

TARTU RIIKLIK ÜLIKOO L



*Harry Siiglane*

KAASAEGSE  
TEOREETILISE FÜÜSIKA  
PÕHIKURSUS

II OSA

TARTU 1967

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Teoreetilise füüsika kateeder

Harry Oiglane

KAASAEGSE  
TEOREETILISE FÜÜSIKA  
PÕHIKURSUS

II OSA

Ettevalmistus kvantteooriateks

TARTU 1967

## S i s s e j u h a t u s .

"Kaasaegse teoreetilise füüsika põhikursuse" II osa on pühendatud kolmedimensioonilise ruumi ja aja pidevate teisen-  
duste rühmade, samuti Lorentzi rühma esituste uurimisele ning  
nimetatud rühmade esituste teooria sidumisele füüsikalise  
maailma nähtustega.

Füüsikalist objekti saame kvantitatiivsest küljest ala-  
ti iseloomustada ühe- või mitmekomponendilise arvu tüüpi suu-  
rusega. Näiteks võime antud keha massi üles kirjutada ühe ar-  
vuga, kehale mõjuva jõu kolme arvuga (jõuvektori komponendid),  
laengute süsteemi kvadrupolmomendi (vt. I, 3, 167) viie ar-  
vuga jne. Füüsikalist objekti iseloomustame üldreeglina mit-  
mekomponendiliste suurustega, mida võime matemaatilisest sei-  
sukohast käsitleda kui lineaarsete vektorruumide elemente.  
Objekti konkreetsele olekule vastavad konkreetset vektorid  
objekti kirjeldamiseks võetud vektorruumides. Muutub objekti  
olek, muutuvad ka need konkreetset vektorid.

Füüsikaline objekt asetseb ruumis ja ajas. Selle asja-  
olu peegelduseks on, et aja- ja ruumikoordinaadistike teisen-  
damisel objekti kirjeldavad suurused üldreeglina samuti muu-  
tuvad (erandjuhul võivad nad muidugi ka muutumatuks jääda).  
Näiteks muutuvad ruumikoordinaadistiku pööramisel nii kehale  
mõjuva jõuvektori komponendid kui ka laengute süsteemi kvad-  
rupolmomendi komponendid. Aja- ja ruumikoordinaadistike tei-  
sendamine tingib teisendused ka nendes formaalsetes vektor-  
ruumides, mida me kasutame füüsikalise objekti oleku iseloo-  
mustamiseks. Niisuguse sõltuvuse kirjeldamiseks on kõige ots-

tarbekohasem kasutada rühmade esituste teooria matemaatilist aparati.

Matemaatiku seisukohalt on meie ees seisvat ülesannet siis kõige loomulikum formuleerida järgmiselt:

Leida aja ja ruumi teisendusrühmade kõikvõimalikud esitused ning teha kindlaks, missuguse füüsikalise suuruse kirjeldamiseks üks või teine esitusruum sobib.

On ilmne, et ajalis-ruumilises mõttes terviklike füüsikaliste suuruste kirjeldamiseks sobivad ainult aja ja ruumi teisendusrühmade täielikult taandumatud esitused. Täielikult taanduv esitus, mis on antud mitmes invariantsses alamruumis, kirjeldab üheaegselt mitut omavahel sõltumatut füüsikalist suurust (igas invariantsses alamruumis üks suurus).

Nagu juba öeldud, on "Kaasaegse teoreetilise füüsika põhikursuse" II osa matemaatiliseks sisuks aja ja ruumi teisendusrühmade esituste uurimine. Matemaatilise aparadi sidumisel füüsikalise realiteediga jõuame vajaduseni kirjeldada füüsikalisi suurusi mitte ainult arvude, vaid ka lineaarsete operaatorite abil. Viimane võte on kvantteooriate matemaatilise aparatuuri kõige olulisemaks jooneks. Seepärast võib käesolevat kursust pidada ettevalmistuseks kvantteooriateks. Kvantteooriad ise - kvantmehhaanika ja väljade kvantteooria - tulevad käsitlemisele käesoleva kursuse kolmandas osas.

## I p e a t ü k k .

### KOLMEDIMENSIONILISE VEKTORRUUMI TEISENDUSRÜHMADE ESITUSED JA NENDE RAKENDUSI FÜÜSIKAS.

#### § 1. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma lõplikudimensioonilised taandumatud esitused.

Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühm on määratud lõpmata väikeste teisendustega

$$x' = (I + \varepsilon_k J_k) x, \quad (1.1)$$

kus infinitesimaaloperaatorid  $J_k$  rahuldavad vahetuseeskirju (vt. (I; 2.35) ja (I; 2.33)):

$$[J_1, J_2] = i J_3,$$

$$[J_2, J_3] = i J_1,$$

$$[J_3, J_1] = i J_2.$$

Lie-Cartani teoreemi (I; 1.51) järgi rahuldavad samasuguseid vahetuseeskirju kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma kõigi esituste infinitesimaaloperaatorid. See tä-

hendab, et teisendusele (1.1) vastab esitusruumis (mille vektoreid tähistame  $\psi$ ) teisendus

$$\psi' = (I + \varepsilon_k S_k) \psi, \quad (1.2)$$

kus esitusruumis mõjuvad infinitesimaaloperaatorid  $S_k$  rahuldavad vahetuseeskirju

$$\begin{aligned} [S_1, S_2] &= i S_3, \\ [S_2, S_3] &= i S_1, \\ [S_3, S_1] &= i S_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Käesoleval juhul huvitavad meid kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitused lõplikudimensioonilistes ruumides. See tähendab, et operaatorid  $S_k$  on lõplikku järku maatriksid. Rühma esituste leidmine taandub siia järgmiseks ülesandeks: Leida kõikvõimalikud maatriksid  $S_k$ , mis rahuldavad vahetuseeskirju (1.3).

Võtame operaatorite  $S_1$  ja  $S_2$  asemel tarvitusele nende lineaarkombinatsioonid

$$\begin{aligned} L_1 &= S_1 + i S_2, \\ L_2 &= S_1 - i S_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Arvestades vahetuseeskirju (1.3) saame siis operaatorite  $L_1$ ,  $L_2$  ja  $S_3$  jaoks järgmised vahetuseeskirjad:

$$\begin{aligned} [S_3, L_1] &= L_1, \\ [S_3, L_2] &= -L_2, \\ [L_1, L_2] &= 2 S_3. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Oletame nüüd, et operaator  $S_3$  on diagonaalkujus; tähistame selle operaatori omaväärtusi  $\lambda_3$  ja omavektorit, mis vastab omaväärtusele  $\lambda_3$  - tähisega  $v_{\lambda_3}$  (mõnikord kirjutame ka lihtsalt  $v$ ). Teiste sõnadega

$$S_3 v_{\lambda_3} = \lambda_3 v_{\lambda_3}. \quad (1.6)$$

Eeldus, et operaator  $S_3$  on diagonaalkujju viidav, ei ole meie ülesande lahendamisel mingisuguseks kitsenduseks. Saab näidata, et kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma iga esitust on võimalik lugeda unitaarseks esituseks (s. o. esituseks, mille moodustavad unitaarmaatriksid). Unitarmaatriksit kui normaalmaatriksi erijuhtu saab sarnasusteisenduse abil alati diagonaalkujju viia. Nii võimegi oletada, et maatriks  $S_3$  on juba viidud diagonaalkujju.

Kasutades valemeid (1.5) ja (1.6) võime arvutada

$$\begin{aligned} S_3 k_1 v &= (k_1 + k_1 S_3) v = k_1 v + k_1 \lambda_3 v = (\lambda_3 + 1) k_1 v, \\ S_3 k_2 v &= (k_2 S_3 - k_2) v = k_2 \lambda_3 v - k_2 v = (\lambda_3 - 1) k_2 v. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Saadud seosed ütlevad meile:

Kui  $v$  on operaatori  $S_3$  omavektoriks omaväärtusel  $\lambda_3$ , siis  $k_1 v$  on sama operaatori omavektoriks omaväärtusel  $\lambda_3 + 1$  ja  $k_2 v$  - sama operaatori omavektoriks omaväärtusel  $\lambda_3 - 1$ .

Et  $S_3$  on lõplikku järku maatriks, siis ei saa tema omaväärtused olla kuitahes suured. Tähistame operaatori  $S_3$  maksimaalset omaväärtust  $\lambda$  ja sellele vastavat omavektorit -  $v_\lambda$ . Et nüüd  $k_1 v_\lambda$  peaks olema operaatori  $S_3$  omavektoriks ühe võrra suuremal omaväärtusel, s. o.

$$S_3 k_1 v_\lambda = (\lambda + 1) k_1 v_\lambda,$$

mis on aga võimatu ( $\lambda$  oli eelduse kohaselt juba maksimaalne omaväärtus), siis peab kehtima

$$L_1 v_\lambda = 0. \quad (1.8)$$

Olekuvektor, mis vastab omaväärtusele  $\lambda + 1$ , peab olema null, muidu pole võimalik oletust  $\lambda$  maksimaalsusest kooskõlla viia esimese tingimusega (1.7).

Lähtudes omavektorist  $v_\lambda$  võime operaatori  $L_2$  abil järjest konstrueerida omavektorid, mis vastavad omaväärtustele  $\lambda - 1$ ,  $\lambda - 2$  jne.:

$$\begin{aligned} L_2 v_\lambda &= v_{\lambda-1}, \\ L_2 v_{\lambda-1} &= v_{\lambda-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ L_2 v_{\lambda-k} &= v_{\lambda-k-1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Seda protseduuri võib jätkate, kuni lõpuks mingisugune

$L_2 v_{\lambda-k} = 0$ , sest omavektoreid ei saa lõplikudimensioonilises ruumis olla rohkem, kui on ruumi dimensioon.

Asumegi nüüd lahendama küsimust, kui palju on operaatoril  $S_3$  nullist erinevaid lineaarselt sõltumatuid omavektoreid. Selleks näitame kõigepealt, et

$$L_1 v_{\lambda_3} = S_{\lambda_3} v_{\lambda_3-1}, \quad (1.10)$$

kus  $S_{\lambda_3}$  on täisarv. Tõestame valemi (1.10) täieliku induktsiooni meetodil.

Valemist (1.8) on näha, et  $\lambda_3 = \lambda$  juhul tingimus (1.10) kehtib, kusjuures  $S_{\lambda_3} = 0$ .

Oletame, et valem (1.10) on õige mingi  $\lambda_3$  korral ja

näitame, et sel juhul kehtib ta ka  $s_3 - 1$  korral.

Et operaator  $k_2$ , mõjudes omavektorile  $v_{s_3}$ , vähendab tema indeksit ühe võrra, siis võime kirjutada

$$k_1 v_{s_3-1} = k_1 k_2 v_{s_3}.$$

Kasutades viimast vahetuseeskirja (1.5) võime selle asemel kirjutada

$$k_1 v_{s_3-1} = (k_2 k_1 + 2 S_3) v_{s_3}. \quad (1.11)$$

Pidades silmas omaväärtus-võrrandit (1.6), samuti seda, et eelduse kohaselt kehtib (1.10), saame eelmise avaldada:

$$k_1 v_{s_3-1} = k_2 \rho_{s_3} v_{s_3+1} + 2 s_3 v_{s_3} = (\rho_{s_3} + 2 s_3) v_{s_3}, \quad (1.12)$$

kusjuures kasutasime jällegi  $k_2$  omadust omavektori  $v_{s_3}$  indeksit ühe võrra vähendada. Järelikult saime

$$k_1 v_{s_3-1} = \rho_{s_3-1} v_{s_3}, \quad (1.13)$$

kus

$$\rho_{s_3-1} = \rho_{s_3} + 2 s_3. \quad (1.14)$$

Eeldades (1.10) kehtivust saime tõestada, et samasugune seos kehtib ka  $s_3 - 1$  korral, kusjuures  $\rho_{s_3-1}$  on täisarv (juhul, kui seda on  $2 s_3$ , mida hiljem näitame).

