

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

# TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

700

ALGEBRALISTE SÜSTEEMIDE  
EHITUS JA ESITUSED

СТРОЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893.a. ВІСНІК 700 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.g.

ALGEBRALISTE SÜSTEEMIDE  
EHITUS JA ESITUSED  
СТРОЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid  
Труды по математике и механике

TARTU 1985

Redaktsioonikolleegium:

Ü.Lepik (esimees), L.Ainola, K.Kenk, M.Kilp, Ü.Lumiste,  
E.Reimers, E.Tiit, G.Vainikko

Редакционная коллегия:

Э.Лепик (председатель), Л.Айнола, Г.Вайникко, К.Кенк,  
М.Кильп, Ю.Лумисте, Э.Реймерс, Э.Тийт

Ответственный редактор выпуска У.Кальблайд

О РАЗРЕШИМЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ  
ГРУППЫ ГРУППОВОГО КОЛЬЦА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

А. Бовди, И. Хрипта

Ужгородский государственный университет  
Дрогобычский педагогический институт

Пусть  $U(KG)$  - мультипликативная группа группового кольца  $KG$ . В работе [1] авторами доказана следующая Теорема. Пусть  $K$  - поле характеристики  $p \geq 3$  и  $P$  - силовская  $p$ -подгруппа периодической группы  $G$ . Группа  $U(KG)$  разрешима тогда и только тогда, когда либо коммутант группы  $G$  - конечная  $p$ -группа, либо  $K$  - поле из трех элементов, силовская 3-подгруппа  $P$  конечна и нормальна и выполняется одно из условий:

1.  $G/P$  - расширение абелевой 2-группы  $A$  показателя 8 при помощи группы  $\langle \ell A \rangle$  порядка 2 и  $\ell a \ell^{-1} = a^{-1}$  для всех  $a \in A$ ;

2.  $G/P$  - 2-группа степени нильпотентности 2 и неабелевы подгруппы ее гомоморфных образов не содержат в центре элементов порядка 4.

В первой части настоящей работы дается полное описание строения групп, удовлетворяющих условию 2 теоремы. А именно:

Теорема I. Пусть  $G$  - нильпотентная 2-группа степени 2. Неабелевы подгруппы гомоморфных образов группы  $G$  не имеют в центре элемент порядка 4 тогда и только тогда, когда группа  $G$  удовлетворяет одному из условий:

1.  $G$  - расширение абелевой группы  $A$  показателя 4 при помощи группы  $\langle \ell A \rangle$  порядка 2 и  $\ell a \ell^{-1} = a^{-1}$  для всех  $a \in A$ ;

2.  $G$  - расширение элементарной 2-группы при помощи группы порядка 2;

3.  $G$  - прямое произведение группы показателя 2 и группы  $\langle a, \ell \mid a^4 = \ell^4 = 1; (a, \ell)^2 = 1; (a, \ell, a) = (a, \ell, \ell) = 1 \rangle$  32-го порядка.

Отметим, что в силу теоремы I описание групповых алгебр  $KG$  с разрешимой группой  $U(KG)$  для конечных групп  $G$  совпадает с результатами, полученными Пассманом [4] и Тейло-

ром [5].

Во второй части работы исследуются разрешимые нормальные подгруппы группы  $U(KG)$  и доказывается следующая **Теорема 2**. Пусть  $K$  - бесконечное локальное коммутативное кольцо без делителей нуля, характеристика которого не равна 2 и 3. Если  $G$  - периодическая группа и характеристика кольца  $K$  не делит порядок ни одного элемента из максимальной  $FC$ -подгруппы  $\Delta(G)$  группы  $G$ , то каждая разрешимая нормальная подгруппа мультипликативной группы  $U(KG)$  центральна.

Строение абелевых нормальных подгрупп  $U(KG)$  при более слабых предположениях на кольцо  $K$  изучалось в работе [2]. Частный случай теоремы 2 доказан также И.Голубчиком.

### §1. Доказательство теоремы 1

**Определение.** Группа  $G$  называется  $E$ -группой, если  $G$  - нильпотентная 2-группа ступени 2 и неабелевы подгруппы гомоморфных образов группы  $G$  не имеют в центре порядка 4.

Так как группа  $G$  является своим гомоморфным образом, то центр и коммутант  $E$ -группы имеют показатель 2. Поэтому показатель  $E$ -группы равен 4.

Пусть  $(a, b)$  - коммутатор элементов  $a$  и  $b$  группы  $G$ .

**Лемма 1.** Пусть  $a_1$  и  $a_2$  - перестановочные элементы порядка 4  $E$ -группы  $G$  и  $(a_1, b) \neq 1$ . Если  $(a_1, b) \neq (a_2, b)$ , то  $b a_1 b^{-1} = a_1^3$ . Если же  $(a_1, b) = (a_2, b) \neq 1$ , то  $a_1^2 = a_2^2$ .

**Доказательство.** Пусть  $G_1 = \langle a_1, a_2, b \rangle$  и  $(a_1, b) \neq (a_2, b)$ . Так как в центре группы  $G_1$  нет элементов порядка 4, то  $(a_2, b) \neq 1$ . Поэтому группа  $G_1 / \langle (a_1, b) \rangle$  неабелева и ее элемент  $a_1 \langle (a_1, b) \rangle$  принадлежит центру и имеет порядок 2. Следовательно,  $b a_1 b^{-1} = a_1^3$ . Если же  $(a_1, b) = (a_2, b)$ , то элемент  $a_1 a_2^{-1}$  принадлежит центру группы  $G_1$  и имеет порядок 2. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $G$  -  $E$ -группа. Тогда централизатор элемента  $a$  4-го порядка абелева группа и: 1. если  $(a, b) = 1$  и  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ , то подгруппа  $\langle b \rangle$  нормальна в  $G$ ; 2. если  $(a, b) \neq 1$  и  $b^2 = 1$ , то либо элемент  $b$  имеет ровно 2 сопряженных в  $G$ , либо  $b a b^{-1} = a^3$ ; 3. если  $b a b^{-1} = a^{-1}$  и  $b^2 \neq 1$ , то либо элемент  $a$  имеет ровно 2 сопряженных в  $G$ , либо  $a^2 = b^2$ .

Доказательство. Так как элемент  $a$  4-го порядка принадлежит центру централизатора  $C(a)$  элемента  $a$ , то группа  $C(a)$  абелева. Пусть  $(a, t) = 1$  и  $(b, g) \neq 1$  для некоторого  $g \in G$ . Так как  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ , то порядок элемента  $ab$  равен 4 и  $(a, g) \neq (ab, g)$ . Тогда в силу леммы I  $gag^{-1} = a^3$  и  $gabg^{-1} = (ab)^3$ . Поэтому  $gbg^{-1} = b^3$  и подгруппа  $\langle b \rangle$  нормальна.

Пусть  $(a, b) \neq 1$ ,  $b^2 = 1$  и  $(a, c) = c \neq a^2$ . Тогда в факторгруппе  $\bar{G} = G/\langle c \rangle$  элементы  $\bar{a} = a\langle c \rangle$  и  $\bar{b} = b\langle c \rangle$  перестановочны. Если  $\bar{G}$  - неабелева группа, то  $\bar{b} \in C(\bar{a})$ , порядок элемента  $\bar{a}$  равен 4 и  $\langle \bar{a} \rangle \cap \langle \bar{b} \rangle = 1$ . В силу доказанного выше утверждения подгруппа  $\langle \bar{b} \rangle$  нормальна и элемент  $\bar{b}$  имеет 2 сопряженных в  $\bar{G}$ .

Утверждение 3 доказывается аналогичным образом, факторизуя группу  $G$  по подгруппе  $\langle a^2 \rangle$ .

Лемма 3. Если  $G$  является  $E$ -группой, то либо группа  $G$  удовлетворяет утверждению I теоремы I, либо централизатор  $C(a)$  каждого элемента  $a$  4-го порядка имеет вид  $\langle a, \mathfrak{Z}(G) \rangle$ , где  $\mathfrak{Z}(G)$  - центр группы  $G$ .

Доказательство. Пусть  $H = C(a)$  и группа  $H$  обладает таким элементом  $a_1$  4-го порядка, что  $(a, b) \neq (a_1, b)$  для всех  $b$  из подмножества  $G \setminus H$ . Тогда в силу леммы I  $bab^{-1} = a^3$  для всех  $b$ . Согласно лемме 2 группа  $H$  абелева и, если  $h \in H$  и  $(b, h) \neq 1$ , то  $bhb^{-1} = h^3$ . Если же  $(b, h) = 1$ , то  $(b, ah) \neq 1$  и снова по лемме 2  $bahb^{-1} = (ah)^3$ , а отсюда  $bhb^{-1} = h^3 = h$ . Следовательно, группа  $G/H$  имеет порядок 2 и выполняется утверждение I теоремы I.

Пусть для каждого элемента  $a_1$  4-го порядка группы  $H$  существует элемент  $b \in G \setminus H$  такой, что  $(a, b) = (a_1, b)$ . Тогда в силу леммы I  $a_1^2 = a^2$  и группа  $H$  представима как прямое произведение группы  $\langle a \rangle$  и группы  $W$  показателя 2. Ввиду леммы 2 каждая подгруппа 2-го порядка группы  $W$  нормальна и поэтому принадлежит центру группы  $G$ . Следовательно,  $H = \langle a, \mathfrak{Z}(G) \rangle$ . Лемма доказана.

Доказательство теоремы I. Пусть в группе  $G$  существует элемент  $a$ , имеющий ровно 2 сопряженных.

Если  $a^2 = 1$ , то группа  $H$  имеет показатель 2. Действительно, пусть  $h$  - элемент порядка 4 из  $H$ . Так как в  $E$ -группе квадрат каждого элемента принадлежит центру, то  $a \in \langle h \rangle$ . Очевидно, что  $(a, h) = 1$  и  $\langle a \rangle \cap \langle h \rangle = 1$ . Тогда

по лемме 2 подгруппа  $\langle a \rangle$  нормальна, а это невозможно. Следовательно, группа  $G$  удовлетворяет утверждению 2 теоремы.

Пусть  $a$  - элемент порядка 4 и группа  $G$  не удовлетворяет утверждению 1 теоремы. Тогда  $H$  - абелева группа и в силу леммы 3  $H = \langle a, z(G) \rangle$ . Группа  $z(G)$  имеет показатель 2 и  $G/z(G) = \langle az(G) \rangle \times \langle bz(G) \rangle$ . Если хотя бы один из элементов  $a, b, ab$  имеет порядок 2, то группа  $G$  удовлетворяет утверждению 2 теоремы. Поэтому можно считать, что эти элементы имеют порядок 4. Если  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$ , то  $(ab)^2 = (a, b)$  и  $a(ab)a^{-1} = (ab)^3$ . Так как группа не удовлетворяет утверждению 1 теоремы, то это невозможно. Следовательно, группа  $\langle a, b \rangle$  имеет строение, указанное в утверждении 3 теоремы и группа  $G$  представима как прямое произведение  $\langle a, b \rangle$  и группы показателя 2.

Докажем, что если группа  $G$  не обладает классом сопряженных элементов порядка 2, то она не является  $E$ -группой. Действительно, если  $G$  такая  $E$ -группа, то по лемме 3 централизатор  $H$  элемента  $a$  4-го порядка имеет вид  $\langle a, z(G) \rangle$  и  $[G:H] > 2$ . Поэтому существует такой  $b \in G$ , что  $\bar{b} = (a, b) \in \{1, a^2\}$ . Элемент  $a \in \langle \bar{b} \rangle$  факторгруппы  $\bar{G} = G/\langle \bar{b} \rangle$  обозначим через  $\bar{a}$ . Тогда  $\bar{a}^2 \neq 1$  и в силу леммы 2 либо элемент  $\bar{a}$  имеет ровно 2 сопряженных в  $\bar{G}$ , либо  $\bar{b} \in \langle \bar{a}, z(\bar{G}) \rangle$ . Второй случай невозможен, так как в силу предположения  $[G:C(b)] > 2$ ,  $\bar{b} \in z(\bar{G})$  и  $\bar{b} = \bar{a}^i \bar{z} (\bar{z} \in z(\bar{G}))$ . Так как  $[G:C(z)] \leq 2$ , то элемент  $z$  принадлежит центру группы  $G$ , а это невозможно. Следовательно,  $\{a, a^3, ba, ba^3\}$  - класс сопряженных элементов.

Пусть  $\forall a b^{-1} = ac$ ,  $b_1 a b_1^{-1} = a^3$  и  $G_1 = \langle a, b, b_1 \rangle$ . Тогда в силу леммы 2  $b^2 \neq 1$ . Если  $(b, b_1) = 1$  и  $b_1^2 = 1$ , то  $b_1 \in \langle b \rangle$  и на основании леммы 2 получаем противоречие  $b_1 \in z(G_1)$ . Если же  $(b, b_1) \neq 1$ , то ввиду леммы 2  $b_1, b b_1^{-1} = a^3$ . Тогда  $(b b_1)^2 = 1$ ,  $(a, b b_1) \neq 1$  и в силу леммы 2  $b b_1 a (b b_1)^{-1} = a^3$ , а это невозможно. Следовательно, элементы  $b$  и  $b_1$  имеют порядок 4 и  $b_1^2 = a^2$ . Аналогично, как и для элемента  $a$ , доказываем, что  $\{b, b^3, b_1, b_1^3\}$  - класс сопряженных элементов группы  $G$ . Возможны такие случаи:

1.  $b, b b_1^{-1} = a^3$ . В силу леммы 2  $b^2 = b_1^2 = a^2$  и  $ab \in C(b_1)$ . Тогда по лемме 3  $ab = b_1 c_1 (c_1 \in z(G))$  и равенство  $(a, b) = (a, ab) = (a, b_1 c_1) = (ab)$  противоречиво.

2.  $\ell_1 \ell \ell_1^{-1} = \ell$ . Тогда  $\ell_1 = \ell c_1$  ( $c_1 \in Z(G)$ ) и как и предыдущем случае получаем противоречие.

3.  $\ell_1 \ell \ell_1^{-1} = \ell c$ . Группа  $G/\langle c \rangle$  является  $E$ -группой и ее подгруппа  $G_1/\langle c \rangle$  абелева. Так как ее центр не содержит элемент порядка 4, то  $\ell^2 = c$  и имеем случай I.

4.  $\ell_1 \ell \ell_1^{-1} = \ell^3 c$ . Тогда  $a \ell_1 \ell (a \ell_1)^{-1} = \ell^3$  и в силу леммы 2  $(a \ell_1)^2 = \ell^2$ . Поэтому  $a^2 = \ell^2$  и  $a \ell \in C(a \ell_1)$ . Тогда по лемме 3  $a \ell = a \ell_1 c_1$  ( $c_1 \in Z(G)$ ), а это невозможно. Таким образом, необходимость этих условий доказана, а их достаточность очевидна.

## §2. Доказательство теоремы 2

Лемма 4. Пусть  $K$  - бесконечное коммутативное локальное кольцо без делителей нуля и  $G = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$  - циклическая группа порядка  $n$ . Тогда существует бесконечное множество таких элементов  $\alpha$  кольца  $K$ , что элемент  $g - \alpha$  группового кольца  $KG$  обратим и  $(g - \alpha)^{-1} = (1 - \alpha^n)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-1-i} g^i$ .

Доказательство. Если  $\alpha$  - ненулевой элемент из максимального идеала  $T$  кольца  $K$ , то все степени элемента  $\alpha$  различны и  $1 - \alpha^m$  обратим в кольце  $K$  при всех  $m$ . Если же  $T = 0$ , то мультипликативная группа поля  $K$  либо обладает элементом бесконечного порядка, либо неограниченная периодическая группа. Поэтому утверждение леммы очевидно.

Доказательство теоремы 2. Так как характеристика кольца  $K$  не делит порядок ни одного элемента из группы  $\Delta(G)$ , то кольцо  $KG$  не обладает нильпотентным идеалом [3]. Пусть абелева нормальная подгруппа  $A$  группы  $U(KG)$  не принадлежит центру и  $(h, g) \neq 1$ , где  $g \in G$  и  $h \in A$ . В силу леммы 4 существует такое  $\alpha$  из  $K$ , что элемент  $g - \alpha$  обратим. Пусть  $h_\alpha = (g - \alpha) h (g - \alpha)^{-1}$  и  $h_0 = g h g^{-1}$ . Тогда  $h_0, h_\alpha \in A$  и  $(h_0 - h_\alpha)g = \alpha(h - h_\alpha)$ . Отсюда следует, что элементы  $h$  и  $(h_0 - h_\alpha)g$  перестановочны. Поэтому  $(h - h_0)(h_0 - h_\alpha) = 0$  и  $(h - h_0)(h - h_\alpha) = 0$ . Из этих равенств следует, что  $(h - h_0)^2 = 0$  и в кольце  $KG$  выполняется линейное тождество

$$h^2 g - g h g h + g h^2 = 0 \quad (g \in G). \quad (I)$$

Рассмотрим в кольце  $KG$  внутреннее дифференцирование  $d(x) = hx - xh$ . Тогда в силу (I)  $d^2(x) = 0$

для всех  $x \in KG$ . Так как  $d^2(xy) = d^2(x)y + 2d(x)d(y) + x d^2(y)$ , то  $d(x)dy = 0$ . Если  $z \in KG$ , то из равенства  $0 = d(x)d(zx) = d(x)(d(z)x + z d(x))$  следует, что  $d(x)z d(x) = 0$ . Тогда  $KG d(x)$  - нильпотентный идеал кольца  $KG$  и в силу полупервичности этого кольца имеем, что  $d(g) = 0$  для всех  $g \in G$ . Полученное противоречие доказывает, что каждая абелева нормальна подгруппа группы  $U(KG)$  центральна.

Пусть  $H$  - нормальная подгруппа группы  $U(KG)$  с абелевым коммутантом  $H'$ . Тогда  $H'$  - подгруппа центра группы  $U(KG)$ . Если  $g \in G$  и  $h \in H$ , то в силу леммы 4 существует такое  $\alpha$  из  $K$ , что  $g-\alpha$  обратим и  $(g-\alpha)^{-1} h (g-\alpha) \in H$ . Тогда элемент

$$c_\alpha = (g-\alpha)^{-1} h (g-\alpha) h (g-\alpha)^{-1} h^{-1} (g-\alpha) h^{-2} \quad (2)$$

принадлежит  $H'$  и является центральным элементом.

Пусть  $n$  - порядок элемента  $g$ . Учитывая вид элемента  $(g-\alpha)^{-1}$ , в силу (2) получаем такое равенство

$$\left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i} g^i \right) (hgh^{-1} - \alpha h^2) \left( \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{n-j} g^j \right) (h^{-1} g h^{-1} - \alpha h^{-2}) = c_\alpha (1 - \alpha^n)^2$$

Представим левую часть этого равенства как многочлен от  $\alpha$ . Тогда

$$\alpha^{2n} a_0 + \alpha^{2n-1} a_1 + \dots + \alpha a_{2n-1} + a_{2n} = (\alpha^n - 1)^2 c_\alpha \quad (3)$$

Очевидно, что вид элементов  $a_i$  не зависит от  $\alpha$  и непосредственным подсчетом проверяем, что  $a_0 = 1$  и

$$a_1 = g - 2hgh^{-1} + h^2gh^{-2} \quad (4)$$

В силу леммы 4 существует бесконечно много таких  $\alpha$ , что  $g-\alpha$  обратим и удовлетворяют равенству 2. Выберем такие попарно различные элементы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ , что

$$\alpha_i^{2n-1} a_1 + \alpha_i^{2n-2} a_2 + \dots + a_{2n} = (\alpha_i^n - 1)^2 c_{\alpha_i} - \alpha_i^{2n}$$

для  $i = 1, \dots, 2n$ . Тогда получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  с определителем Вандермонда, который отличен от нуля. Поэтому элементы  $a_i$  принадлежат центру кольца  $KG$  и в силу

$$(4) \quad d^2(g) = a_1 h^2 \quad \text{для всех } g \in G. \quad \text{Тогда } d^3(g) = 0 \quad \text{и} \\ 0 = d^4(g^2) = 6d^2(g)d^2(g) = 6a_1^2 h^4. \quad (5)$$

Так как центр кольца  $KG$  не обладает ненулевым нильпотентным элементом, то из (5) следует, что  $a_1 = 0$ . Поэтому

$d^2(g) = 0$  для всех  $g \in G$ . Тогда можно повторить приведенные выше рассуждения и получить противоречие. Теорема доказана.

### Литература

1. Б о в д и А. А., Х р и п т а И.И. Групповые алгебры периодических групп с разрешимой мультипликативной группой. Матем. Заметки, 1977, т. 22, № 3, 421-432.
2. Б о в д и А. А. О строении мультипликативной группы групповой алгебры с условиями конечности. В кн.: Алгебраические структуры. (Мат. исслед., вып. 56). Кишинев, Штиинца, 1980, 14-27.
3. Б о в д и А. А., Групповые кольца. Ужгород, Ужгородский госуниверситет, 1974, 120 с.
4. Р а в я ш а н D. S. Observations on group rings. Commun. Algebra, 1977, V. 5, p. 1119-1162.
5. Т а у л о р D. E. Groups whose modular group have soluble unit groups. Proc. minioonf. theory of groups, Canberra, 1975, pp. 112-117.

Поступило  
25.XI 1983

### LAHENDUVATEST NORMAALJAGAJATEST PERIOODILISE RÜHMÄ RÜHMARINGI MULTIPLIKATIIVSE RÜHMÄS

A. Bovdi, I.Hripta

R e s ü m e e

Töö esimeses osas antakse nende perioodiliste rühmade  $G$  lõplik kirjeldus, mille rühmaringi  $KG$  multiplikaatiivne rühm  $U(KG)$  on lahenduv. Töö teises osas tõestatakse, et rühma  $U(KG)$  kõik invariantised alamrühmad on tsentraalsed juhul, kui  $K$  on nullitegurita kommutatiivne lokaalne ring karakteristikaga  $p > 0$ ,  $p \neq 2, 3$ , kusjuures algarv  $p$  ei ole rühma  $G$   $FC$ -tsentri elementide järkude jagajaks.

ON SOLVABLE INVARIANT SUBGROUPS IN THE UNIT GROUP  
OF THE GROUP RING OF A PERIODIC GROUP

A. Bovdi, I. Hripta

S u m m a r y

The first part of this paper gives a description of periodic groups  $G$  with solvable unit groups  $U(K[G])$  of their group rings  $K[G]$ . In the second part it is proved that all solvable invariant subgroups in  $U(K[G])$  are central if  $K$  is a local integral domain with characteristic  $p > 0$ ,  $p \neq 2, 3$  such that  $p$  doesn't divide orders of elements in the FC-center of  $G$ .

## LOCALLY AFFINE COMPLETE ABELIAN GROUPS

K. Kaarli

Tartu State University

In [4] the complete description of affine complete abelian groups was obtained. In this paper we give a solution of the local version of this problem.

Throughout the paper, "group" is used in the meaning "abelian group". Concerning the notions and fundamental theorems of the theory of abelian groups we refer the reader to [1]. By  $\exp A$  we denote the exponent of a group  $A$ , i.e. the least positive integer  $n$  such that  $nA = 0$ .

Let  $A$  be a group. A function  $f : A^n \rightarrow A$  of the form

$$f(x_1, \dots, x_n) = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n + a$$

where  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ ,  $a \in A$ , is called a polynomial function. The set of all  $n$ -ary polynomial functions on  $A$  is denoted by  $P_n(A)$ . For any natural numbers  $k \geq 2$  and  $n$ , we consider the set  $L_k P_n(A)$  of all  $n$ -ary functions on  $A$  which can be interpolated by a polynomial function on every subset  $X \subseteq A^n$  with  $|X| \leq k$ . Functions belonging to the intersection

$$LP_n(A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} L_k P_n(A)$$

are called local polynomial functions. Furthermore, we consider the set  $C_n(A)$  of all  $n$ -ary compatible functions on  $A$ . A function  $f : A^n \rightarrow A$  is said to be compatible if it is compatible with all congruence relations of  $A$ , i.e.

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n) \in \langle x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n \rangle$$

for all  $x_i, y_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, n$  (cf. [5]).

It is easy to see that, for given  $n$ , the sets of functions defined above form the chain

$$C_n(A) \supseteq L_2 P_n(A) \supseteq L_3 P_n(A) \supseteq \dots \supseteq LP_n(A) \supseteq P_n(A). \quad (1)$$

In [2] Hule and Nöbauer proved that, for any  $n$ ,  $C_n(A) = L_2 P_n(A)$ ,  $L_4 P_n(A) = LP_n(A)$  and  $L_3 P_1(A) = LP_1(A)$ . Hence, the chains (1) reduce to chains

$$C_1(A) \cong LP_1(A) \cong P_1(A) \quad (2)$$

$$C_n(A) \cong L_3P_n(A) \cong LP_n(A) \cong P_n(A), \quad n \geq 2. \quad (3)$$

Moreover, in [2,3] the same authors described the classes of groups  $A$  satisfying  $LP_n(A) = P_n(A)$  or  $L_3P_n(A) = L_4P_n(A)$  for a given natural number  $n$ . The description of  $n$ -affine complete groups, i.e. groups  $A$  with  $C_n(A) = P_n(A)$  was obtained in [4]. Thus, there remain two problems concerning the chains (2) and (3):

a) to describe locally  $n$ -affine complete groups, i.e. groups  $A$  with  $C_n(A) = LP_n(A)$ ;

b) to describe groups  $A$  satisfying  $C_n(A) = L_3P_n(A)$ .

Several partial results concerning these problems were obtained by Hule and Nöbauer in [3]. Here we solve them completely making use of methods developed in [4].

We start with two lemmas. The first of them is an easy generalization of Theorems 2.1 and 2.2 from [4]. The second one was originally proved in [3]. However, we present a much shorter proof here.

Lemma 1. Let  $A$  be a group with a subgroup  $B$  such that

- i)  $A/B$  has a distributive lattice of subgroups;
- ii)  $B$  is bounded,  $\exp B = t$  and there exists  $a_0 \in A$  such that  $2ta_0 \neq 0$ .

Then, for any  $n$ ,  $C_n(A) \neq L_3P_n(A)$ .

Proof. Obviously, it is enough to prove  $C_1(A) \neq L_3P_1(A)$ . Consider the mapping  $\bar{g} : \{0, \bar{a}_0, 2\bar{a}_0\} \rightarrow \bar{A} = A/B$ ,  $\bar{g}(0) = 0$ ,  $\bar{g}(\bar{a}_0) = \bar{a}_0$ ,  $\bar{g}(2\bar{a}_0) = 4\bar{a}_0$ . An easy computation shows that  $\bar{g}$  is a unary partial compatible function on  $\bar{A}$ . Since  $\bar{A}$  has a distributive lattice of subgroups, it is countable ([6], I, Theorem 2). Hence, applying a countable number of times Lemma 2.1 from [4], we can extend  $\bar{g}$  to a function  $\bar{f} \in C_1(\bar{A})$ .

Define now a mapping  $f : A \rightarrow A$  as follows

$$f(a) = tb \quad \text{if} \quad \bar{f}(\bar{a}) = \bar{b}.$$

This definition is correct for  $b_1 - b_2 \in B$  implies  $tb_1 - tb_2 = t(b_1 - b_2) = 0$ . Take now arbitrary  $a_1, a_2 \in A$  and let  $\bar{f}(\bar{a}_i) = \bar{c}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Since  $\bar{f} \in C_1(\bar{A})$ , there exist  $k \in \mathbb{Z}$  and  $b \in B$  such that  $c_1 - c_2 = k(a_1 - a_2) + b$ . Therefore

$$f(a_1) - f(a_2) = tc_1 - tc_2 = tk(a_1 - a_2),$$

so  $f \in C_1(A)$ .

Suppose  $f \in L_2P_1(A)$ . Then, in particular, there exist  $m \in \mathbb{Z}$  and  $c \in A$  such that  $0 = m0 + c$ ,  $ta_0 = ma_0 + c$  and  $4ta_0 = 2ma_0 + c$ . An easy consequence from these equalities is  $2ta_0 = 0$ , a contradiction.

**Lemma 2.** If  $A = U + B$  where  $U = \mathbb{Z}(2^e)$  and  $\exp B = 2^{e-1}$  then  $C_n(A) = L_2P_n(A)$  for any  $n \geq 1$ .

**Proof.** Take an  $f \in C_n(A)$ . We have to prove that, for any three elements  $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , there exists a  $p \in P_n(A)$  such that  $f(\bar{a}_i) = p(\bar{a}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Since the subgroup  $D = A[2^{e-1}] = \{a \in A \mid 2^{e-1}a = 0\}$  is affine complete ([5], Satz 5), we may assume

$$f(D^n) = 0 \quad (4)$$

By [5] we can represent  $f$  as a direct sum of  $g \in C_n(U)$  and  $h \in C_n(B)$ . Now from (4) it follows

$$g((2U)^n) = 0, \quad h = 0. \quad (5)$$

Let  $\bar{u}, \bar{v} \in U^n$ ,  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$  and let  $\bar{b} = (b, \dots, b)$  where  $b$  is an element of the maximal order in  $B$ , i.e.  $o(b) = 2^{e-1}$ . Since  $f \in C_n(A)$ , there exist  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  such that

$$f(\bar{u} + \bar{b}) - f(\bar{v}) = m_1(u_1 + b - v_1) + \dots + m_n(u_n + b - v_n).$$

On the other hand,

$$f(\bar{u} + \bar{b}) - f(\bar{v}) = g(\bar{u}) - g(\bar{v}) \in U,$$

implying  $2^{e-1} \mid m_i$  for any  $i = 1, \dots, n$ . Hence

$$g(\bar{u}) - g(\bar{v}) \in \langle 2^{e-1}(u_1 - v_1), \dots, 2^{e-1}(u_n - v_n) \rangle. \quad (6)$$

In particular, for any  $\bar{u} \in U^n$ ,

$$g(\bar{u}) \in 2^{e-1}U. \quad (7)$$

Let now  $a_{ij} = u_{ij} + b_{ij}$  ( $u_{ij} \in U$ ,  $b_{ij} \in B$ ) and consider the system of equations

$$x_0 u_0 + 2^{e-1} x_1 u_{11} + \dots + 2^{e-1} x_n u_{in} = g(u_{11}, \dots, u_{in}), \quad (8)$$

$i = 1, 2, 3,$

where  $u_0$  is the only non-zero element of  $2^{e-1}U$ . By (7),

the system (8) can be considered as the system of linear equations over Galois field  $GF(2)$ . If the rank of the matrix of this system is less than 3 then, looking at its first column, we see that two of its rows, say the first and the second, must be equal. Then from (6) it follows

$$g(u_{11}, \dots, u_{1n}) = g(u_{21}, \dots, u_{2n}) \quad \text{and so the system (8) is solvable.}$$

Let  $(k_0, \dots, k_n)$  be a solution of this system,  $k_i \in \{0, 1\}$ , and define a polynomial function

$$p(y_1, \dots, y_n) = k_0 u_0 + 2^{e-1} k_1 y_1 + \dots + 2^{e-1} k_n y_n.$$

It is easy to see that  $f(\bar{a}_1) = p(\bar{a}_1)$  for  $i = 1, 2, 3$  and so the lemma is proven.

**Theorem.** For  $n \geq 2$ , the complete list of locally  $n$ -affine complete groups is the following:

1. groups of torsion-free rank  $\geq 2$  ;
2. groups of torsion-free rank 1 with unbounded torsion part;
3. bounded  $p$ -groups which are direct sums of two groups of the same exponent;
4.  $p$ -groups having a non-bounded basic subgroup;
5.  $p$ -groups having  $\mathbb{Z}(p^m) + \mathbb{Z}(p^m)$  as a homomorphic image;
6. torsion groups all of whose  $p$ -components are of type 3, 4 or 5 .

**Proof.** The groups of types 1, 2 and 3 are affine complete [4]. Let  $A$  be a group of type 4 or 5 . Obviously  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A[p^k]$  and in both cases all the subgroups  $A[p^k]$  are of type 3 , so they are affine complete. Since every finite subset  $X \subseteq A$  is contained in some  $A[p^k]$ ,  $A$  is locally  $n$ -affine complete. Groups of type 6 are locally  $n$ -affine complete by [3], Corollary after Theorem 9.

Suppose now that  $A$  does not belong to the classes of groups listed above. By [3] the case of torsion group completely reduces to its  $p$ -components. Taking in account that the quotient group of a  $p$ -group by its basic subgroup is divisible, there remain three cases

a)  $A$  is an extension of a bounded torsion group by a torsion-free group of rank 1;

b)  $A$  is a  $p$ -group and  $A = U + B$  where  $U = \mathbb{Z}(p^e)$ ,  $\exp B < p^e$  ;

c)  $A$  is an extension of a bounded  $p$ -group by  $\mathbb{Z}(p^m)$  .

In all these cases but the subcase of b) with  $p = 2$  ,  $\exp B = 2^{e-1}$  , Lemma 1 yields  $C_n(A) \neq L_3 P_n(A)$  . In the exceptional case, however, by Theorem 1 from [3] we have  $L_3 P_n(A) \neq L P_n(A)$  . Hence,  $A$  is not locally  $n$ -affine complete. The theorem is proven.

**Corollary.** For  $n \geq 1$  , a group  $A$  satisfies the condition  $C_n(A) = L_3 P_n(A)$  if and only if it belongs to one of the classes listed in the theorem or it is a torsion group whose 2-component is as in Lemma 2 and all other  $p$ -compo-

nents are of type 3, 4 or 5 .

