achtungsvoll vom Verfaſſer.

Wiederholungsbüchlein

für den

Rechenunterricht

in

den unteren Klaſſen der Gymnaſien, in Kreisſchulen und
in höheren Mädchenſchulen

von

Friedr. Wilh. Kellner,
wiſſenſchaftlichem Lehrer an der Kreisſchule zu Reval.

Reval, 1879.
Verlag von Franz Kluge.

Wiederholungsbüchlein

für den

Rechenunterricht

in

den unteren Klaſſen der Gymnaſien, in Kreisſchulen und
in höheren Mädchenſchulen

von

Friedr. Wilh. Kellner,
wiſſenſchaftlichem Lehrer an der Kreisſchule zu Reval.

Reval, 1879.
Verlag von Franz Kluge.

Vorwort.

Das vorliegende Wiederholungsbüchlein für den Rechenunterricht hat den Zweck, das zeitraubende Dictiren und Nachſchreiben in den arithmetiſchen Lehrſtunden, wobei ſich in der Regel viele Fehler und Ungenauigkeiten einſchleichen, zu beſeitigen. Es enthält in kurzer und möglichſt einfacher Faſſung die nöthigen Begriffsbeſtimmungen, Rechenregeln und Beiſpiele, denen nur in einzelnen Fällen, wo es ganz beſonders geboten erſchien, dem Gedächtniß und Verſtändniß des Schülers zu Hilfe zu kommen, kurze Erläuterungen beigegeben ſind.

Was die Anordnung des Stoffes und eine Anzahl von Begriffserklärungen anlangt, ſo bin ich dabei nachgeſchriebenen Vorträgen und den freundlichen Rathſchlägen des Herrn Collegienraths Carl Lais, Oberlehrers der Mathematik am Gouvernements-Gymnaſium zu Reval, gefolgt.

Reval, im April 1879.

Der Verfaſſer.

Inhaltsverzeichniß.

Erſtes Kapitel: Von den ganzen Zahlen.

Zweites Kapitel: Von den gemeinen Brüchen.

Drittes Kapitel: Von den Decimalbrüchen.

Viertes Kapitel: Rechnungen mit gleichartig benannten Zahlen.

Fünftes Kapitel: Rechnungen mit ungleichartig benannten Zahlen, oder die ſogenannten bürgerlichen Rechnungsarten.

A. Die Regeldetri-Rechnungen.

B. Die Theilungs-Rechnungen.

Sechstes Kapitel. Anhang: Von der Wurzelausziehung.

Die **Arithmetik** oder **Zahlenlehre** macht uns mit den Eigenſchaften der Zahlen bekannt und lehrt uns, wie man aus gegebenen oder bekannten Zahlen unbekannte Zahlen findet.

Erſtes Kapitel: Von den ganzen Zahlen.

I. Die Zahl.

1. Eine Zahl iſt der Inbegriff einer beſtimmten Menge von Einheiten. — Man bildet eine neue Zahl, indem man zu einer fertigen Zahl eine oder mehrere Einheiten hinzufügt; z. B. $1+1=2$; $2+1=3$; $3+1=4$ u. ſ. w.

2. Eine Zahl heißt abſtract oder unbenannt, wenn keine Benennung mit derſelben verbunden iſt. Eine Zahl heißt dagegen concret oder benannt, wenn ſie mit dem Namen des gezählten Gegenſtandes verbunden iſt. So iſt z. B. 9 eine abſtracte Zahl, aber 9 Pud iſt eine concrete Zahl.

3. Benannte Zahlen heißen gleichnamig, wenn ſie gleiche Benennungen haben, z. B. 6 Pfund, 9 Pfund, 13 Pfund u. ſ. w.; ſie werden dagegen ungleichnamig genannt, wenn ſie ungleiche Benennungen haben; z. B. 6 Pfund, 9 Rubel, 13 Werſt.

4. Benannte Zahlen heißen gleichartig, wenn die ihnen zu Grunde liegenden Dinge gleichartig ſind, d. h. wenn ſie mit demſelben Maße gemeſſen oder auf dieſelbe Benennung zurückgeführt werden können. So ſind z. B. Pud, Pfund und Solotnik gleichartige Dinge, denn ſie können durch Solotnik gemeſſen und auf Solotnik zurückgeführt werden. — Ungleichartig dagegen heißen benannte Zahlen, wenn ihnen ungleichartige Dinge zu Grunde liegen, d. h. ſolche Dinge, die nicht durch daſſelbe Maß gemeſſen und nicht auf dieſelbe Benennung zurückgeführt werden können. So ſind z. B. Pfund und Tſchetwert, Saſhen und Ries ungleichartige Dinge.

5. Den Inbegriff einer Menge kann man anderen Perſonen auf zweierlei Art mittheilen, entweder durch Laute (Wörter) oder durch Zeichen (Ziffern). Beſondere Namen (Laute) hat man für die Zahlen von 1—10, ferner für Hundert, Tauſend, Million, Billion u. ſ. w.; im Uebrigen werden die Zahlennamen durch Zuſammenſetzung gebildet; z. B. ein-lif oder elf, zwei-lif oder zwölf, drei-zehn, zwei-zig oder zwanzig, drei-zig oder dreißig, vier-zig u. ſ. w.*) — Es giebt unzählig viel Zahlen, aber nur für eine beſchränkte Anzahl der Zahlen hat man beſondere Schriftzeichen; dieſe Schriftzeichen für die Zahlen nennt man Ziffern.

6. Die alten Römer hatten zum Schreiben der Zahlen nur folgende 7 Schriftzeichen:

	I	V	X	L	C	D	M
Bedeutung:	1	5	10	50	100	500	1000

Mit Hilfe dieſer Ziffern ſchrieben ſie die Zahlen nach folgenden Geſetzen:

a) Wenn hinter einer Ziffer rechts eine kleinere oder gleiche Ziffer ſteht, ſo ſollen ſie addirt werden; z. B. VI = 6; XII = 12; XX = 20; LV = 55; CL = 150; MC = 1100; LXII = 62; MDCC = 1700; XXXVII = 37.

b) Wenn vor einer Ziffer links eine (aber auch nur eine) kleinere Ziffer ſteht, ſo ſoll dieſe kleinere von der größeren abgezogen werden; z. B. IV = 4; IX = 9; XL = 40; CD = 400; CM = 900; XIX = 19; XIV = 14; LIX = 59.

7. Die civiliſirten jetzt lebenden Völker der Erde bedienen ſich zum Schreiben aller auch noch ſo großen Zahlen der arabiſchen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und des Zeichens 0 (Null). — Die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 werden im Gegenſatz zur Null geltende Ziffern genannt. Die Null bezeichnet das gänzliche Fehlen der Einheit.

II. Verſchiedene Zahlenſyſteme.

A. Das dekadiſche Zahlenſyſtem.

1. Unſer Zahlenſyſtem, welches wir ebenſo wie die Ziffern von den Arabern überkommen haben, heißt das Zehnerſyſtem oder das dekadiſche Syſtem oder das Decimalſyſtem, weil immer 10 Einheiten gleicher Art zu einer höheren Einheit zuſammengefaßt werden; z. B. 10 Einer = 1 Zehner; 10 Zehner = 1 Hunderter; 10 Hunderter = 1 Tauſender u. ſ. w. — Die Zahl 10 iſt die Grundzahl oder Baſis des dekadiſchen Zahlenſyſtems. Die Zahl zehn und die Producte $10 \times 10 = 100$, ferner $10 \times 10 \times 10 = 1000$; ferner $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ u. ſ. w. heißen dekadiſche Einheiten.

---

*) Die Ausdrücke lif und zig bedeuten beide zehn; einlif heißt eins über zehn; zweizig oder zwanzig heißt zwei mal zehn.

2. Im Zehnerſyſtem bilden:
die Einer . . . . die erſte Stelle,
die Zehner . . . . die zweite Stelle,
die Hunderter . . . . . die dritte Stelle,
die Tauſender . . . . . die vierte Stelle,
die Zehntauſender . . . die fünfte Stelle,
die Hunderttauſender . . die ſechste Stelle.

Dieſe 6 Stellen machen zuſammen die erſte Hauptklaſſe unſeres dekadiſchen Zahlenſyſtems aus.*)

Die zweite Hauptklaſſe heißt Million und umfaßt folgende 6 Stellen: Einer-Million, Zehn-Million, Hundert-Million, Tauſend-Million, Zehntauſend-Million, Hunderttauſend-Million.

Die dritte Hauptklaſſe heißt: Billion, die vierte: Trillion, die fünfte: Quadrillion, die ſechste: Quintillion, u. ſ. w. Jede dieſer Hauptklaſſen enthält wieder, ebenſo wie die erſte und zweite, 6 Stellen.

3. Um mit 9 Ziffern und einer Null jede beliebige, auch noch ſo große Zahl ſchreiben zu können, muß man den 10 Zahlzeichen zweierlei Werth beilegen, nämlich: a) den urſprünglichen oder abſoluten Werth, der nur an die Form der Ziffer geknüpft iſt, und b) den Stellenwerth oder den relativen Werth, der von der Stelle abhängt, welche die Ziffer in Verbindung mit anderen Ziffern einnimmt. So bedeutet z. B. die Ziffer 8 ſtets acht Einheiten; das iſt ihr abſoluter Werth. Aber ſie bedeutet 8 Einer, wenn ſie in der erſten Stelle ſteht, acht Zehner, wenn ſie in der zweiten Stelle, acht Hunderter, wenn ſie in der dritten Stelle ſteht u. ſ. w.; das iſt ihr relativer Werth. — Jede Ziffer, **eine** Stelle weiter nach **links** gerückt, hat einen **zehn** mal ſo großen Werth als vorher.

4. Unter Numeriren verſteht man die zweifache Fertigkeit: a) mit Hilfe unſerer Ziffern eine jede beliebige Zahl zu ſchreiben, und b) eine jede geſchriebene Zahl zu leſen.

B. Andere Zahlenſyſteme.

1. Daß die Erfinder unſeres Decimalſyſtems grade zehn Zahlzeichen wählten, hat ohne Zweifel ſeine Gründe; aber man kann auch mit weniger oder mehr als 10 Zahlzeichen die Zahlen ſchreiben. Würde man z. B. immer drei Einheiten einer Stelle zu einer Einheit der nächſt höheren Stelle zuſammenfaſſen, ſo

---

*) Bemerkung: Die erſte Hauptklaſſe heißt Einer; beim Zahlenleſen wird aber dieſe erſte Klaſſe ohne Benennung gelaſſen; z. B. 634 wird geleſen: ſechshundertvierunddreißig, und nicht 634 Einer.

erhielte man das Dreierſyſtem. In dieſem ſtehen auf der erſten Stelle die Einer, auf der zweiten Stelle die Dreier, auf der dritten die 3×Dreier oder Neuner, auf der vierten die 3×3×Dreier oder Siebenundzwanziger u. ſ. w.; und ſo iſt alſo:

1 nach dem Zehnerſyſtem = 1 nach dem Dreierſyſtem,
3 „ „ „ = 10 „ „ „
9 „ „ „ = 100 „ „ „
27 „ „ „ = 1000 „ „ „

Die Zahl 201 bedeutet nach dem Dreierſyſtem: 1 Einer + 0 Dreier + 2 Neuner oder 1 + 0 + 18 = 19. Diejenige Zahl, welche wir nach dem Zehnerſyſtem ſo ſchreiben: 17 (ſieben Einer und ein Zehner), müſſen wir nach dem Dreierſyſtem ſo ſchreiben: 122 (zwei Einer, zwei Dreier und ein Neuner).

2. Das Dreierſyſtem hat außer 0 nur die Ziffern 1 und 2, denn mit 3 beginnt ſchon die 1 der nächſt höheren Stelle. Während wir alſo nach dieſem Syſteme (und ebenſo nach dem Zweier-, Vierer-, Fünfer-, Sechser-, Siebener-, Achter-, und Neuner-Syſtem) nicht alle unſere Zahlzeichen verwenden können, würden uns nach dem Elferſyſtem ein, und nach dem Zwölferſyſtem zwei, nach dem Zwanzigerſyſtem zehn ſolcher Zahlzeichen fehlen.

Man braucht zum Schreiben der Zahlen:

im Zweierſyſtem	die Zahlzeichen	0, 1.
„ Dreierſyſtem	„ „	0, 1, 2.
„ Viererſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3.
„ Fünferſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3, 4.
„ Sechserſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3, 4, 5.
„ Siebenerſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
„ Achterſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
„ Neunerſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
„ Zehnerſyſtem	„ „	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Die einzelnen Stellen heißen nach dem:

Zweierſyſtem:	Einer,	2er,	4er,	8er,	16er	u. ſ. w.
Dreierſyſtem:	Einer,	3er,	9er,	27er,	81er	„
Viererſyſtem:	Einer,	4er,	16er,	64er,	256er	„
Fünferſyſtem:	Einer,	5er,	25er,	125er,	625er	„
Sechserſyſtem:	Einer,	6er,	36er,	216er,	1296er	„
Siebenerſyſtem:	Einer,	7er,	49er,	343er,	2401er	„
Achterſyſtem:	Einer,	8er,	64er,	512er,	4096er	„
Neunerſyſtem:	Einer,	9er,	81er,	729er,	6561er	„
Zehnerſyſtem:	Einer,	10er,	100er,	1000er,	10000er	„

Die nach dem Zehnerſyſtem **27** geſchriebene Zahl muß alſo dargeſtellt werden:

a) nach dem Zweierſyſtem durch: einen 16er + einen 8er + null 4er + einen 2er + einen Einer, d. i. 11011;

b) nach dem Dreierſyſtem durch: einen 27er + null 9er + null 3er + 0 Einer, d. i. 1000;

c) nach dem Viererſyſtem durch: einen 16er + zwei 4er + 3 Einer, d. i. 123;

d) nach dem Fünferſyſtem durch: einen 25er + null 5er + 2 Einer, d. i. 102;

e) nach dem Sechserſyſtem durch: vier 6er + 3 Einer, d. i. 43;

f) nach dem Siebenerſyſtem durch: drei 7er + ſechs Einer, d. i. 36;

g) nach dem Achterſyſtem durch: drei 8er + drei Einer, d. i. 33;

h) nach dem Neunerſyſtem durch: drei 9er + null Einer, d. i. 30;

i) nach dem Elferſyſtem durch: zwei 11er + 5 Einer, d. i. 25;

k) nach dem Zwanzigerſyſtem durch: einen 20er + 7 Einer, d. i. 17.

4. Beiſpielshalber mögen hier noch einige Zahlen folgen, wie ſie nach den verſchiedenen Syſtemen geſchrieben werden:

a) Zehnerſyſt.	b) Dreierſyſt.	c) Sechserſyſt.	d) Achterſyſt.
1	1	1	1
2	2	2	2
3	10	3	3
4	11	4	4
5	12	5	5
6	20	10	6
7	21	11	7
8	22	12	10
9	100	13	11
10	101	14	12
15	120	23	17
20	202	32	24
48	1210	120	60
55	2001	131	67
64	2101	144	100
76	2211	204	114
84	10010	220	124
100	10201	244	144

III. Die Operationen mit ganzen Zahlen.

Unter Operation verſteht man die Art und Weiſe, Zahlen mit einander zu verbinden. — Es giebt 3 directe und 4 indirecte Operationen: die directen Operationen geben an, wie man Zahlen bildet; die indirecten zeigen an, wie man Zahlen ſucht und findet.

A. Die directen Operationen.

1. Die **Addition.** — a) Addiren heißt: zu den Einheiten einer Zahl die Einheiten einer andern Zahl durch Vorwärtszählen hinzufügen. — Die Addition iſt alſo nur eine beſondere Art der Zahlenbildung.

b) Die Zahlen, welche addirt werden ſollen, heißen: Summanden, Poſten oder Addenden; die Zahl, welche durch Addition zweier oder mehrerer Zahlen entſteht, heißt: Summe.

c) Das Zeichen der Addition iſt ein ſtehendes Kreuz (+); geleſen: plus, mehr oder und.

d) Summanden darf man ordnen, wie man will; an dem Werthe der Summe wird dadurch nichts geändert. Z. B.

$$3 + 4 = (1, 1, 1) + (1, 1, 1, 1) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 = 7$$
$$4 + 3 = (1, 1, 1, 1) + (1, 1, 1) = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 = 7$$

e) Wie addirt man mehrſtellige Zahlen mit einander?

2. Die **Multiplication.** — a) Multipliciren heißt: eine von zwei gegebenen Zahlen ſo viel mal als Summanden ſetzen, als die andere Einheiten hat.*) Die Multiplication iſt alſo nur eine verkürzte Addition gleicher Summanden; es bedeutet z. B. „9 multiplicirt mit 5" nichts anderes, als daß die 9 fünfmal als Summand geſetzt werden ſoll; nämlich $9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$.

b) Diejenige Zahl, welche mehreremal als Summand geſetzt werden ſoll, heißt Multiplicandus; diejenige der beiden Multiplicationszahlen, welche anzeigt, wie oft die andere als Summand geſetzt werden ſoll, heißt Multiplicator. Multiplicand und Multiplicator führen auch den gemeinſchaftlichen Namen: Factoren. Die durch die Multiplication zweier Zahlen gebildete neue Zahl heißt Product; es iſt dies eine Summe gleicher Summanden.

c) Das Zeichen der Multiplication iſt ein liegendes (×) oder ein Punkt zwiſchen den einzelnen Factoren.

d) Man darf die Factoren ordnen, wie man will; oder: gleiche Factoren geben gleiche Producte. Es iſt $4 \times 9 = 9 \times 4 = 36$; es kommt daſſelbe heraus; ob man 4 neun mal, oder ob man 9 vier mal als Summand ſetzt; nämlich:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 9 + 9 + 9 + 9.$$

---

*) Oder: Multipliciren heißt: aus einer von zwei gegebenen Zahlen eine neue Zahl ebenſo bilden, wie die andere gegebene Zahl aus der Einheit (aus der Eins) gebildet worden iſt. — Z. B.: Multiplicire 5 mit 3 heißt: bilde aus 5 eine neue Zahl, ebenſo wie 3 aus 1 gebildet worden iſt. Da aber 3 entſtanden iſt, indem man $1 + 1 + 1$ geſetzt hat, ſo muß die neue Zahl auch gebildet werden, indem man $5 + 5 + 5$ ſetzt; das giebt 15.

e) Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man die einzelnen Summanden mit dieſer Zahl multiplicirt und alsdann die Einzelproducte addirt; z. B.: $(12 + 5) \times 3 = 36 + 15 = 51$.

f) Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man die beiden Elemente der Differenz mit dieſer Zahl multiplicirt und alsdann die Einzelproducte ſubtrahirt; z. B.: $(16 - 5) \times 3 = 48 - 15 = 33$.

g) Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man einen der Factoren mit dieſer Zahl multiplicirt. Soll z. B. das Product (2×3) mit 5 multiplicirt werden, ſo giebt dies 10×3 oder 2×15; beides iſt $= 30$.

h) Wie multiplicirt man eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen?

i) Wie multiplicirt man zwei mehrzifferige Zahlen mit einander?

k) Außer der ſteigend geordneten giebt es auch eine fallend geordnete Multiplications-Weiſe. Sie unterſcheidet ſich von der erſteren dadurch, daß man die Multiplication mit der höchſten Stelle des Multiplicators beginnt und jedes folgende Theilproduct um eine Stelle weiter nach rechts heraus rückt. Z. B.: $2634 \times 578 = ?$

Steigend geordnet:	Fallend geordnet:
2634	2634
578	578
21072	13170
18438	18438
13170	21072
1522452	1522452

3. Die **Potenzirung**. — a) Eine Potenz iſt ein Product aus lauter gleichen Factoren. So iſt z. B. $16 = 2 . 2 . 2 . 2$ oder die vierte Potenz von 2 (man ſchreibt: $16 = 2^4$); ferner $125 = 5 . 5 . 5$ oder die dritte Potenz von 5 (man ſchreibt: 5^3); ferner $49 = 7 . 7$ oder die zweite Potenz von 7 (man ſchreibt: $49 = 7^2$). — Die Zahl, welche mehrere mal als Factor geſetzt iſt, heißt die Grundzahl oder Baſis; und die Zahl, welche anzeigt, wie viel gleiche Factoren vorhanden ſind, heißt der Anzeiger oder Exponent. In dem Beiſpiel $2^4 = 16$ iſt die Zahl 16 die Potenz, die Zahl 2 die Grundzahl der Potenz, und die Zahl ^{4} der Exponent der Potenz.

b) Die zweite Potenz einer Zahl nennt man auch das Quadrat derſelben; ſo iſt $25 = 5^2$, geleſen: 25 iſt die 2te Potenz oder das Quadrat von 5. — Die dritte Potenz einer Zahl nennt man auch den Kubus derſelben; ſo iſt $8 = 2^3$, geleſen: 8 iſt die 3te Potenz oder der Kubus von 2.

c) Potenziren heißt: eine Zahl (die Baſis) ſo viel mal als Factor ſetzen, als eine andere Zahl (der Exponent) Einheiten hat. — Die Potenzirung iſt demnach eine Multiplication gleicher Factoren. Der Zahlenausdruck 6^4 bedeutet, daß die 6 viermal als Factor geſetzt werden ſoll; alſo $6 . 6 . 6 . 6 = 1296$.

d) Bei der Multiplication iſt das Product unabhängig von der Anordnung der Factoren; bei der Potenzirung aber dürfen Baſis und Exponent nicht mit einander vertauſcht werden; ſo iſt z. B. $2^5 = 32$ und $5^2 = 25$.

B. Die indirecten Operationen.

4. Die Subtraction. — a) Subtrahiren heißt: aus zwei gegebenen Zahlen eine neue Zahl (Differenz) finden, welche zu der einen gegebenen Zahl (Subtrahend) hinzu addirt, die andere gegebene Zahl (Minuend) ergiebt.

b) Die neue Zahl, welche bei der Subtraction entſteht, heißt Unterſchied oder Differenz oder auch Reſt. Diejenige gegebene Zahl, zu welcher die Differenz addirt wird, heißt Subtrahendus, d. i. eine Zahl, welche abgezogen werden ſoll; die andere gegebene Zahl, welche man bei Addition der Differenz und des Subtrahend als Summe erhält, heißt Minuendus, d. i. eine Zahl, welche kleiner gemacht werden ſoll.

c) Die Probe der Subtraction beſteht darin, daß man die Differenz mit dem Subtrahend addirt; die erhaltene Summe muß dem Minuendus gleich ſein.

d) Das Zeichen der Subtraction iſt ein wagerechter Strich (—), welcher zwiſchen den Minuend und den rechts darauffolgenden Subtrahend geſetzt und minus oder weniger geleſen wird.

e) Ein Aggregat iſt ein Zahlenausdruck, der aus mehreren Zahlen beſteht, welche durch die Vorzeichen + und — mit einander verbunden ſind; z. B. $16 - 7 + 9 - 3 + 12 = ?$ — Die Zahlen, vor denen das Zeichen + ſteht, heißen poſitive Größen oder Plus-Größen; und die Zahlen, vor denen das Zeichen — ſteht, heißen negative Größen oder Minus-Größen. — Poſitive und negative Größen bilden ähnliche Gegenſätze wie: Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, vorwärts und rückwärts, Höhe und Tiefe, Wärme und Kälte.

Anmerkung: Wenn einer Zahlengröße kein Vorzeichen, weder + noch —, vorgeſetzt iſt, ſo wird ſie als poſitiv betrachtet.

f) Wie ſubtrahirt man mehrſtellige Zahlen von einander?

g) Wenn der Subtrahend größer iſt, als der Minuend, ſo muß die geſuchte Zahl (Differenz) negativ ſein. Z. B.:

Minuend: 4
Subtrahend: 9
Differenz: — 5

In vorliegendem Falle, ſoll eine Zahl gefunden werden, welche zur 9 hinzugefügt, die Zahl 4 giebt, und das iſt: — 5.

5. Die Diviſion. — a) Dividiren heißt: aus zwei gegebenen Zahlen eine neue Zahl finden, welche mit der einen gegebenen Zahl multiplicirt, die andere als Product ergiebt. Z. B. dividire 20 durch 4 heißt: finde eine Zahl, welche mit 4 multiplicirt, das Product 20 giebt; d. i. 5, denn $5 \times 4 = 20$.

b) Die neue Zahl, welche bei der Diviſion gefunden wird, heißt: Quotient. Diejenige gegebene Zahl, welche mit dem Quotienten multiplicirt werden ſoll, heißt: Diviſor, d. i. Theiler; die andere gegebene Zahl, welche als Product (des Quotienten und Diviſors) erhalten werden muß, heißt: Dividend, d. i. eine Zahl, welche getheilt werden ſoll.

c) Die Probe der Diviſion beſteht darin, daß man den Quotienten mit dem Diviſor multiplicirt und zu dieſem Product den etwaigen Reſt hinzuaddirt; die ſo erhaltene Zahl muß dem Dividendus gleich ſein.

d) Die Diviſionsaufgaben treten als Aufgaben des Theilens und als Aufgaben des Enthaltenſeins oder Meſſens auf. Z. B. 20 : 4 kann bedeuten:

1ſtens: Wie heißt der 4te Theil von 20?
2tens: Wie oft iſt 4 in 20 enthalten?

Im erſten Falle giebt der Diviſor die Anzahl der Theile an, in welche der Dividendus zerlegt werden ſoll; und die Größe eines ſolchen Theiles wird geſucht. Im zweiten Falle giebt der Diviſor die Größe eines Theiles und die Anzahl der Theile wird geſucht.

e) Das Zeichen der Diviſion iſt ein Doppelpunkt (:); links von demſelben ſteht der Dividend, rechts der Diviſor. 15 : 3 lieſt man: Theile 15 in 3 gleiche Theile! Oder: Wie viel beträgt der 3te Theil von 15? Oder: Wie oft iſt 3 in 15 enthalten? Oder: 15 dividirt durch 3. — Man kann die Diviſionsaufgaben auch ohne Benutzung des Doppelpunktes in der Art darſtellen, daß man den Diviſor unter den Dividendus ſchreibt und beide durch einen wagerechten Strich von einander trennt. Soll z. B. 28 durch 4 dividirt werden, ſo ſchreibt man entweder

$28 : 4 = ?$ oder $\frac{28}{4} = ?$

f) Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividendus und den Diviſor mit ein und derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Beiſpiel 1) $15:5=\mathbf{3}$.
$(15\times4):(5\times4)=60:20=\mathbf{3}$.
Beiſpiel 2) $30:6=\mathbf{5}$.
$(30:3):(6:3)=10:2=\mathbf{5}$.

g) Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man die einzelnen Summanden durch dieſe Zahl dividirt und alsdann die Einzelquotienten addirt; z. B.:
$(15+6):3=(15:3)+(6:3)=5+2=\mathbf{7}$.

h) Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, indem man ihre Elemente durch dieſe Zahl dividirt und alsdann die Einzelquotienten ſubtrahirt; z. B.:
$(25-10):5=(25:5)-(10:5)=5-2=\mathbf{3}$.

i) Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen der Factoren durch dieſe Zahl dividirt; z. B.:
$(8\times12):4=(8:4)\times12=2\times12=\mathbf{24}$.
Oder: $(8\times12):4=(12:4)\times8=3\times8=\mathbf{24}$.

k) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Dividendus durch das Product der Diviſoren dividirt; z. B.:
$(50:5):2=50:(5\times2)=50:10=\mathbf{5}$.

