TPI

Kõrgem matemaatika

II

Tallinn
1969

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Matemaatika kateeder

K Õ R G E M   M A T E M A A T I K A

PROGRAMM, METOODILINE JUHEND JA KONTROLLTÖÖDE ÜLESANDED

II kursuse kaugüliõpilastele

Koostanud E. Etverk, H. Roos, T. Jõgi, A. Kass

Tallinn

1969

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

для студентов-заочников I курса

Составители : Э. Этверк, Х. Роос, Т. Йыги
А. Касс

На эстонском языке

Vastutav toimetaja A. Jaanson

Trükkimisele antud 5.IX 69. Paber 60x84/16
Trükipg. 2,5. Tingpg. 2,33. Tiraaž 1200
TPI rotaprint, Tallinn, Pikk jalg 14
Tell.343 Tasuta

SISSEJUHATUS

Juhend on koostatud vastavalt N.Piskunovi õpikutele "Diferentsiaal- ja integraalarvutus" I, Tallinn 1965 (tekstis lühendatult P I) ja "Diferentsiaal- ja integraalarvutus" II, Tallinn 1966 (tekstis lühendatult P II) ning I.Peterseni ja H.Roosi "Kõrgema matemaatika ülesannete kogule" I ja II (tekstis lühendatult PR I ja PR II).

Õpikus esinevate näidisülesannete lahendamine on aluseks kursuse läbitöötamisel. Kursuse täielikuks omandamiseks on tarvilik läbi töötada ka käesolevas juhendis näidatud ülesanded ülesannete kogudest PR I ja PR II.

Sügissemestril käsitletav kõrgem matemaatika III haarab teemad: määramata integraal ehk üldintegraal, määratud integraal, päratu integraal, määratud integraali rakendused ja mitme muutuja funktsioonid.

Kevadsemestril käsitletav kõrgem matemaatika IV hõlmab teemad: kahe- ja kolmekordne integraal, joonintegraal, pindintegraal ja diferentsiaalvõrrandid.

Programmi teemad on allpool antud raamitult.

Antud funktsiooni algfunktsioon; algfunktsioonide üldavaldis. Ülesandeid, mis viivad üldintegraali mõistele. Üldintegraal ja selle lihtsamad omadused. Üldintegraalide põhivalemid. Integreerimise üldvõtted: konstantse teguri integraali märgi ette toomine, summa integreerimine, ositi integreerimine, integreerimine asendusvõttega.

Ratsionaalsete murdfunktsioonide lahutamine osamurdudeks. Ratsionaalsete murdfunktsioonide integreerimine. Trigonomeetriliste ja irratsionaalsete avaldiste integreerimine. Näiteid üldintegraalidest, mis pole avaldatavad elementaarfunktsioonide kaudu.

Enne kui asuda kõne all oleva teema õppimisele, peavad hästi peas olema diferentseerimise põhivalemid.

Teemat käsitletakse õpiku P I peatükis X. Nimetatud peatükist tuleb hästi ära õppida §-d 1-9, 11, 14, 15 ja 16. Ära võib jätta §-d 10 ja 13.

Integreerimise põhivalemid, mis on antud § 2, tuleb kindlasti pähe õppida.

Rohkesti tähelepanu pööratagu murdratsionaalse funktsiooni integreerimisele (§ 5 - I ja II, §-d 7, 8 ja 9), sest väga suur osa irratsionaalseid, trigonomeetrilisi ja muid funktsioone teisendatakse enne integreerimist muutuja vahetamisega murdratsionaalseteks funktsioonideks.

Irratsionaalsete funktsioonide integreerimisel võib § 12 näidatud võtete asemel kasutada § 15 käsitletud võtteid. Mõnikord on aga trigonomeetriliste teisenduste (§ 15) asemel sobivam kasutada hüperboolseid teisendusi, mis on näidatud ülesannete kogus PR I, lk. 190 valemites (31) ja (32). Hüperboolsete funktsioonide definitsioonid on antud samas ülesannete kogus lk. 113. Nendest definitsioonidest järelduvad hüperboolsete funktsioonide järgmised omadused, mis mõnikord kergendavad integreerimist:

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x,$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1),$$
$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + c,$$
$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + c,$$
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c,$$
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c.$$

Sageli vóib antud üldintegraali avaldamiseks kasutada mitut eri vótet ja igale vóttele vastavalt saada ka erineva vastuse. Kuid kóik saadud vastused erinevad üksteisest ainult konstantse liidetava vórra, kuigi see alati pole silmanähtav.

Näiteks, kui $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ lahendamiseks kasutada asendust $t = x + 1$, siis saame $I = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + c = \arctan (x + 1) + c$, kui aga kasutada asendust $x = \frac{2}{z - 1}$ ehk $z = \frac{2 + x}{x}$, saame $I = -\int \frac{dz}{1 + z^2} = -\arctan z + c = -\arctan \frac{2 + x}{x} + c$.

Saadud vastustest pole otsekohe näha, et nad erineksid ainult konstantse liidetav võrra. Kui aga lugeda suvalised konstandid mõlemas vastuses võrdseteks ja esimesest vastusest lahutada teine, siis saame: $\arctan (x + 1) - (-\arctan \frac{2 + x}{x})$, millest $\tan\left[\arctan (x+1) + \arctan \frac{2+x}{x}\right] =$

$$= \frac{\tan \arctan (x + 1) + \tan \arctan \frac{2 + x}{x}}{1 - \tan \arctan (x + 1) \cdot \tan \arctan \frac{2 + x}{x}} =$$

$$= \frac{x + 1 + \frac{2 + x}{x}}{1 - (x + 1) \cdot \frac{2 + x}{x}} = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x^2 - 2x - 2} = -1.$$ Sellest järeldub, et

$$\arctan(x+1) - \left(-\arctan\frac{2+x}{x}\right) = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ kus } k$$

täisarv. Et ühtlasi $-\pi < \arctan\alpha - \arctan\beta < \pi$, siis ü...l-saadud võrduses $k = 0$ või $k = 1$, seega

$$\arctan(x+1) - \left(-\arctan\frac{2+x}{x}\right) \text{ on } -\frac{\pi}{4} \text{ või } \frac{3\pi}{4}.$$

Järelikult erinevadki saadud üldintegraalid konstandi võrra.

Üliõpilane peab olema teadlik, et üldintegraal avaldub elementaarsetes funktsioonides ainult eriti valitud integreeritavate funktsioonide puhul. Õpiku P I §-is 16 on näiteid üsna lihtsatest funktsioonidest, mille integraalid ei avaldu elementaarfunktsioonide kaudu.

Ülesannete kogust PR I tuleks läbi töötada näited I-XVI, lk. 191-205 ja lahendada ülesanded: 1033 - 1035, 1037, 1038, 1042, 1043, 1045, 1048, 1049, 1052, 1053, 1057, 1058, 1063, 1066, 1073, 1078, 1080, 1084, 1085, 1087, 1098, 1092, 1094, 1095, 1102, 1107, 1108, 1109, 1114, 1116, 1119, 1125, 1126, 1131, 1132, 1141, 1145, 1150, 1151, 1154, 1156, 1158, 1166, 1168, 1171, 1175, 1181, 1186, 1192, 1194, 1198, 1200, 1202, 1204, 1209, 1220, 1221, 1224, 1226, 1228, 1232, 1236, 1239, 1244, 1251.

