TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

HARJUTUSÜLESANDEID VÕREDEST JA NENDE KOMBINATOORIKAST

1983

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Algebra ja geomeetria kateeder

HARJUTUSÜLESANDEID VÕREDEST JA NENDE KOMBINATOORIKAST

koostas U.Kaljulaid

TARTU 1983

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 21. jaanuaril 1983.a.

Saateks

Käesolev valimik ülesandeid on abimaterjaliks loengukursuse [1] omandamisel ning moodustab viimasega ühtse terviku. Ülesannete numeratsioon siin on kooskõlas aine jaotusega konspektis [1].

Vahel arvatakse, et vanematel kursustel pole ülesandeid lahendada enam vajalik, et varem saavutatud tase lubab nüüd piirduda vaid teoreetilise materjali läbitöötamisega. Autori arvates tugineb selline vaade illusioonil. Kes tahab, et uus ainevald teda rikastaks, peab võitlema loomuliku kalduvusega passiivselt omandada ja reprodutseerida öeldut-kirjutatut. Ikka ja jälle tuleb õppida <u>ise</u> püstitama häid küsimusi, püüda neid lahendada ja otsida saadud tulemuste rakendusi. Loendamisteooria rakendusalade avardamise ja tulemuste süstematiseerimise taotlus tingivad esituse üsna suure üldisuse astme loenguis [1]. Kasutamist leiab rida mõisteid, mis pole üldtuntud või esinevad ebaharilikus situatsioonis(näit. vektorruumid üle Galois' korpuse). Neile, kes loendamisteooriast edaspidi kasu loodavad või kes algebra rakendustest huvituvad, on eriti vajalik harjuda uute mõistete ja nendevaheliste seostega ning hästi orienteeruda põhitulemustes ja nende kasutamises. Ülesannete lahendamine viib Teid teele selle eesmärgi suunas!

Oluline osa ülesandeid on võetud raamatuist [2-4], vahel modifitseeritult. Paljusid neist on esitatud ka eksamil rakendusmatemaatika osakonna üliõpilastele ja nad on jõukohasteks osutunud. Rida ülesandeid ilmub siin esmakordselt, on ka ülesannete seeriaid, mis võivad anda kätte alguse iseseisvaks tööks antud valdkonnas. Jääb loota, et kauges tulevikus ilmub eestikeelne ülesannete kogu, mis kõrvuti ülesannetega diskreetse matemaatika kõigist osadest sisaldab ka nende lahendusi või lahendusjuhiseid.

1. JÄRJESTATUD HULGAD

1.1. Veenduda, et on täpselt kolm erinevat viisi antud kaheelemendilise hulga järjestamiseks, neist kahel juhul saadakse o-hulgad, mis pole isomorfsed, kuid on eneseduaalsed.

1.2. Veenduda, et leidub täpselt viis kolmeelemendilist o-hulka, mis pole (paarikaupa) isomorfsed ning kolm neist o-hulkadest on eneseduaalsed.

1.3. Veenduda, et leidub täpselt kuusteist erinevat neljaelemendilist o-hulka.

1.4. Veenduda, et [1] näites 1.3 vaadeldud o-hulgas on igal ideaalil I olemas "moodustaja", s.o. selline element $a \in \mathbb{N}$, et $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq a\}$.

1.5. Erirelatiivsusteooria toob sisse aegruumi punktide järjestuse, lugedes $(x,y,z,t) \geq (x',y',z',t')$, kui

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \leq (t-t')^2.$$

Anda selle relatsiooni füüsikaline interpretatsioon.

1.6. Antud hulkade I ja I^*, fikseeritud binaarse relatsiooni $\rho \subset I \times I^*$ ja alamhulga $X \subset I$ korral tähistagu X^* hulka $\{x^* \in I^* \mid \forall x \in X, x \rho x^*\}$ ning iga $Y \subset I^*$ jaoks tähistagu Y^+ hulka $\{x \in I \mid \forall y \in Y, x \rho y\}$. Näidata, et operaatorid $X \mapsto (X^*)^+$ ja $Y \mapsto (Y^+)^*$ on sulundioperaatorid ning kujutused $X \mapsto X^*$ ja $Y \mapsto Y^+$ määravad antiisomorfismid hulkade I ja I^* kinniste alamhulkade vahel.

1.7. Kui eelmises ülesandes lugeda, et $I=I^*$ ja ρ on sümmeetriline, siis $X^+=X^*$ ning on óiged seosed $(X^*)^*=X$ $(X\cap Y)^*=X^*\cup Y^*$ ja $(X\cup Y)^*=X^*\cap Y^*$. Veenduda!

1.8. Olgu $I=I^*=M_n(\mathbb{C})$, kus $M_n(\mathbb{C})$ tähistab kôigi kompleksarvuliste elementidega $n\times n$ maatriksite hulka. Suvaliste $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ korral loeme $A\rho B$, kui $AB=BA$. Kirjeldada vastavust $X\mapsto X^*$.

2. JÄRJESTATUD HULGA TÜKELDUSED

2.1. Leida o-hulga $(D_n; |)$ laius, s.o. naturaalarvu n nende jagajate maksimaalarv, mis on paarikaupa vôrreldamatud jaguvuse kaudu antud järjestusseose suhtes.

2.2. Näidata, et $\omega(\mathcal{B}(n))=\binom{n}{[n/2]}$; siin $[r]$ tähistab arvu r täisosa.

2.3. Kui saalis viibib $mn+1$ töötajat, siis kas: a) leidub $m+1$ töötajast koosnev hierarhia, s.o. jada, kus igaüks on selles jadas järgmise alluv vôi b) saalis viibib $n+1$ töötajat, kellest ükski ei ole ülejäänud n töötaja alluvaks. Veenduda!