Proof. The sufficiency follows from the proof of our theorem, from Lemma 2 and from [3], Theorem 9. Let now  $C_n(A) = L_3P_n(A)$  but  $L_3P_n(A) \neq LP_n(A)$ . Then  $n \geq 2$  by [2], Theorem 3, and  $A$  is a torsion group with the 2-component as in Lemma 2 ([3], Theorem 1). Let  $A_p$  be the  $p$ -component of  $A$ ,  $p \neq 2$ . Then the equality  $C_n(A) = L_3P_n(A)$  implies  $C_n(A_p) = L_3P_n(A_p)$  ([3], Theoreme 9 and 11). Hence,  $A_p$  must be of type 3, 4 or 5 .

#### References

1. P u c h s, L., Infinite abelian groups I, II. Academic Press, 1970, 1973. Russian translation 1974, 1977.
2. H u l e, H., N ö b a u e r, W., Local polynomial functions on universal algebras. An. Acad. brasil. Cienc., 49, 3, 1977, 365-372.
3. H u l e, H., N ö b a u e r, W., Local polynomial functions on abelian groups. An. Acad. brasil. Cienc., 49, 4, 1977, 491-498.
4. K a a r l i, K., Affine complete abelian groups. Math. Nachr., 107, 1982, 235-239.
5. N ö b a u e r, W., Affinvollständige Moduln. Math. Nachr., 86, 1978, 85-96.
6. S u z u k i, M., Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Springer-Verlag, 1956. Russian translation 1960.

Получено  
20.VI 1984

#### LOKAALSELT AFINSELT TÄIELIKUD ABELI RÜHMAD

K. Kaarli

#### R e s ü m e e

Artiklis tõestatakse teoreem, mis annab pealkirjas toodud Abeli rühmade klassi täieliku kirjelduse.

# ЛОКАЛЬНО АФФИННО ПОЛНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

К. Каарян

## Резюме

Пусть  $A$  - абелева группа и  $f: A^n \rightarrow A$ . Функция  $f$  называется совместной, если при любой подгруппе  $B \subseteq A$  из  $a_1 - c_1 \in B, \dots, a_n - c_n \in B$  следует

$$f(a_1, \dots, a_n) - f(c_1, \dots, c_n) \in B.$$

Функция  $f$  называется полиномиальной, если существуют  $a \in A$  и  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ , такие что

$$f(x_1, \dots, x_n) = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n + a \quad (I)$$

при всех  $x_1, \dots, x_n \in A$ . Наконец, функция  $f$  называется локально полиномиальной, если она задается формулой вида (I) на любом конечном подмножестве множества  $A^n$ .

Абелева группа  $A$  называется (локально) аффинно полной, если всякая ее совместная функция является (локально) полиномиальной. Аффинно полные абелевы группы полностью описаны в [4]. Локально аффинно полные абелевы группы рассматривались в [2,3], в настоящей статье получено их полное описание. Доказано, что локально аффинно полными являются в точности абелевы группы из следующего списка:

1. абелевы группы, ранг без кручения которых  $\geq 2$ ;
2. абелевы группы, периодическая часть которых неограничена;
3. абелевы  $p$ -группы, представимые в виде прямой суммы двух групп одной и той же экспоненты;
4. абелевы  $p$ -группы, имеющие в качестве гомоморфного образа  $\mathbb{Z}(p^m) \oplus \mathbb{Z}(p^m)$ ;
5. абелевы  $p$ -группы с неограниченной базисной подгруппой;
6. периодические абелевы группы, все  $p$ -компоненты которых являются группами типа 3, 4, или 5 из настоящего списка.

ОДНОЗНАЧНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП

У. Кальклайд

Тартуский государственный университет

В теории групп имеется направление, ставящее целью классификацию многообразий групп и описание арифметической природы их полугруппы, [7]. В.И.Плоткиным в серии работ, начиная с 1971 года, реализована идея распространения этой тематики на многообразия представлений групп. В частности, в [9] доказана теорема о свободе полугруппы многообразий представлений групп.

Предметом работы служат многообразия линейных (над полем  $K$ ) полугрупповых пар, а ее результаты могут быть рассмотрены как вариации на описанную выше тему (для полугрупп). Здесь говорят о паре  $(G, \Gamma)$ , если полугруппа  $\Gamma$  действует в качестве полугруппы линейных преобразований в векторном пространстве  $G$  над  $K$ . Слово "многообразие", если специально не оговорено, означает "многообразие пар, отличное от единичного многообразия (класс пар с нулевой областью действия) и от многообразия всех пар". Множество многообразий пар допускает ассоциативное умножение: пара  $(G, \Gamma)$  содержится в  $\theta_1 \cdot \theta_2$ , если в  $G$  имеется  $\Gamma$ -подмодуль  $H$  такой, что  $(H, \Gamma) \in \theta_1$  и  $(G/H, \Gamma) \in \theta_2$ . Обозначим через  $\text{Var } \mathcal{K}$  многообразие, порожденное классом пар  $\mathcal{K}$ . Основным результатом данной работы является доказательство для любых классов  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  полугрупповых пар формулы  $\text{Var}(\mathcal{K}_1 \Delta \mathcal{K}_2) = \text{Var } \mathcal{K}_1 \cdot \text{Var } \mathcal{K}_2$ . Отсюда следует, что полугруппа (нетривиальных) многообразий линейных представлений полугрупп является полугруппой с однозначным разложением на множители; другое доказательство этого результата см. в [6].

Предполагается знакомство с понятием  $\Delta$ -умножения полугрупповых пар, [5]. Работа была доложена на Всесоюзном симпозиуме в Кяэрику (1976 г.) по теории колец, модулей и алгебр и изложена в рукописи [4]. Интерес к этой тематике не угас, [8,9]. Поэтому данная публикация, возможно, будет

полезной для интересующихся соответствующими вопросами для полугрупп. Я признателен Б.И.Плоткину, который помог мне войти в рассматриваемую здесь тематику.

## §1. Вспомогательные результаты

1. Прежде всего, отметим следующий результат о треугольном произведении пар, которым будем пользоваться.

**Предложение 1.** Для любых подпар  $(A', \Sigma'_1)$  и  $(B', \Sigma'_2)$  в  $(A, \Sigma_1)$  и  $(B, \Sigma_2)$  соответственно, пара  $(A', \Sigma'_1) \Delta (B', \Sigma'_2)$  принадлежит многообразию  $\text{Var}((A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2))$ .

**Доказательство.** Введем обозначение  $(G, \Gamma) = (A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$ . Утверждение будем доказывать в несколько этапов.

Сначала заметим, что вложения  $\Sigma'_i \rightarrow \Sigma_i$ ,  $i=1,2$ , индуцируют очевидным образом вложение пар  $(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2) \rightarrow (G, \Gamma)$ .

Пусть  $\Gamma'$  - действующая полугруппа пары  $(A, \Sigma'_1) \Delta (B, \Sigma'_2)$ . Полагаем  $H = A + B'$ . Очевидно,  $H \cap B = B'$ , а непосредственная проверка показывает, что  $H \circ \Gamma' \subset H$ . Поэтому имеем эпиморфизм пар  $(A \oplus B', \Gamma') \rightarrow (A, \Sigma'_1) \Delta (B', \Sigma'_2)$ ; см. предложение 6 из [5]. Действующую полугруппу в паре правее стрелки обозначим  $\Gamma''$ . Заметим также, что  $A'$  является  $\Gamma''$ -подмодулем в  $A \oplus B'$ .

Рассмотрим пару  $(A', \Sigma'_1) \Delta (B', \Sigma'_2)$  и выделим в полугруппе  $\Phi = \text{Hom}^+(B', A)$  подполугруппу  $\Phi'$  всех тех элементов  $\varphi$ , что  $\text{Im } \varphi \subset A'$ . Очевидно, имеется естественный изоморфизм  $\text{Hom}^+(B', A') \rightarrow \Phi'$ , индуцирующий изоморфизм пар  $(A', \Sigma'_1) \Delta (B', \Sigma'_2) \rightarrow (A' \oplus B', \Phi' \lambda (\Sigma'_1 \times \Sigma'_2))$ , откуда в силу того, что  $(A' \oplus B', \Phi' \lambda (\Sigma'_1 \times \Sigma'_2))$  является подпарой в  $(A, \Sigma_1) \Delta (B', \Sigma_2)$ , следует существование вложения  $(A', \Sigma'_1) \Delta (B', \Sigma'_2) \rightarrow (A, \Sigma_1) \Delta (B', \Sigma_2)$ . В силу свойств  $\text{Var}(G, \Gamma)$  построенные морфизмы пар дают требуемое в предложении включение.

Предложение доказано.

2. Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  - счетное множество, а  $\Psi$  и  $\Psi^*$  - свободная полугруппа и свободный моноид, соответственно с элементами множества  $X$  в качестве системы свободных образующих. Далее, пусть  $\Theta$  - многообразие пар, и  $\mathcal{U}$  - отвечающий ему специальный идеал в полугрупповом кольце  $K\Psi^*$ . Пара  $(K\Psi^*/\mathcal{U}, \Psi)$  является, очевидно, циклической парой, и как легко убедиться, свободной в многооб-

разии  $\Theta$ . Легко понять, что  $\Theta = \text{Var}(K\Psi^*/\mathcal{U}, \Psi)$ .

Предложение 2. Пусть  $(A, \Sigma)$  - произвольная пара, а  $(R, \Psi)$  - свободная пара многообразия  $\Theta_2$ . Тогда  $\text{Var}((A, \Sigma) \Delta (R, \Psi)) = \text{Var}(A, \Sigma) \cdot \Theta_2$ .

Доказательство. Обозначим  $\Theta_1 = \text{Var}(A, \Sigma)$  и  $\Theta_3 = \text{Var}((A, \Sigma) \Delta (R, \Psi))$ . Используя предложения 3 и 9 из [5] вместе с доказанным выше предложением I, выводим  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 \subset \Theta_3$ . С другой стороны, имеем  $\Theta_3 = \text{Var}((A, \Sigma) \Delta (R, \Psi)) \subset \Theta_1 \cdot \Theta_2$ . В итоге,  $\Theta_3 = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ . Предложение доказано.

3. Можно вывести одно полезное свойство полугруппы многообразий представлений полугрупп - она является полугруппой с двусторонним сокращением. Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы.

Теорема I. Пусть  $\Theta, \Theta_1$  и  $\Theta_2$  - любые многообразия. Верны следующие импликации

- (а)  $\Theta_1 \cdot \Theta = \Theta_2 \cdot \Theta \implies \Theta_1 = \Theta_2$ ,  
 (б)  $\Theta \cdot \Theta_1 = \Theta \cdot \Theta_2 \implies \Theta_1 = \Theta_2$ . \*

Следующие два замечания о специальных идеалах в кольце  $K\Psi^*$  будут существенны.

Во-первых, непосредственно из определений следует, что всякий специальный в  $K\Psi^*$  идеал  $\mathcal{U}$  содержится в фундаментальном идеале  $\Delta$  полугруппового кольца  $K\Psi^*$ .

Во-вторых, для полугруппового кольца  $K\Psi^*$  как кольца многочленов от некоммутирующих переменных из  $X$  имеем соотношение  $\bigcap_n \Delta^n = 0$ . Это позволяет ввести понятие веса собственного специального идеала  $\mathcal{U}$ ,  $v(\mathcal{U})$ , определяя его как первый такой показатель  $k$ , что  $\mathcal{U} \subset \Delta^k$ ,  $\mathcal{U} \not\subset \Delta^{k+1}$ . Легко понять, что если специальный идеал  $\mathcal{U}$  разлагается в произведение двух других собственных специальных идеалов, то вес множителей меньше, чем вес самого  $\mathcal{U}$ .

Доказательство теоремы I. (а) Мы должны доказать, что  $\Theta_1 \subset \Theta_2$  и  $\Theta_2 \subset \Theta_1$ . Допустим, например, что  $\Theta_1 \not\subset \Theta_2$ . Возьмем любую пару  $(A, \Sigma)$ , порождающую многообразие  $\Theta_1$  и пусть  $(R, \Psi)$  - свободная пара в  $\Theta$ . Тогда, согласно предложению 2, пара  $(G, \Gamma) \doteq (A, \Sigma) \Delta (R, \Psi)$  порождает многообразие  $\Theta_1 \cdot \Theta = \Theta_2 \cdot \Theta$ .

Пусть  $\Theta_2$  - радикал по многообразию  $\Theta_2$ . Рассмотрим подмодуль  $H \doteq \Theta_2(A, \Sigma) \subset A$ . Если имеет место  $H = A$ , то  $(A, \Sigma) \in \Theta_2$ , откуда  $\Theta_1 = \text{Var}(A, \Sigma) \subset \Theta_2$ , что противоречит допущению. Следовательно,  $H < A$  и мы можем вос-

пользоваться предложением 7 из [5]; в результате выводим соотношение  $H = \theta_2(G, \Gamma)$ , которое вместе с  $(G, \Gamma) \in \theta_2 \cdot \theta$  дает  $(G/H, \Gamma) \in \theta$ . Естественный эпиморфизм  $(A, \Sigma) \rightarrow (A/H, \Sigma)$  индуцирует эпиморфизм  $(G, \Gamma) \rightarrow (A/H, \Sigma) \Delta(R, \Psi)$ ; см. предложение 4, [5]. Внутри области действия в ядре этого эпиморфизма в силу его конструкции лежит  $H$ . Но тогда имеется коммутативная диаграмма эпиморфизмов

$$\begin{array}{ccc} (G, \Gamma) & \longrightarrow & (A/H, \Sigma) \Delta(R, \Psi) \\ & \searrow & \nearrow \\ & (G/H, \Gamma) & \end{array}$$

Поэтому из  $(G/H, \Gamma) \in \theta$  вытекает  $(A/H, \Sigma) \Delta(R, \Psi) \in \theta$ , откуда, в свою очередь, следует (согласно предложению 2), что  $\theta \subset \text{Var}(A/H, \Sigma) \cdot \theta = \text{Var}(A/H, \Sigma) \cdot \text{Var}(R, \Psi) = \text{Var}((A/H, \Sigma) \Delta(R, \Psi)) \subset \theta$ , т.е.  $\theta = \text{Var}(A/H, \Sigma) \cdot \theta$ .

Покажем теперь, что последнее равенство противоречиво. Для этого заметим, что в силу  $H < A$  многообразие  $\text{Var}(A/H, \Sigma)$  не является единичным, а из  $\text{Var}(A/H, \Sigma) \subset \theta_1$  вытекает, что оно не может быть и многообразием всех пар. Следовательно, многообразию  $\text{Var}(A/H, \Sigma)$  отвечает в  $K\Psi^*$  собственный специальный идеал  $\mathcal{U}_2$ . Специальный идеал, отвечающий  $\theta$ , обозначим  $\mathcal{U}_1$ . В силу теоремы 2 из [2] имеем  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2$ . Сравнивая веса левой и правой частей этого равенства, выводим

$$v(\mathcal{U}_1) = v(\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2) \geq v(\mathcal{U}_1) + v(\mathcal{U}_2) > v(\mathcal{U}_1).$$

Противоречие. Следовательно, верно  $\theta_1 \subset \theta_2$ .

Так как многообразия  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в рассуждениях выступают симметрично, то поменяя их роли, выводим аналогично  $\theta_2 \subset \theta_1$ .

(б) Допустим, что  $\theta_1 \not\subset \theta_2$ . Возьмем любую пару  $(A, \Sigma)$ , порождающую многообразие  $\theta$  и пусть  $(R, \Psi)$  - свободная пара в  $\theta_1$ . Тогда, согласно предложению 2, пара  $(G, \Gamma) \doteq (A, \Sigma) \Delta(R, \Psi)$  порождает многообразие  $\theta \cdot \theta_1 = \theta \cdot \theta_2$ . Пусть  $\theta_2$  - вербал по  $\theta_2$ . Рассмотрим подмодуль  $R_0 \doteq \theta_2(R, \Psi)$ . Если  $R_0 = 0$ , то  $(R, \Psi) \in \theta_2$ , откуда  $\theta_1 = \text{Var}(R, \Psi) \subset \theta_2$ , что противоречит допущению. Следовательно, имеем  $R_0 > 0$ . Воспользуясь предложением 5 из [5], выводим  $H \doteq \theta_2(G, \Gamma) = A + R_0$ . Из  $(G, \Gamma) \in \theta \cdot \theta_2$  следует теперь, что  $(H, \Gamma) \in \theta$ . Имеется, однако, естественный правый эпиморфизм  $(H, \Gamma) \rightarrow (A, \Sigma) \Delta(R_0, \Psi)$ ; поэтому

пара правее стрелки также лежит в многообразии  $\Theta$ .

Заметим, далее, что свободная циклическая пара  $(B, \Psi)$  многообразия  $\text{Var}(R_0, \Psi)$  содержится в  $\mathbf{VSC}(R_0, \Psi)$ ; доказательство этого факта получается дословным перенесением в полугрупповую ситуацию леммы I.3 из [1].

Теперь, согласно предложению IO из [5], пару  $(A, \Sigma) \Delta (R_0, \Psi)^I$  можно вложить в  $((A, \Sigma) \Delta (R_0, \Psi))^I$ , которая лежит в  $\Theta$ . Следовательно,  $(A, \Sigma) \Delta (R_0, \Psi)^I \in \Theta$ . Из отмеченного выше соотношения  $(B, \Psi) \in \mathbf{VSC}(R_0, \Psi)$  вытекает существование подпары  $(B, \Sigma_2)$  в  $(R_0, \Psi)^I$ , такой, что имеется правый эпиморфизм  $\mu: (B, \Psi) \rightarrow (B, \Sigma_2)$ . Отображение  $\mu$  индуцирует, очевидно, эпиморфизм пар  $(A, \Sigma) \Delta (B, \Psi) \rightarrow (A, \Sigma) \Delta (B, \Sigma_2)$  из соотношений  $(B, \Sigma_2) \subset (R_0, \Psi)^I$  и  $(A, \Sigma) \Delta (R_0, \Psi)^I \in \Theta$  вытекает  $(A, \Sigma) \Delta (B, \Sigma_2) \in \Theta$ ; см. предложение I. Поэтому  $(A, \Sigma) \Delta (B, \Psi) \in \Theta$ . Воспользуемся предложением 2; как и в (а) выводим  $\Theta = \Theta \cdot \text{Var}(B, \Psi)$ . Пусть многообразию

$\Theta$  соответствует специальный идеал  $\mathcal{U}_1$ , а многообразию  $\text{Var}(B, \Psi)$  - специальный идеал  $\mathcal{U}_2$ . Имеем равенство  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 \cdot \mathcal{U}_1$ , которое, однако, противоречиво, как показывает сравнение весов левой и правой его частей. Следовательно,  $\Theta_1 \subset \Theta_2$ . В силу симметричности ролей  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  в рассуждениях, выводим аналогично, что  $\Theta_2 \subset \Theta_1$ .

Теорема доказана.

4. Перейдем теперь к изложению одного технического результата, необходимого для доказательства теоремы о порождающей паре. Именно, исследуем детальнее форму битожеств, которые выполняются в треугольных произведениях пар.

Пусть даны любые пары  $(A, \Sigma_1)$  и  $(B, \Sigma_2)$ , а  $(G, \Gamma)$  - их треугольное произведение. Далее, возьмем любые элементы  $\gamma_i \in \Gamma$ ,  $\gamma_i = (\varphi_i, \sigma_i', \sigma_i'')$ , где  $\varphi_i \in \Phi \cong \text{Hom}^+(B, A)$ ,  $\sigma_i' \in \Sigma_1$ ,  $\sigma_i'' \in \Sigma_2$ ,  $i = 1, \dots, n$  и пусть  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  - некоторый фиксированный элемент в полугрупповой алгебре  $K\Psi^*$ . В качестве первого шага в намеченном направлении вычислим элемент  $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in K\Gamma^*$ .

В ведуем тут частном случае, когда  $u = \mathcal{f}(x_1, \dots, x_n) \in K\Psi^*$ , легко понять, что элемент  $\mathcal{f}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  имеет следующий вид  $\mathcal{f}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \left( \sum_{i_1, \dots, i_n} \tau_{i_1, \dots, i_n}(\sigma_{i_1}', \dots, \sigma_{i_n}') \cdot \varphi_{i_1, \dots, i_n}(\sigma_{i_1}'', \dots, \sigma_{i_n}'') \right) \cdot \mathcal{f}(\sigma_{i_1}', \dots, \sigma_{i_n}') \cdot \mathcal{f}(\sigma_{i_1}'', \dots, \sigma_{i_n}'') \right)$ ; (1) здесь  $m_1 + \dots + m_n = \ell(\mathcal{f})$  - длина слова  $\mathcal{f} \in \Psi^*$ , а каждое из элементов  $\tau_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n)$  и  $\varphi_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n)$  определяется словом  $\mathcal{f}$  и парой индексов  $i_1, i_n$  только. Детали необходимой

здесь проверки предоставляются читателю.

Формулу (I) можно записать компактнее. Исходим из того, что  $\mathcal{P}$  является аддитивной абелевой группой; поэтому вместе с элементами из  $\sum_{\kappa}$  в  $\mathcal{P}$  действуют и элементы из подмножества  $\mathbb{Z}_0 \sum_{\kappa}^* \subset \mathbb{Z} \sum_{\kappa}^*$ ,  $\kappa=1, 2$ , где через  $\mathbb{Z}_0$  обозначено множество неотрицательных целых чисел. Полагая

$$\bar{z}_i = \sum_{j=1}^{m_i} \pi_{ij}(\sigma_1^j, \dots, \sigma_n^j) \quad \text{и} \quad \bar{z}'_i = \sum_{j=1}^{m_i} \bar{\pi}_{ij}(\sigma_1^j, \dots, \sigma_n^j),$$

приходим к формуле

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot \varphi_i \cdot \bar{z}'_i, f(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1), f(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \right).$$

Накопленный опыт позволяет справиться теперь и с общим случаем. Действительно, пусть задан некоторый фиксированный элемент

$u = u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} f_{\kappa}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\lambda_{\kappa} \in K$ , полугруппового кольца  $K\Psi^*$ , а элементы  $\gamma_i \in \Gamma$  таковы, как прежде. Нетрудно понять, что в  $\mathbb{Z}_0\Psi^*$  существуют такие элементы  $\bar{z}_{ik}(x_1, \dots, x_n)$  и  $\bar{z}'_{ik}(x_1, \dots, x_n)$  что их значения  $\bar{z}_{ik} = \bar{z}_{ik}(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1)$  и  $\bar{z}'_{ik} = \bar{z}'_{ik}(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1)$  позволяют записать элемент  $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in K\Gamma^*$  в виде

$$u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} f_{\kappa}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \\ = \left( \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} \left( \sum_{i=1}^n \bar{z}_{ik} \cdot \varphi_i \cdot \bar{z}'_{ik} \right), \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} f_{\kappa}(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1), \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} f_{\kappa}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \right).$$

Ниже обозначим суммы  $\sum_{i=1}^n \bar{z}_{ik} \cdot \varphi_i \cdot \bar{z}'_{ik}$  символами  $\psi_{\kappa}$ , так что запись элемента  $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  становится короче:

$$u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \left( \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} \psi_{\kappa}, u(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1), u(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \right). \quad (2)$$

Выясним, как элемент  $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  действует в  $G$ . С этой целью применим его к элементу  $g = a + b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Действие элементов кольца  $K\Gamma^*$  на  $G$  является линейным продолжением действия элементов из  $\Gamma^*$ ; поэтому, используя (2), выводим

$$g \circ u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (a + b) \circ \left( \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} \psi_{\kappa}, u(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1), u(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) \right) = \\ = a \circ u(\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1) + \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} b^{\psi_{\kappa}} + b \circ u(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2).$$

После этих предварительных вычислений вернемся к исходному вопросу этого пункта - к вопросу о форме битождеств пары  $(G, \Gamma) = (A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$ . Точнее, будем исследовать вид элемента  $g \circ u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  при допущении, что в обоих сомножителях рассматриваемого треугольного произведения выполняется битождество  $y \circ u = 0$ . Из этого допущения будет, в частности, следовать, что

$$a \circ u(\sigma_1', \dots, \sigma_n') = 0 \text{ и } b \circ u(\sigma_1'', \dots, \sigma_n'') = 0.$$

Таким образом, приходим здесь к формуле

$$g \circ u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_k \lambda_k b^{\psi_k}.$$

Слагаемые суммы в правой части этого равенства допускают дальнейшую обработку. Пусть имеем

$$\bar{v}_{ik}(x_1, \dots, x_n) = \sum_p n_{ikp} v_{ikp}(x_1, \dots, x_n), \quad \text{и}$$

$$\bar{\delta}_{ik}(x_1, \dots, x_n) = \sum_q m_{ikq} w_{ikq}(x_1, \dots, x_n),$$

где все  $n_{ikp}, m_{ikq} \in \mathbb{Z}_0$ , а все  $v_{ikp}(x_1, \dots, x_n)$  и все  $w_{ikq}(x_1, \dots, x_n)$  являются элементами моноида  $\Psi^*$ . Для краткости записи обозначим

$$\bar{v}_{ikp} = v_{ikp}(\sigma_1', \dots, \sigma_n') \quad \text{и} \quad \bar{w}_{ikq} = w_{ikq}(\sigma_1'', \dots, \sigma_n'');$$

в этих обозначениях имеем

$$\bar{v}_{ik} = \sum_p n_{ikp} \bar{v}_{ikp} \quad \text{и} \quad \bar{\delta}_{ik} = \sum_q m_{ikq} \bar{w}_{ikq}.$$

В итоге приходим к интересующему нас виду элемента

$$\begin{aligned} g \circ u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= \sum_k \lambda_k b^{\psi_k} = \sum_k \lambda_k b^{\left(\sum_i \bar{v}_{ik} \cdot \psi_i + \bar{\delta}_{ik}\right)} = \\ &= \sum_{k, i, p, q} (n_{ikp} \cdot m_{ikq} \cdot \lambda_k) b^{\bar{v}_{ikp} \cdot \psi_i + \bar{w}_{ikq}} \end{aligned} \quad (3)$$

## §2. Основная лемма

I. Пусть  $\mathcal{K}$  - произвольный класс пар,  $D\mathcal{K}$  - класс всех прямых произведений пар из  $\mathcal{K}$ ,  $\Theta = \text{Var } \mathcal{K}$  и  $(A, \Sigma)$  - свободная пара в  $\Theta$ . В этих условиях имеет место

**Лемма I.** Если в  $A$  задана некоторая конечная линейно независимая система элементов  $a_1, \dots, a_n$ , то существует пара  $(B, \Sigma') \in D\mathcal{K}$  и гомоморфизм пар  $\mu: (A, \Sigma) \rightarrow (B, \Sigma')$  такие, что элементы  $a_1^{\mu}, \dots, a_n^{\mu}$  линейно независимы в  $B$ .

**Доказательство.** Многообразия полугрупповых пар находятся в биективном соответствии со специальными идеалами в кольце  $K\Psi^*$ ; см. теорему 2 в [2]. При этом, если многообразию  $\Theta$  соответствует специальный идеал  $\mathcal{U}$ , то пара  $(K\Psi^*/\mathcal{U}, \Psi)$  является свободной циклической парой в  $\Theta$ ; поэтому данная пара  $(A, \Sigma)$  является подпарой некоторой декартовой степени пары  $(K\Psi^*/\mathcal{U}, \Psi)$ . Однако, воспользовавшись теоремой Ремака, нетрудно видеть, что в классе  $\mathcal{K}$

имеются пары  $(A_i, \Sigma_i)$ ,  $i \in I$ , такие, что существует правый гомоморфизм  $\nu$  пары  $(A, \Sigma)$  в пару  $\prod_{i \in I} (A_i, \Sigma_i)$ ; последнюю пару обозначим  $(\bar{A}, \bar{\Sigma})$ . Так как  $\nu$  является тождественным отображением на  $A$ , то элементы  $\bar{a}_i = a_i \nu$ ,  $i = 1, \dots, n$  останутся линейно независимыми и в  $\bar{A}$ .

Далее, для любого подмножества индексов  $F \subset I$  обозначим символом  $\pi_F$  естественное проектирование пространства  $\bar{A}$  на декартову сумму тех подпространств  $A_i$ , индекс  $i$  которых принадлежит  $F$ . При этом, пусть  $\bar{A}^{(F)}$  - ядро  $\pi_F$ ; очевидно, для всяких  $F', F'' \subset I$  имеем соотношение

$$\bar{A}^{(F')} \cap \bar{A}^{(F'')} = \bar{A}^{(F' \cup F'')}$$

Наконец, пусть  $V$  - линейная оболочка векторов  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  в  $\bar{A}$ . Покажем существование конечного подмножества в  $I$  такого, что соответствующее этому подмножеству проектирование индуцирует мономорфизм на  $V$ .

Действительно, заметим, что имеют место соотношения

$$\bigcap_{F \subset I} \bar{A}^{(F)} = \bar{A}^{(\cup F)} = \bar{A}^{(I)} = 0,$$

откуда следует, что

$$0 = V \cap \left( \bigcap_{F \subset I} \bar{A}^{(F)} \right) = \bigcap_{F \subset I} (V \cap \bar{A}^{(F)}).$$

В силу конечномерности пространства  $V$  следует отсюда существование конечного подмножества  $F^* \subset I$  для которого  $V \cap \bar{A}^{(F^*)} = 0$ ; нетрудно видеть, что отображение  $\pi_{F^*}$  на  $V$  является мономорфизмом.

Сходно тому, как это делалось выше для областей действия, определяем проектирования  $\pi_F: \Sigma \rightarrow \prod_{i \in F} \Sigma_i$  для действующих полугрупп; таким образом возникает проектирование пар  $\pi_F: (A, \Sigma) \rightarrow \prod_{i \in F} (A_i, \Sigma_i)$ . Полагаем  $(B, \Sigma') = \prod_{i \in F^*} (A_i, \Sigma_i)$ ; ясно, что  ${}^{i \in F^*} (B, \Sigma') \in \mathcal{D}\mathcal{K}$  и гомоморфизм  $\mu = \nu|_{F^*}: (A, \Sigma) \rightarrow (B, \Sigma')$  обладает требуемым свойством.

Лемма доказана.

2. Сформулируем и докажем теперь основную лемму на пути к теореме о порождающей паре.

**Лемма 2.** Пусть многообразии  $\Theta_1$  порождается одной парой  $(A, \Sigma_1)$ , а многообразие  $\Theta_2$  порождено любым классом пар  $\mathcal{K}_2$ , удовлетворяющим условию  $\mathcal{D}\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2$ . Тогда  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 = \text{Var}((A, \Sigma_1) \Delta \mathcal{K}_2)$ .

**Доказательство.** Верно, очевидно, включение  $\text{Var}((A, \Sigma_1) \Delta \mathcal{K}_2) \subset \Theta_1 \cdot \Theta_2$ . Однако, если  $(R, \Psi)$  - свободная пара в  $\Theta_2$ , то согласно предложению 2 имеем  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 = \text{Var}(A, \Sigma_1) \cdot \text{Var}(R, \Psi) = \text{Var}((A, \Sigma_1) \Delta (R, \Psi))$ . Следовательно, всякое тождество пары  $(A, \Sigma_1) \Delta (R, \Psi)$  выполняется также в парах

$(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$ , где  $(B, \Sigma_2) \in \mathcal{K}_2$ . Все сводится, таким образом, к проверке следующего утверждения: если некоторое битожество  $y \circ u \equiv 0$  в паре  $(\bar{G}, \bar{\Gamma}) = (A, \Sigma_1) \Delta (R, \Psi)$  не выполнено, то существует пара  $(B, \Sigma_2) \in \mathcal{K}_2$  такая, что в паре  $(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$  рассматриваемое битожество также не выполняется.

Прежде всего, можно считать, что в обоих многообразиях  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  битожество  $y \circ u \equiv 0$  выполняется. Действительно, если  $y \circ u \equiv 0$  в  $\Theta_2$  места не имеет, то существует пара  $(B, \Sigma_2) \in \mathcal{K}_2$ , в которой указанное битожество не выполнено. Но тогда это битожество не выполнено, очевидно, и в паре  $(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$  и наше утверждение доказано. Если же битожество  $y \circ u \equiv 0$  не выполняется в  $\Theta_1$ , то оно не выполнено в паре  $(A, \Sigma_1)$ , а тем самым и в паре  $(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$  при любой  $(B, \Sigma_2) \in \mathcal{K}_2$ ; но в таком случае снова все доказано.

Воспользуясь этим замечанием, считаем, что битожество  $y \circ u \equiv 0$  не выполняется в паре  $(\bar{G}, \bar{\Gamma})$ , но имеет место в многообразиях  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ . Это означает существование таких  $g^* \in \bar{G}$  и  $y_1^*, \dots, y_n^* \in \bar{\Gamma}$ , что

$$g^* \circ u(y_1^*, \dots, y_n^*) \neq 0.$$

Согласно этому же условию, если  $g^* = a + h$ , где  $a \in A$ ,  $h \in R$  и  $y_i^* = (\varphi_i^*, \sigma_i^*)$ , где  $\varphi_i^* \in \text{Hom}^+(R, A)$ ,  $\sigma_i^* \in \Sigma_1$ ,  $\sigma_i^* \in \Psi$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то

$$a \circ u(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) = 0 \text{ и } h \circ u(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*) = 0.$$

Воспользуемся формулой (3) предыдущего параграфа; имеем

$$g^* \circ u(y_1^*, \dots, y_n^*) = \sum_{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i} (n_{\alpha_i \beta_i \gamma_i} \cdot m_{\alpha_i \beta_i \gamma_i} \cdot \lambda_{\alpha_i}) h_{\alpha_i \beta_i \gamma_i}.$$

Пусть  $V = \sum_{i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i} h_{\alpha_i \beta_i \gamma_i}$  — линейная оболочка в  $R$  конечного подмножества  $\sum_{i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i} h_{\alpha_i \beta_i \gamma_i}$ ; является конечномерным подпространством в  $R$  и можно пользоваться леммой I. Согласно этому результату, существуют пара  $(B, \Sigma_2) \in \mathcal{K}_2$  и гомоморфизм  $\mu: (R, \Psi) \rightarrow (B, \Sigma_2)$ , являющийся мономорфизмом на  $V$ .

