Lehrbuch

der

sphärischen Trigonometrie

von

W. Nersing.

Dorpat 1853.

Lehrbuch

der

sphärischen Trigonometrie,

zum Gebrauch

bei

dem Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten

von

W. Nersing,

Collegienrath und Oberlehrer an dem Gymnasium
in Dorpat.

Dorpat 1853,

gedruckt bei Heinrich Laakmann.

Der Druck dieser Schrift wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl von Exemplaren vorgestellt werde.

Dorpat, den 29. Juni 1853.

Abgetheilter Censor de la Croix.

I. Lehrsätze über sphärische Dreiecke.

Erklärung. Ein sphärisches Dreieck ist ein von drei Bogen dreier größten Kugelkreise eingeschlossener Theil der Kugelfläche. Die Bogen (Centriwinkel) nennt man Seiten, und die Winkel des sphärischen Dreiecks sind die Flächenwinkel, welche die Ebenen dieser Bogen mit einander bilden.

Die Prädikate gleichseitig, gleichwinklig, ungleichseitig u. s. w. kommen diesen Dreiecken in demselben Sinne zu, wie den gleichnamigen ebenen.

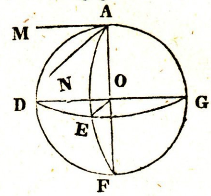
Der Theil der Kugeloberfläche, welcher von zwei größten Kugelkreisen gebildet wird, nennt man ein sphärisches Zweieck.

Anmerkung. Zwischen zwei Punkten der Peripherie eines Kreises kommen immer zwei Bogen vor, von denen der eine kleiner, der andere größer als die halbe Peripherie ist. Hier sind nur Bogen, welche kleiner als die halbe Peripherie sind, zu verstehen, indem leicht gezeigt werden kann, daß die Berechnung eines jeden sphärischen Dreiecks, in welchem diese Bedingung nicht erfüllt ist, auf die Berechnung eines dieser Bedingung genügenden sphärischen Dreiecks zurückgeführt werden kann.

Lehrs. 1. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks werden durch die Winkel der Tangenten der entsprechenden Ebenen gemessen.

Bew. Es sei Winkel A zu messen. Man ziehe die Tangenten AM und AN zu den Kreisen AFD und AEF, deren Durchschnittslinie AOF ist, und lege durch O (Mittelpunkt der Kugel) eine Ebene senkrecht auf AF, so entsteht ein Kreis DEGD, verbinde O mit D und E, so ist DOE der Neigungswinkel beider Ebenen oder der sphärische Winkel. Da MA senkrecht auf AO steht, so ist MA ∥ DO, ebenso NA ∥ EO; folglich ∠ MAN = ∠ DOE = ∠ A.

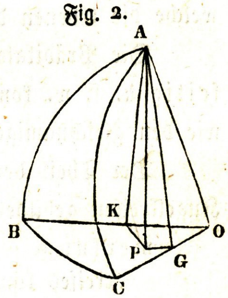
Fig. 1.



Zus. Der sphär. Winkel hat auch zu seinem Maaße den Bogen des größten Kreises DE, der zwischen seinen bis zum Quadranten verlängerten Schenkeln enthalten ist.

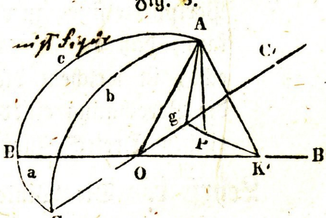
Lehrs. 2. In einem gleichschenkligen sph. Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und sind zwei Winkel gleich, so ist es ein gleichschenkliges.

Fig. 2.



Bew. ABC sei das sphärische Dreieck, AB und AC kleiner als 90°. Man verbinde O mit A, B, C, ziehe von A, AP ⊥ auf die Ebene BOC, AK ⊥ OB u. AG ⊥ OC, verbinde P mit K und G, so ist ∠ AKP = ∠ B und ∠ AGP = ∠ C (Stereometrie). Das △ APK ≅ △ APG, folglich ∠ B = ∠ C. Ebenso umgekehrt.

Fig. 3.



Sind AB und AC größer als 90° (Fig. 3), so fällt AP auf die Verlängerung von BOC; man ziehe dann AG' ⊥ OC' und AK' ⊥ OB', verbinde P mit K' u. G', so sind ∠ AK'P, ∠ AG'P, ∠ AOB', ∠ AOC' Nebenwinkel von ∠ B, ∠ C, ∠ c und ∠ b.

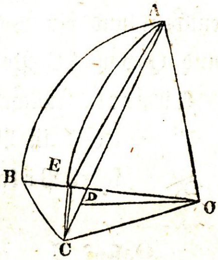
Lehrs. 3. Der größern Seite eines sphär. Dreiecks liegt der größere Winkel, und dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Bew. Es sei $AC > AB$ oder $\angle AOC > AOB$, so ist (Fig. 2), da die Sinuslinien im ersten Quadranten mit den Winkeln wachsen, auch $AG > AK$, folglich $\angle AGP < \angle AKP$ (Stereometrie), oder $\angle C < \angle B$, und umgekehrt.

Nach Fig. 3 ist, da die Sinuslinien im zweiten Quadranten abnehmen, wenn die Winkel wachsen, $AG' < AK'$, folglich $\angle AG'P > AK'P$ oder der Nebenwinkel von C ist größer als der Nebenwinkel von B, also $\angle C < \angle B$.

Lehrs. 4. Zwei Seiten eines sphär. Dreiecks zusammengenommen sind größer als die dritte.

Fig. 4.

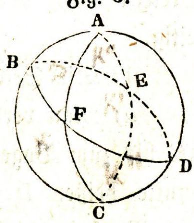


Bew. 1) Sind die Seiten gleich, so bedarf es keines Beweises.

2) Sind die Seiten ungleich und sei AOC der größere Winkel. Man verbinde A mit C und mache $\angle AOD = \angle AOB$, $OE = OD$ und verbinde A mit E, so ist $\triangle ADO \cong \triangle AEO$, folglich $AE = AD$ u. $DC < EC$, also $\angle EOC > \angle DOC$ und auch $\angle AOE + EOC > \angle AOD + DOC$ oder $AB + BC > AC$.

Lehrs. 5. Wenn drei größte Kugelkreise sich durchschneiden, so entstehen acht sphärische Dreiecke, von denen je zwei nach ihren Seiten und Winkeln einander gleich sind.

Fig. 5.

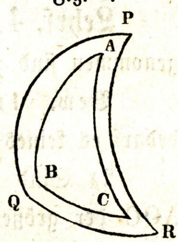


Bew. Schneiden sich zwei größte Kugelkreise so entstehen vier Zweiecke, von denen je zwei gleiche Winkel und gleiche Seiten haben, werden diese von einem dritten größten Kugelkreise geschnitten, so entstehen acht sphär. Dreiecke, von denen je zwei gleiche Seiten und Winkel haben; so sind in den $\triangle ABF$ und $\triangle CED$ die Seiten

$AB + BC = BC + CD$, also $AB = CD$, und $AF + FC = FC + CE$, also $AF = CE$ und $BF + FD = FD + ED$, also $BF = ED$, auch $\angle BAF = \angle BCF = \angle ECD$ und $\angle FBA = \angle EDC$ und $\angle BFA = \angle CED$. Ebenso in den $\triangle BFC$ und $\triangle AED$, $\triangle CFD$ und $\triangle ABE$, $\triangle AFD$ und $\triangle BEC$.

Lehrs. 6. Wenn man aus den Endpunkten des sphärischen Dreiecks ABC als Polen mit den Quadranten eines größten Kreises des sphär. Dreiecks PQR construirt, so sind umgekehrt auch P, Q, R Pole der Seiten des Dreiecks ABC.

Fig. 6.

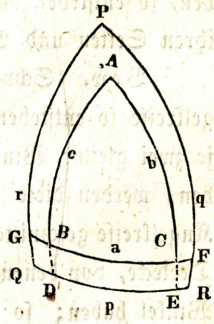


Bew. Nach der Construction ist A von QR um 90° entfernt, also ein Pol, B von PR um 90° entfernt, folglich ist R von AB um 90° entfernt und ein Pol. Ebenso sind P von BC und Q von AC Pole.

Anmerk. Man nennt solche Dreiecke wie PQR in Bezug auf ABC oder umgekehrt **Polardreiecke**.

Lehrs. 7. In einem Polardreiecke PQR sind die Seiten Supplemente von den Winkeln des gegebenen sphär. Dreiecks ABC (α) und umgekehrt (β).

Fig. 7.



Bew. Es treten hier zwei Fälle ein, entweder schneiden sich die Seiten der beiden Dreiecke nicht, oder sie schneiden sich gegenseitig.

1) Die Seiten schneiden sich nicht.

α) Man verlängere die Bogen AB und AC bis zum Bogen QR, die Durchschnittspunkte heißen D und E, so ist Bogen DE das Maaß des sphär. Winkels A. Nun ist

$$\begin{array}{l} QD + DE = R \\ RE + \angle A = R \\ \hline QD + DE + RE + \angle A = 2R \\ QD + DE + RE = QR = p \\ \hline p + \angle A = 2R. \end{array}$$

Ebenso ist zu beweisen, daß $q + \angle B = 2R$ und $r + \angle C = 2R$.

β) Man verlängere die Bogen BC nach beiden Seiten bis zu den Bogen PQ und PR, die Durchschnittspunkte heißen F, G, so ist Bogen GF das Maaß des Winkels P. Nun ist

$$\begin{array}{l} GB + BC = R \\ BC + CF = R \\ \hline GB + BC + BC + CF = 2R \\ GB + BC + CF = \angle P \\ \hline \angle P + a = 2R. \end{array}$$

2) Die Seiten schneiden sich.

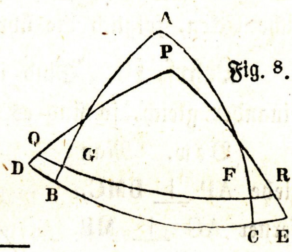


Fig. 8.

α) Man verlängere die Bogen PQ, PR, BC, bis sie sich schneiden, die Durchschnittspunkte heißen D, E, so ist

$$\begin{array}{l} GQ + GF = R \\ GF + RF = R \\ \hline GQ + GF + GF + RF = 2R \\ \hline p + \angle A = 2R. \end{array}$$

β) Bogen DE ist das Maaß für den Winkel P; nun ist

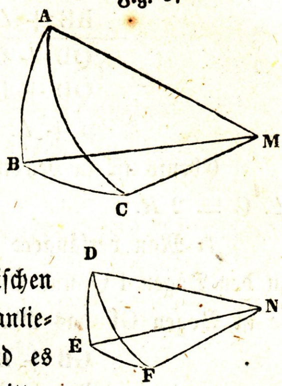
$$\begin{array}{l} DB + BC = R \\ BC + CE = R \\ \hline a + \angle P = 2R. \end{array}$$

Zus. Die Winkel des gegebenen Dreiecks bestimmen die Seiten des Polardreiecks und umgekehrt.

Lehrs. 8. Sind in zwei sphär. Dreiecken zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel einander gleich, so sind es auch die andern Winkel nebst der dritten Seite.

