 264.215 (Median) | |
| | | ***** | |
| Cases: | 6 | Lt Median | |
| | 6 | Ge Median | Z = -2.7249 |
| | -- | | |
| | 12 | Total | 2-tailed P = .0064 |
| | | | ***** |

Saame mediaani $Me = 264.215$ ja olulisuse tõenäosuse $p = 0.0064$. Järelikult peame vastu võtma sisuka hüpoteesi (mediaanist suuremad ja väiksemad elemendid ei paikne juhuslikult, esineb süstemaatiline muutus).

Näite 4.22 lahendus

Võrdleme üliõpilaste ja bakalaureusekraadi taotlejate enesehinnanguid. Enesehinnangud on sisestatud ühe tunnusena (tunnus TUDENG) ja asjolu, kas on tegemist üliõpilase või kraaditaotlejaga, määrab tunnus KLASS. Moodustame lause:

CROSSTABS /TABLES= TUDENG BY KLASS
/STATISTICS= CHISQ.

Tulemuseks esitatakse kõigepealt kahemõõtmeline sagedustabel (nn risttabel) ja seejärel statistikud.

TUDENG by KLASS

| Count | KLASS | | Row Total |
|--------------|-------|------|-----------|
| | 1.00 | 2.00 | |
| TUDENG | | | |
| 1.00 | 24 | 3 | 27 |
| | | | 7.7 |
| 3.00 | 55 | 22 | 77 |
| | | | 22.0 |
| 5.00 | 72 | 58 | 130 |
| | | | 37.1 |
| 7.00 | 29 | 53 | 82 |
| | | | 23.4 |
| 9.00 | 20 | 14 | 34 |
| | | | 9.7 |
| Column Total | 200 | 150 | 350 |
| | 57.1 | 42.9 | 100.0 |

| Chi-Square | Value | DF | Significance |
|--|-------------------|----|-----------------|
| Pearson | 33.61016
***** | 4 | .00000
***** |
| Likelihood Ratio | 35.74010 | 4 | .00000 |
| Mantel-Haenszel Test for
Linear Association | 20.38184 | 1 | .00001 |
| Minimum Expected Frequency | 11.571
***** | | |

Number of Missing Observations: 0

χ^2 -statistiku väärtus on 33.61016 ja olulisuse tõenäosus $p = 0.0$, seega võtame vastu sisuka hüpoteesi (enesehinnangute jaotused on erinevad).

Samuti väljastab SPSS siinjuures ka mitmesuguseid teisi statistikuid ning igaühe jaoks olulisuse tõenäosuse (mis kõik on nullilähedased). Eraldi on välja toodud ka minimaalne hinnatud sagedus $e_1^{(2)} = 11.571$.

Näite 4.26 lahendus

Kasutame eelmises näites esitatud ülesande lahendamiseks Kolmogorov-Smirnovi testi. Selleks moodustame lause:

NPARTS /KOLMOGOROV-SMIRNOV TUDENG

BY KLASS (1,2).

Tulemuseks saame:

- - - - Kolmogorov - Smirnov 2-Sample Test

TUDENG
by KLASS

Cases

200 KLASS = 1.00

150 KLASS = 2.00

350 Total

Most Extreme Differences

| Absolute | Positive | Negative | K-S Z | 2-tailed P |
|----------|----------|----------|-------|------------|
| .22833 | .22833 | -.00667 | 2.114 | .000 |
| ***** | | | ***** | ***** |

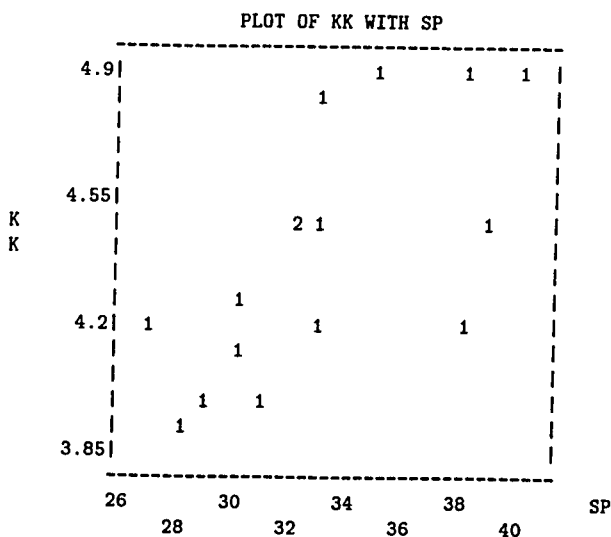
Esitatakse suurim absoluutne erinevus (0.2283), arvutatud Z -statistik ($Z = 2.114$) ja olulisuse tõenäosus $p = 0.0$. Seega ka see test kinnitab, et peame vastu võtma sisuka hüpoteesi (enesehinnangute jaotused on erinevad).

Näite 5.1 lahendus

Vaatame hajuvusdiagrammi joonistamist. Meil levivates SPSS 4.1 versioonides puudub tavaliselt peengraafika blokk, siis graafiku täpsus jätab soovida, ent ettekujutuse andmetest siiski saame. Kõigepealt valime vertikaalteljele keskmise hinde (KK) ja horisontaalteljele summaarse hindepalli (SP). Vastav punkt iga väärtuspaari jaoks tähistatakse joonisel numbriga 1 või 2 (kui on kaks kokkulangevat punkti).

Põhimenüüst valime allmenüü graph data ja moodustame lause:

PLOT /PLOT KK WITH SP.



Näidete 5.3 ja 5.5 lahendused

Leiame eelmises näites vaadatud hinnete vahelise korrelatsiooni. Moodustame lause:

CORRELATIONS /VARIABLES SP KK.

Tulemuseks saame:

| | | |
|---------------|--------|------------------------------------|
| Correlations: | SP | KK |
| SP | 1.0000 | .6704* |
| KK | .6704* | 1.0000 |
| | ***** | |
| N of cases: | 16 | 1-tailed Signif: * - .01 ** - .001 |

Korrelatsioonikordaja keskkooli lõputunnistuse keskmise hinde ja ülikooli sisseastumisel saadud summaarse hindepalli vahel on $r = 0.6704$. Kontrollitakse ka korrelatsioonikordaja olulisust, olulise korrelatsioonikordaja taha kirjutatakse tähn(id). Siinjuures tuleb tähele panna, et SPSS kasutab väikimisi olulisuse kontrollimisel ühepoolset sisukat hüpoteesi. Kahepoolse hüpoteesi kontrollimiseks tuleb lause formeerida kujul CORRELATION /VARIABLES SP KK OPTION 3.

Näite 5.6 lahendus

Leiame nüüd korrelatsioonikordaja hiirte pikkuse ja kaalu vahel. Moodustame lause:

CORRELATIONS /VARIABLES PIKKUS KAAL.

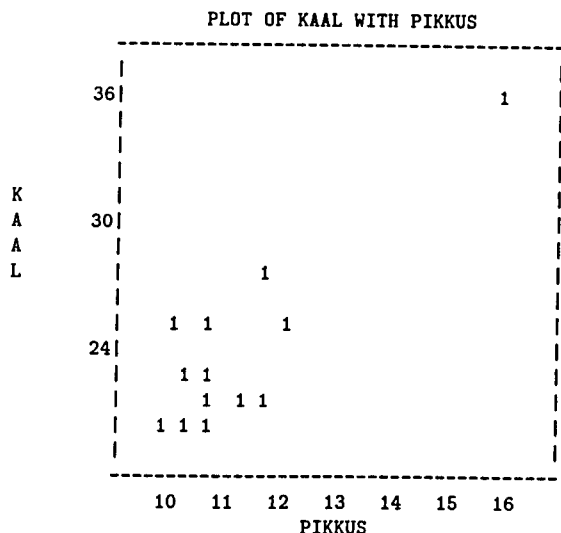
Tulemuseks saame:

| | | |
|---------------|---------|------------------------------------|
| Correlations: | PIKKUS | KAAL |
| PIKKUS | 1.0000 | .8743** |
| KAAL | .8743** | 1.0000 |
| N of cases: | 13 | 1-tailed Signif: * - .01 ** - .001 |

Saime tugeva positiivse seose ($r = 0.8743$). Kontrollime hajuvusdiagrammilt, kas on tõepoolest tegemist tugeva kasvava seosega. Moodustame lause:

PLOT /PLOT KAAL WITH PIKKUS.

Saame graafiku:



Nagu näha, on üks objekt teistest kaugel, mis moonutab korrelatsiooni. Jätame selle objekti andmetest välja, selleks võib kasutada järgmist käsku:

```
SELECT IF (PIKKUS LT 15).
```

st me vaatame ainult neid objekte, kelle pikkus on väiksem kui 15. Seejärel leiame uuesti korrelatsiooni:

```
CORRELATIONS /VARIABLES PIKKUS KAAL.
```

Saame:

```
Correlations:  PIKKUS      KAAL

      PIKKUS      1.0000      .4735
      KAAL        .4735      1.0000
      *****
N of cases:    12          1-tailed Signif:  * - .01  ** - .001
      ****
```

Objektide arv on ühe võrra väiksem (nüüd 12, enne 13), korrelatsioon on vähenenud ($r = 0.4735$) ja mitteoluline.

Näite 5.8 lahendus

Leiame kahe testi vahelise korrelatsiooni. Moodustame lause:

```
CORRELATIONS /VARIABLES T1 T2.
```

Tulemuseks saame:

```

Correlations:  T1          T2

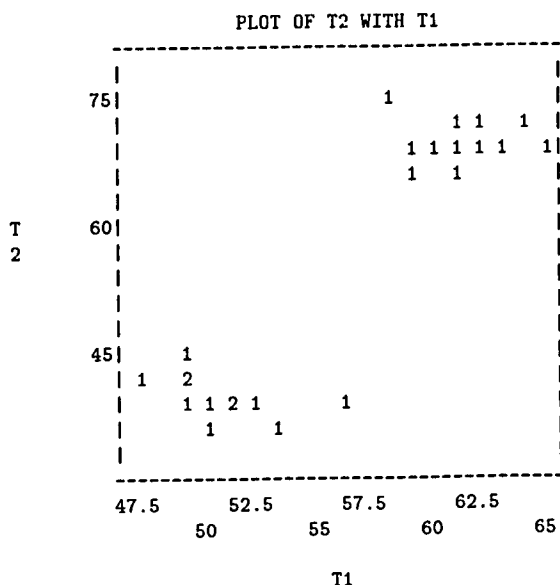
T1          1.0000      .9021**
T2          .9021**    1.0000
*****
N of cases:   24        1-tailed Signif:  * - .01  ** - .001

```

Korrelatsioonikordaja $r = 0.9021$ näitab jällegi väga tugevat positiivset seost. Kontrollime olukorda hajuvusdiagrammil. Selleks moodustame lause:

PLOT /PLOT T2 WITH T1.

Tulemuseks saame graafiku:



Näeme, et tegelikult on tegemist hoopis kahe eraldi asuva punktiparvega. Leiame kummaski eraldi korrelatsioonid. Kõigepealt võtame alumise punktiparve, sellele vastavad 8-aastased lapsed. Eraldame nad andmestikust käsuga:

SELECT IF (VANUS EQ 8).

Seejärel arvutame uuesti korrelatsioonikordaja:

CORRELATIONS /VARIABLES T1 T2.

Saame:

```
Correlations:  T1          T2

      T1          1.0000    -.4790
      T2          -.4790    1.0000
                *****
N of cases:    12          1-tailed Signif:  * - .01  ** - .001
```

Tulemuseks saame hoopis kahaneva seose ($r = -0.4790$), mis vastab tõepoolest alumise punktisarve kujule, kuid korrelatsioonikordaja pole oluline.

Et analüüsida edasi 12-aastaseid lapsi (ülemine punktisarv), tuleb lähtuda uuesti algfailist (st muuta aktiivseks algfail, kasutades käsku GET). Algfailist valime 12-aastased lapsed tingimusega:

SELECT IF (VANUS EQ 12).

Korrelatsiooni leiame analoogiliselt:

CORRELATIONS /VARIABLES T1 T2.

```
Correlations:  T1          T2

      T1          1.0000    .0159
      T2          .0159    1.0000
                *****
N of cases:    12          1-tailed Signif:  * - .01  ** - .001
```

Näeme, et selles rühmas on korrelatsioon väga madal ($r = 0.0159$). Kummaski rühmas ei osutunud korrelatsioonikordaja statistiliselt oluliseks.

Näite 5.9 lahendus

Vaatame edasi astakorrelatsioonikordajat. Paketis SPSS 4.1 puudub otseselt Spearmani korrelatsioonikordaja leidmise protseduur. Seepärast tuleb kasutada asjaolu, et Spearmani korrelatsioon on astakutevaheline korrelatsioon. Leiame kõigepealt astakud, selleks kasutame käsku RANK, mis on allmenüü modify data or files allmenüü modify data values viimane käsk. Moodustame lause: RANK MEHED NAISED.

Protseduuri RANK tulemusena moodustatakse uued tunnused, mis lisatakse andmefaili. Uue tunnuse väärtusteks

on etteantud tunnuse astakud ja tema nimi moodustatakse vanast tähe R lisamisega algusesse. Seega saame:

| From
variable | New
variable | Label |
|------------------|-----------------|----------------|
| ----- | ----- | ----- |
| MEHED | RMEHED | RANK of MEHED |
| NAISED | RNAISED | RANK of NAISED |

Edasi leiame juba tuntud viisil korrelatsiooni uute tunnuste vahel:

CORRELATIONS /VARIABLES RMEHED RNAISED.
Saame:

| | | |
|---------------|---------|------------------------------------|
| Correlations: | RMEHED | RNAISED |
| | RMEHED | .5152 |
| | RNAISED | 1.0000 |
| | ***** | |
| N of cases: | 10 | 1-tailed Signif: * - .01 ** - .001 |

Spearmani korrelatsioonikordaja meeste ja naiste 100 m jooksu rekordite vahel on $r_s = 0.5152$.

Näite 5.10 lahendus

Leiame Spearmani korrelatsioonikordaja ka näites 5.6 toodud hiirte pikkuse ja kaalu vahel. Kõigepealt leiame tunnuste väärtuste astakud:

RANK PIKKUS KAAL.

Saame:

| From
variable | New
variable | Label |
|------------------|-----------------|----------------|
| ----- | ----- | ----- |
| PIKKUS | RPIKKUS | RANK of PIKKUS |
| KAAL | RKAAL | RANK of KAAL |

Edasi leiame korrelatsioonikordaja:

CORRELATIONS /VARIABLES RPIKKUS RKAAL.
Saame:

| | | |
|---------------|---------|------------------------------------|
| Correlations: | RPIKKUS | RKAAL |
| | RPIKKUS | .5609 |
| | RKAAL | 1.0000 |
| | ***** | |
| N of cases: | 13 | 1-tailed Signif: * - .01 ** - .001 |

Spearmani korrelatsioonikordaja hiirte pikkuse ja kaalu vahel on $r_s = 0.5609$.

Näite 5.12 lahendus

Kendalli korrelatsioonikordaja on pakettis SPSS võimalik arvutada koos kahemõõtmeliste sagedustabelitega (vt järgmine ülesanne). On võimalik arvutada τ_b ja τ_c , mis ruudukujulise tabeli korral langevad kokku (nagu ka selle ülesande korral). Moodustame lause:

CROSSTABS /TABLES= K1 BY K2
/STATISTICS= BTAU CTAU.

ja saame tulemuseks (sagedustabelite järel, mida me siinkohal ära ei too)

| Statistic | Value | ASE1 | T-value |
|-----------------|--------|--------|---------|
| Kendall's Tau-b | .23810 | .17635 | 1.35015 |
| Kendall's Tau-c | .23810 | .17635 | 1.35015 |

Seega kohtunike hinnangute vaheline Kendalli korrelatsioonikordaja on $\tau = 0.23810$.

Näite 5.14 lahendus

Uurime hooaja jooksul esinenud mäesuusatajate traumasid. Kahemõõtmelise sagedustabeli saamiseks moodustame lause:

CROSSTABS /TABLES= KVALIF BY VIGAST.

Tulemuseks on järgmine tabel:

| KVALIF by VIGAST | | VIGAST | | | |
|------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
| Count | | | | | Row |
| | | kerge | keskm | raske | Total |
| KVALIF | algaja | 55 | 4 | 1 | 60 |
| | | | | | 37.5 |
| | edasi | 30 | 29 | 11 | 70 |
| | | | | | 43.8 |
| | meist | 11 | 7 | 12 | 30 |
| | | | | | 18.8 |
| Column | | 96 | 40 | 24 | 160 |
| Total | | 60.0 | 25.0 | 15.0 | 100.0 |

Soovides rea suhtelisi sagedusi, tuleb kasutada parameetrit
/CELLS=ROW, seega moodustame lause:

CROSSTABS /TABLES= KVALIF BY VIGAST
/CELLS=ROW.

Saame tabeli:

KVALIF by VIGAST

| KVALIF | VIGAST | | | |
|--------|---------|-------|-------|-------|
| | Row Pct | | | |
| | | kerge | keskm | raske |
| algaja | 91.7 | 6.7 | 1.7 | 60 |
| | | | | 37.5 |
| edasi | 42.9 | 41.4 | 15.7 | 70 |
| | | | | 43.8 |
| meist | 36.7 | 23.3 | 40.0 | 30 |
| | | | | 18.8 |
| Column | 96 | 40 | 24 | 160 |
| Total | 60.0 | 25.0 | 15.0 | 100.0 |

Veeru suhteliste sageduste saamiseks tuleb kasutada para-
meetrit /CELLS=COLUMN, seega moodustame lause:

CROSSTABS /TABLES= KVALIF BY VIGAST
/CELLS=COLUMN.

Saame tabeli:

KVALIF by VIGAST

| KVALIF | VIGAST | | | |
|--------|---------|-------|-------|-------|
| | Col Pct | | | |
| | | kerge | keskm | raske |
| algaja | 57.3 | 10.0 | 4.2 | 60 |
| | | | | 37.5 |
| edasi | 31.3 | 72.5 | 45.8 | 70 |
| | | | | 43.8 |
| meist | 11.5 | 17.5 | 50.0 | 30 |
| | | | | 18.8 |
| Column | 96 | 40 | 24 | 160 |
| Total | 60.0 | 25.0 | 15.0 | 100.0 |

Kui soovime sagedustabelite põhjal analüüsida tunnuste sõltuvust, tuleb arvutada χ^2 -statistik. See (ja ka teised seosekordajad) tellitakse käsuga

/STATISTICS.

Näiteks χ^2 -statistiku, ϕ ja Crameri V saame tellida lausega:

CROSSTABS /TABLES= KVALIF BY VIGAST

/STATISTICS=CHISQ PHI.

Selle tulemusena esitatakse sagedustabelite järel järgmised väärtused:

| Chi-Square | Value | DF | Significance |
|--|----------|------------|--------------|
| ----- | ----- | ---- | ----- |
| Pearson | 51.47063 | 4 | .00000 |
| | ***** | | ***** |
| Likelihood Ratio | 53.52121 | 4 | .00000 |
| Mantel-Haenszel test for
linear association | 37.04891 | 1 | .00000 |
| Minimum Expected Frequency - | 4.500 | | |
| Cells with Expected Frequency < 5 - | 1 OF | 9 (11.1%) | |

| Statistic | Value | Approximate
Significance |
|------------|--------|-----------------------------|
| ----- | ----- | ----- |
| Phi | .56718 | .00000 *1 |
| | ***** | ***** |
| Cramer's V | .40106 | .00000 *1 |
| | ***** | ***** |

*1 Pearson chi-square probability

Näeme, et χ^2 -statistik on 51.47 ja ta on statistiliselt oluline ($p = 0.0$). Seega võime öelda, et suusatajate kvalifikatsioon ja hooajal saadud vigastused on seotud. Statistiliselt olulised on ka teised leitud seosekordajad: $\phi = 0.567$ ja Crameri $V = 0.401$ (mõlemal juhul $p = 0.0$).

Näidete 5.18 ja 5.19 lahendus

Koostame kahemõõtmelise sagedustabeli läbipõlemissündroomi andmestiku kohta ning arvutame tunnustevahelised seosekordajad (Kendalli τ_b , Sommers'i d ja γ). Mõlema tunnuse tasemed on kodeeritud numbritena 1, 2 ja 3. Sõnaliste koodide kasutamisel tuleb tähele panna, et pakett SPSS järjestab nad automaatselt tähestiku järjekorras ja näiteks

antud ülesande korral ei ole see tunnuse sisuline järjestus.
Moodustame lause:

CROSSTABS /TABLES= AEG BY SYNDR
/STATISTICS= BTAU GAMMA D.