Оказывается, в паре  $(G, \Gamma) = (A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2)$  битожество  $y \circ u = 0$  места не имеет.

С целью доказать это рассмотрим  $K$ -морфизм  $\nu: B \rightarrow R$  на  $V$  обратный к  $\mu$  и определенный вне  $V$  произвольным, но фиксированным образом; такой морфизм можно построить, соответствующим образом, определяя его на базисе  $B$ , полученном дополнением базиса для  $V \subset B$ . Далее, полагаем:

1)  $\varphi_i \doteq \nu \varphi_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; ясно, что  $\varphi_i \in \text{Hom}^+(B, A)$ .  
Заметим также, что

$$[(h \circ \bar{v}_{i\text{кр}})^h]^{q_i} = [(h \circ \bar{v}_{i\text{кр}})^{h\nu}]^{q_i^*} = (h \circ \bar{v}_{i\text{кр}})^{q_i^*};$$

2)  $h \doteq h^h$ , и  $g \doteq a + b \in A \oplus B$ ;

3)  $\tau_i^h \doteq (\sigma_i^h)^h \in \Sigma_2$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

4)  $\gamma_i \doteq (\varphi_i, \sigma_i^h, \tau_i^h) \in \text{Hom}^+(B, A) \lambda(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ ;

5)  $\bar{v}_{i\text{кр}}^h \doteq v_{i\text{кр}}^h(\tau_i^h, \dots, \tau_n^h) = [v_{i\text{кр}}^h(\sigma_1^h, \dots, \sigma_n^h)]^h \in \Sigma_2$ .

Согласно формуле (3), в этих обозначениях имеем

$$g \circ u(\gamma_1^h, \dots, \gamma_n^h) = \sum_{i \in \Sigma_1, j \in \Sigma_2} (n_{i\text{кр}} \cdot m_{i\text{кр}} \cdot \lambda_k) h^{v_{i\text{кр}}^h \cdot q_i^* \cdot \bar{v}_{i\text{кр}}^h}$$

В этом равенстве сумма справа допускает несложное<sup>I</sup> преобразование, показывающее, что она равна  $g^* \circ u(\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*)$ .

Однако,  $g^* \circ u(\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*) \neq 0$ ; поэтому и  $g \circ u(\gamma_1^h, \dots, \gamma_n^h) \neq 0$ . Следовательно, в паре  $(G, \Gamma)$  битожество  $g \circ u \equiv 0$  не выполняется.

Утверждение доказано, а вместе с тем доказана и лемма 2.

### §3. Теорема о порождающей паре

Настоящий параграф посвящен доказательству основного результата данной работы - теоремы 2, названной здесь "теоремой о порождающей паре". Этот результат порождает ряд следствий о строении классов представлений полугрупп и дает средство для изучения интересных индивидуальных представлений.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{X}_1$  и  $\mathcal{X}_2$  - любые два класса линейных представлений (над полем  $K$ ) полугрупп. Верна формула

$$\text{Var}(\mathcal{X}_1 \Delta \mathcal{X}_2) = \text{Var} \mathcal{X}_1 \cdot \text{Var} \mathcal{X}_2.$$

**Доказательство.** Введем обозначения  $\Theta = \text{Var}(\mathcal{X}_1 \Delta \mathcal{X}_2)$  и  $\Theta_i = \text{Var} \mathcal{X}_i, i=1,2$ . Как доказывалось в [5], для любых пар  $(A, \Sigma_1) \in \Theta_1$  и  $(B, \Sigma_2) \in \Theta_2$  имеет место  $(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2) \in \Theta_1 \cdot \Theta_2$ . Поэтому верно включение  $\mathcal{X}_1 \Delta \mathcal{X}_2 \subset \Theta_1 \cdot \Theta_2$ , откуда имеем также  $\Theta \subset \Theta_1 \cdot \Theta_2$ .

Остается доказать обратное включение  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 \subset \Theta$ . Соответствующие рассуждения проводим в два этапа. На первом из них допустим временно, что ограничение  $D\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2$  в лемме

<sup>I</sup> ... но громоздко записываемое и поэтому опущенное...

2 удается снять, и покажем, как это может быть использовано в данном доказательстве. На втором этапе докажем, что отмеченное усиление леммы 2 на самом деле имеет место.

Первый этап - редукция. Пусть  $(A, \Sigma_1)$  - точная пара, порождающая многообразие  $\Theta_1$ ; в качестве  $(A, \Sigma_1)$  можно взять, например, "уточнение" свободной циклической пары в  $\Theta_1$ . Легко понять, что в этих условиях существует семейство пар  $(A_i, \Sigma_i) \in \mathcal{K}_1$ ,  $i \in I$ , и подпара  $(A', \Sigma')$  в декартовом произведении  $(A, \Sigma) = \prod (A_i, \Sigma_i)$ , такая, что имеется эпиморфизм пар  $(A', \Sigma') \rightarrow (A, \Sigma)$ . Фиксируем теперь произвольную пару  $(B, \Sigma_2)$  в классе  $\mathcal{K}_2$ . Согласно предложению 8 из [5] существует вложение

$$(A, \Sigma) \Delta (B, \Sigma_2) \rightarrow \prod_{i \in I} ((A_i, \Sigma_i) \Delta (B, \Sigma_2)),$$

где пара правее стрелки, очевидно, лежит в  $\Theta$ . Но тогда, это же верно относительно пары  $(A, \Sigma) \Delta (B, \Sigma_2)$ . Отсюда, в свою очередь, следует  $(A', \Sigma') \Delta (B, \Sigma_2) \in \Theta$ ; см. предложение I. Наконец, воспользуемся предложением 4, [5]: эпиморфизм  $(A', \Sigma') \rightarrow (A, \Sigma_1)$  гарантирует соотношение  $(A, \Sigma_1) \Delta (B, \Sigma_2) \in \Theta$ .

Резюмируя, видим, что  $(A, \Sigma_1) \Delta \mathcal{K}_2 \subset \Theta$ , откуда, на основании сделанного нами выше допущения насчет леммы 2, соотношение  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 \subset \Theta$  следует немедленно.

Второй этап - усиление основной леммы. Пусть класс  $\mathcal{K}_1$  состоит из одной единственной пары  $(A, \Sigma)$ , а класс пар  $\mathcal{K}_2$  - произвольный. Далее, обозначим  $\bar{\mathcal{K}}_2 = \mathcal{D}\mathcal{K}_2$ ,  $\Theta = \text{Var}(\mathcal{K}_1 \Delta \bar{\mathcal{K}}_2)$  и  $\Theta_i = \text{Var} \mathcal{K}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Непосредственно из леммы 2 следует  $\text{Var}(\mathcal{K}_1 \Delta \bar{\mathcal{K}}_2) = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ , если воспользоваться очевидным соотношением  $\text{Var} \bar{\mathcal{K}}_2 = \text{Var} \mathcal{K}_2$ . Поэтому, имеем  $\Theta \subset \Theta_1 \cdot \Theta_2$ .

Покажем, что имеет место и обратное включение  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 \subset \Theta$ .

Пусть  $(B_i, \Sigma_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  - любой конечный набор пар из класса  $\mathcal{K}_2$ ;  $(\bar{B}, \bar{\Sigma}) = \prod (B_i, \Sigma_i)$ ;  $G = A + \bar{B}$ ;  $\Gamma = \text{Hom}^+(B, A) \lambda (\Sigma * \bar{\Sigma})$ . Легкая проверка показывает, что подпространства  $A + B_i \subset G$ ,  $i = 1, \dots, n$ , являются  $\Gamma$ -инвариантными; следовательно, имеем пары  $(A + B_i, \Gamma)$ . Докажем, что все эти пары лежат в многообразии  $\Theta$ .

Действительно, пары  $(A, \Sigma) \Delta (B_i, \Sigma_i)$  лежат, очевидно, в  $\Theta$ . Покажем существование эпиморфизмов  $\mu_i: (A + B_i, \Gamma) \rightarrow (A, \Sigma) \Delta (B_i, \Sigma_i)$ , откуда будут следовать соотношения  $(A + B_i, \Gamma) \in \Theta$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

На областях действия  $\mu_i$  определяется тождественным образом. Естественные проектирования  $\Sigma \rightarrow \Sigma_i$  определяют гомоморфизмы  $\mu_i: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma \times \Sigma_i$ . Сопоставление каждому  $\varphi \in \text{Hom}(\bar{B}, A)$  его ограничения на  $B_i$  определяет эпиморфизм  $\mu_i: \text{Hom}(\bar{B}, A) \rightarrow \text{Hom}(B_i, A)$ ; следует напомнить, что  $K$ -морфизмы достаточно задать на базисах  $\bar{B}$ , которые получены дополнением базисов  $B_i \subset \bar{B}$ . Проверим, что определенная таким образом тройка отображений  $\mu_i$  является морфизмом тройных произведений,

$$\mu_i: \Gamma \rightarrow \text{Hom}^+(B_i, A) \lambda (\Sigma \times \Sigma_i).$$

Возьмем в  $\Gamma$  любые элементы  $(\varphi, \sigma_1, \sigma_2)$  и  $(\varphi', \sigma_1', \sigma_2')$ . Вычислим

$$\begin{aligned} [(\varphi, \sigma_1, \sigma_2), (\varphi', \sigma_1', \sigma_2')]^{\mu_i} &= ((\sigma_2 \cdot \varphi' + \varphi \cdot \sigma_1')^{\mu_i}, \sigma_1 \sigma_1', (\sigma_2 \sigma_2')^{\mu_i}) = \\ &= (\sigma_2^{\mu_i} \cdot \varphi'^{\mu_i} + \varphi^{\mu_i} \cdot \sigma_1', \sigma_1 \sigma_1', \sigma_2^{\mu_i} \sigma_2'^{\mu_i}) = (\varphi, \sigma_1, \sigma_2)^{\mu_i} \cdot (\varphi', \sigma_1', \sigma_2')^{\mu_i}. \end{aligned}$$

К этому следует добавить проверку соотношения

$$(\sigma_2 \cdot \varphi' + \varphi \cdot \sigma_1')^{\mu_i} = \sigma_2^{\mu_i} \cdot \varphi'^{\mu_i} + \varphi^{\mu_i} \cdot \sigma_1',$$

которым мы воспользовались в этих вычислениях. Действительно, при любом  $b \in B_i$  имеем  $b \cdot \sigma_2 = b \circ \sigma_2^{\mu_i} \in B_i$ , откуда следует

$$\begin{aligned} b^{(\sigma_2 \cdot \varphi' + \varphi \cdot \sigma_1')^{\mu_i}} &= b^{\sigma_2 \cdot \varphi' + \varphi \cdot \sigma_1'} = (b \circ \sigma_2)^{\varphi'} \circ \sigma_1' = \\ &= (b \circ \sigma_2^{\mu_i})^{\varphi'^{\mu_i}} + (b^{\varphi^{\mu_i}}) \circ \sigma_1' = b^{\sigma_2^{\mu_i} \cdot \varphi'^{\mu_i} + \varphi^{\mu_i} \cdot \sigma_1'}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано полностью.

Следует установить, что отображения  $\mu_i$  согласованы с действием в рассматриваемых парах. Возьмем произвольные элементы  $a+b \in A+B_i$  и  $(\varphi, \sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma$  и проведем нужную проверку; при этом учтем, что на областях действия отображения  $\mu_i$  являются тождественными. Имеем

$$\begin{aligned} (a+b)^{\mu_i} \circ (\varphi, \sigma_1, \sigma_2)^{\mu_i} &= (a+b) \circ (\varphi^{\mu_i}, \sigma_1, \sigma_2^{\mu_i}) = \\ &= b^{\varphi^{\mu_i}} + a \circ \sigma_1 + b \circ \sigma_2^{\mu_i} = b^{\varphi} + a \circ \sigma_1 + b \circ \sigma_2 = \\ &= (a+b) \circ (\varphi, \sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Резюмируя, нами доказаны соотношения  $(A+B_i, \Gamma) \in \Theta, i=1, 2$ . Но  $\Gamma$ -подмодули  $A+B_i, i=1, 2$ , порождают модуль  $G$ . Поэтому, повторяя здесь ход мысли замечания в пункте 2.4 из [2], выводим  $(G, \Gamma) \in \Theta$ . Следовательно, имеем  $\mathcal{X}, \Delta \mathcal{X}_2 \subset \Theta$ , откуда немедленно выводим нужное нам  $\theta_1, \theta_2 = \text{Var}(\mathcal{X}, \Delta \mathcal{X}_2) \subset \Theta$ .

Усиление леммы 2 доказано, и тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

#### §4. Следствия

Интерес к арифметике некоммутативных колец дает стимул к исследованию вопроса об однозначном разложении элементов в полугруппах. Ниже будет показано, что факториальна также полугруппа многообразий линейных представлений полугрупп.

**Лемма 3.** Пусть для многообразий  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_1', \Theta_2'$  выполняются соотношения  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 = \Theta_1' \cdot \Theta_2'$  и  $\Theta_2' \not\subset \Theta_2$ . Тогда существует многообразие  $\Theta_3'$  такое, что  $\Theta_1 \cdot \Theta_2 = \Theta_1' \cdot \Theta_3' \cdot \Theta_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $(R_i, \psi)$  — свободные пары в  $\Theta_i', \Theta_2'$ ,  $i=1,2$  и  $(G, \Gamma) = (R_1, \psi) \Delta (R_2, \psi)$ . В силу соотношений  $\Theta_2' = \text{Var}(R_2, \psi)$  и  $\Theta_2' \not\subset \Theta_2$  имеем  $(R_2, \psi) \notin \Theta_2$ . Обозначим символом  ${}^*\Theta_2$  вербал по многообразию  $\Theta_2$ , и пусть  $B = {}^*\Theta_2(R_2, \psi)$ . Можно утверждать, что  $B \neq 0$ ; иначе  $(R_2, \psi) = (R_2/B, \psi) \in \Theta_2$ , что противоречиво.

Полагаем  $\Theta_3' = \text{Var}(B, \psi)$  и докажем сначала, что  $\Theta_1' \Theta_3' \Theta_2 \subset \Theta_1 \Theta_2$ . Действительно, из  $B > 0$  следует  ${}^*\Theta_2(G, \Gamma) = R_1 + B$ , и имеется правый эпиморфизм  $(R_1 + B, \Gamma) \rightarrow (R_1, \psi) \Delta (B, \psi)$ ; это вытекает из предложений 6 и 7 в [5]. Однако, по теореме 2 пара  $(R_1, \psi) \Delta (B, \psi)$  порождает многообразие  $\Theta_1' \Theta_3'$ , откуда в силу указанного эпиморфизма следует  $\text{Var}(R_1 + B, \Gamma) = \Theta_1' \cdot \Theta_3'$ . Заметим еще, что  $(G, \Gamma) \in \Theta_1' \Theta_2' = \Theta_1' \Theta_2$ , а это равносильно включению  $({}^*\Theta_2(G, \Gamma), \Gamma) \in \Theta_1$ . В итоге доказано  $\Theta_1' \Theta_3' \subset \Theta_1$ , откуда вытекает нужное здесь соотношение.

С другой стороны, согласно теореме 2 имеем  $\text{Var}(G, \Gamma) = \Theta_1' \Theta_2'$  а полученное выше соотношение  $({}^*\Theta_2(G, \Gamma), \Gamma) \in \Theta_1' \Theta_3'$  равносильно включению  $(G, \Gamma) \in \Theta_1' \Theta_3' \Theta_2$ . Получаем  $\Theta_1 \Theta_2 = \Theta_1' \Theta_3' \Theta_2 \subset \Theta_1' \Theta_3' \Theta_2$ , что вместе с доказанным выше обратным включением дает  $\Theta_1 \Theta_2 = \Theta_1' \Theta_3' \Theta_2$ , что и требовалось.

Лемма доказана.

Многообразие называется неразложимым, если оно не может быть представлено в виде произведения двух нетривиальных сомножителей.

Основным следствием теоремы о порождающей паре является

**Теорема 3.** Всякое многообразие линейных представлений (над полем  $K$ ) полугрупп однозначно разлагается в произведение конечного числа неразложимых многообразий.

**Доказательство.** Покажем сначала возможность раскладывать любое многообразие в конечное произведение неразложимых многообразий. Антиизоморфизм между полугруппой многообразий пар

и полугруппой собственных специальных идеалов в  $K\psi^*$  позволяет перевести это утверждение на язык специальных идеалов<sup>2</sup>: слово "многообразие" надо заменить на "собственный специальный идеал". В этой новой формулировке утверждение легко доказывается индукцией по весу рассматриваемого специального идеала.

Остается доказать однозначность полученного разложения. Нетрудно видеть, что это вытекает из следующего факта: если многообразия  $\Theta_1$  и  $\Theta'_1$  неразложимы, то для любых многообразий  $\Theta_2$  и  $\Theta'_2$  из  $\Theta_1\Theta_2 = \Theta'_1\Theta'_2$  вытекают соотношения  $\Theta_1 = \Theta'_1$  и  $\Theta_2 = \Theta'_2$ . С целью проверить отмеченное утверждение заменим  $\Theta_2 = \Theta'_2$  на равносильную ему пару соотношений  $\Theta_2 \subset \Theta'_2$  и  $\Theta'_2 \subset \Theta_2$  и допустим, что  $\Theta'_2 \not\subset \Theta_2$ . Согласно лемме 3 существует тогда многообразие  $\Theta'_3$  такое, что  $\Theta'_1\Theta'_3\Theta_2 = \Theta_1\Theta_2$ . Воспользуемся теперь теоремой I и сокращаем это равенство справа на  $\Theta_2$ . Получается  $\Theta_1 = \Theta'_1\Theta'_3$ , что противоречит условию. Соотношение  $\Theta_2 \subset \Theta'_2$  доказывается аналогично. Равенство  $\Theta_2 = \Theta'_2$  таким образом, доказано. Снова используя теорему I, из  $\Theta_1\Theta_2 = \Theta'_1\Theta'_2$  выводим  $\Theta_1 = \Theta'_1$ . Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 3 закончено.

**Теорема 4.** Полугруппа многообразий линейных представлений полугрупп свободна.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 3.

#### Литература

1. В о в с и С. М., Полугруппа предмногообразий линейных представлений групп. Матем. сб., 1974, 93, 405-421.
2. К а л ь ю л а й д У., Замечания о многообразиях представлений полугрупп и линейных автоматов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 431, 47-67.
3. К а л ь ю л а й д У., Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр. Успехи матем. наук, 1977, 32, 253-254.
4. К а л ь ю л а й д У. Э., Арифметика многообразий представлений полугрупп и алгебр. Деп. РЖ "Математика" 1979, 2A137.
5. К а л ь ю л а й д У., Треугольное произведение линейных представлений полугрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 640, 13-28.

6. К а л ь в л а й д У., О свободе полугруппы специальных идеалов. Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту, 1983, 10-12.
7. Н е й м а н Х., Многообразия групп. Москва, 1969.
8. П л о т к и н Б. И., В о в с и С. М., Многообразия представлений групп. Рига, 1983.
9. П л о т к и н Б. И., Г р и н б е р г А. С., О полугруппах многообразий, связанных с представлениями групп. Сиб. матем. ж., 1972, 13 (5), 1030-1053.
10. V o v s i S. M., Triangular products of group representations and their applications. Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1981.

Поступило 26. XII.83

#### POOLRÜHMÄDE ESITUSMUUTKONDADE ÜHENE LAHUTUS

U. Kaljulaid

R e s ü m e e

Märkimisväärseks tulemuseks rühmade esitusmuutkondade uurimisel on teoreem nende poolrühma faktoriaalsusest, [9]. Käesolevas töös tõestatakse, et samasuguse omadusega on ka poolrühmade esitusmuutkondade poolrühm. See fakt tuleneb valamist korrutismuutkonna moodustajapaaride arvutamiseks (teoreem 2), mille tõestus ongi käesoleva töö põhitulemuseks.

#### UNIQUE FACTORISATION OF VARIETIES OF SEMIGROUP REPRESENTATIONS

U. Kaljulaid

S u m m a r y

A remarkable result about the semigroup  $\mathcal{C}$  of varieties of linear group representations is the fact that  $\mathcal{C}$  has the Unique Factorization property, [9]. It is shown in this paper that the semigroup of varieties of linear semigroup representations has  $UF$ -property also. This fact follows here from the formula of finding generating pairs for product varieties (theorem 2), this last being the main result of the paper.

ON COMPLETELY FLAT MONOIDS

M.Kilp

Tartu State University

Let  $S$  be a monoid,  $A$  a right  $S$ -act, and  $M$  a left  $S$ -act. Let  $\tau$  be the smallest equivalence relation on  $A \times M$  containing all pairs  $((as, m), (a, sm))$  for  $a \in A, m \in M$  and  $s \in S$ . The tensor product  $A \otimes M$  is defined to be the set  $(A \times M)/\tau$ . For  $a \in A$  and  $m \in M$   $a \otimes m$  denotes the  $\tau$ -class of  $(a, m)$ . A left  $S$ -act  $M$  is called flat if the functor  $\otimes M$  preserves all monomorphisms  $A \rightarrow B$  of right  $S$ -acts. A left  $S$ -act  $M$  is weakly flat if the functor  $\otimes M$  preserves all monomorphisms  $I \rightarrow S$  where  $I$  is a right ideal of  $S$ . A left  $S$ -act  $M$  is called principally weakly flat if the functor  $\otimes M$  preserves all monomorphisms  $aS \rightarrow S$  where  $a \in S$ . A monoid  $S$  is called left completely flat if all left  $S$ -acts are flat, completely flat if all (left and right)  $S$ -acts are flat. Completely flat monoids were investigated in [1] - [3]. Note that in [1] and [2] it is proved (independently) that every inverse monoid is completely flat. In this paper we present two more theorems on completely flat monoids.

Lemma 1. All cyclic left  $S$ -acts are principally weakly flat if and only if  $S$  is regular.

Proof. Necessity follows from Theorem 8 of [4] (since left Rees factor of  $S$  are cyclic left  $S$ -acts).

Sufficiency. Let  $S$  be regular,  $\rho$  an arbitrary left congruence on  $S$ , and let  $M = S/\rho$ . As usually, for  $s \in S$   $\bar{s}$  denotes the class by  $\rho$  containing  $s$ . Let  $a \in S$  and consider the inclusion  $aS \subseteq S$ . Let  $a \otimes \bar{x} = a \otimes \bar{y}$  in  $S \otimes M$  for some  $x, y \in S$ . Then  $(ax)\rho(ay)$ . Since  $S$  is regular there exists  $a' \in S$  such that  $a = aa'a$ . Now in  $aS \otimes M$  we have

$$\begin{aligned} a \otimes \bar{x} &= (aa'a) \otimes \bar{x} = (aa') \otimes a\bar{x} = aa' \otimes a\bar{y} = \\ &= (aa'a) \otimes \bar{y} = a \otimes \bar{y}. \end{aligned}$$

It follows that  $M$  is principally weakly flat.

**Lemma 2.** A principally weakly flat cyclic left  $S$ -act  $M = S/\rho$ , where  $\rho$  is a left congruence on  $S$ , is weakly flat if and only if from  $spt, s, t \in S$ , it follows that there exist elements  $x, y \in S$  such that  $sx = ty$ ,  $(sx)\rho s$ .

**Proof. Necessity.** Let  $\rho$  be a left congruence and let a principally weakly flat cyclic left  $S$ -act  $M = S/\rho$  be weakly flat. Let  $spt$  for  $s, t \in S$ . Let us consider the inclusion  $sS \cup tS = S$ . If  $tS \subseteq sS$ , then the existence of elements  $x, y \in S$  as required is obvious. Otherwise from  $spt$  it follows that  $s \circ \bar{t} = t \circ \bar{t}$  in  $S \otimes M$ . Since  $M$  is weakly flat we have the equality  $s \circ \bar{t} = t \circ \bar{t}$  in the tensor product  $(sS \cup tS) \otimes M$ . This means that we can get the pair  $(t, \bar{t})$  from the pair  $(s, \bar{t})$  in  $(sS \cup tS) \times M$  by means of a finite sequence of transfers of elements of  $S$ :

$$(s, \bar{t}) \rightarrow \dots \rightarrow (su, \bar{v}) \rightarrow (tr, \bar{w}) \rightarrow \dots \rightarrow (t, \bar{t}).$$

Let  $(s, u, \bar{v})$  be the last pair of our sequence not lying in  $(tS) \times M$ . It is easy to check that  $s\rho(suv)$ . To get the next pair  $(tr, \bar{w})$  of our sequence we must have  $\bar{v} = z\bar{w}$ ,  $su\bar{z} = tr$  for some  $z \in S$ . Now  $su\bar{z}w = trw$  and  $su\bar{z}w = su\bar{v} = s$ , hence  $(su\bar{z}w)\rho s$ .

**Sufficiency.** Let us consider a principally weakly flat cyclic left  $S$ -act  $M = S/\rho$  where  $\rho$  is a left congruence on  $S$ . Let  $s, t \in S$  and let  $s \circ \bar{u} = t \circ \bar{v}$  in the tensor product  $S \otimes M$ . This implies  $(su)\rho(tv)$ . Using the condition of lemma we get elements  $x, y \in S$  such that  $sux = tvy$  and  $(sux)\rho(su)$ . Now in the tensor product  $(sS \cup tS) \otimes M$  we have

$$\begin{aligned} s \circ \bar{u} &= s \circ \bar{u}x = (sux) \circ \bar{t} = (tvy) \circ \bar{t} = \\ &= t \circ \bar{v}y = t \circ \bar{v}, \end{aligned}$$

where the first and the last equalities hold because  $M$  is principally weakly flat. Hence  $M$  is weakly flat.

Let now  $\mathcal{M}^{\circ}(G, I, J, P)$  be a Rees matrix semigroup where  $P$  is a regular  $|J| \times |I|$  sandwich matrix with entries in  $G^{\circ}$ . We denote by  $s(P)$  (the support of  $P$ ) the matrix obtained by replacing all of the non-zero entries of  $P$  by the symbol 1.

**Lemma 3** (1, corollary 5.3). Let  $S = (\mathcal{M}^{\circ}(G, I, J, P))^1$ .  $S$  is left (right) completely flat if and only if no two

columns (rows) of  $s(P)$  are identical.

In what follows we will deal with regular semigroups in which Green's relations  $\mathcal{J}$  and  $\mathcal{D}$  coincide,  $\mathcal{J} = \mathcal{D}$ . Let  $D$  be a  $\mathcal{D}$ -class of such a semigroup and  $D^\circ = DU\{0\}$  be a semigroup with multiplication  $\circ$  defined as follows

$$x \circ y = \begin{cases} xy & \text{if } x, y, xy \in D; \\ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is well known that  $D^\circ$  is simple or 0-simple. We shall consider the case when  $D^\circ$  is completely 0-simple for every  $\mathcal{D}$ -class  $D$ . In what follows we identify  $D^\circ$  with the isomorphic Rees matrix semigroup.

**Lemma 4** ([3], Lemma 1). Homomorphic images of left completely flat monoids are left completely flat.

**Theorem 5.** Let  $S$  be a regular monoid in which Green's relations  $\mathcal{J}$  and  $\mathcal{D}$  coincide,  $\mathcal{J} = \mathcal{D}$ , and for every  $\mathcal{D}$ -class  $D$  of  $S$  the semigroup  $D^\circ$  is completely 0-simple. If  $S$  is left (right) completely flat then no two columns (rows) of supports of sandwich matrices of any semigroup  $D^\circ$ , where  $D$  is a  $\mathcal{D}$ -class of  $S$ , are identical.

**Proof.** Let  $D$  be a  $\mathcal{D}$ -class of  $S$  and let  $I$  be the set of all  $\mathcal{D}$ -classes of  $S$  which are not higher or equal than  $D$  (in the sense of the usual order of  $\mathcal{J}$ -classes). It is easy to understand that  $I$  is an ideal of  $S$ . Let  $T$  be the Rees factor monoid of  $S$  by  $I$ ,  $T = S/I$ . Then, by lemma 4,  $T$  is completely flat. Obviously,  $D$  is the lowest non-zero  $\mathcal{D}$ -class of  $T$ . Let  $D^\circ = \mathcal{M}^0(\alpha, I, \mathcal{J}, P)$  and  $s = (g, i, j)$  and  $t = (g', i', j')$  be two non-zero elements of  $D^\circ$  with  $i \neq i'$ . Let  $\rho$  be the smallest left congruence on  $S$  such that  $s \rho t$ . Since  $T$  is left completely flat then  $S/\rho$  is flat. Then by lemma 2, there exist elements  $x, y \in T$  such that  $sx = ty$ ,  $(sx)\rho s$ . Now  $sx = s(s'sx)$  and  $ty = t(t'ty)$  for some inverses  $s'$  and  $t'$  of  $s$  and  $t$ , respectively. Since  $ss'x$  and  $t'ty$  cannot belong to a higher  $\mathcal{D}$ -class than  $D$  then it follows that  $sx = ty = 0$ . Hence  $s \rho 0$ . It follows that there exists an element  $u = (h, k, l)$  in  $D$  such that one of the products  $us$  and  $ut$  is zero and the other is not zero. Let  $(h, k, l)(g, i, j) = 0$  and  $(h, k, l)(g', i', j') \neq 0$ . Then  $pe_i = 0$  and  $pe_{i'} \neq 0$ . From this follows that  $i$ -th and  $i'$ -th columns of the support of  $P$  are not identical. A dual argument gives us

that no two rows of  $P$  are identical.

Lemma 6 ([2], Theorem 7). A monoid  $S$  is completely flat if and only if all cyclic right and all cyclic left  $S$ -acts are weakly flat.

Theorem 7. Let  $S$  be a regular monoid in which Green's relations  $J$  and  $\mathcal{D}$  coincide,  $J = \mathcal{D}$ , the set of  $J$ -classes satisfies the minimum condition, and for every  $J$ -class  $D$  of  $S$  the semigroup  $D^\circ$  is completely  $0$ -simple. If no two columns and no two rows of supports of sandwich matrices of any semigroup  $D^\circ$ , where  $D$  is a  $\mathcal{D}$ -class of  $S$ , are identical then  $S$  is completely flat.

Proof. By lemma 6 it suffices to prove that all cyclic left (right)  $S$ -acts are weakly flat. From lemmas 1 and 2 it follows that it suffices to show that for every left congruence  $\rho$  on  $S$  from  $s \rho t$  it follows the existence of elements  $x, y \in S$  such that  $s x = t y$  and  $(s x) \rho s$ . Note, first of all, that from the minimal condition for  $J$ -classes it follows that there is only one minimal  $J$ -class. Let  $D$  be the minimal  $J$ -class and let  $s \rho t, s, t \in D$ . If  $s \rho t$  then there exists an element  $x \in S$  such that  $s x = t$  and our condition is satisfied. Let now  $s$  and  $t$  belong to different  $\mathcal{D}$ -classes,  $s = (g, i, j)$  and  $t = (h, k, l)$ . From our assumption on the support of the sandwich matrix of  $D^\circ = M^\circ(a, I, j, P)$  it follows that there exists  $j' \in J$  such that  $p_{j'i} = 0$  and  $p_{j'k} = 0$  or vice versa. Both possibilities imply that  $D$  cannot be minimal.

Suppose now that  $s \rho t$  and assume that for all elements  $s', t' \in S$  in  $\mathcal{D}$ -classes lower than  $D_s$  and  $D_t$  from  $s' \rho t'$  it follows that there exist elements  $x', y' \in S$  such that  $s' x' = t' y'$  and  $(s' x') \rho s'$ . Suppose that  $D_s$  and  $D_t$  are not comparable. Let  $\bar{s}$  and  $\bar{t}$  be inverses of  $s$  and  $t$  respectively. From  $s \rho t$  we get  $(\bar{s} \bar{s}) \rho (\bar{s} \bar{t})$  or  $s \rho (\bar{s} \bar{t})$ . Similarly one gets  $t \rho (\bar{t} \bar{s})$ . Obviously,  $\bar{s} \bar{t}$  and  $\bar{t} \bar{s}$  belong to  $\mathcal{D}$ -classes lower than  $D_s$  and  $D_t$ . Hence for them there exist elements  $x, y \in S$  such that  $(\bar{s} \bar{t}) \bar{x} = (\bar{t} \bar{s}) y$  and  $(\bar{s} \bar{t}) \bar{x} \rho (\bar{s} \bar{t})$ . But then  $s(\bar{s} \bar{t} \bar{x}) = t(\bar{t} \bar{s} y)$  and  $(s(\bar{s} \bar{t} \bar{x})) \rho s$  and our condition is satisfied for  $s$  and  $t$ .

Suppose now that  $D_t$  is higher than  $D_s$ . Then again  $s \rho (\bar{t} \bar{s})$  and  $\bar{t} \bar{s}$  belongs to the  $\mathcal{D}$ -class which is not higher than  $D_s$ . From the existence of required

elemente for  $s$  and  $t$  it follows that such elements exist also for  $s$  and  $t$ .

Finally, let  $s, t$  be such that  $D_s = D_t$  If  $s R t$  then the existence of required elements is obvious. Now suppose that  $D^0 = \mathcal{R}^0(\alpha, I, J, P)$ ,  $s = (g, i, j)$ ,  $t = (h, k, l)$  where  $i \neq k$ . By assumption, there exist  $j' \in J$  such that  $p_{ji} = 0$  and  $p_{j'k} \neq 0$  or vice versa. Let the first possibility take place and let  $u = (p_{j'k}^{-1}, k, j')$ . Then  $us = 0$  and  $ut = t$ . This means that  $us$  belongs to the  $\mathcal{R}$ -class lower than  $D_s$ . From  $sqt$  it follows that  $(us)q(ut)$  or  $(us)qt$  or  $(t\bar{I}us)qt$  or  $(t\bar{I}us)qt$ . Now for elements  $s$  and  $t\bar{I}us$  there exist elements  $x, y \in S$  such that  $sx = t\bar{I}usy$  and  $(sx)qs$ . Hence we have found required elements for  $s$  and  $t$ .

