Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Kaia Malberg

Sümmeetriline tuletis ja sellega seotud keskväärtusteoreemid

Bakalaureusetöö

Juhendaja: prof. Toivo Leiger

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Funktsioonid, mis on diferentseeruvad tavalises mõttes, on meile tuttavad matemaatilise analüüsi põhikursusest, selles töös uuritakse diferentseeruvust veidi üldisemas tähenduses. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}$, on punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruv, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} =: f^s(x),$$

arvu $f^s(x)$ nimetatakse funktsiooni f sümmeetriliseks tuletiseks punktis x. Siinjuures eeldatakse, et mingi $\rho > 0$ korral

$$(x-\rho, x) \cap D \neq \varnothing \quad \text{ja} \quad (x, x+\rho) \cap D \neq \varnothing.$$

Selgub, et sümmeetriline diferentseeruvus on nõrgem tingimus kui tavaline diferentseeruvus, seejuures, kui leidub $f'(a)$, siis $f^s(a) = f'(a)$. Veelgi enam, sümmeetriliselt diferentseeruvad funktsioonid ei pruugi olla pidevad (vt näited 1.1-1.4).

Käesolevas töös uuritakse sümmeetrilise diferentseeruvusega seotud keskväärtusteoreeme, mis lähtuvad järgmistest klassikalistest väidetest (vt B. S. Thomson, J. B. Bruckner, A. M. Bruckner [7]).

Teoreem 0.1 (Lagrange'i keskväärtusteoreem)**.** *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis on vahemikus (a,b) diferentseeruv. Siis leidub selline $c \in (a,b)$, et*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Erijuhul, kui $f(a) = f(b)$, tuleneb teoreemist 0.1 Rolle'i teoreem.

Teoreem 0.2 (Rolle'i teoreem)**.** *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis on vahemikus (a,b) diferentseeruv. Kui $f(a) = f(b)$, siis leidub selline punkt $c \in (a,b)$, et $f'(c) = 0$.*

Teoreem 0.3 (Cauchy keskväärtusteoreem)**.** *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, mis on vahemikus (a,b) diferentseeruvad, ning olgu $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a,b)$ korral. Siis leidub punkt $c \in (a,b)$, et*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Lihtsad näited (vt näide 2.1) kinnitavad, et need teoreemid ei ole vahetult ülekantavad sümmeetriliselt diferentseeruvatele funktsioonidele. Bakalaureusetöö eesmärgiks on leida teoreemidele 0.1, 0.2 ja 0.3 vasted sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide korral ja täpsustada tingimusi, mil sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide keskväärtusteoreemid sarnanevad klassikalistega. Lisaks neile vaadeldakse ka Fletti, Trahani ja teiste keskväärtusteoreemide analooge sümmeetrilise diferentseeruvuse juhul.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis esitatakse vajalikud mõisted ja tulemused. Defineeritakse sümmeetriline pidevus ja diferentseeruvus ning leitakse nende seosed tavalise pidevuse ja diferentseeruvusega. Tõestatakse, et sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide korral on arvutusvalemid sarnased nendega, mida kasutatakse tavalise diferentseeruvuse puhul.

Teises peatükis tõestatakse põhitulemus – keskväärtusteoreem sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide jaoks. Lisaks leitakse vajalikud tingimused selleks, et see nn kvaasi-keskväärtusteoreem oleks esitatav klassikalise keskväärtusteoreemiga sarnasel kujul. Peatüki teises osas käsitletakse mõningaid kvaasi-keskväärtusteoreemi rakendusi, vaadeldakse tingimusi, millal sümmeetriliselt diferentseeruvad funktsioonid oleksid diferentseeruvad ka tavalises mõttes.

Kolmas peatükk tutvustab kvaasi-keskväärtusteoreemi erinevaid versioone, mis on Fletti, Trahani ja teiste teoreemide analoogid sümmeetrilise diferentseeruvusega funktsioonide jaoks.

Viimases, neljandas peatükis antakse ülevaade Cauchy tüüpi keskväärtusteoreemidest sümmeetrilise diferentseeruvuse juhul. Nende lähtekohaks on Wachnicki tõestatud tulemus, mis on Cauchy keskväärtusteoreemi üks versioonidest.

Antud bakalaureusetöö on referatiivne, selle kirjutamisel olid aluseks järgmised artiklid: C. E. Aull [1], R. M. Davitt, R. C. Powers, T. Riedel, P. K. Sahoo [2], T. M. Flett [3], S. Reich [4], P. K. Sahoo [5], P. K. Sahoo [6], D. H. Trahan [8], E. Wachnick [9].

1 Sümmeetriliselt diferentseeruvad funktsioonid

Käesolevas sissejuhatavas peatükis defineerime funktsioonide sümmeetrilise pidevuse ja sümmeetrilise diferentseeruvuse mõisted ning uurime nendega seotud omadusi.

1.1 Funktsioonide sümmeetriline pidevus

Olgu $D \subset \mathbb{R}$ mittetühi hulk ja olgu $x \in \mathbb{R}$ selline arv, et iga $\rho > 0$ korral

$$D \cap (x-\rho, x) \neq \varnothing \text{ ning } D \cap (x, x+\rho) \neq \varnothing. \tag{1}$$

Definitsioon. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *sümmeetriliselt pidev* punktis x, kui

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x+h) - f(x-h)\big) = 0,$$

st

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \; [x \pm h \in D, |h| < \delta] \Rightarrow |f(x+h) - f(x-h)| < \varepsilon.$$

Lause 1.1. *Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall ning olgu $x \in D$ selle intervalli sisepunkt. Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis x, siis on ta punktis x sümmeetriliselt pidev.*

Tõestus. Kuna x on intervalli $D \subset \mathbb{R}$ sisepunkt, siis on tingimus (1) täidetud. Tänu funktsiooni f pidevusele punktis x kehtib võrdus $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$, mistõttu

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\big(f(x+h) - f(x-h)\big) &= \lim_{h\to 0}\big(f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\big(f(x+h) - f(x)\big) + \lim_{h\to 0}\big(f(x) - f(x-h)\big) = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Seega on funktsioon f sümmeetriliselt pidev punktis x. $\square$

Definitsiooni kohaselt ei pruugi antud punktis sümmeetriliselt pidev funktsioon olla selles punktis määratud. Seega leidub sümmeetriliselt pidevaid funktsioone, mis ei ole pidevad.

Näide 1.1. Olgu

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, \quad f(x) := \cos\frac{1}{x}.$$

Funktsioon f on pidev igas punktis $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ja lause 1.1 põhjal on ta neis punktides ka sümmeetriliselt pidev. Kuid ta on sümmeetriliselt pidev ka kohal $x=0$:

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x+h)-f(x-h)\big) = \lim_{h\to 0}\left(\cos\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{-h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\cos\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Näide 1.2. Olgu

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{kui } x<2,\\ 1, & \text{kui } x=2,\\ 4, & \text{kui } x>2.\end{cases}$$

See funktsioon ei ole pidev kohal $x=2$, kuid on selles punktis sümmeetriliselt pidev:

$$\lim_{h\to 0}\big(f(x+h)-f(x-h)\big) = \lim_{h\to 0}\big(f(2+h)-f(2-h)\big) = 4-2^2 = 0.$$

1.2 Funktsioonide sümmeetriline diferentseeruvus

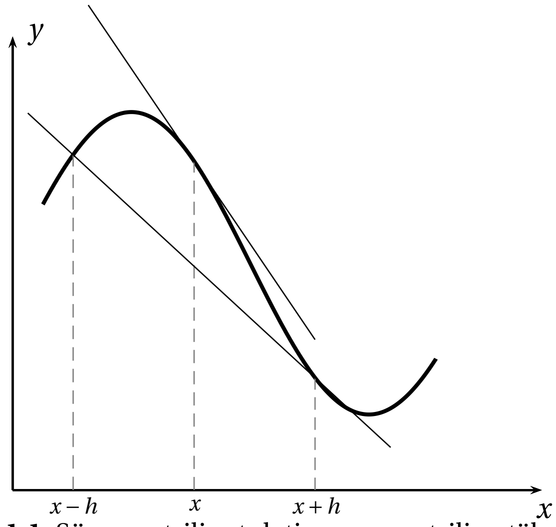
Rahuldagu hulk $D\subset\mathbb{R}$ ja arv $x\in\mathbb{R}$ tingimust (1).

Definitsioon. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$ on *sümmeetriliselt diferentseeruv* punktis x, kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} =: f^s(x).$$

Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *sümmeetriliseks tuletiseks* punktis x.

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni f sümmeetriline diferentseeruvus punktis x seda, et läbi graafiku punktide $(x-h, f(x-h))$ ja $(x+h, f(x+h))$ võetud lõikaja piirseis protsessis $h\to 0$ on punkti $(x, f(x))$ läbiv sirge, mille tõus on $f^s(x)$ (vt joonis 1.1) .



Joonis 1.1. Sümmeetrilise tuletise geomeetriline tähendus.

Lause 1.2. *Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall ja olgu $x \in D$ selle intervalli sisepunkt. Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x, siis on ta punktis x ka sümmeetriliselt diferentseeruv ning*

$$f^s(x) = f'(x).$$

Tõestus. Kuna x on intervalli $D \subset \mathbb{R}$ sisepunkt, siis on tingimus (1) täidetud. Eelduse kohaselt leidub punktis x lõplik tuletis, seega

$$\begin{aligned} f^s(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2} f'(x) = f'(x). \end{aligned}$$

□

Isegi kui funktsioon on pidev ja tal leidub sümmeetriline tuletis, siis sellega ei ole garanteeritud tavalise tuletise olemasolu. Toome järgneva näite.