2.4. Sônastada ja tôestada Dilworth'i teoreem lôpmatute o-hulkade korral, mille kôik antiahelad on lôplikud.

2.5. Veenduda, et juhul $G=\mathbb{R}(+)$ saab [1] teoreemis 4 vaadeldava f-keskmise $\mu(f)$ arvutada valemi

$$\mu(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)dt$$

järgi.

2

2.6. Leida [1] teoreemile 4 toodud tõestusega analoogiline tõestus Haari mõõdu olemasolust kompaktsel topoloogilisel rühmal G.

2.7. Milline on vastus küsimusele: "Kui o-hulk P on selline, et iga $a \in P$ korral hulk $\{x \in P \mid x \geqslant a\}$ on ahel ning o-hulga P iga ahel ja antiahel on loenduvad, kas on siis hulk P ise ka loenduv?"

3. VÕRE MÕISTE

3.1. Tõestada, et (suvalise) rühma G kõik alamrühmad moodustavad võre; näidata ära vastav sulundioperaator hulgal $\mathcal{B}(G)$. Püstitada ja lahendada analoogiline ülesanne rühma normaaljagajate jaoks.

3.2. Vaatleme kõigi funktsioonide $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulgal $\mathcal{F}$ kahte binaarset algebralist operatsiooni $\wedge$ ja $\vee$: $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mis on antud valemitega

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$ ja

Veenduda, et $\{\mathcal{F}; \wedge, \vee\}$ on võre.

3.3. Veenduda, et iga geomeetriline konfiguratsioon, mis tekib mingite kahe paralleelsirgete pere lõikumisel, määrab võre lõikepunktide hulgal L. Tuua vastava järjestuse ja võreoperatsioonide definitsioonid.

3.4. Näidata, et iga võre, milles on rohkem kui 6 elementi sisaldab alamvõret, milles on täpselt 6 elementi. Veenduda, et analoogiline väide 7 elemendi korral pole óige.

3.5. Olgu P o-hulk, mille iga mittetühi ja ülalt tókestatud alamhulk omab ülemraja ning olgu $f: P \to P$ selline o-endomorfism, mille jaoks hulgas P eksisteerivad elemendid a ja b nii, et $a \leq f(a) \leq f(b) \leq b$. Näidata, et hulgas P leidub vähemalt üks element c nii, et $a \leq c \leq b$ ja $f(c) = c$ (püsipunkti olemasolu).

3.6. Näidata, et antud vahemiku $\subset \mathbb{R}$ "Riemanni tükeldused" lóplikuks arvuks mittelóikuvateks vahemikeks moodustavad vóre.

3.7. Tóestada, et vóre, mille kui o-hulga iga o-endomorfism on selle vóre endomorfismiks, on ahel.

3.8. Näidata, et igas vóres L suvaliste $a, b \in L$ korral kujutused $x \mapsto x \vee a$ ja $y \mapsto y \wedge b$ määravad Galois' vastavuse o-hulkade $[a \wedge b, b]$ ja $[a, a \vee b]$ vahel.

3.9. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma G alamrühmade vóre $\mathcal{S}(G)$ kui o-hulk oleks eneseduaalne.

3.10. Kas on óige implikatsioon: (rühma G alamrühmade vóre $\mathcal{S}(G)$, kui o-hulk omab lóplikku pikkust) $\Longrightarrow$ (rühm G on lóplik)?

3.11. Näidata, et o-hulk on ahel parajasti siis, kui kóik tema alamhulgad on vóred indutseeritud järjestuse móttes.

3.12. Näidata, et vóres $(\mathcal{B}(M); \subseteq)$ on iga lóik jällegi sama tüüpi vóre.

3.13. Vähimat elementi $\hat{0}$ omavas o-hulgas P nimetame elemendi $m \neq \hat{0}$ <u>molekuliks</u>, kui P iga kaks vähimast elemendist erinevat elementi a ja b , mille korral $m \in T\{a, b\}$, omavad $\neq \hat{0}$ alamtõket. Veenduda, et o-hulga P iga aatom on molekul. Tuua näide 3-elemendilisest o-hulgast, milles leidub molekule, mis pole aatomid.

3.14. Tõestada, et Boole'i võres on iga molekul ka aatomiks.

3.15. Veenduda, et o-hulga P alamhulk F on <u>filter</u> parajasti siis, kui: (1) $\hat{0} \notin F$, (2) F iga kaks elementi omavad alamtõket $\in F$ ja (3) kui mingi $p \in P$ ja $f \in F$ korral $p \geq f$, siis $p \in F$.

3.16. Alamhulka $D \subset P \setminus \hat{0}$ nimetatakse <u>tihedaks</u> o-hulgas P , kui iga $\hat{0} \neq x \in P$ jaoks leidub $d \in D$, $d \neq \hat{0}$ nii, et $d \leq x$. Veenduda, et o-hulga P kõik $\neq \hat{0}$ minimaalsed elemendid sisalduvad P <u>igas</u> tihedas alamhulgas.

3.17. Omagu o-hulk P molekuli m . Näidata, et alamhulk $F = \{x \in P | y \leq x$ mõne y , $\hat{0} \neq y \leq m$, korral$\}$ on filter, mis omab mittetühja ühisosa P iga tiheda alamhulgaga.

3.18. Omagu o-hulk P filtrit F , millel on mittetühi ühisosa P iga tiheda alamhulgaga. Arutledes vastuväiteliselt veenduda, et P omab molekuli.

3.19. Tõestada, et Boole'i võre omab aatomit parajasti siis, kui ta omab filtrit, mille ühisosa antud võre iga tiheda alamhulgaga on mittetühi.

