

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Sven-Erik Bender
Kvaternioonmuutuja funktsioonide teooria

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Urve Kangro

TARTU 2026

KVATERNIOONMUUTUJA FUNKTSIOONIDE TEOORIA

Bakalaureusetöö

Sven-Eerik Bender

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös antakse üksikasjalik ülevaade (ühe muutuja) viiluregulaarsete funktsioonide teoriast. Konstrueeritakse kvaternioonide algebra ning luuakse viilupõhist lähenemist motiveeriv geomeetiline raamistik. Seejärel defineeritakse viiluregulaarsus kvaternioonide ruumis sisalduvate komplekstasandite peal, arendatakse vastav tuletise mõiste ning tõestatakse astmerea esituse teoreem. Seejärel tõestatakse muuhulgas Cauchy teoreemi, Cauchy integraalvalemi ja Liouville'i teoreemi analoogid.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Kvaternioonid, viiluregulaarsed funktsioonid, viilkonnad, kvaternioonanalüüs, Cauchy valem, astmereal, kompleksanalüüs.

FUNCTIONS OF A QUATERNIONIC VARIABLE

Bachelor thesis

Sven-Eerik Bender

Abstract

This thesis provides a self-contained introduction to (single variable) slice regular function theory over the quaternions. We begin by constructing the quaternion algebra and establishing the geometric framework of slices that motivates the theory. We then define slice regularity on complex planes within the quaternionic space, develop the corresponding notion of derivative, and prove a power series expansion theorem. Afterwards we prove analogues for the Cauchy theorem, Cauchy integral representation and Liouville theorem

among other results.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Quaternions, slice regular functions, slice domains, quaternionic analysis, Cauchy integral formula, power series, complex analysis.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Vajalikud eelteadmised	5
2 Kvaternioonide struktuur	8
2.1 Konstrueerimine	8
2.2 Algebralised omadused	11
2.3 Visualiseerimine	16
3 Kvaternioonmuutuja funktsioon	20
3.1 Diferentseeruvus	20
3.2 Astmereal	29
4 Integraal kvaternioonmuutuja funktsioonist	32
Kokkuvõte	41
Kasutatud allikad	42

Sissejuhatus

Õeldakse, et kompleksmuutuja funktsioonide teooria on üks matemaatika elegantsemaid harusid. Seega on loomulik küsida, kui kaugele ulatuvad selle ideed kõrgemates dimensioonides? Kõige vahetum kandidaat on kvaternioonide kaldkorpus $\mathbb{H}$, mille võttis kasutusele W. R. Hamilton 1843. aastal. Kvaternioonide korrutamise mittekommutatiivus tähendab aga seda, et kompleksmuutuja funktsioonide diferentseeruvuse naiivsest üldistamisest saame äärmiselt range teooria. Viljakam lähenemine, mida tuntakse viiluregulaarsuse nime all, töötati välja G. Gentili ja D. C. Struppa poolt 2000ndatel aastatel ning annab rikkaliku funktsiooniteooria, mis on tihedalt seotud klassikalise kompleksanalüüsiga.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda sissejuhatus viiluregulaarsete funktsioonide teooria alustesse. Autori teada puudub pädev eestikeelne käsitus sellest teoriast. Töö on mõeldud kompleksanalüüsi loomuliku jätkuna, ehitades üles teooria kvaternioonide peal võimalikult lähedaselt kompleksmuutuja funktsioonide teoriaga.

Töö koosneb neljast peatükist. Esimene peatükk annab ülevaate vajalikest teoreemidest kompleksmuutuja funktsioonide teoriast. Teises peatükis tutvustame kvaternioone, nende algebralist struktuuri ja kvaternioonide ruumi geomeetrilist pilti, mis motiveerib viilupõhist lähenemist. Kolmas peatükk arendab viiluregulaarsete funktsioonide teooriat: defineerime regulaarsuse ja tuletise ning tõestame tulemuse astmeridade kohta. Neljas peatükk sisaldab integraalteooriat, kulmineerudes Cauchy valemi, Cauchy võrratuse ja Liouville'i teoreemiga.

1 Vajalikud eelteadmised

Eeldame lugejalt baaskursuse tasemel teadmisi kompleksmuutuja funktsioonide teooriast ning tuletame siinkohal meelde mõned tulemused, millele hiljem viitame.

Kõikide järgnevate tulemuste tõestused on kättesaadaval allikast [5].

Kui $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on funktsioon piirkonnas Ω , millel leiduvad osatuletised, siis kasutame lühendatud tähistust

$$f_x := \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ja} \quad f_y := \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Teoreem 1 (Piisavad tingimused diferentseeruvuseks). *Olgu $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ defineeritud punkti $z = x + yi$ mingis ümbruses. Kui funktsioonid u ja v on diferentseeruvad punktis (x, y) ja*

$$u_x(x, y) - v_y(x, y) = 0, \quad u_y(x, y) + v_x(x, y) = 0,$$

siis funktsioon f on diferentseeruv punktis $z = x + yi$.

Teoreem 2 (Cauchy-Riemanni võrrandid). *Olgu $f(x+yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ defineeritud punkti $z = x + yi$ mingis ümbruses ja diferentseeruv punktis $z = x + yi$. Siis funktsioonidel u ja v leiduvad osatuletised punktis (x, y) ja*

$$u_x(x, y) - v_y(x, y) = 0, \quad u_y(x, y) + v_x(x, y) = 0.$$

Tuletame meelde, et funktsioon f on analüütiline punktis a , kui ta on punkti a mingis ümbruses arendatav astmeritta punktis a , kusjuures punktis a regulaarne funktsioon on analüütiline selles punktis.

Teoreem 3 (Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem). *Olgu f ja g analüütilised piirkonnas D ning võrdsed hulgal $E \subset D$, millel on vähemalt üks kuhjumispunkt piirkonnas D . Siis f ja g on võrdsed hulgas D .*

Teoreem 4 (Regulaarse funktsiooni analüütilisus). *Punktis a regulaarne funktsioon on selles punktis analüütiline, kusjuures tema Taylori rida punktis a koondub suurimas ringis $B(a, R)$, milles funktsioon on regulaarne.*

Teoreem 5 (Abeli I teoreem). *Kui astmerida $\sum_n c_n(z-a)^n$ koondub punktis z_0 , siis koondub ta absoluutselt igas punktis z , mille puhul $|z-a| < |z_0-a|$. Seejuures igas kinnises ringis $|z-a| \leq q|z_0-a|$ ($0 < q < 1$) koondub vaadeldav rida ühtlaselt.*

Teoreem 6 (Cauchy teoreem). *Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ regulaarne funktsioon ühe-
lisidusas piirkonnas D ning pidev kuni selle tükiti sileda rajani Γ . Siis*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Teoreem 7 (Morera teoreem). *Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ pidev piirkonnas D ning olgu $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ iga kinnise joone γ puhul selles piirkonnas. Siis f on regulaarne selles piirkonnas.*

Teoreem 8 (Cauchy valem). *Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

Teoreem 9 (Regulaarse funktsiooni lõpmatu diferentseeruvus). *Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis*

f on kuitahes palju kordi diferentseeruv piirkonnas *D* ning

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D.$$

2 Kvaternioonide struktuur

Kvaternioonide avastamine oli oluline areng kompleksarvude üldistamisel. Kvaternioonid, mida iiri matemaatik William Rowan Hamilton 1843. aastal esmakordselt kirjeldas, laiendavad kompleksarvude hulga neljamõõtmeliseks kaldkorpuseks üle reaalarvude. Hamiltoni avastuse ajalooline taust on eriti tähelepanuväärne: kvaternioonide korrutamist defineeriva põhivalemi $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ mõtles ta välja teel Iiri Kuningliku Akadeemia poole. Olles rahul oma saavutusega, kirjutas ta hiljem selle Broughami silla peale. [7] Järgmisel päeval saatis Hamilton oma sõbrale ja kolleegile J. T. Gravesile kirja, milles kirjeldas oma mõtteid, mis viisid tema avastuseni. Hamilton kirjutab: "Ja siis avaldus mulle tõde, et meil on vaja ruumi neljandant mõõdet, mingis tema mõttes, selleks et teha arvutusi kolmikutega /—/ Elektrialhel näis sulguvat ja säde sähvatas."¹

2.1 Konstrueerimine

See alapeatükk põhineb allikal [6].