Näide 1.3. Lihtne on veenduda, et funktsioon

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x|,$$

ei ole punktis $x = 0$ diferentseeruv:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1, \\ \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1, \end{aligned}$$

seega kohal $x = 0$ tuletist ei eksisteeri. Kuid

$$f^s(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0.$$

Allolev näide demonstreerib, et analoogiliselt sümmeetrilise pidevusega ei eelda sümmeetriline diferentseeruvus antud punktis, et funktsioon on selles punktis määratud.

Näide 1.4. Olgu

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x^2}.$$

Kuna funktsioon f on kõikides punktides $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diferentseeruv, siis lause 1.2 põhjal on ta neis punktides ka sümmeetriliselt diferentseeruv ja tema sümmeetriliseks tuletiseks on tavaline tuletis. Osutub, et sümmeetriline tuletis eksisteerib ka punktis $x = 0$, nimelt

$$f^s(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{(-h)^2}}{2h} = 0.$$

Näitest 1.4 on selge, et sümmeetriline diferentseeruvus ei garanteeri funktsiooni pidevust. Küll aga kehtib järgmine väide.

Lause 1.3. *Punktis x sümmeetriliselt diferentseeruv funktsioon f on selles punktis sümmeetriliselt pidev.*

Tõestus. Kuna $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 0$, siis

$$\lim_{h\to 0} \big(f(x+h) - f(x-h)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \lim_{h\to 0} 2h = 0.$$

□

Tõestame järgnevalt kaks väidet, mis on seotud sümmeetrilise diferentseeruvusega punktis $x = 0$.

Lause 1.4. *(a) Kui paarisfunktsioon f on määratud hulgas $(-c, 0) \cup (0, c)$ mingi $c > 0$ korral, siis on ta punktis $x = 0$ sümmeetriliselt diferentseeruv ja $f^s(0) = 0$.*

(b) Kui funktsioonil f on punktis $x = 0$ erinevad lõplikud ühepoolsed piirväärtused, siis f ei ole selles punktis sümmeetriliselt diferentseeruv.

Tõestus. (a) Paarisfunktsiooni $f\colon (-c, 0) \cup (0, c) \to \mathbb{R}$ korral

$$f^s(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = 0.$$

(b) Kuna $\lim_{h\to 0+} f(h) = \lim_{h\to 0-} f(-h)$, siis eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{h\to 0+} (f(h) - f(-h)) = \lim_{h\to 0+} f(h) - \lim_{h\to 0-} f(h) =: r$$

ja

$$\lim_{h\to 0-} (f(h) - f(-h)) = \lim_{h\to 0-} f(h) - \lim_{h\to 0+} f(h) = -r.$$

Seega,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \begin{cases} \infty, & \text{kui } r > 0, \\ -\infty, & \text{kui } r < 0, \end{cases}$$

niisiis ei ole funktsioon f kohal $x = 0$ sümmeetriliselt diferentseeruv. □

Lause 1.4 väidet (a) illustreerib näide 1.4, väidet (b) aga järgmine näide.

Näide 1.5. Olgu

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

siis

$$\lim_{h\to 0+} f(h) = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{h\to 0-} f(h) = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Seega $r = 2$ (vt lause 1.4 tõestus), mistõttu $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = \infty$ ning punktis $x = 0$ sümmeetrilist tuletist ei eksisteeri.

Käesoleva alapunkti lõpetame järgmise tähelepanuväärse näitega.

Näide 1.6. Vaatleme Dirichlet' funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

teisisõnu, f on alamhulga $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ karakteristlik funktsioon $\chi_{\mathbb{Q}}$. Teatavasti on f katkev igas punktis $x \in \mathbb{R}$. Näitame, et funktsioon f on sümmeetriliselt diferentseeruv igas punktis $x \in \mathbb{Q}$, kuid ei ole sümmeetriliselt diferentseeruv üheski punktis $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Olgu $x \in \mathbb{Q}$ ja $h \in \mathbb{R}$. Kuna

$$x - h = 2x - (x + h), \tag{2}$$

siis $x - h \in \mathbb{Q}$ parajasti siis, kui $x + h \in \mathbb{Q}$, mistõttu

$$f^s(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{2h} = 0.$$

Kui aga $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, siis ka $2x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ning seose (2) kohaselt $x - h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, kui $x + h \in \mathbb{Q}$. Tänu ratsionaalarvude hulga tihedusele korpuses $\mathbb{R}$ saame leida niisuguse ratsionaalarvude jada (r_k), et $r_k > x$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral ning $r_k \to x$. Tähistame $h_k := r_k - x$, siis $x + h_k = r_k \in \mathbb{Q}$ ning $x - h_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, kusjuures $h_k \to 0$. Kuna

$$\lim_k \frac{f(x+h_k) - f(x-h_k)}{2h_k} = \lim_k \frac{1}{2h_k} = \infty,$$

siis lõplikku piirväärtust $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ ei eksisteeri.

Sümmeetrilist diferentseeruvust kasutatakse eelkõige parema lähendi saamiseks erinevates olukordades: arvutites graafiku saamiseks, kiiruse komponentide täpsustamiseks orbiitide korrigeerimisel. Selgub, et sümmeetrilise diferentseeruvuse valem annab üldiselt funktsiooni tuletisele tavalisest diferentseeruvusest täpsema lähenduse.

Näide 1.7. Olgu

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3.$$

Leiame funktsiooni f tuletise ligikaudse väärtuse kohal $x = 2$, kui argumendi muut $h = 0.001$. Tavalise tuletise puhul on tulemuseks

$$\frac{2.001^3 - 2^3}{0.001} \approx 12.006001,$$

ent sümmeetrilise tuletise korral saame

$$\frac{2.001^3 - 1.999^3}{0.002} \approx 12.000001,$$

mis on lähemal funktsiooni tuletise tegelikule väärtusele $f'(2) = 12$.

Näide 1.8. Samamoodi võime vaadelda funktsiooni

$$f\colon \mathbb{R} \to [-1,1], \quad f(x) := \sin x,$$

kui $x = \frac{\pi}{2}$ ja $h = 0.01$. Siis

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.01\right) - \sin\frac{\pi}{2}}{0.01} \approx -1.52 \cdot 10^{-6}$$

ja

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.01\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0.01\right)}{0.02} \approx -7.37 \cdot 10^{-37}$$

ning $f'(\sin\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Kui esimese näite puhul erines tuletiste ligikaudne väärtus vähesel määral, siis selles näites on erinevus märkimisväärne.

Definitsioon. Öeldakse, et funktsioon f on *sümmeetriliselt pidev (sümmeetriliselt diferentseeruv)* vahemikus (a,b), kui ta on sümmeetriliselt pidev (sümmeetriliselt diferentseeruv) igas punktis $x \in (a,b)$.

Põhimõtteliselt ei ole võimalik rääkida funktsiooni ühepoolsest sümmeetrilisest pidevusest ega ka sümmeetrilisest diferentseeruvusest. Kuna eelseisvate väidete sõnastamiseks ja tõestamiseks uurime funktsioonide sümmeetrilise pidevuse või sümmeetrilise diferentseeruvusega seotud omadusi mingis lõigus, siis on mugavam lähtuda järgmistest definitsioonidest.

Definitsioon. Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetame *intervallis D sümmeetriliselt pidevaks*, kui funktsioon f on sümmeetriliselt pidev intervalli D igas sisepunktis ning ühepoolselt pidev intervalli kuuluvates otspunktides.

Definitsioon. Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetame *intervallis D sümmeetriliselt diferentseeruvaks*, kui funktsioon f on sümmeetriliselt diferentseeruv intervalli D igas sisepunktis ning intervalli kuuluvates otspunktides eksisteerivad lõplikud ühepoolsed tuletised.

Edaspidi tähistame $f'_+(a) =: f'(a)$ ja $f'_-(b) =: f'(b)$.

1.3 Sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide omadusi

Sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide korral on arvutusvalemid sarnased nendega, mida kasutatakse tavalise diferentseeruvuse korral.

Lause 1.5. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruvad, siis ka nende summa ja vahe*

$$f \pm g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (f \pm g)(t) := f(t) \pm g(t),$$

on punktis x sümmeetriliselt diferentseeruvad ning

$$(f \pm g)^s(x) = f^s(x) \pm g^s(x).$$

Tõestus. Punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide f ja g korral

$$\begin{aligned}(f \pm g)^s(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) \pm g(x+h)\big) - \big(f(x-h) \pm g(x-h)\big)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = f^s(x) \pm g^s(x).\end{aligned}$$

□

Lause 1.6. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruv, siis ka funktsioon*

$$\lambda f\colon D \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(t) := \lambda f(t),$$

on suvalise $\lambda \in \mathbb{R}$ korral punktis x sümmeetriliselt diferentseeruv ning

$$(\lambda f)^s(x) = \lambda f^s(x).$$

Tõestus. Kui funktioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruv ja $\lambda \in \mathbb{R}$, siis

$$(\lambda f)^s(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x-h)}{2h} = \lambda \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \lambda f^s(x).$$

□

Lause 1.7. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruvad, siis ka funktsioon*

$$\lambda f + \mu g\colon D \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f + \mu g)(t) := \lambda f(t) + \mu g(t),$$

on suvaliste $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ korral punktis x sümmeetriliselt diferentseeruv ning

$$(\lambda f + \mu g)^s(x) = \lambda f^s(x) + \mu g^s(x).$$

Tõestus. Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g : D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in \mathbb{R}$ sümmeetriliselt diferentseeruvad ning $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, siis, kasutades eelnevaid lauseid 1.5 ja 1.6, saame, et

$$(\lambda f + \mu g)^s(x) = (\lambda f)^s(x) + (\mu g)^s(x) = \lambda f^s(x) + \mu g^s(x).$$

□

Lausete 1.5–1.7 valemite korral piisas eeldusena funktsioonide diferentseeruvusest, ent korrutamise ja jagamise puhul, nagu järgmistest tõestustest selgub, on vajalik eeldada ka funktsioonide pidevust.