Saame tulemuseks tabeli ja selle järel statistikud:

AEG by SYNDR

| | | SYNDR | | | Page 1 of 1 | |
|--------|-------|-------|------|------|-------------|--|
| AEG | Count | | | | Row | |
| | | 1.00 | 2.00 | 3.00 | Total | |
| AEG | 1.00 | 20 | 10 | 8 | 38 | |
| | | | | | 38.0 | |
| | 2.00 | 6 | 15 | 11 | 32 | |
| | | | | | 32.0 | |
| | 3.00 | 4 | 5 | 21 | 30 | |
| | | | | | 30.0 | |
| Column | | 30 | 30 | 40 | 100 | |
| Total | | 30.0 | 30.0 | 40.0 | 100.0 | |

| Statistic | Value | ASE1 | T-value |
|----------------------|--------|--------|---------|
| Kendall's Tau-b | .40266 | .08312 | 4.84408 |
| | ***** | | ***** |
| Gamma | .57167 | .10553 | 4.84408 |
| | ***** | | ***** |
| Somers' D : | | | |
| symmetric | .40266 | .08312 | 4.84408 |
| | ***** | | ***** |
| with AEG dependent | .40364 | .08352 | 4.84408 |
| with SYNDR dependent | .40169 | .08294 | 4.84408 |

Saame seosekordajad $\tau_b = 0.40266$, $\gamma = 0.57167$, $d = 0.40266$ ja paneme tähele, et kõigi seosekordajate jaoks arvutatud t -väärtus on 4.84408, mis on olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$ korral suurem kriitilisest väärtusest (1.96) ning järelikult on kõik arvutatud seosekordajad statistiliselt olulised.

Näidete 5.20–5.24 lahendused

Leiame mudeli üliõpilaste sisseastumispalli prognoosimiseks keskkooli keskmise hinde järgi. Selleks vajalik lause sisaldab järgnevaidsid käsklusi:

/VARIABLES – määrab kõigi nende tunnuste nimed, mis mudelis kasutatakse,

/DEPEND – määrab sõltuva tunnuse,

/METHOD ENTER – määrab sõltumatu(d) tunnuse(d) e argumentitunnuse(d).

Ülesande lahendamiseks moodustame lause:

REGRESSION /VARIABLES SP KK /DEPENDENT SP /METHOD ENTER KK.

Tulemusena väljastatakse terve hulk informatsiooni, millest olulisem osa on järgmine:

```

      * * * *  M U L T I P L E   R E G R E S S I O N   * * * *
Equation Number 1   Dependent Variable..  SP
Variable(s) Entered on Step Number
      1..      KK

      ----- Statistikud
Multiple R           .67041
                    *****
R Square             .44945
                    *****
Adjusted R Square    .41012
Standard Error       3.07213
                    *****

      ----- Dispersioonanal. tabel
Analysis of Variance
              DF          Sum of Squares      Mean Square
Regression           1             107.86782        107.86782
Residual            14             132.13218         9.43801

F =          11.42908      Signif F =   .0045

      ----- Kordajate hinnangud
Variable           B          SE B          Beta          T      Sig T
KK                7.873563     2.328979     .670410         3.381   .0045
                    *****
(Constant)        -1.643678     10.276251     -.160         -.8752
                    *****

```

Tulemuses saame eristada kolme informatsiooniblokki.

Esimene informatsiooniblokk “Statistikud” sisaldab regressiooniseose kasulikkust ja täpsust iseloomustavaid statisti-

kuid. Siit blokest saame tunnustevahelise korrelatsioonikordaja (*Multiple R*) 0.67, determinatsioonikordaja (*R Square*) 0.449 ja keskmise standardvea (*standard error*) 3.07.

Teine informatsiooniblokk sisaldab dispersioonanalüüsi tabeli, F-statistiku ja tema olulisuse tõenäosuse.

Kolmanda informatsioonibloki "Kordajate hinnangud" veerust B saame vähimruutude hinnangud regressioonikordajale (7.87) ja vabaliikmele (-1.64). Seega on prognoosimudelil kuju $SP = -1.64 + 7.87 \cdot KK$. Veerust SE B leiame kordajate standardhälbed, veerust T kordajate olulisust kirjeldavad T-statistikud ja veerust Sig T kordajate olulisuse tõenäosused. Paneme tähele, et vabaliige ei ole oluline (olulisuse tõenäosus $p = 0.8752$).

Lisades ülaltoodud lausesse (käsu /DEPENDENT ette) veel käsu /STATISTICS CI saame kordajate 95% usalduspiirid.

| Variable | 95% Confidence | Intrvl B |
|------------|----------------|-----------|
| KK | 2.878399 | 12.868727 |
| (Constant) | -23.684043 | 20.396687 |

Näite 5.27 lahendus

Leiame eelmises näites saadud mudeli prognoosid, jäägid, standardiseeritud jäägid ja vaatluste mõjukused. Selleks tuleb eelmises näites esitatud lausesse lisada veel käsk

/SAVE PRED (progn) RESID (jaak) SRESID (sjaak)
LEVER (moju).

Sulgudes on nimed, mille alla salvestatakse lähtetunnuste maatriksisse prognoosid, jäägid, standardiseeritud jäägid ja mõjud. Nende (ja esialgsete tunnuste) väljastamiseks kasutatakse käsku LIST allmenüüst reports and tables.

LIST SP KK PROGN JAAK SJAAC MOJU.

Tulemuseks saame:

| Name | Contents |
|-------|----------------------|
| ----- | ----- |
| PROGN | Predicted Value |
| JAAK | Residual |
| SJAAK | Studentized Residual |
| MOJU | Leverage |

| SP | KK | PROGN | JAAK | SJAAK | MOJU |
|-------|------|----------|----------|----------|--------|
| 35.00 | 4.90 | 36.93678 | -1.93678 | -.70759 | .14368 |
| 32.00 | 4.50 | 33.78736 | -1.78736 | -.60273 | .00575 |
| 38.00 | 4.20 | 31.42529 | 6.57471 | 2.23791 | .02299 |
| 30.00 | 4.30 | 32.21264 | -2.21264 | -.74614 | .00575 |
| 33.00 | 4.80 | 36.14943 | -3.14943 | -1.11487 | .09195 |
| 27.00 | 4.20 | 31.42529 | -4.42529 | -1.50628 | .02299 |
| 30.00 | 4.10 | 30.63793 | -.63793 | -.22063 | .05172 |
| 28.00 | 3.90 | 29.06322 | -1.06322 | -.38844 | .14368 |
| 31.00 | 4.00 | 29.85057 | 1.14943 | .40689 | .09195 |
| 32.00 | 4.50 | 33.78736 | -1.78736 | -.60273 | .00575 |
| 33.00 | 4.50 | 33.78736 | -.78736 | -.26551 | .00575 |
| 38.00 | 4.90 | 36.93678 | 1.06322 | .38844 | .14368 |
| 33.00 | 4.20 | 31.42529 | 1.57471 | .53600 | .02299 |
| 29.00 | 4.00 | 29.85057 | -.85057 | -.30110 | .09195 |
| 40.00 | 4.90 | 36.93678 | 3.06322 | 1.11912 | .14368 |
| 39.00 | 4.50 | 33.78736 | 5.21264 | 1.75779 | .00575 |

Näite 6.1 lahendus

Andmestiku moodustavad kaks tunnust: TEST (sõltuv tunnus, testihinded 30 õppuril) ja MEETOD (faktortunnus, kodeeritud numbriliseks 1–3, kusjuures esimeses rühmas on kõigil väärtus 1, teises 2 ja kolmandas 3).

Ülesande lahendamiseks moodustame lause:

ONEWAY /VARIABLES TEST BY MEETOD (1,3).
ja saame tulemuseks dispersioonanalüüsi tabeli :

- - - - - O N E W A Y - - - - -

| Variable TEST | | | | | |
|--------------------|------|----------------------|--------------|---------|---------|
| By Variable MEETOD | | | | | |
| | | Analysis of Variance | | | |
| Source | D.F. | Sum of Squares | Mean Squares | F Ratio | F Prob. |
| Between Groups | 2 | 10093.8667 | 5046.9333 | 16.8231 | .0000 |
| | *** | ***** | ***** | ***** | ***** |
| Within Groups | 27 | 8100.0000 | 300.0000 | | |
| | *** | ***** | ***** | | |
| Total | 29 | 18193.8667 | | | |

Tabelis reast *Between Groups* (rühmadevaheline e õpetamis-meetodi poolt põhjustatud hajuvus) saame ruutude summa 10093.8667 ja talle vastava keskruudu 5046.9333. Reast

Within Groups (rühmadesisene e vea poolt põhjustatud hajuvus) saame ruutude summa 8100.0000 ja talle vastava keskruudu 300.0000. Keskruutude suhe annab meile F -suhte, seega $F = 16.8231$, millele vastav olulisuse tõenäosus on $p = 0.0000$ ja järelikult oleme tõestanud sisuka hüpoteesi: erinevad õpetamismeetodid annavad erisuguse keskmise tulemuse.

Näite 6.2 lahendus

Jätkame eelmise ülesande lahendamist ja vaatame konkreet-selt, millised õpetamismeetodid annavad erineva tulemuse, st lahendame keskmiste mitmese võrdlemise ülesande. Kasuta-me vähima olulise erinevuse (LSD) testi, selleks moodustame lause:

ONEWAY /VARIABLES TEST BY MEETOD (1,3)
/RANGES LSD.

Lisaks eelmises ülesandes kirjeldatud dispersioonanalüüsi tabelile väljastatakse veel palju informatsiooni.

```

----- O N E W A Y -----
      Variable TEST By Variable MEETOD
Multiple Range Test
LSD Procedure
----- 1. osa
Ranges for the .050 level -
      2.90    2.90

The ranges above are table ranges.
The value actually compared with Mean(J)-Mean(I) is..
12.2474 * Range * Sqrt(1/N(I) + 1/N(J)) <---valem stat. arvutamiseks
----- 2. osa
(*)Denotes pairs of groups sign. different at the .050 level
      G G G
      r r r
      p p p
      3 2 1
      Mean      Group
29.4000      Grp 3
41.8000      Grp 2
73.0000      Grp 1      * *
----- 3. osa
Homogeneous Subsets (Subsets of gr, whose highest and lowest means
(homogeensed rühmad) do not differ by more than the shortest
significant range for a subset of that size)
SUBSET 1
Group   Grp 3      Grp 2
Mean    29.4000    41.8000

```

```

SUBSET  2
Group   Grp 1
Mean    73.0000

```

Püüame selles selgust saada. Seletamise hõlbustamiseks on väljund jaotatud kolme ossa, vaatamegi seda osade kaupa. Esimeses osas antakse valem vähima olulise erinevuse statistiku arvutamiseks. Meie juhul saaksime sellest valemist $LSD = 12.2474 * 2.90 * \text{Sqrt}(1/10 + 1/10) = 15.883$ (Sqrt tähistab ruutjuurt), sest antud juhul Range=2.90. Saadud tulemus ühtib käsitsi arvutatud tulemusega. Edasi, teises osas määratakse, millised rühmad on omavahel statistiliselt erinevad, need tähistatakse tärniga (*). Näeme, et esimene rühm (meetod A) erineb kolmandast (meetod C) ja teisest (meetod B). Kolmandas osas näidatakse nn homogeensed alarühmad, st need, mille sees erinevust ei saanud tõestada. Siin on kaks homogeenset alarühma: esimese moodustavad rühmad 3 ja 2 (meetodid C ja B) ja teise — rühm 1 (meetod A).

Näite 6.4. lahendus

Analüüsime ülesandes 6.1 toodud andmeid ka teise mitmese võrdlemise meetodiga — Tukey meetodiga. Selleks tuleb analoogiliselt eelmise näitega moodustada lause, kus käsuga RANGES tellime nüüd Tukey meetodi:

```

ONEWAY /VARIABLES TEST BY MEETOD (1,3)
/RANGES TUKEY.

```

Dispersioonanalüüsi tabelit ja homogeensete rühmade kirjeldust me siin ei esita, vaatame vaid seda osa väljundist, mis vastab konkreetsele meetodile.

```

Tukey-HSD Procedure
Ranges for the .050 level -
      3.50    3.50
The ranges above are table ranges.
The value actually compared with Mean(J)-Mean(I) is..
      12.2474 * Range * Sqrt(1/N(I) + 1/N(J))

```

Toodud valemi abil saame arvutada ka vastava statistiku ($TSD = 12.2474 \times 3.5 \times \sqrt{(1/10 + 1/10)} = 19.12$) Näeme, et tulemus ühtib käsitsi arvutatuga.

Näite 6.5 lahendus

Andmestiku moodustavad keskmine läbimüük (tunnus MYYK) ja koolitusfirma (faktortunnus GRUPP, kus väärtus 0 vastab kontrollrühmale ja väärtused 1–3 erinevatele koolitusfirmadele). Paketiga SPSS saame analoogiliselt eelnevaga tellida dispersioonanalüüsi tabeli. Selleks moodustame lause:

ONEWAY /VARIABLES MYYK BY GRUPP (0,3).

| - - - - - O N E W A Y - - - - - | | | | | |
|------------------------------------|------|----------------------|-----------------|------------|------------|
| Variable MYYK
By Variable GRUPP | | Analysis of Variance | | | |
| Source | D.F. | Sum of
Squares | Mean
Squares | F
Ratio | F
Prob. |
| Between Groups | 3 | 7.1259 | 2.3753 | 3.7715 | .0280 |
| Within Groups | 19 | 11.9663 | .6298 | | ***** |
| Total | 22 | 19.0922 | | | |

Et olulisuse tõenäosus $p = 0.028$ on väiksem tavalisest olulisuse nivoost $\alpha = 0.05$, võtame vastu sisuka hüpoteesi: eri koolitusfirmades ettevalmistuse saanud isikutel oli erinev läbimüük (ehk firmal kui faktoril on mõju läbimüügile). Kontrastide analüüsiks tuleb kasutada käsku /CONTRASTS, millele järgnevad komadega eraldatult vastavad kontrasti kordajad. Kuna kordajate summa peab olema null, siis selle täpseks saavutamiseks tuleb kordajad ette anda täisarvulistena. Seega on siin kontrastide leidmiseks vaja lisa-da lausesse käsud

/CONTRASTS 3,-1,-1,-1/CONTRASTS 0,-1,-1,2.
Tulemuseks saame

| Contrast Coefficient Matrix | | | | |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|
| | Grp 0 | Grp 1 | Grp 2 | Grp 3 |
| Contrast 1 | 3.0 | -1.0 | -1.0 | -1.0 |
| Contrast 2 | .0 | -1.0 | -1.0 | 2.0 |

| Pooled Variance Estimate | | | | | |
|--------------------------|---------|----------|---------|------|---------|
| | Value | S. Error | T Value | D.F. | T Prob. |
| Contrast 1 | -1.0012 | 1.1389 | -.879 | 19.0 | .390 |
| Contrast 2 | 2.6238 | .9082 | 2.889 | 19.0 | .009 |

| Separate Variance Estimate | | | | | |
|----------------------------|---------|----------|---------|------|---------|
| | Value | S. Error | T Value | D.F. | T Prob. |
| Contrast 1 | -1.0012 | 1.1442 | -.875 | 8.2 | .406 |
| Contrast 2 | 2.6238 | .7491 | 3.503 | 7.3 | .009 |

Näite 6.6 lahendus

Kontrollimaks dispersioonide võrdsust näites 6.1 toodud valimite jaoks tuleb lisada näite 6.1 lahendamiseks moodustatud lausele käsk /STATISTICS 3. Seega sisestame lause:

ONEWAY /VARIABLES TEST BY MEETOD (1,3)
/STATISTICS 3.

Väljundis dispersioonanalüüsi tabeli järel (mida siinkohal enam ei esita) esitatakse nüüd dispersioonide homogeensuse testide tulemused.

Tests for Homogeneity of Variances

Cochrans C = Max. Variance/Sum(Variances) = .4474, P = .550

Bartlett-Box F = 2.246 , P = .106

Maximum Variance / Minimum Variance 4.025

Kolme punktis 6.3 kirjeldatud testi jaoks esitatakse teststatistikute väärtused ja antakse neist esimese kahe kohta ka vastavad olulisuse tõenäosused. Praegu on mõlemal juhul olulisuse tõenäosus suurem kui 0.05 ($p = 0.55$ ja $p = 0.106$), olulisuse nivool $\alpha = 0.05$ peame jääma nullhüpoteesi juurde: loeme dispersioonid võrdseteks. Kolmandal real tuuakse maksimaalse ja minimaalse dispersiooni suhe, G -statistik ($G = 4.025$), mille olulisuse kontrollimiseks peame kasutama tabeleid.

Näite 6.8 lahendus

Selle ülesande korral on andmeteks paketi omandamiseks kulunud aeg (tunnus AEG) ja paketi nimetus (tunnus PAKETT), mille väärtused on kodeeritud järgmiselt: Microsoft Word – 1, Word Perfect – 2, Tex – 3.

Dispersioonanalüüsi eelduste täidetust kontrollime järgmise lausega:

```
ONEWAY /VARIABLES AEG BY PAKETT (1,3)
/STATISTICS 3.
```

Dispersioonanalüüsi tabel meid praegu ei huvita ja vaatame ainult sellele järgnevat dispersioonide homogeensuse testi.

Tests for Homogeneity of Variances

| | | |
|--|------------|------|
| Cochrans C = Max. Variance/Sum(Variiances) = | .7178, P = | .042 |
| | ***** | **** |
| Bartlett-Box F = | 2.591, P = | .076 |
| | ***** | **** |
| Maximum Variance / Minimum Variance | 8.393 | |

Tulemusena saame Cochran C-statistiku väärtuseks $C = 0.7178$ ja talle vastavaks olulisuse tõenäosuseks $p = 0.042$, mis on väiksem kui olulisuse nivoo $\alpha = 0.05$ ja järelikult tuleb vastu võtta sisukas hüpotees: dispersioonid on erinevad.

Kuigi siin teises reas oleva Bartlett-Boxi statistiku ($F = 2.591$) ja talle vastava olulisuse tõenäosuse järgi ($p = 0.076$) peaksime jääma nullhüpoteesi juurde, kehtib reegel: kui me mingi statistiku järgi saame tõestada dispersioonide erinevust, siis pole õige neid mingi teise järgi lugeda võrdseteks.

Näite 6.9 lahendus

Lahendame edasi eelmises näites toodud ülesannet. Kuna saime tulemuseks, et valimite dispersioonid pole võrdsed, siis on klassikalise dispersioonanalüüsi eeldused rikutud ja tuleb kasutada mitteparameetrilist meetodit. Moodustame lause

```
NPARTESTS /KRUSKAL-WALLIS AEG
BY PAKETT (1,3).
```

ja saame tulemuseks

- - - - - Kruskal-Wallis 1-way ANOVA

| RAEG | RANK of AEG | | |
|-----------|-------------|----------|---|
| by PAKETT | | | |
| Mean Rank | Cases | | |
| 4.83 | 6 | PAKETT = | 1 |
| 9.33 | 6 | PAKETT = | 2 |
| 14.33 | 6 | PAKETT = | 3 |
| | -- | | |
| | 18 | Total | |

| | | | Corrected for Ties | |
|-------|------------|--------------|--------------------|--------------|
| CASES | Chi-Square | Significance | Chi-Square | Significance |
| 18 | 9.5088 | .0086 | 9.5088 | .0086 |
| | ***** | ***** | | |

Esimeses veerus (*Mean rank*) on toodud valimite keskmised astakud (vastavalt 4.83, 9.33 ja 14.33). Viimases reas on esitatud χ^2 -statistik (*Chi - square*) $H = 9.5088$ ja tal-
le vastav olulisuse tõenäosus (*Significance*) $p = 0.0086$.
Protseduur väljastab ka korregeeritud teststatistiku väärtu-
se (*Corrected for Ties*), kus on arvesse võetud võrdsete
astakute olemasolu. Antud juhul võrdseid aegu ei esinenud
ja korregeeritud teststatistiku väärtus on samuti 9.5088.

Et olulisuse tõenäosus on väiksem kui valitud olulisuse
nivoo $\alpha = 0.01$ ($0.0086 < 0.01$), loeme tõestatuks sisuka
hüpoteesi: erinevate pakettide omandamiseks kulunud aeg on
erinev.

