M. Võgodski

GEOMEETRIA

VI JA VII KLASSILE

Eesti Riiklik Kirjastus
Tallinn

A-18361

M. VÕGODSKI

GEOMEETRIA

VI JA VII KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
7783

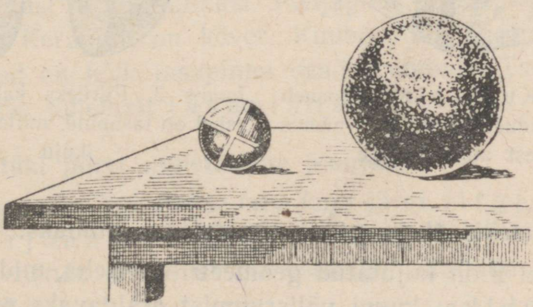
ARHIIVKOGU

Sissejuhatus.

§ 1. Põhimõisteid.

Geomeetriaks nimetatakse õpetust esemete kujust ja suurusest.

Geomeetria tekkis väga ammu. Ta arenes vajadusest määrata aitade ja anumate kuju ja mõõteid, et kindlaks teha



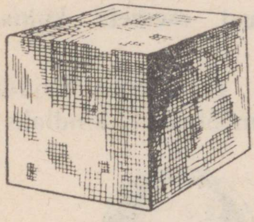
Joonis 1. Malmkuulil ja kummipallil on ühesugune kuju — kera kuju.

nende mahtu, samuti vajadusest määrata maatükkide kuju ja mõõteid, et kindlaks teha nende pindala. Siit tulenebki kreekakeelne nimetus «geomeetria», mis tõlkes tähendab «maamõõtmine». Käesoleval ajal pole võimalik ilma geomeetria tundmiseta läbi saada ühelgi tehnika alal.

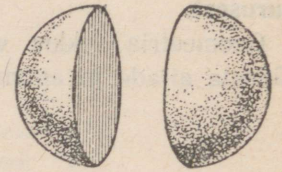
Peale kuju ja mõõdete on esemeil veel mitmeid muid tunnuseid, näiteks kaal, temperatuur jne. Kuid need jäetakse geomeetrias tähele panemata, s. t. me justkui võtame esemelt mõttes need tunnused ära.

Ese, millelt mõttes on ära võetud kõik tema tunnused peale kuju ja mõõdete, kannab geomeetrilise kujundi nimetust.

Näide 1. Joonisel 1 näeme palli ja kuuli. Need erinevad mitmes suhtes teineteisest: kuul on malmist ja pall on kummist; pall on kuulist palju kergem. Kuid geomeetriliste kehadena on nad ühesugused: nii pallil kui ka kuulil on ühesugune kuju, nimelt kera kuju. Mainides sõna «kera», kujutleme geomeetrilist keha.



Joonis 2. Kuubi pind koosneb kuuest ruudust. Joonisel näeme nendest ainult kolme.



Joonis 3. Piirdeks kahe poolkera vahel on tasapind, millel on ringi kuju.

Geomeetrilise keha piiret nimetatakse pinnaks.

Joonisel 2 on kujutatud geomeetriline keha, mida nimetatakse kuubiks; kuupi välisruumist eraldavaks piirdeks on kuus ruutu; need asetsevad ees, taga, ülal, all, vasakul ja paremal. Need kuus ruutu moodustavad pinna.

Geomeetrilise keha iga osa on ka geomeetriline keha; keha üht osa tema teistest osadest eraldav piire on samuti pind.

Näiteks kera (joonis 3) võib jaotada kaheks poolkeraks (kujutelge pooleks lõigatud õuna). Poolkera on geomeetriline keha. See moodustab kera osa. Võime kujutella, et lahti lõikamata kera koosneb ka kahest poolkerast (kujutelge kaht kokkukleebitud poolkera). Siis on piirdeks kahe poolkera vahel tasapind, millel on ringi kuju.

Pinnal ei ole paksust, vaid ainult pikkus ja laius.

N ä i d e 2. Veega täidetud klaasi on valatud kiht õli. Õli ujub tervenisti vee peal. Ühiseks piirdeks õli ja vee vahel on pind, mille piirjoonel on ringjoone kuju. On selge, et sellel pinnal ei ole paksust.

Kõigil meid ümbritsevail esemeil on paksus ja ükski neist ei saa olla pinnaks. Kuid see ei takista meid kujutlemast mõningaid esemeid kui pindasid. Nii näiteks kujutleme paberilehte või plekitahvlit kui pinda.

Kõik pinnad võib liigitada nende kuju järgi kahte liiki: esimesse liiki kuuluvad t a s a s e d, teise k õ v e r a d pinnad. Selgitame seda näidete varal.

Aknaklaasil on tasane pind. Vee pind anumas on tasane. Kahurimürsu pind on kõver. Pange pind koosneb kahest osast: põhjast ja külgpinnast. Põhjapind on tasane, külgpind on kõver. Kerapind on kõver. Kuubi pind koosneb kuuest osast; need on kõik tasapinna osad (ruudud). Tasast pinda nimetatakse lühemalt t a s a p i n n a k s.

Pinnatüki piiret nimetatakse jooneks.

Kõik jooned liigitatakse oma kuju järgi s i r g j o o n t e k s ja k õ v e r j o o n t e k s. Sirgjoont oskab kõverjoonest igaüks eraldada; nende erinevust on võimalik selgitada ainult näidete varal.

N ä i d e 3. Kaht kõrvuti asetsevat ruutu kuubi pinnal eraldab teineteisest sirgjoon.

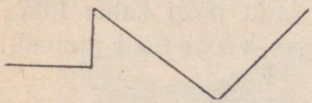
N ä i d e 4. Konservikarbi kaane pind piirneb külgpinnaga kõverjoont mööda, mida nimetatakse ringjooneks.

N ä i d e 5. Inimesest päikesepaistel maa pinnale langev vari piirneb maa valgustatud osaga kõverjoont mööda.

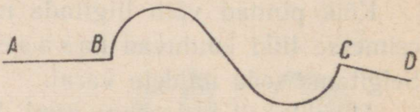
Joonel ei ole paksust ega laiust, vaid ainult pikkus.

Näiteks joonel, mis eraldab maa pinnal varju maa valgustatud osast, ei ole paksust ega laiust.

Ükski meid ümbritsevaist esemeist ei saa olla jooneks, sest pole olemas ilma laiuseta ja paksuseta esemeid. Kuid see ei takista meid kujutlemast mõningaid esemeid kui jooni. Nii näiteks kujutleme pingule tõmmatud peenikest traati või niiti sageli joonena. Tõmmates kriidiga üle tahvli, ütleme, et joonestasime mingisuguse joone. Sellel on muidugi nii paksus kui ka laius, kuid neid me ei arvesta. Nõndaviisi võtame mõttes kriidijäljelt tema paksuse ning laiuse ja just sellega muudame tema jooneks.



Joonis 4. Neljast lülist koosnev m u r d j o o n.



Joonis 5. Joone p i i r e t e k s on p u n k t i d *A* ja *D*; tema osade p i i r e t e k s on punktid *B* ja *C*.

Joont (samuti nagu pinda ja keha) võib jaotada osadeks. Kui joont saab jaotada sirgjoonelisteks osadeks, siis nimetatakse teda m u r d j o o n e k s* ning teda moodustavaid sirglõike tema k ü l g e d e k s ehk l ü l i d e k s. Joonisel 4 on kujutatud murdjoon, mis koosneb neljast lülist.

Joone piiret nimetatakse punktiks.

Joonisel 5 on märgitud kaks punkti *A* ja *D*, mis on joone piirdeks, samuti kaks punkti *B* ja *C*, mis on piirdeks selle joone sirgjooneliste osade ja kõverjoonelise osa vahel. Punkte märgime suurte ladina tähtedega.

Punktil ei ole pikkust, laiust ega paksust.

On selge, et ükski ese ei ole punkt. Kuid jälge, mis tekib, kui pliiats puudutab paberit, nimetame punktiks, sest et mõttes kõrvaldame sellelt jäljelt igasugused mõõted. Võime kujutella samuti punkti, mis ei ole seoses ei pliiatsiga ega paberiga ega mingisuguse muu kehaga. Võtame näiteks õõnsa kera. Kujutleme punkti otse kera keskel või, nagu öeldakse, selle kera keskpunkti, kuigi see punkt pole kinnistatud ühegi keha külge.

Algasime oma arutlust geomeetrilise kehaga ja jõudsime punktini. Läheme nüüd tuldud teed tagasi.

Joont võib vaadelda kui liikuva punkti jälge.

Näide 6. Pliiats jätab paberi külge puutudes jäljena punkti. Paberit mööda liikuv pliiats jätab jäljena joone.

Näide 7. Võtame hõõguva söekese ja liigutame seda kiiresti pimeduses. Näeme tulijoont — liikuva punkti jälge.

Pinda võib vaadelda kui liikuva joone jälge.

Näide 8. Jalgratta ratta kiire liikumise puhul me ei eralda tema kodaraid ja näeme pidevat ringi. Iga kodara (sirglõigu) jäljeks on tasapinna osa (ring).

Näide 9. Võitükki võib pooleks lõigata pingule tõmmatud traadiga (sirgjoon). Lõikepind on liikuva sirgjoone jäljeks. See pind võib olla tasane, kuid võib olla ka kõver.

Näide 10. Paneme traadist tehtud võru (ringjoon) siledal põrandal vurrina kiiresti pöörlema. Siis näeme kerapinda — pöörleva ringjoone jälge.

Geomeetrilist keha võib vaadelda kui liikuva pinna jälge.

Näide 11. Kõva ruutplaat vajutatakse pehmesse savisse. See jätab jäljena süvendi, millel on kuju ja mõõted; see süvend on geomeetriline keha.

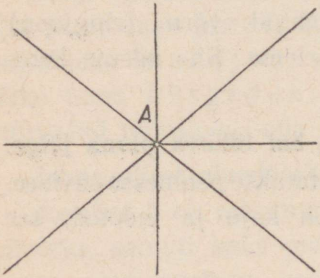
I peatükk.

Sirgjoon. Nurk.

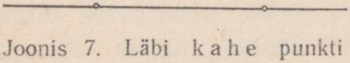
§ 2. Sirgjoon.

Läbi ühe punkti saab joonestada kuitahes palju sirgjooni. Joonisel 6 on läbi punkti *A* kujutatud neli sirgjoont.

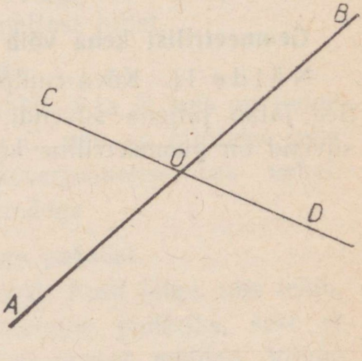
Läbi kahe antud punkti saab joonestada ainult ühe sirgjoone. Joonisel 7 läbib kaht punkti *E* ja *K* sirgjoon; mingisugust teist sirgjoont ei ole võimalik läbi nende punktide joonestada. Et seda sirgjoont teistest eraldada, nimetatakse teda



Joonis 6. Läbi ühe punkti *A* saab kujutada kuitahes palju sirgjooni.

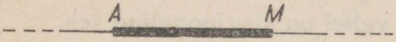


Joonis 7. Läbi kahe punkti *E* ja *K* saab joonestada ainult ühe sirgjoone.

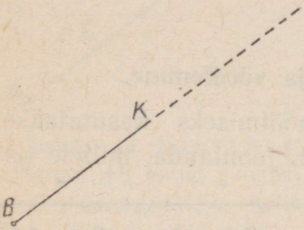


Joonis 8. Jämedat sirgjoont sellel joonisel võib nimetada sirge *AB* ehk sirge *BA* ehk sirge *AO* ehk sirge *OB*.

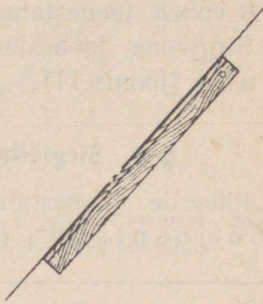
sirgeks *EK*. Üldiselt koostatakse sirgjoone nimetus sellel sirgjoonel asetseva mistahes kahe punkti nimetusest. Nii näiteks võib joonisel 8 jämedalt kujutatud sirgjoont nimetada sirgeks *AB*. Sama sirget võib veel nimetada sirgeks *BA* ehk sirgeks *AO* ehk sirgeks *OB*.



Joonis 9. Jämedalt joonestatud lõiku sellel joonisel võib nimetada ainult lõik *AM* ehk lõik *MA*.



Joonis 10. Kiir *BK*. Esimene täht (*B*) on punkt, kust kiir väljub, teine (*K*) on mistahes muu punkt kiirel.



Joonis 11. Joonlaud (tavaline) on riist, mille abil joonestatakse sirgjoont.

Sirglõiku võib pikendada nii ühele kui ka teisele poole. Praktiliselt on teda võimalik pikendada ainult mõninga piirini, näiteks paberilehe servani. Mõttes aga kujutleme, et sirgjoont võib pikendada piiramatult.

Geomeetrias nimetatakse sirgjooneks ehk lühemalt sirgeks niisugust sirget joont, mis pole piiratud ei ühelt ega teiselt poolt. Kui kõneldakse sirgjoonest, millel on otspunktid, siis nimetatakse seda sirglõiguks ehk lühemalt lihtsalt lõiguks.

Lõigu nimetus koostatakse kahe punkti nimetusest, mis on tema otspunktideks. Nii nimetatakse joonisel 9 jämedalt joonestatud lõiku lõik *AM* ehk lõik *MA*.

Kui sirgjoon on piiratud ainult ühelt poolt, teisele poole aga jätkub piiramatult, siis nimetatakse teda kiireks. Kiirt tähistatakse kahe tähega: esimene täht tähistab punkti, kust kiir väljub; teine mistahes muud punkti kiirel.

Joonisel 10 on kujutatud kiir *BK*.

Igaüks teab, et

lühimaks teeks kahe punkti vahel on sirgjooneline tee.

Teiste sõnadega, sirglõik *AB* on lühem igast punktide *A* ja *B* vahele joonestatud joonest.

Sirgjoone joonestamiseks paberile kasutatakse joonlauda (joonis 11).

§ 3. Sirglõikude mõõtmine ja võrdlemine.

Paberile joonestatud lõikude mõõtmiseks kasutatakse mõõtjoonlauda (joonis 12), s. t. joonlauda, millele on

Joonis 12. Mõõtjoonlaud on riist lõikude mõõtmiseks. (Käesoleval joonisel on kujutatud metalljoonlaud, mille jaotised on täpsed, kui temperatuur on +20° C.)

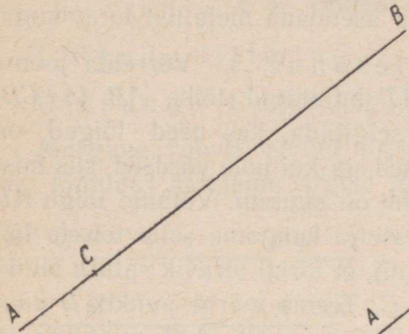
märgitud jaotised (sentimeetrid ja millimeetrid). Mõõtjoonlaua abil võib lahendada järgmise ülesande.

Ülesanne 1. Sirgel *AB* (joonis 13) antud punktist *C* joonestada lõik, mille pikkus on 18 mm.

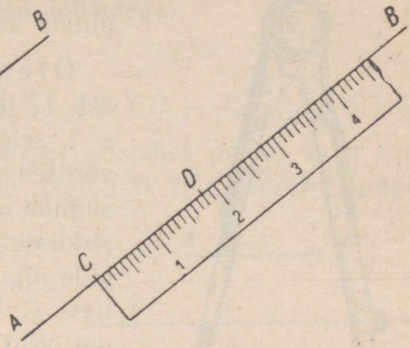
Asetame mõõtjoonlaua sirgele *AB* (joonis 14) nõnda, et joonlaua algus (jaotis 0) satuks punkti *C* kohale. Jaotise 18 mm kohale märgime *D*. Lõik *CD* ongi otsitav. Samuti võib joonestada veel ühe sama pikkusega lõigu, kuid see asetseb teisel pool punkti *C*.

Vaatleme veel üht sageli esinevat ülesannet.

Ü l e s a n n e 2. Sirgel *AB* (joonis 15) joonestada punktist *C* paremale poole lõik, mis oleks võrdne antud lõiguga *MN*.

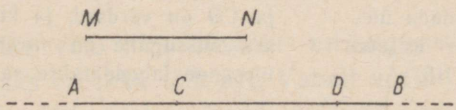


Joonis 13. Ü l e s a n n e: sirgel *AB* antud punktist *C* joonestada lõik, mille pikkus on 18 mm.



Joonis 14. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendamine.

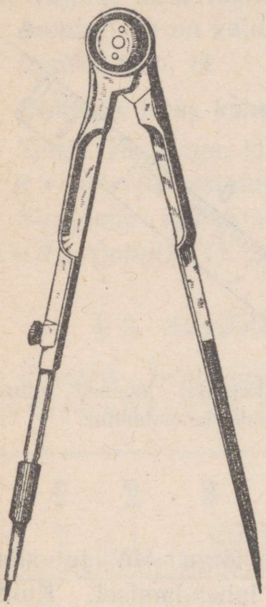
Esialgu võib mõõtjoonlauaga mõõta lõigu *MN* ja siis toimida samuti nagu eelmise ülesande lahendamisel. Kuid hoopis täpsemalt võib ülesande lahendada s i r k l i abil (sirkel on kujutatud joonisel 16).



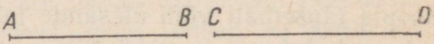
Joonis 15. Ü l e s a n n e: sirgel *AB* joonestada punktist *C* paremale poole lõik, mis oleks võrdne antud lõiguga *MN*.

Asetame sirkli teraviku punkti *M*; avame sirkli nõnda, et tema teine haar (pliiatsiga) ulatuks punktini *N*. Tõstame nüüd avatud sirkli sirgele *AB*, toetame tema teraviku punktisse *C* ja teeme sirkli teise haara pliiatsiga märgi sirgele *AB* punktist C paremale poole. Saame punkti D. Lõik CD võrdub lõiguga MN. Sel juhul öeldakse: «võtsime lõigu MN sirklisse ja kandsime sirgele AB». See lahendus muutub veel täpsemaks, kui sirkli teises haaras pliiats asendada metallist teravikuga.

Ülesanne 3. Võrrelda joonisel 17 kujutatud lõike AB ja CD, s. t. selgitada, kas need lõigud on võrdsed, ja kui pole võrdsed, siis missugune on suurem. Võtame lõigu AB sirklisse ja kanname selle teisele lõigule nii, et sirkli teravik satuks punktisse C. Teeme märgi punkti D suunas. Kui see märk ühtib punktiga D, siis on lõigud AB ja CD võrdsed ($AB = CD$); kui ta asetseb lõigul CD, siis on lõik CD suurem kui AB (kirjutatakse nii: $CD > AB$; sümbol $>$ asendab väljendit «suurem kui»); see juhus ongi kujutatud joonisel 17. Kui märk asetseb lõigu CD pikendusel, siis on lõik CD väiksem kui AB (kirjutatakse: $CD < AB$; sümbol $<$ tähistab väljendit «väiksem kui»).



Joonis 16. Sirkel on riist, mille abil saab joonestada ringjooni. Sirkli abil võib lahendada ülesande, mis on esitatud joonisel 15.



Joonis 17. Ülesanne: kas lõigud AB ja CD on võrdsed, ja kui pole võrdsed, siis missugune on neist suurem? See ülesanne lahendatakse samuti sirkli abil.

Niiviisi selgub meile, et

kaks lõiku on võrdsed, kui ühte neist saab paigutada teisele nii, et nad ühtivad;

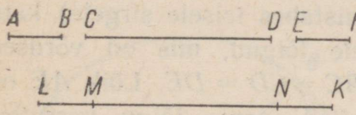
kaks lõiku ei ole võrdsed, kui ühte neist saab paigutada teise sisse; esimene neist on siis teisest väiksem.

§ 4. Tehted lõikudega.

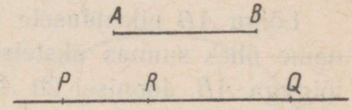
Lõikude liitmine.

Ülesanne 4. Liita lõigud AB, CD ja EF (joonis 18).

Märgime vabalt võetud sirgel mistahes punkti L ja sellest lähtudes kanname sirgele lõigu LM, mis võrdub lõiguga



Joonis 18. Ülesanne: liita lõigud AB, CD ja EF. Vastus: $AB+CD+EF=LK$.



Joonis 19. Ülesanne: lahutada lõik AB lõigust PQ. Vastus: $PQ-AB=PR$.

AB. Lähtudes punktist M kanname samas suunas lõigu MN, mis võrdub lõiguga CD; lähtudes punktist N kanname samas suunas $NK = EF$. Lõik LK on lõikude AB, CD ja EF summa. Kirjutatakse seda nõnda:

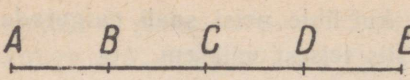
$$LK = AB + CD + EF.$$

Antud lõike võib liita ükskõik missuguses järjekorras: nende summaks on ikka lõik LK. Vabalt võetud sirge asemel võib võtta ühe lõikudest ja kanda teised lõigud selle pikendusele.

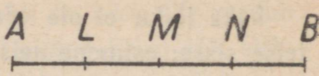
Lõikude lahutamine.

Ülesanne 5. Lahutada lõik AB (joonis 19) lõigust PQ $(PQ > AB)$.

Kanname lõigu QR, mis võrdub lõiguga AB, lõigule PQ. Lõik PR on PQ ja AB vahe $(PR = PQ - AB)$.



Joonis 20. Ülesanne: suurendada lõik AB neljakordseks (s. t. korrutada lõiku AB neljaga). Vastus: $4AB=AE$.



Joonis 21. Ülesanne: jaotada lõik AB neljaks võrdseks osaks. Vastus: $AB:4=AL$.

L õ i g u k o r r u t a m i n e (täisarvuga).

Ü l e s a n n e 6. Suurendada lõik AB (joonis 20) neljakordseks.

Lõigu AB pikendusele (või mistahes teisele sirgele) kanname ühes suunas üksteise järele lõigud, mis on võrdsed lõiguga AB. Joonisel 20 $AB = BC = CD = DE$. Lõik AE on lõigu AB neljakordne. Samal viisil saame lõigu korrutise mistahes teise t ä i s a r v u g a.

L õ i g u j a o t a m i n e võrdseiks osadeks.

Ü l e s a n n e 7. Jaotada lõik AB neljaks võrdseks osaks.

Selle ülesande võib lahendada sirkli ja lihtsa (jaotisteta) joonlaua abil. Kuid lahendus (esitame selle hiljem) ei ole nõnda lihtne, nagu eelmistes ülesannetes. Kui ei nõuta suurt täpsust, on parem kasutada mõõtjoonlauda. Mõõtes sellega lõigu AB (joonis 21), leiame, et lõigu pikkus on ligikaudu 26 mm (väikese ülejäägi jätame ära). Teostame jagamise:

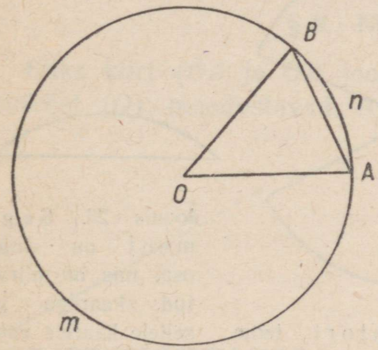
$$26 \text{ mm} : 4 = 6\tfrac{1}{2} \text{ mm}.$$

Kasutades mõõtjoonlauda märgime lõigu AL pikkusega $6\frac{1}{2}$ mm (pool millimeetrit võtame silma järgi). Kanname lõigu AL neli korda antud lõigule AB ($AL=LM=MN=NB$). Viimase lõigu otspunkt peab kokku sattuma punktiga B. Tegelikult võib juhtuda, et kokkusattumist ei esine, kui AB pikkus on mõõdetud ebatäpselt ja kui lõik AL on kantud sirglõigule AB ebatäpselt. Siis teeme silma järgi paranduse, lühendades või pikendades natuke lõiku AL.

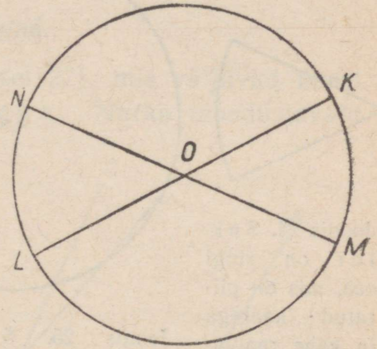
M ä r k u s. Osates lõiku jaotada ükskõik mitmeks osaks, võime lõiku korrutada mitte ainult täisarvuga, vaid ka murdarvuga. Kui näiteks on tarvis korrutada lõiku AB arvuga $2\frac{3}{4}$, siis esmalt kahekordistame AB, siis jaotame AB neljaks osaks ja kolmekordistame saadud lõigu. Lõpuks liidame $2AB$ ja $\frac{3}{4}AB$.

§ 5. Ringjoon ja ring.

Surume sirkli teraviku paberisse ja pöörame teist, pliiatsiga varustatud haara. Pliiats tõmbab paberile kinnise



Joonis 22. R i n g j o o n. Punkt O on k e s k p u n k t, lõigud OA ja OB on r a a d i u s e d, ringjoone osa AnB on k a a r, lõik AB on k õ õ l.



Joonis 23. R i n g j o o n e d i a m e e t r i k s on kõõl, mis läbib ringjoone keskpunkti. Lõigud KL ja MN on ringjoone diameetrid.

kõverjoone — r i n g j o o n e. Vastavalt ringjoone konstruktsioonile võime teda järgmiselt seletada ehk d e f i n e e r i d a:

Ringjooneks nimetatakse kinnist joont, mille kõik punktid asetsevad ühel tasapinnal ja võrdsetel kaugustel mingist punktist, mis asetseb samal tasapinnal.

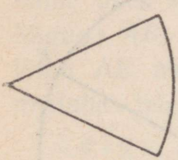
Seda punkti nimetatakse k e s k p u n k t i k s. Joonisel 22 on punkt O ringjoone keskpunktiks.

Lõiku OB, mis ühendab ringjoone mistahes punkti keskpunktiga, nimetatakse r a a d i u s e k s. Joonisel 22 on kujutatud kaks raadiust: OA ja OB.

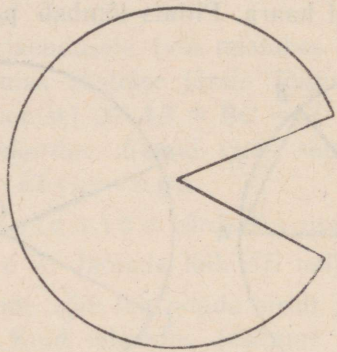
On selge, et

ühe ringjoone raadiused on kõik võrdsed.

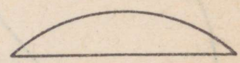
Ringjoone osa (näiteks AnB joonisel 22) nimetatakse tema k a a r e k s. Kaare täpseks märkimiseks tuleb kasutada mitte



Joonis 24. S e k t o r on ringi osa, mis on piiratud kaarega ja kahe raadiusega.



Joonis 25. S e k t o r i teine kuju.



Joonis 26. S e g m e n t on ringi osa, mis on piiratud kaarega ja sellele kaarele vastava kõõluga.

kahte, vaid kolme tähte. Kui meie näiteks kaart AnB tähistame lihtsalt AB, siis pole teada, kumma kaarega (AnB või AmB) on tegu. Kui aga niisugust arusaamatust pole karta, võib kaart tähistada ka kahe tähega. Et eraldada kaart AB lõigust AB, tähistatakse kaart järgmiselt: $\smile AB$ ehk $\overset{\smile}{AB}$.

Ringjoone mistahes kaht punkti ühendavat lõiku (AB joonisel 22) nimetatakse k õ õ l u k s.

Ringjoone keskpunkti läbivat kõõlu nimetatakse d i a m e e t r i k s. Joonisel 23 on lõigud KL ja MN ringjoone diameetrid.

On selge, et

diameeter on raadiusest kaks korda suurem

ja et

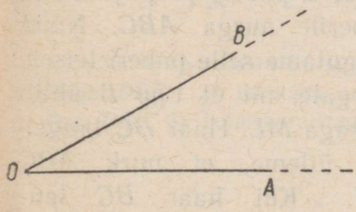
kõik ühe ringjoone diameetrid on võrdsed.

Ringjoonega piiratud tasapinna osa nimetatakse ringiks.

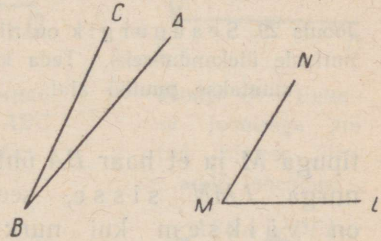
Ringi osa, mis on piiratud kaarega ja kahe raadiusega, nimetatakse sektoriks (joonised 24 ja 25). Ringi osa, mis on piiratud kaarega ja sellele kaarele vastava kõõluga, nimetatakse segmendiks (joonis 26).

§ 6. Nurgad.

Kaks kiirt (*OA* ja *OB* joonisel 27), mis väljuvad ühest punktist (*O*), moodustavad nurga. Nurka moodustavaid



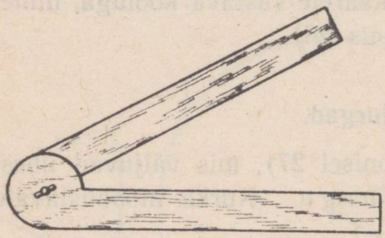
Joonis 27. Nurk. Kiired *OA* ja *OB* on nurga haarad, punkt *O* on nurga tipp.



Joonis 28. Nurkade võrdlemine. $\angle ABC < \angle LMN$.

kiiri nimetatakse nurga haaradeks. Punkti, millest haarad väljuvad, nimetatakse nurga tipuks. Sõna «nurk» tähistatakse sageli sümboliga $\angle$. Joonisel tähistatakse antud nurka sageli tipu juurde asetatud üheainsa tähega; nii tähistatakse nurka joonisel 27 tähega *O*. Sümbolit $\angle O$ loeme «nurk *O*». See märkimisviis ei kõlba, kui ühe tipu juures on mitu nurka; siis tähistatakse nurka kolme tähega; esimene ja kolmas täht paigutatakse kuhugi haaradele, teine aga tipu juurde. Nii võib nurka joonisel 27 tähistada $\angle AOB$ ehk $\angle BOA$, kuid seda nurka ei või tähistada $\angle ABO$ või $\angle BAO$ või $\angle OAB$ või $\angle OBA$.

On tähtis ära märkida, et nurga haarad on k i i r e d, m i t t e lõigud; haarade välja joonestatud pikkus ei avalda nurga suurusele mingisugust mõju. Joonisel 28 on nurga *ABC* haarad kujutatud pikematena kui nurga *LMN* haarad; siiski on nurk *ABC* väiksem kui nurk *LMN*, s. t. kiirte *BA* ja *BC* a v a on väiksem kui kiirte *ML* ja *MN* ava. Antud juhul on see silmaga näha.



Joonis 29. S e a d n u r g i k on riist nurkade ülekandmiseks. Teda kasutatakse puutöö alal.

Et täpsemalt võrrelda nurkade suurusi, võib toimida nii: asetame joonisele 28 läbipaistva paberi ja jäljendame paberile nurga *ABC*. Nüüd paigutame selle paberi teisele nurgale, nii et tipp *B* ühtib tipuga *M* ja et haar *BA* ühtib haaraga *ML*. Haar *BC* langeb nurga *LMN* s i s s e, seepärast ütleme, et nurk *ABC* on v ä i k s e m kui nurk *LMN*. Kui haar *BC* langeks haarale *MN*, siis ütleksime, et nurk *ABC* v õ r d u b nurgaga *LMN*; kui haar *BC* langeks v ä l j a p o o l e nurka *LMN*, siis ütleksime, et nurk *ABC* on s u u r e m kui nurk *LMN*.

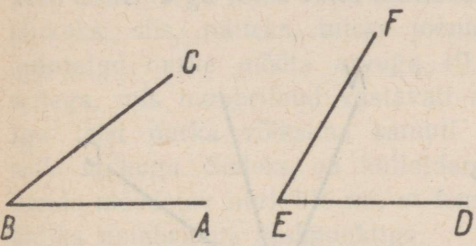
Jõuame järgmiste järeldusteni:

Kaks nurka on võrdsed, kui neid saab niiviisi teineteise peale paigutada, et nad ühtivad.

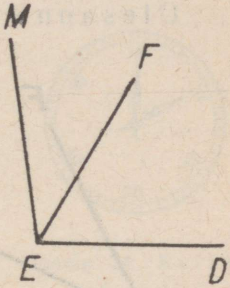
Kaks nurka ei ole võrdsed, kui nende teineteise peale asetamisel ja tippude ühtimisel üks nurk osutub teise sees asetsevaks; esimene nurk on siis teisest väiksem.

Nurkade ülekandmiseks mingisugusel pinnal kasutatakse puutöö alal seadnurgikut. See riist on kujutatud joonisel 29. Tema konstruktsioon sarnaneb sirkli konstruktsiooniga. Erinevus seisneb selles, et seadnurgiku haaradeks on joonlauad.

Nurkade ülekandmiseks paberil võib kasutada ülalkirjeldatud võtet (läbipaistva paberi abil), kuid see võte on kaunis ebatäpne. Joonestajad kasutavad täpsemat võtet, mida kirjeldame hiljem.



Joonis 30. Ülesanded: 1) liita nurgad *ABC* ja *DEF*, 2) lahutada nurgast *ABC* nurk *DEF*, 3) kolmekordistada $\angle ABC$.



Joonis 31. Eelmise joonisega antud esimese ülesande lahendus:

$$\angle ABC + \angle DEF = \angle DEM$$

Ülesanne 8. Liita nurgad *ABC* ja *DEF* (joonis 30).

Ülekandmise teel viime ühtivusse antud nurkade tipud *B* ja *E* ning haarad *BA* ja *EF*. Seejuures hoolitseme, et meie nurgad asetseksid teine teisel pool ühtivaid haarasid, nagu on näidatud joonisel 31, kus $\angle FEM$ on saadud nurga *ABC* ülekandmise teel. Nurk *DEM* on nurkade *ABC* ja *DEF* summa:

$$\angle DEM = \angle ABC + \angle DEF.$$

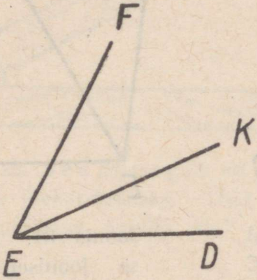
Samuti võib leida mitme antud nurga summa.

Ü l e s a n n e 9. Lahutada $\angle ABC$ nurgast DEF (joonis 30).

Lahendatakse ühtemoodi eelmisega, ainult nurgad asetatakse ühtinud haaradest EF ühele poole (joonis 32). Nurk KED on nurkade DEF ja KEF vahe, mis on saadud nurga ABC ülekandmisega:

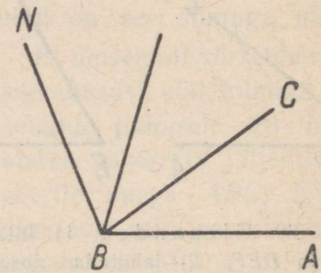
$$\angle KED = \angle DEF - \angle ABC.$$

Ü l e s a n n e 10. Kolmekordistada nurk ABC (joonis 30).



Joonis 32. Joonisel 30 toodud teise ülesande lahendus:

$$\angle DEF - \angle ABC = \angle KED.$$



Joonis 33. Joonisel 30 toodud kolmanda ülesande lahendus:

$$3\angle ABC = \angle ABN.$$

Ülesanne lahendub ülesande 8 alusel; nurk ABC võetakse liidetavana kolm korda. Nurk ABN (joonis 33) võrdub nurga ABC kolmekordsega:

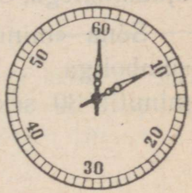
$$\angle ABN = 3\angle ABC.$$

Samal viisil saab antud nurka korrutada mistahes täisarvuga.

Et jaotada antud nurka võrdseteks osadeks, tuleb õppida nurki mõõtma.

§ 7. Nurkade mõõtmine.

Joonisel 34 on kujutatud kella sekundiosuti. Iga sekundiga pöördub ta ühe ja sama nurga võrra, sest tema ots läbib numbrilaual ühe ja sama pikkusega kaare. Iga kella numbrilaual on isesugused mõõted, seega kaared, mida läbivad osutite otsad ühe sekundi jooksul, pole ühesuguse pikkusega; kuid n u r k, mille teeb seejuures osuti, on kõigil maailma kelladel üks ja sama. Ta moodustab $\frac{1}{60}$ osa osuti täispöördest. Selle nurga võiks võtta nurkade mõõtühikuks; siis, näiteks, tuleks joonisel 34 kujutatud nurka mõõta arvuga 10, s. t. sellega, mis numbrilaud vastavalt näitab. Iga teist nurka võiksime samuti mõõta selle ühikuga. Selleks on küllaldane, kui kanda mõõdetav nurk üle nii, et tema tipp ühtiks numbrilaua keskpunktiga.



Joonis 34. K e l l a s e k u n d i o s u t i.

Geomeetrias kasutatakse nurkade mõõtmiseks just niisugust meetodit. Ainult mõõtühikuks ei võeta mitte $\frac{1}{60}$ täispöördest, vaid $\frac{1}{360}$ täispöördest. Nurka, mis moodustab $\frac{1}{360}$ täispöördest, nimetatakse k r a a d i k s. Seega täispööre koosneb 360 kraadist. Sõna «kraad» tähistatakse sümboliga °, nii et kirjutist 360° loetakse «360 kraadi». Antud nurgas sisalduvat kraadide arvu nimetatakse selle nurga k r a a d m õ õ d u k s.

N ä i d e 1. Kraadmõõt selle nurga jaoks, mille läbib sekundiosuti ühe sekundi jooksul, on 6°, sest et $\frac{1}{60}$ 360 kraadist on 6°.

N ä i d e 2. Kraadmõõt sellele nurgale, mille läbib tunniosuti ühe tunni jooksul, on 30°, sest et see nurk moodustab $\frac{1}{12}$ täispöördest:

$$360° : 12 = 30°.$$

N ä i d e 3. Rattal on 16 kodarat; missuguse nurga moodustavad kaks kõrvuti asetsevat kodarat?

L a h e n d u s: $360° : 16 = 22\frac{1}{2}°$.

1° suurune nurk on niivõrd väike, et tehnikas tegelikult paljudel juhtudel pole vajadust arvestada tema osi.

Täpsemates töödes tuleb arvestada ka kraadi osi. Kraadi on hakatud jaotama 60 võrdseks osaks; neid osasid nimetatakse m i n u t i t e k s. Minut jaotatakse omakorda 60 s e k u n d i k s. Ei tohi segada neid minuteid ja sekundeid ajaühikutega, milledel on samasugused nimetused.

Sõna «minut» tähistatakse sümboliga ′, sõna «sekund» sümboliga ″. Kirjutis 13°26′30″ tähendab «13 kraadi 26 minutit 30 sekundit».

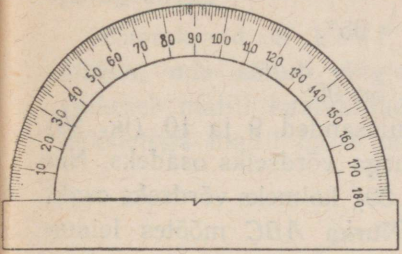
§ 8. Mall.

Paberile joonestatud nurkade mõõtmiseks kasutatakse m a l l i (joonis 35). See riist sarnaneb ehituselt kella numbrilauaga.

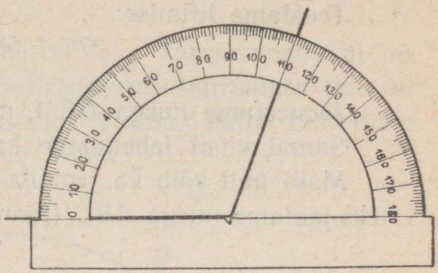
Malli kaar vastab numbrilaua poolele ringjoonele. Ta on jaotatud 180 võrdseks osaks ja tema peale on kantud jaotised ja numbrid, mis näitavad jaotiste arvu. Malli joonlaua serval, mis on poolringjoone diameetriks, on märgitud selle keskpunkt. Mall tuleb asetada paberile nõnda, et see keskpunkt ühtiks mõõdetava nurga tipuga (joonis 36). Joonlaua serv, kust algab jaotiste loendamine, tuleb suunata nurga üht haara mööda. Nurga teine haar läbib malli kaare ühe jaotise. Lugedes numbri selle jaotise kohal, saame teada nurga mõõtarvu.

Joonisel 36 võrdub mõõdetav nurk 110°. Joonisel 37 võrdub mõõdetav nurk 25°.

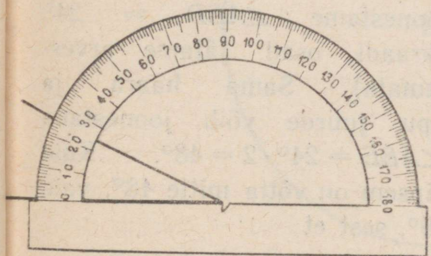
Et joonlauda oleks võimalik asetada ükskõik missugusele nurga haarale, varustatakse malli kaar sageli kahe skaalaga (joonis 38). Need kulgevad teineteisele vastandsuunas. Kasutades niisugust malli, tuleb hoiduda, et mõõtmise ajal mitte segi minna ja ühelt skaalalt teisele mitte üle minna.



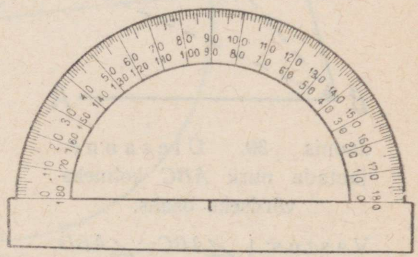
Joonis 35. Mall on riist nurkade mõõtmiseks. Malli kaar on jaotatud 180 võrdseks osaks, iga osa vastab ühele kraadile.



Joonis 36. Nurga mõõtmine malli abil. Sellel joonisel kujutatud nurk võrdub 110°.



Joonis 37. Nurga mõõtmine malli abil. Sellel joonisel kujutatud nurk võrdub 25°.



Joonis 38. Mõned mallid on varustatud kahe skaalaga, mis kulgevad teineteisele vastandsuunas.

Malli abil võib mõõta antud nurka ja ka konstrueerida (joonestada) antud suuruses nurka. Kuidas seda teha, see on arusaadav ilma seletusteta.

Malli abil võib samuti teostada §-s 6 vaadeldud tehteid: nurkade liitmist, lahutamist ja korrutamist.

Näiteks ülesande 8 lahendamiseks (lk. 19) mõõdame nurgad *ABC* ja *DEF*.

Leiame

$$\angle ABC = 37°; \quad \angle DEF = 58°.$$

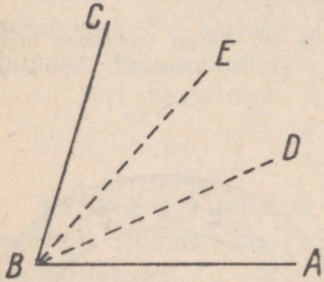
Teostame liitmise:

$$37° + 58° = 95°.$$

Joonestame nurga *DEM*, mis on 95°.

Samal viisil lahendame ka ülesanded 9 ja 10 (lk. 20).

Malli abil võib ka jaotada nurga võrdseiks osadeks. Näiteks jaotame nurga *ABC* (joonis 39) kolmeks võrdseks osaks.



Joonis 39. Ülesanne: jaotada nurk *ABC* kolmeks võrdseks osaks.

Vastus: $\frac{1}{3} \angle ABC = \angle ABD$.

Nurka *ABC* mõõtes leiame, et see on 73°. Teostame jagamise:

$$73° : 3 = 24\tfrac{1}{3}°.$$

Haara *BA* ja tipu *B* juurde joonestame $\angle ABD = 24°$ (kraadi osad jätame arvestamata). Sama haara ja tipu juurde võib joonestada $\angle ABE = 24° \cdot 2 = 48°$. Kuid täpsem on võtta mitte 48°, vaid 49°, sest et

$$24\tfrac{1}{3}° \cdot 2 = 48\tfrac{2}{3}°$$

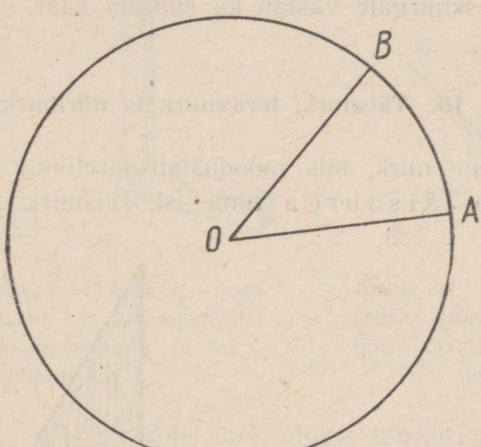
ning see arv on lähem 49°-le.

Niisugused parandused on eriti tähtsad nurga jaotamise puhul paljudeks osadeks, sest et isegi väikese eksimuse kordamine võib viia tunduva veani.

§ 9. Nurgakraad ja kaarekraad.

Nagu nägime, jaotatakse nurkade mõõtmiseks malli poolringjoon 180 võrdseks osaks. Samaks arvuks osadeks on hakatud jaotama ka igasugust poolringjoont, s. t. kogu ringjoon jaotatakse 360 võrdseks osaks. Iga niisugust osa nimetatakse k r a a d i k s ehk täpsemalt k a a r e k r a a d i k s, erinevalt n u r g a k r a a d i s t, millest oli juttu eelmises paragrahvis.

Kaarekraad on k a a r, mis on $\frac{1}{360}$ ringjoonest. Tal on pikkus, mis sõltub ringjoone raadiuse suurusest; nii on väikesel mallil kaarekraad umbes $\frac{1}{2}$ mm, kuna suuremate mõõdetega mallil on ta umbes 1 mm.



Joonis 40. K e s k n u r k. $\angle$ *AOB* on kaarele *AB* vastav kesknurk.

Nurgakraad on n u r k, mille suurus ei olene haarade pikkusest. Ei saa kõnelda ühegi nurgakraadi «p i k k u s e s t», nagu ei saa kõnelda kilogrammi pikkusest.

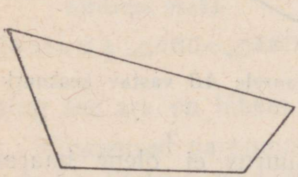
Nurka, mille moodustavad ringjoone kaks raadiust, nimetatakse k e s k n u r g a k s. Joonisel 40 kujutatud ringi kesknurgaks on $\angle AOB$. Et me jaotame ringjoone 360-ks kaarekraadiks ja tema raadiuse täispöörde samaks hulgaks nurgakraadideks, siis on ilmne, et k e s k n u r k *AOB* s i s a l d a b niisama palju nurgakraade, kui palju kaar *AB* sisaldab kaarekraade. Lühemalt öeldakse nii:

kesknurga mõõduks on temale vastav kaar.

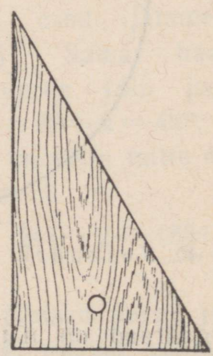
On selge, et ühe ja sama ringjoone puhul vastavad võrdsetele kesknurkadele võrdsed kaared; see on õige ka kahe võrdsete raadiustega ringjoone suhtes. Kuid erinevate raadiustega ringjoonte puhul vastavad võrdsetele kesknurkadele pikkuse poolest mittevõrdsed kaared; suurema ringjoone kesknurgale vastab ka suurem kaar.

§ 10. Täisnurk, teravnurk ja nürinurk.

90° suurune nurk, mis moodustab järelikult $\frac{1}{4}$ täispöördest, kannab täisnurga nimetust. Täisnurki esineb meid



Joonis 41. Selles nelinurgas on mõlemad ülemised nurgad teravnurgad ja mõlemad alumised nurgad nürinurgad.

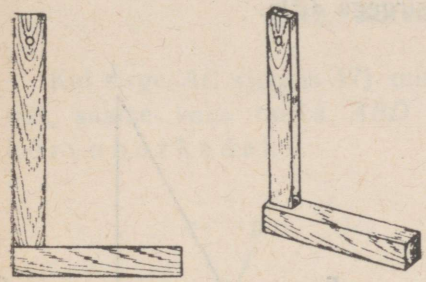


Joonis 42. Nurklaud ehk joonestuskolmnurk täisnurga joonestamiseks.

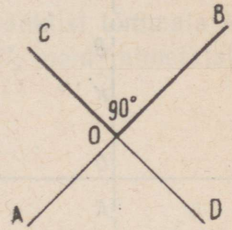
ümbritsevail esemeil teistest nurkadest sagedamini. Nii on raamatukaane, tikutoosi, toapõranda nurgad täisnurgad.

Täisnurgast väiksemat nurka nimetatakse teravnurgaks. Täisnurgast suuremat nurka nimetatakse nürinurgaks. Joonisel 41 kujutatud nelinurgas on mõlemad ülemised nurgad teravnurgad ja mõlemad alumised nurgad nürinurgad.

Täisnurkade joonestamiseks paberile tarvitatakse joonestuskolmnurka (joon. 42), mida sageli nimetatakse nurklauaks.



Joonis 43. Nurgamõõtja, mida kasutatakse tisleri- ja puusepatöödel täisnurkade joonestamiseks ja kontrollimiseks.



Joonis 44. Täisnurga haarade pikendamisel üle tipu saame neli täisnurka.

Tisleri- ja puusepatöödel tarvitatakse täisnurkade joonestamiseks ja kontrollimiseks joonisel 43 kujutatud nurgamõõtjat.

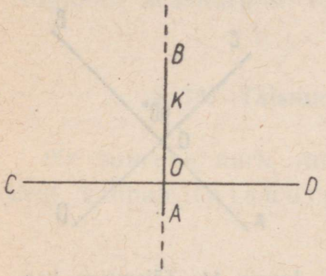
Kui täisnurga haarasid (*BOC* joonisel 44) pikendada üle tema tipu, saame sirged *AB* ja *CD*, mis moodustavad neli nurka: $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOD$ ja $\angle DOB$. Need nurgad on täisnurgad.

§ 11. Ristsirge ja kaldsirge.

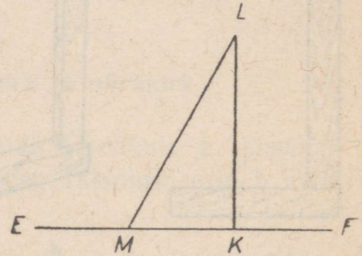
Sirgjooni (*AB* ja *CD* joonisel 45), mille lõikumisel tekivad täisnurgad, nimetatakse teineteisega ristuvaiks ehk perpendikulaarseiks sirgeiks.

Öeldakse ka, et «*AB* on *CD* ristsirge ehk perpendikulaar». Sõna «ristsirge» võib tähendada sirgjoont, samuti ka kiirt või lõiku. Nii võib öelda: «kiir *OB* on ristjooneks sirgele *CD*» või «lõik *OK* on ristjooneks sirgele *CD*». Kiire või lõigu algus (punkt *O*) võetakse sirgel *CD*; seda nimetatakse ristlõigu aluspunktiks.

Sõna «risti ehk perpendikulaarne» tähistatakse sümboliga $\perp$. Näiteks kirjutist $AB \perp CD$ loetakse: «sirge *AB* on risti ehk perpendikulaarne sirgega *CD*».



Joonis 45. Ristuvad sirged. $AB \perp CD$. Punkt *O* on sirgele *CD* punktist *K* lastud ristlõigu *AB* aluspunkt.



Joonis 46. Ristsirge ja kaldsirge. $LK \perp EF$, *LM* on kaldu *EF*-ga. Ristlõik on kaldlõigust lühem: $LK < LM$.

Kui nõutakse ristsirge joonestamist sirgele (*CD* joonisel 45) läbi sellel sirgel antud punkti (*O* joonisel 45), siis öeldakse, et punktist on tarvis püstitada sirgele ristsirge; kui aga nõutakse ristsirge tõmbamist läbi punkti, mis asetseb väljaspool sirget, siis öeldakse, et on tarvis lasta sirgele ristsirge.

Antud punktist võib antud sirgele alati lasta ristsirge, kuid ainult ühe.

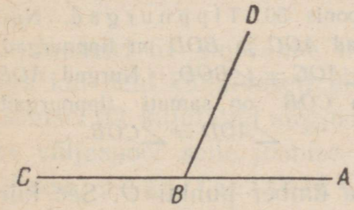
Sirget, kiirt või lõiku, mis pole risti antud sirgega, nimetatakse temaga kaldu olevaks. Joonisel 46 on *ML* kaldjooneks sirge *EF* suhtes.

Kui punktist L, mis ei asetse sirgel EF (joonis 46), on lastud sirgele ristlõik LK ja kaldlõik LM kuni selle sirgega lõikumiseni, siis ristlõik on kaldlõigust lühem.

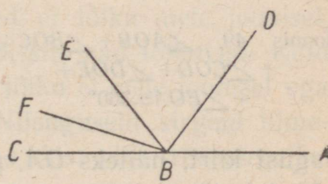
Kui kõneldakse punkti kaugusest (L joonisel 46) sirgjoonest (EF), siis mõistetakse sellega lühimat kaugust, s. t. ristlõigu (LK) pikkust.

§ 12. Kõrvunurgad.

Kui sirge AC (joonis 47) mistahes punktist tõmmata kiir BD, saame kaks nurka ABD ja DBC; neid nimetatakse kõrvunurkadeks.



Joonis 47. Kõrvunurgad. $\angle ABD$ ja $\angle DBC$ on kõrvunurgad. $\angle ABD + \angle DBC = 180°$.



Joonis 48. $\angle ABD + \angle DBE + \angle EBF + \angle FBC = 180°$.

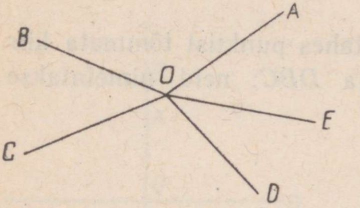
Kahe kõrvunurga summa on alati 180°.

See selgub joonisest 47: nurkade ABD ja DBC summaks on «nurk» ABC, mille haarad on vastandsuunalised ja asetsevad ühel sirgel. Niisugune sirgnurk on 180°.

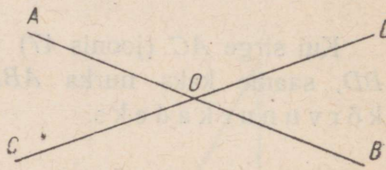
Et täisnurk on 90°, siis võib öelda, et kahe kõrvunurga summa võrdub kahe täisnurgaga. On selge, et kui üks kõrvunurkadest on teravnurk, siis teine on nürinurk.

Kui sirgel AC asetsevast punktist B tõmmata ükskõik kui palju kiiri ühele poole sirget AC (BD, BE, BF joonisel 48), siis on kõrvutiasetsevate nurkade ABD, DBE, EBF ja FBC summa samuti 180°.

Kui mingist punktist O tõmmata ükskõik missugune arv kiiri, mis moodustavad nurgad punkti O ümber (joonis 49), siis on kõigi nende üksteise kõrval asetsevate nurkade summa alati 360°. Me veendume selles, kui hakkame mingi-



Joonis 49. $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 360°$.



Joonis 50. Tippnurgad. Nurgad AOC ja BOD on tippnurgad; $\angle AOC = \angle BOD$. Nurgad AOD ja COB on samuti tippnurgad; $\angle AOD = \angle COB$.

sugust kiirt, näiteks OA, pöörama ümber punkti O. See kiir pöördub järgemööda nurkade AOB, BOC, COD, DOE, EOA võrra ja jõuab siis tagasi algasendisse, olles teinud täispöörde, s. t. 360°. Seepärast on mainitud nurkade summa 360°.

§ 13. Tippnurgad.

Kaks lõikuvat sirget (joonis 50) moodustavad neli nurka. Kui ühe nurga suurus on mõõdetud, siis võib ülejäänute suurused leida ilma neid mõõtmata.

Näiteks mõõdame nurga BOC; olgu see 140°. Ta moodustab koos nurgaga BOD paari kõrvunurki. Et nende nurkade summa on 180°, siis

$$\angle BOD = 180° - 140° = 40°.$$

Samuti on nurgad AOC ja BOC kõrvunurgad; seega on nurk AOC ka 40°. Lõpuks on $\angle AOD$ kõrvunurk nurgaga AOC, mis võrdub 40°; seepärast $\angle AOD = 180° - 40° = 140°$.

Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui ühe haaradeks on teise nurga haarade pikendused. Kahe sirge lõikumisel tekib kaks paari tippnurki. Joonisel 50 moodustavad ühe paari nurgad AOC ja BOD ning teise paari nurgad AOD ja COB.

Tippnurgad on võrdsed.

Tõepoolest, nii $\angle DOB$ kui ka $\angle AOC$ saadakse ühe ja sellesama nurga COB lahutamisega 180°-st. Seega on nad võrdsed.

§ 14. Paralleelsed sirged.

Joonisel 51 kujutatud sirgjooned ei lõiku meie joonisel, aga kui neid küllaldaselt pikendada, siis nad lõikuvad. Kuid joonisel 52 kujutatud sirgjooned ei lõiku ei meie joonisel ega ka väljaspool selle joonise piire. Niisuguseid sirgeid nimetatakse paralleelseiks sirgeiks ehk rööpsirgeiks.

Ühel ja samal tasapinnal asetsevaid ja mittelõikuvaid sirgjooni nimetatakse paralleelseiks.

Sõna «paralleelne» tähistatakse sümboliga $\parallel$, nii et sümbol $AB \parallel CD$ tähendab «AB ja CD on paralleelsed».

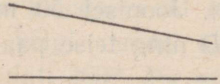
Paralleelsete sirgetega puutume kokku väga sagedasti: paralleelseteks sirgeteks on raudteerööpmed, joonlaua servad, raamatu tekstiread jne.

Kui kaks sirget on paralleelsed mingisuguse kolmanda sirgega, siis on nad ka isekeskis paralleelsed.

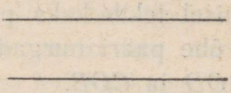
Kui joonestada sirge, mis on risti ühe paralleeljoonega, siis on ta risti ka teise paralleeljoonega (joonis 53a).

Kaks sirget (AB ja CD joonisel 53b), **mis on risti ühe ja sama kolmanda sirgega** (AC), **on paralleelsed.**

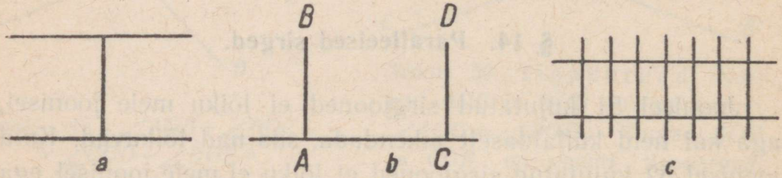
Kaks paralleelset sirget lõikavad kõigilt nendega ristuvatelt sirgetelt ära (joonis 53c) ühe ja sama pikkusega lõigud. Ühe niisuguse lõigu pikkust nimetame *paralleelide-vaheliseks kauguseks*.



Joonis 51. Need sirgjooned ei lõiku joonisel, kuid nad lõikuvad, kui neid pikendada.



Joonis 52. *Paralleelsed sirged*. Need sirged asetsevad ühel tasapinnal ega lõiku, ükskõik kui palju neid pikendada.



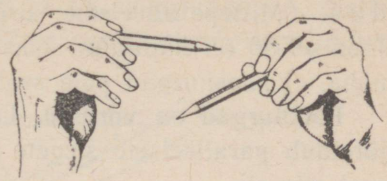
Joonis 53. *Paralleeljoonte omadusi*: a) ühe paralleeljoonega ristuv sirge on risti ka teisega; b) kaks sirget (*AB ja CD*), mis on risti ühe ja sama kolmanda sirgega, on paralleelsed; c) kaks paralleelset sirget lõikavad kõigilt nendega ristuvatelt sirgetelt ära ühe ja sama pikkusega lõigud.

Tuleb täheldada, et *mitte igasugused mittelõikuvad sirged ei ole paralleelsed*. Nii näiteks põrandale põigiti nurgast nurka joonestatud sirge ja lae karniisi mööda kulgev sirge pole paralleelsed, kuigi nad kuskil ei saa lõikuda. Asi seisab selles, et need sirged ei asetse ühel tasapinnal — ei ole võimalik kujutella tasapinda, mis läbiks neid mõlemaid sirgeid.

Mittelõikuvaid, kuid ka mitteparalleelseid sirgeid nimetatakse *kiivsirgeiks*. Joonisel 54 on kujutatud kaks kiivas pliiatsit.

§ 15. Kaasnurgad. Põiknurgad.

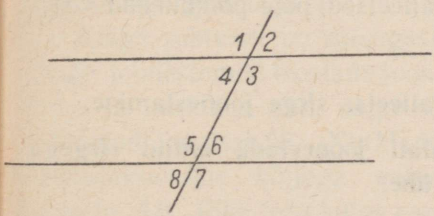
Kui joontega vihu lehele joonestada mingisugune joontega mitteparalleelne sirge, siis saame ühe joonega lõikumisel täpselt ühesuurused nurgad nagu teise joonega lõikumiselgi.



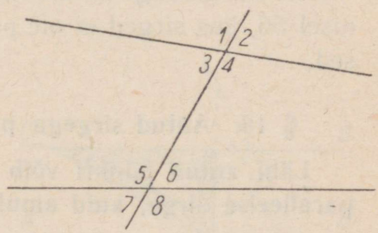
Joonis 54. K i i v s i r g e d. Sellel joonisel kujutatud kaks pliiatsit ei lõiku; nad moodustavad mitte paralleelsed, vaid k i i v s i r g e d, sest nad ei asetse ühel ja samal tasapinnal.

Kahe paralleeljoone lõikumisel kolmanda sirgega (joonis 55) saame kaheksa nurka; need on joonisel 55 märgitud numbritega. Nurgapaari 1 ja 5 nimetatakse kaasnurkadeks; samuti on kaasnurgad nurgad 2 ja 6, 3 ja 7, 4 ja 8.

Nurgapaari 4 ja 6 nimetatakse põiknurkadeks; põiknurkadeks on samuti nurgapaarid 3 ja 5, 1 ja 7, 2 ja 8.



