

H. LAUL

KOORMISE LAHUTAMISE MEETOD  
PLAATIDE ARVUTAMISEL

С РЕЗЮМЕ:

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ ПРИ  
РАСЧЁТЕ ТОНКИХ ПЛИТ



РК „ТЕАДУСЛИК КИРЖАНДУС“

H. LAUL

KOORMISE LAHUTAMISE MEETOD  
PLAATIDE ARVUTAMISEL

С РЕЗЮМЕ:

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ ПРИ  
РАСЧЁТЕ ТОНКИХ ПЛИТ



RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“

TARTU, 1949

PI

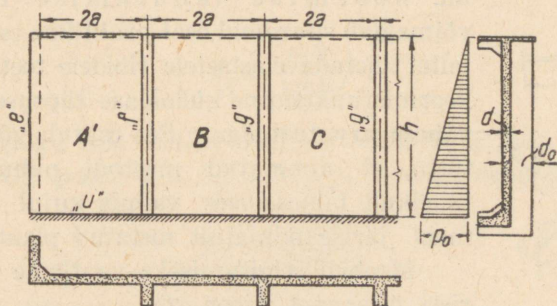
Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

8210

## Sissejuhatus.

Taladele toetuvate plaatide arvutus on talades esinevate lükete tõttu väga komplitseeritud ülesanne. Arvutuskäik, mille kohaselt jäetakse tähele panemata talades esinevate lükete mõju plaadi koormisfunktsioonidele<sup>1</sup>, on harilikus olukorras seotud veega vähem kui 10% plaadi koormisfunktsioonides. Seepärast on see arvutusi tunduvalt lihtsustav viis üldiselt tarvitamiskõlblik.

Kuid praktikas esineb küllalt juhtumeid, kus plaatide arvutustes jäetakse tähele panemata toetavates talades esinevate elastsete lükete



Joon. 1.

mõju koormisfunktsioonidele, kuigi selle tagajärjel saadakse plaadi koormisfunktsioonid veega kuni 40%. Näiteks joonisel 1 esitatud suuremahulise raudbetoonanuma (reservuaar või silo) ribidele toetuva vertikaalseina plaadi arvutamisel tooks ribide elastsete lükete mõju arvestamata jätmine enesega kaasa suuremaid vigu koormisfunktsioonides.

Elastsetele ribidele toetuva plaadi Kirchhoffi oletuste mõttes täpne lahend on praktiliselt leitav ainult siis, kui kahel vastamisi asetseval serval on rahuldatud Navier' ääretingimused (s. t. painde-

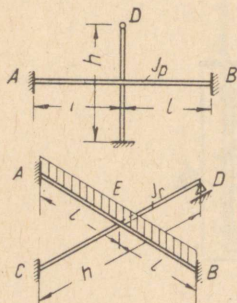
<sup>1</sup> Koormisfunktsioonidena on mõeldud käesolevas töös kõiki koormistest põhjustatud suurusi, nagu paindemomente, põikjõude, lükkeid jne.

momendid ja lükked võrduvad nulliga). Niisugused lahendid, mis leitakse Maurice Lévy' meetodil, on juba ammu tuntud<sup>2</sup> ja on kasutatud sildade, eriti aga laevade projektide koostamisel.

Kui ei esine kaht vastasserva, mille puhul on täidetud Navier' ääritingimused, siis on ülesande täpne lahendamine praktiliselt teostamatu.

Näiteks joonisel 1 esitatud raudbetoonanuma puhul on iga plaadivälja vertikaalservadest vähemalt üks elastselt toetatud, kusjuures servad ei moodusta paari, mispuhul oleksid Navier' ääritingimused rahuldatud (anuma täidise vertikaalkoormise tõttu on alumine serv  $u$  raskesse põrandaplaati jäigalt kinnitatud)<sup>3</sup>.

Horisontaalne ristkülikuline plaat, mis toetub kõigi nelja küljega elastsetele ribidele, ei oma samuti Navier' ääritingimusi täitvat servapaari. Seesuguse ülesande lahendamine, vaatamata ääritingimustele kinnitustmomentide suhtes, on praktiliselt teostamatu ka lihtsaimate koormiste puhul.



Joon. 2.

Käesolevas töös esitatakse lähendusmeetod — nn. koormise lahutamise meetod, mis võimaldab suuremal osal praktikas esinevatel juhtumitel tuletada elastsetele ribidele toetuvate plaatide koormisfunktsioone küllaldase täpsusega juba üsna vähese arvutustööga. See osutub võimalikuks seetõttu, et nimetatud meetodi puhul kasutatakse täielikult kirjanduses valmis kujul leiduvaid andmeid järeleandmatult toetatud plaatide kohta.

Meetodi selgitamiseks vaatleme järgmist tala-risti ülesannet (joon. 2).

Jäigalt kinnitatud otstega tala  $AB$  (avaga  $2l$ , inertsmomendiga  $J_p$ ) on toetatud keskel samast materjalist talaga  $CD$ , avaga  $h$ , inertsmomendiga  $J_r$ , mis on ühes otsas jäigalt kinnitatud. Tala  $AB$  on koormatud koormisega  $p$  t/m. Talade ristlemispunktis  $E$  olgu tala  $AB$  surve talale  $CD$  tähistatud  $X$ -ga; selle leidmiseks koos-

<sup>2</sup> Näiteks: Чалышев, К. А.: Сборник Института Инженеров Путей Сообщения, 1915 г.

<sup>3</sup> Käesolevas töös kasutatakse järgmist terminoloogiat: jäigalt kinnitatud serval ei saa esineda ristlõike pöördumist; järeleandmatult toetatud serval ei saa esineda lineaarseid lükkeid; elastselt toetatud serval võib esineda lineaarseid lükkeid, seejuures võib serv olla kas jäigalt kinnitatud või vabalt toetatud. Vabalt toetatud serval ei esine paindemomente, seejuures võib serv olla toetatud järeleandmatult või elastselt.

tatakse tavaliselt pidevuse tingimus talade keskohtade läbipaindumiste võrdsuse kohta:

$$\frac{p(2l)^4}{384EJ_r} - \frac{X(2l)^3}{192EJ_p} = \frac{Xh^3}{110EJ_r},$$

millest

$$X = \frac{pl}{1 + 0,218 J_p h^3 / J_r l^3}. \quad (1)$$

Samale tulemusele jõuame teisel teel, olgugi veidi pikema arvu-  
tustööga.

Kujutleme, et talale  $AB$  mõjuv koormis on jagatud kahte ossa:

$$p = p_I + p_{II},$$

kus

1)  $p_I$  mõjugu tala ristile, millel  $J_r = \infty$ , järelikut punkti  $E$  lüke on null; sel puhul on punktis  $E$  tala  $AB$  rõhk talale  $CD$

$$X_I = p_I l;$$

sellisel koormisel saaks tala  $CD$  punkt  $E$  lükke (kui inertsmoment on taas  $J_r$ )

$$\delta_I = \frac{p_I l h^3}{110EJ_r};$$

2)  $p_{II}$  mõjugu tala ristile, millel  $J_r = 0$ , s. o. tala  $AB$  pole üldse toetatud tala  $CD$  poolt; siis  $X_{II} = 0$ , aga tala  $AB$  saab punktis  $E$  lükke

$$\delta_{II} = \frac{p_{II}(2l)^4}{384EJ_p}.$$

Kui nüüd liidame mõlemad koormisskeemid, saame algskeemi, s. t. koormis- ja piiritingimused on täidetud, kui

$$\delta_I = \delta_{II}. \quad (2)$$

Tõepoolest, I skeemist tekkiv lüke talas  $CD$  on tegelik, kuna II skeemist ei lisandu talle koormist, resp. lükkeid. Aga II skeemist tek-  
kiv lüke talas  $AB$  on tegelik, kuna I skeemist oli tema punkti  $E$  lüke null.

Saame pidevuse tingimusest (2) lisavõrrandi, ja võrrandsüsteem koormisosiste  $p_I$  ja  $p_{II}$  määramiseks on:

$$\begin{cases} p = p_I + p_{II} \\ \frac{p_I \cdot l h^3}{110EJ_r} = \frac{p_{II}(2l)^4}{384EJ_p} \end{cases}$$

$$p_I = \frac{p}{1 + 0,218 J_p h^3 / J_r l^3}$$

ja

$$X = X_I = \frac{p l}{1 + 0,218 J_p h^3 / J_r l^3} \quad (1')$$

Esitatud teine lahenduskäik, nn. koormise lahutamise meetod, oli talaristi näites tavalisest meetodist tunduvalt kohmakam. Seevastu on koormise lahutamise meetod väga edukalt rakendatav elastsetele taladele toetuvate plaatide koormisfunktsioonide tuletamisel, nagu nähtub allpool.

Järgnevalt vaadeldakse lähemalt elastsetele ribidele toetuvate suuremahuliste raudbetoonanumate vertikaalsete seinaplaatide arvutust koormise lahutamise meetodil (peatükk I) ja mõningaid ülesandeid horisontaalsete plaatide kohta (peatükk II).

# I. Suuremahuliste raudbetoonanumate vertikaalsete seinaplaatide arvutus hüdrostaatilisel koormisel.

## 1. Üldisi märkusi.

Suuremahuliste silode või reservuaaride projektimisel esineb sageli järgmine olukord (joon. 1). Vertikaalne seinaplaat töötab täidise horisontaalse surve all. Seinaplaat on nurgas  $e$  jäigalt kinnitatud koormise ja konstruktsiooni oletatava sümmeetria tõttu nurga bissektori suhtes. Samuti on jäigalt kinnitatud plaadi alumine serv  $u$ , kuna siin seinaplaat on monoliitselt ühendatud täidise vertikaalrõhu all oleva raske põrandaplaadiga või letriga. Tavaliselt on ülemine serv  $o$  vabalt toetatud, sest seinaplaat on seal ühendatud suhteliselt nõrga laeplaadiga. Edasi toetatakse plaat kas majanduslikkudel või käitistehnilistel kaalutlustel suuremale või väiksemale arvule seintele või elastsetele ribidele. Toetumise puhul seintele on plaadi toetumine järeleandmatu. Toetumise puhul vertikaalsetele ribidele on plaadi toetumine elastne. Seejuures on ribides horisontaalsed lükked tavaliselt plaadi omadega suurusjärgult võrdsed.

Kui plaat toetub ribidele — ja see juhtum leiabki allpool pikemat käsitlust —, siis on staatiline ülesanne alljärgnev.

Jätkuv plaat toetub elastselt järeleandvatele vahetugedele ning on nurgas ja alumises servas jäigalt kinnitatud; ülemine serv on vabalt toetatud; koormiseks on kolmnurkselt jaotatud horisontaalrõhk. Maksimalne koormise intensiivsuse ordinaat  $p_0$  asub alumise jäigalt kinnitatud serva kohal. On vajalik leida koormisfunktsioonid.

Selle ülesande täpne lahendamine tavalise plaaditeooria mõttes Fourier' ridade abil on praktiliselt teostamatu. Raskus seisneb selles, et alumine serv on jäigalt kinnitatud. Laevaehitusstaatikas on ammu lahendatud analoogiline ülesanne Maurice Lévy'<sup>4</sup> meetodil, kuid eeldusel, et alumine serv on vabalt toetatud. Kui soovime arvestada ka alumise serva tegelikke ääretingimusi, tuleb rakendada alumises servas kinnitus-

<sup>4</sup> C. R. Acad. Sci. Paris, CXXIX 1899; lk. 535.

momendid kui välised staatiliselt määratud suurused. Arvutus viib teatavasti Fourier' ridadeni, kus iga liige on omakorda Fourier' rida.

Lahendamine võrgumeetodiga on seotud samuti suurte raskustega. Teatavasti tingib kinnitatud servade olemasolu suurema võrgupunktide resp. lineaarsete võrrandite arvu, kui tahame vältida jämedaid vigu. Lisaks on piiritingimuste avaldamine, võttes arvesse ka elastseid lükkeid ribides, väga keerukas. Seetõttu tuleb eelistada ülesande iteratsioonilist lahendust, s. o. kasutada vastavalt mingile lähendusarvutusele etteantud diskreetsete ribipunktide lükkeid. Ribipunktide lükkeid tuleks korrigeerida vastavalt leitud uuele koormisjaotusele võrgumeetodi kohaselt. Kogu lahenduskaik, eriti aga vajaliku suurema võrgupunktide arvu puhul, on äärmiselt tülikas. Tuleb märkida, et võrgupunktide arvu suurenemisega suureneb lisaks võrrandite arvule veel kogu võrrandsüsteemi vigade tundlikkus, s. t. halveneb koonduvus selle süsteemi iteratsioonilisel lahendusel. Nii jääb kaheldavaks, kas võrgumeetodiga on üldse võimalik saada koormisfunktsioone vajaliku täpsusega, kui servad on jäigalt kinnitatud.

Sageli nõutakse silodel ja reservuaaridel pragunemiskindlust (vähemalt pragude suhtes, mis avanevad täidise poole). Sel puhul minnakse tagavarateguriga mõnikord alla kuni 1,1-ni. Teisest küljest on teada, et tavaliselt pragunemiskindluse nõue suurendab tunduvalt ristlõike elemente võrreldes tavalise dimensioneerimisega. Seega näeme, et on oluline tunda küllaldase täpsusega eriti neid momente, millele vastav tõmbetsoon ulatub anuma sisepinnale (tavaliselt kinnitusemomendid). Sest momentide väärtuste ülehindamisel teeme asjatuid kulutusi, alahindamisel aga, kasutades mõõdukat tagavarategurit, võime kaotada nõutava pragunemiskindluse.

Käesolevas töös lahendatakse ülesanne ligikaudselt, saavutades koormisfunktsioonid praktiliselt küllaldase täpsusega ja vähese ajakuluga. Lahendamine toimub järgmise skeemi kohaselt.

Arvutatakse (punkt 2) koormisfunktsioonid plaadile, mis on kolmel küljel jäigalt kinnitatud, ülemisel serval aga vabalt toetatud (nn. elementaarplaat); koormis — kolmnurkselt jaotatud horisontaalrõhk. Selle osa arvutused teostatakse meetodiga, mis on tuntud H. Marcuse ühe töö järgi<sup>5</sup>. Arvutuse tulemuseks on graafik (joon. 5), mida kasutame ka edaspidistes arvutustes. Selle joonise abil on võimalik määrata kõik vajalikud koormisfunktsioonid plaadil, mis on külgedel ja all jäigalt

<sup>5</sup> H. Marcus: Beitrag zur Untersuchung von Behältern mit ebenen Wandungen, Bauingenieur, 1936. H. 5/6.

kinnitatud, ülal aga vabalt toetatud (kõik servad on aga toetatud järeleandmatult).

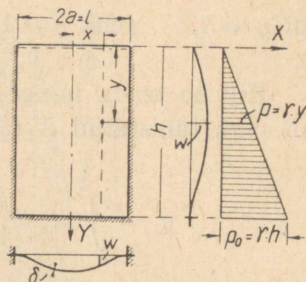
Seejärel kujundatakse (punkt 3) ribide elastsete lükete mõju arvutuskoormise lahutamise meetodiga.