Kordajate  $\rho_{s_3}$  määramiseks saime rekurrentsed valemid (1.14), mis tuleb lahendada tingimusel  $\rho_3 = 0$ . Et saada avaldist  $\rho_{s_3}$  jaoks, kirjutame valemid (1.14) järjest üles alates  $s_3$  maksimaalse väärtusega  $s_3 = 3$  ja lõpetades väärtusega  $s_3$ :

$$\rho_{s_3-1} - \rho_{s_3} = 2 s_3; \quad \rho_3 = 0;$$

$$\rho_{s_3-2} - \rho_{s_3-1} = 2(s_3 - 1),$$

$$\rho_{s-3} - \rho_{s-2} = 2(s-2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\rho_{s_3} - \rho_{s_3+1} = 2(s_3+1).$$

Liidame nüüd saadud võrrandid. Saame

$$\rho_{s_3} = 2s + 2(s-1) + 2(s-2) + \dots + 2(s_3+1).$$

Näeme, et  $\rho_{s_3}$  avaldub aritmeetilise reana, milles liikmeid on  $s-s_3$  tükki. Järelikult saame

$$\rho_{s_3} = \frac{(s-s_3)[2s+2(s_3+1)]}{2} = (s-s_3)(s+s_3+1),$$

või teisiti

$$\rho_{s_3} = s(s+1) - s_3(s_3+1). \quad (1.15)$$

Valemi (1.10) võime nüüd täpsemal kujul välja kirjutada:

$$h_1 v_{s_3} = [s(s+1) - s_3(s_3+1)] v_{s_3+1}. \quad (1.16)$$

Eespool rääkisime juba, et omavektori indeksi vähendamisel peame lõpuks jõudma omavektorini, mis on võrdne nulliga. Tingituna esitusruumi dimensiooni lõplikkusest peab kindlasti olema omavektor  $v_{\sigma+1} \neq 0$ , kuid millest ühe võrra väiksema indeksiga omavektor on juba null;  $v_{\sigma} = 0$ . Et niisugune olukord ei oleks vastuolus valemiga (1.16), peab olema

$$s(s+1) - \sigma(\sigma+1) = 0. \quad (1.17)$$

Saime võrrandi seni veel tundmatu arvu  $\sigma$  määramiseks.

Võrrandil (1.17) on kaks lahendit:

$$\sigma = s,$$

$$\sigma = -(s+1).$$

Esimene neist ei sobi, sest  $v_s$  eelduse kohaselt null ei olnud ( $s$  oli  $s_3$  maksimaalne väärtus, mille korral oma-

vektor veel nullist erinev oli). Järelikult tuleb valida  $\zeta = -(\zeta + 1)$ , s. o.  $v_{-(\zeta+1)} = 0$ . Nullist erinevad omavektorid on järelikult

$$v_{\zeta}, v_{\zeta-1}, v_{\zeta-2}, \dots, v_{-\zeta+1}, v_{-\zeta}. \quad (1.18)$$

Kokku on omavektoreid  $2\zeta + 1$  tükki. Juhul, kui esitus on taandumatu (mida me kohe näitame), annab sõltumatute omavektorite arv esitusruumi dimensiooni  $n$ :

$$n = 2\zeta + 1. \quad (1.19)$$

Silmas pidades, et esitusruumi dimensioon võib olla mistahes nullist erinev positiivne täisarv,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , saame  $\zeta$  jaoks võimalikud väärtused

$$\zeta = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (1.20)$$

Iga kord, kui fikseerime  $\zeta$ , saame kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma ühe esituse, mis on antud  $2\zeta + 1$  dimensioonilises ruumis. Jadast (1,18) on näha, et operaatori  $S_{\zeta}$  omavektoreid nummerdav indeks  $\zeta$  võib antud  $\zeta$  korral omandada väärtusi

$$\zeta_{\zeta} = \zeta, \zeta - 1, \zeta - 2, \dots, -\zeta + 1, -\zeta. \quad (1.21)$$

Sellega on kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esituste määramise probleem lahendatud. Nimetatud rühmal on taandumatu esitus olemas igas lõplikudimensioonilises ruumis.

Lihtne on veenduda, et kõik need esitused on taandumatud. Tõepoolest, valemitest (1.9) ja (1.16) on näha, et operaatorite  $h_1$  ja  $h_2$  järjest rakendamise teel võib antud oma-

vektori  $v_{s_3}$  teiseks indeksiga omavektoriks. Teiste sõnadega: invariantseid alamruume operaatorite  $\mu_2$  ja  $\mu_3$  suhtes esitusruumis ei ole. Esitus on taandumatu.

Kirjutame välja valemid (1.6), (1.9) ja (1.16):

$$\begin{aligned} S_3 v_{s_3} &= s_3 v_{s_3}, \\ \mu_2 v_{s_3} &= v_{s_3-1}, \\ \mu_1 v_{s_3} &= [s(s+1) - s_2(s_2+1)] v_{s_3+1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Et omavektorite pikkus pole määratud, siis võime anda neile valemitele sümmeetrilisema kuju. Selleks toome vektorite  $v$  asemel sisse uued vektorid  $u$ , mille pikkuste suhted on määratud järgmiselt:

$$\frac{|v_{s_3}|}{|v_{s_3+1}|} = \sqrt{s(s+1) - s_2(s_2+1)} \frac{|u_{s_3}|}{|u_{s_3+1}|}. \quad (1.23)$$

Võttes selles tingimuses  $s_3$  asemele  $s_3-1$  saame

$$\frac{|v_{s_3-1}|}{|v_{s_3}|} = \sqrt{s(s+1) - s_2(s_2-1)} \frac{|u_{s_3-1}|}{|u_{s_3}|}. \quad (1.24)$$

On näha, et omavektorite pikkuste suhte muutmine tingimuse (1.23) kohaselt ei piira omavektorite normeerimise võimalust. Edaspidi oletamegi, et kõik omavektorid  $u_{s_3}$  on normeeritud, s. o. et  $|u_{s_3}| = 1$ .

Viies võrranditesse (1.22) tingimuste (1.23) ja (1.24) kohaselt sisse uued vektorid  $u$ , saame

$$S_3 u_{s_3} = s_3 u_{s_3}, \quad (1.25a)$$

$$\mu_1 u_{s_3} = \sqrt{s(s+1) - s_2(s_2+1)} u_{s_3+1}, \quad (1.25b)$$

$$\mu_2 u_{s_3} = \sqrt{s(s+1) - s_2(s_2-1)} u_{s_3-1}. \quad (1.25c)$$

Saadud valemid näitavad, kuidas mõjuvad operaatorid  $\mathcal{L}_1$  ja  $\mathcal{L}_2$  operaatori  $S_3$  omavektoritele  $u_{S_3}$ . Operaatori  $S_3$  erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on loomulikult ortogonaalsed:

$$(u_{S_3}, u_{S'_3}) = \delta_{S_3 S'_3}. \quad (1.26)$$

§ 2. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma invariaandi omaväärtused.

Kolme esitusruumis mõjuvat infinitesimaaloperaatorit  $S_k$  võime formaalselt lugeda ühe suuruse, teatud "vektori" kolmeks komponendiks. Et need komponendid omavahel ei kommuteeru, siis saab neist korraga diagonaalkujus olla ainult üks. Eelmises punktis eeldasime, et diagonaalkujus olevaks operaatoriks on  $S_3$ . (Samahästi oleksime võinud eeldada, et diagonaalkujus on näit. operaator  $S_1$ . Operaatorid  $S_2$  ja  $S_3$  siis muidugi diagonaalkujus ei oleks ja nende lineaarkombinatsioonid (analoogilised operaatoritele  $\mathcal{L}_1$  ja  $\mathcal{L}_2$ ), muudaksid operaatori  $S_1$  omavektori indeksit. Saaksime käsitleda, mis on täiesti ekvivalentne eelmises punktis tooduga).

Edaspidi me oletame konkreetsuse mõttes alati, et infinitesimaaloperaatoritest  $S_k$  on diagonaalkujju viidud nimelt operaator  $S_3$ , s. o. esitusruumi baasvektoriteks on operaatori  $S_3$  omavektorid.

Käesoleva kursuse esimeses osas (vt. (I; 2.38)) nägime, et operaator  $J^2 = J_k J_k$  kommuteerub kõigi infinitesimaalope-

raatoritega  $\gamma_k$ . Analoogiline kommutatsioonleeskirj kehtib siie ka muidugi kõigis esitusruumides: "vektori"  $S_k$  pikkuse ruut

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (1.27)$$

kommuteerub kõigi komponentidega  $S_k$ :

$$[S^2, S_k] = 0. \quad (1.28)$$

See tähendab, et üheaegselt operaatoriga  $S_3$  on diagonaal-kujus ka operaator  $S^2$ . Operaatoritel  $S_3$  ja  $S^2$  on ühi-sed omavektorid.

Arvutame nüüd operaatori  $S^2$  omaväärtused. Valemite (1.27) ja (1.4) abil kirjutame omaväärtusprobleemi üles järgmiselt:

$$S^2 u_{s_3} = \left[ \frac{1}{2} (k_1 k_2 + k_2 k_1) + S_3^2 \right] u_{s_3}.$$

Valemite (1.25) rakendamine annab

$$\begin{aligned} S^2 u_{s_3} &= \frac{1}{2} k_1 \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 - 1)} u_{s_3-1} + \\ &+ \frac{1}{2} k_2 \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 + 1)} u_{s_3+1} + s_3^2 u_{s_3}. \end{aligned}$$

Rakendades veel kord valemeid (1.25), saab lihtsalt leida

$$S^2 u_{s_3} = s(s+1) u_{s_3}. \quad (1.29)$$

Näeme, et antud esitusruumis (fikseeritud  $s$  korral) on ope-raatoril  $S^2$  ainult üks omaväärtus. Maatriks  $S^2$  on skalaar-ne maatriks.

"vektori"  $S_k$  "pikkuse ruuduks" antud esitusruumis on  $s(s+1)$ ; "vektori" pikkuseks võime seega lugeda arvu  $\sqrt{s(s+1)}$ .

Arv  $s_3$ , mis võib omandada väärtusi

$$s_3 = s, s-1, s-2, \dots, -s+1, -s,$$

näitab "vektori"  $S_k$  kolmanda komponendi võimalikke väärtusi. Kahe esimese komponendi väärtuste kohta me midagi öelda ei saa, sest need komponendid pole diagonaalkujus.

### § 3. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma mõningaid konkreetseid esitusi.

Leiame kõigepealt valemid esitusruumides mõjuvate infinitesimaalmatriksite elementide jaoks. Selleks korrutame valemid (1.25) paremalt skalaarselt operaatori  $S_3$  mingi omavektoriga. Pidades silmas skalaarkorrutise moodustamise reeglit (I; 1.14) ja omafunktsioonide ortonormeerituse tingimust (1.26) saame:

$$(S_3)_{k s_3} = (S_3 u_{s_3}, u_k) = s_3 (u_{s_3}, u_k) = s_3 \delta_{s_3, k}, \quad (1.27a)$$

$$(H_1)_{k s_3} = (H_1 u_{s_3}, u_k) = \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3+1)} \delta_{k, s_3+1}, \quad (1.27b)$$

$$(H_2)_{k s_3} = (H_2 u_{s_3}, u_k) = \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3-1)} \delta_{k, s_3-1}. \quad (1.27c)$$

Saadud valemite abil võime arvutada infinitesimaalmatriksite konkreetseid kujusid esitusruumides. Vaatame mõningaid erijuhte.

#### Esitus ühedimensioonilises ruumis.

Võtame  $s = 0$ . Esitusruumi dimensioon tuleb siis  $n = 2s + 1 = 1$ .  $s_3$  võib omandada ainult väärtuse  $s_3 = 0$ ,

s. o. operaator  $S_3 = 0$ . Vahetuseeskirjadest (1.5) järgneb siis otseselt, et ka  $k_1 = k_2 = 0$ , samuti  $S_1 = S_2 = 0$ . Infinitesimaaloperaatorid on nulloperaatorid. Teisendusmaatriks, mis kirjeldab lõpmata väikestele teisendustele vastavaid teisendusi esitusruumis, on antud juhul võrdne ühikoperaatoriga. Tõepoolest - valemile (I; 2.35) vastav teisendusvalem esitusruumis tuleb järgmine:

$$\psi' = (I + \varepsilon_k S_k) \psi = \psi, \quad (1.28)$$

kus  $\psi$  tähistab esitusruumi vektorit. Eeskirja (1.28) kohaselt teisenevaid suurusi nimetatakse skaalariteks.

#### Esitus kahedimensioonilises ruumis.

Võtame nüüd  $\zeta = \frac{1}{2}$ . Esitusruumi dimensioon tuleb siis  $n = 2\zeta + 1 = 2$ . Eeskirjast (1.21) on näha, et operaatoril  $S_3$  on antud juhul omaväärtusteks  $s_3 = \pm \frac{1}{2}$ , s. o. maatrikskujul võime kirjutada

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Valemitest (1.27) on näha, et maatriksite ridu ja veerge on antud juhul kõige otstarbekohasem nummerdada mitte täisarvudega, vaid operaatori  $S_3$  omaväärtustega. Nimetatud valemitest saame siis

$$(k_1)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, (k_1)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 1, (k_1)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, (k_1)_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 0;$$

$$(k_2)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, (k_2)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 0, (k_2)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 1, (k_2)_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 0.$$

Maatrikskujul on see:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Silmas pidades valemid (1.4) saame edasi

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Maatriksid (1.29) ja (1.31) on kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esituse infinitesimaalmaatriksiteks kahedimensioonilises ruumis. Füüsikalistes rakendustes nimetatakse neid maatrikseid ka kaherealisteks spinmaatriksiteks. Maatrikseid  $\sigma_k = 2S_k$ , s. o.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

nimetatakse ka Pauli maatriksiteks. Viimased koos kaherealise ühikmaatriksiga moodustavad baasi kaherealiste maatriksite ruumis.