Joonis 55. Kahe paralleeljoone lõikumisel kolmanda sirgjoonega moodustunud kaasnurgad. $\angle 1$ ja $\angle 5$, $\angle 2$ ja $\angle 6$, $\angle 3$ ja $\angle 7$, $\angle 4$ ja $\angle 8$ on neli paari kaasnurki. Paralleeljoonte puhul kaasnurgad on v õ r d s e d. Ka põiknurgad on v õ r d s e d.



Joonis 56. Kahe mitteparalleelse joone lõikumisel kolmanda sirgega m o o d u s t u n u d k a a s n u r g a d ja põiknurgad. Siin kaasnurgad ei ole v õ r d s e d: $\angle 1 \neq \angle 5$, $\angle 2 \neq \angle 6$, $\angle 3 \neq \angle 7$, $\angle 4 \neq \angle 8$. Ka põiknurgad ei ole võrdsed: $\angle 4 \neq \angle 6$, $\angle 3 \neq \angle 5$; $\angle 1 \neq \angle 7$; $\angle 2 \neq \angle 8$.

Kaasnurgad on võrdsed.

Ainult paralleelseil sirgeil on see omadus. Mitteparalleelsete sirgete kohta pole see maksev. Joonisel 56 on kujutatud kaks mitteparalleelset sirget, võime näha, et kaasnurgad pole seal võrdsed.

Põiknurgad on võrdsed, kui sirged on paralleelsed. See järeldub paralleelsete sirgete korral kaasnurkade võrdsusest, sest siis on

$$\angle 2 = \angle 6,$$

$$\text{kuid } \angle 2 = \angle 4,$$

sest 2 ja 4 on tippnurgad, eespool aga nägime, et tippnurgad on võrdsed.

Siit järeldamegi, et

$$\angle 4 = \angle 6.$$

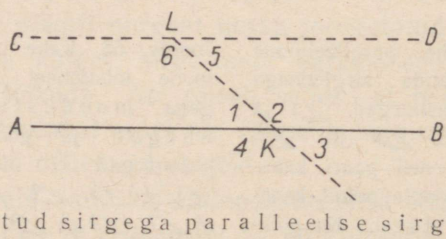
Samal viisil saame järeldada, et

$$\angle 3 = \angle 5, \quad \angle 1 = \angle 7 \text{ ja } \quad \angle 2 = \angle 8.$$

Nii on muidugi ainult siis, kui sirged on paralleelsed. Joonisel 56, kus sirged ei ole paralleelsed, pole põiknurgad võrdsed.

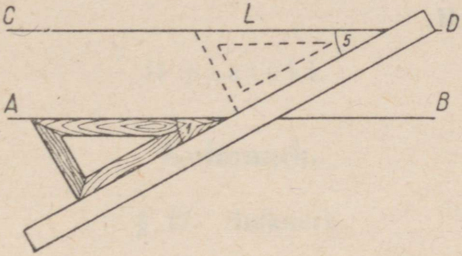
§ 16. Antud sirgega paralleelse sirge joonestamine.

Läbi antud punkti võib alati joonestada antud sirgega paralleelse sirge, kuid ainult ühe.



Joonis 57. Antud sirgega paralleelse sirge joonestamine. Kui tõmmata läbi punkti L sirge CD nii, et $\angle 5 = \angle 3$, siis on sirge CD paralleelne sirgega AB.

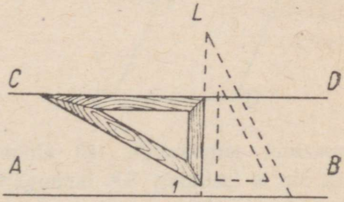
Läbi antud punkti L (joonis 57) tuleb joonestada sirge, mis on paralleelne antud sirgega AB. Joonestame läbi punkti L mingi sirge LK. Sirgete AB ja LK lõikepunktis K saame neli nurka, need on joonisel 57 märgitud numbritega. Nüüd



Joonis 58. Antud sirgega paralleelse sirge joonestamine joonlaua ja nurklaua abil.

joonestame läbi punkti L sirgjoone CD nii, et kaasnurgad 5 ja 3 oleksid võrdsed. Sirge CD on siis paralleelne sirgega AB Sirgjoont CD oleksime võinud joonestada ka nii, et võrduksid kaasnurgad 6 ja 4.

Kõige sobivam on niisuguse sirge joonestamist teostada joonlaua ja nurklaua abil, nagu on näidatud joonisel 58. Nurklaud asetatakse ühe küljega antud sirgele AB. Piki teist külge asetatakse joonlaud. Siis lükatakse nurklauda joonlauda mööda edasi, kuni see külg, mis asetses sirgel AB, jõuab punkti L. Tõmmates pliiatsiga seda külge mööda nurklaua uues asen-



Joonis 59. Antud sirgele paralleelse sirge joonestamine ainult nurklaua abil.

dis, saame sirge CD, mis on paralleelne sirgega AB ja läbib punkti L. Kaasnurgad 1 ja 5 on siin võrdsed, sest see on nurklaua üks ja seesama nurk, ainult joonisel teise kohta üle viidud.

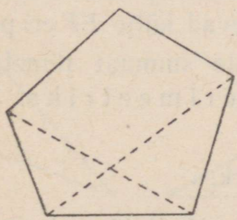
Võib aga ka toime tulla ilma joonlauata, ainult nurklauaga. Nimelt tõmbame nurklaua abil punktist L sirgele AB ristsirge LM (joonis 59) ja siis sama nurklaua abil ristsirge DC sirgele LM.

II peatükk.

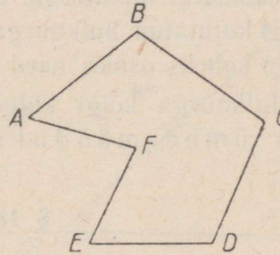
Kolmnurk.

§ 17. Hulknurk.

H u l k n u r g a k s nimetatakse kinnise murdjoonega moodustatud tasapinnalist kujundit. Murdjoont moodustavate lõikude arvu järgi nimetatakse hulknurka kolmnurgaks, neli-



Joonis 60. Kumer viisnurk. Kõik selle hulknurga diagonaalid asetsevad tema s e e s.



Joonis 61. Mittekumer kuusnurk. Diagonaal AE (joonisel ei ole teda joonestatud) asetseb v ä l j a s p o o l kuusnurka.

nurgaks, viisnurgaks jne. Joonisel 60 on kujutatud viisnurk, joonisel 61 kuusnurk. Naaberlülide lõikepunkte nimetatakse hulknurga t i p p u d e k s. Tippude arv võrdub lülide arvuga; näiteks viisnurgal on viis tippu ja viis lüli. Naabertippe ühendavaid lõike nimetatakse hulknurga k ü l g e d e k s. Kaht mitte ühel küljel asetsevat tippu ühendavat lõiku nimetatakse diagonaaliks. Joonisel 60 on kujutatud punktjoonega viisnurga kaks diagonaali. Näidake teisi diagonaale; kokku on neid viis.

Joonisel 60 on kujutatud kumer hulknurk, joonisel 61 aga mittekumer hulknurk. Igaüks eraldab silmaga kumera hulknurga mittekumerast. Mis on kumer hulknurk, seda võib defineerida nii:

kumeraks nimetatakse niisugust hulknurka, mille kõik diagonaalid asetsevad tema sees.

Joonisel 60 kujutatud viisnurga kõik diagonaalid asetsevad tema sees. Kuusnurgal (joonisel 61) ei asetse diagonaal *AE* tema sees (joonisel pole seda diagonaali joonestatud). Seepärast on see hulknurk mittekumer.

Kumer hulknurk asetseb alati ühel pool oma igast küljest. Mittekumeral hulknurgal ei ole seda omadust. Näiteks joonisel 64 kujutatud hulknurga külg *EF* lõikab pikendamisel hulknurga kaheks osaks, need osad asetsevad külje *EF* eri pooltel.

Hulknurga kõigi külgede pikkuste summat nimetatakse tema ümbermõõduks ehk perimeetriks.

§ 18. Kolmnurk.

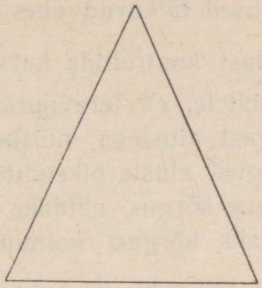
Kolmnurki liigitatakse nende kuju järgi järgmiselt.

Kolmnurka nimetatakse isekülgseks, kui tal ei ole võrdseid külgi (joonis 62); võrdhaarseks, kui tal on kaks võrdset külge (joonis 63), ja võrdkülgseks, kui tal on kõik kolm külge võrdsed (joonis 64).

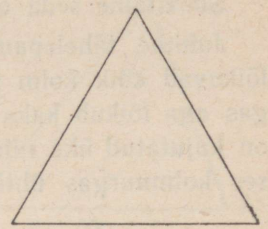
Kolmnurka nimetatakse teravnurkseks, kui tema kõik nurgad on teravnurgad (joonised 62, 63, 64); täisnurkseks, kui tema nurkade hulgas leidub üks täisnurk (joonis 65), ja nürinurkseks, kui tema nurkade hulgas esineb nürinurk (joonis 66).

N ä i d e. Joonestage ruutu diagonaal. See jaotab ruudu kaheks kolmnurgaks. Kumbki neist kolmnurkadest on täisnurkne ja ühtlasi võrdhaarne.

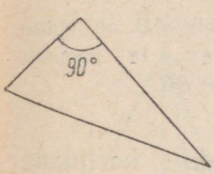
Joonis 62. I s e k ü l g n e k o l m n u r k. Tema kõik kolm külge on pikkuselt erinevad.



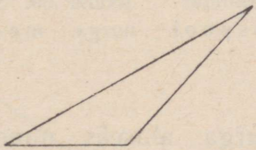
Joonis 63. V õ r d h a a r n e k o l m n u r k. Tema kaks külge on võrdsed.



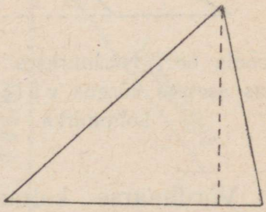
Joonis 64. V õ r d k ü l g n e k o l m n u r k. Tema kõik kolm külge on võrdsed.



Joonis 65. T ä i s n u r k n e k o l m n u r k. Üks tema nurkadest on täisnurk.



Joonis 66. N ü r i n u r k n e k o l m n u r k. Üks tema nurkadest on nürinurk.



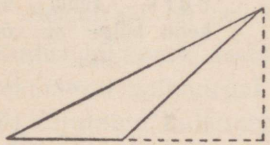
Joonis 67. Sellel joonisel punktiiriga joonestatud sirglõik on kolmnurga k õ r g u s.

Ristlõiku, mis on lastud kolmnurga ühest tipust (ükskõik missugusest) vastasküljele või selle pikendile (joonis 67), nimetatakse kolmnurga k õ r g u s e k s, ja külge, millele on lastud ristjoon, nimetatakse kolmnurga a l u s e k s. Tähendab, kolmnurgal on kolm kõrgust ja vastavalt kolm alust. Juhime tähelepanu kolmnurga kõrguste märkimisväärsele omadusele:

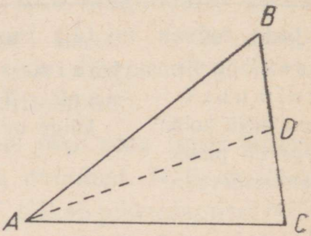
kolmnurga kõik kõrgused lõikuvad ühes punktis.

Soovitame seda omadust kontrollida katsetega.

Juhime tähelepanu sellele, et teravnurkses kolmnurgas lõikuvad kõik kolm kõrgust alustega, nürinurkses kolmnurgas aga lõikub kaks kõrgust aluste pikenditega. Joonisel 68 on kujutatud üks niisugune kõrgus, näidake teine. Täisnurkses kolmnurgas ühtib kaks kõrgust kolmnurga külgedega.



Joonis 68. Nürinurkses kolmnurgas asetseb kõrgus väljaspool kolmnurka.



Joonis 69. Sirglõik AD on kolmnurga mediaan; ta poolitab külje BC.

Võrdhaarse kolmnurga aluseks nimetatakse harilikult seda külge, millel ei ole võrdset, ja tipuks nimetatakse seda tippu, mis asetseb aluse vastas; võrdhaarse kolmnurga kõrguseks nimetatakse harilikult seda kõrgust, mis on tõmmatud sellest tipust.

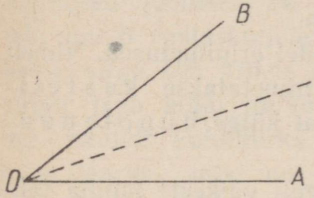
Lõiku, mis ühendab kolmnurga mistahes tippu vastaskülje keskpunktiga, nimetatakse kolmnurga mediaaniks. Kolmnurgal on kolm mediaani. Kolmnurga ABC üks mediaan AD (joonis 69) on kujutatud joonisel punktjoonega.

Täheldame mediaanide tähtsa omaduse:

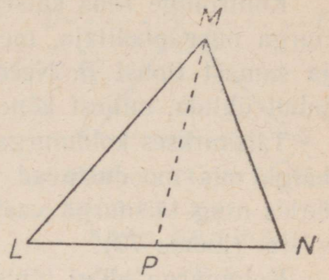
kõik kolm mediaani lõikuvad ühes punktis kolmnurga sees.

Kontrollige seda omadust katsega.

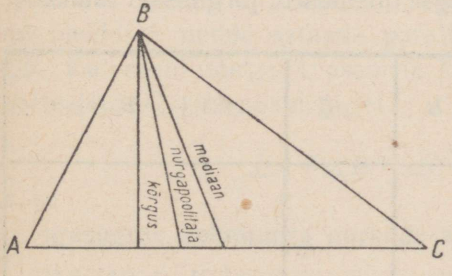
Kiirt OC (joonis 70), mis poolitab mingi nurga AOB, nimetatakse n u r g a p o o l i t a j a k s ehk bisektoriks.



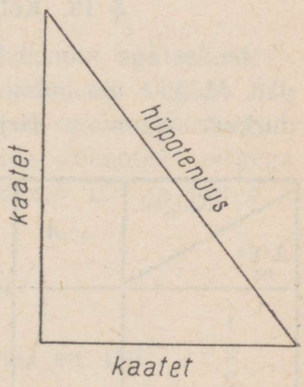
Joonis 70. Kiir OC on nurga AOB poolitaja ehk bisektor $\angle AOC = \angle COB$.



Joonis 71. Sirglõik MP on kolmnurga nurgapoolitaja; ta poolitab kolmnurga nurga LMN.



Joonis 72. Kolmnurga mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus.



Joonis 73. Täisnurkse kolmnurga küljed.

K o l m n u r g a n u r g a p o o l i t a j a k s nimetatakse kolmnurga nurga poolitaja l õ i k u, mis asetseb tipu ja selle tipu vastaskülje vahel.

Joonisel 71 on sirglõik *MP* kolmnurga *LMN* üks nurgapoolitaja. Täheldame, et

kolmnurga kõik nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis.

Kontrollige seda katsega. Joonisel 72 on kujutatud kolmnurga nurgapoolitaja, mediaan ja kõrgus väljuvatena ühest ja samast tipust *B*. Need kolm sirglõiku võivad ainult erijuhul ühtida, millest kõneleme hiljem.

Täisnurkses kolmnurgas on külgedel erinimetused. Nimelt külgi, mis moodustavad täisnurga, nimetatakse kaatetiteks ning täisnurga vastas asetsevat külge hüpotenuusiks (joonis 73).

Kolmnurga külgi tähistatakse sageli väikeste ladina tähtedega, vastasnurkade tippe aga vastavate suurte tähtedega. Sõna «kolmnurk» tähistatakse sageli sümboliga $\triangle$.

§ 19. Kolmnurga nurkade summa.

Joonestage mõned kujult ja suuruselt erinevad kolmnurgad. Mõõtke iga kolmnurga nurgad ja leidke iga kolmnurga nurkade summa. Kirjutage tulemused järgmisse tabelisse:

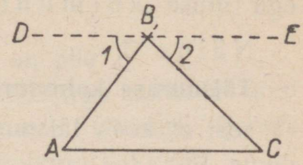
Nurgad / $\triangle$-ga nr.	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle A + \angle B + \angle C$
1				
2				
3				
4				
5				

Kokku ....

Keskmine ....

Teid üllatab arvatavasti, et see summa on iga kord kas 180° või siis peagu 180°, kas väikese puudujäägiga või liiaga. Kui arvutame veel tulemuste keskmise, siis lõpptulemus arvatavasti ei erinegi 180°-st. Et täpselt teada saada, kui suur on kolmnurga nurkade summa, selleks arutleme nõnda:

Võtame ükskõik missuguse kolmnurga, näiteks selle, mis on kujutatud joonisel 74. Tõmbame läbi tipu B vastasküljele AC paralleelse sirge DE. Ühele poole seda sirget jääb kolm nurka: nurk B, mis kuulub kolmnurka ABC, ja kaks nurka, mis on märgitud numbritega 1 ja 2. Nende kolme nurga summa on, nagu teame (§ 12), 180°:



Joonis 74. Teoreem kolmnurga nurkade summast: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

$$\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180°.$$

Kuid $\angle 1 = \angle A$, sest need on põiknurgad, mis tekkisid paralleelsete sirgete AC ja DE lõikamisel kolmanda sirgega AB.

Edasi näeme, et $\angle 2 = \angle C$, sest need on ka põiknurgad, mis tekkisid nende samade paralleelide lõikamisel sirgega CB. Kui nüüd nurga 1 asemele kirjutame $\angle A$ ja nurga 2 asemele $\angle C$, siis saamegi, et

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°,$$

s. t.

igasuguse kolmnurga nurkade summa on 180°.

Näide 1. Kolmnurga üks nurk on 24°, teine 110°. Leida kolmas nurk.

Lahendus. Kahe antud nurga summa on 24° + 110° = 134°. Järelikult kolmas nurk on 180° — 134° = 46°.

Näide 2.

Kolmnurgas saab olla ainult üks täisnurk.

Tõepoolest, kaks täisnurka moodustaksid juba 180° ning kolmanda nurga jaoks ei jääks midagi üle. Samal põhjusel ei saa täisnurkses kolmnurgas olla nürinurka ega üldse kolmnurgas kaht nürinurka.

Näide 3.

Täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa on 90°,

sest et koos täisnurgaga (90°) nende summa peab võrduma 180°.

§ 20. Aksioomid, teoreemid ja tõestused.

Kolmnurga nurkade summa kõrvalekaldumine 180°-st, mida täheldasime katsete juures, seletub sellega, et meie joonised ja mõõtmised sisaldavad mõningaid eksimusi.

Piirduksime me ainult katsetega, siis meil ei oleks veenvat kindlust selle kohta, et igasuguse kolmnurga nurkade summa võrdub täpselt 180°. Selle kindluse saame arutlusega.

Arutlus, mis selgitab mingisuguse tõe, kannab tõestuse nimetust; tõestatavat tõde nimetatakse teoreemiks. Teoreemi tõestamisel tuleb meil toetuda varem kindlaks tehtud omadustele. Äsjatõestatud teoreemis kolmnurga nurkade summa kohta toetusime § 12 ja § 15 selgitatud omadustele.

Kuid mõned tõed peame võtma kõigi edasiste arutluste aluseks, s. t. peame neid tunnustama ilma tõestuseta. Ilma tõestuseta tunnustatavaid tõdesid nimetatakse aksioomideks. Aksioomina võtsime näiteks niisuguse iseenesest mõistetava tõe: ristlõik on lühem kaldlõigust.

§ 21. Hulknurga nurkade summa.

Võtame mingisuguse kumera nelinurga (joonis 75). Jaotame selle diagonaaliga AC kaheks kolmnurgaks. Kummagi kolmnurga nurkade summa on 180°. Tähendab, mõlema kolmnurga nurkade summa võrdub $180° \cdot 2 = 360°$.

Et nurgad 1 ja 3 koos moodustavad nelinurga nurga A, ja nurgad 2 ja 4 annavad nurga C, siis

$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 180° \cdot 2 = 360°,$$

s. t. me tõestasime järgmise teoreemi:

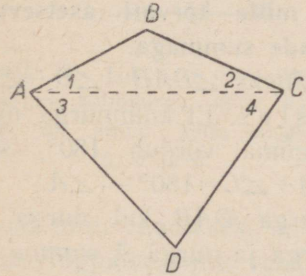
kumera nelinurga nurkade summa on 360°.

Täpselt samuti leiame, et kumera viisnurga nurkade summa on $180° \cdot 3 = 540°$. Tõepoolest, kumer viisnurk (joonis 76) jaotub diagonaalidega kolmeks kolmnurgaks.

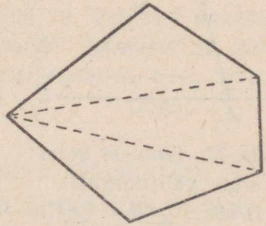
Täpselt samuti jaotub kuusnurk diagonaalidega neljaks kolmnurgaks, seitsenurk — viieks kolmnurgaks jne. Üldse on kolmnurkade arv, milleks jaotub kumer hulknurk ühest tipust väljuvate diagonaalidega, kahe võrra väiksem külgede arvust.

Seepärast kehtib järgmine teoreem:

kumera hulknurga nurkade summa võrdub 180° ja kahe võrra vähendatud külgede arvu korrutisega.



Joonis 75. Teoreem kumera nelinurga nurkade summast:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.



Joonis 76. Kumera viisnurga nurkade summa on $180° \cdot 3 = 540°$

Kui tähistame hulknurga külgede arvu tähega n ja nurkade summa tähega s, siis võime anda tema nurkade arvutamiseks järgmise valemi:

$$s = 180° \cdot (n - 2).$$

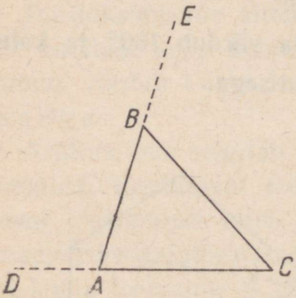
Näide. Leiame kumera kaksteistnurga nurkade summa. Asendades valemis tähe n arvuga 12, saame:

$$s = 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (12 - 2) = 180° \cdot 10 = 1800°.$$

Märkus. Teoreemis kõneldakse ainult kumeratest hulknurkadest; mittekumerat hulknurka pole mõnikord võimalik diagonaalidega kolmnurkadeks jaotada, sest mõned diagonaalid ei asetse selle hulknurga sees.

§ 22. Kolmnurga välisnurk.

Kolmnurga välisnurgaks nimetatakse niisugust nurka, mis on kolmnurga mingisuguse (sise-) nurga kõrvunurk. Kolmnurga nurkade eraldamiseks tema välisnurkadest nimetatakse esimesi tema sisenurkadeks. Joonisel 77 on kolmnurga ABC $\angle DAB$ ja $\angle CBE$ välisnurgad.



Joonis 77. Teoreem kolmnurga välisnurgast: $\angle DAB = \angle B + \angle C$.

Teoreem. **Kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.**

Nii näiteks $\angle DAB = \angle B + \angle C$.

Tõestus. Et kolmnurga nurkade summa võrdub 180°, siis

$$\angle B + \angle C = 180° - \angle A.$$

Kuid nurga DAB kui nurga A kõrvunurga ja nurga A summa on samuti 180°, seega

$$\angle DAB = 180° - \angle A.$$

Võrreldes saadud võrdusi, saame järgmise tulemuse:

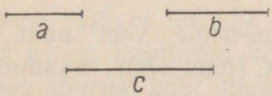
$$\angle DAB = \angle B + \angle C.$$

§ 23. Kolmnurga konstrueerimine kolme külje järgi.

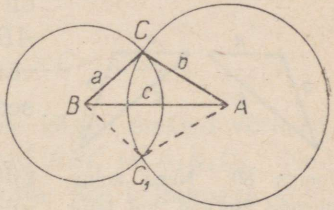
Ülesanne 11. Konstrueerime kolmnurga antud kolme külje a, b ja c järgi.

Küljed a, b, c võivad olla antud kas lõikudena joonisel (näiteks joonis 78) või mõõtühikuis (näiteks $a=10$ mm, $b=13$ mm, $c=20$ mm). Seejuures peab suurim antud lõikudest olema väiksem kui teise kahe summa; meie näites on seda nõuet silmas peetud: 20 mm < 10 mm + 13 mm. See nõue tuleneb sellest, et kolmnurga üks külg peab olema lühem kui kaks teist külge kokku (sirgjoon on lühem kui murdjoon). Kui mainitud nõuet ei ole silmas peetud, siis ei ole ülesanne lahenduv. On aga see nõue täidetud, siis lahendame ülesande järgmiselt.

Kanname mistahes sirgjoonele sirkli või mõõtjoonlaua abil ühe antud külgedest, näiteks c (joonis 79). Saame lõigu AB. Selle ühest otspunktist B kui keskpunktist joonestame ring-



Joonis 78. Ülesanne: konstrueerime kolmnurga, mille külgedeks on antud kolm sirglõiku a, b ja c.



Joonis 79. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus ja kolmnurga konstrueerimine tema kolme külje järgi.

joone, mille raadiuseks on antud lõik a. Otspunktist A joonestame ringjoone, mille raadiuseks on antud lõik b. Need ringjooned lõikuvad meie joonisel kahes punktis C ja C_1. Võtame ühe neist, näiteks C, ja ühendame selle lõigu AB otspunktidega. Saame kolmnurga ABC, mille küljed on võrdsed antud lõikudega a, b ja c. Tõepoolest, võtsime $AB=c$; et BC on üks esimese ringjoone raadiusi, siis $BC=a$; täpselt samuti arutledes saame, et $AC=b$.

On ilmne, et kolmnurga ABC_1 küljed on võrdsed kolmnurga ABC külgedega. On samuti ilmne, et kui joonis 79 sirgjoont AB mööda kokku murda, et siis kolmnurgad ABC

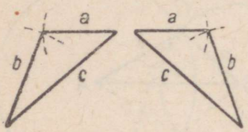
ja ABC_1 ühtivad. Teisiti öeldes, need kolmnurgad on ühesugused ehk, nagu öeldakse geomeetrias, k o n g r u e n t s e d.

M ä r k u s. Kahe ringjoone täielik väljajoonestamine ei ole vajalik, on küllalt, kui joonestada nende kaared nii pikalt, et nad lõikuksid.

§ 24. Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus.

Kaht tasapinnalist kujundit nimetatakse kongruentseteks, kui nad teineteisele asetamisel võivad täielikult ühtida.

N ä i t e i d. Võrdsete külgedega ruudud on kongruentsed; võrdsete raadiustega ringid on kongruentsed; erinevate raadiustega ringid ei ole kongruentsed. Eelmises paragrahvis oli meil kaks kolmnurka ABC ja ABC_1 (joonis 79) kolme vastavalt võrdse küljega, need olid kongruentsed.



Joonis 80. Need kolmnurgad ühtivad, kui teine neist ümber pöörata.

Konstrueerime veel paar kolmnurka ABC (joonis 80). Saadud kolmnurgad erinevad kolmnurgast ABC joonisel 79 ainult oma asendi poolest. Kumbagi neist saab paigutada kolmnurga ABC peale kas samapidiselt või ümberpööratult, nii et nad kolmnurgaga ABC täiesti ühtivad (võrrelda mõlemaid kolmnurki joonisel 80).

Teostage veel niisugune katse. Võtke kolm ükskõik kui pikka kepikest (ainult et suurim neist oleks kahe teise summast väiksem). Koostage nendest kolmnurki ja te näete, et iga kord saate ühe ja sama kolmnurga mitmesuguses asendis.

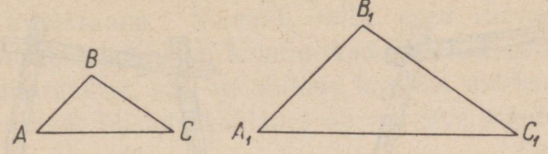
Need katsed juhivad meid niisugusele järeldusele:

kui ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega, siis on niisugused kolmnurgad kongruentsed.

ehk lühemalt

kolmnurgad on kongruentsed kolme külje järgi.

Kahe kolmnurga külgede võrdsus on seega kolmnurkade eneste kongruentsuse (s. t. ühtivuse) tunnuseks. Siit järeldub ka vastavate külgede vastas asetsevate nurkade võrdsus.

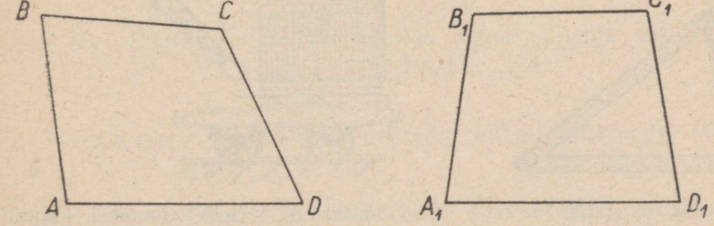


Joonis 81. Nende kahe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed, kuid kolmnurgad ei ole kongruentsed.

Märkus 1. Kui kahe kolmnurga ABC ja $A_1B_1C_1$ nurgad on vastavalt võrdsed, s. t.

$$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1,$$

siis sellest veel ei järeldu, et nende küljed oleksid võrdsed. Joonisel 81 on kujutatud kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$. Neil on erinev suurus, kuid ühesugune kuju: ühe kolmnurga kolm

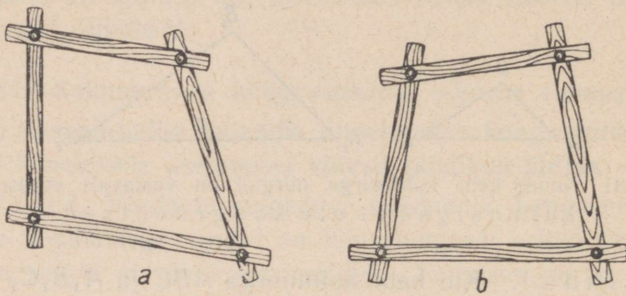


Joonis 82. Nende kahe nelinurga küljed on vastavalt võrdsed, kuid need nelinurgad ei ole kongruentsed.

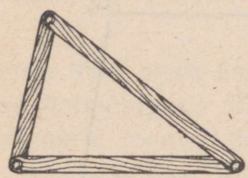
nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme nurgaga, kuid need kolmnurgad ei ole kongruentsed.

Märkus 2. Kaks nelinurka kolme ja isegi nelja vastavalt võrdse küljega võivad olla teineteisega mittekongruentsed. Joonisel 82 on kujutatud nelinurgad $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$

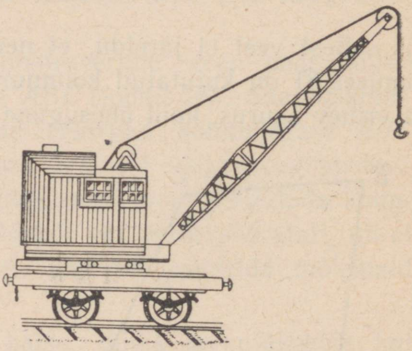
nelja vastavalt võrdse küljega $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ jne. Need nelinurgad ei ole kongruentsed: nende vastavad nurgad ei ole võrdsed.



Joonis 83. Nelja liistu m u u t l i k ü h e n d u s: šarniirnelinurk võib muuta oma kuju.



Joonis 84. K o l m e l i i s t u m u u t m a t u ü h e n d u s: selle šarniirkolmnurga kuju ei saa muuta.



Joonis 85. Sellel joonisel kujutatud t õ s t e k r a a n a on kindel, sest et metallsõrestik koosneb ainult k o l m n u r k a d e s t.

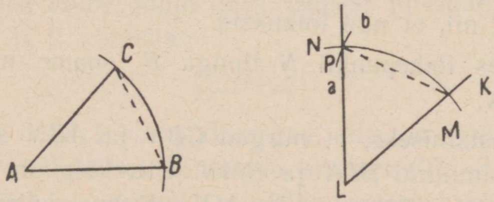
Neljast šarniiridega (liigenditega) ühendatud liistust ehitatud nelinurka (joonis 83a) võib muuta teiseks nelinurgaks (joonis 83b). Selleks piisab ühe nurga suuruse muutmisest; ülejäänud nurgad muutuvad iseenesest.

Kolmnurga kuju aga ei saa tema külgede šarniirühenduse puhul muuta (joonis 84). Öeldakse, et kolmnurk kujutab endast m u u t m a t u t ja nelinurk m u u t l i k k u ühendust.

N ä i d e. Joonisel 85 on kujutatud metallvarbadest kokkupandud tõstekraana. Sõrestik, mille need varvad moodustavad, koosneb tervenisti kolmnurkadest. Kui sõrestik koostada nelinurkadest, siis on ehituse tugevus märksa väiksem, sest et varbade ühenduskohtades on nurkade muutumine võimalik.

§ 25. Nurga konstrueerimine ja poolitamine.

Rakendame meie poolt kindlaks tehtud kolmnurkade kongruentsuse tunnust praktiliselt tähtsate konstruktsioonide teostamiseks.



Joonis 86. Ü l e s a n n e: konstrueerida antud nurgaga võrdne nurk. L a h e n d u s: $\angle PLM = \angle A$.

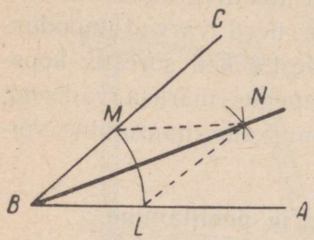
Ü l e s a n n e 12. Konstrueerida antud nurgaga võrdne nurk.

Olgu tarvis konstrueerida nurk, mis võrdub antud nurgaga A (joonis 86); siis võib ette anda konstrueeritava nurga tipu L ja ühe haara LK suuna.

Ülesande võib lahendada malli abil, kuid niisugune lahendus ei ole täpne. Seepärast toimime järgmiselt: antud nurga tipust A kui keskpunktist joonestame kaare vabalt valitud raadiusega. Selle lõikumisel nurga A haaradega saame punktid B ja C. Sirkli sama avaga joonestame punktist L kui keskpunktist kaare MN. Võtame sirklisse kauguse punk-

TRÜ Raamatukogu

tide B ja C vahel ja sirkli saadud avaga joonestame punktist M kui keskpunktist kaare ab. Kaarte ab ja MN lõikepunkti P ühendame tipuga L. Nurk PLM võrdub nurgaga A.



Joonis 87. Ülesanne: poolitada antud nurk ABC.

Tõepoolest, kolmnurgad ABC ja MLP on kongruentsed kolme külje järgi. Nende nurgad on vastavalt võrdsed, tähendab, $\angle PLM = \angle A$.

Ülesanne 13. Poolitada antud nurk ABC (joonis 87). Joonestame punktist B vabalt valitud raadiusega kaare; see lõikub nurga haaradega punktides L ja M. Edasi joonestame vabalt valitud raadiusega (parem küll endise raadiusega) kaared punktidest L ja M nii, et nad lõikuksid.

Ühendades lõikepunkti N tipuga B, saame nurga ABC poolitaja BN.

Selle tõestamiseks, et nurgad CBN ja ABN on võrdsed, vaatleme kolmnurki BLN ja BMN. Üks külg on neil ühine; peale selle $BL=BM$ ja $LN=MN$. Kolme külje järgi on kolmnurgad BLN ja BMN kongruentsed. Sellest järeldub, et

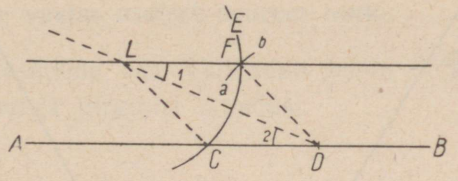
$$\angle CBN = \angle ABN.$$

Märkus. Kirjeldatud viisil võib $\angle ABN$ ja $\angle CBN$ uuesti poolitada, nõnda et $\angle ABC$ jaotub neljaks võrdseks osaks. On selge, et võime samuti jaotada $\angle ABC$ 8-ks, 16-ks jne. võrdseks osaks. Kuid 3-ks, 5-ks, 6-ks, 7-ks jne. osaks saab nurka jaotada joonlaua ja sirkli abil ainult ligikaudselt.

§ 26. Paralleelsirge konstrueerimine.

Kui on tarvis konstrueerida läbi punkti L sirget, mis on paralleelne sirgega AB, siis joonestame ümber punkti L

(joonis 88) vabalt valitud raadiusega kaare CE, mis lõikub sirgega AB punktis C. Sama raadiusega joonestame punktist C kaare, mis lõikub sirgega AB punktis D, ja punktist D kaare ab, mis lõikub kaarega CE punktis F. Joonestame sirge LF. See on paralleelne sirgega AB.



Joonis 88. Ü l e s a n n e: läbi punkti L joonestada sirge, mis on paralleelne sirgega AB.

Tõepoolest, võrdhaarsed kolmnurgad LCD ja LFD on kongruentsed kolme külje järgi. Sellest järeldub muuseas ka nurkade 1 ja 2 võrdsus:

$$\angle 2 = \angle 1.$$

Nurgad 1 ja 2 on põiknurgad, mis on tekkinud sirgete AB ja LF lõikamisel kolmanda sirgega DL. Kuid varem (§ 15 lõpus) oli öeldud, et põiknurgad on võrdsed ainult paralleelsete sirgete puhul. Tähendab, sirged LF ja AB on paralleelsed.

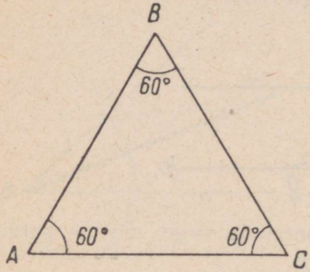
See konstruktsiooniviis on sellepoolest hea, et ta teostub sirkli ühe avaga.

§ 27. Võrdkülgne kolmnurk. Täisnurkne kolmnurk nurgaga 30°.

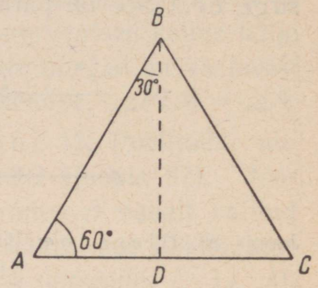
Võrdkülgne kolmnurk on samaaegselt ka võrdhaarne, kusjuures tema iga külg võib olla aluseks. Järelikult on kõik tema nurgad omavahel võrdsed: $\angle A = \angle B = \angle C$ (joonis 89). Nende summa on 180°; seepärast

võrdkülgse kolmnurga iga nurk on 60°.

Tõmbame võrdkülgse kolmnurga mediaani BD (joonis 90). Lõik AD võrdub lõigu AC poolega, järelikult ka AB poolega. Et selle kolmnurga mediaan on ühtlasi ka nurgapoolitaja, siis $\angle ABD = 30°$, ja et BD on ühtlasi kõrgus, siis $\angle BDA = 90°$.

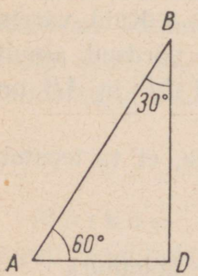


Joonis 89. Võrdkülgse kolmnurga iga nurk on 60°.



Joonis 90. Võrdkülgse kolmnurga mediaan ühtib tema nurgapoolitajaga ja sellepärast... (vt. joonis 91).

Vaatleme nüüd eraldi $\triangle ABD$ (joonis 91). See on täisnurkne kolmnurk; üks tema teravnurkadest on 30°, teine 60°. Kaatet AD võrdub hüpotenuusi poolega.



Joonis 91. ...täisnurkses kolmnurgas, mille üks nurk on 30°, selle nurga vastaskaatet võrdub hüpotenuusi poolega: $AD = \frac{1}{2}AB$.

Nii näeme, et

täisnurkse kolmnurga 30-kraadise nurga vastaskaatet võrdub hüpotenuusi poolega.

See omadus on igal täisnurksel kolmnurgal, mille üks nurk on 30°, sest niisugusel kolmnurgal on alati ühed ja samad nurgad 90°, 60° ja 30° ning ta võib erineda joonisel 91 kujutatud kolmnurgast ainult suuruse, kuid mitte kuju poolest.

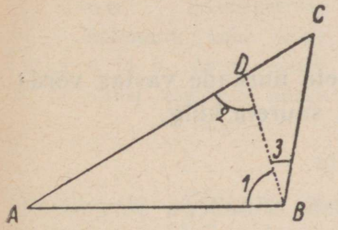
Täpselt samuti: kui on teada, et täisnurkse kolmnurga ABD kaatet AD on kaks korda väiksem hüpotenuusist AB, siis võib öelda, et kaateti AD vastasnurk võrdub 30°.

§ 28. Kolmnurga külgede ja nurkade vaheline sõltuvus.

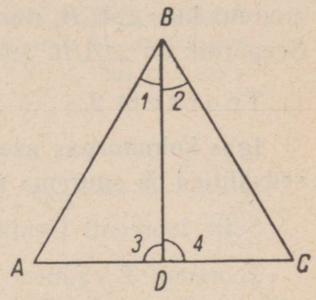
Teoreem 1.

Kui kolmnurgas on võrdseid külgi, siis nende vastasnurgad on võrdsed; kui kolmnurgas ei ole võrdseid külgi, siis suurema külje vastas asetseb suurem nurk.

Teoreemi esimene osa väljendab teiste sõnadega võrdhaarse kolmnurga järgmist omadust.



Joonis 92-a. Kolmnurga suurema külje vastas asetseb suurem nurk: $AC > AB$ ja seepärast $\angle ABC > \angle ACB$.



Joonis 92-b. Võrdhaarse kolmnurga omadused: 1) $\angle A = \angle C$, 2) BD — mediaan, nurgapoolitaja ja kõrgus.

Olgu kolmnurk ABC (joonis 92-b) võrdhaarne ($AB = BC$). Tõmbame mediaani BD; saame kaks kolmnurka ABD ja DBC, kus BD on nende ühiseks küljeks. Saame, et $AD = DC$, sest D on AC keskpunkt, ja et $AB = BC$ kui võrdhaarse kolmnurga haarad. Kolmnurgad ABD ja DBC on kongruentsed kolme külje järgi. Seega $\angle A = \angle C$, mis ütleb, et

võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

Teoreemi teine osa väidab, et kui kolmnurga ABC külg AC on suurem küljest AB (joonis 92-a), siis on tema vastasnurk ABC suurem nurgast ACB. Joonisel 92-a kujutatud kolmnurgal on see silmaga näha, kuid meil tuleb tõestada, et see omadus on igal kolmnurgal.

Tõestus. Pikemale küljele AC asetame lõigu AD, mis võrdub väiksema küljega AB. Ühendame punktid B ja D. Saame võrdsed nurgad 1 ja 2 ($\triangle ABD$ on võrdhaarne). Kolmnurga BDC suhtes on $\angle 2$ välisnurk; seega ta võrdub $\angle ACB + \angle 3$ (§ 22). Tähendab, $\angle 2$ on suurem kui $\angle ACB$ eraldi võetuna. Nurgaga 2 võrdne $\angle 1$ on samuti suurem kui $\angle ACB$, nurk ABC on aga veel suurem kui $\angle 1$. Seepärast on $\angle ABC$ suurem kui $\angle ACB$.

Teoreem 2.

Igas kolmnurgas asetsevad võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed ja suurema nurga vastas suurem külg.

Selle teoreemi tõestust me ei esita.

Teoreemi 2 esimest osa võib teiste sõnadega järgmiselt väljendada:

kui kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis on see kolmnurk võrdhaarne.

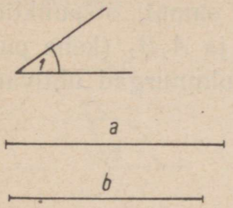
On selge, et kui kolmnurga kõik kolm nurka on võrdsed, et siis on ka tema kõik kolm külge võrdsed, s. t. et siis on ta võrdkülgne.

§ 29. Kolmnurga konstrueerimine kahe külje ja nende vahel asetseva nurga järgi.

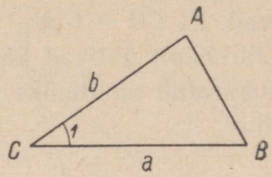
Ülesanne 14. Konstrueerida kolmnurk antud kahe külje a ja b ning nende vahel asetseva nurga 1 järgi (joonis 93).

Konstrueerime nurga C (joonis 94), mis võrdub antud nurgaga (kuidas konstrueerida nurka, on seletatud ülesandes 12,

§ 25); selle haaradele paigutame lõigud $CA = b$ ja $CB = a$. Ühendame nende otspunktid A ja B, ja ülesanne on lahendatud. Kogemus näitab, et igat niiviisi konstrueeritud kolm-

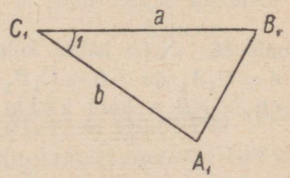


Joonis 93. Ülesanne: konstrueerida kolmnurk kahe külje a ja b ning nende vahel asetseva nurga 1 järgi.



Joonis 94. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus.

nurka on võimalik paigutada kolmnurga ABC peale kas samapidiselt või ümberpööratult, nii et nad kolmnurgaga ABC täiesti ühtivad (võrrelda kolmnurki joonisel 94 ja 95). See juhib meid kolmnurkade kongruentsuse teisele tunnusele.



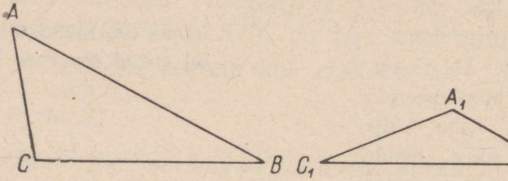
Joonis 95. Sama ülesande teine lahendus. Kolmnurka $A_1B_1C_1$ saab paigutada kolmnurgale ABC, nii et nad täiesti ühtivad, kui $\triangle A_1B_1C_1$ enne ümber pöörata.

§ 30. Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus.

Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel asetsev nurk on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe külje ja nende vahel asetseva nurgaga, siis on niisugused kolmnurgad kongruentsed.

Tõestame seda. Olgu meil teada, et kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (joonised 94 ja 95) $CA = C_1A_1$, $CB = C_1B_1$ ja

$\angle C = \angle C_1$. Et nurgad C ja C_1 on võrdsed, siis saab neid teineteisele paigutada, nii et nad ühtivad. Teeme seda nii, et külg CA satub küljele C_1A_1 ning CB küljele C_1B_1. Et küljed CA ja C_1A_1 on võrdsed, siis nende otspunktid A ja A_1 ühtivad. Et $CB = C_1B_1$, siis ühtivad samuti otspunktid B ja B_1. Järelikult ühtivad ka küljed AB ja A_1B_1 (kahe punktiga on määratud ainult üks sirglõik). Kolmnurgad ühtivad täielikult.



Joonis 96. Neis kahes kolmnurgas on kaks külge vastavalt võrdsed ($CA = C_1A_1$ ja $CB = C_1B_1$) ja ühe külje vastasnurgad on võrdsed ($\angle B = \angle B_1$), kuid kolmnurgad ei ole kongruentsed.

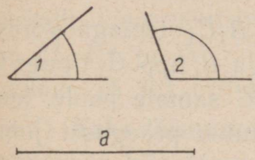
Siin selgitatud kolmnurkade kongruentsuse teist tunnust (esimest vaata § 24) võib lühidalt sõnastada järgmiselt:

kolmnurgad on kongruentsed kahe külje ja nende vahel asetseva nurga järgi.

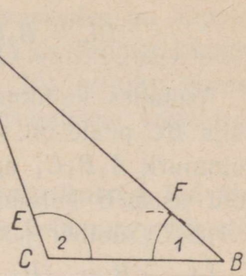
M ä r k u s. Sõnad «nende vahel» on olulised; kui kahe kolmnurga vastavalt võrdsed nurgad ei asetse vastavalt võrdsete külgede vahel, vaid vastavalt võrdsete külgede vastas, siis võivad kolmnurgad olla ka mittekongruentsed. Nii on joonisel 96 kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$, kus ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ($CA = C_1A_1$ ja $CB = C_1B_1$). Külje CA vastasnurk B võrdub nurgaga B_1, mis asetseb külje C_1A_1 vastas. Ja ometi pole kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ kongruentsed.

§ 31. Kolmnurga konstrueerimine külje ja kahe nurga järgi.

Ülesanne 15. Konstrueerida kolmnurk kahe antud nurga ja nende nurkade tippe ühendava külje a järgi ($\angle 1$ ja $\angle 2$ joonisel 97).



Joonis 97. Ülesanne: konstrueerida kolmnurk kahe antud nurga 1 ja 2 ning nende nurkade tippe ühendava külje a järgi.



Joonis 98. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus.

Joonestame ükskõik kuhu lõigu $BC = a$ (joonised 98 ja 99). Tema otspunktide B ja C juurde konstrueerime nurgad $CBF = \angle 1$ ja $BCE = \angle 2$. Pikendame nende nurkade haarasid BF ja CE kuni nende omavahelise lõikumiseni, ja ülesanne on lahendatud. Kogemus näitab, et kõik niiviisi saadavad kolmnurgad on kongruentsed. See juhib meid kolmnurkade kongruentsuse kolmandale tunnusele.

Joonis 99. Sama ülesande teine lahendus. $\triangle A_1B_1C_1$ ühtib kolmnurgaga ABC, kui ta enne ümber pöörata ja siis $\triangle ABC$ peale paigutada.

§ 32. Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus.

Kui ühe kolmnurga külg ja tema kaks lähisnurka võrduvad

vastavalt teise kolmnurga küljega ja tema kahe lähisnurgaga, siis niisugused kolmnurgad on kongruentsed.

Tõestame seda.

Olgu kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (joonised 98 ja 99)

$$BC = B_1C_1; \ \angle B = \angle B_1; \ \angle C = \angle C_1.$$

Asetades kolmnurga $A_1B_1C_1$ külje B_1C_1 temaga võrdse külje BC peale nii, et tipp B_1 ühtib tipuga B, tipp C_1 tipuga C, kolmnurk $A_1B_1C_1$ aga asetub küljest BC samale poole, kuspool asetseb kolmnurk ABC. Selleks tuleb praegusel juhul $\triangle A_1B_1C_1$ ümber pöörata.

Et $\angle B = \angle B_1$, siis külg B_1A_1 satub küljele BA; et $\angle C = \angle C_1$, siis külg C_1A_1 satub küljele CA; tähendab tipp A_1 ühtib tipuga A (kaks sirgjoont lõikuvad ainult ühes punktis). Kolmnurk $A_1B_1C_1$ ühtib kolmnurgaga ABC, s. t. need kolmnurgad on kongruentsed.

Siin selgitatud kolmnurkade kongruentsuse tunnust võib lühidalt sõnastada nii:

kolmnurgad on kongruentsed külje ja tema lähisnurkade järgi.

§ 33. Täisnurksete kolmnurkade kongruentsuse tunnused.

Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed:

I) **kui ühe kolmnurga kaatetid on teise kolmnurga kaatetitega vastavalt võrdsed;**

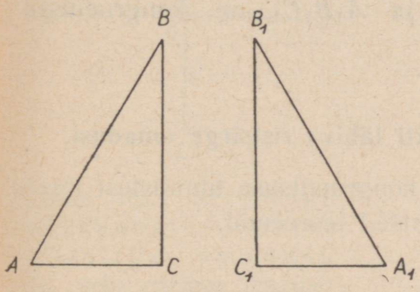
II) **kui ühe kolmnurga kaatet ja selle lähisteravnurk on teise kolmnurga kaateti ja selle lähisteravnurgaga vastavalt võrdsed;**

III) **kui ühe kolmnurga kaatet ja selle vastasnurk on teise kolmnurga kaateti ja selle vastasnurgaga vastavalt võrdsed;**

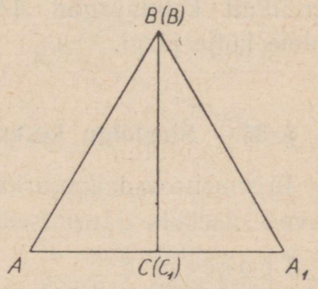
IV) **kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja teravnurk on teise kolmnurga hüpotenuusi ja teravnurgaga vastavalt võrdsed.**

Need tunnused on otsesed järeldused üldistest kolmnurkade kongruentsuse tunnustest, sest nad on üldiste tunnuste erijuhud. Tõepoolest, täisnurksetes kolmnurkades on hüpotenuusi vastas alati 90-kraadine nurk, seega on tunnus I kolmnurkade kongruentsuse teise tunnuse (§ 30) erijuht; tunnused II, III ja IV on kolmnurkade kongruentsuse kolmanda tunnuse (§ 32) erijuhud.

V) **Kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja kaatet on teise kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetiga vastavalt võrdsed.**



Joonis 100. Nendel kolmnurkadel on võrdsed hüpotenuusid ($AB = A_1B_1$) ja üks paar võrdseid kaateteid ($BC = B_1C_1$). Nad on kongruentsed, . . .



Joonis 101. . . . mida on kerge tõestada, kui neid asetada nõnda, nagu osutab see joonis.

Tõestame selle tunnuse.

Olgu teada, et täisnurksetes kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (joonis 100)

$$AB = A_1B_1 \quad \text{ja} \quad BC = B_1C_1.$$

Paneme need kolmnurgad teineteise külge, nii et võrdsed kaatetid BC ja B_1C_1 ühtivad ja nii et kolmnurgad ise jäävad nendest kaatetitest üks ühele, teine teisele poole (joonis 101). Siis kaatetid AC ja A_1C_1 asetsevad ühel ja samal sirgjoonel. Tõesti, CA ja CA_1 vaheline nurk on nurkade ACB ja $B_1C_1A_1$ summa, seega on ta $90° + 90° = 180°$. See tähendab, et kiired CA ja CA_1 asetsevad ühel sirgjoonel.

Siit järeldub, et kujundid ABC ja $A_1B_1C_1$ koos omas uues asendis moodustavad kolmnurga (kui nurgad C ja C_1 oleksid teravnurgad või nürinurgad, siis tekiks nelinurk).

Niiviisi tekkinud kolmnurk ABA_1 on võrdhaarne (sest eelduse põhjal $AB = A_1B_1$). BC on selle kolmnurga kõrgus ja seega ka mediaan, nii et

$$AC = A_1C_1.$$

Järelikult kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on kongruentsed kolme külje järgi.

§ 34. Sirglõigu keskpunkti läbiva ristsirge omadusi.

Täisnurksete kolmnurkade kongruentsuse tunnustest järelduvad otsekohe järgmised tähtsad teoreemid.

T e o r e e m 1.

Sirglõigu (AB) keskpunkti (O) läbival ristsirgel (CD) asetsev mistahes punkt (L joonisel 102) **on selle lõigu otspunktidest** (A ja B) **võrdsetel kaugustel** (s. t. $LA = LB$).

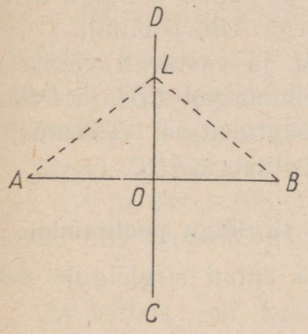
Tõepoolest, meil on kaks täisnurkset kolmnurka AOL ja BOL, mille kaatetid on vastavalt võrdsed ($AO = OB$, OL on ühine kaatet). Järelikult on need kolmnurgad kongruentsed (tunnus I). Tähendab, nende hüpotenuusid LA ja LB on võrdsed, s. t. punkti L kaugused sirglõigu AB otspunktidest on võrdsed.

T e o r e e m 2.

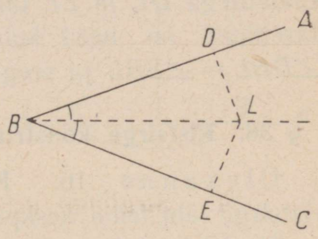
Punkt, mis on sirglõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, asetseb selle sirglõigu keskpunkti läbival ristsirgel.

Olgu antud, et $LA = LB$; joonestame $LC \perp AB$ ja tõestame, et sirgete AB ja LC lõikepunkt O on sirglõigu AB keskpunktiks.

Tõepoolest, meil on nüüd täisnurksed kolmnurgad AOL ja BOL, milledel on ühine kaatet LO ja võrdsed hüpotenuusid $LA = LB$. Need kolmnurgad on kongruentsed (tõestada), seega $AO = OB$, s. t. et O on sirglõigu AB keskpunkt.



Joonis 102. **Sirglõigu keskpunkti läbiva ristsirge omadusi:** 1) selle ristsirge mistahes punkti L kohta kehtib võrdus $LA = LB$; 2) kui $LA = LB$, siis asetseb punkt L sellel ristsirgel.



Joonis 103. **Nurgapoolitaja omadusi:** 1) selle nurgapoolitaja mistahes punkti L kohta kehtib võrdus $LE = LD$; 2) kui $LE = LD$, siis asetseb punkt L nurgapoolitajal.

§ 35. Nurgapoolitaja omadusi.

1. **Nurgapoolitajal** (ABC poolitajal BL joonisel 103) **asetsev mistahes punkt** (L) **on selle nurga haaradest võrdsetel kaugustel.**

Et punkti kaugust sirgest mõõdetakse ristsirget mööda, siis on ristlõigud LE ja LD väljendatud omaduse põhjal võrdsed.

Tõestuseks vaatleme täisnurkseid kolmnurki EBL ja DBL. Neil on ühine hüpotenuus BL ja vastavalt võrdsed teravnurgad ($\angle DBL = \angle EBL$), sest et BL on nurga ABC poolitaja. Järelikult on kolmnurgad EBL ja DBL kongruentsed (tunnus IV) ja seega $LE = LD$.

2. Punkt, mis on nurga haaradest võrdsetel kaugustel, asetseb selle nurga poolitajal.

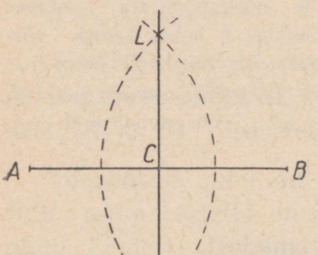
Olgu teada, et $LE = LD$. Ühendame punkti L nurga ABC tipuga ja tõestame, et kiir BL on nurga ABC poolitaja.

Nii saime ühise hüpotenuusiga BL ja vastavalt võrdsete kaatetitega DL ja EL täisnurksed kolmnurgad EBL ja DBL. Järelikult on need kolmnurgad kongruentsed. Tähendab, $\angle DBL = \angle EBL$ ja seega kiir BL poolitab $\angle ABC$.

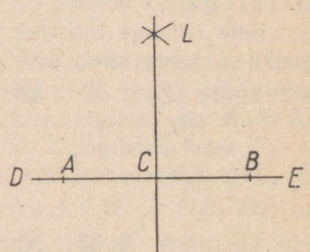
§ 36. Ristsirge konstrueerimine ja sirglõigu poolitamine.

Ülesanne 16. Konstrueerida antud sirglõigule AB ristsirge läbi tema keskpunkti.

Punktidest A ja B (joonis 104) joonestame ühe ja sama vabalt valitud raadiusega (suuremaga kui $\frac{1}{2}AB$) kaks kaart.



Joonis 104. Ülesanded: 1) konstrueerida antud lõigule AB ristsirge läbi tema keskpunkti; 2) poolitada antud lõik AB.



Joonis 105. Ülesanne: joonestada ristsirge sirgjoonele DE temal antud punktist C.

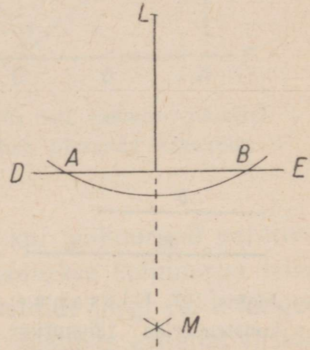
Ühendame nende lõikepunktid, ja ülesanne on lahendatud. Tõepoolest, mõlemad punktid L ja M, nagu nähtub konstruktsioonist, asetsevad otspunktidest A ja B võrdsetel kaugustel. Tähendab (§ 34, teoreem 2), nii L kui ka M asetsevad otsitaval sirgel. Kuid punktidega L ja M on määratud ainult üks sirgjoon. Selle me joonestasimegi.

Kui antud lõiku AB on tarvis poolitada, siis tuleb seda teha samuti nagu eelmises ülesandes. Sirge LM lõikub lõiguga AB viimase keskpunktis C.

Ülesanne 17. Joonestada ristsirge sirgjoonele DE temal antud punktist C (joonis 105).

Sirgel DE võtame võrdsed lõigud CA ja CB punktist C kahele poole. Siis toimime nagu ülesandes 16.

On küllalt, kui konstrueerime kahest punktist L ja M ainult ühe, näiteks L. Ühendades siis punktid L ja C, saame otsitava ristsirge. Kuid konstruktsioon saab täpsem, kui ühendada L ja M.



Joonis 106. Ülesanne: lasta antud punktist L ristsirge antud sirgele DE.

Ülesanne 18. Lasta antud punktist L (joonis 106) ristsirge antud sirgele DE.

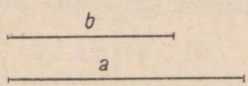
Punktist L joonestame vabalt valitud raadiusega kaare AB, mis lõikub antud sirgega DE punktides A ja B. Seejärel joonestame punktidest A ja B ühe ja sama vabalt valitud raadiusega (kasvõi eelmisega) kaks kaart, mis lõikuvad punktis M. Sirge LM on otsitav ristsirge.

Tõepoolest, mõlemad punktid L ja M, nagu nähtub konstruktsioonist, on punktidest A ja B ühekaugusel; sirge LM on järelikult sirgjoone DE ristsirge (läbides lõigu AB keskpunkti).

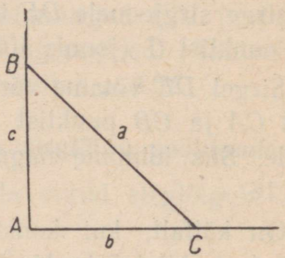
§ 37. Täisnurkse kolmnurga konstrueerimine antud elementide järgi.

Ülesanne 19. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi ja kaateti järgi.

Tuleb joonestada täisnurkne kolmnurk antud hüpotenuusi a ja kaateti b järgi (joonis 107). Et hüpotenuus on kaatetist alati suurem, siis peab lõik a olema suurem kui lõik b, muidu pole ülesanne lahenduv.



Joonis 107. Ülesanne: konstrueerida täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi a ja kaateti b järgi.

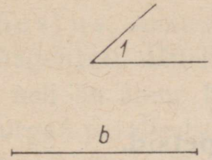


Joonis 108. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus.