Olgu V neljamõõtmeline vektorruum üle reaalarvude ortonormeeritud baasiga $\{e, i, j, k\}$. Kvaternioon on vektorruumi V element

$$q = q_0e + q_1i + q_2j + q_3k \in V,$$

kus q_0, q_1, q_2, q_3 on reaalarvud.

Olgu $p = p_0e + p_1i + p_2j + p_3k \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Liitmine ja korrutamine

¹"And here there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triples /—/ An electric circuit seemed to close, and a spark flashed forth." [4]

skalaariga on defineeritud komponenthaaval

$$p + q = (p_0 + q_0)e + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \in V,$$

$$\lambda q = (\lambda q_0)e + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)j + (\lambda q_3)k \in V.$$

Samuti on igal kvaternioonil $q \in V$ olemas vastand arv $-q$ komponentidega $-q_0, -q_1, -q_2, -q_3$.

Loomulikult viisil võime reaalarvudest ja kompleksarvudest mõelda kui kvaternioonidest, mistõttu edaspidi kirjutame $q = q_0e + q_1i + q_2j + q_3k$ asemel $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ ehk baasivektor e käitub ühikelemendina.

Kahe kvaterniooni korrutis peab rahuldama Hamiltoni reegleid

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = k = -ji,$$

$$jk = i = -kj,$$

$$ki = j = -ik,$$

mille abil saame defineerida korrutamise

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k)(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(q_1i + q_2j + q_3k) + q_0(p_1i + p_2j + p_3k) \\ &\quad + (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k. \end{aligned}$$

Kvaterniooni $q \in V$ reaali- või skalaarosaks nimetatakse suurust

$$\operatorname{Re} q := q_0 \in \mathbb{R}$$

ning imaginaar- või vektorosaks suurust

$$\operatorname{Im} q := q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

mida sageli samastame vektoriga ruumis $\mathbb{R}^3$. Kaaskvaternioon on defineeritud võrdusega

$$\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \in V,$$

mille abil saame loomulikul viisil defineerida normi

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Kvaterniooni $q \neq 0$ pöördkvaterniooniks nimetatakse kvaterniooni

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \in V,$$

mille korral on lihtne veenduda, et $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$.

Edaspidi kasutame kvaternioonide hulga tähisena üldtuntud tähist $\mathbb{H}$. Kvaternioone uurime tavaliselt neljamõõtmelise vektorruumi elementidena. Tihti on aga kasulikum eristada kvaterniooni skalaar- ja vektorosi. Niisiis saame iga kvaterniooni esitada kujul

$$q = a + v,$$

kus $a \in \mathbb{R}$ on skalaarosa ja $v \in \mathbb{R}^3$ on vektorosa. Tavaliselt kasutame sõna vektorosa just siis, kui soovime rõhutada, et vaatleme ruumi $\mathbb{R}^3$ vektorit (q_1, q_2, q_3) .

Kasutame eelnevat kuju, et anda alternatiivne valem kahe kvaterniooni korutamiseks. Olgu $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \mathbb{R}^3$ puhtima-

ginaarsed kvaternioonid. Kasutame kahe kvaterniooni korrutise valemit, et leida

$$\begin{aligned} uv &= -(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &\quad + (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k \\ &= -u \cdot v + (u \times v). \end{aligned}$$

Olgu nüüd $q_1 = a_1 + v_1$, $q_2 = a_2 + v_2 \in \mathbb{H}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Siis

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (a_1 + v_1)(a_2 + v_2) \\ &= a_1a_2 + a_1v_2 + v_1a_2 + v_1v_2 \\ &= (a_1a_2 - v_1 \cdot v_2) + (a_1v_2 + a_2v_1 + v_1 \times v_2). \end{aligned}$$

Oleme loonud piisava aparatuuri, et lähemalt uurida kvaternioonide algebralisi omadusi.

2.2 Algebralised omadused

See alapeatükk tugineb allikale [3]. Väited, mis selles teoses on tõestuseta, on esitatud siin koos autoripoolsete tõestustega ja lisakommentaaridega. Nendel tulemustel eraldi viiteid juures ei ole.

Tähistame tähega $\mathbb{S}$ kõigi puhtimaginaarsete ühikkvaternioonide ehk puhtimaginaarsete versorite hulga

$$\mathbb{S} := \{q = bi + cj + dk : b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1, \operatorname{Re} q = 0\}.$$

Edaspidi kutsume tihti eelneva hulga elemente kas ühikkvaternioonideks või imaginaarühikuteks, kui oleme kindlad, et segadust ei teki.

Lause 1. Suvaline kvaternioon $q \in \mathbb{H}$ esitub kujul $q = x + yI$, kus $x, y \in \mathbb{R}$ ja $I \in \mathbb{S}$.

Tõestus. Olgu $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}$. Defineerime $x = x_0 \in \mathbb{R}$ ja $y = |\operatorname{Im} q| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Kui $y = 0$, siis $q = x_0 \in \mathbb{R}$ ning saame kirjutada $q = x + 0 \cdot I$ suvalise $I \in \mathbb{S}$ korral.

Kui $y > 0$, siis olgu

$$I = \frac{\operatorname{Im} q}{y} = \frac{\operatorname{Im} q}{|\operatorname{Im} q|} = \frac{x_1i + x_2j + x_3k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \in \mathbb{H}.$$

Ilmselt on I ühikupikkune. Veel enam

$$I^2 = \frac{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = -1,$$

mistõttu $I \in \mathbb{S}$.

Olukord, kus $y < 0$ ei saa juhtuda, sest y on pikkus. Niisiis oleme leidnud vajaliku kuju suvalise kvaterniooni $q \in \mathbb{H}$ jaoks.

Eelnevast järeldub, et kui $y > 0$, siis on leitud kuju üheselt määratud. Tõepoolest, olgu $q = x + yI = x' + y'I'$, kus $x, x' \in \mathbb{R}$, $y, y' > 0$ ja $I, I' \in \mathbb{S}$. Reaalsosa on üheselt määratud, seega $x = x' = \operatorname{Re} q$. Järelikult $yI = y'I'$ ning normi võttes $y = y'$, millest omakorda järeldub $I = I'$, sest $y \neq 0$. $\square$

Iga $I \in \mathbb{S}$ korral defineerime tasandi

$$L_I := \{x + yI : x, y \in \mathbb{R}\},$$

mida nimetame viiluks.

Lause 2. *Kvaternioonid esituvad ühendina*

$$\mathbb{H} = \bigcup_{I \in \mathbb{S}} L_I.$$

Tõestus. Näitame sisalduvust mõlemat pidi.

($\subset$). Olgu $q = x + yI \in \mathbb{H}$ fikseeritud $I \in \mathbb{S}$ korral. Niisiis $q \in L_I \subset \bigcup_{I \in \mathbb{S}} L_I$.

($\supset$). Iga $I \in \mathbb{S}$ korral $L_I = \mathbb{R} + \mathbb{R}I \subset \mathbb{H}$, seega $\bigcup_{I \in \mathbb{S}} L_I \subset \mathbb{H}$. $\square$

Lause 3 ([2], lause 4.1.5). *Olgu $I, J \in \mathbb{S}$. Nende korrutise IJ saab arvutada valemiga*

$$IJ = -I \cdot J + I \times J.$$

Tõestus. Kuna I ja J on puhtimaginaarsed kvaternioonid, st reaalosad on neil nullid, järeldub see valem eespool tuletatud kahe kvaterniooni korrutisvalemist. $\square$

Kui $I, J \in \mathbb{S}$ on ortogonaalsed, siis $I \cdot J = 0$, seega eelnev valem lihtsustub kujule $IJ = I \times J$. Kuna I ja J on ortogonaalsed ühikkvaternioonid, siis $|I \times J| = |I||J|\sin(90^\circ) = 1$. Nende korrutis IJ on ilmselt ka puhtimaginaarne kvaternioon, mistõttu $IJ \in \mathbb{S}$. Kasutame seda fakti, et konstrueerida ortogonaalseid baase hulgas $\mathbb{S}$.

Lause 4 ([2], lause 4.1.6). *Olgu $I, J \in \mathbb{S}, I \perp J$ ja $K = IJ$. Siis*

1. $K = IJ = -JI$ on element hulgas $\mathbb{S}$,
2. K on ortogonaalne elementidega I ja J ,
3. $JK = I = -KJ$ ja $KI = J = -IK$.