6. Die Radicirung oder die Wurzelausziehung. — a) Radiciren oder die Wurzel ausziehen, heißt: aus einer gegebenen Zahl die Baſis für einen beſtimmten Exponenten ſuchen.*) — Die Quadratwurzel ausziehen heißt: aus einer gegebenen Zahl die Baſis ſuchen, deren Exponent 2 heißt; die Kubikwurzel ausziehen heißt: aus einer gegebenen Zahl die Baſis ſuchen, deren Exponent 3 heißt.

b) Soll aus einer Zahl die Wurzel ausgezogen werden, ſo wird dies durch ein dem Anfangsbuchſtaben des lateiniſchen Wortes radix (Wurzel) nachgebildetes Zeichen ($\sqrt{\ }$) angedeutet. — Den Ausdruck $\sqrt[2]{49}=7$ lieſt man: Die Quadratwurzel aus 49 heißt 7. Die Zahl 49 iſt der Radicand; die 2 über dem Wurzelzeichen iſt der Wurzel-Exponent und zeigt an, die wievielte Wurzel ausgezogen werden ſoll; die 7 iſt die gefundene Wurzel oder Baſis. Den Ausdruck $\sqrt[3]{64}=?$ lieſt man: Wie heißt die 3te Wurzel oder die Kubikwurzel aus 64? — Bemerkung: Bei der Quadratwurzel wird der Exponent gewöhnlich nicht geſchrieben.

---

*) Oder: Radiciren heißt: aus einer gegebenen Zahl (p) eine neue Zahl (b) finden, welche mit dem beſtimmten Exponenten (e) potenzirt, die gegebene Zahl (p) wiedergiebt. — Die Quadratwurzel ausziehen heißt hiernach: aus einer gegebenen Zahl eine neue Zahl finden, welche zur 2ten Potenz erhoben, die gegebene Zahl hervorbringt.

c) Die Probe für die Richtigkeit der Radicirung beſteht darin, daß man die gefundene Wurzel (Baſis) mit dem Exponenten potenzirt; die ſo gefundene Zahl muß dem Radicanden gleich ſein. Zum Beiſpiel:

$\sqrt{64} = 8$, und $8^2 = 64$; ebenſo $\sqrt[3]{125} = 5$, und $5^3 = 125$.

7. Das **Logarithmiren** oder Exponentiiren. — a) Das Logarithmiren lehrt den Exponenten finden, mit welchem eine gegebene Baſis potenzirt werden muß, um eine andere gegebene Zahl hervorzubringen. Dieſen Exponenten nennt man den Logarithmus.

b) Die Logarithmen laſſen ſich bei der Multiplication, Diviſion, Potenzirung und Radicirung verwenden und ſind bei größeren Rechnungen dieſer Art ein wichtiges Erleichterungsmittel; denn mit Hilfe beſonderer Logarithmen-Tafeln wird das Multipliciren zum Addiren, das Dividiren zum Subtrahiren, das Potenziren zum Multipliciren und das Radiciren zum Dividiren.*)

IV. Die einfachen und die zuſammengeſetzten ganzen Zahlen.

1. Iſt eine ganze Zahl in einer anderen ganzen Zahl ohne Reſt enthalten, ſo nennt man die erſtere ein Maß der letzteren. So iſt z. B. 6 ein Maß von 42; 5 ein Maß von 65; 7 ein Maß von 77; 3 ein Maß von 6, 9, 12, 15 u. ſ. w. — Die Eins iſt das Maß aller Zahlen.

2. Eine Zahl, in welcher eine andere Zahl ohne Reſt aufgeht, heißt ein Vielfaches der letzteren; ſo iſt 35 ein Vielfaches der 5; 24 ein Vielfaches der 2, der 3, der 4, der 6 und der 12.

Bemerkung: Alle Zehner ſind Vielfache von 9 plus der geltenden Ziffer; ſo iſt $20 = 2 \times 9$ plus 2; ferner $50 = 5 \times 9$ plus 5; $70 = 7 \times 9$ plus 7; u. ſ. w.

3. Jede Zahl iſt durch Eins und durch ſich ſelbſt ohne Reſt theilbar. So iſt 17 durch 1 und durch 17 ohne Reſt theilbar; ebenſo 15 durch 1 und 15; ebenſo 24 durch 1 und 24; u. ſ. w.

4. Zahlen, welche nur durch 1 und durch ſich ſelbſt ohne Reſt theilbar ſind, werden einfache Zahlen oder Primzahlen genannt; alle anderen Zahlen heißen zuſammengeſetzte. — So

---

*) Die Radicirung und Logarithmirung entſtehen aus der Potenzirung; ebenſo wie die Subtraction aus der Addition und die Diviſion aus der Multiplication entſteht. — Aus der Addition und aus der Multiplication entſteht nur je eine Rechnungsart, da ſowohl Summanden, wie auch Factoren mit einander vertauſcht werden können. Aus der Potenzirung dagegen entſtehen zwei Rechnungsarten, weil Baſis und Exponent nicht mit einander vertauſcht werden dürfen.

ſind die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 u. ſ. w. Primzahlen, denn ſie haben nur 1 und ſich ſelbſt zum Maße; die Zahl 36 dagegen iſt eine zuſammengeſetzte Zahl, denn ſie läßt ſich durch 2, 3, 4, 6, 9, 12 und 18 ohne Reſt theilen.

Anmerkung: Die Primzahlen im Zahlenkreiſe bis 100 heißen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

5. Alle Zahlen, welche durch 2 ohne Reſt theilbar ſind, werden grade Zahlen oder Paarzahlen genannt; alle übrigen heißen ungrade Zahlen.

6. Um zu entſcheiden, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl oder eine zuſammengeſetzte Zahl iſt, muß man ſie durch die kleinen bekannten Primzahlen (ſiehe Nr. 4, Anmerkung) der Reihe nach dividiren; man hört erſt dann auf, wenn kein Reſt bleibt, oder wenn der Quotient kleiner iſt, als der Diviſor. Iſt die gegebene Zahl durch keine dieſer Primzahlen ohne Reſt theilbar, ſo iſt ſie eine Primzahl. — Soll z. B. unterſucht werden, ob 209 eine Primzahl iſt, ſo dividirt man mit 2, dann mit 3, mit 5, mit 7, mit 11 in 209 und findet, daß die 11 darin aufgeht; 209 iſt demnach eine zuſammengeſetzte Zahl und keine Primzahl. Soll man ferner entſcheiden, ob 179 eine Primzahl iſt, ſo dividirt man erſt mit 2, dann mit 3, mit 5, mit 7, mit 11, mit 13, mit 17 in 179; iſt man beim Diviſor 17 angekommen, ſo findet man, daß jetzt der Quotient kleiner iſt als der Diviſor, und man hört nun auf zu dividiren. Da die Zahl 179 durch keine der genannten Primzahlen ohne Reſt theilbar iſt, ſo iſt ſie eine Primzahl.

7. Wenn eine Zahl in zwei oder mehreren Zahlen ohne Reſt enthalten iſt, ſo iſt ſie das gemeinſchaftliche Maß oder der gemeinſchaftliche Diviſor dieſer Zahlen. So iſt z. B. die 3 ein gemeinſchaftlicher Diviſor der Zahlen 6, 15, 21, 39 u. ſ. w.; ferner 7 iſt ein gemeinſchaftlicher Diviſor von 14, 21, 28, 35, 42 u. ſ. w.

8. Relative Primzahlen ſind ſolche Zahlen, welche wohl zerlegt werden können, aber unter ſich keinen gemeinſchaftlichen Diviſor haben. — So ſind z. B.: a) 8 und 9; b) 12 und 25; c) 10 und 21; d) 27 und 35 relative Primzahlen.

9. Zahlen, welche außer Eins noch ein anderes gemeinſchaftliches Maß haben, heißen verwandte Zahlen. — So ſind z. B. a) 6 und 8 durch 2; b) 6 und 9 durch 3; c) 15 und 35 durch 5; d) 12 und 15 und 18 durch 3; e) 16 und 20 und 32 durch 4 mit einander verwandt.

10. Eine Zahl, die durch mehrere andere Zahlen ohne Reſt theilbar iſt, heißt der gemeinſchaftliche Dividend oder das gemeinſchaftliche Vielfache dieſer Zahlen. — So iſt z. B. die Zahl 24 der gemeinſchaftliche Dividend der Zahlen 2, 3, 4, 6, 8 und 12; ferner 60 iſt das gemeinſchaftliche Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 und 30.

V. Theilbarkeit der ganzen Zahlen.

A. Geſetze über die Theilbarkeit der Zahlen.

1. Wenn eine Zahl in einer anderen aufgeht, ſo geht ſie auch in jedem Vielfachen dieſer anderen Zahl auf. Z. B. 4 geht in 8 auf, ſo geht ſie auch in 2 × 8 oder 16, in 3 × 8 oder 24, in 4 × 8 oder 32 u. ſ. w. auf.

2. Wenn eine Zahl in zwei oder mehreren anderen Zahlen einzeln aufgeht, ſo geht ſie auch in der Summe dieſer Zahlen auf. Z. B. 3 geht in 9, in 12, in 15 auf, ſo geht ſie auch in 9 + 12 + 15 oder 36 ohne Reſt auf. (Oder mit anderen Worten: Eine Zahl geht in der Summe mehrerer Zahlen auf, wenn ſie in jedem einzelnen Summanden aufgeht.)

3. Wenn eine Zahl in zwei anderen Zahlen einzeln aufgeht, ſo geht ſie auch in dem Unterſchiede dieſer beiden anderen Zahlen auf. Z. B. 4 geht in 12 und in 32 auf, ſo geht ſie auch in 32—12 oder 20 ohne Reſt auf. (Oder mit anderen Worten: Eine Zahl geht in der Differenz zweier Zahlen auf, wenn ſie im Minuendus und im Subtrahendus einzeln aufgeht.)

B. Einige Kennzeichen für die Theilbarkeit ganzer Zahlen.*)

4. Durch 2 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn in der Einerſtelle derſelben eine grade Zahl oder eine Null ſteht. Z. B. 374; 590.

5. Durch 3 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn ſich die Querſumme derſelben durch 3 ohne Reſt theilen läßt. Z. B. 105; 2244.

Anmerkung: Die Summe, welche man erhält, wenn man die einzelnen Ziffern einer mehrſtelligen Zahl als Einer betrachtet und dieſe addirt, wird die Querſumme dieſer Zahl genannt. — So iſt die Querſumme von 105 = 6, denn 1 + 0 + 5 = 6; ferner die Querſumme von 2244 = 12, denn 2 + 2 + 4 + 4 = 12.

---

*) Nähere Erklärungen findet man in der zweiten Abtheilung meines Wegweiſers Seite 78 ff. — Die Begründung der Theilbarkeit einer Zahl durch 9 und 3 und 6 wird nur von reiferen Schülern verlangt.

6. Durch 4 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern rechts, als eine Zahl betrachtet, durch 4 theilbar ſind. Solche Zahlen ſind z. B. 1236 und 3528, da ſowohl 36, als auch 28 durch 4 theilbar ſind.

7. Durch 5 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn in der Einerſtelle derſelben 5 oder 0 ſteht. Z. B. 135; 390.

8. Durch 6 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn ſie ſich durch 2 und auch durch 3 ohne Reſt theilen läßt. Z. B. 234; 1716.

9. Durch 8 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn ihre drei letzten Ziffern rechts, als eine Zahl betrachtet, durch 8 ohne Reſt theilbar ſind. Z. B. 5736; 75000.

10. Durch 9 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn die 9 in der Querſumme derſelben ohne Reſt aufgeht. Z. B. 1377; 2034.

11. Durch 10 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn in der Einerſtelle derſelben eine Null ſteht. Z. B. 790; 2300.

12. Durch 11 iſt jede dreiſtellige Zahl ohne Reſt theilbar, wenn die Summe der beiden äußeren Ziffern ebenſoviel oder 11 mehr beträgt, als die mittelſte Ziffer, Z. B. 396; 638; 209.

13. Durch 25 iſt jede Zahl ohne Reſt theilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern rechts, als eine Zahl betrachtet, durch 25 ohne Reſt theilbar ſind. Z. B. 725; 850; 1275; 2300.

Anmerkung: Wenn eine Zahl nicht durch 2 ohne Reſt theilbar iſt, ſo läßt ſie ſich durch keine Zweierzahl (2, 4, 6, 8, 10, 12 u. ſ. w.) ohne Reſt theilen. — Ebenſo: Wenn eine Zahl nicht durch 3 ohne Reſt theilbar iſt, ſo läßt ſie ſich durch keine Dreierzahl (3, 6, 9, 12, 15, 18 u. ſ. w.) ohne Reſt theilen. U. ſ. w.

VI. Das Zerlegen der zuſammengeſetzten Zahlen in ihre Primfactoren.

1. Jede zuſammengeſetzte Zahl läßt ſich als ein Product darſtellen, deſſen Factoren ſämmtlich Primzahlen ſind. So iſt z. B. 36 = 2. 2. 3. 3; ferner 210 = 2. 3. 5. 7.

2. Eine Zahl zerlegen heißt, die kleinſten Factoren derſelben aufſuchen. — Wenn man eine zuſammengeſetzte Zahl in ihre Primfactoren zerlegen ſoll, ſo verfährt man in folgender Weiſe: Man dividirt die gegebene Zahl zuerſt, wenn dies ohne Reſt geſchehen kann, durch die kleinſte Primzahl, alſo durch 2. Iſt der Quotient nochmals durch 2 ohne Reſt theilbar, ſo dividirt man ihn wiederum durch 2; und dies wiederholt man ſo lange, als die 2 ohne Reſt in dem Quotienten aufgeht. Hierauf dividirt man in ähnlicher Weiſe mit den folgenden Primzahlen, alſo zunächſt mit 3, wenn dieſe Zahl im letzten Quotienten reſtlos enthalten iſt; alsdann ebenſo mit 5, mit 7, mit 11, mit 13 u. ſ. w., bis der Quotient 1 herauskommt. Die einzelnen Diviſoren ſind die geſuchten Primfactoren der gegebenen Zahl.

Beiſpiel: Zerlege die Zahl 4950 in ihre Primfactoren!

2	4950
3	2475
3	825
5	275
5	55
11	11
	1

Erklärung: Zuerſt wird 4950 durch 2 dividirt und man erhält 2475. Dieſer Quotient wird nun, da er nicht mehr durch 2, wohl aber durch 3 ohne Reſt theilbar iſt, durch 3 dividirt und man erhält den Quotienten 825. Dieſer neue Quotient läßt ſich noch einmal durch 3 theilen; man thut es daher und erhält den Quotienten 275. Da dieſer Quotient nicht mehr durch 3 theilbar iſt, ſo unterſucht man, ob die nächſtfolgende Primzahl, alſo die 5, in dem Quotienten aufgeht. Da dies der Fall iſt, ſo dividirt man mit 5 und erhält den Quotienten 55. Dieſer neue Quotient läßt ſich noch einmal durch 5 theilen; man thut es und erhält den Quotienten 11. Da in dieſem neuen Quotienten die 5 nicht aufgeht, ſo verſucht man mit der folgenden Primzahl, alſo mit der 7, zu dividiren; da dieſe aber in 11 nicht aufgeht, ſo ſchreitet man zur folgenden Primzahl, zur 11. Dieſe 11 geht in dem letzten Quotienten $11 = 1$ mal. Die Zahl 4950 beſteht mithin aus den Primfactoren 2. 3. 3. 5. 5. 11 oder 2. 3^2. 5^2. 11, geleſen 2, mal 3 in der zweiten Potenz, mal 5 in der zweiten Potenz, mal 11.*)

VII. Das Aufſuchen des kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden gegebener Zahlen.

Merke für das Auffinden des kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden oder des kleinſten gemeinſchaftlichen Vielfachen gegebener Zahlen folgende Regeln:

1. Wenn die kleineren der gegebenen Zahlen in der größten gegebenen Zahl ohne Reſt aufgehen, ſo iſt dieſe letztere der kleinſte gemeinſchaftliche Dividend. — So iſt der kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für:

a) 2, 4, 12, 6, 3 = **12**.
b) 6, 10, 2, 30, 5, 15 = **30**.
c) 8, 9, 3, 12, 72, 18, 24 = **72**.

2. Wenn die gegebenen Zahlen kein gemeinſchaftliches Maß haben, ſo findet man ihren kleinſten gemeinſchaftlichen Dividend, indem man ſie mit einander multiplicirt. — So iſt der kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für:

---

*) Siehe: Erſtes Capitel, III A, 3: Die Potenzirung; Seite 7.

a) 3 und $5 = 3 \times 5 = \mathbf{15}$.
b) 2 und 3 und $7 = 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{42}$.
c) 4 und 15 und $11 = 4 \times 15 \times 11 = \mathbf{660}$.

3. Wenn die gegebenen Zahlen gemeinſchaftliche Maße haben, ſo kann man auf zweierlei Art verfahren.

Erſtes Verfahren: Man zerlegt die gegebenen Zahlen der Reihe nach in ihre Primfactoren; von der *erſten* zerlegten Zahl benutzt man *alle* Primfactoren, von jeder folgenden Zahl aber nur diejenigen, welche erforderlich ſind, um die betreffende Zahl mit Hilfe der ſchon vorhandenen Primfactoren zuſammenzuſetzen. *Das Product aller dieſer benutzten Primfactoren giebt den geſuchten kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden.*

Beiſpiel: Suche den kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden der Zahlen 4, 6, 9 und 8.

Schriftliche Darſtellung:

$$\begin{array}{l} 4,\ 6,\ 9,\ 8 \\ \hline 2.\ 2.\ 3.\ 3.\ 2 = \mathbf{72}. \end{array}$$

Erklärung: Die Zahl 4 beſteht aus 2×2; man ſchreibe beide Primfactoren unter den Strich. Die Zahl 6 beſteht aus 2×3, hiervon benutzt man nur die 3 und ſchreibt ſie unter den Strich, da man aus dieſer 3 und aus den ſchon vorhandenen Primzahlen (2×2) ſowohl die 4, als auch die 6 zuſammenſetzen kann. Nun zerlegt man die 9, das giebt 3×3; hiervon benutzt man aber nur *eine* 3, weil man aus den ſchon vorhandenen Primfactoren (2×2×3) und der noch hinzukommenden 3 nicht nur die Zahlen 4 und 6, ſondern auch die 9 zuſammenſetzen kann. Ferner zerlegt man die 8, das giebt 2×2×2; hiervon benutzt man aber nur *eine* 2, denn unter den bereits vorhandenen Primfactoren (2×2×3×3) befinden ſich ſchon 2 Zweien, ſo daß man aus den vorhandenen Primzahlen und der noch hinzukommenden 2 nicht nur die Zahlen 4, 6 und 9, ſondern auch die 8 zuſammenſetzen kann. Man hat alſo erhalten $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = \mathbf{72}$ als den kleinſten gemeinſchaftlichen Dividendus der Zahlen 4, 6, 9 und 8.

Zweites Verfahren: Um den kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden zu finden, ſchreibt man die gegebenen Zahlen über einen wagerechten Strich und durchſtreicht diejenigen, welche in der einen oder in der andern der gegebenen Zahlen reſtlos enthalten ſind (ſiehe die unten folgende Aufgabe). Hierauf ſucht man zu wenigſtens 2 der nicht durchſtrichenen Zahlen einen gemeinſchaftlichen Diviſor (wozu man aber ſtets eine *Primzahl* wählen muß) und dividirt durch denſelben diejenigen Zahlen, welche ſich ohne Reſt durch ihn theilen laſſen; die erhaltenen Quotienten, ſowie auch alle Zahlen, die ſich nicht ohne Reſt theilen ließen, ſetzt man *unter* den wagerechten Strich. Alsdann ſtreicht man von dieſen unter dem Strich ſtehenden Zahlen wieder diejenigen durch, welche in einer oder der anderen der hier verzeichneten Zahlen ohne Reſt aufgehen. Nun ſucht man wieder zu wenigſtens 2 der nicht durchſtrichenen Zahlen einen gemeinſchaftlichen Diviſor und dividirt dadurch diejenigen Zahlen, welche ſich durch ihn ohne Reſt theilen laſſen. Die erhaltenen Quotienten und alle Zahlen, die ſich nicht ohne Reſt theilen ließen, ſetzt man unter einen zweiten wagerechten Strich. Dieſes Verfahren ſetzt man ſo lange fort, bis die erhaltenen Quotienten keinen gemeinſchaftlichen Diviſor mehr haben, alſo relative Primzahlen ſind. Schließlich multiplicirt man die letzten Quotienten nebſt den erwählten Diviſoren mit einander, und das Product iſt der kleinſte gemeinſchaftliche Dividend für die gegebenen Zahlen.

Aufgabe: Suche den kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden zu folgenden Zahlen: 6, 2, 12, 18, 4, 28, 21, 70, 5, 25!

Schriftliche Darſtellung.

2	~~6~~.	~~2~~.	12.	18.	~~4~~.	28.	21.	70.	~~5~~.	25.
2			6.	9.		14.	21.	35.		25.
3			~~3~~.	9.		7.	21.	35.		25.
5				3.			7.	35.		25.
				3.				7.		5.

Reſultat: 2 × 2 × 3 × 5 × 3 × 7 × 5 = **6300**.*)

VIII. Das Aufſuchen des größten gemeinſchaftlichen Maßes oder Diviſors zweier Zahlen.

Man kann das größte gemeinſchaftliche Maß zweier Zahlen auf zweierlei Weiſe finden:

1. Erſtes Verfahren: Man findet das größte gemeinſchaftliche Maß zu zwei Zahlen, indem man die gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt und von dieſen diejenigen benutzt, welche den gegebenen Zahlen gemeinſam ſind. Das Product der gemeinſamen Primfactoren iſt das größte gemeinſchaftliche Maß der gegebenen Zahlen.

Beiſpiele: Suche das größte gemeinſchaftliche Maß der Zahlen:

a) 12 und 18. Rechnung: 12 = 2 . 2 . 3, und 18 = 2 . 3 . 3; beide Zahlen haben nur die Primfactoren 2 und 3 gemeinſchaftlich; folglich iſt 2 × 3 = **6** das größte gem. Maß der Zahlen 12 und 18.

b) 16 und 36. Rechnung: 16 = 2 . 2 . 2 . 2, und 36 = 2 . 2 . 3 . 3; beide Zahlen haben alſo die Primfactoren 2 × 2 gemeinſchaftlich, und 2 × 2 = **4** iſt demnach das größte gem. Maß der Zahlen 16 und 32.

---

*) Weitere Belehrung kann man finden in der zweiten Abtheilung meines Wegweiſers, Seite 83 ff.

2. Zweites Verfahren: Wenn zwei große Zahlen gegeben ſind, ſo wendet man die ſogenannte Kettendiviſion an, um das größte gemeinſchaftliche Maß dieſer Zahlen zu finden:

Man dividirt mit der kleinen Zahl in die größere; mit dem Reſt dividirt man in den vorigen Diviſor; mit dem nun verbleibenden Reſte wieder in den nächſt vorhergehenden Diviſor, und ſo weiter fort, bis die Diviſion aufgeht. Der letzte Diviſor iſt das größte gemeinſchaftliche Maß der gegebenen Zahlen. — Heißt der letzte Diviſor 1, ſo geht daraus hervor, daß die gegebenen Zahlen nicht mit einander verwandt, daß ſie alſo relative Primzahlen ſind.

Beiſpiel: Wie heißt das größte gemeinſchaftliche Maß für die Zahlen 2256 und 7488?

Schriftliche Darſtellung:

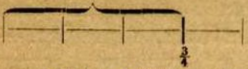
$$\begin{array}{rrrrrr}
2256\,| & 7488\,| & 3 & & & \\
 & 6768 & & & & \\
 & \overline{720}\,| & 2256\,| & 3 & & \\
 & & 2160 & & & \\
 & & \overline{96}\,| & 720\,| & 7 & \\
 & & & 672 & & \\
\text{Reſultat} = \mathbf{48}. & & & \overline{48}\,| & 96\,| & 2 \\
 & & & & \underline{96} &
\end{array}$$

Zweites Kapitel: Von den gemeinen Brüchen.

I. Einleitung.

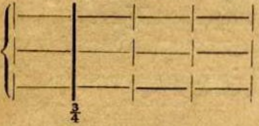
1. Eine Zahl, welche einen oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen bezeichnet, nennt man eine Bruchzahl oder einen Bruch. — Die Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt worden iſt, heißt der Nenner des Bruches. Die Zahl, welche angiebt, wie viel mal man einen Theil des Ganzen genommen hat, heißt der Zähler des Bruches. — Beim Schreiben eines Bruches ſtellt man den Nenner unter den Zähler und ſcheidet beide Zahlen durch einen wagerechten oder ſchrägen Strich.

2. Ein Bruch entſteht, wenn man ein Ganzes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilt und einen dieſer Theile ein oder mehrere mal nimmt. — So iſt z. B. $\frac{3}{4}$ dadurch entſtanden, daß man ein Ganzes (eine Einheit) in 4 gleiche Theile getheilt und einen dieſer Theile 3 mal genommen hat.



$\frac{3}{4}$ iſt 3 mal der 4. Theil eines Ganzen.

Anmerkung: Der Bruch $\frac{3}{4}$ kann auch dadurch entſtehen, daß man 3 Ganze in 4 gleiche Theile theilt und einen ſolcher Theile nimmt. In dieſem Falle zeigt der Zähler an, wie viel Ganze man getheilt hat.



$\frac{3}{4}$ iſt der vierte Theil von 3 Ganzen.

3. Ein Bruch, welcher zum Zähler die Zahl 1 hat, welcher alſo nur einen Theil eines Ganzen bezeichnet, heißt ein Stammbruch. — Ein Bruch, welcher zum Zähler eine andere Zahl als 1 hat, welcher alſo zwei oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen bezeichnet, heißt ein abgeleiteter Bruch oder ein Zweigbruch.