Punkt 4 käsitleb kvalitatiivselt ribide pöördumise mõju koormisfunktsioonidele. Punkt 5 annab arvutamiseeskirja kokkuvõtteks.

## 2. Elementaarplaat.

Joonisel 3 on esitatud elementaarplaat. Niisuguse plaadi probleem on leidnud kirjanduses käsitlust ja leidub mõningaid andmeid koormisfunktsioonide kohta, kuid mitteküllaldaselt selleks, et rakendada koormise lahutamise meetodit. Seejärel tuli autoril lahendada elementaarplaadi ülesanne mitmesugustel kõrguse ja laiuse suhetel ( $h/a$ ), kusjuures oli võimalik kasutada H. Marcuse iteratsioonilist lahendusviisi.

Lähtume tuntud Lagrange'i plaadi biharmoonilisest diferentsiaalvõrrandist



Joon. 3.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{N}, \quad (3)$$

milles  $w$  tähendab plaadi keskpinna punkti lüket risti plaadi keskpinnaga,

$x, y$  — plaadi keskpinna jooksva punkti koordinaate,

$p(x, y)$  — koormist,

$N$  — plaadi paindejäikust  $\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)}$ , selles omakorda

$E$  — on materjali elastsusmoodul,

$d$  — plaadi paksus,

$\mu$  — Poissoni tegur (edaspidistes arvutustes loetud nulliks).

Kui otsida võrrandi (3) lahendit kujus:

$$w = KX(x)Y(y) \quad (4)$$

ning edaspidi kasutada dimensioonita koordinaate  $\xi = x/a$ ;  $\eta = y/h$ , saame võrrandist (3):

$$\frac{Y}{a^4} \frac{d^4 X}{d\xi^4} + \frac{2}{a^2 h^2} \frac{d^2 Y}{d\eta^2} \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{X}{h^4} \frac{d^4 Y}{d\eta^4} = \frac{p}{KN}. \quad (5)$$

Seega on kõik plaadi elastse pinna lõiked, näiteks paralleelselt  $x$ -teljega, omavahel afiinsed. Sel põhjusel nimetataksegi antud lahenduskaiku lähendusarvutuseks tavalise plaaditeooria mõttes.

Ääritingimused on:

$$\text{kui } x = 0, \quad (\text{ehk } \xi = 0), \quad \text{siis } \frac{dX}{d\xi} = \frac{d^3 X}{d\xi^3} = 0, \quad (\text{sümmeetria}), \quad (6)$$

$$\text{kui } x = \pm a, \quad (\text{ehk } \xi = \pm 1), \quad \text{siis } X = \frac{dX}{d\xi} = 0, \quad (7)$$

$$\text{kui } y = 0, \quad (\text{ehk } \eta = 0), \quad \text{siis } Y = \frac{d^2 Y}{d\eta^2} = 0, \quad (8)$$

$$\text{kui } y = h, \quad (\text{ehk } \eta = 1), \quad \text{siis } Y = \frac{dY}{d\eta} = 0. \quad (9)$$

Kui on teada mingi tingimusi (6) ja (7) rahuldav funktsioon<sup>6</sup>  $X$ , mis olgu tähistatud  $X_1(\xi)$ , siis saab arvutada järgmised integraalid:

$$q_1 = \int_0^1 X_1 d\xi, \quad r_1 = \int_0^1 \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} d\xi, \quad n_1 = \int_0^1 \frac{d^4 X_1}{d\xi^4} d\xi. \quad (10)$$

Järelikult saab võrrandist (5) liikmeti integreerimisel  $\xi$  järgi (raja-dega 0 ja 1):

$$\frac{Y}{a^4} n_1 + \frac{2}{a^2 h^2} \frac{d^4 Y}{d\eta^2} r_1 + \frac{q_1}{h^4} \frac{d^4 Y}{d\eta^4} = \frac{1}{KN} \gamma h \eta, \quad (\text{kui } \int_0^1 p d\xi = \gamma h \eta)$$

ehk, pärast mõningaid ümberpaigutusi,

$$Y + \frac{2a^2}{h^2} \frac{r_1}{n_1} \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{a^4}{h^4} \frac{q_1}{n_1} \frac{d^4 Y}{d\eta^4} = \frac{ha^4}{KNn_1} \gamma \eta. \quad (11)$$

See konstantsete kordajatega harilik lineaarne diferentsiaalvõrrand on kergesti lahendatav. Leiame lahendi  $Y_1$ , mis täidab tingimusi (8) ja (9).

Edasi leiame sama  $Y_1$  järgi integraalid:

$$q_2 = \int_0^1 Y_1 d\eta, \quad r_2 = \int_0^1 \frac{d^2 Y_1}{d\eta^2} d\eta, \quad n_2 = \int_0^1 \frac{d^4 Y_1}{d\eta^4} d\eta. \quad (12)$$

<sup>6</sup> Näiteks  $1 - 2\xi^2 + \xi^4$  (afiinne mõlemas otsas jäigalt kinnitatud ühtlaselt koormatud tala elastse joonega).

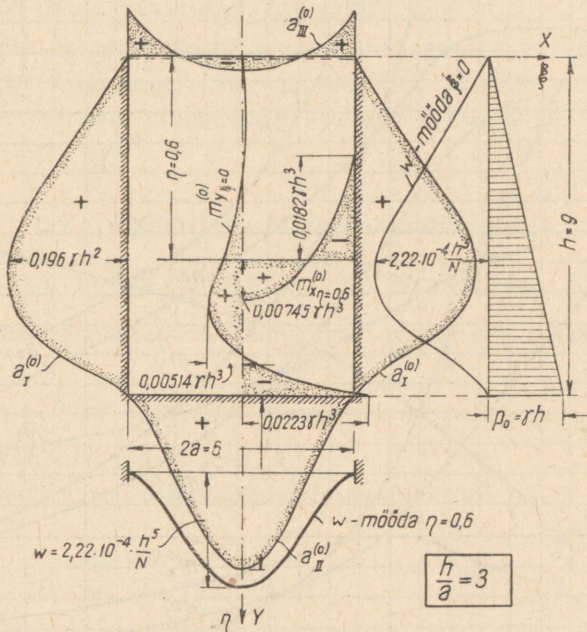
Seega saame võrrandist (5) liikmeti integreerimisel  $\eta$  järgi (raja-  
dega 0 ja 1):

$$X + \frac{2h^2}{a^2} r_2 \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{h^4}{a^4} q_2 \frac{d^4 X}{d\xi^4} = \frac{p_0 h^4}{KNn_2}. \quad (13)$$

Seda konstantsete kordajatega harilikku diferentsiaalvõrrandit lahendades saame funktsioonile  $X$  teise lähenduse  $X_2$ .

Niisugust iteratsioonilist toimingut tuleb korrata, kuni kahe järjestikuse iteratsioonisammu tulemused pole praktiliselt erinevad ( $X_n \approx X_{n-1}$ ).

See on saavutatav antud koormisel üldiselt 5 kuni 6 iteratsioonisammuga.



Joon. 4.

Järgnevalt pole lahenduskaiku üksikasjalisemalt näidatud.

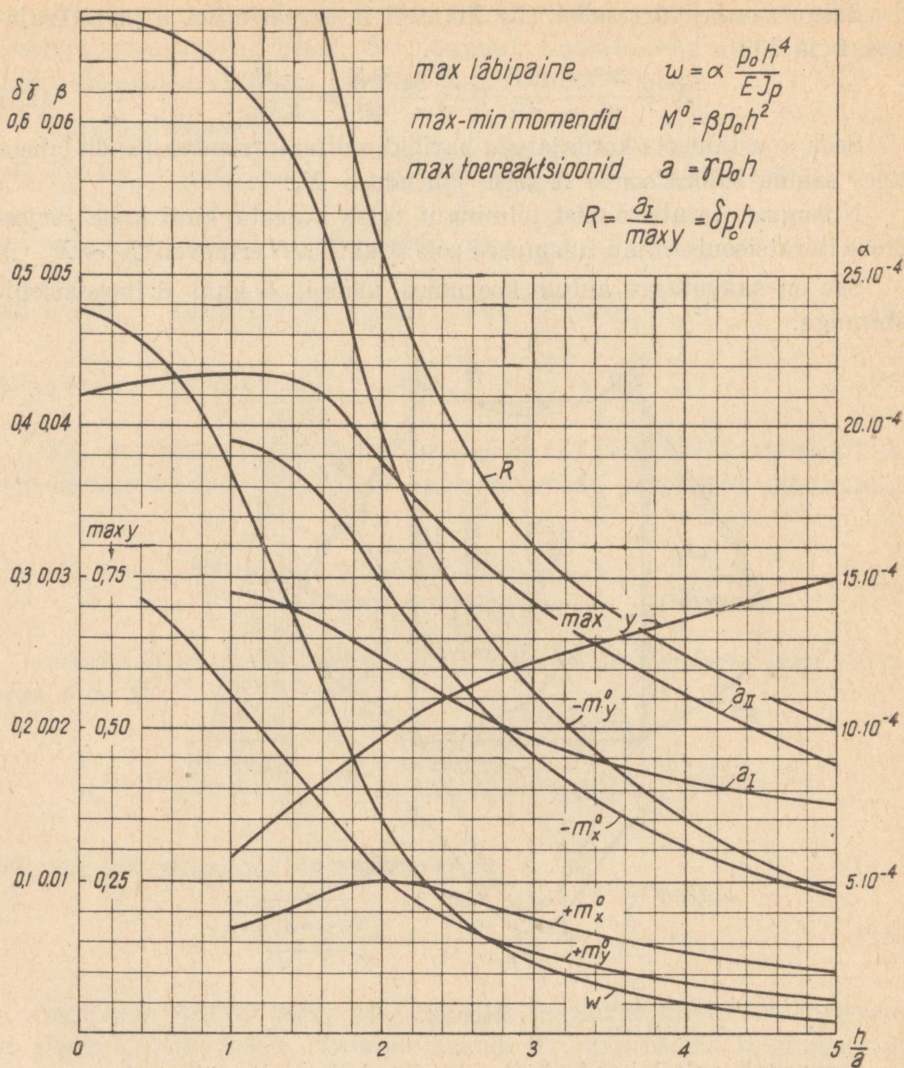
Võrrandis (4) esinevad suurused on:

$$X(\xi) = 1 - (A_n \sin \varepsilon \xi \operatorname{sh} \vartheta \xi + D_n \cos \varepsilon \xi \operatorname{ch} \vartheta \xi), \quad (14)$$

$$Y(\eta) = \eta - (B_n \sin \mu \eta \operatorname{ch} \nu \eta + C_n \cos \mu \eta \operatorname{sh} \nu \eta), \quad (15)$$

$$K = \frac{h a^4}{N n_n} \gamma, \quad (16)$$

kus  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  ja  $D_n$  on ääritingimustest leitavad integreerimis-  
konstandid  $n$ -dal iteratsioonisammul (olenevad plaadi suhtest  $h/a$ );  $\varepsilon$ ,  $\vartheta$ ,  
 $\mu$  ja  $\nu$  on diferentsiaalvõrranditele (11) resp. (13) vastavate karak-



Joon. 5.

teristlike võrrandite nurklahendid  $n$ -dal iteratsioonisammul (olevad plaadi suhtest  $h/a$ );  $n_n$  — valemist (10) samuti  $n$ -dal iteratsioonisammul.

Momendid:

$$m_x = -\frac{NK}{a^2} Y \frac{d^2 X}{d\xi^2}, \quad (17)$$

$$m_y = -\frac{NK}{h^2} X \frac{d^2 Y}{d\eta^2}. \quad (18)$$

Reaktsioonid jäigalt kinnitatud servadel:

$$\alpha_x = N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_{x=\pm a} = \frac{NK}{a^3} Y \left( \frac{d^3 X}{d\xi^3} \right)_{\xi=1} = RY, \quad (19)$$

$$\alpha_y = N \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_{y=h} = \frac{NK}{h^3} X \left( \frac{d^3 Y}{d\eta^3} \right)_{\eta=1}. \quad (20)$$

Joonisel 4 on esitatud koormisfunktsioonide epüürid plaadi suhte  $h/a=3$  ja  $h=9$  m puhul. Võrreldes seejuures plaadireaktsioonide resultanti koormise resultandiga selgub, et esimene on leitud veaga 0,8%. Seega meetod omab praktiliselt küllaldast täpsust.

Kasutades esitatud meetodit, on läbi arvatud rida plaate erinevate suhetega  $h/a$ . Seejuures on oletatud, et Poissoni tegur  $\mu=0$ . Joonisel 5 on esitatud olulisemate koormisfunktsioonide olenevus plaadi suhtest  $h/a$ .

### 3. Vaheribide läbipaindumiste mõju.

a) Vaheribide koormis (vt. joon. 6).

Vaheribisid koormatakse kahelt poolt plaadi reaktsioonidega [v. (19) ja (15)]:

$$q(\eta) = 2RY = 2R(\eta - B \sin \mu\eta \operatorname{ch} \mu\eta - C \cos \mu\eta \operatorname{sh} \mu\eta); \quad (21)$$

suuruse  $R$  väärtusi esitab joon. 5.

Ribi elastse joone diferentsiaalvõrrand koormisel  $q(\eta)$  on

$$\frac{EJ_r}{h^4} \frac{d^4 w}{d\eta^4} = q(\eta), \quad (22)$$

kus  $J_r$  on ribi kui plaattala inertsmoment.

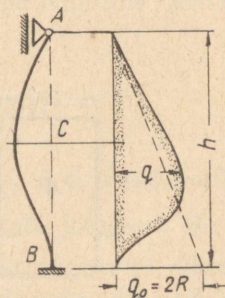
Lahendades võrrandi (22) konkreetsete näidete varal selgub, et on võimalik ilma tunduva veata ära jätta trigonomeetrilisi ja hüperboolseid funktsioone sisaldavad liikmed koormise  $q(\eta)$  avaldises (21).

Seega on ribi koormisjaotus küllaldase täpsusega lineaarne:

$$q(\eta) \approx 2R\eta \quad (21')$$

osutudes maksimaalseks all ( $\eta=1$ )

$$q_0 = 2R.$$



Joon. 6.

Elastse joone diferentsiaalvõrrandist (22) jäeldub siis:

$$\frac{EJ_r}{2Rh^4} w = \frac{\eta - 2\eta^3 + \eta^5}{120}. \quad (23)$$

Vajalikud koormisfunktsioonid on:

$$\max w = \frac{2Rh^4}{420EJ_r} \quad (\text{seejuures } \eta = 0,45), \quad (24)$$

$$M = -\frac{EJ_r}{h^2} \frac{d^2w}{d\eta^2} = -2Rh^2 \left( \frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta}{10} \right). \quad (25)$$

Toemoment ( $\eta = 1$ ):

$$M_B = -0,067 \cdot 2Rh^2. \quad (26)$$

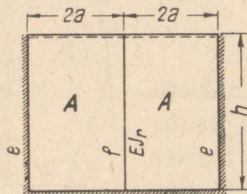
(Toemomendil  $M_B$  on koormisfunktsiooni  $q(\eta)$  lihtsustamise tõttu väike viga tagavara kasuks).

