

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

Füüsika õppekava

Karl Abiline

Nambu–Jona-Lasinio mudeli
massilõhe võrrandi uurimine

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendajad: Arpan Chatterjee, MSc

Stefan Groote, PhD

Tartu 2025

Nambu–Jona-Lasinio mudeli massilõhe võrrandi uurimine

On teada, et kvarkide massid moodustavad vaid murdosa kergete hadronite massidest ning ülejäänud tuleb tugeva vastastikmõju seoseenergiast. Madalate energiatega juures pole aga võimalik häiritusteooriat kvantkromodünaamika raames rakendada, mistõttu on abiks efektiivsed väljateooriad. Nende hulka kuulub ka Nambu–Jona-Lasinio mudel, mis põhineb fermionide nelik-vastastikmõjul ja lubab tekitada massi dünaamiliselt läbi kiraalse sümmeetria spontaanse rikkumise. Käesolevas töös tuletatakse Nambu–Jona-Lasinio mudeli massilõhe võrrand, kasutades standardset häiritusteooriat. Et massilõhe võrrandit oleks võimalik kasutada, proovitakse teooriat regulariseerida ja renormeerida, kasutades äralõikega-, dimensionaalset ja mittelokaalset regulariseerimist ning võrreldakse tulemusi.

Märksõnad: efektiivne teooria, dünaamiline mass, renormeerimismeetodid, Nambu–Jona-Lasinio mudel

CERCS: **P210** — Elementaarosakeste füüsika, kvantväljade teooria

Study of the Mass-Gap Equation of the Nambu–Jona-Lasinio model

It is known that the masses of quarks constitute only a fraction of the masses of light hadrons, with the remainder arising from the binding energy of the strong interaction. However, at low energies, it is not possible to apply perturbation theory within the framework of quantum chromodynamics, which is why effective field theories are helpful. Among these is the Nambu–Jona-Lasinio model, which is based on a four-fermion interaction and allows mass to be generated dynamically through spontaneous chiral symmetry breaking. In this work, the mass-gap equation of the Nambu–Jona-Lasinio model is derived using standard perturbation theory. To make use of the mass-gap equation, an attempt is made to regularize and renormalize the theory using cutoff, dimensional, and non-local regularization methods, and the results are compared.

Keywords: effective theory, dynamical mass, renormalization methods, Nambu–Jona-Lasinio model

CERCS: **P210** — Elementary particle physics, quantum field theory

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Teoreetiline taust	6
1.1 Kvantväljateooria	6
1.2 Kanooniline kvantiseerimine	7
1.3 Fermionide kirjeldus	8
1.4 Feynmani diagrammid	10
1.5 Regulariseerimine ja renormeerimine	11
1.6 Dünaamiline mass ja Nambu–Jona-Lasinio mudel	13
2 Massilõhe võrrandi tuletamine	16
2.1 Fierzi teisendus	16
2.2 Omaenergia	18
3 Regulariseerimine ja renormeerimine	23
3.1 Äralõikega regulariseerimine	24
3.2 Dimensionaalne regulariseerimine	24
3.3 Mittelokaalne regulariseerimine	30
3.4 Tulemuste võrdlus	32
Kokkuvõte	36
Kasutatud kirjandus	38
Tänuõnad	39

Sissejuhatus

Nambu–Jona-Lasinio (NJL) mudelit tutvustati esmakordselt Yoichiro Nambu ja Giovanni Jona-Lasinio 1961. aasta artiklis “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I” [1], kust pärineb ka siin käsitletud massilõhe võrrand (artiklis valem (3.6), edaspidi lihtsalt massilõhe võrrand). Mudel põhineb analoogial Bardeen–Cooper–Schrieffer’i (BCS) teooriaga ülijuhtivusest ja selgitab prootonite ja neutronite massi¹ neid moodustava elementaarse fermionvälja eneseinteraktsioonide kaudu. Massi tekkimise kontekstis on eneseinteraktsiooni all mõeldud osakese interaktsioone teiste, virtuaalsete fermionidega. Sel viisil dünaamiliselt genereeritud mass tekib läbi sama mehhanismi, mis tekitab ülijuhtivusteoorias energiapiilu (ingl k *energy gap*, võiks tõlkida ka kui energeetiline lõhe) ehk minimaalse energia, mis on vajalik, et tekitada ergastus ülijuhtivast seisundist. Tänapäeval tuntakse seda mehhanismi spontaanse sümmeetria rikkumise nime all. Massilõheks nimetatakse dünaamiliselt tekitatud panust osakese kogumassi. Ilma süvenemata mudeli kõigisse üksikasjadesse,² uuritakse käesolevas töös vaid massilõhe võrrandit, mis esitab osakese dünaamiliselt tekitatud massi fermionvälja eneseinteraktsioonide energia kaudu. Seda energiat nimetatakse osakese omaenergiaks.

Käesoleval töö on kolm eesmärki. Esiteks, tuletada NJL mudeli lagranžiaanist lähtudes massilõhe võrrand. Artiklis [1] on küll esitatud tulemus ja kirjeldatud lühidalt meetodit, kuid tuletuskäiku ennast pole antud. Teiseks, kuna massilõhe võrrand naiivsel kujul sisaldab hajuvat integraali, püüda teooriat regulariseerida ja renormeerida, kasutades selleks meetodeid, mis ei olnud artikli [1] ilmumise ajal veel leiutatud. See tähendab, sättida teooria parameetreid nii, et hajuvused oleksid kõrvaldatud ja massilõhe võrrand annaks realistliku tulemuse. Algselt oli plaanis piirduda ainult dimensionaalse regulariseerimise meetodiga, kuid kuna see ei andnud soovitud tulemust, prooviti ka teisi lähenemisi. Kolmandaks eesmärgiks on tutvuda kvantväljateooria ning renormeerimismeetoditega praktilise harjutuse näitel. Seetõttu on ühe tulemusena esitatud ka kõik olulisemad arvutuskäigud, isegi siis, kui need lõppkokkuvõttes millegi eriti kasulikuni ei viinud. Samuti on ära seletatud olulisemate meetodite põhimõtted.

Töö esimeses osas esitatakse töö praktilise osa mõistmiseks hädavajalikud taustateadmised, kuid sinne kokkuvõtte ei pretendeeri mingil moel ammendavusele. Pea kõiki olulisemaid teemasid on piisava põhjalikkusega käsitletud näiteks raamatutes [2] ja [3]. Eestikeelse käsitluse võib leida töö autori juhendaja Stefan Groote loengukonspektidest [4, 5]. Peatükis 1 tehakse lühi-

¹Töös kasutatakse läbivalt sõna „mass“ vaid seisumassi tähenduses.

²Töö jaoks on olulised vaid artikli [1] peatükid 2 ja 3.

ke sissejuhatus kvantväljateooriasse ja selle kanoonilisse formalismi reaalarvuliste väärtustega skalaarvälja näitel. Tutvustatakse ka Diraci bispinorvälja, mis on NJL mudeli ainus komponentväli. Seejärel räägitakse põgusalt Feynmani diagrammidest, mis on abiks osakeste vaheliste interaktsioonide visualiseerimisel. Selgitatakse regulariseerimise ja renormeerimise mõisteid ning kirjeldatakse seost omaenergia ja dünaamilise massi vahel.

Peatükis 2 alustatakse NJL lagranžiaanist ning näidatakse, kuidas seda saab Fierzi teisen-duse abil viia teistsugusele kujule. Seejärel tuletatakse massilõhe võrrand lähtudes kahe punkti korrelatsioonifunktsioonist, mis kirjeldab välja väärtuste vahelist seost kahes aegruumi punktis. Kahe punkti korrelatsioonifunktsioonist massilõhe võrrandini jõudmiseks kasutatakse häiritus-teooriat ja Wicki teoreemi. Peatükis 3 näidatakse kõigepealt massilõhe võrrandis sisalduva integraali hajuvust, esitatakse äralõikega regulariseerimise tulemus ning rakendatakse dimen-sionaalse regulariseerimise meetodit. Jooksvalt esitatakse ka kasutatud meetodite selgitused. Siis tutvustatakse mittelokaalset vastastikmõju sisaldavat mittelokaalset NJL mudelit ning sel-lest inspireerituna rakendatakse mittelokaalse regulariseerimise meetodit. Lõpuks esitatakse erinevate renormeerimismeetodite tulemuste võrdlus graafiliselt ning arutletakse nende üle.

1 Teoreetiline taust

1.1 Kvantväljateooria

„Kvantväljateooria on ideede ja tööriistade kogum, mis ühendab endas tänapäeva füüsika kolme põhilist teemat: kvantteooriat, *välja* mõistet ja relatiivsuspriprintsipi.“ [2, lk xi]. Tänapäeva füüsikutel on raske hakkama saada, teadmata midagi kvantväljateooriast, olgu uurimisvaldkonnaks siis osakeste-, tuuma-, aatomi-, kondensaine- või astrofüüsika [2, lk xi]. Kõige tähtsam roll on aga kvantväljateoorial elementarosakeste füüsikas ning selle suurimaks saavutuseks võib pidada elementarosakeste standardmudelit. [3, lk 1] võtab kvantväljateooria põhilise seisukoha kokku nii: „Iga osake ja iga laine universumis on lihtsalt ergastus kvantväljas, mis on defineeritud kogu ajal ja ruumil.“ Sellest tulenevalt saab väga paljude füüsikaliste nähtuste kirjeldamiseks kasutada kvantväljateooria abi, mistõttu on see levinud tööriist kõigis eelpool nimetatud valdkondades. Üldrelatiivsusteooria kvantiseerimisest on pikka aega oodatud kandidaati nn kõiksusteooriale, mis ühendaks gravitatsiooni teiste vastastikmõjudega. Kas see on ka võimalik, on hetkel selgusetu, kuid sellele vaatamata on kvantväljateooria puhul tegu ühe tänapäeva kõige täpsemini testitud ja edukama füüsikateooriaga [3, lk 1].

Põhjus, miks elementarosakeste kirjeldamiseks on vaja *välja* mõistet, tuleb vajadusest ühildada kvantmehaanika erirelatiivsusteooriaga. Selle mõiste vajalikkust saab põhjendada mitmel viisil, aga üks lihtne näide, mis pärineb raamatust [2, lk 14] on järgmine. Kui uurida kvantmehaanikas vaba osakese levimise tõenäosust ühest aegruumi punktist teise, siis ilmneb, et see on nullist erinev ka ruumisarnaste intervallide jaoks, mis erirelatiivsusteooria kontekstis tähendaks põhjuslikkuse rikkumist. Kvantväljateooria abil saab näidata, et osakese levimine üle ruumisarnase intervalli on ekvivalentne antiosakese levimisega vastupidises suunas. Seega taanduvad osakese ja antiosakese levimise tõenäosused vastastikku välja ja põhjuslikkus säilib. See on tulemus, milleni üksikosakeste kvantmehaanikas jõuda ei saa.

Matemaatiliselt pisut komplitseeritud põhjendus, mis pärineb Laur Järve loengukonspektist [6] on järgmine. Kvantmehaanikas kirjeldavad sümmeetriateisendusi Hilberti ruumis lineaarsed ja unitaarsed (või antilineaarsed või antiunitaarsed) operaatorid, mis jätavad muutumatuks tõenäosustiheduse. Et muuta kvantmehaanika relativistlikuks, on vaja, et see alluks ka sümmeetriale Lorentzi teisenduste suhtes. Rühmateoorias saab näidata, et igale Lie rühmale, mille hulka kuulub ka Lorentzi rühm, vastab mõni unitaarne esitus. Kuna aga Lorentzi rühm on mitte-kompaktne (tema parameetrid on tõkestamata), siis peab tema unitaarne esitus olema tingimata

lõpmatumõõtmeline, mida füüsikas tuntaksegi väljana.

Järgnevalt tutvustatakse põgusalt kvantväljateooria olulisemaid põhimõtteid ning selle matemaatilist formalismi.