Lause 1.8. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in D$ pidevad ja sümmeetriliselt diferentseeruvad, siis ka nende korrutis*

$$fg\colon D \to \mathbb{R}, \quad (fg)(t) := f(t)g(t),$$

on punktis x sümmeetriliselt diferentseeruv ning

$$(fg)^s(x) = f^s(x)g(x) + f(x)g^s(x).$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in D$ pidevad ja sümmeetriliselt diferentseeruvad. Siis

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x-h)g(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x-h) - f(x-h)g(x-h) + f(x+h)g(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x-h)\big(-f(x-h)+f(x+h)\big)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\big(g(x+h)-g(x-h)\big)}{2h} \\
&= g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h},
\end{aligned}$$

kusjuures viimase võrduse saamiseks kasutame funktsioonide f ja g pidevust punktis x. Kokkuvõttes kehtib võrdus

$$(fg)^s(x) = f^s(x)g(x) + f(x)g^s(x).$$

□

Lause 1.9. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in D$ pidevad ja sümmeetriliselt diferentseeruvad ning $g(t) \neq 0$ iga $t \in D$ korral, siis ka funktsioon*

$$\frac{f}{g}\colon D \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(t) := \frac{f(t)}{g(t)},$$

on punktis x sümmeetriliselt diferentseeruv ning

$$\left(\frac{f}{g}\right)^s(x) = \frac{f^s(x)g(x) - f(x)g^s(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

Tõestus. Kuna funktsioon $g\colon D \to \mathbb{R}$ on punktis $x \in D$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv, siis ka funktsioon

$$\frac{1}{g}: D \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)(t) := \frac{1}{g(t)},$$

on pidev ning sümmeetriliselt diferentseeruv. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)^s(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x-h)}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x-h)-g(x+h)}{g(x+h)g(x-h)2h} \\
&= \frac{-1}{\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x-h)} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} = -\frac{g^s(x)}{\big(g(x)\big)^2}.
\end{aligned}$$

Kuna ka funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv, siis lause 1.8 kohaselt

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)^s(x) &= \left(f\frac{1}{g}\right)^s(x) = f^s(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)^s(x)\\ &= \frac{f^s(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g^s(x)}{\big(g(x)\big)^2} = \frac{f^s(x)g(x) - f(x)g^s(x)}{\big(g(x)\big)^2}.\end{aligned}$$

□

2 Sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide keskväärtusteoreem

Käesolevas peatükis vaadeldakse klassikalise Lagrange'i keskväärtusteoreemi analoogi sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide jaoks. Meenutame, et Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt teoreem 0.1) kohaselt leidub pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jaoks selline punkt $c \in (a, b)$, et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Järgnev näide kinnitab, et sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide puhul Lagrange'i keskväärtusteoreem üldjuhul ei kehti.

Näide 2.1. Vaatame pidevat funktsiooni

$$f : [-1, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x|$$

(vt näide 1.3). See funktsioon on sümmeetriliselt diferentseeruv iga $x \in [-1, 2]$ korral ja

$$f^s(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Paneme tähele, et

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3},$$

kuid arv $\frac{1}{3}$ ei kuulu sümmeetrilise tuletise f^s väärtuste hulka, seega ei saa võrdus $f^s(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{3}$ kehtida ühegi $c \in (-1, 2)$ korral.

2.1 Kvaasi-keskväärtusteoreem

Esimeses alapunktis tõestatakse nn kvaasi-keskväärtusteoreem 2.3 sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide jaoks. Saadud tulemus vastab küll klassikalisele Lagrange'i keskväärtusteoreemile, ent erineb sellest siiski. Lagrange'i teoreemiga kooskõlas olev väide 2.5 saadakse eeldusel, et vaadeldava funktsiooni sümmeetriline tuletis on Darboux' omadusega (Thomson [7]). Kõigepealt aga põhjendatakse kaks olulist väidet (Aull [1] ning Sahoo [5]), mis on vajalikud kvaasi-keskväärtusteoreemi tõestamiseks.

Lause 2.1. *Olgu funktsioon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *lõigus* $[a,b]$ *sümmeetriliselt pidev ja vahemikus* (a,b) *sümmeetriliselt diferentseeruv.*

(*a*) *Kui* $f(b) > f(a)$*, siis leidub punkt* $\xi \in (a,b)$ *nii, et* $f^s(\xi) \geqslant 0$.

(*b*) *Kui* $f(b) < f(a)$*, siis leidub punkt* $\eta \in (a,b)$ *nii, et* $f^s(\eta) \leqslant 0$.

Tõestus. Eeldame, et funktsioon f on lõigus $[a,b]$ sümmeetriliselt pidev ja vahemikus (a,b) sümmeetriliselt diferentseeruv.

(a) Kuna $f(b) > f(a)$, siis leidub selline reaalarv K, et $f(a) < K < f(b)$. Mittetühi hulk

$$X := \{x \in [a,b] \mid f(x) > K\}$$

on alt tõkestatud arvuga a. Vastavalt pidevuse aksioomile leidub hulgal X alumine raja $\inf X =: \xi$. Näitame, et $\xi \neq a$ ja $\xi \neq b$.

Oletame esiteks vastuväiteliselt, et $\xi = a$. Infiimumi definitsiooni kohaselt tähendab see, et

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in X : a \leqslant x_\delta < a + \delta.$$

Võtame $\delta := \frac{1}{k}$ ja valime $x_k \in X$ nii, et

$$a \leqslant x_k < a + \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Saame hulga X elementide jada (x_k), mis koondub arvuks a. Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis a saame, et $f(x_k) \to f(a)$. Kuna $f(x_k) > K \quad (k \in \mathbb{N})$, siis $f(a) = \lim_k f(x_k) \geqslant K$. Viimane on aga vastuolus eeldusega, et $f(a) < K < f(b)$. Niisiis, $\xi \neq a$.

Teiseks, kui oletada vastuväiteliselt, et $b = \xi = \inf X$, siis $b = \min X \in X$. Seega $f(x) \leqslant K$ iga $x \in [a,b)$ korral. Moodustame jada (x_k), kus $x_k \in [a,b)$ ja $x_k \to b$. Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis b saame, et $f(x_k) \to f(b)$. Kuna $f(x_k) \leqslant K$, siis $f(b) = \lim_k f(x_k) \leqslant K$, mis on jällegi vastuolus eeldusega $f(a) < K < f(b)$.

Niisiis, $\xi \in (a,b)$. Seega leidub selline $\delta > 0$, et $(\xi-\delta, \xi+\delta) \subset (a,b)$. Kuna ξ on hulga X suurim alumine tõke, siis

$$f(x) \leqslant K \text{ iga } x \in (\xi - \delta, \xi) \text{ korral.}$$

Olgu (h_k) selline jada, et $0 < h_k < \delta$ ja $h_k \to 0$. Suvalise $k \in \mathbb{N}$ korral ei ole $\xi + h_k$ hulga X alumine tõke, seega $f(\xi+h_k) > K$ $(k \in \mathbb{N})$. Järelikult $f(\xi+h_k) - f(\xi-h_k) > 0 \quad (k \in \mathbb{N})$, mistõttu

$$f^s(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi-h)}{2h} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\xi+h_k) - f(\xi-h_k)}{2h_k} \geqslant 0.$$

(b) Olgu $f(b) < f(a)$ ja tähistame $g(x) := -f(x) \quad (x \in (a,b))$, siis g on sümmeetriliselt pidev lõigus $[a,b]$ ning $g^s(x) = -f^s(x) \quad (x \in (a,b))$. Kuna $g(b) = -f(b) > -f(a) = g(a)$, siis väite (a) põhjal leidub punkt $\eta \in (a,b)$, et $g^s(\eta) \geqslant 0$. Teame, et $g^s(x) = -f^s(x)$, seega $f^s(\eta) \leqslant 0 \quad (\eta \in (a,b))$. □

Lause 2.2. *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ selline lõigus $[a,b]$ pidev ja vahemikus (a,b) sümmeetriliselt diferentseeruv funktsioon, et $f(a) = f(b)$. Siis leiduvad punktid ξ ja η vahemikust (a,b) nii, et*

$$f^s(\xi) \geqslant 0 \quad \textit{ja} \quad f^s(\eta) \leqslant 0.$$

Tõestus. Võime eeldada, et $f(a) = f(b) = 0$, vastupidisel juhul asendame funktsiooni f funktsiooniga $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kus $h(x) := f(x) - f(a)$.

Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev lõigus $[a,b]$ ja vahemikus (a,b) sümmeetriliselt diferentseeruv ning olgu $f(a) = f(b) = 0$. Kui $f(x) = 0$ iga $x \in [a,b]$ korral, siis teoreem kehtib, sest $f^s(x) = f'(x) = 0$ iga $x \in [a,b]$ korral. Seega eeldame, et f ei ole konstantne funktsioon. Siis leiduvad $x_1, x_2 \in (a,b)$ nii, et on täidetud üks järgnevast neljast tingimusest:

1) $f(x_1) > 0$ ja $f(x_2) < 0$,
2) $f(x_1) < 0$ ja $f(x_2) > 0$,
3) $f(x_1) > 0$ ja $f(x_2) > 0$,
4) $f(x_1) < 0$ ja $f(x_2) < 0$.

Tõestame väite juhul 1), ülejäänud juhtudel on tõestus analoogiline.