MÄÄRATUD INTEGRAAL JA PÄRATU INTEGRAAL

Ülesanded, mis viivad määratud integraali mõistele. Pideva funktsiooni määratud integraal kui summa piirväärtus, selle olemasoluteoreemi sõnastus (ilma tõestuseta). Määratud integraali lihtsamaid omadusi, keskväärtusteoreem.

Määratud integraali tuletis ülemise raja järgi. Määratud integraali ja üldintegraali vaheline seos. Newton-Leibnizi valem.

Määratud integraali arvutamine muutuja vahetusega ja ositi integreerimisega. Määratud integraali ligikaudne arvutamine; Simpsoni valem.

Lõpliku arvu katkevuskohtadega (tõkestatud kui ka tõkestamata) funktsioonide integreerimine. Päratu integraal lópmatu integreerimispiirkonnaga; vórdlusprintsiip, absoluutne ja tingimisi koonduvus.

Nimetatud palu on käsitletud ópiku P I XI peatükis (§-d 1 - 8).

Määratud integraali omadustest tuleks esile tósta 6. omadust (lk. 388), mis vóimaldab integreerida praktikas küllaltki sageli esinevaid mitteelementaarseid funktsioone, nagu

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & \text{kui } 1 < x < 2, \\ \sqrt{4x - x^2}, & \text{kui } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Nimetatud omaduse póhjal saame näiteks:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx = 3 + \pi.$$

Määratud integraali arvutamiseks muutuja vahetusel on kaks vóimalust.

Avaldame üldintegraali uue muutuja kaudu, teisendame saadud funktsiooni tagasi esialgse muutuja funktsiooniks ning seejärel arvutame integraali Newton-Leibnizi valemi abil. Niisugusel juhul pole vaja integraali rajasid muuta. Sel viisil on lahendatud ülesannete kogus PR I näide II, lk. 223.

Sageli on aga otstarbekohasem teisendada ka integraali rajasid uuele muutujale vastavaiks. Nii on lahendatud ópikus P I, lk. 394 toodud näide ja ülesannete kogus PR I näide VII, lk. 226.

Kui määratud integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ arvutamisel kasutada muutuja teisendamist $u = \varphi(x)$, siis peab sellel funktsioonil vahemikus $a \leq x \leq b$ olema üks ja seesama pöördfunktsioon $x = \psi(u)$.

Näiteks $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$

Kui aga selle integraali arvutamiseks kasutada näiteks teisendust $u = x^2$, siis vahemikus $-1 \leq x < 0$ $x = -\sqrt{u}$, $dx = -\frac{du}{2\sqrt{u}}$, vahemikus $0 \leq x \leq 2$ aga $x = \sqrt{u}$ ja $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$.
Seetóttu tuleb integraal kóigepealt teisendada summaks ja siis kumbagi liidetavat eraldi integreerida:

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2dx = \int\limits_{-1}^{0} x^2dx + \int\limits_{0}^{2} x^2dx = \int\limits_{1}^{0} u\left(-\frac{du}{2\sqrt{u}}\right) + \int\limits_{0}^{4} u\,\frac{du}{2\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0} \sqrt{u}\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{0}^{1} \sqrt{u}\,du + \int\limits_{0}^{4} \sqrt{u}\,du\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left[u\sqrt{u}\right]_0^1 + \left[u\sqrt{u}\right]_0^4\right\} = \frac{1}{3}\,(1 + 4 \cdot 2) = 3.$$

Jättes aga tähele panemata, et funktsioonil $u = x^2$ on vahemikus $-1 \leq x \leq 2$ kaks erinevat pöördfunktsiooni ning asendades kogu integreerimispiirkonnas $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ vói $dx = -\frac{du}{2\sqrt{u}}$, saaksime vale vastuse:

$$\int\limits_{1}^{4} u\,\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{1}^{4} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{vói} \quad -\int\limits_{1}^{4} u\,\frac{du}{2\sqrt{u}} = -\frac{2}{3}.$$

Määratud integraali arvutamine lihtsustub tunduvalt, kui integreerimispiirkond on sümmeetriline nullpunkti suhtes ja integreeritav funktsioon on kas paaritu vói paarisfunktsioon.

Olgu näiteks $f(x)$ paaritu funktsioon, s.o. $f(-x) = -f(x)$, siis

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Tehes nüüd esimeses integraali asenduse $x = -y$, $dx = -dy$, saame:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) = \int_{a}^{0} f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(y)\,dy =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{(kui asendada } y = x\text{). Seega}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Kui $f(x)$ on paarisfunktsioon, s.o. $f(-x) = f(x)$, siis

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Tehes esimeses integraalis asenduse $x = -y$, saame:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy) = -\int_{a}^{0} f(y)\,dy = \int_{0}^{a} f(y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Seega

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Niisiis

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{kui } f(x) \text{ on paarisfunktsioon} \\ 0, & \text{kui } f(x) \text{ on paaritu funktsioon.} \end{cases}$$

Määratud integraalide puhul peab alati kontrollima, kas Newton-Leibnizi valemi eeldused on rahuldatud, s.o. kas integreeritav funktsioon on integreerimispiirkonnas pidev. Vastavad näited on toodud ópikus P I lk. 402 - 403 (näide 7 ja 8).

Ülesannete kogust PR I tuleb läbi töötada § 13 näited I, II, IV - XV ja lahendada ülesanded 1265(1), 1266,

1268, 1270, 1273, 1281, 1282, 1285, 1287(1), 1288(1,2), 90, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299(1), 1301, 1303, 1305, 1309(1,3,5), 1310, 1312, 1315, 1322, 1325, 1327, 1329, 1333, 1335, 1341, 1343, 1344, 1347, 1349, 1351, 1352, 1356, 1358, 1364, 1366, 1368, 1382, 1383, 1387, 1390, 1391.

MÄÄRATUD INTEGRAALI RAKENDUSI

Määratud integraali rakendamine geomeetriliste ja füüsikaliste suuruste leidmiseks.

Pindala arvutamine rist- ja polaarkoordinaatides. Keha ruumala arvutamine paralleellõigete pindalade kaudu. Kaare pikkuse arvutamine. Pöördpinna pindala arvutamine.

Lihtsamaid füüsikalise sisuga ülesandeid.

Määratud integraali rakendusi on käsitletud õpiku P I peatükis XII, millest tuleb õppida kõik §-d 1 - 6.

Käesolev teema peab andma üliõpilasele kindla veendumuse, et määratud integraali mõiste on möödapääsmatult vajalik väga mitmesuguste suuruste arvutamisel.

Ülesannete kogust PR I tuleb läbi töötada § 14 näited I - XVI ja lahendada ülesanded 1407, 1408, 1409, 1411, 1412, 1417, 1421, 1423, 1427, 1429, 1431, 1437, 1441, 1443, 1447, 1451, 1455, 1460, 1462, 1467, 1470, 1473, 1475, 1478, 1483, 1487, 1488, 1490, 1495, 1507, 1511, 1517, 1520, 1527.

Geomeetrilise sisuga ülesannete lahendamisel tuleb erilist tähelepanu pöörata integraali rajade õigele määramisele. Näiteks õpikus P I lk. 442 ülesandes nr. 9 antud pind koosneb kahest tükist: joonisel 1 viirutatud pinnatükist OAB ja sellega koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetrilisest tükist.