Maksimaalne välimoment

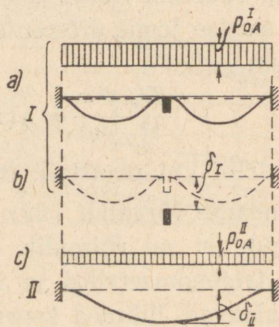
$$M_C = 0,030 \cdot 2Rh^2, \quad (\eta \approx 0,45). \quad (27)$$

b) Ribi läbipaindumise mõju, kui plaat on toetatud kesktelt vaid ühe ribiga — plaat A (joon. 7).

Valitud erijuhtumi vaatlemine võimaldab uurida ribi läbipaindumise mõju, ilma et tarvitseks arvestada ribi pöörde mõju. Ribi jaotab



Joon 7.



Joon 8.

anuma külje kaheks võrdseks ja võrdselt koormatud osaks. Sümmeetria tõttu ei toimu ribi pööret ja plaadi servad ribil on jäigalt kinnitatud, kuigi neis on lükked võimalikud, vastavalt ribi elastsusele. Niisugustel tingimustel koormisfunktsioonide leidmise ülesande täpne lahendus pole praktiliselt teostatav.

Alljärgnevalt lahendame esitatud ülesande koormise lahutamise meetodiga.

Põhiline mõttekäik on seesama, mis sissejuhatuses esitatud talaristi näitel, ainult tala  $AB$  tuleb asendada plaadiga ja tala  $CD$  ribiga. Koormise lahutamise meetod osutub väga sobivaks käesoleva plaadi-probleemi lahendamisel, sest ta võimaldab tulemusrikkalt kasutada eespool koostatud graafikuid, joonisel 5.

Niisiis kujutleme, et antud koormis  $p_0$  on jagatud kahte ossa:

$$p_0 = p_{OA}^I + p_{OA}^{II}.$$

$p_{OA}^I$  koormaku niisugust plaadi ja ribi skeemi, kus  $J_r = \infty$ , s. o. plaadi punktid ribil ei saa lükkeid (joon. 8-a). Sel puhul leiame ribi koormise maksimaalväärtuse  $q'_0 = 2R \frac{p_{OA}^I}{p_0}$  jooniselt 5 (analoogiline suurus talaristi näites on  $X_I$ ).

Sellest koormisest saab ribi maksimaalse läbipainde [valem (24); joon. 8-b)].

$$\delta_I = \frac{q'_0 h^3}{420 E J_r} = \frac{2 R h^3}{420 E J_r} \frac{p_{OA}^I}{p_0} \quad (\text{seejuures } \eta = 0,45).$$

Koormise teine osa  $p_{OA}^{II}$  mõjub plaadile, kui  $J_r = 0$ , s. o. ribi puudub (joon. 8-c). Sel puhul tekkiv maksimaalne läbipaindumine leidub graafikus joonisel 5:

$$\delta_{II} = \alpha_{h/2a} \frac{p_{OA}^{II} h^4}{E J_p} \quad (\text{vastav } \eta = 0,45 \div 0,6),$$

kusjuures  $a$  tuleb võtta vastavana plaadi suhtele  $\frac{h}{2a}$ , s. o. kaks korda laiemale plaadile, kui seda on põhiplaat (nagu nähtub joonisest 8-c).

Nagu talaristi näites, nii ka siin mõlemat koormisskeemi ühendades saame algskeemi, niihästi koormise kui ka piiritingimuste poolest, kui nõuame, et ribi maksimaalne läbipaine I koormisskeemis võrduks plaadi maksimaalse läbipaindega II koormisskeemis. Tõepoolest, ribi ei saa II koormisskeemist enam lisakoormisi resp. lükkeid ja I koormisskeemis leitavad lükked on seega tegelikud, plaat aga ei saa I koormisskeemis lükkeid ribijoonel ja tema kohta on II koormisskeemis leiduvad lükked ribijoonel tegelikud.

Kasutades seda pidevustingimust, saame võrrandid kummagi koormiskomponendi avaldamiseks:

$$\begin{cases} p_o = p_{OA}^I + p_{OA}^{II} \\ \frac{2Rh^3}{420EJ_r} \frac{p_{OA}^I}{p_o} = \alpha_{h/2a} \frac{p_{OA}^{II} h^4}{EJ_p} \end{cases}$$

Neist võrrandeist leiame

$$p_{OA}^{II} = \frac{p_o}{1 + 420\alpha_{h/2a} J_r p_o / J_p 2R}, \quad (28)$$

$$p_{OA}^I = p_o - p_{OA}^{II};$$

seejuures  $J_r$  on ribi inertsmoment ja  $J_p$  plaadi inertsmoment ühele pikkuseühikule; tegur  $\alpha_{h/2a}$  ja  $2R$  (ribikoormise maksimaalne intensiivsus) saadakse jooniselt 5.

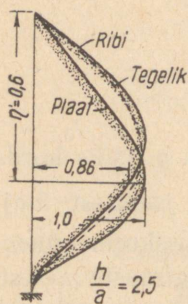
Ribile jääb tegelikult mõjuma koormis maksimaalväärtusega

$$q'_o = \frac{p_{OA}^I}{p_o} 2R.$$

Kogu see lahenduskäik oleks matemaatiliselt peaaegu niisama täpne kui talaristi näiteski, kui maksimaalsete läbipaindumiste kohad ribis I koormisskeemi järgi ja plaadis II koormisskeemi järgi langeksid ühte. Kahjuks ei lange nad aga ühte, vaid esineb mõningal määral nihkumine  $\eta$ -suunas, mistõttu tulebki esitatud lahenduskäiku pidada lähendusmeetodiks <sup>7</sup>.

Nii on ribi läbipainde puhul  $w$  maksimaalne, kui  $\eta = 0,45$ ; II koormisskeemis plaadi puhul aga on  $w$  maksimaalne, kui  $\eta = 0,45 \div 0,60$ .

Praktikas võib-olla suurima võimaliku plaadi suhte  $\frac{h}{a} = 5$  puhul on joonisel 9 esitatud mõlemad elastsed jooned. Selgub, et plaadi maksimaalse läbipainde kohal on ribi läbipaine 86% maksimaalsest. Siit tekkiv viga on  $p_{OA}^{II}$  määramisel kuni 10% (arvutusprotsessi lõpuks tuleneb siit koormisfunktsioonide viga 2–3%). Kui peame veel silmas, et tegelikult tekib lükete tasandumine, ribi ja plaat võtavad omaks



Joon. 9.

<sup>7</sup> Kuigi maksimaalsete läbipaindepunktide kohad ühte langeksid, esineksid siiski väikesed erinevused, sest kumbki elastne joon on kujult erinev. Näiteks on järgalt kinnitatud plaadil joone käänupunkt üldiselt toele lähemal kui sama avaga järgalt kinnitatud talal.

mingisuguse vahepealse uue elastse joone (joonisel 9 punktiirjoon), siis võib väita, et see viga on veel väiksem. Pealegi, nagu autori poolt teostatud selle küsimuse lähem uurimine on näidanud, asuvad siit tekivad lisamomendid ribi lähemas ümbruses ning on seejuures maksimaalsete momentide piirkonnast ära nihutatud. Väiksemate plaadi suhete  $\frac{h}{a}$  puhul lähenevad mõlemad maksimaalsete läbipaindumiste kohad teineteisele.

c) Ribiläbipaindumise mõju keskmise plaadi C puhul (vt. joon. 1).

Nagu eelmises punktis, nii jaotame ka siin koormise kaheks osaks:

$$p_o = p_{oc}^I + p_{oc}^{II}$$

ja vaatleme plaati töötavana kahes olukorras (kui väljade arv kummalgi pool ribi on küllalt suur, võime ribi pöördumise jätta tähele panemata).

I olukorra kohaselt ei esine ribides lükkeid, kuid plaatide reaktsioonid ribidel omavad koormiskomponendist  $p_{oc}^I$  parajasti nii suuri väärtusi, et ribid saavad sellest niisama suuri läbipaindumisi nagu II olukorras plaat ribi joonel koormiskomponendi  $p_{oc}^{II}$  puhul. Sel juhtumil ribid ei toeta üldse plaati. Viimase läbipainde pind on silindriline, mille moodustajad asuvad  $x$ -suunas.

Kui need kaks olukorda ühendada, on koormise nõuded ja ka ääretingimused täidetud.

Eelmisele punktile analoogilise mõttekäiguga leiame mõlemale olukorrale vastavad koormised:

$$p_{oc}^{II} = \frac{p_o}{1 + J_{rr} p_o / J_p 2R}, \quad (29)$$

$$p_{oc}^I = p_o - p_{oc}^{II}.$$

Siin ei esine ribi ja plaadi maksimaalsete lükete vastastikust nihutust, nagu eelmises punktis.

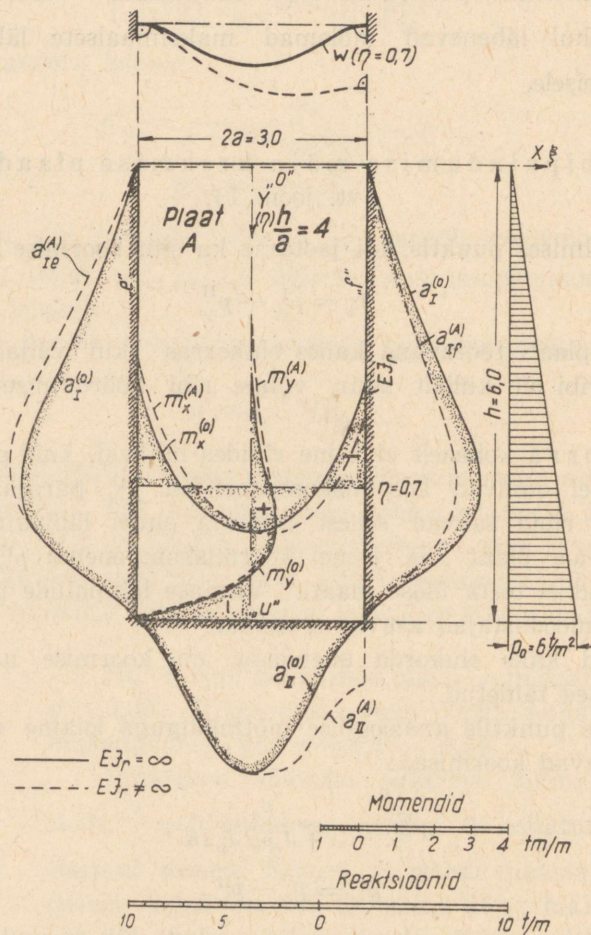
d) Ribide läbipaindumise mõju plaatide A' ja B puhul (vt. joon. 1).

Järgnevalt käsitleme juhtumit, kui ribi väändekangus on  $\infty$ . Ribil pöördumise mõju käsitletakse punktis 4.

Vaatleme jälle kaht plaadi olukorda:

TRÜ Raamatukogu

I olukorras puuduvad ribi läbipaindumised, plaadireaktsioonid koormistest  $p_{OA}^I$  resp.  $p_{OB}^I$  on parajasti nii suured, et ribi saab nendest niisama suured läbipaindumised kui II olukorras fiktiivne plaat koor-



Joon. 10.

miste  $p_{OA}^{II}$  resp.  $p_{OB}^{II}$  puhul. Seejuures on plaadid A' ja B allutatud vastavalt punktides b) ja c) käsitletud tingimustele.

Nii saadakse plaadi A' puhul  $p_0 = p_{OA}^I + p_{OB}^{II}$ ,  
ja plaadi B puhul

$$p = p_{OB}^I + p_{OB}^{II}.$$

Pidevustingimused annavad kaks võrrandit:

$$\frac{2Rh^4}{420EJ_r} \left( p_o - 0,5(p_{OA}^{II} + p_{OB}^{II}) \right) = \alpha_{h/2a} \frac{p_{OA}^{II} h^4}{EJ_p} = \frac{p_{OB}^{II} h^4}{420EJ_p}.$$

Siit järeldub:

$$p_{OB}^{II} = p_{OA}^{II} 420\alpha_{h/2a}, \quad (30)$$

$$p_{OA}^{II} = \frac{p_o}{0,5 + 210\alpha_{h/2a}(1 + 2J_r p_o / J_p 2R)}. \quad (31)$$

### e) Arvutusnäide ja kaalutlused seejuures (vt. joon. 1 ja 10).

Vaatleme seinaplaati:  $h = 6,0$  m;  $a = 1,5$  m; (seega  $h/a = 4$ ).

Plaat on koormatud veesurvega; pragudekindlust ei nõuta. Jooniselt leiame absoluutselt maksimaalse momendi, mis ongi esialgseks plaadi dimensioneerimiseks mõõduandev:

$$|\max m| = |\min m_y| = 0,0141 \cdot p_o h^2 = 0,0141 \cdot 6,0 \cdot 6,0^2 = 3,06 \text{ [tm/m];}$$

nii suure momendi puhul on piisav plaadi paksus  $d = 18$  cm.

Edasised koormisfunktsioonide epüürid on joonisel 10 (projektimisel pole üldiselt vajalik neid joonestada).

$$J_p = \frac{1,0 \cdot 018^3}{12} = 0,486 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^4\text{/m]}.$$

Maksimaalne läbipaindumine (vt. joon. 5)

$$\max w_p = 0,93 \cdot 10^{-4} p_o h^4 / N = 1,15 h^4 / E.$$

Esialgseks ribimomentide määramiseks leiame (vt. joon. 5):

$$\begin{aligned} 2R &= 2\delta p_o h = 2 \cdot 0,247 \cdot 6,0 \cdot 6,0 = 17,8 \text{ [tm]}, \\ M_B &= -0,067 \cdot 2Rh^2 = -42,6 \text{ [tm]}, \\ M_C &= 0,030 \cdot 2Rh^2 = 19,3 \text{ [tm]}. \end{aligned}$$

Valitud ribi ristlõige on  $75 \times 30$  cm; plaadi paksus  $d = 18$  cm; töötav plaadi laius plaattala ristlõikes  $b_n = 6 \cdot 18 + 30 = 138$  cm.

Ribi ristlõike inertsmoment<sup>8</sup>:

$$J_r = \mu \frac{b_n d_o^3}{12} = 0,405 \frac{1,38 \cdot 0,75^3}{12} = 19,2 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^4\text{];}$$

$$\max w_r = \frac{17,8 h^4}{420 \cdot 19,2 \cdot 10^{-3} E} = 2,21 h^4 / E.$$

Seega maksimaalne ribi läbipaindumine ületab peaaegu kahekordselt maksimaalse plaadi läbipaindumise.