Bew. Es sei $\angle$ AMB = $\angle$ DNE, $\angle$ AMC = $\angle$ DNF und $\angle$ A = $\angle$ D, die Radien der beiden Kugeln mögen gleich oder ungleich sein, so sind MABC und NDEF körperliche Ecken; folglich die übrigen Stücke gleich (Stereometrie).

Fig. 9.

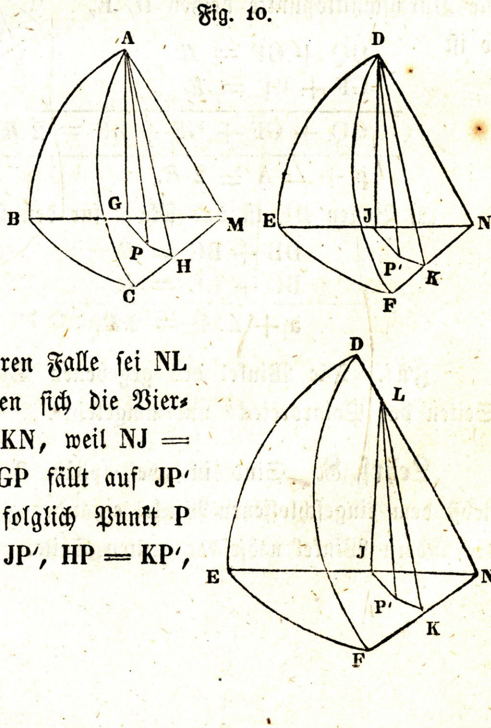


Lehrs. 9. Sind in zwei sphärischen Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einander gleich, so sind es auch die andern Seiten nebst dem dritten Winkel.

Bew. (Fig. 9) Es sei $\angle$ BMC = $\angle$ ENF, $\angle$ B = $\angle$ E und $\angle$ C = $\angle$ F. Nun sind MABC und NDEF körperliche Ecken, folglich die übrigen Stücke gleich (Stereometrie).

Lehrs. 10. Sind in zwei sphär. Dreiecken drei Seiten einander gleich, so sind es auch die Winkel.

Fig. 10.



Bew. Man ziehe AP $\perp$ BMC, ferner AG $\perp$ MB und AH $\perp$ MC u. verbinde P mit G und H. Nun nehme man MA und lege auf ND, so fällt der Punkt A auf D oder nicht, im letzteren Falle sei NL = MA; dann decken sich die Vierecke GPHM und JP'KN, weil NJ = MG, NK = MH, GP fällt auf JP' und HP auf KP', folglich Punkt P auf P', also GP = JP', HP = KP', folglich ist das $\triangle$ GAP $\cong$ $\triangle$ JLP′, also auch $\angle$ G = $\angle$ J oder $\angle$ B = $\angle$ E und $\angle$ C = $\angle$ F (Lehrs. 9).

Lehrs. 11. Sind in zwei sphär. Dreiecken die Winkel einander gleich, so sind es auch die Seiten.

Bew. M und N sollen die beiden gegebenen Dreiecke, T und U ihre Polardreiecke sein. Da die Dreiecke M und N einerlei Winkel haben, so haben T und U einerlei Seiten (Lehrs. 7), folglich auch einerlei Winkel (Lehrs. 10), also sind auch die Seiten von M und N einander gleich.

Lehrs. 12. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und eine gegenüberstehende Seite, oder zwei Seiten und ein gegenüberstehender Winkel, einzeln genommen gleich sind, so sind nicht immer die übrigen Stücke derselben einander gleich.

Bew. Es sei ACDA ein Zweieck, und aus einem Punkte C, der nicht in der Mitte der halben Peripherie ACD liegt, auf ABD ein Bogen CE senkrecht gefällt. Ferner sei EB = EF und durch C und B, sowie durch C und F Bogen größter Kreise gelegt, so

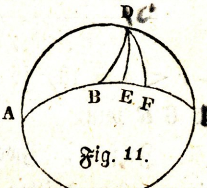


Fig. 11.

sind in den Dreiecken CEB und CEF die Seite EB = EF, CE = CE, und $\angle$ CEB = $\angle$ CEF und daher (Lehrs. 8) die Seite CB = CF, $\angle$ CBF = $\angle$ CFB und $\angle$ BCE = $\angle$ FCE.

In den Dreiecken ACF, DCB wäre hiernach CF = CB, $\angle$ CFA = $\angle$ CBD und $\angle$ CAF = $\angle$ CDB; aber AC nicht gleich CD.

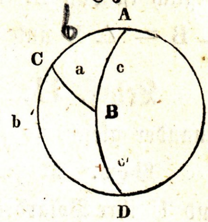
Ebenso ist in den beiden Dreiecken ACB, ACF die Seite CB = CF, AC = AC, und $\angle$ CAB = $\angle$ CAB; aber dennoch ist die dritte Seite AF > AB.

Lehrs. 13. Die Summe der Seiten eines sphärischen Dreiecks beträgt stets weniger als 4 *R*.

Bew. Es sei ACB das sphär. Dreieck. Man verlängere

AC und AB, bis sie sich schneiden, so sind ACD, ABD halbe größte Kugelkreise, also $b + b' + c + c' = 4\,R$, nun ist $b' + c' > a$ (Lehrs. 4), folglich $b + c + a < 4\,R$.

Fig. 12.



Lehrs. 14. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks beträgt stets weniger als $6\,R$, aber mehr als $2\,R$.

Bew. Es sei ABC das gegebene Dreieck (Fig. 7 und 8) und dessen Winkel α, β, γ; PQR sein Polardreieck und p, q, r die Seiten desselben, so ist

$$\angle\,\alpha + p = 2\,R$$
$$\angle\,\beta + q = 2\,R$$
$$\angle\,\gamma + r = 2\,R$$

$\alpha + \beta + \gamma + p + q + r = 6\,R$. Da nun $p + q + r < 4\,R$ ist, so muß $\alpha + \beta + \gamma$ größer als $2\,R$ und kleiner als $6\,R$ sein.

Zus. 1. Zwei gegebene Winkel eines sphär. Dreiecks bestimmen den dritten nicht.

Zus. 2. Ein sphär. Dreieck kann 2 und 3 rechte, 2 und 3 stumpfe Winkel haben.

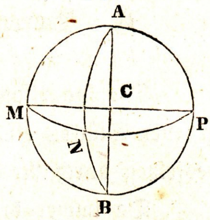
Zus. 3. Wenn das Dreieck zweirechtwinklig ist, so ist der Scheitel A der Pol der Grundlinie BC; AB und AC sind Quadranten.

Zus. 4. Ist das Dreieck dreirechtwinklig, so sind alle Seiten Quadranten.

Lehrs. 15. Der Inhalt eines Zweiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie der sphär. Winkel zu $4\,R$.

Bew. Es sei AMBN das Zweieck. Man ziehe den Durchmesser AB und lege auf AB eine senkrechte Ebene MNPM, so wird der $\angle$ A durch den Bogen MN gemessen. Man suche zwischen MN und MNPM das gemeinschaftliche Maaß (sie mögen commensurabel oder incommensurabel sein, im letztern Falle näherungsweise), es sei α, so wird $MN = n\alpha$ und $MNPM = m\alpha$, durch die Theilungspunkte und durch A und B lege man größte Kreise, so entstehen gleiche Zweiecke, ein solches heiße z, so ist $AMBN = nz$ und die Kugelfläche $J = mz$; folglich $MN : MNPM = AMBN : J$ oder $AMBN : J = \angle A : 4R$.

Fig. 13.



Zus. Zweiecke verhalten sich wie ihre Winkel.

Lehrs. 16. Die Oberfläche eines sphär. Dreiecks verhält sich zu derjenigen der Kugel, wie der Ueberschuß seiner Winkel über $2R$ sich zu $8R$ verhält.

Bew. Es sei (Fig. 5) ABF das sphär. Dreieck $= D$ und $\triangle BCF = K$, $\triangle AFD = K'$ und $\triangle DCE = \triangle BAE = K''$ die Ergänzungsdreiecke zu Zweiecken, und J die Oberfläche der Kugel, so ist

$$\angle A = \frac{4R(D+K)}{J}$$

$$\angle B = \frac{4R(D+K')}{J}$$

$$\angle F = \frac{4R(D+K'')}{J}$$

$$\angle A+B+F = \frac{4R}{J}(2D+D+K+K'+K''),$$ nun ist $D+K+K'+K'' = \frac{1}{2}J$, folglich $\angle A+B+F = \frac{4R}{J}(2D+\frac{1}{2}J) = \frac{8RD}{J} + 2R$ oder $D : J = \angle A+B+F-2R : 8R$.

Zus. 1. Der Flächeninhalt eines sphär. Dreiecks ist gleich $\left(\frac{\angle A+B+C-2R}{2R}\right) r^2\pi$.

Zus. 2. Symmetrische sphär. Dreiecke sind gleichen Inhalts.

II. Berechnung der sphärischen Dreiecke.

Die sphärische Trigonometrie lehrt, aus drei in Zahlen gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die drei übrigen Stücke desselben durch Rechnung finden.

Da immer drei Stücke gegeben sein müssen, so können nur folgende Fälle vorkommen:

1) Gegeben die drei Seiten;
2) „ 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel;
3) „ 2 Seiten und ein Gegenwinkel;
4) „ eine Seite und die beiden anliegenden Winkel;
5) „ eine Seite, ein anliegender und der gegenüberstehende Winkel;
6) „ die drei Winkel.

Diese 6 Aufgaben lassen sich durch 4 Gleichungen lösen, welche man die Grundformeln der sphär. Trigonometrie nennt.

1) Zwischen drei Seiten und einem Winkel.

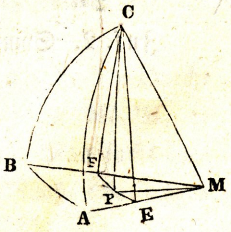
2) Zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, die den beiden Seiten gegenüberliegen.

3) Zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, von denen einer der einen Seite gegenüber, und der andere zwischen den beiden Seiten liegt.

4) Zwischen drei Winkeln und einer Seite.

1. Aufg. Eine Gleichung zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines sphär. Dreiecks zu finden.

Fig. 14.



Aufl. Das sphär. Dreieck sei ABC, Mittelpunkt der Kugel M, der Halbmesser MC = r. Man fälle von C auf die Ebene BMA die Senkrechte CP, so kann sie innerhalb $\angle$ BMA fallen oder außerhalb (Fig. 3), ferner CF $\perp$ MB und CE $\perp$ MA, verbinde F und E mit P, und P mit M. Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks mit a, b, c und die sphär. Winkel mit A, B, C, die Linie PM $= \varrho$ und den Winkel EMP $= x$, so ist in dem $\triangle$ CMF, FM $= r \cos a$ und im $\triangle$ FMP, FM $= \varrho \cos (c - x)$, also

$$r \cos a = \varrho \cos (c - x) = \varrho \cos c \cos x + \varrho \sin c \sin x.$$

Nun ist $\varrho \cos x = EM = r \cos b$, $\varrho \sin x = PE = CE \cos A$, $CE = r \sin b$, folglich: $r \cos a = r \cos b \cos c + r \sin b \sin c \cos A$. Durch r dividirt, giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \text{ Verwechselt} \\ \quad \text{man die Buchstaben, so erhält man auch} \\ \quad \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \text{ und} \\ \quad \cos c = \cos a \cos c + \sin a \sin b \cos C. \end{array}\right\} \text{I.}$$

2. Aufg. Eine Gleichung zwischen zwei Seiten und den Gegenwinkeln eines sphär. Dreiecks zu finden.

Aufl. (Fig. 14.) $CP = CF \sin B = CE \sin A$, $CF = r \sin a$ und $CE = r \sin b$, also $r \sin a \sin B = r \sin b \sin A$, durch r dividirt, giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B \\ \sin c \sin A = \sin a \sin C \end{array}\right\} \text{II.}$$

Zus. Die Sinusse der Seiten verhalten sich wie die Sinusse der Gegenwinkel.