1.2 Kanooniline kvantiseerimine

Klassikaliseks väljaks nimetatakse funktsiooni, mis seab igale ruumi punktile vastavusse mingi ajast sõltuva välja väärtuse $\Psi(\vec{x}, t)$. Aja- ja ruumikoordinaadid võib võtta kokku ühtseteks aegruumikoordinaatideks x , mida ka edaspidi tehakse. See muudab oluliselt lihtsamaks teooria relativistliku käsitluse. Kui N -vabadusastmega süsteemi korral on süsteem täielikult kirjeldatud, kui on teada kõik tema üldistatud koordinaadid ja üldistatud kiirused, siis välja kui lõpmatu arvu vabadusastmetega süsteemi puhul on vaja teada selle väärtusi igas aegruumi punktis ning tuletisi kõikide koordinaatide järgi. See tähendab, et mõju avaldub kui

$$S = \int dt L = \int dt dx dy dz \mathcal{L}(\phi^a, \partial\phi^a) = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(\phi^a, \partial\phi^a), \quad (1.1)$$

kus \mathcal{L} nimetatakse lagranžiaani tiheduseks ning ϕ^a on erinevad väljad. Kõige lihtsam näide klassikalise väljast on skalaarväli $\phi(x)$, mis seab igale aegruumi punktile vastavusse reaalarvu. Olgu antud lagranžiaani tihedus³

$$\mathcal{L}_{\text{KG}}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} \left(\hbar^2 (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 c^2 \phi^2 \right), \quad (1.2)$$

millest saab tuletada süsteemi Euler-Lagrange'i võrrandi⁴

$$(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \phi(x) = 0. \quad (1.3)$$

Seda tuntakse Kleini-Gordoni võrrandina, mida võib vaadata kui relativistliku energia dispersiooniseose $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ üldistust kvantmehaanikale. See on relativistlik lainevõrrand, mille üldlahend avaldub seetõttu kõigi tasalainete superpositsioonina

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x/\hbar} + a^*(\vec{p}) e^{ip \cdot x/\hbar} \right) \Big|_{p^0 c = E(\vec{p})}, \quad (1.4)$$

kus $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ ning $a(\vec{p})$ ja $a(\vec{p})^*$ on kompleksarvud. Siiski ei õnnestu enamikke kvantmehaanilisi nähtuseid klassikalise väljateooria abil kirjeldada ning selleks on vaja välja

³Siin ja edaspidi lähtutakse Einsteini summeerimiskokkulepeest, mille järgi summeeritakse üle korduva indeksi olenemata sellest, kas see on üleval või all.

⁴Selles peatükis kasutatud valemite kujud pärinevad enamjaolt loengukonseptist [4].

mõistet kohandada. Igat tasalainet ehk võnkemoodi impulsiga \vec{p} võib vaadata kui harmoonilist ostsillaatorit sagedusega $E(\vec{p})$. Seega, et luua seos kvantmehaanikaga, piisab, kui asendada klassikaline harmooniline ostsillaator kvantmehaanilisega, kus kordajad $a(\vec{p})$ ja $a(\vec{p})^*$ on asendatud operaatoritega $a(\vec{p})$ ja $a(\vec{p})^\dagger$, mida nimetatakse vastavalt kao- ja tekkeoperaatoriteks. Need rahuldavad kommutaatorseost

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (1.5)$$

kus $\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y)\delta(p_z - p'_z)$ on kolmemõõtmeline Diraci deltafunktsioon. Seda lähenemist nimetatakse kanooniliseks või sekundaarseks kvantiseerimiseks. Lisaks sellele on ka teisi meetodeid, millest tuntuim on funktsionaalsete integraalide formalism, kuid käesolevas töös lähtutakse just kanoonilisest kvantiseerimisest.

Veel üks oluline suurus kvantväljateoorias on propagaator, mis kirjeldab osakese levimise tõenäosust ühest aegruumi punktist teise. Selle defineerimiseks on erinevaid võimalusi, kuid siin kasutatakse enimlevinud Feynmani propagaatorit⁵

$$\Delta_F(x - y) = \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar c}{p^2 - m^2c^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)/\hbar}, \quad (1.6)$$

kus $T\{\}$ tähendab ajalist korrastust ehk ajaliselt varasemad operaatorid on tõstetud paremale poole ning $i\epsilon$ on väike imaginaarne nihe. Selle tuletuskäigu võib leida näiteks raamatust [2, lk 29-31].

1.3 Fermionide kirjeldus

Kuigi ka skalaarväli on Higgsi välja näol standardmudelil olemas, siis kuna antud töös käsitletud mudel tegeleb just fermionidega, on antud lühikokkuvõtte ka Diraci välja teooriast. Diraci teooria loomist motiveerisid Kleini-Gordoni võrrandil leiduvad negatiivse energiaga lahendid, mis tulevad teist järku tuletistest. Selle vältimiseks mõtles P.A.M. Dirac välja võrrandi

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi(x) = 0, \quad (1.7)$$

mille ruutu võtmisel saadakse Kleini-Gordoni võrrand. Selle võrrandi saab tuletada kui liikumisvõrrandi Diraci lagranžiaani tihedusest

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi(x). \quad (1.8)$$

⁵Kui pole öeldud teisiti, siis tähistab ilma rajadeta integraal integraali $\int_{-\infty}^{\infty}$. Samuti tuleb integraali kordsus välja lugeda diferentsiaali astendajast.

Tegelikult on ka Diraci võrrandil olemas negatiivse energiaga lahendid, kuid erinevalt reaalsest skalaarväljast saab neid tõlgendada kui positiivse energiaga antiosakesi. Valemites (1.7) ja (1.8) tähistavad $\psi(x)$ spinoorvälja, mis kuulub Lorentzi rühma bispiinoresitusse (spinn 1/2), $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ tähistab kaasspiinorit ning γ^μ tähistab matrikseid, mis rahuldavad Cliffordi algebrat⁶

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu =: \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Diraci (standard) esituses on nende kuju järgmine:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ning

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

kus σ_i -sid nimetatakse Pauli matriksiteks. γ -matriksite omadused on olulised, sest need tagavad, et võrrandi (1.7) ruutu võtmisel saadakse (1.3). Samuti järeldub siit, et Diraci bispiinoril on 4 komponenti. Defineeritakse ka viies γ -matriks

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Samuti võib defineerida⁷

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.13)$$

Diraci väli kvantiseeritakse kui

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(b_i(\vec{p}) u_i(\vec{p}) e^{-iE(\vec{p})t/\hbar} + \tilde{b}_i^\dagger(-\vec{p}) v_i(-\vec{p}) e^{iE(\vec{p})t/\hbar} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \\ &= \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(b_i(\vec{p}) u_i(\vec{p}) e^{-ipx/\hbar} + \tilde{b}_i^\dagger(\vec{p}) v_i(\vec{p}) e^{ipx/\hbar} \right) \Big|_{p^0 c = E(\vec{p})}, \\ \bar{\psi}(t, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left(\tilde{b}_i(\vec{p}) \bar{v}_i(\vec{p}) e^{-ipx/\hbar} + b_i^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_i(\vec{p}) e^{+ipx/\hbar} \right) \Big|_{p^0 c = E(\vec{p})}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

⁶Kasutatakse meetrika signatuuri $\text{diag}(+, -, -, -)$.

⁷Siin lähtutakse $\sigma^{\mu\nu}$ normeeringust, mis tagab normeerimistingimuse kehtivuse Fierzi teisenduse jaoks (vt seksioon 2.1), aga on ka muid konventsioone.

kus u_i ja v_i tähistavad baasspiinori komponente ning b_i^\dagger, b_i ja $\tilde{b}_i^\dagger, \tilde{b}_i$ tekke- ja kaooperaatoreid vastavalt osakeste ja antiosakeste seisundite jaoks, mis rahuldavad antikommutaatorsuhteid

$$\{b_i(\vec{p}), b_j^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi\hbar)^3 \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad \{\tilde{b}_i(\vec{p}), \tilde{b}_j^\dagger(\vec{p}')\} = (2\pi\hbar)^3 \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.15)$$

Kõik ülejäänud operaatorid on antikommuteeruvad. Antikommuteeruvus on vajalik, et vaakumseisundi energia oleks alt tõkestatud, aga sellel on ka väga olulisi järeltusi, nagu näiteks Pauli printsiiip

$$b_i^\dagger(\vec{p})| \vec{p}, i \rangle = b_i^\dagger(\vec{p}) b_i^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \frac{1}{2} \{b_i^\dagger(\vec{p}), b_i^\dagger(\vec{p})\}|0\rangle = 0. \quad (1.16)$$

(1.16) on alus Fermi-Diraci statistikale, mis näitab, et osake, mis rahuldab Diraci võrrandit, on fermion. Siit järeltub ka, et indeks i tähistab spinni. Olgu veel toodud ka Feynmani propagaator Diraci välja jaoks

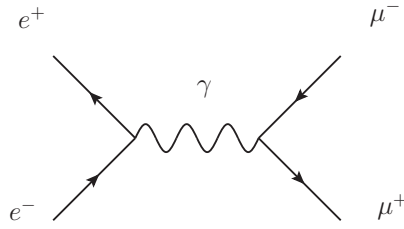
$$\begin{aligned} S_F^{ab}(x-y) &= \langle 0|T\{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\}|0\rangle = (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)_{ab} \Delta_F(x-y) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar c(\not{p} + mc)_{ab}}{p^2 - m^2c^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)/\hbar}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

kus $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu$ ning a ja b on spiinori komponente tähistavad indeksid. See tähendab, et Diraci propagaator on maatriks.

1.4 Feynmani diagrammid

Feynmani diagrammiks nimetatakse piktogrammi, mis kirjeldab osakeste vahelisi interaktsioone. Käesolevas töös kasutatavas kvantväljateooria kanoonilises formalismis tähistavad need formaalselt S-maatriksi ehk hajumismaatriksi erinevat järku häiritusliikmeid [3, lk 175]. Diagrammide lugemise ehk aja suund on kokkuleppeline, antud töös loetakse neid vasakult paremale. Joonte kokkupuutepunkte nimetatakse tippudeks.⁸ Vasakpoolsetest tippudest vasakule jäävad jooned tähistavad esialgseid osakesi ning parempoolsetest paremale jäävad lõplikke osakesi. Ühiselt nimetatakse neid välisjoonteks ning need vastavad reaalsele osakestele. Tippude vahele jäävad jooned tähistavad aga virtuaalseid ehk mittevaadeldavaid osakesi.

⁸Siin kasutatud eestikeelne terminoloogia pärineb raamatust [7, lk 252-253].



Joonis 1: Elektron-positronpaari annihileerumine ja müüon-antimüüonpaari teke virtuaalse footoni vahendusel.

Kokkuleppeliselt tähistatakse veel fermionijooni nooltega, kus tagurpidi nool vastab antiosakesele. See sobib kokku interpretatsiooniga, kus antiosakesed on ekvivalentsed ajas tagurpidi liikuvate osakestega [3, lk 175]. Täpsemalt näitab noole suund fermionarvu voolu suunda. Vektorbosoneid tähistatakse laineliste joontega. Feynmani diagrammid on äärmiselt kasulikud tööriistad, sest need aitavad visualiseerida keerulisi interaktsioone ning on abiks pikkade avaldiste kirjapanekul, mis on vajalikud näiteks hajumisamplituudi arvutamise juures. Samuti on tihti võimalik ühe diagrammi abil kujutada väga suurt arvu (suurusjärgus $\sim 10^4$) ekvivalentseid interaktsioone, mis annavad tõenäosusamplituudi sama panuse.

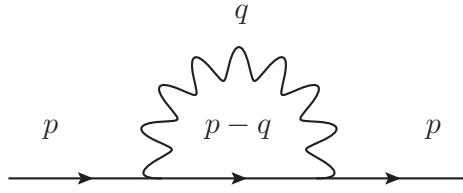
Käesolevas töös piisab kahe punkti korrelatsioonifunktsioonist, mis tähendab, et vaadatakse diagramme, millel puuduvad välisjooned. Kahe punkti korrelatsioonifunktsioon

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle \quad (1.18)$$

on sarnane mõiste propagaatorile, kuid vaba teooria vaakumolekud $|0\rangle$ on siin asendatud interakteeruva teooria vaakumolekutega $|\Omega\rangle$. See tähendab, et Diraci lagranžiaani tihedusele (1.8) on lisatud osakeste vahelisi interaktsioone kirjeldav liige (samuti võib olla kadunud massi liige). Korrelatsioonifunktsiooni abil saab, kasutades LSZ-taandamisvalemit, leida ka S-maatriksi elemendid ning arvutada hajumisamplituude (vt nt [2, lk 222-230]).

1.5 Regulariseerimine ja renormeerimine

Kuigi häiritusteooria on väga kasulik tõenäosusamplituudide arvutamise juures, kaasneb sellega ka üks suur probleem. Nimelt teatud tüüpi interaktsioonide puhul, kus Feynmani diagrammides esinevad nõ silmused, tekivad päratute integraalide arvutamisel hajuvused, sest integreeritakse üle kõikvõimalike impulsside. See tähendab, et energiad võivad kasvada lõpmata suureks, mis kahtlemata pole kooskõlas reaalse maailmaga.



Joonis 2: Silmusega diagramm, p ja q tähistavad impulsse

Selliseid energiasid, mis tekivad osakeste interaktsioonidel virtuaalsete osakestega, nimetatakse osakeste omaenergiateks. Need on olulised dünaamilise massi tekke juures, mida käsitletakse hiljem. Diagrammides tekkivate lõpmatustega tegelemiseks on olemas mitmeid meetodeid, mida koondnimetuse all tuntakse kui renormeerimismeetodeid. Sealjuures jaotub hajuvustega tegelemine kaheks etapiks, milleks on regulariseerimine ja renormeerimine.