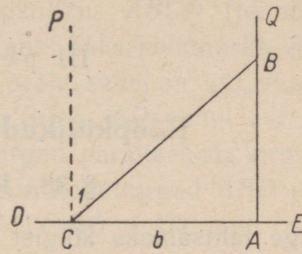
Konstrueerime täisnurga A (§ 36) ja kanname tema ühele haarale lõigu $AC = b$ (joonis 108). Punktist C joonestame kaare raadiusega a. See lõikub täisnurga teise haaraga punktis B. Kolmnurk ABC vastab ilmselt ülesande nõudeile. Kõik kolmnurgad, millel on hüpotenuus a ja kaatet b, on kongruentsed kolmnurgaga ABC.

Ülesanne 20. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk kaateti b ja tema vastasnurga 1 järgi (joonis 109).

Kanname vabalt valitud sirgjoonele DE (joonis 110) lõigu $CA = b$; konstrueerime $CP \perp DE$ ja $AQ \perp DE$ (ülesanne 17); sirged CP ja AQ, olles risti ühe ja sama sirgjoonega DE, on isekeskis paralleelsed. Täisnurka ECP joonestame kiire CB, mis koos sirgega CP moodustab antud nurgaga 1 võrdse nurga. Kiir CB lõikub sirgega AQ punktis B. Täisnurkne kolmnurk ABC vastab ülesande nõudeile. Tõe-



Joonis 109. Ülesanne: konstrueerida täisnurkne kolmnurk kaateti b ja tema vastasnurga 1 järgi.



Joonis 110. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus.

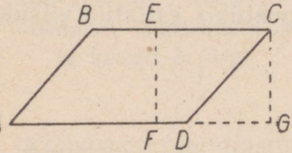
poolest, nurgad B ja 1 on võrdsed kui põiknurgad paralleelsete sirgete AQ ja CP juures. Täisnurkse kolmnurga teised konstruktsioonülesanded antud elementide järgi (s. t. külgede ja nurkade järgi) lahendatakse VII peatükis esitatud viisidel.

III peatükk.

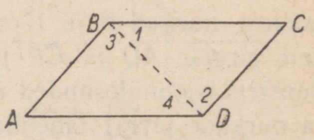
Rööpkülikud ja trapetsid.

§ 38. Rööpkülik.

Kõige tähtsamaks kõigist nelinurkadest osutub praktikas rööpkülik. Rööpkülikuks nimetatakse igat nelinurka, mille vastasküljed on paarikaupa paralleelsed. Nii on nelinurk $ABCD$ (joonis 111), kus $AB \parallel CD$ ja $AD \parallel BC$, rööpkülik.



Joonis 111. Rööpkülik. $AB \parallel CD$ ja $AD \parallel BC$. Kui AD lugeda rööpküliku aluseks, siis on EF (samuti ka CG) tema kõrgus.



Joonis 112. Rööpküliku omadusi: 1) vastasküljed on võrdsed ($AB = CD$, $BC = AD$); 2) vastasnurgad on võrdsed ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$); 3) lähisnurkade summa on 180° ($\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$).

Kui rööpküliku mistahes külge võib nimetada tema aluseks, siis nimetatakse kaugust selle külje ja vastaskülje vahel rööpküliku kõrguseks. Joonisel 111 on EF, samuti ka CG rööpküliku $ABCD$ kõrgused. Alusteks on siin küljed AD ja BC.

§ 39. Rööpküliku omadusi.

Teoreem 1.

Iga rööpküliku vastasküljed on võrdsed.

Tõestus. Joonestame rööpkülikus $ABCD$ (joonis 112) ühe diagonaali, näiteks BD. Saame kaks kolmnurka ABD ja CBD; neil on ühine külg BD; peale selle on $\angle 1 = \angle 4$ kui põiknurgad paralleelsete sirgete BC ja AD puhul (vt. § 15), samuti on $\angle 2 = \angle 3$ kui põiknurgad paralleelsete sirgete CD ja AB puhul. Järelikult (§ 32) on kolmnurgad ABD ja CBD kongruentsed. Seega $AB = CD$ ja $BC = AD$.

Tõestatud teoreemi võib veel nii sõnastada:

Paralleelsed lõigud paralleelsete lõikude vahel on võrdsed.

Teoreem 2.

Iga rööpküliku vastasnurgad on võrdsed ja lähisnurkade summa on 180°.

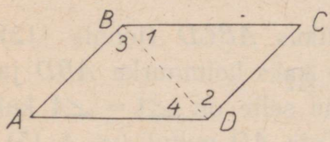
Tõestus. Eelmises teoreemis tõestatud kolmnurkade ABD ja BDC kongruentsusest järeldub ka rööpküliku vastasnurkade A ja C võrdsus. Lähisnurkade, näiteks $\angle A$ ja $\angle B$, summa on 180°. Tõepoolest, $\angle A = \angle C$ ja $\angle B = \angle D$. Liites nende võrduste vastavad pooled, saame:

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D,$$

s. t. et rööpküliku kahe lähisnurga summa võrdub kahe teise lähisnurga summaga. Kuid kõikide nelja nurga summa on igas nelinurgas (vt. § 21) 360°, järelikult on rööpküliku kahe lähisnurga summa 180°.

§ 40. Rööpküliku kaks eristamistunnust.

1. Kui nelinurga kaks paari vastaskülgi on võrdsed, siis on see nelinurk rööpkülik.



Joonis 113.

Tõestus. On antud, et nelinurgas $ABCD$ (joonis 113) on vastasküljed võrdsed:

$$AD = BC$$

ja

$$AB = DC.$$

Joonestame selles nelinurgas ühe diagonaali, näiteks BD. Saame kolmnurgad ABD ja BCD. Need kolmnurgad on kongruentsed kolme külje järgi, järelikult nende kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed, nii on siis

$$\angle 1 = \angle 4$$

ja

$$\angle 2 = \angle 3.$$

Kuid nurgad 1 ja 4 on tekkinud sirgete AD ja BC lõikamisel kolmanda sirgega BD, seega on nad põiknurgad.

Kui aga põiknurgad on võrdsed, siis sirged on paralleelsed, seega

$$AD \parallel BC.$$

Samal viisil näeme, et nurgad 3 ja 2 on põiknurkadeks sirgete AB ja DC lõikamisel sirgega BD, sellepärast on ka

$$AB \parallel DC.$$

Nüüd on selgunud, et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, kuid niisugune nelinurk ongi rööpkülik.

2. Kui nelinurga üks paar vastaskülgi on võrdsed ja paralleelsed, siis on see nelinurk rööpkülik.

Tõestus. Olgu teada, et nelinurgas $ABCD$ (joonis 113) küljed AD ja BC on võrdsed ja paralleelsed, s. t. on teada, et

$$AD = BC$$

ja

$$AD \parallel BC.$$

Diagonaal BD moodustab paralleelsete külgedega võrdsed põiknurgad:

$$\angle 1 = \angle 4.$$

Kolmnurgad ABD ja BCD on kongruentsed, sest neil on kaks paari vastavalt võrdseid külgi ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed:

$$BD = BD \text{ (ühine külg)},$$
$$AD = BC,$$

ja

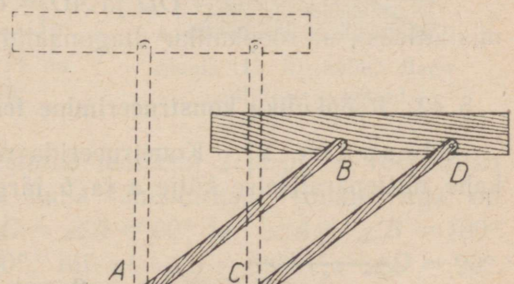
$$\angle 1 = \angle 4.$$

Et kongruentsetel kolmnurkadel kõik vastavad küljed on võrdsed, siis

$$AB = CD;$$

nüüd võime eelmise tunnuse põhjal öelda, et nelinurk $ABCD$ on rööpkülik.

Rakendus. Joonisel 114 kujutatud instrument koosneb kahest joonlauast, mis on ühendatud ühepikkuste kangidega AB ja CD. Kaugused AC ja BD on võrdsed. Kangid ja joonlauad on ühendatud šarniiridega, nii et joonlaudu võib teineteisele lähendada ja teineteisest eemaldada, seejuures jäävad joonlauad teineteisega alati paralleelseiks, sest nelinurgal $ABCD$ on kaks paari võrdseid vastaskülgi. Kirjeldatud riista kutsutakse «paralleelseiks joonlaudadeks», teda kasutatakse paralleelide joonestamiseks.

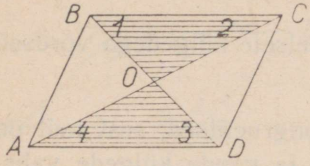


Joonis 114.

§ 41. Rööpküliku diagonaalide omadus.

Teoreem.

Rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.



Joonis 115. Teoreem rööpküliku diagonaalidest: $BO = OD$, $AO = OC$.

Tõestus. Vaatleme joonisel 115 kolmnurki AOD ja BOC (punkt O on rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt). Need kolmnurgad on kongruentsed, sest

$$BC = AD,$$

kui rööpküliku vastasküljed,

$$\angle 1 = \angle 3$$

ja

$$\angle 2 = \angle 4,$$

kui põiknurgad.

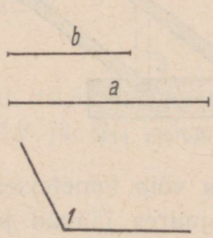
Kongruentsetel kolmnurkadel on vastavad küljed võrdsed, seega

$$BO = OD \text{ ja } AO = OC,$$

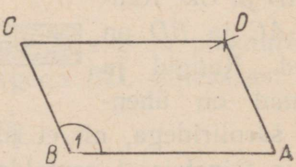
mis ütlebki, et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.

§ 42. Rööpküliku konstrueerimine tema elementide järgi.

Ülesanne 21. Konstrueerida rööpkülik ühe nurga ja kahe mitteparalleelse külje a ja b järgi (joonis 116).



Joonis 116. Ülesanne: konstrueerida rööpkülik kahe külje ja nende vahel asetseva nurga järgi.

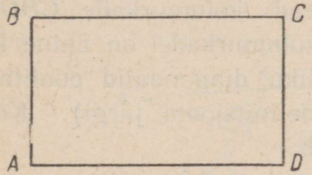


Joonis 117. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus.

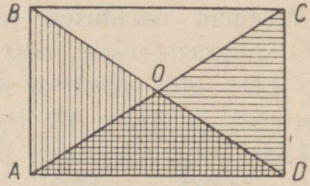
Konstrueerime nurga ABC (joonis 117), mis on võrdne antud nurgaga. Tema haaradele kanname lõigud $BA = a$ ja $BC = b$. Punktist A joonestame kaare raadiusega b ja punktist C kaare raadiusega a. Nende kaarte lõikepunkti D ühendame punktidega A ja C. Konstrueeritud nelinurk on rööpkülik külgedega a, b ja nurgaga $B = \angle 1$. Iga teine rööpkülik, millel on samad elemendid, on kongruentne rööpkülikuga $ABCD$.

§ 43. Ristkülik.

Kui rööpkülikul $ABCD$ üks nurk, näiteks $\angle A$, on täisnurk (joonis 118), siis on ka ülejäänud nurgad täisnurgad.



Joonis 118. Ristkülik on täisnurkne rööpkülik.



Joonis 119. Ristküliku diagonaalid on võrdsed.

Tõepoolest, §-s 39 tõestatud teoreemi 2 järgi on rööpküliku vastasnurgad võrdsed, kuna lähisnurkade summa aga on $180°$. Järelikult on $\angle C = \angle A = 90°$ ja $\angle A + \angle B = 180°$ ning $\angle A + \angle D = 180°$, nii et $\angle B = 90°$ ja $\angle D = 90°$.

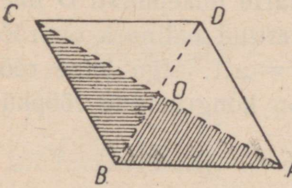
Rööpkülikut, millel on täisnurk, nimetatakse ristkülikuks. Peale nende omaduste, mis on igal rööpkülikul, on ristkülikul ka oma eriline omadus. Nimelt,

ristküliku diagonaalid on võrdsed.

See järeldub täisnurksete kolmnurkade ACD ja ABD kongruentsusest (joonis 119); neil kolmnurkadel on üks kaatet AD ühine, kaks ülejäänud kaatetit AB ja CD on aga võrdsed kui rööpküliku vastasküljed.

§ 44. Romb.

Kui rööpküliku kaks lähiskülge on võrdsed, siis on kõik tema küljed võrdsed (§ 39, teoreem 1).



Joonis 120. R o m b on võrdsete külgedega rööpkülik.

Võrdsete lähisküIgedega rööpkülikut nimetatakse r o m b i k s. Joonisel 120 on kujutatud romb $ABCD$.

Peale omaduste, mis on igal rööpkülikul, on rombil oma erilised omadused, ja nimelt:

1. Rombi diagonaalid poolitavad rombi nurki.

2. Rombi diagonaalid on teineteisega risti.

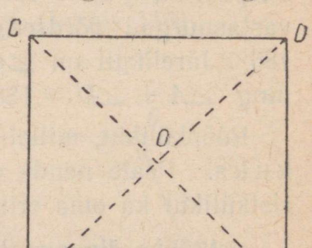
Mõlemad omadused järelduvad kolmnurkade CBO ja ABO kongruentsusest, sest neil kolmnurkadel on ühine külg BO, $CO = AO$ (sest et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist) ja $BC = BA$ (rombi definitsiooni järgi). Kolmnurkade kongruentsusest järeldub:

1) $\angle CBO = \angle ABO$, s. t. diagonaal BD poolitab nurga B. Samuti võib tõestada, et ka rombi teised nurgad poolituvad vastavate diagonaalidega.

2) $\angle COB = \angle AOB$, need nurgad on aga kõrvunurgad, tähendab, kumbki neist on $90°$, s. t. diagonaalid BD ja AC on risti.

§ 45. Ruut.

R u u d u k s nimetatakse rööpkülikut, mille lähisküljed on võrdsed ja millel on täisnurk (joonis 121). Ruut on ühtlasi ristkülik (sest tema nurk on täisnurk) ja romb (sest tema küljed on võrdsed). Seepärast on ruudul nii iga rööpküliku üldised kui ka



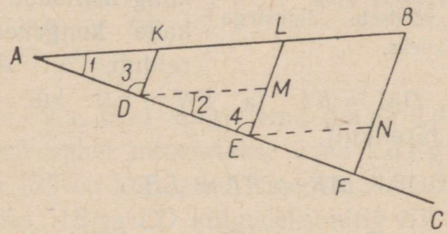
Joonis 121. R u u t on võrdsete külgedega täisnurkne rööpkülik.

ristküliku ja rombi eriomadused. Ruudu diagonaalid on võrdsed, poolitavad teineteist, on risti ja poolitavad ruudu nurki, s. t. moodustavad ruudu külgedega 45-kraadised nurgad.

§ 46. Lõigu jaotamine võrdseteks osadeks.

Ülesanne 22. Jaotada antud lõik AB kolmeks võrdseks osaks.

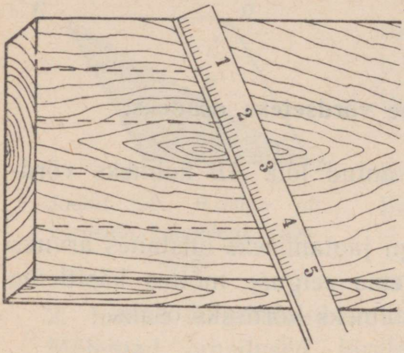
Siin esitatav viis sobib lõigu jaotamiseks mistahes arvuks võrdseteks osadeks, kuid suurema selguse mõttes käsitleme juhtu, kus AB tuleb jaotada kolmeks võrdseks osaks.



Joonis 122. Ülesanne: jaotada antud lõik AB kolmeks võrdseks osaks. Lahendus: $AK = KL = LB$.

Lõigu AB ühest otspunktist, näiteks punktist A (joonis 122), joonestame läbi mistahes sirge AC. Sellel sirgel märgime punktist A alates tarviliku arvu vabalt valitud pikkusega võrdseid lõike; käesoleval juhul kanname sirgele AC kolm lõiku $AD = DE = EF$. Ühendame punkti F punktiga B. Vahepealsetest punktidest E ja D tõmbame sirged EL ja DK, mis on paralleelsed sirgega FB. Nad lõikuvad lõiguga AB punktides L ja K. Need punktid jaotavad lõigu AB kolmeks võrdseks osaks.

Lõikude AK, KL ja LB võrdsuse tõestuseks joonestame läbi punktide D ja E abijooned DM ja EN, mis on paralleelsed sirgega AB. Saame kolm kolmnurka AKD, DME ja ENF, mis on kongruentsed. Vaatleme näiteks kolmnurki AKD ja DME. Neil on $AD = DE$ (konstruktsiooni põhjal), $\angle 1 = \angle 2$ ja $\angle 3 = \angle 4$ kui kaasnurgad paralleelsete sirgete puhul. Järelikult on need kolmnurgad kongruentsed. Samuti võib tõestada kolmnurkade AKD ja ENF kongruentsust. Kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et $AK = DM = EN$. Edasi, $DM = KL$ ja $EN = LB$ kui rööpkülikute vastasküljed). Järelikult,



Joonis 123. Laua jaotamine mõõtjoonlaua abil võrdsete laiustega osadeks.

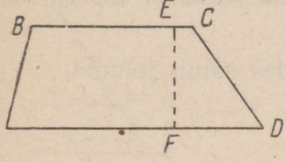
$$AK = KL = LB.$$

Tegelikult pole tarvis joonestada kõiki sirgjoonega BF paralleelseid sirgeid. Jätkub sellest, kui joonestada üks paralleelne sirge DK ja siis märkida sirglõigul AB lõigud, mis on võrdsed lõiguga AK. Kui lõik tuleb jaotada paljudeks osadeks, siis on kasulik joonestada veel mõned sirged, mis on paralleelsed sirgega BF. Siis saame sirgel AB mõned kontrollpunktid, mis takistavad vigade kasvamist.

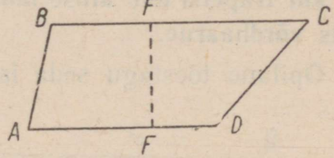
N ä i d e. Laua jaotamisel võrdsete laiustega osadeks kasutavad tislerid joonisel 123 kujutatud võtet. Siin jaotatakse laud viieks osaks. Meetripuu (või mistahes muu mõõtjoonlaud) asetatakse niiviisi lauale, et nulljaotis langeb laua ühele servale; siis pööratakse joonlauda, kuni viies jaotis satub laua teisele servale. Lõpuks tõmmatakse läbi joonlaua vahepealsete jaotuspunktide laua servadega paralleelsed sirged (läbi jaotiste 1, 2, 3 ja 4). See võte ühtib täpselt meie poolt kirjeldatud viisiga, kui nulljaotis asetada laua nurka.

§ 47. Trapets.

T r a p e t s i k s nimetatakse nelinurka, mille kaks vastaskülge on paralleelsed. Trapetsi paralleelseid külgi nimeta-



Joonis 124. T r a p e t s: $AD \| BC$. AD ja BC on tema alused, AB ja CD haarad ning EF kõrgus.

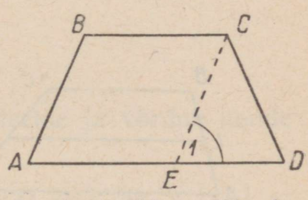


Joonis 125. Trapetsi teine kuju (kahe nürinurgaga).

takse a l u s t e k s, teisi külgi tema h a a r a d e k s. Kaugust trapetsi aluste vahel nimetatakse tema k õ r g u s e k s. Joonistel 124 ja 125 on kujutatud trapetsid $ABCD$. BC ja AD on nende alusteks, AB ja CD külgedeks ning EF kõrguseks.

Rööpkülikut võib pidada niisuguse trapetsi erikujuks, mille haarad on ka paralleelsed.

Võrdsete (kuid mitteparalleelsete) haaradega trapetsit nimetatakse v õ r d h a a r s e k s (joonisel 126 $AB = CD$).



Joonis 126. V õ r d h a a r n e t r a p e t s. $AB = CD$.

T e o r e e m.

Võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

Olgu $ABCD$ (joonis 126) võrdhaarne trapets ($BC \| AD$; $AB = CD$). Joonestame läbi punkti C sirge, mis on paralleelne haaraga AB. Saame rööpküliku $ABCE$. Tema vastasküljed

AB ja CE on võrdsed (§ 39). Kuid tingimuste kohaselt $AB = CD$. Tähendab, $CD = CE$, seega on $\triangle EDC$ võrdhaarne. Järelikult $\angle D = \angle 1$. $\angle 1 = \angle A$ kui kaasnurgad paralleelsete sirgete puhul. Järelikult $\angle D = \angle A$, s. t. aluse AD lähisnurgad on võrdsed. Aluse BC lähisnurgad on samuti võrdsed, sest $\angle B = 180° - \angle A$ ja $\angle C = 180° - \angle D$.

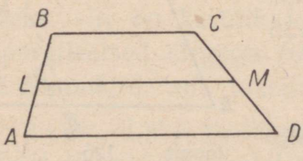
Ümberpöördult,

kui trapetsi ühe aluse lähisnurgad on võrdsed, siis on trapets võrdhaarne.

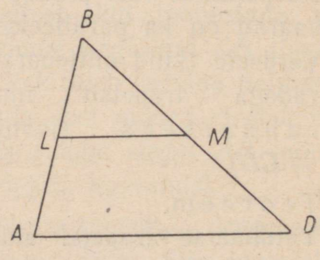
Õpilane tõestagu seda ise, kasutades sama joonist.

§ 48. Trapetsi ja kolmnurga kesklõik.

Trapetsi haarade keskpunkte ühendavat joonlõiku nimetatakse tema k e s k l õ i g u k s. Joonisel 127 on LM trapetsi $ABCD$ kesklõik. Täpselt samuti nimetatakse kolmnurga ABD (joonisel 128) külgede AB ja BD keskpunkte ühendavat joonlõiku LM kolmnurga k e s k l õ i g u k s. Seejuures nimetatakse AB ja BD külgedeks ja AD aluseks.

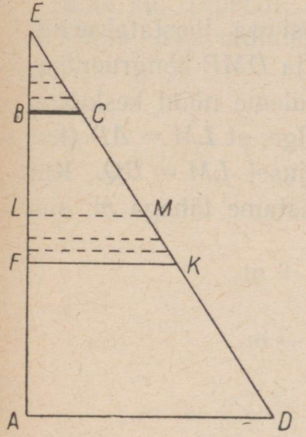


Joonis 127. LM on trapetsi k e s k l õ i k.

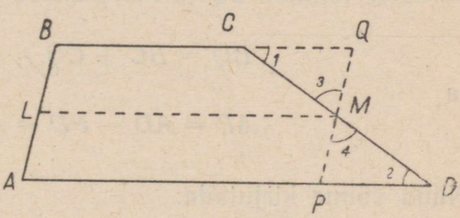


Joonis 128. LM on kolmnurga k e s k l õ i k.

Kui trapetsi $ABCD$ haarasid AB ja CD pikendada kuni lõikumiseni punktis E, siis saame kolmnurga AED (joonis 129). Selle kolmnurga võib saada veel järgmiselt. Lükkame trapetsi alust BC ülespoole, nii et ta püsib paralleelne alusega AD ja et ta otspunktid B ja C liiguvad mööda haarade pikendeid. Seejuures hakkab BC, nagu nähtub joonisest, vähenema ning punktis E muutub ta võrdseks nulliga. Siis muutub trapets $ABCD$ kolmnurgaks AED ja tema kesklõik FK kolmnurga kesklõiguks LM.



Joonis 129. Kolmnurga saamine trapetsist.



Joonis 130. Trapetsi kesklõik. $LM \parallel AD$ ja $LM = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Teoreem 1.

Trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja võrdub nende poolsummaga.

Olgu LM (joonis 130) trapetsi $ABCD$ kesklõik, s. t. $AL = LB$ ja $CM = MD$. Joonestame läbi punkti M sirge $PQ \parallel AB$. Kolmnurgad CMQ ja DMP on kongruentsed, sest et neil $CM = MD$ (eelduse järgi), $\angle 1 = \angle 2$ (kui põiknurgad paralleelsete sirgete juures) ja $\angle 3 = \angle 4$ (kui tippnurgad). Kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et $PM =$

$= MQ$, nii et PM võrdub lõigu PQ poolega. $PQ = AB$ (kui rööpküliku vastasküljed). Tähendab, $PM = \frac{1}{2}AB = AL$. Nii on nelinurgal $ALMP$ kaks vastaskülge võrdsed ja paralleelsed, järelikult vastavalt rööpküliku teisele eristamistunnusele (§ 40) on $ALMP$ rööpkülik, s. t. $LM \parallel AD$.

Tõestasime teoreemi esimese osa. Teist osa tõestatakse nii. Meie poolt tõestatud kolmnurkade CMQ ja DMP kongruentsusest järeldub samuti, et $CQ = PD$. Võrdleme nüüd kesklõigu pikkust trapetsi aluste pikkusega. On selge, et $LM = AP$ (kui rööpküliku vastasküljed) ja samal põhjusel $LM = BQ$. Kui võrdsete lõikude CQ ja PD pikkuse tähistame tähega m, siis

$$BQ = BC + CQ = BC + m$$

ja

$$AP = AD - PD = AD - m.$$

Nüüd võime kirjutada:

$$LM = BC + m$$

ja

$$LM = AD - m.$$

Liites nende võrduste vasakud pooled ja paremad pooled, saame

$$LM + LM = BC + m + AD - m$$

ehk

$$2LM = AD + BC$$

ja siit

$$LM = \frac{AD + BC}{2}$$

ehk

$$LM = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Järelikult

trapetsi kesklõik võrdub aluste poolsummaga.

T e o r e e m 2.

Kolmnurga kesklõik on paralleelne alusega ja võrdub tema poolega.

See teoreem järeldub teoreemist 1, kui käsitella kolmnurka kui trapetsit, mille üks alus (BC joonisel 129) võrdub nulliga. Siis muutub võrdus $LM = \frac{1}{2}(AD + BC)$ võrduseks

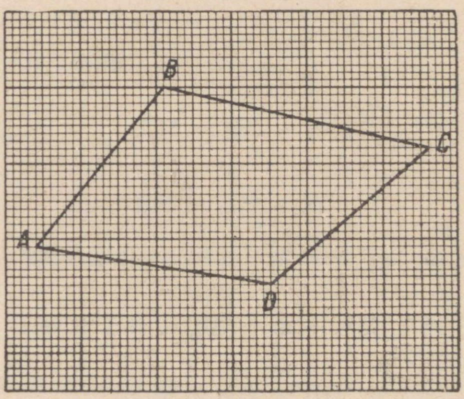
$$LM = \frac{1}{2} AD.$$

IV peatükk.

Hulknurkade pindalad.

§ 49. Pindalade mõõtmine.

Lõigu pikkuse määramisel võrdleme mõõdetavat lõiku teise lõiguga, mida tarvitatakse mõõtühikuna. Pikkuse



Joonis 131. Pindala mõõtmine ruutvõrguga.

mõõtühikuks võib võtta meetri, sentimeetri, millimeetri, tolli, miili jne.; need on kõik lõigud. Nurga mõõtmisel võrdleme mõõdetavat nurka teise nurgaga, mida tarvitatakse mõõtühikuna. Täpselt samuti võrdleme pindala mõõtmisel mõõdetavat pindala mingisuguse pindalaga, mida kasutatakse mõõtühikuna. Meetritega või sentimeetritega ei saa pindala mõõta, nagu ei saa teda mõõta kraadidega või grammidega.

Pindala mõõtühikuna tarvitatakse r u u t u, mille külg võrdub pikkusühikuga, näiteks 1 cm-ga; seda pindala mõõtühikut nimetatakse r u u t s e n t i m e e t r i k s. Lühendatult tähistatakse seda cm^2.

Paberile joonestatud kujundi pindala võib mõõta ruutvõrguga ehk p a l e t i g a; palett on läbipaistev paber, mis on jaotatud väikesteks ruudukesteks; nende ruutude küljed võrduvad harilikult 1 mm, nõnda et iga ruudu pindala on 1 mm^2. Katame paletiga kujundi *ABCD*, mille pindala on tarvis mõõta (joonis 131), ja loendame ruudukeste arvu, mis tervetena langevad kujundi sisse. Need ruutude osad, mis asetsevad kujundi piiril, hinnatakse silmaga ja vastav parandus lisatakse loendamise tulemusele.

Niisugune pindala vahetu mõõtmise viis on kaunis väsitav; pealegi on ta rakendatav ainult väikeste pindalade puhul. Seepärast mõõdetakse pindala kõige sagedamini kaudsete võtetega: vahetult ei mõõdeta mitte pindala ennast, vaid mõnede temaga ühenduses olevate lõikude pikkust. Peale selle teostatakse arvutus, mille tulemus annab otsitava pindala rutemini ja täpsemalt kui selle pindala vahetu mõõtmine.

§ 50. Ristküliku pindala.

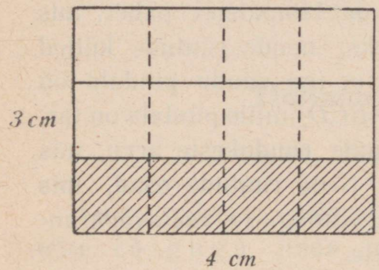
Kui tahetakse mõõta toa pindala, siis ei paigutata põrandale ruutmeetrit, vaid mõõdetakse meetrites toa pikkus ja laius ning korrutatakse saadud arvud.

See hästituntud võte põhineb järgmisel teoreemil:

Ristküliku pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega.

See tähendab, et ristküliku pindalas sisalduvate p i n d - a l a ü h i k u t e arv võrdub aluses ja kõrguses sisalduvate p i k k u s ü h i k u t e arvude korrutisega.

Olgu näiteks aluse pikkus 4 cm ja kõrguse pikkus 3 cm. On selge (joonis 132), et ruutsentimeeter asetub piki alust 4 korda, moodustades joonisel 132 viirutatud riba; kolm niisugust riba katavad täielikult meie ristküliku, nii et ruutsentimeetrite üldarv on $4 \cdot 3 = 12$. Seda arutlust võib korrata mistahes täisarvudega.



Joonis 132. Selle ristküliku pindala võrdub $4 \cdot 3 = 12$ (cm²).

Kui võetud pikkusühik ei mahu alusesse või kõrgusse täisarv korda, siis võime võtta väiksema ühiku. Olgu alus 4,2 cm ja kõrgus 3,4 cm. Võtame pikkusühikuks millimeetri, siis väljenduvad pikkused täisarvudes: 42 mm ja 34 mm. Pindala sisaldab $42 \cdot 34 = 1428$ ruutmillimeetrit, s. t. 14,28 ruutsentimeetrit (ühes ruutsentimeetris on 100 ruutmillimeetrit). Arvu $1428 : 100 = 14{,}28$ oleksime võinud saada ka arvude 4,2 ja 3,4 korrutamisega.

Tuletatud reegli võime kirjutada valemi kujul. Tähistame ristküliku külgede pikkused tähtedega a (alus) ja b (kõrgus), ristküliku pindala aga tähega S. Siis tuleb reegel kirjutada nii:

$$S = ab. \tag{1}$$

Edaspidi tähistame pindala alati tähega S.

§ 51. Ruudu pindala.

Kuna ruut on ristküliku erikuju, siis võrdub tema pindala samuti aluse ja kõrguse korrutisega. Et ruudu küljed on võrdsed, siis ruudu pindala võrdub külje korrutisega iseendaga, s. t. ruudu külje teise astmega.

N ä i d e. 1,6 m küljega ruudu pindala võrdub $1{,}6 \cdot 1{,}6 = 1{,}6^2 = 2{,}56$ (m^2).

Sel põhjusel nimetatakse mingisuguse arvu korrutamist iseendaga selle arvu r u u t u t õ s t m i s e k s ja selle tulemust antud arvu r u u d u k s. Nii näiteks arvu 3 ruutu tõstmisel saame 9, teisiti öeldes: 9 on arvu 3 ruut.

Tähistades ruudu pindala tähega S ja külje tähega a, saame valemi:

$$S = a^2. \tag{2}$$

§ 52. Näiteid.

N ä i d e 1. Leida joonisel 133 esitatud kujundi pindala.

Jaotame antud kujundi kaheks ristkülikuks, nagu on näidatud joonisel 134. Mõõdame nende ristkülikute külgede pikkused; selleks tuleb teostada ainult 4 mõõtmist, mille tulemused on samuti toodud joonisel 134.

Leiame kahe ristküliku pindalad:

$$\text{I pindala} = 40 \cdot 9 = 360 \text{ (mm}^2\text{)},$$
$$\text{II pindala} = 17 \cdot 22 = 374 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Liites need pindalad, leiame, et kogu kujundi pindala on 734 mm^2.

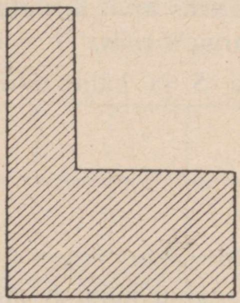
Arvutamist võib teostada veel nii: täiendame meie kujundi ristkülikuks, nagu on näidatud joonisel 134. Siis leiame tema pindala, lahutades pindala $23 \cdot 22$ pindalast $40 \cdot 31$:

$$40 \cdot 31 - 23 \cdot 22 = 734 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

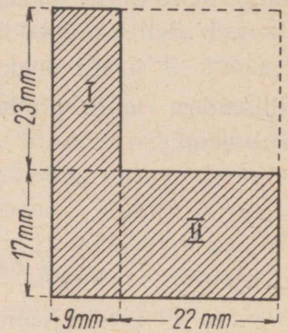
N ä i d e 2. Toa pikkus on 5,4 m, laius 4,0 m ja kõrgus 3,2 m. Toal on uks $1{,}0 \cdot 2{,}0$ meetrit ja aken mõõdetega $2{,}0 \cdot 2{,}0$ meetrit. 1 m^2 valgendamine maksab 52 kopikat. Kui palju läheb maksma toa valgendamine?

Lae pindala on $4{,}0 \cdot 5{,}4 = 21{,}6$ (m^2).

Ühe seina pindala on $5{,}4 \cdot 3{,}2 = 17{,}3$ (m²).
Teise seina pindala on $4{,}0 \cdot 3{,}2 = 12{,}8$ (m²).
Nelja seina üldpindala on $2(17{,}3 + 12{,}8) = 60{,}2$ (m²).



Joonis 133. Selle kujundi pindala võib leida, . . .



Joonis 134. . . . kui jaotada kujund kaheks ristkülikuks.

Akna ja ukse pindala kokku on 6,0 m².
Nii saame valgendamisele tuleva pindala

$$21{,}6\ \text{m}^2 + 60{,}2\ \text{m}^2 - 6{,}0\ \text{m}^2 = 75{,}8\ \text{m}^2.$$

Valgendamine läheb maksma:

$$52 \cdot 75{,}8 \text{ ehk } 39 \text{ rbl. } 42 \text{ kop.}$$

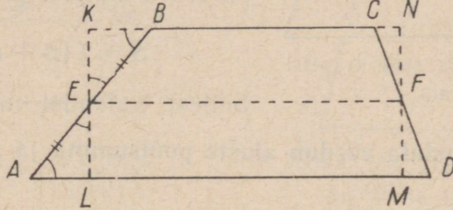
§ 53. Pindvõrdsed kujundid. Trapetsi pindala.

Ühesuuruste pindaladega kujundeid nimetatakse p i n d - v õ r d s e i k s. Kongruentsed kujundid on alati pindvõrdsed, kuid pindvõrdsed kujundid võivad olla ka mittekongruentsed, s. t. mitte täiesti ühtivad.

T e o r e e m.

Trapets on pindvõrdne ristkülikuga, mille alus võrdub trapetsi kesklõiguga ja kõrgus trapetsi kõrgusega.

T õ e s t u s. Trapetsile $ABCD$ (joonis 135) joonestame kesklõigu EF. Läbi kesklõigu otspunktide E ja F konstrueerime kõrgused KL ja NM. Saame ristküliku $KLMN$, mille alus LM võrdub kesklõiguga EF (sest $EF \parallel LM$, vt. § 48); ristküliku kõrgus KL on ühtlasi trapetsi kõrguseks. Tõestame, et ristküliku $KLMN$ ja trapetsi $ABCD$ pindalad on võrdsed, s. t. et trapets $ABCD$ ja ristkülik $KLMN$ on pindvõrdsed.



Joonis 135. T r a p e t s i p i n d a l a: $S = EF \cdot KL$.

Kolmnurgad AEL ja EKB on kongruentsed, sest nende võrdsed küljed $AE = EB$ asetsevad vastavalt võrdsete nurkade vahel ($\angle AEL$ ja $\angle KEB$ on võrdsed kui tippnurgad, $\angle EAL$ ja $\angle EBK$ on võrdsed kui põiknurgad paralleelsete sirgete juures). Täpselt samuti saab näidata, et kolmnurgad MDF ja NCF on kongruentsed.

Kuid ristküliku $KLMN$ võib saada trapetsist $ABCD$, kui viimasest eraldada kolmnurgad AEL ja MDF ning liita talle kolmnurgad EKB ja NCF. Et liidetavad kolmnurgad on vastavalt kongruentsed eraldatavatega, siis jääb pindala muutmatuks.

Tõestatud teoreemist järeldub otsekohe, et

trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega:

$$S = EF \cdot KL.$$

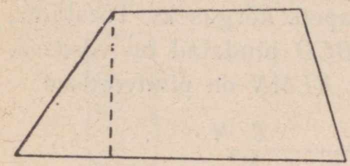
Tähistame trapetsi kesklõigu pikkuse tähega k ja kõrguse tähega h; siis saame trapetsi pindala valemi:

$$\boldsymbol{S = kh.} \tag{3}$$

Et vastavalt §-le 45

$$EF = \tfrac{1}{2}(AD + BC),$$

siis võime trapetsi pindala valemi kirjutada nii:



Joonis 136. Leida selle trapetsi pindala.

$$S = \tfrac{1}{2}(AD + BC)\,KL$$

ehk, tähistades trapetsi aluste pikkused tähtedega a ja b, saame

$$\boldsymbol{S = \tfrac{1}{2}(a + b)\,h.} \qquad (4)$$

Sellest valemist nähtub, et

trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

N ä i d e. Leida joonisel 136 kujutatud trapetsi pindala. Mõõdame selle trapetsi alused ja kõrguse; olgu $a = 44$ mm, $b = 24$ mm, $h = 19$ mm.

Valemi $S = \frac{1}{2}(a + b)\,h$ järgi leiame:

$$S = \tfrac{1}{2}(44 + 24) \cdot 19 = 646 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

§ 54. Rööpküliku pindala.

Rööpkülik ($ABCD$ joonisel 137) on trapetsi erikuju, nimelt võrdsete alustega trapets ($a = b$). Tema kesklõik (EF joonisel 137) on võrdne nii ühe kui teise alusega. Seepärast on iga rööpkülik pindvõrdne niisuguse ristkülikuga, millel on temaga võrdne alus ja kõrgus. Järelikult

rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

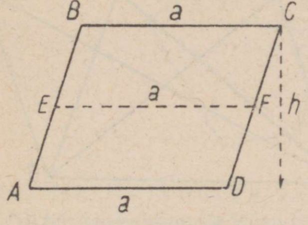
Kui tähistame rööpküliku kõrguse tähega h, siis võib tema pindala anda valemiga

$$\boldsymbol{S = ah.} \qquad (5)$$

Selle valemi võib saada ka trapetsi jaoks leitud valemist, asendades selles tähe b tähega a.

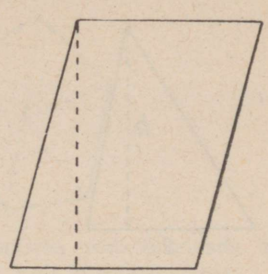
On selge, et kaks võrdsete aluste ja kõrgustega rööpkülikut on pindvõrdsed.

N ä i d e. Leida joonisel 138 kujutatud rööpküliku pindala.



Joonis 137. R ö ö p k ü l i k u p i n d a l a:

$S = ah.$



Joonis 138. Leida selle rööpküliku pindala.

Aluse ja kõrguse mõõtmisel saame, et

$$a = 24 \text{ mm}, \quad h = 33 \text{ mm},$$

asendame nüüd valemis $S = ah$ tähed mõõtmisel saadud arvudega ning leiame pindala:

$$S = 24 \cdot 33 = 792 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

§ 55. Kolmnurga pindala.

Kolmnurka võib vaadelda kui trapetsit, mille ühe aluse pikkus (näiteks b pikkus) võrdub nulliga. Asendades trapetsi pindala valemis $b = 0$, leiame kolmnurga pindala valemi:

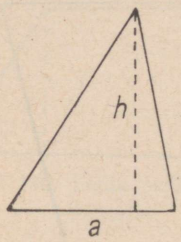
$$S = \tfrac{1}{2}\ (a + b)\ h = \tfrac{1}{2}\ (a + 0)\ h = \tfrac{1}{2}\ ah$$

ehk

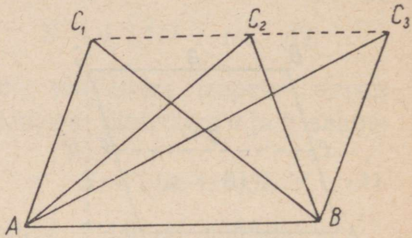
$$\boldsymbol{S = \tfrac{1}{2}\ ah} \qquad (6)$$

ehk sõnadega:

kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega.



Joonis 139. Kolmnurga pindala: $S = \frac{1}{2}ah$.



Joonis 140. Kolmnurgad ABC_1, ABC_2 ja ABC_3 on pindvõrdsed.

Näide 1. Leida joonisel 139 kujutatud **kolmnurga pindala**. Aluse ja kõrguse mõõtmisel leiame, et

$$a = 2{,}3 \text{ cm}, \quad h = 2{,}8 \text{ cm},$$

seega

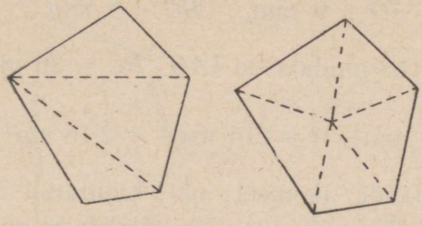
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}8 = 3{,}22 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Näide 2. Joonisel 140 kujutatud kolmnurgad ABC_1, ABC_2 ja ABC_3 on pindvõrdsed, sest neil on ühine alus ja võrdsed kõrgused (tipud C_1, C_2 ja C_3 asetsevad sirgel, mis on paralleelne sirgega AB).

§ 56. Hulknurga pindala.

Hulknurga pindala leidmiseks võib selle hulknurga tükeldada kolmnurkadeks, arvutada iga kolmnurga pindala ja liita tulemused. Tükeldamist võib teostada mitmel viisil; ühe ja sama hulknurga kaks tükeldamisviisi on näidatud joonisel 141. Iga juhu puhul tuleb leida kõige otstarbekam tükeldamisviis. Mõnikord on kergem leida hulknurga pindala, kui teda tükeldada mitte kolmnurkadeks, vaid teisekujulisteks osadeks. Võib kasutada ka muid võtteid, mõned neist on näidatud allpool toodud näidetes.

N ä i d e 1. Leida joonisel 142 kujutatud viisnurga pindala.

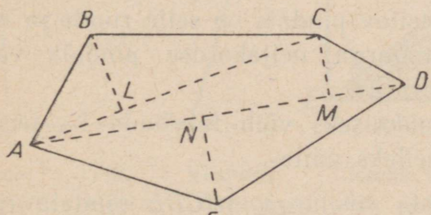


Joonis 141. H u l k n u r g a p i n d a l a leidmiseks võib tükeldada hulknurga kolmnurkadeks. Siin on antud kaks tükeldamisviisi.

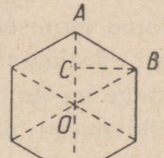
Tükeldame viisnurga kolmnurkadeks. Joonestame kõrgused BL, CM, EN. Olgu mõõtmisel saadud andmed $AC =$ $= 40$ mm, $AD = 50$ mm, $BL = 11$ mm, $CM = 8$ mm, $EN =$ $= 12$ mm. Arvutame iga kolmnurga pindala:

$$
\begin{array}{rl}
\triangle ABC \text{ pindala on } \frac{1}{2}AC \cdot BL &= \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 11 = 220 \text{ (mm}^2\text{)} \\
+\triangle ACD \text{ pindala on } \frac{1}{2}AD \cdot CM &= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \ \ 8 = 200 \text{ (mm}^2\text{)} \\
\triangle ADE \text{ pindala on } \frac{1}{2}AD \cdot EN &= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 12 = 300 \text{ (mm}^2\text{)} \\
\hline
\end{array}
$$

viisnurga $ABCDE$ pindala on $220 \text{ mm}^2 + 200 \text{ mm}^2 +$ $+ 300 \text{ mm}^2 = 720 \text{ mm}^2$.



Joonis 142. Leida selle viisnurga pindala.



Joonis 143. P o l d i p e a. Tuleb leida selle pea pindala.

N ä i d e 2. Leida joonisel 143 kujutatud poldi pea pindala.

Selle kuusnurga võib antud juhul tükeldada kuueks ühesuguseks kolmnurkseks osaks, nagu on näidatud joonisel. Mõõdame:

$$AO = 9 \text{ mm}, \quad BC = 8 \text{ mm}.$$

Leiame: $\triangle AOB$ pindala on $\frac{1}{2}AO \cdot BC = 36 \text{ mm}^2$; poldi pea pindala on

$$36 \text{ mm}^2 \cdot 6 = 216 \text{ mm}^2 = 2{,}16 \text{ cm}^2.$$

N ä i d e 3. Leida joonisel 144 kujutatud kaheksanurga pindala. Selle kaheksanurga võib tükeldada ruuduks $ACEG$ ja neljaks ühesuguseks kolmnurgaks. Mõõtmisega leiame, et

$$AC = 26 \text{ mm}, \quad BL = 5 \text{ mm}.$$

Arvutame:

nelinurga $ACEG$ pindala on $AC^2 = 26^2 = 676 \text{ (mm}^2\text{)}$

$+$

$4\triangle ABC$ pindala on $4 \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BL = 2AC \cdot BL =$
$= 2 \cdot 26 \cdot 5 = 260 \text{ (mm}^2\text{)}$

---

kaheksanurga $ABCDEFGH$ pindala on $676 \text{ mm}^2 + 260 \text{ mm}^2 =$
$= 936 \text{ mm}^2$.

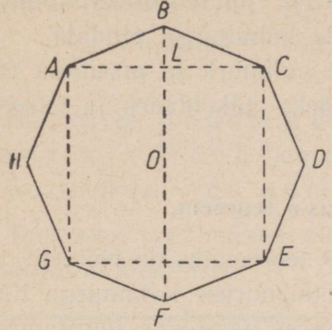
Antud kaheksanurga võib täiendada ruuduks, nagu on näidatud joonisel 145. Otsitav pindala on selle ruudu ja nurkadest äralõigatud kolmnurga neljakordse pindala vahe. Teostage mõõtmine ja arvutus.

Hulknurga pindala leidmiseks võib tarvitada ka teisendamismeetodit. Võtame selleks näite.

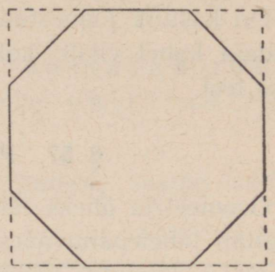
N ä i d e 4. Tuleb leida viisnurga $ABCDE$ pindala (joonis 146).

Pikendame külge AE ja joonestame läbi tipu B diagonaaliga AC paralleelse sirge BL. Kolmnurgad ABC ja ALC on pindvõrdsed, sest neil on ühine alus AC ja võrdsed kõrgused (võrdle näitega 2, § 55).

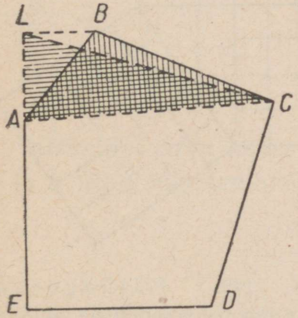
Kui viisnurga *ABCDE* pindalast lahutada $\triangle ABC$ pindala ja liita $\triangle ALC$ pindala, siis pindala suurus ei muutu, kuid



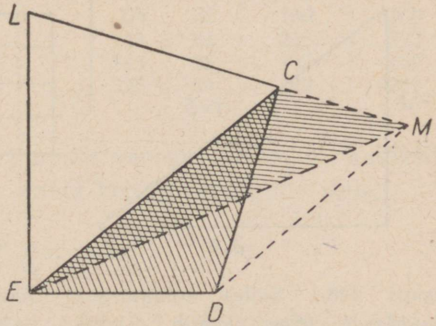
Joonis 144. Kaheksanurga pindala leidmine tema diagonaalidega osadeks tükeldamise teel.



Joonis 145. Teine viis sellesama kaheksanurga pindala leidmiseks — tema ruuduks täiendamise teel.



Joonis 146. Viisnurk *ABCDE* muutub temaga pindvõrdseks nelinurgaks *LEDC* ...



Joonis 147. ...ja see nelinurk muutub temaga pindvõrdseks kolmnurgaks *LEM*.

viisnurk muutub nelinurgaks *LEDC*. Samuti saab seda nelinurka muuta kolmnurgaks. Näiteks pikendame külge *LC* (joonis 147) ja joonestame diagonaaliga *EC* paralleelse sirge

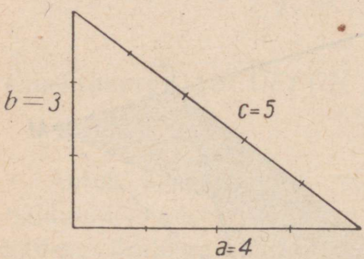
DM. Kolmnurgad *ECD* ja *ECM* on pindvõrdsed, millest järeldub, et nelinurk *LEDC* ja $\triangle LEM$ on pindvõrdsed.

Nii muudame viisnurga *ABCDE* pindvõrdseks kolmnurgaks. Jääb veel ainult leida selle kolmnurga pindala.

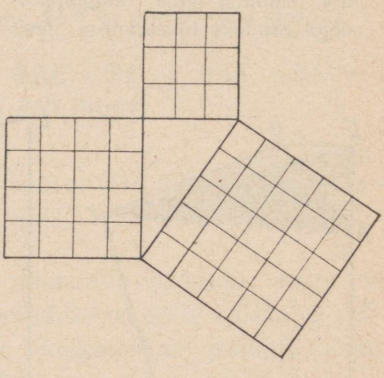
On kasulik joonestada mingi hulknurk ja arvutada tema pindala kahel viisil: kolmnurkadeks tükeldades ja teisendamise teel.

§ 57. Püthagoras'e teoreem.

Geomeetria üheks tähtsamaks teoreemiks on teoreem, mis selgitab tähelepanuväärse seose täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi ja kaatetite vahel. Selle seose paremaks selgitamiseks teostame mitu konstrueerimist ja mõõtmist.



Joonis 148. Selles kolmnurgas $a^2+b^2=c^2$. See kehtib igas täisnurkses kolmnurgas.



Joonis 149. Püthagoras'e teoreem: hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdub kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summaga. Sellel joonisel: $16 + 9 = 25$.

Konstrueerime täisnurkse kolmnurga kaatetitega: $a = 4$ cm; $b = 3$ cm (joonis 148) ja mõõdame tema hüpotenuusi c. Leiame, et $c = 5$ cm. Üldse, kui kaatetid võrduvad 3 ja 4 mistahes pikkusühikuga, siis hüpotenuus sisaldab 5 samasugust mõõtühikut. Kui niisuguse kolmnurga hüpotenuusile ja kaatetitele konstrueerida ruudud, siis (joonis 149) nende pindalad on

$$a^2 = 16 \text{ cm}^2, \qquad b^2 = 9 \text{ cm}^2, \qquad c^2 = 25 \text{ cm}^2.$$

Näeme, et h ü p o t e n u u s i l e e h i t a t u d r u u d u p i n d a l a v õ r d u b k a a t e t i t e l e e h i t a t u d r u u t u d e p i n d a l a d e s u m m a g a.

Teostame veel mõned niisugused katsed, saame näiteks niisugused tulemused:

Konstrueerime kolmnurgad kaatetitega (sentimeetreis)		Mõõdame hüpotenuusi c	Arvutame			
a	b		a^2	b^2	a^2+b^2	c^2
8	6	10	64	36	100	100
12	9	15	144	81	225	225
12	5	13	144	25	169	169
15	8	17	225	64	289	289

Võrreldes arve kahes viimases veerus, näeme, et kaatetite a ja b ning hüpotenuusi c vahel kehtib niisugune seos:

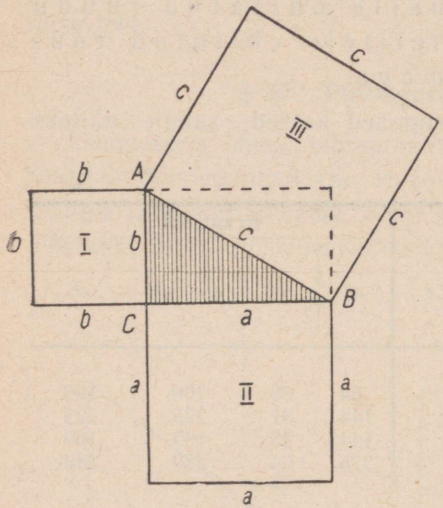
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

s. t. et h ü p o t e n u u s i l e e h i t a t u d r u u d u p i n d a l a v õ r d u b k a a t e t i t e l e e h i t a t u d r u u t u d e p i n d a l a d e s u m m a g a.

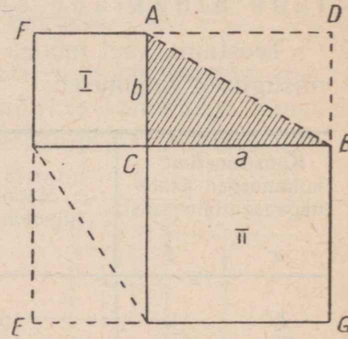
Tõestame, et see seos kehtib iga t ä i s n u r k s e kolmnurga puhul.

Võtame mistahes täisnurkse kolmnurga ABC ja ehitame tema külgedele ruudud (joonis 150). Edasise konstrueerimise hõlbustuseks vaatleme eraldi I ja II ruudust koostatud kujundit (joonis 151) ja eraldi III ruutu (joonis 152; õpilastele tuleb tungivalt soovitada jooniste 150, 151 ja 152 ise joonestamist).

Pikendame I ja II ruudu külgi, nagu on näidatud joonisel 151. Saame ruudu *EFDG* küljega $a + b$. I ja II ruudust koos-



Joonis 150. Püthagoras'e teoreem. Pindala I + pindala II = pindala III.

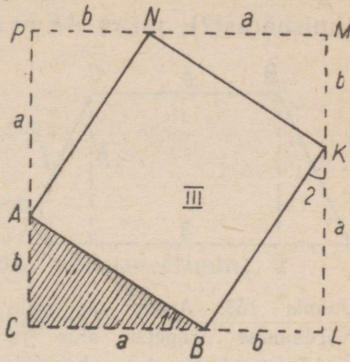


Joonis 151. Püthagoras'e teoreemi tõestus. Kogu suur ruut on koostatud I ja II ruudust ja neljast viirutatud kolmnurgast, . . .

tatud kujundi saame siis, kui ruudust *EFDG* eraldame kaks võrdset ristkülikut külgedega a ja b või neli täisnurkset kolmnurka *ABC*.

Nüüd joonestame läbi III ruudu tippude sirged, mis on paralleelsed kolmnurga *ABC* kaatetitega, nagu on näidatud joonisel 152. Saame ristküliku *CLMP*, mis osutub, nagu seda on kerge näha, ruuduks küljega $a + b$. Tõepoolest, täisnurksed kolmnurgad *ABC* ja *BKL* on kongruentsed hüpotenuusi ja teravnurga järgi ($\angle 1 = \angle 2$ kui vastavalt ristuvate haaradega nurgad). Järelikult $BL = AC = b$, nii et $CL = CB + BL = a + b$. Samuti tõestame, et ristküliku $CLMP$ teised küljed võrduvad $a + b$.

Nii saame III ruudu, kui ruudust, mille külg on $a + b$, eraldame neli kolmnurka ABC. Kuid eespool nägime, et I ja II ruudust koosneva kujundi saame nelja (teisiti asetatud) kolmnurga ABC eraldamisega ruudust, mille külg on $a+b$. Järelikult on mainitud kujundil sama pindala, mis III ruudul, s. t.



Joonis 152. ... kuid sama ruudu võib koostada III ruudust ja samast neljast kolmnurgast.

hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdub kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summaga

ehk lühemalt

hüpotenuusi ruut võrdub kaatetite ruutude summaga.

Siit järeldubki eespool toodud valem

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Seda meie poolt tõestatud teoreemi nimetatakse Pü t h a g o r a s'e t e o r e e m i k s.

§ 58. Püthagoras'e teoreemi rakendamine.

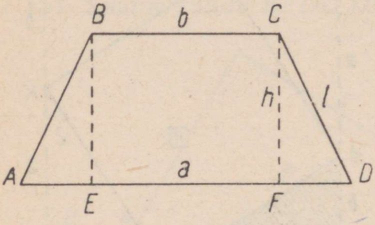
N ä i d e 1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus c on 26 cm; kaatet $a = 24$ cm. Leida teise kaateti b pikkus.

L a h e n d u s. $b^2 = c^2 - a^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 =$

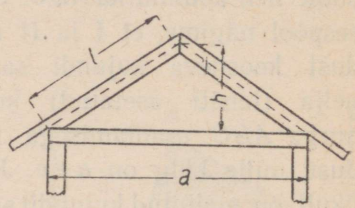
$$= 100; \; b = 10 \text{ cm}.$$

N ä i d e 2. Võrdhaarse trapetsi alused on $a = 23{,}5$ cm ja $b = 13{,}5$ cm, trapetsi kõrgus $h = 12$ cm. Leida haara pikkus.

Jooniselt 153 näeme, et külg l on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus; kolmnurga üks kaatet on h ja teine (FD) on $\frac{a-b}{2}$. Tõepoolest, kolmnurgad ABE ja CFD on kongruentsed (mispärast?), nii et $AE = FD$; lõigud AE ja FD kokku on aga



Joonis 153. Antud on selle võrdhaarse trapetsi alus ja kõrgus. Leida tema haar.



Joonis 154. Antud on katuse kõrgus h ja tema ava a. Leida sarika jala l pikkus.

niisama pikad kui $AD - EF = AD - BC = a - b$, seepärast on kummagi pikkus $\frac{a-b}{2}$. Püthagoras'e teoreemi põhjal saame:

$$l^2 = h^2 + (FD)^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 12^2 + \left(\frac{23{,}5 - 13{,}5}{2}\right)^2$$

ehk

$$l^2 = 169,$$

kust

$$l = 13 \text{ cm}.$$

N ä i d e 3. Kaheviilulise katuse kõrgus $h = 3$ m; $a = 8$ m (joonis 154). Määrata sarika jala pikkus l.

Jooniselt 154 näeme, et l on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus; kolmnurga kaatetid on $\frac{a}{2} = 4$ m ja $h = 3$ m. Püthagoras'e teoreemi põhjal leiame

$$l^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$

siit leiame, et

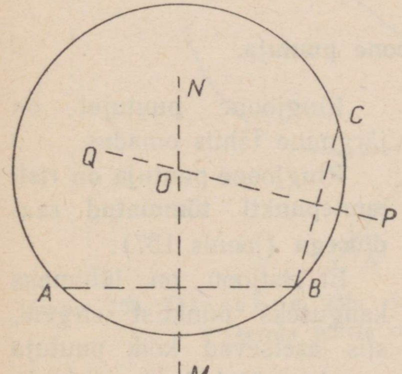
$$l = 5 \text{ m}.$$

V peatükk.

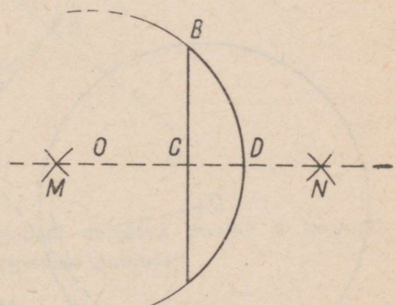
Ringjoon.

§ 59. Ringjoone keskpunkti konstrueerimine. Kaare poolitamine.

Praktikas on sageli tarvis leida juba olemasoleva ringjoone keskpunkti. Selle ülesande lahendamiseks on küllalt,



Joonis 155. Leida ringjoone keskpunkt antud punktide *A, B* ja *C* järgi.



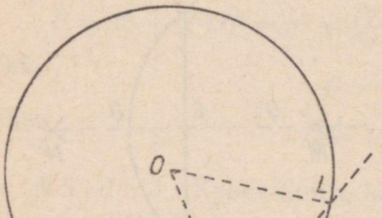
Joonis 156. Ülesanne: poolitada antud kaar *AB*.

kui valida antud ringjoonel mistahes kolm punkti *A, B* ja *C* (joonis 155) ja joonestada ristsirge *MN* läbi sirglõigu *AB* keskpunkti ja ristsirge *PQ* läbi sirglõigu *BC* keskpunkti. Kui punktid *A, B* ja *C* ei asetse ühel sirgel, siis sirged *MN* ja *PQ* lõikuvad mingis punktis *O*, mis on otsitava ringjoone keskpunkt. Et see oleks täpsem, tuleb punktid *A*, *B* ja *C* võtta mitte liiga lähestikku üksteisele. Samuti lahendatakse keskpunkti konstrueerimise ülesanne, kui on antud mitte kogu ringjoon, vaid ainult selle kaar.

Punkt *O* on otsitavaks keskpunktiks sellepärast, et ta, olles võrdsetel kaugustel punktidest *A* ja *B*, asetseb sirglõigu *AB* keskristsirgel (vt. § 34); samal põhjusel ta asetseb sirglõigu *BC* keskristsirgel ja seega ta on nende keskristsirgete lõikepunktiks.

Ülesanne 23. Poolitada antud kaar *AB*. Konstrueerime sirge *MN* (joonis 156), mis on kõõlu *AB* ristsirge ja läbib selle keskpunkti. Punkt *D*, milles sirge *MN* lõikub kaarega *AB*, on kaare otsitav keskpunkt.

§ 60. Ringjoone puutuja.



Joonis 157. Ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Ringjoone puutujal on järgmine tähtis omadus.

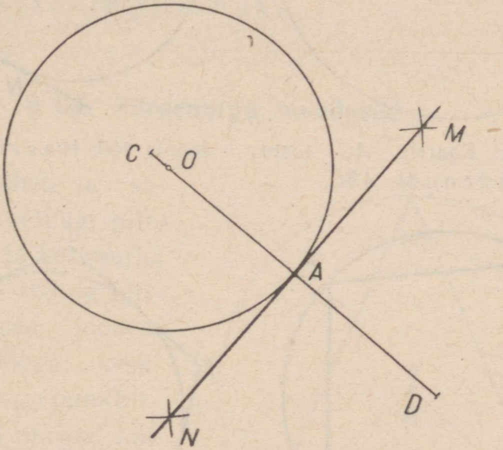
Ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega (joonis 157).

