Тартуский университет

Нарвский колледж

Aritmeetika ja arvuteooria

P2NC.00.655

Игорь Костюкевич

Euroopa Liit
Euroopa Sotsiaalfond

Eesti tuleviku heaks

Нарва

2010

Оглавление

МНОЖЕСТВА

Понятие множества

Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Таково интуитивное определение понятия множества, данное основателем теории множеств Георгом Кантором. Это понятие в математике является первичным и, следовательно, не имеет строгого определения. Объекты, составляющие множество, будем называть его элементами. Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …, а элементы множеств – строчными буквами a, b, c,.... Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством A, обозначается так: $a \in A$ {a принадлежит A). Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не принадлежит A). Некоторые множества имеют общепринятые обозначения: N – множество натуральных чисел; R – множество действительных чисел; Z – множество целых чисел.

Способы задания множеств

Имеется два существенно различных способа задания множеств. Можно либо указать правило для определения того, принадлежит или не принадлежит рассматриваемому множеству любой данный объект, либо дать полный перечень элементов этого множества.

Первый способ – описание множества, а второй способ – перечисление элементов множества. Например, обозначение $\{x \in U : \alpha\{x)\}$ читается: «элементы множества U, обладающие свойством α» – это описание множества. Элементы перечисляемого множества принято заключать в скобки: {1, 2, 3, ...} – множество натуральных чисел; {2, 4, 6, ...} – множество четных чисел. Под многоточием в первом случае подразумеваются все последующие натуральные числа, а во втором – четные.

Подмножества

Множество, состоящее из некоторых элементов другого множества, называется подмножеством этого последнего множества. С целью изучения всех подмножеств данного множества введем следующую терминологию. Исходное множество будем называть универсальным множеством; подмножества, содержащие один элемент, будем называть единичными множествами; множество, вовсе не содержащее никаких элементов, будем называть пустым множеством и обозначать 0.

В качестве примера возьмем универсальное множество U, состоящее из трех элементов {a, b, c}. Собственные подмножества U – это множества, которые содержат некоторые, но не все элементы U. Этими подмножествами являются три множества из двух элементов {a, b}, {a, c}, {b, c} и три единичных множества {a}, {b}, {c}.

Будем считать подмножеством множества U и пустое множество $\varnothing$, не содержащее элементов U.

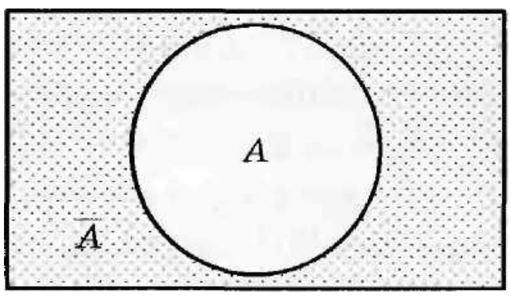
Другими словами, множество A называется подмножеством множества B (обозначаем $A \subset B$), если все элементы множества A принадлежат B. Это означает справедливость следующего утверждения: для любого элемента a, если $a \in A$, то $a \in B$ при условии $A \subset B$. Будем говорить также, что множество A содержится в B или имеется включение множества A в B. Множества A и B называются равными или совпадающими (обозначается A = B), если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если $A \subset B$ и $B \subset A$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения.

Операции над множествами

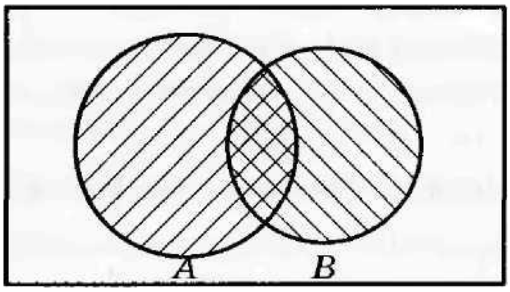
Будем рассматривать образование новых множеств из данных множеств. Мы будем предполагать, что каждое из множеств, которое мы используем в этом процессе, является подмножеством некоторого универсального множества, и будем требовать, чтобы вновь образованное множество было подмножеством того же самого универсального множества. Мы можем задавать вновь образованное множество или путем описания, или путем перечисления.

Чтобы нагляднее представить эти операции, изобразим их на диаграмме, называемой диаграммой Эйлера-Венна. Пусть прямоугольник обозначает универсальное множество, а круги внутри прямоугольника – подмножества.

Дополнением к множеству A называется множество элементов, которые не содержатся в A. Обозначают его $\bar{A}$ и читают «дополнение множества A к U».

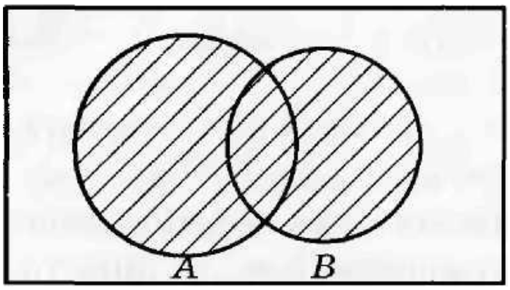


Пересечением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих и A и B. Обозначают $A \cap B$ и читают «пересечение A и B».

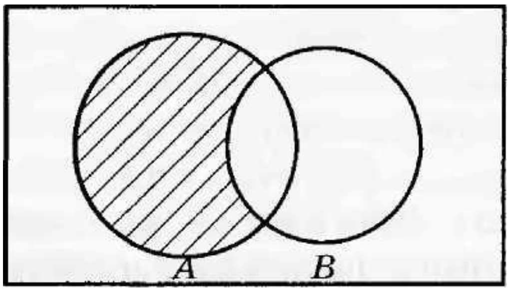


Если А и В – непустые множества, пересечение которых пусто, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то их называют непересекающимися множествами.

Объединением множеств А и В называется множество элементов, принадлежащих либо А, либо В (либо обоим). Обозначают $A \cup Б$ и читают «объединение А и В».



Разностью множеств А и В называется множество элементов, принадлежащих А и не принадлежащих В. Обозначают $A \setminus B$ и читают «разность А и В».



Абстрактные законы операций над множествами

Введенные операции над множествами подчинены некоторым очень простым абстрактным законам, которые будут перечислены в этом разделе.

Эти законы очень напоминают элементарные законы алгебры высказываний.

По этой причине множество, его подмножества и законы сочетания подмножеств образуют алгебраическую систему, называемую булевой алгеброй. Система составных высказываний, подчиняющаяся таким законам, тоже называется булевой алгеброй. Таким образом, любую из этих систем можно изучать или с алгебраической, или с логической точки зрения.

Ниже перечислены основные законы, действующие в булевых алгебрах.

Законы для объединения и пересечения

$A \bigcup A = A$

$A \cap A = A$

$A \cup B = B \cap A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup U = U$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cap U = A$

$A \cup \varnothing = A$

Законы для дополнений

$\overline{\overline{A}} = A$

$A \cup \overline{A} = \varnothing$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{U} = \varnothing$

Законы для разностей множеств

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$U \setminus A = \overline{A}$

$A \setminus U = \varnothing$

$\varnothing \setminus A = \varnothing$

$A \setminus A = \varnothing$

$((A \setminus B) \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Доказательство каждого из перечисленных законов основано на определении равенства множеств и определений операций над множествами. Напомним, что множество A равно множеству B, если они состоят из одних и тех же элементов или оба пусты. Докажем один из законов для дополнений: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $x \in A \cup B$. По определению операции дополнения это означает, что $x \notin A \cup B$, но $x \in U$. Следовательно, $x \notin A$ и одновременно $x \notin B$. Таким образом, $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Из определения операции пересечения получаем, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Поэтому, учитывая произвольность элемента $x \in \overline{(A \cup B)}$, имеем $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть теперь $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Это значит, что $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Таким образом, $x \notin A$ и $x \notin B$. Поэтому $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \in U \setminus (A \cup B) = \overline{(A \cup B)}$. Поскольку x – произвольный элемент из $\overline{A} \cap \overline{B}$, то окончательно получаем $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$.

Приходим к выводу, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$.

Формула включений и исключений

Для конечного множества A обозначим через m(A) число его элементов (мощность). Число элементов пустого множества, очевидно, равно нулю. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Действительно, пусть множества A и B не пересекаются, т.е. $m(A \cap B) = 0$. Их объединение получается добавлением к элементам одного множества всех элементов другого множества, поэтому

$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Если же пересечение множеств A и B не пусто, то число их общих элементов равно $m(A \cap B)$. Объединение этих множеств образуется добавлением к элементам множества A всех тех элементов множества B, которые не входят в A. Число таких элементов равно $m(B) - m(A \cap B)$. Таким образом,

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Эту формулу легко обобщить на случай объединения произвольного конечного количества конечных множеств. Для случая трех множеств она имеет следующий вид:

$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$.

Кортежи и декартово произведение множеств

Пусть даны множества $X_1, X_2, ..., X_n$. Кортежем длины n, составленным из элементов этих множеств, называется конечная последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где для всех k, $1 \leq k \leq n$, имеем $x_k \in X_k$.

Элемент x_k называется k-й координатой или k-й компонентой кортежа α.

Два кортежа равны в том и только в том случае, когда они имеют одинаковую длину, причем их координаты, стоящие на местах с одинаковыми номерами, равны, т.е. кортежи $\alpha = (x_1, ..., x_m)$ и $\beta = (y_1, ..., y_n)$ равны только в том случае, когда $m = n$, причем $x_k = y_k$ для всех $1 \le k \le n$.

Кортежи длины два называют упорядоченными парами, длины три – упорядоченными тройками, длины n – упорядоченными n-ками. Для краткости речи слово «упорядоченные» часто опускают.

Кортеж, не содержащий ни одной координаты, т. е. кортеж длины 0, называется пустым.

Основные отличия понятий кортежа и множества следующие:

1) в множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны, даже в случае, когда они имеют одинаковый состав;
2) в множестве все элементы различны, а в кортеже координаты могут повторяться.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – некоторые множества. Их декартовым произведением называют множество, состоящее из кортежей вида $(a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i \in A_i$. Декартово произведение обозначается так: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Наиболее распространенные числовые множества

Числовым множеством называется множество, элементы которого есть числа.

Для наиболее распространенных числовых множеств применяют следующие обозначения и названия.

1. $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множество всех натуральных чисел.
2. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ – множество всех целых чисел.
3. $Z_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел.
4. $Q = \{m/n \mid m \in Z, n \in N\}$ – множество всех рациональных чисел.
5. $Q_0 = \{m/n \mid m \in Z_0, n \in N\}$ – множество всех неотрицательных рациональных чисел.
6. $R = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ – множество всех действительных чисел (числовая прямая). Элементы множества R (числа) называются также точками числовой прямой.
7. $R \setminus \{a\} = \{x \mid -\infty < x < \infty, x \ne a\}$ – множество всех действительных чисел, таких что $x \ne a$ (вся числовая прямая, из которой выбрасывается точка $x = a$).
8. $R_+ = \{x \mid 0 < x < \infty\}$ – множество всех положительных действительных чисел.
9. $R_- = \{x \mid -\infty < x < 0\}$ – множество всех отрицательных действительных чисел.
10. $[a; b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ – замкнутый промежуток (отрезок, сегмент) с концами в точках a и b, $a < b$, $a \in R$, $b \in R$.
11. $(a; b) = \{x \mid a < x < b\}$ – открытый промежуток (интервал) с концами в точках a и b, $a < b$, $a \in R$, $b \in R$.

12. $[a; b) = \{x \mid a \le x < b\}$, $(a; b] = \{x \mid a < x \le b\}$ – полуоткрытые промежутки (полуинтервалы, полусегменты) с концами в точках a и b, $a < b$, $a \in R$, $b \in R$.
13. $[a; +\infty) = \{x \mid a \le x < +\infty\}$, $(-\infty; b] = \{x \mid -\infty < x \le b\}$ – замкнутые полубесконечные промежутки (бесконечные полусегменты, полупрямые, числовые лучи).
14. $(a; +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$, $(-\infty; b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$ – открытые полубесконечные промежутки (бесконечные полуинтервалы, открытые полупрямые, открытые числовые лучи).
15. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \mid a - \varepsilon < x < a - \varepsilon\}$ – ε-окрестность числа a (точки a).
16. $R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$ – множество всех упорядоченных пар чисел (числовая плоскость).

