

62059.

Ueber die
Berechnung der Störungen.

Eine mit Genehmigung
der
Hochverordneten physiko-mathematischen Fakultät
der Kaiserlichen Universität zu Dorpat

zur Erlangung der

Magisterwürde

verfasste und zur öffentlichen Vertheidigung bestimmte

Abhandlung

von

Friedr. Wilh. Berg,

Cand. astr.



Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1869.

Druckfehler.

Seite	5,	Zeile	3	von oben,	muss heissen	$\frac{d^2r}{dt^2}$
"	5,	"	4	"	"	"
"	18,	"	11	"	"	"
"	18,	"	13	"	"	"
"	18,	"	1	"	unten,	"
"	19,	"	2	"	oben,	"
"	19,	"	4	"	"	"
"	19,	"	3	"	unten,	"
"	29,	"	1	"	"	"
"	31,	"	15	"	oben,	"
"	32,	"	1	"	unten,	"
"	36,	"	11	"	oben,	"
"	38,	"	8	"	"	"
"	38,	"	15	"	"	"
"	38,	"	1	"	unten,	"
"	48,	"	9	"	oben,	"
"	49,	"	15	"	"	"
"	50,	"	8	"	"	"
"	52,	"	1	"	unten,	"
"	53,	"	8	"	oben,	"

$-\frac{2e}{a^2} \int m dt \{ \dots$
$\mathfrak{A} = -\alpha \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^2 + 2e \cos(\dots \right.$
$v' = m't + L' + v'$,
$u', u', z, \text{ etc.}$
$\left\{ a^2 - 2au' \cos \theta + a'^2 \right\}^{-s}$
$X = \nu \left(\frac{x'-x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) m'$
$\nu = \frac{1}{2} \bar{W}_0$
die Klammer muss nach h kommen.
$D_1 \bar{r} \sin(\bar{r} + \pi_0 - \Omega_0) - \text{etc.}$
in Bahnen etc.
Für ein ungraden q etc.
$(-1)^p \beta_2 = -2p \dots$
$+ \frac{1}{a} T \}$
$-\frac{n-2}{4} \cdot f. \frac{t^{(n)}}{i-4} = 0$
$1 + c'' = \frac{\cos \vartheta''}{\sqrt{\cos \vartheta'}}$
$\sum_{i'=\infty} \sin \varphi \sin \vartheta',$
$\sum_{i'=0} \dots$
$\frac{1}{2} (c_{\nu}'' - s_{\nu}')'$

Sonst muss im ganzen Werke für $\Omega, \bar{\Omega}$ gelesen werden.

Der Druck gestattet auf Verfügung der physiko-mathematischen Fakultät.

Dorpat, den 27. October 1869.

N^o 86.

Dr. P. Helmling,
d. Z. Decan der physiko-mathem. Fakultät.

Δ 63055

Abschnitt I.

Wenngleich *Kepler* nicht nur der Sonne eine Kraft zuschreibt, durch welche sie die Planeten um sich herum bewegt, sondern auch den einzelnen Planeten ¹, so hat er doch an Störungen, die ein Planet im Laufe eines andern hervorbringen kann, nie gedacht; und nur dadurch, dass diese Störungen der damaligen Beobachtungskunst beinahe sich entzogen, war es auch nur möglich, dass er die drei seinen Namen tragenden Gesetze, die nur für die rein elliptische Bewegung massenloser Punkte um die Sonne gelten, aufstellen konnte. Ueberhaupt hatte *Kepler* selbst von der Sonnenkraft, der Centrakraft im Sonnensysteme, einen nicht ganz deutlichen Begriff, indem er diese Kraft wohl von der Sonne ausgehend, aber nicht nach der Sonne gerichtet annahm. Durch verschiedene Folgerungen kommt er zu dem Schlusse, die Sonne müsse einen magnetischen Zustand haben; aber er folgert weiter, diese Sonnenkraft könne doch wiederum keine attractive sein, wie die Kraft der Magneten, weil dann die Planeten in die Sonne fallen müssten ². Erst der Italiener *Borelli*, der, wie *Zach* gezeigt hat ³, zwei Jahre vor dem Erscheinen der *Kometographie* von *Hevel*, die Behauptung ausgesprochen hat, der Komet von 1664 müsse sich in einer Parabel bewegt haben, weil er nur dann das zeigen konnte, was er gezeigt hat, sprach in seiner Theorie der Jupiters-Satelliten, Florenz 1666, zum ersten Male deutlich den Begriff einer Centralbewegung aus. Er sagt: „Jeder Planet und jeder Satellit bewegt sich offenbar um irgend

einen andern Körper des Universums, als um eine Quelle der Anziehung, von welcher jene Planeten und Satelliten gehalten und geführt werden, so dass sie sich nie von ihrem Hauptkörper entfernen können, sondern dass sie ihm vielmehr, welchen Weg auch derselbe nehmen mag, überall folgen und in immerwährenden Umläufen um ihn sich bewegen müssen.“ Diese Anziehung vergleicht *Borelli* mit einer Neigung, mit dem Centalkörper sich zu vereinigen. In demselben Werke wird auch von Störungen gesprochen, und es scheint, dass hier zum ersten Male von solchen die Rede ist. *Borelli* sagt: „Wie kann man zweifeln, dass die Mediceischen Gestirne, gleich allen übrigen Planeten, eine grössere Geschwindigkeit annehmen, wenn sie der Sonne näher kommen, und dass sie dann eigentlich von zwei bewegenden Kräften beherrscht werden, von denen die eine ihre Umläufe um Jupiter erzeugt, während die andere ihre Bewegung um die Sonne regulirt.“ 4.

Deutlicher als *Borelli*, spricht der scharfsinnige Engländer *Robert Hooke* von den gegenseitigen Anziehungen der Planeten 5. Er sagt, „aus meiner Theorie folgt, dass nicht nur Sonne und Mond Einfluss auf die Bewegung der Erde haben, sondern dass auch alle übrigen Planeten durch ihre Anziehungskraft die Erde zu bewegen suchen, und dass ebenso die Erde auf die Bewegung aller andern Planeten zurück wirke.“ Auch kann man sagen, dass *Hooke* dem wahren Begriffe des Beharrungsvermögens sehr nahe kam.

Aber erst *Newton* bewies die Existenz der gegenseitigen Anziehungen zwischen den Planeten, nachdem er die Form des nach ihm benannten Gravitationsgesetzes gefunden und bewiesen hatte. Die von der Sonne im Laufe des Mondes hervorgebrachten Störungen, hat er meistens untersucht und ihre Grösse auf synthetischem Wege bestimmt; aber die von einem Planeten im Laufe eines andern hervorgebrachten, hat er nicht der Rechnung unterworfen, wiewohl er ausdrücklich sagt, dass die Wirkung von Jupiter auf Saturn nicht vernachlässigt wer-

den darf 6. Aus seiner Theorie folgte er, dass die Perihelien von Mercur, Venus, der Erde und des Mars nach der Ordnung der Himmelszeichen langsam sich vorwärts bewegen.

Die fernere Ausbildung der Lehre von den Störungen, wurde nun aus doppeltem Grunde verlangt, und zwar erstens, um das von *Newton* aufgestellte Gesetz an den Erscheinungen zu prüfen, zweitens aber auch, weil man einsah, dass eine vollkommene Theorie des Mondes, die schon seit geraumer Zeit angestrebte Lösung des Längenproblems geben würde. *Euler* war es, der sich zuerst an eine analytische Untersuchung der Mondstörungen machte und im Jahre 1745 übergab er der Academie zu Berlin seine Arbeit: *Sur le mouvement des noeuds de la lune et sur la variation de son inclination à l'écliptique*. Acht Jahre später lieferte er eine vollständige Mondtheorie 7. Sein Gang in dieser Untersuchung ist folgender. Durch drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z , wird der Mondmittelpunkt auf den Erdmittelpunkt bezogen, und sind X, Y, Z , die in die Richtung der entsprechenden Coordinatenachsen fallenden Componenten der den Mond bewegenden Kraft, so hat man für die Bewegung des Mondmittelpunktes die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2}Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{2}Z,$$

wenn t die Zeit bedeutet. Die Coordinaten x, y, z , sind nun so angenommen, dass man setzen darf

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda, \quad z = \rho \tan \beta$$

wo ρ die curtirte Distanz des Mondmittelpunktes von der Erde, λ seine Länge und β seine Breite ist, dann erhält man

$$\rho \frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{2}(Y \cos \lambda - X \sin \lambda) = -\frac{1}{2}T$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}(X \cos \lambda + Y \sin \lambda) = -\frac{1}{2}V$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} \tan \beta + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\beta}{dt} \frac{1}{\cos \beta^2} + \frac{\rho}{\cos \beta^2} \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{2\rho \sin \beta}{\cos \beta^3} \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}Z.$$

Durch

$$\tan \beta = \tan i \sin(\lambda - \Omega)$$

wo i die Neigung der Mondbahn, und Ω die Länge des Mondknotens ist, findet man

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\lambda - \Omega)}{\rho} \left\{ V \sin(\lambda - \Omega) + T \cos(\lambda - \Omega) - \frac{Z}{\tan i} \right\}$$

$$d \log \tan i = \frac{d\Omega}{\tan(\lambda - \Omega)}$$

und diese beiden braucht *Euler* statt der obern dritten.

Sei ferner L die Länge der Sonne, R die Entfernung der Erde von der Sonne, R_1 die des Mondes von der Sonne, \odot , \oplus , \ominus , die entsprechenden Massen dieser drei Körper, so giebt *Euler*

$$T = \left(\frac{\odot R}{R_1^3} - \frac{\odot}{R^2} \right) \sin(\lambda - L)$$

$$V = \left(\oplus + \ominus \right) \frac{\cos \beta^3}{\rho^2} + \frac{\odot \rho}{R_1^3} + \left(\frac{\odot}{R^2} - \frac{\odot R}{R_1^3} \right) \cos(\lambda - L)$$

$$Z = \frac{\odot \rho \tan \beta}{R_1} - \left(\oplus + \ominus \right) \frac{\sin \beta \cos \beta^2}{\rho^2}$$

Aus den obigen Gleichungen wurde nun die Zeit durch die mittlere Anomalie der Sonne und diese hierauf durch die des Mondes eliminirt. Zur schliesslichen Anwendung der hieraus resultirenden Gleichungen, ersetzt *Euler* die mittlere Anomalie des Mondes durch die wahre, und entwickelt nach dieser, um die Integration der Gleichungen vollziehen zu können. Die Coefficienten der auftretenden Reihen hängen von den ersten und zweiten Potenzen der Excentricitäten der Sonnen- und Mondbahn ab. Dieser *Euler'schen* Methode hat sich auch *T. Mayer* bei der Berechnung seiner Mondtafeln bedient. Zwanzig Jahre später lieferte *Euler* andere Methoden zur Berechnung der Mondstörungen. Zugleich mit *Euler* beschäftigten sich auch *Clairaut* und *d'Alembert* mit demselben Probleme, das man, da nur drei Körper, Mond, Erde und Sonne, in Betrachtung kamen, das Problem der drei Körper nannte; und schon im Jahre 1747 übergaben sie ihre Lösungen der Pariser Academie. Drei Jahre später überreichte *Clairaut* der Academie zu Petersburg eine vollständige Mondtheorie ⁸.

Ohne von rechtwinkligen Coordinaten auszugehen, gelangt *Clairaut* sehr schnell zu den folgenden Gleichungen:

$$\frac{dr^2}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = -R$$

$$r \frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} = T$$

wo r der Radius vector des Mondes ist, v seine wahre Anomalie (gerechnet vom Apogaeum), R die Kraft, die den Mond zur Erde treibt und T die, die in der Richtung der Tangente der Mondbahn wirkt. Aus der zweiten Gleichung folgt nun durch Integration

$$r^2 \frac{dv}{dt} = f + \int Tr dt$$

wo f die Integrationsconstante ist. Und da

$$\int Tr^3 dv = f \int Tr dt + \frac{1}{2} \left(\int Tr dt \right)^2$$

so wird

$$dt = \frac{r^2 dv}{f \sqrt{1 + 2\rho}}$$

wobei

$$\rho = \frac{1}{f^2} \int Tr^3 dv;$$

ist demnach die Bahn bekannt, so giebt die vorletzte Gleichung die Zeit, die der Körper nöthig hatte, einen gewissen Theil der Bahn zu durchlaufen. Diesen Ausdruck der Zeit gebraucht nun *Clairaut* zur Umformung der ersten der beiden obern Gleichungen, und indem er setzt

$$R = \frac{M}{r^2} + \varphi$$

$$1 + \Omega = \frac{1 + \frac{\rho r^2}{M} + \frac{f d\rho dr}{M r^2 dv}}{1 + 2\varphi}$$

$$1 - \frac{f^2}{Mr} = s$$

wo M die Summe der Erd- und Mondmasse ist und φ die störende Kraft vorstellt, so erhält er

$$\frac{d^2v}{dv^2} + s = -\Omega$$

aus der durch zweimalige Integration

$$\frac{f^2}{Mr} = 1 - g \sin v - c \cos v + \sin v \int \Omega \cos v \, dv - \cos v \int \Omega \sin v \, dv$$

erhalten wird. Hierbei sind g und c Integrationsconstanten. Nimmt man den von Ω unabhängigen Theil dieser Gleichung, so ist dieser die Wirkung der Kraft $\frac{M}{r^2}$, und da man ihn auf die Form

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(v - \eta)}$$

bringen kann, wo

$$\frac{g}{\sqrt{g^2 + c^2}} = \sin \eta, \quad \sqrt{g^2 + c^2} = e, \quad \frac{f^2}{M} = p$$

so sieht man, dass dieser Theil eine Ellipse darstellt, deren Dimensionen p und e angeben. Um die Integration nach v auszuführen, setzt *Clairaut*

$$\Omega = A \cos pv + B \cos qv + \dots$$

wo A, B u. s. w. von den Dimensionen und Lagen der Bahnen abhängen, und p, q , u. s. w. ganze Zahlen sind; da aber durch solch eine Substitution ein Glied entsteht, das proportional dem Winkel v wird, so sucht *Clairaut* erst ein Mittel, solche Glieder zu vernichten. Solch ein Mittel gewährt ihm folgendes Verfahren: er betrachtet die Mondbahn als eine veränderliche Ellipse, deren Perigaeum und Knöten gleichförmige Bewegungen haben. Nun setzt er die Coordinaten dieser Ellipse in die Gleichungen der gestörten Bewegung, und bestimmt die Bewegung so, dass die Glieder, die der Zeit, oder was dasselbe ist, dem Bogen v proportional sind, verschwinden. Die Schlussgleichungen, die *Clairaut* endlich in der Theorie des Mondes anwendet, lauten, für den Radius vector

$$\frac{p}{r} = 1 - e \cos mv + \beta \cos \frac{2}{n} v - \gamma \cos \left(\frac{2}{n} - m \right) v + \delta \cos \left(\frac{2}{n} + m \right) v + \dots$$

und für die Zeit

$$t = v + b e \sin mv + g e^2 \sin 2mv + h \sin \left(\frac{2}{n} - m \right) v + \dots$$

wo $\beta \gamma b g$ etc. numerische Coefficienten sind ⁹.

d'Alembert betrachtet nur eine Kraft, die den Körper gegen einen festen Punkt zu treiben trachtet, und sucht nun eine Relation zwischen dem Radius vector und dem durchlaufenen Bogen ¹⁰. Das Resultat seiner Betrachtungen ist auch die oben gegebene Gleichung zwischen s und Ω . Hierauf integrirt er mit Hülfe des Imaginären; ein Verfahren, das *Euler* zum ersten Male angewandt hat.

Zugleich mit den Mondstörungen, wurden auch die Störungen, die Jupiter und Saturn auf einander ausüben, in Angriff genommen; und auch auf diesem Felde war *Euler* der Erste. Bevor *Clairaut* und *d'Alembert* ihre ersten Arbeiten bezüglich der Mondtheorie eingereicht hatten, übergab *Euler* (27 Juli 1747) der Pariser Academie seine Arbeit, *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*, und erhielt den ausgesetzten Preis. In dieser Abhandlung giebt *Euler* zum ersten Male die drei Differentialgleichungen der Bewegung eines Körpers mit der Masse m , um einen Körper mit der Masse M , wobei m auch noch den Einwirkungen eines zweiten Körpers mit der Masse m' unterworfen ist. Nimmt man den Anfang der Coordinaten in M an, und beziehen sich x, y, z , auf m, x', y', z' , auf m' , so hat man die bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(M+m)}{r^3} x &= m' \left(\frac{x' - x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) = X \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(M+m)}{r^3} y &= m' \left(\frac{y' - y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) = Y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{(M+m)}{r^3} z &= m' \left(\frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) = Z \end{aligned} \quad (\odot)$$

wobei

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \rho^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2. \end{aligned}$$

Für x, y, z wurden nun Polarcoordinaten eingeführt. Beim Integriren dieser Gleichungen, bereitete der analytische Ausdruck von ρ , der allgemein die Form

$$\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(r, r')}$$

annehmen kann, grosse Schwierigkeiten, aber *Euler* überwand

dieselben, indem er eine Methode angab, diese Wurzelgrösse nach den Vielfachen des Winkels (r, r') zu entwickeln ¹¹. Aber auch noch heute besteht die grösste Schwierigkeit der Störungsrechnung in einer schicklichen Entwicklung dieser Wurzelgrösse.

Eine weitere Anregung zur Erfindung von Vorschriften für die Störungsrechnung, war die auf das Jahr 1758 gesetzte Wiederkehr des *Halley'schen* Kometen, und es gebührt *Clairaut* der Ruhm, die Zeit der Wiederkehr, auf Grundlage des Newtonschen Gesetzes, vorausgesagt zu haben. Erst wollte er zu diesen Rechnungen die Methoden anwenden, die er für den Mond entwickelt hatte, aber in diesem Falle waren die oben gegebenen Reihen, wegen der grossen Excentricität und Neigung der Bahn dieses Kometen, äusserst schwach convergent, und er musste deshalb andere Methoden suchen. In dem Werke: *Théorie du mouvement des comètes*, das am Schlusse des Jahres 1758 erschien, veröffentlichte er den Gang, den er bei seinen Rechnungen genommen hatte. *Clairaut* setzte die halbe grosse Axe der Kometenbahn gleich der Einheit, und suchte nun, ob sich nicht dem \bar{r} und z , welche in rein elliptischer Hypothese berechnet werden aus

$$\bar{r} = 1 - e \cos \varepsilon \quad z = \int \bar{r} d\varepsilon = \varepsilon - e \sin \varepsilon,$$

solche Correctionen zufügen lassen, dass die hervorgehenden r und ζ der gestörten Ellipse entsprächen. Dieses gelingt ihm mit Hilfe der in seiner Mondtheorie abgeleiteten Grundgleichungen und er giebt damit folgendes Formelsystem

$$\begin{aligned} r &= \bar{r} (1 + \xi) & \zeta &= z + 2 \int \bar{\xi} \bar{r} d\varepsilon - \int \rho \bar{r} d\varepsilon \\ \rho &= \frac{\int T \bar{r} d\varepsilon}{M \sqrt{1 - ee}} & \bar{w} &= \frac{\varphi}{M} + \frac{T e \sin \varepsilon}{M \sqrt{1 - ee}} - \frac{2 \rho}{\bar{r}} \\ P &= \int \bar{w} \sin \varepsilon d\varepsilon & Q &= \int \bar{w} (\cos \varepsilon - e) d\varepsilon \\ \xi &= P (\cos \varepsilon - e) - Q \sin \varepsilon \end{aligned}$$

wo T und φ dieselbe Bedeutung haben, wie oben in der Mondtheorie. Für die beiden das Perihel der Kometenbahn einschliessenden Quadranten, berechnet *Clairaut* T und φ von Grad zu Grad der excentrischen Anomalie, für die beiden um das Aphel liegen-

den Quadranten von 2^0 zu 2^0 . Darauf wird \bar{w} gebildet und vermittelst mechanischer Quadratur φ , P und Q berechnet. Nun sucht *Clairaut* durch die Gleichung für ζ , um wie viel Jupiter und Saturn die Zeit verkürzt oder verlängert haben, in der der Komet, vermöge alleiniger Einwirkung der Sonne, einen bestimmten Theil seiner Bahn durchlaufen musste. Auf diese Weise gelang es, den bevorstehenden Periheldurchgang des Kometen auf die Mitte des Monates März des Jahres 1759 zu setzen.

Nach dem Erscheinen des Werkes von *Clairaut*, hat sich *Euler* vielfach mit dem Problem der Störungsrechnung beschäftigt, und eine nicht unbedeutende Anzahl von Abhandlungen darüber veröffentlicht. Von diesen verdienen zwei die grösste Aufmerksamkeit; in der einen, die 1779 erschien, giebt *Euler* ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der gegenseitigen Störungen der Planeten; die andere aber, die im vierten Bande der *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae* steht, enthält die Grundzüge der jetzt unter dem Namen der Variation der Constanten bekannten Methode zur Berechnung der Störungen. Die erste Abhandlung hat vor nahe 15 Jahren in dem verstorbenen Professor *Anger* (in Danzig), einen Bearbeiter gefunden, der die *Euler'sche* Methode, die die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten zu berechnen vorschreibt, auf den einfachsten Ausdruck zurück führte ¹². Von welcher Wichtigkeit aber die Methode der Variation der Constanten für die Störungsrechnung ist, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden, da sie nach dem Dafürhalten aller Geometer, die beste Methode, die Störungen zu berechnen, darbietet.

