

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Ravel Riik
**ÄRITSÜKLI INDEKSI HINDAMINE KALMANI
FILTRIGA**

Finants- ja kindlustusmatemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Raul Kangro

Tartu 2019

Äritsükli indeksi hindamine Kalmani filtriga

Magistritöö

Ravel Riik

Lühikokkuvõte. Vastava magistritöö eesmärk on rakendada Kalmani filtrit ning tuletada vastava meetodiga äritsükli indeks. Meetodi sobivust testitakse kahe erineva makromajanduse aegrea abil.

CERCS teaduseriala. P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmate-maatika.

Märksõnad. Aegridade analüüs, Kalmani filter, Riskianalüüs, Pangandus

Business Cycle Index Evaluation with Kalman Filter

Master's thesis

Ravel Riik

Abstract. The purpose of this Master's thesis is to apply Kalman filter to derive the business cycle index. Derived method is later assessed by two different macro-economic time series.

CERCS research specialisation. P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics.

Keywords. Analysis of time series, Kalman filter, Risk analysis, Banking

Sisukord

| | |
|---|-----------|
| Sissejuhatus | 4 |
| 1 Mõisted ja terminoloogia | 5 |
| 2 Metodoloogia | 7 |
| 2.1 Varjatud komponentidega mudel | 7 |
| 2.2 Kalmani filter | 9 |
| 2.2.1 Silutud Kalmani filter | 13 |
| 2.2.2 Prognoosivead | 13 |
| 2.3 Mudeli headuse hindamine | 16 |
| 3 Metoodika | 19 |
| 3.1 Mertoni mudeli ülesehitus | 20 |
| 3.2 Sesoonne komponent | 23 |
| 3.3 Stohhastiline tsükkel | 25 |
| 3.4 Lokaalne lineaarne trend | 29 |
| 3.5 Täielik struktuurne mudel | 30 |
| 4 Näited | 33 |
| 4.1 Eesti kodulaenude portfell | 33 |
| 4.2 Rootsi väikeettevõtete portfell | 40 |
| Kokkuvõte | 45 |
| Kirjandus | 46 |

Sissejuhatus

Finantsinstrumentide standardi IFRS (rahvusvaheline finantsaruandlusstandard) 9 kehtestamine 2018. aasta alguses on suurendanud huvi majandusaegride perioodilise komponendi vastu finantssektoris, sest vastav raamistik nõuab, et kliendi kahjude hindamisel tuleb arvestada ka vastava segmendi/portfelli majandusfaktoriga, kus vastav klient tegutseb. Juhul kui klient peaks olema eraisik ning omab kodulaenulepingut tuleb vastava kliendi varade hindamisel arvestada vastava segmendi (st kodulaenu portfelli) globaalset (st riigi tasemel) olukorda. Esiteks aitab vastav teadmine finantsettevõttel korrigeerida enda laenukahjude katte reservi tänasel ajahetkel, mille läbi vähendada enda pankrotistumise võimalust. Lisaks saavad finantsaettevõtted võrrelda, kuidas läheb riigis üldiselt vastavas segmendis ning saada aimu, kui hea kvaliteediga on finantsettevõtte segmenti kuuluvad kliendid globaalsel tasemel.

Majandusteadlased pole jõudnud konsensusele, et enamus makromajanduse aegread sisaldavad majandustsükleid, mis reeglina kestavad 40-60 aastad ning mida tuntakse kui Kondratjevi lainetena. Ühed levinuvad põhjused on väheste andmete hulk ning esinenud pole piisavalt majanduskriise, mis oleks tervet maailma mõjutanud piisavalt. Samas usutakse, et kõik makromajanduse aegread sisaldavad endas väiksemaid majandustsükleid, mille pikkus pole rangelt defineeritud, aga jääb umbkaudselt vahemikku 15-20 aastat. Vastavaid regulaarse perioodiga tsükleid nimetatakse äritsükliteks.

Käesoleva magistritöö eesmärk on tuletada meetod, millega on võimalik äritsükli seisundit kirjeldav indeks tuletada, mis sobiks IFRS 9 konteksti.

Töö on jaotatud neljaks peatükiks:

- i. Esimeses peatükis on toodud vajalikud mõisted ja terminid, mida kasutatakse järgnevatel peatükkides.
- ii. Teine peatükk on jaotatud alapeatükkideks, kus kirjeldatakse, mis on varjatud komponentidega mudel ja Kalmani filter. Viimases alapeatükis on välja toodud mudeli headuse hindamise mõõdikud, mida kasutatakse empiiriliste tulemuste juures.
- iii. Kolmandas peatükis kirjeldatakse lõputöös käsitlevat meetodikat, mille peale lõputöö empiirilised tulemused tuginevad.
- iv. Neljandas peatükis esitatakse kolmandas peatükis formuleeritud meetodiga rakendamisel saadud tulemusi.

1 Mõisted ja terminoloogia

Selles peatükis toome välja olulisemad mõisted ning abitulemused, mida vajame järgmistes peatükkides.

Definitsioon 1.1. Aegreaks y nimetatakse vaatluste jada, mis on ajas järjestatud:

$$y = (y_1, \dots, y_T), \quad T \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Järgnevalt eeldame alati, et aegrea väärtused on realisatsioonid normaaljaotusest

$$Y = (Y_1, \dots, Y_T), \quad Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad \forall i \in \{1, \dots, T\}. \quad (1.2)$$

Definitsioon 1.2. Olgu $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}}$ juhuslik protsess. Nihkeoperaator B defineeritakse järgmiselt

$$BZ_t = Z_{t-1} \quad (1.3)$$

ning

$$B^0 Z_t = Z_t. \quad (1.4)$$

Nihkeoperaatori järjest rakendamisel saame:

$$B^\tau Z_t = Z_{t-\tau}. \quad (1.5)$$

Definitsioon 1.3. Olgu juhuslike vektorite \mathbf{x} ja \mathbf{y} mõõtmed vastavalt $n \times 1$ ja $m \times 1$. Juhuslike vektorite kovariatsioonimaatriksiks nimetatakse maatriksit

$$\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}\mathbf{y}') - E\mathbf{x}(E\mathbf{y})', \quad (1.6)$$

kus E tähistab keskväärtuse leidmise operaatorit. Juhul kui $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, siis kasutatakse kovariatsioonimaatriksi tähistuseks $\text{Var}(\mathbf{x}) := \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Lemma 1.1. Olgu vektor $\mathbf{z} = [\mathbf{x} \ \mathbf{y}]'$, kus \mathbf{x} ja \mathbf{y} on juhuslikud vektorid, mitmemõõtmelise normaaljaotusega $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kus

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} E(\mathbf{x}) \\ E(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) & \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{cov}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) & \text{cov}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Sel juhul on vektori \mathbf{x} tinglik jaotus tingimusel, et \mathbf{y} on teada, normaaljaotus keskväärtusega

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} = \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (1.8)$$

ja kovariatsioonimaatriksiga

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}|\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}. \quad (1.9)$$

Definitsioon 1.4. Olgu antud T vaatlust, y_1, \dots, y_T , mis vastavad sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste väärtustele. Olgu vastava jaotuse parameetrite vektor $\boldsymbol{\Psi}$, siis tõepärafunktsioon pideva jaotuse korral avaldub kujul:

$$L(y; \boldsymbol{\Psi}) = \prod_{t=1}^T p(y_t; \boldsymbol{\Psi}), \quad (1.10)$$

kus $p(y; \boldsymbol{\Psi})$ on jaotuse tihedusfunktsioon.

Märkus 1.1. Üldisemalt, T -mõõtmelise pideva juhusliku vektori tõepärafunktsiooni (1.10) väärtus avaldub kujul

$$L(y; \Psi) = \prod_{t=1}^T p(y_t | y_{1:t-1}; \Psi), \quad (1.11)$$

kus $y_{1:t-1} = \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ ning $p(y_t | y_{1:t-1})$ on tinglik tihedusfunktsioon. Logaritmiline tõepärafunktsioon (1.11) avaldub kujul:

$$\log L = \ln\left(\prod_{t=1}^T p(y_t | y_{1:t-1})\right) = \sum_{t=1}^T \ln(p(y_t | y_{1:t-1})). \quad (1.12)$$

□

Definitsioon 1.5. Teist järku nõrgalt statsionaarse juhusliku protsessi $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ võimsusspektri nimetatakse suurust:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) \exp(-i\lambda\tau), \quad \lambda \in [0, \pi], \quad (1.13)$$

kus $\gamma(\tau)$ on autokovariatsioonifunktsioon, mis on defineeritud järgmiselt:

$$\gamma(\tau) = \text{cov}(Z_t, Z_{t+\tau}), \quad \tau \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Definitsioon 1.6. Teist järku nõrgalt statsionaarse juhusliku protsessi Z võimsusspekter hinnatakse läbi relisatsiooni z valimi spektri, mis avaldub kujul:

$$I(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T y_t e^{-i\lambda_j t} \right|^2, \quad \lambda_j = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, \dots, T-1. \quad (1.15)$$

Definitsioon 1.7. Olgu antud maatriksid \mathbf{A} (mõõtmed $m \times n$) ja \mathbf{B} (mõõtmed $r \times s$), siis maatriksite otsekorrutis $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ on $mr \times ns$ mõõtmeline maatriks:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}], \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.16)$$

kus

$$a_{ij}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{ij}b_{11} & \cdots & a_{ij}b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij}b_{r1} & \cdots & a_{ij}b_{rs} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Definitsioon 1.8. Olgu antud maatriks \mathbf{A} (mõõtmed $m \times n$). Maatriksi vektoriseeritud operaator, $\text{vec}(\cdot)$, transformeerib maatriksi \mathbf{A} vektoriks:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = [a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n} \quad a_{21} \quad \cdots \quad a_{mn}]'. \quad (1.18)$$

Definitsioon 1.9. Skalaari λ nimetatakse mõõtmega $n \times n$ maatriksi \mathbf{A} omaväärtuseks, kui leidub $n \times 1$ mõõtmeline nullvektorist erinev vektor \mathbf{x} nii et:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.19)$$

kus \mathbf{I}_n on $n \times n$ mõõtmeline ühikmaatriks ja $\mathbf{0}$ on $n \times 1$ nullvektor. Võrrandit $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0$ nimetatakse karakteristlikuks võrrandiks ja selle võrrandi lahendid on maatriksi \mathbf{A} omaväärtused.

Märkus 1.2. Juhul kui maatriks \mathbf{A} on 2×2 mõõtmeline, siis maatriksi \mathbf{A} omaväärtused avalduvad kujul

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{4a_{12}a_{21} + (a_{11} - a_{22})^2} \right]. \quad (1.20)$$

□

Definitsioon 1.10. Olgu f funktsioon, kus on m erinevat parameetrit

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (1.21)$$

Hessi maatriksit \mathbf{H} nimetatakse funktsiooni f teist-järku osatuletiste maatriksiks:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

2 Metodoloogia

Käesoleva peatüki materjal tugineb allikale [1], juhul kui pole teisiti märgitud.

2.1 Varjatud komponentidega mudel

Varjatud komponentidega mudeli puhul eeldatakse, et meid huvitava süsteemi käitumine mingil ajamomendil sõltub selle seisundist, mis on kirjeldatav m - mõõtmelise vektoriga $\boldsymbol{\alpha}$ ning juhuslikust müra (mis võib mõjutada järgnevat seisundit). Samas seisund ise ei pruugi olla otseselt jälgitav, kuid meil on andmeid teatud suuruste kohta, mis otseselt sõltuvad süsteemi seisundist. Täpsemalt eeldame, et meil on igal ajamomendil N mõõtmistulemust kujul

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

mida nimetatakse mõõtmisvõrrandiks, kus \mathbf{y}_t on $N \times 1$ mõõtmeline vektor N erineva aegrea ajamomendile t vastavatest väärtustest. Vastavad vaatlused on ühendatud $m \times 1$ mõõtmelise vektoriga $\boldsymbol{\alpha}_t$, mida tuntakse kui olekuruumi vektorit. Lisaks \mathbf{Z}_t on $N \times m$ mõõtmeline maatriks, \mathbf{d}_t on $N \times 1$ mõõtmeline vektor ja $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ on $N \times 1$ mõõtmeline müra vektor, mille erinevatele ajamomentidele vastavad väärtused on omavahel sõltumatud, keskvärtus on 0 ja kovariatsioonimaatriks on \mathbf{H}_t ehk

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t. \quad (2.2)$$

Üldiselt pole olekuruumi vektori $\boldsymbol{\alpha}_t$ elemendid vaadeldavad. Eeldame, et need vastavad esimest järku Makrovi protsessile,

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.3)$$

mida nimetatakse üleminekuvõrrandiks, kus \mathbf{T}_t on $m \times m$ mõõtmeline maatriks, \mathbf{c}_t on $m \times 1$ mõõtmeline vektor, \mathbf{R}_t on $m \times g$ mõõtmeline maatriks ja $\boldsymbol{\eta}_t$ on $g \times 1$ mõõtmeline müra vektor, mille erinevatele ajamomentidele vastavad väärtused on omavahel sõltumatud, keskvärtus on $\mathbf{0}$ ja kovariatsioonimaatriks on \mathbf{Q}_t ehk

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{Q}_t. \quad (2.4)$$

Olekuruumi süsteemiks ehk varjatud komponentidega mudelit nimetatakse mudelit, mille moodustavad võrrandid (2.1) ja (2.3) ning kaks järgnevat eeldust:

1. juhuslik vektor $\boldsymbol{\alpha}_0$ on keskvärtusega \mathbf{a}_0 ja kovariatsioonimaatriksiga \mathbf{P}_0 , mis on teada ja fikseeritud ehk:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{a}_0, \quad \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{P}_0. \quad (2.5)$$

2. müra vektorid, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ja $\boldsymbol{\eta}_t$, on üksteisest sõltumatud igal ajaperioodil ning on sõltumatud ka algväärtusest:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\eta}_s') = 0, \quad s, t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

ja

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\alpha}_0') = 0, \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\alpha}_0') = 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.7)$$

Maatrikseid \mathbf{Z}_t , \mathbf{d}_t ja \mathbf{H}_t võrrandist (2.1) ja maatrikseid \mathbf{T}_t , \mathbf{c}_t ja \mathbf{Q}_t võrrandist (2.3) nimetatakse süsteemimaatriksiteks. Juhul kui pole teisiti öeldud, eeldatakse alati, et vastavad maatriksid pole stohhastilised. Süsteemimaatriksid võivad ajas deterministlikult (st kindlate, juhuslikkust mittesisaldavate valemite kohaselt) muutuda.

Juhul kui juhuslik vektor $\boldsymbol{\alpha}_0$ on fikseeritud ja teada, siis iga ajahetke t korral saab \mathbf{y}_t esitada algseisundi $\boldsymbol{\alpha}_0$ ja müravektorite $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_t$ lineaarkombinatsioonina.