Regulariseerimine tähendab matemaatilist trikki või lihtsustust hajuvustega tegelemiseks. Näiteks võib asendada pärdus integraalis \int_0^∞ ülemise raja mingi konstandiga Λ , mida nimetatakse regulaatoriks või siis omistada mõnele muidu massita osakesele massi. Kuigi selline tegevus tundub esmapilgul vastuoluline, võib see olla füüsikaliselt täiesti põhjendatud. Näiteks võib Λ tähistada energiataset, kust alates mingi teooria lõpetab kehtivuse. Samas kaotab teooria sellisel juhul muuhulgas oma Lorentzi invariantuse. Selliseid väljateooriaid, mis on loodud kehtima ainult kindla energiavahemiku jaoks, nimetatakse efektiivseteks ja nende hulka kuulub ka antud töös käsitletud NJL mudel. Teine põhjus, miks regulariseerimine on õigustatud, viib järgmise sammu juurde, milleks on renormeerimine.

Renormeerimine tähendab teooria parameetrite (nt mass, laeng) kohandamist nii, et arvutuste käigus leitud füüsikalised suurused (nt hajumisristlõige) oleksid lõplikud ning kooskõlas eksperimendiga. Olgu antud näiteks mingis teoorias esinev osake hajuva massiga m_0 . Postuleeritakse, et leidub mingi kordaja Z_m nii, et $m_0 = Z_m m_r$, kus m_r on reaalne, eksperimendis mõõdetav mass. Nüüd tuleb ainult leida Z_m , kasutades erinevaid füüsikalisi kaalutlusi näiteks osakese interaktsioone teiste, virtuaalsete osakestega. Sealjuures on oluline, et parameeter Z_m sõltuks mingist skaleerimistegurist μ , mida nimetatakse renormeerimise skaleerimisteguriks. μ toob sisse sõltuvuse renormeerimise skaalast. Kui ka seosekonstant g_0 , mis määrab interaktsiooni tugevuse, sõltub skaleerimistegurist μ , sõltub ka m_0 parameetrist μ , ehk valides sobivalt renormeerimisteguri Z_m , taanduvad hajuvused välja ning saadakse lõplik mass. Kuigi selline lähenemine võib jällegi tunduda meelevaldsena, on renormeerimine ennast igati õigustanud, ennustades eksperimentaalselt ülitäpseid tulemusi. Tänapäeval nähakse renormeerimise efek-

tiivsuses hoopis ühte looduse tähtsat omadust – mastaabisõltuvust. See tähendab, et füüsikalised suurused nagu näiteks seosekonstandid sõltuvad tugevalt energiatasemest.

Tulles tagasi regulariseerimise juurde, siis teatud teooriate puhul pärast renormeerimist sõltuvus regulariseerimismeetodist kaob. Selliseid teooriaid nimetatakse renormeeritavateks ning nende puhul on regulariseerimise eesmärk hajuvused „üles leida“ ning kättesaadavaks teha. Teooria renormeeritavus on seotud sellega, kas häiritusrea kõrgemate liikmetega tuleb hajuvusi juurde või mitte ehk kas teooria renormeerimiseks piisab lõplikust arvust renormeerimisteguritest. Näiteks osakestefüüsika standardmudel on renormeeritav, NJL mudel aga mitte. Tuleb märkida, et mõisted „efektiivne teooria“ ja „mitterenormeeritav teooria“ pole ekvivalentsed, see tähendab, et leidub ka efektiivseid teooriaid, mis on renormeeritavad. Lisaks sellele saab ka rangetes mõttes „mitterenormeeritavaid“ teooriaid renormeerida, kuid sellisel juhul tuleb arvestada piiratud täpsusega ja piirduda häiritusrea madalamat järku liikmete renormeerimisega. Mitterenormeeritavate teooriate puhul sõltuvad seega ka tulemused renormeerimismeetodi valikust, mistõttu on nende valikul olulised füüsikalised kaalutlused. Alati pole aga mitterenormeeritavate teooriate renormeerimine võimalik või vajalik ning saab piirduda ainult regulariseerimisega.

Kuigi fundamentaalsetelt väljateooriatelt eeldatakse reeglina renormeeritavust, ei tähenda teooria mitterenormeeritavus selle kasutust – tuleb teada lihtsalt selle täpsuse piire. Tänapäeval nähakse ka efektiivseid teooriaid üldiselt heas valguses, sest ka praegu teadaolevalt kõige fundamentaalsemates väljateooriates endis nähakse kõigest efektiivset versiooni mingist suuremast ühendteooriast [8, lk 154]. Järelikult võib piir efektiivse ja fundamentaalse teooria vahel olla hägune. Näiteks võib tuua ka kvantkromodünaamika – tugeva vastastikmõju fundamentaalse teooria, mis ei anna tulemusi madalate energiatega juures, sest suure seosekonstandi väärtuse tõttu ei saa häiritusteooriat rakendada. Just siin aga tulevad appi efektiivsed teooriad, nende hulgas ka NJL mudel, mis suudavad kirjeldada tugeva vastastikmõju protsesse just madalate energiatega juures.

Töös kasutatud renormeerimismeetodeid on lähemalt tutvustatud vastavate paragrahvide juures.

1.6 Dünaamiline mass ja Nambu–Jona-Lasinio mudel

Dünaamiliseks massiks nimetatakse osakestefüüsikas liitosakese massi, mis tekib koostisosakeste kineetiliste energiatega ja omavaheliste interaktsioonide tõttu. Seda põhjendab erirelatiivsusteooriast tulenev massi ja energia ekvivalentsusprintsip. Näiteks prootoni mass on ligikaudu

938,272 MeV/c² [9], samal ajal kui selle moodustavad 2 u- ja 1 d-kvark annavad kokku vaid umbes 9,02 MeV/c² [10]. Kuigi kvargid ise omandavad massi läbi interaktsioonide Higgsi väljaga, moodustab selle mehhanismi kaudu tekkiv mass ainult ligikaudu 2% nukleonide moodsed massidest [11]. Kõige täpsemini tänapäevastest mudelitest kirjeldab hadronite sees toimuvaid tugeva vastastikmõju protsesse kvantkromodünaamika, kuid nagu juba eelnevalt mainitud, pole selle raames võimalik rakendada häiritusteooriat madalate energiatega juures, mistõttu on abiks efektiivsed teooriad.

NJL mudelis selgitab dünaamilise massi teket atraktiivne fermionide nelik-interaktsioon. Nelik-interaktsioon ei tähenda mitte nelja fermioni üksteise poole tõmbumist, vaid formaalselt tähendab see, et lagranžiaani tiheduses on liige kujul $g_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$ või midagi analoogset. Füüsikaliselt tähendab see, et fermion ja antifermion (antud juhul võiksid need olla kvark ja antikvark) tunnevad vastastikmõju ilma igasuguse vaheosakeseta. Atraktiivne tähendab, et neil on energeetiliselt soodsam olla lähestikku. Tegelikult looduses fermionide vahetut interaktsiooni nähtud ei ole ning nelik-interaktsioon on lihtsustatud mudel, kus vaheosakesed on kõrvale jäetud. Selle lähenemise peamine eelis seisneb selles, et see lubab tekitada fermioni silmusega diagramme, mis väljendavad kvarkvälja „eneseinteraktsioone“. Tegelikult vahendavad seda vastastikmõju aga gluoonid. Sellest eneseinteraktsioonist tulenevat massipanust kirjeldabki eespool mainitud omaenergia. Omaenergiat tähistatakse

$$\Sigma = m - m_0, \tag{1.19}$$

kus m tähistab reaalselt moodsed massi ning m_0 nn paljast massi,⁹ mis on osakesel enne interaktsioone. Et põhjendada konkreetsemalt omaenergia seost massiga, tuleb appi võtta propagaatori mõiste. Mnemooniliselt kujutab osakese levimist ühest aegruumi punktist teise diagramm, kus iga järgnev liidetav tähistab väikest omaenergia parandit ehk mõnda silmusdiagrammi.



Joonis 3: Eneseinteraktsioonide Dysoni rida

Sellist parandite rida nimetatakse Dysoni reaks. Kasutades fermionpropagaatori jaoks alter-

⁹Ingl k *bare mass*. Kuigi see võib tunduda toortõlkena, kasutatakse kvantväljateooria kontekstis tihti selle vastandina ka sõna *dressed* ehk riietatud. Nt *dressed particle* ehk riietatud osake, mis on paljas osake ümbritsetud virtuaalsetest osakestest. Seepärast võiks ka „paljas“ olla parim eestikeelne vaste.

natiivset kuju

$$\frac{i\hbar c(\not{p} + m_0c)}{p^2 - m_0^2c^2} = \frac{i\hbar c(\not{p} + m_0c)}{(\not{p} - m_0c)(\not{p} + m_0c)} = \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c}, \quad (1.20)$$

kus lihtsuse mõttes on ära jäetud imaginaarne nihe $+i\epsilon$, saab arendada Dysoni ritta ka fermion-propagaatori

$$\begin{aligned} S(\not{p}) &= \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} + \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{i\hbar c} \right) \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} + \\ &\quad + \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{i\hbar c} \right) \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{i\hbar c} \right) \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} + \dots \\ &= \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} \left(1 + \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0c} + \left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0c} \right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c} \left(1 - \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m_0c} \right)^{-1} = \frac{i\hbar c}{\not{p} - m_0c - \Sigma(\not{p})}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

kus viimasel real on kasutatud koonduva geomeetrilise rea summa valemit ning arvestatud, et $i\hbar c/(\not{p} - m_0c)$ ja $\Sigma(\not{p})$ kommuteeruvad. Niimoodi on jõutud uue propagaatorini, mida võib vaadelda kuuluvana fermionile massiga $m = m_0 + \Sigma(\not{p})/c$, millest tuleneb jällegi, et $\Sigma(\not{p}) \approx m - m_0$. Nüüd jääb üle ainult omaenergia panuse arvutamine.

Nagu eespool mainitud, põhineb NJL mudel analoogial BCS teooriaga ülijuhtivusest. BCS teoorias käsitletakse ülijuhtivuse tekitajana nn Cooperi paaridest tekkinud kondensaati. Cooperi paari moodustavad kaks elektroni (spinniga 1/2 osakest), mis teatud tingimustel kombineerudes annavad täisarvulise spinniga liitosakese. Paljude paaride tekkimise korral tekib süsteemi lubatud energiaseisunditesse lõhe, mis tähendab, et iga ergastus vajab mingit minimaalset energiat. Viimane ongi põhjuseks ülijuhtivuse nähtusele, sest väikese energiaga ergastused nagu näiteks elektronide hajumine pole lubatud [12, 13].

NJL mudeli vasteks Cooperi paaridele on Diraci fermionidest ja antifermionidest moodustuv kondensaat ning energiapilu analoogiks massilõhe, mis on dünaamiliselt genereeritud panus osakese kogumassi. Teoreetiliselt kirjeldab vastavaid protsesse mingi kalibratsioonisümmeetria spontaanne rikkumine. BCS teoorias rikub kondensaat globaalset $U(1)$ sümmeetriat, mille tulemusel tekib Goldstone'i teoreemi järgi massita skalaarne osake. NJL mudeli puhul on tegu γ_5 ehk kiraalse sümmeetriaga, mille rikkumisel tekib nullise spinniga pion [1]. NJL mudel on ka ajalooliselt väga oluline, sest see tõi osakestefüüsikasse spontaanse sümmeetria rikkumise idee, millel muuhulgas põhineb ka Higgsi mehhanism [14, lk 23]. Kuigi NJL mudel on väga rikalik, võimaldades tuletada erinevaid hadronite olekuid, piirduakse käesolevas töös massilõhe võrrandi uurimisega ning mudeli teised rakendused võivad olla töö edasisteks arendusteks.

2 Massilõhe võrrandi tuletamine

2.1 Fierzi teisendus

Lähtudes artikli [1] konventsioonist, kasutatakse töö praktilises osas loomulikke ühikuid ($c = 1$, $\hbar = 1$). Artiklis [1] toodud lagranžiaani tihedus on¹⁰

$$\mathcal{L}_{NJL} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2], \quad (2.1)$$

kus interaktsiooniliikme $\mathcal{L}_{int} = g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2]$ võib kirjutada ümber kasutades Fierzi teisendust, kui

$$-\frac{1}{2}g_0[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2]. \quad (2.2)$$

Fierzi teisendus põhineb tõsiasjal, et lineaarselt sõltumatute maatriksite hulk

$$\Gamma^A = \{\mathbb{I}_4, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\} \quad (2.3)$$

moodustab baasi 4×4 komplekssete maatriksite jaoks. Kasutades seda omadust, võib esitada kahe spiniori ja maatriksi korrutise ehk bilineaarse vormi ruudu $(\bar{\psi}\Gamma^A\psi)^2$ teiste samasuguste ruutude summana, kus maatriksid on erinevad. Teisenduse kordajad on võimalik määrata järgnevalt tabelist.