Im Jahre 1762 gab *Albert Euler*, ein Sohn des grossen *Leonhard Euler*, eine Methode zur Berechnung der Störungen, die ein Komet von den Planeten erleidet ¹³. Er geht aus von den Gleichungen (\odot) , die er so stellt

$$\begin{aligned} d^2 x &= -k^2 (1 + \mu) dt^2 \left\{ \frac{x}{r^3} + \frac{u x}{\rho^3} - n r' \cos \theta \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3} \right) \right\} \\ d^2 y &= -k^2 (1 + \mu) dt^2 \left\{ \frac{y}{r^3} + \frac{u y}{\rho^3} - n r' \sin \theta \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$d^2z = -k^2(1+\mu) dt^2 \left\{ \frac{z}{r^3} + \frac{nz}{\rho^3} \right\}$$

hierbei beziehen sich x, y, z und μ auf den Kometen, r' auf den Planeten; ferner ist ϑ der Winkel, den r' mit einer bestimmten Geraden in der Planetenbahn bildet, ρ der Abstand des Kometen vom Planeten,

und $n = \frac{\text{Masse des Planeten}}{\text{Masse der Sonne}}$. k ist hier die Gauss'sche Constante.

Aus diesen drei Gleichungen werden nun die Ausdrücke

$$xdz - zdx, \quad ydx - xdy, \quad zdy - ydz \\ dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z$$

gebildet. Andererseits bildet aber auch Euler dieselben Ausdrücke, indem er setzt

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z = r \sin u \sin i$$

wo Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Kometenbahn auf der Planetenbahn, i die gegenseitige Neigung beider Bahnen und u den Abstand des Kometen von seinem Knoten Ω bezeichnet. Aus den durch Vergleichung erhaltenen Gleichungen werden nun abgeleitet

$$dp = -2nrR dl \\ de = -ndl \left[(P-Q) \sin v + R \left(\frac{2 \cos v + e + e \cos v^2}{1 + e \cos v} \right) \right] \\ d\Omega = -ndl \frac{rS}{\rho} \sin u \sin(\vartheta - \Omega) \\ d\frac{1}{a} = 2ndl \left[\frac{e}{\rho} (P-Q) \sin v + \frac{1}{r} R \right]$$

wobei gesetzt ist

$$r^2 dl = dt k \sqrt{(1+\mu)p}, \quad r = \frac{p}{1+e \cos v}$$

$$P = \left(\frac{r}{\rho}\right)^3 \quad S = r^2 r' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

$$Q = S(\cos u \cos(\vartheta - \Omega) + \sin u \sin(\vartheta - \Omega) \cos i)$$

$$R = S(\sin u \cos(\vartheta - \Omega) - \cos u \sin(\vartheta - \Omega) \cos i)$$

Die Aenderung der Neigung lässt A. Euler durch Drehen der Bahnebene um den Radius vector entstehen; dann sind z und r constant, und da $du = -\cos i d\Omega$, wie sich geometrisch leicht ergibt, so kommt durch Differentiation der Coordinate z ,

$$dz = -\cot u \sin i d\Omega.$$

Für die Aenderung der Perihellänge findet Euler

$$d\pi = dl - dv = \frac{ndl}{e} \left[(P-Q) \cos v - R \sin v \frac{1+e \cos v}{2+e \cos v} \right].$$

Die Aenderung der Umlaufzeit erhält man sehr leicht; denn da nach den obigen Formeln

$$\Delta a = A.a^2$$

die Umlaufzeit T aber gleich $\frac{2\pi a \sqrt{a}}{k \sqrt{1+\mu}}$ ist, so wird die Aenderung der Zeit T , oder die Grösse ΔT erhalten aus

$$\Delta T = V(1 + Aa)^3 - 1.$$

Diese Methode, die Albert Euler auf den Halley'schen Kometen 1682 anwandte, lehrt also die Aenderungen der Elemente selbst zu berechnen, und man sieht, dass diese Methode im Allgemeinen anwendbarer ist, als die von Clairaut für den Mond vorgeschlagene, weil diese von der Neigung und der Excentricität unabhängig ist.

Einen grossen Aufschwung nahmen die Störungstheorien durch die Arbeiten von Lagrange und Laplace, die sich von Neuem an eine Untersuchung des Jupiter und Saturn machten. Fortgesetzte Beobachtungen hatten nämlich gezeigt, dass die mittlere Bewegung des Jupiter nach und nach zugenommen, die des Saturn dagegen abgenommen hatte. Man suchte nun diese Aenderung der mittlern Bewegung, durch gegenseitige Störungen zu erklären und schon Euler hatte sich, wie angeführt wurde, an eine Untersuchung dieser Störungen gemacht, aber er beging einen Fehler. Auch Lagrange beging einen Zeichenfehler, und erst Laplace gelang es den wahren analytischen Ausdruck der Säculargleichung der mittlern Bewegung zu finden, aber bei der Anwendung auf Jupiter und Saturn, tilgten sich alle nicht periodischen Glieder, woraus Laplace folgerte, dass die mittlere Bewegung der Planeten

und also auch ihre mittlere Entfernung von der Sonne, unveränderlich oder nur periodischen Veränderungen unterworfen seien. Bei dieser Untersuchung hatte *Laplace* nur die dritten Potenzen der Excentricitäten und Neigungen, so wie nur das Quadrat der störenden Kraft berücksichtigt. Unterdessen aber hatte *Lagrange* bemerkt, dass die rechten Seiten der oben von *Euler* gegebenen drei Differentialgleichungen partielle Differentiale der Function

$$Q = m' \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right\}^{14}.$$

sind; und zwar erhält man die rechte Seite der ersten Gleichung, wenn man Q nach x , die der zweiten, wenn man nach y und die der dritten, wenn man nach z differentiirt. Diese Function wird jetzt allgemein die *Lagrange'sche* Störungfunction genannt. Nun bewies *Lagrange* den von *Laplace* gefolgerten Satz ganz allgemein¹⁵, und zugleich entwickelte er Ausdrücke für die Aenderungen der Elemente. Diese Ausdrücke lassen sich auf folgendem Wege leicht finden. Es seien x, y, z die Coordinaten des Planeten, so sind diese, als auch deren ersten Differentiale nach der Zeit t , Functionen der Bahnelemente (a die halbe grosse Axe, c die mittlere Anomalie zur Zeit $t=0$, e ($= \sin \varphi$) die Excentricität, ω der Abstand des Perihels vom Knoten, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens, i die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik und m die mittlere Bewegung) und der Zeit t , und man hat

$$x = f(\Omega, i, \omega, e, a, c, t) \\ \frac{dx}{dt} = x' = f'(\Omega, i, \omega, e, a, c, t).$$

Aehnliche Formen erhält man für y und z . Differentiirt man nach t , so wird

$$\frac{dx'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt} \right) + \left(\frac{dx'}{da} \right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dx'}{de} \right) \frac{de}{dt} + \dots$$

und analog lauten die Ausdrücke für y' und z' . Vergleicht man diese Formen mit den Gleichungen (⊙), die durch die *Lagrange'sche* Störungfunction übergehen in

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2(1+\mu)x}{r^3} &= k^2(1+\mu) \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) = X \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2(1+\mu)y}{r^3} + k^2(1-\mu) \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) &= Y \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2(1+\mu)z}{r^3} - k^2(1+\mu) \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) &= Z \end{aligned} \quad (1)$$

wenn

$$M + m = k^2(1 + \mu)$$

und

$$Q = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{V((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\}$$

so erhält man

$$\left(\frac{dx'}{da} \right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dx'}{de} \right) \frac{de}{dt} + \dots = k^2(1+\mu) \left\{ \left(\frac{d\Omega}{da} \right) \frac{da}{dx} + \left(\frac{d\Omega}{de} \right) \frac{de}{dx} + \dots \right\}$$

und ähnliche Gleichungen für y' und z' . Da somit nur drei Gleichungen zur Bestimmung der sechs Grössen $\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}$ etc. vorhanden sind, so wird es erlaubt sein noch drei Bedingungen hinzuzufügen, denen diese Grössen Genüge leisten müssen. Man ist nun übereingekommen die Elemente a, e, c etc. so zu bestimmen, dass die gestörte Bahn mit der ungestörten eine Berührung erster Ordnung habe; dann wird

$$x = (x') \text{ und } \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

wobei die Einklammerung anzeigen soll, dass die Elemente als constant betrachtet und für dieselben diejenigen Werthe gesetzt werden müssen, die zur gegebenen Zeit wirklich stattfinden. Somit kommt

$$\left(\frac{dx}{da} \right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dx}{de} \right) \frac{de}{dt} + \dots = 0$$

und ähnliche Gleichungen finden sich für y und z . Indem man nun für x, y und z Ausdrücke annahm, wie sie auf pag. 10 vorkommen, so ergaben sich aus diesen sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2a^2 m \left(\frac{d\Omega}{dc} \right) \\ \frac{dc}{dt} &= - \frac{am \cos \varphi^2}{e} \left(\frac{d\Omega}{de} \right) - 2a^2 m \left(\frac{d\Omega}{da} \right) \\ \frac{de}{dt} &= \frac{am \cos \varphi^2}{e} \left(\frac{d\Omega}{dc} \right) - am \cotang \varphi \left(\frac{d\Omega}{da} \right) \\ \frac{d\omega}{dt} &= am \cotang \varphi \left(\frac{d\Omega}{de} \right) - \cos i \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{am}{\cos \varphi \sin i} \left(\frac{d\Omega}{di} \right)$$

$$\frac{di}{dt} = - \frac{am}{\cos \varphi \sin i} \left(\frac{d\Omega}{d\Omega} \right) + \frac{am}{\cos \varphi} \cotang i \left(\frac{d\Omega}{d\omega} \right).$$

Für diejenigen Planeten, deren Neigung sehr klein ist, gebraucht man für die zwei letzten Gleichungen zwei andere, die erhalten werden aus der Differentiation der Gleichungen

$$p = \tang i \sin \Omega \quad q = \tang i \cos \Omega$$

und lauten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{am}{\cos \varphi} \left(\frac{d\Omega}{dq} \right)$$

$$\frac{dq}{dt} = - \frac{am}{\cos \varphi} \left(\frac{d\Omega}{dp} \right).$$

Diese sechs Gleichungen wurden oft zur Berechnung der Störungen angewandt; man entwickelte dazu die Störungsfuction nach den Potenzen der Excentricität und der Neigung, und ordnete die Reihen nach den Vielfachen der mittlern Längen des störenden und des gestörten Planeten, wodurch die auszuführende Integration sehr einfach wurde. Ist ferner M die mittlere Anomalie zur Zeit t , so hat man

$$M = c + mt$$

oder differentiirt man nach t

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dc}{dt} + m + t \frac{dm}{dt},$$

da aber in $\frac{dc}{dt}$ ein Glied $- t \frac{dm}{dt}$ vorkommt, so hat man, wenn

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dc}{dt} \right) - t \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dc}{dt} \right) + \int \frac{dm}{dt} dt = \left(\frac{dc}{dt} \right) - \frac{3}{2} \int \frac{m}{a} \frac{da}{dt} dt.$$

Sind hiermit die Aenderungen Δa , ΔM und $\Delta \varphi$ gefunden, so ergibt sich die Aenderung des Radius vector und der wahren Anomalie aus *Gauss, theoria motus c. c.*

$$\Delta r = \frac{r}{a} \Delta a + a \tang \varphi \sin v \Delta M - a \cos \varphi \cos v \Delta \varphi$$

$$\Delta v = \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \varphi \Delta M + \frac{(2 + e \cos v)}{\cos \varphi} \sin v \Delta \varphi$$

und bildet man

$$\Delta(v + \omega) = \Delta v + (\Delta \omega) - \cos(i_0 + \Delta i) \Delta \Omega$$

wo $(\Delta \omega)$ der Theil von $\Delta \omega$ ist, der auf die Bahn allein sich bezieht, so erhält man die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten x , y und z , aus

$$x = (r_0 + \Delta r) \sin a \sin (A + (v + \omega)_0 + \Delta(v + \omega))$$

$$y = (r_0 + \Delta r) \sin b \sin (B + (v + \omega)_0 + \Delta(v + \omega))$$

$$z = (r_0 + \Delta r) \sin c \sin (C + (v + \omega)_0 + \Delta(v + \omega))$$

wo r_0 , v_0 , w_0 die elliptischen Werthe sind.

Die grosse Anzahl der zu berechnenden Differentialquotienten und die bei etwas grosser Excentricität und Neigung schwache Convergenz der hier auftretenden Reihen der Function Ω , machen diese Methode in der Anwendung unbequem. Man wird später sehen, wie diese sechs Differenzialquotienten, durch eine Zerlegung der störenden Kraft, auf drei zurückgeführt werden können.

Aus dieser Zeit datirt auch her die Eintheilung der Störungen in periodische und säculare; die ersten begreifen die Aenderungen im elliptischen Orte, während die letztern die Aenderungen der Bahnelemente umfassen. Periodisch sind auch die letztern, nur umfassen ihre Perioden viele Jahrhunderte, und da die Säcularänderungen der Elemente viele Jahrhunderte hindurch in demselben Sinne fortschreiten, so hat man diese Aenderungen nach Potenzen der Zeit entwickelt. Die Gleichungen für die Säcularstörungen lassen sich leicht aus den obigen sechs Gleichungen ableiten. Dazu denke man sich in Ω für die Coordinaten x , y , z , x' , y' , z' , ihre Ausdrücke durch die Elemente und durch die Zeit, gesetzt, so wird man, bei Entwicklung nach der Zeit, Ω allgemein in folgender Form

$$\Omega = A + Bf(t) + Cf_1(t) + \dots$$

erhalten, wo A , B , C etc. von den Elementen abhängen und $f(t)$, $f_1(t)$ etc. gewisse Functionen der Zeit bedeuten. Nun ist aber klar, dass man die der Zeit proportionalen Störungen erhalten wird, wenn man an die Stelle von

$$\left(\frac{d\Omega}{dc} \right), \left(\frac{d\Omega}{da} \right) \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{dA}{dc}\right), \left(\frac{dA}{da}\right) \text{ etc.}$$

setzt. Von allen diesen Differentialquotienten von A , verschwindet der nach c , weil A von c unabhängig ist. Darnach erhält man für die Säcularstörungen

$$\frac{da}{dt} = 0$$

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{am}{r} \cos \varphi^2 \left(\frac{dA}{dc}\right) - 2a^2 m \left(\frac{dA}{da}\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{am}{\sin \varphi} \left(\frac{dA}{da}\right)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = am \cotang \varphi \left(\frac{dA}{dc}\right) - \cos i \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{am}{\cos \varphi \sin i} \left(\frac{dA}{da}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{am}{\cos \varphi \sin i} \left(\frac{dA}{d\Omega}\right) + \frac{am}{\cos \varphi} \cotang i \left(\frac{dA}{da}\right).$$

Auch *Laplace* entwickelte Formeln zur Berechnung der säcularen und periodischen Störungen, und lieferte, bezüglich der letztern, Ausdrücke für die Aenderungen des Radius vector, der wahren Länge und der Breite ¹⁶. Er geht aus von den Gleichungen (1) und nimmt die Ebene, in der zur Zeit t_0 die Bahn des gestörten Planeten lag, zur xy Ebene; dann ist z die durch die Störungen hervorgebrachte kleine Breite des Planeten über dieser Ebene, und Z ist die auf der Bahnebene senkrechte Componente der störenden Kraft. Nun sei $z = r\delta s$, so wird $s + \delta s$ sehr nahe die Breite des Planeten über einer zu seiner Bahnebene wenig geneigten Ebene sein, und man erhält $r\delta s$ aus

$$(1) \quad \frac{d^2 r\delta s}{dt^2} + \frac{k^2(1+\mu)}{r^3} r\delta s = Z$$

Aus den obigen drei Gleichungen erhält man durch bekannte Operationen, wenn man $r = r_0 + \delta r$ setzt und den rein elliptischen Theil abzieht,

$$(2) \quad \frac{d^2 r\delta r}{dt^2} + \frac{k^2(1+\mu)}{r^3} r\delta r = 2 \int \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt + (Xx + Yy + Zz).$$

Macht man ferner Gebrauch von dem elliptischen Bogenelemente

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 dv^2$$

und setzt $v = v_0 + \delta v$, so erhält man ebenfalls mit wenig Mühe,

$$kV\bar{p}(1+\mu)\delta r = - \int \left\{ 3 \int \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt + 2(Xx + Yy + Zz) \right\} dt + 2r \frac{d\delta r}{dt} + \delta r \frac{dr}{dt}. \quad (3)$$

Von diesen drei Gleichungen geht nun *Laplace* aus. Vergleicht man die unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke mit den Ableitungen von Ω , und berücksichtigt die Annahme über die xy Ebene, so ist

$$X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} = k^2(1+\mu) \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$$

$$Xx + Yy + Zz = k^2(1+\mu)r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right).$$

Die Bestimmung der Störungen δs und δr ist somit auf die Integration einer Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u = H$$

zurückgeführt, die *Laplace* anders als *Clairaut* ausführt.

Aus den Gleichungen (1) und (2) sieht man, dass H lediglich eine Folge der störenden Kraft ist, und verschwindet, wenn eine störende Kraft fehlt. *Laplace* setzt nun $u = \psi(r^2)$, dann wird

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u = \frac{d^2(r^2)}{dt^2} \psi' + 4r^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \psi'' + n^2 \cdot \psi \quad (4)$$

und für den Fall der elliptischen Bewegung sind beide Seiten dieser Gleichung gleich Null, da man dann $u = e \cos(mt + L - \pi)$ setzen kann, wo ae die Excentricität, m die mittlere Bewegung, L die mittlere Länge und π die Perihellänge zur Zeit $t=0$ ist. Findet aber keine rein elliptische Bewegung statt, so erhält man H durch die rechte Seite der Gleichung (4), wenn man in diese die störende Kraft einführt. Dazu nehme man die bei der Ableitung der Gleichung (2) gebrauchte Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k^2(1+\mu)}{r} + \frac{k^2(1+\mu)}{a} = Q,$$

wo

$$Q = k^2(1+\mu) \left(2 \int d\Omega + r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \right),$$

so sieht man, dass $2Q$ der Zuwachs von $\frac{d^2(r^2)}{dt^2}$ und $8 \int Qr dr$ der

Zuwachs von $\frac{4r^2 dr^2}{d^2}$ ist. Diese Zuwächse müssen nun in die Gleichung (5) gesetzt werden. Bedenkt man jetzt, dass für die gestörte Bewegung

$$u = e \cos(mt + L - \pi) + \delta u$$

ferner, bis auf Grössen dritter Ordnung,

$$r^2 = a^2 (1 + 2e^2 - 2u(1 - \frac{1}{2}e^2) - u^2 - u^3)$$

und braucht man für u ausserhalb des Integralzeichens

$$u = e \cos(mt + L - \pi),$$

so kommt

$$\frac{d^2 \delta u}{dt^2} + m^2 \delta u = \frac{1}{a^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} e^2 - e \cos(mt + L - \pi) - \frac{1}{4} e^2 \cos 2(mt + L - \pi) \right\} Q + \frac{2e}{a^2} \int m dt \left\{ \sin(mt + L - \pi) (1 + e \cos(mt + L - \pi)) Q \right\}$$

und hat man hieraus δu bestimmt, so erhält man $\delta r = \mathfrak{A} \cdot \delta u$, wobei $\mathfrak{A} = -a(1 + \frac{3}{4}e^2) + 2e \cos(mt + L - \pi) + \frac{3}{4}e^2 \cos 2(mt + L - \pi)$. Da die Gleichungen für $r \delta r$ und $r \delta s$ der Form nach ganz gleich sind, so braucht man nur an die Stelle von Q , Z zu setzen, dann erhält man $\delta u'$ und es wird $\delta s = \mathfrak{A} \cdot \delta u'$.

Um die Function Ω auf eine Form zu bringen, die die Integration bequem ausführen lässt, wird nun gesetzt

$$\begin{aligned} x &= r \cos v & y &= r \sin v \\ x' &= r' \cos v' & y' &= r' \sin v' \end{aligned}$$

und da die Planetenbahnen (hier ist nur von den grossen Planeten die Rede) sehr wenig gegen einander geneigt sind, so nimmt *Laplace* die xy Ebene so an, dass für diese z und z' sehr klein werden: und weil die Planetenbahnen fast kreisförmig sind, so werden r und r' sehr wenig von den Halbaxen a und a' verschieden sein, und deshalb setzt er

$$r = a(1 + u), \quad r' = a'(1 + u').$$

Aus dem letzten Grunde werden auch die Winkel v und v' sehr wenig von $mt + L$ und $m't + L'$ abweichen und deshalb setzt *Laplace*

$$v = mt + L + v, \quad v' = m't + L' + v'.$$

Nun wird Ω in eine nach Potenzen und Producten von $u, u', z, z', v,$ und v' , geordnete Reihe entwickelt. Die hier auftretenden Coefficienten bestimmt *Laplace* durch Betrachtung des Ausdrucks $(a^2 - 2aa' \cos \theta + a'^2)^{-3}$, den er nach den Cosinussen der Vielfachen des Winkels θ entwickelt.