Esitusruumi vektor  $\psi$  teiseneb antud juhul siis eeskirja järgi

$$\psi' = (I + \epsilon_k S_k) \psi, \quad (1.33)$$

kus infinitesimaalmaatriksid  $S_k$  on antud valemitega (1.29) ja (1.31). Suurusi  $\psi$ , mis teisenevad easkirja (1.33) järgi, nimetatakse esimest järku epiinoriteks (täpsemini kolmedimensioonilise ruumi esimest järku epiinoriteks).

### Esitus kolmedimensioonilises ruumis.

Võtame  $s_3 = 1$ , mis tähendab, et asitusruumi dimensioon on 3. Operaatori  $S_3$  omaväärtusteks on antud juhul  $s_3 = 1, 0, -1$ , s. o. maatrikskujul võima selle operaatori

kirjutada

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Toimides analoogiliselt eelmise juhuga, saame edasi leida

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Valemite (1,4) järgi saame edasi

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Maatriksid (1,34) ja (1,35) määravad kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esituse kolmedimensioonilises ruumis. Tegelikult langeb see esitus ühte rühma endaga. Õeldus on lihtne veenduda. Teisendades infinitesimaaloperaatoreid  $S_k$  (valemid (1,34) ja (1,35)) unitaarmaatriksiks

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

abil, saame neist valemitega (I; 2.29) ja (I; 2.32) antud infinitesimaaloperaatorid  $J_k$ :

$$US_k U^* = J_k \quad (1.37)$$

Infinitesimaaloperaatorid  $S_k$  ja  $J_k$  on ühete ja samade

operaatorite eri kujud erinevates baasides. Operaatorid  $J_k$  määravad ruumi teisenduseeskirja Cartesiuse ristkoordinaatides, operaatorid  $S_k$  aga koordinaatide  $\xi$ , mis avalduvad Cartesiuse ristkoordinaatide  $x_k$  kaudu järgmiselt:

$$\xi = Ux. \quad (1.38)$$

Üksikasjalisemalt väljakirjutatuna saame viimasest järgmised teisenduseeskirjad:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_3), \\ \xi_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (x_1 + x_3), \\ \xi_3 &= -x_2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

#### § 4. Matemaatilise skeemi füüsikalisest interpreteerimisest.

Matemaatikas endas ei ole viiteid selle kohta, kuidas matemaatikat looduse kirjeldamisel rakendada. Jäädes ainult matemaatika raamidesse, ei või matemaatik öelda, kuidas tema arendatud matemaatilist distsipliini füüsikalisele maailmale vastavusse seada. Seda võib öelda ainult füüsikalisest kogemusest lähtudes. Kui matemaatilises teoorias kasutatavatele matemaatilistele suurustele õnnestub vastavusse seada mõõdetavaid füüsikalisi suursi, nii et matemaatilise skeemi valemeid on võimalik füüsikaliselt mõistlikult, eksperimendile vastavalt tõlgendada, siis olemegi sellega matemaatilist skeemi füüsikaliselt interpreteerinud (või teiste sõnadega - füüsikasse matemaatika sisse toonud).

Vastavuse loomine matemaatilise skeemi ja füüsikalise maailma vahel ei ole, põhimõtteliselt rääkides, alati ühene protsess. Võib juhtuda, et antud nähtuste kompleksi saab samaaegselt kirjeldada mitmete erinevate matemaatiliste skeemide abil. Reeglina on niisugustel juhtudel tegemist kogemuste nappusega ja mitteühtsus uute eksperimentaalsete andmete saamisel kaob. Tihti esinevad aga ka niisugused juhud, kus üks ja seesama matemaatiline skeem kirjeldab hoopis erinevatesse valdkondadesse kuuluvaid füüsikalisi nähtusi. Sel juhul on niisuguseid nähtusi juhtivad loodusseadused omavahel sügavalt analoogilised.

Matemaatilise skeemi füüsikalisel interpreteerimisel on kõige lihtsamaks ja loomulikumaks oletuseks, et füüsikalisi mõõdetavaid suurusi kirjeldavad reaalarvud. See oletus õigustas end täielikult makromaailma nähtuste kirjeldamisel. Klassikaline mehhaanika, termodünaamika, elektrodünaamika ja optika on näideteks füüsikalistest teooriatest, mis kõik tuginevad põhioletusele füüsikaliste suuruste kirjeldatavusest reaalarvude abil (mõnel juhul kasutatakse reaalarvude asemel ka kompleksarve eesmärgiga valemuid kompaktsemalt üles kirjutada). Mikromaailma käsitlevaid teooriaid niisugusele oletusele enam rajada ei õnnestunud.

Elementaarosakeste teoreetilise kirjeldamise ajalugu tunneb perioodi, mil osakeste täielikuks iseloomustamiseks tuli kasutada nii laine levikut kirjeldavaid diferentsiaalvõrrandeid kui ka diferentsiaalvõrrandeid, mis kirjeldavad osakeste liikumist. Et nende võrranditega olid juba seotud

konkreetsed füüsikalised kujutlused, siis näis, et elementaariosakesed on vastuoluliste omadustega objektid. Osake on samaaegselt nii laine kui ka korpuskel. Tegelikult selgus hiljem, et nimetatud vastuolu tekkis selleks mittekohase matemaatika rakendamisest mikroosakeste teoorias. Osutus, et mikroobjektide näivalt vastuolulised omadused (korpuskel ja laine) on üheaegselt kirjeldatavad sisemiselt kooskõlalise matemaatilise skeemi abil, kui loobuda oletusest, et füüsikalised mõõdetavad suurused on kirjeldatavad reaalarvude abil.

Kaasajal oletatakse teoreetilises füüsikas, et kõiki mõõdetavaid füüsikalisi suurusi saab kirjeldada lineaaroperaatorite abil. See oletus on loomulikuks üldistuseks klassikalise füüsika kogemustest, sest reaalarvud on erikujulised lihtsad lineaaroperaatorid. Et füüsikaliste suuruste kirjeldamisel kasutatavad operaatorid peavad olema tingimata just lineaarsed, see pole kindel. Näib, et mõnede probleemide lahendamisel oleks otstarbekohasem kasutada mittelineaarseid operaatoreid. Kuid mittelineaarsete operaatorite teoorias on terve rida põhiküsimusi alles lahendamata, nii et selle teooria ulatuslikum rakendamine füüsikas pole veel võimalik.

Niisiis on meie põhioletuseks, et mõõdetavaid füüsikalisi suurusi kirjeldavad lineaaroperaatorid. Teoorias esinevad energia operaator (mida harilikult tähistatakse  $H$  ja nimetatakse ka hamiltoniaanika), koordinaadi operaator, impulsi operaator, impulssmomendi operaator jne. Edasi oletata-

takse, et füüsikalise suuruse mõtmisel saadavad arvud on vastava operaatori omaväärtusteks. Kui meil on energia operaator  $H$ , mis kirjeldab mingit füüsikalist süsteemi, siis saame selle süsteemi kõikvõimalikud energia väärtused määrata võrrandist

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad (1.40)$$

kus  $E_n$  on operaatori  $H$  omaväärtused ja  $\psi_n$  - omaväärtusele  $E_n$  vastav omavektor.

Füüsikaliste suuruste kirjeldamine lineaaroperaatoritena on iseloomulik kvantteooriatele, mille käsitlemisele on pühendatud käesoleva kursuse kolmas osa. Muuhulgas vaatleme seal lähemalt ka omavektorite füüsikalise interpretatsiooni probleeme. Kursuse käesolevas osas vaatleme ainult mõningaid üksikküsimusi lineaarsete operaatorite teooria rakendamisest füüsikas. Seepärast võib kursuse käesolevat osa pidada teatud mõttes ettevalmistuseks kvantteooriateks.

Fraktika seisukohalt on energia füüsikalise süsteemi üks kõige olulisematest karakteristikutest. Seepärast vaatlemegi edaspidi kõiki füüsikalisi suurusi üheaegselt energiaga.

Olgu antud mingi füüsikalise süsteemi energia operaator  $H$  ja veel mingit teist suurust kirjeldav operaator  $F$ . Nüüd on kaks võimalust: operaatorid  $H$  ja  $F$  kas kommuteeruvad või mitte.

Jahul, kui operaatorid  $H$  ja  $F$  omavahel ei kommuteeru, s. o. kui

$$[H, F] \neq 0, \quad (1.41)$$

eiis (vt. I, ptk. I, § 5) neid operaatoreid üheaegselt diagonaalkujju viia ei saa. Operaatorite  $H$  ja  $F$  omaväärtused pole üheaegselt määratavad, mis füüsikalises interpretatsioonis tähendab seda, et energiat ja operaatoriga  $F$  kirjeldatavat suurust ei saa üheaegselt mõõta. Me võime mõõta energiat (matemaatilises skeemis tähendab see, et me viime diagonaalkujju  $H$ ), kusjuures me ei tea midagi suuruse  $F$  väärtuste kohta. Me võime aga mõõta ka suurust  $F$  (viime  $F$  diagonaalkujju), sel juhul me ei tea aga midagi energia väärtuste kohta.

Juhul, kui operaatorid  $H$  ja  $F$  omavahel kommuteeruvad, s. o., kui

$$[H, F] = 0, \quad (1.42)$$

siis on need operaatorid üheaegselt diagonaalkujju viidavad. Lineaarses vektorruumis, kus mõjuvad operaatorid  $H$  ja  $F$ , võime valida baasvektoriteks nende operaatorite ühised omavektorid. Füüsikaliselt tähendab see, et suurust  $F$  on võimalik energiaga üheaegselt mõõta.

Eeltoodud arutlus ei tarvitse tingimata olla seotud energia operaatoriga, vaid ta kehtib üldisemalt. Kõiki füüsikalisi suurusi kirjeldame teoreetilises füüsikas lineaaroperaatoritena. Seejuures on antud objekti olekut võimalik iseloomustada ainult nende suurustega, mida kirjeldavad omavahel kommuteeruvad operaatorid. Nii osutub näiteks, et pole võimalik rääkida üheaegselt elementaarosakese asukohast ja impulsist, potentsiaalsest energiast ja kineetilisest energiast jne., sest neid suurusi kirjeldavad kvantteoorias

omavahel mittekommuteeruvad operaatorid.

Viimases lõigus toodu kehtib kogu füüsikas tervikuna. Erijuhul, kui lineaaroperaatoriteks on reaalarvud (s.o. klassikalises füüsikas), ei teki sellest mingeid kitsendusi. Reaalarvude korpus on kommutatiivne hulk, mis ütleb, et klassikalise füüsika objekti olekut saab kirjeldada kõigi teda iseloomustavate suuruste arvuliste väärtustega. Kvantteooriates aga, kus lineaaroperaatoriteks on harilikult maatriksid ja diferentsiaaloperaatorid, toob niisugune matemaatiline mudel sisse rea kitsendusi, mis peegeldavad mikroobjektide füüsikalist olemust.

## § 5. Aja ja ruumi nihete rühma esitused.

### Energia ja impulss.

Käesoleva kursuse esimese osa teises peatükis paragrahvis 11 on näidatud, et aja- ja ruumikoordinaadistiku alguspunktide nihete rühma lõpmata väikesed teisendused

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu \quad (1.43)$$

võib kirjutada ka

$$x' = (I + \varepsilon_\nu J_\nu) x, \quad (1.44)$$

kus  $x$  tähistab Minkowski ruumi vektorit  $x_\mu$ ,  $\varepsilon_\nu$  on lõpmata väikest nihet määravad parameetrid ja  $J_\nu$  - infinitesimaaloperaatorid

$$J_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (1.45)$$

Operaatorid  $J_\nu$  määravad tegelikult aja ja ruumi nihete rühma esitused Hilberti ruumis. Näitsme seda.