#### References

- 1 Bulman - Fleming S. and K. M c D o - well, Absolutely flat semigroups, Pacific Journal of Mathematics, 107(1983), 319-333.
- 2 F l e i s c h e r V., Completely flat monoids, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 610(1982), 38-52 (Russian).
- 3 K i l p M., On left completely flat monoids that are unions of groups, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 556(1981), 33-37 (Russian).
- 4 K i l p M., Characterization of monoids by properties of their left Rees factors, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 640(1983), 29-37 (Russian).
- 5 L a l l e m e n t G. Semigroups and combinatorial applications, John Wiley, 1979.

Received  
Oct. 25, 1984

#### TÄIESTI LAMEDATEST MONOIDIDEST

M. Kilp

R e s ü m e e

Artiklis uuritakse täiesti lamedaid regulaarseid monoiide, millede Green'i seosed  $\mathcal{J}$  ja  $\mathcal{D}$  kokku langevad.

## О ВПОЛНЕ ПЛОСКИХ МОНОИДАХ

М.Кильп

### Резюме

Моноид  $S$  называется вполне плоским слева, если все левые  $S$ -полигоны являются плоскими. Встречающиеся в статье вполне  $0$ -простые полугруппы отождествляются с изоморфными им матричными полугруппами Риса. Столбцы (строки) сандвич-матрицы полугруппы Риса называются пропорциональными, если в них нули находятся на одинаковых местах. Доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 5.** Пусть  $S$  - регулярный моноид, в котором отношения Грина  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{D}$  совпадают и для любого  $\mathcal{D}$ -класса  $D$  моноида  $S$  полугруппа  $D^\circ$  является вполне  $0$ -простой. Если  $S$  является вполне плоским слева (справа), то любые два столбца (строки) сандвич-матрицы произвольной полугруппы  $D^\circ$ , где  $D \in \mathcal{D}$ -класс моноида  $S$ , не являются пропорциональными.

**Теорема 7.** Пусть  $S$  - регулярный моноид, в котором отношения Грина  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{D}$  совпадают, множество  $\mathcal{J}$ -классов удовлетворяет условию минимальности и для любого  $\mathcal{D}$ -класса  $D$  моноида  $S$  полугруппа  $D^\circ$  является вполне  $0$ -простой. Если любые два столбца и любые две строки сандвич-матрицы произвольной полугруппы  $D^\circ$ , где  $D \in \mathcal{D}$ -класс моноида  $S$ , не являются пропорциональными, то  $S$  является вполне плоским как слева, так и справа.

STRONG FLATNESS OF FLAT CYCLIC LEFT ACTS

M.Kilp

Tartu State University

Let  $S$  be a monoid. A left  $S$ -act  $M$  is called flat if the functor  $\otimes M$  preserves all monomorphisms  $A \rightarrow B$  of right  $S$ -acts (for the definition of the tensor product of acts see, for example, [3]). A left  $S$ -act  $M$  is called strongly flat if  $sa = tb$ , with  $a, b \in M$  and  $s, t \in S$ , implies the existence of elements  $c \in M$  and  $s', t' \in S$  such that  $s'c = a$ ,  $t'c = b$  and  $ss' = tt'$ . Moreover, if  $a = b$ , there exists  $s' \in S$  such that  $s'c = a$  and  $ss' = ts'$ . Note that such acts are called weakly flat in [6]. It was shown in [3] that every strongly flat act is flat.

A monoid  $S$  is called left reversible if any two principal right ideals of  $S$  intersect. In this note we characterize left reversible monoids all flat cyclic left acts over which are strongly flat.

Let  $\beta$  be a right congruence on a monoid  $S$  and  $s$  an element of  $S$ . Then by  $\beta_s$  we denote the right congruence on  $S$  defined as follows:

$$x(\beta_s)y \iff (sx)\beta(sy).$$

Lemma 1 ([2], Theorem 2). Let  $\alpha$  be a left congruence on a monoid  $S$ . A cyclic left  $S$ -act  $M = S/\alpha$  is flat if and only if for every right congruence  $\beta$  on  $S$  from  $s(\beta \forall \alpha)t$  it follows that there exist elements  $x, y \in S$  such that  $(sx)\beta(ty)$ ,  $1(\beta_s \forall \alpha)x$  and  $1(\beta_t \forall \alpha)y$ .

Lemma 2. Let  $\alpha$  be the principal left congruence on  $S$  identifying 1 and  $u$ ,  $u \in S$ . Then  $v \alpha w$ ,  $v, w \in S$ , if and only if  $v = wu^k$  or  $w = vu^l$  for some  $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Proof. Easy. The information given in [1], p. 319, is useful.

Lemma 3. Let  $\alpha$  be the principal left congruence on  $S$  identifying 1 and  $u$ ,  $u \in S$ . Then the left  $S$ -act  $M = S/\alpha$  is flat.

Proof. Let  $\beta$  be a right congruence on  $S$  and let  $s(\beta \forall \alpha)t$  for some  $s, t \in S$ . This means that there

exist elements  $v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_n \in S$  such that  $s\beta v_1, v_1 \alpha w_1, w_1 \beta v_2, v_2 \alpha w_2, \dots, w_n \beta t$ . By lemma 2 from  $v_i \alpha w_i, i = 1, 2, \dots, n$ , it follows that there exists  $k_i$  or  $l_i, k_i, l_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , such that  $v_i = w_i u^{k_i}$  or  $w_i = v_i u^{l_i}$ . This easily implies the existence of  $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$  such that  $(su^k)\beta(tu^l)$ . Since from  $1 \alpha u$  it follows  $1 \alpha u^k$  and  $1 \alpha u^l$  then  $1(\beta s v \alpha)u^k$  and  $1(\beta t v \alpha)u^l$ . Hence, by lemma 1,  $M$  is flat.

**Lemma 4** ([4], Proposition 7). Let  $I$  be a left ideal of a monoid  $S$ . Then the Rees factor  $S/I$  is flat if and only if  $S$  is left reversible and for every element  $a \in I$  there exists an element  $b \in I$  such that  $ab = a$ .

**Lemma 5.** Let  $I$  be a left ideal of a monoid  $S, I \neq S$ . If the Rees factor  $S/I$  is strongly flat then  $|I| = 1$ .

**Proof.** Let  $\bar{S} = S/I$  for a left ideal  $I$  of  $S$  be strongly flat. Suppose  $s, t \in I, s \neq t$ . Then  $s\bar{1} = t\bar{1}$  and from the definition of strong flatness it follows that there exist elements  $\bar{c} \in \bar{S}$  and  $x \in S$  such that  $\bar{1} = x\bar{c}$  and  $sx = tx$ . From  $\bar{1} = x\bar{c}$  and  $I \neq S$  we get  $1 = xc$ . Hence  $s = s(xc) = (sx)c = (tx)c = t(xc) = t$ , a contradiction.

**Theorem.** Let  $S$  be a left reversible monoid. All flat cyclic left  $S$ -acts are strongly flat if and only if  $S$  is either an one-element group or  $S = T^+$  where  $T$  is a nil semigroup.

**Proof. Necessity.** Let all flat cyclic left  $S$ -acts be strongly flat. Let  $u \in S$  be an arbitrary element and  $\alpha$  the principal left congruence on  $S$  identifying 1 and  $u$ . Then the cyclic left  $S$ -act  $\bar{S} = S/\alpha$  is flat by lemma 3. Hence  $\bar{S}$  is strongly flat. From the equality  $u\bar{1} = 1\bar{1}$  in  $\bar{S}$  it follows that there exist elements  $\bar{c} \in \bar{S}$  and  $s \in S$  such that  $\bar{1} = s\bar{c}$  and  $us = 1s$ . From  $1 \alpha (sc)$  we get, using lemma 2, that  $scu^k = 1$  or  $sc = u^l$  for some  $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . In the first case we have  $u = us = u(scu^k) = (us)cu^k = scu^k = 1$ . In the second case we get from  $us = s$  the equality  $usc = sc$  so that  $u^{l+1} = u^l$ . Hence in all cases there exists a natural number  $m$  such that  $u^m = e$  is an idempotent. Consider the Rees factor  $S/S_e$ . By lemma 4  $S/S_e$  is flat. By assumption  $S/S_e$  is then strongly flat and from lemma it follows that either  $e = 1$  or  $e$  is a

right zero. Let now  $I$  be the set of all right zeros of  $S$ . If  $I \neq \emptyset$  then  $I$  is a left ideal of  $S$  and from lemma 4 it follows easily that  $S/I$  is flat. Hence  $S/I$  is strongly flat. From lemma 5 it follows that  $I$  consists of one element. It is easy to understand that this element is the zero of  $S$ . Hence we have shown that for every element  $u \in S$  there exists a natural number  $m$  such that either  $u^m = 1$  or  $u^m = 0$ . Suppose that for all  $u \in S$  the first possibility takes place. Then  $S$  is a group and, among others, one-element left  $S$ -act  $0$  is flat. Let  $s, t \in S$  and  $s \neq t$ . Then from  $s0 = t0$  it follows by strong flatness of  $0$  that there exists an element  $x \in S$  such that  $sx = tx$  which implies  $s = t$ . Hence  $S$  is one-element. In general case we get that  $S = GUT$  where  $G$  is the group of units of  $S$  and  $T$  is a nil semigroup. Let  $g \in G, g \neq 1$ , and let  $\alpha$  be the smallest left congruence on  $S$  such that  $1 \alpha g$ . Then  $S/\alpha$  is flat by lemma 3. Hence  $S/\alpha$  is strongly flat. From the equality  $g\bar{T} = 1\bar{T}$  in  $S/\alpha$  it follows that there exist elements  $\bar{c} \in \bar{S}$  and  $s \in S$  such that  $\bar{T} = s\bar{c}$  and  $gs = s$ . From  $1 \alpha (sc)$  we get, using lemma 2, that  $scg^k = 1$  or  $sc = g^k$  for some  $k, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Since  $T$  is an ideal of  $S$  it follows from the equalities above that  $s \in G$ . But then from  $gs = s$  we get  $g = 1$ , a contradiction. Hence  $|G| = 1$  and  $S = T'$  where  $T$  is a nil semigroup.

Sufficiency. Let  $S = T'$  where  $T$  is a nil semigroup. If a left congruence  $\alpha$  on  $S$  is such that  $1 \alpha t$  for some  $t \in T$  then  $1 \alpha t^k$  for all natural numbers  $k$ . Hence  $1 \alpha 0$  and  $\alpha$  is the universal congruence. Then, of course,  $S/\alpha$  is strongly flat. Let us show that in the opposite case  $S/\alpha$  cannot be flat. Suppose that  $\alpha$  is a left congruence on  $S$  such that  $1 \alpha u$  does not take place for any  $u \in T$  and  $s \alpha t$  for  $s, t \in T, s \neq 0, t \neq 0$ . If  $S/\alpha$  were flat then there should exist elements  $x, y \in S$  such that  $sx = ty, 1(\Delta s \forall \alpha)x$ , and  $1(\Delta t \forall \alpha)y$ , where  $\Delta$  is the equality. Since from  $1(\Delta s)u, u \in T$ , it follows  $s = su$  which implies  $s = su^k$  for all natural numbers  $k$  then  $s = 0$ . Hence  $x = 1$  which implies  $t \neq 0$  and, similarly,  $y = 1$ . It follows that  $s = t$ , a contradiction.

## References

- [1] Bulman - Fleming, S. and K. McDowell, Absolutely flat monoids, Pacific J. Math, 107 (1983), 319-333.
- [2] Fleischer, V. Flat relative to diagrams acts, Summaries of the conference "Theoretical and applied problems of mathematics", Tartu 1980, 17-19 (Russian).
- [3] Kilp, M., On homological classification of monoids, Siberian Math. J., 13(1972), 396-41.
- [4] Kilp, M., Characterization of monoids by properties of their left Rees factors, Učh. Zap. Tartu Un-ta, 640(1983), 29-37.
- [5] Knauer, U., Characterization of monoids by properties of their cyclic or finitely generated acts and their right ideals, in Semigroups, Proc. of Oberwolfach Conf. 1982, Lect. Notes in Math.
- [6] Stenström, B., Flatness and localization over monoids, Math. Nachr., 48 (1970), 315-334.

Received  
Oct. 25, 1984

### LAMEDATE TSÜKLILISTE VASAKPOOLSETE POLÜGOONIDE

TUGEV LAMEDUS

M. Kilp

R e s ü m e

Leitakse tingimus lamedate tsükliliste polügoonide tugevaks lameduseks juhul, kui iga kaks põhimonoidi parempoolset ideaali lõikuvad.

### ПОЛНАЯ ПЛОСКОСТНОСТЬ ПЛОСКИХ ЦИКЛИЧЕСКИХ

ЛЕВЫХ ПОЛИГОНОВ

М. Кильп

Р е з ю м е

Пусть  $S$  - моноид, любые два правых идеала которого пересекаются. Доказывается, что все плоские циклические левые  $S$ -полигоны являются сильно плоскими тогда и только тогда, когда  $S$  является одноэлементной группой или нильполугруппой с единицей.

# О ПОЛУГРУППАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

П. Пуусемп

Таллинский политехнический институт

## §1. Введение

Каждая конечная группа является подгруппой подходящей симметрической группы. Поэтому свойства симметрических групп исследовались с разных сторон. В настоящей работе характеризуем конечную симметрическую группу  $S_n$  степени  $n$  при помощи ее полугруппы эндоморфизмов  $\text{End } S_n$  (теорема 1) и докажем, что группа  $S_n$  определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп, т.е. всегда из того, что полугруппа всех эндоморфизмов некоторой группы  $G$  изоморфна полугруппе  $\text{End } S_n$  следует изоморфизм  $G \cong S_n$  (теорема 2).

Введем следующие обозначения:  $\text{End } G$  - полугруппа всех эндоморфизмов группы  $G$ ;  $\text{Aut } G$  - группа всех автоморфизмов группы  $G$ ;  $I_0(G)$  - совокупность всех ненулевых и неединичных идемпотентов полугруппы  $\text{End } G$ ;  $Z(G)$  - центр группы  $G$ ;  $C_n$  - циклическая группа порядка  $n$ ;  $\langle a, b, \dots \rangle$  - подгруппа, порожденная элементами  $a, b, \dots$ ;  $D_3$  - группа диэдра порядка 6,  $K_a(x) = \{y \in \text{End } G \mid yx = xy = y\}$ ;  $H_a(x) = \{y \in \text{End } G \mid xy = y, yx \neq 0\}$ ;  $D_b(x) = \{y \in \text{Aut } G \mid yx = xy = x\}$ ;  $\hat{g}$  - внутренний автоморфизм, порожденный элементом  $g$ ;  $\hat{G} = \{\hat{g} \mid g \in G\}$ .

## §2. Свойства группы $S_n$

Перечислим некоторые нужные нам свойства симметрических групп. Группа  $S_n$  задается порождающими элементами  $a_1, \dots, a_{n-1}$  и следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \dots = a_{n-1}^2 = 1, \\ (a_i a_{i+1})^3 &= 1 \quad (i \in \{1, \dots, n-2\}), \\ a_i a_k &= a_k a_i \quad (k-i \geq 2) \end{aligned} \tag{1}$$

(см. [1], с. 97). Группа  $S_4$  задается порождающими  $a, b, c, d$  и определяющими соотношениями —

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = d^2 = c^3 = 1, \\ ab = ba, c^{-1}ac = b, c^{-1}bc = ab, \\ d^{-1}ad = a, d^{-1}bd = ab, d^{-1}cd = c^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом  $a = (12)(34), b = (13)(24), d = (12)$  и  $c = (123)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S_4 &= (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda (\langle c \rangle \lambda \langle d \rangle), \\ A_4 &= (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Общеизвестны следующие факты. При  $n \geq 3$  и  $n \neq 6$  группа  $S_n$  совершенна, т.е. она без центра и все ее автоморфизмы внутренние. При  $n \geq 5$  знакопеременная группа  $A_n$  является простой группой. При  $n \neq 4$  единственными нормальными делителями группы  $S_n$  являются  $\langle 1 \rangle, A_n$  и  $S_n$ . Нормальными делителями группы  $S_4$  являются  $\langle 1 \rangle, \langle a \rangle \times \langle b \rangle, A_4, S_4$  и только они ( $a, b$  — элементы из соотношений (2)). Группа  $S_n$  неразложима в нетривиальное прямое произведение своих подгрупп.

При  $n \geq 3, n \neq 6$  группа всех автоморфизмов группы  $S_n$  изоморфна самой группе  $S_n$ . Группа  $S_6$  имеет внешние автоморфизмы (см., например, работу [7]). Укажем здесь один из них:

$$\begin{aligned} (12)\gamma &= (12)(35)(46), \\ (123456)\gamma &= (14)(235). \end{aligned} \quad (4)$$

Аutomорфизм  $\gamma$  имеет порядок 2 и

$$\text{Aut } S_6 = \hat{S}_6 \lambda \langle \gamma \rangle, \quad \hat{S}_6 \cong S_6. \quad (5)$$

Наконец отметим, что каждую симметрическую группу  $S_n$  ( $n \geq 3$ ) можно разложить в полупрямое произведение  $S_n = A_n \lambda \langle g \rangle$ , где  $g$  — произвольная транспозиция.

### § 3. Определяемость группы $S_n$ ее полугруппой эндоморфизмов

Абстрактную характеристику полугруппам эндоморфизмов конечных симметрических групп дает следующая

Теорема I. Конечная группа  $G$  изоморфна группе  $S_n$  ( $n \geq 3$ ) тогда и только тогда, когда

$$1) \text{Aut } G \cong \text{Aut } S_n;$$

2) группа  $G$  неразложима в нетривиальное прямое произведение своих подгрупп;

3) если  $n=4$  то существует  $y \in J_0(G)$  для которого

$$K_y(y) \cong \text{End } S_3;$$

4) существует  $x \in J_0(G)$  удовлетворяющий условиям:

$$4.1. K_x(x) \cong \text{End } C_2;$$

$$4.2. |y \cdot \text{Aut } G| > 2 \text{ для каждого } y \in H_G(x) \setminus \{0\};$$

4.3. если  $n=6$ , то: а) из  $y \in \text{End } G$  и  $yx = xy = 0$  следует  $y=0$ ; б) в  $\text{Aut } G$  существует такой нормальный делитель  $A$ , что  $A \cong A_6$  и  $A \cdot S_6(x) \cong S_6$ .

Доказательство. Необходимость. Пусть  $G = S_n$ . Тогда тривиально выполняется условие 1) теоремы. В силу того, что группа  $S_n$  неразложима в нетривиальное прямое произведение своих подгрупп, имеет место условие 2).

Если  $n=4$ , то согласно определяющим соотношениям (2) группы  $S_4$  имеем

$$S_3 \cong \langle e \rangle \lambda \langle d \rangle. \quad (6)$$

Обозначим через  $y$  идемпотент полугруппы  $\text{End } G$ , соответствующий полупрямому разложению (3), т.е.  $Jmy = \langle e \rangle \lambda \langle d \rangle$  и  $\text{Ker } y = \langle a \rangle x \langle b \rangle$ . Тогда  $y \in J_0(G)$  и в силу  $K_y(y) \cong \text{End}(Jmy)$  (см. [2], лемма I.6) и (6) имеем  $K_y(y) \cong \text{End } S_3$ . Справедливость условия 3) доказана.

Ясно, что

$$G = A_n \lambda \langle h \rangle, \quad (7)$$

где  $h$  - произвольная транспозиция, например,  $h = (12)$ . Обозначим через  $x$  идемпотент полугруппы  $\text{End } G$  соответствующий полупрямому разложению (7), т.е.  $\text{Ker } x = A_n$  и  $Jmx = \langle h \rangle$ . Тогда  $x \in J_0(G)$ . Покажем, что  $x$  удовлетворяет условию 4). Так как  $K_x(x) \cong \text{End}(Jmx)$  (см. [2], лемма I.6) и  $Jmx \cong C_2$ , то условие 4.1 выполняется.

Покажем справедливость условия 4.2. Для того предположим, что  $y \in H_G(x) \setminus \{0\}$ . Тогда  $A_n y = (\text{Ker } x)y = \langle 1 \rangle$  и  $1 \neq h y \in A_n = \text{Ker } x$  (см. [3], лемма 2). При этом  $h y$  - элемент второго порядка. Очевидно, что индекс централизатора элемента  $h y$  в группе  $G = S_n$  больше двух. Поэтому  $|y \cdot G| > 2$ ,  $|y \cdot \text{Aut } G| > 2$  и условие 4.2 имеет место.

Предположим, наконец, что  $n=6$ , т.е.  $G = S_6$ . Пусть  $y \in \text{End } G$  и  $yx = xy = 0$ . Тогда  $Jmy = \langle h \rangle \subset \text{Ker } y \neq \langle 1 \rangle$  и поэтому  $\text{Ker } y \neq A_6$ . Так как единственными делителями

группы  $S_c$  являются  $\langle 1 \rangle$ ,  $A_c$  и  $S_c$ , то  $\text{Ker } \gamma = S_c$ , т.е.

$\gamma = 0$  и условие 4.3 а) имеет место. Докажем условие 4.3б). Отметим, что  $\hat{G} = \hat{A}_c \lambda \langle \hat{h} \rangle \cong S_c$ . Обозначим  $\hat{A}_c = A$ . Тогда  $A \triangleleft \text{Aut } \hat{G}$  и  $A \cong A_c$ . С другой стороны  $\hat{h} \in \mathcal{D}_c(x)$  (см. [4], лемма 6). Поэтому

$$\hat{G} = A \cdot \langle \hat{h} \rangle \subset A \cdot \mathcal{D}_c(x).$$

Допустим, что  $\hat{G} \neq A \cdot \mathcal{D}_c(x)$ . Тогда

$$\text{Aut } \hat{G} = A \cdot \mathcal{D}_c(x), \quad (8)$$

ибо  $\hat{G}$  является подгруппой индекса 2 в группе  $\text{Aut } \hat{G}$ . Рассмотрим  $\gamma \in \text{Aut } \hat{G}$ , задаваемый формулами (4). В силу равенства (8)

$$\gamma = x \cdot \hat{g}, \quad \hat{g} \in A, \quad g \in A_c, \quad x \in \mathcal{D}_c(x).$$

Тогда  $x \cdot x = x \cdot x = x$ ,  $\hat{h} x = (12)x = (12)$  и  $(12)x = ((12)x)x = (12)(x \cdot x) = (12)x = (12)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} (12)(35)(46) &= (12)\gamma = (12)(x \cdot \hat{g}) = \\ &= ((12)x)\hat{g} = (12)\hat{g}. \end{aligned} \quad (9)$$

Правая часть равенства (9) является транспозицией, левая часть - нет. Полученное противоречие показывает, что равенство (8) не имеет место. Следовательно,  $A \cdot \mathcal{D}_c(x) = \hat{G} \cong S_c$  и условие 4.3б) имеет место. Необходимость теоремы I доказана.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия 1)-4) теоремы. Тогда  $\hat{G} = \text{Ker } x \lambda \text{Im } x$  (см. [2], лемма I.1). Так как  $\text{Ker } x \cong \text{End}(\text{Im } x)$  (см. [2], лемма I.6) и каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп (см. [2], теорема 4.2), то в силу условия 4.1 имеем  $\text{Im } x = \langle h \rangle \cong C_2$ . Отсюда

$$\hat{G} = \text{Ker } x \lambda \langle h \rangle. \quad (10)$$

Порядок автоморфизма  $\hat{h}$  равен двум, ибо в противном случае  $\hat{h} = 1$ ,  $h \in \mathcal{K}(G)$ ,  $G = \text{Ker } x \times \text{Im } x$ , что противоречит условию 2). Аналогично,  $\hat{G} \neq \langle 1 \rangle$ . Очевидно, что группа  $\hat{G}$  неизоморфна знакопеременной группе  $A_n$ .

Покажем теперь, что  $\hat{G} \cong S_n$ . При  $n \in \{4, 6\}$  это следует сразу из предыдущего абзаца и условия 1), ибо тогда

$\hat{G} \triangleleft \text{Aut } \hat{G} \cong \text{Aut } S_n \cong S_n$  и  $\langle 1 \rangle, A_n, S_n$  - единственные нормальные подгруппы группы  $S_n$ . Предположим, что  $n = 4$ . Тогда по условию 1) имеем  $\text{Aut } \hat{G} \cong \text{Aut } S_4 \cong S_4$ .

Поэтому можно считать, что группа  $\text{Aut } \hat{G}$  задается с опре-

делящими соотношениями (2). Так как  $\hat{G} \neq \langle 1 \rangle$  и  $\hat{G} \neq A_4$ , то  $\hat{G} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$  или  $\hat{G} \cong S_4$ . Пусть  $\hat{G} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Тогда

$G/\mathcal{Z}(G) \cong C_2 \times C_2$  и группа  $G$  разлагается в прямое произведение  $G = G_{21} \times G_{22}$  своей силовой 2-подгруппы  $G_{21}$  и холмовской 2'-подгруппы  $G_{22}$ . В силу условия 2)  $G_{21} = \langle 1 \rangle$ , т.е.  $G$  является 2-группой. С другой стороны, из условия 3)  $G = \text{Ker } \lambda \text{Im } \mu$  и  $\text{End}(\text{Im } \mu) \cong \text{End } S_3$  (см. [2], лемма 1.6). Поскольку группа  $S_3$  определяется своей полу-группой эндоморфизмов (см. [5], теорема 27), то  $\text{Im } \mu \cong S_3$ . Поэтому группа  $G$  не является 2-группой. Полученное противоречие показывает, что  $\hat{G} \neq \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Следовательно,  $\hat{G} \cong S_4$ .

Предположим, что  $n=C$  и покажем изоморфизм  $\hat{G} \cong S_2$ . По условию 1)  $\text{Aut } G \cong \text{Aut } S_2$ . В силу условий (5) можно считать, что  $\text{Aut } G = S_2 \lambda \langle a \rangle$ , где  $a$  - автоморфизм второго порядка. Так как  $S_2 = A_2 \lambda \langle \beta \rangle$ , где  $\beta$  - элемент второго порядка, то

$$\text{Aut } G = (A_2 \lambda \langle \beta \rangle) \lambda \langle a \rangle. \quad (II)$$

Из равенства (II) следует, что

$$A_2 \triangleleft \text{Aut } G, \quad (I2)$$

ибо единственными нормальными делителями группы  $G$  являются  $\langle 1 \rangle$ ,  $A_2$  и  $S_2$ . В силу простоты группы  $A_2$  и неравенства  $\hat{G} \neq A_2$  имеем  $A_2 \subset \hat{G}$  или  $A_2 \cap \hat{G} = \langle 1 \rangle$ . При  $A_2 \cap \hat{G} = \langle 1 \rangle$  будет  $A_2 \cdot \hat{G} = A_2 \times \hat{G}$  и, ввиду равенства (II),  $\hat{G} \cong C_2$  или  $\hat{G} \cong C_2 \times C_2$ . Это означает, в силу равенства (10), что  $\hat{G} = \text{Ker } \pi \times \langle a \rangle$ . Если  $\hat{G} \cong C_2$ , то  $\text{Ker } \pi = \langle 1 \rangle$  и  $G = \text{Ker } \pi \times \text{Im } \pi$  что противоречит условию 2). Если  $\hat{G} \cong C_2 \times C_2$ , то  $\text{Ker } \pi \cong C_2$  и в группе  $\text{Ker } \pi$  существуют элементы второго порядка. Пусть  $g$  - один из них. Теперь можно указать ненулевой эндоморфизм  $\psi$  группы  $G$ , обладающий свойством  $\psi^2 = \psi = 0$ . Именно,  $\psi = \varepsilon \pi \pi$ , где  $\varepsilon: G \rightarrow \hat{G} = G/\mathcal{Z}(G)$  - естественный гомоморфизм,  $\pi: \hat{G} \rightarrow \text{Ker } \pi$  - проектирование,  $\pi$  - изоморфизм между  $\text{Ker } \pi$  и  $\langle g \rangle$ . Это противоречит условию 4.3а). Следовательно, случай  $A_2 \cap \hat{G} = \langle 1 \rangle$  невозможен и

$$A_2 \subset \hat{G}. \quad (I3)$$

Покажем, что  $\hat{G} \cong A_2$ . Если  $\hat{h} \in A_2$ , то в силу условий (10)-(13) группа  $\text{Ker } \pi \cdot A_2 / A_2 = \hat{G} / A_2$  изоморфна группе  $C_2$  или  $C_2 \times C_2$ . В обоих случаях можно аналогично предыдущему абзацу построить ненулевой  $\psi \in \text{End } G$ , удовлетворяю-

щий равенствам  $yx = xy = 0$ . Полученное противоречие с условием 4.3а) показывает, что

$$\hat{h} \in A_0. \quad (I4)$$

Так как элемент  $\hat{h}$  принадлежит централизователю подгруппы  $Zmx = \langle \hat{h} \rangle$  группы  $\hat{G}$ , то  $\hat{h} \in D_0(x)$  (см. [4], лемма 6). Ввиду условий (I3), (I4) и 4.3б) имеем

$$S_0 \subset \hat{G}. \quad (I5)$$

Если мы покажем, что  $\hat{G} \neq \text{Aut } G$ , то из условий (II) и (I5) сразу следует изоморфизм  $\hat{G} \cong S_0$ .

Предположим, что  $\hat{G} = \text{Aut } G$ . В силу условий (II) и (I2) имеем  $\langle A_0, \hat{h} \rangle \triangleleft \text{Aut } G$  и  $\text{Aut } G / \langle A_0, \hat{h} \rangle \cong C_2$ . Обозначим через  $T$  полный прообраз нормального делителя  $\langle A_0, \hat{h} \rangle$  группы  $\hat{G}$  при естественном гомоморфизме  $G \rightarrow \hat{G} = G / Z(G)$ . Тогда  $T \triangleleft G$ ,  $h \in T$  и  $G/T \cong C_2$ . Поэтому в группе существует элемент  $g$  второго порядка и можно указать ненулевой  $y \in \text{Inn } G$ , обладающий свойством  $yx = xy = 0$ :  $y = \kappa t$ , где  $\kappa: G \rightarrow G/T$  - естественный гомоморфизм и  $t$  - изоморфизм между  $G/T$  и  $\langle g \rangle$ : Это противоречит условию 4.3а). Следовательно,  $\hat{G} \neq \text{Aut } G$  и  $\hat{G} \cong S_0$ .

Уже установлено, что  $\hat{G} \cong S_n$  для любого  $n$  ( $n \geq 3$ ). Достаточность теоремы доказана, если покажем, что  $Z(\hat{G}) = \langle 1 \rangle$ .

Отметим, что  $Z(\hat{G})$  не содержит элементов второго порядка. Действительно, если  $g$  - элемент второго порядка из  $Z(\hat{G})$ , то  $g \in \text{Ker } x$  (в противном случае  $G = \text{Ker } x \times \langle g \rangle$ , что противоречит условию 2)) и можно построить  $y \in \text{Inn}(G) \setminus \{0\}$  следующим образом:

$$(\text{Ker } x)y = \langle 1 \rangle, \quad hy = g.$$

При этом  $y \cdot \hat{G} = y$ . Так как ввиду  $\hat{G} \cong S_n$  и условия I) индекс подгруппы  $\hat{G}$  группы  $\text{Aut } G$  не больше двух, то  $|y \cdot \text{Aut } G| \leq 2$ . Это противоречит условию 4.2. Следовательно, группа  $Z(\hat{G})$  не содержит элементов второго порядка.

Так как  $\hat{G} \cong S_n$ , то согласно равенствам (I) существуют  $a_1, \dots, a_{n-1} \in G$ , так что

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_{n-1} &= \hat{a}_{n-1}^2 = 1, \\ (\hat{a}_i \hat{a}_{i+1})^2 &= 1 \quad (i \in \{1, \dots, n-2\}), \\ \hat{a}_i \hat{a}_k &= \hat{a}_k \hat{a}_i \quad (k-i \geq 2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$a_j^2 = c_j \in \mathcal{Z}(G) \quad (j \in \{1, \dots, n-1\}),$$

$$(a_i a_{i+1})^2 = d_i \in \mathcal{Z}(G) \quad (i \in \{1, \dots, n-2\}), \quad (I6)$$

$$a_i a_k = a_k a_i e_{ik}, \quad e_{ik} \in \mathcal{Z}(G) \quad (k-i \geq 2). \quad (I7)$$

Поскольку  $\mathcal{Z}(G)$  не содержит элементов второго порядка, то без ограничения общности можно предполагать, что  $c_j = 1$  для каждого  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Из равенства (I7) вытекает

$$a_k = a_i^{-1} a_k a_i e_{ik},$$

$$a_k^2 = a_i^{-1} a_k^2 a_i e_{ik}^2 = e_{ik}^2 = 1,$$

т.е.  $e_{ik} = 1$  (ведь  $e_{ik} \in \mathcal{Z}(G)$ ). Из равенств (I6) получим

$$a_{i+1} a_i a_{i+1} a_i a_{i+1} a_i a_{i+1} = a_{i+1} d_i,$$

$$(a_{i+1} d_i)^2 = 1, \quad a_{i+1}^2 d_i^2 = d_i^2 = 1.$$

Поэтому также  $d_i = 1$ . Следовательно, элементы  $a_1, \dots, a_{n-1}$  удовлетворяют соотношениям (I) и группа  $K = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  изоморфна некоторой факторгруппе группы  $S_n$ . В силу  $K = \mathcal{G} \cong S_n$  ясно, что  $K \cong S_n$ . Поэтому  $K$  является системой представителей смежных классов факторгруппы  $G/\mathcal{Z}(G)$  и  $\mathcal{G} = K \times \mathcal{Z}(G)$ . В силу условия 2)  $\mathcal{Z}(G) = \langle 1 \rangle$ , т.е.  $\mathcal{G} \cong S_n$ . Достаточность доказана. Теорема I доказана.