3.20. Veenduda, et o-hulga P aatomite hulgaks on alamhulk $\mathcal{A}(P) = \{p \in P \mid \perp\{p\} = \{p\}\}$.

3.21. Olgu o-hulk P atomaarne, s.t. rahuldagu ta tingimust

$$\forall p \in P, (\perp\{p\}) \cap \mathcal{A}(P) \neq \emptyset.$$

Tõestada, et sellise o-hulga P korral on vastavus ν, mis antakse reegliga

$$\forall a \in \mathcal{A}(P), a \mapsto \nu_a = \top\{a\},$$

injektiivseks kujutuseks hulgast $\mathcal{A}(P)$ hulka $\mathcal{M}(P)$.

3.22. Tõestada, et o-hulga P mittetühi alamhulk F on filter, kui on täidetud kaks nõuet:

(F1) $q \in F \Rightarrow \top\{q\} \subset F$ ja

(F2) $\{p,q\} \subset F \Rightarrow (\perp\{p,q\}) \cap F \neq \emptyset$

Veenduda, et $\hat{1} \in F$, aga $\hat{0} \notin F$.

3.23. Näidata, et o-hulga P kõigi filtrite hulk $\mathcal{F}(P)$ on mittetühi. Veenduda ka, et (suvalise) o-hulga P kõigi maksimaalsete filtrite alamhulk $\mathcal{M}(P)$,

$$\mathcal{M}(P) \doteq \{F \in \mathcal{F}(P) \mid \forall G \in \mathcal{F}(P), F \subset G \Rightarrow F = G\},$$

on samuti mittetühi.

3.24. Topoloogiliseks struktuuriks nimetatakse kolmikut $(P, \Delta, \mathcal{T})$, kus P on o-hulk, $\Delta \subset \mathcal{M}(P)$ ja $\mathcal{T}: \Delta \to \mathcal{F}(P)$ on kujutus, mis iga $\mu \in \Delta$ korral täidab järgmisi tingimusi:

(T1) $\mathcal{T}_\mu \subset \mu$; siin tähistame $\mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}(\mu)$ ja

(T2) Iga $p \in \mathcal{T}_\mu$ korral leidub $\tau \in \mathcal{T}_\mu$ selline, et $\tau \leq p$ ja $\tau \in \bigcap_{\tau \in \varsigma} \mathcal{T}_\varsigma$

Tuua näide topoloogilisest struktuurist, milles P on atomaarne o-hulk ja $\Delta \subset \nu(\mathcal{A}(P))$; siin ν on injektsioon $\mathcal{A}(P) \hookrightarrow \mathcal{M}(P)$, millest oli juttu ülesandes 3.21. Kirjeldatud omadustega topoloogilist struktuuri nimetatakse atomaarseks.

3.25. Topoloogilises struktuuris (P, Δ, $\mathcal{T}$) iga $q \in \bigcup_{\mu\in\Delta} \mathcal{T}_\mu$ korral olgu $N_q = \{ \mu \in \Delta \mid q \in \mu \}$. Tõestada, et iga $\mu \in \Delta$ korral on alamhulkade pere

$$\mathcal{T}_\mu^* = \{ N \subset \Delta \mid \exists\, q \in \mathcal{T}_\mu ,\ N_q \subset N \}$$

filtriks o-hulgas ($\mathcal{B}(\Delta)$; $\subseteq$).

3.26. Veenduda, et tavaline (hulgateoreetiline) topoloogia hulgal S määrab atomaarse topoloogilise struktuuri o-hulgal ($\mathcal{B}(S)$; $\subseteq$).

3.27. Topoloogilises struktuuris (P, Δ, $\mathcal{T}$) olgu $\mathcal{T}_\mu^*$, $\mu \in \Delta$, alamhulkade filter hulgas Δ, mis määratleti ülesandes 3.25, ning $\mathcal{T}^*$ olgu reegliga $\mu \mapsto \mathcal{T}_\mu^*$ antud kujutus $\Delta \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}(\Delta))$. Tõestada, et topoloogiline struktuur ($\mathcal{B}(\Delta)$; Δ, $\mathcal{T}^*$) määrab tavalise (hulgateoreetilise) topoloogia hulgal Δ.

3.28. Uurida topoloogilisi struktuure o-hulkadel ($\mathbb{N}$; $\leqslant$), ($\mathbb{N}$; $/$) ja D_n.

4. POOLMODULAARSED VÕRED

4.1. Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja vähimat elementi omava poolmodulaarse võre L korral, kui me "pressime kokku" elemendiks $\hat{1}$ kõik sellised elemendid $x \in L$, et $\ell(x) \geqslant n$, siis saame uuesti poolmodulaarse võre.

4.2. Tõestada, et poolmodulaarse võre kumer alamvõre on poolmodulaarne.

4.3. Näidata, et lõpliku p-rühma kõigi alamrühmade võrega duaalne võre on poolmodulaarne.

4.4. Veenduda, et võre Π_n on isomorfne n-järku sümmeetrilise rühma alamrühmade võre alamvõrega.

4.5. Veenduda, et võres Π_n kehtib suvaliste $\pi, \sigma \in \Pi_n$ korral võrratus $n(\pi \wedge \sigma) + n(\pi \vee \sigma) \geq n(\pi) + n(\sigma)$.

4.6. Suvaliste $\pi, \sigma \in \Pi_n$ korral olgu $G = G(V, \mathcal{E})$ kahealuseline graaf, mille tipuhulgaks on $V = V^{(1)} \sqcup V^{(2)}$ kus $V^{(1)}$ koosneb tükelduse π tükkidest A_i ja $V^{(2)}$ koosneb tükelduse σ tükkidest B_j. Loeme, et $(A_i, B_j) \in \mathcal{E}$, kui $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Tõestada, et $|V| = n(\pi) + n(\sigma)$, $|\mathcal{E}| = n(\pi \wedge \sigma)$ ja $n(\pi \vee \sigma)$ on võrdne graafi G sidususkomponentide arvuga.