Olgu pinnatüki OAB pindala S, kolmnurkade OB'B ja OA'A pindalad vastavalt S_1 ja S_2 ning kóverjoonelise trapetsi A'B'BA pindala S_3. Siis $S = S_1 - S_2 - S_3$. Nende pindalade saamiseks peame leidma punktide A ja B koordinaadid. Vórrandisüsteemist $y = x^3$ ja $y = x$ saame A(1;1). Süsteemist $y = x^3$ ja $y = 2x$ saame $B(\sqrt{2};2\sqrt{2})$. Seega

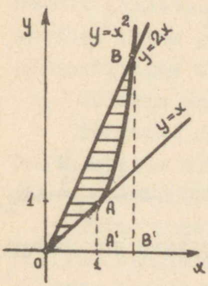
$$S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ ja}$$

$$S_3 = \int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(4 - 1) = \frac{3}{4}.$$

$$S = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Kogu kujundi pindala on seega

$$2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$



Joon. 1.

Õpikus P I lk. 443 ülesandes nr. 37 ei ole antud rajasid. Nagu vórrandist $(x^{\frac{1}{3}})^2 + (y^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{2}{3}}$ nähtub, on joon sümmeetriline koordinaattelgede suhtes, funktsioon on määratud vahemikus $[-a,a]$. Seega on tegemist kinnise kóveraga, millest veerand asub I veerandis rajadega 0 ja a. Leiame funktsiooni $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ tuletise

$$y' = -(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$$

ja kaare diferentsiaali

$$ds = \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) x^{-\frac{2}{3}}}\, dx = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx.$$ Seega joone kogupikkus

$$s = 4 \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = 6a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = 6a.$$

Füüsikalise sisuga ülesannete lahendamisel on kõige olulisemaks momendiks elementaarkorrutise (osavahemiku pikkuse ja funktsiooni korrutise) moodustamise oskus. Nende korrutiste summeerimine ja üleminek piirväärtusele, s.o. määratud integraalile, ei valmista tavaliselt mingeid raskusi. Vaatleme õpikus P I lk. 445 toodud ülesannet nr. 71 (vt. joonis 2). Antud ülesande puhul peame arvutama töö , mis kulub kogu anumas oleva vedeliku tõstmiseks anuma ülemise servani (kust vedelik juba ise ära voolab). **Selleks jaotame anumas oleva vedeliku mõttes õhukesteks kihtideks paksusega Δh_i. Iga niisugune kiht on kujult tüvikoonus, mille kõrgus Δh_i on väike, nii et alumise ja ülemise põhja raadiused erinevad väga vähe. Seetõttu võtame ülemise põhja raadiuse võrdseks alumise põhja raadiusega r_i, s.o. tüvikoonuse asendame silindriga. Vedelikukihi ruumala on siis $\pi r_i^2 \Delta h_i$, kus r_i sõltub alumise põhja kõrgusest h_i:**

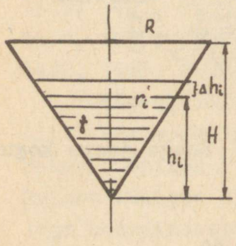
$$\frac{r_i}{h_i} = \frac{R}{H},$$

millest

$$r_i = \frac{R}{H} h_i.$$

Seega on kihi ruumala $\pi \frac{R^2}{H^2} h_i^2 \Delta h_i$ ja kihi raskus $\frac{\pi R^2 h_i^2}{H^2} \Delta h_i \gamma$.

Selle vedelikukihi tõstmiseks anuma ülemise servani ehk kõrgusele $H - h_i$ kulub tööd $\frac{\pi R^2 h_i^2}{H^2} \Delta h_i \gamma (H - h_i)$.



Joon. 2.

Järelikult kogu tehtav töö:

$$\lim_{\Delta h_i \to 0} \sum \frac{\pi \gamma R^2}{H} h_i^2 (H - h_i) \Delta h_i =$$

$$= \frac{\pi \gamma R^2}{H^2} \int_0^H h^2 (H - h)\, dh =$$

$$= \frac{\pi \gamma R^2}{H^2} \left| H \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \right|_0^H = \frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}.$$

Kahe ja kolme muutuja funktsioonid. Kahe muutuja funktsiooni geomeetriline kujutamine: pind, nivoojooned. Skalaarväli. Kolme muutuja funktsiooni nivoopinnad.

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus. Funktsiooni pidevus antud punktis ja piirkonnas. Lõplikus kinnises piirkonnas pidevate funktsioonide põhiomadused (ilma tõestuseta).

Mitme muutuja funktsiooni osatuletised. Kahe muutuja funktsiooni osatuletiste geomeetriline tähendus. Liitfunktsiooni diferentseerimine.

Ilmutamata funktsioon, tema olemasolu teoreemi sõnastus. Ilmutamata funktsiooni diferentseerimine.

Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal, tema olemasolu piisavad tingimused; täisdiferentsiaali kuju invariantsus. Pinna puutuvtasapind ja normaal, täisdiferentsiaali geomeetriline tähendus.

Tuletis antud suunas ja skalaarvälja gradient.

Kõrgemat järku osatuletised ja täisdiferentsiaalid. Osatuletiste diferentseerimise järjekorrast sõltumatuse teoreemi sõnastus.

Mitme muutuja funktsiooni ekstreemum, ekstreemumi tarvilikud tingimused, piisavate tingimuste sõnastamine (esimese diferentsiaali muutumine nulliks ja teise diferentsiaali märgi muutumatus), nende tingimuste väljendamine osatuletiste kaudu kahe muutuja funktsiooni puhul. Mitme muutuja funktsiooni suurima ja vähima väärtuse leidmine antud kinnises piirkonnas.

Mitme muutuja funktsioone tuleb õppida õpiku P I peatükist VIII §-d 1 - 8, 10 - 15 ja 17 (§ 17 teoreemi 2 tõestuse võib ära jätta).

Maailmas toimuvaid nähtusi uurides on leitud, et enamasti ei sõltu muutuv suurus mitte ühestainsast teisest muutuvast suurusest, vaid mitmest. Selle tõttu on mitme muutuja funktsioonide teoorial suur praktiline väärtus.

Sóltuvus mitmest muutujast on aga keerulisem kui sóltuvus ühest muutujast. Ühe muutuja funktsioonide uurimist kergendab graafiku kasutamine, mitme muutja funktsioonide puhul peaks aga graafiku asendama mudeliga ja sedagi ainult kahe muutuja funktsioonide korral. Seetóttu vóetakse mitme muutuja funktsioonide uurimise lähtekohaks kóige lihtsam juhtum, kahe muutuja funktsioon. Mitme muutuja funktsioonide puhul kehtivad teoreemid tóestatakse kahe muutuja funktsioonide kohta.

Kui funktsiooni $z = f(x,y)$ osatuletised $f'_x(x,y)$ ja $f'_y(x,y)$ on pidevad punktis $(x;y)$, siis saab funktsiooni täisjuurdekasvu

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

teisendada kujule

$$\Delta z = f'_x(x,y)\cdot \Delta x + f'_y(x,y)\cdot \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

kus γ_1 ja γ_2 lähenevad nullile Δx ja Δy lähenemisel nullile. Esimese kahe liidetava summa on funktsiooni juurdekasvu peaosa ja teda nimetatakse antud funktsiooni täisdiferentsiaaliks ning tähistatakse sümboliga dz:

$$dz = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y$$

vói

$$dz = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy.$$

Kui funktsioonil $f(x,y)$ on olemas täisdiferentsiaal, siis nimetatakse funktsiooni diferentseeruvaks.