Reegli (I; 1.46) järgi vastab lõpmata väikesele nihkele (1.43) esitusruumis teisendus

$$\psi \rightarrow \psi', \quad \text{kus} \quad \psi' = (I + \varepsilon_\nu \mathcal{P}_\nu) \psi. \quad (1.46)$$

$\mathcal{P}_\nu$  tähistab siin esitusruumis mõjuvaid infinitesimaaloperaatoreid. Et nihete rühm on Abeli rühm, siis on tema ainukeseks taandumatuks esituseks ühedimensiooniline esitus. Triviaalse tasandumatu esituse saame siis sel teel, et igale rühma elemendile seame vastavusse arvu 1, s. o.

$$\psi' = \psi,$$

kus  $\psi$  on ühekomponendiline vektor. Mittetriviaalse esituse saame sel juhul, kui oletame, et esitusruumi ühekomponendiline vektor  $\psi$  on ruumi- ja ajakoordinaatide funktsioon. Sel juhul vastab teisendusele (1.43) esitusruumis teisendus

$$\psi \rightarrow \psi', \quad \text{kus} \quad \psi' = \psi(x'_\sigma). \quad (1.47)$$

Valem (1.46) võtab nüüd kuju

$$\psi(x'_\sigma) = (I + \varepsilon_\nu \mathcal{P}_\nu) \psi(x_\sigma) \quad (1.48)$$

Teiselt poolt, jättes ära kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, võime kirjutada

$$\psi(x'_\sigma) = \psi(x_\sigma + \varepsilon_\nu) = \psi(x_\sigma) + \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \varepsilon_\nu. \quad (1.49)$$

Võrreldes valemid (1.48) ja (1.49), näeme et

$$\varepsilon_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} = \varepsilon_\nu \mathcal{P}_\nu \psi,$$

millest järgneb

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (1.50)$$

Suurus  $\mathcal{P}_3$  teiseneb koordinaatide teisenduse (I;2,89)

$$x'_3 = a_{36} x_6$$

korral järgmise eeskirja kohaselt:

$$\mathcal{P}'_3 = a_{36} \mathcal{P}_6, \quad (1.51)$$

kus

$$\mathcal{P}'_3 = \frac{\partial}{\partial x'_3}.$$

$\mathcal{P}_3$  on neljakomponendiline vektor. Missugune võiks olla selle vektori füüsikaline tähendus? Osutub, et arendatav teooria annab eksperimendiga kooskõlalisi tulemusi, kui lugeda vektor  $\mathcal{P}_3$  võrdeliseks energia-impulsi vektoriga (vt. I, ptk. 3, § 7). Täpsemini: energia-impulsi operaatori  $P_3$  defineerime kui

$$P_3 = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (1.52)$$

$\hbar$  tähistab siin konstanti  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , kus  $h$  kannab nime-tust Plancki konstant (ka Plancki mõjukvant):

$$h = (6,62517 \pm 0,00023) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Plancki konstant on kvantteooriatele iseloomulik suurus, mille täpsem tähendus selgub käesoleva kursuse kolmandas osas. Üleminek klassikalisest osakeste teooriast kvantmehhaanikasse toimub just sel teel, et arvuliste komponentidega energia-impulsi vektor asendatakse vektoroperaatoriga (1.52).

Silmas pidades energia-impulsi vektori komponentide tähendust (I; 3.86) saame leida valemist (1.52) impulsi operaatorid

$$p_k = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.53)$$

ja energia operaatori

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} . \quad (1,54)$$

§ 6. Matemaatilise skeemi füüsikaliseat  
interpreteerimisest (järg).

Selleks et veelgi süvendada kasutatava matemaatilise formalismi füüsikalist interpretatsiooni, uurime lähemalt küsimust, kuidas defineerida mingi operaatori tuletist aja järgi.

Olgu antud lineaarne vektorruum vektoriga  $\psi$  ja mõjugu selles ruumis lineaarteisendusena energia operaator  $H$ . Operaatorseose (1.54) saame siis üksikasjalisemalt välja kirjutada

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} . \quad (1.54a)$$

Mõjugu selles lineaarses ruumis veel mingi operaator  $F$ . Moodustame suuruse

$$\langle F \rangle = (F\psi, \psi) , \quad (1.55)$$

mida nimetame operaatori  $F$  keskvärtuseks vektoriga  $\psi$  määratud olekus (käesoleva kursuse kolmandas osas põhjendame üksikasjalisemalt seda nimetust). Operaatori keskvärtus on arv, millest võime tuletise aja järgi harilikul viisil arvutada. Suurust  $\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle$  võime seega antuks lugeda.

Defineerime nüüd operaatori  $\dot{F}$  tuletise aja järgi kui niisuguse operaatori  $\dot{F}$ , mille keskvärtus on võrdne suurusega  $\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle$ :

$$\langle \dot{F} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle , \quad (1.56)$$

või üksikasjalisemalt kirjutatuna

$$(\dot{F}\psi, \psi) = \frac{\partial}{\partial t} (F\psi, \psi) . \quad (1.56a)$$

Siit saame arvutada

$$(\dot{F}\psi, \psi) = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \psi, \psi \right) + \left( F \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi \right) + \left( F\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) .$$

Kasutades võrrandit (1.54a) järgneb eelmisest

$$(\dot{F}\psi, \psi) = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \psi, \psi \right) + \left( -\frac{i}{\hbar} FH\psi, \psi \right) + \left( F\psi, -\frac{i}{\hbar} H\psi \right) .$$

Silmas pidades skalaarkorrutise arvutamise reeglit (I;1.18)

saame viimase liidetava kirjutada

$$(F\psi, -\frac{i}{\hbar} H\psi) = \left( \frac{i}{\hbar} HF\psi, \psi \right) \quad (H^* = H)$$

ja eelmine võrdus kujuneb

$$(\dot{F}\psi, \psi) = \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (HF - FH) \right] \psi, \psi \right) .$$

Siit järgneb operaatoritevaheline seos

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (HF - FH) . \quad (1.57)$$

Sellega olemegi defineerinud operaatori  $F$  tuletise aja järgi. Erijuhul, kui operaator  $F$  aega ilmutatud kujul ei sisalda, on  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  ja

$$\dot{F} = \frac{i}{\hbar} (HF - FH) . \quad (1.57a)$$

Siit on näha, et juhul, kui operaator  $F$  ajast otseselt ei sõltu ja kommuteerub energia operaatoriga

$$HF - FH = 0, \quad (1.58)$$

on  $\dot{F} = 0$ . Operaator  $F$  on ajast sõltumatu suurus (liikumise integraal). Kui füüsikalist suurust kirjeldav operaator  $F$  kommuteerub energia operaatoriga, siis on operaatorile  $F$  vastav suurus liikumise integraaliks.

Saadud tõlgendus tingimusele (1.58) täiendab tõlgendust, mis on antud paragrahvis 4. Tuleb ainult silmas pida, et paragrahvis 4 antud tõlgendus füüsikaliste suuruste üheaegsest mõõtmisest kehtib üldiselt kogu füüsikas, käesolevas antud lisatõlgendus on aga seotud energia operaatori tähendusega (1.54) ja on rakendatav ainult kvantteooriates.

### § 7. Spinvektori füüsikalisest tähendusest.

Eespool nägime, et kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma igas esitusruumis mõjub kolm infinitesimaalmatriksit  $S_k$ , mis määravad esitusruumi vektorite  $\psi$  teisenemiseeskirja:

$$\psi' = (I + \varepsilon_k S_k) \psi. \quad (1.59)$$

Matrikseid  $\hbar S_k$  nimetatakse füüsikalistes rakendustes harilikult spinnmatriksiteks ja kolmekomponendilist suurust  $\hbar(S_1, S_2, S_3)$ - spinnvektoriks. Vaatleme nüüd lähemalt, missugune võiks olla spinnvektori füüsikaline tähendus.

Olgu antud mingisugune tsentraalsümmeetriline süsteem, s. o. süsteem, millel kõik ruumisuunad on samaväärsed. Nii-

sugused on näiteks kõik vabad elementaariosakesed, seepärast räägimegi edaspidi konkreetseuse mõttes elementaariosakesest. Tähistame elementaariosakese energia operaatorit  $H$ , mis mõjub samuti vaadeldavas esitusruumis. Et operaatori  $(I + \varepsilon_\kappa S_\kappa)$  pöördoperaatoriks on (vrd. näit. (I; 2.39)):

$$(I + \varepsilon_\kappa S_\kappa)^{-1} = (I - \varepsilon_\kappa S_\kappa),$$

siis eeskirja (I; 1.12) kohaselt esitusruumi vektori teisenumisel (1.59) järgi teiseneb energia operaator järgmiselt

$$H' = (I + \varepsilon_\kappa S_\kappa) H (I - \varepsilon_\kappa S_\kappa). \quad (1.60)$$

Tsentraalsümmeetrilise objekti korral ei saa ruumikoordinaatistiku pööre objekti energiat muuta, s. o. peab olema

$$H' = H. \quad (1.61)$$

Asendame siia  $H'$  avaldise (1.60), avame sulud ja loeme nulliks teist järku lõpmata väikesed liikmed, siis saame

$$\varepsilon_\kappa (H S_\kappa - S_\kappa H) = 0, \quad (1.62)$$

või pidades silmas, et parameetrid  $\varepsilon_\kappa$  on meelevaldsed:

$$H S_\kappa - S_\kappa H = 0. \quad (1.63)$$

Infinitesimaaloperaatorid kommuteeruvad energia operaatoriga, mis tähendab, et nende operaatorite omaväärtusi saab koos energiaga kasutada elementaariosakese oleku iseloomustamiseks. Operaatorid  $S_\kappa$  kirjeldavad liikumise integraale, muidugi siis ka operaatorid  $\hbar S_\kappa$ .

Tingituna sellest, et operaatorid  $\hbar S_\kappa$  omavahel ei kommuteeru, neid üheaegselt diagonaalkujju viia ei saa. Üheaegselt võime diagonaalkujju viia ainult operaatorid  $H$ ,  $\hbar S_3$  ja  $\hbar^2 S^2$ .

( $S_3$  asemel võiks olla ka kas  $S_1$  või  $S_2$ ). Üheaegselt ener-

giaga saab elementaarosakese olekut iseloomustada spinnvektori absoluutväärtusega ja ühe komponendi väärtusega.

Spinnvektori saime, kui vaatlesime ruumikoordinaadistiku pöörete rühma. Füüsikaline suurus, mida see vektor kirjeldab, peab kuidagi samuti olema seotud ruumiliste pööretega. Osutub, et spinnvektor on pöördimpulsi vektoriga sama tüüpi suurus. Erinevus on ainult selles, et spinnoperaatorid osakese kiirusest (ja üldse koordinaatidest) ei olene. See tähendab, et spinnoperaatoritega antud pöördimpulss võib olla ka paigalseisval osakesel.

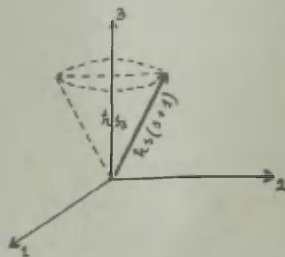
Operaatoritega  $\hbar S_k$  kirjeldatav füüsikaline suurus, nn. spinn, on paigalseisva osakese pöördimpulss. Väga tugevasti lihtsustatud käsitluses vaadatakse vahel spinni ka kui pöördimpulssi, mis tekib osakese pöörlemisel ümber oma telje. Täpne ei ole see käsitlus sellepärast, et elementaarosakesed on ilma kindla geomeetrilise kujuta objektid (elementaarosakese "pildiks" on matemaatiline punkt), mille korral pole mõtet rääkida pöörlemisest ümber oma telje.

Kui osakest kirjeldame operaatoritega  $H$ ,  $\hbar S_3$  ja  $\hbar^2 S^2$ , siis võime öelda, et osakese energia on  $E$  (operaatori  $H$  omaväärtus), osakese spinnvektori absoluutväärtus  $\hbar \sqrt{s(s+1)}$  ja osakese spinnvektori kolmanda komponendi väärtus  $\hbar s_3$ , kusjuures  $s_3$  võib omandada ükskõik missuguse järgmistest  $2s+1$  väärtustest:

$$s_3 = s, s-1, \dots, -s+1, -s.$$

Spinnvektor võib ruumis olla orienteeritud  $2s+1$  viisil, kusjuures see orientatsioon määratakse ainult vektori kol-

manda komponendi väärtusega. Spinnvektori esimese ja teise komponendi väärtuste kohta me midagi öelda ei tea, sest neid kirjeldavad operaatorid  $\hbar S_1$  ja  $\hbar S_2$  diagonaalkujus ei ole. Piltlikult võiks seda olukorda ette kujutada nii, et spinnvektor pöörleb ümber kolmanda telje, nagu näitab joonis 1. Spinnvektori kolmanda komponendi mõõtmisel saaksime niisugusel juhul alati arvu  $\hbar s_3$ , kahe esimese komponendi mõõtmine aga kindlat tulemust ei annaks.



Joon. 1.