Eeldusel 1) kehtivad võrratused $f(x_2) < f(a) < f(x_1)$. Tänu teisele võrratusele saame lõigus $[a,x_1]$ lauset 2.1 rakendades leida sellise $\xi \in (a,x_1) \subset (a,b)$, et $f^s(\xi) \geqslant 0$. Kasutades samamoodi lauset 2.1 lõigus $[a,x_2]$, leiame sellise $\eta \in (a,x_2) \subset (a,b)$, et $f^s(\eta) \leqslant 0$. □

Viimane lause on Rolle'i teoreemi (vt teoreem 0.2) analoog sümmeetriliselt diferentseeruva funktsiooni jaoks. Selle abil tõestame teoreemi, mida edaspidi nimetatakse kvaasi-keskväärtusteoreemiks, sümmeetriliselt diferentseeruva funktsiooni jaoks.

Teoreem 2.3 (kvaasi-keskväärtusteoreem)**.** *Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv lõigus $[a,b]$. Siis leiduvad punktid ξ ja η vahemikus (a,b) nii, et*

$$f^s(\xi) \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant f^s(\eta).$$

Tõestus. Defineerime funktsiooni $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kus

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Siis $g(a) = g(b) = 0$, mistõttu saame rakendada funktsioonile g lauset 2.2 lõigus $[a, b]$. Tolle kohaselt leiduvad sellised punktid ξ ja η vahemikust (a, b), et

$$g^s(\xi) \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad g^s(\eta) \leqslant 0.$$

Kuna $g^s(x) = f^s(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, siis

$$f^s(\eta) = g^s(\eta) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant g^s(\xi) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^s(\xi).$$

□

Definitsioon. Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall. Öeldakse, et funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ on intervallis D *Darboux' omadus*, kui suvalise lõigu $[\xi, \eta] \subset D$ ja iga arvu y korral, mis on funktsiooni väärtuste $f(\xi)$ ja $f(\eta)$ vahel, leidub selline arv $x \in (\xi, \eta)$, et $y = f(x)$. Teisisõnu, funktsiooni f Darboux' omadus tähendab, et $f(D)$ on intervall.

Tuntud Bolzano–Cauchy teoreemi — seda teoreemi nimetatakse ka teoreemiks vahepealsetest väärtustest — kohaselt on igal pideval funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$ Darboux' omadus intervallis D. Allolevast näitest selgub, et pidevus ei ole selleks tarvilik tingimus.

Näide 2.2. Olgu

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ \alpha, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

kus $\alpha \in [-1, 1]$ on suvaliselt fikseeritud. Näitame, et funktsioonil $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Darboux' omadus, kuigi ta ei ole pidev. Kui valida lõik $[\xi, \eta]$ nii, et $0 \notin (\xi, \eta)$, siis tolles vahemikus on funktsioon pidev, seega Darboux' omadusega. Vaatleme vahemikku (ξ, η), kus $0 \in (\xi, \eta)$. Funktsioon f ei ole punktis 0 pidev, kuid ta saavutab selles vahemikus kõik väärtused lõigust [-1,1], järelikult on Darboux' omaduse tingimus ka sel juhul täidetud.

Antud omadus kannab Darboux' nime seetõttu, et tema tõestas esimesena järgneva, ka Darboux' teoreemiks nimetatava väite.

Teoreem 2.4. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on intervallis D diferentseeruv, siis tema tuletisel f' on intervallis D Darboux' omadus.*

Peatüki alguses toodud näite 2.1 põhjal ei saa seda väidet üle kanda sümmeetrilisele tuletisele.

Alapunkti viimase lause kohaselt kehtib vaadeldaval funktsioonil klassikaline Lagrange'i keskväärtusteoreem siis, kui tolle funktsiooni sümmeetrilisel tuletisel on Darboux' omadus.

Lause 2.5. *Olgu funktsioon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv lõigus* $[a,b]$. *Kui funktsiooni sümmeetrilisel tuletisel* f^s *on vahemikus* (a,b) *Darboux' omadus, siis leidub selline* $c \in (a,b)$, *et*

$$f^s(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tõestus. Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv lõigus $[a,b]$. Kvaasi-keskväärtusteoreemi 2.3 põhjal leiduvad sellised $\xi,\eta \in (a,b)$, et

$$f^s(\xi) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f^s(\eta).$$

Kuna eelduse kohaselt on funktsioonil f^s vahemikus (a,b) Darboux' omadus, siis leidub $c \in (a,b)$ omadusega

$$f^s(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

2.2 Kvaasi-keskväärtusteoreemi rakendusi

Esimeses peatükis selgus, et funktsiooni pidevus koos sümmeetrilise diferentseeruvusega ei garanteeri tavalist diferentseeruvust. Käesolevas alapunktis uurime, millistel lisatingimustel on sümmeetriliselt diferentseeruvad funktsioonid diferentseeruvad.

Lause 2.6. *Olgu funktsioon* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv punkti* a *mingis ümbruses* $(a-\delta, a+\delta)$. *Kui* f^s *on punktis* a *pidev, siis* f *on kohal* a *diferentseeruv ja*

$$f'(a) = f^s(a).$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv punkti a ümbruses $(a-\delta, a+\delta)$. Olgu $\varepsilon > 0$. Sümmeetrilise tuletise pidevuse tõttu leidub $\rho > 0$ nii, et kui $x \in (a-\rho, a+\rho)$, siis $|f^s(x) - f^s(a)| < \varepsilon$, st

$$f^s(a) - \varepsilon < f^s(x) < f^s(a) + \varepsilon.$$

Olgu arv h valitud nii, et $0 < |h| < \rho$, siis $a+h \in (a-\rho, a+\rho)$. Funktsioon f on pidev lõigus otspunktidega a ja $a+h$ ning sümmeetriliselt diferentseeruv vastavas vahemikus. Kvaasi-keskväärtusteoreemi 2.3 põhjal leiduvad punktid ξ ja η arvude a ja $a+h$ vahel nii, et

$$f^s(\xi) \geqslant \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant f^s(\eta).$$

Kuna $\eta, \xi \in (a-\rho, a+\rho)$, siis

$$f^s(a) - \varepsilon < f^s(\eta) \leqslant \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqslant f^s(\xi) < f^s(a) + \varepsilon.$$

Seega

$$\left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f^s(a) \right| < \varepsilon, \quad \text{kui } |h| < \rho,$$

ning funktsioonil f leidub tuletis

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f^s(a).$$

□

Seega on sümmeetriliselt diferentseeruva funktsiooni diferentseeruvuseks punktis a piisav, et funktsiooni sümmeetriline tuletis on pidev selles punktis ja funktsioon ise pidev punkti a mingis ümbruses.

Järeldus 2.7. *Olgu funktsioon $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv. Kui $f^s\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on pidev, siis f on vahemikus (a,b) diferentseeruv ja iga $x \in (a,b)$ korral*

$$f'(x) = f^s(x).$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv ning f^s on pidev. Siis iga $x \in (a,b)$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$. Seega lause 2.6 kohaselt $f'(x) = f^s(x)$ iga $x \in (a,b)$ korral. □

Alljärgnev lause toob välja sümmeetriliselt diferentseeruva funktsiooni seose matemaatilise analüüsi põhikursusest tuntud Lipschitzi tingimusega.

Lause 2.8. *Olgu funktsioon $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv. Kui funktsioon $f^s\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on tõkestatud vahemikus (a,b), siis f rahuldab selles vahemikus Lipschitzi tingimust, st leidub selline konstant $C > 0$, et*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2| \text{ suvaliste } x_1, x_2 \in (a,b) \text{ korral.}$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv. Olgu funktsioon f^s vahemikus (a,b) tõkestatud, st leidub selline $C > 0$, et

$$|f^s(x)| \leqslant C \quad (x \in (a,b)).$$

Olgu x_1 ja x_2 suvalised punktid vahemikus (a,b), konkreetsuse mõttes olgu $x_1 < x_2$. Siis rahuldab funktsioon f lõigus $[x_1, x_2]$ kvaasi-keskväärtusteoreemi 2.3 eeldusi, mille kohaselt leiduvad punktid ξ ja η vahemikus (x_1, x_2) nii, et

$$C \geqslant f^s(\xi) \geqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant f^s(\eta) \geqslant -C.$$

Seega

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|.$$

□

Järgmine näide kinnitab, et vastupidine väide ei kehti, st Lipschitzi tingimust rahuldav funktsioon ei pruugi olla sümmeetriliselt diferentseeruv.

Näide 2.3. Vaatleme funktsiooni $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse järgmiselt:
1) $f(x) = 0$ iga $x \in [-1,0]$ korral,
2) $f(x) = 0$, kui $x = \frac{1}{2^{2n}}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$,
3) $f(x) = \frac{1}{2^{2n}}$, kui $x = \frac{1}{2^{2n-1}}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$,
4) punktide $\left(\frac{1}{2^n}, f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ ja $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$ vahel on funktsiooni f graafik neid punkte ühendav sirglõik ($n \in \mathbb{N}$).

Nõnda defineeritud funktsioon on pidev, ent näitame, et punktis $x = 0$ sümmeetrilist tuletist ei eksisteeri. Selleks võtame kaks jada $(h_n^{(1)})$ ja $(h_n^{(2)})$, kus $h_n^{(1)} = \frac{1}{2^{2n-1}}$ ja $h_n^{(2)} = \frac{1}{2^{2n}}$, siis $h_n^{(1)} \to 0$ ja $h_n^{(2)} \to 0$ protsessis $n \to \infty$. Kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(h_n^{(1)}) - f(-h_n^{(1)})}{2h_n^{(1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right) - 0}{2\frac{1}{2^{2n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{2n}}}{2\frac{1}{2^{2n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}2} = \frac{1}{4},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(h_n^{(2)}) - f(-h_n^{(2)})}{2h_n^{(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) - 0}{2\frac{1}{2^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{2\frac{1}{2^{2n}}} = 0,$$

siis piirväärtust $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ ei eksisteeri, st funktsioon f ei ole punktis $x = 0$ sümmeetriliselt diferentseeruv.