Для множеств N, Z, Q, R справедливы следующие включения: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Задачи по теме «Множества»

Варианты 0 и 5

1. Экзамен сдавали 300 учеников. Оценки 2, 3, 4 получили 280 человек, а оценки 3, 4, 5 получили 200 человек. Сколько человек получили пятерки? Сколько человек получили оценки 3, 4?
2. По итогам экзаменов из 37 студентов отличную оценку по математике имели 15 студентов, по физике – 16, по химии – 19, по математике и физике – 7, по математике и химии – 9, по физике и химии – 6, по всем трем предметам – 4. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?
3. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?
4. На бал приехала известная модница N. Некоторые дамы, узнав об этом, купили себе такие же подвески, серьги и кольца. Из 115 дам, присутствовавших на балу, 31 была в таких же подвесках, 45 − в серьгах и 50 − в кольцах. 36 дам надели подвески и серьги, 23 – надели подвески и кольца, 27 − кольца и серьги. А самыми модными оказались 15 дам, которые надели и подвески, и серьги, и кольца, такие же, как у N. Сколько дам не знало о приезде N?

Варианты 1 и 6

1. В одном городе все жители говорят на английском или французском языке. На английском языке говорят 90% всех жителей, на французском – 80%. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?
2. Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе: Всего – 45 студентов. Футбольная секция – 25 человек, баскетбольная секция – 30 человек,

шахматная секция – 28 человек, футбольная и баскетбольная – 16, футбольная и шахматная – 18, баскетбольная и шахматная – 17. В трех секциях одновременно занимаются 15 человек. Объясните, почему отчет не был принят?

3. Из 100 школьников 40 играют в футбол, а 50 в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?
4. В племени Майя 37 индейцев. 12 из них на голове носят красные перья, 14 − синие, 17 − белые, 9 – красные и синие, 5 − красные и белые, 3 − синие и белые. Есть ли в племени Майя индейцы, у которых присутствуют перья всех трех цветов и если есть, то сколько?

Варианты 2 и 7

1. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы, и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?
2. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?
3. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?
4. 17 арабов нашли волшебную лампу с джином и попросили у него исполнить их желания. 9 арабов захотели много золота, 4 − большой и красивый дворец, 6 − женский гарем. Одновременно золото и дворец попросили трое, гарем и золото − десять, дворец и гарем − трое арабов. Сколько арабов попросили все это вместе, если известно, что джин для каждого исполнил желание?

Варианты 3 и 8

1. В школе 70 десятиклассников. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, а в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают драмкружок и занятия хора. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?
2. В одном из отделов научно–исследовательского института работают несколько человек, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, причем 6 человек знают английский язык, 6 – немецкий язык, 7 – французский язык, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько человек знает только один язык?
3. Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных 2; 115 чисел, кратных 3; 120 чисел, кратных 5; 45 чисел, кратных 6; 38 чисел, кратных 10; 50 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30. Сколько элементов в заданном множестве?

4. Из 21 дня, проведенного в санатории, 12 дней я принимал лечебные процедуры, 5 дней ездил на экскурсии. Сколько у меня было свободных дней, если 3 дня я сочетал лечебные процедуры и экскурсии?

Варианты 4 и 9

1. В течение 30 дней сентября было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливый, и ветреный, и холодный. В течение скольких дней в сентябре была хорошая погода?
2. Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
3. Из 80 школьников 40 играют в футбол, а 50 в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?
4. В деревне 500 пожилых женщин смотрят бразильский сериал. Из них 155 переживают за Марию Антонио, 108 интересуются жизнью Педро, 134 волнует судьба Хосе Игнасио, 48 женщин переживают за отношения Марии Антонио и Хосе Игнасио, 35 − волнуются за Марию Антонио и Педро, 17 − подозревают о родственных связях Хосе Игнасио и Педро, 23 женщины верят в счастье всех трех главных героев. А сколько женщин в деревне, смотрящих сериал, вообще ни за кого из главных героев не переживают и не верят в их счастье?

ДЕЛИМОСТЬ

Понятие делимости. Свойства делимости

На множестве натуральных (и целых) чисел деление не всегда выполнимо. Возникающие в этой связи вопросы решаются теорией делимости.

Говорят, что целое число a делится на целое число b ($b \neq 0$), или что b делит a, если существует такое число q, что $a = bq$. При этом q называется кратным числа b, а b – делителем числа a. То, что a делится на b, обозначается символом $a \vdots b$.

Из определения понятия делимости и свойств целых чисел вытекают свойства делимости.

1. Отношение делимости рефлексивно и транзитивно:

- $a \vdots a$;
- из $a \vdots b$ и $b \vdots c$ следует $a \vdots c$.

2. Из $a \vdots c$ следует $ab \vdots c$ для любого целого b.

3. Из $a \vdots c$ и $b \vdots c$ $(ax + by) \vdots c$ для любых целых чисел x, y. Это свойство можно распространить на несколько чисел.

4. Из $a \vdots b$ и $b \vdots a$ следует $a = \pm b$.

5. Из $a \vdots b$, $a > 0$, $b > 0$ следует $b \leq a$.

Не всегда a делится на b, но всегда возможно деление a на b с остатком, т.е. можно найти, притом единственным образом, такие q и r , что

$a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

Число q называется неполным частным, r – остатком от деления a на b.

Доказательство возможности. Пусть bq – наибольшее кратное числа b, не превышающее a, тогда

$bq \leq a < b(q + 1)$

и

$0 \leq a - bq < b$.

Полагая $a - bq = r$, получаем представление $a = bq + r$.

Доказательство единственности. Допустим, что существует другое представление

$a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$.

Тогда $bq + r = bq_1 + r_1$, $r - r_1 = b(q_1 - q)$, следовательно, $(r - r_1) \vdots b$. Так как $|r - r_1| < b$, то $(r - r_1) \vdots b$ возможно лишь при $r - r_1 = 0$. В таком случае и $q = q_1$. Единственность доказана.

Признаки делимости суммы, разности и произведения натуральных и целых чисел

Ниже приводятся свойства делимости.
Доказать самостоятельно.

1. Достаточное условие делимости суммы.
   Если каждое из слагаемых делится на некоторое число, то и сумма разделится на это число.
2. Необходимое условие делимости суммы.
   Сумма нескольких слагаемых делится на данное число в том и только в том случае, когда сумма остатков, получаемых при делении слагаемых на данное число, кратна этому числу.
3. Если только одно слагаемое не делится на данное число, то и сумма всех слагаемых на это число не разделится.
4. Достаточное условие делимости разности.
   Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность разделится на это число.
5. Необходимое условие делимости разности.
   разность разделится на данное число в том и только в том случае, когда равны остатки, получаемые при делении на это число уменьшаемого и вычитаемого.
6. Для делимости произведения сомножителей на данное число достаточно, чтобы на это число делился хотя бы один сомножитель.
7. Произведение делится на данное число тогда и только тогда, когда произведение остатков, получаемых при делении сомножителей на данное число, кратно этому числу.
8. При делении натурального числа $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ на натуральное число b получается остаток , такой же, как и при делении на число b суммы $s = a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \ldots + a_1 r_1 + a_0$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – остатки от деления на b разрядных единиц (для десятичной системы счисления – $10, 10^2, \ldots, 10^n$).

Делители чисел

Если a, b – натуральные числа и a ⁝ b, то число b называют делителем числа a.

1. Всякое натуральное число a, отличное от 1, имеет не менее двух различных делителей.
2. Всякое натуральное число имеет конечное множество делителей.

Общим делителем (ОД) данных натуральных чисел называется число, являющееся делителем каждого из этих чисел.

1. Любые два или несколько натуральных чисел имеют конечное множество общих делителей.
2. Среди общих делителей данных натуральных чисел имеется наименьший (1) и наибольший (НОД).

Два числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен единице, и взаимно составными, если их наибольший общий делитель не равен единице.

Алгоритм Евклида

В III в. до н.э. греческий математик Евклид в своих знаменитых «Началах» указывает следующий прием отыскания наибольшего общего делителя двух чисел: для получения наибольшего общего делителя чисел a и b (a > b) надо производить последовательные деления:

$a = b \cdot q_1 + r_1$,
$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$,
$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$,
$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$
и т.д. до получения остатка, равного нулю. Последний из остатков, отличных от 0, и будет наибольшим общим делителем чисел a и b. Если уже первый остаток равен 0, то число a ⋮ b и НОД(a, b) = b.

Пример. Найти НОД(1349, 119).

$1349 = 119 \cdot 11+40$

$119 = 40 \cdot 2+39$

$40 = 39 \cdot 1 + 1$

$39 = 1 \cdot 39+0.$

Последний ненулевой остаток равен 1, следовательно, НОД(1349, 119) (такие числа называются взаимно простыми).

Основные свойства НОД

1. Если умножить каждое из двух данных чисел a, b на одно и то же число n, то на это число умножится и НОД(a, b).
2. Если разделить каждое из двух данных чисел a, b на одно и то же число n (когда деление возможно), то на это число разделится и НОД(a, b).
3. Если НОД двух данных чисел a, b делится на некоторое число n, то и каждое из этих чисел делится на n.
4. Частные от деления данных чисел a, b на их НОД суть числа взаимно простые, и обратно, если частные от деления a, b на некоторое число c взаимно простые, то c есть НОД(a, b).
5. Чтобы найти НОД(a_1, a_2, a_3, …, a_{n-1}, a_n), находят последовательно НОД(a_1, a_2) = d_1, НОД(d_1, a_3) = d_2, НОД(d_2, a_4) = d_3, …, НОД(d_{n-2}, a_n) = d_{n-1}, d_{n-1} и будет искомым НОД(a_1, a_2, a_3, …, a_{n-1}, a_n).

Кратные чисел и их свойства

Число a называют кратным числа b, если a ⋮ b.

Всякое число, кратное двум, называют четным числом, а не кратное двум – нечетным.

1. Каждое число имеет бесконечно много кратных, среди которых есть наименьшее, но нет наибольшего.

Общим кратным двух (и большего количества) чисел называют число, кратное каждому из этих чисел.

2. У всяких двух или нескольких натуральных чисел есть бесконечно много общих кратных, среди которых нет наибольшего, но есть только одно наименьшее, оно называется наименьшим общим кратным (НОК).
3. Наименьшее общее кратное двух чисел равно частному от деления произведения этих чисел на их наибольший общий делитель:

$$\text{НОК}(a,b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}.$$

4. Каждое общее кратное двух чисел делится на их наименьшее общее кратное.
5. Произведение наименьшего общего кратного двух чисел на их наибольший общий делитель равно произведению этих чисел:
6. $\text{НОК}(a,b) \cdot \text{НОД}(a,b) = ab$.
7. Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.
8. Частные от деления наименьшего общего кратного двух чисел на каждое из этих чисел являются взаимно простыми.
9. Если умножить (или разделить) каждое из данных чисел на одно и то же число, то на это число умножится (разделится) и их наименьшее кратное.
10. Чтобы найти НОК(a_1, a_2, a_3, …, a_{n-1}, a_n), находят последовательно НОК(a_1, a_2) = m_1, НОК(m_1, a_3) = m_2, НОД(m_2, a_4) = m_3, …, НОК(m_{n-2}, a_n) = m_{n-1}, m_{n-1} и будет искомым НОК(a_1, a_2, a_3, …, a_{n-1}, a_n).
11. Чтобы найти наибольший общий делитель данных натуральных чисел, достаточно: 1) представить каждое данное число в каноническом виде; 2) взять произведение общих простых множителей, находящихся в данных числах, причем с наименьшими показателями из имеющихся в разложениях.
12. Чтобы найти наименьшее общее кратное данных натуральных чисел, достаточно: 1) представить каждое данное число в каноническом виде; 2) взять произведение всех простых множителей, находящихся в данных числах, причем с наибольшими показателями из имеющихся в разложении.

   Пример. $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$,

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$,

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$,

НОД(396, 168, 180) = $2^2 \cdot 3 = 12$,

НОК(396, 168, 180) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$.

Простые и составные числа

Всякое натуральное число $p > 1$, не имеющее других натуральных делителей, кроме 1 и p, называется простым. Натуральные числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными. Число 1 не считается ни простым, ни составным.

Рассмотрим основные теоремы о простых и составных числах.

1. Если $p_1 > 1$ является наименьшим делителем целого числа $n > 1$, то оно простое.

Действительно, иначе p_1 имело бы такой делитель a, что $1 < a < p_1$, и из $n \vdots p_1$ и $p_1 \vdots a$ следовало бы, что $n \vdots a$, $a < p_1$, но это противоречит определению числа p_1.

2. Натуральное число a и простое число p либо взаимно простые, либо a делится на p.

В самом деле, единственные делители p = это 1 и p, поэтому НОД a и p может равняться либо 1, либо p. В последнем случае a кратно p.

3. Если произведение ab делится на простое число p, то по меньшей мере один из сомножителей делится на p.

Действительно, если a не кратно p, то согласно предыдущему свойству НОД(a, p) = 1. Но в таком случае из делимости ab на p в силу свойств НОД следует, что b делится на p.