4.7. Olgu $\mathcal{S}_n(K)$ n-mõõtmeline afiinne ruum üle korpuse K. Igale alamhulgale $T \subset \mathcal{S}_n(K)$ seame vastavusse vähima tasandi $\tau(T)$, mis sisaldab hulka T. Veenduda, et kujutus $\tau : \mathcal{B}(\mathcal{S}_n) \to \mathcal{B}(\mathcal{S}_n)$ on sulundioperaator, mille kinnisteks alamhulkadeks on tasandid, kusjuures viimaste koguhulk $AG_n(K)$ moodustab poolmodulaarse võre operatsioonide

$$\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 := \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \quad \text{ja} \quad \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 := \tau(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \quad \text{suhtes.}$$

4.8. Hulga S katteks nimetatakse selle hulga alamhulkade peret, mille (hulgateoreetiliseks) ühendiks on S; vaadeldavasse perre kuuluvaid S alamhulkasid nimetatakse katte komponentideks. Katet nimetatakse <u>m-tükelduseks</u>, kui on täidetud järgmised tingimused: (1) selle katte igas komponendis on vähemalt m elementi ja (2) hulga S iga m-elemendiline alamhulk sisaldub parajasti ühes antud katte komponendis; juhul $m = 1$ on siin tegemist hulga S (tavalise) tükeldusega. Hulgal S antud m-tükelduse $\mathfrak{T}$ korral defineerime alamhulga $A \subset S$ jaoks

$$\bar{A} := \begin{cases} A, \text{kui } |A| < m; \\ B, \text{kui } |A| \geq m \text{ ja } A \text{ sisaldub } \mathfrak{T} \text{ komponendis } B; \\ S, \text{kui } |A| \geq m \text{ ja } A \text{ ei sisaldu katte } \mathfrak{T} \text{ üheski komponendis.} \end{cases}$$

Tõestada, et vastavus $\Delta: A \to \bar{A}$ on sulundioperaator hulgal S, mis rahuldab aksioome (LB) ja (V); vt. [1], § 4.

4.9. Veenduda, et vektorruumi $V = V(K)$ kõik baasid $B, B', \ldots$ rahuldavad järgmisi kahte omadust; (1) ruumi V ükski baas ei sisaldu pärisalamhulgana V mõnes teises baasis ja (2) suvaliste baaside B ja B' ning vektori $\bar{e} \in B$ korral leidub selline $\bar{e}' \in B'$, et $(B \setminus \{\bar{e}\}) \cup \{e'\}$ on ka ruumi V baas.

4.10. Tsükliteta graafi nimetatakse *metsaks*, sidusat tsükliteta graafi aga *puuks*. *Sidusa graafi* G *baasiks* nimetatakse puud, mis sisaldab G kõiki tippe ning mille servad on graafi G servadeks. Suvalise *graafi* G *baasiks* nimetatakse metsa, mis tekib graafi G sidususkomponentide baaside ühendamisel. Tõestada, et iga graafi G baasid rahuldavad järgmisi kahte omadust: (1) graafi G ükski baas ei sisaldu pärisalamgraafina G üheski teises baasis, ja (2) kui B ja B' on graafi G baasid ning e on graafi B serv, siis leidub graafis B' selline serv e', et graaf $(B \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ on ka graafi G baas; graaf $(B \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ on graafist B saadud serva e väljajätmisel ja serva e' lisamisel.

4.11. Olgu $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_k)$ lõpliku hulga S mittetühjade alamhulkade suvaline (lõplik) pere. *Pere* $\mathcal{S}$ *transversaaliks* nimetatakse igat sellist k-elemendilist alamhulka hulgas S, milles sisaldub igast alamhulgast S_i vähemalt üks element. *Pere* $\mathcal{S}$ *osatransversaalideks* nimetatakse pere $\mathcal{S}$ alamperede transversaale, *maksimaalseteks* aga selliseid osatransversaale, mis ei sisaldu pärisalamhulgana pere $\mathcal{S}$ üheski teises osatransversaalis. Näidata, et (1) pere $\mathcal{S}$ ükski maksimaalne osatransversaal ei sisaldu pärisalamhulgana $\mathcal{S}$ mõnes teises maksimaalses osatransversaalis ja (2) kui T ja T' on pere $\mathcal{S}$ maksimaalsed osatransversaalid ning $x \in T$, siis leidub element $y \in T'$, et hulk $(T \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ on ka pere $\mathcal{S}$ maksimaalne osatransversaal.

4.12. Lõpliku hulga S kõigi alamhulkade hulgas $\mathcal{B}(S)$ olgu fikseeritud mingi alamhulk $\mathcal{B}^*(S)$ kahe järgmise omadusega: (1) kui $B, B' \in \mathcal{B}^*(S)$, siis ei saa kehtida $B \subsetneq B'$ ja (2) suvaliste $B, B' \in \mathcal{B}^*(S)$ ja $x \in B$ korral leidub $y \in B'$, et $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}^*(S)$; hulka $\mathcal{B}^*(S)$ kuuluvaid alamhulkasid nimetame baasideks. Näidata, et hulgal S saab defineerida sulundioperaatori Δ, nii et sulundiruum $(S; \Delta)$ on matroid.