Seejuures osutub, et funktsioon f rahuldab vahemikus $(-1,1)$ Lipschitzi tingimust. Paneme tähele, et kui $x_1 = \frac{1}{2^{2n-1}}$ ja $x_2 = \frac{1}{2^{2n}}$, siis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{2^{2n}} - 0\right| = \frac{1}{2^{2n}}, \quad |x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n}}\right| = \frac{1}{2^{2n}},$$

st

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|.$$

Kui $x_1 = \frac{1}{2^{2n}}$ ja $x_2 = \frac{1}{2^{2n+1}}$, siis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|0 - \frac{1}{2^{2n}}\right| = \frac{1}{2^{2n}}, \quad |x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}},$$

st

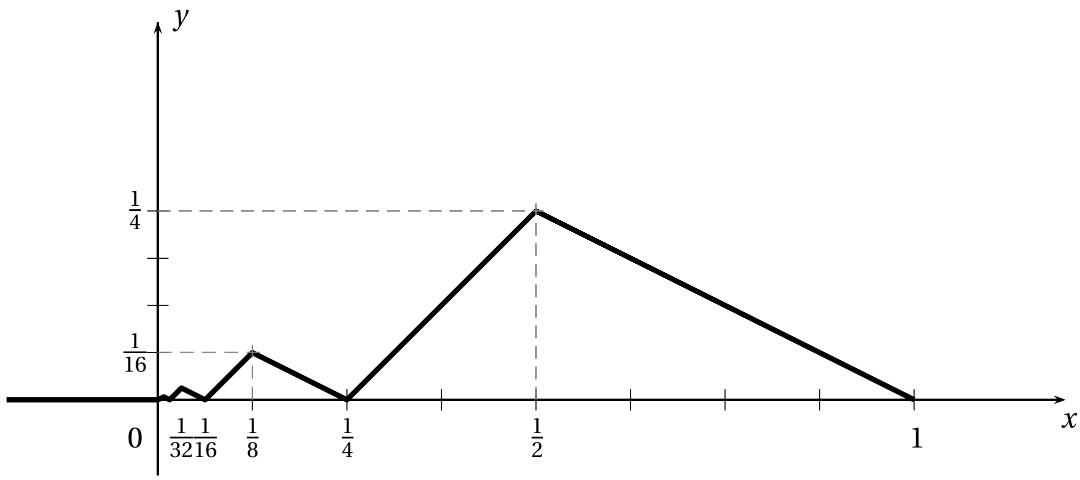
$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Pidades silmas funktsiooni f graafikut (vt joonis 2.1), on lihtne näha, et üldjuhul suvaliste $x_1, x_2 \in [-1,1]$ korral

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leqslant 1,$$

st

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |x_1-x_2|.$$



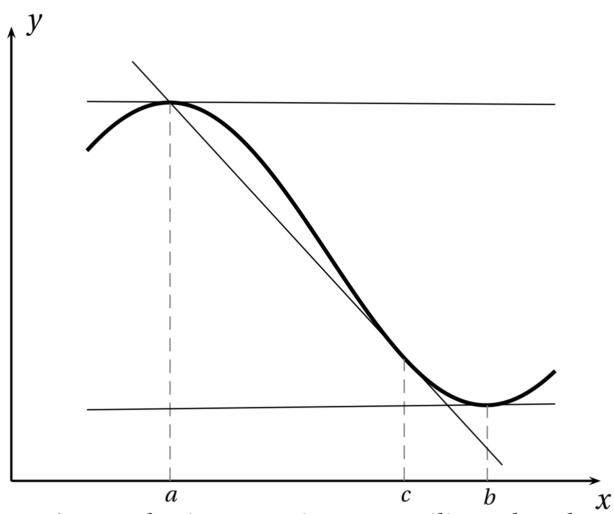
Joonis 2.1. Funktsiooni f graafik.

3 Kvaasi-keskväärtusteoreemi mõnesuguseid versioone

Klassikalise Lagrange'i keskväärtusteoreemi kõrval eksisteerib mitmeid selle vähemtuntud versioone. Tuntuim on neist järgmine Fletti teoreem (vt [3] ning Trahan, [4]).

Teoreem 3.1. *Olgu* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *diferentseeruv funktsioon omadusega* $f'(a) = f'(b)$. *Siis leidub selline* $c \in (a,b)$, *et*

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \tag{3}$$



Joonis 3.1. Fletti teoreemi geomeetriline tähendus.

Teoreemi geomeetrilist sisu illustreerib joonis 3.1, mille kohaselt funktsiooni graafiku puutuja punktis $(c, f(c))$ läbib punkti $(a, f(a))$.

Trahan (Sahoo, [6]) tõestas, et Fletti teoreem jääb kehtima ka juhul, kui selle eeldus $f'(a) = f'(b)$ asendada üldisema tingimusega.

Teoreem 3.2. *Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ diferentseeruv funktsioon omadusega*

$$\left(f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\left(f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\geqslant 0.$$

Siis leidub selline $c\in(a,b]$, et

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Davitt, Powers, Riedel ja Sahoo ([2]) näitasid, et kui üldse loobuda tingimustest funktsiooni tuletise väärtuste kohta otspunktides, siis omandab seos (3) märksa keerulisema kuju.

Teoreem 3.3. *Iga diferentseeruva funktsiooni $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ puhul leidub selline $c\in(a,b)$, et*

$$f(c)-f(a)=(c-a)f'(c)-\frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

Toodud tulemustest lähtuvalt tõestatakse antud peatükis mõningaid sümmeetrilise diferentseeruvusega seotud kvaasi-keskväärtusteoreemi versioone.

3.1 Lihtsamad versioonid

Käesolevas alapunktis tõestatakse teoreemidega 3.1 ja 3.2 analoogsed teoreemid sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide jaoks. Nende aluseks on alljärgnev lause.

Lause 3.4. *Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis poollõigus $(a,b]$ on sümmeetriliselt diferentseeruv ning rahuldab tingimust*

$$(f(b)-f(a))f'(b)\leqslant 0.$$

Siis leiduvad sellised $\xi,\eta\in(a,b]$, et

$$f^s(\xi)\geqslant 0 \quad \text{ja} \quad f^s(\eta)\leqslant 0.$$

Tõestus. Olgu funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidev ja poollõigus $(a,b]$ sümmeetriliselt diferentseeruv ning kehtigu tingimus $(f(b)-f(a))f'(b)\leqslant 0$.

Vaatleme algul kahte lihtsamat erijuhtu. Esiteks, kui $f'(b)=0$, siis võtame $\xi:=b$ ja $\eta:=b$, seega $f^s(\xi)=0$ ja $f^s(\eta)=0$, mistõttu väide kehtib. Teiseks, kui $f(b)=f(a)$, siis kvaasi-keskväärtusteoreemi 2.3 põhjal leiduvad sellised $\xi,\eta\in(a,b)$, et

$$f^s(\eta)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\leqslant f^s(\xi).$$

Niisiis kehtib väide ka sel juhul.

Eeldame nüüd, et $\big(f(b)-f(a)\big)f'(b)<0$. Siis on kaks võimalust:
1) $f'(b)<0$ ja $f(b)>f(a)$,
2) $f'(b)>0$ ja $f(b)<f(a)$.
Vaatleme võimalust 1). Kui $f(b)>f(a)$, siis saame rakendada lauset 2.1 funktsioonile f lõigus $[a,b]$. Selle kohaselt leidub selline punkt $\xi\in(a,b)$, et

$$f^s(\xi)\geqslant 0.$$

Edasi paneme tähele, et kuna funktsioon f on pidev lõigus $[a,b]$ ja $f(b)>f(a)$, siis leidub punkt $x\in(a,b)$ nii, et $f(x)>f(b)>f(a)$. Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et $f(x)\leqslant f(b)$ iga $x\in(a,b)$ korral, siis $f(b)-f(x)\geqslant 0$ ja $f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant 0$, mis aga oleks vastuolus eeldusega. Rakendades funktsioonile f Bolzano–Cauchy teoreemi, leiame sellise $x_0\in(a,x)$, et $f(x_0)=f(b)$. Seega $f(x)>f(x_0)>f(a)$ ja teoreemi 2.2 põhjal leidub lõigus $[x_0,b]$ selline $\eta\in(a,b)$, et

$$f^s(\eta)\leqslant 0.$$

Võimaluse 2) korral tähistame $g(x):=-f(x)\quad(x\in[a,b])$, siis $g'(b)<0$ ja $g(b)<g(a)$. Punkti 1) põhjal leiduvad $\xi,\eta\in(a,b)$, et $g^s(\xi)\leqslant 0$ ja $g^s(\eta)\geqslant 0$, mis tähendab, et

$$f^s(\xi)\geqslant 0 \quad \text{ja} \quad f^s(\eta)\leqslant 0.$$

□

Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidev sümmeetriliselt diferentseeruv funktsioon. Järgnevate väidete tõestamisel rakendame abifunktsiooni $h\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$h(x):=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{kui } x\in(a,b],\\ f'(a), & \text{kui } x=a.\end{cases} \tag{4}$$