4. Brüche, welche weniger als ein Ganzes betragen, heißen echte Brüche. Brüche, welche ebenſoviel oder mehr als ein Ganzes betragen, heißen unechte Brüche. — Bei unechten Brüchen iſt der Zähler ebenſo groß oder größer als der Nenner; bei echten Brüchen iſt der Zähler kleiner als der Nenner.

5. Brüche, welche gleiche Nenner haben, nennt man gleichnamige Brüche. Z. B. $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{9}$.

6. Unter gleichnamigen Brüchen iſt der der größte, welcher den größten Zähler hat. Z. B. $\frac{8}{9}$ größer als $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{9}$ größer als $\frac{2}{9}$.

7. Unter Brüchen, welche gleiche Zähler haben, iſt der der größte, welcher den kleinſten Nenner hat. Z. B. $\frac{3}{5}$ größer als $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{7}$ größer als $\frac{4}{11}$.

8. Eine ganze Zahl mit einem echten Bruch, heißt eine gemiſchte Zahl. Z. B. $4\frac{2}{5}$, $6\frac{3}{7}$.

9. Eine gemiſchte Zahl einrichten heißt: die gemiſchte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln. — Es geſchicht dies, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplicirt und zu dieſem Product den Zähler addirt; die ſo gewonnene Zahl iſt der Zähler des unechten Bruches; der Nenner bleibt derſelbe. Z. B. $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

10. Einen unechten Bruch in eine gemiſchte Zahl verwandeln, heißt: den unechten Bruch zurückführen, oder auch: die Ganzen herausziehen. — Es geſchieht dies, indem man den Zähler des unechten Bruches durch den Nenner deſſelben dividirt. Der Quotient giebt die Ganzen und der Reſt den Zähler des zugehörigen Bruches an; der Nenner bleibt derſelbe. Z. B. $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$.

11. Wenn man nur den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplicirt, ſo wird der Werth des Bruches größer. — Wenn man nur den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplicirt, ſo wird der Werth des Bruches kleiner.

12. Wenn man nur den Zähler eines Bruches durch eine ganze Zahl dividirt, ſo wird der Werth des Bruches kleiner. — Wenn man nur den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl dividirt, ſo wird der Werth des Bruches größer.

13. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man den Zähler und den Nenner deſſelben: a) mit ein und derſelben Zahl multiplicirt, oder: b) durch ein und dieſelbe Zahl dividirt. Z. B.

a) $\frac{2}{3}=\frac{2.4}{3.4}=\frac{8}{12}$; b) $\frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3}$.

14. Einen Bruch erweitern heißt: den Bruch durch größere Zahlen ausdrücken, doch ſo, daß der Werth deſſelben unverändert bleibt. — Man erweitert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner deſſelben mit ein und derſelben Zahl (Erweiterungszahl) multiplicirt.

Anmerkung: Sind die Erweiterungs-Aufgaben in der Art geſtellt, daß wohl der Nenner des neuen Bruches, aber nicht die Erweiterungszahl gegeben iſt, ſo findet man die Erweiterungszahl, indem man mit dem (kleinen) Nenner des gegebenen Bruches in den (großen) Nenner des geſuchten Bruches dividirt. Iſt z. B. die Aufgabe gegeben: $\frac{3}{4}$ ſind wie viel 28tel? ſo iſt die Erweiterungszahl 28 : 4 = **7**; mit dieſer muß man nun den Zähler und den Nenner des Bruches $\frac{3}{4}$ multipliciren; alſo: $\frac{3}{4}=\frac{3\times7}{4\times7}=\frac{21}{28}$.

15. Einen Bruch heben oder kürzen heißt: den Bruch durch kleinere Zahlen ausdrücken, doch ſo, daß der Werth deſſelben unverändert bleibt. — Man hebt oder kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner deſſelben durch ein und dieſelbe Zahl (Hebungszahl) dividirt.

Anmerkung: Wenn die Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen nicht ausreichen, um die Hebungszahl zu erkennen, ſo ſucht man ſie vermittelſt der ſogenannten Kettendiviſion (ſiehe: Erſtes Kapitel VIII, Nr. 2, Seite 18); das größte gemeinſchaftliche Maß des Zählers und Nenners iſt die größte Hebungszahl des Bruches.

16. Brüche gleichnamig machen heißt, ſie unter gleichen Nenner bringen. — Um ungleichnamige Brüche gleichnamig zu machen, muß man:

a) Den **Haupt**- oder **Generalnenner** ſuchen. Dieſen findet man, indem man für alle Nenner der gegebenen Brüche den kleinſten gemeinſchaftlichen Dividenden oder das kleinſte gemeinſchaftliche Vielfache ermittelt. (Siehe: Erſtes Kapitel, VII, Seite 15.)

b) Die **Erweiterungszahl** für jeden einzelnen Bruch ſuchen. Dieſe findet man, indem man mit dem Nenner des gegebenen Bruches in den Hauptnenner dividirt.

c) Jeden Bruch mit der Erweiterungszahl **erweitern.** Dies geſchieht, indem man den Zähler und den Nenner eines jeden Bruches mit der Erweiterungszahl multiplicirt.

II. Addition der Brüche.

1. Nur gleichnamige Brüche können zu einander addirt werden.
2. Gleichnamige Brüche werden addirt, indem man ihre Zähler addirt und der ſo gewonnenen Summe den vorhandenen Nenner giebt. Iſt die Summe ein unechter Bruch, ſo müſſen die Ganzen herausgezogen werden.
3. Sollen ungleichnamige Brüche zuſammengezählt werden, ſo müſſen ſie erſt gleichnamig gemacht werden.
4. Sollen gemiſchte Zahlen addirt werden, ſo werden zuerſt die Brüche und alsdann die Ganzen addirt und ſchließlich die beiden Summen vereinigt. — Kommt bei der Summirung der Brüche ein unechter Bruch heraus, ſo muß man die Ganzen herausziehen und dieſelben zu den Ganzen der Summanden addiren.

III. Subtraction der Brüche.

1. Nur gleichnamige Brüche können von einander abgezogen werden.
2. Gleichnamige Brüche werden ſubtrahirt, indem man ihre Zähler ſubtrahirt und dem Reſt den vorhandenen Nenner giebt.
3. Ungleichnamige Brüche kann man nur von einander abziehen, nachdem man ſie gleichnamig gemacht hat.
4. Wenn gemiſchte Zahlen von einander abgezogen werden ſollen, ſo ſubtrahirt man zuerſt die Brüche und alsdann die Ganzen; ſchließlich vereinigt man beide Differenzen. — Wenn der Bruch des Minuendus kleiner iſt, als der des Subtrahendus, ſo borgt man beim Minuendus 1 Ganzes, macht dieſes zum unechten Bruch und zählt denſelben zu dem im Minuendus vorhandenen Bruche hinzu; von dem ſo erhaltenen unechten Bruche ſubtrahirt man nun den Bruch des Subtrahendus. Zum Beiſpiel:

Aufgabe: $16\frac{1}{3}-9\frac{3}{4}=?$ Rechnung:

$$\begin{array}{r|lr} & \overset{12}{\smile} & \\ 16.\frac{1}{3} & =4+12= & 16 \\ -9\frac{3}{4} & =9 & 9 \\ \hline 6\frac{7}{12} & & \frac{7}{12} \end{array}$$

Aehnlich verfährt man, wenn ein Bruch oder eine gemiſchte Zahl von einer ganzen Zahl abgezogen werden ſoll. Z. B.:
Statt $15-6\frac{3}{5}=?$ denkt man ſich $14\frac{5}{5}-6\frac{3}{5}=?$

IV. Multiplication der Brüche.

1. Man multiplicirt einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multiplicirt. Iſt das Product ein unechter Bruch, ſo verwandelt man dieſen in eine gemiſchte Zahl. — Bemerkung: Bevor man die Multiplication ausführt, kürzt man den Nenner und die ganze Zahl ſo viel als möglich.

Beiſpiel: Multiplicire $\frac{5}{8}$ mit 7!

Rechnung: $\frac{5\,.\,7}{8}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$.

Begründung des Verfahrens: 7 mal 5 Ganze = 35 Ganze; da iſt 7 mal 5 Achtel = 35 Achtel, geſchrieben $\frac{35}{8}$ oder $4\frac{3}{8}$.

2. Man multiplicirt eine ganze Zahl mit einem Bruch, indem man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches multiplicirt, den Nenner unverändert läßt und aus dem Product, wenn es ein unechter Bruch iſt, die Ganzen herauszieht. — Bemerkung wie oben unter Nr. 1.

Beiſpiel: Multiplicire 7 mit $\frac{5}{8}$!

Rechnung: $\frac{7\,.\,5}{8}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$.

Begründung des Verfahrens: Multiplicirt man 7 mit 1, ſo kommt 7 heraus; multiplicirt man 7 mit $\frac{1}{8}$, alſo mit einer 8 mal ſo kleinen Zahl als 1, ſo muß auch 8 mal ſo wenig als 7 herauskommen, d. i. $\frac{7}{8}$; man ſollte aber nicht mit $\frac{1}{8}$, ſondern mit $\frac{5}{8}$ multipliciren, alſo mit einer 5 mal ſo großen Zahl als $\frac{1}{8}$, ſo muß auch 5 mal ſo viel als $\frac{7}{8}$ herauskommen, d. i.

$$\frac{7\,.\,5}{8}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}.$$

Alſo kurz ſo: 7 multiplicirt mit $1=7$;
7 " " $\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$;
7 " " $\frac{5}{8}$ oder $(5\times\frac{1}{8})=\frac{7\,.\,5}{8}=4\frac{3}{8}$.

Oder auch ſo: 7 multiplicirt mit 5 giebt 35; 7 multiplicirt mit $\frac{5}{8}$ muß 8 mal ſo wenig als 35 ſein, d. i. $\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$.

Anmerkung: Da man die Factoren mit einander vertauſchen kann, ohne den Werth des Productes zu ändern, ſo kann man die unter Nr. **1** und **2** aufgeſtellten Regeln auch in eine zuſammenfaſſen, nämlich: Wenn in einer Multiplications-Aufgabe einer der Factoren ein Bruch und der andere eine ganze Zahl iſt, ſo multiplicirt man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl.

3. Brüche werden mit einander multiplicirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. — Bevor man die Multiplication ausführt, kürzt man ſo viel als möglich.

Beiſpiel: Multiplicire $\frac{7}{8}$ mit $\frac{5}{9}$!

Rechnung: $\frac{7\,.\,5}{8\,.\,9} = \frac{35}{72}$.

Begründung des Verfahrens ähnlich wie bei Nr. 2; kurz ſo:

$\frac{7}{8} \times 1 = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{72}$ (da $\frac{1}{9}$ neun mal ſo klein iſt als 1)

$\frac{7}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{35}{72}$ (da $\frac{5}{9}$ fünf mal ſo groß iſt als $\frac{1}{9}$).

Oder auch ſo: $\frac{7}{8} \times 5 = \frac{35}{8}$; da muß $\frac{7}{8} \times \frac{5}{9}$ auch 9 mal ſo klein ſein, als $\frac{35}{8}$; d. i. $\frac{35}{72}$.

4. Wenn in einer Multiplicationsaufgabe gemiſchte Zahlen vorkommen, ſo verwandelt man dieſe vor Ausführung der Multiplication in unechte Brüche. Z. B.:

a) $6 \times 3\frac{1}{7} = \frac{6\,.\,22}{7} = \frac{132}{7} = 18\frac{6}{7}$.

b) $\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{5} = \frac{2\,.\,16}{3\,.\,5} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$.

c) $4\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3} = \frac{19\,.\,7}{4\,.\,3} = \frac{133}{12} = 11\frac{1}{12}$.

Anmerkung: Wenn eine gemiſchte Zahl mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden ſoll (ſiehe Beiſpiel a), ſo kann man auch in folgender Weiſe verfahren: Man multiplicirt einzeln nach einander ſowohl die Ganzen, wie auch den echten Bruch der gemiſchten Zahl mit der ganzen Zahl (Multiplicator) und addirt ſchließlich beide Producte.

Beiſpiel: Multiplicire $3\frac{1}{7}$ mit 6!

Rechnung: I. $3 \times 6 = 18$

II. $\frac{1}{7} \times 6 = \frac{6}{7}$

III. $18 + \frac{6}{7} = 18\frac{6}{7}$.

V. Diviſion der Brüche.

1. Iſt der Diviſor eine ganze Zahl und der Dividendus ein Bruch, ſo findet man den Quotienten, indem man den Nenner des Dividendus mit der ganzen Zahl (Diviſor) multiplicirt. — Bevor man die Multiplication ausführt, kürzt man ſo viel als möglich.

Beiſpiel: $\frac{3}{4} : 2 = ?$ Rechnung: $\frac{3}{4\,.\,2} = \frac{3}{8}$.

Auflöſung: Die Hälfte von $\frac{1}{4}$ iſt $= \frac{1}{8}$; die Hälfte von $\frac{3}{4}$ (das iſt $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$) iſt $= \frac{3}{8}$.

Anmerkung: Soll eine gemiſchte Zahl durch eine ganze Zahl dividirt werden, ſo verwandelt man die gemiſchte Zahl in einen unechten Bruch und multiplicirt den Nenner desſelben mit dem Diviſor.

Beiſpiel: $6\frac{1}{3} : 5 = ?$ Rechnung: $\frac{19}{3\,.\,5} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$.

Man kann in ſolchem Falle aber auch auf folgende Weiſe verfahren: Man dividirt ſowohl die Ganzen, wie auch den echten Bruch der gemiſchten Zahl (Dividendus) durch die ganze Zahl (Diviſor) und addirt alsdann beide Quotienten. — Soll z. B. $24\frac{5}{7}$ durch 3 dividirt werden, ſo ſagt man: der 3. Theil von 24 iſt 8; und der 3. Theil von $\frac{5}{7}$ iſt $\frac{5}{21}$; 8 plus $\frac{5}{21} = 8\frac{5}{21}$. — Erhält man aber bei der Diviſion der Ganzen des Dividendus einen Reſt, ſo muß dieſer ſammt dem echten Bruche des Dividendus eingerichtet und der ſo erhaltene unechte Bruch durch den Diviſor (ganze Zahl) dividirt werden.

Beiſpiel: $26\frac{1}{3} : 4 = ?$

Rechnung: $4 \mid 26\frac{1}{3} \mid 6$

$$\begin{array}{l} 24 \\ \hline 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3\,.\,4} = \frac{7}{12}; \end{array}$$ alſo Reſultat $6\frac{7}{12}$.

Erklärung: Der 4. Theil von $26\frac{1}{3} = 6$ Ganze und Reſt $2\frac{1}{3}$; der 4. Theil von $2\frac{1}{3}$ oder $\frac{7}{3} = \frac{7}{12}$; Reſultat $6 + \frac{7}{12} = 6\frac{7}{12}$.

2. Iſt der Diviſor ein Bruch,*) ſo kehrt man denſelben um und multiplicirt mit der ſo gewonnenen Bruchzahl den Dividendus. — Vor Ausführung der Multiplication kürzt man ſo viel als möglich.

Beiſpiel: a) $6 : \frac{5}{7} = 6 \times \frac{7}{5} = \frac{6\,.\,7}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$.

b) $\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{5} = \frac{3\,.\,9}{4\,.\,5} = \frac{27}{20} = 1\frac{7}{20}$.

c) $6\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{20}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{\overset{5}{\cancel{20}}\,.\,5}{3\,.\,\cancel{4}} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$.

---

*) Hierbei iſt es ganz gleich, ob der Dividendus eine ganze Zahl oder ein Bruch oder eine gemiſchte Zahl iſt.

Begründung des Verfahrens zu a: $6 : \frac{5}{7} = 8\frac{2}{5}$. Denn dividirt man 6 durch 5, ſo erhält man $\frac{6}{5}$; dividirt man aber durch $\frac{5}{7}$, alſo durch eine 7 mal ſo kleine Zahl als 5, ſo muß 7 mal ſo viel herauskommen, alſo $\frac{6 \,.\, 7}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$.

Oder: Diviſor mal Quotient giebt den Dividendus. Nennt man den unbekannten Quotienten x, ſo iſt:

$$\frac{5}{7} \times x = 6$$
$$\frac{1}{7} \times x = \frac{6}{5}$$
$$\text{Alſo } x = \frac{6 \,.\, 7}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}.$$

3. Iſt der Diviſor eine gemiſchte Zahl, ſo verwandelt man ſie in einen unechten Bruch, kehrt dieſen um und multiplicirt mit der ſo erhaltenen Bruchzahl den Dividendus.

Beiſpiele:

a) $8 : 2\frac{3}{5} = 8 : \frac{13}{5} = 8 \times \frac{5}{13} = \frac{8 \,.\, 5}{13} = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{13}$.

b) $\frac{5}{9} : 3\frac{1}{2} = \frac{5}{9} : \frac{7}{2} = \frac{5}{9} \times \frac{2}{7} = \frac{5 \,.\, 2}{9 \,.\, 7} = \frac{10}{63}$.

c) $2\frac{4}{5} : 4\frac{3}{4} = \frac{14}{5} : \frac{19}{4} = \frac{14}{5} \times \frac{4}{19} = \frac{14 \,.\, 4}{5 \,.\, 19} = \frac{56}{95}$.

4. Doppelbrüche ſind ſolche Brüche, deren Zähler oder deren Nenner ſelbſt wieder Brüche ſind. Sie werden in einfache Brüche verwandelt, indem man die in ihnen angedeutete Diviſion ausführt.

Beiſpiele: a) $\frac{7/9}{8}$ bedeutet $7/9 : 8$; d. i. aber $\frac{7}{9 \,.\, 8} = \frac{7}{72}$.

b) $\frac{5}{2/3}$ bedeutet $5 : 2/3$; d. i. aber $\frac{5 \,.\, 3}{2} = 7\frac{1}{2}$.

c) $\frac{3/4}{2/3}$ bedeutet $3/4 : 2/3$; d. i. aber $\frac{3 \,.\, 3}{4 \,.\, 2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

5. Wenn in einer Aufgabe Addition und Subtraction mit Multiplication oder Diviſion verbunden iſt, ſo gilt die Regel: Führe zuerſt die Zahlenpaare, welche durch Multiplications- oder Diviſionszeichen mit einander verbunden ſind, auf **eine** Zahl zurück, und dann erſt ſchreite zur Addition und Subtraction. — Oder mit andern Worten: Multiplication und Diviſion gehen vor Addition und Subtraction. — Oder: Behandle die Zahlenpaare, welche durch Multiplications- oder Diviſionszeichen mit einander verbunden ſind, ſo, als ob ſie in Klammern ſtänden.

Beiſpiel a) $16 - 5\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = ?$ Hier muß man zuerſt $5\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ berechnen und alsdann das gewonnene Product von 16 abziehen.

Beiſpiel b) $18\frac{4}{5} + 16\frac{2}{3} : 10 = ?$ Hier muß man zuerſt $16\frac{2}{3} : 10$ berechnen und alsdann den ſo gewonnenen Quotienten zu $18\frac{4}{5}$ hinzuzählen.

Beiſpiel c) $2\frac{5}{6} \times 15 - 2\frac{5}{8} : 7 + 6\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = ?$

Rechnung: I. $2\frac{5}{6} \times 15 = 42\frac{1}{2}$
II. $2\frac{5}{8} : 7 = \frac{3}{8}$
III. $6\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = 3\frac{3}{4}$
IV. $42\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = 42\frac{1}{8}$
V. $42\frac{1}{8} + 3\frac{3}{4} = 45\frac{7}{8}$.

Drittes Kapitel: Von den Decimalbrüchen.

I. Einleitung.

1. Decimalbrüche entſtehen, wenn man die dekadiſche Stufenleiter unſeres Zahlenſyſtems unter die Einer nach rechts fortſetzt. In der erſten Stelle der Ganzen ſtehen die Einer; in der nächſten Stelle, rechts von den Einern, müſſen nach dem Geſetz des Zehnerſyſtems, die Zehntel ſtehen; in der darauf folgenden Stelle die Hundertſtel; in der darauf folgenden die Tauſendſtel u. ſ. w. — Auf dieſe Weiſe entſtehen Brüche, deren Nenner immer aus einer Eins mit Nullen (10 oder 100 oder 1000 u. ſ. w.) beſtehen und in denen jede Stelle nach rechts einen 10 mal ſo kleinen Werth hat als die vorhergehende; ſolche Brüche nennt man Decimalbrüche. Alſo:

Decimalbrüche ſind ſolche Brüche, welche nach dem Zehnerſyſtem geſchrieben ſind und deren Nenner immer aus einer Eins mit angehängten Nullen beſteht; oder: Decimalbrüche ſind ſolche Brüche, welche zum Nenner eine 10 oder eine Potenz von 10 haben und nach dem Zehnerſyſtem geſchrieben ſind.

2. Da die Nenner der Decimalbrüche ſtets nur aus einer Eins mit angehängten Nullen beſtehen, ſo kann man ſolche Brüche in Form von ganzen Zahlen darſtellen, d. h. man kann die Nenner beim Schreiben weglaſſen. — Die Einer werden von den Zehnteln durch ein Komma (Decimalkomma) getrennt. — Bei einem echten Decimalbruch ſetzt man in die Stelle der Einer ſtets eine Null; alſo: 0,56 heißt: null Ganze, 5 Zehntel, 6 Hundertſtel.

3. Decimalbrüche können auf verſchiedene Weiſe geleſen werden:

a) 3,64 lieſt man: 3 Ganze, 6 Zehntel, 4 Hundertſtel;

b) 3,64 lieſt man: 3 Ganze, 64 Hundertſtel; ($\frac{6}{10} + \frac{4}{100}$ ſind nämlich zuſammen $\frac{60}{100} + \frac{4}{100} - \frac{64}{100}$.)

c) 3,64 lieſt man: 364 Hundertſtel (man macht alſo die Ganzen auch zu Hundertſtel.)

d) 3,64 lieſt man: 3 Ganze (oder 3, Komma) ſechs, vier (man lieſt alſo die Ganzen und die Decimalſtellen der Reihe nach ohne weitere Benennung.)

4. Beim Schreiben eines Decimalbruches, der in ſeinen einzelnen Beſtandtheilen angegeben wird (wie bei Nr. 3, a), hat man darauf zu achten, daß eine 0 in diejenige Stelle geſetzt wird, für welche kein Bruch angegeben iſt; z. B. 7 Zehntel und 9 Tauſendſtel ſchreibt man: 0,709. — Iſt der Decimalbruch als echter oder unechter Bruch im Ganzen angegeben (wie bei Nr. 3, b und c), ſo richtet man ſich nach der Anzahl der Nullen, welche der Nenner hat; ſo viel Nullen derſelbe hat, ſo viel Stellen bekommt der Decimalbruch; z. B. 36 Tauſendſtel ſchreibt man: 0,036.

5. Ein unechter Decimalbruch kann als ſolcher nicht geſchrieben werden, ſondern nur als gemiſchte Zahl. — Z. B. $\frac{37}{10} = 3,7$; $\frac{549}{100} = 5,49$; $\frac{2237}{10} = 223,7$; $\frac{56783}{1000} = 56,783$.

6. Ein Decimalbruch kann nur durch 10 oder eine Potenz von 10, alſo nur durch 10, 100, 1000 u. ſ. w., erweitert werden; es geſchieht dadurch, daß man dem Decimalbruch ſo viel Nullen anhängt, als die Erweiterungszahl Nullen hat. — Vergleiche folgende Brüche ihrem Werthe nach: 0,5; 0,50; 0,500; 0,5000.

7. Einen Decimalbruch kann man nur durch 10 oder eine Potenz von 10 heben oder kürzen; alſo nur dann, wenn er in den letzten Stellen rechts Nullen hat. Es geſchieht dadurch, daß man die rechts ihm anhängenden Nullen wegläßt. — Vergleiche folgende Brüche: a) 3,50 und 3,5; b) 0,2500 und 0,25; c) 4,1000 und 4,1.

8. Decimalbrüche macht man gleichnamig, indem man ſie durch Anhängung von Nullen ſo erweitert, daß ſie alle ſo viel Decimalſtellen haben, wie derjenige Bruch, welcher den größten Nenner hat. Es iſt alſo:

2,345 = 2,3450 (erweitert durch 10)
0,8 = 0,8000 (erweitert durch 1000)
7,6325 = 7,6325
4,02 = 4,0200 (erweitert durch 100)

9. Wenn es bei einem Decimalbruche nicht auf große Genauigkeit ankommt, ſo läßt man eine oder mehrere der niedrigſten Stellen rechts weg. Man nennt dies Verfahren das Verkürzen oder Abſchließen eines Decimalbruches.

Regel: Bei der Verkürzung der Decimalbrüche erhöht man die niedrigſte der noch benutzten Stellen um eine Einheit, wenn die rechts darauf folgende Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9 iſt. Iſt dies nicht der Fall, ſo ſtreicht man die nicht verlangten Stellen einfach ab. — In beiden Fällen hängt man dem verkürzten Bruche einige Punkte an, welche ihn als nicht abgeſchloſſenen Bruch kenntlich machen ſollen.

Beiſpiel a: Soll der Bruch 6,38427 bis auf 2 Stellen verkürzt werden, ſo ſtreicht man einfach die dritte, vierte und fünfte Decimalſtelle, alſo die Ziffern 4, 2 und 7 ab, und es entſteht der Bruch 6,38..., welcher um $\frac{427}{100000}$ kleiner iſt, als der gegebene unverkürzte Bruch.

Beiſpiel b: Soll der Bruch 0,34682 bis auf 2 Stellen verkürzt werden, ſo ſtreicht man die drei letzten Stellen, alſo die 6, 8 und 2, ab, erhöht aber die niedrigſte der benutzten Stellen, alſo die 4, um eine Einheit. Es entſteht auf dieſe Weiſe der Bruch 0,35...; er iſt größer als der gegebene unverkürzte Bruch und zwar um $\frac{35}{100} - \frac{34682}{100000} = \frac{318}{100000}$.

Anmerkung: Wenn man einen Decimalbruch regelrecht verkürzt, ſo iſt der hierdurch entſtehende Fehler (d. h. der Unterſchied zwiſchen dem verkürzten und unverkürzten Bruche) ſtets kleiner, als die Hälfte einer Einheit der niedrigſten benutzten Stelle. — Bei den oben angeführten Beiſpielen betrug eine Einheit der niedrigſten benutzten Stelle $= \frac{1}{100}$ oder $\frac{1000}{100000}$; die Hälfte dieſer Einheit beträgt alſo $\frac{500}{100000}$; der Fehler betrug bei Beiſpiel a aber nur $\frac{427}{100000}$ und bei Beiſpiel b nur $\frac{318}{100000}$, alſo in beiden Fällen weniger als $\frac{500}{100000}$.