Näide 2.1. Vaatleme teist järku autoregressiivset mudelit ehk AR(2) mudelit:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (2.8)$$

Varjatud komponentidega mudel avalduks kujul:

$$y_t = [1 \quad 0] \boldsymbol{\alpha}_t \quad (2.9a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_t, \quad (2.9b)$$

või

$$y_t = [1 \quad 0] \boldsymbol{\alpha}_t \quad (2.10a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_t. \quad (2.10b)$$

Süsteemimaatriksid \mathbf{Z}_t , \mathbf{H}_t , \mathbf{T}_t , \mathbf{R}_t ja \mathbf{Q}_t võivad sõltuda tundmatutest parameetritest ja peamine matemaatiline ülesanne on vastavaid tundmatuid parameetreid hinnata. Vastavalt näitele (2.1) on vaja hinnata dispersioon σ_ε^2 ning autoregressiivsed parameetrid ϕ_1 ja ϕ_2 . Tundmatud parameetrid kogutakse kokku $n \times 1$ vektorisse $\boldsymbol{\Psi}$, mida nimetatakse hüperparameetriks, mis määrab ära mudeli stohhastilised omadused. Näite (2.1) korral on

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

2.2 Kalmani filter

Järgnevalt eeldame, et $N = 1$. Juhul kui mudel on viidud varjatud komponentidega mudeli kujule (vt peatükk 2.1), on võimalik rakendada Kalmani filtrit. Kalmani filter on rekursiivne protseduur, mis aitab arvutada keskmise ruutvea mõttes optimaalseid hinnanguid ajapunktis t olekuruumi vektorile $\boldsymbol{\alpha}_t$ arvestades informatsiooni, mis on olemas ajahetkel t . Kalmani filter eeldab, et süsteemimaatriksid, \mathbf{a}_0 ja \mathbf{P}_0 on teada ning fikseeritud.

Eeldame edaspidi, et $\boldsymbol{\alpha}_t | \mathcal{Y}_t \sim N(\mathbf{a}_t, \mathbf{P}_t)$, kus \mathbf{a}_t tähistab $\boldsymbol{\alpha}_t$ optimaalset hinnangut ajahetkel t ning \mathbf{P}_t tähistab kovariatsioonimaatriksit:

$$\mathbf{a}_t = E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathcal{Y}_t), \quad \mathbf{P}_t = \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathcal{Y}_t), \quad \mathcal{Y}_t = \{Y_1, \dots, Y_t\}. \quad (2.12)$$

Järgnevalt kasutame võrrandit (2.3), et leida hinnang ja kovariatsioonimaatriks $\boldsymbol{\alpha}_{t+1}$ -le ajal t olemasolevat informatsiooni kasutades. Lahenduskäigus rakendame järgmiseid tõenäosusteooria tulemusi:

1. Olgu \mathbf{X} ja \mathbf{Y} mitmemõõtmelised juhuslikud suurused ning \mathbf{c} sobivate mõõtmetega reaalarvuliste elementidega maatriks. Kehtib

$$E(\mathbf{cX} | \mathbf{Y}) = \mathbf{c}E(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \quad (2.13a)$$

$$\text{Var}(\mathbf{cX} | \mathbf{Y}) = \mathbf{c} \text{Var}(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \mathbf{c}' \quad (2.13b)$$

2. Olgu \mathbf{X} , \mathbf{Y} ja \mathbf{Z} mitmemõõtmelised juhuslikud suurused. Kehtib

$$\mathbf{E}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}|\mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) + \mathbf{E}(\mathbf{Z}|\mathbf{Y}). \quad (2.14)$$

3. Olgu \mathbf{X} , \mathbf{Y} ja \mathbf{Z} sõltumatud mitmemõõtmelised juhuslikud suurused. Kehtib

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \quad \wedge \quad \text{Var}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{X}) \quad (2.15a)$$

$$\text{Var}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}|\mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{X}|\mathbf{Z}) + \text{Var}(\mathbf{Y}|\mathbf{Z}). \quad (2.15b)$$

4. Olgu \mathbf{Y} mitmemõõtmeline juhuslik suurus ja maatriks \mathbf{c} teada ja fikseeritud. Kehtib

$$\mathbf{E}(\mathbf{c}|\mathbf{Y}) = \mathbf{E}(\mathbf{c}) = \mathbf{c} \quad (2.16a)$$

$$\text{Var}(\mathbf{c}|\mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}. \quad (2.16b)$$

Saame

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{t+1|t} &:= \mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) = \mathbf{E}(\mathbf{T}_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{c}_{t+1} + \mathbf{R}_{t+1}\boldsymbol{\eta}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{T}_{t+1}\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}_t|\mathcal{Y}_t) + \mathbf{E}(\mathbf{c}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \mathbf{R}_{t+1}\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{T}_{t+1}\mathbf{a}_t + \mathbf{E}(\mathbf{c}_{t+1}) + \mathbf{R}_{t+1}\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}_{t+1}) \\ &= \mathbf{T}_{t+1}\mathbf{a}_t + \mathbf{c}_{t+1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ning

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+1|t} &:= \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) = \text{Var}(\mathbf{T}_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{c}_{t+1} + \mathbf{R}_{t+1}\boldsymbol{\eta}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{T}_{t+1}\text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_t|\mathcal{Y}_t)\mathbf{T}'_{t+1} + \text{Var}(\mathbf{c}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \mathbf{R}_{t+1}\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_{t+1}|\mathcal{Y}_t)\mathbf{R}'_{t+1} \\ &= \mathbf{T}_{t+1}\mathbf{P}_t\mathbf{T}'_{t+1} + \mathbf{R}_{t+1}\mathbf{Q}_{t+1}\mathbf{R}'_{t+1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Võrrandeid (2.17) ja (2.18) nimetatakse prognoosivalemiteks. Juhul kui uue vaatluse y_{t+1} informatsioon on kättesaadav, on võimalik olekuvektori $\boldsymbol{\alpha}_{t+1}$ hinnagut parandada. Esmalt kirjutame välja y_{t+1} tingliku keskväärtuse ja kovariatsioonimaatriksi, kasutades selleks võrrandit (2.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) &= \mathbf{E}(\mathbf{Z}_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1} + d_{t+1} + \varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{E}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \mathbf{E}(d_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \mathbf{E}(\varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t} + d_{t+1} \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) &= \text{Var}(\mathbf{Z}_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1} + d_{t+1} + \varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{Z}_{t+1}\text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t)\mathbf{Z}'_{t+1} + \text{Var}(d_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \text{Var}(\varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{Z}'_{t+1} + h_{t+1} =: f_{t+1}. \end{aligned} \quad (2.19b)$$

Järgmiseks rakendame lemmat (1.1), kus täiendavalt eeldame, et lemma jääb kehtima tingliku keskväärtuse ja kovariatsioonimaatriksi korral ning \mathbf{x} ja \mathbf{y} rollis on vastavalt $\boldsymbol{\alpha}_{t+1}$ ja y_{t+1} . Esmalt kirjutame muutujad kujul:

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{a}_{t+1|t} + (\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1|t}) \quad (2.20a)$$

$$y_{t+1} = \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t} + d_{t+1} + \mathbf{Z}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1|t}) + \varepsilon_{t+1} \quad (2.20b)$$

ning leiame tingliku keskvärtuse ja kovariatsioonimaatriksi:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ \mathbb{E}(y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{t+1|t} \\ \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t} + \mathbf{d}_{t+1} \end{bmatrix} \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) & \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ \text{cov}(y_{t+1}, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) & \text{Var}(y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{t+1|t} & \mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{Z}'_{t+1} \\ \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{P}'_{t+1|t} & \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{Z}'_{t+1} + h_{t+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21b)$$

Näitame, et kovariatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Sigma}$ avaldub tõesti kujul (2.21b). Selleks kasutame järgmiseid tõenäosusteooria tulemusi:

1. Olgu \mathbf{X} , \mathbf{Y} ja \mathbf{Z} mitmemõõtmelised juhuslikud suurused ning olgu maatriksid \mathbf{c} ja \mathbf{d} sobivate mõõtmetega reaalarvuliste elementidega maatriksid. Kehtib

$$\text{cov}(\mathbf{cX}, \mathbf{dZ}|\mathbf{Y}) = \mathbf{c} \text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\mathbf{Y})\mathbf{d}'. \quad (2.22)$$

2. Olgu \mathbf{X} ja \mathbf{Y} mitmemõõtmelised juhuslikud suurused ning olgu \mathbf{c} reaalarvuliste elementidega vektor. Kehtib:

$$\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{c}|\mathbf{Y}) = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Märkus 2.1. Iga ajahetke $t + 1$ korral saab $\boldsymbol{\alpha}_{t+1}$ esitada algseisundi $\boldsymbol{\alpha}_0$ ja müra-vektorite $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{t+1}$ lineaarkombinatsioonina. Varjatud komponentidega mudeli eelduste kohaselt on müravektorid $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{t+1}$ omavahel sõltumatud, mõõtmisvõrrandi ja olekuruumi müra liikmed on sõltumatud ning sõltumatud ka algvärtusest $\boldsymbol{\alpha}_0$, seega $\text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) = \mathbf{0}$. \square

Saame

$$\begin{aligned} \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) &= \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t} + d_{t+1} + \mathbf{Z}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1|t}) \\ &\quad + \varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t}|\mathcal{Y}_t) + \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, d_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &\quad + \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1|t})|\mathcal{Y}_t) + \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}, \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t)\mathbf{Z}'_{t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{Z}'_{t+1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

ja

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_{t+1}|\mathcal{Y}_t) &= \text{Var}(\mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t} + d_{t+1} + \mathbf{Z}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1|t}) + \varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \text{Var}(\mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{a}_{t+1|t}|\mathcal{Y}_t) + \text{Var}(d_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + \text{Var}(\mathbf{Z}_{t+1}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1} - \mathbf{a}_{t+1|t})|\mathcal{Y}_t) \\ &\quad + \text{Var}(\varepsilon_{t+1}|\mathcal{Y}_t) \\ &= \text{Var}(\mathbf{Z}_{t+1}\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t) + h_{t+1} = \mathbf{Z}_{t+1}\text{Var}(\boldsymbol{\alpha}_{t+1}|\mathcal{Y}_t)\mathbf{Z}'_{t+1} + h_{t+1} \\ &= \mathbf{Z}_{t+1}\mathbf{P}_{t+1|t}\mathbf{Z}'_{t+1} + h_{t+1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lähtudes võrranditest (1.8) ja (1.9) saame:

$$\mathbf{a}_{t+1} := \mathbf{a}_{t+1|t+1} = \mathbf{a}_{t+1|t} + f_{t+1}^{-1} \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{Z}'_{t+1} (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{Z}_{t+1} \mathbf{a}_{t+1} - \mathbf{d}_{t+1}) \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{P}_{t+1} := \mathbf{P}_{t+1|t+1} = \mathbf{P}_{t+1|t} - f_{t+1}^{-1} \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{Z}'_{t+1} \mathbf{Z}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \quad (2.26b)$$

Vastavad võrrandid korrigeerivad eelmise ajamomendi info põhjal saadud hinnanguid, kasutades uue ajamomendi vaatluste teadaolevaid väärtuseid, mis on tuletatud läbi prognoosivalemite, seega Kalmani filtri moodustavad võrrandid (2.17), (2.18), (2.26a) ja (2.26b). Kalmani filtri võrrandite rakendamiseks vajaminevad algväärtused \mathbf{a}_0 ja \mathbf{P}_0 või $\mathbf{a}_{1|0}$ ja $\mathbf{P}_{1|0}$ tuleb ette anda, misjärel järgnevad optimaalsed hinnangud leitakse võrrandite rakendamise teel.

Näide 2.2. Vaatleme lokaalse trendiga mudelit:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2.27a)$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2). \quad (2.27b)$$

Esimese sammuna määrame ära varjatud komponentidega mudeli maatriksid:

$$\alpha_t = \mu_t; \quad \mathbf{Z}_t = \mathbf{T}_t = \mathbf{R}_t = 1; \quad d_t = \mathbf{c}_t = 0; \quad h_t = \sigma_\varepsilon^2; \quad \mathbf{Q}_t = \sigma_\eta^2. \quad (2.28)$$

Teiseks fikseerime esmase olekuruumi vektori, $\alpha_0 \sim N(a_0, P_0)$, algväärtused. Kuna puudub informatsioon α_0 kohta, valime suvalise a_0 ning suure P_0 väärtuse. Rakendame järgmisena Kalmani filtrit:

$$a_{1|0} = a_0 \quad (2.29a)$$

$$P_{1|0} = P_0 + \sigma_\eta^2 \quad (2.29b)$$

$$f_1 = P_{1|0} + \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.29c)$$

$$a_1 = a_{1|0} + \frac{P_{1|0}}{f_1} y_1 = a_0 + \frac{P_0 + \sigma_\eta^2}{P_0 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2} (y_1 - a_0) \quad (2.29d)$$

$$P_1 = P_{1|0} - \frac{P_{1|0}^2}{f_1} = \frac{P_{1|0} \sigma_\varepsilon^2}{P_{1|0} + \sigma_\varepsilon^2} = \frac{(P_0 + \sigma_\eta^2) \sigma_\varepsilon^2}{P_0 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2}. \quad (2.29e)$$

Uurime lähemalt juhtu, kui $P_0 \rightarrow \infty$:

$$a_1 = \lim_{P_0 \rightarrow \infty} \left(a_0 + \frac{P_0 + \sigma_\eta^2}{P_0 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2} (y_1 - a_0) \right) = a_0 + y_1 - a_0 = y_1 \quad (2.30a)$$

$$P_1 = \lim_{P_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{(P_0 + \sigma_\eta^2) \sigma_\varepsilon^2}{P_0 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2} \right) = \sigma_\varepsilon^2, \quad (2.30b)$$

seega $\alpha_1 | Y_1 \sim N(y_1, \sigma_\varepsilon^2)$. Märkame, et kui hinnangut a_1 uuendatakse, koondub a_0 välja, seega pole oluline, milline on algväärtus a_0 , kui P_0 on piisavalt suur.

Lause 2.1. Olgu üleminekumaatriksid aja suhtes homogeenised ehk $\mathbf{T}_t = \mathbf{T}$ ja $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}$, siis

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}_t. \quad (2.31)$$

Olekuvektor $\boldsymbol{\alpha}_t$ on statsionaarne, kui üleminukumaatriksi \mathbf{T} omaväärtuste moodulid on väiksemad ühest, \mathbf{c}_t on aja suhtes homogeenne ning $\mathbf{a}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{c}$ ja $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$, kus

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{T}' + \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}'. \quad (2.32)$$

Lõpliku ajaga protsessi statsionaarsuseks on väga tähtis, millise jaotusega on algväärtused (peavad olema valitud vastavalt jaotusele, mis lõpmatu ajaga protsessi puhul kirjeldab selle jaotust suvalisel fikseeritud ajamomendil).

Märkus 2.2. Üks võimalus tuletada maatriksi \mathbf{P} väärtused on kasutades maatriksite otsekorrutise definitsiooni (1.7) ja maatriksi vektoriseerimise operaatorit (1.8). Saame:

$$\text{vec}(\mathbf{P}) = [\mathbf{I} - \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}]^{-1}\text{vec}(\mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}'). \quad (2.33)$$

□

Juhul kui üleminekumaatriksid on aja suhtes homogeenised, saab Kalmani filtri esmase olekuruumi vektori kovariatsioonimaatriksi defineerida läbi võrrandi (2.32) või (2.33) ehk $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$ ning keskväertuseks võtta $\mathbf{a}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{c}$. Samu väärtusi võib omistada ka esimesele tinglikule hinnangule, kuna võrrandite (2.32) ja (2.18) paremad pooled on võrdsed aja suhtes homogeenises süsteemis. Juhul kui üleminekuvõrrand (2.3) pole aja suhtes homogeenne, siis on soovitatud võtta esmase olekuruumi vektori kovariatsioonimaatriksiks $\mathbf{P}_0 = p\mathbf{I}$, kus p on piisavalt suur reaalarv. Praktikas piisab, kui võtta $p = 10^7$ ning algväärtuseks nullvektor ehk $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ [5]. Kokkuvõtvalt, Kalmani filtri kasutamiseks peab määrama kas suurused \mathbf{a}_0 ja \mathbf{P}_0 või $\mathbf{a}_{1|0}$ ja $\mathbf{P}_{1|0}$.