Selge, et funktsioon h on pidev poollõigus $(a,b]$, tänu seosele

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=h(a)$$

on funktsioon pidev ka punktis a. Seega on h pidev kogu lõigus $[a,b]$.
Lause 1.5 kohaselt

$$\begin{aligned}h^s(x)&=\frac{\big(f(x)-f(a)\big)^s(x-a)-\big(f(x)-f(a)\big)(x-a)^s}{(x-a)^2}\\&=\frac{f^s(x)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{1}{x-a},\end{aligned}$$

seega

$$h^s(x) = \frac{f^s(x)}{x-a} - \frac{h(x)}{x-a} \quad (x \in (a,b]). \tag{5}$$

Paneme tähele, et kui $x \in (a,b]$, siis tingimus $h^s(x) \geqslant 0$ on samaväärne tingimusega $f^s(x) \geqslant h(x)$, seega

$$h^s(x) \geqslant 0 \iff f^s(x)(x-a) \geqslant f(x) - f(a). \tag{6}$$

Analoogiliselt

$$h^s(x) \leqslant 0 \iff f^s(x)(x-a) \leqslant f(x) - f(a). \tag{7}$$

Teoreem 3.5. *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv funktsioon omadusega*

$$\left(f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\left(f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \geqslant 0. \tag{8}$$

Siis leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a,b]$ nii, et

$$f^s(\xi) \geqslant \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a} \quad \textit{ja} \quad f^s(\eta) \leqslant \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a}.$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv. Olgu funktsioon $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ määratud seosega (4). Kuna

$$\begin{aligned}
&\left(f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = f'(b) - h(b) = \frac{f'(b)-h(b)}{b-a}(b-a) = h'(b)(b-a),\\
&\left(f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = h(a) - h(b),
\end{aligned}$$

siis seose (8) järgi $(h(b) - h(a))h'(b) \leqslant 0$. Eelneva lause 3.4 põhjal leiduvad sellised $\xi, \eta \in (a,b]$, et

$$h^s(\xi) \geqslant 0 \geqslant h^s(\eta).$$

Seoste (6) ja (7) kohaselt

$$f^s(\xi)(\xi - a) \geqslant f(\xi) - f(a) \quad \text{ja} \quad f^s(\eta)(\eta - a) \leqslant f(\eta) - f(a).$$

□

Teoreem 3.6. *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev sümmeetriliselt diferentseeruv funktsioon omadusega $f'(a) = f'(b)$. Siis leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a,b)$, et*

$$f^s(\xi) \geqslant \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a} \quad \textit{ja} \quad f^s(\eta) \leqslant \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a}. \tag{9}$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv ning kehtib valem $f'(a) = f'(b)$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $f'(a) = f'(b) = 0$. Kui see ei kehti, siis defineerime funktsiooni

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := f(x) - xf'(a)$$

ning paneme tähele, et kuna $F^s(x) = f^s(x) - f'(a)$, siis $F^s(a) = f'(a) - f'(a) = 0$ ja $F^s(b) = f'(b) - f'(a) = 0$.
Näitame, et kui teoreemi väide kehtib F korral, siis ta kehtib ka f korral. Olgu $\xi, \eta \in (a,b)$ nii, et $F^s(\xi)(\xi - a) \geqslant F(\xi) - F(a)$ ja $F^s(\eta)(\eta - a) \leqslant F(\eta) - F(a)$, siis

$$\big(f^s(\xi) - f'(a)\big)(\xi - a) \geqslant f(\xi) - \xi f'(a) - f(a) + af'(a)$$

ehk

$$f^s(\xi)(\xi - a) - f'(a)(\xi - a) \geqslant f(\xi) - f(a) - f'(a)(\xi - a),$$

st

$$f^s(\xi)(\xi - a) \geqslant f(\xi) - f(a)$$

ja

$$f^s(\eta)(\eta - a) \leqslant f(\eta) - f(a).$$

Niisiis eeldame, et $f'(a) = f'(b) = 0$ ja määrame funktsiooni $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seosega (4), siis $h^s(x)$ on määratud seosega (5). Edasi vaatame kolme juhtu.

1. Kui $h(b) = 0$ (paneme tähele, et $h(a) = f'(a) = 0 = h'(b)$), siis teoreemi 2.2 põhjal leiduvad sellised $\xi, \eta \in (a,b)$, et

$$h^s(\xi) \geqslant 0 \text{ ja } h^s(\eta) \leqslant 0$$

ja seoste (6) ja (7) kohaselt kehtivad võrratused (9).

2. Kui $h(b) > 0$, siis

$$h'(b) = \frac{f'(b)}{b-a} - \frac{h(b)}{b-a} = -\frac{h(b)}{b-a} < 0.$$

Vastavalt tuletise definitsioonile leidub $\delta > 0$, et

$$\frac{h(x) - h(b)}{x - b} < 0 \quad (x \in (b - \delta, b)).$$

Võtame suvalise $x_1 \in (b - \delta, b)$, siis $h(x_1) > h(b)$, seega $0 = f'(a) = h(a) < h(b) < h(x_1)$. Kuna $h\colon [a, x_1] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, siis Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal leidub selline $x_0 \in (a, x_1)$, et $h(x_0) = h(b)$. Paneme tähele, et funktsioon h rahuldab lõigus $[x_0, b]$ teoreemi 2.2 eeldusi ja seega leiduvad $\xi, \eta \in (a,b)$, et

$$h^s(\xi) \geqslant 0 \text{ ja } h^s(\eta) \leqslant 0.$$

Võrratused (9) saadakse seostest (6) ja (7).

3. Kui $h(b) < 0$, siis moodustame funktsiooni $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nii, et $g(x) := -f(x)$. Tähistame

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}, & \text{kui } x \in (a,b], \\ g'(a), & \text{kui } x = a \end{cases}$$

ja näeme, et $h_1 = -h$, seega $h_1(b) > 0$. Juhu 2. põhjal leiduvad sellised $\xi, \eta \in (a,b)$, et $g^s(\xi)(\xi - a) \leqslant g(\xi) - g(a)$ ja $g^s(\eta)(\eta - a) \geqslant g(\eta) - g(a)$, seega

$$f^s(\xi)(\xi - a) \geqslant f(\xi) - f(a) \quad \text{ja} \quad f^s(\eta)(\eta - a) \leqslant f(\eta) - f(a).$$

□

3.2 Keerulisemad versioonid

Kui eelmises alapunktis lähtusime Fletti ja Trahani keskväärtusteoreemidest, siis selles alapunktis on kvaasi-keskväärtusteoreemi versioonidel loobutud lõigu otspunktidega seotud kitsendustest, lähtepunktiks on Davitti jt [2] teoreem 3.3.

Teoreem 3.7. *Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv lõigus $[a,b]$, siis leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a,b)$, et*

$$(\xi - a) f^s(\xi) \geqslant f(\xi) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(\xi - a)^2$$

ja

$$(\eta - a) f^s(\eta) \leqslant f(\eta) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(\eta - a)^2.$$

Tõestus. Eeldame, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv funktsioon lõigus $[a,b]$. Olgu funktsioon $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ defineeritud seosega

$$g(x) := f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(x-a)^2.$$

Siis on g sümmeetriliselt diferentseeruv vahemikus (a,b) ja

$$g^s(x) = f^s(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(x-a).$$

Näeme, et

$$g'(b) = f'(b) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(b-a) = f'(b) - f'(b) + f'(a) = f'(a) = g'(a).$$

Rakendame teoreemi 3.6, mille põhjal leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a, b]$, et

$$(\xi - a) g^s(\xi) \geqslant g(\xi) - g(a) \quad \text{ja} \quad (\eta - a) g^s(\eta) \leqslant g(\eta) - g(a),$$

sellest tulenevalt

$$(\xi - a)\left(f^s(\xi) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)\right) \geqslant f(\xi) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2 - f(a)$$

ehk

$$(\xi - a) f^s(\xi) \geqslant f(\xi) - f(a) + \left(\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}\right)(\xi - a)^2,$$

niisiis

$$(\xi - a) f^s(\xi) \geqslant f(\xi) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2.$$

Samamoodi saame ka teise võrratuse

$$(\eta - a) f^s(\eta) \leqslant f(\eta) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\eta - a)^2.$$

□

Saadud tulemus vastab küll peatüki alguses toodud teoreemile 3.3, ent on sellest veidi erinev. Teoreemiga kooskõlas oleva väite saamiseks peame eeldama ka sümmeetrilise tuletise pidevust.

Teoreem 3.8. *Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv ning olgu f^s pidev lõigus $[a, b]$. Siis leidub selline $c \in (a, b)$, et*

$$f(c) - f(a) = (c - a) f^s(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(c - a)^2.$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv ning olgu ka f^s lõigus $[a, b]$ pidev. Teoreemi 3.7 kohaselt leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a, b)$, et

$$(\xi - a) f^s(\xi) \geqslant f(\xi) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2$$

ja

$$(\eta - a) f^s(\eta) \leqslant f(\eta) - f(a) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\eta - a)^2.$$

Need võrratused saab kirjutada kujul

$$\frac{f^s(\xi)}{\xi - a} - \frac{f(\xi) - f(a)}{(\xi - a)^2} \geqslant \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} \quad \text{ja} \quad \frac{f^s(\eta)}{\eta - a} - \frac{f(\eta) - f(a)}{(\eta - a)^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}, \tag{10}$$

Defineerime funktsiooni $\psi\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$\psi(x) := \frac{f^s(x)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}.$$

Seega, funktsioon ψ on pidev, sest funktsioonid f^s ja f on pidevad. Võrratuste (10) kohaselt

$$\psi(\xi) = \frac{f^s(\xi)}{\xi-a} - \frac{f(\xi)-f(a)}{(\xi-a)^2} \geqslant \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} \geqslant \frac{f^s(\eta)}{\eta-a} - \frac{f(\eta)-f(a)}{(\eta-a)^2} = \psi(\eta).$$

Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal leidub selline $c \in (a,b)$, et

$$\psi(c) = \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}.$$

Seega

$$\frac{f^s(c)}{c-a} - \frac{f(c)-f(a)}{(c-a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$

ehk

$$f^s(c)(c-a) - f(c) + f(a) = \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2,$$

st

$$f(c)-f(a) = (c-a)f^s(c) + \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

□

4 Cauchy tüüpi keskväärtusteoreemid sümmeetrilise diferentseeruvuse juhul

Käesolevas viimases peatükis vaadeldakse Cauchy tüüpi keskväärtusteoreeme sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide jaoks. Meenutame klassikalist Cauchy keskväärtusteoreemi (vt teoreem 0.3): pidevate funktsioonide $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ (kus $g'(x)\neq 0$ iga $x\in(a,b)$ korral) jaoks, mis on vahemikus (a,b) diferentseeruvad, leidub selline punkt $c\in(a,b)$, et $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Edaspidi lähtume alljärgnevast Wachnicki ([9]) tõestatud teoreemist.