10. Man multiplicirt einen Decimalbruch mit einer dekadiſchen Einheit, d. h. mit 10, 100, 1000 u. ſ. w., indem man das Komma ſo viel Stellen nach rechts rückt, als die dekadiſche Einheit Nullen hat. — Z. B.: $3{,}45 \times 10 = 34{,}5$; dadurch, daß man das Komma eine Stelle nach rechts gerückt hat, iſt jede Ziffer eine Stelle nach links geſchoben worden und hat nun einen 10 mal ſo großen Werth als vorher.

Anmerkung: Reicht die Anzahl der Stellen nicht aus, ſo erweitert man den Bruch, ſo viel als nöthig, durch Anhängung von Nullen. — Z. B.: $7{,}6 \times 1000 = 7{,}600 \times 1000 = 7600$.

11. Man dividirt einen Decimalbruch durch eine dekadiſche Einheit, d. h. durch 10, 100, 1000 u. ſ. w., indem man das Komma ſo viel Stellen nach links rückt, als die dekadiſche Einheit Nullen hat. Z. B.: $25{,}4 : 100 = 0{,}254$; dadurch, daß man das Komma 2 Stellen nach links gerückt hat, iſt jede Ziffer

2 Stellen nach rechts geſchoben worden und hat nun einen 100 mal ſo kleinen Werth als vorher.

Anmerkung: Sind im Dividendus nicht genug Ziffern vorhanden, ſo werden links ſo viel Nullen vorgeſetzt, als Ziffern fehlen. Z. B.: 6,4 : 100 = 0,064; ferner 0,59 : 1000 = 0,00059.

II. Addition der Decimalbrüche.

Rechenregel: Man ſchreibt die Summanden in der Art unter einander, daß die Ziffern der gleichnamigen Stellen unter einander zu ſtehen kommen, alſo auch Komma unter Komma. Hierauf macht man die Brüche gleichnamig und addirt alsdann, mit der niedrigſten Stelle beginnend, wie bei ganzen Zahlen. Der Summe giebt man ſo viel Decimalſtellen, wie der Generalnenner hat.

III. Subtraction der Decimalbrüche.

Rechenregel: Man macht die Brüche gleichnamig, ſetzt den Subtrahend ſo unter den Minuend, daß die gleichnamigen Stellen unter einander ſtehen, und führt alsdann die Subtraction wie mit ganzen Zahlen aus. Die Zehntel trennt man von den Einern durch das Decimalkomma.

Beiſpiele:	a)	5,369	b)	0,8300	c)	3,000
		— 3,400		— 0,2567		— 1,567
		1,969		0,5733		1,433

IV. Multiplication der Decimalbrüche.

1. Rechenregel: Man multiplicirt die beiden Factoren ohne Rückſicht auf die Kommata, als ob es ganze Zahlen wären, und giebt dem Product, von rechts nach links abzählend, ſo viel Decimalſtellen, als beide Factoren zuſammen Decimalſtellen haben.

Beiſpiele:	a)	5,81	b)	0,324
		× 24		× 0,72
		2324		648
		1162		2268
		139,44		0,23328

Anmerkung: Enthält das Product weniger Stellen, als abzuſchneiden ſind, ſo ſind die fehlenden durch links vorangeſetzte Nullen zu ergänzen.

Beiſpiele:	a)	0,0865	b)	0,1124
		× 0,025		0,0053
		4325		3372
		1730		5620
		0,0021625		0,00059572

2. Begründung des Verfahrens: a) Das Product der Zahlen $0{,}72 \times 6$ muß 2 Decimalen erhalten, weil Hundertſtel × Einer = Hundertſtel giebt. — b) Das Product der Zahlen $3{,}246 \times 4$ muß 3 Decimalen erhalten, weil Tauſendſtel × Einer = Tauſendſtel giebt. — c) $0{,}16 \times 12 = 1{,}92$; denn $\frac{16}{100} \times 12 = \frac{192}{100} = 1{,}92$. — d) Das Product $0{,}27 \times 0{,}3$ muß 3 Decimalen bekommen, weil Hundertſtel × Zehntel = Tauſendſtel giebt. — e) Das Product der Zahlen $0{,}2357 \times 0{,}09$ muß 6 Decimalen erhalten, weil Zehntauſendſtel × Hundertſtel = Millionſtel giebt. — f) $0{,}034 \times 0{,}16 = 0{,}00544$; denn $\frac{34}{1000} \times \frac{16}{100} = \frac{544}{1000000}$ $= 0{,}00544$.

3. Die abgekürzte Multiplication. Sie beſteht darin, daß man das Product auf weniger Decimalſtellen berechnet, als die vollſtändige Multiplication liefern würde. Man wendet dabei die fallend geordnete Multiplications-Weiſe*) an und läßt im Multiplicandus nach und nach diejenigen Stellen weg, deren Multiplication eine niedrigere Stelle als die verlangte ergeben würde. Damit das ſo erzielte Product aber dem Werthe des vollſtändigen Productes möglichſt nahe komme, benutzt man ſtets die letzte der weggelaſſenen Stellen zur Correctur, d. h. man benutzt die Zahl, welche man bei der Multiplication der weggelaſſenen Stelle im Sinne behält.

Erſtes Beiſpiel: Multiplicire 7,2356 mit 0,3652 auf 4 Decimalſtellen! — Will man das Product der Zahlen:

$$\left.\begin{array}{r} 7{,}235\cancel{6} \\ \times\,\underline{0{,}3652} \end{array}\right\}$$

nur auf 4 Decimalen berechnen, ſo muß man die Ziffer 6 im Multiplicandus weglaſſen (man ſtreicht ſie durch), denn 3 Zehntel mal 6 Zehntauſendſtel würde 18 Hunderttauſendſtel, alſo die fünfte Decimalſtelle geben, die man nicht haben will. — Man muß alſo in dem gegebenen Falle multipliciren:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3 \times 7{,}235 = 2{,}1705 \\ 0{,}06 \times 7{,}23 = 0{,}4338 \\ 0{,}005 \times 7{,}2 = 0{,}0360 \\ \underline{0{,}0002 \times 7 = 0{,}0014} \end{array}\right\}$$

$$= 2{,}6417..$$

Wir haben im Multiplicandus eine Ziffer nach der andern weggelaſſen, und zwar immer diejenige Ziffer, durch deren Multiplication wir eine niedrigere, als die verlangte Zehntauſendſtel-Stelle erhalten hätten. Um aber das Product dem Werthe des vollſtändigen Productes näher zu bringen (ein Unterſchied muß immer vorhanden ſein), wollen wir jetzt die Correctur vornehmen; wir erhalten alsdann:

---

*) Siehe: Erſtes Kapitel III, Nr. 2, k; Seite 7.

$7{,}235\cancel{6}$
× 0,3652

2,1707 = (0,3 × 7,235) + 2 als Correctur von 3 × 6 *)
4341 = (0,06 × 7,23) + 3 „ „ „ 6 × 5
362 = (0,005 × 7,2) + 2 „ „ „ 5 × 3
14 = (0,0002 × 7) + 0 „ „ „ 2 × 2

2,6424…

Dieſes Product ſtimmt in den verlangten 4 Decimalſtellen mit dem durch vollſtändige Multiplication erzielten Producte vollkommen überein. Dies iſt aber nicht immer der Fall; nicht ſelten ergiebt ſich in der letzten Decimalſtelle ein Unterſchied von 1 bis 2 Einheiten. Will man ganz ſicher gehen und das Product in den verlangten Stellen genau erhalten, ſo berechne man das Product auf eine Stelle mehr, als verlangt iſt, werfe aber dieſelbe nach vorgenommener Correctur wieder weg.

Zweites Beiſpiel: Multiplicire 6,8027 mit 543,21 auf 3 Decimalſtellen! — Soll man dieſe beiden Zahlen nach der abgekürzten Multiplications-Weiſe multipliciren und das Product auf 3 Stellen berechnen, ſo muß man vor dem Beginn der Multiplication dem Multiplicandus eine Null anhängen, denn wollte man 7 Zehntauſendſtel mit 5 Hundertern multipliciren, ſo würde man Hundertſtel, alſo nur 2 Decimalſtellen erhalten; um 3 Decimalſtellen zu bekommen, muß man Hunderttauſendſtel mit Hundertern multipliciren. Die Rechnung geſtaltet ſich demnach in folgender Weiſe:

6,80270
543,21

3401,350 = 500 × 6,80270
272,108 = 40 × 6,8027
20,408 = 3 × 6,802 + 2 als Correctur von 3 × 7
1,360 = 0,2 × 6,80
68 = 0,01 × 6,8

3695,294…

Anmerkung zu vorſtehender Rechnung: Multiplicirt man die 5. Decimalſtelle (hier 0 Hunderttauſendſtel) mit Hundertern

---

*) Merke: Beträgt das Product, welches man zur Correctur benutzt:
5 bis 14, ſo heißt die Correctur 1;
15 „ 24, „ „ „ „ 2;
25 „ 34, „ „ „ „ 3;
35 „ 44, „ „ „ „ 4; u. ſ. w.

(hier mit 500), ſo bekommt man nicht 5, ſondern 5 — 2 = 3 Decimalſtellen, nämlich ſo viel Decimalſtellen, als der Multiplicandus hat, minus ſo viel Decimalſtellen, als die ganze Zahl, mit der man multiplicirt, zu ihrer Schreibung Nullen erfordert. — Ferner: Multiplicirt man die 4. Decimalſtelle (hier 7 Zehntauſendſtel) mit Zehnern (hier mit 40), ſo erhält das Product 4 — 1 = 3 Decimalſtellen, nämlich ſo viel Decimalſtellen, als der Multiplicandus hat, minus ſo viel Decimalſtellen, als die ganze Zahl, mit der man multiplicirt, zu ihrer Schreibung Nullen erfordert. — Ferner: Multiplicirt man die 3. Decimalſtelle (hier 2 Tauſendſtel) mit Einern (hier mit 3), ſo erhält das Product 3 Decimalſtellen. — Ferner: Multiplicirt man die 2. Decimalſtelle (hier 0 Hundertſtel) mit der 1. Decimalſtelle (hier mit 2 Zehnteln), ſo erhält das Product 2 + 1 = 3 Decimalſtellen. U. ſ. w.*)

V. Diviſion der Decimalbrüche.

1. *Iſt der Diviſor eine ganze Zahl*, ſo dividirt man mit derſelben der Reihe nach in die Ganzen, in die Zehntel, in die Hundertſtel u. ſ. w. des Dividenden, wodurch entſprechend die Ganzen, die Zehntel, die Hundertſtel u. ſ. w. des Quotienten gefunden werden. — Bei Anwendung dieſer Regel beachte man folgende zwei Punkte: a) Beim Beginn der Diviſion darf man nie weiter greifen, als bis zum Decimalkomma, und nie darf man mehr als *eine* Stelle auf einmal herunterholen. (Siehe Beiſpiel Nr. II und III.) — b) Bleibt zuletzt ein Reſt, ſo hängt man demſelben eine Null an; bleibt wieder ein Reſt, ſo verfährt man auf dieſelbe Weiſe fort, bis die Diviſion aufgeht, oder bis man die gewünſchte Anzahl von Decimalſtellen erhalten hat. (Siehe Beiſpiel Nr. IV bis VI.)

Beiſpiel I. 653,451 : 3 = ?

```
3 | 653,451 | 217,817
    5
     23
      24
       5
        21
```

Beiſpiel II. 3,425 : 5 = ?

```
5 | 3,425 | 0,685
    34
     42
      25
```

---

*) Siehe des Verfaſſers: Heft VI für das Tafelrechnen. Die dem entſprechenden Reſultathefte beigegebenen „Erklärungen“ enthalten unter Nr. 744—759 eine genügende Anzahl erläuterter und berechneter Beiſpiele.

Beiſpiel III. 0,01524 : 6 = ?
6 | 0,01524 | 0,00254
15
32
24

Beiſpiel IV. 179 : 25 = ?
25 | 179 | 7,16
175
40
150

Beiſpiel V. 0,127 : 20 = ?
20 | 0,127 | 0,00635
127
70
100

Beiſpiel VI. 0,2 : 3 = ?
3 | 0,2 | 0,0666...
20
20
20

2. Iſt der Diviſor ein Decimalbruch, ſo verwandelt man ihn in eine ganze Zahl, und zwar dadurch, daß man das Komma deſſelben um ſo viele Stellen nach rechts rückt, als er Decimalen hat. — Ebenſo viele Stellen rückt man das Komma auch im Dividendus nach rechts; hat dieſer aber gar keine oder weniger Decimalen als der Diviſor, ſo hängt man ihm für jede fehlende Stelle rechts eine Null an. — (Diviſor und Dividendus ſind hierdurch mit ein und derſelben Zahl multiplicirt, und der Quotient iſt alſo in ſeinem Werthe nicht verändert worden.) Hat man die Aufgabe in der angegebenen Weiſe umgeſtaltet, ſo dividirt man, wie unter Nr. 1 gezeigt worden, denn der Diviſor iſt jetzt eine ganze Zahl.

Z. B.: Aus 3,2685 : 0,15 wird 326,85 : 15 = ?
Aus 8,5 : 0,5 wird 85 : 5 = ?
Aus 11,25 : 0,015 wird 11250 : 15 = ?
Aus 3 : 0,06 wird 300 : 6 = ?

3. Man kann die Diviſionsaufgaben, gleichviel ob der Diviſor eine ganze Zahl oder ein Decimalbruch iſt, auch nach folgender Regel rechnen: Dividire mit dem Diviſor in den Dividendus ohne Rückſicht auf die Kommata, als wären es ganze Zahlen; und dem auf dieſe Weiſe gefundenen Quotienten gieb ſo viel Decimalſtellen, als der Dividendus mehr hat wie der Diviſor. Hat z. B. der Dividendus 6 und der Diviſor nur 2 Decimalen, ſo bekommt der Quotient 6 − 2 = 4 Decimalſtellen.

Begründung des Verfahrens: Da der Dividendus ein Product aus Diviſor mal Quotient iſt, ſo muß er ſo viel Decimalſtellen haben, als Diviſor und Quotient zuſammen; folglich muß der Quotient ſo viel Decimalen haben, als der Dividend mehr hat wie der Diviſor.

Anmerkung: Bei Anwendung dieſer Regel hat man Folgendes zu beobachten:

a) Hat der Dividendus ebenſo viel Decimalen wie der Diviſor, ſo bekommt der Quotient keine Decimalſtelle; z. B. 16,12 : 1,24 = 13.

Rechnung: 1,24 | 16,12 | 13
12 4
3 72
3 72

b) Hat der Dividendus gar keine oder weniger Decimalen als der Diviſor, ſo erweitert man ihn durch Anhängung von Nullen ſo weit, daß er ebenſo viel Stellen hat wie der Diviſor; z. B. 7,6 : 0,08 = 95.

Rechnung: 0,08 | 7,60 | 95
7 2
40
40

c) Hat man alle Stellen des Dividendus heruntergezogen und die Diviſion iſt nicht aufgegangen, ſo beſtimmt man zunächſt in dem bis jetzt gefundenen Quotienten das Komma. Hierauf erweitert man den Reſt durch Anhängung einer Null und ſetzt die Diviſion fort; bleibt noch ein Reſt, ſo hängt man demſelben wieder eine Null an; u. ſ. w.

Beiſpiel I. 46,2 : 8 = ?

8 | 46,2 | 5,775
6 2
60
40

Erklärung: 462 dividirt durch 8 giebt 57; dieſer Quotient erhält eine Decimalſtelle (da der Dividend eine Stelle mehr hat als der Diviſor); aus 57 wird alſo 5,7. Nun hängt man an den Reſt 6 eine Null und ſetzt die Diviſion fort.

Beiſpiel II. 6,65 : 0,28 = 23,75.

0,28 | 6,65 | 23,75
5 6
1 05
84
210
196
140
140

Erklärung: 665 dividirt durch 28 giebt 23; dieſer Quotient bekommt keine Decimalſtelle (da der Dividendus nur eben ſo viel Decimalen hat als der Diviſor); er heißt alſo 23 Ganze. Nun hängt man aber an den Reſt 21 eine Null, ſetzt die Diviſion fort und ſchreibt die nächſte Ziffer des Quotienten in die Zehntelſtelle deſſelben; u. ſ. w.

Beiſpiel III. 0,01928 : 0,016 = 1,205.

0,016 | 0,01928 | 1,205
32
80

Erklärung: 1928 dividirt durch 16 giebt 120; dieſer Quotient erhält 2 Decimalſtellen (da der Dividend 2 Decimalen mehr hat als der Diviſor);

aus 120 wird alſo 1,20. Nun hängt man an den Reſt 8 eine Null und ſetzt die Diviſion fort.

Beiſpiel IV. 0,0003 : 0,24 = 0,00125.

0,24 | 0,0003 | 0,00125
30
60
120

Erklärung: 3 dividirt durch 24 giebt 0; dieſer Quotient erhält 2 Decimalſtellen (da der Dividend 2 Decimalen mehr hat als der Diviſor); aus 0 wird alſo 0,00. Nun hängt man an den Reſt 3 eine Null und ſetzt die Diviſion fort.

Beiſpiel V. 1 : 16 = 0,0625.

16 | 1 | 0,0625
100
96
40
32
80
80

Erklärung: 1 dividirt durch 16 giebt 0; dieſer Quotient bekommt keine Decimalſtelle (da der Dividend und der Diviſor gleichviel, nämlich keine, Decimalſtellen haben); er heißt bis jetzt: 0 Ganze. Nun hängt man aber an den Reſt 1 eine Null und ſetzt die Diviſion fort.

4. Die abgekürzte Diviſion. Das Weſentlichſte der abgekürzten Diviſionsweiſe beſteht darin, daß man aus dem Dividendus keine Ziffern herunternimmt, um ſie den verbleibenden Reſten anzureihen, ſondern daß man vom Diviſor rechts nach und nach eine Ziffer wegläßt und mit dem ſo verkürzten Diviſor in den jedesmaligen Reſt dividirt.

Beiſpiel: Berechne durch abgekürzte Diviſion den Quotienten der Zahlen 0,987754 : 4,26793 auf 4 Decimalſtellen.

Erklärung und Rechnung: Zuerſt unterſuchen wir, in welche Stelle des Quotienten die erſte geltende Ziffer (die Null iſt keine geltende Ziffer) kommt und verfahren dabei in folgender Weiſe: 0 Ganze dividirt durch 4 Ganze giebt 0 Ganze; 9 Zehntel dividirt durch 4 Ganze giebt eine geltende Ziffer für die Zehntelſtelle. Wir wiſſen alſo, daß die erſte geltende Ziffer in die Zehntelſtelle kommt und ſchließen hieraus weiter, daß wir im Ganzen 4 mal zu dividiren haben, da der Quotient 4 Ziffern bekommen muß. So viel Ziffern aber der Quotient bekommen ſoll, ſo viel Ziffern muß auch der Diviſor behalten; wir ſtreichen darum die beiden letzten Ziffern des Diviſors (nämlich 9 und 3) weg und benutzen nur die 9 zur Correctur. Wir dividiren jetzt ohne Rückſicht auf die Decimalkomma, mit 4267 in 9877 und ſchreiben den Theil-Quotienten 2 in die Zehntelſtelle.

$4{,}267\cancel{9}\cancel{3} \mid 0{,}987754 \mid 0{,}2314 \; . \; . \; .$

$\underline{8536} = (0{,}2 \times 4{,}267) + 2$ als Corr. von $2 \times 9 = 18$.

1341

$\underline{1280} = (0{,}03 \times 4{,}26) + 2$ als Corr. von $3 \times 7 = 21$.

61

$\underline{43} = (0{,}001 \times 4{,}2) + 1$ als Corr. von $1 \times 6 = 6$.

18

$\underline{17} = (0{,}0004 \times 4) + 1$ als Corr. von $4 \times 2 = 8$.

1

Zu dem Reſte 1341 ziehen wir keine neue Ziffer aus dem Dividendus herunter, ſondern laſſen im Diviſor rechts eine Ziffer (die 7) weg und dividiren nun mit 426 in 1341, wobei wir aber die durch die weggelaſſene Ziffer nöthige Correctur berückſichtigen. — Wir laſſen hierauf wieder vom Diviſor rechts eine Ziffer (alſo die 6) weg und dividiren nur mit 42 in den Reſt 61; u. ſ. w.*)

VI. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. — Endliche und unendliche Decimalbrüche.

1. Jeder gewöhnliche Bruch kann als eine nicht ausgeführte Diviſion aufgefaßt werden; der Zähler iſt der Dividendus und der Nenner iſt der Diviſor; z. B. $\frac{5}{8}$ heißt: der 8. Theil von 5 Ganzen. — *Wenn man einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln ſoll, ſo dividirt man mit dem Nenner in den Zähler*; aber ſo, daß man ermittelt, wie viel Zehntel, Hundertſtel, Tauſendſtel u. ſ. w. *mal* der Nenner im Zähler enthalten iſt. — Z. B.

a) $\frac{19}{40} = 40 \mid 19 \mid 0{,}475$

$\underline{190}$

$\underline{300}$

$\underline{200}$

b) $\frac{7}{11} = 11 \mid 7 \mid 0{,}6363 \ldots$

$\underline{70}$

$\underline{40}$

$\underline{70}$

$\underline{40}$

c) $\frac{5}{6} = 6 \mid 5 \mid 0{,}833 \ldots$

$\underline{50}$

$\underline{20}$

$\underline{20}$

2

---

*) Siehe des Verfaſſers: Heft VI für das Tafelrechnen; die dem entſprechenden Reſultathefte angehängten „*Erklärungen*“ geben unter Nr. 768—797 eine genügende Anzahl berechneter und erläuterter Beiſpiele.

2. Wenn bei der Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche die Diviſion aufgeht, ſo entſtehen endliche oder abgeſchloſſene Decimalbrüche (ſiehe Nr. 1, Beiſp. a); geht die Diviſion aber nicht auf, ſo entſtehen unendliche Decimalbrüche (ſiehe Nr. 1, Beiſp. b und c). Die letzteren heißen auch periodiſche Brüche, da die regelmäßig und in derſelben Ordnung wiederkehrende Ziffernreihe Periode genannt wird.

3. Die unendlichen oder periodiſchen Decimalbrüche zerfallen in reinperiodiſche und unrein- oder gemiſcht-periodiſche; bei den erſteren beginnt die Periode gleich nach dem Komma (ſiehe Nr. 1, Beiſp. b); bei den letzteren ſtehen vor den periodiſchen Ziffern noch unperiodiſche Decimalſtellen (ſiehe Nr. 1, Beiſp. c). — Die unperiodiſchen Decimalſtellen eines unrein-periodiſchen Bruches nennt man die Vorſtellen oder den Kopf des Decimalbruches; z. B. in dem Decimalbruche 0,03478478 . . . bilden die Ziffern 03 den Kopf, und die Ziffern 478 die Periode.

4. Man ſchreibt die Periode gewöhnlich 2 mal auf und macht einige Punkte dahinter, um anzudeuten, daß der Bruch unendlich iſt.

5. Die Periode kann einſtellig (0,66 . . .), zweiſtellig (0,5757 . . .), dreiſtellig (0,347347 . . .) u. ſ. w. ſein. Sie muß aber wenigſtens eine Stelle weniger haben, als der Diviſor des zu verwandelnden Bruches Einheiten hat. — Soll z. B. der Bruch $\frac{4}{7}$ in einen Decimalbruch verwandelt werden, ſo kann deſſen Periode höchſtens 6ſtellig ſein, da bei der Diviſion des Nenners in den Zähler höchſtens die 6 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 als Reſte auftreten können. Sind all dieſe Reſte dageweſen, ſo muß einer derſelben wiederkehren; und da man an dieſen Reſt ganz ebenſo wie bei ſeinem erſten Auftreten eine Null anhängt, ſo müſſen ſich von da an auch im Quotienten die Ziffern wiederholen und alſo eine Periode geben.

6. Bei der Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche entſtehen:

a) endliche Decimalbrüche, wenn der Nenner des gewöhnlichen Bruches nur die Primfactoren 2 oder 5, oder eine Potenz von 2 oder 5 enthält; z. B. $\frac{7}{16} = 0{,}4375$; $\frac{18}{25} = 0{,}72$; $\frac{13}{20} = 0{,}65$.

b) rein-periodiſche Decimalbrüche, wenn der Nenner des gewöhnlichen Bruches die Primfactoren 2 und 5 gar nicht — alſo nur andere — enthält; z. B. $\frac{6}{11} = 0{,}5454 \ldots$; $\frac{13}{33} = 0{,}3939 \ldots$; $\frac{11}{27} = 0{,}407407 \ldots$

c) unrein-periodiſche Decimalbrüche, wenn der Nenner des gewöhnlichen Bruches außer 2 oder 5 noch andere Primfactoren enthält; z. B. $\frac{17}{30} = 0{,}566 \ldots$; $\frac{5}{18} = 0{,}277 \ldots$; $\frac{61}{75} = 0{,}8133 \ldots$

VII. Verwandlung der Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche.

1. Man verwandelt einen endlichen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch, indem man ihn in Form eines gewöhnlichen Bruches aufſchreibt und ihn alsdann ſo viel als möglich hebt.

Z. B. $0{,}75 = \frac{75}{100}$ oder gehoben durch $25 = \frac{3}{4}$.
$4{,}016 = 4\frac{16}{1000}$ „ „ „ $8 = 4\frac{2}{125}$.

2. Soll ein rein-periodiſcher Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, ſo macht man die erſte Periode zum Zähler des Bruches und giebt dieſem ſo viel Neunen zum Nenner, als die Periode Stellen hat.

Z. B. a) $0{,}22\ldots = \frac{2}{9}$ c) $0{,}0404\ldots = \frac{4}{99}$
b) $0{,}538538\ldots = \frac{538}{999}$ d) $6{,}2828\ldots = 6\frac{28}{99}$.

Erläuterung zu a: $0{,}22\ldots$ ſei $= x$. Multiplicirt man dieſe Gleichung mit einer dekadiſchen Einheit, die ſo viel Nullen als die Periode Stellen hat (hier alſo mit 10), ſo erhält man: $10\,x = 2{,}22\ldots$

Subtrahirt man hiervon die erſte Gleichung, ſo erhält man:

$$\begin{array}{rl} 10\,x = & 2{,}22\ldots \\ -\quad x = & 0{,}22\ldots \\ \hline 9\,x = & 2 \end{array}$$

Wenn aber $9\,x = 2$, ſo iſt x, d. h. der gegebene Bruch, $= \frac{2}{9}$.