Käsitletud matemaatiline skeem peegeldab reaalsete mikroosakeste omadusi. Kursuse järgmises osas näeme, et osakese spinniga käivad kaasas ka osakese magnetilised omadused. See tähendab, et eksperimendis on alati võimalik ühte eelisuunda (kolmanda koordinaattelje suunda) määrata välise magnetvälja suunaga. Magnetväljas orienteerivad mikroosakesed end alati nii, et nende spinnvektori projektsioon magnetvälja suunale on  $\hbar s_3$ . Eelissuund võib olla määratud ka näiteks osakese liikumissuunaga.

Vaatleme lõpuks paari konkreetset erijuhtu.

#### Nullspinni juht.

Kui osakest kirjeldab kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus ühedimensioonilises ruumis, s.o. kui esitusruumi vektor on ühekomponendiline suurus, siis on spinni komponendid nullid (vt. § 3),  $S_k = 0$ . Osakese spinn

on null. Väline magnetväli osakese orientatsioonile ei mõju. Niisuguste omadustega on näiteks  $\pi$ -mesonid ja K-mesonid (osakesed, mille massid ületavad elektroni massi vastavalt umbes 270 ja 970 korda).

### Spinni 1/2 juht.

Kui osakest kirjeldab vaadeldava rühma esitus kahedimensioonilises ruumis, siis on tema spinni komponendid

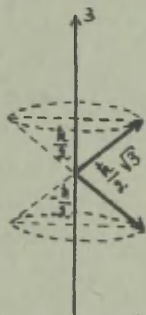
$$S_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lihtne arvutus annab siit

$$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On näha, et spinni kui vektori pikkus on sntud juhul

$\hbar \sqrt{s(s+1)} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{3}$ , kusjuures ruumis on see vektor orienteeritud nii, et tema kolmas komponent on kas  $\frac{\hbar}{2}$  või  $-\frac{\hbar}{2}$ .



Joon. 2.

Osakesel on välises magnetväljas võimalik võtta ainult kaks orientatsiooni, nagu näitab joonis 2.

Kirjeldatud omadustega on suur hulk elementaarosakesi, näiteks elektron, prooton, neutron ja veel mitmed teised.

### Spinni 1 juht.

Kui osakest kirjeldab vaadeldava rühma esitus kolmedimensioonilises ruumis, siis on osakese spinni komponendid (vt. § 3):

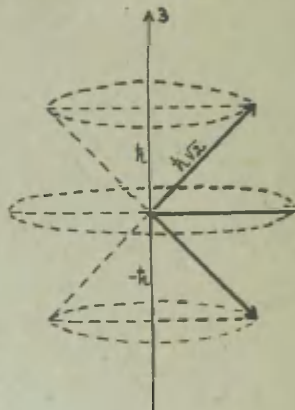
$$S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ja

$$S^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osakese spinni kui vektori pikkus on niisugusel juhul  $\hbar\sqrt{2}$ , kusjuures ruumis on see vektor orienteeritud nii, et tema kolmas komponent on kas  $\hbar$ ,  $0$  või  $-\hbar$  (vt. joon. 3).

Osake võib väliste tingimustega määratud eelissuuna suhtes olla kolme erineva orientatsiooniga. Niisugune esitus kirjeldab mitmeid aatomituumi. Niisugune esitus kirjeldab ka "valguseosakesi" footoneid, ainult selle erinevusega, et olek  $s_3 = 0$  on neil keelatud. Footoni spinni vektor võib footoni liikumissuuna (kolmanda telje) suhtes olla ainult kahes orientatsioonis.



Joon. 3.

§ 8. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus skalaarses Hilberti ruumis.

Olgu antud esitusruum, mille vektorid  $\psi$  on ruumikoordinaatide funktsioonid:

$$\varphi = \varphi(x_i). \quad (1.64)$$

Niisugusel juhul toob ruumikoordinaadistiku pööre

$$x'_i = x_i + \varepsilon_{i\kappa} x_\kappa \quad (1.65)$$

esitusruumis endaga kaasa nii suuruse  $\varphi$  komponentide asendamise nende lineaarkombinatsioonidega kui ka argumendi muutmise:

$$\varphi(x_i) \rightarrow \varphi'(x'_i). \quad (1.66)$$

Esitusruumis mõjuva teisenduse (1.2) saame siis üldiselt kirjutada

$$\varphi'(x'_i) = (I + \varepsilon_\kappa S_\kappa) \varphi(x_i), \quad (1.67)$$

kus infinitesimaaloperaatorid  $S_\kappa$  on käesoleva peatüki esimeses punktis juba leitud.

Argumendi muutumine teisenduses (1.67) tähendab ruumikoordinaadistiku teisendust, mis füüsikaliste suuruste määramisel olulist osa ei tohi mängida. Seepärast huvitavad meid eelkõige niisugused teisendused esitusruumis, kus me ruumikoordinaadistiku teisenemise mõju argumendis ei arvesta, s. o. teisendused

$$\varphi(x_i) \rightarrow \varphi'(x_i). \quad (1.68)$$

Vaatleme nüüd täpsemalt erijuhtu, kus esitusruumi moodustavad skaalarid. Eespool nägime, et niisugusel juhul  $S_\kappa = 0$  ja teisendusvalem (1.67) annab

$$\varphi'(x'_i) = \varphi(x_i). \quad (1.69)$$

Teisendusvalemi (1.65) abil saame siit

$$\varphi'(x_i + \varepsilon_{ik} x_k) = \varphi(x_i).$$

Kasutame nüüd reaksarendust, kusjuures kõik kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed loeme nulliks. Saame:

$$\varphi'(x_i) = \varphi(x_i) - \varepsilon_{ik} x_k \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}. \quad (1.70)$$

Viimase võime ümber kirjutada

$$\begin{aligned} \varphi'(x_i) = \varphi(x_i) - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \left( x_k \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} \right) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \left( x_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Märgime kõigepealt, et vastavalt reaksarendusele (1.70)

erineb suurus  $\varphi'$  suurusest  $\varphi$  ainult esimest järku väikeste liikmete poolest. Järelikult võime valemis (1.71) paremal pool  $\varphi'$  igal pool asendada suurusega  $\varphi$ ; viga, mis me selle juures teeme, on teist järku lõpmata väike suurus.

Võtame nüüd arvesse, et sümmeetrilise suuruse korrutis antisümmeetrilise suurusega, kui summeerimine toimub üle mõlema indeksi, on null (vt. I, ptk. II, § 2). Valemi (1.71) asemele annab see

$$\varphi'(x_i) = \left[ I + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \mathcal{L}_{ik} \right] \varphi(x_i), \quad (1.72)$$

kus

$$\mathcal{L}_{ik} = x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.73)$$

on Hilberti ruumis mõjuvad infinitesimaaloperaatorid.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Käesoleva kursuse esimeses osas lk. 95 on juhtunud eksitav viga. Ülaltpäev teine lõik peaks olema järgmine:

Ruumis, kus mõjuvad operaatorid  $\mathcal{J}_\sigma$ , on antud ka Lorentzi omarühma esitus. Esitusruumis mõjuvad infinitesimaaloperaatorid võime kirjutada

$$\mathcal{J}_{\sigma\sigma} = x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}. \quad (2.112)$$

Erijuhul, kui anda indeksitele  $\rho$  ja  $\sigma$  ainult kolm esimest väärtust, 1, 2, 3, langevad valemiga (I; 2.112) antud infiniteimaaloperaatorid kokku operaatoritega  $\mathcal{L}_{ik}$ .

Teisendused (1.72) moodustavad kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esituse skalaarses Hilberti ruumis. Seda kinnitab asjaolu, et operaatorid rahuldavad nimetatud rühma infinitesimaaloperaatorite vahetuseeskirja (I; 2,30).

Analoogiliselt sellele, nagu me toimisime eespool, võime ka siin sisse tuua ühe indeksiga infinitesimaaloperaatorid

$$\mathcal{L}_2 = -ie_{\rho ik} \mathcal{L}_{ik} \quad (1.74)$$

või detailsemalt väljakirjutatuna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -i \left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ \mathcal{L}_2 &= -i \left( x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \\ \mathcal{L}_3 &= -i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Teisendusvalem (1.72) kujuneb niisugusel juhul

$$\psi'(x_i) = [I + \varepsilon_k \mathcal{L}_k] \psi(x_i). \quad (1.76)$$

On lihtne kontrollida, et need operaatorid rahuldavad vahetuseeskirju (2.84). Pöorete rühma ja nihete rühma infinitesimaaloperaatorite vahel kehtivad kommutatsiooniseosed

$$[J_{\rho\sigma}, J_\nu] = -\delta_{\nu\rho} J_\sigma + \delta_{\nu\sigma} J_\rho. \quad (2.113)$$

## § 9. Orbitaalne pöördimpulss.

Vaatame, missugune võiks olla operaatorite  $\mathcal{L}_k$  füüsikaline tähendus. Selleks moodustame suurused  $H_k = \hbar \mathcal{L}_k$ . On lihtne näha, et valemid (1.75) võime nüüd kirjutada

$$\begin{aligned} H_1 &= x_2 p_3 - x_3 p_2, \\ H_2 &= x_3 p_1 - x_1 p_3, \\ H_3 &= x_1 p_2 - x_2 p_1, \end{aligned} \quad (1.77)$$

kus  $p_k$  tähistab impulsi operaatorit (1.53). Vektorkujus võime eelmised valemid kirjutada

$$\vec{H} = \vec{x} \times \vec{p}. \quad (1.78)$$

See on klassikalisest mehhaanikast tuntud pöördimpulsi avaldis. Suurus  $\vec{H}$  on ilmselt pöördimpulss, mille tingib osakese liikumine ruumis kõverjoonelisel teel ja mida harilikult nimetatakse orbitaalseks pöördimpulsiks.

Et orbitaalse pöördimpulsi ja spinni operaatorid saime ühe ja sama rühma erinevate esituste kaudu, see näitab, et need suurused on analoogilised. Sellel analoogial põhinebki spinni lugemine pöördimpulsi tüüpi suuruseks, nagu me seda eespool tegime.

Arvutame nüüd orbitaalse pöördimpulsi omaväärtused. Operaatorid  $\mathcal{L}_k$  valemitest (1.75) rahuldavad vahetuseeskirju

$$[\mathcal{L}_j, \mathcal{L}_k] = i \varepsilon_{jkl} \mathcal{L}_l, \quad (1.79)$$

mis langevad täpselt kokku kolmedimensioonilise vektorruumi pöörete rühma infinitesimaaloperaatorite vahetuseeskirjadega (I;2,33) (nagu see peabki olema, sest operaatorid  $\mathcal{L}_k$

määravad nimetatud rühma esituse Hilberti ruumis). Järelikult ei kommuteeru orbitaalse pöördimpulsi komponendid  $L_k$  omavahel, küll aga kommuteerub igaüks neist operaatoriga

$$L^2 = L_k L_k. \quad (1.80)$$

Me võime üheaegselt arvutada  $L^2$  ja ühe komponendi omaväärtused. Olgu selleks komponendiks  $L_3$ .

$L^2$  ja  $L_3$  omaväärtusprobleemid annavad võrrandsüsteemi

$$L_3 \psi = l_3 \psi, \quad (1.81)$$

$$L^2 \psi = k \psi,$$

kus  $\psi$  on otsitav omafunktsioon (ühine mõlemale operaatorile) ja  $l_3$  ning  $k$  tähistavad operaatorite omaväärtusi.

Operaatorid ise, detailselt väljakirjutatuna, on

$$\begin{aligned} L_3 &= -i\hbar \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \\ L^2 &= -\hbar^2 \left[ \left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 + \left( x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Seatud ülesannet on kõige lihtsam lahendada sfäärilistes koordinaatides. Teeme muutujate vahetuse

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Operaatorid (1.82) võtavad siis lihtsama kuju

$$\begin{aligned} L_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ L^2 &= -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Esimese omaväärtusvõrranditest (1.81) saame nüüd kirjutada

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = l_3 \Psi. \quad (1.85)$$

Selle võrrandi lahendiks on

$$\Psi = f(r, \theta) e^{\frac{i}{\hbar} l_3 \varphi}, \quad (1.86)$$

kus  $f(r, \theta)$  tähistab suvalist funktsiooni, mis võib sõltuda polaarraadiusest  $r$  ja polaarnurgast  $\theta$ .

