S. BRONŠTEIN

ALGEBRA

JA SELLE ÕPETAMINE SEITSMEKLASSILISES KOOLIS

ABIRAAMAT ÕPETAJAILE

★

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"
TALLINN

S. BRONŠTEIN

ALGEBRA
JA SELLE ÕPETAMINE
SEITSMEKLASSILISES KOOLIS

Abiraamat õpetajaile

Kohustuslik kontrolleksemplar

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"
TALLINN 1949

Bibliotheca
Universitatis
Tartuensis
1949: 786
14921

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

A-17867

Algebra aine.

§ 1. Algebra kui teadus ja kui õppeaine.

Küsimusele, mis on algebra ja mille poolest ta erineb teistest matemaatilistest distsipliinidest — aritmeetikast ja analüüsist —, vastatakse erinevalt. Vaated, mis on eri aegadel selles küsimuses valitsenud, on üldjoontes järgmised:

1. Ühed nägid algebra erinevust teistest matemaatilistest distsipliinidest, eriti aritmeetikast, tähtarvutuses.

2. Teistel algas algebra negatiivsete arvude sissetoomisega: algebra samastati arvu mõiste laiendamisega.

3. Kolmandad vaatasid algebrale kui õpetusele ratsionaalsest täisfunktsioonist.

4. Neljanda definitsiooni järgi on algebra teadus võrranditest.

Algebra definitsioonide erinevus on tingitud kahest põhjusest: esiteks sellest, et segatakse ära kaks iseasja: algebra kui õppeaine koolis (kesk- või ülikoolis) ja algebra kui teadus; teiseks ühe või teise ajajärgu iseärasustest ja neis ajajärkudes valitsevatest vaadetest.

On tingimata tarvis vahet teha algebra kui õppeaine ja algebra kui teaduse vahel. Algebra kui õppeaine (nn. elementaarne ja nn. kõrgem algebra) on küllaltki kirev. Koolialgebra sisu ja selle meetodite mitmekesisus ei võimalda anda ainele ühtsat definitsiooni; ühed teadlased ja pedagoo-

gid omistavad algebra ühele osale, teised teisele osale suuremat tähtsust; sellest siis ka erinevad definitsioonid.

Kui aga vaadelda algebrat kui iseseisvat teadust teiste matemaatiliste teaduste hulgas, siis peab tal olema ühtne definitsioon. „Puhta matemaatika sisuks on ruumikujundid ja tõelise maailma arvulised vahekorrad, s. o. tal on väga reaalne sisu" (Friedrich Engels, Anti-Dühring, 1933, lk. 25). Niihästi algebra kui ka aritmeetika aineks on tõelise maailma arvulised vahekorrad. Nende vahekordade uurimine on toimunud järk-järgult.

Oma arenemise esimesel perioodil erines algebra aritmeetikast täheliste tähistamiste poolest. Sel ajal olid tähelised tähistamised algebra iseärasuseks.

Vaade algebrale kui õpetusele arvu mõiste arenemisest ja selle edaspidisest laiendamisest on seotud sellega, et negatiivsed arvud, siis irratsionaalsed ja kompleksarvud ilmusid esmakordselt võrrandite lahendamisel, võrrandite lahendamine aga on alati kuulunud algebrasse.

Analüüsi arenemisega XVIII sajandil hakkasid analüüsi ideed, eriti funktsiooni mõiste, tungima ka algebrasse. Ühenduses sellega tekkiski vaade algebrale kui õpetusele ratsionaalsest täisfunktsioonist.

Vaade algebrale kui õpetusele võrranditest on seoses matemaatika arenemisastmega, mil ülesannete lahendamist võrrandite abil vastandati aritmeetilistele meetoditele.

Et algebra arenemist ei saa veel pidada lõppenuks, milles ei või edaspidi esineda muutusi, siis on loomulik, et algebra definitsioon, mis peegeldab tema ajaloolise arenemise teatavat ajajärku, ei või olla lõplik ja osutub piiratuks.

XIX sajandi kaheksakümnendail aastail lõi Georg Cantor oma hulkadeteooria, mis on matemaatikas etendanud väga tähtsat osa. Hulkade- ja rühmateooria meetod on tunginud matemaatiliste distsipliinide enamikku ja seal esile kutsunud põhilisi muudatusi — täieliku pöörde matemaatiliste distsip-

liinide ja nende uurimisobjektide definitsioonides. Iseäranis suuri muudatusi on hulkadeteooria algebras esile kutsunud viimase kahekümne aasta jooksul. Oma sisult pole praegusaegse algebra kursusel midagi ühist nn. klassikalise kursusega; ilmunud on uued mõisted: hulk, korpus ehk ratsionaalsuskond, rühm; isegi õpetus võrranditest, see, nagu võiks arvata, kõige olulisem osa algebrast, pole muud midagi kui üleminek ühest korpusest teise, laiemasse korpusesse.

Praegusaegsete teaduslikkude vaadete seisukohalt pole algebra kui teaduse aineks mitte tähtarvutus, mitte arvu mõiste laiendamine, mitte õpetus võrranditest ja ka mitte sissejuhatus funktsioonide teooriasse, vaid õpetus mitmesuguste hulkade, ringide, korpuste ja rühmade elementidega sooritatavatest põhitehetest ning nende tehete seadustest. (Vt. märkusi 1 ja 2 raamatu lõpus.)

§ 2. Koolialgebra aine.

Algebrat kui teaduslikku distsipliini iseloomustab põhijoon — lakkamatu tendents allutada vaadeldavat ainestikku ühtsale matemaatilisele ideele, mis on valitsev selle teaduse arenemise antud perioodil, näiteks funktsiooni-ideele XIX sajandil või hulga-ideele XX sajandil. Ideede vahetus toob aga endaga kaasa teaduse sisu revideerimise, definitsioonide ja meetodite muutmise.

Erinevalt algebra kui teaduse arengust on koolialgebra sisu juba ammu stabiliseerunud. Koolialgebra ühendab endas mitmesuguste teaduste üksikuid peatükke, nimelt: elemente algebrast kitsamas mõttes (täheline sümboolika) ja põhitehteid ratsionaalsete ning irratsionaalsete hulkliikmetega, õpetust esimese, teise ja üksikuist kõrgema astme võrrandeist; aritmeetika ja arvuteooria elemente (arvu mõiste laiendamine), elemente kombinatoorikast ja analüüsist (liht-

samad arvjärjendid, peatükk transtsendentsetest funktsioonidest).

Muidugi pole võimalik seda mitmekesist materjali, mida koolis „algebra" nime all käsitellakse, põhjendada või valgustada ühtsalt vaatekohalt, sest siin esineb osi väga mitmest matemaatilisest distsipliinist. Kuid isegi puht-algebralist materjali pole koolis võimalik valgustada praegusaja teaduse seisukohalt. Materjali valgustamine selliselt laialt vaatekohalt pole õpilastele jõukohane ja võib seepärast algõpetuses ainult kahju tuua.

Õpetajale on aga tutvumine algebra praegusaegsete teaduslikkude alustega tarvilik, sest see lubab talle rajada aine õpetamise metoodikat teaduslikule alusele.

Algebra keerulisus, tema omandamise raskus peitub aine abstraktsuses. Seda raskust võib ületada rea võtetega, mis avavad vaadeldavate objektide ja tehete reaalse, mõttelise tähenduse. Õpilane ei saa aru negatiivsetest ja irratsionaalsetest arvudest, kui talle konkreetsete näidete najal ei illustreerita nende arvude mõttelist tähendust. Kuid sellest on vähe: avanud õpilastele sümbolite reaal-mõttelise tähenduse ja loonud psühholoogilised eeldused nendest sümbolitest arusaamiseks, tuleb neid tutvustada ka formaalse meetodiga — mõistete ja tehete formaalsete definitsioonidega. Kui piirduda ainult konkreetsete reaaldefinitsioonidega, siis ei arene õpilastes algebra õppimiseks väga tarvilikku võimet abstraktselt-loogiliselt mõtelda.

Algebra õpetamise praktikas tuleb juhinduda järgmistest kaalutlustest:

1. Tähelise sümboolika tarvituselevõtmine teeb õpilastele suuri psühholoogilisi raskusi. Selles küsimuses on algebra õpetamise ülesandeks süstemaatiliselt valitud näidete najal selgitada tähtarvutuse otstarbekust.

2. Küsimused, mis on seoses arvu mõiste laiendamisega, nimelt negatiivsete ja kompleksarvude tarvituselevõtmisega,

peavad olema rajatud konkreetsele alusele, mis on kõige loomulikum ja õpilastele kõige jõukohasem.

3. Keskkooli algebra kursus sisaldab endas rea küsimusi, mida rangelt põhjendab matemaatiline analüüs. Siia kuuluvad irratsionaalsed arvud ja tehted nendega, astmed murruliste astendajatega ja logaritmid. Neid küsimusi võib rangelt põhjendada mitme eri meetodiga, mis aga kaugelt ületavad keskkoolis olemasolevaid võimalusi. Seepärast tuleb paratamatult loobuda teostamatust unistusest anda keskkoolis irratsionaalsete arvude, murruliste näitajatega tehete ja logaritmide teaduslikult põhjendatud teooria.

Käesoleva raamatu ülesanne neis küsimustes on järgmine: meenutada õpetajale neid teooriaid, mis on olemas iga mainitud küsimuse kohta (nende teooriate üksikasjaline esiletoomine ei kuulu aga selle raamatu ülesannete hulka), neid võrdlevalt iseloomustada, välja valida neist õpilastele kõige jõukohasem ja lõpuks näidata, mida õpilane võib teooriast omandada.

4. Võrrandite lahendamine tekitab mõningaid raskusi, mis on tingitud võrrandite samaväärsuse printsiibist; samaväärsuse printsiip tuleb läbi arutada enne ühe võrrandi puhul, siis võrrandisüsteemi, ruutvõrrandi, irratsionaalsete võrrandite ja lõpuks kõrgemaastmeliste võrrandite juures.

Õpetamise praktikas on kõige nõrgemaks kohaks võrrandite koostamine ülesande andmete põhjal. Ülesande sõnaliselt väljendatud andmete üleviimine võrrandite keelde teeb õpilastele väga suuri raskusi. Neist raskustest saab üle sel teel, et ülesanded valitakse süstemaatiliselt tõusva raskuse järjekorras. Esmakordselt selle osa juurde asuvat õpilast tuleb üllatada esitatud ülesande kergusega; keerukad ülesanded võivad õpilast algul ainult eemale peletada; sedamööda, kuidas õpilane ülesandeid lahendab, tekib temas kindlus ja veendumus, et esinevaid raskusi võib siiski ületada selle vilumusega, mis ta on omandanud varem eelmiste ülesan-

nete lahendamisega; sel viisil omandab ta oskuse toime tulla keerukamate ülesannetega.

Nüüd võime püstitada järgmise küsimuse: kas on tarvis anda juba esimestel tundidel algebra definitsiooni? Muidugi ei või juttu olla algebra rangest definitsioonist; on mõningaid tõsiseid motiive nende põhjendites, kes ei soovi algebrale anda algul mingit definitsiooni. Praktika aga näitab, et kui õpetaja seda küsimust üldse ei puuduta, järgneb õpilaste poolt rida küsimusi, ühe sõnaga — sellest ei pääse kõrvale. Pole ju halb, kui õpilase küsimusele vastata, et algebra on teadus, mis tegeleb ülesannete lahendamise isesuguse viisiga, nimelt võrrandite abil; tutvumisele nende meetoditega peab aga eelnema teiste osade, nimelt tähelise sümboolika, relatiivsete arvude, täheliste täis- ja murdavaldiste teisenduste omandamine. Selline selgitamine viib õpilasi algebra ideedesse ja annab neile ilma pretensioonita rangusele ja teaduslikkusele teatava üldise orientatsiooni. Ka siin, nagu paljudes teisteski teadustes, avastub definitsioon sedamööda, kuidas tutvutakse ainestikuga.

§ 3. Lühidad andmed algebra arenemisloost.

Täheline sümboolika pole ühelt poolt piisavaks tunnuseks, mis eristab algebrat aritmeetikast ja analüüsist, sest tähelist sümboolikat esineb ka teistes matemaatilistes distsipliinides; teiselt poolt pole ta ka iseloomustavaks tunnuseks, sest egiptlaste, kreeklaste ja hindude algebra polnud sümboliline. „Kui esiteks vaadata esituse vormi, siis paistab silma igaühele, kes esimest korda sellist teksti loeb, et tekst on ilma igasuguste valemiteta ja sümboliteta. Tähelepanelikumal lugemisel võib märgata, et tekstis esinevad algebra elemendid on väljendatud puht-geomeetriliselt, nagu näiteks lõikude suhe sarnastes kolmnurkades või võrde sise- ja välisliikmete korrutised on kujutatud ristkülikutena" — loeme matemaatika ajaloost.

Algebra algeid laiemas mõttes kohtame egiptlaste juures. Kas võime nimetada algebraliseks järgmist ülesannet Ahmese egiptuse papüürusest: „Leida arv, mis liidetult oma kolmandiku ja neljandiku osaga annab 2"?

Meie seisukohalt kuulub see ülesanne oma lahendusviisi poolest algebrasse, sest siin rakendatakse võrrandite meetodit, kuigi ilma tähelise sümboolikata.

Kreeklastel oli oma klassikalisel perioodil algebra, milles aga tehetele oli antud geomeetriline kuju.

Eukleidesele olid tuntud seosed, milliseid me väljendame praegu valemitena: $ma + mb = m(a + b)$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ („Elemendid", raamat II); $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ („Elemendid", raamat IX).

„Elementide" V raamatus on esitatud õpetus võrretest ja tuletisvõrded; X raamatus on õpetus irratsionaalsetest arvudest; siin esineb näiteks liitradikaali teisendamine radikaalide summaks:

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{b})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{b})}.$$

Ruutvõrrandid olid tuntud kreeklastele. Eukleidese VI raamatus on lahendatud võrrandid: $x^2 + q^2 = px$ ja $x^2 + px = q^2$; lahendused on puht-geomeetrilised. Võrrandi kolmas tüüp $x^2 = px + q^2$ esineb Eukleidese ühes teises teoses.

Matemaatika-kirjanduse mälestisi meie ajaarvamise algusest kuni III sajandini pole säilinud. III saj. lõpul esinevad Heronil ruutvõrrandid arvuliste kordajatega. Aritmeetika ja algebra saavutasid kreeklastel oma õitseaja Diophantose teoses „*Αριθμητικα*" (III saj.). Diophantos on „sünkopeeritud" algebra silmapaistvamaid esindajaid, vanaajal aga ainus; ta võttis kasutusele tundmatu suuruse astmete lühendatud tähistused. Diophantosel esinevad ülesanded esimese ja teise astme võrrandite kohta ühe ja mitme otsitavaga ning kuupvõrrandid. Ta liigitab võrrandid mitte astme, vaid liikmete

arvu järgi. Osavate võtetega viib ta harilikult ülesande lahenduse ühele võrrandile ühe otsitavaga.

Määramatute võrrandite lahendamise üksikuid näiteid leiame pütaagorlastel, Archimedesel ja Heronil; Diophantos ületas neid kaugelt oma meisterlikkusega. Aga ka tema ei andnud üldisi lahendusmeetodeid, vaid iga ülesanne lahendati eri viisil. Määratud ja määramatute võrrandite lahendamisel võtab ta vaatlusele ka murdlahendid; ta kõrvaldab negatiivsed ja irratsionaalsed lahendid ning piirdub ainult positiivsete ja ratsionaalsetega.

Järgmise sammu edasi tegid hindud (Bhascara, XII saj.) ja araablased; nad andsid esimese ja teise astme võrrandite lahendamise üldreeglid ning hakkasid kasutama ka negatiivseid ja irratsionaalseid arve, kuigi mõninga ettevaatusega. Al-Khwarizmi eraldas esimesena aritmeetikast võrrandite lahendamise ja tegi selle eriaine uurimisobjektiks. Tehete kõik põhireeglid jäid aritmeetikasse, võrrandite lahendamine ja kõik muu viidi üle algebrasse. Aritmeetika jäi kooli õppeaineks, algebra aga õpetatud matemaatikute uurimisalaks. Algebra raamatutes oli sissejuhatus pühendatud aritmeetika raskeimale küsimusele — kümnendmurdudele; ruutjuure leidmine oli aga algebra küsimuseks, sest seda läks tarvis võrrandite lahendamisel.

Kolmanda astme võrrandid paistsid pikemat aega juurdepääsematult rasketena. Kolmanda ja neljanda astme võrrandite lahendused andsid XVI saj. itaalia matemaatikud Ferro, Cardano, Tartaglia ja Ferrari; Cardano lahendus esitati paljusõnalise reegli kujul[1]. Viëta võttis (1591. a.) kasutusele tähed mitte ainult otsitavate, vaid ka antud suuruste tähistamiseks; ta tähistas mitmesuguseid astmeid ühe ja

[1] Mõnede matemaatika ajaloolaste (Neugebauer) arvamuse järgi on põhjust oletada, et juba vanad babüloonlased oskasid lahendada üksikuid kolmanda astme võrrandeid.

sama tähega, ühendas tähti tehete märkidega ja valmistas sellega ette pinda Descartes'i töödele.

Nüüd peatume tähelisel sümboolikal. Praegusaegne täheline sümboolika on pika ajaloolise arenemise tulemus. Saksa matemaatik Nesselmann eristab kolme ajajärku, kolme algebra esinemisvormi.

1. Esimesel ajajärgul oli algebra retooriline, milles väljendati kõik laused, tõestused, tulemused täielikult sõnades, vähimate lühendusteta. Selline oli araablaste ja kreeklaste algebra.

2. Teisel ajajärgul oli algebra sünkopeeritud, s. o. tarvitati sõnu, mida aga ei kirjutatud täielikult välja, vaid lühendati. Siia kuulub Diophantose algebra. Diophantos kasutas tähti otsitava suuruse tähistamiseks; otsitava astmete tähistamiseks rakendas ta aga juba teisi tähti: teise astme jaoks δ^{υ} (lühendus sõnast „$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$“ — ruut), kolmanda astme jaoks κ^{υ} (lühendus sõnast „$\kappa\upsilon\beta\acute{o}\varsigma$“ — kuup). Sünkopeeritud algebrasse kuuluvad ka üksikud praegu tarvitusel olevad sümbolid, näiteks log x „x-i logaritmi" asemel.

3. Praegusaegne algebra on sümboliline. See tähendab, et kasutatakse erilist sümbolite süsteemi, mis on kohandatud üldideede väljendamiseks; et neil sümboleil on täita eriline ülesanne, erinevad nad ideede sõnalisest väljendusest; aja jooksul kohaneb sõnaline väljendusviis nende sümbolitega.

Praegusaegne sümboliline algebra tekkis lääne-araablaste juures, kellelt ta võeti üle itaalia matemaatikute poolt. Tähelisele sümboolikale pani aluse prantsuse matemaatik Viëta. Viëta võttis kasutusele tähed mitte ainult otsitavate suuruste tähistamiseks, nagu seda tegi Diophantos, vaid ka antud suuruste jaoks. Ühe ja sama aluse mitmesuguste astmete tähistamiseks tarvitas Viëta eri sõnu, näiteks avaldise $x^3 + 3bx = 2a$ väljendas Viëta järgmiselt:

A cubus *B* planum 3 in *A* aequantur *Z* solido 2. „Cubus" tähendab siin kolmandat astet, „planum" (tõlkes „pindala") tähendab ruutu, aga sõna „solido" *Z* juures ütleb, et jäävale suurusele *Z* tuleb vaadata kui „kehale", millel on kolm dimensiooni. Viëta sümbolite süsteem leidis lühikese aja jooksul matemaatikute poolt tunnustamist.

Ajaks, mil ilmusid Descartes'i tööd, oli kogunenud küllaldaselt matemaatilist materjali ja oli ka juba välja kujunenud tähelise sümboolika aparaat. Descartes võttis kasutusele astme tähistamise. Sellest kirjutab matemaatik-ajaloolane Wieleitner järgmist: „Üldiste algebraliste avaldiste kirjutuses on väga tähtis astmete tähistamine. Oli tarvis leida niisugune tähistusviis, mida esiteks oleks võimalik jätkata nii kaugele kui vaja; mis teiseks käiks mitte ainult otsitava, vaid iga suuruse kohta ja kolmandaks oleks rakendatav üheaegselt mitme eri suuruse kohta.

Ülalnimetatud tingimusi suudeti täita vaid aegamööda XVI sajandi jooksul. Teise ja kolmanda nõude täitmiseks oli tarvis enne täita põhitingimus, nimelt tähistada üldsuurust üheainsa tähega ja seejuures üht ning sedasama suurust ikka ühe ja sellesama tähega ning teist suurust teise tähega. See mõte ei saanud endale teed rajada enne XVI saj. keskpaika.

Alles nüüd oli võimalik täita ka esimene tingimus, lisades tähele mitmesuguseid astmenäitajaid. See astmenäitaja tuli paigutada nii, et teda ei saaks segada kordajaga, mis ikka seisab avaldise ees (kordaja on aga mõnikord kirjutatud sulgudes paremale poole avaldist). Küsimuse lahendas Descartes, kes kirjutas (käsikirjas juba umbes aastal 1628) algul astmenäitajad ilma sulgudeta paremale poole arvust ja hiljem paremale ja kõrgemale arvust."

Geomeetria oli kuni Descartes'ini juhtivaks matemaatiliseks distsipliiniks. Descartes nõudis esimesena, et tähtarvutus rajanegu aritmeetilisele, aga mitte geomeetrilisele alu-

sele, ja andis oma „Geomeetrias" tähtarvutusele selle praeguse kuju. Algebra tähtsus geomeetriale seisab Descartes'i järgi selles, et aritmeetika põhitehteid rakendatakse ka geomeetriale. Descartes ei rakendanud mitte ainult algebrat geomeetriliste ülesannete lahendamisel, vaid hakkas ka geomeetrilisi kujundeid kujutama arvude abil. Selle tagajärjel tekkis põhiline muutus vahekordades aritmeetika ja algebra vahel ühelt poolt ning aritmeetika ja geomeetria vahel teiselt poolt.

Descartes õpetas, et võrrandil on lahendeid niisama palju, kui suur on võrrandi aste; üksikud lahendid võivad olla negatiivsed, isegi imaginaarsed. Descartes lahendas võrrandeid sel teel, et lahutas võrrandi vasaku poole tegureiks.

Descartes'i käsituse järgi said tähed palju sügavama mõtte. Ta oli ka juba tuttav mistahes vabalt võetud arvu mõistega.

Analüütilises geomeetrias arutleb Descartes mitmeid kreeklastelt võetud ülesandeid. Descartes'i meetod aga erineb kreeklaste, näiteks Apolloniuse meetodist selle poolest, et vanad kreeklased ei kasutanud mingeid algebralisi valemeid. Descartes tegeles kaua sümboolika täiustamisega ja lõpuks andis tähelise sümboolika, mis vähe erineb meie praegusaegsest; ta tähistas otsitavaid suurusi tähestiku viimaste tähtedega ja antud suurusi selle esimeste tähtedega; koordinaatide jaoks võttis ta tarvitusele x ja y. Descartes'i koordinaadid on samad, mis Fermat'lgi. Descartes'ile kuulub eriti järgmine mõte: kõvera punktid viiakse (ordinaatide kui projitseerijate abil) vastavusse mingi sirge (abstsisstelje) punktidega. Punktide ehitamisel kasutas Descartes võrrandit kahe otsitavaga. Tema juures ilmub niisiis juba muutuvate suuruste ühise muutumise idee, funktsiooni idee. Määrata mingit funktsiooni tähendab leida selle väärtus iga muutuva suuruse x väärtuse puhul; kui funktsiooni kujutab mingi kõver,

siis see kõver on määratud sel korral, kui on antud kõik tema punktid.

Algebra edasist arenemist — kõrgema astme võrrandite lahendamist, algebra põhiteoreemi, moodsat võrrandite teooriat, mis on rajatud rühmateooriale — pole võimalik koolis käsitella. Mõningaid üksikasjalisemaid teadmisi antakse üksikutes peatükkides. (Vt. märkus 3 raamatu lõpus.)

I peatükk.

Sissejuhatus algebrasse.

§ 4. Peatüki sisu.

Algebra esimestes tundides tutvutakse järgmiste põhimõistetega:

1. Täheline sümboolika, mis koosneb:
   a) arvudest või sümbolitest suuruste tähistamiseks;
   b) tähtedest kui sümbolitest arvude tähistamiseks;
   c) märkidest tehete väljendamiseks;
   d) märkidest arvudevaheliste seoste väljendamiseks;
   e) abimärkidest — sulgudest.
2. Algebralised avaldised:
   a) tehete järjekord;
   b) sulud;
   c) algebraliste avaldiste numbriline väärtus.
3. Valemid. Võrdused. Samasused. Aritmeetiliste tehete omadused. Võrrandid.

Arutelles puht-teoreetiliselt võib algebrat üles ehitada nii, et tähtede all pole tingimata tarvis mõista arve, vaid matemaatilisi objekte, millede suhtes on täidetud teatavad tingimused.

Selline algebra süsteemi ülesehitus, mis on täiesti laitmatu loogika seisukohalt, pole aga vastuvõetav pedagoogika seisukohalt. Pedagoogika nõuab tarvitusele võetavate sümbolite konkreetset tõlgitsemist õpilastele tuntud materjali, s. o. arvude abil.

Sissejuhatava peatüki materjali omandamine teeb õpilastele raskusi. Tähelise sümboolika sissetoomine on tõepoolest abstraktsiooni esimene sissetungimine lapse vaimsesse silmaringi. Lapse mõte on seni tegelnud konkreetse materjaliga, teda ümbritseva elu reaalsete esemetega. Õpikud ei arvesta neid raskusi ja piirduvad tihti lühikese lausega: „Tähti tarvitatakse mistahes arvude tähistamiseks." Et aga õpilased sellest autorite arvates väga lihtsast mõttest aru saaksid, läheb tarvis palju hoolikat ettevalmistust õpetaja juhatusel; vastasel korral harjuvad õpilased tarvitama neid tähti mehaaniliselt ja opereerima nendega formaalselt, ilma teadliku arusaamiseta, et tähed on alati arvud. Pedagoogilises praktikas on tuntud juhud, kus õpilastel, kes juba lahendavad ruutvõrrandeid, aeg-ajalt kerkib neid piinav küsimus: milleks siis on tarvis tähti? Lapsed peavad selgesti aru saama, et tähed on arvud.

Kisseljovi õpiku selgitus, et tähti tarvitatakse arvude üldomaduste tähistamiseks ja samatüübiliste ülesannete lahendamisvalemite väljendamiseks, küsimust siiski veel ei ammuta. Algebras kasutatakse tähti järgmistel juhtudel:

1. Mõningaid tähti tarvitatakse mõne tuntud arvu tähistamiseks (näiteks täht π tähistab jäävat arvu, nimelt ringjoone pikkuse suhet ringi läbimõõduga; see arv võrdub ligikaudu 3,14159-ga).

2. Täht võib tähendada mitte mõnda ühte kindlat arvu, vaid mistahes arvu õpilastele tuntud arvudest. See juhtum on õpilastel seotud kõige suuremate raskustega.

3. Lõpuks võib täht tähendada mitte antud arvu, vaid otsitavat arvu. Aritmeetiliste ülesannete lahendamisel õpila-

sed juba tähistasid otsitavat arvu tähega, näiteks x-ga võrde tundmatut liiget või tundmatut arvu kirjutuses $\frac{3}{4}x = 15$ arvu leidmisel tema osa järgi.

§ 5. Tähtede sissetoomine.

Ülalmainitud kolme tähtede kasutamise juhtu võib käsitella vabalt võetud järjestuses. Lähtudes õpilastele juba tuntud aritmeetilisest ainestikust, võib alustada tähtede kasutamisest otsitava arvu tähistamiseks.

Võrdes $x : 15 = 12 : 4$ tuleb kolme antud arvu põhjal leida neljas, s. o. kõigist õpilastele tuntud täis- ja murdarvudest see arv, mis antud kolme arvuga moodustab õige võrde. Seni, kuni võrde esimene liige pole leitud, ei saa selle asemele kirjutada arvu. Selle otsitava arvu asemele paneme tähe.

Analoogiliselt tarvitatakse tähte otsitava arvu leidmisel tema osa järgi, näiteks kirjutuses $\frac{4}{5}x = 8$.

Siis minnakse üle tähe kasutamisele määratud arvu tähistamiseks. Aritmeetika kursuses esinevaist geomeetria elementidest on õpilastele juba teada, et ringjoone pikkuse suhe ringi läbimõõduga on jääv arv ja võrdub ligikaudu 3,14159-ga. Seda jäävat suhet pole võimalik täpselt väljendada ühegi arvuga; seepärast ei saa selle suhte tähistamiseks tarvitada arvu, vaid tuleb võtta täht.

Peale seda kui on läbi arutatud kaks juhtu, milles on tähega ära märgitud üks arv, kas tuntud või tundmatu, võib siirduda juhule, kus täht pole määratud arv, vaid õpilastele tuntud arvudest mistahes arv. Käesoleva peatüki keskseks kohaks ongi tähega väljendatud mistahes arvu idee omandamine; see idee leiab hiljem arendamist algebralistes avaldistes, tähtvalemites ja võrdustes.

Küsimuse tähtsus ja omandamise raskus sunnivad peatuma selle juures üksikasjalisemalt ja näite najal selgitama neid põhjusi, mis nõuavad tähelise sümboolika kasutuselevõtmist.

Oletagem, et õpilasele on esitatud järgmine ülesanne: arvutada ristküliku pindala, mille alus on 8 cm ja kõrgus 3 cm. Õpilane teab, et siin tuleb leida, kui palju ruutsentimeetreid läheb tarvis, et katta ristküliku pinda ilma vahedeta. Saades esitatud ülesandest niimoodi aru, jagab õpilane antud ristküliku kolmeks ristkülikuks alusega 8 cm ja kõrgusega 1 cm, ja siis juba iga saadud ristküliku ruutudeks küljega 1 cm. Niisuguseid ruute on igas saadud ristkülikus 8 ja antud ristkülikus $8 \cdot 3$ ehk 24. Seega on otsitav pindala 24 cm^2. Esitatud praktiline küsimus on lahendatud. Nüüd tuleb õpilase tähelepanu juhtida praktiliselt küsimuselt — antud ristküliku pindalalt — tolle vaimse protsessi juurde, mille abil ülesanne lahendati. Protsessi olu seisab ristküliku aluse ja kõrguse mõõtarvude korrutamises. Selle aritmeetilise ülesande analüüsi tulemusena fikseerib õpilane üldreegli, mille põhjal saab määrata ristküliku pindala mitte ainult külgedega 8 cm ja 3 cm, vaid ka teiste külgedega; õpilase mõte on siirdunud erijuhult üldjuhule. Lahendatud ristkülik oli ainult näidis, mistahes ristküliku esindaja. Kui antud konkreetse ülesande lahendamisel õpilane avastab mõtte abstraktse protsessi, erijuhu taga hakkab nägema üldjuhtu ja juhuse taga seaduspärasust, siis on ta lahkunud aritmeetikast ja siirdunud algebrasse.

Ülalmainitud protsessis teeb õpilane läbi kaks vaimset operatsiooni: esiteks, aritmeetilise arvutuse taga näeb ta ülesande lahendamise protsessi olu; teiseks, ta saab aru, et see protsess annab talle võimaluse lahendada sama tüüpi mitmesuguseid ülesandeid täpselt samuti, nagu ta lahendas antud ülesande.

Esimest operatsiooni nimetatakse mõnikord analüüsiks,

teist üldistamiseks. Tuleb juhtida tähelepanu erinevusele nende kahe vaimse operatsiooni vahel. Iseäranis tähtis on üldistamisprotsessi olu täpsustamine, muidu võib tekkida vale kujutlus, nagu rajaneks üldistamine tingimata üksikutele arvulistele näidetele ja nagu sõltuks tulemuste usutavus näidete arvust, mille põhjal on tulemus saadud.

Tuleb selgeks teha, et ühel juhul üldistamise usutavus on rajatud erijuhtude suurele hulgale, kuna teisel juhul üksikfaktide arv ei etenda loogilise järelduse saamisel mingit osa: piisab ühest faktist, et veenduda üldistamise tulemuse ebaõigsuses; mõnikord aga tagab üks näide seoses vastava arutlusega (tõestusega) üldistamise tulemuse õigsuse. Näiteks püstitame järgmise väite: iga arv kujul $n^2 - n + 11$ (kus n on loomulik arv) on algarv.

Kui $n = 1$, saame $1 - 1 + 11 = 11$, algarv
$n = 2$, „ $4 - 2 + 11 = 13$, „
$n = 3$, „ $9 - 3 + 11 = 17$, „
$n = 4$, „ $16 - 4 + 11 = 23$, „
$n = 5$, „ $25 - 5 + 11 = 31$, „
$n = 6$, „ $36 - 6 + 11 = 41$, „
$n = 7$, „ $49 - 7 + 11 = 53$, „

Oleme juba nõus tunnustama, et väide on õige; aga ei maksa otsuse tegemisega rutata, teeme veel mõne proovimise.

Kui $n = 8$, saame $64 - 8 + 11 = 67$, algarv
$n = 9$, „ $81 - 9 + 11 = 83$, „
$n = 10$, „ $100 - 10 + 11 = 101$, „
$n = 11$, „ $121 - 11 + 11 = 121$, kordarv $(11 \cdot 13)$
$n = 12$, „ $144 - 12 + 11 = 143$, „ $(11 \cdot 13)$

Järelikult arvu n esimese kümne väärtuse puhul on väide õige; kui aga $n = 11$ ja $n = 12$, siis on väide vale.

Võetud näitega kõrvuti vaatleme järgmist väidet: vabalt võetud kahe järjestikuse loomuliku arvu korrutis jagub

kahega. Kui esimene arv on paarisarv, siis kahe järjestikuse loomuliku arvu korrutis on ka paarisarv, sest ükskõik millise loomuliku arvu korrutis paarisarvuga on paarisarv. Kui aga esimene tegur on paaritu arv, siis teine tegur kui loomulik arv, mis esimesest erineb ühe võrra, on paarisarv ja ka korrutis on seetõttu paarisarv.

Seega on meil kaht liiki üldistusi: üks, mis on rajatud empiirilisele vaatlusele, ilma järelduse ja tõestuse elementideta; teises liigis võib opereerida ainult ühe erijuhuga, kuid ühenduses tõestusega. Esimesel juhul ei saa väite õigsuse või ebaõigsuse kohta midagi kindlasti öelda niikaua, kuni pole kokku puututud erijuhuga, mis eitab väidet. Teisel juhul võib ühe erijuhu najal otsustada väite õigsuse või ebaõigsuse üle.

Mõlemad üldistuse eri liigid on oma osa etendanud matemaatiliste avastuste ajaloos, ka esinevad nad koolis õpetamisel.

Tähendab, mõlemad üldistuse liigid on tarvilikud; aga üldistamiseks ja selle väljendamiseks on tarvis tähelist sümboolikat.

Ilma sümboliteta pole tõepoolest mõeldav ei aritmeetiliste arvutuste analüüs ega selle tulemuste väljendamine. Nii näiteks pole Newtoni binoomi arendrida

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1}\,a + \ldots$$

mõeldav ilma sümboliteta; sõnalises väljenduses esineks liiga palju sõnu; ta oleks praktilisteks otstarveteks kohmakas. Ainult sümbolite lühidus lubab näha üldistamist ja seda ka väljendada. Peale selle on sõnadel ja järelikult ka sõnalistel avaldistel mitu tähendust, mis muidugi pole asja selgusele kasuks. Mainitud põhjuste tõttu, selgusetuse kõrvaldamiseks, mis on tingitud kasutamisele võetud sõnade mitmest tähendusest, loodi sümboolika kui väga hõlpus abinõu abstraktsete

arutluste ja täpsete sõnastuste jaoks selguse, lühiduse ja ilmekuse suurendamiseks.

Sümbolid on kujutlused ja mõisted arvude asendajaist, arvude esindajaist.

Mistahes arvu mõiste sissetoomise töö võib toimuda sellises järjekorras. Kõigepealt meenutatakse, et aritmeetika tundidest on saadud järgmine arvude materjal: täisarvud, liht- ja kümnendmurrud, lõpmatud perioodsed murrud (viimased on tuntud ainult osaliselt, sest nendega sooritatavate tehete reegleid koolis läbi ei võeta).

Siis tuleb meelde tuletada, et juba aritmeetikas esines mistahes arvu mõiste. Selleks on kasulik seada mõned eelküsimused, näiteks järgmised:

1. Kuidas muutub summa, kui ühele liidetavale juurde lisada 7? Kas otsitav summa muutumine sõltub esialgseist liidetavaist või ainult sellest, kui palju ühele liidetavale on juurde lisatud? Kas on vastuseks tarvis teada, kui suured on liidetavad? Kas vastus oleneb üksikute liidetavate suurusest või jääb püsima mistahes liidetavate puhul? Kuidas tuleb muutunud summat üles märkida mistahes liidetavate puhul? Kas on küllaldane, kui tarvitame ainult arve?

2. Kuidas muutub korrutis, kui üht tegurit korrutame 10-ga? Kas on vastuseks tarvis teada, kui suur on iga tegur? Kas korrutise muutumine oleneb esialgsete tegurite suurusest või jääb püsima mistahes tegurite puhul? Kuidas üles märkida korrutise muutumise tulemust mistahes tegurite puhul? Kas on küllaldane tarvitada ainult arve?

3. Millega võrdub arvu korrutis ühega? Kas on õige väide, et iga korrutatava puhul on arvu korrutis ühega võrdne sama arvuga?

4. Millega võrdub kahe või enama arvu korrutis, kui üks tegureist on null? Kas on vastuseks tarvis teada, kui suured on ülejäänud tegurid? Kas vastus on täisarv või murd ja

kas vastus sõltub teistest teguritest, või on üks ja sama mistahes teiste tegurite puhul?

5. Kuidas leida teatav arv protsente antud arvust? Kas protsentide leidmise viis (reegel) oleneb antud arvust ja protsentide arvu suurusest?

Esitatud küsimuste läbitöötamise järel peavad õpilased omandama järgmised teadmised:

1. Tehete paljud omadused on õiged, sõltumata sellest, milliste arvudega on tehted sooritatud; ühetüübilised ülesanded lahendatakse ühel ja samal viisil, sõltumatult suuruse arvulistest väärtustest. Niisiis võimaldavad mistahes arvu mõiste, mis esineb ka juba aritmeetikas, ja selle arvu tähistamine tähega väljendada arvude üldomadusi.

2. Mistahes arvu tähistamiseks pole küllaldane numeratsiooni süsteemi kasutamine, sest arv oma olemuselt on midagi määratut, fikseeritut, konkreetset ja seepärast ei väljenda ta mistahes arvu mõistet. Neil kaalutlustel tarvitatakse mistahes arvu tähistamiseks tähti.

Õpilased peavad teadma järgmisi fakte tähtede kasutamisest:

a) Algebras kasutatakse ladina alfabeedi tähti, tavaliselt väikesi, mõnikord ka suuri. Tähtede kirjutusviis peab olema õpilastele tuttav.

b) Igal tähel on antud mõttekäigu ulatuses üks ja sama tähendus. Näide: võrdus $a(b+1)=ab+a$ on kehtiv igasuguste a ja b väärtuste puhul; tähti a ja b võib asendada mistahes arvudega, võrdus jääb ikka kehtima. Arvu a väärtus aga peab kõigil kolmel juhul muutumatu olema; ei saa a-le anda näiteks üht väärtust võrduse ühel poolel ja teist väärtust võrduse teisel poolel. Sama on kehtiv ka tähe b kohta.

c) Geomeetrias, füüsikas, loodusteaduses ja tehnikas esinevad mõned kindlad tähelised tähistused. Loeteldud distsipliinidest võetud küsimuste lahendamisel algebra tundides

tuleb kohastuda nende teadusharude nõuetega, tuleb näidata teatavat painduvust, püüdes kinni pidada tähistustest, mis on tarvitusel vastavates distsipliinides. Näiteks füüsikas on jõud tähistatud P ja Q-ga; seepärast tuleb ka algebra tundides füüsikast võetud ülesannete lahendamisel tarvitada neid tähti koormuse või jõu suuruse tähistamiseks, ükskõik kas need on antud või otsitavad.

Mõnikord püüavad õpilased füüsika tähelisi väljendeid asendada teiste tähtedega. Võtavad näiteks teiste tähtede asemel x ja y ainult sellepärast, et on tegemist otsitavate suurustega. Selliseid juhtumeid esineb ka algebras endas; ülesannete lahendamisel aritmeetilise progressiooni tähistamiseks tarvitavad õpilased tähti a, d, n, a_n ja s. Väljendanud ülesande andmed võrranditega, mis sisaldavad mainitud tähti, asendavad õpilased saadud võrrandite lahendamisel need tähed, mis tähistavad otsitavaid suurusi, x ja y-ga. Neist ebaratsionaalseist harjumustest tuleb vabaneda.

Algul tähistatakse tundmatud suurused ladina alfabeedi viimaste tähtedega — x, y, z, . . . , antud suurused aga esimeste tähtedega — a, b, c, . . . Täisarvude tähistamiseks tarvitatakse tähti n, m, p, q, k, l.

Mistahes arvu mõiste omandamiseks tuleb teha harjutusi, mis illustreeriksid ülaltoodud mõtteid:

a) Kirjutada täisarv, mis järgneb täisarvule k.
b) Kirjutada täisarv, mis on täisarvu k ees.
c) Mitu täisarvu on täisarvu m ja nulli vahel?
d) Anda üldkuju paarisarvule.

Tavaliselt need, kes asuvad tähelise sümboolika õppimisele, ei saa sellest küsimusest aru ja kirjutavad mõne paarisarvu, näiteks 2, 4, 12, 20 jne.

Kui üles kirjutada paarisarvud tõusvas järjestuses ja n-ga tähistada neist vabalt võetud arvu järjenumbri, siis $2n$ väljendab ikka paarisarvu järjenumbriga n. Vastupidi:

kui $2n$ on paarisarv, siis n on loomulik arv, mis näitab antud arvu järjenumbrit.

Järgmine tabel illustreerib öeldut näitlikult:

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\ldots$$
$$2n = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\ldots$$

Algebraline avaldis $2n$ on ilmekam ja lühem kui sõna „paarisarv". Ta on ilmekam, sest $2n$ näitab arvu struktuuri, seda üldist viisi, kuidas saadakse ükskõik milline paarisarv loomulikkude arvude korrutamisel kahega; $2n$ on lühem kui sõna „paarisarv".

e) Anda üldkuju paaritule arvule. Paaritu arvu jagamisel kahega saadakse jäägis 1. Seepärast võib paaritu arvu saada paarisarvu liitmisel ühega. Järelikult paaritu arvu väljendus on $2n + 1$.

Soovitav on lasta õpilastel koostada vastav tabel.

f) Koostada kolmekohaline arv, milles on a sajalist, b kümnelist ja c ühelist.

Ülesande mõtte järgi on arvud a, b, c täisarvud, igaüks neist pole suurem 9-st; peale selle pole a nulliga võrdne. Kui $a = 0$, siis arv pole kolmekohaline.

Et sajas on 100 ühelist, siis a sajas on $100a$ ühelist, b kümnelises on $10b$ ühelist; tähendab, kolmekohaline arv sisaldab endas $100a + 10b + c$ ühelist.

Läbiarutatud näidete najal peab õpilane omandama järgmist. Kuigi täht võib väljendada mistahes arvu, siiski võivad igal erijuhul, vastavalt küsimuse mõttele, tähe väärtused piiratud olla. Näiteks paarisarvu väljenduses $2n$ võib n all mõista mistahes täisarvu, aga kolmekohalise arvu väljenduses $100a + 10b + c$ tuleb a, b ja c all mõista loomulikke arve, millede kohta kehtivad järgmised kitsendused:

$$1 \leqslant a \leqslant 9;\ \ 0 \leqslant b \leqslant 9;\ \ 0 \leqslant c \leqslant 9.$$

Hool väljendatavate väidete täpsuse ja nende õigsuse eest igal erijuhul sunnib kitsendusi tegema neile arvulistele

väärtustele, mis antakse tähtedele. See hool läbib punase niidina kõiki edasisi algebra osi.

Esimeses abstraktsioonis, nimelt tähega väljendatud mistahes arvu mõiste sissetoomises peitub formalismiks mandumise oht. Selleks et varitsevat ohtu vältida, on paratamatult tarvis meeles pidada, et täht väljendab ikka arvu, ja neid väärtusi, mis tähel võib olla, tuleb piirata; vastavalt küsimuse mõttele on tarvis paljude arvude hulgast valida kitsam arvude piirkond, on tarvis ära näidata see tähe väärtuste piirkond vastavalt küsimuse sisule ja ka tehete teostamise seisukohale; kui näiteks saadakse avaldis $a - b$, siis kuni negatiivsete arvude sissetoomiseni on avaldisel $a - b$ mõte ainult siis, kui $a \geqslant b$; kui aga $a < b$, pole vahel $a - b$ mõtet.

Tekib loomulikult tarvidus läbi arutada aritmeetiliste tehete omadused, eriti tehete teostamine. Siinjuures on tehete omaduste kirjutamine tähtedega heaks harjutuseks tähtede rakendamise kohta.

§ 6. Tehted tähtedega.

Kuna tähtede all mõistetakse arve, siis on ju selge, et nendega võib teha aritmeetilisi tehteid, vaadates tehetele tähtedega kui niisugustele, mis on tehtud tähtedega väljendatud arvudega.

Arvude, tähtede ja nendega sooritatud tehete märkide kogumit nimetatakse algebraliseks ehk tähtavaldiseks.

Õpilased oskavad arvudega sooritada järgmisi tehteid: liitmine, korrutamine, astendamine, lahutamine ja jagamine. Neid tehteid võib teha ka tähtedega.

Liitmine, korrutamine ja astendamine on otsesed tehted. Korrutamine täisarvulise korrutaja puhul on liitmise erijuhtum, nimelt võrdsete liidetavate liitmine. Astendamine, kui astendaja on loomulik arv, on korrutamise erijuhtum, nimelt võrdsete tegurite korrutamine.

Lahutamine ja jagamine on pöördtehted: lahutamine on liitmise pöördtehe, jagamine on korrutamise pöördtehe. Seost liitmise ja lahutamise vahel võib väljendada nõnda: $(a - b) + b = a$ või $(a + b) - b = a$. Seost korrutamise ja jagamise vahel võib väljendada nõnda: $(a : b) \cdot b = a$ või $(a \cdot b) : b = a$.

Liitmine ja lahutamine on esimese järgu tehted, korrutamine ja jagamine on teise järgu tehted, astendamine on kolmanda järgu tehe.

§ 7. Tehete tähistamine.

Liitmismärgiks tähtavaldistes on sama, mis arvude juures — pluss (+); $a + b$ tähendab, et tuleb liita arv a arvuga b; seda loetakse: „a pluss b." Lahutamise tähistamiseks niihästi tähtavaldistes kui ka arvude juures on märk miinus (—); $a - b$ tähendab, et arvust a lahutatakse arv b; seda loetakse „a miinus b."

Tähtede korrutamisel tarvitatakse samu korrutamismärke, mis aritmeetikas, s. o. kaldristi ($\times$) või täppi ($\cdot$). Korrutamismärk jääb harilikult kirjutamata järgmistel juhtudel:

1. Kui üks või mõlemad tegurid on väljendatud tähtedega; näiteks $a \times b$ ehk $a \cdot b$ asemel kirjutatakse ab; $10 \times a$ ehk $10 \cdot a$ asemel kirjutatakse $10a$.

2. Kui üks või mõlemad tegurid on sulgudes; näiteks $a \times (a + c)$ ehk $a \cdot (b + c)$ asemel kirjutatakse $a\,(b + c)$; $(a + b) \times (c - d)$ ehk $(a + b) \cdot (c - d)$ asemel kirjutatakse $(a + b)\,(c - d)$.

Jagamismärgiks on kaks täppi (:) või murrukriips (—). Astendamismärgist on juba räägitud.

Nüüd tuleb arutella küsimust tehete teostatavusest.

1. Liitmine on alati teostatav.

2. Lahutamine on teostatav sel korral, kui vähendatav pole lahutatavast väiksem. Kui aga vähendatav on lahutatavast väiksem, siis on lahutamine võimatu (õpilased ei tunne veel negatiivseid arve). Tähendab, lahutamine $a - b$ on teostatav, kui $a \geqslant b$, ja ilma mõtteta, kui $a < b$.

3. Korrutamine on alati teostatav.

4. Jagamine on teostatav, kui jagaja ei võrdu nulliga. Jagamine nulliga on mõttetu ja võimatu kogu algebra kursuse ulatuses. Täpsuse mõttes on siiski tarvis ka edaspidi alati rõhutada, et jagamine on teostatav ainult siis, kui jagaja ei võrdu nulliga.

5. Astendamisel on definitsiooni järgi mõte, kui astendaja on loomulik arv, mitte väiksem kahest; kui astendaja on murdarv, siis asendamine kaotab vastavalt definitsioonile mõtte (edaspidi üldistatakse seda tehet ka murrulise astendaja kohta). (Vt. märkus 4 raamatu lõpus.)

§ 8. Tehete järjekord.

Aritmeetikas kui ka algebras juhindutakse järgmisest kahest tingimusest:

1. Kui tehted tehakse mingi tehte tulemusega, siis esimese tehte tulemus paigutatakse sulgudesse.

N ä i d e. Kui on tarvis liita 3 ja 4 ning summa korrutada 2-ga, siis summa $3 + 4$ paigutatakse sulgudesse; tehe kirjutatakse nii: $(3 + 4) \cdot 2$.

Võetud numbrilises näites võib summa $3 + 4$ asendada 7-ga, siis pole sulgusid tarvis. On aga liidetavad väljendatud tähtedega, näiteks a ja b-ga, siis on tarvis a ja b summa korrutamisel c-ga $a + b$ paigutada sulgudesse; saame $(a + b)c$.

2. On soovitav võimaluste piirides vähendada neid juhtusid, kus tarvitatakse sulgusid. Seepärast igal pool, kus tehete järjekord pole tähtis või on täiesti selge, jäetakse sulud ära.

Pärast seda kui mainitud kahe tingimusega on tutvutud, tuleb peatuda tehete normaalse järjekorra juures ja siis siirduda sulgude juurde. Tehete normaalse järjekorra omandamine toimub järgmiselt:

a) Algul vaadatakse läbi mitme liidetava summa. Liitmise omaduste põhjal on järjekord meelevaldne. Seepärast langeb ära tarvidus sulgude järele.

Näide. $a+b+c+d$.

Mitme liidetava summa definitsiooni järgi tuleb teha rida järjestikuseid liitmisi, aga tehete puhul tulemustega on tarvis tulemus paigutada sulgudesse, s. o.

$$a+b+c+d=[(a+b)+c]+d.$$

Et aga tehete järjekord on meelevaldne, siis võib sulud ära jätta ja liita arvud ükskõik millises järjekorras.

Näide. $2+3+7+8=2+8+3+7=8+2+7+3=20$.

b) Nüüd võtame lahutamise koos liitmisega.

Näide. $80-25+30=(80-25)+30=55+30=85$.

Sama tulemuse saame, kui komponendid koos oma märkidega ümber paigutame:

$$80-25+30=80+30-25=110-25=85.$$

Tehteid ei tohi teha nii: $25+30=55$; $80-55=25$.

Tähendab, kui on antud liitmine koos lahutamisega, võivad sulud ära jääda ja tehted tehakse kas antud või meelevaldses järjekorras, võttes aga liikmed koos nende märkidega.

Paljude liidetavate ja lahutatavate puhul on kasulik rakendada võrdust:

$$a - b + c - d - e + f = a + c + f - b - d - e =$$
$$= a + c + f - (b + d + e).$$

Näide. $25 - 15 + 18 - 7 - 5 + 6 = (25 + 18 + 6) - (15 + 7 + 5) = 49 - 27 = 22.$

c) Võtame mitu järjestikust korrutamist: $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5$.

Et korrutamise järjekord on meelevaldne, võib tegurid ümber paigutada.

Näide. $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 960.$

Sel põhjusel jäetakse sulud korrutamisel ära.

d) Võtame näite korrutamise kohta koos jagamisega. Kui tehted teha antud järjekorras, saame:

$$80 : 20 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Sama tulemus saadakse, kui korrutatakse korrutajaga ja jagatakse jagajaga. Täiesti teine tulemus saadakse, kui enne 20 korrutatakse 2-ga ja siis 80 jagatakse 40-ga.

$$20 \cdot 2 = 40; \quad 80 : 40 = 2.$$

Järelikult saadakse sellele vastavalt, kas tehted tehakse ühes või teises järjekorras, kaks eri tulemust. Et seda vältida, tuleb tehete järjekorra suhtes kokku leppida.

Oleks ju loomulik liitmise ja lahutamise analoogia põhjal kokku leppida sooritada tehteid antud järjekorras või korrutada korrutajatega ja jagada jagajatega. Teiselt poolt on täiesti õigustatud püüe püstitada ühesugune lepe nii aritmeetikas kui ka algebras ja kohandada võtted, mis on tarvitusel aritmeetikas, ka algebraliste avaldiste kohta. Avaldis $8a^3b^2 : 12a^2b$ tähendab algebras, et avaldis $8a^3b^2$ tuleb jagada $12a^2b$-ga, s. o. et tuleb algul 12 korrutada a^2b-ga ja siis $8a^3b^2$ jagada korrutisega $12a^2b$. Et ei tuleks loobuda neist harjumustest, mis on saadud aritmeetikast, tehakse

mõnede poolt ettepanek juba aritmeetikas läbi viia algebras tarvitusel olev kokkulepe. Et üldiselt vastuvõetud kokkulepet pole, siis jääb avaldis $60 : 3 \cdot 5$ määramatuks. Et seda vältida, tuleb tehete järjekord kuidagiviisi ära näidata; see saavutatakse näiteks sel teel, et jagatis kirjutatakse murru kujul, s. o. kriipsu abil, või kogu jagaja paigutatakse sulgudesse, s. o. $60 : (3 \cdot 5)$.

N ä i t e d. 1) $96 : 2 \cdot 3$ on kindla mõtteta, seepärast on sulud tarvilikud:

$96 : (2 \cdot 3) = 96 : 6 = 16$; $(96 : 2) \cdot 3 = 48 \cdot 3 = 144$.

$72 : (4 \cdot 3) = 72 : 12 = 6$; $(72 : 4) \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54$.

2) $100 : 10 : 2$ on määramatu. Tõepoolest:

$(100 : 10) : 2 = 10 : 2 = 5$; $100 : (10 : 2) = 100 : 5 = 20$.

Et tehete järjekord oleks määratud, tuleb tarvitada kas sulgusid või murrukriipsu.

$$\frac{100 : 10}{2} = \frac{10}{2} = 5; \quad 100 : \frac{10}{2} = 100 : 5 = 20.$$

e) Tähtavaldise puhul algebras laheneb küsimus lihtsalt: mitme tähelise teguri korrutist koos kordajaga käsitatakse kui üht korrutist, kui üht arvu; nii tähendab näiteks avaldis $8a^3b^2 : 12a^2b$, et korrutis $8a^3b^2$ tuleb jagada korrutisega $12a^2b$. Vaatamata sellele, et puuduvad sulud või murrukriips, ei teki siin arusaamatusi. Tulemusena saadakse $\frac{2}{3}ab$.

f) Võtame näite, milles esineb 4 tehet. Sulgude vältimiseks on kokku lepitud teha enne korrutamine ja jagamine, siis liitmine ja lahutamine.

N ä i d e. $80 \cdot 2 + 40 : 4 - 50 : 10 - 160 + 10 - 5 - 165$.

Kui tehted sooritada antud järjekorras, saame:

$80 \cdot 2 = 160$; $160 + 40 = 200$; $200 : 4 = 50$; $50 - 50 = 0$; $0 : 10 = 0$.

Viimast tulemust tuleb pidada valeks, sest tehted pole tehtud vastavalt kokkulepitud järjekorrale.

g) Võtame näite, milles esineb 5 tehet. On kokku lepitud esmajärjekorras teha astendamine, siis korrutamine ja jagamine ning lõpuks liitmine ja lahutamine.

Näide. $3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 4^3 - 3^4 : 9 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 64 - 81 : 9 =$
$= 192 + 320 - 9 = 503.$

Seda kokulepitud tehete järjekorda nimetatakse normaalseks.

Pärast normaalse tehete järjekorra omandamist küllaldaselt suure arvu näidete najal võib üle minna sulgude tarvitamisele.

Näited tüüpiliste vigade kohta tehete järjekorras.

1. Õpilased teevad tihti tehted kirjutuse järjekorras. Näiteks avaldis

$$7 \cdot 8 + 10 : 2$$

arvutatakse nii:

$$7 \cdot 8 = 56; \quad 56 + 10 = 66; \quad 66 : 2 = 33.$$

Nii arvutada ei tohi, see järjekord ei vasta tehete normaalsele järjekorrale. Õige lahendus on:

$$7 \cdot 8 + 10 : 2 = 56 + 5 = 61.$$

2. Avaldise $5 \cdot 2^3 - 80 : 20$ arvutamisel tehakse mõnikord järgmine viga:

$5 \cdot 2 = 10; \quad 10^3 = 1000; \quad 1000 - 80 = 920; \quad 920 : 20 = 46.$

Õige lahendus on:

$$5 \cdot 2^3 - 80 : 20 = 5 \cdot 8 - 4 = 40 - 4 = 36.$$

3. Mõnikord tarvitatakse valesti võrdusmärki. Näiteks avaldise $72 : 4 + 22 : 2$ arvutamine kirjutatakse üles järgmiselt:

$$72 : 4 = 18 + 22 = 40 : 2 = 20.$$

Selline üleskirjutus on lubamatu, sest võrdusmärgid on pandud valesti, mittevõrdsete arvude vahele. Peale selle on rikutud ka normaalset tehete järjekorda.

§ 9. Sulgude tarvitamine.

Kui tehteid tuleb teha mittenormaalses järjekorras, siis peab tarvitama sulgusid. Kui sulud on olemas, tuleb enne teha tehted sulgude sees ja asendada siis avaldised sulgude sees arvutatud tulemustega; seejärel viiakse arvutus lõpule tehete normaalsest järjekorrast kinni pidades. Kui sulgudes on mitu tehet, siis tehakse need tehted normaalses järjekorras.

Sulgusid ei tarvitata, kui murrukriips asendab jagamismärki; sel korral asendab murrukriips üht või kaht suluavaldist.

Näited. $(10+5):3=\frac{10+5}{3}$.

Murrukriips tähendab jagamist ja asendab sulgusid.

$$(10+5):(9-6)=\frac{10+5}{9-6}.$$

Murrukriips tähendab jagamist ja asendab kaht suluavaldist.

Sulud on ümmargused ( ), nurgelised [ ] ja loogelised { }. Mitmete sulgude esinemisel alustatakse ümmargustest sulgudest, tehakse neis tehted normaalses järjekorras ja asendatakse need saadud arvudega; siis minnakse üle nurgelistele sulgudele, tehakse neis arvutused, asendatakse tehted saadud arvudega ja lõpuks siirdutakse loogeliste sulgude juurde.

Näide. $\{[(9\frac{1}{2}-4\frac{1}{2})\cdot 4-6]\cdot 2+12\}\cdot 5=$
$=\{[(5\cdot 4-6]\cdot 2+12\}\cdot 5=$
$=\{[20-6]\cdot 2+12\}\cdot 5=$
$=\{14\cdot 2+12\}\cdot 5=$
$=\{28+12\}\cdot 5=40\cdot 5=200.$

Stabiilses ülesannetekogus on küsimus tehete järjekorrast ja sulgudest esitatud veidi teisiti, nimelt lähtudes tehete jaotamisest järkude järgi. Kogu esitus koosneb kolmest reeglist.

Reegel 1. Kui mingisuguse järgu tehte tulemusega tuleb teha eelmise järgu tehe, siis ei paigutata esimese tehte tulemust sulgudesse; näide:

$$a^5b^5;\ a^3 + b^4.$$

Reegel 2. Kui mingisuguse järgu tehte tulemusega tuleb teha järgmise järgu tehe, siis paigutatakse esimese tehte tulemus sulgudesse; näide:

$$(a + b)c;\ (a - b)^2.$$

Sel korral aga, kui tuleks sulgudesse paigutada murru lugeja või nimetaja või avaldis radikaali all, jäävad sulud ära; siin etendab sulgude osa murrukriips või jälle radikaalijoon; näide:

$$\frac{a+b}{c-d};\ \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Reegel 3. Kui mingisuguse järgu tehte tulemusega tuleb teha sama järgu tehe, siis paigutatakse esimese tehte tulemus sulgudesse.

Kui aga esimese tehte tulemus on teises tehtes esimeseks liidetavaks, vähendatavaks või korrutise korrutatavaks, siis jäetakse tavaliselt sulud ära, sest sulgude puudumine ei vii arusaamatustele; näide:

$$a + b + c;\ abs;\ a - b + c.$$

Pedagoogilises praktikas on kõige hõlpsam kasutada tehete normaalse järjekorra selgitamise esimest viisi, sest see on vähem dogmaatiline ja seepärast siis ka õpilastele arusaadavaim, ka on see vahenditult seotud tehete seadustega.

§ 10. Algebralise avaldise numbriline väärtus.

Siirdume nüüd tagasi täheliste avaldiste mõiste juurde. Üks täht võib väljendada ka algebralist avaldist, näiteks a on algebraline avaldis.

Ka avaldisele, mis koosneb ainult arvudest, võib vaadata kui algebralisele avaldisele; näiteks $(5+7)-4$ ja ka üks arv, näiteks 8, on algebralised avaldised. Kui algebraline avaldis koosneb ainult arvudest ja tehete märkidest, siis võib sooritada kõik näidatud tehted ja tulemusena saada mingi arvu. Seda arvu nimetatakse algebralise avaldise numbriliseks väärtuseks.

Öeldut on tarvis täpsustada. §-s 7 oli näidatud, et b lahutamine a-st on teostatav ainult siis, kui $a \geqslant b$; a jagamine b-ga on võimalik, kui $b \neq 0$. Seepärast on algebralisel avaldisel kindel väärtus ainult siis, kui ei tule lahutada väiksemast arvust suuremat või jagada nulliga. Vastasel korral pole avaldisel mõtet.

Kui aga algebraline avaldis sisaldab tähti, milledel pole kindlat väärtust, kui tähed väljendavad kas mistahes arvu või otsitavat arvu, siis on avaldis enamikul juhtudel määramatu.

Näide. Avaldise $\frac{5a+2b+1}{3a-b}$ väärtus on määramatu niikaua, kuni pole öeldud, kui suur on a ja b.

Kui aga a ja b väärtused on kindlad, näiteks $a=1$ ja $b=2$, siis pannes a ja b asemele 1 ja 2 ning tehes nõutavad tehted, saame avaldisele kindla väärtuse:

$$\frac{5a+2b+1}{3a-b} = \frac{5\cdot 1+2\cdot 2+1}{3\cdot 1-2} = \frac{5+4+1}{3-2} = \frac{10}{1} = 10.$$

Kui $a=1$, $b=3$, saame:

$$\frac{5a+2b+1}{3a-b} = \frac{5\cdot 1+2\cdot 3+1}{3\cdot 1-3} = \frac{5+6+1}{3-3} = \frac{12}{0}.$$

Et nulliga jagada pole võimalik, siis antud avaldisel ei ole mõtet, kui $a = 1$ ja $b = 3$.

Järelikult niikaua, kuni tähtede väärtusi pole antud, on tähtavaldis määramata. Ta saab määratuks ainult siis, kui avaldises esinevatele tähtedele antakse kindlad väärtused ja arvude asendamisel ei teki avaldist, millel pole mõtet.

Märgime ära, et üldiselt oleneb algebralise avaldise väärtus temas esinevate tähtede väärtustest.

Mõnikord aga ei olene algebralise avaldise väärtus temas esinevate tähtede väärtustest; näiteks $\frac{3a^2 - 3b^2}{(a+b)(a-b)} = 3$ mistahes a ja b väärtuste puhul, välja arvatud ainult juhud, kui $a = b$ ja $a < b$. Siin kaotab avaldis mõtte.

Antud avaldise numbrilise väärtuse leidmise operatsiooni tähistatakse eri märgiga: kogu antud avaldis paigutatakse nurgelistesse sulgudesse, millede järele veidi allapoole rida kirjutatakse antud tähtede väärtused.

Avaldise $\frac{5a+2b+1}{3a-b}$ numbrilise väärtuse leidmise operatsiooni, kui $a = 4$ ja $b = 3$, märgitakse järgmiselt:

$$\left[\frac{5a+2b+1}{3a-b}\right]_{a=4;\ b=3} = 3 \quad \text{või} \quad \left[\frac{5a+2b+1}{3a-b}\right]_{\substack{a=4\\b=3}} = 3.$$

Tähtavaldise numbrilise väärtuse leidmisel võib tehted paigutada mitmesuguste skeemide kujul: kas ühte ritta, nagu oli näidatud, või jälle iga tehe eri reale. Toome näite teise skeemi kohta:

$$\left[\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]_{x=\frac{1}{6};\ y=-\frac{1}{2}}.$$

$$x+y=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}; \quad (x+y)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9};$$

$$\frac{1}{(x+y)^2}=1:\frac{4}{9}=\frac{9}{4}; \quad x^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36};$$

$$\frac{1}{x^2}=1:\frac{1}{36}=36; \quad y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{y^2}=1:\frac{1}{4}=4;$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=36+4=40;\quad \frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{9}{4}\cdot 40=90;$$

$$(x+y)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27};\quad \frac{2}{(x+y)^3}=2:\frac{8}{27}=\frac{27}{4};$$

$$\frac{1}{x}=1:\frac{1}{6}=6;\quad \frac{1}{y}=1:\frac{1}{2}=2;$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6+2=8;\quad \frac{2}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{27}{4}\cdot 8=54;$$

$$\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=90+54=144.$$

Tähtavaldiste numbriliste väärtuste leidmise harjutuste eesmärgiks on korrata tehteid murdudega, anda vilumust tehete järjekorra suhtes ja selgitada tähtede tarvitamist.

§ 11. Märgid, mis väljendavad vahekordi arvude ja tähtede vahel.

Kahe arvu a ja b vahel võib olla üks kolmest vahekorrast, nimelt: a võib olla b-ga võrdne, a võib olla b-st suurem ja a võib olla b-st väiksem. Neid vahekordi me tähistame eri märkide abil: „võrdne" tähistatakse märgiga $=$, näiteks $5=5$. Mõiste „suurem" tähistamiseks tarvitatakse märki $>$, näiteks „8 on 5-st suurem" kirjutatakse nii: $8>5$. Vahekorra „väiksem" tähistamiseks tarvitatakse märki $<$, näiteks lause „12 on väiksem 20-st" kirjutatakse nii: $12<20$.

Lause „10 pole võrdne 20-ga" tähistatakse nii: $10\neq 20$.

Mõtet „arv a pole suurem b-st" väljendatakse nii: $a\leqslant b$, s. o. arv a on kas väiksem b-st või sellega võrdne.

Mõtet „arv a pole väiksem b-st", s. o. arv a on b-st kas suurem või sellega võrdne, väljendatakse nii: $a\geqslant b$.

Õpetajal tuleb silmas pidada, et kahe arvu võrdsuse mõistele on kasulik, kui sellele eelneb kahe esemete kogumi

võrdsuse mõiste. Siis tuleb selgitada, et mõistel „võrdne" on üksikutes matemaatilistes distsipliinides eri sisu; näiteks mõistel „võrdsed lõigud" on hoopis teine sisu kui mõistel „võrdsed arvud"; edasi mõiste „võrdne" loomulikkude arvude suhtes erineb samast mõistest murdude vallas.

Et tähed tähendavad arve, siis on arvude vahel olemasolevad vahekorrad kehtivad ka tähtede kohta. Aga tähtede ja arvude vahel on erinevus võrdsuse ja võrratuse mõttes, nimelt: kaks tähtavaldist võivad võrdsed olla tähtede ühtede väärtuse puhul ja seda mitte olla tähtede teiste väärtuse puhul. Mõnikord on kaks tähtavaldist võrdsed tähtede mistahes väärtuste puhul. Kaks avaldist, mis sisaldavad üht või mitut tähte, on identselt ehk samaselt võrdsed, kui nad on võrdsed tähe või tähtede mistahes väärtuste puhul. Nii on $a+a+a$ võrdne $3a$-ga ükskõik millise a väärtuse puhul. Sellist võrdsust märgitakse samasusena: $a+a+a=3a$ või $a+a+a\equiv 3a$.

Mõnikord tarvitatakse ka liikmeti võrdsete hulkliikmete mõistet; näiteks hulkliikmed $3a+2b$ ja $2b+3a$ on liikmeti võrdsed, sest nad erinevad ainult liikmete järjekorra poolest.

§ 12. Algebralised valemid.

Kaks tähtavaldist ühendatuna võrdus- või võrratusmärgiga moodustavad valemi. Esimesel juhul nimetatakse valemit võrduseks, teisel juhul võrratuseks.

Näited. $a+b=b+a$ on võrdus;
$(a+b)m=am+bm$ on võrdus;
$a>b$ (a on b-st suurem) on võrratus.

Võrduses eristatakse vasakut poolt, mis seisab võrdusmärgi ees, ja paremat poolt, mis seisab võrdusmärgi taga.

Võrratuses on parem ja vasak pool seotud võrratusmärgiga: $>$ „suurem", $<$ „väiksem", $\neq$ „mittevõrdne".

$\leqslant$ „väiksem või võrdne", $\geqslant$ „suurem või võrdne", näiteks mõtte väljendamiseks, et „8 on suurem 3-st", tarvitatakse märki, mis väljendab mõistet „suurem": $8 > 3$.

Kui on antud, mitme võrra üks arv on teisest suurem või mitu korda üks arv on teisest suurem, siis kasutatakse matemaatikas võrdusmärki, kuigi igapäevases kõnes tarvitatakse mõistet „suurem" või „väiksem".

Lause „20 on 16-st 4 võrra suurem" kirjutatakse ühel järgmistest viisidest:

$$20 - 16 = 4 \text{ või } 20 - 4 = 16 \text{ või } 20 = 4 + 16.$$

Tähtavaldist $a + b$ võib vaadata kui nõuet, et a tuleb liita b-ga (tehteline tähistamine), või kui liitmise tulemust, s. o. a ja b summat (resultatiivne tähistamine); $a - b$ on tehteline ja ka resultatiivne tähistamine; sama on kehtiv ka ab ja $\frac{a}{b}$ kohta.

Niikaua kui a ja b on määramatud, ühtib toodud näidetes resultatiivne tähistamine tehtelisega ja on määramatu.

Ka aritmeetikas väljendatakse tulemust mõnikord kahe arvuga; näiteks pole võimalik 5 jagatist 7-ga väljendada ühe täisarvuga, seepärast siis võib käsitada $\frac{5}{7}$ kui tehtelist ja ka kui resultatiivset väljendust.

Tehtelise ja resultatiivse väljenduse ühtimine tähtavaldiste puhul teeb tähtavaldised eriti sobivaks suuruste vahel kehtiva sõltuvuse täpseks tähistamiseks. Et tulemuse tähistamine tõepoolest ühtib tehte tähistamisega, siis võib tulemuse järgi otsustada, millist tehet tuleb sooritada antud tulemuse saamiseks. Valemis $s = vt$ näitab vt, et kiiruse mõõtarv tuleb korrutada aja mõõtarvuga.

Võtame kokku, mida õpilased omandavad valemitega harjutades.

1. Valem annab suurustevahelised seosed.

2. Valem näitab, millist üldreeglit tuleb kasutada antud tüübi mistahes ülesande lahendamisel; näitab, missugune seaduspärasus valitseb üksikute suuruste vahel.

3. Valem ühendab kõik aritmeetilised arvutused, toob arvutusprotsessi plaanikindlust, on sooritatavatele tehetele nagu päistiitliks.

4. Iseseisev valemite koostamine õpilaste poolt on võimalik ainult siis, kui ainestik on nende poolt hästi läbi mõeldud ja kui valem on nende omade mõtete väljenduseks.

§ 13. Võrdused.

Kas kaks avaldist, milledes esinevad ainult arvud, mitte tähed, on võrdsed — seda küsimust võib lahendada otsese kontrolliga: tuleb arvutada iga avaldis eraldi; kui seejuures saadakse üks ja seesama arv, siis on avaldised võrdsed ja nende vahele võib panna võrdusmärgi. Kui mõlemate avaldiste arvutusel saadakse mittevõrdsed arvud, siis pole avaldised võrdsed, nende vahele ei saa panna võrdusmärki; kui võrdusmärk on siiski pandud, siis pole võrdus õige.

Asi on aga teine algebraliste avaldiste võrdsusega. Et täht tähistab mitte ainult määratud arvu, vaid ka mistahes arvu, siis tähtavaldise väärtus jääb määramatuks. Et tähtavaldise väärtus oleneb tähtede väärtustest, siis võib ette tulla, et ühtede tähtede väärtuste puhul on võrdus õige, teiste puhul aga mitte.

Võtame näiteks võrduse $s = a + b$; kui $a = 2$, $b = 3$, $s = 5$, siis on mõlemad avaldised võrdsed, sest $5 = 2 + 3$. Kui aga $a = 2$, $b = 3$ ja s väärtus erineb 5-st, näiteks on 8 või 4, siis s ei võrdu $a + b$-ga. Seepärast on tarvis ühenduses võrdusmärgiga täpsustada esialgseid definitsioone. Tähe all mõistetakse ükskõik millist arvu; aga selleks, et kaks algebralist avaldist oleksid võrdsed, ei saa tähele mõnikord

anda vabalt võetud väärtust, vaid tuleb anda määratud väärtus.

Võrdusest $s = a + b$ võib aru saada nii, et s all mõistame arvude a ja b summat.

On olemas võrdusi, mis on kehtivad võrduses esinevate tähtede vabalt võetud väärtuste puhul.

Näiteks võrdus $a + a + a = 3a$ on õige vastavalt täisarvuga korrutamise definitsioonile ükskõik milliste tähe a väärtuste puhul.

Pärast selliseid näiteid võib tutvustada samasusega kui võrdusega, mis on kehtiv selles esinevate tähtede igasuguste väärtuste puhul.

Õiged võrdused, mis koosnevad arvudest, on ka samasused.

Näidetena ja harjutustena võib võtta samasused, mis väljendavad aritmeetiliste tehete põhiomadusi. Seejuures on tarvis neid omadusi õpetada mitte ainult üles kirjutama, vaid ka sõnastama.

Liitmise omadused.

1. Liitmise vahetuvusseadus (kommutatiivsus):
$$a + b = b + a.$$
2. Liitmise ühenduvusseadus (assotsiatiivsus):
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$
3. Nulli omadus:
$$a + 0 = a.$$

Korrutamise omadused.

1. Korrutamise vahetuvusseadus:
$$ab = ba.$$
2. Korrutamise ühenduvusseadus:
$$(ab) \cdot c = a \cdot (bc).$$

3. Ühelise omadus:

$$a \cdot 1 = a.$$

4. Korrutamise jaotuvusseadus (distributiivsus):

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

On kasulik võrrelda liitmise ja korrutamise omadusi. Liitmise kaks esimest omadust on analoogilised korrutamise vastavate omadustega. Korrutamise kolmanda omaduse puhul etendab üks sama osa mis null liitmise kolmandas omaduses: arv ei muutu, kui sellele juurde lisada null või kui seda korrutada ühega. Neljas korrutamise omadus seob korrutamist liitmisega.

Peatume nüüd üksikasjalisemalt nende võrduste juures, millede mõlemad pooled pole võrdsed tähtede mistahes väärtuste puhul. Selliste võrduste näidetena võivad olla arvukad valemid füüsikast, tehnikast jne. Väga ahvatlev mõte on juba nüüd näidata algebra rakendusi tehnika mitmesugustes harudes. Kahjuks pole aga antud astmel õpilaste üldarenemine selleks küllaldane; nad ei taipa pahatihti ühe või teise näite füüsikalist sisu. Tuleb üheaegselt ületada kaks raskust — arusaamine valemist ja selle tehnilisest mõttest; seetõttu pole põhi-eesmärk saavutatav. On tarvis kinni pidada järgmisest pedagoogika põhitõest: õpilastele võib esitada näiteid ainult sellest ainestikust, mis on neile hästi tuttav. Siin on vaja ainult kujundada tulemus, väljendades seda algebraliste avaldiste võrdusega.

N ä i d e 1. Valem protsentide arvutamiseks antud arvust on tuttav juba aritmeetikast, see on: $b = \frac{ap}{100}$. Kui valemit enne üldkujul ei tarvitatud, siis tuleb seda teha nüüd.

See valem seob arvud a, p ja protsendid b ning annab võimaluse määrata ühte neist, kui kaks teist on antud.

Tõepoolest, kui on antud b ja p, siis otsitava teguri a määramiseks tuleb korrutis b jagada antud teguriga $\frac{p}{100}$;

saame $a = b : \frac{p}{100}$ ehk $a = \frac{100b}{p}$. See valem on arvu a määramiseks protsentide põhjal.

Kui aga on antud b ja a, siis tundmatu teguri p määramiseks tuleb korrutis b jagada antud teguriga $\frac{a}{100}$; $p = b : \frac{a}{100}$; $p = \frac{100b}{a}$. See valem on õpilastele juba tuttav kui valem arvude b ja a suhte määramiseks protsentides.

Ristküliku pindala määramise valem on õpilastele tuttav, sest selle abil on nad lahendanud aritmeetikas palju ülesandeid ristküliku pindala määramise kohta.

Mõõta kujundi pindala tähendab määrata, mitu korda antud pindalasse mahub mingi teine pindala, mis on võetud ühikuna. Pindala ühikuna on võetud sellise ruudu pindala, mille külg on üks pikkusühik. Ristküliku pindala määramiseks tuleb leida, mitu korda mahub sellesse ruut, mis on võetud ühikuna. Aga geomeetrias kindlakstehtud seose põhjal, mis on olemas ristküliku pindala mõõtarvu ja selle külgede mõõtarvude vahel, seisab ristküliku pindala määramine aritmeetilises tehtes, nimelt ristküliku aluse ja kõrguse mõõtarvude korrutamises. Koostame rea ühetüübilisi ülesandeid ristküliku pindala määramiseks, kui on antud alus ja kõrgus (vt. juurdelisatud tabelit).

Alus cm-tes	Kõrgus cm-tes	Ristküliku pindala cm^2-tes
5	2	?
$12\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	?
$21\frac{1}{3}$	$6\frac{3}{4}$	?
$12\frac{2}{5}$	$2\frac{1}{2}$	?

Selle tabeli järgi arvutavad õpilased ristkülikute pindalasid. Igal neljal juhul on ristküliku pindala erinev, aga

pindala määramise võte on sama, nimelt tuleb aluse mõõtarv korrutada kõrguse mõõtarvuga.

Võtame tarvitusele järgmised tähistused: aluse pikkus on b, kõrguse pikkus on h ja pindala suurus ruutühikutes on s. Saame pindalale järgmise avaldise: $s = bh$.

Võrduses esinevad tähed ei tähista kõrgust ja alust kui lõikusid; korrutada üht sirglõiku teise sirglõiguga pole võimalik, selline tehe on mõttetu. Tähtede all mõistetakse aluse ja kõrguse mõõtarve. Räägitakse küll: „Ristküliku pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega", see aga on ainult lühendatud väljendus lausele: „Ristküliku pindala mõõtarv võrdub tema aluse ja kõrguse mõõtarvude korrutisega."

Võrdus $s = bh$ pole samasus; selles võib veenduda asendamisel, andes näiteks b-le väärtuse 2, h-le 3 ja s-le 10. Et $s = bh$ pole samasus, on näha ka sellest, et võrduse paremal poolel on tähed b ja h, millede korrutis ei saagi võrduda mistahes võetud arvuga s. Võrdus $s = bh$ näitab seost s, b ja h vahel ning ütleb seda, et kui korrutada aluse mõõtarvu kõrguse mõõtarvuga, siis saadakse ristküliku pindala mõõtarv; erijuhul, kui mõõta ristküliku pindala vahetult, siis saadud ruutühikute arv võrdub aluse ja kõrguse ühikute arvude korrutisega.

Valemis $s = bh$ esineb kolm arvu; kui kaks neist on teada, võib kolmanda leida. Tõepoolest, kui on teada s ja b, siis otsitava teguri h leidmiseks tuleb korrutis s jagada antud teguriga b; $h = \frac{s}{b}$. Õpilased peavad harjuma neid võrdusi sõnastama.

Kui on teada s ja h, siis b leidmiseks tuleb korrutis s jagada antud teguriga h; $b = \frac{s}{h}$.

N ä i d e 3. Ühtlase liikumise valem on õpilastele hästi tuttav paljudest aritmeetika ülesannetest, millede lahendamisel tuli rakendada ühtlase liikumise seadust. Tõsi küll,

seda seadust ei sõnastatud ega kirjutatud ka tähelise valemina. Tähelise sümboolika tarvituselevõtmisel on siis täiesti ajakohane kujundada see õpilastele tuntud seos läbitud teepikkuse, kiiruse ja aja vahel:

$$s = vt.$$

Valemina $s = vt$ püstitatud seos arvude s, v ja t vahel lubab leida üht neist arvudest, kui kaks on antud. Tõepoolest, kui on antud s ja v, võib leida t; selleks tuleb korrutis s jagada antud teguriga v; saame $t = \frac{s}{v}$.

Teades s ja t, võib leida v; tundmatu teguri v leidmiseks tuleb korrutis s jagada teise antud teguriga t:

$$v = \frac{s}{t}.$$

§ 14. Võrrandite mõiste.

Kas saab esimestes algebra tundides juba anda õpilastele mõistet võrranditest? Sellele küsimusele vastavad eri autorid erinevalt. Võrrandite varase sissetoomise pooldajad toovad järgmised põhjendused.

1) Võrrandite tarvitamine on vajalik teistele distsipliinidele, eriti füüsikale.

2) Võrrandite idee etendab väga tähtsat osa algebras ja seepärast on selle idee varane sissetoomine kasulik. Nende pooldajate arvates on elustamise huvides otstarbekohane kogu formaalsete samaväärsete teisenduste osa siduda võrrandite lahendamisega.

Võrrandite liialt varase sissetoomise vastased põhjendavad oma seisukohta järgmiste kaalutlustega.