Et ristjoon on lühimaks kauguseks punktist sirgeni, siis asetsevad kõik puutuja muud punktid ringjoone keskpunktist *O* kaugemal kui raadiuse *OA* pikkus. Tähendab, kogu puutuja asetseb väljaspool ringjoont; puutuja *MN* ei saa peale puutepunkti *A* mitte kuskil kokku puutuda ringjoonega.

§ 61. Puutuja konstrueerimine ringjoonele läbi temal antud punkti.

Ü l e s a n n e 24. Läbi ringjoonel asetseva punkti A konstrueerida selle ringjoone puutuja.

Läbi keskpunkti O ja antud punkti A joonestame sirge CD (joonis 158). Punktist A püstitame sirgele CD ristsirge MN. Otsitav puutuja peab olema sirgega OA risti; kuid läbi punkti A saab joonestada ainult ühe sirge, mis on sirgega OA risti; järelikult on joonestatud sirge MN ringjoone puutuja punktis A.



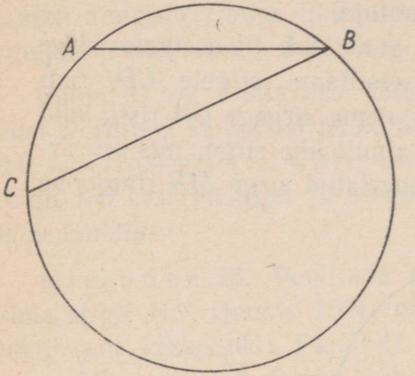
Joonis 158. Ü l e s a n n e: läbi ringjoonel asetseva punkti A konstrueerida sellele ringjoonele puutuja.

§ 62. Piirdenurgad ja haardenurgad; ümberjoonestatud hulknurgad ja sissejoonestatud hulknurgad.

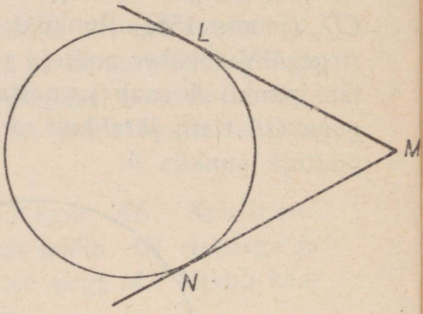
Nurka, mille moodustavad kaks ringjoone ühest punktist lähtuvat kõõlu, nimetatakse p i i r d e n u r g a k s.

Nii on $\angle ABC$ joonisel 159 ringjoone piirdenurk. Öeldakse, et piirdenurk ABC t o e t u b tema haarade vahel asetsevale kaarele AC.

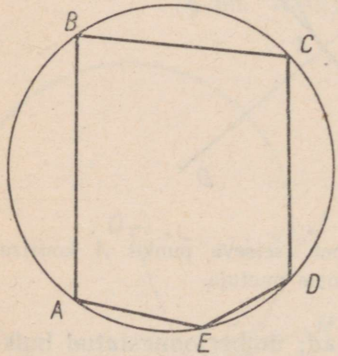
Ühe ringjoone kahe puutuja poolt moodustatud nurka nimetatakse **h a a r d e n u r g a k s**. Nii on $\angle LMN$ joonisel 160 ringjoone haardenurk.



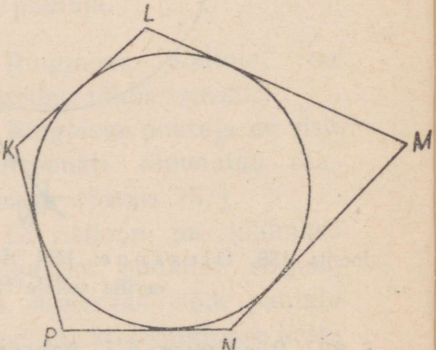
Joonis 159. Kaarele AC toetuv p i i r d e n u r k ABC.



Joonis 160. H a a r d e n u r k LMN.



Joonis 161. K õ õ l h u l k n u r k ehk s i s s e j o o n e s t a t u d h u l k n u r k.



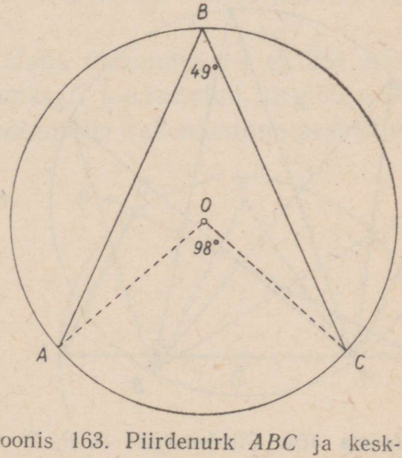
Joonis 162. P u u t u j a h u l k n u r k ehk ü m b e r j o o n e s t a t u d h u l k n u r k.

Hulknurka ($ABCDE$ joonisel 161), mille kõik tipud asetsevad ringjoonel, nimetatakse **k õ õ l h u l k n u r g a k s** ehk **s i s s e j o o n e s t a t u d h u l k n u r g a k s**. Sissejoonestatud hulknurga kõik nurgad on piirdenurgad: Ringjoont, millesse on joonestatud hulknurk, nimetatakse selle hulknurga ümber joonestatud ringjooneks ehk lühidalt ümberringjooneks.

Hulknurka (*KLMNP* joonisel 162), mille kõik küljed on ringjoone puutujad, nimetatakse puutujahulknurgaks ehk ümberjoonestatud hulknurgaks. Ümberjoonestatud hulknurga kõik nurgad on haardenurgad. Ringjoont, mille ümber on joonestatud puutujahulknurk, nimetatakse selle hulknurga sisse joonestatud ringjooneks ehk lühidalt siseringjooneks.

§ 63. Piirdenurga omadused.

Võrdleme ühele ja samale kaarele toetuvat piirdenurka *ABC* ja kesknurka *AOC*. Joonisel 163 on piirdenurga haarad joonestatud täisjoontega, kesknurga haarad aga punktiirjoontega; need nurgad toetuvad mõlemad ühele ja samale kaarele *AC*. On näha, et kesknurk on piirdenurgast suurem. Leiame nende nurkade vahelise seose. Mitu korda kesknurk on suurem kui samale kaarele toetuv piirdenurk?



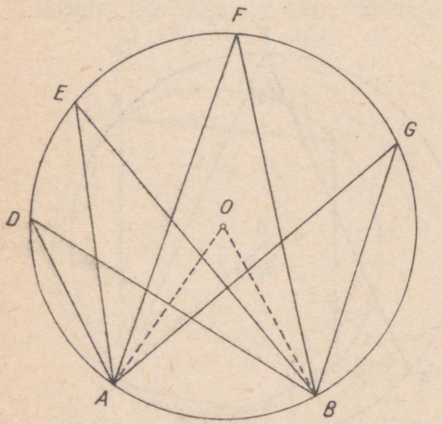
Joonis 163. Piirdenurk *ABC* ja kesknurk *AOC* toetuvad ühele ja samale kaarele *AC*. Piirdenurk on pool kesknurgast: $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

Joonestame mitu ringjoont, igas ringjoones ühele ja samale kaarele toetuva piirdenurga ja kesknurga. Mõõdame malliga nende suurused ja leiame nende suhte (s. t. jagatise). Kanname oma uurimise tulemused tabelisse:

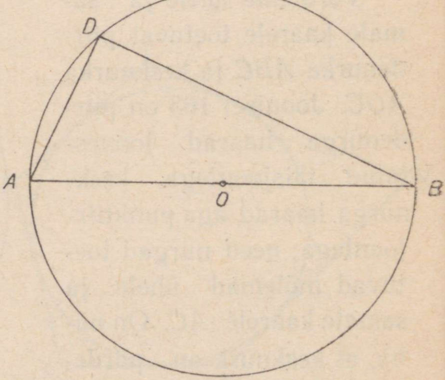
Nr.	Kesknurk AOC	Piirdenurk ABC	$\angle AOC : \angle ABC$
1.	98^0	49^0	2,0
2.			
3.			
4.			
5.			

Sellest vaatlusest tuleme järeldusele, et kui piirdenurk ja kesknurk toetuvad ühele ja samale kaarele, siis kesknurk on piirdenurgast kaks korda suurem, ehk, teisiti öeldes,

piirdenurk on pool kesknurgast.



Joonis 164. Piirdenurgad D, E, F ja G on võrdsed, sest igaüks neist on pool kesknurgast AOB.



Joonis 165. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk, sest samale kaarele toetuv kesknurk on 180°.

Sellest piirdenurga omadusest saame teha kaks järeldust.

1. Kui ühe ja sama ringjoone sisse joonestame hulga piirdenurki, nii et nad kõik toetuvad ühele ja samale kaarele,

siis iga niisugune piirdenurk on pool sellest kesknurgast, mis toetub samale kaarele.

Seega

ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

2. Joonestame ringjoone. Joonestame selle ringjoone sisse piirdenurga, mis toetub niisugusele kaarele, mis on poolringjoont.

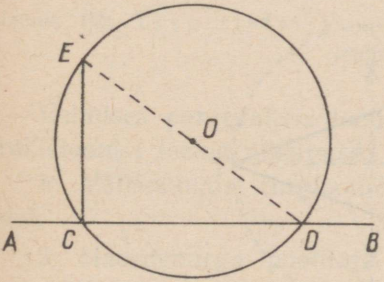
Sel korral on kesknurk *AOB* (joonis 165) sirgnurk; piirdenurk *ADB* on pool sellest sirgnurgast, piirdenurk *ADB* on seega 90°. Siit järeldame, et

diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

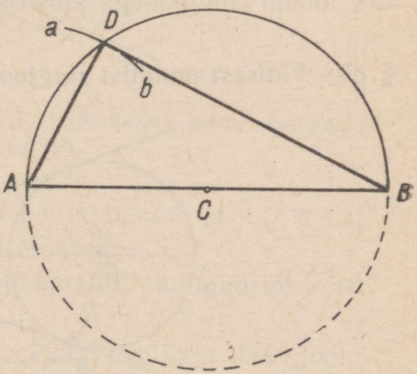
§ 64. Konstruktsioonülesandeid.

Ü l e s a n n e 25. Püstitada sirgele *AB* temal antud punktist *C* ristsirge.

Selle ülesande võib lahendada ülesandes 18 (§ 36) käsiteldud viisil; asetseb aga punkt *C* joonestatud sirglõigu *AB* otsa lähedal, siis pole § 36 põhimõtte rakendamine praktiline,



Joonis 166. Ü l e s a n n e. Püstitada sirgele *AB* temal antud punktist *C* ristsirge.



Joonis 167. Ü l e s a n n e. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi ja kaateti järgi.

sest et sirget AB saab sel korral liiga vähe pikendada, mis toob kaasa liigset ebatäpsust. Konstrueerimine § 36 käsiteldud viisil võib osutuda praktiliselt koguni teostamatuks, kui punkt C asetseb paberilehe ääre ligidal.

Vabalt valitud punktist O, mis asetseb väljaspool sirget AB (joonis 166), joonestame ringjoone raadiusega OC. Läbi ringjoone ja sirge AB teise lõikepunkti D joonestame diameetri DO. Tema teise otspunkti E ühendame punktiga C. Sirge CE on otsitav ristsirge.

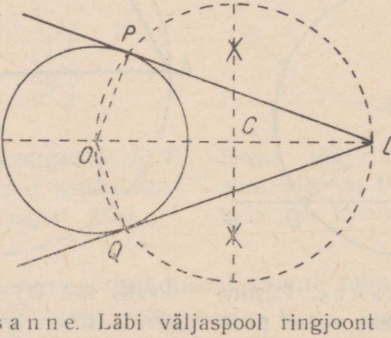
See ristsirge konstrueerimise viis on muuseas sobiv puutuja konstrueerimisel ringjoonele läbi sellel ringjoonel asetseva punkti (ülesanne 24).

Ü l e s a n n e 26. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi ja kaateti järgi.

§-s 37 lahendasime juba selle ülesande. Siin toodud lahendus on sobivam siis, kui on antud mitte ainult hüpotenuusi pikkus, vaid ka tema asend.

Poolitame antud hüpotenuusi AB (joonis 167); tema keskpunktist C joonestame poolringjoone raadiusega CA. Punktist A joonestame kaare ab antud kaatetiga võrdse raadiusega. See lõikub ringjoonega punktis D. Kolmnurk ADB on otsitav.

§ 65. Välisest punktist ringjoonele puutujate konstrueerimine.

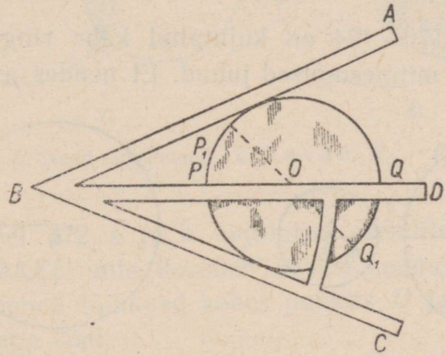


Joonis 168. Ü l e s a n n e. Läbi väljaspool ringjoont asetseva punkti L konstrueerida sellele ringjoonele p u u t u j a d.

Ülesanne 27. Läbi väljaspool ringjoont asetseva punkti konstrueerida sellele ringjoonele puutujad.

Ühendame punkti L (joonis 158) antud ringjoone keskpunktiga O. Poolitame OL ja leitud keskpunktist C joonestame raadiusega CO ringjoone. See ringjoon lõikub antud ringjoonega kahes punktis P ja Q. Sirged LP ja LQ on mõlemad antud ringjoone puutujad. Tõepoolest, nurgad LPO ja LQO on täisnurgad, sest nad on joonestatud abiringjoonesse ja toetuvad tema diameetrile. Et LP ja LQ on raadiustega OP ja OQ risti, siis on nad antud ringjoone puutujad.

§ 66. Haardenurga omadusi.



Joonis 169. Tsentriotsija on riist ringikujulise eseme keskpunkti leidmiseks.

Eelmises paragrahvis toodud puutujate LP ja LQ konstruktsioonist teeme niisugused järeldused:

1. Välispunktist ringjoonele tõmmatud puutujad on võrdsed.

2. Haardenurga poolitaja ($\angle PLQ$ poolitaja OL joonisel 168) läbib ringjoone keskpunkti.

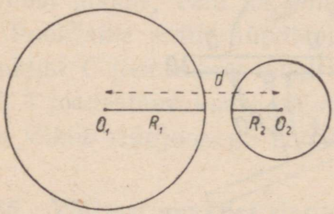
Mõlemad need omadused järelduvad kolmnurkade OPL ja OQL kongruentsusest.

Haardenurga teisele omadusele on rajatud t s e n t r i o t s i j a konstruktsioon; tsentriotsija on riist, mida kasutatakse ringikujulise eseme keskpunkti leidmiseks.

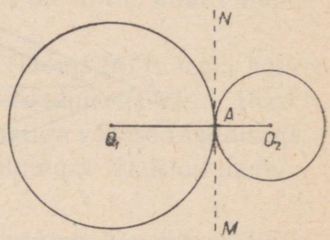
Tsentriotsija (joonis 169) kujutab endast nurka *ABC*, mille poolitajaks on *BD*. Ring, mille keskpunkti on tarvis leida, asetatakse tsentriotsijasse, nii et nurga *ABC* haarad puutuksid ringjoont. Nurgapoolitaja järgi joonestatakse üks ringi diameeter *PQ*. Siis pööratakse ringi ja joonestatakse samal viisil teine diameeter P_1Q_1. Sirgete *PQ* ja P_1Q_1 lõikepunkt ongi ringi keskpunkt *O*.

§ 67. Kahe ringjoone vastastikune asend.

Joonistel 170—174 on kujutatud kahe ringjoone vastastikuse asendi mitmesugused juhud. Et nendes asendites pare-



Joonis 170. Need ringjooned asetsevad teine v ä l j a s p o o l teist; $d>R_1+R_2$.



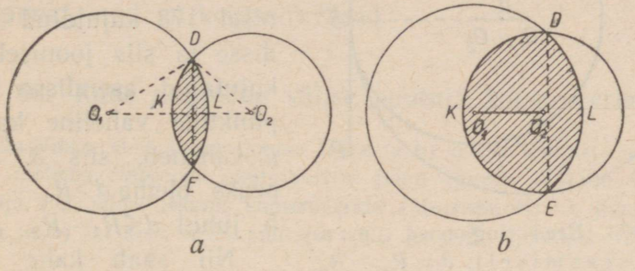
Joonis 171. Need ringjooned p u u d u t a v a d t e i n e t e i s t v ä l i s e l t; $d=R_1+R_2$.

mini orienteeruda, kujutleme, et ringjoon suurema raadiusega R_1 püsib liikumatuna, kuid ringjoon väiksema raadiusega R_2 liigub mõlema ringjoone keskpunkte ühendava sirglõigu O_1O_2 sihis; seda sirglõiku nimetatakse t s e n t r i j o o n e k s ehk k e s k j o o n e k s.

Kaugust mõlema ringjoone keskpunktide O_1 ja O_2 vahel tähistame tähega *d*.

1. Joonisel 170 on kujutatud teine ring asetsevana väljaspool teist; nii ringidel kui ka ringjoontel puuduvad ühised punktid. Sel juhul $d > R_1 + R_2$.

2. Joonisel 171 kujutatud asendis on ringidel ja ringjoontel ainult üks ühine punkt A. Punktis A sirgega O_1O_2 ristuv sirge MN on mõlemale ringjoonele puutujaks. Sel juhul öeldakse, et mõlemad ringjooned p u u t u v a d v ä l i s e l t. Ringjoonte välise puutumise puhul $d = R_1 + R_2$. Ringjoonte edasisel lähendamisel $d < R_1 + R_2$.



Joonis 172 a ja b. Need ringjooned l õ i k u v a d; $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$.

3. Joonisel 172 a ja b kujutatud asendites on ringidel ühine osa $DKEL$, mis koosneb kahest segmendist DKE ja DLE. Ringjooned lõikuvad kahes punktis D ja E. Sirge DE on keskjoonega risti.

Soovitame õpilastel seda tõestada: vaadelge kolmnurki O_1DO_2 ja O_1EO_2 ning siis võrdhaarset kolmnurka DO_1E.

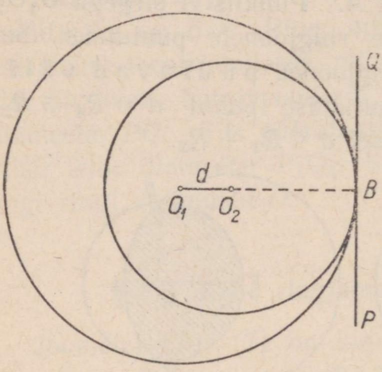
4. Joonisel 173 on kujutatud üks ring asetsevana teise sees, kusjuures ringjoontel on ainult üks ühine punkt B. Punktist B keskjoonega ristuv sirge PQ on mõlema ringjoone puutujaks.

Sel puhul öeldakse, et ringjooned p u u t u v a d s e e s m i s e l t.

5. Joonisel 174 a ja b on kujutatud üks ring asetsevana teise sees, kusjuures ringjoontel ei ole ühiseid punkte. Erijuhul (joonis 174 b) võib mõlemal ringjoonel olla ühine kesk-

punkt; siis nimetatakse neid ringjooni kontsentrilisteks. Viimasel juhul $d = 0$.

Nagu nägime, kehtib kõigil kolmel viimasel juhul võrratus: $d < R_1 + R_2$.

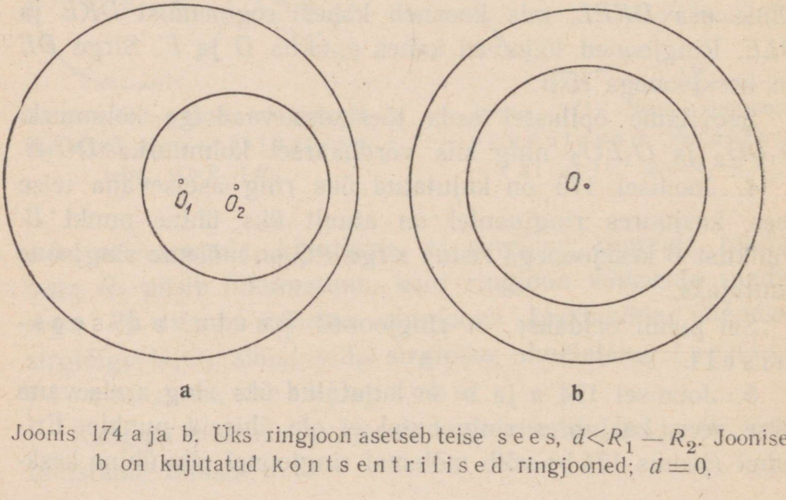


Joonis 173. Need ringjooned puutuvad seesmiselt; $d = R_1 - R_2$.

4. juhul kehtib veel peale eelmise võrdus $d = R_1 - R_2$.

Et üleminekul joonisel 172 kujutatud asendist joonisel 173 kujutatud asendisse ja siis joonisel 174 kujutatud asendisse keskpunktide vaheline kaugus d väheneb, siis 3. juhul peaks olema $d > R_1 - R_2$ ja 5. juhul $d < R_1 - R_2$.

Nii saab kahe ringjoone vastastikuse asendi mitmesuguseid juhtusid iseloomustada järgmiselt:



Joonis 174 a ja b. Üks ringjoon asetseb teise sees, $d < R_1 - R_2$. Joonisel b on kujutatud kontsentrilised ringjooned; $d = 0$.

1. $d > R_1 + R_2$; ringjooned asetsevad teine väljaspool teist puutumatult.

2. $d = R_1 + R_2$; ringjooned puutuvad väliselt.

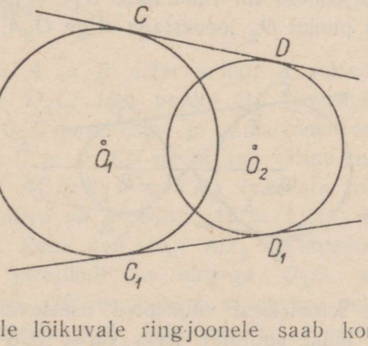
3. $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$; ringjooned lõikuvad.

4. $d = R_1 - R_2$; ringjooned puutuvad seesmiselt.

5. $d < R_1 - R_2$; üks ringjoon asetseb teise sees puutumatult. Erijuhul, kui $d = 0$, s. t. kui ringjoontel on ühine keskpunkt, nad on kontsentrilised.

§ 68. Kahe ringjoone välise puutuja konstrueerimine.

On ilmne, et 5. juhul (joonis 174 a ja b) ei saa tõmmata sirget, mis oleks mõlema ringjoone puutujaks. 4. juhul (joonis 173) on üks ühine puutuja PQ, mida oskame konstrueerida (ülesanne 24). 3. juhul (joonis 172 a ja b) on kaks ühist puutujat (CD ja C_1D_1 joonisel 175; nende



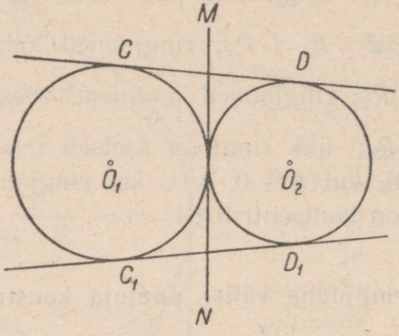
Joonis 175. Kahele lõikuvale ringjoonele saab konstrueerida k a k s ühist puutujat.

konstrueerimisviisi kirjeldame hiljem); 2. juhul on peale CD ja C_1D_1 veel üks ühine puutuja MN (joonis 176), mida oskame konstrueerida. Lõpuks 1. juhul esineb peale CD ja C_1D_1 veel kaks ühist puutujat (EF ja E_1F_1 joonisel 177).

Puutujaid CD ja C_1D_1 nimetatakse v ä l i s e i k s puutujaiks; puutujaid EF ja E_1F_1, samuti MN (joonisel 176) s e e s m i s t e k s.

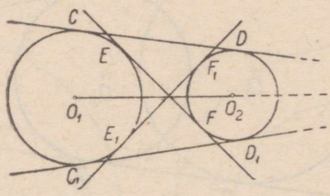
Välised puutujad lõikuvad keskjoone $O_1 O_2$ pikendiga; seesmised puutujad aga tema endaga (joonis 177).

Ü l e s a n n e 28. Konstrueerida kahe antud ringjoone välised puutujad



Joonis 176. Kahele väliselt puutuvale ringjoonele saab konstrueerida k o l m ühist puutujat: kaks välist (CD ja C_1D_1) ja ühe seesmise (MN).

Lahendus põhineb järgmistel kaalutlustel. Otsitav sirge CD (joonis 178) peab olema ristjooneks nii raadiusele $O_1C = R_1$ kui ka raadiusele $O_2D = R_2$. Kui läbi punkti O_2 joonestada sirge O_2A, mis on paralleelne



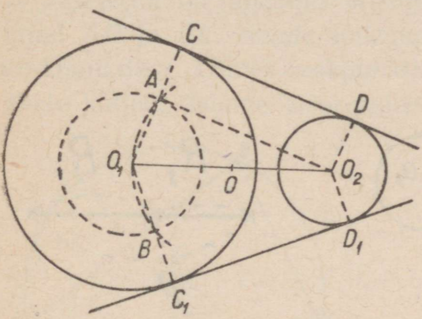
Joonis 177. Kahele teineteisest väljaspool asetsevale ringjoonele saab konstrueerida n e l i ühist puutujat: kaks välist (CD ja C_1D_1) ja kaks seesmist (EF ja E_1F_1).

sirgega CD, siis saame täisnurkse kolmnurga O_1AO_2, mille hüpotenuusiks on O_1O_2 ja mille kaatet O_1A võrdub antud ringjoonte raadiuste R_1 ja R_2 vahega. Tõepoolest, $AC = O_2D$ kui ristküliku $ACDO_2$ vastasküljed, nii et

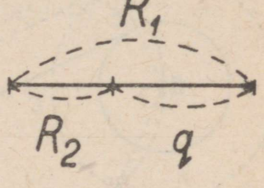
$$O_1A = O_1C - AC = O_1C - O_2D = R_1 - R_2.$$

Ülesanne muutub niiviisi täisnurkse kolmnurga O_1AO_2 konstrueerimiseks antud hüpotenuusi O_1O_2 ja antud kaateti R_2-R_1 järgi (ülesanne 26). Seepärast lahendame ülesande järgmiselt.

Leiame lõigu $q=R_1-R_2$ (joonis 179). Punktist O_1 (joonis 178) joonestame ringjoone raadiusega q. Lõigu O_1O_2 keskpunktist O joonestame kaare raadiusega OO_1, see kaar lõikub raadiusega q joonestatud



Joonis 178. Ülesanne. Konstrueerida kahe antud ringjoone välised puutujad.



Joonis 179. Selle ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt lõigu $q=R_1-R_2$.

ringjoonega puktides A ja B. Läbi punkti A (täisnurga O_1AO_2 tipp) joonestame raadiuse O_1C; läbi punkti O_2 joonestame raadiuse O_2D, mis on raadiusega O_1C paralleelne ja samasuunaline. Ühendame nende raadiuste otspunktid C ja D. CD on otsitav väline puutuja.

Tõepoolest, lõik $AC=R_1-q=R_2$ (vaadata joonis 179). Nelinurga $ACDO_2$ vastasküljed on võrdsed ($AC=O_2D=R_2$) ja paralleelsed, järelikult $CD \parallel AO_2$. Kuna aga sirge AO_2 on konstruktsiooni järgi risti sirgega O_1C ja järelikult ka sirgega O_2D, siis $CD \perp O_1C$ ja $CD \perp O_2D$. Tähendab, CD on mõlema ringjoone puutuja.

Teine väline puutuja C_1D_1 konstrueeritakse samuti.

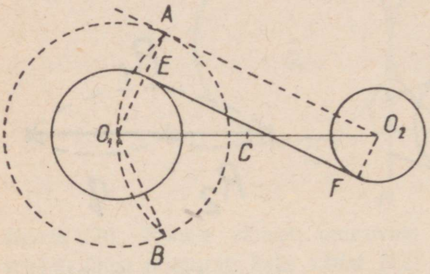
§ 69. Kahele ringjoonele seesmise puutuja konstrueerimine.

Ülesanne 29. Konstrueerida kahele antud rigjoonele seesmised puutujad.

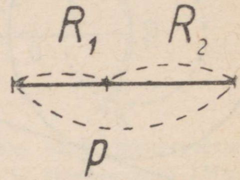
Lahendus põhineb järgmistel kaalutlustel. Otsitav sirge EF peab olema risti nii raadiusega O_1E kui ka raadiusega O_2F (joonis 180). Kui läbi O_2 joonestada $O_2A \parallel EF$, siis saame täisnurkse kolmnurga

O_1AO_2, mille hüpotenuusiks on O_1O_2 ja mille kaatet O_1A võrdub $R_1 + R_2$ (sest et $O_1A = O_1E + EA = O_1E + O_2F$).

Seepärast lahendame ülesande nii. Leiame lõigu $p = R_1 + R_2$ (joonis 181); punktist O_1 joonestame ringjoone raadiusega p. Lõigu O_1O_2 keskpunktist C joonestame kaare raadiusega CO_1, see kaar lõikub raadiusega p joonestatud ringjoonega punktides A ja B.



Joonis 180. Ülesanne. Konstrueerida kahele antud ringjoonele seesmine puutuja.



Joonis 181. Selle ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt lõigu $p = R_1 + R_2$.

Läbi punkti A joonestame raadiuse O_1E ja läbi punkti O_2 raadiuse O_2F, mis on paralleelne ja vastandsuunaline raadiusega O_1E.

Nende raadiuste otspunktid E ja F ühendame. Sirge EF on otsitav seesmine puutuja, sest ta on raadiustega O_1E ja O_2F risti. Seda tõestatakse samuti nagu eelmises paragrahvis.

§ 70. Antud kolmnurga sise- ja ümberringjoone konstrueerimine.

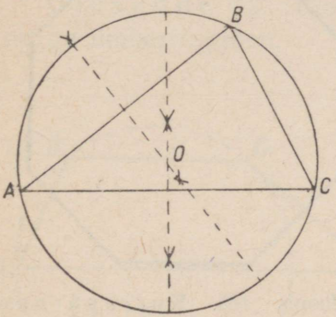
Ülesanne 30. Konstrueerida antud kolmnurga ABC ümberringjoon.

Ülesanne taandub ringjoone konstrueerimiseks läbi kolme mitte ühel sirgjoonel asetseva punkti (A, B, C joonisel 182). Konstrueerimise seletus leidub § 59.

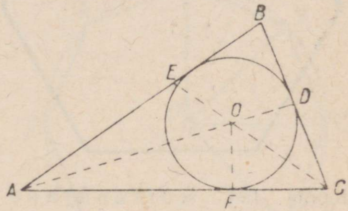
Ülesanne 31. Konstrueerida antud kolmnurga ABC (joonis 183) siseringjoon.

Kõik antud kolmnurga nurgad on otsitava ringjoone suhtes haardenurgad. Seepärast peavad nurkade A ja C poolitajad läbima ringi keskpunkti (§ 66).

Järelikult on lahendus niisugune: joonestame nurgapoolitajad AD ja CE. Nende lõikepunkt O on otsitava ringjoone keskpunktiks. Lastes keskpunktist O ristsirge OF kolmnurga ühele küljele, leiame siseringjoone raadiuse OF.



Joonis 182. Ülesanne. Konstrueerida antud kolmnurga ABC ümberringjoon.



Joonis 183. Konstrueerida antud $\triangle ABC$ siseringjoon.

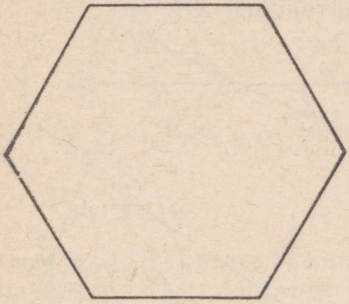
Märkus. On ilmne, et punkti O läbib ka nurga B poolitaja (joonisel 183 joonestamata). Tähendab, kolmnurga kolm nurgapoolitajat lõikuvad alati ühes punktis. Seda oleme varemalt maininud. Täheldame samuti, et kolmnurga sise- ja ümberringjoone keskpunktid ühtivad ainult siis, kui kolmnurk on võrdkülgne.

§ 71. Korrapärased hulknurgad.

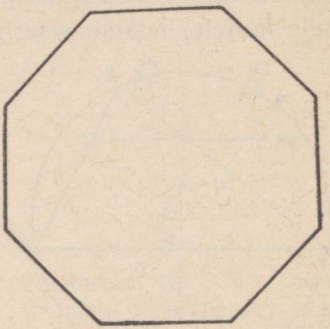
Võrdsete külgede ja võrdsete nurkadega kumerat hulknurka nimetatakse korrapäraseks kumeraks hulknurgaks ehk, lühemalt, korrapäraseks hulknurgaks.

Joonisel 184 on kujutatud korrapärane kuusnurk ja joonisel 185 korrapärane kaheksanurk. Korrapärane kolmnurk on võrdkülgne kolmnurk ja korrapärane nelinurk on ruut.

Korrapäraste hulknurkade kuju on paljudel toodetel ja mehhanismide üksikosadel: mutritel, poldipeadel, mutrivõtmete pesadel, pakksillutise pakkudel, parketil, kandiliste klaaside põhjadel jm.



Joonis 184. Korrapärane kuusnurk.



Joonis 185. Korrapärane kaheksanurk.

Nagu teada (§ 21), on hulknurga nurkade summa $180° \cdot (n - 2)$, kui tal on n külge (n-nurk). Kuna korrapärase hulknurga kõik nurgad on võrdsed, siis võrdub korrapärase hulknurga iga nurk $\frac{180^0}{n} \cdot (n - 2)$.

§ 72. Sise- ja ümberringjooned.

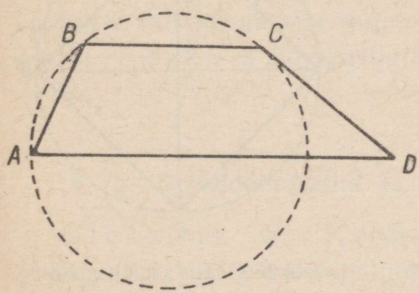
Paragrahvis 70 nägime, et igal kolmnurgal on nii ümberringjoon kui ka siseringjoon. Kolmest suurema külgede arvuga hulknurgal pole alati sise- ja ümberringjoont. Nii näiteks ei saa joonisel 186 kujutatud trapetsile $ABCD$ konstrueerida sise- ja ümberringjoont. Tõepoolest, läbi kolme punkti A, B, C saab joonestada ainult ühe ringjoone (§ 59), punkti D see ringjoon aga ei läbi. Tähendab, nelinurgal *ABCD* puudub ümberringjoon. Samuti veendume, et puudub ka siseringjoon.

Täheldame, et rööpkülikule on võimalik konstrueerida siseringjoont ainult siis, kui ta on romb, ja ümberringjoont ainult siis, kui ta on ristkülik.

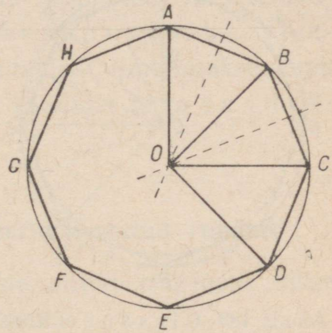
Korrapärasele hulknurgale saab alati konstrueerida sise- ja ümberringjoone.

Selles veendume järgmisel viisil.

Ülesanne 32. Konstrueerida antud korrapärase hulknurga ümberringjoon.



Joonis 186. Sellele trapetsile on võimatu konstrueerida nii sise- kui ka ümberringjoont.



Joonis 187. Ülesanne. Konstrueerida antud korrapärase hulknurga ümberringjoon.

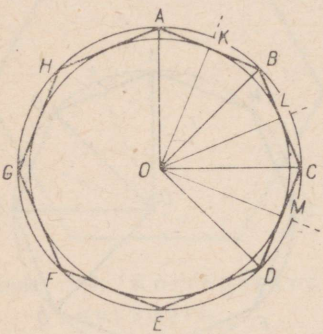
Võtame korrapärase hulknurga (joonis 187) mistahes kolm lähistippu *A, B, C* ja konstrueerime ringjoone läbi nende. See ringjoon on otsitav, ta läbib korrapärase hulknurga kõik teised tipud. Tõestame seda.

Raadiustel *AO, OB* ja *OC* on üks ja sama pikkus. Veendume selles, et lõigul *OD* on sama pikkus.

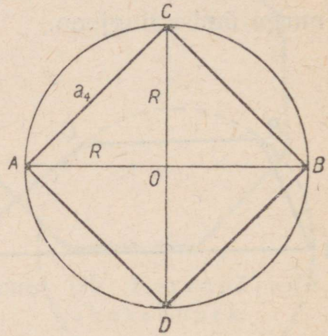
Võrdhaarsetel kolmnurkadel *AOB* ja *BOC* on haarad võrdsed kui ringjoone raadiused ja alused *AB* ja *BC* on võrdsed kui korrapärase hulknurga küljed. Tähendab, kolmnurgad *AOB* ja

BOC on kongruentsed; järelikult $\angle ABO = \angle CBO$, s. t. igaüks neist nurkadest võrdub $\frac{1}{2}\angle ABC$, aga kuna peale selle $\angle CBO = \angle BCO$, siis ka $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle ABC$. Korrapärase hulknurga kõik nurgad on võrdsed; tähendab, $\angle ABC = \angle BCD$, nii et $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$, teiste sõnadega, $\angle BCO = \angle DCO$.

Nüüd vaatleme kolmnurki OBC ja OCD. Neil on ühine külg OC; $BC = CD$ kui korrapärase hulknurga küljed ja tõestuse järgi $\angle BCO = \angle DCO$. Järelikult on need kolmnurgad



Joonis 188. Ülesanne. Konstrueerida antud korrapärase hulknurga siseringjoon.



Joonis 189. Ülesanne. Konstrueerida antud ringjoone sisse joonestatud ruut.

kongruentsed ja seega $OD = OB$. Saime, et lõik OD võrdub konstrueeritud ringjoone raadiusega. Joonestades OE, tõestame samuti, et sellel lõigul on sama pikkus, jne. Järelikult läbib ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega OA hulknurga kõik tipud.

Ülesanne 33. Konstrueerida antud korrapärase hulknurga siseringjoon.

Eelmises ülesandes leitud punktist O laseme ristsirge OK (joonis 188) korrapärase hulknurga ühele küljele. Punktist O kui keskpunktist joonestame ringjoone raadiusega OK. See ringjoon on otsitav; ta puutub korrapärase hulknurga kõiki külgi. Tõepoolest, korrapärase hulknurga küljed on ümberringjoone võrdsed kõõlud, võrdsete kõõlude kaugused keskpunktist on aga võrdsed; seepärast on kõik punktist O hulknurga külgedele lastud ristlõigud võrdsed: $OK = OL = OM$ jne. Seega läbib ringjoon, mille raadius on OK, kõik punktid K, L, M jne.

Küljed BC, CD jne., olles raadiustega OL, OM jne. risti, on selle ringjoone puutujad.

Esitatust selgub, et korrapärase hulknurga sise- ja ümberringjoonel on ühine keskpunkt; seda keskpunkti nimetatakse k o r r a p ä r a s e h u l k n u r g a k e s k p u n k t i k s. Korrapärase hulknurga siseringjoone raadiust nimetatakse tema a p o t e e m i k s ja ümberringjoone raadiust tema r a a d i u s e k s.

§ 73. Sissejoonestatud ja ümberjoonestatud ruudud.

Ü l e s a n n e 34. Konstrueerida antud ringjoone sisse joonestatud korrapärane nelinurk (ruut).

Konstrueerime antud ringjoone kaks isekeskis risti asetsevat diameetrit AB ja CD (joonis 189). Nende otspunktid ühendame kõõludega. Sissejoonestatud nelinurk $ACBD$ on ruut, sest et kaared AC, CB, BD ja DA on võrdsed (igaüks võrdub 90°); järelikult on neile vastavad kõõlud, s. t. nelinurga $ACBD$ küljed, võrdsed. Peale selle on tema nurgad täisnurgad, sest nad on piirdenurgad ja toetuvad diameetrile.

Korrapärase hulknurga külgede pikkust on hakatud tähistama tähega a; tema juurde paremale poole alla märgitakse hulknurga külgede arv. Nii tähendab a_4 sissejoonestatud ruudu külje pikkust, a_6 korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külje pikkust.

Sissejoonestatud ruudu külg a_4 on ringjoone raadiusega R ja diameetriga D tähtsas seoses. Nimelt, rakendades Püthagoras'e teoreemi, leiame täisnurksest kolmnurgast ACO valemi.

$$a_4^2 = 2R^2, \tag{7}$$

millest nähtub, et

sissejoonestatud ruudu pindala on raadiuse ruudust kaks korda suurem.

Kuna raadiuse ruut on neli korda väiksem diameetri ruudust (võrrelda joonisel 190), s. t. $R^2 = \frac{1}{4}D^2$, siis leiame äsjatuletatud valemist, et

$$a_4^2 = \frac{1}{2} D^2, \tag{8}$$

s. t.

sissejoonestatud ruudu pindala on diameetri ruudust kaks korda väiksem.

Et $\sqrt{2} \approx 1,4$, siis saame nendest valemitest:

$$a_4 = \sqrt{2}R \approx 1,4\,R,$$

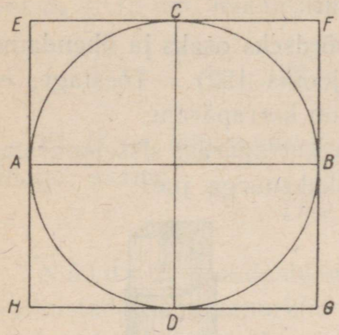
ja

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} D \approx 0,7\,D. \tag{9}$$

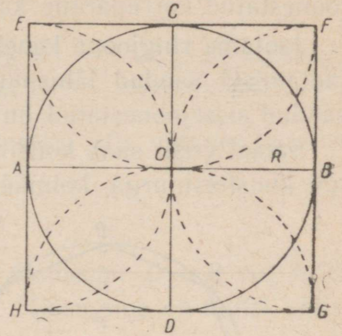
Ü l e s a n n e 35. Konstrueerida antud ringjoone ümber joonestatud ruut.

Joonestame kaks ristuvat diameetrit AB ja CD (joonis 190). Kui läbi nende otspunktide joonestada ringjoone puutujad, saame ümberjoonestatud nelinurga $EFGH$. Jätame õpilasele tõestada, et $EFGH$ on ruut.

Puutujate konstrueerimiseks on antud juhul kõige sobivam rakendada järgmist võtet: punktidest A, C, B ja D joonestame kaared antud ringjoone raadiusega võrdse raadiusega R (nagu on näidatud joonisel 191). Nende kaarte lõikepunktid *E, F, G* ja *H* on otsitava ruudu tippudeks. Tõepoolest, nelinurga *AOCE* kõik küljed on konstruktsiooni järgi võrdsed. Tähendab, see on rööpkülik (romb), ja kuna $\angle AOC$ on täisnurk, siis *AOCE* on ruut. Järelikult on $CE \perp OC$ ja



Joonis 190. Raadiuse ruut on diameetri ruudust neli korda väiksem.



Joonis 191. Ülesanne. Konstrueerida antud ringjoone ümber joonestatud ruut.

seega on *CE* ringjoone puutujaks punktis *C;* samuti tõestame, et *CF* on ringjoone puutujaks punktis *C,* et *BF* ja *BG* on ringjoone puutujaks punktis *B,* jne.

Korrapärase ümberjoonestatud hulknurga külje pikkust on hakatud tähistama tähega *b,* mille juurde alla märgitakse hulknurga külgede arv. Ümberjoonestatud ruudu külg b_4 on ringjoone raadiusega *R* ja diameetriga *D* lihtsõltuvuses

$$b_4 = 2R = D, \tag{10}$$

mis järeldub teostatud konstruktsioonist.

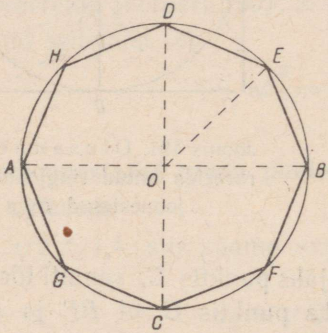
Ülesanne 36. Jaotada antud ringjoon neljaks ja kaheksaks võrdseks osaks.

Joonestame kaks ristuvat diameetrit *AB* ja *CD* (joonis 192). Punktid *A, D, B* ja *C* jaotavad ringjoone neljaks võrdseks osaks, millest igaüks võrdub 90°. Poolitades kaare *DB,* mis võrdub 90° (§ 59), leiame kaared $DE = EB = 45°$. Poolitades ka ülejäänud kaared, jaotame ringjoone punktidega D, E, B, F, C, G, A ja H kaheksaks võrdseks osaks, igaüks 45°.

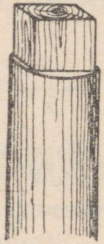
Ülesanne 37. Konstrueerida antud ringjoone sisse joonestatud korrapärane kaheksanurk.

Jaotame ringjoone kaheksaks võrdseks osaks ja ühendame jaotamisel saadud lähispunktid (joonis 192). Tõestage, et saadud sissejoonestatud hulknurk on korrapärane.

Samal viisil saab konstrueerida korrapärase sissejoonestatud kuusteistnurga, kolmkümmendkaksnurga jne.



Joonis 192. Ülesanne. Konstrueerida antud ringjoone sisse joonestatud korrapärane kaheksanurk.



Joonis 193. Kui jäme palk tuleb võtta, et temast saaks saagida antud mõõdetega ruutristlõikega tala?

§ 74. Näiteid.

Näide 1. On tarvis saagida ruutristlõikega tala mõõdetega 12 cm · 12 cm. Kui jäme palk tuleb selleks võtta?

Nagu nähtub jooniselt 193, on palgi kõige väiksemaks ehk, nagu öeldakse, minimaalseks läbimõõduks 12-sentimeetrise küljega ruudu ümberringjoone diameeter D. On jämedus väiksem kui D, siis pole nõutavat tala võimalik saagida. On jämedus tublisti suurem kui D, siis tuleb kulutada liiga palju jõudu ja kasutult raisata materjali. Tegelikult tuleb muidugi arvestada väikest «varu».

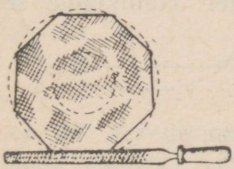
Diameetri D suuruse leiame valemi järgi, mis seob sissejoonestatud ruudu külge diameetriga, $a_4 \approx 0{,}7D$; võttes selles $a_4 = 12$ cm, leiame, et

$$D \approx \frac{a_4}{0{,}7} = \frac{12}{0{,}7}.$$

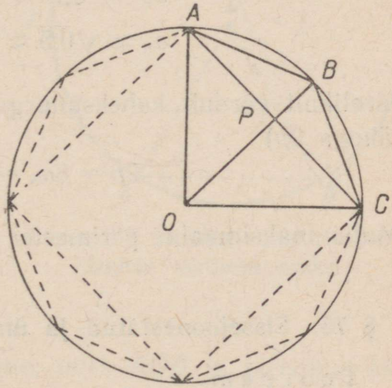
Et D on minimaalseks jämeduseks, siis võtame jagatise liiaga; saame

$$D \approx 18 \text{ cm}.$$

N ä i d e 2. Raudpoldist, mille diameeter $D = 2$ cm, tuleb valmistada kaheksanurkne mutter. Missugune on mutri välisperimeetri maksimaalne suurus?



Joonis 194. Antud diameetriga raudpoldist tuleb valmistada kaheksanurkne mutter. Missugune on mutri välisperimeeter?



Joonis 195. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendus.

Joonisel 194 on näha, et mutter saab siis kõige suurem, kui teda piirav korrapärane hulknurk on joonestatud ringi sisse, mille raadius $R = 1$ cm.

Ülesanne muutub $a_8 = AB$ arvutamiseks (joonis 195) R antud suuruse järgi.

Joonisel 195 on meil $AC = a_4$ (vaata ülesandeid 36 ja 37), $AP = \frac{1}{2}a_4$, $OA = R$; järelikult, asendades a_4 avaldisega diameetri kaudu, saame

$$AP = \tfrac{1}{2}a_4 \approx \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}7D = 0{,}7 \text{ cm}, \qquad OA = R = 1 \text{ cm}.$$

OP pikkuse võib leida Püthagoras'e teoreemi järgi, kuid käesoleval juhul saab seda arvutada lihtsamini: et $\angle AOP = 45^\circ$, siis $\triangle AOP$ on võrdhaarne: $OP = AP$; tähendab

$$OP \approx 0{,}7 \text{ cm}.$$

Külje $AB = a_8$ leiame Püthagoras'e teoreemi järgi kolmnurgast APB, milles $PB = OB - OP = 1 \text{ cm} - 0{,}7 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ cm}$:

$$a_8^2 = 0{,}7^2 + 0{,}3^2 \approx 0{,}5,$$

$$a_8 \approx \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}76 \text{ cm}.$$

Järelikult võrdub kaheksanurga perimeeter (tähistame selle tähega $2p$)

$$2p = 8a_8 = 6{,}12 \text{ cm}.$$

Mutri maksimaalne perimeeter on 6,12 cm.

§ 75. Sissejoonestatud ja ümberjoonestatud kuusnurgad.

Teoreem.

Korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg võrdub ringjoone raadiusega.

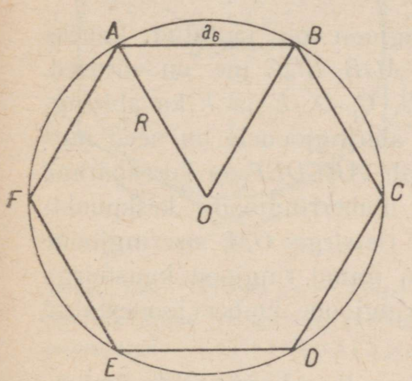
$$\boldsymbol{a_6 = R.} \qquad (11)$$

Tõestus. Ühendame korrapärase sissejoonestatud kuusnurga tipud A ja B (joonis 196) ringjoone keskpunktiga O. Kuna kaar AB moodustab $\frac{1}{6}$ osa ringjoonest, siis ta sisaldab 60°. Tähendab, kesknurk AOB võrdub ka 60°.

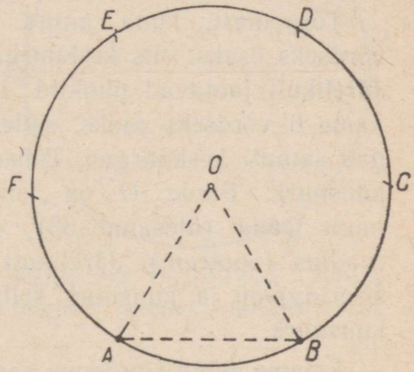
Järelikult on võrdhaarse kolmnurga AOB kumbki alusnurk võrdne $\frac{1}{2}$ $(180° - 60°) = 60°$. Saime, et kolmnurga AOB kõik nurgad on võrdsed, seega on ta võrdkülgne, s. t. $a_6 = R$.

Ülesanne 38. Jaotada antud ringjoon kuueks võrdseks osaks.

Ringjoone mistahes punktist A (joonis 197) joonestame sirklisse võetud raadiusega R kaare, mis lõikub ringjoonega punktis B. Punktist B joonestame sama raadiusega kaare, mis lõikub ringjoonega punktis C jne. Kolmnurk AOB on



Joonis 196. Korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg võrdub ringjoone raadiusega.



Joonis 197. Jaotada antud ringjoon kuueks võrdseks osaks.

konstruktsiooni järgi võrdkülgne; nurk AOB ja järelikult ka kaar AB sisaldab 60°. Seepärast peab kuues märge sattuma punktisse A, ja ringjoon jaotub kuueks võrdseks osaks.

Ülesanne 39. Konstrueerida antud ringjoone sisse joonestatud korrapärane kuusnurk.

Jaotame ringjoone kuueks võrdseks osaks, ühendame jaotuspunktid ja saamegi otsitava kuusnurga.

Ülesanne 40. Konstrueerida antud ringjoone ümber joonestatud korrapärane kuusnurk.

Jaotame ringjoone kuueks võrdseks osaks; läbi jaotuspunktide a, b, c, d, e ja f joonestame raadiused ja pikendame neid (joonis 198). Poolitame kaare ab ja tähistame poolituspunkti M-ga (§ 60). Läbi punkti M joonestame sirge, mis on risti raadiusega OM; ta on ringjoone puutuja ja lõikub raadiuse pikendiga Oa punktis A. Punktist O joonestame sirkli avaga, mis võrdub lõiguga OA, abiringjoone; see lõikub raadiuste pikenditega Ob, Oc, Od, Oe ja Of punktides B, C, D, E ja F. Joonestades sirged AB, BC, CD, DE, EF ja FA, saame otsitava kuusnurga.

Tõepoolest, kuna antud ringjoon oli jaotatud kuueks võrdseks osaks, siis kesknurgad AOB, BOC jne. on võrdsed. Järelikult jaotavad punktid A, B, C, D, E ja F ka abiringjoone 6 võrdseks osaks, sellele abiringjoonele on need nurgad samuti kesknurgad. Tähendab, $ABCDEF$ on korrapärane kuusnurk. Punkt O on tema ümberringjoone keskpunkt; nagu teada (ülesanne 33), on ristsirge OM siseringjoone raadius (apoteem). Järelikult on antud ringjoon kuusnurga siseringjoon ja kuusnurk selle ringjoone ümber joonestatud kuusnurk.

Leiame nüüd ringjoone raadiuse R ja korrapärase ümberjoonestatud kuusnurga külje b_6 vahelise seose. Vaatleme täisnurkset kolmnurka AOM (joonis 198). Selle $\angle AOM =$ $= 30°$. Seepärast $AO = 2AM$. Kui AM võtta pikkusühikuks, siis $AM = 1$, $AO = 2$. Püthagoras'e teoreemi järgi $OM^2 =$ $= AO^2 - AM^2 = 2^2 - 1^2 = 3$. Siit $OM = \sqrt{3} \approx 1{,}7$. Kuid OM on ringjoone raadius, järelikult $R = \sqrt{3}AM$. Et aga $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b_2$, siis

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} b_6 \approx 0{,}85\ b_6 \tag{12}$$

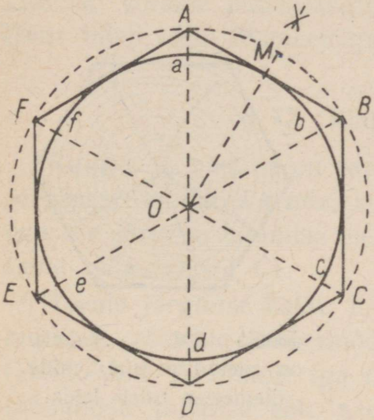
ja

$$D = \sqrt{3}\ b_6 \approx 1{,}7\ b_6 . \tag{13}$$

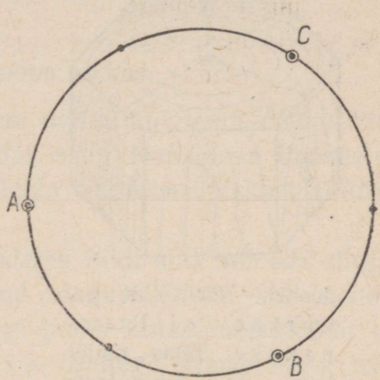
Praktikas on enamasti küllalt, kui võtta $D \approx 1{,}7\ b_6$.

Ülesanne 41. Jaotada ringjoon kolmeks võrdseks osaks.

Jaotame ringjoone kuueks võrdseks osaks ja võtame jaotuspunktid üle ühe. Joonisel 199 jaotavad punktid A, B



Joonis 198. Ülesanne. Konstrueerida antud ringjoone ümber joonestatud korrapärane kuusnurk.



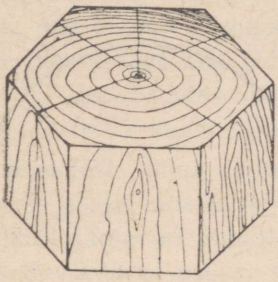
Joonis 199. Ülesanne. Jaotada ringjoon kolmeks võrdseks osaks.

ja C ringjoone kolmeks võrdseks kaareks, igaühes 120°. Toimides nii nagu ülesannetes 39 ja 40, võime konstrueerida ringjoone sisse ja ümber joonestatud korrapärase (võrdkülgse) kolmnurga.

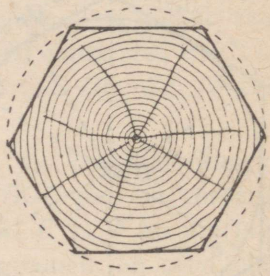
§ 76. Näiteid.

1. Missugune peaks olema ümmarguse palgi diameeter, et sellest saaks tahuda väikseima materjalikaoga kuusnurkne tänavasillutuse pakukene, mille külg on 12 cm (joonis 200)?

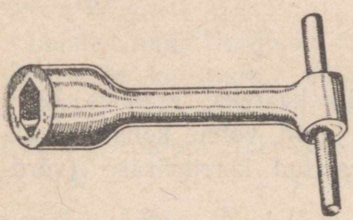
Joonisest 201 nähtub, et palgi diameeter ei saa olla väiksem kuusnurkse pakukese ümberringjoone diameetrist D. Et materjalikulu oleks kõige väiksem, tuleb võtta sama diameetriga palk, nii et $D = 2R$. Kuna ringi sisse joonestatud korrapärase kuusnurga külg võrdub ringi raadiusega (vt. valem 11), siis $R = 12$ cm. Seepärast $D = 2 \cdot 12$ cm $=$ $= 24$ cm.



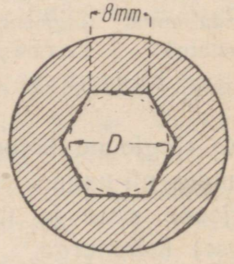
Joonis 200. Kuusnurkne sillutuspakuke. Tema ristlõikeks on korrapärane kuusnurk, mille külg on 12 cm; . . .



Joonis 201. . . . pakuke on saetud palgist, mille diameeter tuleb leida.



Joonis 202. Otsvõti kuusnurksetele mutritele . . .



Joonis 203. . . . küljega 8 mm.

2. Otsvõtme valmistamisel (joonis 202) puuritakse toorvõtmesse ümmargune auk, mis hiljem töödeldakse mutrikujuliseks. On tarvis valmistada võti mutrite jaoks, mille külje pikkus on 8 mm. Missuguse diameetriga puuri tuleb tarvitada?

Nagu näitab joonis 203, on otsitav kuusnurk ümmarguse augu ümber joonestatud kuusnurgaks.

Valemi (13) järgi leiame

$$D = \sqrt{3}\, b_3 \approx 1{,}7 \cdot 8 \approx 13{,}6 \text{ mm}.$$

Lähendi võtame puudujäägiga — vastavalt ülesande nõudele. Puur tuleb võtta diameetriga 13,6 mm.

§ 77. Ringjoone pikkus.

Ringjoone pikkust on raskem mõõta kui tema diameetrit; seepärast on tähtis teada, kuidas saab teadaoleva diameetri suuruse järgi arvutamise teel leida ringjoone pikkust (tähistame seda tähega C).

Teeme järgmise katse: mõõdame niidi abil mõnede ringikujuliste esemete ümbermõõdud ning mõõtlaua abil nende läbimõõdud. Arvutame iga ringi jaoks tema ümbermõõdu ja läbimõõdu jagatise ehk suhte. Sellega saame arvu, mis näitab, mitu korda ringi ümbermõõt on läbimõõdust pikem.

Katse tulemused korraldame tabelisse:

Katse nr.	Ringi ümbermõõt	Ringi läbimõõt	Ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe
1			
2			
3			
.			
.			
.			
		Suhete summa	....
		Keskmine	....

Katsed näitavad, et ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe ei olene ringi suurusest. Igal katsel saame selle suhte jaoks arvu, mis väga vähe erineb arvust 3, enamail juhtudel saame 3-st pisut suurema arvu.

Uurimisel on selgunud, et selle suhte ligikaudne väärtus on 3,14. Seega

ringjoon on oma diameetrist 3,14 korda pikem.

Seda suhtearvu on hakatud tähistama kreekakeelse tähega π, mille nimetuseks on «pii». Nii on

$$\pi = 3{,}14.$$

Tarvitades seda tähist, võime öelda, et

ringjoon on diameetrist π korda pikem.

Ringjoone pikkuse saamiseks peame diameetri pikkuse korrutama arvuga 3,14 ehk arvuga π.

Tähistades ringjoone pikkuse tähega C, saame ringjoone pikkuse valemi

$$C = \pi D. \qquad (14)$$

Silmas pidades, et $D = 2R$, saame: $C = \pi 2R$ ehk kirjutades numbrilise teguri esikohale

$$C = 2\pi R. \qquad (15)$$

Ringjoone pikkuse valemile jõuame ka järgmise arutluse teel.

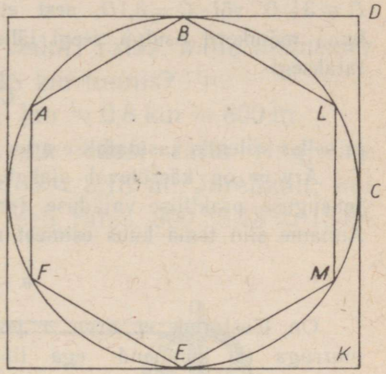
Ringjoone pikkus on alati mistahes sissejoonestatud hulknurga perimeetrist suurem. See on selge sellest, et iga kaar, näiteks AB, BL jne. (joonis 204), on talle vastavast kõõlust pikem.

Teiselt poolt, ringjoone pikkus on alati mistahes ümberjoonestatud hulknurga perimeetrist väiksem. See ilmneb sellest, et kaared BC, CE jne. (joonis 204) on lühemad kui murdjooned BDC, CKE jne., sest et näiteks murdjoon ABC suundub punktist A punktisse C kaudsemat teed kui kaar AC.

Korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg a_6 võrdub raadiusega R (§ 76); tähendab, selle kuusnurga perimeeter $(2p)_6 = 6R = 3D$, seepärast $C > 3D$.

Ringjoone ümber joonestatud ruudu külg võrdub diameetriga D (§ 74); tähendab, selle ruudu perimeeter $(2P)_4 = 4D$, seepärast $C < 4D$.