Это свойство методом индукции можно распространить на произведение трех и более множителей.

Если все сомножители произведения, кратного p, простые числа, то по меньшей мере один из сомножителей должен совпадать с p.

Основная теорема арифметики

Всякое натуральное число a, кроме 1, может быть представлено как произведение простых множителей

$a = p_1 p_2 \ldots p_n$, $n \geq 1$,

причем единственным образом (с точностью до перестановки множителей).

Такое представление называется разложением числа на простые множители (факторизацией).

Докажем существование такого разложения.

В силу первой теоремы о свойствах составных чисел число а имеет в качестве наименьшего делителя, отличного от 1, простое число p_1, так что $a = p_1a_1$. Если $a_1 > 1$ и p_2 – его наименьший простой делитель, то $a_1 = p_2a_2$, отсюда $a = p_1p_2a_2$. Этот процесс можно продолжить, пока не придем к $a_n = 1$. Итак,

$a = p_1p_2\ldots p_n$.

Единственность такого разложения можно доказать, основываясь на третьем свойстве составных и простых чисел.

Допустим, что существуют два разложения числа а на простые множители

$p_1p_2\ldots p_n = q_1q_2\ldots q_s$.

Поскольку каждое pi делит произведение чисел q, то согласно указанному свойству можно утверждать, что p_i равно некоторому q_j и что, наоборот, каждое q равно некоторому p. Таким образом, оба разложения содержат одинаковые множители. Единственное их отличие может состоять лишь в том, что некоторое простое p встречается в одной части равенства большее число раз, чем в другой. Однако после сокращения на p достаточное число раз получилось бы равенство с числом p в одной части равенства и без него в другой, а это противоречило бы свойству 3. Теорема доказана.

Среди простых сомножителей в разложении числа могут быть и равные. Если обозначить различные из них через p_i и допустить, что они встречаются α_i раз, то получается каноническое представление натурального числа:

$a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$.

Каноническое разложение показывает, что все делители числа a исчерпываются числами вида $d = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$, где все $0 \le \beta_i \le \alpha_i$.

Решето Эратосфена

Евклид доказал бесконечность множества простых чисел, но вопрос о том, является ли данное число простым или составным, решается для больших чисел со значительным трудом.

Наименьший простой делитель числа a не может быть больше $\sqrt{a}$. В самом деле, если p_1 – наименьший простой делитель a, то $a= p_1a_1$, причем $a_1 > p_1$. Поэтому $a = p_1a_1 \ge p_1^2$, откуда $p_1 \le \sqrt{a}$.

Этот факт используется при составлении таблицы простых чисел $\le$ N способом, который был указан Эратосфеном.

Выписывают все натуральные числа от 2 до N. Из них вычеркивают каждое второе число полсе простого числа 2. Первым незачеркнутым числом остается простое число 3. Теперь вычеркивают каждое третье число после 3, причем считают и те числа, которые зачеркнуты ранее, и т.д.

После вычеркивания всех чисел, кратных простому p_n, первое следующее за p_n незачеркнутое число p_{n+1} является простым, иначе оно имело бы простой делитель $\le p_n$, но все кратные простым числам $\le p_n$ уже зачеркнуты.

Простыми являются также незачеркрутые числа $\le p_{n+1}^2$, так как составные числа $< p_{n+1}^2$ имеют простой делитель $\le p_n$ и уже ранее вычеркнуты из таблицы. Поэтому вычеркивание кратных простому p_{n+1} следует начинать с p_{n+1}^2 и составление таблицы простых чисел $\le N$ можно считать законченным, как только найдено простое число $> \sqrt{N}$.

Пример. N = 50.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Метод выделения множителей Ферма

Этот метод используется для определения простоты числа.

Целое нечетное целое число n > 1 не является простым тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные целые числа p и q, что $p^2 = n + q^2$, $p - q > 1$.

Последовательно придавая q значения 1, 2, …, (n – 1)/2, находим значение выражения $n + q^2$. Как только получен полный квадрат, то можно утверждать, что n – составное число. В противном случае число n является простым числом.

Пример. Проверить, является ли число 559 простым.

Возможные значения q – натуральные числа от 1 до (n – 1)/2 = 279. Придаем q последовательные значения. При q + 15 получаем полный квадрат: $559 + 15^2 = 784 = 28^2$. Следовательно, число 559 является составным: $559 = 28^2 - 15^2 = (28-15)(28+15) = 13{\cdot}43$.

Таблица простых чисел до 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521

523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Задачи по теме «Теория делимости»

Общие для всех вариантов задачи

1. Для факториалов чисел, образованных первыми двумя и последними двумя цифрами номера зачетной книжки, найти их канонические разложения на произведения простых множителей.

2. Для заданных чисел a и b найти:
   1) каноническое разложение на простые множители;
   2) наибольший общий делитель (НОД);
   3) наименьшее общее кратное (НОК);
   4) НОД по алгоритму Евклида.

Вариант	a	b
0	120	144
1	275	180
2	372	156
3	70	112
4	75	114
5	544	720
6	108	105
7	144	174
8	192	102
9	216	270

Вариант 0

3. Доказать, что сумма двух нечетных чисел есть число четное, а произведение нечетных чисел есть число нечетное.
4. Существует ли такое натуральное число, которое при делении на 12 дает в остатке 6, а при делении на 18 дает остаток 7?
5. Если натуральное число не кратно 3, то его квадрат дает при делении на 3 в остатке 1. Доказать.
6. Может ли произведение нескольких сомножителей делиться на число a, если ни один из сомножителей на a не делится?
7. Доказать, что в десятичной системе разность между любым данным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, кратна 9. Обобщить эту теорему на любую позиционную систему.
8. Найти признак делимости в позиционной системе с основанием t на число t–1.

Вариант 1

3. Доказать, что всякое число, кратное 4, можно представить в виде суммы двух последовательных нечетных чисел.
4. Найти остаток от деления натурального числа на 96, если известно, что это число делится на 12 без остатка, а полученное при этом частное при делении не 8 дает остаток 2.
5. Доказать, что числа $N_1 = 3^{2n+2} + 3^{6n} – 2^{n+1} – 1$ и $N_2 = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ кратны 7 при всяком натуральном n.
6. Доказать, что разность четвертых степеней любых натуральных чисел, не кратных 5, делится на 5.
7. Доказать, что 10 является делителем числа $a = n^5 - n$ при всяком натуральном n.
8. Найти натуральные числа a, b, если их НОД = 24, а НОК = 2496.

Вариант 2

3. Показать, что сумма трех последовательных целых неотрицательных чисел кратна 3, а сумма пяти последовательных целых неотрицательных чисел кратна 5 и т.д., сумма 2n+1 последовательных чисел кратна 2n+1.
4. Если r есть остаток от деления a на b, то при делении степени a^n на b получится тот же остаток, что и при делении r^n на b. Доказать.
5. Ни одно из слагаемых не делится на число n, а сумма этих слагаемых делится на n; при каком условии это возможно?
6. К числу 6157 приписать слева и справа по одной цифре, чтобы образовалось число, делящееся на 5 и на 9. Сколько решений имеет задача?

7. Найти остатки от деления:
   числа 73 298 602 на 8, на 9, на 10;
   числа $(23\ 041\ 100)_6$ на 2, на 3, на 4, на 5, на 6.
8. При каком условии при делении с остатком можно делитель и частное поменять местами?

Вариант 3

3. Какие числа при делении на a дают частное, равное остатку?
4. Найти остатки от деления 23^n на 7, где n – произвольное натуральное число.
5. Разность чисел кратна 17, а уменьшаемое при делении на 17 дает остаток 1. Какой остаток получится при делении на 17 вычитаемого?
6. Может ли число быть делителем суммы некоторых чисел, не являясь делителем слагаемых?
7. Найти 2 числа, если их произведение 12600 и НОК 6300.
8. Даны числа: 420, 630 и 1155; найти делители каждого из этих чисел, затем выписать их общие делители и наибольший общий делитель.

Вариант 4

3. При делении a на b получился остаток r, равный частному q. Определить частное и остаток от деления a на q (a и b – целые неотрицательные).
4. При делении натуральных чисел a и b на 7 получились остатки 4 и 3 соответственно. Какие остатки получатся при делении на 7 следующих чисел: $a+b$, $a-b$, ab, $2a+3b$, a^2, b^2, a^3, b^3, a^2+b^2?
5. Доказать, что $(a^6 - b^6) \vdots 9$, если a, b – натуральные числа, не кратные 3.
6. Произведение abc кратно 12, а числа a и b при делении на 12 дают остатки 3 и 5; показать, что c кратно 4.
7. Если a – делитель числа b, а b–делитель числа c, то a будет делителем c. Доказать.
8. Построить график функции y = НОД(2; x).

Вариант 5

3. Разбить множество целых неотрицательных чисел на классы, так чтобы в каждом классе находились только такие числа, которые дают равные остатки при делении их на 8.
4. Найти остатки от деления на 9 чисел 65^{6k}, 65^{6k+1}, 65^{6k+2}, 65^{6k+3}, 65^{6k+4}, 65^{6k+5}.
5. Найти наименьшее число, которое при делении на 29 дает в остатке 5, а при делении на 31 дает остаток 28.

6. Доказать, что сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3 в том и только в том случае, когда каждое из этих чисел кратно 3.
7. Если число является общим делителем двух чисел, то оно будет делителем суммы и разности этих чисел. Доказать.
8. Построить график функции y = НОД(x, y), где x принимает нечетные значения, а y – любые.

Вариант 6

3. Доказать, что всякое натуральное число можно представить в одном из следующих видов: 5k, 5k+1, 5k–1, 5k+2, 5k–2, k – целое неотрицательное.
4. Показать, что всякая четная степень трех при делении на 4 дает в остатке 1.
5. Может ли разделиться на 5 сумма нескольких натуральных чисел, если ни одно из этих чисел не делится на 5?
6. Найти признаки делимости в десятичной системе на 2, на 5, на 9, на 6.
7. Доказать, что 7 является делителем числа $a = n^7 - n$ при всяком натуральном n.
8. На какое наименьшее число надо умножить 217, чтобы полученное произведение было кратно 5, 7 и 9.

Вариант 7

3. Показать, что всякое нечетное число можно представить в виде 4k–1 или 4k+1 , где k – целое неотрицательное.
4. Если число не кратно 5, то его квадрат представим в виде 5k–1 или 5k+1. Доказать.
5. При делении чисел a, b и c на 15 получились соответственно остатки 4, 7 и 10; разделится ли на 15 произведение этих чисел?
6. Доказать, что 7 есть делитель числа $a = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ при всяком натуральном n.
7. Найти натуральные числа, если разность между их НОК и НОД равна 18.
8. Доказать, что куб числа, не кратного 7, имеет вид 7m–1 или 7m+1, m – целое неотрицательное число.

Вариант 8

3. Сколько чисел, дающих нечетные остатки при делении на 6, находятся в промежутке от 100 до 1000?
4. Если делимое есть произведение нескольких сомножителей, то остаток от деления не изменится при увеличении или уменьшении одного из множителей на число, кратное делителя. Доказать.
5. Натуральные числа a и 6 не кратны 6, а их разность кратна 6; при каком условии это

возможно?

6. Найти трехзначные числа, удовлетворяющие следующим условиям:
   1) число делится на 3 и на 5;
   2) первая и последняя цифры числа одинаковы;
   3) число записано в десятичной системе.
7. Найти признаки делимости в шестеричной системе на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6.
8. Доказать, что сумма квадратов двух чисел может быть кратной 7 только в том случае, если каждое из них кратно 7.

Вариант 9

3. При делении некоторого числа на 8 получился остаток 4 и частное, кратное 3. Найти остаток от деления этого числа на 24.
4. При каких условиях сумма трех слагаемых разделится на 15, если известно, что первое слагаемое при делении на 15 дает остаток 7, а второе–8.
5. Найти остаток от деления на 9 числа
   $a = 23457^2 + 34533^3 + 38997 \cdot 583724$.
6. Найти цифры x и y в числе $\overline{42x4y}$, если оно делится на 8 и на 9.
7. Найти признаки делимости в двенадцатеричной системе на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 10, на 11 и на 12.
8. Четыре спутника Юпитера совершают полный оборот за 42, 85, 172 и 400 часов. Через сколько часов спутники будут находиться в том же положении, в котором они находятся в данный момент?

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Индукция (лат. inductio – наведение) – переход от общего к частному. Метод математической индукции применяется в различных областях математики для доказательства формул, неравенств, теорем и, в общем случае, для доказательства истинности утверждений вида A(n), зависящих от натурального числа n, для всех значений $n \geq n_0$.