Die Bestimmung selbst übergehe ich hier, da dieselbe weiter unten in grösster Vollständigkeit vorkommen wird.

Um die Integration auszuführen, setzt *Laplace*

$$\delta u = \theta \cos pt$$

also

$$\frac{d^2 \delta u}{dt^2} + m^2 \delta u + (p^2 - m^2) \theta \cos pt = 0$$

und durch Vergleichung wird nun θ bestimmt.

Bald nach dem Verschwinden des schönen Kometen von 1807 veröffentlichte (1810) *Bessel* seine Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn dieses Himmelskörpers und gab hierbei Vorschriften, wie man bei Berechnung der Bahn die Störungen leicht berücksichtigen kann. Dieses Verfahren besteht in einer Anwendung der schon von *Euler* erfundenen, aber erst von *Lagrange* vollständig ausgebildeten Methode der Variation der Constanten. *Bessel* geht hierbei von den Gleichungen (©) aus und setzt nach *Gauss*

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A + \omega + v) \\ y &= r \sin b \sin(B + \omega + v) \\ z &= r \sin c \sin(C + \omega + v), \end{aligned}$$

wo v die wahre Anomalie, ω der Abstand des Perihels vom Knoten, r der Radius vector und A, a, B etc. Constanten sind. Da die Ableitung der Formeln ähnlich geschieht, wie oben in der *Euler*'schen Methode, so führe ich nur den Gang der Rechnung an. Zuerst bestimmt man

$$X + \Sigma \left(\frac{x' - x}{r^3} - \frac{x'}{r^3} \right) m'$$

und ähnliche Ausdrücke für Y und Z , wo das Summenzeichen auf alle störenden Planeten sich bezieht, hierauf

$$\begin{aligned} A' &= X \sin a \sin(A + \omega + v) + Y \sin b \sin(B + \omega + v) + Z \sin c \sin(C + \omega + v) \\ B' &= X \sin a \cos(A + \omega + v) + Y \sin b \cos(B + \omega + v) + Z \sin c \cos(C + \omega + v) \\ C' &= X \sin \Omega \sin i \quad - Y \cos \Omega \sin i \quad + Z \cos i \end{aligned}$$

dann erhält man die Aenderungen der Elemente, während eines mittlern Tages, aus

$$\frac{dh}{dt} = -r B' . k$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{r}{h} C' k \cos(\omega + v)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{r}{h} C' k \frac{\sin(\omega + v)}{\sin i}$$

$$\frac{de}{dt} = -A' h k \sin v - B' \frac{r}{h} k (e + 2 \cos v + e \cos v^2)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{h} k (e A' \sin v + B' (1 + e \cos v))$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{A' h}{e} k \cos v - \frac{B' r}{h e} (2 + e \cos v) k \sin v + \frac{C' r}{h \tan i} k \sin(\omega + v)$$

wo $k = 0,01720209895$, $hh = a(1 - ee) = q(1 + e)$ und q der kleinste Abstand des Kometen von der Sonne ist. Die Aenderung der Perihelzeit T erhält man, wenn $\tau = \tan \frac{1}{2} v$, aus

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) = -\frac{A' q^2}{1 + \tau^2} (-1 + 3\tau^2 + \tau^4 + \frac{1}{5}\tau^6) - \frac{B' q^2}{1 + \tau^2} (4\tau - \frac{4}{5}\tau^5).$$

Diese Differentiale, bei denen v für die Zeit $t - T$ gilt, werden nun durch die mechanische Quadratur integrirt. Vielfach hat man diese Methode bei Berechnung von Bahnen angewandt.

Im Jahre 1818 gab *Gauss* ein von den vorhergehenden ganz verschiedenes Verfahren zur Berechnung der Säcularänderungen der Elemente. Dieses Verfahren gründet sich darauf, dass diese Aenderungen der Bahn durch die Störungen eines andern Planeten ganz dieselben sind, der störende Planet mag eine elliptische Bahn nach den *Kepler'schen* Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Maasse vertheilt angenommen werden, dass auf Stücke dieses Umfanges der Ellipse, die sonst in gleich grossen Zeiten beschrieben werden, gleich grosse Antheile an der Masse kommen, vorausgesetzt, dass die Umlaufzeiten der beiden Planeten nicht in rationalem Verhältnisse zu einander stehen.

Diese Methode ist zum ersten Male angewandt worden von Herrn Prof. *Clauser* (1864) bei der Berechnung der Störungen, die der *Tuttle'sche* Komet vom Jupiter erlitten hatte (vergl. Beobach. der Dorpater Sternwarte Band XVI.)

Im Jahre 1834 (Naut. Alm. 1837) gab *Airy* eine der *Bessel'schen* ähnliche Methode, die namentlich bei Kometen von kurzer Umlaufszeit und bei den kleinen Planeten von Nutzen ist. Auch *Encke* hat sich ein grosses Verdienst um die Bearbeitung der Störungsmethoden erworben. Im Jahre 1835 (Berl. Jahrb. für 1836) gab er die *Lagrange'schen* Formeln in einer solchen Gestalt, dass man die mechanische Quadratur auf dieselben mit Leichtigkeit anwenden kann, und zeigte nun, wie man die Störungen eines Himmelskörpers, innerhalb eines gegebenen Zeitraums, ihren numerischen Werthen nach ermitteln kann, ohne von einem allgemeinen Ausdrucke auszugehen. Dieses Verfahren nennt man die Berechnung der speciellen Störungen, zum Unterschiede von der Berechnung der absoluten Störungen, zu deren Ermittlung man von allgemeinen Ausdrücken ausgeht, wie die unten auseinander gesetzte *Hansen'sche* Methode es vorschreibt. Die von *Encke* gegebenen Formeln lassen sich leicht herleiten, wenn man die Bahnebene zur xy Ebene nimmt, und

$$x = r \cos v \quad y = r \sin v$$

setzt, wo v die wahre Anomalie ist. Dann wird Ω eine Function von v , r und z , und man hat

$$\left(\frac{d\Omega}{dc}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \frac{dr}{dc} + \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \frac{dv}{dc}, \quad \left(\frac{d\Omega}{da}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \frac{dr}{da} + \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \frac{dv}{da}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{de}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \frac{dr}{de} + \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \frac{dv}{de}, \quad \left(\frac{d\Omega}{d\pi}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dv}\right).$$

Nach der *Theoria motus c. c.* ist aber

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dc} &= a \tan \varphi \sin v, & \frac{dr}{de} &= -a \cos v, & \frac{dr}{da} &= \frac{r}{a}, \\ \frac{dv}{dc} &= \frac{aa}{r} \cos \varphi, & \frac{dv}{de} &= \frac{(p+r) \sin v}{r \cos \varphi^2}, & \frac{dv}{da} &= 0. \end{aligned}$$

Dann erhält man aus den *Lagrange'schen* Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{k\sqrt{p(1+m)}} \left\{ Re \sin v + S \frac{p}{r} \right\} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{1}{\sin \varphi k \sqrt{p(1+m)}} \left\{ S(p+r) \sin v - Rp \cos v \right\} + (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{d\pi}{dt} - \frac{2r \cos \varphi}{k\sqrt{p(1+m)}} R - \cos \varphi \left(\frac{dw}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{k\sqrt{p(1+m)}} \left(Rp \sin v + p(\cos v + \cos \varepsilon) S \right) \end{aligned}$$

wenn $R = k^2(1+m) \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)$ $S = k^2(1+m) \frac{1}{r} \left(\frac{d\Omega}{dv} \right)$,

L die mittlere Länge und ε die excentrische Anomalie ist.

Das erste Glied in $d\pi$ giebt die Aenderung der Perihellänge gezählt in der Bahn, das zweite Glied dagegen, das sich geometrisch sehr leicht erklärt, überträgt den Anfang dieser Zählung auf eine Fundamentalebene, also hier auf die Ekliptik. Aehnlich erklärt sich auch das Glied $\cos i \frac{d\Omega}{dt}$ bei $\frac{dw}{dt}$.

Zur Ableitung der Gleichungen für i und Ω bediene ich mich des kleinen Dreiecks $\Omega \Omega' n$. (Fig. 2 auf der Figurentafel der *Theoria motus c. c. auct. Gauss.*) Nun sei Winkel $n \Omega' \Omega = i'$ der Ausenwinkel an Ω gleich i und $\Omega n \Omega' = d\xi$. Ferner liege A irgend wo zwischen $n\Omega$ und A' irgend wo auf $n\Omega'$. In der Zeit dt möge sich Ω in Ω' und i in i' geändert haben; dabei sei der gestörte Planet, der von n nach A gehen sollte, durch die, durch $A'A$ vorgestellte Kraft, von n nach A' geführt worden. Wird nun diese Kraft für den Augenblick durch ϕ bezeichnet, und da ferner die auf den Radius vector senkrechte Componente der Geschwindigkeit $r \frac{dl}{dt}$ ist, wo l die wahre Länge des Planeten bedeutet, so erhält man, wenn man den gleichen Factor dt fortlässt

$$\frac{\phi dt}{r \frac{dl}{dt}} = \sin d\xi = d\xi$$

also

$$\frac{\phi \cdot r}{k\sqrt{p(1+m)}} = \frac{d\xi}{dt}$$

Andererseits erhält man aber aus demselben Dreiecke

$$\begin{aligned} \sin i d\Omega &= \sin u d\xi \\ di &= \cos u d\xi \end{aligned}$$

wenn die Seiten $A\Omega$ und $A'\Omega'$ allgemein durch u , welches also das Argument der Breite bezeichnet, ausgedrückt werden. Da nun aber

$$\phi = k^2(1+m) \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(v + \pi - \Omega)}{\sin i} \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) \\ \frac{di}{dt} &= r \cos(v + \pi - \Omega) \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) \end{aligned}$$

Dadurch sind die sechs Ableitungen von Ω nach den Elementen, auf die drei nach v , r und z zurückgeführt. Jetzt aber sind die Coefficienten der Differentialquotienten nicht mehr von der Zeit unabhängig, wie in den von *Lagrange* gegebenen Gleichungen. Zur Integration wendet man nun die mechanische Quadratur an.

Eine noch grössere Vereinfachung der Berechnung der speciellen Störungen lieferte *Encke* im Jahre 1851, indem er zeigte, dass man die mechanische Quadratur direct auf die drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten und der störenden Kraft anwenden kann, nachdem der rein elliptische Theil in Abzug gebracht worden ist.

Setzt man in den Gleichungen I, $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$, zieht hierauf von jeder Gleichung den rein elliptischen Theil ab, und benutzt die Abkürzung

$$f = 3 \left\{ 1 - \frac{5}{2} q + \frac{5.7}{2.3} q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4} q^3 \dots \right\}$$

wo

$$\left(\frac{r_0}{r} \right)^{-2} = 1 + 2q$$

also

$$q = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{r_0^2} \xi + \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{r_0^2} \eta + \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{r_0^2} \zeta,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= X + \frac{k^2(1+m)}{r_0^3} \left\{ f \cdot q(x_0 + \xi) - \xi \right\} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y + \frac{k^2(1+m)}{r_0^3} \left\{ f \cdot q(y_0 + \eta) - \eta \right\} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z + \frac{k^2(1+m)}{r_0^3} \left\{ f \cdot q(z_0 + \zeta) - \zeta \right\}. \end{aligned}$$

Zur Integration werden nun noch die rechten Seiten mit dem Quadrate des Zeitintervalles multiplicirt, und man kann dieses Zeitintervall immer so wählen, dass die Coefficienten, mit denen die unbekanntes Grössen auf der rechten Seite multiplicirt sind, so klein wie möglich werden; dadurch wird die Anwendung der mechanischen Quadratur sehr erleichtert. Durch das Bilden der ersten und zweiten Summenreihen aus den X , Y , Z , in denen man vorläufig ξ , η , ζ vernachlässigt hat, kann man sich nun einen ersten Werth für ξ , η , ζ verschaffen. Mit Hülfe der drei Gleichungen erhält man dann neue, der Wahrheit besser entsprechende Werthe der Störungen, durch welche dann die rechten Seiten der drei Gleichungen von Neuem berechnet werden. Auf solche Weise kann man sich ganz richtige ξ , η und ζ verschaffen. Hierbei kann es aber geschehen, dass die ξ , η , ζ so anwachsen, wenn stets dieselben elliptischen Elemente beibehalten werden, dass zur Berechnung der indirecten Glieder sechsstellige Logarithmen nicht mehr ausreichen, und deshalb leitete *Encke* auch Formeln ab, mit Hülfe deren man durch ξ , η , ζ , $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, neue elliptische Elemente sich verschaffen kann.

Ausserdem haben sich noch *Poisson*¹⁷, *Plana*¹⁸, *Pontécoulant*¹⁹, *Lubbock*²⁰, *Cauchy*²¹ und *Leverrier*²², vielfach mit der Störungsrechnung beschäftigt, aber da diese Arbeiten, theils mir nicht zur Hand sind, theils aber auch nicht die practische Bedeutung bei Berechnung der Störungen der kleinen Planeten haben, wie die meisten der oben angeführten, so begnüge ich mich diese nur erwähnt zu haben.

Abschnitt II.

Geht man die im ersten Abschnitte aufgezählten Methoden zur Berechnung der Störungen durch, so ergibt sich, dass man entweder die Aenderungen der Elemente selbst zu berechnen suchte, oder aber die Correctionen ∂r , ∂v und ∂s , des Radius vector r_0 , der wahren Länge v_0 und der Breite s_0 über der Fundamentalebene, wenn r_0 , v_0 und s_0 mit constanten Elementen berechnet sind, oder aber man suchte die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten. Von diesen drei Arten der Berechnungsvorschriften, sind die erste und letzte am meisten angewandt worden. Die beiden letzten Methoden sind der ersten vorzuziehen, weil die Anzahl der zu berechnenden Gleichungen in diesem Falle kleiner ist. Aber diese Methoden sind nicht ganz zweckentsprechend, weil erstens die Convergenz der Reihen für ∂r , ∂v und ∂s , nicht in allen Fällen genügend stark ist, und zweitens weil bei rechtwinkligen Coordinaten die Störungen grösser erscheinen, als sie in Wirklichkeit sind. Man muss aber immer suchen die Störungen auf ihren kleinsten Betrag zurückzuführen, weil man dadurch das Berücksichtigen der höhern Potenzen der störenden Kraft auf lange Zeit hinausschiebt. Deshalb verliess *Hansen* die frühern Wege und schlug ganz neue ein. Um die Störungen auf ihren kleinsten Betrag zurückzuführen, schlägt *Hansen* vor, erstens die Störung der mittlern Anomalie oder der Zeit (grosse Störungsglieder, die aus einer nahe stattfindenden Commensurabilität der mittlern Bewegungen entstehen, können nur in

dieser Coordinate vorkommen), zweitens denjenigen Factor, mit dem der schon aus der verbesserten mittlern Anomalie berechnete Radius vector multiplicirt werden muss, um den wahren gestörten Radius vector zu erhalten, und drittens die Störung des Sinus der Breite über der Fundamentalebene. Die Reihen, durch welche diese Störungen ausgedrückt werden, ordnet *Hansen* nach den Vielfachen der excentrischen Anomalie, indem diese eine grössere Convergenz hervorbringt, als die früher angewandte mittlere Länge oder mittlere Anomalie.

Der Grundgedanke der *Hansen'schen* Methode fällt zusammen mit dem der *Clairaut'schen* Vorschrift, die oben angeführt wurde, und auch *Clairaut* hat schon diese excentrische Anomalie als vortheilhafter vorgeschlagen. (*Théorie du mouv. des Comètes*, pag. 6).

Im Folgenden gebe ich nun die *Hansen'sche* Methode; (meiner Arbeit liegen zu Grunde die drei Abhandlungen von *Hansen*, *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten*, Abhandlung der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, math.-physische Classe, Band 5, 6 u. 7); indem ich aber die nöthigen Transformationen etwas anders ausführe, als *Hansen* es thut, so erhalten die Schlussgleichungen bei mir eine von der *Hansen'schen* etwas verschiedene Form.

Um den Ort und die Geschwindigkeit eines Planeten in jedem Augenblicke angeben zu können, bedarf man seiner Bahnelemente, die ich für den gestörten Planeten so bezeichnen will: a sei die halbe grosse Axe, e die Excentricität ($e = \sin \varphi$), Ω die Länge des Knotens, i die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik, die die Fundamentalebene sein soll, π die Länge des Perihels (gerechnet in der Bahn), m die mittlere Bewegung und μ die Masse; dieselben Buchstaben mit Strichen versehen, mögen für den störenden Planeten gelten. In Folge der Störungen sind die Elemente kleinen Aenderungen unterworfen, und deshalb wird der mit constanten Elementen berechnete Ort von dem wahren, durch

die Störungen hervorgebrachten, abweichen. Soll nun der wahre Ort durch constante Elemente berechnet werden können, so verlangt die *Hansen'sche* Methode, dass diese Elemente zu einer gewissen Zeit, Ort und Geschwindigkeit genau darstellen, oder dass dieselben, wie man sagt, für diese Zeit osculirende seien.

Für die elliptische Bewegung hat man

$$\begin{aligned} mt &= \varepsilon - e \sin \varepsilon \\ r \cos v &= a \cos \varepsilon - ae \\ r \sin v &= a \cos \varphi \sin \varepsilon \end{aligned}$$

und aus diesen Gleichungen erhält man durch die zur Zeit t statt habenden Elemente a, e, m den wahren Radius vector r und die wahre Anomalie v . Legt man aber die constanten, für den Zeitpunkt $t=0$ geltenden Elemente a_0, e_0, m_0 der Rechnung zu Grunde, so kann man der Zeit immer einen solchen Werth z geben, dass die damit berechnete wahre Anomalie vermehrt um die Perihellänge π_0 , die augenblicklich stattfindende wahre Länge in der Bahn giebt. Darnach hat man

$$\begin{aligned} m_0 z &= \eta - e_0 \sin \eta \\ \bar{r} \cos \bar{v} &= a_0 \cos \eta - a_0 e_0 \\ \bar{r} \sin \bar{v} &= a_0 \cos \varphi_0 \sin \eta \\ v + \pi &= \bar{v} + \pi_0 = l. \end{aligned}$$

Das hierbei gefundene \bar{r} wird aber im Allgemeinen mit r nicht zusammenfallen, und deshalb setze ich (abweichend von *Hansen*)

$$\bar{r} = r(1 + \nu).$$

Das Herstellen der Differentialgleichung zwischen z und der störenden Kraft, hat nun weiter keine Schwierigkeit. Man hat

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt}$$

und da

$$r^2 \frac{dl}{dt} = k \sqrt{p(1 + \mu)} \quad \bar{r}^2 \frac{dv}{dz} = k \sqrt{p_0(1 + \mu)}$$

wo k die *Gauss'sche* Constante, p der veränderliche und p_0 der constante Parameter ist, so erhält man

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} (1 + \nu)^2 \tag{1a}$$

wenn

$$h = \frac{k\sqrt{1+\mu}}{\sqrt{p}} \quad h_0 = \frac{k\sqrt{1+\mu}}{\sqrt{p_0}}$$

Aus (1a) ergibt sich

$$\frac{dz}{dt} = 2 \frac{h_0}{h} \frac{\bar{r}}{r} - \frac{h_0}{h} + \frac{h_0}{h} \nu^2$$

also

$$(1b) \quad \frac{dz}{dt} = 1 + W + \frac{h_0}{h} \nu^2$$

wenn

$$W = \left(2 \frac{\bar{r}}{r} - 1\right) \frac{h_0}{h} - 1.$$

Man sieht leicht, dass W nur in Folge der Aenderungen der Elemente einen Werth bekommt und bei constanten Elementen verschwindet. Soll nun in W die störende Kraft, die Ursache der Aenderungen der Elemente eingeführt werden, so muss man W nach t differentiiren; hierbei dürfen aber nur die Elemente als veränderlich angesehen werden.

Damit wird

$$(2a) \quad \frac{dW}{dt} = \left(2 \frac{\bar{r}}{r} - 1\right) h_0 \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + \frac{2e\bar{r}\sin v}{\rho} \frac{h_0}{h} (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt}$$

da bekanntlich

$$\frac{dh}{dt} = -h^2 \left(\frac{d\Omega}{dv}\right).$$

Indem ich von nun ab diejenige Ebene, in der zur Zeit $t=0$ die Bahn des gestörten Planeten lag, zur xy Ebene nehmen will, so kann man für $\frac{d\Omega}{dt}$ den im ersten Abschnitte unter dieser Annahme gefundenen Ausdruck setzen.