2.2.1 Silutud Kalmani filter

Olgu teada Kalmani filtri põhjal leitud olekuruumi vektorite väärtused ehk igal ajahetkel t olgu teada \mathbf{a}_t ja \mathbf{P}_t . Silutud Kalmani filtri algoritm võimaldab täpsustada ainult mineviku informatsiooni kasutanud hinnanguid \mathbf{a}_t ja \mathbf{P}_t , kasutades kogu teadaolevat informatsiooni vaatluste kohta. Osutub, et seda saab teha rekursiivselt alustades eelviimasest ajamomendist kujul

$$\mathbf{a}_{t|T} = \mathbf{a}_t + \mathbf{P}_t^*(\mathbf{a}_{t+1|T} - \mathbf{T}_{t+1}\mathbf{a}_t) \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{P}_{t|T} = \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_t^*(\mathbf{P}_{t+1|T} - \mathbf{P}_{t+1|t})\mathbf{P}_t^* \quad (2.34b)$$

$$\mathbf{P}_t^* := \mathbf{P}_t\mathbf{T}_{t+1}'\mathbf{P}_{t+1|t}^{-1}, \quad t = T-1, \dots, 1. \quad (2.34c)$$

2.2.2 Prognoosivead

Järgnevalt uurime prognoosivigu, selleks tähistame esmalt aegrea, $y = (y_1, \dots, y_T)$, prognoositava väärtuse ehk $\hat{y}_{t|t-1} = \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_{t|t-1} + d_t$ ning defineerime prognoosi-

vead:

$$v_t := y_t - \hat{y}_{t|t-1} = \mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_{t|t-1}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.35)$$

kus vastavate juhuslike suuruste tinglik keskväärus on 0 ja dispersioon f_t , mis on defineeritud võrrandis (2.19b), tingimusel, et \mathcal{Y}_{t-1} on teada ehk $V_t|\mathcal{Y}_{t-1} \sim N(0, f_t)$. Märkame, et prognoosivead sisaldavad uut informatsiooni, mis on saadaval järgmisel ajahetkel, seega soovime, et vastavad suurused oleksid nulli lähedal. Selleks arvutame välja logaritmilise tõepärafunktsiooni väärtuse, mis on antud võrrandiga (1.12):

$$\begin{aligned} \log L &= \ln\left(\prod_{t=1}^T p(v_t|y_{1:t-1})\right) = \sum_{t=1}^T \ln(p(v_t|y_{1:t-1})) \\ &= \sum_{t=1}^T \ln \left[\frac{1}{\sqrt{f_t}2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v_t^2}{f_t}\right) \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln f_t 2\pi - \frac{1}{2} \frac{v_t^2}{f_t} \right] \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln f_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Praktikas käsitletakse keerukama ülesehitusega mudeleid ning saadud avaldise (2.36) maksimiseerimine üle hüperparameetri pole täpselt (analüütiliselt ehk valemite kujul saadavate vastuste teel) võimalik. Selleks, et hinnata tundmatud parameetrid, kasutatakse optimeerimise algoritme. Soovitatud on kasutada Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) meetodit, mis minimiseerib negatiivset logaritmilist tõepärafunktsiooni. Algoritmil on hea koonduvuskiirus ja on numbriliselt stabiilne. Samuti tagab vastav meetod, et ligikadune Hessi maatriks oleks positiivselt määratud, mis viitab, et meetod on leidnud miinimum punkti. Juhul kui mõnel hüperparameetril on kitsendused, siis peab transformeerima hüperparameetri ümber nii, et uus hüperparameeter oleks ilma kitsenduseta ehk kõik reaalarvud on lubatavad väärtused.

Näide 2.3. Vaatleme esimest järku autoregressiivset mudelit ehk AR(1) mudelit:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \quad t = 1, \dots, T; \quad |\phi_1| < 1. \quad (2.37)$$

Paneme kirja varjatud komponentidega mudeli maatriksid:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = y_t; \quad \mathbf{Z}_t = \mathbf{1}; \quad \mathbf{T}_t = \phi_1; \quad \mathbf{R}_t = \mathbf{1}; \quad d_t = \mathbf{c}_t = \mathbf{0}; \quad h_t = 0; \quad \mathbf{Q}_t = \sigma_\eta^2. \quad (2.38)$$

Märkame, et üleminekuvõrrandi maatriksid \mathbf{T}_t ja \mathbf{R}_t aja suhtes homogeensed (vt võrrand (2.31)), seega saame rakendada võrrandit (2.33), et leida esimese tingliku olekuvektori dispersioon $p_{1|0}$:

$$p_{1|0} := p = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_1^2} \quad (2.39)$$

ning tinglikuks hinnanguks võtame $a_{1|0} = 0$. Rakendame Kalmani filtrit, et leida v_t ja f_t väärtused, et arvutada logaritmilise tõepärafunktsiooni väärtus, mille maksimiseerimise abil leiame hüperparameetri Ψ , kus

$$\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 \\ \phi_1 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Kalmani filtri tulemused:

| t | $a_{t t-1}$ | v_t | $p_{t t-1}$ | f_t | a_t | p_t |
|----------|------------------|------------------------|--------------------------------------|-------------|----------|----------|
| 1 | 0 | y_1 | $\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_1^2}$ | $p_{1 0}$ | y_1 | 0 |
| 2 | $\phi_1 y_1$ | $y_2 - \phi_1 y_1$ | σ_η^2 | $p_{2 1}$ | y_2 | 0 |
| 3 | $\phi_1 y_2$ | $y_2 - \phi_1 y_2$ | σ_η^2 | $p_{3 2}$ | y_3 | 0 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| T | $\phi_1 y_{T-1}$ | $y_T - \phi_1 y_{T-1}$ | σ_η^2 | $p_{T T-1}$ | y_T | 0 |

Tabel 1: Kalmani filter AR(1) mudeli näitel

Seega $v_1 = y_1$, $f_1 = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_1^2}$, $v_t = y_t - \phi_1 y_{t-1}$ ja $f_t = \sigma_\eta^2$, kus $t = \{2, \dots, T\}$. Kirjutame välja logaritmilise tõepärafunktsiooni, mis avaldub kujul (2.36):

$$\begin{aligned} \log L(\mathbf{y}; \Psi) &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln f_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{v_t^2}{f_t} \\ &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi_1^2} - \frac{T-1}{2} \sum_{t=2}^T \ln \sigma_\eta^2 \\ &\quad - \frac{(1 - \phi_1^2) y_1^2}{2\sigma_\eta^2} - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \frac{(y_t - \phi_1 y_{t-1})^2}{\sigma_\eta^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Kuna vastav logaritmiline tõepärafunktsioon avaldub lihtsal kujul, on võimalik leida tundmatute suhtes tuletised ning lahendada analüütilisest vastav võrrandisüsteem. Teine võimalus on rakendada BFGS meetodit, mille korral transformeerime tundmatud parameetrid ümber järgmiselt:

$$0 < \sigma_\eta^2 < \infty \Leftrightarrow -\infty < \psi_\eta < \infty \wedge \sigma_\eta^2 = e^{\psi_\eta} \quad (2.42a)$$

$$-1 < \phi_1 < 1 \Leftrightarrow -\infty < \psi_\phi < \infty \wedge \phi_1 = \frac{\psi_\phi}{\sqrt{1 + \psi_\phi^2}} \quad (2.42b)$$

ning laseme algoritmil leida optimaalsemad hinnangud kontrollides, kas numbriliselt leitud Hessi maatriks on negatiivselt määratud.

2.3 Mudeli headuse hindamine

Vastavas peatükis on test-statistikud pärit allikast [5] ja ülejäänud väited allikast [7].

Mudeli headuse hindamiseks on erinevaid võimalusi. Eeldame, et vaatluste arv on T , hüperparameeter Ψ sisaldab n erinevat tundmatut ja $\hat{\Psi}$ on optimaalne hinnang vektorile Ψ . Lisaks eeldame, et kovariatsioonimaatriks \mathbf{P}_0 sisaldab diagonaalil d hajutatud elementi ja usaldus nivoo α on teada ja fikseeritud.

1. Akaike informatsioonikriteerium (AIC)

$$\text{AIC} = -2\log L(\mathbf{y}; \hat{\Psi}) + 2n. \quad (2.43)$$

2. Akaike informatsioonikriteerium (AIC) juhul, kui algseisundi kovariatsioonimaatriksis \mathbf{P}_0 on d hajutatud elementi

$$\text{AIC} = -2\log L(\mathbf{y}; \hat{\Psi}) + 2(d + n). \quad (2.44)$$

3. Bayesi informatsioonikriteerium (BIC)

$$\text{BIC} = -2\log L(\mathbf{y}; \hat{\Psi}) + n \log T. \quad (2.45)$$

4. Bayesi informatsioonikriteerium (BIC) juhul, kui algseisundi kovariatsioonimaatriksis \mathbf{P}_0 on d hajutatud elementi

$$\text{BIC} = -2\log L(\mathbf{y}; \hat{\Psi}) + (d + n) \log T. \quad (2.46)$$

5. Juhul kui T on piisavalt suur, siis kehtib

$$\hat{\Psi} \sim N(\Psi, \Omega), \quad (2.47)$$

kus

$$\Omega = \left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \Psi \partial \Psi} \right]^{-1}. \quad (2.48)$$

Järgnevalt püstitatakse hüpotees iga tundmatu parameetri kohta, mis kuulub vektorisse Ψ :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 & : \Psi_i = 0 \text{ ehk tegu on mitteolulise parameetriga.} \\ \mathbf{H}_1 & : \Psi_i \neq 0 \text{ ehk tegu on statistiliselt olulise parameetriga.} \end{cases} \quad (2.49)$$

Hüpoteesi (2.49) määramiseks kasutatakse iga i korral t -statistikut

$$t_i = \frac{\hat{\Psi}_i - 0}{\sqrt{\Omega_{ii}}} \sim t_m, \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.50)$$

Juhul kui

$$P(t_{\alpha/2;m} < t_i < t_{1-\alpha/2;m}) > \alpha, \quad (2.51)$$

siis jääme nullhüpoteesi \mathbf{H}_0 .

6. Muutujate olulisuse hindamiseks kasutatakse Kalman filtri teel leitud lõppseisundit ehk \mathbf{a}_T ja selle kovaratsioonimaatriksit \mathbf{P}_T Järgnevalt püstitatakse hüpotees:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 & : \mathbf{a}_T \text{ pole nullvektorist oluliselt erinev ehk } \mathbf{a}_T = \mathbf{0}. \\ \mathbf{H}_1 & : \text{eksisteerib } i, \text{ mille korral } \mathbf{a}_{T;i} \neq 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Olgu \mathbf{a} vektori \mathbf{a}_T alamvektor ja \mathbf{P} talle vastav alammaatriks \mathbf{P}_T -st. Hüpoteesi (2.52) määramiseks kasutatakse Hii-ruut statistikut

$$\chi^2 = \mathbf{a}' \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}, \quad (2.53)$$

kus vabadusaste arv f on võrdne vektori \mathbf{a} komponentide arvuga ning olgu juhuslik suurus $X \sim \chi^2(f)$. Kui

$$P(X > \chi^2) > \alpha, \quad (2.54)$$

siis jääme nullhüpoteesi \mathbf{H}_0 .

7. Järgnevalt toome välja ka prognoosi headuse mõõdikud, mida rakendame prognoosivigadele (vt alapeatükk (2.2.2)).

- (a) Keskmine absoluutne viga (MAD)

$$MAD = (T - d)^{-1} \sum_{i=1+d}^T |v_i|. \quad (2.55)$$

- (b) Keskmine ruutviga (MSE)

$$MSE = (T - d)^{-1} \sum_{i=1+d}^T v_i^2. \quad (2.56)$$

- (c) Ruutkeskmine viga (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{MSE}. \quad (2.57)$$

- (d) Veendumaks, et normeeritud veasuured \tilde{v} on juhuslikud sõltumatud sama jaotusega püstitatakse järgnev hüpotees:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 & : \text{Veasuured on juhuslikud.} \\ \mathbf{H}_1 & : \text{Veasuured on pole juhuslikud.} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Test-statistiku rollis on Ljung-Box testi statistik:

$$Q_{BL} = (T - d)(T - d + 2) \sum_{\tau=1}^P (T - d - \tau)^{-1} r_v^2(\tau) \sim \chi_n^2, \quad (2.59)$$

kus $r_v(\tau)$ on τ -järku autokorrelatsioonikordaja

$$r_v(\tau) = \frac{\sum_{t=\tau+1+d}^T (\tilde{v}_t - \bar{\tilde{v}})(\tilde{v}_{t-\tau} - \bar{\tilde{v}})}{\sum_{t=1+d}^T (\tilde{v}_t - \bar{\tilde{v}})^2}, \quad \tau = 1, 2, \dots, \quad (2.60)$$

kus prognoosivigade $v_{d+1:T} = (v_{d+1}, \dots, v_T)$ normeeritud väärtused on tähistatud $\tilde{v}_{d+1:T} = (\tilde{v}_{d+1}, \dots, \tilde{v}_T)$. Juhul kui $Q_{BL} > \chi_{1-\alpha, n}^2$, siis kummutatakse nullhüpotees.

3 Metoodika

Varasema IAS39 standardi nõuete kohaselt ei pidanud finantsettevõtte pärast uue laenu väljastamist moodustama laenukahjumi katte jaoks reservi kohe, vaid alles pärast vastava kliendi maksejõuetuse märkide tekkimist ehk standard oli tagasivaatav. See oli ka üks ajendeid, miks paljud finantsettevõtted pankrotistusid majanduskriisi perioodil. Kuna standard ei nõudnud, et finantsettevõtte laenukahju katte reserv peab arvesse võtma tulevikus esineda võivaid sündmuseid ning finantskriisieelsel ajal oli finantsettevõtete pankrotisumisi üsna vähe, oli majanduskriisi alguseks vastav reserv pigem minimaalne, mis põhjustas kriisi tekkimisel mitmete ettevõtete tegevuse lõppemise.

Erakliendi puhul võis maksejõuetuste esmasteks märkideks olla regulaarse sissetuleku kadumine või krediitkaardi hüppeline kasutamine ning ettevõtte puhul tavapärasest väiksemad tehingud ning väiksemate palkade tasumine.