Korrutis	S	V	T	A	P
S =	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
V =	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
T =	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
A =	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1
P =	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Tabel 1: Tabel Fierzi teisenduse kordajate määramiseks (raamatust [15, lk 322])

Siin

$$\begin{aligned} S &= (\bar{\psi}\mathbb{I}_4\psi)(\bar{\psi}\mathbb{I}_4\psi), & V &= (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi), \\ T &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi\right), \\ A &= (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi), & P &= (\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\psi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹⁰Artiklis [1] kasutatakse eukleidilist meetrikat, seega on siin kasutatud meetrika konventsiooni tõttu asendatud -1 i -ga.

tähistavad vastavalt skalaar-, vektor-, tensor-, aksiaalvektor- ja pseudoskalaarvoolusid. Lisaks teisendamisele erinevate voolude vahel ning avaldiste lihtsustamisele on Fierzi teisendus kasulik kvantkromodünaamikas, sest lubab teisendada värvi singletid lõhna singlettideks ja vastupidi. Käesoleva töö koostamisel aitas Fierzi teisendus mõista artikli [1] massilõhe võrrandi tuletuskäiku, mistõttu on sellest ka natuke pikemalt juttu. Järgneb lühike selgitus tabelis olevate kordajate määramise kohta, täpsem arvutuskäik on toodud raamatus [15, lk 324-325].

Suvalise kompleksse 4×4 maatriksi M võib esitada maatriksite Γ^A lineaarkombinatsioonina

$$M = C_A \Gamma^A. \quad (2.5)$$

Kui panna tähele, et kehtib normeerimistingimus

$$\text{Tr}[\Gamma^A \Gamma_B] = 4\delta_B^A \quad (2.6)$$

(vt [16]), kus alumine indeks maatriksi puhul tähistab hermiitilist konjugatsiooni, saadakse

$$M = C_A \Gamma^A \quad \left| \quad \text{Tr}[(\) \Gamma_B] \right. \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \text{Tr}[M \Gamma_B] = \text{Tr}[C_A \Gamma^A \Gamma_B] = 4C_B. \quad (2.8)$$

Sellest järedub, et

$$C_A = \frac{1}{4} \text{Tr}[M \Gamma_A] \quad , \quad M = \frac{1}{4} \text{Tr}[M \Gamma_A] \Gamma^A. \quad (2.9)$$

Indekstähistuses

$$M_k^i = \frac{1}{4} (M_m^l \Gamma_{Al}^m) \Gamma_k^{Ai}. \quad (2.10)$$

Viimane seos kehtib parajasti siis, kui

$$\frac{1}{4} \Gamma_{Al}^m \Gamma_k^{Ai} = \delta_k^m \delta_l^i. \quad (2.11)$$

Tähistades viimases avaldises $m \rightarrow m'$ ja $l \rightarrow l'$ ning korrutades tensoriga $F_{m'}^m G_l^{l'}$, saadakse

$$F_k^m G_l^i = \frac{1}{4} (F \Gamma_A G)_l^m \Gamma_k^{Ai}. \quad (2.12)$$

Nüüd tuleb avaldis veel läbi korrutada spiinoritega $\bar{\psi}^k, \psi_m, \bar{\psi}^l, \psi_i$ ning saadakse

$$\bar{\psi}^k F_k^m \psi_m \bar{\psi}^l G_l^i \psi_i = -\frac{1}{4} \bar{\psi}^l (F \Gamma_A G)_l^m \psi_m \bar{\psi}^k \Gamma_k^{Ai} \psi_i, \quad (2.13)$$

kus märk muutus avaldise paremal pool, sest spiinorikomponendid $\bar{\psi}^k$ ja $\bar{\psi}^l$ vahetasid kohad. Viimase võrduse võib kirjutada ka kujul

$$\bar{\psi}^k F_k^m \psi_m \bar{\psi}^l G_l^i \psi_i = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \Delta_A \bar{\psi}^l (F\Gamma^A G)_l^m \psi_m \bar{\psi}^k \Gamma_k^{Ai} \psi_i, \quad (2.14)$$

kus $\Delta_A = 1$, kui Γ^A on hermiitiline ja $\Delta_A = -1$, kui Γ^A on antihermiitiline. Kui nüüd asendada F ja G mingite maatriksitega hulgast Γ^A ning kasutada γ -maatriksite omadusi, on lihtne määrata kordajad tabelis 1. Interaktsiooniliige valemis (2.1), kirjutatuna lahti tabelis toodud kordajate abil, on

$$\begin{aligned} g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] &= g_0(S - P) \\ &= g_0\left(-\frac{1}{4}S - \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}V - \frac{1}{4}T + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}P\right) \\ &= -g_0\left(\frac{1}{2}V - \frac{1}{2}A\right) = -\frac{1}{2}g_0[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Kombineerides võrduse (2.15) vasakut ja paremat poolt saab kirjutada interaktsiooniliikme samuti kujul

$$\frac{1}{2}g_0(S - P) - \frac{1}{2}g_0\left(\frac{1}{2}V - \frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2}g_0\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2\right]. \quad (2.16)$$

Omaenergia panuse arvutamisel lähtutakse just viimasest kujust, sest seda on tehtud ka artiklis [1].

2.2 Omaenergia

Artiklis [1] on omaenergia arvutamiseks kasutatud üldistatud Hartree-Focki meetodit, mis oli algselt loodud ülijuhtivuse teooria jaoks. Siiski pole arvutuskäiku ennast näidatud, vaid on esitatud ainult tulemus. Järgnevalt näidatakse, et sama tulemuseni on võimalik jõuda ka lähtudes kahe punkti korrelatsioonifunktsioonist ja kasutades kvantväljateoorias standardset meetodit häiritusliikmete arvutamiseks Wicki teoreemi abil.

Et jõuda omaenergia ning massilõhe arvutamise juurde, tuleb kõigepealt kirja panna kahe punkti korrelatsioonifunktsioon, mis kirjeldab välja väärtuste vahelist seost kahes aegruumi punktis. Kõige üldisemal kujul võib selle spiinorvälja jaoks kirja panna järgmiselt:

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \psi_I(x) \bar{\psi}_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}, \quad (2.17)$$

kus H tähistab hamiltoniaani ning alaindeks I interaktsioonipilti. Valemi (2.17) tuletuskäigu võib leida näiteks [2, lk 82-87]. Kaalutlustel, mida samuti käsitletakse raamatus [2], taandub hiljem murru nimetaja välja, seega piisab, kui vaadata ainult lugejat. Edaspidi kaotatakse lihtsustuse mõttes alaindeks I ning samuti olgu märgitud, et $\mathcal{L}_{int} = -\mathcal{H}_{int}$. Arendades eksponendi ritta ja vaadates kahte esimest liiget, saadakse

$$\langle 0|T \left\{ \psi(x)\bar{\psi}(y) + \psi(x)\bar{\psi}(y) \left[-i \int dt H_I(t) \right] \right\} |0\rangle, \quad (2.18)$$

millest esimene liige annab vaba välja tulemuse, mis omaenergiasse panust ei anna, teine aga huvipakkuva

$$\begin{aligned} \langle 0|T \left\{ \psi(x)\bar{\psi}(y) \left(\frac{ig_0}{2} \right) \int d^4z \left[(\bar{\psi}(z)\psi(z))^2 - (\bar{\psi}(z)\gamma_5\psi(z))^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}(\bar{\psi}(z)\gamma_\mu\psi(z))^2 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}(z)\gamma_\mu\gamma_5\psi(z))^2 \right] \right\} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Selle võib jagada neljaks osaks, mida kõiki hiljem kasutatakse, kuid näitlikkuse huvides vaadatakse hetkel ainult vektorliiget

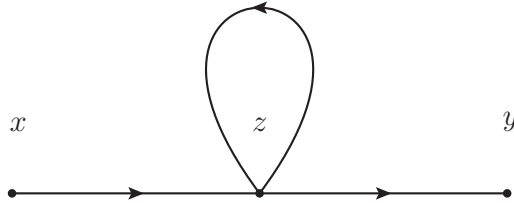
$$\langle 0|T \left\{ \psi(x)\bar{\psi}(y) \left(\frac{ig_0}{2} \right) \int d^4z \left[-\frac{1}{2}(\bar{\psi}(z)\gamma_\mu\psi(z))^2 \right] \right\} |0\rangle. \quad (2.20)$$

Wicki teoreem lubab esitada ajaliselt korrastatud operaatorite korrutise normaalkorrastatud korrutiste summana, kus liidetavateks on kõikvõimalikud ahendused kahe operaatori vahel. Normaalkorrastus tähendab, et kõik tekkeoperaatorid asuvad kaooperaatoritest vasakul. Alles jäävad ainult liikmed, kus pole ahendamata operaatoreid, sest need annavad vaakumolekule mõjudes nulli ja igale ahendusele vastab Feynmani propagaator. Samuti kaovad ära spiiinor-spiinor ja antispiinor-antispiinor ahendused, mille väärtuseks on null. Seega koos spiiinorindeksitega võib

(2.20) kirjutada lahti kui

$$\begin{aligned}
& \langle 0|T \left\{ \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \left(\frac{ig_0}{2} \right) \int d^4z \left[-\frac{1}{2} (\bar{\psi}_c(z) (\gamma_\mu)_{cd} \psi_d(z)) (\bar{\psi}_e(z) (\gamma^\mu)_{ef} \psi_f(z)) \right] \right\} |0\rangle \\
& = - \left(\frac{ig_0}{4} \right) \left[S_F(x-y)_{ab} \int d^4z (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{dc} (\gamma^\mu)_{ef} S_F(z-z)_{fe} \right. \\
& \quad - S_F(x-y)_{ab} \int d^4z (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{de} (\gamma^\mu)_{ef} S_F(z-z)_{fc} \\
& \quad + \int d^4z S_F(x-z)_{ac} (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{de} (\gamma^\mu)_{ef} S_F(y-z)_{fb} \\
& \quad - \int d^4z S_F(x-z)_{ac} (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{fe} (\gamma^\mu)_{ef} S_F(y-z)_{db} \\
& \quad - \int d^4z S_F(x-z)_{ae} (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{dc} (\gamma^\mu)_{ef} S_F(y-z)_{fb} \\
& \quad \left. + \int d^4z S_F(x-z)_{ae} (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{fc} (\gamma^\mu)_{ef} S_F(y-z)_{db} \right], \quad (2.21)
\end{aligned}$$

kus märgimuutused tulevad sellest, et normaalkorrastuse tõttu on kõik fermionikomponendid antikommuteeruvad. Esimese kahe liikme puhul on tegu kahe ühendamata diagrammi summaga ehk nn vaakummulliga, mille puhul saab näidata, et need taanduvad valemi (2.17) paremal pool oleva murru nimetaja vastu [2, lk 95-99]. Seega vaadatakse ainult ülejäänud liidetavaid. Diagrammiliselt on need kujutatud joonisel 4.



Joonis 4: Eneseinteraktsiooni diagramm

Kuna huvi pakub ainult eneseinteraktsioonist tekkiv panus, siis tähistatakse

$$\begin{aligned}
\Sigma_V &:= -i \frac{ig_0}{4} \left[(\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{de} (\gamma^\mu)_{ef} - (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{fe} (\gamma^\mu)_{ef} \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{dc} (\gamma^\mu)_{ef} + (\gamma_\mu)_{cd} S_F(z-z)_{fc} (\gamma^\mu)_{ef} \right] \\
&= \frac{g_0}{2} (-\gamma_\mu \text{Tr}[S_F(0)\gamma^\mu] + \gamma_\mu S_F(0)\gamma^\mu) \\
&= -\frac{g_0 i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu \text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\mu]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{g_0 i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu (\not{p} + m)\gamma^\mu}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{g_0 i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4\not{p}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{g_0 i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4m - 2\not{p}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= g_0 i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

kus kordaja i tuleb nõudest, et omaenergia peab olema reaalne ja positiivne. Siinkohal tasub märkida, et kuigi neile vastab sama diagramm, on siin tegu kahte tüüpi omaenergia panustega, millest üks annab jälje üle spiinorindeksite ja teine mitte. Esimene küll antud juhul kaob, kuid üldjuhul see nii pole. Siin ja edasises arvutuskäigus on kasutatud järgnevaid γ -maatriksite omadusi.