Теорема 2. Если полугруппа всех эндоморфизмов некоторой группы  $G$  изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов конечной симметрической группы  $S_n$ , то группы  $G$  и  $S_n$  изоморфны.

Доказательство. Предположим, что  $\text{End} G \cong \text{End} S_n$ . В силу конечности полугруппы  $\text{End} G$  группа  $G$  также конечна (см. [6], теорема 2). Если  $n \in \{1, 2\}$ , то группа  $S_n$  коммутативна и  $G \cong S_n$  (см. [2], теорема 4.2). Предположим теперь, что  $n \geq 3$ . Так как группа  $S_n$  удовлетворяет теореме I (взять там  $G = S_n$ ) и свойства I)-4), перечисленные в теореме I, сохраняются при изоморфизме полугрупп эндоморфизмов (см. [2], следствие I.14; [3], следствие I5), то полугруппа  $\text{End} G$  также удовлетворяет условиям I)-4) теоремы I. Следовательно,  $G \cong S_n$ . Теорема доказана.

#### Литература

1. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Д., Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, М., "Наука", 1980.
2. Пусемп П., Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, № 366, 76-104.

3. П у у с е м п П., Полугруппа эндоморфизмов полупрямого произведения двух циклических  $\rho$ -групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, № 390, 104-133.
4. П у у с е м п П., Полугруппы эндоморфизмов обобщенных групп кватернионов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, № 390, 84-108.
5. П у у с е м п П., Об определяемости полупрямого произведения циклических групп своей полугруппой эндоморфизмов. Труды Таллинск. политехн. ин-та, 1980, № 482, 131-148.
6. A l p e r i n, J. L., Groups with finitely many automorphisms. Pacific J. Math., 1962, 12, Nr. 1, 1-5.
7. M i l l e r, D. W., On a theorem of Hölder. Amer. Math. Monthly, 1958, 65, Nr. 3-4, 252-254.

Поступило  
9.XII 1983

#### SÜMMEETRILISTE RÜHMADE ENDOMORFISMIPOOLRÜHMADEST

P. Puusemp

R e s ü m e e

Artiklis antakse lõplike sümmeetriliste rühmade endomorfismipoolrühmade abstraktne iseloomustus (teoreem 1) ning näidatakse, et iga lõplik sümmeetriline rühm määratakse ära oma endomorfismipoolrühmaga kõigi rühmade klassis (teoreem 2).

#### ON THE SEMIGROUP OF ENDOMORPHISMS OF THE SYMMETRIC GROUPS

P. Puusemp

S u m m a r y

Let  $S_n$  be a finite symmetric group. In this paper the following theorem is proved: If the semigroup of all endomorphisms of some group  $G$  is isomorphic to the semigroup of all endomorphisms of the group  $S_n$  then the groups  $G$  and  $S_n$  are isomorphic.

САМОИНЪЕКТИВНОСТЬ ПРАВОИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП,  
ПОДПОЛУГРУППА ИДЕМПОТЕНТОВ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ  
КОНЕЧНОЙ ЦЕПЬЮ  $\mathcal{R}$ -КЛАССОВ

Х.Пяэва

Тартуский государственный университет

В работе [6] даются необходимые и достаточные условия для самоинъективности инверсных полугрупп. Этим результатам последовала статья [7] о самоинъективности обобщенной инверсной полугруппы, т.е. регулярной полугруппы, множество идемпотентов  $E$  которой удовлетворяет условию  $efgh = egfh$  для любых  $e, f, g, h \in E$  и обобщенной инверсной справа полугруппы, т.е. регулярной полугруппы, множество идемпотентов  $E$  которой удовлетворяет тождеству  $efg = feg$  для любых  $e, f, g \in E$ . В статьях [7] и [8] дается ряд необходимых условий самоинъективности для правоинверсной полугруппы, т.е. полугруппы, каждый  $\mathcal{L}$ -класс которой содержит единственный идемпотент. Легко видеть, что обобщенная инверсная справа полугруппа является правоинверсной. Теорема 1.6 из [7] показывает, что самоинъективная обобщенная инверсная полугруппа является правоинверсной. Заметим, что обобщенный инверсный моноид и обобщенный инверсный справа моноид являются инверсными, но в то же время правоинверсность является для моноида обобщением инверсности.

По теореме 7 из [4], множество идемпотентов правоинверсной полугруппы является подполугруппой. Статья [5] и теорема 9 из [4] дают, что подполугруппа идемпотентов правоинверсной полугруппы является полурешеткой своих  $\mathcal{R}$ -классов. Следовательно, целесообразно изучать самоинъективность такой полугруппы, исходя из типа полурешетки. В данной работе даются необходимые и достаточные условия для самоинъективности правоинверсной полугруппы, подполугруппа идемпотентов которой является конечной цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов и исследуется полугруппа идемпотентов,  $\mathcal{R}$ -классы которой образуют произвольную цепь. Легко показать, что полугруппы такого типа являются правоинверсными.

Отметим, что запись вида  $A = \dots$  в статье означает "через  $A$  обозначается...". Все понятия, которые

в дальнейшем не определяются, можно найти в монографиях [1] и [2].

Пусть  $S$  - полугруппа,  $T \subseteq S$  - произвольное подмножество. Обозначим через  $E_T$  множество идемпотентов, принадлежащих подмножеству  $T$ . Для  $a \in S$  через  $V(a)$  обозначим множество инверсных элементов к элементу  $a$ . Напомним, что множество  $A = A_S$  называется правым  $S$ -полигоном (в статье  $S$ -полигоном), если для любых  $s \in S$  и  $p \in A$  определено произведение  $ps \in A$ , причем  $(ps)t = p(st)$  для всех  $s, t \in S, p \in A$  и  $p1 = p$ , если  $S = S^1$ . Пусть  $A$  и  $B$  -  $S$ -полигоны. Правым  $S$ -гомоморфизмом (в статье  $S$ -гомоморфизмом) называется отображение  $\varphi: A \rightarrow B$ , удовлетворяющее условию  $\varphi(ps) = \varphi(p)s$  для всех  $p \in A, s \in S$ . Мы пользуемся записью  $A \hookrightarrow B_S$ , если  $A$  является  $S$ -подполигоном  $S$ -полигона  $B$ . В частности,  $I \hookrightarrow S_S$  обозначает, что  $I$  является правым идеалом полугруппы  $S$ .  $S$ -полигон  $M$  называется инъективным, если для любого  $S$ -полигона  $B$ , для любого  $A \hookrightarrow B_S$  и для любого  $S$ -гомоморфизма  $\varphi: A \rightarrow M$  существует  $S$ -гомоморфизм  $\psi: B \rightarrow M$ , который продолжает  $S$ -гомоморфизм  $\varphi$ . Полугруппа  $S$  называется самоинъективной, если она инъективна как  $S$ -полигон.

**Определение.** Полугруппа  $S$  называется правоинверсным, если каждый ее  $\mathcal{R}$ -класс содержит единственный идемпотент.

**Лемма 1** (см. [9], теорема I). Полугруппа  $S$  является правоинверсной тогда и только тогда, когда  $S$  -регулярна и  $ef = ef$  для всех  $e, f \in E_S$ .

**Лемма 2** (см. [3], теорема I). Если полугруппа  $S$  содержит левый нулевой элемент и инъективна относительно вложений в циклические полигоны, то она самоинъективна.

Пусть  $S$  - регулярная полугруппа,  $s \in S, I \hookrightarrow S_S$  и

$$Q_s = Q_s(I) = \{u \in S' \mid su \in I\}.$$

Пусть  $f \in E_T$ . Определим бинарное отношение  $\rho = \rho(I, f)$  на  $S$  следующим образом

$$spt \Leftrightarrow Q_s = Q_t \text{ и } fsu = ftu \text{ для всех } u \in Q_s(I)$$

**Лемма 3** (а). Отношение  $\rho$  является правой конгруэнцией на  $S$ .

(б) Для любых  $a, b \in fS$  из  $a\rho b$  следует  $a = b$ .

(в) Пусть  $S$  - правоинверсная полугруппа, подполугруппа идемпотентов которой является цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов. Тогда

да  $g_1 \rho g_2$  для любых  $g_1, g_2 \in E_S \setminus E_I$ .

Доказательство. (а) Очевидно,  $\rho$  является эквивалентностью. Пусть  $spt$  ( $s, t \in S$ ),  $x \in S$  и  $u \in Q_{sx}$ . Тогда  $sxu \in I$ , откуда  $xu \in Q_s$ . Так как по определению  $\rho$  имеем  $Q_s = Q_t$ , то  $xu \in Q_t$ . Из определения  $Q_t$  вытекает, что  $txu \in I$ , откуда следует, что  $u \in Q_{tx}$ . Таким образом, мы установили, что  $Q_{sx} \subseteq Q_{tx}$ . Аналогично доказывается обратное включение, следовательно  $Q_{sx} = Q_{tx}$ .

Учитывая, что  $spt$  и  $xu \in Q_s$  для любого  $u \in Q_{sx}$ ,  $fsxu = ftxu$ , следовательно  $sxptx$ , т.е.  $\rho$  - правая конгруэнция.

(б) Пусть  $a, b \in fS \subseteq I$  и пусть  $a \rho b$ . Тогда  $Q_a = Q_b = S^1$  и из определения  $\rho$  получим

$$a = fa = fa1 = fb1 = fb = b.$$

(в) Заметим, что если  $g \in E_S$ , то для каждого  $x \in S \setminus gS$  мы имеем  $gS \not\subseteq xS = xx'S$ , где  $x' \in V(x)$ . Значит  $xx'g = g$  и

$$gx(x'g) = g(xx'g) = gg = g,$$

т.е.  $gx \mathcal{R} g$ . С другой стороны, для каждого  $x \in gS$  мы имеем  $gx = x$ . Поэтому для  $g_1, g_2 \in E_S \setminus E_I$  получим  $Q_{g_1} = Q_{g_2} = I$ . Если  $u \in I$  - произвольный элемент, то мы можем писать

$$fg_1u = f(g_1u) = fu = f(g_2u) = fg_2u.$$

Следовательно,  $g_1 \rho g_2$ .

Лемма доказана.

Пусть  $R_f$  -  $\mathcal{R}$ -класс полугруппы  $S$ , содержащий элемент  $f \in S$ .

Предложение 4. Пусть  $S$  - самоинъективная правоинверсная полугруппа, подполугруппа идемпотентов которой является целью своих  $\mathcal{R}$ -классов. Определим  $\rho = \rho(I, f)$  для  $I \in S_S$  и  $f \in E_I$  при помощи определения (I). Тогда существует  $q \in E_{R_f}$  такой, что из  $spt$  ( $s, t \in S$ ) следует равенство  $qs = qt$ .

Доказательство. Так как  $\rho$  - правая конгруэнция полугруппы  $S$ , то  $S/\rho$  является  $S$ -полигоном. Пусть

$$\pi: \begin{cases} S \rightarrow S/\rho \\ s \mapsto \bar{s} \end{cases}$$

- естественный эпиморфизм  $S$ -полигона  $S$ . Тогда  $I\pi \in (S/\rho)_S$ .

Определим отображение

$$\varphi: \begin{cases} I\pi \rightarrow fS \\ \bar{a} \mapsto fa \end{cases}$$

Пусть  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 \in I\pi$ . По определению  $\rho$  имеем  $f a_1 u = f a_2 u$  для каждого  $u \in Q_{a_1} = Q_{a_2} = S^1$ . Выбирая  $u = 1 \in S^1$ , получим  $f a_1 = f a_2$ . Следовательно, определение  $\varphi$  корректно. Очевидно,  $\varphi$  является  $S$ -гомоморфизмом.

Из самоинъективности полугруппы  $S$  и из леммы I.3 статьи [7] следует, что  $fS$  является инъективным правым идеалом. Следовательно, найдется  $S$ -гомоморфизм  $\psi: fS \rightarrow fS$ , который является продолжением  $S$ -гомоморфизма  $\varphi$ . Пусть  $h$  обозначает левую единицу полугруппы  $S$ , которая существует по лемме I.3 из [7]. Пусть  $q \doteq \psi(\bar{h})$ . Если  $spt(s, t \in S)$ ,

$$\begin{aligned} qs &= \psi(h)s = \psi(\bar{h}s) = \psi(\bar{h}s) = \psi(\bar{s}) = \psi(\bar{t}) = \\ &= \psi(\bar{h}t) = \psi(\bar{h}t) = \psi(\bar{h})t = qt. \end{aligned}$$

Пусть  $x \in fS$  - произвольный элемент. Тогда

$$qx = \psi(\bar{h})x = \psi(\bar{h}x) = \psi(\bar{h}x) = \psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) = fx = x.$$

В частности,  $qq = q$  и  $qf = f$ , т.е.  $q \in E_{R_f}$ . Предложение доказано.

**Теорема 5.** Пусть  $S$  - правоинверсная полугруппа, подполугруппа идемпотентов которой является конечной цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов.

$S$  является самоинъективной тогда и только тогда, когда

- (а)  $S$  содержит левый нулевой элемент и
- (б) для любых  $e, f \in E_S$ , удовлетворяющих условию  $fS \subseteq eS$ , существует  $q \in E_{R_f}$  такой, что из  $spt(s, t \in S$  и  $p = p(eS, f)$  определено по (I)) следует равенство  $qs = qt$ .

**Доказательство. Необходимость.** (а) вытекает из теоремы 2 статьи [3], (б) вытекает из предложения 4.

**Достаточность.** Для доказательства самоинъективности полугруппы  $S$  мы пользуемся леммой 2. Пусть  $\rho^S$  - произвольный циклический  $S$ -полигон и  $A \subset (\rho^S)_S$ . Пусть  $I \doteq \{s \in S \mid \rho s \in A\}$ . Легко видеть, что  $I \subset S_S$  и  $A = \rho I$ . Поскольку  $S$  регулярна и  $E_S$  является конечной цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов, то  $I$  является главным правым идеалом и найдется элемент  $e \in E_S$ , для которого  $I = eS$ .

Пусть  $\varphi: \rho I \rightarrow S$  - произвольный  $S$ -гомоморфизм,  $m \doteq \varphi(\rho e)$  и  $f \doteq m'/m$ , где  $m' \in V(m)$ . Поскольку  $me = m$ , имеет место равенство

$$fe = f. \quad (2)$$

Из леммы I получаем, что

$$ef = fef = ff = f,$$

откуда следует включение  $fS \subseteq eS$ . Используя (б), мы можем найти элемент  $q \in ER_f$  такой, что из  $spt (s, t \in S)$  следует равенство  $qs = qt$ . Определим отображение

$$\psi: \begin{cases} pS \rightarrow S \\ ps \mapsto mqs. \end{cases}$$

Пусть  $ps_1 = ps_2$ , где  $s_1, s_2 \in S$ . Если  $u \in Q_{s_1} = Q_{s_2} (I)$ , то  $ps_2 u = ps_1 u \in A$ , следовательно, по определению I, мы имеем  $s_2 u \in I$ , т.е.  $u \in Q_{s_2}$ . Аналогично можно доказать, что  $Q_{s_2} \subseteq Q_{s_1}$ . Следовательно,  $Q_{s_1} = Q_{s_2}$ . Если теперь  $u \in Q_{s_1} = Q_{s_2}$  то, поскольку  $I = eS$ ,  $s_1 u = es_1 u$  и  $s_2 u = es_2 u$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} ms_1 u &= \varphi(pe)s_1 u = \varphi(pes_1 u) = \varphi(ps_1 u) = \varphi(ps_2 u) = \\ &= \varphi(pes_2 u) = \varphi(pe)s_2 u = ms_2 u. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$fs_1 u = m'(ms_1 u) = m'(ms_2 u) = fs_2 u.$$

Этим мы доказали, что  $s_1 \rho s_2$ . Используя (б), можно теперь писать

$$\psi(ps_1) = mqs_1 = mqs_2 = \psi(ps_2),$$

следовательно, определение отображения  $\psi$  корректно. Очевидно,  $\psi$  является  $S$ -гомоморфизмом.

Остается доказать, что  $\psi$  является продолжением  $S$ -гомоморфизма  $\varphi$ . Из того, что  $e, f \in eS$ , следуют равенства  $Q_e = Q_f = S^0$ . По (2) имеют место равенства  $fe = f = ff$ ; следовательно,  $f e u = f f u$  для каждого  $u \in Q_e = Q_f$ . Это показывает, что  $e \rho f$  и по условию (б) имеем

$$qe = qf = f.$$

Если теперь  $pes \in pI$  - произвольный элемент, то

$$\begin{aligned} \psi(pes) &= mqs = mfs = m(m'f)s = ms = \\ &= \varphi(pe)s = \varphi(pes). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 6.** Пусть  $E$  - полугруппа идемпотентов, являющаяся конечной цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (а)  $E$  является самоинъективной;

(б)  $E$  содержит левый нулевой элемент и для любых  $e, x \in E$ , где  $R_e \not\subseteq R_x$ , найдется элемент  $z \in R_e$  так, что  $za = z$  для каждого  $a \in R_x$ ;

(в)  $E$  содержит левый нулевой элемент и для каждого  $e \in E$  найдется элемент  $z \in R_e$  так, что  $za = z$  для каждого  $a \in E \setminus eE$ .

Доказательство. Легко показать, что  $E$  является правоинверсной.

(а) (б) Пусть  $E$  самоинъективна. По теореме 5  $E$  содержит левый нулевой элемент. Определяя правую конгруэнцию  $\rho = \rho(eE, e)$  по (I), получим, согласно лемме 3 (в), что  $a \rho b$  для любых  $a, b \in R_x$ . Из теоремы 5 вытекает, что существует такой  $q \in R_e$ , что  $qa = qb$  для любых  $a, b \in R_x$ . Пусть  $z = qb$  для какого-то  $b \in R_x$ . По предположению  $R_q = R_e \not\subseteq R_x = R_e$ , следовательно, рассуждая также, как при доказательстве пункта (в) леммы 3, получим  $z \in R_e$ . Если  $a \in R_x$ , то

$$za = (qb)a = q(va) = qa = qb = z.$$

(б)  $\Rightarrow$  (в) Если  $E = eE$ , то для  $e \in E$  утверждение (в) выполняется тривиально. Пусть  $e \in E$  такой, что  $eE \not\subseteq E$ . По предположению,  $E$  является конечной цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов. Поэтому существует  $g \in E$  такой, что  $\{x \in E \mid R_e \not\subseteq R_x \not\subseteq R_g\} = \emptyset$ . По условию (б) найдется элемент  $z \in R_e$  для которого справедливо равенство  $za = z$  для каждого  $a \in R_g$ . Если  $a \in E \setminus gE$ , то  $ga \in R_g$  и, следовательно  $z = zga = (zga)a = za$ .

(в)  $\Rightarrow$  (а). Пользуемся теоремой 5. Пусть  $e, f \in E$ , так что  $fE \subseteq eE$ . По (в) существует  $z \in R_e$ , так что  $za = z$  для всех  $a \in E \setminus eE$ . Пусть  $q = fz$ . Если  $s, t \in E \setminus eE$ , то

$$qs = (fz)s = f(zs) = fz = f(zt) = (fz)t = qt.$$

Если  $s \rho t$ , где  $s, t \in eE$  и  $\rho = \rho(eE, f)$  определяется по (I), то  $Q_s = Q_t = S^4$ , следовательно  $fs = ft$ . Но тогда, учитывая, что  $z \in R_e$ , получим

$$qs = (fz)s = f(zs) = fs = ft = f(zt) = (fz)t = qt.$$

Заметим, что если  $s \in E \setminus eE$  и  $t \in eE$  то  $Q_s \neq Q_t$ , следовательно  $(s, t) \notin \rho$ .

Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть  $S$  - правоинверсная полугруппа, подполугруппа идемпотентов которой является конечной цепью

своих  $\mathcal{R}$ -классов. Тогда из самоинъективности полугруппы  $S$  следует самоинъективность полугруппы  $E_S$ .

**Доказательство.** Пусть  $S$  - самоинъективна. Условие (а) из теоремы 5 дает, что  $E_S$  имеет левый нулевой элемент. Пусть  $e, k \in E_S$ , так что  $Re \neq R_k$ . Обсуждая также, как в доказательстве (а)  $\Rightarrow$  (б), теоремы 6, мы получаем, что существует такой  $g \in E_{R_e}$ , что  $ga = gb$  для любых  $a, b \in E_{R_k}$ . Пусть  $x = gb$  для какого-то  $b \in E_{R_k}$ . Используя снова доказательство (а)  $\Rightarrow$  (б) теоремы 6, получаем, что  $x \in E_{R_e}$  и  $x = xa$  для любого  $a \in E_{R_k}$ . Этим мы показали, что для  $E_S$  выполняется условие (б) теоремы 6, следовательно,  $E_S$  является самоинъективной.

Следствие доказано.

**Пример.** Пусть полугруппа  $S$  задана следующей таблицей:

$\cdot$	$a$	$b$	$e_1$	$e_2$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$a$	$e_1$	$e_2$	$a$	$b$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$b$	$e_1$	$e_2$	$a$	$b$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$e_1$	$a$	$b$	$e_1$	$e_2$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$e_2$	$a$	$b$	$e_1$	$e_2$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$g$	$f_1$	$f_2$	$g$	$g$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$f_1$	$g$	$g$	$f_1$	$f_2$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$f_2$	$g$	$g$	$f_1$	$f_2$	$g$	$f_1$	$f_2$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$

Используя лемму I, легко проверить, что  $S$  - правоинверсная полугруппа. Пусть  $R_1 = \{a, b, e_1, e_2\}$  и  $R_2 = \{g, f_1, f_2\}$ . Очевидно,  $R_1$  и  $R_2$  являются  $\mathcal{R}$ -классами полугруппы  $S$ , причем  $E_{R_1} = \{e_1, e_2\}$ ,  $E_{R_2} = R_2$  и  $0$  образуют конечную цепь.

По теореме 6, так как существует элемент  $g \in E_{R_2}$  такой, что  $g = ge_1 = ge_2$ ,  $E_S$  является самоинъективной.

Определим конгруэнцию  $\rho = \rho(gS, g)$  по (I). Легко проверить, что  $a \rho b$  и  $e_1 \rho e_2$ . С другой стороны

$$\begin{aligned} ga &= f_1 \neq f_2 = gb, \\ f_1 e_1 &= f_1 \neq f_2 = f_1 e_2, & \text{и} \\ f_2 e_1 &= f_1 + f_2 = f_2 e_2 \end{aligned}$$

т.е. не выполняется условие (б) теоремы 5. Следовательно,  $S$

не является самоинъективной.

Напомним, что полугруппа  $S$  называется слабо самоинъективной, если она самоинъективна относительно вложений правых идеалов полугруппы  $S$  в  $S$ .

**Теорема 8.** Пусть  $E$  - полугруппа идемпотентов, являющаяся цепью своих  $\mathcal{R}$ -классов.

Полугруппа  $E$  самоинъективна тогда и только тогда, когда

- (а)  $E$  содержит левый нулевой элемент,
- (б)  $E$  является слабо самоинъективной и
- (в) для каждого  $I \in E_E$  существует  $q \in E$  так, что  $q = qs$  для любого  $s \in E \setminus I$  и  $x = qx$  для любого  $x \in I$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $E$  - самоинъективная полугруппа. Выполнение условия (а) следует из теоремы 2 статьи [3]. Очевидно, каждая самоинъективная полугруппа является слабо самоинъективной. Для доказательства третьего утверждения определим бинарное отношение на  $E$  следующим образом:

$$a \tau b \iff a = b \text{ или } a, b \in E \setminus I, \text{ где } I \in E_E.$$

Легко видеть, что  $\tau$  - правая конгруэнция полугруппы  $E$ . Следовательно,  $E/\tau$  -  $E$ -полигон и  $\bar{x} \in (E/\tau)_E$ , где  $\bar{x}$  - естественный эпиморфизм  $E$ -полигона  $E$  (см. доказательство предложения 4). Определяя  $E$  - гомоморфизм

$$\varphi: \begin{cases} \bar{x} \rightarrow E \\ \bar{x} \mapsto x, \end{cases}$$

по самоинъективности полугруппы  $E$  существует  $E$ -гомоморфизм  $\psi: E/\tau \rightarrow E$ , который является продолжением  $E$ -гомоморфизма  $\varphi$ . Пусть  $q = \psi(\bar{e})$ , где  $\bar{e}$  - левый единичный элемент полугруппы  $E$ , существующий по лемме 1.3 статьи [7]. Аналогично теореме 3.4 из [8],  $qs = q$  для любого  $s \in S \setminus I$ . Если  $x \in I$ , то

$$qx = \psi(\bar{e})x = \psi(\bar{e}x) = \psi(\bar{e}x) = \psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) = x.$$

**Достаточность.** Пользуемся леммой 2. Пусть  $p \in E$  - произвольный циклический  $E$ -полигон и  $A \in (pE)_E$ . Пусть  $I = \{e \in E \mid pe \in A\}$ . Тогда  $I \in E_E$  и  $A = pI$ . Пусть  $\varphi: pI \rightarrow E$  произвольный  $E$ -гомоморфизм. Определим отображение

$$\xi: \begin{cases} I \rightarrow E \\ x \mapsto \varphi(px). \end{cases}$$

Если  $x_1, x_2 \in I$  такие, что  $x_1 = x_2$ , то  $px_1 = px_2$  и, следо-

вательно,

$$\xi(x_1) = \varphi(px_1) = \varphi(px_2) = \xi(x_2),$$

т.е. определение корректно. Очевидно,  $\xi$  является  $E$ -гомоморфизмом. По предположению,  $E$  - слабо самоинъективна. Следовательно, существует  $E$ -гомоморфизм  $\lambda: E \rightarrow E$ , который продолжает  $\xi$ . Пусть  $m \doteq \lambda(\kappa)$ , где  $\kappa \in E \setminus I$ .

Определим отображение

$$\psi: \begin{cases} pE \rightarrow E \\ pe \mapsto mqe, \end{cases}$$

где  $q$  - элемент, существующий по условию (в). Если  $pe_1 = pe_2$ , где  $e_1, e_2 \in E \setminus I$  ( $pe_1 \neq pe_2$ , если  $e_1 \in I$  и  $e_2 \in E \setminus I$ ), то,

$$\psi(pe_1) = mqe_1 = mq = mqe_2 = \psi(pe_2),$$

т.е. определение корректно. Очевидно,  $\psi$  является  $E$ -гомоморфизмом. Если  $x \in I$  то, используя предположение, что  $E$  - цепь своих  $\mathcal{R}$ -классов, мы имеем

$$\psi(px) = mqx = mx = \lambda(\kappa)x = \lambda(x) = \xi(x) = \varphi(px).$$

Следовательно,  $\psi$  является продолжением  $E$ -гомоморфизма  $\varphi$  т.е.  $E$  - самоинъективна. Теорема доказана.

#### Литература

1. Биркгоф Г., Теория решеток. Москва, 1984.
2. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. Т. I., Москва, 1972.
3. Скорняков Л. А., О гомологической классификации моноидов. Сибирский матем. журнал, 10(1969), II39-II43.
4. Baileys G. L., Jr., Right inverse semigroups. J. Algebra 26 (1973), 492-507.
5. McLean D., Idempotent semigroups. Amer. Math. Monthly, 61(1954), 110-113.
6. Shein B. M., Injective monars over inverse semigroups. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 20, Algebraic theory of semigroups. Szeged, 1976, 519-544.
7. Shoji K., On right self-injective regular semigroups. Semigroup Forum, 25(1982), 51-71.

8. S h o j i K., On right self-injective regular semi-groups, II *J. Australian Math. Soc., Series A*, 34 (1983), 182-198.
9. V e n k a t e s a n P. S., Right (left) inverse semigroups. *J. Algebra*, 31(1974), 209-217.

Доступило  
20 IX 1984

ISEINJEKTIIVSED, PAREMINVEHSSED POOLRÜHMAD,  
MILLE IDEMPOTENTIDE ALAMPOOLRÜHMA  $\mathcal{R}$ -KLASSID  
MOODUSTAVAD LÕPLIKU AHELA

H. Põeva

R e s ü m e e

Poolrühmade ja monoidide pareminverssus (vt. [9]) on üldistuseks poolrühmade inverssuse mõistele. Tarvilikud ja piisavad tingimused viimaste iseinjektiivsuseks on esitatud töös [6]. Artiklis [4] tõestatakse, et pareminversse poolrühma idempotendid moodustavad alampoolrühma, tödest [4] ja [5] järeldub, et pareminversse poolrühma idempotentide  $\mathcal{R}$ -klassid moodustavad poolvõre.

Käesolevas artiklis kirjeldatakse pealkirjas esitatud poolrühmad: tõestatakse, et taolise poolrühma iseinjektiivsusest järeldub tema idempotentide alampoolrühma iseinjektiivsus; esitatakse tarvilikud ja piisavad tingimused sellise idempotentide poolrühma iseinjektiivsuseks, mis on oma  $\mathcal{R}$ -klasside lõplik ahel; leitakse, millal nõrgalt iseinjektiivne idempotentide poolrühm, mille  $\mathcal{R}$ -klassid moodustavad ahela, on iseinjektiivne.

SELF-INJECTIVE RIGHT INVERSE SEMIGROUPS  
WHOSE SUBSEMIGROUP OF IDEMPOTENTS IS A FINITE CHAIN  
OF ITS  $\mathcal{R}$ -CLASSES

H. Põeva

S u m m a r y

In this paper we characterize semigroups presented in the heading. As a corollary we prove that self-injectivity of such semigroups implies self-injectivity of their subsemigroups of idempotents. We also give a characterization of self-injective finite chains of right zero bands and find conditions when weakly self-injective chain of right zero bands is self-injective.

## О ПРОСТЫХ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

Р. Роомельди

Тартуский государственный университет

Неассоциативное кольцо называется правоальтернативным, если в нем выполнено тождество

$$(x, y, y) = 0. \quad (I)$$

Как обычно, через  $(x, y, h) = (xy)h - x(yh)$  обозначим ассоциатор элементов  $x, y, h$ , через  $[x, y] = xy - yx$  - коммутатор элементов  $x, y$  и через  $S(x, y, h) = (x, y, h) + (y, h, x) + (h, x, y)$  - циклическую сумму ассоциаторов.

Описание простых правоальтернативных колец является одним из центральных вопросов теории правоальтернативных колец ([1], [2, проблема I.57]). Хорошо известно описание простых колец в многообразиях альтернативных [3] и ли-допустимых правоальтернативных колец [9]. Последние в дальнейшем назовем ЛДП-кольцами. Они известны также под названием  $(-1, 1)$ -колец и их можно определить тождествами (I) и

$$S(x, y, h) = 0. \quad (2)$$

Неассоциативные простые, а именно алгебры Кэли-Диксона, найдутся лишь в случае альтернативных колец. Эти два многообразия являются подмногообразиями многообразия всех правоальтернативных колец и их пересечением является класс ассоциативных колец. Альтернативность простых правоальтернативных колец при различных дополнительных условиях доказал Тэди [12], [13]. Гипотезу о том, что все простые правоальтернативные кольца альтернативны, опроверг Михеев [5], построив пример простой правоальтернативной неальтернативной бесконечномерной алгебры над произвольным полем.

Представляет интерес исследовать простые кольца в многообразиях, содержащих как альтернативные так и ЛДП-кольца. Например, Тэди [12] доказал, что в многообразии правоальтернативных колец, определенном тождеством  $(x, x, [h, (y, y, t)]) = 0$ , все простые кольца альтернативны. Это тождество выполняется как в альтернативных, так и в ЛДП-кольцах. Клейнфельд и Смит [10] показали альтернативность простых бинарно ЛДП-колец

(любое 2-порожденное подкольцо является ЛДП-кольцом) с не-тривиальным идемпотентом. Пчелинцев [6] показал, что бинарно ЛДП-кольца образуют многообразие, определенное тождествами (I) и

$$S(y, xy, x) = 0. \quad (3)$$

В настоящей работе доказана

**Теорема 5.** Все простые правоальтернативные кольца без элементов порядка 2 в аддитивной группе из подмногообразия, определенного тождествами

$$S(h, xy, x) = S(h, y, x)x, \quad (4)$$

$$S(h, yx, x) = xS(h, y, x), \quad (5)$$

являются альтернативными.

Этот результат анонсирован в [7]. Легко видеть, что из любого из тождеств (4) и (5) следует тождество (3), так что данное многообразие колец является подмногообразием многообразия бинарно ЛДП-колец. С другой стороны ясно, что это многообразие колец содержит в себе все ЛДП-кольца. Поскольку в альтернативных кольцах выполняются тождества Муфанг [3]

$$(h, xy, x) = (h, y, x)x, \quad (6)$$

$$(h, yx, x) = x(h, y, x) \quad (7)$$

и тождество  $S(h, y, x) = 3(h, y, x)$ , то данное многообразие содержит в себе также альтернативные кольца. Назовем в дальнейшем правоальтернативные кольца с тождеством (4)  $S_1$ -кольцами, с тождеством (5)  $S_2$ -кольцами и с тождествами (4) и (5)  $S$ -кольцами. Для доказательства теоремы 5 покажем, что коммутативный центр  $Z$  правоальтернативного кольца без локально нильпотентных идеалов равен ассоциативно-коммутативному центру  $C$  (теорема 1), в  $S_2$ -кольцах элементы вида  $(x, x, [x, y])$  принадлежат  $Z$  (теорема 3), а в  $S$ -кольцах даже  $(x, x, [y, h]) \in Z$  (теорема 4).