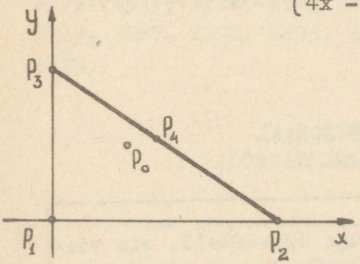
Praktikas tekib tihti vajadus mitme muutuja funktsiooni ekstreemumi leidmiseks. Sellise ülesande lahendamisel tuleb silmas pidada, et mitme muutuja funktsioonil vóib ekstreemum olla kas statsionaarses punktis, s.o. punktis, kus kóik esimest järku osatuletised vórduvad nulliga, vói punktis, kus funktsioon pole diferentseeruv. Funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ miinimum on näiteks ilmselt punktis (0,0), kuid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ selles punktis ei eksisteeri.

Funktsiooni suurim ja vähim väärtus mingis kinnises piirkonnas vóib esineda piirkonnasiseses statsionaarses punktis või piirkonna rajajoonel. Seega tuleb arvutada funktsiooni väärtused statsionaarsetes punktides, piirkonna rajajoonel asuvates ekstreemkohtades ja, juhul kui rajajoon koosneb erineva võrrandiga antud osadest, veel nende osade lõikepunktides. Saadud väärtuste hulgast tuleb valida suurim ja vähim väärtus.

Olgu näiteks vaja leida funktsiooni $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ suurim ja vähim väärtus kolmnurgas, mis on piiratud koordinaattelgedega ja sirgega $2x + 3y - 6 = 0$.

Eelkõige leiame funktsiooni statsionaarsed kohad. Need saame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$$



Joon. 3.

Seega on funktsioonil üksainus statsionaarne koht $P_0(1;1)$, mis asub ühtlasi antud piirkonnas (joon. 3). Piirkonna rajajoone üksikute osade $y = 0$, $x = 0$ ja $2x + 3y - 6 = 0$ lõikepunktid on $P_1(0;0)$, $P_2(3;0)$ ja $P_3(0;2)$.

Rajajoone osal P_1P_2 on funktsioonil kuju $z = x^2 - 6x$, mille ekstreemkoha saame võrrandist $2x - 6 = 0$, milles $x = 3$. Seega P_2 on ühtlasi ka rajajoonel asuvaks ekstreemkohaks.

Rajajoone osal P_1P_3 on funktsioonil kuju $z = -y^2 - 2y$. Sirgel P_1P_3 asuva ekstreemkoha ordinaadi saame võrrandist $-2y - 2 = 0$, millest $y = -1$. Seega ekstreemkoht ei asu antud piirkonnas.

Rajajoone osal P_2P_3 on funktsioonil kuju $z = -9 + 10y - \frac{19}{4}y^2$, mille ekstreemkoha ordinaadi leiame võrrandist

$10 - \frac{19}{2}y = 0$, milles $y = \frac{20}{19}$. Seega rajajoonel asuvaks ekstreemkohaks on $P_4(\frac{27}{19};\frac{20}{19})$.

Et $z(P_0) = -4$, $z(P_1) = 0$,

$z(P_2) = -9$, $z(P_3) = -8$

ja $z(P_4) = -\frac{71}{19}$, siis funktsiooni suurim väärtus antud piirkonnas on 0 ja vähim väärtus -9.

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 15, näited I - XII, XIV - XVIII, XXII, XXIV - XXVI ning lahendada ülesanded 1529, 1530, 1533, 1534, 1535, 1538, 1539, 1542, 1544, 1546, 1550 - 1552, 1554, 1557, 1561, 1564, 1565, 1567, 1569, 1570, 1574, 1576, 1577, 1580, 1582, 1583, 1586, 1587, 1588, 1591, 1592, 1594, 1597, 1601, 1603, 1607, 1608, 1611, 1612, 1616, 1619, 1621, 1623, 1626, 1631, 1637, 1642, 1647, 1648, 1650, 1653, 1656, 1657, 1659, 1662, 1665, 1667, 1669, 1672, 1676, 1678 - 1682, 1684, 1685, 1687, 1689, 1691, 1695, 1696, 1698, 1700, 1701, 1703, 1705, 1707, 1711, 1714, 1716, 1725, 1730, 1732, 1737, 1740, 1769, 1770, 1779, 1787, 1791, 1792, 1797, 1798 - 1801, 1804.

KAHE- JA KOLMEKORDNE INTEGRAAL

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mis viivad kahekordse integraali mõistele. Kahekordne integraal kui summa piirväärtus, tema olemasolu teoreem. Kahekordse integraali lihtsamaid omadusi, keskväärtusteoreem.

Kahekordse integraali arvutamine kahe teineteisele järgneva integreerimise teel. Muutuja vahetus kahekordses integraalis, kahekordse integraali avaldamine polaarkoordinaatides. Võrrandiga $z = f(x,y)$ antud pinnatüki pindala arvutamine.

Ülesandeid, mis viivad kolmekordse integraali mõistele. Kolmekordne integraal kui summa piirväärtus, tema lihtsamaid omadusi ja arvutamine.

Muutujate vahetus kolmekordses integraalis, kolmekordse integraali teisendamine silinder- ja sfäärikoordinaatidesse.

Tasapinnaliste ja ruumiliste kujundite momentide ja raskuskeskmete leidmine.

Nimetatud palad on käsitletud õpiku P II XIV peatükis §-d 1 - 5, 7, 9 - 14 (§ 13-st jääb ära 3. lõik, muutujate vahetuse üldjuhtum).

Kahekordse integraali arvutamisel on kõige olulisem osata õigesti määrata integreerimispiirkonda, mis on antud kas võratustega või piirkonna rajajoonte võrranditega. Soovitav on piirkond skitseerida, joonise abil on tunduvalt kergem määrata õiget integreerimisjärjekorda ja integraali rajasid.

See kehtib ka kolmekordse integraali puhul.

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 19 toodud näited I - XIII ja lahendada ülesanded 2222, 2224, 2227, 2229, 2230, 2232, 2234 - 2236, 2240, 2241, 2243, 2247, 2249, 2250, 2252, 2255, 2257, 2261, 2264, 2265, 2268, 2270, 2272, 2275, 2316, 2322, 2323, 2329, 2336, 2338, 2344, 2346, 2284, 2286, 2287, 2290, 2293, 2299, 2300, 2305, 2307, 2309, 2310, 2339.

JOONINTEGRAAL JA PINDINTEGRAAL

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesandeid, mis viivad joonintegraali mõistele. Joonintegraal kaare pikkuse ja koordinaatide järgi tasapinnal. Joonintegraali lihtsamaid omadusi. Joonintegraali arvutamine tema teisendamisel määratud integraaliks. Vektorfunktsiooni joonintegraal.

Greeni valem. Koordinaatide järgi võetud joonintegraali integreerimisteest sõltumatuse tingimused.

*Ülesandeid, mis viivad pindintegraali mõistele. Pindintegraali lihtsamaid omadusi. Pindintegraali arvutamine tema kahekordseks integraaliks teisendamise teel. Vektori voog läbi pinna.

*Ostrogradski ja Stokesi valemid, nende vektorkuju, divergents ja rootor.

Ülalloetud teemad on käsitletud õpiku P II XV peatükis §-d 1 - 9. Tärnikesega * märgitud teemad on vajalikud ainult elektrotehnikutele.