Selle all kannatab materjali jaotuse süstemaatilisus ja tekib kaks kontsentrit. Võrrandite sissetoomine algebra õpe-

tamisse juba esimesel aastal võtab tõepoolest ära võimaluse rajada need lahendused samaväärsuse printsiibile, millest arusaamine pole õpilastele jõukohane nende madala matemaatilise arenemise ja nooruse tõttu. Jääb järele ainus pääsetee — lahendada võrrandeid tehete omaduste põhjal, ja siis juba aasta pärast asuda võrrandite süstemaatilisele õpetamisele. Selline olukord pole normaalne, sest kogu aasta jooksul tegeldakse võrrandite kohmakate ja ebaratsionaalsete lahendamisviisidega, mida edaspidi mitte ainult ei tarvitata, vaid isegi välditakse.

Hoida õpilasi pika aja jooksul tehete omadustele rajatud võrrandite lahendamise juures pole muidugi otstarbekohane. Et aga võrrandite idee etendab niivõrd tähtsat osa, vilumuse puudumine võrrandite koostamisel on nii tõsiseks lüngaks õpilaste matemaatilises ettevalmistuses, siis on tingimata tarvis juba algusest peale osutada võrranditele erilist tähelepanu, anda rohkem aega nende lahendamisele ja koostamisele. Teiselt poolt on samaväärsuse printsiip, liialt vara sissetooduna, õpilastele mittejõukohane, seda enam, et see ka veel aasta pärast teeb neile, nagu koolipraktika näitab, suuri raskusi.

Mainitud kaalutlustel oleks võimalik selle küsimuse järgmine lahendus.

Juba algebra käsitlemise esimesel aastal tuleb anda võrrandite mõiste ja lahendada neid aritmeetiliste tehete seaduste põhjal, pärast aga näitamisega, et võrrandite mõlema poole struktuurid on analoogilised, ja ka lahendite vahetu leidmisega. Üksikasjalisemalt räägitakse sellest võrrandeid käsitlevas peatükis.

Niisugune võrrandite käsitlemise viis lubab neid juba üsna varakult tarvitada ülesannete lahendamisel ja tutvustab lahendamisvõtetega, mida tuleb kasutada edaspidi. Ühes-koos sellega avaneb muidugi ka rikkalik harjutuste valik; need harjutused elustavad peatükki, mis tegeleb formaalsete

teisendustega ja nõuab läbivõtmiseks pikemat aega. Esimese aasta jooksul ei ole, tõsi küll, võrrandite lahendamine küllaldaselt põhjendatud, aga õpetamise teisel aastal on tarvis õpilasi juba tutvustada võrrandite samaväärsuse printsiibiga.

Asjaolu, et võrrandite samaväärsuse printsiibi omandamine teeb õpilastele raskusi, sunnib selle juures mitu korda peatuma algebra eri peatükkide läbivõtmisel. Esimest korda võib seda teha üleminekul võrrandite süstemaatilisele õpetamisele, siis irratsionaalsete võrrandite arutlusel, edasi võrrandite uurimisel ja lõpuks trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel.

Võrrandite lahendamisele asumine võib toimuda näiteks järgmist tüüpi ülesandega. On mõeldud arv; see arv on korrutatud 3-ga; korrutisest on lahutatud 8; jääk võrdub 22-ga. Kui suur on mõeldud arv?

Aritmeetiliselt lahendatakse ülesanne järgmiselt: kuni 8 lahutamiseni on mõeldud kolmekordne arv: $22 + 8 = 30$. Kui kolmekordne otsitav arv on 30, siis mõeldud arv on $30 : 3 = 10$.

Aritmeetilise lahendusviisi ebamugavus, vaatamata selle lihtsusele, seisab selles, et ülesande andmeid pole võimalik üles kirjutada matemaatiliste sümbolite abil. Kuidas väljendada, tõepoolest, otsitavat arvu? Kui seda tähistada ühe osaga, siis kolmekordse arvu jaoks saadakse 3 osa, aga ei saa kirjutada $3 - 8$, sest 3 on osade arv, aga 8 üheliste arv, ja kolmest osast ei saa lahutada 8 ühelist. Edasi, aritmeetilisest lahendusest pole näha seda põhi-ideed, mille arenemisele allub ülesande lahendamine: ei ole valemit. Selleks et vältida arvu lahutamist osade arvust, tuleb teha tehted ainult arvudega, s. o. tuleb alustada lõpust, minna teed mööda, mis on vastupidine ülesandes antud teele.

Algebraline lahendusviis lubab neid ebamugavusi vältida. „Osa" ähmase mõiste asemel võetakse otsitava arvu väljendamiseks täiesti määratud tähistus x. See võimaldab üles-

annet kirja panna matemaatilises keeles ja loomulikus järjestuses: $3x - 8 = 22$.

Tähendab, ülesanne on väljendatud võrrandina; jääb üle see lahendada. Lahendamist võib teostada aritmeetiliste tehete seaduste põhjal. Otsitav vähendatav $3x$ võrdub lahutatavaga pluss vahe: $3x = 8 + 22$ ehk $3x = 30$; 30 on otsitava arvu korrutis 3-ga; tähendab, otsitav kui otsitav tegur võrdub 30 ja 3 jagatisega; $x = 30 : 3$ ehk $x = 10$.

Tuleb täheldada üleskirjutust.

1. Võrrandi koostamine. Tähistamine: x on mõeldud arv. Kolmekordne mõeldud arv ilma 8-ta on $3x - 8$; ülesande tingimuste põhjal $3x - 8 = 22$.

2. Võrrandi lahendamine ja selle üleskirjutamine. Ülaltoodud aritmeetilisi kaalutlusi korrates kirjutame üksteise järel:

$$3x - 8 = 22;$$
$$3x = 22 + 8;$$
$$3x = 30;$$
$$x = 30 : 3;$$
$$x = 10. \text{ Seega } x = 10.$$

Tuleb eriti täheldada üleskirjutust: võrrand koosneb kahest võrdusmärgiga ühendatud avaldisest, seepärast ei tohi kirjutada nii: $3x = 22 + 8 = 30$; $x = \frac{30}{3} = 10$. Seda ei tohi teha kahel põhjusel: esiteks saadakse mitte kaks, vaid kolm võrdusmärgiga ühendatud avaldist; teiseks tuleb vahet teha samaväärsete ja samaste teisenduste vahel. Õpilasele on need mõisted veel tundmatud, aga ta peab harjuma juhtudel, kui võrrandi vasak pool ei muutu, seda mitte ümber kirjutama, vaid arvudega samaväärseid teisendusi tegema võrrandi paremal poolel.

Küsimuse igakülgsemaks selgitamiseks võtame ülesande hanedest. Arvatavasti on ülesanne tuttav. Aritmeetiline lahendus on järgmine. Hanede arvu jaoks võtame tarvitu-

sele 1; siis saame, et $(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$ ehk $2\frac{3}{4}$ hanede arvust pluss üks on 100. On endastmõistetav, et ei saa liita $2\frac{3}{4}$ osa ühe hanega; seepärast on aritmeetiline lahendusviis järgmine: $100 - 1 = 99$, s. o. hanede otsitav arv, korrutatud $2\frac{3}{4}$-ga, on 99 ja otsitav hanede arv on $99 : 2\frac{3}{4} = 36$.

Algebraline lahendusviis võimaldab selle tõttu, et otsitava hanede arvu tähistame x-ga, esiteks ülesannet väljendada täheliste sümbolitega ja nimelt: $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$; teiseks toob see üleskirjutus arvutusprotsessi plaanikindlust ja näitab, milliseid tehteid tuleb teha x-i leidmiseks.

Ilma seletusteta kirjutame lahenduse järgmiselt:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100;$$

$$2\frac{3}{4}x + 1 = 100;$$

$$2\frac{3}{4}x = 100 - 1;$$

$$2\frac{3}{4}x = 99;$$

$$x = 99 : 2\frac{3}{4};$$

$$x = 36.$$

Seega ülesande tingimuste väljendamine võrrandina annab võrduse, mis näitab, milliseid tehteid tuleb teha x-i leidmiseks. Jääb järele ainult küsimus, kuidas antud võrrandist leida x.

Peale ülaltoodud ülesannete lahendame järgmise harjutuse:

3. $5n + 40 = 95;$
$5n = 95 - 40;$
$5n = 55;$
$n = 55 : 5;$
$n = 11.$

Antud harjutust võib lahendada ka teisiti:

$$5n + 40 = 95;$$
$$5(n + 8) = 95;$$
$$n + 8 = 95 : 5;$$
$$n + 8 = 19;$$
$$n = 19 - 8;$$
$$n = 11.$$

4. $\frac{1}{3}(x + 9) = 15$; $x + 9 = 15 \cdot 3$; $x + 9 = 45$; $x = 45 - 9$; $x = 36$.

Arutelles nii nagu ülesandes 1, lahendame harjutused 3 ja 4.

Küllaldaselt suure harjutuste arvu arutluse põhjal tuleb teha analüüs ja vastav üldistamine. Vahetult saadakse järgmised reeglid:

a) Kui vasakul pool võrdusmärki on otsitava arvu summa (või vahe) antud arvuga, siis liidetav kantakse üle võrdusmärgist paremale poole lahutatavana, aga lahutatav liidetavana.

b) Kui vasakul pool võrdusmärki on otsitava arvu korrutis antud arvuga, siis antud arv kantakse võrdusmärgist paremale poole jagajana; kui aga võrdusmärgist vasakul pool on otsitava suuruse jagatis antud arvuga, siis kantakse antud arv üle võrdusmärgist paremale poole tegurina.

c) Võrduse pooled võib ära vahetada.

Vigade vältimiseks tuleb tingimata nende tekkimise võimalust ennetada eelkäiva arutlusega. Näiteks võrrandi $5(n + 3) = 45$ lahendamisel ei tohi kirjutada $5n = 45 - 3$, sest võrrandi vasak pool on korrutis; õige lahendus on järgmine:

$5(n+3)=45$ või jälle $5(n+3)=45;$
$5n+15=45;$ $n+3=45:5;$
$5n=45-15;$ $n+3=9;$
$5n=30;$ $n=9-3;$
$n=30:5;$ $n=6.$
$n=6.$

Samuti pole õige alustada võrduse $4n+5=49$ lahendamist sellega, et jagatakse 4-ga; on ju võrrandi vasak pool summa ja summa kohta käib reegel (a), aga mitte (b), s. o. tuleb alustada lahutamisega; õige lahendus on järgmine:

$$4n+5=49;$$
$$4n=49-5;$$
$$4n=44;$$
$$n=44:4;$$
$$n=11.$$

Pärast seda antakse võrrandile ja selle lahendile harilik definitsioon (pole soovitav veel rääkida „võrrandi lahendist").

Igale võrdusele, mis pole samasus, võib vaadata kui võrrandile. Näiteks võrdust $s=vt$, mis seob suurusi s, v ja t, võib käsitada võrrandina.

Milliseid teadmisi peab õpilastele andma algebra sissejuhatav peatükk? Pärast sissejuhatava peatüki läbivõtmist peavad õpilased omama järgmisi teadmisi.

1. Tähed väljendavad alati arve: kas tundmatut, kas mistahes arvu või mistahes arvu mingist hulgast teatava piiramisega, või täiesti määratud arvu (näiteks π). Kõigil mainitud juhtudel on tähtede kasutamine tingimata tarvilik, sest numbritega ei saa väljendada ei otsitavat arvu ega mistahes arvu; ka arvu π ei saa numbritega täpselt väljendada.

2. Igal eri juhul tuleb ära näidata see hulk, kuhu kuuluvad tähtedega väljendatud arvud. Hulka, millesse kuulub tähega tähistatud arv, võib ära näidata kas ülesande enda andmetega, ülesande sisuga või vaikse iseendastmõistetava kokkuleppega. On tingimata tarvis, et õpilastele oleks täiesti selge, millisesse piirkonda kuuluvad tähtede võimalikud väärtused.

3. Et tähtede all mõistetakse mistahes arve, siis on tarvis tehete olemasolu korral iga kord jälgida, kas tehted on teostatavad või mitte, ja näidata need tingimused, millede puhul tehted pole läbiviidavad; näiteks vahe $a - b$, kui $a < b$, kaotab oma mõtte positiivsete arvude piirkonnas, jagatis $\frac{a}{b}$ kaotab arvu mõtte, kui $b = 0$. Mainitud tingimuste silmaspidamine ennetab tähtavaldistesse formaalse suhtumise tekkimist, aitab kaasa tehtavate operatsioonide suhtes teadlikkuse tekkimisele ja matemaatilise kultuuri arenemisele. (Vt. märkus 5 raamatu lõpus.)

§ 15. Harjutused tähelise sümboolika abil.

Õpilasele, kes esmakordselt tutvub algebraga, paistab juba puhtväliselt, et peamiseks vaheks algebra ja aritmeetika vahel on täheline sümboolika. Muidugi esines ka juba aritmeetikas tähti, näiteks võrde tundmatu liikme tähistamiseks, aga see esinemine oli episoodilisem; algebras aga kasutatakse tähti süstemaatiliselt, siin on nad hädavajalikuks abinõuks. Seepärast peavadki esimesed algebra tunnid olema pühendatud tähelise sümboolika kultiveerimisele ning olema sellistena hästi läbi mõeldud.

Tähelise sümboolika omandamine seisab esiteks oskuses väljendada sõnalisi arutlusi matemaatiliste sümbolite, arvude, tähtede ja seoste märkide abil, teiseks vastupidises tegevuses

Ex bibl. uni

— oskuses väljendada tähelisi valemeid sõnadega, neid tõlgendada, lugeda. Sellest aga veel täielikult ei piisa: tuleb osata leida seaduspärasusi ja neid väljendada valemitena. On mõistetav, et enne kui siirduda arutlustele, tuleb omandada oskus väljendada tähtedega arutluste peaosi — mõisteid, oskussõnu.

Tähelise sümboolika omandamine peab järelikult kulgema järgmistes suundades:

1. Harjutused mõningate mõistete väljendamiseks tähtedega, ja vastupidi: tähtedega väljendatud mõistete lugemine sõnades.
2. Harjutused sõnaliste matemaatiliste lausete väljendamiseks tähelise sümboolika abil.
3. Harjutused tähtvalemite lugemiseks ja tõlgendamiseks.
4. Harjutused iseseisvaks valemite koostamiseks, millele eelneb oskus näha ja leida lihtsamaid seaduspärasusi.
5. Harjutused tähtavaldise numbrilise väärtuse leidmiseks.

1. Harjutuste näited esimese punkti kohta.

a) Kirjutada tähtede abil üldkuju arvudele, mis jaguvad 5-ga; 3-ga.

b) On antud rida arve, mis on tähistatud ühe ja sama tähega, kuid eri indeksitega. Need indeksid näitavad vastava arvu järjenumbrit reas: a_1, a_2, a_3, . . . , a_n.

Kirjutada selle rea eelviimane liige, keskmine liige.

c) Kui palju täisarve on kahe loomuliku arvu k ja l vahel? $(l > k)$

2. Harjutusi teise punkti kohta.

Kirjutada täheliste sümbolite abil:

a) Reegel ristküliku pindala s arvutamiseks aluse b ja kõrguse h järgi.

b) Reegel ristküliku aluse arvutamiseks pindala s ja kõrguse h järgi.

c) Reegel ristküliku kõrguse arvutamiseks pindala s ja aluse b järgi.

d) Reegel üldmaksuse arvutamiseks, kui on antud kilogrammide arv n ja ühe kilogrammi hind a.

Iga reegel väljendatakse täheliste sümbolitega ainult pärast seda, kui õpilane on omandanud eeskirjas väljendatud protsessi olemuse ja õppinud õpetaja poolt öeldut väljendama temale arusaadavas keeles ning üles kirjutama seda lühidalt valemi abil.

3. Sõnalise lause väljendamise oskus tähelise sümboolika abil on lahutamatult seotud tähelise valemi sõnalise tõlgendamisega.

Põhiraskuse kõrval, mis on tingitud mistahes arvu abstraktse mõiste sissetoomisest, tuleb veel ületada raskused, mis on seoses sellega, et sõnade ehitus lauses erineb matemaatikas vastuvõetud tehete järjekorrast; sõnalises väljenduses nimetatakse esimesena selle tehte tulemus, mis matemaatikas saadakse viimasena. Näiteks räägitakse „a ja b ruutude vahest" järgmiste tehete väljendamiseks: tõsta ruutu arv a, siis arv b ja siis lahutada a^2-st b^2. Selline mõte on avaldisel $a^2 - b^2$, mida nimetatakse a ja b ruutude vaheks. Lause ehitus järgneb antud keele iseärasustele, mis on eri rahvastel lahkuminevad, tehete järjekord on aga kõikide rahvaste juures ühtne.

Selleks et ennetada õpilaste juures võimalikke vigu, mis on tingitud erinevustest keele ja matemaatiliste kokkulepete vahel, tuleb lapsi õpetada lauseid üle viima matemaatilisse keelde, asendama neid lauseid teiste samamõttelistega, et sisu oleks selgem. Näiteks väljenduse „arvude a ja b vahe ruut" asendame teise sõnalise väljendusega: „arvude a ja b

vahe tuleb tõsta ruutu". Tuleb selgemini öelda, et enne on tarvis a-st lahutada b ja saadud vahe tõsta ruutu [1].

Keeleliselt on teine sõnastus raskepärane, seepärast seda tavalises kõnekeeles ei tarvitatagi, aga matemaatika seisukohalt on see selgem ja parem.

Muide tuleb rõhutada, et ka aritmeetikas esineb mõnikord lahkuminek keelelise ja matemaatilise väljenduse vahel; näiteks räägitakse „kolmteistkümmend", s. o. „kolm ja kümme", aga kirjutatakse 13, s. o. enne 10 ja siis 3.

Öeldu kehtib harjutuste kohta, mis leiduvad Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogus, I osa, § 6.

Näited.

a) Sõnastada valemid:

$$u_5 = u_1 + 4d;$$
$$u_4 = aq^3;$$
$$u_n = 2n - 1.$$

b) Kõrgema pedagoogilise õppeasutise lõpetanu võib valida kolme temale tehtud ettepaneku vahel.

Esimese ettepaneku järgi väljendub aastane töötasu valemina $s_1 = 3600 + 75n$.

Teise järgi valemina $s_2 = 2700 + 120n$.

Kolmanda järgi valemina $s_3 = 2550 + 225n$.

Esimene liidetav on jääv aastane töötasu, teine on täiendav kompensatsioon (lisatasu), n selles näitab teenitud aastate arvu.

Selgitada üksikasjaliselt iga valemi mõte ja otsustada, milline ettepanekuist on kasulikem.

4. Valemite iseseisev koostamine. Selle liigi harjutuste eesmärgiks on välja selgitada protsess, mille alusel lahen-

[1] Kõik see ei kehti eesti keele kohta. Eesti keeles pole siinkohal vahet sõnalise väljenduse ja tehete järjekorra vahel. — Tõlkija märkus.

datakse ühetüübilisi ülesandeid, ja väljendada see täheliste sümbolite abil. Siia kuuluvad ka need harjutused, millede ülesandeks on arvjada seaduspärasuse väljaselgitamine; enne võetakse sõnaline arvjada, siis selle täheline avaldis.

Näited.

a) Koostada valem arvude *a*, *b* ja *c* keskmise aritmeetilise leidmiseks.

b) Koostada valem arvude *a* ja *b* keskmise kaalu leidmiseks, kui *a* kaal (hinnang) on *m* ja *b* kaal on *n*.

c) Väljendada valemina seadus, millel põhineb arvjärjend 3, 5, 7, 9...

5. Tähelise sümboolika kasutamine omab praktilist väärtust tähtavaldiste numbrilise väärtuse leidmisel tähtede antud väärtuste puhul.

Nende harjutuste eesmärgiks on korrata aritmeetilisi tehteid täis- ja murdarvudega, aga ka ettevaatlik tutvunemine mõnede valemitega, mis on tuletatud teoreetiliselt või saadud katseliselt mitmesugustes distsipliinides. Sellele vaatamata, et idee tutvustada õpilasi mitmesugustelt aladelt võetud valemite rakendamisega on väga ahvatlev, tuleb siiski kainelt arvestada seda, et õpilased ei taipa sageli selle seaduse olu, mis on väljendatud valemina, ja siis on olemas oht, et õpilastes tekib veendumus, nagu asendaks matemaatiline valem teises distsipliinis käsiteldava fakti enda tundmist. On tarvilik piirduda nende valemitega, mis väljendavad kas tuntud fakte teistelt aladelt või jälle kergesti arusaadavaid fakte.

Õpilasi tuleb õpetada kasutama algebralise avaldise numbrilise väärtuse leidmisel teatavat skeemi; neid tuleb tutvustada võimalike lihtsustustega teatava tähe järgi korraldatud hulkliikmete numbrilise väärtuse leidmisel. Sellega saavutatakse esiteks oskus arvutusi ratsionaliseerida, teiseks illustreeritakse õigeaegselt korrutamise jaotuvusseadust summa kohta ja kolmandaks valmistatakse pinda Horneri skeemi jaoks.

N ä i d e. Leida hulkliikme $x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5 + 9$ numbriline väärtus, kui $x = 2$.

Kirjutus: $[x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x + 9]_{x=2}$.

Rakendades korduvalt korrutamise jaotuvusseadust, saame:

$$
\begin{aligned}
& x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x + 9 = \\
&= (\{[(x + 4)x - 7]x + 6\}x - 5)x + 9 = \\
&= (\{[(x + 4) \cdot 2 - 7] \cdot 2 + 6\} \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 9 = \\
&= (\{[6 \cdot 2 - 7] \cdot 2 + 6\} \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 9 = \\
&= (\{[12 - 7] \cdot 2 + 6\} \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 9 = \\
&= (\{5 \cdot 2 + 6\} \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 9 = \\
&= (\{10 + 6\} \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 9 = (32 - 5) \cdot 2 + 9 = \\
&= 27 \cdot 2 + 9 = 63.
\end{aligned}
$$

Niisiis $[x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x + 9]_{x=2} = 63$.

(Vt. märkus 6 raamatu lõpus.)

II peatükk.

Relatiivsed arvud.

§ 16. Terminist „relatiivsed arvud".

F. Klein alustab negatiivsete arvude käsitelu oma raamatus „Elementaar- ja kõrgema matemaatika küsimused" (lk. 34) järgmise märkusega: „Alustame märkusega terminoloogia kohta. Positiivseid ja negatiivseid arve nimetatakse koolis harilikult „relatiivseteks arvudeks" kui vastandeid „absoluutsetele (positiivsetele) arvudele"; ülikoolis pole aga see väljendus tarvitusel."

NSV Liidus on üksikute matemaatikateaduse esindajate hulgas viimaste aastate jooksul elavnenud püüdlus lähendada koolimatemaatika terminoloogiat teaduslikule.

F. Klein nendib, et on olemas vahe keskkooli ja ülikooli väljendusviisi vahel, nõukogude teadlased aga lähevad veel kaugemale: nad panevad ette kõrvaldada koolipraktikast teaduses mittetarvitatav sõna „relatiivsed arvud" ja asendada see sõnaga „ratsionaalsed arvud" (professorid P. S. Aleksandrov ja A. N. Kolmogorov algebraõpikus, prof. A. I. Hintšin brošüüris „Elementaarmatemaatika põhimõisted keskkoolis").

Termini „relatiivsed arvud" võttis tarvitusele Otto Stoltz, see pole aga teaduslikus kirjanduses juurdunud, vaid on säilinud peamiselt kooliõpikutes.

Sõnad „relatiivsed" arvud ja „ratsionaalsed" arvud ei väljenda aga identseid mõisteid: nad iseloomustavad arvu mõiste arenemise eri järke.

Õpilased tundsid kuni negatiivsete arvude sissetoomiseni ainult positiivseid — täis- ja murdarve ning nulli. Seepärast polnud ka tarvidust termini „positiivsed arvud" järele. Ainult negatiivsete arvude ilmumine tegi vajalikuks hakata varem tuntud arve nimetama terminiga „positiivsed arvud", et neid eristada negatiivsetest arvudest.

Relatiivsed arvud ilmuvad siis, kui positiivsed arvud on täiendatud negatiivsete arvude ja nulliga.

Edaspidi tutvuvad õpilased uute arvudega, nimelt irratsionaalsete arvudega. Ratsionaalse arvu mõiste tekib pärast irratsionaalsete arvude sissetoomist; ajalooliselt ja ka loogiliselt ilmub enne irratsionaalse arvu termin ja siis, et eristada uutest, sissetoodud arvudest varem tuntuid, antakse viimastele nimi „ratsionaalsed arvud". Sageli nimetatakse ratsionaalseteks avaldisteks selliseid avaldisi, milledes ei esine radikaalimärki. Seepärast ongi liigituse alused (*principium divisionis*), mille järgi arvud jaotatakse positiivseteks ja negatiivseteks ühelt poolt ning ratsionaalseteks ja irratsionaalseteks teiselt poolt, erinevad: esimene klassifikatsioon kerkib üles seoses lahutamisega, teine seoses juurimisega; ratsionaalsed ja irratsionaalsed arvud võivad olla niihästi positiivsed kui ka negatiivsed. Negatiivsete arvudega tutvutakse esmakordselt koolis; teaduslikul käsitlusel aga eeldatakse juba teadmisi negatiivsetest, samuti ka irratsionaalsetest arvudest; siin on tegemist tuntud ainestiku parema paigutusega. Tutvumine negatiivsete arvudega toimub koolis kuuendas klassis, irratsionaalsete arvudega aga kaheksandas klassis; seepärast ongi otstarbetu tuua termin „ratsionaalne arv" vara sisse ja kasutada teda kahe aasta jooksul, mil ei ole veel arusaamist selle termini mõttest. Siit siis tulenebki kaks võimalust: kas tarvitada relatiivseid arve, mõistes nende

all positiivseid ja negatiivseid arve ja nulli, või jälle täpsuse saavutamiseks ning teaduslikust terminoloogiast lahkumineku vältimiseks rääkida paljusõnaliselt: positiivsed ja negatiivsed arvud ning null.

Uue oskussõna sissetoomisele või ühe oskussõna asendamisele teisega ei tohi vaadata kui tühjale sõnademängule; oluline on, et iga oskussõna kasutuselevõtmine tooks kaasa rikastumise uue ideega. On võimalik, et õpilane, kuuldes esmakordselt terminit „relatiivsed arvud", ei taipa selle täielikku mõtet ja sisu; kui ta aga on sellesse terminisse sisse mõtelnud ja saanud õpetajalt seletuse, et positiivsed ja negatiivsed arvud asetuvad teljel nullist kahel eri poolel, siis rikastab see arusaamine tema teadmisi.

Vastuväide, nagu viiks oskussõna „relatiivsed arvud" arvu absoluutse väärtuse kui märgita arvu valele definitsioonile, on suunatud mitte selle oskussõna vastu, vaid relatiivsete arvude ja nende absoluutse väärtuse mõiste vale definitsiooni vastu. On endastmõistetav, et valed definitsioonid tuleb asendada õigetega.

§ 17. Puudused relatiivsete arvude õpetamisel.

Negatiivsete arvude sissetoomine on esimene arvu mõiste üldistamine koolialgebra kursuses. Edaspidi tuuakse sisse irratsionaalsed ja lõpuks imaginaarsed arvud. Loomulikult peab esimene arvu mõiste üldistamine toimuma erilise ettevaatusega.

Vahepealt aga esineb negatiivsete arvude esituses õpikutes ja nende õpetamisel koolis puht-teaduslikku laadi puudusi ning ka metoodika nõuete rikkumisi.

Märgime ära järgmised teaduslikkude aluste rikkumised.

1. Väärad katsed tõestada negatiivsete arvudega sooritatavate tehete reegleid. Need reeglid on sisse viidud definitsioonidena ja järelikult neid tõestada ei saa ja pole tarviski.

Õpetaja peab vahetpidamata juhtima õpilaste tähelepanu sellele, et tehteid uute arvudega tõestada ei saa. Kõigi õpetaja seletuste eesmärgiks on õpilastele näidata (mitte tõestada) uute arvude sissetoomise kahekordset otstarbekust: praktilist otstarbekust, mis lubab rakendada neid uusi arve konkreetsete ülesannete lahendamisel, ja loogilist otstarbekust, mis ilmneb selliste definitsioonide püstitamises, milledes säilivad endiste, s. o. positiivsete arvudega sooritatavate tehete seadused.

2. Arvu absoluutset väärtust määratakse kui arvu ilma märgita. Tõeliselt on arvu absoluutne väärtus mitte negatiivne arv, vaid positiivne arv või null. Edaspidi antakse sellele mõistele täpne definitsioon.

3. Valgustatakse ebaselgelt ja vääralt vahekorda relatiivsete arvude ja aritmeetikast tuntud arvude vahel. Tekib vale kujutlus, nagu oleks aritmeetikast tuntud arvude kõrval olemas veel teisi arve, nimelt relatiivsed arvud, kuhu kuuluvad positiivsed arvud, negatiivsed arvud ja null.

Õpetaja peab õpilasi viima arusaamisele, et aritmeetikast tuntud arvud ongi positiivsed arvud, samuti on tuntud null; ainult selle tõttu, et on tarvitusele võetud negatiivsed arvud, on varem tuntud arvud täiendatud relatiivsete arvude süsteemiks.

Nüüd juhime tähelepanu järgmistele õpetamise metoodika nõuete rikkumistele.

1. Keskkoolis esineb relatiivsete arvude esitamisel kaks süsteemi: reaal-konkreetne ja formaal-loogiline. Koolikirjanduses on laiemalt esindatud esimene süsteem (Davõdov, Kisseljov, Lebedintsev jt.), aga esineb ka teine süsteem (Marakujev, Grave; viimane toob negatiivsed arvud sisse arvupaaridena).

Niisugune jaotus kaheks teineteisest erinevaks süsteemiks ei ole õige. Kummastki neist kahest — reaal-konkreetsest ja formaal-loogilisest süsteemist ei piisa. On tarvilik mõle-

mate aluste harmooniline liitumine, konkreetse tõlgendamise liitumine formaal-loogilise põhjendusega. Kuidas jõuda sellise sünteesini, näidatakse hiljem.

2. Mõnikord tuuakse negatiivsed arvud sisse loomulikkudest arvudest ühekaupa mahaarvamise tulemusena. Seejuures aga jääb silmade vahele, et diskreetsete esemete igasugune loendus algab ühest ja tagurpidisel loendusel ei saa tulemus järelikult olla ühest väiksem.

3. Mõnikord räägitakse suurustest, mis võivad muutuda kahes mõttes (kahtepidi). Selle termini abil on reeglite sõnastused ebaselged.

4. Tihti sõnastatakse reegel nii: „Miinus miinusega annab plussi." Sel juhul toimub märgi lahutamine arvust, esineb ainult märk, ja õpilastel võib tekkida arvamus, nagu sooritataks tehteid mitte arvudega, vaid märkidega.

On toodud peamised vead, mis esinevad koolis relatiivsete arvude õpetamisel. Valitsev olukord on seda kurvem, et korralik, teaduse vaadetele ja metoodika nõuetele vastav relatiivsete arvude käsitlemine osutub õpilastele kergemaks kui need väärseletused, mis on koolis õpetamisel traditsiooni tõttu säilinud.

Negatiivsete arvude olu omandatakse tõepoolest konkreetsete näidete geomeetrilise tõlgendamisega; iga toimingut saab arusaadavalt seletada ja seepärast siis ka kohaseks teha teadlikule omandamisele. Edaspidi võib ka näiteid negatiivsete arvude rakendamise kohta valida õpilastele tuntud aladelt.

Teatavat raskust põhjustab arvu uue kontseptsiooni üldine plaan, ideede loogiline järjestus; eriti hämmastavalt mõjub lastele see asjaolu, et tehetel uute arvudega on endised nimed, kuna tehete sisu on muutunud. Näiteks on lapsel raske aru saada, mispärast tehet nimetatakse positiivse ja negatiivse arvu liitmiseks, kuna õigupoolest on tegemist

aritmeetikast tuntud arvude lahutamisega. Õpilased on hämmelduses, nad soovivad veenvaid põhjendeid; algavad tõestuste otsingud seal, kus on tegemist ainult definitsioonidega.

§ 18. Kuidas õpetada negatiivseid arve.

Esimest kokkupuutumist uute arvudega tuleb koolis alustada reaal-konkreetsest esitussüsteemist sellepärast, et konkreetne süsteem lubab selgitada uute arvude ja nendega sooritatavate tehete mõtet reaalse maailma näidete najal ning soodustab uute arvude tajumise psühholoogilist ettevalmistust. Negatiivsete arvude sissetoomist ei saa motiveerida formaalse põhjendiga — teha lahutamine alati teostatavaks tehteks, sest aritmeetikas leiti võimalik olevat leppida lahutamise puhul teatavate kitsendustega. Negatiivsete arvude sissetoomine saab õpilastele veenvaks ainult siis, kui õnnestub neile näidata, et tegeliku elu nõuded seda tingimata ette kirjutavad.

Alustame sirglõigu mõõtmisega. Lõigu alguse märgime arvuga null, pikkusühikuks võtame meetri. Paigutame nüüd ühemeetrise lõigu nullist alates ja märgime lõigu otsa ühega; niiviisi toimides saame selle meetri järkjärgulisel paigutamisel loomulikud arvud:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

Paigutades analoogiliselt poole meetrit, saame:

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots$$

Selliselt tehakse iga kord, kui on olemas loomulik algus. On aga olemas suurusi, millede mõõtmisel loomulikku algust pole.

Esimene näide.

Mööda ringjoont jooksevad ühes suunas kaks hobust — must ja valge. Kumb hobune on ees? Et ringjoonel pole algust, siis ei saa sellele küsimusele vastata.

Teine näide.

Aja mõõtmisel pole samuti loomulikku algust. Missugusest momendist tuleb tõepoolest aega arvata? Loomulikult tuleks võtta ajaarvamise alguseks selline sündmus, mis toimus enne kõike; pole aga teada, milline sündmus oli enne kõiki teisi.

Järelikult on olemas suurusi, millede iseloomustamiseks puudub loomulik algus, millest alates võiks neid mõõtma hakata. Kuidas mõõta praktiliselt suurusi, milledel puudub loomulik algus? Ei saa mööda minna praktilisest tarvidusest aega mõõta.

Selleks et täita elu tungivaid nõudmisi, valib inimene praktilises elus alguseks vabalt võetud punkti. Esimeses näites valitakse ringjoonel mistahes punkt; et hobused liiguvad ühes ja samas suunas, siis on kerge otsustada, kumb hobustest on ees.

Teises näites võetakse aja mõõtmise alguseks mingi sündmus. Näiteks muhameedlastel on selleks võetud aasta, millal Muhamed põgenes Mekast Mediinasse.

Kui algus on vabalt võetud, siis toimub loendus juba mitte ühes suunas, vaid kahes vastassuunas.

On aja mõõtmise alguseks võetud mingi sündmus, siis tuleb vahet teha sündmuste vahel enne ja pärast seda sündmust.

Seega tekib järgmine olukord: on olemas alguspunkt null ja punktid paremal pool seda; on olemas samal rõhtjoonel sümmeetrilised punktid vasakul pool nulli või jälle loodisjoonel ülal- ja allpool nulli.

See negatiivsete arvude sissetoomise meetod ei luba neid arve mitte ainult tõlgendada konkreetsete näidete najal, vaid annab ka võimaluse ehitada õpetust relatiivsetest arvudest palju laiemale alusele kui abstraktsele nõudele teha lahutamine alati teostatavaks. Mõningate objektide uurimisel ilmnevad niisugused omadused ja seosed, millede iseloomustamiseks ei piisa aritmeetikast tuntud täis- ja murdarvudest. Juba aritmeetikas põrkasime murdude sissetoomisel kokku faktiga, et täisarvudest ei piisa nende seoste väljendamiseks, mis tekivad eseme jagunemisel osadeks; seepärast võetigi täisarvude kõrval tarvitusele uued arvud — murrud. Samuti on otstarbekohane mõningate kahes vastassuunas muutuvate suuruste iseloomustamiseks toimetada loendust ja mõõtmist mitte otspunktist, mis, nagu näidetest nähtus, tihti puudub, vaid mõnest vahepealsest punktist ja seejuures kahes suunas sellest. Niisugustel juhtudel valitakse sirgel mingi meelevaldne punkt, millele vaadatakse kui alguspunktile. Iga muu punkti asend määratakse selle võetud alguspunkti suhtes, andes punkti kauguse alguspunktist. Seejuures saab punkti kaugust ühel pool nullpunkti väljendada aritmeetikast tuntud arvudega, s. o. positiivsete arvudega, teisel pool nullpunkti aga uute negatiivsete arvudega.

Loomulik on alustada järgmistest küsimustest:

I. Rong sõitis jaamast edasi 3 km. Kas piisab neist andmeist rongi lõppasendi määramiseks? Mis veel puudub rongi asendi määramiseks?

II. Termomeetri lugem muutus 4° võrra. Kas piisab sellest, et otsustada, kuidas muutus temperatuur?

III. Kas tuleb lausest „7 kraadi külma" aru saada nii, et soojust selle temperatuuri puhul pole? Kuidas mõista seda väljendust?

IV. Kas on olemas vahet nulli tähenduses väljendustes 0° ja 0 rubla või 0 inimest? Mida tähendab üks ja seesama sõna „null" mõlemal juhul?

Arutleme üksikasjalisemalt järgmist ülesannet. „Auto sõitis punktist O sirget mööda a meetrit paremale poole kuni punktini A, siis punktist A vasakule poole b meetrit kuni punktini B. Arvutada punkti B kaugus O-st."

On selge, et ülesande lahendamiseks tuleb b lahutada a-st, saame $a - b$.

Auto poolt läbitud tee pikkuse mõõtarvude a ja b vahel võib olla kolm vahekorda:

1. $a > b$; siin on lahutamine võimalik; vahet väljendab mõni tuntud arv; punkt B asetseb O-st paremal pool, s. o. auto on O-st paremal pool.

2. $a = b$; siin on vahe $a - b$ null. Punkt B langeb ühte lähtepunktiga O; $a - a = 0$; auto on lähtepunktis.

Lahutamine on võimalik ainult sel juhul, kui arvude ritta on toodud null, s. o. kui on näidatud nulliga sooritatavate tehete mõte ja reeglid.

3. Kui $a < b$, on lahutamine tuntud arvude süsteemis võimatu ja vahel $a - b$ pole mingit mõtet.

Esitatud küsimuse lahendamisel on aga reaalne mõte ja see on võimalik isegi siis, kui $a < b$, s. o. kui tee OA, mis on sõidetud paremale poole nullist, on lühem teest AB, mis on sõidetud vasakule A-st B-ni. Sel juhul on tõepoolest auto poolt läbitud tee vasakule suurem OA-st, ja seepärast lõpp-punkt B asetsebki vasakul pool alguspunktist O. Oletades näiteks, et $a = 5$ m, $b = 6$ m, saame, et lõpp-punkt asetseb ühe meetri kaugusel vasakul pool nulli. Kui $a = 5$, $b = 7$, siis vahe $a - b$ tähistab punkti, mis on 2 m kaugusel vasakul pool O-st, jne.

Tähendab, vasakul pool nulli asetseb samasugune lõpmatu punktide rida kui paremal pool, s. o. kaugusi O-st paremale ja vasakule poole võib tähistada arvudega 1, 2, 3, 4, 5, ...

Järelikult, kui $a < b$, siis võib vahet $a - b$ tõlgendada kui O-st vasakule poole suunatud lõikude vahet.

Tekib tarvidus eraldada arve, mis mõõdavad O-st paremal pool võetud lõike, arvudest, mis väljendavad O-st vasakul pool võetud lõike. On kokku lepitud esimesi arve nimetada positiivseteks ja teisi negatiivseteks; need ja teised arvud koos nulliga moodustavad relatiivsete arvude süsteemi.

§ 19. Telg.

Arvudevaheliste seoste uurimist ja nende meelespidamist kergendab suurel määral ratsionaalsete arvude näitlik geomeetriline kujutamine teatavate punktide abil sirgel, mida lühidalt nimetatakse arvsirgeks.

Et punkt sirgel võib liikuda kahes vastassuunas, siis on esijoones vaja neid suundi teineteisest eraldada. On kokku lepitud üht suunda nimetada positiivseks ja teist negatiivseks; millist nimetada positiivseks, on täiesti ükskõik; kokkuleppest tuleb vaid kogu arutluse jooksul kinni pidada.

Sirge, mille üht suunda kokkuleppe alusel nimetatakse positiivseks, on telg või orienteeritud sirge. Kõige lihtsam on valida sirgel kaks punkti O ja A ning nimetada suunda OA positiivseks. Harilikult kujutellakse telge sirgena, mis on tõmmatud vasakult paremale, ja punkti A punktist O paremal pool. Nüüd langeb positiivne suund ühte suunaga paremale poole, negatiivne aga suunaga vasakule poole.

Kui võtta sirge, mis ulatub lõpmatuseni ühele ja teisele poole, siis pole võimalik määrata sellel sirgel ühegi punkti absoluutset asendit, vaid ainult näidata ühe punkti asendit mõne teise punkti suhtes. Selleks et määrata kahe punkti suhtelist asendit, pole tarvis anda iga punkti asendit iga teise punkti suhtes, sest kahe punkti asendid mingi ühe ja sama kolmanda punkti suhtes määravad ka nende punktide asendid teineteise suhtes.

Piisab sellest, kui määrata sirge kõigi punktide asendid mõne vabalt võetud punkti suhtes. Seda punkti nimetatakse alguspunktiks ja see tähistatakse O-ga.

Võttes lõigu OA pikkusühikuks, paigutame teda sirgele kahele poole punktist O piiramatu arv kordi; saame suure hulga punkte, mida võib vaadata täisarvude kujutistena, nimelt: O on nulli kujutis, A — ühe kujutis, punktid paremale on arvude 2, 3, 4, ... kujutised, aga vasakule — arvude -1, -2, -3, -4, ... kujutised.

Lühidalt võib täisarvu m kujutavat punkti nimetada punktiks m.

Kui t on mistahes täis- või murdarv, siis võib talle anda kuju $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud, b peale selle veel positiivne.

Arvu $\frac{a}{b}$ kujutise saame nii: jagame lõigu nullist kuni a-ni b võrdseks osaks; esimene jaotuspunkt nullist lugedes ongi arvu t kujutis. Selline ehitus lubab kujutada sirgel mistahes täis- või murdarvu punktiga. Võrdseid arve kujutab üks ja seesama punkt, mittevõrdseid arve kujutavad eri punktid.

Täis- ja murdarve nimetatakse ratsionaalseteks arvudeks. Ratsionaalsete arvude kujutisi nimetatakse lühidalt sirge ratsionaalseteks punktideks.

Pöördväide pole õige, sest ei saa öelda, et iga punkt sirgel oleks ratsionaalse arvu kujutis.

Sirgel kahe ratsionaalse punkti B ja C vahel võib võtta mistahes arvu ratsionaalseid punkte. Selleks on küllaldane näiteks jagada sirglõik BC kaheks võrdseks osaks, siis iga pool jälle pooleks jne. Jaotuspunktid on ratsionaalsed punktid B ja C vahel.

Olgu A, B, C kolm punkti sirgel, seejuures B asetseb A ja C vahel. Võib paigutada punktist A suunas AC järk-järgult sirglõike, mis on võrdsed AB-ga, ja jõuda punkti C taha. See asjaolu kujutab geomeetriliselt Archimedese aksioomi,

mis ütleb, et on olemas arv n, mille kohta kehtib võrratus $n \cdot AB > AC$.

Kasutades Archimedese aksioomi, võib näidata, et kui P on mistahes punkt sirgel, siis antud n puhul võib alati leida kaks ratsionaalset punkti $\frac{m}{n}$ ja $\frac{m+1}{n}$, millede vahel asetseb punkt P (punkt P võib ühtida ka ühega antud kahest punktist).

Relatiivset arvu, mis väljendab arvteljel mingi punkti M kaugust alguspunktist O, s. o. arvu, mis mõõdab sirglõiku OM koos suuna tähisega, nimetatakse punkti M abstsissiks.

Kui arvteljel on antud mingi punkt M, siis tähendab see, et on antud selle punkti abstsiss; leida punkt M arvteljel tähendab leida selle punkti abstsiss.

§ 20. Relatiivsete arvude süsteem.

Negatiivsete arvude sissetoomise viisist on näha, et negatiivseid väärtusi võime anda ainult nendele suurustele, mis saavad muutuda kahes vastassuunas. Näiteks keha kaal, esemete arv jms. ei või olla negatiivsed. Siit siis suuruste liigitus suunaga ja suunata suurusteks.

Suunaga suurustest esinevad kõige sagedamini: punkti koordinaadid sirgel; aeg, mille arvamiseks puudub kindel algusmoment; temperatuur, mis loetakse termomeetri skaalal kokkulepitud nullpunktist kahes vastassuunas. Samuti mõõdetakse kahes vastassuunas ekvaatorist meridiaani mööda geograafilist laiust ja teatavast meridiaanist ekvaatorit või rööpjoont mööda geograafilist pikkust. Suurustele, nagu kapital ja võlg, kantakse samuti üle kahes vastassuunas muutumise idee.

Relatiivsete arvude süsteem väljendab pikkuse, aja ja teiste suunaga suuruste tõeliselt olemasolevaid arvulisi oma-

dusi. Tuleb ainult kokku leppida, kumb vastassuundadest on positiivne ja kumb negatiivne.

1. Tehete sooritamist negatiivsete arvudega võib kergesti siduda arvteljel võetud suunaga lõikude uurimisega. Selgitame näiteks arvude liitmise ja lahutamise mõtet, piirdudes lihtsuse mõttes ainult täisarvudega.

Kahe täisarvu a ja b summaks nimetatakse arvu, mis saadakse, loendades loomulikkude arvude reas b arvu, mis vahetult järgnevad a-le.

Analoogiliselt mõistetakse a ja b vahe all arvu, mis saadakse, loendades loomulikkude arvude reas a-st alates b arvu vastupidises suunas. Kui $a > b$, on vahel $a - b$ tavaline mõte ja ta väljendab mingit arvu vasakul pool a-d, aga paremal poolel O-d. Kui $a = b$, on vahe $a - b = 0$. Kui $a < b$, on vahel järgmine mõte. See arv mõõdab lõiku, mis asetseb nullist alates vasakul pool ja mille pikkus on $b - a$. Arvud, mis asetsevad teljel O-st vasakul pool, on negatiivsed, erinedes neist, mis on O-st paremal pool ja mida nimetatakse positiivseteks.

2. Märkide $+$ ja $-$ rakendamisel suundade tähistamiseks on mõningaid pahemusi, sest üks ja sama märk pluss tähistab liitmistehet ja samal ajal ka suunda. Selleks et vältida seda kahesust märkide rakendamisel, on mõned autorid teinud mitmesuguseid ettepanekuid. Ühed soovitavad positiivset suunda tähistada tähega p, mis asetatakse arvu peale, ja negatiivset suunda tähega v (Agura, Algebra õpik). Teised jälle, et vahet teha tehtemärgi ja suunamärgi vahel, asetavad suunamärgi arvu peale, näiteks:

$$\begin{matrix} + & - \\ 4 & +3 \end{matrix}$$

Sellist viisi tarvitavad oma algebra ülesannete ja harjutuste kogus Volkov ja Struve. Kas seda on vaja?

Suundade tähistamisviis tähtedega *p* (esimene täht sõnas „parem") ja *v* (esimene täht sõnas „vasak"), mis asetatakse arvude peale, tuleb siiski tagasi lükata, sest seda viisi ei tarvitata praeguses algebras, mis on sümboliline ja mitte sünkopeeritud. Samuti pole tarvis vahet teha plussi kui tehtemärgi ja arvu peale paigutatud plussi kui suunamärgi vahel. Sümbolid peavad olema muidugi ühe tähendusega; sellelt seisukohalt paistab eri märgi sissetoomine suuna tähistamiseks soovitav olevat. Tõepoolest kaob edaspidi vahe plussi kui tehtemärgi ja plussi kui suunamärgi vahel ära ja seega ka märkide + ja — näiv kahesus.

3. Nullil on suunaga ja suunata suuruste puhul erinev mõte. Suunata suuruste puhul näitab null suuruste puudumist, näiteks null inimest tähendab, et pole üldse inimesi; null kilogrammi ütleb, et pole kilogramme. Suunaga suuruste puhul aga näitab null kokkulepitud alguspunkti. Termomeetri puhul ei näita null soojuse puudumist, vaid teatavat soojusastet. Ajaarvutamises on null teatav kokkulepitud moment, millest algab ajaarvutamine aastates; see moment on eri kalendrites erinev.

Relatiivsete arvude süsteemis on null järelikult punkt, millest algab loendus. Teataval määral on see punkt valitud meelevaldselt. Näiteks Celsiuse ja Réaumuri skaalal näitab null jää sulamistemperatuuri, kuna Fahrenheit'i skaalal ta näitab jää ning salmiaagi segu temperatuuri.

4. Relatiivsete arvude sissetoomine suunaga suuruste tähistamiseks vastab teaduse arengu tendentsile — väljendada näivat kahesust ühtsalt. Näiteks „5° külma" ja „7° sooja" asemel öeldakse: „— 5°", „+ 7°". Selle tähistamisega välditakse ebaõiget kujutlust külmast ja soojast kui kahest eri omadusest ja asendatakse nad ühe mõistega soojusastmest.

5. Kaks arvu arvteljel, mis on nullist ühekaugusel, kuid sellest kahel pool, näiteks arvud (+ 5) ja (— 5), näitavad

ühesuurust muutumist, aga kahes vastassuunas; samu arve (+ 5) ja (— 5) nimetatakse vastupidisteks ehk sümmeetrilisteks.

Üldse on arvud (+ a) ja (— a) teineteisele vastupidised.

Kui a on positiivne täis- või murdarv, siis temale vastupidine arv (— a) on negatiivne täis- või murdarv. Kui arv a on negatiivne täis- või murdarv, siis temale vastupidine arv (+ a) on positiivne täis- või murdarv. Kui arv a on null, siis temale vastupidine arv on ka 0.

Negatiivsete arvude tarvituselevõtmise tõttu on arvude hulk rikastunud ja koosneb järgmistest arvudest:

1. Positiivsetest täis- ja murdarvudest, s. o. neist arvudest, mis on tuntud aritmeetikast.
2. Negatiivsetest täis- ja murdarvudest.
3. Täisarvust null.

§ 21. Relatiivse arvu absoluutväärtuse mõiste.

Arvu absoluutväärtuse mõiste etendab paljudel juhtudel suurt osa. Kahjuks aga esinevad selle mõiste defineerimisel ebatäpsused ja isegi vead. Näiteks Kisseljovi algebra õpikus (I osa, lk. 15, 1934. a. trükk) on öeldud, et relatiivse arvu absoluutväärtuseks on sama arv võetuna ilma märgita; tõepoolest aga mõistetakse negatiivse arvu absoluutväärtuse all sellele arvule vastupidist positiivset arvu. Selles küsimuses on tarvilik ja ka võimalik koolialgebra seisukohta lähendada teaduslikule seisukohale ja anda algusest peale selged ning täpsed definitsioonid.

Võib alustada mainimisest, et mõnikord ei osutata tähelepanu suuruse suunale. Oletame näiteks, et on tellitud vardaid pikkusega 2 meetrit; seejuures on lubatud hälve kuni 5 mm, s. o. vardad võivad normist olla pikemad või lühemad 5 mm võrra. Hälbest rääkides pole meile tähtis, kas

see on $(+5)$ või (-5), s. o. kas hälve pikendab varrast või lühendab teda; meile on tähtis ainult hälbe mõõtarv, mis võrdub mõlemal juhul positiivse arvuga 5. Samuti ei osutata lõigu pikkusest kõneldes tähelepanu tema suunale ja vaadeldakse pikkust kui positiivset arvu.

Pärast seda siirdutakse relatiivse arvu absoluutväärtuse juurde.

Arv võib olla positiivne, negatiivne või võrdne nulliga.

Negatiivse arvu absoluutväärtuse all mõistetakse sellele arvule vastupidist positiivset arvu. Arvu (-10) absoluutväärtus on 10. Positiivse arvu absoluutväärtus võrdub sama arvuga; nulli absoluutväärtus on null.

Absoluutväärtus on ikka positiivne arv: ta võib olla null ainult nullil.

Arvu absoluutväärtuse tähistamiseks paigutatakse arv püstkriipsude vahele (Weierstrass'i sümbol); näiteks $|-3|=3$.

Järelikult arvu a absoluutväärtuseks nimetatakse sama arvu a, kui $a>0$; kui arv $a<0$, siis absoluutväärtus on $-a$; kui arv on 0, siis absoluutväärtus on ka 0. Võttes tarvitusele Weierstrass'i sümboli, võime kirjutada:

$$|a|=a, \text{ kui } a>0;$$
$$|a|=-a, \text{ kui } a<0;$$
$$|a|=0, \text{ kui } a=0.$$

Relatiivse arvu absoluutväärtuse mõistet võib väljendada ka teisiti: a väljendab a ja $(-a)$ kahest väärtusest seda, mis pole negatiivne; see tähendab: $|a|\geqslant 0$, seejuures $|a|=0$ siis ja ainult siis, kui $a=0$.

Arvu a absoluutväärtus võrdub $(-a)$ absoluutväärtusega, s. o. $|a|=|-a|$. Eri juhul $|a-b|=|b-a|$.

Pöördväide: kui kahe relatiivse arvu absoluutväärtused on võrdsed, siis arvud on kas võrdsed või vastupidised.

Tähe all mõistetakse õpilastele mistahes tuntud arvu.

Seepärast ei saagi relatiivsete arvude süsteemis a all mõista ainult positiivset arvu, ainult negatiivset arvu või nulli; a all mõistetakse mistahes arvu positiivsete ja negatiivsete arvude hulgast ja ka nulli. Võib ainult öelda, et arvu a asendamine arvuga $(-a)$ muudab a märgi vastupidiseks ja nimelt:

Kui a on positiivne arv, siis $(-a)$ on negatiivne arv;
kui a on negatiivne arv, siis $(-a)$ on positiivne arv;
kui a on võrdne nulliga, siis ka $(-a)$ võrdub nulliga.

Kuidas siis väljendada, et arv on positiivne? Seda võib teha kahel viisil.

Esimene viis. Võib kasutada asjaolu, et positiivne arv on suurem nullist, kirjutada $a > 0$ ja analoogiliselt väljendada negatiivset arvu kirjutisega $a < 0$.

Teine viis. Võib kasutada ka arvu absoluutväärtuse mõistet; siis on juhul, kui $a \neq 0$, arv $|a|$ positiivne ja arv $-|a|$ negatiivne.

§ 22. Tehted nulliga.

Tegelik koolitöö näitab, et õpilased ei kujutle endale selgesti tehteid nulliga. Seepärast ongi vaja need tehted üksikasjaliselt läbi arutada.

1. $a + 0 = a$. See võrdus on nulli definitsioon: null on niisugune arv, mida liites mistahes arvuga viimane ei muutu.

2. Võrdusest $a + 0 = a$ järgneb: $a - 0 = a$. Sõnades: null on arv, mida lahutades mistahes arvust viimane ei muutu.

3. $0 \cdot a = 0$. Tõepoolest, kui a on loomulik arv, siis $0 \cdot a = 0 + 0 + 0 \ldots = 0$ (definitsiooni järgi). Kui üks tegureist on null, siis ka korrutis on null.

On õige ka pöördlause: korrutis on null ainult siis, kui üks tegureist on null, sest kahe nullist erineva arvu korrutis ei võrdu nulliga.

4. $0 : a = 0$ (kui $a \neq 0$), sest $0 \cdot a = 0$. Sõnades: nulli jagatis arvuga, mis erineb nullist, on null.

5. Nullist erineva arvu b jagatis nulliga on võimatu, sest mistahes jagatise x puhul saame $x \cdot 0 = 0$, aga mitte b.

6. Nulli jagatis nulliga pole ainuväärtuseline, sest mistahes arvu x korrutis nulliga on null. Seepärast pole siis sümbolil $\frac{0}{0}$ mingit määratud numbrilist väärtust.

Kahe viimase omaduse põhjal kõrvaldatakse tehete arvust, millega teeb tegemist algebra, arvu jagamine nulliga, esimesel juhul sellepärast, et tehe on võimatu, teisel juhul, et tehe pole ainuväärtuseline.

Avaldise $\frac{0}{0}$ puhul tuleb rõhutada, et kui ülesande lahendamisel saadakse $\frac{0}{0}$, siis ülesanne nõuab täiendavat, üksikasjalisemat arutlust. Pärast seda kui on kindlaks tehtud nulliga sooritatavate tehete reeglid, kui null on muutunud arvuks, tuleb õpetada õpilasi lahti saama nende keskel levinud arvamusest: „null pole midagi".

§ 23. Kahe relatiivse arvu liitmine.

Definitsioon. Kahe ühesuguse märgiga arvu summaks nimetatakse nende arvude absoluutväärtuste summat, võetud märgiga $+$, kui mõlemad arvud on positiivsed, ja märgiga $-$, kui mõlemad arvud on negatiivsed.

Kahe eri märgiga arvu summaks nimetatakse nende arvude vahet, võetud selle liidetava märgiga, mille absoluutväärtus on suurem.

Kahe vastupidise arvu summa on null.

Kui üks kahest liidetavast on null, siis summa võrdub teise liidetavaga. Kui mõlemad liidetavad on nullid, siis summa on ka null.

Õpilastele tuleb selgeks teha, et kahe relatiivse arvu summa leitakse definitsiooni põhjal ja seepärast ei saa seda tõestada. Õpilaste küsimuse puhul, mispärast summat nimelt niiviisi defineeritakse, peab õpetaja mainitud definitsioonile andma näitliku illustratsiooni, juurde lisades, et selle definitsiooni osaliselt ka loogiline vajalikkus selgub järk-järguilt kaugemal relatiivsete arvude liitmise seaduste arutamisel.

Relatiivsete arvude liitmise illustreerimine suunatud lõikude abil.

Võtame järgmise ülesande. Antud punktist O lähtudes liikus keha enne 2 meetrit paremale poole $(+2)$, siis veel 3 meetrit paremale poole $(+3)$. Kus asub liikuv keha?

On vaja rõhutada, et ülesandes ei küsita, kui palju on liikuv keha üldse edasi läinud, vaid tuleb näidata koht, kus asetseb liikuv keha kahe liikumise tagajärjel, s. o. näidata, kas liikuv keha asetseb paremal pool või vasakul pool O-st ja kui kaugel.

Et iga liidetavat võib võtta kahe eri märgiga, siis kahe relatiivse arvu liitmisel võib esineda neli juhtu:

1) mõlemad liidetavad on positiivsed;
2) esimene liidetav on positiivne, teine negatiivne;
3) esimene liidetav on negatiivne, teine positiivne;
4) mõlemad liidetavad on negatiivsed.

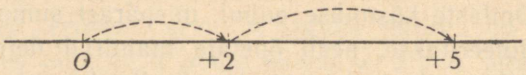
Liitmise üleskirjutamine toimub järgmiselt:

1) $(+2)+(+3)$;
2) $(+2)+(-3)$;
3) $(-2)+(+3)$;
4) $(-2)+(-3)$;

Tuleb silmas pidada järgmist: märgil $+$ sulgudes ja sulgude vahel on erinev mõte: märk $+$ sulgudes tähistab arvteljel liikumise suunda paremale; märk $+$ sulgude vahel tähistab liitmistehet.

Kõigil neljal juhul leitakse summa suunatud lõikude abil.

1. Keha nihkus paremale poole kahe meetri võrra (+2) ja siis veel (tehtemärk +) 3 meetri võrra paremale poole

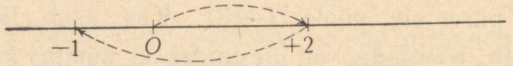


Joon. 1.

(+ 3); jooniselt 1 on vahetult näha, et keha asub pärast liikumist 5 meetri kaugusel paremal pool *O*-st.

$$(+2) + (+3) = +5.$$

2. Keha nihkus paremale poole kahe meetri võrra (+ 2) ja siis veel (tehtemärk +) kolme meetri võrra vasakule



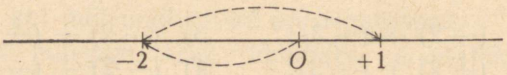
Joon. 2.

poole; jooniselt 2 on vahetult näha, et keha on pärast liikumist 1 meetri kaugusel vasakul pool *O*-st.

$$(+2) + (-3) = -1.$$

2a. Olgu üks liidetav (+ 2), teine aga (— 2), s. t. keha nihkus enne kahe meetri võrra paremale poole ja siis kahe meetri võrra vasakule poole. On selge, et keha osutub lähtepunktis olevaks. Järelikult $(+2) + (-2) = 0$.

3. Keha nihkus kahe meetri võrra vasakule poole (— 2) ja siis veel (tehtemärk +) kolme meetri võrra paremale



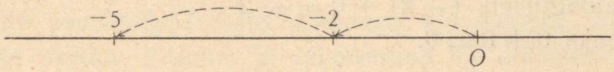
Joon. 3.

poole (+ 3); jooniselt 3 on vahetult näha, et keha on kahe liikumise tagajärjel punktis 1 meetri kaugusel *O*-st paremal pool.

$$(-2) + (+3) = +1.$$

4. Keha nihkus kahe meetri võrra vasakule poole (— 2) ja siis veel kolme meetri võrra vasakule poole (— 3); jooniselt 4 on vahetult näha, et keha on kahe liikumise tagajärjel punktis 5 meetri kaugusel O-st vasakul pool.

$$(-2) + (-3) = -5.$$



Joon. 4.

Ülal on läbi arutatud kahe arvu liitmine nelja võimaliku juhu kohta. See arutlusviis on aga seotud lõikude ehitamisega ja nõuab igal üksikul juhul üsna palju aega. Tekib vajadus sellise reegli tuletamiseks, mis võimaldaks leida summat igal üksikjuhul ilma jooniseta, ilma geomeetrilise illustratsioonita. Vastastame esimese ja neljanda juhu. Mõlemal juhul on liidetavad ühesuguste märkidega; me näeme, et summa absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste summaga ja summa märk on pluss, kui mõlemad liidetavad on positiivsed, ning miinus, kui mõlemad liidetavad on negatiivsed.

Vastastame teise ja kolmanda juhu. Mõlemal juhul on liidetavad vastasmärkidega; mõlemal juhul summa absoluutväärtus võrdub liidetavate absoluutväärtuste vahega ja summa märk ühtib selle liidetava märgiga, mille absoluutväärtus on suurem.

Esimene ja neljas juhtum annavad meile liitmise reegli kahe ühesuguse märgiga arvu kohta, teine ja kolmas juhtum annavad seevastu liitmise reegli kahe eri märgiga arvu kohta. Nelja juhu üldistamine annab liitmise reegli kahe relatiivse arvu kohta.

5. Selleks et oleksid läbi arutatud kõik võimalikud liitmise juhud, on järele jäänud veel arutada juhtu, kus üks liidetavatest on null.

Olgu üks liidetavatest null. Tuleb liita $(+2)+0$. Keha nihkus 2 meetri võrra paremale poole punktist O ja siis enam ei liikunud. On selge, et keha lõppkaugus on ka 2 meetrit O-st paremal pool. Niisiis $(+2)+0=+2$.

Analoogiliselt $(-2)+0=-2$.

Lõpuks $0+0=0$.

§ 24. Kolme ja enama relatiivse arvu liitmine.

Selleks et liita kolm või enam relatiivset arvu, tuleb liita järk-järgult — enne kaks arvu, saadud tulemus kolmandaga, uus tulemus neljandaga jne., kuni kõik liidetavad on liidetud:

$$(+2)+(-3)+(-7)=(-1)+(-7)=-8.$$

Aga liita võib ka teisiti, nimelt: kõigepealt liidetakse kõik positiivsed arvud, siis kõik negatiivsed arvud ja lõpuks liidetakse positiivsete arvude summa negatiivsete arvude summaga.

§ 25. Relatiivsete arvude liitmise omadused.

1. Näidete najal veendume, et relatiivsete arvude kohta on kehtiv vahetuvusseadus:

$$(+2)+(-3)=-1; \quad (-3)+(+2)=-1.$$

Järelikult:

$$(+2)+(-3)=(-3)+(+2).$$

2. Samuti on kehtiv ühenduvusseadus:

$$(-3)+[(+10)+(+5)]=(-3)+(+15)=+12;$$

$$[(-3) + (+10)] + (+5) = (+7) + (+5) = \\ = +12.$$

Järelikult:

$$(-3) + [(+10) + (5)] = \\ = [(-3) + (+10)] + (+5).$$

3. Relatiivsete arvude liitmine on ainuväärtuseline tehe. Relatiivsete arvude summa absoluutväärtus võrdub kas liidetavate absoluutväärtuste summaga või vahega, aga absoluutsete arvude liitmine ja lahutamine on ainuväärtuselised tehted; märk on vastavalt reeglile täiesti määratud.

§ 26. Ülesanded relatiivsete arvude liitmise kohta.

Relatiivsete arvude liitmise ülesandeid ja harjutusi tuleb valida alltoodud järjekorras.

1. Algul mõni ülesanne, näiteks seda laadi: „Vedur sõitis enne 250 m depoost paremale poole, siis 300 m vasakule poole, siis jälle 120 m paremale poole ja lõpuks 40 m vasakule poole. Kus asetseb lõpuks vedur depoo suhtes?" Või analoogilist laadi ülesanne temperatuuri kohta (selliseid ülesandeid leidub Lebedintsevi ülesannetekogus).

2. Järgnevad harjutused tehte tehnika peale, nii nagu Šapošnikovi raamatus.

3. Edasi tuleb rida ülesandeid jõudude liitmise kohta, kui jõud mõjuvad üht ja sama sirget mööda.

4. Edasi harjutusi arvude keskmise aritmeetilise leidmiseks. Näiteks leida arvude 120,1; 120,2 119,8; 119,7 120,3; 119,5 keskmine aritmeetiline. Selle asemel et leida arvude summat ja jagada summa 6-ga, võib toimida lihtsamalt, nimelt: võtta normiks 120, arvutada arvude hälbed sellest normist, liita need ja summa jagada 6-ga. Hälbed on järgmised: $+0,1$; $+0,2$; $-0,2$; $-0,3$; $+0,3$; $-0,5$. Hälvete

summa võrdub: $(+0{,}1) + (+0{,}2) + (-0{,}2) + (-0{,}3) + (+0{,}3) + (-0{,}5) = -0{,}4$.

Keskmine hälve võrdub:

$$-0{,}4 : 6 = \frac{-4}{-10 \cdot 6} = -\frac{2}{30} = -\frac{1}{15};$$

järelikult arvude keskmine aritmeetiline on

$$120 + \left(-\frac{1}{15}\right) = 119\frac{14}{15}.$$

5. Lõpuks võib esitada järgmist laadi küsimusi:

a) Kui suur on mistahes arvu summa oma vastupidise arvuga?

b) Tõestada: kui kahe arvu summa on null, siis arvud on kas vastupidised või mõlemad võrduvad nulliga.

§ 27. Relatiivsete arvude lahutamine.

Käsitleme relatiivsete arvude lahutamistehet ja tuletame selle tehte reegli.

Olgu tarvis leida järgmine vahe: $(+2) - (+5)$.

1. $(+2) - (+5) = -3$, sest $(-3) + (+5) = +2$.
2. $(+2) - (-5) = +7$, sest $(+7) + (-5) = +2$.
3. $(-2) - (+5) = -7$, sest $(-7) + (+5) = -2$.
4. $(-2) - (-5) = +3$, sest $(+3) + (-5) = -2$.

Käsiteldud näidetest teeme järgmise järelduse:

1. Me leidsime, et $(+2) - (+5) = -3$, aga ka $(+2) + (-5) = -3$.
2. $(+2) - (-5) = +7$, aga ka $(+2) + (+5) = +7$.
3. $(-2) - (+5) = -7$, aga ka $(-2) + (-5) = -7$.
4. $(-2) - (-5) = +3$, aga ka $(-2) + (-5) = +3$.

Niisiis:

$$(+2) - (+5) = (+2) + (-5) = -3$$
$$(+2) - (-5) = (+2) + (+5) = +7$$
$$(-2) - (+5) = (-2) + (-5) = -7$$
$$(-2) - (-5) = (-2) + (+5) = +3$$

Relatiivsete arvude lahutamise kohta võib tarvitada järgmist metoodilist võtet.

Võtame näite:

$(+2) - (-5)$; esitatud vahe ei muutu, kui sellega liita null; nulli asemel võime võtta avaldise $(+5) + (-5)$; liidame viimase avaldise antud vahega:

$(+2) - (-5) = (+2) - (-5) + 0 = (+2) - (-5) + (-5) + (+5) = (+2) + (+5) =$ [sest kaks keskmist arvu koonduvad välja] $= +(+7)$.

Analoogiliselt:

$$(+2) - (+5) = (+2) - (+5) + (+5) + (-5) =$$
$$= (+2) + (-5) = [\text{sest } (+5) + (-5) = 0] = -3$$
$$(-2) - (+5) = (-2) - (+5) + (+5) + (-5) =$$
$$= (-2) + (-5) = -7$$
$$(-2) - (-5) = (-2) - (-5) + (+5) + (-5 =$$
$$= (-2) + (+5) = +3$$

Lahutamist võib graafiliselt illustreerida samuti, nagu seda tegime liitmise puhul, ainult selle vahega, et liitmise puhul illustreeriti mittetõestatavat definitsiooni, lahutamise puhul aga reeglit, mida, nagu me praegu nägime, on võimalik tõestada.

On tarvis tähelepanu juhtida küsimuse asetamisele lahutamisel ja sellele, mille poolest see erineb liitmise puhul esitatavast küsimusest: „Punktist O arvteljel lähtub kaks liikuvat keha; üks liigub 5 m paremale, teine 2 m paremale; millises suunas ja mitu meetrit peab liikuma teine keha, et

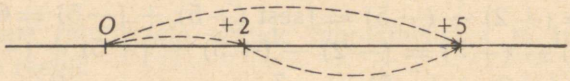
jõuda esimeseni, s. o. tulla punkti, mille kaugus on O-st 5 m paremal pool?"

Esitatud küsimuse lahendab lahutamistehe. Sama küsimus lahendatakse lahutamisega ka sel korral, kui mõlemad liikumised toimuvad vasakule poole või jälle eri suundades. Analoogiliselt liitmisega on siingi võimalik neli juhtu.

1) $(+5)-(+2)$; 3) $(+5)-(-2)$;
2) $(-5)-(+2)$; 4) $(-5)-(-2)$.

Esimese üleskirjutuse mõte on selline: sirgel punktist O lähtub kaks keha; esimene liigub 5 m paremale poole $(+5)$, teine 2 m paremale poole $(+2)$; millises suunas ja mitu meetrit peab liikuma teine keha et jõuda esimeseni?

Selleks et jõuda punktist, mis on O-st 2 meetri kaugusel paremal pool, punkti 5 meetri kaugusel O-st paremal pool, tuleb kehal läbida $5-2=3$ m, liikudes paremale poole (joon. 5).



Joon. 5.

Niisiis $(+5)-(+2)=+3$.

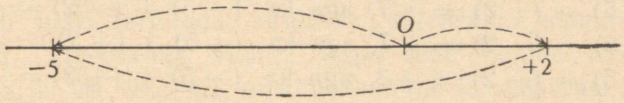
Järeleproovimine liitmise abil annab: $(+2)+(+3)=+5$.

Teise üleskirjutuse mõte on: sirgel punktist O lähtub kaks keha; esimene liigub 5 m vasakule poole, teine 2 m paremale poole; millises suunas ja mitu meetrit peab liikuma teine keha, et jõuda esimeseni? Jooniselt 6 on näha, et teine keha peab liikuma vasakule poole ja läbima $2+5=7$ m.

Niisiis $(-5)-(+2)=-7$.

Järeleproovimine liitmise abil annab: $(+2)+(-7)=-5$.

Kolmanda üleskirjutuse mõte on: sirgel punktist O lähtub kaks keha; esimene liigub 5 m paremale poole $(+5)$, teine 2 m vasakule poole (-2); millises suunas ja mitu meetrit peab liikuma teine keha, et jõuda esimeseni?

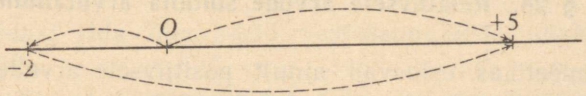


Joon. 6.

On selge, et liikumine peab toimuma paremale poole ja kehal tuleb edasi minna 2 m, et jõuda punkti O, ja siis veel 5 m paremale poole, et jõuda esimese kehani; kokku $2+5=7$ m.

Niisiis $(+5)-(-2)=+7$ (joon. 7).

Järeleproovimine liitmise abil annab: $(-2)+(+7)=+5$.

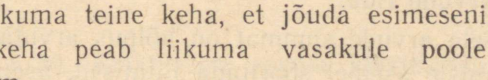


Joon. 7.

Neljanda üleskirjutuse mõte on: sirgel punktist O lähtub kaks keha; esimene liigub 5 m vasakule poole (-5), teine 2 m ka vasakule poole (-2); millises suunas ja mitu meetrit peab liikuma teine keha, et jõuda esimeseni? On selge, et teine keha peab liikuma vasakule poole ja läbima $5-2=3$ m.

Järelikult $(-5)-(-2)=-3$ (joon. 8).

Järeleproovimine liitmise abil annab: $(-3)+(-2)=-5$.



Joon. 8.

Selleks et tuletada relatiivsete arvude lahutamise reeglit, võrdleme lahutamist liitmisega, kus liidetakse arv, mis on vastupidine lahutatavale:

$(+5) - (+2) = +3$, aga ka $(+5) + (-2) = +3$;
$(-5) - (+2) = -7$, aga ka $(-5) + (-2) = -7$;
$(+5) - (-2) = +7$, aga ka $(+5) + (+2) = +7$;
$(-5) - (-2) = -3$, aga ka $(-5) + (+2) = -3$.

Me näeme vahetult, et mistahes relatiivse arvu lahutamine asendub sellele vastupidise relatiivse arvu liitmisega. Siit saamegi relatiivsete arvude lahutamise reegli: vähendatav jääb muutmata, lahutamismärk — asendatakse +-märgiga, lahutatava märk sulgudes asendatakse vastupidisega ja sooritatakse relatiivsete arvude liitmine.

§ 28. Relatiivsete arvude summa arvutamine.

Aritmeetikas esinevad ainult positiivsete arvude summa ja vahe, näiteks summa kujul $9 + 3$ ja vahe kujul $9 - 3$. Algebras aga võib vahele $9 - 3$ vaadata ka kui relatiivsete arvude summale $9 + (-3)$, sest $9 + (-3) = 9 - 3$. Seepärast algebras ongi summa mitte ainult summa, vaid ka arvude vahe, ja summaks nimetatakse märkidega + ja − ühendatud arvude rida.

Relatiivsete arvude summat on hõlpus arvutada, kui kõikide lahutamiste asemel sooritada liitmised, asendades lahutatavad nendele vastupidiste arvudega.

Näide. $(-7) + (-5) - (+4) + (-2) - (-12) =$
$= (-7) + (-5) + (-4) + (-2) +$
$+ (+12) = (-18) + (+12) = -6.$

+- ja −-märkidega ühendatud relatiivsete arvude rida nimetatakse traditsiooni järgi tihti algebraliseks summaks;

sõna „algebraline" on üleliigne; see on säilinud ajast, mil negatiivsed arvud olid algebra tunnuseks. Teaduses tarvitatakse seda sõna vähe. Terminoloogia ühtlustamise huvides tuleb ka koolis loobuda terminist „algebraline summa", asendades selle lihtsalt „summaga".

Kui siiski tarvitada terminit „algebraline summa", siis termin „algebraline vahe", nagu seda leiame Kisseljovil (I osa, lk. 28, vene k.), on täiesti liigne ja seepärast tarbetu.

§ 29. Ülesanded negatiivsete arvude lahutamise kohta.

Negatiivsete arvude lahutamise ülesanded tuleb valida järgmises järjestuses:

1. Algul antakse mõned tekstülesanded lahutamise kohta.
2. Siis harjutusi Šapošnikovi õpikust lahutamistehnika kohta.
3. Edasi rida ülesandeid vastassuunaliste jõudude liitmise kohta.
4. Selliseid küsimusi: kui palju on üks relatiivne arv suurem teisest relatiivsest arvust?
5. Lõpuks rida järgmisi küsimusi: kui suur on arvu ja selle vastupidise arvu vahe? Kui suur on kahe võrdse relatiivse arvu vahe?

§ 30. Relatiivsete arvude korrutamine.

Relatiivsete arvude korrutamine tuuakse analoogiliselt arvude liitmisele sisse kui definitsioon ja seepärast ei saa seda tõestada. Et õpilastel puuduvad kujutlused tõelisest asjaolust, siis on soovitav teostada relatiivsete arvude korrutamist järgmiselt: anda kahe relatiivse arvu korrutise definitsioon ja siis juba korrutamist illustreerida graafiliselt.

D e f i n i t s i o o n. Kahe relatiivse arvu korrutiseks nimetatakse nende arvude absoluutväärtuste korrutist, mis on võetud plussmärgiga, kui tegurite märgid on ühesugused, ja miinusmärgiga, kui tegurite märgid on erinevad.

Järelikult definitsiooni põhjal saame vahetult:

$$(+2)\cdot(-5)=-10;$$
$$(-2)\cdot(-8)=+16;$$
$$(+4)\cdot(-1)=-4;$$
$$(+3)\cdot(+2)=+6;$$
$$0\cdot(-8)=0;$$
$$(-12)\cdot 0=0.$$

Pärast definitsiooni omandamist võib anda relatiivsete arvude korrutisele graafilise illustratsiooni, käsitades seda igatahes mitte kui tõestust.

Relatiivsete arvude korrutamist võib analoogiliselt liitmisele ja lahutamisele illustreerida konkreetse ülesandega, mis annab tehtele reaalse mõtte. Ülesande valikul tuleb selgitada vahet ühelt poolt liitmise ja lahutamise ning teiselt poolt liitmise ja korrutamise vahel. Liidetavad ja lahutatavad suurused on samanimelised, s. o. nad kõik väljendavad kas lõikusid, tunge või ajavahemikke jne.; relatiivsete arvude korrutamisel aga mõlemad tegurid ei väljenda samanimelisi suurusi, seejuures on kumbki neist relatiivne arv. Kaks kõige sagedamini esinevat suurust, mida väljendavad relatiivsed arvud, on pikkus ja aeg. Pikkusi väljendavaid arve tuleb korrutada aega väljendavate arvudega ülesannetes ühtlase liikumise puhul. Näiteks et määrata teepikkust s (meetrit), mis on läbitud t ajaühiku jooksul (t sek.) kiiruse v m/sek puhul, tuleb rakendada valemit $s=vt$. Et kumbki suurustest v ja t võib olla väljendatud relatiivse arvuga, siis on tarvis meenutada kokkuleppet pluss- ja miinusmärgi kohta pikkuse ja aja puhul.

Pikkuse puhul:

$+$ väljendab suunda ülespoole või paremale,
$-$ väljendab suunda allapoole või vasakule,
0 on alguspunkt.

Aja puhul:

$+$ väljendab eelseisvat aega,
$-$ väljendab möödunud aega,
0 väljendab antud momenti.

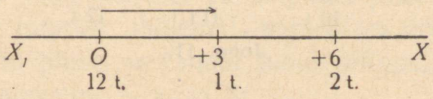
Kahe relatiivse arvu korrutamisel võib esineda neli järgmist juhtu:

1) $(+3)\cdot(+2)$;
2) $(-3)\cdot(+2)$;
3) $(+3)\cdot(-2)$;
4) $(-3)\cdot(-2)$.

Arutleme kõiki neid nelja juhtu ülesandes ühtlase liikumise kohta, püsides ülaltoodud kokkuleppe alusel.

1. Arutleme esimest juhtu: $(+3)\cdot(+2)$.

Kiirus v on $+3$, s. o. keha liigub vasakult paremale kiirusega 3 km tunnis; aeg $t=+2$; kokkuleppe põhjal $+2$ väljendab eelseisvat aega; küsimus sõnastatakse järgmiselt: antud momendil, näiteks kell 12, on keha alguspunktis O; keha liigub vasakult paremale kiirusega 3 km tunnis; kus on keha tunni pärast, s. o. kui kaugel O-st ja mis suunas (joon. 9)?



Joon. 9.

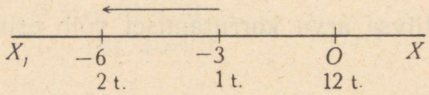
Et keha liigub O-st paremale poole, siis 2 tunni pärast on ta O-st $2\cdot3=6$ km kaugusel paremal pool.

Lühidalt kirjutame tehte nii:

$$(+3) \cdot (+2) = +6.$$

2. Võtame arutlusele teise juhu: $(-3) \cdot (+2)$.

Et kiirus v on -3, siis keha liigub vasakule kiirusega 3 km tunnis; aeg $t = 2$, järelikult tuleb võtta 2 tundi pärast algusmomenti ehk keskpäeva; küsimus sõnastatakse järgmiselt: antud momendil, s. o. keskpäeval on keha punktis O; ta liigub vasakule kiirusega 2 km tunnis; kui kaugel O-st ja mis suunas on keha 2 tunni pärast (joon. 10)?



Joon. 10.

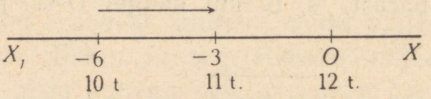
Et keha liigub O-st vasakule, siis kahe tunni pärast on ta O-st $3 \cdot 2 = 6$ km kaugusel vasakul pool.

Tehte kirjutame järgmiselt:

$$(-3) \cdot (+2) = -6.$$

3. Arutleme kolmandat juhtu: $(+3) \cdot (-2)$.

$v = +3$, $t = -2$; vastavalt kokkuleppele sõnastatakse küsimus järgmiselt: antud momendil on keha punktis O; ta liigub vasakult paremale kiirusega 3 km tunnis. Kus oli keha tunni eest (joon. 11)?



Joon. 11.

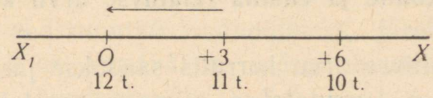
Keha tuli punkti O vasakult poolt; kahe tunni eest oli ta $3 \cdot 2 = 6$ km kaugusel O-st vasakul pool.

Üleskirjutus on järgmine:

$$(+3) \cdot (-2) = -6.$$

4. Neljas juhtum: $(-3)\cdot(-2)$.

$v=-3$; $t=-2$; kokkuleppe alusel tuleb küsimus sõnastada järgmiselt: keha liigub paremalt vasakule kiirusega 3 km tunnis; antud momendil on keha punktis O. Kus kohal oli keha kahe tunni eest (joon. 12)?