## §1. Основные тождества и функции

Все рассматриваемые ниже кольца предполагаются  $\Phi$ -операторными, где  $\Phi$  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и имеют характеристику не 2 (в аддитивной группе кольца отсутствуют элементы порядка 2).

Линеаризацией тождества правой альтернативности (I) получаем тождество

$$\bar{A}(x, y, h) = (x, y, h) + (x, h, y) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем воспользуемся обозначениями для тождеств из работы [8] (подобные обозначения использовались и в работах других авторов). Тождество  $\bar{A}$  можно переписать в виде

$$\bar{A}'(x, y, h) = (xy)h + (xh)y - x(yh) - x(hy) = 0.$$

Хорошо известно, что в правоальтернативных кольцах выполняется тождество (6) - правое тождество Муфанг:

$$\bar{C}'(x, y, t) = (x, y, yt) - (x, y, t)y = 0,$$

линеаризацией которого по  $y$  получим

$$\bar{C}(x, y, h, t) = (x, y, ht) + (x, h, yt) - (x, y, t)h - (x, h, t)y = 0.$$

В правоальтернативных кольцах [12] справедливы также следующие тождества:

$$\bar{F}(x, y, h, t) = (xy, h, t) - x(y, h, t) - (x, h, t)y + (x, y, [h, t]) = 0,$$

$$([x, y], h, t) - [x, (y, h, t)] + [y, (x, h, t)] + (x, y, [h, t]) - (y, x, [h, t]) = 0, \quad (8)$$

$$2S(x, y, h) = [[x, y], h] + [y, h, x] + [h, x, y], \quad (9)$$

$$[xy, h] = x[y, h] + [x, h]y + 2(x, y, h) + (h, x, y), \quad (10)$$

$$[x, (y, y, x)] = -S(y, xy, x). \quad (11)$$

Из (11) следует, что бинарно ЛДП-кольца определяются также тождеством

$$[x, (y, y, x)] = 0, \quad (12)$$

откуда линеаризацией получаем тождество

$$[x, (x, x, y)] = 0. \quad (13)$$

Ниже приведены доказательства новых тождеств с помощью функций  $\bar{A}'$ ,  $\bar{C}'$ ,  $\bar{C}$  и  $\bar{F}$ , что позволяет вместо длинных преобразований ассоциаторов получить более компактное и наглядное равенство функций. При этом тождество  $\bar{A}$  как самое простое, в доказательствах опускается.

Частичные линеаризации [3] выражений и тождеств обозначим символом  $\partial$ . Например, частичная линеаризация выражения  $[x, (x, x, h)]$  по  $x$  с последующей заменой  $h$  на  $xh$  выглядит следующим образом:

$$\partial_{x \rightarrow y} [x, (x, x, h)] \Big|_{h \rightarrow xh} = [y, (x, x, xh)] + [x, (y, x, xh)] + [x, (x, y, xh)].$$

§2. Коммутативный центр правоальтернативных колец

Пусть  $R$  - правоальтернативное кольцо. Обозначим через

$$Z = \{z \in R \mid [R, z] = 0\}$$

коммутиативный центр, через

$$N = \{n \in R \mid (n, R, R) = (R, R, n) = 0\}$$

ассоциативный центр, через

$$N_z = \{n \in R \mid (R, R, n) = 0\}$$

правый ассоциативный центр, через  $C = N \cap Z$  ассоциативно-коммутиативный центр и через

$$V = \{v \in R \mid (x, x, v) = 0 \text{ при любом } x \in R\}$$

левоальтернативный центр [I2] кольца  $R$ .

Тогда при любых  $x, y \in R$  и  $v \in V$

$$(x, y, v) + (y, x, v) = 0. \quad (I4)$$

Ясно, что  $C \subseteq N \subseteq N_z \subseteq V$  и

$$Z \subseteq V. \quad (I5)$$

Следовательно, при любых  $x, y \in R$  и  $z \in Z$

$$(x, y, z) + (y, x, z) = 0, \quad (I6)$$

и в силу (I0)

$$(z; x, y) = 2(y, x, z). \quad (I7)$$

Известно [I2], что в правоальтернативных кольцах характеристики не 3

$$(z, z, R) = (R, z, z) = 0 \quad (I8)$$

и характеристики не 2

$$(v, R, R) \subseteq V. \quad (I9)$$

К сожалению, в свободных правоальтернативных кольцах (даже с 2 порождающими) не известно ни одного ненулевого элемента из перечисленных выше центров. С другой стороны их, например, для ЛДП-колец известно много и центры изучены достаточно полно [8]. Лучше изучены центры простых правоальтернативных колец. Например, Тэди [I2] показал, что в простых неальтернативных правоальтернативных кольцах

$$N_z = N = C, \quad (20)$$

что доказывается с помощью следующего результата (непосредственное следствие из леммы 5 этой работы):

**Лемма 1.** (Тади) Пусть  $U$  - коммутативное подкольцо левоальтернативного центра  $V$  правоальтернативного кольца  $R$  без локально нильпотентных идеалов. Если  $[U, R] \subseteq U$ ,  $(R, R, U) \subseteq U$  и  $(U, U, R) = 0$ , то  $U = C$ .

Если в качестве  $U$  взять  $Z$ , то в силу (18)  $(Z, Z, R) = 0$  и из предпосылок этой леммы остается недоказанной лишь включение  $(R, R, Z) \subseteq Z$ . Чтобы преодолеть эту трудность, построим подкольцо  $\tilde{Z}$  в  $V$ , являющееся "замыканием"  $Z$  относительно этого свойства и покажем, что для  $\tilde{Z}$  все условия леммы выполнены. Тогда  $\tilde{Z} = C$  и, в частности,  $Z = C$ .

Определим последовательно

$$Z_1 = Z, \quad Z_{n+1} = (Z_n, R, R) + (R, R, Z_n), \\ S_n = \{x \in R \mid \text{существует } k \geq 0, \text{ что } 2^k x \in \sum_{i=1}^n Z_i\}, \quad \tilde{Z} = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i.$$

**Лемма 2.**  $(S_n, R, R) + (R, R, S_n) \subseteq S_{n+1}$ ,  $(\tilde{Z}, R, R) + (R, R, \tilde{Z}) \subseteq \tilde{Z}$ .

**Доказательство.** При любом  $i$

$$(Z_i, R, R) + (R, R, Z_i) = Z_{i+1} \subseteq S_{i+1}.$$

Поэтому, если  $s_n \in S_n$  и  $2^k s_n \in \sum_{i=1}^n Z_i$ , то

$$2^k (s_n, R, R) = (2^k s_n, R, R) \subseteq \sum_{i=1}^n (Z_i, R, R) = \sum_{i=1}^n (Z_i, R, R) \subseteq \sum_{i=1}^n Z_{i+1} \subseteq S_{n+1}.$$

Отсюда

$$(s_n, R, R) \subseteq S_{n+1}, \quad (S_n, R, R) \subseteq S_{n+1} \quad \text{и} \quad (Z, R, R) \subseteq \tilde{Z}.$$

Остальные включения доказываются аналогично.

**Лемма 3.**  $[R, S_n] \subseteq S_n \subseteq V$ ,  $[R, \tilde{Z}] \subseteq \tilde{Z} \subseteq V$ .

**Доказательство.** Докажем, что  $[R, S_n] \subseteq S_n \subseteq V$  индукцией по  $n$ . Тогда включения для  $\tilde{Z}$  следуют непосредственно из определения  $\tilde{Z}$ .

При  $n=1$   $[R, S_1] = 0$ , т.к.  $[R, Z_1] = [R, Z] = 0$ . В силу (14)  $S_1 \subseteq V$ .

Предположим, что при некотором  $n \geq 1$   $[R, S_n] \subseteq S_n \subseteq V$ . Пусть  $x, y, h \in R$  и  $z_n \in Z_n$ . Тогда в силу (8), предположения индукции и леммы 2

$$[x, (z_n, y, h)] = [z_n, (x, y, h)] + [(x, z_n), y, h] + (x, z_n, [y, h]) - (z_n, x, [y, h]) \in [S_n, R] + (S_n, R, R) + (R, R, S_n) \subseteq S_{n+1}, \text{ т.е.}$$

$$[R, (z_n, R, R)] \subseteq S_{n+1}. \quad (21)$$

В силу (9) и  $[R, S_n] \subseteq S_n$

$$2S(z_n, y, h) = [(z_n, y, h)] + [(y, h), z_n] + [(h, z_n), y] \in S_n, \text{ т.е.}$$

$$S(z_n, y, h) \in S_n. \quad (22)$$

Следовательно,

$$[x, S(z_n, y, h)] \in S_n. \quad (23)$$

Далее, в силу  $S_n \subseteq V$ , (I4), (2I) и (23)

$$\begin{aligned} 2[x, (y, h, z_n)] &= [x, (y, h, z_n)] + (y, h, z_n) = [x, (y, h, z_n)] - \\ &- (h, y, z_n) = [x, S(z_n, y, h)] - (z_n, h, y) \in S_{n+1}, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$[R, (R, R, z_n)] \in S_{n+1}. \quad (24)$$

Ввиду (2I) и (24)  $[R, z_{n+1}] \in S_{n+1}$  и

$$[R, S_{n+1}] \subseteq S_{n+1}. \quad (25)$$

Докажем теперь, что  $S_{n+1} \subseteq V$ . По предположению индукции  $S_n \subseteq V$ . В силу (I9) отсюда следует, что

$$(z_n, R, R) \subseteq V. \quad (26)$$

Далее, ввиду  $z_n \in V$  (I4), (22) и (26)

$$2(y, h, z_n) = (y, h, z_n) - (h, y, z_n) = S(z_n, y, h) - (z_n, y, h) \in V.$$

Отсюда при любом  $x \in R$   $2(x, x, (y, h, z_n)) = 0$ ,  $(x, x, (y, h, z_n)) = 0$  и

$$(R, R, z_n) \subseteq V. \quad (27)$$

Следовательно,  $z_{n+1} \subseteq V$  и

$$S_{n+1} \subseteq V. \quad (28)$$

Лемма 4. Если  $R$  - правоальтернативное кольцо характеристики не 2 и не 3, то  $\tilde{Z}$  - ассоциативно-коммутативное подкольцо в  $V$ , причем

$$(\tilde{Z}, \tilde{Z}, R) = (R, \tilde{Z}, \tilde{Z}) = 0.$$

Доказательство. Поскольку  $\tilde{Z} \subseteq V$ , то по (I4) достаточно доказать, что  $[\tilde{Z}, \tilde{Z}] = (\tilde{Z}, \tilde{Z}, R) = 0$  и  $\tilde{Z}\tilde{Z} \subseteq \tilde{Z}$ .

Ясно, что  $[S_1, S_1] = 0$ , в силу (I8)  $(S_1, S_1, R) = 0$  и в силу (I0)  $S_1 S_1 \subseteq S_1$ . Предположим, что для некоторого  $n > 2$  доказано, что при любых  $i$  и  $j$  таких, что  $i + j \leq n$

$$[S_i, S_j] = 0, \quad (29)$$

$$(S_i, S_j, R) = (R, S_i, S_j) = 0, \quad (30)$$

$$S_i S_j \subseteq S_{i+j-1}. \quad (31)$$

Пусть теперь  $k + l = n + 1$ . Не ограничивая общности предположим, что  $l > 1$ . Рассмотрим произвольные  $z_{l-1} \in z_{l-1}$  и  $s_k \in S_k$ . В силу (8), леммы 3 и предположения индукции

$$\begin{aligned}
 [s_k, (x, y, z_{e-1})] &= [z, (s_k, y, z_{e-1})] + ([s_k, x], y, z_{e-1}) + \\
 &+ (s_k, x, [y, z_{e-1}]) - (x, s_k, [y, z_{e-1}]) \in \\
 &\in [R, (S_k, R, S_{e-1})] + (S_k, R, S_{e-1}) + (R, S_k, S_{e-1}) = 0, \text{ т.е.} \\
 [S_k, (R, R, z_{e-1})] &= 0. \quad (32)
 \end{aligned}$$

В силу (22) и предположения индукции  $[s_k, S(z_{e-1}, x, y)] \in [S_k, S_{e-1}] = 0$ . Отсюда и из (32)

$$[s_k, (z_{e-1}, x, y)] = [s_k, S(z_{e-1}, x, y) - (x, y, z_{e-1}) - (y, z_{e-1}, x)] = 0.$$

Следовательно,

$$[S_k, (S_{e-1}, R, R)] = 0. \quad (33)$$

Значит,  $[S_k, z_e] = 0$  и

$$[S_k, S_e] = 0. \quad (34)$$

В силу лемм 2 и 3

$$\begin{aligned}
 s_k(x, y, z_{e-1}) &= -(s_k, y, z_{e-1})x + (s_k, x, y, z_{e-1}) + (s_k, x, [y, z_{e-1}]) - \\
 &- \overline{F}(s_k, x, y, z_{e-1}) \in (S_k, R, S_{e-1})R + (R, R, S_{e-1}) + (S_k, R, S_{e-1}) \subseteq S_e.
 \end{aligned}$$

Отсюда, используя (22) и лемму 2, получим  $s_k(z_{e-1}, x, y) = -s_k[S(z_{e-1}, x, y) - (x, y, z_{e-1}) - (y, z_{e-1}, x)] \in S_k S_{e-1} + S_e \subseteq S_n$ .

Следовательно, в силу (34)

$$S_k S_e + S_e S_k \subseteq S_n. \quad (35)$$

Тогда ввиду (I4), (9), леммы 3 и (34)

$$\begin{aligned}
 6(x, s_k, s_e) &= 2[(x, s_k, s_e) - (s_k, x, s_e) - (s_e, s_k, x)] = 2S(x, s_k, s_e) = \\
 &= [[x, s_k], s_e] + [s_k, s_e, x] + [s_e, x, s_k] \in [S_k, S_e] + [[S_k, S_e], R] = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$(R, S_k, S_e) = 0. \quad (36)$$

и в силу леммы 3 и (I4)

$$(S_e, S_k, R) = (S_k, S_e, R) = 0. \quad (37)$$

Индукция полностью проведена и утверждение леммы легко следует из (29)–(31) при любом  $n$ .

Из доказанных лемм легко следует

**Теорема 1.** Если  $R$  – правоальтернативное кольцо характеристики не 2 и не 3 без локально нильпотентных идеалов, то  $Z = C$ .

Отметим, что в работе [12] такой же результат получен при дополнительном условии  $(R, R, R, Z) = 0$ .

**Теорема 2.** Если  $R$  – простое неальтернативное правоальтернативное кольцо характеристики не 2, то  $Z = C$ .

Доказательство. Хорошо известно, что простое кольцо не может быть локально нильпотентным. Условием "характеристики не 3" мы воспользовались лишь при доказательстве леммы 4. Но известно [12], что в простых неальтернативных правоальтернативных кольцах характеристики не 2

$$(V, V, R) = (R, V, V) = 0.$$

### §3. Простые $S$ -кольца

В многообразии ЛДП-колец элементы вида  $(x, y, [h, t])$  принадлежат коммутативному центру  $Z$  [8]. Докажем, что в  $S_2$ -кольцах элементы вида  $(x, x, [x, y])$  принадлежат  $Z$ , а в  $S$ -кольцах даже  $(x, x, [y, h]) \in Z$ .

Лемма 5. В произвольном правоальтернативном кольце характеристики не 2 выполняется тождество

$$\begin{aligned} [t, (x, x, [y, h])] &= [x, x S(y, t, x) - S(y, tx, x)] + \\ &+ \partial_{y \rightarrow t} [x, x(y, y, x) - 3(y, x, xy) - 4(y, x, yx)] + \\ &+ \partial_{y \rightarrow t} [y, 4(x, x, xy) + 2(x, x, yx)] + \partial_{y \rightarrow tx} \{ [x, (y, y, x)] - 2[y, (x, xy)] - \\ &- 3 \partial_{t \rightarrow xy} \{ [t, (x, x, t)] + [x, (t, t, x)] \} - \partial_{t \rightarrow yx} \{ 3[t, (x, x, t)] + 4[x, (t, t, x)] \} - \\ &- [x, (x, x, yt)] + \partial_{x \rightarrow y} [x, (x, x, t)] \} + 3[y, (x, x, t)] + 2 \partial_{x \rightarrow y} [x, (x, x, t)] + \\ &+ 2 \partial_{x \rightarrow t} [x, (x, x, y)] + [x, C(x, x, y, t) + 5 \bar{C}(y, x, t) - 3 \bar{F}(x, y, x, t) - \\ &- 4 \bar{F}(y, x, x, t)] - 6 [y, \bar{C}(x, x, t)] + 3 \bar{A}'(y, x, (x, x, t)) + 3 \bar{A}''(x, y, (x, x, t)) + 3 \bar{A}'''(x, x, t, x, y). \end{aligned}$$

Доказательство. Это тождество проверяется непосредственным проведением всех частных линейризаций и замен всех функций на суммы ассоциаторов.

Теорема 3. В  $S_2$ -кольцах характеристики не 2 элементы вида  $(x, x, [x, y])$  принадлежат коммутативному центру  $Z$ . В простых  $S_2$ -кольцах характеристики не 2 выполняется тождество  $(x, x, [x, y]) = 0$ .

Доказательство первого утверждения следует непосредственно из леммы 5 в силу (12) и (13). При этом тождество

$[x, x(y, y, x)] = 0$  и другие тождества подобного типа легко следуют из (12) даже в случае характеристики не 2 [11]. В случае простых колец по теореме 2  $(x, x, [x, y]) \in C$ . Но в правоальтернативных кольцах выполняется тождество  $(x, x, y) = 0$  [4] и любой нильпотентный элемент из  $C$  порождает нильпотентный идеал. Следовательно,  $(x, x, [x, y]) = 0$ .

Лемма 6. В произвольном правоальтернативном кольце характеристики не 2 выполняется тождество

$$\begin{aligned}
4(x, x, [y, h]) = & 3[S(y, h, x)x - S(y, xh, x)] + [xS(y, h, x) - \\
& - S(y, hx, x)] + \partial_{x \rightarrow y}(x, x, [x, h]) - \partial_{x \rightarrow h}(x, x, [x, y]) + \\
& + \partial_{x \rightarrow y}[x, (x, x, h)] + 2\partial_{x \rightarrow h}[x, (x, x, y)] - \partial_{y \rightarrow h}[y, (x, x, y)] - \\
& - 2\bar{C}(x, x, h, y) + 2\bar{C}(x, x, y, h) + 2\bar{C}(x, y, h, x) - \\
& - 2\bar{C}(y, x, x, h) + \bar{F}(h, x, x, y) + 3\bar{F}(x, h, x, y).
\end{aligned}$$

Теорема 4. В  $S$ -кольцах характеристики не 2 элементы вида  $(x, x, [y, h])$  принадлежат коммутативному центру  $Z$ .

Доказательство следует непосредственно из теоремы 3 и леммы 6.

Теорема 5. Простые  $S$ -кольца, т.е. правоальтернативные кольца с тождествами  $S(h, xy, x) = S(h, x, y)x$  и  $S(h, yx, x) = xS(h, x, y)$  характеристики не 2 альтернативны.

Доказательство. В силу теоремы 4  $(x, x, [y, h]) \in Z$  при любых  $x, y, h \in R$ . Аналогично, как в доказательстве теоремы 3, получим, что в  $R$  выполняется тождество  $(x, x, [y, h]) = 0$ , т.е.  $[R, R] \subseteq V$ . Но тогда в силу следствия I из леммы I5 работы [12]  $R$  является альтернативным.

В заключение отметим, что открытым остается вопрос об альтернативности простых  $S_1$ - и  $S_2$ -колец, а также бинарно ЛДП-колец.

#### Литература

1. Бахтурин Ю. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Неассоциативные кольца. В сб. "Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)", Москва, 1981, 18, 3-72.
2. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Новосибирск, 1982.
3. Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным. Москва, 1978.
4. Михеев И. М., Об одном тождестве в правоальтернативных кольцах. Алгебра и логика, 1969, 8, № 3, 357-366.
5. Михеев И. М., О простых правоальтернативных кольцах. Алгебра и логика, 1977, 16, № 6, 682-710.
6. Пчелинцев С. В., Определение тождества одного многообразия правоальтернативных алгебр. Мат. за-

- метки, 1976, 20, № 2, 161-176.
7. Р о о м е л ь д и Р. Э., Об одном классе правоальтернативных колец. II Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Рез. сообщ., Кишинев, 1974, стр. 52.
  8. Р о о м е л ь д и Р. Э., Центры свободного  $(-1,1)$ -кольца. Сиб. мат. ж., 1977, 18, № 4, 861-876.
  9. Н е n t z e l I. R., The characterization of  $(-1,1)$  rings. J. Algebra, 1974, 30, 236-258.
  10. К l e i n f e l d E., S m i t h H. F., Locally  $(-1,1)$  rings. Commun. Algebra, 1975, 2, №3, 219-237.
  11. М a n e r i K., Simple  $(-1,1)$  rings with an idempotent. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, 110-117.
  12. Т h e d y A., Right alternative rings. J. Algebra, 1975, 37, №1, 1-43.
  13. Т h e d y A., Right alternative rings with Peirce decomposition. J. Algebra, 1975, 37, №1, 44-63.

Поступило

13 I 1984

#### LIHTSATEST PAREMALTERNATIIVSETEST RINGIDEST

R. Roomeldi

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis defineeritakse  $S$ -ringid - paremalternatiivsed ringid samasustega  $S(h,xy,x)=S(h,y,x)x$  ja  $S(h,yx,x)=xS(h,y,x)$ .  $S$ -ringide muutkond sisaldab nii alternatiivsete kui ka Lie-lubatavate paremalternatiivsete ringide muutkondi. Näidatakse, et kõik lihtsad  $S$ -ringid on alternatiivsed. Et seda tõestada, näidatakse, et  $S$ -ringides  $(x,x, [y,h])$ -tüüpi elemendid kuuluvad kommutatiivsesse tsentrisse ja igas lokaalselt nilpotenteete ideaalideta paremalternatiivses ringis ühtib kommutatiivne tsenter assotsiatiivse-kommutatiivse tsentriga.

#### ON SIMPLE RIGHT ALTERNATIVE RINGS

R. Roomeldi

S u m m a r y

In this paper we define  $S$ -rings - right alternative rings with identities  $S(h,xy,x)=S(h,y,x)x$  and  $S(h,yx,x)=$

$\mathcal{S}(h, y, x)$ . The variety of  $\mathcal{S}$ -rings contains both the varieties of alternative and Lie-admissible right alternative rings. We show that all simple  $\mathcal{S}$ -rings are alternative. To prove this result, we show that in any  $\mathcal{S}$ -ring  $R$  all the elements of type  $(x, x, [y, h])$  belong to the commutative center  $Z$  of  $R$  and in any right alternative ring without nonzero locally nilpotent ideals commutative center  $Z$  of  $T$  coincides with associative-commutative center  $C$  of  $T$ .

## ОБ АФФИННОЙ ПОЛНОТЕ МОДУЛЕЙ

А. Сакс

Тартуский государственный университет

Настоящей работой положено начало изучению аффинной полноты модулей над произвольным ассоциативным кольцом с единицей. До сих пор с этой точки зрения рассматривались лишь векторные пространства [5], т.е. модули над телом, и абелевы группы [3,4], т.е. модули над кольцом целых чисел. Главным результатом этой работы является теорема, которая дает полное описание аффинно полных модулей над классически полупростым кольцом. Также доказывается, что нециклический свободный модуль над любым кольцом является аффинно полным.

### §1. Определения, обозначения, вспомогательные результаты

Так как рассматриваются только левые  $R$ -модули, то будем их называть просто  $R$ -модулями. Все модули унитарны. Пусть  $X$  — подмножество модуля  $M$ . Подмодуль модуля  $M$ , порожденный множеством  $X$ , обозначим через  $\langle X \rangle$ . Если  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , то, очевидно,  $\langle X \rangle = Rx_1 + \dots + Rx_n$ . Функция  $f: M^n \rightarrow M$  называется совместной, если

$$f(u_1, \dots, u_n) - f(v_1, \dots, v_n) \in \langle u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n \rangle \quad (A)$$

для всех  $u_i, v_i \in M$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Функция  $f: M^n \rightarrow M$  называется полиномиальной, если найдутся  $r_1, \dots, r_n \in R$  и  $a \in M$ , так что  $f(y_1, \dots, y_n) = r_1 y_1 + \dots + r_n y_n + a$  для всех  $y_1, \dots, y_n \in M$ . Обозначим множество всех функций  $f: M^n \rightarrow M$  через  $F_n(M)$ , множество всех полиномиальных (совместных) функций через  $P_n(M)$  ( $C_n(M)$ ). Очевидно,  $P_n(M) \subset C_n(M)$ .

Определение. Модуль  $M$  называется аффинно  $n$ -полным, если  $C_n(M) = P_n(M)$ .

Отметим, что нулевой модуль является всегда аффинно полным и поэтому в дальнейшем рассматриваются только ненулевые модули.

Теперь приводим некоторые вспомогательные результаты, которые доказаны Нёбауером ([4], стр. 86 и 88) для абелевых групп. Эти доказательства остаются верными и в случае моду-

лей над произвольным кольцом.

**Предложение 1.1.** Для любого модуля  $M$  справедливо одно из следующих утверждений:

- 1)  $M$  не является  $k$ -полным ни при одном значении  $k$ ;
- 2)  $M$  является  $k$ -полным только при  $k=1$ ;
- 3)  $M$  является  $k$ -полным при всех  $k > 1$ .

В соответствии с условиями 1), 2) или 3) из предложения 1.1 модуль  $M$  называется аффинно неполным, аффинно полуполным или аффинно полным. В дальнейшем нам часто приходится сформулировать аналогичные утверждения для аффинной полноты и аффинной 1-полноты. Поэтому будем писать "аффинно (1-)полный", имея в виду "аффинно полный (аффинно 1-полный)".

**Лемма 1.2.** Модуль является аффинно (1-)полным тогда и только тогда, когда каждая функция  $f \in C_k(M)$  ( $f \in C_1(M)$ ), для которой  $f(0,0) = 0$  ( $f(0) = 0$ ) является полиномиальной.

Эта лемма позволяет при исследовании аффинной полноты ограничиться лишь такими совместными функциями, которые сохраняют ноль. Используя (A) для  $f \in C_k(M)$ , где  $f(0, \dots, 0) = 0$ , мы получаем, что  $f(x_1, \dots, x_k) \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ , т.е. для любых  $x_1, \dots, x_k \in M$  найдутся  $r_1, \dots, r_k \in R$ , такие что

$$f(x_1, \dots, x_k) = r_1 x_1 + \dots + r_k x_k. \quad (B)$$

## §2. Об аффинной полноте разложимых модулей

В настоящем параграфе приводятся некоторые результаты описывающие связь между аффинной полнотой прямой суммы модулей и аффинной полнотой прямых слагаемых. Прямую сумму  $R$ -модулей  $M_i, i \in I$ , обозначим через  $\sum_{i \in I} M_i$ . Элемент прямой суммы  $\sum_{i \in I} M_i$  имевший в  $M_i$  в качестве компоненты  $m_i$ , обозначим через  $\sum_{i \in I} m_i$ .

Все рассуждения настоящего параграфа основываются на предложении 2.1. Оно доказано Нёбауером ([4], стр. 88) для конечного числа абелевых групп. Очевидно, что доказательство Нёбауера остается в силе и в нашем более общем случае.

**Предложение 2.1.** Пусть  $R$ -модуль имеет разложение  $M = \sum_{i \in J} M_i$ , где  $|J| > 1$ . Для каждого  $f \in C_k(M)$  существует точно одно семейство функций  $f_i \in C_k(M_i), i \in J$ , так что  $f(\sum_{i \in J} m_{i1}, \dots, \sum_{i \in J} m_{ik}) = \sum_{i \in J} f_i(m_{i1}, \dots, m_{ik})$ . Если  $f(0, \dots, 0) = 0$ , то и  $f_i(0, \dots, 0) = 0$  при всех  $i \in J$ .

Введем обозначение  $A^I = \sum_{i \in I} A_i$ , где  $A_i = A$  для всех  $i \in I \neq \emptyset$ .

Предложение 2.2. Пусть  $M = A^I$  -  $R$ -модуль. Для каждой  $f \in C_k(M)$ , где  $f(0, \dots, 0) = 0$ , существует точно одна функция  $g \in C_k(A)$ , так что

$$f\left(\sum_{i \in I} a_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} a_{ki}\right) = \sum_{i \in I} g(a_{ki}). \quad (1)$$

Доказательство. Пусть  $f \in C_k(M)$ , где  $f(0, \dots, 0) = 0$ . В силу предложения 2.1 существуют  $f_i \in C_k(A_i)$ , так что

$$f\left(\sum_{i \in I} a_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} a_{ki}\right) = \sum_{i \in I} f_i(a_{ki}). \quad (2)$$

В силу (B) существуют  $\pi_i, \dots, \pi_k \in R$ , зависящие от элементов  $a_{ji}$ , так что

$$f\left(\sum_{i \in I} a_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} a_{ki}\right) = \sum_{\lambda=1}^k \pi_\lambda \sum_{i \in I} a_{ki}^\lambda = \sum_{i \in I} \sum_{\lambda=1}^k \pi_\lambda a_{ki}^\lambda. \quad (3)$$

Пусть  $a_{ki} = a_i$  для всех  $i \in I$  и  $k = 1, \dots, k$ . Теперь из (2) и (3) следует, что  $f_i(a_i, \dots, a_i) = \pi_1 a_i + \dots + \pi_k a_i^k$  для всех  $i \in I$ . Таким образом, все функции  $f_i$  равны и очевидно, что в качестве  $g$  можно взять функцию  $f_i$ . Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.3. Пусть  $A+B$  - аффинно (1-)полный  $R$ -модуль. Тогда модуль  $A^I+B^J$  является аффинно (1-)полным при любых непустых  $I$  и  $J$ .

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что  $R$ -модуль  $A+B$  является аффинно (1-)полным. Пусть  $A+B$  является аффинно 1-полным и  $f \in C_1(A+B)$ ,  $f(0) = 0$  и пусть  $K = [I \setminus J]$ . Рассмотрим выражение  $V = f\left(\sum_{i \in I} a_i + \epsilon\right)$ . В силу предложений 2.1 и 2.2 существуют  $g \in C_1(A)$  и  $h \in C_1(B)$ , так что

$$V = \sum_{i \in K} g(a_i) + g(a_j) + h(\epsilon).$$

Кроме того по предложению 2.1 также  $h_i \in C_1(A+B)$ , где  $h_i(a+\epsilon) = g(a) + h(\epsilon)$ . Так как  $A+B$  является аффинно 1-полным, то найдется  $\pi \in R$ , так что  $h_i(a+\epsilon) = g(a) + h(\epsilon) = \pi(a+\epsilon) = \pi a + \pi \epsilon$  при всех  $a \in A$  и  $\epsilon \in B$ . Таким образом,  $g(a) = \pi a$  для всех  $a \in A$ . Следовательно,

$V = \sum_{i \in K} \pi a_i + \pi a_j + \pi \epsilon = \pi\left(\sum_{i \in I} a_i + \epsilon\right)$  и  $f \in P_1(A^I+B^J)$ , что и требовалось доказать.

Если  $A+B$  является аффинно полным, то аналогично доказывается, что  $C_2(A^I+B^J) \subset P_2(A^I+B^J)$ , значит  $A^I+B^J$  является тоже аффинно полным. Предложение 2.3 доказано.

Следствие 2.4. Если  $R$ -модуль  $\sum_{i \in I} A_i$  является аффинно (1-)полным, то при любых непустых  $I_i$   $R$ -модуль  $\sum_{i \in I} A_i^{I_i}$  тоже является аффинно (1-)полным.

В следующем предложении мы докажем, что при наличии некоторого дополнительного условия аффинная полнота прямой суммы  $A+B$  равносильна аффинной полноте  $A$  и  $B$ .

Предложение 2.5. Пусть  $R$ -модуль  $A+B$  удовлетворяет условию

$$\forall \alpha, \beta \in R \exists t \in R \forall (a \in A, b \in B) \quad \pi a + \beta b = t(a+b).$$

$A+B$  - аффинно  $(1-)$ полный модуль тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  являются аффинно  $(1-)$ полными модулями.

Доказательство. Дадим здесь доказательство лишь для случая аффинной  $1$ -полноты. Доказательство для случая аффинной полноты аналогично.

Необходимость. Пусть  $A+B$  - аффинно  $1$ -полный модуль. Возьмем  $g \in C_1(A)$  и  $h \in C_1(B)$ . Определим  $f \in F_1(A+B)$ , так что

$$f(a+b) = g(a) + h(b). \quad (4)$$

Покажем, что  $f \in C_1(A+B)$ . Для этого изучаем разность

$$V = f(a+b) - f(c+d).$$

По формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} V &= (g(a) + h(b)) - (g(c) + h(d)) = \\ &= (g(a) - g(c)) + (h(b) - h(d)). \end{aligned}$$

В силу (A) найдется  $\kappa \in R$ , так что  $g(a) - g(c) = \kappa(a-c)$ .

Аналогично  $h(b) - h(d) = \lambda(b-d)$ . Таким образом,

$V = \kappa(a-c) + \lambda(b-d)$ . В силу предположения

$V = t((a-c) + (b-d)) \in R((a+b) - (c+d))$ , т.е.

$f \in C_1(A+B)$ . По предположению  $C_1(A+B) = P_1(A+B)$ , т.е.

существует  $\mu \in R$ , так что  $f(a+b) = \mu(a+b) = \mu a + \mu b$  для всех  $a \in A$  и  $b \in B$ . Из условия (4) получаем, что  $g(a) = \mu a$  и  $h(b) = \mu b$ , т.е.  $g \in P_1(A)$  и  $h \in P_1(B)$ .