Nõuame nüüd esitusruumi vektorite ühesust, s. o. nõuame, et täispööre ruumis ei muuda funktsiooni  $\Psi$  väärtust. Polaarnurkade  $\varphi$  ja  $\varphi + 2n\pi$  korral peavad funktsioonil  $\Psi$  olema samad väärtused, mis tähendab nõuet

$$e^{\frac{i}{\hbar} l_3 \varphi} = e^{\frac{i}{\hbar} l_3 (\varphi + 2n\pi)},$$

kus  $n$  võib olla mistahes täisarv. Järelikult

$$e^{\frac{i}{\hbar} l_3 2n\pi} = 1$$

ja  $l_3$  võib omandada järgmisi väärtusi:

$$l_3 = 0, \pm \hbar, \pm 2\hbar, \pm 3\hbar, \dots \quad (1.87)$$

Jadaga (1.87) on antud operaatori  $L_3$  omaväärtused ja valemiga (1.86) tema omafunktsioonid.

Määrame nüüd suuruse  $f(r, \theta)$  nii, et funktsioon (1.86) oleks omafunktsiooniks ka operaatorile  $L^2$ . Selleks asetame  $\Psi$  avaldise (1.86) teise võrrandisse (1.81) ja peame silmas operaatori  $L^2$  kuju (1.84). Pärast tuletiste võtmist polaarnurga  $\varphi$  järgi ja võrrandi jagamist teguriga  $e^{\frac{i}{\hbar} l_3 \varphi}$  saame

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{m r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( m r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \kappa - \frac{l_3^2}{m r^2} \right\} f(r, \theta) = 0. \quad (1.88)$$

Kirjutame selle võrrandi ümber nii, et polaarnurga asemel võtame sõltumatuks muutujaks  $x = \cos \theta$ . Silmas pidades, et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial (\cos \theta)},$$

saame eelmise asemel

$$\left[ \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + \frac{k}{\hbar^2} - \frac{l_3^2}{\hbar^2 (1-x^2)} \right] f(r, x) = 0. \quad (1.89)$$

Võrdleme saadud võrrandid Legendre'i polünoome määrava võrrandiga:<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_n^m(x) = 0, \quad (1.90)$$

kusjuures indeks  $n$  võib omandada väärtusi  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ja indeks  $m$  võib omandada väärtusi  $m = -n, -n+1, \dots, n-1, n$ .

Võrrandite (1.89) ja (1.90) võrdlemine näitab, et polaarnurgast  $\theta$  sõltuv osa funktsioonis  $f(r, \cos \theta)$  on Legendre'i polünoom  $P_l^{l_3}(\cos \theta)$ , kusjuures  $\frac{k}{\hbar^2} = l(l+1)$  ja  $l$  võib omandada väärtusi

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ning  $l_3$  võib omandada väärtusi

$$l_3 = -l, -l+1, \dots, l-1, l,$$

kokku  $2l+1$  väärtust.

Operaatorite  $l_3$  ja  $l^2$  ühised omafunktsioonid võime järelikult kirjutada

$$\Psi = R(r) P_l^{l_3}(\cos \theta) e^{\frac{i}{\hbar} l_3 \varphi}, \quad (1.91)$$

<sup>1</sup> vt. näit. В.И.Смирнов, "Курс высшей математики", том II, часть 2, Москва 1956, lk. 500.

kus  $R(z)$  tähistab integreerimiskonstanti, mis üldjuhul võib oleneda näiteks polaarraadiusest või mõnedest teistest suurustest.

Arvutus andis orbitaalse pöördimpulsi ruudu,  $L^2$ , operaatori omaväärtusteks

$$K = l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.92)$$

ja sama pöördimpulsi kolmanda komponendi operaatori omaväärtusteks

$$L_z \hbar = -l\hbar, (-l+1)\hbar, \dots, (l-1)\hbar, l\hbar. \quad (1.93)$$

Sellest on näha, et mikroosake võib liikuda ruumis nii, et tema pöördimpulss on järgmiste väärtustega:

1)  $l=0$ ,  $l_z=0$ , s. o. olekus, kus osakese orbitaalne pöördimpulss on null. Niisugune olek tähendab seda, et osake liigub sirgjooneliselt.

2)  $l=1$ ,  $l_z=-1, 0, +1$ . Selles olekus on orbitaalse pöördimpulsi absoluutväärtus  $\hbar\sqrt{2}$  ja tema kolmas komponent võib omandada väärtusi  $-\hbar$ ,  $0$ ,  $+\hbar$ . Niisugust olekut kujutab piltlikult joonis 3, ainukese erinevusega, et joonistatud vektor ei kujuta seekord spinni, vaid orbitaalset pöördimpulssi.

3)  $l=2$ ,  $l_z=-2, -1, 0, +1, +2$ . Selles olekus on orbitaalse pöördimpulsi absoluutväärtuseks  $\hbar\sqrt{6}$  ja tema kolmas komponent võib omandada väärtusi  $-2\hbar$ ,  $-\hbar$ ,  $0$ ,  $+\hbar$ ,  $+2\hbar$ .

Andes arvule  $l$  järjest täisarvulisi väärtusi, võib minna kuitahes kaugemale. Osakese orbitaalne pöördimpulss võib

olla kuitahes suur, kuid ta ei või muutuda pidevalt. Orbi-  
 taalse pöördimpulsi vektori ja tema kolmanda komponendi või-  
 malikud väärtused on määratud omaväärtustega (1.92) ja (1.93).

§ 10. Omateisenduste rühma esituste otsekorrutis.

Olgu antud kolmedimensioonilise vektorruumi omateisen-  
 duste rühma taandumatu esitus  $2s+1$  dimensioonilises vek-  
 torruumis  $R$ . Tähistame seda esitust sümboolselt  $D^s$  ja  
 nimetame esituseks indeksiga  $s$ . Esitusruumis mõjuvate in-  
 finitesimaaloperaatorite omaväärtused on antud juhul siis:

$$\begin{aligned} S^2 \text{ omaväärtus } & s(s+1), \\ S_3 \text{ omaväärtused } & -s, -s+1, \dots, s-1, s. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Nende operaatorite ühised omavektorid

$$u_{-s}, u_{-s+1}, \dots, u_{s-1}, u_s \quad (1.95)$$

moodustavad ortonormeeritud süsteemi, nii et võime nad va-  
 lida baasvektoriteks.

Olgu antud veel sama rühma esitus  $2s'+1$  dimensioonili-  
 ses vektorruumis  $R'$ . See on esitus indeksiga  $s'$  ja tä-  
 histame teda  $D^{s'}$ . Selles esitusruumis mõjuvate infinitesi-  
 maaloperaatorite omaväärtused on:

$$\begin{aligned} S'^2 \text{ omaväärtus } & s'(s'+1), \\ S'_3 \text{ omaväärtused } & -s', -s'+1, \dots, s'-1, s'. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Esitusruumis  $R'$  võime siis valida baasvektoriteks nende  
 operaatorite omavektorid

$$v_{-s'}, v_{-s'+1}, \dots, v_{s'-1}, v_{s'} \quad (1.97)$$



$$\sum_{\kappa} = (I \times S'_{\kappa}) + (S_{\kappa} \times I). \quad (1.101)$$

On lihtne kontrollida, et need maatriksid rahuldavad vahetuseeskirju (1,3), nagu see peabki olema - tegemist on kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitusruumis mõjuvate infinitesimaalmaatriksitega.

Infinitesimaalmaatriksitega (1.101) määratud esitus on üldiselt taanduv. Selles on lihtne veenduda, kui arvutame operaatori

$$\sum_3 = (I \times S'_3) + (S_3 \times I) \quad (1.102)$$

omaväärtused.

On lihtne näha, et baasivektorid (1.98) on operaatorile  $\sum_3$  omavektoriteks. Tõepoolest, et kehtivad võrrandid

$$S_3 u_z = z u_z, \quad z = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

ja

$$S'_3 v'_z = z' v'_z, \quad z' = -s, -s'+1, \dots, s'-1, s'$$

siis kehtib avaldise (1.102) põhjal ka

$$\sum_3 u_z v'_z = (z+z') u_z v'_z. \quad (1.103)$$

Näemegi, et vektor  $u_z v'_z$  on operaatori omavektoriks omaväärtusel  $z+z'$ . Operaatori  $\sum_3$  kõikvõimalikud omaväärtused saame siis analoogiliselt omavektorite tabelile (1.98) kirjutada tabelina (lk. 46). Iga punktike selles tabelis tähistab ühte omaväärtust, kusjuures võrdsed omaväärtused on ühendatud punktiirjoontega. Igale punktiirjoonele vastavad omaväärtused on kirjutatud tabeli äärtele. Näeme, et operaatoril  $\sum_3$  on võrdseid omaväärtusi, mida taandumatu esituse korral olla ei saa (selles veendusime paragrahvis 1).

$$\begin{array}{ccccccc}
-s-s' & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & -s+s' \\
-s-s'+1 & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & -s+s'+1 \\
-s-s'+2 & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & -s+s'+2 \\
. & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\
. & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\
s-s'-2 & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & s+s'-2 \\
s-s'-1 & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & s+s'-1 \\
s-s' & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & s+s'
\end{array} \tag{1.104}$$

Et lahutada see taanduv esitus taandumatute esituste otsesummaks, selleks tuleb esitusmaatriksitega teha niisugune unitaarteisendus, et need maatriksid läheksid kujju (I;1.21), kus peadiagonaalil on järjest taandumatutele esitustele vastavad maatriksid. Käesolevas me seda unitaarteisendust määrama ei hakka. Taandumatute esituste leidmisel arvestame ainult seda, et maatriksis  $\sum_3$  peab igale taandumatule esitusele vastav osa sisaldama diagonaalil kõiki omaväärtusi ainult ühekordselt ja seejuures nii, nagu nõuab reegel (1.21). Teiste sõnadega: esituse taandamisel grupeeruvad omaväärtused maatriksis  $\sum_3$  järgmiselt:

$$\begin{array}{l}
-s-s', -s-s'+1, \dots, s+s'-1, s+s'; 2(s+s')+1 \text{ omaväärtust,} \\
-s-s'-1, -s-s'-2, \dots, s+s'-2, s+s'-1; 2(s+s'-1)+1 \text{ omaväärtust,} \\
\dots \text{ jne. kuni } \dots \dots \dots (1.105) \\
-|s-s'|, -|s-s'|+1, \dots, |s-s'|-1, |s-s'|; 2|s-s'|+1 \text{ omaväärtust.}
\end{array}$$

Kontrollime, kas me oleme eelmises kõik omaväärtused arvestanud. Tabelis (1.104) on omaväärtusi üldse  $(2s+1)(2s'+1)$ .

Tabelis (1.105) on omaväärtusi

$$n = [2(s+s') + 1] + [2(s+s'-1) + 1] + \dots + [2|s-s'| + 1] .$$

$n$  avaldub aritmeetilise reana, millel on

$$s + s' - |s - s'| + 1$$

liiget. Rea summa on järelikult

$$n = \frac{1}{2} [s + s' - |s - s'| + 1] [\{2(s+s') + 1\} + \{2|s-s'| + 1\}] ,$$

millest järgneb

$$n = (2s + 1)(2s' + 1) .$$

Tabel (1.105) sisaldab sama palju omaväärtusi kui tabel (1.104). Kõik omaväärtused on tabelis (1.105) arvesse võetud.

Iga omaväärtuste rühm tabelis (1.105) vastab ühele taandumatule esitusele. Sellega on näidatud, et maatriks  $\sum_3$  laguneb järgmiste maatriksite otsesummaks:

$$\sum_3 = \sum_{j=|s-s'|}^{s+s'} S_3(j) , \quad (1.106)$$

kus poolpaks summamärk tähistab maatriksite otsesummat ja  $S_3(j)$  on taandumatule esitusele  $D^j$  vastav infinitesimaal-maatriks. Vastavalt valemile (1.106) võime siis välja kirjutada kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esituste otsekorrutise taandamise valemi:

$$D^s \times D^{s'} = \sum_{j=|s-s'|}^{s+s'} D^j . \quad (1.107)$$

Poolpaks summamärk tähistab siin esituste otsesummat.

#### N ä i d e .

Et illustreerida eespool toodud mõttekäike, arvutame ühe konkreetse näite. Valem (1.107) annab:

$$D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} = D^0 + D^1 . \quad (1.108)$$

Vaatleme konkreetselt, kuidas see otsekorrutis taandumatu-  
teks esitusteks laguneb.