Erläuterung zu b: $0{,}538538\ldots$ ſei $= x$. Multiplicirt man dieſe Gleichung mit einer dekadiſchen Einheit, die ebenſo viel Nullen als die Periode Stellen hat (hier alſo mit 1000), ſo erhält man: $1000\,x = 538{,}538538\ldots$

Subtrahirt man hiervon die erſte Gleichung, ſo erhält man:

$$\begin{array}{rl} 1000\,x = & 538{,}538538\ldots \\ -\quad x = & 0{,}538538\ldots \\ \hline 999\,x = & 538 \end{array}$$

Wenn aber $999\,x = 538$, ſo iſt x, d. h. der gegebene Bruch $= \frac{538}{999}$.

3. Wenn man einen unrein-periodiſchen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln ſoll, ſo nimmt man den Kopf ſammt der erſten Periode als ganze Zahl und zieht hiervon den Kopf als ganze Zahl ab; der ſo entſtandene Reſt iſt der Zähler des gewöhnlichen Bruches. Der Nenner bekommt ſo viel Neunen, wie die Periode Stellen hat und rechts daran ſo viel Nullen, als der Kopf Stellen hat.

Z. B. a) $0{,}57272\ldots = \frac{572 - 5}{990} = \frac{567}{990} = \frac{63}{110}$

b) $0{,}03478478\ldots = \frac{3478 - 3}{99900} = \frac{3475}{99900} = \frac{139}{3996}$.

Erläuterung zu a: Es ſei I. $x = 0{,}57272\ldots$ — Multiplicirt man dieſe Gleichung mit einer dekadiſchen Einheit, welche ſo viel Nullen als der Kopf ſammt der erſten Periode Ziffern hat (hier alſo mit 1000), ſo erhält man:

II. $1000\,x = 572{,}7272\ldots$

Multiplicirt man nun die Gleichung I mit einer dekadiſchen Einheit, welche ſo viel Nullen als der Kopf der Periode Ziffern hat (hier alſo mit 10), ſo erhält man:

III. $10\,x = 5{,}7272\,\ldots$

Subtrahirt man nun die Gleichung III von der Gleichung II, ſo erhält man:

$$\begin{array}{lrl} \text{IV.} & 1000\,x = & 572{,}7272\,\ldots \\ - & 10\,x = & 5{,}7272\,\ldots \\ \hline & 990\,x = & 567 \end{array}$$

Wenn aber $990\,x = 567$, ſo iſt $x = \frac{567}{990}$; durch 9 gehoben $= \frac{63}{110}$.

Erläuterung zu b: Es ſei:

I. $x = 0{,}03478478\,\ldots$, dann ſind

II. $100000\,x = 3478{,}478478\,\ldots$;

III. $100\,x = 3{,}478478\,\ldots$;

$$\begin{array}{lrl} \text{IV.} & 100000\,x = & 3478{,}478478\,\ldots \\ \text{Davon ab} & 100\,x = & 3{,}478478\,\ldots \\ \hline \text{giebt} & 99900\,x = & 3475 \end{array}$$

Sind aber $99900\,x = 3475$, dann iſt $x = \frac{3475}{99900}$; gehoben durch $25 = \frac{139}{3996}$.

VIII. Verbindung gewöhnlicher Brüche mit Decimalbrüchen.

Aufgaben, in welchen gewöhnliche und Decimalbrüche vorkommen, können ſowohl mit gewöhnlichen, als auch mit Decimalbrüchen berechnet werden. Da man aber das Rechnen mit *unendlichen Decimalbrüchen* gern vermeidet, ſo beobachtet man dabei gewöhnlich folgende Regel: *Wenn Aufgaben endliche Decimalbrüche und ſolche gewöhnliche Brüche enthalten, die in endliche Decimalbrüche verwandelt werden können, ſo führt man die Rechnung mit Decimalbrüchen aus; in allen übrigen Fällen mit gewöhnlichen Brüchen.*

Viertes Kapitel: Rechnungen mit gleichartig benannten Zahlen.

I. Einleitung.

1. Jede Zahl, die mit einer Benennung verbunden iſt, heißt eine benannte Zahl; z. B. 16 Pfund, 25 Aepfel, 7 Werſchock u. ſ. w.

2. Es giebt *einfachbenannte* oder einſortige Zahlen, z. B. 23 Pfund, und *mehrfachbenannte* oder mehrſortige Zahlen; z. B. 4 Pud 17 Pfund 37 Solotnik.

3. Es giebt *gleichartig* und *ungleichartig* benannte Zahlen. So ſind z. B. 3 Rubel und 5 Kopeken *gleichartig* benannte Zahlen; ebenſo 2 Pud, 7 Pfund und 9 Solotnik; ebenſo 4 Werſt, 6 Saſhen, 2 Arſchinen und 8 Werſchock. *Ungleichartig* benannte Zahlen dagegen ſind z. B. 8 Rubel und 7 Pud; ebenſo 5 Werſt und 9 Stunden; ebenſo 3 Tage und 7 Arſchinen; u. ſ. w.

Nach dieſer Eintheilung der benannten Zahlen zerfallen alle Rechnungen mit denſelben in 2 Hauptgruppen:

A. Rechnungen mit gleichartig benannten Zahlen:

1) Reſolviren.
2) Reduciren.
3) Addition.
4) Subtraction (Zeitrechnung).
5) Multiplication.
6) Diviſion.

B. Rechnungen mit ungleichartig benannten Zahlen:

a. Regeldetri-Rechnungen.

1) Einfache Regeldetri.
2) Zuſammengeſetzte Regeldetri.
3) Zinsrechnung.
4) Kettenrechnung.

b. Theilungsrechnungen.

1) Geſellſchaftsrechnung.
2) Durchſchnittsrechnung.
3) Miſchungsrechnung (Alligationsrechnung).

4. Der bequemen Ueberſicht wegen hat man die Einheit einer höheren Sorte in eine beſtimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, die dann Einheiten der niederen Sorte ſind. Z. B. 1 Rubel = 100 Kopeken; 1 Pud = 40 Pfund; 1 Pfund = 96 Solotnik; u. ſ. w.

5. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Einheiten der niederen Sorte *eine* Einheit der höheren Sorte ausmachen, heißt *Reſolutions-* oder *Reductionszahl*, auch wohl *Verhältnißzahl* oder auch *Währungszahl* genannt.

6. Die Zahl, welche bei einer Benennung ſteht, muß ſtets kleiner ſein, als die Reductionszahl; alſo nicht 5 Rbl. 184 Kop., ſondern 6 Rbl. 84 Kop.

7. Brüche dürfen in mehrfachbenannten Zahlen nur bei der kleinſten Sorte vorkommen; alſo nicht 72 Saſhen $2\frac{1}{2}$ Arſchin 14 Werſchock, ſondern 72 Saſhen 2 Arſchin $15\frac{1}{4}$ Werſchock.

8. Das Verwandeln oder *Auflöſen* höherer Sorten in niedere heißt das *Reſolviren* oder die *Reſolution*. — Das Verwandeln oder *Zurückführen* niederer Sorten in höhere heißt *Reduciren* oder die *Reduction*.

II. Das Reſolviren.

1. Wenn eine einfachbenannte höhere Sorte in eine niedere verwandelt werden ſoll, ſo multiplicirt man die betreffende Reſolutionszahl mit den gegebenen Einheiten der höheren Sorte.

Aufgabe a: 15 Saſhen ſind wie viel Werſchock?

Rechnung gewöhnlich ſo:	Richtiger ſo:
15 Saſhen = Werſchock?	48 Werſchock*)
× 48	× 15
120	240
60	48
720 Werſchock.	**720 Werſchock.**

Aufgabe b: $\frac{3}{8}$ Rubel ſind wie viel Kopeken?

Rechnung: $\frac{3\ .\ 100}{8}$ Kopeken = **37½ Kopeken.**

Aufgabe c: 1,8 Ballen ſind wie viel Buch?

Rechnung: 1,8
200
360,0 = **360 Buch.**

2. Soll eine mehrfachbenannte Zahl in eine niedere Sorte verwandelt werden, ſo reſolvirt man zuerſt die höchſte gegebene Sorte in die nächſtniedere und addirt zum Producte die in der Aufgabe gegebene Menge der gleichnamigen niederen-Sorte. Die auf ſolche Weiſe gefundenen Einheiten der nächſtniederen Sorte verwandelt man in die folgende niedere Sorte und zählt wieder die in der Aufgabe gegebene Menge der gleichnamigen Sorte hinzu. Das ſetzt man ſo lange fort, bis man bei der verlangten niederen Sorte angelangt iſt. — Z. B.: Wie viel Stunden ſind

5 Monate 14 Tage 10,25 Stunden?
× 30
150
+ 14
164 Tage
× 60
9840
+ 10,25
9850,25 Stunden.

Kürzer ſo: 5
× 30
164
× 60
9850,25 Stnd.

3. Soll eine benannte Bruchzahl in eine mehrſortige Größe niederer Art verwandelt werden, ſo reſolvirt man den

---

*) Nämlich: 1 Saſh. = 48 Werſchock; alſo 15 Saſh. = 15 × 48 Werſchock.

gegebenen Bruch zuerſt in die nächſtniedere Sorte; den bei dieſer Sorte vorkommenden echten Bruch reſolvirt man wieder auf die nun folgende niedere Sorte, und ſo weiter fort bis auf die verlangte Sorte.

Z. B.: $\frac{4}{11}$ Berkowetz ſind wie viel Pud, Pfd. und Sltk.?

Rechnung: I. $\frac{4\,.\,10}{11}$ Pud $=\frac{40}{11}=\mathbf{3}(\frac{7}{11})$ **Pud.**

II. $\frac{7\,.\,40}{11}$ Pfd. $=\frac{280}{11}=\mathbf{25}(\frac{5}{11})$ **Pfund.**

III. $\frac{5\,.\,96}{11}$ Sltk. $=\frac{480}{11}=\mathbf{43\frac{7}{11}}$ **Solotnik.**

Reſultat: 3 Pud 25 Pfund $43\frac{7}{11}$ Solotnik.

III. Das Reduciren

1. Zurückführung einſortiger Größen. — Wenn eine einſortige Zahl reducirt werden ſoll, ſo dividirt man die gegebene Zahl durch die Reductionszahl. Der Quotient bekommt den Namen der höheren Sorte; der etwaige Reſt dagegen gehört der zur Verwandlung gegebenen niederen Sorte an und behält auch den Namen derſelben.

Beiſp. a: 711 Arſchinen ſind wie viel Saſhen?

3 | 711 | 237 Saſhen.
11
21

Beiſp. b: 3012 Buch ſind wie viel Ballen, Ries und Buch?

10
20 | 3012 | 150 | 15 Ballen
101 — Ries
12 Buch.

Reſultat: 15 Ballen — Ries 12 Buch.

Beiſp. c: Reducire $41239\frac{1}{3}$ Solotnik!

40 10
96 | $41239\frac{1}{3}$ | 429 | 10 | 1 Berkowetz
283 29 Pfd. — Pud
919
$55\frac{1}{3}$ Solotnik.

Reſultat: 1 Berk. — Pud 29 Pfd. $55\frac{1}{3}$ Sltk.

Beiſp. d: 65 Kopeken ſind wie viel Rubel?

$65 : 100 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$ Rubel.

Beiſp. e: 89 Zoll ſind wie viel Fuß?

$12 \mid 89 \mid 7$ Reſultat: $7\frac{5}{12}$ Fuß. — Da hier nur Fuß verlangt
84 ſind, ſo müſſen die 5 Zoll, welche als Reſt verblieben,
$\frac{5}{12}$ auch in Fuß verwandelt, alſo durch 12 dividirt werden.

Beiſp. f: $5\frac{1}{3}$ Tſchetwerik ſind wie viel Tſchetwert?

$$5\tfrac{1}{3} : 8 = \frac{16}{3\,.\,8} = \tfrac{2}{3}\ \text{Tſchetwert.}$$

Beiſp. g: $51\frac{3}{7}$ Minuten ſind wie viel Tage?

$51\frac{3}{7}$ dividirt durch 60×24; alſo $\frac{360}{7\,.\,60\,.\,24} = \frac{1}{28}$ Tag.

Beiſp. h: 5,12 Garnetz ſind wie viel Tſchetwert?
5,12 dividirt durch 8×8 oder 64; alſo:

$64 \mid \underline{5{,}12} \mid 0{,}08$ Tſchetwert.
$\overline{5\,12}$
$\underline{5\,12}$

2. Zurückführung mehrſortiger Größen. — Wenn man mehrſortige Größen reduciren ſoll, ſo kann man auf drei verſchiedene Arten verfahren.

Erſtes Verfahren: Man reſolvirt die mehrſortige Zahl bis auf die niedrigſte gegebene Sorte und dividirt dieſe alsdann durch das Product ſämmtlicher vorkommenden Reductionszahlen bis zu der verlangten höchſten Benennung.

Zweites Verfahren: Man verwandelt die niedrigſte Sorte in die nächſt höhere, addirt hierzu die Einheiten dieſer gleichnamigen höheren Sorte und wiederholt daſſelbe Verfahren ſo oft, als es nöthig iſt, um zu der verlangten höchſten Sorte zu gelangen.

Drittes Verfahren: Man reducirt jede Sorte für ſich auf die verlangte höchſte Sorte und addirt die einzelnen Reſultate.

Erſtes Verfahren:

Beiſpiel: 2 Ries 12 Buch $18\frac{2}{3}$ Bogen Schreibpapier ſind wie viel Ballen?

I. 2 Rieß 12 Buch $18\frac{2}{3}$ Bogen
$\underline{\times 20}$
52
$\underline{\times 24}$
208
104
$\underline{18\frac{2}{3}}$
$1266\frac{2}{3}$ Bogen

II. $\frac{3800}{3\,.\,24\,.\,20\,.\,10} = \frac{19}{72}$ **Ballen.**

Erläuterung: Bei I ſind 2 Ries 12 Buch 18$\frac{2}{3}$ Bogen in Bogen verwandelt worden; das ſind 1266$\frac{2}{3}$ Bogen. Dieſe 1266$\frac{2}{3}$ Bogen ſind bei II durch das Product der Reductionszahlen 24 × 20 × 10 dividirt worden; *Reſultat:* $\frac{19}{72}$ Ballen.

Zweites Verfahren:

Beiſpiel: 2 Ries 12 Buch 18$\frac{2}{3}$ Bogen Schreibpapier = Ballen?

$$\text{I. } 18\tfrac{2}{3} \text{ Bogen} = \frac{56}{3\,.\,24} = \tfrac{7}{9} \text{ Buch.}$$

$$\text{II. } 12\tfrac{7}{9} \text{ Buch} = \frac{115}{9\,.\,20} = \tfrac{23}{36} \text{ Ries.}$$

$$\text{III. } 2\tfrac{23}{36} \text{ Ries} = \frac{95}{36\,.\,10} = \tfrac{19}{72} \textbf{ Ballen.}$$

Erläuterung: Bei I ſind die in der Aufgabe gegebenen 18$\frac{2}{3}$ Bogen auf Buch reducirt worden; das giebt $\frac{7}{9}$ Buch; und dieſe $\frac{7}{9}$ Buch zu den in der Aufgabe gegebenen 12 Buch addirt, giebt 12$\frac{7}{9}$ Buch. Dieſe 12$\frac{7}{9}$ Buch ſind bei II auf Ries reducirt worden, d. ſ. $\frac{23}{36}$ Ries; dazu die in der Aufgabe gegebenen 2 Ries, das giebt 2$\frac{23}{36}$ Ries. Dieſe 2$\frac{23}{36}$ Ries ſind bei III auf Ballen reducirt; *Reſultat:* $\frac{19}{72}$ Ballen.

Drittes Verfahren:

Beiſpiel: 2 Ries 12 Buch 18$\frac{2}{3}$ Bogen Schreibpapier = Ballen?

$$\text{I. } 2 \text{ Ries} = \frac{2}{10} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \tfrac{1}{5} \text{ Ballen}$$

$$\text{II. } 12 \text{ Buch} = \frac{12}{20\,.\,10} = \;.\;.\;.\;.\; \tfrac{3}{50} \quad ,,$$

$$\text{III. } 18\tfrac{2}{3} \text{ Bog.} = \frac{56}{3\,.\,24\,.\,20\,.\,10} = \tfrac{7}{1800} \quad ,,$$

$$\text{Summa} = \tfrac{19}{72} \textbf{ Ballen.}$$

Erläuterung: Bei I ſind 2 Ries, bei II 12 Buch und bei III 18$\frac{2}{3}$ Bogen auf Ballen reducirt worden. Das giebt zuſammen $\frac{1}{5} + \frac{3}{50} + \frac{7}{1800} = \frac{19}{72}$ Ballen.

IV. Addition und Subtraction gleichartig benannter Zahlen.

1. Sollen *mehrfachbenannte* Poſten addirt werden, ſo ſetzt man ſie ſo unter einander, daß die *gleichnamigen* Sorten unter einander zu ſtehen kommen. Hierauf zählt man zunächſt die Poſten der niedrigſten Sorte zuſammen und reducirt deren Summe (wenn es geht) auf die nächſt höhere Sorte; die höheren Einheiten addirt man zur gleichnamigen höheren Sorte der Aufgabe, und den übrig gebliebenen Reſt der niederen Sorte ſetzt man unter die addirten Poſten. In dieſer Weiſe wird die Berechnung bis zur höchſten Sorte fortgeführt.

Beiſpiel:	5	Saſhen	2	Arſchin	12	Werſchock
	6	„	1	„	8	„
	7	„	—	„	13	„
	1		2			
	19	Saſhen	2	Arſchin	1	Werſchock.

Erläuterung: 1) 12 + 8 + 13 Werſch. = 33 Werſch. = 2 Arſch. 1 Werſch.; 2) 2 + 1 + 2 Arſchin = 5 Arſchin = 1 Saſh. 2 Arſchin; 3) 5 + 6 + 7 + 1 Saſh. = 19 Saſhen.

Reſultat: 19 Saſhen 2 Arſchin 1 Werſchock.

2. Sollen mehrſortige Größen von einander ſubtrahirt werden, ſo ſetzt man ſie ſo untereinander, daß die gleichnamigen Sorten unter einander ſtehen und führt alsdann, bei der niedrigſten Sorte beginnend, die Subtraction aus.

Anmerkung a: Wenn im Minuendus eine Zahl kleiner iſt, als die ihr gleichnamige im Subtrahendus, ſo borgt man von der nächſt höheren Sorte des Minuendus eine Einheit und bemerkt dies daſelbſt durch einen Punkt. Die geborgte Einheit verwandelt man in Einheiten der niederen Sorte, zählt ſie zu den ſchon vorhandenen Einheiten dieſer Sorte hinzu und führt dann die Subtraction aus.

Anmerkung b: Wenn man bei der nächſt höheren Sorte nicht borgen kann, ſo geht man zu der darauffolgenden höheren Sorte und borgt hier eine Einheit. Dieſe verwandelt man in die nächſt niedere Sorte und borgt jetzt hiervon eine Einheit, die man wiederum in die nächſt niedere Sorte verwandelt.

			10.		40		96	
Beiſpiel:	6.	Brktz.	—	Pud	19.	Pfd.	$44\frac{3}{4}$	Sltk.
	2	„	7	„	36	„	$60\frac{1}{2}$	„
	3	Brktz.	2	Pud	22	Pfd.	$80\frac{1}{4}$	Sltk.

V. Zeitrechnung.

1. Die Zeitrechnung hängt mit der Subtraction und Addition zuſammen und iſt nur inſofern eine beſondere Rechnungsart, als man die Benennungen in verſchiedener Weiſe angiebt, indem man von laufender und verfloſſener Zeit zu ſprechen pflegt. — Die laufende Zeit oder das ſogenannte Datum giebt an, im wievielſten Jahre nach (oder vor) Chriſti Geburt, in welchem Monate dieſes Jahres und am wievielſten Tage des Monats eine

Begebenheit ſtattgefunden hat; z. B. A iſt geboren 1854 am 16. März. — Die verfloſſene Zeit giebt an, wie viel Zeit (Jahre, Monate, Tage, Stunden u. ſ. w.) im Augenblicke einer Begebenheit ſeit Chr. Geb. verfloſſen iſt. Z. B. Als A ſtarb, waren ſeit Chr. Geb. verfloſſen: 1853 Jahre 2 Monate 15 Tage.

2. Nur verfloſſene Zeit kann zu verfloſſener Zeit addirt oder von ſolcher ſubtrahirt werden; die laufende Zeit iſt daher ſtets vor der Addition oder Subtraction in verfloſſene Zeit umzuſetzen.

3. Nach dem Julianiſchen Kalender, der in Rußland gebräuchlich iſt, hat jedes Jahr, deſſen Jahreszahl durch 4 ohne Reſt theilbar iſt, 366 Tage und heißt ein Schaltjahr; jedes gemeine Jahr hat 365 Tage. — Wo es ſich bei der Zeitrechnung um einen beſtimmten Monat handelt, muß man ſtets unterſuchen, ob derſelbe 30 oder 31 Tage hat; und iſt es der Februar, ſo hat man zu prüfen, ob er einem gemeinen oder einem Schaltjahre angehört; im erſten Falle hat er 28, im anderen 29 Tage. — Der Tag wird von 12 Uhr Mitternacht bis wiederum 12 Uhr Mitternacht gerechnet und hat 24 Stunden. Von dieſen 24 Stunden fallen 12 auf den Vormittag und 12 auf den Nachmittag. Es iſt alſo darauf zu achten, ob es z. B. in einer Aufgabe heißt: 6 Uhr Vormittags (Morgens) oder 6 Uhr Nachmittags (Abends); im erſten Falle ſind nur 6 Stunden, im zweiten dagegen $12 + 6 = 18$ Stunden vom laufenden Tage verfloſſen.

4. Bei jeder Begebenheit kann bezüglich der Zeit Dreierlei in Betracht kommen, nämlich der Anfang, die Dauer und das Ende derſelben. — Darnach unterſcheidet man bei der Zeitrechnung auch 3 Arten von Aufgaben:

a) Es iſt gegeben Anfang und Ende; man ſucht die Dauer.
b) „ „ „ Ende „ Dauer; „ „ den Anfang.
c) „ „ „ Dauer „ Anfang; „ „ das Ende.

5. Die Dauer eines Zeitraumes findet man, indem man die Zeit, welche beim Anfangspunkt verfloſſen iſt, von der Zeit, welche beim Endpunkt verfloſſen iſt, abzieht. — Der Anfangspunkt eines Zeitraumes wird gefunden, wenn man die Dauer des letzteren von der Zeit, welche beim Endpunkt verfloſſen iſt, abzieht und den Reſt in das entſprechende Datum umwandelt. — Der Endpunkt eines Zeitraumes wird gefunden, wenn man die Dauer des letzteren zu der Zeit, welche beim Anfangspunkt verfloſſen war, hinzuzählt und die Summe in das entſprechende Datum umwandelt.

VI. Multiplication und Diviſion gleichartig benannter Zahlen.

A. Der Multiplicator und der Diviſor ſind ganze Zahlen.

1. Bei der Multiplication benannter Zahlen kann nur der Multiplicand eine benannte Zahl ſein; der Multiplicator muß immer unbenannt ſein.

2. Wenn eine mehrfachbenannte Zahl mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden ſoll, ſo kann man auf zweierlei Art verfahren.

Erſtes Verfahren: Man multiplicirt jede einzelne Sorte der mehrfachbenannten Zahl mit dem Multiplicator und giebt den ſo erhaltenen Einzelproducten die Benennung des Multiplicandus. Hierauf reducirt man, bei der niedrigſten Sorte beginnend, die einzelnen Producte (wenn es geht) auf die nächſt höhere Sorte und vereinigt die gleichnamigen Sorten.

Zweites Verfahren: Iſt der Multiplicand mehrſortig, ſo reſolvirt man ihn auf ſeine niedrigſte Sorte, multiplicirt alsdann die ſo gewonnene einſortige Zahl mit dem Multiplicator und reducirt das Product wieder auf die höheren Benennungen.

Beiſpiel: 13 Pud 26 Pfd. $62\frac{7}{8}$ Sltk. × 5 = ?

Rechnung nach dem erſten Verfahren.

13 Pud	26 Pfd.	$62\frac{7}{8}$ Sltk.
$\times 5$	$\times 5$	$\times 5$
65 „	130 „	$314\frac{3}{8}$ „
3	3	
68 Pud	**13 Pfd.**	**$26\frac{3}{8}$ Sltk.**

Rechnung nach dem zweiten Verfahren.

I. 13 Pud 26 Pfd. $62\frac{7}{8}$ Sltk. × 5 = ?

$\times 40$

546 Pfund

$\times 96$

3276

4914

$62\frac{7}{8}$

$52478\frac{7}{8}$ Solotnik

$\times 8$

$$\frac{419831 \times 5}{8} = \frac{2099155}{8} = 262394\frac{3}{8} \text{ Solotnik.}$$

$$\text{II.}\quad 96 \,|\, 262394\tfrac{3}{8} \overset{40}{|}\, 2733 \,|\, 68 \text{ Pud}$$

192 240
703 333
672 320
319 13 Pfund.
288
314
288
26$\frac{3}{8}$ Solotnik.

Reſultat: 68 Pud 13 Pfund 26$\frac{3}{8}$ Solotnik.

3. Bei der Diviſion benannter Zahlen kommen zwei verſchiedene Fälle vor; entweder: a) ſowohl der Dividendus als auch der Diviſor ſind benannte Zahlen; z. B.: Wie oft ſind 15 Pfd. in 16 Pud 5 Pfd. enthalten? oder: b) der Dividendus iſt benannt, der Diviſor iſt unbenannt; z. B.: Wie groß iſt der 15. Theil von 16 Pud 5 Pfd.? — Im erſten Falle iſt die Diviſion ein Meſſen oder Enthaltenſein, indem unterſucht wird, wie viel mal der Diviſor im Dividendus enthalten iſt; der Quotient bekommt in dieſem Falle keine Benennung. Im zweiten Falle iſt die Diviſion ein Theilen des Dividenden in ſo viel gleiche Theile, als der Diviſor Einheiten hat; der Quotient iſt einer dieſer gleichen Theile und daher immer mit dem Dividendus gleichartig benannt.

4. Wenn der Dividendus und der Diviſor benannte Zahlen ſind (Meſſen oder Enthaltenſein), ſo müſſen beide vor der Diviſion in einſortige und zwar gleichbenannte Zahlen verwandelt werden.*)

Beiſpiel a: Wie oft ſind 15 Kopeken in 13$\frac{3}{4}$ Rubel enthalten?