2018. aasta alguses jõustus uus rahvusvaheline finantsaruandlusstandard (IFRS 9), mis reguleerib finantsinstrumentide arvestust. Uus standard nõuab, et finantsettevõtte provisjonide¹ hindamisel võetaks arvesse ka makromajanduse muutujaid ning iga segmendi/portfelli äritsükli mõju. Selle tulemusena suurendatakse finantsettevõtte laenukahjumi katte reservi iga uue laenu väljastamisel ning uuendatakse olemasolevate laenude reservi suurust iga kuu ehk uus standard on ka edasivaatav. Lisaks annab vastav metoodika pangale konkreetsema informatsiooni vastava reservi suurusest ning sellest, kuidas läheb panga klientidel. Seega kui peaks juhtuma uus finantskriis või ettevõttel peaks tekkima järsku palju maksejõuetuid kliente, siis finantsettevõtte on nende riskidega arvestanud ning enda poolt maandanud need riskid ära, et saaks finantssektoris tegevust jätkata.[3, 4]

Järgnevad definitsoonid pärinevad allikast [2]. Eeldame, et erinevate riskinäitajate käitumist vaadeldaval ajahetkel kirjeldab juhuslik suurus $Z \sim N(0, 1)$ (süsteemaatiline faktor ehk faktor, mis kirjeldab konkreetse portfelli/segmendi majandusolukorda) ja kõik muud mõjutegurid (st kliendi, portfelli näitajad) on ajast sõltumatud.

Definitsioon 3.1. PIT (*Point-In-Time*) PD (*Probability of Default*), mille tähistus on $p_i(z)$, on tõenäosus, et klient i muutub maksejõuetuks järgmise 12 kuu jooksul, kui süstemaatilise riski Z hetkeväärtus on $Z = z$ ajahetkel t ja ülejäänud parameetrid on ajas muutumatud.

Definitsioon 3.2. TTC (*Through-The-Cycle*) PD, mille tähistus on q_i on kliendi i keskmine PIT PD ülekogu süstemaatilise riski:

$$q_i = E_Z[p_i(Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(z)f(z)dz, \quad (3.1)$$

kus f on standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon.

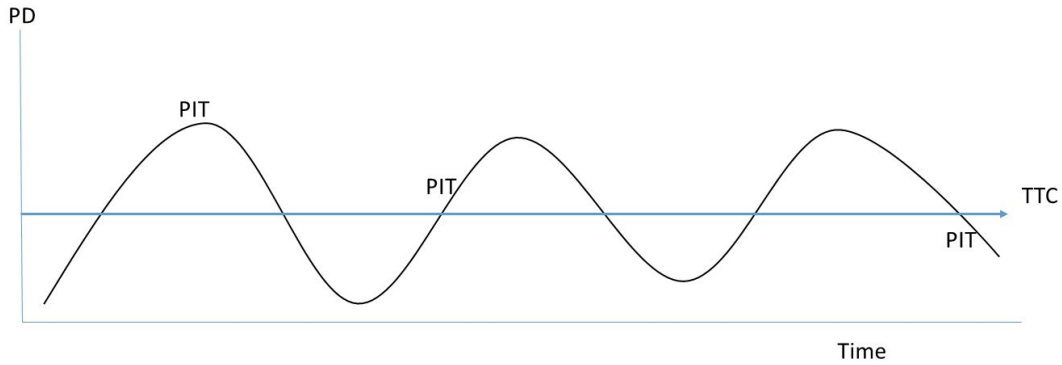
¹Teatud protsent laenujäägist

Definitsioon 3.3. Olgu portfellis P tähistatud arvuga P_N unikaalsete klientide arv ajahetkel t ning süstemaatiline risk vastaval ajahetkel $Z = z$. PPIT PD, mille tähistus on $p_P(z)$, on portfelli P keskmine PIT PD, mis on arvatatud klientide põhjal, kes kuuluvad portfelli P ajahetkel t :

$$p_P(z) = \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{P_N} p_i(z). \quad (3.2)$$

Definitsioon 3.4. PTTC PD, mille tähistus on q_P on portfelli P keskmine TTC PD, mis on arvatatud klientide põhjal, kes kuuluvad portfelli P ajahetkel t ülekogu süstemaatilise riski:

$$q_P = \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{P_N} q_i. \quad (3.3)$$



Joonis 1: Illustreeriv pilt, kuidas ajas PIT ja TTC PD ajas liiguvad [8]

3.1 Mertoni mudeli ülesehitus

Järgnev alapeatükk tugineb allikale [2].

Finantsettevõtte peamine eesmärk on võimalikult täpselt prognoosida sündmust, mil portfelli/segmenti P klient muutub maksejõuetuks vaadeldes klienti ajahetkel t ning vastavat sündmust saab vaadleda kui diskreetset juhuslikku suurust $W_{iP} \sim B(0, 1)$:

$$W_{iP} = \begin{cases} 0, & \text{klient } i \text{ on maksejõuline.} \\ 1, & \text{klient } i \text{ on maksejõuetu.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Eeldame, et portfell P on fikseeritud. Vastavat probleemi aitab lahendada Robert C. Mertoni poolt loodud mudel 1974. aastal. Kliendi i (st ettevõtte/eraklient) vараde väärtust X_{iP} on võimalik kirjeldada läbi süstemaatilise Z (äri-tsükli indeks) ning ideosünteesilise ε_{iP} (kliendi spetsiifiline, seotud tema tegevusega) riskifaktori, kus mõlemad on sõltumatud juhuslikud suurused standartiseeritud normaaljaotusest:

$$X_{iP} = \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_{iP}. \quad (3.5)$$

Suurus ρ kirjeldab, kui palju globaalsel tasemel ühe kliendi maksejõuetus mõjutab teist klienti portfellis P . Igal kliendil i on unikaalne konstante parameeter B_{iP} , mis tähistab maksejõuetuse lävendit. Juhul kui kliendi i varade väärtus X_{iP} on maksejõuetuse lävendist B_{iP} väiksem, on klient muutunud maksejõetuks. Vastava sündmuse tõenäosust teadaoleva Z väärtuse korral saab hinnata järgnevalt:

$$\begin{aligned} p(W_{iP} = 1|Z) &= p_{iP}(Z) \\ &= P[X_{iP} < B_{iP}|Z] = P[\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_{iP} < B_{iP}|Z] \\ &\Leftrightarrow P\left[\varepsilon_i < \frac{B_{iP} - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}} \middle| Z\right] = \Phi\left(\frac{B_{iP} - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Igal ajahetkel, mil me teame äriotsikli indeksi väärtust, on võimalik välja arvutada $p_{iP}(z)$ ning näha, kuidas kliendi i vaadeldaval perioodil maksejõuetuks jäämise sündmuse tõenäosus varieerub üle aja (vt Joonis 1).

Keskmistades üle süstemaatilise riski Z , mis esindab äriotsikli erinevaid olekuid, kaotatakse äriotsikli indeksi mõju kliendi maksejõuetuse tõenäosuse hindamisel ning saadakse keskmine maksejõuetuse määr kujul:

$$q_{iP} = E_Z[p_{iP}] = \Phi(B_{iP}). \quad (3.7)$$

Keeruline on vaadelda ajalooliselt ühe spetsiifilise kliendi maksejõuetuse määra, kuna finantsettevõtte mõistes klient on kas maksejõuline või -jõetu. Seega viime Mertoni mudeli ülesehituse kliendi tasemelt portfelli/segmenti tasemele, kus eeldame, et portfellisiseselt on kõigil klientidel sama maksejõuetuse lävend B_p .

Järgnev arenduskäik pärineb allikast [6]. Esmalt paneme kirja portfelli P maksejõuetuse määra aegrea:

$$DF_{tP} = \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{P_N} I_{(X_{tiP} < B_P)}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.8)$$

ning kirjutame välja kovaratsiooni kahe erineva kliendi varade vahel, kus mõlemad kuuluvad portfelli P ajahetkel t :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{tiP}, X_{tjP}) &= \text{cov}(\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_{tiP}, \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_{tjP}) \\ &= \rho \text{cov}(Z, Z) + \sqrt{\rho(1-\rho)} \text{cov}(Z, \varepsilon_{tjP}) \\ &+ \sqrt{\rho(1-\rho)} \text{cov}(\varepsilon_{tiP}, Z) + (1-\rho) \text{cov}(\varepsilon_{tiP}, \varepsilon_{tjP}) \\ &= \rho + 0 + 0 + 0 = \rho, \quad i, j \in \{1, \dots, P_N\} \text{ kus } i \neq j. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tinglik kovaratsioon kahe erienva kliendi varade vahel, kus Z on teada avaldub kujul:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{tiP}, X_{tjP}|Z) &= \text{cov}(\sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_{tiP}, \sqrt{\rho}Z + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_{tjP}|Z) \\ &= \rho \text{cov}(Z, Z|Z) + \sqrt{\rho(1-\rho)} \text{cov}(Z, \varepsilon_{tjP}|Z) \\ &+ \sqrt{\rho(1-\rho)} \text{cov}(\varepsilon_{tiP}, Z|Z) + (1-\rho) \text{cov}(\varepsilon_{tiP}, \varepsilon_{tjP}|Z) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \quad i, j \in \{1, \dots, P_N\} \text{ kus } i \neq j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seega ei ole rea DF_P liikmed sõltumatud juhuslikud suurused, kuid kuna (X_{tiP}, X_{tjP}) tinglik jaotus tingimusel, et Z on teada, on kahemõõtmeline normaaljaotus, järeldub eelnevast, et juhuslikud suurused X_{tiP} ja X_{tjP} on tinglikult sõltumatud tingimusel, et Z on teada. Seetõttu koondub summa suurte arvude seaduse kohaselt iga Z väärtuse korral peaaegu kindlasti vastavaks tinglikuks keskväärtuseks ning seega juhuslik suurus DF_{tP} esitub fikseeritud Z korral sõltumatute Bernoulli jaotusega juhuslike suuruste aritmeetilise keskmisena, mis suurte arvude seaduse kohaselt koondub keskväärtuseks ehk

$$\begin{aligned} DF_{tP} &= \lim_{P_N \rightarrow \infty} \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{P_N} I_{(X_{tiP} < B_P)} = \lim_{P_N \rightarrow \infty} \frac{1}{P_N} \sum_{i=1}^{P_N} P[X_{tiP} < B_P | Z_t] \\ &= \Phi \left(\frac{B_P - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1 - \rho}} \right), \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Oleme saanud seose ajalooliste maksejõuetus määrade $DF = (DF_{1P}, \dots, DF_{TP})$, äritsükli indeksi $Z = (Z_1, \dots, Z_T)$, maksejõetus lävendi B_P ja korrelatsioonikordaja ρ vahel.

Toome välja artiklis [2] pakutud äritsükli indeksi, maksejõuetuse lävendi B_P ja ρ arvutuskäigud, kus eeldatakse et B_P ajas ei muutu.

1. Transformeerime maksejõuetuse määra aegrida, kasutades selleks standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni pöördfunktsiooni, kuna eeldame, et kõik riskid on standardse normaaljaotusega

$$DF \rightarrow \Phi^{-1}(DF) \sim N(0, 1). \quad (3.12)$$

2. Järgnevalt leiame keskväärtuse ja dispersiooni:

$$E(\Phi^{-1}(DF)) = E \left(\frac{B_P - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1 - \rho}} \right) = \frac{B_P}{\sqrt{1 - \rho}} \quad (3.13a)$$

$$\text{Var}(\Phi^{-1}(DF)) = \text{Var} \left(\frac{B_P - \sqrt{\rho} Z_t}{\sqrt{1 - \rho}} \right) = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (3.13b)$$

3. Tähistame DF valimi keskväärtuse m ja dispersiooni s^2 ning sidudes eelneva punktiga saame:

$$s^2 = \frac{\rho}{1 - \rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{s^2}{1 + s^2} \quad (3.14a)$$

$$m = \frac{B_P}{\sqrt{1 - \rho}} \Leftrightarrow B_P = m \sqrt{1 - \rho} = m \sqrt{1 - \frac{s^2}{1 + s^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 + s^2}}. \quad (3.14b)$$

4. Leiame äritsükli indeksi, mis on standardiseeritud, et oleks võimalik võrrelda erinevaid ajapunkte:

$$\begin{aligned}
DF_t &= \Phi\left(\frac{B_P - \sqrt{\rho}Z_t}{\sqrt{1-\rho}}\right) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(DF) = \frac{B_P - \sqrt{\rho}Z_t}{\sqrt{1-\rho}} \\
&\Leftrightarrow \\
Z_t &= \frac{B - \Phi^{-1}(DF_t)\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{m - \Phi^{-1}(DF_t)}{\sigma}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Vastav lähenemine äritsükli indeksi leidmisele eeldab, et valim vastab sõltumatu-tele sama jaotusega juhuslike suuruste väärtustele. Sõltuvate vaatluste korral aga läheb mõistliku täpsusega hinnangute saamiseks vaja väga pikka aegrida, sest tsükkel on ajaliselt küllalt suure pikkusega. Seega ei pruugi vaadeldud lähenemine anda kuigi täpseid tulemusi. Vastavad tulemused võtame enda lõputöö aluseks veendumaks, et meie poolt pakutav äritsükli indeks käituks ajas sarnaselt primitiivse lähenemisega. IFRS 9 kontekstis vastav lähenemine ei sobi, kuna vastav meetoodika pole piisavalt täpne ning samas ei luba meetoodika maksejõuetuse lävendil B_P ajas muutuda ehk edaspidi lubame

$$B_P \rightarrow B_{tP}. \tag{3.16}$$

Üheks võimaluseks on selle jaoks rakendada varjatud komponentidega mudelit, mis on paindlikum ning lubab lisada komponente juurde, juhul kui selleks on vajadust. Viimaseks jääb rakendada Kalmani filtrit leidmaks ρ , maksejõuetuse lävend ja äritsükli indeks läbi ajaloo, mis sobiks IFRS 9 konteksti. Järgnevalt toome välja lõputöös vaadeldava mudeli.

3.2 Sesoone komponent

Alapeatükk tugineb allikale [5].