3. Aufg. Eine Gleichung zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, von denen einer der einen Seite entgegengesetzt ist, und der andere zwischen den beiden Seiten liegt.

Aufl. (Fig. 14.) $FP = \varrho \sin (c - x)$

$FP = CF \cos B = r \sin a \cos B$

$r \sin a \cos B = \varrho \sin c \cos x - \varrho \cos c \sin x$ oder $r \sin a \cos B = r \sin c \cos b - r \cos c \sin b \cos A$ für $\sin a = \dfrac{\sin b \sin A}{\sin B}$ (II) gesetzt, und durch $r \sin b$ dividirt, giebt:

$$\frac{r \sin b \sin A \cos B}{r \sin b \sin B} = \frac{r \sin c \cos b}{r \sin b} - \frac{r \cos c \sin b \cos A}{r \sin b}$$ oder

$$\left.\begin{array}{l} \sin A \operatorname{cotg} B = \sin c \operatorname{cotg} b - \cos c \cos A \\ \sin A \operatorname{cotg} C = \sin b \operatorname{cotg} c - \cos b \cos A \\ \sin B \operatorname{cotg} C = \sin a \operatorname{cotg} c - \cos a \cos B \text{ ꝛc.} \end{array}\right\} \textbf{III.}$$

4. Aufg. Eine Gleichung zwischen drei Winkel und einer Seite eines sphärischen Dreiecks zu finden.

Aufl. Man construire das Polardreieck, so erhält man nach Aufg. 1: $\cos p = \cos q \cos r + \sin q \sin r \cos P$. Setzt man für $p = 2R - A$ u. s. w. (Lehrs. 8), so ist $\cos(2R - A) = \cos(2R - B)\cos(2R - C) + \sin(2R - B)\sin(2R - C)\cos(2R - a)$, folglich $-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$ oder

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{array}\right\} \textbf{IV.}$$

Aus den 4 allgemeinen Grundformeln lassen sich unmittelbar die zur Auflösung des rechtwinkligen sphär. Dreiecks nöthigen Formeln ableiten. Es sei $\angle C$ der rechte Winkel und c die Hypotenuse, so finden 6 Gleichungen statt:

1) Die drei Seiten a, b, c.

2) Die beiden Catheten a, b und ein Gegenwinkel A od. B.

3) Die Hypotenuse c, eine Cathete A und der Gegenw. A.

4) Die Hypotenuse c, eine Cathete a und der eingeschlossene Winkel B.

5) Die Hypotenuse c und die beiden Winkel A und B.

6) Eine Cathete a und die beiden Winkel A und B.

Die Ableitung dieser 6 Gleichungen ergiebt sich

aus I. zwischen a, b, c, C

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, setzt man für $\angle C = R$, so ist

1) $\cos c = \cos a \cos b$.

Aus III. zwischen a, b, A, C

$\sin C \operatorname{cotg} A = \sin b \operatorname{cotg} a - \cos b \cos C$, erhält man

2) $\operatorname{cotg} A = \sin b \operatorname{cotg} a$.

Aus II, zwischen a, c, A, C

$\sin a \sin C = \sin c \sin A$, erhält man

3) $\sin a = \sin c \sin A$.

Aus III, zwischen a, c, B, C

$\sin B \operatorname{cotg} C = \sin a \operatorname{cotg} c - \cos a \cos B$, erhält man

4) $\operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \cos B$.

Aus IV, zwischen c, A, B, C

$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$, erhält man

5) $\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$.

Aus IV, zwischen a, A, B, C

$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$, erhält man

6) $\cos A = \sin B \cos a$.

Umformung der Grundformeln.

Die erste, dritte und vierte Grundformeln sind mit Logarithmen unbequem zu rechnen, daher hat man diese Gleichungen umgeformt.

Aus der ersten Gleichung

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, ergiebt sich $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$.

Verfährt man hier wie in der ebenen Trigonometrie (S. 39, Aufg. 11), so erhält man:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c} =$$

$$\frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} s \sin (\frac{1}{2} s - a)}{\sin b \sin c} \text{ und}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} s \sin (\frac{1}{2} s - a)}{\sin b \sin c}}. \quad \text{V.}$$

Und $1 - \cos A = \dfrac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} =$

$\dfrac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \dfrac{s \sin(\frac{1}{2}s - b) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin b \sin c}$, folglich

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin b \sin c}}. \quad \textbf{VI.}$$

Hieraus folgt

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin \frac{1}{2}s \sin(\frac{1}{2}s - a)\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}}{\sin b \sin c}.$$

Ebenso entwickelt man für $\angle$ B und $\angle$ C.

Wenn man dann folgende Funktionen mit einander multiplicirt

$$\left.\begin{aligned}
\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin \frac{1}{2}s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin a \sin b}} \\
&= \frac{\sin \frac{1}{2}s}{\sin c}\sin \tfrac{1}{2}C \\
\sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin a \sin b}} \\
&= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin c}\sin \tfrac{1}{2}C \\
\cos \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin a \sin b}} \\
&= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)}{\sin c}\cos \tfrac{1}{2}C \\
\sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B &= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}s \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin a \sin b}} \\
&= \frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin c}\cos \tfrac{1}{2}C
\end{aligned}\right\} \textbf{VI.}\,\alpha.$$

so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \cos\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin\frac{1}{2}s - \sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin c}\sin\frac{1}{2}C = \\
\frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} \\
2)\ \cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}s + \sin(\frac{1}{2}s-c)}{\sin c}\sin\frac{1}{2}C = \\
\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C \\
3)\ \sin\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)+\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C = \\
\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C \\
4)\ \sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin(\frac{1}{2}s-b)-\sin(\frac{1}{2}s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C = \\
\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C
\end{array}\right\}\ \textbf{VII.}$$

Diese vier Formeln (VII) nennt man die Gauß'schen.

Dividirt man die dritte durch die erste, die vierte durch die zweite, die zweite durch die erste und die vierte durch die dritte, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \tang\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cotg\frac{1}{2}C \\
2)\ \tang\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cotg\frac{1}{2}C \\
3)\ \tang\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tang\frac{1}{2}c \\
4)\ \tang\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tang\frac{1}{2}c
\end{array}\right\}\ \textbf{VIII.}$$

Diese Formeln (VIII) werden die Nepperschen genannt.

Aus der vierten Grundgleichung

$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$ ergiebt sich:

$$1)\ \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}{\sin B\sin C}}\quad \textbf{IX.}$$

$$2)\ \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-A)}{\sin B\sin C}}$$

$$3)\ \sin a = \frac{2\sqrt{-\cos\frac{1}{2}S\cos(\frac{1}{2}S-A)\cos(\frac{1}{2}S-B)\cos(\frac{1}{2}S-C)}}{\sin B\sin C}$$

IX.

Die Gleichung 2 und 3 scheinen imaginäre Zahlen zu sein, es ist aber $\frac{1}{2}S$ ($S = A + B + C$) größer als R, folglich ist $-\cos\frac{1}{2}S$ eine positive Zahl.

Umformung der Grundformeln durch Hilfswinkel.

Aus der ersten Grundformel
$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Man setze $\cos c = m \cos\varphi$ und $\sin c \cos A = m \sin\varphi$, so ist $\cos a = m\cos(b-\varphi) = \frac{\cos c\cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}$, $m = \frac{\cos c}{\cos\varphi}$ und $\tang\varphi = \tang c\cos A$.

Aus der dritten Grundformel
$\sin B \cotg A = \sin c \cotg a - \cos c \cos B$.

Wird $\angle B$ gesucht, so ist $\sin B\cotg A + \cos c\cos B = \sin c\cotg a$.

Man setze $\cos c = m\sin\varphi$ und $\cotg A = m\cos\varphi$, $m = \frac{\cos c}{\sin\varphi}$, $\tang\varphi = \cos c\tang A$, so wird $\sin c\cotg a = m\sin(B+\varphi) = \frac{\cos c}{\sin\varphi}\sin(B+\varphi)$, folglich $\sin(B+\varphi) = \frac{\tang c}{\tang a}\sin\varphi$.

Wird c gesucht, so setze man $\cotg a = m\cos\varphi$ und $\cos B = m\sin\varphi$, $m = \frac{\cos B}{\sin\varphi}$, $\tang\varphi = \cos B\tang a$, so wird $\sin B\cotg A = m\sin(c-\varphi) = \frac{\cos B\sin(c-\varphi)}{\sin\varphi}$, folglich $\sin(c-\varphi) = \tang B\cotg A\sin\varphi$.

Aus der vierten Grundformel
$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C.$

Wird $\angle$ A gesucht, so setze man $\sin C \cos a = m \cos \varphi$ und $\cos C = m \sin \varphi$, $m = \frac{\cos C}{\sin \varphi}$, $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} C}{\cos a}$, so wird

$$\cos A = m \sin (B - \varphi) = \frac{\cos C \sin (B - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Wird $\angle$ B gesucht, so erhält man $\sin (B - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos C}$.

Auflösung rechtwinkliger Dreiecke.

5. Aufg. In einem rechtw. sphär. Dreiecke sind die beiden Catheten $\angle b = 47^0\ 40'$, $\angle a = 103^0\ 20'$ und der Radius der Kugel $rL = 2$ Fuß gegeben; gesucht wird c, $\angle$ A, $\angle$ B und der Flächeninhalt J. *).

Aufl. 1) $\cos c = \cos a \cos b$.

$$\log \cos c = \log \cos 47^0 40' + \log - \cos 76^0 40'$$
$$\log \cos 47^0\ 40' = 9{,}8283006$$
$$\log - \cos 76^0\ 40' = 9{,}3628892n$$
$$\log \cos c = 9{,}1911898n$$
$$\angle c = 98^0\ 56'\ 5''.$$

Soll die Länge des Bogens von c durch Fuße berechnet werden, so ist

$$cL = \frac{\angle c r \pi}{2 R} L = \frac{98^0\ 56'\ 5''\ .\ 2\ .\ \pi}{180^0\ .\ 60\ .\ 60} \text{ Fuß} = \frac{712330\ .\ \pi}{648000} \text{ Fuß}.$$
$$\log 712330 = 5{,}8526812$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\text{Cpl. } \log 648000 = 4{,}1884250 - 10$$
$$0{,}5382561$$
$$cL = 3 \text{ Fuß } 5{,}44 \text{ Zoll}.$$

---

*) $\angle$ b bezeichnet die Seite nach Gradmaaß und bL die Seite nach Längenmaaß.

2) $\cot A = \sin b \cot a$

$$\log \sin 47^0\,40' = 9{,}8687851$$
$$\log - \cot 76^0\,40' = 9{,}3747563n$$
$$\log \cot A = 9{,}2435414n$$

$\angle A = 99^0\,56'\,16''$.