Tõestus. Tõestame iga väite eraldi.

1. Kuna I ja J on ortogonaalsed ja $I \times J = -J \times I$, järeldub see otse lausest 3 ja eelmisest tähelepanekust.

2. Leiame

$$K \cdot I = IJ \cdot I = (I \times J) \cdot I = 0.$$

Seega on K ortogonaalne elemendiga I . Analoogiliselt on K ortogonaalne elemendiga J .

3. Lause 3 kahekordse rakendamise tulemusena leiame

$$\begin{aligned} JK &= J(IJ) = J(-I \cdot J + I \times J) \\ &= -J \cdot (-I \cdot J + I \times J) + J \times (-I \cdot J + I \times J) \\ &= -J \cdot (I \times J) + J \times (I \times J), \end{aligned}$$

kus viimane võrdus kehtib $I \perp J$ tõttu. Kuna $I \times J$ on ortogonaalne elemendiga J , siis $J \cdot (I \times J) = 0$. Kasutame nüüd tuntud kolme elemendiga vektorkorrutise valemit, et leida

$$JK = J \times (I \times J) = I(J \cdot J) - J(J \cdot I) = I \cdot 1 - J \cdot 0 = I.$$

Analoogiliselt saame $KI = J$. Võrdused $JK = -KJ$ ja $KI = -IK$ järelduvad sarnasest arutelist, mida tegime osas 1, kasutades fakte, et $J \perp K$ ja $I \perp K$.

□

Niisiis selgub, et I, J ja K moodustavad baasi hulga $\mathbb{S}$ ning suvalise $I \in \mathbb{S}$ korral saame sellise baasi alati konstrueerida, kuigi mitte üheselt.

Lause 5. Olgu $I, J \in \mathbb{S}$. Iga tasand L_I on isomorfne komplekstasandiga $\mathbb{C}$, kusjuures iga kahe suvalise elemendi $I \neq \pm J$ korral $L_I \cap L_J = \mathbb{R}$.

Tõestus. Defineerime kujutuse

$$\phi_I: \mathbb{C} \rightarrow L_I, \quad x + yi \mapsto x + yI.$$

See kujutus on ilmselt bijektiivne. Näitame, et see on isomorfism.

Olgu $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$. Siis

$$\phi_I(z_1 + z_2) = \phi_I((a + c) + (b + d)i) = (a + c) + (b + d)I$$

ja

$$\phi_I(z_1) + \phi_I(z_2) = (a + bI) + (c + dI) = (a + c) + (b + d)I.$$

Analoogiliselt

$$\phi_I(z_1 z_2) = \phi_I((ac - bd) + (ad + bc)i) = (ac - bd) + (ad + bc)I$$

ja

$$\begin{aligned} \phi_I(z_1)\phi_I(z_2) &= (a + bI)(c + dI) \\ &= ac + adI + bcI + bdI^2 \stackrel{I^2=-1}{=} (ac - bd) + (ad + bc)I. \end{aligned}$$

Seega $\phi_I(z_1 + z_2) = \phi_I(z_1) + \phi_I(z_2)$, $\phi_I(z_1 z_2) = \phi_I(z_1)\phi_I(z_2)$ ning ϕ_I on isomorfism.

Kui $x \in L_I \cap L_J$, $I \neq \pm J$, siis

$$x = a + bI = c + dJ.$$

See tähendab, et

$$a + bI - c - dJ = 0 \implies (a - c) + bI - dJ = 0.$$

Kuna $I \neq \pm J$, siis $\{1, I, J\}$ on lineaarselt sõltumatud, mistõttu $a - c = 0$, $b = 0$, $d = 0$. Niisiis $x = a \in \mathbb{R}$. $\square$

Märkus 1. Edaspidi kasutame eelmise lause esimest osa vaikumisi: kui me tegutseme kindlal (kompleks)tasandil L_I , siis tihti kirjutame kompleksarvude imaginaarühiku i asemel hoopis I , mis on fikseeritud hulgast $\mathbb{S}$.

Kuigi kvaternioonide algebralised omadused on hästi tuntud, on kvaternioonanalüüs palju keerulisem ja mitmetahulisem valdkond kui kompleksanalüüs. Peamine põhjus seisneb kvaternioonide mittekommutatatiivsuses, mis muudab diferentseeruvuse mõtestamise oluliselt keerukamaks. Sellest tulenevalt on tekkinud kaks peamist regulaarsuse tüüpi: Fueter-regulaarsus ja viiluregulaarsus. Siin töös käsitleme ainult viiluregulaarseid funktsioone ja sellest tekkinud teooriat. Seda valikut põhjendame järgmises peatükis.

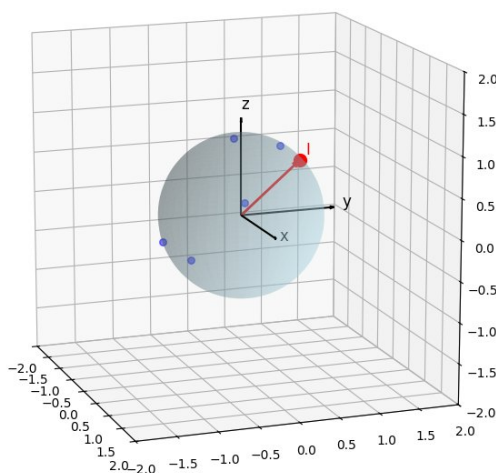
2.3 Visualiseerimine

Üks suur raskus kvaternioonide ja kvaternioonmuutuja funktsioonide analüüsimise juures seisneb nende kujutamises. Järgnevalt anname intuitiivse ja geomeetrilise seletuse sellele, kuidas kvaternioonide viilupõhisest kujutamisest võiks mõelda.

Nagu juba teame, saame kvaternioonide imaginaarosi kujutada ruumis $\mathbb{R}^3$, st kvaternioon koosneb ühemõõtmelisest reaalosast ja kolmemõõtmelisest imaginaarosast. Niisiis on hulk $\mathbb{S}$ ühikera ruumis $\mathbb{R}^3$. Iga element $I \in \mathbb{S}$ määrab mingisuguse suuna kolmemõõtmelises ruumis ning rahuldab tingimust

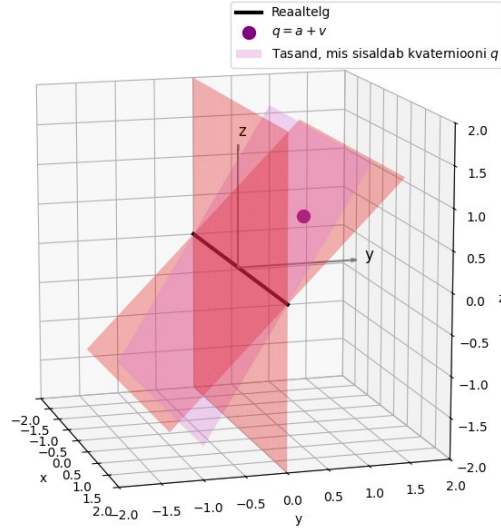
$I^2 = -1$ sarnaselt imaginaarühikuga i . Seetõttu sisaldab kvaternioonide ruum lõpmata palju ühikkvaternioone, mis on parametrizeeritud ühikkera $\mathbb{S}$ abil.

Eelnevalt nägime, et iga L_I on komplekstasandiga isomorfne. Geomeetriliselt on L_I tasand, mis on moodustatud reaaltelje ja kindla ühikkvaterniooni I suuna poolt. Suuna valik on illustreeritud joonisel 1.



Joonis 1: Ühikkera $\mathbb{S}$ ja suund I .

Joonis 2 toob välja mõned viilud. Kõik sellised viilud lõikuvad reaalteljel ning koos moodustavad piltlikult komplekstasandite lehvikku. Teame ka, et iga mittereaalne kvaternioon määrab üheselt tasandi L_I , milles ta sisaldub. Seda illustreerib samuti joonis 2: kujutatud kvaternioon q asub täpselt ühel tasandil; nimelt sellel tasandil, mis on määratud tema imaginaarosa suuna poolt. Ilmselt sisalduvad kvaternioonid $q = x \in \mathbb{R}$ igas sellises tasandis.



Joonis 2: Viilud L_I kvaternioonide ruumis.