Selgub, et ringjoon sisaldab üle kolme, kuid alla nelja diameetri. Et meie kuusnurk asetseb ringjoonele ligemal kui ruut (joonis 204), siis peab ringjoone pikkus C olema lähem $3D$-le kui $4D$-le; tähendab, ta peab peituma $3D$ ja $3\frac{1}{2}D$ vahel. Neid piire, mille vahel peitub ringjoone pikkus, võib kitsendada. Selleks tuleb ümberjoonestatud ruudu ja sissejoonestatud kuusnurga asemel võtta suurema külgede arvuga korrapärased hulknurgad.



Joonis 204. Ringjoone pikkus ületab kolme diameetri pikkuse, kuid on väiksem nelja diameetri pikkusest.

Nii võib arvutada korrapäraste sisse- ja ümberjoonestatud hulknurkade perimeetrite pikkused, kui hulknurkade külgede arv on 12, 24, 48 ja 96 külge; kuigi need arvutused on lihtsad, on nad siiski kohmakad (võrrelda näitega 2, § 75), seepärast jätame nad ära. Nad annavad $(2p)_{96}$ jaoks (korrapärase sissejoonestatud 96-nurga perimeetri jaoks) ja $(2P)_{96}$ jaoks (korrapärase ümberjoonestatud 96-nurga perimeetri jaoks) järgmised tulemused:

$$(2p)_{96} \approx 3{,}1410D \quad \text{(puudujäägiga)},$$

$$(2P)_{96} \approx 3{,}1428D \quad \text{(liiaga)}.$$

Need resultaadid näitavad, et C on suurem kui $3{,}1410D$, kuid väiksem kui $3{,}1428D$.

Kui tunnustame $C = 3{,}14D$ vastuvõetavaks, siis eksime ainult diameetri tuhandikes; niisugune täpsus on praktikas sageli täiesti küllaldane. Mõnikord rahuldutakse veel jämedama lähendiga, oletades, et $C = 3\frac{1}{7}D$ (mis moodustab ligikaudu $3{,}14D$), või koguni, et $C = 3{,}1D$.

Kui diameeter tunnustada pikkusühikuks, siis ringjoone pikkus sisaldab neid ühikuid ligikaudu 3,14.

Arvu, mis väljendab nüüd ringjoone pikkust diameetrites, kui diameeter on võetud mõõtühikuks, tähistatakse kreekakeelse tähega π («pii»), mida kreeka keeles hääldatakse nagu eesti «p»; selle tähega algab kreekakeelne sõna «perifereia», mis tähendab «ringjoont». Selle arvu märkimine eri tähega on sellepoolest sobiv, et mitmesugustel juhtudel tuleb seda arvu võtta mitmesuguse täpsusega. Ei ole sobiv kirjutada $C = 3\frac{1}{7} D$ või $C = 3{,}1D$, sest et mõnel juhul tuleb võtta $C = 3{,}14D$, kuna mõnikord osutub seegi lähend mitteküllaldaseks. Seepärast kirjutataksegi

$$C = \pi D$$

ja selles valemis kasutatakse arvu π niisugust lähendit, milline on tarvilik.

Arv π on käesoleval ajal tuntud niisuguse täpsusega, mis ületab igasuguse praktilise vajaduse (on välja arvutatud 700 kümnendkohta). Anname siin tema kuus esimest numbrit:

$$\pi = 3{,}14159.$$

On tõestatud, et arvu π pole võimalik täpselt väljendada ühegi murruga (ei kümnend- ega lihtmurruga), samuti nagu on võimatu murruga täpselt väljendada arvusid $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ jms. Kuid tegelikult pole seda tarviski; kuigi arvu π oleks võimalik täpselt väljendada, ütleme kümnendmurruga, millel on 1000 kohta, meie kasutaksime ikkagi ainult mõningaid esimesi numbreid.

Valemit (14) võib kirjutada samuti järgmiselt:

$$\pi = \frac{C}{D},$$

s. t. et arv π pole midagi muud, kui r i n g j o o n e j a d i a m e e t r i p i k k u s t e j a g a t i s ehk, lühemalt, r i n g j o o n e j a d i a m e e t r i s u h e.

§ 78. Näiteid.

1. Määrata hooratta ringjoone pikkus, kui raadius on 1,40 m.

Valem (15) annab

$$C = 2\pi \cdot 1{,}4 \approx 2 \cdot 3{,}1 \cdot 1{,}4 \approx 8{,}7 \text{ (m)}.$$

Võttes $\pi = 3{,}14$, saame täpsema tulemuse: $C = 8{,}79$ m.

2. Rihmaratta ringjoone pikkus võrdub 1540 mm. Leida rihmaratta diameetri pikkus.

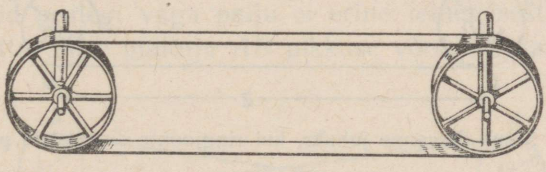
Valemist (14) leiame

$$D = \frac{C}{\pi} \approx \frac{1540}{3,14} \approx 490 \text{ (mm)}.$$

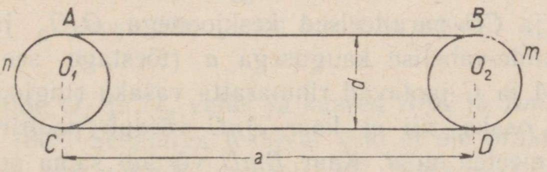
3. Mitu pööret teeb minutis veduri ratas, mille diameeter on 1,65 m, kui rongi kiirus on 48 km tunnis?

Minutis liigub rong edasi $\frac{48}{60}$ km $= 0,8$ km $= 800$ m.

Ratta iga pöördega liigub vedur edasi ratta ringjoone pikkuse võrra $C = \pi D \approx 3,14 \cdot 1,65 \approx 5,18$ m. Järelikult, kui vedur liigub edasi 800 m, siis teeb ratas $800 : 5,18 \approx 154,4$ pööret.



Joonis 205. Missugune on selle j õ u ü l e k a n d e r i h m a pikkus, . . .



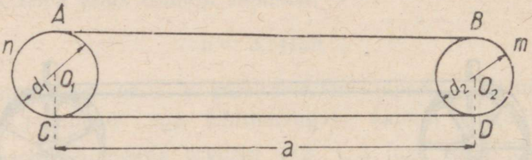
Joonis 206. . . . kui a ja d on antud?

4. Vasktoote puurimisel peab puuri ringjoone punkt liikuma kiirusega 15 kuni 20 meetrit minutis. Mitu pööret võib minutis teha puur, mille diameeter on 22 mm?

Puuril, mille diameeter $D = 22$ mm, on ringjoon, mis võrdub $C = \pi \cdot 22 \approx 69$ mm. Puuri ühe pöördega läbib tema ringjoone punkt tee, mille pikkus võrdub 69 mm. Kui ta minutis läbib tee 15 m = 15 000 mm, siis võrdub puuri pöörete arv minutis 15 000 : 69 ≈ 217. Kui ta minutis läbib 20 m, siis on pöörete arv minutis 20 000 : 69 ≈ 290. Seega võib puur teha minutis 217 kuni 290 pööret.

5. Jõuülekanderihm ühendab kaht rihmaratast, mille kummagi diameeter $d = 520$ mm; rihmarataste keskpunktide kaugus $a = 3600$ mm; ülekanne on lahtine (joonis 205). Leida jõuülekanderihma pikkus.

Selle ülesande lahendamisel ei arvestata rihma allavajumist raskuse mõjul, sest see ei saa olla kuigi suur. Ülesanne taandub joone $ABmDCn$ pikkuse arvutamisele. See joon koosneb kahest kaarest AnC ja BmD ja kahest sirglõigust AB ja



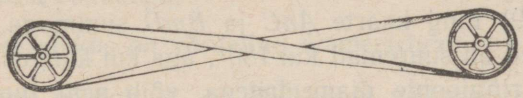
Joonis 207. Sama ülesanne juhuks, kui ringjoonte diameetrid pole võrdsed.

CD (joonis 206). Sirged AB ja CD on rihmarataste ringjoonte välispuutujad. Nende ringjoonte võrdsuse tõttu on sirged AB ja CD paralleelsed keskjoonega O_1O_2 ja võrdsed keskpunktide-vahelise kaugusega a (tõestage see). Puutepunktid A ja C jaotavad rihmaratta vasaku ringjoone kaheks võrdseks osaks, nii et kaar AnC võrdub poolringjoonega, mille diameeter on d. Kaar BmD võrdub sama poolringjoonega. Niiviisi on rihma kõverate osade pikkus πd, kuna sirgjooneliste osade pikkus võrdub $2a$. Kogu rihma pikkus võrdub

$$2a + \pi d = 2 \cdot 3600 + 3{,}14 \cdot 520 \approx 8833 \text{ (mm)}.$$

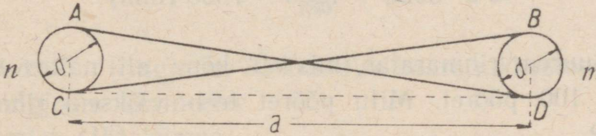
6. Missuguse pikkusega rihm on tarvilik kahe rihmaratta ühendamiseks, mille diameetrid on 600 mm ja 455 mm, kui kaugus rihmarataste keskpunktide vahel on 2900 mm? Ülekanne on lahtine.

Juhul, kui kahe ringjoone diameetrid pole võrdsed, pole väline puutuja keskjoonega paralleelne; suurema ringjoone kaar (joonis 207) sisaldab rohkem kui 180°, kuna väiksema ringjoone kaar BmD sisaldab vähem kui 180°. See järeldub § 69 toodud konstruktsioonist. Seepärast komplitseerub täpne



Joonis 208. Missugune on selle jõuülekanderihma pikkus, ...

arvutus ja seni meil olemasolevate andmete varal ei suuda me seda teha. Aga kui kaugus ringjoonte keskpunktide vahel on küllalt suur võrreldes nende diameetritega ja kui need diameetrid pealegi väga palju ei erine teineteisest, siis võib siiski võtta ühise puutuja AB pikkuse võrdseks kaugusega a



Joonis 209. . . . kui a ja d on antud?

keskpunktide O_1 ja O_2 vahel ja kaared AnC ja BmD kumbki võrdseks 180°. Seejuures tekkival veal ei ole praktilist tähtsust, nagu see nähtub joonisest 207. Seepärast lahendame ülesande nii.

Rihma sirgjooneliste osade pikkus on $2a$ nagu eelmiseski ülesandes; kõverjooneline osa AnC võrdub suurema rihmaratta poolringjoonega $\frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}\pi d_1$; kõverjooneline osa BmD võrdub väiksema rihmaratta poolringjoonega $\frac{1}{2}C_2 = \frac{1}{2}\pi d_2$. Kogu rihma pikkus on

$$2a + \tfrac{1}{2}\pi d_1 + \tfrac{1}{2}\pi d_2 = 2a + \pi \frac{d_1 + d_2}{2} \approx 7456 \text{ (mm)}.$$

7. Kaks ühesugust rihmaratast diameetriga 400 mm on ühendatud jõuülekanderihmaga; kaugus rihmarataste keskpunktide vahel on 3000 mm. Tegu on ristülekandega (joonis 208). Leida jõuülekanderihma pikkus.

Otsitav pikkus võrdub kahe seesmise puutuja AD ja CB (joonis 209) ning kaarte AnC ja BmD summaga. Mõlemad need kaared on suuremad kui 180°, aga kui kaugus a on suur võrreldes ringjoonte diameetritega, võib neid lugeda võrdseiks 180°. Siis võib kõõle AC ja BD lugeda ringjoonte diameetriteks. Puutuja $AD = l$ pikkuse leiame täisnurksest kolmnurgast ADC, milles $CD = a$ ja $AC = d$; järelikult

$$l = \sqrt{a^2 + d^2}.$$

Kogu rihma pikkus on

$$2l + \pi d = 2\sqrt{a^2 + d^2} + \pi d \approx 2\sqrt{3000^2 + 400^2} + 3{,}14 \cdot 400 \approx$$
$$\approx 2 \cdot 3026 + 1256 = 7308 \text{ (mm)}.$$

8. Suurem rihmaratas, mis oli kõne all näites 6, teeb minutis 100 pööret. Mitu pööret teeb väiksem rihmaratas minutis?

Ülesande lahendamisel eeldame, et rihm ei libise rihmarataste ringjoontel. Siis on pikkused, mille võrra mõlemate rihmarataste punktid ühe ja sama ajavahemiku jooksul edasi liiguvad, võrdsed. Suurema rihmaratta punkt läbib minutis tee $100 \cdot \pi d_1$; tähistame väiksema rihmaratta otsitava pöörete arvu sümboliga x; siis läbib teise rihmaratta punkt minutis tee $x\pi d_2$. Võrrandist

$$100\pi d_1 = x\pi d_2$$

leiame

$$x = \frac{100\ d_1}{d_2} = \frac{100 \cdot 600}{455} \approx 131.$$

Väiksem rihmaratas teeb minutis ligikaudu 131 pööret.

§ 79. Ringjoone ja diameetri võrdelisus. Kaare pikkus.

Ringjoone ja diameetri suhe, s. t. arv π, jääb kõigil ringjoontel üheks ja samaks. Kui ringjoone diameetrit suurendada näiteks kolm korda, siis suureneb kolm korda ka ringjoone pikkus. Teiste sõnadega,

ringjoone pikkus on võrdeline diameetriga.

Kaar, mis võrdub 1°, on 360 korda väiksem ringjoonest; seepärast on 1-kraadise kaare pikkus $\frac{\pi D}{360}$; kaare s pikkus, milles on $n°$, on n korda suurem 1-kraadise kaare pikkusest; seepärast

$$s = \frac{\pi D n}{360}, \tag{16}$$

ehk, kuna $D = 2R$, siis

$$s = \frac{\pi R n}{180}. \tag{17}$$

N ä i d e 1. Ringjoone 30-kraadise kaare pikkus on 25 mm. Leida ringjoone diameeter.

Valemist (16) leiame

$$D = \frac{360 \cdot s}{\pi n} = \frac{360 \cdot 25}{3{,}14 \quad 30} \approx 95{,}5 \text{ (mm)}.$$

N ä i d e 2. Mitmekraadine on raadiusega võrdne kaar?

Oletame, et valemis (17) $s = R$. Leiame

$$R = \frac{\pi R n}{180},$$

kust

$$n = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3° = 57°18'.$$

Raadiusega võrdsele kaarele toetuvat kesknurka, mis võrdub 57°18′, nimetatakse r a d i a a n i k s. Niisugust nurka kasutatakse sageli nurkade mõõtühikuna (kraadi asemel).

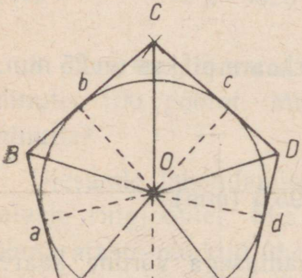
§ 80. Ümberjoonestatud hulknurga pindala.

Teoreem.

Ümberjoonestatud hulknurga pindala võrdub tema ümbermõõdu ja raadiuse poole korrutisega.

Olgu näiteks tarvis leida joonisel 210 kujutatud ümberjoonestatud viisnurga pindala. Mõõtmise teel leiame külgede pikkused: $a = 20$ mm; $b = 23$ mm; $c = 22$ mm; $d = 21$ mm; $e = 24$ mm. Ringjoone raadiust R me esialgu ei mõõda. Tükeldame antud viisnurga keskpunkti O ja tippe ühendavate sirglõikudega OA, OB jne. kolmnurkadeks. Saame viis kolmnurka; kõigil neil on üks ja sama kõrgus, mis on võrdne R-ga. Kolmnurga AOB pindala on $\frac{1}{2}Ra = \frac{1}{2}R \cdot 20$; kolmnurga BOC pindala on $\frac{1}{2}Rb = \frac{1}{2}R \cdot 23$ jne. Antud viisnurga pindala S saame nende pindalade liitmise teel:

$$S = \tfrac{1}{2}R \cdot 20 + \tfrac{1}{2}R \cdot 23 + \tfrac{1}{2}R \cdot 22 + \tfrac{1}{2}R \cdot 21 + \tfrac{1}{2}R \cdot 24;$$



Joonis 210. Leida selle viisnurga pindala.

selle asemel, et korrutada $\frac{1}{2}R$ 20-ga, 23-ga jne., ja siis liita saadud korrutised, võib esmalt leida summa $20 + 23 + 22 + 21 + 24 = 110$ (see on viisnurga perimeeter $2P = 110$ mm) ja siis korrutada $\frac{1}{2}R$ selle summaga:

$$S = \tfrac{1}{2}R \cdot 110 = \tfrac{1}{2} \cdot 110 \cdot R = 55R.$$

Arv 55 ei kujuta muud midagi, kui viisnurga ümbermõõdu poolt pikkust, nii et käesoleva näite jaoks on teoreem õige. Kuid on selge, et toodud arutlust võib sõna-sõnalt korrata mistahes teise näite puhul; seepärast on teoreem õige iga ümberjoonestatud hulknurga suhtes. Leitud tulemuse võib anda valemiga

$$\boldsymbol{S = \tfrac{1}{2} \cdot 2PR = PR.} \qquad (18)$$

Toodud näites $2P = 110$ mm. Nüüd mõõdame raadiuse. Olgu $R = 15$ mm; siis

$$S = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 15 = 825 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

N ä i d e. Leida ringi ümber joonestatud korrapärase kuusnurga pindala S_6, kui ringi raadius on $R = 20$ mm. Korrapärase ümberjoonestatud kuusnurga ümbermõõt $(2P)_6 = 6b_6$. Valem (18) annab

$$S = 3b_6R.$$

Läbimõõt D ja külg b_6 on seotud (ülesanne 40, § 76) valemiga $D = 1{,}73\ b_6$. Sellest leiame

$$b_6 = \frac{D}{1{,}7} = \frac{2R}{1{,}7}.$$

Järelikult

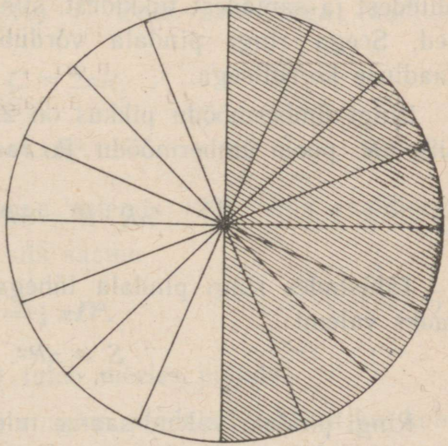
$$S_6 = 3 \cdot \frac{2R}{1{,}7} \cdot R = \frac{6R^2}{1{,}7} = \frac{6 \cdot 400}{1{,}7} \approx 1410 \text{ (mm}^2\text{) ehk } 14 \text{ cm}^2.$$

§ 81. Ringi pindala.

Et saada juhist ringi pindala arvutamiseks, selleks tükeldame ringi ja katsume tükkidest koostada niisuguse kujundi, mille pindala oskame arvutada.

Joonestame paberile umbes 5 cm raadiusega ringi.

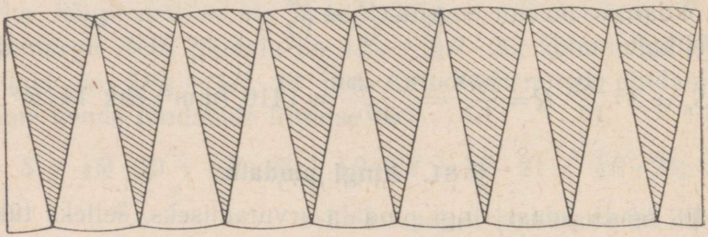
Jaotame ta esmalt 6-ks võrdseks sektoriks, siis, iga saadud sektorit poolitades, 12-ks võrdseks sektoriks, siis 24-ks võrdseks sektoriks. Poole ringist võime varjutada või katta mõlemad pooled eri värviga (vt. joonis 211).



Joonis 211.

Nüüd lõikame ringi paberist välja ja lõikame selle 24-ks sektoriks. Sektorid laome kokku, nagu näha joonisel 212. Saadud kujundit vaadeldes näeme, et see ei erine palju rööpkülikust. Erinevus seisneb ainult selles, et selle kujundi alused ei ole päris sirged, vaid koosnevad väikestest kaartest. See erinevus on aga väike ja saab veel väiksemaks, kui ringi jaotame edasi 48-ks, 96-ks jne. võrdseks sektoriks.

Selle «rööpküliku» aluseks on varjutatud sektorite kaartest moodustatud joone tükk, sellega pool ringjoonest, kõrguseks on raadius. Et meie «rööpkülik» ja ring koosnevad



Joonis 212.

ühtedest ja samadest tükkidest, siis nende pindalad on võrdsed. Seega ringi pindala võrdub poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.

Ringi ümbermõõdu pikkus on $2\pi R$, pool ümbermõõtu on siis πR, poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutis on seega

$$\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Tähistades ringi pindala tähega S, saame ringi pindala jaoks valemi

$$S = \pi R^2.$$

Ringi pindala valemi saame tuletada ka sel teel, et vaatleme ringjoone ümber ja ringjoone sisse ehitatud hulknurki.

Kui ringi ümber konstrueerida lühikeste külgedega ja suure külgede arvuga ümberjoonestatud hulknurk (joonis 213 a), siis see hulknurk on vaevu eraldatav ringist. Täpselt samuti on vaevu eraldatav ringist ka lühikeste külgedega ja suure külgede arvuga sissejoonestatud hulknurk (joonis 213 b). Mida lühemad on nende hulknurkade küljed, seda väiksem on hulknurga ja ringi erinevus. Seepärast öeldakse ka, et ring on lõpmata suure külgede arvuga hulknurk.

T e o r e e m.

Ringi pindala võrdub ringjoone pikkuse ja raadiuse poole korrutisega:

$$S = \tfrac{1}{2} CR. \qquad (19)$$

T õ e s t u s. Vaatleme ringi kui väga suure külgede arvuga ümberjoonestatud hulknurka. Vastavalt valemile (17) võrdub ümberjoonestatud hulknurga pindala ümbermõõdu ja raadiuse poole korrutisega. Kuid hulknurga muutumisel ringiks muutub tema perimeeter ringjoone pikkuseks. See tõestabki meie teoreemi.

Asendades valemis (19) C tema avaldisega raadiuse kaudu

$$C = 2\pi R,$$

saame valemi:

$$S = \pi R^2. \qquad (20)$$

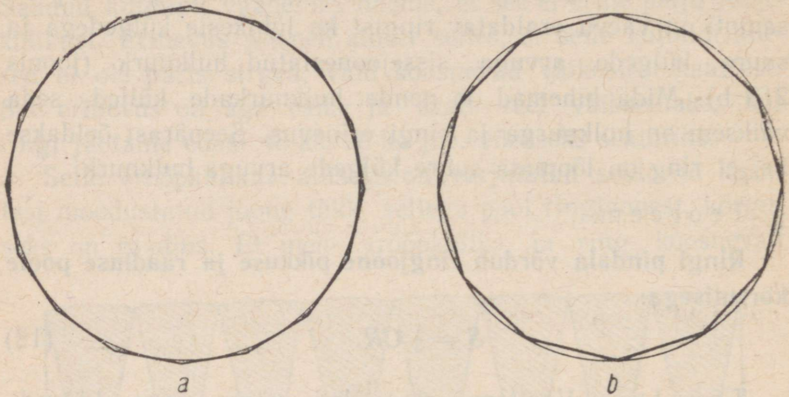
Kui aga raadiuse asendame valemis (20) tema avaldisega diameetri kaudu $R = \frac{D}{2}$, siis saame

$$S = \tfrac{1}{4} \pi D^2. \qquad (21)$$

Valemid (20) ja (21) tuleb meeles pidada.

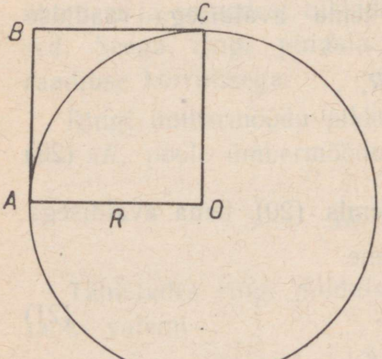
Valem (20) näitab, et ring on pindalalt rohkem kui kolm korda (π korda) suurem kui joonisel 214 kujutatud ruut;

valem (21) näitab, et ring on pindalalt natuke suurem kui kolmveerand ümberjoonestatud ruudust (joonis 215).

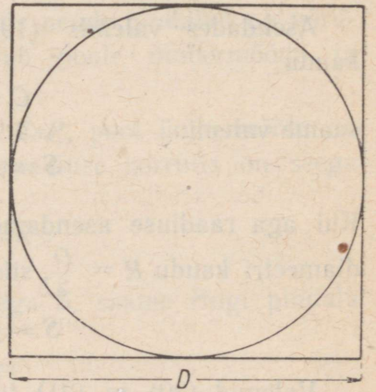


Joonis 213. Ring on sisse- või ümberjoonestatud hulknurga piirväärtus.

Ringi pindala suhe selle ringi raadiusele ehitatud ruudu pindalaga (joonis 214) on alati üks ja sama; ta võrdub π-ga,



Joonis 214. Selle ringi pindala on rohkem kui kolm korda suurem ruudu *OABC* pindalast.



Joonis 215. Selle ringi pindala on natuke suurem kui kolmveerand ümberjoonestatud ruudu pindalast.

s. t. ringjoone ja diameetri suhtega. See tähendab, et ruudu *ABCO* pindala suurendamisel näiteks neli korda, suureneb ka ringi pindala neli korda. Kuid oleks ekslik arvata, et ringi raadiuse suurendamisel neli korda tema pindala suureneks neli korda. Eks suurene raadiuse neljakordseks suurendamisel ruut *ABCO* $4 \cdot 4 = 16$ korda, järelikult ka ring suureneb 16 korda.

Teiste sõnadega,

ringi pindala on võrdeline raadiuse ruuduga.

Samuti veendume, et

ringi pindala on võrdeline diameetri ruuduga.

§ 82. Näiteid.

1. Leida ringi pindala, kui diameeter on 26 mm. Valem (21) annab

$$S = \tfrac{1}{4}\pi 26^2 \approx \tfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 26^2 \approx 531 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

2. Leida ringi diameeter, kui pindala on 200,96 cm^2. Valem (21) annab

$$D^2 = 4S : \pi \approx 4 \cdot 200{,}96 : 3{,}14 = 256.$$

Siit

$$D = \sqrt{256} = 16 \text{ (cm)}.$$

Paljudes käsiraamatutes leiduvad tabelid, mis annavad ringi pindala $\frac{\pi D^2}{4}$ mitmesuguste D väärtuste jaoks. Need tabelid võimaldavad antud diameetri järgi leida ringi pindala ja, ümberpöördult, antud ringi pindala järgi leida diameetri.

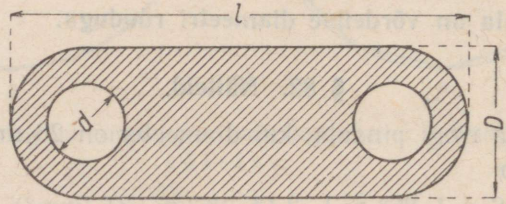
3. Vesi voolab kahes torus võrdse kiirusega. Esimese toru diameeter $D_1 = 20$ cm; teise diameeter $D_2 = 15$ cm. Mitu korda toimub vee andmine esimese toru kaudu kiiremini kui teise kaudu?

Voolu muutmatu kiiruse juures on toru kaudu antava vee hulk võrdeline toru ristlõike pindalaga. Kuid ringi pindala on võrdeline diameetri ruuduga; seepärast suhtub esimese toru kaudu antava vee hulk teise toru kaudu antava vee hulgasse, nagu D_1^2 suhtub D_2^2-sse, s. t. nagu 20^2 suhtub 15^2-sse:

$$20^2 : 15^2 = 400 : 225 \approx 1{,}8.$$

Vee andmine esimese toru kaudu toimub ligikaudu 1,8 korda kiiremini kui teise kaudu.

4. Ruudukujulisest plekilehest lõigatakse maksimaalsete mõõdetega ring. Missugune protsent läheb plekist lõikmeteks?



Joonis 216. Kui suur on selle kujundi pindala, kui l, D ja d on antud?

Diameeter D võrdub ruudu küljega. Ruudu pindala võrdub D^2; ringi pindala $\frac{\pi D^2}{4} \approx \frac{3}{4}D^2$. Pleki lõikmete pindala võrdub $D^2 - \frac{3}{4}D^2 = \frac{1}{4}D^2$. Lõikmeteks läheb plekist ligikaudu 25%.

5. Leida joonisel 216 esitatud kujundi pindala.

Oletame, et mõõtmise teostamisel saime: $l = 60$ mm, $D = 20$ mm, $d = 10$ mm. Kui ei oleks olnud auke, võinuks kujundi koostada kahest poolringist diameetriga D üldise pindalaga $\frac{1}{4}\pi D^2$ ja ristkülikust, mille aluseks $l - D$ ja kõrguseks D. Järelikult oleks pindala $(l - D)D + \frac{1}{4}\pi D^2$. Siit tuleb lahutada kahe augu pindala. Niiviisi leiame

$$S = (l - D)D + \tfrac{1}{4}\pi D^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi d^2 =$$
$$= 40 \cdot 20 + \tfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 400 - \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 100 =$$
$$= 800 + 314 - 157 = 957 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

§ 83. Sektori pindala.

Arvutada ringi sektori AOB pindala (joonis 217), mis sisaldab $n°$, kui ringi raadius on R.

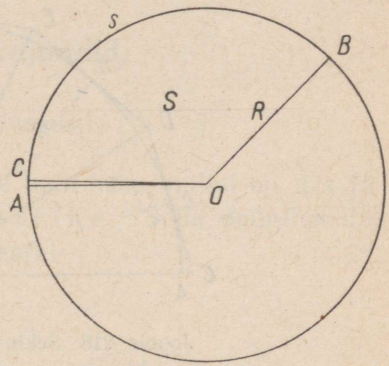
Antud ringi pindala on πR^2; kui sellest ringist välja lõigata sektor AOC, mille nurk on $1°$, siis on selle sektori pindala võrdne $\frac{1}{360}$ osaga ringi pindalast, s. t. võrdub $\frac{\pi R^2}{360}$; meie sektor AOB, mille nurk on $n°$, on n korda suurem sektorist AOC, seega avaldub tema pindala S valemiga

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}, \qquad (22)$$

kus n tähendab antud sektori kraadide arvu. On kasulik tunda sektori pindala jaoks ka niisugust valemit:

$$S = \tfrac{1}{2} sR. \qquad (23)$$

Siin s tähendab kaare AB pikkust. Sõnadega väljendub see valem järgmiselt:



Joonis 217. Sektori AOB pindala võrdub kaare ja raadiuse poole korrutisega.

Sektori pindala võrdub tema kaare ja raadiuse poole korrutisega.

Valemi (23) kehtivuses võib veenduda, kui asetada temasse s avaldis, mis on saadud §-s 79 (valem 17):

$$s = \frac{\pi R n}{180}.$$

Siis saame

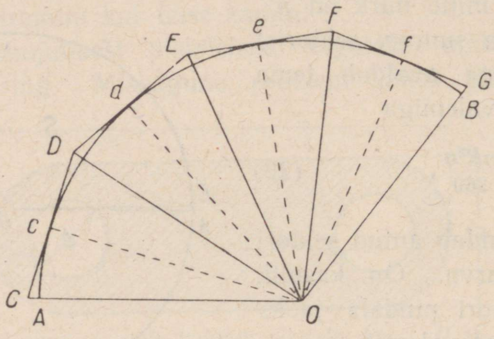
$$S = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi R n}{180} \cdot R = \frac{\pi R^2 n}{360},$$

s. t. valemi (22).

Kui sektori kaar on 360°, siis muutub sektor ringiks ja kaare pikkus ringjoone pikkuseks, nii et valemist (23) saame ringi pindala jaoks uuesti valemi (19)

$$S = \tfrac{1}{2}CR.$$

Valemi $S = \frac{1}{2}sR$ võinuksime leida ka nii, nagu leidsime valemi (19). Selleks on tarvis sektori kaarele konstrueerida



Joonis 218. Sektori pindala arvutamine.

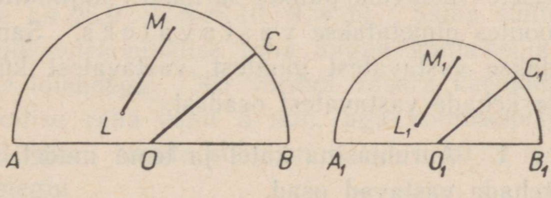
ümberjoonestatud murdjoon (joonis 218) ja tõestada, nagu §-s 80, et hulknurga $OCDEFG$ pindala võrdub raadiuse ja murdjoone poole korrutisega. Kui murdjoon ühtib kaarega AB, siis muutub hulknurk $OCDEFG$ sektoriks ja murdjoon kaare AB pikkuseks. Järelikult võrdub sektori pindala kaare AB ja raadiuse poole korrutisega.

VI peatükk.

Sarnased kujundid.

§ 84. Sarnasus.

Kaht joont, kaht kujundit või kaht keha, millel on üks ja sama kuju, nimetatakse s a r n a s e i k s. Selle definitsiooni mõte selgub järgmiste näidete varal:



Joonis 219. Need kaks poolringi on s a r n a s e d k u j u n d i d. Nendele on joonestatud vastavad jooned ja punktid.

1. Masina mudel ja selle mudeli järgi ehitatav masin on kaks sarnast keha.

2. Päevapilt ja selle suurendus on sarnased kujundid.

3. Ühe ja sama maa-ala kaks plaani on sarnased kujundid.

4. Kaks poolringjoont on sarnased jooned.

Kahel kongruentsel kujundil on muidugi üks ja sama kuju (ja peale selle võrdsed mõõted). Seepärast on nad sarnased, nii et kongruentsus on sarnasuse erijuhtum.

Nii on üks kahest sarnasest kujundist teise vähendatud, suurendatud või täpne kujutis. Sarnaste kujundite puhul ühe kujundi igale punktile vastab tema kujutisena teise kujundi punkt. Nii vastab aurumasina veoratta keskpunktile tema mudeli veoratta keskpunkt.

Joonis 220. 3-kopikalisel ja 5-kopikalisel metallrahal on s a r n a s e d pildid.

Teineteisele vastavaid punkte sarnastes kujundites, kehades või joontes nimetatakse v a s t a v a t e k s. Samas mõttes kõneldakse vastavatest joontest, vastavatest kujunditest ja sarnaste kehade vastavatest osadest.

N ä i d e 1. Aurumasina katel ja tema mudeli katel on sarnaste kehade vastavad osad.

N ä i d e 2. Joonisel 219 kujutatud kahes poolringis on diameetrid AB ja A_1B_1, raadiused OC ja O_1C_1, punktid L ja L_1 ning joonlõigud LM ja L_1M_1 vastavad.

N ä i d e 3. Joonisel 220 on kujutatud loomulikus suuruses 1946. a. välja lastud 3-kopikaline ja 5-kopikaline metallraha (vapipoolsest küljest). Nende joonised on sarnased. Riigi nimetähed on nii ühel kui teisel rahal kujutatud vastavate joontega. Need tähed, samuti ka sirp ja vasar nii ühel kui teisel rahal on jooniste vastavad osad.

§ 85. Sarnaste kujundite omadusi.

E s i m e n e o m a d u s. Kahes sarnases kujundis on vastavate lõikude pikkuste suhetel üks ja sama väärtus. Seda nimetatakse s a r n a s u s e t e g u r i k s, samuti ka s a r n a s u s e k o e f i t s i e n d i k s ehk m a s t a a b i k s.

N ä i d e 1. Seeria E veduri ratta diameeter $D = 1320$ mm. Mudeli sama ratta diameeter $d = 66$ mm. Suhe $d : D = 66 : 1320 = \frac{1}{20}$. Sama veduri silindri diameeter $D_1 = 630$ mm. Mudeli silindri diameeter $d_1 = 31{,}5$ mm. Suhe $d_1 : D_1 = 31{,}5 : 630 = \frac{1}{20}$. Sama suhe $1 : 20$ peab olema ka teistel vastavatel lõikudel. Teiste sõnadega, kõik mudeli mõõted peavad olema 20 korda väiksemad veduri mõõteist. Sarnasustegur on siin $\frac{1}{20}$. Öeldakse samuti, et mudel on valmistatud mastaabis $1 : 20$. See suhe $1 : 20$ on arvmõõt.

N ä i d e 2. Viiekopikalise metallraha diameeter on 25 mm; kolmekopikalise diameeter on 22,5 mm (joonis 220). Viiekopikalise raha diameetri suhe kolmekopikalise raha diameetrisse on $25{,}0 : 22{,}5 = 10 : 9 = 1\frac{1}{9}$. Sama suhte moodustavad kõik viiekopikalise raha lõigud kolmekopikalise raha vastavate lõikudega. Nii võrdub vasara käepideme pikkus viiekopikalise raha vapil 5 mm, aga kolmekopikalise raha vapil 4,5 mm. Nende suhe on $5 : 4{,}5 = 10 : 9 = 1\frac{1}{9}$; $1\frac{1}{9}$ on sarnasustegur.

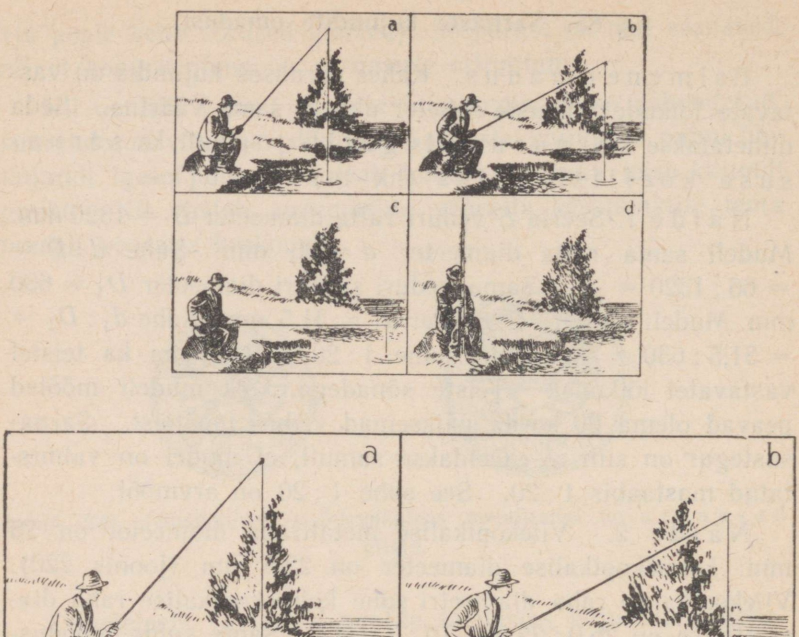
Meie poolt kindlaks tehtud omadust võib veel nii sõnastada:

Sarnaste kujundite vastavad lõigud on võrdelised (ehk **proportsionaalsed**).

T e i n e o m a d u s.

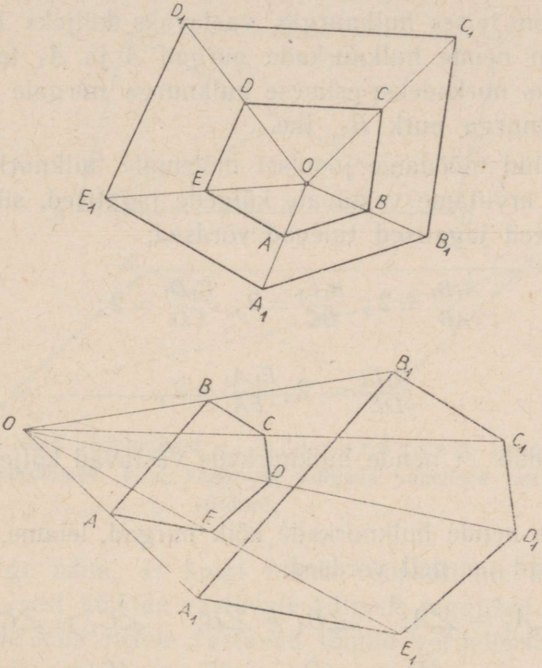
Sarnaste kujundite nurgad vastavate lõikude vahel on võrdsed.

N ä i d e 3. Laeva mudelil korstnate ja lae vaheline nurk on 85°. Ka laeva korstnad moodustavad laevalaega sama nurga.



Joonis 221. Kaks pildiseeriat, mis erinevas mastaabis kujutavad kalapüüki. Pildid a ja a, b ja b jne. on s a r n a s e d, v a s t a v a d nurg a d (ridva ja õngenööri vahel) on neil v õ r d s e d.

N ä i d e 4. Joonisel 221 on antud erinevates mastaapides kaks seeriat kalapüüki kujutavaid pilte. Samade tähtedega märgitud pildid on sarnased. On selgesti näha, et nendel piltidel on nurgad vastavate joonte vahel võrdsed, näiteks õngeridva ja nööri vahel.



Joonis 222. Need viisnurgad on sarnased: nende vastavad küljed on võrdelised ja vastavad nurgad on võrdsed.

N ä i d e 5. Joonestame mingi hulknurga, näiteks viisnurga $ABCDE$. Võtame vabalt mingi punkti O (nagu joonisel 222); punktist O joonestame kiired läbi hulknurga iga tipu. Siis võtame igal kiirel punkti, mis punktist O on kaks korda kaugemal kui hulknurga vastav tipp, näiteks A_1 võtame nõnda, et

$$OA_1 = 2 \cdot OA,$$

B_1 võtame nõnda, et

$$OB_1 = 2 \cdot OB,$$

jne. Ühendades niiviisi saadud punktid järgemööda, saame uue hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$. Esimese hulknurga küljele AB vastab teises hulknurgas külg A_1B_1; esimese hulknurga küljele BC on teises hulknurgas vastavaks küljeks B_1C_1 jne. Samuti on nende hulknurkade nurgad A ja A_1 teineteisele vastavateks nurkadeks; esimese hulknurga nurgale B vastab teise hulknurga nurk B_1, jne.

Kui nüüd mõõdame joonisel mõlemate hulknurkade kõik küljed ja arvutame vastavate külgede jagatised, siis näeme, et kõik need jagatised tulevad võrdsed:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = 2\,; \quad \frac{B_1C_1}{BC} = 2\,; \quad \frac{C_1D_1}{CD} = 2\,;$$

$$\frac{D_1E_1}{DE} = 2\,; \frac{E_1A_1}{EA} = 2\,,$$

see tähendab, et nende hulknurkade vastavad küljed on võrdelised.

Mõõtes nende hulknurkade kõik nurgad, leiame, et vastavad nurgad on neil võrdsed:

$$\angle A_1 = \angle A; \qquad \angle B_1 = \angle B; \qquad \angle C_1 = \angle C;$$

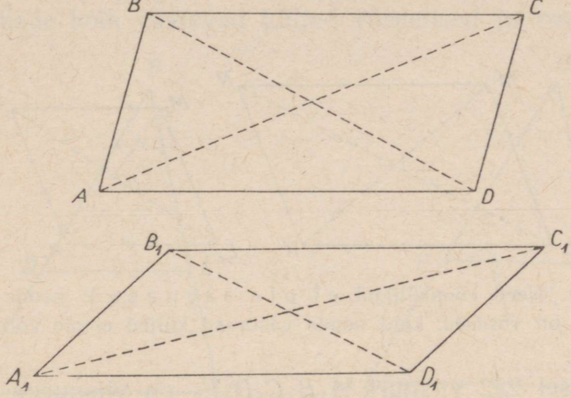
$$\angle D_1 = \angle D; \qquad \angle E_1 = \angle E.$$

Nagu jooniselt näeme, on hulknurgad $A_1B_1C_1D_1E_1$ ja $ABCDE$ ühesuguse kujuga, nad on sarnased.

Niisiis

kaks hulknurka on sarnased, kui nende vastavad küljed on võrdelised ja vastavad nurgad on võrdsed.

Et hulknurgad oleks sarnased, selleks peavad need kaks tingimust mõlemad täidetud olema. Kui üks tingimus on täidetud, teine aga mitte, siis hulknurgad ei ole sarnased. Näiteks võib joonestada kaks võrdeliste või koguni võrdsete küljedega rööpkülikut, nii et nende vastavate külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed, nagu joonisel 223. Need rööpkülikud ei ole sarnased.



Joonis 223. Need rööpkülikud e i o l e s a r n a s e d: nende vastavad küljed on võrdelised, kuid vastavate külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed.

On kerge näha, et kuigi nende rööpkülikute küljed on võrdelised, sest kõikide vastavate külgede jagatised on ühed, siiski ei ole kõik nende vastavad lõigud võrdelised: näiteks diagonaalide suhted

$$\frac{BD}{B_1D_1} \quad \text{ja} \quad \frac{AC}{A_1C_1}$$

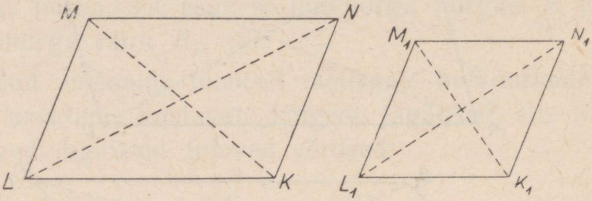
ei ole võrdsed; esimene neist on suurem kui 1, teine aga väiksem kui 1.

Joonisel 224 on esitatud kaks rööpkülikut, mille vastavad nurgad on võrdsed, kuid vastavad küljed ei ole võrdelised. Siin ei ole esimene, külgede võrdelisuse, tingimus täidetud, seepärast need rööpkülikud ei ole sarnased.

Vaatamata sellele, et joonisel 224 esitatud rööpkülikute vastavad nurgad on võrdsed:

$$\angle L = \angle L_1; \quad \angle K = \angle K_1; \quad \angle N = \angle N_1; \quad \angle M = \angle M_1,$$

ei ole ometi kõikide vastavate lõikude vahelised nurgad võrdsed, näiteks diagonaalide vahelised nurgad ei ole neil võrdsed.



Joonis 224. Need rööpkülikud e i o l e s a r n a s e d: nende vastavad nurgad on võrdsed, kuid nende vastavad küljed ei ole võrdelised.

Joonisel 222 viisnurk $A_1B_1C_1D_1E_1$ on viisnurga $ABCDE$ kahekordne suurendus. Kui oleksime võtnud punktid A_1, B_1, C_1, jne. punktile O kaks korda lähemal kui viisnurga $ABCDE$ vastavad tipud, siis oleksime saanud antud viisnurga kahekordse vähenduse.

Ü l e s a n n e. Teha ülalkirjeldatud viisil vabalt võetud nelinurga kolmekordne suurendus ja kahekordne vähendus.

§ 86. Sarnaste kolmnurkade konstrueerimine.

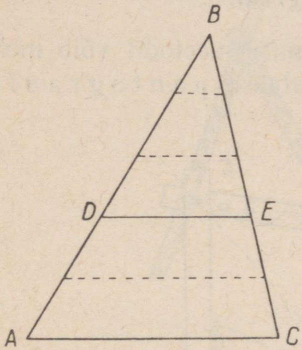
Ü l e s a n n e 42. Konstrueerida antud kolmnurgaga sarnane kolmnurk antud mastaabis.

On antud $\triangle ABC$ (joonis 225). Nõutakse konstrueerida temaga sarnane kolmnurk mastaabis 3 : 5.

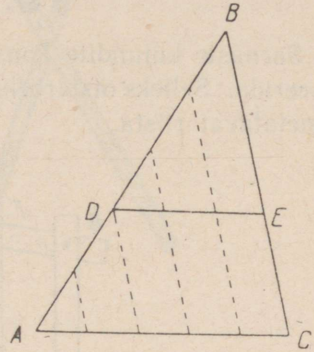
Jaotame antud kolmnurga ühe külje, näiteks AB, viieks võrdseks osaks (§ 46). Loeme kolm niisugust osa tipu B

juurest alates. Saadud punktist D joonestame sirge $DE \parallel AC$. Kolmnurk DBE ongi otsitav.

Tõestame seda. Kolmnurkadel ABC ja DBE $\angle A = \angle D$ ja $\angle C = \angle E$ kui kaasnurgad paralleelsete sirgete juures ja nurk B on ühine. Nii on kolmnurga ABC kõik nurgad vastavalt võrdsed kolmnurga DBE nurkadega. Peale selle on nende kolmnurkade kõik vastavad küljed võrdelised ja nende suhe



Joonis 225. Ülesanne. Antud on $\triangle ABC$. Konstrueerida ternaga sarnane kolmnurk mastaabis 3:5. Vastus: $\triangle DBE$.



Joonis 226. Eelmisel joonisel konstrueeritud kolmnurkade sarnasuse tõestuse juurde.

on 3 : 5, mis on võrdne antud suhtega. Et selles veenduda, joonestame läbi nende punktide, mis jaotavad AB viieks võrdseks osaks, küljega AC paralleelsed sirged. Nad lõikuvad küljega BC punktides, mis jaotavad selle külje viieks võrdseks osaks (§ 46); seejuures jaotub lõik BE kolmeks võrdseks osaks. Järelikult, $BE : BC = 3 : 5$.

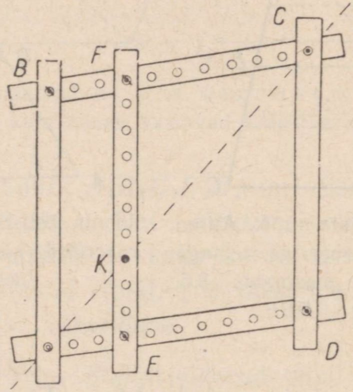
Nüüd tõmbame läbi AB jaotuspunktide küljega BC paralleelsed sirged (joonis 226). Need lõikuvad küljega AC punktides, mis jaotavad selle külje viieks võrdseks osaks, ja küljega DE punktides, mis jaotavad selle kolmeks võrdseks osaks. Järelikult $DE : AC = 3 : 5$.

Niisiis, 1) kolmnurkade *DBE* ja *ABC* küljed on võrdelised, 2) vastavate külgede vahel asetsevad nurgad on võrdsed. Tähendab, kolmnurgad *DBE* ja *ABC* on sarnased. Sarnasustegur (mastaap) on 3 : 5.

Iga kolmnurk, mis on kongruentne kolmnurgaga *DBE*, on ka ülesande lahendiks.

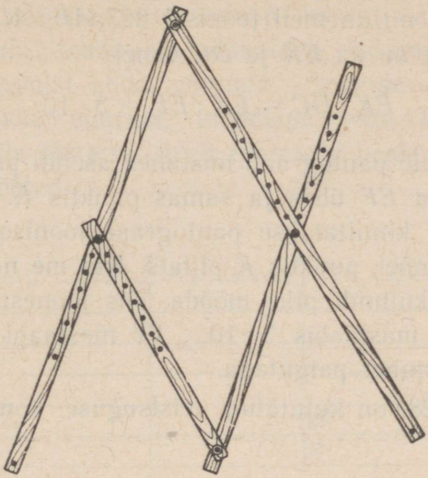
§ 87. Pantograaf.

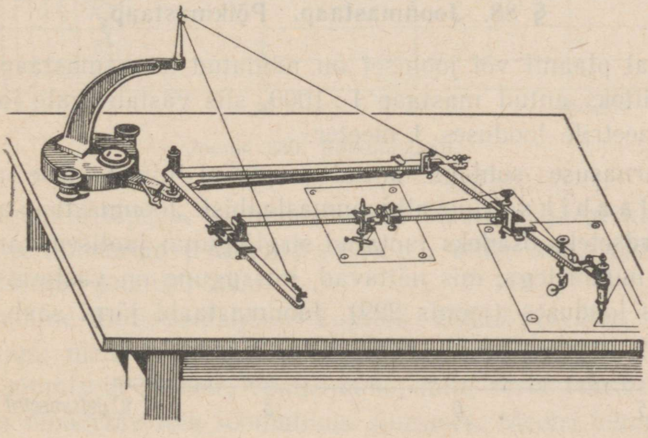
Sarnaste kujundite konstrueerimise meetodit võib mehhaniseerida. Selleks otstarbeks tarvitatakse p a n t o g r a a f i k s nimetatavat riista.



Joonis 227. P a n t o g r a a f on sarnaste kujundite joonestamise seadeldis.

Kõige lihtsama konstruktsiooniga pantograafist on kerge kujutlust saada jooniselt 227. Ta koosneb neljast liigenditega ühendatud joonlauast. Nelinurk *ABCD* on rööpkülik (ta võib ka olla mitte rombikujuline). Vastaskülgedel *BC* ja *AD* leidub võrdsel hulgal auke; augud asetsevad teineteisest võrdsetel kaugustel. Põikjoonlaual *EF* on võrdsetes kaugustes asetsevaid auke niisama palju kui joonlaudadel *BC* ja *AD*. Oma äärmiste aukude kaudu on ta liigenditega ühendatud joonlaudadega BC ja AD. Joonlauda EF on võimalik paigutada mitmesugustesse asenditesse. Liigenditega kinnitatud joonlaud





Joonis 228. Mitmesuguse konstruktsiooniga p a n t o g r a a f e.

EF ei takista rööpküliku kuju muutmist. Seejuures muutub diagonaali AC pikkus. Kuid joonlaud EF jääb kogu aeg paralleelseks küljega CD, nii et kolmnurgad AKE ja ACD jäävad sarnasteks (§ 86). Veel enam, sarnasuse suhe $AE : AD$ jääb üheks ja samaks; seda on kerge leida augukeste vahede loendamisega; nii on meil joonisel 227 $AE : AD = 3 : 10$.

Sama suhe on ka EK ja DC vahel:

$$EK : DC = EK : EF = 3 : 10.$$

Järelikult lõikub pantograafi mistahes asendi puhul diagonaal AC joonlauaga EF ühes ja samas punktis K.

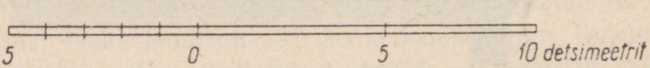
Punktis A kinnitatakse pantograaf joonise pinna külge; punktis E on nõel, punktis K pliiats. Kui me nõelaga liigume tasapinnalise kujundi piiri mööda, siis joonestab pliiats sarnase kujundi mastaabis 3 : 10. Et mastaapi muuta, tuleb joonlaud EF ümber paigutada.

Joonisel 228 on kujutatud teistsuguse konstruktsiooniga pantograafe.

§ 88. Joonmastaap. Põikmastaap.

Igal plaanil või joonisel on näidatud tema mastaap. Kui on näiteks antud mastaap 1 : 1000, siis vastab igale joonise millimeetrile looduses 1 meeter.

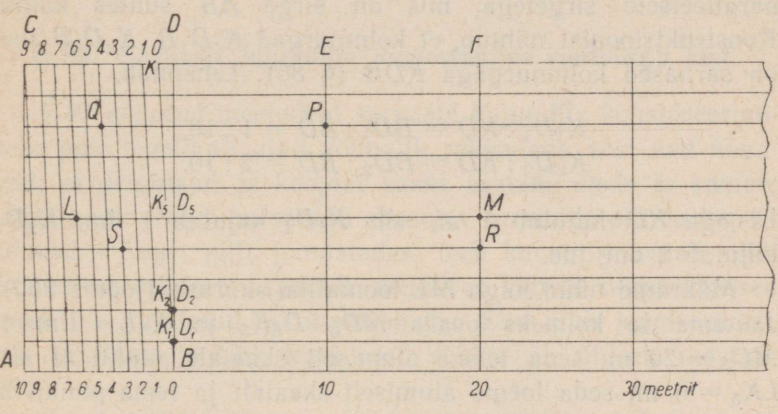
Sarnasuse suhtega antud mastaapi nimetatakse a r v - m a s t a a b i k s erinevalt joonmastaabist. Joonmastaap antakse võrdseteks osadeks jaotatud sirglõiguna; jaotised varustatakse numbritega, mis näitavad, missugune on vastava lõigu pikkus looduses (joonis 229). Joonmastaabi järgi saab alati



Joonis 229. Joonmastaap.

määrata arvmastaapi ja ümberpöördult; mõõtes 10 detsimeetrit kujutava lõigu joonisel 229, leiame, et ta sisaldab 5 cm. Tähendab, arvmastaap on 5 : 100 ehk 1 : 20, mis on seesama. 1 : 20 on väga tarvitatav mastaap masinate kujutamisel ja nende mudelite valmistamisel.

Harilikult antakse joonmastaap kõrvuti arvmastaabiga. Joonmastaabi teadmine võimaldab määrata loomulikke mõõteid, arvutamist abiks võtmata. Soovides kindlaks teha lõigu loomulikku suurust, mõõdame selle lõigu sirkliga plaani peal; siis tõstame sirkli mastaabi peale, kust loemegi loomulikud mõõted.



Joonis 230. Põikmastaap.

Lugemite täpsuse suurendamiseks mastaabi järgi kasutatakse niinimetatud p õ i k m a s t a a p i, mille konstruktsioon on näidatud joonisel 230.

Alumine horisontaaljoon kujutab endast tavalist joonmastaapi; meie joonisel on võetud mastaap 1 : 500. Tõstes sirkli alumisele joonele, võime näha, mitu tervet meetrit sisaldab mõõdetav lõik loomulikus suuruses. Meetri kümnendosad (detsimeetrid) tuleks arvestada silma järgi; harilikku joonmastaapi ei saa varustada väiksemate jaotistega, sest et need jaotised sulaksid isekeskis ühte.

Põikmastaap annab võimaluse täpselt lugeda ka tervete detsimeetrite hulka. Selleks joonestatakse 10 võrdse laiusega horisontaalset riba. Missugune laius ribale anda, see on ükskõik; harilikult on riba laius kaks korda suurem kui mastaabi ühik. Sirged CA, DB, $E10$, $F20$ jne. on vertikaalsed; kaugus nende vahel moodustab 10 joonmastaabi ühikut. Lõik CD on jaotatud kümneks võrdseks osaks, kuid jaotuspunktide numbrid 0, 1, 2, 3 jne. on nihutatud ühe jaotise võrra vasakule, võrreldes vastavate numbritega lõigul AB. Lõikude AB ja CD samade numbritega punktid on ühendatud omavahel paralleelsete sirgetega, mis on sirge AB suhtes kaldu. Konstruktsioonist nähtub, et kolmnurgad K_1D_1B, K_2D_2B jne. on sarnased kolmnurgaga KDB (§ 86). Tähendab,

$$K_1D_1 : KD = BD_1 : BD = 1 : 10,$$
$$K_2D_2 : KD = BD_2 : BD = 2 : 10.$$

Et aga KD kujutab 1 m, siis K_1D_1 kujutab 1 dm, K_2D_2 kujutab 2 dm, jne.

Määrame nüüd lõigu ML loomuliku suuruse (joonis 230). Jaotame ta kolmeks osaks MD_5, D_5K_5 ja K_5L. Ilmselt $MD_5 = 20$ m; seda loeme alumiselt skaalalt punkti M alt; $LK_5 = 6$ m; seda loeme alumiselt skaalalt ja tema punkti L läbiva kaldjoone lõikepunktis; lõpuks, $K_5D_5 = 5$ dm; seda loeme vertikaalselt skaalalt lõigu LM kõrguselt. Nii on lõigu ML pikkus 26,5 m.

Nüüd toome näite, kuidas kasutada põikmastaapi pikkuste mõõtmiseks. Tuleb määrata lõigu QP loomulik suurus (joonis 231). Võtame QP sirklisse. Otsekohe on näha, et QP pikkus ületab 10 m, kuid on väiksem kui 20 m. Seepärast liigume sirkli ühe teravikuga joonel $E10$ (joonis 230), jälgides, et sirklisse võetud sirglõik püsiks horisontaalsena. Kui sirkli teine teravik jõuab lõikumiseni ühe kaldjoonega, siis tähistame selle lõikepunkti Q-ga. Selle kaldjoone lõikepunk-

Joonis 231. Ülesanne: määrata selle lõigu loomulik mõõt eelmisel joonisel kujutatud mastaabis.

tis horisontaalse skaalaga leiame numbri 4, kuna vertikaalsel skaalal loeme lõigu QP kõrgusel numbri 8. Mõõdetava lõigu loomulik pikkus on 14,8 m.

Kui tuleb plaani peale kanda lõiku pikkusega 23,4 m, siis otsime põikmastaabis (joonis 230) horisontaaljoone numbriga 4 ja märgime sellel kaks punkti: punkti S, kus ta lõikub kaldjoonega, mis on märgitud numbriga 3, ja punkti R vertikaaljoonel numbriga 20. Lõik SR ongi otsitav.

§ 89. Sarnaste kujundite joonestamine ruutvõrgu abil.

§ 87 esitatud meetodeid sarnaste kujundite konstrueerimiseks pole tegelikult alati võimalik rakendada, sest nad nõuavad, et originaali ja koopiat saaks asetada ühele ja samale tasapinnale. Neid on samuti ebasobiv tarvitada piltide kopeerimisel. Suurt pilti joonistades teeb kunstnik esmalt pildi üksikutest osadest visandid; seejuures võivad mitmesugused osad olla kujutatud eri mastaapides. Siis alles joonistatakse pilt tervikuna ja kõik tema osad viiakse üle ühisele mastaabile.

Joonisel 232 a ja b on näidatud, kuidas teostub mastaabi muutmine. Meil on ülesandeks suurendada joonis 232a mastaabis 5 : 3. Katame selle joonise paletiga, millel leidub ruutvõrk (kunstnikud valmistavad kavandi paberile või lõuendile, millel leidub kergesti kustutatav ruutvõrk). Leht, millele tehakse koopia (joonis 232b), kaetakse samuti ruutvõrguga, kuid selle võrgu iga ruudu külg on suurem kui ruudu külg paletil, küljed suhtuvad seejuures nagu 5 : 3.

Nüüd kanname üle pildi üksikud punktid. Kalju varjutatud nurk vasakul asetseb 5. horisontaal- ja 2. vertikaaljoone lõikekohal. Leiame koopial 5. horisontaal- ja 2. vertikaaljoone lõikepunkti ja märgime sinna punkti. Niiviisi märgitakse tihe rida punkte kalju äärt mööda, rõnga, nõgude, lõhede jne. kontuure mööda. Ruutude sisse langevate punktide suhtes toimub vertikaalne ja horisontaalne tähistamine silma järgi. Nii saame kalju tipul asetseva

a

vasaku inimese pea kuju jaoks horisontaalse numbri 1,3 ja vertikaalse 6,5.

b

Joonis 232. Pildi kopeerimine teises mastaabis ruutvõrgu abil.