<sup>8</sup> Strassner: Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke, Berlin, 1925, lk. 12.

Vaatleme nüüd ribi läbipaindumise mõju punktides b), c) ja d) arendatud mõttekäigu kohaselt.

Plaat A'. Määrame koormismomendi  $p_{OA}^{\text{II}}$ , millega tuleks koormata fiktiivset plaati plaadisuhte  $h/2a = 4/2 = 2$  puhul.

Joonisest 5 leiame, et

$$\alpha_{h/2a} = 6,95 \cdot 10^{-4}$$

ja

$$p_{OA}^{\text{II}} = \frac{6,0}{0,5 + 210 \cdot 6,95 \cdot 10^{-4} (1 + 2 \cdot 19,2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0/0,485 \cdot 10^{-3} \cdot 17,8)} = 1,32 \text{ [t/m}^2\text{]}.$$

Nii saadakse vastavalt kahele olukorrale järgmised koormised:

$$p_{OA}^{\text{I}} = 6,0 - 1,32 = 4,68 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad (h/a = 4)$$

$$p_{OA}^{\text{II}} = 1,32 \text{ [t/m}^2\text{]} \quad (h/a = 2).$$

Olukordade ühendamisel leitud koormisfunktsioonide epüürid esinevad joonisel 10 punktiirjoontena.

Iseloomustavad paindemomendid<sup>9</sup>:

$$\text{Toel } e: \min m_x^{(A)} = -0,0124 \cdot 4,68 \cdot 6,0^2 - 0,85 \cdot 0,0295 \cdot 1,32 \cdot 6,0^2 = -3,30 \text{ [tm/m]};$$

$$\text{toel } f: \min m_x^{(A)} = -0,0124 \cdot 4,68 \cdot 6,0^2 + 0,85 \cdot 0,0099 \cdot 1,32 \cdot 6,0^2 = -1,70 \text{ [tm/m]}.$$

Võrreldes neid arve plaadi andmetega, kus ribi läbipaindumist ei toimu (edaspidi tähistab indeks  $o$  — elementaarplati):

$$\min m_x^{(o)} = -0,0124 \cdot 6,0 \cdot 6,0^2 = -2,68 \text{ [tm/m]},$$

näeme, et toel  $e$  on kinnitusemoment kasvanud ribi järeleandmise tõttu 23% ja toel  $f$  kahanenud 36%.

$$\text{Toel } u: \min m_y^{(A)} = -0,0141 \cdot 4,68 \cdot 6,0^2 - 0,55 \cdot 0,039 \cdot 1,32 \cdot 6,0^2 = -3,40 \text{ [tm/m]}^{10}.$$

(Seega on see moment suurenenud 11%).

Tuleb märkida, et ribis esinevate lükete tõttu on  $-m_y$  ka ribi kohal olemas. Konstruktiivselt tuleb min  $m_y$  väärtusele vastav armatuur jätkata ka üle ribi 50% ulatuses.

Välimomendid pole märgatavalt muutunud, vaid veidi nihkunud. Neid võib seepärast arvutada elementaarplaadi andmetest:

$$\max m_x^{(A)} \approx \max m_x^{(o)} = 0,00556 \cdot 6,0 \cdot 6,0^2 = 1,20 \text{ [tm/m]};$$

$$\max m_y^{(A)} \approx \max m_y^{(o)} = 0,0033 \cdot 6,0 \cdot 6,0^2 = 0,71 \text{ [tm/m]}.$$

Toereaktsioonid. Allservas võime arvutada toereaktsioone otse elementaarplaadi andmetest. Tõepoolest

$$\max a_{\text{II}}^{(A)} = 0,226 \cdot 4,68 \cdot 6,0 + 0,55 \cdot 0,378 \cdot 1,32 \cdot 6,0 = 8,0 \text{ [t/m]}^{10};$$

$$\max a_{\text{II}}^{(o)} = 0,226 \cdot 6,0 \cdot 6,0 = 8,1 \text{ [t/m]}.$$

Seega  $\max a_{\text{II}}^{(A)} = \max a_{\text{II}}^{(o)}$ .

<sup>9</sup> Tegur 0,85 ehk 85% tuleneb sellest, et I ja II faasi maksimumid on teineteise suhtes nihutatud.

<sup>10</sup> Tegur 0,55 ehk 55% arvestab I ja II faasi maksimaalsete ordinaatide nihkumist.

Toereaktsioonide kahanemine servas  $f$  toimub koormise kahanemisest  $p_{OA}^{II}$  võrra, s. o. väärtuselt  $6,0 \text{ t/m}^2$  väärtusele  $4,68 \text{ t/m}^2$ ;

Toereaktsiooni suurenemine serval  $e$  pole suur:

$$\max a_1^{(A)} = 0,168 \cdot 4,68 \cdot 6,0 + 0,85 \cdot 0,247 \cdot 1,32 \cdot 6,0 = 6,39 \text{ [t/m]};$$

$$\max a_1^{(e)} = 0,168 \cdot 6,0 \cdot 6,0 = 6,04 \text{ [t/m]}.$$

(Seega on kasv  $6\%$ ).

Kuid just sellel serval on sageli peatõmbepingete nõudeid raskem täita, sest see serv  $e$  on lisaks tõmmatud naaberseina reaktsioonist. Alumine (suurema põikjõuga) serv on aga üldiselt surve all (välja arvatud juhtum, kui täidise väljalaskelehid on riputatud alt plaadi külge).

Ribi  $f$  koormis on tunduvalt kahanenud:

$$q'_o = 2R \left[ \frac{p_o - 0,5(p_{OA}^{II} + p_{OB}^{II})}{p_o} \right] = 17,8 \left[ \frac{6,0 - 0,5(1,32 + 0,386)}{6,0} \right] = 15,3 \text{ [t/m]},$$

(seega väiksem  $14\%$ ),  
milles

$$p_{OB}^{II} = p_{OA}^{II} \cdot 420 \alpha_{h/2a} = 1,32 \cdot 420 \cdot 6,95 \cdot 10^{-4} = 0,386 \text{ [t/m}^2\text{]}.$$

Plaat C. Sel juhul

$$p_{OC}^{II} = \frac{6,0}{1 + 19,2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0 / 0,486 \cdot 10^{-3} \cdot 17,8} = 0,42 \text{ [t/m}^2\text{]}.$$

See suurus erineb vähe samast suurusest plaadi B kohta ( $0,386 \text{ t/m}^2$ ), mistõttu on üldiselt võimalik teostada arvutusi plaadi B kohta samuti nagu plaadi C puhul.

$$p_{OC}^I = 6,0 - 0,42 = 5,58 \text{ [t/m}^2\text{]}.$$

Toemomendid:

$$\min m_x^{(C)} = \min m_x^I = -0,0124 \cdot 5,58 \cdot 6,0^2 = -2,48 \text{ [tm/m]};$$

$$\min m_y^{(C)} = -0,0141 \cdot 5,58 \cdot 6,0^2 - 0,067 \cdot 0,42 \cdot 6,0^2 = -3,84 \text{ [tm/m]}.$$

Seega on  $x$ -suunas toemoment kahanenud  $7\%$  võrreldes elementaarplaadiga. Kõrvutades seda suurust plaadi A puhul esinenud toemomendi vähenemisega ( $36\%$ ), näeme, et ribi peab pöörduma, sest kahe naaberplaadi A ja B kinnitusemomendid pole tasakaalustatud.

Tekkiva momendi hüppe  $\Delta m = 2,48 - 1,70 = 0,78 \text{ tm/m}$  tasakaalustamist käsitletakse allpool (punkt 4).

Toemoment  $y$ -suunas on kasvanud  $26\%$  võrra. Seejuures on toemomendi väärtus ribi kohal

$$m_y = -0,067 \cdot 0,42 \cdot 6,0^2 = -1,01 \text{ [tm/m]},$$

mida tuleb konstruktiivselt katta suurusele  $50\%$  min  $m_y$  vastava armatuuri läbi viimisega üle ribi.

Välimomendid:

$$\max m_x^{(C)} = \max m_x^I = 0,00556 \cdot 5,58 \cdot 6,0^2 = 1,12 \text{ [tm/m]}, \text{ s. t. } 7\% \text{ vähem.}$$

Välja  $y$ -suunas on olukordadele I ja II vastavad maksimaalsete välimomentide asukohad teineteise suhtes tunduvalt nihutatud ( $\eta_I = 0,7$ ;  $\eta_{II} = 0,447$ ).

Läbi töötades näiteid mitmesuguste plaadi suhetega  $h/a$  leitakse, et  $\max m_y^{(C)}$  muutub väärtusest  $0,85 \max m_y^{(0)}$  kuni  $1,17 \cdot \max m_y^{(0)}$ . Seepärast võib soovitada  $\max m_y^{(C)}$  valida lihtsalt võrdsena  $\max m_y^{(0)}$ -ga.

Toereaktsioonid:

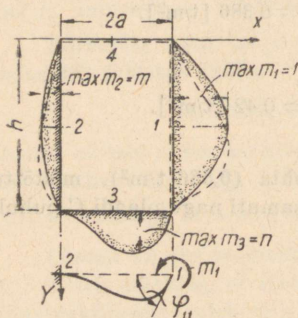
$$\text{ribil: } \max a_I^{(C)} = \max a_I^I = 0,168 \cdot 5,58 \cdot 6,0 = 5,62 \text{ [t/m];}$$

$$\text{serval u: } \max a_{II}^{(C)} = 0,226 \cdot 5,58 \cdot 6,0 + 0,4 \cdot 0,42 \cdot 6,0 = 8,57 \text{ [t/m].}$$

#### 4. Ribi pöördumise mõju.

##### a) Üldisi märkusi.

Nagu nägime arvutusnäites 3, e, tekib ribil  $f$ , mis eraldab plaate A' ja B, plaatide toemomentides hüpe  $\Delta m$  (näites  $0,78 \text{ tm/m}$ ), mille jaotus piki ribi on afiinne reaktsiooni  $a_I$  muutumisega (vt. joon. 10). Tasakaalustamata momendi  $\Delta m$  jaotus plaatide A, B ja ribi vahel saadakse allpool deformatsiooni-meetodi kohaselt, kuid enne tuleb lahendada kaks abiülesannet:



Joon. 11.

1) plaadi serva pöördenurga  $\varphi_{11}$  leidmine, kui mõjub  $\Delta m = 1$  (abiülesanne nr. 1), ja

2) ribi väändenurga  $\psi_{11}$  leidmine, kui ribile mõjuvad siinusjoone järgi jaotatud väändemomendid maksimaalse intensiivsusega  $\max m_{yy} = 1$  (abiülesanne nr. 2).

siivsusega  $\max m_{yy} = 1$  (abiülesanne nr. 2).

b) Abiülesanne nr. 1 (joon. 11). Plaadi arvutus, kui plaat on koormatud toemomentidega  $m_1$  serval 1.

Järgnevalt vaatleme nelinurkset plaati, mis on koormatud ühest servast jaotatud paindemomentidega  $m_1$  nii, et  $\max m_1 = 1$ . Plaadi ääretingimused lisaks üldisele tingimusele  $w = 0$  on:

$$\text{serval 1: } m = m_1,$$

$$\text{serval 4: } m = 0,$$

$$\text{serval 2: } \partial w / \partial x = 0,$$

$$\text{serval 3: } \partial w / \partial y = 0.$$

Väljendame kõik kinnitismomendid Fourier' ridade abil:

$$m_1 = \sum_n A_n \sin n\pi y/h$$

$$m_2 = \sum_n B_n \sin n\pi y/h$$

$$m_3 = \sum_k C_k \sin k\pi x/2a.$$

Tähistame edaspidi  $a = h/2a$ .

Olgu ülesandeks leida esitatud andmetel toe 1 pöördenurk, mida tähistame  $\varphi_{11}$ , sest põhjus  $m_1$ , mis selle tekitab, asub samal serval (1).

Ülesande lahendamisel on arvutuste lihtsustamiseks kasutatud allpool järgmisi oletusi:

1) on oletatud, et  $m_1$  väärtusi esitab siinusjoon maksimaalse ordinaadiga  $\max m_1$  abstsissil  $y = h/2$ ;

2) on oletatud, et ka  $m_2$  väärtusi esitab siinusjoon, mis on samuti sümmeetriline  $y = h/2$  suhtes.

Need oletused, nagu näitavad vastavad arvutused, ei mõju tunduvalt pöördenurga suurusele  $\varphi_{11}$ , eriti kui  $h \gg a$ . Kui peame silmas, et käesolev probleem on kogu ülesande raamides siiski teisejärgulise tähtsusega, tuleb tunnustada tehtud lihtsustavad oletused täiesti vastuvõetavateks.

Seega on momentide avaldised servadel 1 ja 2:

$$\begin{aligned} m_1 &= \sin \pi y/h, \\ m_2 &= B \sin \pi y/h. \end{aligned}$$

Et määrata koefitsiente  $B$  ja  $C_k$ , vaatleme servade 2 ja 3 pöördenurki vastavalt Maurice Lévy' meetodile<sup>11</sup>:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=h} = \sum_k \left\{ -\frac{h}{2N} C_k \Theta_1(u_k) - \frac{1}{aN} \frac{B - \cos k\pi}{\left[\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^2} \left(\frac{k\pi}{2a}\right) \left(\frac{\pi}{h}\right) \right\} \sin \frac{k\pi x}{2a}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} &= \left\{ \frac{a}{N} [B \Theta_1(\bar{u}) + \Theta_2(\bar{u})] + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{hN} \sum_k \frac{C_k}{\left[\left(\frac{k\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right]^2} \left(\frac{k\pi}{2a}\right) \left(\frac{\pi}{h}\right) \right\} \sin \frac{\pi y}{h}, \quad (33) \end{aligned}$$

kus  $u_k = k\pi a$ ;  $\bar{u} = \pi/a$ ,

$$\Theta_1(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u - 2u}{2u \operatorname{sh}^2 u} \quad \text{ja} \quad \Theta_2(u) = \frac{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u}{u \operatorname{sh}^2 u}.$$

<sup>11</sup> Папкович: Строительная механика корабля. Ленинград 1941. Ч. II, лк. 552.