Teoreem 4.1. *Olgu funktsioonid $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ diferentseeruvad. Kui $g'(x)\neq 0$ iga $x\in[a,b]$ korral, siis leidub punkt $c\in(a,b)$, et*

$$\frac{f(c)-f(a)}{g(c)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}-\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{g(c)-g(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Olgu $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidevad sümmeetriliselt diferentseeruvad funktsioonid. Järgnevate väidete tõestamisel kasutame abifunktsiooni $w:[a,b]\to\mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$w(x):=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}, & \text{kui } x\in(a,b],\\ \frac{f'(a)}{g'(a)}, & \text{kui } x=a.\end{cases} \tag{11}$$

Funktsioon w on pidev poollõigus $(a,b]$, ent seose

$$\lim_{x\to a} w(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

põhjal on ta pidev ka punktis a. Seega on funktsioon w pidev kogu lõigus $[a,b]$. Lause 1.9 järgi saame, et

$$\begin{aligned}w^s(x)&=\frac{\big(f(x)-f(a)\big)^s\big(g(x)-g(a)\big)-\big(f(x)-f(a)\big)\big((g(x)-g(a)^s)\big)}{\big(g(x)-g(a)\big)^2}\\&=\frac{f^s(x)}{g(x)-g(a)}-\frac{\big(f(x)-f(a)\big)g^s(x)}{\big(g(x)-g(a)\big)^2},\end{aligned}$$

seega

$$w^s(x) = \frac{f^s(x)}{g(x)-g(a)} - \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g^s(x)}{\big(g(x)-g(a)\big)^2} \quad (x \in (a,b)). \tag{12}$$

Paneme veel tähele, et kui $x \in (a,b]$, siis tingimus $w^s(x) \geqslant 0$ on samaväärne tingimusega $f^s(x) \geqslant w(x)g^s(x)$, seega

$$w^s(x) \geqslant 0 \iff f^s(x)\big(g(x)-g(a)\big) \geqslant \big(f(x)-f(a)\big)g^s(x). \tag{13}$$

Analoogiliselt

$$w^s(x) \leqslant 0 \iff f^s(x)\big(g(x)-g(a)\big) \leqslant \big(f(x)-f(a)\big)g^s(x). \tag{14}$$

Esmalt esitame kaks Reichi poolt tõestatud tulemust sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Teoreem 4.2. *Olgu funktsioonid* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *pidevad ja sümmeetriliselt diferentseeruvad lõigus* $[a,b]$ *ning olgu* $g'(a) \neq 0$. *Kui* $g(x) \neq g(a)$ *iga* $x \in (a,b]$ *korral ja*

$$\left(\frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)\Big(f'(b)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(b)\big(f(b)-f(a)\big)\Big) \geqslant 0, \tag{15}$$

siis leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a,b]$, *et*

$$\big(g(\xi)-g(a)\big)f^s(\xi) \geqslant \big(f(\xi)-f(a)\big)g^s(\xi)$$

ja

$$\big(g(\eta)-g(a)\big)f^s(\eta) \leqslant \big(f(\eta)-f(a)\big)g^s(\eta).$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioonid $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidevad ning sümmeetriliselt diferentseeruvad ja $g'(a) \neq 0$. Olgu $g(x) \neq g(a)$ iga $x \in (a,b]$ korral ja kehtigu võrratus (15). Defineerime funktsiooni $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seosega (11). Näeme, et

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = w(a) - w(b)$$

ja

$$f'(b)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(b)\big(f(b)-f(a)\big) = \frac{f'(b)}{g(b)-g(a)} - g'(b)\frac{f(b)-f(a)}{\big(g(b)-g(a)\big)^2} = w'(b),$$

seose (15) põhjal

$$\big(w(b)-w(a)\big)w'(b) \leqslant 0.$$

Rakendades teoreemi 3.4 funktsioonile w, leiame sellised $\xi, \eta \in (a,b]$, et

$$w^s(\xi) \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad w^s(\eta) \leqslant 0.$$

Seoste (13) ja (14) põhjal saame võrratused

$$\big(g(\xi) - g(a)\big) f^s(\xi) \geqslant \big(f(\xi) - f(a)\big) g^s(\xi)$$

ja

$$\big(g(\eta) - g(a)\big) f^s(\eta) \leqslant \big(f(\eta) - f(a)\big) g^s(\eta).$$

□

Antud teoreemi põhjal saab tuletada ka mitmeid kasulikke võrratusi (Trahan [8]).

Näide 4.1. Olgu $[a,b] \subset \mathbb{R}$ selline lõik, et funktsioonid

$$f\colon [a,b] \to [-1,1], \quad f(x) := \sin x$$

ja

$$g\colon [a,b] \to [-1,1], \quad g(x) := \cos x$$

rahuldavad tingimusi

$$\sin a \neq 0 \quad \text{ja} \quad \cos x \neq \cos a \quad (x \in (a,b]).$$

Osutub, et $b - a < \pi$. Tõepoolest, kui $b - a = \pi$, siis $b = a + \pi$, seega $a = k\pi$ mingi $k \in \mathbb{Z}$ korral ning $\sin a = 0$, mis oleks vastuolus eeldusega. Kui $x - a > 0$, siis see oleks vastuolus teise eeldusega, kus $\cos x \neq \cos a \quad (x \in (a,b])$.

Paneme tähele, et

$$\big(g(x) - g(a)\big) f^s(x) = \cos x(\cos x - \cos a)$$

ja

$$\big(f(x) - f(a)\big) g^s(x) = -\sin x(\sin x - \sin a).$$

Moodustame funktsiooni

$$\varphi := \big(g(x) - g(a)\big) f^s(x) - \big(f(x) - f(a)\big) g^s(x) = \cos x(\cos x - \cos a) + \sin x(\sin x - \sin a),$$

kusjuures

$$\varphi(x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 - (\cos x \cos a + \sin x \sin a) = 1 - \cos(x - a) \geqslant 0 \quad (x \in [a,b]).$$

Selgub, et $\varphi(x) = 0$ vaid juhul, kui $x = a$, ent eelduse $\cos x \neq \cos a \quad (x \in (a,b])$ tõttu ei ole see võimalik. Niisiis

$$\varphi(x) > 0 \quad (x \in (a,b]).$$

Seega teoreemi väide $\big(g(x)-g(a)\big)f^s(x) \leqslant \big(f(x)-f(a)\big)g^s(x)$ ei saa olla tõene. Järelikult kehtib võrrand

$$\left(-\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin b-\sin a}{\cos b-\cos a}\right)\big(\cos b(\cos b-\cos a)-\sin b(\sin b-\sin a)\big)<0.$$

Kuna

$$\big(\cos b(\cos b-\cos a)-\sin b(\sin b-\sin a)\big)=\varphi(b)>0,$$

siis

$$-\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin b-\sin a}{\cos b-\cos a}<0$$

ehk

$$\frac{\cos a(\cos b-\cos a)+\sin a(\sin b-\sin a)}{\sin a(\cos b-\cos a)}>0,$$

st

$$\frac{\cos(b-a)-1}{\sin a(\cos b-\cos a)}>0.$$

Viimases võrratuses teame, et $\cos(a-b)-1<0$, seega

$$\sin a(\cos b-\cos a)<0.$$

Kokkuvõtteks oleme saanud kaks võrratust:

$$\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\sin b-\sin a}{\cos b-\cos a}>0 \quad \text{ja} \quad \sin a(\cos b-\cos a)<0.$$

Teoreem 4.3. *Olgu funktsioonid $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ pidevad ja sümmeetriliselt diferentseeruvad lõigus $[a,b]$ ning olgu $g'(a)\neq 0$ ja $g'(b)>0$. Kui $g(x)\neq g(a)$ iga $x\in(a,b]$ korral ja*

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)},$$

siis leiduvad punktid $\xi,\eta\in(a,b)$, et

$$\big(g(\xi)-g(a)\big)f^s(\xi)\geqslant\big(f(\xi)-f(a)\big)g^s(\xi) \quad \text{ja} \quad \big(g(\eta)-g(a)\big)f^s(\eta)\leqslant\big(f(\eta)-f(a)\big)g^s(\eta). \tag{16}$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioonid $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on pidevad ning sümmeetriliselt diferentseeruvad. Olgu $g'(a)\neq 0$ ja $g'(b)>0$ ning kui $g(x)\neq g(a)$ iga $x\in(a,b]$ korral, siis kehtigu valem $\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)}$.
Defineerime funktsiooni $w\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ seosega (11), siis w^s on määratud seosega (12). Edasi vaatleme kolme juhtu.