Siinkohal tuleb märkida, et me ei ole suutelised visualiseerima tervet kvaternioonide ruumi; selle jaoks peaksime ette kujutama neljamõõtmelist ruumi. Igasugune pilt on ainult projektsioon: saame näha reaaltelge ning kolmemõõtmelist imaginaarruumi. Ära peab kaduma üks telgedest, sest me ei suuda mahutada veel ühte telge, mis oleks ortogonaalne ülejäänud kolmele, oma pilti. Seetõttu on joonis 2 tõetruu kujutus sellest, kuidas tasandid L_I sisalduvad ruumis $\mathbb{H}$, kuid ei ole täielik neljamõõtmeliste punktide sisestus kolme mõõtmesse. Ühe telje kadumise tõttu võivad mõned viilud L_I paikneda erinevalt neljas mõõtmes, mis meie joonise peal omavahel kattuvad.

Sarnane visualiseerimine on meile varem tuttav: kui soovime kera joonestada paberil, näeme selle kõrgust ja laiust, kuid sügavuse peame projekteerima. Kui kaks kera paiknevad kolmemõõtmelises ruumis erineval sügavusel, võivad nende projektsioonid tasapinnale osaliselt või täielikult kattuda, kuigi ruumis nad ei lõiku. Eelnevalt tehtud projektsioon surub kokku ühe mõõtme ning

kaotab informatsiooni objektide tegeliku ruumilise paigutuse kohta.

3 Kvaternioonmuutuja funktsioon

Selle peatüki mõlemad alapeatükid tuginevad peamiselt allikale [3].

3.1 Diferentseeruvus

Teame, et hulk on sidus, kui selle hulga iga kahte punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva pideva joonega. Hulk on ühelisidus, kui ta on sidus ja iga temas sisalduvat kinnist kõverat saab selles hulgas pidevalt deformeerida punktiks.

Definitsioon 1. Lahtist sidusat hulka $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ nimetatakse piirkonnaks.

Definitsioon 2. Olgu $D \subseteq \mathbb{H}$ hulk. Kui igale kvaternioonile $q \in D$ on seatud vastavusse mingi kindel kvaternioon w , siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud kvaternioonmuutuja funktsioon $w = f(q)$.

Hulka D nimetatakse funktsiooni f originaalide hulgaks ja hulka $f(D) = \{f(q) : q \in D\}$ funktsiooni f väärtuste hulgaks ehk kujutiseks. Kui D on piirkond, siis nimetame hulka D funktsiooni f määramispiirkonnaks.

Loomulik oleks defineerida kvaternioonmuutuja funktsiooni diferentseeruvus analoogiliselt kompleksmuutuja juhuga: ütleme, et piirkonnas Ω defineeritud funktsioon $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ on (vasakult) diferentseeruv punktis $q \in \Omega$, kui leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q+h) - f(q)),$$

kus $h \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Funktsioon f on Fueter-regulaarne punktis $q \in \mathbb{H}$, kui ta on diferentseeruv mingis punkti q ümbruses.

Näide 1. Olgu kvaternioonmuutuja funktsioon $f(q) = q^2$. Näitame, et f ei ole Fueter-regulaarne.

Arvutame

$$\begin{aligned}
 h^{-1}(f(q+h) - f(q)) &= h^{-1}((q+h)^2 - q^2) \\
 &= h^{-1}(q^2 + qh + hq + h^2 - q^2) \\
 &= h^{-1}(qh + hq + h^2) \\
 &= h^{-1}qh + h^{-1}hq + h^{-1}h^2 \\
 &= h^{-1}qh + q + h.
 \end{aligned}$$

Kui $h \rightarrow 0$, siis eelmise summa viimane liige kaob ning piirväärtuse leidumine taandub esimese liikme uurimisele.

Olgu punkt $q = i$. Läheneme punktile q kahest erinevast suunast.

Olgu $h = \varepsilon i$, kus $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Siis $h^{-1} = -\frac{i}{\varepsilon}$, mistõttu

$$h^{-1}qh = \left(-\frac{i}{\varepsilon}\right)(i)(\varepsilon i) = (-i)(i)(i) = i.$$

Seega $h^{-1}qh + q = i + i = 2i$.

Olgu $h = \varepsilon j$, kus $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Siis $h^{-1} = -\frac{j}{\varepsilon}$, mistõttu

$$h^{-1}qh = \left(-\frac{j}{\varepsilon}\right)(i)(\varepsilon j) = (-j)(i)(j) = -(ji)(j) = -(-k)(j) = kj = -i.$$

Seega $h^{-1}qh + q = -i + i = 0$.

Eelmises arutelus kasutasime fakti, et reaalarvud kommuteeruvad kvaternioonidega.

Kuna $2i \neq 0$, siis ei saa leiduda piirväärtust $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q+h) - f(q))$ punktis $q = i$.

Eelneva definitsiooniga kaasneb oluline piirang: on võimalik näidata, et ain-

sad regulaarsed funktsioonid on kujul $f(q) = aq + b$, kus $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{H}$ (vt näiteks [1]), mis praktikas piirab sellise teooria kasulikkust. Seetõttu anname definitsiooni nüüdseks põhjalikult uuritud viilude peal, mille abil tekib rikkalikum funktsiooniteooria.

Cauchy-Riemanni võrrandid on ühed olulisemad vahendid diferentseeruvuse uurimisel (vt teoreeme 1 ja 2). Olgu piirkonnas $\Omega \subset \mathbb{C}$ antud kompleksmuutuva mõttes regulaarne funktsioon $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ kujul $f = u + vi$. Leiame

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_i(f) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} (u_x + v_x i + i u_y + i v_y i) \\ &= \frac{1}{2} (u_x + v_x i + i u_y - v_y) \\ &= \frac{1}{2} (u_x - v_y) + \frac{1}{2} (v_x + u_y) i.\end{aligned}$$

Teame, et kompleksarv on võrdne nulliga parajasti siis, kui tema reaali- ja imaginaariosad on võrdsed nulliga. Seega $\bar{\partial}_i(f) = 0$ parajasti siis, kui kehtivad Cauchy-Riemanni võrrandid. Järgnev definitsioon üldistab seda tingimust loomulikult viisil kvaternioonidele.

Definitsioon 3. Olgu f kvaternioonmuutuva funktsioon, mis on defineeritud piirkonnas Ω . Iga $I \in \mathbb{S}$ korral olgu $\Omega_I := \Omega \cap L_I$ ja $f_I := f|_{\Omega_I}$ funktsiooni f ahend hulgale Ω_I . Funktsioon f_I on regulaarne, kui tal on pidevad osatuletised ning kui kehtib

$$\bar{\partial}_I f(q) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + yI) \equiv 0.$$

Õeldakse, et kvaternioonmuutuva funktsioon f on s -regulaarne (inglise keel-
sest mõistest *slice regular*) ehk viiluregulaarne, kui iga $I \in \mathbb{S}$ korral ahend f_I

on regulaarne eelmise definitsiooni mõttes.

Märkus 2. Edaspidi kasutame tihti eelnevalt sisse toodud tähist $\Omega_I = \Omega \cap L_I$, mis kirjeldab funktsiooni f originaalide hulga punkte tasandil L_I .

Kui oleme kindlad, et segadust ei teki, siis nimetame viiluregulaarset funktsiooni lihtsalt regulaarseks.

Märkus 3. Kuna $\bar{\partial}_I$ on lineaarne, siis viiluregulaarsete funktsioonide summa on viiluregulaarne.

Näide 2. Näitame, et $f(q) = q^2$ on regulaarne. Vaatleme suvalise $I \in \mathbb{S}$ korral tasandit L_I . Olgu $q \in \mathbb{H}$ kujul $q = x + yI$. Leiame

$$f_I(x + yI) = (x + yI)^2 = x^2 - y^2 + 2xyI,$$

mille korral

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_I f(x + yI) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - y^2 + 2xyI) \\ &= \frac{1}{2} ((2x + 2yI) + I(-2y + 2xI)) = \frac{1}{2} (2x + 2yI - 2yI - 2x) \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Näeme, et nõutav võrdus kehtib iga $I \in \mathbb{S}$ korral, mistõttu on f regulaarne funktsioon.

Lause 6. Polünoom $q \mapsto a_0 + qa_1 + \dots + q^n a_n$, kus $a_l \in \mathbb{H}$, $l = 0, \dots, n$, on regulaarne.