Ääritingimus serval 3 (vt. 32):

$$\sum_k \left\{ -C_k \Theta_1(u_k) - \frac{4k\alpha^2(B - \cos k\pi)}{\pi^2 [1 + (k\alpha)^2]^2} \right\} \sin \frac{k\pi x}{2\alpha} = 0$$

annab võrrandid:

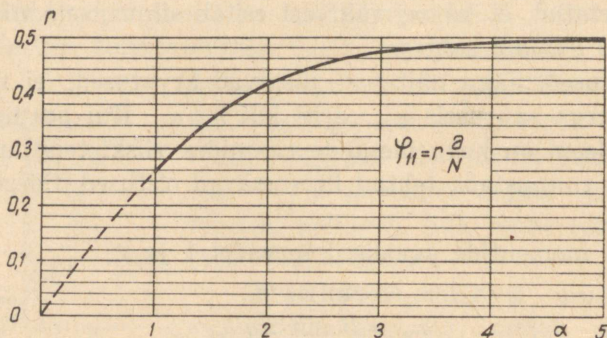
$$C_k \Theta_1(u_k) + \frac{4k\alpha^2}{\pi^2} \frac{B - \cos k\pi}{[1 + (k\alpha)^2]^2} = 0,$$

$k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Ühe võrrandi saame veel serva 2 ääritingimusest (vt. 33):

$$B \Theta_1(\bar{u}) + \Theta_2(\bar{u}) + \sum_k \frac{4\alpha^2 k}{\pi^2 [1 + (k\alpha)^2]^2} C_k = 0.$$

Seega on võrrandeid niisama palju kui tundmatuid ( $C_k$  ja  $B$ ).



Joon. 12.

Otsitav maksimaalne pöördenurk (vt. 33)

$$\varphi_{11} = \frac{\alpha}{N} \left\{ \Theta_2(\bar{u}) + B \Theta_1(\bar{u}) - \sum_k \frac{4\alpha^2 k}{\pi^2} \frac{C_k \cos k\pi}{[1 + (k\alpha)^2]^2} \right\}. \quad (34)$$

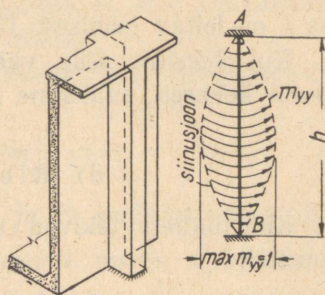
Et saada ülevaadet  $\varphi_{11}$  muutumisest, arvutame ta väärtused, kui  $\alpha = 1$ ;  $\alpha = 1,5$ ;  $\alpha = 2$ ;  $\alpha = 3$ ;  $\alpha = 5$  (seejuures osutub  $k = 1, \dots, 6$  küllaldaseks). Siia lisanduvad veel tugevusõpetusest andmed  $\alpha = 0$  ja  $\alpha = \infty$  puhul. Arvutustulemuste põhjal valmistatud joonis 12 esitab  $\varphi_{11}$  olenevust  $\alpha$ -st.

c) Abiülesanne nr. 2. Ribi pöördenurga  $\varphi_{11}$  arvutus, kui mõjub siinuseliselt jaotatud väändemoment (joon. 13).

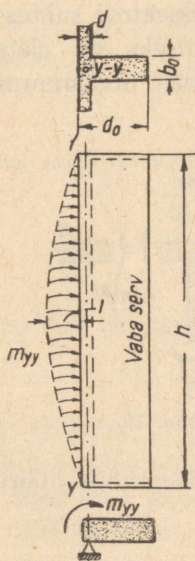
Vaatleme ribi töötamist väände. Koormiseks valime siinuseliselt jaotatud väändemomendi  $m_{yy}$ , maksimaalväärtusega keskel  $\max m_{yy} = 1$ .

Oletame, et ribi on pöörde vastu kinnitatud nii ülalt kui ka alt horisontaalplaatide tõttu. Telg ( $Y-Y$ ), mille ümber toimub ribi pöördumine (joon. 14), võib asuda ainult ribi peapinna ja vertikaalplaadi keskpinna liitejoonel. Igal teisel telje asendil tekiks ribi pöördel lüke vertikaalplaadi keskpinna suunas, mis on aga ilmselt võimatu plaadipinna suure jäikuse tõttu.

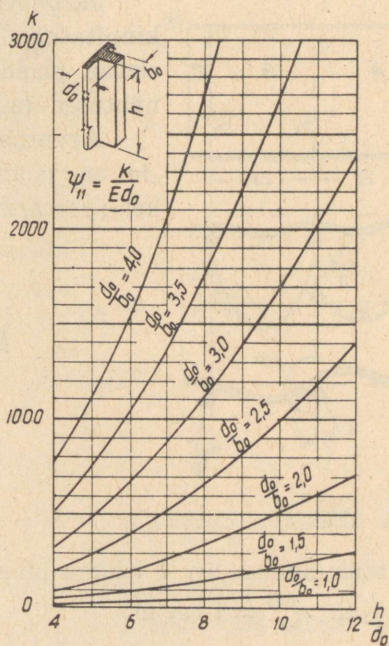
Ribi osutub sel juhtumil plaadiks, mis on kolmest servast vabalt toetatud ja ühel serval ilma reaktsioonideta. Selle ülesande on lahendanud H. Blech ühes oma töös<sup>12</sup>, saades järgmise empiirilise seose (kui Poissoni tegur  $\mu = 0$ ):



Joon. 13.



Joon. 14.



Joon. 15.

$$E \psi_{11} = \frac{12h}{b_0^3} (0,06 + 0,047 \frac{h}{d_0}) \quad (35)$$

<sup>12</sup> H. Blech: Berechnung kreuzweisbewehrter Fahrbahnplatten bei beliebiger Stellung der Verkehrslasten, B. u. E. 1937., H. 19, 20.

või

$$\psi_{11} = \frac{k}{E d_0^2}, \quad (35')$$

kus  $k$  on leitav joonisest 15.

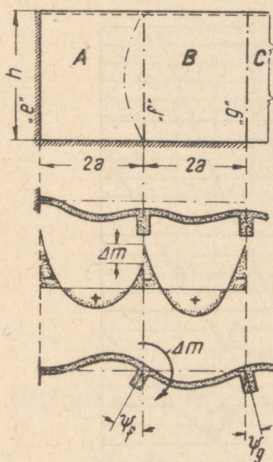
Kui oleksime selle väändeprobleemi lahendanud tavalise väändeteooria kohaselt, saaksime kuni 40% suurema väändenurga  $\psi_{11}$ .

#### d) Ribi pöördumise mõju.

Ribi lükkest tekivad ribil  $f$  plaatides A' ja B erinevad kinnitusemomendid:

$$m_{xf}^{(A)} \text{ ja } m_{xf}^{(B)}.$$

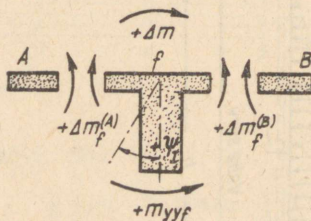
Nende vahe  $\Delta m$  püüab pöörata ribi (joon. 16).



Joon. 16.

Järgnevalt oletame, et nurk  $e$  on jäigalt kinnitatud, nii et mõlemas teineteisega risti olevas plaadis tekivad oluliselt ühed ja samad nähtused (sümmeetria bissektori suhtes).

Arvutuste lihtsustamiseks on oletatud, et  $\Delta m$  on jaotatud siinuseliselt maksimumiga keskel ( $y = h/2$ ).



Joon. 17.

Abiülesandest nr. 1 leiame plaadi serva maksimaalse pöördenurga, kui mõjub  $m_{xf}^{(A)} = 1 \text{ tm/m}$ :

$$\varphi_{11} = r \frac{a}{N} = r \frac{12a}{d^3 E} \quad (r \text{ — vt. joon. 12}).$$

Abiülesandest nr. 2 leiame ribi maksimaalse väändenurga:

$$\psi_{11} = k/E d_0^2 \quad (k \text{ — vt. joon. 15}).$$

Plaadi pöördenurga  $\varphi_{11} = 1$  tekitab plaadi serval moment

$$m_{11x} = d^3 E / 12ar.$$

Ribi väändenurga  $\psi_{11} = 1$  tekitab väändemoment

$$m_{11yy} = E d_o^2 / k.$$

Arvuliste näidete läbitöötamisel on selgunud, et ribi  $g$  pöördenurka on võimalik ilma suurema veata lugeda nulliks.

Rakendades deformatsioonimeetodit, koostame ribi  $f$  tasakaalu tingimuse (joon. 16 ja 17):

$$\Delta m + \Delta m_f^{(A)} - \Delta m_f^{(B)} - m_{yyf} = 0, \quad (36)$$

kus  $\Delta m_f^{(A)}$ ,  $\Delta m_f^{(B)}$  on vastavalt plaatide A ja B maksimaalsete kinnitusemomentide kasvud ribil  $f$  selle pöördumisel nurga  $\Psi_f$  võrra;  $m_{yyf}$  on sel puhul ribile rakendatud jaotatud väändemomentide maksimaalne väärtus.

Kui asendame võrrandis (36)

$$\Delta m_f^{(A)} = -\Psi_f \frac{d^3 E}{12 a r} = -\Delta m_f^{(B)} \quad \text{ja}$$

$$m_{yyf} = \Psi_f \frac{E d_o^2}{k}, \quad (37)$$

siis leiame

$$E \Psi_f = \frac{\Delta m}{2 d^3 / 12 a r + d_o^2 / k}. \quad (38)$$

Asetades (38) valemitesse (37), saame:

$$\Delta m_f^{(A)} = -\frac{0,5 \Delta m}{1 + 6 r a d_o^2 / k d^3} = -\Delta m_f^{(B)} \quad (39)$$

$$m_{yyf} = \frac{\Delta m}{1 + k d^3 / 6 r a d_o^2}.$$

Maksimaalne väändemoment ribis

$$M_{yy} = \frac{h}{\pi} m_{yyf}. \quad (40)$$

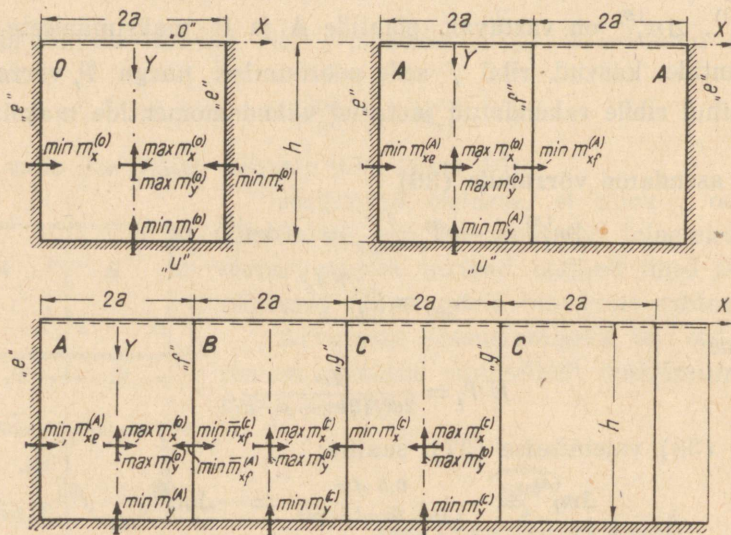
Läbitöötatud arvuliste näidete põhjal on võimalik esitada siinkohal järgmised järeldused:

- 1) väänatud on praktiliselt ainult äärmine ribi  $f$ ;
- 2) ribi pöördest on mõjustatud praktiliselt vaid plaadi kinnitusemomentid ribil  $f$  suunas  $x$ ; ülejäänud koormisfunktsioone saab arvutada punkti 3 järgi;
- 3) praktilikas tavaliselt esinevatel juhtudel on võimalik momendi hüpet  $\Delta m$  tasandada kolmeks võrdseks osaks, s. o. plaadi kinnitusemomentide lisadeks vasakule ja paremale ning ribi väändemomendiks;
- 4) ribi väändemoment ei nõua tavaliselt ribis erilist väändearmatuuri, sest lubatavaid tõmbepingeid betoonis ei ületata.

## 5. Kokkuvõte.

Punktis 1 näidatud plaadi probleemi lahendamiseks esitatakse järgmine lähendusmeetod, mille järgi ribides esinevate elastsete lükete ja ka pöörete mõju on kergelt arvatav (joon. 1 ja joon. 18).

a. Plaadiskeem  $o$  (elementaarplaat) — ribad puuduvad (joon. 18). Tähistus  $o$  — näiteks  $\max m_x^{(o)}$ . Koormisfunktsioonid on ilma pikemata loetavad joonisest 5.



Joon. 18.

b. Plaadiskeem A — A. Seinaplaati poolitab üks ribi (joon. 18). Sümmeetria tõttu ei toimu ribi pööret.

Koormis jaotatakse kaheks osaks  $p_o = p_{oA}^I + p_{oA}^{II}$ , kusjuures  $p_{oA}^{II}$  leitakse valemi (28) abil. Joonise 5 abil määrame nii  $p_{oA}^I$  kui ka  $p_{oA}^{II}$  (sel puhul on plaadisuhe  $h/2a$ ) jaoks maksimaalsed koormisfunktsioonid. Summeerimine toimub järgmiselt, arvestades ka maksimaalsete ordinaatide nihkumist:

Toemomendid:

$$\begin{aligned} \text{serval } e: \quad \min m_{xe}^{(A)} &= \min m_x^I + 0,85 \min m_x^{II} \\ \text{serval } f: \quad \min m_{xf}^{(A)} &= \min m_x^I + 0,85 \max m_x^{II} \\ \text{serval } u: \quad \min m_y^{(A)} &= \min m_y^I + 0,55 \min m_y^{II}. \end{aligned}$$

Välimomendid:

$$\max m_x^{(A)} \approx \max m_x^{(o)}$$

$$\max m_y^{(A)} \approx \max m_y^{(o)}.$$

Toereaktsioonid:

$$\text{serval } e: \max a_{Ie} = \max a_I^I + 0,85 \max a_I^{\text{II}}$$

$$\text{serval } f: \max a_{If} = \max a_I^I$$

$$\text{serval } u: \max a_{\text{II}} \approx \max a_{\text{II}}^{(o)}.$$

Ribikoormis:

$$q'_0 = 2Rp_{0A}^I / p_0, \text{ kus } R - \text{vt. joon. 5.}$$

c. Plaadiskeem A—B—C. Seinaplaat toetub mitmele ribile (joon. 18).

1) Plaat C.