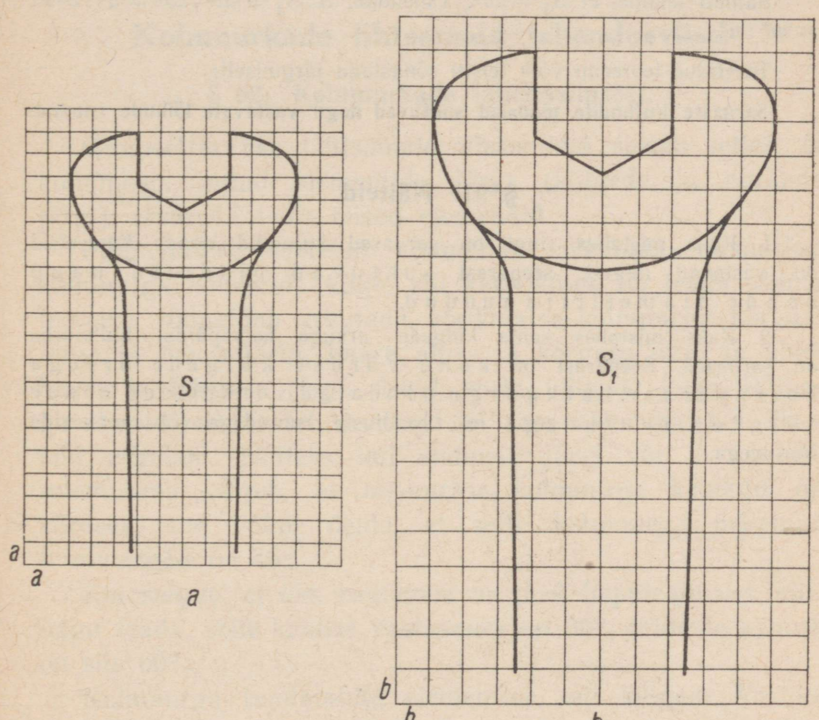
Saadud pilt on originaaliga sarnane, sest et k õ i k vastavad lõigud on konstruktsiooni järgi võrdelised; selletõttu on k õ i k vastavad nurgad võrdsed.

§ 90. Sarnaste kujundite pindalad.

T e o r e e m.

Kahe sarnase kujundi pindalade suhe võrdub sarnasuse suhte ruuduga.

Olgu antud kaks mistahes sarnast kujundit (joonis 233a ja b). Nende sarnasuse suhe on $m : n$ (meie joonisel $m : n = 2 : 3$). Tõestame,



Joonis 233. Nendel joonistel esitatud kujundite sarnasuse suhe on 2 : 3. Nende pindalade s u h e on $2^2 : 3^2$ ehk 4:9.

et nende pindalade suhe $S : S_1$ on $(m : n)^2$ ehk, mis on seesama, $m^2 : n^2$ (meie näites $S : S_1 = 4 : 9$).

Katame kujundi 233a tiheda ruutvõrguga. Tähistame selle võrgu ruudu ühe külje tähega a ja tähega k arvu, mis näitab, mitu ruutu sisaldab kujund 233a. Joonestame joonisel 233b sirgjooned, mis vastavad joonise 233a võrgu horisontaal- ja vertikaaljoonetele. Siis kattub kujund 233b samuti ruutvõrguga, milles leidub sama palju ruutusid, kui palju neid oli kujundis 233a, s. t. k ruutu. Ent iga ruudu küljel joonisel 233b on teine pikkus kui ruudu küljel joonisel 233a; tähistame selle tähega b; suhe $a : b$ võrdub sarnasuse suhtega $a : b = m : n$. Ruudu pindala joonisel 233a on a^2, ja kuna S sisaldab k ruutu, siis $S = ka^2$.

Samuti leiame, et $S_1 = kb^2$. Tähendab, $S : S_1 = ka^2 : kb^2 = a^2 : b^2 = m^2 : n^2$.

Tõestatud teoreemi võib teisiti sõnastada järgmiselt:

Sarnaste kujundite pindalad suhtuvad nagu vastavate lõikude ruudud.

§ 91. Näiteid.

1. Kaks mistahes ringi on sarnased kujundid; nende diameetrid on vastavad lõigud; seepärast suhtuvad pindalad nagu nende diameetrite ruudud.

2. Kaks mistahes sama külgede arvuga korrapärast hulknurka on sarnased. Seepärast on kahe võrdse külgede arvuga korrapärase hulknurga pindalad võrdelised nende külgede ruutudega või raadiuste ruutudega või apoteemide ruutudega.

VII peatükk.

Kolmnurkade lihtsamaid lahendusviise.

§ 92. Kolmnurkade lahendamisest.

Geomeetria üks tähtsamaid ülesandeid seisab selles, et kolmnurga antud elementide järgi (külgede ja nurkade järgi) arvutada tema teised elemendid.

Püthagoras'e teoreem võimaldab arvutada täisnurkse kolmnurga kolmanda külje, kui kaks külge on teada. Sama teoreem võimaldab arvutada võrdhaarse kolmnurga kõrgust aluse ja haara järgi, haara aluse ja kõrguse järgi ja alust haara ja kõrguse järgi. Kuid nurki külgede järgi Püthagoras'e teoreemi abil arvutada ei saa, välja arvatud üksikud erijuhud. Näiteks kui andmete järgi või arvutamise tulemusena selgub, et täisnurkse kolmnurga kaatetid on võrdsed, siis võime öelda, et selle kolmnurga mõlemad teravnurgad on 45°.

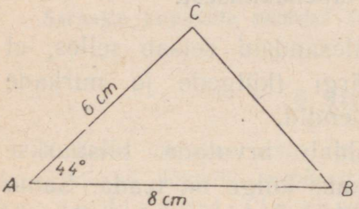
Kui selgub, et üks kaateteist on pool hüpotenuusist, siis, nagu teada, selle kaateti vastasnurk on 30°, teine teravnurk on siis 60°.

Kolmnurga tundmatute elementide, nii külgede kui ka nurkade, arvutamist antud elementide järgi nimetatakse k o l m n u r g a l a h e n d a m i s e k s. Antud elementide hulgas võivad esineda nii küljed kui ka nurgad.

Kolmnurkade lahendamisega tegelevat geomeetria osa nimetatakse t r i g o n o m e e t r i a k s. Selles raamatus käsitleme ainult lihtsamaid kolmnurkade lahendamise ülesandeid.

§ 93. Kolmnurkade graafiline lahendamine.

Põhimõtteliselt on kõige lihtsamaks kolmnurkade lahendamise viisiks *graafiline lahendamine*. See viis seisab selles, et antud elementide järgi joonestatakse kolmnurk ja joonisel mõõdetakse tundmatud elemendid. Muidugi peavad antud elemendid olema niisugused, et nende järgi saab kolmnurga ehitada, vastasel korral ei saa ülesannet lahendada.



Joonis 234

Et nii joonestamisel kui ka mõõtmisel tekib vigu, siis selleks, et tulemuse viga ei läheks liiga suureks, peab joonise kui ka mõõtmised tegema äärmiselt hoolega, hästi teritatud pliiatsiga; erilist täpsust nõuab nurga joonestamine malli abil ja saadud nurkade mõõtmine malliga.

Ülesanne 43. Kolmnurgast ABC on antud: $AB = 8$ cm; $AC = 6$ cm; $\angle A = 44°$. Leida graafiliselt külg BC ja nurgad B ja C.

Lahendus. Ehitame antud elementide järgi kolmnurga ABC (joonis 234).

Jooniselt leiame mõõtmise teel:

$$AB = 5{,}6 \text{ cm}; \quad \angle B = 47°; \quad \angle C = 89°.$$

Kontrollimiseks liidame kolmnurga nurgad:

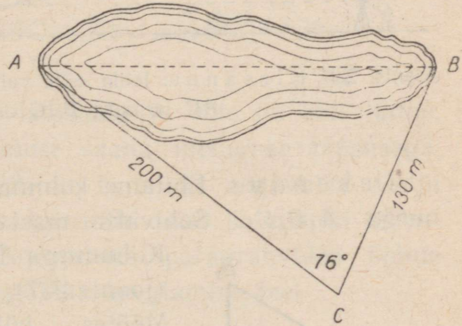
$$44° + 47° + 89° = 180°,$$

nagu peab olema.

Kui ülesanne viib maapinnal asetseva kolmnurga lahendamisele, siis valime vastava mastaabi, vähendame vastav arv korda maapinnal mõõdetud pikkusi, nurgad jätame endiseks, ja ehitame joonise lehele antud kolmnurgaga sarnase, vähendatud kolmnurga. Otsitavad nurgad leiame jooniselt otsese mõõtmise teel. Otsitava pikkuse leidmiseks mõõdame vastava pikkuse joonisel ja korrutame selle arvuga, mille kordselt me oma kolmnurka vähendasime.

Ülesanne 44. Arvutada järve pikkus AB, kui valitud punkti C kaugused punktidest A ja B on $AC = 200$ m ja $BC = 130$ m ja nende kauguslõikude vaheline nurk $C = 76°$ (joonis 235).

Lahendus. Valime mastaabi. Suurem antud mõõdetest on 200 m ehk 20 000 cm; 1000 korda vähendades tuleks joonisel sellele pikkusele vastav pikkus 20 cm, see ei mahu hästi vihu lehele. Vähendame 2000 korda, seega võtame mastaabiks 1 : 2000. Nüüd tuleb 200 m vastavaks pikkuseks joonisel 10 cm, seega siis joonisel 1 cm kujutab 20 m.

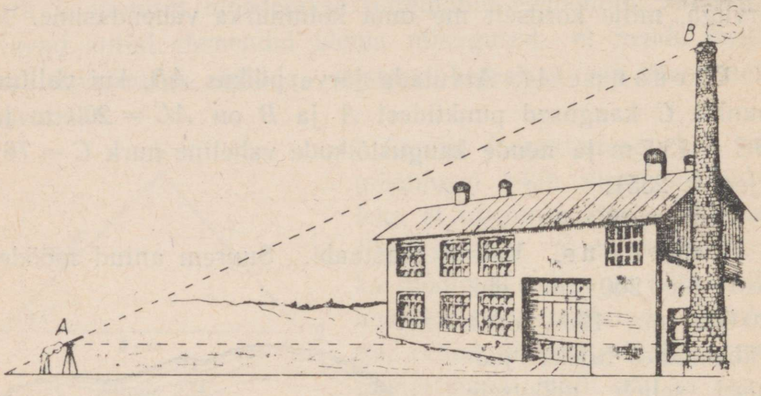


Joonis 235.

Ehitame nüüd kolmnurga külgedega $A_1C_1 = 10$ cm, $B_1C_1 = 6{,}5$ cm ja nende vahelise nurgaga 76°.

Saadud joonisel mõõdame pikkuse A_1B_1, selgub, et $A_1B_1 = 10{,}5$ cm. Korrutades seda arvu 2000-ga, leiame, et järve pikkus $AB = 10{,}5 \cdot 2000$ cm $= 21\,000$ cm $= 210$ m.

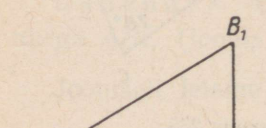
Ü l e s a n n e 45. Vabriku korstna kõrguse mõõtmiseks (joonis 236) mõõdeti korstna kaugus valitud vaatluskohast A ja nurk BAC, milles korsten paistab vaatluskohast A. Kui kõrge oli korsten, kui kaugus $AC = 27$ m, $BAC = 30°$ ja nurgamõõtja kõrgus oli 1,5 m?



Joonis. 236. Ü l e s a n n e: leida selle vabriku korstna kõrgus, kui kaugus AC ja nurk BAC on mõõdetud.

L a h e n d u s. Ehitame kolmnurgaga ABC sarnase kolmnurga $A_1B_1C_1$. Sobivaks mastaabiks on nüüd 1 : 1000. Kolmnurga $A_1B_1C_1$ külg $A_1C_1 = 27$ mm (joonis 237), $\angle A_1 = 30°$ ja $\angle C_1 = 90°$. Mõõtes külje B_1C_1, leiame, et

$$B_1C_1 = 15 \text{ mm}.$$



Joonis 237. Eelmisel joonisel antud ülesande lahendamiseks tuleb konstrueerida kolmnurk $A_1B_1C_1$, mis on s a r n a n e kolmnurgaga ABC.

Korrutades seda sarnasusteguriga 1000, saame, et $BC = 15 \cdot 1000 \text{ mm} = 15$ m.

Lisades siia mõõteriista kõrguse (kaugus punktist C kuni maapinnani), saame korstna kõrguse:

$$15 \text{ m} + 1{,}5 \text{ m} = 16{,}5 \text{ m}.$$

Ülesanded. Lahendada graafiliselt kolmnurk, millest on antud:

1. $BC = 4$ cm; $AC = 5$ cm; $\angle C = 102°$.

2. $AB = 13$ cm; $BC = 14$ cm; $CA = 15$ cm.

3. $AB = 11$ km; $\angle A = 20°$; $\angle B = 28°$.

4. Vaenlase laev asetseb merel punktis C. On tarvis teada, kui kaugel on laev rannal asetsevast punktist A. Selleks valitakse rannal teine punkt B. Leida laeva kaugus teades, et

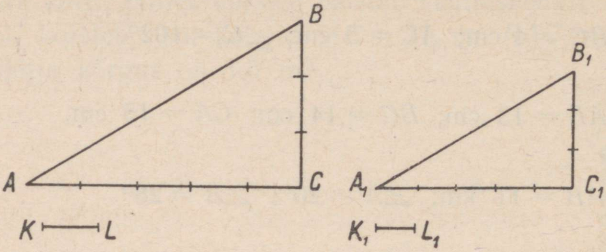
$$AB = 500 \text{ m}, \ \angle BAC = 70°, \ \angle ABC = 85°.$$

Kolmnurkade graafilise lahendamise võte on küll lihtne, kuid ta ei võimalda tulemust saada niisuguse täpsusega, nagu see tänapäeval tarvilik on, ta on ka aegaviitev. Palju suurema täpsusega ja palju kiiremini saab kolmnurki lahendada arvutamise teel. Järgnevates paragrahvides õpime täisnurkset kolmnurka lahendama arvutamise teel.

§ 94. Nurga tangens ja kootangens.

Eelmises paragrahvis esitatud võtet võib paremaks muuta, nii et saab igasugust täisnurkset kolmnurka lahendada, ilma et teda tuleks konstrueerida. Mistahes kujuga kolmnurki saab samuti konstruktsioonita lahendada, kuid lahendus on keerukam.

Lahendusviis, millega nüüd tutvume, põhineb järgmisel lihtsal ja tähtsal tõsiasjal.



Joonis 238. Nurga tangens. Nendel kolmnurkadel $\angle A = \angle A_1$ ja seepärast $BC : AC = B_1C_1 : A_1C_1$. Suhet $BC : AC$ nimetatakse nurga A tangensiks.

Kõigil täisnurksetel kolmnurkadel, millel on antud teravnurk A, on nurga A vastaskaateti suhe lähiskaatetisse üks ja sama.

Täisnurksete kolmnurkade ABC ja $A_1B_1C_1$ (joonis 238). vastavad teravnurgad $\angle A = \angle A_1$. Siis on neil kõik nurgad vastavalt võrdsed ja seega on nad sarnased. Tõestame, et nurga A vastaskaateti BC ja lähiskaateti AC suhe võrdub nurga A_1 vastaskaateti B_1C_1 ja lähiskaateti A_1C_1 suhtega.

Oletame, et pikkusühik a (lõik KL) sisaldub lõigus BC m korda ja lõigus AC n korda (meie joonisel $m = 3$, $n = 5$).

Võtame lõigu $K_1L_1 = a_1$, mis kujutab pikkusühikut a samas mastaabis, milles $\triangle A_1B_1C_1$ kujutab kolmnurka ABC. Siis sisaldab kaatet B_1C_1 lõiku a_1 m korda ning kaatet A_1C_1 n korda. Tähendab, mõlemad suhted $BC : AC$ ja $B_1C_1 : A_1C_1$ võrduvad ühe ja sama suhtega $m : n$.

$$BC : AC = B_1C_1 : A_1C_1 = m : n.$$

Teravnurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhet nimetatakse selle nurga t a n g e n s i k s.

Nii on kolmnurgas ABC joonisel 238 nurga A tangens $BC : AC = \frac{3}{5}$ ja nurga B tangens $AC : BC = \frac{5}{3}$. Joonisel 237 on nurga A_1 tangens $B_1C_1 : A_1C_1 = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$ ja nurga B_1 tangens $\frac{9}{5}$.

Esitatust selgub, et

nurga tangensi väärtus ei sõltu seda nurka sisaldava kolmnurga suurusest.

Igale teravnurgale vastab täiesti kindel tangens ja, ümberpöördult, igale tangensile vastab täiesti kindel teravnurk.

N ä i d e 1. Missuguse nurga tangens on üks?

Nurga tangens on vastaskaateti ja lähiskaateti suhe; seepärast, kui tangens võrdub ühega ($BC : AC = 1$; joonis 239), siis vastaskaatet võrdub lähiskaatetiga: $BC = AC$. Järelikult on täisnurkne $\triangle ABC$ võrdhaarne; tähendab $\angle A = \angle B = 45°$. Otsitav nurk on 45°.

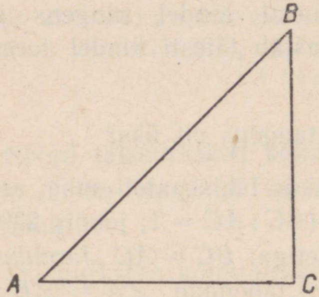
N ä i d e 2. Leida tangens nurgast 60°.

Kolmnurga ABC (joonis 240) $\angle A = 60°$ ja järelikult $\angle B = 30°$. Siis (§ 27) on hüpotenuus AB kaatetist AC kaks korda suurem. Võtame AC pikkusühikuks. Siis $AC = 1$; $AB = 2$; $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 4 - 1 = 3$; $BC = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. Järelikult on 60-kraadise nurga vastaskaateti BC ja lähiskaateti AC suhe (ligikaudu) $1{,}73 : 1 = 1{,}73$.

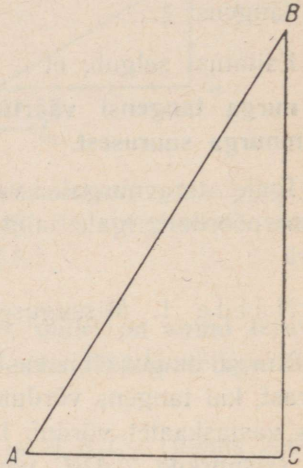
Nii on tangens nurgast 60° võrdne 1,73 täpsusega kuni 0,01. Oleksime võinud teda leida mistahes täpsusega; nii näiteks võrdub ta 1,732 täpsusega kuni 0,001.

Iga nurga jaoks võib leida arvutamise teel tema tangensi mistahes täpsusega.

Näites 2 leidsime tangensi nurgast 60°; võib kergesti leida ka tangensi nurgast 45°; see võrdub ühega (näide 1); pole raske leida tangensit nurgast 30°; see võrdub $1 : 1{,}732 \approx 0{,}577$ (vt. näide 2). Teiste nurkade tangensite arvutusvõtted selgitatakse edaspidises kursuses.



Joonis 239. 45-kraadise nurga tangens on 1.



Joonis 240. Tangens nurgast 60° on $\sqrt{3}$.

Vastaskaateti ja lähiskaateti suhte asemel võib vaadelda ka ümberpöördud suhet, s. t. lähiskaateti suhet vastaskaatetisse. Seda suhet nimetatakse nurga **kootangensiks**. Joonisel 240 on nurga A kootangensiks suhe $AC : BC$ ja nurga B kootangensiks suhe $BC : AC$, mis on ka nurga A tangensiks.

Üldse on täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga kootangens teise teravnurga tangensiks. Seepärast võrdub tangens nurgast 30° kootangensiga nurgast $90° - 30° = 60°$; tangens nurgast 20° võrdub kootangensiga nurgast $90° - 20° = 70°$ jne. Sõnu **tangens** ja **kootangens** tähistatakse lühendatult tähistega tan (tg) ja cot (ctg). Tähist tan 30° loetakse: «tangens nurgast 30°» ehk lühemalt «tangens kolmkümmend kraadi». Tähist cot 20° loetakse: «kootangens kakskümmend kraadi». Tähis tan A tähendab: «tangens nurgast A» jne.

Kasutades neid sümboleid, kirjutame üles meile teada olevad tulemused:

$$\tan 45^\circ = 1, \quad \tan 60^\circ = 1{,}732, \quad \tan 30^\circ = 0{,}577,$$
$$\cot 45^\circ = 1, \quad \cot 60^\circ = 0{,}577, \quad \cot 30^\circ = 1{,}732,$$
$$\tan A = \cot\,(90^\circ - A), \quad \cot A = \tan\,(90^\circ - A).$$

Täheldame veel tan A ja cot A vahel kehtiva lihtsa seose:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

Tõepoolest, kui nurga A vastaskaatetit tähistada tähega a ning lähiskaatetit tähega b, siis

$$\tan A = \frac{a}{b},$$

$$\cot A = \frac{b}{a}.$$

Kuid ilmselt

$$\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}.$$

§ 95. Antud nurga tangensi ja kootangensi leidmine.

Tangensi ja kootangensi väärtused saab mistahes nurga jaoks leida tabelist selle raamatu lõpus.

Kui on tarvis leida tabelist tan 28°, siis otsime üles vasakust veerust, kus esineb tähis «kraadid» (ehk °), arvu 28. Samas reas tähisega tan pealkirjastatud veerus leiame tangensi väärtuse, mis võrdub 0,5317. Saame

$$\tan 28^\circ = 0{,}5317.$$

Lihtsate arvutuste jaoks on küllalt, kui võtta kaks esimest kohta; ümardades saame

$$\tan 28° = 0{,}53.$$

Samuti leiame cot 28°. Tähisega cot pealkirjastatud veerus leiame samast reast arvu 1,881:

$$\cot 28° = 1{,}881.$$

Nii leiame ka teiste nurkade tangensid kuni 45°, viimane kaasa arvatud.

Suuremate kui 45-kraadiste nurkade jaoks võib tangensite ja kootangensite väärtusi leida nii. Näiteks peame leidma tan 60°. Teame (§ 94), et ta võrdub cot (90°—60°) = = cot 30°. Seepärast reast arvuga 30 ja sümboliga cot pealkirjastatud veerust leiame arvu 1,732.

Niisugune võte pole sobiv, sest arvutaja peab enne teostama lahutamise ja alles siis leidma tabelist vastuse. Et teda sellest vabastada, on tabeli p a r e m a l e poole asetatud veel üks kraadide veerg. Otsides näiteks tan 60°, võime toimida nii: otsime p a r e m a l t poolt veerust «kraadid» rea arvuga 60. Samast reast veerus, mis a l t on tähistatud sümboliga tan, leiame 1,732.

Üldse igakord, kui nurk ületab 45°, tuleb kasutada kraadide veergu p a r e m a l t poolt ja veergude a l l a asetatud tähised. See tuleb kindlalt omandada.

N ä i d e 1. Leida cot 75°.

Vasakul kraadide veerus puudub arv 75, kuid parempoolses leidub; seepärast vaatame sümbolit cot a l t ja leiame vastavast reast cot 75° = 0,2679.

N ä i d e 2. Leida tan 52°.

P a r e m p o o l s e s t kraadide veerust otsime rea arvuga 52; samast reast veerus, mille a l l seisab tähis tan, leiame, et

$$\tan 52° = 1{,}280.$$

Peale täiskraadide ka minuteid sisaldavate nurkade tangensite ja kootangensite arvutamiseks leiduvad täielikumad tabelid (vt. näiteks V. B r a d i s, «Neljakohalised matemaatilised tabelid»). Täpsust mittenõudvate arvutuste juures võib minutid jätta hoopis arvestamata; siis pole mõtet tabelist välja kirjutada tangensi või kootangensi viimast kümnendkohta.

M ä r k u s. Minuteid sisaldavate nurkade tangensite ja kootangensite arvutamiseks saab kasutada ka selles raamatus leiduvaid tabeleid. On tarvis teostada ainult järgmine täiendav arvutus.

Kui on tarvis leida tan 52°25′, siis leiame tabelist:

$$\tan 52^\circ = 1{,}280$$

ja

$$\tan 53^\circ = 1{,}327.$$

Nurga suurendamisel 1° võrra k a s v a s tangens $1{,}327 - 1{,}280 = 0{,}047$ võrra. Võib arvestada, et ühe kraadi piirides tangens muutub võrdeliselt nurgaga (täpset võrdelisust ei ole, kuid viga ei ületa 0,001). Seepärast, kui nurk suureneb 25′, s. t. $\frac{25}{60}$ kraadi, siis tangens kasvab $\frac{25}{60}$ osa võrra arvust 0,047, s. t. $\frac{25}{60} \cdot 0{,}047 \approx 0{,}020$. Liites selle paranduse arvuga 1,280, leiame, et

$$\tan 52^\circ 25' = 1{,}280 + 0{,}020 = 1{,}300.$$

N ä i d e 3. Leida cot 39°10′. Tabelist leiame:

$$\cot 39^\circ = 1{,}235$$

ja

$$\cot 40^\circ = 1{,}192.$$

Nurga suurenemisel 1° võrra v ä h e n e s kootangens 0,043 võrra. Nurga suurenemisel 10′ võrra, s. t. $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ kraadi võrra, väheneb kootangens $\frac{1}{6} \cdot 0{,}043 \approx 0{,}007$ võrra. Nii saame, et

$$\cot 39^\circ 10' = 1{,}235 - 0{,}007 = 1{,}228.$$

§ 96. Nurga leidmine tema tangensi või kootangensi järgi.

N ä i d e 1. Leida nurk A, kui on teada, et tan $A = 1,170$. Kui tan $A > 1$, siis $\angle A > 45°$; seepärast võime käesoleval juhul piirduda otsimisega selles veerus, millel tähis tan asetseb a l l. Läbides silmadega tangensite veeru alt ülespoole, leiame antud arvule 1,150 lähima. Kuna tähis tan asetseb a l l, siis valime kraadide p a r e m p o o l s e veeru ja loeme samas reas 49. Otsitav nurk peitub 49° ja 50° vahel. Suuremat täpsust mittenõudva arvutuse puhul võime teda lugeda võrdseks 49°. Täpsema arvutuse korral tuleb kasutada täielikumat tabelit või täiendavat arvutamist (vt. näide 2 eelmises paragrahvis).

N ä i d e 2. tan $A = 0,6190$. Leida nurk A. Ü l a l tähisega tan pealkirjastatud veerust leiame lähima arvu 0,6249; samas reas loeme vasakult kraadide veerust 32. Otsitav nurk peitub 31° ja 32° vahel. Parem on võtta $\angle A = 32°$, sest et tan 32° on lähemal arvule 0,6190 kui tan 31°.

N ä i d e 3. tan $A = 1,522$. Leida nurk A.

Arvule 1,522 lähima arvu 1,540 leiame veerust, mille a l l on tähis tan. Kraadide arvu leiame paremalt poolt: $\angle A \approx 57°$ (liiaga).

Et täpsustada tulemust, täheldame, et nurga suurendamisel 1° võrra 56 kraadilt 57 kraadile kasvab tangens arvust 1,483 arvuni 1,540, s. t. $1,540 - 1,483 = 0,057$ võrra.

Meile antud arv 1,522 on väiksem kui $1,540 = \tan 57°$ $1,540 - 1,522 = 0,018$ võrra. Eeldades, et tangensi muutumine on võrdeline nurga muutumisega, koostame võrde

$$0,018 : 0,057 = x : 1,$$

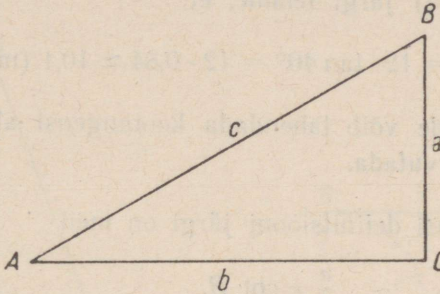
kust

$$x = \frac{0,018}{0,057} \text{ kraadi} = \frac{0,018}{0,057} \cdot 60 \text{ minutit.}$$

Arvutades leiame, et $x \approx 20$ minutit. Lahutades selle paranduse 57 kraadist, saame, et $\angle A = 56°40'$.

§ 97. Täisnurkse kolmnurga lahendamine kaateti ja teravnurga järgi.

Pöördume tagasi ülesande juurde vabriku korstna kõrgusest. See muutub täisnurkse kolmnurga lahendamiseks antud kaateti $b = 27$ m ja lähisteravnurga $A = 30°$ järgi (joonis 241). Tuleb leida vastaskaatet a.



Joonis 241. $a = b \tan A$.

Tangensi definitsiooni järgi (§ 94) on

$$\frac{a}{b} = \tan A,$$

kust

$$\boldsymbol{a = b \tan A,} \tag{24}$$

s. t.

$$a = 27 \cdot \tan 30°.$$

Leides tabelist $\tan 30° = 0{,}58$, saame, et

$$a = 27 \cdot 0{,}58 \approx 15{,}6 \text{ (m)}.$$

Valemit (24) on kasulik meeles pidada, tema sõnastus on järgmine:

kaatet võrdub teise kaateti ja oma vastasnurga tangensi korrutisega.

On selge, et kõrvuti valemiga (24) võib kirjutada ka järgmise valemi

$$b = a \tan B.$$

Kui kolmnurgas on teada kaatet ja tema vastasnurk ja tuleb leida teine kaatet, siis võib ülesande otsekohe muuta eelmiseks.

N ä i d e. On antud: $b = 12$ m, $\angle B = 50°$.

Leiame $\angle A = 90° - \angle B = 40°$.

Valemi (24) järgi leiame, et

$$a = 12 \cdot \tan 40° = 12 \cdot 0{,}84 \approx 10{,}1 \text{ (m)}.$$

Sama ülesande võib lahendada kootangensi abil; siis pole tarvis $\angle A$ arvutada.

Kootangensi definitsiooni järgi on meil

$$\frac{a}{b} = \cot B,$$

kust

$$\boldsymbol{a = b \cot B,} \tag{25}$$

$$a = 12 \cdot \cot 50° \approx 12 \cdot 0{,}84 = 10{,}1 \text{ (m)}.$$

Valemit (25) võib sõnastada nii:

kaatet võrdub teise kaateti ja oma lähisnurga kootangensi korrutisega.

On selge, et kõrvuti valemiga (25) võib kirjutada ka teise valemi:

$$b = a \cot A.$$

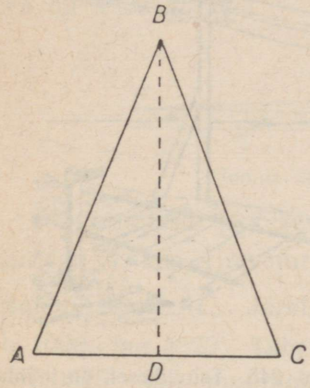
Seega, kui kaatet ja teravnurk on antud, siis võime leida teise teravnurga (lahutades 90°-st antud nurga) ja teise kaateti valemi (24) või (25) järgi. Kolmnurga täielikuks lahendamiseks tuleb veel leida tema hüpotenuus. Seda võib teha Püthagoras'e teoreemi järgi; kuid kergem on kasutada allpool (§ 104) esitatud võtet.

§ 98. Näiteid geomeetriast.

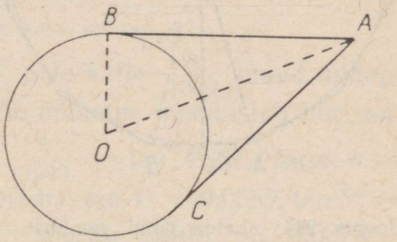
1. Võrdhaarse kolmnurga alus AC (joonis 242) on 12,4 m. Alusnurgad on kumbki 70°. Leida kõrgus BD.

Vaatleme täisnurkset kolmnurka ABD. Tema teravnurk A on 70°; kaatet $AD = 12{,}4 : 2\,\text{m} = 6{,}2\,\text{m}$.

$$BD = 6{,}2 \cdot \tan 70° = 6{,}2 \cdot 2{,}75 \approx 17{,}0\ (\text{m}).$$



Joonis 242. On antud AC ja $\angle A$; leida BD. Vastus: $BD = AD \tan A$.



Joonis 243. On antud R ja $\angle BAC$; leida AB. Vastus: $AB = OB \cot \angle BAO$.

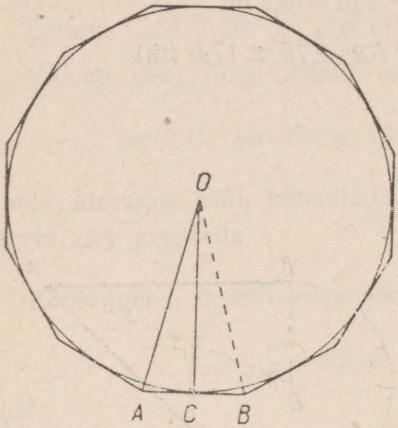
2. Punktist A on ringjoonele raadiusega $R = 15\,\text{cm}$ konstrueeritud kaks puutujat AB ja AC (joonis 243), mis moodustavad nurga 52°. Leida puutujate pikkus.

Ühendame punkti A ringjoone keskpunktiga O ja joonestame raadiuse OB. Sirge AO poolitab $\angle BAC$ (§ 67), seega on täisnurkses kolmnurgas teada: $OB = 15$ cm ja $\angle OAB = 26°$. Valemi (25) järgi leiame:

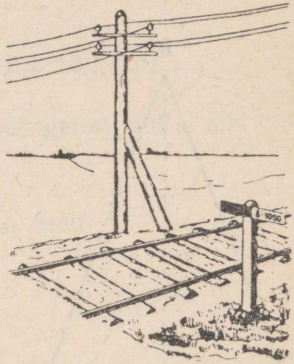
$$AB = OB \cdot \cot \angle BAO = 15 \cdot \cot 26° = 15 \cdot 2{,}05 \approx 30{,}7\ (\text{cm}).$$

3. Leida korrapärase ümberjoonestatud 12-nurga perimeeter ja pindala, kui ringjoone raadius võrdub 10 cm.

Joonestame ümberjoonestatud hulknurga raadiuse OA ja apoteemi OC (joonis 244). Täisnurkse kolmnurga AOC $\angle AOC$ moodustab poole nurgast AOB; $\angle AOB$ on aga $\frac{1}{12}$ osa 360°-st. Seepärast $AOC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360° = 15°$.



Joonis 244. Leida ringi raadiuse järgi selle hulknurga perimeeter ja pindala.



Joonis 245. Tahvlikesel on näidatud raudtee kalle: 1000 meetri ulatusel tee tõuseb 8 m võrra.

Kaatet OC võrdub ringjoone raadiusega $R = 10$ cm. Kaatet AC võrdub külje b_{12} poolega; seepärast $b_{12} = 2AC = 2OC \tan 15° = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}2679 = 5{,}358$ (cm).

Perimeeter

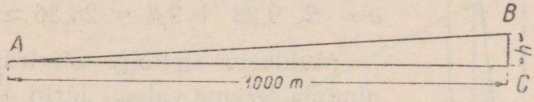
$$(2P)_{12} = 12b_{12} = 12 \cdot 5{,}358 \approx 64{,}3 \text{ (cm)}.$$

Ümberjoonestatud hulknurka saab jaotada $2 \cdot 12 = 24$ kolmnurgaks, mis on võrdsed kolmnurgaga AOC. Seepärast tema pindala $S_{12} = 24 \cdot \frac{1}{2}AC \cdot OC = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b_{12} \cdot R = 6 \cdot 5{,}358 \cdot 10 \approx 321{,}5$ (cm²).

§ 99. Näiteid tehnikast.

1. Kivimaantee või raudtee kallet (ehk tõusu) mõõdetakse suhtega $h : 1000$, kuș h on meetrites väljendatud tee horisontaalse tõusu kõrgus 1 km ulatusel. Nii näitab pealkiri 8/1000 tahvlikesel joonisel 245, et 1 km = 1000 m ulatusel tee kõrgus merepinnast suureneb 8 m võrra.

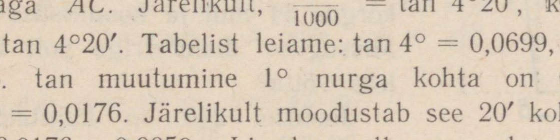
Leida kivimaantee kalle, kui tee tõusunurk horisondi suhtes on $4°20'$.



Joonis 246. Tee kalle on tan A.

Nagu nähtub joonisest 246, pole kalle $\frac{h}{1000}$ muud midagi kui tan A, kus A on nurk, mille maantee moodustab horisontaalsuunaga AC. Järelikult, $\frac{h}{1000} = \tan 4°20'$, kust $h = 1000 \cdot \tan 4°20'$. Tabelist leiame: $\tan 4° = 0{,}0699$, $\tan 5° = 0{,}0875$. tan muutumine 1° nurga kohta on $0{,}0875 - 0{,}0699 = 0{,}0176$. Järelikult moodustab see 20′ kohta muutuse $\frac{1}{3} \cdot 0{,}0176 \approx 0{,}0059$. Lisades selle paranduse tan 4° juurde, leiame, et $\tan 4°20' = 0{,}0758$. Järelikult $h = 1000 \cdot 0{,}0758 = 75{,}8$ (m), ehk, ümardades, $h = 76$ m. Tee kalle on $76 : 1000$.

2. 5,8 m kõrge raudteemuldkeha kaldenurk peab olema 32°. Muldkeha laius (kahe paari rööbaste puhul) on 9,8 m. Leida muldkeha laius tema aluse juures ja muldkeha ristlõike pindala.



Joonis 247. Raudteemuldkeha.

Joonisel 247 on kujutatud muldkeha ristlõige. Antud on suurused $h = 5{,}8$ m; $\angle A = 32°$; $b = 9{,}8$ m. Otsitavad on suurused a ja S. Täisnurksest kolmnurgast ABE leiame:

$$AE = h \cot 32° = 5{,}8 \cdot 1{,}600 = 9{,}28 \text{ (m)}.$$

On selge, et

$$FD = AE = 9{,}28 \text{ m ja } EF = b = 9{,}8 \text{ m}.$$

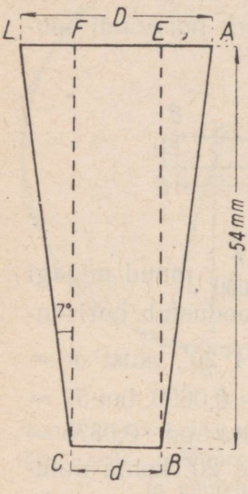
Tähendab,

$$a = 2 \cdot 9{,}28 + 9{,}8 = 28{,}36 \approx 28{,}4 \text{ (m)}.$$

Muldkeha ristlõige on trapets, tema pindala leiame valemi järgi $S = \frac{1}{2}(a + b)\,h$ (§ 53);

$$S = \tfrac{1}{2}\,(28{,}4 + 9{,}8) \cdot 5{,}8 \approx 110{,}8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

3. On tarvis treida kraanikork, mille väiksema põhja diameeter on 12 mm, kõrgus 54 mm ja koonilisuse nurk 7°. Missuguse diameetriga polt tuleb selleks võtta?



Joonis 248. Kraanikorgi telglõige. Joonisel näidatud andmete järgi tuleb määrata, missuguse läbimõõduga polt tuleb võtta selle korgi treimiseks.

Joonisel 248 on kujutatud korgi telglõige; koonilisuse nurk, s. t. nurk, mille moodustab korgi pinnal asetsev kaldsirge (AB ehk LC joonisel 248) vertikaalse sirgega (EB ehk FC), on 7°. Vahe ülemise põhja otsitava diameetri D ja alumise põhja diameetri $d = 12$ mm vahel on võrdne lõigu AE kahekordse pikkusega. Kolmnurgast AEB leiame:

$$AE = BE \tan 7° = 54 \cdot 0{,}1228 = 6{,}631.$$

Järelikult

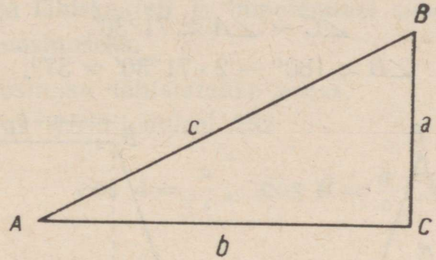
$$D = d + 2AE = 12 + 2 \cdot 6{,}631 \approx 25{,}262 \text{ (mm)}.$$

Tähendab, tuleb võtta polt, mille diameeter on 26—27 mm.

§ 100. Täisnurkse kolmnurga lahendamine kahe kaateti järgi.

Kolmnurga ABC (joonis 249) kaatetid a ja b on antud. Lahendada see kolmnurk.

Leiame tan A (vt. § 101): $\tan A = \frac{a}{b}$ või $\cot A = \frac{b}{a}$. $\angle A$ leiame tabelist. Edasi leiame $\angle B$, saame $\angle B = 90° - \angle A$. Hüpotenuusi võib leida Pühagoras'e teoreemi järgi, kuid parem on kasutada võtet, mis esitatakse §-s 104.



Joonis 249. Ü l e s a n n e: on antud k a a t e t i d a ja b. Lahendada see kolmnurk, s. t. leida $\angle A$ ja $\angle B$.

N ä i d e. $a = 18$ m, $b = 32$ m.

Leiame $\tan A = \frac{18}{82} = 0{,}5625$.

Tabelist leiame tangensi väärtused, mis on arvule 0,5625 lähimad: $\tan 30° = 0{,}5774$ ja $\tan 29° = 0{,}5543$; vahe $d =$ $= 231$ (kümnetuhandikes). Arvutame parandused:

$$x : 60 = \frac{5625 - 5543}{231}; \quad x = \frac{82}{231} \cdot 60 = 21'.$$

$$\angle A = 29°21'; \quad \angle B = 90° - 29°21' = 60°39'.$$

§ 101. Näiteid geomeetriast ja tehnikast.

1. Võrdhaarse kolmnurga ABC alus AC (joonis 250) on 20 mm ja pindala $S = 300$ mm²; leida selle kolmnurga nurgad täpsusega kuni 1°.

Et $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, siis

$$BD = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \quad 300}{20} = 30 \text{ (mm)}.$$

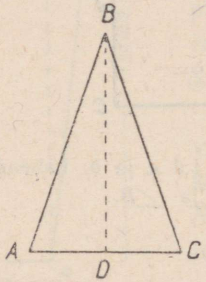
Täisnurksest kolmnurgast ABD leiame:

$$\tan A = \frac{BD}{AD} = \frac{30}{10} = 3{,}0,$$

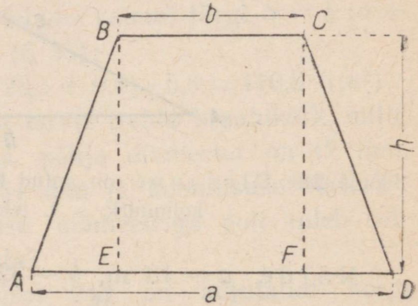
$$\angle A \approx 71°30',$$

$$\angle C = \angle A \approx 71°30',$$

$$\angle B \approx 180° - 2 \cdot 71°30' = 37°.$$



Joonis 250. On antud selle kolmnurga alus AC ja pindala S, leida tema nurgad.



Joonis 251. Leida selle trapetsi nurgad aluste ja kõrguse järgi.

2. Võrdhaarse trapetsi kõrgus $h = 12$ cm ja alused $a = 16$ cm, $b = 10$ cm. Leida trapetsi nurgad.

Täisnurkse kolmnurga ABE (joonis 251; mõõteid pole sellel joonisel silmas peetud) $BE = h = 12$ cm;

$$AE = \frac{a-b}{2} = 3 \text{ cm}; \tan A = \frac{BE}{AE} = \frac{12}{3} = 4.$$

Järelikult

$$\angle A \approx 76°, \quad \angle D \approx 76°,$$

$$\angle B = \angle C = 180° - 76° = 104°.$$

§ 102. Nurga siinus ja koosinus.

Teravnurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse selle nurga siinuseks.

Sõna «siinus» tähistatakse lühendatult tähisega sin.

Kolmnurgas ABC joonisel 252

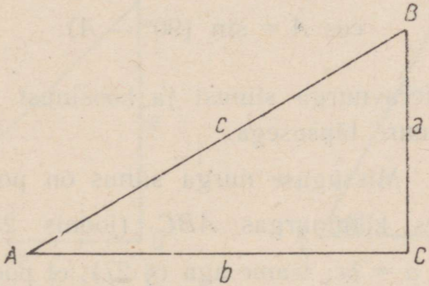
$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}. \tag{26}$$

Teravnurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse selle nurga koosinuseks.

Sõna «koosinus» tähistatakse «cos».

Kolmnurgas ABC joonisel 252

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}.$$



Joonis 252. Nurga siinus ja koosinus.

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}.$$

Nurga siinuse ja koosinuse väärtus ei sõltu täisnurkse kolmnurga mõõteist, kui teravnurga suurus ei muutu.

Seda tõestatakse samuti nagu tangensi ja kootangensi vastavaid omadusi (§ 95).

Igale teravnurgale vastab täiesti kindel siinus ja koosinus. Siinuse ja koosinuse väärtused ei saa olla ühest suuremad, sest et kaatetid on hüpotenuusist alati väiksemad. Igale (ühest väiksemale) siinusele või koosinusele vastab täiesti kindel nurk.

Suurusi sin A, cos A, tan A, cot A nimetatakse t r i g o n o m e e t r i l i s t e k s s u u r u s t e k s ehk t r i g o n o m e e t r i l i s t e k s f u n k t s i o o n i d e k s.

Siinuse või koosinuse definitsioonist järeldub, et täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga siinus võrdub teise teravnurga koosinusega. Et täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa on 90°, siis kehtib iga teravnurga A puhul võrdus:

$$\sin A = \cos (90° - A),$$

ja

$$\cos A = \sin (90° - A).$$

Mistahes teravnurga siinust ja koosinust võib arvutada ükskõik kui suure täpsusega.

N ä i d e 1. Missuguse nurga siinus on pool?

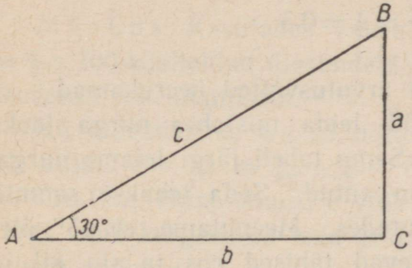
Täisnurkses kolmnurgas ABC (joonis 253) $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$. Siis $a = \frac{1}{2}c$; teame aga (§ 27), et poole hüpotenuusiga võrduv kaatet asetseb 30° nurga vastas. Saime, et otsitav nurk on 30°.

N ä i d e 2. Missuguse nurga koosinus on pool?

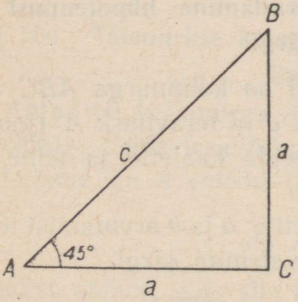
Joonisest 253 näeme, et kui $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, siis nurk B, mille koosinuseks on $\frac{a}{c}$, võrdub $90° - 30° = 60°$.

N ä i d e 3. Leida sin 45° ja cos 45°.

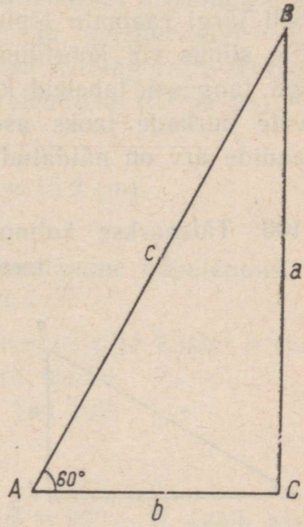
Täisnurkne kolmnurk ABC (joonis 254), milles $\angle A = 45°$, on võrdhaarne: $AC = BC = a$. Võtame AB pikkusühikuks. Siis $c = 1$ ja Püthagoras'e teoreemi järgi $2a^2 = 1$, s. t. $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Tähendab, $\sin 45° = a : c = \sqrt{\frac{1}{2}} : 1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx$ $\approx 0{,}71$. Samuti leiame, et $\cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$.



Joonis 253. Siinus nurgast 30° on $\frac{1}{2}$.



Joonis 254. $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Joonis 255. $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

N ä i d e 4. Leida sin 60° ja cos 60°.

Kui täisnurkse kolmnurga ABC (joonis 255) nurk A on 60°, siis nurk B on 30°, nii et $b = \frac{1}{2}c$.

Kui võtame b pikkusühikuks, saame $b = 1$, $c = 2$ ja Püthagoras'e teoreemi järgi $(c^2 = a^2 + b^2)$ leiame $a^2 = 3$, s. t. $a = \sqrt{3}$.

Siinuse ja koosinuse definitsiooni järgi

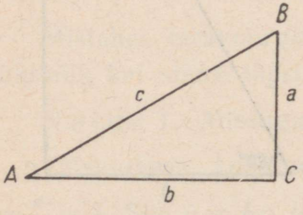
$$\sin 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87,$$

$$\cos 60^\circ = \frac{b}{c} = \tfrac{1}{2} = 0{,}5.$$

Teiste nurkade jaoks on arvutusvõtted keerukamad.

Siinuse ja koosinuse võib leida mistahes nurga jaoks tabeli järgi raamatu lõpus. Sama tabeli järgi leiame nurga, mille siinus või koosinus on antud. Seda tehakse samuti, nagu tangensi tabeleid kasutades. Meenutame, et 45° ületavate nurkade jaoks asetsevad tähised cos ja sin all ja kraadide arv on näidatud paremal pool.

§ 103. Täisnurkse kolmnurga lahendamine hüpotenuusi ja teravnurga järgi.



Joonis 256. Ülesanne: on antud hüpotenuus c ja nurk A. Lahendada see kolmnurk, s. t. leida a, b ja $\angle B$.

Antud on kolmnurga ABC hüpotenuus c ja teravnurk A (joonis 256). Leida kaatetid ja teine teravnurk.

Kaatetite a ja b arvutamist teostatakse valemite järgi

$$a = c \sin A, \tag{27}$$

$$b = c \cos A, \tag{28}$$

mis järelduvad valemist (26) § 102; neid valemeid (27 ja 28) sõnastatakse järgmiselt:

Kaatet võrdub hüpotenuusi ja oma vastasnurga siinuse või lähisnurga koosinuse korrutisega.

$\angle B$ määratakse valemi järgi $\angle B = 90^\circ - \angle A$.

Näide. Antud: $c = 4{,}5$ cm, $\angle A = 42^\circ$.

Valemite (27 ja 28) järgi leiame:

$$a = 4{,}5 \cdot \sin 42° \approx 4{,}5 \cdot 0{,}67 \approx 3{,}01 \ (\text{cm}),$$
$$b = 4{,}5 \cdot \cos 42° = 4{,}5 \cdot 0{,}74 \approx 3{,}33 \ (\text{cm}),$$
$$\angle B = 90° - 42° = 48°.$$

Märkus. Kasutades valemeid (27 ja 28), võib §-s 97 ja §-s 100 käsiteldud ülesandeid lahendada ilma Püthagoras'e teoreemi rakendamiseta.

Nii lahendasime §-s 97 näites täisnurkse kolmnurga, kui oli antud $b = 12$ m ja $\angle B = 50°$, ja leidsime $\angle A = 40°$; $a = 10{,}1$ m. Hüpotenuusi c võib leida Püthagoras'e teoreemi järgi, kuid kergem on teda leida valemitest (27 ja 28). Nii annab valem (27)

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{10{,}1}{\sin 40°} = \frac{10{,}1}{0{,}64} \approx 15{,}8 \ (\text{m}).$$

§ 104. Täisnurkse kolmnurga lahendamine hüpotenuusi ja kaateti järgi.

Antud on kolmnurga ABC hüpotenuus c ja kaatet a (joonis 256). Leida teravnurgad ja teine kaatet.

Leiame $\sin A$ valemi (26) järgi §-st 102:

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Tabelist otsime $\angle A$; siis leiame $\angle B = 90° - A$ (võib alata nurga B leidmisega valemi järgi: $\cos B = \frac{a}{c}$).

Kaateti b võib leida Püthagoras'e teoreemi järgi, kuid kergemini saame ta leida, kasutades valemit

$$b = c \cos A.$$

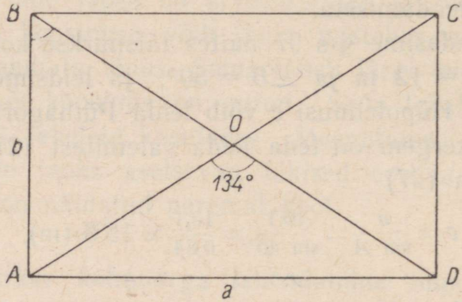
Näide. On antud: $c = 70$ mm, $a = 53$ mm.

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{53}{70} \approx 0{,}76,$$
$$\angle A = 50°, \ \angle B = 90° - 50° = 40°,$$
$$b = c \cdot \cos A = 70 \cdot 0{,}64 \approx 45 \ (\text{mm}).$$

§ 105. Näiteid geomeetriast ja tehnikast.

Ristküliku diagonaal $d = 122$ cm. Nurk diagonaalide vahel on 134°. Leida ristküliku külgede pikkused.

Vaatleme täisnurkset kolmnurka ABD (joonis 257). Ristküliku $ABCD$ küljed a ja b on tema kaatetiteks. Hüpotenuus $BD = d = 122$ cm.



Joonis 257. Leida ristküliku külgede pikkused tema diagonaalide ja nende vahel asetseva nurga järgi.

Kolmnurk AOD on võrdhaarne, sest et diagonaalid AC ja BD on võrdsed (§ 43) ja poolitavad teineteist. Leiame $\angle BDA$:

$$\angle BDA = \frac{180° - 134°}{2} = \frac{46°}{2} = 23°.$$

Edasi saame:

$$b = d \sin 23° = 122 \cdot 0{,}391 \approx 47{,}7 \text{ (cm)}.$$
$$a = d \cos 23° = 122 \cdot 0{,}921 \approx 112{,}4 \text{ (cm)}.$$

2. Leida korrapärase sissejoonestatud 12-nurga perimeeter ja pindala, kui ringi raadius $R = 11$ cm.

Täisnurksest kolmnurgast AOC (joonis 258) leiame:

$$\tfrac{1}{2} a_{12} = AC = OA \sin \frac{360°}{24} = R \sin 15°,$$

kust

$$a_{12} = 2R \sin 15° = 2 \cdot 11 \cdot 0{,}2588 \approx 5{,}694 \text{ (cm)}.$$
$$(2_p)_{12} = 12 a_{12} = 68{,}3 \text{ (cm)}.$$

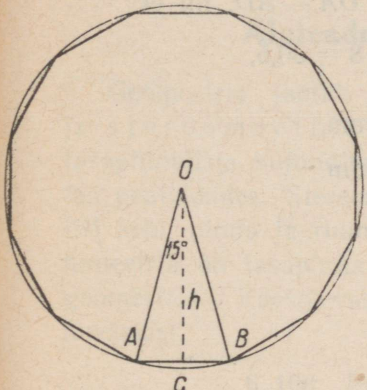
Leiame apoteemi

$$h = OC = R\cos 15^\circ = 11 \cdot 0{,}9659 \approx 10{,}62 \text{ (cm)}.$$

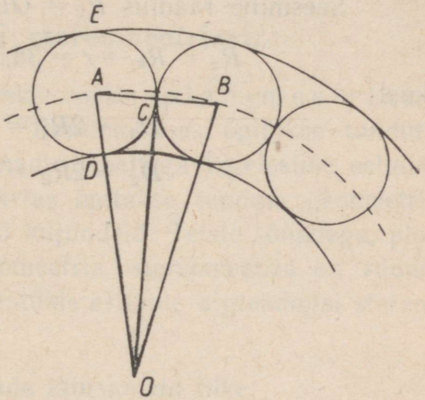
Kolmnurga AOB pindala $S = \frac{1}{2}a_{12}h$; järelikult

$$S_{12} = 12S = 12 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a_{12}h = \tfrac{1}{2}\,(2p)_{12}h = \tfrac{1}{2} \cdot 68{,}3 \cdot 10{,}6 \approx 362 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3. Arvutada kuullaagri võru seesmine ja välimine diameeter, kui laagril on 15 kuuli diameetriga $d = 16$ mm (joonis 259). Vaheruume ei tule arvestada.



Joonis 258. Leida raadiuse R järgi selle hulknurga perimeeter ja pindala.



Joonis 259. Kuullaagri võru läbilõige.

Joonisel 259 kujutab punkt O kuullaagri keskpunkti. Sirglõigud OA ja OB moodustavad nurga $\frac{360^0}{15} = 24^\circ$. C on kuulide puutepunkt. Ta asetseb keskjoonel AB ja poolitab selle (§ 68).

Sirglõik OC tükeldab võrdhaarse $\triangle AOB$ kaheks kongruentseks täisnurkseks kolmnurgaks AOC ja COB. Kolmnurgast AOC on teada kaatet $AC = r = \frac{d}{2} = 8$ mm ja selle kaateti vastas asetsev teravnurk $AOC = \frac{24^0}{2} = 12^\circ$. Hüpotenuus OA

on võru keskmine raadius R_k. Selle leiame (vt. märkust §-s 103) valemi järgi

$$R_k = \frac{AC}{\sin 12^\circ} = \frac{8}{0{,}2079} \approx 38{,}5 \text{ (mm)}.$$

Välimise raadiuse $R_1 = OE$ saame, kui liidame $R_k = AO$ ja $r = AE$.

$$R_1 = R_k + r = 38{,}5 + 8 = 46{,}5.$$

Seesmine raadius $R_2 = OD = OA - AD$, nii et

$$R_2 = R_k - r = 38{,}5 - 8 = 30{,}5,$$

kust

$$D_1 = 2R_1 = 93 \text{ mm},$$
$$D_2 = 2R_2 = 61 \text{ mm}.$$

VIII peatükk.

Algteadmisi stereomeetriast.

Geomeetria jaotub kaheks osaks: planimeetriaks ja stereomeetriaks. Planimeetrias õpitakse tundma tasapinnaliste kujundite omadusi; sellega tegelesime eelmistes peatükkides. Stereomeetrias õpitakse tundma geomeetrilisi kehi, pindu ja ruumilisi kujundeid. Teiste sõnadega, planimeetria on tasapinna geomeetria, stereomeetria on ruumi geomeetria. Käesolevas peatükis esitame algteadmisi stereomeetriast.

§ 106. Pindade tähtsamaid liike.

Planimeetrias on lihtsaimaks jooneks sirgjoon. Vastavalt sellele on stereomeetrias lihtsaimaks pinnaks tasapind.

Et kontrollida, kas tasane pind on hästi tehtud, toimitakse tegelikult järgmiselt: asetatakse hästikontrollitud joonlaud servaga vastu pinda. Kui joonlaud igas kohas ja igas sihis hoidub täielikult vastu pinda, siis on see pind tasapind; leidub sellel pinnal ebatasasusi, siis esinevad mõnedes asendites joonlaua ja pinna vahel pilud.

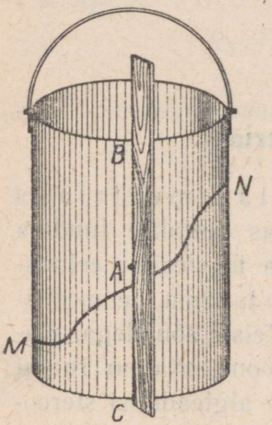
See kontrollimisvõte põhineb tasapinna järgmisel eriomadusel:

iga sirgjoon, millel on tasapinnaga kaks ühist punkti, asetseb tervenisti sellel tasapinnal.

Kõigist pindadest on ainult tasapinnal see omadus.

Näide 1. Laua pinnale asetatud joonlaud hoidub kõigis asendites laua ligi. Laua pind on tasapind.

Näide 2. Vertikaalselt vastu pange külgpinda asetatud joonlaud (joonis 260) hoidub hästi vastu seda pinda. Siiski ei ole pange külgpind tasapind, sest kaldasendis ei saa joonlaud ühtida välispinnaga.



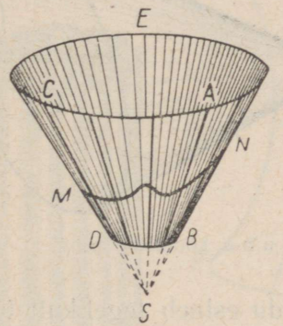
Joonis 260. Pange külgpind on joonpind ja silindriline pind. BC — moodustaja, MN — juhtjoon.

Läbi mistahes punkti A saab pange pinnal tõmmata sirgjoone BC. Pange kõverpinna võib saada selle sirgjoone liikumisel. Niisugust pinda, mille võib moodustada liikuv sirgjoon, nimetatakse joonpinnaks, kuna sirgjoont, mis oma liikumisega selle pinna tekitab, nimetatakse sirgjooneliseks moodustajaks ehk lihtsalt moodustajaks. Joont, mida mööda moodustaja liigub, nimetatakse juhtjooneks. Nii võib pange kõvera joonpinna juhtjooneks olla tema ülemist äärt või põhja ümbritsev ringjoon, samuti pange pinnale tõmmatud mistahes joon MN (joonis 260).

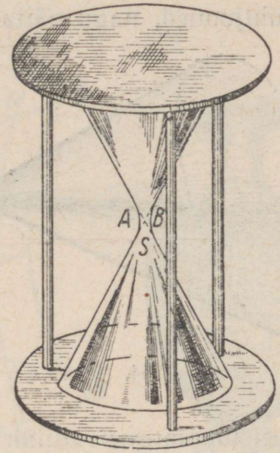
Näide 3. Lehtri pind (joonis 261) on joonpind; sirged AB, CD jne. on tema sirgjoonelised moodustajad. Ringjoon ACE on juhtjoon. Joon MN on ka juhtjoon.

Joonisel 260 kujutatud pange kõverpinna kõik sirgjoonelised moodustajad on paralleelsed. Joonpinda, mille kõik moodustajad on paralleelsed, nimetatakse silindriliseks.

Kõik lehtri pinna moodustajad läbivad (pikendamisel) punkti S. Joonpinda, mille kõik moodustajad läbivad ühe punkti, nimetatakse k o o n i l i s e k s. Punkti, mida läbivad kõik koonilise pinna moodustajad, nimetatakse tema t i p u k s. Et sirgjoont võib pikendada mõlemale poole, siis võib kooniline pind jätkuda ka teisele poole tippu. Näiteks võib tuua liivakella kõverpinna (joonis 262). Kui mitte arvestada tema

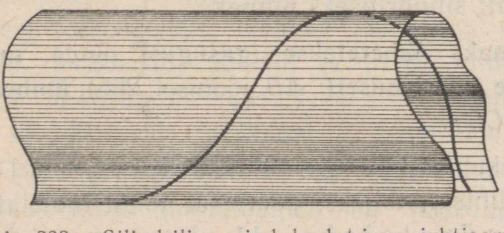


Joonis 261. Lehtri pind on j o o n - p i n d ja k o o n i l i n e p i n d. *AB*, *CD* on m o o d u s t a j a d, *MN* on j u h t j o o n, *S* on t i p p.