Olgu uuritav aegrida y sõltuv kindlast ajaperioodist (nt aastad, kvartalid, kuud). Tähistame vastava perioodi pikkuse s -ga. Kuna tegu on perioodilise komponendiga, mis kordab regulaarselt enda mustrit, siis perioodi lõpus eeldame, et komponentide summa on 0 ehk

$$\sum_{j=1}^s \gamma_j^* = 0 \Leftrightarrow \gamma_s^* = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_j^*. \tag{3.17}$$

Paneme kirja sesoone komponendi väärtuse ajahetkel t ning eeldame, et eelnev seos jääb kehtima igal ajahetkel t :

$$\sum_{j=1}^s \gamma_{t-j} = 0 \Leftrightarrow \gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j}, \quad t = s, s+1, \dots, T, \tag{3.18}$$

kus algväärtused on ajahetkedel $t = 1, \dots, s - 1$ korral teada. Eesmärk on saada sesoonne komponent, mille muster ajas muutub, seega lisame stohhastilisuse jaoks müra liikme ω_t . Saame:

$$\gamma_t = - \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2) \quad (3.19)$$

iga $t = s, \dots, T$ korral, kus algväärtused on antud ajahetkel $t = 1, \dots, s - 1$. Edaspidi eeldame, et $s = 4$ ehk tegu on kvartaalse sesoonse komponendiga. Kirjutame välja sesoonset komponeti sisaldava mudeli:

$$y_t = \gamma_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.20a)$$

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=1}^3 \gamma_{t+1-j} + \omega_t, \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2). \quad (3.20b)$$

Viime vastava mudeli varjatud komponentidega mudeli kujule:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\gamma &:= \mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_t &= \begin{bmatrix} \gamma_t \\ \gamma_{t-1} \\ \gamma_{t-2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_\gamma &:= \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_\gamma &:= \mathbf{R}_t = \mathbf{I}_3, \\ \boldsymbol{\eta}_t &= \begin{bmatrix} \omega_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_\gamma &:= \mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_\gamma &:= \mathbf{c}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_\gamma &:= d_t = 0, \quad h := h_t = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Üleminekumaatriksid on aja suhtes homogeenised ning saame rakendada lauset (2.1) kontrollimaks, kas leiduvad sobilikud algväärtused statsionaarsuse jaoks. Selleks veendume, kas maatriksi \mathbf{T}_γ omaväärtused on mooduli poolest ühest väiksemad. Saame omaväärtusteks

$$\lambda_{1,2,3} = \{-1.i, -1\} \Rightarrow |\lambda_j| = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.22)$$

seega pole võimalik rakendada lauset (2.1) ning valime algväärtuseks $\mathbf{a}_0 = [0 \ 0 \ 0]'$ ja $\mathbf{P}_\gamma^0 = p\mathbf{I}$, kus p on piisavalt suur arv. Vastava mudeli hüperparameetriks on $\boldsymbol{\Psi} = [\sigma_\varepsilon^2 \ \sigma_\omega^2]'$, kus dispersioonid transformeeritakse sarnaselt näitele (2.3).

3.3 Stohhastiline tsükkel

Käesolev alapeatükk tugineb allikale [1].

Deterministliku funktsiooni saab väljendada siinuste ja koosinuste summana. Vaatleme lihtsaimat juhtu, kus summa asemel on üks nurksagedusele $\lambda_c \in [0, \pi]$ vastav koosinuslaine ψ_t , mille perioodiks on $2\pi/\lambda_c$:

$$\psi_t = A \cos(\lambda_c t - \theta), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.23)$$

kus $A \in \mathbb{R}^+$ on amplituud ja θ kirjeldab faasi. Rakandame valemit

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B). \quad (3.24)$$

Saame võrrandi (3.23) viia kujule:

$$\psi_t = \alpha \cos(\lambda_c t) + \beta \sin(\lambda_c t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.25)$$

kus $\alpha = A \cos(\theta)$, $\beta = A \sin(\theta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = A^2$, $\arctan(\beta/\alpha) = \theta$.

Järgnevalt eeldame, et $A = 1$. Kuna majandustsüklid ei vasta deterministlikele kindla perioodiga funktsioonidele, soovime muuta eelnevat koosinuslainet nii, et see vastaks statsionaarsele aegreale. Osutub, et selleks on heaks lähtekohaks vaadata, kuidas siinus- ja koosinusfunktsioonide erinevatele ajamomentidele vastavad väärtused on omavahel seotud. Selleks defineerime vektorfunktsiooni:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\lambda_c t) \\ \cos(\lambda_c t) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Järgmiseks näitame, et eelnevalt defineeritud vektori väärtus ajal t on küllalt lihtsalt tuletatav eelneva ajamomendi vektori kaudu, selleks kasutame järgmiseid valemmeid:

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B) \quad (3.27a)$$

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B). \quad (3.27b)$$

Kasutades valemit (3.27a) kirjutame ψ_t välja kujul:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda_c t) &= \sin[\lambda_c t + \lambda_c - \lambda_c] = \sin[\lambda_c(t-1) + \lambda_c] \\ &= \sin[\lambda_c(t-1)] \cos \lambda_c + \cos[\lambda_c(t-1)] \sin \lambda_c \end{aligned} \quad (3.28)$$

ja ψ_t^* välja kujul, kasutades ära valemit (3.27b):

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_c t) &= \cos[\lambda_c t + \lambda_c - \lambda_c] = \cos[\lambda_c(t-1) + \lambda_c] \\ &= \cos[\lambda_c(t-1)] \cos \lambda_c - \sin[\lambda_c(t-1)] \sin \lambda_c. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Võttes kokku võrrandid (3.28) ja (3.29), saame järgmise regursiivse seose:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\lambda_c t) \\ \cos(\lambda_c t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.30)$$

Selleks, et lubada tsükli pikkusel ja kujul juhuslikult muutuda, lisame sõltumatud juhuslikud mürad ning eeldame, et mõlema dispersiooni suurus on sama:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.31)$$

kus

$$\text{Var} \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} = \sigma_\kappa^2 \mathbf{I}. \quad (3.32)$$

Saamaks, et protsess (3.31) oleks statsionaarne, korrutame esimese komponendi läbi suurusega $\rho \in (0, 1)$ ning lõplik mudel avaldub kujul:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.33)$$

kus

$$\text{Var} \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} = \sigma_\kappa^2 \mathbf{I}. \quad (3.34)$$

Viimaseks veendume, et protsess (3.33) on statsionaarne. Selleks kirjutame välja ψ_{t+1} ning ψ_t^* :

$$\psi_{t+1} = \rho \cos(\lambda_c) \psi_t + \rho \sin(\lambda_c) \psi_t^* + \kappa_t \quad (3.35a)$$

$$\psi_t^* = -\rho \sin(\lambda_c) \psi_{t-1} + \rho \cos(\lambda_c) \psi_{t-1}^* + \kappa_{t-1}^*. \quad (3.35b)$$

Asendame (3.35b) võrrandisse (3.35a):

$$\psi_{t+1} = \rho \cos(\lambda_c) \psi_t + \rho \sin(\lambda_c) [-\rho \sin(\lambda_c) \psi_{t-1} + \rho \cos(\lambda_c) \psi_{t-1}^* + \kappa_{t-1}^*] + \kappa_t. \quad (3.36)$$

Viime ψ liikmed vasakule:

$$\begin{aligned} \psi_{t+1} - \rho \cos(\lambda_c) \psi_t &= -\rho^2 \sin^2(\lambda_c) \psi_{t-1} + \rho^2 \sin(\lambda_c) \cos(\lambda_c) \psi_{t-1}^* \\ &\quad + \rho \sin(\lambda_c) \kappa_{t-1}^* + \kappa_t \end{aligned} \quad (3.37)$$

Järgmisena tuletame liikme $\rho \sin(\lambda_c) \psi_{t-1}^*$ läbi ψ_t võrrandi:

$$\begin{aligned} \psi_t &= \rho \cos(\lambda_c) \psi_{t-1} + \rho \sin(\lambda_c) \psi_{t-1}^* + \kappa_{t-1} \\ \Rightarrow \\ \rho \sin(\lambda_c) \psi_{t-1}^* &= \psi_t - \rho \cos(\lambda_c) \psi_{t-1} - \kappa_{t-1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Asendame (3.38) võrrandisse (3.37), saame:

$$\begin{aligned} \psi_{t+1} - \rho \cos(\lambda_c) \psi_t &= -\rho^2 \sin^2(\lambda_c) \psi_{t-1} + \rho \sin \lambda_c(\lambda_c) \kappa_{t-1}^* \\ &\quad + \rho \cos(\lambda_c) (\psi_t - \rho \cos(\lambda_c) \psi_{t-1} - \kappa_{t-1}) + \kappa_t \\ &= -\rho^2 \sin^2(\lambda_c) \psi_{t-1} - \rho^2 \cos^2(\lambda_c) \psi_{t-1} \\ &\quad + \rho \cos(\lambda_c) \psi_t - \rho \cos(\lambda_c) \kappa_{t-1} + \rho \sin(\lambda_c) \kappa_{t-1}^* + \kappa_t \\ &= -\rho^2 \psi_{t-1} + \rho \cos(\lambda_c) \psi_t \\ &\quad - \rho \cos(\lambda_c) \kappa_{t-1} + \rho \sin(\lambda_c) \kappa_{t-1}^* + \kappa_t. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Viime võrrandis (3.39) ψ liikmed vasakule ning paremale jäävad müra liikmed. Mugavuse mõttes kasutame nihke operaatorit (vt definitsioon 1.2):

$$\psi_{t+1} - 2\rho \cos(\lambda_c)\psi_t + \rho^2\psi_{t-1} = \kappa_t - \rho \cos(\lambda_c)\kappa_{t-1} + \rho \sin(\lambda_c)\kappa_{t-1}^* \quad (3.40)$$

\Leftrightarrow

$$(1 - 2\rho \cos(\lambda_c)B + \rho^2 B^2)\psi_{t+1} = (1 - \rho \cos(\lambda_c)B)\kappa_t + \rho \sin(\lambda_c)B\kappa_t^*. \quad (3.41)$$

Saab näidata, et ψ_{t+1} teisendatud kuju on ARMA(2,1) protsess ning vastav protsess on statsionaarne kui ψ_{t+1} kordaja (polünoom) nullkohad on mooduli poolest ühest suuremad:

$$1 - 2\rho \cos \lambda x + \rho^2 x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\cos \lambda_c \pm i \sin \lambda_c}{\rho}. \quad (3.42)$$

Leiame, kas nullkohtade moodulid rahuldavad statsionaarsuse tingimust:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos \lambda_c \pm i \sin \lambda_c}{\rho} \right| > 1 &\Leftrightarrow \frac{|\cos \lambda_c \pm i \sin \lambda_c|}{|\rho|} > 1 \\ \frac{|\cos \lambda_c \pm i \sin \lambda_c|}{\rho} > 1 &\Leftrightarrow |\cos \lambda_c \pm i \sin \lambda_c| > \rho \\ \sqrt{\cos^2 \lambda_c + \sin^2 \lambda_c} > \rho &\Leftrightarrow 1 > \rho. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nullkohad on mooduli poolest ühest suuremad kui $\rho \neq 1$, seega $\rho \in (0, 1)$ ning protsess (3.33) on statsionaarne.

Äritsükli perioodi pikkus on allikas [5] defineeritud:

$$1.5 \leq 2\pi/\lambda_c \leq 12. \quad (3.44)$$

Järgmiseks vaatleme aegrida y , mis esitub kujul:

$$y_t = \psi_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad t = 1, \dots, T \quad (3.45a)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} \quad (3.45b)$$

ning eeldame, et $\text{Var}[\psi_t \ \psi_t^*]' = \sigma_\psi^2 \mathbf{I}$. Esitame stohhastilise tsükliga mudeli varjatud

komponentidega mudeli kujul:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_\psi &:= \mathbf{Z}_t = [1 \ 0], \\
\boldsymbol{\alpha}_t &= \begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix}, \\
\mathbf{T}_\psi &:= \mathbf{T}_t = \rho \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & \sin(\lambda_c) \\ -\sin(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_\psi &:= \mathbf{R}_t = \mathbf{I}_2, \\
\boldsymbol{\eta}_t &= \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}, \\
\mathbf{Q}_\psi &:= \mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\kappa^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\kappa^2 \end{bmatrix} = \sigma_\kappa^2 \mathbf{I}_2, \\
\mathbf{c}_\psi &:= \mathbf{c}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
d_\psi &:= d_t = 0, h := h_t = \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Märkame, et üleminekumaatriksid on aja suhtes homogeensed, seega saame rakendada lauset (2.1) näitamaks, et $\boldsymbol{\alpha}_t$ on statsionaarne, kui \mathbf{a}_0 ja \mathbf{P}_0 on sobivalt valitud. Selleks, et saaks rakendada lauset (2.1) peame veenduma, et maatriksi \mathbf{T}_ψ omaväärtuste moodulid on väiksemad ühest. Lause teine eeldus on täidetud, sest \mathbf{c}_ψ väärtused ei muutu ajas ehk \mathbf{c}_ψ on homogeenne aja suhtes. Üleminekumaatriks \mathbf{T}_ψ on mõõtmetelt 2×2 , seega saame rakendada võrrandit (1.20):

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}(2\rho \cos(\lambda_c) \pm \sqrt{-4\rho^2 \sin^2(\lambda_c)}) = \rho \cos(\lambda_c) \pm i\rho \sin(\lambda_c) \tag{3.47}$$

$$|\lambda_\pm| = \sqrt{\rho^2 \cos^2(\lambda_c) + \rho^2 \sin^2(\lambda_c)} = |\rho| = \rho \tag{3.48}$$

Eelduste kohaselt $0 < \rho < 1$, seega on lause eeldused täidetud, seega võime valida

$$\mathbf{a}_0 = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{T}_\psi)^{-1} \mathbf{c}_\psi = [0 \ 0]' \tag{3.49}$$

ja $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$, kus \mathbf{P} rahuldab võrrandit:

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_\psi \mathbf{P} \mathbf{T}_\psi' + \mathbf{R}_\psi \mathbf{Q}_\psi \mathbf{R}_\psi'. \tag{3.50}$$

Näitame, et sellel võrrandil on lahend kujul $\mathbf{P} = \sigma_\psi^2 \mathbf{I}_2$, kus $\sigma_\psi^2 = \frac{\sigma_\kappa^2}{1 - \rho^2}$. Vaatleme eraldi korrutist $\mathbf{T}_\psi \mathbf{P} \mathbf{T}_\psi'$:

$$\mathbf{T}_\psi \mathbf{P} \mathbf{T}_\psi' = \rho^2 \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & \sin(\lambda_c) \\ -\sin(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\psi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\psi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & -\sin(\lambda_c) \\ \sin(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$= \rho^2 \sigma_\psi^2 \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & \sin(\lambda_c) \\ -\sin(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\lambda_c) & -\sin(\lambda_c) \\ \sin(\lambda_c) & \cos(\lambda_c) \end{bmatrix} = \rho^2 \sigma_\psi^2 \mathbf{I}_2 \tag{3.52}$$

ning

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{T}_\psi \mathbf{P} \mathbf{T}'_\psi + \mathbf{R}_\psi \mathbf{Q} \mathbf{R}'_\psi \\ &\Leftrightarrow \\ \sigma_\psi^2 \mathbf{I}_2 &= \rho^2 \sigma_\psi^2 \mathbf{I}_2 + \sigma_\kappa^2 \mathbf{I}_2 \Rightarrow \sigma_\psi^2 \mathbf{I}_2 = \frac{\sigma_\kappa^2}{1 - \rho^2} \mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Seega $\mathbf{a}_0 = [0 \ 0]'$ ja $\mathbf{P}_\psi^0 = \frac{\sigma_\kappa^2}{1 - \rho^2} \mathbf{I}_2$. Kirjutame välja ka vastava mudeli hüperparameetrite vektori:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\kappa^2 \quad \rho \quad \lambda]'. \quad (3.54)$$

Suurima tõepära meetodi kasutamise lihtsustamiseks transformeerime hüperparameetrite väärtuseid nii, et need võiksid olla suvalised reaalarvud. Dispersioonide puhul käitume sarnaselt nagu oli tehtud näites (2.3) ning parameetrite ρ ja λ jaoks kasutame järgnevaid teisendusi:

$$0 < \rho < 1 \Leftrightarrow -\infty < \psi_\rho < \infty \wedge \rho = \frac{\exp(-\psi_\rho)}{1 + \exp(-\psi_\rho)} \quad (3.55a)$$

$$0 < \lambda < \pi \Leftrightarrow -\infty < \psi_\lambda < \infty \wedge \lambda = \pi \frac{\exp(-\psi_\lambda)}{1 + \exp(-\psi_\lambda)} \quad (3.55b)$$

3.4 Lokaalne lineaarne trend

Järgnev alapeatükk tugineb allikale [1].