Da die Störungsfunction als auch deren partielle Ableitungen nach der excentrischen Anomalie entwickelt werden, so muss man die Ableitung nach v durch die nach ε eliminiren; man hat aber

$$\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \frac{dv}{d\varepsilon} + \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \frac{dr}{d\varepsilon}$$

und durch

$$\frac{dv}{d\varepsilon} = \frac{a \cos \varphi}{r} \quad \frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{er \sin v}{\cos \varphi} \quad \frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{r}{ma}$$

erhält man

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = \frac{h_0 r}{am} \left(2 \frac{\bar{r}}{r} - 1\right) \frac{r}{a \cos \varphi} \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) - \frac{h_0 r}{am} \left(2 \frac{\bar{r}}{r} - 1\right) \frac{er \sin v}{a \cos \varphi^2} r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + \frac{2e \operatorname{tang} \frac{1}{2} i \bar{r} r \sin v \sin(v + \pi - \Omega)}{a \cos \varphi^3} \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right). \quad (2b)$$

Nun ist

$$r = a(1 - e \cos \varepsilon) \quad r \sin v = a \cos \varphi \sin \varepsilon \quad \bar{r} = a_0(1 - e_0 \cos \eta)$$

und da man zur Berechnung der Grösse W die constanten Elemente nehmen muss, so fällt eine Unterscheidung der Elemente fort, und man bekommt

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = Ma \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + Na r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + 2e \operatorname{tang} \frac{1}{2} i (1 - e \cos \eta) O a^2 \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) \quad (2c)$$

wobei

$$M = \frac{1}{\cos \varphi^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^2 - 2e \cos \eta - \frac{1}{2} e^2 \cos 2\varepsilon + e^2 \cos(\eta + \varepsilon) + e^2 \cos(\eta - \varepsilon) \right\}$$

$$N = \frac{e}{\cos \varphi^2} \left\{ \sin(-\varepsilon) + e \sin(\eta + \varepsilon) - e \sin(\eta - \varepsilon) + \frac{1}{2} e \sin(-2\varepsilon) \right\}$$

$$O = \frac{1}{\cos \varphi^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos \varphi \cos(\pi - \Omega) - e \sin(\pi - \Omega) \sin \varepsilon + \frac{1}{2} \sin(\pi - \Omega) \sin 2\varepsilon - \frac{1}{2} \cos \varphi \cos(\pi - \Omega) \cos 2\varepsilon \right\}$$

Durch Integration der Gleichung (2c) erhält man W_0 und nun muss man das in W_0 vorhandene η in ε verwandeln; hierauf erhält man die gestörte mittlere Anomalie aus

$$m_0 z = m_0 t + c_0 + m_0 \delta z \quad (3)$$

wenn

$$m_0 \delta z = m_0 \int (W_0 + \nu^2) dt.$$

Hierbei zeigt der Strich über W_0 die vollzogene Verwandlung von η in ε an und c_0 bedeutet die Integrationsconstante (mittlere Anomalie zur Zeit $t=0$).

Aus (1a) und (1b) ergibt

$$(1 + W) \frac{h}{h_0} - 1 = 2\nu \quad (4a)$$

oder in erster Näherung

$$\nu = \frac{1}{2} W_0. \quad (4b)$$

Noch auf eine andere Art kann man eine Gleichung zwischen ν und der störenden Kraft herstellen. Durch Differentiation der Gleichung

$$\bar{r} = r(1 + \nu)$$

nach t kommt

$$\frac{d\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{h_0}{rr} \left\{ e_0 \bar{r} \sin \bar{\nu} \frac{h_0}{h} - er \sin v \frac{h}{h_0} \right\} dt$$

weil

$$\frac{d\bar{r}}{dz} = h_0 e_0 \sin \bar{\nu} \quad \frac{dr}{dt} = he \sin v.$$

Um die störende Kraft einzuführen, müsste man nun für e und h

$$e = e_0 + \int \frac{de}{dt} dt \quad h = h_0 + \int \frac{dh}{dt} dt$$

setzen; man verfährt aber einfacher, wenn man ν durch ε eliminiert. Es wird dann

$$h e r \sin v = k \sqrt{1 + \mu} \cdot e \sqrt{a} \cdot \sin \varepsilon$$

und jetzt betrachte man $e\sqrt{a}$ mit einem Male. Man findet

$$e\sqrt{a} = e_0\sqrt{a_0} + \int x d\varepsilon$$

wobei

$$x = \sqrt{a} \left\{ \left(-\frac{1}{2} e + 2 \cos \varepsilon - \frac{1}{2} e \cos 2\varepsilon \right) a \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right) + (\sin \varepsilon - \frac{1}{2} e \sin 2\varepsilon) a r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) \right\}$$

und damit kommt

$$(4c) \quad \frac{d\nu}{(1+\nu)^2} = \frac{1}{r} \left\{ e a \sin \eta \frac{h_0}{h} - (e a + \sqrt{a} \int x d\varepsilon) \sin \varepsilon \right\} d\varepsilon$$

wenn überall die constanten Elemente gesetzt sind. Weiter findet sich

$$\frac{h_0}{h} = 1 + \int \left\{ M, a \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right) + N, a r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) \right\} d\varepsilon$$

wo

$$M, = \frac{1}{\cos \varphi^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} e^2 - 2 e \cos \varepsilon + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\varepsilon \right\}$$

$$N, = - \frac{1}{\cos \varphi^2} \left\{ e \sin \varepsilon - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varepsilon \right\}.$$

Wird nun der Inhalt der Klammer der rechten Seite der Gleichung (4c) gleich \mathfrak{A} gesetzt, so kommt durch Integration

$$\frac{1}{1+\nu} = C - \frac{1}{r} \int \mathfrak{A} d\varepsilon \quad (4d)$$

wobei C die Integrationsconstante bedeutet.

Zur Herleitung der Gleichung für die Störung des Sinus der Breite gehe ich von den im Absch. I gegebenen drei Gleichungen (I) aus und berücksichtigt man die oben gemachte Annahme über die xy Ebene, dann ist z die durch die Störungen hervorgebrachte kleine Breite des Planeten über der xy Ebene und Z die auf derselben Ebene senkrechte Componente der störenden Kraft. Sucht man nur die Störungen erster Ordnung, so kann man die Producte zX und zY vernachlässigen, indem diese schon von zweiter Ordnung sind, und sieht man vorläufig von der Integrationsconstante ab, so erhält man

$$\left\{ z = h y \int x \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dt - x \int y \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dt \right\} \quad (5a)$$

Hierbei kann man setzen

$$x = r \cos v \quad y = r \sin v;$$

um aber die ausserhalb des Integralzeichens vorkommenden x und y unter das Integralzeichen bringen zu können, so setze ich diese

$$x = \bar{r} \cos \bar{v} \quad y = \bar{r} \sin \bar{v}$$

dann wird

$$z = h \int \bar{r} \bar{r} \sin(\bar{v} - v) \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dt \quad (5b)$$

wobei zu merken ist, dass \bar{r} und \bar{v} als von t unabhängig betrachtet und nach vollzogener Integration in r und v verwandelt werden müssen.

Eliminiert man auch hier die wahre Anomalie und die Zeit durch die excentrische Anomalie und nimmt überall die constanten Elemente, so kommt

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = Q a^3 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)$$

wo

$$Q = e \sin \varepsilon - \frac{1}{2} e^2 \sin 2\varepsilon + \frac{1}{2} e^2 \sin (\eta + \varepsilon) - \frac{3}{2} e \sin \eta + (1 + \frac{1}{2} e^2) \sin (\eta - \varepsilon) - \frac{1}{2} e \sin (\eta - 2\varepsilon).$$

Ist nun b die Breite des Planeten und s sein senkrechter Abstand von der Ekliptik, so ist

$$s = r \sin b$$

oder ist b_0 die mit constanten Elementen berechnete Breite, so hat man

$$s = r \sin b_0 + r \delta s$$

und δs ist hiermit die Störung des Sinus der Breite. Da aber, wie leicht ersichtlich

$$z \cos i = r \delta s$$

so wird

$$(5c) \quad \frac{d \left(\frac{u}{\cos i} \right)}{dz} = Q a^2 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)$$

wenn

$$u = \frac{r \delta s}{a}$$

Durch Integration kommt nun

$$(5d) \quad \frac{u}{\cos i} = \overline{R}$$

wenn R das Integral der rechten Seite der Gleichung (5c) ist, und der Strich über R wiederum die Verwandlung von η in ε anzeigt.

Ist die Neigung der Bahn des gestörten Planeten gegen die des störenden beträchtlich, so dass also die Breitenstörungen einen nicht kleinen Werth erreichen, so wird man Anstand nehmen müssen, die Producte zX und zY zu vernachlässigen und deshalb will ich für diesen Fall einen andern Ausdruck für die Breitenstörung ableiten. Man hat

$$\sin b = \sin i \sin (v + \pi - \Omega) \quad (6a)$$

also

$$\overline{r} \delta s = \mathfrak{D}_i \overline{r} \sin (\overline{v} + \pi_0 - \Omega) - \mathfrak{D}_{ii} \overline{r} \cos (\overline{v} + \pi_0 - \Omega_0) \quad (6b)$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_i &= \sin i \cos (\Omega - \Omega_0) - \sin i_0 \\ \mathfrak{D}_{ii} &= \sin i \sin (\Omega - \Omega_0). \end{aligned} \quad (6c)$$

Um die störende Kraft einzuführen, muss man \mathfrak{D}_i und \mathfrak{D}_{ii} nach t differentiiren; setzt man nun für $\frac{di}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ die im ersten Abschnitte gegebenen Ausdrücke und nimmt überall die constanten Elemente, so kommt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_i &= \cos i_0 \int r \cos (v + \pi_0 - \Omega_0) h_0 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dt \\ \mathfrak{D}_{ii} &= \int r \sin (v + \pi_0 - \Omega_0) h_0 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) dt \end{aligned} \quad (6d)$$

wobei vorläufig die Integrationsconstante nicht berücksichtigt ist. Da die weitere Behandlung dieser Formel für δs sich ähnlich gestaltet wie die der oben gegebenen, so breche ich hier ab.

Die Ausdrücke für die Störungen δz , $\frac{1}{1+z}$ und $\frac{u}{\cos i}$ können nur durch Näherungen integrirt werden, und man setzt nun in erster Näherung, für die vorkommenden veränderlichen Grössen, die elliptischen Ausdrücke, oder, wie es schon geschehen ist, die constanten Elemente. Dadurch werden die Störungen reine Functionen der Zeit, die dann in unendliche Reihen aufgelöst und integrirt werden können.

Das nächste Geschäft ist nun die Darstellung der partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right) \quad \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) \quad \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)$$

von denen die Störungen abhängig gemacht worden sind. Hierbei ist es von Vortheil gleich $r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right)$ zu suchen. Beziehen sich nun x, y, z auf den gestörten, x', y', z' auf den störenden Planeten, und ist

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \rho^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{x}{r} \cdot \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \cdot \frac{y'}{r'} + \frac{z}{r} \cdot \frac{z'}{r'} = \cos (r, r') = H$$

wo (r, r') der Winkel zwischen r und r' ist; und weiter kommt dann

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' H$$

$$(7) \quad \Omega = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{r}{r'^2} H \right\}$$

also

$$(8) \quad r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} r r' H - \frac{\mu'}{1+\mu} \cdot \frac{r^2}{\rho^3}.$$

Indem weiterhin die Störungfunction explicite nach ε entwickelt wird, so erhält man die Ableitung nach ε durch eine einfache Differentiation nach ε .

Die Ableitung nach z erhält man durch Differentiation nach z , und es wird

$$(9) \quad \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} z'.$$

Den Winkel (r, r') kann man durch die wahren Anomalien beider Planeten ausdrücken. Dazu berechne man die Winkel I, Φ und Ψ' aus

$$(10) \quad \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (\Psi' + \Phi) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i + i') \\ \sin \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (\Psi' + \Phi) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i - i') \\ \cos \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (\Psi' - \Phi) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i + i') \\ \cos \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (\Psi' - \Phi) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i - i') \end{aligned}$$

und setzt man dann

$$(11) \quad \Pi = \pi - \Omega - \Phi \quad \Pi' = \pi' - \Omega' - \Psi'$$

so wird

$$(12) \quad H = \cos(v + \Pi) \cos(v' + \Pi') + \sin(v + \Pi) \sin(v' + \Pi') \cos I.$$

Die geometrische Bedeutung der Grössen I, Φ, Ψ' , ist leicht zu finden.

Die Coordinate z' wird durch die gegebenen Grössen am bequemsten ausgedrückt, wenn man den Zählungsanfang der Coordinaten in den aufsteigenden Knoten der Bahn des gestörten Planeten auf der des störenden Planeten verlegt, dann wird

$$z' = -r' \sin I \sin(\bar{v}' + \Pi').$$

In die Störungfunction, als auch in deren Ableitungen, führt nun *Hansen* das Verhältniss der Radien vectore zu den halben grossen Axen ein und multiplicirt dann alles mit 206264^u,8, um die Störungen in Secunden ausgedrückt zu erhalten. Sei zur Abkürzung

$$206264^u,8 \frac{\mu'}{1+\mu} = \Delta \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha$$

so wird

$$\alpha \Omega = \Delta \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{\alpha^2} \Delta \left(\frac{\alpha'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{\alpha} \right) H$$

$$\alpha r \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^3 \left\{ \alpha^2 \left(\frac{r'}{\alpha'} \right)^2 - \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \Delta \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{\alpha^2} \Delta \left(\frac{\alpha'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{\alpha} \right) H \quad (13)$$

$$\alpha^2 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = - \Delta \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^3 \alpha \sin I \left(\frac{r'}{\alpha'} \right) \sin(v' + \Pi') + \frac{1}{\alpha^2} \Delta \sin I \left(\frac{\alpha'}{r'} \right)^2 \sin(v' + \Pi')$$

und diese Grössen müssen nun in Reihen entwickelt werden.

Die grösste Schwierigkeit bei diesen Entwicklungen hegt in der Zerlegung des Bruches $\frac{1}{\rho}$ und es ist schon oben angeführt worden, dass *Euler* zuerst eine solche Entwicklung vorgenommen hat. Nach *Euler* gab *Lagrange* eine Entwicklung der Function Ω und deren Differentialquotienten, die mit einigen Abänderungen sehr lange im Gebrauche gewesen ist. Diese Entwicklung bestand darin, dass man die Hauptreihe nach den Vielfachen der mittlern Längen beider Planeten ordnete, und die Coefficienten dieser Reihe nach Potenzen der Excentricität und Neigung entwickelte. Waren Excentricität und Neigung nicht klein, so war die Convergenz der Reihen der Coefficienten eine schwache, und sollte eine gewünschte Genauigkeit erlangt werden, so musste man immer mehr und mehr Glieder mitnehmen, was die Rechnung sehr zeitraubend machte. In neuerer Zeit hat deshalb *Hansen* andere Methoden zur Entwicklung der Grösse $\frac{1}{\rho}$ in Vorschlag gebracht, die sich durch Kürze und Genauigkeit auszeichnen.

In dem ersten Verfahren, das *Hansen* in seiner Untersuchung der gegenseitigen Störungen Jupiters und Saturns (1831) bekannt machte, wird gesetzt

$$\Omega = \Sigma \left\{ \varphi_i \cos(im - i'm') + \varphi_{-i} \cos(-im - i'm') + \psi_i \sin(im - i'm') + \psi_{-i} \sin(-im - i'm') \right\}$$

wo m und m' die mittlern Anomalien beider Planeten bedeuten.

Nach den von *Lagrange* und *Fourier* gegebenen Entwicklungen kann man die φ und ψ Coefficienten erhalten aus

$$\varphi_i = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega \cos(im - i'm') dm dm'$$

$$\psi_i = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega \sin(im - i'm') dm dm'$$

und setzt man für $i, -i$ so bekommt man die φ_{-i} und ψ_{-i} .

Auf diese Integrale wird nun die mechanische Quadratur angewandt. Dazu theilt man die Bahnen bezüglich m und m' in 2ν und $2\nu'$ Theile. Da aber hierdurch $2\nu, 2\nu'$ Werthe von Ω zu berechnen sind, so wird dieses Verfahren ziemlich weifläufig.

Ein zweites Verfahren gab *Hansen* in seinem Werke: *Er-mittlung der absoluten Störungen in den Bahnen von beliebiger Excentricität und Neigung, Gotha 1843*. Bei dieser Vorschrift sind die unendlichen, nach Potenzen der Excentricität und Neigung des gestörten Planeten fortschreitenden, Reihen der Coefficienten vermieden und durch Einführung der excentrischen Anomalie an Stelle der mittlern eine grössere Convergenz der Hauptreihe bewirkt worden.

Hierbei setzt *Hansen* die Störungfunction

$$(14) \quad \Omega = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{r'} + \frac{r^2}{r'^3} U_2 + \frac{r^3}{r'^4} U_3 + \dots \right\}$$

da

$$(15) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} U_1 + \frac{r^2}{r'^3} U_2 + \dots$$

wo die U Coefficienten Functionen der Grösse H sind. Weiter wird nun gesetzt

$$(16) \quad H = A \cos v + B \sin v$$

und man kann leicht beweisen, dass A und B nie grösser als 1 werden können.

Durch

$$x = \frac{r}{a} \cos v = \cos \varepsilon - e \quad y = \frac{r}{a} \sin v = \cos \varphi \sin \varepsilon$$

wird

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \Omega &= x^2 C_{2,0} + xy C_{1,1} + y^2 C_{0,2} \\ &+ x^3 C_{3,0} + x^2 y C_{2,1} + x y^2 C_{1,2} + y^3 C_{0,3} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

also allgemein

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \Omega = \Sigma x^p y^q C_{p,q}$$

wo

$$C_{p,q} = \frac{\mu'}{1+\mu} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'} \right)^{p+q+1} \left(\frac{a'}{r'} \right)^{p+q+1} D_{p,q}$$

und $D_{p,q}$ eine Function von A und B ist. Hierbei sind p und q immer ganze positive Zahlen.

Durch specielle Werthe von A und B wird nun $D_{p,q}$ in eine Reihe entwickelt, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der wahren Anomalie der störenden Planeten fortschreitet, und nach Multiplication mit $\left(\frac{a'}{r'} \right)^{p+q+1}$ wird die wahre Anomalie durch die mittlere eliminiert. Die Ausführung einer solchen Elimination werde ich weiter unten zeigen.

Zufolge der Annahme von x und y wird

$$a \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = -a \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) \sin \varepsilon + a \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) \cos \varphi \cos \varepsilon$$

$$ar \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) = a \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) (\cos \varepsilon - e) + a \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) \cos \varphi \sin \varepsilon;$$

dennach hat man zur Berechnung von $\frac{dW}{dz}$, $\left(\frac{d\Omega}{dx} \right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dy} \right)$ nöthig. Man hat aber

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) = \Sigma y^q p x^{p-1} C_{p,q}$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) = \Sigma q y^{q-1} x^p C_{p,q}$$

und deshalb muss zuerst die Entwicklung von

$$(\sin \varepsilon)^p (\cos \varepsilon - e)^q = \theta$$

vorgenommen werden.

Für ein grades q sei

$$\theta = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos \varepsilon + 2\alpha_2 \cos 2\varepsilon + \dots + 2\alpha_{p+q} \cos(p+q)\varepsilon$$

und zur Bestimmung der α_i Coefficienten findet man

$$0 = (p + q + i) \alpha_i - 2e(q + i - 1) \alpha_{i-1} - 2(p - q) \alpha_{i-2} - 2e(q - i + 3) \alpha_{i-3} + (p + q - i + 4) \alpha_{i-4}$$

aus der alle Coefficienten berechnet werden können, wenn α_0 und α_1 bekannt sind. Für diese findet man

$$\begin{aligned} (-1)^p \alpha_0 &= \frac{1.3.5\dots q-1}{2.4.6\dots q} e^p + \frac{p \cdot p-1}{1.2} \cdot \frac{1.1.3.5\dots q-1}{2.4.6\dots q+2} e^{p-2} + \dots \\ (-1)^p \alpha_1 &= -p \frac{1.1.3\dots q-1}{2.4.6\dots q+2} e^{p-1} - \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1.2.3} \cdot \frac{1.3.1.3\dots q-1}{2.4.6\dots q+4} e^{p-3} - \dots \end{aligned}$$

Für ein gerades q sei

$$\theta = 2\beta_1 \sin \varepsilon + 2\beta_2 \sin 2\varepsilon + \dots + 2\beta_{p+q} \sin(p+q)\varepsilon$$

und auch zwischen diesen β_i Coefficienten herrscht die obige Bedingungsgleichung, nur müssen jetzt β_1 und β_2 gegeben sein, da $\beta_0 = 0$ und $\beta_{-i} = -\beta_i$; oben war $\alpha_{-i} = \alpha_i$.

Man hat

$$\begin{aligned} (-1)^p \beta_1 &= \frac{1.3.5\dots q}{2.4.6\dots q+1} e^p + \frac{p \cdot p-1}{1.2} \cdot \frac{1.1.3.5\dots q}{2.4.6\dots q+3} e^{p-2} + \dots \\ (-1)^p \beta_2 &= -2p \frac{1.1.3\dots q}{2.4.6\dots q+3} e^{p-1} - 2 \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1.2.3} \cdot \frac{1.3.1.3\dots q}{2.4.6\dots q+5} e^{p-3} - \dots \end{aligned}$$

Durch mechanisches Multipliciren der Reihe für $C_{p,q}$ mit θ erhalten die Differentialquotienten von Ω die Form

$$\Sigma (M_{i,p} \cos(i\varepsilon + i'm') + N_{i,p} \sin(i\varepsilon + i'm'))$$

und eine ähnliche ergibt sich für $\frac{dW}{d\varepsilon}$.