1. $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}_4$
2. $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$
3. $\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$
4. $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$
5. $\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0$
6. Jälg paaritu arvu γ^μ -de korrutisest on null
7. Jälg paaritu arvu γ^μ -de ja γ^5 korrutisest on null
8. $(\gamma_5)^2 = \mathbb{I}_4$
9. $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$

Samuti kaovad rajade sümmeetrilisuse tõttu kõik integraalid, kus lugejas on ainult \not{p} korda mingi arv. Tehes läbi analoogse arvutuskäigu teiste voolude jaoks, saadakse

$$\begin{aligned}
\Sigma_S &= g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{I} \text{Tr}[(\not{p} + m)\mathbb{I}]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{I}(\not{p} + m)\mathbb{I}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{3m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_P &= -g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_5 \text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma_5]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_5(\not{p} + m)\gamma_5}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= 0 + g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_A &= \frac{g_{0i}}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu \gamma_5 \text{Tr}[(\not{p} + m)\gamma^\mu \gamma_5]}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{g_{0i}}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu \gamma_5 (\not{p} + m) \gamma^\mu \gamma_5}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= 0 - \frac{g_{0i}}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-4m - 2\not{p}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Omaenergia kokkuvõttes:

$$\Sigma = \Sigma_S + \Sigma_P + \Sigma_V + \Sigma_A = g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{8m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.26}$$

Kirjutatuna lahti esialgsete voolude kaudu:

$$2(\Sigma_V + \Sigma_A) = g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{8m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.27}$$

$$2(\Sigma_S + \Sigma_P) = g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{8m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.28}$$

Ehk omaenergia on invariantne Fierzi teisenduste suhtes, mis oligi oodatav tulemus. Kasutades seost (1.19) ning võttes $m_0 = 0$, saadakse valemist (2.26)

$$m = g_{0i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{8m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.29}$$

mis ühtib massilõhe võrrandiga (3.6) artiklis [1] (meetrika konventsiooni täpsusega). Siinjuures väärib märkimist, et kuigi tulemus (2.26) ühtib omaenergia avaldisega (3.5) artiklis [1], siis valem (3.4) samas artiklis, mis väljendab sama tulemust koordinaadiruumis, on esitatud pisut teistsugusel kujul kui siin leitud. Nimelt on seal ära jäetud mittejälgelised panused ning ülejäänud on korrutatud kahega. Sellisel juhul on tulemus küll sama, aga panuse annab ainult skalaarvool. See tuleneb Hartree-Focki meetodi omapärast, kus jäljega osa nimetatakse Hartree diagrammiks ja jäljeta osa Focki diagrammiks [17]. Keskmise välja lähenduses (ingl *mean field approximation*), mida kasutatakse palju ülijuhtivuse teoorias, jääb alles ainult Hartree osa.

3 Regulariseerimine ja renormeerimine

Esmalt proovitakse leida integraali

$$\Sigma = \frac{8g_0 i}{(2\pi)^4} \int \frac{m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} d^4 p \quad (3.1)$$

väärtust tavapäraste meetodite abil.¹¹ Cauchy integraalteoreemi tõttu võib p_0 jaoks asendada integreerimisrajad $-\infty$ ja ∞ rajadega $-i\infty$ ja $i\infty$. Tehes muutujavahetuse $p_0 \rightarrow ip_0$, saab 4-vektori ruudu Minkowski ruumis $p_M^2 = p_0^2 - \vec{p}^2$ asendada 4-vektori ruuduga eukleidilises ruumis $-p_E^2 = -p_0^2 - \vec{p}^2$. Samuti võib jätta ära imaginaarse nihke $i\epsilon$, sest integreerimisteed on nüüd poolustest kaugel. Seda meetodit nimetatakse Wicki pöördeks. Wicki pöörde abil saadakse valemist (3.1)

$$\Sigma = \frac{8g_0 i}{(2\pi)^4} \int \frac{m}{p_M^2 - m^2 + i\epsilon} d^4 p_M = \frac{8g_0}{(2\pi)^4} \int \frac{m}{p_E^2 + m^2} d^4 p_E. \quad (3.2)$$

Kuna integraal on sümmeetriline, ehk sõltub ainult 4-vektori p pikkusest, on edasiseks arvutamiseks kasulik üle minna 4-mõõtmelisesse polaarkoordinaatidesse. Siis

$$d^4 p = \kappa^3 d\kappa d\Omega_3, \quad (3.3)$$

kus $\kappa := |p_E|$ ja $d\Omega_3$ on ühik 3-sfääri pindalaelement ning

$$\Omega_3 = \int d\Omega_3 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2, \quad (3.4)$$

kus $\Gamma(z)$ on Euleri gammafunktsioon, mis positiivsete, täisarvuliste argumentide korral annab väärtuseks $\Gamma(n) = (n-1)!$. Seega saadakse

$$\Sigma = \frac{8g_0}{(2\pi)^4} \int \frac{m}{p_E^2 + m^2} d^4 p_E = \frac{16g_0\pi^2 m}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{\kappa^3}{\kappa^2 + m^2} d\kappa, \quad (3.5)$$

mida saab veel lihtsustada tehes muutujavahetuse

$$u := \kappa^2 + m^2, \quad du = 2\kappa d\kappa \Rightarrow \kappa^3 d\kappa = \frac{1}{2}(u - m^2)du, \quad (3.6)$$

millest

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{8g_0\pi^2 m}{(2\pi)^4} \int_{m^2}^\infty \frac{u - m^2}{u} du = \frac{8g_0\pi^2 m}{(2\pi)^4} \left(u - m^2 \ln(u) \right) \Big|_{m^2}^\infty \\ &= \frac{8g_0\pi^2 m}{(2\pi)^4} \left(\kappa^2 + m^2 - m^2 \ln(\kappa^2 + m^2) \right) \Big|_0^\infty. \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹¹Kogu peatükis on läbivalt kasutatud tulemusi juhendaja Stefan Groote loengukursuse Renormeerimismeetodid kvantväljateoorias konspektist [5].

See tulemus on ruutjalt hajuv, seega tuleb valemi kasutamiseks teooriat mingil viisil regulariseerida (ja renormeerida).

3.1 Äralõikega regulariseerimine

Nagu eelnevalt mainitud, on lihtsaim viis hajuvusi vältida, kasutada suurte energiatega juures meelevaldset äralõiget $\int_0^\infty \rightarrow \int_0^\Lambda$. Seda meetodit kasutatakse ka artiklis [1]. Avaldisest (3.7) lähtudes saadakse

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{8g_0\pi^2 m}{(2\pi)^4} \left(\kappa^2 + m^2 - m^2 \ln(\kappa^2 + m^2) \right) \Big|_0^\Lambda \\ &= \frac{8g_0\pi^2 m}{(2\pi)^4} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln(\Lambda^2 + m^2) + m^2 \ln(m^2) \right) \\ &= \frac{g_0 m}{2\pi^2} \left(\Lambda^2 + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2 + m^2} \right) \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Kasutades seost (1.19) ning võttes $m_0 = 0$, saadakse

$$\frac{g_0}{2\pi^2} \left(\Lambda^2 + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2 + m^2} \right) \right) = 1.\tag{3.9}$$

Sellest järeldeb, et

$$\frac{2\pi^2}{g_0\Lambda^2} = 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right).\tag{3.10}$$

Lagranžiaani tihedusest (2.1) järeldeb, et g_0 dimensioon loomulikes ühikutes on M^{-2} ning samuti on ilmne, et Λ peab olema energia ehk massi dimensiooniga M . Seetõttu on võrrandi (3.10) kuju kasulik, sest mõlemal pool võrdusmärgi on dimensioonitud suurused, mis teeb mugavaks võrdlemise teiste meetodite tulemustega. Kuigi äralõikega regulariseerimine võib olla piisavalt täpne lähendus näiteks kondensainefüüsikas, kus tihti ignoreeritakse väga väikseid mastaape, on see endiselt problemaatiline fundamentaalfüüsika seisukohast, mis tahab kirjeldada ka väikseid mastaape ja suuri energiasid [3, lk 286-287]. Seetõttu proovitakse ka teisi renormeerimismeetodeid, mida artikli [1] avaldamise hetkel veel ei tuntud.

3.2 Dimensionaalne regulariseerimine

Dimensionaalne regulariseerimine tähendab nelja aegruumi dimensiooni asendamist mingi mittetäisarvulise parameetriga D . Iga silmusintegraali jaoks leidub piisavalt väike D , mille puhul päratu integraal on koonduv [2, lk 249]. D võib olla antud näiteks kujul $D = 4 - 2\varepsilon$. Seega, olles integraali arvutanud, saab minna piirile $\varepsilon \rightarrow 0$ ning saadaksegi soovitud tulemus. Kuigi see on

mugav matemaatiline tööriist hajuvuste ülesleidmiseks, tuleb nende kõrvaldamiseks sisse tuua renormeerimistegurid. Üleminekul D mõõtmelisesse polaarkoordinaatidesse lähtutakse seosest

$$d^D p_E = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \kappa^{D-1} d\kappa, \quad \kappa^2 = p_E^2. \quad (3.11)$$

Saadakse

$$\Sigma = \frac{8g_0}{(2\pi)^D} \int \frac{m}{p_E^2 + m^2} d^D p_E = \frac{16g_0 m}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^\infty \frac{\kappa^{D-1} d\kappa}{\kappa^2 + m^2}. \quad (3.12)$$

Tehakse muutujavahetus

$$u := \frac{m^2}{(\kappa^2 + m^2)} \Rightarrow \kappa = \sqrt{\frac{m^2(1-u)}{u}} = m(1-u)^{1/2} u^{-1/2}, \quad (3.13)$$

$$d\kappa = \left| -\frac{m}{2u\sqrt{u(1-u)}} \right| du = \frac{1}{2} m u^{-3/2} (1-u)^{-1/2} du, \quad (3.14)$$

millest järeldub, et

$$\frac{\kappa^{D-1} d\kappa}{\kappa^2 + m^2} = \frac{1}{2} (m^2)^{D/2-1} u^{-D/2} (1-u)^{D/2-1} du. \quad (3.15)$$

Edasi saadakse

$$\Sigma = \frac{8g_0 m (m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \int_0^1 u^{-D/2} (1-u)^{D/2-1} du = \frac{8g_0 m (m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} B(1-D/2, D/2), \quad (3.16)$$

kus

$$B(m, n) := \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (3.17)$$

tähistab Euleri beetafunktsiooni. Saadakse

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{8g_0 m (m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} B(1-D/2, D/2) = \frac{8g_0 m (m^2)^{D/2-1} \Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(1)} \\ &= \frac{8g_0 m (m^2)^{D/2-1} \Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Asendatakse $D = 4 - 2\varepsilon$, millest

$$\Sigma = \frac{8g_0 m (m^2)^{D/2-1} \Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} = \frac{8g_0 m \Gamma(\varepsilon - 1)}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (m^2)^{1-\varepsilon}. \quad (3.19)$$

Et lahti saada probleemsetest suurustest, võetakse kõik tegurid, mille astendajaks on ε kokku ning arendatakse ühiselt ritta:

$$\begin{aligned} (m^2)^{1-\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon &= m^2 \left(\frac{m^2}{4\pi} \right)^{-\varepsilon} = m^2 \mu^{-2\varepsilon} \left(\frac{m^2}{4\pi \mu^2} \right)^{-\varepsilon} \\ &= m^2 \mu^{-2\varepsilon} e^{-\varepsilon \ln\left(\frac{m^2}{4\pi \mu^2}\right)} = m^2 \mu^{-2\varepsilon} \left(1 - \varepsilon \ln\left(\frac{m^2}{4\pi \mu^2}\right) + O(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

kus renormeerimise skaleerimistegur $\mu^{-2\varepsilon}$ tuuakse sisse, et reaksarendus oleks dimensioonitu (μ on massi dimensiooniga). Ritta saab arendada ka

$$\Gamma(\varepsilon - 1) = -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + 1 + O(\varepsilon)\right), \quad (3.21)$$

kus $\gamma_E \approx 0,577$ on Euler-Mascheroni konstant. Samuti tähistatakse

$$g(\mu) := \mu^{-2\varepsilon} g_0. \quad (3.22)$$

Asendades need valemisse (3.19), saadakse

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{8mg_0\Gamma(\varepsilon - 1)}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}(m^2)^{1-\varepsilon} = \frac{8mg_0}{(4\pi)^2}\Gamma(\varepsilon - 1)(m^2)^{1-\varepsilon}(4\pi)^\varepsilon \\ &= \frac{8mg_0}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - 1 + O(\varepsilon)\right) m^2 \mu^{-2\varepsilon} \left(1 - \varepsilon \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(\varepsilon^2)\right) \\ &= \frac{8m^3 g(\mu)}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \gamma_E - 1 + O(\varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Avaldises (3.23) on hästi näha hajuvust põhjustav liige $-\frac{1}{\varepsilon}$. Selle kõrvaldamiseks on erinevaid lähenemisi, kuid enne nende vaatamist tutvustatakse renormeerimiskordajaid. Renormeerimistegurite tuletuskäigud põhinevad loengukonspektil [5].