Lokaalse lineaarse trendi mudel avaldub kujul:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.56a)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \quad (3.56b)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.56c)$$

Esitame selle mudeli varjatud komponentidega mudeli kujul. Selleks tuleb defineerida:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\mu &:= \mathbf{Z}_t = [1 \quad 0], \\ \boldsymbol{\alpha}_t &= \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_\mu &:= \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_\mu &:= \mathbf{R}_t = \mathbf{I}_2, \\ \boldsymbol{\eta}_t &= \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \eta_t^* \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_\mu &:= \mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_\mu &:= \mathbf{c}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d_\mu &:= \mathbf{d}_t = 0, \quad h := h_t = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Tegu on mittestatsionaarse olekuvektoriga lause (2.1) põhjal, kuna eeldused pole täidetud. Üleminekumaatriksi \mathbf{T}_μ omaväärtuste absoluutväärtused pole ühest väiksemad. Kasutame selle näitamiseks võrrandit (1.20), sest üleminekumaatriksi mõõtmed on 2×2 . Saame:

$$\lambda_{1,2} = 1. \quad (3.58)$$

Seetõttu valime algväärtusteks $\mathbf{a}_0 = [0 \ 0]'$ ja $\mathbf{P}_\mu^0 = p\mathbf{I}_2$, kus p on piisavalt suur arv. Lokaalse lineaarse trendi mudeli hüperparameetriks on $\mathbf{\Psi} = [\sigma_\varepsilon^2 \ \sigma_\zeta^2 \ \sigma_\eta^2]$, kus dispersioonid transformeeritakse sarnaselt näitele (2.3).

3.5 Täielik struktuurne mudel

Järgnevalt ühendame kolme eelmise alapeatükid kokku. Täielikuks struktuurseks mudeliks nimetatakse mudelit, mis avaldub kujul:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \varepsilon_t, \ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.59a)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \zeta_t, \ \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2) \quad (3.59b)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t, \ \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.59c)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}, \ \text{Var} \begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \sigma_\kappa^2 \mathbf{I} \quad (3.59d)$$

$$\gamma_{t+1} = - \sum_{j=1}^3 \gamma_{t+1-j} + \omega_t, \ \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2). \quad (3.59e)$$

Täielik struktuurne mudel on esitatav varjatud komponentidega mudeli kujul,

kus

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_t &= [\mathbf{Z}_\mu \quad \mathbf{Z}_\psi \quad \mathbf{Z}_\gamma] = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \\
\boldsymbol{\alpha}_t &= [\mu_t \quad \beta_t \quad \psi_t \quad \psi_t^* \quad \gamma_t \quad \gamma_{t-1} \quad \gamma_{t-2}]', \\
\mathbf{T}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \cos(\lambda) & \rho \sin(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \sin(\lambda) & \rho \cos(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_t &= \mathbf{I}_7, \\
\boldsymbol{\eta}_t &= [\zeta_t \quad \eta_t \quad \kappa_t \quad \kappa_t^* \quad \omega_t \quad 0 \quad 0]', \\
\mathbf{Q}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{c}_t &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]', \quad d_t = 0, \quad h_t = \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Esimeseks olekvektoriks ja tema kovariatsioonimaatriksiks valime kombinatsiooni alammudelite omadest, defineerides $\mathbf{a}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$ ja

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\mu^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_\psi^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_\gamma^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_\kappa^2}{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_\kappa^2}{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

kus p on piisavalt suur arv. Vastava mudeli hüperparameeter on:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\zeta^2 \quad \sigma_\eta^2 \quad \sigma_\kappa^2 \quad \rho \quad \lambda \quad \sigma_\omega^2]'. \tag{3.62}$$

Järgnevalt paneme kirja mudeli kitsendused. Soovime, et maksejõuetuse lävend B_{tP} poleks ajas liiga volatiilne, seega esimene mudeli kitsendus on $\zeta_t = 0$, mille tulemusena on lokaalne lineaarne trend sile. Samas soovime, et lokaalne lineaarne trend ei kirjeldaks peamiselt uuritavat aegrida, vaid stohhastiline tsükkel kirjeldaks

põhilisi muudatusi aegreas, seega nõuame, et lokaalne trend oleks lineaarne ehk $\eta_t = 0$. Lõplik mudel avaldub kujul:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_t &= [\mathbf{Z}_\mu \quad \mathbf{Z}_\psi \quad \mathbf{Z}_\gamma] = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \\
\boldsymbol{\alpha}_t &= [\mu_t \quad \beta_t \quad \psi_t \quad \psi_t^* \quad \gamma_t \quad \gamma_{t-1} \quad \gamma_{t-2}]', \\
\mathbf{T}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \cos(\lambda) & \rho \sin(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \sin(\lambda) & \rho \cos(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_t &= \mathbf{I}_7, \\
\boldsymbol{\eta}_t &= [0 \quad 0 \quad \kappa_t \quad \kappa_t^* \quad \omega_t \quad 0 \quad 0]', \\
\mathbf{Q}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{c}_t &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]', \quad d_t = 0, \quad h_t = \sigma_\varepsilon^2, \\
\boldsymbol{\Psi} &= [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\kappa^2 \quad \rho \quad \lambda \quad \sigma_\omega^2]'.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Äritsükli indeksi leidmiseks läbitakse järgmised etapid:

1. Rakendame maksejõetusmäära aegreale standardiseeritud normaaljaotuse pöördfunktsiooni.
2. Uurime tekkinud aegrea spektrit, leidmaks esialgse hinnangu λ_c -le.
3. Rakendame mudelit (3.63) ning teostame mudeli headuse hindamise. Juhul kui on vajadust, siis modifitseerime mudelit (3.63).
4. Standardiseerime saadud äritsükli, et saada äritsükli indeks. Leiame ρ ja TTC taseme läbi ajaloo.
5. Võrdleme saadud suuruseid konservatiivse lähenemisega.
6. Teostame jääkliikmete uurimise.

4 Näited

Selles peatükis uuritakse kahte erinevat portfelli: Eesti kodulaenude ja Rootsi väikeettevõtete globaalseid² portfelle.

4.1 Eesti kodulaenude portfell

Esimese näitena kasutame Eesti Panga kodulaenude andmeid vahemikust 31.01.1997 - 28.02.2019. Uuritav aegrida koostatakse väljastatud laenude jääkide summast³ ning tähtajaks tasumata laenude jääkide summast⁴, kus nõuame, et vähemalt 60 päeva pole tasutud laenu.

| Kuupäev | Jääk (mEUR) | Võlg (mEUR) | DF_M | DF_Q |
|------------|-------------|-------------|-----------------------|---|
| 31-01-1997 | 57.7 | 0.9 | | |
| 28-02-1997 | 62.2 | 0.5 | | |
| 31-03-1997 | 66 | 0.5 | | |
| 30-04-1997 | 78.5 | 0.5 | $DF_{M;1} = 0.5/57.7$ | |
| 31-05-1997 | 85.6 | 0.7 | $DF_{M;2} = 0.5/62.2$ | |
| 30-06-1997 | 90.1 | 0.5 | $DF_{M;3} = 0.7/66$ | $DF_{Q;1} = (DF_{M;1} + DF_{M;2} + DF_{M;3})/3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 31-07-2018 | 7364.4 | 32.9 | $DF_{M;T-5}$ | |
| 31-08-2018 | 7405 | 32.5 | $DF_{M;T-4}$ | |
| 30-09-2018 | 7449.6 | 30.9 | $DF_{M;T-3}$ | $DF_{Q;T-1} = (DF_{M;T-3} + DF_{M;T-4} + DF_{M;T-5})/3$ |
| 31-10-2018 | 7511.6 | 32 | $DF_{M;T-2}$ | |
| 30-11-2018 | 7557.4 | 30.9 | $DF_{M;T-1}$ | |
| 31-12-2018 | 7602.6 | 28.4 | $DF_{M;T}$ | $DF_{Q;T} = (DF_{M;T} + DF_{M;T-1} + DF_{M;T-2})/3$ |

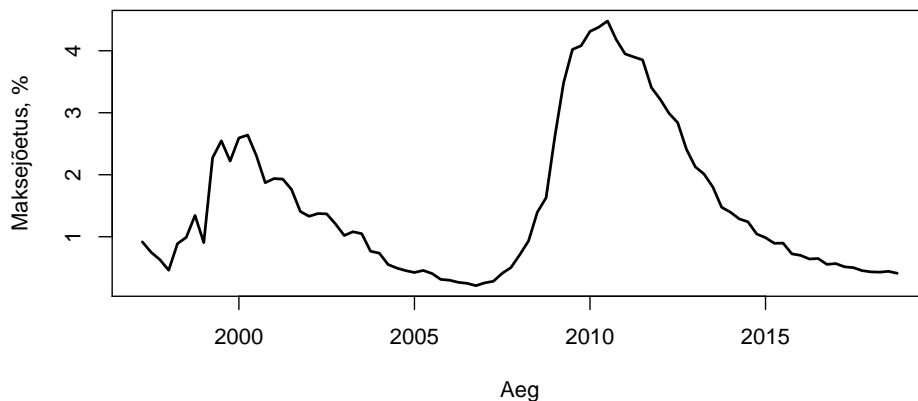
Vastava suhte kaudu saadakse kätte Eesti kodulaenude portfelli maksejõuetuse määra aegrida, kus andmed on esitatud kvartaalselt⁵. Tähistame tekkinud aegrea $DF = \{DF_{Q;1}, \dots, DF_{Q;T}\}$.

²Riigi tasemel.

³3.3.3 Kodumajapidamistele antud laenude jääk ja arv laenu liigi, valuuta ja tagatise lõikes

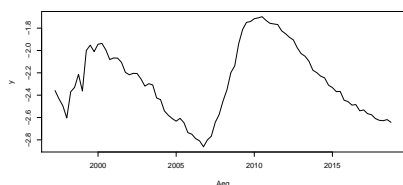
⁴3.3.11 Tähtajaks tasumata laenude jääk

⁵Edaspidi on kvartal tähistatud tähisega Q .

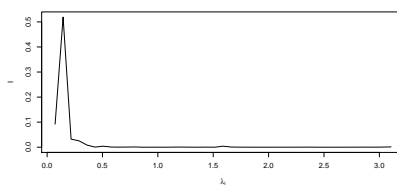


Joonis 2: Eesti kodulaenude portfelli maksejõuetus; 1997Q2 - 2018Q4

Järgnevalt läbime etapid, mis toodi välja autori poolt eelmise peatüki lõpus. Rakendame maksejõetusmäära aegreale standardse normaaljaotuse pöördfunktsiooni ning tähistame tekkinud aegrea ehk $y = \Phi^{-1}(DF)$. Uurime tekkinud aegrea spektrit, hindamakas kas vastav aegrida sisaldab perioodilist komponenti ning juhul kui sisaldab, siis mis on tsüklilise perioodi pikkus. Soovime leida, milliste λ_j korral on spektri väärtus kõige suurem, mis annab indikatsiooni, et aegrida sisaldab perioodilist komponenti. Selleks, et saaks rakendada valimi spektrit, eraldame aegreast lineaarse trendi ja sesoonse komponendi. Vaatluse teel teeme kindlaks, et sagedusel $\lambda_q = 0.144441$ omab kõige suuremat spektri väärtust ehk vastav aegrida sisaldab perioodilist komponenti, mille pikkus on $2\pi/\lambda_q = 43.5Q$ ehk 10.875 aastat. Leitud suurus sobib eelnevalt defineeritud äritsükli pikkuse vahemikku (vt võrrand (3.44)).



(a) $y = \Phi^{-1}(DF)$



(b) Aegrea y spektrum

Eeldame, et tsükliline komponent on mudelis tugevalt esindatud, seega esialgseks ρ väärtuseks võtame 0.9 ehk transformeeritud kujul $\Psi_\rho = -\log \frac{\rho}{1-\rho}$. Äritsükli perioodi pikkus aegrea spektri järgi on hinnanguliselt $\lambda = 0.144441$ ning transformeeritud kujul $\Psi_\lambda = -\log \frac{\lambda}{\pi - \lambda}$. Dispersioonide σ_ϵ^2 ja σ_κ^2 algväärtusteks võtame 1 ning transformeeritud kuju avaldub $\Psi_i = \log \sigma_i^2$, kus $i \in \{\epsilon, \kappa\}$. Sesoonse mü-

ra komponendi dispersiooni σ_γ^2 väärtuseks valime 0.36, sest eeldame, et sesoonne komponent muutub ajas, aga mitte tugevalt:

$$\Psi_0 = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\kappa^2 \quad \rho \quad \lambda \quad \sigma_\gamma^2]' = [1 \quad 1 \quad 0.9 \quad 0.1444441 \quad 0.36]' \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow \Psi_0 = [\Psi_\varepsilon \quad \Psi_\kappa \quad \Psi_\rho \quad \Psi_\lambda \quad \Psi_\gamma]' = [0 \quad 0 \quad -2.19722 \quad 3.03255 \quad -1]'. \quad (4.2)$$

Leidmaks optimaalne hinnang hüperparameetritele Ψ , rakendame Kalmani filtrit koos BFGS algoritmiga. Veendumaks, kas algoritm leidis miinimumi nõuame, et Hessi maatriksi omaväärtused oleksid positiivselt määratud. Vastasel juhul on algoritm leidnud sadulpunkti.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0.0719 & 0.0010 & -0.0019 & 0.0187 \\ 0.0719 & 29.8473 & -1.5076 & -7.1099 & 3.7035 \\ 0.0010 & -1.5076 & 2.1488 & 0.0936 & 0.0739 \\ -0.0019 & -7.1099 & 0.0936 & 112.6984 & -0.1266 \\ 0.0187 & 3.7035 & 0.0739 & -0.1266 & 3.5628 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\mathbf{H}} = [113.3064 \quad 29.8365 \quad 3.1199 \quad 1.9949 \quad 0.0022] \quad (4.4)$$

Järgmiseks, uurime mudelis esindatud muutujate olulisust lõppseisundis, kasutades selleks Hii-ruut statistikut (vt alampeatükk 2.3 punkt 6).

| Komponent | f | Hii-ruut | Pr $> \chi^2$ |
|----------------|---|----------|---------------|
| Lokaalne trend | 1 | 677.86 | <.0001 |
| Tõusunurk | 1 | 0.41 | 0.5209 |
| Tsükkel | 2 | 22.47 | <.0001 |
| Sesoonsus | 3 | 1.42 | 0.7014 |

Tabel 2: Komponentide olulisuse hindamine lõppseisundis

Lähtudes tabelist Tabel 2 statistilistest tulemustest, märkame, et sesoonne komponent ja tõusunurk pole mudeli lõppseisundis olulised komponendid, samas on keeruline ümber lükata hüpoteesi, et mõlemad komponendid poleks üldsegi olulised mudelis. Selleks, et saada rohkem selgust uurime vastava mudeli (tähistame Mudel 1) tõepära statistikuid ning ka kahe lihtsama mudeli (tähistame Mudel 2 ja Mudel 3) väärtusi, kus Mudel 2 korral $\gamma_t = 0$ ja Mudel 3 korral $\gamma_t = 0$ ning $\beta_t = 0$. Eelnevalt on kontrollitud, et Hessi maatriksid vastavate mudelite korral on positiivselt määratud.