Joonis 262. Liivakellal on k o o n i l i n e p i n d; *S* on t i p p, mis jaotab pinna kaheks k a t t e k s.

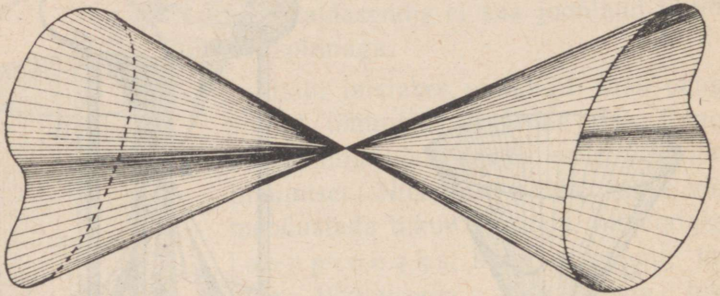
seda osa, mis asetseb kitsa avause *AB* kohal, siis sel pinnal on kooniline kuju. Liivakella koonilise pinna tipuks on kaela moodustava ringjoone keskpunkt *S*. Koonilise pinna



Joonis 263. Silindriline pind l a h t i s e juhtjoonega.

kaht osa, milleks tipp ta jaotab, nimetatakse tema k a t e t e k s.

Silindrilistel ja koonilistel pindadel võib niisugune ümmargune kuju puududa, nagu seda nägime pangel, lehtril ja liivakellal (vt. joonised 263 ja 264). Võivad ka puududa kinnised juhtjooned, nagu näitab joonis 263.



Joonis 264. M i t t e ü m m a r g u n e kooniline pind.

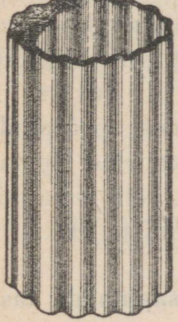
Mitteümmargusi silindrilisi pindu esineb tegelikult tehnikas, kuigi harvemini kui ümmargusi. Nii on radiaatoritorul (joonis 265) silindriline, kuid mitteümmargune pind. Jalgratta tagaratta vabajooksu puksirullidel on samuti silindriline, kuid mitteümmargune pind.

Kuid enamalt jaolt on tegelikult esinevad silindrilised ja koonilised pinnad ümarpinnad ehk, nagu öeldakse geomeetrias, p ö ö r p i n n a d. Seepärast nimetatakse koonilist pöörpinda sageli lihtsalt kooniliseks pinnaks ning silindrilist pöörpinda lihtsalt silindriliseks pinnaks.

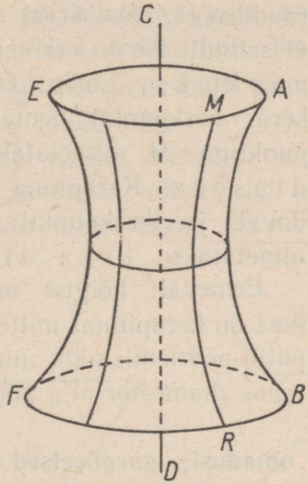
Pöörpinnaks nimetatakse igasugust pinda, mille saame mingi joone pöörlemisel(*AB* joonisel 266) **ümber liikumatu sirgjoone** (*CD*).

Seda liikumatut sirget nimetatakse p ö ö r l e m i s t e l j e k s ehk lihtsalt teljeks; pöörlevat joont nimetatakse pöörpinna m o o d u s t a j a k s ehk tema m e r i d i a a n i k s.

Moodustaja kõik punktid joonestavad telje ümber pöörlemisel ringjooned (näiteks joonisel 266 punkt A joonestab ringjoone EMA, punkt B ringjoone FRB). Neid ringjooni nimetatakse pöörpinna p a r a l l e e l i d e k s. Silindrilisel ja koonilisel pöörpinnal on meridiaanideks sirgjooned.



Joonis 265. R a d i a a t o r i t o r u l on silindriline, kuid mitteümmargune pind.

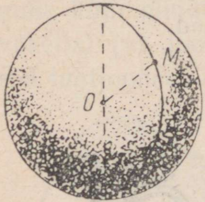


Joonis 266. P ö ö r p i n d. AB on moodustaja (ehk m e r i d i a a n), CD on p ö ö r l e m i s t e l g, EMA ja FRB on p a r a l l e e l i d.

Joonis 267. Vaasi pind on pöörpind (kui mitte arvestada käepidemeid).

Kõik treipingil treitud kõverpinnad on pöörpinnad. Igapäevastest tarbeasjadest omavad pöörpinna tassid, kannud, vaasid, teeklaasid, pudelid ja paljud muud esemed. Joonisel 267 on kujutatud vaas. Tema pinnaks on (kui mitte arvestada käepidemeid) pöörpind. Tema mustri jooned suunduvad tema pinna meridiaane mööda.

Pöörpinda, mille meridiaaniks on poolringjoon ning teljeks selle poolringjoone diameeter, nimetatakse k e r ap i n n a k s ehk s f ä ä r i l i s e k s p i n n a k s (joonis 268). Kerapinnaga piiratud keha nimetatakse k e r a k s.



Joonis 268. K e r a on s f ä ä r i l i s e p i n n a g a piiratud keha. *O* on kera k e s k p u n k t, *OM* on tema r a a - d i u s.

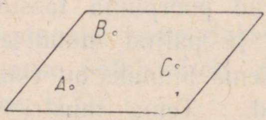
Pöörleva poolringjoone keskpunkt *O* (joonisel 268) asetseb kerapinnast ühel ja samal kaugusel, mis võrdub poolringjoone raadiusega. Seepärast nimetatakse punkti *O* samuti k e r a (või kerapinna) k e s k - p u n k t i k s. Lõiku *OM*, mis ühendab kera keskpunkti tema pinna mistahes punktiga *M*, nimetatakse k e r a r a a - d i u s e k s. Kerapinna kaht punkti ühendavat ja keskpunkti läbivat sirglõiku nimetatakse k e r a d i a m e e t r i k s.

Erinevalt kõigist muudest pöörpindadest on kerapinnal mitte üks, vaid lõpmata palju pöörlemistelgi; nimelt võib tema mistahes diameeter olla pöörlemisteljeks.

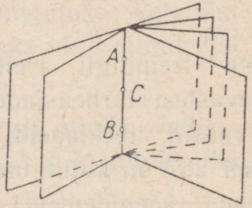
§ 107. Tasapinna omadusi; paralleelsed tasapinnad; tasapind ja sirgjoon.

Peale tasapinna eriomaduse (§ 106) mainime tema järgmisi omadusi.

Läbi mistahes kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti saab kujutada ainult ühe tasapinna (joonis 269).



Joonis 269. Läbi mistahes kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti saab kujutada ainult ühe tasapinna.



Joonis 270. Läbi kolme ühel sirgel asetseva punkti saab kujutada l õ p m a t a p a l j u tasapindu (tasapindade k i m b u).

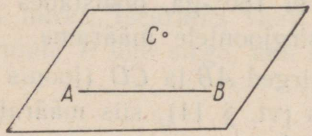
Läbi kolme ühel sirgel asetseva punkti A, B ja C saab kujutada lõpmata palju tasapindu, mis moodustavad tasapindade kimbu (joonis 270).

Sirget ACB, mida läbivad kõik kimbu tasapinnad, nimetatakse kimbu teljeks.

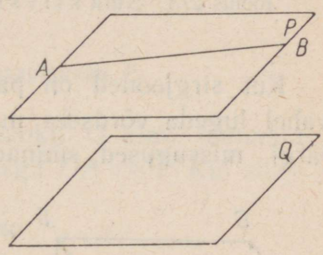
Läbi sirgjoone ja väljaspool teda asetseva punkti saab alati kujutada tasapinna, kuid ainult ühe (joonis 271).

Läbi kahe sirgjoone pole alati võimalik kujutada tasapinda (vt. § 14 ja joonis 54).

Kaks tasapinda võivad lõikuda, nende lõikejooneks on sirgjoon. Kaks tasapinda võivad ka mitte lõikuda; mittelõikuvaid tasapindu nimetatakse paralleelseiks.



Joonis 271. Läbi sirgjoone ja väljaspool teda asetseva punkti saab alati kujutada tasapinna, kuid ainult ühe.



Joonis 272. Paralleelsed tasapinnad.

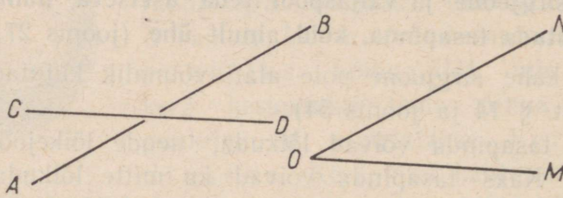
Konservikarbi põhi ja kaas, metallraha ees- ja tagakülg, veepind klaasis ja vaagnas võivad esineda paralleelsete tasapindade näidetena.

Tasapind ja temal mitteasetsev sirgjoon võivad lõikuda (ainult ühes punktis) või mitte lõikuda; mittelõikuvat tasapinda ja sirgjoont nimetatakse paralleelseks.

On selge, et kui sirgjoon AB asetseb tasapinnaga Q paralleelsel tasapinnal P (joonis 272), siis sirgjoon AB ja tasapind Q on paralleelsed.

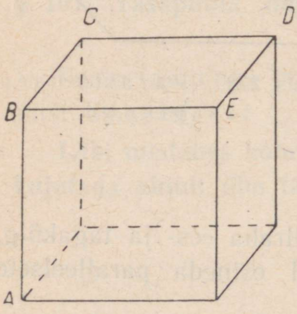
§ 108. Nurk kahe sirge vahel.

Kui kaks sirgjoont lõikuvad, siis võib läbi nende kujutada tasapinna; nurka ühel tasapinnal asetsevate sirgete vahel oskame aga juba mõõta.



Joonis 273. Nurk kiivsirgete AB ja CD vahel on $\angle NOM$.

Kui sirgjooned on paralleelsed, siis võib nurka nende vahel lugeda võrdseks nulliga või 180°-ga, otsustades selle järgi, missugused suunad me sirgjoontele määrame.



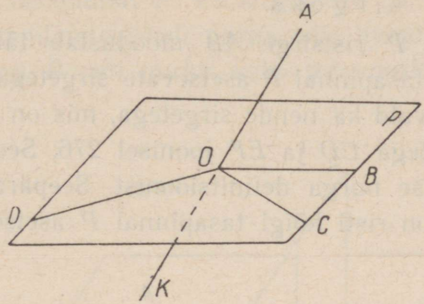
Joonis 274. Nurk sirgete CD ja AB vahel on 90°.

Kui sirged AB ja CD (joonis 273) on kiivas (vt. § 14), siis määratakse nendevahelist nurka järgmiselt: läbi ruumi mistahes punkti O tõmmatakse sirged $ON \parallel AB$ ja $OM \parallel CD$. Nurk AB ja CD vahel loetakse võrdseks nurgaga NOM. Teiste sõnadega, sirged AB ja CD kantakse uude asendisse paralleelselt iseendaga kuni lõikumiseni teineteisega. Erijuhul võib punkti O võtta ühel sirgeist AB või CD, mis siis jääb liikumatuks.

Näide. Vaatleme kuubi pinnal (joonis 274) sirgeid AB ja CD; need sirged on kiivad; nurk nende vahel võrdub nurgaga sirge AB ja sirge $BE \parallel CD$ vahel, s. t. 90°.

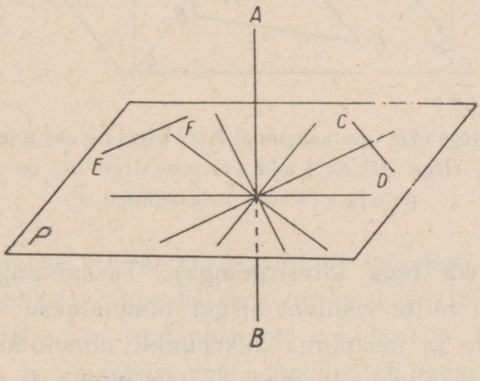
§ 109. Ristsirge ja kaldsirged.

Sirgjoon *AK*, mis lõikub tasapinnaga *P* punktis *O* (joonis 275), võib moodustada tasapinnale joonestatud mistahes sirgetega, näiteks sirgetega *OB*, *OC*, *OD* mitmesuguse suu-



Joonis 275. *AK* on k a l d u tasapinnaga *P*.

rusega nurki. Iseäranis saab läbi punkti *O* alati tõmmata tasapinnale *P* ühe sirge, mis on sirgega *OA* risti. Kui sirge



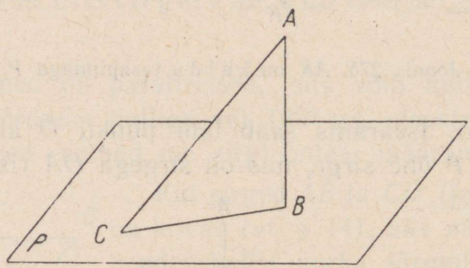
Joonis 276. *AB* on r i s t i tasapinnaga *P*.

OA on risti kahe sirgega tasapinnal *P*, mis läbivad punkti *O*, siis on ta risti kõigi muude tasapinnal *P* asetsevate sirgetega.

Kontrollida seda katsetega. Tõestuse võib leida täielikumates õpikutes.

Sirgjoont *AB* (joonis 276), mis moodustab kõikide sirgetega tasapinnal *P* täisnurgad, nimetatakse tasapinnaga *P* r i s t u v a k s s i r g e k s.

Tasapinna *P* ristsirge *AB* moodustab täisnurgad mitte ainult nende tasapinnal *P* asetsevate sirgetega, mis lõikuvad sirgega *AB*, vaid ka nende sirgetega, mis on temaga kiivas, näiteks sirgetega *CD* ja *EF* joonisel 276. See järgneb kiivsirgete vahelise nurga definitsioonist. Seepärast võib öelda, et sirge *AB* on risti kõigi tasapinnal *P* asetsevate sirgetega



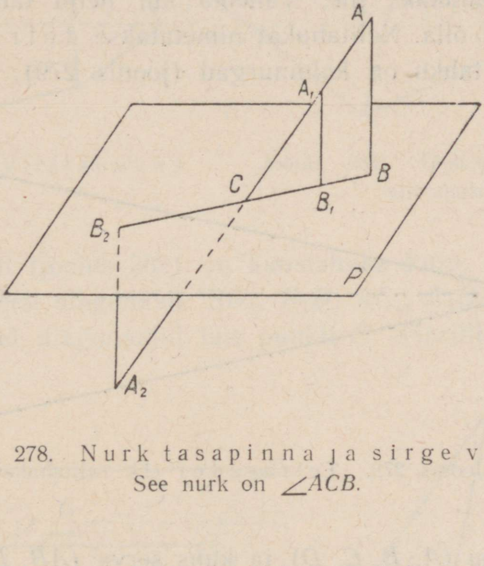
Joonis 277. Sirge *AB* on tasapinna *P* r i s t s i r g e; punkt *B* on selle ristsirge j ä l g, sirge *AC* on k a l d s i r g e, sirge *BC* on selle kaldsirge p r o j e k t s i o o n tasapinnal *P*.

(sealhulgas ka oma kiivsirgetega). Tasapinnaga lõikuvat, kuid temaga mitte ristuvat sirget nimetatakse k a l d s i r g e k s. Sirge ja tasapinna lõikepunkti nimetatakse ristsirge või kaldsirge jäljeks. Joonisel 277 on punkt *B* ristsirge *AB* jäljeks; punkt *C* on kaldjoone *AC* jäljeks.

Sirget *BC*, mis läbib ristsirge ja kaldsirge jälgi, nimetatakse kaldsirge *AC* p r o j e k t s i o o n i k s ehk k u j u t i s e k s tasapinnal *P*.

§ 110. Nurk sirgjoone ja tasapinna vahel.

Nurgaks tasapinna P ja kaldsirge AC vahel (joonis 278) nimetatakse nurka, mille moodustavad sirge AC ja tema projektsioon BC tasapinnal P. Et sirged AC ja BC moodustavad nende pikendamisel neli nurka, siis moodustab ka sirge AC tasapinnaga P neli nurka, kaks teravnurka (võrdset) ja



Joonis 278. Nurk tasapinna ja sirge vahel.
See nurk on $\angle ACB$.

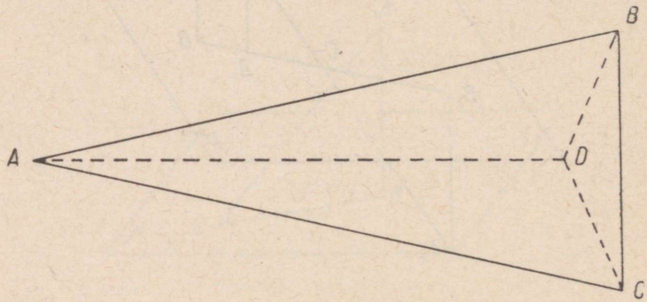
kaks nürinurka (võrdset). Harilikult loetakse sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks teravnurka ($\angle ACB$ või $\angle B_2CA_2$ joonisel 278). See teravnurk on väiksem kõigist teistest nurkadest, mis kaldsirge AC moodustab tasapinna P sirgetega.

Nurgaks tasapinna P ja tema ristsirge AB vahel (joonis 276) nimetatakse nurka sirge AB ja tasapinna P mistahes sirge vahel, s. t. täisnurka.

§ 111. Hulktahukas.

Keha, mille pind koosneb hulknurkadest, nimetatakse h u l k t a h u k a k s ehk p o l ü e e d r i k s. Hulktahukat piiravaid hulknurki nimetatakse h u l k t a h u k a t a h k u d e k s, nende hulknurkade külgi h u l k t a h u k a s e r v a d e k s ja tippe h u l k t a h u k a t i p p u d e k s.

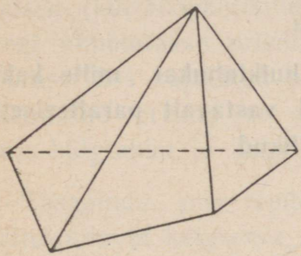
Tahkude arvu järgi nimetatakse hulktahukat nelitahukaks, viistahukaks jne. Vähema kui nelja tahuga ei saa hulktahukat olla. Nelitahukat nimetatakse t e t r a e e d r i k s. Tema neli tahku on kolmnurgad (joonis 279). Nelitahukal



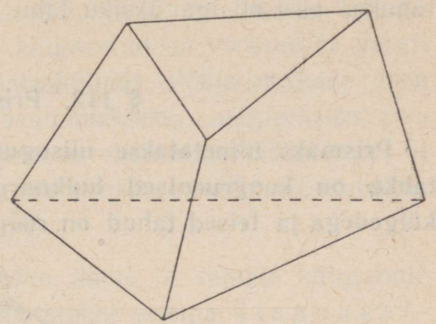
Joonis 279. T e t r a e e d e r ehk nelitahukas.

on neli tippu (*A*, *B*, *C*, *D*) ja kuus serva (*AB*, *BC*, *AC*, *AD*, *BD*, *CD*). Hulktahuka tippude, servade ja tahkude arvud ei ole võrdsed. Viistahukal joonisel 280 on viis tippu, kaheksa serva ja viis tahku, kuid viistahukal joonisel 281 on kuus tippu, üheksa serva ja viis tahku. Külgede arvud ühe hulktahuka mitmesugustel tahkudel pole võrdsed. Viistahukal joonisel 280 on neli kolmnurkset ja üks nelinurkne tahk ja viistahukal joonisel 281 kaks kolmnurkset ja kolm nelinurkset tahku.

Hulktahuka kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu ühendavat sirglõiku nimetatakse tema diagonaaliks.

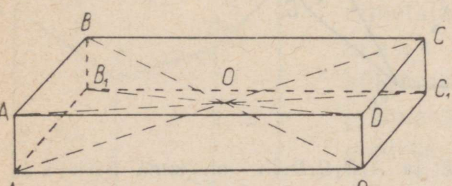


Joonis 280. Viistahukas.

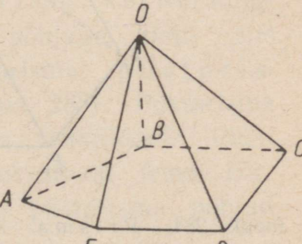


Joonis 281. Teistsuguse kujuga viistahukas.

Telliskivil (joonis 282) on kuustahuka kuju; sellel kuustahukal on neli diagonaali: BD_1, B_1D, AC_1, A_1C. Käesoleval juhul läbivad diagonaalid ühe punkti O. Harilikult seda ei



Joonis 282. Kuustahukas. BD_1, B_1D, AC_1, A_1C on tema diagonaalid.



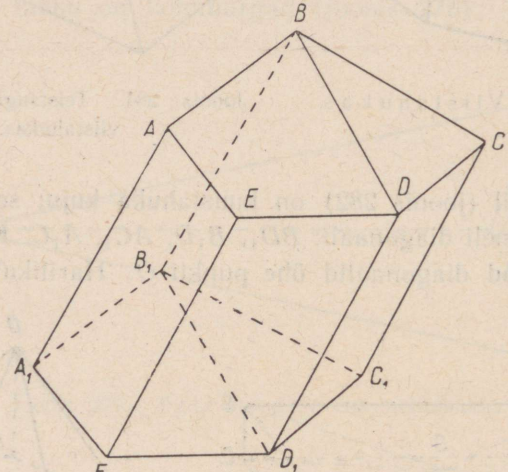
Joonis 283. Sellel kuustahukal ei ole diagonaale.

toimu. Joonisel 283 kujutatud kuustahukal $OABCDE$ ei ole üldse diagonaale. Diagonaale ei ole ka hulktahukail joonistel 280 ja 281.

Hulktahukat nimetatakse kumeraks, kui kõik tema tahud on kumerad hulknurgad ja diagonaalid (kui nad on olemas) asetsevad tervenisti hulktahuka sees. Kumer hulktahukas asetseb iga üksiku tahu tasapinnast ühel pool.

§ 112. Prisma.

Prismaks nimetatakse niisugust hulktahukat, mille kaks tahku on kongruentsed hulknurgad vastavalt paralleelsete külgedega ja teised tahud on rööpkülikud.

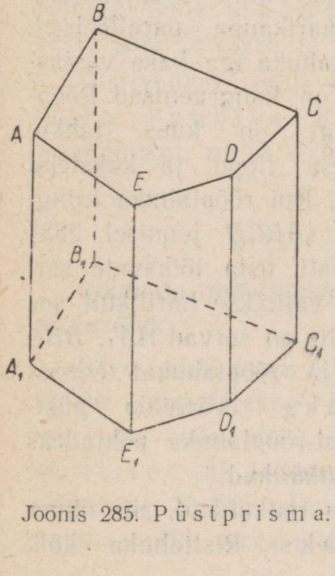


Joonis 284. Prisma. $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ on tema põhjad; AA_1B_1B, BB_1C_1C jne. on külgtahud; AA_1, BB_1 jne. on külgservad; BDD_1B_1 on diagonaaltasapind. Sellel joonisel on kujutatud kaldprisma.

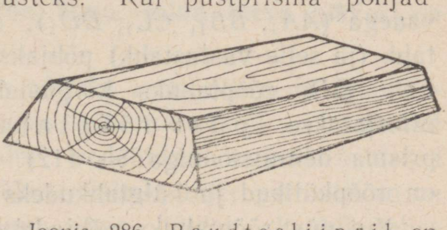
Kongruentseid hulknurki vastavalt paralleelsete külgedega ($ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ joonis 284) nimetatakse prisma põhjadeks. Põhjade tasapinnad on teineteisega paralleelsed. Kaugust nende vahel (ristsirget mööda) nimetatakse prisma k õ r g u s e k s. Rööpkülikuid AA_1B_1B, BB_1C_1C jne. nimetatakse prisma k ü l g t a h k u d e k s; põhjade vastavaid tippe ühendavaid servi (AA_1, BB_1 jne.) nimetatakse k ü l g s e r v a d e k s. Kõik prisma külgservad on võrdsed ja paralleelsed (kui rööpkülikute vastasküljed). Põhja nurkade arvu järgi nimetatakse prismat kolmnurkseks, nelinurkseks jne. Joonisel 284 kujutatud prisma on viisnurkne. Täheldame, et viisnurkne prisma ei ole viistahukas, vaid seitsetahukas (viis külgtahku ja kaks põhja).

Tasapinda, mis läbib kahte ühele ja samale külgtahule mittekuuluvat külgserva, nimetatakse prisma d i a g o n a a l t a s a p i n n a k s. Joonisel 284 on kujutatud diagonaaltasapind BDD_1B_1. On ilmne, et prismal võib olla sama palju diagonaaltasapindu, kui palju diagonaale on tema põhjaks oleval hulknurgal.

Kui prisma külgservad on põhjade suhtes kaldu, siis nimetatakse teda k a l d p r i s m a k s. Kui külgservad on põhjaga risti, siis nimetatakse prismat p ü s t p r i s m a k s (joonis 285). Püstprisma külgtahud on ristkülikud. Püstprisma külgservad on tema kõrgusteks. Kui püstprisma põhjad



Joonis 285. P ü s t p r i s m a.



Joonis 286. R a u d t e e l i i p r i l on nelinurkse püstprisma kuju.

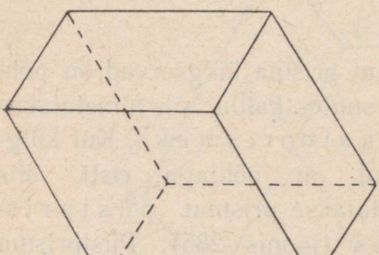
on korrapärased hulknurgad, siis nimetatakse prismat **korrapäraseks**. Korrapärase prisma külgtahkudeks olevad ristkülikud on pindvõrdsed.

Näiteid. Poldi peal on nelinurkse, kuusnurkse, mõnikord ka kaheksanurkse korrapärase prisma kuju. Raudteeliipril on nelinurkse püstprisma kuju (joonis 286).

Pinda, mille moodustavad prisma külgtahud, nimetatakse **prismapinnaks**.

§ 113. Rööptahukas.

Prismat, mille põhjadeks on rööpkülikud, nimetatakse **rööptahukaks** ehk **parallelepipeediks** (joonis 287). Rööptahuka kõik tahud on rööpkülikud; rööptahuka mistahes tahu võib võtta tema põhjaks.

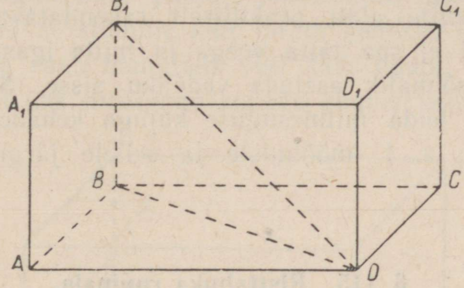


Joonis 287. Rööptahukas.

Rööptahukat võib defineerida ka kui niisugust kuustahukat, mille vastastahud on paarikaupa paralleelsed. Rööptahuka iga kaks vastastahku on kongruentsed. Rööptahukal on kuus tahku, kaheksa tippu ja kaksteist serva. Kui rööptahuka mingi tahk ($ABCD$ joonisel 288) on risti teda lõikavate servadega (AA_1, BB_1, CC_1, DD_1), siis valitakse harilikult see tahk (ja selle vastastahk) põhjaks. Siis on servad AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 rööptahuka kõrgusteks ja rööptahukat ennast nimetatakse **püst-rööptahukaks** (võrrelda püstprisma definitsiooniga §-s 112). Püst-rööptahuka põhjadeks on rööpkülikud ja külgtahkudeks ristkülikud.

Kui püst-rööptahuka põhjadeks on ristkülikud, siis nimetatakse rööptahukat **risttahukaks**. Risttahuka kõik külgtahud on ristkülikud, nii et võttes põhjaks mistahes tahu, jääb see rööptahukas ikkagi risttahukaks.

Telliskividel, kastidel, karpidel, taladel, laudadel, kiviplaatidel jm. on enamasti risttahuka kuju. Rööptahuka teised kujud esinevad harva.



Joonis 288. P ü s t - r ö ö p t a h u k a s.

Risttahuka kolme ühest tipust väljuvat serva nimetatakse tema m õ õ d e t e k s; ühe neist võib võtta pikkuseks, teise laiuseks ja kolmanda kõrguseks.

Risttahukat, mille kõik kolm mõõdet on võrdsed, nimetatakse k u u b i k s. Kuubiks võib nimetada ka niisugust rööptahukat, mille kõik tahud on ruudud.

§ 114. Ruumalade mõõtmine.

Ruumala mõõtühikuks on kuup, mille serva pikkus on pikkusühik.

Olgu kuubi serva pikkus näiteks 1 cm, siis seda ruumalaühikut nimetatakse k u u p s e n t i m e e t r i k s. Lühidalt märgime seda cm^3. «1 dm^3 vedelikku» asemel öeldakse «1 l i i t e r ehk 1 l vedelikku». Näiteks liiter petrooleumi on niisugune hulk petrooleumi, mis täidab kuubikujulise anuma, mille serva pikkus on 1 dm.

Õõnsa keha ruumala mõõtmiseks võib valada sellesse kehasse vedelikku liitrise anumaga või mingisuguse teise mõõtriistaga. Tahke keha ruumala mõõtmiseks võime lasta selle keha üleni vedeliku sisse, mis täidab mingisugust anumat ääreni. Väljavoolav vedelik kogutakse varem varutud mõõtriistasse ja määratakse tema ruumala. Need võtted pole siiski mitte alati praktiliselt rakendatavad. Puukasti või eluruumi ei saa täita veega ja mitte igasugust tahket keha pole võimalik asetada vedeliku sisse. Seepärast on tähtis osata leida mitmesuguse kujuga kehade ruumalasid kaudsel teel, s. t. mõõtmiste ja sellele järgnevate arvutuste abil.

§ 115. Risttahuka ruumala.

Risttahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

See tähendab, et risttahuka ruumalas sisalduvate ruumalaühikute arv võrdub põhjas sisalduvate pindalaühikute arvu ja kõrguses sisalduvate pikkusühikute arvu korrutisega.

Näide. Leida kasti ruumala, mille pikkus on 4 dm, laius 2 dm ja kõrgus 3 dm.

Selle kasti põhja pindala on $4 \cdot 2\ dm^2 = 8\ dm^2$. Korrutades arvu 8, mis väljendab põhja pindala ruutdetsimeetreis, arvuga 3, mis väljendab kõrgust detsimeetreis, saame arvu 24, mis väljendab ruumala kuupdetsimeetreis:

$$8 \cdot 3 = 24\ (dm^3).$$

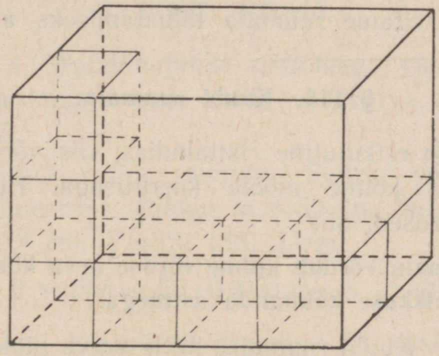
Nagu nähtub sellest näitest, võib risttahuka ruumala määramise reeglit sõnastada veel järgmiselt:

risttahuka ruumala võrdub tema kolme mõõte korrutisega.

Tõepoolest:

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Toodud reegleid võib tuletada nii. Olgu kasti pikkus 4 dm, laius 2 dm ja kõrgus 3 dm, nagu oli ka eelmises näites. Siis võib kasti põhja jaotada $4 \cdot 2 = 8$ ruuduks, mille külje pikkus on 1 dm (joonis 289). Võtame 24 kuupi, mille iga serva pikkus võrdub 1 dm, ja hakkame neid paigutama meie kasti. Igale kasti põhjale joonestatud ruudule paigutub üks kuup, nii et alumine kiht täitub kaheksa kuubiga. Iga kuubi kohale saab mahutada veel kaks kuupi; joonisel 289 on kujutatud üks niisugune kolmest kuubist koosnev sammas.



Joonis 289. Selle risttahuka r u u m a l a on $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ (dm^3).

Kaheksa niisugust sammast täidavad kasti, nii et kokku paigutub kasti $8 \cdot 3 = 24$ kuupi serva pikkusega 1 dm. Tähendab, kasti ruumala on 24 dm^3. Seda arutlust võib rakendada mistahes täisarvude puhul.

Kui pikkus, laius või kõrgus ei ole antud pikkusühiku täiskordsed, siis võib võtta väiksema pikkusühiku. Näiteks, kui kasti pikkus on 4,2 dm, laius 2,5 dm ja kõrgus 3,4 dm, siis võib pikkusühikuks võtta sentimeetri. Siis väljenduvad kasti kolm mõõdet arvudega 42, 25 ja 34. Kasti ruumala on siis $42 \cdot 25 \cdot 34 \text{ cm}^3 = 35\,700 \text{ cm}^3$, s. t. 35,7 dm^3

(ühes kuupdetsimeetris on $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ kuupsentimeetrit). Arvu 35,7 oleksime saanud ka arvude $4{,}2 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}4$ korrutamisel.

Kui tähistame risttahuka pikkuse tähega a, laiuse tähega b, kõrguse tähega h, põhjapindala tähega S_p, risttahuka ruumala tähega V, siis võib tuletatud reegleid esitada järgmiste valemitega:

$$V = S_p h, \tag{29}$$

$$V = abh. \tag{30}$$

Edaspidi tarvitame ruumala tähistamiseks alati tähte V.

§ 116. Kuubi ruumala.

Et kuup on erikujuline risttahukas, siis võrdub ka kuubi ruumala tema kolme mõõte korrutisega. Et kuubi kõik servad on võrdsed, siis

kuubi ruumala võrdub kolme võrdse arvu korrutisega, s. t. kuubi serva pikkuse kolmanda astmega.

N ä i d e 1. Kuubi ruumala, mille serva pikkus on 20 cm, võrdub $20 \cdot 20 \cdot 20\ cm^3 = 8000\ cm^3$.

Sel põhjusel nimetatakse kolme üksteisega võrdse teguri a korrutamist selle arvu a «kuupi tõstmiseks», arvu aga, mis selle korrutamise tulemusena saadakse, arvu a «kuubiks». Nii on arvu 4 kuupitõstmise tulemuseks 64, teisiti öeldes, arv 64 on arvu 4 kuup.

Tähistades kuubi ruumala tähega V, tema serva pikkust aga tähega a, saame valemi

$$V = a^3. \tag{31}$$

Kui kuubi serva suurendada 2 k o r d a, siis suureneb kuubi ruumala $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ k o r d a. Täpselt samuti, kui serva suurendada 3 k o r d a, siis suureneb ruumala

$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ korda. Üldse, kui serva suurendada või vähendada k korda, siis suureneb või väheneb ruumala $k \cdot k \cdot k$ ehk k^3 korda.

Näide 2. Kui kuubi serva pikkus on 10 cm, siis tema ruumala võrdub $10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$. Suurendame serva kaks korda. Siis suureneb korrutise $10 \cdot 10 \cdot 10$ iga tegur kaks korda, tähendab, korrutis peab suurenema 8 korda. Tõepoolest, serva pikkuseks saab siis 20 cm, ruumalaks aga $20 \cdot 20 \cdot 20 \text{ cm}^3 = 8000 \text{ cm}^3$.

§ 117. Näiteid.

Näide 1. Ruudukujulise ristlõikega vaskvarva pikkus on 50 cm ja laius 4 mm. Leida vaskvarva kaal, kui vase erikaal on 8,9.

Leiame algul varva ruumala. Selleks väljendame kõik mõõted sentimeetreis. Pikkus $a = 50$ cm, laius $b = 0{,}4$ cm, kõrgus $h = 0{,}4$ cm. Valemi (30) järgi

$$V = abh = 50 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 8 \ (\text{cm}^3).$$

Niipalju vett kaaluks 8 grammi. Et vask on veest 8,9 korda raskem, siis kaalub vaskvarb

$$8 \cdot 8{,}9 = 71{,}2 \ (\text{g}).$$

Näide 2. Kasti maht peab olema $0{,}9 \text{ m}^3$. Kasti pikkus peab võrduma 1,20 m, laius aga 80 cm. Missugune peab olema kõrgus?

Kasti põhja pindala võrdub

$$S_p = 1{,}20 \cdot 0{,}8 \text{ m}^2 = 0{,}960 \text{ m}^2.$$

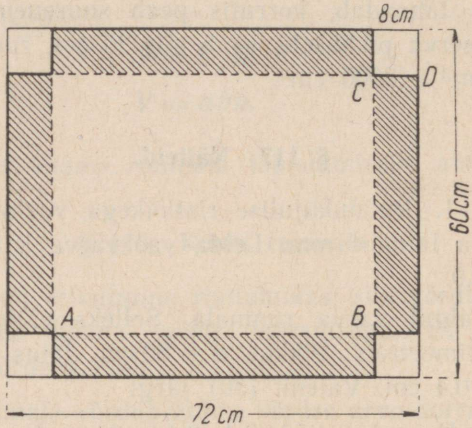
Valemi (30) põhjal

$$0{,}9 = 0{,}960 \cdot h;$$

kust leiame, et

$$h = 0{,}9 : 0{,}960 \text{ m} \approx 0{,}94 \text{ m} = 94 \text{ cm}.$$

N ä i d e 3. Kartongilehe pikkus on 72 cm, laius 60 cm (joonis 290). Nurkadest on välja lõigatud neli ruutu külje pikkusega 8 cm. Neli ristkülikut (joonisel 290 viirutatud) painutatakse üles ja me saame lahtise karbi. Leida selle karbi ruumala.



Joonis 290. Ü l e s a n n e: Leida sellest kartongitükist valmistatud lahtise karbi ruumala.

Karbi pikkuseks on lõik AB, mis võrdub

$$72 - 2 \cdot 8 = 56 \text{ (cm)}.$$

Karbi laiuseks on lõik BC, mis võrdub

$$60 - 2 \cdot 8 = 44 \text{ (cm)}.$$

Karbi kõrguseks on lõik CD, mis võrdub 8 cm. Valemi (30) põhjal

$$V = a \cdot b \cdot h = 56 \cdot 34 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 15\,232 \text{ cm}^3 \approx 15{,}2 \text{ dm}^3.$$

§ 118. Risttahuka pindala.

Tähistame risttahuka kolm mõõdet tähtedega a, b, c (joonis 291), tema täispindala, s. t. tema kõikide tahkude pindalad kokku tähega S_t, mille leidmiseks kasutame valemit

$$S_t = 2\,(ab + ac + bc) \qquad (32)$$

Näide. Leiame kasti täispindala, kui kasti pikkus $a = 4$ dm, laius $b = 2$ dm ja kõrgus $c = 3$ dm.

Valem (32) annab

$$S_t = 2(4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3)\ \text{dm}^2 = 52\ \text{dm}^2.$$

Seda valemit võib tuletada järgmiselt. Kasti kaane pindala on

$$a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8\ (\text{dm}^2).$$

Eesmise külje pindala on

$$a \cdot c = 4 \cdot 3 = 12\ (\text{dm}^2).$$

Parempoolse külje pindala on

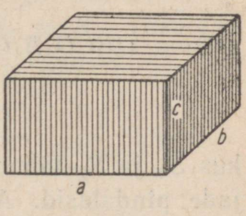
$$b \cdot c = 2 \cdot 3 = 6\ (\text{dm}^2).$$

Nende kolme tahu pindalad kokku annavad

$$ab + ac + bc = 8 + 12 + 6 = 26\ (\text{dm}^2).$$

Kuid kasti kuue tahu pindala S_t on kaks korda suurem, sest et põhja pindala võrdub kaane pindalaga 8 dm^2, tagumise külje pindala on 12 dm^2, nagu eesmise külje oma, ja vasakpoolse külje pindala on 6 dm^2, nagu parempoolse külje pindala. Seepärast

$$S_t = 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot 26\ \text{dm}^2 = 52\ \text{dm}^2.$$



Joonis 291. Risttahuka täispindala: $S_t = 2\ (ab + ac + bc)$.

§ 119. Püstprisma ruumala ja pindala.

Püstprisma ruumala arvutamise juhise leidmiseks vaatleme esmalt püstprismat, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk. Niisugust prismat saab temaga kongruentse prismaga täiendada risttahukaks. Selle risttahuka ruumala on põhja pindala ja kõrguse korrutis; siit järeldub, et niisuguse prisma ruumala, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk, on pool sellest korrutisest, see korrutis on aga parajasti antud kolmetahulise prisma põhja pindala ja kõrguse korrutis, sest antud prisma põhja pindala on pool saadud risttahuka põhja pindalast. Niisiis, kui püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, siis tema ruumala on põhja pindala ja kõrguse korrutis, s. o.

$$V = S_p \cdot h,$$

kus S_p tähistab põhja pindala ja h kõrgust.

Kui kolmnurkse püstprisma põhjaks ei ole täisnurkne kolmnurk, siis saab selle prisma tükeldada kaheks niisuguseks prismaks, mille põhjad on täisnurksed kolmnurgad ja kõrgus on võrdne antud prisma kõrgusega h. See tükeldamine toimub tasapinnaga, mis läbib üht külgserva ja on ühe külgtahuga risti, nagu näha joonisel 292.

Nüüd on prisma $ADCC_1A_1D_1$ ruumala

$$V_1 = S_1 \cdot h,$$

prisma $DBCD_1B_1C_1$ ruumala on

$$V_2 = S_2 \cdot h,$$

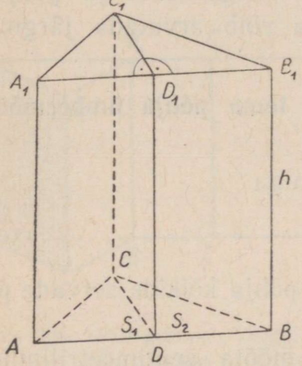
kus S_1 ja S_2 tähendavad tükeldamisel saadud prismade põhjade pindalasid. Antud prisma $ABCA_1B_1C_1$ ruumala V on ruumalade V_1 ja V_2 summa:

$$V = V_1 + V_2 = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h = (S_1 + S_2)h.$$

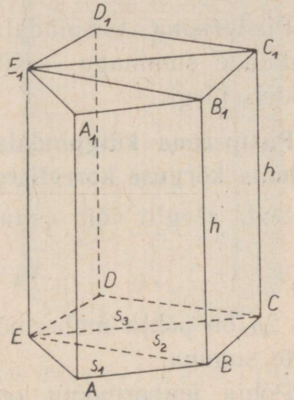
Kuid $S_1 + S_2$ on antud prisma põhja pindala S_p. Seega mistahes kolmnurkse püstprisma ruumala on

$$V = S_p \cdot h.$$

Kui antud prisma põhjaks on hulknurk, näiteks viisnurk, nagu joonisel 293, siis võib selle prisma diagonaaltasapin-



Joonis 292. Tasapind $C\ D\ D_1\ C_1$ tükeldab prisma kaheks prismaks, mille põhjad on täisnurksed kolmnurgad.



Joonis 293. Tasapinnad $E\ B\ B_1E_1$ ja $E\ C\ C_1E_1$ tükeldavad viisnurkse prisma kolmnurkseteks prismadeks.

dadega tükeldada kolmnurkseteks prismadeks, mille kõrgused on võrdsed antud prisma kõrgusega h. Olgu kolmnurksete prismade põhjade pindalad vastavalt S_1, S_2 ja S_3. Tükeldamisel saadud prismade ruumalad on siis järgmised:

$$V_1 = S_1h$$
$$V_2 = S_2h$$
$$V_3 = S_ph.$$

Antud prisma ruumala on seega:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = S_1h + S_2h + S_3 = (S_1 + S_2 + S_3)h,$$

ehk

$$V = S_p h, \tag{29}$$

kus S_p tähistab antud prisma põhja pindala.

Niisiis iga

püstprisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Püstprisma täispindala võrdub külgpindala ja põhjade pindalade summaga. Külgpindala võib arvutada järgmise eeskirja järgi:

Püstprisma külgpindala võrdub tema põhja ümbermõõdu ja tema kõrguse korrutisega.

Seda reeglit võib esitada valemiga

$$S_k = 2ph, \tag{33}$$

kus $2p$ on põhja ümbermõõt, s. t. põhja kõikide servade pikkuste summa.

Põhja ümbermõõtu on sobiv mõõta sentimeetrilindiga, tõmmates selle püstprisma ümber ristlõike suunas.

N ä i d e. Püstprisma põhja (joonis 294) külg $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm ja kõrgus $= 16$ cm. Leida selle püstprisma külgpindala.

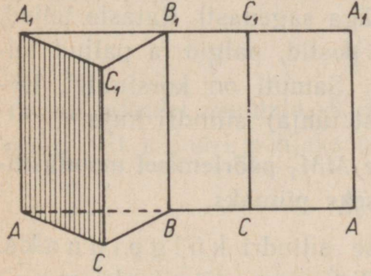
Põhja ümbermõõt

$$2p = a + b + c = 12 + 8 + 7 = 27 \text{ (cm)}.$$

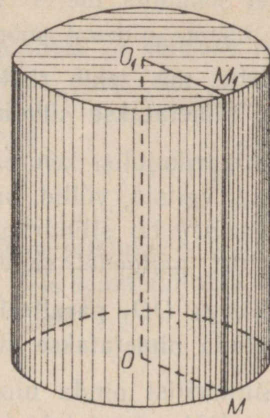
Valemi (33) järgi

$$S_k = 2ph = 27 \cdot 16 = 432 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Seda valemit võib tuletada järgmiselt. Katame püstprisma $ABCA_1B_1C_1$ külgtahud paberiga (joonis 294). Kui nüüd laotada see paber tasapinnale, siis saame ristküliku, mille alus koosneb külgedest $a = 12$ cm, $b = 8$ cm ja $c = 7$ cm, nii et selle ristküliku pikkus võrdub püstprisma põhja ümbermõõduga $2p = a + b + c = 27$ cm. Ristküliku AA_1 kõrgus aga võrdub püstprisma kõrgusega $h = 16$ cm. Et püstprisma külgpindala võrdub selle ristküliku pindalaga, siis $S_k = 27 \cdot 16\ cm^3 = 432\ cm^3$.



Joonis 294. Püstprisma külgpindala: $S_k = 2ph$.



Joonis 295. S i l i n d e r; OO_1 on silindri telg.

Et leida püstprisma täispindala, selleks liidame külgpindalaga kahe põhja pindalad. Järelikult

$$S_t = S_k + 2S_p.$$

Kasutades valemit (33), saame, et

$$S_t = 2ph + 2S_p. \qquad (34)$$

§ 120. Pöörkehad. Silinder.

Keha, mis tekib mingi tasapinnalise kujundi pöörlemisel ümber paigalseisva sirgjoone, nimetatakse pöörkehaks ehk ümarkehaks.

Paigalseisvat sirget nimetatakse p ö ö r l e m i s t e l j e k s.

Lõikame kartongist või plekist ristküliku OO_1M_1M (joonis 295), kinnitame selle telje OO_1 külge ja paneme ta selle telje ümber kiiresti pöörlema. Meie silm hoiab nägemismuljet kinni ligikaudu $\frac{1}{16}$ sekundit. Seega kui ristkülik teeb 15—20 pööret sekundis, me ei eralda enam tema üksikuid asendeid, vaid näeme pidevat pöörkeha.

Keha, mis tekib ristküliku pöörlemisel ümber ühe oma külje, nimetatakse silindriks.

Silindrikujulisi kehi esineb väga sagedasti. Rataste teljed, vardad, valtsid, võllid, sambad, postid, palgid ja paljud teised esemed on silindrikujulised. Samuti on korstnatel, teeklaasidel, pangedel, sageli (seest tühja) silindri kuju.

Teljega OO_1 paralleelse sirge MM_1 pöörlemisel moodustuvat pinda nimetatakse silindriliseks pinnaks.

Silindrilist pinda nimetatakse silindri küljpinnaks. Sirget MM_1 nimetatakse silindrilise pinna või silindri moodustajaks. Telge OO_1 nimetatakse silindri teljeks.

Pöörleva ristküliku alused OM ja O_1M_1 kujundavad ringid. Neid ringe nimetatakse silindri põhjadeks. Silindri põhjad on kongruentsed; nad on teineteisega rööbiti ja silindri teljega risti. Silindri iga ristlõige on ring ja kongruentne tema põhjaga. Silindri põhja raadiust (ja diameetrit) nimetatakse samuti silindri raadiuseks (ja diameetriks). Ristlõiku silindri põhja tasapindade vahel nimetatakse silindri kõrguseks. Silindri kõrgus on võrdne tema moodustaja pikkusega.

§ 121. Silindri ruumala.

Silindri ruumala valemi saamiseks võrdleme silindri ruumala niisuguse püstprisma ruumalaga, millel on sama suure pindalaga põhi ja sama suur kõrgus, nagu silindril. Põhjade pindvõrdsuse selgitame arvutamise teel. Võtame silindri ja prisma mudelid pealt lahti ja täidame ühe neist liivaga või viljateradega. Valame siis terad teise mudelisse — näeme, et ruumalad on võrdsed, seepärast silindri ruumala arvutatakse sama eeskirja järgi, nagu püstprisma ruumalagi. Nimelt:

silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Seda reeglit võib esitada valemiga

$$V = S_p h \tag{29}$$

(V on silindri ruumala, S_p tema põhja pindala, h tema kõrgus). Et silindri põhjaks on ring, siis tema pindala

$$S_p = \pi R^2$$

ehk

$$S_p = \tfrac{1}{4}\pi D^2,$$

kus R on silindri raadius ja D silindri diameeter.

Asetades need avaldised valemisse (29), saame silindri ruumala jaoks järgmised valemid:

$$V = \pi R^2 h, \tag{35}$$

$$V = \tfrac{1}{4}\pi D^2 h. \tag{36}$$

Meenutame, et arv π võrdub ligikaudu 3,14.

N ä i d e. 1. Leida silindrikujulise ämbri maht, kui ämbri seesmine diameeter on 20 cm, kõrgus aga 25 cm.

Selles näites $D = 20$ cm, $R = 10$ cm, $h = 25$ cm. Valemi (35) järgi

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h \approx 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 25 \text{ cm}^3 \approx 7850 \text{ cm}^3 \approx 7{,}9 \text{ dm}^3.$$

Pange maht on 7,9 liitrit.

N ä i d e 2. Leida 30 meetri pikkuse vasktraadi kaal, kui traadi diameeter on 1 mm.

Leiame silindri ruumala, mille diameeter $D = 1$ mm $=$ $= 0{,}1$ cm, kõrgus $h = 30$ m $= 3000$ cm. Valemi (36) järgi

$$V = \tfrac{1}{4}\pi D^2 h \approx \tfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 \cdot 3000 \approx 23{,}55 \ (\mathrm{cm}^3).$$

Et vase erikaal on 8,9, siis traat kaalub

$$8{,}9 \cdot 23{,}55 \approx 210{,}6 \ (\mathrm{g}).$$

N ä i d e 3. Kera vasktraati kaalub 2 kg. Traadi diameeter $D = 1{,}5$ mm. Leida traadi pikkus.

Traadi ruumala leidmiseks kuupsentimeetreis tuleb traadi kaal grammides jagada vase erikaaluga. Tähendab, traadi ruumala

$$V = 2000 : 8{,}9 \ \mathrm{cm}^3 \approx 227 \ \mathrm{cm}^3.$$

Asetades väärtused

$$V = 227 \ \mathrm{cm}^3 \text{ ja } D = 0{,}15 \ \mathrm{cm}$$

valemisse (36), saame võrrandi

$$227 = \tfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15^2 \cdot h,$$

millest leiame, et

$$h = \frac{327 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 0{,}15^2} \ \mathrm{cm} \approx 12\,800 \ \mathrm{cm} = 128 \ \mathrm{m}.$$

§ 122. Silindri pindala.

Silindri täispindala moodustavad külgpindala ja kahe põhja pindalad kokku.

Silindri külgpindala võrdub ristküliku pindalaga, mille aluseks on silindri põhja ümbermõõt ja kõrguseks silindri kõrgus,

seepärast võib külgpindala leida järgmiselt:

$$S_k = C \cdot h,$$

kus C on silindri põhja ümbermõõt.

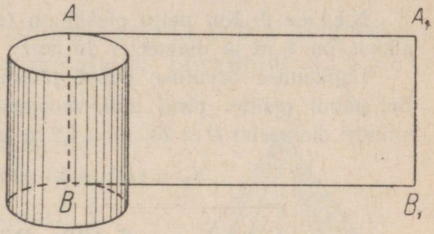
Seda reeglit võib tuletada samuti, nagu seda tegime püstprisma külgpindala puhul (§ 119).

Nimelt, laotame paberilehe, millega silindri külgpind oli kaetud, tasapinnale (joonis 296). Siis saame ristküliku ABB_1A_1. Selle ristküliku alus BB_1 võrdub silindri põhja ümbermõõduga C; selle ristküliku kõrgus AB võrdub silindri kõrgusega. Et ringjoone pikkus

$$C = 2\pi R$$

ehk

$$C = \pi D$$



Joonis 296. Silindri külgpindala: $S_k = Ch$.

(D on ringjoone diameeter, R raadius), siis võime kirjutada järgmised valemid:

$$S_k = \pi D h \tag{37}$$

ehk

$$S_k = 2\pi R h. \tag{38}$$

Silindri täispindala S_t leidmiseks liidame külgpindalaga alumise ja ülemise põhja pindalad:

$$S_t = S_k + 2S_p.$$

Et S_p on ringi pindala, mille raadius on R ja diameeter D, siis

$$S_p = \pi R^2 = \tfrac{1}{4}\pi D^2.$$

Seepärast võime kirjutada valemid

$$S_t = \pi D h + \tfrac{1}{2}\pi D^2 \tag{39}$$

ehk

$$S_t = 2\pi R h + 2\pi R^2. \tag{40}$$

N ä i d e 1. Leida silindri täis- ja külgpindala, kui silindri diameeter on 5 cm ja kõrgus 15 cm. Külgpindala

$$S_k = \pi Dh = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 15 \approx 235 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Põhjapindala

$$S_p = \tfrac{1}{4}\pi D^2 = \tfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \approx 19{,}6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Järelikult täispindala

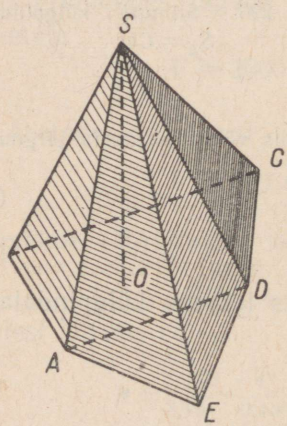
$$S_t = S_k + 2S_p = 235 + 2 \cdot 19{,}6 = 274 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

N ä i d e 2. Kui palju plekki on tarvis korstna valmistamiseks, mille pikkus on 4 m ja diameeter 20 cm?

Ligikaudse arvutuse puhul jätame valtsideks kuluva plekiosa ära. Sel puhul otsitav pleki hulk moodustab silindri külgpindala, kusjuures silindri diameeter $D = 20$ cm $= 0{,}2$ m ja kõrgus $h = 4$ m. Valemi (37) järgi

$$S_k = \pi Dh \approx 3{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 4 \approx 2{,}5 \text{ (m}^2\text{)}.$$

§ 123. Püramiid.



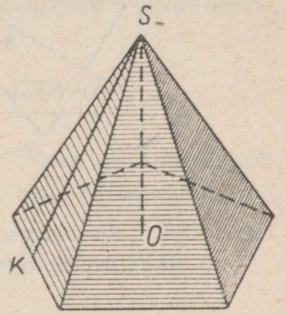
Joonis 297. P ü r a m i i d. *ABCDE* on tema p õ h i; $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ jne. on k ü l g t a h u d; *S* on t i p p; *SA*, *SB* jne. on k ü l g s e r v a d; *SO* on k õ r g u s; *SAD* on d i a g o n a a l t a s a p i n d.

Püramiidiks nimetatakse hulktahukat, mille üks tahk on mingi hulknurk (*ABCDE* joonisel 297), **kõik teised tahud aga on ühise tipuga** (*S*) **kolmnurgad.**

Hulknurka *ABCDE* nimetatakse püramiidi p õ h j a k s; ühise tipuga kolmnurki nimetatakse k ü l g t a h k u d e k s; nende ühist tippu *S* nimetatakse püramiidi t i p u k s. Tippu koonduvaid külgtahkude külgi *SA*, *SB* jne. nimetatakse püramiidi k ü l g s e r v a d e k s. Püramiidi tipust põhja tasapinnale lastud ristlõiku *SO* nimetatakse püramiidi k õ r g u s e k s. Püramiidi tähistatakse harilikult tähtede reaga, alates tipu juurde asetatud tähega. Nii tähistatakse joonisel 297 kujutatud püramiidi *SABCDE*. Püramiide liigitatakse külgtahkude arvu järgi kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne. Joonisel 297 kujutatud püramiid on viisnurkne. Olgu tähendatud, et viisnurkne püramiid ei ole viistahukas, vaid kuustahukas (viis külgtahku ja üks põhi). Kolmnurkne püramiid on nelitahukas (tetraeeder). Tema mistahes tahku võib pidada põhjaks. Püramiidil ei ole diagonaale.

Tasapinda, mis läbib püramiidi tippu ja põhja diagonaali (näiteks *AD* joonisel 297) nimetatakse püramiidi diagonaaltasapinnaks.

Püramiidi nimetatakse korrapäraseks (joonis 298), kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja kõrgus läbib põhja keskpunkti. Korrapärase püramiidi kõik külgservad on võrdsed ja kõik külgtahud on isekeskis kongruentsed võrdhaarsed kolmnurgad. Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust *SK* nimetatakse korrapärase püramiidi apoteemiks. Korrapärase püramiidi kõrgust nimetatakse ka tema teljeks.



Joonis 298. Korrapärane püramiid. *SO* on telg, *SK* on apoteem.

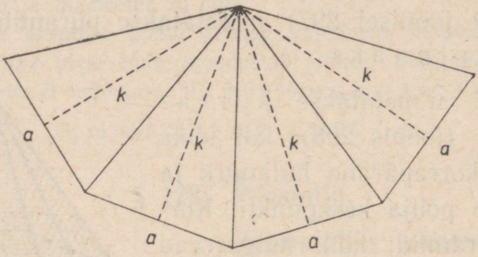
Igasuguse püramiidi ruumala on kolm korda väiksem kui samasuguse põhja ja samasuguse kõrgusega püstprisma ruumala. Tähendab, püramiidi ruumala võrdub ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.

Seda reeglit võib esitada valemiga

$$V = \tfrac{1}{3} S_p h, \qquad (41)$$

(V on püramiidi ruumala, S_p on põhja pindala, h on kõrgus). Selle reegli tuletamine nõuab komplitseeritud arutlusi, kuid seda on kerge kontrollida järgmisel viisil: valmistame kaks plekkanumat, millest ühel on püramiidi kuju, teisel sama põhjaga ja sama kõrgusega püstprisma kuju. Valades esimese anumaga vett teise, veendume, et teise maht on kolm korda suurem.

Püramiidi täispindala koosneb tema põhja- ja külgpindalast. Korrapärase püramiidi külgpindala määramisel võime toimida nii, et arvutame iga külgtahu pindala ja tulemused liidame. Näiteks kui neljatahulise korrapärase püramiidi



Joonis 299. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgpindala on nelja kongruentse võrdhaarse kolmnurga pindalade summa.

põhjaserva pikkus on a cm ja püramiidi apoteem on k cm (joonis 299), siis ühe tahu pindala on $\frac{ak}{2}$ cm². Püramiidi külgpindala S_k on siis cm²-tes:

$$S_k = \frac{ak}{2} + \frac{ak}{2} + \frac{ak}{2} + \frac{ak}{2} = 4 \cdot \frac{ak}{2} = \frac{4\,ak}{2}.$$

Tegur $4a$ väljendab püramiidi põhja ümbermõõtu. Seega siis

korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega.

Seda reeglit võib esitada järgmiselt:

$$S_k = \frac{1}{2} \cdot 2pk = pk,$$

kus $2p$ on põhja ümbermõõt, k aga püramiidi apoteem.

Mitte-korrapärase püramiidi suhtes ei ole see reegel rakendatav. Et leida niisuguse püramiidi külgpindala, tuleb eraldi arvutada kõikide külgtahkude pindalad ja saadused liita.

N ä i d e. Leiame korrapärase viisnurkse püramiidi külgpindala, mille põhja külg $a = 20$ cm ja mille apoteem $k = 30$ cm.

Püramiidi iga külgtahu kui kolmnurga pindala on $\frac{1}{2}ak = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 = 300$ (cm^2). Meie korrapärase püramiidi külgpindala koosneb viie kongruentse külgtahu pindaladest. Seega külgpindala

$$S_k = 5 \cdot \tfrac{1}{2}ak = 5 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 = 1500 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Rakendame nüüd ülaltoodud reeglit. Meie püramiidi põhjaks on viisnurk, mille iga külg on 20 cm. Tähendab, põhja ümbermõõt

$$2p = 5a = 5 \cdot 20 = 100 \text{ (cm)}.$$

Eespool toodud reegli järgi

$$S_k = \tfrac{1}{2} \cdot 2pk = \tfrac{1}{2} \cdot 100 \cdot 30 = 1500 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Nii saime sama resultaadi, mis eelmisegi meetodiga. See on kehtiv ka igasuguse teise korrapärase püramiidi puhul.

Tõepoolest, kui korrapärasel püramiidil on n külgtahku (meie näites $n = 5$), siis, arvutades külgpindala esimese meetodi järgi, leiame, et

$$S_k = n \cdot \tfrac{1}{2}ak = \tfrac{1}{2}nak.$$

Arvutame nüüd külgpindala teise meetodi järgi. Põhja ümbermõõt

$$2p = na;$$

järelikult

$$S_k = \tfrac{1}{2} \cdot 2pk = \tfrac{1}{2}nak.$$

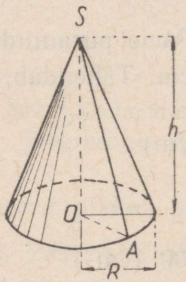
Nii näeme, et mõlemad meetodid annavad alati ühe ja sama tulemuse, nimelt $\frac{1}{2}nak$.

§ 124. Koonus.