Tõestus. Konstantsed funktsioonid on regulaarsed, sest nende osatuletised on nullid.

Näitame, et $q \mapsto q^l$ on regulaarne iga $l \geq 1$ korral. Suvalise $I \in \mathbb{S}$ korral on ahend $f_I(z) = z^l$ regulaarne kompleksmuutuja funktsioon hulgas Ω_I ,

mistõttu $\bar{\partial}_I(q^l) = 0$.

Näitame nüüd, et $q \mapsto q^l a_l$ on regulaarne. Kuna $a_l \in \mathbb{H}$ on konstant, siis

$$\bar{\partial}_I(q^l a_l) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(q^l a_l)}{\partial x} + I \frac{\partial(q^l a_l)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q^l}{\partial x} a_l + I \frac{\partial q^l}{\partial y} a_l \right) = (\bar{\partial}_I q^l) \cdot a_l = 0.$$

Tulemus järeldub märkusest 3. □

Kui $f = u + vi$ on kompleksmuutuja mõttes regulaarne funktsioon, siis tema tuletise võime leida kujul $f' = u_x + v_x i$. Arvutame

$$\begin{aligned} \partial_i(f) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} ((u_x + v_x i) - i(u_y + v_y i)) \\ &= \frac{1}{2} ((u_x + v_y) + (v_x - u_y)i) \\ &= \frac{1}{2} (2u_x + 2v_x i) \\ &= u_x + v_x i = f'(z), \end{aligned}$$

kus kolmanda võrduse saamiseks kasutasime Cauchy-Riemanni võrrandeid. Sarnaselt regulaarsusele kasutame eelnevat tingimust, et luua tuletis regulaarsete kvaternionmuutuja funktsioonide jaoks.

Definitsioon 4. Olgu Ω piirkond. Olgu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ regulaarne funktsioon. Funktsiooni f I -tuletis punktis q on defineeritud võrdusega

$$\partial_I f(x + yI) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + yI).$$

Definitsioon 5. Olgu Ω piirkond. Olgu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ regulaarne funktsioon. Funktsiooni f tuletis on kvaternionmuutuja funktsioon $f': \Omega \rightarrow \mathbb{H}$, mis on defineeritud võrdusega

$$f'(q) := \partial_I f(x + yI) \quad \text{iga } I \in \mathbb{S} \text{ korral.}$$

Märkus 4. Kuna $f'(q)$ on defineeritud iga $I \in \mathbb{S}$ korral, tekib küsimus, kas erinevad $I \in \mathbb{S}$ valikud annavad meile sama väärtuse, st kas tuletis on korrektselt defineeritud. Eriti problemaatiline võib olla reaaltelg, mille peal kõik viilud lõikuvad.

Kvaternioon $q = x + yI$, $y \neq 0$, on lause 1 põhjal üheselt määratud, mistõttu $f'(q)$ ei sõltu I valikust: $f'(q) = \partial_I f(x + yI)$ valib välja parajasti ühe ainsa I väärtuse ja teistsugust ühikkvaterniooni I , mis annaks erineva väärtuse sama q korral, ei saa leiduda.

Reaalse $q = x \in \mathbb{R}$ korral võime valida suvalise $I \in \mathbb{S}$. Kasutades regulaarsuse tingimust $\bar{\partial}_I f(x) = 0$, saame

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = -I \frac{\partial f}{\partial y}(x),$$

millest omakorda

$$\partial_I f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x) - I \frac{\partial f}{\partial y}(x) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

Seega on $f'(x)$ võrdne funktsiooni f hariliku tuletisega punktis x ega sõltu valitud ühikkvaternioonist I .

Kui Ω ei sisalda reaalarve, siis on korrektsus ilmne, sest iga mittereaalne kvaternioon asub parajasti ühel viilul.

Selgub, et saame kvaternioonmuutuja funktsioonide paremaks uurimiseks neid lahutada osadeks, mis on määratud tasanditel L_I .

Lemma 1 ([3], lemma 1.3). *Olgu f regulaarne funktsioon piirkonnas Ω . Siis iga $I, J \in \mathbb{S}$, $I \perp J$, korral leiduvad regulaarsed (kompleksmuutuja)*

funktsioonid $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$ selliselt, et iga $z = x + yI$ korral

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J.$$

Tõestus. Lause 4 tõttu saame leida $K \in \mathbb{S}$, mille korral I, J, K on ortogonaalne baas ja $K = IJ \in \mathbb{S}$. Kirjutame $f_I(x + yI) = f(x + yI)$, kus

$$f = f_0 + f_1I + f_2J + f_3K,$$

ja f_0, f_1, f_2, f_3 on reaalkäätustega funktsioonid.

Kuna f on regulaarne, siis

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + yI) = 0.$$

Seega saame kuju

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} + I \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + J \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + K \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = 0.$$

Kuna $\{1, I, J, K\}$ on lineaarselt sõltumatud, siis saame süsteemid

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$$

ja

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0.$$

Teoreemi 1 põhjal on $f_0 + f_1I$ ja $f_2 + f_3I$ regulaarsed hulgas Ω_I . Olgu funkt-

sioonid $F := f_0 + f_1 I$ ja $G := f_2 + f_3 I$. Siis

$$\begin{aligned} f_I(x + yI) &= f_0 + f_1 I + f_2 J + f_3 K = f_0 + f_1 I + f_2 J + f_3 IJ \\ &= f_0 + f_1 I + (f_2 + f_3 I)J = F(x + yI) + G(x + yI)J. \end{aligned}$$

Kuna $z = x + yI$, siis $f_I(z) = F(z) + G(z)J$. □

Märkus 5. Urime avaldist

$$\bar{\partial}_I \partial_I f - \partial_I \bar{\partial}_I f = \frac{1}{2} I \left(\frac{\partial^2 f_I}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f_I}{\partial x \partial y} \right).$$

Eelnev avaldis on võrdne nulliga parajasti siis, kui osatuletised kommuteeruvad. Kui funktsioonil f_I on pidevad teist järku osatuletised (mille jaoks piisab, et f_I on regulaarne kompleksmuutuja funktsioon), siis nad kommuteeruvad.

Kuna meil on olemas lahutus $f_I = F + GJ$, kus F, G on regulaarsed kompleksmuutuja funktsioonid hulgas Ω_I , siis

$$\bar{\partial}_I(f'(x + yI)) = \bar{\partial}_I(\partial_I f(x + yI)) = \partial_I(\bar{\partial}_I f(x + yI)) = 0,$$

mistõttu f' on regulaarne.

Näide 3. Olgu $I \in \mathbb{S}$ ja $f: \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ defineeritud võrdusega

$$f(q) = \begin{cases} 0, & \text{kui } q \in \mathbb{H} \setminus L_I, \\ 1, & \text{kui } q \in L_I \setminus \mathbb{R}. \end{cases}$$

Iga viilu L_K , $K \neq \pm I$, korral on f konstantselt 0 ja $L_I \setminus \mathbb{R}$ peal konstantselt 1. Seega on f ilmselt regulaarne funktsioon.

Eelmisest näitest on näha, et kui piirkond Ω pole hoolikalt valitud, siis ei

pruugi regulaarne funktsioon $f: \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ isegi pidev olla. Selle vältimiseks peame uurima piirkondi, millel on lisatingimused.

Definitsioon 6. Viilkond on piirkond $Q \subseteq \mathbb{H}$, mille korral $Q \cap \mathbb{R}$ on mittetühi ja iga $I \in \mathbb{S}$ korral on $Q \cap L_I$ piirkond tasandil L_I .

Definitsioon 7. Hulk $T \subseteq \mathbb{H}$ on sümmeetriline, kui iga $q = x + yI \in T$, $x, y \in \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{S}$, korral sisaldab see hulk ka kera

$$x + y\mathbb{S} = \{x + yJ: J \in \mathbb{S}\}.$$

Viilkondade jaoks saame tõestada regulaarsete funktsioonide ainsuse teoreemi.