4.13. Olgu $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ning $\mathcal{B}^*(S) = \mathcal{B}(S) \setminus \mathcal{T}$, kus $\mathcal{T} = \{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,7\}, \{2,5,6\}, \{3,4,6\}, \{3,5,7\}\}$. Näidata, et kolmeelemendilisi alamhulki süsteemist $\mathcal{B}(S) \setminus \mathcal{T}$ võib nimetada baasideks, mistõttu hulgal S tekib (Fano) matroid.

4.14. Vektorruumis $V = V(K)$ defineeritakse (lõpliku) alamhulga $A \subset V$ astak $\mu(A)$ kui alamruumi $\lambda_K(A)$ dimensioon. Tõestada, et funktsioon $\mu : \mathcal{B}_\ell(V) \to N \cup 0$ rahuldab järgmisi nõudeid: (1) iga $A \subset V$ korral kehtib $0 \leq \mu(A) \leq |A|$, (2) kui

$A \subset B$, siis $\mu(A) \leq \mu(B)$ ja (3) suvaliste $A, B \subset V$ korral $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

4.15. Graafis G, mis omab n tippu ja k sidususkomponenti, sisaldab baas $n-k$ serva; seda arvu $n-k$ nimetatakse *graafi* G *astakuks* ja tähistatakse $\mu(G)$. Tõestada, et funktsioonil μ on järgmised 3 omadust: (1) iga alamgraafi H korral kehtib $0 \leq \mu(H) \leq |E(H)|$; siin $E(H)$ oleme tähistanud graafi H servade hulka ja $|E(H)|$ selle hulga võimsust, (2) kui graaf H on K alamgraaf, siis $\mu(H) \leq \mu(K)$ ja (3) graafi G suvaliste alamgraafide H ja K korral

$$\mu(H \cup K) + \mu(H \cap K) \leq \mu(H) + \mu(K).$$

4.16. Olgu $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ lõpliku hulga S alamhulkade suvaline (lõplik) pere. *Alamhulga* $A \subset S$ *astakuks* nimetatakse hulgas A sisalduvate $\mathcal{S}$ osatransversaalide suurimat elementide arvu. Tõestada, et funktsioon μ rahuldab nõudeid: (1) suvalise $A \subset S$ korral $0 \leq \mu(A) \leq |A|$, (2) kui $A \subset B \subset S$, siis $\mu(A) \leq \mu(B)$ ja (3) suvaliste $A, B \subset S$ korral

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

4.17. Lõpliku hulga S korral olgu antud funktsioon $\mu : \mathcal{B}(S) \to \mathbb{N} \cup 0$, mis rahuldab nõudeid: (1) iga $A \subset S$ korral kehtib $0 \leq \mu(A) \leq |A|$, (2) kui $A \subset B \subset S$, siis $\mu(A) \leq \mu(B)$ ja (3) suvaliste $A, B \subset S$ korral $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Näidata, et hulgal S saab defineerida sulundioperaatori Δ, nii et sulundiruum $(S; \Delta)$ on matroid.

4.18. (Projekt). Tõestada ülesandeis 4.12 ja 4.17 toodud matroidi definitsioonide samaväärsus (esialgse) definitsiooniga, kus matroid lõplikul hulgal defineeritakse kui sulundiruum, mis rahuldab nõuet (V); vt. [1] punktis 4.3.

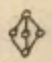
5. MODULAARSED VÕRED

5.1. Näidata, et modulaarses võres kehtib samasus

$$x \wedge y = [(x\wedge y)\vee(x\wedge z)]\wedge[(x\wedge y)\vee(y\wedge z)].$$

5.2. Näidata, et modulaarse võre alamvõred ja o-epimorfsed kujutised on modulaarsed võred.

5.3. Näidata, et ekvivalentside võred Π_1, Π_2 ja Π_3 on modulaarsed.

5.4. Näidata, et võre diagrammiga  on modulaarne.

5.5. Näidata, et võre pikkusega 2 on modulaarne.

5.6. Näidata, et võre on modulaarne parajasti siis, kui temas on täidetud samasus

$$x\wedge(y\vee z) = x\wedge([y\wedge(x\vee z)]\vee z).$$

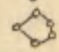
5.7. Näidata, et võre on modulaarne parajasti siis, kui temas on täidetud samasus

$$[(x\wedge z)\vee y]\wedge z = [(y\wedge z)\vee x]\wedge z.$$

5.8. Näidata, et modulaarses võres V iga fikseeritud element $a\in V$ defineerib idempotentse ja assotsiatiivse binaarse operatsiooni hulgal V : $* : V\times V \to V$,

$$x * y = [x\wedge(a\vee y)]\vee(a\wedge y).$$

5.9. Rühma G alamrühma N nimetame kvaasinormaalseks, kui N kommuteerub rühma G kõigi alamrühmadega. Tõestada, et rühmal, mille kõik alamrühmad on kvaasinormaalsed, on alamrühmade võre modulaarne. Järeldada siit, et Abeli rühmal ning Hamiltoni rühmal on modulaarsed alamrühmade võred.

5.10. Veenduda, et mittemodulaarses võres leiduvad elemendid x, y ja z, nii et $x<z$ ja $x\vee(y\wedge z)<(x\vee y)\wedge z$. Tõestada, et elemendid $x\vee y$, $(x\vee y)\wedge z$, $x\vee(y\wedge z)$, $y\wedge z$ ja y moodustavad mittemodulaarse alamvõre diagrammiga  .

5.11. Olgu Π lõplik projektiivne tasand ja $n\geq 2$ naturaalarv. Tõestada, et igaüks järgmisest kuuest tingimusest, kui on täidetud tasandil Π, toob enesega kaasa kõigi ülejäänud viie tingimuse täidetuse:

1) Tasandi Π mingi sirge koosneb $n+1$ punktist;

2) Tasandi Π mingi punkt asub täpselt $n+1$ sirgel;

3) Tasandi Π iga sirge koosneb $n+1$ punktist;

4) Tasandi Π iga punkt asub täpselt $n+1$ sirgel;

5) Tasandil Π on täpselt n^2+n+1 punkti;

6) Tasand Π sisaldab täpselt n^2+n+1 sirget.