Rechnung: 15 Kopeken in 13$\frac{3}{4}$ Rubel = ?

$$\begin{array}{r l}
 & 100 \\
15 & \overline{1375}\,|\;\mathbf{91\tfrac{2}{3}\ mal} \\
 & 25 \\
 & \overline{10} \\
 & \overline{15} = \tfrac{2}{3}
\end{array}$$

Beiſpiel b: Wie viel mal ſind 5 Tſchetwerik in 15 Tſchwt. 4 Tſchwk. 5$\frac{1}{2}$ Grtz. enthalten?

---

*) Bemerkung: Dieſelbe Regel gilt auch für diejenigen Aufgaben, in welchen der Diviſor eine benannte Bruchzahl iſt.

Rechnung: 5 Tſchwk. in 15 Tſchwt. 4 Tſchwk. $5\frac{1}{2}$ Grtz. = ?

$\times 8$ — 40 Garnetz

$\times 8$ — 124

$\times 8$ — $997\frac{1}{2}$ Garnetz

2 — 1995

$$\frac{1995}{2 \times 40} = 24\tfrac{15}{16}\ \textbf{mal.}$$

5. Wenn der Dividendus benannt, der Diviſor aber unbenannt iſt (Theilen), ſo kann man auf zweierlei Art verfahren.

Erſtes Verfahren: Soll eine mehrſortige Zahl durch eine ganze unbenannte Zahl dividirt werden, ſo theilt man zuerſt die höchſte Sorte. Bleibt ein Reſt, ſo reſolvirt man ihn in die nächſt niedere Sorte, addirt hierzu die gleichnamige Sorte aus dem Dividendus und theilt die ſo gewonnene Zahl. Auf dieſe Weiſe fährt man mit dem Theilen fort, bis alle Sorten dividirt ſind.

Zweites Verfahren: Soll eine mehrfachbenannte Zahl durch eine ganze unbenannte Zahl dividirt werden, ſo reſolvirt man den Dividendus bis auf ſeine niedrigſte Sorte, theilt dieſe alsdann durch den Diviſor und reducirt ſchließlich den ſo erhaltenen Quotienten wieder auf die höheren Sorten.

Beiſpiel: Wie groß iſt der 4. Theil von 290 Faden 3 Fuß $6\frac{1}{3}$ Zoll?

Rechnung nach dem erſten Verfahren:

290 Faden 3 Fuß $6\frac{1}{3}$ Zoll : 4 = ?

4 | 290 Faden | 72 Faden
10
2 Faden
$\times 7$
14
$+ 3$
4 | 17 Fuß | 4 Fuß
1 Fuß
$\times 12$
12
$+ 6\frac{1}{3}$
4 | $18\frac{1}{3}$ Zoll | $4\frac{7}{12}$ Zoll.
16
$2\frac{1}{3} : 4 = \frac{7}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$

Der geſuchte Quotient heißt:

72 Faden 4 Fuß $4\frac{7}{12}$ Zoll.

Kürzer ſo: 290 Faden 3 Fuß $6\frac{1}{3}$ Zoll : 4 = ?

$$4)\ \overline{290 \text{ Faden } \overset{17}{3} \text{ Fuß } \overset{18\frac{1}{3}}{6\frac{1}{3}} \text{ Zoll}}$$

72 Faden 4 Fuß $4\frac{7}{12}$ Zoll.

Erläuterung: Der 4. Theil von 290 Faden = 72 Faden und Reſt: 2 Faden. Dieſe 2 Faden = 14 Fuß; dazu 3 Fuß giebt 17 Fuß. Der 4. Theil von 17 Fuß = 4 Fuß und Reſt: 1 Fuß. Dieſer 1 Fuß = 12 Zoll; dazu $6\frac{1}{3}$ Zoll giebt $18\frac{1}{3}$ Zoll. Der 4. Theil von $18\frac{1}{3}$ Zoll = $4\frac{7}{12}$ Zoll. Reſultat: 72 Faden 4 Fuß $4\frac{7}{12}$ Zoll.

Rechnung nach dem zweiten Verfahren.

I. 290 Faden 3 Fuß $6\frac{1}{3}$ Zoll : 4 = ?

×7

2033 Fuß

×12

4066

2033

$6\frac{1}{3}$

$24402\frac{1}{3}$ Zoll

×3

$$\frac{73207}{3 \cdot 4} = \frac{73207}{12} = 6100\tfrac{7}{12} \text{ Zoll.}$$

II. 12 | $6100\frac{7}{12}$ | 7 | 508 | 72 Faden

100 18

$4\frac{7}{12}$ Zoll 4 Fuß

Reſultat: 72 Faden 4 Fuß $4\frac{7}{12}$ Zoll.

Erläuterung: Bei I iſt der Dividend auf ſeine niedrigſte Sorte reſolvirt ($24402\frac{1}{3}$ Zoll) und dieſe alsdann durch 4 dividirt worden; das giebt $6100\frac{7}{12}$ Zoll. Dieſes Ergebniß iſt bei II auf die höheren Sorten reducirt worden.

B. Der Multiplicator und der Diviſor ſind Bruchzahlen.

6. Wenn man eine mehrſortige Zahl mit einem gewöhnlichen Bruch multipliciren ſoll, ſo kann man auf zweierlei Art verfahren.

Erſtes Verfahren: Man dividirt die mehrfachbenannte Zahl durch den Nenner des Bruches und multiplicirt hierauf den ſo gefundenen Quotienten mit dem Zähler des Bruches. Das

Product reducirt man ſchließlich, wenn es geht, auf die höheren Sorten.*)

Zweites Verfahren: Man reſolvirt den Multiplicand auf ſeine niedrigſte Benennung, multiplicirt das Ergebniß mit dem Multiplicator und reducirt ſchließlich das Product auf die höheren Benennungen.

Beiſpiel: 3 Pud 16 Pfund $6\frac{1}{4}$ Sltk. $\times \frac{4}{5} = ?$

Rechnung nach dem erſten Verfahren.

$$
5)\;\begin{array}{rlrlrl}
3 & \text{Pud} & 16 & \text{Pfd.} & 6\frac{1}{4} & \text{Sltk.} \times \frac{4}{5} \\
 & & 136 & & 102\frac{1}{4} & \\
\hline
\text{---} & \text{Pud} & 27 & \text{Pfd.} & 20\frac{9}{20} & \text{Sltk.} \\
 & & \times 4 & & \times 4 & \\
\hline
\text{---} & \text{Pud} & 108 & \text{Pfd.} & 81\frac{4}{5} & \text{Sltk.} \\
\hline
\mathbf{2} & \textbf{Pud} & \mathbf{28} & \textbf{Pfd.} & \mathbf{81\frac{4}{5}} & \textbf{Sltk.}
\end{array}
$$

Erläuterung: Eine Zahl $\frac{4}{5}$ mal nehmen, heißt: den 5. Theil derſelben 4 mal nehmen. Der 5. Theil von 3 Pud 16 Pfd. $6\frac{1}{4}$ Sltk. iſt = 27 Pfd. $20\frac{9}{20}$ Sltk.; und 4 mal 27 Pfd. $20\frac{9}{20}$ Sltk. iſt = 108 Pfd. $81\frac{4}{5}$ Sltk. oder reducirt = 2 Pud 28 Pfd. $81\frac{4}{5}$ Sltk.

Rechnung nach dem zweiten Verfahren.

$$
\text{I.}\quad\begin{array}{rl}
3 & \text{Pud } 16 \text{ Pfd. } 6\frac{1}{4} \text{ Sltk.} \times \frac{4}{5} = ? \\
\underline{\times 40} & \\
136 & \text{Pfd.} \\
\underline{\times 96} & \\
816 & \\
1224 & \\
\underline{6\frac{1}{4}} & \\
13062\frac{1}{4} & \text{Sltk.} \times \frac{4}{5} = \dfrac{52249\,.\,4}{4\;\;.\,5} = 10449\frac{4}{5} \text{ Sltk.}
\end{array}
$$

$$
\text{II.}\quad\begin{array}{r|r|r|l}
96 & \overset{40}{10449\frac{4}{5}} & 108 & 2 \text{ Pud} \\
 & \underline{96} & \underline{80} & \\
 & 849 & 28 & \text{Pfd.} \\
 & \underline{768} & & \\
 & 81\frac{4}{5} & \text{Sltk.} &
\end{array}
$$

Reſultat: 2 Pud 28 Pfd. $81\frac{4}{5}$ Sltk.

Erläuterung: Bei I iſt der Multiplicand auf Solotnik reſolvirt (das ſind $13062\frac{1}{4}$ Sltk.) und dann mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt worden;

---

*) Begründung: Soll man eine Zahl z. B. $\frac{1}{4}$ mal nehmen, ſo will man nicht die ganze Zahl, ſondern nur den 4. Theil derſelben haben. Soll man eine Zahl $\frac{3}{4}$ mal nehmen, alſo $\frac{1}{4}$ mal + $\frac{1}{4}$ mal + $\frac{1}{4}$ mal, ſo will man den 4 Theil 3 mal haben. Eine Zahl $\frac{3}{4}$ mal nehmen, heißt alſo: den 4. Theil der Zahl 3 mal nehmen.

das giebt $10449\frac{4}{5}$ Sltk. Dieſes Product iſt bei II auf die höheren Sorten reducirt worden.

7. Wenn eine mehrfachbenannte Zahl mit einem Decimalbruch multiplicirt werden ſoll, ſo bringt man die benannte Zahl auf ihre niedrigſte Benennung und multiplicirt ſie alsdann mit dem Decimalbruch;*) oder man verwandelt den im Multiplicator gegebenen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch und führt hiermit die Multiplication aus.

Anmerkung: Iſt der Multiplicator ein unendlicher Decimalbruch, ſo verwandelt man ihn jedenfalls in einen gewöhnlichen Bruch und führt mit dieſem die Multiplication aus.

8. Wenn man eine mehrfachbenannte Zahl durch einen unbenannten gemeinen Bruch dividiren ſoll, ſo multiplicirt man den Dividendus mit dem umgekehrten Werthe des Diviſors. — Soll z. B. eine mehrſortige Zahl durch $1\frac{3}{5}$ oder $\frac{8}{5}$ dividirt werden, ſo multiplicirt man ſie mit $\frac{5}{8}$.

Anmerkung: Ueber Diviſion einer mehrfachbenannten Zahl durch eine benannte Bruchzahl ſiehe die Bemerkung auf Seite 48.

9. Wenn man eine mehrfachbenannte Zahl durch einen Decimalbruch dividiren ſoll, ſo bringt man den Dividendus auf ſeine niedrigſte Sorte und dividirt ihn alsdann durch den Decimalbruch; — oder man verwandelt den als Diviſor gegebenen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch und führt durch dieſen die Diviſion aus.

Anmerkung: Iſt der Diviſor ein unendlicher Decimalbruch, ſo verwandelt man ihn jedenfalls in einen gewöhnlichen Bruch und führt durch dieſen die Diviſion aus.

Fünftes Kapitel: Rechnungen mit ungleichartig benannten Zahlen oder die ſogenannten bürgerlichen Rechnungsarten.

A. Die Regeldetri-Rechnungen.

Zu den Regeldetri-Rechnungen gehören: a) Einfache Regeldetri, b) Zuſammengeſetzte Regeldetri, c) Zinsrechnung, d) Kettenrechnung.

I. Einfache Regeldetri.

1. Die einfache Regeldetri iſt diejenige Rechnungsart, welche uns lehrt, aus 3 gegebenen Zahlen eine unbekannte 4te Zahl zu finden. — Oder: Die Regeldetri lehrt, aus dem gegebenen Werthe

---

*) Z. B. 45 Rbl. 26,5 Kop. × 3,5 = 4526,5 Kop. × 3,5; d. i. 15842,75 Kopeken, oder reducirt: 158 Rbl. 42,75 Kop.

eines Vielfachen den Werth eines andern Vielfachen beſtimmen. Z. B. In der Aufgabe: 3 Pfd. koſten 87 Kopeken; wie theuer ſind 10 Pfd.? iſt 87 Kop. der gegebene Werth des Vielfachen 3 Pfd.; daraus ſoll nun der Werth des andern Vielfachen, 10 Pfd., beſtimmt werden.

2. Jede Regeldetri-Aufgabe beſteht aus der Angabe (oder Bedingung oder Annahme) und aus der Frage. — Die Angabe iſt der Theil der Aufgabe, aus welchem der Werth der Einheit berechnet werden kann und ſoll; der andere Theil iſt die Frage. So heißt in obiger Aufgabe die Angabe: 3 Pfd. koſten 87 Kop., denn hieraus ſoll der Werth der Einheit (1 Pfd.) berechnet werden; die Frage heißt: wie theuer ſind 10 Pfd.?

3. In jeder (einfachen) Regeldetri-Aufgabe enthält ſowohl die Angabe, wie auch die Frage je eine Werthgleichung. Aber in der Angabe ſind die beiden Glieder der Werthgleichung bekannt; in der Frage iſt nur das eine Glied bekannt, das andere wird geſucht.

4. Unter dem erſten Gliede einer Regeldetri-Aufgabe verſteht man dasjenige Glied der Angabe, welches mit dem bekannten Gliede der Frage gleichnamig (oder doch wenigſtens gleichartig) iſt; und dieſes bekannte Glied der Frage nennt man das dritte Glied der Aufgabe. (3 Pfd. = erſtes Glied; 10 Pfd. = drittes Glied in obiger Aufgabe unter Nr. 1.) — Unter dem zweiten Gliede verſteht man dasjenige Glied der Angabe, welches mit dem unbekannten Gliede der Frage gleichnamig iſt; und dieſes unbekannte Glied der Frage heißt das vierte Glied der Aufgabe. (87 Kop. = zweites Glied; x Kop. = viertes Glied in obiger Aufgabe unter Nr. 1.)

5. Bei der ſchriftlichen Aufzeichnung einer Regeldetri-Aufgabe ſetzt man die Angabe in eine Reihe, und zwar gewöhnlich das erſte Glied links und das zweite rechts; beide durch ein Gleichungszeichen (=) mit einander verbunden. Unter die Angabe ſtellt man die Frage und zwar ſo, daß die gleichnamigen Glieder unter einander zu ſtehen kommen, nämlich das dritte unter das erſte, das vierte unter das zweite; alſo:

Angabe: 3 Pfd. (erſtes Glied) = 87 Kop. (zweites Gl.)
Frage: 10 „ (drittes Glied) = x „ (viertes Gl.)

Anmerkung 1: Wenn in einem Gliede eine mehrſortige Größe vorkommt, ſo muß ſie vor der Berechnung in eine einſortige Zahl verwandelt werden. — Z. B. die Aufgabe: 5 Tſchwk. koſten 21 Rbl. 50 Kop.; wie theuer ſind hiernach 4 Tſchwt. 6 Tſchwk.? muß wie folgt umgewandelt werden: 5 Tſchwk. koſten 2150 Kop.; wie theuer ſind 38 Tſchwk.?

Anmerkung 2: Wenn das dritte Glied der Aufgabe mit dem erſten nur gleichartig, aber nicht gleichnamig iſt, ſo macht man ſie (zumeiſt) gleichnamig.*)

$$\textbf{Beiſpiel a:}\ \left.\begin{array}{l} 3 \text{ Pfd.} = 54 \text{ Kop.} \\ 7 \text{ Pud} = x \text{ 〃} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 3 \text{ Pfd.} = 54 \text{ Kop.} \\ 280 \text{ 〃} = x \text{ 〃} \end{array}\right.$$

$$\textbf{Beiſpiel b:}\ \left.\begin{array}{l} 5 \text{ Tſchwk.} = 90 \text{ Kop.} \\ 3 \text{ Grtz.} = x \text{ 〃} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 40 \text{ Grtz.} = 90 \text{ Kop.} \\ 3 \text{ 〃} = x \text{ 〃} \end{array}\right.$$

$$\textbf{Beiſpiel c:}\ \left.\begin{array}{l} \frac{4}{5} \text{ Rbl.} = 2\frac{1}{2} \text{ Ellen} \\ 64 \text{ Kop.} = x \text{ 〃} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 80 \text{ Kop.} = 2\frac{1}{2} \text{ Ellen} \\ 64 \text{ 〃} = x \text{ 〃} \end{array}\right.$$

6. Wenn die beiden Zahlengrößen der Angabe (wie auch die der Frage) in ſolcher Beziehung zu einander ſtehen, daß bei der Verdoppelung der einen Zahl auch eine Verdoppelung der andern Zahl erfolgen muß, ſo ſagt man: beide Zahlen ſtehen im graden oder directen Verhältniſſe zu einander. Und Aufgaben, in denen ſolche grade Verhältniſſe vorkommen, gehören der ſogenannten graden Regeldetri oder der Regeldetri mit directen Verhältniſſen an. Bei dergleichen Aufgaben bildet man ſtets Schlüſſe folgender Art: Je mehr das Eine, je mehr das Andere; und je weniger das Eine, je weniger das Andere.

7. Wenn die Zahlengrößen der Angabe (wie auch die der Frage) in ſolcher Beziehung zu einander ſtehen, daß bei der Verdoppelung der einen Zahl die andere zwei mal ſo klein werden muß, ſo ſagt man: die Zahlen ſtehen im umgekehrten oder im indirecten Verhältniſſe zu einander. Und Aufgaben, in denen ſolche indirecte Verhältniſſe vorkommen, gehören der ſogenannten umgekehrten Regeldetri oder der Regeldetri mit indirecten Verhältniſſen an. Bei dergleichen Aufgaben bildet man ſtets Schlüſſe folgender Art: Je mehr das Eine, je weniger das Andere; und je weniger das Eine, je mehr das Andere.

Anmerkung: Wenn man bei Berechnung der Regeldetri-Aufgaben die Schlußrechnung anwendet, ſo iſt eine Trennung der Aufgaben mit directen Verhältniſſen von denen mit indirecten Verhältniſſen ganz überflüſſig.

8. Die Schlußrechnung beſteht in der Zurückführung auf die Einheit: Aus dem in der Bedingung gegebenen

---

Bemerkung: Es iſt nicht durchaus nothwendig, das erſte mit dem dritten Gliede gleichnamig zu machen. Bei Anwendung der Schlußrechnung ſchließt man: bei **Beiſp. a** von 3 Pfd. auf 1 Pfd., von 1 Pfd. auf 1 Pud, von 1 Pud auf 7 Pud; — bei **Beiſp. b** von 5 Tſchwk. auf 1 Tſchwk., von 1 Tſchwk. auf 1 Grtz., von 1 Grtz. auf 3 Grtz.; — bei **Beiſp. c** von ⅘ Rbl. auf ⅕ Rbl., von ⅕ Rbl. auf 1 Rbl., von 1 Rbl. auf 1 Kop., von 1 Kop. auf 64 Kop.

Werthe der Vielheit berechnet man zunächſt den Werth der Einheit, und aus dem Werthe dieſer Einheit den geſuchten Werth der in der Frage gegebenen Vielheit. — Z. B.: 30 Arbeiter verdienen 22½ Rubel; wie viel verdienen (unter ſonſt gleichen Umſtänden) 40 Arbeiter?

Aufgabe: 30 Arbeiter = 22½ Rubel
40 „ = x „

Berechnung nach der Schlußrechnung in Bruchform.

$$\frac{45\ \text{Rbl.}\ .\ 40}{2\ .\ 30} = \textbf{30 Rubel.}$$

Erklärung: $\frac{45}{2}$ Rbl. verdienen 30 Arbeiter, da verdient 1 Arbeiter 30 mal ſo wenig, und 40 Arbeiter verdienen 40 mal ſo viel als 1 Arbeiter. — Aus dem in der Angabe gegebenen Werthe ($22\frac{1}{2} = \frac{45}{2}$ Rbl.) der Vielheit (30 Arb.) berechnet man zuerſt den Werth der Einheit (1 Arb.), d. h. man berechnet, wie viel 1 Arbeiter verdient, wenn 30 Arbeiter 22½ Rbl. verdienen. Aus dem gefundenen Werthe der Einheit, nämlich $\frac{45\ \text{Rbl.}}{2\ .\ 30}$, berechnet man nun den Werth der in der Frage gegebenen Vielheit (40 Arb.); das giebt $\frac{45\ \text{Rbl.}\ .\ 40}{2\ .\ 30} = \textbf{30 Rbl.}$

9. Wenn im erſten oder im dritten Gliede, oder auch in beiden, Brüche vorkommen, ſo muß man auf die Einheit der Bruchtheile zurückgehen. Z. B.:

Aufgabe a: 6 Arſchinen koſten 2 Rbl. 88 Kop.
¾ „ „ x „

Gang der Auflöſung:

Mehrheit der Ganzen . . . . . 6 Arſchinen = 288 Kop.
Einheit der Ganzen . . . . . 1 „ = 48 „
Einheit der Bruchtheile . . . . ¼ „ = 12 „
Mehrheit der Bruchtheile . . . . ¾ „ = 36 „

Aufgabe b: Bei 2 Pfd. ſchwerer Portion reicht man 5 Wochen;
„ 2½ „ „ „ „ „ x „

Gang der Auflöſung:

Mehrheit der Ganzen . . . . 2 Pfd. = 5 Wochen.
Einheit der Ganzen . . . . 1 „ = 10 „
Einheit der Bruchtheile . . . . . ½ „ = 20 „
Mehrheit der Bruchtheile . . . . $\frac{5}{2}$ „ = 4 „

Aufgabe c: $\frac{3}{4}$ Pfd. koſten 11 Rbl. 31 Kop.
5 „ „ x „

Gang der Auflöſung:

Mehrheit der Bruchtheile . . . . . $\frac{3}{4}$ Pfd. = 1131 Kop.
Einheit der Bruchtheile . . . . . $\frac{1}{4}$ „ = 377 „
Einheit der Ganzen . . . . 1 „ = 1508 „
Mehrheit der Ganzen . . . . 5 „ = 7540 „

Aufgabe d: $\frac{5}{6}$ Ellen koſten $17\frac{1}{2}$ Kopeken
$3\frac{2}{3}$ „ „ x „

Macht man im erſten und dritten Gliede die Brüche gleichnamig, alſo aus $3\frac{2}{3}$ oder $\frac{11}{3}$ Ellen = $\frac{22}{6}$ Ellen, ſo iſt der:

Gang der Auflöſung:

Mehrheit der Bruchtheile . . . . $\frac{5}{6}$ Ellen = $\frac{35}{2}$ Kopeken.
Einheit der Bruchtheile . . . . $\frac{1}{6}$ „ = $\frac{7}{2}$ „
Mehrheit der Bruchtheile . . . . $\frac{22}{6}$ „ = 77 „

Macht man die Brüche des erſten und dritten Gliedes nicht gleichnamig, ſo iſt der:

Gang der Auflöſung:

Mehrheit der Bruchtheile . . . . $\frac{5}{6}$ Ellen = $\frac{35}{2}$ Kopeken.
Einheit der Bruchtheile . . . . $\frac{1}{6}$ „ = $\frac{7}{2}$ „
Einheit der Ganzen . . . . . 1 „ = 21 „
Einheit der Bruchtheile . . . . $\frac{1}{3}$ „ = 7 „
Mehrheit der Bruchtheile . . . . $\frac{11}{3}$ „ = 77 „

10. Bei Anwendung der Schlußrechnung macht man den Rechenanſatz zumeiſt in Form eines Bruches. Zuerſt ſchreibt man das zweite Glied (alſo dasjenige, welches mit dem unbekannten Gliede gleichnamig iſt) über den Bruchſtrich; nun ſchließt man von der Vielheit des erſten Gliedes auf die Einheit deſſelben u. ſ. w. und ſetzt jedesmal die Zahl, durch welche dividirt werden ſoll, als Nenner (oder Diviſor) unter den wagerechten Bruchſtrich, und die Zahl, mit welcher multiplicirt werden ſoll, als Zähler über den Bruchſtrich. — Wenn der Rechenanſatz fertig iſt, kürzt man, ſo viel als möglich, die Zahlen des Zählers gegen die des Nenners. Hierauf dividirt man das Product der im Zähler ſtehenden Zahlen durch das Product der im Nenner ſtehenden Zahlen und reducirt ſchließlich erforderlichen Falls den Quotienten.

Aufgabe: Wie viel koſten $1\frac{7}{15}$ Pud, wenn $\frac{11}{16}$ Pud mit $2\frac{5}{8}$ Rbl. bezahlt werden?

Kürzeſte Form der Aufgabe. $\frac{11}{16}$ Pud = $\frac{21}{8}$ Rbl.
$\frac{22}{15}$ „ = x „

Rechenanſatz: $$\frac{21 \text{ Rbl.} \,.\, 16 \,.\, 22}{8 \qquad .\, 11 \,.\, 15} = \frac{28}{5} = 5\tfrac{3}{5} \textbf{ Rbl.}$$

Entwickelung des Rechenanſatzes:

$\frac{11}{16}$ Pud $= \frac{21 \text{ Rbl.}}{8}$;

$\frac{1}{16}$ „ $= \frac{21 \text{ Rbl.}}{8 \,.\, 11}$; (denn $\frac{1}{16}$ iſt 11 mal ſo klein als $\frac{11}{16}$)

1 „ $= \frac{21 \text{ Rbl. } 16}{8 \,.\, 11}$; (denn 1 iſt 16 mal ſo groß als $\frac{1}{16}$)

$\frac{1}{15}$ „ $= \frac{21 \text{ Rbl. } 16}{8 \,.\, 11 \,.\, 15}$; (denn $\frac{1}{15}$ iſt 15 mal ſo klein als 1)

$\frac{22}{15}$ „ $= \frac{21 \text{ Rbl. } 16 \,.\, 22}{8 \,.\, 11 \,.\, 15}$; (denn $\frac{22}{15}$ iſt 22 mal ſo groß als $\frac{1}{15}$)

Anmerkung: Der Gang der Rechnung wird vereinfacht, wenn man die Brüche im erſten und dritten Gliede ($\frac{11}{16}$ und $\frac{22}{15}$) gleichnamig macht.

II. Zuſammengeſetzte Regeldetri.

1. Wenn in einer Regeldetri-Aufgabe die geſuchte Größe von mehr als einem Verhältniſſe gleichnamiger Zahlengrößen abhängig iſt, wenn alſo mehr als drei Glieder (nämlich 5, oder 7, oder 9 u. ſ. w.) gegeben ſind, ſo gehört die Aufgabe zur zuſammengeſetzten Regeldetri; — und die zuſammengeſetzte Regeldetri iſt alſo die Rechnungsregel, welche zeigt, wie man das unbekannte Glied findet, wenn es von mehreren Verhältniſſen abhängig iſt. — Z. B. in der Aufgabe: 6 Arbeiter verdienen in 12 Tagen 54 Rubel; wie viel verdienen bei gleichem Tagelohn 7 Arbeiter in 16 Tagen? wird die geſuchte Zahlengröße durch zwei Verhältniſſe beſtimmt: durch das Verhältniß der Arbeiter und durch das Verhältniß der Tage.