1. Kui $w'(b) = 0$, siis

$$\frac{f'(b)}{g(b)-g(a)} - \frac{\big(f(b)-f(a)\big)g'(b)}{\big(g(b)-g(a)\big)^2} = 0,$$

st

$$w(b) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = w(a).$$

Seega saame funktsioonile w rakendada teoreemi 2.2, mille kohaselt leiduvad niisugused $\xi, \eta \in (a,b)$, et

$$w^s(\xi) \geqslant 0 \text{ ja } w^s(\eta) \leqslant 0.$$

Seosete (13) ja (14) põhjal saame võrratused (16).

2. Olgu $w'(b) > 0$, st $\lim_{x\to b} \frac{w(x)-w(b)}{x-b} > 0$. Leiame sellise $\delta > 0$, et kui $x \in (b-\delta, b)$, siis $\frac{w(x)-w(b)}{x-b} > 0$. Kuna

$$\frac{f'(b)}{g(b)-g(a)} - \frac{\big(f(b)-f(a)\big)g'(b)}{\big(g(b)-g(a)\big)^2} = w'(b) > 0,$$

siis

$$w(b) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} < \frac{f'(b)}{g'(b)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = w(a).$$

Valime suvalise $x_1 \in (b-\delta, b)$, siis $x_1 - b < 0$, mistõttu $w(x_1) < w(b) < w(a)$. Rakendades Bolzano–Cauchy teoreemi, leiame $x_0 \in (a, x_1)$ nii, et $w(x_0) = w(b)$, st $w(x_1) < w(x_0) < w(a)$. Teoreemi 2.2 kohaselt saame lõigus $[x_0, b]$ leida sellised $\xi, \eta \in (a,b)$, et

$$w^s(\xi) \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad w^s(\eta) \leqslant 0.$$

Võrratused (16) saame seoste (13) ja (14) põhjal.

3. Kui $w'(b) < 0$, siis tähistame $m'(x) := -w'(x) \quad (x \in [a,b])$, mistõttu $m'(b) > 0$. Juhu 2. põhjal leiduvad sellised $\xi, \eta \in (a,b)$, et $m^s(\eta) \geqslant 0$ ja $m^s(\xi) \leqslant 0$, st

$$w^s(\xi) \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad w^s(\eta) \leqslant 0.$$

Seoste (13) ja (14) abil saame võrratused (16). □

Loobume teoreemides 4.2 ja 4.3 eeldustest lõigu otspunktide kohta ning tõestame tulemuse, mida võib pidada teoreemi 4.1 analoogiks sümmeetriliselt diferentseeruvate funktsioonide korral.

Teoreem 4.4. *Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidevad ja sümmeetriliselt diferentseeruvad lõigus $[a,b]$ ning olgu $g'(a) \neq 0$ ja $g'(b) \neq 0$. Kui $g(x) \neq g(a)$ iga $x \in (a,b]$ korral, siis leiduvad punktid $\xi, \eta \in (a,b)$ nii, et*

$$\big(g(\xi)-g(a)\big)f^s(\xi) \geqslant \left(f(\xi)-f(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\left(\frac{\big(g(\xi)-g(a)\big)^2}{g(b)-g(a)}\right)\right) g^s(\xi)$$

ja

$$\big(g(\eta)-g(a)\big)f^s(\eta) \leqslant \left(f(\eta)-f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\left(\frac{\big(g(\eta)-g(a)\big)^2}{g(b)-g(a)}\right)\right)g^s(\eta).$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioonid $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ja $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on pidevad ning sümmeetriliselt diferentseeruvad lõigus $[a,b]$. Olgu $g'(a)\neq 0$ ja $g'(b)\neq 0$. Defineerime funktsiooni $\psi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ seosega

$$\psi(x) := f(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{\big(g(x)-g(a)\big)^2}{g(b)-g(a)}.$$

Siis on funktsioon ψ pidev ja sümmeetriliselt diferentseeruv lõigus $[a,b]$ ning

$$\psi^s(x) = f^s(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{g(x)-g(a)}{g(b)-g(a)}2g^s(x).$$

Et

$$\psi'(b) = f'(b)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)2g'(b) = \frac{f'(a)}{g'(a)}g'(b)$$

ja

$$\psi'(a) = f'(a)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)0 = f'(a),$$

siis $\frac{\psi'(b)}{\psi'(a)} = \frac{g'(b)}{g'(a)}$ ehk

$$\frac{\psi'(b)}{g'(b)} = \frac{\psi'(a)}{g'(a)}.$$

Teoreemi 4.3 põhjal leiduvad punktid $\xi,\eta\in(a,b)$, et

$$\big(g(\xi)-g(a)\big)\psi^s(\xi) \geqslant \big(\psi(\xi)-\psi(a)\big)g^s(\xi) \tag{17}$$

ja

$$\big(g(\eta)-g(a)\big)\psi^s(\eta) \leqslant \big(\psi(\eta)-\psi(a)\big)g^s(\eta). \tag{18}$$

Kuna

$$\psi(\xi)-\psi(a) = f(\xi)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{1}{g(b)-g(a)}\big(g(\xi)-g(a)\big)^2-f(a),$$

siis võrratuse (17) põhjal

$$\begin{aligned}\big(g(\xi)-g(a)\big)f^s(\xi)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{\big(g(\xi)-g(a)\big)^2}{g(b)-g(a)}2g^s(\xi) \geqslant\\ \geqslant f(\xi)g^s(\xi)-\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\frac{g^s(\xi)}{g(b)-g(a)}\big(g(\xi)-g(a)\big)^2-f(a),\end{aligned}$$

st

$$\big(g(\xi)-g(a)\big)f^s(\xi) \geqslant \left(f(\xi)-f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\left(\frac{\big(g(\xi)-g(a)\big)^2}{g(b)-g(a)}\right)\right)g^s(\xi).$$

Analoogiliselt saame ka võrratuse (18) abil, et

$$\big(g(\eta)-g(a)\big)f^s(\eta) \leqslant \left(f(\eta)-f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{f'(b)}{g'(b)}-\frac{f'(a)}{g'(a)}\right)\left(\frac{\big(g(\eta)-g(a)\big)^2}{g(b)-g(a)}\right)\right)g^s(\eta).$$

□

Symmetrical Differentiability and Related Mean Value Theorems

Summary

Kaia Malberg

Ordinary differentiable functions are known from base course of calculus. In this bachelor thesis they are presented in a generalized meaning. The function $f\colon D \to \mathbb{R}$, where $D \subset \mathbb{R}$, is said to be symmetrically differentiable at a point $x \in D$ if the limit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} := f^s(x)$$

exists. $f^s(x)$ is called the symmetric derivative of the function f. It is assumed that with some $\rho > 0$

$$(x-\rho, x) \cap D \neq \varnothing \quad \text{and} \quad (x, x+\rho) \cap D \neq \varnothing.$$

Denote that symmetrical differention is weaker condition than ordinary differention so, if $f(a)$ exists then $f^s(a) = f(a)$. It is also seen that symmetrically differentiable function may not be continuous.

In this paper mean value theorems of symmetrically differentiable functions are examined. They are derived from Lagrange's, Rolle's and Cauchy's mean value theorems.

This work consists of four chapters. In the first chapter there are necessary notions and results. Symmetrical continuity and differentiability are defined, connections with ordinary continuous and differentiation are found. It is proven that equations of symmetrically differentiable functions are similar to the equations of orinary differentiable functions.

In the second chapter the main result — the mean value theorem for symmetrically differentiable functions — is presented. In addition the necessary conditions for this quasi–mean value theorem to manifest as classical one are found. In the second part of the chapter some applications of the quasi–mean value theorem are shown, the conditions when symmetrically differentiable functions are differentiable in ordinary sense, investigated.

The third chapter introduces different versions of the quasi–mean value theorem. They are analogous to theorems for symmetrically differentiable functions of Flett, Trahan and others .

In the last, fourth, chapter there is an overview of Cauchy like mean value theorems for symmetrically differentiable functions. They are based on Wachnicks result, which is one of the versions of mean value theorem of Cauchy.

This bachelor thesis is referable, it is drawn on the next articles: C. E. Aull [1], R. M. Davitt, R. C. Powers, T. Riedel, P. K. Sahoo [2], T. M. Flett [3], S. Reich [4], P. K. Sahoo [5], P. K. Sahoo [6], D. H. Trahan [8], E. Wachnick [9].

Kirjandus

[1] C. E. Aull, *The first symmetric derivative*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 708–711.

[2] R. M. Davitt, R. C. Powers, T. Riedel, P. K. Sahoo, *Flett's mean value theorem for holomorphic functions*, Amer. Math. Monthly **72** (1999), 304–307.

[3] T. M. Flett, *A mean value theorem*, Math. Gazette **42** (1958), 38–39.

[4] S. Reich, *On mean value theorems*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 70–73.

[5] P. K. Sahoo, T. Riedel, *Mean value theorems and functional equations*, World Scientific, 1998.

[6] P. K. Sahoo, *Quasi-mean value theorems for symmetrically differentiable functions*, Tamsui Oxf. J. Inf. Math. Sci **27** (2011), 279–301.

[7] B. S. Thomson, J. B. Bruckner, A. M. Bruckner, *Elementary real analysis*, Prentice Hall (Pearson), 2011.

[8] D. H. Trahan, *A new type of mean value theorem*, Math. Mag **39** (1966), 264–268.

[9] E. Wachnick, *Une variante du theoreme de Cauchy de la valeur moyenne*, Demonstratio Math. **33** (2000), 737-740.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Kaia Malberg

(sünnikuupäev: 30.11.1985)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Sümmeetriline tuletis ja sellega seotud keskväärtusteoreemid,

mille juhendaja on prof Toivo Leiger,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 31.05.2013