Применение метода основано на теореме – принципе математической индукции.

Теорема. Утверждение A(n) является истинным для всех n, если выполнены следующие два условия:

1. Утверждение A(1) истинно (это условие называют базисом индукции).
2. Для любого натурального k из предположения, что утверждения A(1), A(2), ..., A(k) истинны следует, что A(k+1) также истинно (это условие называют индуктивным переходом). Предположение об истинности условий A(1), A(2), ..., A(k) называется предположением индукции.

Иногда базис индукции заменяют на предположение об истинности A(n0), где n0 – фиксированное число. Кроме того, предположением индукции можно считать истинность A(k), а индуктивным переходом – переход «A(k) истинно $\Rightarrow$ истинно A(k+1)».

Примеры доказательств арифметических тождеств

Задача 1. Вычислить сумму первых n нечетных чисел.

Решение. Обозначим искомую сумму S_n, т.е.

$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

Имеем

$S_1 = 1 = 1^2$, $S_2 = 4 = 2^2$, $S_3 = 9 = 3^2$, $S_4 = 16 = 4^2$, $S_5 = 25 = 5^2$.

Можно предположить, что $S_n = n^2$.

Докажем, что гипотеза справедлива. При n = 1 гипотеза верна. Предположим, что она верна для n = k, т.е. $S_k = k^2$. Докажем, что она верна и для n = k + 1, т.е. $S_{k+1} = (k+1)^2$.

$S_{k+1} = S_k + (2k+1) = k^2 + 2k+1 = (k+1)^2$.

Гипотеза доказана.

Задача 2. Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Обозначим искомую сумму Sn = 1 + 2 + 3 + … + n.

При n = 1 гипотеза верна. Пусть $S_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Тогда $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Гипотеза доказана.

Задача 3. Показать, что сумма квадратов n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Обозначим $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

При n = 1 формула верна: $S_1 = 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Предположим, что $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тогда

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

(правильность вычислений проверить самостоятельно).

Задача 4. Доказать, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

При n = 2 формула верна: $S_2 = 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$.

Если $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, то

$$S_{n+1} = S_n + n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(правильность вычислений проверить самостоятельно).

Задача 5. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Сумма $1^3 + 2^3 + 3^3$ делится на 9.

Пусть сумма $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$, где k – некоторое натуральное число, делится на 9. Тогда сумма

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$
$$= \left[k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right] + 9\left(k^2 + 3k + 3\right)$$

Представляет собой сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 9, поэтому тоже делится на 9. Гипотеза доказана.

Задачи по теме «Математическая индукция»

Задача 1. Доказать утверждение методом математической индукции (n – натуральное число)

0. Найти u_n, если $u_1 = 1$ и $u_k = u_{k-1} + 3$.
1. Найти сумму $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1}$.
2. Доказать, что $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
3. Доказать, что сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
4. Доказать, что $1 + x + x^2 + \ldots x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ (x \neq 1)$.
5. Доказать, что $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
6. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
7. Доказать, что $\frac{1^2}{1\cdot3} + \frac{2^2}{3\cdot5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.
8. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \frac{1}{7\cdot10} \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.
9. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

Задача 2. Доказать утверждение методом математической индукции (n – натуральное число)

0. $n^3 + 5n \,\vdots\, 6$ (кратно 6).
1. Сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.
2. $4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9$
3. $11^{n+2} + 12^{2n+1} \,\vdots\, 133\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$
4. $3^{2n} - 1 \,\vdots\, 2^{n+2}\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$
5. $3^{2n} - 1$ не делится на 2^{n+3}.
6. Число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.
7. Число, записываемое 3^n единицами, не делится на 3^{n+1}.
8. $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \,\vdots\, 19$ при $n \geq 0$.

9. $\frac{\mathrm{n}}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{\mathrm{n}^3}{6}$ - целое число при n $\geq$ 0.

Задача 3. Доказать утверждение методом математической индукции (n – натуральное число)

0. Доказать: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!$
1. Доказать: $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+...+(n-1)\cdot n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.
2. Доказать: $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
3. Дана прогрессия: 1, 3, 5, ..., 2n-1. Доказать: $S_n = n^2$.
4. Доказать: $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
5. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.
6. Доказать, что $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.
7. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.
8. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.
9. Доказать, что если $v_0=2$, $v_1=3$ и для всякого натурального k имеет место соотношение $v_{k+1}=3v_k-2v_{k-1}$, то $v_n=2^n+1$.

Задача 4. Для последовательности Фибоначчи ($a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$) доказать методом математической индукции, что:

0. $a_1+a_2+...+a_n=a_{n+2}-1$
1. $a_1+a_3+...+a_{2n-1}=a_{2n}$
2. $a_2+a_4+...+a_{2n}=a_{2n+1}-1$
3. $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=a_na_{n+1}$
4. $a_{2n}=a_n(a_{n-1}+a_{n+1})$
5. $a_{2n}=a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$
6. $a_{2n-1}=a_n^2+a_{n-1}^2$
7. $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}+(-1)^{n-1}$
8. $a_1+a_2+...+a_n=a_{n+2}-1$
9. $a_2+a_4+...+a_{2n}=a_{2n+1}-1$

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Расположенные друг за другом n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются числовой последовательностью длины n. Элементы числовой последовательности называются ее членами.

Числовую последовательность можно рассматривать как отображение части (первых n чисел) множества натуральных чисел N на множество действительных чисел R. Если рассматривать отображение всего множества натуральных чисел N на множество R, то получим бесконечную числовую последовательность

Числовую последовательность можно задавать:

1) с помощью формулы общего члена последовательности $a_k = f(k)$, где $f(k)$ – некоторое выражение, $k = 1, 2, \ldots, n$ для конечной числовой последовательности и $k \in N$ – для бесконечной последовательности;
2) табличным способом;
3) графическим способом;
4) рекуррентно, т.е. с помощью формулы, выражающей очередной член прогрессии через один или несколько предыдущих. Например, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 3)$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;
5) с помощью словесного описания способа получения членов последовательности, например, последовательность двузначных чисел, кратных 5.

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – конечная или бесконечная числовая последовательность, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называемым разностью арифметической прогрессии, т.е. $a_n = a_{n-1} + d$.

При $d > 0$ прогрессия является возрастающей, при $d < 0$ – убывающей.

Частичная сумма (сумма первых n членов) $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Формула суммы первых n членов $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Задание. Доказать две последние формулы методом математической индукции.

Так как арифметическая прогрессия однозначно определяется своим первым членом и разностью, то многие задачи на прогрессию решаются составлением системы уравнений относительно a_1 и d.

Формула n-го члена арифметической прогрессии связывает четыре величины: a_1, a_n, d и n. Зная три из них, легко можно найти четвертую.

Задание. Вывести соответствующие формулы.

Характеристические свойства арифметической прогрессии

1. Каждый член a_k, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов, а также равен среднему арифметическому членов, равноудаленных от него:
   $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \dfrac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}$. (*Доказать*)
2. Для всякой арифметической прогрессии верно равенство
   $a_m + a_k = a_p + a_s$, если $m + k = p + s$.
   Если же у прогрессии конечное число членов, то сумма любых двух членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т.е.
   $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$. (*Доказать*)

Примеры задач на арифметическую прогрессию

Задача 1. Найти сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, если известно, что пятый член равен 10, а десятый равен 30.

Решение.

$$a_5 = a_1 + 4d = 10$$
$$a_{10} = a_1 + 9d = 30$$
$$\begin{cases} a_1 + 4d = 10 \\ a_1 + 9d = 30 \end{cases}$$
$$d = 4, a1 = -6,$$
$$S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = \frac{-12 + 56}{2} \cdot 15 = 330.$$

Задача 2. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 1.

Решение. Наименьшее такое число равно 106, наибольшее 995. Требуется вычислить сумму арифметической прогрессии с разностью 7, первым членом 106, последним 995. Общее число членов арифметической прогрессии определим из выражения $a_n = a_1 + (n-1)d$. Получим уравнение на n

$995 = 106 + 7(n - 1)$, откуда $n = 128$.

Искомая сумма $S_{128} = \dfrac{106 + 995}{2} \cdot 128 = 70464.$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность неравных нулю чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему, умноженному на одно и то же число q, называемое знаменателем геометрической прогрессии, т.е. $b_n = b_{n-1} \cdot q$. Из определения следует, что $q \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Частичная сумма прогрессии (сумма первых n членов) $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы первых n членов $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ при $q \neq 0$ и $S_n = nb_1$ при $q = 0$.

Задание. Доказать формулы методом математической индукции.

Так как геометрическая прогрессия однозначно определяется своим первым членом и знаменателем, то многие задачи на прогрессию решаются составлением системы уравнений относительно b_1 и q.

Формула n-го члена геометрической прогрессии связывает четыре величины: b_1, b_n, q и n. Зная три из них, легко можно найти четвертую.

Задание. Вывести соответствующие формулы.

Для геометрической прогрессии ($q \neq 0$) характерна монотонность:

- прогрессия является возрастающей, если выполнено дно из следующих условий: а) $b_1 > 0$ и $q > 1$; 2) $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$;
- прогрессия является убывающей, если выполнено дно из следующих условий: а) $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$; 2) $b_1 < 0$ и $q > 1$.

При $q < 0$ геометрическая прогрессия является знакопеременной: члены с нечетными номерами имеют такой же знак, что и b_1, а члены с четными номерами – противоположный ему.

Характеристические свойства геометрической прогрессии

1. Каждый член, начиная со второго, связан с предыдущим и последующим ему членами зависимостью (и даже с членами, равноудаленными от него) $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1} = b_{k-m} \cdot b_{k+m}$.. (*Доказать*)
2. Во всякой геометрической прогрессии $b_m \cdot b_k = b_p \cdot b_s$, если $m + k = p + s$. В частности, если у прогрессии конечное число членов, то произведение двух членов, равноудаленных от ее концов, равно произведению крайних членов, т.е. $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$. (*Доказать*)

Примеры задач на геометрическую прогрессию

Задача 1. Найти 2030-ый член геометрической прогрессии, если 1990-ый и 2010-ый равны соответственно 8 и 2.

Решение. Заметим, что 2010 = 1990 + 20 = 2030 – 20. Используя первое характеристическое свойство геометрической прогрессии, получим

$$b_{2010}^2 = b_{1990} \cdot b_{2030}, \; b_{2030} = \frac{b_{2010}^2}{b_{1990}} = \frac{2^2}{8} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2. Восьмой член геометрической прогрессии равен 10. Найти произведение первых пятнадцати членов прогрессии.

Решение. Вновь воспользуемся характеристическим свойством прогрессии. Получим:

$$b_8^2 = b_1 \cdot b_{15} = b_2 \cdot b_{14} = ... = b_7 \cdot b_9,$$

$$b_1 b_2 ... b_{15} = (b_1 \cdot b_{15})(b_2 \cdot b_{14})...(b_7 \cdot b_9) b_8 = b_8^{15} = 10^{15}.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Геометрическая прогрессия, у которой знаменатель по абсолютной величине меньше единицы ($|q| < 1$), называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называю предел суммы первых n ее членов при бесконечном возрастании n:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Эту формулу легко получить и не прибегая к понятию предела:

$$S = b_1 + b_1 q + b1q^2 + b_1 q^3 + ... = b_1 + q(b_1 + b_1 q + b1q^2 + b_1 q^3 + ...) = b_1 + qS, \text{ т.е. } S = b_1 + qS,$$

откуда и следует приведенная выше формула.

Возвратные последовательности. Рекуррентные уравнения

Возвратная последовательность порядка k – последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющих при всех n условию

$$x_{n+k} = \alpha_1 x_{n+k-1} + \alpha_2 x_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k x_n,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – фиксированные числа (не зависящие от n). Приведенное соотношение называется однородным линейным рекуррентным уравнением порядка k и позволяет найти (n + k)-ый член, если известны k предшествующих членов.

Чтобы последовательность была определена однозначно, необходимо задать значения первых k ее членов (начальные условия):

$x_1 = \mu_1$, $x_2 = \mu_2$, …, $x_k = \mu_k$.

Рекуррентное условие линейно по x, поэтому сумма двух (и большего количества) числовых последовательностей, удовлетворяющих этому условию, тоже будет удовлетворять ему.

Для решения рекуррентного уравнения составляется соответствующее ему алгебраическое уравнение степени k:

$\lambda^k - \alpha_1\lambda^{k-1} - \alpha_2\lambda^{k-2} - \ldots - \alpha_k = 0$.

Это уравнение называется характеристическим. При k = 2 получаем квадратное уравнение, при k = 3 – кубическое и т.д.

Имеют место теорема, связывающая решения характеристического уравнения и выражение для общего члена рекуррентно заданной последовательности.