Joon. 12.

Et keha liigub paremalt vasakule, siis tuli ta punkti O paremalt ja kahe tunni eest oli ta $3\cdot2=6$ km kaugusel O-st paremal.

Tehte üleskirjutus on järgmine:

$$(-3)\cdot(-2)=+6.$$

5. Selleks et oleksid läbi arutatud kõik korrutamise võimalikud juhud, tuleb veel vaadata juhtu, kus üks tegureist on null.

Võtame juhu $0\cdot(+2)$. Kui kiirus on null, siis keha on paigal ja igal momendil on ta lähtepunktis. Järelikult: $0\cdot(+2)=0$.

Sellega ongi läbi arutatud relatiivsete arvude korrutamise kõik võimalikud juhud. Jääb vaid püstitada relatiivsete arvude korrutamise üldine võte, mis poleks seotud geomeetriliste illustratsioonide joonestamise ebamugavustega.

Üldistame enne esimese ja neljanda juhu. Neil on järgmine ühine tunnus: mõlemal teguril on ühesugune märk, esimesel juhul pluss, neljandal juhul miinus; mõlemal juhul on korrutis plussiga, s. o. $+6$.

Siit järeldub reegel: kui mõlemal teguril on ühesugune märk, siis korrutisel on plussmärk.

Üldistame teise ja kolmanda juhu. Neil on järgmine ühine tunnus: tegurid on eri märkidega, teisel juhul korruta-

tav on miinusega, korrutaja plussiga, kolmandal juhul korrutatav on plussiga, korrutaja miinusega; korrutisel on mõlemal juhul miinusmärk; ta võrdub — 6-ga.

§ 31. Kolme ja enama relatiivse arvu korrutis.

Mitme relatiivse arvu korrutis saadakse järjestikuse korrutamisega, s. o. korrutatakse esimene arv teisega, saadud korrutis kolmandaga jne. kuni lõpuni.

Näited:

$$(+2)\cdot(+3)\cdot(+5) = +30;$$
$$(-2)\cdot(+3)\cdot(+5) = -30;$$
$$(-2)\cdot(-3)\cdot(+5) = +30;$$
$$(-2)\cdot(-3)\cdot(-5) = -30;$$
$$(+2)\cdot(+3)\cdot(+5)\cdot(+4) = +120;$$
$$(-2)\cdot(+3)\cdot(+5)\cdot(+4) = -120;$$
$$(-2)\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(+4) = +120;$$
$$(-2)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(+4) = -120;$$
$$(-2)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-4) = +120.$$

Et negatiivse arvuga korrutamisel märk muutub, siis järeldame: kui kõik tegurid on positiivsed, siis on ka korrutis positiivne; kui negatiivsete tegurite arv on paaritu arv, siis korrutis on negatiivne; kui negatiivsete tegurite arv on paarisarv, siis korrutis on positiivne.

Selle reegli saame analüütiliselt, arutelles järgmiselt: kui negatiivsete tegurite arv on paarisarv, siis võib tegurid jaotada mitmeks paariks; iga paari korrutis on positiivne, järelikult kõigi paaride kui positiivsete arvude korrutis on positiivne. Kui negatiivsete tegurite arv on paaritu arv, siis tegurite jagamisel paarideks üks tegur jääb üle. Kõigi paaride korrutis on positiivne, aga selle positiivse arvu

korrutamisel ülejäänud negatiivse teguriga saadakse negatiivne arv [1].

Kui üks teguritest on üks, siis korrutis võrdub teise teguriga; ka ei muutu siin märk. Järelikult korrutamisel ühega teguri absoluutväärtus ja ka märk ei muutu.

Korrutamisel (-1)-ga korrutatava absoluutväärtus ei muutu, märk aga muutub vastupidiseks, järelikult korrutamine (-1)-ga on samaväärne märgi muutumisega vastupidiseks, teiste sõnadega: $(-1) \cdot (+a) = -a$.

§ 32. Relatiivsete arvude korrutamise omadused.

Relatiivsete arvude korrutamisel on vahetuvus-, ühenduvus- ja jaotuvusomadus.

1. Vahetuvusomadus. Korrutise absoluutväärtus võrdub tegurite absoluutväärtuste korrutisega; aritmeetika reeglite põhjal on sel korrutisel vahetuvusomadus. Kahe relatiivse arvu korrutise märk aga ei olene tegurite järjekorrast, vaid ainult sellest, kas teguritel on ühesugused või vastupidised märgid. Näiteks:

$$(+a) \cdot (-b) = -ab = -ba = (-b) \cdot (+a).$$

2. Ühenduvusomadus. Kolme arvu a, b ja c korrutisel on ühenduvusomadus, s. o. $[a(bc)] = [(ab) \cdot c]$. Korrutise märgi aga määrab negatiivsete tegurite arv; see arv ei olene ühenduse järjekorrast. Näiteks:

$$(-a) \cdot [(+b) \cdot (-c)] = [(-a) \cdot (+b)] \cdot (-c).$$

[1] Tuleb vältida väga levinud relatiivsete arvude korrutamise reegli sõnastust kujul: „pluss plussiga annab plussi", „pluss miinusega annab miinuse". Selles sõnastuses pole esiteks öeldud, et jutt on korrutamisest, teiseks tekib kujutlus mingist mõttetust manipulatsioonist märkidega, mis on arvudest lahti kistud.

3. Jaotuvusomadus. Näiteks:

$$(-5)[(-2)+(-6)] = (-5)\cdot(-8) = 40.$$
$$(-5)(-2)+(-5)\cdot(-6) = 10+30 = 40.$$

Järelikult

$$(-5)[(-2)+(-6)] = (-5)\cdot(-2)+(-5)\cdot(-6).$$

4. Relatiivsete arvude korrutamine erineb positiivsete arvude korrutamisest ühe omaduse poolest.

Tõepoolest, kui $a > b$, saame $ac > bc$, kui $c > 0$.

Kui $c = 0$, saame $ac = bc$, olenemata a ja b väärtusest.

Kui $c < 0$ ja $a > b$, saame $ac < bc$.

5. Ühelise-omadus. Tõestame, et võrdus $a \cdot 1 = a$ on kehtiv ka relatiivsete arvude puhul.

See omadus on meile juba tuttav, kui a on positiivne või võrdne nulliga. Kui aga a on negatiivne arv, siis vastuvõetud korrutamise definitsiooni järgi korrutise $a \cdot 1$ absoluutväärtus võrdub $|a| \cdot |1| = |a| \cdot 1 = |a|$ ja korrutise märk ühtib arvu a märgiga.

Mistahes arvu a korrutamine (-1)-ga on samaväärne märgi muutumisega vastupidiseks, s. o.

$$a \cdot (-1) = -a.$$

Tõepoolest, $a \cdot (-1) = -1(a)$ (korrutamise vahetuvusseaduse põhjal). Kumbki nendest korrutistest võrdub

$$-(1 \cdot a) = -a.$$

§ 33. Relatiivsete arvude jagamine.

Lähtudes definitsioonist, mille järgi jagamine on korrutamise pöördtehe, ja toetudes relatiivsete arvude korrutamise reeglile, saadakse relatiivsete arvude jagamise reegel. Selgitame seda näite abil.

Olgu antud $+20$ jagada $+4$-ga.

1. $(+20) : (+4) = +5$. Selleks et jagada $(+20)$ $(+4)$-ga, tuleb tõepoolest leida arv, mille korrutis $+4$-ga võrduks $+20$-ga. Et $+20$ on kahe relatiivse arvu korrutis, siis võib ta olla positiivne ainult siis, kui mõlemad tegurid on ühesuguse märgiga, ja et üks tegur on plussmärgiga, siis ka teine tegur peab olema plussmärgiga. Et kahe relatiivse arvu korrutise absoluutväärtus võrdub tegurite absoluutväärtuste korrutisega, siis jagatis peab olema $+5$.

2. $(+20) : (-4) = -5$, sest $(-5) \cdot (-4) = +20$.

3. $(-20) : (+4) = -5$, sest $(-5) \cdot (+4) = -20$.

4. $(-20) : (-4) = +5$, sest $(+5) \cdot (-4) = -20$.

Jagamine nulliga tuleb tehete hulgast kõrvaldamisele varemesitatud kaalutlustel.

§ 34. Relatiivsete arvude astendamine, kui astendaja on positiivne täisarv.

Aste on võrdsete tegurite korrutis. Astendamine on korrutamise erijuhtum. Relatiivsete arvude korrutamine koosneb kahest operatsioonist: korrutise absoluutväärtuse leidmisest tegurite absoluutväärtuste korrutamise abil ja märgi määramisest. Järelikult ka relatiivsete arvude astendamine koosneb kahest operatsioonist: astme absoluutväärtuse leidmisest aluse järkjärgulise korrutamise teel alusega ja märgi määramisest. Esimene operatsioon toimub täis- ja murdarvude korrutamise reegli kohaselt. Nüüd tuletame astme märgi määramise reegli. Ilmselt on võimalik kaks juhtu: 1) positiivse arvu astendamine ja 2) negatiivse arvu astendamine. Et astendamine on korrutamise erijuhtum, siis positiivse arvu aste on positiivne; negatiivse arvu astendamisel aga võib esineda kaks võimalust:

1) Negatiivse arvu astendamine paarisastmesse ja 2) negatiivse arvu astendamine paaritusse astmesse. Nega-

tiivsete arvude korrutis paarisarvu tegurite puhul on positiivne, paaritu arvu tegurite puhul aga negatiivne. Seepärast ongi negatiivse arvu paarisaste positiivne ja paaritu aste negatiivne.

Näited.

$(+2)^3 = 8$; $(+3)^4 = 81$; $(+5)^2 = 25$; $\left(+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

$\left(+\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$; $(-2)^2 = 4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = 16$;

$(-2)^5 = -32$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Üldistame astendaja, võttes selleks m (m on täisarv):

$(+2)^{2m} = 2^{2m}$; $(+2)^{2m+1} = 2^{2m+1}$; $(+2)^{2m-1} = 2^{2m-1}$;

$\left(+\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}$; $\left(+\frac{1}{2}\right)^{2m+1} = \frac{1}{2^{2m+1}}$; $\left(+\frac{1}{2}\right)^{2m-1} = \frac{1}{2^{2m-1}}$.

$(-2)^{2m} = 2^{2m}$; $(-2)^{2m+1} = -2^{2m+1}$; $(-2)^{2m-1} = -2^{2m-1}$;

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m+1} = -\frac{1}{2^{2m+1}}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2m-1} = -\frac{1}{2^{2m-1}}$.

Täiesti üldkujul:

$(+a)^{2m} = a^{2m}$; $(+a)^{2m+1} = a^{2m+1}$; $(+a)^{2m-1} = a^{2m-1}$;

$(-a)^{2m} = a^{2m}$; $(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}$; $(-a)^{2m-1} = -a^{2m-1}$.

Erijuhul 1 ja -1 astendades saame:

$(+1)^{2m} = 1$; $(+1)^{2m+1} = 1$; $(+1)^{2m-1} = -1$.

$(-1)^{2m} = 1$; $(-1)^{2m+1} = -1$; $(-1)^{2m-1} = -1$.

(Vt. märkus 7 raamatu lõpus.)

§ 35. Negatiivsete arvude ajaloost.

Sellest hoolimata, et negatiivse arvu idee tekkis võrdlemisi hilja, on ta muutunud laiade ringkondade kultuuriliseks omandiks. See termin on tarvitusel igapäevases kõnes: rää-

gitakse „negatiivsest küljest", „negatiivsetest tulemustest" kui vastanditest „positiivsele küljele", „positiivsetele tulemustele" jne.

Korrutise $(x-1)(x-3)$ arvutamisel annab juba Diophantos (III saj. m. a. j.) märkide reegli („puudujääk puudujäägiga annab liia"), aga ta ei võta vaatlusele negatiivseid arve väljaspool ühendusi tähtedega.

Hindud tarvitasid negatiivse arvu tähistamiseks eri märki täpi või ristikese kujul, mis asetati arvu peale või selle kõrvale; XII sajandi hindu matemaatikutel esinevad juba negatiivsed arvud.

Ka ülesannete lahendamine võrrandite abil pidi viima negatiivsetele arvudele. Selgitame seda võrrandi $x+31=52$ najal.

On teada, et $x=52-31$ ehk $x=21$.

Samataolist ülesannet tuleb tihti lahendada teiste numbriliste väärtuste puhul. Vajadus lahendada ülesandeid üldkujul nõudis täheliste sümbolite tarvituselevõtmist. Tähtedega omandab eelmine võrrand kuju

$$x+b=a,$$

siit

$$x=a-b.$$

Kui a ja b on mistahes arvud, siis $a-b$ on positiivne ainult juhul, kui $a>b$.

Kui $a=b$, saame $x+a=a$; $x=a-a=0$; võrdusest $a-a=0$ järeldub $0+a=a$. See võrdus ongi nulli definitsioon.

Kui $a<b$, saame $x+b=a$; $x=a-b$. See on negatiivse arvu definitsioon.

Pole kahtlust, et negatiivsete arvude tarvituselevõtmise paremused olid selged paljudele matemaatikutele, aga siiski neid arve ei tunnustatud pikemat aega. Nii ütleb hindu Bhascari (XII saj.): „Inimesed ei tunnusta negatiivseid arve

kui iseseisvaid arve." Ka araablased, kes oma teadmised said hindudelt, ei tunnustanud võrrandi negatiivseid lahendeid. Läänes kohtame negatiivseid arve Leonardo Pisano'l (Fibonacci'l) XIII sajandil; see teadlane käsitab ühe ülesande lahendamisel saadud negatiivset lahendit võlana.

Diophantose teos ilmus trükist 1575. a., s. o. enam kui tuhat aastat pärast teadlase surma, kuid negatiivsetest arvudest arusaamine ei olnud selle aja jooksul sugugi edasi nihkunud. Märkide + ja — tähistamiseks tarvitati, tõsi küll, eri terminit „koosilised märgid" (sümboliga cos a tähistati otsitavat suurust võrrandis), ka sooritati mõningaid tehteid nende märkidega, aga negatiivsete arvude olu jäi siiski selgitamata; kui I ja II astme võrrandite lahendamisel saadi negatiivsed lahendid, siis kõrvaldati need kui valed, ehkki võeti vaatlusele ruutvõrrandi mõlemad lahendid, kui need olid positiivsed.

Mõõdunud sajandi 30-ndail aastail avaldab selles küsimuses oma arvamust Gauss, kes ütleb oma memuaarides: „Positiivsed ja negatiivsed arvud leiavad rakendust seal, kus sellel, mida loendatakse, on olemas vastupidine, millega koos loendatav suurus muutub nulliks. Rangel vaatlusel osutub, et selline olukord esineb siis, kui loendatavateks on mitte substantsid, vaid mingi kahe eseme vahelised suhted. Seejuures peab aga täidetud olema nõue, et esemed oleksid korraldatud ritta määratud viisil, näiteks: A, B, C, D, ja nõnda, et suhe A ja B vahel võrduks suhtega C ja D vahel, jne. Vastupidisuse mõiste seisab võimaluses suhteid ümber vahetada, et kui suhe, s. o. üleminek A-st B-sse, on väljendatud + 1-ga, siis B suhe A-ga peab väljenduma — 1-ga. Millisel määral on selline rida mõlemast poolest piiramatu, sellisel määral kujutab iga reaalne täisarv suhet mingi (meelevaldselt esimeseks võetud) rea liikme ja määratud liikme vahel. Ei saa negatiivsetelt arvudelt võtta õigusi, mis on samad kui positiivsetel, ainult sellepärast, et paljudel asjadel pole

vastupidisust ... Negatiivsete arvude tõelisus leiab õigustamist selles, et paljudel teistel juhtudel neil on sobiv alus."

Pärast Gauss'i võib negatiivsete arvude õpetust pidada juba väljakujunenuks. Selle õpetuse edaspidine arenemine XIX saj. kõrvaldas kõik eelmised katsed põhjendada ja tõestada märkide reegleid; tekkis vaade, et negatiivsete arvude kasutamine ja märkide reeglid negatiivsete arvudega sooritatavate tehete kohta pole tõestatavad, vaid on kokkuleppe asjad, mida tingib otstarbekohasus. Relatiivsete arvude süsteemi kasutatakse sellepärast, „et nende märkidega on sobiv väljandada esemete reaalseid omadusi".

§ 36. Relatiivsete arvude süsteemi esitamine arvupaaride teooria ja võrratuste abil.

Me esitasime relatiivsete arvude õpetuse näitlik-konkreetsel kujul. Teaduslikus kirjanduses tehakse seda teiste võtetega.

Näiteks võtame sõnasõnalise tõlke Van der Waerdeni raamatu „Moderne Algebra" järgmisest kohast: „Sümbolite (negatiivsete arvude jaoks) ja nulli (0) kasutamiselevõtmisega võib loomulikkude arvude rida täiendada täisarvude süsteemini. Selle süsteemi seaduste paremaks selgitamiseks on otstarbekohane täisarve kujutada loomulikkude arvude (a, b) abil, nimelt:

loomulikku arvu a $(a+b, b)$ abil,
arvu 0 (b, b) abil,

negatiivset arvu $-a$ $(b, a+b)$ abil,

kus b on samuti loomulik arv.

Iga arvu võib kujutada mitmete sümbolite (a, b) kujul, aga iga sümbol (a, b) määrab üht ja sedasama täisarvu, nimelt:

loomulikku arvu $a - b$, kui $a > b$,
arvu 0, kui $a = b$,
negatiivset arvu $-(b - a)$, kui $a < b$.

Edasi määratakse:

$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$;
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd,\ ad + bc)$;
$(a, b) < (c, d)$ või $(c, d) > (a, b)$, kui $a + d < b + c$.

Pole raske järele proovida esiteks, et definitsioon ei sõltu sümbolite valikust vasakul poolel, kui ainult nende sümbolitega tähistatud arvud ei muutu; teiseks, et liitmise seadused on õiged: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $a + b = b + a$, kui $a + b = a + c$, siis $b = c$.

Õiged on ka korrutamise seadused:

$$(ab) \cdot c = a \cdot (bc);\ a \cdot b = b \cdot a;\ a(b + c) = ab + ac.$$

Kahe mistahes arvu vahel võib olla üks järgmistest vahekordadest:

$$a > b,\ a = b,\ a < b.$$

Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a > c$. Kui $a < b$, siis $a + c < b + c$.

Kui $a < b$, siis $ac < bc$. Viimane on õige, kui $c > 0$.

Kolmandaks, võrrandil $a + x = b$ on arvude laiendatud süsteemis eranditult üheväärtuseline lahend; seda lahendit väljendame avaldisega $b - a$.

Neljandaks, $ab = 0$ siis ja ainult siis, kui $a = 0$ või $b = 0$."

Milles siis seisab negatiivsete arvude sissetoomise paremus arvupaaride abil?

1. Sisse tuues relatiivse arvu uut mõistet, kasutatakse selle tähistamiseks sümbolit (a, b). Arvude a ja b vahele ei panda mingit märki, eriti mitte miinusmärki; seda sellepärast, et ennast mitte siduda selle märgi eelmise mõttega.

2. Kahe uue sümboli võrdus ja liitmis- ning korrutamistehted defineeritakse; lahutamine ja jagamine määratakse kui liitmise ja korrutamise pöördtehted.

Esitatud negatiivsete arvude sissetoomise viis kui liialt abstraktne pole koolile vastuvõetav. Tuleb tähendada, et näidatud negatiivsete arvude sissetoomise viis pole ainus. Võib aluseks võtta teise aksioomide süsteemi, mille abil on võimalik tõestada neid lauseid, mis enne võeti aksioomidena.

Näiteks teiste aksioomide valikul võib tõestada need märkide reeglid relatiivsete arvude korrutamise kohta, mis enne olid võetud definitsioonidena. Kõik need relatiivsete arvude sissetoomise viisid on liiga rasked, liiga abstraktsed, seepärast ei saagi neid kasutada õpetamisel koolis.

§ 37. Kahe punkti vahelise kauguse arvutamine.

Näitame, et vahemaa kahe punkti vahel teljel AB väljendatakse suuruse ja suuna poolest ikka olenematult punktide A, B ja O asendist avaldisega $b - a$, kus b ja a on vastavalt punktide A ja B abstsissid.

Mõeldavad on järgmised punktide A, B ja O asendid.

1. Punktid A ja B on paremal pool O-st, seejuures B võib olla paremal või vasakul pool A-st (joon. 13 ja 14).

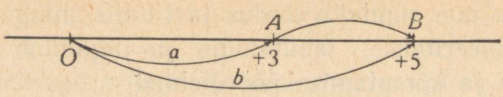
2. Punktid A ja B on mõlemal pool O-st, seejuures B võib olla paremal või vasakul pool O-st (joon. 15 ja 16).

3. Punktid A ja B on vasakul pool O-st, seejuures B võib olla paremal või vasakul pool A-st (joon. 17 ja 18).

Tähendab, kokku on kuus eri punktide asendit. Arvutame vahemaa AB iga üksiku juhu kohta.

1. Olgu $OA = a = 3$; $OB = b = 5$.

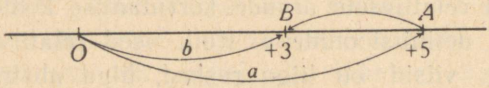
AB absoluutväärtus võrdub $OB - OA = 5 - 3 = 2$; et AB on positiivne suurus, siis $AB = 2$ (joon. 13).



Joon. 13.

Lihtsamalt võib AB leida nii: $b - a = 5 - 3 = 2$.

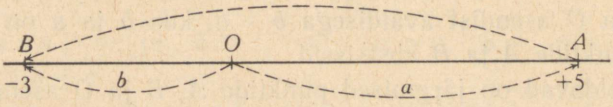
2. Olgu $OA = a = 5$; $OB = b = 3$. AB absoluutväärtus võrdub $OA - OB = 5 - 3 = 2$; et AB on negatiivne suurus, siis järelikult $AB = -2$ (joon. 14).



Joon. 14.

Lihtsamalt võib AB leida nii: $b - a = 3 - 5 = -2$.

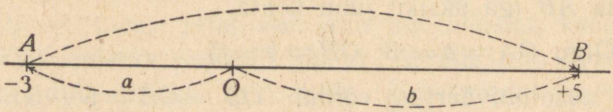
3. Olgu $OA = a = -3$; $OB = b = 5$. AB absoluutväärtus võrdub $AO + OB = 3 + 5 = 8$; et AB on positiivne suurus, siis järelikult $AB = +8$ (joon. 15).



Joon. 15.

Lihtsamalt võib AB leida nii: $b - a = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$.

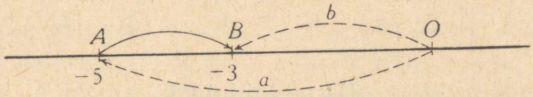
4. Olgu $OA = a = 5$; $OB = b = -3$. AB absoluutväärtus võrdub $AO + OB = 5 + 3 = 8$; et AB on negatiivne suurus, siis järelikult $AB = -8$ (joon. 16).



Joon. 16.

Lihtsamalt võib AB leida nii: $b - a = (-3) - (+5) = -3 - 5 = -8$.

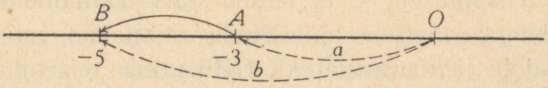
5. Olgu $OA = a = -5$; $OB = b = -3$. AB absoluutväärtus võrdub $AO - OB = 5 - 3 = 2$; et AB on negatiivne suurus, siis järelikult $AB = 2$ (joon. 17).



Joon. 17.

Lihtsamalt võib AB leida nii: $b - a = -3(-5) = -3 + 5 = 2$.

6. Olgu $OA = a = -3$; $OB = b = -5$. AB absoluutväärtus võrdub $OB - OA = 5 - 3 = 2$; et AB on negatiivne suurus, siis järelikult $AB = -2$ (joon. 18).



Joon. 18.

Lihtsamalt võib AB leida nii: $b - a = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$.

Kõigis kuues punktides A, B ja O asendis määratakse lõigu AB pikkus avaldisega $b - a$, s. o. lõigu otsa ja alguse abstsisside vahega; märk seejuures näitab lõigu suunda teljel.

III peatükk.

Tehted täis-üksliikmete ja täis-hulkliikmetega.

§ 38. Teaduslikud ja metoodilised puudused selle peatüki käsitlemisel koolis.

Selle peatüki sisuks on ratsionaalsete täisavaldiste samased teisendused, s. o. tehted täis-üksliikmete ja täis-hulkliikmetega. Sellele ainestikule rajanevad ratsionaalsete murdavaldiste ja kaugemal ka radikaalide teisendused. Mainitud teisendused on vajalikud ka täheliste kordajatega võrrandite lahendamisel.

Selle peatüki õpetamisel koolis esineb palju ebaselgusi, üksliikme ja hulkliikme definitsioonis tuleb ette lahkhelisid ja kõrvalekaldumisi teaduses vastuvõetud definitsioonidest; hulkliikme tegureiks lahutamisele, sellele väga tähtsale osale on tihti osutatud vähe tähelepanu (Kisseljovi õpikus on sellele küsimusele pühendatud vähem kui kolm lehekülge).

Õpilaste massiliste vigade vaatlus näitab, et suur protsent vigu esineb just siin; siia kuuluvad näiteks järgmised vead, mida õpilased teevad vähemalt algul:

$$4a - 3a = 1;\quad 12a^2b - 7b = 5a^2;\quad 7a^4 - 3a^2 = 4a^2.$$

Need vead tõendavad, et puudub arusaamine tähtavaldiste mõttest.

§ 39. Üksliikmete ja hulkliikmete definitsioon.

Üksliikme ja hulkliikme teaduslik definitsioon erineb neile mõisteile koolialgebras antavast definitsioonist. Teaduses nimetatakse täis-hulkliikmeks (polünoomiks) x-i suhtes avaldist $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_kx^{m-k} + \ldots + A_m$. Kordajad A_0, A_1, $A_2 \ldots A_k \ldots A_m$ ei olene x-st. Kui $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_k = \ldots = A_m = 0$, siis hulkliige omab kuju A_0x^m ja teda nimetatakse üksliikmeks.

Sellest seisukohast lähtudes pole põhimõttelist vahet hulkliikme ja üksliikme vahel; üksliige on hulkliikme erijuhtum, kui kordajad A_1, $A_2 \ldots A_k \ldots A_m$ võrduvad nulliga.

Veel enam, mõnikord on otstarbekohane üksliiget käsitada hulkliikmena. Kui mõne omaduse kehtivus on tõestatud hulkliikme mistahes kordajate kohta, siis on see omadus kehtiv ka juhul, kui $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_k = \ldots A_m = 0$, s. o. üksliikme kohta.

Asi on aga teisiti keskkooli õppekirjanduses; siin esineb üksliikme kaks definitsiooni. Vastavalt ühele definitsioonile on üksliige avaldis, milles ei esine liitmist ja lahutamist. Teise definitsiooni järgi on üksliige avaldis, milles viimaseks tehteks pole liitmine ega lahutamine. Mõlemal definitsioonil on negatiivne iseloom. Hulkliikmeks aga nimetatakse pluss- või miinusmärkidega ühendatud üksliikmete kogumit.

Mõlemad üksliikme kooli-definitsioonid erinevad teaduslikust definitsioonist. Ülikoolis on põhimõisteks hulkliige ja üksliige on selle erijuhuks. Keskkoolis on aga põhimõisteks üksliige ja hulkliige on üksliikmete algebraline summa.

Koolis tarvitusele võetud erinevad definitsioonid on tingitud metoodilistest kaalutlustest: koolipraktikas on hõlpsam alustada erijuhust, lihtsamast, nimelt üksliikmest. Kuid tulemuseks on lahkhelid. Avaldisele $3(a + b + c)$ vaatavad ühed kui üksliikmele, teised jälle kui hulkliikmele; lõpuks mõned arvavad, et see avaldis pole ei üks ega teine. Selline olukord

pole muidugi lubatav, ja on selge, et kooliterminoloogia tuleb kooskõlastada teaduslikuga.

Algebralisi avaldisi, milledes ei esine sulge, nimetatakse üksliikmeiks, kui nendes pole liitmist või lahutamist; vastasel korral on avaldis hulkliige.

Näiteks a^3, a^2, b, $\frac{a}{b}$ on üksliikmed; $a+b$, a^3+a^2b+ $+ab^2$ on hulkliikmed.

Vastavalt definitsioonile võivad üksliikmes esineda ainult korrutamine, jagamine ja astendamine. Et aga aste on korrutise erijuhtum ja jagamine on samaväärne korrutamisega jagaja pöördarvuga, siis võib üksliikmele anda positiivse definitsiooni ja käsitada teda korrutisena; näiteks:

$$7a^2b = 7 \cdot a \cdot a \cdot b; \quad \frac{5ab}{c} = 5 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{c}.$$

Üksliikmeiks on ka avaldised, mis koosnevad ainult ühest tähest või ühest arvust; näiteks a, 2 on üksliikmed.

Tähtavaldised, mis moodustavad hulkliikme ja on teineteisest eraldatud kas pluss- või miinusmärgiga, on hulkliikme liikmed. Liikmete arvu järgi võivad hulkliikmed olla kaksliikmed, kolmliikmed jne.

Antud definitsioonile tuleb lisada järgmine täiendus. Mõnikord on kasulik hulkliikmele vaadata kui üksliikmele; sel korral pannakse ta sulgudesse. Olgu näiteks x-i kordaja $A_1 - A_2$; et A_1 ja ka A_2 ei sisalda x-i, siis võib $A_1 - A_2$-le vaadata kui x-i kordajale avaldises $(A_1 - A_2)x$ ja $(A_1 - A_2)\,x$ lugeda üksliikmeks. Muidugi võib $A_1 - A_2$ tähistada ühe tähega A_1 ja siis on avaldis A_1x^m üksliige; formaalselt on $A_1 - A_2$ hulkliige, aga antud juhul on otstarbekohane teda vaadelda üksliikmena.

Siin antud definitsiooni kasutamisel langeb ära küsimus, kas avaldis $3\,(a+b+c)$ on üksliige või hulkliige: avaldis

tüübilt 3 $(a + b + c)$ on hulkliige, millele meie aga vaatame kui üksliikmele; sellega lähenemegi teaduslikule definitsioonile.

§ 40. Kordaja (koefitsient).

Vastavalt definitsioonile võivad üksliikmes esineda mitme teguri korrutis, aste ja jagatis. Mõned tegureist on tihti väljendatud arvudega, teised jälle tähtedega.

Niisiis võib üksliikmel olla näiteks järgmine kuju:

$$a^2 \cdot 20 \cdot b \cdot 4\, c^3 \cdot \frac{1}{8}.$$

Iga täht võib siin tähistada õpilastele tuntud mistahes arvu, s. o. positiivset või negatiivset, täis- või murdarvu või nulli. Et relatiivsete arvude korrutisel on vahetuvusomadus, siis võib arvulisi tegureid kirjutada täheliste tegurite ette, näiteks:

$$20 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8}\, a^2bc^3.$$

Korrutise kohta kehtiva tuntud märkidereegli põhjal määratakse üksliikme märk tegurite märkide järgi.

Näiteks:

$$a^2 \cdot (-20) \cdot (-b) \cdot (-4) \cdot c^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = +10a^2bc^3.$$

Täheliste tegurite ees seisvat arvulist tegurit koos üksliikme märgiga nimetatakse koefitsiendiks ehk kordajaks. Kordaja 1 jääb harilikult kirjutamata. Näiteks üksliikme a^2b kordaja on 1; seda ei kirjutata.

Mõnikord eraldatakse üks- või hulkliikmes mõni üksik täht, millele osutatakse erilist tähelepanu. Näiteks üksliikmes $4a^2x$ mõeldakse x-i all kas otsitavat või muutuvat arvu, a all aga antud või jäävat arvu. Kui peatäht tähistab muutuvat arvu, siis loetakse üksliikme kordajaks kõigi arvuliste ja ka täheliste konstantsete tegurite korrutist. Kui peatäht tähis-

tab otsitavat arvu, siis loetakse kordajaks kõigi antud teguritе korrutist. Niisiis üksliikmes $4a^2x$ on kordajaks $4a^2$.

See täiendav tingimus laiendab suurel määral kordaja kui arvulise teguri esialgset mõistet.

§ 41. Samaväärsed avaldised.

Kaht algebralist avaldist, mille numbrilised väärtused on võrdsed tähtede mistahes (muidugi mõlema avaldise jaoks ühesuguste) väärtuste puhul, nimetatakse samaväärseteks avaldisteks. Võrdust, mis näitab, et kaks avaldist on samaväärsed, nimetatakse samasuseks.

§ 42. Identsete (samaste) teisenduste omadused.

1. Kui samaväärseid avaldisi liita ühe ja sellesama avaldisega, siis saadud summad on samaväärsed.

Kui $A = B$, siis $A + C = B + C$.

2. Kui samaväärseid avaldisi korrutada ühe ja sellesama avaldisega, siis saadud korrutised on samaväärsed.

Kui $A = B$, siis $AC = BC$.

3. Kahe samasuse liikmete liitmisel saadakse samasus.

Kui $A = B$ ja $C = D$, siis $A + C = B + D$.

4. Kahe samasuse liikmete korrutamisel saadakse samasus.

Kui $A = B$ ja $C = D$, siis $AC = BD$.

§ 43. Algebraliste avaldiste identsed teisendused.

Mingi avaldise identseks teisenduseks nimetatakse selle avaldise teisendamist teiseks temaga samaväärseks avaldiseks. Identse teisenduse näiteks võib olla hulkliikme liikmete ümberpaigutamine.

Tähtsaks identseks teisenduseks on ka hulkliikme sarnaste liikmete koondamine.

Hulkliikme sarnaseid liikmeid tuleb defineerida kui avaldisi, mis erinevad üksteisest kas kordajate poolest või mitte millegi poolest; lisada, et sarnased liikmed erinevad kordajate ja märkide poolest (Kisseljov, Algebra, I osa, lk. 35), on liigne, sest märk kuulub kordaja juurde, kordajad $(+5)$ ja (-5) on erinevad.

Kui hulkliikme kõik liikmed on sarnased, siis hulkliige on samaväärne üksliikmega, mille kordaja võrdub kõikide liikmete kordajate summaga ja täheline osa on sama, mis kõikidel hulkliikme liikmetel.

Võtame näiteks hulkliikme $7a - 9a + 5a - 7a + 12a$. Kõik liikmed on sarnased, sest nad erinevad ainult kordajate poolest. Korrutise jaotuvusomaduse põhjal saame:

$$7a - 9a + 5a - 7a + 12a = (7 - 9 + 5 - 7 + 12)\, a = 8a.$$

Võtame kasutusele uue mõiste. Analoogiliselt samaväärsete hulkliikmete definitsiooniga on kokku lepitud, et hulkliige on samaväärne nulliga (või muutub nulliks), kui ta võrdub nulliga temas esinevate tähtede kõikide väärtuste puhul.

Lähtudes mainitud definitsioonist võib näidata järgmist: kui hulkliige sisaldab ainult sarnaseid liikmeid, millede kordajate summa on null, siis on hulkliige võrdne nulliga.

Tuleb rõhutada, et sarnaste liikmete koondamine on ainult kordajatega tehtav toiming; sarnaste liikmete täheline osa jääb muutmatuks. Selge arusaamine sellest asjaolust võib suurel määral ennetada sarnaste liikmete koondamisel esinevaid vigu.

Identsete teisenduste edasisteks näideteks on tehted üksja hulkliikmetega.

Pärast seda tuletatakse reegel üksliikme liitmise kohta

üksliikme ja hulkliikmega ning seletatakse, et reegli põhjal saadud summa on samaväärne antud liidetavate summaga.

Siis antakse reegel hulkliikme liitmiseks hulkliikmega. On tarvis ära märkida, et igas hulkliikmes võib mõned liikmed paigutada sulgudesse, pannes sulgude ette plussmärgi.

Edasi tuleb peatuda tähtavaldiste summa omadustel:

1) vahetuvusomadusel (ehk kommutatiivsusel): $a + b = b + a$,

2) ühenduvusomadusel (ehk assotsiatiivsusel): $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Need hulkliikmete omadused on arvude samade omaduste järeldused. Näitena võib tõestada, et $(a + b) + c = (a + c) + b$, s. o. kolme üksliikme summa leidmiseks võib esimese üksliikme liita kolmandaga ja saadud summa liita teisega:

$(a + b) + c = a + (b + c) =$ [ühenduvusomaduse põhjal];
$= a + (c + b) =$ [vahetuvusomaduse põhjal];
$= (a + c) + b$ [ühenduvusomaduse põhjal].

Seda omadust saab rakendada mitte ainult kolme liidetava, vaid mistahes arvu liidetavate kohta, tähendab, summa kohta kehtivad vahetuvus- ja ühenduvusomadus ilma kitsendusteta. Siit järgneb, et liitmist võib teostada mistahes järjekorras.

Esimene järeldus. Vahetuvusomaduse põhjal võib hulkliikme liikmed asetada mistahes järjekorda; loomulikult tuleb nad korraldada kõige sobivamasse järjekorda. Tihti on kasulik paigutada hulkliige mõne temas esineva tähe kasvava või kahaneva astendaja järjekorda, s. o. nõnda, et selle tähe astendajad järk-järgult (liikmest liikmeni) suureneksid või väheneksid.

Näiteks hulkliige

$$8a^5 - 6a^4b + 9a^3b^2 - 8a^2b^3 + 12ab^4 - 10b^5$$

on korraldatud tähe a kahanevate ja tähe b kasvavate astendajate järgi.

Teine järeldus. Vahetuvus- ja ühenduvusomaduse põhjal võib hulkliikmete liitmisel nende liikmed korraldada ja liidetavad hulkliikmed kirjutada üksteise alla nii, et sarnased liikmed oleksid üksteise all. Kui see korraldus on läbi viidud, siis seisab hulkliikmete liitmine püstridades asetsevate sarnaste liikmete koondamises.

Olgu liita hulkliikmed:

$$8a^2b - 5ab^2 + 3b^3 \text{ ja } 7ab^2 - 5a^2b - 4b^3.$$

Kirjutame järgmiselt:

$$\begin{array}{rl} & 8a^2b - 5ab^2 + 3b^3 \\ + & -5a^2b + 7ab^2 - 4b^3 \\ \hline & 3a^2b + 2ab^2 - b^3 \end{array}$$

§ 44. Üksliikmete ja hulkliikmete lahutamine.

Algebraliste avaldiste lahutamist defineeritakse kui liitmise pöördtehet, s. t. selleks, et lahutada algebralisest avaldisest a algebraline avaldis b, tuleb leida niisugune algebraline avaldis, mille summa b-ga on a. a ja b vahe on $a - b$, sest $b + (a - b) = b + a - b = a$; aga $a - b = a + (-b)$. Siit järeldub üksliikmete lahutamise reegel.

Olgu tarvis hulkliikmest P lahutada hulkliige $a - b + c - d$. Vastavalt lahutamise definitsioonile tuleb leida niisugune avaldis, mille summa lahutatava $a - b + c - d$-ga oleks hulkliige P. Säärane avaldis on $P - a + b - c + d$, sest

$$(a - b + c - d) + (P - a + b - c + d) = a - b + c - d + P - a + b - c + d = P.$$

Siit tuletatakse hulkliikmete lahutamise reegel. Võtame näite hulkliikmete lahutamise kohta:

$$\begin{array}{r} 12a^3 - 11a^2b + 10ab^2 - 15b^3 \\ -\ 7a^3 - 4a^2b - 6ab^2 - 2b^3 \\ \hline 5a^3 - 7a^2b + 16ab^2 - 13b^3 \end{array}$$

Hulkliikmete liitmise ja lahutamise reegleist järeldub sulgude avamise reegel: sulgude avamisel jäävad liikmete märgid endisteks, kui sulgude ees on plussmärk, ja muutuvad vastupidisteks, kui sulgude ees on miinusmärk.

Sellest reeglist järeldub, et igas hulkliikmes võib mõned liikmed paigutada sulgudesse, pannes sulgude ette miinusmärgi ja muutes sulgudes iga liikme märgi vastupidiseks.

§ 45. Tähtavaldiste liitmise ja lahutamise harjutustest.

Peale Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogus toodud ülesannete on kasulik anda järgmist tüüpi harjutusi:

1. Missugune arv tuleb lahutada a-st, et saada temale vastupidist arvu?

2. Näidata, et iga mitmekohalist arvu võib kujutada hulkliikmena, mis on korraldatud kümne kahanevate astendajate järjekorras.

3. Kas on olemas vahe sarnaste liikmete koondamise ja üksliikmete liitmise vahel?

4. Missuguse avaldisega tuleb liita $a - b + c$, et saada sellele vastupidist avaldist? Missugusest avaldisest tuleb lahutada $a - b + c$, et saada sellele vastupidist avaldist?

5. Leida avaldise $P - [Q - 2P - (P - Q)]$ väärtus, kui $P = a^2 + 2ab + b^2$ ja $Q = a^2 - 2ab - b^2$.

Kuidas tuleb seda arvutust lihtsustada? Kas enne lahutada ja siis asendada, või enne asendada ja siis lahutada?

6. Tõestada, et vahe auriku kiiruse vahel pärivoolu ja vastuvoolu võrdub voolu kahekordse kiirusega.

Näpunäide. Kiirus pärivoolu võrdub auriku kiiruse V ja voolukiiruse v summaga; kiirus vastuvoolu võrdub auriku kiiruse ja voolukiiruse vahega.

7. Teostada avaldises $a - [a - 2 - (a + 1) - 1]$ näidatud tehted kahel viisil.

§ 46. Hulkliikmete korrutamine.

Peale materjali, mis on esitatud Kisseljovi õpikus, tuleb hulkliikmete korrutamist täiendada järgmisega:

1. On tarvis läbi arutada korrutamine $(+1)$-ga ja (-1)-ga ning selgitada, et hulkliikme korrutamine (-1)-ga on samaväärne kõigi hulkliikme liikmete märkide muutmisega vastupidiseks.

2. Tuleb õpetada aru saama kahe hulkliikme korrutise struktuurist ja leidma antud astme jaoks peatähe ette kordajat ilma kõigi hulkliikme liikmete korrutamiseta.

Arutame läbi korrutise struktuuri. Esimene osakorrutis (kui korrutamine toimub veergudes) saadakse korrutatava korrutamisest korrutaja esimese liikmega, teine — korrutamisest teise liikmega jne. Kahe esimese osakorrutise summa saadakse korrutatava korrutamisest korrutaja kahe esimese liikmega; kolme esimese osakorrutise summa saadakse korrutatava korrutamisest korrutaja kolme esimese liikmega jne.

Kui hulkliikmed on korraldatud tähe tõusvate või kahanevate astendajate järjekorras, võib kogu korrutist leidmata määrata mistahes antud liikme kordaja. Korrutise kõrgema liikme määramiseks tuleb korrutada tegurite kõrgemad liikmed ja madalama liikme määramiseks tegurite madalamad liikmed. Näiteks hulkliikmete $a^2 + 4ab + 5b^2$ ja $a^2 + 2ab + 3b^2$ korrutises saadakse liige, milles a on kõige kõrgemas

astmes, tegurite kõrgemate liikmete korrutamisega, s. o. a^2 korrutamisega a^2-ga; $a^2 \cdot a^2 = a^4$; liige, milles b on kõige kõrgemas astmes, saadakse $3b^2$ korrutamisega $5b^2$-ga; $3b^2 \cdot 5b^2 = 15b^4$.

Leiame kordaja liikmele, milles esineb a^2b^2. See liige koosneb järgmistest korrutistest: 1) a^2 korrutisest $5b^2$-ga; 2) $2ab$ korrutisest $4ab$-ga; 3) $3b^2$ korrutisest a^2-ga. Järelikult see liige võrdub:

$$a^2 \cdot 5b^2 + 4ab \cdot 2ab + a^2 \cdot 3b^2 = 5a^2b^2 + 8a^2b^2 + 3a^2b^2 = 16a^2b^2.$$

Seega nõutava liikme kordaja on 16.

Analoogiliselt võib leida korrutise mistahes liikme kordaja.

3. Tuleb anda kahe kaksliikme korrutamise valem, kui need kaksliikmed erinevad ainult oma teiste liikmete poolest. Seda valemit on vaja hulkliikmete tegureiks lahutamisel ja ruutvõrrandite käsitlemisel.

Võtame järgmiste kaksliikmete korrutised:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Täheldame selle korrutise järgmist omadust.

Kahe, ainult oma teiste liikmete poolest erineva kaksliikme korrutis on kolmliige, mille esimene liige on kaksliikmete esimese liikme ruut; teises liikmes esineb kaksliikmete esimene liige esimeses astmes ja selle liikme kordaja võrdub kaksliikmete teiste liikmete algebralise summaga; kolmas liige võrdub kaksliikmete teiste liikmete korrutisega.

On soovitav tundides enne üldvalemi ja reegli tuletamist jälgida neid omadusi arvuliste näidete puhul, näiteks:

$$(x + 4) \cdot (x + 5) = x^2 + 5x + 4x + 20 = x^2 + 9x + 20;$$
$$(x + 4) \cdot (x - 5) = x^2 - 5x + 4x - 20 = x^2 - x - 20;$$
$$(x - 4) \cdot (x + 5) = x^2 + 5x - 4x - 20 = x^2 + x - 20;$$
$$(x - 4) \cdot (x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20.$$

Märkide kohta on tarvis öelda, et kaksliikmete teiste liikmete summat ja vahet tuleb mõista muidugi algebralises mõttes.

Valemit $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ peab illustreerima kahekohaliste arvude korrutamisega, kui neil arvudel on ühepalju kümnelisi.

Olgu $x=10$, $a=8$, $b=7$; siis $x+a=10+8=18$, $x+b=10+7=17$. Rakendades ülaltoodud valemit, saame:

$$18\cdot 17=10^2+(8+7)\cdot 10+8\cdot 7=$$
$$100+150+56=306.$$

Arvutamist võib lihtsustada järgmiselt:

$$18\cdot 17=(18+7)\cdot 10+8\cdot 7=250+56=360.$$
$$19\cdot 16=(19+6)\cdot 10+9\cdot 6=250+54=304.$$
$$24\cdot 29=(29+4)\cdot 20+4\cdot 9=660+36=696.$$
$$28\cdot 27=(28+7)\cdot 20+8\cdot 7=700+56=756.$$
$$34\cdot 39=(39+4)\cdot 30+4\cdot 9=1290+36=1326.$$

Pärast seda kui on omandatud kahe, teise liikme poolest erineva kaksliikme korrutamise reegel, võib asuda lühendatud korrutamise valemite juurde.

4. Tuleb $(x+a)$ korrutada $(x+a)$-ga ehk leida $(x+a)^2$. See korrutamine on eelmise korrutamise erijuhtum: kaksliikmete mõlemad liikmed on vastavalt võrdsed.

Selleks et rakendada tuletatud võtet, on tarvis eelmises valemis b asendada a-ga.

$$(x+a)^2=(x+a)(x+a)=x^2+(a+a)x+a\cdot a;$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2. \qquad (1)$$

Valemi (1) illustratsioon arvulise näitega:

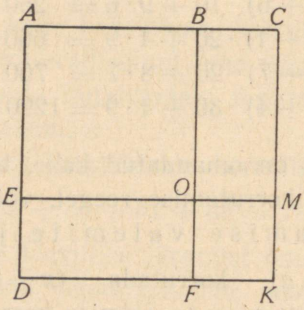
$$17^2=(10+7)^2=100+2\cdot 10\cdot 7+7^2=$$
$$=100+140+49=289.$$

Selleks et saadud valemit $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ paremini meeles pidada, on kasulik anda talle geomeetriline illustratsioon. Vaatame x-le ja a-le kui lõikude pikkustele. Nende summa on $(x+a)$; $(x+a)^2$ on siis ruudu pindala, kui ruudu külg on $(x+a)$. Ruudu $ACKD$ pindala võrdub $AC^2 = (AB+BC)^2 = (x+a)^2$.

Ruudu $ACKD$ pindala koosneb ruudu $ABOE$, ristkülikute $BCMO$ ja $EOFD$ ning ruudu $OMKF$ pindaladest.

$ABOE$ pindala võrdub $AB \cdot BO = x \cdot x = x^2$;
$BCMO$ pindala võrdub $BC \cdot BO = a \cdot x = ax$;
$EOFD$ pindala võrdub $DF \cdot DE = x \cdot a = ax$;
$OMKF$ pindala võrdub $FK \cdot KM = a \cdot a = a^2$.

Seega $(x+a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2$ ehk $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.



Joon. 19.

5. Korrutame $x-a$ $x-a$-ga, s. o. leiame $(x-a)^2$. Et valem $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (1) on tuletatud x ja a mistahes väärtuste kohta, siis on ta ka õige, kui $(+a)$ asendada $(-a)$-ga.

Asendades $(+a)$ $(-a)$-ga saame:

$$(x-a)^2 = [x+(-a)]^2 = x^2 + 2x \cdot (-a) + (-a)^2.$$

$2x \cdot (-a) = -2ax$; $(-a)^2 = a^2$;

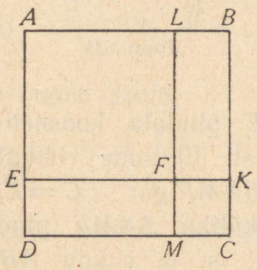
järelikult $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$. (2)

Arvuline illustratsioon:

$$19^2 = (20 - 1)^2 = 400 - 2 \cdot 20 + 1 = 400 - 40 + 1 = 361.$$

Valemi $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ geomeetriline illustratsioon. Avaldisele $(x - a)^2$ võib vaadata kui ruudu pindalale, kui ruudu külg võrdub lõikude a ja x vahega. Kujutame selle ruudu pindala lõikudest x ja a ehitatud ristkülikute ja ruutude pindalade algebralise summana. Ruudu *ALFE* pindala, mis võrdub $(x - a)^2$, koosneb ruudu *ABCD* pindalast miinus ristkülikute *LBCM* ja *EKCD* pindalad ning pluss ruudu *FKCM* pindala, sest viimane kui ristkülikute *LBCM* ja *EKCD* osa lahutati kaks korda (joon. 20). Seega *ALFE* pindala võrdub *ABCD* pindala miinus *LBCM* pindala miinus *EKCD* pindala pluss *FKCM* pindala ehk

$$(x - a)^2 = x^2 - xa - xa + a^2; \quad (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$



Joon. 20.

6. Arvutame $(x + a)$ korrutise $(x - a)$-ga.

Mõlemal teguril on esimesed liikmed ühesugused, tegurite teised liikmed erinevad ainult märkide poolest. Rakendades korrutise leidmiseks üldist võtet, saame:

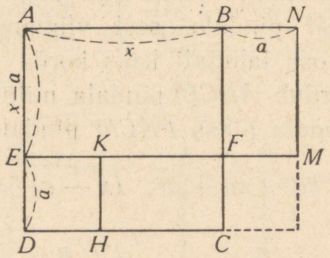
$$(x + a)(x - a) = x^2 + (a - a)x + a(-a) = x^2 - a^2.$$

Järelikult $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$. (3)

Arvuline illustratsioon: $103 \cdot 97$.

$$103 \cdot 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 9 = \\ = 10\,000 - 9 = 9991.$$

Valemi $(x + a)(x - a)$ geomeetriline illustratsioon. Korrutisele $(x + a)(x - a)$ võib vaadata kui ristküliku pindalale, kui ristküliku aluseks on $x + a$ ja kõrguseks $x - a$. Olgu $AB = x$, $BN = a$; siis $AN = AB + BN = x + a$ ja $AE = AD - ED = x - a$.



Joon. 21.

Ristküliku $ANME$ pindala koosneb ristkülikute $ABFE$ ja $BNMF$ pindaladest. Ehitame ristküliku $FCHK$, mis on võrdne ristküliku $BNMF$-ga; $FC = ED = BN = a$; $FK = BF = x - a$. Ristküliku $ANME$ pindala võrdub kujundi $ABCHKE$ pindalaga, s. o. ruudu $ABCD$ pindala miinus ruudu $EKHD$ pindala, s. o. $x^2 - a^2$. Järelikult

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2.$$

7. Määrame $(x + a)^3$.

$$(x + a)^3 = (x + a)^2 \cdot (x + a) = (x^2 + 2ax + a^2)(x + a) = \\ = x^3 + 2ax^2 + a^2x + ax^2 + 2a^2x + a^3 = x^3 + \\ + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Järelikult $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$. (4)

8. Määrame $(x-a)^3$. Valem (4) on tuletatud a mistahes väärtuse kohta. Järelikult on see valem õige ka siis, kui $+a$ asendada $(-a)$-ga. Saame järgmised järjestikused teisendused:

$$(x-a)^3 = [x+(-a)]^3 = x^3 + 3(-a)x^2 + 3(-a)^2x + \\ + (-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2 - a^3.$$

Järelikult $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$. (5)

9. Arvutame korrutise $(x+a)(x^2-ax+a^2)$.

Vahenditu korrutamisega saame:

$$x^3 + ax^2 - ax^2 - a^2x + a^2x + a^3 = x^3 + a^3.$$

Järelikult $(x+a)(x^2-ax+a^2) = x^3 + a^3$. (6)

10. Arvutame korrutise $(x-a)(x^2+ax+a^2)$.

Selle valemi saame tuletada tavalisel teel — korrutamise abil. Avaldisele $(x-a)(x^2+ax+a^2)$ võime aga vaadata ka kui valemi (6) erijuhule, kus $(+a)$ on asendatud $(-a)$-ga.

Võrduse vasakul poolel saame:

$$[x+(-a)][x^2-(-a)\cdot x+(-a)^2] = (x-a)(x^2 + \\ + ax + a^2).$$

Valemi (6) paremal poolel, asendades $(+a)$ $(-a)$-ga, saame:

$$x^3 + (-a)^3 = x^3 - a^3.$$

Järelikult $(x-a)(x^2+ax+a^2) = x^3 - a^3$. (7)

§ 47. Üksliikmete ja hulkliikmete korrutamise harjutustest.

Tähtavaldiste korrutamise harjutusi tuleb täiendada järgmist laadi küsimustega:

1) Mis toimub korrutisega $(2a^2+1)(2a^2-1)$, milles $a \neq 0$, kui:

a) iga tegurit suurendada a võrra?
b) iga tegurit vähendada a võrra?
c) esimest tegurit suurendada a võrra, teist vähendada a võrra?

2) Tõestada järgmised võrdused:

a) $(-a-b)^2=(a+b)^2$; b) $(a-b)^2=(b-a)^2$;
c) $(a+b)^3=-(-a-b)^3$; d) $(b-a)^3=$
$=-(a-b)^3$.

3) Millega tuleb liita $(a-b)^2$, et saada $(a+b)^2$?

4) Kui palju tuleb lahutada a ja b summa kuubist, et saada a ja b kuupide summat?

5) Leida korrutise $(2a^3-3a-1-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2})\cdot(3a^2+$
$+a+2\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2})$ see liige, milles ei esine a.

6) Missuguste a ja b väärtuste puhul on $(x-1)(2x-3)$ samaväärne korrutisega $(ax+b)(1-x)$?

7) Täiendada järgmised avaldised kaksliikme ruuduni, lisades ühe liikme:

a) $a^2+2ab+?$ b) $a^2+b^2+?$ c) $a^2+b^2-?$

Kujutada avaldis $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$ kolme kaksliikme ruutude summana.

§ 48. Korraldatud hulkliikmed.

Üksliikme astmeks mõne tähe suhtes nimetatakse selle tähe astendajat antud üksliikmes.

Näide. Avaldis $8a^3$ on kolmanda astme üksliige a suhtes; $12x^2y$ on teise astme üksliige x suhtes ja esimese astme üksliige y suhtes.

Arvu võib lugeda null-astmeliseks üksliikmeks mistahes tähe suhtes; näiteks 6 võib olla null-astmeline üksliige tähe x suhtes.

Hulkliikme astmeks mingi tähe suhtes on kokkuleppe alusel selle tähe kõrgeim astendaja hulkliikme liikmetes. Näiteks $6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 15$ on neljanda astme hulkliige tähe x suhtes, avaldis $6a^2b + 5ab^2$ on teise astme hulkliige a suhtes.

Üksliikme astmeks mitme tähe suhtes nimetatakse nende tähtede astendajate summat selles üksliikmes.

Hulkliikme astmeks mitme tähe suhtes nimetatakse selle liikmete kõrgeimat astet nende tähtede suhtes. Näiteks $2x^3y^2 + 3x^2y^4 + 5x^3y^6 + 9x^4y^7$ on üheteistkümnenda astme hulkliige x ja y suhtes.

Üksliikme ja hulkliikme astme mõiste lubab hulkliikme liikmeid asetada teatavasse järjekorda.

Kui hulkliikme kõik liikmed sisaldavad üht ja sedasama tähte, siis on kokku lepitud korraldada hulkliige selle tähe kahanevate astendajate järjekorras.

Kui hulkliikme kõik kordajad on arvud, siis hulkliikme korraldamine ainsa tähe kahanevate astendajate järjekorras toimub kergesti, kui varem on sarnased liikmed koondatud. Näiteks et korraldada hulkliiget $5x^2 - 4x + 6x^3 - 2x^2 + 9x + 12$, mille kuuest liikmest viis sisaldavad x-i, tuleb toimida järgmiselt. Kõigepealt kirjutatakse liikmed x-i langevate astendajate järjekorras (liikmete ümberpaigutamine toimub summa vahetuvus- ja ühenduvusomaduse põhjal), siis koondatakse sarnased liikmed:

$$5x^2 - 4x + 6x^3 - 2x^2 + 9x + 12 = 6x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 9x - 4x + 12 = 6x^3 + (5-2)x^2 + (9-4)x + 12 = 6x^3 + 3x^2 + 5x + 12.$$

Pärast sarnaste liikmete koondamist ei või arvuliste kordajatega hulkliige sisaldada enamat kui ühte liiget igast ast-

mest. Kui aga hulkliikme liikmetel on tähelised kordajad, siis võib hulkliiget mingi tähe kahanevate astendajate järjekorras korraldades esineda mitu liiget ühest ja samast astmest. Näiteks selline hulkliige on $ax^3 + bx^3 + cx^2 - 5x^2 + dx^2 + 12x - fx + k + l$. Selles on kaks liiget x^3-ga, kolm liiget x^2-ga, kaks liiget x-ga ja kaks liiget, mille aste x suhtes on null. Selleks et liikmeid ühendada ühesuguse x-i astmega, tuleb see x-i aste võtta sulgude taha. Antud näites saame:

$$ax^3 + bx^3 + cx - 5x^2 + dx^2 + 12x - fx + k + l =$$
$$= (a + b)x^3 + (c - 5 + d)x^2 + (12 - f)x + k + l.$$

Hulkliikmed $a + b$, $c - 5 + d$, $12 - f$ on vastavalt x^3, x^2, x kordajad ja $k + l$ on hulkliikme vabaliige. Nüüd on see hulkliige korraldatud x-i kahanevate astendajate järjekorras.

Esimese astme hulkliikmel tähe x suhtes on üldkuju:

$$Ax + B.$$

Kordajad A ja B on mingid x-i mittesisaldavad avaldised ja $A \neq 0$.

Teise astme hulkliikmel tähe x suhtes on üldkuju:

$$Ax^2 + Bx + C.$$

Kordajad A, B, C on mistahes x-i mittesisaldavad avaldised. Kordajad B ja C võivad võrduda nulliga. A aga ei või võrduda nulliga, sest kui $A = 0$, siis hulkliikmel oleks kuju $Bx + C$, s. t. ta oleks tähe x suhtes mitte teise, vaid esimese astme hulkliige.

m-astmelisel hulkliikmel tähe x suhtes on üldkuju:

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m.$$

m on siin positiivne täisarv, kordajad A_0, A_1, A_2, ..., A_m on mistahes x-i mittesisaldavad avaldised. Aga $A_0 \neq 0$, sest kui $A_0 = 0$, siis liige $A_0x^m = 0$ ja hulkliige poleks enam m-astmeline.

Kui ükski kordajaist A_0, A_1, A_2, ..., A_m ei võrdu nulliga, siis m-astmelisel hulkliikmel x suhtes on $m+1$ liiget. Kui aga $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_m = 0$, siis hulkliige muutub üksliikmeks.

§ 49. Hulkliikme jaguvusest ja jagamisest hulkliikmega.

Täis-hulkliikme tegureiks lahutamine on üks tähtsamaid identseid teisendusi, sest kõik murdude teisendused on rajatud tegureiks lahutamisele. Kui hulkliikmete tegureiks lahutamine on hästi omandatud, pole raskusi algebraliste murdude käsitlemisel.

Hulkliikmete tegureiks lahutamise juurde asudes on kohane juhtida tähelepanu täisarvude (positiivsete ja negatiivsete) jaguvuse õpetuse lühikesele kordamisele ja süstematiseerimisele.

Jaguvuse küsimus algebras erineb jaguvusest aritmeetikas kahes suhtes. Esiteks teeb aritmeetika tegemist ainult positiivsete arvude jaguvusega, kuna algebra tegeleb ka negatiivsete arvude jaguvusega. Seepärast ongi tarvis jaguvuse õpetust täiendada küsimusega jagajate märkidest. Teiseks uuritakse aritmeetikas ainult arvude jaguvust, kuna algebras tuleb tegemist teha ka tähtavaldiste jaguvusega.

Aritmeetikas on mitme arvu suurim ühistegur tõepoolest suurim kõikidest ühistest teguritest ja väikseim ühiskordne väikseim kõikidest ühistest kordsetest. Algebras on aga tähtavaldise numbriline väärtus määramata, seepärast võib ka ette tulla, et suurima ühisteguri numbriline väärtus polegi ühisteguritest suurim ja väikseima ühiskordse numbriline väärtus polegi ühiskordsetest väikseim. Siit järeldub vajadus anda suurimale ühistegurile ja väikseimale ühiskordsele teine definitsioon.

T e g u r i d j a n e n d e ü l d o m a d u s e d. Täisarvude liitmine, lahutamine ja korrutamine on täisarvude vallas

alati teostatavad, s. t. et nende tehete tulemus kuulub samasse arvude valda; jagamine aga pole täisarvude vallas iga kord teostatav, seepärast on otstarbekohane tarvitusele võtta eri terminid nende juhtude kohta, kus täisarvu jagatis täisarvuga on samuti täisarv.

Kui $a = bq$ (a, b ja q on täisarvud), siis nimetatakse b-d ja q-d arvu a teguriteks ning a-d b ja q kordseks.

Täisarvude jaguvusest tuleb meeles pidada järgmist.

1. Arv null jagub iga teise arvuga; tõepoolest $0 : m = 0$, sest $0 \cdot m = 0$.

2. Ükski arv ei jagu nulliga; jagamine nulliga kõrvaldatakse.

Mainitud omaduste tõttu on nullil eriline koht täisarvude jaguvuse õpetuses.

3. Kummalgi arvudest $+1$ ja -1 on ainult kaks jagajat: $+1$ ja -1. Tõepoolest $\pm \frac{1}{m}$ on väiksem ühest ja järelikult pole täisarv, kui $m \neq 1$.

4. Välja arvatud 0, on igal arvul a vähemalt järgmised tegurid: $+a$, $-a$, $+1$ ja -1.

5. Kui a on b kordne, siis mõlemad, nii $+a$ kui ka $-a$, on $+b$ ja $-b$ kordsed.

6. Kui a on b kordne ja b on a kordne, siis b ja a peavad oma absoluutväärtuse poolest võrdsed olema. Tõepoolest, arvud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ on täisarvud. Aga $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$; järelikult kumbki arvudest $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ on arvu 1 tegurid, ühel on aga vastavalt punktile 2 teguriteks ± 1. Järelikult kumbki arvudest $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ võib võrduda ainult ± 1-ga, s. o. $\frac{a}{b} = \pm 1$ või $a = \pm b$.

7. Kui kumbki arvudest a ja b on c kordsed, siis ka $a \pm b$ on c kordne.

Tõepoolest, kui a on c kordne, siis $\frac{a}{c}$ on täisarv; kui b on c kordne, siis ka $\frac{b}{c}$ on täisarv; tähendab, $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$ kui täisarvude summa või vahe on ka täisarv, aga $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$, järelikult $\frac{a \pm b}{c}$ on täisarv, s. t. $a \pm b$ on c kordne.

8. Kui a on b kordne ja b on c kordne, siis ka a on c kordne.

Arvu a võib kujutada mitme liidetava summana, kus iga liidetav on b; igaüks neist liidetavaist on c kordne; järelikult ka a on c kordne (omadus 7).

9. Kui b on täisarvude $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ teguriks ja $x_1, x_2, \ldots, x_4$ on mistahes täisarvud, siis on b summa $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ iga liikme teguriks, sest eelduse kohaselt on olemas täisarvud $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, millede kohta kehtivad võrdused $a_i = bq_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Sel korral aga $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n)$, s. o. antud hulkliikmel on kuju bq ja järelikult b on arvu $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ teguriks.

Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

Hulkliikmete algebraline jagamine erineb oluliselt aritmeetilisest jagamisest. Esijoones on juttu ratsionaalseist, korraldatud täis-hulkliikmeist, s. o. niisuguseist hulkliikmeist, mis sisaldavad üht tähte ja mis on korraldatud selle tähe kahanevate astendajate järjekorras; näiteks hulkliikme

$$4x^6 + 5x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 9x - 10$$

jagamisest hulkliikmega

$$2x^3 - 4x^2 + 5x + 1.$$

Siin sisaldavad mõlemad hulkliikmed üht ja sedasama tähte ning on korraldatud selle tähe kahanevate astendajate

järjekorras. Edasi erineb hulkliikme jagamise definitsioon arvude jagamise definitsioonist: jagada hulkliige A hulkliikmega B tähendab, et tuleb leida kaks hulkliiget Q ja R, millede kohta peavad täidetud olema kaks järgmist tingimust:

1. $A = BQ + R.$ (1)

2. Hulkliikme R kõrgema liikme peatähe (antud näites x) astendaja peab olema väiksem sama tähe astendajast hulkliikme B kõrgemas liikmes.

Esimene tingimus ütleb järgmist: kui hulkliige B korrutada Q-ga, korrutisega liita hulkliige R ja sarnased liikmed koondada, siis saadud avaldis peab olema samaväärne hulkliikmega A, s. o. peame saama hulkliikme, milles peavad esinema tähe x samad astmed ja ka x-i võrdsetele astmetele peavad vastama samad kordajad kui hulkliikmes A.

Võib juhtuda, et jääk R võrdub nulliga. Siis võtab võrdus (1) järgmise kuju:

$$A = BQ. \quad (2)$$

Öeldust järeldub vahenditult, et jutt on kahest hulkliikmest Q ja R (kui aga $R = 0$, siis ühest), mis peavad rahuldama püstitatud tingimusi, milledest esimene on $A = BQ + R$, s. t. meil on tegemist toiminguga, mis pole jagamine aritmeetika mõttes. Siiski on kokku lepitud Q leidmisel võrdusest $A = B \cdot Q$ nimetada A jagatavaks, B jagajaks ja Q jagatiseks ning kirjutada $A : B = Q$, aga võrdusest $A = B \cdot Q + R$ nimetada A jagatavaks, B jagajaks, Q jagatiseks ja R jäägiks.

Alustame arutlust lihtsamast hulkliikmete jagamise juhust, kus jääk puudub.

Näitame, kuidas leitakse hulkliige Q. Kõigepealt leiame B ja Q korrutise.

Olgu $B = 3x^2 - 4x + 5$;

$Q = 6x^2 + 7x - 8$.

$$A = B \cdot Q = (3x^2 - 4x + 5)(6x^2 + 7x - 8)$$

$$\begin{array}{rl} = 18x^4 - 24x^3 + 30x^2 & \alpha \\ + 21x^3 - 28x^2 + 35x & \beta \\ - 24x^2 + 32x - 40 & \gamma \\ \hline = 18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40 & A \end{array}$$

Esimene osakorrutis $\alpha = B \cdot 6x^2$.

Teine „ $\beta = B \cdot 7x$.

Kolmas „ $\gamma = B \cdot (-8)$.

Nüüd püstitame pöördülesande: leida korrutise

$$A = 18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40$$

ja ühe teguri $B = 3x^2 - 4x + 5$ põhjal teine tegur Q. On selge, et tulemus peab olema $Q = 6x^2 + 7x - 8$.

Siin on korrutis A ja tegur B korraldatud tähe x kahanevate astendajate järjekorras. Kui A ja B pole vastavalt korraldatud, tuleb enne jagamisele asumist seda teha.

Et $A = \alpha + \beta + \gamma$, siis hulkliikmete α, β ja γ lahutamise tulemusena A-st peame saama nulli.

Hulkliikme A esimene liige ($18x^4$) on Q kõrgema liikme ($6x^2$) ja B kõrgema liikme ($3x^2$) korrutis, nimelt $6x^2 \cdot 3x^2$. Järelikult selleks, et leida Q esimest liiget ehk jagatist $\frac{A}{B}$, tuleb A esimene liige jagada B esimese liikmega.

$$18x^4 : 3x^2 = 6x^2.$$

Korrutame B $6x^2$-ga, saame hulkliikme α; selle lahutame A-st.

$$\begin{array}{rl} A & 18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40 \\ \alpha & - \; 18x^4 - 24x^3 + 30x^2 \\ \hline R_1 & + 21x^3 - 52x^2 + 67x - 40 \end{array}$$

Saadud vahe ehk jäägi tähistame R_1-ga.

On selge, et R_1 võrdub β ja γ summaga. Jagatise $A : B = Q$ teise liikme saame jagades jäägi R_1 esimese liikme B esimese liikmega:

$$21x^3 : 3x^2 = +7x.$$

Korrutades B $7x$-ga, saame β; lahutame β R_1-st:

$$\begin{array}{r|l} R_1 & -21x^3 - 52x^2 + 67x - 40 \\ \beta & -21x^3 - 28x^2 + 35x \\ \hline R_2 & -24x^2 + 32x - 40 \end{array}$$

On selge, et jääk $R_2 = \gamma$.

Jagades jäägi R_2 esimese liikme, s. o. $-24x^2$, jagaja B esimese liikmega, s. o. $3x^2$-ga, saame:

$$-24x^2 : 3x^2 = -8.$$

See ongi jagatise $A : B = Q$ kolmas ning viimane liige. Korrutame (-8) B-ga, saame: $\gamma = R_2$.

$$\begin{array}{r|l} R_2 & -24x^2 + 32x - 40 \\ \gamma & -24x^2 + 32x - 40 \\ \hline R_3 & 0 \end{array}$$

Jagamistehe korraldatakse lõplikult järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{r|l} 18x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 67x - 40 & 3x^2 - 4x + 5 \\ \underline{18x^4 - 24x^3 + 30x^2} & \overline{6x^2 + 7x - 8} \\ 21x^3 - 52x^2 + 67x & \\ \underline{21x^3 - 28x^2 + 35x} & \\ -24x^2 + 32x - 40 & \\ \underline{-24x^2 + 32x - 40} & \\ 0 & \end{array}$$

Nüüd arutleme hulkliikme jagamist hulkliikmega üldisemal kujul, kui jääk $R \neq 0$. Siin muutub ülesanne keerukamaks selle tõttu, et tuleb leida mitte üks hulkliige Q, vaid kaks: Q ja R. Nagu arutlusele võetud näitest on näha, saa-

dakse jagamisel rida jääke R_1, R_2, R_3 jne. Tekib küsimus, millise jäägi juures tuleb peatuda. Vastuse annab jagamistehte definitsiooni täiendav tingimus (2): kui hulkliikmed on korraldatud ühe ja sellesama tähe kahanevate astendajate järjekorras, siis tuleb jagamisel peatuda, kui ilmneb, et jäägi aste on madalam jagaja astmest. Võtame näite:

Hulkliige $x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1$ jagada hulkliikmega $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1 & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
\hline
 & + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 & x^3 - 4x - 5 \\
\hline
(R_1) & - 4x^4 + 3x^3 - x & \\
 & - 4x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x & \\
\hline
(R_2) & - 5x^3 + 12x^2 - 5x + 1 & \\
 & - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 5 & \\
\hline
(R_3) & 2x^2 + 10x - 4 &
\end{array}
$$

Jääk R_3 on tähe x suhtes teise astme hulkliige, jagaja aga on sama tähe suhtes kolmanda astme hulkliige; järelikult on jagamine lõpule viidud ja x suhtes on esitatud tõepoolest kaks hulkliiget, nimelt $Q = x^3 - 4x - 5$ ja $R = 2x^2 + 10x - 4$, mis rahuldavad definitsiooni poolt püstitatud tingimust:

1) $A = BQ + R$ ehk

$x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1 = (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)(x^3 - 4x - 5) + 2x^2 + 10x - 4$, sest hulkliikme $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ korrutamisel hulkliikmega $x^3 - 4x - 5$ saadakse pärast korrutise liitmist jäägiga $R_3 = 2x^2 + 10x - 4$ ja sarnaste liikmete koondamist hulkliige, mis on samaväärne hulkliikmega

$$A = x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1.$$

2) Jäägi R_3 aste tähe x suhtes on madalam jagaja $B = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ astmest, sest $2 < 3$.

Hulkliikmete jagamisel on tingimata tarvis korraldada peatähe kahanevate või kasvavate astendajate järjekorras mitte ainult antud hulkliikmed, vaid ka jagamisel saadavad järjestikused jäägid.

N ä i d e. Jagada $x^8 - a^8$ $x^2 - a^2$-ga.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^8 & \qquad\qquad\qquad\qquad - a^8 \;\; x^2 - a^2 \\
\cline{2-2}
- \; x^8 - x^6a^2 & \qquad\qquad\qquad\qquad x^6 + x^4a^2 + x^2a^4 + a^6 \\
\cline{1-1}
\qquad - \; x^6a^2 & \\
\qquad\quad x^6a^2 - x^4a^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad - \; x^4a^4 & \\
\qquad\qquad\quad x^4a^4 - x^2a^6 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad - \; x^2a^6 - a^8 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2a^6 - a^8 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

§ 50. Hulkliikmete väikseima ühiskordse ja suurima ühisteguri definitsioon.

Hulkliikme A jagamine hulkliikmega B seisab kahe hulkliikme Q ja R leidmises; seejuures peavad Q ja R rahuldama järgmisi nõudeid.

1) Peab kehtiv olema võrdus $A = BQ + R$;

2) R aste peab olema väiksem B astmest.

Hulkliige A on jagatav, B on jagaja, Q on jagatis ja R on jääk. Kui $R = 0$, siis räägitakse, et A jagub B-ga jäägita ehk lihtsalt A jagub B-ga.

Kahe või enama arvu ühisteguri ja ühiskordse definitsioonid võib aritmeetikast üle kanda algebrasse mõningate muudatustega.

Mitme algebralise hulkliikme ühiskordseks nimetatakse niisugust hulkliiget, mis jagub ilma jäägita igaühega antud

hulkliikmeist. Kahe või enama hulkliikme ühisteguriks nimetatakse niisugust hulkliiget, millega jagub ilma jäägita igaüks antud hulkliikmeist.

Väikseima ühiskordse definitsiooni ei saa aritmeetikast tuua algebrasse üle ilma muudatuseta, sest algebras ei kehti hulkliikmete kohta mõisted „suurem" ja „väiksem", „suurim" ja „väikseim" nende hulkliikmete numbriliste väärtuste võrdluse mõttes. Samal põhjusel ei saa aritmeetikast algebrasse ilma muudatuseta üle tuua ka suurima ühisteguri definitsiooni. Seepärast tulebki algebras anda suurimale ühistegurile ja väikseimale ühiskordsele uued definitsioonid.

Šapošnikovi ja Valtsovi stabiilseks muutunud ülesannetekogu viimastes väljaannetes alustatakse sellest, et antakse enne ühise teguri definitsioon ja alles siis suurima ühisteguri mõiste. Suurimaks ühisteguriks nimetatakse ühist tegurit, mis jagub iga teise ühise teguriga. See definitsioon on tingimata õige; ta nõuab vaid täpsustamist. Ka on tarvis esituse järjekorda muuta.

Kui kahe või enama hulkliikme suurim ühistegur on see tegur, mis ilma jäägita jagub kõigi ülejäänud ühiste teguritega, siis on ta nende ühiste tegurite ühiskordne ja seejuures väikseim ühiskordne. Kui aga suurimat ühistegurit defineerida kui ühiste tegurite väikseimat ühiskordset, siis tuleb asuda enne väikseima ühiskordse ja siis alles suurima ühisteguri käsitlemisele.

See lõhe algebras tarvitusel oleva suurima ühisteguri definitsiooni vahel ja aritmeetikas õpitud definitsiooni vahel teeb õpilastele raskusi. Seepärast tulebki enne, kui mitme hulkliikme suurimat ühistegurit uuel viisil defineerida, näidata arvuliste näidete najal arvude suurima ühisteguri järgmist omadust: mitme arvu suurim ühistegur on kõigi ühiste tegurite väikseim ühiskordne. Suurim ühistegur on tõepoolest kõigi ühiste tegurite väikseim ühiskordne, sest ta jagub jäägita kõigi teiste ühiste teguritega. Ta on väikseim ühis-

kordne sellepärast, et ise ühiskordsete hulka kuuludes ei saa ta ühestki neist väiksem olla.

Pärast sellist aritmeetilist eeltööd ei tee suurima ühisteguri algebraline definitsioon enam raskusi ja muutub arusaadavaks.

Nüüd tuleb veel arutella seost suurima ühisteguri ja ühistegurite astendajate vahel. Et suurim ühistegur on kõigi ühiste tegurite kordne, siis peavad temas esinema kõigi ühiste tegurite kõrgeimad astendajad.

§ 51. Hulkliikme tegureiks lahutamise definitsioon.

Sageli on kasulik kujutada hulkliiget, s. o. täis-üksliikmete algebralist summat, korrutisena, eriti esimese astme hulkliikmete korrutisena. Need mõlemad kujud, s. o. algebraline summa ja korrutis, peavad olema muidugi samaväärsed. Tegureiks lahutamise all mõistetakse algebralise summa samaväärset teisendamist korrutiseks.

Arutame läbi hulkliikmete tegureiks lahutamise lihtsamad võtted.

§ 52. Ühise teguri sulgude ette võtmise võte.

1. Hulkliikmete korrutamisel on liitmise suhtes jaotuvusomadus:

$$(a + b) \cdot D = aD + bD.$$

(Siin on a, b ja D mistahes hulkliikmed.)

Võrduse vasak pool on tähtede a, b ja D mistahes väärtuste puhul samaväärne parema poolega.

Kirjutame selle võrduse vastupidi:

$$aD + bD = (a + b) \cdot D = D(a + b).$$

Seda võrdust võib sõnadega väljendada nii: selleks et liita kaht ühist tegurit omavat korrutist, tuleb see ühine

tegur korrutada kahe teise teguri summaga. Järelikult, kui iga hulkliikme liikme koosseisu kuulub üks ja seesama tegur D, siis võib hulkliiget kujutada kahe teguri korrutisena: üks neist tegureist on kõigi liikmete ühine tegur D, teine — antud hulkliikme jagatis D-ga. Tegur D kirjutatakse sulgude ette või taha, teine tegur kui hulkliikmeline — sulgudesse.

2. Tuleb selgesti läbi arutada märkide küsimus. Hulkliikme liikmete suurima ühisteguri võime sulgude ette võtta plussi või miinusega. Kui hulkliikme kõik liikmed on ühe ja sellesama märgiga, siis tavaliselt võetakse sulgude ette ühine tegur ka selle märgiga.

Näide. Kaksliikme $aD - bD$ tegureiks lahutamisel võetakse sulgude ette tegur D kas plussiga või miinusega. $(+D)$, samuti ka $(-D)$ on kaksliikme $aD - bD$ tegurid. Esimesel juhul saame:

$$aD - bD = D(a - b).$$

Teisel juhul saame:

$$aD - bD = -D(-a + b) = -D(b - a).$$

Mõlema avaldise samasust saab järele proovida korrutamisega; samasust võib seletada sellega, et kahe teguri korrutis ei muutu, kui mõlema teguri märgid muuta vastupidiseks, sest see on samaväärne korrutisega $(-1) \cdot (-1) = +1$. Korrutamisel $+1$-ga aga korrutis ei muutu.

3. Tuleb rõhutada vajadust võtta sulgude ette mitte lihtsalt ühine tegur, vaid liikmete suurim ühistegur. Sulgude ette võetav tegur peab olema kõigi liikmete ühiseks teguriks, vastasel korral sulgudesse jääv teine tegur pole täis-hulkliige; ühine tegur peab olema suurim ühistegur, vastasel korral on sulgudesse jäänud hulkliikmel olemas veel mingi ühine tegur ja teisendamine pole lõpule viidud.

4. Tuleb õpetada sõnades väljendama sulgude ette võtmise reeglit. Ühise teguri sulgude ette võtmise võtet võib

rakendada mitte ainult kaksliikme, vaid iga hulkliikme kohta.

Näide. $aD - bD + cD - fD = (a - b + c - f)D$.

5. Sulgude ette võetav tegur ei tarvitse olla ainult üksliige, ta võib olla ka kaksliige või hulkliige. Kui sulgude ette võetud tegur on hulkliige, siis tuleb ta paigutada sulgudesse.

Näide 1. Hulkliikmes $a(x+y) - b(x+y) + c(x+y)$ võib sulgude ette võtta $x+y$; saame:

$$a(x+y) - b(x+y) + c(x+y) = (x+y)(a - b + c).$$

Näide 2. $a(p-q)^2 - b(q-p)$.

Esimestes sulgudes on siin vahe $(p-q)$ ruut, teistes sulgudes vahe $(q-p)$. Sulgude ette võib võtta kas $p-q$ või $q-p$. On parem, kui teisendame hulkliikme nii, et mõlemas sulgudes oleks tegur $p-q$ või $q-p$. Oletame, et soovime sulgude ette võtta $p-q$. Korrutis $-b(q-p)$ ei muutu, kui muudame mõlema teguri $(-b)$ ja $(q-p)$ märgid, s. o.:

$$-b(q-p) = b(-q+p) = b(p-q);$$

järelikult

$$a(p-q)^2 - b(q-p) = a(p-q)^2 + b(p-q) =$$
$$= (p-q)[a(p-q) + b] = (p-q)(ap - aq + b).$$

Avaldist $a(p-q)^2 - b(q-p)$ võime teisendada ka nii: teades, et $(p-q)^2 = (q-p)^2$, saame:

$$a(p-q)^2 - b(q-p) = a(q-p)^2 - b(q-p) =$$
$$= (q-p)[a(q-p) - b] = (q-p)(aq - ap - b).$$

Selleks et paremini aru saada suluavaldise märgi muutmise küsimusest eri astendajate puhul, tuleb anda järgmist tüüpi näide:

$$2(a-b)^3 - 5a(b-a)^2 + 3ab(b-a),$$

milles kaksliige $\pm(a-b)$ esineb paaris- ja ka paaritus astmes.