3) $\cot B = \sin a \cot b$

$$\log \sin 76^0\,40' = 9{,}9881329$$
$$\log \cot 47^0\,40' = 9{,}9595155$$
$$\log \cot B = 9{,}9476484$$

$\angle B = 48^0\,26'\,42''$.

4) $J = \left(\frac{\angle A+B-R}{2R}\right) r^2\pi = \frac{840712\,.\,\pi}{648000}$

$$\log 840712 = 5{,}9246472$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\text{Cpl. } \log 648000 = 4{,}1884250-10$$
$$\log J = 0{,}6102221$$

$JF = 4\square$ Fuß $10{,}915\square$ Zoll.

6. Aufg. In einem rechtw. sphär. Dreiecke ist die Hypotenuse $\angle c = 60^0\,18'$, eine Cathete $\angle b = 50^0\,2'$ und der Radius der Kugel $rL = 5$ Fuß 2 Zoll gegeben; gesucht wird a, $\angle A$, $\angle B$ und J.

Aufl. 1) $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$

$$\log \cos a = 9{,}8872412-10$$

$\angle a = 39^0\,31'\,34''$

$aL = \frac{142294\,.\,62\,.\,\pi}{648000}\,.\,L$

$$\log a = 1{,}6311532$$

$aL = 3$ Fuß $6{,}771$ Zoll.

2) $\cos A = \tan b \cot c$

$$\log \cos A = 9{,}8328714$$

$\angle A = 47^0\,6'\,43''$.

3) $\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$

$\log \sin B = 9{,}9456303$

$\angle B = 61^0\ 55'\ 28''$ oder $118^0\ 4'\ 32''$

$\angle B$ ist gleich dem spitzen Winkel, da $c > b$ ist.

4) $J = \dfrac{68531 \,.\, 62^2 \,.\, \pi}{648000}$

$\log J = 3{,}1062454$

JF = 1277,16□ Zoll = 8□ Fuß 125,16□ Zoll.

7. Aufg. In einem rechtw. sphär. Dreiecke ist eine Cathete $\angle a = 140^\circ\ 48'\ 12''$, der Gegenwinkel $A = 127^0\ 18'\ 20''$ und der Radius der Kugel $rL = 5$ Fuß gegeben; gesucht wird b, c, $\angle B$ und J.

Aufl. 1) $\sin b = \operatorname{cotg} A \operatorname{tang} a$

$\log - \operatorname{cotg} 52^0\ 41'\ 40'' = 9{,}8819260n$

$\log - \operatorname{tang} 39^0\ 11'\ 48'' = 9{,}9114150n$

$\log \sin b = 9{,}7933410$

$\angle b = 38^0\ 24'\ 55''$ oder $141^0\ 35'\ 5''$

$bL = \dfrac{138295 \,.\, 5 \,.\, \pi}{648000} L$ oder $\dfrac{509705 \,.\, 5 \,.\, \pi}{648000}$

$\log b = 0{,}5253514$ oder $1{,}0918637$

bL = 3 Fuß 4,22 Zoll oder 12 Fuß 4,26 Zoll.

2) $\sin c = \dfrac{\sin a}{\sin A}$

$\log \sin c = 9{,}9001126$

$\angle c = 52^0\ 36'\ 40''$ oder $127^0\ 23'\ 20''$

$cL = \dfrac{947000\ \pi}{648000} L$ oder $\dfrac{2293000 \,.\, \pi}{648000} \,.\, L$

$\log c = 0{,}6619249$ oder $1{,}0459790$

cL = 4 Fuß 7,09 Zoll oder 11 Fuß 1,39 Zoll.

3) $\sin B = \dfrac{\cos A}{\cos a}$

$\log \sin B = 9{,}8932284$

$\angle B = 51^0\ 26'\ 51''$ oder $128^0\ 33'\ 9''$.

4) $J = \dfrac{88^0\ 45'\ 11'' \,.\, 5^2 \,.\, \pi}{180^0 \,.\, 60 \,.\, 60}$

$\log J = 1{,}5880008$

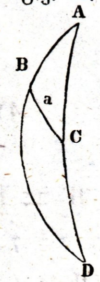
JF = 38□ Fuß 104,5□ Zoll oder

$$J = \frac{165^0\ 51'\ 29''\ .\ 5^2\ .\ \pi}{180^0\ .\ 60\ .\ 60}$$

$\log J = 1{,}8595541$

JF = 72□ Fuß 53,1□ Zoll.

Fig. 15.



In dieser Aufgabe sind zwei Dreiecke möglich, entweder das △ ABC oder △ BDC, in beiden kommt a vor und ∠ A = ∠ D.

8. Aufg. In einem rechtw. sphär. Dreiecke ist eine Cathete ∠ b = 108° 54′, der anliegende Winkel ∠ A = 95° 23′ und der Radius der Kugel rL = 20 Arschin gegeben; gesucht wird ∠ B, a, c und J.

Aufl. 1) $\cos B = \sin A \cos b$

$\log \cos B = 9{,}5085145n$

$\angle B = 108^0\ 48'\ 49''$

2) $\operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{cotg} A}{\sin b}$ oder $\operatorname{tang} a = \sin b \operatorname{tang} A$

$\log \operatorname{tang} a = 11{,}0017211n$

$\angle a = 95^0\ 41'\ 18''$

$$aL = \frac{6889560\ .\ \pi}{648000}\ .\ L$$

$\log a = 1{,}5237664$

aL = 33 Arschin 6,4 Werschock.

3) $\operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} b \cos A$

$\log \operatorname{cotg} c = 8{,}5067935$

$\angle c = 88^0\ 9'\ 36''$

$$cL = \frac{6346320\ .\ \pi}{648000}\ L$$

$\log c = 1{,}4880969$

cL = 30 Arschin 12,2 Werschock.

4) $$J = \frac{114^0\ 11'\ 49''\ .\ 20^2\ .\ \pi}{180^0\ .\ 60\ .\ 60}$$

$\log J = 2{,}9015918$

JF = 797□ Arschin 62,7□ Werschock.

9. Aufg. In einem rechtw. sphär. Dreiecke ist die Hypotenuse $\angle c = 50^0\ 44'$, ein anliegender Winkel $\angle A = 46^0\ 58'$ und der Radius der Kugel $rL = 100$ Fuß; gesucht wird a, b, $\angle B$ und J.

Aufl. 1) $\sin a = \sin c \sin A$

$\log \sin a = 9{,}7527497$

$\angle a = 34^0\ 27'\ 56''$ oder $145^0\ 32'\ 4''$

Da $\angle A$ kleiner als $\angle C$ ist, so muß $\angle a$ auch kleiner als R sein.

$$aL = \frac{12407600 \cdot \pi}{648000}$$

$\log a = 1{,}7792627$

$aL = 60$ Fuß 1,8 Zoll.

2) $\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} c \cos A$

$\log \operatorname{tang} b = 9{,}9215560$

$\angle b = 39^0\ 51'\ 12''$

$$bL = \frac{14347200 \cdot \pi}{648000}$$

$\log b = 1{,}8423421$

$bL = 69{,}557$ Fuß $= 69$ Fuß 6,6 Zoll.

3) $\operatorname{cotg} B = \cos c \operatorname{tang} A$

$\log \operatorname{cotg} B = 9{,}8311937$

$\angle B = 55^0\ 51'\ 53''$.

4) $$J = \frac{46193 \cdot 100^2 \cdot \pi}{648000}$$

$\log J = 3{,}3501511$

$JF = 2239\square$ Fuß $72\square$ Zoll.

10. Aufg. In einem rechtw. sphär. Dreiecke sind die beiden Winkel $\angle B = 153^0\ 26'$ und $\angle A = 105^0\ 28'$ und der Radius der Kugel $rL = 4$ Saschen gegeben; gesucht wird a, b, c und J.

Aufl. 1) $$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$$

$\log \cos a = 9{,}7754472n - 10$

$\angle a = 126^0\ 36'\ 14''$

$$aL = \frac{1823096 \,.\, \pi}{648000} \,.\, L$$

$$\log a = 0{,}9463844$$

aL = 8 Saschen 2 Arschin 8,2 Werschock.

2) $\cos b = \dfrac{\cos B}{\sin A}$

$$\log \cos b = 9{,}9675584n - 10$$

$\angle b = 158^0\ 7'\ 43''$

$$bL = \frac{2277052 \,.\, \pi}{648000} \,.\, L$$

$$\log b = 1{,}0429478$$

bL = 11 Saschen 0 Arschin 1,8 Werschock.

3) $\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$

$$\log \cos c = 9{,}7430056$$

$\angle c = 56^0\ 24'\ 8''$

$$cL = \frac{812192 \,.\, \pi}{648000} \,.\, L$$

$$\log c = 0{,}5952336$$

cL = 3 Saschen 2 Arschin 13 Werschock.

4) $J = \dfrac{162144 \,.\, \pi}{10800}$

$$\log J = 1{,}6736270$$

JF = 47 □ Saschen 1 □ Arschin 125,7 □ Wersch.

Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

11. Aufg. Es sind die drei Seiten $\angle a = 69^0\ 50'$, $\angle b = 109^0\ 59'\ 10''$ und $\angle c = 46^0\ 42'$ eines sphärischen Dreiecks gegeben; es werden die drei Winkel gesucht und der Flächeninhalt, wenn der Radius der Kugel rL = 10 Meilen beträgt.

Aufl. 1) $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin b \sin c}}$

$\frac{1}{2} s = 113^0\ 15'\ 35''$

$(\frac{1}{2} s - a) = 43^0\ 25'\ 35''$
$\frac{1}{2} s - b = 3^0\ 16'\ 25''$
$\frac{1}{2} s - c = 66^0\ 33'\ 35''$

$$\begin{aligned} \log \sin 3^0\ 16'\ 25'' &= 8{,}7566681 - 10 \\ \log \sin 66^0\ 33'\ 35'' &= 9{,}9625943 - 10 \\ \text{Cpl.} \log \sin 70^0\ 0'\ 50'' &= 0{,}0269759 \\ \text{Cpl.} \log \sin 46^0\ 42' &= 0{,}1380042 \\ \hline 2 \mid & \ 18{,}8842425 - 20 \\ \log \sin \tfrac{1}{2} A &= 9{,}4421212 - 10 \end{aligned}$$

$\angle \frac{1}{2} A = 16^0\ 4'\ 3''$, $\angle A = 32^0\ 8'\ 6''$.

Nimmt man den stumpfen Winkel für $\frac{1}{2}$ A, so wird $A > 2\,R$, was nicht möglich ist.

2) $$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2} s - c) \sin(\frac{1}{2} s - a)}{\sin c \sin a}}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2} B = 9{,}9826490$$

$\angle \frac{1}{2} B = 73^0\ 54'\ 41''$, $\angle B = 147^0\ 49'\ 22''$

3) $$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2} s - a) \sin(\frac{1}{2} s - b)}{\sin a \sin b}}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2} C = 9{,}3241717$$

$\angle C = 24^0\ 21'\ 20''$.