6. DISTRIBUTIIVSED VÕRED

6.1. Näidata, et võre, milles kehtib samasus

$$(x\vee y)\wedge[z\vee(x\wedge y)]=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x),$$

on distributiivne.

6.2. Näidata, et võre on distributiivne parajasti siis, kui $x\vee(y\wedge z)\geq(x\vee y)\wedge z$ kehtib kõigi tema elementide x, y ja z korral.

6.3. Veenduda, et distributiivsele võrele kahe uue elemendi α ja ω lisamine nii, et $\alpha < x < \omega$ antud võre iga elemendi x korral annab uue distributiivse võre.

6.4. Tõestada, et rühma alamrühmade võre on distributiivne parajasti siis, kui antud rühm on kas tsükliline või tsükliliste alamrühmade kasvava jada ühend.

6.5. Näidata, et kaks distributiivset võret on isomorfsed parajasti siis, kui nad on isomorfsed kui o-hulgad.

6.6. Tähistagu $\mathbb{N}$ o-hulka, mille moodustavad naturaalarvud nende tavalise järjestuse suhtes ning tähistagu $\mathbb{N}^m = \underbrace{\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}}_{m\ korda}$ ja $m\mathbb{N} = \underbrace{\mathbb{N}\oplus\cdots\oplus\mathbb{N}}_{m\ korda}$. Näidata, et $\mathcal{J}^*(k\mathbb{N}) \cong \mathbb{N}^k$.

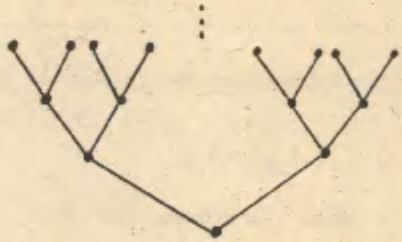
6.7. Näidata, et o-hulgad $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on lõpliku kasvuga.

6.8. Näidata, et võre $\mathbb{N}^m$ juurdekasvu mõõdab konstantne funktsioon $f(k,n)=m$.

6.9. Tõestada, et võre $\mathcal{J}^*(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ juurdekasv on kõrgusest sõltumatu, $f(n)=n+1$, samal ajal aga võredel $\mathcal{J}^*(\mathbb{N}^m)$, $m>2$, juurdekasvu mõõt puudub.

6.10. Veenduda, et võre $\mathbf{2}^m$ juurdekasvu mõõdab funktsioon $f(k,n)=-n+m$. Tõestada, et kõrgusest sõltumatu juurdekasvuga distributiivne võre on Boole'i algebra.

6.11. Olgu T_2 - universaalne binaarne puu (vt. joon.1). Näidata, et võimsust $k\in\mathbb{N}$ omavate ideaalide arv o-hulgas T_2 on võrdne *Catalani arvuga* $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.



Joon.1.

6.12. Näidata, et Fibonacci võres $\mathcal{F}$ kõrgust κ omavate ja täpselt r võre $\mathcal{F}$ elementi katvate elementide arvuks on

$$\binom{\kappa-r-1}{r-1} + \binom{\kappa-r}{r-1};$$

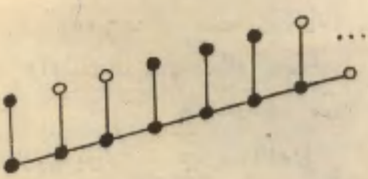
siin loetakse $\binom{s}{t}=0$, kui vähemalt üks arvudest s, t on negatiivne.

6.13. Seame o-hulga Φ (vt. [1] punktis 6.6.) igale võimsust κ omavale ideaalile I vastavusse naturaalarvu κ nn. *o-lahutuse* $\varphi(I): \kappa=\kappa_1+\dots+\kappa_t$, kus kõik $\kappa_j \in \{1,2\}$ ning

$$\kappa_j = \begin{cases} 1, \text{ kui } (j,0)\in I, \text{ aga } (j,1)\notin I, \\ 2, \text{ kui } (j,1)\in I. \end{cases}$$

Näidata, et vastavus $I \to \varphi(I)$ on bijektsioon o-hulga Φ võimsust κ omavate ideaalide hulga ja naturaalarvu κ kõigi o-lahutuste hulga vahel; ideaali I, kui ta ülalkirjeldatud viisil määrab lahutuse $\kappa=\kappa_1+\dots+\kappa_t$, tähistatakse $I = \langle \kappa_1\kappa_2\dots\kappa_t\rangle$. Näiteks, joonisel 2 toodud ideaali (I elemendid on kujutatud rasvaselt) tähistatakse $I=\langle 2112221\rangle$.

6.14. Tõestada, et [1] punktis 6.6 kirjeldatud kujutused Δ ja $\square$ on bijektiivsed.



Joon.2.

6.15. Tóestada, et Youngi vóre $\mathcal{Y}$ on ainus vähimat elementi omav lokaalselt lóplik distributiivne vóre, selline, et kui element $\nu \in \mathcal{Y}$ katab n elementi, siis ν kaetakse $n+1$ elemendi poolt.

7. TÜKELDUSTE VÓREGA SEOTUD ARVUDEST

7.1. Mitmel erineval viisil saab naturaalarvu m esitada paarikaupa ühistegurita tegurite korrutisena?

7.2. On antud n erinevat kasti ja n erinevat kuulikest. Mitmel erineval viisil saab kuulikesed paigutada neisse kastidesse, kui on lubatud ka kastide tühjaksjäämine?