Näiteid hulkliikmete tegureiks lahutamise kohta sulgude ette võtmise võttega tuleb valida sellises järjekorras:

1. Ühise arvulise teguri sulgude ette võtmine:

$$4a-6b=2(2a-3b).$$

2. Ainult tähelise teguri sulgude ette võtmine:

$$ab+ac+ad=a(b+c+d).$$

3. Hulkliikme sulgude ette võtmine:

$$5a(c+d)+4b(c+d)=(c+d)(5a+4b).$$

4. Hulkliikme iga liige on kahe hulkliikme korrutis, üks hulkliikmeist on kõigi liikmete ühiseks teguriks:

$$\begin{aligned}&(a+b)(c+d)+(a+b)(k+l)=\\&=(a+b)[(c+d)+(k+l)]=\\&=(a+b)(c+d+k+l).\end{aligned}$$

5. Üksliikmeliste ja hulkliikmeliste ühiste tegurite üheaegne sulgude ette võtmine:

$$\begin{aligned}&24a^6b^4(3c^2-4d^2)-36a^4b^5(3c^2-4d^2)=\\&=12a^4b^4(3c^2-4d^2)(2a^2-3b).\end{aligned}$$

6. Hulkliikme liikmete ühine tegur esineb varjatud kujul; see tuleb enne kindlaks teha:

$$\begin{aligned}&2(ac-bc)-5(ad-bd)+8(ax-bx)=\\&=2c(a-b)-5d(a-b)+8x(a-b)=\\&=(a-b)(2c-5d+8x).\end{aligned}$$

§ 53. Hulkliikme tegureiks lahutamine lühendatud korrutamise ja jagamise valemite abil.

1. Lühendatud korrutamise viie valemi tundmine seisab oskuses mitte ainult minna valemi paremalt poolelt vasakule, vaid ka vastupidi. Näiteks on tarvis mitte ainult teada,

et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, vaid ka, et $a^2-b^2=$ $=(a+b)(a-b)$, ja osata sõnastada viimast samasust: kahe avaldise ruutude vahe lahutub kaheks teguriks, nimelt esimeste astmete summaks ja vaheks.

2. On tarvis tunda valemeid:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(b-a)^2.$$

3. Tuleb teha harjutusi ruutude vahe lahutamise kohta sellises järjekorras:

1) $a^2+2ab+b^2-c^2=$
$=(a^2+2ab+b^2)-c^2=$
$=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c).$

2) $a^2-2ab+b^2-c^2=$
$=(a^2-2ab+b^2)-c^2=$
$=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c).$

3) $c^2-a^2-2ab-b^2=$
$=c^2-(a^2+2ab+b^2)=$
$=a^2-(a+b)^2=(c+a+b)(c-a-b).$

4) $c^2-a^2+2ab-b^2=$
$=c^2-(a^2-2ab+b^2)=$
$=c^2-(a-b)^2=(c+a-b)(c-a+b).$

5) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$
$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$
$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=$
$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a^2-2ab+b^2)]=$
$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]=$
$=a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$

Viimane teisendus leiab rakendust geomeetrias kolmnurga pindala valemi tuletamisel kolme külje järgi.

§ 54. Rühmitamisvõte hulkliikme tegureiks lahutamisel.

Seda võtet tuleb selgitada näidetega.

N ä i d e. Lahutada tegureiks neliliige $ac + bc + ad + bd$. Neljal liikmel pole ühist tegurit olemas, kahel esimesel liikmel on ühine tegur c. Võttes c sulgude ette, saame sulgudes $a + b$:

$$ac + bc = c(a + b).$$

Antud hulkliikme kahel viimasel liikmel on ühine tegur d; võttes d sulgude ette, saame sulgudes $a + b$:

$$ad + bd = d(a + b),$$

seega

$$ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b).$$

Mõlemates sulgudes on nüüd kaksliikmeline tegur $(a + b)$; võttes $a + b$ sulgude ette, saame:

$$c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d).$$

Rühmitamisvõte annab tulemusi ainult siis, kui pärast esimest sulgude ette võtmist kõigisse sulgudesse jääb üks ja seesama avaldis.

Antud näidet võib lahendada ka teisiti. Võtame ühte rühma esimese ja kolmanda liikme, sest neil on ühine tegur a, ning teise rühma teise ja neljanda liikme, milledel on ühine tegur b:

$$ac + bc + ad + bd = a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b).$$

Saame samad tegurid mis ennegi, ainult teises järjekorras.

Vaatame, kuidas muutub see hulkliige, kui ühe tähe, näiteks a asemel võtta 1; meil on siis:

$$c + d + bc + bd = (c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b).$$

Analoogiliselt võime, kui on antud hulkliige $ac - ad - - c + d$, kahe esimese liikme rühmas sulgude ette võtta a,

ülejäänud kaks liiget paigutada sulgudesse, võttes sulgude ette miinusmärgi selleks, et mõlemates sulgudes oleks üks ja seesama avaldis:

$$ac - ad - c + d = a(c - d) - (c - d) = (c - d)(a - 1).$$

Juhtub mõnikord, et õpilased sellelaadilises avaldises ei kirjuta ühte; see on ränk viga, sest saadakse avaldis, mis pole samaväärne lähteavaldisega.

N ä i d e. Lahutada tegureiks neliliige $ac + bc - ad - bd$. Toimime analoogiliselt eelmise ülesande lahendamisele:

$$ac + bc = c(a + b); \quad -ad - bd = -d(a + b);$$
$$ac + bc - ad - bd = c(a + b) - d(a + b) = (a + b)(c - d).$$

Mõnikord on antud korrutiste summa või vahe, liidetavate ühistegurit pole aga vahenditult näha; ainult pärast sulgude avamist ja liikmete uut rühmitamist õnnestub eraldada ühine tegur.

N ä i d e. Lahutada tegureiks: $a(a + c) - b(b + c)$.

Et sulgudes asetsevad tegurid pole võrdsed, siis on vaja sulud avada ja katsuda liikmeid rühmitada teisiti, nimelt nii, et sulgudes saadaks ühesugused hulkliikmed:

$$a(a + c) - b(b + c) = a^2 + ac - b^2 - bc =$$
$$= (a^2 - b^2) + (ac - bc) = (a + b)(a - b) + c(a - b) =$$
$$= (a - b)(a + b + c).$$

Muide, esitatud ülesannet võib lahendada ka teisiti.

Avaldised sulgudes saavad võrdseks, kui esimest liita b-ga, teist aga a-ga; liites esimest suluavaldist b-ga, me tõeliselt liidame teda ab-ga, ja et teise suluavaldise ees seisab $(-b)$, siis, liites teda a-ga, me tegelikult liidame teda $-b \cdot a = -ab$-ga; liites üht liidetavat $+ab$-ga ja teist $(-ab)$-ga, me summat ei muuda, järelikult:

$$a(a + c) - b(b + c) = a(a + b + c) - b(a + b + c) =$$
$$= (a + b + c)(a - b).$$

§ 55. Lühendatud korrutamise valemite kasutamise võtte ühendamine rühmitamisvõttega.

Toome mõningad näited.

Näited.

1) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = (a^3 + a^2b) - (ab^2 + b^3) =$
$= a^2(a + b) - b^2(a + b) = (a + b)(a^2 - b^2) =$
$= (a + b)(a + b)(a - b) = (a + b)^2(a - b).$

2) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = (a^3 - a^2b) - (ab^2 - b^3) =$
$= a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)(a^2 - b^2) =$
$= (a - b)(a - b)(a + b) = (a - b)^2(a + b).$

Teine võte: $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) -$
$- (a^2b + ab^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) -$
$- ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) =$
$= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)(a - b)^2.$

3) $a^2 + 2ab + b^2 + aD + bD = (a + b)^2 +$
$+ D(a + b) = (a + b)(a + b + D).$

4) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2 =$
$= (a^2 - 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2) =$
$= (a - b)^2 - (c + d)^2 =$
$= (a - b + c + d)(a - b - c - d).$

5) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2 =$
$= (a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 + 2cd + d^2) =$
$= (a + b)^2 - (c + d)^2 =$
$= (a + b + c + d)(a + b - c - d).$

§ 56. Mõningad tegureiks lahutamise erivõtted.

Raskuste hulka, mis õpilastel esinevad hulkliikmete tegureiks lahutamisel, kuulub järgmine asjaolu. Hulkliige antakse tihti sellisel kujul, et ei saa vahenditult rakendada ühtki hulkliikme lahutamise kolmest põhivõttest — ei sulgude ette

võtmist, rühmitamist ega lühendatud korrutamise valemeid; sageli on tarvis enne seda teha mõningaid teisendusi, et avaldist muuta sobivaks valemite kasutamise või rühmitamise jaoks. Nende eelkäivate teisenduste kohta on olemas mõningaid põhivõtteid. Üks neist seisab selles, et üht liiget kujutatakse kahe liikme summana. Alustame selle võtte arutlust ruuttrinoomi lahutamise võttest.

§ 57. Ruuttrinoomi lahutamine lineaartegureiks.

Võtame hulkliikme $a^2 + 12a + 20$.

Meile on teada, et kaks binoomi, mis erinevad oma teiste liikmete poolest, annavad korrutamisel trinoomi, mille teise liikme kordaja võrdub binoomide teiste liikmete summaga ja kolmanda liikme kordaja võrdub binoomide teiste liikmete korrutisega; seepärast siis, kui tuleb lahutada tegureiks näiteks trinoom $a^2 + 12a + 20$, on binoomide esimene liige a, nende teiste liikmete summa peab olema 12 ja nendesamade liikmete korrutis 20. Järelikult tuleb leida kaks arvu, millede summa on 12 ja korrutis 20.

Arv 20 lahutub järgmiseks kaheks teguriks:

$$20 = 20 \cdot 1;\ 20 = 10 \cdot 2;\ 20 = 4 \cdot 5.$$

Koostame iga teguritepaari summa:

$$20 + 1 = 21;\ 10 + 2 = 12;\ 4 + 5 = 9.$$

Summa 12 saadakse, kui tegurid on 10 ja 2, järelikult

$$a^2 + 12a + 20 = (a + 2)(a + 10).$$

Lahutamist korraldatakse tavaliselt nii:

$$a^2 + 12a + 20 = a^2 + 10a + 2a + 20 =$$
$$= (a^2 + 10a) + (2a + 20) = a(a + 10) + 2(a + 10) =$$
$$= (a + 10)(a + 2).$$

Lapsed peavad õppima tulemust kohe välja kirjutama. On tarvis valida kaks arvu, millede summa võrduks trinoomi teise liikme kordajaga ja korrutis — kolmanda liikme kordajaga. Kumbki neist arvudest kirjutatakse liidetavana binoomide esimese ühise liikme juurde; antud näites kirjutatakse a juurde enne 2, saadakse $a+2$; siis 10, saadakse $a+10$.

Liidetavate märkide määramisel tuleb arvestada trinoomi kordajate märke. Kui trinoomi viimane liige on positiivne, siis binoomide teistel liikmetel on ühesugused märkid; on aga trinoomi viimane liige negatiivne, siis binoomide teistel liikmetel on vastupidised märgid.

Nüüd lahendame veel mõned raskemad harjutused.

Näide 1. Lahutada tegureiks hulkliige

$$ac(a+c) - bc\,(b+c) + ab\,(a-b).$$

Antud kujul pole selle avaldise kohta rakendatav sulgude ette võtmise võte, sest kolmel liikmel puudub ühine tegur; pole rakendatav ka rühmitamisvõte. Siin võib üht liiget kujutada kahe liikme summana; siis saadakse neli liiget, s. o. kaks rühma igaüks kahe liikmega. Millist liiget tuleb kujutada summana? Võttes vaatlusele avaldised sulgudes $a+c$, $b+c$ ja $a-b$, näeme, et $(b+c)+(a-b)=a+c$; järelikult $a+c$ asemele võime kirjutada $(a-b)+(b+c)$:

$$ac(a+c) - bc(b+c) + ab(a-b) = ac[(b+c) + (a-b)] - bc(b+c) + ab(a-b) =$$
$$= ac(b+c) + ac(a-b) - bc(b+c) + ab(a-b) =$$
$$= [ac(b+c) - bc(b+c)] + [ac(a-b) + ab(a-b)] = c(b+c)(a-b) + a(a-b)(c+b) =$$
$$= (a-b)(b+c)(c+a).$$

Antud ülesannet võib lahendada ka teisiti, nimelt korrutamise ja järgneva liikmete ümberrühmitamisega; see viis

aga nõuab eelnevat üleminekut summale ja siis alles korrutisele.

Võib endale seada eesmärgiks eraldada ühise tegurina kas $a+c$ või $b+c$, või jälle $a-b$. Näitame, kuidas seda teha, kui ühiseks teguriks võtta $(a-b)$.

Avame kahed esimesed sulud:

$$\begin{aligned}
&ac(a+b)-bc(b+c)+ab(a-b)= \\
&=a^2c+ac^2-b^2c+bc^2+ab(a-b)= \\
&=(a^2c-b^2c)+(ac^2-bc^2)+ab(a-b)= \\
&=c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b)= \\
&=c(a-b)(a+b)+c^2(a-b)+ab(a-b)= \\
&=(a-b)[c(a+b)+c^2+ab]= \\
&=(a-b)[ac+bc+c^2+ab]= \\
&=(a-b)[(ac+c^2)+(bc+ab)]= \\
&=(a-b)[c(a+c)+b(a+c)]= \\
&=(a-b)(a+c)(b+c).
\end{aligned}$$

Mainitud võtte kohta tuleb teha küllaldaselt harjutusi.

Näide 2. Lahutada tegureiks hulkliige

$$ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b).$$

Tähele pannes, et hulkliige viimastes sulgudes võrdub esimestes sulgudes olevate hulkliikmete summaga, kirjutame:

$$\begin{aligned}
(a-b)+(a+c)&=a-b+a+c=2a-b+c= \\
&=2a+c-b.
\end{aligned}$$

Seepärast kujutame $2a+c-b$ summana

$$(a-b)+(a+c).$$

Saame:

$$ab(a-b) - ac(a+c) + bc(2a+c-b) =$$
$$= ab(a-b) - ac(a+c) + bc[(a-b) + (a+c)] =$$
$$= ab(a-b) - ac(a+c) + bc(a-b) + bc(a+c) =$$
$$= [ab(a-b) + bc(a-b)] - [ac(a+c) -$$
$$- bc(a+c)] = b(a-b)(a+c) - c(a+c)(a-b) =$$
$$= (a-b)(a+c)(b-c).$$

Näide 3. Lahutada tegureiks hulkliige

$$bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b).$$

Binoom $(a-c)$, mis seisab keskmise liikme teistes sulgudes, on $(b-c)$ ja $(a-b)$ summa, sest

$$(b-c) + (a-b) = b - c + a - b = a - c.$$

Seepärast saame:

$$bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)[(b-c) + (a-b)] +$$
$$+ ab(c+d)(a-b) = bc(a+d)(b-c) -$$
$$- ac(b+d)(b-c) - ac(b+d)(a-b) +$$
$$+ ab(c+d)(a-b) = c(b-c)[b(a+d) -$$
$$- a(b+d)] - a(a-b)[c(b+d) - b(c+d)] =$$
$$= c(b-c)(ab+bd-ab-ad) -$$
$$- a(a-b)(bc+cd-bc-bd) =$$
$$= c(b-c)(bd-ad) - a(a-b)(cd-bd) =$$
$$= c(b-c)d(b-a) - a(a-b)d(c-b) =$$
$$= c(b-c)\cdot[-d(a-b)] - a(a-b)\cdot[-d(b-c)] =$$
$$= -cd(b-c)(a-b) + ad(a-b)(b-c) =$$
$$= (a-b)(b-c)(ad-cd) = d(a-b)(b-c)(a-c).$$

Näide 4. Lahutada tegureiks hulkliige

$$x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5.$$

Seda hulkliiget võib lahutada tegureiks rühmitamisvõttega, kui keskmist liiget $6x^2$ kujutada summana $x^2 + 5x^2$.

$$x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 =$$
$$= x^4 + x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 5 =$$
$$= (x^4 + x^3 + x^2) + (5x^2 + 5x + 5) =$$
$$= x^2(x^2 + x + 1) + 5(x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 5).$$

Näide 5. Lahutada tegureiks hulkliige

$$2x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 15x + 35.$$

Võib rakendada rühmitamisvõtet, kui $17x^2$ asemele võtta $7x^2 + 10x^2$:

$$2x^4 + 3x^2 + 17x^2 + 15x + 35 =$$
$$= 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 10x^2 + 15x + 35 =$$
$$= (2x^4 + 3x^3 + 7x^2) + (10x^2 + 15x + 35) =$$
$$= x^2(2x^2 + 3x + 7) + 5(2x^2 + 3x + 7) =$$
$$= (2x^2 + 3x + 7)(x^2 + 5).$$

See võte leiab sageli rakendamist trinoomide lahutamisel.

Mõnikord tuleb kujutada kahe liikme summana mitte üht, vaid kaht või enamat liiget.

Näide 6. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^3 + 8a^2 + 19a + 12.$$

Kujutame $8a^2$ summana $4a^2 + 4a^2$ ja $19a$ summana $16a + 3a$, saame:

$$a^3 + 8a^2 + 19a + 12 = a^3 + 4a^2 + 4a^2 + 16a + 3a + 12 =$$
$$= (a^3 + 4a^2) + (4a^2 + 16a) + (3a - 12) =$$
$$= a^2(a + 4) + 4a(a + 4) + 3(a + 4) =$$
$$= (a + 4)(a^2 + 4a + 3) =$$
$$= (a + 4)(a^2 + a + 3a + 3) =$$
$$= (a + 4)[a(a + 1) + 3(a + 1)] =$$
$$= (a + 4)(a + 1)(a + 3).$$

Muide, seda hulkliiget võib lahutada tegureiks ka teisiti:

$$a^3 + 8a^2 + 19a + 12 =$$
$$= (a^3 + 8a^2 + 16a) + (3a + 12) =$$
$$= a(a^2 + 8a + 16) + 3(a + 4) =$$
$$= a(a + 4)^2 + 3(a + 4) = (a + 4)[a(a + 4) + 3] =$$
$$= (a + 4)(a^2 + 4a + 3) = (a + 4)(a^2 + a + 3a + 3) =$$
$$= (a + 4[a(a + 1) + 3(a + 1)] =$$
$$= (a + 4)(a + 1)(a + 3).$$

Näide 7. Lahutada tegureiks hulkliige $a^3 + a^2 - 2$.

$$a^3 + a^2 - 2 = a^3 + a^2 - 1 - 1 =$$
$$= (a^3 - 1) + (a^2 - 1) =$$
$$= (a - 1)(a^2 + a + 1) + (a - 1)(a + 1) =$$
$$= (a - 1)[a^2 + a + 1 + a + 1] =$$
$$= (a - 1)(a^2 + 2a + 2).$$

Võib lahutada ka teisiti:

$$a^3 + a^2 - 2 = a^3 - a^2 + 2a^2 - 2 =$$
$$= a^2(a - 1) + 2(a^2 - 1) =$$
$$= a^2(a - 1) + 2(a - 1)(a + 1) =$$
$$= (a - 1)[a^2 + 2(a + 1)] =$$
$$= (a - 1)(a^2 + 2a + 2).$$

Näide 8. Lahutada tegureiks hulkliige

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Esimese liikme kujutame vahena:

$$2a^2b^2 = 4a^2b^2 - 2a^2b^2.$$

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$= 4a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) =$$
$$= 4a^2b^2 - [(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4] =$$
$$= 4a^2b^2 - [(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4] =$$

$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 =$$
$$= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 =$$
$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) =$$
$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)] =$$
$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] =$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

Näide 9. Lahutada tegureiks hulkliige

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3.$$

Kasutame samasust $(b-c) + (a-b) = -c + a =$
$= -(c-a)$.

Asendame $c-a$ avaldisega $-[(b-c) + (a-b)]$. Edasi:

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 =$$
$$= (b-c)^3 - [(b-c) + (a-b)]^3 + (a-b)^3 =$$
$$= (b-c)^3 - [(b-c)^3 + 3(b-c)^2(a-b) +$$
$$+ 3(b-c)(a-b)^2 + (a-b)^3] + (a-b)^3 =$$
$$= (b-c)^3 - (b-c)^3 - 3(b-c)^2(a-b) -$$
$$- 3(b-c)(a-b)^2 - (a-b)^3 + (a-b)^3 =$$
$$= -3(b-c)^2(a-b) - 3(b-c)(a-b)^2 =$$
$$= -3(b-c)(a-b)[b-c+a-b] =$$
$$= -3(b-c)(a-b)(a-c) = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

§ 58. Täisruudu eraldamise võte.

Täisruudu eraldamise võttega võib trinoomi lahutada tegureiks.

Näide 1. Lahutada tegureiks trinoom $a^2 + 12a + 20$.

Esimene liige on a ruut, teine liige — a ja b kahekordne korrutis, sest $2a \cdot 6 = 12a$. Järelikult vaadates 6-le kui binoomi teisele liikmele, tuleb täisruudu saamiseks liita teise

liikme ruut, s. o. 6^2 ehk 36. Seepärast kirjutame 20 asemele 36—16. Saame:

$$a^2 + 12a + 20 = a^2 + 12a + 36 - 16 = (a+6)^2 - 4^2.$$

$(a+6)^2 - 4^2$ on ruutude vahe.

$$(a+6)^2 - 4^2 = (a+6+4)(a+6-4) = (a+10)(a+2).$$

Näide 2. Lahutada tegureiks $a^2 - 18a + 80$.

$$a^2 - 18a + 80 = a^2 - 2 \cdot 9a + 9^2 - 1 = (a-9)^2 - 1 =$$
$$= (a-9+1)(a-9-1) = (a-8)(a-10).$$

Näide 3. Lahutada tegureiks $a^2 - 7a + 12$.

$$a^2 - 7a + 12 = a^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}a + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(a - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(a - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = (a-3)(a-4).$$

§ 59. Segaülesandeid hulkliikmete tegureiks lahutamise kohta mitmesuguste võtetega.

Kui sulgudest vabastatud hulkliikmes on võimalik sulgude ette võtta ühine tegur või on rakendatavad lühendatud korrutamise valemid või saab kergesti teostada nõutavat liikmete rühmitamist, siis pärast korralikku valemite omandamist ja küllaldast harjutamist pole karta raskusi. Asi muutub, kui siirduda raskemate segaülesannete juurde, millede lahendamine nõuab kahe või enama võtte rakendamist.

Keerukamate ülesannete lahendamisel tuleb juhinduda järgmisest põhimõttest: on tarvis antud hulkliikme struktuuris üles leida sarnasus mõne põhivalemiga; lahutamisel tuleb siis orienteeruda vastavalt sellele. Mõningad kõrvalekaldumised põhivalemist märgivad ära, milliseid abiteisendusi tuleb teha.

Näide 1. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2.$$

Kas võib siin kohe kasutada lühendatud korrutamise valemit? Ei. Kas antud hulkliige meenutab mingit valemit? Kauge sarnasus on olemas kahe erivalemiga.

Võib vaadata a^6-le kui $(a^3)^2$-le, siis $a^6 + 2a^3$ kujutab endast arvu a^3 ruutu ja selle kahekordset korrutist ühega; binoomi täisruudu saamiseks puudub teise liikme ruut, s. o. 1; lisame ühe juurde, saame $a^6 + 3a^3 + 1$; on selge, et tuleb liita ülejäänud liikmed ja (-1), s. o. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = (a^6 + 2a^3 + 1) - a^4 + 2a^2 - 1$; ehk teisiti: $(a^3 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2$.

Edasi:

$$\begin{aligned}
&(a^3 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2 = \\
&= (a^3 + 1 + a^2 - 1)(a^3 + 1 - a^2 + 1) = \\
&= (a^3 + a^2)[(a^3 + 1) - (a^2 - 1)] = \\
&= a^2(a + 1)[(a + 1)(a^2 - a + 1) - (a + 1)(a - 1)] = \\
&= a^2(a + 1)^2(a^2 - a + 1 - a + 1) = \\
&= a^2(a + 1)^2(a^2 - 2a + 2).
\end{aligned}$$

Võib lahendada ka teisiti.

Kõigil liikmeil on ühine tegur a^2;

$$a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^2(a^4 - a^2 + 2a + 2).$$

Nüüd rühmitame liikmed sulgudes:

$$\begin{aligned}
&a^2(a^4 - a^2 + 2a + 2) = a^2[a^2(a^2 - 1) + 2(a + 1)] = \\
&= a^2[a^2(a + 1)(a - 1) + 2(a + 1)] = \\
&= a^2(a + 1)[a^2(a - 1) + 2] = \\
&= a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2) = \\
&= a^2(a + 1)(a^3 + 1 - a^2 + 1) = \\
&= a^2(a + 1)[(a + 1)(a^2 - a + 1) - (a + 1)(a - 1)] = \\
&= a^2(a + 1)^2(a^2 - a + 1 - a + 1) = \\
&= a^2(a + 1)^2(a^2 - 2a + 2).
\end{aligned}$$

Näide 2. Lahutada tegureiks kolmliige (trinoom)

$$a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

See hulkliige lahutub tegureiks järgmiselt:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 =$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) =$$
$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

§ 60. Mõningate hulkliikmete tegureiks lahutamine.

Näide 1. Tuleb lahutada tegureiks binoom $a^4 + 4b^4$.

Ükski senini esitatud võtetest pole siin rakendatav; liikmetel puudub ühine tegur, mille võiksime võtta sulgude ette; pole vastavat korrutamise või jagamise valemit; ei saa kasutada ka ühe liikme summana kujutamise võtet.

Arutleme järgmiselt: a^4-le vaatame kui $(a^2)^2$-le; $4b^4 = (2b^2)^2$; liidame ja lahutame $4a^2b^2$.

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 =$$
$$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 =$$
$$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) =$$
$$= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2).$$

Näide 2. Lahutame tegureiks hulkliikme

$$a^4 + 5a^3 + 15a - 9.$$

Liidame ja lahutame $3a^2$:

$$a^4 + 5a^3 - 3a^2 + 3a^2 + 15a - 9 =$$
$$= (a^4 + 5a^3 - 3a^2) + (3a^2 + 15a - 9) =$$
$$= a^2(a^2 + 5a - 3) + 3(a^2 + 5a - 3) =$$
$$= (a^2 + 5a - 3)(a^2 + 3).$$

Võib lahendada ka teisiti:

$$a^4 + 5a^3 + 15a - 9 = (a^4 - 9) + (5a^3 + 15a) =$$
$$= (a^2 + 3)(a^2 - 3) + 5a(a^2 + 3) =$$
$$= (a^2 + 3)(a^2 + 5a - 3).$$

Näide 3. Lahutame tegureiks hulkliikme

$$a^2 + 10ab - 70b - 49.$$

Liidame kaksliikmega $a^2 + 10ab$ liikme, mis on teise liikme ruut; ilmselt on see $25b^2$. Et avaldis ei muutuks, lahutame samuti $25b^2$; saame niiviisi:

$$a^2 + 10ab - 70b - 49 = a^2 + 10ab + 25b^2 - 25b^2 -$$
$$- 70b - 49 = (a^2 + 10ab + 25b^2) - (25b^2 + 70b + 49) =$$
$$= (a + 5b)^2 - (5b + 7)^2 =$$
$$= (a + 5b + 5b + 7)(a + 5b - 5b - 7) =$$
$$= (a + 10b + 7)(a - 7).$$

Esitatud ülesannet võib lahendada ka teisiti, nimelt:

$$a^2 + 10ab - 70b - 49 = (a^2 - 49) + (10ab - 70b) =$$
$$= (a + 7)(a - 7) + 10b(a - 7) =$$
$$= (a - 7)(a + 7 + 10b).$$

§ 61. Ühe ja sellesama hulkliikme lahutamine mitme võttega.

On tarvis ära märkida, et üht ja sedasama hulkliiget võib lahutada tegureiks mitme võttega. Selgitame seda mõne näitega.

Näide 1. Hulkliikme $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$ lahutasime varem sel viisil, et $6x^2$ asemele võtsime $x^2 + 5x^2$. Võib toimida ka teisiti; kujutades $6x^2$ $x^2 + 5x^2$ summana, kujutame saadud kuusliikme kolme kaksliikme summana, nimelt:

$$x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = x^4 + x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 5 =$$
$$= (x^4 + 5x^2) + (x^3 + 5x) + (x^2 + 5) =$$
$$= x^2(x^2 + 5) + x(x^2 + 5) + (x^2 + 5) =$$
$$= (x^2 + 5)(x^2 + x + 1).$$

Antud harjutust võib lahendada ka täisruudu eraldamise võttega:

$$x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = x^4 + 10x^2 + 25 + x^3 -$$
$$- 4x^2 + 5x - 20 = (x^2 + 5)^2 + x^3 + 5x - 4x^2 - 20 =$$
$$= (x^2 + 5)^2 + x(x^2 + 5) - 4(x^2 + 5) =$$
$$= (x^2 + 5)(x^2 + 5 + x - 4) = (x^2 + 5)(x^2 + x + 1).$$

Näide 2. Lahutada tegureiks hulkliige $a^3 + 9a^2 + 26a + 24$ mitme võttega.

a) Keskmiste liikmete kujutamine kahe liikme summana:

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 4a^2 + 5a + 20a + 6a + 24 =$$
$$= a^2(a + 4) + 5a(a + 4) + 6(a + 4) =$$
$$= (a + 4)(a^2 + 5a + 6) = (a + 4)(a + 2)(a + 3).$$

Sama võtet võib kasutada veel kahel järgmisel viisil:

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 3a^2 + 6a^2 + 18a + 8a + 24 =$$
$$= a^2(a + 3) + 6a(a + 3) + 8(a + 3) =$$
$$= (a + 3)(a^2 + 6a + 8) = (a + 3)(a + 2)(a + 4).$$

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 2a^2 + 7a^2 + 14a + 12a + 24 =$$
$$= a^2(a + 2) + 7a(a + 2) + 12(a + 2) =$$
$$= (a + 2)(a^2 + 7a + 12) = (a + 2)(a + 3)(a + 4).$$

b) Täiskuubi eraldamine kolmel viisil, s. o. $(a + 3)^3$, $(a + 2)^3$ või $(a + 4)^3$ eraldamine:

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27 - a - 3 =$$
$$= (a + 3)^3 - (a + 3) = (a + 3)[(a + 3)^2 - 1] =$$
$$= (a + 3)(a + 3 + 1)(a + 3 - 1) =$$
$$= (a + 3)(a + 4)(a + 2)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 =$$
$$= a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + 3a^2 + 14a + 16 =$$
$$= (a+2)^3 + (3a^2 + 6a + 8a + 16) =$$
$$= (a+2)^3 + 3a(a+2) + 8(a+2) =$$
$$= (a+2)[(a+2)^2 + 3a + 8] =$$
$$= (a+2)(a^2 + 4a + 4 + 3a + 8) =$$
$$= (a+2)(a^2 + 7a + 12) = (a+2)(a+3)(a+4)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 =$$
$$= a^3 + 12a^2 + 48a + 64 - 3a^2 - 22a - 40 =$$
$$= (a+4)^3 - (3a^2 + 12a + 10a + 40) =$$
$$= (a+4)^3 - [3a(a+4) + 10(a+4)] =$$
$$= (a+4)[(a+4)^2 - 3a - 10] =$$
$$= (a+4)(a^2 + 8a + 16 - 3a - 10) =$$
$$= (a+4)(a^2 + 5a + 6) = (a+4)(a+2)(a+3).$$

c) Kuupide summa eraldamine kolmel viisil, nimelt $a^3 + 3^3$, $a^3 + 2^3$ või $a^3 + 4^3$ eraldamine:

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 27 + 9a^2 + 26a - 3 =$$
$$= (a^3 + 3^3) + (9a^2 + 26a - 3) =$$
$$= (a+3)(a^2 - 3a + 9) + [9a(a+3) - (a+3)] =$$
$$= (a+3)(a^2 - 3a + 9) + (a+3)(9a - 1) =$$
$$= (a+3)(a^2 - 3a + 9 + 9a - 1) =$$
$$= (a+3)(a^2 + 6a + 8) = (a+3)(a+2)(a+4)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 8 + 9a^2 + 26a + 16 =$$
$$= (a^3 + 2^3) + (9a^2 + 18a + 8a + 16) =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a + 4) + [9a(a+2) + 8(a+2)] =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a + 4 + 9a + 8) =$$
$$= (a+2)(a^2 + 7a + 12) = (a+2)(a+3)(a+4)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 64 + 9a^2 + 26a - 40 =$$
$$= (a^3 + 4^3) + (9a^2 + 36 - 10a - 40) =$$
$$= (a + 4)(a^2 - 4a + 16) + 9a(a + 4) - 10(a + 4) =$$
$$= (a + 4)(a^2 - 4a + 16 + 9a - 10) =$$
$$= (a + 4)(a^2 + 5a + 6) = (a + 4)(a + 2)(a + 3).$$

d) Täisruudu eraldamine kolmel viisil pärast a sulgude ette võtmist:

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 =$$
$$= a^3 + 8a^2 + 16a + a^2 + 10a + 24 =$$
$$= a(a^2 + 8a + 16) + (a^2 + 4a + 6a + 24) =$$
$$= a(a + 4)^2 + [a(a + 4) + 6(a + 4)] =$$
$$= (a + 4)[a(a + 4) + a + 6] =$$
$$= (a + 4)(a^2 + 5a + 6) = (a + 4)(a + 2)(a + 3)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 6a^2 + 9a + 3a^2 + 17a + 24 =$$
$$= a(a^2 + 6a + 9) + (3a^2 + 9a + 8a + 24) =$$
$$= a(a + 3)^2 + 3a(a + 3) + 8(a + 3) =$$
$$= (a + 3)[a(a + 3) + 3a + 8] =$$
$$= (a + 3)(a^2 + 6a + 8) = (a + 3)(a + 2)(a + 4)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 4a^2 + 4a + 5a^2 + 22a + 24 =$$
$$= a(a^2 + 4a + 4) + (5a^2 + 10a + 12a + 24) =$$
$$= a(a + 2)^2 + 5a(a + 2) + 12(a + 2) =$$
$$= (a + 2)[a(a + 2) + 5a + 12] =$$
$$= (a + 2)(a^2 + 7a + 12) = (a + 2)(a + 3)(a + 4).$$

e) Täisruudu eraldamine kolmel viisil ilma a-d sulgude ette võtmata:

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 9a^2 + 36a + 36 - 10a - 12 =$$
$$= a^3 + 9(a^2 + 4a + 4) - 10a - 12 =$$
$$= a^3 + 9(a + 2)^2 - 10a - 12 =$$
$$= a^3 + 2^3 + 9(a + 2)^2 - 10a - 20 =$$
$$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4) + 9(a + 2)^2 - 10(a + 2) =$$
$$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4 + 9a + 18 - 10) =$$
$$= (a + 2)(a^2 + 7a + 12) = (a + 2)(a + 3)(a + 4)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 9a^2 + 54a + 81 - 28a - 57 =$$
$$= a^3 + 9(a^2 + 6a + 9) - 28a - 57 =$$
$$= a^3 + 9(a + 3)^2 - 28a - 57 =$$
$$= a^3 + 3^3 + 9(a + 3)^2 - 28a - 84 =$$
$$= (a + 3)(a^2 - 3a + 9) + 9(a + 3)^2 - 28(a + 3) =$$
$$= (a + 3)[(a^2 - 3a + 9) + 9(a + 3) - 28] =$$
$$= (a + 3)(a^2 - 3a + 9 + 9a + 27 - 28) =$$
$$= (a + 3)(a^2 + 6a + 8) = (a + 3)(a + 2)(a + 4)$$

või

$$a^3 + 9a^2 + 26a + 24 = a^3 + 9a^2 + 72a + 144 -$$
$$- 46a - 120 =$$
$$= a^3 + 9(a^2 + 8a + 16) - 46a - 120 =$$
$$= a^3 + 9(a + 4)^2 - 46a - 120 =$$
$$= a^3 + 4^3 + 9(a + 4)^2 - 46a - 184 =$$
$$= (a^3 + 4^3) + 9(a + 4)^2 - 46(a + 4) =$$
$$= (a + 4)(a^2 - 4a + 16) + 9(a + 4)^2 - 46(a + 4) =$$
$$= (a + 4)(a^2 - 4a + 16 + 9a + 36 - 46) =$$
$$= (a + 4)(a^2 + 5a + 6) = (a + 4)(a + 2)(a + 3).$$

Näide 3. Lahutada tegureiks hulkliige $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$.

a) Mõlemate keskmiste liikmete kujutamine kahe liikme summana kolmel viisil:

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + a^2 + 5a^2 + 5a + 6a + 6 =$$
$$= a^2(a + 1) + 5a(a + 1) + 6(a + 1) =$$
$$= (a + 1)(a^2 + 5a + 6) = (a + 1)(a + 2)(a + 3)$$

või

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 2a^2 + 4a^2 + 8a + 3a + 6 =$$
$$= a^2(a+2) + 4a(a+2) + 3(a+2) =$$
$$= (a+2)(a^2 + 4a + 3) =$$
$$= (a+2)(a+1)(a+3)$$

või

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 3a^2 + 3a^2 + 9a + 2a + 6 =$$
$$= a^2(a+3) + 3a(a+3) + 2(a+3) =$$
$$= (a+3)(a^2 + 3a + 2) = (a+3)(a+1)(a+2).$$

b) Täiskuubi eraldamine kolmel viisil, s. o. $(a+1)^3$, $(a+2)^3$ või $(a+3)^3$ eraldamine:

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 - a - 2 =$$
$$= (a+2)^3 - (a+2) = (a+2)[(a+2)^2 - 1] =$$
$$= (a+2)(a+2+1)(a+2-1) =$$
$$= (a+2)(a+3)(a+1)$$

või

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + 3a^2 + 8a + 5 =$$
$$= (a+1)^3 + (3a^2 + 3a + 5a + 5) =$$
$$= (a+1)^3 + [3a(a+1) + 5(a+1)] =$$
$$= (a+1)^3 + (a+1)(3a+5) =$$
$$= (a+1)[(a+1)^2 + 3a + 5] =$$
$$= (a+1)(a^2 + 2a + 1 + 3a + 5) =$$
$$= (a+1)(a^2 + 5a + 6) = (a+1)(a+2)(a+3)$$

või

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27 -$$
$$- 3a^2 - 16a - 21 = (a+3)^3 - (3a^2 + 16a + 21) =$$
$$= (a+3)^3 - (3a^2 + 9a + 7a + 21) =$$
$$= (a+3)^3 - [3a(a+3) + 7(a+3)] =$$
$$= (a+3)^3 - (a+3)(3a+7) =$$
$$= (a+3)[(a+3)^2 - (3a+7)] =$$
$$= (a+3)(a^2 + 6a + 9 - 3a - 7) =$$
$$= (a+3)(a^2 + 3a + 2) = (a+3)(a+1)(a+2).$$

c) Täisruudu eraldamine kolmel viisil:

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 6a^2 + 12a + 6 - a =$$
$$= a^3 + 6(a^2 + 2a + 1) - a =$$
$$= a^3 - a + 6(a + 1)^2 = a(a^2 - 1) + 6(a + 1)^2 =$$
$$= a(a + 1)(a - 1) + 6(a + 1)^2 =$$
$$= (a + 1)[a(a - 1) + 6(a + 1)] =$$
$$= (a + 1)(a^2 - a + 6a + 6) = (a + 1)(a^2 +$$
$$+ 5a + 6) = (a + 1)(a + 2)(a + 3)$$

või

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 6a^2 + 24a + 24 - 13a - 18 =$$
$$= a^3 + 6(a^2 + 4a + 4) - 13a - 18 =$$
$$= 6(a + 2)^2 + a^3 - 4a - 9a - 18 =$$
$$= 6(a + 2)^2 + a(a^2 - 4) - 9(a + 2) =$$
$$= 6(a + 2)^2 + a(a + 2)(a - 2) - 9(a + 2) =$$
$$= (a + 2)[6(a + 2) + a(a - 2) - 9] =$$
$$= (a + 2)(6a + 12 + a^2 - 2a - 9) =$$
$$= (a + 2)(a^2 + 4a + 3) = (a + 2)(a + 1)(a + 3)$$

või

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 6a^2 + 36a + 54 -$$
$$- 25a - 48 = a^3 + 6(a^2 + 6a + 9) - 25a - 48 =$$
$$= 6(a + 3)^2 + a^3 - 9a - 16a - 48 =$$
$$= 6(a + 3)^2 + a(a^2 - 9) - 16(a + 3) =$$
$$= 6(a + 3)^2 + a(a + 3)(a - 3) - 16(a + 3) =$$
$$= (a + 3)[6(a + 3) + a(a - 3) - 16] =$$
$$= (a + 3)(6a + 18 + a^2 - 3a - 16) =$$
$$= (a + 3)(a^2 + 3a + 2) = (a + 3)(a + 1)(a + 2).$$

d) Täisruudu eraldamine kolmel viisil a eelkäiva sulgude ette võtmisega:

$$a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a^3 + 6a^2 + 9a + 2a + 6 =$$
$$= a(a^2 + 6a + a) + 2(a + 3) =$$
$$= a(a + 3)^2 + 2(a + 3) = (a + 3)[a(a + 3) + 2] =$$
$$= (a + 3)(2^2 + 3a + 2) = (a + 3)(a + 2)(a + 1)$$

või

$$a^3+6a^2+11a+6=a^3+2a^2+a+4a^2+10a+6=$$
$$=a(a^2+2a+1)+4a^2+4a+6a+6=$$
$$=a(a+1)^2+4a(a+1)+6(a+1)=$$
$$=(a+1)[a(a+1)+4a+6]=$$
$$=(a+1)(a^2+a+4a+6)=$$
$$=(a+1)(a^2+5a+6)=(a+1)(a+2)(a+3)$$

või

$$a^3+6a^2+11a+6=a^3+4a^2+4a+2a^2+7a+6=$$
$$=a(a^2+4a+4)+2a^2+4a+3a+6=$$
$$=a(a+2)^2+2a(a+2)+3(a+2)=$$
$$=(a+2)[a(a+2)+2a+3]=$$
$$=(a+2)(a^2+2a+2a+3)=(a+2)(a^2+4a+3)=$$
$$=(a+2)(a+3)(a+1).$$

e) Kuupide summa eraldamine kolmel viisil:

$$a^3+6a^2+11a+6=a^3+1+6a^2+6a+5a+5=$$
$$=(a+1)(a^2-a+1)+6a(a+1)+5(a+1)=$$
$$=(a+1)(a^2-a+1+6a+5)=$$
$$=(a+1)(a^2+5a+6)=(a+1)(a+2)(a+3)$$

või

$$a^3+6a^2+11a+6=a^3+8+6a^2+11a-2=$$
$$=(a^3+2^3)+6a^2+12a-a-2=$$
$$=(a^3+2^3)+6a(a+2)-(a+2)=$$
$$=(a+2)(a^2-2a+4)+6a(a+2)-(a+2)=$$
$$=(a+2)(a^2-2a+4+6a-1)=$$
$$=(a+2)(a^2+4a+3)=(a+2)(a+1)(a+3)$$

või

$$a^3+6a^2+11a+6=a^3+27+6a^2+11a-21=$$
$$=(a^3+3^3+6a^2+18a-7a-21=$$
$$=(a+3)(a^2-3a+9)+6a(a+3)-7(a+3)=$$
$$=(a+3)(a^2-3a+9+6a-7)=$$
$$=(a+3)(a^2+3a+2)=(a+3)(a+2)(a+1).$$

Näide 4. Lahutada tegureiks hulkliige $a^3 - 7a - 6$.

a) Keskmise liikme kujutamine kahe liikme summana:

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - a - 6a - 6 =$$
$$= a(a^2 - 1) - 6(a + 1) = a(a + 1)(a - 1) -$$
$$- 6(a + 1) = (a + 1)[a(a - 1) - 6] =$$
$$= (a + 1)(a^2 - a - 6) = (a + 1)(a + 2)(a - 3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - 4a - 3a - 6 =$$
$$= a(a^2 - 4) - 3(a + 2) = a(a + 2)(a - 2) - 3(a + 2) =$$
$$= (a + 2)[a(a - 2) - 3] = (a + 2)(a^2 - 2a - 3) =$$
$$= (a + 2)(a - 3)(a + 1)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - 9a + 2a - 6 =$$
$$= a(a^2 - 9) + 2(a - 3) =$$
$$= a(a + 3)(a - 3) + 2(a - 3) =$$
$$= (a - 3)[a(a + 3) + 2] =$$
$$= (a - 3)(a^2 + 3a + 2) = (a - 3)(a + 1)(a + 2).$$

b) Täiskuubi eraldamine, s. o. $(a + 1)^3$, $(a + 2)^3$ või $(a - 3)^3$ eraldamine:

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a^2 - 10a - 7 =$$
$$= (a + 1)^3 - 3a^2 - 3a - 7a - 7 =$$
$$= (a + 1)^3 - 3a(a + 1) - 7(a + 1) =$$
$$= (a + 1)[(a + 1)^2 - 3a - 7] =$$
$$= (a + 1)(a^2 + 2a + 1 - 3a - 7) =$$
$$= (a + 1)(a^2 - a - 6) = (a + 1)(a - 3)(a + 2)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 - 6a^2 -$$
$$- 19a - 14 = (a+2)^3 - 6a^2 - 12a - 7a - 14 =$$
$$= (a+2)^3 - 6a(a+2) - 7(a+2) =$$
$$= (a+2)[(a+2)^2 - 6a - 7] =$$
$$= (a+2)(a^2 + 4a + 4 - 6a - 7) =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a - 3) =$$
$$= (a+2)(a+1)(a-3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - 9a^2 + 27a - 27 + 9a^2 - 34a + 21 =$$
$$= (a-3)^3 + 9a^2 - 27a - 7a + 21 =$$
$$= (a-3)^3 + 9a(a-3) - 7(a-3) =$$
$$= (a-3)[(a-3)^2 + 9a - 7] =$$
$$= (a-3)(a^2 - 6a + 9 + 9a - 7) =$$
$$= (a-3)(a^2 + 3a + 2) = (a-3)(a+1)(a+2).$$

c) Täisruudu eraldamine kolmel viisil:

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + a^2 + 2a + 1 - a^2 - 9a - 7 =$$
$$= a^3 + (a+1)^2 - a^2 - 9a - 7 =$$
$$= (a+1)^2 + a^3 + 1 - a^2 - 9a - 8 =$$
$$= (a+1)^2 + (a+1)(a^2 - a + 1) - (a^2 + 9a + 8) =$$
$$= (a+1)^2 + (a+1)(a^2 - a + 1) - (a+1)(a+8) =$$
$$= (a+1)[a + 1 + a^2 - a + 1 - a - 8] =$$
$$= (a+1)(a^2 - a - 6) = (a+1)(a-3)(a+2)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - a^2 - 4a - 4 + a^2 - 3a - 2 =$$
$$= a^3 - (a^2 + 4a + 4) + a^2 - 3a - 2 =$$
$$= a^3 - (a+2)^2 + a^2 - 3a - 2 =$$
$$= a^3 + 2^3 - (a+2)^2 + a^2 - 3a - 10 =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a + 4) - (a+2)^2 + (a+2)(a-5) =$$
$$= (a+2)[a^2 - 2a + 4 - a - 2 + a - 5] =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a - 3) = (a+2)(a+1)(a-3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - a^2 + 6a - 9 + a^2 - 13a + 3 =$$
$$= a^3 - (a^2 - 6a + 9) + a^2 - 13a + 3 =$$
$$= a^3 - 3^3 - (a - 3)^2 + a^2 - 13a + 30 =$$
$$= (a - 3)(a^2 + 3a + 9) - (a - 3)^2 +$$
$$+ (a - 3)(a - 10) =$$
$$= (a - 3)(a^2 + 3a + 9 - a + 3 + a - 10) =$$
$$= (a - 3)(a^2 + 3a + 2) = (a - 3)(a + 1)(a + 2).$$

d) Täisruudu eraldamine kolmel viisil pärast a sulgude ette võtmist:

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + 2a^2 + a - 2a^2 - 8a - 6 =$$
$$= a(a^2 + 2a + 1) - 2(a^2 + 4a + 3) =$$
$$= a(a + 1)^2 - 2(a + 1)(a + 3) =$$
$$= (a + 1)[a(a + 1) - 2(a + 3)] =$$
$$= (a + 1)(a^2 + a - 2a - 6) = (a + 1)(a^2 - a - 6) =$$
$$= (a + 1)(a + 2)(a - 3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + 4a^2 + 4a - 4a^2 - 11a - 6 =$$
$$= a(a^2 + 4a + 4) - 4a^2 - 8a - 3a - 6 =$$
$$= a(a + 2)^2 - 4a(a + 2) - 3(a + 2) =$$
$$= (a + 2)[a(a + 2) - 4a - 3] =$$
$$= (a + 2)(a^2 + 2a - 4a - 3) = (a + 2)(a^2 - 2a - 3) =$$
$$= (a + 2)(a + 1)(a - 3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - 6a^2 + 9a + 6a^2 - 16a - 6 =$$
$$= a(a^2 - 6a + 9) + 6a^2 - 18a + 2a - 6 =$$
$$= a(a - 3)^2 + 6a(a - 3) + 2(a - 3) =$$
$$= (a - 3)[a(a - 3) + 6a + 2] =$$
$$= (a - 3)(a^2 - 3a + 6a + 2) =$$
$$= (a - 3)(a^2 + 3a + 2) =$$
$$= (a - 3)(a + 1)(a + 2).$$

e) Kuupide summa eraldamine kolmel viisil:

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + 1 - 7a - 7 =$$
$$= (a+1)(a^2 - a + 1) - 7(a+1) =$$
$$= (a+1)(a^2 - a + 1 - 7) =$$
$$= (a+1)(a^2 - a - 6) = (a+1)(a+2)(a-3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 + 8 - 7a - 14 =$$
$$= (a^3 + 2^3) - 7(a+2) =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a + 4) - 7(a+2) =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a + 4 - 7) =$$
$$= (a+2)(a^2 - 2a - 3) =$$
$$= (a+2)(a+1)(a-3)$$

või

$$a^3 - 7a - 6 = a^3 - 27 - 7a + 21 =$$
$$= (a^3 - 3^3) - 7(a-3) =$$
$$= (a-3)(a^2 + 3a + 9) - 7(a-3) =$$
$$= (a-3)(a^2 + 3a + 9 - 7) =$$
$$= (a-3)(a^2 + 3a + 2) = (a-3)(a+1)(a+2).$$

Lõpuks on kasulik hulkliikmete tegureiks lahutamist vaadata ka hulkliikme liikmete arvu seisukohalt.

I. Binoomide lahutamine.

a) Binoomid kujul $a^n - b^n$ ja $a^n + b^n$, eriti $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^6 - b^6$, $a^6 + b^6$.

b) Binoomid kujul $a^4 + 4b^4$.

c) Binoomid kujul $n^m - n$:
$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$.

II. Trinoomide lahutamine.

a) Lahutamine valemite $a^2 \pm 2ab + b^2$ järgi.

b) Lahutamine $a^2 + (b+c)a + bc = (a+b)(a+c)$ järgi.

c) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ lahutamine.

d) $a^3 + a^2 + 4$

$a^3 + a^2 + 4 = a^3 + 8 + a^2 - 4 =$

$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4) + (a + 2)(a - 2) =$

$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4 + a - 2) =$

$= (a + 2)(a^2 - a + 2).$

III. Neliliikmete lahutamine.

a) Valemite $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ järgi.

b) Valemite $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$ ja $z^2 - x^2 \pm 2xy - y^2$ järgi.

c) $a^3 \pm b^3 + a^2 - b^2.$

d) $a^2 + 10ab - 10b - 1.$

IV. Viisliikmete lahutamine.

a) $a^2 \pm 2ab + b^2 \pm am + bm.$

b) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 + c^3.$

c) $a^3 + a^2 - ab + b^2 + b^3.$

d) $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 2.$

V. Kuusliikmete lahutamine.

a) $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2 \pm 2cd - d^2.$

b) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 + a^2 - b^2.$

c) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 + a \pm b.$

§ 62. Hulkliikmete tegureiks lahutamise harjutustest.

Hulkliikmete tegureiks lahutamine leiab rakendust murdudega sooritatavate tehete puhul ja võrrandite lahendamisel. Oskuse omandamiseks on tarvis teha süstemaatilisi harjutusi.

Kõigepealt on tarvis täiendada Šapošnikovi ja Valtsovi õpiku ülesandeid keerukamate harjutustega, näiteks järgmistest tüüpidest:

1. $a^3 + 2a^2c + 2adc + 2cd^2 - d^3 = (a^3 - d^3) +$
$+ (2a^2c + 2adc + 2cd^2) =$
$= (a - d)(a^2 + ad + d^2) + 2c(a^2 + ad + d^2) =$
$= (a^2 + ad + d^2)(a - d + 2c).$

2. $a^3 + 2a^2 - 3 = a^3 - 1 + 2a^2 - 2 =$
$= (a - 1)(a^2 + a + 1) + 2(a^2 - 1) =$
$= (a - 1)(a^2 + a + 1) + 2(a - 1)(a + 1) =$
$= (a - 1)(a^2 + a + 1 + 2a + 2) =$
$= (a - 1)(a^2 + 3a + 3)$

või teisiti:

$a^3 + 2a^2 - 3 = a^3 - a^2 + 3a^2 - 3 =$
$= a^2(a - 1) + 3(a^2 - 1) =$
$= a^2(a - 1) + 3(a - 1)(a + 1) =$
$= (a - 1)(a^2 + 3a + 3).$

3. $2a^3 + a^2 - 4a - 12 = 2a^3 + (a^2 - 4a + 4) - 16 =$
$= (2a^3 - 16) + (a^2 - 4a + 4) =$
$= 2(a^3 - 8) + (a - 2)^2 =$
$= 2(a - 2)(a^2 + 2a + 4) + (a - 2)^2 =$
$= (a - 2)(2a^2 + 4a + 8 + a - 2) =$
$= (a - 2)(2a^2 + 5a + 6).$

Siis tuleb teha rida harjutusi mingisuguste, näiteks järgmist tüüpi omaduste tõestamiseks:

1. Näidata, et vahe $a^3 - a$ (kui a on loomulik arv) jagub 3-ga.

2. Tuletada samasus

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$$

ja kasutada seda viiega lõppevate kahekohaliste arvude ruutude kiirel arvutamisel.

3. Tuletada samasus

$$(10a + b)[10a + (10 - b)] = 100a(a + 1) + b(10 - b)$$

ja kasutada seda kahe kahekohalise arvu lühendatud korrutamisel, kui arvude kümnelised on võrdsed ja ühelised annavad summas 10.

4. Tuletada samasus

$$(10a + b)[10(10 - a) + b] = 100[a(10 - a) + b] + b^2$$

ja kasutada seda kahe kahekohalise arvu lühendatud korrutamisel, kui arvude ühelised on võrdsed ja kümneliste summa on 10.

5. Näidata, et binoomide $ax + b$ ja $cx + d$ summa on x suhtes ka esimese astme binoom.

6. Näidata, et kahe paaritu arvu korrutis on paaritu arv.

7. Tõestada, et mistahes kahekohalise arvu summa arvuga, milles on samad numbrid vastupidises järjekorras, võrdub üheteistkümne ja arvu ristsumma korrutisega.

8. Tõestada, et vahe mistahes kahekohalise arvu ja vastupidiselt järjestatud samade numbritega arvu vahel võrdub üheksa ja arvu numbrite vahe korrutisega.

IV peatükk.

Algebralised murrud.

§ 63. Peatüki sisu.

Algebraliste murdude identsed teisendused ja tehted murdudega omavad tähtsat kohta algebraliste operatsioonide praktikas. Suur osa õpilaste sagedastest vigadest langeb algebra nendele osadele.

Algebraliste murdude õpetamise metoodika erineb aritmeetiliste murdude õpetamise metoodikast. Aritmeetiliste murdude käsitlemisel tutvus õpilane uute mõistetega; teda oli vaja psühholoogiliselt ette valmistada uute ideede tajumiseks; murdude sissetoomise meetod oli seepärast reaalkonkreetne.

Algebraliste murdude käsitlemisel on kõik tehted positiivsete ja negatiivsete täis- ning murdarvudega tuntud. Algebralise murru osadeks võivad olla mistahes positiivsed ja negatiivsed, täis- ja murdarvud; kõik need arvud alluvad tehete põhiseadustele; et algebralised murrud on arenenud aritmeetilistest murdudest, siis kõik aritmeetiliste murdude omadused käivad ka algebraliste murdude kohta. Seepärast ongi eelistatavam käsitella tehteid algebraliste murdudega formaal-loogiliselt.

Küllaldase hulga harjutuste lahendamisel areneb tehnika ja oskus; tehteid algebraliste murdudega tuleb teha teadlikult ja kindlalt.

§ 64. Algebralise murru definitsioon.

Täis-hulkliikmete liitmine, lahutamine ja korrutamine on alati teostatavad ja nende tehete tulemus on samuti täis-hulkliige. Hulkliikmete jagamine seevastu ei ole iga kord läbiviidav, s. t. et tulemust ei saa sageli väljendada täis-hulkliikmena.

Definitsioon. Algebraliseks murruks $\frac{a}{b}$ nimetatakse üksliikme või hulkliikme a jagatist üksliikmega või hulkliikmega b.

Jagatavat a nimetatakse algebralise murru lugejaks ja jagajat b nimetajaks. Lugeja ja nimetaja koos on algebralise murru liikmed.

Veel on tarvis rõhutada, et lugejal võib tähtede mitmesuguste väärtuste puhul olla mistahes väärtus, kuna nimetajal võivad olla kõik väärtused, välja arvatud null.

Tehted algebraliste murdudega seisavad kolme võrduse püstitamises:

1. Püstitatakse kahe murru võrdumise kriteerium: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siis ja ainult siis, kui $ad = bc$; $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, kui $ad > bc$; $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, kui $ad < bc$.

2. Püstitatakse kahe murru summa definitsioon:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

3. Püstitatakse kahe murru korrutise definitsioon:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

4. Lahutamine ja jagamine on liitmise ja korrutamise pöördtehed; nende tehete reeglid on liitmise ja korrutamise reeglite järeldused, nimelt:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd},$$

sest $\frac{ad - bc}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{ad - bc + bc}{bd} = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$;

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

sest $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$.

Siis tõestatakse, et tehete põhiseadused on kehtivad ka murdude puhul.

Oma olemuselt lõpebki sellega algebraliste murdude teooria. Koolipraktikas aga tuleb õpetust murdudest arendada täies ulatuses ja palju tähelepanu pühendada murdudega sooritatavate tehete tehnikale.

Pärast murdude võrdumise kriteeriumi püstitamist tuleb siirduda murru põhiomaduse juurde. Murru väärtus ei muutu, kui murru liikmeid korrutada või jagada ühe ning sellesama avaldisega, s. o. $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

Murru põhiomadus on kahe murru võrdsuse definitsiooni järeldus. Tõepoolest, võrreldes murde $\frac{a}{b}$ ja $\frac{an}{bn}$, me koostame kaks korrutist $a \cdot bn$ ja $b \cdot an$; need kaks korrutist on võrdsed, sest teine korrutis saadakse esimesest tegurite a ja b ümberpaigutamisega (korrutisel on, nagu teada, vahetuvus- ja ühenduvusomadus); võrduse $a \cdot bn = b \cdot an$ ja kahe murru võrdsuse definitsiooni põhjal otsustame, et $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

(Tuleb tähendada, et $b \neq 0$, sest kui $b = 0$, siis murdudel $\frac{a}{b}$ ja $\frac{an}{bn}$ pole mõtet.)

Algebraliste murdude põhiomadusele rajaneb kaks identset teisendust, nimelt murdude taandamine ja ühisnimetajale viimine. (Vt. märkus 8 raamatu lõpus.)

§ 65. Algebraliste murdude taandamine.

Kui murru liikmeid jagada nende suurima ühisteguriga, siis saadakse murd, mis on võrdne esialgse murruga; see järeldub vahenditult murru põhiomadusest:

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}.$$

Murru taandamiseks on tarvis leida murru liikmete suurim ühistegur ja siis sellega jagada murru liikmed.

Näited.

$$\frac{4a^2}{6ab} = \frac{2a}{3b}; \quad \frac{4a^2b^3c}{12a^3b^2d} = \frac{bc}{3ad}; \quad \frac{15a^3b^4c^5}{21a^2b^5c^7} = \frac{5a}{7bc^2};$$

$$\frac{a^2 - ab}{ac - ad} = \frac{a(a-b)}{a(c-d)} = \frac{a-b}{c-d}; \quad \frac{a}{ac + ab} = \frac{a}{a(c+b)} = \frac{1}{c+b};$$

$$\frac{ac - ab}{bc - bd} = \frac{a(c-d)}{b(c-d)} = \frac{a}{b}.$$

Õpilased taandavad sageli hulkliikmelist murdu mitte murru liikmete ühisteguriga, vaid teguriga, mis esineb nimetajas ja lugeja ühes liikmes, näiteks: $\frac{2a+3b}{2} = a + 3b$. See pole muidugi õige, sest summa jagamisel tuleb jagada iga liidetav, s. o.

$$\frac{2a+3b}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{3b}{2} = a + \frac{3b}{2}.$$

Ei tohi murdu taandada nõnda: $\frac{a+b}{a} = b$, sest kahest lugeja liidetavast on ainult üks (a) jaguv a-ga, teine (b) aga mitte.

Tuleb meeles pidada, et hulkliikmelises murrus murrukriips asendab sulgusid, seepärast on tarvis siis, kui murrukriips asendatakse kahe täpiga, võtta tarvitusele sulud; näiteks:

$$\frac{a}{b+c} = a : (b+c); \quad \frac{a+b}{c} = (a+b) : c;$$

$$\frac{a-b}{c+d} = (a-b) : (c+d).$$

Murru mõlema liikme märke võib üheaegselt muuta. Tõepoolest, märgi muutmine lugejas on samaväärne lugeja korrutamisega (-1)-ga; nimetaja märgi muutmine on samaväärne nimetaja korrutamisega (-1)-ga. Aga murd ei muutu, kui tema liikmeid korrutada ühe ja sellesama arvuga; järelikult murd ei muutu, kui tema liikmete märgid muuta.

Näited.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (-1)}{a \cdot (-1)} = \frac{-a}{-b}; \quad \frac{-a}{b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{b \cdot (-1)} = \frac{a}{-b};$$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{-a}{-b}.$$

Järelikult võib üheaegselt muuta märke lugejas ja nimetajas või murru ees ja lugejas, või murru ees ja nimetajas.

Kui murru lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, siis märgi muutmine lugejas ja nimetajas on samaväärne lugeja ja nimetaja kõigi liikmete märgi muutmisega, näiteks:

$$\frac{a-b}{-c-d} = \frac{-a+b}{c+d} = \frac{b-a}{c+d}.$$

Näited.

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1;$$

$$\frac{a-b}{b^2-a^2} = \frac{a-b}{(b+a)(b-a)} = \frac{a-b}{(b+a)[-(a-b)]} =$$

$$= \frac{a-b}{-(b+a)(a-b)} = -\frac{1}{a+b};$$

$$\frac{(a-b)^2}{b^2-a^2}=\frac{(a-b)(a-b)}{(b+a)(b-a)}=\frac{(b-a)(b-a)}{(b+a)(b-a)}=\frac{b-a}{b+a};$$

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}=\frac{(b-a)(d-c)}{(b+a)(b-a)(d+c)(d-c)}=\frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Mõnikord õpilased, soovides murdu igal juhul taandada, muudavad näiteks murru $\frac{a-b}{a+b}$ puhul lugeja teise liikme märgi ja taandavad siis $a+b$-ga. On tarvis juhtida õpilaste tähelepanu sellele, et märkide muutmine toimub üheaegselt lugeja ja nimetaja kõikide liikmete juures.

Võtame arutlusele murrud, millede lugeja ja nimetaja on mitme hulkliikme, erijuhul mitme üksliikme korrutis. Näiteks:

$$\frac{x(a-b)(c-d)(k-l)}{4(b-a)(d-c)(l-k)}.$$

Lugejas ja nimetajas on sulgudes avaldised, mis on võrdsed oma absoluutväärtuste poolest, aga vastupidised märkide poolest. Tõepoolest, $a-b=-(-a+b)=-(b-a)$;

$$c-d=-(-c+d)=-(d-c);$$
$$k-l=-(-k+l)=-(l-k).$$

Järelikult

$$\frac{x(a-b)(c-d)(k-l)}{y(b-a)(d-c)(l-k)}=\frac{x[-(b-a)][-(d-c)][-(l-k)]}{y(b-a)(d-c)(l-k)}=$$
$$=\frac{-x(b-a)(d-c)(l-k)}{y(b-a)(d-c)(l-k)}=-\frac{x}{y}.$$

Viimastest näidetest on näha, et kui lugejas ja nimetajas on kaksliikmed, mis erinevad ainult märkide poolest, siis on kasulik iga kaksliikmete paari juures ühes muuta märk vastupidiseks, sest siis on võimalik murdu taandada. On tarvis meeles pidada, et märgid tuleb muuta vastupidiseks paarisarvu tegurite juures, kahe, nelja jne. teguri juures. Seega siis võib muuta märgid kahel teguril kas lugejas või nimetajas, või jälle ühes lugeja ja ühes nimetaja teguris, või ühes lugeja (või nimetaja) teguris ja murru ees.

Murdude taandamise harjutusi tuleb valida järgmises järjekorras.

1. Taandada järgmised murrud:

$$\frac{a+b}{a^2-b^2};\quad \frac{a-b}{a^2-b^2};\quad \frac{a-b}{b-a};\quad \frac{a-b}{b^2-a^2};\quad \frac{a-b}{a^3-b^3};\quad \frac{(a-b)^2}{b^2-a^2};$$

$$\frac{a-b}{(b-a)^2};\quad \frac{(a-b)(c-d)}{b-a};\quad \frac{(a-b)(c-d)}{(b-a)^2(d-c)^2};\quad -\frac{a^2-b^2}{a-b};$$

$$-\frac{a^3-b^3}{a-b};\quad -\frac{a-b}{b-a};\quad \frac{m-n}{-(n-m)};\quad \frac{(a-b)^{2m}}{(b-a)^{2m}};\quad \frac{(a-b)^{2m+1}}{(b-a)^{2m+1}}.$$

2. Avastada viga, mis on tehtud järgmiste murdude taandamisel:

$$\frac{5a+c}{5m}=\frac{a+c}{m};\quad \frac{2a+b}{2c+d}=\frac{a+b}{c+d};\quad \frac{a+b}{a+c}=\frac{b}{c};$$

$$\frac{a+b(c+d)}{b(c+d)}=a;\quad \frac{a+b}{(a+b)^2}=a+b;\quad \frac{a}{a^2}=a;\quad \frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b;$$

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2+b^2;\quad \frac{a+b}{b}=a+1;\quad \frac{c+ab}{a}=b;$$

$$\frac{2a}{2c+d}=\frac{a}{c+d};\quad \frac{5a+b}{5c+d}=\frac{a+b}{c+d};\quad \frac{a}{ab+ac}=b+c;$$

$$\frac{d^2}{c^2-c^3d^2}=0;\quad \frac{2^m}{2}=m.$$

3. Määrata, millised järgmistest võrdustest on õiged:

$$\frac{mc-mb}{m}=c-b;\quad \frac{a+ab}{b}=a;\quad \frac{5a+y}{5b+c}=\frac{a+y}{b+c};$$

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c};\quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{a-b}{d-c};\quad -\frac{a-b}{c-d}=-\frac{a-b}{d-c}.$$

4. Tõestada, et murru $\frac{5a+5b}{8a+8b}$ väärtus on jääv, s. o. et see väärtus ei olene a-st ja b-st.

5. Tõestada järgmiste võrduste õigsus:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c};\quad \frac{a-b}{c-d}=-\frac{a-b}{d-c};\quad \frac{a-b}{c-d}=-\frac{b-a}{c-d};$$

$$\frac{1}{(a-b)(c-d)}=\frac{1}{(b-a)(d-c)};\quad \frac{1}{(a-b)(c-d)}=-\frac{1}{(a-b)(d-c)}.$$

§ 66. Murdude ühenimeliseks teisendamine.

Algebraliste murdude ühenimeliseks tegemine sel korral, kui kõik nimetajad on üksliikmed, raskusi ei tee, sest siin kordub juba aritmeetikast tuntud lugu. Raskusi esineb siis, kui nimetajad on hulkliikmelised.

Näide. Teha murrud $\frac{1}{a-b}$; $\frac{1}{b-a}$; $\frac{1}{a^2-b^2}$ ühenimeliseks.

Teise murru nimetajale anname kuju $-(a-b)$ ja kolmanda murru nimetajale $(a-b)(a+b)$. Et $a-b$ esineb kõigis nimetajais, teises murrus ainult vastupidise märgiga, siis, et ka teises murrus oleks nimetaja $a-b$, muudame selle murru lugejas märgi vastupidiseks, saame:

$$\frac{1}{a-b}, \quad \frac{-1}{a-b}, \quad \frac{1}{(a-b)(a+b)}.$$

Nüüd on vahenditult näha, et murdude nimetajate väikseimaks ühiskordseks on $(a-b)(a+b)$, esimese ja teise murru laiendusteguriks on $a+b$; saame:

$$\frac{a+b}{a^2-b^2}, \quad \frac{-a-b}{a^2-b^2}, \quad \frac{1}{a^2-b^2}.$$

Vead murdude ühenimeliseks tegemisel kui ka murdude taandamisel on tingitud enamikul juhtudest sellest, et ei osata hulkliikmeid lahutada tegureiks; seepärast siis õpilaset korrutavad kõik nimetajad ja saavad väga kohmakad avaldised. Veel mõningaid näiteid murdude ühenimeliseks teisendamise kohta:

1. $\frac{A}{(a-b)(c-d)(k-l)}, \quad \frac{B}{(b-a)(d-c)(k-l)}, \quad \frac{C}{(b-a)(c-d)(m-n)}.$

2. $\frac{1}{a-b}, \quad \frac{2}{b^2-a^2}, \quad \frac{c}{b^3-a^3}.$

§ 67. Murdude liitmine ja lahutamine.

Algebraliste murdude liitmise ja lahutamise reegel on sama, mis aritmeetiliste murdude puhul. Murrud tuleb teha ühenimeliseks ja liita murdude lugejad, millede ees on plussmärk, ning lahutada lugejad, millede ees on miinusmärk. Hulkliikmeliste nimetajatega murdude lahutamisel tuleb märk vastupidiseks muuta iga vähendatava liikme juures.

Kolme ja enama murru liitmine toimub korraga:

$$\frac{2}{a+b}+\frac{3}{a-b}+\frac{4a-5b}{a^2-b^2}=\frac{2(a-b)+3(a+b)+4a-5b}{(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{2a-2b+3a+3b+4a-5b}{(a+b)(a-b)}=\frac{9a-4b}{a^2-b^2}.$$

Mõnikord on siiski otstarbekohane sooritada mitme murru liitmine paarikaupa. Võtame harjutuse nr. 110 Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu esimesest osast (lk. 66):

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\left[\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\left[1+\frac{(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)}\right]=$$

$$=\frac{(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)}{(a+b)(b+c)}+$$

$$+\frac{c-a}{c+a}\cdot\frac{(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)}=$$

$$=\frac{ab+ac-b^2-bc+b^2+ab-bc-ac}{(a+b)(b+c)}+$$

$$+\frac{c-a}{c+a}\cdot\frac{ab+b^2+ac+bc+ab-b^2-ac+bc}{(a+b)(b+c)}=$$

$$=\frac{2ab-2bc}{(a+b)(b+c)}+\frac{c-a}{c+a}\cdot\frac{2ab+2bc}{(a+b)(b+c)}=$$

$$= \frac{2ab - 2bc}{(a+b)(b+c)} + \frac{c-a}{c+a} \cdot \frac{2b(a+c)}{(a+b)(b+c)} =$$

$$= \frac{2ab - 2bc + 2bc - 2ab}{(a+b)(b+c)} = 0.$$

Erilist tähelepanu tuleb juhtida liitmisele ja lahutamisele juhul, kui on tegemist täisavaldistega koos murdudega:

$$a + \frac{ac}{b-c} = \frac{a(b-c)+ac}{b-c} = \frac{ab-ac+ac}{b-c} = \frac{ab}{b-c},$$

$$a - \frac{ab-ac}{b+c} = \frac{ab+ac-ab+ac}{b+c} = \frac{2ac}{b+c}.$$

Mõnikord on murdude liitmise ja lahutamise tulemuseks null, õpilased aga kirjutavad ühe.

N ä i d e. Teostada näidatud tehted:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2-4} - 2 - \frac{a-1}{2-a}.$$

Harjutust võib teha mitmel viisil, nimelt: kas taandada esimene murd või jälle teha murrud ühenimeliseks.

Esimene lahendus:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2-4} - 2 - \frac{a-1}{2-a} = \frac{a^2+2a-3a-6}{(a+2)(a-2)} - 2 - \frac{a-1}{2-a} =$$

$$= \frac{a(a+2)-3(a+2)}{(a+2)(a-2)} - 2 + \frac{a-1}{a-2} =$$

$$= \frac{(a+2)(a-3)}{(a+2)(a-2)} - 2 + \frac{a-1}{a-2} =$$

$$= \frac{a-3}{a-2} - 2 + \frac{a-1}{a-2} = \frac{a-3+a-1}{a-2} - 2 =$$

$$= \frac{2a-4}{a-2} - 2 = \frac{2(a-2)}{a-2} - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Teine lahendus:

$$\frac{a^2-a-6}{a^2-4} - 2 - \frac{a-1}{2-a} = \frac{a^2-a-6}{a^2-4} - \frac{2(a^2-4)}{a^2-4} + \frac{a-1}{a-2} =$$

$$= \frac{a^2-a-6-2a^2+8+a^2+a-2}{a^2-4} = \frac{0}{a^2-4} = 0.$$

Kui mõnedel murdudel on ühesugused nimetajad, siis on mõnikord otstarbekohane enne liita (või lahutada) ühesuguste nimetajatega murrud ja siis juba leida üldsumma.

N ä i t e d. Teostada näidatud tehted järgmistes murdudes.

1. $\frac{a^3}{a-1}-\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}$;

$$\frac{a^3}{a-1}-\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}=\left(\frac{a^3}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)-$$
$$-\left(\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a+1}\right)=\frac{a^3-1}{a-1}-\frac{a^2-1}{a+1}=$$
$$=a^2+a+1-a+1=a^2+2.$$

2. $\frac{(a+1)^3}{a}-\frac{(a+1)^2}{a+2}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}=\left[\frac{(a+1)^3}{a}-\frac{1}{a}\right]-$
$$-\left[\frac{(a+1)^2}{a+2}-\frac{1}{a+2}\right]=\frac{(a+1)^3-1}{a}-\frac{(a+1)^2-1}{a+2}=$$
$$=\frac{(a+1-1)\left[(a+1)^2+(a+1)+1\right]}{a}-$$
$$-\frac{(a+1+1)(a+1-1)}{a+2}=\frac{a(a^2+2a+1+a+1+1)}{a}-$$
$$-\frac{a(a+2)}{a+2}=a^2+3a+3-a=a^2+2a+3.$$

Summa põhiomadused on kehtivad ka murruliste liidetavate puhul.

1. Murdude summal on vahetuvusomadus:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{bd}=\frac{bc}{bd}+\frac{ad}{bd}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

2. Murdude summal on ühenduvusomadus:

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf};$$
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf},$$

järelikult

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}.$$

§ 68. Täisavaldise eraldamine algebralisest murrust.

Kui murru lugeja on hulkliige, mille aste on nimetaja astmest kõrgem või niisama suur kui see, siis võib antud murdu kujutada täis-hulkliikme ja murru summana, kus murru lugeja aste on madalam nimetaja astmest. Täis-hulkliikme eraldamine murrust võib toimuda kahel viisil.

Esimene viis. Lugeja tuleb jagada nimetajaga; et lugeja aste on nimetaja astmest kõrgem või sellega võrdne, siis jagatises saadakse hulkliige, mis ei võrdu nulliga.

Näide 1.

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a-b};\quad \begin{array}{l} a^2-ab+b^2 \\ \underline{a^2-ab} \\ \quad +b^2 \end{array}\ \begin{array}{|l} a-b \\ \hline a \end{array};\ \text{järelikult}$$

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}=a+\frac{b^2}{a-b}.$$

Näide 2.

$$\frac{n+1}{n-1};\quad \begin{array}{l} n+1 \\ \underline{n+1} \\ 2 \end{array}\ \begin{array}{|l} n+1 \\ \hline 1 \end{array};\ \text{järelikult}\ \frac{n+1}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}.$$

Teine viis. Murru lugeja tuleb teisendada kahe avaldise summaks, kus üks on nimetaja kordne.

Näited.

1. $\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n-1+2}{n-1}=\dfrac{n-1}{n-1}+\dfrac{2}{n-1}=1+\dfrac{2}{n-1}.$

2. $\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{n}{n}-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}.$

3. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}=\dfrac{a^2-ab}{a-b}+\dfrac{b^2}{a-b}=\dfrac{a(a-b)}{a-b}+\dfrac{b^2}{a-b}=$

$=a+\dfrac{b^2}{a-b}.$

§ 69. Murdude korrutamine.

Kahe murru korrutamise reegel oli juba antud võrdusega

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Kolme või enama murru korrutamine seisab kahe murru korrutise korrutamises kolmanda murruga, siis saadud korrutise korrutamises neljanda murruga jne., kuni kõigi tegurite ammendamiseni.

Selleks et leida mitme murru korrutist, tuleb kõikide murdude lugejate korrutis jagada murdude nimetajate korrutisega:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{k} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{k} = \frac{ace}{bdf} \cdot \frac{h}{k} = \frac{aceh}{bdfk}.$$

J ä r e l d u s. Selleks et murdu astendada, tuleb murru liikmed astendada samasse astmesse ja lugeja aste jagada nimetaja astmega:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}; \text{ tõepoolest, } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

§ 70. Korrutise omadused.

Täis-hulkliikmete korrutise põhiomadused kehtivad ka murruliste tegurite puhul.

1. Jaotuvusomadus jääb kehtima, s. o.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

Tõepoolest,

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{(ad + bc)e}{bdf} = \frac{ade + bce}{bdf} =$$

$$= \frac{ade}{bdf} + \frac{bce}{bdf} = \frac{ae}{bf} + \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

2. Vahetuvusomadus jääb kehtima, s. o.

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Tõepoolest,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

3. Ka ühenduvusomadus kehtib, s. o.

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}.$$

Tõepoolest,

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{ace}{bdf} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}.$$

§ 71. Algebraliste murdude korrutamise tehnika.

1. Lihtsustamise huvides tuleb murrud enne korrutamist taandada.

$$\frac{4a^2b}{9c^3d^2} \cdot \frac{21cd^3}{8ab} = \frac{4a^2b \cdot 21cd^3}{9c^3d^2 \cdot 8ab} = \frac{7ad}{6c^2}.$$

Suurima ühisteguriga võib taandada mistahes lugeja tegurit ja mistahes nimetaja tegurit.

$$\frac{3a^3b}{2c^2d} \cdot \frac{4c^3d^2}{9a^4b^2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2cd}{3ab} = \frac{2cd}{3ab}.$$

2. Et hulkliikmeliste lugejate ja nimetajatega murdude taandamisel pole kohe näha, kui suur on ühine jagaja, siis tuleb hulkliikmed lahutada tegureiks:

$$\frac{a^2 - ab}{c^2 + cd} \cdot \frac{c^2 - d^2}{ma - mb} = \frac{a(a-b)(c+d)(c-d)}{c(c+d)m(a-b)} = \frac{a(c-d)}{cm}.$$

3. Hulkliikmeliste lugejate ja nimetajatega murdude korrutamisel tuleb võimalikult kasutada lühendatud korrutamise valemeid.

4. Murru korrutamisel hulkliikmeliste murdude summa või vahega võib toimida kahel viisil: teha liidetavad ühenimeliseks, liita need ja siis korrutada kaks murdu, või korrutada murd summa või vahe iga liikmega. Teine viis on eriti kasulik siis, kui korrutatavaid murde saab taandada.

Näited.

a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a}{a-b}-$

$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)a}{(a^2+b^2)(a-b)}-\frac{(a+b)(a-b)b}{(a^2+b^2)(a+b)}=$

$=\frac{(a+b)a}{a^2+b^2}-\frac{(a-b)b}{a^2+b^2}=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2+b^2}=$

$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1;$

b) $(a^2-1)\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}+1\right)=$

$=(a^2-1)\left[\frac{(a+1)-(a-1)}{(a-1)(a+1)}+1\right]=$

$=(a^2-1)\left(\frac{2}{a^2-1}+1\right)=\frac{2(a^2-1)}{a^2-1}+a^2-1=$

$=2+a^2-1=a^2+1.$

§ 72. Murdude jagamine.

On kasulik ära märkida järgmist.

1. Jagamine murruga on samaväärne kui korrutamine pöördmurruga:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};$$

aga

$$\frac{d}{c}=1:\frac{c}{d},$$

järelikult

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\left(1:\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

2. Võrdsete nimetajatega murdude jagatis võrdub nende lugejate jagatisega:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}.$$

3. Võrdsete lugejatega murdude jagatis võrdub nende nimetajate pöördjagatisega:

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{ac}{ab} = \frac{c}{b}.$$

§ 73. Algebralised liitmurrud.

Algebraliseks liitmurruks nimetatakse niisugust murdu, mille üks liikmeist (kas lugeja või nimetaja) või mõlemad liikmed on algebralised murrud. Näiteks

$$\frac{a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \quad \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{a}, \quad \frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{e}}{\frac{1}{k}-\frac{1}{e}} \text{ on algebralised liitmurrud.}$$

Algebralised liitmurrud erinevad lihtmurdudest ka välimuselt: lihtmurdudes on üks murrukriips, liitmurdudes on neid kaks, kolm ja isegi rohkem.