Ferner ist

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dH}\right) \frac{z'}{rr'}$$

und eliminirt man die Ableitung nach H durch die Gleichungen

$$A \sin H + B \cos H = \cos I \sin(v' + H')$$

$$H = (Ax + By) \frac{a}{r}$$

so wird

$$a \left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = -a \left\{ \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \text{tang } I \sin H + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \text{tang } I \cos H + T \right\}$$

wo

$$T = \frac{\mu'}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \Sigma y^q x^p \left(\frac{a}{a'}\right)^{p+q+2} \left(\frac{a'}{r}\right)^{p+q+2} K_{p,q}$$

und

$$K_{p,q} = \left(\frac{dD_{p,q}}{dA}\right) \text{tang } I \sin H + \left(\frac{dD_{p,q}}{dB}\right) \text{tang } I \cos H.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} D_{p,q} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1.3.5.7\dots(2(p+q)-(2n+1))}{n!} \left\{ \frac{A^p B^{q-2n}}{p!(q-2n)!} + \right. \\ &\quad \left. \frac{n A^{p-2} B^{q-2(n-1)}}{1(p-2)!(q-2(n-1))!} + \frac{n(n-1) A^{p-4} B^{q-2(n-2)}}{1.2(p-4)!(q-2(n-2))!} + \dots \right\} \end{aligned}$$

wobei 1 für $\frac{1}{0!}$ zu nehmen ist, dann wird

$$\frac{dD_{p,q}}{dA} = \left\{ 2(p+q) - (2n+1) \right\} D_{p-1,q}$$

$$\frac{dD_{p,q}}{dB} = \left\{ 2(p+q) - (2n+1) \right\} D_{p,q-1} = \frac{dD_{p+1,q-1}}{dA}$$

Ist der störende Planet ein unterer, so muss man von

$$\Omega = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} U_1 + \dots - \frac{r}{r'^2} H \right\}$$

ausgehen.

Bis zu einer gewissen Grenze der Vielfachen der Anomalien ist die Rechnung nach diesem Verfahren ziemlich bequem, aber es schwindet diese Bequemlichkeit, wenn man die Entwicklung weiter fortführt: denn die $D_{p,q}$ werden dann immer verwickelter und die Multiplicationen mit $C_{p,q}$ immer langwieriger.

In der Schrift: *Entwicklung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function* ($r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta$) (1854) hat Hansen ein drittes Verfahren gelehrt, das ich nun kurz auseinandersetzen will. Da man nur die Ableitungen von Ω nach den Coordinaten der gestörten Planeten sucht, so kann man setzen

$$\Omega = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{r^2}{r'^3} U_2 + \frac{r^3}{r'^4} U_3 + \dots \right\} \quad (17)$$

und durch $\frac{a'}{a} = \alpha$ wird

$$a \Omega = \frac{\mu'}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \left(\frac{r}{a} \right)^2 U_2 + \frac{1}{a^4} \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(\frac{r}{a} \right)^3 U_3 + \dots \right\}$$

Die Bestimmung der U geschieht nun folgendermassen.

Man hat

$$(18) H = \cos \frac{1}{2} I^2 \cos(v - v' + \Pi - \Pi') + \sin \frac{1}{2} I^2 \cos(v + v' + \Pi + \Pi')$$

und wird gesetzt

$$\begin{aligned} \frac{r}{r'} \cos \frac{1}{2} I^2 &= \delta & \frac{r}{r'} \sin \frac{1}{2} I^2 &= \delta', \\ \cos(v - v' + \Pi - \Pi') &= \frac{p+p^{-1}}{2} & \cos(v + v' + \Pi + \Pi') &= \frac{q+q^{-1}}{2} \end{aligned}$$

so wird aus

$$(19) \left(\frac{\rho}{r'} \right)^2 = 1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{r'} \right) H$$

$$(19) \left(\frac{\rho}{r'} \right)^2 = (1 - \delta p - \delta' q) \left(1 - \frac{\delta}{p} - \frac{\delta'}{q} \right) - \delta \delta' \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

Entwickelt man diesen Ausdruck mit Hilfe des Binomiums, nach Potenzen von δ und δ' , so kommt

$$\frac{r'}{\rho} = \sum_0^{\infty} E(k, l) \delta^k \delta'^l$$

wo der Coefficient $E(k, l)$ von p und q abhängt. Andererseits hat man aber auch

$$\frac{r'}{\rho} = \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{r'} \right)^n U_n$$

und somit wird, wenn $k+l=n$ gesetzt wird,

$$U_n = \cos \frac{1}{2} I^{2n} \sum \tan \frac{1}{2} I^{2l} E(k, l).$$

Für die E Coefficienten findet man

$$E(k, l) = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=l} \left\{ P \cos(a' \Pi' - a \Pi) \cos(a' v' - a v) - P \sin(a' \Pi' - a \Pi) \sin(a' v' - a v) \right\}$$

$$- \sum_{\tau=0}^{\tau=k-1} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=l-1} \left\{ P' \cos(b' \Pi' - b \Pi) \cos(b' v' - b v) + P' \sin(b' \Pi' - b \Pi) \sin(b' v' - b v) \right\}$$

wobei

$$a = k - l - 2(\tau - \sigma) = b$$

$$a' = k + l - 2(\tau + \sigma) = b' + 2$$

$$P = \rho(k - \tau, l - \sigma) \cdot \rho(\tau, \sigma) \cdot \pi(l - \sigma, \tau) \cdot \pi(k - \tau, \sigma)$$

$$P' = \frac{4(k-\tau)(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)} \cdot \rho(k-\tau, l-\sigma-1) \cdot \rho(\tau, \sigma+1) \cdot \pi(l-\sigma, \tau) \cdot \pi(k-\tau, \sigma)$$

und

$$\rho(z, z') = \frac{1.3.5 \dots 2(z+z')-1}{2.4.6 \dots 2z.2.4.6 \dots 2z'}$$

$$\pi(z, z') = \frac{.2z+1.2z+3.2z+5 \dots 2(z+z')-1}{1.3.5.7 \dots 2z'-1}$$

$$\rho(0, 0) = \pi(0, 0) = \pi(0, z) = 1 \quad \rho(0, z) = \frac{1.3.5 \dots 2z-1}{2.4.6 \dots 2z}$$

$$\rho(z, z') = \rho(z', z) \quad \pi(z, z') = \pi(z', z).$$

Hierbei sind also die P und P' von den Bahnelementen unabhängig und können in Tafeln gebracht werden, wie Hansen es auch schon gethan hat. Aus den U_n wird nun v durch die excentrische Anomalie ε , und v' durch die mittlere Anomalie m' eliminirt; dadurch wird

$$a \Omega = \sum \left\{ \mathfrak{A}_{i,i'} \cos(i\varepsilon - i'm') + \mathfrak{B}_{i,i'} \sin(i\varepsilon - i'm') \right\}.$$

Durch Differentiation nach ε erhält man den Differentialquotienten $a \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right)$.

Die Ableitung nach z erhält man aus den Gleichungen (13) und zwar wird

$$a^2 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = - \left\{ a \Omega + 2ar \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) + 3 \left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \frac{1}{a^2} U_1 \right.$$

$$\left. + \frac{\mu'}{1+\mu} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \frac{\frac{a'}{r'} \cdot \frac{1}{a} \sin l \sin(v' + \Pi')}{1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^2} \right\}.$$

Der Differentialquotient nach r findet sich sehr schnell, denn da

$$a \Omega = \frac{\mu'}{1+\mu} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{a'}{r'} \right)^{n+1} U_n$$

so wird

$$ar \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) = (n) a \Omega$$

wo (n) anzeigt, dass jedes Glied mit dem entsprechenden n multiplicirt werden muss.

Auch diese Methode, bei der also die mechanische Quadratur nicht in Anwendung gekommen ist, ist nicht in allen Fällen mit gleichem Vortheile anwendbar, indem die Convergenz der Reihe für Ω wesentlich von α abhängt. Ist dieses Verhältniss der grossen Axen kleiner als $\frac{1}{2}$, so ist die Rechnung nach dieser Methode sehr kurz; bei einem α , das grösser als $\frac{1}{2}$ ist, wird die Rechnung ziemlich langwierig, indem dann die Convergenz der Reihen für $\mathfrak{A}_{i,j}$ und $\mathfrak{B}_{i,j}$, die nach Potenzen von α fortschreiten, sehr schwach wird.

Ein in allen Fällen anwendbares Verfahren veröffentlichte *Hansen* in seiner *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode etc.* (1856). Dieses Verfahren, bei dem wiederum die mechanische Quadratur in Anwendung kommt, will ich nun vollständig auseinandersetzen.

Führt man in

$$(20) \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \alpha^2 - 2\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r'}{a'}\right) \alpha H.$$

die excentrische Anomalie ein, so kommt

$$(21) \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = D - \gamma_1 \cos \varepsilon' - \beta_0 \sin \varepsilon' + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2\varepsilon'$$

wo D , γ_1 und β_0 Abkürzungen sind, deren Berechnung ich hernach zeigen werde; für γ_2 findet man $\alpha^2 e'^2$.

Es kommt nun alles darauf an $\left(\frac{\rho}{a}\right)$ nach beiden Planeten, dem gestörten und dem störenden, zu entwickeln. Dazu setzt *Hansen*

$$(22) \quad \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = (C - q \cos(\varepsilon' - Q)) (1 - q \cos(\varepsilon' - Q))$$

und führt man die Multiplication aus, so giebt die Vergleichung mit (21)

$$\gamma'_0 = C - qq, \sin Q^2$$

$$\gamma_1 = (q + q, C) \cos Q$$

$$\gamma_2 = qq,$$

$$\beta_0 = (q - q, C) \sin Q$$

$$Q = Q$$

wobei gesetzt ist

$$\gamma'_0 = D - \frac{1}{2} \gamma_2.$$

Aus diesen vier Gleichungen müssen nun C , q , q , und Q bestimmt werden, und man kann es immer machen, dass C , q und q , positiv werden. Dazu erhebe man die zweite und vierte in's Quadrat, subtrahire dann die vierte von der zweiten, eliminiere hierauf C aus der entstandenen Gleichung durch die erste und setzt man dann $\sin Q^2 = y$, so erhält man

$$4\gamma_2^2 y^3 + 4\gamma_2(\gamma'_0 - \gamma_2)y^2 + (\gamma_1^2 + \beta_0^2 - 4\gamma_2\gamma'_0)y - \beta_0^2 = 0$$

und man findet leicht, dass der Coefficient von y^2 immer positiv sein wird.

Wendet man auf diese Gleichung den von *Harriot* zuerst ausgesprochenen, von *Stübner* (1720) und dem *Abbé de Gua* (1741) aber zuerst bewiesenen Satz über die Abhängigkeit der Vorzeichen der Coefficienten einer Gleichung von den Vorzeichen ihrer Wurzeln an, so sieht man, dass diese Gleichung stets eine positive Wurzel haben muss, und nur diese kann für y genommen werden. Hierauf kann man die Rechnung immer so anstellen, dass man zuerst C , q und q , bestimmt und dann erst Q aus der Tangente.

Da nun D , γ_1 und β_0 von der excentrischen Anomalie der gestörten Planeten abhängen, so werden auch C , q , q , und Q von derselben Anomalie abhängen und für verschiedene Werthe dieser Anomalie wird man demnach auch verschiedene Werthe dieser vier Grössen finden. Wie nun diese verschiedenen Werthe zur Entwicklung nach beiden Planeten angewandt werden, will ich weiter unten auseinandersetzen.

Aber in vielen Fällen ist es vortheilhafter

$$\beta_0 = f \sin F \quad \gamma_1 = f \cos F \quad (23)$$

zu setzen, dann wird

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 = D - f \cos(\varepsilon' - F) + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2\varepsilon \quad (24)$$

und da γ_2 für diejenigen Planeten, die überhaupt als störende in Betrachtung gezogen werden können, klein ist, so setzt *Hansen*

$$(25) \quad \left(\frac{a}{\rho}\right)^n = \frac{1}{\{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{n}{2}}} - \frac{n}{4} \frac{\gamma_2 \cos 2\varepsilon'}{\{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{n+2}{2}}} + \frac{n(n+2)}{64} \frac{(1 + \cos 4\varepsilon') \gamma_2^2}{\{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{\frac{n+4}{2}}} \dots$$

und nimmt von dieser Entwicklung nur die beiden ersten Glieder. Wie die Gleichungen (13) zeigen, so hat man

$$(26) \quad \left(\frac{a}{\rho}\right) = \{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \gamma_2 \cos 2\varepsilon' \{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = \{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \gamma_2 \cos 2\varepsilon' \{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{5}{2}}$$

nöthig.

Beide Entwicklungsvorschriften für $\left(\frac{a}{\rho}\right)$ verlangen also eine Entwicklung des Ausdrucks

$$\{M - N \cos(\varepsilon' - P)\}^{-\frac{n}{2}}$$

und setzt man

$$A = \{C - q \cos(\varepsilon' - Q)\} \quad B = \{1 - q, \cos(\varepsilon' - Q)\},$$

so ergeben sich die verschiedenen Potenzen von $\left(\frac{a}{\rho}\right)$ entweder aus

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^n = A^{-\frac{n}{2}} B^{-\frac{n}{2}}$$

oder aus (25).

Da die zweite Vorschrift in vielen Fällen die kürzere ist, so will ich bei der weitem Auseinandersetzung die Bezeichnung der zweiten beibehalten.

Man setze

$$\{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{n}{2}} = a_0^{(n)} + 2a_1^{(n)} \cos(\varepsilon' - F) + 2a_2^{(n)} \cos 2(\varepsilon' - F) + \dots;$$

macht man nun Gebrauch von den Abkürzungen

$$\frac{f}{D} = \sin \chi = \frac{2 \tan \frac{1}{2} \chi}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \chi} = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}$$

$$\cos(\varepsilon' - F) = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p}\right)$$

so wird

$$\{D - f \cos(\varepsilon' - F)\}^{-\frac{n}{2}} = \frac{D^{-\frac{n}{2}}}{(1 + \tau^2)^{-\frac{n}{2}}} \left\{1 - \tau p\right\}^{-\frac{n}{2}} \left\{1 - \frac{\tau}{p}\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

und durch Anwendung des Binomiums erhält man dann allgemein

$$a_i^{(n)} = \frac{D^{-\frac{n}{2}}}{(1 + \tau^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{\tau^i n(n+2)(n+4)\dots(n+2i-2)}{1.2.3\dots i.2^i} \left\{1 + \frac{n(n+2i)\tau^2}{2^2(i+1)} + \frac{n(n+2)(n+2i)(n+2i+2)}{2^4.1.2(i+1)(i+2)} \tau^4 + \dots\right\}.$$

Aber zur Berechnung der a Coefficienten ist dieser Ausdruck nicht bequem, und es ist vortheilhafter dazu Relationen abzuleiten, die zwischen den a_i existiren.

Dazu nehme man

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

die von $x=0$ bis $x=1$ stetig sein soll, so erhält man nach Multiplication beider Seiten mit $y^{\varphi-1} (1-y)^{\psi-\varphi-1} dy$ und Integration von $y=0$ bis $y=1$,

$$\frac{\Gamma(\psi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(\psi-\varphi)} \int_0^1 y^{\varphi-1} (1-y)^{\psi-\varphi-1} F(xy) dy = A_0 + \frac{\varphi}{\psi} A_1 x + \frac{\varphi(\varphi+1)}{\psi(\psi+1)} A_2 x^2 + \frac{\varphi(\varphi+1)(\varphi+2)}{\psi(\psi+1)(\psi+2)} A_3 x^3 + \dots$$

wo Γ das Zeichen der Gammafunction ist. Macht man nun

$$F(x) = (1-x)^{-\theta} \text{ also } F(xy) = (1-xy)^{-\theta}$$

so ergibt sich

$$\frac{\Gamma(\psi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(\psi-\varphi)} \int_0^1 y^{\varphi-1} (1-y)^{\psi-\varphi-1} (1-xy)^{-\theta} dy = 1 + \frac{\varphi \cdot \theta}{1 \cdot \psi} x + \frac{\varphi(\varphi+1)\theta(\theta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \psi(\psi+1)} x^2 + \dots$$

Die Reihe rechts nennt man eine hypergeometrische und für diese hat Gauss eine eigene Bezeichnung in die Mathematik eingeführt; Gauss bezeichnet sie mit $F(\theta, \varphi, \psi, x)$.

Für $x=1$ hat man

$$\frac{\Gamma(\psi) \Gamma(\psi - \varphi - \theta)}{\Gamma(\psi - \theta) \Gamma(\psi - \varphi)} = \mathbf{F}(\theta, \varphi, \psi, 1)$$

und damit die Reihe convergire, so muss ψ stets grösser als $\theta + \varphi$ sein.

Darnach hat man also

$$(27) \quad a_i^{(n)} = \frac{D^{-\frac{n}{2}} (1 + \tau^2)^{\frac{n}{2}} \tau^i n(n+2)(n+4) \dots (n+2i-2)}{i! 2^i} \cdot \mathbf{F}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1, \tau^2\right)$$

und setzt man

$$F_i = \frac{n+2i-2}{4i} \cdot \frac{f}{D} \quad \gamma_i = 2\tau \frac{D}{f} \cdot \frac{\mathbf{F}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1, \tau^2\right)}{\mathbf{F}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i - 1, i, \tau^2\right)}$$

so wird

$$(28) \quad \frac{a_i^{(n)}}{a_{i-1}^{(n)}} = \gamma_i F_i$$

Es ist von Vortheil das Verhältniss der geometrischen Reihen in einen Kettenbruch zu verwandeln. Dazu setze ich

$$\mathbf{F}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1, \tau^2\right) - \mathbf{F}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i - 1, i, \tau^2\right) = \frac{n(1 - \frac{n}{2})}{i(i+1)} \tau^2 \left\{ 1 + \frac{(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2} + i)}{(i+2)} \tau^2 + \frac{(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2} + 2)(\frac{n}{2} + i)(\frac{n}{2} + i + 1)}{1 \cdot 2 \cdot (i+2)(i+3)} \tau^4 + \dots \right\}$$

also

$$= \frac{n(1 - \frac{n}{2})}{i(i+1)} \tau^2 \mathbf{F}\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + i, i + 2, \tau^2\right)$$

und setzt man das in γ_i vorkommende Verhältniss der geometrischen Reihen gleich G , so wird

$$G = \frac{1}{1 - \frac{n(1 - \frac{n}{2})}{i(i+1)} \tau^2 \frac{\mathbf{F}\left(\frac{n}{2} + i, \frac{n}{2} + 1, i + 2, \tau^2\right)}{\mathbf{F}\left(\frac{n}{2} + i, \frac{n}{2}, i + 1, \tau^2\right)}}$$

Setzt man die Entwicklung fort, so erhält man schliesslich

$$(29) \quad \gamma_i = \frac{\sec \frac{1}{2} \chi^2}{1 - p_i} \cdot \frac{1 - q_i}{1 - r_i} \cdot \frac{1 - s_i}{1 - \text{etc.}}$$

wobei gesetzt ist

$$p_i = \frac{n(2-n)}{4i(i+1)} \tan \frac{1}{2} \chi^2, \quad r_i = \frac{(n+2)(4-n)}{4(i+2)(i+3)} \tan \frac{1}{2} \chi^2, \quad (30)$$

$$q_i = \frac{(2i+n)(2i+2-n)}{4(i+1)(i+2)} \tan \frac{1}{2} \chi^2, \quad s_i = \frac{(2i+2+n)(2i+4-n)}{4(i+3)(i+4)} \tan \frac{1}{2} \chi^2.$$

Zur weitem Vereinfachung der Rechnung kann man nun eine Relation zwischen den γ_i ableiten. Dazu differentiire man den Ausdruck

$$\rho = \sin(i-1)x (D - f \cos x)^{-\frac{n-2}{2}} \quad (31)$$

nach x , dann kommt nach einigen Reductionen

$$\frac{d\rho}{dx} = \left\{ D i \cos ix - \frac{f}{4} (2i+2-n) \cos(i+1)x - \frac{f}{4} (2i+2+n-4) \cos(i-1)x \right\} (D - f \cos x)^{-\frac{n}{2}} \quad (31a)$$

Ist nun $f(x)$ eine zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=\pi$ stetige Function und gleich

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots,$$

so hat man bekanntlich

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos ix \, dx. \quad (32)$$

Integrirt man nun die Gleichung (31a), von $x=0$ bis $x=\pi$, und wendet Satz (32) an, so kommt

$$0 = 4i D a_i^{(n)} - f \cdot (2i+2-n) a_{i+1}^{(n)} - f \cdot (2i-2+n) a_{i-1}^{(n)} \quad (33)$$

und berücksichtigt man die Gleichung (28), so geht (33) über in

$$1 - \gamma_i + \frac{2i+2-n}{4i} \cdot \frac{f}{D} \cdot \gamma_i F_{i+1} \gamma_{i+1} = 0$$

woraus erhalten wird

$$\gamma_i = \frac{1}{1 - \lambda_{i+1} \gamma_{i+1}} \quad (34)$$

wenn

$$\lambda_{i+1} = \frac{2i+2-n}{4i} \cdot \frac{f}{D} \cdot F_{i+1} \quad (35)$$

Setzt man

$$F_i^{(n)} \cdot \gamma_i^{(n)} = p_i^{(n)} \quad (36)$$

so wird

$$(37) \quad a_i^{(n)} = a_0^{(n)} \cdot p_1^{(n)} \cdot p_2^{(n)} \cdot p_3^{(n)} \cdots p_i^{(n)}.$$

Somit sind alle $a_i^{(n)}$ auf $a_0^{(n)}$ zurückgeführt; man kann aber auch alle $a_i^{(n)}$ auf $a_0^{(1)}$ zurückführen.