Näite 6.11 lahendus

Andmestiku moodustavad kolm tunnust: TEST, OPETAJA,
MEETOD. Tunnus TEST sisaldab õpilaste testitulemused,
tunnused OPETAJA ja MEETOD on faktortunnused, mõle-
mal kaks taset, mis on lihtsuse mõttes kodeeritud numbrilis-
teks (1–2). Et tegemist on kahefaktorilise dispersioonanalüü-
siga, siis kasutame lauset ANOVA. Rühmade keskmiste leid-
miseks tuleb lisada käsk

/STATISTICS 3.

Seega sisestame

ANOVA /VARIABLES TEST BY MEETOD (1,2)
OPETAJA (1,2) /STATISTICS 3.

Tulemusena väljastatakse kõigepealt keskmised ja seejärel dispersioonanalüüsi tabel.

| * * * C E L L M E A N S * * * | | | | | |
|---|----------------|-------|-----|-------------|-------------|
| TEST BY MEETOD OPETAJA | | | | | |
| TOTAL POPULATION | | | | | |
| 49.18 | (| 28) | | | |
| MEETOD | | | | | |
| 1 | | 2 | | | |
| 64.29 | | 34.07 | | | |
| (| 14) | (| 14) | | |
| OPETAJA | | | | | |
| 1 | | 2 | | | |
| 53.43 | | 44.93 | | | |
| (| 14) | (| 14) | | |
| OPETAJA | | | | | |
| | | 1 | | 2 | |
| MEETOD | | | | | |
| 1 | | 69.14 | | 59.43 | |
| (| 7) | (| 7) | | |
| 2 | | 37.71 | | 30.43 | |
| (| 7) | (| 7) | | |
| * * * A N A L Y S I S O F V A R I A N C E * * * | | | | | |
| TEST BY MEETOD OPETAJA | | | | | |
| Source of Variation | Sum of Squares | | DF | Mean Square | Signif of F |
| Main Effects | 6896.071 | | 2 | 3448.036 | 7.915 .002 |
| MEETOD | 6390.321 | | 1 | 6390.321 | 14.668 .001 |
| OPETAJA | 505.750 | | 1 | 505.750 | 1.161 .292 |
| 2-way Interactions | 10.321 | | 1 | 10.321 | .024 .879 |
| MEETOD OPETAJA | 10.321 | | 1 | 10.321 | .024 .879 |
| Explained | 6906.393 | | 3 | 2302.131 | 5.284 .006 |
| Residual | 10455.714 | | 24 | 435.655 | |
| Total | 17362.107 | | 27 | 643.041 | |

Keskmete osas väljastatakse kõigepealt üldkeskmine (*Total population*) 49.18 ja selle all sulgudes objektide arv 28. Edasi väljastatakse keskmised meetodite kaupa, vastavalt 64.29 ja 34.07, ning õpetajate kaupa, vastavalt 53.43 ja 44.93 (sulgudes keskmise all on jällegi objektide arv), ning lõpuks õpetajale ja meetodile vastav ühine keskmiste tabel.

Dispersioonanalüüsi tabel sisaldab nüüd kõigepealt faktorite peamõjusid (*Main effects*) ning seejärel koosmõju (*2 - way Interactions*). Analüüsides peamõjusid saame

meetodi mõjule vastava F -statistiku $F_A = 14.668$ ja talle vastava olulisuse tõenäosuse $p = 0.00$. Järelikult olulisuse nivool $\alpha = 0.05$ on õpetamismeetodil mõju testi tulemustele. Õpetaja mõjule vastav statistik on $F_B = 1.161$ ja olulisuse tõenäosus $p = 0.29$. Järelikult (et $0.29 > 0.05$) tuleb jääda nullhüpoteesi juurde: erinevad õpetajad annavad sama tasemega teadmisi. Koosmõjude hindamisel saame vastavaks statistikuks $F_{AB} = 0.024$ ja olulisuse tõenäosuseks $p = 0.87$ ning jääme jällegi nullhüpoteesi juurde: faktoritel koosmõju puudub.

Näite 6.12 lahendus

Analoogiliselt eelmisele ülesandele on ka siin tegemist kahe faktortunnusega: õppimisaasta (tunnus AASTA, väärtustega 1-2) ning aktiivsus (tunnus AKTIIV, väärtustega 1-3). Funktsioontunnuseks on testi tulemused (tunnus HINNE). Ülesande lahendamiseks moodustame lause

ANOVA /VARIABLES HINNE BY AASTA (1,2)

AKTIIV (1,3) /STATISTICS 3.

Tulemusena esitatakse jällegi kõigepealt keskmised ja seejärel dispersioonanalüüsi tabel.

| * * * C E L L M E A N S * * * | | | | | | | | | |
|-------------------------------|--|-------|--|-------|--|------|--|--|--|
| HINNE BY AASTA AKTIIV | | | | | | | | | |
| TOTAL POPULATION | | | | | | | | | |
| 10.60 | | | | | | | | | |
| (30) | | | | | | | | | |
| AASTA | | | | | | | | | |
| 1 | | 2 | | | | | | | |
| 9.20 | | 12.00 | | | | | | | |
| (15) | | (15) | | | | | | | |
| AKTIIV | | | | | | | | | |
| 1 | | 2 | | 3 | | | | | |
| 12.70 | | 12.00 | | 7.10 | | | | | |
| (10) | | (10) | | (10) | | | | | |
| AKTIIV | | | | | | | | | |
| | | 1 | | 2 | | 3 | | | |
| AASTA | | | | | | | | | |
| 1 | | 11.00 | | 8.60 | | 8.00 | | | |
| (5) | | (5) | | (5) | | (5) | | | |
| 2 | | 14.40 | | 15.40 | | 6.20 | | | |
| (5) | | (5) | | (5) | | (5) | | | |

| * * * A N A L Y S I S O F V A R I A N C E * * * | | | | | |
|---|-------|----------|--------|--------|-------------|
| | HINNE | BY AASTA | AKTIIV | Mean | Signif |
| Source of Variation | | Sum of | DF | Square | of F |
| Main Effects | | Squares | | | F |
| AASTA | | 245.000 | 3 | 81.667 | 10.294 .000 |
| | | 58.800 | 1 | 58.800 | 7.412 .012 |
| | | | | | **** |
| AKTIIV | | 186.200 | 2 | 93.100 | 11.735 .000 |
| | | | | | **** |
| 2-way Interactions | | 93.800 | 2 | 46.900 | 5.912 .008 |
| AASTA AKTIIV | | 93.800 | 2 | 46.900 | 5.912 .008 |
| | | | | | **** |
| Explained | | 338.800 | 5 | 67.760 | 8.541 .000 |
| Residual | | 190.400 | 24 | 7.933 | |
| Total | | 529.200 | 29 | 18.248 | |

Tabeli põhjal võime öelda, et aastal on mõju, sest vastav olulisuse tõenäosus on $p = 0.012 (< 0.05)$ ning ka aktiivsusel on mõju, siin vastav olulisuse tõenäosus on $p = 0.00$. Samuti on tõestatud faktorite koosmõju, vastav olulisuse tõenäosus on $p = 0.008$. Seega on uuritavas mudelis kõik mõjud olulised.

Lihtmõjude analüüsimiseks peame vaatama eraldi kahte rühma. Kõigepealt eraldame esimese aasta õpilased, selleks kasutame lauset

SELECT IF (AASTA EQ 1).

Seejärel analüüsime saadud osavalimit. Moodustame lause
ONEWAY /VARIABLES HINNE BY AKTIIV (1,3).

| - - - - - O N E W A Y - - - - - | | | | | |
|---------------------------------|--------|----------|---------|--------|-------|
| Variable | HINNE | | | | |
| By Variable | AKTIIV | | | | |
| Source | D.F. | Sum of | Mean | F | F |
| Between Groups | 2 | Squares | Squares | Ratio | Prob. |
| Within Groups | 12 | 25.2000 | 12.6000 | 1.5242 | .2571 |
| Total | 14 | 99.2000 | 8.2667 | | |
| | | 124.4000 | | | |

Dispersioonanalüüsi tabelist näeme, et olulisuse tõenäosus ($FProb$) on $p = 0.2571$. Et $0.2571 > 0.05$, peame jääma nullhüpoteesi juurde: esimese aasta õpilastel aktiivsus enesehinnangut ei mõjusta.

Analüüsi teostamiseks abiturientide hulgas tuleb uuesti muuta aktiivseks algfail (kasutades selleks käsku GET) ja seejärel sellest valida abiturientide osavalim lausega

SELECT IF (AASTA EQ 2).

Edasine analüüs on eelmisega analoogiline, st moodustame lause

ONEWAY /VARIABLES HINNE BY AKTIIV (1,3).
ja saame dispersioonanalüüsi tabeli

| - - - - - O N E W A Y - - - - - | | | | | |
|---------------------------------|--------|----------------|--------------|---------|---------|
| Variable | HINNE | | | | |
| By Variable | AKTIIV | | | | |
| Source | D.F. | Sum of Squares | Mean Squares | F Ratio | F Prob. |
| Between Groups | 2 | 254.8000 | 127.4000 | 16.7632 | .0003 |
| Within Groups | 12 | 91.2000 | 7.6000 | | |
| Total | 14 | 346.0000 | | | |

Saadud tabelist näeme, et olulisuse tõenäosus on $p = 0.0003$, mis on väiksem olulisuse nivoost $\alpha = 0.05$, seega oleme tõestanud sisuka hüpoteesi: abiturientide hulgas mõjustab aktiivsusklass enesehinnangut.

Näite 6.13 lahendus

Andmestiku moodustavad neli erinevat hinnet:

HINNE1 — hinded näitlejale A,

HINNE2 — hinded näitlejale B,

HINNE3 — hinded näitlejale C,

HINNE4 — hinded näitlejale D.

Lahendamiseks kasutame mitteparameetrilist Friedmanni testi, sest meil on tegemist sõltuvate valimitega (samad inimesed on hinnanud korduvalt). Moodustame lause

NPARTESTS /FRIEDMAN

HINNE1 HINNE2 HINNE3 HINNE4.

ja saame tulemuseks

- - - - - Friedman Two-way ANOVA

| Mean Rank | Variable | | | |
|-----------|----------|--|--|--|
| 3.20 | HINNE1 | | | |
| 2.00 | HINNE2 | | | |
| 2.50 | HINNE3 | | | |
| 2.30 | HINNE4 | | | |

| Cases | Chi-Square | D.F. | Significance |
|-------|------------|------|--------------|
| 10 | 4.6800 | 3 | .1968 |
| | ***** | | ***** |

Esimeses veerus antakse keskmised astakud (*Mean Rank*) iga näitleja hinnete jaoks. Viimases reas on statistiku väärtus 4.6800 ja talle vastav olulisuse tõenäosus 0.1968. Et $0.1968 > 0.05$, siis peame jääma nullhüpoteesi juurde: näitlejaid on hinnatud ühtemoodi, kedagi ei eelistata teistele.

Näite 6.14 lahendus

Antud ülesandes saame paketi SPSS kontrollida faktori mõju, ei saa aga hinnata dispersiooni komponente (need on lihtsalt arvutatavad dispersioonanalüüsi tabeli põhjal). Ülesandeks on kontrollida faktori TEST (väärtusteks on küsitlenud A, B, C, D, mis on kodeeritud arvudega 1–4) mõju tunnusele PUNKTE (testis saadud punktide arv). Moodustame lause

ONEWAY /VARIABLES PUNKTE BY TEST (1,4)
/STATISTICS 1.

ja saame tulemuseks

| ----- O N E W A Y ----- | | | | | | | |
|-------------------------|-------|----------------|--------------------|----------------|--------------------------|---------|--|
| Variable | | PUNKTE | | | | | |
| By Variable | | TEST | | | | | |
| Analysis of Variance | | | | | | | |
| Source | D.F. | Sum of Squares | Mean Squares | F Ratio | F Prob. | | |
| Between Groups | 3 | 310.8571 | 103.6190 | 7.8984 | .0008 | | |
| Within Groups | 24 | 314.8571 | 13.1190 | | | | |
| Total | 27 | 625.7143 | | | | | |
| | | | | | | | |
| Group | Count | Mean | Standard Deviation | Standard Error | 95 Pct Conf Int for Mean | | |
| Grp 1 | 7 | 72.0000 | 2.3094 | .8729 | 69.8642 To | 74.1358 | |
| Grp 2 | 7 | 80.0000 | 5.2599 | 1.9881 | 75.1354 To | 84.8646 | |
| Grp 3 | 7 | 80.0000 | 3.1623 | 1.1952 | 77.0754 To | 82.9246 | |
| Grp 4 | 7 | 78.8571 | 3.0783 | 1.1635 | 76.0102 To | 81.7041 | |
| Total | 28 | 77.7143 | 4.8140 | .9098 | 75.8476 To | 79.5810 | |

Nagu tavaliselt, väljastatakse kõigepealt dispersioonanalüüsi tabel ja seejärel (vastavalt käsule /STATISTICS 1) keskmised (*Mean*) koos standardhälvete (*Standard Deviation*) ja standardvigadega (*Standard Error*) ning viimastes veergudes keskmise usalduspiirid (*95 Pct Conf Int for Mean*). Dispersioonanalüüsi tabelist saame olulisuse tõenäosuse $p = 0.0008$

ja et $0.0008 < 0.05$, siis saame öelda, et erinevate küsitlejate korral on erinevad tulemused: faktoril on mõju. Dispersiooni komponente peaks aga analüüsima käsitsi (vt näide 6.14).

Näite 6.15 lahendus

Andmestiku moodustavad kolm tunnust: funktsioontunnus TULEM — testi tulemused; faktortunnused JRK — piltide esitamise järjekord (1–5 erinevat väärtust) ning TEST — testija (1–4 erinevat väärtust). Lahendada saame ülesande üldiselt, st leida dispersioonanalüüsi tabeli. Moodustame lause

ANOVA /VARIABLES TULEM

BY JRK (1,5) TEST (1,4).

ja saame tulemuseks

| * * * A N A L Y S I S O F V A R I A N C E * * * | | | | | |
|---|----------------|-----|-------------|-------|-------------|
| TULEM | | | | | |
| BY JRK | | | | | |
| TEST | | | | | |
| Source of Variation | Sum of Squares | DF | Mean Square | F | Signif of F |
| Main Effects | 570.517 | 7 | 81.502 | 5.176 | .000 |
| JRK | 548.717 | 4 | 137.179 | 8.712 | .000 |
| | | | | | **** |
| TEST | 21.800 | 3 | 7.267 | .461 | .710 |
| | | | | | **** |
| 2-way Interactions | 204.283 | 12 | 17.024 | 1.081 | .384 |
| JRK TEST | 204.283 | 12 | 17.024 | 1.081 | .384 |
| | | | | | **** |
| Explained | 774.800 | 19 | 40.779 | 2.590 | .001 |
| Residual | 1574.667 | 100 | 15.747 | | |
| Total | 2349.467 | 119 | 19.743 | | |

Tabeli põhjal võime öelda, et faktoril JRK (piltide järjestus) on mõju (sest vastav olulisuse tõenäosus on 0.000), kuid faktoril TEST (testija) ei ole mõju (vastav olulisuse tõenäosus on 0.710 (sest $0.710 > 0.05$)) testi tulemustele. Puudub ka faktorite koosmõju (vastav olulisuse tõenäosus on 0.384).

8. Lõpetuseks

Ärge kaotage lootust! See kõik ei olegi nii raske!

Kui olete lahendanud kõik ülesanded ja töötate juba oma andmetega, siis olete põhialused omandanud.

Kui olete õpiku siiani lihtsalt läbi lugenud, siis võtke uuesti lahti Lisa esimene lehekülg ja lahendage kõik näited ja ülesanded. Iga tehtud sammu järel võtke natuke aega ja mõelge läbi, mida te tegite. Nii omandate samm-sammult SPSS-i, nagu te õppisite lugema.

Märkus

Ka neil, kellel on kasutada paketi SPSS Windowsi versioon, kus töö toimub valikuga erinevatest menüüakendest, ei maksa seda õpikut käest visata! Kuigi Windowsi versioonides ei pea teadma statistikaprotseduure realiseerivate käskude nimetusi, on ometi nende teadmine abiks menüüdest valikute tegemisel, sest lõppkokkuvõttes tuleb ikkagi teha sarnased valikud. Windowsi keskkonnas saab ka otseselt kirjutada lauseid. Selleks tuleb avada põhimenüüst aken FILE, sealt NEW ja SPSS Syntax. Seejärel ongi avatud aken lausete sisestamiseks, sinna saame kirjutada vajaliku(d) käsu(d). Valides aknas klahvi RUN käivitame kirjutatud lause(d). Samas on ka klahv Syntax, kust saame abi, kui meil tekib probleeme käskude kirjutamisel.

JÕUDU TÕÖLE!

LISA 2

Psühholoogide-kaugõppijate ankeet

| Jrk. | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 | X8 | X9 | X10 |
|------|----|----|----|----|------|----|----|-----|----|-----|
| 1. | N | 31 | L | 2 | PedI | A | 14 | 140 | E | H |
| 2. | M | 35 | A | 1 | EPA | A | 17 | 320 | J | H |
| 3. | N | 32 | A | 2 | PedI | L | 10 | 318 | J | H |
| 4. | N | 35 | A | 3 | PedI | A | 15 | 260 | J | H |
| 5. | N | 26 | V | 0 | EPA | L | 1 | 130 | E | H |
| 6. | N | 25 | V | 0 | TPI | SL | 3 | 210 | J | K |
| 7. | N | 28 | V | 0 | TRÜ | SL | 8 | 180 | J | H |
| 8. | N | 31 | A | 2 | PedI | L | 11 | 250 | J | H |
| 9. | N | 38 | L | 1 | PedI | A | 14 | 250 | J | H |
| 10. | N | 44 | A | 2 | PedI | A | 26 | 200 | J | H |
| 11. | N | 30 | L | 1 | PedI | M | 12 | 360 | J | H |
| 12. | M | 28 | V | 0 | EPA | M | 7 | 270 | E | K |
| 13. | N | 26 | A | 0 | TRÜ | L | 8 | 403 | — | H |
| 14. | N | 28 | A | 2 | TRÜ | A | 9 | 242 | J | K |
| 15. | N | 28 | V | 0 | PedI | L | 9 | 140 | — | H |
| 16. | N | 30 | A | 2 | TRÜ | SL | 6 | 240 | J | H |
| 17. | N | 25 | A | 0 | TRÜ | M | 1 | 220 | J | H |
| 18. | N | 25 | V | 0 | PedI | L | 2 | 220 | J | K |
| 19. | N | 31 | A | 2 | PedI | SL | 8 | 235 | J | K |
| 20. | N | 27 | A | 3 | TRÜ | SL | 4 | 280 | E | H |
| 21. | N | 33 | L | 2 | PedI | SL | 15 | 286 | J | K |
| 22. | N | 24 | A | 1 | TRÜ | A | 1 | 140 | — | H |
| 23. | M | 48 | A | 1 | TPI | SL | 35 | 250 | E | K |
| 24. | M | 28 | A | 1 | PedI | SL | 12 | 250 | J | H |
| 25. | M | 26 | V | 0 | PedI | A | 3 | 175 | J | V |
| 26. | M | 37 | A | 2 | PedI | L | 15 | 280 | J | K |
| 27. | M | 30 | A | 2 | TRÜ | M | 12 | 310 | J | K |
| 28. | N | 25 | V | 0 | TRÜ | L | 2 | 230 | — | K |
| 29. | N | 31 | V | 0 | PedI | A | 9 | 160 | E | H |
| 30. | N | 33 | A | 1 | EPA | L | 10 | 150 | J | K |

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|----|---|---|------|----|----|-----|---|---|
| 31. | N | 32 | A | 2 | EPA | M | 10 | 245 | J | K |
| 32. | M | 28 | V | 0 | EPA | A | 5 | 240 | J | K |
| 33. | N | 27 | V | 0 | EPA | M | 5 | 200 | E | V |
| 34. | N | 27 | V | 0 | PedI | L | 6 | 150 | J | V |
| 35. | M | 26 | A | 0 | TPI | L | 2 | 180 | J | H |
| 36. | N | 26 | V | 0 | TRÜ | A | 7 | 233 | E | H |
| 37. | N | 24 | V | 0 | TRÜ | A | 7 | 208 | J | K |
| 38. | M | 25 | V | 0 | PedI | SL | 7 | 172 | J | H |
| 39. | N | 34 | A | 2 | TRÜ | L | 12 | 240 | J | H |

Tabelis toodud lühitähistuste taga peituvad järgmised tunnused:

- X1 — sugu
- X2 — vanus
- X3 — perekonnaseis
- X4 — laste arv
- X5 — lõpetatud kõrgkool
- X6 — asula suurus, kus vastaja töötab
- X7 — tööstaaž
- X8 — palk
- X9 — rahulolu tööga
- X10 — edukus kõrgkoolis