Liitmurru asendamiseks lihtmurruga tuleb murru liikmed korrutada liikmete nimetajate väikseima ühiskordsega. Näiteks liitmurru $\dfrac{a-\frac{1}{k}}{b+\frac{c}{k}+\frac{d}{k^2}}$ võime asendada lihtmurruga, korrutades liitmurru lugejat ja nimetajat k^2-ga, tõepoolest

$$\frac{a-\frac{1}{k}}{b+\frac{c}{k}+\frac{d}{k^2}} = \frac{\left(a-\frac{1}{k}\right)k^2}{\left(b+\frac{c}{k}+\frac{d}{k^2}\right)k^2} = \frac{ak^2-k}{bk^2+ck+d}.$$

Võib aga toimida ka teisiti, nimelt: peale lugeja ja nimetaja lihtsustamist jagada esimese teisega; jagatis on lihtmurd ja asendab liitmurdu, millega ta on samaväärne.

Näiteks:

$$\frac{a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{a}{\frac{c+b}{bc}}=\frac{abc}{c+b};\quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Liitmurru kriips asendab üht või kaht sulgude paari, seepärast on tarvis siis, kui murrukriips asendatakse kahe täpiga, tarvitusele võtta sulud. Näiteks:

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{a}=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):a;\quad \frac{a-b}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=(a-b):\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{(a-b)cd}{c+d};$$

$$\frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{e}}{\frac{1}{k}-\frac{1}{e}}=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{e}\right):\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{e}\right)=\frac{e+k}{e-k}.$$

Liitmurrus esineb mõnikord mitu jagamismärki murrukriipsu näol. Viimaseks tehteks on liitmurrus murrulise lugeja jagamine murrulise nimetajaga; kriipsu, mis seda jagamist tähistab, nimetatakse liitmurru kriipsuks erinevalt murrukriipsust lugejas ja nimetajas. Mõnes raamatus on ta trükitud jämedamana. Näiteks murrus $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}$ on keskmine kriips liitmurru kriips, ülemine kriips on lugeja ja alumine nimetaja kriips. Liitmurru kriipsu eraldamise vajadus lugeja ja nimetaja kriipsust on tingitud sellest, et vältida arusaamatusi. Võtame murru $\frac{\frac{1}{a}}{b}$; kui ülemine kriips on liitmurru kriips,

siis tehted tuleb teostada niisuguses järjekorras:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{a}.$$

Kui aga alumine kriips on liitmurru kriips, siis tehted tuleb teostada teises järjekorras:

$$\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{1}{a} : b = \frac{1}{ab}.$$

Nagu näha, oleneb tulemus sellest, milline kriips on liitmurru kriipsuks. Võrdusmärk liitmurru puhul pannakse selle kriipsu, aga mitte lugeja või nimetaja kriipsu järele. Näiteks:

$$\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{1}{ab}; \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Näited.

1) $$\frac{\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}}{\frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}} = \left(\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}\right) : \left(\frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}\right) =$$

$$= \frac{(m+n)^2 - (m-n)^2}{(m+n)(m-n)} : \frac{(m+n)^2 + (m-n)^2}{(m+n)(m-n)} =$$

$$= \frac{(m+n)^2 - (m-n)^2}{(m+n)^2 + (m-n)^2} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2}{m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2} =$$

$$= \frac{4mn}{2m^2 + 2n^2} = \frac{2 \cdot 2mn}{2(m^2 + n^2)} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Veel lihtsamalt võib harjutuse lahendada, korrutades lugejat ja nimetajat $(m - n)(m + n)$-ga.

2) $$\frac{4 - \frac{4 + b^2}{b}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{4b - 4 - b^2}{b}}{\frac{b-2}{2b}} = \frac{(4b - 4 - b^2)2b}{b(b-2)} =$$

$$= \frac{2(4b - 4 - b^2)}{b-2} = \frac{2(2-b)^2}{2-b} = 2(2-b).$$

Lihtsamalt saab harjutuse lahendada, korrutades lugejat ja nimetajat $2b$-ga:

$$\frac{8b-8-2b^2}{b-2} = -\frac{2(b^2-4b+4)}{b-2} = -\frac{2(b-2)^2}{b-2} =$$
$$= -2(b-2) = 4-2b.$$

§ 74. Nelja tehte harjutused algebraliste murdudega.

Algebraliste murdude teisenduste harjutused taotlevad sihti õpetada murdudega teadlikult ja ratsionaalselt opereerima. Rööbiti üldvõtetega tuleb näidata ka kunstlikke võtteid, mis lihtsustavad tööd. Möödaminnes lahendatagu läbivõetud kursusest ka keerukamaid harjutusi, peamiselt hulkliikmete tegureiks lahutamise ja tehete järjekorra kohta.

Näide 1. Taandada murd

$$\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{b^2c^2(b-c)-a^2c^2(a-c)+a^2b^2(a-b)}.$$

Lugeja ja nimetaja tegureiks lahutamisel on kasulik tähele panna, et teine suluavaldis on samaväärne esimese ja kolmanda suluavaldise summaga, s. o.

$$a-c = (a-b)+(b-c).$$

Pannes $a-c$ asemele $(a-b)+(b-c)$, saame:

$$\frac{bc(b-c)-ac[(a-b)+(b-c)]+ab(a-b)}{b^2c^2(b-c)-a^2c^2[(a-b)+(b-c)]+a^2b^2(a-b)} =$$
$$= \frac{bc(b-c)-ac(a-b)-ac(b-c)+ab(a-b)}{b^2c^2(b-c)-a^2c^2(a-b)-a^2c^2(b-c)+a^2b^2(a-b)} =$$
$$= \frac{c(b-c)(b-a)+a(a-b)(b-c)}{c^2(b-c)(b^2-a^2)+a^2(a-b)(b^2-c^2)} =$$
$$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)[a^2(b+c)-c^2(b+a)]} =$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a^2b+a^2c-bc^2-bc^2-ac^2)} =$$

$$= \frac{a-c}{b(a^2-c^2)+ac(a-c)} = \frac{a-c}{(a-c)[b(a+c)+ac]} =$$

$$= \frac{1}{ab+bc+ac}.$$

Näide 2. Liita murrud

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Näpunäide. Murdude ühenimeliseks tegemisel silmas pidada vastupidiseid märke vahedes $a-b$ ja $b-a$, $a-c$ ja $c-a$, $b-c$ ja $c-b$ ning siis lahendada samal viisil, nagu näide 1.

Näide 3. Liida murrud

$$\frac{1}{(a-c)(a-b)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Kõrvuti murdude liitmise üldvõttega tuleb näidata järgmist kunstlikku võtet. Lähtugem silmanähtavast samasusest

$$b-c = (a-c) - (a-b).$$

Jagame samasuse mõlemad pooled korrutisega

$$(b-c)(a-c)(a-b),$$

saame:

$$\frac{b-c}{(b-c)(a-c)(a-b)} = \frac{a-c}{b-c)(a-c)(a-b)} -$$

$$- \frac{a-b}{(b-c)(a-c)(a-b)};$$

$$\frac{1}{(a-c)(a-b)} = \frac{1}{(b-c)(a-b)} - \frac{1}{(b-c)(a-c)};$$

$$\frac{1}{(a-c)(a-b)} - \frac{1}{(b-c)(a-b)} + \frac{1}{(b-c)(a-c)} = 0 \text{ või}$$

$$\frac{1}{(a-c)(a-b)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-b)(c-a)} = 0.$$

Näide 4. Tõestada samasus

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Samasuse vasaku poole ehitus on järgmine: see kujutab endast murdude summat, kus kõigi murdude lugejateks on arv üks, nimetajateks aga on järjestikused loomulikud arvud ühest kuni $2n$-ni; murrud paaritutel kohtadel on positiivsed, paariskohtadel negatiivsed. Samasugune murdude summa on paremal poolel; ka nende murdude lugejateks on arv üks, nimetajateks aga järjestikused loomulikud arvud $n+1$-st kuni $2n$-ni; siin on kõik murrud positiivsed.

Teisendame samasuse vasaku poole:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Liidame ja lahutame ühe ja sellesama summa:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Tähendab, alikvootsete murdude summast, kus nimetajad on järjestikused loomulikud arvud ühest $2n$-ni, tuleb lahutada alikvootsete murdude summa, kus nimetajad on järjestikused loomulikud arvud ühest kuni n-ni. On selge, et see

vahe võrdub alikvootsete murdude summaga, kus nimetajad on järjestikused loomulikud arvud $n+1$-st kuni $2n$-ni.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2n}.$$

Samasus on tõestatud. Seda võib tõestada ka täieliku matemaatilise induktsiooni abil. Teeme seda hiljem.

N ä i d e 5. Teostada murrus näidatud tehted:

$$\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}\right)+\frac{2}{(a+b)^4}\cdot\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)+\frac{2}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

Lahendus:

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\frac{b^4-a^4}{a^4b^4}+\frac{2}{(a+b)^4}\cdot\frac{b^3-a^3}{a^3b^3}+\frac{2}{(a+b)^5}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2(a+b)^3}\left[\frac{b^4-a^4}{a^2b^2}+\frac{2}{a+b}\cdot\frac{b^3-a^3}{ab}+\frac{2}{(a+b)^2}\cdot(b^2-a^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2(a+b)^3}\cdot\left[\frac{b^4-a^4}{a^2b^2}+\frac{2(b^3-a^3)}{ab(a+b)}+\frac{2(b^2-a^2)}{(a+b)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2(a+b)^3}\cdot\left[\frac{b^4-a^4}{a^2b^2}+\frac{2(b^3-a^3)}{ab(a+b)}+\frac{2(b-a)}{a+b}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2(a+b)^3}\cdot\left[\frac{b^4-a^4}{a^2b^2}+\frac{2(b^3-a^3)+2ab(b-a)}{ab(a+b)}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2(a+b)^3}\cdot\frac{b-a}{ab}\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{ab}+\frac{2(b^2+ab+a^2)+2ab}{a+b}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2(a+b)^3}\cdot\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{(a+b)^2(b^2+a^2)+2ab(b^2+ab+a^2)+2a^2b^2}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{b-a}{a^4b^4(a+b)^4}\cdot[(a+b)^2(a^2+b^2)+$$

$$+2ab(b^2+ab+a^2+ab)]=$$

$$=\frac{b-a}{a^4b^4(a+b)^4}\cdot[(a+b)^2(a^2+b^2)+2ab(a+b)^2]=$$

$$=\frac{b-a}{a^4b^4(a+b)^4}\cdot(a+b)^2(a^2+b^2+2ab)=$$

$$=\frac{b-a}{a^4b^4(a+b)^4}\cdot(a+b)^4=\frac{b-a}{a^4b^4}.$$

Näide 6. Tõestada samasus

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

Samasuse vasakul poolel on iga nimetaja kahe vahe korrutis, aga paremal poolel on iga nimetaja ainult üks vahe. Selline nimetajate ehitus viib mõttele taandada murrud vasakul poolel. Antud kujul pole taandamine võimalik. Teisendame iga murru lugeja sel teel, et liidame ja lahutame ühe ja sellesama liikme, nimelt: esimese murru lugeja $b-c$ kirjutame kujul $b-a+a-c$, teise murru lugeja $c-a$ kujul $c-b+b-a$, kolmanda murru lugeja $a-b$ kujul $a-c+c-b$.

$$\frac{b-a+a-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-b+b-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c+c-b}{(a-c)(c-b};$$

nüüd kujutame iga murru kahe sama nimetajaga murru summana:

$$\frac{b-a+a-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-b+b-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c+c-b}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{a-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-b}{(b-c)(b-a)}+$$
$$+\frac{b-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}+\frac{c-b}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{-1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{-1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{-1}{c-b}+\frac{1}{c-a}=$$
$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=$$
$$=\frac{2}{c-a}+\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}.$$

On enesestmõistetav, et õpilaselt ei saa nõuda iseseisvat tulekut sellele raskele tõestusvõttele. Siin on õpetaja selgitused ja näpunäited paratamatud.

Näide 7. Tõestada, et

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9,$$

kui $a+b+c=0$.

Märgime ära, et tõestatav võrdus pole samasus, sest ta pole õige a, b ja c mistahes väärtuste puhul, vaid on õige ainult tingimusel $a+b+c=0$; see tingimus on täidetud lõpmata paljude a, b ja c väärtuste, kuid mitte iga väärtuse puhul.

Võrduse vasaku poole iga tegur on kolme murru summa: esimeses teguris on lugejad kaksliikmed, nimetajad üksliikmed, teises teguris vastupidi. On hõlpsam korrutada liikmeti selle asemel, et teostada liitmisi sulgudes, sest sulgudes on kolm paari üksteise suhtes pöördmurdusid, millede korrutamisel saadakse üks, ja kolme korrutise summa on 3.

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=$$

$$=\frac{a-b}{c}\cdot\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)+$$

$$+\left(\frac{a-b}{c}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{a}{b-c}+\frac{b-c}{a}\cdot\frac{a}{b-c}+$$

$$+\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}\right)\cdot\frac{b}{c-a}+\frac{c-a}{b}\cdot\frac{b}{c-a}=$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{ab-b^2+c^2-ac}{bc}+$$

$$+1+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac}+1=$$

$$=3+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(ac-bc)-(a^2-b^2)}{ab}+$$

$$+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{(ab-ac)-(b^2-c^2)}{bc}+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{(bc-ab)-(c^2-a^2)}{ac}=$$

$$=3+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{c(a-b)-(a+b)(a-b)}{ab}+$$

$$+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{a(b-c)-(b+c)(b-c)}{bc}+$$

$$+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{b(c-a)-(c+a)(c-a)}{ac}=$$

$$=3+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(c-a-b)}{ab}+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{(b-c)(a-b-c)}{bc}+$$

$$+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{(c-a)(b-c-a)}{ac}=3+\frac{c(c-a-b)}{ab}+$$

$$+\frac{a(a-b-c)}{bc}+\frac{b(b-c-a)}{ac}=$$

$$=3+\frac{c^2(c-a-b)+a^2(a-b-c)+b^2(b-c-a)}{abc}.$$

Nüüd võib arvesse võtta täiendava tingimuse $a+b+c=0$. Siit saame:

$$a=-b-c;$$
$$b=-a-c;$$
$$c=-a-b.$$

Paneme esimestes sulgudes $(-a-b)$ asemele $+c$, teistes sulgudes $(-b-c)$ asemele $+a$, kolmandates sulgudes $(-c-a)$ asemele $+b$.

$$3+\frac{c^2(c-a-b)+a^2(a-b-c)+b^2(b-c-a)}{abc}=$$

$$=3+\frac{c^2(c+c)+a^2(a+a)+b^2(b+b)}{abc}=$$

$$=3+\frac{2c^3+2a^3+2b^3}{abc}=3+2\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ldots\quad(A)$$

Siit edasi

$$a+b=-c;$$
$$(a+b)^3=-c^3;$$
$$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3;$$
$$a^3+b^3+3ab\cdot(-c)=-c^3;$$
$$a^3+b^3=-c^3+3abc.$$

Avaldises (A) paneme a^3+b^3 asemele $-c^3+3abc$:

$$3+2\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3+2\cdot\frac{3abc-c^3+c^3}{abc}=$$

$$=3+\frac{6abc}{abc}=3+6=9.$$

Näiteid iseseisvaks tööks tehete peale murdudega tuleb valida niisuguses järjekorras.

Näiteid murdude kohta.

A. Algebralised murrud.

I. Murdude taandamine:

1. $\dfrac{a^{12}+x^{12}}{a^5+a^4x+ax^4+x^5}$.

2. $\dfrac{(x+y)^5-(x^5+y^5)}{(x+y)^3-(x^3+y^3)}$.

II. Murdude liitmine ja lahutamine:

1. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

2. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

3. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$.

4. $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

5. Tõestada samasus:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

III. Neli tehet murdudega:

1. $\dfrac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)+\dfrac{3}{(a+b)^4}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)+$

$+\dfrac{b}{(a+b)^5}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

2. $\left(\dfrac{x^3+4^3}{x^2-y^2}:\dfrac{x+y}{x-y}\right)\cdot\dfrac{(x+y)^5-x^5-y^5}{2x^2y+3xy^2}$.

3. $\left(\frac{a^2+ab}{a^2+b^2} : \frac{a^3b+ab^3+2a^2b^2}{a^4-b^4}\right) \times$
$\times \left(\frac{a^4-a-3a^3+3a^2}{a^3b-b^4} : \frac{a^4+a^2-2a^3}{a^2b^2+ab^3+b^4}\right).$

4. $\left(\frac{a^2-ax}{a^2x+x^3} - \frac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{x-1}{a} - \frac{x}{a^2}\right).$

5. $\left[\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} - \frac{1}{(1-a)(a-2)}\right] \times$
$\times \left[\frac{1}{a-1} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{(1-a)(a-2)}\right] \cdot (a^2-3a+2).$

6. $\left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3} - \frac{1}{a-b} + \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$

7. $\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b\right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1\right].$

8. $\left(\frac{a}{a^2+a-b} + \frac{1}{a^3+3a^2-4a-12} - \frac{4}{6-a-a^2}\right) \times$
$\times \left(a - \frac{4+3a}{a+3}\right).$

B. Tehete järjekord.

Teostada näidatud tehted:

1. $\left(\frac{k+l}{2} : l - k : \frac{k+l}{2}\right) : [(1-2l)(k+l)].$

2. $1 - \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right) + \frac{m}{n} : \left(1 - \frac{m}{n}\right).$

3. $\left[\frac{1}{(b-a)^3} : \frac{1}{(a-b)^2} - \frac{1}{a+b}\right] : \frac{2a^2}{a^2-b^2} + 1 : (a^2+a).$

4. $\left[\frac{-3ab}{a^3-b^3} - 1 : (b-a)\right] : \left[\frac{ab}{a^3+b^3} - 1 : (b+a)\right] - 1.$

5. $\left(\frac{1}{b^2-b} : \frac{a^2}{b-b^3} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1+b}\right).$

C. Algebralised liitmurrud.

Teostada näidatud tehted:

1. $1-1:\left[1-\dfrac{1:\left(1-\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2}{1:\left(1-\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2}\right]$.

2. $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2-6ab}{a^2b+2ab^2+b^3}-\dfrac{b}{a^2+ab^2}+\dfrac{3ab}{a^2b+ab^2}}{\dfrac{a}{a^2b+ab^2}-\dfrac{2b}{a^2b-b^3}+\dfrac{1}{a^2-ab}}:$

$:\left[a+\dfrac{(a-b)^2}{a+b}-b\right]$.

3. $\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$.

4. $\dfrac{1-a^2}{b^2+b}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{b}}\right)\cdot\dfrac{b^4+b^3-b-1}{a^2-1}$.

5. $a+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$

6. $\left[-\dfrac{a}{b}-\dfrac{\left(\frac{1}{a}-a\right):\frac{1}{a}}{\left(1-\frac{1}{a}\right):\frac{1}{b}}\right]\left(\dfrac{b}{-a}+\dfrac{b}{2a}\right)-\dfrac{-a}{-2+1:\frac{a}{4}}$.

7. $\dfrac{\left[\dfrac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]\left[\dfrac{(a-b)^3}{3ab}+a-b\right]}{\left[\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-1\right](ab^2-ab)}\times$

$\times\dfrac{(b-a)^3-(b-a)(a^2+b^2+ab)}{(a+b)^3-3ab(a-b)}$.

D. Algebraliste avaldiste numbriline väärtus.

Leida järgmiste avaldiste numbriline väärtus [1]:

1. $y = \frac{a+b}{c} - \frac{a+c}{b}$, kui $a = \frac{c^2}{b-c}$.

2. $y = \frac{x-a}{x-b} - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}$, kui $x = \frac{a+b}{2}$.

3. $y = \frac{\frac{a}{x}-1}{1-\frac{b}{x}}$, kui $x = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{a+b}$.

4. $y = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$, kui $x = \frac{2ab}{a+b}$.

5. $y = (a+x)(b-x) - (a+x+b)(a+b-x)$,
kui $x = \frac{(a+b)^2}{b-a}$.

6. $y = \frac{2}{a^2-x^2} - \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{4ax}{(a^2-b^2)^2}$,
kui $x = b$.

E. Tõestused.

1. Tõestada, et $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{x}{ab}$, kui $x = a+b$.

2. Tõestada, et kahe murru summa, kui lugeja on 1, võrdub murruga, mille lugeja võrdub antud nimetajate summaga ja nimetaja nende nimetajate korrutisega.

3. Tõestada samasus:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

---

[1] Avaldise numbrilise väärtuse all mõistetakse tavaliselt seda arvu, mis tekib avaldisest tähtede asendamisel numbritega (mitte tähega või tähtedega, nagu siin).

Vast. toim.

V peatükk.

Võrdused. Samasused. Võrrandid.

§ 75. Võrrandi mitmesugused definitsioonid.

Võrranditel on koolialgebras keskne koht. Kuigi vaated algebrale on muutunud, on võrrandid jäänud tema võõrandamatuks osaks. Sellele vaatamata vastatakse ka praegu küsimusele, mis on võrrand, väga mitmeti. Ühed defineerivad võrrandit kui võrdust, mis on kehtiv selles esinevate tähtede mitte kõigi väärtuste, vaid ainult üksikute määratud väärtuste puhul; selline definitsioon on võrrandile antud ka Kisseljovi õpikus. Teised jälle näevad võrrandis „küsimust, kas on olemas niisuguseid otsitavate suuruste väärtusi, millede puhul võrduse vasak pool võrdub parema poolega, ja kui on olemas sellised väärtused, siis millised need on" (В. Ф. Каган, Основания теории определителей, lk. 10). On olemas ka niisugune definitsioon: „Iga võrdust, milles üht arvu, mis on väljendatud tähega, nimetatakse otsitavaks, kuna teiste tähtede (kui neid on olemas) väärtusi loetakse antuks, nimetatakse võrrandiks ühe otsitavaga" (П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Алгебра, lk. 136).

Need autorid vaatavad samasusele kui võrrandi erijuhule.

Selleks et vaadeldavas küsimuses kergemini orienteeruda, võtame arutlusele faktilise materjali, millega opereeritakse. Koolis on õpilastel tegmist järgmiste võrduste liikidega.

1. Võrdused, mis on õiged neis esinevate tähtede mistahes väärtuste puhul.

Näited. $a+a=2a$; $a+b=b+a$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a+b)n=an+bn$.

Neid võrdusi nimetatakse tavaliselt samasusteks.

2. Võrdused, mis on õiged neis esinevate tähtede ainult teatavate väärtuse puhul.

Näited. $2+x=10$; $5x=30$; $a+x=c$. Selliseid võrdusi nimetatakse võrranditeks.

3. Võrdused, mis pole õiged tähe ühegi väärtuse puhul.

Näited. $0\cdot x=12$; $x+2=x+10$; $ax-ax=5$. Selliseid võrdusi võib üle viia kujule $0\neq 0$. Need on mitteõiged võrdused ehk võrratused.

4. Võrdused, milledel puudub mõte.

Näited. $a:0=a$; $\frac{5}{a-a}=b$.

Kui räägitakse võrrandeist, siis peetakse silmas peamiselt teist liiki võrdusi. See on ka arusaadav: praktiliste küsimuste lahendamisel on tähtis saada mingi üks vastus (mõnikord piiratud arv vastuseid). Seda tingimust rahuldab ainult teine liik võrdusi. Samasused ei vasta sellele nõudele, sest vastuseks püstitatud küsimusele on siis mistahes arv (mitmetähenduselisus). Ka kolmandat liiki võrdused ei vasta nõudele, sest need on alati valed; nende ebaõigsuse väljaselgitamisel võib olla mõnikord teoreetiline väärtus, oma olemuselt on nad aga valed ja seepärast ei anna nad nõutavat vastust. Neljandat liiki võrdused kui mõttetud ei või anda tarvisminevat vastust.

Teadust iseloomustab püüe üldistada. See püüe on põhjustanud kaks võrduste klassifikatsiooni, mis aga pole võrdsel määral üldised. Vastavalt klassifikatsiooni ühele süsteemile nimetatakse kõiki võrdusi võrranditeks; ülaltoodud

võrduste esimesele liigile vaadatakse kui võrrandi erijuhule, nimelt võrrandile, millel on lõpmata palju lahendeid; teine võrduste liik on võrrandid, milledel on määratud hulk lahendeid; kolmas liik on võrrandid, milledel puuduvad lahendid; neljas liik kõrvaldatakse. Sellel võrrandite kontseptsioonil on kõige suurem üldisus.

Vastavalt klassifikatsiooni teisele süsteemile eristatakse kahte võrduste klassi: identseid võrdusi ehk samasusi ja tingvõrdusi ehk võrrandeid. Võrrandid jagunevad kahte liiki: võrranditeks, milledel on lahendid, ja võrranditeks ilma lahenditeta; mitteõiged võrdused kuuluvad seega võrrandite hulka. Selle kontseptsiooni esindajad käsitavad võrrandit kui küsimust, kas võrrandil lahendeid on, ja kui on, siis millised. Erinevalt võrrandeist vaadatakse samasustele kui väidetele.

Järelikult on olemas kolm võrrandi definitsiooni. 1. Koolis üldtarvitusele võetud definitsioon: võrrand on võrdus, mis on kehtiv ainult otsitava kindla väärtuse puhul. See definitsioon kõrvaldab võrduse kaks äärmist juhtu: samasused ja mitteõiged võrdused. 2. Definitsioon võrrandist kui küsimusest, kas on olemas otsitava niisugune väärtus, mille puhul võrduse vasak pool võrdub parema poolega, ja kui on, millega ta siis võrdub. Selle definitsiooni järgi kuuluvad võrrandite hulka selle sõna otseses mõttes võrrandid ja mitteõiged võrdused, kusjuures viimaseile vaadatakse kui erijuhule, kui võrranditele, millel puuduvad lahendid. Selle definitsiooni järgi ei kuulu võrrandite hulka samasused. 3. Võrrandi kolmanda definitsiooni järgi on võrrand ükskõik milline võrdus, milles esineb otsitav; seejuures on samasused niisugused võrrandid, milledel on lõpmata palju lahendeid, ja mitteõiged võrdused on võrrandid, milledel puuduvad lahendid.

Loogika seisukohalt võib võtta mistahes ühe neist kolmest. Teine definitsioon on vahepealne, kompromisne üldi-

suse mõttes ja isegi vaieldav järgmistel kaalutlustel. Kirjutus $a = b$ väljendab matemaatilist lauset, et arvud a ja b on isekeskis võrdsed. See lause aga võib olla õige või vale; õige on ta siis, kui a ja b on isekeskis võrdsed, ja vale vastasel juhul. Kui võrduses on ainult arvud, on kerge otsustada, kas võrdus on õige või vale. Lugu on teine, kui võrdustes esinevad tähed: võrdused võivad olla õiged tähtede ühtede väärtuste ja mitteõiged teiste väärtuste puhul. Erijuhul võrdus $0 \cdot x = 5$ on vale, sest mistahes arvu korrutis nulliga võrdub nulliga, aga mitte viiega.

Püüe täpselt kindlaks teha, millistel tingimustel on väljendatud matemaatiline lause õige, on tarvilikuks iseloomustavaks jooneks mitte ainult võrrandite, vaid ka samasuste ja isegi võrratuste puhul. Võtame võrduse

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

Oleks ebatäpne nimetada antud võrdust samasuseks. See võrdus on tõepoolest õige kõigi a ja b väärtuste puhul, välja arvatud ainult juhtum, kui $a = b$, sest kui $a = b$, siis võrduse vasak pool kaotab mõtte ja võtab kuju $\frac{0}{0}$, kuna parem pool võrdub kas $2a$ või $2b$-ga. Järelikult tuleb ka samasuse korral esitada küsimus, millal ta on õige.

Niisiis võib mitte ainult võrrandite kohta esitada küsimuse, kas võrdus on õige ja nimelt tähtede milliste väärtuste puhul, vaid ka samasuste ja teiste matemaatiliste seoste puhul. Seepärast ei saagi üles ehitada õpetust võrrandeist ebakindlale definitsioonile võrrandist kui küsimusest (ja siis ka definitsioonile samasusest kui väitest).

Selle tõttu, et võrrandile puudub ühtne üldtunnustatud vaade ja et on olemas kolm erinevat definitsiooni, kerkib tahestahtmata üles järgmine küsimus: milline kolmest definitsioonist on otstarbekohaseim võtta tarvitusele koolis? Esitatud küsimuse lahendamisel olgu meile lähtekohaks järg-

mised kaalutlused. 1) Teaduse aluste uurimise olu analüüs üldiselt ja näpunäited, mis järelduvad teaduse ajaloost. 2) Nende ideede peegeldus kooliõpetamises ja kursuse ülesehitamise meetodi valik.

Uurida tähendab määrata ja väljendada uuritavat kvalitatiivselt ja kvantitatiivselt juba tuntu kaudu, siduda õpitavat juba õpituga, püstitada hüpoteese ja katseliselt kontrollida hüpoteesidest saadud loogilisi järeldusi. Uurimisel jääb ikkagi järele midagi, mis võetakse vastu ilma uurimiseta, millele vaadatakse kui antule ja mis siis saabki uurimise aluseks.

Uurimisel on loogiliselt mõeldavad kaks meetodit, kaks teed: kas ainult deduktiivne tee väheselt, mis pole kaheldav, kogu uuritava mitmekesisusele või induktiivne tee paljude faktide uurimiselt üksikutele kaheldamatutele ja kindlatele järeldustele, mis siis edaspidi võetakse deduktiivsele töötlemisele. Vanaaja rahvad püüdsid ühe mõttetuhinaga sisse tungida kõikidesse uuritava põhilistesse kategooriatesse, leida „kõigi alguste algust". Vastupidiselt sellele suunale alustasid praegusaegsed täppisteadused faktide kogumisest, seades oma ülesandeks mitte „kõigi alguste alguse" leidmise, vaid läbiuuritud materjalist mõningate kaheldamatute järelduste tegemise; seejuures liiguti kogu aja paljudelt eri juhtudelt üldistele seadustele ja saavutati sel teel suuri edusamme. Austusest ajaloo vastu ja selle õppetunde arvestades tuleb ka koolis loobuda alustamast üldistest vaatekohtadest ja järk-järgult minna eri juhtudelt kaheldamatutele järeldustele, et siis juba teha neist üldisemaid järeldusi.

Induktiivne meetod arendab õpilastes juurdlevat vaimu; rahuldamata ainult mõttepuhangutega, õpetab ta õpilasi katsetega mõtteid kontrollides visalt tööd tegema; see on karmi distsipliini kool, mis aeglaselt, aga kindlalt viib viljakatele tulemustele. Neil kaalutlustel osutub induktiivne meetod peamiseks meetodiks õpetamisel koolis. Matemaatika

õpetamise eesmärgiks keskkoolis on arendada peale praktiliste küsimuste lahendamise oskuse ka abstraktse ja loogilise mõtlemise võimet, s. o. oskust analüüsida, üldistada ja loogiliselt arutella. Ei saa oletada, et need võimed on õpilastes juba valmis olemas; need saavutatakse ainult visa töö ja igapäevaste harjutustega.

Siit järeldus: tuleb alustada nendest mõistetest, mis õpilastel on juba olemas; neid mõisteid samm-sammult edasi arendades viiakse nad järjekindlate harjutustega kõrgemale üldistamisastmele ja võimalikule loogilisele täpsusele. Teiste sõnadega: tuleb alustada vähem üldistest mõistetest ja järk-järgult sammuda üldisemate lausete poole, läbi arutades enne peamise, põhilise ja siis juba erijuhud. Kuni võrranditeni olid õpilased tuttavad samasustega ja üksikute väheste võrranditega. Nüüd tuleb teadmisi samasustest täiendada võrrandite süstemaatilise õpetamisega, näidates, milles seisab vahe võrrandite ja samasuste vahel. Säärane tee vastab loomulikule tutvumiskäigule uue mõistega. Edaspidises kursuses täiendatakse sel määral, kuidas fakte on kogutud, järk-järgult võrrandi mõistet, ja ainult kõrgemates klassides võib õpilastele anda võrrandi laiema mõiste, mõiste, mis haarab ka samasusi kui võrrandeid lõpmata suure lahendite arvuga ja mitteõigeid võrdusi kui võrrandeid ilma lahenditeta. Selle mõiste edasine arenemine pole vastuolus esialgsega, mida ei kõrvaldata, vaid ainult laiendatakse, seejuures saab siis ka selle laiendamise otstarbekus õpilastele arusaadavaks.

Kuni võrrandite käsitlemiseni iseloomustab programmis ettenähtud algebra ainestikku identsete teisenduste idee; identsuse idee ja selle edasise arenemise loomulikuks jätkuks on õpetus võrrandeist. Muidugi võib vaadata samasustele kui võrrandite erijuhtudele; see seisukoht osutub pärast viljakaks. Tuleb aga arvestada lapse mõtte loomulikku arenemist ja alustada mitte kõrgematest, vaid keskmistest

üldistustest, mitte võrrandite erijuhtudest, kus lahendeid on lõpmata palju, vaid neist, mida nimetatakse tõelisteks võrranditeks.

Võrrandeid võib koolis käsitella niisuguses järjekorras.

Definitsioon. Kaks arvu või avaldist on võrdsed sel korral, kui vahe nende vahel on null. Näiteks $-5=-2-3$, sest $-5-(-2-3)=-5+5=0$. Kirjutust, mis seda väljendab, nimetatakse võrduseks.

Nagu juba varem oli öeldud, võivad võrdused, milles esinevad ainult arvud, olla kas õiged või mitteõiged. Peale õigete ja mitteõigete võrduste esineb veel mõtteta võrdusi.

Näited.

$2+3=5$ (õige võrdus);

$2(3+7)=2\cdot 3+2\cdot 7$ (õige võrdus);

$10:(3\cdot 4-6\cdot 2)=10$ (võrdus, millel puudub mõte, sest $3\cdot 4-6\cdot 2=0$, ja jagamine nulliga on võimatu).

Siis siirdutakse võrdustele, milledes on tähed:

$$a+5=22 \quad (1)$$
$$5a=30 \quad (2)$$
$$a+a=2a \quad (3)$$
$$a(b+c)=ab+ac \quad (4)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (5)$$
$$a(b+c)=ab+c \quad (6)$$
$$(a+b):(a-a)=a \quad (7)$$

Võrdus (1) on õige, kui $a=17$, sest $17+5=22$; tähe a iga muu väärtuse puhul pole see võrdus õige. Võrdus (2) on õige, kui $a=6$, ja pole õige tähe a iga muu väärtuse puhul.

Võrdused (3), (4) ja (5) on õiged tähtede mistahes väärtuste puhul. Võrdus (6) pole õige, sest korrutamise jaotuvusseaduse järgi $a(b+c)=ab+ac$, aga mitte $ab+c$.

Võrdusel (7) puudub mõte a iga väärtuse puhul, sest $a - a = 0$, aga jagamine nulliga on võimatu.

Ülaltoodud ja ka teiste analoogiliste võrduste arutlus näitab, et võrdusi võib jagada kahte liiki: võrdusteks, mis on kehtivad tähtede mistahes väärtuste puhul, ja võrdusteks, mida rahuldavad ainult tähtede teatavad väärtused. Esimesi võrdusi nimetatakse samasusteks, teisi võrranditeks.

Seosed algebraliste tehete komponentide ja tulemuste vahel on näideteks samasuste kohta.

Võrdused, milles esinevad ainult arvud, on ka samasused.

Võrduste jaotust samasusteks ja võrranditeks ei tule käsitada kui midagi absoluutset, kategoorilist: on olemas võrdusi, mis moodustavad ülemineku samasustelt võrranditele; näiteks võrdus $|x| = x$ on õige x-i mistahes positiivsete väärtuste või nulli puhul ja ses suhtes ei saa teda nimetada võrrandiks; x-i negatiivsete väärtuste puhul pole aga see võrdus õige, seepärast ei saa teda nimetada samasuseks.

Edasises kursuses õpilased tutvuvad trigonomeetriliste võrranditega, milledel on lõpmata palju lahendeid.

Sellele vaatamata, et samasuste ja võrrandite vahel on olemas vahepealseid vorme, on võrduste jaotamine kahte liiki väga tähtis, sest see võimaldab piirata mõisteid ja kergendab lastel arusaamist võrrandeist. (Kui võrrandi mõiste on õpilaste poolt juba omandatud, võib üle minna edasisele üldistamisele ja samasusi vaadata juba kui võrrandite erijuhtusid.)

Võrduste põhiomadused.

1. Võrduste ümberpööratavus.

   Kui $a = b$, siis $b = a$.

Definitsioonist $a = b$ järeldub $a - b = 0$, siit aga, et $b - a = 0$, s. o. $b = a$.

2. Võrduste transitiivsus.

Kui $a = b$ (1) ja $b = c$ (2), siis $a = c$ (3).

Definitsiooni põhjal järeldub esimesest võrdusest (1) $a = b$, et $a - b = 0$ (4), ja teisest võrdusest (2), et $b - c = 0$ (5). Kui kahest liidetavast kumbki on null, siis ka summa on null, s. o. $a - b + b - c = 0$ ehk $a - c = 0$, järelikult $a = c$ (definitsiooni järgi).

3. Kui võrduse mõlemad pooled liidetakse ühe ja sellesama avaldisega, saadakse võrdus.

Olgu $a = b$ (1). Liidame mõlemad pooled c-ga; on tarvis tõestada, et $a + c = b + c$.

Esimesest (1) järgneb, et $a - b = 0$ ja edasi $a + c - b - c = 0$, s. o. $a + c - (b + c) = 0$; viimasest võrdusest järgneb definitsiooni järgi $a + b = b + c$.

Tähtis märkus. Avaldisel c võib olla mistahes väärtus, ta ei tohi aga kaotada arvu mõtet, näiteks ei saa liita võrduse mõlemaid pooli murruga, mille nimetaja on null.

Järeldus 1. Kui võrduse mõlemast poolest lahutatakse üks ja seesama avaldis, saadakse võrdus. Avaldise c lahutamine on tõepoolest samaväärne ($-c$) liitmisega, võrduse mõlema poole liitmine ühe ja sellesama avaldisega annab aga, nagu juba tõestatud, võrduse.

Järeldus 2. Kui võrduse mõlemast poolest ära jätta üks ja seesama liige, saadakse võrdus, sest mõne liikme ärajätmine on samaväärne liitmisega võrdvastupidise avaldisega.

Näide. Kui võrdusest $a + c = b + c$ ära jätta c, saame võrduse $a = b$.

Järeldus 3. Igale võrdusele $a = b$ võib anda kuju $a - b = 0$ (järgneb vahenditult definitsioonist).

4. Võrduse mõlema poole korrutamisel ühe ja sellesama avaldisega saadakse võrdus.

Olgu $a = b$ (1) ja c mingi arv või avaldis, millel ei puudu arvu mõte. Esimesest (1) järeldub, et $a - b = 0$ (2). Võrduse (2) mõlema poole korrutis mistahes c-ga võrdub nulliga, järelikult $ac - bc = 0$ (3), aga võrdusest (3) järgneb definitsiooni järgi $ac = bc$.

Järeldus 1. Võrduse $a = b$ mõlema poole jagamisel mistahes arvu või avaldisega, mis ei võrdu nulliga ja millel ei puudu arvu mõte, saadakse võrdus $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Tõepoolest, korrutame võrduse (1) mõlemad pooled $\frac{1}{c}$-ga; see on võimalik, sest $c \neq 0$ ja tal ei puudu arvu mõte.

Omaduse (4) põhjal võrduse (1) mõlema poole korrutamisel $\frac{1}{c}$-ga saame $a \cdot \frac{1}{c} = b \cdot \frac{1}{c}$ ehk $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Järeldus 2. Kui võrduses esinevad algebralised murrud, siis kõigi liikmete korrutamisel ühisnimetajaga saadakse võrdus, millel puuduvad murdavaldised. (Vt. märkus 9 raamatu lõpus.)

§ 76. Võrrandid.

Definitsioon. Võrrandiks nimetatakse niisugust võrdust, mis on kehtiv, kui otsitavate tähtede asemele panna mõningad määratud arvud.

Arve, mis tähti asendades muudavad võrrandi õigeks võrduseks, nimetatakse võrrandi juurteks ehk lahenditeks.

Võrrandit lahendada tähendab leida kõik need arvud, milledega asendades neid tähti, mis väljendavad otsitavaid suurusi, muudetakse võrrand õigeks võrduseks.

Definitsioon vajab veel täiendavaid selgitusi. On tarvis teada, millisesse arvude valda ehk arvude hulka kuuluvad otsitavad lahendid; seda hulka nimetatakse lubatud väärtuste vallaks.

Definitsioon. Arvude hulka, millesse peavad kuuluma võrrandi lahendid, nimetame võrrandi lahenditeks olla võivate arvude vallaks ehk lühidalt — lubatud väärtuste vallaks.

Võrrandi lahendite olemasolu või puudumine võib sõltuda mitte ainult võrrandist, vaid ka lubatud arvude vallast. Selgitame seda näidete varal.

Näide 1. Võrrandil $8x = 1500$ puuduvad lahendid loomulikkude arvude vallas; ainus lahend on murd 187,5.

Näide 2. Võrrandil $x + 12 = 5$ (1) puuduvad lahendid positiivsete arvude vallas; ainus lahend on negatiivne arv (-7), seepärast võrrandil (1) kuni negatiivsete arvude tarvituselevõtmiseni lahendeid pole.

Ja tõepoolest, matemaatika ajalugu kinnitab, et seni, kuni olid tuntud ainult positiivsed arvud, polnud võrrandil $12 + x = 5$ lahendeid, sest negatiivsed juured jäeti välja.

Näide 3. Võrrandil $x^2 = 2$ puuduvad lahendid ratsionaalsete arvude vallas. Seni, kuni olid tuntud ainult ratsionaalsed arvud, vaadati võrrandile $x^2 = 2$ kui mõtet mitteomavale. Samas olukorras on ka õpilane, kes pole veel tuttav irratsionaalsete arvudega.

Näide 4. Võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on lahendid ainult siis, kui diskriminant $\triangle = b^2 - 4ac \geqslant 0$. Kui aga $\triangle < 0$, siis puuduvad võrrandil lahendid reaalsete arvude vallas. Õpilastel, kes pole veel tuttavad kompleksarvudega, on lubatud juurte väärtuste hulk piiratud reaalarvude vallaga ja seepärast siis lahendeil

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{kui } b^2 - 4ac < 0,$$

pole mõtet, taoliselt sellega, nagu need arvud olid „kujuteldavad, valed" kuni kompleksarvude tarvituselevõtmiseni.

Näide 5. Kui lubatud väärtuste vallas on ainult reaalarvud, siis võrrandil $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ on ainult kaks lahendit: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; kui aga selleks vallaks on kompleksarvud, siis antud võrrandil on neli lahendit, nimelt:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = i;\ x_4 = -i.$$

Näide 6. Võrrandil $x^4 - 7x^2 + 20 = 0$ puuduvad lahendid reaalarvude vallas, aga kompleksarvude vallas on tal neli lahendit.

Läbiarutatud juhud näitavad, et võrrandil võivad ühes lubatud väärtuste vallas olla lahendid, teises aga mitte olla; lahendite arv võib olla üks ühes lubatud väärtuste vallas ja teine, suurem üleminekul teise, laiemasse valda. Seepärast ongi küsimuse selguse huvides tarvilik ära näidata ka lubatud väärtuste vald.

Kui aga lubatud väärtuste vald pole ära näidatud, siis oletatakse, et lahendid võivad kuuluda kõige laiemasse õpilastele antud momendil tuntud valda.

Järelikult tuleb peale lahendite leidmise veel ära tähendada lubatud väärtuste vald ja kindlaks teha, millises vallas on lahendeid ja millises pole, samuti kui palju neid on ühes või teises vallas. Selles seisabki üks võrrandite uurimise ülesandeid. Pole tarvis mõelda, et uurimist tuleb teostada ainult pärast võrrandi lahendamist; uurimine on tihedalt seotud lahendusega, ta on sellest mittelahutatav ja jälgib seda, nagu pärast näeme, pidavalt, kas minnes selle ees, olles sellega läbi põimitud või jälle käies selle jälgedes.

§ 77. Seos võrrandi ja funktsiooni vahel.

On teada, et otsitava x suhtes esimese astme hulkliikme või funktsiooni üldkuju on $ax + b$, teise astme üldkuju on $ax^2 + bx + c$. Avaldise $ax + b$ numbriline väärtus muutub olenevalt x-i väärtuse muutumisest. Tähistame hulkliikme

või funktsiooni F-ga; selleks, et näidata, et hulkliikmes esineb x ja hulkliikme väärtus oleneb x-i väärtusest, on kokku lepitud kirjutada $F(x)$. Üldiselt rääkides tähendab selles sümbolis F vastavust x-i ja kogu avaldise vahel; algebralises funktsioonis väljendab F operatsioone või tehteid, mida tuleb teostada hulkliikmes, täht x sulgudes F juures aga näitab, et hulkliikme väärtus oleneb x-i väärtusest.

Näide. Olgu $F(x) = x^2 - 7x + 12$; tähendab, $F(x)$ näitab, et x tuleb ruutu tõsta, saadud arvust lahutada $7x$ ja siis liita 12-ga.

Arvutame $F(2)$, s. o. arvutame funktsiooni $F(x) = x^2 - 7x + 12$ väärtuse, kui $x = 2$.

$$F(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 12 = 4 - 14 + 12 = 2.$$
$$F(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0.$$
$$F(0) = 0 - 0 + 12 = 12.$$

Tarvitusele võetud sümbolit kasutades võib mistahes võrrandit ühe otsitavaga kujutada järgmiselt:

$$F(x) = f(x). \qquad \text{(I)}$$

Võrduse definitsiooni põhjal võime antud võrduse asendada võrdusega

$$F(x) - f(x) = 0. \qquad \text{(II)}$$

Kahe x-i suhtes hulkliikme (või funktsiooni) vahe on samuti funktsioon x-st, s. o. $F(x) - f(x)$ võime väljendada $\varphi(x)$-ga. Seepärast võib siis võrrandile (I) anda kuju $\varphi(x) = 0$ (III).

Järelikult võrrandi (I) lahendamine on üle viidud võrrandi (III) lahendamisele, seepärast võib võrrandi lahendamise ülesannet sõnastada järgmiselt: lahendada võrrand $F(x) - f(x) = 0$ tähendab leida need x-i väärtused antud arvude hulgast (loomulikkudest arvudest, täisarvudest, positiivsetest ja negatiivsetest arvudest jne.), millede puhul funktsioon

$\varphi(x)$ muutub nulliks; on kokku lepitud nimetada neid väärtusi funktsiooni $\varphi(x)$ nullpunktideks.

Kui võrduses $y = ax$ anda x-le väärtused 1, 2, 3, 4, ..., siis saame y-le vastavad väärtused a, $2a$, $3a$, $4a$, ... Arvutuste tulemused võib kujutada järgmises tabelis:

x väärtused	1, 2, 3, 4, ...
y „	a, $2a$, $3a$, $4a$, ...

Tabelist on näha, et igale x-i väärtusele vastab ainult üks y-i väärtus.

§ 78. Ühe otsitavaga lineaarvõrrandite lahendamine.

Esitame nüüd järgmise küsimuse: milliste x-i väärtuste puhul avaldis ax, millel võib olla mitmesuguseid väärtusi, omab etteantud määratud väärtust?

Andes y-le määratud väärtuse kitsendame nähtavasti x-i muutumise vabadust. Võrdus $y = ax$, väljendades vastavuse ideed, muutub tähtede y ja x vastastikusel muutumisel võrduseks $ax = b$ või $ax - b = 0$, s. o. võrrandiks.

Kui võrrandis on ainult üks täht, mis väljendab otsitavat, ja teisi tähti üldse pole või need väljendavad antud suurusi, siis võrrand on ühe otsitavaga.

Lahendada ühe otsitavaga võrrand, tähendab leida otsitava kõik väärtused, mis muudavad võrrandi õigeks võrduseks.

Võrrandi juureks ehk lahendiks nimetatakse iga arvu või tähelist avaldist, mis x-i asendades muudab võrrandi õigeks võrduseks.

Ühe otsitavaga esimese astme võrrandil on tavaliselt ainult üks lahend, näiteks võrrandil $x + 7 = 12$ on ainult üks lahend, nimelt $x = 12 - 7$ ehk $x = 5$; x-i iga muu väär-

tuse puhul võrrandi vasak pool ei võrdu 12-ga, s. o. saadakse mitteõige võrdus. Räägitakse, et arv 5 rahuldab võrrandit.

Mõnikord rahuldab ühe otsitavaga esimese astme võrrandit mitte üks x-i väärtus, vaid lõpmata palju väärtusi. Võrdus $7x - 2x = 5x$ kehtib x-i iga väärtuse puhul, ta on samasus.

Ühe otsitavaga esimese astme võrrandil ei saa olla lõpmata palju lahendeid, kui ta pole samasus.

Tekib küsimus, kas igal ühe otsitavaga esimese astme võrrandil on olemas lahend. Võtame näiteks arutlusele niisuguse võrrandi: $5x - 4x + 2 = 1{,}5x - 0{,}5x + 7$.

Pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi mõlemal poolel saame võrrandi $x + 2 = x + 7$.

Sellel võrrandil nähtavasti puuduvad lahendid; tõepoolest, kui otsitav arv liita 2-ga ja seejärel sama arv liita 7-ga, siis saadud summad ei või olla võrdsed, sest x-i mistahes väärtuse puhul on teine summa ikka esimesest 5 võrra suurem. Järelikult pole sellist x-i väärtust olemas, mis rahuldaks võrrandit.

Niisiis on olemas võrrandeid, milledel puudub üldse lahend. Öeldakse, et sellised võrrandid on vasturääkivad.

Küsimusest täieliku arusaamise saavutamiseks tuleb õpilastele esitada järgmine harjutus. Kirjutatakse üles mitu võrdust — arvvõrdused, samasused, võrrandid — ja õpilased peavad näitama, millised võrdused on samasused, millised võrrandid on vasturääkivad.

Edasiseks sammuks võrrandite õpetamisel on lihtsamate võrrandite lahendamine, ilma et seejuures leiaks rakendamist õpetus ekvivalentsetest võrranditest; lahendamine toimub võrrandi vahenditu arutluse põhjal.

Et soovitatav võrrandite lahendamise võte ei eelda teadmisi ekvivalentsetest võrranditest, siis võib seda võtet rakendada juba kuuendas klassis võrrandite lahendamisel ja koos-

tamisel. See võte ei rajane aritmeetiliste tehete omadustele, milledele toetudes võib võrrandeid lahendada, kuigi väga kohmakalt; võte põhineb võrrandi mõlema poole teisendusel oma struktuurilt analoogilisele kujule, millest võrrandi lahendus järeldub vahenditult.

Näide 1. Lahendada võrrand $x + 5 = 12$.

Kujutame 12 arvude 5 ja 7 summana; saame $x + 5 = 7 + 5$. Näeme vahenditult, et asetades x-i asemele 7, saame õige võrduse, järelikult võrrandi lahendiks on 7. Niisiis $x = 7$.

Näide 2. Lahendada võrrand $x - 10 = 15$.

Kujutame 15 arvude 25 ja 10 vahena; saame $x - 10 = 25 - 10$. Näeme vahenditult, et asetades x-i asemele 25, saame õige võrduse. Seega võrrandi lahendiks on 25.

Näide 3. Lahendada võrrand $3x + 7 = 31$.

Kujutame 31 arvude 24 ja 7 summana ning liidetava 24 korrutisena $3 \cdot 8$; saame:

$$3x + 7 = 3 \cdot 8 + 7.$$

Näeme vahenditult, et asetades x-i asemele 8, saame õige võrduse. Seega võrrandi lahendiks on 8.

Näide 4. Lahendada võrrand $\frac{x}{5} - 7 = 9$.

Kujutame 9 arvude 16 ja 7 vahena ning 16 kujul $\frac{80}{5}$; saame $\frac{x}{5} - 7 = \frac{80}{5} - 7$. Näeme vahenditult, et asetades x-i asemele 80, saame õige võrduse. Seega võrrandi lahendiks on 80.

Näide 5. Lahendada võrrand

$$\frac{a + bx}{a + b} = \frac{c + dx}{c + d}$$

(Šapošnikov ja Valtsov, I osa, IV peatükk, nr. 156).

Paigutame sisemised liikmed ümber:

$$\frac{a+bx}{c+dx}=\frac{a+b}{c+d}.$$

Saadud võrrandi mõlema poole struktuuri võrreldes näeme, et vasak pool erineb paremast poolest ainult teguritega b ja d juures: vasakul pool on tegurina b ja d juures x, paremal pool 1. Suurema näitlikkuse saamiseks anname võrrandile kuju:

$$\frac{a+b\cdot x}{c+d\cdot x}=\frac{a+b\cdot 1}{c+d\cdot 1}.$$

Näeme vahenditult, et asetades x-i asemele 1, saame õige võrduse; seega võrrandi lahendiks on 1.

N ä i d e 6. Lahendada võrrand

$$\frac{2x}{15}+\frac{15-x}{4}+\frac{2(15-x)}{3}=2.$$

Oma väliskujuga viib võrrand järgmistele kaalutlustele: 15 ja x esinevad sümmeetriliselt kahes keskmises liikmes; pärast tuntud liikmete üleviimist ühele poole ja otsitavate liikmete üleviimist teisele poole osutub, et x ühel poolel on asendatud 15-ga teisel poolel. Jääb järele veel esimene ja viimane liige. Kui $x=15$, siis murd $\frac{2x}{15}$ võrdub $\frac{2\cdot 15}{15}=2$. Järelikult võib kinnitada, et asetades x-i asemele 15, saadakse õige võrdus ja, tähendab, 15 on võrrandi lahendiks.

Läbiarutatud võrrandite lahendamine sellel ebatavalisel viisil peab lapsi õpetama tähelepanelikult silmitsema võrrandi struktuuri, kinni püüdma sümmeetriat võrrandi mõlemas pooles ja leidma lahendamise lihtsaimat viisi. Samal ajal viivad need näited ka mõttele, et on vaja üldisemat võtet, mis ei nõua iga erijuhu kohta eri arutlust. (Vt. märkus 10 raamatu lõpus.)

§ 79. Ekvivalentseist võrrandeist.

Võrrandite lahendamise põhjendamiseks vajatakse õpetust ekvivalentseist võrrandeist. Võrrandite ekvivalentsus (samaväärsus) on keerukas küsimus, mille omandamine teeb õpilastele raskusi. Mõned pedagoogid on isegi arvamusel, et sellest keerukast küsimusest tuleb algebra õpetamise esimestel aastatel loobuda ja üle kanda see küsimus hilisematele aastatele, viies selle ühendusse irratsionaalsete võrrandite käsitlemisega.

Tunnustades raskusi, mis lastel tekivad ühenduses ekvivalentsete võrrandite õpetamisega, ei saa siiski leppida ülaltoodud arvamusega, sest võrrandite lahendamine, ilma et tehtavatest operatsioonidest oleks arusaamist, on pedagoogiliselt seisukohalt vale; õpilane peab teadlik olema sellest, mis toimub võrrandi lahenditega iga tehtava operatsiooni tagajärjel. Võrrandite ekvivalentsuse õpetust võib edasi lükata ainult siis, kui seda on võimalik teha ka võrrandite lahendamisega. Küsimuse kõrvalejätmine ainult sellepärast, et küsimus on keerukas, pole veel küsimuse lahendamine; vastupidi, arvestades arutatava küsimuse keerukust, tuleb sellele pühendada enam tähelepanu, peatudes selle juures mitu korda, nimelt: esimene kord enne võrrandite süstemaatilist läbivõtmist, siis lahendades võrrandeid otsitavaga nimetajas, veel kaugemal irratsionaalsete võrrandite lahendamisel, hiljem eksponent- ja logaritmiliste, samuti trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel ja lõpuks algebra kursuse kordamisel.

Esialgsel tutvumisel tuleb eri näidete najal selgitada küsimus, milliste operatsioonide tagajärjel võrrandite lahendid ei muutu, s. o. milliste teisenduste tulemusena saadakse võrrand, mis on esialgsega samaväärne. Pole tarvis karta termini „ekvivalentsed võrrandid" tarvituselevõtmist, selle

termini meelespidamine ei tee raskusi; muidugi pole oluline sõna, vaid mõiste sisu.

Ühe otsitavaga esimese astme võrrandi lahendamise peamiseks ülesandeks on otsitava leidmine, tähendab, rea tehete abil tuleb võrrandis leida võrrandi lõppkuju $x = a$. Võrrandite lahendamisel võib seepärast kasutada mitte ainult identseid teisendusi, mis asendavad antud võrrandi temaga samaväärse, lihtsama võrrandiga, vaid ka teisi teisendusi, mis võimaldavad ühelt võrrandilt järk-järgult üle minna teisele, lihtsamale, millel aga on sama lahend. Nii näiteks on üleminek võrrandilt $9x - 4x = 48 - 33$ (1) võrrandile $5x = 15$ (2) rajatud identsete teisenduste põhimõttele, sest $9x - 4x$ on samaväärne $5x$-ga, $48 - 33$ võrdub 15-ga. Üleminek võrrandilt $5x = 15$ võrrandile $x = 3$ (3) pole aga rajatud identsete teisenduste printsiibile, sest x ei võrdu $5x$-ga ja 3 ei võrdu 15-ga. On tähtis aru saada, et võrrandeil (2) ja (3) on üks ja seesama lahend, järelikult on nad samaväärsed võrrandid.

Definitsioon. Kaks võrrandit on samaväärsed (ekvivalentsed), kui esimese võrrandi lahendid on ka teise võrrandi lahenditeks, ja ümberpöördult.

Näited. 1. Võrrandid $x + 2 = 5$ ja $3x + 5 = 14$ on samaväärsed, sest mõlemal võrrandil on üks ja seesama ainus lahend $x = 3$.

2. Võrrandid $x + 3 = 8$ ja $2x + 3 = 9$ pole samaväärsed, sest esimese võrrandi lahendiks on 5, aga teise võrrandi lahendiks on 3.

3. Võrrandid $3x = 6$ ja $x^2 - 4 = 0$ pole samaväärsed. Esimese võrrandi lahendiks on 2. Võrrandi $x^2 - 4 = 0$ lahendamiseks lahutame $x^2 - 4$ tegureiks $(x + 2)(x - 2) = 0$. Korrutis võib võrduda nulliga siis ja ainult siis, kui üks tegureist võrdub nulliga; järelikult kas $x + 2 = 0$, s. o. $x = -2$, või $x - 2 = 0$, s. o. $x = 2$. Niisiis teisel võrrandil

on kaks lahendit $(+2)$ ja (-2), esimesel võrrandil aga üks lahend $(+2)$. Teise võrrandi lahend (-2) ei rahulda esimest võrrandit, seepärast antud võrrandid polegi samaväärsed.

Pärast võrrandite samaväärsuse selgitamist tuleb läbi arutada küsimus teisendustest, millede tulemusena saadakse samaväärsed võrrandid ja millede tulemusena — mittesamaväärsed.

Esimene põhilause. Kui võrrandi mõlemad pooled liita arvu või avaldisega, millel ei puudu arvu mõte, siis saadakse uus võrrand, mis on esialgsega samaväärne.

Võtame arutlusele näiteks võrrandi $x-8=7$. Selle võrrandi lahendiks on $x=15$. Liidame võrrandi mõlemad pooled 8-ga; saame $x-8+8=7+8$ ehk $x=15$, s. o. võrrandi, mille lahendiks on ka 15.

Pärast mõningaid harjutusi siirdutakse üldisele tõestusele. Tarvitame juba varem kasutamisele võetud terminit ja kirjutame võrrandi järgmisel kujul:

$$A(x)=B(x). \tag{1}$$

Liidame võrrandi mõlemad pooled m-ga; saame:

$$A(x)+m=B(x)+m. \tag{2}$$

m võib olla mistahes arv või avaldis, millel ei puudu mõte x-i selle väärtuse puhul, mis rahuldab võrrandit (1). See tähendab, et tähe m all võib mõista kas mistahes arvu või mistahes algebralist avaldist (täis- või murdavaldist), mille nimetaja ei muutu nulliks x-i selle väärtuse puhul, mis rahuldab võrrandit (1). On tarvis tõestada, et võrrandid (1) ja (2) on samaväärsed, see aga tähendab, et tuleb tõestada esiteks, et võrrandi (1) iga lahend rahuldab võrrandit (2), ja teiseks, et võrrandi (2) iga lahend rahuldab võrrandit (1).

1) Olgu α võrrandi (1) lahendiks, s. o. asetades x-i asemele võrrandisse (1) α, saame õige võrduse

$$A(\alpha) = B(\alpha). \tag{3}$$

Liidame võrduse (3) mõlemad pooled m-ga, saame meile juba tuntud võrduse omaduse põhjal õige võrduse

$$A(\alpha) + m = B(\alpha) + m. \tag{4}$$

Võrdus (4) saadi, asetades võrrandisse (2) x-i asemele α. Et aga x-i asendamine α-ga võrrandis (2) andis õige võrduse, siis on α võrrandi (2) lahendiks. Järelikult võrrandi (1) iga lahend rahuldab võrrandit (2), s. o. kui võrrandi (1) mõlemad pooled liita m-ga, siis võrrandi (1) lahendid esinevad ka võrrandi (2) lahendite hulgas.

2) Aga võib olla, et võrrandil (2) on peale võrrandi (1) lahendite veel teisi oma lahendeid. Selleks et kinnitada, et võrrandid (1) ja (2) on samaväärsed, on tarvis veel tõestada, et võrrandi (2) lahendid rahuldavad võrrandit (1). Olgu võrrandi (2) lahendiks β. Punktis (1) on tõestatud, et kui võrrandi mõlemad pooled liita mingi avaldisega, siis saadakse võrrand, mille kõik lahendid on esialgse võrrandi lahenditeks; liites võrrandi (2) mõlemad pooled $(-m)$-ga, saame võrrandi, mille kõik lahendid on ka võrrandi (2) lahenditeks; liites võrrandi (2) mõlemad pooled $(-m)$-ga, saame $A(x) + m - m = B(x) + m - m$ ehk $A(x) = B(x)$. Teiste sõnadega: võrrandi (2) kõik lahendid rahuldavad võrrandit (1). Järelikult võrrandid (1) ja (2) on samaväärsed.

On tarvis selgitada näite najal m-i kohta käivate kitsenduste mõtet.

Olgu antud võrrand $3x = 6$ (1); selle lahend võrdub 2-ga. Liites võrrandi mõlemad pooled murruga $\frac{1}{x-2}$ saame võrrandi

$$3x + \frac{1}{x-2} = 6 + \frac{1}{x-2}. \tag{2}$$

Kui aga $x = 2$, kaotab murd $\frac{1}{x-2}$ mõtte; seepärast on tarvis jälgida sel korral, kui võrrandi mõlemad pooled liidetakse murruga, mille nimetajas on otsitav, et see murd ei kaotaks oma mõtet nende x-i väärtuste puhul, mis rahuldavad antud võrrandit.

Järeldus 1. Lahutades võrrandi $A(x) = B(x)$ mõlemast poolest avaldise m, mis ei kaota oma mõtet (kui otsitava asemele panna võrrandi lahend), saadakse võrrand, mis on esialgsega samaväärne.

Võrrand $A(x) = B(x)$ (1) on samaväärne võrrandiga $A(x) - m = B(x) - m$ (2), sest m lahutamine on samaväärne $(-m)$ liitmisega.

Järeldus 2. Mistahes liikme üleviimisel ühelt võrrandi poolelt teisele vastupidise märgiga saadakse võrrand, mis on esialgsega samaväärne.

Mistahes liikme üleviimine ühelt võrrandi poolelt teisele vastupidise märgiga on samaväärne ühe ja sellesama avaldise liitmisele võrrandi mõlema poolega; see teisendus aga ei muuda esimese järelduse põhjal võrrandi lahendeid.

Võrdsed liikmed võrrandi eri pooltel võib ära jätta, sest üleviimisel ühele poolele nad vastastikku koonduvad.

Järeldus 3. Igale võrrandile võib anda kuju $P(x) = 0$; selleks on ainult tarvis üle viia kõik liikmed võrrandi vasakule poolele vastupidise märgiga.

Teine põhilause. Võrrandi mõlema poole korrutamisel ühe ja sellesama avaldisega, mis ei võrdu nulliga ja millel ei puudu arvu mõte, saadakse uus võrrand, mis on esialgsega samaväärne.

On antud võrrand $A(x) = B(x)$ (1); m on mingi avaldis, mis ei võrdu nulliga ja millel ei puudu arvu mõte, kui x-i asemele asetada võrrandi (1) lahend. On tarvis tõestada, et võrrand $mA(x) = mB(x)$ (2) on samaväärne võrrandiga (1),

s. o. esiteks, et võrrandi (1) iga lahend rahuldab võrrandit (2), ja teiseks, et võrrandi (2) iga lahend rahuldab võrrandit (1).

1. Olgu võrrandi (1) lahendiks a; järelikult väärtus $x = a$ muudab võrrandi (1) õigeks võrduseks $A(a) = B(a)$ (3), seepärast võrrandi (3) mõlema poole korrutamisel avaldisega m saadakse õige võrdus $mA(a) = mB(a)$ (4). Näeme vahenditult, et asetades võrrandisse (2) x-i asemele a, saame õige võrduse, tähendab a on võrrandi (2) lahendiks. Järelikult võrrandi (1) kõik lahendid rahuldavad võrrandit (2) ja esinevad selle lahendite hulgas.

2. Aga võib olla, et võrrandil (2) peale võrrandi (1) lahendite on veel omi lahendeid. Selleks et kinnitada, et võrrandid (2) ja (1) on samaväärsed, tuleb veel tõestada, et võrrandi (2) kõik lahendid rahuldavad võrrandit (1).

Kui võrrandi (2) mõlemad pooled korrutada $\frac{1}{m}$-ga, siis tõestuse põhjal punktis 1 peavad lõppvõrrandi kõik lahendid kuuluma võrrandi (2) lahendite hulka. Võrrandi (2) mõlema poole korrutamisel $\frac{1}{m}$-ga saame $m \cdot \frac{1}{m} \cdot A(x) = m \cdot \frac{1}{m} \cdot B(x)$ ehk $A(x) = B(x)$, s. o. võrrandi (1).

Järelikult võrrandi (2) iga lahend rahuldab võrrandit (1). Nüüd võime kinnitada, et võrrandid (1) ja (2) on samaväärsed.

On tarvis juhtida tähelepanu sellele, et korrutamine $\frac{1}{m}$-ga on lubatav, sest eelduse järgi $m \neq 0$ ja seepärast $\frac{1}{m}$ ei kaota arvu mõtet.

Selgitame, mispärast peab olema kitsendus $m \neq 0$, s. o. et kõrvaldatakse võrrandi mõlema poole korrutamine nulliga. Näitlikustamiseks arutame konkreetset näidet, nimelt võrrandit $7x = 21$ (A). Selle võrrandi ainsaks lahendiks on $x = \frac{21}{7}$ ehk 3.

Korrutades võrrandi (A) mõlemad pooled nulliga, saame $7x \cdot 0 = 21 \cdot 0$ (B); see võrrand on juba samasus, s. o. tal on lõpmata palju lahendeid, sest x-i mistahes väärtuse puhul saadakse võrrandi mõlema poole korrutamisel võrdus $0 = 0$. Niisiis, võrrandil (A) on üksainus lahend, aga võrrandil (B) lõpmata palju lahendeid, s. o. võrrandid (A) ja (B) pole samaväärsed.

Järeldus 1. Võrrandi mõlema poole jagamisel ühe ja sellesama arvu või avaldisega, mis ei võrdu nulliga, saadakse võrrand, mis on esialgsega samaväärne, sest jagamine mingi avaldisega võib asendatud saada korrutamisega pöördavaldisega.

Näide. Võrrandi $3x + 15 = 6x - 45$ võime teisendada samaväärseks võrrandiks $x + 5 = 2x - 15$ kõigi liikmete jagamise teel 3-ga.

Sellele omadusele rajaneb kõigi kordajate taandamine nende suurima ühisteguriga.

Järeldus 2. Võrrandit murruliste kordajatega võib teisendada samaväärseks võrrandiks täisarvuliste kordajatega, korrutades kõiki kordajaid nende väikseima ühiskordsega.

Näide. Võrrand $\frac{x}{2} + 3 = \frac{x}{4} + 9$ muutub liikmeti 4-ga korrutamisel samaväärseks võrrandiks $2x + 12 = x + 36$, millel on juba täisarvulised kordajad.

See omadus lubab võrrandit vabastada otsitavat mittesisaldavaist nimetajaist.

Järeldus 3. Võrrandi kõigi liikmete märgi muutmisel vastupidiseks saadakse võrrand, mis on samaväärne esialgse võrrandiga, sest märkide muutmine vastupidiseks on samaväärne korrutamisega (—1)-ga, mis pole võrdne nulliga.

Näide. Võrrand $B - Ax = C$ on samaväärne võrrandiga $Ax - B = -C$ ehk võrrandiga $Ax = B - C$.

Läbiarutatud samaväärsuse põhilaused koos neist saadud järeldustega on põhjenduseks võrrandite õpetusele ja lahendamisele.

Samaväärsuse idee paremaks omandamiseks on vaja teostada rida järgmist laadi harjutusi.

Võtame võrrandi $5x + 6 = 2x + 30$. (1)

Selle lahendamisel saavad õpilased samm-sammult:

$$5x - 2x = 30 - 6 \quad (2)$$
$$3x = 24 \quad (3)$$
$$x = 8 \quad (4)$$

Võrreldes (2) (1)-ga, näeb õpilane vahenditult, et vasakud pooled pole võrdsed, samuti ka paremad pooled. Tõepoolest, $5x + 6$ ei võrdu $5x - 2x$ ja $2x + 30$ ei võrdu $30 - 6$. Tähendab, üleminekul (1)-lt (2)-le pole rakendatud identsete teisenduste printsiipi, vaid võrrandite samaväärsuse printsiipi. Võrreldes (3) (2)-ga on näha, et neil võrrandeil on vasakud pooled samaväärsed, sest $5x - 2x = 3x$; samuti on samaväärsed ka paremad pooled, sest $30 - 6 = 24$. Tähendab, üleminek (2)-lt (3)-le toimus samaväärsete teisenduste printsiibi põhjal. Võrreldes (4) (3)-ga näeme, et $3x$ ei võrdu x-ga ja 24 ei võrdu 8-ga, s. o. et üleminek (3)-lt (4)-le toimus võrrandite samaväärsuse printsiibi põhjal, sest asendades võrrandi (3) võrrandiga (4) lahend ei muutu.

Samaväärsuse idee ei luba ühe otsitavaga esimese astme võrrandite lahendamisel mitte ainult leida võrrandi lahendit, vaid annab ka veendumuse, et leitud lahend on ainus. Tõepoolest üleminekul antud võrrandilt (1) lõppvõrrandile $x = 8$ kasutati kas identsete teisenduste printsiipi või jälle võrrandite samaväärsuse printsiipi; nii ühel kui ka teisel juhul võrrandi lahendid ei muutu. Esimese astme võrrandite lahendamisel kasutatavate operatsioonide hulka kuuluvad sarnaste liikmete koondamine, liitmine, lahutamine, samuti ka korrutamine ja jagamine (arvudega, mis ei võrdu nul-

liga); kõik need tehted on teostatavad ja üheväärtuselised. Seepärast saadakse otsitavale üksainus väärtus, antud näites $x = 8$. Et esialgse võrrandi kõik lahendid kuuluvad lõppvõrrandi lahendite hulka, siis ka esialgsel võrrandil on üksainus lahend $x = 8$.

Meie arutluses on juttu ainult võrrandeist, mis ei muutu samasusteks.

§ 80. Ühe otsitavaga arvuliste kordajatega lineaarvõrrandite lahendamine.

I. On loomulik alustada lahendamist võrrandeist, milledes otsitav esineb ainult ühes liikmes.

Arutame läbi järgmist tüüpi harjutuste lahendamise:

$$x + a = 3;\ x - a = d;\ a - x = k;\ ax = b;\ \frac{x}{a} = c;\ \frac{a}{x} = f.$$

1) $x + 7 = 35$. Võrrandite samaväärsuse esimese printsiibi põhjal kanname $+7$ võrrandi vasakult poolelt paremale miinusmärgiga; saame

$$x = 35 - 7;\ x = 28.$$

2) $x - 12 = 40$. Võrrandite samaväärsuse esimese printsiibi põhjal kanname -12 võrrandi vasakult poolelt paremale plussmärgiga; saame

$$x = 40 + 12;\ x = 52.$$

3) $70 - x = 45$. Kanname 70 võrrandi vasakult poolelt paremale miinusmärgiga; saame: $-x = 45 - 70$; $-x = -25$. Korrutades võrrandi mõlemad pooled (-1)-ga, saame võrrandite samaväärsuse teise printsiibi põhjal võrrandi $x = 25$, mis on samaväärne võrrandiga $-x = -25$.

4) $6x = 48$. Jagades võrrandi mõlemad pooled x-i kordajaga, s. o. 6-ga, saame võrrandite samaväärsuse teise printsiibi põhjal võrrandi $x = 8$, mis on samaväärne esialgsega.

5) $\frac{x}{4} = 5$. Korrutades võrrandi mõlemad pooled 4-ga (või jagades $\frac{1}{4}$-ga), saame võrrandi

$$x = 5 \cdot 4 \text{ ehk } x = 20,$$

mis on samaväärne esialgsega võrrandite samaväärsuse teise printsiibi põhjal.

6) $\frac{80}{x} = 5$. Korrutame võrrandi mõlemad pooled x-ga, saame $80 = 5x$ ehk $x = 16$.

Korrutamine x-ga on lubatav, sest $x = 0$ puhul võrrandi vasak pool kaotab arvu mõtte ja ei saa olla võrdne 5-ga.

Ühe otsitavaga esimese astme võrrandi lahendamisel üldkujul $ax = b$, kus $a \neq 0$, saame $x = \frac{b}{a}$. Tähendab, võrrandi lahendit määravad kordajad a ja b; a ja b muutumisel muutub ka lahend. Kui a ja b ei muutu, ei muutu ka otsitava väärtus, vaatamata sellele, millise tähega x, y, z jne. meie otsitavat ka tähistaksime.

Niisiis võrrandi lahend on kordajate funktsioon.

II. Arutame läbi võrrandite lahendamise võtted, kui otsitav esineb mitmes liikmes. Selgitame võrrandite lahendamisel teostatavaid operatsioone ja nende järjekorda järgmise võrrandi lahendamisel:

$$\frac{3x-5}{4} = \frac{4-x}{2} + \frac{9-2x}{6}. \qquad \text{(I)}$$

1. Vabastame võrrandi murdudest, korrutades võrrandi mõlemad pooled ühisnimetajaga 12. Võrrandite samaväärsuse teise printsiibi põhjal saame võrrandi

$$3(3x-5) = 6(4-x) + 2(9-2x), \qquad \text{(II)}$$

mis on samaväärne (I)-ga.

2. Avame sulud, saame:

$$9x - 15 = 24 - 6x + 18 - 4x. \qquad \text{(III)}$$

3. Kanname liikmed otsitavaga võrrandi vasakule poolele, ilma otsitavata paremale poolele:

$$9x + 6x + 4x = 24 + 18 + 15. \qquad \text{(IV)}$$

4. Koondame sarnased liikmed võrrandi mõlemal poolel:

$$19x = 57. \qquad \text{(V)}$$

5. Jagame võrrandi mõlemad pooled x-i kordajaga:

$$x = 57 : 19; \quad x = 3. \qquad \text{(VI)}$$

Teostatud operatsioonidest on sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine identsed teisendused, kuna kõik teised operatsioonid toimusid võrrandite samaväärsuse printsiibi põhjal.

Tuleb tähelepanu juhtida sageli esinevale veale võrrandi lahendamise kirjutuses. Kui üks võrrand saadakse teisest identsete teisendustega, siis mõlemate võrrandite vasakud pooled on võrdsed, samuti ka paremad pooled. Kui kaks võrrandit on samaväärsed, siis pole tingimata tarvis, et ühe võrrandi vasak pool võrduks teise võrrandi vasaku poolega; sama lugu on võrrandite paremate pooltega. Nii näiteks võrrand $\frac{2x-3}{2} = \frac{x+10,5}{3}$ on samaväärne võrrandiga $6x - 9 = 2x + 21$, aga $\frac{2x-3}{2}$ ei võrdu $6x - 9$-ga ja $\frac{x+10,5}{3}$ ei võrdu $2x + 21$-ga. Seepärast ei saagi kirjutada

$$\frac{2x-3}{2} = \frac{x+10,5}{4} = 6x - 9 = 2x + 21.$$

Viga seisab selles, et võrdusmärgiga on ühendatud mittevõrdsed avaldised. Isegi identsete teisenduste puhul pole soovitav neid ühendada järjestikuste võrdusmärkidega, sest võrrand on kahe avaldise võrdus ja koosneb kahest osast, õpilastel aga, nagu on näha võetud näitest, on võrdusmärkidega ühendatud neli avaldist.

Kõik ülaltoodud viis operatsiooni pole tingimata tarvilikud; kui nimetajas ei esine x-i, pole tingimata tarvis antud võrrandit asendada teisega, millel on täisarvulised kordajad.

Näiteks lahendame võrrandi $\frac{2(x-2)}{9} - 1 = \frac{x+1}{12}$.

Avame sulud, jagame lugeja iga liikme nimetajaga, kanname liikmed otsitavaga vasakule poole ja antud liikmed paremale poole:

$$\frac{2x-4}{9} - 1 = \frac{x+1}{12}; \quad \frac{2x}{9} - \frac{4}{9} - 1 = \frac{x}{12} + \frac{1}{12};$$

$$\frac{2x}{9} - \frac{x}{12} = \frac{1}{12} + \frac{4}{9} + 1; \quad \frac{5x}{36} = \frac{55}{36}; \quad x = \frac{55}{36} : \frac{5}{36}; \quad x = 11.$$

Harjutusi võrrandite lahendamise kohta võib anda õpilastele niisuguses järjekorras:

1. Võrrandid, milledes otsitav esineb ainult võrrandi ühel poolel:

$$2x + 3x + 4x = 18; \quad 9x = 18; \quad x = 2.$$

2. Võrrandid, milledes otsitav esineb võrrandi mõlemal poolel, tuntud liikmed aga ainult ühel poolel:

$$5x + 7x = 8 - 3x + 7; \quad 5x + 7x + 3x = 8 + 7; \quad 15x = 15;$$
$$x = \frac{15}{15}; \quad x = 1.$$

3. Võrrandid, milledes liikmed otsitavaga ja liikmed ilma otsitavata on nii võrrandi ühel kui ka teisel poolel:

$$12x + 9 - 3x = 65 + 2x; \quad 12x - 3x - 2x = 65 - 9;$$
$$7x = 56; \quad x = 8.$$

4. Võrrandid, milledes otsitav on sulgudes:

$$8(9 - 2x) = 5(3x + 2); \quad 72 - 16x = 15x + 10;$$
$$31x = 62; \quad x = 2.$$

5. Võrrandid, milledes esineb murdusid arvuliste nimetajatega ja üksliikmeliste lugejatega:

$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{7}-\frac{x}{2}=9;\quad 14x+30x-35x=630;\quad 9x=630;\quad x=70.$$

6. Võrrandid, milledes esineb murdusid arvuliste nimetajatega ja hulkliikmeliste lugejatega:

$$\frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}=\frac{x+6}{2};\quad 8-x-10+8x=3x+18;$$

$$4x=20;\quad x=5.$$

7. Võrrandid, milledes otsitav on üksliikmelises nimetajas:

$$\frac{1}{7x}+\frac{3}{x}=\frac{5}{2x}+\frac{9}{28};\quad 4+84=70+9x;\quad 4+84-70=9x;$$

$$9x=18;\quad x=2.$$

8. Võrrandid, milledes otsitav on hulkliikmelises nimetajas:

$$\frac{2+x}{x-1}-\frac{5}{2(x-1)}=\frac{8}{3(x-1)}+\frac{5}{18};\quad \frac{18(2+x)-5\cdot 9}{18(x-1)}=$$

$$=\frac{6\cdot 8+5(x-1)}{18(x-1)};\quad \frac{36+18x-45-48-5x+5}{18(x-1)}=0;$$

$$\frac{13x-52}{18(x-1)}=0;\quad \frac{13(x-4)}{18(x-1)}=0;\quad \frac{x-4}{18(x-1)}=0;$$

$$x-4=0;\quad x=4.$$

Et $x=4$ puhul nimetaja $x-1$ ei muutu nulliks, siis $x=4$ on esitatud võrrandi lahend.

§ 81. Võrrandid otsitavaga nimetajas.

Nende võrrandite lahendamine on teoreetiliselt ja ka praktiliselt puudulikult läbi töötatud. Teoreetiliselt seisukohalt on vähe tähelepanu juhitud võrrandite $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ ja $A(x)=0$ samaväärsusele. Õpetamise seisukohalt koolis puudub vastavate harjutuste süstemaatiline valik.

Tavaliselt viiakse võrrand otsitavaga nimetajas x suhtes täiskujule sel teel, et liikmeti korrutatakse võrrandit kõigi nimetajate väikseima ühiskordsega. Siin loomulikult kerkib üles vajadus arutella, mis toimub lahenditega, kui võrrandi kõiki liikmeid korrutada x-i sisaldava avaldisega.

Algebralisel avaldisel, milles esineb otsitav, võib olla palju väärtusi vastavalt otsitava väärtusele; eri juhul võib mõne otsitava väärtuse puhul avaldise väärtuseks olla ka null; sel juhul korrutamine otsitavat sisaldava avaldisega annab tulemusena nulli ja võrrandi mõlema poole korrutamine sellise avaldisega annab võrduse $0 = 0$ sõltumatult võrrandi esialgsest kujust. Seepärast see x-i väärtus, mis muutis algebralise avaldise nulliks, on uue võrrandi lahendiks isegi sel korral, kui ta polnud lähtevõrrandi lahendiks.

Näitena arutleme võrrandit $2x = 10$ (1); selle ainsaks lahendiks on 5. Korrutame võrrandi mõlemad pooled $x - 3$-ga, saame $2x(x - 3) = 10(x - 3)$ (2); võrrandi (1) lahend 5 rahuldab võrrandit (2), sest $2 \cdot 5(5 - 3) = 10(5 - 3)$. Peale 5 on võrrandil (2) veel lahend 3, sest $2 \cdot 5(3 - 3) = 10(3 - 3)$ ehk $10 \cdot 0 = 0$.

Teine lahend 3 saadi korrutamise tulemusena $(x - 3)$-ga, mis $x = 3$ puhul muutub nulliks.

Tehtud harjutusest selgub, et võrrandi mõlemate poolte korrutamisel otsitavat sisaldava täis-hulkliikmega saadakse võrrand, millel on samad lahendid mis lähtevõrrandil, aga mõnikord veel peale endiste ka uued lahendid. Uued lahendid muudavad nulliks selle hulkliikme, millega meie korrutasime võrrandi mõlemaid pooli.