Aus (31) folgt auch

$$\frac{d\rho}{dx} = (i-1) \cos(i-1)x (D - f \cos(\varepsilon' - F))^{-\frac{n-2}{2}} + \frac{n-2}{2} f \cdot \frac{\cos ix - \cos(i-2)x}{2} (D - f \cos(\varepsilon' - F))^{-\frac{n}{2}}$$

und setzt man $i+1$ statt i , so kommt nach Integration von o bis π

$$i a_i^{(n-2)} + \frac{n-2}{4} f \cdot a_{i+1}^{(n)} - \frac{n-2}{4} f \cdot a_{i-1}^{(n)} = 0.$$

Eliminirt man aus dieser $a_{i-1}^{(n)}$ mittelst (33) und setzt $n+2$ statt n , so kommt

$$(38) \quad (2i+n) a_i^{(n)} + f \cdot n \cdot a_{i+1}^{(n+2)} - n \cdot D \cdot a_i^{(n+2)} = 0.$$

Nun ist aber $a_i = a_{-i}$; also kann man $-(i+1)$ für i setzen, dadurch wird

$$(39) \quad (n-2i-2) a_{i+1}^{(n)} + n \cdot f \cdot a_i^{(n+2)} - n \cdot D \cdot a_{i+1}^{(n+2)} = 0.$$

Durch (38) und (39) ist man nun im Stande die $a^{(n+2)}$ aus den $a^{(n)}$ zu berechnen. Man findet

$$(40) \quad a_i^{(n+2)} = \frac{(2i-2+n)}{n(D^2-f^2)} \cdot f \cdot a_{i-1}^{(n)} - \frac{(2i-n)}{n(D^2-f^2)} \cdot D \cdot a_i^{(n)}.$$

Aus (38) erhält man durch $i=0$,

$$(41) \quad a_0^{(n+2)} = \frac{a_0^{(n)}}{D - f \cdot p_1^{(n)}}.$$

Jetzt muss nun noch gezeigt werden, wie man $a_0^{(1)}$ berechnen kann.

Es war

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{D - f \cos x}}$$

und setzt man

$$\frac{1}{2} x = \frac{\pi}{2} - y, \quad \frac{2f}{D+f} = c^2$$

so wird

$$a_0^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{D+f}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 y}}.$$

Nach der Theorie der elliptischen Functionen hat man aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 y}} = \frac{\pi}{2} (1+c')(1+c'')(1+c''') \dots$$

wo die Moduli c durch die Gleichungen

$$c = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}, \quad c' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''} \text{ etc.}$$

zusammenhängen.

Setzt man nun

$$c = \sin \vartheta, \quad c' = \sin \vartheta' \text{ etc.}$$

also

$$\sin \vartheta' = \text{tang } \frac{1}{2} \vartheta^2, \quad \sin \vartheta'' = \text{tang } \frac{1}{2} \vartheta'^2 \text{ etc.}$$

so ergibt sich bald

$$1+c' = \frac{\cos \vartheta'}{\sqrt{\cos \vartheta}}, \quad 1+c'' = \frac{\cos \vartheta''}{\sqrt{\cos \vartheta'}} \text{ etc.}$$

und es wird

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{D+f}} \sqrt{\frac{\cos \vartheta' \cdot \cos \vartheta'' \cdot \cos \vartheta''' \dots}{\cos \vartheta}}. \quad (42)$$

Damit ist die Entwicklung des Bruches $\left(\frac{a}{\rho}\right)^n$ nach dem störenden Planeten vollendet; um aber auch die Coordinaten des gestörten Planeten explicit in Rechnung zu bringen, so werden die $a_i^{(n)}$ Coefficienten mit Hülfe der mechanischen Quadratur in Reihen entwickelt, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten fortschreiten. Um die mechanische Quadratur anzuwenden, wird die Bahn des gestörten Planeten in eine gewisse Anzahl von Theilen getheilt, und für die den einzelnen Theilpunkten entsprechenden ε müssen hierauf die D, f, F und $a_i^{(n)}$ berechnet werden. Diese Berechnung geschieht recht zweckmässig durch folgende Formeln.

Erst berechnet man

$$\begin{aligned} \cos II' \cos II + \sin II' \sin II \cos I &= m \sin \phi \\ (\cos II' \sin II - \sin II' \cos II \cos I) \cos \varphi &= m \cos \phi \\ - \sin II' \cos II + \cos II' \sin II \cos I &= m_1 \sin \phi, \\ (\sin II' \sin II + \cos II' \cos II \cos I) \cos \varphi &= m_1 \cos \phi, \end{aligned}$$

dann erhält man F, f und D aus

$$\begin{aligned} f \cos F &= (2 \alpha^2 e' - 2 \alpha m \sin \varphi \sin \phi) + 2 \alpha m \sin (\phi - \varepsilon) \\ (43) \quad f \sin F &= -2 \alpha m_1 \cos \varphi' \sin \phi_1 + 2 \alpha m_1 \cos \varphi' \sin (\phi_1 + \varepsilon) \\ D &= \alpha^2 (1 - \frac{3}{2} e'^2) + (1 - e \cos \varepsilon)^2 + e' f \cos F. \end{aligned}$$

Mit den gefundenen f und D , deren Anzahl gleich ist der Anzahl der Theile, in die die Bahn des gestörten Planeten getheilt ist, berechnet man nun λ_i (35) und hierauf für den höchsten Werth von i den Kettenbruch (29); dann erhält man die übrigen γ_i durch die Gleichung (34). Dann folgt die Berechnung der Gleichung (36) für alle i und hat man nun auch $\alpha_0^{(1)}$ bestimmt, so erhält man alle $\alpha_i^{(n)}$ Coefficienten aus (37) u. (40).

Da die f, F und D die Grundlage der ganzen spätern Rechnung sind, so ist es unumgänglich nothwendig, dass sie sorgfältig controlirt werden. Diese Controle wird am einfachsten ausgeführt durch den Bruch $(\frac{\rho}{\alpha})$, der unter zwei Formen dargestellt werden kann, nämlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 &= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{r'}{\alpha'}\right)^2 - 2 \alpha \left(\frac{r}{\alpha}\right) \left(\frac{r'}{\alpha'}\right) H \\ &= D - f \cos (\varepsilon' - F) + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2 \varepsilon' \end{aligned}$$

und setzt man noch

$$\begin{aligned} n \sin l &= \cos I \sin (v + II) \\ n \cos l &= \cos (v + II) \end{aligned}$$

so wird

$$H = n \cos (v' + II' - l).$$

Die Grösse $(\frac{r}{\alpha})$ braucht nicht mehr berechnet zu werden, da sie schon bei der Bestimmung von D vorgekommen ist.

Wir hatten

$$\begin{aligned} \{D - f \cos (\varepsilon' - F)\}^{-\frac{n}{2}} &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} a_i^{(n)} \cos i (\varepsilon' - F) \\ &= 2 \sum_{i=0}^{i=+\infty} a_i^{(n)} \cos i (F - \varepsilon) \cos i (\varepsilon' - \varepsilon) \\ &\quad + a_0^{(n)} \sin i (F - \varepsilon) \sin i (\varepsilon' - \varepsilon) \end{aligned} \quad (44)$$

und nun muss man durch die mechanische Quadratur aus

$$\begin{aligned} a_i^{(n)} \cos i (F - \varepsilon) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(\begin{matrix} (n)c \\ i, \nu \end{matrix} c \cos \nu \varepsilon + \begin{matrix} (n)c \\ i, \nu \end{matrix} s \sin \nu \varepsilon \right) \\ a_i^{(n)} \sin i (F - \varepsilon) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(\begin{matrix} (n)s \\ i, \nu \end{matrix} c \cos \nu \varepsilon + \begin{matrix} (n)s \\ i, \nu \end{matrix} s \sin \nu \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (46)$$

die Entwicklungscoefficienten c und s bestimmen. Man sieht, dass in (46) die Coefficienten für $\nu=0$ doppelt angesetzt sind.

In den meisten Fällen genügt es, die Bahn des gestörten Planeten in 16 Theile zu theilen; man hat dann 16 verschiedene D, f, F und soviel mal 16 verschiedene a , als das höchste i Einheiten hat.

Für diesen Fall, wenn man die Bahn in 16 Theile getheilt hat, will ich die Formeln hersetzen, durch die man die c und s bestimmen kann. Der Kürze halber sei nun die linke Seite der Gleichungen (46) mit Y bezeichnet und es möge Y_0 dem ersten Theilpunkte, Y_1 dem zweiten etc. entsprechen. Für diese 16 Punkte hat ε die Werthe

$$0^0, 22\frac{1}{2}^0, 45^0, 67\frac{1}{2}^0, 90^0 \text{ etc.}$$

Ferner sei

$$\begin{aligned} 0.8 &= Y_0 + Y_8 & \frac{0}{8} &= Y_0 - Y_8 \\ 1.9 &= Y_1 + Y_9 & \frac{1}{9} &= Y_1 - Y_9 \\ &\vdots & &\vdots \\ 7.15 &= Y_7 + Y_{15} & \frac{7}{15} &= Y_7 - Y_{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0.4) &= 0.8 + 4.12 & (\frac{1}{4}) &= 0.8 - 4.12 & (0.2) &= (0.4) + (2.6) \\ (1.5) &= 1.9 + 5.13 & (\frac{1}{5}) &= 1.9 - 5.13 & (1.3) &= (1.5) + (3.7) \\ (2.6) &= 2.10 + 6.14 & \vdots & \vdots & (0-2) &= (0.4) - (2.6) \\ (3.7) &= 3.11 + 7.15 & \vdots & \vdots & (1-3) &= (1.5) - (3.7) \end{aligned}$$

$$(56) \quad \begin{aligned} c_{\nu}^{i'} &= \frac{i'}{\nu} \left\{ I_{\frac{\nu e'}{2}}^{(\nu-i')} - I_{\frac{\nu e'}{2}}^{(\nu+i')} \right\} \\ s_{\nu}^{i'} &= \frac{i'}{\nu} \left\{ I_{\frac{\nu e'}{2}}^{(\nu+i')} + I_{\frac{\nu e'}{2}}^{(\nu-i')} \right\} \end{aligned}$$

aus denen die Gleichungen (51) folgen. Diese Herleitung rührt von *Jakobi* her.

Auch zwischen den I lässt sich eine der Gleichung (33) ähnliche herstellen; denn differentiirt man den Ausdruck

$$G = \sin(\rho - \nu \sin \varepsilon)$$

nach ε , und integriert hierauf von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \pi$, so kommt

$$(57) \quad q I_{\frac{q}{2}}^{(\rho-1)} - 2\rho I_{\frac{q}{2}}^{(\rho)} + q I_{\frac{q}{2}}^{(\rho+1)} = 0.$$

Setzt man $q = 2l$, und

$$(58) \quad \frac{I_l^{(\rho)}}{I_l^{(\rho-1)}} = r_p$$

so wird wie früher

$$(59) \quad \frac{1}{r_p} = \frac{p}{l} - r_{p+1}$$

$$(60) \quad r_p = \frac{1}{\frac{p}{l} - \frac{1}{\frac{p+1}{l} - \frac{1}{\frac{p+2}{l} - \dots \text{etc.}}}}$$

und analog den a Coefficienten

$$(61) \quad I_l^{(\rho)} = I_l^{(0)} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_p$$

Den Werth von $I_l^{(0)}$ erhält man aus

$$I_l^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2l \sin \varepsilon') d\varepsilon' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 1 - \frac{(2' \sin \varepsilon')^2}{2!} + \frac{(2' \sin \varepsilon')^4}{4!} - \dots \right\} d\varepsilon'$$

und da

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{2n} dx = \pi \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

wo $(2n)_n$ der n^{te} Binomialcoefficient ist, so kommt

$$I_l^{(0)} = 1 - \frac{l^2}{1^2} + \frac{l^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{l^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots \quad (62)$$

Um die Coefficienten der Entwicklung von $\zeta^{(\nu)}$ nach ε und g' bequemer ausdrücken zu können, führt *Hansen* für die I Functionen andere Grössen ein. Er setzt

$$(63) \quad \frac{i'}{\nu} I_{\frac{\nu e'}{2}}^{(\nu-i')} = P_{\nu}^{(i')}$$

dann ist auch

$$(64) \quad -\frac{i'}{\nu} I_{\frac{\nu e'}{2}}^{(\nu+i')} = P_{-\nu}^{(i')} = P_{\nu}^{(-i')} \quad \text{und} \quad P_{-\nu}^{(-i')} = P_{\nu}^{(i')}$$

da die *Bessel'sche* Function die Eigenschaft

$$I_{-r}^{(-i)} = I_r^{(i)}$$

hat.

Zur Ausführung der Elimination ist nur noch der Werth von $c_0^{i'}$ anzuführen, da dieser durch die Formeln (56) nicht bestimmt werden kann. Man hat aber aus (53)

$$c_0^{i'} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \cos i' \varepsilon' - \frac{1}{2} e' \cos (i' + 1) \varepsilon' - \frac{1}{2} e' \cos (i' - 1) \varepsilon' \right\} d\varepsilon'$$

und aus dieser folgt für $i' = 1$

$$(65) \quad c_0^1 = -\frac{1}{2} e';$$

für jeden anderen Werth von i' verschwindet dieser Coefficient.

Nun war aber

$$c_0^1 = \frac{1}{2} (P_0^{(1)} + P_0^{(-1)})$$

also

$$P_0^{(1)} + P_0^{(-1)} = -e'$$

und man findet bald

$$(66) \quad P_0^{(1)} = P_0^{(-1)} = -\frac{1}{2} e'.$$

Für jeden von + 1 und — 1 verschiedenen Werth von i' wird

$$P_0^{(i')} = 0.$$

Führt man nun die Elimination aus, so kommt

$$(67) \quad \psi^{(n)} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ [i, \nu, c]_n \cos(i\varepsilon - \nu g') + [i, \nu, s]_n \sin(i\varepsilon - \nu g') \right\}$$

wobei gesetzt ist

$$(68) \quad [i, \nu, c]_n = \sum_{i'=0}^{i'=+\infty} \left\{ (i, i', c)_n P_{n-\nu}^{(-i')} + (-i, i', c)_n P_{n-\nu}^{(i')} \right\}$$

$$[i, \nu, s]_n = \sum_{i'=0}^{i'=+\infty} \left\{ (i, i', s)_n P_{n-\nu}^{(-i')} - (-i, i', s)_n P_{n-\nu}^{(i')} \right\}$$

und löst man die Summenzeichen auf, so wird

$$(69) \quad [i, \nu, c]_n = (i, 0, c)_n P_{n-\nu}^{(0)} + (i, 1, c)_n P_{n-\nu}^{(-1)} + (i, 2, c)_n P_{n-\nu}^{(-2)} + \dots$$

$$+ (-i, 1, c)_n P_{n-\nu}^{(1)} + (-i, 2, c)_n P_{n-\nu}^{(2)} + \dots$$

$$[i, \nu, s]_n = (i, 0, s)_n P_{n-\nu}^{(0)} + (i, 1, s)_n P_{n-\nu}^{(-1)} + (i, 2, s)_n P_{n-\nu}^{(-2)} + \dots$$

$$- (-i, 1, s)_n P_{n-\nu}^{(1)} - (-i, 2, s)_n P_{n-\nu}^{(2)} - \dots$$

Aus diesen ergeben sich nun für $\nu=0$ und $i=0, 1, 2, 3$ etc.

$$[0, 0, c] = (0, 0, c) - e' (0, 1, c)$$

$$[1, 0, c] = (1, 0, c) - \frac{1}{2} e' (1, 1, c) - \frac{1}{2} e' (-1, 1, c)$$

$$[2, 0, c] = (2, 0, c) - \frac{1}{2} e' (2, 1, c) - \frac{1}{2} e' (-2, 1, c)$$

$$[3, 0, c] = (3, 0, c) - \frac{1}{2} e' (3, 1, c) - \frac{1}{2} e' (-3, 1, c)$$

etc. etc. etc.

$$[0, 0, s] = 0$$

$$[1, 0, s] = (1, 0, s) - \frac{1}{2} e' (1, 1, s) + \frac{1}{2} e' (-1, 1, s)$$

$$[2, 0, s] = (2, 0, s) - \frac{1}{2} e' (2, 1, s) + \frac{1}{2} e' (-2, 1, s)$$

etc. etc. etc.

Durch diese Elimination ist (49) auf die Form (67) gebracht.

Zur vollständigen Entwicklung von $a\Omega$, $ar \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2 \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ werden nun noch erfordert die Entwicklungen von

$$\frac{\Delta}{a^2} \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right) H, \quad \left(\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right),$$

$$\frac{1}{a} \sin I \sin(\nu' + \Pi') \left(\frac{r'}{a'}\right), \quad \frac{\Delta}{a^2} \sin I \sin(\nu' + \Pi') \left(\frac{a'}{r'}\right)^2,$$

die nach dem Gegebenen nicht schwer zu erhalten sind.

Zuerst hat man

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 + \frac{1}{2} e^2) - 2e \cos \varepsilon + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\varepsilon$$

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = (1 + \frac{1}{2} e'^2) - 2e' \cos \varepsilon' + \frac{1}{2} e'^2 \cos 2\varepsilon'$$

und eliminirt man ε' durch g' , mittelst der Gleichungen (50) so wird

$$\left(\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right) = (1 + \frac{3}{2} e')^2 - \frac{1}{a^2} (1 + \frac{1}{2} e^2)$$

$$+ \frac{2e}{a^2} \cos \varepsilon - \frac{e^2}{2a^2} \cos 2\varepsilon - \frac{4}{3} I_{\frac{1}{2}e'}^{(1)} \cos g' - \frac{4}{4} I_{e'}^{(2)} \cos 2g'$$

$$- \frac{4}{9} I_{\frac{3}{2}e'}^{(3)} \cos g' - \frac{4}{16} I_{2e'}^{(4)} \cos 4g' \dots$$

Ferner findet man ziemlich leicht

$$\frac{1}{a} \sin I \sin(\nu' + \Pi') \left(\frac{r'}{a'}\right) = -\frac{3}{2} e' c_1 + \left(I_{\frac{1}{2}e'}^{(0)} - I_{\frac{1}{2}e'}^{(2)} \right) c_1 \cos g'$$

$$+ \frac{1}{2} \left(I_{e'}^{(1)} - I_{e'}^{(3)} \right) c_1 \cos 2g' + \frac{1}{3} \left(I_{\frac{3}{2}e'}^{(2)} - I_{\frac{3}{2}e'}^{(4)} \right) c_1 \cos 3g' + \dots$$

$$+ \left(I_{\frac{1}{2}e'}^{(0)} + I_{\frac{1}{2}e'}^{(2)} \right) c_2 \sin g' + \frac{1}{2} \left(I_{e'}^{(1)} + I_{e'}^{(3)} \right) c_2 \sin 2g'$$

$$+ \frac{1}{3} \left(I_{\frac{3}{2}e'}^{(2)} + I_{\frac{3}{2}e'}^{(4)} \right) c_2 \sin 3g' + \dots$$

wobei

$$c_1 = \frac{1}{a} \sin \Pi' \sin I \quad c_2 = \frac{1}{a} \cos \Pi' \cos \varphi' \sin I.$$

Die Producte mit $\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \alpha^2$ erhält man hierauf durch mechanisches Ausmultipliciren.