2. Die Aufgaben der zuſammengeſetzten Regeldetri werden gelöſt, indem man ſie in mehrere Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt und dieſe nach der Schlußrechnung in einem einzigen Bruchanſatze berechnet. — Z. B. 8 Perſonen verzehren in 6 Tagen 36 Pfd. Brod; wie viel verzehren unter gleichen Umſtänden 10 Perſonen in 14 Tagen?

Aufgabe: 8 Perſonen = 6 Tage = 36 Pfd.
10 „ = 14 „ = x „

Anſatz und Berechnung:

$\frac{36 \text{ Pfd.} \,.\, 10 \,.\, 14}{8 \,.\, 6}$ = 105 Pfd. = **2 Pud 25 Pfd.**

Erläuterung: Man zerlegt ſich die gegebene Aufgabe in zwei Aufgaben der einfachen Regeldetri, nämlich:

I. 8 Perſonen verzehren 36 Pfd. }
10 „ „ x „ } D. i. 45 Pfd.
II. In 6 Tagen verzehrt man*) 45 Pfd. }
„ 14 „ „ „ x „ } D. i. **105 Pfd.**

Man hat alſo zuerſt von den Tagen ganz abgeſehen und gefragt, wie viel 10 Perſ. verzehren, wenn 8 Perſ. 36 Pfd. verbrauchen; alsdann hat man von den Perſonen ganz abgeſehen und berechnet, wie viel Pfund man in 14 Tagen verbraucht, wenn in 6 Tagen das eben vorher gefundene Quantum verzehrt wird. — Man berechnet aber die beiden Aufgaben nicht einzeln für ſich, ſondern in einem einzigen Bruchanſatze.

Entwickelung des Bruchanſatzes: 36 Pfd. verzehren 8 Perſ., da verzehrt 1 Perſ. 8 mal ſo wenig, d. i. $\frac{36 \text{ Pfd.}}{8}$; und 10 Perſ. verzehren 10 mal ſo viel als 1 Perſ., d. i. $\frac{36 \text{ Pfd.} \times 10}{8}$. So viel verzehrt man in 6 Tagen, alſo in 1 Tage den 6. Theil davon, d. i. $\frac{36 \text{ Pfd.} \times 10}{8 \times 6}$; und in 14 Tagen verzehrt man 14 mal ſo viel als in 1 Tage, d. i. $\frac{36 \text{ Pfd.} \times 10 \times 14}{8 \times 6}$. — Hat man in dieſer Weiſe den Bruchanſatz hergeſtellt, ſo hebt man den Zähler gegen den Nenner ſo viel als möglich; u. ſ. w. wie bei der einfachen Regeldetri.**)

III. Zinsrechnung.

1. Leute, welche Geldſummen beſitzen, die ſie nicht in einem eigenen Geſchäft verwerthen wollen, pflegen dieſe Summen anderen Leuten auf eine beſtimmte Zeit zu leihen, oder zinstragende Papiere dafür zu kaufen. — Die Summe, welche man zumeiſt gegen ein Unterpfand (Haus, Grundſtück, Schuldſchein oder Obligation) ausleiht, heißt Kapital. Wenn A dem B Geld leiht, ſo iſt A der Gläubiger (Creditor) des B, und B iſt der Schuldner (Debitor) des A. Die Vergütung, welche B dem A für das Leihen des Geldes zahlt, heißt Zinſen oder Intereſſen. Beim Ausleihen eines Kapitals wird gewöhnlich beſtimmt, wie viel Zinſen der Schuldner dem Gläubiger von je 100 Rubel Kapital

---

*) Nämlich die zehn Perſonen der Frage.

**) Ausführlichere Belehrung über die Regeldetri, verbunden mit Auflöſung und Berechnung vieler Aufgaben, findet man in des Verfaſſers: Wegweiſer für den Rechenunterricht, zweite Abtheilung.

jährlich zahlen muß; und die Zinſen eines Kapitals von 100 (Rubeln, Kopeken, Mark, Gulden u. ſ. w.) für 1 Jahr heißen Procente. Die Procente bezeichnet man kurz durch p. c. oder durch %; z. B. 6% heißt: Für je 100 Geldeinheiten (Rubel, Kopeken oder dergl.) erhält man jährlich 6 ſolche Geldeinheiten.*)

2. Die Zinſen, welche für ein geliehenes Kapital zu zahlen ſind, richten ſich nach der Größe des Kapitals, nach dem Procentſatze und nach der Zeit, während welcher das Kapital benutzt wird. — Es kommen alſo bei der Zinsrechnung vier von einander abhängige Größen in Berechnung: **Kapital, Procente, Zinſen** und **Zeit**; drei derſelben müſſen immer gegeben ſein, um die vierte berechnen zu können. Man findet alſo:

a) die Zinſen aus Kapital, Procenten und Zeit;
b) die Procente aus Kapital, Zinſen und Zeit;
c) das Kapital aus Zinſen, Procenten und Zeit;
d) die Zeit aus Kapital, Procenten und Zinſen.

3. Wenn bei der Zinsrechnung Tage in Berechnung kommen, ſo nimmt man das Jahr zu 360 Tagen, den Monat alſo zu 30 Tagen.

4. Die Zinsrechnung iſt nur eine beſondere Art der Regeldetri; und die hierher gehörigen Aufgaben werden auch ganz ebenſo wie die Regeldetri-Aufgaben nach der Schlußrechnung berechnet.

5. Wenn nach Zinſen, oder nach Kapital, oder nach Zeit gefragt iſt, ſo enthält der Procentſatz für ſich allein die ganze Angabe, während die anderen gegebenen Größen die Frage bilden.

Beiſpiel a: Wie viel Zinſen tragen 565 Rbl. Kapital bei 4% in 7 Jahren?

Angabe: 100 Rbl. Kap. tragen in 1 Jahr 4 Rbl. Zins
Frage: 565 „ „ „ „ 7 „ x „ „

Beiſpiel b: Welches Kapital trägt bei 5% in 3 Jahren 252 Rbl. Zinſen?

Angabe: 5 Rbl. Zins erfordern in 1 Jahr 100 Rbl. Kap.
Frage: 252 „ „ „ „ 3 „ x „ „

Beiſpiel c: In welcher Zeit bringen 625 Rbl. Kap. zu 6% 225 Rbl. Zinſen?

Ang.: 100 Rbl. K. müſſen, um 6 Rbl. Z. zu tragen, 1 Jahr ausſtehen
Fr.: 625 „ „ „ „ 225 „ „ „ „ x „ „

6. Wenn nach Procenten gefragt wird, ſo bilden die gegebenen Größen zuſammen die Angabe, und die Frage heißt

---

*) Die jährlichen Zinſen eines Kapitals, welches Eins beträgt, werden Zinsfuß genannt. — Die jährlichen Zinſen für je 1000 Rbl. heißen pro mille; geſchrieben: p. M. oder ‰.

ſtets: Wie viel Zinſen erhält man von 100 Rbl. Kapital in 1 Jahre?

Beiſpiel: Zu wie viel p. c. ſind 540 Rbl. Kap. ausgeliehen, wenn ſie in 5 Monaten 9 Rbl. Zinſen tragen?

Angabe: 540 Rbl. Kap. bringen in 5 Monaten 9 Rbl. Zins
Frage: 100 „ „ „ „ 12 „ x „ „

Anmerkung: Die in Nr. 5 und 6 für die Bildung des Rechenanſatzes aufgeſtellten Regeln gelten nur für ſolche Aufgaben, in denen jede der 4 Größen: Zinſen, Kapital, Zeit und Procentſatz nur einmal gegeben iſt. Indeß giebt es auch Aufgaben, in denen von jenen 4 Größen immer nur drei derſelben, aber in doppelten, mit einander zuſammenhängenden Werthen vorkommen. Angabe und Frage ſind in ſolchen Aufgaben leicht von einander zu unterſcheiden.

Beiſpiel: Ein Kapital bringt zu 5 % in 4 Jahren 600 Rbl. Zinſen; zu wie viel % muß man es ausleihen, wenn es in 3 Jahren 720 Rbl. Zinſen tragen ſoll?

Angabe: 600 Rbl. Zins erhält man in 4 Jahren bei 5 %
Frage: 720 „ „ „ „ „ 3 „ „ x %

7. Die in Aufgaben der Zinsrechnung von einander abhängigen Größen ſtehen nur dann im directen Verhältniß zu einander, wenn eine von den beiden mit einander verglichenen Zahlen die Benennung Zinſen hat; alſo: Kapital und Zinſen, Procentſatz und Zinſen, Zeit und Zinſen. Dagegen ſtehen im indirecten Verhältniß zu einander: Kapital und Zeit, Kapital und Procentſatz, Zeit und Procentſatz; z. B. Je größere Procente Jemand von einem Kapitale nimmt, deſto kürzere Zeit braucht er es auszuleihen, um dieſelben Zinſen zu erzielen.

8. Kauft Jemand eine größere Quantität Waaren, ſo wird ihm von dem Verkäufer nicht ſelten ein nach Procenten feſtgeſtellter Abzug bewilligt, welcher Rabatt heißt. — Der Rabatt wird auch Disconto oder Sconto genannt, beſonders wenn von Zahlungen die Rede iſt, bei denen die Zeit in Betracht kommt. So kann z. B. ein Wechſel, der erſt nach einer beſtimmten Zeit fällig iſt, ſogleich discontirt oder mit Disconto verkauft werden.

9. Diejenige Summe, welche ohne Abzug des Rabatts oder Discontos bezahlt werden müßte, heißt die Werthſumme, Schuldſumme, Wechſelſumme, zukünftiger Werth u. ſ. w., und diejenige Summe, welche nach Abzug des Rabatts wirklich gezahlt wird, heißt Baarzahlung oder gegenwärtiger Werth.

10. Man kann den Rabatt und Disconto ſowohl **in** Hundert, als auch **auf** Hundert berechnen. Z. B. 5 % Rabatt in Hdrt. heißt: Statt 100 Rbl. zahlt man nur 95 Rbl.; dagegen 5 % auf

Hdrt. bedeutet: Statt 105 Rbl., die ſpäter zu zahlen wären, hat man ſogleich 100 Rbl. baar zu entrichten.

11. Wenn man am Schluß des Jahres die Zinſen eines ausgeliehenen Kapitals nicht erhebt, ſondern zum Kapital hinzurechnet und die ſo entſtandene Summe auf Zins ſtehen läßt, ſo erhält man die ſogenannten Zinſeszinſen; und Aufgaben der Art gehören zur zuſammengeſetzten Zinsrechnung oder zur Zinſeszinsrechnung.

IV. Kettenrechnung.

1. Bei den gewöhnlichen Regeldetri-Aufgaben ſtimmen die Benennungen in der Bedingung und in der Frage mit einander überein; z. B.

5 Ellen koſten 7 Rubel;
12 Ellen koſten x Rubel?

Hier entſpricht der Benennung Ellen in der Bedingung auch die Benennung Ellen in der Frage, und ebenſo der Benennung Rubel in der Bedingung auch Rubel in der Frage.

2. Es giebt aber auch Regeldetri-Aufgaben, in welchen die entſprechenden Benennungen in der Bedingung und Frage verſchieden ſind; z. B.

5 Ellen koſten 7 Rubel;
12 Meter koſten x Mark?

Hier ſteht in der Bedingung die Benennung Ellen und in dem entſprechenden Gliede der Frage die Benennung Meter; und ebenſo in der Bedingung: Rubel und in der Frage Mark. Wir haben hier alſo eine Regeldetri-Aufgabe mit ungleichen Benennungen, welche durch mehrere einfache Regeldetri-Aufgaben gelöſt werden kann; die ſogenannte Kettenrechnung aber vereinigt dieſe einzelnen Regeldetri-Aufgaben und verſchmelzt ſie zu einem Anſatz, zu dem Kettenſatz.

3. Man unterſcheidet einfache und zuſammengeſetzte Kettenrechnung. Einfach iſt die Kettenrechnung, wenn von den entſprechenden Benennungen in Bedingung und Frage nur eine verſchieden iſt; z. B.

5 Ellen koſten 7 Rubel;
12 Meter koſten x Rubel?

Mit Hilfe des Kettenſatzes wird dieſe Aufgabe in folgender Weiſe gelöſt:

x Rubel = 12 Meter
18 Meter = 25 Arſchin
3 Arſchin = 4 Ellen
5 Ellen = 7 Rubel.

$$x = \frac{12.25.4.7}{18.\ 3.5} = 31\tfrac{1}{9}\ \textbf{Rubel.}$$

Dieſe einfache Kettenrechnung findet beſonders häufig Anwendung, wenn Münz-, Maß- und Gewichtsbenennungen verſchiedener Länder berechnet werden ſollen.

Zuſammengeſetzt iſt die Kettenrechnung, wenn beide entſprechenden Benennungen in Bedingung und Frage verſchieden ſind; wie z. B. in der Aufgabe unter Nr. 2:

5 Ellen koſten 7 Rubel;
12 Meter koſten x Mark?

Die Ausrechnung geſchieht in ähnlicher Weiſe, wie bei der einfachen Kettenrechnung, nur daß eine längere Kette gebildet werden muß; nämlich:

x Mark = 12 Meter
18 Meter = 25 Arſchin
3 Arſchin = 4 Ellen
5 Ellen = 7 Rubel
1 Rubel = 100 Kopeken
40 Kopeken = 1 Mark

$$x=\frac{12.25.4.7.100}{18.\;3.5.\;40}=77\tfrac{7}{9}\ \textbf{Mark.}$$

4. Der Kettenſatz beſteht aus lauter Werthgleichungen, welche unter einander geſetzt werden. Bei der Bildung deſſelben hat man folgende Regeln zu beobachten: a) Die erſte Gleichung enthält die Frage, und zwar bildet die geſuchte Größe x die linke Seite dieſer Gleichung. — b) Die linke Seite jeder folgenden Gleichung muß mit der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung gleichnamig ſein. — c) Die rechte Seite der letzten Gleichung muß mit der linken Seite der erſten Gleichung gleichnamig ſein.

Die Ausrechnung geſchieht in der Weiſe, daß man das Product der rechts ſtehenden Zahlen durch das Produkt der links ſtehenden Zahlen dividirt; dem Quotienten giebt man die bei x ſtehende Benennung.

Anmerkung 1: Vor der Bildung des Kettenſatzes muß jede mehrfachbenannte Zahl in eine einfachbenannte Zahl verwandelt werden.

Anmerkung 2: Kommt in einer Säule des Kettenſatzes ein Bruch vor, ſo ſchafft man ihn fort, indem man den Nenner ſtreicht und denſelben als Factor auf die andere Seite (in die andere Säule) ſetzt; beide Seiten ſind dadurch nämlich mit einer und derſelben Zahl multiplicirt.

Anmerkung 3: Jede Zahl der rechts ſtehenden Säule (Dividendus, Zähler) kann gegen jede geeignete Zahl der links ſtehenden Säule (Diviſor, Nenner) gekürzt werden.

B. Die Theilungsrechnungen.

Zu den Theilungsrechnungen gehören: a) Einleitung: Verhältnißbeſtimmungen; b) Geſellſchaftsrechnung; c) Durchſchnittsrechnung; d) Miſchungsrechnung.

V. Einleitung: Verhältnißbeſtimmungen.

1. Wenn man zwei Zahlen nach ihrem Quotienten mit einander vergleicht, ſo giebt man das geometriſche Verhältniß derſelben an.*) — Die beiden mit einander verglichenen Zahlen heißen die Glieder des Verhältniſſes, und zwar erſtes oder Vorderglied und zweites oder Hinterglied. — Diejenige Zahl, welche bei einem Verhältniſſe angiebt, wie viel mal ſo groß das Vorderglied gegen das Hinterglied iſt, heißt der Quotient oder (Exponent) dieſes Verhältniſſes.

2. Die Glieder eines (geometriſchen) Verhältniſſes müſſen gleichnamige Größen ſein.

3. Geometriſche Verhältniſſe mit gleichen Quotienten ſind einander gleich. Z. B. 35 : 5 = 14 : 2 (lies 35 verhält ſich zu 5 wie 14 zu 2), denn in beiden Verhältniſſen iſt der Quotient oder Exponent = 7**)

4. Ein geometriſches Verhältniß bleibt unverändert, wenn beide Glieder mit ein- und derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

5. Auf die Frage: „Wie verhalten ſich die Zahlen 12 und 16 zu einander?“ kann man antworten: Wie 12 : 16. Das Verhältniß gewinnt aber an Anſchaulichkeit, wenn man daſſelbe in den kleinſten ganzen Zahlen darſtellt, oder wenn man ein Glied gleich Eins ſetzt. Z. B. Das Verhältniß 12 : 16 wird am anſchaulichſten und bequemſten ausgedrückt durch:

a) $3:4$; b) $1:1\frac{1}{3}$; c) $\frac{3}{4}:1$.

Erklärung zu a) Dividirt man die beiden Glieder (12 und 16) des gegebenen Verhältniſſes durch das größte gemeinſchaftliche Maß (alſo durch 4), ſo erhält man das neue Verhältniß 3 : 4, welches dem gegebenen Verhältniß gleich iſt, weil beide den Quotienten $\frac{3}{4}$ gemeinſam haben.

Erkl. zu b: Setzt man in dem Verhältniſſe 12 : 16 im erſten Gliede ſtatt 12 Eins, alſo eine 12 mal ſo kleine Zahl, ſo muß man auch das

---

*) Wenn man zwei Zahlen nach ihrem Unterſchiede mit einander vergleicht, ſo giebt man ihr arithmetiſches Verhältniß an. Von dergleichen Verhältniſſen iſt aber hier nicht die Rede.

**) Zwei gleiche (geometriſche) Verhältniſſe bilden eine (geometriſche) Proportion.

zweite Glied 12 mal ſo klein machen; und man erhält das Verhältniß 1 : $1\frac{1}{3}$, welches dem gegebenen gleich iſt, da ſie beide den Quotienten $\frac{3}{4}$ haben.

Erkl. zu c: Setzt man in den Verhältniſſe 12 : 16 im Hintergliede ſtatt 16 Eins, ſo muß auch das Vorderglied 16 mal ſo klein gemacht werden; und es entſteht das Verhältniß $\frac{3}{4}$: 1, welches dem gegebenen gleich iſt, weil beide den Quotienten $\frac{3}{4}$ haben.

6. Gleichnamige Brüche verhalten ſich zu einander wie ihre Zähler. Z. B. $\frac{8}{9} : \frac{5}{9}$ iſt gleich 8 : 5, denn die Quotienten oder Exponenten beider Verhältniſſe ſind gleich, nämlich $1\frac{3}{5}$.

VI. Geſellſchaftsrechnung.

1. Die Geſellſchaftsrechnung, auch Repartitionsrechnung genannt, lehrt eine beſtimmte Zahl nach gegebenen Bedingungen in ungleiche Theile zerlegen und wird bei Vertheilung von Erbſchaften, Gewinn und Verluſt, Arbeitslohn, Steuern, Einquartierungen und dergl. angewendet. — Die Zahl, welche getheilt werden ſoll, heißt das Ganze oder die Theilungsſumme: und diejenigen Zahlen, in deren Verhältniß das Ganze getheilt werden ſoll, werden die Verhältnißzahlen oder der Theilungsfuß genannt. Die durch die Theilung entſtandenen Theile heißen: Antheile.

Anmerkung: Die Verhältnißzahlen können als Glieder ein und deſſelben Verhältniſſes beliebig erweitert und gekürzt werden.

2. Man nennt die Geſellſchaftsrechnung einfach, wenn die Antheile nur von einer Bedingung (z. B. nur von der Einlage, oder nur von der Zeitdauer u. ſ. w.) abhängig ſind; dagegen zuſammengeſetzt, wenn die Antheile von mehreren Bedingungen (z. B. von der Einlage und von der Zeitdauer) abhängig ſind, aus denen die einfachen Verhältnißzahlen erſt durch Multiplication oder Diviſion hergeſtellt werden müſſen.

Beiſpiele zur einfachen Geſellſchaftsrechnung.

a) Zu einem Geſchäft giebt A 3000, B 5000 und C 7000 Rubel. Bei Auflöſung des Geſchäfts ergiebt ſich ein Gewinn von 1800 Rbl.; wie viel erhält jeder vom Gewinn? — (Hier iſt die Zeitdauer gleich, und die Gewinn-Antheile verhalten ſich darum zu einander wie die Einlagen.)

b) A, B und C verdienten an einer gemeinſam ausgeführten Arbeit zuſammen 105 Rubel. Wie viel kam davon auf jeden, wenn A 15, B 16, C 14 Tage gearbeitet hat? — (Hier verhalten ſich die Antheile wie die Arbeitszeiten.)

Beiſpiele zur zuſammengeſetzten Geſellſchaftsrechnung.

a) A, B und C führen gemeinſchaftlich ein Geſchäft aus; A giebt dazu 2000 Rbl. auf 9 Monate, B 3000 Rbl. auf 7 Monate und C 5000 Rbl. auf 3 Monate. Sie gewinnen 1800 Rbl.; wie viel erhält jeder vom Gewinn? — (Bei dieſer Aufgabe hängen die Antheile ſowohl von den Einlagen als auch von der Zeitdauer ab; und die einfachen Verhältnißzahlen müſſen hier durch Multiplication aus Einlage und Zeit beſtimmt werden.)

b) Drei Hausbeſitzer erhalten zuſammen 25 Soldaten Einquartierung. A erhält an Vergütung 11,25 Rbl. für 9 Tage, B bekommt 16 Rbl. für 8 Tage und C 21 Rbl. für 7 Tage. Wie viel Mann waren bei jedem Hausbeſitzer einquartiert worden? — (Bei dieſer Aufgabe ſind die Antheile, nämlich die Anzahl der Soldaten eines jeden Hausbeſitzers, ſowohl von der Größe der Vergütung, wie auch von der Zeitdauer abhängig. Um die einfachen Verhältnißzahlen herzuſtellen, muß man eine jede Entſchädigungsſumme durch die dabei gegebene Anzahl der Tage dividiren; denn die Antheile verhalten ſich wie die für einen Tag gezahlten Vergütungsſummen.)

3. Bei den allermeiſten Aufgaben der Geſellſchaftsrechnung iſt der Gang der Berechnung folgender: 1) man ermittelt die Verhältnißzahlen; 2) man addirt die Verhältnißzahlen; 3) man dividirt mit der Summe der Verhältnißzahlen in die Theilungsſumme; 4) man multiplicirt den ſo erhaltenen Quotienten der Reihe nach mit jeder einzelnen Verhältnißzahl. — Die auf ſolche Weiſe gefundenen Producte ſind die geſuchten Antheile.

VII. Durchſchnittsrechnung.

1. Die Durchſchnittsrechnung behandelt diejenigen Aufgaben, in denen der Mittel- oder Durchſchnittswerth (Qualität) einer ganzen Miſchung oder eines Beſtandtheils derſelben ermittelt werden ſoll.*)

2. Um Aufgaben der Durchſchnittsrechnung zu löſen, ſucht man den Geſammtwerth der gegebenen Quantitäten und berechnet hieraus den Werth der betreffenden Maß- oder Gewichtseinheit.

Beiſpiel a: Jemand miſcht 3 Sorten Wein unter einander, nämlich 25 Flaſchen à $1\frac{1}{2}$ Rbl., 15 Fl. à 80 Kop. und 20 Fl. à $1\frac{1}{5}$ Rbl. Wie hoch kommt 1 Flaſche der Miſchung?

Rechnung: 25 Fl. à 150 Kop. koſten 3750 Kop.
+ 15 „ à 80 „ „ 1200 „
20 „ à 120 „ „ 2400 „
60 Fl. koſten zuſammen 7350 Kop.
1 Fl. koſtet . . . . x Kop.

Reſultat: $x = \frac{7350}{60} = 122\frac{1}{2}$ **Kopeken.**

Beiſpiel b: A braucht 40 Pfd. Tabak à 25 Kop. Er nimmt dazu 25 Pfd. à 28 Kop. und den Reſt von einer geringeren Sorte; wie hoch kommt jedes Pfund der ſchlechteren Sorte?

---

*) Die Aufgaben der Durchſchnittsrechnung gehören im weiteren Sinne zur Miſchungsrechnung, bei der man ſie in den Aufgaben-Sammlungen zumeiſt verzeichnet findet.

Rechnung: 40 Pfd. à 25 Kop. koſten 1000 Kop.
— 25 „ à 28 „ „ 700 „
15 Pfd. koſten . . . . 300 Kop.
1 Pfd. koſtet . . . . x Kop.

Reſultat: $x = \frac{300}{15} =$ **20 Kopeken.**

VIII. Miſchungsrechnung.

1. Die Miſchungsrechnung behandelt im Allgemeinen ſolche Aufgaben, welche eine Miſchung verſchiedener Stoffe (Ingredienzien) nach gegebenen oder nach erſt zu beſtimmenden Verhältniſſen verlangen. In dem letzteren Falle wird die Miſchungsrechnung Alligationsrechnung genannt. — Die Stoffe, welche vereinigt werden ſollen, ſind die Beſtandtheile der Miſchung.

2. Wenn ſich die Stoffe ſo mit einander verbinden, daß eine gleichartige Maſſe entſteht, in welcher die einzelnen Beſtandtheile nicht mehr unterſchieden werden können, ſo nennt man das Ganze eine Miſchung. (Waſſer und Spiritus; Silber und Kupfer.) — Können dagegen die einzelnen Beſtandtheile in der Verbindung noch von einander unterſchieden werden, ſo nennt man das Ganze ein Gemenge. (Gerſte und Hafer.)

3. Bei jeder Miſchung und bei jedem Gemenge muß man außer der Menge oder Quantität auch die Güte oder Qualität der mit einander verbundenen Stoffe berückſichtigen. Erſtere wird durch die Angabe der Maße und Gewichte, letztere ſehr häufig durch Angabe des Preiſes (bei Gold- und Silber-Miſchungen durch die ſogenannte Probe) beſtimmt.

4. Silber und Gold werden faſt niemals rein verarbeitet; beide erhalten zumeiſt einen Zuſatz von Kupfer. Unvermiſchtes Silber und Gold heißt: feines Silber und feines Gold. Eine Miſchung von Silber oder Gold mit einem anderen Metall heißt eine Legirung.