Koormis jaotatakse kaheks osaks:  $p_0 = p_{0C}^I + p_{0C}^{\text{II}}$ , kus  $p_{0C}^{\text{II}}$  leitakse valemi (29) abil. Koormise  $p_{0C}^{\text{II}}$  järgi (kuna plaat silindriliselt paindub) on koormisfunktsioonid leitavad ühest otsast kangelt ja teisest vabalt toetatud tala skeemist (näiteks valemite (24), (26), (27) abil või ka joon. 5, kui  $h/a = 0$ ). Koormisele  $p_{0C}^I$  vastavad suurused leiame joo-  
nisest 5. Summeerides saame:

$$\min m_x^{(c)} = \frac{p_{0C}^I}{p_0} \min m_x^{(o)} = \min m_x^I,$$

$$\max m_x^{(c)} = \frac{p_{0C}^I}{p_0} \max m_x^{(o)} = \max m_x^I,$$

$$\min m_y^{(c)} = \min m_y^I + \min m_y^{\text{II}} \text{ (kus } \min m_y^{\text{II}} = -0,067 p_{0C}^{\text{II}} h^2 \text{)},$$

$$\max m_y^{(c)} \approx \max m_y^{(o)},$$

$$\max a_I = \max a_I^I,$$

$$\max a_{\text{II}} = \max a_{\text{II}}^I + a_{\text{II}}^{\text{II}} \text{ (kus } a_{\text{II}}^{\text{II}} = p_{0C}^{\text{II}} 0,4h \text{)}.$$

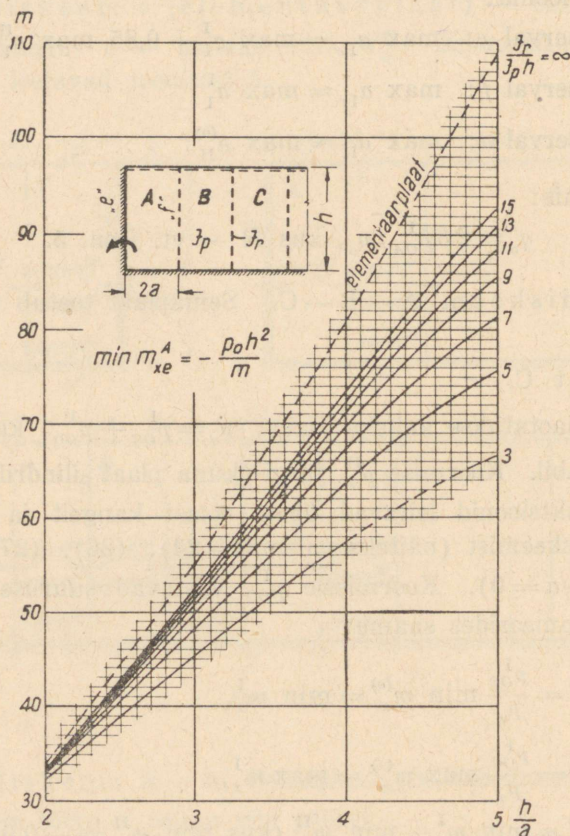
2) Plaat A.

Arvutatakse üldiselt nagu punkt b, kuid  $p_{0A}^{\text{II}}$  arvutatakse valemi (31) järgi. Ribi  $f$  pööre ei mõju nimetamisväärselt suurustele

$$\min m_{xe}^{(A)}, \min m_y^{(A)}, \max m_x^{(A)}, \max m_y^{(A)}$$

ning toereaktsioonidele ja kõik need arvutatakse nagu punkt b. Ribil  $f$  kin-  
 nitusmoment  $m_{xf}^{(A)}$  aga suureneb mõningal määral võrreldes punkti b-ga:

$$\min \bar{m}_{xf}^{(A)} = \min m_{xf}^{(A)} + \Delta m_f^{(A)} \approx \min m_{xf}^{(A)} - \left| \frac{\Delta m}{3} \right|.$$



Joon. 19.

kus  $\Delta m_f^{(A)}$  arvutatakse vastavalt valemile (39) ja

$$\Delta m = \left| \min m_x^{(C)} - \min m_{xf}^{(A)} \right|.$$

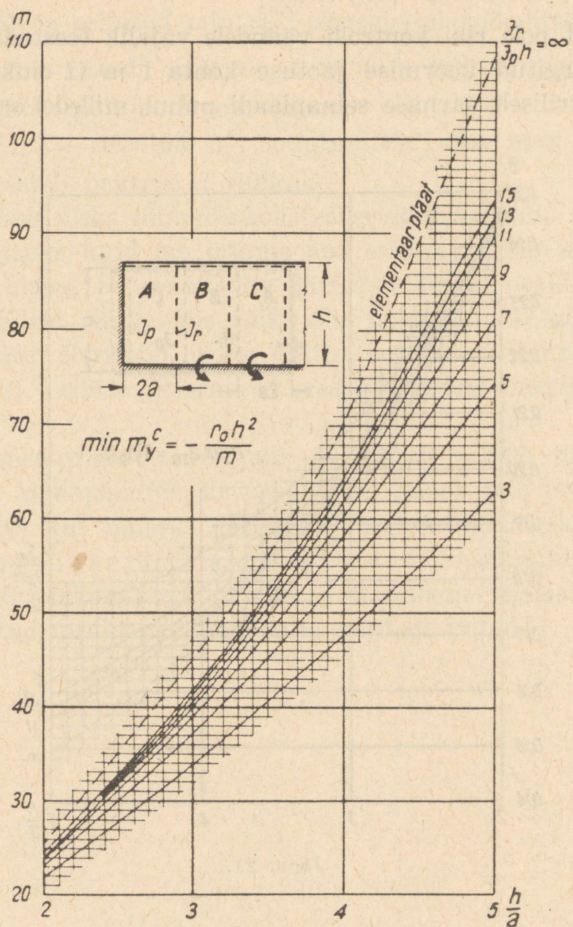
### 3) Plaat B.

See on üldiselt samasuguses olukorras kui plaat C, ainult toe-  
 moment üle ribi  $f$  kahaneb:

$$\min m_{xf}^{(B)} = \min m_{xf}^{(C)} + \Delta m_f^{(B)} \approx \min m_x^{(C)} - \left| \frac{\Delta m}{3} \right|,$$

kus  $\Delta m_f^{(B)}$  arvutatakse vastavalt valemile (39) ja

$$\Delta m = \left| \min m_x^{(C)} - \min m_{xf}^{(A)} \right|.$$



Joon. 20.

#### 4) Ribid.

Ribid  $f$  omavad võrreldes elementaarplaadi juhtumiga sageli tunduvalt väiksemat koormist:

$$q'_{of} = \frac{p_o - 0,5(p_{oA}^{\text{II}} + p_{oC}^{\text{II}})}{p_o} 2R,$$

milles  $p_{oA}^{\text{II}}$  leiame valemi (31) ja  $p_{oC}^{\text{II}}$  valemi (29) abil.

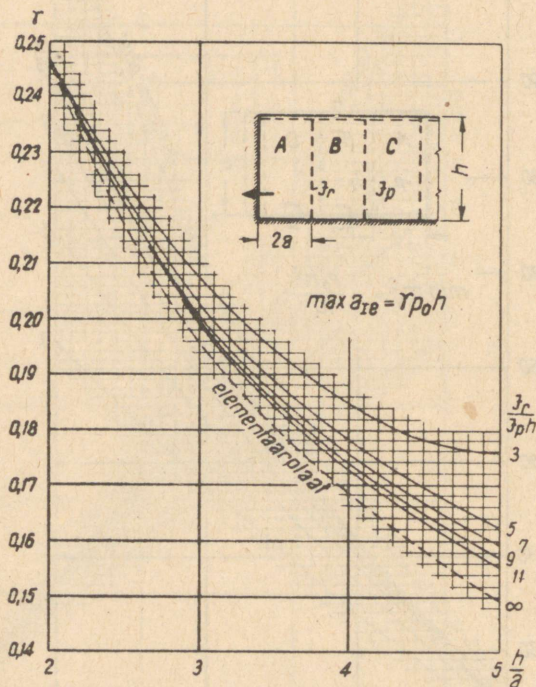
Lisaks sellele saab see ribi maksimaalse väändemomendi

$$M_{yy} = \frac{h}{\pi} m_{yyf},$$

kus  $m_{yyf}$  on leitav valemi (39) abil.

Tavaliselt pole ribi kontrolli väände vajalik teostada.

Olgu märgitud koormise jaotuse kohta I ja II olukorra vahel, et kahe geomeetriliselt sarnase seinaplaadi puhul, millel on lineardimen-



Joon. 21.

sioonid erinevad, jaotub ka koormis erinevalt. See pealiskaudsel vaatlusel ootamatu nähtus on põhjendatav sellega, et suurema  $h$  puhul ribi koormis  $q$  kasvab. Seega osutavad ribad suurema  $h$  puhul suhteliselt väiksemat jäikust. Selle asjaolu tõttu pole praktiliselt võimalik tabuleerida koormisfunktsioone argumentide  $h/a$ ,  $J_r/J_p$ , vaid  $h/a$  ja  $J_r/J_p h$  järgi (muidugi kuni väände mõju arvestamiseni).

Järgnevalt on graafikutena esitatud tähtsamate koormisfunktsioonide olemus mainitud argumentidest; nagu varem nägime, ei avalda ribi pööre esitatavatele koormisfunktsioonidele peaaegu mingit mõju.

Joonisel 19 on esitatud min  $m_{xe}^{(A)}$  olenevus plaadisuhtest. Üldiselt tuleb märkida, et plaadi paksuse  $d$  määramisel on min  $m_{xe}^{(A)}$  mõõduandev, kui nõutakse pragudekindlust.

Joonisel 20 on esitatud min  $m_y^{(C)}$  olenevus plaadisuhtest. Üldiselt on min  $m_y^{(C)}$  otsustav plaadi paksuse  $d$  valikul, kui pragudekindlus pole nõutav ja arvutus põikjõule pole määrav.

Joonisel 21 on esitatud  $a_{I_e}$  muutumine. Ka max  $a_{I_e}$  võib olla mõõduandev plaadi paksuse  $d$  valikul.

Analoogiliselt oleks võimalik konstrueerida graafikuid kõigi koormisfunktsioonide jaoks, kuid me jätame nad esitamata, sest antud arvutuseskiri on nii lihtne, et graafikute järele ei tundu praktilist vajadust.

Arvutusnäitest (3,e), mis võiks olla normaaljuhtumiks, selgub, et ribides esinevate elastsete lükete tõttu muutuvad kinnitusemomendid plaadis  $\pm 30\%$ , ribide koormised resp. paindemomendid aga  $15\%$  ja enam.

Esitatud meetodiga on võimalik suhteliselt vähese tööga sooritada ülalkirjeldatud seinaplaatide arvutusi. Sel puhul pole projektiva inseri töö suurem kui näiteks jätkuvate horisontaal-laeplaatide arvutamisel Marcus-Löser'i järgi. Arvutuste hõlbustamiseks tehtud oletused on arvutusolukorda viinud tunduvalt vähem tegelikkusest eemale kui äsjamainitud, praktikas läbilõõnud meetodi puhul.

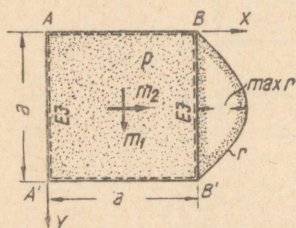
## II. Koormise lahutamise meetodi rakendamine elastsetele ribidele toetuvate horisontaalsete ristkülikuliste plaatide puhul.

Koormise lahutamise meetod on edukalt rakendatav paljudel horisontaalplaadi koormise juhtudel. Tema eelis seisneb selles, et ta võimaldab kasutada mõningaid olemasolevaid andmeid servadel järeleandmatult toetatud plaatide kohta. Koormisfunktsioonid, mis vastavad servadel järeleandmatult toetatud plaatidele, tähistatakse edaspidi nullikesega (näiteks  $m_x^{(0)}$ ).

Järgnevalt vaatleme rida ülesandeid.

### 1. Kahel serval järeleandmatult ja kahel serval elastsetele taladele toetuv plaat.

Vaatleme ruudukujulist vabalt toetatud plaati.



Joon. 22.

See erijuhtum on valitud võrdlemise võimaldamiseks täpsete meetoditega, sest ta on lahendatav Maurice Lévy' meetodi abil, (kahel vastasserval on rahuldatud Navier' ääretingimused). Koormise lahutamise meetodi rakendamise seisukohalt on aga hõlpsasti käsitatavad ka teised juhud.

Plaat olgu paindejäikusega  $N$  ja koormatud ühtlaselt jaotatud koormisega  $p$  t/m<sup>2</sup> (joon. 22). Servadel  $AB$  ja  $A'B'$  plaat olgu toetatud vabalt ja järeleandmatult; servadel  $AA'$  ja  $BB'$  samuti vabalt, aga elastsetele tugiribidele paindejäikusega  $EJ$ .

Kasutame järgmisi vabalt toetatud ja ühtlaselt koormatud plaadi andmeid<sup>13</sup>:

<sup>13</sup> Галеркин, Б. Г.: Тонкие упругие плиты, Госстройиздат, 1933.

$$\text{keskel: } \max w^{(0)} = 0,0037 qa^2/N,$$

$$\max m^{(0)} = 0,0479 qa^2;$$

$$\text{toereaktsioon: } \max r^{(0)} = 0,420 qa.$$

Kujutleme, et koormis on jagatud kaheks

$$p. = p_{\text{I}} + p_{\text{II}},$$

millest  $p_{\text{I}}$  mõjub järeleandmatult toetatud plaadile.

Reaktsioonid ribile koormisel  $p_{\text{I}}$  peavad olema nii suured, et neist tekkivad ribi läbipaindumised võrduksid teisest koormisosast  $p_{\text{II}}$  tulenevate plaadi läbipaindumistega. Plaat on teisel puhul vaadeldud toetatuna vaid servadel  $AB$  ja  $A'B'$  (läbipaindumine silindripinda mööda).

Oletame, et esimesele koormisele vastavad reaktsioonid jaotuvad siinuseliselt

$$r = \max r \cdot \sin \pi y/a = 0,42 p_{\text{I}} a \sin \pi y/a.$$

Sel puhul maksimaalne ribi läbipaine

$$\max w_r = \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \frac{0,42 p_{\text{I}} a}{EJ}.$$

Maksimaalne plaadi läbipaine teise osakoormise puhul

$$\max w_p = \frac{5}{384} \frac{p_{\text{II}} a^4}{N}.$$

Kui võrdsustame need kaks avaldist ning kasutame lisatingimust:

$$p = p_{\text{I}} + p_{\text{II}},$$

siis saame

$$p_{\text{I}} = \frac{p}{1 + 0,33 aN/EJ} \quad \text{ja} \quad p_{\text{II}} = \frac{p}{1 + 3,02 EJ/aN}.$$

Summeerides leiame järgmised koormisfunktsioonid (vt. joon. 22).

$$\max m_1 = \frac{0,0479}{1 + 0,33 aN/EJ} p a^2 + \frac{0,125}{1 + 3,02 EJ/aN} p a^2,$$

$$\max m_2 = \frac{0,0479}{1 + 0,33 aN/EJ} p a^2,$$

$$\max w = \frac{0,0037}{N} \frac{p a^4}{1 + 0,33 aN/EJ} + \frac{0,013}{N} \frac{p a^4}{1 + 3,02 EJ/aN}.$$

Võttes näiteks  $\frac{EJ}{aN} = 6$ , nagu see praktikas sageli esineb, leiame siit järgmised väärtused:

$$\max m_1 = 0,0519 p a^2,$$

$$\max m_2 = 0,0454 p a^2,$$

$$\max w = 0,00418 p a^4/N.$$

Neile tuleb muidugi vaadata kui lähendusarvutuse tulemustele<sup>14</sup>, kuid võrdlus täpsemate arvutuste<sup>15</sup> tulemustega

$$\max m_1 = 0,0514 pa^2,$$

$$\max m_2 = 0,0455 pa^2,$$

$$\max w = \frac{0,0495 pa^4}{12 N} = 0,00412 pa^4/N$$

näitab, et need koormisfunktsioonide väärtused on leitud lähendusmeetodi abil veaga ca 1<sup>0</sup>/. Seejuures on aga töö võrdlematult lihtsam.