Tunnuste väärtuste kodeerimisel on kasutatud järgmisi tähistusi (kasutatakse kõrgkoolide vanu nimetusi)

- X5 : PedI — Tallinna Pedagoogiline instituut
- EPA — Eesti Põllumajanduse Akadeemia
- TPI — Tallinna Polütehniline Instituut
- TRÜ — Tartu Riiklik Ülikool

- X6 : M — maa-asula
- A — alev
- L — linn
- SL — vabariikliku alluvusega linn

- X10: K — keskmine
- H — hea
- V — väga hea

LISA 3

Lugemisajad

Iga tulemuse ette on kirjutatud järjekorranumber

| | | | | |
|---------|---------|---------|----------|----------|
| 1. 72 | 31. 110 | 61. 106 | 91. 128 | 121. 98 |
| 2. 94 | 32. 162 | 62. 119 | 92. 114 | 122. 106 |
| 3. 99 | 33. 137 | 63. 102 | 93. 98 | 123. 105 |
| 4. 116 | 34. 142 | 64. 136 | 94. 144 | 124. 106 |
| 5. 82 | 35. 121 | 65. 124 | 95. 111 | 125. 111 |
| 6. 130 | 36. 109 | 66. 112 | 96. 134 | 126. 89 |
| 7. 92 | 37. 122 | 67. 129 | 97. 110 | 127. 123 |
| 8. 134 | 38. 152 | 68. 123 | 98. 119 | 128. 125 |
| 9. 105 | 39. 105 | 69. 80 | 99. 146 | 129. 95 |
| 10. 129 | 40. 114 | 70. 116 | 100. 103 | 130. 113 |
| 11. 86 | 41. 121 | 71. 143 | 101. 152 | 131. 125 |
| 12. 81 | 42. 93 | 72. 85 | 102. 96 | 132. 174 |
| 13. 169 | 43. 131 | 73. 152 | 103. 134 | 133. 131 |
| 14. 141 | 44. 137 | 74. 153 | 104. 154 | 134. 130 |
| 15. 97 | 45. 132 | 75. 83 | 105. 125 | 135. 104 |
| 16. 141 | 46. 108 | 76. 95 | 106. 147 | 136. 124 |
| 17. 79 | 47. 83 | 77. 127 | 107. 86 | 137. 94 |
| 18. 93 | 48. 145 | 78. 133 | 108. 117 | 138. 105 |
| 19. 114 | 49. 143 | 79. 147 | 109. 133 | 139. 117 |
| 20. 118 | 50. 108 | 80. 146 | 110. 127 | 140. 115 |
| 21. 99 | 51. 116 | 81. 123 | 111. 122 | 141. 101 |
| 22. 101 | 52. 102 | 82. 168 | 112. 90 | 142. 97 |
| 23. 142 | 53. 115 | 83. 120 | 113. 91 | 143. 111 |
| 24. 96 | 54. 105 | 84. 95 | 114. 108 | 144. 114 |
| 25. 131 | 55. 81 | 85. 92 | 115. 140 | 145. 124 |
| 26. 119 | 56. 125 | 86. 126 | 116. 120 | 146. 119 |
| 27. 150 | 57. 122 | 87. 99 | 117. 116 | 147. 138 |
| 28. 137 | 58. 126 | 88. 126 | 118. 96 | 148. 98 |
| 29. 88 | 59. 132 | 89. 122 | 119. 118 | 149. 130 |
| 30. 145 | 60. 122 | 90. 135 | 120. 114 | 150. 98 |

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 151. 65 | 185. 143 | 219. 102 | 253. 102 | 287. 130 |
| 152. 114 | 186. 126 | 220. 112 | 254. 101 | 288. 125 |
| 153. 135 | 187. 101 | 221. 125 | 255. 131 | 289. 134 |
| 154. 139 | 188. 123 | 222. 139 | 256. 111 | 290. 106 |
| 155. 121 | 189. 121 | 223. 97 | 257. 112 | 291. 149 |
| 156. 177 | 190. 131 | 224. 119 | 258. 164 | 292. 105 |
| 157. 92 | 191. 152 | 225. 122 | 259. 99 | 293. 145 |
| 158. 140 | 192. 97 | 226. 171 | 260. 143 | 294. 102 |
| 159. 151 | 193. 141 | 227. 106 | 261. 152 | 295. 119 |
| 160. 124 | 194. 86 | 228. 128 | 262. 130 | 296. 95 |
| 161. 92 | 195. 123 | 229. 145 | 263. 107 | 297. 129 |
| 162. 75 | 196. 117 | 230. 113 | 264. 131 | 298. 102 |
| 163. 139 | 197. 128 | 231. 99 | 265. 107 | 299. 135 |
| 164. 155 | 198. 104 | 232. 99 | 266. 114 | 300. 127 |
| 165. 166 | 199. 129 | 233. 105 | 267. 112 | 301. 132 |
| 166. 132 | 200. 138 | 234. 119 | 268. 154 | 302. 113 |
| 167. 150 | 201. 110 | 235. 118 | 269. 135 | 303. 144 |
| 168. 144 | 202. 103 | 236. 151 | 270. 141 | 304. 114 |
| 169. 121 | 203. 132 | 237. 145 | 271. 101 | 305. 140 |
| 170. 119 | 204. 106 | 238. 127 | 272. 122 | 306. 101 |
| 171. 132 | 205. 150 | 239. 99 | 273. 141 | 307. 116 |
| 172. 132 | 206. 71 | 240. 146 | 274. 135 | 308. 116 |
| 173. 125 | 207. 76 | 241. 106 | 275. 103 | 309. 117 |
| 174. 86 | 208. 88 | 242. 111 | 276. 131 | 310. 104 |
| 175. 89 | 209. 117 | 243. 87 | 277. 113 | 311. 118 |
| 176. 120 | 210. 131 | 244. 125 | 278. 124 | 312. 122 |
| 177. 99 | 211. 147 | 245. 114 | 279. 87 | 313. 131 |
| 178. 139 | 212. 129 | 246. 144 | 280. 113 | 314. 139 |
| 179. 102 | 213. 118 | 247. 85 | 281. 155 | 315. 130 |
| 180. 129 | 214. 95 | 248. 110 | 282. 121 | 316. 106 |
| 181. 148 | 215. 106 | 249. 103 | 283. 59 | 317. 142 |
| 182. 80 | 216. 139 | 250. 95 | 284. 125 | 318. 97 |
| 183. 114 | 217. 114 | 251. 84 | 285. 122 | 319. 77 |
| 184. 83 | 218. 73 | 252. 112 | 286. 115 | 320. 147 |
| 321. 102 | 342. 172 | 363. 125 | 384. 134 | 405. 158 |
| 322. 137 | 343. 117 | 364. 107 | 385. 144 | 406. 114 |
| 323. 107 | 344. 138 | 365. 125 | 386. 110 | 407. 114 |
| 324. 108 | 345. 92 | 366. 126 | 387. 147 | 408. 122 |
| 325. 118 | 346. 107 | 367. 12 | 388. 94 | 409. 122 |
| 326. 140 | 347. 118 | 368. 96 | 389. 122 | 410. 108 |
| 327. 112 | 348. 134 | 369. 140 | 390. 120 | 411. 136 |

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 328. 138 | 349. 157 | 370. 125 | 391. 105 | 412. 124 |
| 329. 118 | 350. 115 | 371. 134 | 392. 146 | 413. 149 |
| 330. 115 | 351. 117 | 372. 101 | 393. 141 | 414. 104 |
| 331. 127 | 352. 97 | 373. 82 | 394. 138 | 415. 116 |
| 332. 113 | 353. 94 | 374. 130 | 395. 134 | 416. 119 |
| 333. 111 | 354. 54 | 375. 115 | 396. 114 | 417. 134 |
| 334. 105 | 355. 103 | 376. 128 | 397. 121 | 418. 111 |
| 335. 107 | 356. 119 | 377. 140 | 398. 140 | 419. 108 |
| 336. 133 | 357. 123 | 378. 153 | 399. 123 | 420. 136 |
| 337. 106 | 358. 133 | 379. 124 | 400. 154 | 421. 117 |
| 338. 112 | 359. 84 | 380. 122 | 401. 96 | 422. 101 |
| 339. 108 | 360. 122 | 381. 137 | 402. 97 | 423. 155 |
| 340. 110 | 361. 109 | 382. 113 | 403. 113 | 424. 127 |
| 341. 88 | 362. 161 | 383. 124 | 404. 66 | 425. 135 |

TABEL A. Binoomjaotused

| m x | P | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | .01 | .05 | .10 | .20 | .30 | .40 | .50 | .60 | .70 | .80 | .90 | .95 | .99 | |
| 3 | 0 | 970 | 857 | 729 | 512 | 343 | 216 | 125 | 064 | 027 | 008 | 001 | 0+ | 0+ |
| | 1 | 029 | 135 | 243 | 384 | 441 | 432 | 375 | 288 | 189 | 096 | 027 | 007 | 0+ |
| | 2 | 0+ | 007 | 027 | 096 | 189 | 288 | 375 | 432 | 441 | 384 | 243 | 135 | 029 |
| | 3 | 0+ | 0+ | 001 | 008 | 027 | 064 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 857 | 970 |
| 4 | 0 | 961 | 815 | 656 | 410 | 240 | 130 | 062 | 026 | 008 | 002 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 039 | 171 | 292 | 410 | 412 | 346 | 250 | 154 | 076 | 026 | 004 | 0+ | 0+ |
| | 2 | 001 | 014 | 049 | 154 | 265 | 346 | 375 | 346 | 265 | 154 | 049 | 014 | 001 |
| | 3 | 0+ | 0+ | 004 | 026 | 076 | 154 | 250 | 346 | 412 | 410 | 292 | 171 | 039 |
| 5 | 0 | 951 | 774 | 590 | 328 | 168 | 078 | 031 | 010 | 002 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 048 | 204 | 328 | 410 | 360 | 259 | 156 | 077 | 028 | 006 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 001 | 021 | 073 | 205 | 309 | 346 | 312 | 230 | 132 | 051 | 008 | 001 | 0+ |
| | 3 | 0+ | 001 | 008 | 051 | 132 | 230 | 312 | 346 | 309 | 205 | 073 | 021 | 001 |
| 6 | 0 | 941 | 735 | 531 | 262 | 118 | 047 | 016 | 004 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 057 | 232 | 354 | 393 | 303 | 187 | 094 | 037 | 010 | 002 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 001 | 031 | 098 | 246 | 324 | 311 | 234 | 138 | 060 | 015 | 001 | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 002 | 015 | 082 | 185 | 276 | 312 | 276 | 185 | 082 | 015 | 002 | 0+ |
| 7 | 0 | 932 | 698 | 478 | 210 | 082 | 028 | 008 | 002 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 066 | 257 | 372 | 367 | 247 | 131 | 055 | 017 | 004 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 002 | 041 | 124 | 275 | 318 | 261 | 164 | 077 | 025 | 004 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 004 | 023 | 115 | 227 | 290 | 273 | 194 | 097 | 029 | 003 | 0+ | 0+ |
| 8 | 0 | 922 | 688 | 458 | 192 | 072 | 024 | 006 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 072 | 264 | 378 | 372 | 252 | 136 | 059 | 019 | 005 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 003 | 045 | 128 | 278 | 321 | 264 | 166 | 078 | 026 | 005 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 005 | 025 | 118 | 229 | 292 | 275 | 196 | 098 | 030 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 9 | 0 | 912 | 678 | 450 | 184 | 064 | 014 | 004 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 082 | 268 | 382 | 376 | 256 | 139 | 063 | 021 | 006 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 004 | 048 | 130 | 280 | 323 | 266 | 168 | 080 | 027 | 006 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 006 | 027 | 120 | 231 | 294 | 277 | 198 | 100 | 031 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 10 | 0 | 902 | 668 | 442 | 176 | 056 | 006 | 002 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 092 | 272 | 386 | 380 | 260 | 141 | 065 | 022 | 007 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 005 | 049 | 132 | 282 | 325 | 270 | 172 | 082 | 028 | 007 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 007 | 029 | 122 | 233 | 296 | 279 | 200 | 101 | 032 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 11 | 0 | 892 | 658 | 434 | 168 | 048 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 102 | 276 | 390 | 384 | 264 | 143 | 067 | 023 | 008 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 006 | 051 | 134 | 284 | 327 | 272 | 174 | 084 | 029 | 008 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 008 | 031 | 124 | 235 | 298 | 281 | 202 | 103 | 033 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 12 | 0 | 882 | 648 | 426 | 160 | 040 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 112 | 280 | 394 | 388 | 266 | 145 | 069 | 024 | 009 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 007 | 053 | 136 | 286 | 329 | 274 | 176 | 086 | 030 | 009 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 009 | 033 | 126 | 237 | 300 | 283 | 204 | 105 | 034 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 13 | 0 | 872 | 638 | 418 | 152 | 032 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 122 | 284 | 398 | 392 | 268 | 147 | 071 | 025 | 010 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 008 | 055 | 138 | 288 | 331 | 276 | 178 | 088 | 031 | 010 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 010 | 035 | 128 | 239 | 302 | 285 | 206 | 107 | 035 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 14 | 0 | 862 | 628 | 410 | 144 | 024 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 132 | 288 | 402 | 396 | 270 | 149 | 073 | 026 | 011 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 009 | 057 | 140 | 290 | 333 | 278 | 180 | 090 | 032 | 011 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 011 | 037 | 130 | 241 | 304 | 287 | 208 | 109 | 036 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 15 | 0 | 852 | 618 | 402 | 136 | 016 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 142 | 292 | 406 | 400 | 272 | 151 | 075 | 027 | 012 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 010 | 059 | 142 | 292 | 335 | 280 | 182 | 092 | 033 | 012 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 012 | 039 | 132 | 243 | 306 | 289 | 210 | 111 | 037 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 16 | 0 | 842 | 608 | 394 | 128 | 008 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 152 | 296 | 410 | 404 | 274 | 153 | 077 | 028 | 013 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 011 | 061 | 144 | 294 | 337 | 282 | 184 | 094 | 034 | 013 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 013 | 041 | 134 | 245 | 308 | 291 | 212 | 113 | 038 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 17 | 0 | 832 | 598 | 386 | 120 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 162 | 300 | 414 | 408 | 276 | 155 | 079 | 029 | 014 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 012 | 063 | 146 | 296 | 339 | 284 | 186 | 096 | 035 | 014 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 014 | 043 | 136 | 247 | 310 | 293 | 214 | 115 | 039 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 18 | 0 | 822 | 588 | 378 | 112 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 172 | 304 | 418 | 412 | 278 | 157 | 081 | 030 | 015 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 013 | 065 | 148 | 298 | 341 | 286 | 188 | 098 | 036 | 015 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 015 | 045 | 138 | 249 | 312 | 295 | 216 | 117 | 040 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 19 | 0 | 812 | 578 | 370 | 104 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 182 | 308 | 422 | 416 | 280 | 159 | 083 | 031 | 016 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 014 | 067 | 150 | 300 | 343 | 288 | 190 | 100 | 037 | 016 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 016 | 047 | 140 | 251 | 314 | 297 | 218 | 119 | 041 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 20 | 0 | 802 | 568 | 362 | 096 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 192 | 312 | 426 | 420 | 282 | 161 | 085 | 032 | 017 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 015 | 069 | 152 | 302 | 345 | 290 | 192 | 102 | 038 | 017 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 017 | 049 | 142 | 253 | 316 | 299 | 220 | 121 | 042 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 21 | 0 | 792 | 558 | 354 | 088 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 202 | 316 | 430 | 424 | 284 | 163 | 087 | 033 | 018 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 016 | 071 | 154 | 304 | 347 | 292 | 194 | 104 | 039 | 018 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 018 | 051 | 144 | 255 | 318 | 301 | 222 | 123 | 043 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 22 | 0 | 782 | 548 | 346 | 080 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 212 | 320 | 434 | 428 | 286 | 165 | 089 | 034 | 019 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 017 | 073 | 156 | 306 | 349 | 294 | 196 | 106 | 040 | 019 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 019 | 053 | 146 | 257 | 320 | 303 | 224 | 125 | 044 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 23 | 0 | 772 | 538 | 338 | 072 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 222 | 324 | 438 | 432 | 288 | 167 | 091 | 035 | 020 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 018 | 075 | 158 | 308 | 351 | 296 | 198 | 108 | 041 | 020 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 020 | 055 | 148 | 259 | 322 | 305 | 226 | 127 | 045 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 24 | 0 | 762 | 528 | 330 | 064 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 232 | 328 | 442 | 436 | 290 | 169 | 093 | 036 | 021 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 019 | 077 | 160 | 310 | 353 | 298 | 200 | 110 | 042 | 021 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 021 | 057 | 150 | 261 | 324 | 307 | 228 | 129 | 046 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 25 | 0 | 752 | 518 | 322 | 056 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 242 | 332 | 446 | 440 | 292 | 171 | 095 | 037 | 022 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 020 | 079 | 162 | 312 | 355 | 299 | 202 | 112 | 043 | 022 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 022 | 059 | 152 | 263 | 326 | 309 | 230 | 131 | 047 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 26 | 0 | 742 | 508 | 314 | 048 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 252 | 336 | 450 | 444 | 294 | 173 | 097 | 038 | 023 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 021 | 081 | 164 | 314 | 357 | 300 | 204 | 114 | 044 | 023 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 023 | 061 | 154 | 265 | 328 | 311 | 232 | 133 | 048 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 27 | 0 | 732 | 498 | 306 | 040 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 262 | 340 | 454 | 448 | 296 | 175 | 099 | 039 | 024 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 022 | 083 | 166 | 316 | 359 | 302 | 206 | 116 | 045 | 024 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 024 | 063 | 156 | 267 | 330 | 313 | 234 | 135 | 049 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 28 | 0 | 722 | 488 | 298 | 032 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 272 | 344 | 458 | 452 | 298 | 177 | 101 | 040 | 025 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 023 | 085 | 168 | 318 | 361 | 304 | 208 | 118 | 046 | 025 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 025 | 065 | 158 | 269 | 332 | 315 | 236 | 137 | 050 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 29 | 0 | 712 | 478 | 290 | 024 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 282 | 348 | 462 | 456 | 300 | 179 | 103 | 041 | 026 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 024 | 087 | 170 | 320 | 363 | 306 | 210 | 120 | 047 | 026 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 026 | 067 | 160 | 271 | 334 | 317 | 238 | 139 | 051 | 0+ | 0+ | 0+ |
| 30 | 0 | 702 | 468 | 282 | 016 | 000 | 000 | 000 | 000 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 1 | 292 | 352 | 466 | 460 | 302 | 181 | 105 | 042 | 027 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 2 | 025 | 089 | 172 | 322 | 365 | 308 | 212 | 122 | 048 | 027 | 0+ | 0+ | 0+ |
| | 3 | 0+ | 027 | 069</ | | | | | | | | | | |