4) $$J = \frac{(\angle A + B + C - 2\,R)\, r^2 \pi}{180^0} =$$

$$\frac{24^0\ 18'\ 48'' \,.\, 100 \,.\, \pi}{648000} = \frac{8752800 \,.\, \pi}{648000}$$

$$\log J = 1{,}6277219$$

JF = 42,434□ Meilen.

12. Aufg. Wenn zwei Seiten $\angle b = 100^0$, $\angle c = 50^0$, der eingeschlossene Winkel $\angle A = 150^0$ eines sphärischen Dreiecks und der Radius der Kugel rL = 8 Faden gegeben sind; die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c) \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} =$$

$$\frac{\cos 25^0 \operatorname{cotg} 75^0}{\cos 75^0} = \frac{\cos 25^0}{\sin 75^0}$$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B+C) = 9{,}9723319$$

$$\tfrac{1}{2}(B+C) = 43^0\ 10'\ 34''$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A$$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B-C) = 9{,}0690570$$

$$\tfrac{1}{2}(B-C) = 6^0\ 41'\ 11''$$

1) $\angle B = 49^0\ 51'\ 45''$

2) $\angle C = 36^0\ 29'\ 23''$

3) $\cos \tfrac{1}{2} a = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(b+c) \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}$

$$\log \cos \tfrac{1}{2} a = 9{,}5350610$$

$$\angle a = 139^0\ 54'\ 10''.$$

Oder man berechnet a durch Hilfswinkel.

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, setzt man $\cos c = m \sin \varphi$ und $\sin c \cos A = m \cos \varphi$, so ist $\cos a = m \sin (b+\varphi) = \dfrac{\cos c \sin (b+\varphi)}{\sin \varphi}$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} c}{\cos A} = \frac{\operatorname{cotg} 50^0}{-\cos 30^0}$$

$$\log \operatorname{tang} \varphi = 9{,}9862829n$$

$$\angle \varphi = 135^0\ 54'\ 17''$$

$$\cos a = \frac{-\cos 50^0 \sin 55^0\ 54'\ 17''}{\sin 44^0\ 5'\ 43''}$$

$$\log \cos a = 9{,}8836359n$$

$$\angle a = 139^0\ 54'\ 10''$$

$$aL = \frac{40292 \cdot \pi}{6480} \cdot L$$

aL = 19 Faden 3 Fuß 8,7 Zoll.

4) $J = \dfrac{202868 \cdot 64 \cdot \pi}{648000}$, $\log J = 1{,}7989584$

JF = 62,9446□ Faden = 62□ Faden 46□ Fuß 41□ Zoll.

13. Aufg. Wenn zwei Seiten $\angle a = 70^0\ 30'$ $\angle b = 120^0\ 50'$ und der, einer dieser beiden Seiten gegenüberstehende $\angle A = 45^0$ eines sphär. Dreiecks gegeben sind; die übrigen Stücke zu finden.

Aufl. 1) $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$

$$\log \sin B = 9{,}8089606$$

$$\angle B = 40^0\ 5'\ 56{,}5'' \text{ oder } 139^0\ 54'\ 3{,}5''.$$

Hier ist für $\angle$ B der stumpfe Winkel zu nehmen, da $\angle$ b größer $\angle$ a, also ist $\angle$ B größer $\angle$ A.

2) $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}$

$$\log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C = 10{,}4064178-10$$

$$\angle C = 42^0\ 50'\ 12{,}8''$$

3) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = 9{,}8042803$$

$$\angle c = 65^0\ 0'\ 40''.$$

Durch Hilfswinkel.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos a = \frac{\cos b \sin(\varphi + c)}{\sin \varphi},\quad \sin(\varphi + c) = \frac{\cos a \sin \varphi}{\cos b}$$

$$\cos b = m \sin \varphi,\quad \sin b \cos A = m \cos \varphi,\quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos A}$$

$$\log \operatorname{tang} \varphi = 9{,}9264227\mathrm{n}$$

$$\angle \varphi = 139^0\ 49'\ 49{,}5''$$

$$\log \sin(\varphi + c) = 9{,}6233601\mathrm{n};\quad (\varphi + c) = 204^0\ 50'\ 28{,}8''$$

$$\angle c = 65^0\ 0'\ 39{,}3''.$$

14. Aufg. Wenn in einem sphär. Dreiecke eine Seite, ein anliegender Winkel, ein gegenüberstehender Winkel und der Radius der Kugel gegeben sind; die übrigen Stücke des Dreiecks zu berechnen. Gegeben aL = 3 Fuß 8,2 Zoll, $\angle$ B = 82^0 50', $\angle$ A = 49^0 20' und rL = 5 Fuß.

Aufl. Man berechne erst $\angle$ a aus folgender Proportion:

$$\angle a : 360^0 = aL : 2 r \pi L$$

$$\angle a = \frac{180^0\, aL}{r \pi L} = \frac{180^0 \,.\, a}{r \pi} = \frac{180^0 \,.\, 44{,}2}{60 \,.\, \pi}$$

$$= 42{,}2078^0 = 42^0\ 12'\ 28''.$$

1) $\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$; $\log \sin b = 9{,}9438839$

$\angle b = 61^0\ 29'\ 47{,}2''$ oder $118^0\ 30'\ 12{,}8''$.

2) $\tan g\ \frac{1}{2}\ C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(a+b}$

Ist $\angle b$ spitz, so ist $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = 9{,}8499263$

$\angle C = 70^0\ 35'\ 1{,}2''$.

Ist $\angle b$ stumpf, so ist $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = 10{,}3184383$

$\angle C = 128^0\ 41'\ 5{,}8''$.

Durch Hilfswinkel.

$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$. Setzt man für $\sin B \cos a = m \cos \varphi$ und $\cos B = m \sin \varphi$, so wird

$$\cos A = m \sin (C-\varphi) = \frac{\cos B \sin (C-\varphi)}{\sin \varphi}$$

$$\sin (C-\varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}; \ \operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos a}$$

$\log \operatorname{tang} \varphi = 9{,}2298176$; $\angle \varphi = 9^0\ 38'\ 3{,}5''$

$\log \sin (C-\varphi) = 9{,}9416070$

$\angle C-\varphi = 60^0\ 56'\ 58{,}2''$ oder $119^0\ 3'\ 1{,}8''$

$\angle C = 70^0\ 35'\ 1{,}7''$ oder $128^0\ 41'\ 5{,}3''$.

3) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+A) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(b+a)}{\cos \frac{1}{2}(B-A)}$

Ist $\angle b = 61^0\ 29'\ 47{,}2''$ so ist

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = 9{,}7316017$

$\angle c = 56^0\ 39'\ 2{,}6''$

Ist $\angle b = 118^0\ 30'\ 12{,}8''$, so ist

$\angle c = 136^0\ 15'\ 38{,}6''$.

Oder $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, nimmt man für

$\angle C = 70^0\ 35'\ 1{,}2''$, so ist

$\log \sin c = 9{,}9218608$

$\angle c = 56^0\ 39'\ 2{,}6''$.

Nimmt man $\angle C = 128^0\ 41'\ 5{,}8''$, so ist

$\log \sin c = 9{,}8397158$

$\angle c = 136^0\ 15'\ 38{,}5''$.

Durch Hilfswinkel.

$\sin B \operatorname{cotg} A = \sin c \operatorname{cotg} a - \cos c \cos B$

$\cot g\, a = m \cos\varphi$ und $\cos B = m \sin\varphi$; $m = \frac{\cos B}{\sin\varphi}$, und $\tan g\,\varphi = \cos B \tan g\, a$

$$\sin B \cot g\, A = \frac{\cos B \sin(c-\varphi)}{\sin\varphi}$$

$$\sin(c-\varphi) = \tan g\, B \cot g\, A \sin\varphi$$

$$\log \tan g\,\varphi = 9{,}0536650$$

$$\triangle\,\varphi = 6^0\ 27'\ 20{,}6''$$

$$\log \sin(c-\varphi) = 9{,}8854907$$

$\angle\, c-\varphi = 50^0\ 11'\ 42{,}4''$; $\angle\, c = 56^0\ 39'\ 3''$ u. s. w.

4) $J = \frac{81901{,}2\,.\,25\,.\,\pi}{648000}$ oder $\frac{291065{,}8\,.\,25\,.\,\pi}{648000}$

$\log J = 0{,}9968046$ oder $1{,}5475061$

$JF = 9{,}9267\square$ Fuß oder $35{,}2781\square$ Fuß.

In dieser Aufgabe sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, wie Lehrs. 12 zeigt.

15. Aufg. Wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel eines sphär. Dreiecks gegeben sind, die übrigen Stücke zu finden. Gegeben $\angle a = 66^\circ\ 20'\ 44{,}12''$, $\angle B = 55^\circ\ 52'\ 30{,}25''$ und $\angle C = 20^\circ\ 9'\ 54{,}65''$.

Aufl. $\tan g\,\frac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C) \tan g\,\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}$

$$\log \tan g\,\tfrac{1}{2}(b+c) = 9{,}8975300$$

$$\angle\,\tfrac{1}{2}(b+c) = 38^\circ\ 18'\ 9{,}01''$$

$$\tan g\,\tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C) \tan g\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\log \tan g\,\tfrac{1}{2}(b-c) = 9{,}5124275$$

$$\angle\,\tfrac{1}{2}(b-c) = 18^\circ\ 1'\ 30{,}99''.$$

1) $\angle\, b = 56^\circ\ 19'\ 40''$.

2) $\angle\, c = 20^\circ\ 16'\ 38{,}02''$.

3) $\sin A = \frac{\sin a \sin B}{\sin b}$

$$\log \sin A = 9{,}9595811$$

$\angle\, A = 65^\circ\ 39'\ 43{,}86''$ oder $114^\circ\ 20'\ 16{,}14''$.

In dieser Aufgabe ist $\angle\, A = 114^\circ\ 20'\ 16{,}14''$, weil die Summe der drei Winkel eines sphär. Dreiecks $> 2\,R$ ist.

16. Aufg. Von einem sphär. Dreiecke sind die drei Winkel $\angle A = 67^\circ\ 30'\ 25''$, $\angle B = 74^\circ\ 18'\ 33''$ und $\angle C = 82^\circ\ 41'\ 16''$ gegeben; es werden die übrigen Stücke gesucht.

Aufl. 1) $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2} S - B) \cos(\frac{1}{2} S - C)}{\sin B \sin C}}$

$$\begin{array}{rcl}
\log \cos 37^\circ\ 56'\ 34'' & = & 9{,}8968707 \\
\log \cos 29^\circ\ 33'\ 51'' & = & 9{,}9394213 \\
\text{Cpl.} \log \sin 74^\circ\ 18'\ 33'' & = & 0{,}0164933 \\
\text{Cpl.} \log \sin 82^\circ\ 41'\ 16'' & = & 0{,}0035464 \\
\hline
 & 2\,| & 19{,}8563317 \\
\log \cos \frac{1}{2} a & = & 9{,}9281658
\end{array}$$

$\angle \frac{1}{2} a = 32^\circ\ 3'\ 13''$

$\angle a = 64^\circ\ 6'\ 26''$.

2) $\cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2} S - C) \cos(\frac{1}{2} S - A)}{\sin C \sin A}}$

$\log \cos \frac{1}{2} b = 9{,}9143699$

$\angle b = 69^\circ\ 37'\ 12''$

3) $\cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos(\frac{1}{2} S - A) \cos(\frac{1}{2} S - B)}{\sin A \sin B}}$

$\log \cos \frac{1}{2} c = 9{,}8995681$

$\angle c = 74^\circ\ 57'\ 54''$.