## 2. Neljal serval elastsetele ribidele toetuv plaat

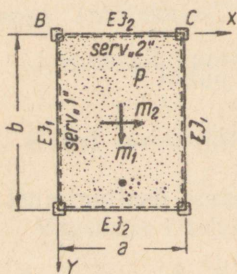
(joon. 23).

Koormisfunktsioonide leidmine sel juhul on täpsemate meetodite järgi seotud väga suurte raskustega, sest nüüd ei esine kaht vastaskülge, mille puhul oleks Navier' ääritingimused täidetud.

Papkovitši teoses<sup>16</sup> on näidatud lahenduse võimalus Ritzi meetodi abil. Sel puhul märgitakse, et plaadi elastse pinna võrrandis tuleb kahe- ja ühekordsetest trigonomeetriliste funktsioonide ridadest kasutada vaid esimesi liikmeid, et oleks mõeldav arvutuste tegelik teostamine. Kuid viimaselgi juhul, olgugi et ei saaks enam loota suuremat täpsust kui koormise lahutamise meetodil, pole ühtki näidet viidud arvuliste tulemusteni.

E. Müller<sup>17</sup> on jõudnud niisuguse ülesande lahendamisel küll arvuliste tulemusteni, kuid arvutuskäik on õige pikk (7 suureformaadilist ajakirja lehekülge) ja vigadeohtlik.

Müller kasutab plaadi elastse pinna võrrandis trigonomeetriliste ja hüperboolsete funktsioonide rida. Seejuures määratakse rea konstandid tingimustest, et plaadi kontuuril peavad plaadi reaktsioonid võrduma toetavate talade koormisega. Neid tingimusi koostatakse kontuuri nii mitme diskreetse punkti kohta, kui mitut rea kordajat kasutatakse valitud elastse pinna võrrandis. Nii saadud lineaarvõrrandsüsteem on üsna vigadetundlik ja tema lahendamine võiks



Joon. 23.

<sup>14</sup> Plaadi reaktsioonide jaotus ribile pole täpselt siinuseline ja ribi elastne joon ei lange ühte plaadi elastse pinnaga teise osakoormise puhul.

<sup>15</sup> Чалышев, К. А.: Сборник Института Инженеров Путей Сообщения, 1915, lk. 48.

<sup>16</sup> Папкович, П. Ф.: Строительная механика корабля, 1941, lk. 644.

<sup>17</sup> E. Müller, Rechteckige Platten, die an allen vier Seiten durch elastische Träger unterstützt sind. Ing. Archiv. 1941, lk. 37.

toimuda arvutusmasinat kasutades Gaussi algoritmi abil. Muide Müller kurdab, et suuremaid raskusi pakub võrrandsüsteemi kordajate leidmine, kui saadud (näites 8 tundmatuga) võrrandsüsteemi lahendamise.

Vaatleme sama ülesande lahenduskäiku koormise lahutamise meetodi abil ning võrdleme arvulisi tulemusi.

Oletame, et on antud vabalt toetatud plaadi andmed

$$\max m_1^{(0)}, \max m_2^{(0)}, \max w^{(0)}, \max r_1^{(0)} = k_1 a q$$

ja

$$\max r_2^{(0)} = k_2 b q$$

(mis on kõik leitavad tabelitest).

Edasi oletame, et koormis on jagatud kolme ossa (joon. 24).

$p_I$  — mõjub plaadile, mis on toetatud järeleandmatult (joon. 24-a). Sel puhul tekivad ribidel koormised (plaadi reaktsioonide epüür on oletatud siinusjoonelisena) —

$$\text{ribil 1: } r_{1I} = k_1 p_I a \sin \pi y / b,$$

$$\text{ribil 2: } r_{2I} = k_2 p_I b \sin \pi x / a.$$

$p_{II}$  — mõjub plaadile, mis on toetatud järeleandmatult vaid servadel  $AB$  ja  $CD$  (joon. 24-b). Reaktsioonid tekivad vaid ribil 1:

$$r_{1II} = 0,5 a p_{II}.$$

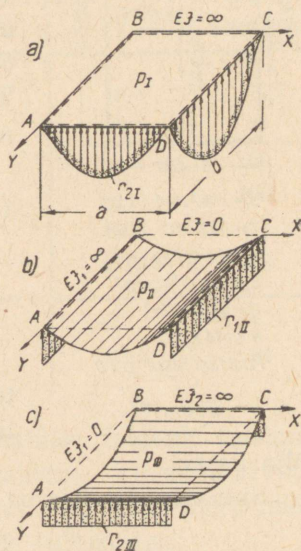
Läbipaindumispind on silindriline.

$p_{III}$  — mõjub plaadile, mis on järeleandmatult toetatud vaid servadel  $BC$  ja  $AD$  (joon. 24-c). Reaktsioonid tekivad vaid nimetatud ribidel:

$$r_{2III} = 0,5 b p_{III}.$$

Läbipaindumispind on samuti silindriline ning on määratav lihttala ülesandest.

Kui nüüd nõuame, et ribi  $AB$  lõplikud läbipaindumised peavad võrduma plaadi läbipaindumistega III osakoormisel ning ribi  $BC$  lõplikud läbipaindumised peavad võrduma plaadi läbipaindumistega II osakoormisel, saamegi võrrandsüsteemi  $p_I$ ,  $p_{II}$  ja  $p_{III}$  määramiseks:



Joon. 24.

$$\begin{cases} p = p_I + p_{II} + p_{III} \\ \frac{k_2 p_I b}{E J_2} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 + \frac{5}{384} \frac{p_{III} 0,5 b a^4}{E J_2} = \frac{5}{384} \frac{p_{II} a^4}{N} \\ \frac{k_1 p_I a}{E J_1} \left(\frac{b}{\pi}\right)^4 + \frac{5}{384} \frac{p_{II} 0,5 a b^4}{E J_1} = \frac{5}{384} \frac{p_{III} b^4}{N} \end{cases} \quad (41)$$

või peale mõningaid ümberkujundusi:

$$\begin{cases} p = p_I + p_{II} + p_{III} \\ 0,79 k_2 p_I + 0,5 p_{III} = p_{II} E J_2 / b N \\ 0,79 k_1 p_I + 0,5 p_{II} = p_{III} E J_1 / a N \end{cases} \quad (41')$$

Saadud kolmest võrrandist leitakse igal arvulisel erijuhtumil  $p_I$ ,  $p_{II}$  ja  $p_{III}$  ning siis summeerimise teel vajalikud koormisfunktsioonid.

Vaatleme koormise lahutamise meetodi rakendust Mülleri<sup>17</sup> poolt valitud arvutusnäite puhul (joon. 25).

Tuleb märkida, et sel puhul plaati toetavad talad on suhteliselt väga nõrgad. Sellega ongi seletatav asjaolu, et momendid välja keskel on arvuliselt isegi väiksemad kui talade kohal. Tabelist leiame, et  $k_1 = 0,523$  ja  $k_2 = 0,340$ , ning edasi  $E J_1 / a N = 0,372$  ja  $E J_2 / b N = 0,108$ .

Asetades need suurused võrrandsüsteemi (41), leiame

$$p_I = -302 \text{ [kg/m}^2\text{]}$$

$$p_{II} = 443 \text{ ,,}$$

$$p_{III} = 259 \text{ ,,}$$

Ootamatult on  $p_I$  negatiivne. Kuid seetõttu saabki ka koormise lahutamise meetod anda talade kohal arvuliselt suuremaid momente kui

välja keskel.

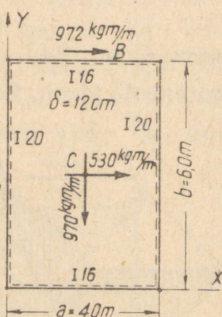
Summeerides leiame iseloomustavad momendid (vt. joon. 25):

$$m_{C_x} = \frac{p_{II} a^2}{8} + \frac{p_I a^2}{m_{1x}} = \frac{443 \cdot 4^2}{8} - \frac{302 \cdot 4^2}{13,87} = 536 \text{ [kgm/m]}$$

$$m_{C_y} = \frac{p_{III} b^2}{8} + \frac{p_I b^2}{m_{1y}} = \frac{259 \cdot 6^2}{8} - \frac{302 \cdot 6^2}{70,22} = 1007 \text{ ,,}$$

$$m_{A_y} = \frac{p_{III} b^2}{8} = \frac{259 \cdot 6^2}{8} = 1160 \text{ ,,}$$

$$m_{B_x} = \frac{p_{II} a^2}{8} = \frac{443 \cdot 4^2}{8} = 886 \text{ ,,}$$



$J_1 = 2140 \text{ cm}^4$  (I 20)  
 $J_2 = 935 \text{ cm}^4$  (I 16)  
 $E_I = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_{PI} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$   
 $q = 400 \text{ kg/m}^2$   
 $N = 144 E_{PI}$   
 Poissoni tegur  $\mu = 0$

Joon. 25.

Momendid kandetalades, kui oletada, et  $p_I$  annab taladele paraboolselt jaotatud koormisi:

$$\max M_A = \frac{a}{2} p_{II} \frac{b^2}{8} + \frac{5}{48} a k_1 p_I b^2 = 1620 \text{ [kgm]}$$

$$\max M_B = \frac{b}{2} p_{III} \frac{a^2}{8} + \frac{5}{48} b k_2 p_I a^2 = 495 \text{ ,,}$$

Maksimaalne läbipaine plaadi keskel:

$$\max w = \frac{0,0078 p_I a^4}{N} + \frac{5}{384} \left( \frac{p_{II} a^4}{N} + \frac{p_{III} b^4}{N} \right) = \frac{5225}{N} = 1,72 \text{ [cm]}$$

Tabelis 1 on toodud arvulised väärtused ka sel juhtumil, kui talade läbipainumisi ei arvestataks ( $J_1 = J_2 = \infty$ ).

Tabel 1.

	Mülleri järgi	Koormise lahutamise meetodil		Oletusel, et $J_1 = J_2 = \infty$	
			viga (%)		viga (%)
$m_{Cx}$ (kgm/m)	530	536	1,1	463	12,6
$m_{Cy}$ „	971	1007	3,7	205	79
$m_{Ay}$ „	1079	1106	7,5	0	100
$m_{Bx}$ „	972	886	8,8	0	100
$M_A$ „	1602	1620	1,1	3060	91
$M_B$ „	526	525	0,0	1410	168
Läbipainumine max $w$ (cm)	1,64	1,72	4,9	0,26	84

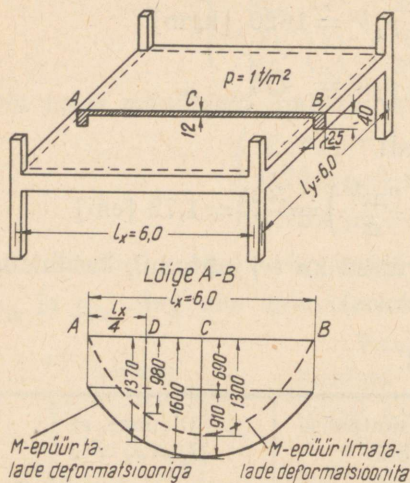
Nagu tabelist nähtub, on koormise lahutamise meetodi tulemuste täpsus, vaatamata meetodi lihtsusele, üsna küllaldane. Tavaline arvutusvõte (s. ö. talades esinevate lükete mõju hülgamine) viib, nagu näeme esitatud tabelist, mõnel puhul täiesti vääradele tulemustele.

Toodud näide on raudbetoonkonstruktsioonide seisukohalt muidugi erakordne seetõttu, et toetustalad on suhteliselt väga elastsed.

Kuid ka raudbetoonkonstruktsioonides võib esineda skeeme, kus plaadi ääretalade läbipainumise mõju on tunduv.

Näiteks joonisel 26 esitatud skeemi ja koormise puhul kasvas välimoment punktis  $C$  23%, võrreldes tavalise arvutusmeetodiga. Seejuures tuleb eriti rõhutada, et tavaline ristiarmeeritud plaadi armee-

rimisvõte, s. o. äärmistes veerandites väliraudade kahandamine 50% võrra, pole antud juhul enam lubatav. Tõepoolest, nagu nähtub joonisest, plaadi veerandites (punkt *D*) on moment kasvanud 40% võrra talade läbipaindumiste tõttu ja seejuures koguni suuremaks kui moment välja keskel tavalise meetodi kohaselt arvatatuna.



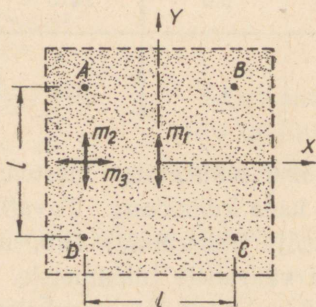
Joon. 26.

Olgu veel mainitud, et koormise lahutamise meetodi rakendamise puhul on ükskõik, kas plaadi servad omavad kinnitusmomenti või mitte.

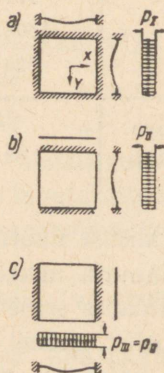
### 3. Üksikutele punktidele toetuv plaat (nn. seenlagi).

Vaatleme näiteks ruudukujuliste väljadega üksikutes punktides toetatud plaati, nagu seda on käsitletud Lewe<sup>18</sup>. Pole küll mingit põhi-

mõttelist ega arvutustehnilist raskust sama ülesannet lahendada koormise lahutamise meetodil ka üldse ristkülikuliste väljade puhul, kuid



Joon. 27.



Joon. 28.

et oleks võimalik teostada võrdlusi kirjanduse andmetega, on selles töös piiratud ruudukujulisi välju omavate plaatide probleemiga.

<sup>18</sup> Lewe, Pilsdecken, Berlin, 1926.

Vaatleme ühtlaselt koormatud seenlae keskmist välja (joon. 27). Kui kujutleme esialgu, et postid on omavahel ühendatud taladega, siis on võimalik rakendada koormise lahutamise meetodit järgmiselt:

$p_I$  — mõjub järeleandmatult toetatud, kuid kinnitusemomentide mõttes jäigalt kinnitatud plaadile (joon. 28-a);

$p_{II}$  — mõjub samuti jäigalt kinnitatud plaadile, mis on toetatud vaid  $x$ -suunalistele servadele (joon. 28-b); see skeem võimaldab arvutamist tavalise tugevusõpetuse vahenditega;

$p_{III}$  — mõjub jäigalt kinnitatud plaadile, mis on toetatud vaid  $y$ -suunalistele servadele (joon. 28-c).