TABEL A (järg)

| m | x | P | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| | | .01 | .05 | .10 | .20 | .30 | .40 | .50 | .60 | .70 | .80 | .90 | .95 | .99 | |
| 8 | 0 | 923 | 663 | 430 | 168 | 058 | 017 | 004 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 1 | 075 | 279 | 383 | 336 | 198 | 090 | 031 | 008 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 2 | 003 | 051 | 149 | 294 | 296 | 209 | 109 | 041 | 010 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 3 | 0+ | 005 | 033 | 147 | 254 | 279 | 219 | 124 | 047 | 009 | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 4 | 0+ | 0+ | 005 | 046 | 136 | 232 | 273 | 232 | 136 | 046 | 005 | 0+ | 0+ | |
| | 5 | 0+ | 0+ | 0+ | 009 | 047 | 124 | 219 | 279 | 254 | 147 | 033 | 005 | 0+ | |
| | 6 | 0+ | 0+ | 0+ | 001 | 010 | 041 | 109 | 209 | 296 | 294 | 149 | 051 | 003 | |
| | 7 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 001 | 008 | 031 | 090 | 198 | 336 | 383 | 279 | 075 | |
| 9 | 0 | 914 | 630 | 387 | 134 | 040 | 010 | 002 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 1 | 083 | 299 | 387 | 302 | 156 | 060 | 018 | 004 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 2 | 003 | 063 | 172 | 302 | 267 | 161 | 070 | 021 | 004 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 3 | 0+ | 008 | 045 | 176 | 267 | 251 | 164 | 074 | 021 | 003 | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 4 | 0+ | 001 | 007 | 066 | 172 | 251 | 246 | 167 | 074 | 017 | 001 | 0+ | 0+ | |
| | 5 | 0+ | 0+ | 011 | 017 | 074 | 167 | 246 | 251 | 172 | 066 | 007 | 001 | 0+ | |
| | 6 | 0+ | 0+ | 0+ | 003 | 021 | 074 | 164 | 251 | 267 | 176 | 045 | 008 | 0+ | |
| | 7 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 004 | 021 | 070 | 161 | 267 | 302 | 172 | 063 | 003 | |
| 10 | 0 | 904 | 599 | 349 | 107 | 028 | 006 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 1 | 091 | 315 | 387 | 268 | 121 | 040 | 010 | 002 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 2 | 004 | 075 | 194 | 302 | 233 | 121 | 044 | 011 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 3 | 0+ | 010 | 057 | 201 | 267 | 215 | 117 | 042 | 009 | 001 | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 4 | 0+ | 001 | 011 | 088 | 200 | 251 | 205 | 111 | 037 | 006 | 0+ | 0+ | 0+ | |
| | 5 | 0+ | 0+ | 001 | 026 | 103 | 201 | 246 | 201 | 103 | 026 | 001 | 0+ | 0+ | |
| | 6 | 0+ | 0+ | 0+ | 006 | 037 | 111 | 205 | 251 | 200 | 088 | 011 | 001 | 0+ | |
| | 7 | 0+ | 0+ | 0+ | 001 | 009 | 042 | 117 | 215 | 267 | 201 | 057 | 010 | 0+ | |
| 10 | 8 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 001 | 011 | 044 | 121 | 233 | 302 | 194 | 075 | 004 | |
| | 9 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 002 | 010 | 040 | 121 | 268 | 387 | 315 | 091 | |
| | 10 | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 0+ | 001 | 006 | 028 | 107 | 349 | 599 | 904 | | |

TABEL B. Normaaljaotuse jaotusfunktsioon $\Phi(x)$

| x | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |

TABEL C. Juhuslike arvude tabel

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2384 | 4589 | 9133 | 9987 | 2683 | 7759 | 7187 | 7934 | 1128 | 5513 |
| 8907 | 8880 | 4927 | 3541 | 0473 | 3823 | 8429 | 1856 | 7941 | 7153 |
| 5035 | 2177 | 1078 | 9673 | 6740 | 4387 | 6523 | 2287 | 4866 | 9657 |
| 8225 | 7589 | 1794 | 6541 | 7546 | 8004 | 9984 | 4486 | 6039 | 0142 |
| 9516 | 1946 | 9548 | 6209 | 2220 | 7992 | 8967 | 3727 | 3794 | 0575 |
| 5752 | 3586 | 5494 | 7396 | 4606 | 1386 | 0049 | 3095 | 0572 | 4741 |
| 8849 | 0182 | 1866 | 0951 | 0288 | 2340 | 0909 | 5614 | 1186 | 1817 |
| 6466 | 3351 | 8568 | 6920 | 4804 | 8359 | 9670 | 6478 | 5856 | 3731 |
| 7124 | 3728 | 7838 | 0187 | 4137 | 0768 | 8186 | 2789 | 1945 | 7647 |
| 6274 | 9864 | 8918 | 7106 | 2902 | 7984 | 7334 | 8828 | 2213 | 8509 |
| 8984 | 5838 | 1794 | 7684 | 1579 | 4130 | 4001 | 8661 | 6403 | 8333 |
| 9394 | 3918 | 8329 | 1216 | 0204 | 1075 | 7286 | 2382 | 8673 | 9396 |
| 4605 | 4434 | 6003 | 7267 | 4956 | 7251 | 7056 | 1401 | 4492 | 8783 |
| 2699 | 3961 | 8458 | 9303 | 4295 | 1290 | 0413 | 2266 | 3330 | 4005 |
| 4102 | 7858 | 8396 | 2297 | 8165 | 3663 | 8054 | 0727 | 4906 | 7334 |
| 4605 | 4434 | 6003 | 7267 | 4956 | 7251 | 7056 | 1401 | 4492 | 8783 |
| 2699 | 3961 | 8458 | 9303 | 4295 | 1290 | 0413 | 2266 | 3330 | 4005 |
| 4102 | 7858 | 8396 | 2297 | 8165 | 3663 | 8054 | 0727 | 4906 | 7334 |
| 4384 | 2607 | 2814 | 7990 | 8847 | 7561 | 1077 | 2797 | 2129 | 4093 |
| 0282 | 3767 | 4611 | 4527 | 4467 | 4254 | 5533 | 7978 | 5741 | 7771 |
| 6991 | 0345 | 7968 | 8564 | 9943 | 4261 | 3163 | 6505 | 1755 | 5761 |
| 5812 | 3337 | 6110 | 7767 | 9484 | 5513 | 9497 | 4897 | 8186 | 4896 |
| 4826 | 2595 | 5303 | 4546 | 2041 | 9304 | 9109 | 9512 | 7957 | 9256 |
| 3940 | 9119 | 3010 | 6056 | 3902 | 7772 | 4227 | 0083 | 5685 | 5947 |
| 8422 | 1822 | 6929 | 2058 | 1886 | 9066 | 4201 | 4175 | 5887 | 2572 |
| 2069 | 7569 | 8274 | 5257 | 4341 | 9099 | 4119 | 7812 | 5698 | 9308 |
| 2468 | 5367 | 3575 | 4814 | 5988 | 5366 | 1287 | 2653 | 3659 | 2776 |
| 9401 | 4966 | 5222 | 3968 | 8740 | 4513 | 1760 | 9758 | 2908 | 5963 |
| 4966 | 8225 | 7708 | 6154 | 8992 | 8908 | 6777 | 8550 | 4708 | 1235 |
| 4906 | 9090 | 2860 | 7372 | 4160 | 6470 | 6905 | 7855 | 4555 | 2921 |
| 9564 | 0803 | 5450 | 0888 | 7772 | 2186 | 5011 | 6489 | 3619 | 1071 |
| 2178 | 0459 | 6979 | 1278 | 4599 | 7858 | 3766 | 7932 | 0274 | 0063 |

TABEL D. t-jaotuse täiendkvantiilid

| df | α | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| 1 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.500 |
| 8 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.054 |
| 13 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.132 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.688 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| ∞ | 0.84 | 1.04 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.327 | 2.575 |

TABEL E. Tolerantsuskonstandid

| n | 1- γ | | | | | |
|----------|-------------|-------|--------|-------|--------|--------|
| | p=0.90 | | p=0.95 | | p=0.99 | |
| | 0.90 | 0.95 | 0.90 | 0.95 | 0.90 | 0.95 |
| 2 | 15.98 | 18.80 | 32.02 | 37.67 | 160.19 | 188.49 |
| 3 | 5.85 | 6.92 | 8.38 | 9.92 | 18.93 | 22.40 |
| 4 | 4.17 | 4.94 | 5.37 | 6.37 | 9.40 | 11.15 |
| 5 | 3.50 | 4.15 | 4.28 | 5.08 | 6.61 | 7.86 |
| 6 | 3.13 | 3.72 | 3.71 | 4.41 | 5.34 | 6.35 |
| 7 | 2.90 | 3.45 | 3.37 | 4.01 | 4.61 | 5.49 |
| 8 | 2.74 | 3.26 | 3.14 | 3.73 | 4.15 | 4.94 |
| 9 | 2.63 | 3.13 | 2.97 | 3.53 | 3.82 | 4.55 |
| 10 | 2.54 | 3.02 | 2.84 | 3.38 | 3.58 | 4.27 |
| 12 | 2.40 | 2.86 | 2.66 | 3.16 | 3.25 | 3.87 |
| 14 | 2.31 | 2.76 | 2.53 | 3.01 | 3.03 | 3.61 |
| 16 | 2.25 | 2.68 | 2.44 | 2.90 | 2.87 | 3.42 |
| 18 | 2.19 | 2.61 | 2.37 | 2.82 | 2.75 | 3.28 |
| 20 | 2.15 | 2.56 | 2.31 | 2.75 | 2.66 | 3.17 |
| 25 | 2.08 | 2.47 | 2.21 | 2.63 | 2.49 | 2.97 |
| 30 | 2.03 | 2.41 | 2.14 | 2.55 | 2.39 | 2.84 |
| 50 | 1.92 | 2.28 | 2.00 | 2.38 | 2.16 | 2.58 |
| 100 | 1.82 | 2.17 | 1.87 | 2.23 | 1.98 | 2.36 |
| 500 | 1.72 | 2.05 | 1.74 | 2.07 | 1.78 | 2.12 |
| ∞ | 1.65 | 1.96 | 1.65 | 1.96 | 1.65 | 1.96 |

TABEL F. F-jaotuse täiendkvantiilid

| f_2 | α | f_1 | | | | | | | | | | | |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 0.05 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 243 | 244 |
| | 0.01 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6082 | 6106 |
| 2 | 0.05 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.36 | 19.37 | 19.38 | 19.39 | 19.40 | 19.41 |
| | 0.01 | 98.49 | 99.01 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.34 | 99.36 | 99.38 | 99.40 | 99.41 | 99.42 |
| 3 | 0.05 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.88 | 8.84 | 8.81 | 8.78 | 8.76 | 8.74 |
| | 0.01 | 34.12 | 30.81 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.34 | 27.23 | 27.13 | 27.05 |
| 4 | 0.05 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.93 | 5.91 |
| | 0.01 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.54 | 14.45 | 14.37 |
| 5 | 0.05 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.78 | 4.74 | 4.70 | 4.68 |
| | 0.01 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.45 | 10.27 | 10.15 | 10.05 | 9.96 | 9.89 |
| 6 | 0.05 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.03 | 4.00 |
| | 0.01 | 13.74 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.79 | 7.72 |
| 7 | 0.05 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.63 | 3.60 | 3.57 |
| | 0.01 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 7.00 | 6.84 | 6.71 | 6.62 | 6.54 | 6.47 |
| 8 | 0.05 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.34 | 3.31 | 3.28 |
| | 0.01 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.19 | 6.03 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.67 |
| 9 | 0.05 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.13 | 3.10 | 3.07 |
| | 0.01 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.62 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.18 | 5.11 |
| 10 | 0.05 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.97 | 2.94 | 2.91 |
| | 0.01 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.21 | 5.06 | 4.95 | 4.85 | 4.78 | 4.71 |
| 11 | 0.05 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.86 | 2.82 | 2.79 |
| | 0.01 | 9.65 | 7.20 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.88 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.46 | 4.40 |
| 12 | 0.05 | 4.75 | 3.88 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.92 | 2.85 | 2.80 | 2.76 | 2.72 | 2.69 |
| | 0.01 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.65 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.22 | 4.16 |
| 13 | 0.05 | 4.67 | 3.80 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.92 | 2.84 | 2.77 | 2.72 | 2.67 | 2.63 | 2.60 |
| | 0.01 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.20 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 4.02 | 3.96 |
| 14 | 0.05 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.56 | 2.53 |
| | 0.01 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.03 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.86 | 3.80 |
| 15 | 0.05 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.70 | 2.64 | 2.59 | 2.55 | 2.51 | 2.48 |
| | 0.01 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.73 | 3.67 |
| 16 | 0.05 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.45 | 2.42 |
| | 0.01 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.61 | 3.55 |
| 17 | 0.05 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.62 | 2.55 | 2.50 | 2.45 | 2.41 | 2.38 |
| | 0.01 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.52 | 3.45 |
| 18 | 0.05 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.37 | 2.34 |
| | 0.01 | 8.28 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.85 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.44 | 3.37 |
| 19 | 0.05 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.55 | 2.48 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.31 |
| | 0.01 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.36 | 3.30 |
| 20 | 0.05 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.52 | 2.45 | 2.40 | 2.35 | 2.31 | 2.28 |
| | 0.01 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.71 | 3.56 | 3.45 | 3.37 | 3.30 | 3.23 |
| 21 | 0.05 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.25 |
| | 0.01 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.65 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.24 | 3.17 |
| 22 | 0.05 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.47 | 2.40 | 2.35 | 2.30 | 2.26 | 2.23 |
| | 0.01 | 7.94 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.18 | 3.12 |
| 23 | 0.05 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.45 | 2.38 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 |
| | 0.01 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.14 | 3.07 |
| 24 | 0.05 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.43 | 2.36 | 2.30 | 2.26 | 2.22 | 2.18 |
| | 0.01 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.25 | 3.17 | 3.09 | 3.03 |
| 25 | 0.05 | 4.24 | 3.38 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.41 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 |
| | 0.01 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.86 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.99 |
| 26 | 0.05 | 4.22 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.15 |
| | 0.01 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.17 | 3.09 | 3.02 | 2.96 |

TABEL F (järg)

| f_2 | α | f_1 | | | | | | | | | | | |
|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
| 1 | 0.05 | 245 | 246 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 253 | 254 | 254 | 254 |
| | 0.01 | 6142 | 6169 | 6208 | 6234 | 6258 | 6286 | 6302 | 6323 | 6334 | 6352 | 6361 | 6366 |
| 2 | 0.05 | 19.42 | 19.43 | 19.44 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.49 | 19.50 | 19.50 |
| | 0.01 | 99.43 | 99.44 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.48 | 99.48 | 99.49 | 99.49 | 99.49 | 99.50 | 99.50 |
| 3 | 0.05 | 8.71 | 8.69 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.60 | 8.58 | 8.57 | 8.56 | 8.54 | 8.54 | 8.53 |
| | 0.01 | 26.92 | 26.83 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.35 | 26.27 | 26.23 | 26.18 | 26.14 | 26.12 |
| 4 | 0.05 | 5.87 | 5.84 | 5.80 | 5.77 | 5.74 | 5.71 | 5.70 | 5.68 | 5.66 | 5.65 | 5.64 | 5.63 |
| | 0.01 | 14.24 | 14.15 | 14.02 | 13.93 | 13.83 | 13.74 | 13.69 | 13.61 | 13.57 | 13.52 | 13.48 | 13.46 |
| 5 | 0.05 | 4.64 | 4.60 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.44 | 4.42 | 4.40 | 4.38 | 4.37 | 4.36 |
| | 0.01 | 9.77 | 9.68 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.24 | 9.17 | 9.13 | 9.07 | 9.04 | 9.02 |
| 6 | 0.05 | 3.96 | 3.92 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.75 | 3.72 | 3.71 | 3.69 | 3.68 | 3.67 |
| | 0.01 | 7.60 | 7.52 | 7.39 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.09 | 7.02 | 6.99 | 6.94 | 6.90 | 6.88 |
| 7 | 0.05 | 3.52 | 3.49 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.32 | 3.29 | 3.28 | 3.25 | 3.24 | 3.23 |
| | 0.01 | 6.35 | 6.27 | 6.15 | 6.07 | 5.98 | 5.90 | 5.85 | 5.78 | 5.75 | 5.70 | 5.67 | 5.65 |
| 8 | 0.05 | 3.23 | 3.20 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.05 | 3.03 | 3.00 | 2.98 | 2.96 | 2.94 | 2.93 |
| | 0.01 | 5.56 | 5.48 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.11 | 5.06 | 5.00 | 4.96 | 4.91 | 4.88 | 4.86 |
| 9 | 0.05 | 3.02 | 2.98 | 2.93 | 2.90 | 2.86 | 2.82 | 2.80 | 2.77 | 2.76 | 2.73 | 2.72 | 2.71 |
| | 0.01 | 5.00 | 4.92 | 4.80 | 4.73 | 4.64 | 4.56 | 4.51 | 4.45 | 4.41 | 4.36 | 4.33 | 4.31 |
| 10 | 0.05 | 2.86 | 2.82 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.67 | 2.64 | 2.61 | 2.59 | 2.56 | 2.55 | 2.54 |
| | 0.01 | 4.60 | 4.52 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.12 | 4.05 | 4.01 | 3.96 | 3.98 | 3.91 |
| 11 | 0.05 | 2.74 | 2.70 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.50 | 2.47 | 2.45 | 2.42 | 2.41 | 2.40 |
| | 0.01 | 4.29 | 4.21 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.80 | 3.74 | 3.70 | 3.66 | 3.62 | 3.60 |
| 12 | 0.05 | 2.64 | 2.60 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.36 | 2.35 | 2.32 | 2.31 | 2.30 |
| | 0.01 | 4.05 | 3.98 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.61 | 3.56 | 3.49 | 3.46 | 3.41 | 3.38 | 3.36 |
| 13 | 0.05 | 2.55 | 2.51 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.32 | 2.28 | 2.26 | 2.24 | 2.22 | 2.21 |
| | 0.01 | 3.85 | 3.78 | 3.67 | 3.59 | 3.51 | 3.42 | 3.37 | 3.30 | 3.27 | 3.21 | 3.18 | 3.16 |
| 14 | 0.05 | 2.48 | 2.44 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.24 | 2.21 | 2.19 | 2.16 | 2.14 | 2.13 |
| | 0.01 | 3.70 | 3.62 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.26 | 3.21 | 3.14 | 3.11 | 3.06 | 3.02 | 3.00 |
| 15 | 0.05 | 2.43 | 2.39 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.21 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.07 |
| | 0.01 | 3.56 | 3.48 | 3.36 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.07 | 3.00 | 2.97 | 2.92 | 2.89 | 2.87 |
| 16 | 0.05 | 2.37 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.13 | 2.09 | 2.07 | 2.04 | 2.02 | 2.01 |
| | 0.01 | 3.45 | 3.37 | 3.25 | 3.18 | 3.10 | 3.01 | 2.96 | 2.89 | 2.86 | 2.80 | 2.77 | 2.75 |
| 17 | 0.05 | 2.33 | 2.29 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.04 | 2.02 | 1.99 | 1.97 | 1.96 |
| | 0.01 | 3.35 | 3.27 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.86 | 2.79 | 2.76 | 2.70 | 2.67 | 2.65 |
| 18 | 0.05 | 2.29 | 2.25 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.04 | 2.00 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.92 |
| | 0.01 | 3.27 | 3.19 | 3.07 | 3.00 | 2.91 | 2.83 | 2.78 | 2.71 | 2.68 | 2.62 | 2.59 | 2.57 |
| 19 | 0.05 | 2.26 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.02 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.90 | 1.88 |
| | 0.01 | 3.19 | 3.12 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.70 | 2.63 | 2.60 | 2.54 | 2.51 | 2.49 |
| 20 | 0.05 | 2.23 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.96 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.84 |
| | 0.01 | 3.13 | 3.05 | 2.94 | 2.86 | 2.77 | 2.69 | 2.63 | 2.56 | 2.53 | 2.47 | 2.44 | 2.42 |
| 21 | 0.05 | 2.20 | 2.15 | 2.09 | 2.05 | 2.00 | 1.96 | 1.93 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.81 |
| | 0.01 | 3.07 | 2.99 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.63 | 2.58 | 2.51 | 2.47 | 2.42 | 2.38 | 2.36 |
| 22 | 0.05 | 2.18 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.91 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.80 | 1.78 |
| | 0.01 | 3.02 | 2.94 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.37 | 2.33 | 2.31 |
| 23 | 0.05 | 2.14 | 2.10 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.88 | 1.84 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.76 |
| | 0.01 | 2.97 | 2.89 | 2.76 | 2.70 | 2.62 | 2.53 | 2.48 | 2.41 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.26 |
| 24 | 0.05 | 2.13 | 2.09 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.82 | 1.80 | 1.76 | 1.74 | 1.73 |
| | 0.01 | 2.93 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.44 | 2.36 | 2.33 | 2.27 | 2.23 | 2.21 |
| 25 | 0.05 | 2.11 | 2.06 | 2.00 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.84 | 1.80 | 1.77 | 1.74 | 1.72 | 1.71 |
| | 0.01 | 2.89 | 2.81 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.40 | 2.32 | 2.29 | 2.23 | 2.19 | 2.17 |
| 26 | 0.05 | 2.10 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.78 | 1.76 | 1.72 | 1.70 | 1.69 |
| | 0.01 | 2.86 | 2.77 | 2.66 | 2.53 | 2.50 | 2.41 | 2.36 | 2.28 | 2.25 | 2.19 | 2.15 | 2.13 |