Fragen.

1) Was ist ein sphärisches Dreieck?

2) Zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche ist welche Linie die kürzeste?

3) Wodurch werden die Winkel eines sphärischen Dreiecks gemessen?

4) Wenn man von dem Winkel zweier krummen Linien spricht, so versteht man immer welchen Winkel?

5) Lehrsätze über Winkel und Seiten.

6) Wenn drei größte Kugelkreise sich durchschneiden, so entstehen wie viele Dreiecke und wie sind sie unter sich beschaffen?

7) Was heißt ein Polardreieck?

8) Lehrsätze über Polardreiecke.

9) In welchen Fällen sind die Winkel und Seiten zweier sphärischen Dreiecke bestimmt?

10) Wodurch ist der Flächeninhalt eines sphär. Dreiecks bestimmt?

11) Wie groß ist die Summe der Seiten eines sphärischen Dreiecks?

12) Wie groß ist die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks?

13) Wie findet man den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks?

14) Wie viele Relationen bestehen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks?

Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie.

a) Das rechtwinklige sphär. Dreieck.

In dem rechtw. sphär. Dreiecke sei $\angle C = R$.

1) Gegeben $\angle c = 40^\circ\ 53'\ 56''$ und $\angle A = 23^\circ\ 28'\ 13''$. Man soll die übrigen Stücke berechnen.

2) Gegeben $\angle a = 15^\circ\ 6'\ 55''$ und $\angle A = 37^\circ\ 28'\ 7''$; gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

3) Gegeben $\angle a = 108^\circ\ 40'$ $\angle A = 93^\circ\ 31'$ und der Radius der Kugel rL $= 42$ Fuß; gesucht werden die übrigen Stücke und der Flächeninhalt des Dreiecks.

4) Gegeben $\angle b = 15^\circ\ 6'\ 55''$, $\angle B = 37^\circ\ 28'\ 7''$ und der Radius der Kugel rL = 3 Fuß 4 Zoll; gesucht werden die übrigen Stücke und der Flächeninhalt des Dreiecks.

5) Gegeben $\angle c = 98^\circ\ 14'$, $\angle A = 35^\circ\ 27'$ und der Radius der Kugel rL = 4 Faden 3 Fuß 10 Zoll; gesucht werden die übrigen Stücke und der Flächeninhalt des Dreiecks.

6) Gegeben $\angle c = 40^\circ\ 53'\ 56''$, $\angle B = 23^\circ\ 28'\ 13''$ und der Radius der Kugel rL = 5 Faden 4 Fuß; gesucht werden die übrigen Stücke und der Flächeninhalt des Dreiecks.

7) Gegeben $\angle a = 50^\circ$, $\angle b = 40^\circ$ und der Radius der Kugel rL = 144 Werst 431 Saschen; gesucht werden die übrigen Stücke und der Flächeninhalt des Dreiecks.

8) Gegeben $\angle c = 108^0\ 14\tfrac{1}{2}'$, $\angle B = 48^0\ 48\tfrac{3}{4}'$ und rL = 860 Meilen; gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

9) Gegeben cL = 4 Fuß 6 Zoll, bL = 3 Fuß 9 Zoll und rL = 14 Fuß 3,5 Zoll; wie groß sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

10) Gegeben bL = 6 Werst 200 Saschen, cL = 10 Werst 300 Saschen und rL = 6020 Werst; wie groß sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

11) Gegeben $\angle B = 100^0\ 42'\ 13{,}5''$, $\angle A = 85^0\ 20'\ 16{,}5''$ und rL = 40 Saschen; wie groß sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

12) In einem zweirechtwinkl. sphär. Dreiecke sei gegeben der dritte Winkel $\angle A = 115^0\ 40'$ und der Radius der Kugel rL = 3 Werst 40 Saschen. Wie groß sind die übrigen Stücke und der Flächeninhalt des Dreiecks?

b) Das schiefwinklige sphär. Dreieck.

13) Gegeben $\angle a = 34^0\ 16'\ 52''$, $\angle b = 46^0\ 20'\ 40''$ und $\angle C = 37^0\ 17'\ 4''$; die übrigen Stücke des Dreicks zu berechnen.

14) Gegeben $\angle a = 34^\circ\ 16'\ 52''$, $\angle b = 46^\circ\ 20'\ 40''$ und $\angle c = 26^\circ\ 32'\ 18''$; gesucht die drei Winkel.

15) Gegeben $aL = 5$ Fuß, $bL = 6$ Fuß, $cL = 7$ Fuß und der Radius der Kugel $rL = 20$ Fuß; es werden die drei Winkel und der Flächeninhalt des Dreiecks gesucht.

16) Gegeben $\angle b = 73^\circ\ 58'\ 54''$, $\angle c = 38^\circ\ 45'$ $\angle A = 46^\circ\ 33'\ 46''$ und $rL = 43{,}52$ Werst; gesucht werden die übrigen Stücke des Dreiecks.

17) Gegeben $\angle b = 43^\circ\ 57'\ 30''$, $\angle c = 15^\circ\ 39'\ 5''$, $\angle B = 46^\circ\ 18'\ 9''$ und $rL = 15$ Meilen; gesucht werden die übrigen Stücke des Dreiecks.

18) Gegeben $\angle A = 130^\circ\ 39'\ 40''$, $\angle B = 132^\circ\ 1'\ 50''$, $\angle C = 176^\circ\ 57'\ 3''$ und $rL = 10$ Faden 5 Fuß 10 Zoll; gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

19) Gegeben $\angle a = 95^\circ\ 7'\ 30''$, $\angle B = 114^\circ\ 15'\ 7''$, $\angle C = 76^\circ\ 35'\ 10''$ und $rL = 1720$ Meilen; gesucht die übrigen Stücke.

20) Gegeben $\angle b = 96^\circ\ 28'\ 45''$, $\angle A = 73^\circ\ 20'\ 18''$, $\angle B = 103^\circ\ 24'$ und $rL = 48$ Meilen 3 Werst; gesucht die übrigen Stücke. (1 Meile = 7 Werst.)

21) Gegeben $\angle a = 64^\circ\ 45'$, $\angle b = 98^\circ\ 12'$, $\angle c = 105^\circ\ 42'$ und $rL = 50$ Meilen; gesucht die übrigen Stücke.

22) Gegeben $\angle a = 88^\circ\ 50'$ $\angle c = 58^\circ\ 26'$ und $\angle A = 75^\circ\ 46'$; gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

23) Gegeben $\angle B = 94^\circ\ 30'$, $\angle C = 96^\circ\ 20'$ und $\angle a = 100^\circ\ 16'$; gesucht die übrigen Stücke.

24) Gegeben $\angle A = 100^\circ\ 40'$, $\angle B = 94^\circ\ 30'$, $\angle C$ $96^\circ\ 20'$; gesucht die übrigen Stücke.

25) Gegeben $\angle b = 45^\circ\ 10'$, $\angle c = 38^\circ\ 4'$ und $\angle B = 19^\circ\ 46'$; gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

26) Gegeben $\angle a = 114^\circ\ 8'$, $\angle B = 65^\circ\ 18'$ und $\angle C = 47^\circ\ 34'$; gesucht die übrigen Stücke des Dreiecks.

27) Aus den drei Winkeln und dem Flächeninhalte eines sph. Dreiecks, die drei Seiten und den Radius der Kugel, so wie Winkel, Seiten und Flächeninhalt des Polardreiecks zu berechnen.

Gegeben $\angle A = 47^\circ\ 42'\ 10''$, $\angle B = 79^\circ\ 53'\ 20''$, $\angle C = 108^\circ\ 25'\ 30''$ und JF = 1456 □Fuß 110 □Zoll.

28) Aus den drei Seiten aL = 60 Werst, bL = 120 Werst, cL = 90 Werst eines sph. Dreiecks ARC das Perpendikel pL zu finden, welches aus dem Scheitel B eines seiner Winkel auf die gegenüberstehende Seite b gefällt wird. Der Radius der Kugel rL beträgt 500 Werst.

29) Formeln für die Summe und den Unterschied sphärischer Winkel durch die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks zu finden.

30) Den sph. Radius des um ein sph. Dreieck beschriebenen Kreises durch die drei Seiten $\angle a = 56^\circ\ 14'\ 22''$, $\angle b = 60^\circ\ 22'\ 30''$ und $\angle c = 32^\circ\ 51'\ 10''$ des Dreiecks auszudrücken.

31) Den sphärischen Radius des in ein sph. Dreieck eingeschriebenen Kreises durch die 3 Seiten $\angle a = 56^\circ\ 14'\ 22''$, $\angle b = 60^\circ\ 22'\ 30''$, $\angle c = 32^\circ\ 51'\ 10''$ des Dreiecks zu bestimmen.

32) Ein Winkel im Raume MSN = 51° 2′ sei gegeben; man soll die Horizontalprojektion des gegebenen Winkels finden.

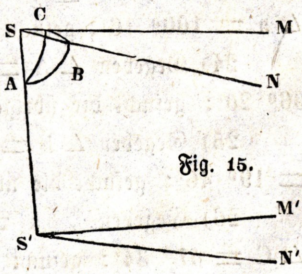


Fig. 15.

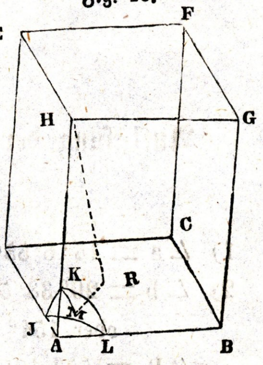
Aufl. Man errichte aus dem Punkte S eine Senkrechte SS′ auf den Horizont und lege durch MS, SS′ eine Ebene, so wie durch SN, SS′, so werden diese Ebenen den Horizont in S′M′ und S′N′ schneiden; der Winkel M′S′N, ist denn die Horizontalprojektion des gegebenen Winkels MSN. Um diesen Winkel zu berechnen, sind gegeben $< MSS' = 75^\circ\ 58'\ 54''$ und $< NSS' = 38^\circ\ 45'$.

33) Die Horizontalprojektion M'S'N' (Fig. 15) eines Winkels im Raume sei gegeben, so wie die Winkel, welche die Schenkel des Raumwinkels mit der Senkrechten machen; man soll den Winkel im Raume berechnen.

Gegeben $< M'S'N' = 40^\circ\ 15'\ 32''$, $< MSS' = 60^\circ\ 20'\ 30''$ und $< NSS' = 15^\circ\ 30'\ 36''$.

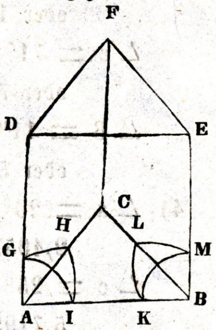
34) Drei an einer Ecke eines Parallelepipedums zusammenstoßende Kanten, nebst den Winkeln, welche sie mit einander einschließen, sind gegeben; man soll die Oberfläche OF und den körperlichen Inhalt KW dieses Körpers finden. Gegeben AB $=$ aL $=$ 10 Fuß 10 Zoll, AD $=$ bL $=$ 8 Fuß 4 Zoll, AH $=$ cL $=$ 14 Fuß 5 Zoll, $< BAD = < \alpha = 124^\circ\ 15'$, $< BAH = < \beta = 74^\circ\ 12'$, $< HAD = < \gamma = 50^\circ\ 40'$.