Теорема. Если характеристическое уравнение имеет k различных корней λ1, λ1, …, λk, то общее решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$, где C_1, C_2, …, C_k – произвольные постоянные. Для любых начальных условий существуют однозначно определенные константы C_1, C_2, …, C_k такие, что последовательность x_n удовлетворяет как самому рекуррентному уравнению, так и начальным условиям.

Задача 1. Найти общее решение рекуррентного уравнения $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ (n > 3).

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 = \lambda + 6$. Его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Общее решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = C_1\cdot(-2)^n + C_2\cdot 3^n$, C_1, C_2 – произвольные числа.

Задача 2. Последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … определяется уравнением $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ ($n \geq 3$) и начальными условиями $x_1 = x_2 = 1$. Применяя теорему 1, получим формулу общего члена последовательности Фибоначчи:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Задача 3. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_n = 2x_{n-1} - 5x_{n-2}$ ($n \geq 3$) и начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 = 2\lambda - 5$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, $i^2 = -1$. Применяя теорему 1, получим формулу общего члена последовательности $x_n = 0{,}1\{(-1 - 3i)(1 + 2i)^n + (-1 + 3i)(1 - 2i)^n\}$.

Задача 4. Решить рекуррентное уравнение $x_n = 6x_{n-1} – 9x_{n-2}$ ($n \geq 3$) с начальными условиями x1 = 1, x2 = 2.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 – 6\lambda + 9 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 3$ (кратные). В этом случае общее решение имеет вид $x_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$ (появление множителя n во втором слагаемом обусловлено кратностью корня характеристического уравнения). Используя начальные условия, получим $C_1 = 4/9$, $C_2 = –1/9$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общий член последовательности $x_n = 2x_{n-1}$ ($n \geq 2$), $x_1 = 1$.
2. Найти общий член последовательности $x_n = qx_{n-1}$ ($n \geq 2$), $x_1 = b$.
3. Найти общий член последовательности $x_n = 2x_{n-1} – x_{n-2}$ ($n \geq 3$), $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
4. Найти общий член последовательности $x_n = 2x_{n-1} – x_{n-2}$ ($n \geq 3$), $x_1 = a$, $x_2 = a + d$.
5. Найти общий член последовательности $x_n = 3x_{n-1} – 3x_{n-2} + x_{n-3}$ ($n \geq 4$), $x_1 = 1$, $x_2 =4$, $x_3 = 9$.

Тест про прогрессии

1. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой a3 = 7, a6 = 13, a8 = 17?
2. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой a4 = 8, a9 = –7, a12 = -17?
3. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой a3 = –5, a8 = 5,a11 = 12?
4. Является ли число 4 членом арифметической прогрессии, первые два члена которой соответственно равны –8 и –5?
5. Существует ли геометрическая прогрессия, у которой b2 = 4; b5 = 12; b8 = 32?
6. Является ли число 1/81 членом геометрической прогрессии 3; 1; ...?
7. Является ли число 64 членом геометрической прогрессии 0,5; 1; ...?
8. Сумма третьего, шестого и девятого членов последовательности с общим членом $a_n = n^{-2}$ равна
   7 49/324 17 7/9 49/81
9. Сумма 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + … +99 – 100 равна
   50 -50 100 -100 99
10. Номер члена прогрессии 1, 1 / 4, 1 / 16 … величиной 1/1024 равен
    6 4 5 7 8
11. Восьмой член прогрессии 0,0625, 0,25, 1, … равен
    256 512 1024 2048 4096

12. В арифметической прогрессии разность 0,5 и шестой член 25. Семнадцатый член прогрессии равен
    30 29,5 31 30,5 31,5
13. Номер члена геометрической прогрессии -1, 2, -4, …, равного 128, равен
    5 6 7 8 9
14. Сумма 1 – 1 /3 + 1/9 – 1/27+ … равна
    4 / 3 3/2 3 / 4 2/3 1 / 2
15. Сумма всех четных чисел от 30 до 80 равна
    1430 1375 1485 1320 1410
16. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 0,5 равна 0,75, если ее первый член равен
    0,25 0,125 0,5 0,4 0,375
17. В арифметической прогрессии сумма восьмого и двадцатого членов равна 30. Четырнадцатый член прогрессии равен
    30 14 12 10 15
18. Произведение всех значений x, при которых числа 4, $2x^2$, $0,75x^4$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, равно
    таких x нет 4 -4 16/3 -16/3
19. Чтобы сумма первых членов прогрессии 21, 15, 9, … равнялась нулю, необходимо их взять в количестве
    7 6 8 9 5
20. Число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072, равно
    5 6 8 10 12
21. Разность между 31-м и 30-м членами последовательности, общий член которой задается формулой $a_n = n^2 – 2n + 39$, равна
    59 -61 122 118 58
22. Сумма бесконечно убывающей прогрессии с первым членом 2 равна 5. Сумма прогрессии, составленной из квадратов членов исходной прогрессии, равна
    4,75 4,25 5,5 6,75 6,25

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 0

1. Первый, второй и четвертый члены возрастающей арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.
2. Три положительных числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, образуют арифметическую прогрессию.

Найдите все возможные значения q.

3. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии в 2 раза меньше суммы последующих трех ее членов. Найдите второй член этой прогрессии, если восьмой член равен 38.
4. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если второе из них уменьшить на 1, а первое и третье оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия, первый член которой совпадает со знаменателем. Найдите разность данной арифметической прогрессии.

Вариант 1

1. Квадраты первого, второго и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии, все члены которой положительны, образуют геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.
2. Три различных числа a, b и c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа c + a,a + b, b + c образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
3. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти ее членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 26.
4. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 30. Известно, что если первое число оставить без изменения, а от второго и третьего отнять соответственно 4 и 5, то образуется геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

Вариант 2

1. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если первое число увеличить на 1, второе число на 2, а третье уменьшить на 1, то получится возрастающая арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.
2. Три различных числа a, b и c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа a + b, b + c,c + a образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
3. Сумма второго, четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно 120. Найдите первый член прогрессии.
4. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам прибавить соответственно 1,1 и 4, то они образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

Вариант 3

1. Три числа, сумма которых равна 21, образуют геометрическую прогрессию. Если первое и второе число увеличить на 1, а третье уменьшить на 2, то получится

убывающая арифметическая прогрессия. Найдите эти числа.

2. При каком целом значении x последовательность $-x$, $x + 1$, $x - 5$ является геометрической прогрессией?
3. Составляют ли второй, четвертый и шестой члены арифметической прогрессии геометрическую прогрессию, если ее третий член равен 8, а восьмой равен 33?
4. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что их сумма равна 12, и при увеличении первого числа на 1, второго – на 2 и третьего – на 11 они составляют геометрическую прогрессию.

Вариант 4

1. Три положительных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если последнее из них уменьшить в 5 раз, а первые два оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
2. При каком целом значении x последовательность x, $x + 2$, $5x - 2$ является геометрической прогрессией?
3. Составляют ли первый, второй и шестой члены арифметической прогрессии геометрическую прогрессию, если ее третий член равен 7, а пятый равен 13?
4. Три положительных числа образуют арифметическую прогрессию с разностью d, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные значения d.

Вариант 5

1. Три положительных числа образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если от последнего из них оставить 80%, а первые два числа не изменять, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
2. Три положительных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если среднее из них увеличить в 1,5 раза, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.
3. Три числа образуют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 18. Если к первому числу прибавить 2, к третьему – 1, а второе оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа, если известно, что последнее из них меньше трех.
4. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что их сумма равна 27, и при уменьшении первого числа на 1, второго – на 3 и третьего – на 2 они составляют геометрическую прогрессию.

Вариант 6

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_n, если $b_2 – b_4 =3$ и $b_1 – b_3 = 6$.
2. Три положительных числа образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если первое из них уменьшить в 1,5 раза, а второе и третье оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель данной геометрической прогрессии.
3. Три числа образуют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 24. Если первое число оставить без изменения, из второго числа вычесть 2, а к третьему прибавить 4, то получим геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если известно, что первое из них больше трех.
4. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые делятся на 8.

Вариант 7

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_n, если $b_2 + b4 = 20/3$, $b_1 + b_3 = 20$.
2. Три числа, сумма которых равна 33, образуют убывающую арифметическую прогрессию. Если первое число оставить без изменения, второе число уменьшить на 3, а третье – на 2, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.
3. Дана возрастающая арифметическая прогрессия. Первый, второй и седьмой её члены образуют геометрическую прогрессию. Найдите, во сколько раз пятый член данной арифметической прогрессии больше первого.
4. В первый день строитель выложил 5 рядов кирпичей. В каждый следующий день он выкладывал на 2 ряда больше, чем в предыдущий день. Сколько дней работал строитель, если всего он выложил 140 рядов?

Вариант 8

1. Найдите сумму первых трех членов геометрической прогрессии, в которой $b_3 = -18$, $b_6 = 486$.
2. Три числа, сумма которых равна 18, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если первое число увеличить на 1, второе – на 2, а третье – на 7, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.
3. Дана возрастающая арифметическая прогрессия. Первый, второй и пятый её члены образуют геометрическую прогрессию. Найдите, во сколько раз четвертый член данной арифметической прогрессии больше первого.
4. Стрелок сделал 30 выстрелов в мишень. За первое попадание ему начислили 0,76 балла, а за каждое следующее попадание на 0,5 балла больше, чем за предыдущее. Сколько раз промахнулся стрелок, если он набрал 99,75 балла?

Вариант 9

1. Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, в которой b_4 = -32, b_9 = 1024.
2. Три положительных числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если наименьшее из них уменьшить втрое, наибольшее уменьшить вдвое, а среднее оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель такой геометрической прогрессии.
3. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если второе из них уменьшить на 1,5, а первое и третье оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия, первый член которой в 1,5 раза больше знаменателя. Найдите разность данной арифметической прогрессии.
4. Машина выехала из города со скоростью 40 км/ч. Каждые 20 секунд она увеличивала скорость на 5 км/ч. Какую скорость она имела через 7 минут после выезда из города?

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Представление рациональных чисел в виде конечных цепных дробей

Конечной цепной дробью называется выражение вида

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\ +\cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}\end{matrix}}}}} \; ,$$

где a_1 – целое неотрицательное число, $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – натуральные числа ($a_n \neq 1$).

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – элементы цепной дроби.

Пример. $[2; 1, 5, 8] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{8}}}$.

Теорема. Всякую конечную цепную дробь можно заменить равным ей рациональным числом.

Для этого достаточно выполнить указанные в определении цепной дроби операции с конца:

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = \frac{a_{n-1}a_n + 1}{a_n} = \frac{A_1}{a_n};$$

$$a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}} = a_{n-2} + \cfrac{1}{\left(\cfrac{A_1}{a_n}\right)} = \frac{a_{n-2}A_1 + a_n}{A_1} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Продолжая такое «свертывание» цепной дроби до конца, получим

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\right)} = \frac{a_1 A_{n-1} + A_{n-2}}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

т.е. искомое рациональное число.

Пример. $[2;1,5,8] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{8}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\left(\frac{41}{8}\right)}} = 2 + \cfrac{1}{\left(\frac{49}{41}\right)} = \frac{139}{49}.$

Следствие. Первый элемент цепной дроби является целой частью соответствующего рационального числа.

Пусть R – рациональное число:

$$R = [a_1; a_2, \ldots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots}}} = a_1 + h.$$

Число h<1 и положительное, следовательно, a1 – целая часть числа R.

Теорема. Всякое неотрицательное рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби и притом единственным образом.

Применим к дроби a/b алгоритм Евклида:

$a = bq_1 + r_1,$

$b = r_1q_2 + r_2,$

$r_1 = r_2q_3 + r_3,$

$r_2 = r_3q_4 + r_4,$

…………….

$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k,$

$r_{k-1} = r_kq_{k+1}.$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r_1}\right)},$$

$$\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)},$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} = q_k + \frac{r_k}{r_{k-1}} = q_k + \frac{1}{\left(\frac{r_{k-1}}{r_k}\right)},$$

$$\frac{r_{k-1}}{r_k} = q_{k+1} > 1.$$

Подставляя в первое равенство значение a/b из второго, затем значение r_1/r_2 из третьего и так далее, получим:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{array} + q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}}}}}} = [q_1; q_2, q_3, \ldots, q_{k+1}].$$

Данное рациональное число разложено в цепную дробь, элементами которой являются частные алгоритма Евклида.

Если число a/b – отрицательное, то обычно разлагают в цепную дробь число |a/b|, а затем перед полученной цепной дробью ставят знак минус.