TABEL F (järg)

| f_2 | α | f_1 | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 27 | 0.05 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.30 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.13 |
| | 0.01 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.79 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.14 | 3.06 | 2.98 | 2.93 |
| 28 | 0.05 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.44 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 |
| | 0.01 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.76 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.11 | 3.03 | 2.95 | 2.90 |
| 29 | 0.05 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.54 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.14 | 2.10 |
| | 0.01 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.87 |
| 30 | 0.05 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.34 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 |
| | 0.01 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.06 | 2.98 | 2.90 | 2.84 |
| 32 | 0.05 | 4.15 | 3.30 | 2.90 | 2.67 | 2.51 | 2.40 | 2.32 | 2.25 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 |
| | 0.01 | 7.50 | 5.34 | 4.46 | 3.97 | 3.66 | 3.42 | 3.25 | 3.12 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.80 |
| 34 | 0.05 | 4.13 | 3.28 | 2.88 | 2.65 | 2.49 | 2.38 | 2.30 | 2.23 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 |
| | 0.01 | 7.44 | 5.29 | 4.42 | 3.93 | 3.61 | 3.38 | 3.21 | 3.08 | 2.97 | 2.89 | 2.82 | 2.76 |
| 36 | 0.05 | 4.11 | 3.26 | 2.86 | 2.63 | 2.48 | 2.36 | 2.28 | 2.21 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 |
| | 0.01 | 7.39 | 5.25 | 4.38 | 3.89 | 3.58 | 3.35 | 3.18 | 3.04 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.72 |
| 38 | 0.05 | 4.10 | 3.25 | 2.85 | 2.62 | 2.46 | 2.35 | 2.26 | 2.19 | 2.14 | 2.09 | 2.05 | 2.02 |
| | 0.01 | 7.35 | 5.21 | 4.34 | 3.86 | 3.54 | 3.32 | 3.15 | 3.02 | 2.91 | 2.82 | 2.75 | 2.69 |
| 40 | 0.05 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.07 | 2.04 | 2.00 |
| | 0.01 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.88 | 2.80 | 2.73 | 2.66 |
| 42 | 0.05 | 4.07 | 3.22 | 2.83 | 2.59 | 2.44 | 2.32 | 2.24 | 2.17 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.99 |
| | 0.01 | 7.27 | 5.15 | 4.29 | 3.80 | 3.49 | 3.26 | 3.10 | 2.96 | 2.86 | 2.77 | 2.70 | 2.64 |
| 44 | 0.05 | 4.06 | 3.21 | 2.82 | 2.58 | 2.43 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 |
| | 0.01 | 7.24 | 5.12 | 4.26 | 3.78 | 3.46 | 3.24 | 3.07 | 2.94 | 2.84 | 2.75 | 2.68 | 2.62 |
| 46 | 0.05 | 4.05 | 3.20 | 2.81 | 2.57 | 2.42 | 2.30 | 2.22 | 2.14 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.97 |
| | 0.01 | 7.21 | 5.10 | 4.24 | 3.76 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.92 | 2.82 | 2.73 | 2.66 | 2.60 |
| 48 | 0.05 | 4.04 | 3.19 | 2.80 | 2.56 | 2.41 | 2.30 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.03 | 1.99 | 1.96 |
| | 0.01 | 7.19 | 5.08 | 4.22 | 3.74 | 3.42 | 3.20 | 3.04 | 2.90 | 2.80 | 2.71 | 2.64 | 2.58 |
| 50 | 0.05 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.02 | 1.98 | 1.95 |
| | 0.01 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.88 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.56 |
| 55 | 0.05 | 4.02 | 3.17 | 2.78 | 2.54 | 2.38 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.05 | 2.00 | 1.97 | 1.93 |
| | 0.01 | 7.12 | 5.01 | 4.16 | 3.68 | 3.37 | 3.15 | 2.98 | 2.85 | 2.75 | 2.66 | 2.59 | 2.53 |
| 60 | 0.05 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.52 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.92 |
| | 0.01 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.56 | 2.50 |
| 65 | 0.05 | 3.99 | 3.14 | 2.75 | 2.51 | 2.36 | 2.24 | 2.15 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.90 |
| | 0.01 | 7.04 | 4.95 | 4.10 | 3.62 | 3.31 | 3.09 | 2.93 | 2.79 | 2.70 | 2.61 | 2.54 | 2.47 |
| 70 | 0.05 | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.89 |
| | 0.01 | 7.01 | 4.92 | 4.08 | 3.60 | 3.29 | 3.07 | 2.91 | 2.77 | 2.67 | 2.59 | 2.51 | 2.45 |
| 80 | 0.05 | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.48 | 2.33 | 2.21 | 2.12 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.91 | 1.88 |
| | 0.01 | 6.96 | 4.88 | 4.04 | 3.56 | 3.25 | 3.04 | 2.87 | 2.74 | 2.64 | 2.55 | 2.48 | 2.41 |
| 100 | 0.05 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.30 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.85 |
| | 0.01 | 6.90 | 4.82 | 3.98 | 3.51 | 3.20 | 2.96 | 2.82 | 2.69 | 2.59 | 2.51 | 2.43 | 2.36 |
| 125 | 0.05 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.44 | 2.29 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.95 | 1.90 | 1.86 | 1.83 |
| | 0.01 | 6.84 | 4.78 | 3.94 | 3.47 | 3.17 | 2.95 | 2.79 | 2.65 | 2.56 | 2.47 | 2.40 | 2.33 |
| 150 | 0.05 | 3.91 | 3.06 | 2.67 | 2.43 | 2.27 | 2.16 | 2.07 | 2.00 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.82 |
| | 0.01 | 6.81 | 4.75 | 3.91 | 3.44 | 3.14 | 2.92 | 2.76 | 2.62 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.30 |
| 200 | 0.05 | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.41 | 2.26 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.80 |
| | 0.01 | 6.76 | 4.71 | 3.88 | 3.41 | 3.11 | 2.90 | 2.73 | 2.60 | 2.50 | 2.41 | 2.34 | 2.28 |
| 400 | 0.05 | 3.86 | 3.02 | 2.62 | 2.39 | 2.23 | 2.12 | 2.03 | 1.96 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.78 |
| | 0.01 | 6.70 | 4.66 | 3.83 | 3.36 | 3.06 | 2.85 | 2.69 | 2.55 | 2.46 | 2.37 | 2.29 | 2.23 |
| 1000 | 0.05 | 3.85 | 3.00 | 2.61 | 2.38 | 2.22 | 2.10 | 2.02 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.76 |
| | 0.01 | 6.66 | 4.62 | 3.80 | 3.34 | 3.04 | 2.82 | 2.66 | 2.53 | 2.43 | 2.34 | 2.26 | 2.20 |
| ∞ | 0.05 | 3.84 | 2.99 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.09 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.79 | 1.75 |
| | 0.01 | 6.64 | 4.60 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.24 | 2.18 |

TABEL F (järg)

| f_2 | α | f_1 | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------|--|--|
| | | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 75 | 100 | 200 | 500 | ∞ | | |
| 27 | 0.05 | 2.08 | 2.03 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.67 | | |
| | 0.01 | 2.83 | 2.74 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.33 | 2.25 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.10 | | |
| 28 | 0.05 | 2.06 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.67 | 1.65 | | |
| | 0.01 | 2.80 | 2.71 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.30 | 2.22 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | | |
| 29 | 0.05 | 2.05 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.77 | 1.73 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.64 | | |
| | 0.01 | 2.77 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.32 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | | |
| 30 | 0.05 | 2.04 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.62 | | |
| | 0.01 | 2.74 | 2.66 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.24 | 2.16 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 2.01 | | |
| 32 | 0.05 | 2.02 | 1.97 | 1.91 | 1.86 | 1.82 | 1.76 | 1.74 | 1.69 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.59 | | |
| | 0.01 | 2.70 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.34 | 2.25 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.96 | | |
| 34 | 0.05 | 2.00 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.71 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.59 | 1.57 | | |
| | 0.01 | 2.66 | 2.58 | 2.47 | 2.38 | 2.30 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | | |
| 36 | 0.05 | 1.98 | 1.93 | 1.87 | 1.82 | 1.78 | 1.72 | 1.69 | 1.65 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.55 | | |
| | 0.01 | 2.62 | 2.54 | 2.43 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.12 | 2.04 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | | |
| 38 | 0.05 | 1.96 | 1.92 | 1.85 | 1.80 | 1.76 | 1.71 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.53 | | |
| | 0.01 | 2.59 | 2.51 | 2.40 | 2.32 | 2.22 | 2.14 | 2.08 | 2.00 | 1.97 | 1.90 | 1.86 | 1.84 | | |
| 40 | 0.05 | 1.95 | 1.90 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.61 | 1.59 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | | |
| | 0.01 | 2.56 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.05 | 1.97 | 1.94 | 1.88 | 1.84 | 1.81 | | |
| 42 | 0.05 | 1.94 | 1.89 | 1.82 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.49 | | |
| | 0.01 | 2.54 | 2.46 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.08 | 2.02 | 1.94 | 1.91 | 1.85 | 1.80 | 1.78 | | |
| 44 | 0.05 | 1.92 | 1.88 | 1.81 | 1.76 | 1.72 | 1.66 | 1.63 | 1.58 | 1.56 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | | |
| | 0.01 | 2.52 | 2.44 | 2.32 | 2.24 | 2.15 | 2.06 | 2.00 | 1.92 | 1.88 | 1.82 | 1.78 | 1.75 | | |
| 46 | 0.05 | 1.91 | 1.87 | 1.80 | 1.75 | 1.71 | 1.65 | 1.62 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.46 | | |
| | 0.01 | 2.50 | 2.42 | 2.30 | 2.22 | 2.13 | 2.04 | 1.98 | 1.90 | 1.86 | 1.80 | 1.76 | 1.72 | | |
| 48 | 0.05 | 1.90 | 1.86 | 1.79 | 1.74 | 1.70 | 1.64 | 1.61 | 1.56 | 1.53 | 1.50 | 1.47 | 1.45 | | |
| | 0.01 | 2.48 | 2.40 | 2.28 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.96 | 1.88 | 1.84 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | | |
| 50 | 0.05 | 1.90 | 1.85 | 1.78 | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.52 | 1.48 | 1.46 | 1.44 | | |
| | 0.01 | 2.46 | 2.39 | 2.26 | 2.18 | 2.10 | 2.00 | 1.94 | 1.86 | 1.82 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | | |
| 55 | 0.05 | 1.88 | 1.83 | 1.76 | 1.72 | 1.67 | 1.61 | 1.58 | 1.52 | 1.50 | 1.46 | 1.43 | 1.41 | | |
| | 0.01 | 2.43 | 2.35 | 2.23 | 2.15 | 2.06 | 1.96 | 1.90 | 1.82 | 1.78 | 1.71 | 1.66 | 1.64 | | |
| 60 | 0.05 | 1.86 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.56 | 1.50 | 1.48 | 1.44 | 1.41 | 1.39 | | |
| | 0.01 | 2.40 | 2.32 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.93 | 1.87 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.63 | 1.60 | | |
| 65 | 0.05 | 1.85 | 1.80 | 1.73 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.54 | 1.49 | 1.46 | 1.42 | 1.39 | 1.37 | | |
| | 0.01 | 2.37 | 2.30 | 2.18 | 2.09 | 2.00 | 1.90 | 1.84 | 1.76 | 1.71 | 1.64 | 1.60 | 1.56 | | |
| 70 | 0.05 | 1.84 | 1.79 | 1.72 | 1.67 | 1.62 | 1.56 | 1.53 | 1.47 | 1.45 | 1.40 | 1.37 | 1.35 | | |
| | 0.01 | 2.35 | 2.28 | 2.15 | 2.07 | 1.98 | 1.88 | 1.82 | 1.74 | 1.69 | 1.62 | 1.56 | 1.53 | | |
| 80 | 0.05 | 1.82 | 1.77 | 1.70 | 1.65 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.45 | 1.42 | 1.38 | 1.35 | 1.32 | | |
| | 0.01 | 2.32 | 2.24 | 2.11 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.78 | 1.70 | 1.65 | 1.57 | 1.52 | 1.49 | | |
| 100 | 0.05 | 1.79 | 1.75 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.51 | 1.48 | 1.42 | 1.39 | 1.34 | 1.30 | 1.28 | | |
| | 0.01 | 2.26 | 2.19 | 2.06 | 1.98 | 1.89 | 1.79 | 1.73 | 1.64 | 1.59 | 1.51 | 1.46 | 1.43 | | |
| 125 | 0.05 | 1.77 | 1.72 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.45 | 1.39 | 1.36 | 1.31 | 1.27 | 1.25 | | |
| | 0.01 | 2.23 | 2.15 | 2.03 | 1.94 | 1.85 | 1.75 | 1.68 | 1.59 | 1.54 | 1.46 | 1.40 | 1.37 | | |
| 150 | 0.05 | 1.76 | 1.71 | 1.64 | 1.59 | 1.54 | 1.47 | 1.44 | 1.37 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.22 | | |
| | 0.01 | 2.20 | 2.12 | 2.00 | 1.91 | 1.83 | 1.72 | 1.66 | 1.56 | 1.51 | 1.43 | 1.37 | 1.33 | | |
| 200 | 0.05 | 1.74 | 1.69 | 1.62 | 1.57 | 1.52 | 1.45 | 1.42 | 1.35 | 1.32 | 1.26 | 1.22 | 1.19 | | |
| | 0.01 | 2.17 | 2.09 | 1.97 | 1.88 | 1.79 | 1.69 | 1.62 | 1.53 | 1.48 | 1.39 | 1.33 | 1.28 | | |
| 400 | 0.05 | 1.72 | 1.67 | 1.60 | 1.54 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.32 | 1.28 | 1.22 | 1.16 | 1.13 | | |
| | 0.01 | 2.12 | 2.04 | 1.92 | 1.84 | 1.74 | 1.64 | 1.57 | 1.47 | 1.42 | 1.32 | 1.24 | 1.19 | | |
| 1000 | 0.05 | 1.70 | 1.65 | 1.58 | 1.53 | 1.47 | 1.41 | 1.36 | 1.30 | 1.26 | 1.19 | 1.13 | 1.08 | | |
| | 0.01 | 2.09 | 2.01 | 1.89 | 1.81 | 1.71 | 1.61 | 1.54 | 1.44 | 1.38 | 1.28 | 1.19 | 1.11 | | |
| ∞ | 0.05 | 1.69 | 1.64 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.40 | 1.35 | 1.28 | 1.24 | 1.17 | 1.11 | 1.00 | | |
| | 0.01 | 2.07 | 1.99 | 1.87 | 1.79 | 1.69 | 1.59 | 1.52 | 1.41 | 1.36 | 1.25 | 1.15 | 1.00 | | |

TABEL G. Mann-Whitney testi kriitilised väärtused
 (ühepoolne hüpotees, $\alpha = 0.025$, kahepoolne, $\alpha = 0.05$)

| n_2 | n_1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | 16 | 18 | 20 | 22 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 32 | 34 | 36 | 38 |
| 3 | - | - | - | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| | | | | 15 | 17 | 20 | 22 | 25 | 27 | 30 | 32 | 35 | 37 | 40 | 42 | 45 | 47 | 50 | 52 | |
| 4 | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | |
| | | | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 | 57 | 60 | 63 | 67 | |
| 5 | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
| | | 15 | 19 | 23 | 27 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 68 | 72 | 76 | 80 | |
| 6 | - | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | |
| | | 17 | 22 | 27 | 31 | 36 | 40 | 44 | 49 | 53 | 58 | 62 | 67 | 71 | 75 | 80 | 84 | 89 | 93 | |
| 7 | - | 1 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | |
| | | 20 | 25 | 30 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 | 81 | 86 | 91 | 96 | 101 | 106 | |
| 8 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 38 | 41 | |
| | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 | 51 | 57 | 63 | 69 | 74 | 80 | 86 | 91 | 97 | 102 | 108 | 111 | 119 | |
| 9 | 0 | 2 | 4 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 45 | 48 | |
| | 18 | 25 | 32 | 38 | 44 | 51 | 57 | 64 | 70 | 76 | 82 | 89 | 95 | 101 | 107 | 114 | 120 | 126 | 132 | |
| 10 | 0 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 52 | 55 | |
| | 20 | 27 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 97 | 104 | 111 | 118 | 125 | 132 | 138 | 145 | |
| 11 | 0 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 55 | 58 | 62 | |
| | 22 | 30 | 38 | 46 | 53 | 61 | 69 | 76 | 84 | 91 | 99 | 106 | 114 | 121 | 129 | 136 | 143 | 151 | 158 | |
| 12 | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 22 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 | |
| | 23 | 32 | 41 | 49 | 58 | 66 | 74 | 82 | 91 | 99 | 107 | 115 | 123 | 131 | 139 | 147 | 155 | 163 | 171 | |
| 13 | 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 59 | 63 | 67 | 72 | 76 | |
| | 25 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | 80 | 89 | 97 | 106 | 115 | 124 | 132 | 141 | 149 | 158 | 167 | 175 | 184 | |
| 14 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 22 | 26 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 | 64 | 67 | 74 | 78 | 83 | |
| | 27 | 37 | 47 | 51 | 67 | 76 | 86 | 95 | 104 | 114 | 123 | 132 | 141 | 151 | 160 | 171 | 178 | 188 | 197 | |
| 15 | 1 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | |
| | 29 | 40 | 50 | 61 | 71 | 81 | 91 | 101 | 111 | 121 | 131 | 141 | 151 | 161 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | |
| 16 | 1 | 6 | 11 | 15 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 92 | 98 | |
| | 31 | 42 | 53 | 65 | 75 | 86 | 97 | 107 | 118 | 129 | 139 | 149 | 160 | 170 | 181 | 191 | 202 | 212 | 222 | |
| 17 | 2 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 | 81 | 87 | 93 | 99 | 105 | |
| | 32 | 45 | 57 | 68 | 80 | 91 | 102 | 114 | 125 | 136 | 147 | 158 | 171 | 180 | 191 | 202 | 213 | 224 | 235 | |
| 18 | 2 | 7 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 | |
| | 34 | 47 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 | 132 | 143 | 155 | 167 | 178 | 190 | 202 | 213 | 225 | 236 | 248 | |
| 19 | 2 | 7 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 | 92 | 99 | 106 | 113 | 119 | |
| | 36 | 50 | 63 | 76 | 89 | 101 | 114 | 126 | 138 | 151 | 163 | 175 | 188 | 200 | 212 | 224 | 236 | 248 | 261 | |
| 20 | 2 | 8 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 119 | 127 | |
| | 38 | 52 | 67 | 80 | 93 | 106 | 119 | 132 | 145 | 158 | 171 | 184 | 197 | 210 | 222 | 235 | 248 | 261 | 273 | |

TABEL G (järg). Ühepoolne hüpotees, $\alpha = 0.05$,
kahepoolne $\alpha = 0.1$

| n ₂ | n ₁ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 19 | 20 |
| 2 | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| | | | | | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 26 | 27 | 29 | 31 | 32 | 34 | 36 |
| 3 | - | - | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| | | | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 31 | 33 | 35 | 38 | 40 | 42 | 45 | 47 | 49 |
| 4 | - | - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| | | | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 50 | 53 | 56 | 59 | 62 |
| 5 | - | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| | | 10 | 14 | 18 | 21 | 25 | 29 | 32 | 36 | 39 | 43 | 47 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 68 | 72 | 75 |
| 6 | - | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| | | 12 | 16 | 21 | 25 | 29 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 55 | 59 | 63 | 67 | 71 | 76 | 80 | 84 | 88 |
| 7 | - | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| | | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 38 | 43 | 48 | 53 | 58 | 63 | 67 | 72 | 77 | 82 | 86 | 91 | 96 | 101 |
| 8 | - | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 |
| | | 15 | 21 | 27 | 32 | 38 | 43 | 49 | 54 | 60 | 65 | 70 | 76 | 81 | 87 | 92 | 97 | 103 | 108 | 113 |
| 9 | - | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| | | 17 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 96 | 102 | 108 | 114 | 120 | 126 |
| 10 | - | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| | | 19 | 26 | 33 | 39 | 46 | 53 | 60 | 66 | 73 | 79 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 | 119 | 125 | 132 | 138 |
| 11 | - | 1 | 5 | 8 | 12 | 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| | | 21 | 28 | 36 | 43 | 50 | 58 | 65 | 72 | 79 | 87 | 94 | 101 | 108 | 115 | 122 | 130 | 137 | 144 | 151 |
| 12 | - | 2 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| | | 22 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 | 70 | 78 | 86 | 94 | 102 | 109 | 117 | 125 | 132 | 140 | 148 | 156 | 163 |
| 13 | - | 2 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| | | 24 | 33 | 42 | 50 | 59 | 67 | 76 | 84 | 93 | 101 | 109 | 118 | 126 | 134 | 143 | 151 | 159 | 167 | 176 |
| 14 | - | 2 | 7 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| | | 26 | 35 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | 126 | 135 | 144 | 153 | 161 | 170 | 179 | 188 |
| 15 | - | 3 | 7 | 12 | 18 | 23 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| | | 27 | 38 | 48 | 57 | 67 | 77 | 87 | 96 | 106 | 115 | 125 | 134 | 144 | 153 | 163 | 172 | 182 | 191 | 200 |
| 16 | - | 3 | 8 | 14 | 19 | 25 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| | | 29 | 40 | 50 | 61 | 71 | 82 | 92 | 102 | 112 | 122 | 132 | 143 | 153 | 163 | 173 | 183 | 193 | 203 | 213 |
| 17 | - | 3 | 9 | 15 | 20 | 26 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| | | 31 | 42 | 53 | 65 | 76 | 86 | 97 | 108 | 119 | 130 | 140 | 151 | 161 | 172 | 183 | 193 | 204 | 214 | 225 |
| 18 | - | 4 | 9 | 16 | 22 | 28 | 35 | 41 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| | | 32 | 45 | 56 | 68 | 80 | 91 | 103 | 114 | 123 | 137 | 148 | 159 | 170 | 182 | 193 | 204 | 215 | 226 | 237 |
| 19 | 0 | 4 | 10 | 17 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| | 19 | 34 | 47 | 59 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 | 132 | 144 | 156 | 167 | 179 | 191 | 203 | 214 | 226 | 238 | 250 |
| 20 | 0 | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 | 47 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |
| | 20 | 36 | 49 | 62 | 75 | 88 | 101 | 113 | 126 | 138 | 151 | 163 | 176 | 188 | 200 | 213 | 225 | 237 | 250 | 262 |