Arutleme küsimust üldkujul. Olgu võrrandil kuju $P(x) = 0$ (1); võrrandi (1) korrutamisel $Q(x)$-ga saadakse võrrand $P(x) \cdot Q(x) = 0$ (3).

Võrrandi $P(x) \cdot Q(x) = 0$ (3) arutlemisel tuleb eristada kaht juhtu: 1) $P(x)$ ja $Q(x)$ on x suhtes täisfunktsioonid; 2) $P(x)$ ja $Q(x)$ on ratsionaalsed funktsioonid.

1. Olgu $P(x)$ ja $Q(x)$ x suhtes täisfunktsioonid. Sel juhul on igaühel hulkliikmeist $P(x)$ ja $Q(x)$ x-i mistahes väärtuse puhul täiesti määratud väärtus. Kahe hulkliikme $P(x)$ ja $Q(x)$ korrutis võib võrduda nulliga ainult sel korral, kui üks tegureist võrdub nulliga ja teine ei kaota arvu mõtet. Teiste sõnadega, võrrand $P(x) \cdot Q(x) = 0$ jaguneb kaheks: 1) $P(x) = 0$, kusjuures $Q(x)$ võib olla mistahes arv või avaldis, millel ei puudu arvu mõte.

2. $Q(x) = 0$ ja $P(x)$ võib olla mistahes arv või avaldis, millel ei puudu arvu mõte. Seepärast, kui $P(x)$ ja $Q(x)$ on x suhtes täis-hulkliikmed, võivad võrrandi $P(x) \cdot Q(x) = 0$ lahendeiks olla mõlema võrrandi $P(x) = 0$ ja $Q(x) = 0$ lahendid.

Tähendab, kui $P(x)$ ja $Q(x)$ on x suhtes täis-hulkliikmed, siis võrrand $P(x) \cdot Q(x) = 0$ pole samaväärne kummagi võrrandiga $P(x) = 0$ ja $Q(x) = 0$.

Järelikult võrrandi mõlema poole korrutamisel x suhtes täis-hulkliikmega saadakse uus võrrand, mis pole samaväärne lähtevõrrandiga. Räägitakse, et võrrandil $P(x) \cdot Q(x)$ on võrrandiga $P(x)$ võrreldes liigsed või võõrlahendid, nimelt need otsitava väärtused, mis muudavad hulkliikme $Q(x)$ nulliks.

On enesestmõistetav, et kui $Q(x) \neq 0$, siis võrrand $P(x) \cdot Q(x) = 0$ on samaväärne võrrandiga $P(x) = 0$, sest võrrandi $P(x) \cdot Q(x) = 0$ mõlema poole jagamisel $Q(x)$-ga, mis erineb nullist, saadakse võrrand $P(x) = 0$, mida rahuldavad kõik need otsitava väärtused, mis rahuldasid ka võrrandit $P(x) \cdot Q(x) = 0$, kui $Q(x) \neq 0$.

II. Olgu $P(x)$ ja $Q(x)$ x suhtes ratsionaalsed hulkliikmed, seejuures mitte tingimata täis-hulkliikmed. Sel korral tegur $Q(x)$ kaotab arvu mõtte otsitava nende väärtuste puhul, millede puhul tema nimetaja muutub nulliks, sest jagamisel nulliga pole mõtet.

Võtame järgmised võrrandid:

$$P(x) = 0 \quad (1)$$
$$Q(x) = 0 \quad (2)$$
$$P(x) \cdot Q(x) = 0 \quad (3)$$

Olgu a võrrandi (1) lahendiks; siis $P(a) = 0$. Võtame arutlusele korrutise $P(x) \cdot Q(x)$. Et tegur $P(a) = 0$, siis korrutis $P(x) \cdot Q(x)$ võrdub nulliga ainult sel korral, kui tegur $Q(x)$ ei kaota arvu mõtet. Järelikult a on võrrandi (3) lahendiks ainult juhul, kui a ei muuda võrrandi (2) vasakut poolt avaldiseks, millel puudub arvu mõte.

Seega võrrandil (3) on võrrandi (1) kõik lahendid, mis ei muuda võrrandi (2) vasakut poolt avaldiseks ilma arvu mõtteta.

Analoogiliselt võib veenduda selles, et võrrandil (3) on võrrandi (2) kõik lahendid, mis ei muuda $P(x)$ avaldiseks ilma arvu mõtteta.

Seega võrrandi (1) iga lahend, mille puhul avaldis $Q(x)$ ei kaota arvu mõtet, on võrrandi (3) lahendiks. Võrrandi (1) teised lahendid võivad kaotsi läinud olla, ka võib juurde tulnud olla üleminekul võrrandilt (1) võrrandile (3) mõningaid võrrandi (2) lahendeid.

Võrrandi mõlema poole korrutamisel x-i sisaldava avaldisega saadakse ühel juhul tingimata võrrand, mis on samaväärne lähtevõrrandiga. Oletame, et pärast kõiki lihtsustamisi saadi võrrand $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, kus esiteks $P(x)$ ja $Q(x)$ on x suhtes hulkliikmed ja teiseks murd $\frac{P(x)}{Q(x)}$ on taandamatu. Võrrandi $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ mõlema poole korrutamisel $Q(x)$-ga saadakse võrrand $P(x) = 0$. Võrrandid $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ ja $P(x) = 0$ on samaväärsed. Tõepoolest, võrrandi $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ lahendid, kui neid on olemas, peavad rahuldama võrrandit $P(x) = 0$,

aga need x-i väärtused muudavad $P(x)$ nulliks, ei muuda aga $Q(x)$ nulliks; kui x-i ühe ja sama väärtuse, näiteks $x=a$ puhul muutuksid $P(x)$ ja $Q(x)$ nulliks, siis oleks $P(x)$ ja $Q(x)$ ühiseks jagajaks $x-a$ ja murd järelikult oleks taandatav, mis aga räägib eeldusele vastu. Et funktsiooni selle omadusega tutvuvad õpilased palju hiljem, siis teadmiste antud tasemel peavad nad pärast seda, kui nad on lahendanud võrrandi $P(x)=0$, veel järele proovima, kas saadud lahendid ei muuda nulliks nimetajat $Q(x)$. Ainult selle tingimuse silmaspidamisel võib öelda, et $P(x)=0$ lahendid on võrrandi $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ lahendeiks.

Kuidas sellistel juhtudel toimida, seda selgitame näidete najal.

Näide 1. Lahendada võrrand:

$$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}.$$

Üle kandes kõik liikmed vasakule poole, saame:

$$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}-\frac{37}{x^2+5x+6}=0.$$

Kõigi murdude ühisnimetajaks on $(x+2)(x+3)$, sest $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

Pärast murdude liitmist võrrandi vasakul poolel saame:

$$\frac{4(x+3)+7(x+2)-37}{(x+2)(x+3)}=0;\quad \frac{4x+12+7x+14-37}{(x+2)(x+3)}=0;$$

$$\frac{11x-11}{(x+2)(x+3)}=0;\quad \frac{11(x-1)}{(x+2)(x+3)}=0;\quad \frac{x-1}{(x+2)(x+3)}=0.$$

Selleks et murd võrduks nulliga, peab murru lugeja võrduma nulliga, nimetaja aga ei tohi võrduda nulliga. Võrrutades lugeja $x-1$ nulliga, saame võrrandi $x-1=0$; selle lahend $x=1$. Nüüd tuleb veel kindlaks teha, et $x=1$ puhul nimetaja $(x+2)(x+3)$ ei muutu nulliks. Asetades x asemele nimetajasse 1, saame avaldise, mis ei võrdu nulliga,

nimelt: $(x+2)(x+3)=(1+2)\cdot(1+3)=3\cdot 4=12$. Seepärast on $x=1$ antud võrrandi lahendiks ja seejuures ainsaks.

Lahendatud näitest tuleneb järgmine võte võrrandite lahendamiseks, milledes on otsitav nimetajas. Algul tuleb kõik liikmed üle kanda vasakule poole, siis teha kõik murrud ühenimelisteks ja need liita. Võrrandi vasak pool on nüüd murd, kas taandatav või mitte. Kui osutub, et murd on taandatav, siis tuleb enne murd taandada ja siis kõrvaldada nimetaja. Saadud võrrandi lahendus annab antud võrrandi lahendid. Eelnev taandamine väldib võõrlahendite saamist, mis tekivad võrrandi mõlema poole korrutamisel kõigi murdude ühisnimetajaga.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{3x^2+2}{x^2-1}+\frac{2(x-2)}{x+2}=\frac{5(x^2-x-1)}{x^2-1}. \qquad (1)$$

Pärast kõigi liikmete ülekandmist võrrandi vasakule poolele ja murdude liitmist saame võrrandi

$$\frac{3(x^2-5x-6)}{(x^2-1)(x+2)}=0. \qquad (2)$$

Kuigi $(x^2-1)(x+2)$ on kõigi murdude ühisnimetajaks, on murd võrrandi vasakul poolel taandatav, sest

$$\frac{3(x^2-5x-6)}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{3(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}.$$

Murru liikmeil on ühine tegur $x+1$. x-i väärtus -1 muudab üheaegselt nulliks murru lugeja ja nimetaja. Seepärast on väär kinnitada, et võrrand (2) on samaväärne võrrandiga (1), sest võrrandil $3(x^2-5x-6)=0$ on kaks lahendit: $x_1=6$ ja $x_2=1$; neist kahest lahendist rahuldab võrrandit (1) ainult üks: $x=6$.

Ainult pärast murru taandamist $x+1$-ga võrrandi vasakul poolel saame võrrandi, mis on samaväärne lähtevõrrandiga.

Selge kujutluse samaväärsuse küsimusest seoses võrrandite lahendamisega, milledel on otsitav nimetajas, võivad õpilased saada ainult süstemaatiliselt valitud mitmesugust tüüpi harjutuste lahendamisel. Enne kui asuda nende harjutuste järjekorra arutlusele, tuleb tähelepanu juhtida järgmisele.

Funktsioon $y=\frac{x(x-a)}{x-a}$ on määratud kõigi x-i väärtuste puhul, välja arvatud $x=a$; selle viimase väärtuse puhul nimetaja muutub nulliks ja funktsioon kaotab mõtte. Kõigi teiste x-i väärtuste puhul, s. o. kui $x\neq a$, saame: $y=\frac{x(x-a)}{x-a}=$ $=x$ ehk $y=x$. Teiste sõnadega, kui välja arvata $x=a$, mille puhul murrulise hulkliikme $\frac{x(x-a)}{x-a}$ nimetaja muutub nulliks, on võrrandid $\frac{x(x-a)}{x-a}=0$ ja $x=0$ samaväärsed a i n u l t s i i s, kui on kõrvaldatud x-i väärtus a.

N ä i d e 1. Lahendada võrrand $\frac{1}{x-2}=1$.

Esitatud võrrandis on otsitav ainult nimetajas; võrrand kaotab oma mõtte ainult siis, kui $x-2=0$, s. o. kui $x=2$. Selleks et murd $\frac{1}{x-2}$ võrduks ühega, on tingimata tarvis, et lugeja ja nimetaja oleksid võrdsed, s. o. $x-2=1$; $x=3$. Sellest aga piisab, sest $x=3$ ei muuda nimetajat nulliks. Järelikult 3 on võrrandi lahend.

Lahendame sellesama harjutuse üldvõttega, andes võrrandile kuju $F(x)=0$:

$$\frac{1}{x-2}-1=0;\quad \frac{1-x+2}{x-2}=0;\quad \frac{3-x}{x-2}=0.$$

Selleks et murd $\frac{3-x}{x-2}$ võrduks nulliga, on tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks, et lugeja $3-x=0$, s. o. $x=3$, aga nimetaja $x=3$ puhul ei muutuks nulliks, mis praegusel juhul on ka täidetud, sest $3-2=1$, s. o. ei võrdu nulliga.

Läbiarutatud näitest selgub, et võrrand kujul $\frac{a}{Q(x)} = b$, milles otsitav esineb ainult nimetajas $Q(x)$, aga a ja b ei sisalda otsitavat, on samaväärne võrrandiga $a = b \cdot Q(x)$.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{x-7}{x-2} = 3. \qquad (1)$$

Esimene lahendusvõte, lahendamine üldvõttega.

$\frac{x-7}{x-2} = 3$; $\frac{x-7}{x-2} - 3 = 0$; $\frac{x-7-3x+6}{x-2} = 0$; $\frac{-2x-1}{x-2} = 0$; $\frac{2x+1}{2-x} = 0$; lugeja $2x+1$ võrdub nulliga, kui $x = -\frac{1}{2}$; nimetaja $2-x$ muutub nulliks ainult siis, kui $x = 2$, $x = -\frac{1}{2}$ puhul aga ei võrdu nulliga; järelikult $x = -\frac{1}{2}$ on võrrandi (1) lahend.

Teine lahendusvõte. Anname võrrandile sellise kuju nagu näites 1.

Et $\frac{x-7}{x-2} = \frac{(x-2)-5}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} - \frac{5}{x-2} = 1 - \frac{5}{x-2}$,

siis võrrandile (1) võib anda kuju

$$1 - \frac{5}{x-2} = 3; \quad -\frac{5}{x-2} = 3-1; \quad -\frac{5}{x-2} = 2;$$

$$\frac{5}{2-x} = 2; \quad 5 = 4-2x; \quad 2x = -1; \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Näide 3. Lahendada võrrand $\frac{x-3}{x-7} = 2$.

Esimene võte: $\frac{x-3}{x-7} - 2 = 0$; $\frac{x-3-2x+14}{x-7} = 0$; $\frac{11-x}{x-7} = 0$; lugeja võrdub nulliga, kui $x = 11$. Et aga $x = 11$ ei muuda nulliks nimetajat, siis võrrandi (1) lahend on 11.

Teine võte: anname võrrandile (1) sellise kuju nagu näites 1:

$$\frac{x-7+4}{x-7}=2;\ \frac{x-7}{x-7}+\frac{4}{x-7}=2;\ 1+\frac{4}{x-7}=2;$$

$$\frac{4}{x-7}=1;\ 4=x-7;\ x=11.$$

Näide 4. Lahendada võrrand $\frac{x^2-1}{x-1}=0$.

Lugeja võrdub nulliga, kui $x^2-1=0$; et aga $x^2-1=(x+1)(x-1)$, siis võrrand $x^2-1=0$ jaguneb kaheks võrrandiks $x+1=0$ ja $x-1=0$; esimesel võrrandil $x+1=0$ on lahendiks $x=-1$, teisel võrrandil $x-1=0$ on lahendiks $x=1$. Võrrandi $x^2-1=0$ kahest lahendist lahend $x=1$ muudab nulliks mitte ainult lugeja, vaid ka nimetaja, seepärast $x=1$ pole esitatud võrrandi lahendiks.

Lahend $x=-1$ muudab nulliks lugeja, aga mitte nimetaja, sest $x=-1$ puhul nimetaja võrdub $-1-1=-2$-ga.

Seepärast ongi esitatud võrrandi lahendiks (-1).

Esitatud harjutuse võib lahendada ka teise võttega. Kõigi x-i väärtuste puhul, mis erinevad ühest, võrdub murd $\frac{x^2-1}{x-1}$ $x+1$-ga; kui aga $x=1$, siis murd kaotab arvu mõtte, aga $x+1$ võrdub 2-ga. Seepärast murrud $\frac{x^2-1}{x-1}$ ja $x+1$ on võrdsed kõigi x-i väärtuste puhul, mis erinevad ühest. Et aga $x=1$ puhul murd $\frac{x^2-1}{x-1}$ kaotab arvu mõtte, siis 1 pole antud võrrandi lahendiks ja võrrandi $\frac{x^2-1}{x-1}=0$ asemele võime võtta võrrandi $x+1=0$, mis on samaväärne lähtevõrrandiga, kui on kõrvaldatud $x=1$. Järelikult $x=-1$.

Näide 5. Lahendada võrrand

$$\frac{(x-1)^2}{x-1}=0. \qquad (1)$$

Ratsionaalsete arvude vallas võrrandi (1) vasak pool muutub $(x-1)$-ks kõigi x-i väärtuste puhul, välja arvatud 1, ja ei muutu nulliks mitte ühegi x-i muu väärtuse puhul. Kui $x=1$, siis võrrandi vasak pool kaotab mõtte, sest pole võimalik jagada nulliga. Võrrandid $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$ ja $x-1=0$ pole samaväärsed; esimene võrrand kaotab mõtte, kui $x=1$, aga teine võrrand muutub x-i selle väärtuse puhul õigeks võrduseks.

Järelikult võrrandil $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$ pole lahendeid.

Näide 6. Lahendada võrrand

$$\frac{7-x}{x-6}-5=\frac{1}{x-6}. \qquad (1)$$

Lahendame võrrandi (1) tavalise teisendusvõttega (p. 1):

$$\frac{7-x-5(x-6)-1}{x-6}=0;\quad \frac{7-x-5x+30-1}{x-6}=0;$$

$$\frac{36-6x}{x-6}=0;\quad \frac{6(6-x)}{x-6}=0;\quad \frac{-x+6}{x-6}=0.$$

Selle võrrandi lahend, kui see on olemas, peab rahuldama võrrandit $-x+6=0$, s. o. võrrandi $\frac{-x+6}{x-6}=0$ lahendiks võib olla ainult 6. Aga $x=6$ puhul muutub nimetaja nulliks ja võrrand kaotab arvu mõtte, seepärast siis ka võrrandil $\frac{-x+6}{x-6}=0$ puuduvad lahendid. Et võrrandil $\frac{7-x}{x-6}-5=$ $=\frac{1}{x-6}$ puuduvad lahendid, seda võib näidata ka niiviisi:

$$\frac{7-x}{x-6}=\frac{6-x}{x-6}+\frac{1}{x-6}=\frac{-(x-6)}{x-6}+\frac{1}{x-6}=-1+\frac{1}{x-6}.$$

Tähendab, esitatud võrrandi vasak pool on

$$-1+\frac{1}{x-6}-5 \text{ ja parem pool } \frac{1}{x-6}.$$

$-1+\frac{1}{x-6}-5=\frac{1}{x-6}$ ehk $-1-5=0$, s. o. mitte-

õige võrdus $-6=0$. Järelikult on antud võrrand varjatud kujul mitteõige võrdus $-6=0$.

Näide 7. Lahendada võrrand

$$2+\frac{1}{x-3}=\frac{4-x}{x-3}. \qquad (1)$$

Esimene lahendusvõte:

$$2+\frac{1}{x-3}-\frac{4-x}{x-3}=0;\quad \frac{2x-6+1-4+x}{x-3}=0;\quad \frac{3x-9}{x-3}=0.$$

Lugeja $3x-9$ võrdub nulliga ainult $x=3$ puhul; aga $x=3$ puhul muutub ka nimetaja nulliks; seepärast puuduvad esitatud võrrandil lahendid.

Teine lahendusvõte:

Teisendame $\frac{4-x}{x-3}$; $\frac{4-x}{x-3}=\frac{-x+3+1}{x-3}=-\frac{x-3-1}{x-3}=$

$$=-\frac{x-3}{x-3}+\frac{1}{x-3}=-1+\frac{1}{x-3}.$$

Näeme vahenditult, et esitatud võrrand on varjatud kujul mitteõige võrdus $2=-1$ ja on koostatud järgmiselt: kaks mittevõrdset arvu 2 ja -1 on liidetud ühe ja sellesama murruga; muidugi pole need summad kui arvud võrdsed, nad on aga siiski ühendatud võrdusmärgiga.

Näide 8. Lahendada võrrand

$$1+\frac{5}{x^2-x-6}=-\frac{1}{x+2}; \qquad (1)$$

$$1+\frac{5}{x^2-x-6}+\frac{1}{x+2}=0;$$

$$1+\frac{5}{(x-3)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=0;$$

$$\frac{x^2-x-6+5+x-3}{(x-3)(x+2)}=0;$$

$$\frac{x^2-4}{(x-3)(x+2)}=0.$$

Lugeja x^2-4 muutub nulliks, kui $x=+2$ ja $x=-2$, sest $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Aga $x=-2$ muudab nime-

taja nulliks ja murd $\frac{1}{x+2}$ kaotab $x=-2$ puhul mõtte. Seepärast võrrandi (I) lahend (-2) pole antud võrrandi (1) lahendiks.

Võrrandil on ainus lahend $x=2$.

Võib arutella ka niiviisi. Pärast võrrandi $\frac{x^2-4}{(x-3)(x+2)}=0$ saamist taandame murru $\frac{x^2-4}{(x-3)(x+2)}$ $x+2$-ga, ilma et karta oleks lahendi kaotust, sest kui $x+2=0$, siis lugeja ja nimetaja muutuvad nulliks ja murd kaotab mõtte.

Näide 9. Lahendada võrrand:

$$\frac{x-9}{x-5}-\frac{x-7}{x-2}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x-8}{x-5}-\frac{x-7}{x-4}-\frac{x-8}{x-2}; \qquad (1)$$

$$\left(\frac{x-9}{x-5}-\frac{x-8}{x-5}\right)+\left(\frac{x-8}{x-2}-\frac{x-7}{x-2}\right)+\left(\frac{x-7}{x-4}-\frac{x-9}{x-4}\right)=0;$$

$$\frac{x-9-x+8}{x-5}+\frac{x-8-x+7}{x-2}+\frac{x-7-x+9}{x-4}=0;$$

$$-\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-4}=0;$$

$$\frac{-(x-2)(x-4)-(x-5)(x-4)+2(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-2)(x-4)}=0;$$

$$\frac{-x^2+6x-8-x^2+9x-20+2x^2-14x+20}{(x-5)(x-2)(x-4)}=0;$$

$$\frac{x-8}{(x-5)(x-2)(x-4)}=0.$$

Lugeja $x-8$ muutub nulliks, kui $x=8$. See ongi võrrandi lahend, sest nimetaja muutub nulliks, kui x-l on üks kolmest väärtusest, mis saadakse võrrandeist $x-5=0$, $x-2=0$ ja $x-4=0$, s. o. kui $x=5$, $x=2$ ja $x=4$.

Näide 10. Lahendada võrrand

$$\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x+5}=\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$$

Kanname võrrandi ühesuguste lugejatega liikmed võrrandi ühele poolele:

$$\frac{4}{x+3}-\frac{4}{x+2}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+1};\quad \frac{4x+8-4x-12}{(x+3)(x+2)}=$$

$$=\frac{x+1-x-5}{(x+1)(x+5)};\quad \frac{-4}{(x+3)(x+2)}=\frac{-4}{(x+1)(x+5)}.$$

Murrud ühesuguste lugejatega võivad olla võrdsed ainult siis, kui nimetajad on võrdsed, s. o. $x^2+5x+6=x^2+6x+5$ ehk $5x-6x=5-6$, $x=1$. Et murrud ei kaota $x=1$ puhul arvu mõtet, siis $x=1$ on antud võrrandi lahend.

Näide 11. Lahendada võrrand

$$\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}=\frac{4}{7(x-3)}-\frac{11}{7(x+4)};$$

$$\frac{2x+4-3x+3}{(x-1)(x+2)}=\frac{4x+16-11x+33}{7(x-3)(x+4)};$$

$$\frac{7-x}{(x-1)(x+2)}=\frac{49-7x}{7(x-3)(x+4)};$$

$$\frac{7-x}{(x-1)(x+2)}=\frac{7-x}{(x-3)(x+4)};$$

$$\frac{7-x}{(x-1)(x+2)}-\frac{7-x}{(x-3)(x+4)}=0.$$

$$(7-x)\left[\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x-3)(x+4)}\right]=0.$$

Saadud võrrand jaguneb kaheks: kas $7-x=0$, s. o. $x=7$, või $\frac{x^2+x-12-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}=0$; $\frac{-10}{(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}=0$; $x=7$ on võrrandi lahend, sest nimetaja ei muutu x-i selle väärtuse puhul nulliks.

Võrrandil $\frac{-10}{(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}=0$ puuduvad lahendid, sest murd ei saa olla võrdne nulliga, kui tema lugeja erineb nullist, antud võrrandis on aga lugeja (-10). (Vt. märkus 11 raamatu lõpus.)

§ 82. Ühe otsitavaga täheliste kordajatega lineaarvõrrandid.

Ühe otsitavaga täheliste kordajatega lineaarvõrrandi üldkuju pärast võimalikke teisendusi on $ax = b$. (I)

Kuni praeguseni on õpilased lahendanud numbriliste kordajatega võrrandeid. Täheliste kordajate tarvituselevõtmine sunnib selgitama vahet täheliste ja numbriliste kordajate vahel.

Nagu juba korduvalt on märgitud, tuleb numbriliste kordajatega võrrandite lahendamisel näidata arvuvald, kuhu kuuluvad otsitava lubatud väärtused. Kasutusele võttes tähelised kordajad, milledeks võivad olla mistahes arvud, tuleb ära näidata mitte ainult arvuvald, kuhu kuuluvad otsitava lubatud väärtused [võrrandis (I) x-i väärtused], vaid ka iga kordaja (a ja b) väärtused. Tavaliselt võetakse lubatud väärtuste vallaks see kõige laiem arvude hulk, mis on õpilastele tuntud, s. o. antud momendil ratsionaalsete arvude hulk; mõnikord aga tehakse kitsendusi nii x kui ka a ja b kohta. Tuleb ära märkida, et eriliselt on tarvis tähelepanu juhtida kordaja a kitsendusele.

Seega võrrand (I) sisaldab ühe otsitava x kõrval kordajad a ja b; x, a ja b lubatud väärtuste vallaks on ratsionaalsete arvude hulk. Tähelisi kordajaid a ja b nimetatakse tavaliselt parameetriteks.

Kui a ja b asemele panna mõni arv lubatud väärtuste vallast, siis saadakse võrrand ilma parameetriteta, s. o. numbriliste kordajatega võrrand. Numbriliste kordajatega võrrandite lahendamisel on võimalikud järgmised juhud: võrrandil on antud parameetrite väärtuste puhul kas üks lahend, kui $a \neq 0$, või lõpmata palju lahendeid, kui $a = 0$ ja $b = 0$, või mitte ühtegi lahendit, kui $a = 0$ ja $b \neq 0$.

Kui õpilastel on tegemist numbriliste kordajatega võrrandiga, siis on vahenditult näha, millesse mainitud kolmest tüübist kuulub antud ülesanne, ja seepärast pole siis ka

raskusi lahendi kirjutamisel. Nii näiteks lahendades võrrandit $2x = 5$, kirjutab õpilane julgesti $x = \frac{5}{2}$, kartmata saada avaldist, millel puudub mõte. Lahendades võrrandit kujul $0 \cdot x = 0$, õpilane näeb otsekohe, et on tegemist samasusega, ja ta ei hakka kirjutama $x = \frac{0}{0}$, sest sümbolil $\frac{0}{0}$ puudub määratud arvu mõte. Võrrandi $0 \cdot x = 1$ lahendamisel ei hakka õpilane kirjutama $x = \frac{1}{0}$, sest jagamine nulliga on võimatu ja sümbolil $\frac{1}{0}$ puudub mõte; juba ainult võrrandi $0 \cdot x = 1$ kuju järgi õpilane järeldab, et võrrandil puudub lahend, sest pole olemas arvu, mille korrutis nulliga ei võrduks nulliga.

Asi on aga teisiti, kui tuleb lahendada parameetritega võrrandit. Kuna tähtedel võivad olla mistahes väärtused lubatud arvuvallast, siis võib juhtuda, et ühtede parameetrite väärtuste puhul on võrrandil üksainus lahend, teiste väärtuste puhul lõpmata palju lahendeid ja mõnikord lahendid isegi puuduvad. Seepärast ei saagi võrrandi $ax = b$ (1) lahendamisel kirjutada $x = \frac{b}{a}$. On väga tähtis, et õpilastel oleks selge, et jagamine on teostatav ainult siis, kui jagaja ei võrdu nulliga. Kirjutus $x = \frac{b}{a}$ juba oletab ja otsustab ette, et $a \neq 0$; kuna aga parameetri lubatud väärtuste vallaks on ratsionaalsed arvud, siis a võib võrduda ka nulliga. Et mitte saada sümboleid ilma mõtteta, et õpetada õpilasi sümbolitega ümber käima mitte formaalselt, vaid aidata neil teadlikult süveneda tähtede sisusse, et nad näeksid tähtedes mistahes arve, selleks on tingimata tarvis teostada võimalikkude parameetrite väärtuste eelanalüüsi, läbi arutada juhtum, kus $a \neq 0$; sel korral on võrrandil ainus lahend $x = \frac{b}{a}$.

Kui $a = 0$ ja $b \neq 0$, siis võrrandil lahend puudub ja kirjutus $x = \frac{b}{a}$ pole lubatav.

Ülaltoodud kaalutlused selgitavad parameetritega võrrandi lahendamist.

Definitsioon. Lahendada parameetritega võrrandit tähendab esiteks leida antud arvude hulgast need parameetrite väärtused, millede puhul võrrandil on lahend, ja teiseks leida võrrandi lahendid parameetrite iga leitud väärtuse puhul.

Mõnikord nimetatakse mainitud ülesandeist esimest võrrandite uurimiseks. See eraldatakse võrrandite lahendamisest iseseisva peatükina ja seda käsitellakse koolides kolm aastat hiljem. Vaidlemata selle vastu, et küsimuste kogu, mis on ühenduses võrrandite lahendamisega, võib nimetada sõnadega „võrrandite lahendamine ja uurimine", ei saa siiski nõustuda sellega, et võrrandite lahendamine rebitakse lahti nende uurimisest; ei saa enne lahendada võrrandit ja siis asuda uurimisele, seda lubamatum on lahutada võrrandite uurimist nende lahendamisest mitme aasta kaugusele.

Antud täheliste kordajatega võrrandite lahendamise definitsioon ja toodud kaalutlused näitavad, et võrrandi uurimine peab kulgema käsikäes tema lahendamisega: uurimine saadab pidevalt lahendust, olles sellega tihedalt seotud, mõnikord aga käib ta lahenduse ees. Ilma lahendite olemasolu uurimiseta ei saa võrrandit lahendada. Täheliste kordajatega võrrandite lahendamise tehnikal on mõningaid iseärasusi võrreldes numbriliste kordajatega võrrandite lahendamise tehnikaga.

1. Numbriliste kordajatega võrrandite lahendamisel saadakse pärast otsitavat sisaldavate liikmete koondamist otsitava kordajana üksliige. Täheliste kordajatega võrrandites aga võib otsitav esineda mitmes liikmes, millede kordajad pole

võrdsed, ja pärast otsitava võtmist sulgude taha saadakse kordajana hulkliige.

Näide 1. Lahendada võrrand $ax + bx - cx = a^2 + b^2$.

Lahendus: $(a + b - c)x = a^2 + b^2$.

Kui $a + b \neq 0$, siis $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b - c}$.

Näide 2. Lahendada võrrand $ax - cx = a^2 - c^2$.

Lahendus: $(a - c)x = a^2 - c^2$; kui $a - c \neq 0$, on võrrandil ainus lahend $x = \frac{a^2 - c^2}{a - c}$ ehk $x = a + c$; kui $a - c = 0$, muutub võrrand samasuseks ja tal on lõpmata palju lahendeid.

Näide 3. Lahendada võrrand

$$\frac{a - x}{b} + \frac{b - x}{a} = 2.$$

Nähtavasti on võrrandil mõte ainult siis, kui $a \neq b$ ja $b \neq 0$.

$a(a - x) + b(b - x) = 2ab$; $a^2 - ax + b^2 - bx = 2ab$;
$-ax - bx = -a^2 - b^2 + 2ab$; $ax + bx = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a + b)x = (a - b)^2$.

Kui $a + b \neq 0$, siis võrrandil on ainus lahend $x = \frac{(a - b)^2}{a + b}$.

Vaatame, mis toimub, kui $a + b = 0$, kuigi $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Olgu näiteks $a = 1$ ja $b = -1$. Asetame antud võrrandisse a asemel 1 ja b asemel (-1), saame:

$$\frac{1 - x}{-1} + \frac{-1 - x}{1} = 2;$$

$-1 + x - 1 - x = 2$ ehk $-2 = 2$, s. o. mitteõige võrdus.

Andes a-le ja b-le võrdsed väärtused, s. o. oletades, et $a = b$, saame $\frac{a - x}{a} + \frac{a - x}{a} = 2$; $a - x + a - x = 2a$;
$-2x = 0$; $x = 0$.

Näide 4. Lahendada võrrand

$$\frac{b^2+x}{a+b}-\frac{a^2-x}{a-b}-\frac{ab-x}{a+b}=2a.$$

Võrrandil on mõte ainult siis, kui $a+b\neq 0$ ja $a-b\neq 0$, s. o. lubatud väärtuste vallast tuleb välja jätta väärtused $a=b$ ja $a=-b$; kui tarvitada absoluutväärtuste sümbolit, siis saab need kaks tingimust ühendada üheks $|a|=|b|$.

$(a-b)(b^2+x)-(a+b)(a^2-x)-(a-b)(ab-x)=$
$=2a(a-b)(a+b);$
$(a-b)b^2+(a-b)x-(a+b)a^2+(a+b)x-$
$-(a-b)ab+(a-b)x=2a(a-b)(a+b);$
$(a-b)x+(a+b)x+(a-b)x=$
$=2a(a-b)(a+b)+ab(a-b)+$
$+a^2(a+b)-b^2(a-b);$
$(a-b+a+b+a-b)x=2a(a-b)(a+b)+$
$+ab(a-b)+a^2(a+b)-b^2(a-b);$
$(3a-b)x=2a(a^2-b^2)+a^2b-$
$-ab^2+a^3+a^2b-ab^2+b^3;$
$(3a-b)x=2a^3-2ab^2+a^2b-ab^2+$
$+a^3+a^2b-ab^2+b^3;$
$(3a-b)x=3a^3+2a^2b-4ab^2+b^3;$
$(3a-b)x=3a^3-a^2b+3a^2b-ab^2-3ab^2+b^3;$
$(3a-b)x=a^2(3a-b)+ab(3a-b)-b^2(3a-b);$
$(3a-b)x=(3a-b)(a^2+ab-b^2).$

Kui $3a-b\neq 0$, siis on võrrandil ainus lahend

$$x=\frac{(3a-b)(a^2+ab-b^2)}{3a-b}\text{ ehk }x=a^2+ab-b^2.$$

Kui aga $3a-b=0$, siis võrrand muutub samasuseks

$$0\cdot x=0.$$

Näide 5. Lahendada võrrand

$$\frac{x}{a+b}+\frac{a}{a-b}=\frac{x}{a-b}+\frac{b}{a+b}.$$

Võrrandil on mõte, kui $a+b\neq 0$ ja $a-b\neq 0$; see tähendab, et lubatud väärtuste vallast tuleb ära jätta väärtused $|a|=|b|$.

$$\frac{x}{a+b}-\frac{x}{a-b}=\frac{b}{a+b}-\frac{a}{a-b};\quad x\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)=$$

$$=\frac{ab-b^2-a^2-ab}{(a+b)(a-b)};\quad x\cdot\frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{-a^2-b^2}{(a+b)(a-b)};$$

$$-2bx=-a^2-b^2;$$

$2bx=a^2+b^2$; kui $b\neq 0$, siis $x=\frac{a^2+b^2}{2b}$.

Kui $b=0$ ja $a\neq 0$, siis võrrandil lahendeid pole.

Kui $b=0$ ja $a=0$, siis võrrand kaotab mõtte.

Nüüd võime võrrandi $ax=b$ (1) lahendamise ja uurimise viia süsteemi.

I. Kui $a\neq 0$, siis parameetrite a ja b väärtuste mistahes paari puhul on olemas ainult lahend $x=\frac{b}{a}$.

II. Kui $a=0$ ja $b\neq 0$, siis parameetrite a ja b väärtuste mistahes paari puhul pole võrrandil ühtegi lahendit.

III. Parameetrite $a=0$ ja $b=0$ väärtuste puhul on võrrandil lõpmata palju lahendeid, sest võrrand muutub samasuseks $0\cdot x=0$ ja lahendiks võib olla mistahes arv lubatud väärtuste vallast.

On tarvis harjutusi teha ühe otsitavaga esimese astme ühe, kahe ja kolme parameetriga võrrandite lahendamiseks ja uurimiseks. Siin mõningaid näiteid.

Lahendada ja uurida võrrandid:

1. $(a^2-1)x=a^2$;
2. $(a-2)x=a^2-3$;
3. $(p^2-q^2)x=(p+q)^2$.

§ 83. Ühe otsitavaga täheliste kordajatega lineaarvõrrandite lahendamise mõned võtted.

Pärast kindla vilumuse omandamist võrrandite lahendamises tuleb õpilastes arendada oskust üles leida iga üksiku võrrandi omapära. Selle võime arendamine kergendab mõningail juhtumeil lahendamist, lubades ära jätta mõned sammud lahendamise üldvõttes; mõnikord lubab see isegi võrrandi väliskuju järgi leida lahendid.

Väljendatud üldideed selgitame mõningate näidetega.

Näide 1. Lahendada võrrand $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a+b+1}{a+b-1}$.

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogust, I osa, VI peatükk, nr. 191.)

Enamik õpilasi hakkab ilma võrrandisse süvenemata seda lahendama üldvõttega. Muidugi see võte annab õige tulemuse, aga teisendused seejuures on väga kohmakad.

Mõned õpilased võtavad tarvitusele tuletisvõrrete võtte, nimelt:

$$\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}=\frac{a+b+1+a+b-1}{a+b+1-a-b+1};$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{2a+2b}{2};\quad x=a+b.$$

Märksa lihtsamalt võib võrrandit lahendada järgmise võttega. Tuleb leida need x-i väärtused, millede puhul esitatud võrrand muutub õigeks võrduseks või samasuseks. Võrrandi struktuuri tähelepanelikul vaatlemisel võib näha järgmist: võrrandi mõlemad pooled on ehitatud ühteviisi, ainult x asemel vasakul poolel seisab $a+b$ paremal poolel. Järelikult x-i asendamine $a+b$-ga muudab võrrandi samasuseks ja seepärast ongi $a+b$ võrrandi lahend. Väärtus $a+b$ on ainus lahend, sest võrrand on esimeses astmes, ja kuna ta pole samasus, ei oma ta rohkem lahendeid.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{c+d}. \qquad (1)$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, IV peatükk, nr. 156.)

Vaadates võrrandile (1) kui võrdele paigutame x-i sisemised liikmed ümber:

$$\frac{a+bx}{c+dx}=\frac{a+b}{c+d}. \qquad (2)$$

Võrreldes võrrandi (2) paremat poolt vasakuga täheldame, et teguri x asemel vasaku poole murrulugeja ja -nimetaja teises liidetavas esineb paremal poolel vastavalt tegur 1. Järelikult, kui x võrdub ühega, võrrand (2) muutub samasuseks; tähendab, $x=1$ on võrrandi lahend ja seejuures ainus.

Näide 3. Lahendada võrrand

$$\frac{kx}{l}+\frac{l-k}{2k}+\frac{k(l-x)}{2}=k.$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk, nr. 173.)

On vahenditult näha, et võrrandi teise ja kolmanda liikme lugejad on koostatud l ja x suhtes sümmeetriliselt; kui $x=l$, siis võrrandi teine ja kolmas liige muutuvad nulliks, esimene murd aga muutub x-i selle väärtuse puhul k-ks, seepärast väärtus $x=l$ muudab võrrandi samasuseks $k=k$ ja järelikult $x=l$ on esitatud võrrandi lahend.

Näide 4. Lahendada võrrand

$$\frac{x+b}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}+\frac{b+x}{a^2+2ab+b^2}=\frac{x-b}{a^2-b^2}+\frac{2x}{a}.$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk, nr. 207.)

Esimese murru nimetaja $a+b$ on saadud sama murru lugejast, asendades x a-ga, samuti on koostatud ka teise

murru nimetaja selle lugejast. Iseenesest tekib oletus, et $x = a$. Oletuse õigsuse kontrollimiseks asetame võrrandisse x asemele a.

Kui x asendada a-ga, muutuvad mõlemad murrud võrrandi esimesel poolel üheks:

$$\frac{a+b}{a+b} + \frac{a-b}{a-b} = 1 + 1 = 2.$$

Viimane murd muutub $x = a$ puhul $\frac{2a}{a} = 2$-ks.

Vahe kolmanda ja neljanda murru vahel muutub $x = a$ puhul nulliks; tõepoolest $\frac{b+a}{(a+b)^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b} -$

$$- \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b} = 0.$$

Tähendab, väärtus $x = a$ muudab võrrandi samasuseks, seepärast $x = a$ on esitatud võrrandi lahend.

N ä i d e 5. Lahendada võrrand

$$\frac{a(x-a)}{a+2b} + \frac{b(x-b)}{2a+b} = a + b. \qquad (1)$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk, nr. 190.)

Selleks et paremini näha sarnasust võrrandi kummagi poole struktuuris, anname võrrandile kuju

$$a \cdot \frac{x-a}{a+2b} + b \cdot \frac{x-b}{2a+b} = a + b. \qquad (2)$$

On vahenditult näha, et võrrandi vasak pool võrdub parema poolega, kui tegurid $\frac{x-a}{a+2b}$ ja $\frac{x-b}{2a+b}$ võrrandi vasakul poolel võrduvad a ja b kordajatega võrrandi paremal poolel, teiste sõnadega — võrrandi lahendeiks on need otsitava väärtused, mis muudavad üheks üheaegselt $\frac{x-a}{a+2b}$ ja $\frac{x-b}{2a+b}$.

Kui $\frac{x-a}{a+2b}=1$, siis $x-a=a+2b$; $x=2a+2b$. Kui $x=2a+2b$, siis tegur $\frac{x-b}{2a+b}=\frac{2a+2b-b}{2a+b}=\frac{2a+b}{2a+b}=1$.

Tähendab, esitatud võrrandi lahendiks on $x=2a+2b$.

Näide 6. Lahendada võrrand

$$\frac{x}{k}(3kl+1)=\frac{3kl}{k+1}+\frac{(2k+1)x}{k^3+2k^2+k}+\frac{k^2}{(k+1)^3} \qquad (1)$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk, nr. 181.)

Pärast otsitavaga liikmete ülekandmist võrrandi ühele poolele ja antud liikmete ülekandmist teisele poolele saame:

$$\frac{x}{k}(3kl+1)-\frac{x\cdot(2k+1)}{k(k^2+2k+1)^2}=\frac{3kl}{k+1}+\frac{k^2}{(k+1)^3}$$

ja edasi:

$$\frac{x}{k}(3kl+1)-\frac{x}{k}\cdot\frac{2k+1}{(k+1)^2}=\frac{3kl}{k+1}+\frac{k^2}{(k+1)^3};$$

$$\frac{x}{k}\left[3kl+1-\frac{2k+1}{(k+1)^2}\right]=\frac{1}{k+1}\left[3kl+\frac{k^2}{(k+1)^2}\right].$$

Avaldised nurksulgudes võrrandi kummalgi poolel on sarnased: esimene liige mõlemates sulgudes on $3kl$; nurksulgudes on võrrandi vasakul poolel kolm liiget, aga paremal poolel ainult kaks liiget; nähtavasti tuleb kaksliige $1-\frac{2k+1}{(k+1)^2}$ asendada ühe murruga, saame:

$$1-\frac{2k+1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-2k-1}{(k+1)^2}=$$

$$=\frac{k^2+2k+1-2k-1}{(k+1)^2}=\frac{k^2}{(k+1)^2}.$$

Seega saime võrrandi

$$\frac{x}{k}\left[3kl+\frac{k^2}{(k+1)^2}\right]=\frac{1}{k+1}\left[3kl+\frac{k^2}{(k+1)^2}\right];$$

kui

$$3kl + \frac{k^2}{(k+1)^2} \neq 0,$$

siis

$$\frac{x}{k} = \frac{1}{k+1}; \quad x = \frac{k}{k+1}.$$

Tähendame, et Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogus on veel mitu harjutust, mis on läbiarutatutega täiesti analoogilised; need on nr-d 183, 201, 208. Kui kaks kujult ja lahenduse raskuselt ühesugust harjutust pole paigutatud kõrvuti, vaid eraldatud teineteisest 27 vahepealse harjutusega, siis tuleb nentida süsteemi puudumist harjutuste valikul ja elementaarse pedagoogilise printsiibi rikkumist. See printsiip nõuab, et harjutused tuleb paigutada lahenduse suureneva raskuse järjekorras.

N ä i d e 7. (Nr. 14/4 raamatust Auber ja Papelier, „Harjutusi elementaaralgebras", II raamat, lk. 96.)

Lahendada võrrand

$$\frac{(b-c)(1+a^2)}{x+a^2} + \frac{(c-a)(1+b^2)}{x+b^2} + \frac{(a-b)(1+c^2)}{x+c^2} = 0.$$

Võrrandi vasakul poolel on murdude nimetajad vastavalt $x+a^2$, $x+b^2$ ja $x+c^2$, lugejates on teiseks teguriks vastavalt $1+a^2$, $1+b^2$ ja $1+c^2$. Võrreldes paarikaupa $1+a^2$ ja $x+a^2$, $1+b^2$ ja $x+b^2$, $1+c^2$ ja $x+c^2$, näeme, et x asemel nimetajas esineb lugejas 1. See viib oletusele, et $x=1$; siis võib murde taandada $1+a^2$, $1+b^2$, $1+c^2$-ga, mille tulemusena saadakse võrrandi vasakul poolel $(b-c)+(c-a)+(a-b)$; see algebraline avaldis aga võrdub nulliga; järelikult, asetades võrrandisse x asemele 1, saadakse õige võrdus $0=0$. Seepärast on esitatud võrrandi lahendiks $x=1$.

Nüüd võtame arutlusele mõned raskemad näited ühe otsitavaga esimese astme tähtvõrrandite lahendamise kohta.

Näide 8. Lahendada võrrand

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c.$$

Viime otsitavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele:

$$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a+c}+\frac{x}{b+c}=a+b+c+$$
$$+\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}.$$

Võrrandi vasakul poolel võtame x sulgude taha, paremal poolel liidame paarikaupa üksliikme a murruga $\frac{bc}{b+c}$, üksliikme b murruga $\frac{ac}{a+c}$ ja üksliikme c murruga $\frac{ab}{a+b}$.

$$x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\left(a+\frac{bc}{b+c}\right)+\left(b+\frac{ac}{a+c}\right)+$$
$$+\left(c+\frac{ab}{a+b}\right);\quad x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=$$
$$=\frac{ab+ac+bc}{b+c}+\frac{ab+bc+ac}{a+c}+\frac{ac+bc+ab}{a+b};$$
$$x\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=(ab+ac+bc)\left(\frac{1}{b+c}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right);\quad \text{kui}\ \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\neq 0,$$

siis võrrandil on üksainus lahend

$$x=ab+ac+bc.$$

Kui aga $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0$, siis võrrand võtab kuju $0\cdot x=0$ ja tal on lõpmata palju lahendeid.

Näide 9. Lahendada võrrand

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1. \quad (1)$$

Esimeste murdude lugejas puudub liige, mis esineb nimetajas. Teisendame võrrandi nii, et esimeste murdude iga

lugeja võrduks $a+b+c-x$; selleks on tarvis kolmest murrust igaüht liita 1-ga ja võrrandi paremat poolt liita 3-ga.

$$\left(\frac{a+b-x}{c}+1\right)+\left(\frac{a+c-x}{b}+1\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+1\right)+$$

$$+\frac{4x}{a+b+c}=1+3;\quad \frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+$$

$$+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}-4=0;$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)-4\left(1-\frac{x}{a+b+c}\right)=0;$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4\cdot\frac{a+b+c-x}{a+b+c}=0;$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0.$$

Kui $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\neq 0$, siis võrrandil on ainus lahend: $a+b+c-x=0$; $x=a+b+c$.

Kui aga $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}=0$, siis võrrandil on lõpmata palju lahendeid.

N ä i d e 10. Lahendada võrrand

$$\frac{(x-a)^3}{(x+b)^3}=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}.$$

Koostame tuletisvõrde:

$$\frac{(x-a)^3+(x+b)^3}{(x+b)^3-(x-a)^3}=\frac{x-2a-b+x+a+2b}{x+a+2b-x+2a+b};$$

$$\frac{(x-a)^3+(x+b)^3}{(x+b)^3-(x-a)^3}=\frac{2x-a+b}{3b+3a};$$

$$\frac{(x-a+x+b)\left[(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2\right]}{(x+b-x+a)\left[(x+b)^2+(x+b)(x-a)+(x-a)^2\right]}=\frac{2x-a+b}{3(a+b)};$$

$$\frac{(2x-a+b)\left[(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2\right]}{(a+b)\left[(x+b)^2+(x+b)(x-a)+(x-a)^2\right]}=\frac{2x-a+b}{3(a+b)};$$

$$(2x-a+b)\cdot\frac{(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}=\frac{2x-a+b}{3};$$

$$(2x-a+b)\cdot\frac{(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}-$$

$$-\frac{2x-a+b}{3}=0;$$

$$(2x-a+b)\cdot\left[\frac{(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}-\frac{1}{3}\right]=0.$$

Võrrand jaguneb kaheks võrrandiks:

$$\begin{cases} 2x-a+b=0 & (2)\\ \dfrac{(x-a)^2-(x-a)(x+b)+(x+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}-\dfrac{1}{3}=0 & (3)\end{cases}$$

Võrrandi (2) lahendiks on $x=\frac{a-b}{2}$. Asetus näitab, et $x=\frac{a-b}{2}$ puhul võrrand (3) ei kaota mõtet, seepärast on võrrandi (1) lahend $x=\frac{a-b}{2}$.

Lahendame võrrandi (3):

$$\frac{3(x-a)^2-3(x-a)(x+b)+3(x+b)^2-(x-a)^2-(x-a)(x+b)-(x+b)^2}{3[(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2]}=0;$$

$$\frac{2(x-a)^2-4(x-a)(x+b)+2(x+b)^2}{3[(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2]}=0;$$

$$\frac{(x-a)^2-2(x-a)(x+b)+(x+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}=0;$$

$$\frac{(x+b-x+a)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}=0;$$

$$\frac{(a+b)^2}{(x-a)^2+(x-a)(x+b)+(x+b)^2}=0.$$

Kui $a+b\neq 0$, siis võrrandil lahendit pole.

Kui $a+b=0$, siis viimane võrrand muutub samasuseks $0\cdot x=0$.

On tarvis tähelepanu juhtida tuletisvõrrete rakendamisele võrrandite lahendamisel.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{h-x}. \qquad (1)$$

Lubatud väärtuste vallast kõrvaldub $x=0$ ja $h-x=0$, s. o. $x=h$.

Vaadates antud võrrandile kui võrdele, koostame tuletisvõrde nii, et x esineks ainult ühes võrde liikmes, nimelt võrrutame võrde välisliikmete summa ja siseliikmete summa suhte võrde esimese suhtega, saame $\frac{a+b}{x+h-x}=\frac{a}{x}$ ehk $\frac{a+b}{h}=\frac{a}{x}$; $x=\frac{ah}{a+b}$.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{5a+x}{a-x}=\frac{2a-3x}{4a+3x}.$$

Koostame tuletisvõrde:

$$\frac{5a+x+a-x}{5a+x-a+x}=\frac{2a-3x+4a+3x}{2a-3x-4a-3x};\quad \frac{6a}{4a+2x}=\frac{6a}{-2a-6x}.$$

Kui kahe võrdse murru lugejad on võrdsed, siis peavad võrdsed olema ka nimetajad, tähendab:

$$4a+2x=-2a-6x;$$
$$2x+6x=-2a-4a;$$
$$8x=-6a;$$
$$x=-\frac{3}{4}a.$$

§ 84. Ühe otsitavaga lineaarvõrrandi lahendite arv.

Ühe otsitavaga lineaarvõrrandil on kõige rohkem üks lahend, kui ta pole samasus ja kui tal on üldse lahendeid.

Olgu antud võrrand

$$ax=b. \qquad (I)$$

Oletame, et selles võrrandis $a\neq 0$, sest vastasel korral, kui $b=0$, võrrand muutuks samasuseks ja, kui $b\neq 0$, võrrandil poleks mõtet. Oletame, et võrrandil on kaks erinevat

lahendit; tähistame need c ja d-ga. Asetades võrrandisse (I) x asemele järjest c ja d, saame kaks võrdust (samasust):

$$ac = b \qquad \text{(II)}$$

$$\text{ja} \quad ad = b. \qquad \text{(III)}$$

Lahutades võrduse (III) võrdusest (II) saame:

$$ac - ad = 0 \text{ ehk } a(c - d) = 0.$$

a ei võrdu nulliga; et c ja d on erinevad arvud, siis ka $c - d$ ei võrdu nulliga. Järelikult võrdus $a(c - d) = 0$ pole õige, sest ükski tegureist, mille korrutis on null, pole võrdne nulliga. Meie tulime vastuolule, mis näitab, et võrrandil $ax - b = a$ ei või olla kaht erinevat lahendit.

§ 85. Lineaarvõrrandite uurimine.

Võrrandit lahendama asudes me lähtusime senini oletusest, et võrrandil on lahend, kuigi ei väljendanud seda oletust selgesti. On aga täiesti kohane küsida: kas võrrandil on lahend?

Et see küsimus pole üleliigne, on näha võrrandist $3x + 8 = 4x + 11 - x$; lahendus annab $3x - 4x + x = 11 - 8$ ehk $0 \cdot x = 3$; viimane võrdus on võimatu, sest pole olemas sellist arvu, mille korrutis nulliga annaks 3. Järelikult on olemas võrrandeid, mida ei rahulda ükski arv. Selliste võrrandite olemasolu nõuab, et võrrandit uuritaks lahendi olemasolu suhtes.

Igale ühe otsitavaga esimese astme võrrandile võib anda kuju $ax = b$, kus a ja b on tuntud arvud.

Eristame kaht juhtu: I. $a \neq 0$; II. $a = 0$.

I. $a \neq 0$. Nüüd on võrrandil $ax = b$ lahend $x = \frac{b}{a}$; see lahend on, nagu juba tõestatud, ainus.

II. $a = 0$. Nüüd on võrrandi vasak pool võrdne nulliga x-i mistahes väärtuste puhul. Seepärast oleneb võrrandi lahend b-st ja tuleb eristada kaht juhtu: 1) $b \neq 0$ ja 2) $b = 0$:

1) Kui $a = 0$ ja $b \neq 0$, siis võrrandis esineb teostamatu nõue, et arv, mis võrdub nulliga, ei võrduks sellega. Võrrandil puudub lahend.

2) Kui $a = 0$ ja $b = 0$, siis võrrandit rahuldab x-i mistahes väärtus. Võrrand $ax = b$ võtab kuju $0 \cdot x = 0$; seda rahuldab x-i mistahes väärtus; öeldakse, et võrrandil on lõpmata palju lahendeid (samasus).

Tähendab, ühe otsitavaga esimese astme (lineaar-) võrrandil võib olla üks lahend, mitte ühtegi lahendit või lõpmata palju lahendeid.

Uurimise tulemused kanname järgmisse tabelisse:

a \ b	$b = 0$	$b \neq 0$
$a = 0$	Võrrandit rahuldab x-i mistahes väärtus	Võrrand on vasturääkiv
$a \neq 0$	Võrrandil on üksainus lahend $x = \frac{a}{b}$	

Pole raske püstitada võrrandi $ax = b$ (kui $a \neq 0$) lahendi tüüpi.

1. Kui $a > 0$ ja $b > 0$, siis $x = \frac{b}{a} > 0$.
2. Kui $a > 0$ ja $b < 0$, siis $\frac{b}{a} < 0$.
3. Kui $a < 0$ ja $b > 0$, siis $\frac{b}{a} < 0$.
4. Kui $a < 0$ ja $b < 0$, siis $\frac{b}{a} > 0$.

§ 86. Ühe tundmatuga kahe lineaarvõrrandi ekvivalentsuse tingimus.

On antud kaks ühe tundmatuga lineaarvõrrandit

$$a_1x = b_1 \quad \text{ja} \quad a_2x = b_2.$$

Püstitame nüüd järgmise küsimuse. Millistel tingimustel on neil kahel võrrandil üks ja seesama lahend? Kaht võrrandit, millel on kõik lahendid ühised, nimetatakse ekvivalentseiks ehk samaväärseiks. Millistel tingimustel on võrrandid $a_1x = b_1$ ja $a_2x = b_2$ samaväärsed?

Oletame, et võrrandid $a_1x = b_1$ ja $a_2x = b_2$ on samaväärsed; järelikult on olemas niisugune x-i väärtus, mis rahuldab mõlemat võrrandit, s. o. x-i asendamisel sellega mõlemas võrrandis saadakse kaks samasust $a_1x = b_1$ ja $a_2x = b_2$.

Korrutame esimese võrrandi a_2-ga, teise a_1-ga. Saame $a_1a_2 = b_1a_2$ ja $a_1a_2x = b_2a$. Selle x-i väärtuse puhul, mis rahuldab mõlemat võrrandit, muutuvad mõlemad võrrandid samasuseks, seejuures on samasuste vasakud pooled isekeskis võrdsed. Järelikult on ka $b_1a_2 = b_2a_1$ ehk $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Tähendab, kui võrrandid $a_1x = b_1$ ja $a_2x = b_2$ on samaväärsed, siis $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, s. o. võrrandite ekvivalentsuse tarvilikuks tingimuseks on $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Näiteks kaks võrrandit $3x = 15$ ja $7x = 35$ on samaväärsed, sest neil on ühine lahend $x = 5$. Nende võrrandite kordajad ja vabaliikmed on tõeliselt seotud vahekorraga:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Tõepoolest, $3 \cdot 35 - 7 \cdot 15 = 0$.

Tõestame, et ka vastupidi, kui $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, võrrandid $a_1x = b_1$ ja $a_2x = b_2$ on samaväärsed.

Tõepoolest, esimesest võrrandist $x=\frac{b_1}{a_1}$, teisest võrrandist $x=\frac{b_2}{a_2}$. Aga võrdusest $a_1b_2-a_2b_1=0$ järeldub $a_1b_2=a_2b_1$, siit $\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_1}{a_1}$; järelikult x-i väärtus esimesest võrrandist võrdub x-i väärtusega teisest võrrandist.

Siiski on tarvis lisada, et tingimus $a_1b_2-a_2b_1=0$ on piisav ainult siis, kui ükski võrrand pole vasturääkiv. Kui aga üks võrrand on vasturääkiv, siis tingimusest $a_1b_2-a_2b_1=0$ võrrandite ekvivalentsuseks ei piisa. See on ka arusaadav. Kui $a_1=0$ või $a_2=0$, siis võrdusest $a_1b_2=a_2b_1$ ei järeldu $\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_1}{a_1}$. Meie varem toodud arutlus kaotab kehtivuse.

N ä i d e. Võrdustes $0\cdot x=0$ ja $0\cdot x=1$ on tingimus $a_1b_2-a_2b_1=0$ täidetud, sest $0\cdot 1-0\cdot 0=0$, aga võrrandid pole siiski samaväärsed sellepärast, et esimest võrrandit rahuldab x-i mistahes väärtus, teisel võrrandil aga puudub lahend.

Tähendab, võrrandite $a_1x=b_1$ ja $a_2x=b_2$ ekvivalentsuseks läheb tarvis, et $a_1b_2-a_2b_1=0$; sellest tingimusest piisab, kui ükski võrrand pole vasturääkiv.

§ 87. Üks võrrand kahe otsitavaga.

Pärast seda kui õpilased on tutvunud üht otsitavat omava lineaarvõrrandi lahendamisega, tuleb läbi arutada kahe otsitavaga võrrandi lahendamine. Selle küsimuse juures on tarvis peatuda järgmistel kaalutlustel. Ilma kohase seletuseta võib õpilastel tekkida arvamus, et kahe otsitavaga võrrandi lahendamine pole üldse võimalik, et alati saadakse lõpmata palju lahendeid. Selleks et hajutada sääraseid ebaõigeid kujutlusi ja ette valmistada loomulikku üleminekut ühe otsi-

tavaga võrrandi lahendamiselt võrrandisüsteemi lahendamisele, tuleb kahe otsitavaga kahe võrrandi süsteemi lahendamise eel läbi võtta kahe otsitavaga lineaarvõrrandi lahendamine.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$3x + 4y = 9. \qquad (1)$$

Tuleb näidata otsitavate lubatud väärtuste vald.

Enne võtame lubatud väärtuste vallaks ratsionaalsete arvude hulga, s. o. leiame võrrandi (1) kõik ratsionaalsed lahendid, ja siis võtame lubatud väärtuste vallaks täisarvude hulga, s. o. leiame võrrandi (1) kõik täislahendid.

Lahendame võrrandi ühe otsitava, näiteks x suhtes; saame $3x = 9 - 4y$; $x = \frac{9-4y}{3}$; $x = 3 - \frac{4}{3}y$. Tähendab, antud võrrandi lahendeiks on mistahes arvude x ja y paar, milles y võib olla meelevaldselt võetud ratsionaalne arv, x-i vastavat väärtust aga määrab võrdus $x = 3 - \frac{4}{3}y$.

Lahendid kirjutatakse tavaliselt nii: olgu t mistahes ratsionaalne arv; siis $y = t$ ja $x = 3 - \frac{4}{3}t$.

Järelikult kahe otsitavaga võrrandi ratsionaalseiks lahendeiks nimetatakse iga ratsionaalsete arvude paari, mis rahuldab võrrandit. Selliseid paare on lõpmata palju.

Nüüd kitsendame võrrandi lahendeid.

Leiame kõik võrrandi (1) täislahendid.

Kahe otsitavaga võrrandi täislahendeiks nimetatakse iga täisarvude paari, mis rahuldab võrrandit.

Võrrandi (1) kõik ratsionaalsed lahendid on juba leitud; neist tuleb võtta ainult täisarvud. On selge, et y või t peavad olema mistahes arvud ja peale selle peab x olema täisarv. Aga selleks, et x oleks täisarv, peab $3 - \frac{4}{3}t$ olema täisarv ja järelikult ka $\frac{4}{3}t$ peab olema täisarv. On selge, et $\frac{4}{3}t$

ja järelikult ka x on täisarv sel korral ja ainult sel korral, kui t on kolmega jaguv, s. o. $t = 3k$, kus k on täisarv.

Niisiis $y = 3k$, $x = 3 - 4k$, kus k on mistahes täisarv. Läbiarutatud näidetest on näha, et üldiselt rääkides on kahe otsitavaga võrrandil palju lahendeid. Võib aga ette tulla, et mõne täiendava tingimuse puhul on lahendeid ainult üks paar.

N ä i d e 2. Lahendada võrrand

$$x + y = 0,$$

kus x ja y on ratsionaalsed ja mittenegatiivsed arvud. Kahe arvu summa võrdub nulliga ainult sel korral, kui arvud on vastupidised või võrdsed nulliga. Et aga x ja y pole negatiivsed, siis on selge, et $x = 0$ ja $y = 0$. Sellest näitest selgub, et vastavate kitsenduste puhul võib kahe otsitavaga võrrandil olla ainult üks lahendite paar.

Võib osutuda, et ka ruutvõrrandil kahe otsitavaga on teatavate kitsenduste puhul ainult üks lahendite paar.

N ä i d e 3. Leida võrrandi $x^2 + y^2 = 0$ reaalsed lahendid.

Mistahes reaalse arvu ruut ei või olla negatiivne, ta võrdub kas positiivse arvuga või nulliga. Kahe positiivse arvu summa võib olla null siis, kui mõlemad arvud võrduvad nulliga, s. o. $x = 0$ ja $y = 0$.

Kahe otsitavaga lineaarvõrrandi lahendamisel võib esineda juhtusid, kus võrrandil polegi lahendeid, näiteks võrrandil $2x + 3y = 2x + 3y + 5$.

Ü l d j ä r e l d u s. Enamikul juhtudest pole võimalik ühest võrrandist kahe otsitavaga leida otsitavaid, sest on olemas lõpmata palju lahendeid.

Võrrandi lahendite kohta käivate kitsenduste olemas olles võib ilmneda, et lahendeid on piiratud arv, mõnikord isegi ainult üks paar. Vahel võivad lahendid täielikult puududa.

Üldiselt rääkides kujutab üks võrrand kahe otsitavaga teatavat x ja y väärtuste vahelist olenevust.

VI peatükk.

Lineaarvõrrandi-süsteemid.

§ 88. Puudused lineaarvõrrandi-süsteemide käsitlemisel koolis.

Koolipraktikas piirdutakse harilikult kahe ja kolme tundmatuga lineaarvõrrandi-süsteemidega. Peatähelepanu juhitakse ülesannete lahendamisele numbriliste kordajatega võrrandite süsteemide abil, ainult õige harva lahendatakse kahe tundmatuga kahe tähtvõrrandi süsteeme ja peaaegu üldse ei lahendata harjutusi kolme tundmatuga kolme tähtvõrrandi süsteemide kohta.

Vähe tähelepanu juhitakse teoreetilistele küsimustele, nimelt võrrandisüsteemi täpsele definitsioonile ja lahendamisele, samaväärsuse- (ekvivalentsuse-) printsiibi osale võrrandisüsteemi lahendamisel, lahendite uurimisele, lahendamise üldvalemite struktuuri arutlusele ja võimalikkudele lihtsustustele võrrandisüsteemide lahendamisel.

§ 89. Võrrandisüsteemi definitsioon.

Kaks lineaarvõrrandit kahe otsitavaga x ja y moodustavad võrrandisüsteemi sel korral, kui on olemas kaks arvu α ja β, milledega x ja y asendamine kummaski võrrandis muudab need võrrandid samasusteks.

Iga arvupaari α ja β, mis asetatult võrrandeisse x ja y asemele muudab kummagi võrrandi samasuseks, nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks ehk antud võrrandite lahendite süsteemiks. Kui kaks võrrandit moodustavad süsteemi, siis tähistatakse see sümboliga ({) mõlema võrrandi ees.

Näide. Võrrandid

$$(1)\quad \begin{cases} x+3y=11 & (1) \\ 3x-4y=7 & (2) \end{cases}$$

moodustavad süsteemi, sest on olemas kaks arvu $x=5$ ja $y=2$, milledega x ja y asendamine võrrandeis muudab võrrandid samasusteks, nimelt:

$$5+3\cdot 2=11 \text{ ehk } 11=11,$$
$$3\cdot 5-4\cdot 2=7 \text{ ehk } 7=7.$$

Arvupaari 5 ja 2 nimetatakse antud süsteemi lahendiks.

On tarvis rõhutada viga, mida mõnikord tehakse, väites, et süsteemil (I) on lahendite paar $x=5$ ja $y=2$. Arvupaar 5 ja 2 moodustab ainult süsteemi (I) üheainsa lahendi ehk ühe lahendite süsteemi.

Lahendada võrrandisüsteem tähendab leida selle kõik lahendid ehk lahendite süsteemid.

§ 90. Ekvivalentsed süsteemid.

Kaht võrrandisüsteemi nimetatakse ekvivalentseks (samaväärseks), kui neil on üks ja seesama lahend ehk lahendite süsteem.

Keskkoolis leiab rakendamist ainult kaks lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisvõtet: asendusvõte ja liitmisvõte. Iga võtte kohta on tarvis läbi arutada antud süsteemi ehk lähtesüsteemi samaväärsus mõne teise, lihtsama

süsteemiga, millest on kergem leida süsteemi lahendit. Seda teist süsteemi nimetatakse lõppsüsteemiks.

Teoreem. Kui üks võrrandeist kahe otsitavaga kahe lineaarvõrrandi süsteemi

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 & (1) \\ F_1(x, y) = 0 & (2) \end{cases}$$

hulgast on samaväärne võrrandiga, mille kuju on

$$x = f(y), \tag{3}$$

siis võrrand (3) ja võrrand, mis saadakse võrrandist (2) sel teel, et sellesse asetatakse x asemele $f(y)$, moodustavad süsteemi, mis on samaväärne võrrandiga (1).

Järelikult tuleb tõestada, et süsteemid

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_1(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \text{(II)} \quad \begin{cases} x = f(y) \\ F_1[f(y), y] = 0 \end{cases}$$

on samaväärsed, s. o. et esiteks süsteemi (I) iga lahend on ka süsteemi (II) lahendiks ja teiseks süsteemi (II) iga lahend on ka süsteemi (I) lahendiks.

1. Olgu süsteemi (I) lahendiks $x = \alpha$ ja $y = \beta$.

See tähendab, et

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= 0, \\ F_1(\alpha, \beta) &= 0 \end{aligned}$$

on õiged võrdused (samasused).

Asetame võrrandisüsteemi (II) kumbagi võrrandisse x ja y asemele α ja β. Süsteemi (II) esimene võrrand muutub võrduseks $\alpha = f(\beta)$. Teoreemi eelduse põhjal on võrrand $x = f(y)$ samaväärne võrrandiga $F(x, y) = 0$, järelikult väärtused $x = \alpha$ ja $y = \beta$ muudavad võrrandi $x = f(y)$ samasuseks, s. o. et tõepoolest $\alpha = f(\beta)$.

Süsteemi (II) teine võrrand võtab $x = \alpha$ ja $y = \beta$ puhul kuju

$$F_1[f(\beta), \beta] = 0.$$

See võrdus on õige, sest ta saadi sel teel, et õigesse võrdusse pandi α asemele sellega võrdne $f(\beta)$ seose põhjal $\alpha = f(\beta)$.

Niisiis süsteemi (I) iga lahend $x = \alpha$ ja $y = \beta$ on ka süsteemi (II) lahendiks, s. o. süsteemi (I) kõik lahendid kuuluvad ka süsteemi (II) lahendite hulka.

2. Aga võib olla, et süsteemil (II) on veel teisi lahendeid peale $x = \alpha$ ja $y = \beta$?

Olgu $x = \alpha$ ja $y = \beta$ süsteemi (II) lahendid. Siis on meil kaks õiget võrdust:

$$\alpha = f(\beta) \quad (k) \quad \text{ja} \quad F_1[f(\beta), \beta] = 0. \quad (l)$$

Eelduse põhjal on võrrand $x = f(y)$ samaväärne võrrandiga $F(x_1 y) = 0$; siis võime võrduse $F_1[f(\beta), \beta] = 0$ asemele võtta võrduse $F(\alpha, \beta) = 0$, järelikult α ja β muudavad süsteemi (I) esimese võrrandi õigeks võrduseks.

Asendame võrduses (l) $f(\beta)$ α-ga, saame $F_1(\alpha, \beta) = 0$; järelikult α ja β muudavad süsteemi (I) iga võrrandi õigeks võrduseks.

Niisiis süsteemid (I) ja (II) on samaväärsed.

Tõestatud teoreemile on rajatud kahe otsitavaga lineaarvõrrandi-süsteemi lahendamine asendusvõttega.

N ä i d e. Lahendada süsteem

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 35 & (1) \\ 5x - 2y = 40 & (2) \end{cases}$$

Võrrand (2) süsteemist (I) on samaväärne võrrandiga

$$2y = 5x - 40 \text{ ehk } y = \frac{5x - 40}{2}. \quad (3)$$

Tõestatud teoreemi põhjal on süsteem (I) samaväärne süsteemiga

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} 2x + 3 \cdot \frac{5x - 40}{2} = 35 \\ y = \frac{5x - 40}{2} \end{cases}$$

Süsteemi (II) esimeses võrrandis puudub y; see võrrand on järelikult ühe otsitavaga, nimelt x-ga võrrand

$$2x + \frac{15x - 120}{2} = 35 \text{ ehk } 4x + 15x - 120 = 70;$$
$$19x = 190;\ x = 10.$$

Võrrandi (3) põhjal $y = \frac{50 - 40}{2}$ ehk $y = 5$.

Järelikult süsteemi (I) lahendiks on $x = 10$, $y = 5$.

Kui võrrandil, mis saadakse pärast ühe otsitava kaotamist, puudub lahend, siis teisest võrrandist olenematult puudub süsteemil lahend.

Teisendamist, mille abil võrrandisüsteemist (I), mis koosneb kahest kahe tundmatuga võrrandist, saadakse sellega samaväärne võrrandisüsteem (II), milles üks võrrand on kahe tundmatuga ja teine ühe tundmatuga, nimetatakse ühe tundmatu k õ r v a l d a m i s e k s ehk e l i m i n e e r i m i s e k s antud süsteemist.

T e o r e e m. Kahe otsitavaga kahe võrrandi süsteem

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

on samaväärne süsteemiga

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} m_1 F_1(x, y) + m_2 F_2(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

kus m_1 ja m_2 on jäävad arvud ja $m_1 \neq 0$.

1. Otsitavate need väärtused, mis muudavad nulliks avaldised $F_1(x, y)$ ja $F_2(x, y)$, muudavad nulliks ka avaldised $m_1 F_1(x, y)$ ja $m_2 F_2(x, y)$, järelikult ka summa $m_1 F_1(x, y) + m_2 F_2(x, y)$.

Tähendab, süsteemi (I) iga lahend on ka süsteemi (II) lahendiks.

2. Et $F_2(x, y) = 0$, siis ka $m_2 F_2(x, y) = 0$. Et $m_1 F_1(x, y) + m_1 F_1(x, y) = 0$ ja tõestuse põhjal ka $m_2 F_2(x, y) = 0$, siis

peab ka $m_1F_1(x, y)$ võrduma nulliga; kui aga $m_1 \neq 0$, siis peab nulliga võrduma $F_1(x, y)$.

Seega süsteem (I) on samaväärne süsteemiga (II).

Toetudes tõestatud teoreemile võib süsteemi iga võrrandit sobiva teguriga korrutades ja saadud võrrandeid liites saada uue võrrandi ühe otsitavaga. See võrrand koos ühega antud võrrandeist annab uue süsteemi, mis on samaväärne antud süsteemiga; uue süsteemi lahendamine toimub raskusteta.

Sellele teoreemile on rajatud kahe otsitavaga kahe võrrandi süsteemi lahendamine algebralise liitmisvõttega.

§ 91. Liitmisvõte.

Võtame arutlusele kaks põhivõtet, mille abil süsteemist kõrvaldatakse üks otsitav, — liitmisvõtte ja asendusvõtte. Kahest võttest leiab laiemat rakendamist asendusvõte, mis on rakendatav ka ruutvõrrandi-süsteemi lahendamisel. Alustada aga on parem liitmis- ja lahutamisvõttest, sest see võte lubab kergemini omandada ühe otsitava kõrvaldamise ideed; pärast selle idee omandamist on kergem omandada ka asendusvõtte ideed.

Liitmis- ja lahutamisvõtte selgitamiseks tuleb võtta ülesanne ja lahendada see enne aritmeetiliselt.

Võtame järgmise ülesande. Kolme päeva leivanorm ja kaheksa päeva lihanorm kaaluvad kokku 4 kg; nelja päeva leivanorm ja kahe päeva lihanorm kaaluvad 3,6 kg. Tuleb leida, kui palju kaalub ühe päeva leivanorm ja ühe päeva lihanorm.

Aritmeeetilisel lahendamisel suurendame teist portsjonit neli korda; teise andme asemele saame uue, nimelt: kuue-teistkümne päeva leivanorm koos kaheksa päeva lihanormiga kaalub 14,4 kg. Vastastame nüüd mõlemad andmed.

Kolme päeva leivanorm ja kaheksa päeva lihanorm kaaluvad kokku 4 kg.

Kuueteistkümne päeva leivanorm ja kaheksa päeva lihanorm kaaluvad kokku 14,4 kg.

Vastastamisest näeme, et teisel korral võeti leiba kolmeteistkümne päevanormi võrra enam; see kolmeteistkümne päeva leivanorm kaalubki 10,4 kg; järelikult ühe päeva leivanorm kaalub $10{,}4 : 13 = 0{,}8$ (kg). Nüüd tuleb veel määrata ühe päeva lihanorm. Kolme päeva leivanorm kaalub 2,4 kg, tähendab, kaheksa päeva lihanorm kaalub 4—2,4, s. o. 1,6 (kg) ja ühe päeva lihanorm kaalub $1{,}6 : 8 = 0{,}2$ (kg).

Ülesande lahendamise aritmeetilise võtte olu seisab selles, et kõige enne teeme liha kohta käivad päevade arvud võrdseks; selleks tuleb ülesande üks andmetest korrutada mõne täiendusteguriga; siis vastastame saadud võrduse ülesande teise andmega ja üht võrdust teisest lahutades saame uue, tuletatud seose ainult ühe tundmatuga, mida siis võib selle seose põhjal arvutada.

Väljendame ülesande andmed algebraliste sümbolitega. Selleks väljendame ühe päeva leivanormi kaalu tähega x ja ühe päeva lihanormi kaalu tähega y. Siis väljendub ülesande esimene eeldus võrrandina

$$3x + 8y = 4 \qquad \text{(I)}$$

ja teine eeldus võrrandina

$$4x + 2y = 3{,}6. \qquad \text{(II)}$$

Mõlemaid võrrandeid vastastades näeme, et tähtede y ja x kordajad on erinevad. Nüüd võrrutame ühe otsitava, näiteks y kordajad. y kordajate 8 ja 2 väikseimaks ühiskordseks on 8; seepärast viib juba antud süsteemi võrrandite kuju mõttele koostada võrrand kujul 4 (II) — (I). See on teostatav, sest süsteemi ekvivalentsuse kohta tõestatud teo-

reemi põhjal saadakse teine võrrandisüsteem, mis on samaväärne lähtesüsteemiga. See on praktiliselt otstarbekohane, sest liitmine võimaldab kõrvaldada üht otsitavat ja saada võrrandit, mis koos ühega antud võrrandeist, näiteks võrrandiga (I) moodustab lähtesüsteemiga samaväärse süsteemi:

$$\begin{array}{lll|r|l} 3x+8y=4 & (\mathrm{I}) & & -1 & -3x-8y=-4 \\ 4x+2y=3{,}6 & (\mathrm{II}) & & 4 & 16x+8y=14{,}4 \\ \hline & & & & 13x \qquad =10{,}4 \end{array}$$

$$x=10{,}4:13;\ x=0{,}8.$$

Nüüd on meil süsteem

$$\begin{cases} x=0{,}8 \\ 3x+8y=4, \end{cases}$$ mis on samaväärne lähtesüsteemiga.

Et leida y, asetame võrrandis $3x+8y=4$ x asemele 0,8; saame:

$$3\cdot 0{,}8+8y=4;\ 8y=4-2{,}4;\ 8y=1{,}6;\ y=1{,}6:8=0{,}2.$$

Järelikult selleks, et leida tegurid m_1 ja m_2, milledega tuleb korrutada kumbagi võrrandit, peame leidma ühe otsitava kordajate väikseima ühiskordse; jagades väikseima ühiskordse vastava otsitava kordajatega, saame tegurid m_1 ja m_2.

§ 92. Asendusvõte.

Olgu antud lahendada järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 4x+5y=31 & (1) \\ 3x-2y=6 & (2) \end{cases}$$

Teostame teises võrrandis järgmised teisendused: viime 6 vasakule poole üle ja $(-2y)$ paremale poole, saame:

$$3x-6=2y,$$

siit

$$y=\frac{3x-6}{2}. \qquad (3)$$

Väljendasime y x-i kaudu; y numbriline väärtus võrdub avaldise $\frac{3x-6}{2}$ numbrilise väärtusega.

Lähtudes võrdusest (3), on meil alus asetada võrrandis (1) $5y$ asemele $5 \cdot \frac{3x-6}{2}$.

Pärast asendamist saime võrrandist (1) võrrandi:

$$4x + 5 \cdot \frac{3x-6}{2} = 31. \qquad (4)$$

Selliste teisendustega eemaldasime otsitava y ja saime võrrandi (4) ainult ühe otsitavaga, mis koos võrrandiga $y = \frac{3x-6}{2}$ moodustab lähtesüsteemiga samaväärse süsteemi.

Vabastades võrrandi (4) nimetajast ja avades sulud saame:

$$8x - 15x - 30 = 62;\ 23x = 92;\ x = 4.$$

Selleks et määrata y, on meil olemas võrrand (3):

$$y = \frac{3x-6}{2};\quad y = \frac{3 \cdot 4 - 6}{2};\quad y = 3.$$

Kontrolliks asetame saadud y ja x väärtused võrrandisse, saame:

$$4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 31 \text{ ja } 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 6.$$

Asendusvõte on eriti sobiv siis, kui üks võrrandeist on antud kujul, kus x või y on väljendatud vastavalt teise otsitava kaudu, s. o. kujul, kus võrrandi ühel poolel seisab üksikult kas x või y, aga teisel poolel mõni keerukam avaldis teise otsitavaga.

N ä i d e 1. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x - 2y = 22 & (1) \\ y = 7x - 23 & (2) \end{cases}$$

See süsteem viib juba oma kujuga mõttele, et võrrandisse (1) tuleb asetada $y = 7x - 23$ ja sel viisil kõrvaldada y võrrandist (1).

$$3x + 2(7x - 23) = 22;\ 3x + 14x - 46 = 22;$$
$$17x = 68;\ x = 4.$$

Otsitava y väärtuse leiame vahenditult võrrandist (2), asetades sinna $x = 4$:

$$y = 28 - 23;\ y = 5.$$

Asendusvõtte rakendamine on sobiv ka sel korral, kui ühes võrrandis on antud otsitavate suhe.

Näide 2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 22 & (1) \\ \frac{x}{y} = 1\frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Väljendame y teisest võrrandist: $y = \frac{4}{5}x$. Saadud väärtuse asetame võrrandisse (1):

$$2x + 3 \cdot \tfrac{4}{5}x = 22;\ 2x + 2\tfrac{2}{5}x = 22;\ 4\tfrac{2}{5}x = 22;$$
$$x = 22 : 4\tfrac{2}{5} = \frac{22 \cdot 5}{22} = 5;\ y = \tfrac{4}{5} \cdot 5 = 4.$$
$$x = 5;\ y = 4.$$

Tuleb ära märkida, et mõnikord on lihtsam vabaliikmed võrrutada; see on kasulik järgmistel juhtudel: esiteks siis, kui vabaliikmed on võrdsed, teiseks siis, kui vabaliikmed on väiksemad kui otsitavate x ja y kordajad.

Näide. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 8x - 33y = 19 \\ 12x + 55y = 19 \end{cases}$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk, nr. 229.)

Et vabaliikmed on võrdsed, siis saame: $8x - 33y = 12x + 55y$ ehk $88y = 4x$, $x = -22y$.

Asendades x süsteemi esimeses võrrandis $(-22y)$-ga, saame: $-176y - 33y = 19$; $-209y = 19$;

$$y = -\frac{19}{209}; \quad y = -\frac{1}{11};$$

seepärast siis $x = -22(-\frac{1}{11})$; $x = 2$.

Järelikult süsteemi lahend on $x = 2$; $y = -\frac{1}{11}$.