Пример. Ранее мы вычисляли НОД(1349, 119).

1349 = 119·11+40

119 = 40·2+39

40 = 39·1 + 1

39 = 1·39+0.

Соответствующая цепная дробь равна $\frac{1349}{119}=11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{39}}}=[11;\ 2, 1, 39]$.

Подходящие дроби

Если у цепной дроби $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$ отбросить все элементы, следующие за a_k, то получится новая цепная дробь $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_k]$, которую называют k-ым отрезком данной цепной дроби. Рациональное число, соответствующее k-му отрезку данной цепной дроби, и представленное в виде несократимой обыкновенной дроби, называют k-ой подходящей дробью к данной цепной дроби:

$$[a_1]=\frac{P_1}{Q_1},\ [a_1;a_2]=\frac{P_2}{Q_2},\ [a_1;a_2,a_3]=\frac{P_3}{Q_3},\ ...,\ [a_1;a_2,...,a_n]=\frac{P_n}{Q_n},$$

где первая подходящая дробь – целая часть данной цепной дроби, а последняя совпадает с исходной дробью.

Пример. Для вычисленной ранее цепной дроби

$$\frac{1349}{119}=11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{39}}}=[11;\ 2, 1, 39]$$

подходящими дробями будут

$$\frac{P_1}{Q_1}=[11]=\frac{11}{1}=11;\ \frac{P_2}{Q_2}=[11;\ 2]=11+\frac{1}{2}=\frac{23}{2}=11{,}5;$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=[11;\ 2, 1]=11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{34}{3}=11{,}333...;$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=[11;\ 2, 1, 39]=11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{39}}}=\frac{1349}{119}\approx 11{,}336...$$

Свойства подходящих дробей

Приведем основные свойства подходящих дробей (без доказательства). Используются следующие обозначения:

$\frac{P_k}{Q_k}$ - k-ая подходящая дробь; q – частные алгоритма Евклида.

1. Подходящие дроби несократимы.
2. Для числителей и знаменателей подходящих дробей справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}$$
$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$$
$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

3. Между числителями и знаменателями двух подряд идущих смежных дробей имеют место соотношения

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k$$
$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_{k-1} Q_k}$$

4. Дробь с нечетным номером меньше смежной с ней дроби с четным номером.
5. Подходящие дроби с нечетными номерами образуют возрастающую последовательность, а с четными – убывающую.
6. Значение цепной дроби заключено между любыми двумя ее смежными подходящими дробями, причем оно ближе к следующей подходящей дроби, чем к предыдущей.
7. Цепная дробь больше подходящих дробей с нечетными номерами, но меньше подходящих дробей с четными номерами.
8. Абсолютное значение разности между цепной дробью и ее подходящей дробью подчиняется соотношению

$$\left| x - \frac{P_k}{Q_k} \right| \le \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}.$$

9. Из всех обыкновенных дробей, у которых знаменатель меньше либо равен Qk, ближайшей к цепной дроби является подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ (теорема Лагранжа о подходящих дробях как наилучших рациональных приближениях к цепной дроби).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить без калькулятора

0. $$\frac{0.128:3.2+0.86}{\frac{5}{6}\cdot 1.2+0.8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3.6}{0.505\cdot\frac{2}{5}-0.002}$$

1. $$\frac{3\frac{1}{3}:10+0.175:0.35}{1.75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1.4}{\left(0.5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}$$

2. $$\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0.6:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+3.75:2\frac{1}{2}\right):2.2$$

3. $$\frac{0.125:0.25+1\frac{9}{16}:2.5}{(10-22:2.3)\cdot 0.46+1.6}+\left(\frac{17}{20}+1.9\right)\cdot 0.5$$

4. $$\left(26\frac{2}{3}:6.4\right)\cdot\left(19.2:3\frac{5}{9}\right)-\frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0.5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\frac{1}{18}$$

5. $$\frac{\left(0.5:1.25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1.5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$$

6. $$\frac{(3.4-1.275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0.5\cdot\left(2+\frac{12.5}{5.75+\frac{1}{2}}\right)$$

7. $$\frac{\left(0.3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0.07}{(13-0.416):6.05+1.92}$$

8. $$\left(\frac{3.75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1.875}-\frac{2\frac{3}{4}+1.5}{2.75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}$$

9. $$\left(1\frac{2}{5}+3.5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3.4:2\frac{1}{8}-0.35$$

Задача 2

1) обратить периодическую десятичную дробь в обыкновенную;
2) указанное число представить в виде цепной дроби;
3) цепную дробь (п. 3) представить в виде рациональной дроби;
4) для цепной дроби (п.3) вычислить все подходящие дроби;
5) оценить погрешность каждого приближения цепной дроби подходящей дробью.

Вариант	1)	2)	3)
0	0,(31)	$\frac{1}{750}$	[3; 1, 1, 2]
1	0,412(5)	$\frac{37}{81}$	[0; 1, 4, 3, 2]
2	2,(412)	$\frac{1811}{691}$	[2; 1, 1, 6, 8]
3	3,1(45)	$\frac{1723}{1447}$	[0; 3, 1, 2, 7]
4	3,2(345)	2,98976	[3; 2, 1, 3]
5	0,5(342)	0,455	[2; 1, 3, 4, 1]
6	0,(26)	0,544	[0; 3, 1, 4, 2]
7	0,(776)	$\frac{226}{343}$	[1; 2, 1, 4]
8	3,24(41)	$\frac{121}{27}$	[3; 3, 1, 4]
9	0,22(23)	$\frac{74}{57}$	[3; 3, 1, 2, 4]

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИОФАНТА

Диофантовым уравнением (алгебраическим диофантовым уравнением) называют уравнение вида $P(x, y, \ldots) = 0$, где $P(x, y, \ldots)$ – многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами. Требуется найти решения, выражающиеся в целых числах. Диофантовы уравнения могут не имеет решений, иметь конечное или бесконечное число решений.

Простейшими диофантовыми уравнениями являются уравнения первой степени – уравнения вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – целые числа и хотя бы один из коэффициентов $a_i \neq 0$. Решение уравнения – любой упорядоченный набор чисел, превращающий уравнение в тождество.

Диофантово уравнение первой степени разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда b делится на НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Если диофантово уравнение разрешимо в целых числах. То оно имеет бесконечно много целочисленных решений.

Рассмотрим наиболее простой случай – линейное уравнение с двумя неизвестными:

$ax + by = c,\ a, b, c \in Z$.

Как уже указывалось, такое уравнение имеет решения, если с НОД(a, b). Но в этом случае обе части уравнения допускают сокращение, так что будем считать, что НОД(a, b) = 1, т.е. коэффициенты уравнения взаимно простые.

Если (x_0, y_0) – какое-то решение уравнения, то все решения задаются формулами $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, t – произвольное целое число (*проверить это утверждение самостоятельно*).

Частное решение (x_0, y_0) можно найти подбором; используя алгоритм Евклида или цепные дроби.

Рассмотрим эти методы на примерах.

Пример. Решить уравнение $3x + 4y =5$.

$x = \dfrac{5-4y}{3}$. Мы ищем целочисленные решения, следовательно, такие y, при которых числитель дроби кратен трем. С точки зрения (не)делимости на 3 все числа целые числа y могут быть разбиты на три группы: $y = 3t$, $y = 3t + 1$, $y = 3t + 2$ (t – произвольное целое число). Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $y = 3t + 2$ получаем целое x: $x = -1 - 3t$. Уравнение решено. (Мы при решении выражали неизвестную x, поскольку коэффициент при ней (3) меньше, следовательно, процесс перебора короче).

Пример. Решить уравнение $147x - 25y = 14$.

Здесь коэффициенты при неизвестных велики, что затрудняет использование рассмотренного в предыдущей задаче метода. Числа 147 и 25 взаимно простые. Выразим через них 1, используя алгоритм Евклида:

$147 = 25\cdot 5 + 22$,

$25 = 22 \cdot 1 + 3$,

$22 = 3 \cdot 7 + 1$,

Следовательно, $1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - (25-22) \cdot 7 = (147 - 25 \cdot 5) \cdot 8 - 25 \cdot 7 = 147 \cdot 8 - 25 \cdot 47$.

Полученное равенство умножим на 14. Тогда

$14 = 147 \cdot (8 \cdot 14) - 25 \cdot (47 \cdot 14) = 147 \cdot 112 - 25 \cdot 658$,

т.е. пара чисел (112, 658) – решение данного уравнения.

Все решения имеют вид $x = 112 - 25t$, $y = 658 + 147t$.

Использование цепных дробей для решения уравнения $ax + by = c$ $(a > 0)$ в целых числах основывается на следующей теореме.

Частное целое решение уравнения $ax + by = c$ $(a > 0)$ можно находить по формулам:

при $b < 0$ $\begin{cases} x_0 = (-1)^n cQ_{n-1} \\ y_0 = (-1)^n cP_{n-1} \end{cases}$,

при $b > 0$ $\begin{cases} x_0 = (-1)^n cQ_{n-1} \\ y_0 = (-1)^{n+1} cP_{n-1} \end{cases}$,

где P_{n-1}, Q_{n-1} – числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби к цепной дроби, в которую разлагается $\frac{a}{|b|}$, а n – число всех подходящих дробей.

Пример. Решить уравнение $31x + 102y = 2$.

Разлагаем $\frac{a}{|b|} = \frac{31}{102} = [0, 3, 3, 2, 4]$. Число подходящих дробей $n = 5$, предпоследняя подходящая дробь $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [0, 3, 3, 2] = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{7}{23}$, $P_{n-1} = 7$, $Q_{n-1} = 23$.

Находим частное решение уравнения

$x_0 = (-1)^5 \cdot 2 \cdot 23 = -46$, $y_0 = (-1)^6 \cdot 2 \cdot 7 = 14$

и общее решение

$x = -46 - 102t$, $y = 14 + 31t$.

Задачи по теме «Уравнения Диофанта»

Задача 1. Найти натуральные решения уравнения

0. $5x + 7y = 52$
1. $17x – 11y = 86$
2. $16x + 4y = 1830$
3. $19x – 15y = 2$
4. $37x + 11y = 1$
5. $20x + 5y = 2005$
6. $20x + 6y = 2006$
7. $7x + 5y = 99$
8. $20x + 5y = 2005$
9. $7x - 5y = 1$

Задача 2. Составить линейное уравнение Диофанта и решить его.

0. Сколькими способами можно разменять 5 крон монетами по 50 и 20 сентов.
1. На складе имеются газопроводные трубы длиной 7 и 13 м. Сколько следует взять тех и других, чтобы проложить газопровод на участке в 218 м?
2. На приобретение подарков победителям школьной математической олимпиады было выделено 300 крон. В магазинах оказались калькуляторы по 19 крон и чертежные наборы по 37 крон. Сколько следует купить тех и других, чтобы израсходовать всю выделенную сумму?
3. Надо разлить 15 л жидкости в сосуды емкостью 0,5 и 0,8 л так, чтобы все использованные сосуды были полными. Сколько потребуется сосудов того и другого типов?
4. Число $1\frac{11}{117}$ представить в виде суммы двух дробей со знаменателями 9 и 13.
5. Найти наименьшее натуральное число, кратное 23, при делении которого на 27 получается остаток 11.
6. Найти двузначное число, у которого удвоенное число единиц меньше утроенного числа десятков на 1.
7. При каких основаниях x и y выполняется равенство чисел $(35)_x = (53)_y$?
8. Разложить число 121 на такие два слагаемых, из которых одно кратно 18, а второе при делении на 7 дает в остатке 3.
9. Найти такое двузначное число, у которого утроенное число десятков больше учетверенного числа единиц на 9.

Задача 3. Составить линейное уравнение Диофанта и решить его.