Infinitesimaaloperaatorid  $S_k$  ja  $S'_k$  võime valida mõ-  
lemad kujul (1.29) ja (1.31). Sel juhul saame näiteks

$$S_1 \times I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I \times S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

millest valemi (1.102) järgi tuleb

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.109)$$

Analoogiliselt saame arvutada

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

ja

$$\Sigma^2 = \sum_k \sum_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.111)$$

Operaatorid (1.109) - (1.111) mõjuvad ruumis, kus baasi-  
vektoriteks on korrutised (1.98). Tähistame baasivektoreid  
lühidalt  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ):

$$w_1 = u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}, \quad w_2 = u_{\frac{1}{2}} v_{-\frac{1}{2}}, \quad w_3 = u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}, \quad w_4 = u_{-\frac{1}{2}} v_{-\frac{1}{2}}. \quad (1.112)$$

Vektori komponente baasi (1.112) suhtes tähistame

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

Teeme nüüd unitaarteisenduse maatriksi

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (1.114)$$

abil. Saame

$$\begin{aligned} \Sigma'_1 = U \Sigma_1 U^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, & \Sigma'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Sigma'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \Sigma'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Näemegi, et kõik infinitesimaalmatriksid  $\Sigma$  lagunesid ühe-  
realiste infinitesimaalmatriksite ja kolmerealiste infini-  
tesimaalmatriksite otsesummaks (eelmistes avaldistes on ot-  
sesumma liidetavatele vastavad osad punktiirjoontega eralda-  
tud). Esitus  $D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}}$  lagunes tõepoolest esituste  $D^0$  ja  $D^1$   
otsesummaks.

Vektorruumi vektorite komponendid muutusid selle uni-

taarteisendusega

$$\alpha' = U\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2 - \alpha_3) \\ \alpha_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2 + \alpha_3) \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

ja baasvektorid

$$\begin{aligned} W' = W U^{-1} &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(w_2 - w_3), w_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(w_2 + w_3), w_4 \right] = \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} - u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}), u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}), u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.117)$$

On näha, et ühedimensioonilise esituse baasvektor

$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} - u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}})$  on vektorite  $u$  ja  $v$  vahetamise suhtes antisümmeetriline (vahetab märki). Kolmedimensioonilise esituse baasvektorid  $u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}} + u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}})$  ja  $u_{-\frac{1}{2}} v_{\frac{1}{2}}$  on  $u$  ja  $v$  vahetamise suhtes aga sümmeetrilised (jäävad  $u$  ja  $v$  vahetamisel muutumatuks).

### § 11. Esituste otsekorrutise taandamise füüsikaline mõte. Süsteemi koguspinn.

Nägime, et kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma taandumatu esituse infinitesimaaloperaatorid kirjeldavad osakese spinni. Kahte osakest kirjeldavate esituste otsekorrutise moodustamine tähendab nendest osakesetest süsteemi moodustamist. Otsekorrutisena saadava esituse infinitesimaaloperaatorid kirjeldavad järelikult süsteemi koguspinni. Kui ühe osakese spinni kirjeldavad operaatorid  $\hbar S_x$  ja teise osakese spinni operaatorid  $\hbar S'_x$ , siis nendest osakestest moodustatud süsteemi koguspinn on antud

valemiga (1.101) määratud operaatoritega  $\hbar \Sigma_n$ . Et viimaseid operaatoreid on võimalik lahutada taandumatute operaatorite otsesummaks, tähendab füüsikaliselt seda, et koguspinnil võib olla mitmesuguseid väärtusi - igale väärtusele vastab üks taandumatu esitus. Osakeste spinnid võivad mitmel viisil liituda. Vaatame konkreetselt paari näidet.

Analüüsime lähemalt valemit (1.108):

$$D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} = D^0 + D^1.$$

Füüsikaliselt ütleb see valem meile, et juhul, kui kaks osakest spinniga  $1/2$  moodustavad süsteemi, siis võib selle süsteemi koguspinn olla kas 0 või 1. Joonisel 4 on geometriliselt kujutatud spinnide liitumist juhul, kui süsteemi koguspinn

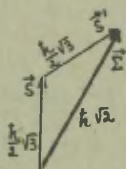


Joon. 4.

tuleb null. Spinnvektorid on niisugusel juhul teineteisele täpselt vastassuunalised ja nende summaks tuleb nullvektor. See nullvektor ongi ühedimensioonilise esituse  $D^0$

poolt kirjeldatava objekti spinnvektoriks.

Joonisel 5 on kujutatud spinnvektorite liitumist sel juhul, kui süsteemi koguspinniks tuleb 1 (s. o. spinnvektori



Joon. 5.

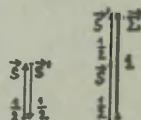
pikkuseks on  $\hbar \sqrt{2}$ ). Osakeste spinnvektorid on sel juhul samasuunalised ja süsteemi kirjeldab taandumatu esitus  $D^1$ .

Joonis 5 kujutab osakeste spinnvektorite liitumist täpselt.

Misuguse täpse joonise tegemine on mõnevõrra tülikas. See-  
 pärast kujutatakse spinnvektorite liitumist tihti lihtsama  
 skeemi abil, kus spinnvektori pikkuse  $\hbar \sqrt{s(s+1)}$  asemel võe-  
 takse  $s$  (operaatori  $S_z$  maksimaalne väärtus, mille juures  
 jäetakse kirjutamata ka arvuline tegur  $\hbar$ , mis mõjustab ai-  
 nult joonise mõõtkava). Jooniste 4 ja 5 asemel saaksime liht-  
 sustatud skeemi kohaselt siis  
 joonised 6.

Analoogilise geomeetrili-  
 se skeemiga saame illustreeri-  
 da kõiki taandamisvalemeid

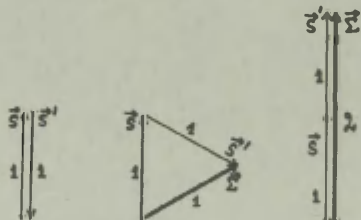
(1.107). Joonisel 7 on seda  
 tehtud veel valemi



Joon. 6.

$$D^1 \times D^1 = D^0 + D^1 + D^2 \quad (1.118)$$

jaoks. Kaks osakest, kui nende mõlema spinn on 1, annavad  
 süsteemi, mille spinn võib olla kas 0, 1 või 2.



Joon. 7.

## § 12. Kogupöördimpulss.

Pöördimpulsi tüüpi suuruste liitumine esineb ka niisugusel juhul, kui osake on üheaegselt kahte tüüpi pöördimpulsi kandja. Konkreetselt esineb niisugune võimalus sel juhul, kui nullist erineva spinniga osake liigub ruumis kõverjoonelisel teel. Spinn ja orbitaalne pöördimpulss liituvad niisugusel juhul kogupöördimpulssiks. Esituse, mis kirjeldab osakese kogupöördimpulssi, saame siis sel teel, et moodustame otsekorrutise, mille teguriteks on esitus Hilberti ruumis ja esitus lõplikudimensioonilises vektorruumis, mis kirjeldab osakese spinni.

Valemitega (1.2) ja (1.76) antud esitusmaatriksite otsekorrutis annab maatriksi

$$(I + \varepsilon_k S_k) \times (I + \varepsilon_k L_k) = I + \varepsilon_k M_k, \quad (1.119)$$

kus

$$M_k = (I \times L_k) + (S_k \times I), \quad (1.120)$$

või lühemalt kirjutatuna

$$M_k = L_k + S_k. \quad (1.20a)$$

Operaatorid  $L_k = \hbar \mathcal{L}_k$  ja  $\hbar S_k$  kirjeldasid vastavalt orbitaalset pöördimpulssi ja spinni; operaator  $M_k = \hbar M_k$  kirjeldab siis kogupöördimpulssi:

$$M_k = L_k + \hbar S_k = -\frac{1}{2} i \hbar e_{k\ell m} \left( x_\ell \frac{\partial}{\partial x_m} - x_m \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) + \hbar S_k. \quad (1.121)$$

Et leida kogupöördimpulsi omaväärtusi, võime kasutada täpselt sama mõttekäiku, nagu seda tegime paragrahvis 10.

Et operaatorid  $h_k$  ja  $\hbar S_k$  omavahel kommuteeruvad, siis on operaatori  $M_k$  omaväärtusteks lihtsalt kõikvõimalikud  $h_k$  ja  $\hbar S_k$  omaväärtuste summad.

Esitus, mille eespool kirjeldatud otsekorrutise moodustamisel saame, on jällegi taanduv - selle võime lahutada taandumatute esituste otsesummaks.

Esitus Hilberti ruumis, mille konstrueerisime paragrahvis 8, on taanduv; tema taandumatud komponendid saame, kui fikseerime arvu  $l$  (vt. § 9). Vastavalt sellele tähistame taandumatut esitust Hilberti ruumis  $D^l$ . Ja täpselt analoogiline arutlus sellele, mis on teostatud paragrahvis 10, annab taandamisvalemi

$$D^l \times D^s = \sum_{j=|l-s|}^{l+s} D^r. \quad (1.122)$$

Poolpaks summamärk tähistab siin jällegi esituste otsesummat.

Ruumis liikuva osakese pöördimpulssi kirjeldab seega üldiselt esitus (1.122). Erinevalt valemist (1.107) ei ole siin vasakul pool võrdusmärgi mõlemad tegurid füüsikaliselt samaväärsed.  $D^s$  on antud osakese korral fikseeritud, sest me ei tea tänapäeval ühtegi võimalust, kuidas osakese spinni muuta. Küll aga võime väliste mõjudega muuta osakese orbitaalset pöördimpulssi, millele vastab ühe taandumatute esituse  $D^l$  asendamine teisega valemis (1.122).

Erijuhul, kui osakese orbitaalne pöördimpulss on null ( $l=0$ , s. o. osake liigub sirgjooneliselt), on tema kogupöördimpulss võrdne spinniga:  $M_k = \hbar S_k$ . Teisel erijuhul,

kui on tegemist osakesega, mille spinn on null ( $s=0$ ), on osakesel olemas ainult orbitaalne pöördimpulss:  $M_k = h_k$ .

### § 13. Kolmedimensioonilise ruumi spinoorid.

Kolmedimensioonilise ruumi  $n$ -järku spinooriks nimetakse suurust, mis kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste korral teiseneb esituse  $[D^{\frac{1}{2}}]^n$  järgi.  $[D^{\frac{1}{2}}]^n$  tähistab siin  $n$  tegurist koosnevat otsekorrutist:

$$[D^{\frac{1}{2}}]^n = \underbrace{D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} \times \dots \times D^{\frac{1}{2}}}_n. \quad (1.123)$$

Vaatleme nüüd konkreetseid erijuhte.

#### Esimest järku spinoor.

Esimest järku spinoor on suurus, mis teiseneb esituse  $D^{\frac{1}{2}}$  järgi. Selle esituse infinitesimaaloperaatorid me leidmise juba eespool (vt. § 3). Et määrata esituse ühte iseloomulikumat omadust, vaatleme siinkohal suuri teisendusi.

Silmas pidades kursuse esimeses osas toodud valemeid (2,49) ja (2,32), saame välja kirjutada operaatori, mis kirjeldab kolmedimensioonilises vektorruumis pöört nurga võrra ümber kolmanda koordinaattelje:

---

Mõnikord defineeritakse spinooreid ka järgmiselt: Kolmedimensioonilise ruumi spinooriks kaaluga  $s$  nimetakse suurust, mis kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste korral teiseneb taandumatu esituse  $D^s$  järgi. Nii-sugusel juhul:

- spinoor kaaluga 0 on skalaar,
- spinoor kaaluga 1/2 on esimest järku spinoor,
- spinoor kaaluga 1 on vektor jne.

$$A(\varphi) = \exp(iJ_3\varphi). \quad (1.124)$$

Üleminekul esitusruumi tuleb infinitesimaaloperaator  $J_3$  asendada lihtsalt vastavas esitusruumis mõjuva infinitesimaaloperaatoriga  $S_3$ . Saame

$$D(\varphi) = \exp(iS_3\varphi); \quad S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.125)$$

Arvutuste hõlbustamiseks on eelmist sobiv ümber kirjutada järgmiselt:

$$D(\varphi) = \exp(i\Lambda \frac{\varphi}{2}); \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.125a)$$

Silmas pidades, et  $\Lambda^2 = I$ ,  $\Lambda^3 = \Lambda$  jne., saame nüüd lihtsalt arvutada

$$D(\varphi) = I \left[ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 - \dots \right] + i\Lambda \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^5 - \dots \right]. \quad (1.126)$$

Ridade summeerimine annab

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.127)$$

Saadud maatriks kirjeldab esimest järku spinoori teisenemist juhul, kui ruumis teostatakse pöörde nurga  $\varphi$  võrra.

Teostame nüüd vektorruumis täispöörde ümber kolmanda telje, mis vastab sisuliselt ühikteisendusele. Vastav spinoorruumi teisendus tuleb

$$D(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = -I. \quad (1.128)$$

Alles pöörde nurga  $4\pi$  võrra vektorruumis annab spinoorruumis ühikteisenduse. Esitus esimest järku spinoorite

ruumis annab tegelikult vastavuse  $\Gamma \rightarrow \pm \Gamma$  ja kooskõlas sellega ka

$$A \rightarrow \pm D, \quad (1.129)$$

kus  $A$  tähistab teisendust kolmedimensioonilises vektorruumis ja  $D$  - teisendust esitusruumis (esimest järku spinnorite ruumis).