Mitmesuguste mehaanikaülesannete (töö, mass, raskuskese jne.) lahendamine nóuab uue matemaatilise móiste - joonintegraali kasutuselevótmist. Õpikus ongi muutuva jóu poolt tehtava töö arvutamise ülesanne vahetult seotud joonintegraali móistega koordinaatide järgi. Kaare pikkuse järgi defineeritud joonintegraal on toodud P II § 4 lópus märkusena (lk. 210). Kui funktsiooni X(x,y) vaadelda joone L tihedusena, siis on selle joonintegraali füüsikaliseks tähenduseks joone L mass.

Greeni valemi rakendamisel, aga samuti ka joonintegraali arvutamisel, kui see ei sóltu integreerimisteest, tuleb alati meeles pidada tingimusi, millal need valemid ja seosed kehtivad: piirkonnas D ja selles asetseval joonel (vói joontel) L peavad funktsioonid X(x,y) ja Y(x,y), aga ka nende osatuletised olema pidevad. Selles móttes on ópetlik läbi uurida PR II § 20, näide VI.

Kui joonintegraal $\int_M^N X\,dx + Y\,dy$ ei sóltu integreerimisteest, siis on $X\,dx + Y\,dy = dU$, kus $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ ja $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$. Seega vóib joonintegraali arvutada ka funktsiooni U(x,y) abil tema väärtuste vahena punktides N ja M. Funktsiooni U(x,y) vóib leida ka nii:

$U(x,y) = \int X\,dx + \varphi(y) = V(x,y) + \varphi(y)$, sest osatuletise $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ avaldamisel kadusid funktsiooni U(x,y) need liidetavad, mis sóltuvad ainult muutujast y. Funktsiooni $\varphi(y)$ leiame tingimusest $\frac{\partial U}{\partial y} = Y = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} + \frac{d\,\varphi(y)}{dy}$, seega

$\frac{d\,\varphi(y)}{dy} = Y - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$ ja

$$\varphi(y) = \int \left[Y - \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \right] dy.$$

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 20 näited I - IX ja § 21 näited II ja III ning lahendada ülesanded 2361 - 2363, 2366, 2368 - 2372, 2380 - 2388, 2392, 2395, 2396, 2403, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2411.

Geomeetrilise ja füüsikalise sisuga ülesanded, mis lahenduvad diferentsiaalvõrrandi abil. Harilikud diferentsiaalvõrrandid, diferentsiaalvõrrandi järk, lahend ja integraaljooned. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi sõnastus. Cauchy' ülesanne, antud algtingimustele vastavate konstantide määramine, üld- ja erilahend. Singulaarse lahendi mõiste.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi geomeetriline tõlgendamine, sihiväli, isokliinid.

Eralduvate muutujatega, homogeensete, lineaarsete ja eksaktsete diferentsiaalvõrrandite integreerimine.

Õpikus P II on käesolevat teemat käsitletud XIII peatükis (§-d 1-5, 7, 9 ja 12).

Hakates teemat õppima, tuleb endale kõigepealt selgeks teha diferentsiaalvõrrandi definitsioon, võrrandite liigituse alused, lahendite liigid ja nende geomeetriline tähendus.

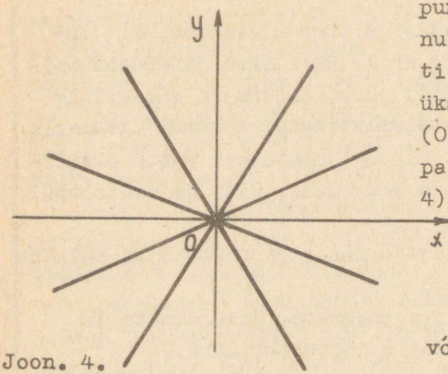
Rakendustes on erilise tähendusega Cauchy' ülesande lahendamine, s.o. diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmine vastavalt antud algtingimustele. Kui võrrandi üldlahend on leitud, tähendab see suvaliste konstantide selliste väärtuste leidmist, mille puhul erilahend rahuldab algtingimusi.

Geomeetriliselt tähendab Cauchy' ülesanne esimest järku diferentsiaalvõrrandi puhul järgmist: integraaljoonte perest (üldlahendist) tuleb eraldada niisugune integraaljoon (erilahend), mis läbib antud punkti $(x_0;y_0)$.

Peab silmas pidama, et esimest järku diferentsiaalvõrrandi puhul võib leiduda punkte, mida ei läbi antud võrrandi ükski integraaljoon, samuti aga võib leiduda punkte, mida läbivad mitu või koguni lõpmata palju integraaljooni.

<u>Näide 1</u>. Diferentsiaalvõrrandist $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ on näha, et otsitava funktsiooni tuletis pole määratud üheski punktis, kus argument on null. Et antud võrrandi üldlahend on $y = cx$,

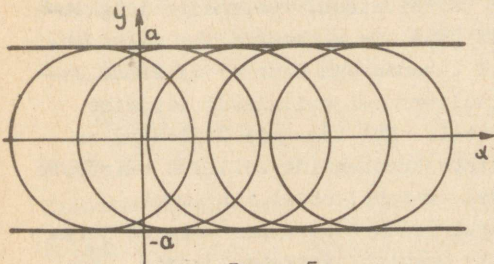
siis on **integraaljoonteks** punkti (0;0) läbivad sirged, välja arvatud sirge $x = 0$. Seega läbib koordinaattasapinna iga punkti, kus $x \neq 0$, üks ja ainult üks **integraaljoon**, punkti ($x = 0$; $y \neq 0$) ei läbi ükski **integraaljoon**, punkti (0;0) aga kõik, s.o. lõpmata palju **integraaljooni** (joon. 4).



Joon. 4.

Näide 2. Nagu kergesti võib veenduda, on diferentsiaalvõrrandi $y^2(1 + y'^2) = a^2$ ($a > 0$) üldlahend $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ ja iseärane lahend, s.o. lahend, mis pole tuletatav üldlahendist, $y = \pm a$.

Seega on **integraaljoonteks** võrdsete raadiustega ringjooned, mille keskpunktid asetsevad x-teljel, ja kaks x-teljega paralleelset sirget, mis on üldlahendiga antud ringjoonte puutujateks (joon. 5). Et üldlahendis $c = x \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, siis läbib iga punkti, kus $-a < y < a$, kaks integraalringjoont; iga punkti, kus $y = \pm a$, läbib üks ringjoon



Joon. 5.

ja üks sirge ning punkte, kus $y > a$ või $y < -a$, ei läbi ükski integraaljoon. Seega asetsevad kõik integraaljooned ribas, mis on piiratud sirgetega $y = a$ ja $y = -a$.

Näide 3. Toome näite diferentsiaalvõrrandi koostamise ja Cauchy' ülesande lahendamise kohta.

Keha temperatuuriga 100°C jahtub ruumis, mille temperatuur on 20° C, ja püsib konstantsena kogu jahtumise vältel. 10 minutit hiljem oli keha temperatuur 60° C. Millal on keha temperatuur 25° C, kui keha jahtumise intensiivsus on võrdeline jahtuva keha ja keskkonna temperatuuride vahega?