Fig. 16.



35) In einem dreiseitigen Prisma sind drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten nebst den ebenen Winkeln oder Seiten, dieser Ecke gegeben. Man soll die Neigungswinkel je zweier Gränzflächen, den körperlichen Inhalt und die Oberfläche dieses Körpers finden.

Fig. 17.



Gegeben AB $=$ aL $=$ 5 Arschin 10 Werschock, AC $=$ bL $=$ 3 Arschin 12 Werschock, AD $=$ cL $=$ 8 Arschin 4 Werschock, $< BAC = < \alpha = 34^\circ\ 25'\ 16''$, $< BAD = < \beta = 62^\circ\ 44'\ 31''$ und $< CAD = < \gamma = 43^\circ\ 1'\ 42''$.

36) Die Seiten eines sph. Dreiecks sind aL $=$ 4 Fuß 2

Zoll, bL = 3 Fuß 8 Zoll, cL = 5 Fuß 4 Zoll und der Radius der Kugel rL = 8 Fuß 10 Zoll; die korrespondirenden Seiten des zugehörigen Sehnendreiecks α, β, γ sollen gefunden werden.

37) In einem sph. Dreiecke sind die Seiten des zugehörigen Sehnendreiecks αL = 80 Arschin 10 Werschock, βL = 90 Arschin 5 Werschock, < γL = 100 Arsch. 15 Wersch. und der Radius der Kugel 859,5 Meilen; man soll die Seiten des sph. Dreiecks a, b, c berechnen.

Auflösung der Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie.

1) $\angle$ a = 15° 6′ 55″, $\angle$ b = 38° 28′ 6″, $\angle$ B = 71° 49′ 50″.

2) $\angle$ b = 20° 38′ 5″ oder 159° 21′ 55″, $\angle$ c = 25° 22′ 55″ oder 154° 37′ 5″,
$\angle$ B = 55° 17′ 55″ oder 124° 42′ 5″.

3) $\angle$ b = 10° 29′ oder 169° 31′ und bL = 7,6847 Fuß oder 124,2622 Fuß,
$\angle$ c = 71° 39′ oder 108° 21′ und cL = 52,5222 Fuß oder 79,4247 Fuß,
$\angle$ B = 11° 3′ oder 168° 57′, JF = 448,4728□ Fuß oder 5309,83□ Fuß.

4) $\angle$ a = 20° 38′ 5″ oder 159° 21′ 55″ und aL = 1 Fuß 2,4057 Zoll oder 9 Fuß 3,257 Zoll,
$\angle$ c = 25° 22′ 55″ oder 154° 37′ 5″ und cL = 1 Fuß 5,7199 Zoll oder 8 Fuß 11,944 Zoll,
$\angle$ A = 55° 17′ 55″ oder 124° 42′ 5″, JF = 77,2754□ Zoll oder 10□ Fuß 119,515□ Zoll.

5) $\angle a = 35^\circ\ 1'\ 50''$ und $aL = 2$ Faden 5 Fuß 5,554 Zoll,
$\angle b = 100^\circ\ 4'\ 20''$ u. $bL = 7$ Faden 6 Fuß 7,197 Zoll,
$\angle B = 95^\circ\ 49'\ 18''$, $JF = 14$□ Faden 43□ Fuß 136,9□ Zoll.

6) $\angle a = 38^\circ\ 28'\ 6''$ und $aL = 3$ Faden 5 Fuß 2,214 Zoll,
$\angle b = 15^\circ\ 6'\ 55''$ u. $bL = 1$ Faden 3 Fuß 3,4632 Zoll,
$\angle A = 71^\circ\ 49'\ 50''$, $JF = 2$□ Faden 42□ Fuß 103,392□ Zoll.

7) $\angle c = 60^\circ\ 30'\ 4{,}7''$, $\angle A = 61^\circ\ 39'\ 33{,}4''$,
$\angle B = 47^\circ\ 36'\ 21{,}3''$, $JF = 7056$□ Werst 4878□ Saschen.

8) $\angle a = 116^\circ\ 35'\ 16''$ und $aL = 1749{,}96$ Meilen,
$\angle b = 45^\circ\ 37'\ 18{,}4''$ und $bL = 684{,}775$ Meilen,
$\angle A = 109^\circ\ 41'$, $JF = 884175{,}6$□ Meilen.

9) $\angle c = 18^\circ\ 2'\ 47''$, $\angle b = 15^\circ\ 2'\ 2''$, $\angle a = 10^\circ\ 6'\ 6''$,
$\angle A = 34^\circ\ 28'\ 41''$, $\angle B = 56^\circ\ 51'\ 29''$,
$JF = 19$□ Fuß 7,52□ Zoll,

10) $\angle b = 30^\circ\ 27'\ 22''$, $\angle c = 50^\circ\ 26'\ 35''$,
$\angle a = 42^\circ\ 22'\ 19''$, $\angle A = 60^\circ\ 56'\ 29''$,
$\angle B = 41^\circ\ 6'\ 16''$, $JF = 7619163$□ Werst.

11) $\angle a = 85^\circ\ 15'\ 18''$ u. $aL = 59$ Saschen 1 Arschin 8,9 Wersch.
$\angle b = 100^\circ\ 44'\ 23''$ u. $bL = 70$ Saschen 15,5 Wersch.
$\angle c = 89^\circ\ 6'\ 57''$ u. $cL = 62$ Saschen 10,3 Werschock.
$JF = 2681$□ Saschen 8□ Arschin 232,96□ Wersch.

12) $\angle a = 115^\circ\ 40'$ u. $aL = 6$ Werst 108,9 Saschen,
$\angle b = \angle c = 90^\circ$ u. $bL = cL = 4$ Werst 417,8 Saschen,
$JF = 19$□ Werst 37700□ Saschen.

13) $\angle c = 26^\circ\ 32'\ 18''$, $\angle A = 49^\circ\ 47'\ 18''$,
$\angle B = 101^\circ\ 12'\ 25''$.

14) $\angle C = 37^\circ\ 17'\ 4''$, $\angle A = 49^\circ\ 47'\ 18''$,
$\angle B = 101^\circ\ 12'\ 25''$.

15) $\angle A = 45^\circ\ 7'\ 33{,}8''$, $\angle B = 57^\circ\ 50'\ 22{,}6''$,
$\angle C = 79^\circ\ 11'\ 1{,}6''$, $JF = 15$□ Fuß 0,856□ Zoll.

16) $\angle a = 51^\circ\ 2'\ 5''$ u. $aL = 38{,}7643$ Werst,
$\angle B = 116^\circ\ 9'$, $\angle C = 35^\circ\ 46'\ 16''$, $JF = 611{,}01$□ Werst.

17) $\angle a = 53^\circ\ 44'\ 8''$ u. $aL = 14{,}0679$ Meilen.
$\angle C = 16^\circ\ 19'\ 11''$, $\angle A = 122^\circ\ 52'\ 38''$,
$JF = 21{,}5962$ □ Meilen.

18) $\angle a = 64^\circ\ 31'\ 24''$ u. $aL = 12$ Fad. 1 Fuß 4,79 Zoll,
$\angle b = 117^\circ\ 52'\ 30''$ u. $bL = 22$ Fd. 2 Fuß 0,15 Zoll,
$\angle c = 177^\circ\ 22'\ 15''$ u. $cL = 33$ Fd. 3 Fuß 9,09 Zoll,
$JF = 531$ □ Faden 40 □ Fuß 134 □ Zoll.

19) $\angle b = 114^\circ\ 44'\ 22''$ u. $bL = 3444{,}44$ Meilen,
$\angle c = 75^\circ\ 41'\ 10''$ u. $cL = 2272{,}07$ Meilen.
$\angle A = 89^\circ\ 4'\ 46''$, $JF = 5158980$ □ Meilen.

20) $\angle a = 78^\circ\ 6'\ 26''$ u. $aL = 63$ Meilen 1,412 Werst,
$\angle c = 63^\circ\ 9'\ 23''$ u. $cL = 53$ Ml. 2,675 Werst,
$\angle C = 61^\circ\ 30'\ 22''$, $JF = 238$ □ Ml. 20,3 □ Werst.

21) $\angle A = 65^\circ\ 58'\ 20''$, $\angle B = 91^\circ\ 47'\ 24''$,
$\angle C = 105^\circ\ 46'\ 52''$, $JF = 3645{,}26$ □ Meilen.

22) $< B = 114^\circ\ 8'\ 30''$, $< C = 55^\circ\ 41'\ 41''$,
$< b = 109^\circ\ 44'\ 46''$.

23) $< A = 100^\circ\ 40'\ 26''$, $< b = 93^\circ\ 23'\ 22''$,
$< c = 95^\circ\ 35'\ 38''$.

24) $< a = 100^\circ\ 15'\ 26''$, $< b = 93^\circ\ 24'\ 24''$,
$< c = 95^\circ\ 36'\ 39''$.

25) $< A = 151^\circ\ 57'\ 53''$, $< C = 16^\circ\ 44'\ 19''$,
$< a = 145^\circ\ 11'\ 23''$.

26) $< b = 86^\circ\ 0'\ 48''$, $< c = 54^\circ\ 8'\ 13''$,
$< A = 123^\circ\ 47'\ 13''$.

27) $< a = 48^\circ\ 36'\ 52''$, $< b = 93^\circ\ 2'\ 3''$,
$< c = 105^\circ\ 46'\ 6''$, $< P = 131^\circ\ 23'\ 8''$,
$< Q = 86^\circ\ 57'\ 57''$, $< R = 74^\circ\ 13'\ 54''$,
$< p = 132^\circ\ 17'\ 50''$, $< q = 100^\circ\ 6'\ 40''$,
$< r = 71^\circ\ 34'\ 30''$.

Bedeutet ϱ den Radius der Kugel, $S = A + B + C$, $s = a + b + c$ und J' den Flächeninhalt des Polardreiecks, so ist $\varrho = \sqrt{\dfrac{180^0 . J}{(S-180)\pi}}$ und $J' = \left(\dfrac{360^0 - s}{S - 180}\right) J$, also $\varrho L = 38$ Fuß 7,21 Zoll und $J'F = 2927$ □ Fuß 118,5 □ Zoll.

28) $< a = 6^0\, 52'\, 31''$, $< b = 13^0\, 45'\, 3''$, $< c = 10^0\, 18'\, 47''$

$$\sin p = \frac{2}{\sin b}\sqrt{\sin \tfrac{1}{2} s \sin (\tfrac{1}{2} s - a) \sin (\tfrac{1}{2} s - b) \sin (\tfrac{1}{2} s - c)}$$

$< p = 5^0\; 0'\; 12{,}6''$ u. $pL = 46$ Werst 268,2 Saschen.