TABEL H. χ^2 -jaotuse täiendkvantiilid

| f | 0.99 | .0975 | 0.95 | 0.90 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|-----|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | - | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| 3 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| 4 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| 5 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 9.236 | 11.071 | 12.833 | 15.086 | 16.750 |
| 6 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| 7 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| 8 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| 9 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| 10 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |
| 11 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 |
| 12 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.299 |
| 13 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 |
| 14 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 21.064 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 |
| 15 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 |
| 16 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 |
| 17 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.085 | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 |
| 18 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.865 | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 |
| 19 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 11.651 | 27.204 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 |
| 20 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 12.443 | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 |
| 21 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 13.240 | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 |
| 22 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 14.042 | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 |
| 23 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 14.848 | 32.007 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 |
| 24 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.559 |
| 25 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 34.382 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 |
| 26 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 |
| 27 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 36.741 | 40.113 | 43.194 | 46.963 | 49.645 |
| 28 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 18.939 | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 |
| 29 | 14.257 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 39.087 | 42.557 | 45.772 | 49.588 | 52.336 |
| 30 | 14.954 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 |
| 40 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 29.051 | 51.805 | 55.758 | 59.342 | 63.691 | 66.766 |
| 50 | 29.707 | 32.357 | 34.764 | 37.689 | 63.167 | 67.505 | 71.420 | 76.154 | 79.490 |
| 60 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 46.459 | 74.397 | 79.082 | 83.298 | 88.379 | 91.952 |
| 70 | 45.442 | 48.758 | 51.739 | 55.329 | 85.527 | 90.531 | 95.023 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 53.540 | 57.153 | 60.391 | 64.278 | 96.578 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 |
| 90 | 61.754 | 65.647 | 69.126 | 73.291 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 |
| 100 | 70.065 | 74.222 | 77.929 | 82.358 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 |

TABEL I. Seeriatesti kriitilised väärtused

| n ₂ | n ₁ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
| 2 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 1
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | 2
6 | |
| 3 | 1
6 | 1
8 | 1
8 | 1
8 | 2
2 | 2
8 | 2
8 | 2
8 | 2
8 | 2
8 | 2
8 | 2
8 | 2
8 | 3
8 | 3
8 | 3
8 | 3
8 | 3
8 | 3
8 | |
| 4 | 1
6 | 1
8 | 1
9 | 2
9 | 2
9 | 2
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 3
10 | 4
10 | 4
10 | 4
10 | 4
10 | |
| 5 | 1
6 | 1
8 | 2
9 | 2
10 | 3
10 | 3
11 | 3
11 | 3
12 | 3
12 | 3
12 | 4
12 | 4
12 | 4
12 | 4
12 | 4
12 | 4
12 | 5
12 | 5
12 | 5
12 | |
| 6 | 1
6 | 2
8 | 2
9 | 3
10 | 3
11 | 3
12 | 3
13 | 4
13 | 4
13 | 4
13 | 4
13 | 5
13 | 5
14 | 5
14 | 5
14 | 5
14 | 5
14 | 6
14 | 6
14 | |
| 7 | 1
6 | 2
8 | 2
10 | 3
11 | 3
12 | 3
13 | 4
14 | 4
15 | 5
15 | 5
15 | 5
15 | 5
15 | 5
15 | 6
15 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | |
| 8 | 1
6 | 2
8 | 3
10 | 3
11 | 3
12 | 4
13 | 4
14 | 5
15 | 5
16 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | 7
17 | 7
17 | 7
17 | 7
17 | 7
17 | |
| 9 | 1
6 | 2
8 | 3
10 | 3
12 | 4
13 | 4
14 | 5
15 | 5
16 | 6
16 | 6
16 | 6
16 | 7
17 | 7
17 | 7
18 | 7
18 | 8
18 | 8
18 | 8
18 | 8
18 | |
| 10 | 1
6 | 2
8 | 3
10 | 3
12 | 4
13 | 5
14 | 5
15 | 6
16 | 6
17 | 7
17 | 7
18 | 7
18 | 7
18 | 8
18 | 8
19 | 8
19 | 8
19 | 8
20 | 9
20 | |
| 11 | 1
6 | 2
8 | 3
10 | 4
12 | 4
13 | 5
14 | 5
15 | 6
16 | 7
17 | 7
18 | 7
19 | 8
19 | 8
19 | 8
19 | 9
20 | 9
20 | 9
20 | 9
21 | 9
21 | |
| 12 | 2
6 | 2
8 | 3
10 | 4
12 | 4
13 | 5
14 | 6
16 | 6
17 | 7
18 | 7
19 | 7
19 | 8
19 | 8
20 | 8
20 | 9
21 | 9
21 | 9
21 | 10
22 | 10
22 | |
| 13 | 2
6 | 2
8 | 3
10 | 4
12 | 5
14 | 5
15 | 6
16 | 6
17 | 7
18 | 7
19 | 8
19 | 8
20 | 9
20 | 9
21 | 9
21 | 10
22 | 10
22 | 10
23 | 10
23 | |
| 14 | 2
6 | 2
8 | 3
10 | 4
12 | 5
14 | 5
15 | 6
17 | 7
18 | 7
19 | 8
20 | 8
20 | 9
21 | 9
21 | 9
22 | 10
22 | 10
23 | 10
23 | 11
23 | 11
24 | |
| 15 | 2
6 | 3
8 | 3
10 | 4
12 | 5
14 | 6
16 | 6
18 | 7
18 | 7
19 | 8
20 | 8
21 | 9
21 | 9
22 | 10
22 | 10
23 | 11
23 | 11
24 | 11
24 | 12
25 | |
| 16 | 2
6 | 3
8 | 4
10 | 4
12 | 5
14 | 6
16 | 6
17 | 8
19 | 8
20 | 9
21 | 9
22 | 10
22 | 10
23 | 11
23 | 11
24 | 11
25 | 12
25 | 12
25 | 13
26 | |
| 17 | 2
6 | 3
8 | 4
10 | 4
12 | 5
14 | 6
16 | 7
18 | 7
19 | 8
20 | 9
21 | 9
22 | 10
23 | 11
23 | 11
24 | 11
25 | 12
26 | 12
26 | 13
26 | 13
27 | |
| 18 | 2
6 | 3
8 | 4
10 | 5
12 | 5
14 | 6
16 | 7
18 | 8
19 | 8
20 | 9
21 | 9
22 | 10
23 | 11
24 | 11
25 | 12
25 | 12
26 | 13
26 | 13
27 | 13
27 | |
| 19 | 2
6 | 3
8 | 4
10 | 5
12 | 6
14 | 6
16 | 7
18 | 8
20 | 8
21 | 9
22 | 10
23 | 11
23 | 11
24 | 12
25 | 12
26 | 13
26 | 13
27 | 13
27 | 13
27 | |
| 20 | 2
6 | 3
8 | 4
10 | 5
12 | 6
14 | 6
17 | 7
18 | 8
20 | 9
21 | 9
22 | 10
23 | 11
24 | 12
25 | 12
25 | 13
26 | 13
27 | 13
27 | 14
28 | 14
28 | |

TABEL J. Wilcoxon'i astakmärgitesti kriitilised väärtused
(sõltuvad valimid)

| N | $\alpha=0.05$ | $\alpha=0.025$ | $\alpha=0.01$ | $\alpha=0.005$ |
|----|---------------|----------------|---------------|----------------|
| 5 | 0 .0313 | | | |
| | 1 .0625 | | | |
| 6 | 2 .0469 | 0 .0156 | | |
| | 3 .0781 | 1 .0313 | | |
| 7 | 3 .0391 | 2 .0234 | 0 .0078 | |
| | 4 .0547 | 3 .0391 | 1 .0156 | |
| 8 | 5 .0391 | 3 .0195 | 1 .0078 | 0 .0039 |
| | 6 .0547 | 4 .0273 | 2 .0117 | 1 .0078 |
| 9 | 8 .0488 | 5 .0195 | 3 .0098 | 1 .0039 |
| | 9 .0645 | 6 .0273 | 4 .0137 | 2 .0059 |
| 10 | 10 .0420 | 8 .0244 | 5 .0098 | 3 .0049 |
| | 11 .0527 | 9 .0322 | 6 .0137 | 4 .0068 |
| 11 | 13 .0415 | 10 .0210 | 7 .0093 | 5 .0049 |
| | 14 .0508 | 11 .0269 | 8 .0122 | 6 .0068 |
| 12 | 17 .0461 | 13 .0212 | 9 .0081 | 7 .0046 |
| | 18 .0549 | 14 .0261 | 10 .0105 | 8 .0061 |
| 13 | 21 .0471 | 17 .0239 | 12 .0085 | 9 .0040 |
| | 22 .0549 | 18 .0287 | 13 .0107 | 10 .0052 |
| 14 | 25 .0453 | 21 .0247 | 15 .0083 | 12 .0043 |
| | 26 .0520 | 22 .0290 | 16 .0101 | 13 .0054 |
| 15 | 30 .0473 | 25 .0240 | 19 .0090 | 15 .0042 |
| | 31 .0535 | 26 .0277 | 20 .0108 | 16 .0051 |
| 16 | 35 .0467 | 29 .0222 | 23 .0091 | 19 .0046 |
| | 36 .0523 | 30 .0253 | 24 .0107 | 20 .0055 |
| 17 | 41 .0492 | 34 .0224 | 27 .0087 | 23 .0047 |
| | 42 .0544 | 35 .0253 | 28 .0101 | 24 .0055 |
| 18 | 47 .0494 | 40 .0241 | 32 .0091 | 27 .0045 |
| | 48 .0542 | 41 .0269 | 33 .0104 | 28 .0052 |
| 19 | 53 .0478 | 46 .0247 | 37 .0090 | 32 .0047 |
| | 54 .0521 | 47 .0273 | 38 .0102 | 33 .0054 |
| 20 | 60 .0487 | 52 .0242 | 43 .0096 | 37 .0047 |
| | 61 .0527 | 53 .0266 | 44 .0107 | 38 .0053 |
| 21 | 67 .0479 | 58 .0230 | 49 .0097 | 42 .0045 |
| | 68 .0516 | 59 .0251 | 50 .0108 | 43 .0051 |
| 22 | 75 .0492 | 65 .0231 | 55 .0095 | 48 .0046 |
| | 76 .0527 | 66 .0250 | 56 .0104 | 49 .0052 |
| 23 | 83 .0490 | 73 .0242 | 62 .0098 | 54 .0046 |
| | 84 .0523 | 74 .0261 | 63 .0107 | 55 .0051 |
| 24 | 91 .0475 | 81 .0245 | 69 .0097 | 61 .0048 |
| | 92 .0505 | 82 .0263 | 70 .0106 | 62 .0053 |
| 25 | 100 .0479 | 89 .0241 | 76 .0094 | 68 .0048 |
| | 101 .0507 | 90 .0258 | 77 .0101 | 69 .0053 |
| 26 | 110 .0497 | 98 .0247 | 84 .0095 | 75 .0047 |
| | 111 .0524 | 99 .0263 | 85 .0102 | 76 .0051 |
| 27 | 119 .0477 | 107 .0246 | 92 .0093 | 83 .0048 |
| | 120 .0502 | 108 .0260 | 93 .0100 | 84 .0052 |

TABEL J (järg)

| N | $\alpha=0.05$ | $\alpha=0.025$ | $\alpha=0.01$ | $\alpha=0.005$ |
|----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 28 | 130 .0496
131 .0521 | 116 .0239
117 .0252 | 101 .0096
02 .0102 | 91 .0048
92 .0051 |
| 29 | 140 .0482
141 .0504 | 126 .0240
127 .0253 | 110 .0095
111 .0101 | 100 .0049
101 .0053 |
| 30 | 151 .0481
152 .0502 | 137 .0249
138 .0261 | 120 .0098
121 .0104 | 109 .0050
110 .0053 |
| 31 | 163 .0491
164 .0512 | 147 .0239
148 .0251 | 130 .0099
131 .0105 | 118 .0049
119 .0052 |
| 32 | 175 .0492
176 .0512 | 159 .0249
160 .0260 | 140 .0097
141 .0103 | 128 .0050
129 .0053 |
| 33 | 187 .0485
188 .0503 | 170 .0242
171 .0253 | 151 .0099
152 .0104 | 138 .0049
139 .0052 |
| 34 | 200 .0488
201 .0506 | 182 .0242
183 .0252 | 162 .0098
163 .0103 | 148 .0048
149 .0051 |
| 35 | 213 .0484
214 .0501 | 195 .0247
196 .0257 | 173 .0096
174 .0100 | 159 .0048
160 .0051 |
| 36 | 227 .0489
228 .0505 | 208 .0248
209 .0258 | 185 .0096
186 .0100 | 171 .0050
172 .0052 |
| 37 | 241 .0487
242 .0503 | 221 .0245
222 .0254 | 198 .0099
199 .0103 | 182 .0048
183 .0050 |
| 38 | 256 .0493
257 .0509 | 235 .0247
236 .0256 | 211 .0099
212 .0104 | 194 .0048
195 .0050 |
| 39 | 271 .0493
272 .0507 | 249 .0246
250 .0254 | 224 .0099
225 .0103 | 207 .0049
208 .0051 |
| 40 | 286 .0486
287 .0500 | 264 .0249
265 .0257 | 238 .0100
239 .0104 | 220 .0049
221 .0051 |
| 41 | 302 .0488
303 .0501 | 279 .0248
280 .0256 | 252 .0100
253 .0103 | 233 .0048
234 .0050 |
| 42 | 319 .0496
320 .0509 | 294 .0245
295 .0252 | 266 .0098
267 .0102 | 247 .0049
248 .0051 |
| 43 | 336 .0498
337 .0511 | 310 .0245
311 .0252 | 281 .0098
282 .0102 | 261 .0048
262 .0050 |
| 44 | 353 .0495
354 .0507 | 327 .0250
328 .0257 | 296 .0097
297 .0101 | 276 .0049
277 .0051 |
| 45 | 371 .0498
372 .0510 | 343 .0244
344 .0251 | 312 .0098
313 .0101 | 291 .0049
292 .0051 |
| 46 | 389 .0497
390 .0508 | 361 .0249
362 .0256 | 328 .0098
329 .0101 | 307 .0050
308 .0052 |
| 47 | 407 .0490
408 .0501 | 378 .0245
379 .0251 | 345 .0099
346 .0102 | 322 .0048
323 .0050 |
| 48 | 426 .0490
427 .0500 | 396 .0244
397 .0251 | 362 .0099
363 .0102 | 339 .0050
340 .0051 |
| 49 | 446 .0495
447 .0505 | 415 .0247
416 .0253 | 379 .0098
380 .0100 | 355 .0049
356 .0050 |
| 50 | 466 .0495
467 .0506 | 434 .0247
435 .0253 | 397 .0098
398 .0101 | 373 .0050
374 .0051 |

TABEL K. Kolmogorov-Smirnovi testi kriitilised väärtused
 (ülevalpool peadiagonaali $\alpha = 0.05$; allpool peadiagonaali
 $\alpha = 0.01$)

Ühepoolne hüpotees

| <i>m</i> | <i>n</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|--|--|--|
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | |
| 6 | | .667 | .625 | .611 | .600 | .576 | .667 | .590 | .571 | .567 | .563 | .649 | .511 | .561 | .550 | | | | |
| 7 | .833 | | .607 | .571 | .571 | .571 | .547 | .549 | .571 | .533 | .526 | .513 | .516 | .519 | .514 | | | | |
| 8 | .833 | .750 | | .556 | .550 | .545 | .500 | .519 | .517 | .500 | .563 | .500 | .500 | .487 | .500 | | | | |
| 9 | .778 | .746 | .750 | | .556 | .525 | .528 | .504 | .500 | .511 | .479 | .484 | .500 | .468 | .467 | | | | |
| 10 | .733 | .714 | .700 | .678 | | .518 | .500 | .492 | .486 | .500 | .475 | .465 | .456 | .447 | .500 | | | | |
| 11 | .742 | .714 | .693 | .636 | .627 | | .485 | .469 | .474 | .461 | .455 | .455 | .444 | .440 | .436 | | | | |
| 12 | .750 | .690 | .667 | .639 | .617 | .583 | | .445 | .464 | .467 | .458 | .441 | .444 | .434 | .433 | | | | |
| 13 | .692 | .692 | .644 | .624 | .600 | .601 | .590 | | .428 | .446 | .438 | .434 | .423 | .421 | .415 | | | | |
| 14 | .714 | .714 | .643 | .635 | .600 | .584 | .560 | .560 | | .438 | .428 | .420 | .413 | .414 | .407 | | | | |
| 15 | .700 | .667 | .625 | .622 | .600 | .576 | .567 | .574 | .529 | | .421 | .412 | .411 | .400 | .417 | | | | |
| 16 | .688 | .652 | .688 | .604 | .588 | .568 | .562 | .538 | .536 | .500 | | .401 | .403 | .395 | .400 | | | | |
| 17 | .667 | .647 | .625 | .601 | .582 | .556 | .549 | .534 | .525 | .514 | .511 | | .386 | .390 | .383 | | | | |
| 18 | .722 | .659 | .611 | .611 | .578 | .545 | .556 | .526 | .519 | .511 | .493 | .490 | | .389 | .378 | | | | |
| 19 | .675 | .647 | .612 | .579 | .547 | .545 | .535 | .526 | .508 | .498 | .497 | .489 | .468 | | .379 | | | | |
| 20 | .667 | .650 | .625 | .578 | .600 | .536 | .533 | .519 | .507 | .500 | .488 | .479 | .472 | .450 | | | | | |

| α | <i>m=n</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|--|--|--|
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | |
| .05 | .833 | .714 | .625 | .667 | .600 | .545 | .500 | .538 | .500 | .467 | .438 | .471 | .444 | .421 | .400 | | | | |
| .01 | 1.00 | .857 | .750 | .778 | .700 | .727 | .667 | .615 | .571 | .600 | .563 | .529 | .555 | .526 | .500 | | | | |

TABEL K (järg)