Teoreem 10 ([3], teoreem 1.12). *Olgu f, g regulaarsed funktsioonid viilkonnas Ω . Kui $I \in \mathbb{S}$ korral funktsioonid f ja g on võrdsed mingil hulga Ω_I alamhulgal, millel on kuhjumispunkt hulgas Ω_I , siis $f = g$ hulgas Ω .*

Tõestus. Ahendid f_I ja g_I on kompleksmuutuja mõttes regulaarsed funktsioonid, sest f ja g on regulaarsed. Teoreemi 3 põhjal f_I ja g_I on võrdsed piirkonnas Ω_I . Hulk $\Omega_I = \Omega \cap L_I$ sisaldab kõiki reaalarve, mis kuuluvad hulka Ω , sest $\mathbb{R}$ sisaldub igas viilus L_I . Kuna me just nägime, et $f_I = g_I$ hulgas Ω_I , siis kindlasti on nad võrdsed ka alamhulgal $\Omega \cap \mathbb{R} \subset \Omega_I$, kus $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, sest Ω on viilkond. Seega $f(x) = g(x)$ iga reaalarvu $x \in \Omega$ korral.

Me alustasime alamhulgaga $E \subset \Omega_I$, millel on kuhjumispunkt hulgas Ω_I . Alamhulk E ei pruugi sisaldada reaalarve. Kompleksmuutuja mõttes regulaarsete funktsioonide ainsuse teoreemi abil saame võrduse tervel viilul Ω_I , mis sisaldab endas reaalarve, sest Ω on viilkond. Selle tõttu saame kasulikuma võrduse reaalarvudel.

Olgu ühikkvaternioon $K \in \mathbb{S}$ ja tasand Ω_K . Esimese osa põhjal teame, et $f = g$ alamhulgas $\Omega \cap \mathbb{R} \subset \Omega_K$. Kuna $\Omega \cap \mathbb{R}$ on mittetühi ja lahtine ruumis $\mathbb{R}$, siis leidub tal kuhjumispunkte hulgas Ω_K . Funktsioonid f_K, g_K on regulaarsed piirkonnas Ω_K ja on võrdsed hulgal $\Omega \cap \mathbb{R} \subset \Omega_K$, mistõttu teoreemi 3 põhjal saame võrduse $f_K = g_K$ hulgas Ω_K . Kuna see kehtib iga $K \in \mathbb{S}$ korral, siis $f = g$ hulgas

$$\Omega = \bigcup_{K \in \mathbb{S}} \Omega_K.$$

□

Viilkonnad ja sümmeetrilised hulgad on kaasaegse teooria keskmes; paljud tugevamad tulemused, nagu üldine Cauchy valem, Cauchy valem tuletiste jaoks ja paljud teised, vajavad just neid eeldusi. Käesolevas töös me nende omadustega väga põhjalikult ei tegele, kuna keskendume peamiselt tekkinud teooria alustele, kuid mainime neid täielikkuse huvides seal, kus need loomulikult esinevad.

3.2 Astmerekord

Kompleksmuutuja funktsioonide teooria üks uurimisobjektidest on astmerida. Astmeridu saame uurida ka regulaarsete kvaternioonmuutuja funktsioonide puhul. Selles alapeatükis tutvustame astmeridu ja uurime nende koonduvust. Muuhulgas tõestame Abeli teoreemi, mis viib meid tulemuseni viiluregulaarsete funktsioonide ritta arendamiseks.

Iga $R \in (0, \infty]$ korral tähistame

$$B(0, R) = \{q \in \mathbb{H} : |q| < R\}.$$

Definitsioon 8. Olgu $D \subset \mathbb{H}$ hulk ja $f_n : D \rightarrow \mathbb{H}$ funktsioonide jada. Rida

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ koondub hulgas D absoluutselt, kui $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(q)| < \infty$ iga $q \in D$ korral.
Rida koondub hulgas D ühtlaselt, kui leidub $S: D \rightarrow \mathbb{H}$ selliselt, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ nii, et

$$|S_N(q) - S(q)| < \varepsilon \quad \forall N \geq N_0, \quad q \in D.$$

Teoreem 11 (Abeli I teoreem). Olgu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jada ruumis $\mathbb{H}$ ja

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^{1/n}}.$$

Kui $R > 0$, siis astmerida

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$$

koondub absoluutselt ja ühtlaselt iga kompaktse alamhulga $K \subset B(0, R)$ korral ning defineerib regulaarse funktsiooni antud keras.

Eelnev teoreem on tuntud reaalanalüüsis ja tõestatakse ka kompleksmuutuja funktsioonide teoorias. Kvaternioonmuutuja funktsioonide puhul on teoreemi tõestus analoogiline.

Kehtib ka vastupidine väide: kõiki keras $B(0, R)$ regulaarseid funktsioone saame esitada astmeridadena.

Teoreem 12 ([3], teoreem 1.9). Olgu $R > 0$ ja $f: B = B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ regulaarne funktsioon. Siis

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

iga $q \in B$ korral. Muuhulgas $f \in C^\infty(B)$.

Tõestus. Olgu $I \in \mathbb{S}$ suvaline. Valime $J \in \mathbb{S}$ selliselt, et $J \perp I$. Lemma 1

põhjal leiduvad regulaarsed funktsioonid $F, G: B_I \rightarrow L_I$ nii, et $f_I = F + GJ$.

Paneme tähele, et iga $z \in B_I$ korral

$$f'(z) = \partial_I f(z) = \partial_I F(z) + \partial_I G(z) \cdot J = \frac{\partial F}{\partial z}(z) + \frac{\partial G}{\partial z}(z)J$$

ja seega

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z)J.$$

Kuna F on regulaarne kompleksmuutuja funktsioon, siis teoreemide 4 ja 5 põhjal

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0)$$

koondub iga $z \in B_I$ korral punktiks $F(z)$ absoluutselt ja ühtlaselt selle hulga suvalise kompaktse alamhulga peal. Sama kehtib funktsiooni G puhul. Seega iga $z \in B_I$ korral

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z) + G(z)J = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(0)J \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Tõestasime väite suvalise $z \in B_I$ korral, kuid iga $q \in B = \bigcup_{I \in \mathbb{S}} B_I$ on mingis hulgas B_I , mistõttu oleme tõestanud väite iga $q \in B$ korral.

Lõpetuseks näitame, et $f \in C^\infty(B)$. Analüüsist teame, et astmerida võib igas tema koonduvusraadiuse punktis diferentseerida, mille tulemusena saadud astmerea koonduvusraadius on sama, mis esialgse rea oma. Kvaternioonmuutuja funktsioonide teoorias saame tõestada analoogilise väite, mille põhjal $f \in C^\infty(B)$. $\square$

4 Integraal kvaternioonmuutuja funktsioonist

Selle peatüki kõik tulemused ja nende tõestused on leitavad allikast [3].

Pädeva integraali definitsiooni andmine kvaternioonmuutuja funktsioonide puhul on raskem kui kompleksmuutuja juhul, sest meil puudub kommutatiivsus.

Olgu $\gamma_I: [0, 1] \rightarrow L_I$ sirgestuv joon. Olgu Γ_I mingi γ_I ümbrus tasandil L_I . Kirjutame joone punktid kujul $s = x + yI$, $x, y \in \mathbb{R}$, ja tähistame

$$ds = dx + Idy.$$

Olgu $f, g: \Gamma_I \rightarrow \mathbb{H}$ pidevad funktsioonid. Kui $J \in \mathbb{S}$ rahuldab tingimust $J \perp I$, siis $L_I + L_I J = \mathbb{H} = L_I + J L_I$ ning leiduvad pidevad funktsioonid $F, G, P, Q: \Gamma_I \rightarrow L_I$ selliselt, et $f = F + GJ$ ja $g = P + JQ$ tasandil Γ_I . Defineerime üldise (kahepoolse) integraali

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_I} g(s) ds f(s) &:= \int_{\gamma_I} P(s) ds F(s) + \int_{\gamma_I} P(s) ds G(s) J \\ &\quad + J \int_{\gamma_I} Q(s) ds F(s) + J \int_{\gamma_I} Q(s) ds G(s) J. \end{aligned}$$

Tasandil L_I on korrutamine kommutatiivne, mistõttu eelnevas definitsioonis võib diferentsiaali ds ja funktsioonide F, G, P, Q omavahelist järjekorda vabalt muuta – tegemist on tavalise kompleksmuutuja integraaliga. Korrutamisel ühikkvaterniooniga J see kommutatiivsus kaob, mistõttu integraali kui terviku väärtus sõltub sellest, kummal pool J esineb.