Достаточность. Пусть  $A$  и  $B$  - аффинно  $1$ -полные  $R$ -модули.

Возьмем  $f \in C_1(A+B)$ . В силу предложения 2.1 существуют  $g \in C_1(A)$  и  $h \in C_1(B)$ , так что  $f(a+b) = g(a) + h(b)$ .

Поскольку  $A$  и  $B$  аффинно  $1$ -полные модули, то найдутся  $\mu, \nu \in R$ , так что  $g(a) + h(b) = \mu a + \nu b$  для всех  $a \in A$  и  $b \in B$ . По предположению найдется  $t \in R$ , так что  $f(a+b) = t(a+b)$ .

Следовательно  $f \in P_1(A+B)$ . Предложение 2.5 доказано.

Следствие 2.6. Пусть  $R$ -модуль  $\sum_{i=1}^n A_i$  удовлетворяет условию

$$\forall \alpha_i \in R \exists \mu \in R \forall a_i \in A_i: \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \mu \sum_{i=1}^n a_i, \quad (5)$$

где  $i = 1, \dots, n$ . Модуль  $\sum_{i=1}^n A_i$  является аффинно  $(1-)$ полным тогда и только тогда, когда модули  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) являются аффинно  $(1-)$ полными.

Докажем еще одно утверждение о совместных функциях, которое нам в дальнейшем понадобится.

Предложение 2.7. Пусть  $M = A^I$  -  $R$ -модуль, где  $|I| \geq 2$ ,  $f \in C_k(M)$ ,  $f(0, \dots, 0) = 0$  и  $g \in C_k(A)$  - функция, определенная в предложении 2.2. Тогда

$$g(a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k) = g(a_1, \dots, a_k) + g(b_1, \dots, b_k), \quad (6)$$

$$f\left(\sum_{i \in I} (a_{ki} + b_{ki}), \dots, \sum_{i \in I} (a_{ki} + b_{ki})\right) = f\left(\sum_{i \in I} a_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} a_{ki}\right) + f\left(\sum_{i \in I} b_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} b_{ki}\right). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть  $f \in C_k(M)$ ,  $f(0, \dots, 0) = 0$  и  $g \in C_k(A)$ , так что справедливо (I). Рассмотрим разность  $V = f\left(\sum_{i \in I} m_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} m_{ki}\right) - f\left(\sum_{i \in I} n_{ki}, \dots, \sum_{i \in I} n_{ki}\right)$ , где  $m_{\lambda j} = n_{\lambda j} + m_{\lambda}$ ,  $n_{\lambda \ell} = 0$ ,  $m_{\lambda \ell} = m_{\lambda}$ ,  $\lambda = 1, \dots, k$  и  $\ell \in J = I \setminus \{j\}$ . В силу (A) существуют  $\pi_1, \dots, \pi_k \in R$ , так что

$$V = \sum_{\lambda=1}^k \pi_{\lambda} \left[ (m_{\lambda j} - n_{\lambda j}) + \sum_{\ell \in J} m_{\lambda \ell} \right] = \sum_{\lambda=1}^k \pi_{\lambda} m_{\lambda}. \quad (8)$$

С другой стороны, учитывая (I), получаем

$$V = \sum_{i \in I} [g(m_{ki}, \dots, m_{ki}) - g(n_{ki}, \dots, n_{ki})] = [g(m_{1j}, \dots, m_{kj}) - g(n_{1j}, \dots, n_{kj})] + \sum_{i \in J} g(m_{ki}, \dots, m_{ki}). \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), получаем

$$g(m_{1j}, \dots, m_{kj}) - g(n_{1j}, \dots, n_{kj}) = \sum_{\lambda=1}^k \pi_{\lambda} m_{\lambda} = g(m_1, \dots, m_k).$$

Следовательно

$$g(n_{1j} + m_1, \dots, n_{kj} + m_k) = g(n_{1j}, \dots, n_{kj}) + g(m_1, \dots, m_k),$$

т.е. имеет место (6). Формула (7) очевидным образом следует из (6). Предложение 2.7 доказано.

### §3. Аффинная полнота свободных модулей

Известно, что векторное пространство, размерность которого больше единицы, является аффинно полным [5]. Мы обобщим этот результат на модули над произвольным кольцом, показывая что все нециклические свободные модули являются аффинно полными.

Теорема 3.1. Для любого кольца  $R$  модуль  $M = R + R$  является аффинно полным.

Доказательство. Покажем, что  $M$  является аффинно  $f$ -полным. Пусть  $f \in C_1(M)$ ,  $f(0) = 0$ . В силу предложения 2.2 существует  $g \in C_1(R)$ , так что  $f(a+b) = g(a) + g(b)$ . Изучаем разность  $V = f(1+0) - f(0+a)$ . В силу (A) существует  $\pi_a \in R$ , так что

$$V = \pi_a (1 + (-a)) = \pi_a + \pi_a(-a). \quad (10)$$

В силу (B) существует  $\lambda, t_a \in R$ , так что

$$\begin{aligned} f(1+0) &= \lambda (1+0) = \lambda + 0 \quad \text{и} \\ f(0+a) &= t_a (0+a) = 0 + t_a a. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом,

$$V = \lambda + (-t_a a) = \lambda + t_a(-a). \quad (12)$$

Из (10) и (12) видно, что  $\pi_a = \lambda$  при всех  $a \in R$ . Так как  $t_a(-a) = \pi_a(-a) = \lambda(-a)$  для всех  $a \in R$ , то можем взять  $t_a = \lambda$ . Подставляем этот результат в (11), получаем

$f(c+a) = g(0) + g(a) = 0 + \lambda a$ . Таким образом  $g(a) = \lambda a$  для всех  $a \in A$ . Следовательно,  $f(a+b) = g(a) + g(b) = \lambda a + \lambda b = \lambda(a+b)$  и  $f \in P_1(M)$ . Покажем, что  $M$  является аффинно полным. Пусть  $f \in C_2(M)$ ,  $f(0,0) = 0$ . Как и в доказательстве предложения 2 из [41] (стр. 87), можем представить  $f$  в виде:

$$f(a+b, c+d) = \lambda_{a,b}(c+d) + \lambda_0(a+b) = \lambda_{c,d}(a+b) + \pi_c(c+d), \quad (I3)$$

где  $\lambda_{a,b}, \lambda_{c,d}, \pi_0, \lambda_c \in R$ . Последнее равенство дает, что

$$\begin{cases} (\lambda_{a,b} - \pi_0)c = (\lambda_{c,d} - \lambda_0)a, \\ (\lambda_{a,b} - \pi_0)d = (\lambda_{c,d} - \lambda_0)b. \end{cases}$$

Взяв  $a = b = 1$  и обозначая  $\lambda_{1,1} - \pi_0 = \pi$ , получаем систему

$$\begin{cases} \pi c = \lambda_{c,d} - \lambda_0, \\ \pi d = \lambda_{c,d} - \lambda_0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что  $\pi(c-d) = 0$  для всех  $c, d \in R$ , следовательно  $\pi = 0$ . Значит  $\lambda_{c,d} = \lambda_0$  и из (I3) получаем

$f(a+b, c+d) = \lambda_c(a+b) + \pi_c(c+d)$ , т.е.  $f \in P_2(M)$ . Теорема 3.1 доказана.

Основным результатом этого параграфа является

**Теорема 3.2.** Нециклический свободный модуль является аффинно полным.

**Доказательство.** Пусть  $M$  - нециклический свободный  $R$ -модуль, тогда  $M \cong \sum_{i=1}^n A_i$ , где  $A_i = R$  ([2], стр. 89), т.е.  $M \cong R^I$ , где  $|I| \geq 2$ . В силу теоремы 3.1 и предложения 2.3  $R^I$  является аффинно полным. Теорема 3.2 доказана.

#### §4. Аффинная полнота простых и полупростых модулей

Сперва покажем, что простой модуль не является аффинно полным. Для этого докажем теорему для более общего случая.

**Теорема 4.1.** Ни один подпрямо неразложимый  $R$ -модуль не является аффинно полным.

**Доказательство.** Пусть  $M$  - подпрямо неразложимый  $R$ -модуль и  $A$  - его наименьший подмодуль. Берем  $0 \neq a \in A$  и предположим сначала, что  $2a \neq 0$ . Тогда определим функцию  $f \in F_1(M)$  по формуле

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что  $f \in C_1(M)$ . По определению  $f$  имеем

$f(m_1) - f(m_2) \in A$  при любых  $m_1, m_2 \in M$ . Но  $A \subseteq R(m_1 - m_2)$ , при  $m_1 \neq m_2$  так как  $A$  - наименьший подмодуль. Следовательно,  $f(m_1) - f(m_2) \in R(m_1 - m_2)$ , что дает  $f \in C_1(M)$ . Легко проверить, что  $f \notin P_1(M)$ . Следовательно, модуль  $M$  является

аффинно неполным. Пусть теперь  $2a = 0$ . Тогда определим

$f \in F_2(M)$  по формуле

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 \neq 0 \text{ или } x_2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что  $f \in C_2(M)$ , но  $f \notin P_2(M)$ . Теорема 4.1 доказана.

**Замечание.** Как показывает пример абелевы группы  $\mathbb{Z}_2$ , применение при доказательстве бинарной функции необходимо. Действительно,  $\mathbb{Z}_2$  является аффинно полуполной ([4], стр. 95).

**Теорема 4.2.** Пусть  $M$  - простой  $R$ -модуль, являющийся конечномерным векторным пространством над  $\text{End}_R M$ . Тогда  $R$ -модуль  $M+M$  является аффинно полным.

**Доказательство.** По лемме Шура  $\text{End}_R M$  - тело, обозначим  $\text{End}_R M = K$ . Таким образом можем рассматривать модуль  $M$  как векторное пространство над  $K$ . Пусть  $f \in C_2(M+M)$ ,  $f(0,0) = 0$ . В силу предложения 2.2 существует  $g \in C_2(M)$ , так что

$$f(a+b, c+d) = g(a, c) + g(b, d). \quad (I4)$$

Покажем, что  $g$  - линейное отображение из векторного пространства  $M+M$  в  $M$ . Из предложения 2.7 получаем, что для всех  $a, b, c, d \in M$

$$g(a+b, c+d) = g(a, c) + g(b, d). \quad (I5)$$

Покажем, что для всех  $k \in K$

$$g(ka, kb) = kg(a, b). \quad (I6)$$

Для этого изучаем выражение  $U = f(a+ka, b+kb)$ . В силу (I4)

$$U = g(a, b) + g(ka, kb). \quad (I7)$$

В силу (B)  $U = \mu(a+ka) + \nu(b+kb) = (\mu a + \nu b) + (\mu ka + \nu kb)$ .

С другой стороны, так как  $k \in \text{End}_R M$ , то

$$U = (\mu a + \nu b) + k(\mu a + \nu b). \quad (I8)$$

Сравнивая (I7) и (I8) видим, что (I6) имеет место. Таким образом  $g$  является действительно линейным отображением из векторного пространства  $M+M$  в  $M$ . Пусть  $A$  - множество всех линейных преобразований  $u: M \rightarrow M$  имеющих вид  $u(x) = \mu x$ , где  $\mu \in R$ . Пусть  $B$  - множество всех линейных отображений  $\sigma: M+M \rightarrow M$  имеющих вид  $\sigma(x, y) = \mu x + \nu y$ , где  $\mu, \nu \in R$ . Тогда  $AB \subseteq B$ . Пусть  $V = \{x_1, \dots, x_n\}$  базис для  $M$ , тогда базисом  $M+M$  служит  $U = \{z_1, \dots, z_{2n}\}$ , где

$$z_i = \begin{cases} (x_i, 0), & \text{если } i \leq n, \\ (0, x_j), & \text{если } n < i \leq 2n, \text{ где } j = 2n - i. \end{cases}$$

Из теоремы плотности ([1], стр. 48) следует, что для произвольных  $y_i \in M$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) существует  $\sigma \in B$ , так что

$\nu z_i = y_i$ . В частности, взяв  $y_i = q z_i$ , получаем, что  $\nu z_i = q z_i$ . Так как линейные отображения  $\nu$  и  $q$  совпадают на базисе, то  $\nu = q$ . Значит, найдутся  $\mu, \lambda \in R$ , так что  $g(x, y) = \mu x + \lambda y$  для всех  $x, y \in M$ , т.е.  $g \in P_2(M)$ . В силу (I4)  $f(a+b, c+d) = g(a, c) + g(b, d) = (\mu a + \lambda c) + (\mu b + \lambda d) = \mu(a+b) + \lambda(c+d)$ , т.е.  $f \in P_2(M+M)$  и  $M+M$  является аффинно полным. Теорема 4.2 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать главный результат этого параграфа.

**Теорема 4.3.** Пусть  $M = M_1 + \dots + M_k$  - модуль над классически полупростым кольцом  $R$ , где  $M_i$  - ненулевые однородные компоненты. Модуль  $M$  является аффинно полным тогда и только тогда, когда каждая  $M_i$  является прямой суммой не менее двух простых подмодулей.

**Доказательство.** Пусть  $R = B_1 + \dots + B_n$ , где  $B_i$  - блоки кольца  $R$  ([2], гл. 8) и пусть при этом простой  $R$ -модуль, соответствующий компоненте  $M_i$  изоморфен левому идеалу кольца  $B_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Тогда  $RM_i = B_i M_i$ , из чего легко следует, что разложение  $M = M_1 + \dots + M_k$  удовлетворяет условию (5). Тем самым вопрос об аффинной полноте  $M$  полностью сводится к вопросу об аффинной полноте компонент  $M_i$ .

Известно, что простой модуль  $A$  над классически полупростым кольцом  $R$  является конечномерным над  $\text{End}_R A$ . Следовательно, утверждение теоремы следует из теоремы 4.1, теоремы 4.2 и предложения 2.3. Теорема 4.3 доказана.

### Литература

1. Джекобсон Н. Строение колец. Москва, 1961.
2. Каш Ф. Модули и кольца. Москва, 1981.
3. Карли К. Affine complete Abelian groups. Math. Nachr., 1982, 107, 235-239.
4. Нобauer W. Affinvollständige Moduln. Math. Nachr., 1978, 86, 85-96.
5. Вернер Н. Produkte von Kongruenzklassengeometrien universeller Algebren. Math. Z., 1971, 121, 111-140.

Поступило  
20.IX 1984

## MOODULITE AFIINSEST TÄIELIKKUSEST

A. Saks

R e s ü m e e

Käesolevas töös on toodud kõigi afiinselt täielike moodulite kirjeldus üle klassikaliselt poollihitsa ringi.

Teoreem. Olgu  $M = M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_k$  moodul üle klassikaliselt poollihitsa ringi, kus  $M_1 \neq 0$  on mooduli  $M$  homogeensuskomponent. Moodul  $M$  on afiinselt täielik parajasti siia, kui iga  $M_1$  on vähemalt kahe isomorfse lihtsa alammoduli otsesumma.

Samuti tõestatakse, et mittetsüklikuline vaba moodul üle suvalise ringi on afiinselt täielik.

## ON AFFINE COMPLETENESS OF MODULES

A. Saks

S u m m a r y

In this paper the description of affine complete modules over classically semi-simple rings is given.

Theorem. Let  $M = M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_k$  be a module over a classically semi-simple ring,  $M_1 \neq 0$  is a homogeneous component of  $M$ . Module  $M$  is affine complete if and only if every  $M_1$  is a direct sum of at least two isomorphic simple submodules of  $M$ .

We also show, that every non-cyclic free module over an arbitrary ring is affine complete.

## РЕГУЛЯРНЫЕ СПРАВА МАТРИЧНЫЕ ПОЛУГРУППЫ РИСА

С. Сильд

Тартуский государственный университет

Пусть  $S$  - полугруппа. Правый  $S$ -полигон  $A$  называется регулярным ([2]), если для любого элемента  $a \in A$  существует гомоморфизм  $f \in \text{Hom}(aS, S)$  правых  $S$ -полигонов такой, что  $af(a) = a$ . Аналогично определяется регулярность левых  $S$ -полигонов. Полугруппа  $S$  называется регулярной справа (слева), если она регулярна как правый (левый) полигон над самой собой.

Пусть теперь  $S = \mathcal{M}^0(G, I, J, P)$  - матричная полугруппа Риса над группой  $G$  с сандвич-матрицей  $P = (p_{ij})$  (опр. см., например, в [1]). Напоминаем, что элементами этой полугруппы являются матрицы размера  $|I| \times |J|$ ,  $(a)_{ij}$ , одним из элементов (стоящим в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце), которой является элемент  $a$  из группы  $G$ , а остальные элементы равны нулю, и нулевая матрица  $0$  размера  $|I| \times |J|$ , причем умножение матриц определено следующим образом:

$$(a)_{ik} \circ (b)_{j\ell} = \begin{cases} (a p_{kj} b)_{i\ell}, & \text{если } p_{kj} \neq 0 \\ 0, & \text{если } p_{kj} = 0. \end{cases}$$

**Теорема.** Матричная полугруппа Риса является регулярной справа тогда и только тогда, когда каждая строка сандвич-матрицы содержит хотя бы один отличный от нуля элемент.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть матричная полугруппа Риса  $S = \mathcal{M}^0(G, I, J, P)$  регулярна справа. Рассмотрим  $\ell$ -ую строку сандвич-матрицы  $P$ ,  $\ell \in J$ . Пусть  $a \in G$  и  $i \in I$  - произвольные элементы. Рассмотрим элемент  $(a)_{i\ell}$  полугруппы  $S$ . Из определения регулярности справа вытекает существование гомоморфизма  $f \in \text{Hom}((a)_{i\ell} S, S)$  такого, что  $(a)_{i\ell} \circ f((a)_{i\ell}) = (a)_{i\ell}$ . Из этого равенства следует, что ненулевой элемент матрицы  $f((a)_{i\ell})$  находится в  $\ell$ -ом столбце. Обозначим  $f((a)_{i\ell})$  через  $(b)_{k\ell}$ ;  $b \in G$ ,  $k \in I$ . Теперь  $(a)_{i\ell} \circ (b)_{k\ell} = (a p_{\ell k} b)_{i\ell}$ . Так как  $(a p_{\ell k} b)_{i\ell} = (a)_{i\ell} \neq 0$ , то  $p_{\ell k} \neq 0$ . Значит, в  $\ell$ -ой строке матрицы  $P$  содержится ненулевой элемент.

**Достаточность.** Пусть каждая строка сандвич-матрицы  $P$  полугруппы Риса  $S = \mathcal{M}^0(G, I, J, P)$  содержит ненулевой

элемент. Пусть  $(a)_{il}$  - произвольный ненулевой элемент полу-  
группы  $S$ . По предположению, в  $l$ -ой строке матрицы  $P$   
имеется ненулевой элемент. Пусть  $p_{lk} \in P$ ,  $p_{lk} \neq 0$ .  
Определим отображение  $f: (a)_{il} S \rightarrow S$  следующим образом:

$$f((a)_{il} \circ s) = (b)_{kl} \circ s$$

для произвольного элемента  $s \in S$ , где  $b = p_{lk}^{-1}$ . Пусть  
 $(a)_{il} \circ (x)_{rs} = (a)_{il} \circ (y)_{uv}$ ,  $x, y \in G$ ,  $r, u \in I$ ,  $s, v \in J$ .  
Если  $p_{lr} = p_{lu} = 0$ , то  $(a)_{il} \circ (x)_{rs} = (a)_{il} \circ (y)_{uv} = 0$   
и  $f((a)_{il} \circ (x)_{rs}) = (b)_{kl} \circ (x)_{rs} = 0 = (b)_{kl} \circ (y)_{uv} =$   
 $= f((a)_{il} \circ (y)_{uv})$ .

Из равенства  $(a)_{il} \circ (x)_{rs} = (a)_{il} \circ (y)_{uv}$  следует, что случаи  
 $p_{lr} = 0$ ,  $p_{lu} \neq 0$  и  $p_{lr} \neq 0$ ,  $p_{lu} = 0$  невозможны.  
Если же  $p_{lr} \neq 0$ ,  $p_{lu} \neq 0$ , то из равенства  $(a p_{lr} x)_{is} =$   
 $= (a p_{lu} y)_{iv}$  следует  $s = v$  и  $a p_{lr} x = a p_{lu} y$ . Так как  
 $a, p_{lr}, p_{lu}, x, y, b \in G$ , то из последнего равенства  
получается  $b p_{lr} x = b p_{lu} y$ . Но тогда

$$f((a)_{il} \circ (x)_{rs}) = (b)_{kl} \circ (x)_{rs} = (b p_{lr} x)_{ks} =$$

$$= (b p_{lu} y)_{kv} = (b)_{kl} \circ (y)_{uv} = f((a)_{il} \circ (y)_{uv}).$$

Значит, определение отображения  $f$  корректно. Очевидно,  
 $f$  - гомоморфизм правых  $S$ -полигонов. Теперь

$$(a)_{il} \circ f((a)_{il}) = (a)_{il} \circ f((a)_{il} \circ (p_{lk}^{-1})_{kl}) =$$

$$= (a)_{il} \circ ((b)_{kl} \circ (p_{lk}^{-1})_{kl}) = (a)_{il} \circ (b p_{lk} p_{lk}^{-1})_{kl} =$$

$$= (a)_{il} \circ (b)_{kl} = (a p_{lk} b)_{il} = (a)_{il}.$$

Тем самым доказано, что  $S$  регулярна справа.

Напоминаем, что полугруппа  $S$  является регулярной  
(в смысле Неймана), если для любого элемента  $a \in S$  суще-  
ствует элемент  $x \in S$  такой, что  $a = a x a$ . Известно (см.  
[1], стр. 124), что матричная полугруппа является регулярной  
(в смысле Неймана) тогда и только тогда, когда как каждая  
строка, так и каждый столбец сандвич-матрицы содержит хотя  
бы один отличный от нуля элемент. Из этого результата и из  
теоремы (вместе с ее вариантом о регулярности слева) выте-  
кает следующее.

Следствие. Если матричная полугруппа Риса является как  
регулярной справа, так и регулярной слева, то она регулярна  
в смысле Неймана.

## Литература

1. Клиффорд А. Х., Престон Г. В., Алгебраическая теория полугрупп. I Москва, 1972.
2. Гран Лаш Насх, Characterization of monoids by regular acts. Preprint, Math. Inst. Budapest, 1983.

Поступило

2 XI 1984

### PAREMALT REGULAARSED REES'I MAATRIKSPOLRÜHMAD

S.Sild

R e s ü m e e

Artiklis antakse tarvilikud ja piisavad tingimused Rees'i maatrikspoolrühma parempoolseks regulaarsuseks.

### RIGHT REGULAR REES MATRIX SEMIGROUPS

S.Sild

S u m m a r y

A right act  $A$  over a semigroup  $S$  is called regular if for every  $a \in A$  there exists a homomorphism  $f \in \text{Hom}(aS, S)$  such that  $af(a) = a$ . A semigroup  $S$  is called right regular if it is regular as a right  $S$ -act. It is proved that a Rees matrix semigroup is right regular if and only if in any row of its sandwich matrix there exists at least one nonzero element.

## К ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ МАЛЫХ КАТЕГОРИЙ

В. Фляйшер

Тартуский государственный университет

В работе [2] У.Кнауэр и А.В.Михалев доказали определяемость свободного полигона своей полугруппой эндоморфизмов в предположении, что исходный моноид с нулем не содержит нетривиальных идемпотентов. В работе [1] автором была доказана определяемость свободного полигона над произвольным моноидом без нуля. Там же было отмечено, что этот факт имеет место и в случае любого моноида с нулем. В настоящей статье мы дадим обобщение этих результатов. Именно, с каждой сильно связанной малой категорией  $\mathcal{K}$  мы свяжем индуцированную ею полугруппу  $S(\mathcal{K})$ , которая определяет категорию  $\mathcal{K}$  с точностью до изоморфизма. Отметим, что другое обобщение результата работы [1] дано Л.А.Скорняковым в статье [3].

Пусть  $\mathcal{K}$  - произвольная малая категория, т.е. категория, объекты которой составляют множество. Это множество объектов будем обозначать  $Ob \mathcal{K}$ . Для произвольных  $A, B \in Ob \mathcal{K}$  множество морфизмов из объекта  $A$  в объект  $B$  в категории  $\mathcal{K}$  будем обозначать через  $\mathcal{H}(A, B)$ . Категорию  $\mathcal{K}$  назовем сильно связанной, если  $\mathcal{H}(A, B) \neq \emptyset$  для любых  $A, B \in Ob \mathcal{K}$ . Для произвольного  $A \in Ob \mathcal{K}$  через  $M(A)$  обозначим множество морфизмов в категории  $\mathcal{K}$ , исходящих из объекта  $A$ ; т.е.  $M(A) = \bigcup_{B \in Ob \mathcal{K}} \mathcal{H}(A, B)$ . Рассмотрим прямое произведение  $S(\mathcal{K})$  всех множеств  $M(A)$ , где  $A \in Ob \mathcal{K}$ , т.е.

$$S(\mathcal{K}) = \prod_{A \in Ob \mathcal{K}} M(A)$$

Пусть  $\varphi$  - произвольный элемент из  $S(\mathcal{K})$ . Для произвольного  $A \in Ob \mathcal{K}$  через  $\varphi(A)$  будем обозначать ту компоненту элемента  $\varphi$ , которая принадлежит множеству  $M(A)$ . Для произвольных элементов  $\varphi, \psi \in S(\mathcal{K})$  определим их произведение  $\varphi\psi$  естественным образом: для любого  $A \in Ob \mathcal{K}$

$$(\varphi\psi)(A) = \varphi(B)\psi(A),$$

где  $B$  - такой объект из  $\mathcal{K}$ , что  $\varphi(A) \in \mathcal{H}(A, B)$ .

Ясно, что  $\varphi\psi \in S(\mathcal{K})$  и, ввиду ассоциативности произведе-

дения морфизмов в категории, получаем, что  $S(\mathcal{K})$  является полугруппой. Будем говорить, что полугруппа  $S(\mathcal{K})$  индуцирована категорией  $\mathcal{K}$ .

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что  $\mathcal{K}$  — произвольная сильно связная малая категория и  $Ob \mathcal{K} = \{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ , причем  $|\mathcal{I}| > 1$ . Для произвольного  $j \in \mathcal{I}$  через  $S_j$  обозначим множество всех элементов  $\varphi$  из полугруппы  $S(\mathcal{K})$  таких, что  $\varphi(A_i) \in \mathcal{K}(A_i, A_j)$  для всех  $A_i \in Ob \mathcal{K}$ . Ясно, что  $S_j$  является правым идеалом в  $S(\mathcal{K})$ . Среди элементов правого идеала  $S_j$ , очевидно, будут и такие элементы  $\varphi$ , что  $\varphi(A_j) = 1_{A_j}$ , где  $1_{A_j}$  — тождественный морфизм объекта  $A_j$ . Зафиксируем один из таких элементов и обозначим его через  $\epsilon_j$ . Ясно, что  $\epsilon_j \varphi = \varphi$  для любого  $\varphi \in S_j$ , откуда следует, что  $S_j = \epsilon_j \cdot S(\mathcal{K})$ ,  $\epsilon_j^2 = \epsilon_j$ . Обозначим  $S^1 = \bigcup_{j \in \mathcal{I}} S_j$ .

**Лемма I.** Множество  $S^1$  является двусторонним идеалом в полугруппе  $S(\mathcal{K})$ , представимым в виде объединения попарно непересекающихся правых идеалов полугруппы  $S(\mathcal{K})$ , порожденных идемпотентами.

Доказательство очевидно.

Пусть  $\mathfrak{D}$  — произвольное непустое подмножество в  $S(\mathcal{K})$ . Для произвольных  $i, j \in \mathcal{I}$  через  $\mathfrak{D}(i, j)$  обозначим множество таких морфизмов  $\alpha \in \mathcal{K}(A_i, A_j)$ , что  $\alpha = \varphi(A_i)$  при некотором  $\varphi \in \mathfrak{D}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\mathfrak{D}$  — правый идеал в полугруппе  $S(\mathcal{K})$ , порожденный идемпотентом  $\psi \in \mathfrak{D}$ . Если  $\mathfrak{D}(i, j) \neq \emptyset$  для некоторых  $i, j \in \mathcal{I}$ , то  $\mathfrak{D}(j, j) \neq \emptyset$  и  $\mathfrak{D}(j, j)$  является правым идеалом в полугруппе  $\mathcal{K}(A_j, A_j)$ , порожденным идемпотентом  $\psi(A_j)$ .

Доказательство. Пусть  $\mathfrak{D}(i, j) \neq \emptyset$ , тогда найдется такой  $\varphi \in \mathfrak{D}$ , что  $\varphi(A_i) = \alpha \in \mathcal{K}(A_i, A_j)$ . Из того, что  $\mathfrak{D}$  правый идеал, порожденный идемпотентом  $\psi$ , следует  $\psi \varphi = \varphi$ . Отсюда вытекает

$$\psi(A_j) \alpha = \psi(A_j) \varphi(A_i) = \psi \varphi(A_i) = \varphi(A_i) = \alpha.$$

Из этого равенства следует, что  $\psi(A_j) \in \mathcal{K}(A_j, A_j)$ . Идемпотентность  $\psi$  очевидным образом влечет идемпотентность морфизма  $\psi(A_j)$ .

Пусть теперь  $\beta$  — произвольный морфизм из  $\mathfrak{D}(j, j)$ . Это значит, что найдется такой элемент  $\gamma \in \mathfrak{D}$ , что  $\gamma(A_j) = \beta$ . Теперь из  $\psi \gamma = \gamma$  следует

$$\psi(A_j) \cdot \beta = \psi(A_j) \gamma(A_j) = \psi \gamma(A_j) = \gamma(A_j) = \beta.$$

Проверка того, что  $\mathfrak{D}(j, j)$  есть правый идеал в  $\mathcal{H}(A_j, A_j)$ , тривиальна. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  — правые идеалы в полугруппе  $S(\mathcal{X})$ , причем  $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} = \emptyset$ . Тогда для произвольных  $i, j \in \mathcal{J}$  выполняется  $\mathfrak{C}(i, j) \cap \mathfrak{D}(i, j) = \emptyset$ .

**Доказательство.** Предположим от противного, что найдется такой морфизм  $\alpha \in \mathcal{H}(A_i, A_j)$ , что  $\alpha \in \mathfrak{C}(i, j) \cap \mathfrak{D}(i, j)$ . Тогда  $\alpha = \varphi(A_i) = \psi(A_j)$  для некоторых  $\varphi \in \mathfrak{C}$ ,  $\psi \in \mathfrak{D}$ . Для произвольного  $k \in \mathcal{J}$  имеем

$$\varphi \varepsilon_i(A_k) = \varphi(A_i) \varepsilon_i(A_k) = \psi(A_j) \varepsilon_i(A_k) = \psi \varepsilon_i(A_k),$$

т.е.  $\varphi \varepsilon_i = \psi \varepsilon_i$ . Значит  $\varphi \varepsilon_i = \psi \varepsilon_i \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ , что противоречит предположению.

**Лемма 4.** Пусть двусторонний идеал  $\mathfrak{D}$  в полугруппе  $S(\mathcal{X})$  представим в виде объединения попарно непересекающихся правых идеалов  $\mathfrak{D}_j$  ( $j \in \mathcal{J}$ ), порожденных идемпотентами, причем  $|\mathcal{J}| > 1$ . Тогда  $\mathfrak{D} \in S^1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{D} = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathfrak{D}_j$  и  $\mathfrak{D}_j = \delta_j \cdot S(\mathcal{X})$ , где  $\delta_j^2 = \delta_j$  для каждого  $j \in \mathcal{J}$ . Предположим противное, т.е.  $\mathfrak{D} \notin S^1$ . Тогда найдется такой  $\varphi \in \mathfrak{D}$ , что  $\varphi(A_i) \in \mathcal{H}(A_i, A_q)$ ,  $\varphi(A_k) \in \mathcal{H}(A_k, A_p)$  для некоторых  $i, q, k, p \in \mathcal{J}$ , причем  $q \neq p$ . Пусть  $\varphi \in \delta_j \cdot S(\mathcal{X})$  при некотором  $j \in \mathcal{J}$ . Тогда  $\delta_j \varphi = \varphi$  и значит

$$\delta_j(A_q) \varphi(A_i) = \delta_j \varphi(A_i) = \varphi(A_i),$$

$$\delta_j(A_p) \varphi(A_k) = \delta_j \varphi(A_k) = \varphi(A_k),$$

т.е.  $\delta_j(A_q) \in \mathcal{H}(A_q, A_q)$  и  $\delta_j(A_p) \in \mathcal{H}(A_p, A_p)$ . Пусть теперь  $n$  — произвольный элемент из  $\mathcal{J}$  и  $\gamma$  — произвольный морфизм из  $\mathcal{H}(A_p, A_n)$ . Через  $\chi$  обозначим произвольный элемент из  $S(\mathcal{X})$  такой, что  $\chi(A_p) = \gamma$ ,  $\chi(A_q) = 1_{A_q}$ . Ясно, что  $\chi \delta_j \in \mathfrak{D}$ , поскольку  $\mathfrak{D}$  есть идеал в  $S(\mathcal{X})$  и пусть  $\chi \delta_j \in \mathfrak{D}_{j'} = \delta_{j'} \cdot S(\mathcal{X})$  при некотором  $j' \in \mathcal{J}$ . Заметим, что

$$\chi \delta_j(A_q) = \chi(A_q) \delta_j(A_q) = 1_{A_q} \cdot \delta_j(A_q) = \delta_j(A_q),$$

т.е.  $\delta_j(A_q) \in \mathfrak{D}_{j'}(q, q) \cap \mathfrak{D}_j(q, q)$ . Но тогда по лемме 3 мы получаем  $\mathfrak{D}_{j'} \cap \mathfrak{D}_j \neq \emptyset$ , а это означает, что  $j' = j$ . В то же время

$$\chi \delta_j(A_p) = \chi(A_p) \delta_j(A_p) = \gamma \cdot \delta_j(A_p) \in \mathcal{H}(A_p, A_n),$$

т.е.  $\mathfrak{D}_j(p, n) \neq \emptyset$ . По лемме 2 отсюда следует, что  $\mathfrak{D}_j(n, n) \neq \emptyset$  и  $\mathfrak{D}_j(n, n)$  есть правый идеал в  $\mathcal{H}(A_n, A_n)$ , порожден-

ный идемпотентом  $\delta_j(A_n)$ . Ввиду произвольности  $n \in \mathcal{J}$ , получаем, что для любого  $n \in \mathcal{J}$  морфизм  $\delta_j(A_n) \in \mathcal{K}(A_n, A_n)$  является идемпотентом.