On teada, et parandatud fermionpropagaator

$$S(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p})} \quad (3.24)$$

sisaldab hajuvaid suuruseid. Nende kõrvaldamiseks oletame, et leiduvad mingid Z_m ja Z_2 nii, et $m_b = Z_m m_r$ (indeks b nagu *bare* - ingl k paljas ja r nagu renormeeritud) ja

$$S_b(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m_b - \Sigma_b(\not{p})} = \frac{iZ_2}{\not{p} - m_r - \Sigma_r(\not{p})} = Z_2 S_r(\not{p}). \quad (3.25)$$

Edasi on kasulik jagada omaenergia panus kaheks osaks, millest üks on proportsionaalne \not{p} -ga (γ -maatriksitega) ning teine massiga m (ühikmaatriksiga)

$$\Sigma(\not{p}) = \not{p}\Sigma_p(p^2) + m\Sigma_m(p^2). \quad (3.26)$$

Antud juhul on esimene võrdne nulliga, kuid siin vaadatakse üldjuhtu. Seosest (3.25) saadakse

$$Z_2 \left(\not{p} - Z_m m_r - \not{p}\Sigma_p^b - Z_m m_r \Sigma_m^b\right) = \not{p} - m_r - \not{p}\Sigma_p^r - m_r \Sigma_m^r. \quad (3.27)$$

Jagades selle seose jällegi kaheks vastavalt proportsionaalsusele saadakse kaks võrrandit

$$Z_2 \left(1 - \Sigma_p^b\right) = 1 - \Sigma_p^r, \quad Z_2 Z_m \left(1 + \Sigma_m^b\right) = 1 + \Sigma_m^r. \quad (3.28)$$

Renormeerimistegurid on võimalik arendada häiritusritta μ suhtes, millest vaadatakse ainult esimest järku panust

$$Z_2 = 1 + \Delta Z_2 + O(\mu^2), \quad Z_m = 1 + \Delta Z_m + O(\mu^2). \quad (3.29)$$

Arvestades, et ka omaenergia sõltub tegurist μ , saadakse

$$\Sigma_p^r = \Sigma_p^b - \Delta Z_2, \quad \Sigma_m^r = \Sigma_m^b + \Delta Z_2 + \Delta Z_m. \quad (3.30)$$

Nüüd tuleb ainult määrata suurused ΔZ_2 ja ΔZ_m . Kahjuks ei saa võrranditest (3.30) neid üheselt määrata. Vabalt valitud kitsendust renormeerimistegurite määramisel nimetatakse lahutamisskeemiks. Renormeeritava teooria puhul lahutamisskeemi valik rolli ei mängi, sest teooria parameetreid võib alati sättida nii, et need oleksid eksperimendiga kooskõlas. Mitterenormeeritavate teooriate puhul võivad siiski erinevad lahutamisskeemid viia erinevate ennustusteni. Lihtsaim nendest, mis kannab nime *minimal subtraction scheme* (MS) ehk minimaalne lahutamisskeem, tähendab lihtsalt hajuvuse ehk liikme $-\frac{1}{\varepsilon}$ kaotamist. Muudetud minimaalne lahutamisskeem $\overline{\text{MS}}$ tähendab ka liikmete γ_E ja $\ln(4\pi)$ kaotamist, sest need on seotud hajuvusega.

Käesoleval juhul $\Sigma_p^b = 0$, mis tähendab, et ka $\Delta Z_2 = 0$, sest ei ole soovitatav, et pärast renormeerimist tekiks p -ga võrdeline panus, kui seda enne polnud. Järelikult peab võrdustest (3.23) ja (3.30) tulenevalt kehtima, et MS skeemi puhul

$$\Delta Z_2 + \Delta Z_m = \frac{8m^2 g}{(4\pi)^2 \varepsilon} \Rightarrow \Delta Z_m = \frac{8m^2 g}{(4\pi)^2 \varepsilon} \quad (3.31)$$

ning $\overline{\text{MS}}$ skeemi puhul

$$\Delta Z_2 + \Delta Z_m = \frac{8m^2 g}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E \right) \Rightarrow \Delta Z_m = \frac{8m^2 g}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E \right). \quad (3.32)$$

Võrrandist (3.23) saab seose (1.19) abil

$$m = \frac{8m^3 g(\mu)}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \gamma_E - 1 \right), \quad (3.33)$$

millest järedub, et

$$\frac{2\pi^2}{g(\mu)\mu^2} = \frac{m^2}{\mu^2} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \gamma_E - 1 \right). \quad (3.34)$$

Seega MS skeemi puhul, pärast renormeerimist

$$\frac{2\pi^2}{g_0\mu^2} = \frac{m^2}{\mu^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \gamma_E - 1 \right) \quad (3.35)$$

ning $\overline{\text{MS}}$ skeemi puhul

$$\frac{2\pi^2}{g_0\mu^2} = \frac{m^2}{\mu^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - 1 \right). \quad (3.36)$$

Siin on arvestatud, et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\mu) \approx g_0$. Tegelikult on seosekonstandis renormeerimistegurite kaudu teatav sõltuvus μ -st endiselt olemas, aga kuna on toodud sisse tegur μ ka ilmutatud kujul, mis domineerib, siis võiks $g(\mu)$ jooksmine olla piisavalt nõrk, et teha vastav lähendus.

Füüsikalisi kaalutlusi arvesse võttes on mõistlik lähtuda *on-shell* ehk massi pinnal renormeerimisest (OS), mis on ka lahutamisskeemidest kõige modernsem. Selle meetodi kasutamine tagab, et renormeeritud propagaator on massi pinnal ehk tema poolused on punktides, kus $p^2 = m^2$, kus m tähistab renormeeritud massi. OS skeemi kasutades fikseeritakse renormeerimistegurid ΔZ_2 ja ΔZ_m järgmiste tingimuste abil:

1. Propagaatori poolus on punktis $p = m$ (määrab põhiliselt Z_m -i)
2. Pooluse resiid on i (määrab põhiliselt Z_2 -e)

Arendades omaenergia $\Sigma_r(p)$ Taylori ritta punktis $p = m$ saadakse

$$\Sigma_r(p) = \Sigma_r(m) + \left. \frac{\partial \Sigma_r(p)}{\partial p} \right|_{p=m} (p - m) + O((p - m)^2). \quad (3.37)$$

Kui esimene liige kaoks, oleks 1. tingimus täidetud, sest siis

$$\Sigma_r(p) = (p - m)\Sigma'_r(m) + O((p - m)^2) \quad (3.38)$$

ja

$$\begin{aligned} S_r(p) &= \frac{i}{p - m - (p - m)\Sigma'_r(m) + O((p - m)^2)} \\ &= \frac{i}{(p - m)(1 - \Sigma'_r(m) + O((p - m)))}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Kui nüüd $\Sigma'_r(p = m) = 0$, siis on resiid täpselt i , sest piiril $p \rightarrow m$ kõrgemat järku liikmed kaovad. Sellega on ka 2. tingimus täidetud. 1. tingimusest

$$\Sigma_r(m) = 0 \quad (3.40)$$

järeldub, et

$$\Sigma_r(p) \Big|_{p=m} = \left(p \Sigma'_p(p^2) + m \Sigma'_m(p^2) \right) \Big|_{p=m} = m \left(\Sigma'_p(m^2) + \Sigma'_m(m^2) \right) = 0. \quad (3.41)$$

Tingimusi (3.30) kombineerides saadakse

$$\begin{aligned} \Sigma_r(m) &= m \left(\Sigma'_p(m^2) + \Sigma'_m(m^2) \right) = m \left(\Sigma^b_p(m^2) + \Sigma^b_m(m^2) + \Delta Z_m \right) \\ &= \Sigma_b + m \Delta Z_m = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

millest järeldub, et

$$\Delta Z_m = -\frac{1}{m}\Sigma_b(m) = -\Sigma_p^b(m^2) - \Sigma_m^b(m^2). \quad (3.43)$$

Teisest tingimusest

$$\left. \frac{\partial \Sigma_r(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} = 0 \quad (3.44)$$

saadakse diferentseerides seost (3.27), et

$$\left. \frac{\partial \Sigma_r(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} = \left. \frac{\partial \Sigma_b(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} - \Delta Z_2 = 0 \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow \Delta Z_2 = \left. \frac{\partial \Sigma_b(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m}. \quad (3.46)$$

Siin on abiks seos

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} = \frac{\partial p^2}{\partial \not{p}} \frac{\partial}{\partial p^2} = \frac{\partial \not{p}^2}{\partial \not{p}} \frac{\partial}{\partial p^2} = 2\not{p} \frac{\partial}{\partial p^2}, \quad (3.47)$$

kus on kasutatud asjaolu, et $\not{p}^2 = p^2$. Seega saadakse

$$\Delta Z_2 = \left. \frac{\partial \Sigma_b(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} = \Sigma_p^b(m^2) + 2m^2 \left(\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_p^b(p^2) + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_m^b(p^2) \right) \right|_{p^2=m^2}. \quad (3.48)$$

Kuna antud juhul

$$\Sigma_p^b(m^2) = 0 \quad (3.49)$$

ja sõltuvus välisest impulsist puudub, ehk

$$\frac{\partial \Sigma_m^b(p^2)}{\partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_p^b(p^2)}{\partial p^2} = 0. \quad (3.50)$$

Siis

$$\Delta Z_m = -\Sigma_m^b(m^2), \quad (3.51)$$

$$\Delta Z_2 = 0 \quad (3.52)$$

ja

$$\Sigma_p^r(m^2) = 0, \quad (3.53)$$

$$\Sigma_m^r(m^2) = 0. \quad (3.54)$$

Viimane tulemus näitab, et renormeeritud omaenergia on võrdne nulliga. See tähendab, et massilõhe võrrandit pole OS skeemi abil võimalik kasutada. Põhjus peitub selles, et kuna puudub sõltuvus välisest impulsist, siis renormeerimistegurid neelavad kogu omaenergia panuse.

3.3 Mittelokaalne regulariseerimine

Kvantväljateooria kontekstis tähendab mittelokaalsus, et väljade vahelised interaktsioonid ei toimu samas aegruumi punktis. Kuigi see mõte võib olla esmapilgul kummaline, on mittelokaalsete nähtuste olemasolu korduvalt eksperimentaalselt kinnitatud (vt nt [18]).

Ka hadronite sees toimuvates tugeva vastastikmõju protsessides võivad gluonid tekitada mittelokaalseid interaktsioone kvargiolekute vahel. Nendel interaktsioonidel põhineva mittelokaalse NJL mudeli ja selle tuletamisega kvantkromodünaamikast on tegelenud ka käesoleva töö autori mõlemad juhendajad [19, 20, 21]. Kuna mittelokaalne NJL mudel on käesoleva töö üks võimalik edasiarendus, käsitletakse ka siin põgusalt selle tuletamist kvantkromodünaamika lagranžiaani tihedusest

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_i \bar{\psi}^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi^i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2. \quad (3.55)$$

Siin $iD_\mu = i\partial_\mu - g_s A_\mu^a(x) T_a$ on kovariantne tuletis korda i , $A_\mu^a(x)$ on gluonvälja komponendid, T_a on $SU(3)$ teisenduse generaatorid, $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + i g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ on kvantkromodünaamika väljatugevuse tensori komponendid, f_{abc} on struktuurikonstandid ja ξ on kalibratsiooni fikseerimise parameeter. Kuna nende terminite lahti seletamine nõuaks pikemat lõiku ja nende tundmine ei ole töö kontekstis hädavajalik, siis sellesse ka pikemalt ei süveneta. Küll aga on kvantkromodünaamikat põhjalikult käsitletud nt raamatus [2]. Esimene liige on Diraci välja lagranžiaan, kuhu on kovariantse tuletise kaudu sisse viidud interaktsioon gluonväljaga. Teine on gluonvälja liige, mis kirjeldab nii kinemaatikat kui eneseinteraktsiooni ja kolmas liige on kalibratsiooni fikseerimiseks. Siit saadakse järgmised Euler-Lagrange'i võrrandid

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi^i = 0, \quad (3.56)$$

$$\bar{\psi}^i (i\overleftarrow{D}_\mu \gamma^\mu + m_i) = 0, \quad (3.57)$$

$$g_s \bar{\psi}^i i\gamma^\mu T_a \psi_i = (\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a + g_s f_{abc} \partial_\nu A_\mu^b A_c^\nu + g_s f_{abc} A_\nu^b (\partial^\mu A_c^\nu - \partial^\nu A_c^\mu) - g_s^2 f_{abc} f_{cde} A_\nu^b A_d^\mu A_e^\nu. \quad (3.58)$$

Esimesed kaks on Diraci võrrandid koos interaktsiooniga, kolmandat aga võib vaadata kui Maxwelli võrrandite üldistust gluonvälja jaoks. Kui fikseerida kalibratsioon, on viimase puhul tegemist Poissoni võrrandiga, mis oleks skalaarsel juhul lahendatav Greeni funktsiooni meetodil. Lihtsustatult võib öelda, et võrrandi $\square A(x) = f(x)$ lahend avaldub Greeni funktsiooni kaudu kui $A(x) = \int G(x-y) f(y) d^4y$, kus Greeni funktsioon määratakse tingimusest $\square G(x-y) =$

$\delta^{(4)}(x - y)$. Käesoleval juhul on Greeni funktsioon tensorfunktsioon $G_{\mu\nu}^{ab}(x - y)$, aga kasutades nn kujutusteoreemi [22, 23], saab probleemi üle viia skalaarjuhule. Tensorkujul avaldub aga lahend kujul

$$A_{\mu}^a(x) = g_s \int G_{\mu\nu}^{ab}(x - y) \bar{\psi}^i(y) \gamma^{\mu} T_b \psi_i(y) d^4 y. \quad (3.59)$$

Sisestades selle lagranžiaani tiheduse (3.55) Diraci osasse ja integreerides üle aegruumi saadakse kvarklõhnadünaamika mõjufunktsionaal

$$\begin{aligned} S_{\text{QFD}} = & \int \sum_i \bar{\psi}^i(x) (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m_i) \psi^i(x) d^4 x - \\ & - g_s^2 \int \sum_{i,j} \bar{\psi}^i(x) \gamma^{\mu} T_a \psi^i(x) G_{\mu\nu}^{ab}(x - y) \bar{\psi}^j(y) \gamma^{\nu} T_b \psi^j(y) d^4 y d^4 x, \end{aligned} \quad (3.60)$$

mida nimetataksegi mittelokaalseks NJL mudeliks. Juba selle kujus on näha teatav sarnasus lagranžiaani tihedusega (2.1), kuid lisandunud on massiliige ja mittelokaalsust vahendav Greeni funktsioon. Lihtsustatult võib seega väita, et kvantkromodünaamika lagranžiaanist saab tuletada, et gluonite ja kvarkide vahelist vastastikmõju saab kirjeldada mittelokaalse NJL mudeli abiga.