Edaspidi kasutame peamiselt parempoolseid integraale. Kui valime eelnevas

definitsioonis $g \equiv 1$, siis

$$\int_{\gamma_I} ds f(s) = \int_{\gamma_I} ds F(s) + \int_{\gamma_I} ds G(s) J.$$

Märgime, et eelneva integraali definitsioonis saame võrduse paremal poolel diferentsiaali ds ja funktsioonide F, G järjekorrad jällegi vahetada.

Põhjus, miks just parempoolne integraal osutub meie teooria jaoks loomulikuks, peitub regulaarsuse definitsioonis. Põhjendame seda.

Olgu D_I piirkond tasandil L_I , kus $\partial D_I = \gamma_I$. Vaatleme parempoolset integraali

$$\int_{\partial D_I} ds f = \int_{\partial D_I} ds f_I = \int_{\partial D_I} (dx + I dy) f_I = \int_{\partial D_I} f_I dx + I f_I dy.$$

Analüüsist teadaolev Greeni valem annab kuju

$$\iint_{D_I} \left(I \frac{\partial f_I}{\partial x} - \frac{\partial f_I}{\partial y} \right) dx dy.$$

Kui f on regulaarne, siis $\bar{\partial}_I f = 0$ tõttu $\frac{\partial f_I}{\partial x} = -I \frac{\partial f_I}{\partial y}$ ehk $I \frac{\partial f_I}{\partial x} = \frac{\partial f_I}{\partial y}$.

Eelmises integraalis on integreeritav võrdne nulliga, mis annab meile täpselt Cauchy teoreemi. Vasakpoolse integraali puhul vastav Greeni valemist saadav integraal ei võrdu nulliga ja seega ei anna meile üldjuhul Cauchy teoreemi.

Tõepoolest, kui uurime

$$\int_{\partial D_I} f ds = \int_{\partial D_I} f_I ds = \int_{\partial D_I} f_I (dx + I dy) = \int_{\partial D_I} f_I dx + f_I I dy,$$

siis Greeni valemist

$$\iint_{D_I} \left(\frac{\partial f_I}{\partial x} I - \frac{\partial f_I}{\partial y} \right) dx dy.$$

Üldjuhul aga I ja $\frac{\partial f_I}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x}J$ ei kommuteeru, kui $\frac{\partial G}{\partial x}$ ei võrdu nulliga (vastasel juhul öeldakse, et funktsioon f on viile säilitav, st funktsiooni f_I väärtused on kõik viilul L_I).

Kuigi me sisuliselt juba tõestasime Cauchy teoreemi, anname tõestuse, mis kasutab teoreemi 6.

Teoreem 13 (Cauchy teoreem, [3], lause 6.1). *Olgu Ω piirkond, $I \in \mathbb{S}$ selline, et Ω_I on ühelisidus piirkond ja γ_I kinnine sirgestuv joon selles piirkonnas. Olgu f regulaarne funktsioon piirkonnas Ω . Siis*

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0.$$

Tõestus. Olgu $J \in \mathbb{S}$ selline, et $J \perp I$. Lemma 1 põhjal saame leida regulaarsed funktsioonid $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$ selliselt, et $f_I = F + GJ$. Siis

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = \int_{\gamma_I} ds(F(s) + G(s)J) = \int_{\gamma_I} dsF(s) + \int_{\gamma_I} dsG(s)J.$$

Kuna γ_I on kinnine sirgestuv joon ühelisidusas piirkonnas Ω_I , siis saame leida piirkonna $D \subset \Omega_I$ selliselt, et piirkonna D raja on joon γ_I . Kuna F, G on regulaarsed piirkonnas $D \subset \Omega_I$, siis teoreemi 6 järgi

$$\int_{\gamma_I} dsF(s) = 0, \quad \int_{\gamma_I} dsG(s) = 0,$$

mistõttu

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0.$$

□

Teoreem 14 (Morera teoreem, [3], lause 6.2). *Olgu $\Omega \subset \mathbb{H}$ piirkond ja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{H}$. Kui iga $I \in \mathbb{S}$ korral funktsiooni f ahend (lahtisele) hulgale Ω_I*

on pidev ja

$$\int_{\gamma_I} ds f(s) = 0$$

iga kinnise sirgestuva joone $\gamma_I: [0, 1] \rightarrow \Omega_I$ korral, siis f on regulaarne piirkonnas Ω .

Tõestus. Olgu $I, J \in \mathbb{S}$ sellised, et $J \perp I$ ja $K = IJ \in \mathbb{S}$. Teame, et $\{1, I, J, K\}$ moodustab ortogonaalse baasi. Kuna lemma 1 rakendamiseks vajame regulaarsust, siis ei saa me seda otse kasutada, et f_I osadeks lahutada. Saame aga läbi teha selle lemma tõestusega sarnase arutelu, et funktsioonile f_I saada pidevate funktsioonidega lahutus. Niisiis kirjutame

$$f_I = f_0 + f_1 I + f_2 J + f_3 K,$$

kus f_0, f_1, f_2, f_3 on reaalkäätustega funktsioonid. Nad on ka pidevad, sest f_I on pidev.

Defineerime

$$F = f_0 + f_1 I, \quad G = f_2 + f_3 I.$$

Siis $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$ on pidevad ja $f_I = F + GJ$.

Olgu γ_I suvaline kinnine sirgestuv joon tasandil Ω_I . Siis

$$0 = \int_{\gamma_I} ds f(s) = \int_{\gamma_I} ds F(s) + \int_{\gamma_I} ds G(s)J.$$

Märkame, et

$$\int_{\gamma_I} ds F(s) \in L_I, \quad \int_{\gamma_I} ds G(s) \in L_I,$$

Kuna 1 ja J on lineaarselt sõltumatud üle L_I , siis järelduvad sellest võrdsed

$$\int_{\gamma_I} ds F(s) = 0, \quad \int_{\gamma_I} ds G(s) = 0.$$

Teoreemi 7 põhjal on F ja G regulaarsed piirkonnas Ω_I . Seega on ahend f_I suvalise $I \in \mathbb{S}$ korral regulaarne, mille tõttu on f regulaarne. $\square$

Oleme tuttavad kompleksmuutuja funktsioonide teoorias tõestatud Cauchy valemiga (teoreem 8). Järgnevalt tõestame Cauchy valemi konkreetse viilu korral ja seejärel sõnastame üldise tulemuse.

Lemma 2 ([3], lemma 6.3). *Olgu f regulaarne funktsioon sümmeetrilises viilkonnas Ω . Olgu $I \in \mathbb{S}$ ja U_I tõkestatud ühelisidus piirkond tasandil L_I , kusjuures $\overline{U_I} \subset \Omega_I$. Kui ∂U_I on sirgestuv joon, siis*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} f(s), \quad z \in U_I.$$

Tõestus. Olgu $J \in \mathbb{S}$ selline, et $J \perp I$. Lemma 1 põhjal saame leida regulaarsed funktsioonid $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$ selliselt, et $f_I = F + GJ$. Nüüd saame rakendada teoreemi 8 (kompleksmuutuja mõttes) regulaarsetel funktsioonidel F ja G , et saada võrdused

$$F(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} F(s), \quad z \in U_I.$$

$$G(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} G(s), \quad z \in U_I.$$

Teoreemi 8 eeldused on täidetud, sest piirkond U_I on tõkestatud, F, G on seal regulaarsed ning kuna U_I sisemus sisaldub piirkonnas Ω_I , siis ka pidevad kuni rajani ∂U_I . Et $f_I = F + GJ$, siis

$$f_I(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} (F(s) + G(s)J) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} f_I(s), \quad z \in U_I.$$

Kuna $f_I := f|_{\Omega_I}$ on funktsiooni f ahend hulga Ω_I , siis iga $z \in \Omega_I$ korral

$f_I(z) = f(z)$. Kuna hetkel $z \in U_I$ ja $s \in \partial U_I$, siis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} f(s), \quad z \in U_I.$$

□

Järgnev teoreem lubab rekonstrueerida funktsiooni f väärtused tervel lah-
tisel hulgal, millel f defineeritud on, kasutades tema väärtusi mõnel viilul.
Kuna rahuldava tõestuse andmine vajaks väga mahuka teooria ülesehitamist,
sõnastame selle ainult täielikkuse huvides.