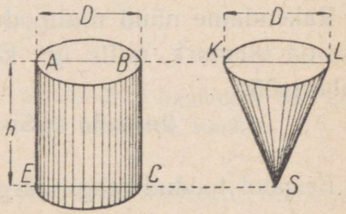
Keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga (*SOA* joonisel 300) **pöörlemisel ümber ühe kaateti** (*SO* joonisel 300), **nimetatakse koonuseks.**

Pinda, mille moodustab sirge *SA* pöörlemisel ümber telje *OS*, nimetatakse koniliseks pinnaks.

Koonilist pinda nimetatakse koonuse külgpinnaks. Sirget *SA* nimetatakse koonilise pinna moodustajaks ehk koonuse moodustajaks. Pöörlemistelge *OS* nimetatakse koonuse teljeks.



Joonis 300. Koonus. *SO* on kõrgus; *S* on tipp.



Joonis 301. Selle purgi ruumala on kolm korda suurem lehtri ruumalast, kuid purgi telglõige on ainult kaks korda suurem lehtri telglõikest.

Pöörleva kolmnurga *SOA* kaatet *OA* kujundab ringi, mida nimetatakse koonuse põhjaks. Paigalseisva kaateti *OS* pikkust h nimetatakse koonuse kõrguseks. Teravnurga paigalseisvat tippu *S* nimetatakse koonuse tipuks. Nurka *ASO* nimetatakse koonilisuse nurgaks. Suhet $R : h$, s. t. põhja raadiuse $R = OA$ suhet kõrgusse $h = OS$, nimetatakse koonilisuseks.

Koonuse lõige, mis asetseb risti teljega, on ring. Selle ringi raadius on võrdeline lõike kaugusega koonuse tipust.

§ 125. Koonuse ruumala.

Koonuse ruumala on kolm korda väiksem kui samasuguse põhja ja samasuguse kõrgusega silindri ruumala.

Joonisel 301 (paremal) kujutatud koonusekujulisel lehtril on kolm korda väiksem ruumala kui samal joonisel (vasakul) kujutatud silindrikujulisel purgil. See tõsiasi on seda tähelepanuväärsem, et lehtri telglõike, s. t. kolmnurga *KSL* pindala on ainult kaks korda väiksem purgi telglõike pindalast, s. t. ristküliku *ABCE* pindalast (kolmnurga *KLS* pindala on $\frac{1}{2}Dh$, kuna ristküliku *ABCE* pindala on Dh).

Nimetatud omaduse kontrollimiseks võib koonusekujulise lehtriga valada vett purki, millel on samasugune põhi ja samasugune kõrgus. Veendume, et purgi maht on kolm korda suurem lehtri mahust.

Et silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega, siis võib koonuse ruumala arvutada valemi järgi

$$V = \frac{1}{3} S_p h, \tag{41}$$

kus S_p on koonuse põhja pindala ja h tema kõrgus. Et

$$S_p = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2,$$

siis võib valemi (41) asemel kirjutada valemid:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h, \tag{42}$$

$$V = \frac{1}{12} \pi D^2 h. \tag{43}$$

Siin D on koonuse põhja diameeter ja R selle põhja raadius.

N ä i d e. Leida koonusekujulise lehtri ruumala, mille kõrgus on 30 cm ja avause diameeter 20 cm. Selles näites $h = 30$ cm, $D = 20$ cm, $R = 10$ cm. Valemi (42) järgi

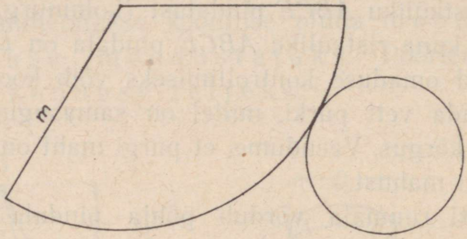
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h \approx \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 30 \text{ cm}^3 \approx 3140 \text{ cm}^3 \approx 3{,}14 \text{ dm}^3.$$

Järelikult on lehtri ruumala 3,14 liitrit.

§ 126. Koonuse pindala.

Koonuse täispindala moodustavad külgpindala ja põhjapindala kokku. Külgpindala arvutamise juhise saamiseks teeme järgmise vaatluse.

Olgu meil mingist ainest tehtud koonus kaetud paberiga ja paberi servad kokku kleebitud. Lõikame nüüd põhja ringjoont mööda ja üht moodustajat mööda kattepaberi lahti.



Joonis 302. Koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadiuseks on koonuse moodustaja ja kaareks on koonuse põhja ümbermõõt.

Selgub, et koonuse pinda saab tasapinnale laotada. Koonuse pinnalaotus esitab ringi ja ühe ringi sektorit, nagu näha joonisel 302. Ring on põhjalaotus. Külgpinnalaotus on niisuguse ringi sektor, mille raadiuseks on koonuse moodustaja. Selle sektori kaareks on koonuse põhja ümbermõõt. Seda, et koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, võiksime juba ette aimata; sest koonuse moodustajad on ju kõik ühepikkused, see tähendab, et koonuse põhjaserva punktid asetsevad koonuse tipust võrdsetel kaugustel, tasapinnal aga asetsevad ühest punktist võrdsetel kaugustel olevad punktid ringjoone kaarel.

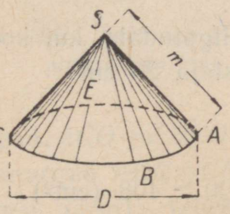
Mida teravam on koonus, seda väiksema nurgaga sektor on tema külgpinnalaotus.

Et koonuse külgpinnalaotus on ringi sektor, mille raadiuseks on koonuse moodustaja ja mille kaare pikkuseks on põhja ümbermõõt, siis arvutame külgpindala, nagu arvutatakse sektori pindala. Et

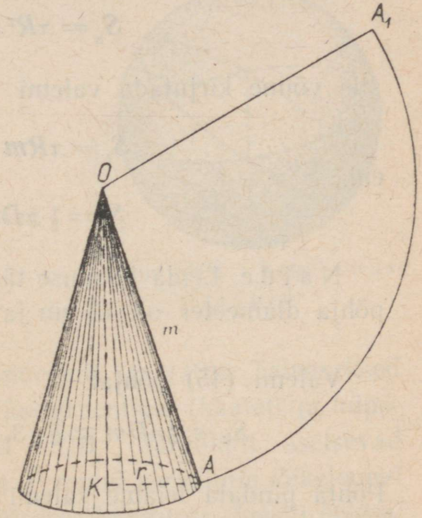
sektori pindala võrdub tema kaare ja raadiuse poole korrutisega,

sellest omakorda järeldub, et

koonuse külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu (*ABCE* joonisel 303) **ja moodustaja pikkuse** (*AS* joonisel 303) **poole korrutisega.**



Joonis 303. Koonuse külgpindala võrdub ringjoone *ABCE* pikkuse ja moodustaja *AS* pikkuse poole korrutisega.



Joonis 304. Koonuse külgpindala valemi $S_k = \frac{1}{2}Cm$ tuletamine.

Kui koonuse moodustajat tähistada tähega m ja põhja ümbermõõtu tähega C, siis võib seda reeglit esitada valemiga

$$S_k = \frac{1}{2} Cm. \tag{44}$$

Et ringjoone pikkus on $2\pi R = \pi D$, siis võib valemi (44) asendada valemiga

$$S_k = \frac{1}{2} \pi Dm \tag{45}$$

ehk

$$S_k = \pi Rm. \tag{46}$$

Koonuse täispindala

$$S_t = S_k + S_p,$$

kus S_p on koonuse põhja pindala.

Et põhja pindala S_p avaldatakse valemiga (21)

$$S_p = \pi R^2 = \tfrac{1}{4} \pi D^2,$$

siis võime kirjutada valemi

$$S_t = \pi Rm + \pi R^2 \tag{47}$$

ehk

$$S_t = \tfrac{1}{2} \pi Dm + \tfrac{1}{4} \pi D^2. \tag{48}$$

N ä i d e. Leida koonuse täis- ja külgpindala, kui koonuse põhja diameeter on 13 cm ja moodustaja 20 cm.

Valemi (45) põhjal

$$S_k = \tfrac{1}{2}\pi Dm \approx \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 13 \cdot 20 \approx 408 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Põhja pindala leiame valemi (21) järgi

$$S_p = \tfrac{1}{4}\pi D^2 \approx \tfrac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 13^2 \approx 133 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Koonuse täispindala

$$S_t = S_k + S_p \approx 408 + 133 \approx 541 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

M ä r k u s. Arvutuse kergenduseks võib valemid (47) ja (48) teisendada ja asendada nad valemitega

$$S_t = \pi R(m + R), \tag{47a}$$

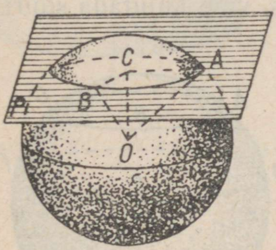
$$S_t = \tfrac{1}{4}\pi D(2m + D). \tag{48a}$$

§ 127. Kera ja tema osad.

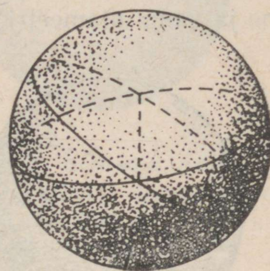
T e o r e e m.

Kera mistahes lõige tasapinnaga P (joonis 305) **on ring; selle ringi keskpunktiks on kera keskpunktist lõikepinnale lastud ristsirge** OC **jälg** C.

Tõepoolest, võtame kerapinna lõikejoonel tasapinnaga P mistahes kaks punkti A ja B ning ühendame nad punktiga C.



Joonis 305. Kera iga lõige tasapinnaga on ring.



Joonis 306. Kera s u u r r i n g i d.

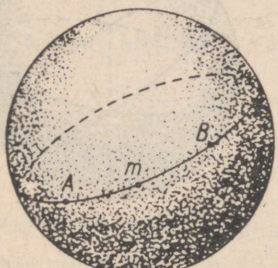
Nurgad ACO ja BCO on täisnurgad (§ 110). Täisnurksed kolmnurgad AOC ja BOC on kongruentsed (kaateti ja hüpotenuusi järgi); tähendab $CA = CB$. Järelikult asetsevad punktid A, B ja kõik tasapinna P muud kerapinna lõikejoonel leiduvad punktid punktist C võrdses kauguses. Teisiti öeldes, lõikejoon on ringjoon.

On selge, et lõikumisega saadava ringi raadius on seda suurem, mida ligemal keskpunktile asetseb tasapind P. Kui tasapind P läbib keskpunkti, moodustub lõikering, mille raadius võrdub kera raadiusega. Niisugust ringi nimetatakse k e r a s u u r r i n g i k s (joonis 306). Ringi, mille pind ei läbi kera keskpunkti, nimetatakse k e r a v ä i k e r i n g i k s. Joonisel 305 lõikab tasapind P kera mööda väikeringi. Suurring poolitab kera; suurringjoon poolitab kerapinna.

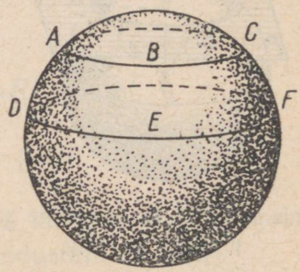
Kaks mistahes suurringi lõikuvad mööda kera üht diameetrit. See diameeter on samuti mõlema lõikuva ringi diameetriks (joonis 306).

Läbi kerapinna kahe punkti, mis on ühe ja sama diameetri otspunktid, võib kujutada arvutu hulga suurringjooni. Nii läbib maakera põhja- ja lõunanaba määratu hulk meridiaane, mis on maakera suurringjoonteks.

Läbi kahe mistahes punkti *A* ja *B* (joonis 307), mis pole ühe ja sama diameetri otspunktideks, võib kujutada suurring-



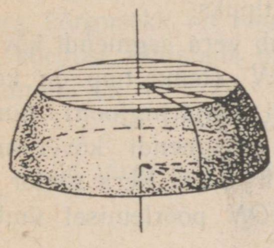
Joonis 307. Suurringjoone kaar *AmB* on kerapinnal lühimaks jooneks, mis ühendab punkte *A* ja *B*.



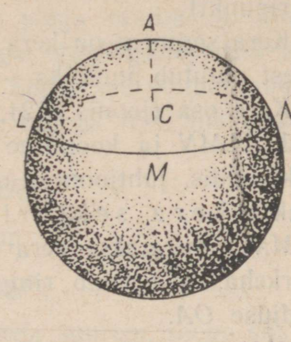
Joonis 308. Kera lõikumine kahe paralleelse tasapinnaga. Nende vahel asetsevat kera osa nimetatakse kera kihiks.

joone, kuid ainult ühe. Selle suurringjoone kaar *AmB*, mis on poolringjoonest väiksem, on kerapinnal lühimaks kauguseks punktide *A* ja *B* vahel, s. t. iga muu joon, mis asetseb kerapinnal ja ühendab punkte *A* ja *B*, on kaarest *AmB* pikem.

Kera osa, mis asetseb kahe paralleelse lõiketasapinna vahel (*ABC* ja *DEF* joonisel 308), nimetatakse kera kihiks. Kera kihi kõverpinda (ehk tema külgpinda) nimetatakse kera vööks. Paralleelseid ringe *AC* ja *DF* nimetatakse kera kihi põhjadeks ning nende ringjooni vöö alusteks. Kaugust kihi põhjade vahel nimetatakse kera kihi (ja vöö) **kõrguseks.** Kera kiht, nagu kera isegi, on pöörkeha (joonis 309).

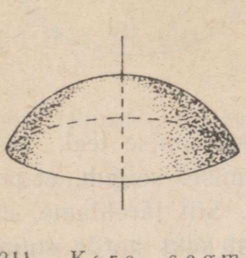


Joonis 309. Kera kiht.

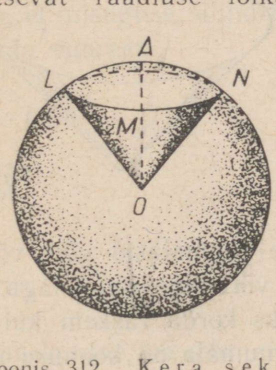


Joonis 310. Kera osa *ALMN* on kera segment. Ring *LMN* on tema põhi, *CA* on kõrgus, *A* on lagipunkt.

Kera osa, mis on eraldatud temast tasapinnaga (*LMN* joonisel 310), (*ALMN*) nimetatakse **kera segmendiks** (joonis 311). Lõikeringi *LMN* nimetatakse kera segmendi **põhjaks.** Põhjaga risti asetsevat raadiuse lõiku *CA*



Joonis 311. Kera segment.



Joonis 312. Kera sektoriks on kera osa, mis koosneb koonusest *OLMN* ja segmendist *ALMN*.

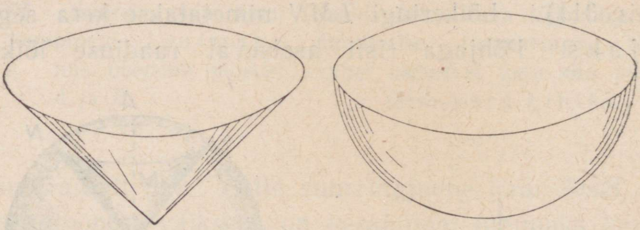
nimetatakse segmendi k õ r g u s e k s; punkti *A*, milles kõrgus lõikub segmendi kõverpinnaga (ehk teisiti öeldes, tema külgpinnaga), nimetatakse segmendi l a g i p u n k t i k s (haripunkt).

Kera segment on kera kihi erandkuju: üks kera kihi põhjadest muutub punktiks — segmendi tipuks.

Kera osa (joonis 312), mida piirab kera segmendi kõverpind *ALMN* ja kooniline pind *OLMN* (tema tipp on kera keskpunktis, juhtjooneks on segmendi põhjaringjoon), nimetatakse k e r a s e k t o r i k s. Kera segmendi kõverpinda *ALMN* nimetatakse kera sektori p õ h j a k s. Kera sektor on pöörkeha, mis tekib ringi sektori *AON* pöörlemisel ümber raadiuse *OA*.

§ 128. Kera ruumala.

Kui meil on puust poolkera ja samast puust koonus, mille põhi on võrdne selle poolkera suurringiga ja kõrgus on võrdne poolkera raadiusega, siis võib nende kehade kohta öelda, et nad on võrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega, kui nimetame poolkera tasapinnalise külje ka põhjaks. Nende



Joonis 313.

kehade ruumalasid võib võrrelda kaalumise teel, sest kaal on ju võrdeline ruumalaga. Kaalumisel selgub, et poolkera on kaks korda raskem kui koonus. Siit järeldame, et poolkera ruumala on koonuse ruumalast kaks korda suurem.

Poolkera ja sama suure põhjaga ning sama kõrge koonuse ruumalasid saab võrrelda ka otsesel teel, kui need kehad on näiteks plekist valmistatud ja kummagi põhi on lahtine, nii et neid võib täita liivaga või mõne muu ainega. Siingi näeme, et poolkera ruumala on koonuse ruumalast kaks korda suurem. Nüüd on koonuse põhja raadius ja kõrgus võrdsed, sest koonus on poolkeraga ühekõrgune, kuid poolkera kõrguseks on tema raadius. Seepärast võime raadiuse ja kõrguse tähistada ühe ja sama tähega R. Siis koonuse ruumala on

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \tfrac{1}{3}\pi R^3.$$

Selle järgi poolkera ruumala on

$$2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi R^3 = \tfrac{2}{3}\pi R^3;$$

kera ruumala on muidugi kaks korda suurem, seega siis

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3, \tag{49}$$

kus R on kera raadius, ehk

$$\boldsymbol{V = \tfrac{1}{6}\pi D^3,} \tag{50}$$

kus D on kera diameeter.

M ä r k u s. Poolkera ruumala võib võrrelda ka niisuguse silindri ruumalaga, mille põhja diameeter ja kõrgus on võrdsed poolkera diameetriga. Selgub, et niisuguse silindri ruumala on poolkera ruumalast 3 korda suurem.

Silindri ruumala on

$$V_s = \pi R^2 \cdot H;$$

et nüüd $H = 2R$, siis

$$V_s = 2\pi R^3.$$

Poolkera ruumala on seega

$$\frac{2\pi R^3}{3}$$

ja kera ruumala, mis on selle kahekordne, on siis

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

N ä i d e 1. Leida kera ruumala, kui kera diameeter on 20 cm. Valemi (49) järgi

$$V = \tfrac{1}{6}\pi D^3 \approx \tfrac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 20^3 \text{ cm}^3 \approx 4186 \text{ cm}^3.$$

Ligikaudse arvutuse puhul võib võtta $\pi = 3$, siis omandab valem (50) lihtsa kuju:

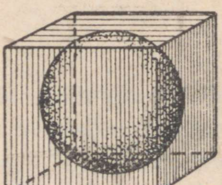
$$V = \tfrac{1}{2}D^3. \tag{50a}$$

Joonisel 314 on kujutatud kuup, mille kõik tahud puutuvad kera. Niisugust kuupi nimetatakse kera ü m b e r j o o n e s t a t u d kuubiks. Ümberjoonestatud kuubi serv on võrdne kera diameetriga D. Seega on ümberjoonestatud kuubi ruumala D^3. Valemist (50a) nähtub, et kera ruumala moodustab ümberjoonestatud kuubi ruumalast ligikaudu poole.

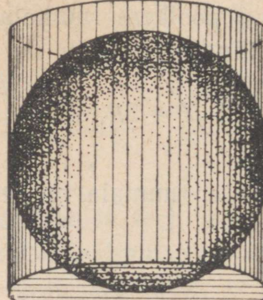
N ä i d e 2. Mitu haavlit, diameetriga 3 mm, võib valmistada 1 kg seatinast (seatina erikaal on 11,3)?

Arvutame ligikaudselt. Loeme ühe haavli ruumalaks $\tfrac{1}{2}D^3 = \tfrac{1}{2} \cdot 3^3 = 13{,}5 \text{ mm}^3$. Siis haavel kaalub $11{,}3 \cdot 13{,}5 \approx$ ≈ 150 mg $= 0{,}15$ g. Järelikult võib 1 kg $= 1000$ g seatinast saada ligikaudu $1000 : 0{,}15 \approx 6700$ haavlit.

Võttes $\pi = 3{,}14$, leiame, et haavlite arv on natuke väiksem (6260).



Joonis 314. Kera ümber joonestatud kuup.



Joonis 315. Kera ü m b e r j o o n e s t a t u d silinder.

N ä i d e 3. Joonisel 315 on kujutatud silinder, mis puudutab kera oma mõlema põhjaga ja külgpinnaga. Niisugust silindrit nimetatakse kera ü m b e r j o o n e s t a t u d silindriks. Ümberjoonestatud silindri diameeter võrdub kera diameetriga. Ümberjoonestatud silindri kõrgus võrdub ka kera diameetriga.

Leiame kera ja tema ümber joonestatud silindri ruumalade suhte.

Ümberjoonestatud silindri ruumala leiame valemi (§ 121) järgi:

$$V_s = \pi R^2 D = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Kera ruumala

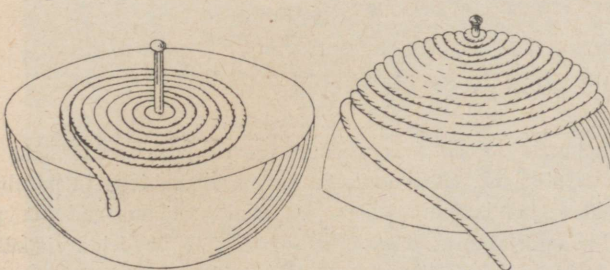
$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Tähendab, suhe $V : V_s = \frac{4}{3} : 2 = 2 : 3$. Näeme, et kera ruumala moodustab täpselt $\frac{2}{3}$ ümberjoonestatud silindri ruumalast.

§ 129. Kera pindala.

Kera pindala valemi leiame kera pindala ja selle suurringi pindala võrdlemise teel.

Kera ja tema suurringi pindalasid võib võrrelda järgmisel viisil. Võtame näiteks puust poolkera.



Joonis 316.

Nüüd hakkame nööriga mähkima kaht pinda: katame nööriga poolkera kumera pinna osa, see tähendab poole kerapinda, siis aga tasase osa, see on, suurringi pinna. Mähkimist teostame nii, et lööme keskele naela, selle naela ümber mähime spiraalselt nööri. Mähkimist peab teostama hoolega, nii et mõlemad pinnad oleksid ühesuguselt tihedalt nööriga kaetud. Kõige sobivam selleks on jäme pesunöör. Nüüd on selge, et see pind, kumb on suurem, vajab katmiseks rohkem nööri, ja nimelt niimitu korda rohkem, kuimitu korda see pindala on teisest suurem. Lühidalt: katmiseks kuluv nööri pikkus on võrdeline kaetava pindalaga. Pindade võrdlemiseks võrdleme nööride pikkusi. Meie katsel selgub (joonis 316), et poole kerapinna katmiseks on tarvis just kaks korda pikem nöör, kui selle kera suurringi katmiseks. Seepärast võime öelda, et poolkera pindala võrdub kahekordse suurringi pindalaga. Sellest järeldame, et

kera pindala võrdub tema suurringi neljakordse pindalaga.

Kui kera raadius on tähistatud tähega R, siis suurringi pindala on πR^2, seega on siis kera pindala $4\pi R^2$. Tähistades kera pindala tähega S, võime kirjutada kera pindala valemi

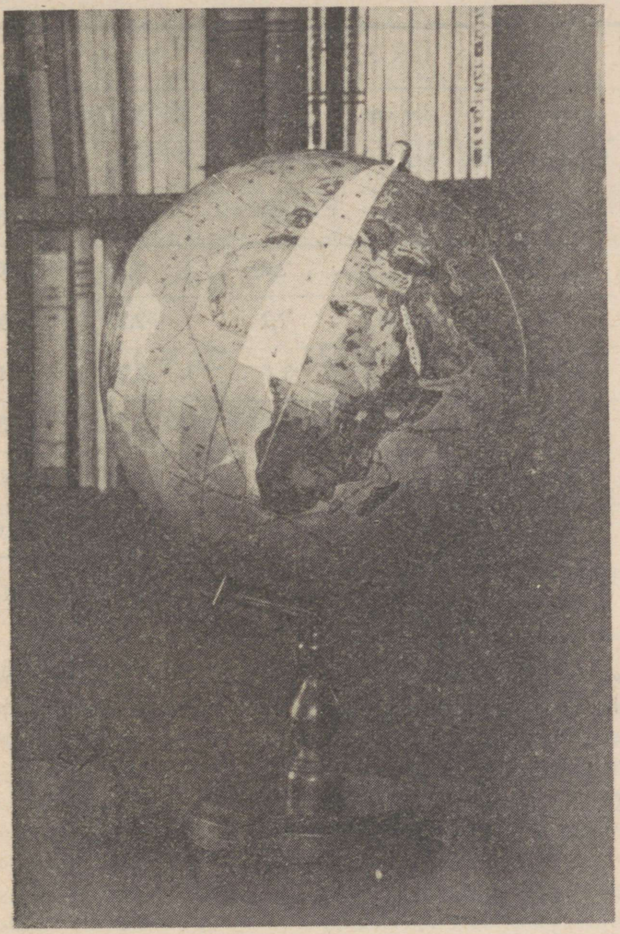
$$S = 4\pi R^2 \qquad (51)$$

ehk

$$S = \pi D^2, \qquad (52)$$

kus D tähendab kera diameetrit.

Kera pindala ja sama kera suurringi pindala võrdlemiseks on hea kasutada ka gloobust. Gloobuse pind on meridiaanidega ja paralleelidega nelinurkadeks ja kolmnurkadeks jaotatud (kolmnurgad on pooluste ümber). Ekvaatori juures olevaid nelinurki võib vaadelda ristkülikutena, teisi nelinurki — trapetsitena (joonis 317). Nende nelinurkade ja kolmnurkade pindalasid arvutades ja tulemusi liites leiamegi gloobuse pindala. See arvutamistöö läheb lihtsamaks, kui paneme tähele, et kahe naabermeridiaani vaheline kerapinna riba, võetud poolusest pooluseni, on $\frac{1}{24}$ gloobuse pindalast. See riba aga koosneb kahest võrdsest poolest, kumbki pool on tükk nimetatud ribast ekvaatorist kuni pooluseni. Nimetatud ribatükk on seega $\frac{1}{48}$ gloobuse pindalast. See ribatükk koosneb 8-st nelinurgast ja ühest kolmnurgast. Kogu arvutamistöö täitmiseks tuleb siis arvutada kaheksa nelinurga ja ühe kolmnurga pindala ja tulemused liita. Saadud summa tuleb siis korrutada 48-ga. Nummerdame need kujundid numbritega 1 kuni 9; tähistame nende alused tähtedega



Joonis 317.

a ja *b* ning kõrguse tähega *h* (kolmnurga numbriks jäägu 9, tema aluse tähiseks *a*. Mõõdame sirkli teravikke kasutades alused ja kõrgused cm-tes ning kanname mõõtmistulemused tabelisse. Pärast arvutame. Kõrguse leidmiseks võib mõõta ekvaatori ja pooluse vahelise meridiaanikaare ja jagada see pikkus 9-ga.

Nr.	Kujund	Alus a	Alus b	Kõrgus h	Pindala S
1	ristkülik	3,4 cm	3,4 cm	2,25 cm	7,65 cm^2
2	trapets	3,4	3,1	2,25	7,31
3	trapets	3,1	2,9	2,25	6,75
4	trapets	2,9	2,6	2,25	6,19
5	trapets	2,6	2,2	2,25	5,40
6	trapets	2,2	1,6	2,25	4,28
7	trapets	1,6	1,1	2,25	3,04
8	trapets	1,1	0,6	2,25	1,91
9	kolmnurk	0,6	—	2,25	0,68
				Kokku	43,3 cm^2

$$43{,}3 \cdot 48 = 2078{,}4 \quad (\mathrm{cm}^2)$$

Seega gloobuse pindala on 2078,4 cm^2. Nüüd arvutame gloobuse suurringi pindala. Selleks arvutuseks vajaliku raadiuse leiame ümbermõõdu mõõtmise teel. Mõõdame selle niidi abil ekvaatorit mööda. Eespool kõne all oleva gloobuse ümbermõõduna leiti 81 cm.

Siit

$$R = \frac{81}{2\pi} \approx 12{,}84 \text{ (cm)}.$$

Nüüd leiame gloobuse suurringi pindala:

$$\pi R^2 \approx 3{,}14 \cdot 12{,}84^2 \approx 520 \quad (\mathrm{cm}^2).$$

Vaatame, mitu korda on kera pindala oma suurringi pindalast suurem:

$$2078{,}4 : 520 = 3{,}99 \approx 4.$$

Sellest vaatlusest näeme, et

kera pindala on oma suurringi pindalast 4 korda suurem.

Seega jõudsime samale tulemusele, nagu eelmisel võrdlemisel.

N ä i d e 1. Leida kera pindala, kui kera diameeter on 12 cm. Valemi (52) järgi

$$S = \pi D^2 = \pi \cdot 12^2 \approx 3,14 \cdot 144 \approx 452 \ (\mathrm{cm}^2).$$

N ä i d e 2. Mitu ruutmeetrit riiet kulub õhupalli kesta valmistamiseks, kui palli diameeter on 10 m ja kui õmbluste arvel tuleb võtta lisaks 5% tarvisminevast riidest?

Õhupalli pindala

$$S = \pi D^2 \approx 3,14 \cdot 10^2 \ \mathrm{m}^2 \approx 314 \ \mathrm{m}^2.$$

Leiame 5% sellest pindalast:

$$0,314 \cdot 0,05 \ \mathrm{m} \approx 16 \ \mathrm{m}.$$

Üldse kulub riiet $314 + 16 = 330$ (m^2).

N ä i d e 3. Leida kera pindala suhe ümberjoonestatud silindri täis- ja külgpindalaga.

Et ümberjoonestatud silindri diameeter võrdub kera diameetriga D ja kõrgus samuti võrdub D-ga, siis silindri külgpindala (§ 122)

$$S_k = \pi D \cdot D = \pi \cdot D^2.$$

Võrdlemine valemiga (52) näitab, et kera pindala on täpselt võrdne ümberjoonestatud silindri külgpindalaga. «Silma järgi» võib näida, et kera pindala on väiksem kui ümberjoonestatud silindri külgpindala. See mulje on ekslik.

Ümberjoonestatud silindri põhi on kongruentne kera suurringiga, nagu nähtub joonisest 315. Et kera pindala on neli korda suurem suurringi pindalast, siis moodustavad ümberjoonestatud silindri ülemise ja alumise põhja pindalad koos võetuna täpselt poole kera pindalast. Tähendab, kera pindala on poolteist korda väiksem silindri täispindalast. Teiste sõnadega, kera pindala moodustab täpselt $\frac{2}{3}$ ümberjoonestatud silindri täispindalast.

I lisa.

Ruutjuurte tabel.

Selle õpiku lõppu paigutatud ruutjuurte tabelist leiame iga kolmest numbrist koosneva arvu ruutjuure, s. o. ruutjuured arvudest 1,00 kuni 99,9. Tabelis antud ruutjuured koosnevad samuti kolmest numbrist, see tähendab, et tabelist leiame ruutjuured kolme kohaga.

Ruumi kokkuhoiu pärast on tabel nii koostatud, et selle arvu, mille ruutjuurt otsime, kaks esimest numbrit on lehekülje vasakul serval, seega tabeli esimeses veerus, juuritava arvu kolmas number aga tuleb võtta tabeli esimesest rõhtsast reast ülal.

Otsitava ruutjuure leiame sealt, kus ristuvad see rida ja see veerg, milles on antud arvu numbrid. Selgituseks toome siin selle tabeli alguse ja ühe tüki tabeli keskelt.

	0	1	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
$\boxed{1,2}$	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	$\boxed{1,12}$	1,12	1,13	1,13	1,14
16,	4,00	4,01	4,02	4,04	4,05	4,06	4,07	4,09	4,10	4,11
17,	4,12	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,20	4,21	4,22	4,23

N ä i d e 1. Leiame tabelist $\sqrt{1,25}$.

Antud arvu 1,25 kaks esimest numbrit, s. o. 1,2, on tabelis esimeses veerus, ülalt lugedes k o l m a n d a s r e a s; antud arvu kolmas number, s. o. 5, on tabelis ülemises reas, ta seisab seal s e i t s m e n d a s v e e r u s. Kolmanda rea ja seitsmenda veeru ristumise kohal leiame otsitava ruutjuure 1,12, niisiis

$$\sqrt{1,25} = 1,12.$$

Samal viisil leiame, et

$$\sqrt{16} = \sqrt{16{,}0} = 4{,}00$$

ja

$$\sqrt{17{,}8} = 4{,}22.$$

Meie tabelis on antud ruutjuured arvudest 1,00 kuni 99,9. Kas see tabel võimaldab leida ruutjuurt arvust, mis on suurem kui 100 või mis on väiksem kui 1?

Võimaldab küll.

Ühest väiksemate ja sajast suuremate arvude ruutjuurte leidmisel rakendame arvu omadust, et kui arvu suurendame või vähendame 100 korda, siis tema ruutjuur vastavalt suureneb või väheneb 10 korda; kui arvu suurendame või vähendame 10 000 korda, siis tema ruutjuur suureneb või väheneb 100 korda, jne., teisiti öeldes, kui arvus nihutame koma 2, 4, 6, jne. koha võrra, siis selle arvu ruutjuures koma nihkub samas suunas 1, 2, 3, jne. koha võrra.

Niisiis, kui tahame leida ühest väiksema arvu ruutjuurt, siis nihutame koma paremale poole kas 2 või 4 või 6 jne. kohta, nii et saame arvu, mis oma suuruse poolest on ühe ja saja vahel. Sellest arvust leiame tabeli abil ruutjuure. Leitud ruutjuur on aga antud arvu ruutjuurest kas 10 või 100 või 1000 jne. korda suurem, olenedes sellest, mitme koha võrra nihutasime koma antud arvus. Et saada õiget ruutjuurt, selleks peame nüüd tabelist leitud ruutjuures koma nihutama vasakule järgmiselt:

Kui arvus nihutasime koma 2 koha võrra, siis ruutjuures nihutame koma 1 koha võrra, kui arvus koma nihkus 4 koha võrra, siis ruutjuures tuleb koma nihutada 2 koha võrra, jne.

Et koma esialgse asendi suhtes ei tekiks segadust, siis võime uued asendid, abiasendid märkida komaga ülal; lõpliku õige asendi ruutjuures märgime jälle all.

N ä i d e 2. Leiame ruutjuure arvust 0,0169. Nihutades koma 2 kohta paremale, saame 0,01'69; selle arvu ruutjuur on tabelis antud: see on 1'3. Saadud ruutjuur on õigest ruutjuurest 10 korda suurem, sellepärast peame temas koma nihutama 1 koha võrra vasakule, siis saame 0,13.

Niisiis

$$\sqrt{0{,}0169} = 0{,}13.$$

Leiame samal viisil $\sqrt{0{,}00072}$.

$$\sqrt{0{,}00'072} \ldots 2'68;$$

$$\sqrt{0{,}00072} = 0{,}0268.$$

Kui antud arv on sajast suurem, siis toimime vastupidi: esiteks nihutame koma vasakule 2, 4, 6, . . . kohta, kuni saame arvu, mis on ühe ja saja vahel, leiame sellest ruutjuure; leitud ruutjuures nihutame koma vastavalt paremale 1, 2, 3, . . . kohta.

N ä i d e 3. Leida $\sqrt{841}$.

$$\sqrt{8'41} = 2'90; \quad \sqrt{841} = 29{,}0 = 29.$$

Kui antud juuritava arvu koostises on rohkem kui kolm numbrit, siis ümardame ta nii, et tema koostisse ei jää üle kolme nullist erineva numbri, ja leiame ümardatud arvu ruutjuure.

N ä i d e 4. Leida $\sqrt{7056}$.

$$\sqrt{7056} \approx \sqrt{7060}; \quad \sqrt{70'6} = 8'4;$$

$$\sqrt{7056} = 84.$$

Näide 5. Leida $\sqrt{0,2704}$.

$$\sqrt{0,2704} \approx \sqrt{0,270};$$

$$\sqrt{27'0} = 5'2;$$

$$\sqrt{0,2704} = 0,52.$$

Harjutamiseks.

Leida tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

0,441	0,676	0,256
0,841	0,324	0,289
0,0196	0,0049	0,0036
0,0042	0,0007	0,0006
62 500	78 400	123 000
3 600	2 500	4 900
336 000	24 000	12 000
725 000	186 000	491 000
385	12	50,4
4234	560	38,24
576,9	0,2859	4876
0,5842	43,66	9,428

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04
1,1	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09
1,2	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,13	1,14
1,3	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,18
1,4	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
1,5	1,22	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26
1,6	1,26	1,27	1,27	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30
1,7	1,30	1,31	1,31	1,32	1,32	1,32	1,33	1,33	1,33	1,34
1,8	1,34	1,35	1,35	1,35	1,36	1,36	1,36	1,37	1,37	1,37
1,9	1,38	1,38	1,39	1,39	1,39	1,40	1,40	1,40	1,41	1,41
2,0	1,41	1,42	1,42	1,42	1,43	1,43	1,44	1,44	1,44	1,45
2,1	1,45	1,45	1,46	1,46	1,46	1,47	1,47	1,47	1,48	1,48
2,2	1,48	1,49	1,49	1,49	1,50	1,50	1,50	1,51	1,51	1,51
2,3	1,52	1,52	1,52	1,53	1,53	1,53	1,54	1,54	1,54	1,55
2,4	1,55	1,55	1,56	1,56	1,56	1,57	1,57	1,57	1,57	1,58
2,5	1,58	1,58	1,59	1,59	1,59	1,60	1,60	1,60	1,61	1,61
2,6	1,61	1,62	1,62	1,62	1,62	1,63	1,63	1,63	1,64	1,64
2,7	1,64	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66	1,66	1,66	1,67	1,67
2,8	1,67	1,68	1,68	1,68	1,69	1,69	1,69	1,69	1,70	1,70
2,9	1,70	1,71	1,71	1,71	1,71	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73
3,0	1,73	1,73	1,74	1,74	1,74	1,75	1,75	1,75	1,75	1,76
3,1	1,76	1,76	1,77	1,77	1,77	1,77	1,78	1,78	1,78	1,79
3,2	1,79	1,79	1,79	1,80	1,80	1,80	1,81	1,81	1,81	1,81
3,3	1,82	1,82	1,82	1,82	1,83	1,83	1,83	1,84	1,84	1,84
3,4	1,84	1,85	1,85	1,85	1,85	1,86	1,86	1,86	1,87	1,87
3,5	1,87	1,87	1,88	1,88	1,88	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89
3,6	1,90	1,90	1,90	1,91	1,91	1,91	1,91	1,92	1,92	1,92
3,7	1,92	1,93	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94	1,94	1,95
3,8	1,95	1,95	1,95	1,96	1,96	1,96	1,96	1,97	1,97	1,97
3,9	1,97	1,98	1,98	1,98	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	2,00
4,0	2,00	2,00	2,00	2,01	2,01	2,01	2,01	2,02	2,02	2,02
4,1	2,02	2,03	2,03	2,03	2,03	2,04	2,04	2,04	2,04	2,05
4,2	2,05	2,05	2,05	2,06	2,06	2,06	2,06	2,07	2,07	2,07
4,3	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,09	2,09	2,09	2,09	2,09
4,4	2,10	2,10	2,10	2,10	2,11	2,11	2,11	2,11	2,12	2,12
4,5	2,12	2,12	2,13	2,13	2,13	2,13	2,14	2,14	2,14	2,14
4,6	2,14	2,15	2,15	2,15	2,15	2,16	2,16	2,16	2,16	2,17
4,7	2,17	2,17	2,17	2,17	2,18	2,18	2,18	2,18	2,19	2,19
4,8	2,19	2,19	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,21	2,21	2,21
4,9	2,21	2,22	2,22	2,22	2,22	2,22	2,23	2,23	2,23	2,23
5,0	2,24	2,24	2,24	2,24	2,24	2,25	2,25	2,25	2,25	2,26
5,1	2,26	2,26	2,26	2,26	2,27	2,27	2,27	2,27	2,28	2,28
5,2	2,28	2,28	2,28	2,29	2,29	2,29	2,29	2,30	2,30	2,30
5,3	2,30	2,30	2,31	2,31	2,31	2,31	2,32	2,32	2,32	2,32
5,4	2,32	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,34	2,34	2,34	2,34

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35	2,36	2,36	2,36	2,36	2,36
5,6	2,37	2,37	2,37	2,37	2,37	2,38	2,38	2,38	2,38	2,39
5,7	2,39	2,39	2,39	2,39	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	2,41
5,8	2,41	2,41	2,41	2,41	2,42	2,42	2,42	2,42	2,42	2,43
5,9	2,43	2,43	2,43	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
6,0	2,45	2,45	2,45	2,46	2,46	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47
6,1	2,47	2,47	2,47	2,48	2,48	2,48	2,48	2,48	2,49	2,49
6,2	2,49	2,49	2,49	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,51	2,51
6,3	2,51	2,51	2,51	2,52	2,52	2,52	2,52	2,52	2,53	2,53
6,4	2,53	2,53	2,53	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,55	2,55
6,5	2,55	2,55	2,55	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,57	2,57
6,6	2,57	2,57	2,57	2,57	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,59
6,7	2,59	2,59	2,59	2,59	2,60	2,60	2,60	2,60	2,60	2,61
6,8	2,61	2,61	2,61	2,61	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62	2,62
6,9	2,63	2,63	2,63	2,63	2,63	2,64	2,64	2,64	2,64	2,64
7,0	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,66	2,66	2,66	2,66	2,66
7,1	2,66	2,67	2,67	2,67	2,67	2,67	2,68	2,68	2,68	2,68
7,2	2,68	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,70	2,70	2,70
7,3	2,70	2,70	2,71	2,71	2,71	2,71	2,71	2,72	2,72	2,72
7,4	2,72	2,72	2,72	2,73	2,73	2,73	2,73	2,73	2,73	2,74
7,5	2,74	2,74	2,74	2,74	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75
7,6	2,76	2,76	2,76	2,76	2,76	2,77	2,77	2,77	2,77	2,77
7,7	2,77	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,79	2,79	2,79	2,80
7,8	2,79	2,79	2,80	2,80	2,80	2,80	2,80	2,81	2,81	2,81
7,9	2,81	2,81	2,81	2,82	2 82	2,82	2,82	2,82	2,82	2,83
8,0	2,83	2,83	2,83	2,83	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84
8,1	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,85	2,86	2,86	2,86	2,86
8,2	2,86	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,88	2,88	2,88
8,3	2,88	2,88	2,88	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,90
8,4	2,90	2,90	2,90	2,90	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91
8,5	2,92	2,92	2,92	2,92	2,92	2,92	2,93	2,93	2,93	2,93
8,6	2,93	2,93	2,94	2 94	2,94	2,94	2,94	2,94	2,95	2,95
8,7	2,95	2,95	2,95	2,95	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96	2,96
8,8	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,98	2,98	2,98	2,98
8,9	2,98	2,98	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	3,00	3.00
9,0	3,00	3,00	3,00	3,00	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01
9,1	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,03	3,03	3,03	3,03
9,2	3,03	3,03	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,05	3,05
9,3	3,05	3,05	3,05	3,05	3,06	3,06	3,06	3,06	3,06	3,06
9,4	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,08	3,08	3,08	3,08
9,5	3,08	3,08	3,09	3,09	3,09	3,09	3,09	3,09	3,10	3,10
9,6	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,11	3,11	3,11	3,11	3,11
9,7	3,11	3,12	3,12	3,12	3,12	3,12	3,12	3,13	3,13	3,13
9,8	3,13	3,13	3,13	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14	3,14
9,9	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,15	3,16	3,16	3,16	3,16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10,	3,16	3,18	3,19	3,21	3,22	3,24	3,26	3,27	3,29	3,30
11,	3,32	3,33	3,35	3,36	3,38	3,39	3,41	3,42	3,44	3,45
12,	3,46	3,48	3,49	3,51	3,52	3,54	3,55	3,56	3,58	3,59
13,	3,61	3,62	3,63	3,65	3,66	3,67	3,69	3,70	3,71	3,73
14,	3,74	3,75	3,77	3,78	3,79	3,81	3,82	3.83	3,85	3,86
15,	3,87	3,89	3,90	3,91	3,92	3,94	3,95	3,96	3,97	3,99
16,	4,00	4,01	4,02	4,04	4,05	4,06	4,07	4,09	4,10	4,11
17,	4,12	4,14	4,15	4,16	4,17	4,18	4,20	4,21	4,22	4,23
18,	4,24	4,25	4,27	4,28	4,29	4,30	4,31	4,32	4,34	4,35
19,	4,36	4,37	4,38	4.39	4,40	4,42	4,43	4,44	4,45	4,46
20,	4,47	4,48	4,49	4,51	4,52	4,53	4,54	4,55	4,56	4,57
21,	4,58	4,59	4,60	4,62	4,63	4,64	4.65	4,66	4,67	4,68
22,	4,69	4,70	4,71	4,72	4,73	4,74	4,75	4,76	4,77	4,79
23,	4,80	4,81	4,82	4,83	4,84	4,85	4,86	4,87	4,88	4,89
24,	4,90	4.91	4,92	4,93	4,94	4 95	4,96	4,97	4,98	4,99
25,	5,00	5,01	5,02	5,03	5,04	5,05	5,06	5,07	5,08	5,09
26,	5.10	5,11	5,12	5,13	5,14	5,15	5,16	5,17	5,18	5,19
27,	5,20	5,21	5,22	5,22	5,23	5,24	5,25	5,26	5,27	5,28
28,	5,29	5,30	5,31	5,32	5,33	5,34	5,35	5,36	5,37	5,38
29,	5,39	5.39	5,40	5,41	5,42	5,43	5,44	5,45	5,46	5,47
30,	5,48	5,49	5,50	5,50	5,51	5,52	5,53	5,54	5,55	5,56
31,	5,57	5,58	5,59	5,59	5,60	5,61	5,62	5,63	5,64	5,65
32,	5,66	5.67	5,67	5,68	5,69	5,70	5,71	5,72	5,73	5,74
33,	5,74	5,75	5.76	5,77	5,78	5,79	5,80	5,81	5,81	5,82
34,	5.83	5,84	5,85	5,86	5,87	5 87	5,88	5,89	5,90	5 91
35,	5,92	5.92	5,93	5,94	5,95	5,96	5,97	5,97	5,98	5,99
36,	6,00	6,01	6,02	6,03	6,03	6,04	6,05	6,06	6,07	6,07
37,	6,08	6,09	6,10	6,11	6,12	6,12	6,13	6,14	6,15	6,16
38,	6,16	6,17	6,18	6,19	6,20	6,20	6,21	6,22	6,23	6,24
39,	6,24	6.25	6,26	6,27	6,28	6,28	6,29	6,30	6,31	6.32
40,	6,32	6,33	6,34	6,35	6,36	6,36	6,37	6,38	6,39	6,40
41,	6,40	6,41	6,42	6,43	6,43	6,44	6,45	6,46	6,47	6,47
42,	6,48	6,49	6,50	6,50	6,51	6,52	6,53	6,53	6,54	6 55
43,	6,56	6,57	6,57	6,58	6,59	6,60	6,60	6,61	6,62	6,63
44,	6,63	6,64	6,65	6,66	6,66	6,67	6,68	6,69	6,69	6,70
45,	6,71	6,72	6,72	6,73	6,74	6,75	6,75	6,76	6,77	6,77
46,	6,78	6,79	6,80	6,80	6,81	6,82	6,83	6,83	6,84	6,85
47,	6,86	6,86	6,87	6,88	6,88	6,89	6,90	6,91	6,91	6,92
48,	6,93	6,94	6,94	6,95	6,96	6,96	6,97	6,98	6,99	6,99
49,	7,00	7,01	7,01	7,02	7,03	7,04	7,04	7,05	7,06	7,06
50,	7,07	7,08	7,09	7,09	7,10	7,11	7,11	7,12	7,13	7,13
51,	7,14	7,15	7,16	7,16	7,17	7,18	7,18	7,19	7,20	7,20
52,	7.21	7,22	7,22	7,23	7,24	7,25	7,25	7,26	7,27	7,27
53,	7,28	7,29	7,29	7,30	7,31	7,31	7,32	7,33	7,33	7,34
54,	7,35	7,36	7,36	7.37	7,38	7,38	7.39	7,40	7.40	7,41

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55,	7,42	7,42	7,43	7,44	7,44	7,45	7,46	7,46	7,47	7,48
56,	7,48	7,49	7,50	7,50	7,51	7,52	7,52	7,53	7,54	7,54
57,	7,55	7,56	7,56	7,57	7,58	7,58	7,59	7,60	7,60	7,61
58,	7,62	7,62	7,63	7,64	7,64	7,65	7,66	7,66	7,67	7,67
59,	7,68	7,69	7,69	7,70	7,71	7,71	7,72	7,73	7,73	7,74
60,	7,75	7,75	7,76	7,77	7,77	7,78	7,78	7,79	7,80	7,80
61,	7,81	7,82	7,82	7,83	7,84	7,84	7,85	7,85	7,86	7,87
62,	7,87	7,88	7,89	7,89	7,90	7,91	7,91	7,92	7,92	7,93
63,	7,94	7,94	7,95	7,96	7,96	7,97	7,98	7,98	7,99	7,99
64,	8,00	8,01	8,01	8,02	8,02	8,03	8,04	8,04	8,05	8,06
65,	8,06	8,07	8,07	8,08	8,09	8,09	8,10	8,11	8,11	8,12
66,	8,12	8,13	8,14	8,14	8,15	8,15	8,16	8,17	8,17	8,18
67,	8,19	8,19	8,20	8,20	8,21	8,22	8,22	8,23	8,23	8,24
68,	8,25	8,25	8,26	8,26	8,27	8,28	8,28	8,29	8,29	8,30
69,	8,31	8,31	8,32	8,32	8,33	8,34	8,34	8,35	8,35	8,36
70,	8,37	8,37	8,38	8,38	8,39	8,40	8,40	8,41	8,41	8,42
71,	8,43	8,43	8,44	8,44	8,45	8,46	8,46	8,47	8,47	8,48
72,	8,49	8,49	8,50	8,50	8,51	8,51	8,52	8,53	8,53	8,54
73,	8,54	8,55	8,56	8,56	8,57	8,57	8,58	8,58	8,59	8,60
74,	8,60	8,61	8,61	8,62	8,63	8,63	8,64	8,64	8,65	8,65
75,	8,66	8,67	8,67	8,68	8,68	8,69	8,69	8,70	8,71	8,71
76,	8,72	8,72	8,73	8,73	8,74	8,75	8,75	8,76	8,76	8,77
77,	8,77	8,78	8,79	8,79	8,80	8,80	8,81	8,81	8,82	8,83
78,	8,83	8,84	8,84	8,85	8,85	8,86	8,87	8,87	8,88	8,88
79,	8,89	8,89	8,90	8,91	8,91	8,92	8,92	8,93	8,93	8,94
80,	8,94	8,95	8,96	8,96	8,97	8,97	8,98	8,98	8,99	8,99
81,	9,00	9,01	9,01	9,02	9,02	9,03	9,03	9,04	9,04	9,05
82,	9,06	9,06	9,07	9,07	9,08	9,08	9,09	9,09	9,10	9,11
83,	9,11	9,12	9,12	9,13	9,13	9,14	9,14	9,15	9,15	9,16
84,	9,17	9,17	9,18	9,18	9,19	9,19	9,20	9,20	9,21	9,21
85,	9,22	9,22	9,23	9,24	9,24	9,25	9,25	9,26	9,26	9,27
86,	9,27	9,28	9,28	9,29	9,30	9,30	9,31	9,31	9,32	9,32
87,	9,33	9,33	9,34	9,34	9,35	9,35	9,36	9,36	9,37	9,38
88,	9,38	9,39	9,39	9,40	9,40	9,41	9,41	9,42	9,42	9,43
89,	9,43	9,44	9,44	9,45	9,46	9,46	9,47	9,47	9,48	9,48
90,	9,49	9,49	9,50	9,50	9,51	9,51	9,52	9,52	9,53	9,53
91,	9,54	9,54	9,55	9,56	9,56	9,57	9,57	9,58	9,58	9,59
92,	9,59	9,60	9,60	9,61	9,61	9,62	9,62	9,63	9,63	9,64
93,	9,64	9,65	9,65	9,66	9,66	9,67	9,67	9,68	9,69	9,69
94,	9,70	9,70	9,71	9,71	9,72	9,72	9,73	9,73	9,74	9,74
95,	9,75	9,75	9,76	9,76	9,77	9,77	9,78	9,78	9,79	9,79
96,	9,80	9,80	9,81	9,81	9,82	9,82	9,83	9,83	9,84	9,84
97,	9,85	9,85	9,86	9,86	9,87	9,87	9,88	9,88	9,89	9,89
98,	9,90	9,90	9,91	9,92	9,92	9,92	9,93	9,93	9,94	9,94
99,	9,95	9,95	9,96	9,96	9,97	9,97	9,98	9,98	9,99	9,99

Trigonomeetriliste väärtuste tabel.

Kraadid	sin	cos	tan	cot	Kraadid
0	0,0000	1,0000	0,0000	—	90
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,514	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,144	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,331	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,904	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,747	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,605	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,475	68
Kraadid	cos	sin	cot	tan	Kraadid

Kraadid	sin	cos	tan	cot	Kraadid
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,356	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,145	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,540	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,483	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,428	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,376	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,327	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1.280	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,235	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,150	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,111	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1.072	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,036	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
Kraadid	cos	sin	cot	tan	Kraadid

Valemite nimestik.

Viimases veerus on raamatu leheküljed, kus leidub vastavate valemite tuletamine.

I. Planimeetria.

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
1	Ristküliku pindala	$S = ab$	a, b — küljed S — pindala	84
2	Ruudu pindala	$S = a^2$	a — külg S — pindala	84
3	Trapetsi pindala	$S = kh$	k — kesklõik h — kõrgus S — pindala	87
4	Trapetsi pindala (valemi teine kuju)	$S = \frac{1}{2}(a + b)\ h$	a, b — alused h — kõrgus S — pindala	88
5	Rööpküliku pindala	$S = ah$	a — alus h — kõrgus S — pindala	88
6	Kolmnurga pindala	$S = \frac{1}{2}\ ah$	a — alus h — kõrgus S — pindala	89
7	Sissejoonestatud ruudu pindala	$a_4^2 = 2R^2$	R — ringjoone raadius a_4 — sissejoonestatud ruudu külg	120
8	Sissejoonestatud ruudu pindala (valemi teine kuju)	$a_4^2 = \frac{1}{2}\ D^2$	D — ringjoone diameeter a_4 — sissejoonestatud ruudu külg	120

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
9	Sissejoonestatud ruudu külg	$a_4 \approx 1{,}4R = 0{,}7D$	R — ringjoone raadius D — ringjoone diameeter a_4 — sissejoonestatud ruudu külg	120
10	Ümberjoonestatud ruudu külg	$b_4 = 2R = D$	R — ringjoone raadius D — ringjoone diameeter b_4 — ümberjoonestatud ruudu külg	121
11	Korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg	$a_6 = R$	R — ringjoone raadius a_6 — korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg	124
12	Ringjoone raadius (korrapärase ümberjoonestatud kuusnurga külje kaudu)	$R = \frac{\sqrt{3}}{2}\, b_6 \approx 0{,}866\, b_6$	b_6 — korrapärase ümberjoonestatud kuusnurga külg R — ringjoone raadius	126
13	Ringjoone diameeter (korrapärase ümberjoonestatud kuusnurga külje kaudu)	$D = \sqrt{3} b_6 \approx 1{,}732\, b_6$	b_6 — korrapärase ümberjoonestatud kuusnurga külg D — ringjoone diameeter	126
14	Ringjoone pikkus (diameetri kaudu)	$C = \pi D$	D — ringjoone diameeter C — ringjoone pikkus	130

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
15	Ringjoone pikkus (raadiuse kaudu)	$C = 2\pi R$	R — ringjoone raadius C — ringjoone pikkus	136
16	Ringjoone kaare pikkus (diameetri kaudu)	$s = \frac{\pi D n}{360}$	D — ringjoone diameeter n — kaare kraadide arv s — kaare pikkus	137
17	Ringjoone kaare pikkus (raadiuse kaudu)	$s = \frac{\pi R n}{180}$	R — ringjoone raadius n — kaare kraadide arv s — kaare pikkus	137
18	Ümberjoonestatud hulknurga pindala	$S = PR$	R — ringjoone raadius $2P$ — perimeeter S — pindala	138
19	Ringi pindala	$S = \frac{1}{2} CR$	R — ringi raadius C — ringjoone pikkus S — ringi pindala	141
20	Ringi pindala (raadiuse kaudu)	$S = \pi R^2$	R — ringi raadius S — pindala	141
21	Ringi pindala (diameetri kaudu)	$S = \frac{1}{4} \pi D^2$	D — ringi diameeter S — pindala	141
22	Sektori pindala	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	R — ringjoone raadius n — kaare kraadide arv S — pindala	145
23	Sektori pindala (valemi teine kuju)	$S = \frac{1}{2} sR$	R — ringjoone raadius s — sektori kaare pikkus S — pindala	145

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
24	Nurga tangens	$a = b \tan A$	a — täisnurkse kolmnurga kaatet b — teine kaatet A — kaateti a vastasnurk	177
25	Nurga kootangens	$a = b \cot B$	a — täisnurkse kolmnurga kaatet b — teine kaatet B — kaateti b vastasnurk	178
26	Nurga siinus ja koosinus	$\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$	a — täisnurkse kolmnurga kaatet b — teine kaatet c — hüpotenuus A — kaateti a vastasnurk	185 185
27 28	Kaatetite arvutamine hüpotenuusi ja teravnurga järgi	$a = c \sin A$ $b = c \cos A$	a — kaatet b — teine kaatet c — hüpotenuus A — kaateti a vastasnurk	188 188

II. Stereomeetria.

29	Silindri ja prisma ruumala	$V = S_p h$	S_p — põhja pindala h — kõrgus V -- ruumala	212
30	Risttahuka ruumala	$V = abh$	a, b, h — risttahuka mõõted V — ruumala	212
31	Kuubi ruumala	$V = a^3$	V — ruumala a — mõõted	212

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
32	Risttahuka täispindala	$S_t = 2(ab + ac + bc)$	a, b, c — risttahuka mõõted S_t — pindala	215
33	Püstprisma külgpindala	$S_k = 2ph$	$2p$ — põhja ümbermõõt h — kõrgus S_k — külgpindala	218
34	Püstprisma täispindala	$S_t = 2ph + 2S_p$	$2p$ — põhja ümbermõõt h — kõrgus S_p — põhjapindala S_t — täispindala	219
35	Silindri ruumala	$V = \pi R^2 h$	R — põhja raadius h — kõrgus V — ruumala	221
36	Silindri ruumala (valemi teine kuju)	$V = \frac{1}{4} \pi D^2 h$	D — põhja diameeter h — kõrgus V — ruumala	221
37	Silindri külgpindala	$S_k = \pi D h$	D — põhja diameeter h — kõrgus S_k — külgpindala	223
38	Silindri külgpindala (valemi teine kuju)	$S_k = 2\pi R h$	R — põhja raadius h — kõrgus S_k — külgpindala	223
39	Silindri täispindala	$S_t = \pi D h + \frac{1}{2} \pi D^2$	D — põhja diameeter h — kõrgus S_t — täispindala	223

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
40	Silindri täispindala (valemi teine kuju)	$S_t = 2\pi R(R + h)$	R — põhja raadius h — kõrgus S_t — täispindala	223
41	Mistahes koonuse ja püramiidi ruumala	$V = \frac{1}{3} S_p h$	S_p — põhja pindala h — kõrgus V — ruumala	229
42	Koonuse ruumala	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$	R — põhja raadius h — kõrgus V — ruumala	229
43	Koonuse ruumala (valemi teine kuju)	$V = \frac{1}{12} \pi D^2 h$	D — põhja diameeter h — kõrgus V — ruumala	229
44	Koonuse külgpindala	$S_k = \frac{1}{2} Cm$	C — põhja ümbermõõt m — moodustaja S_k — külgpindala	231
45	Koonuse külgpindala (valemi teine kuju)	$S_k = \frac{1}{2} \pi Dm$	D — põhja diameeter m — moodustaja S_k — külgpindala	231
46	Koonuse külgpindala (valemi kolmas kuju)	$S_k = \pi Rm$	R — põhja raadius m — moodustaja S_k — külgpindala	232
47	Koonuse täispindala	$S_t = \pi Rm + \pi R^2$	R — raadius m — moodustaja S_t — täispindala	232
48	Koonuse täispindala (valemi teine kuju)	$S_t = \pi Dm + \frac{1}{4} \pi D^2$	D — diameeter m — moodustaja S_t — täispindala	232
49	Kera ruumala	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$	R — kera raadius V — ruumala	237

Nr.	Valemi nimetus	Valem	Tähised	Raamatu lk.
50	Kera ruumala (valemi teine kuju)	$V = \frac{1}{6} \pi D^3$	D – kera diameeter V – ruumala	237
51	Kera pindala	$S = 4\pi R^2$	R — kera raadius S — pindala	240
52	Kera pindala (valemi teine kuju)	$S = \pi D^2$	D – kera diameeter S — pindala	240

Sisukord.

Sissejuhatus.

VI peatükk. **Sarnased kujundid.**

VII peatükk. **Kolmnurkade lihtsamaid lahendusviise.**

II trükk.

Toimetaja M. Tamm.

Tehniline toimetaja E. Lellep.

Ladumisele antud 2. II 1950. Trükkimisele antud 6. III 1950. Trükiarv 4000. Paber 56×79, 1/16. Trükipoognaid 16,5. Arvutuspoognaid 14,81. MB-01661. Trükikoda „Tartu Kommunist", Tartu, Ülikooli 21/23. Tellimise nr. 324.

На эстонском языке.

М. Я. Выгодский. Геометрия для VI и VII классов.

Hind rbl. 4.70.

Trükivigu.

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema	Kelle süü läbi viga tekkinud
180	7. alt	$= 20C$	$= 2OC$	Trükikoja
217	1. alt	$S_1h + S_2h + S_3$	$S_1h + S_2h + S_3h$	"
239	10. ülalt	$V = \frac{1}{3}\pi R^3$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	Toimetaja
239	11. "	Tähendab suhe ·	Tähendab suhe	"
256	1. "	Raamatu lk. 136	Raamatu lk. 130	Trükikoja

Rbl. 4.70

A-18361

TÜ RAAMATUKOGU

1 0300 00504979 8