Et esineb täielik sümmeetria, siis

$$p_{II} = p_{III}.$$

Võrreldes võrrandsüsteemiga (41), on antud juhtumil ka piirtingimused muutunud. Teise võrrandi saame järgmiselt:

$p_I$  tekitab ribile reaktsiooni  $q_I = kl p_I \sin \pi x/l$ , mis põhjustab ribi keskkohas lükke

$$\delta_I = \frac{kl p_I l^4}{455 E_r J_r};$$

$p_{II}$  tekitab reaktsiooni  $q_{II} = 0,5 p_{II} l$ ,

siit

$$\delta_{II} = \frac{l p_{II} l^4}{2 \cdot 384 E_r J_r}.$$

Pidevuse tingimus

$$\frac{kl p_I l^4}{455 E_r J_r} + \frac{l p_{II} l^4}{2 \cdot 384 E_r J_r} = \frac{p_{III} l^4}{384 N}$$

lihtsustub tingimusel  $E_r J_r \rightarrow 0$  järgmiseks

$$0,845 k p_I + 0,5 p_{II} = 0,$$

süsteemi teine võrrand on muidugi

$$p = p_I + 2 p_{II}. \quad (42)$$

Vajalikud andmed jäigalt kinnitatud ühtlaselt koormatud ruudukujulise plaadi kohta on  $(\mu = 0)^{19}$  (joon. 27).

$$k = 0,45; \quad \max w^{(0)} = 0,00125 p l^4 / N,$$

$$\text{maksimaalne välimoment } m_1^0 = 0,0175 p l^2,$$

$$\text{maksimaalne toemoment } m_3^0 = -0,0485 p l^2.$$

<sup>19</sup> Галеркин, Б. Г.: Упругие тонкие плиты, 1933.

Võrrandsüsteem (42) on sel  $k$  väärtusel

$$\begin{cases} p = p_I + 2p_{II} \\ 0,38 p_I + 0,5 p_{II} = 0, \end{cases}$$

millest

$$p_I = -1,94 p \text{ ja } p_{II} = 1,47 p.$$

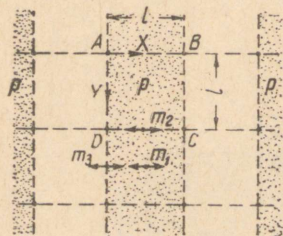
Edasi leiame summeerimisega koormisfunktsioonid (Lewe lahendused antakse võrdluseks sulgudes):

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p_{II} l^2}{24} + 0,0175 p_I l^2 = \frac{p l^2}{36,6} \left( \frac{p l^2}{38} \right) \\ m_2 &= \frac{p_{II} l^2}{24} = \frac{1,47 p l^2}{24} = \frac{p l^2}{16,3} \left( \frac{p l^2}{17,3} \right) \\ m_3 &= -\frac{p_{II} l^2}{12} - 0,0485 p_I l^2 = -\frac{p l^2}{35} \left( -\frac{p l^2}{34} \right). \end{aligned}$$

Maksimaalne läbipaine välja keskel

$$\max w = 2 \frac{p_{II} l^4}{384 N} + 0,00125 \frac{p_I l^4}{N} = \frac{p l^4}{160 N} \left( \frac{p l^4}{170 N} \right).$$

On võimalik jätkata näidete toomist kas malelualise või paelkoormise juhtumitel. Vaatleme näiteks viimast koormisjuhtumit (joon. 29 — koormatud väljad viirutatud).



Joon. 29.

Jaotame esmalt koormise kaheks Andréé meetodi mõttes. Seejuures: 1)  $\frac{p}{2}$  koormaku tervet plaati, aga 2)  $\pm \frac{p}{2}$  koormaku algülesandes koormatud välju positiivselt, koormamatuid välju negatiivselt.

Esimese juhtumi kohta on meil andmed eelmisest ülesandest; teisel juhtumil aga kandub kogu koormis suunas  $x$ , kusjuures plaati võib vaadelda kui kahel toel asetsevat lihttala.

Summeerides juhtumid 1) ja 2) leiame momendid (joon. 29), kusjuures Lewe lahendused on antud sulgudes:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p}{2} \frac{l^2}{8} + \frac{p l^2}{2 \cdot 36,6} = \frac{p l^2}{13,1} \left( \frac{p l^2}{13,1} \right) \\ m_2 &= \frac{p}{2} \frac{l^2}{8} + \frac{p l^2}{2 \cdot 16,3} = \frac{p l^2}{10,75} \left( \frac{p l^2}{10,95} \right) \\ m_3 &= -\frac{p l^2}{2 \cdot 35} = -\frac{p l^2}{70} \left( -\frac{p l^2}{68} \right). \end{aligned}$$

## Lõppsõna.

Nagu nägime (peatükid I ja II) laseb koormise lahutamise meetod ennast edukalt rakendada projektivale insenerile terve rea oluliste ülesannete lahendamisel. Mõned nendest ülesannetest (näit. peatükk I käsitletud ülesanne, plaat toetatud neljale elastsele ribile) on täpsete meetoditega praktiliselt lahendamatud, teised ülesanded on lahendatavad väga suurte raskustega. Uus, autori poolt käesolevaga ette pandud meetod annab lahendused küllaldase täpsusega väga väikese arvutus-tööga. Suuremal täpsusel pole praktilise inseneri seisukohalt mõtet, sest ehitusmaterjalide omaduste kõikumiste amplituudid on suuremad

Uus meetod võimaldab rasketele plaadiprobleemidele tunduvalt rohkem läheneda kui senised lähendusmeetodid, mistõttu on oodata projektimisel palju otstarbekohasemat materjalide jaotust. Siit järgneb omakorda materjalide kokkuhoiu võimalus vähemalt paarikümne protsendi ulatuses, sest et ülesanded on nüüd palju selgemad.

Käesolev töö peaks olema suureks abiks projektivale insenerile tema igapäevases töös.

Olgu märgitud, et I peatükis olev ülesanne pärineb praktikast. Projektides 1940. a. koos prof. O. Maddisoniga ja dots. H. Oengoga Tallinna sadamasse fosforiidisilot selgus, et joon. 1 esitatud probleemile pole kirjanduses rahuldavat lahendust. Prof. Maddison juhtis juba siis tähelepanu probleemi üldisele tähtsusele, mistõttu käesoleva töö autor asus selle lahendamisele. Hiljem selgus, et kasutatud lahenduskäik, nn. koormise lahutamise meetod, on edukalt rakendatav ka mitmesuguste ülesannete lahendamisel horisontaalplaatide suhtes.

Loen oma meeldivaks kohuseks siinkohal tänada prof. O. Maddisoni ja dots. N. Alumäed mõningate sisuliste märkuste eest, eriti aga prof. A. Humalat paljude redaktsiooniliste ja terminoloogiliste näpunäidete eest.

## Kirjandus. — Литература.

1. Бубнов, И. Г. — Тонкие упругие плиты, 1935 г. Москва.
2. Галеркин, Б. Г. — Тонкие упругие плиты, Госстройиздат. 1933.
3. Папкович, П. Ф. — Строительная механика корабля, часть II. 1941.
4. Пушкин, В. А. — Железобетонные конструкции, часть II. 1941, Москва-Ленинград.
5. Чалышев, К. А. — Сборник института инженеров путей сообщения. 1915.
6. Büchi, H. — Zerlegung der hydrostatischen Wandbelastung in offenen rechteckigen Behälter, Beton u. Eisen 1938.
7. Lewe, V. — Die statische Berechnung der Flüssigkeitsbehälter, Handbuch f. Eisenbetonbau, Bd. IX. Berlin 1934.
8. Lewe, V. — Pilzdecken, Berlin 1926.
9. Marcus, H. — Beitrag zur Untersuchung von Behältern mit ebenen Wandungen, Bauing., 1936. H. 5/6.
10. Müller, E. — Rechteckige Platten, die an alle vier Seiten durch elastische Träger unterstützt sind. Ing. Archiv, 1941.

## Метод разложения нагрузки при расчёте тонких плит.

(Резюме.)

При расчёте резервуаров часто приходится иметь дело с плитами, опирающимися на упругие рёбра. В некоторых случаях можно пренебречь влиянием перемещений упругих рёбер на распределение внутренних сил плиты, но весьма часто обычный упрощённый способ расчёта связан с большими погрешностями.

Учёт влияния перемещений упругих рёбер на внутренние силы плиты т. н. точными методами можно произвести лишь в некоторых специальных случаях.

Настоящим предлагается приближённый метод решения, т. н. метод разложения нагрузки, который при весьма небольшой расчётной работе даёт в отношении точности вполне удовлетворяющие результаты. При этом методе используются данные, имеющиеся в литературе по жёстко опирающимся плитам, что упрощает расчётную работу.

Ознакомимся с указанным методом на примере тонкой плиты, представленной на рис. 23. Означенная плита нагружена равномерно распределённой нагрузкой  $p$  и с четырёх краёв опирается на упругие рёбра.

Предположим, что функции нагрузки для жёстко опирающейся плиты даны (обозначим, например, моменты  $\max m_1^{(o)}$ , прогибы  $\max w^{(o)}$ , реакции  $\max r_1^{(o)} = k_1 ap$  и  $\max r_2^{(o)} = k_2 bq$ ).

Далее предположим, что нагрузка разложена на три части (рис. 24):

$p_I$  — влияет на жёстко опирающуюся плиту (рис. 24-а). В этом случае на рёбрах возникают нагрузки (эпюра реакций плиты предполагается по линии синуса)

$$\text{на ребре 1: } r_{1I} = k_1 p_I a \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\text{на ребре 2: } r_{2I} = k_2 p_I b \sin \frac{\pi x}{a}.$$

$p_{II}$  — влияет на плиту, жёстко опирающуюся по краям  $AB$  и  $CD$  (рис. 24б). Реакции возникают лишь на ребре 1:

$$r_{III} = p_{II} a/2.$$

Поверхность прогиба цилиндрическая и определима из решения задачи балки на двух опорах.

$p_{III}$  — влияет на плиту, жёстко опирающуюся лишь по краям  $BC$  и  $AD$  (рис. 24с). Реакции возникают лишь на названных рёбрах:

$$r_{2III} = p_{III} b/2.$$

Исходя из условия, что окончательные прогибы ребра  $AB$  должны равняться прогибам плиты при III составляющей нагрузки, а окончательные прогибы ребра  $BC$  — прогибам плиты при II составляющей нагрузки, получаем систему уравнений для вычисления  $p_I$ ,  $p_{II}$  и  $p_{III}$ ; см. (41). Так, например, левая часть второго уравнения представляет максимальный прогиб ребра  $BC$  (1-ый член от I составляющей нагрузки, 2-ой член от III составляющей нагрузки), правая же часть уравнения представляет максимальный прогиб плиты от II составляющей нагрузки. Функции нагрузок (моменты, прогибы и т. д.) находим путём суммирования влияний всех трёх частей нагрузки.

Один пример расчёта (рис. 25) представлен для предыдущего задания (стр. 38) и сравнен с результатами, найденными более точным методом (по Мюллеру, см. сноску 17).

Как видно из таблицы 1, погрешности, несмотря на простоту хода вычисления, являются ничтожными, особенно по сравнению с погрешностями, имеющими место при жёстких рёбрах ( $J_1 = J_2 = \infty$ ).

На рис. 26 изображено *железобетонное перекрытие*, при расчёте которого обычно пренебрегают влиянием перемещений упругих рёбер.

Простая проверка при помощи метода разложения нагрузки показала, что вследствие упругости балок моменты возросли особенно в четвертях пролётов (в точках  $D$ ), вследствие чего там невозможно произвести обычное конструктивное уменьшение количества арматуры на 50%.

Само собой разумеется, что при применении данного метода не возникало бы никаких трудностей, если бы края плиты были жёстко заделаны, как видно из рассматриваемой задачи безбалочного перекрытия на стр. 40. (Разд. II, 3, рис. 27, 28 и 29). Здесь при разрешении задачи пришлось предположить, что жёсткость изгиба ребра  $EJ_r \rightarrow 0$ . Несмотря на чрезвычайную простоту расчёта, полные результаты являются достаточно точными, как показало сравнение их с результатами Лева (представлены в скобках рядом с результатами автора).

Весь I раздел отведён расчёту *стеновых плит резервуаров больших объёмов* (см. рис. 1 и 18), каковые плиты опёрты на упругие ребра.

Точное решение подобного задания практически неосуществимо, так как при этом не имеется двух противолежащих краёв, где краевые условия Навье были бы удовлетворены. При проведении проверки встречающихся на практике случаев при помощи метода разложения нагрузки выяснилось, что моменты плиты могут изменяться на 30—40% вследствие упругого перемещения рёбер. В разд. I, 5 даётся инструкция расчёта. На рис. 19, 20 и 21 представлены графики для вычисления более существенных функций нагрузок, при которых удобно также принимать в расчёт упругие перемещения рёбер. В разд. I, 4 рассчитывается приближённо влияние кручения рёбер. В итоге этого раздела отмечается, что кручению подвергается, главным образом, крайнее ребро „ $f$ “, и что обыкновенно при этом ребре нет необходимости предусматривать специальную арматуру, работающую на кручение.

Представленный метод оказывается применимым во многих сравнительно сложных задачах из области статики плит.

## Sisukord.

	Lk.
Sissejuhatus . . . . .	3
I. Suuremahuliste raudbetoonanumate vertikaalsete seinaplaatide arvutus hüd- rostaatilisel koormisel . . . . .	7
1. Üldisi märkusi . . . . .	7
2. Elementaarplaat . . . . .	9
3. Vaheribide läbipaandumiste mõju . . . . .	13
4. Ribide pöördumise mõju . . . . .	22
5. Kokkuvõte . . . . .	28
II. Koormise lahutamise meetodi rakendamine elastsetele ribidele toetuvate horisontaalsete ristikülikuliste plaatide puhul . . . . .	34
1. Kahel serval järeleandmatult ja kahel serval elastsetele taladele toe- tuv plaat . . . . .	34
2. Neljal serval elastsetele ribidele toetuv plaat . . . . .	36
3. Üksikutele punktidele toetuv plaat (nn. seenlagi) . . . . .	40
Lõppsõna . . . . .	43
Kirjandus. — Литература . . . . .	44
Метод разложения нагрузки при расчёте плит. (Резюме). . . . .	45

*Vastutav toimetaja*  
*N. Atumäe.*

*Tehniline toimetaja*  
*H. Kohu.*

Ladumisele antud 15. III 1949.  
Trükkimisele antud 23. V 1949.  
Paberi kaust 67×95. Trüki-  
poognaid 3. Autoripoognaid  
2,17. Arvestuspoognaid 2,76.  
MB 01819. Laotihedus trükipg.  
42200. Tiraaž 800. Trükikoja  
tellimus nr. 753. Trükikoda  
„Hans Heidemann“, Tartu,  
Vallikraavi 4.

*Hind rbl. 3.—*

Х. Лаул, Метод разложения  
нагрузки при расчёте тонких  
плит.

На эстонском языке.  
Эгосиздат „Научная Литера-  
тура“, Тарту.