7.3. Tóestada valem

$$\sum_{k} S(n,k)\cdot s(k,m) = \delta_{n,m}.$$

7.4. Tóestada valem

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} k^n = \begin{cases} r!\,S(n,r), & \text{kui } n \geq r, \\ 0, & \text{kui } n < r. \end{cases}$$

7.5. Kui palju on vóimalusi paigutada n erinevat eset erinevasse kasti, kui kastide tühjaksjäämine pole lubatud?

7.6. Tõestada, et

$$S(n+k,n)=\sum_{1\le a_1\le\dots\le a_k\le n} a_1 a_2\cdot\ldots\cdot a_k\ , \quad a_i\in\mathbb{N}.$$

7.7. Vaatleme 1-1 kujutusi $\sigma: n\to n$ (substitutsioone), nende koguhulka tähistame $\mathcal{S}_n$ ning olgu $f(\sigma)$ kujutuse σ püsipunktide arv. Tõestada valem

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} f(\sigma)^k=\sum_{i=1}^{\min(k,n)} S(k,i).$$

7.8. Tõestada, et

$$B_n=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\ge 0\\ k_1+2k_2+\dots+nk_n=n}}\frac{n!}{k_1!(1!)^{k_1}\cdot k_2!(2!)^{k_2}\cdot\ldots\cdot k_n!(n!)^{k_n}}.$$

8. ALAMRUUMIDE VÕREGA SEOTUD ARVUDEST

8.1. Loendades kõik (järjestatud) baasid ruumi $V_n(q)$ k-mõõtmelistes alamruumides ning seejärel ka igas k-mõõtmelises alamruumis, veenduda, et kehtib valem

$$\left[{n \atop k}\right]=\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdot\ldots\cdot(q^k-q^{k-1})}.$$

8.2. Tõestada võre $\Lambda_n(q)$ eneseduaalsus.

8.3. Polünoomi $Q(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^k x)$ korral kehtiva seose $(1+x)Q(qx)=(1+q^n x)\,Q(x)$ vasakus ja paremas pooles võrrelda kordajaid x^k ees. Veenduda, et kehtib samasus

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k .$$

8.4. Eelmises ülesandes saadud samasusele tuginedes veenduda, et kehtib valem

$$\begin{bmatrix} n+1\\ k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} + q^{n-k+1}\cdot \begin{bmatrix} n\\ k-1\end{bmatrix}.$$

8.5. Nn. *q-faktoriaal* defineeritakse kui q-polünoom

$$n!_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}{(q-1)^n} = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{n-1})$$

ning loetakse, et $0!_q = 1$. Veenduda, et kehtib valem

$$\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} = \frac{n!_q}{k!_q\,(n-k)!_q} .$$

8.6. Olgu

$$n!_q = \sum_{\alpha=0}^{\binom{n}{2}} I(n,\alpha) q^{\alpha} .$$

Näidata, et kehtivad valemid

$$I(n,\alpha) = I\left(n,\tbinom{n}{2}-\alpha\right), \quad \sum_{\alpha=0}^{\binom{n}{2}} I(n,\alpha) = n! \quad \text{ja}$$

$$I(n+1,\alpha) = I(n,\alpha) + I(n,\alpha-1) + \dots + I(n,\alpha-n).$$

Tõestada, et arv $I(n,\alpha)$ näitab hulga m nende permutatsioonide arvu, millel on täpselt α inversiooni.

8.7. Olgu $H_k(x) = \sum_{i\geq 0} \begin{bmatrix} k\\ i\end{bmatrix} x^i$; tõestada, et Galois' arvude jaoks kehtib (asümptootilisteks hinnanguteks sobiv) valem

$$G_n = \left[\prod_{m\geq 0}(1+q^m)\right]\cdot \sum_{k\geq 0} \frac{[H_k(D_q x^n)]_{x=1}}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)} .$$

9. GAUSSI ARVUDE TÄIENDAVAID OMADUSI

9.1. Näidata, et kehtivad võrdused

a) $P(n,m,\alpha) = P(m,n,\alpha)$ ja

b) $P(n,m,\alpha) = P(n,m,nm-\alpha)$.

9.2. Leida kombinatoorne tõestus faktile:

$$P(n,m,\alpha) - P(n,m,\alpha-1) \geqslant 0, \text{ kui } 0<\alpha\leqslant \tfrac{nm}{2}.$$

9.3. Tuginedes võre $\Lambda_n(GF(q))$ kombinatoorikale (loendades lineaarteisendusi) $f: V_n \to X$, $|X| = x$, anda vahetu tõestus q-samasusele [1], (9.5.2).

9.4. Tõestada, et vektorruumide $V_n(GF(q))$, $n=0,1,2,$ automorfismide arvu (Euleri) genereerivaks funktsiooniks on formaalne rida

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} t^n.$$

9.5. Vaatleme nn. *q-Catalani arve* $c_k = \left[{2k \atop k}\right] / \left[{k+1 \atop 1}\right]$ ning arve $d_k = \left[{2k \atop k}\right] - \left[{2k \atop k+1}\right]$. Märganud seoseid $d_k = q^k \cdot c_k$, veenduda, et q-Catalani arv c_k on q-polünoom, $c_k = \sum_{\alpha=0}^{k^2-k} c_{k,\alpha} q^\alpha$, mille kordajate summa $\sum_{\alpha=0}^{k^2-k} c_{k,\alpha}$ on *Catalani arv* C_k, mis (tavaliselt) defineeritakse valemiga $C_k = \binom{2k}{k} / \binom{k+1}{1}$.