Analoogiliselt lahendatakse ka ülesanne nr. 222 Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogust.

Valides ülesandeid numbriliste kordajatega võrrandisüsteemide kohta tuleb võtta harjutused, milledes kordajad on niihästi harilikud kui ka kümnendmurrud.

N ä i d e. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 0{,}2x - \frac{3{,}2 - 4y}{5} = x + 0{,}16 \\ \frac{1{,}2y}{0{,}3} - \frac{2{,}5x + 1}{y + 0{,}6} = 4y - \frac{5}{3} \end{cases}$$

(Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk, nr. 247.)

Teisendame süsteemi teise võrrandi, saame:

$$4y - \frac{2{,}5x + 1}{y + 0.6} = 4y - \frac{5}{3};$$

$$-\frac{2{,}5x + 1}{y + 0{,}6} = -\frac{5}{3};$$

$$\frac{2{,}5x + 1}{y + 0{,}6} = \frac{5}{3};$$

$$7{,}5x + 3 = 5y + 3;$$

$$7{,}5x = 5y;$$

$$y = 1{,}5x.$$

Asetame y asemele esimeses võrrandis $1{,}5x$, saame:

$$0{,}2x - \frac{3{,}2 - 4y}{5} = x + 0{,}16;$$
$$x - 3{,}2 + 4y = 5x + 0{,}8;$$
$$4y - 4x = 4;\ y - x = 1;$$
$$1{,}5x - x = 1;\ 0{,}5x = 1;\ x = 2;$$
$$y = 1{,}5 \cdot 2 = 3.$$

Süsteemi lahend on järelikult $x = 2;\ y = 3$.

Märkused kahe otsitavaga kahe võrrandi süsteemi lahendamise kohta.

1. Tuletisvõrrete rakendamine. Kui üks võrrand süsteemis on antud võrde kujul või võrrandi kujul, milles puudub vaba liige (homogeenne võrrand), siis on sobiv kasutada tuletisvõrrete omadust.

Näide. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x : y = 4 : 5 \\ 2x + 3y = 46. \end{cases}$$

Koostame tuletisvõrde, milles üks liige oleks võrdne $2x + 3y$. Selleks korrutame esimese suhte esimese liikme 2-ga, teise liikme 3-ga ja liidame korrutised. Saadud summa võtame tuletisvõrde välisliikmeks, kuna siseliikmeks võtame x (või y). Samu operatsioone teostame ka teise suhte liikmetega. Saame uue süsteemi, mis on samaväärne lähtesüsteemiga, nimelt:

$$\begin{cases} \frac{2x + 3y}{x} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{4} \\ x : y = 4 : 5 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} \frac{46}{x} = \frac{23}{4} \\ x : y = 4 : 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{46 \cdot 4}{23};\ x = 8;$$

$$8 : y = 4 : 5;\ y = 8 \cdot 5 : 4;\ y = 10.$$

Süsteemi lahenditeks on järelikult $x = 8$ ja $y = 10$.

2. Kui üks võrrandeist on antud võrde kujul, milles esineb otsitavate suhe, või kui ühes võrrandeist puudub vabaliige, siis on sobiv kasutada asendusvõtet.

Näide. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} \frac{1}{2}y - 3x = 2 \\ y = 14x \end{cases}$

Asetame esimesse võrrandisse y asemele $14x$, saame uue süsteemi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 14x - 3x = 2 \\ y = 14x \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 3x = 2 \\ y = 14x \end{cases}$$

$$4x = 2; \quad x = \frac{1}{2};$$

$$y = 14 \cdot \frac{1}{2}; \quad y = 7.$$

Süsteemi lahend on järelikult $x = \frac{1}{2}$; $y = 7$.

3. Võrrandisüsteeme tüübilt

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{cases}$$

on otstarbekohasem ja lihtsam lahendada ilma abiotsitavate sissetoomiseta, kuigi Šapošnikovi ja Valtsovi õpikus (I osa, VI peatükk, lk. 95) seda soovitatakse. Selliste süsteemide lahendamisel tuleb vahenditult rakendada asendusvõtet.

Näidatud süsteemide tüüpi iseloomustab see, et süsteemi mõlemas võrrandis on murrud, millede nimetajad on mõlemas võrrandis ühesugused; seepärast tuleb ühe otsitava eraldamiseks lugejad võrdsustada, korrutades neid vastavate täiendusteguritega, ja siis mõlemad võrrandid liita või lahutada.

Toome siin antud süsteemi lahenduse:

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3 \\ \frac{15}{x}-\frac{4}{y}=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3 \\ \frac{30}{x}-\frac{8}{y}=8 \end{cases}$$

$$\frac{33}{x}=11; \quad x=\frac{33}{11}; \quad x=3.$$

$$\frac{3}{3}+\frac{8}{y}=3; \quad 1+\frac{8}{y}=3; \quad \frac{8}{y}=2; \quad y=4.$$

Niisiis, esitatud süsteemi lahend on

$$x=3; \quad y=4.$$

4. Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu I osas, VI peatükis, nr. 282 all on ülesande 280 järel toodud järgmine süsteem:

$$\begin{cases} 3xy=8x+3y \\ 4xy=15y-4x \end{cases}$$

Arvestades seda, et süsteem vahenditult järgneb ülesandele nr. 280 ja süsteemi

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3 \\ \frac{15}{x}-\frac{4}{y}=4 \end{cases}$$

vabastamisel nimetajaist saadakse süsteem, mis on toodud nr. 282 all, tekib tahtmatult mõte, et autor pidas silmas soovi nr. 282 süsteem üle viia nr. 280 süsteemile mõlema võrrandi liikmeti jagamise teel xy-ga. Seda arvamust kinnitab kaudselt ka ülesande vastus, nimelt $x=3$ ja $y=4$. Kuid süsteem nr. 282 on ruutsüsteem, aga mitte lineaarne ja tal ei ole mitte üks, vaid kaks lahendit. Üks lahendite süsteem läks kaotsi jagamise tõttu xy-ga.

On tarvis veenduda selles, kas xy ei võrdu nulliga; selle juhuga on siin just tegemist, sest $x=0$ ja $y=0$ rahuldavad antud süsteemi, ja jagamisel xy-ga läheb üks lahendite süsteem kaotsi.

Vahe mõlema süsteemi vahel seisab selles, et ülesandes nr. 282 oletatakse, et x ja y, mis esinevad nimetajais, ei võrdu nulliga, sest jagamine nulliga pole teostatav; avaldised $\frac{3}{x}$ ja $\frac{8}{y}$ on mõttetud, kui $x = 0$ ja $y = 0$, ja nende summa ei saa võrduda 3-ga.

Süsteemi õige lahendus on järgmine. Eemaldame xy; selleks korrutame esimese võrrandi liikmed 4-ga ja teise liikmed 3-ga, saame:

$$\begin{cases} 12xy = 32x + 12y \\ 12xy = 45y - 12x \end{cases}$$

ja siis

$$\begin{cases} 32x + 12y = 45y - 12x \\ 44x = 33y; \quad 3y = 4x \end{cases}$$

Asetame süsteemi mistahes võrrandisse $3y$ asemele $4x$, saame:

$$16x^2 = 32x + 16x; \quad x^2 = 3x; \quad x^2 - 3x = 0; \quad x(x - 3) = 0.$$

Siit $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$.

Öeldust järeldub, et esitatud süsteem on ruutsüsteem ja on sattunud arusaamatuse tõttu lineaarsüsteemide hulka. Ülesanded nr. 288 ja 289 tuleb seepärast seitsmendas klassis kõrvale jätta.

Kui võrrandite kordajad on tähed, siis pärast süsteemi lahendamist üldkujul on soovitav anda x ja y kordajaile mitmesugused numbrilised väärtused. Sel teel saab õpilasi veenda, et otsitavate väärtused muutuvad ja nad on kordajate funktsioonid. Pärast seda võib püstitada küsimuse: kas pole võimalik saada reeglit otsitavate väljendamiseks kordajate ja vabaliikmete kaudu?

§ 93. Kahe otsitavaga üldkujulise lineaarvõrrandi-süsteemi lahendamine ja uurimine.

Lahendame süsteemi

$$(1)\quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Otsitava y eemaldamiseks korrutame võrrandi (1) b_2-ga ja võrrandi (2) b_1-ga; seejärel kasutame liitmisvõtet:

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \end{cases}$$

$$a_1b_2x - a_2b_1x + b_1b_2y - b_1b_2y = c_1b_2 - c_2b_1;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \qquad (\alpha)$$

Kui $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, siis võrrandil on üksainus x väärtus, nimelt

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Analoogiliselt korrutame x-i elimineerimiseks võrrandi (1) a_2-ga ja võrrandi (2) a_1-ga ning kasutame liitmisvõtet:

$$\begin{cases} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{cases}$$

$$a_1a_2x - a_1a_2x + a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (\beta)$$

Kui $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, siis võrrandil on üksainus x väärtus, nimelt

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Avaldise $a_1b_2 - a_2b_1$ tähistame $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$-ga või lühidalt Δ-ga. Järelikult saame:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lühendatud tähistuse abil kirjutame (α) ja (β) järgmiselt:

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \Delta x = \Delta_1 \\ \Delta y = \Delta_2 \end{cases}$$

Tekib küsimus: kas süsteem (II) on samaväärne süsteemiga (I)?

Silmas pidades küsimuse tähtsust ja selle ebaõiget valgustamist mõnedes õpikutes, on tarvis küsimuse juures üksikasjalisemalt peatuda.

Mõnikord antakse püstitatud küsimusele järgmine vastus: „Süsteem (II) pole üldiselt samaväärne süsteemiga (I)" ja selle väite tõestuseks tuuakse järgmised kaks näidet.

N ä i d e 1. On antud süsteem:

$$(A) \quad \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y = 1 \end{cases}$$

Selles süsteemis:

$$\Delta = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0;$$
$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\Delta_2 = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Lõppsüsteemil (II) on kuju:

$$(B) \quad \begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Lõppsüsteemi (B) rahuldab mistahes arvupaar, lähtesüsteemi (A) rahuldab arvupaar, milles x väärtusena esineb mistahes arv ja y väärtusena arv $\frac{1}{2}$. Seega süsteemi (B) rahuldab mistahes arvupaar, näiteks $x = 15$ ja $y = 4$, aga see paar pole süsteemi (A) lahendiks.

N ä i d e 2. On antud süsteem:

$$(C) \quad \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \end{cases}$$

Lõppsüsteemil on kuju:

$$(D)\quad \begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Lähtesüsteemil lahendit pole, sest süsteemi teisel võrrandil pole lahendeid; see on vasturääkiv, sest $0 + 0 = 0$, aga mitte 1. Lõppsüsteemi aga rahuldab mistahes arvupaar.

Toodud näidetest hoolimata on väide, et „süsteemid (I) ja (II) pole samaväärsed", siiski mitteveenev. Asi seisab selles, et ülaltoodud näited on erandlikud (eriliselt valitud juhud). Süsteemis (A) pole esimene võrrand mitte võrrand, vaid samasus kujul $0 + 0 = 0$, teine võrrand on oma olemuselt võrrand ühe otsitavaga y. Seega süsteem (A) muutub üheks võrrandiks ühe otsitavaga. Süsteemis (C) on esimene võrrand samasus, teine aga mitteõige võrdus kujul $0 + 0 = 1$. Järelikult õiget olukorda tuleb täpsuse huvides väljendada nii: kui arvesse võtta ainult tõelised võrrandid, siis lähtesüsteem (I) ja lõppsüsteem (II), mis on saadud (I)-st korrutamise teel teatavate arvudega ja järgneva liitmisega, on samaväärsed; kui aga arvestada ka erandjuhtusid, s. o. samasusi ja mitteõigeid võrdusi, siis on lähtesüsteemi iga lahend ka lõppsüsteemi lahendiks. Pöördväide ei tarvitse õige olla.

Tehtud järelduse põhjal kuulub süsteemi (I) lahend süsteemi (II) lahendite hulka.

Edasisel arutlusel eristame järgmisi juhtusid.

1. $\Delta \neq 0$. Süsteemil (II) on ainus lahend:

$$(III)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

Süsteem (III) on samaväärne süsteemiga (II), kui $\Delta \neq 0$. Kas aga süsteemi (III) lahend on ka süsteemi (I) lahendiks? Varem tehtud järelduse põhjal on tarvis asendamise

teel veenduda, et süsteemi (III) lahend rahuldab süsteemi (I). Kontrolli puudumine võib õpilaste juures tekitada ainult ähmast kujutlust ilmsest samaväärsusest. Seepärast ongi tingimata tarvis teostada kontrolli:

$$a_1 \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + b_1 \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_1\Delta_1 + b_1\Delta_2) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}(a_1c_1b_2 - a_1b_1c_2 + b_1a_1c_2 - b_1a_2c_1) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}(a_1c_1b_2 - b_1a_2c_1) = \frac{1}{\Delta} \cdot c_1(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot c_1 \cdot \Delta = c_1.$$

Seega süsteemi (III) lahend muudab süsteemi (I) esimese võrrandi õigeks võrduseks. Analoogiliselt tehakse asendamine ka süsteemi (I) teises võrrandis.

Tähendab, kui $\Delta \neq 0$, siis süsteemi (III) lahend rahuldab süsteemi (I).

2. $\Delta = 0$. Nüüd võtab süsteem (II) kuju:

$$\begin{cases} 0 \cdot x = \Delta_1 \\ 0 \cdot y = \Delta_2 \end{cases}$$

Siit on näha, et süsteemil võib üldse puududa lahend, kui $\Delta_1 \neq 0$ või $\Delta_2 \neq 0$, või jälle tal on lõpmata palju lahendeid, kui $\Delta_1 = 0$ ja $\Delta_2 = 0$.

a) $\Delta = 0$, aga üks arvudest Δ_1 või Δ_2 on nullist erinev. Oletame, et $\Delta_2 \neq 0$. Sel korral süsteemi (II) esimene võrrand võtab kuju $0 \cdot x = \Delta_2$, kus $\Delta_2 \neq 0$. Järelikult võrrand on vasturääkiv ja seepärast süsteemil (II) teisest võrrandist olenematult lahendeid pole ja järelikult pole lahendeid ka süsteemil (I).

b) Igaüks arvudest Δ, Δ_1 ja Δ_2 võrdub nulliga, s. o. $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Neil tingimustel omandab süsteem (II) kuju:

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases}$$

Viimast süsteemi rahuldab mistahes arvupaar, aga süsteemi (I) lahendite üle võib otsustada ainult üksikute juhtude arutluse põhjal.

a) Vähemalt üks kordajaist ei võrdu nulliga. Oletame, et $a_1 \neq 0$; oletus, et $a_1 \neq 0$, ei kitsenda arutluse üldisust. Võrrandite järjekord pole tõepoolest tähtis ja ka lahendite väärtustele see mõju ei avalda; seepärast paigutame esikohale selle võrrandi, milles x-i kordaja ei võrdu nulliga. Et ka otsitavate x ja y järjekord pole tähtis, siis paigutame võrrandis esikohale selle otsitava, mille kordaja ei võrdu nulliga.

Eeldusest $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ järeldub $a_1b_2 = a_2b_1$; $b_2 = \frac{a_2}{a_1} b_1 \ldots (m)$; eeldusest $\Delta_2 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ järeldub $a_1c_2 = a_2c_1$; $c_2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot c_1 \ldots (n)$. Kahele võrdusele (m) ja (n), mis on saadud eeldusest $\Delta = 0$ ja $\Delta_2 = 0$, lisame kolmanda ilmse samasuse $a_2 = \frac{a_1}{a_1} \cdot a_2$ ehk $a_2 = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \ldots (p)$.

Asetame süsteemi (I) teises võrrandis a_2 asemele $\frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$, b_2 asemele $\frac{a_2}{a_1} \cdot b_1$, c_2 asemele $\frac{a_2}{a_1} \cdot c_1$, saame võrrandi:

$$\frac{a_2}{a_1} a_1x + \frac{a_2}{a_1} \cdot b_1y = \frac{a_2}{a_1} \cdot c_1 \ldots (D).$$

Vahenditult näeme, et võrrand (D) saadakse süsteemi (I) esimesest võrrandist, kui teda korrutada liikmeti avaldisega $\frac{a_2}{a_1}$, millel ei puudu arvu mõte, sest eelduse põhjal $a_1 \neq 0$.

Järelikult süsteemi (I) esimese võrrandi lahendid rahuldavad võrrandit (D), mille lahendiks võib olla mistahes arv y-le ja avaldis $\frac{c_1 - b_1y}{a_1}$ x-le.

Sel juhul süsteem muutub üheks võrrandiks kahe otsitavaga ja tal on lõpmata palju lahendeid.

β) Kõik kordajad on võrdsed nulliga, aga vähemalt üks vabaliikmeist ei võrdu nulliga. Oletame, et $c_1 \neq 0$. Niisiis $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ ja $c_1 \neq 0$. Neist viimastest eeldustest järeldub:

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0;$$
$$\Delta_1 = c_1 b_2 - c_2 b_1 = c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 0 = 0;$$
$$\Delta_2 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0 \cdot c_2 - 0 \cdot c_1 = 0.$$

Neil tingimustel süsteem (I) võtab kuju:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Saadud süsteemi esimene võrrand on vasturääkiv, sest $0 + 0$ ei saa võrduda arvuga, mis erineb nullist. Seepärast olenematult teisest võrrandist puuduvad süsteemil (I) lahendid.

γ) Kõik kordajad ja kõik vabaliikmed on võrdsed nulliga. Süsteem (I) võtab kuju:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Süsteemi lahendiks on mistahes arvupaar.

Juhtu $\Delta = 0$ võib uurida ka teisel viisil. Oletame, et üks kordajaist, näiteks a_1, ei võrdu nulliga, s. o. $a_1 \neq 0$. Siis süsteemi esimest võrrandit tähe y mistahes väärtuse puhul rahuldab $x = -\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1}$. Asendame x-i selle väärtusega süsteemi teises võrrandis, s. o. avaldises $a_2 x + b_2 y - c_2$; saame:

$$a_2 \left(-\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} \right) + b_2 y - c_2.$$

Teisendame selle avaldise:

$$-\frac{a_2 b_1 y}{a_1} + \frac{a_2 c_1}{a_1} + \frac{b_2 \cdot a_1}{a_1} y - \frac{c_2 a_1}{a_1} =$$
$$= \left(\frac{a_1 b_2}{a_1} - \frac{a_2 b_1}{a_1} \right) y + \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1} y + \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1}.$$

Kui $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ja $\Delta_2 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, siis

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2}\,y + \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1} = \frac{0 \cdot y}{a_1} + \frac{0}{a_1} = 0;$$

järelikult väärtus

$$x = \frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}$$

rahuldab süsteemi mõlemat võrrandit tähe y mistahes väärtuse puhul.

Kui aga $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ja $\Delta_2 = a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, siis y mistahes väärtuse puhul

$$x = -\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}$$

rahuldab süsteemi (I) esimest võrrandit, ei rahulda aga teist.

§ 94. Teise järgu determinandid.

Kahe otsitavaga lineaarvõrrandi-süsteemi lahendamisel ja uurimisel esinevad avaldised $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_1 = a_1c_2 - a_2c_1$, $\Delta_2 = b_1c_2 - b_2c_1$. Avaldised Δ, Δ_1, Δ_2 määravad võrrandisüsteemi

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

iseloomu.

Tõepoolest, kui $\Delta \neq 0$, siis süsteemil on ainus lahend ja süsteemi nimetatakse määratud süsteemiks. Kui $\Delta = 0$, $\Delta_2 \neq 0$ ja $a_1 = 0$, siis süsteemil lahendeid pole ja teda nimetatakse vasturääkivaks süsteemiks. Kui $\Delta = 0$, $\Delta_2 = 0$ ja $a_1 \neq 0$, siis süsteemil on lõpmata palju lahendeid ja teda nimetatakse määramatuks süsteemiks.

Neil kaalutlustel nimetatakse avaldisi kujul $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ teise järgu määrajaiks (determinantideks), arve a_1, a_2, b_1 ja b_2 nimetatakse determinandi elementideks.

Determinandi üleskirjutamiseks tarvitatakse sageli Cauchy tähist

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Selleks et arvutada determinanti Cauchy tähise järgi, tuleb korrutada elemendid diagonaalil, mis on tõmmatud vasakult paremale ja ülalt alla, siis korrutada elemendid teisel diagonaalil ja esimesest korrutisest lahutada teine.

Determinantide struktuur lubab selgesti kujutada kahe võrrandi süsteemi üldlahendi valemeid.

1. Otsitavate x ja y nimetajaks on determinant $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$; see on kahe korrutise vahe: x-i kordaja esimeses võrrandis, korrutatud y-i kordajaga teises võrrandis, miinus x-i kordaja teises võrrandis, korrutatud y-i kordajaga esimeses võrrandis.

2. Selleks et saada lugejat x-i väärtuses, tuleb avaldises $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ x-i kordajad, s. o. a_1 ja a_2, asendada vastavate vabaliikmetega c_1 ja c_2. Otsitava y lugeja saadakse, kui avaldises $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ tähe y kordajad, s. o. b_1 ja b_2, asendada vastavate vabaliikmetega c_1 ja c_2.

Kahe otsitavaga kahe lineaarvõrrandi süsteemi uurimist tuleb täiendada harjutustega.

1. Lahendada süsteem

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} ax + y = 2 & (1) \\ x + ay = a & (2) \end{cases}$$

Lubatud väärtuste vallaks on ratsionaalarvude hulk

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = a \end{cases} \begin{vmatrix} a \\ \\ \end{vmatrix} - \begin{array}{r} a^2x + ay = 2a \\ x + ay = a \\ \hline (a^2 - 1)x = a \end{array} \qquad (3)$$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = a \end{cases} \begin{vmatrix} \\ a \end{vmatrix} \begin{array}{l} ax + y = 2 \\ ax + a^2y = a^2 \\ \hline (a^2 - 1)y = a^2 - 2 \end{array} \qquad (4)$$

Koostame lõppsüsteemi (3) ja (4), s. t.

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (a^2-1)x = a & (3) \\ (a^2-1)y = a^2-2 & (4) \end{cases}$$

Kui $a^2-1 \neq 0$, s. o. $a^2 \neq 1$ või $a \neq \pm 1$ või $|a| \neq 1$, siis süsteemil on ainus lahend:

$$x = \frac{a}{a^2-1} \text{ ja } y = \frac{a^2-2}{a^2-1}.$$

Kui $a^2-1=0$, s. o. $a^2=1$, $a=\pm 1$, siis süsteemi (II) esimene võrrand võtab kuju $0 \cdot x = \pm 1$ ja tal pole lahendeid; järelikult süsteemil (II) lahendid puuduvad ja samuti ka süsteemil (I).

2. Määrata parameetri a väärtus, mille puhul süsteemil

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 4x + ay = 0 \\ ax + 4y = 0 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendeid.

$$\Delta = 4 \cdot 4 - a \cdot a = 16 - a^2; \quad \Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0.$$

Järelikult lõppsüsteem omandab kuju

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (16-a^2)x = 0 \\ (16-a^2)y = 0 \end{cases}$$

Selleks et süsteemil oleks lõpmata palju lahendeid, on tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks

$$\Delta = 16 - a^2 = 0 \text{ ehk } a = \pm 4.$$

Kui $a=4$, siis süsteem muutub üheks võrrandiks kahe otsitavaga $4x+4y=0$ ehk $x+y=0$, kui aga $a=-a$, siis süsteem muutub võrrandiks $4x-4y=0$ ehk $x-y=0$. Ühel võrrandil kahe otsitavaga aga on, kui puuduvad täiendavad tingimused, lõpmata palju lahendeid.

§ 95. Võrrandite koostamine.

Lineaarvõrrandite koostamine sõnaliselt väljendatud ülesande andmete põhjal teeb õpilastele suuri raskusi. Matemaatikaõpetajal tuleb sageli kuulata sugulasdistsipliinide õpetajailt kaebusi, et õpilastel puudub oskus matemaatikat rakendada praktiliste küsimuste lahendamisel.

Õpilane on tõepoolest harjunud ülesandeid lahendama aritmeetilisel viisil. Algebraline lahendusviis, s. o. x-i tarvituselevõtmine ja võrrandi koostamine, mille lahendus annab otsitava, erineb teravalt aritmeetilisest viisist. Pole siis ka imestada, et üleminek aritmeetiliselt lahendusviisilt algebralisele on seotud suurte raskustega.

Võrrandi koostamine ülesande teksti järgi on keerukas asi. Seepärast tulebki lineaarvõrrandi-süsteemi koostamise küsimus läbi töötada erilise hoole ja tähelepanuga.

Nende põhjuste analüüs, mispärast õpilased ei oska võrrandeid koostada, lubab kindlaks teha järgmisi puudusi.

1. Vilumuse puudumine aritmeetiliste ülesannete lahendamisel.

2. Vilumuse puudumine algebraliste avaldiste ja valemite koostamisel.

3. Tehete komponentide ja tulemuste vahel olevate seoste mittetundmine.

4. Oskamatus siduda suurusi.

5. Süsteemi ja täpsuse puudumine tähistustes.

Ülaltoodud puudused näitavad, et peamine põhjus, mispärast võrrandit ei osata koostada, peitub puudulikus matemaatilises arenemises; paranemine selles asjas võib tulla ainult pika ettevalmistava töö järel. Seepärast ei või juttugi olla imeravimi otsimisest mingi universaalse retsepti näol, mille omandamine võiks asja parandada lühima aja jooksul. Selleks et olukorda parandada, tuleb kõrvaldada eespooltoo-

dud puudused, tähendab, tõsta üldist matemaatilise kultuuri taset.

Metoodilises kirjanduses on palju seisukohti küsimuse suhtes, millised võtted on kõige sobivamad, et lapsi õpetada koostama võrrandit ülesande andmete järgi. Et selles küsimuses on palju vaieldavat ja lahendamatut, siis tuleb meil läbi arutada ülesande lahendamise protsess ühe tundmatuga võrrandi koostamise võtte abil ja peatada selle protsessi üksikute järkude juures.

Ühe otsitavaga võrrandi koostamine koosneb järgmistest järkudest.

1. Selle seose valik, mille alusel koostatakse võrrand.
2. Otsitava valik ja otsitava tähistamine.
3. Põhiseoses esinevate suuruste väljendamine antud ja otsitavate suuruste kaudu.
4. Võrrandi koostamine.
5. Võrrandi lahendamine.
6. Kontroll, kas leitud lahend rahuldab ülesande tingimusi.

Nüüd arutleme üksikasjaliselt kõiki ülaltoodud järke.

Põhiseose valik (ülesande teksti põhjal) võrrandi koostamiseks.

Tavaliselt selle operatsiooni puhul vaikitakse või arvatakse, et sellele peab eelnema otsitava arvu valik. Et võrrandi koostamise sellele järgule ei pühendata küllaldast tähelepanu, leiab seletuse osalt selles, et põhiseose valikut ei fikseerita kirjutusega, nagu seda tehakse kõigi teiste võrrandi koostamise protsesside puhul, ja et see valik toimub teadvuses mõnikord märkamatult. Ometi reguleerib põhiseose valik kogu seda operatsioonide kompleksi, mida nimetatakse võrrandite koostamiseks. Esimeseks toiminguks on välja selgitada küsimus, milline ülesandes esinev suurus võib olla võrdne teise suurusega, mis on esimesega vastastikuses olenevuses, või, teisiti, millist suurust võib väljen-

dada kahel eri viisil, kas mõlemal juhul x kaudu või ühel juhul x-ga ja teisel juhul antud arvude kaudu. Alles pärast seda, kui see küsimus on lahendatud kas teadlikult või ebateadlikult, kas selgesti või ähmaselt, võivad toimuda teised võrrandi koostamise ja lahendamise protsessi osad. Kõigepealt tuleb lahendada küsimus: millised kaks arvu, millest vähemalt üks on tingimata avaldatud x kaudu, on ülesande andmete põhjal isekeskis võrdsed? Selles seisabki keskne küsimus, ja iga võrdus, mis saadakse ülesande andmetest õigel loogilisel arutlusel, peab möödapääsematult viima selle küsimuse lahenduse juurde, kui ainult seejuures ei saada samasust.

Mõnikord antakse võrrandi koostamiseks järgmine näpunäide: tuleb valida mingi otsitav arv, tähistada see x-ga, väljendada selle kaudu muud suurused ja siis koostada võrrand. Kuigi see skeem annab tihti positiivseid tulemusi, siiski kutsub ta esile õigustatud vastuväiteid. Esiteks esinevad ülesandes mõnikord liigsed andmed; niisugusel juhul on asjatu väljendada kõiki ülesandes esinevaid suurusi otsitava kaudu; teiseks peab teadma, mida väljendada x kaudu. Seda toimingut seepärast reguleeribki põhiseose valik võrrandi koostamiseks.

Kui ülesandes on antud ainult üks seos, siis võrrandi koostamine raskusi ei tekita.

Võtame näiteks ülesande nr. 402 Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu I osast, VI peatükist:

„Kauba müügil 299 rubla eest saadi 15% kasu. Kui palju maksab kaup?"

Ülesandes on ainult üks seos; võrrandi koostamine toimub raskuseta:

$$x + \frac{15}{100}x = 299; \quad 1{,}15x = 299; \quad x = 299 : 1{,}15; \quad x = 260.$$

Vastus: kaup maksab 260 rubla.

Ülesannet on kerge lahendada ka aritmeetiliselt, nimelt:

$$100\% + 15\% = 115\%;\ 299 : 1{,}15 = 260.$$

Selle ülesande lahendamisel tekib mulje, nagu ei oleks antud näide võrrandi lahendamise kohta mitte valmis võrrandi peale, vaid sõnaliselt väljendatud võrrandi peale ehk, nagu mõnikord öeldakse, on antud „kirjeldatud" võrrandi näide.

Olukord on teistsugune, kui tuleb lahendada ühe võrrandi abil ülesanne, milles otsitava ja antud suuruste vahel esineb mitte vähem kui kaks seost. Sellisel korral võib mistahes antud seostest võtta aluseks võrrandi koostamisel; teised seosed kasutatakse ära selleks, et väljendada x-i ja tuntud suuruste kaudu ülejäänud otsitavaid. Põhiseose valiku vabadus tingib seda, et ühe otsitavaga võrrandit võib koostada antud ülesande andmete põhjal mitmel erineval viisil. Kinnitame seda mõtet paari näitega Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogust.

N ä i d e 1. Ülesanne nr. 370. „Jagada arv 21 kahte ossa nõnda, et esimese arvu suhe teisega võrduks $\frac{3}{4}$-ga."

Ülesandes esineb kaks seost: esimene — otsitavate arvude summa on 21; teine — nende arvude suhe on $\frac{3}{4}$. Leida arvud.

Võrrandi koostamisel võib esimese seose võtta põhiseoseks, s. o. panna võrdusmärk kahe liidetava avaldise summa ja 21 vahele. Kirjutame üles: esimene otsitav + teine otsitav võrdub 21-ga.

See kirjutus näitab, et tuleb kuidagi väljendada otsitavaid. Võtteid on mitu. Tähistame suurema otsitava (teise) x-ga; siis teise seose põhjal esimene otsitav võrdub $\frac{3}{4}$ x-ga.

Nüüd asendame kirjutuses sõnad esimene ja teine otsitav $\frac{3}{4}x$ ja x-ga ning ongi koostatud nõutav võrrand:

$$x + \frac{3}{4}x = 21. \qquad (1)$$

Võrrandi lahendus annab $x = 12$, s. o. teine otsitav on 12 ja esimene $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

Kontroll näitab, et $9 + 12 = 21$ ja $9 : 12 = \frac{3}{4}$, s. o. et võrrandi (1) lahend rahuldab ülesande andmeid.

Võrrandi koostamisel võime aluseks võtta teise seose, s. o. lähtuda kahe arvu suhtest.

Kirjutame üles: esimese arvu jagatis teise arvuga võrdub $\frac{3}{4}$-ga.

Oletame, et esimene liidetav on x; siis teine liidetav esimese seose põhjal on $21 - x$.

Esimese arvu jagatis teise arvuga on $\frac{x}{21-x}$ ja see võrdub $\frac{3}{4}$-ga. Tähendab, saame võrrandi

$$\frac{x}{21-x} = \frac{3}{4}.$$

Võrrandi lahendus:

$$4x = 63 - 3x; \quad 7x = 63; \quad x = 9.$$

Seega esimene arv on 9 ja teine $21 - 9 = 12$.

Nüüd tehakse kontroll.

N ä i d e 2. Ülesanne nr. 477. „Kahe arvu summa on 47. Kui esimest arvu jagada teisega, siis jagatises saame 2 ja jäägis 5. Leida arvud."

Ülesandes on kaks seost: esimene — kahe arvu summa on 47; teine — esimene arv on viie võrra suurem kahekordsest teisest arvust.

Võrrandi koostamisel võib aluseks võtta esimese seose; kirjutame üles:

„Esimese ja teise otsitava arvu summa on 47."

Tähistame väiksema arvu x-ga.

Siis teise seose alusel on suurem liidetav jagatava, jagaja ja jäägi vahel kehtiva aritmeetikast tuntud seose põhjal $2x + 5$.

Asetame kirjutusse x ja $2x + 5$, saame:

$$x + 2x + 5 = 47.$$

Lahendus annab $x = 14$, $2x + 5 = 2 \cdot 14 + 5 = 33$.

Niisiis suurem arv on 33, väiksem 14. Kontroll näitab, et võrrandi lahendid rahuldavad ülesande tingimusi.

Võrrandi koostamisel võib aluseks võtta teise seose: ühe arvu jagatis teise arvuga on 2 ja jääk 5 ehk: „Esimene arv võrdub kahekordse teise arvuga pluss 5."

Tähistame ühe arvu x-ga, teine arv võrdub esimese seose alusel $47 - x$. Asetame kirjutusse esimese arvu asemele x ja teise arvu asemele $47 - x$, saame võrrandi:

$$x = 2(47 - x) + 5. \qquad (1)$$

Võrrandi lahendus annab

$$x = 33 \text{ ja } 47 - x = 47 - 33 = 14.$$

Selle ülesande aritmeetiline lahendus ei tee raskusi. Tõepoolest, on antud kahe arvu summa 47 ja on öeldud, et esimene arv võrdub kahekordse teise arvuga pluss 5. Kui esimene arv võrduks kahekordse teise arvuga, siis summa võrduks $47 - 5 = 42$ ja koosneks kolmekordsest väiksemast arvust; niisiis väiksem arv on $42 : 3 = 14$ ja suurem $47 - 14 = 33$.

Mõlemad võtted annavad ühesugused tulemused.

Enamik ülesandeid lineaarvõrrandite koostamise kohta tarvitusele võetud ülesannetekogus on ülesanded kahe seosega; leidub aga ka ülesandeid enam kui kahe seosega. Kui ülesandes on enam kui kaks seost, siis on soovitav võtta

võrrandi koostamisel aluseks see seos, mis seob kõiki otsitavaid, kui selline seos on olemas.

Näide 3. Ülesanne nr. 428. „Kolme arvu summa on 100. Kui esimest arvu jagada teisega, siis jagatises saadakse 4 ja jäägis 3; kui aga teist arvu jagada kolmandaga, siis saadakse jagatises 2 ja jäägis 4. Leida arvud."

Meil on kolm seost:

1) kolme arvu summa on 100;

2) esimene arv võrdub neljakordse teise arvuga pluss 3;

3) teine arv võrdub kahekordse kolmanda arvuga pluss 4.

Võtame võrrandi koostamisel aluseks esimese seose. Kirjutame üles:

Esimene otsitav + teine otsitav + kolmas otsitav võrdub 100.

Tähistame kolmanda arvu x-ga ja väljendame teise ning kolmanda arvu x-i ja antud arvude kaudu. Siis väljendub teine arv $2x + 4$-ga kolmanda seose põhjal ja esimene arv $4(2x + 4) + 3$-ga teise seose põhjal.

Leiame, et $4(2x + 4) + 3$ võrdub $8x + 16 + 3 = 8x + 19$.

Nüüd asetame kirjutusse saadud avaldised esimese, teise ja kolmanda arvu asemele, saame võrrandi:

$$(8x + 19) + (2x + 4) + x = 100.$$

Selle võrrandi lahendus annab x-le väärtuse 7, s. o. kolmas arv võrdub 7-ga, teine võrdub $2x + 4$ ehk 18-ga ja esimene võrdub $8x + 19$ ehk 75-ga.

Kontroll näitab, et võrrandi lahend rahuldab ülesande tingimusi.

Kolmest ülesandes antud seosest esinevad kõik kolm otsitavat arvu ainult esimeses, igaüks ülejäänuist seob ainult kaht otsitavat. Seepärast pole otstarbekohane võtta aluseks võrrandi koostamisel teist ja kolmandat seost.

Näide 4. Ülesanne nr. 518. „Leida kolm arvu, mis moodustavad pideva aritmeetilise võrde. Arvude summa on 570.

Kui suuremat arvu jagada väiksemaga, siis jagatises saadakse 11 ja jäägis arv, mis on ühe võrra suurem keskmise liikme kümnendikust."

Ülesandes esineb kolm seost:

1) teine otsitav on esimese ja kolmanda arvu aritmeetiline keskmine, s. o. võrdub esimese ja kolmanda arvu poole summaga;

2) kolme arvu summa on 570;

3) suurem arv võrdub väiksema arvu ja 11 korrutisega $+\frac{1}{10}$ teisest arvust $+1$.

Seos kolme otsitava ja antud arvude vahel esineb teises ja kolmandas vahekorras; esimeses seoses ei ole üldse tuntud arve. Seepärast võrrandi koostamisel tulebki aluseks võtta kas teine või kolmas seos.

Lähtudes teisest seosest kirjutame: esimene otsitav $+$ teine otsitav $+$ kolmas otsitav võrdub 570.

Tähistame teise arvu x-ga ja väljendame selle kaudu esimese ning kolmanda arvu. Et kirjutuses esineb esimese ja kolmanda arvu summa, siis pole vajadust neid üksikult x kaudu väljendada, ainult nende summa tuleb väljendada x kaudu. Esimese seose põhjal võrdub esimese ja kolmanda arvu summa kahekordse teise arvuga, s. o. $2x$-ga.

Koostame võrrandi:

$$x + 2x = 570;\ 3x = 570;\ x = 190.$$

Teine arv on 190, esimese ja kolmanda arvu summa on 380.

Nüüd leiame esimese ja kolmanda arvu eraldi. On saadud ülesanne: leida kaks arvu, kui arvude summa on 380 ja on kehtiv kolmas seos, milles $\frac{1}{10}$ teisest arvust võib asendada $\frac{1}{10} \cdot 190 = 19$; kolmas seos võtab kuju: esimene arv võrdub kolmanda arvu ja 11 korrutisega pluss 19 ja 1, s. o. esimene arv võrdub kolmanda arvu ja 11 korrutisega pluss 20.

Tähistame kolmanda arvu y-ga, saame esimese arvu jaoks $11y + 20$.

Niisiis $11y + 20 + y = 380$.

$$12y = 360;$$
$$y = 30.$$

Kolmas arv on 30 ja esimene $11 \cdot 30 + 20$, s. o. 350.

Kui aluseks võtta võrrandi koostamisel seos (1), siis tuleb panna võrdusmärk kahekordse teise ja esimese ning kolmanda arvu summa vahele.

Tähistame teise arvu x-ga. Teise seose alusel on kõigi kolme arvu summa 570, järelikult esimese ja kolmanda arvu summa väljendub $(570 - x)$-ga.

Koostame võrrandi:

$$2x = 570 - x \text{ ehk } 3x = 570;\ x = 190.$$

Edasine lahendus toimub nii nagu esimese võtte puhul.

N ä i d e 5. Ülesanne nr. 519. „Kolme murru summa on 1. Teine murd on esimese ja kolmanda murru keskmine aritmeetiline; esimene murd on kolm korda suurem kolmandast. Leida need murrud."

Ülesandes on kolm seost:

1) kolme murru summa on 1;

2) teine murd võrdub esimese ja kolmanda murru poole summaga;

3) esimene murd võrdub kolmekordse kolmanda murruga.

Võtame võrrandi koostamisel aluseks esimese seose. Kirjutame üles: esimene murd + teine murd + kolmas murd võrdub 1.

Tähistame kolmanda murru x-ga ja väljendame esimese ning teise murru x kaudu.

Kolmanda seose põhjal on esimene murd $3x$; teise seose põhjal võrdub teine murd $\frac{x + 3x}{2} = 2x$.

Seega saame võrrandi:

$$3x + 2x + x = 1;$$
$$6x = 1;$$
$$x = \frac{1}{6}.$$

Kolmas murd on $\frac{1}{6}$. Teine murd võrdub $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Esimene murd on $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Võtame võrrandi koostamisel aluseks teise seose.

Kahekordne teine murd võrdub esimese ja kolmanda summaga.

Tähistame teise murru x-ga ja väljendame ülejäänud murrud x kaudu.

Esimese seose põhjal teise ja kolmanda murru summa võrdub $1 - x$-ga. Niisiis saame võrrandi: $2x = 1 - x$; $3x = 1$; $x = \frac{1}{3}$.

Tähendab, teine murd võrdub $\frac{1}{3}$-ga.

Edasine lahendamine raskusi ei tee.

Läbiarutatud näidete põhjal võib teha mõningaid järeldusi neist operatsioonidest, mis tuleb teostada ühe otsitavaga võrrandi koostamisel ülesande andmete järgi.

1. Kõigepealt valitakse see seos, mille põhjal võrrand koostatakse. Kui ülesandes on enam kui kaks seost, siis aluseks võrrandi koostamisel võetakse see seos, milles esinevad kõik otsitavad.

2. Seejärel valitakse otsitav ja tähistatakse see vastava tähega.

3. Kõik otsitavad arvud, mis esinevad võrrandi koostamisel aluseks võetud seoses, tuleb väljendada valitud otsitava kaudu, toetudes seejuures teistele seostele, mis esinevad ülesandes peale põhiseose.

4. Ülaltoodud kolmest toimingust järeldub vahenditult võrrandi koostamine kui sõnalise kirjutuse kujundamine matemaatiliste sümbolite abil.

5. Koostatud võrrand tuleb lahendada.

6. On tarvis kontrollida, kas saadud lahend rahuldab kõiki tingimusi.

Mainitud toiminguist on keskne koht põhiseose valikul. Ülaltoodud ülesanded näitavad, et põhiseose valik on juhtivaks niidiks võrrandi koostamisel, ta loob loogilise harmoonilisuse ülesande mõnikord üsna laialivalguvasse sõnalisse teksti, annab kindlust orienteerumises ja kaitseb õpilasi korratute toimingute eest kõigi ülesandes esinevate suuruste väljendamisel antud ja otsitavate suuruste kaudu. Pedagoogilised kogemused näitavad, et õpilased väljendavad mõnikord kõik ülesandes esinevad otsitavad valitud otsitava kaudu; vahel on mõned neist toiminguist täiesti liigsed, sest nad ei leia rakendust edaspidi võrrandite koostamisel.

Põhiseose valik avaldab olulist mõju otsitava valikule, teiste otsitavate väljendamisele võetud otsitava kaudu.

Kõik öeldu põhiseose valikust kehtib ainult ühe otsitavaga võrrandi koostamise kohta.

Mitme võrrandi koostamisel ülesande andmete põhjal langeb küsimus põhiotsitava valikust ära. On täiesti kohane arutusele võtta küsimus: kas on tingimata tarvis kasutada üht võrrandit ühe otsitavaga või võib kasutada ka võrrandisüsteemi mitme otsitavaga?

Üldiselt valitseb arvamus, et ülesanne tuleb lahendada ühe võrrandi abil. Mõnikord peetakse sellist viisi peenemaks; minnakse, kuigi harva, isegi niikaugele, et süsteemi koostamise eest ühe võrrandi koostamise asemel alandatakse hinnet. Hinde alandamine võrrandisüsteemi koostamise eest ühe võrrandi asemel on igal juhul täiesti lubamatu, ja küsimuse lahendamise sellise viisi eelistamine on kahtlane, sest paljudel juhtudel on võrrandisüsteemi koostamine ühe võrrandi

asemel palju loomulikum ja ka palju vastavam ülesande sisule. Õpilastele tuleb anda vabadus valida üht või teist lahendusviisi, kui aga õpilane ainult oskab ülesannete lahendamisel võrrandeid rakendada.

§ 96. Põhiotsitava valik.

Põhiseose valik võrrandi koostamisel avaldab mõju otsitava valikule ja teiste otsitavate väljendamisele selle kaudu. Kuid ka otsitava valik on lahenduse juures tähtis.

Laialt on levinud arvamus, et otsitavaks võetakse otsitav arv ülesandes ja tähistatakse see x-ga. On enesestmõistetav, et ülesande otsitava arvu tähistamine x-ga on väga sobiv, sest võrrandi lahend on sel korral ka vastuseks ülesande küsimusele, aga sellele vaatamata pole see valik siiski iga kord otstarbekohane.

Võtame näited.

Näide 1. „Ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille üks külgedest on 5 m võrra pikem ja teine 4 m võrra lühem ruudu küljest. Leida ruudu pindala."

Põhiseoseks võtame: ruudu pindala võrdub ristküliku pindalaga. Kui juhinduda levinud vaatest, siis tuleks otsitavaks võtta ruudu pindala ja tähistada see x-ga. See pole aga sobiv; tõepoolest, kui võtta ruudu pindalaks x, siis ruudu külg väljendub $\sqrt{x}$-ga. Ristküliku pikkus on siis $\sqrt{x}+5$ ja laius $\sqrt{x}-5$. Saame võrrandi

$$(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-4)=x.$$

See on juurvõrrand; irratsionaalsete arvudega pole aga õpilased tuttavad ja tehteid nendega nad teha ei oska; lubatud väärtuste vallaks on ratsionaalsete arvude hulk. Lihtsam ja otstarbekohasem on väljendada x-ga ruudu külg. Tähistame:

ruudu külje pikkus	x;
ruudu pindala	x^2;
ristküliku pikkus	$x + 5$;
ristküliku laius	$x - 4$;
ristküliku pindala	$(x + 5)(x - 4)$.

Koostame võrrandi:

$$(x + 5)(x - 4) = x^2;$$
$$x^2 + 5x - 4x - 20 = x^2;$$
$$x - 20 = 0;$$
$$x = 20.$$

Ruudu külje pikkus on 20 m, ruudu pindala on $20 \cdot 20$ ehk 400 m^2.

Kui on antud kahe otsitava arvu suhe $m : n$, siis on otstarbekohane tähistada x-ga nende arvude suurimat ühistegurit; tõepoolest, kui kahe arvu suhe on $m : n$, siis on olemas teatav arv x, mis läheb m korda esimesse otsitavasse ja n korda teise otsitavasse; s. o. esimest arvu võib tähistada mx-ga ja teist arvu nx-ga. Kui teist arvu tähistada x-ga, siis esimest arvu tuleks tähistada $\frac{m}{n}x$, s. o. murruga; on endastmõistetav, et tähistamine täis-üksliikmetena on eelistatavam. Näitame seda ülesandega.

N ä i d e 2.

Eelmise paragrahvi esimeses näites lahendasime ülesande nr. 370, milles oli antud kahe arvu summa 21 ja arvude suhe $\frac{3}{4}$. Oli näidatud, et arve võib mitmel viisil tähistada; suurem otsitav oli tähistatud x-ga ja väiksem $\frac{3}{4}x$-ga ning siis koostatud võrrand

$$x + \frac{3}{4}x = 21.$$

Lihtsam on tähistada x-ga suurimat ühistegurit; siis väiksem arv on $3x$ ja suurem arv $4x$; koostame võrrandi:

$$3x + 4x = 21.$$

Võrrand $3x + 4x = 21$ on lihtsam võrrandist $x + \frac{3}{8}x = 21$, sest kordajad on siin täisarvud.

Näide 3. „Kahekohalises arvus on üheliste arv 4 võrra suurem kümneliste arvust. Arv on 4 korda suurem oma ristsummast. Leida arv."

Ülesandes on kaks seost:

1) üheliste arv on 4 võrra suurem kümneliste arvust;

2) arv on 4 korda suurem oma ristsummast.

Võtame põhiseoseks võrrandi koostamisel seose (2):

„Kahekohaline arv võrdub oma ristsumma neljakordse korrutisega."

Tähistame kümneliste arvu x-ga, siis seose (1) põhjal üheliste arv on $x + 4$. Väljendame x kaudu arvu, milles on $x + 4$ ühelist ja x kümnelist. See arv on $10x + x + 4$.

Seega koostame võrrandi: $10x + x + 4 = (x + x + 4) \cdot 4$; $11x + 4 = 8x + 16$.

Võrrandi lahendus annab $x = 4$.

Järelikult kümneliste arv on 4 ja üheliste arv on $4 + 4 = 8$. Otsitav arv on 48.

Kontroll: 1) Üheliste arv on 4 võrra suurem kümneliste arvust: $8 - 4 = 4$.

2) Arvu 48 jagamisel 12-ga saadakse 4.

Toodud näites võeti otsitavaks mitte kahekohaline arv ise, vaid selle kümneliste arv.

Näide 4. Ülesanne nr. 412. „Leida arv, mille jagamisel 5-ga saadakse jäägis 2, jagamisel 8-ga on jääk 5, esimene jagatis on 3 võrra teisest suurem."

Ülesandes on kaks seost:

1) otsitav arv annab jagamisel 5-ga jäägi 2, jagamisel 8-ga jäägi 5;

2) esimene jagatis võrdub teise jagatisega pluss 3.

Võtame aluseks võrrandi koostamisel esimese seose. Otsitavat arvu võib esimese seose põhjal väljendada kahel viisil, nimelt:

a) 5 korrutatuna teatava arvuga pluss 2.

b) 8 korrutatuna teatava arvuga pluss 5.

Et otsitav arv on üks ja seesama, siis peavad olema mõlemad avaldised, mis seda arvu väljendavad, võrdsed.

Saame järgmise seose:

„5 korrutatuna teatava arvuga pluss 2 võrdub 8 korrutisega teatava arvuga pluss 5."

Tähistame teise jagatise x-ga; teise seose põhjal on esimene jagatis $x+3$. Siis $5(x+3)+2$ ja $8x+5$ kui ühe ja sellesama arvu avaldised peavad olema võrdsed, s. o. saame võrrandi:

$$5(x+3)+2=8x+5.$$

Lahendus annab: $5x+15+2=8x+5$.

$$8x-5x=15+2-5;$$
$$3x=12;$$
$$x=4.$$

Teine jagatis on 4, järelikult otsitav arv on $8\cdot 4+5=37$, ja $5\cdot 7+2=37$.

Jagatis 7 on neljast 3 võrra suurem.

Ka selles ülesandes oli otsitavaks võetud mitte otsitav arv, vaid jagatis.

Niisiis põhiotsitavaks võetakse kas otsitav arv või üks neist, kui neid on mitu.

Selline valik on soovitav, mitte aga sunduslik, sest mõningail juhtudel on otstarbekohane võtta põhiotsitavaks mitte ülesande otsitav arv, vaid mingi teine.

Tavaliselt võetakse põhiotsitavaks kõige väiksem otsitavatest arvudest; teiste, suuremate otsitavate väljendamiseks tuleb siis koostada summa või korrutis, ja summa või korrutisega tegemist teha on lihtsam kui vahe või jagatisega.

Näide 5. Ülesanne nr. 374. „Kolmel riiulil on kokku 66 raamatut, alumisel riiulil on neid kolm korda rohkem ja keskmisel kaks korda rohkem kui ülemisel. Mitu raamatut on igal riiulil?"

Ülemisel riiulil on kõige väiksem raamatute arv; tähistame selle arvu x-ga; siis keskmisel riiulil on raamatuid $2x$ ja alumisel $3x$.

Koostame võrrandi: $3x + 2x + x = 66$;

$$6x = 66;\ x = 11;\ 2x = 22;\ 3x = 33.$$

Kui võtta otsitavaks raamatute arv alumisel riiulil ja tähistada see x-ga, siis raamatute arv ülemisel riiulil on $\frac{1}{3}x$, keskmisel riiulil $\frac{2}{3}x$.

Koostame võrrandi:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = 66.$$

On tarvis selgesti näidata, missugune otsitav arv on tähistatud x-ga või mingi teise tähega. Kogemused näitavad, et õpilased, kellel puuduvad üleskirjutus ja tähistused, unustavad pärast otsitava, näiteks otsitava murru lugeja jaoks väärtuse leidmist, et otsitavaks on murd, aga mitte lugeja, ja kirjutavad vastuseks mitte murru, vaid ainult lugeja.

§ 97. Otsitavate suuruste väljendamine ühe põhiotsitava kaudu.

See võrrandi lahendamise etapp teeb õpilastele suuri raskusi. Vilumust ja oskust väljendada üht osa otsitavaist

teiste kaudu võib arendada harjutuste tegemisega. Neid harjutusi tuleb teha enne võrrandite abil ülesannete lahendamisele asumist. Nagu näitavad mõnede õpetajate kogemused, on ülesannete lahendamisel seose peale, mis on olemas jagatava, jagaja, jagatise ja jäägi vahel, kasulik tarvitusele võtta skeem, mis kujutab arvude jagamist. See skeem aitab paremini meeles pidada seost jagamise nelja elemendi vahel, nimelt:

$\begin{array}{c|c} N & D \\ \hline R & Q \end{array}$ N on siin jagatav, D — jagaja, Q — jagatis ja R — jääk, põhiseoseks on $N = D \cdot Q + R$. Sellest järelduvad teised kolm. Need seosed tuleb meeles pidada, aga mitte iga kord põhiseosest tuletada; need on:

$$N = D \cdot Q + R \quad (1)$$
$$D = (N - R) : Q \quad (2)$$
$$Q = (N - R) : D \quad (3)$$
$$R = N - D \cdot Q \quad (4)$$

Tuleb teha järgmist laadi harjutusi:

1. Kahe arvu suhe on $\frac{2}{5}$. Väiksem arv on a. Väljendada selle kaudu suurem. Olgu suurem arv b. Väljendada selle kaudu väiksem.

2. Teatava arvu jagamisel p-ga saadi jagatises 3 ja jäägis 4. Väljendada jagatav p kaudu.

Jagatav $= 3p + 4$.

Arvu N jagamisel teatava arvuga saadi jagatises 3 ja jäägis 4. Väljendada jagaja N kaudu.

Jagaja $= \frac{N-4}{3}$.

3. Arvu N jagamisel 4-ga saadi jäägis 3. Väljendada jagatis.

Jagatis $= \frac{N-3}{4}$.

4. Väljendada seos ratta ümbermõõdu, pöörete arvu ja läbitud tee vahel.

5. Kirjutada kahekohaline arv, milles on a kümnelist ja b ühelist.

6. Väljendada kahe kahekohalise arvu vahe, kui ühes arvus on a kümnelist ja b ühelist ning teises samad numbrid vastupidises järjekorras. Näidata, et see vahe on jaguv 9-ga ja võrdub arvu numbrite vahe 9-kordse korrutisega.

§ 98. Seos ülesande algebralise lahendusvõtte (võrrandite abil) ja aritmeetilise lahendusvõtte vahel.

Sageli räägitakse algebra tundides sideme loomisest aritmeetikaga. On tarvis süsteemi viia selle sideme realiseerimine, sest see soodustab paremat ülesande lahendamise omandamist ja arusaamist ning peale selle aitab kaasa nende kahe distsipliini — algebra ja aritmeetika — iseärasuste selgitamisele.

Kui kaugele võib selles tihedas koostöös minna, seda selgitame näidetega.

Alustame võrrandite koostamise meetodi kasutuselevõtmise motiveerimisega ülesannete lahendamisel. Kisseljovi õpikus on toodud järgmine ülesanne: „Isa on 40 aastat vana, poeg 17 aastat. Mitme aasta pärast on isa pojast kaks korda vanem?" ja siis on lisatud: „Tavalisel (aritmeetilisel) viisil on ülesannet raske lahendada. Lahendada see rakendades tähelisi tähistamisi" jne. Selles seletuses kutsub vasturääkimisi esile kaks asjaolu. Esiteks ei saa aritmeetilist lahendusviisi nimetada tavaliseks ja seda vastandada algebralisele viisile, nimetades viimast ebatavaliseks. Teiseks pole õige väide, et esitatud ülesannet on aritmeetiliselt raske lahendada. Tõepoolest, $40 = 17 + 23$, s. o. isa aastad on poja aastad pluss 23. Antud kolmest arvust on 23 jääv, sest vahe isa ja poja vanuse vahel ei muutu ja on 23; teine liide-

tav (17) ja summa (40) suurenevad iga aastaga. On selge, et summa saab kaks korda suuremaks igast liidetavast, kui mõlemad liidetavad saavad isekeskis võrdseks ja kumbki neist on 23, see aga on 23—17 ehk 6 aasta pärast. Isa saab tõepoolest 6 aasta pärast vanaks 40 + 6 ehk 46 aastat, pojal on siis 17 + 6 ehk 23 aastat.

Tähendab, näide, mis on toodud, et motiveerida võrrandite võtet ülesannete lahendamisel, pole veenev: ülesanne lahendub aritmeetiliselt lihtsamini kui algebraliselt. On täiesti arusaadav see nõutus, mis õpilastel tekib sellise argumentatsiooni puhul. Seepärast on kasulik illustreerida vahet aritmeetilise ja algebralise ülesannete lahendusviisi vahel rea vastavate ülesannetega.

N ä i d e 1. „Kahekohalise arvu ristsumma on 12. Kui otsitavast arvust lahutada 18, siis saadakse arv, milles on samad numbrid vastupidises järjekorras. Leida see arv." (Šapošnikov ja Valtsov, I osa, VI peatükk, nr. 415.)

Selle ülesande algebralisele lahendusele peab eelnema aritmeetiline lahendus, sest ülesanne on algajaile ebaselge ja seletusi on kergem anda aritmeetilisest vaatekohast.

Selgitamiseks kirjutame üles rea kahekohalisi arve ja leiame vahed nende arvude ning arvude vahel, mis on kirjutatud samade numbritega, ainult vastupidises järjekorras.

Näidete najal tehakse kindlaks, et need vahed jaguvad üheksaga ja igas vahes on niipalju üheksaid, kui suur on kümneliste ja üheliste vahe. Pärast selle fakti selgitamist ja põhjendamist lahendub ülesanne puht-aritmeetiliselt: et ristsumma on 12 ja kümneliste ning üheliste arvude vahe on 18 : 9 = 2, siis otsitavas arvus on kümnelisi (12 + 2) : 2 ehk 7 ja ühelisi (12 — 2) : 2 = 5.

Alles pärast seda tuleb üle minna algebralisele lahendamisele.

Näide 2. Ülesanne nr. 484. „Kahekohalise arvu ristsumma on 9. Kui selle arvu numbrid ümber paigutada, siis saadud arv on $\frac{4}{7}$ esialgsest arvust. Leida arv."

Alustame aritmeetilisest lahendusest. Õpilastele tehakse ettepanek kirjutada mistahes kahekohaline arv, siis numbrid ümber paigutada ja liita mõlemad arvud. Mõne näitega selgitatakse, et kõik saadud summad jaguvad 11-ga, seejuures on niiviisi võetud kahe arvu summa võrdne iga liidetava ristsumma 11-kordsega. Seda fakti teades võib väita, et otsitava arvu summa arvuga, milles on samad numbrid vastupidises järjekorras, võrdub $11 \cdot 9 = 99$; nende arvude suhe aga on $\frac{4}{7}$. Järelikult tuleb lahendada järgmine ülesanne: kahe arvu summa on 99, nende suhe on $\frac{4}{7}$; esimene arv võrdub $\frac{99 \cdot 4}{4+7}$ ehk $\frac{99 \cdot 4}{11} = 36$, teine aga $\frac{99 \cdot 7}{4+7} = 9 \cdot 7 = 63$.

Pärast seda võib asuda ülesannet lahendama algebraliselt. Olgu otsitava arvu üheliste arv x ja kümneliste arv y; siis otsitav arv võrdub $10y + x$, samade numbritega vastupidises järjekorras kirjutatud arv aga on $10x + y$; koostame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{10x + y}{10y + x} = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Lahendame koostatud süsteemi:

$$70x + 7y = 40y + 4x; \quad 66x = 33y; \quad 2x = y;$$
$$2x + x = 9; \quad 3x = 9; \quad x = 3; \quad y = 2 \cdot 3 = 6.$$

Otsitav arv on 63.

Kaht viimast ülesannet aritmeetilise võttega lahendades tutvuvad õpilased kahe tähtsa faktiga arvuteooriast, nimelt esiteks sellega, et kaks kahekohalist arvu, millest üks on kirjutatud samade numbritega mis teine, aga ainult vastu-

pidises järjekorras, annavad summas arvu, mis võrdub 11 ja kummagi arvu ristsumma korrutisega, ning teiseks sellega, et kahe niisuguse arvu vahe võrdub 9 ja nende arvude numbrite vahe korrutisega. Need kaks fakti, millede tundmine on iseenesest hinnatav, jäävad algebralisel lahendusviisil tähele panemata.

Näide 3. Ülesanne nr. 501. „Kui otsitav kahekohaline arv jagada arvuga, mis on kirjutatud samade numbritega, ainult vastupidises järjekorras, siis jagatises saadakse 1 ja jäägis 9; kui aga otsitav arv jagada oma ristsummaga, siis jagatis on 5 ja jääk 11. Leida arv."

Aritmeetiline lahendus.

Otsitava kahekohalise arvu jagamisel arvuga, mis on kirjutatud samade numbritega, kuid vastupidises järjekorras, saadakse jagatises 1 ja jäägis 9; see tähendab, et otsitav arv on teisest arvust suurem 9 võrra; järelikult on selles kümnelisi 9 : 9 ehk ühe võrra rohkem kui ühelisi.

Otsitava arvu jagamisel selle ristsummaga saadakse jagatises 5 ja jäägis 11. Järelikult, kui otsitavast arvust lahutada 11, siis vahe peab jaguma 5-ga. Selleks et arv jaguks viiega, peab arvu viimaseks numbriks olema kas 5 või 0. Viimane number null olla ei saa, sest vastasel korral oleks see number enne 11 lahutamist pidanud olema 1; esimese tingimuse tõttu on kümneliste arv ühe võrra suurem üheliste arvust, s. o. kümnelisi oleks pidanud olema 2; aga siis arvu jagamisel $1 + 2 = 3$-ga jääk ei oleks saanud olla 11. Seepärast on viimane number pärast 11 lahutamist 5 ja enne lahutamist 6. Järelikult otsitavas arvus on 6 ühelist ja $6 + 1$ ehk 7 kümnelist, s. o. otsitav arv on 76.

Kontroll. 76 jagamisel 67-ga saadakse jagatises 1 ja jäägis 9. 76 jagamisel $6 + 7$ ehk 13-ga saadakse jagatises 5 ja jäägis 11.

Algebraline lahendus.

Sisaldagu otsitav arv x kümnelist ja y ühelist, s. o. võrdugu $10x + y$-ga. Arv, mis on kirjutatud samade numbritega, aga vastupidises järjekorras, on $10y + x$. Vastavalt esimesele tingimusele $10x + y = 10y + x + 9$ ehk $9x - 9y = 9$ ehk $x - y = 1$. (1)

Vastavalt teisele tingimusele $10x + y = 5(x + y) + 11$; $10x + y = 5x + 5y + 11$ ehk $5x - 4y = 11$. (2)

Lahendame süsteemi $\begin{cases} x - y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$

$x = y + 1$; $5(y + 1) - 4y = 11$; $5y + 5 - 4y = 11$; $y = 6$;

$x = y + 1 = 6 + 1$; $x = 7$.

Otsitav arv on 76.

Läbiarutatud ülesanded näitavad, et mõnikord aritmeetiline lahendus langeb algebralise lahendusega idee poolest ühte, aga erineb kujundamise poolest, teine kord aga mõlemad lahendused lähevad eri teed. Lahenduse parema selgitamise huvides on soovitav läbi arutada mõlemad lahendused.

Ülesande lahendamisel ühe võrrandi abil võetakse põhiotsitavaks see otsitav arv, mis ei muutu kõigis ülesande seostes, Aritmeetilistest ülesannetest, milledes esinevad jäävad arvud, kas antud või otsitavad, on õpilastele tuttavad ülesanded päri- ja pöördvõrdelise olenevuse kohta. Nii ühes kui ka teises olenevuses on jäävad võrdetegurid; esimesel juhul võrdub võrdetegur kahe arvu jagatisega, teisel juhul arvude korrutisega.

N ä i d e 4. Võtame järgmise ülesande.

„Osteti 74 kg kolme sorti jahu: 4,8 rubla, 4 rubla ja 3,2 rubla kg. Summad, mis kulutati iga jahusordi ostmiseks, on isekeskis võrdsed. Kui palju osteti jahu igast sordist?"

Algebraline lahendus.

Antud ülesande andmetes on jäävaks arvuks rahasumma, mis kulutati iga sordi ostmiseks. Seepärast tulebki põhiotsi-

tavaks võtta rahasumma. Tähistame x-ga rahasumma, mis kulutati iga jahusordi ostmiseks. Järelikult esimest sorti osteti $\frac{x}{4{,}8}$ kg, teist sorti $\frac{x}{4}$ kg ja kolmandat sorti $\frac{x}{3{,}2}$ kg. Kokku osteti 74 kg, seepärast

$$\frac{x}{4{,}8}+\frac{x}{4}+\frac{x}{3{,}2}=74.$$

$$\frac{10x}{48}+\frac{x}{4}+\frac{10x}{32}=74.$$

$$20x+24x+30x=74\cdot 96;$$

$$74x=74\cdot 96;\quad x=96.$$

Seega iga jahusort maksab 96 rubla. Esimest sorti osteti $96:4{,}8$ ehk 20 kg, teist sorti $96:4$ ehk 24 kg, kolmandat sorti $96:3{,}2=30$ kg.

Aritmeetiline lahendus.

Ühe rubla eest võib esimest sorti osta $1:4{,}8$ kg ehk $\frac{5}{24}$ kg, teist sorti $1:4$ kg ehk $\frac{1}{4}$ kg ja kolmandat sorti $1:3{,}2$ kg ehk $\frac{5}{16}$ kg; et aga rahasummad, mis kulutati iga sordi peale, olid võrdsed, siis tuleb 74 jagada kolme osa võrdeliselt arvudega $\frac{5}{24}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$ ehk 10, 12, 15.

$$\frac{74\cdot 10}{10+12+15}=20 \text{ kg esimest sorti,}$$

$$\frac{74\cdot 12}{10+12+15}=24 \text{ kg teist sorti ja}$$

$$\frac{74\cdot 15}{10+12+15}=30 \text{ kg kolmandat sorti.}$$

N ä i d e 5. „4 kaevandust leppisid omavahel kokku. Esimene kohustus tootma $\frac{1}{2}$ kolme ülejäänu toodangust, teine $\frac{1}{3}$ kolme ülejäänu toodangust, kolmas $\frac{1}{4}$ kolme ülejäänu toodangust ja neljas ülejäänud 650 tonni. Leida kogutoodang ja kolme esimese kaevanduse osatoodang iga kaevanduse kohta."

Jäävaks arvuks on kõigi kaevanduste kogutoodang. Tähistame: x on kogutoodang; siis on esimese kaevanduse toodang $\frac{x}{1+2}$, teisel kaevandusel $\frac{x}{1+3}$, kolmandal $\frac{x}{1+4}$. Koostame võrrandi:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+650=x;$$
$$20x+15x+12x+650\cdot 3\cdot 4\cdot 5=3\cdot 4\cdot 5x;$$
$$47x+650\cdot 60=60x;$$
$$650\cdot 60=13x.$$
$$x=\frac{650\cdot 60}{13};\quad x=3000.$$

Kõigi kaevanduste kogutoodang on 3000 t; esimese kaevanduse toodang on $\frac{x}{3}$, s. o. $\frac{3000}{3}$ ehk 1000 t; teise kaevanduse toodang on $\frac{x}{4}$, s. o. $\frac{3000}{4}$ ehk 750 t, ja kolmanda kaevanduse toodang on $\frac{3000}{5}$ ehk 600 t.

Aritmeetiline lahendus.

Olgu kõigi kaevanduste kogutoodang 1. Et esimene kaevandus kohustus täitma $\frac{1}{2}$ kolme ülejäänu toodangust, s. o. esimese kaevanduse 1 t kohta annavad ülejäänud 2 t, siis esimene kaevandus annab $\frac{1}{1+2}$ ehk $\frac{1}{3}$ üldisest toodangust. Analoogiliselt teine kaevandus annab $\frac{1}{1+3}$ ehk $\frac{1}{4}$ üldisest toodangust, kolmas $\frac{1}{1+4}$ ehk $\frac{1}{5}$ üldisest toodangust. Tähendab, kolm esimest kaevandust annavad $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20+15+12}{60}=$ $=\frac{47}{60}$ üldisest toodangust. Järelikult neljanda kaevanduse toodang on $1-\frac{47}{60}$ ehk $\frac{13}{60}$ üldisest toodangust ja see on 650 t. Seega on kogutoodang $650:\frac{13}{60}=3000$ t. Esimese

kaevanduse toodang on $\frac{1}{3} \cdot 3000 = 1000$ t, teisel kaevandusel $\frac{1}{4} \cdot 3000 = 750$ t ja kolmandal $\frac{1}{5} \cdot 3000 = 600$ t.

Algebraline lahendusviis erineb aritmeetilisest selle poolest, et kogutoodangu tähistamiseks võetud ähmase mõiste (ühe) asemel on võetud selgem mõiste x kui otsitav. Lahenduskäik on aga samasugune ja samad on ka raskused õpilastele üleminekul kogutoodangult üksikute kaevanduste osatoodangutele. Ülesannet oleks võinud lahendada kolme otsitava ja kolmest lineaarvõrrandist koosneva süsteemi abil. Selline viis on loomulikum, kuigi väga kohmakas.

N ä i d e 6. Lahendame järgmise ülesande. „Kaugus A-st B-ni on 900 km. A-st ja B-st lähtuvad üheaegselt veo- ja sõiduauto. Esimese auto kiirus on 21 km tunnis, teise auto kiirus 57 km tunnis. Mitme tunni pärast jääb veoautol veel sõita kolm korda pikem tee kui sõiduautol?"

Aritmeetiline lahendus.

Esimene võte. Sõiduauto sõidab ühes tunnis veoautost rohkem $57 - 21 = 36$ (km). Veoautol jääb sõita kolm korda rohkem kui sõiduautol, s. o. $3 - 1 = 2$ lõiku enam. 36-km vahe moodustabki selle kahekordse lõigu; järelikult ühe lõigu kohta tuleb kiiruse suurendamist $36 : 2 = 18$ $\left(\frac{\text{km}}{\text{tund}}\right)$ võrra, s. o. kui suurendada sõiduauto kiirust 18 $\frac{\text{km}}{\text{tund}}$ võrra, siis see auto läbib kogu kauguse 900 km ajaga, mille jooksul veoauto veel sõitmisele tulev tee on võrdne kolmekordse lõiguga. Siis aga oleks sõiduauto kiirus $57 + 18 = 75$ km tunnis. Sellise kiiruse puhul läbiks sõiduauto kogu tee $900 : 75 = 12$ tunniga. Järelikult 12 tunni pärast on veomasinal veel sõita kolm korda rohkem kui sõiduautol.

Kontroll kinnitab lahenduse õigsust. 12 tunniga läbib sõiduauto $57 \cdot 12 = 684$ (km), jääb veel sõita $900 - 684 =$

$= 216$ (km). Veoauto läbib aga 12 tunniga $21 \cdot 12 = 252$ (km), jääb veel sõita $900 - 252 = 648$ (km); $648 : 216 = 3$.

Teine aritmeetiline lahendusviis rajaneb läbimisele tulevate teepikkuste võrrutamise ideele. Selleks et veoautol veel sõita tulev teepikkus oleks võrdne sõiduauto vastava teepikkusega, võib toimida kahel viisil: kas suurendada kolm korda sõiduauto tee pikkust ja auto kiirust, siis kolmekordistub ka veel sõita jäänud tee; või jagada veoauto teepikkus ja kiirus kolmeks; siis sõita jäänud teepikkus väheneb kolm korda. Lahendame esimesel viisil. Olgu sõiduauto kogu teepikkus $900 \cdot 3 = 2700$ (km), kiirus aga $57 \cdot 3 = 171$ (km tunnis). Siis kolmekordistub ka veel sõidetav teepikkus ja võrdub nüüd selle pikkusega, mis on jäänud sõita veoautol.

Niiviisi on esitatud ülesanne üle viidud järgmisele ülesandele: samast punktist lähtuvad üheaegselt veo- ja sõiduauto; veoauto kiirus on 21 km tunnis ja ta peab läbima 900 km; sõiduauto kiirus on 171 km tunnis ja läbimisele tulev teepikkus on 2700 km. Mitme tunni pärast tee, mis on veel jäänud sõita veoautol, on niisama pikk kui vastav sõiduauto tee? Sõiduauto tee on pikem veoauto teest $2700 - 900 = 1800$ (km); sõiduauto kiirus on veoauto kiirusest suurem $171 - 21 = 150$ (km tunnis); selleks et läbida 1800 (km), läheb sõiduautol tarvis aega $1800 : 150 = 12$ (tundi). Tähendab, 12 tunni pärast jääb veoautol veel sõita kolm korda rohkem kui sõiduautol.

Algebraline lahendus.

Tähistame otsitava tundide arvu x-ga. Sõiduauto sõidab x tunni jooksul $57x$ km; tal jääb veel sõita $900 - 57x$ km; veoauto sõidab $21x$ km ja tal jääb veel sõita $900 - 21x$ km; ülesande andmete põhjal $(900 - 57x) \cdot 3 = 900 - 21x$ ehk $900 - 57x = 300 - 7x$; $50x = 600$; $x = 12$.

Võrreldes läbiarutatud näidetes aritmeetilist ja algebralist lahendusviisi, võib teha järgmised järeldused.

1. Aritmeetilise lahendusviisi puhul fikseeritakse mõnikord asjaolud, mis jäävad tähelepanematuks algebralisel lahendamisel.

2. Mõnikord kulgeb algebraline meetod rööbiti aritmeetilise meetodiga, erinedes ainult lahenduse kujundamise poolest; teinekord lähevad mõlemad meetodid eri teid.

3. Et oskus lahendada algebralisi ülesandeid on koolis nõrk, siis on väga kasulik ülesannete lahendamist võrrandite abil siduda aritmeetilise lahendusviisiga; mõlema meetodi üheaegne rakendamine aitab kaasa ülesannete paremale omandamisele ja lahendamisoskuse kujunemisele. Seoses sellega, ilma et oleks tarvis aritmeetikat kuuendasse ja seitsmendasse klassi iseseisva õppeainena sisse tuua, jätkavad õpilased tegelikult aritmeetika õppimist ja omandavad need osad, mis praeguse õppekava tõttu on viiendas klassis nõrgalt omandatud. Sellist algebra kursuse läbipõimimist aritmeetikaga on kasulik ka edaspidi jätkata. Rööbiti arusaamise suurenemisega võib valgustada ka neid küsimusi teoreetilisest aritmeetikast, mida polnud võimalik küllaldaselt läbi arutada õpilaste puuduliku arenemise tõttu viiendas klassis.

N ä i d e 7. „Leida kuuekohaline arv järgmiste andmete põhjal. Arv lõpeb 2-ga. Kui 2 paigutada esimesele kohale, siis saadakse arv, mis on kolm korda väiksem otsitavast arvust."

Algebraline lahendus.

Otsitavale arvule võib vaadata kui arvule, mis koosneb kahest osast: mingist viiekohalisest arvust ja kahest, mis kirjutatakse selle viiekohalise arvu lõppu. Tähistame selle viiekohalise arvu x-ga; kui selle arvu lõppu kirjutada 2, siis otsitav arv väljendub nii: $10x + 2$.

Kui aga 2 kirjutada viiekohalise arvu x ette, siis on see

samaväärne arvu x liitmisega arvule $2 \cdot 100\,000$ ehk 200 000. Järelikult, kui kaks on kirjutatud arvu x ette, siis arv võrdub $200\,000 + x$-ga. Ülesande põhjal

$$10x + 2 = 3 \cdot (200\,000 + x).$$

Võrrandi lahendus: $10x + 2 = 3(200\,000 + x)$ annab $10x + 2 = 600\,000 + 3x$; $10x - 3x = 600\,000 - 2$; $7x = 599\,998$; $x = 85\,714$.

„Tähega x on tähistatud viiekohaline arv. Kui selle arvu lõppu kirjutada 2, saame otsitava arvu 857 142."

Aritmeetiline lahendus.

Ülesannet saab lahendada puht-aritmeetiliselt. Tõepoolest, otsitavale arvule võib vaadata kui mõne kuuekohalise arvu korrutisele kolmega, teades, et korrutatava arvu esimene number on 2. Korrutise viimase numbri, s. o. 2, võis saada kolme korrutamisel ainult neljaga; tähendab, kuuekohalises korrutises kahe ees seisab neli. Edasi, kümneliste arv neli sisaldab ka selle ühe, mis saadi pärast nelja korrutamist kolmega; järelikult $4 - 1 = 3$ võis tulla ainult ühe korrutamisel kolmega; järelikult sajaliste arv on 1; sajalistes võis ühe saada ainult seitsme korrutamisel kolmega; järelikult tuhandeliste arv on 7, aga tuhanded sisaldavad ka selle kahe, mis saadi seitsme korrutamisel kolmega; tähendab, tuhandeliste arvu korrutamisel kolmega saadakse viimane number $7 - 2 = 5$; 5 võidi aga saada viie korrutamisel kolmega; järelikult otsitavas arvus on kümnetuhandelisi 5; viie hulka kuulub ka see 1, mis saadi viie korrutamisel kolmega; tähendab, kümnetuhandeliste arvu korrutamisel saadi korrutis, mis lõpeb $5 - 1 = 4$-ga, aga 4 võidi saada ainult 8 korrutamisel kolmega; järelikult sajatuhandelisi on 8, aga 8 saadi kahe korrutamisel kolmega ja selle kahe juurdelisamisel, mis saadi 8 kümnetuhandelise korrutamisel kolmega. Järelikult otsitav arv on 857 142 ja see saadi arvu 285 714 korrutamisel 3-ga.

§ 99. Illustratsiooni osa võrrandite koostamisel.

Võrrandite koostamist kergendab mõnikord andmete graafiline kujutamine. Kui ülesanne käsitleb liikumist, on kasulik kujutada läbitud teed ja vahemaad joonlõikudena; selline kujutamine selgitab seoseid suuruste vahel. Selgitame ühe näite najal geomeetrilise illustratsiooni kasu võrrandite koostamisel.

N ä i d e 1. Ülesanne. „Ruudukujulise maatüki pindala on 550 m² suurem ristküliku-kujulise maatüki pindalast. Ristküliku pikkus on 10 m võrra suurem ja laius 15 m võrra väiksem ruudu küljest. Leida ruudukujulise maatüki pindala."

Võtame otsitavaks mitte ruudu pindala, vaid ruudu külje. Ruudu külg on meetrites x ja pindala ruutmeetrites x^2.

Ristküliku pikkus on $(x+10)$ ja laius $(x-15)$, ristküliku pindala on $(x+10)(x-15)$. Ülesande põhjal

$$x^2 = (x+10)(x-15)+550.$$

Siit

$$x^2 = x^2 - 5x - 150 + 550;\ 5x = 400;\ x = 80.$$

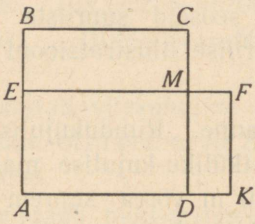
Tähendab, ruudu külg on 80 m ja pindala 6400 m². Ristküliku pikkus on 90 m ja laius 65 m; ristküliku pindala on 5850 m², s. o. ruudu pindalast 550 m² väiksem.

Selle ülesande lahendamisel muutus ruutvõrrand pärast sarnaste liikmete koondamist lineaarvõrrandiks. Tekib küsimus: kas pole võimalik kohe koostada lineaarvõrrandit?

Olgu $ABCD$ otsitav ruut (joon. 22), mille külg on x. Olgu $AEFK$ ristkülik; seejuures olgu tema pikkus $AK = x + 10$ ja kõrgus $AE = x - 15$. Mõlema kujundi pindaladel on ühine pindala $AEMD$. Ruudu pindala võib ristküliku pindalast 550 m² võrra suurem olla ainult sel korral, kui ristküliku $BCME$ pindala on suurem ristküliku $MFKD$ pindalast 550 m² võrra. $BCME$ pindala võrdub BC ja BE korrutisega

ehk $x \cdot 15$. Ristküliku $MFKD$ pindala võrdub DK ja MD korrutisega, s. o. $10(x - 15)$. Tähendab, $15x = 10(x - 15) + 550$.

$3x = 2(x - 15) + 110$; $3x = 2x - 30 + 110$; $x = 80$.

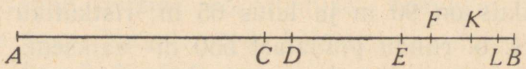


Joon. 22.

Niisiis, geomeetriline illustratsioon seletab lineaarvõrrandi saamist ja näitab, et ühise pindala $AEMD$ kõrvaldamine mõlemast kujundist on sarnaste liikmete koondamise geomeetriliseks ekvivalendiks.

Näide 2. Ülesanded nr. 419 ja 436 (Šapošnikov ja Valtsov, I osa, VI peatükk).

Mõlemad ülesanded on oma ehituselt sarnased, sisaldavad samu arve ja nende lahendused on ühesugused.



Joon. 23.

„Nööri otsast lõigati ära $\frac{1}{2}$ nööri ja $\frac{1}{2}$ cm, siis lõigati järelejäänud nöörist jälle $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$ cm, lõpuks lõigati ära uuesti jäägist $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$ cm, pärast seda jäi nöörist järele 6 cm. Kui pikk oli nöör?"

Võtame mingi lõigu AB (joon. 23); olgu selle keskkoht C; ehitame lõigu AD, mis võrdub AC (s. o. pool AB-st) pluss

$CD = \frac{1}{2}$ cm. Jäägiga DB teeme sama. Olgu E DB keskkohaks; ehitame lõigu $DF = DE + EF$, kus $EF = \frac{1}{2}$ cm, s. o. DF võrdub $\frac{1}{2}$-ga jäägist ja veel $\frac{1}{2}$ cm.

Lõpuks jagame FB pooleks punktis K ja lisame juurde $KL = \frac{1}{2}$ cm; siis ülesande põhjal peab LB võrduma 6 cm-ga.