Inspireerituna mittelokaalsest NJL mudelist saab ka renormeerimiseks kasutada mittelokaalsust eeldavaid meetodeid. Üheks võimalikuks renormeerimismeetodiks on kasutada kordajana funktsiooni $F(p, \lambda) = e^{-\frac{p^2}{\lambda^2}}$, kus λ on mittelokaalsuse skaleerimistegur. Sealjuures tuleb märkida, et $F(p, \lambda)$ ongi ühe võimaliku lihtsustatud Greeni funktsiooni $G_{\mu\nu}^{ab} = g_{\mu\nu} \delta^{ab} G(x - y)$ esitus impulsiruumis ehk $F = \tilde{G}$. Saadakse

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{8g_0 i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-\frac{p^2}{\lambda^2}} = \frac{8g_0}{(2\pi)^4} \int d^4 p_E \frac{m}{p_E^2 + m^2} e^{-\frac{p^2}{\lambda^2}} \\ &= \frac{16g_0 \pi^2 m}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\kappa \frac{\kappa^3}{\kappa^2 + m^2} e^{-\frac{\kappa^2}{\lambda^2}}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

mis analüütilisel kujul avaldub kui

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{16g_0 \pi^2 m}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} d\kappa \frac{\kappa^3}{\kappa^2 + m^2} e^{-\frac{\kappa^2}{\lambda^2}} = \frac{8g_0 \pi^2 m}{(2\pi)^4} \left(m^2 e^{\frac{m^2}{\lambda^2}} Ei\left(-\frac{\kappa^2 + m^2}{\lambda^2}\right) + \lambda^2 e^{-\frac{\kappa^2}{\lambda^2}} \right) \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{8g_0 \pi^2 m}{(2\pi)^4} \left(m^2 e^{\frac{m^2}{\lambda^2}} Ei\left(-\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \lambda^2 \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

kus erifunktsiooni $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ nimetatakse integraalseks eksponentfunktsiooniks ja

$\lim_{x \rightarrow -\infty} Ei(x) = 0$. Kuigi analüütiliselt on seda tulemust keeruline interpreteerida, saab seda numbriliselt siiski võrrelda teiste meetodite tulemustega. Minnes tagasi avaldise (3.61) juurde, saadakse seosest (1.19), et

$$m = \frac{16g_0 \pi^2 m}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^3 d\kappa}{\kappa^2 + m^2} e^{-\frac{\kappa^2}{\lambda^2}}. \quad (3.63)$$

Peale muutujavahetust $u^2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$

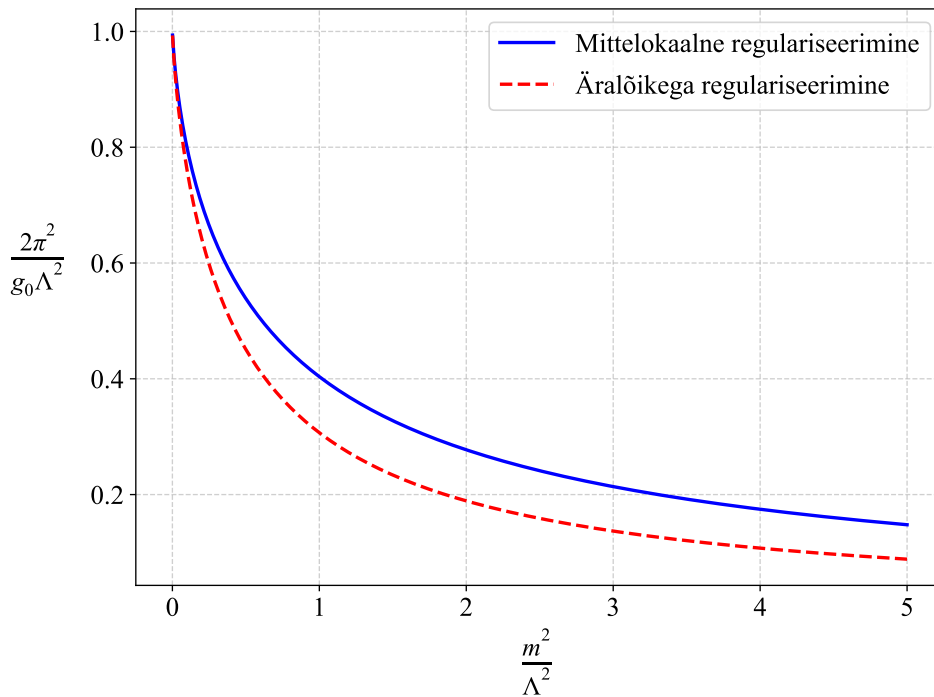
$$1 = \frac{16g_0\pi^2\lambda^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{u^3 du}{u^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}} e^{-u^2}, \quad (3.64)$$

$$\frac{2\pi^2}{g_0\lambda^2} = 2 \int_0^\infty \frac{u^3 du}{u^2 + \frac{m^2}{\lambda^2}} e^{-u^2}. \quad (3.65)$$

Võrrandi (3.65) paremat poolt saab numbriliselt integreerida ning tulemust võrrelda teiste meetoditega.

3.4 Tulemuste võrdlus

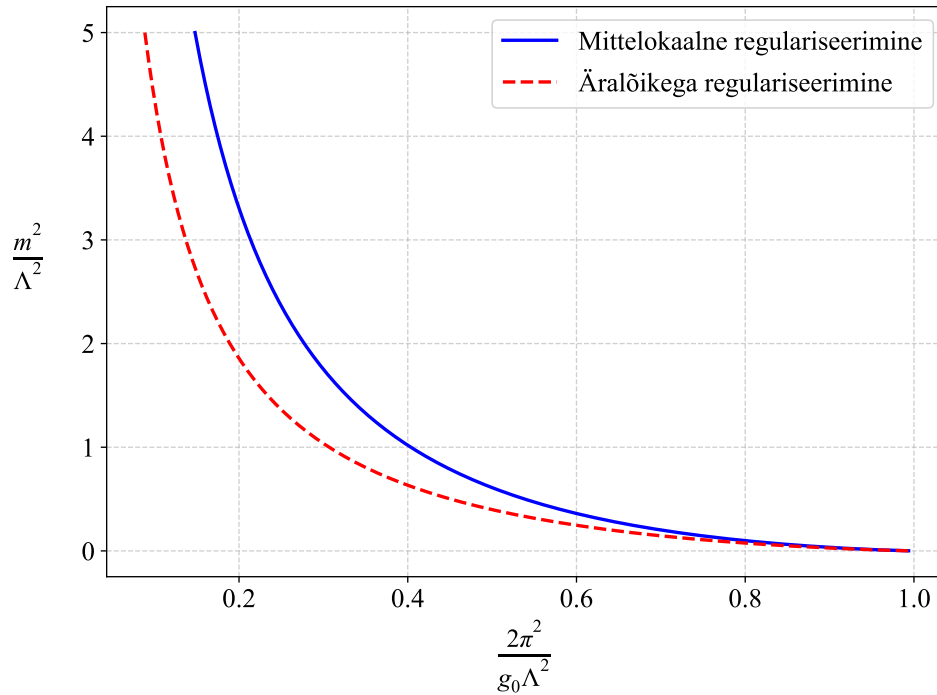
Et erinevatel renormeerimismeetoditel saadud tulemusi võrrelda, on mõistlik neid kujutada graafiliselt. Sealjuures tuleb tähele panna, et erinevad meetodid lähtuvad erinevatest skaaladest ning seetõttu peab nende üksühesesse võrdlemisse suhtuma teatava ettevaatusega. Sellegipoolest aitab graafiline analüüs mõnede meetodite puudujäägid kohe tuvastada.



Joonis 5: Mittelokaalse ja äralõikega regulariseerimise meetodite tulemuste võrdlus

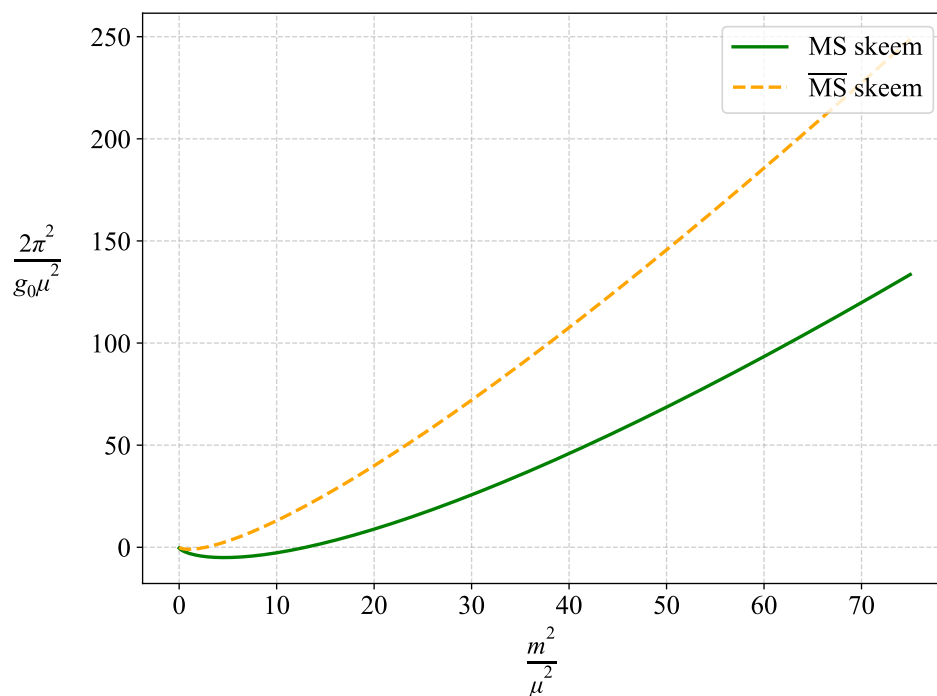
Joonise 5 puhul tuleb tähele panna, et mittelokaalse regulariseerimise puhul tähistab Λ tegelikult mittelokaalsuse skaleerimistegurit λ ning äralõikega regulariseerimise puhul on tegu äralõikepunktiga $|p_E| = \Lambda$, millest suuremaid impulsi väärtuseid enam integreerimisel ei arvestata. Kuigi matemaatiliselt on siin kasutatud lähenemise puhul loogiline vaadata $\frac{2\pi^2}{g_0\Lambda^2}$

funktsionaalset sõltuvust argumentidist $\frac{m^2}{\Lambda^2}$, siis füüsikaliselt oleks informatiivsem vaadata massi ruudu m^2 sõltuvust seosekonstandi g_0 väärtustest, mida on kujutatud joonisel 6. Nagu näha, siis annavad äralõikega regulariseerimine ja mittelokaalne regulariseerimine üsna sarnaseid tulemusi. g_0 kasvades kasvab kiiresti ka mass ning g_0 väärtuste puhul, kus $g_0 < \frac{2\pi^2}{\Lambda^2}$, eksisteerib ainult triviaalne lahend $m = 0$.