0. В автобусе есть 1- и 2-местные сиденья. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидели 13 человек, то 9 сидений были свободными, а когда сидели 10 человек, свободными были 6. Сколько сидений в автобусе?
1. Буратино хочет купить букварь, но ему не хватает 18 сольдо. На такой же букварь Мальвине не хватает 7, а Пьеро – 10 сольдо. Смогут ли Пьеро с Мальвиной купить один букварь на двоих?
2. На рынок привезли огурцы. Если считать их десятками, то не хватает 2 до полного числа десятков, а когда их считали дюжинами, то осталось 8 огурцов. Найдите количество огурцов, если известно, что их было более 300, но меньше 350.
3. Отец с сыном решили измерить шагами расстояние между 2 деревьями. Они договорились идти одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца 70 см, сына – 56 см. Найти расстояние между деревьями, если известно, что следы отца и сына совпали 10 раз.
4. Две команды разыграли первенство в спартакиаде школы. За победу в каждом виде соревнований команда получает 4 очка, за ничью – 2 очка и за проигрыш – 1 очко. Обе команды вместе набрали 46 очков. Сколько было ничьих?
5. Ученику заочной математической школы выслали задание, которое содержит 25 задач. За решенную правильно задачу начисляют 7 баллов, за каждую решенную неверно – минус 5 баллов, а за каждую задачу, которую он не брался решать – 0.Ученик получил в сумме 61 балл. Сколько задач он брался решать?
6. В комнате, где заседал «Союз меча и орала», были стулья на 4 ножках и табуретки на 3. Когда все присутствующие расселись, то свободных мест не осталось, а сумма количества ног у сидящих и у стульев и табуреток равнялась 39. Сколько было в комнате стульев и табуреток?
7. Миша и Витя живут в одном доме (с несколькими подъездами), на каждом этаже которого размещены 4 квартиры. Миша живет на 5 этаже в квартире 83, а Витя на 3 этаже в квартире 169. Сколько этажей в доме?
8. Мужик привез продавать на базар фуки, глюки и дрюки. Он прошелся по базару и решил увеличить задуманные прежде цены, добавив вовнутрь по одному нулю. При этом цена за один фук увеличилась в 6 раз, за 1 глюк – в 7 раз, а за дрюк – в 9 раз. Сколько они стали стоить, если их первоначальные цены были меньше 100 у.е.?
9. В Одессе на «Привозе» продавали раков: больших – по 5, маленьких – по 3, а жаб – по 1 у.е. за штучку. Иван и Степан купили себе раков на одинаковую сумму денег, причем Иван купил больших и маленьких поровну, а Степан – больших в 2 раза меньше, чем маленьких. Иван расплатился одной купюрой в 100 у.е., а Степан – несколькими по 10 у.е. У продавца не было мелких денег, поэтому он дал сдачу: Ивану раками, а Степану – жабами. Сколько животных досталось друзьям с «Привоза»?

Пифагоровы числа

Пифагоровыми числами называются натуральные числа x, y,z, удовлетворяющих уравнению

$x^2 + y^2 = z^2$. (*)

Естественно, треугольник с такими сторонами является прямоугольным (теорема Пифагора).

Заметим, что зная одно натуральное решение (x_0, y_0, z_0) уравнения (*), можно получить бесконечное множество его решений путем умножения чисел x_0, y_0, z_0 на произвольное натуральное число k. Но этот прием не решает уравнения, но показывает, что можно ограничиться поиском решений, для которых наибольший общий делитель равен 1. Такие решения называют основными. Легко показать, что для такого решения все три числа попарно просты. Также в основном решении не может быть двух четных чисел. Очевидно, что среди чисел x, y одно четное, другое нечетное. Будем считать, что y – четное.

Решим уравнение (*). Представим его в виде

$x^2 = z^2 – y^2 = (z-y)(z+y)$

И введем обозначения z + y =m, z + y = n, где m, n – нечетные числа.

Тогда

$$\begin{cases} z = \dfrac{m+n}{2} \\ y = \dfrac{m-n}{2} \\ \mathrm{x}^2 = \mathrm{mn} \end{cases}$$

$x^2 = mn$.

Числа m и n – взаимно простые. Тогда из последнего равенства следует, что они должны быть полными квадратами.

Обозначим $m = a^2$, $n = b^2$. Тогда основное решение уравнения (*) запишется в виде

$$\begin{cases} x = ab \\ y = \dfrac{a^2 - b^2}{2} \\ z = \dfrac{a^2 + b^2}{2} \end{cases}$$

где a, b – взаимно простые числа.

Приведем несколько пифагоровых троек чисел, вычисленных по этим формулам:

a	b	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	19	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

Существует и другое представление пифагоровых троек:

$x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$,

где u, v – взаимно простые и одно из них нечетное.

Это представление легко получить из предыдущего с помощью замены

$$\frac{a+b}{2} = u, \frac{a-b}{2} = v.$$

Задачи на пифагоровы треугольники

(задания без вариантов)

1. Найти пифагоровы треугольники, длины сторон которых составляют арифметическую прогрессию.
2. Найти формулы для вычисления сторон пифагоровых треугольников, у которых катет и гипотенуза выражаются последовательными натуральными числами.
3. Доказать, что не существует пифагоровых треугольников, у которых все стороны – простые числа.
4. Доказать, что во всех пифагоровых треугольниках один из катетов выражается числом, кратным 4.
5. Доказать, что во всяком пифагоровом треугольнике хотя бы один из катетов выражается числом, кратным 3.

Текстовые задачи с целочисленными неизвестными

Целочисленность искомых неизвестных обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать его однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющих остальным условиям задачи.

Пример. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4, 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Решение. Обозначим количество двоек – x, троек – y, четверок – z, пятерок – u. Тогда условия задачи можно записать в виде системы уравнений и неравенств:

$x + y + z + u = 30$

$2x + 3y + 4z + 5u = 93$

$y > u$

$y < z$

$z = k \cdot 10$

$u = 2L$, k, L – целые числа.

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$x + 2y + 3z + 4u = 63$.

Так как z кратно 10, то единственное значение для k – это $k = 1$. При $k > 1$ уравнение не имеет решения в целых положительных числах. Используя то, что $z = 10$, придем к уравнению

$x + 2y + 4u = 33$.

Возможные значения для u (оно должно быть четным и меньшим $y < 10$) $u = 2, 4, 6, 8$. Но при $u = 6$ и $u = 8$ получаем, что $8 = u > y$ при любых значениях x. Следовательно, проверке подлежат только значения 2 и 4.

При $u = 4$ получаем систему уравнений

$x + 2y = 17$,

$2x + 3y = 33$,

решение которой ($x = 15$, $y = 1$) не удовлетворяют условию $y > u$. При $u = 2$ получаем систему уравнений

$x + 2y = 25$,

$2x + 3y = 43$,

решение которой $x = 11$, $y = 7$ удовлетворяет условиям задачи.

Ответ – количество пятерок – 2, четверок – 10, троек – 7, двоек – 11.

Еще одним типом задач на составление уравнений с целочисленными неизвестными являются задачи на запись числа в позиционной (обычно десятичной) системе счисления.

Пример. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найти это число.

Решение. Условие задачи приводит к системе уравнений:

$10m + n = 4(m + n) + 3$,

$10\ m + n = 3mn + 5$.

Выразим из первого уравнения n: $n = 2m – 1$, подставим это выражение во второе уравнение. Получим квадратное уравнение $2m^2 – 5m + 1 = 0$, $m1 = 2$, $m2 = 1 / 2$. Условию задачи удовлетворяет $m = 2$, тогда $n = 3$. Искомое число – 23.

Задачи для самостоятельного решения

Варианты 0 и 5

1. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на листе, то ему не хватит альбома, а если по 23 на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?
2. Определить целое положительное число по следующим данным: если к его цифровой записи присоединить справа цифру 4, то получим число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получим число, меньше делителя на 27.

Варианты 1 и 6

1. В классе писали контрольную работу. Среди выставленных оценок встречаются только 2, 3, 4, 5. Оценки 2, 3, 5 получили одинаковое количество учеников, а оценок 4 поставлено больше, чем остальных вместе взятых. Оценки выше 3 получили менее 10 учеников. Сколько троек и сколько четверок было поставлено, если писали контрольную работу не менее 12 человек?
2. Ученику надо было умножить 72 на двузначное число, в котором десятков втрое больше единиц. По ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего получил произведение на 2592 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?

Варианты 2 и 7

1. Квартал застроен пяти- и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет больше 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных, то общее число домов станет меньше 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?
2. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Варианты 3 и 8

1. На стоянке находятся машины марок WW и BMW. Общее их число меньше 30. Если увеличить вдвое число BMW, а число WW на 27, то BMW станет больше; а если увеличить вдвое число WW, не изменяя число BMW, то машин WW станет больше. Сколько машин каждого вида находится на стоянке?
2. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Варианты 4 и 9

1. В вазе лежат конфеты двух видов, причем число конфет первого вида более чем на 20 превышает число конфет второго вида. Одна конфета первого вида весит 2 грамма, второго – 3 грамма. Из вазы взяли 15 конфет одного сорта, вес которых составил пятую часть от веса всех конфет, лежавших в вазе. Затем было взято еще 20 конфет другого сорта; их вес оказался равным весу оставшихся в вазе конфет. Сколько конфет каждого сорта лежало первоначально в вазе?
2. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

СРАВНЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

Пусть n – положительное целое число. Говорят, что целые числа a и b сравнимы по модулю n ($a \equiv b \pmod{n}$), если разность a – b делится на n (без остатка).

Например, числа 27 и 2 сравнимы по модулю 5, поскольку их разность 27 – 2 делится на 5 без остатка.

Свойства сравнений

Ниже приводятся простейшие свойства сравнений. Их доказательство основывается на определении сравнимости по модулю (*доказательства провести самостоятельно!*).

Утверждение $a \equiv b \pmod{m}$ равносильно другому утверждению: существует такое целое число z, такое, что $a = b + mz$.

1. Рефлексивность: $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Симметричность: если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$.
3. Транзитивность: если $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$.
5. Если $ac \equiv bc \pmod{mc}$, то $a \equiv b \pmod{m}$.
6. Если $ac \equiv bc \pmod{m}$, НОД(c, m) = 1, то $a \equiv b \pmod{m}$.
7. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, n – любое натуральное число.
8. Пусть f(x) – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда если $a \equiv b \pmod{m}$, то $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

Примеры использования сравнений

Пример 1. Найти остаток от деления 520 на 24.

$5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10}$, $25 \equiv 1 \pmod{24}$, следовательно, $5^{20} \equiv 1^{10} \pmod{24} \equiv 1 \pmod{24}$ и остаток равен 1.

Пример 2. Найти последнюю цифру натурального числа $33^{22} + 22^{11}$.

Очевидно, что надо найти остаток от деления заданного числа на 10.

$33 \equiv 3 \pmod{10}$, $33^2 \equiv 3^2 \pmod{10} \equiv -1 \pmod{10}$.

$33^{22} \equiv (33^2)^{11} \pmod{10} \equiv (-1)^{11} \pmod{10} \equiv -1 \pmod{10}$.

Аналогично $22 \equiv 2 \pmod{10}$, $22^{11} \equiv 2\cdot(22^{10}) \pmod{10} \equiv 2\cdot(2^{10}) \pmod{10} \equiv 2\cdot(2^5)^2 \pmod{10} \equiv 2\cdot2^2 \pmod{10} \equiv 8 \pmod{10}$.

Следовательно, остаток от деления заданного числа на 10 равен –1 + 8 = 7.

Решение сравнений

Рассмотрим применение сравнений для решения уравнений вида $ax \equiv c \pmod{m}$.

Если c делится на НОД(a, m), то сравнение $ax \equiv c \pmod{m}$ имеет конечное множество решений по модулю m.

Эти решения задаются формулой $x_0 + tm/\text{НОД}(a, m) \pmod{m}$, где t = 1, 2, …, НОД(a, m), а для x_0 существует такой y_0, что пара чисел (x_0, y_0) является решением уравнения $ax + my = c$.

Пример. Решить уравнение $4x \equiv 6 \pmod{18}$.

НОД(4, 18) = 2, c = 6 делится на 2, следовательно, сравнение имеет решение. Число таких решений равно 2.

В уравнении $4x + 18y = 6$ обе части сократим на 2. Получим $2x + 9y = 3$. Нас интересует любое решение этого уравнения, например, (6, -1). Тогда решение сравнения (по общей формуле) будет иметь вид $x \equiv 6 + 9t \pmod{18}$, t = 1, 2.

При = 1 $x \equiv 6 + 9 \pmod{18}$, т.е. $x \equiv 15 \pmod{18}$; при t = 2 $x \equiv 6 + 9\cdot 2 \pmod{18} \equiv 6 + 18 \pmod{18}$, т.е. $x \equiv 6 \pmod{18}$.

Если же НОД(a, m) = 1, то сравнение имеет единственное решение. Действительно, поскольку НОД(a, m) = 1, то существуют такие целые числа u и v, что $au + mv = 1$, откуда $bau + bmv = b$, $abu \equiv b \pmod{m}$. Следовательно, $x \equiv bu \pmod{m}$ – решение исходного сравнения. Таким образом, задача и здесь сводится к решению линейного уравнения Диофанта.

Китайская теорема об остатках

Рассмотрим систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv a_1 (\operatorname{mod} m_1) \\ x \equiv a_2 (\operatorname{mod} m_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_n (\operatorname{mod} m_n) \end{cases},$$

где все m_i попарно взаимно просты: НОД$(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j$.

Обозначим $M_j = M/m_j$, $M = m_1 m_2 ... m_n$, j = 1, 2, …, n.