5. Mit dem Ausdruck Feingewicht wird das Gewicht des Goldes oder Silbers, welches in einer Legirung enthalten iſt, bezeichnet. Das Gewicht des Kupfers, welches mit Gold oder Silber legirt iſt, nennt man Zuſatz, das Gewicht der ganzen Maſſe heißt: Bruttogewicht. Wenn z. B. eine Legirung aus 75 Sltk. Silber und 5 Sltk. Kupfer beſteht, ſo iſt das Bruttogewicht = 80 Sltk, das Feingewicht = 75 Sltk. und der Zuſatz = 5 Sltk. — Die Qualität der Legirung wird durch den Feingehalt bezeichnet; derſelbe giebt an, in welchem Verhältniß Gold oder Silber mit dem Kupfer vermiſcht iſt.

6. Will man den Feingehalt oder die Qualität einer Legirung bezeichnen, ſo giebt man die ſogenannte Probe der Miſchung an, d. h. man ſagt, wie viel Solotnik fein Silber oder Gold in 1 Pfunde, oder wie viel Doli fein Silber oder Gold in 1 Solotnik, oder überhaupt, wie viel Gewichtstheile fein Silber oder Gold in 96 eben ſolchen Gewichtstheilen der Legirung enthalten ſind. Z. B. Drei Pfund Silber von der vierundachtziger Probe heißt: das Bruttogewicht beträgt 3 Pfund, und jedes Pfund der Miſchung enthält 84 Sltk. fein Silber und demnach 12 Sltk. Zuſatz. Ferner: 4 Solotnik Gold von der 80er Probe heißt: das Miſchungsquantum (Bruttogewicht) wiegt 4 Solotnik, und jedes Solotnik deſſelben enthält 80 Doli fein Gold und demnach 16 Doli Zuſatz.

7. In früherer Zeit war in Deutſchland die Mark das Silber- und Goldgewicht; ſie wurde, je nachdem Silber oder Gold in Berechnung kam, verſchieden eingetheilt, nämlich in 16 Loth Silber und in 24 Karat Gold. Fein Silber nannte man 16löthig und fein Gold 24karatig; war alſo z. B. eine Legirung 13löthig, ſo enthielt jede Mark derſelben 13 Loth fein Silber und 3 Loth Zuſatz. — Im Jahre 1858 wurde ſtatt der Mark das Pfund als Silber- und Goldgewicht eingeführt. Zur Beſtimmung des Feingehaltes der Silber- oder Goldlegirungen wird das Pfund in Tauſendtheile eingetheilt. Enthält eine Silberlegirung in 1000 Gewichtstheilen 800 Gewichtstheile fein Silber und 200 ſolcher Gewichtstheile Zuſatz, ſo ſagt man: Der Feingehalt der Legirung iſt 800; oder auch: die Legirung enthält 800-theiliges Silber.

8. Die Güte des Spiritus wird nach Procenten beſtimmt, d. h. es wird angegeben, wie viel Theile (Grade) Alkohol in 100 Theilen (Graden) Spiritus enthalten ſind.

9. Die Aufgaben der Miſchungsrechnung zerfallen in zwei Hauptgruppen, je nachdem die Verhältnißzahlen, nach welchen die einzelnen Beſtandtheile mit einander verbunden werden ſollen, angegeben ſind oder erſt gefunden werden müſſen.

Die Aufgaben der erſten Hauptgruppe (einfache Miſchungsrechnung), bei denen alſo die Verhältnißzahlen gegeben ſind, werden ebenſo berechnet, wie die Aufgaben der Geſellſchaftsrechnung. (Siehe Seite 65, Nr. 3.)

Beiſpiel: Eine Compoſition beſteht aus 8 Theilen Gold, 14 Theilen Silber und 17 Theilen Kupfer. Wie viel Solotnik kommen auf jeden Beſtandtheil, wenn die ganze Maſſe $68\frac{1}{4}$ Sltk. ſchwer iſt?*)

Rechnung: Gold $8 \times 1\frac{3}{4}$ Sltk. $= $ **14 Sltk.**
Silber $14 \times 1\frac{3}{4}$ „ $= $ **$24\frac{1}{2}$ Sltk.**
Kupfer $17 \times 1\frac{3}{4}$ „ $= $ **$29\frac{3}{4}$ Sltk.**

$$39 \mid 68\tfrac{1}{4}\ \text{Sltk.} \mid 1\tfrac{3}{4}\ \text{Sltk.}$$

$$\frac{39}{29\frac{1}{4}} = \frac{117}{4\ .\ 39} = \tfrac{3}{4}.$$

Erklärung: Die ganze Miſchung zerfällt in $8 + 14 + 17 = 39$ Theile. Wenn aber $68\frac{1}{4}$ Sltk. $= 39$ Theile, ſo kommen auf 1 Theil $= 1\frac{3}{4}$ Sltk. Kommen aber auf 1 Theil $= 1\frac{3}{4}$ Sltk., ſo kommen auf 8 Theile auch $8 \times 1\frac{3}{4} = 14$ Sltk.; und auf 14 Theile kommen $14 \times 1\frac{3}{4} = 24\frac{1}{2}$ Sltk.; und auf 17 Theile kommen $17 \times 1\frac{3}{4} = 29\frac{3}{4}$ Sltk.

10. Die Miſchungs-Aufgaben der zweiten Hauptgruppe, bei denen die Verhältnißzahlen gefunden werden müſſen, gehören der ſogenannten Alligationsrechnung an. Um dergleichen Aufgaben zu berechnen, ſucht man zunächſt die Qualitätsunterſchiede**) und vertauſcht dieſelben mit einander. Die ſo mit einander vertauſchten Qualitätsunterſchiede ſind die Verhältnißzahlen für die einzelnen Beſtandtheile der Miſchung; die weitere Berechnung erfolgt wie bei den Aufgaben der Geſellſchaftsrechnung. — Man kann alſo für die Aufgaben der Alligationsrechnung kurz folgende Rechenregel aufſtellen: Man miſcht im umgekehrten Verhältniß der Qualitätsunterſchiede. Oder mit anderen Worten: Der Unterſchied zwiſchen der Qualität der mittleren und der geringeren Sorte giebt die Verhältnißzahl für die beſſere Sorte; und der Unterſchied zwiſchen der Qualität der mittleren und der beſſeren Sorte giebt die Verhältnißzahl für die geringere Sorte.

Beiſpiel a: Ein Kaufmann ſoll 150 Pfd. Kaffee à 45 Kop. liefern. Er hat aber nur Kaffee zu 48 Kop. und zu 43 Kop. das Pfund und will aus dieſen beiden Sorten die gewünſchte Mittelſorte herſtellen; wie viel Pfund muß er von jeder Sorte nehmen?

---

*) Bemerkung: Die Reſultate der Miſchungsrechnung ſtimmen ſelten mit der Erfahrung überein. Miſcht man z. B. 7 Pfd. Kupfer und 3 Pfd. Zink, ſo wiegt die Miſchung nicht 10 Pfd., ſondern etwas weniger.

**) Die Zahlen, welche den Unterſchied ſowohl zwiſchen der Qualität der theuren und mittleren Sorte, wie auch zwiſchen der billigeren und mittleren Sorte angeben, heißen Qualitätsunterſchiede. Im folgenden Beiſpiel a heißen die Qualitätsunterſchiede 3 und 2; im Beiſpiel b: 6 und 14 oder gehoben 3 und 7.

Rechnung:	x Pfd. à 48 Kop.	3 Kop.	2
	y „ à 43 „	2 „	3
	150 Pfd. à 45 Kop.		5 Theile = 150 Pfd.
			1 Theil = 30 Pfd.

Reſultat: 2 × 30 Pfd. = **60 Pfd.** à 48 Kop.
3 × 30 Pfd. = **90 Pfd.** à 43 Kop.

Oder auch ſo: Beſſere Sorte . . 48 ╲╱ 3 | 2
Mittelſorte . . . 45
Schlechtere Sorte . 43 ╱╲ 2 | 3
5 Th. = 150 Pfd.
1 Th. = 30 Pfd.

Reſultat: 2 × 30 Pfd. = **60 Pfd.** à 48 Kop.
3 × 30 Pfd. = **90 Pfd.** à 43 Kop.

Beiſpiel b: Wie viel Solotnik Gold von der 70er Probe muß man zu 91 Solotnik von der 90er Probe hinzuſchmelzen, um eine Legirung von der 84er Probe zu erhalten?

		2		
Rechnung:	91 Sltk. à 90 Doli	6	3	7 Theile = 91 Sltk.
	x „ à 70 „	14	7	3 „ = x „
	à 84 Doli			

Reſultat: $\frac{91\ .\ 3}{7}$ = **39 Solotnik** à 70er Probe.

Oder auch ſo: Beſſere Sorte . 90 ╲╱ $\overset{2}{6}$ | 3 | 7 Th. = 91 Slk.
Mittelſorte . . 84
Schlechtere Sorte 70 ╱╲ 14 | 7 | 3 „ = x „

Reſultat: $\frac{91\ .\ 3}{7}$ = **39 Solotnik** von der 70er Probe.

Sechſtes Kapitel. Anhang: Von der Wurzelausziehung.

I. Ausziehung der Quadratwurzel.

1. Wiederhole: Erſtes Kapitel III, Nr. 6; ſiehe Seite 10.

2. $1^2=1$ $4^2=16$ $7^2=49$ $10^2=100$
$2^2=4$ $5^2=25$ $8^2=64$ $11^2=121$
$3^2=9$ $6^2=36$ $9^2=81$ $12^2=144$.

3. Das Quadrat einer einſtelligen Zahl hat 1 bis 2 Ziffern;
" " " zweiſtelligen " " 3 " 4 " ;
" " " dreiſtelligen " " 5 " 6 " ;
u. ſ. w. u. ſ. w.

4. Die Quadratwurzel aus einer 1 bis 2 ſtell. Zahl hat 1 Ziffer;
" " " " 3 " 4 " " " 2 Ziffern;
" " " " 5 " 6 " " " 3 "
u. ſ. w. u. ſ. w.

5. Betrachtet man die zweizifferige Zahl 34 als eine Summe aus 30 + 4 und erhebt man dieſe Summe ins Quadrat, ſo erhält man $30^2 + 2(30.4) + 4^2$; nämlich:

$$\begin{array}{rl} (30+4)^2 = & (30+4) \\ & \times(30+4) \\ \hline & 30.30+30.4 \\ & \qquad +30.4+4.4 \\ \hline \end{array}$$

Das iſt $= 30^2 + 2(30.4) + 4^2$.

6. Bezeichnet man die Zehner einer zweiſtelligen Zahl mit a und die Einer mit b, ſo iſt a + b das Bild einer zweiſtelligen Zahl; und das Quadrat derſelben iſt: $a^2 + 2ab + b^2$. — Es iſt *alſo das Quadrat einer aus zwei Theilen beſtehenden Zahl gleich dem Quadrat des erſten Theiles, plus dem doppelten Product aus dem erſten und zweiten Theil, plus dem Quadrate des zweiten Theils.*

7. *Aufgabe:* Wie heißt die Quadratwurzel aus 1156?

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{11} & 56 = 34 \\ 9 & \\ \hline 6_4 & 256 \\ & 256 \end{array}$$

Erläuterung: Man theilt den Radicanden von rechts nach links in *zweizifferige Klaſſen*, wobei indeß die äußerſte Klaſſe links auch einzifferig ſein kann. *Die Wurzel muß ſo viel Ziffern haben, als Klaſſen entſtehen.* — Die Zahl 1156 iſt das Quadrat einer zweiſtelligen Zahl; ſie enthält alſo $a^2 + 2ab + b^2$. Zuerſt beſtimmt man die Wurzel aus 11; das iſt 3 (= a). Das Quadrat von 3 iſt 9, und dies von 11 abgezogen, giebt als Reſt 2. An dieſen Reſt reiht man die Ziffern der nächſten Klaſſe (56) an und erhält 256; dieſe Zahl enthält noch $2ab + b^2$. Um b zu finden, dividirt man mit 2a, alſo mit 2 × 3 oder 6 in die beiden erſten Ziffern der Zahl 256, alſo in 25 (niemals darf man die letzte Ziffer rechts zum Dividendus hinzunehmen), und man erhält als Einer-Wurzel die Zahl 4 (= b). Dieſe 4 ſetzt man in die Einerſtelle der Wurzel, aber zugleich auch rechts neben den Diviſor 6 (alſo 6_4); multiplicirt man jetzt 4 × 64, ſo erhält man nicht nur 2ab, ſondern zugleich auch b^2, alſo in Ganzen $2ab + b^2$, was ja in 256 enthalten ſein ſollte.

8. Aufgabe: Wie heißt die Quadratwurzel aus $\sqrt{60516}$?

$\sqrt{6|05|16} = 246$

4

$4_4 \mid 205$

$\mid 176$

$48_6 \mid 2916$

$\mid 2916$

Erläuterung: Iſt der Radicand 5 oder 6ſtellig, ſo iſt die Wurzel 3ſtellig. Zuerſt ſucht man aus 605 die beiden erſten Ziffern (Hunderter und Zehner) der Wurzel, wie unter Nr. 7 gezeigt worden; man erhält alſo in der Wurzel 24, und als Reſt bleibt 29 übrig. An dieſen Reſt reiht man die nächſt niedere Klaſſe (16) und erhält alſo die Zahl 2916. Nun betrachtet man die Wurzelziffern 24 als a und ſucht wiederum b, indem man mit 2a oder 48 in 291 dividirt; das geht 6 mal. Dieſe 6 ſetzt man in die Wurzel neben 4, aber auch neben den Diviſor 48; u. ſ. w.

9. Hat der Radicand mehr als 6 Ziffern, ſo ſucht man erſt wie unter Nr. 8 die drei erſten Wurzelziffern; hat man dieſe gefunden, ſo betrachtet man alle drei zuſammen als a und verfährt alsdann, b ſuchend, in bekannter Weiſe.

10. Wenn die Quadratwurzel aus einem Decimalbruch gezogen werden ſoll, ſo kommt der erſte Theilungsſtrich dahin, wo das Komma ſteht; von dieſem Strich werden nun nach links die Ganzen, und nach rechts die Decimalen in zweizifferige Klaſſen getheilt. Fehlt bei den Decimalen zur letzten Klaſſe eine Ziffer, ſo wird dafür eine Null hingeſetzt (Warum?). — Hierauf zieht man die Wurzel wie bei ganzen Zahlen aus und ſetzt das Komma in die Wurzel, ſobald man mit dem Ausziehen der Wurzelziffern aus den Ganzen fertig iſt.

11. Hat der Decimalbruch, aus welchem die Wurzel gezogen werden ſoll, 0 Ganze, ſo erhält auch die Wurzel 0 Ganze; und finden ſich in der nächſten oder in einigen der nächſten Klaſſen lauter Nullen, ſo iſt auch für jede einzelne dieſer Klaſſen in die Wurzel eine Null zu ſetzen, ſo daß man die eigentliche Rechnung nicht früher als bei derjenigen Klaſſe beginnt, welche eine geltende Ziffer enthält. Z. B. Wurzel aus 0,00001369 = 0,0037.

12. Unter den ganzen Zahlen ſind diejenigen, die ſich in zwei gleiche Factoren zerlegen laſſen, vollkommene Quadratzahlen; z. B. $1 = 1 . 1$; $16 = 4 . 4$; $49 = 7 . 7$; $169 = 13 . 13$; u. ſ. w. — Nur wenn der Radicand eine vollkommene Quadratzahl iſt, läßt ſich aus ihm eine genaue Wurzel ziehen. — Solche Wurzeln, welche weder durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen genau ausgedrückt werden können, nennt man irrationale Wurzeln.

13. Wenn man aus einem Radicanden, welcher keine vollkommene Quadratzahl iſt, eine irrationale Wurzel ziehen ſoll, ſo hängt man dem Reſt, welcher nach Herabſetzung aller Ziffern des Radicanden geblieben iſt, Nullen an und ebenſo allen folgenden Reſten und ſetzt die Rechnung beliebig weit auf die gewöhnliche Weiſe fort.

14. Wenn man aus einem gemeinen Bruche die Wurzel ziehen ſoll, ſo thut man zumeiſt am beſten, wenn man denſelben in einen Decimalbruch verwandelt und aus dieſem die Wurzel zieht. — Nur wenn der Zähler und der Nenner des gemeinen Bruches vollkommene Quadratzahlen ſind, zieht man die Wurzel ſowohl aus dem Zähler, wie auch aus dem Nenner; z. B.

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}.$$

II. Ausziehung der Kubikwurzel.

1. Wiederhole: Erſtes Kapitel III, Nr. 6, ſiehe Seite 10.

2. $1^3 = 1$ $4^3 = 64$ $7^3 = 343$
$2^3 = 8$ $5^3 = 125$ $8^3 = 512$
$3^3 = 27$ $6^3 = 216$ $9^3 = 729$.

3. Der Kubus einer 1ſtelligen Zahl hat 1—3 Ziffern;
" " " 2 " " " 4—6 " ;
" " " 3 " " " 7—9 " ;
u. ſ. w. u. ſ. w.

4. Die Kubikwurzel aus einer 1—3ſtell. Zahl hat 1 Ziffer;
" " " " 4—6 " " " 2 Ziffern;
" " " " 7—9 " " " 3 " ;
u. ſ. w. u. ſ. w.

5. Wenn man die zweizifferige Zahl 34 als eine Summe aus $30 + 4$ betrachtet und dieſe Summe in die dritte Potenz erhebt, ſo erhält man: $30^3 + 3(30^2 . 4) + 3(30 . 4^2) + 4^3$. — Wenn man nämlich die Summe $30 + 4$ erſt mit ſich ſelbſt multiplicirt, alſo ins Quadrat erhebt, ſo erhält man (ſiehe Seite 70) $30^2 + 2(30 . 4) + 4^2$; multiplicirt man nun dieſes Reſultat wieder noch mit $30 + 4$, ſo erhält man:

$$\begin{array}{r}
30^2 + 2(30 . 4) + 4^2 \qquad\qquad\qquad \\
30 + 4 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
30^3 + 2(30^2 . 4) + (30 . 4^2) \qquad\quad \\
+ \quad (30^2 . 4) + 2(30 . 4^2) + 4^3 \\
\hline
\end{array}$$

Das iſt $= 30^3 + 3(30^2 . 4) + 3(30 . 4^2) + 4^3$.

6. Wenn man die Zehner irgend einer zweiſtelligen Zahl mit a und die Einer mit b bezeichnet, ſo iſt $a + b$ das Bild einer zweiſtelligen Zahl; und der Kubus oder die dritte Potenz derſelben iſt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Nach dieſer Formel wird die Kubikwurzel aus dem Radicanden gezogen. — Es iſt alſo der Kubus einer aus zwei Theilen beſtehenden Zahl gleich dem Kubus des erſten Theiles, plus dem 3fachen Quadrate des erſten Theiles mal dem zweiten Theile, plus dem 3fachen erſten Theile mal dem Quadrate des zweiten Theiles, plus dem Kubus des zweiten Theiles.

7. Aufgabe: Wie heißt die Kubikwurzel aus 79507?

Erſte Rechnung.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt[3]{79\,|\,507} = 43 \\ a^3 = & 64 \\ 3a^2 = 48 \text{ in } & \overline{155} \\ 3a^2b = & 144 \\ & \overline{110} \\ 3ab^2 = & 108 \\ & \overline{27} \\ b^3 = & \underline{27} \end{array}$$

Zweite Rechnung.

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{79\,|\,507} = 43 & \\ 64 & \\ 48\,|\,\overline{15507} & \\ 144 & \left.\right\} \text{addirt und} \\ 108 & \quad \text{von 15507} \\ \underline{27} & \quad \text{abgezogen.} \end{array}$$

Erläuterung zur erſten Rechnung: Man theilt den Radicanden von rechts nach links in dreizifferige Klaſſen, wobei indeß die äußerſte Klaſſe links auch nur eine oder zwei Ziffern haben kann. Die Wurzel einer vollkommenen Kubikzahl muß ſo viel Ziffern haben, als Klaſſen entſtanden ſind. — Die Zahl 79507 iſt der Kubus einer zweiſtelligen Zahl und enthält $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Zuerſt beſtimmt man die Kubikwurzel aus 79 ($= a^3$), das iſt 4 ($= a$). Der Kubus von 4 iſt 64; dieſe 64 von 79 abgezogen, giebt den Reſt 15. An dieſen Reſt reiht man die erſte Ziffer der nächſtniederen Klaſſe und man erhält 155. Dieſe Zahl enthält $3a^2b$; um b zu finden, muß man mit $3a^2$, alſo mit 3 . 4 . 4 oder 48, in 155 dividiren; dies giebt die Ziffer 3 ($= b$) für die Einerſtelle der Wurzel. Nun multiplicirt man 48×3, d. i. 144 ($= 3a^2b$) und zieht das Product von 155 ab; bleibt Reſt 11. An dieſen Reſt reiht man die zweite Ziffer jener Klaſſe und man erhält die Zahl 110; hiervon zieht man $3ab^2$, alſo 3 . 4 . 3 . 3 oder 108 ab, und es bleibt als Reſt die Ziffer 2 übrig. An dieſen Reſt reiht man nun die dritte Ziffer der bekannten Klaſſe; und man erhält die Zahl 27, von der man b^3, alſo 3 . 3 . 3 oder 27, abzieht.

Die zweite Berechnung iſt etwas kürzer, und das Verfahren aus dem gegebenen Beiſpiele leicht zu erkennen.

8. Aufgabe: Wie heißt die Kubikwurzel aus 82312875?

Erſte Rechnung:

$$\begin{array}{r}
\sqrt{82\,|\,312\,|\,875} = 435 \\
a^3 = 64 \\
3a^2 = 48\,|\,183 \\
3a^2b = 144 \\
391 \\
3ab^2 = 108 \\
2832 \\
b^3 = 27 \\
3a^2 = 5547\,|\,28058 \\
3a^2b = 27735 \\
3237 \\
3ab^2 = 3225 \\
125 \\
b^3 = 125
\end{array}$$

Erläuterung: Nachdem man die beiden erſten Ziffern (43) der Wurzel, wie unter Nr. 7 gezeigt worden, gefunden hat, betrachtet man ſie als a und ſucht wieder b, indem man mit $3a^2$ (alſo mit 3 . 43 . 43 oder 5547) in den verbliebenen Reſt nebſt erſter Ziffer der folgenden Klaſſe (alſo in 28058) dividirt; u. ſ. w.

Zweite Rechnung; etwas kürzer:

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{82\,|\,312\,|\,875} = 435 \\
\quad 64 \\
48\,|\,18312 \\
\quad \left.\begin{array}{r}144 \\ 108 \\ 27\end{array}\right\} \text{addirt} = 15507\text{; dieſe Zahl von 18312 abgezogen, giebt 2805; daneben die folgende Klaſſe geſetzt.} \\
5547\,|\,2805875 \\
\quad \left.\begin{array}{r}27735 \\ 3225 \\ 125\end{array}\right\} \text{addirt} = 2805875.
\end{array}$$

9. Iſt der Radicand, aus welchem man die Kubikwurzel ziehen ſoll, ein Decimalbruch oder eine unvollkommene Kubikzahl oder ein gemeiner Bruch, ſo verfährt man ähnlich wie bei Ausziehung der Quadratzahl; nur darf man dabei nicht vergeſſen, daß jede Klaſſe, mit Ausnahme der äußerſten links, drei Ziffern enthalten muß.

* * *

Reductionstabelle.

I. Münzen.

1 Rubel = 100 Kopeken.
= 50 Zweikopeken⸗Stücke.
= 20 Fünfkopeken⸗Stücke.
= 10 Zehnkopeken⸗Stücke.
= 5 Zwanzigkopeken⸗Stücke.
1 Imperial = 10 Rubel 30 Kopeken Silber.
1 Halbimperial = 5 Rubel 15 Kopeken Silber.

---

1 Mark = 100 Pfennige (Deutſches Reich).
1 öſterreichiſcher Gulden = 100 Neukreuzer.
1 Franc = 100 Centimes (Frankreich).
1 Pfund Sterling = 20 Shilling } England.
1 Shilling = 12 Pence }

II. Längen⸗ und Flächenmaße.

1 Meile = 7 Werſt.
1 Werſt = 500 Saſhen.
1 Saſhen = 3 Arſchinen.
1 Arſchine = 16 Werſchock.

1 Faden (Saſhen) = 7 Fuß.
1 Fuß (′) = 12 Zoll.
1 Zoll (″) = 12 Linien.
3 Arſchinen = 4 Ellen.

1 Kreisumfang = 360 Grade (360°).
1 Grad = 60 Minuten (60′).
1 Minute = 60 Secunden (60″).

---

1 Deſſjatine = 2400 □ Saſhen oder □ Faden.
1 □ Saſhen = 9 □ Arſchinen = 49 □ Fuß.
1 □ Fuß = 144 □ Zoll.
1 □ Werſt = $104\frac{1}{6}$ Deſſjatinen.

III. Getreide⸗ und Flüſſigkeitsmaße.

1 Tſchetwert = 8 Tſchetwerik = 2 Osmina.
1 Tſchetwerik = 8 Garnetz.

1 Rigaer Tonne = 2 Looſ à 6 Külmit à 9 Stoof.
1 Revaler Laſt = 24 Tonnen à 3 Looſ à 3 Külmit à 12 Stoof.

1 Botſchka (Tonne) = 40 Wedro.
1 Wedro (Eimer) = 10 Kruſchken.

IV. Gewichte.

1 Berkowetz = 10 Pud.
1 Pud = 40 Pfund.
1 Pfund = 96 Solotnik.
1 Solotnik = 96 Doli.

1 Schiffpfund = 20 Liespfund
1 Liespfund = 20 Pfund.
1 Pfund (℔) = 32 Loth.
1 Loth = 4 Quentchen.

V. Zähl- und Zeitmaße.

1 Ballen = 10 Ries.
1 Ries = 20 Buch.
1 Buch = 24 Bog. Schreibp.
1 Buch = 25 Bog. Druckp.

1 Schck. = 5 Dtzd. = 60 Stck.
1 Dutzend = 12 Stück.
1 Schock = 4 Mandel.
1 Mandel = 15 Stück.

1 Jahr = 12 Monate = 52 Wochen = 365 (366) Tage.
1 Tag = 24 Stunden.
1 Stunde = 60 Minuten.
1 Minute = 60 Secunden.

Im gewöhnlichen Geſchäftsleben wird 1 Jahr zu 12 Monaten à 30 Tagen, oder zu 52 Wochen à 7 Tagen gerechnet.

* * *

Druck von Julius Klinkhardt in Leipzig.