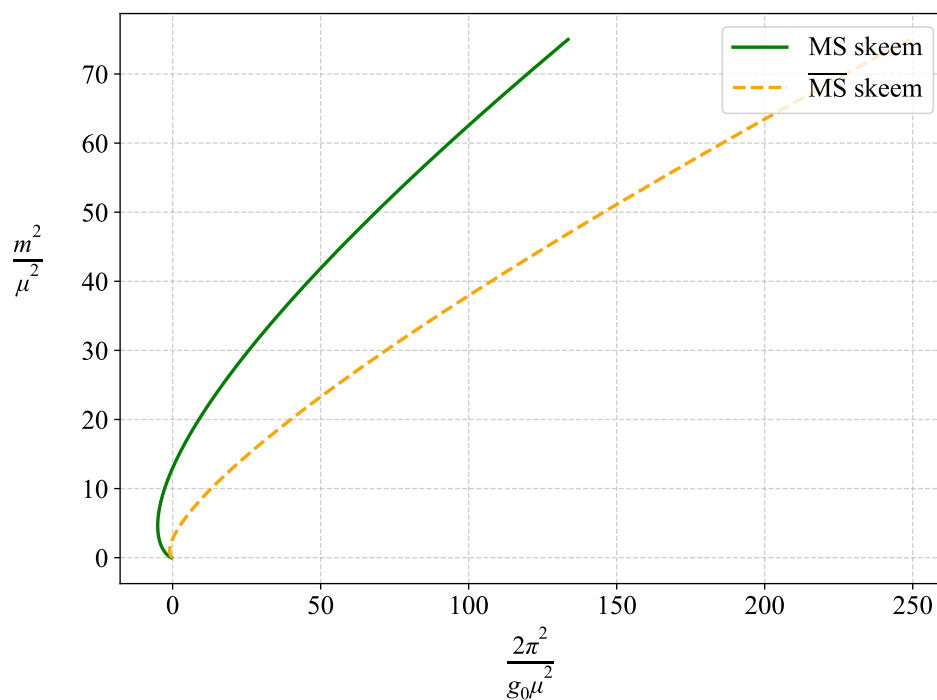


Joonis 6: Mittelokaalse ja äralõikega regulariseerimise meetodite tulemuste võrdlus

Dimensionaalne regulariseerimine annab käesoleval juhul aga hoopis teistsugused tulemused. Joonistelt 7 ja 8 nähtub, et $\frac{m^2}{\Lambda^2}$ sõltuvus $\frac{2\pi^2}{g_0\Lambda^2}$ - st pole enam üksühene. Selle probleemi saab aga kõrvaldada vaadates ainult mittenegatiivseid g_0 väärtuseid. Kuna NJL mudel sobib eelkõige tugeva vastastikmõju modelleerimiseks, kus seosekonstant võetakse reeglina positiivne, on selline kitsendus õigustatud. Sellisel juhul g_0 kahanedes aga mass hoopis kasvab, mis on vastupidine eelnevatele tulemustele.



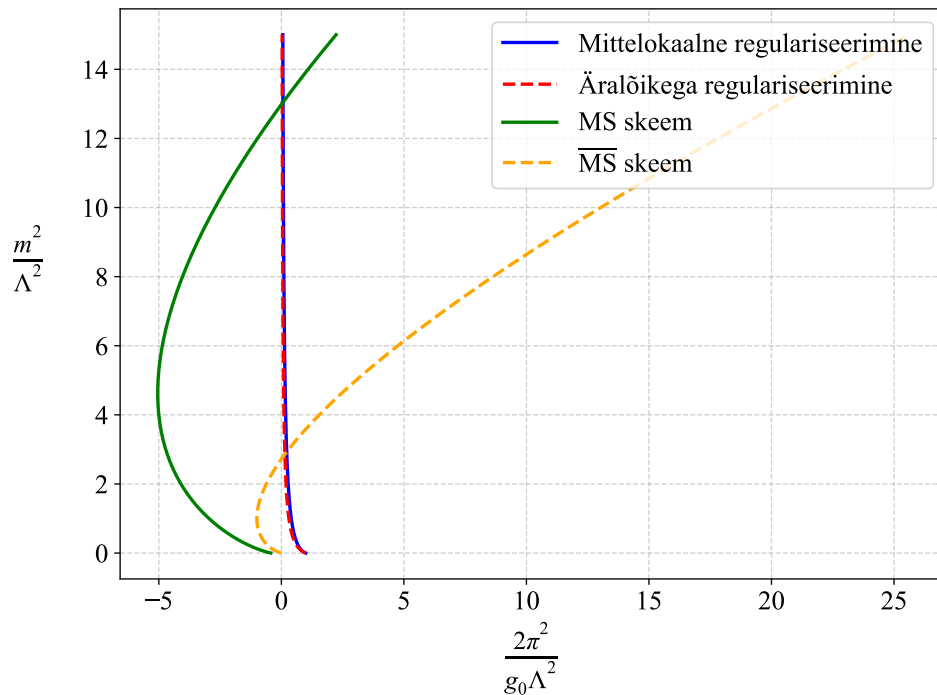
Joonis 7: Dimensionaalse regulariseerimise meetodi tulemuste võrdlus



Joonis 8: Dimensionaalse regulariseerimise meetodi tulemuste võrdlus

Täielikkuse huvides on toodud ka graafik, kus on kujutatud kõik kasutatud regulariseerimis-meetodid ning kus Λ tähistab kõiki erinevaid skaleerimistegureid korruga. Jooniselt 9 on näha,

kui erinevaid ning raskelt võrreldavaid tulemusi annavad erinevad meetodid.



Joonis 9: Kõigi renormeerimismeetodite tulemuste võrdlus

Kokkuvõtlikult võib öelda, et äralõikega regulariseerimine ja mittelokaalne regulariseerimine annavad üsna ootuspäraseid tulemusi. Sealjuures on positiivne tõdemus see, et mittelokaalne regulariseerimine on otseselt seotud mittelokaalse NJL mudeliga, mis on omakorda tuletatav kvantkromodünaamikast. See tähendab, et mitte-invariantse äralõike asemel on võimalik väga sarnane tulemus saavutada täiesti loomulikul viisil, lähtudes juba olemasolevast ja igati kinnitust leidnud tugeva vastastikmõju teooriast. Samas on mittelokaalne NJL mudel veel lahtine uurimisvaldkond ning seda teemat tuleks edaspidi rangemas kontekstis põhjalikumalt käsitleda. Dimensionaalse regulariseerimise tulemust võiks aga põhjendada järgmiselt. Spiinorite bilineaarsed vormid on mõnes mõttes samastatavad liitosakesega. Liitosakesed aga lakkavad olemast, kui koostisosakeste impulsid on liiga suured. See on sarnane Fermi 4-fermioni teooriale [24], mis kaotab kehtivuse kusagil 80 GeV piirkonnas, kus tuleks sisse tuua interaktsioonid W-bosoniga. Kui nüüd jõuga renormeerida teooriat lõpmatute impulssideni, siis see tähendaks teoorialt millegi nõudmist, mis pole sellele võimetekohane ehk asub väljaspool selle kehtivuspiirkonda.

Kokkuvõte

Töö teoreetilises osas esitati vajalikud taustateadmised töö praktilise osa mõistmiseks. Praktilises osas esitati massilõhe võrrandi tuletuskäik NJL lagranžiaanist, mida Nambu ja Jona-Lasinio artiklis [1] ei olnud välja toodud. Ühtlasi näidati, et selleni on võimalik jõuda lähtudes kahe punkti korrelatsioonifunktsioonist ning kasutades standardset lähenemist Wicki teoreemi kaudu. Samuti leiti, et massilõhe võrrand on invariantne Fierzi teisenduste suhtes. Seejärel näidati, et massilõhe võrrand naiivsel kujul sisaldab lõpmatust ning prooviti seda kõrvaldada teooriat regulariseerides ja renormeerides.

Renormeerimismeetoditest andsid üsna sarnaseid ja ootuspäraseid tulemusi äralõikega regulariseerimine ja mittelokaalne regulariseerimine. Äralõikega regulariseerimine tähendab lõpmatu integreerimisraja asendamist meelevaldse äralõikepunktiga ning mittelokaalne regulariseerimine tähendab mittelokaalse vastastikmõju sissetoomist Greeni funktsiooni kaudu. Viimane meetod on otseselt seotud ka mittelokaalse NJL mudeliga, mis võiks olla töö jätkamisel üheks edasiseks uurimissuunaks. Teooriale rakendati ka dimensionaalse regulariseerimise meetodit, mis tähendab hajuvuste „üles otsimist“ integraali dimensiooni muutmise teel. Hajuvuste kõrvaldamiseks prooviti erinevaid lahutamisskeeme ehk viise, kuidas hajuvust sisaldavaid liikmeid eemaldada. OS (*on-shell*) skeem kaotas omaenergia massipanuse täielikult ning MS (minimaalne lahutamisskeem) ja \overline{MS} (muudetud minimaalne lahutamisskeem) andsid mitterealistliku tulemuse. Sellest võib järeldada, et dimensionaalne regulariseerimine pole NJL mudeli jaoks sobiv meetod, sest teooria kaotab kehtivuse suurte energiatega juures, aga dimensionaalne regulariseerimine seda arvesse ei võta.

Käesolevas töös on ainult pinnapealselt puudutatud kõiki NJL mudeliga seotud võimalusi ja problemaatikat. Mittelokaalne NJL mudel on tuletatav kvantkromodünaamika lagranžiaanist ja seega vägagi loomulik asendaja tugeva vastastikmõju kirjeldamiseks madalate energiatega juures. Ka artiklist [1] on siin käsitletud vaid väga väikest osa, rääkimata mudeli kõikvõimalikest edasiarendustest. Loodetavasti on võimalik tulevikus neid käesoleva uurimusega siduda ja jõuda ka eksperimentaalselt kontrollitavate tulemusteni. Efektiivsed väljateooriad on jätkuvalt paljutõotav uurimisvaldkond ja seni, kuni ei leidu kõiksust kirjeldavat teooriat (mille võimalikkus on täiesti kaheldav), tuleb iga teooria puhul arvestada tema kehtivuse piire. Töö oli autori jaoks väga kasulik kvantväljateooria ja renormeerimismeetodite tundmaõppimiseks ning ta tahab kindlasti tulevikus samade uurimisteedadega jätkata.

Kasutatud kirjandus

- [1] Y. Nambu, and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I,” *Physical Review* 122, 345–358 (1961).
- [2] M. E. Peskin, and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Boulder, 1995).
- [3] T. Lancaster, and S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur* (Oxford University Press, Oxford, 2014).
- [4] Stefan Groote, „Elementaarosakeste teooria,“
<https://kodu.ut.ee/~groote/osakeste/osakeste.pdf>.
- [5] Stefan Groote, „Renormeerimismeetodid kvantväljateoorias,“
<https://kodu.ut.ee/~groote/renormee/renormee.pdf>.
- [6] Laur Järv, „Klassikaline väljateooria,“
https://moodle.ut.ee/pluginfile.php/2206977/mod_resource/content/9/Klassikaline_v%C3%A4ljateooria_2024.pdf.
- [7] M. Selg, *Sissejuhatus hajumise kvantteooriasse* (Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2015).
- [8] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton, 2003).
- [9] National Institute of Standards and Technology, “The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty,”
<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mpc2mev>.
- [10] Particle Data Group, “Light Quarks (u,d,s),”
[https://pdglive.lbl.gov/Particle.action?node=Q123&home=.](https://pdglive.lbl.gov/Particle.action?node=Q123&home=)
- [11] M. Schumacher, “Mass generation via the Higgs boson and the quark condensate of the QCD vacuum,” *Pramana* 87, p. 44 (2016).
- [12] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Theory of Superconductivity,” *Physical Review* 108, 1175–1204 (1957).
- [13] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, “Microscopic Theory of Superconductivity,” *Physical Review* 106, 162–164 (1957).

- [14] Z. Xing, and S. Zhou, *Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology* (Springer, Heidelberg, 2011).
- [15] L. B. Okun, *Leptons and Quarks* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [16] C. C. Nishi, “Simple derivation of general Fierz-type identities,” *American Journal of Physics* 73, 1160–1163 (2005).
- [17] S. P. Klevansky, “The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics,” *Rev. Mod. Phys.* 64, 649–708 (1992).
- [18] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement,” *Nature* 403, 515–519 (2000).
- [19] A. Chatterjee, M. Frasca, A. Ghoshal, and S. Groote, “Renormalisable Non-Local Quark–Gluon Interaction: Mass Gap, Chiral Symmetry Breaking and Scale Invariance,” *Particles* 7, 392–415 (2024).
- [20] A. Chatterjee, M. Frasca, A. Ghoshal, and S. Groote, “Dynamical generation of electroweak scale from the conformal sector: A strongly coupled Higgs via the Dyson–Schwinger approach,” *Fortschritte der Physik*, (2024), <http://dx.doi.org/10.1002/prop.202400259>.
- [21] A. Chatterjee, M. Frasca, A. Ghoshal, and S. Groote, “Finite temperature QCD crossover at non-zero chemical potential: A Dyson-Schwinger approach,” *arXiv:2502.02070[hep-ph]* (2025) <https://arxiv.org/abs/2502.02070>.
- [22] M. Frasca, “Infrared gluon and ghost propagators,” *Physics Letters B* 670, 73–77 (2008).
- [23] M. Frasca, “Mapping a massless scalar field theory on a Yang–Mills theory: classical case,” *Modern Physics Letters A* 24, 2425–2432 (2009).
- [24] E. Fermi, „Versuch einer Theorie der beta-Strahlen. I,“ *Zeitschrift für Physik* 88, S. 161–177 (1934).

Tänuõnad

Autor soovib väga tänada oma mõlemaid juhendajaid alatise abivalmiduse eest ning huvi tekitamise ja hoidmise eest osakeste maailma vastu. Samuti soovib ta tänada oma elukaaslast kannatlikkuse ning kõikvõimaliku toetuse eest.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Karl Abiline,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Nambu–Jona-Lasinio mudeli massilõhe võrrandi uurimine“, mille juhendajad on Arpan Chatterjee ja Stefan Groote, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada Tartu Ülikooli digitaalarhiivi kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
2. annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;
3. olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Karl Abiline

01.06.2025