Setzt man weiter

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{a^2} &= \mathfrak{M} & \frac{\Delta}{a^2} \cos \varphi' &= \mathfrak{N} \\ h &= \mathfrak{M} m \sin \phi & h' &= \mathfrak{N} m, \cos \phi' \\ l &= \mathfrak{M} m \cos \phi & l' &= \mathfrak{N} m, \sin \phi' \\ b &= \mathfrak{M} \sin I \sin II' & b' &= -\mathfrak{N} \sin I \cos II' \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{a^2} \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \left(\frac{r}{a} \right) II = & \\ \frac{1}{2} (h \gamma_1 - h' \delta_1) \cos(-\varepsilon - g') + \frac{1}{2} (l \gamma_1 - l' \delta_1) \sin(-\varepsilon - g') & \\ - e h \gamma_1 \cos(-g') + e l' \delta_1 \sin(-g') & \\ + \frac{1}{2} (h \gamma_1 + h' \delta_1) \cos(\varepsilon - g') - \frac{1}{2} (l \gamma_1 + l' \delta_1) \sin(\varepsilon - g') & \\ + \frac{1}{2} (h \gamma_2 - h' \delta_2) \cos(-\varepsilon - 2g') + \frac{1}{2} (l \gamma_2 - l' \delta_2) \sin(-\varepsilon - 2g') & \\ - e h \gamma_2 \cos(-2g') + e l' \delta_2 \sin(-2g') & \\ + \frac{1}{2} (h \gamma_2 + h' \delta_2) \cos(\varepsilon - 2g') - \frac{1}{2} (l \gamma_2 + l' \delta_2) \sin(\varepsilon - 2g') & \\ + \text{etc.} & \quad \quad \quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{a^2} \sin I \sin(v' + II') \left(\frac{r'}{a} \right)^2 = & \\ b \gamma_1 \cos(-g') + b' \delta_1 \sin(-g') & \\ + b \gamma_2 \cos(-2g') + b' \delta_2 \sin(-2g') & \\ + b \gamma_3 \cos(-3g') + b' \delta_3 \sin(-3g') & \\ + \text{etc.} & \quad \quad \quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hierbei ist gesetzt

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= c'_1 & \delta_1 &= s'_1 \\ \gamma_2 &= 4 c'_2 & \delta_2 &= 4 s'_2 \\ \gamma_3 &= 9 c'_3 & \delta_3 &= 9 s'_3 \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned}$$

wo die c und s durch die Gleichungen (56) gegeben sind.

Damit sind $a\Omega$, $ar \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right)$ und $a^2 \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right)$ auf die Form (67) gebracht; da aber hernach nicht $a\Omega$, sondern, wie die Gleichung (2c) zeigt, $a \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right)$ gebraucht wird, diese Ableitung aber

$$a \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-ib(i, \nu, c) \sin(i\varepsilon - \nu g') + ib(i, \nu, s) \cos(i\varepsilon - \nu g'))$$

lautet, wenn $b(i, \nu, c)$ der Cosinuscoefficient und $b(i, \nu, s)$ der Sinuscoefficient der Reihe für $a\Omega$ ist, so ist es vortheilhafter gleich $(i)a\Omega$ zu berechnen, wobei (i) anzeigt, dass jeder Coefficient mit dem entsprechenden i multiplicirt werden muss. Um aber die Integration der Gleichung (2c) möglichst leicht ausführen zu können, so eliminirt Hansen auch noch g' . Die Elimination geschieht folgendermaassen. Ist c die mittlere Anomalie des gestörten Planeten zur Zeit t_0 , so ist

$$g = mt + c = \varepsilon - e \sin \varepsilon$$

und dem analog

$$g' = m' t + c'$$

also

$$g' = c' - \zeta c + \zeta \varepsilon - e \zeta \sin \varepsilon$$

wenn

$$\zeta = \frac{m'}{m}.$$

Unter Anwendung der Formel (52) findet sich

$$\cos(\nu \zeta e \sin \varepsilon) = 2 \sum_{q=0}^{q=\infty} I_{\lambda}^{(2q)} \cos 2q \varepsilon$$

$$\sin(\nu \zeta e \sin \varepsilon) = 2 \sum_{q=0}^{q=\infty} I_{\lambda}^{(2q)} \sin(2q + 1) \varepsilon$$

wenn $\lambda = \frac{1}{2} \nu \zeta e$ ist; und benutzt man diese Ausdrücke, so ergibt sich

$$a \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-\beta(i, \nu, c) \sin \theta + \beta(i, \nu, s) \cos \theta) \quad (70)$$

wenn

$$\theta = ((i - \nu \zeta) \varepsilon - \nu(c' - \zeta c))$$

und

$$\begin{aligned} \beta(i, \nu, c) = & ib(i, \nu, c) I_{\lambda}^{(0)} + (i-1)b(i-1, \nu, c) I_{\lambda}^{(1)} + (i-2)b(i-2, \nu, c) I_{\lambda}^{(2)} + \dots \\ & - (i+1)b(i+1, \nu, c) I_{\lambda}^{(1)} + (i+2)b(i+2, \nu, c) I_{\lambda}^{(2)} - \dots \end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned} \beta(i, \nu, s) = & ib(i, \nu, s) I_{\lambda}^{(0)} + (i-1)b(i-1, \nu, s) I_{\lambda}^{(1)} + (i-2)b(i-2, \nu, s) I_{\lambda}^{(2)} + \dots \\ & - (i+1)b(i+1, \nu, s) I_{\lambda}^{(1)} + (i+2)b(i+2, \nu, s) I_{\lambda}^{(2)} - \dots \end{aligned}$$

Durch gleiche Operationen sei erhalten worden

$$ar \left(\frac{d\Omega}{dr} \right) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ c(i, \nu, c) \cos \theta + c(i, \nu, s) \sin \theta \right\}$$

$$a^2 \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ d(i, \nu, c) \cos \theta + d(i, \nu, s) \sin \theta \right\}.$$

Hierauf muss man nun die Gleichung (2c) zusammenstellen.

Dazu setze ich

$$B_0 = \frac{1 - \frac{1}{2} e^2}{\cos \varphi^2}, B_2 = -\frac{e^2}{4 \cos \varphi^2}, A_0 = -\frac{e}{\cos \varphi^2}, A_{-1} = A_{+1} = \frac{e^2}{2 \cos \varphi^2},$$

$$D_1 = \frac{e}{2 \cos \varphi^2}, D_2 = \frac{e}{4 \cos \varphi^2}, C_{+1} = -\frac{e^2}{2 \cos \varphi^2}, C_{-1} = \frac{e^2}{2 \cos \varphi^2}$$

$$B'_0 = \tan \varphi \tan \frac{1}{2} i \cos(\pi - \Omega), D_{-1} = -\tan \varphi^2 \tan \frac{1}{2} i \sin(\pi - \Omega)$$

$$C_{-2} = -B'_0 \tan \varphi \sec \varphi \tan \frac{1}{2} i \quad D_{-2} = -\frac{1}{2} D_{-1} \operatorname{cosec} \varphi$$

ferner

$$F(i, \nu, s) = B_0 \beta(i, \nu, s) - D_1 c(i+1, \nu, s) + B_2 \beta(i+2, \nu, s) - D^2 c(i+2, \nu, s) \\ + D_1 c(i-1, \nu, s) + B_2 \beta(i-2, \nu, s) + D^2 c(i-2, \nu, s)$$

$$G(i, \nu, s) = A_0 \beta(i, \nu, s) + A_{-1} \beta(i+1, \nu, s) + A_{+1} \beta(i-1, \nu, s) \\ + C_{-1} c(i+1, \nu, s) + C_{+1} c(i-1, \nu, s)$$

$$\mathfrak{M}(i, \nu, s) = B'_0 d(i, \nu, c) + D_{-1} d(i+1, \nu, s) + D_{-2} d(i+2, \nu, s) + C_{-2} d(i+2, \nu, c) \\ - D_{-1} d(i-1, \nu, s) - D_{-2} d(i-2, \nu, s) + C_{-2} d(i-2, \nu, c)$$

$$\mathfrak{M}(i, \nu, c) = B'_0 d(i, \nu, s) - D_{-1} d(i+1, \nu, c) - D_{-2} d(i+2, \nu, c) + C_{-2} d(i+2, \nu, s) \\ + D_{-1} d(i-1, \nu, c) + D_{-2} d(i-2, \nu, c) + C_{-2} d(i-2, \nu, s)$$

dann wird

$$\frac{dW_0}{d\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}(i, \nu, s) \cos \theta - \mathfrak{M}(i, \nu, c) \sin \theta \\ + \mathfrak{M}(i, \nu, s) \cos(\theta - \gamma) - \mathfrak{M}(i, \nu, c) \sin(\theta - \gamma) \\ + \mathfrak{F}(i, \nu, s) \cos(\theta + \gamma) - \mathfrak{F}(i, \nu, c) \sin(\theta + \gamma) \end{array} \right\}$$

wenn

$$\mathfrak{M}(i, \nu, s) = \mathfrak{F}(i, \nu, s) + \mathfrak{M}(i, \nu, s)$$

$$\mathfrak{M}(i, \nu, c) = \mathfrak{G}(i, \nu, c) - \frac{1}{2} c \mathfrak{M}(i, \nu, s)$$

$$\mathfrak{F}(i, \nu, s) = \mathfrak{M}(i, \nu, s)$$

$$\mathfrak{M}(i, \nu, c) = \mathfrak{F}(i, \nu, c) - \mathfrak{M}(i, \nu, c)$$

$$\mathfrak{M}(i, \nu, c) = \mathfrak{G}(i, \nu, c) + \frac{1}{2} c \mathfrak{M}(i, \nu, c)$$

$$\mathfrak{F}(i, \nu, c) = \mathfrak{M}(i, \nu, c)$$

Ist nun

$$P(i, \nu, s) = \frac{\mathfrak{M}(i, \nu, s)}{i - \nu \varepsilon} + \frac{\mathfrak{M}(i+1, \nu, s)}{i+1 - \nu \varepsilon} + \frac{\mathfrak{F}(i-1, \nu, s)}{i-1 - \nu \varepsilon}$$

so wird, bei vorläufiger Vernachlässigung der Integrationsconstante,

$$W_0 = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(P(i, \nu, c) \cos \theta + P(i, \nu, s) \sin \theta \right) \quad (74)$$

und verfährt man nach der Vorschrift (3) und setzt

$$R(i, \nu, s) = \frac{P(i, \nu, s) - \frac{1}{2} e P(i+1, \nu, s) - \frac{1}{2} e P(i-1, \nu, s)}{i - \nu \varepsilon}$$

so kommt schliesslich

$$m \delta z = \Sigma \Sigma (R(i, \nu, c) \sin \theta - R(i, \nu, s) \cos \theta). \quad (75)$$

Aus (74) erhält man die Störung des Radius vector, wie die Gleichung (4b) zeigt.

Zur Berechnung der Breitenstörung sei

$$Q = 2(-M_1 \sin \varepsilon - M_2 \sin 2\varepsilon + N_{-1} \sin(\gamma + \varepsilon) + N_0 \sin \gamma \\ + N_{+1} \sin(\gamma - \varepsilon) + N_{+2} \sin(\gamma - 2\varepsilon))$$

und

$$T(i, \nu, s) = M_1 d(i-1, \nu, s) + M_2 d(i-2, \nu, s) - M_1 d(i+1, \nu, c) - M_2 d(i+2, \nu, s)$$

$$U(i, \nu, s) = N_{-1} d(i+1, \nu, s) + N_0 d(i, \nu, s) + N_{+1} d(i-1, \nu, s) + N_{+2} d(i-2, \nu, s)$$

$$V(i, \nu, s) = -(N_{-1} d(i-1, \nu, s) + N_0 d(i, \nu, s) + N_{+1} d(i+1, \nu, s) + N_{+2} d(i+2, \nu, s))$$

dann kommt mit Vorbehalt der später hinzuzufügenden Constante

$$\frac{r \delta s}{\cos i} = \Sigma \Sigma (Y(i, \nu, c) \cos \theta + Y(i, \nu, s) \sin \theta) \quad (76)$$

wenn

$$Y(i, \nu, s) = \frac{T(i, \nu, s)}{i - \nu \varepsilon} + \frac{U(i+1, \nu, s)}{i+1 - \nu \varepsilon} + \frac{V(i-1, \nu, s)}{i-1 - \nu \varepsilon}. \quad (77)$$

Die $Y(i, \nu, s)$ lassen sich leicht controliren; denn da aus (5c)

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\nu}{\cos i} \right) = 0$$

folgt, wenn der horizontale Strich die vollzogene Verwandlung von γ in ε anzeigt, so muss sein

$$T(i, \nu, s) + U(i+1, \nu, s) + V(i-1, \nu, s) = 0. \quad (78)$$

Eliminirt man nun aus (77) und (78) $T(i, \nu, \zeta)$, so folgt so-
gleich

$$(79) \quad (i - \nu \zeta) Y(i, \nu, \zeta) = -\frac{U(i+1, \nu, \zeta)}{i+1-\nu\zeta} + \frac{V(i-1, \nu, \zeta)}{i-1-\nu\zeta}.$$

Da für $i=0$ und $\nu=0$, und $i=-1$ oder $+1$ und $\nu=0$,
einige der Integrationsdivisoren verschwinden, so muss man für
diese Fälle die Integration besonders durchführen. Dazu hat man
aus (73)

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{d\varepsilon} = & \frac{1}{2} \mathfrak{M}(0,0,s) - \mathfrak{N}(0,0,c) \sin(-\eta) + \mathfrak{N}(0,0,s) \cos(-\eta) \\ & - \mathfrak{P}(0,0,c) \sin \eta + \mathfrak{P}(0,0,s) \cos \eta \\ & - \mathfrak{M}(1,0,c) \sin \varepsilon + \mathfrak{M}(1,0,s) \cos \varepsilon \\ & - \mathfrak{N}(1,0,c) \sin(-\eta + \varepsilon) + \mathfrak{N}(1,0,s) \cos(-\eta + \varepsilon) \\ & - \mathfrak{P}(1,0,c) \sin(\eta + \varepsilon) + \mathfrak{P}(1,0,s) \cos(\eta + \varepsilon) \\ & - \text{etc.} \qquad \qquad \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

und da W_0 auf die Form $k + k_1 \cos \eta + k_2 \sin \eta$ muss gebracht
werden können, so muss man der Integrationsconstante auch eine
solche Form geben; dadurch wird

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 = & k + P(0,0,c) + \frac{1}{2} M(0,0,s) \varepsilon \\ & + (k_1 + P(1,0,c)) \cos \varepsilon + (k_2 + P(1,0,s)) \sin \varepsilon \\ & + (\mathfrak{N}(0,0,s) + \mathfrak{P}(0,0,s)) \varepsilon \cos \varepsilon \\ & + P(2,0,c) \cos 2\varepsilon + P(2,0,s) \sin 2\varepsilon \\ & + P(3,0,c) \cos 3\varepsilon + P(3,0,s) \sin 3\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad \qquad \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} P(0,0,c) &= \mathfrak{N}(1,0,c) \\ P(1,0,c) &= \mathfrak{M}(1,0,c) + \frac{1}{2} \mathfrak{N}(2,0,c) \\ P(2,0,c) &= \frac{1}{2} \mathfrak{M}(2,0,c) + \frac{1}{3} \mathfrak{N}(3,0,c) + \mathfrak{P}(1,0,c) \\ \text{etc.} & \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

und dem analog

$$\begin{aligned} P(1,0,s) &= \mathfrak{M}(1,0,s) + \frac{1}{2} \mathfrak{N}(2,0,s) \\ P(2,0,s) &= \frac{1}{2} \mathfrak{M}(2,0,s) + \frac{1}{3} \mathfrak{N}(3,0,s) + \mathfrak{P}(1,0,s) \\ \text{etc.} & \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Das gefundene \bar{W}_0 setzt man nun in die Gleichung (3); dann
kommt durch Integration und durch darauf folgende Elimination
des ausserhalb der trigonometrischen Functionen auftretenden
Bogens ε , durch

$$\begin{aligned} \varepsilon = & mt + e \sin \varepsilon + c_0, \\ m_0 z = & c + (1 + k - \frac{1}{2} ek + 2 \mathfrak{M} c_0 + R(0,0,c)) mt + \mathfrak{M} m^2 t^2 \\ & + (1 - \frac{1}{2} e^2) \mathfrak{N} mt \sin \varepsilon - \frac{1}{2} e \mathfrak{N} mt \sin 2\varepsilon \\ & + \left\{ (1 - \frac{1}{2} e^2) (c_0 \mathfrak{N} + k_1 + P(1,0,c)) - \frac{1}{2} e P(2,0,c) \right\} \sin \varepsilon \\ & + \left\{ (1 - \frac{1}{4} e^2) \mathfrak{N} - \frac{1}{2} e \mathfrak{M}(0,0,s) - k_2 - R(1,0,s) \right\} \cos \varepsilon \\ & + \left\{ R(2,0,c) - \frac{1}{4} ek_1 - \frac{1}{2} ec_0 \mathfrak{N} \right\} \sin 2\varepsilon \\ & + \left\{ \frac{1}{8} e^2 \mathfrak{M}(0,0,s) + e \left(\frac{e^2}{8} - \frac{3}{4} \right) \mathfrak{N} + \frac{1}{4} ek_2 - R(2,0,s) \right\} \cos 2\varepsilon \\ & + R(3,0,c) \sin 3\varepsilon + \left\{ \frac{1}{4} e^2 \mathfrak{N} - R(3,0,s) \right\} \cos 3\varepsilon \\ & + R(4,0,c) \sin 4\varepsilon - R(4,0,s) \cos 4\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad \qquad \qquad - \text{etc.} \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum \left\{ R(i,\nu,c) \sin \theta - R(i,\nu,s) \cos \theta \right\} \end{aligned}$$

hierbei sind in c alle constanten Glieder zusammen gefasst, ferner

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4} (\mathfrak{M}(0,0,s) - e \mathfrak{N}) \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(0,0,s) + \mathfrak{P}(0,0,s)$$

und

$$\begin{aligned} R(0,0,c) &= P(0,0,c) - \frac{1}{2} e P(1,0,c) \\ R(2,0,c) &= \frac{1}{2} (P(2,0,c) - \frac{1}{2} e P(3,0,c) - \frac{1}{2} e P(1,0,c)) \\ R(3,0,c) &= \frac{1}{3} (P(3,0,c) - \frac{1}{2} e P(4,0,c) - \frac{1}{2} e P(2,0,c)) \\ & \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \\ R(1,0,s) &= P(1,0,s) - \frac{1}{2} e P(2,0,s) \\ R(2,0,s) &= \frac{1}{2} (P(2,0,s) - \frac{1}{2} e P(3,0,s) - \frac{1}{2} e P(1,0,s)) \\ R(3,0,s) &= \frac{1}{3} (P(3,0,s) - \frac{1}{2} e P(4,0,s) - \frac{1}{2} e P(2,0,s)) \\ & \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Durch die Gleichung (4b) erhält man

$$\begin{aligned}
 2\nu &= k + P(0, 0, c) + \frac{1}{2}c_0 \mathfrak{M}(0, 0, s) + \frac{1}{2}\mathfrak{M}(0, 0, s)mt + \mathfrak{N}mt \cos \varepsilon \\
 &+ \left\{ k_1 + P(1, 0, c) + c_0 \mathfrak{N} \right\} \cos \varepsilon + \left\{ k_2 + P(1, 0, s) + \frac{1}{2}e \mathfrak{M}(0, 0, s) \right\} \sin \varepsilon \\
 &+ P(2, 0, c) \cos 2\varepsilon \quad + \left\{ P(2, 0, s) + \frac{1}{2}e \mathfrak{N} \right\} \sin 2\varepsilon \\
 &+ P(3, 0, c) \cos 3\varepsilon \quad + P(3, 0, s) \sin 3\varepsilon \\
 &+ \text{etc.} \quad + \text{etc.} \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum \left\{ P(i, \nu, c) \cos \theta + P(i, \nu, s) \sin \theta \right\}.
 \end{aligned}$$

Durch ähnliche Operationen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{r\delta s}{a \cos i} &= U(1, 0, c) - \frac{c}{2}V(0, 0, c) - el - ec_0 V(0, 0, s) - eV(0, 0, s)mt \\
 &+ \left\{ Y(1, 0, s) - e^2 V(0, 0, s) - c_0 V(0, 0, c) + l \right\} \sin \varepsilon \\
 &\quad + \left\{ Y(1, 0, c) + c_0 V(0, 0, s) + l \right\} \cos \varepsilon \\
 &- V(0, 0, c)mt \sin \varepsilon \quad + V(0, 0, s)mt \cos \varepsilon \\
 &+ \left\{ Y(2, 0, s) + \frac{c}{2}V(0, 0, s) \right\} \sin 2\varepsilon + \left\{ Y(2, 0, c) + \frac{c}{2}V(0, 0, c) \right\} \cos 2\varepsilon \\
 &+ Y(3, 0, s) \sin 3\varepsilon \quad + Y(3, 0, c) \cos 3\varepsilon \\
 &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum \left\{ Y(i, \nu, s) \sin \theta \quad + Y(i, \nu, c) \cos \theta \right\}
 \end{aligned}$$

wo entsprechend der Gleichung (77)

$$\begin{aligned}
 Y(1, 0, s) &= T(1, 0, s) + \frac{1}{2}U(2, 0, s) \\
 Y(2, 0, s) &= \frac{1}{2}T(2, 0, s) + \frac{1}{3}U(3, 0, s) + V(1, 0, s) \\
 Y(3, 0, s) &= \frac{1}{3}T(3, 0, s) + \frac{1}{4}U(4, 0, s) + \frac{1}{2}V(2, 0, s) \\
 &\text{etc.} \quad \text{etc.} \\
 Y(1, 0, c) &= T(1, 0, c) + \frac{1}{2}U(2, 0, c) \\
 Y(2, 0, c) &= \frac{1}{2}T(2, 0, c) + \frac{1}{3}U(3, 0, c) + V(1, 0, c) \\
 &\text{etc.} \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Hierbei sind l und l , Integrationsconstanten. Aus (5a) und (5b) sieht man nämlich, dass die Störung der Breite auf die Form

$$l_0 + l \sin \eta + l \cos \eta$$

zweitens aber auch auf

$$t \frac{r}{a_0} \sin \bar{\nu} + t \frac{r}{a_0} \cos \bar{\nu}$$

muss gebracht werden können; daraus folgt aber

$$t = l, \quad t \cos \varphi_0 = l, \quad -t, e_0 = l_0,$$

also ist die ganze Constante

$$-el + l \sin \eta + l \cos \eta$$

und diese ist in das Integral der Gleichung (5c) eingeführt worden.