Kahepoolne hüpotees

| m | n | | | | | | | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | | .714 | .708 | .722 | .667 | .652 | .667 | .667 | .643 | .533 | .625 | .667 | .667 | .614 | .600 |
| 7 | .857 | | .714 | .667 | .657 | .623 | .631 | .615 | .643 | .590 | .571 | .571 | .571 | .571 | .564 |
| 8 | .833 | .857 | | .639 | .600 | .602 | .625 | .596 | .571 | .588 | .625 | .556 | .611 | .539 | .550 |
| 9 | .883 | .778 | .764 | | .589 | .596 | .583 | .556 | .556 | .556 | .542 | .536 | .556 | .520 | .517 |
| 10 | .800 | .757 | .750 | .700 | | .545 | .550 | .569 | .529 | .533 | .525 | .524 | .511 | .495 | .550 |
| 11 | .818 | .766 | .727 | .707 | .700 | | .545 | .524 | .532 | .509 | .506 | .497 | .490 | .488 | .486 |
| 12 | .833 | .714 | .708 | .694 | .667 | .652 | | .519 | .512 | .517 | .500 | .490 | .500 | .474 | .483 |
| 13 | .769 | .714 | .692 | .667 | .646 | .636 | .608 | | .489 | .492 | .486 | .475 | .470 | .462 | .462 |
| 14 | .762 | .786 | .679 | .667 | .643 | .623 | .619 | .571 | | .467 | .473 | .467 | .460 | .455 | .450 |
| 15 | .767 | .714 | .675 | .667 | .667 | .618 | .600 | .590 | .586 | | .475 | .455 | .456 | .446 | .450 |
| 16 | .750 | .688 | .688 | .653 | .625 | .602 | .604 | .582 | .563 | .554 | | .456 | .444 | .437 | .429 |
| 17 | .716 | .706 | .647 | .647 | .624 | .588 | .583 | .576 | .563 | .557 | .526 | | .435 | .437 | .429 |
| 18 | .778 | .690 | .653 | .667 | .600 | .596 | .583 | .585 | .556 | .544 | .535 | .536 | | .415 | .422 |
| 19 | .728 | .684 | .645 | .626 | .595 | .584 | .570 | .559 | .556 | .533 | .526 | .514 | .515 | | .421 |
| 20 | .733 | .664 | .650 | .617 | .650 | .577 | .583 | .550 | .543 | .533 | .525 | .515 | .506 | .492 | |

| α | m=n | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| .05 | .833 | .857 | .750 | .667 | .700 | .636 | .583 | .538 | .571 | .533 | .500 | .471 | .500 | .474 | .450 |
| .01 | 1.00 | .857 | .875 | .778 | .800 | .727 | .667 | .692 | .643 | .600 | .625 | .583 | .555 | .526 | .550 |

Asümptootilised täiendkvantiliid $\bar{k}_\alpha$

| α | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\bar{k}_\alpha$ | 1.073 | 1.224 | 1.358 | 1.517 | 1.628 |

TABEL L. Fisheri z-teisendus

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | .0000 | .0100 | .0200 | .0300 | .0400 | .0500 | .0599 | .0699 | .0708 | .0898 |
| 0.1 | .0997 | .1096 | .1194 | .1293 | .1391 | .1489 | .1586 | .1684 | .1781 | .1877 |
| 0.2 | .1974 | .2070 | .2165 | .2260 | .2355 | .2449 | .2543 | .2636 | .2729 | .2821 |
| 0.3 | .2913 | .3004 | .3095 | .3185 | .3275 | .3364 | .3452 | .3540 | .3627 | .3714 |
| 0.4 | .3800 | .3885 | .3969 | .4053 | .4136 | .4219 | .4301 | .4382 | .4462 | .4542 |
| 0.5 | .4621 | .4699 | .4777 | .4854 | .4930 | .5005 | .5080 | .5154 | .5227 | .5299 |
| 0.6 | .5370 | .5441 | .5511 | .5580 | .5649 | .5717 | .5784 | .5850 | .5915 | .5980 |
| 0.7 | .6044 | .6107 | .6169 | .6231 | .6291 | .6351 | .6411 | .6469 | .6527 | .6584 |
| 0.8 | .6640 | .6696 | .6751 | .6805 | .6858 | .6911 | .6963 | .7014 | .7064 | .7114 |
| 0.9 | .7163 | .7211 | .7259 | .7306 | .7352 | .7398 | .7443 | .7447 | .7531 | .7574 |
| 1.0 | .7616 | .7658 | .7699 | .7739 | .7779 | .7818 | .7857 | .7895 | .7932 | .7969 |
| 1.1 | .8005 | .8041 | .8076 | .8110 | .8144 | .8178 | .8210 | .8243 | .8275 | .8306 |
| 1.2 | .8337 | .8367 | .8397 | .8426 | .8455 | .8483 | .8511 | .8538 | .8565 | .8591 |
| 1.3 | .8617 | .8643 | .8668 | .8692 | .8717 | .8741 | .8764 | .8787 | .8810 | .8832 |
| 1.4 | .8854 | .8875 | .8896 | .8917 | .8937 | .8957 | .8977 | .8996 | .9015 | .9033 |
| 1.5 | .9051 | .9069 | .9087 | .9104 | .9121 | .9138 | .9154 | .9170 | .9186 | .9201 |
| 1.6 | .9217 | .9232 | .9246 | .9261 | .9275 | .9289 | .9302 | .9316 | .9329 | .9341 |
| 1.7 | .9354 | .9366 | .9379 | .9391 | .9402 | .9414 | .9425 | .9436 | .9447 | .9458 |
| 1.8 | .94681 | .94783 | .94884 | .94983 | .95080 | .95175 | .95268 | .95359 | .95449 | .95537 |
| 1.9 | .95624 | .95709 | .95792 | .95873 | .95953 | .96032 | .96109 | .96185 | .96259 | .96331 |
| 2.0 | .96403 | .96473 | .96541 | .96609 | .96675 | .96739 | .96803 | .96865 | .96926 | .96986 |
| 2.1 | .97045 | .97103 | .97159 | .97215 | .97269 | .97323 | .97375 | .97426 | .97477 | .97526 |
| 2.2 | .97574 | .97622 | .97668 | .97714 | .97759 | .97803 | .97846 | .97888 | .97929 | .97970 |
| 2.3 | .98010 | .98049 | .98087 | .98124 | .98161 | .98197 | .98233 | .98267 | .98301 | .98335 |
| 2.4 | .98367 | .98399 | .98431 | .98462 | .98492 | .98522 | .98551 | .98579 | .98607 | .98635 |
| 2.5 | .98661 | .98688 | .98714 | .98739 | .98764 | .98788 | .98812 | .98835 | .98858 | .98881 |
| 2.6 | .98903 | .98924 | .98945 | .98966 | .98987 | .99007 | .99026 | .99045 | .99064 | .99083 |
| 2.7 | .99101 | .99118 | .99136 | .99153 | .99170 | .99186 | .99202 | .99218 | .99233 | .99248 |
| 2.8 | .99263 | .99278 | .99292 | .99306 | .99320 | .99333 | .99346 | .99359 | .99372 | .99384 |
| 2.9 | .99396 | .99408 | .99420 | .99431 | .99443 | .99454 | .99464 | .99475 | .99485 | .99495 |
| | .0 | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 |
| 3 | .99505 | .99595 | .99668 | .99728 | .99777 | .99818 | .99851 | .99878 | .99900 | .99918 |
| 4 | .99933 | .99945 | .99955 | .99963 | .99970 | .99975 | .99980 | .99983 | .99986 | .99989 |

TABEL M. Spearmani korrelatsioonikordaja kriitilised väärtused

| n | $\alpha=0.05$ | $\alpha=0.025$ | $\alpha=0.01$ | $\alpha=0.005$ |
|----|---------------|----------------|---------------|----------------|
| 5 | 0.900 | | | |
| 6 | 0.829 | 0.886 | 0.943 | |
| 7 | 0.714 | 0.786 | 0.893 | |
| 8 | 0.643 | 0.738 | 0.833 | 0.881 |
| 9 | 0.600 | 0.683 | 0.783 | 0.833 |
| 10 | 0.564 | 0.648 | 0.745 | 0.794 |
| 11 | 0.523 | 0.623 | 0.736 | 0.818 |
| 12 | 0.497 | 0.591 | 0.703 | 0.780 |
| 13 | 0.475 | 0.566 | 0.673 | 0.745 |
| 14 | 0.457 | 0.545 | 0.646 | 0.716 |
| 15 | 0.441 | 0.525 | 0.623 | 0.689 |
| 16 | 0.425 | 0.507 | 0.601 | 0.666 |
| 17 | 0.412 | 0.490 | 0.582 | 0.645 |
| 18 | 0.399 | 0.476 | 0.564 | 0.625 |
| 19 | 0.388 | 0.462 | 0.549 | 0.608 |
| 20 | 0.377 | 0.450 | 0.534 | 0.591 |
| 21 | 0.368 | 0.438 | 0.521 | 0.576 |
| 22 | 0.359 | 0.428 | 0.508 | 0.562 |
| 23 | 0.351 | 0.418 | 0.496 | 0.549 |
| 24 | 0.343 | 0.409 | 0.485 | 0.537 |
| 25 | 0.336 | 0.400 | 0.475 | 0.526 |
| 26 | 0.329 | 0.392 | 0.465 | 0.515 |
| 27 | 0.323 | 0.385 | 0.456 | 0.505 |
| 28 | 0.317 | 0.377 | 0.448 | 0.496 |
| 29 | 0.311 | 0.370 | 0.440 | 0.487 |
| 30 | 0.305 | 0.364 | 0.432 | 0.478 |

TABEL P. Studentiseeritud haarde kriitilised väärtused

| N-k | α | k | | | | | | | | | |
|----------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 5 | .05 | 3.64 | 4.60 | 5.22 | 5.67 | 6.03 | 6.33 | 6.58 | 6.80 | 6.99 | 7.17 |
| | .01 | 5.70 | 6.98 | 7.80 | 8.42 | 8.91 | 9.32 | 9.67 | 9.97 | 10.24 | 10.48 |
| 6 | .05 | 3.46 | 4.34 | 4.90 | 5.30 | 5.63 | 5.90 | 6.12 | 6.32 | 6.49 | 6.65 |
| | .01 | 5.24 | 6.33 | 7.03 | 7.56 | 7.97 | 8.32 | 8.61 | 8.87 | 9.10 | 9.30 |
| 7 | .05 | 3.34 | 4.16 | 4.68 | 5.06 | 5.36 | 5.61 | 5.82 | 6.00 | 6.16 | 6.30 |
| | .01 | 4.95 | 5.92 | 6.54 | 7.01 | 7.37 | 7.68 | 7.94 | 8.17 | 8.37 | 8.55 |
| 8 | .05 | 3.26 | 4.04 | 4.53 | 4.89 | 5.17 | 5.40 | 5.60 | 5.77 | 5.92 | 6.05 |
| | .01 | 4.75 | 5.64 | 6.20 | 6.62 | 6.96 | 7.24 | 7.47 | 7.68 | 7.86 | 8.03 |
| 9 | .05 | 3.20 | 3.95 | 4.41 | 4.76 | 5.02 | 5.24 | 5.43 | 5.59 | 5.74 | 5.87 |
| | .01 | 4.60 | 5.43 | 5.96 | 6.35 | 6.66 | 6.91 | 7.13 | 7.33 | 7.49 | 7.65 |
| 10 | .05 | 3.15 | 3.88 | 4.33 | 4.65 | 4.91 | 5.12 | 5.30 | 5.46 | 5.60 | 5.72 |
| | .01 | 4.48 | 5.27 | 5.77 | 6.14 | 6.43 | 6.67 | 6.87 | 7.05 | 7.21 | 7.36 |
| 11 | .05 | 3.11 | 3.82 | 4.26 | 4.57 | 4.82 | 5.03 | 5.20 | 5.35 | 5.49 | 5.61 |
| | .01 | 4.39 | 5.15 | 5.62 | 5.97 | 6.25 | 6.48 | 6.67 | 6.84 | 6.99 | 7.13 |
| 12 | .05 | 3.08 | 3.77 | 4.20 | 4.51 | 4.75 | 4.95 | 5.12 | 5.27 | 5.39 | 5.51 |
| | .01 | 4.32 | 5.05 | 5.50 | 5.84 | 6.10 | 6.32 | 6.51 | 6.67 | 6.81 | 6.94 |
| 13 | .05 | 3.06 | 3.73 | 4.15 | 4.45 | 4.69 | 4.88 | 5.05 | 5.19 | 5.32 | 5.43 |
| | .01 | 4.26 | 4.96 | 5.40 | 5.73 | 5.98 | 6.19 | 6.37 | 6.53 | 6.67 | 6.79 |
| 14 | .05 | 3.03 | 3.70 | 4.11 | 4.41 | 4.64 | 4.83 | 4.99 | 5.13 | 5.25 | 5.36 |
| | .01 | 4.21 | 4.89 | 5.32 | 5.63 | 5.88 | 6.08 | 6.26 | 6.41 | 6.54 | 6.66 |
| 15 | .05 | 3.01 | 3.67 | 4.08 | 4.37 | 4.59 | 4.78 | 4.94 | 5.08 | 5.20 | 5.31 |
| | .01 | 4.17 | 4.84 | 5.25 | 5.56 | 5.80 | 5.99 | 6.16 | 6.31 | 6.44 | 6.55 |
| 16 | .05 | 3.00 | 3.65 | 4.05 | 4.33 | 4.56 | 4.74 | 4.90 | 5.03 | 5.15 | 5.26 |
| | .01 | 4.13 | 4.79 | 5.19 | 5.49 | 5.72 | 5.92 | 6.08 | 6.22 | 6.35 | 6.46 |
| 17 | .05 | 2.98 | 3.63 | 4.02 | 4.30 | 4.52 | 4.70 | 4.86 | 4.99 | 5.11 | 5.21 |
| | .01 | 4.10 | 4.74 | 5.14 | 5.43 | 5.66 | 5.85 | 6.01 | 6.15 | 6.27 | 6.38 |
| 18 | .05 | 2.97 | 3.61 | 4.00 | 4.28 | 4.49 | 4.67 | 4.82 | 4.96 | 5.07 | 5.17 |
| | .01 | 4.07 | 4.70 | 5.09 | 5.38 | 5.60 | 5.79 | 5.94 | 6.08 | 6.20 | 6.31 |
| 19 | .05 | 2.96 | 3.59 | 3.98 | 4.25 | 4.47 | 4.65 | 4.79 | 4.92 | 5.04 | 5.14 |
| | .01 | 4.05 | 4.67 | 5.05 | 5.33 | 5.55 | 5.73 | 5.89 | 6.02 | 6.14 | 6.25 |
| 20 | .05 | 2.95 | 3.58 | 3.96 | 4.23 | 4.45 | 4.62 | 4.77 | 4.90 | 5.01 | 5.11 |
| | .01 | 4.02 | 4.64 | 5.02 | 5.29 | 5.51 | 5.69 | 5.84 | 5.97 | 6.09 | 6.19 |
| 24 | .05 | 2.92 | 3.53 | 3.90 | 4.17 | 4.37 | 4.54 | 4.68 | 4.81 | 4.92 | 5.01 |
| | .01 | 3.96 | 4.55 | 4.91 | 5.17 | 5.37 | 5.54 | 5.69 | 5.81 | 5.92 | 6.02 |
| 30 | .05 | 2.89 | 3.49 | 3.85 | 4.10 | 4.30 | 4.46 | 4.60 | 4.72 | 4.82 | 4.92 |
| | .01 | 3.89 | 4.45 | 4.80 | 5.05 | 5.24 | 5.40 | 5.54 | 5.65 | 5.76 | 5.85 |
| 40 | .05 | 2.86 | 3.44 | 3.79 | 4.04 | 4.23 | 4.39 | 4.52 | 4.63 | 4.73 | 4.82 |
| | .01 | 3.82 | 4.37 | 4.70 | 4.93 | 5.11 | 5.26 | 5.39 | 5.50 | 5.60 | 5.69 |
| 60 | .05 | 2.83 | 3.40 | 3.74 | 3.98 | 4.16 | 4.31 | 4.44 | 4.55 | 4.65 | 4.73 |
| | .01 | 3.76 | 4.28 | 4.59 | 4.82 | 4.99 | 5.13 | 5.25 | 5.36 | 5.45 | 5.53 |
| 120 | .05 | 2.80 | 3.36 | 3.68 | 3.92 | 4.10 | 4.24 | 4.36 | 4.47 | 4.56 | 4.64 |
| | .01 | 3.70 | 4.20 | 4.50 | 4.71 | 4.87 | 5.01 | 5.12 | 5.21 | 5.30 | 5.37 |
| ∞ | .05 | 2.77 | 3.31 | 3.63 | 3.86 | 4.03 | 4.17 | 4.29 | 4.39 | 4.47 | 4.55 |
| | .01 | 3.64 | 4.12 | 4.40 | 4.60 | 4.76 | 4.88 | 4.99 | 5.08 | 5.16 | 5.23 |

TABEL R. Cochran'i testi kriitilised väärtused

$\alpha = 0.05$

[illegible]

$\alpha = 0.01$

[illegible]

AINEREGISTER

A

aegrida 166
andmestik 13
astak 56

B

binoomkordaja 23

D

determinatsioonikordaja 235
dispersioon 48
–, valimi 62
dispersioonanalüüs 258
dispersiooni komponent 310

E

erind 196, 251

F

faktori tase 259
faktortunnus 259
Fisheri z-teisendus 191
Fisheri φ -teisendus 137

H

haare 61
hajuvusdiagramm 184
hinnang 76
hüpotees
–, kahepoolne 101
–, null 96
–, sisukas 96
–, statistiline 96
–, ühepoole 101
–, keskvärtuse kohta 101, 108
–, protsendi kohta 107
hälve 228, 247

J

jaotus 19
–, Bernoulli 19
–, binoom 22
–, diskreetne 19
–, F- 135
–, kaheväärtuseline 19
–, normaal- 36
–, pidev 32
–, Poissoni 28
–, t- 73
–, χ^2 116
–, -funktsioon 33
– –, empiiriline 171
–, -histogramm 15
–, -murdjoon 16
–, -polügoon 16
– –, kumulatiivne 18
–, -tabel 15
– –, valimi 57
juhuslik valik 53
juhusliku valimi moodustamine 65
jääk 228, 247

K

karpdiagramm 63
keskmise ruutviga 233
keskruut 239, 265
keskväärtus 46
–, valimi 60
keskväärtuste võrdlus 122, 133, 151
klastervalim 66
kontrast 278
korrelatsioonikordaja

–, Kendalli 206
 –, lineaarne 187
 –, Spearmanni 201
 –, osa- 253
 kriitiline piirkond 97
 kvantiil 46, 67
 kvartiil 61

M

mediaan
 –, valimi 59
 –, üldkogumi 79
 mõju
 –, fikseeritud 260
 –, juhuslik 260
 mõjukus 248
 mood 59
 mudel
 –, hierarhiline 260
 –, juhuslike mõjudega 260, 309
 –, rist- 260
 –, tasakaalustamata 260, 270
 –, tasakaalustatud 260, 261

O

objekt 13
 olulisuse
 –, nivoo 100
 –, tõenäosus 106
 osakaal 15
 –, kumulatiivne 18

P

paar
 –, samasuunaline 206
 –, vastassuunaline 206
 parameeter 20, 24, 30, 37
 prognoos 241
 protsentide võrdlus 128, 137
 protsentiil 46

R

regressioonikordaja 227
 regressioonisirge 227

S

sagedus
 –, marginaal- 211
 –, suhteline 54
 –, suhteline rea 212
 –, suhteline tabeli 212
 –, suhteline veeru 212
 –, ääre- 211
 sagedustabel 15
 –, kahemõõtmeline 211
 seeria 161
 seos
 –, kahanev 186
 –, kasvav 186
 –, monotoonne 201
 standardhälve 48
 –, valimi 62
 standardiseeritud
 –, normaaljaotus 37
 –, väärtus 45
 standardiseeriv teisendus 39
 standardviga 72
 –, mudeli 233
 sügavus 57
 sündmus 54

T

test 97
 –, Bonferroni 275
 –, Bartletti 286
 –, Cochran 287
 –, Fisher LSD 273
 –, Hartley 285
 –, Kruskal-Wallise 289
 –, Mann-Whitney 139
 –, märgi- 154
 –, Scheffe 277
 –, seeria- 161
 –, Tukey 276
 –, Wald-Wolffitzi 164
 –, Wilcoxon astakmärgi- 157
 –, Wilcoxon 145

teststatistik 97
 tihedusfunktsioon 32
 tõenäosus 54
 tolerantintervall 114
 tulpdiaagramm 15

tunnus 13

- , argument- 219, 227
- , arvuline 14
- , diskreetne 14, 19
- , funktsioon- 219, 227
- , järjestus- 14
- , mitteamvuline 14
- , nominaal- 14
- , pidev 14, 32

tunnused

- , sõltuvad 183
- , sõltumatud 183

täiendkvantiil 68

U

usaldusintervall 82
 –, keskväärtuse 81, 87
 –, mediaani 88

- , prognoosi 242
- , protsendi 85
- , üksikväärtuse 242

usaldusnivoo 82

usalduspiir 82

V

vabadusastmete arv 239

valim 13

- , juhuslik 65
- , sõltumatu 121
- , sõltuv 121, 149

variatsioonrida 56

viga

- , 1. liiki 99
- , 2. liiki 99
- , katseviisiline 272
- , võrdlusviisiline 272

võimsus 100, 145

vähimruutude printsiip 228

Wilcoxoni statistik 146, 157

Ü

üldkogum 13