Olgu teataval ajahetkel t jahtuva keha ja keskkonna temperatuuride vahe T; siis jahtumise intensiivsus ("hetkeline kiirus") on $\frac{dT}{dt}$ ja protsessi diferentsiaalvórrand on $\frac{dT}{dt} = kT$, kus k on vórdetegur (mitte suvaline konstant). Eraldame muutujad ja integreerime:

$$\int \frac{dT}{T} = k \int dt, \qquad \ln T = kt + C.$$

Saime diferentsiaalvórrandi üldlahendi. Algtingimuseks on siin asjaolu, et hetkel $t = 0$ on $T = 100 - 20 = 80$, seega saame üldlahendist $c = \ln 80$ ja erilahend on $\ln T = kt + \ln 80$ ehk

$$\ln \frac{T}{80} = kt.$$

Jääb üle määrata vórdetegur (see pole enam algtingimuste rakendamine!): kui $t = 10$, on $T = 60 - 20 = 40$, seega

$$\ln \frac{40}{80} = 10k, \qquad k = \frac{1}{10} \ln \frac{1}{2}.$$

Seega antud jahtumisintensiivsuse puhul on erilahend

$$\ln \frac{T}{80} = \frac{t}{10} \ln \frac{1}{2}$$

ehk

$$t = 10 \frac{\ln \frac{T}{80}}{\ln \frac{1}{2}}.$$

Seega vastus esitatud küsimusele (kui $T = 25 - 20 = 5$):

$$t = 10 \frac{\ln \frac{5}{80}}{\ln \frac{1}{2}} = 10 \frac{\ln \frac{1}{16}}{\ln \frac{1}{2}} = 10 \frac{4 \ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{2}} = 40 \text{ min.}$$

Olulise tähtsusega küsimuseks on ka joontepere diferentsiaalvórrandi leidmine (vastupidine ülesanne diferentsiaalvórrandi üldlahendi leidmisele). Kui on tegemist n-parameetrilise joonteperega, tuleb selle vórrandit n korda diferentseerida ja saadud süsteemist elimineerida parameetrid; saadakse vórrand $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$. Selline elimineerimine on aga vóimalik, kui parameetrid on omavahel lineaarselt sóltumatud (vt. PR II § 17, näide II). See aga tähendab, et diferentsiaalvõrrandi üldlahendis konstandid on küll meelevaldsed, aga peavad olema sealjuures lineaarselt sõltumatud. Sellel asjaolul on oluline tähtsus kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite teoorias.

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 17 näited I - IV, VII, VIII ja X ning lahendada ülesanded 1875 - 1877, 1882, 1883, 1885, 1887, 1895, 1899, 1900, 1903, 1906, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1920, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1934, 1936, 1939, 1941, 1942, 1944, 1946 - 1949, 1960, 1961, 1963, 1965, 1970, 1972, 1973, 2043 - 2046.

KÕRGEMAT JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Suvalise järguga diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi sõnastus. Cauchy' ülesanne, üldlahend ja erilahend.

Mõnede diferentsiaalvõrrandite integreerimine järgu alandamise võttega.

Homogeensed ja mittehomogeensed suvalist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid. Lahendite fundamentaalsüsteem ja Wronsky' determinant. Homogeense ja mittehomogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi struktuur.

Suvalist järku lineaarsed homogeensed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid, karakteristlik võrrand.

Lineaarsed mittehomogeensed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid, erilahendi leidmine määramatu kordajate võttega. Konstantide variatsiooni meetod. Nimetatud diferentsiaalvõrrandite rakendamine lihtsate võnkumiste uurimiseks, resonants.

Õpikus P II on nimetatud palasid käsitletud XIII peatükis §-d 16 - 18, 20 - 28.

Et käesoleva peatüki valdavaks teemaks on lineaarsed diferentsiaalvórrandid, siis tuleb erilist tähelepanu pöörata lineaarse diferentsiaalvórrandi üldlahendi struktuurile.

Kui n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvórrandi

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

n lineaarselt sóltumatut erilahendit on $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, siis üldlahend on

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n,$$

kus $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ on suvalised konstandid.

Vóttes ülal antud diferentsiaalvórrandi paremal pool arvu 0 asemel funktsiooni f(x), saame n-järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvórrandi

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x).$$

Kui selle mittehomogeense diferentsiaalvórrandi üks erilahend on $\overline{y}$, siis üldlahend on selle erilahendi ja vastava homogeense diferentsiaalvórrandi üldlahendi summa:

$$y = \overline{y} + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n.$$

Kui kordajad $p_1, p_2, \dots, p_n$ on konstandid, siis nimetatakse diferentsiaalvórrandit lineaarseks homogeenseks konstantsete kordajatega n-järku diferentsiaalvórrandiks. Tema n lineaarselt sóltumatut erilahendit leitakse karakteristliku vórrandi abil (§-d 21 ja 22). Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvórrandi üks erilahend leitakse aga kas konstantide variatsiooni vói määramatu kordajate vótte abil (§-d 23, 24 ja 25).

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 18 näited I - XII ja lahendada ülesanded 2066, 2068 - 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2086, 2088, 2089, 2091, 2092, 2094, 2096, 2100, 2102, 2103, 2109, 2110, 2113, 2115, 2119, 2120, 2123, 2125, 2127, 2131, 2134, 2137, 2138, 2142, 2144, 2148, 2150, 2153 - 2155, 2160, 2162.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi mõiste. Homogeenne lineaarne konstantsete kordajatega süsteem ja selle lahendamine, kui karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja erinevad.

Õpikus P II on nimetatud teemat käsitletud XIII peatüki §-des 29 ja 30, kuni esimese näiteni (incl.).

Ülesannete kogust PR II tuleb läbi töötada § 18 näited XV ja XVI ning lahendada ülesanded 2205, 2208, 2210, 2212 ja 2214.

Näide. Lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t},$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}.$$

Lahendus: Diferentseerides antud süsteemi teist võrrandit, saame

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 5e^{-t}.$$

Asendades saadud võrrandis $\frac{dx}{dt}$ avaldisega $5x - 3y + 2e^{3t}$, saame

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + 5x - 3y + 2e^{3t} - 5e^{-t}. \qquad (*)$$

Avaldades süsteemi teisest võrrandist muutuja x ja asetades saadud avaldise võrrandisse (*), saame

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}.$$

Lahendades selle diferentsiaalvõrrandi, saame:

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \qquad (***)$$

Seega üks otsitavatest funktsioonides on leidtud. Et süsteemi teisest vórrandist

$$x = \frac{dy}{dt} - y - 5e^{-t}$$

ja leitud lahendist (***)

$$\frac{dy}{dt} = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 6e^{3t} + 2e^{-t},$$

siis

$$x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}.$$

Seega antud vórrandisüsteemi üldlahend on

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}, \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}. \end{cases}$$

Kontrolltööks lahendab iga üliópilane need ülesanded, mille järjekorranumber lópeb sama numbriga, millega lópeb üliópilase ópinguraamatu number.

Kontrolltööde tähtajad:

1. töö - 1. nov.; 2. töö - 10. dets.
3. töö - 25. märts; 4. töö - 1. mai.

Kontrolltöö nr. 1

(ülesanded 1 - 50)

Ülesandeis 1 - 10 avaldada antud integraalid.

1. a) $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}$; c) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

2. a) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; b) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$; c) $\int x^2 2^x\,dx$.

3. a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+x^6}}\,dx$; b) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$; c) $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

4. a) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$; b) $\int x^3 \arctan x\,dx$; c) $\int \frac{(2x^2+4)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

5. a) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; b) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; c) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

6. a) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+3\sin x}$; b) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$; c) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

7. a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(3\tan x+1)}$; b) $\int \frac{dx}{\tan x\cos 2x}$;

   c) $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

8. a) $\int \frac{3^{3x}\,dx}{\sqrt{4 - 3^{6x}}}$; b) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; c) $\int \ln^2 x\,dx$.

9. a) $\int \frac{dx}{(\arctan x)^3(1 + x^2)}$; b) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$;

c) $\int \frac{x^3 dx}{1 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$.