Tähendab, $LB = 6$ cm; $KB = 6 + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$ cm.

$$FB = 6\frac{1}{2} \cdot 2 = 13 \text{ cm};$$

$$BE = 13 + \frac{1}{2} = 13\frac{1}{2} \text{ cm};$$

$$DB = 13\frac{1}{2} \cdot 2 = 27 \text{ cm};$$

$$CB = 27 + \frac{1}{2} = 27\frac{1}{2} \text{ cm};$$

$$AB = 27\frac{1}{2} \cdot 2 = 55 \text{ cm}.$$

Sel viisil ülesande geomeetriline illustratsioon mitte ainult ei anna vahenditut aritmeetilist lahendust, vaid kergendab ka võrrandi koostamist.

Tõepoolest, olgu $AB = x$ cm, siis $AC = \frac{1}{2}x$; $AD = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

$$DB = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2};\ DE = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4};$$

$$DF = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4};$$

$$FB = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4};$$

$$FK = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8};$$

$$FL = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8};$$

$$LB = FB - FL = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}x - \frac{7}{8}.$$

Koostame võrrandi

$$\frac{1}{8}x - \frac{7}{8} = 6.$$

$$x - 7 = 48; \quad x = 55 \text{ cm}.$$

§ 100. Võrrandi lahendite vastavuse kontroll ülesande andmetele.

Lahendanud ülesande andmete põhjal koostatud lineaarvõrrandi ühe otsitavaga, tuleb veel tingimata kontrollida, kas võrrandi lahendid vastavad ülesandele. See on tingimata tarvilik järgmistel kaalutlustel.

Võrrandi lahendamisel leitakse lahendid lubatud väärtuste määratud vallas. Võib aga osutuda, et otsitav arv ülesande mõtte järgi peab kuuluma mõnesse teise, enam piiratud väärtuste valda kui see piirkond, kuhu kuuluvad võrrandi lahendite lubatud väärtused. Sel korral on tarvis võrrandi lahendeist võtta need, mis rahuldavad ülesande andmeid; ülejäänud võrrandi lahendid tuleb kõrvaldada. Võib juhtuda, et võrrandil on lahend, aga ülesandel pole. Selgitame seda näidete abil.

N ä i d e. „Tehases töötab 300 töölist; naiste arv on $\frac{3}{5}$ meeste arvust. Mitu meest ja mitu naist töötab tehases?"

1) Meeste ja naiste arv kokku on 300.

Tähistame meeste arvu x-ga ja naiste arvu y-ga, saame

$$x + y = 300;$$

et aga

$$y = \frac{3}{5}x,$$

siis

$$x + \frac{3}{5}x = 300.$$

2) Võrrandi lahendamine annab

$$\frac{8}{5}x = 300;\quad x = \frac{300 \cdot 5}{8};\quad x = 187{,}5.$$

Võrrandi lahend on 187,5. Et aga sellega võrdub meeste arv ja meeste arv ei või olla murdarv, siis arv 187,5 rahuldab küll võrrandit, aga mitte ülesande nõudeid. Seepärast ülesandel lahendit pole.

Järeldus: isegi juhtudel, kus võrrandi lahend ei kutsu esile kahtlust, tuleb kontrollida võrrandi lahendi vastavust ülesande nõuetele.

Ülesanded liigsete andmetega.

Mõnikord esineb ülesandeid, milles on liigseid andmeid. Sellised ülesanded on tarvis üksikasjaliselt läbi arutada, näidates, mis on ülesandes liigne ja millised andmed on tarvilikud ja piisavad.

Näide 1. Ülesanne nr. 46 (Auber'i ja Papelier' ülesannetekogu, lk. 207). „Leida kolmekohaline arv, kui on teada, et selle sajaliste arv on $\frac{3}{5}$ üheliste arvust ja kümneliste arv võrdub üheliste ning sajaliste arvu poole summaga. Kui otsitavale arvule liita 198, siis saadakse arv, mis on kirjutatud samade numbritega, aga vastupidises järjekorras."

Kui sajaliste arv võrdub $\frac{3}{5}$-ga üheliste arvust, siis üheliste arv peab jaguma viiega ja, tähendab, võib olla kas 0 või 5. Null tuleb kõrvaldada, sest numbrite ümberpaigutamisel ei saada muidu kolmekohalist arvu. Järelikult üheliste arv on 5, sajaliste arv on $\frac{3}{5} \cdot 5 = 3$ ja kümneliste arv on $\frac{3+5}{2} = 4$. Otsitavaks arvuks saame 345. Ülesande viimased andmed arvu 198 liitmisest osutuvad liigseiks, sest ülesanne lahendatakse ilma võrrandita lihtsamalt.

Näide 2. Ülesanne nr. 437 (Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk). „Töölised said 120 rubla. Kui neid oleks olnud 4 võrra vähem, siis igaüks oleks saanud 3 korda rohkem. Kui palju oli töölisi?" Ülesandes on liigne 120 rubla. Tõepoolest, olgu üldine summa a rubla, aga mitte 120 rubla. Tähistades tööliste arvu x-ga saame võrrandi $\frac{3a}{x} = \frac{a}{x-4}$, pärast taandamist $\frac{3}{x} - \frac{1}{x-4}$; siit $3x - 12 = x$; $2x = 12$; $x = 6$.

Seega 120 rubla on liigne.

§ 101. Ülesannete valikust võrrandite koostamise peale.

Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogus 1) puudub süsteem ülesannete järjestuses, ülesanded ei ole paigutatud suureneva raskuse järjekorras; 2) on toodud ülesandeid, millede aritmeetiline lahendus on palju lihtsam lahendusest võrrandite koostamise abil. Keerulisema võtte rakendamine juhtudel, kui lihtsamad võtted on käepärast, kutsub õpilastes esile arusaadava kahtluse: milleks on tarvis lihtsat võtet asendada keerulisemaga? Ülesannete hulka, millede aritmeetiline lahendus on lihtne, kuuluvad ülesanded nr. 371, 372, 376, 378, 379, 399, 402, 403, 404, 429, 515 jne.; 3) mõned ülesanded lahenduvad võrdlemisi kergesti, triviaalselt.

Sageli soovitatakse ülesandeid lahendada niisuguses järjekorras.

1. Alustatakse ülesandeist, millede lahendus viib võrranditele, kus vasak pool sisaldab mitut otsitavat ja paremal poolel on mingi arv. Näiteks võib olla ülesanne hanedest; selle ülesande lahendamiseks koostatakse võrrand:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100.$$

2. Siis võib siirduda ülesannete lahendamisele, kus x-i sisaldavad avaldised võrrutatakse otsitavaga. Näidetena võivad olla nr-d 422, 427, 434, 435, 436.

3. Ülesanded, mis viivad niisuguste võrrandite koostamisele, kus võrrandi mõlemal poolel on x-i sisaldavad avaldised, teiste sõnadega ülesanded, kus võrrutatakse kaks ühe ja sama arvu avaldist, — nr. 377, 386, 387, 429.

4. Mõnevõrra keerulisemad seda tüüpi ülesanded on nr. 412 ja 452.

5. Lõpuks tuleb üle minna keerulisemate ülesannete juurde; nende keerulisemate ülesannete lahendamiseks tarvisminevate võrrandite koostamine nõuab ülesande tõsist ja süvenenud läbimõtlemist. Selle küsimuse puhul võib tähendada järgmist. Soovitatav skeem ei käi mitte võrrandite koostamisel, vaid saadud võrrandite lahendamisel tekkinud raskuste ületamise kohta. Toome järgmise näite keerulisema ülesande kohta. „Klassi ilmunud õpilaste arv on suurem puuduvate õpilaste arvust $\frac{2}{3}$ kõikide õpilaste arvu võrra. Pärast seda kui ilmunud õpilastest lubati koju 4, oli tundi jäänud õpilaste arv suurem puuduvate õpilaste arvust arvu võrra, mis moodustab 50% klassi kõigi õpilaste arvust. Kui suur on klass?"

Ülesandes on kaks seost:

1) klassi ilmunud õpilaste arv võrdub puuduvate õpilaste arvuga pluss $\frac{2}{3}$ kõigi õpilaste arvust;

2) klassi ilmunud õpilaste arv pärast nelja õpilase äralubamist võrdub puuduvate õpilaste arvuga pluss 50% kõigi õpilaste arvust.

Võtame võrrandi koostamisel aluseks teise seose.

Tähistame x-ga õpilaste üldarvu ja kasutame esimest seost teiste ülesandes esinevate suuruste väljendamiseks x kaudu. Süveneme tähelepanelikult esimesse seosesse. Klassi ilmunud õpilaste arv on suurem puuduvate õpilaste arvust $\frac{2}{3}x$ võrra, teiste sõnadega, kahe arvu summa on x, aga nende vahe on $\frac{2}{3}x$. Aritmeetikast tuntud võttega, mille abil leitakse

arvud nende summa ja vahe põhjal, saame suuremale arvule, s. o. klassi ilmunud õpilaste arvule, avaldise $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}x\right)$ ehk $\frac{1}{2}\cdot\frac{5x}{3}=\frac{5}{6}x$ ja väiksemale arvule, s. o. puuduvate õpilaste arvule, avaldise $\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}x\right)$ ehk $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}x$.

Tähendab, klassi oli esialgu ilmunud $\frac{5}{6}x$ ja puudus $\frac{1}{6}x$.

Pärast nelja õpilase äralubamist oli klassis õpilasi $\frac{5}{6}x-4$ ja puudus $\frac{1}{6}x+4$. Teise seose põhjal koostame võrrandi:

$$\frac{5}{6}x-4=\frac{1}{6}x+4+\frac{1}{2}x.$$

Vabastame võrrandi nimetajaist, koondame sarnased liikmed ja viime võrrandi normaalkujule, saame järjestikku:

$$5x-24=x+24+3x;$$
$$5x-x-3x=24+24;$$
$$x=48.$$

Järelikult õpilaste üldarv klassis oli 48. Kontroll näitab, et võrrandi lahend rahuldab ülesande tingimusi.

Tõepoolest, esialgu puudus $\frac{1}{6}\cdot 48$ ehk 8 õpilast, klassis viibis 40 õpilast; ilmunud õpilaste arv on suurem puuduvate õpilaste arvust $40-8$ ehk 32 võrra, mis moodustab $\frac{32}{48}=\frac{2}{3}$ klassi üldarvust.

Pärast seda, kui oli ära lubatud 4 õpilast, oli klassis $40-4$ ehk 36 õpilast ja puudus $8+4$ ehk 12 õpilast; klassis viibinud õpilaste arv on suurem puuduvate õpilaste arvust $36-12$ ehk 24 õpilase võrra, s. o. $\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$ ehk 50% kõigi õpilaste arvust.

Vaadeldes ülesandeid võrrandite koostamise kohta Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogust temaatika seisukohalt, võime ära märkida järgmised ülesannete liigid.

1. Ülesanded seose kohta, mis on olemas jagatava, jagaja, jagatise ja jäägi vahel.

2. Ülesanded seose kohta, mis on olemas arvu ja seda väljendavate numbrite vahel.

3. Väga väike arv ülesandeid protsentide kohta, peamiselt üht tüüpi.

4. Väike arv ülesandeid liikumise kohta.

5. Mõningad ülesanded mehaanika valemite rakendamise kohta (kangid), mõni ülesanne erikaalu kohta.

6. Mõni ülesanne sulamite ja segude kohta.

7. Ülesanded mitmesugustelt aladelt.

Võrreldes mõnede tõlgitud ülesannetekogudega puuduvad üldse ülesanded hulkliikmete kohta, mitteküllaldaselt täielikult on esitatud ülesandeid sulamite, segude, lahuste, protsentide ja ühtlase liikumise kohta. Kõiki neid alasid tuleb süstemaatiliselt täiendada, näiteks ülesannetega Auber'i ja Papelier' õpikust.

§ 102. Kolme otsitavaga kolme lineaarvõrrandi süsteem.

Kolme otsitava määramiseks on harilikult tarvis kolm võrrandit. Tuleb tõestada näite varal, et kahest lineaarvõrrandist kolme otsitavaga ei piisa otsitavate määramiseks. Selleks võib võtta näiteks süsteemi

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ x + 2y + 3z = 10 & (2) \end{cases}$$

Eemaldame x, lahutades esimese võrrandi teisest; saame:

$$y + 2z = 4;$$

siit

$$y = 4 - 2z. \qquad (3)$$

Eemaldame y; selleks korrutame võrrandi (1) kahega; saame

$$2x + 2y + 2z = 12.$$

Lahutades viimasest võrrandist teise, saame $x - z = 2$, siit

$$x = 2 + x. \qquad (4)$$

Saadud võrdused (3) ja (4) väljendavad x ja y z kaudu, s. o. nad näitavad x ja y olenevust z-st, kuid nende abil ei saa määrata z. Asetades z asemele meelevaldsed väärtused, saame x-le ja y-le erinevad väärtused:

$$z = 0,\ y = 4,\ x = 2,$$
$$z = 1,\ y = 2,\ x = 3,$$
$$z = 2,\ y = 0,\ x = 4,$$
$$z = 3,\ y = -2,\ x = 5 \text{ jne.}$$

Iga väärtuste kolmik rahuldab igaüht antud kahest võrrandist, milles võib vahenditult veenduda asendamisega. Järelikult antud süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Säärast võrrandisüsteemi nimetatakse määramatuks.

Kolme otsitavaga kolme võrrandi süsteemi lahendiks nimetatakse neid otsitavate väärtusi, mis üheaegselt rahuldavad kõiki süsteemi võrrandeid. Kolme otsitavaga kolme võrrandi süsteemi definitsioon on analoogiline kahe otsitavaga kahe võrrandi süsteemi definitsioonile.

Kas kolme lähtevõrrandi süsteem on samaväärne kolme lõppvõrrandi süsteemiga? Vastuseks küsimusele arutame näidet.

Võtame kolme võrrandi süsteemi:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 & (F_1) \\ x - y = 0 & (F_2) \\ y - z = 0 & (F_3) \end{cases} \qquad (I)$$

Teine ja kolmas võrrand näitavad, et $x = y$, $y = z$; kõigi kolme otsitava väärtused on isekeskis võrdsed; esimene võrrand aga näitab, et kolme otsitava väärtuste summa on 3; järelikult $x = y = z = 1$.

Saame lõppsüsteemi järgmisel viisil: koostame lõppsüsteemi esimese võrrandi kujul $F_1 + 2F_2 + 2F_3 = 0$, teise võrrandi kujul $F_1 - F_2 + F_3 = 0$ ja kolmanda võrrandi kujul $2F_1 + F_2 + 3F_3 = 0$.

Asetades F_1, F_2, F_3 asemele vastavad väärtused, saame järgmised kolm võrrandit:

$$x + y + z - 3 + 2(x - y) + 2(y - z) = 0$$

ehk pärast lihtsustamist: $3x + y - z = 3 = 0$;

$$x + y + z - 3 - (x - y) + (y - z) = 0$$

ehk pärast lihtsustamist: $3y - 3 = 0$;

$$2(x + y + z - 3) + (x - y) + 3(y - z) = 0$$

ehk pärast lihtsustamist: $3x + 4y - z - 6 = 0$.

Niisiis on saadud järgmine lõppsüsteem:

$$\begin{cases} 3x - y - z - 3 = 0 \\ 3y - 3 = 0 \\ 3x + 4y - z - 6 = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Kas lõppsüsteem (II) on samaväärne lähtesüsteemiga (I)? Väärtused $x = y = z = 1$, mis rahuldavad süsteemi (I), rahuldavad ka süsteemi (II); aga süsteemi (II) rahuldavad ka teised otsitavate väärtused, näiteks $x = 2$, $y = 1$, $z = 4$, lähtevõrrandeid aga need väärtused ei rahulda.

Niisiis kõik otsitavate väärtused, mis rahuldavad lähtesüsteemi, rahuldavad ka iga lähtesüsteemist saadud võrrandit, järelikult ka kogu lõppsüsteemi. Pöördjäreldus on üldiselt õige, aga võib esineda juhtumeid, kus otsitavate väärtused, mis rahuldavad lõppsüsteemi, ei rahulda lähtesüsteemi.

Lähemalt vaadates lõppsüsteemi (II) näeme, et kui $y = 1$, siis esimene võrrand võtab kuju $3x - z - 2 = 0$ ja ka kolmas võrrand võtab sama kuju: $3x - z - 2 = 0$; niiviisi on süsteemis (II) mitte kolm üksteisest olenematut võrrandit, vaid ainult kaks.

§ 103. Kolme otsitavaga kolme lineaarvõrrandi süsteemi lahendamine üldkujul.

Lahendame nüüd kolme otsitavaga kolme võrrandi süsteemi üldkujul:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Esitatud süsteemis on a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 antud arvud, seejuures on tähed a x kordajad, tähed b y kordajad ja tähed c z kordajad; tähed d on vabaliikmed; indeksid 1, 2, 3 tähtede juures näitavad, millisesse võrrandisse kuulub antud kordaja; näiteks b_3 on y kordaja kolmandas võrrandis.

Püstitagem järgmine küsimus: kas pole võimalik teostada antud võrranditega niisuguseid teisendusi, millede tagajärjel oleks võimalik kõrvaldada üheaegselt kaks otsitavat, näiteks y ja z?

Näitame, et y ja z kõrvaldamiseks kõigist kolmest võrrandist ja järelikult x määramiseks on piisav korrutada esimese võrrandi kõik liikmed kaksliikmega

$$b_2c_3 - b_3c_2,$$

teise võrrandi liikmed kaksliikmega

$$b_3c_1 - b_1c_3,$$

kolmanda võrrandi liikmed kaksliikmega

$$b_1c_2 - b_2c_1.$$

Pärast korrutamist saame:

$$\begin{aligned} &a_1(b_2c_3 - b_3c_2)x + b_1(b_2c_3 - b_3c_2)y + c_1(b_2c_3 - b_3c_2)z = \\ &\quad = d_1(b_2c_3 - b_3c_2); \\ &a_2(b_3c_1 - b_1c_3)x + b_2(b_3c_1 - b_1c_3)y + \\ &\quad + c_2(b_3c_1 - b_1c_3)z = d_2(b_3c_1 - b_1c_3); \\ &a_3(b_1c_2 - b_2c_1)x + b_3(b_1c_2 - b_2c_1)y + \\ &\quad + c_3(b_1c_2 - b_2c_1)z = d_3(b_1c_2 - b_2c_1). \end{aligned}$$

Saadud võrrandite vasakute poolte summa võrdub võrrandite paremate poolte summaga:

$$[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)]\,x + \\ + [b_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \\ + b_3(b_1c_2 - b_2c_1)]\,y + [c_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \\ + c_2(b_3c_1 - b_1c_3) + c_3(b_1c_2 - b_2c_1)]\,z = \\ = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Avame sulud y ja z kordajate avaldistes ja koondame sarnased liikmed:

$$[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \\ + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)]\,x + [b_1b_2c_3 - b_1b_3c_2 + \\ + b_2b_3c_1 - b_2b_1c_3 + b_3b_1c_2 - b_3b_2c_1]\,y + \\ + [c_1b_2c_3 - c_1b_3c_2 + c_2b_3c_1 - c_2b_1c_3 + \\ + c_3b_1c_2 - c_3b_2c_1]\,z = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \\ + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Kordajad y ja z juures pärast sarnaste liikmete koondamist muutuvad nulliks, sest igale liikmele plussmärgiga leidub sarnane liige miinusmärgiga; niiviisi saame võrrandist (1)

$$[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)]\,x = \\ = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

s. o. ühe võrrandi ühe otsitavaga x. Määrame sellest võrrandist x, oletades, et x kordaja $\neq 0$.

$$x = \frac{d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Avame sulud lugejas ja nimetajas, leiame:

$$x = \frac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}.$$

Selleks et leida väärtust y-le, korrutame esimese antud võrrandeist $a_2c_3 - a_3c_2$-ga, teise $a_3c_1 - a_1c_3$-ga, kolmanda $a_1c_2 - a_2c_1$-ga ja liidame võrrandid liikmeti. Kordajad x ja z juures kui nullid langevad ära. Tõepoolest, sul-

gusid avades näeme, et liikmele plussmärgiga leidub sarnane liige miinusmärgiga. Järelikult saadakse üks võrrand ühe otsitavaga.

Tulemusena leiame y-le järgmise avaldise:

$$y = \frac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}.$$

Analoogiliste arutluste ja toimingutega leiame z-le väärtuse:

$$z = \frac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 - a_2b_1d_3 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}.$$

Me näeme, et x, y ja z väärtusel on üks ja seesama nimetaja, s. o. kuusliige

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1,$$

mis on koostatud otsitavate x, y ja z kordajaist.

Kõik kuus nimetaja liiget võib saada ühest, nimelt korrutisest $a_1b_2c_3$, paigutades indeksid kõigil võimalikel kombeil ümber. Numbritest 1, 2, 3 saab kuus ümberpaigutust. Kõigepealt paigutame esialgses rühmituses 1, 2, 3 ümber kaks viimast numbrit, saame 1, 3, 2, selles viimases — kaks äärmist numbrit, saame 2, 3, 1, siis kaks viimast, saame 2, 1, 3, siis kaks äärmist, saame 3, 1, 2, siis kaks viimast, saame 3, 2, 1.

Paigutades korrutises $a_1b_2c_3$ indeksid 1, 2, 3 ümber vastavalt kirjeldatud ümberpaigutustele, saame järgmised üksliikmed:

$$a_1b_2c_3,\ a_1b_3c_2,\ a_2b_3c_1,\ a_2b_1c_3,\ a_3b_1c_2,\ a_3b_2c_1.$$

Kõik kuus liiget esinevad nimetajas, seejuures liikmed paaritutel kohtadel on plussmärgiga ja liikmed paariskohtadel miinusmärgiga.

Mis puutub x, y ja z avaldiste lugejaisse, siis võib need saada ühisest nimetajast, asendades otsitavate kordajad a, b, c vastavate vabaliikmetega, s. o. x lugeja saadakse a asenda-

misel nimetajas d-ga vastavate indeksitega, y lugeja saadakse b asendamisel nimetajas d-ga vastavate indeksitega, z lugeja saadakse c asendamisel nimetajas d-ga vastavate indeksitega. (Vt. märkus 12 raamatu lõpus.)

§ 104. Homogeensete lineaarvõrrandite süsteem.

Homogeensete lineaarvõrrandite süsteemiks kahe otsitavaga nimetatakse võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

Iga võrrandi vasak pool on otsitava x ja kordaja a_1 või a_2 ning otsitava y ja kordaja b_1 või b_2 korrutiste summa, s. o. homogeenne hulkliige x ja y suhtes. Võrrandite parem pool võrdub nulliga.

Kaks homogeenset lineaarvõrrandit x ja y suhtes on ikka ühtivad, sest neil on lahend $x = 0$ ja $y = 0$. On tähtis kindlaks teha, kas homogeensetel võrranditel on olemas ka lahendeid, mis erineksid sellest triviaalsest lahendist.

Võtame arutlusele kaks juhtu: esiteks $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ja teiseks $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Kui $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, siis süsteemil on üksainus lahend, ja et üks lahend $x = 0$ ja $y = 0$ on juba olemas, siis teist lahendit pole.

Kui $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, siis lineaarvõrrandi-süsteem on kas vasturääkiv või määramatu. Homogeensete võrrandite süsteem ei saa olla vasturääkiv, sest tal on ikka üks lahend $x = 0$ ja $y = 0$. Niisiis $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ puhul võib süsteem olla ainult määramatu, s. o. tal on lõpmata palju lahendeid.

Arutame läbi kolme otsitavaga kolme homogeense lineaarvõrrandi süsteemi lahenduse.

Näide. Tõestame, et võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 & (1) \\ x + by + b^2z = 0 & (2) \\ x + cy + c^2z = 0 & (3) \end{cases}$$

on ainus lahend $x = y = z = 0$, kui $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

Esimene lahendusviis. Otsitava x kõrvaldamine, lahutades võrrandi (2) võrrandist (1) ja siis võrrandi (3) võrrandist (1), annab

$$\begin{cases} (a-b)y + (a^2-b^2)z = 0 & (4) \\ (a-c)y + (a^2-c^2)z = 0 & (5) \end{cases}$$

Et $a \neq b$ ja $a \neq c$, siis $a - b \neq 0$ ja $a - c \neq 0$; seepärast võrrandi (4) taandamine $(a-b)$-ga ja võrrandi (5) taandamine $(a-c)$-ga annab

$$\begin{cases} y + (a+c)z = 0 & (6) \\ y + (a+b)z = 0 & (7) \end{cases}$$

Kõrvaldades y võrrandi (7) lahutamisega võrrandist (6), saame

$$(a+b-a-c)z = 0 \text{ ehk } (b-c)z = 0; \qquad (8)$$

et aga $b \neq c$, siis $z = 0$.

Asetades z asemele nulli võrrandisse (7), saame $y = 0$. Asetades z ja y asemele nulli ühesse võrrandeist (1), (2) või (3), saame $x = 0$.

Teine lahendusviis. Süsteem on homogeenne x, y ja z suhtes, sest iga võrrandi vasak pool on homogeenne hulkliige ning parem pool võrdub nulliga.

Olgu $x = kz$ ja $y = lz$. Asetades need väärtused x ja y asemele võrrandeisse (1), (2) ja (3), saame

$$\begin{cases} kz + alz + a^2z = 0 \\ kz + blz + b^2z = 0 \\ kz + clz + c^2z = 0 \end{cases}$$

Võtame z sulgude ette, saame

$$\begin{cases} z(k + al + a^2) = 0 \\ z(k + bl + b^2) = 0 \\ z(k + cl + c^2) = 0 \end{cases}$$

Siit kas $z = 0$ või $k + al + a^2 = 0$,

$$k + bl + b^2 = 0,$$
$$k + cl + c^2 = 0.$$

Näitame, et võrdused

$$k + al + a^2 = 0$$
$$k + bl + b^2 = 0$$
$$k + cl + c^2 = 0$$

räägivad vastu eeldusele $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

Kõrvaldades k saame

$$(a - b)l + a^2 - b^2 = 0; \quad (1)$$
$$(a - c)l + a^2 - c^2 = 0. \quad (2)$$

Esimesest võrdusest taandamisel $(a - b)$-ga saame

$$l + a + b = 0, \quad (3)$$

aga teisest (2) taandamisel $(a - c)$-ga

$$l + a + c = 0. \quad (4)$$

Lahutades võrrandi (4) võrrandist (3), saame $b - c = 0$ ehk $b = c$, mis aga räägib eeldusele vastu.

Niisiis $z = 0$. Asetades selle z väärtuse võrrandeisse (1) ja (2), saame kahe otsitavaga kahe lineaarvõrrandi süsteemi, milles sama võttega leiame

$$x = 0, \quad y = 0.$$

§ 105. Lihtsustustest lineaarvõrrandi-süsteemide lahendamisel.

1. Kui üks võrrandeist sisaldab kolm otsitavat, aga kaks teist võrrandit igaüks kaks otsitavat, siis saab süsteemi

lahendada lihtsamalt asendusvõttega, väljendades kaks otsitavat selle otsitava kaudu, mis esineb kõigis kolmes võrrandis.

Näide. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 80 \\ 5x - 2y = 70 \\ 3x + 2z = 80 \end{cases}$$

Väljendame y ja z x-i kaudu; teisest võrrandist leiame

$$2y = 5x - 70;$$
$$y = \frac{5x - 70}{2},$$

aga kolmandast $2z = 80 - 3x$

$$z = \frac{80 - 3x}{2}.$$

Asetades saadud y ja z väärtused esimesse võrrandisse, saame

$$x + 5x - 70 + 3 \cdot \frac{80 - 3x}{2} = 80;$$
$$2x + 10x - 140 + 240 - 9x = 160;$$
$$3x = 60; \quad x = 20.$$
$$y = \frac{100 - 70}{2} = 15.$$
$$z = \frac{80 - 60}{2} = 10.$$

2. Kui süsteemi võrrandeis otsitavad esinevad nimetajais ja igas võrrandis on mitu murdu, kusjuures mitmes võrrandis on murrud võrdsete nimetajatega, siis murrulise liikme kaotamiseks tuleb võrdsete nimetajate juures võrrutada lugejad.

Näide.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{3}{y+1}=\frac{5}{4} \\ \frac{4}{x}-\frac{7}{y+1}=\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} 4 \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4}{x}+\frac{12}{y+1}=5 \\ -\frac{4}{x}+\frac{7}{y+1}=-\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\frac{19}{y+1}=\frac{19}{4};\ y+1=4;\quad y=3.$$

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4};\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2};\ x=2.$$

Süsteemi võib lahendada ka abiotsitavate kasutamisega; olgu $\frac{1}{x}=z$; $\frac{1}{y+1}=t$; siis antud süsteemi asemel saame

$$\begin{cases} z+3t=\frac{5}{4} \\ 4z-7t=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Selle süsteemi lahendus annab $z=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{4}$; järelikult $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$; $x=2$

ja $\frac{1}{y+1}=\frac{1}{4}$; $y=3$.

3. Mõnikord on kasulik koostada tuletisvõrre.

Näide.

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ 2x+5y=52 \end{cases}$$

Koostame tuletisvõrde:

$$\frac{2x+5y}{y}=\frac{2\cdot 3+5\cdot 4}{4};\ \frac{52}{y}=\frac{26}{4};\ y=\frac{52\cdot 4}{26};\ y=8;$$

$$x=\frac{3}{4}\cdot 8;\quad x=6.$$

4. Näide.

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c};\ \frac{xz}{az+cx}=\frac{1}{b};\ \frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}.$$

Asendame antud murrud pöördmurdudega, saame

$$\begin{cases} \frac{ay+bx}{xy}=c; & \frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}=c; & \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c; & \text{(I)} \\ \frac{az+cx}{xz}=b; & \frac{az}{xz}+\frac{cx}{xz}=b; & \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=b; & \text{(II)} \\ \frac{bz+cy}{yz}=a; & \frac{bz}{yz}+\frac{cy}{yz}=a; & \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=a. & \text{(III)} \end{cases}$$

Liites võrrandid (I), (II) ja (III), saame

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=c+b+a;\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{2}. \quad \text{(IV)}$$

Lahutades võrrandi (I) liikmeti võrrandist (IV), saame

$$\frac{c}{z}=\frac{a+b+c-2c}{2};\ \frac{c}{z}=\frac{a+b-c}{2};\ z=\frac{2c}{a+b-c}.$$

Lahutades võrrandi (II) liikmeti võrrandist (IV), saame

$$\frac{b}{y}=\frac{a+b+c-2b}{2};\ \frac{b}{y}=\frac{a+c-b}{2};\ y=\frac{2b}{a+c-b}.$$

Lahutades võrrandi (III) liikmeti võrrandist (VI), saame

$$\frac{a}{x}=\frac{a+b+c-2a}{2};\ \frac{a}{x}=\frac{b+c-a}{2};\ x=\frac{2a}{b+c-a}.$$

5. On tarvis erilist tähelepanu juhtida järgmist tüüpi võrrandite lahendamisele:

$$\begin{cases} x+y=axy \\ x-y=xy \end{cases}$$

Siia kuuluvad üksikud näited Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu I osast, VI peatükist (nr-d 282, 288, 289, 318, 319).

Arutame läbi harjutuse 282 lahenduse:

$$\begin{cases} 3xy=8x+3y & \text{(I)} \\ 4xy=15x-4x & \text{(II)} \end{cases}$$

Et need harjutused ülesannetekogus vahenditult järgnevad tüüpidele $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c$ ja $\frac{d}{x}+\frac{k}{y}=f$, siis tekib mõte, et ülesannetekogu autoril on mõte harjutust nr. 282 üle viia viimasele süsteemile, s. o. säärasele, milles on x ja y nimetajais. See võte pole aga seitsmendale klassile vastuvõetav, sest need võrrandid on ruutvõrrandid ja neid tuleb lahendada koos ruutvõrranditega.

Kui seda süsteemi lahendada võttega, mis oli rakendatud tüüpidele $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c$ ja $\frac{d}{x}+\frac{k}{y}=f$, siis tuleb toimida järgmiselt. Kõige enne veendume vahenditult, et $x=0$ ja $y=0$ on esitatud süsteemi lahend. Edasi näeme, et kui $x=0$, siis $y=0$, ja ümberpöördult, kui $y=0$, siis ka $x=0$. Pärast seda, kui on leitud lahendite süsteem $x=0$ ja $y=0$, võib teiste $x=0$ ja $y=0$ erinevate lahendite leidmiseks jagada xy, sest teiste lahendite puhul $x\neq 0$ ja $y\neq 0$.

Esitatud süsteemi võime lahendada nõnda. Kõrvaldame xy; selleks korrutame võrrandi (I) 4-ga ja võrrandi (II) 3-ga ning lahutame võrrandi (II) võrrandist (I).

$$\begin{cases} - & 12xy = 32x + 12y \\ & 12xy = -12x + 45y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 44x - 33y; \\ 0 &= 4x - 3y; \\ 3y &= 4x. \end{aligned}$$

Asetades (I) $4x$ asemele $3y$, saame

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 8x + 4x; \\ 4x^2 - 12x &= 0; \\ x^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Meie ei saa siin võrrandit liikmeti jagada x-ga, sest selle tagajärjel läheb kaotsi lahend $x=0$. Võrrandit $x^2-3x=0$ tuleb lahendada kui ruutvõrrandit ja tal on

kaks lahendit $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$. Seepärast polegi esitatud näide kohane VI peatükile ja peab üle viidama ruutvõrrandi-süsteemide juurde.

6. Tuletisvõrde rakendamine annab mõnikord lihtsustust.

Näide.

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{a+n}{a-n} \\ \dfrac{2nx+1}{2a-y} = 1 \end{cases}$$

Rakendades esimese võrrandi kohta tuletisvõrde omadust, saame

$$\frac{x-y+x+y}{x-y-x-y} = \frac{a+n+a-n}{a+n-a+n};$$

$$\frac{2x}{-2y} = \frac{2a}{2n}; \quad -\frac{x}{y} = \frac{a}{n}; \quad y = -\frac{n}{a}x.$$

Asetades selle y väärtuse teise võrrandisse, saame

$$\frac{2nx+1}{2a-\left(-\frac{n}{a}x\right)} = 1; \quad \frac{2nx+1}{\frac{2a^2+nx}{a}} = 1; \quad 2anx + a = 2a^2 + nx;$$

$$2anx - nx = 2a^2 - a; \quad nx(2a-1) = a(2a-1);$$

kui $2a - 1 \neq 0$, siis

$$x = \frac{a(2a-1)}{n(2a-1)}; \quad x = \frac{a}{n}.$$

$$y = -\frac{n}{a}x; \quad y = -\frac{n}{a}\cdot\frac{a}{n}; \quad y = -1.$$

7. Otsitavate kõrvaldamine liitmisvõttega on eriti kasulik siis, kui on kerge leida selliseid tegureid, et pärast korrutamist nendega ja liitmist saadakse üks võrrand ühe otsitavaga.

Võtame näiteks järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} x + 9y + 10z = 4 & \text{(I)} \\ 4x + 9z = 6 & \text{(II)} \\ 2x - 6y - 5z = 10 & \text{(III)} \end{cases}$$

Et y esineb ainult võrrandeis (I) ja (III), siis ilmselt tuleb y kõrvaldamiseks võrrandit (I) korrutada 2-ga ja võrrandit (III) 3-ga. Pärast liitmist y kaob. Selleks et samaaegselt kõrvaldada ka x, arutleme järgmiselt: x kordaja võrrandis (I) on 2 ja võrrandis (III) 6; järelikult pärast liitmist saame $8x$. Siit on selge, et x kõrvaldamiseks peab teine võrrand andma $-8x$, s. o. teist võrrandit tuleb korrutada (-2)-ga. Kogu lahenduse kujutame järgmiselt:

$$\begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ 4x + 9z = 6 \\ 2x - 6y - 5z = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2x + 18y + 20z = 8 \\ -2 & -8x - 18z = -12 \\ 3 & 6x - 18y - 15z = 30 \\ \hline & -13z = 26; \\ & z = -2. \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4x - 18 &= 6; \\ 4x &= 24; \\ x &= 6. \\ 6 + 9y - 20 &= 4; \\ 9y &= 18; \\ y &= 2. \end{aligned}$$

8. Mõnikord on sobiv lahendada lineaarvõrrandi-süsteemi vabaliikmete kõrvaldamise võttega, nimelt neil juhtudel, kui kordajad on kohmakad arvud, aga vabaliikmed võrdlemisi väikesed arvud.

Näide.

$$\begin{cases} 457x - 228y = 1 \\ 527x - 261y = 5 \end{cases}$$

Vabaliikmete eemaldamiseks korrutame esimese võrrandi (-5)-ga ja siis liidame saadud võrrandi teise võrrandiga.

$$\begin{cases} + \quad \begin{array}{r} -2285x + 1140y = -5 \\ 527x - 261y = 5 \\ \hline -1758x + 879y = 0 \end{array} \end{cases}$$

Pärast taandamist 879-ga saame $-2x+y=0$.

Asetades y asemele $2x$ süsteemi esimesse võrrandisse, saame

$$457-456y=1; \quad x=1.$$

Seega $y=2x=2$.

Sama võttega on sobiv lahendada ka süsteemi, kus vabaliikmed on võrdsed.

Lahendame harjutuse nr. 222 või 229 (Šapošnikovi ja Valtsovi ülesannetekogu, I osa, VI peatükk):

$$\begin{cases} 5y+4x=13 \\ 3y+5x=13 \end{cases}$$

Lahutame liikmeti teise võrrandi esimesest, saame

$$2y-x=0 \text{ ehk } x=2y.$$

Asetame x asemele $2y$ esimesse võrrandisse:

$$5y+8y=13; \quad 13y=13; \quad y=1.$$
$$x=2y; \quad x=2\cdot 1=2.$$

VII peatükk.

ASTMED. JUURED.

Ruutjuure leidmine arvudest.

§ 106. Aste positiivse täisarvulise astendajaga.

Astmeks nimetatakse mitme võrdse teguri korrutist; igaühte võrdseist tegureist nimetatakse astme aluseks ehk astendatavaks ja tegurite arvu — astendajaks. Järelikult aste on korrutise lühendatud tähistus; arv k avaldises a^k on täisarv.

Astme leidmise tehet nimetatakse astendamiseks.

Astme definitsioonist saame vahenditult järgmised järeldused.

1. Astendamine on korrutamise erijuhtum, kui tegurid on võrdsed.

2. Avaldises a^k võib k olla ainult positiivne täisarv.

Astme kui võrdsete tegurite korrutise definitsioonist järeldub, et tegurite arv peab olema vähemalt kaks; ka võrdsete tegurite mõiste eeldab mitte vähema kui kahe teguri olemasolu. Seepärast pole avaldistel a^0 ja a^1 astme üld-definitsiooni järgi mõtet; a^1 jaoks täiendatakse definitsiooni võrdusega $a^1 = a$ ja a^0 jaoks võrdusega $a^0 = 1$.

Võrdusel $a^0 = 1$ on leppemõte ainult siis, kui $a \neq 0$; kui aga $a = 0$, siis avaldisel a^0 puudub igasugune mõte.

On tarvis hästi meeles pidada, et a^1 ja a^0 on tarvitusele võetud definitsioonidena ja seepärast pole võimalik võrdusi $a^0 = 1$ ja $a^1 = a$ tõestada. Siiski püüavad õpilased tihti neid võrdusi tõestada. Avaldisel a^0 puudub esimese üld-definitsiooni järgi kindel mõte; on otstarbekohane anda talle kindel sisu. Võrduse $a^0 = 1$ otstarbekust võib näidata järgmisel kaalutlusel: $a^{n+1} = a^n \cdot a$; anname sellele võrdusele mõtte ka sel korral, kui $n = 0$; siis $a^{0+1} = a^0 \cdot a$ ehk $a^1 = a^0 \cdot a$, sest $a^1 = a$; siis peab $a^0 = 1$. Kuid tuleb eristada seda, mis on sisse toodud definitsiooni põhjal ja mis seetõttu ei allu tõestusele, sellest, mida on võimalik tõestada.

Aste allub kolmele järgmisele põhiseadusele.

1. $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$. See võrdus järeldub astme definitsioonist. Tõepoolest, tuleb koostada korrutis $k + m$ tegurist, millest igaüks võrdub a-ga, siis astme definitsiooni järgi saame uuesti astme, mille näitajaks on $k + m$.

Niisiis

$$a^k \cdot a^m = \underbrace{aaa \ldots aa}_{k \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{aaa \ldots aa}_{m \text{ tegurit}} = a^{k+m}.$$

2. $a^k \cdot b^k = (ab)^k$. Võrdus tõestatakse ab astendamisega k astmesse:

$$(ab)^k = ababab \ldots ab = \underbrace{aaa \ldots a}_{k \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{bbb \ldots b}_{k \text{ tegurit}} = a^k b^k.$$

3. $(a^k)^m = a^{km}$. Võrdus tõestatakse a^k astendamisega m astmesse:

$$(a^k)^m = \underbrace{a^k \cdot a^k \cdot a^k \ldots a^k}_{m \text{ tegurit}} = a^{k+k+k+ \ldots +k} = a^{km}.$$

On tarvis täheldada järgmist.

1. Astendamine ei allu vahetuvusseadusele, sest üldiselt rääkides a^k ei võrdu k^a (täisarvude puhul on erandiks $2^4 = 4^2$).

2. Astendamine ei allu ühenduvusseadusele, s. o. üldiselt rääkides $(a^k)^m \neq a^{(k^m)}$, sest $(a^k)^m = a^{km}$, seega üldiselt rääkides $km \neq k^m$.

(Mõningail erijuhtudel $km = k^m$, näiteks kui $m = 1$.)

3. Astendamisel ei ole jaotuvusomadust summa suhtes:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2,$$
$$(a+b)^k \neq a^k + b^k;$$

aga kui $k = 1$, siis saame:

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1.$$

Tihti lasevad õpilased selle silmist ja kirjutavad summa ruudu asemel ruutude summa ning summa kuubi asemel kuupide summa.

§ 107. Täisarvude ruututõstmine.

Igale täisarvule võib vaadata kui arvu 10 astmete summale. Näiteks:

$$2345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0.$$

Seepärast võibki täisarvu ruudu määramiseks kasutada kaksliikme summa ruudu valemit, s. o. valemit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, kui arv on kahekohaline, ja valemit

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2,$$

kui arv on kolmekohaline, jne. Neid valemeid võib teisendada sobivamaks ruututõstmiseks, nimelt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b) \cdot b;$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$$
$$= a^2 + (2a+b) \cdot b + [2(a+b) + c]c.$$

Selgitame näidete najal, kuidas neid valemeid tuleb kasutada:

1) $31^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 61 \cdot 1 = 961.$
2) $27^2 = (20 + 7)^2 = 20^2 + 47 \cdot 7 = 729.$

Selle reegli järgi tuleb teha harjutusi mitmekohaliste arvude ruututõstmise kohta; see kergendab arvudest ruutjuure leidmise algoritmist arusaamist.

$$\begin{aligned} 372^2 &= \\ 300^2 &= 90\,000 \\ 670 \cdot 70 &= 46\,900 \\ 742 \cdot 2 &= 1\,484 \\ \hline 372^2 &= 138\,384 \end{aligned}$$

1. Nullidega lõppeva täisarvu ruudul on lõpul nulle kahekordselt:

$$N = b \cdot 10^n;$$
$$N^2 = (b \cdot 10^n)^2 = b^2 \cdot 10^{2n}.$$

Järelikult nullidega lõppeva arvu ruudul on lõpul paarisarv nulle.

2. Mistahes täisarvu ruut lõpeb sama numbriga, millega lõpeb selle arvu üheliste ruut. See järeldub vahenditult asjaolust, et mitmekohaliste arvude korrutamisel üheliste number saadakse korrutatava ja korrutaja üheliste korrutamisest. Et esimese üheksa arvu ruudud lõpevad arvudega 1, 4, 5, 6, 9, siis arv, mis lõpeb 2, 3, 7, 8-ga või jälle paaritu arvu nullidega, ei või olla täisarvu ruuduks.

3. Murru n-es aste on murd.

Kui murru $\frac{p}{q}$ lugejal ja nimetajal on ühine tegur d, siis $p = ad$, $q = bd$, kus a ja b on ühistegurita arvud: $\frac{p}{q} = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$.

Siis $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Kui $\left(\frac{p}{q}\right)^n$ ja $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ oleksid olnud võrdsed mingi täisarvuga l, siis $\left(\frac{a}{b}\right)^n = l$; $\frac{a^n}{b^n} = l$; $a^n = b^n l$.

Siit on selge, et b^n peab olema a^n teguriks, aga a ja b on ühistegurita arvud; järelikult on ka nende arvude astmed ühistegurita, s. o. võrdus $a^n = b^n \cdot l$ on võimalik ainult tingimusel $b^n = \pm 1$; järelikult ka $b = \pm 1$; siis on ühiseks teguriks ± 1 ja arv $\frac{a}{b}$ peab olema täisarv. Eelduse järgi aga $\frac{a}{b}$ pole täisarv.

4. Kui taandamatu murru liikmed pole täisarvude ruudud, siis säärane murd ei saa olla mingi ratsionaalse arvu ruuduks. Tõepoolest, ta ei saa olla täisarvu ruuduks, sest täisarvu ruut on ikka täisarv; ta ei saa olla ka murru ruuduks, sest taandamata murru ruudu lugeja ja nimetaja on ikka täpsed ruutarvud.

Harjutusi.

1. Tuletada lihtsustatud võte viiega lõppevate kahekohaliste arvude ruututõstmiseks.

2. Tõestada, et paaritu arvu ruut on samuti paaritu arv.

3. Tõestada, et paarisarvu ruut on neljaga jaguv paarisarv.

4. Võtta järjestikuste täisarvude 1, 2, 3 ... ruudud ja püstitada seaduspärasus, mille järgi muutub selle jada liikmete vahe.

Juured.

Juure definitsiooni täiendusena on tarvis selgitada võrdused:

$$a^2 = N \qquad \text{(I)}$$

ja

$$\sqrt{N} = a. \qquad \text{(II)}$$

Asetades esimesse võrdusse a teisest võrdusest, saame samasuse:

$$(\sqrt{N})^2 = N. \qquad \text{(III)}$$

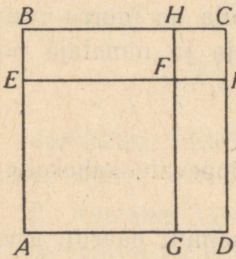
Selle samasuse mõte on järgmine: N on mingi arv, $\sqrt{N}$ on ruutjuur N-st; definitsiooni järgi ruutjuur N-st on arv, mille ruut võrdub N-ga. See mõte ongi väljendatud võrdusega

$$(\sqrt{N})^2 = N.$$

Üldkujul $(\sqrt[n]{A})^n = A$.

Siin tuleb püstitada ka märkide reegel juurimise kohta.

§ 108. Ruutjuure leidmine arvudest, mis on täpsed ruudud.



Joon. 24.

Siirdudes hariliku algoritmi põhjendamisele, on tarvis ära märkida järgmist. Arvutamise praktika omandavad õpilased ilma vaevata, aga arusaamine iga operatsiooni mõttest neil kas täielikult puudub või on väga pealiskaudne. Seepärast on kasulik tarvitada geomeetrilist illustratsiooni, mis selgitab toimingu reaalset mõtet (joon. 24).

Arvudest ruutjuure leidmise geomeetriline illustratsioon.

Oletame, et tuleb eraldada ruudukujuline maatükk pindalaga 625 m². On tarvis leida selle ruudu pikkus või sellega võrdne laius. Tähistades pikkuse y-ga, peame ka laiuse tähistama y-ga; geomeetriast teame, et ruudu pindala võrdub $y \cdot y = y^2$; eelduse põhjal $y^2 = 625$; järelikult $y = \sqrt{625}$. Nagu mõnedel teistel pöördtehete juhtudel, arutame ka siin proovides, sobivat välja valides. Ruutjuur 625-st on suurem

20-st, sest $20^2 = 400$, aga väiksem 30-st, sest $30^2 = 900$. Järelikult 625 sisaldab kümnelisi enam kui kaks ja vähem kui 3, on 20 pluss tundmatu üheliste arv. Asetades ruudu kahele lähisküljele 20 m, ehitame sisemise ruudu, mille pindalaks on seega 400 m^2. Otsitava ruudu pindala on 625 m^2, s. o. $625 - 400$ ehk 225 m^2 enam kui ehitatud ruudu pindala. Niisiis kujundi *EFGDCB* pindala on 225 m^2. Selleks et kergem oleks määrata lõigu *EB* pikkust, toimime nii. Jagame kujundi *EFGDCB* (vanasti nimetati seda „gnoomoniks") joonte *EF* ja *GF* pikendustega kolmeks osaks: 1) ristkülikuks *BEFH*, 2) ruuduks *CKFH* ja 3) ristkülikuks *FKDG*. Ristküliku *BEFH* pindala $= BE \cdot EF$; tähistame *BE* x-ga; $EF = 20$ m, järelikult see pindala $= 20x$. Ruudu *HCKF* pindala $= x^2$; järelikult kujundi *EFGDCB* pindala $= 20x + 20x + x^2 = 40x + x^2$. Seega $40x + x^2 = 225$. Et x kui üheliste arv ei või olla suurem üheksast, s. o. $x \leqslant 9$, siis $x^2 < 40x$; tõepoolest, $x \cdot x \leqslant 9x$; järelikult $x^2 < 40x$; tähendab, liidetav x^2 on palju väiksem teisest liidetavast, s. o. $40x$-st, ja äärmisel juhul, $x = 9$ puhul, 4—5 korda väiksem $40x$-st; seepärast võime esialgu x umbkaudsel määramisel x^2 tähele panemata jätta. Siis võrdub $40x$ ligikaudu 225-ga ja x on ligikaudu võrdne $\frac{225}{40} = 5\frac{5}{8}$. Nähtavasti on otsitav ruutjuur täisarv; vastasel korral oleks arvu ruut olnud mitte täisarv, vaid murdarv. Seega peab x olema täisarv. Kõrvaldame esialgu murru $\frac{5}{8}$. Siis on x võrdne 5-ga. Et aga x on leitud ligikaudselt, siis enne kui x kohta lõplikku otsust teha, tuleb järele proovida, kas 5 vastab püstitatud nõuetele või mitte.

BEFH pindala võrdub $20 \cdot 5 = 100$; *CHFK* pindala võrdub $5 \cdot 5 = 25$; *KFGD* pindala võrdub $20 \cdot 5 = 100$. Järelikult gnoomoni pindala võrdub $100 + 25 + 100 = 2 \cdot 100 + 25$; jääk 25 ongi ruudu *CKFH* pindala, mis esialgu jäi meil tähele panemata. Seega ruudu otsitav külg $AB = AE +$

$+ EB = 20 + 5 = 25$. Ja tõepoolest, kui ruudu külg on 25 m, siis tema pindala on 625 m^2.

Pärast ruutjuure leidmise mõtte esialgset selgitamist geomeetrilise illustratsiooni abil tuleb siirduda toimingu ja algoritmi operatsiooni analüütilisele põhjendamisele ning selgitamisele, läbi arutades järgmised küsimused:

1) Milleks jagatakse arv rühmadeks, kaks numbrit igaühes?

2) Kuidas saadakse kümneliste arv?

3) Mida kujutab endast esimene jääk?

4) Milleks tuleb jäägis eraldada viimane number ja saadud arv jagada kümneliste kahekordse arvuga?

5) Milles seisab selle toimingu mõte, et saadud üheliste arv kirjutatakse kümneliste kahekordsele arvule paremale poole juurde ja saadud arv korrutatakse üheliste arvuga?

§ 109. Ligikaudse ruutjuure leidmine arvudest täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$.

Meie tutvusime ruutjuure leidmise algoritmiga arvudest, mis on täpsed ruudud. Kõiki küsimusi, mis on ühenduses ruutjuure leidmisega arvudest, mis pole teiste arvude ruutudeks, arutellakse üksikasjaliselt kaheksandas klassis; eriti käsitellakse siin irratsionaalse arvu mõistet ja tehteid nende arvudega.

Seitsmendas klassis tuleb läbi võtta ainult puht-praktiliselt ruutjuure leidmine positiivsetest arvudest kümnendtäpsusega.

Olgu nõutud ruutjuur 18-st. Vahenditu proovimine näitab, et

$$4^2 < 18 < 5^2.$$

Neli on ruutjuure lähend 18-st täpsusega kuni 1 puudusega ja 5 ruutjuure lähend 18-st täpsusega kuni 1 liiaga.

Tähendame, et alati on võimalik leida kaht järjestikust täisarvu x ja $x+1$, millede ruutude vahel seisab antud arv N, s. o.

$$x^2 < N < (x+1)^2.$$

Kumbagi arvudest x ja $x+1$ nimetatakse ruutjuure lähendiks N-st täpsusega kuni 1; x on puudusega, $x+1$ liiaga. Kui pole võimalik neid arve kohe leida, tuleb kasutada varem näidatud algoritmi.

Näiteks ruutjuure leidmisel arvust 832 toimime järgmiselt.

$$\sqrt{832} = 28.$$

	4
48	432
8	384
	48

Siin on 28 ruutjuure lähend 832-st täpsusega kuni 1 puudusega ja 29 on ruutjuure lähend 832-st täpsusega kuni 1 liiaga, sest 28^2 $(=784) < 832 < 29^2$ $(=841)$.

Praktikas nõutakse sageli ruutjuure leidmist mingist arvust täpsusega kuni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ jne. See tähendab, et tuleb leida kaks arvu x ja $x+\frac{1}{10}$, mis rahuldaksid nõuet

$$x^2 < N < \left(x+\frac{1}{10}\right)^2.$$

Näitame, kuidas leida $\sqrt{50}$ täpsusega kuni $\frac{1}{10}$.

Korrutame ja jagame $\sqrt{50}$ 10-ga, saame $\frac{10\sqrt{50}}{10}$ ehk $\frac{\sqrt{100}\cdot\sqrt{50}}{10}$ ehk $\frac{\sqrt{5000}}{10}$. Nüüd leiame $\sqrt{5000}$ täpsusega kuni

1 ja saadud tulemuse jagame 10-ga.

$$\sqrt{5000} = 70$$
$$\begin{array}{r|l} & 49 \\ 140 & 100 \\ 0 & \end{array}$$

Niisiis $\sqrt{5000}$ on suurem 70-st ja väiksem 71-st. Tõepoolest,

$$70^2 = 4900 < 5000;$$
$$71^2 = 5041 > 5000.$$

Järelikult 70 on $\sqrt{5000}$ täpsusega kuni 1 puudusega ja 71 on $\sqrt{5000}$ täpsusega kuni 1 liiaga. Oli tarvis aga leida $\sqrt{50}$, mitte $\sqrt{5000}$; $\sqrt{5000}$ saadi pärast $\sqrt{50}$ korrutamist 10-ga ehk $\sqrt{100}$-ga; seepärast tuleb $\sqrt{50}$ saamiseks saadud kaks arvu 70 ja 71, mis on $\sqrt{5000}$ täpsusega kuni 1, jagada 10-ga:

$$70 : 10 = 7. \qquad 71 : 10 = 7{,}1.$$

Seepärast on 7,0 ruutjuur 50-st täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ puudusega ja 7,1 on ruutjuur 50-st täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ liiaga; tõepoolest,

$$7{,}0^2 = 49 < 50;$$
$$7{,}1^2 = 50{,}41 > 50.$$

Tähendame, et ruutjuure lähendite leidmisel täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ kasutasime veel mitte tõestatud reeglit korrutise juure kohta, nimelt:

$$\frac{n\sqrt{A}}{n} = \frac{\sqrt{n^2} \cdot \sqrt{A}}{n} = \frac{\sqrt{An^2}}{n}.$$

Siit tuletame järgmise reegli: selleks et leida arvu N ruutjuurt täpsusega kuni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ja üldse $\frac{1}{10^n}$, tuleb antud

arv N korrutada lähendi nimetaja ruuduga, saadud korrutisest leida ruutjuur täpsusega kuni 1 ja saadud arv jagada lähendi nimetajaga.

Leiame veel ruutjuure kolmest täpsusega kuni $\frac{1}{100}$.

$3 \cdot 100^2 = 30\,000$;

$\sqrt{30000} = 173$

		1
27		200
7		189
343		1100
3		1029
		71

$173 : 100 = 1{,}73$. Seega $\sqrt{3} = 1{,}73$.

VIII peatükk.

Mittetäielikud ruutvõrrandid.

§ 110. Teise astme võrrandid.

Kui võrrandis pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist kõrgem liige sisaldab x^2, siis nimetatakse võrrandit ruut- ehk teise astme võrrandiks x suhtes.

Näiteks võrrand $(2x+3)(4x+5)=40x+125$ on ruutvõrrand, sest pärast seda, kui korrutamise järel on kõik liikmed üle kantud võrrandi vasakule poolele, sarnased liikmed koondatud ja võrrandi kõik liikmed jagatud kahega, saadakse võrrand $4x^2-9x-55=0$, milles kõrgem liige sisaldab x teises astmes, tähendab, esitatud võrrand on ruutvõrrand.

Analoogiline võrrand $(2x+3)(x-2)-(x-5)^2=21$ on samuti ruutvõrrand, nagu järjestikused teisendused näitavad:

$$2x^2+3x-4x-6-x^2+10x-25=21;$$
$$x^2+9x-52=0.$$

Antud näidetes on igal ruutvõrrandil kolm liiget: üks liige, milles esineb x teises astmes, siis liige x-ga esimeses astmes ja lõpuks liige ilma x-ta ehk vabaliige.

Ruutvõrrandile on oluline liikme olemasolu, milles x esineb teises astmes; liige x-ga esimeses astmes ja ka vaba-

liige võivad võrduda nulliga; liikme x^2 olemasolu on aga ruutvõrrandile tingimata tarvilik.

Nii on võrrand $2x^2 - 12{,}5 = 0$ ruutvõrrand, võrrand $x^2 - 5x = 0$ samuti, kuigi esimeses võrrandis puudub liige x-ga esimeses astmes ja teises võrrandis on vabaliige võrdne nulliga.

Võrrandeid kujul $ax^2 + c = 0$ ja $ax^2 + bx = 0$ nimetatakse mittetäielikeks ruutvõrrandeiks ja nad on üldruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ erijuhud.

§ 111. Mittetäieliku ruutvõrrandi $ax^2 + c = 0$ lahendamine.

Lahendada ruutvõrrand tähendab leida need x-i väärtused, mis rahuldavad antud võrrandit.

Olgu antud võrrand $3x^2 - 75 = 0$; pärast võrrandi iga liikme jagamist 3-ga saame võrrandi $x^2 - 25 = 0$. Et aga ruutjuur 25-st võrdub kas $+5$-ga või -5-ga, siis ilmselt rahuldavad antud võrrandit kaks x-i väärtust, nimelt: $x = +5$, sest $(+5)^2 = 25$, ja $x = -5$, sest $(-5)^2 = +25$.

Niisiis mittetäielikul ruutvõrrandil $3x^2 - 75 = 0$ on kaks lahendit, mis on võrdsed absoluutse väärtuse poolest ja vastupidised märkide poolest. Mõlemad väärtused $+5$ ja -5 on ruutvõrrandi $3x^2 - 75 = 0$ lahendid ja neid tähistatakse nii: $x_1 = +5$; $x_2 = -5$.

Esitatud võrrandit võib lahendada ka teisel viisil. Pärast jagamist 3-ga omandab võrrand $3x^2 - 75 = 0$ kuju $x^2 - 25 = 0$. Võrrandi vasakut poolt kujutame kahe, x suhtes esimese astme teguri korrutisena, nimelt

$$(x + 5)(x - 5) = 0.$$

Saadud võrrandi vasak pool on kujutatud kahe, x suhtes esimese astme täisteguri korrutisena, võrrandi parem pool on null. Selleks et kahe teguri korrutis võrduks nulliga, on tarvilik, et vähemalt üks tegureist võrduks nulliga ja teine

tegur seejuures ei kaotaks arvu mõtet; kui aga hulkliige on x suhtes täis-hulkliige, siis ta ei kaota arvu mõtet x-i mistahes väärtuse puhul. Seega on esitatud ruutvõrrandi lahendus üle viidud kahe lineaarvõrrandi lahendamisele: $x + 5 = 0$ ja $x - 5 = 0$. Esimesel võrrandil on lahend $x_1 = -5$, teisel on lahend $x_2 = 5$. Seega võrrandil $3x^2 - 75 = 0$ on kaks lahendit: $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

Kui oleks lahendada võrrand $x^2 + 1 = 0$, siis tuleks öelda, et sellel võrrandil pole üldse lahendeid; tõepoolest, milline x-i väärtus ka oleks (õpilastele antud momendil tuntud arvude vallas), tema ruut, s. o. x^2, on ikka positiivne arv; ta on positiivne x-i iga (reaalse) väärtuse puhul, olgu see väärtus positiivne või negatiivne, sest $(+x)^2 = x^2$ ja $(-x)^2 = +x^2$, ning võrdub nulliga, kui $x = 0$. Niisiis summas $x^2 + 1$ on esimene liidetav positiivne arv või 0; teine liidetav on positiivne arv 1; järelikult pole summa $x^2 + 1$ vähem ühest ega või võrduda nulliga x-i mitte mingi väärtuse puhul; seepärast puuduvadki võrrandil $x^2 + 1 = 0$ tuntud arvude vallas lahendid.

Võib ka teisiti näidata, et võrrandil $x^2 + 1 = 0$ pole lahendeid. Anname võrrandile kuju $x^2 = -1$; vahenditult järeldame, et kuni praeguse momendini tuntud arvude hulgas pole niisugust arvu, mille ruut võrduks negatiivse arvuga; sest iga positiivse kui ka negatiivse arvu ruut on positiivne ja nulli ruut on null. Järelikult, milline x ka oleks, x^2 ei saa võrduda negatiivse arvuga (-1), ja võrrandil $x^2 + 1 = 0$ pole seepärast üldse lahendeid.

Mittetäielikkude täht-ruutvõrrandite lahendamist käsitellakse kaheksandas klassis.

§ 112. Mittetäieliku ruutvõrrandi $ax^2 + bx = 0$ lahendamine.

Lahendame mittetäieliku ruutvõrrandi

$$4x^2 + 3x = 0. \qquad (1)$$

Selles võrrandis on vabaliige null; mõlemad liikmed sisaldavad x, seepärast võib x võtta sulgude ette, andes võrrandile kuju $x(4x+3)=0$. Et x suhtes kahe täisteguri korrutis on null, siis vähemalt üks tegureist peab võrduma nulliga. Seepärast võrrandi $x(4x+3)=0$ lahendamine jaguneb kahe lineaarvõrrandi lahendamiseks:

$$x=0, \tag{2}$$

$$4x^2+3x=0. \tag{3}$$

Võrrandil (2) on lahend $x_1=0$, võrrandil $4x+3=0$ on lahend $x_2=-\frac{3}{4}$. Seega võrrandi $4x+3=0$ lahendeiks on arvud

$$x_1=0 \text{ ja } x_2=-\frac{3}{4}.$$

Järelikult mittetäielikul ruutvõrrandil kujul $ax^2+bx=0$ on alati kaks lahendit, seejuures üks neist võrdub nulliga, milles pole raske veenduda vahenditu asendamisega:

$$a\cdot 0+b\cdot 0=0.$$

On tarvis hoiatada algajaid järgmise väga levinud vea eest. Lahendades võrrandit $x^2-12x=0$ algajad tihti jagavad kõik võrrandi liikmed x-ga ja saavad võrrandi $x-12=0$; seega leiavad nad ainult ühe lahendi $x=+12$, kuna teine lahend $x=0$ on kaotsi läinud. Jagamine x-ga viib ühe lahendi kadumisele.

MÄRKUSED.

Venekeelses metoodilises kirjanduses on käesoleva teose arvustustes juhitud tähelepanu järgmistele asjaoludele.

1. § 1. Matemaatika ajaloo seisukohalt ei saa õigeks pidada, et esimesel arenemisperioodil erines algebra aritmeetikast täheliste tähistamiste poolest. Algebra algust võib leida juba babüloonlaste juures mitu tuhat aastat enne meie ajaarvamist. Nii nende kui ka hilisemate kreeklaste ja araablaste algebras ei ole veel tähtede sümboolikat. Tähtede sümboolika tekib ja areneb keskajal.

2. § 1. Autor tarvitab uuemaid matemaatilisi mõisteid, nagu hulk (множество), ring (кольцо), korpus (поле). Käesolevast raamatust ei leia lugeja nende mõistete definitsioone. Asjast huvitatu võib neid leida igast uuemast kõrgema algebra kursusest, nagu G. Kangro, „Kõrgem algebra", või А. Г. Курош, „Курс высшей алгебры". Peab aga märkima seda, et nimetatud mõisted pole keskkooli algebra seisukohalt vajalikud ja neid ei tule õpetamisprotsessi jooksul tarvitada.

3. § 3. Et paremini aru saada kirjutamisviisist, mida kasutas prantsuse matemaatik V i è t e (loe: vjet), kelle nimi ladina keele päraselt on V i e t a (Viëta), tuleb A asemel võtta x, B asemel b ja Z asemel a, siis on Vieta avaldis vastavuses avaldisega $x^3 + 3bx = 2a$. *Cubus* tähendab kuupi (kolmas aste), *planum* — tasane või pindala, *solido* — kin-

del või keha. Z-le tuleb vaadata kui ruumalale. Nagu esimesest liikmest (x^3) nähtub, kehtib võrrand ruumalade võrdumise kohta.

4. § 7. Siin lihtsustub pikk jutt lühikese märkusega sellest, et nelja esimese tehte tähistamiseks tarvitatakse algebras samu märke mis aritmeetikaski.

5. § 14. Autori poolt antud võrrandite lahendamise üleskirjutuse viisi tuleb pidada otstarbekohaseks ainult võrrandite lahendamise esimesel astmel. Iga sammu selge eraldamine on seal omal kohal. Pole aga mõtet nõuda sellist kirjutamisviisi ikka ja alati. Hiljem võiks lubada ülesmärkimist lühendada:

$3x - 8 = 22;\ 3x = 22 + 8 = 30;\ x = 30 : 3 = 10;\ x = 10$ või $3x - 8 = 22;\ 3x = 30;\ x = 10.$

See märkus kehtib ka § 82 näite 4 kohta. Võrrandi vasaku poole paljukordne kordamine, eriti siis, kui see on pikk avaldis, muutub tüütavaks.

Vastuse kordamist, nii nagu seda teeb autor §-s 14 ($x = 10$. Seega $x = 10$), pole vaja.

Võrrandi $5(n + 3) = 45$ kahest autori poolt antud lahendamisviisist tuleb eelistada teist.

6. § 15. Ei või kuidagi nõustuda avaldise $x^5 + 4x^4 - - 7x^3 + 6x^2 - 5x + 9$ numbrilise väärtuse leidmise viisiga. Esiteks sellepärast, et puudub süsteem märkides (korrutamismärgi tarvitamises), asendamises (kolmandas reas on esimene x asendamata) ja sulgude kasutamises (ümmargused korduvad), teiseks sellepärast, et selline viis kui ülearuselt keerukas ei leia praktikas kasutamist. Õpilastelt ei tohiks nõuda niisugust numbrilise väärtuse arvutamist. Tavaliselt tehakse seda nii:

$$x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x + 9 =$$
$$2^5 + 4 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 9 =$$
$$32 + 4 \cdot 16 - 7 \cdot 8 + 6 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 9 =$$
$$32 + 64 - 56 + 24 - 10 + 9 = 63.$$

7. § 34. Relatiivsete arvude astendamisel täisarvulise positiivse astendajaga tuleb piirduda a i n u l t kahe juhuga: 1) astendaja on paarisarv $2m$, 2) astendaja on paaritu arv $2m \pm 1$. $2m+1$ ja $2m-1$ kujutavad mõlemad mistahes paaritut arvu, kui m on täisarv. Seega nende eraldamine tooks asjatut segadust.

8. § 64. Kui $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, siis $ad > bc$ on õige ainult juhul, kui a, b, c ja d on positiivsed täisarvud. Algebras on arvuvald juba laiendatud negatiivsete arvudega. Laiendatud arvuvallas pole aga nimetatud asjaolu õige. Toome näite: $\frac{3}{4} > \frac{2}{-3}$, kuid $3(-3) < 4 \cdot 2$; $\frac{-5}{7} < \frac{4}{-9}$, kuid $(-5)(-9) > 4 \cdot 7$, jne.

9. § 75. Autor eksib, kui peab $a(b+c) = ab + c$ ebaõigeks. See võrdus on õige siis, kui $a = 1$, seejuures võivad b ja c olla mistahes suurused. Samuti jääb see võrdus kehtima siis, kui $c = 0$.

10. § 78. Võrrandi lahendamine on elementaaralgebras tähtsamaid ülesandeid. Kui see osa on õieti ja hästi kätte õpetatud, siis on sellega algebras juba suur samm edasi astutud. Seepärast peab õpetaja seda osa hästi läbikaalutult ja metoodiliselt kõigiti korrektselt esitama.

Seda, kuidas autor õpetab võrrandeid lahendama, ei saa õnnestunuks ja õigeks pidada. Võtame § 78 näite 1: $x + 5 = 12$. Autor ütleb: „Kujutame 12 arvude 5 ja 7 summana; saame $x + 5 = 7 + 5$. Näeme vahenditult, et asetades x-i asemele 7, saame õige võrduse, järelikult võrrandi lahendiks on 7. Niisiis $x = 7$."

Samasuguse „kavalusega" on lahendatud näide 2: $x - 10 = 15$, kus arv 15 kujutatakse 25 ja 10 vahena. Miks ei tule sellist lahendamist pooldada? Selgitame seda kõigepealt näite 1 juures. Arv 12 on kujutatud 5 ja 7 summana,

antud on seejuures 12 ja 5, leitav on 7. Kui meenutada lahutamise definitsiooni, siis on lahutamine antud summa (praegu 12) ja ühe liidetava (praegu 5) järgi teise liidetava (7) leidmine. Seega peame 7 saamiseks 12-st lahutama 5. Eks sellega ju lahendamegi võrrandi ja edaspidine „kavalus" ning kirjutamine on ülearused kui isegi mitte kahjulikud.

Analoogiline on lugu näites 2. Arvu 15 kujutamine 25 ja 10 vahena, kus 15 ja 10 on antud arvud ja 25 leitav arv, on sisuliselt 15 ja 10 liitmine. Viimase tehtega ongi võrrand lahendatud.

Edasistes näidetes läheb asi veel keerukamaks. Näites 3 tuleb summana kujutamise juurde veel kujutamine korrutisena ja näiteks 4 kujutamine jagatisena.

On lühem, lihtsam, selgem ja loomulikum lahendada näidet 3 järgmise arutelu saatel: otsitava kolmekordse ja 7 summa on 31; kuna liidetav on summa ja teise liidetava vahe, siis otsitava kolmekordne on 31 ja 7 vahe ehk $3x = 31 - 7 = 24$. Otsitava kolmekordne on 24, otsitav ise peab olema kolm korda väiksem, seega $x = 24 : 3 = 8$.

Milleni viib autori poolt kasutatav võrrandite lahendamise võte, võib näha näites 6. Sellest on raske aru saada isegi õpetajal, rääkimata õpilasest.

Seega peaksid õpetajad käesoleva raamatu §-s 78 kasutatud võrrandite lahendamise võtet võtma ainult teadmiseks, mitte aga õpetamise protsessis rakendamiseks.

11. § 81. Näites 2 on öeldud: „Kuigi $(x^2 - 1)(x + 2)$ on kõigi murdude ühisnimetajaks, on murd võrrandi vasakul poolel taandatav ..." See ei ole ju mingi erandlik nähtus, et murd on pärast liitmist-lahutamist taandatav. Siin ärgu viigu sõna „kuigi" kedagi segadusse.

12. § 103. Kolme otsitavaga kolme lineaarvõrrandi süsteemi lahendamine toimub tänapäeval determinantide abil võrdlemisi lihtsalt ja mugavalt. Kes aga determinante ei

tunne, sellel pole palju kasu autori poolt antud lahendamisvõttest, sest jääb selgusetuks, kust ja kuidas on võetud binoomid, millega võrrandeid korrutades kaovad z ja y. On kasulikum, arusaadavam ja loogiliselt pidevam kolme otsitavaga lineaarvõrrandi süsteemi lahendamisel rakendada järgmist mõttekäiku.

Valime välja kolmest võrrandist kaks paari, näiteks esimese ja teise ning teise ja kolmanda (võib ka esimese ja teise ning esimese ja kolmanda). Kaotame liitmis-lahutamisvõtte abil ühe tundmatu (näit. z):

$$\begin{array}{l|l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & \cdot c_2 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & \cdot c_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z=d_1c_2 \\ a_2c_1x+b_2c_1y+c_1c_2z=d_2c_1 \end{array}$$

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_1c_2)y=d_1c_2-d_2c_1,$$

$$\begin{array}{l|l} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & \cdot c_3 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & \cdot c_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1c_3x+b_1c_3y+c_1c_3z=d_1c_3 \\ a_3c_1x+b_3c_1y+c_1c_3z=d_3c_1 \end{array}$$

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1$$

Saime võrrandisüsteemi kahe võrrandiga ja kahe otsitavaga:

$$\begin{cases} (a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1 \\ (a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_2c_1)y=d_1c_3-d_3c_1 \end{cases}$$

Seda lahendame juba tuntud viisil. Korrutame ülemist võrrandit $(b_1c_3-b_3c_1)$-ga ja alumist $(b_1c_2-b_2c_1)$-ga. Lahutamisel kaob ära y, saame võrrandi ühe tundmatuga x, millest x-i arvutamine on juba lihtne.

Tuleb lõpuks märkida, et nii nagu viimasena mainitud küsimus — kolme otsitavaga kolme lineaarvõrrandi süsteemi lahendamine üldkujul — nii ka paljud teisedki käesolevas raamatus käsiteldud küsimused ei ole mitte mõeldud niisugusel kujul õpetamiseks seitsmeklassilises koolis, vaid ainult õpetajate kvalifikatsiooni tõstmiseks.

Sisukord.

Lk.

§ 1. Algebra kui teadus ja kui õppeaine 3
§ 2. Koolialgebra aine 5
§ 3. Lühidad andmed algebra arenemisloost 8

I peatükk. Sissejuhatus algebrasse.

§ 4. Peatüki sisu 15
§ 5. Tähtede sissetoomine 17
§ 6. Tehted tähtedega 25
§ 7. Tehete tähistamine 26
§ 8. Tehete järjekord 27
§ 9. Sulgude tarvitamine 32
§ 10. Algebralise avaldise numbriline väärtus 34
§ 11. Märgid, mis väljendavad vahekordi arvude ja tähtede vahel 36
§ 12. Algebralised valemid 37
§ 13. Võrdused 39
§ 14. Võrrandite mõiste 44
§ 15. Harjutused tähelise sümboolika abil 51

II peatükk. Relatiivsed arvud.

§ 16. Terminist „relatiivsed arvud“ 57
§ 17. Puudused relatiivsete arvude õpetamisel 59
§ 18. Kuidas õpetada negatiivseid arve 62
§ 19. Telg 66
§ 20. Relatiivsete arvude süsteem 68
§ 21. Relatiivse arvu absoluutväärtuse mõiste 71
§ 22. Tehted nulliga 73
§ 23. Kahe relatiivse arvu liitmine 74
§ 24. Kolme ja enam relatiivse arvu liitmine 78
§ 25. Relatiivsete arvude liitmise omadused 78

Lk.
§ 26. Ülesanded relatiivsete arvude liitmise kohta 79
§ 27. Relatiivsete arvude lahutamine 80
§ 28. Relatiivsete arvude summa arvutamine 84
§ 29. Ülesanded negatiivsete arvude lahutamise kohta . . . 85
§ 30. Relatiivsete arvude korrutamine 85
§ 31. Kolme ja enama relatiivse arvu korrutis 90
§ 32. Relatiivsete arvude korrutamise omadused 91
§ 33. Relatiivsete arvude jagamine 92
§ 34. Relatiivsete arvude astendamine, kui astendaja on positiivne täisarv 93
§ 35. Negatiivsete arvude ajaloost 94
§ 36. Relatiivsete arvude süsteemi esitamine arvpaaride teooria ja võrratuste abil 97
§ 37. Kahe punkti vahelise kauguse arvutamine 99

III peatükk. Tehted täis-üksliikmete ja täis-hulkliikmetega.

§ 38. Teaduslikud ja metoodilised puudused selle peatüki käsitlemisel koolis 102
§ 39. Üksliikme ja hulkliikme definitsioon 103
§ 40. Kordaja (koefitsient) 105
§ 41. Samaväärsed avaldised 106
§ 42. Identsete (samaste) teisenduste omadused 106
§ 43. Algebraliste avaldiste identsed teisendused 106
§ 44. Üksliikmete ja hulkliikmete lahutamine 109
§ 45. Tähtavaldiste liitmise ja lahutamise harjutustest 110
§ 46. Hulkliikmete korrutamine 111
§ 47. Üksliikmete ja hulkliikmete korrutamise harjutustest . . 117
§ 48. Korraldatud hulkliikmed 118
§ 49. Hulkliikme jaguvusest ja jagamisest hulkliikmega . . . 121
§ 50. Hulkliikmete väikseima ühiskordse ja suurima ühisteguri definitsioon 128
§ 51. Hulkliikme tegureiks lahutamise definitsioon 130
§ 52. Ühise teguri sulgude ette võtmise võte 130
§ 53. Hulkliikme tegureiks lahutamine lühendatud korrutamise ja jagamise valemite abil 133
§ 54. Rühmitamisvõte hulkliikme tegureiks lahutamisel . . . 135
§ 55. Lühendatud korrutamise valemite kasutamise võtte ühendamine rühmitamisvõttega 137
§ 56. Mõningad tegureiks lahutamise erivõtted 137

Lk.
§ 57. Ruuttrinoomi lahutamine lineaartegureiks 138
§ 58. Täisruudu eraldamise võte 144
§ 59. Segaülesandeid hulkliikmete tegureiks lahutamise kohta mitmesuguste võtetega 145
§ 60. Mõningate hulkliikmete tegureiks lahutamine 147
§ 61. Ühe ja sellesama hulkliikme lahutamine mitme võttega . 148
§ 62. Hulkliikmete tegureiks lahutamise harjutustest 160

IV peatükk. Algebralised murrud.

§ 63. Peatüki sisu 163
§ 64. Algebralise murru definitsioon 164
§ 65. Algebraliste murdude taandamine 166
§ 66. Murdude ühenimeliseks teisendamine 170
§ 67. Murdude liitmine ja lahutamine 171
§ 68. Täisavaldise eraldamine algebralisest murrust 174
§ 69. Murdude korrutamine 175
§ 70. Korrutise omadused 175
§ 71. Algebraliste murdude korrutamise tehnika 176
§ 72. Murdude jagamine 177
§ 73. Algebralised liitmurrud 178
§ 74. Nelja tehte harjutused algebraliste murdudega 181

V peatükk. Võrdused. Samasused. Võrrandid.

§ 75. Võrrandite mitmesugused definitsioonid 192
§ 76. Võrrandid 201
§ 77. Seos võrrandi ja funktsiooni vahel 203
§ 78. Ühe otsitavaga lineaarvõrrandite lahendamine 205
§ 79. Ekvivalentseist võrrandeist 209
§ 80. Ühe otsitavaga arvuliste kordajatega lineaarvõrrandite lahendamine 217
§ 81. Võrrandid otsitavaga nimetajas 221
§ 82. Ühe otsitavaga täheliste kordajatega lineaarvõrrandid . 234
§ 83. Ühe otsitavaga täheliste kordajatega lineaarvõrrandite lahendamise mõned võtted 240
§ 84. Ühe otsitavaga lineaarvõrrandi lahendite arv 248
§ 85. Lineaarvõrrandite uurimine 249
§ 86. Ühe tundmatuga kahe lineaarvõrrandi ekvivalentsuse tingimus 251
§ 87. Üks võrrand kahe otsitavaga 252

Lk.

VI peatükk. Lineaarvõrrandi-süsteemid.

§ 88. Puudused lineaarvõrrandi-süsteemide käsitlemisel koolis 255
§ 89. Võrrandisüsteemi definitsioon 255
§ 90. Ekvivalentsed süsteemid 256
§ 91. Liitmisvõte 260
§ 92. Asetusvõte 262
§ 93. Kahe otsitavaga üldkujulise lineaarvõrrandi-süsteemi lahendamine ja uurimine 270
§ 94. Teise järgu determinandid 276
§ 95. Võrrandite koostamine 279
§ 96. Põhiotsitava valik 290
§ 97. Otsitavate suuruste väljendamine ühe põhiotsitava kaudu 294
§ 98. Seos ülesande algebralise lahendusvõtte (võrrandite abil) ja aritmeetilise lahendusvõtte vahel 296
§ 99. Illustratsiooni osa võrrandite koostamisel 307
§ 100. Võrrandi lahendite vastavuse kontroll ülesande andmetele 310
§ 101. Ülesannete valikust võrrandite koostamise peale . . . 312
§ 102. Kolme otsitavaga kolme lineaarvõrrandi süsteem . . . 315
§ 103. Kolme otsitavaga kolme lineaarvõrrandi süsteemi lahendamine üldkujul 318
§ 104. Homogeensete lineaarvõrrandite süsteem 321
§ 105. Lihtsustustest lineaarvõrrandi-süsteemide lahendamisel . 323

VII peatükk. Astmed. Juured. Ruutjuure leidmine arvudest.

§ 106. Aste positiivse täisarvulise astendajaga 331
§ 107. Täisarvude ruututõstmine 333
§ 108. Ruutjuure leidmine arvudest, mis on täpsed ruudud . . 336
§ 109. Ligikaudse ruutjuure leidmine arvudest täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$ 338

VIII peatükk. Mittetäielikud ruutvõrrandid.

§ 110. Teise astme võrrandid 342
§ 111. Mittetäieliku ruutvõrrandi $ax^2 + c = 0$ lahendamine . . 343
§ 112. Mittetäieliku ruutvõrrandi $ax^2 + bx = 0$ lahendamine . . 344
Märkused 346

Tõlkinud V. Masing.

Vastutav toimetaja M. Usai.

Keeleline toimetaja E. Kindlam.

Ladumisele antud 28. II 1949. Trükkimisele antud 22. IV 1949. Trükiarv 2000. Paber 56 × 79, 1/16. Trükipoognaid 22,25. Trükitähti trükipoognas 34.560. Arvutuspoognaid 19,2. MB-01766. Tellimise nr. 613.

Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4.

На эстонском языке.

С. С. Бронштейн. Алгебра и её преподавание в семилетней школе.

RBL. 6.75

A-1786

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00463066 3