| Statistik | Mudel 1 | Mudel 2 | Mudel 3 |
|-------------------------|----------------|----------------|----------------|
| Vaatluste arv | 87 | 87 | 87 |
| Tundmatuid parameetreid | 5 | 4 | 4 |
| Hajutatud algväärtuseid | 5 | 2 | 1 |
| logL | 106.16 | 104.6 | 109.9 |
| AIC | -202.3 | -201.2 | -211.7 |
| AICC | -192.3 | -197.2 | -209.7 |
| BIC | -190.3 | -191.5 | -201.9 |
| BICC | -168.3 | -182.6 | -197.5 |

Tabel 3: Tõepära statistikumud

Tabelist Tabel 3 märkame, et mudeli Mudel 3 korral on hajutatuid algväärtusi üks ning tõepära statistiku väärtused on kahe eelneva mudeli omadest väiksemad. Seega jääme vastava mudeli juurde ning kontrollime, kas lõppseisundis on kõik komponendid olulised või mitte.

| Komponent | DF | Hii-ruut | Pr > χ^2 |
|------------------|-----------|-----------------|------------------------------------|
| Lokaalne trend | 1 | 2781.73 | <.0001 |
| Tsükkel | 2 | 56.92 | <.0001 |

Tabel 4: Komponentide olulisuse hindamine lõppseisundis

Märkame, et lõppseisundis on nii lokaalne trend kui ka tsükliline komponent mudeli seisukohast olulised muutujad prognoosimaks tuleviku väärtuseid. Järgnevalt teostame testi, mis annab aimdust, kas hinnatud parameeter on statistilisest oluline mudelis või mitte (vt alampeatükk 2.3 punkt 5). Selleks peame transformeerima Hessi maatriksit, kuna Hessi maatriks on leitud transformeeritud hüperparameetri pealt. Tähistame

$$\Psi = [\Psi_\varepsilon \quad \Psi_\kappa \quad \Psi_\rho \quad \Psi_\lambda]' = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4]', \quad (4.5a)$$

$$\Phi = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\kappa^2 \quad \rho \quad \lambda] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]'. \quad (4.5b)$$

ning kirjutame transformeeritud funktsioonid kujul

$$\Phi_1 = \exp(\Psi_1) \Rightarrow \Psi_1 = \log(\Phi_1) \Rightarrow \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Phi_1} = \frac{1}{\Phi_1}, \quad (4.6a)$$

$$\Phi_2 = \exp(\Psi_2) \Rightarrow \Psi_2 = \log(\Phi_2) \Rightarrow \frac{\partial \Psi_2}{\partial \Phi_2} = \frac{1}{\Phi_2}, \quad (4.6b)$$

$$\Phi_3 = \frac{\exp(-\Psi_3)}{1 + \exp(-\Psi_3)} \Rightarrow \Psi_3 = -\log\left(\frac{\Phi_3}{1 - \Phi_3}\right) \Rightarrow \frac{\partial \Psi_3}{\partial \Phi_3} = \frac{1}{\Phi_3(\Phi_3 - 1)}, \quad (4.6c)$$

$$\Phi_4 = \pi \frac{\exp(-\Psi_4)}{1 + \exp(-\Psi_4)} \Rightarrow \Psi_4 = -\log\left(\frac{\Phi_4}{\pi - \Phi_4}\right) \Rightarrow \frac{\partial \Psi_4}{\partial \Phi_4} = \frac{\pi}{\Phi_4(\Phi_4 - \pi)}. \quad (4.6d)$$

Kuna soovime näidata tsüklilise komponendi perioodili pikkust $2\pi/\Phi_4 = \Phi_4^*$, siis modifitseerime Φ_4 avaldist:

$$\begin{cases} 2\pi/\Phi_4 = \Phi_4^* \Leftrightarrow 2\pi/\Phi_4^* = \Phi_4 \\ \Phi_4 = \pi \frac{\exp(-\Psi_4)}{1 + \exp(-\Psi_4)} \end{cases} \quad (4.7)$$

ehk

$$2\pi/\Phi_4^* = \pi \frac{\exp(-\Psi_4)}{1 + \exp(-\Psi_4)} \Rightarrow \Psi_4 = -\log\left(\frac{2/\Phi_4^*}{1 - 2/\Phi_4^*}\right) \Rightarrow \frac{\partial\Psi_4}{\partial\Phi_4^*} = \frac{1}{\Phi_4^* - 2}. \quad (4.8)$$

Leiame teist-järku osatuletised negatiivsest logaritmilisest tõepärafunktsioonist $-\log L$ ning tähistame ümber $\Phi_4^* = \Phi_4$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\log L}{\partial\Phi_i} &= \frac{\partial\log L}{\partial\Psi_i} \frac{\partial\Psi_i}{\partial\Phi_i} \\ &\Rightarrow \\ \frac{\partial^2\log L}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j} &= \frac{1}{\partial\Phi_j} \partial\left(\frac{\partial\log L}{\partial\Psi_i} \frac{\partial\Psi_i}{\partial\Phi_i}\right) \\ &= \frac{\partial^2\log L}{\partial\Psi_i\partial\Psi_j} \frac{\partial\Psi_i}{\partial\Phi_i} \frac{\partial\Psi_j}{\partial\Phi_j} + I_{i=j} \frac{\partial\log L}{\partial\Psi_i} \frac{\partial^2\Psi_i}{\partial^2\Phi_i} \text{ kus } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Eelduste kohaselt on optimaalne hinnang Ψ funktsiooni $-\log L$ miinimum punkt, seega teine liidetav võrdub nulliga ning saame Hessi maatriksi transformeerimise kirja panna:

$$\mathbf{H}_\Psi = \left[-\frac{\partial^2\log L}{\partial\Psi\partial\Psi'} \right] \Rightarrow \mathbf{H}_\Phi = \left[-\frac{\partial^2\log L}{\partial\Phi\partial\Phi'} \right]. \quad (4.11)$$

Tundmatute parameetrite ligikaudsed standardhälved leiame maatriksi \mathbf{H}_Φ pöördmaatriksi diagonaalilt.

| Komponent | Parameeter | Hinnang | \sim std.hälve | t väärtus | Pr $> t $ |
|-----------|------------------------|----------|------------------|-----------|------------|
| Müra | σ_ε^2 | 0.00064 | 0.00041 | 1.57 | 0.1158 |
| Tsükkel | ρ | 0.98291 | 0.01092 | 90.04 | <.0001 |
| Tsükkel | $2\pi/\lambda$ | 44.96379 | 4.72410 | 9.52 | <.0001 |
| Tsükkel | σ_κ^2 | 0.00270 | 0.00079 | 3.40 | 0.0006 |

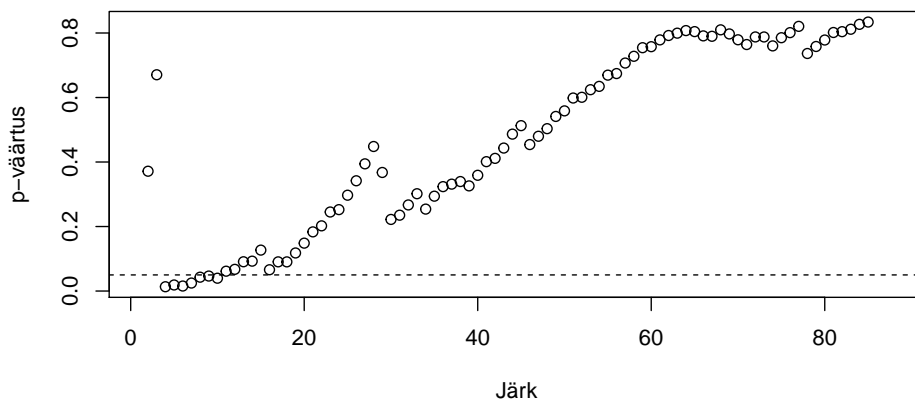
Tabel 5: Parameetrite olulisus

Märkame, et kõik parameetrid on mudelis statistiliselt olulised peale müra dispersiooni, aga vastavat komponenti pole võimalik mudelist välja visata, sest ilma mürata mudel ei ole kindlasti reaalsusele vastav. Viimaseks uurime prognoosimõdikuid, mis on arvutatud prognoosivigade pealt.

| Prognoosimõõdik | Väärtus |
|-----------------|---------|
| MSE | 0.00480 |
| RMSE | 0.06931 |
| MAD | 0.04598 |

Tabel 6: Prognoosimõõdikud

Märkame, et prognoosimõõdikud on suhtelist väikesed, mis annab kindlust, et vastav mudel sobitub andmetega. Prognoosivigade sõltuvust kontrollime Ljung-Box testi statistiku p -väärtuste abil (vt alampeatükk 2.3 punkt 7d). Jooniselt näeme, et 3 aasta perioodile (st järk = 12) vastav Ljung-Box testi statistiku p -väärtus on üle ländi, seega võime eeldada, et vealiikmed on sõltumatud juhuslikud suurused.



Joonis 4: Ljung-Box test

Soovime äritsükli indeksit 2018. aasta lõpu seisuga, seega kasutame silutud Kalmani filtri (vt alapeatükk 2.2.1) tulemusi:

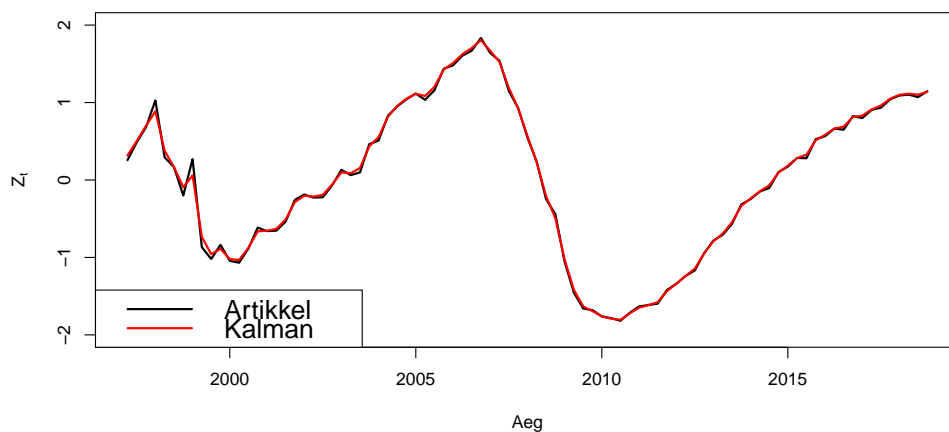
$$B_{tP} = \hat{\mu}_t \quad (4.12a)$$

$$\Phi^{-1}(DF_{tP}) = \hat{\mu}_t - \hat{\psi}_t \quad (4.12b)$$

$$\rho_\psi = \frac{\hat{\sigma}_\psi^2}{1 + \hat{\sigma}_\psi^2} \quad (4.12c)$$

$$Z_t = \frac{B_{tP} - \Phi^{-1}(DF_{tP})\sqrt{1 + \rho_\psi}}{\sqrt{\rho_\psi}} = \frac{-\hat{\psi}_t}{\hat{\sigma}_\psi}. \quad (4.12d)$$

Võrdleme saadud tulemusi artiklis [2] välja toodud meetodika vastu.

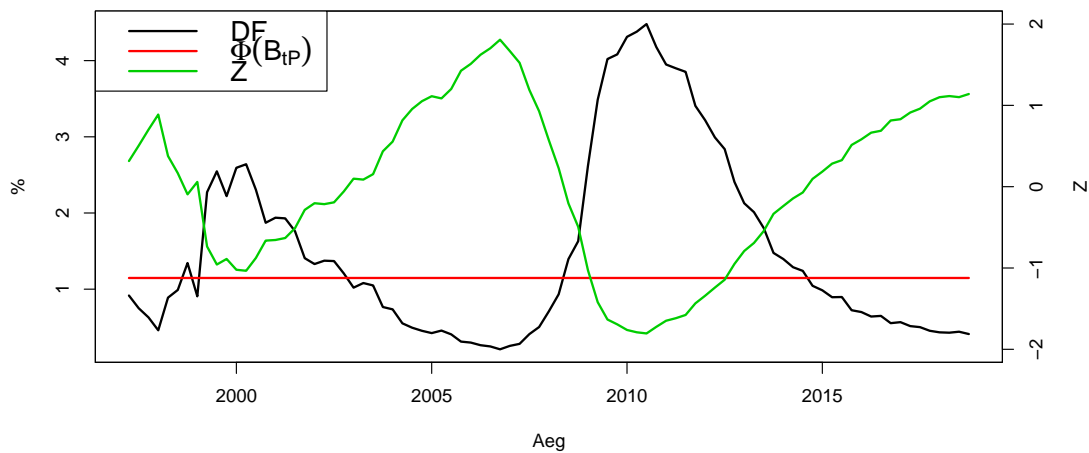


Joonis 5: Eesti kodulaenude portfelli äritsükli indeks ajahetkel 2018Q4

Joonise põhjal pole kahel meetodil väga palju erinevusi, sest tõusunurk polnud varjatud komponentidega mudeli korral statistiliselt oluline komponent. Jooniselt märkame, et äritsükli indeks on siledam varjatud komponentidega mudeli puhul ning artikli meetod võimendab ekstreemseid ajapunkte. Lisaks oleme varjatud komponentidega mudeli abil teinud kindlaks tsüklilise komponendi pikkuse ja maksejõuetuse lävend on leebem ning korrelatsioonikordaja kahe kliendi vahel on nõrgem võrreldes artiklis välja pakutud meetodiga.

| Komponent | Artikkel | Kalman |
|-----------|----------|--------|
| B_P | -2.170 | -2.168 |
| ρ | 0.092 | 0.091 |

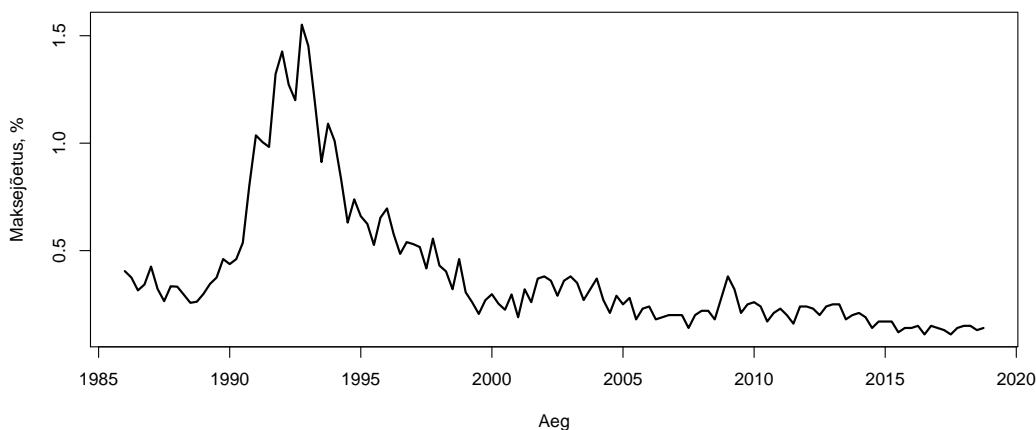
Kokkuvõtteks esitame Eesti kodulaenude portfelli maksejõuetuse määra, PTTC PD taseme ehk $\Phi(B_{tP})$ ja vastava portfelli äritsükli indeksi ajahetkel 2018Q4 ühel joonisel.