10. a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$; c) $\int \cos 2x \sin^2 x\,dx$.

Ülesandeis 11 – 20 arvutada antud määratud integraal Newton–Leibnizi valemi abil

11. $\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 7x\,dx$.

12. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$.

14. $\int_1^9 x \sqrt[3]{1 - x}\,dx$.

15. $\int_1^3 x \ln x\,dx$.

16. $\int_0^{\ln 2} x\,e^{2x}\,dx$.

17. $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x\,dx$.

18. $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5 - 4x}}$.

19. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx$.

20. $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1}$.

Ülesandeis 21 – 30 arvutada antud määratud integraali ligikaudne väärtus Simpsoni valemi abil, jaotades integreerimisvahemiku 10 võrdseks osaks. Arvutused teha kolmanda kümnendkohani ümardatud arvudega.

21. $\int_{-5}^{5} \sqrt{3x^2 + 1}\, dx.$

26. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

22. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\, dx.$

27. $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^2 + 3}\, dx.$

23. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\ln x}.$

28. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin (x^2)\, dx.$

24. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{3 + \cos x}\, dx.$

29. $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{3 - 2x^2}\, dx.$

25. $\int_{0}^{10} \sqrt{x^2 + 21}\, dx.$

30. $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\, dx.$

Ülesandeis 31 - 40 arvutada antud joontega piiratud kujundi pindala. Teha joonis.

31. $4x = y^2$ ja $4x - y - 12 = 0.$

32. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

33. $xy = 4$ ja $x^2 + y^2 = 17.$

34. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy.$

35. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ ja $4(x - 4)^2 + 4y^2 = 43.$

36. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ja $y = \frac{x^2}{2}.$

37. $y = x^3,\ y = 0$ ja $8x + 3y - 40 = 0.$

38. $x^2 + 4x - 2y = 0$ ja $5x - 6y + 10 = 0.$

39. $xy = 6$ ja $x + y = 0$

40. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $\sqrt{15}\,x + y - 11\sqrt{15} = 0$ ja $y = 0$

41. Joon $x^2 - xy + y^2 = a^2$ pöörleb ümber x-telje. Arvutada pöördkeha ruumala.

42. Joon $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $0 < a < b$, pöörleb ümber sirge $y = 0$. Leida tekkinud keha pindala.

43. Leida masskeskme koordinaadid homogeensel tasapinnalisel kujundil, mida piiravad jooned $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $x = 0$ ja $y = 0$.

44. Leida joonte $y = x^2$ ja $y^2 = 8x$ poolt piiratud homogeense tasapinnalise kujundi masskeskme koordinaadid.

45. Leida joone $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ punktide $A(0;0)$ ja $B(2\pi a; 0)$ vahelise kaare pikkus.

46. Leida joone $y = (x + 1)^{\frac{3}{2}}$ kaare pikkus vahemikus, milles $-1 \leq x \leq 4$.

47. Joon $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud keha pindala.

48. Joontega $y = 3$ ja $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$ piiratud kujund pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud keha ruumala.

49. Leida kõvera $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ kogupikkus.

50. Leida pindadega $x^2 + z^2 = a^2$ ja $y^2 + z^2 = a^2$ piiratud keha ruumala.

Kontrolltöö nr. 2
(Ülesanded 51 - 100)

<u>Ülesandeis 51 - 60</u> esitada antud funktsiooni määramispiirkond võrratuste abil ja kujutada see piirkond joonisel.

51. $z = \sqrt{(x^2+y^2+1)(4-x^2-y^2)}$.

52. $z = \arccos \frac{x}{x+y}$

53. $z = \ln(-x-y) + \arcsin 2x$.

54. $z = \ln \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a > 0)$.

55. $z = \arcsin(x^2-3) + \frac{1}{4}\sqrt{-(x^2+y^2+6y)}$.

56. $z = \sqrt{x \sin y}$.

57. $z = \ln\left[x \ln(y-x)\right]$.

58. $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$.

59. $z = \sqrt{\frac{y^2+4x}{y-x-2}}$.

60. $z = xy + \sqrt{\ln \frac{R^2}{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

<u>Ülesandeis 61 – 70</u> kontrollida, kas funktsioon z rahuldab antud tingimust.

61. $z = e^{xy}; \qquad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

62. $z = (y-u)(u-x)(x-y); \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$.

63. $z = x^y; \qquad y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

64. $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$.

65. $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$.

66. $z = \arctan \frac{y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

67. $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$; $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

68. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

69. $z = \ln\left[x^2 + (y + 1)^2\right]$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

70. $z = \frac{\cos x^2}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Ülesandeis 71 - 80 leida funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas.

71. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ kolmnurgas külgedega $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

72. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ ruudus $0 \leq x \leq 2$ ja $0 \leq y \leq 2$.

73. $z = x^2 + 2xy - 10$ piirkonnas, mida piiravad jooned $y = x^2 - 4$ ja $y = 0$.

74. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ kolmnurgas külgedega $x + y + 2 = 0$, $x = 0$ ja $y = 0$.

75. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ kolmnurgas külgedega $y = 2x$, $y = 2$ ja $x = 0$.

76. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ ruudus $-1 \leq x \leq 1$ ja $-1 \leq y \leq 1$.

77. $z = x^2 + xy - 2$ piirkonnas, mida piiravad jooned $y = 4x^2 - 4$ ja $y = 0$.

78. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ kolmnurgas külgedega $x + y + 1 = 0$, $y = 0$ ja $x = -3$.

79. $z = (x^3 - 3x)(2 - y^2)$ ristkülikus $-2 \leq x \leq 2$ ja $-1 \leq y \leq 1$.

80. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$ kolmnurgas külgedega $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 1$.

Ülesandeis 81 - 90 arvutada antud avaldise ligikaudne väärtus, lähtudes funktsiooni z väärtusest punktis A ja lugedes fuhktsiooni juurdekasvu ligikaudu võrdseks funktsiooni täisdiferentsiaaliga.

81. $\frac{1}{\sqrt[3]{0,98 \sqrt[4]{1,05^3}}}$; $z = \frac{1}{\sqrt[3]{x \sqrt[4]{y}}}$; A(1;1).

82. $\sin 29^\circ \cdot \tan 46^\circ$; $z = \sin x \cdot \tan y$; $A(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4})$.

83. $0,97^{1,05}$; $z = x^y$; A(1;1).

84. $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$; $z = \sqrt{x^3 + y^3}$; A(1;1).

85. $\arctan \frac{0,97}{1,05}$; $z = \arctan \frac{y}{x}$; A(1;1).

86. $\frac{10}{(4,02)^3 + (1,97)^5 + 4}$; $z = \frac{10}{x^3 + y^5 + 4}$; A(4;2).

87. $\sqrt{(4,03)^3 + (1,96)^5 + 4}$; $z = \sqrt{x^3 + y^5 + 4}$; A(4;2).

88. $\frac{(2,05)^2}{(2,05)^2 + 3,01^2}$; $z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; A(2;3).

89. $\ln [(1,018)^2 + (0,02)^2]$; $z = \ln (x^2 + y^2)$; A(1;0).

90. $\frac{2}{\sqrt[3]{(3,04)^2 - (0,96)^2}}$; $z = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2 - y^2}}$; A(3;1).

Ülesandeis 91 - 100 leida antud pinna puutuvtasapinna ja normaali võrrandid antud punktis A.

91. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; A(3;4;12).

92. $z^2 + 9y^2 = 0$; A(1;-1;2).