Die Bestimmung der sechs Integrationsconstanten c, k, k_1, k_2, l und l , gründet sich nun auf folgende Betrachtung. Da man osculirende Elemente einer gewissen Epoche der Rechnung zu Grunde gelegt hat, d. h. solche Element, die zur Zeitepoche Ort und Geschwindigkeit des Planeten genau darstellten, so müssen für die Zeitepoche, nicht nur die Störungen selbst, sondern auch deren Ableitungen nach der Zeit, gleich Null sein. Dadurch ergeben sich aber folgende sechs Bedingungsgleichungen

$$m_0 z = c_0; \quad \nu = 0; \quad \frac{r\delta s}{a} = 0;$$

$$\frac{dz}{dt} = 1; \quad \frac{d\nu}{dt} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{r\delta s}{a} = 0;$$

und diese reichen hin die sechs Constanten zu bestimmen. Nun ist aber

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\nu}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \frac{d}{dt} \frac{r\delta s}{a} = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{r\delta s}{a} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$$

und deshalb kann man auch für die beiden letzten Gleichungen

$$\frac{d\nu}{d\varepsilon} = 0 \quad \frac{d}{d\varepsilon} \frac{r\delta s}{a} = 0$$

nehmen.

Die Bestimmung der Constanten erfolgt hierauf folgendermaassen. Man berechnet mit den constanten Elementen und der aus c_0 und $t=0$ gefundenen exentrischen Anomalie ε_0 die Werthe

$$(m_0 \delta z)_0, \quad \left(\frac{d\delta z}{dt} \right)_0, \quad \nu_0, \quad \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon} \right)_0, \quad \left(\frac{r\delta s}{a \cos i} \right)_0, \quad \left(\frac{d}{d\varepsilon} \frac{r\delta s}{a \cos i} \right)_0,$$

indem man die Constanten vorläufig vernachlässigt.

Um Alles beisammen zu haben, so führe ich noch an

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{r ds}{a \cos i} &= -\frac{3}{2} e V(0, 0, s) \\ &+ \left\{ Y(1, 0, s) + V(0, 0, s) - c_0 V(0, 0, c) + l \right\} \cos \varepsilon \\ &- \left\{ Y(1, 0, c) + V(0, 0, c) + c_0 V(0, 0, s) + l \right\} \sin \varepsilon \\ &- V(0, 0, c) m t \cos \varepsilon \quad - V(0, 0, s) m t \sin \varepsilon \\ &+ \left\{ 2 Y(2, 0, s) + \frac{1}{2} e V(0, 0, s) \right\} \cos 2\varepsilon - \left\{ 2 Y(2, 0, c) + \frac{1}{2} e V(0, 0, c) \right\} \sin 2\varepsilon \\ &+ 3 Y(3, 0, s) \cos 3\varepsilon \quad - 3 Y(3, 0, c) \sin 3\varepsilon \\ &+ \text{etc.} \quad - \text{etc.} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum \left\{ Y(i, \nu, s) \cos \theta - Y(i, \nu, c) \sin \theta \right\} (i - \nu \zeta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\nu}{d\varepsilon} &= \frac{1}{2} \mathfrak{M}(0, 0, s) - \frac{1}{2} e \mathfrak{M} - \left\{ k_1 + P(1, 0, c) - c_0 \mathfrak{N} \right\} \sin \varepsilon \\ &+ \left\{ k_2 + P(1, 0, s) + \mathfrak{N} \right\} \cos \varepsilon - \mathfrak{N} m t \sin \varepsilon \\ &- 2 P(2, 0, c) \sin 2\varepsilon \quad + \left\{ 2 P(2, 0, s) + \frac{1}{2} e \mathfrak{N} \right\} \cos 2\varepsilon \\ &- 3 P(3, 0, c) \sin 3\varepsilon \quad + 3 P(3, 0, s) \cos 3\varepsilon \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum \left\{ P(i, \nu, s) \cos \theta - P(i, \nu, c) \sin \theta \right\} (i - \nu \zeta) \end{aligned}$$

wobei c_0 und \mathfrak{N} die frühere Bedeutung haben.

Aus den sechs Bedingungsgleichungen ergeben sich somit zur Berechnung der Constanten die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} c_0 &= c + k_1 (1 - \frac{1}{2} e^2) \sin \varepsilon_0 - k_2 \cos \varepsilon_0 - \frac{1}{4} e k_1 \sin 2\varepsilon_0 + \frac{1}{4} e k_2 \cos 2\varepsilon_0 + (m_0 \delta z)_0 \\ o &= k + k_1 \cos \varepsilon_0 + k_2 \sin \varepsilon_0 + \left(\frac{d\delta z}{dt} \right)_0 \\ o &= k + k_1 \cos \varepsilon_0 + k_2 \sin \varepsilon_0 + (2\nu)_0 \\ o &= -k_1 \sin \varepsilon_0 + k_2 \cos \varepsilon_0 + 2 \left(\frac{d\nu}{d\varepsilon} \right)_0 \\ o &= -e l_1 + l_1 \sin \varepsilon_0 + l_1 \cos \varepsilon_0 + \left(\frac{r ds}{a \cos i} \right)_0 \\ o &= l_1 \cos \varepsilon_0 - l_1 \sin \varepsilon_0 + \left(\frac{d}{d\varepsilon} \frac{r ds}{a \cos i} \right)_0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass eine Constante ganz willkürlich angenommen werden darf. Hätte man zur Berechnung von ν die Gleichung (4d) genommen, so wäre zu den sechs Constanten noch die siebente C gekommen; indem man aber nachweisen kann, dass diese siebente Constante von k und k_1 abhängig ist, so bleiben doch wieder nur sechs. Dadurch erhält man aber für die dritte Gleichung eine neue Relation zwischen k und k_1 , und somit sind in diesem Falle alle sechs Constanten durch diese Gleichungen völlig bestimmt.

Durch die Bestimmung der Constanten ist nun wohl die Aufgabe gelöst, aber ein vollständiges Zusammenfallen des mit Rücksicht auf die Störungen berechneten Ortes mit dem wahren ist noch nicht zu hoffen; denn einerseits ist in der Störung der mittlern Anomalie das Glied $\left(\frac{h_0}{h}\right) \nu^2$ übergangen worden, andererseits aber gehen kleine Fehler der Störungen sehr viel vergrößert in die Constanten über. Aber am meisten wirkt fehlerbildend ein etwas fehlerhafter Werth der mittlern Bewegung m_0 , deshalb muss man suchen, dass das der Rechnung zu Grunde gelegte m_0 , der Wahrheit so nahe als möglich komme. Durch die gegebenen Entwicklungen hat man es aber immer in seiner Gewalt das gebrauchte m_0 zu verbessern; denn da

$$m_0 z = c + \left\{ 1 + k - \frac{1}{2} e k_1 + 2 \mathfrak{M} c_0 + R(0, 0, c) \right\} m_0 t + \dots$$

so entspricht $\left\{ 1 + k - \frac{1}{2} e k_1 + 2 \mathfrak{M} c_0 + R(0, 0, c) \right\} m_0$ besser der Wahrheit als m_0 , und man kann die Rechnung mit dem neuen Werthe wiederholen. Bei dieser Wiederholung muss dann c an die Stelle von c_0 gesetzt werden. Sei der neue Werth von m_0 , m_1 , so ist

$$\zeta_1 = \frac{m'}{m_1} = \zeta + \Delta \zeta$$

und da alle Coefficienten die Form

$$\frac{A}{p - \nu \zeta}$$

hatten, so wird der neue Coefficient

$$\frac{A}{p - \nu \zeta} f(p, \nu)$$

wenn

$$f(p, \nu) = \frac{p - \nu \zeta}{(p - \nu \zeta)^2 - \nu \Delta \zeta}$$

Bildet man $\log(p - \nu \zeta)$ und $\log \nu \Delta \zeta$ und geht in die Zech'schen Tafeln mit dem Argumente

$$\log((p - \nu \zeta) - \nu \Delta \zeta)$$

so ist der gefundene Zech'sche Logarithme gleich $\log f(p, \nu)$.

Hat man die osculirenden Elemente der Epoche t_0 längere Zeit angewandt, so tritt häufig die Nothwendigkeit ein, diese Elemente in osculirende einer andern Zeitepoche zu verwandeln; deshalb will ich jetzt diese Verwandlung auseinandersetzen.

Für die neue Zeitepoche t , hat man mit den Elementen a_0, e_0 etc.

$$\begin{aligned} (m_0 z)_t &= \eta - e_t \sin \eta \\ \bar{r} \cos \bar{v} &= a_0 \cos \eta - a_0 e_0 \\ \bar{r} \sin \bar{v} &= a_0 \cos \varphi_0 \sin \eta \\ \bar{r} &= r(1 + \nu) \\ a_0^3 m_0^2 &= k^2(1 + \mu) \\ l_t &= \bar{v} + \pi_0 \end{aligned}$$

wo $(m_0 z)_t$, ν , und l_t die für die neue Zeitepoche berechneten Werthe sind. Durch die neuen Elemente muss aber sein

$$\begin{aligned} c_t &= \varepsilon - e_t \sin \varepsilon \\ r \cos v &= a_t \cos \varepsilon - a_t e_t \\ r \sin v &= a_t \cos \varphi_t \sin \varepsilon \\ a_t^3 m_t^2 &= k^2(1 + \mu) \\ l_t &= v + \pi_t \end{aligned}$$

und zur Vergleichung beider Gleichungssysteme hat man

$$r = r; \bar{v} + \pi_0 = v + \pi_t; a_0^3 m_0^2 = a_t^3 m_t^2.$$

Durch die gegebenen Formeln hat man aber

$$\begin{aligned} 1 + e_t \cos v &= a_t \cos \varphi_t^2 \frac{(1 + \nu)}{r} = (1 + \nu) (1 + e_0 \cos \bar{v}) \frac{a_0 \cos \varphi_0^2}{a_0 \cos \varphi_0^2} \\ &= (1 + \nu) (1 + e_0 \cos \bar{v}) \frac{h_0^2}{h_1^2} \\ &= \frac{1}{(1 + \nu)^2} (1 + e_0 \cos \bar{v}) \left(\frac{d(m_0 z)_t}{dt} \right)^2 \frac{1}{m_t^2} \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} h_t e_t \sin v &= \frac{dr}{dt} = \frac{1}{(1 + \nu)} \frac{h_0 e_0 \sin \bar{v}}{m_0} \cdot \frac{d(m_0 z)_t}{dt} - \frac{\bar{r}}{(1 + \nu)^2} \cdot \frac{d\nu_t}{dt} \\ &= \frac{1}{(1 + \nu)^2} \frac{h_0 e_0 \sin \bar{v}}{m_0^2} \left(\frac{d(m_0 z)_t}{dt} \right)^2 - \frac{\bar{r}}{(1 + \nu)^2} \cdot \frac{d\nu_t}{dt} \cdot \frac{h_t}{h_0 m_0} \frac{d(m_0 z)_t}{dt} \end{aligned}$$

und setzt man

$$e_t \cos v = \mathfrak{A} \quad e_t \sin v = \mathfrak{B}$$

so kommt

$$\begin{aligned} e_t \sin(\pi - \pi_0) &= \mathfrak{A} \sin \bar{v} - \mathfrak{B} \cos \bar{v} \\ e_t \cos(\pi - \pi_0) &= \mathfrak{A} \cos \bar{v} + \mathfrak{B} \sin \bar{v} \end{aligned}$$

aus denen π , und e , bestimmt werden. Hierauf sucht man ε aus.

$$\text{tang } \frac{1}{2} \varepsilon = \text{tang } (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi_t) \text{ tang } \frac{1}{2} v$$

und schliesslich c_t , a_t und m_t aus

$$\begin{aligned} c_t &= \varepsilon - e_t \sin \varepsilon \\ a_t &= \frac{r \sin v}{\cos \varphi_t \sin \varepsilon} = \frac{r \cos v}{\cos \varepsilon - e_t} \\ m_t^2 &= \frac{k^2(1 + \mu)}{a_t^3} \end{aligned}$$

Ist ferner β , die mit Hülfe der Störungen gefundene, dem Zeitpunkte t , entsprechende heliocentrische Breite und λ , die heliocentrische Länge des gestörten Planeten, so erhält man Ω_t und i_t aus

$$\begin{aligned} \text{tang } \Omega_t &= \frac{\cos(i_t + \pi_t) - \cos \beta_t \cos \lambda_t}{\cos \beta_t \sin \lambda_t} = \frac{\sin(v + \pi_t)}{\sin(v + \pi_t)} \\ \text{tang } i_t &= \frac{\sin \beta_t}{\text{tang}(\lambda_t - \Omega_t) \cos(v + \pi_t - \Omega_t)} \end{aligned}$$

Anmerkungen.

¹S. 1. Im 38. Capitel der *Physica coelestis tradita commentariis de motibus Stellae Martis* sagt Kepler, „virtus ex Sole in mundum per speciem egressa rapidus quidam torrens est, qui planetas omnes adeoque totam forsan auream aetheream ab occasu in ortum rapit, se ipso non aptus corpora ad Solem adducere vel ab eo longius propellere; quod esset infinitae sollicitudinis opus. Necessè ergo est, ut planetae ipsi ceu quaedam cymbae peculiare virtutes motrices quasi quosdam vectores seu portitores habeant, quorum providentia non tantum accessus ad Solem et recessus a Sole, sed etiam declinationes latitudinum administrant, et quasi ab una ripa in aliam, a septentrione inquam in austrum et contra, flumen hoc (se ipso solum eclipticae tractum sequens) trajiciunt.“ Die den Planeten vindicirte Kraft sollte also die sogenannte erste Ungleichheit der Planeten und die Neigung der Planetenbahnen zur Ekliptik erklären. Die Art der Wirkung dieser Kraft wird im 39 Capitel auseinandergesetzt. In den Capiteln 32—36 spricht Kepler von der Sonnenkraft und führt seine in der Einleitung zu diesem Werke gegebene Ansichten über die Gravitationslehre weiter aus. Uebergeht man die aus dem Alterthume überlieferten Ansichten von einer Anziehungskraft der Erde, von der übrigen *Anaxagoras* eine ziemlich klare Ansicht hatte, so kann man kurz sagen, dass die von *Kopernicus* der Materie zugeschriebene Anziehungskraft, welche die Ursache der sphärischen Gestalt der Himmelskörper sein sollte, von Kepler zu einer äussern gegenseitigen Anziehung erweitert wurde. Man vergleiche namentlich die Einleitung zum Werke *de Stella Martis*.

²S. 1. *De Stella Martis*, Cap. 34, „ita credibile est, in Sole non esse ullam vim planetarum attractoriam, ut in magnete (accederent enim ad Solem tantisper, donec cum ipso conjungerentur penitus), sed tantum directoriam, ideoque fibras habere circulares in eam plagam circum porrectas, quae monstratur a circulo zodiaci.“

³S. 1. Vergl. *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, herausgegeben von *Lindenau und Bahnenberger*, May 1817. *Borelli's* Worte lauten: „Parmi premieramente, che il vero e real movimento della presente cometa non possa essere in niun conto fatto per linea retta, ma per una tanto simile a una parabola, ch'è cosa da stupire, e questo non solo le mostra il calcolo, ma ancora un' esperienza meccanica che farò vedere etc.“

⁴S. 2. *Whewell*, *Geschichte der inductiven Wissenschaften*, Band II pag. 145 u. 146.

⁵S. 2. *An Attempt to prove the motion of the Earth*, by Dr. R. Hooke, Lond. 1674. Einen Auszug aus diesem Werke giebt *Baily* in seiner *Histoire de l'Astronomie moderne*, tome II p. 464. Diese Schrift von Hooke darf nicht verwechselt werden mit einer andern, die den Titel führt: *Conamen ad motum telluris probandum, ex observationibus Astron. Celeb. Rob. Hooke, 1679*. Diese Arbeit enthält Beobachtungen über die Parallaxe der Fixsterne.

⁶S. 3. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, lib. III propos. XIII theor. XIII. Actis quidem Jovis in Saturnum non est omnino condemnanda. Nam, et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis planetae hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem Astronomi haereant. Ueber die Säcularstörungen vergl. man das Scholium zu propos. XIV.

⁷S. 3. *Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates auctore L. Eulero, Petropoli 1753*.

⁸S. 4. Diese Arbeit wurde 1752 zu St. Petersburg gedruckt. Eine 2te Auflage dieser Mondtheorie erschien 1765 in Paris; dieser 2ten Auflage sind Mondtafeln beigegeben. Es ist bekannt, dass *Clairaut* bei seiner ersten Rechnung nur die Hälfte der Bewegung fand und daraus auf eine Unvollständigkeit des *Newton'schen* Gesetzes, das er seiner Rechnung zu Grunde gelegt hatte, schloss. Diesen Schluss bekämpfte *Buffon* durch metaphysische Gründe, und endlich fand *Clairaut* den Fehler darin, dass er die Näherung nicht weit genug getrieben hatte. Ueber diesen Streit mit *Buffon* vergl. man *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année 1745, avec les mémoires mathém., Paris 1749*, pag. 329, 493, 529 et 551.

⁹S. 6. Diese Methode hat *Lalande* auf die Jupiterstörungen des Mars und die Erdstörungen der Venus angewandt. Man vergl. *Pariser Memoiren 1760* und *Lalande, Astronomie, seconde édit. tome III* pag. 550.

¹⁰S. 7. *Histoire de l'Académie de Paris année 1745*, pag. 365.

¹¹S. 8. *Acta Academiae Petropolitanae pro Anno 1778 pars prior*, pag. 297.

¹²S. 9. *Astronomische Nachrichten von Schumacher*, Band 42 pag. 97, Band 45 pag. 195 u. Band 50 pag. 33.

¹³S. 9. Die *Euler'sche* Abhandlung über diese Methode, die von der St. Petersburg Academie der Wiss. am 23. Sept. 1762 mit einer Prämie gekrönt wurde, erschien unter dem Titel, *de perturbatione motus cometarum ab attractione planetarum orta, Petropoli 1762*.

¹⁴S. 12. *Mém. de l'Académie de Berlin, 1776*, pag. 210, 1781 pag. 214.

¹⁵S. 12. Die Unveränderlichkeit der grossen Axen fand *Laplace* im Jahre 1777. Drei Jahre später erschien die meisterhafte Abhandlung von *Lagrange* (Berl. Mém. 1776). Der Beweis von *Lagrange* setzt Incommensurabilität der mittlern Bewegungen voraus, weshalb er also eigentlich nur bedingungsweise gilt. *Trembley* hat deshalb auch Einwürfe gegen das *Lagrange'sche* Resultat gemacht. Man vergl. *Bode, Berliner Jahrbuch 1814*.

¹⁶S. 16. *Laplace, traité de mécanique céleste liv. II, chap. VI*.

¹⁷S. 24. Die Abhandlungen von *Poisson* sind erschienen in den Schriften der Pariser Academie und einige wenige in den Jahrgängen der *Connaiss. d. temps*. Die grösste Aufmerksamkeit verdient seine Abhandlung, *sur les inégalités séculaires des moyens mouvemens des planètes, 1808*, (Heft 8 der Schriften der Ecole polytechnique).

¹⁸S. 24. *Plana's* Arbeiten beziehen sich nur auf den Mond. *Théorie du mouv. de la lune, Turin 1832*. 3 vol.

¹⁹S. 24. *Pontécoulant* hat seine Studien niedergelegt in dem berühmten Werke, *théorie analytique du Système du Monde, 4 tomes Paris 1829—46*. Der vierte Band behandelt nur die Theorie des Mondes.

²⁰S. 24. Auch *Lubbock's* Arbeiten beziehen sich zumeist nur auf den Mond; *the theory of the Moon and the perturbations of the Planets. Part. I—IX. London 1834—1850*.

²¹S. 24. *Cauchy's* Arbeiten erstrecken sich über die ganze Störungstheorie und sind zerstreut in den *Comptes Rendus* von 1840—1846.

²²S. 22. Ueber *Leverrier's* Arbeiten vergleiche man die beiden ersten Bände der *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris, 1855 et 1856*.

Thesen.

- 1) Eine Theorie der astronomischen Refraction besitzen wir noch nicht.
- 2) Die von *Laplace* zu Höhenbestimmungen gegebene Barometerformel darf nicht mehr angewendet werden.
- 3) Der Schluss vom Sternspectrum auf die auf dem Sterne vorhandenen Stoffe ist unsicher.
- 4) Die Erde ist ein Electromagnet.
- 5) Die blaue Farbe des Himmels ist mehr eine Folge von Absorption als von Reflexion.
- 6) Wenn das Psychrometer nicht mehr vertheilt ist als das Barometer, so sind die mit demselben angestellten Beobachtungen von wenig Nutzen.
- 7) Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte muss bewiesen werden.