Ввиду  $|\mathcal{J}| > 1$ , найдется  $j^* \in \mathcal{J}$  такой, что  $j^* \neq j$ . По условию  $\mathfrak{D}_{j^*} \cap \mathfrak{D}_j = \phi$ ,  $\mathfrak{D}_{j^*} = \delta_{j^*} \cdot S(\mathcal{K})$  и  $\delta_{j^*}^2 = \delta_{j^*}$ . Пусть  $m$  — такой индекс из  $\mathcal{J}$ , что  $\delta_{j^*}(A_m) \in \mathcal{K}(A_m, A_m)$ . Возьмем произвольный индекс  $r \in \mathcal{J}$ ,  $r \neq m$  и произвольный элемент  $\varphi \in S(\mathcal{K})$  такой, что

$$\varphi(A_m) = \delta_{j^*}(A_m), \quad \varphi(A_r) = \delta_j(A_r).$$

Ясно, что  $\varphi \delta_j \in \mathfrak{D}_j$ , а из

$$(\varphi \delta_j)(A_r) = \varphi(A_r) \delta_j(A_r) = \delta_j(A_r)^2 = \delta_j(A_r)$$

по лемме 3 следует, что  $\varphi \delta_j \in \mathfrak{D}_j$ . С другой стороны,

$$(\varphi \delta_j)(A_m) = \varphi(A_m) \delta_j(A_m) = \delta_{j^*}(A_m) \cdot \delta_j(A_m).$$

Поскольку  $\delta_{j^*}(A_m)$  принадлежит множеству  $\mathfrak{D}_{j^*}(m, m)$ , являющемуся правым идеалом в  $\mathcal{K}(A_m, A_m)$ , то  $\delta_{j^*}(A_m) \cdot \delta_j(A_m) \in \mathfrak{D}_{j^*}(m, m)$ . Отсюда следует, что  $\mathfrak{D}_j(m, m) \cap \mathfrak{D}_{j^*}(m, m) \neq \phi$ , поскольку в этом пересечении содержится морфизм  $\delta_{j^*}(A_m) \delta_j(A_m)$ . По лемме 3 вытекает, что  $\mathfrak{D}_j \cap \mathfrak{D}_{j^*} \neq \phi$ , т.е.  $j = j^*$ . Это противоречит выбору элемента  $j^*$ . Лемма доказана.

Из лемм 1 и 4 очевидным образом вытекает

**Следствие I.** В полугруппе  $S(\mathcal{K})$  идеал  $S^1$  и только он является наибольшим двусторонним идеалом, представимым в виде объединения попарно непересекающихся правых идеалов, порожденных идемпотентами.

**Теорема I.** Для двух произвольных сильно связанных малых не-однообъектных категорий  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{L}$  полугруппы  $S(\mathcal{K})$  и  $S(\mathcal{L})$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны категории  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{L}$ .

**Доказательство.** Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть  $Ob \mathcal{K} = \{A_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ ,  $Ob \mathcal{L} = \{B_j \mid j \in \mathcal{J}'\}$ ,  $|\mathcal{J}| > 1$ ,  $|\mathcal{J}'| > 1$ . Предположим, что полугруппы  $S(\mathcal{K})$  и  $S(\mathcal{L})$  изоморфны и пусть  $f: S(\mathcal{K}) \rightarrow S(\mathcal{L})$  изоморфизм. По следствию I ясно, что  $f$  осуществляет изоморфизм  $f^1$  между  $S^1(\mathcal{K})$  и  $S^1(\mathcal{L})$ , т.е.

$$f^1: S^1(\mathcal{K}) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} S_i(\mathcal{K}) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} e_i \cdot S(\mathcal{K}) \rightarrow S^1(\mathcal{L}) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}'} S_j(\mathcal{L}) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}'} e_j \cdot S(\mathcal{L})$$

Построим отображение  $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'$  следующим образом:

$$g(i) = j \quad \text{тогда и только тогда, если } f^1(S_i(\mathcal{K})) = S_j(\mathcal{L})$$

Легко видеть, что  $g$  является биекцией.

Пусть  $\alpha$  - произвольный морфизм из  $\mathcal{K}(A_i, A_k)$  в категории  $\mathcal{K}$  и пусть  $\varphi$  - произвольный элемент из  $S(\mathcal{K})$  такой, что  $\varphi(A_i) = \alpha$ . Тогда  $\varphi \cdot S_i(\mathcal{K}) \subseteq S_k(\mathcal{K})$  и значит

$$f(\varphi) \cdot f(S_i(\mathcal{K})) = f(\varphi) \cdot S_{g(i)}(\mathcal{Z}) \subseteq S_{g(k)}(\mathcal{Z}).$$

Отсюда следует, что  $f(\varphi)(B_{g(i)})$  есть морфизм из  $\mathcal{K}(B_{g(i)}, B_{g(k)})$  в категории  $\mathcal{Z}$ . Положим

$$G(\alpha) = f(\varphi)(B_{g(i)})$$

и покажем, что таким образом заданное отображение  $G: \text{Mor } \mathcal{K} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{Z}$  определено корректно, а именно, не зависит от выбора  $\varphi$ .

Действительно, пусть  $\psi$  также некоторый элемент из  $S(\mathcal{K})$ , для которого  $\psi(A_i) = \alpha$ . Тогда  $\varphi\psi = \psi\varphi$  для любого  $\nu \in S_i(\mathcal{K})$ . Но тогда  $f(\varphi) \cdot \mu = f(\psi) \cdot \mu$  для любого  $\mu \in S_{g(i)}(\mathcal{Z})$ . Возьмем такой  $\mu \in S_{g(i)}(\mathcal{Z})$ , что  $\mu(B_{g(i)}) = 1_{B_{g(i)}}$ . Тогда из  $f(\varphi)\mu = f(\psi)\mu$  следует

$$f(\varphi)(B_{g(i)}) = [f(\varphi)\mu](B_{g(i)}) = [f(\psi)\mu](B_{g(i)}) = f(\psi)(B_{g(i)})$$

т.е.  $f(\varphi)(B_{g(i)}) = f(\psi)(B_{g(i)})$ .

Таким образом, мы получаем отображение  $G: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Z}$  такое, что

$$1) G(A_i) = B_{g(i)} \in \text{Ob } \mathcal{Z} \quad \text{для каждого } A_i \in \text{Ob } \mathcal{K}$$

$$2) G(\alpha) \in \mathcal{K}(G(A_i), G(A_k)) \quad \text{для каждого } \alpha \in \mathcal{K}(A_i, A_k)$$

Покажем, что  $G$  есть функтор из категории  $\mathcal{K}$  в категорию  $\mathcal{Z}$ , являющийся изоморфизмом. Вначале покажем, что

$G$  сохраняет тождественные морфизмы. Ясно, что единицей моноида  $S(\mathcal{K})$  является такой элемент  $e$ , что  $e(A_i) = 1_{A_i}$  для любого  $i \in \mathcal{I}$ , а единицей моноида  $S(\mathcal{Z})$  есть такой элемент  $e'$ , что  $e'(B_j) = 1_{B_j}$ , при этом, очевидно,  $f(e) = e'$ . Исходя из этого получаем

$$G(1_{A_i}) = f(e)(B_{g(i)}) = e'(B_{g(i)}) = 1_{B_{g(i)}}.$$

Пусть теперь  $\alpha \in \mathcal{K}(A_i, A_k)$ ,  $\beta \in \mathcal{K}(A_k, A_l)$  и пусть  $\varphi, \psi \in S(\mathcal{K})$  такие, что  $\varphi(A_i) = \alpha$ ,  $\psi(A_k) = \beta$ , тогда  $\psi\varphi(A_i) = \psi(A_k)\varphi(A_i) = \beta\alpha$  и значит

$$\begin{aligned} G(\beta\alpha) &= f(\psi\varphi)(B_{g(i)}) = [f(\psi)f(\varphi)](B_{g(i)}) = \\ &= f(\psi)(B_{g(k)}) \cdot f(\varphi)(B_{g(i)}) = G(\beta)G(\alpha) \end{aligned}$$

Следовательно, отображение  $G: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{Z}$  является функтором. Взаимная однозначность функтора  $G$  легко следует из взаимной однозначности отображения  $f: S(\mathcal{K}) \rightarrow S(\mathcal{Z})$

Теорема доказана.

Покажем теперь, как из теоремы I следует определяемость свободного полигона над моноидом своей полугруппой эндоморфизмов ([1], следствие 2). Пусть  $R$  - произвольный моноид и  $F$  - свободный правый  $R$ -полигон с базой  $\{x_i \mid i \in J\}$ . Пусть  $\mathcal{K}$  - полная подкатегория категории всех правых  $R$ -полигонов, объекты которой суть свободные циклические полигоны  $x_i R$  ( $i \in J$ ). Ясно, что в этом случае категория  $\mathcal{K}$  является сильно связной. Теперь остается заметить, что  $S(\mathcal{K}) = \text{End}_R F$  и применить теорему I.

Из теоремы I очевидным образом вытекают также результаты об определяемости свободных топологических или упорядоченных полигонов своей полугруппой эндоморфизмов (см. [2]).

#### Литература

1. Ф л я й ш е р В. Г., Определяемость свободного полигона его полугруппой эндоморфизмов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366. 27-41.
2. К н а у е р U., М и х а л е в А. V., Endomorphism monoids of acts over monoids, Semigroup Forum, vol. 6, 1973, 50-58.
3. С к о р н я к о в L. A., On the wreath product of monoids. Universal algebra and applications, Banach Center publ., Vol. 9, 1982, 181-185.

Поступило  
25.IV 1984

#### VÄIKESTE KATEGOORIATE MÄÄRATAVUS

V. Fljajšer  
R e s ü m e e

Artiklis vaadeldakse tugevasti seotud väikseid kategooriaid. Iga sellise kategooria  $\mathcal{K}$  jaoks konstrueeritakse poolrühm  $S(\mathcal{K})$

$$S(\mathcal{K}) = \prod_{A \in \text{Ob } \mathcal{K}} \mathcal{M}(A)$$

kus

$$\mathcal{M}(A) = \bigcup_{B \in \text{Ob } \mathcal{K}} \mathcal{M}_{\text{or}}(A, B).$$

Korrutamine defineeritakse hulgal  $S(\mathcal{K})$  loomlikul viisil. Toetatakse, et kui kategooriad  $\mathcal{K}$  ja  $\mathcal{L}$  sisaldavad rohkem kui ühe objekti ning poolrühmad  $S(\mathcal{K})$  ja  $S(\mathcal{L})$  on isomorfsed, siis ka kategooriad  $\mathcal{K}$  ja  $\mathcal{L}$  on isomorfsed.

## DETERMINABILITY OF SMALL CATEGORIES

V. Fleischer

S u m m a r y

Let  $\mathcal{K}$  be a small category and  $\mathcal{K}$  is strongly connected, i.e. for any  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{K}$  we have  $\text{Mor}(A, B) \neq \emptyset$ . Let  $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{B \in \text{Ob } \mathcal{K}} \text{Mor}(A, B)$  for all  $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$  and  $S(\mathcal{K})$  is the direct product of all sets  $\mathcal{M}(A)$  where  $A \in \text{Ob } \mathcal{K}$  i.e.

$$S(\mathcal{K}) = \prod_{A \in \text{Ob } \mathcal{K}} \mathcal{M}(A)$$

On  $S(\mathcal{K})$  we define a semigroup structure in the following way. For an arbitrary  $\varphi \in S(\mathcal{K})$  let us denote its component which belongs to  $\mathcal{M}(A)$  by  $\varphi(A)$ . Let  $\varphi, \psi \in S(\mathcal{K})$ ,  $A$  is an arbitrary object from  $\text{Ob } \mathcal{K}$  and let  $\varphi(A) \in \text{Mor}(A, B)$  for any  $B \in \text{Ob } \mathcal{K}$ . Then  $\psi\varphi$  is a such element from  $S(\mathcal{K})$ , that

$$(\psi\varphi)(A) = \psi(B)\varphi(A)$$

Theorem 1. Let  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{L}$  are small strongly connected categories and  $|\text{Ob } \mathcal{K}| > 1$ ,  $|\text{Ob } \mathcal{L}| > 1$ . Then semigroups  $S(\mathcal{K})$  and  $S(\mathcal{L})$  are isomorphic iff categories  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{L}$  are isomorphic.

Let  $R$  be a monoid and  $F = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} x_i R$  is a free  $R$ -polygon with free generators  $\{x_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ . The semigroup of all  $R$ -endomorphisms of  $F$  is denoted by  $\text{End}_R F$ . Let us consider the category  $\mathcal{K}$ , where  $\text{Ob } \mathcal{K} = \{x_i R \mid i \in \mathcal{J}\}$ , and morphisms in  $\mathcal{K}$  are  $R$ -homomorphisms of polygons  $x_i R$  ( $i \in \mathcal{J}$ ). Then obviously  $S(\mathcal{K}) \cong \text{End}_R F$ . Therefore the theorem 1 gives a generalization of the result on the determinability of a free  $R$ -polygon by its semigroup of endomorphisms.

О ДЕЛИТЕЛЯХ НУЛЯ В ОДНОМ КЛАССЕ  
НЕКОММУТАТИВНЫХ ЙОРДАНОВЫХ КОЛЕЦ

В.П. Чуваков

Новосибирский государственный университет

В 1971 году И.П. Шестаков [3] ввел в рассмотрение класс колец, удовлетворяющих следующим тождествам:

$$(x, y, x) = 0, \quad (1)$$

$$(x^2, y, x) = 0, \quad (2)$$

$$([x, y], z, z) = 0. \quad (3)$$

Этот класс обобщает класс Блока [6] и содержит обобщенно-стандартные кольца [3], а следовательно, ассоциативные, альтернативные и Йордановы кольца. В работе [3] было доказано, что простая конечномерная алгебра над полем, удовлетворяющая тождествам (1)–(3), либо альтернативна, либо Йорданова.

Естественным в теории колец является вопрос описания колец без делителей нуля в различных классах колец [1, 2, 5, 7, 8, 9].

В предлагаемой работе рассматриваются кольца, удовлетворяющие тождествам (1)–(3). Доказано, что кольцо без элементов порядка 2 в аддитивной группе, удовлетворяющее тождествам (1)–(3), без делителей нуля либо альтернативно, либо Йорданово.

§1. Предварительные определения и вспомогательные тождества

Если не оговорено противное, в работе рассматриваются кольца без элементов порядка 2 в аддитивной группе, т.е. из равенства  $2x = 0$  следует  $x = 0$ .

В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения:

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz), \quad [x, y] = xy - yx, \quad x \circ y = xy + yx.$$

Кольцо называется эластичным, если в нем выполнено тождество (1).

Эластичное кольцо, удовлетворяющее тождеству (2), будем называть некоммутативным Йордановым.

Напомним, что кольцо называется **Йордановым**, если оно коммутативно и в нем выполнено тождество (2).

Во всяком эластичном кольце верны тождества

$$([x, y], z, t) - (x, [y, z], t) + (x, y, [z, t]) - [x, (y, z), t] - [(x, y, z), t] = 0 \quad (4)$$

$$(x \circ y, z, t) - (x, y \circ z, t) + (x, y, z \circ t) - x \circ (y, z, t) - (x, y, z) \circ t = 0 \quad (5)$$

$$[x \circ y, z] = x \circ [y, z] + [x, z] \circ y, \quad (6)$$

а во всяком некоммутативном Йордановом кольце верно тождество

$$(x, y^2, z) = (x, y, z) \circ y. \quad (7)$$

Тождества (4)-(6) доказаны в [3], тождество (7) в [4]. Линеаризуем тождества (1)-(3), (7),

$$(x, y, z) + (z, y, x) = 0, \quad (8)$$

$$(x \circ z, y, t) + (x \circ t, y, z) + (z \circ t, y, x) = 0, \quad (9)$$

$$([x, y], z, t) + ([x, y], t, z) = 0, \quad (10)$$

$$(x, y \circ t, z) = (x, y, z) \circ t + (x, t, z) \circ y. \quad (11)$$

**Предложение I.** Пусть  $R$  - кольцо без элементов порядка 2 в аддитивной группе и удовлетворяет тождествам (1)-(3). Тогда  $R$  удовлетворяет тождествам:

$$2([x, y], x, y) = (x, [y, x], y), \quad (12)$$

$$[x, (y, y, x)] = [y, (x, x, y)], \quad (13)$$

$$([x, y], t \circ z, z) = ([x, y], t, z) \circ z = ([x, y], t, z^2), \quad (14)$$

$$([x, y] \circ t, z, z) = [x, y] \circ (t, z, z). \quad (15)$$

**Доказательство.** Из тождества (4) получаем

$$([x, y], z, y) - (x, [y, x], y) + (x, y, [x, y]) = 0.$$

Отсюда, в силу эластичности и тождества (10), получаем (12).

Докажем (13).

В силу (4),  $([x, y], y, x) + (x, y, [y, x]) - [x, (y, y, x)] - [(x, y, y), x] = 0$

Следовательно, ввиду эластичности,  $2([x, y], y, x) = -2[x, (y, y, x)]$ . Так как кольцо  $R$  без элементов порядка 2 в аддитивной группе, то  $([x, y], y, x) = [x, (y, y, x)]$ . Переставив местами  $x$  и  $y$ , получим тождество

$$([y, x], x, y) = [y, (x, x, y)].$$

Из тождества (10) получаем, что  $([x, y], y, x) = ([y, x], x, y)$ . Следовательно,  $[x, (y, y, x)] = [y, (x, x, y)]$ .

Тождество (I3) доказано.

Далее, из тождеств (II), (3) получаем

$$([x, y], t, z) = ([x, y], t, z) \circ z + ([x, y], z, z) \circ t = ([x, y], t, z) \circ z.$$

Отсюда, ввиду (I0), (7),  $([x, y], t, z) = ([x, y], t, z) \circ z = -([x, y], z, t) \circ z = -([x, y], z^2, t) = ([x, y], t, z^2).$

Тождество (I4) доказано.

$$\begin{aligned} \text{Теперь, в силу (5), (I4), } ([x, y] \circ t, z, z) &= ([x, y], t, z, z) - \\ &- 2([x, y], t, z^2) + [x, y] \circ (t, z, z) + ([x, y], t, z) \circ z = \\ &= ([x, y], t, z) \circ z - 2([x, y], t, z^2) + ([x, y], t, z) \circ z + \\ &+ [x, y] \circ (t, z, z) = [x, y] \circ (t, z, z). \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (I5) доказано.

Имеет место

Теорема I. Пусть  $R$  - кольцо без элементов порядка 2 в аддитивной группе, удовлетворяющее тождествам (I)-(3). Тогда  $R$  удовлетворяет тождеству

$$[x, y]([x, y], x, y) = 0. \quad (I6)$$

Доказательство. Линеаризуем тождество (I3) по  $x$  и  $y$ .

$$\begin{aligned} [y, (t, x, z)] + [y, (x, t, z)] + [z, (t, z, y)] + [z, (x, t, y)] &= \\ = [t, (y, z, x)] + [t, (z, y, x)] + [x, (y, z, t)] + [x, (z, y, t)]. \end{aligned}$$

Отсюда, при  $y = t$ , получаем

$$\begin{aligned} [y, (y, x, z)] + [y, (x, y, z)] + [z, (y, x, y)] + [z, (x, y, y)] &= \\ = [x, (y, z, y)] + [x, (z, y, y)] + [y, (y, z, x)] + [y, (z, y, x)]. \end{aligned}$$

В силу эластичности,

$$\begin{aligned} [y, (y, x, z)] - [y, (y, z, x)] + [z, (x, y, y)] - [x, (z, y, y)] &= \\ = 2[y, (z, y, x)]. \end{aligned}$$

Положим  $y = [u, v]$ . Из эластичности и тождества (3),

$$([u, v], [u, v], [u, v]) = -([u, v], w, [u, v]) = 0.$$

Следовательно, в силу предыдущего и тождества (I0) получаем, что  $2[[u, v], ([u, v], x, z)] = 2[[u, v], (z, [u, v], x)]$ . Так как в  $R$  нет элементов порядка 2, то

$$[[u, v], ([u, v], x, z)] = [[u, v], (z, [u, v], x)].$$

Пусть  $u = x, v = z = y$ . Тогда

$$[[x, y], ([z, y], x, y)] = [[x, y], (y, [z, y], x)].$$

С другой стороны, в силу (I2)  $2([x, y], x, y) = (x, [y, x], y)$ .

Следовательно,

$$[[x, y], ([x, y], x, y)] = [[x, y], (x, [y, x], y)] = 2[[x, y], ([x, y], x, y)].$$

Таким образом,

$$[[x, y], ([x, y], x, y)] = 0. \quad (17)$$

Далее, в силу (II), (IO), эластичности, получаем, что

$$[x, y] \circ ([x, y], x, y) = ([x, y], [x, y] \circ x, y) - \\ - ([x, y], [x, y], y) \circ x = ([x, y], [x, y] \circ x, y).$$

Из тождеств (5), (I) следует, что  $([x, y], x \circ [x, y], y) =$   
 $= ([x, y] \circ x, [x, y], y) + ([x, y], x, [x, y] \circ y) - [x, y] \circ (x, [x, y], y).$

Перепишем это тождество в следующем виде

$$[x, y] \circ ([x, y], x, y) = ([x, y] \circ x, [x, y], y) + \\ + ([x, y], x, [x, y] \circ y) + [x, y] \circ (x, [y, x], y). \quad (18)$$

Из тождества (6) получаем, что  $[x, y] \circ x = [x, y \circ x]$ . Следовательно, в силу (IO), (8)  $([x, y] \circ x, [x, y], y) =$   
 $= ([x, y \circ x], [x, y], y) = -([x, y \circ x], y, [x, y]) = ([x, y], y, [x, y \circ x]) =$   
 $= ([x, y], y, [x, y] \circ x)$ . Таким образом, ввиду (II),

$$([x, y] \circ x, [x, y], y) = -([x, y], [x, y] \circ x, y) = -([x, y], x, y) \circ [x, y].$$

Итак, из тождества (18) получаем, что

$$2[x, y] \circ ([x, y], x, y) = ([x, y], x, [x, y] \circ y) + [x, y] \circ (x, [y, x], y) \quad (19)$$

С другой стороны, из тождества (12) следует, что

$$2([x, y], x, y) = (x, [y, x], y). \text{ Следовательно,} \\ ([x, y], x, [x, y] \circ y) = 0.$$

Из тождеств (IO), (II), (3) следует, что

$$0 = ([x, y], x, [x, y] \circ y) = -([x, y], [x, y] \circ y, x) = \\ = -([x, y], y, x) = [x, y] = ([x, y], x, y) \circ [x, y].$$

Таким образом,

$$[x, y] \circ ([x, y], x, y) = 0.$$

Сравнивая это тождество с тождеством (17), получаем, что

$$[x, y]([x, y], x, y) = 0. \quad (20)$$

Теорема доказана.

**Лемма I.** Пусть  $R$  — некоммутативное йорданово кольцо, удовлетворяющее тождеству (3), без элементов порядка 2 в адди-

тивной группе. Пусть  $R$  удовлетворяет тождеству

$$([x, y], x, y) = 0. \quad (21)$$

Тогда  $R$  удовлетворяет тождеству

$$[x, y](y, x, x) = 0. \quad (22)$$

Доказательство. Из тождества (15), (3) получаем

$$[x, y] \circ (y, z, z) = ([x, y] \circ y, z, z) = ([x \circ y, y], z, z) = 0.$$

Следовательно,

$$[x, y] \circ (y, z, z) = 0. \quad (23)$$

С другой стороны, в силу (4),  $[[x, y], (y, x, x)] = [[x, y], y], x, z) -$   
 $- ([x, y], [y, x], x) + ([x, y], y, [x, x]) - [[x, y], y, x], x] .$

Ввиду (3), (10)

$$[[x, y], (y, x, x)] = [[x, y], x, y], x] .$$

Таким образом, из тождества (21) следует, что

$$[[x, y], (y, x, x)] = 0.$$

Сравним это тождество с (23) и получим

$$[x, y](y, x, x) = 0.$$

Лемма доказана.

## §2. Кольца без делителей нуля

Кольцо  $R$  будем называть кольцом без делителей нуля, если из того, что произведение  $ab = 0$ , где  $a, b \in R$ , следует, что либо  $a = 0$ , либо  $b = 0$ .

Имеет место

Лемма 2. (Шестаков [5]). Пусть  $R$  — эластичное кольцо без делителей нуля, удовлетворяющее тождеству (22). Тогда  $R$  либо коммутативно, либо альтернативно.

Доказательство этой леммы получается дословным повторением заключения доказательства теоремы I в [5] (см. стр. 708). Заметим, что в соответствующем доказательстве используется в действительности лишь эластичность и тождество  $[x, y](y, x, x) = 0$ .

Из теоремы I следует, что кольцо  $R$  без делителей нуля, удовлетворяющее тождествам (1)–(3), либо коммутативно, либо удовлетворяет тождеству  $([x, y], x, y) = 0$ . Отсюда и из леммы I следует, что  $R$  удовлетворяет тождеству  $[x, y](y, x, x) = 0$ . Следовательно, в силу леммы 2,  $R$  либо йорданово, либо аль-



$$-a_3(a_4a_1) - (a_4a_1)a_1 + a_4(a_1a_1) - a_2a_1 - a_3a_5 - a_3a_1 + a_4a_5 = 0.$$

Аналогично проверяется, что  $([a_1, a_2], a_2, a_2) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны } ([a_1, a_2], a_1, a_2) &= [(a_1a_2)a_1]a_2 - \\ &- (a_1a_2)(a_1a_2) - [(a_2a_1)a_1]a_2 + (a_2a_1)(a_1a_2) = (a_3a_1)a_2 - \\ &- a_3a_3 - (a_4a_1)a_2 + a_4a_3 = a_7a_2 - a_{13} - a_{14} - a_9a_2 = \\ &= a_{13} - a_{13} - a_{14} - a_{14} = -2a_{14} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место соотношения  $2([a_1, a_2], a_1, a_2) =$   
 $= (a_1, [a_2, a_1], a_2) = 2[(a_1, a_1, a_2), a_2] = 2[(a_2, a_2, a_1), a_1] = -4a_{14} \neq 0$ .

Таким образом, тождество  $([x, y], x, y) = 0$  не выполняется в  $R$ .

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А. Никитину и И.П.Шестакову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

#### Литература

1. Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным. М., Наука, 1978.
2. Никитин А. А., Почти альтернативные алгебры. Алгебра и логика, 13, № 5, 1974, 501-533.
3. Шестаков И. П., О некоторых классах некоммутативных Йордановых колец. Алгебра и логика, 10, № 4, 1971, 407-448.
4. Шестаков И. П., Обобщенно-стандартные кольца. Алгебра и логика, 13, № 1, 1974, 88-103.
5. Шестаков И. П., Обобщение альтернативных и коммутативных колец. Алгебра и логика, 12, № 6, 1973, 704-712.
6. Block R. E., A unification of the theories of Jordan and alternative algebras. Not. of the Amer. Math. Soc., 16, N 5, 1968, 803.
7. Kleinfeld E., Rings of  $(\gamma, \delta)$ -type. Portug. Math., 18, 1959, 107-110.
8. Kleinfeld E., A generalization of commutative and alternative rings. Proc. Amer. Math. Soc., 6, N 1, 1974, 21-23.
9. Kleinfeld E., A generalization of commutative and alternative rings. Hadronic J., 5, N 1, 1982, 1-6.

Поступило  
26 III 1984

NULLITEGURITEST ÜHES MITTEKOMMUTATIIVSKTE  
JORDANI RINGIDE KLASSIS

V.P. Tšuvakov

R e s ü m e e

Olgu  $R$  mittekommutatiivne Jordani ring, mille karakteristik pole 2 ja mis rahuldab samasust  $([x, y], z, z) = 0$ . I.P. Šestakov näitas, et kui  $R$  on lihtne lõplikumõõtmeline algebra üle korpuse, siis  $R$  on kas kommutatiivne või alternatiivne.

Käesolevas töös tõestatakse, et kui  $R$  ei sisalda nullitegureid, siis  $R$  on kas kommutatiivne või alternatiivne.

ON ZERO DIVISORS IN A CERTAIN CLASS  
OF NONCOMMUTATIVE JORDAN RINGS

V.P. Chuvakov

S u m m a r y

Let  $R$  be a noncommutative Jordan ring of characteristic  $\neq 2$  satisfying the identity  $([x, y], z, z) = 0$ . I.P. Šestakov [Algebra i Logika, 10 (1971), 407-448; MR 46#7333] has proved that if  $R$  is a simple finite-dimensional algebra over a field, then  $R$  is either commutative or alternative.

In this paper we prove that if  $R$  does not contain proper zero divisors, then  $R$  is either commutative or alternative.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

А. Б о в д и, И. Х р и п т а. О разрешимых нормальных подгруппах мультипликативной группы группового кольца периодической группы. . . . .	3
A. B o v d i, I. H r i p t a. Lahenduvatest normaalse jagajatest perioodilise rühma rühmaringi multiplikatiivses rühmas . . . . .	9
A. B o v d i, I. H r i p t a. On solvable invariant subgroups in the unit group of the group ring of a periodic group . . . . .	10
К. К а а р л и. Locally affine complete Abelian groups . . . . .	11
K. K a a r l i. Lokaalselt afiinselt täielikud Abeli rühmad . . . . .	15
К. К а а р л и. Локально аффинно полные абелевы группы. . . . .	16
У. К а л ь ю л а й д. Однозначное разложение многообразий представлений полугрупп . . . . .	17
U. K a l j u l a i d. Poolrühmade esitusmautkondade ühene lahutus . . . . .	31
U. K a l j u l a i d. Unique factorization of varieties of semigroup representations. . . . .	31
М. К и л ь п. On completely flat monoids . . . . .	32
M. K i l p. Täiesti lameimatest monoididest. . . . .	36
М. К и л ь п. О вполне плоских моноидах . . . . .	37
M. K i l p. Strong flatness of flat cyclic left acts	38
M. K i l p. Lameimate tsükliiliste vasakpoolsete polügoonide tugev lameidus . . . . .	41
М. К и л ь п. Полная плоскостность плоских циклических левых полигонов. . . . .	41
П. П у с е м п. О полугруппах эндоморфизмов симметрических групп . . . . .	42
P. P u s e m p. Sümmeetriliste rühmade endomorfismpoolrühmadest. . . . .	49
P. P u s e m p. On the semigroup of endomorphisms of the symmetric groups . . . . .	49
Х. П я е в а. Самоинъективность правоинверсных полугрупп, полугруппа идемпотентов которой является конечной цепью $\mathcal{R}$ -классов . . . . .	50

H. P ñ e v a. Iseinjektiiused pareminverssed poolrühmad, mille idempotentide alampoolrühma $\mathcal{K}$ -klassid moodustavad lõpliku ahela . . . . .	59
H. P ñ e v a. Selfinjective right inverse semigroups whose subsemigroup of idempotents is a finite chain of its $\mathcal{K}$ -classes . . . . .	59
P. P o o m e l d i. О простых правоальтернативных кольцах . . . . .	60
R. R o o m e l d i. Lihtsatest paremalternatiivsetest ringidest . . . . .	69
R. R o o m e l d i. On simple right alternative rings, . . . . .	69
A. S a k s. Об аффинной полноте модулей . . . . .	71
A. S a k s. Moodulite aafinsest täielikkusest . . . . .	79
A. S a k s. On affine completeness of modules . . . . .	79
C. C и л ь д. Регулярные справа матричные полугруппы Риса . . . . .	80
S. S i l d. Paremal regulaarsed Rees'i maatrikspoolrühmad . . . . .	82
S. S i l d. Right regular Rees matrix semigroups. . . . .	82
B. Ф л я й ш е р. К определяемости малых категорий. . . . .	83
V. F l j a i š e r. Väikeste kategooriate määratavus . . . . .	88
V. F l e i s c h e r. Determinability of small categories . . . . .	89
B. Ч у в а к о в. О делителях нуля в одном классе некоммутативных йордановых колец . . . . .	90
V. T s u v a k o v. Nulliteguritest ühes mittekommutatiiivsete Jordani ringide klassis . . . . .	97
V. C h u v a k o v. On zero divisors in a certain class of noncommutative Jordan rings . . . . .	97

Ученые записки Тартуского государственного университета.  
Выпуск 700.  
**СТРОЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ.**  
Труды по математике и механике.  
На русском и английском языках.  
Резюме на русском, эстонском и английском языках.  
Тартуский государственный университет.  
СССР, 202400, г.Тарту, ул.Пяксона, 14.  
Ответственный редактор У. Кальвлайд.  
Корректоры У. Кальвлайд, М. Кильп.  
Подписано в печати 24.01.1985.  
ИБ 01720.  
Формат 60x90/16.  
Бумага писчая.  
Машиннопись. Ротапринт.  
Учетно-издательских листов 5,60.  
Печатных листов 6,25.  
Тираж 400.  
Заказ № 44.  
Цена 85 коп.  
Типография ТГУ, СССР, 202400, г.Тарту, ул.Пяксона, 14.