29) Wendet man die Formel VI. α Seite 16 auf das Polardreieck an, so erhält man $\dfrac{\cos (R - \frac{1}{2} p) \cos (R - \frac{1}{2} q)}{\sin (R - \frac{1}{2} r)}$

$= \sin \dfrac{[3 R - \frac{1}{2} (P + Q + R)]}{\sin (2R - R)}$ oder $\dfrac{\sin \frac{1}{2} p \sin \frac{1}{2} q}{\cos \frac{1}{2} r}$

$= \dfrac{- \cos \frac{1}{2} (P + Q + R)}{\sin R}$ oder $\dfrac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c}$

$= \dfrac{- \cos \frac{1}{2} (A + B + C)}{\sin C}$. Setzt man für $\sin C$

$= \dfrac{2\sqrt{\sin \frac{1}{2} s \sin (\frac{1}{2} s - a) \sin (\frac{1}{2} s - b) \sin (\frac{1}{2} s - c)}}{\sin a \sin b}$

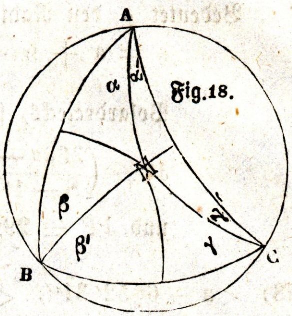
und für $\sqrt{\sin \frac{1}{2} s \sin (\frac{1}{2} s - a) \sin (\frac{1}{2} s - b) \sin (\frac{1}{2} s - c)}$ $= g$, so erhält man:

$- \cos \frac{1}{2} (A + B + C) = \dfrac{g}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$. Eben so

$$\cos \tfrac{1}{2} (A + B - C) = \frac{g}{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (B + C - A) = \frac{g}{2 \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (C + A - B) = \frac{g}{2 \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}$$



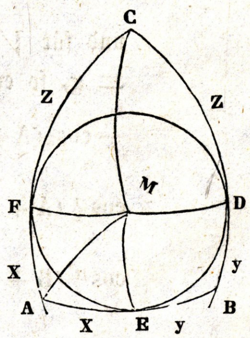
30) Es sei das sph. Dreieck ABC; um den Mittelpunkt zu finden errichte man aus den Mitten der Seiten Perpendikel, so ist der Durchschnittspunkt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises (der Beweis wird ebenso geführt wie in der Planimetrie. Planimetrie Lehrs. 31), und MB = MC = MA ist der Radius r des verlangten Kreises. Das Dreieck MBD ist ein rechtwinkliches, folglich

$$\text{tang}\, r = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\cos\beta'} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} <\alpha = <\beta \\ \underline{<\alpha' = <\gamma'} \\ \underline{\alpha + \alpha' = \beta + \gamma' = \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - \beta' - \gamma} \\ \underline{<A = <B + <C - 2\beta'} \\ <\beta' = \dfrac{<B + C - A}{2}. \end{array}$$

Nun ist $\cos\beta' = \cos\frac{1}{2}(B + C - A) = \dfrac{g}{2\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}a}$,

also $\text{tang}\, r = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}c}{g}$, $<r = 30^0\,46'\,24''$.

Fig. 19.



31) ABC sei das sph. Drck.; man halbire die Winkel, so treffen die Halbirungslinien in einem Punkt zusammen, welcher der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist (der Beweis wird wie in der Planimetrie geführt). Errichtet man von M Perpendikel auf die Seiten, als ME, MF, MD, so sind sie einander gleich. Bezeichnet man ME = $<\varrho$, so ist in dem rechtwinklichen Dreieck EMA tang ϱ = tang $\frac{1}{2}$A sin x tang ϱ = tang $\frac{1}{2}$A sin $\frac{1}{2}$(b + c — a) = sin $\frac{1}{2}$s

$$= \sin(\tfrac{1}{2}s - a)\sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s\sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a)\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin\frac{1}{2}s}}$$

$$\angle \varrho = 13^o\ 7'\ 58''$$

$$z = z,\ y = y$$

$$\angle a = \angle z + y = z + x + y + x - 2x$$

$$\angle a = b + c - 2x$$

$$x = \tfrac{1}{2}(b + c - a)$$

32) Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser die Bogen AC, CB und AB, so ist $\angle A = \angle M'S'N'$,

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b)\sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\angle A = 43^o\ 34'\ 32''$$

33) Man errichte aus dem Punkte S' (Fig. 15) des Horizontes eine Senkrechte, lege durch diese und S'M' und S'N' Ebenen, nehme einen beliebigen Punkt S in der Senkrechten und bilde die gegebenen Winkel, so ist MSN der gesuchte Raumwinkel. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser die Bogen AC, BC, AB, so ist $\angle a = \angle MSN$, also $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ und $\angle a = 49^o\ 8'\ 44''$.

34) Die Seitenfläche ABCD $= ab \sin \alpha F$, die Seitenfläche ABGH $= ac \sin \beta F$ und ADEH $= bc \sin \gamma F$, so ist $O = 2(ab \sin \alpha + ac \sin \beta + bc \sin \gamma)$, OF = 635 □Fuß 193,6 □Zoll.

Man errichte aus dem Punkte H die Senkrechte HR $= c \sin HAR$, so ist $K = abc \sin \alpha \sin HAR$. Beschreibt man um den Punkt A mit beliebigem Halbmesser Bogen JL, JK und KL, und zieht von K den sphärischen Perpendikel KM, so ist $\sin KM = \sin HAR$; nun ist (Aufg. 28) $\sin KM$

$$= \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}s\sin(\tfrac{1}{2}s - \alpha)\sin(\tfrac{1}{2}s - \beta)\sin(\tfrac{1}{2}s - \gamma)},$$

wo $s = \alpha + \beta + \gamma$ bedeutet, so ist K

$= 2\,abc\sqrt{\sin \frac{1}{2} s \sin (\frac{1}{2} s - \alpha) \sin (\frac{1}{2} s - \beta) \sin (\frac{1}{2} s - \gamma)}$

KW = 257558 c Zoll = 149 c Fuß 86 c Zoll.

35) Aus den Punkten A und B beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser Kugeln, wodurch die den Körperwinkeln A und B entsprechenden sphärischen Dreiecken GHJ, KLM entstehen. Da die ebenen Winkel oder Seiten α, β, γ des sph. Dreiecks GHJ bekannt sind, so sind es auch die sph. Winkel G, H, J d. h. die Neigungswinkel der Seitenflächen AE, AF gegen die Grundfläche ACB und gegen einander selbst.

Bedeutet $\alpha + \beta + \gamma = s$, so ist:

$$\sin \tfrac{1}{2} G = \sqrt{\frac{\sin (\frac{1}{2} s - \beta) \sin (\frac{1}{2} s - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}},\ \angle G = 36^0\, 6'\, 6''$$

$$\sin \tfrac{1}{2} H = \sqrt{\frac{\sin (\frac{1}{2} s - \gamma) \sin (\frac{1}{2} s - \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha}},\ \angle H = 133^0\, 27'\, 42''$$

$$\sin \tfrac{1}{2} J = \sqrt{\frac{\sin (\frac{1}{2} s - \alpha) \sin (\frac{1}{2} s - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}},\ \angle J = 50^0\, 32'\, 18''$$

Da im ebenen Dreiecke ABC zwei Seiten AB, AC nebst dem eingeschlossenen Winkel CAB bekannt sind, so sind auch die Winkel $ABC = \delta$, $ACB = \varepsilon$ und die Seite $BC = dL$, als bekannt anzusehen.

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \delta) = \frac{a - b}{b + b} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \alpha,$$

$\frac{1}{2} (\varepsilon + \delta) = 72^0\, 47'\, 22''$ $\frac{1}{2} (\varepsilon - \delta) = 32^0\, 50'\, 57''$

$\angle \varepsilon = 105^0\, 38'\, 19''$ $\angle \delta = 39^0\, 56'\, 25''$

$d = \frac{a \sin \alpha}{\sin \varepsilon}$, dL = 52,8301 Wersch. = 3 Arsch. 4,8301 Wersch.

$\triangle ABC = \frac{ab \sin \alpha}{2}$. F = 1526,23 □ Werschock = 5 □ Arschin 246,23 □ Werschock.

Im sph. Dreiecke KLM kennt man den $\angle K = \angle J$, die Seite $KL = \angle \delta$ und auch $KM = 180^0 - \beta$, folglich auch die Winkel L, M und LM oder Winkel CBE $= \eta$. $\angle K = 50^0\ 32'\ 18''$, $\angle KL = \angle \delta = 39^0\ 56'\ 25''$, $\angle KM = 180^0 - \beta = 117^0\ 15'\ 29''$, $\angle L = 133^0\ 43'\ 40''$, $\angle M = 31^0\ 27'\ 29''$, $\angle LM = \angle \eta = 71^0\ 45'\ 30''$.

An der körperlichen Ecke C kennt man den ebenen Winkel ACB $= \angle \varepsilon$, ACF $= 180 - \angle \gamma$ und BCF $= 180^0 -$ CBE, folglich ist es leicht den Flächenwinkel ACFB zu finden.

$\angle ACB = \angle \varepsilon = 105^0\ 38'\ 19''$, $\angle ACF = 136^0\ 58'\ 18''$, $\angle BCF = 108^0\ 14'\ 30''$, $\angle ACFB = 140^0\ 6'\ 40''$.

Da der körperliche Inhalt eines Prismas die Hälfte von dem eines Parallelepipedums von derselben Höhe und einer doppelten so großen Grundfläche ist, so ist dieser Inhalt

$$K = abc \sqrt{\sin \tfrac{1}{2} s \sin (\tfrac{1}{2} s - \alpha) \sin (\tfrac{1}{2} s - \beta) \sin (\tfrac{1}{2} s - \gamma)}$$

KW $= 141084{,}1$ c Werschock $= 34$ c Arschin $1820{,}1$ c Werschock.

Die Oberfläche des Prismas besteht aus drei Parallelogrammen und zwei Dreiecken. $O = ab \sin \alpha + bc \sin \gamma + ac \sin \beta + dc \sin \eta = 3052{,}46 + 5404{,}29 + 10560{,}75 + 6623{,}11 = 25640{,}61$.

OF $= 25640{,}61$ □ Wrsch. $= 100$ □ Arsch. $40{,}61$ □ Wrsch.

36) $\alpha = 2 r \sin \tfrac{1}{2} a$, $\beta = 2 r \sin \tfrac{1}{2} b$, $\gamma = 2 r \sin \tfrac{1}{2} c$,

$\angle a = 27^0\ 1'\ 33{,}6''$, $\angle b = 23^0\ 46'\ 58{,}8''$,

$\angle c = 34^0\ 35'\ 34{,}8''$, $\alpha L = 4$ Fuß $1{,}5$ Zoll, $\beta L = 3$ Fuß $7{,}7$ Zoll, $\gamma L = 5$ Fuß 3 Zoll.

37) $\sin \tfrac{1}{2} a = \dfrac{\alpha}{2 r}$, $\sin \tfrac{1}{2} b = \dfrac{\beta}{2 r}$, $\sin \tfrac{1}{2} c = \dfrac{\gamma}{2 r}$

$\angle a = 0^0\ 0'\ 13''$, $\angle b = 0^0\ 0'\ 14{,}5''$,

$\angle c = 0^0\ 0'\ 16{,}2''$, aL $= 81$ Arschin 4 Werschock, bL $= 90$ Arsch. 10 Wrsch., cL $= 101$ Arsch. $4{,}1$ Wrsch.