93. $z = x^3 + y^2 + xy$; A(-1;3;5).

94. $e^{-3z} - 6z + 3xy = 10$; A(3;1;0).

95. $z = \arctan \frac{y}{x}$; $A(1;1;\frac{\pi}{4})$.

96. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$; $A(2;2;1)$.

97. $x^3y^2 - xyz = 4$; $A(2;1;2)$.

98. $2z^2 = 9y^2 + 9$; $A(-1;1;3)$.

99. $z = \sin x \sin y$; $A(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};1)$.

100. $8y^2 = 3z^2 + 5$; $A(1;1;1)$.

Kontrolltöö nr. 3
(Ülesanded 101 – 150)

Ülesandeis 101 – 110 teha integreerimispiirkonna joonis ja muuta integreerimise järjekorda.

101. $\int\limits_2^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x;y)\, dy$,

102. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x;y)\, dy$,

103. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x;y)\, dy$,

104. $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;y)\, dy$.

105. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;y)\, dy$.

106. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x;y)\, dx$.

107. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x;y)\, dx$.

108. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x;y)\, dy$.

109. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x;y)\,dx$. 110. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{2-\frac{y}{2}}^{8-\frac{y^2}{2}} f(x;y)\,dx$.

<u>Ülesandeis 111 - 120</u> leida antud pindadega piiratud keha ruumala. Teha skemaatiline joonis.

111. $z = x^2 + y^2;\ x^2 + y^2 = x;\ x^2 + y^2 = 2x;\ z = 0$.

112. $2z = x^2 + y^2;\ x^2 + y^2 = z - 4$.

113. $x^2 + y^2 = 3;\ x + z = 3;\ z = 0$.

114. $z = y;\ z = 0;\ x = 0;\ x = 3;\ y = \sqrt{25 - x^2}$.

115. $x + y + z = 6;\ 3x + y = 6;\ 3x + 2y = 12;\ y = 0;$
$z = 0$.

116. $z = x^2 + y^2;\ y = x^2;\ y = 1;\ z = 0$.

117. $z = y;\ z = 0;\ y = \sqrt{4 - x};\ 2y = x - 1$.

118. $x^2 + y^2 = 4x;\ z = 2x;\ z = x$.

119. $x = 4 - z^2;\ x^2 + y^2 = 4x$.

120. $z = 9;\ y^2 + x^2 = z$.

<u>Ülesandeis 121 - 130</u> leida antud joontega piiratud kujundi pindala kahekordse integraali abil, teisendades joone võrrandi eelnevalt polaarkoordinaatidesse. Teha skemaatiline joonis.

121. $(x^2 + y^2)^2 = 9(3x^2 + 2y^2)$.

122. $4y^3 = (x^2 + y^2)^2$.

123. $x^4 = 25(3x^2 - y^2)$.

124. $(x^2 + y^2)^2 = 16(4x^2 + y^2)$.

125. $x^6 = 4(x^4 - y^4)$.

126. $36x^4 = (x^2 + y^2)^3$.

127. $36xy = x^4 + y^4$.

128. $25x^4 = x^2 - 3y^2$.

129. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2(4x^2 + 3y^2)$.

130. $9y^6 = y^4 - x^4$.

Ülesandeis 131 - 140 leida antud pindaladega piiratud ühtlase tihedusega keha masskese.

131. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

132. $x^2 + y^2 = 4$; $x + z = 2$; $z = 0$.

133. $x^2 + y^2 = 3 - z$; $z = 0$.

134. $z = x^2 + y^2$; $z = 4$; $x = 0\ (x \geq 0)$; $y = 0\ (y \geq 0)$.

135. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$.

136. $x^2 + y^2 = 9$; $y + z = 3$; $z = 0$.

137. $y^2 + 2z^2 = 4x$; $x = 2$.

138. $x^2 + 3y^2 = 4z$; $z = 3$.

139. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $-a < h \leq z \leq a$.

140. $x^2 + y^2 = z$; $x + y + z = 0$.

Ülesandeis 141 - 150 kontrollida, kas antud avaldis on mingi funktsiooni U(x,y) täisdiferentsiaaliks. Jaatava vastuse korral leida funktsioon U(x,y) joonintegraali abil.

141. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy.$

142. $\left(3x^2 \tan y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy.$

143. $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) dx - \frac{x^2 + y^2}{xy^2}\, dy.$

144. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy.$

145. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sqrt{1 + x^2} + x^2 - \ln x\right) dy.$

146. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$

147. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy.$

148. $\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right) dy.$

149. $2x\left[1 - \sin (x^2 - y^2)\right] dx + 2y\left[1 + \sin (x^2 - y^2)\right] dy.$

150. $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right) dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right) dy.$

Kontrolltöö nr. 4
(Ülesanded 151 - 200)

Ülesandeis 151 - 180 leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

151. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$

152. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0.$

153. $y^3 dy + 3y^2 x\, dx + 2x^3 dx = 0.$

154. $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0.$

155. $\frac{dx}{y + x} = \frac{dy}{y - x}.$

156. $\frac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{dy}{y^2 - 4xy}.$

157. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$

158. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$

159. $xy' = y + \sqrt{y^2 - 4x^2}.$

160. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$

161. $(x^2 + 2x - 1)\, y' - (x + 1)\, y = x - 1.$

162. $(1 - x^2)\, y' + xy = 1.$

163. $(x + 1)\, dy - \left[2y + (x + 1)^4\right] dx = 0.$

164. $(a^2 - x^2)\, y' + xy = a^2.$

165. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$

166. $x^2(x^3 + 1)\, y' + (2x^3 - 1)\, xy = x^3 - 2.$

167. $y' - y \sin x = \sin x \cdot \cos x.$

168. $y' \sin x - y = 1 - \cos x.$

169. $(1 + x^2)\, y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$

170. $(x^2 - 1)\, y' - xy = x^3 - x.$

171. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$

172. $(1 + x^2)\, y'' + y'^2 + 1 = 0.$

173. $y'(1 + y'^2) = ay''.$

174. $y^4 - y^3 y'' = 1.$

175. $2y'^2 = (y - 1)y''.$

176. $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2).$

177. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

178. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$

179. $yy'' + y'^2 = 1.$

180. $y''(1 + y) = 5y'^2.$

<u>Ülesandeis 181 - 190</u> leida antud diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi.

181. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x;\quad y(\pi) = \pi e^{\pi};\ y'(\pi) = e^{\pi}.$

182. $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$; $y(0) = -4$; $y'(0) = 5$.

183. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$; $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.

184. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 8$.

185. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

186. $y'' + 9y = 6e^{3x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

187. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 3$.

188. $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

189. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = \frac{4}{3}$; $y'(0) = \frac{1}{27}$.

190. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$.

Ülesandeis 191 - 200 leida diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahend.

191. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2y, \\ \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = 2x. \end{cases}$

192. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t} + x. \end{cases}$

193. $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} = 6x - y - 6t^2 - t + 3, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1. \end{cases}$

194. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t - y - 5x, \\ \frac{dy}{dt} = e^{2t} + x - 3y. \end{cases}$

195. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4(x + y), \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = -4y. \end{cases}$

196. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2t. \end{cases}$

127. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 17x + 8y, \\ 13\frac{dx}{dt} = 53x + 2y. \end{cases}$

128. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

199. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^{-t} - y, \\ 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \sin t - 2y. \end{cases}$ 200. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -3y - x. \end{cases}$

Heaks kiidetud kateedri koosolekul
23. apr. 1969.

S i s u k o r d

Tasuta