9.6. $\mathbb{Z}$-võrgu punkti (x, y) kaaluks loeme arvu $x+y$ ning siksaki kaaluks - tema "loodesuunaliste" tippude ("NW-tippude") kaalude summat. Näidata, et $\mathbb{Z}$-võrgu tipust (0,0) lähtuvate ja tippu $(k, n-k)$ suunduvate ning kaalu α omavate siksakkide üldarvuks on $P(n-k, k, \alpha)$.

9.7. Kaugenevaiks nimetame $\mathbb{Z}$-võrgu selliseid siksakke $(0,0) \to \ldots \to (k, n-k)$, mille kõigi punktide (x, y) jaoks kehtib $x \geq y$. Tôestada, et $\mathbb{Z}$-vôrgu tipust (0,0) lähtuvate ja tippu (k, k) suunduvate ning kaalu α omavate kaugenevate siksakkide üldarvuks on $C_{k,\alpha}$.

9.8. Kontrollida mônede ruudukeste sisu järgmises tabelis.

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	1	q	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8	q^9	q^{10}	q^{11}	q^{12}	q^{13}	q^{14}	q^{15}	q^{16}	q^{17}	q^{18}
$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	1	1	*													
$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	2	1	1	*											
$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	2	2	1	1	*									
$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	3	3	3	2	1	1	*								
$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1	*							
$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	4	5	4	4	3	2	1	1	*					
$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1	*					
$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	5	4	3	2	1	1	*		
$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	5	7	7	8	7	7	5	5	3	2	1	1	*	
$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	4	4	3	3	2	2	1	1	*			
$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	7	7	8	8	8	7	7	5	4	3	2	1	1
$\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	6	8	9	11	11	12	11	11	9	8	6	5	3	2
$\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	4	4	3	3	2	2	1	1	*	
$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	4	5	7	8	9	10	10	10	10	9	8	7	5	4	3
$\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	6	9	10	13	14	16	16	18	16	16	14	13	10	9
$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$	1	1	2	3	5	7	9	11	14	16	18	19	20	20	19	18	16	14	11

Toodud tabelis on antud q-polünoomide $\left[{n \atop k}\right]$ kordajad, kui $n \leq 10$ ja $0 \leq k \leq 5$; seoste $\left[{n \atop 0}\right] = 1$, $\left[{n \atop 1}\right] = 1+q+\dots+q^{n-1}$ ja $\left[{n \atop k}\right] = \left[{n \atop n-k}\right]$ tõttu on see tabel täielik piirides $0 \leq n, k \leq$ ≤ 10.

10. DISTRIBUTIIVSETE VÕREDEGA SEOTUD ARVUDEST

10.1. Tõestada, et tihedate ahelate arvuks võres $\mathcal{J}(2 \times n)$ tuleb nn. *Catalani arv* $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

10.2. Leida arvud $\sum\limits_{I,|I|=k} t(I)$ ja $\sum\limits_{I,|I|=k} t(I)^2$ võrede $\mathcal{J}(2 \times n)$, $\mathcal{J}^*(\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$ ja $\mathcal{J}^*(\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{s\ korda})$, $s > 2$, korral.

10.3. Näidata, et täisarvude jada (x_n), mis kõigi $n \in \mathbb{N}$ korral rahuldab seost $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, rahuldab ka järgmist maatriksseost

$$(x_n, x_{n+1}) = (x_0, x_1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n ;$$

algtingimuse $(x_0, x_1) = (0,1)$ korral on siin tegemist Fibonacci arvudega F_n, aga algtingimuse $(x_0, x_1) = (2,1)$ korral - *Lucas' arvudega* L_n.

10.4. Kasutades liitmisreeglit, tõestada vahetult, et Fibonacci võres on kõrgust k omavate elementide arvuks Fibonacci arv F_k, s.o. $F_0 = F_1 = 1$ ja $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, kui $k \geq 2$.

10.5. Näidata, et kehtivad võrdused

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$ ja

$$(F_{n+k}, F_{n+k+1}) = (F_k, F_{k+1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

ning kasutades viimast võrdust, et tõestada väide: kui $k > 0$, siis F_n jagab arvu F_{nk}.

10.6. Näidata, et kehtib võrdus

$$(L_n, L_{n+1}) = (2, 1) \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

ning kasutada saadud tulemust võrduse

$$L_{n+1} \cdot L_{n-1} - L_n^2 = (-1)^{n+1} \cdot 5$$

tõestamiseks.

10.7. Kas on õige, et suvaliste 6 inimese seas on kas 3 paariti tuttavat või 3 paariti mittetuttavat?

10.8. (Projekt). Sõnastada ja tõestada Ramsey teoreem võre $\Lambda_n(q)$ korral.

KIRJANDUS

1. Kaljulaid, U., Diskreetse matemaatika elemendid (Loenguid võredest ja nende kombinatoorikast). - Trt.: TRÜ Rotaprint, 1983.
2. Aigner, M., Combinatorial Theory. - Berlin: Springer-Verlag, 1979.
3. Birkhoff, G., Lattice Theory. - Providence: AMS Coll. Publ. 1979.
4. Уилсон Р. Введение в теорию графов. - М.: Мир, 1977.

SISUKORD

ЗАДАЧИ УПРАЖНЕНИЙ О РЕШЕТКАХ И ИХ КОМБИНАТОРИКЕ.
Составитель Уво К а л ь ю л а й д.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Vastutav toimetaja M. Kilp.
Paljundamisele antud 15.06.1983.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 1,63.
Arvestuspoognaid 1,47. Trükipoognaid 1,75.
Trükiarv 300.
Tell. nr. 656.
Hind 5 kop.
TRÜ trükikoda. EMSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

5 kop.