Пусть z_j – решение сравнения $M_j zj \equiv a_j \pmod{m_j}$.

Тогда $x = \sum_{j=1}^{n} M_j z_j \left(\operatorname{mod} m_1 m_2 ... m_n\right)$ является решением исходной системы сравнений. Это утверждение называется китайской теоремой об остатках.

Пример. Решить систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 5\left(\operatorname{mod} 7\right) \\ x \equiv 12\left(\operatorname{mod} 15\right) \\ x \equiv 18\left(\operatorname{mod} 22\right) \end{cases}.$$

Здесь m1 = 7, m2 = 15, m3 = 22, M = 71522 = 2310.

M1 = 330, M2 = 154, M3 = 105.

Найдем решение сравнения $330z_1 \equiv 5$ (mod 7). Поскольку $330 = 7 \cdot 47 + 1$, то $z_1 \equiv 5$ (mod 7).

Найдем решение сравнения $154z_2 \equiv 12$ (mod 15). Поскольку $154 = 10 \cdot 15 + 4$, то $4z_2 \equiv 12$ (mod 15). Подбором находим $z_2 \equiv 3$ (mod 15).

Найдем решение сравнения $105z_3 \equiv 18$ (mod 22). Поскольку $105 = 22 \cdot 4 + 17$, то $17z_3 \equiv 18$ (mod 22). Подбором находим $z_3 \equiv 14$ (mod 22).

Решением исходной системы сравнений будет x ≡ 3582 (mod 2310) ≡ 1272 (mod 2310).

Задачи на сравнения

Задача 1.

0. Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + ... + 99^2$.
1. Найдите последнюю цифру числа 1918^{2010}.
2. Найдите последнюю цифру числа 777^{777}.
3. Найдите последнюю цифру числа 2010^{1918}.
4. Найдите последнюю цифру числа 2^{2005}.
5. Докажите, что $7^{777} + 1$ не делится на 5.
6. Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.
7. Найдите остаток от деления 3^{2005} на 7.
8. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
9. Докажите, что $(11^{10} – 1^{10})$ кратно 100.

Задача 2. Решить сравнение:

0. 3x ≡ 4 (mod 7)
1. 9x ≡ 2 (mod 14)
2. 7x ≡ 10 (mod 11)
3. 9x ≡ 12 (mod 7)
4. 10x ≡ 15 (mod 11)
5. 3x ≡ -1 (mod 7)

6. $2x \equiv 1 \pmod{5}$
7. $9x \equiv 17 \pmod{31}$
8. $12x \equiv 16 \pmod{21}$
9. $15x \equiv 21 \pmod{10}$

Задача 3. Решить систему сравнений

0. $3x \equiv 4 \pmod{7}$, $9x \equiv 2 \pmod{14}$
1. $9x \equiv 2 \pmod{14}$, $7x \equiv 10 \pmod{11}$
2. $7x \equiv 10 \pmod{11}$, $9x \equiv 12 \pmod{7}$
3. $9x \equiv 12 \pmod{7}$, $10x \equiv 15 \pmod{11}$
4. $10x \equiv 15 \pmod{11}$, $3x \equiv -1 \pmod{7}$
5. $3x \equiv -1 \pmod{7}$, $2x \equiv 1 \pmod{5}$
6. $2x \equiv 1 \pmod{5}$, $9x \equiv 17 \pmod{31}$
7. $9x \equiv 17 \pmod{31}$, $12x \equiv 16 \pmod{21}$
8. $12x \equiv 16 \pmod{21}$, $15x \equiv 21 \pmod{10}$
9. $15x \equiv 21 \pmod{10}$, $3x \equiv 4 \pmod{7}$

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ»

1. Для двух десятичных чисел, образованных первыми двумя и последними двумя цифрами номера зачетной книжки, выполнить следующие действия:
   1) преобразовать их к двоичной системе счисления;
   2) вычислить сумму полученных двоичных чисел, результат проверить переводом суммы в десятичную систему счисления;
   3) преобразовать двоичные числа в восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.
2. У учителя математики спросили, сколько учеников участвовало в школьной олимпиаде по математике. Он ответил: «66 мальчиков и 12 девочек, всего 100 человек». Очевидно, эти числа приведены не в десятичной системе счисления. В какой?
3. Число 43 записано в семеричной системе счисления. К какой системе счисления оно запишется теми же цифрами, но в обратном порядке?
4. Докажите, что число 534 четно в системе с любым основанием, большим 5.
5. Найдите все d, при которых число 123454_d делится на 6.
6. Найдите в десятичной системе счисления трехзначное число, которое в девятеричной системе записывается теми же цифрами, но в обратном порядке.
7. Найдите цифры a и b, если восьмеричное число $\overline{25ab}_8$ делится на 32. Приведите все решения.
8. Восстановите неизвестные цифры, обозначенные знаком вопроса, определив вначале используемую систему счисления: 5?55 + ?327 = ?16?4.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексными числами называются всевозможные упорядоченные пары (a, b) действительных чисел, для которых определены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$,

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 – b_1b_2 , a_1b_2 + a_2b_1)$.

Комплексные числа равны $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1= b_2$.

Множество комплексных чисел обозначается буквой **C**, для обозначения элементов этого множества обычно используется буква z.

Свойства операций сложения и умножения комплексных чисел

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения).
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения)
3. Для любых z_1 и z_2 существует комплексное число z_3, называемое их разностью и обозначаемое $z_3 = z_2 – z_1$, такое, что $z_1 + z_3 = z_2$.
4. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность умножения).
5. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (ассоциативность умножения).
6. Для любых $z_1 \neq (0, 0)$ и z_2 существует комплексное число z_3, называемое их частным и обозначаемое $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$, такое, что $z_1 \cdot z_3 = z_2$. Деление на комплексное число (0, 0), называемое нулем, невозможно.
7. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Эти свойства являются следствиями определения комплексного числа. Для двух комплексных чисел всегда существует разность и частное, вычисляемые по формулам

$z_2 – z_1 = (a_2, b_2) – (a_1, b_1) = (a_2 – a_1, b_2 – b_1)$,

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(a_2, b_2)}{(a_1, b_1)} = \frac{(a_2, b_2) \cdot (a_1, -b_1)}{(a_1, b_1) \cdot (a_1, -b_1)} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) (z_1 \neq (0,0)).$$

Для комплексных чисел вида (a, 0) все действия совпадают с соответствующими действиями для действительных чисел. Следовательно, множество действительных чисел есть подмножество множества комплексных чисел.

Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексных чисел

Числа вида (0, b) называют чисто мнимыми, число i = (0, 1) называют мнимой единицей. Чисто мнимые числа записывают в виде (0, b) = bi, поскольку (0, b) = (b, 0)(0, 1). Из определения умножения следует, что $i^2 = -1$. Число 0 является одновременно действительным и чисто мнимым.

Использование мнимой единицы приводит к алгебраическому представлению комплексного числа: z = (a, b) = a + bi.

Между множеством комплексных чисел и множеством упорядоченных пар действительных чисел (точек на числовой плоскости) есть взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексное число можно изображать как точку числовой плоскости. Такую плоскость называют комплексной, ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой.

Для геометрического изображения комплексного числа используют также и радиус-вектор соответствующей точки комплексной плоскости. Тогда сложение (вычитание) комплексных чисел можно геометрически интерпретировать как сложение (вычитание) соответствующих векторов.

Модулем (абсолютной величиной, |z|) комплексного числа называют длину соответствующего этому числу вектора. Величина угла между положительным направлением оси абсцисс и вектором, соответствующим комплексному числу, измеренного против часовой стрелки, называется главным аргументом комплексного числа (arg z). Очевидно, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. модуль нуля принимается равным 0, а главный аргумент для него не определяется. Модуль комплексного числа – всегда неотрицателен, а главный аргумент $\arg z \in [0; 2\pi)$.

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими точками комплексной плоскости:

$$|z2 - z1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Действительная и мнимая части комплексного числа z = a + bi выражаются через его модуль r = |z| и его главный аргумент φ = arg z следующим образом:

a = rcosφ, b = rsinφ.

Поэтому аргумент комплексного числа может быть найден из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}.$$

Комплексные числа z = a + bi и z* = a – bi называются сопряженными (комплексно сопряженными). На числовой плоскости они расположены симметрично относительно оси абсцисс, |z| = |z*|, arg z* = 2π - arg z.

Комплексное число может быть выражено через его модуль r и аргумент φ следующим образом:

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Такое представление называют тригонометрической формой записи комплексного числа.

При перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, при делении – модули делятся, а аргументы вычитаются.

Задание. Используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел вывести формулы для косинуса и синуса суммы и разности углов.

Тригонометрическое представление комплексных чисел удобно при выполнении операций возведения комплексного числа в степень n и при извлечении корня степени n.

Эти операции выполняются с применением формул Муавра:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, ..., n-1.$$

Для $z \neq 0$ существует n различных корней степени n из числа z, причем все они имеют равные модули, а аргументы отличаются на $\frac{2\pi k}{n}$.

Примеры задач

Задача 1. Для комплексных чисел $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$ вычислить их разность, произведение и частное.

Решение. $z_1 - z_2 = (1 + i) - (2 - 3i) = -1 + 4i$;

$z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(2 - 3i) = 1\cdot2 - 1\cdot3i + 2i + i\cdot(-3i) = 5 - i$;

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{-1+5i}{2^2+3^2}.$$

Задание. Изобразить исходные числа, а также результаты вычислений на комплексной плоскости. Для каждого числа вычислить его модуль.

Задача 2. Найти все значения корня шестой степени из числа –64.

Решение. Представим число –64 в тригонометрической форме:

$-64 = 64\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Применяя вторую формулу Муавра, получим

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), k = 0, 1, ..., 5.$$

Например, при k = 0 корень равен $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i.$

Задание. Выписать остальные пять корней и изобразить их на комплексной плоскости.

Задача 3. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $2 \le |z - 1 + 2i| < 3$?

Решение. Комплексные числа, удовлетворяющие этому условию, расположены от точки $(1 - 2i)$ на расстоянии не меньшем двух, но меньшем трех. Такие точки расположены внутри и на внутренней границе кольца с центром в точке $(1 - 2i)$ и с радиусами 2 (внутренний) и 3 (внешний).

Задачи по теме «Комплексные числа»

а) записать комплексное число $z_0 = x_0 + y_0 i$ в тригонометрической форме;

б) вычислить z_0^m, привести алгебраическую и тригонометрическую формы записи ответа;

в) вычислить $\sqrt{z_0}$ и $\sqrt[n]{z_0}$, изобразить соответствующие точки на плоскости 0xy;

г) нарисовать на плоскости 0xy множество, заданное системой неравенств H ($z = x + yi$);

д) решить уравнение $az^2 + bz + c = 0$.

V	**Z₀**	**m**	**n**	**a**	**b**	**c**	**H**
0	$-1-i\sqrt{3}$	15	5	i	-1 - 2i	1 + 3i	$\|z-1-i\| \le 1, \quad \operatorname{Im} z > 1, \quad \operatorname{Re} z \ge 1$
1	$\sqrt{3}-3i$	13	5	-i	3 + 2i	-1 - i	$\|z-1+i\| \ge 1, \quad \operatorname{Im} z \le -1, \quad \operatorname{Re} z < 1$
2	$\sqrt{2}-2i$	12	5	i	-3 - 3i	5	$\|z-2-i\| \le 2, \quad \operatorname{Re} z \ge 3, \quad \operatorname{Im} z < 1$
3	$-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	15	5	i	1 - 3i	-4 + 4i	$\|z-1-i\| \ge 1, \quad 0 \le \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z \le 2$
4	$3-i\sqrt{3}$	13	4	i	-4 - 3i	3 + 7i	$\|z+i\| < 2, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$
5	$1-i\sqrt{2}$	13	5	-i	-6 + 3i	7 + 3i	$\|z-i\| < 1$, $0 < \arg z < \pi/4$
6	$-4 + 4i$	15	5	2i	8 - 4i	-8 + 12i	$\|z - i\| \le 2$, $0 < \operatorname{Im} z < 2$
7	$\dfrac{2-i}{3+i}$	8	4	-i	6 + 3i	-11 + 3i	$\|z + i\| > 1$, $-\pi/4 \le \arg z < 0$
8	$\dfrac{-i}{1+i}$	9	4	i	-10 - 4i	20 - 17i	$\|z - 1 - i\| < 1$, $\|\arg z\| \le \pi/4$
9	$\dfrac{2+i}{i-1}$	10	5	2i	20 - 8i	-40 - 34i	$\|z\| < 2$, $-\pi/4 \le \arg z \le \pi/4$