Teoreem 15 (Cauchy valem, [3], teoreem 6.4). *Olgu f regulaarne funktsioon
sümmeetrilises viilkonnas Ω . Olgu $I \in \mathbb{S}$ ja U tõkestatud sümmeetriline lahti-
ne hulk, kus $\bar{U} \subset \Omega$. Kui ∂U_I on lõplik lõikumate sirgestuvate joonte ühend,
siis*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} (s-q)^{-*} ds f(s), \quad q \in U,$$

kus $(s-q)^{-} = (|s|^2 - q2\operatorname{Re}(s) + q^2)^{-1}(\bar{s} - q)$ on funktsiooni $q \mapsto s-q$
regulaarne pöördarvu funktsioon (slice-regular reciprocal).*

Eelmine teoreem tugineb funktsioonile $(s-q)^{-*}$, mida nimetatakse ka (kva-
ternioonmuutuja) Cauchy tuumaks. Fikseeritud $s \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ korral on $q \mapsto (s-q)^{-1}$ defineeritud kõikjal, välja arvatud punktis $q = s$, kuid see ei ole viiluregu-
laarne. Cauchy tuum on viiluregulaarne ja kui vaadelda tema ahendit viilule,
mis sisaldab punkti s , ühtib ta klassikalise Cauchy tuumaga $(s-q)^{-1}$. Kuna
tegeleme sümmeetrilises viilkonnas Ω , siis teoreemi 10 põhjal on kaks viilure-
gulaarset funktsiooni, mis ühtivad mingil viilul L_I , üheselt määratud terves
viilkonnas Ω . Seega on Cauchy tuum $(s-q)^{-*}$ üheselt määratud regulaarne
jätk konkreetse viilu peal defineeritud pöördarvu funktsioonile $(s-q)^{-1}$.

Cauchy valem on hea tööriist regulaarse funktsiooni f n -ndat järku tuletise arvutamiseks.

Lemma 3 ([3], lemma 6.6). *Lemma 2 eeldustel kehtib valem*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} f(s), \quad z \in U_I, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tõestus. Olgu $J \in \mathbb{S}$ selline, et $J \perp I$. Lemma 1 põhjal leiduvad regulaarsed funktsioonid $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$, mille korral $f_I = F + GJ$. Leiame n -ndat järku tuletise

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z)J.$$

Teoreemi 9 põhjal saame kujud

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) &= \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} F(s), \\ \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z) &= \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} G(s). \end{aligned}$$

Seega oleme saanud võrdused

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} F(s) + \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} G(s)J \\ &= \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} f(s). \end{aligned}$$

□

Teoreem 16 ([3], lause 6.7). *Teoreemi 15 eeldustel kehtib valem*

$$f^{(n)}(q) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} (s-q)^{*(-n-1)} ds f(s), \quad q \in U, \quad n \in \mathbb{N},$$

kus $(s-q)^{*(-n-1)} = (|s|^2 - q2\operatorname{Re}(s) + q^2)^{-n-1}(\bar{s} - q)^{(n+1)}$ on funktsiooni $q \mapsto (s-q)^{(n+1)}$ regulaarne pöördarvu funktsioon.

Sarnaselt Cauchy valemiga, on ka eelmises teoreemis vaja regulaarset funktsiooni $(s - q)^{(n+1)}$ pöördarvu funktsiooni jätku, mis oleks regulaarne. Tavaliselt, sarnaselt Cauchy tuumaga, ei ole $(s - q)^{-n-1}$ regulaarne funktsioon, mistõttu võtame appi $(s - q)^{*(n-1-)}$.

Lause 7 (Cauchy võrratus, [3], lause 6.8). *Olgu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ regulaarne funktsioon ja $p \in \Omega$. Kui $p \in L_I$, siis iga $B_I = B_I(p, R)$, kus $R > 0$ ja $\overline{B_I} \subset \Omega_I$, korral kehtib Cauchy võrratus*

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\partial B_I} |f|.$$

Tõestus. Parametriseerime $\gamma(t) = p + Re^{2\pi It}$. Lemma 3 põhjal kehtib

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\gamma} \frac{ds}{(s - p)^{n+1}} f(s), \quad p \in B_I, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hindame

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(s)|}{|s - p|^{n+1}} |ds|.$$

Kuna raja ∂B_I peal $|s - p| = R$ ja kuna $|f(s)| \leq \max_{\partial B_I} |f|$, siis

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{\partial B_I} |f|}{R^{n+1}} \int_{\gamma} |ds| = \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{\partial B_I} |f|}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n!}{R^n} \max_{\partial B_I} |f|.$$

□

Teoreem 17 (Liouville'i teoreem, [3], teoreem 6.9). *Kui funktsioon f on tõkestatud ja regulaarne tervel kvaternioonide hulgal, siis f on konstantne.*

Tõestus. Kuna f on tõkestatud, siis leidub $M > 0$ selliselt, et $|f(q)| \leq M$ iga $q \in \mathbb{H}$ korral. Rakendame lauset 7 juhul $n = 1$ ja kohal $p = 0$, kus $R > 0$

on suvaline. Sellisel juhul

$$|f'(0)| \leq \frac{1!}{R} \max_{\partial B_I} |f| \leq \frac{M}{R}.$$

Kui $R \rightarrow \infty$, siis $\frac{M}{R} \rightarrow 0$ ehk $|f'(0)| = 0$. Analoogiliselt iga $n > 0$ korral $f^{(n)}(0) = 0$.

Teoreemi 12 põhjal

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Kuna iga $n > 0$ korral $f^{(n)}(0) = 0$, siis $f(q) = f(0)$ iga $q \in \mathbb{H}$ korral. See aga tähendab, et f on konstantne. $\square$

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös arendati viiluregulaarsete kvaternioonmuutuja funktsioonide teooriat võimalikult lähedaselt kompleksmuutuja funktsioonide teooriaga. Alustasime kvaternioonide konstrueerimisega ja tõestasime nende põhilised algebralised omadused. Seejärel tutvustasime viilude olemust ja geomeetrilist pilti, mis tervele teooriale aluse annab. Nägime, et funktsiooni regulaarsuse ja tuletise saame defineerida Cauchy-Riemanni võrrandite abil, ja tõestasime, et viiluregulaarsed funktsioonid annavad meile astme-read. Tutvusime integraalteooriaga, tõestasime muuhulgas Cauchy, Morera ja Liouville'i teoreemid ning Cauchy võrratuse.

Kõiki sõnastatud tulemusi me selles töös ei tõestanud: üldine Cauchy valem ja üldine Cauchy tuletisvalem esitati vaid väidetena. Sellegipoolest oleme tuvustanud olulisi põhimõisteid ja kvaternioonidel üles ehitanud esialgse diferentsiaal- ja integraalteooria.

Väga suur osa klassikalisest kompleksmuutuja funktsioonide teooriast jäi aga puutumata. Tulevased tööd saavad uurida ühikkera teisendusi, Laurent'i ridu ja iseäraseid punkte, viiluregulaarsete funktsioonide nullkohtade omadusi, lõpmatuid korrutisi ja palju muud.

Kasutatud allikad

- [1] J. J. Buff. „Characterization of Analytic Functions of a Quaternion Variable“. *Pi Mu Epsilon* 5.8 (1973), lk. 387–392. URL: <https://www.pme-math.org/journal/issues/PMEJ.Vol.5.No.8.pdf> (vaadatud 09.05.2026).
- [2] F. Colombo, I. Sabadini ja D. C. Struppa. *Noncommutative Functional Calculus: Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions*. Springer Basel, 2011. DOI: [10.1007/978-3-0348-0110-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0110-2).
- [3] G. Gentili, C. Stoppato ja D. C. Struppa. *Regular Functions of a Quaternionic Variable*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-33871-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33871-7).
- [4] W.R. Hamilton. „On Quaternions; or on a New System of Imaginaries in Algebra“. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 25.169 (1844), lk. 489–495. DOI: [10.1080/14786444408645047](https://doi.org/10.1080/14786444408645047).
- [5] E. Jürimäe. *Kompleksmuutuja funktsioonide teooria lühikursus*. Valgus, 1983.
- [6] J. B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton University Press, 1999. ISBN: 0-691-10298-8.
- [7] A. Mishchenko ja Y. Solovyov. „Quaternions“. *Quantum* 11.1 (2000), lk. 4–7. URL: <https://static.nsta.org/pdfs/QuantumV11N1.pdf> (vaadatud 20.03.2026).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Sven-Eerik Bender,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Kvaternionmuutuja funktsioonide teooria", mille juhendaja on Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Sven-Eerik Bender

27.05.2026