Joonis 6: Eesti kodulaenude portfelli maksejõuetuse määr, $\Phi(B_{tP})$ ja äritsükli indeks; 1997Q2 - 2018Q4

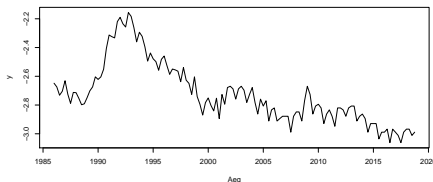
4.2 Rootsi väikeettevõtete portfelli

Vaatleme Rootsi väikeettevõtete globaalset portfelli, kus andmed pärinevad vahemikust 1986Q1 - 2018Q4.

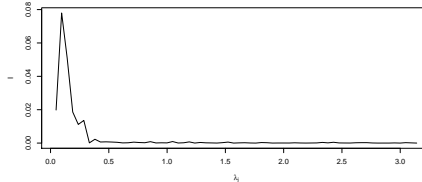


Joonis 7: Rootsi väikeettevõtete portfelli maksejõuetus; 1986Q1 - 2018Q4

Järgnevalt rakendame standardiseeritud normaaljaotuse pöördfunktsiooni ning leiame sobiliku λ_q väärtuse eemalades lineaarse trendi ja sessoonse komponendi aegreast.



(a) $y = \Phi^{-1}(DF)$



(b) Aegrea y spektrum

Võrreldes Eesti kodulaenu portfelli spektriga, käitub Rootsi väikeettevõtete aegrida teisit ning seda kinnitab ka perioodilisuse pikkus, sest $\lambda_q = 0.09519978$ ning $2\pi/\lambda_q = 66Q$ ehk 16.5 aastat, mis ületab perioodilise pikkuse poolst äritsükli pikkust (vt võrrand (3.44)). Samas vastav definitsioon pole rangelt määratud. Võtame saadud väärtuse endale esialgseks hinnanguks ning ülejäänud tundmatute parameetrite algväärtused jätame samaks, mille väärtused olid antud eelmises näites:

$$\Psi_0 = [\sigma_\varepsilon^2 \quad \sigma_\kappa^2 \quad \rho \quad \lambda \quad \sigma_\gamma^2]' = [1 \quad 1 \quad 0.9 \quad 0.09519978 \quad 0.36]' \quad (4.13)$$

\Leftrightarrow

$$\Psi_{\dot{0}} = [\Psi_\varepsilon \quad \Psi_\kappa \quad \Psi_\rho \quad \Psi_\lambda \quad \Psi_\gamma]' = [0 \quad 0 \quad -2.197225 \quad 3.465736 \quad -1]' \quad (4.14)$$

Kontrollime Hessi maatriksit

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 12.5632 & 10.8544 & 0.2189 & -0.2080 & 0.9043 \\ 10.8544 & 25.1274 & -2.6379 & -7.7160 & 0.7513 \\ 0.2189 & -2.6379 & 3.0954 & -0.4804 & 0.0154 \\ -0.2080 & -7.7160 & -0.4804 & 45.6985 & -0.0365 \\ 0.9043 & 0.7513 & 0.0154 & -0.0365 & 0.7895 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

\Rightarrow

$$\lambda_{\mathbf{H}} = [48.6897 \quad 28.9700 \quad 6.6603 \quad 2.2343 \quad 0.7197] \quad (4.16)$$

Järgmiseks vaatame komponentide olulisust lõppseisundis

| Komponent | DF | Hii-ruut | Pr $> \chi^2$ |
|----------------|----|----------|---------------|
| Lokaalne trend | 1 | 4106.15 | <.0001 |
| Tõusunurk | 1 | 47.33 | <.0001 |
| Tsükkel | 2 | 0.12 | 0.9426 |
| Sesoonsus | 3 | 48.66 | <.0001 |

Tabel 7: Komponentide olulisuse hindamine lõppseisundis

Märkame, et kõik komponendid välja arvatud äritsükli komponent on mudeli seisukohast olulised. Kuna meie eesmärk on tuletada Rootsi väikeettevõtete portfelli äritsükli indeks jätame tsükli komponendi mudelisse. Lihtsama ülesehitusega mudelid ei vaatle. Järgmisena uurime, kas hüperparameetri liikmed on statistilised olulised liikmed või mitte.

| Komponent | Parameeter | Hinnang | \sim std.hälve | t väärtus | Pr $> t $ |
|-----------|------------------------|------------|------------------|-----------|-----------|
| Müra | σ_ε^2 | 0.00041 | 0.00016 | 2.56 | 0.01052 |
| Tsükkel | ρ | 0.97877 | 0.01313 | 74.54 | <.0001 |
| Tsükkel | $2\pi/\lambda$ | 51.47113 | 7.74583 | 6.65 | <.0001 |
| Tsükkel | σ_κ^2 | 0.00086 | 0.00025 | 3.43 | 0.00060 |
| Sesoonsus | σ_ω^2 | 0.00000492 | 0.0000578 | 0.85 | 0.39475 |

Tabel 8: Parameetrite olulisus

Märkame, et sesoonse komponendi müra dispersioon pole statistiliselt oluline ehk $\sigma_\omega^2 = 0$. Parima mudeli valimiseks võrdleme tõepära statistiku, kus Mudel 1 on esialgne mudel ning mudeli Mudel 2 korral $\sigma_\omega^2 = 0$.

| Statistik | Mudel1 | Mudel2 |
|-------------------------|--------|--------|
| Vaatluste arv | 132 | 132 |
| Tundmatuid parameetreid | 5 | 4 |
| Hajutatud algväärtuseid | 5 | 5 |
| logL | 207.9 | 207.1 |
| AIC | -405.8 | -406.1 |
| AICC | -395.8 | -396.1 |
| BIC | -391.5 | -394.8 |
| BICC | -367.3 | -370.5 |

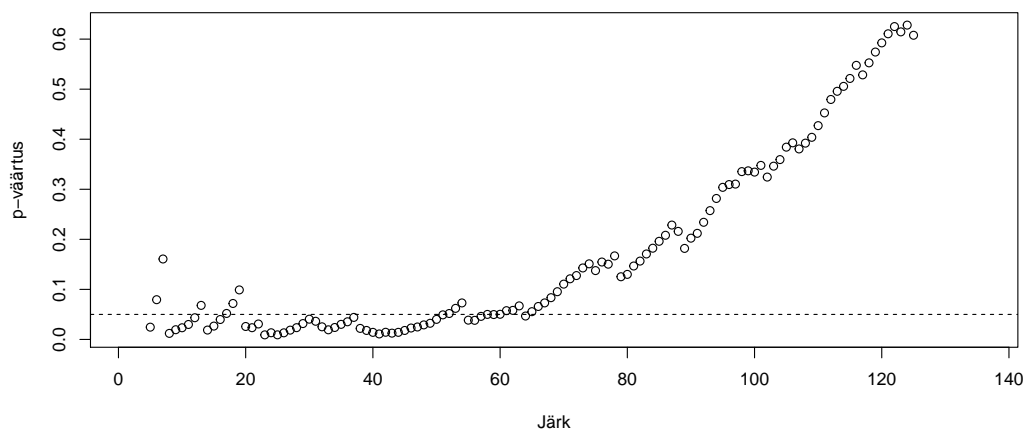
Tabel 9: Tõepära statistikum

Märkame, et juhul kui sesoonse müra dispersioon on 0, siis on mudel pole märgatavalt parem, samas tegu on makromajanduse aegreaga ning perioodilised sündmused varieeruvad ajas, seega jääme esimese mudeli juurde, kus dispersioon ei ole 0.

| Prognoosimõõdik | Väärtus |
|-----------------|---------|
| MSE | 0.00215 |
| RMSE | 0.04632 |
| MAD | 0.0354 |

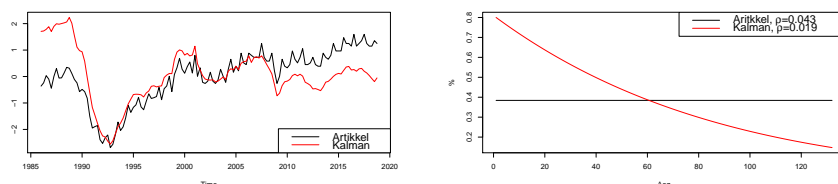
Tabel 10: Prognoosimõõdikud

Kõik kolm prognoosimõõdikut annavad väikesed väärtused, millega veendume, et vastav mudel sobitub hästi meie andmetega. Viimasena uurime Ljung-Box testi p -väärtuseid. Mudel ei ole sobiv, sest ei leidu mõistliku järku, mille korral Ljung-Box test statistiku p -väärtus oleks üle usaldus nivoo. Esimene täisaastatele vastava autokorrelatsioonide rühm, mille korral p -väärtus lävendist üle on 15 aasta (järk 60) perioodi oma.



Joonis 9: Ljung-Box test

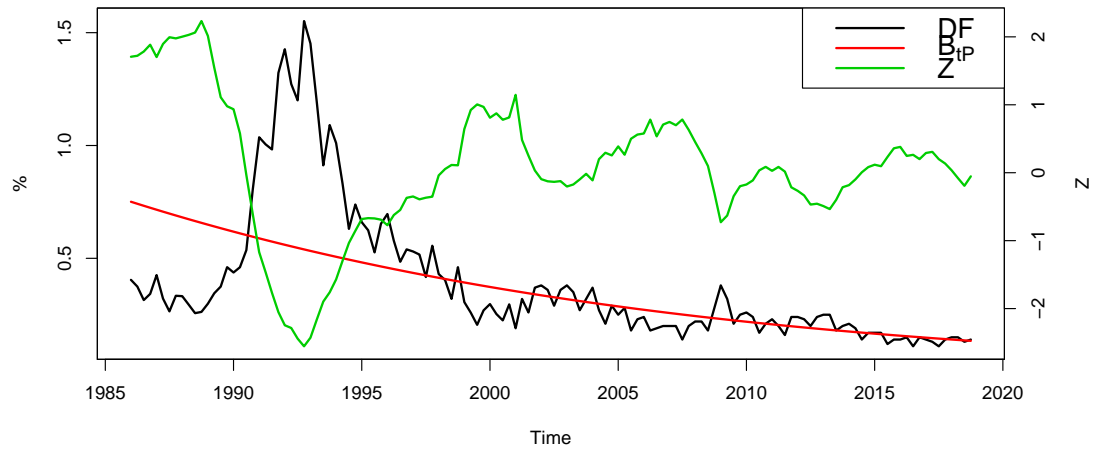
Soovime äriotsükli indeksit 2018 aasta lõpuga vaadelda, seega kasutame silutud Kalmani filtri tulemusi. Esitame kahe mudeli tulemused:



(a) Rootsi väikeettevõtete profelli äriotsükli indeks ajahetkel 2018Q4 (b) PTTC PD taseme ehk $\Psi(B_{tP})$ võrdlus koos ρ -ga

Joonis 10: Kahe mudeli võrdlus

Märkame, et varjatud komponentidega mudeliga leitud äriotsükli indeks on siledam ning hinnangud on täpsemad võrreldes artikli omaga, sest tõusunurk on mudelis statistiliselt oluline komponent. Lisaks märkame, et maksejõuetuse lävend varjatud komponentidega mudeli korral on muutunud ajas konstantselt väiksemaks ja korrelatsioonikordaja on väiksem võrreldes artiklis pakutud mudeliga. Esitame Rootsi väikeettevõtete maksejõuetuse määra, PTTC PD taseme ja äriotsükli indeksi ühel joonisel.



Joonis 11: Rootsi väikeettevõtete portfelli maksejõuetus, $\Phi(B_{tP})$ ja äritsükli indeks; 19867Q1 - 2018Q4

Kokkuvõte

Uuurisime äri-tsükli indeksi tuletamist konkreetse meetodiga, kus probleemi püsitus on viidud varjatud komponentidega mudelile ning rakendatud Kalmani filtrit.

Oleme näidanud, et vastav meetod leiab kahe erineva makromajanduse aegreast äri-tsükli indeksi, mis sobib IFRS 9 konteksti ning tööme välja ka punktid, miks primitiivne lähenemine allikas [2] ei sobi. Lisaks teostasime ka mudelite headuse hindamise. Vastavad näited illustreerivad mudeli võimekust kohaneda erineva aegreaga puhul ning iga portfelli maksejõuetuse aegrida tuleb spetsiifiliselt uurida.

Töös välja toodud meetodit on lihtne arvutis konstrueerida, sest meetod on rekursiivne eelnevate väärtuste pealt. Meetodi jaoks tuleb fikseerida algväärtused \mathbf{a}_0 , \mathbf{P}_0 ning anda esialgne hinnang hüperparameetritele Ψ . Meetod on suhteliselt kiire ning annab rahuldavad tulemused.

Tulevikus tasuks uurida kas müra väheneb, juhul kui lisada juurde tsüklilisi komponente või deterministlikule tsüklilise komponendile rohkem laineid. Lisaks tasub mõelda, kas leidub alternatiivseid makromajanduse aegridu, mis võiksid kirjeldada kindla segmendi käitumist globaalsel tasemel, millega leida äri-tsükli indeks.

Oleme tuletanud meetodi, millega on võimalik leida äri-tsükli indeks privaat- ja korporatiivpanganduse portfellidele. Finantsettevõttele annab parema arusaama, mis olukord vastavas portfellis hetkel on ning aitab korrigeerida vastavalt laenukahjumi katte reservi.

Viited

- [1] A. C. HARVEY, *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [2] M. CARLEHED & A. PETROV, *A methodology for point-in-time-through-the-cycle probability of default decomposition in risk classification systems*, Journal of Risk Model Validation Volume 6, 2012
- [3] N. FRYKSTRÖM & J. LI, *IFRS 9 - the new accounting standard for credit loss recognition*, Sveriges Riksbank, 2018
- [4] C. TOFFANO & F. NISI & L. MAURRI, *IFRS 9, Stress Testing, ICAAP: a comprehensive framework for PD calculation*, Prometeia, 2017
- [5] J. DURBIN & S.J. KOOPMAN, *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford University Press, Oxford, 2012
- [6] S.J. KOOPMAN & A. LUCAS & P. KLAASSEN, *Pro-Cyclical, Empirical Credit Cycles, and Capital Buffer Formation*, Tinberg Institute, Amsterdam, 2005
- [7] S.J. KOOPMAN & A. C. HARVEY & J. A. DOORNIK & N. SHEPHARD, *Unobserved Components Time Series Methodology*, Kasutatud 14.05.2019, <http://stamp-software.com/ucmethod.html#14.3.4>
- [8] S. GAENZLER, *Risk and Regulatory Insights: Reconciling Default Concepts for Risk Management Analytics*, Kasutatud 14.05.2019, <http://www.fivebridgesllc.com/resources/risk-and-regulatory-insights-reconciling-default-concepts-for-risk-management-analytics/>

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ravel Riik

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Äritsükli indeksi hindamine Kalmani filtriga", mille juhendaja on prof. Raul Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Ravel Riik

15.05.2019