Valemiga (1.129) väljendatud fakti võib sõnastada:

Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus esimest järku spinnorite ruumis on kahene.

Esimest järku spinnor teiseneb kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma kahese esituse järgi. Teiste sõnadega: esimest järku spinnor on ainult kuni märgi täpsusega määratud suurus.

#### Teist järku spinnor.

Teist järku spinnor on suurus, mis teiseneb esituse  $D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}}$  järgi. See on taanduv esitus ning laguneb valemi (1.107) kohaselt

$$D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} = D^0 + D^1.$$

Et tegur  $D^{\frac{1}{2}}$  esineb siin otsekorrutises kaks korda, siis ei teki kahesuse probleemi, nagu see oli esimest järku spinnorite korral. Teist järku spinnor teiseneb kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma ühese esituse järgi.

On lihtne näha, et kehtib üldiselt: kõik paarisjärku spinnorid teisenevad kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma üheste esituste järgi.

#### Kolmandat järku spinnor.

Kolmandat järku spinnor on suurus, mis teiseneb esituse  $D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}}$  järgi.

See on jällegi taanduv esitus ning laguneb

$$D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} \times D^{\frac{1}{2}} = (D^0 + D^1) \times D^{\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}. \quad (1.130)$$

Et tegur  $D^{\frac{1}{2}}$  esineb siin otsekorrutises kolm korda, siis tekib samasugune määramatu märgi küsimus, nagu oli esituse korral esimest järku spinoorite ruumis.

Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus kolmandat järku spinoorite ruumis on kahene.

On lihtne näha, et eelöeldu kehtib üldisemalt:

Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus paaritult järku spinoorite ruumis on kahene. Paaritult järku spinoor on ainult kuni märgi täpsusega määratud suurus.

#### § 14. Kolmedimensioonilise ruumi tensorid.

Kolmedimensioonilise ruumi  $n$ -järku tensoriks nimetatakse suurust, mis kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste korral teiseneb esituse  $[D^1]^n$  järgi.  $[D^1]^n$  tähis-  
tab siin  $n$  tegurist koosnevat otsekorrutist:

$$[D^1]^n = \underbrace{D^1 \times D^1 \times \dots \times D^1}_n. \quad (1.131)$$

Toodud definitsiooni loetakse õigeks ka juhul, kui  $n=0$ , kusjuures  $[D^1]^0 = D^0$  all mõistetakse esitust, kus kõigile rühma elementidele on vastavusse seatud ühikteisendus.

$D^0$  järgi teisenevad suurused, mis kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste korral jäävad muutumatuks. Need suurused on skalaarid.

Nulljärku tensor on skalaar.

Esimest järku tensor on vektor.

Teist ja kõrgemat järku tensorid on kõik taanduvad suurused. Näiteks

$$D^1 \times D^1 = D^0 + D^1 + D^2. \quad (1.132)$$

Eespool nägime, et esitus  $D^1$  ei ole midagi muud kui kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühm ise. See esitus on järelikult ühene ja ühesed on ka kõik tensor-esitused.

Vektorit võime eelöeldu põhjal defineerida kui suurust, mille komponendid teisenevad koordinaadistiku omateisenduste korral nagu ruumpunkti koordinaadid. Silmas pidades koordinaatide teisendusvalemit (I;2,5) võime siis öelda:

Vektoriks nimetame suurust  $F'_k$ , mis koordinaatide teisenemisel

$$x'_k = a_{ki} x_i \quad (1.133)$$

teiseneb eeskirja

$$F'_k = a_{ki} F_i \quad (1.134)$$

järgi.

Edasi võime defineerida:

Teist järku tensor on suurus, mis koordinaatide teisenemisel valemi (1.133) kohaselt teiseneb nagu koordinaatvektorite otsekorrutis  $x_k x_l$ . Teiste sõnadega: teist järku tensoriks nimetame suurust  $F'_{kl}$ , mis koordinaatide teisenemisel

$$x'_k = a_{ki} x_i$$

teiseneb

$$F'_{kl} = a_{ki} a_{lj} F_{ij}. \quad (1.135)$$

Analoogiliselt saab defineerida  $n$ -järku tensori kui suuruse, mis teiseneb nagu  $n$  koordinaatvektori otsekorrutis:

$$F_{k_1 k_2 \dots k_n}^i = a_{k_1 i_1} a_{k_2 i_2} \dots a_{k_n i_n} F_{i_1 i_2 \dots i_n}^i. \quad (1.136)$$

Vaatleme nüüd lähemalt teist järku tensorit. Et me teist järku tensori komponente nummerdasime kahe indeksiga, siis on otstarbekas kirjutada seda tensorit maatriksina. Igas konkreetsetes baasis avaldub teist järku tensor kahedimensioonilise maatriksina. Üleminekul ühest baasist teise teisenevad tensori komponendid valemi (1.135) järgi.

Uurime nüüd, mida tähendab konkreetsetelt teist järku tensori taandamisvalem (1.132). Meil on tarvis leida tensori  $F_{k\ell}$  komponentide niisugused lineaarkombinatsioonid, mis moodustaksid ühe-, kolme- ja viiedimensioonilise ruumi, kusjuures need ruumid peavad olema teisenduste (1.135) suhtes invariantseid.

Lahutame tensori  $F_{k\ell}$  kõigepealt sümmeetrilise tensori  $F_{k\ell}^{(s)}$  ja antisümmeetrilise tensori  $F_{k\ell}^{(a)}$  summaks:

$$F_{k\ell} = F_{k\ell}^{(s)} + F_{k\ell}^{(a)}, \quad (1.137)$$

kus

$$F_{k\ell}^{(s)} = \frac{1}{2} (F_{k\ell} + F_{\ell k}), \quad (1.138)$$

$$F_{k\ell}^{(a)} = \frac{1}{2} (F_{k\ell} - F_{\ell k}). \quad (1.139)$$

On lihtne näidata, et sümmeetriline tensor jääb teisenduse (1.135) korral sümmeetriliseks ja antisümmeetriline tensor - antisümmeetriliseks. Suurused  $F_{k\ell}^{(a)}$  ja  $F_{k\ell}^{(s)}$  moodusta-

vadki järelikult invariantseid alamruumid. Esimene neist ruumidest on kolmedimensiooniline (sõltumatute komponentide arv antisümmeetrilises tensoris), teine kuuedimensiooniline (sõltumatute komponentide arv sümmeetrilises tensoris).

Lihtne on näidata, et sümmeetriline tensor omakorda laguneb veel:

$$F_{kl}^{(s)} = F_{kl}^{(s_0)} + \frac{1}{3} \delta_{kl} F', \quad (1.140)$$

kus

$$F_{kl}^{(s_0)} = F_{kl}^{(s)} - \frac{1}{3} \delta_{kl} F' \quad (1.141)$$

ja

$$F' = F'_{kk} = F'_{kk} \quad (1.142)$$

on tensori  $F_{kl}$  jälg, mis oma teisenemisomaduste poolest on skalaar.  $F_{kl}^{(s_0)}$  tähistab aga sümmeetrilist tensorit, mille jälg on null, s. o.  $F_{kl}^{(s_0)}$  on viie sõltumatu komponendiga suurus.

Sellega olemegi teist järku tensori valemi (1.132) kohaselt taandumatute suuruste summaks lahutanud:

$D^0$  järgi teiseneb tensori jälg (skalaar),

$D^1$  järgi teiseneb antisümmeetriline tensor,

$D^2$  järgi teiseneb sümmeetriline tensor, mille jälg on null.

Analoogiliselt teist järku tensoresituse taandamisele võib taandada kõiki kõrgemat järku tensoresitusi.

§ 15. Kolmedimensioonilise vektorruumi täieliku  
ortogonaalse rühma esitused.

Käesoleva kursuse esimese osa teise peatüki esimeses punktis me nägime, et täielik ortogonaalne rühm avaldub omarühma ja peegelduste rühma otsekorrutisena:

$$\{A^{(*)}, PA^{(*)}\} = \{I, P\} \times \{A^{(*)}\}, \quad (1.143)$$

kus  $\{A^{(*)}, PA^{(*)}\}$  tähistab täielikku ortogonaalset rühma,  $\{A^{(*)}\}$  - omateisenduste rühma ja  $G_2 = \{I, P\}$  - ruumi peegelduste rühma, millel on ainult kaks elementi: ühikelement  $I$  ja element  $P$ , mis muudab kõigi koordinaatide märgid vastupidiseks. Järelikult

$$P^2 = I. \quad (1.144)$$

Määrame nüüd rühma  $G_2$  taandumatud esitused. Et on tegemist Abeli rühmaga, siis saab sellel rühmal olla ainult ühedimensioonilised taandumatud esitused; teisendusele  $P$  seame vastavusse mingi arvu  $\lambda$ . Tingimus (1.144) avaldub siis esitusruumis:

$$\lambda^2 = 1, \quad (1.145)$$

millest

$$\lambda = \pm 1. \quad (1.146)$$

Et täielik ortogonaalne rühm avaldub kahe rühma otsekorrutisena, siis saame tema esitused, kui moodustame tegur-rühmade kõikvõimalike esituste otsekorrutised. Kui omarühma esituse maatriksid on  $D$ , siis täieliku rühma esituse maatriksid avalduvad  $\lambda D$ . Siit on näha, et täie-

likul ortogonaalsel rühmal on kahte tüüpi esitusi:

1) Kui  $\lambda = +1$ , siis on omarühma esitus ühtlasi ka täieliku rühma esituseks. Tensoreid, mis teisenevad niisuguse esituse järgi, nimetatakse päristensoreteks. Päristensori teisenemiseeskiri on seega üldiselt

$$F'_{k_1 k_2 \dots k_n} = a_{k_1 i_1} a_{k_2 i_2} \dots a_{k_n i_n} F_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (1.147)$$

kus  $a_{k_i}$  tähistavad täielikku ortogonaalsesse rühma kuuluva teisendusmaatriksi elemente.

2) Kui  $\lambda = -1$ , saame esituse niisuguste suuruste ruumis, mis muudavad peegeldustüüpi teisenduste korral täiendavalt märki. Tensoreid, mis peegelduste korral muudavad märki, nimetatakse pseudotensoreteks.  $n$ -järku pseudotensori teisenemiseeskirja võime kirjutada järgmiselt:

$$F'_{k_1 k_2 \dots k_n} = (\det A) a_{k_1 i_1} a_{k_2 i_2} \dots a_{k_n i_n} F_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (1.148)$$

$A$  tähistab siin täieliku ortogonaalse rühma teisendust, mille elementideks on  $a_{k_i}$ .

Eeskirja (1.148) järgi teisenevad ka paarisjärku spinnorid, mis taandamisvalemi (1.122) kohaselt avalduvad tensorite otsesummana. Paaritud järku spinnorid aga, nagu nägime, on määratud ainult kuni märgi täpsusega. Sisuliselt tähendab see, et täieliku rühma esituse moodustamisel on ükskõik, kas võtame  $\lambda = +1$  või  $\lambda = -1$ . Paaritud järku spinnoreid ei saa jagada pärispinnoriteks ja pseudospinnoriteks. Pärisuurusteks ja pseudosuurusteks saame jagada ainult tensoreid.

Eeskirjadest (1.147) ja (1.148) saame erijuhul järgmised reeglid:

Ruumikoordinaadistiku peegeldamise korral (s. o. operatsiooni  $P$  korral) teiseneb päris skalaar

$$\varphi' = \varphi \quad (1.149a)$$

ja pseudoskalaar teiseneb

$$\varphi' = -\varphi. \quad (1.149b)$$

Analoogiliselt teiseneb sama operatsiooni korral pärisvektor eeskirja kohaselt

$$\psi'_k = -\psi_k \quad (1.150a)$$

ja pseudovektor järgmise eeskirja kohaselt:

$$\psi'_k = \psi_k. \quad (1.150b)$$

Pärisvektoriks (mõnikord nimetatud ka polaarseks vektoriks) on näiteks koordinaatide vektor  $x_k$ . Pseudovektoriks (mõnikord nimetatud ka aksiaalseks vektoriks) on kahe pärisvektori vektorkorrutis, näiteks pöördimpulss  $\vec{x} \times \vec{p}$ .

## § 16. Faarsus.

Veel kümme aastat tagasi valitses füüsikute hulgas arvamus, et kõik füüsikaseadused peavad olema invariantseid ruumitelgede peegelduste, s. o. operatsiooni  $P$  suhtes. Niisugune vaade tundub loomulikuna. Me ei näe põhjust, miks meie maailm peaks olema parema ja vasaku poole suhtes ebasümmeetriline. Matemaatika keeles väljendatuna avaldub parema ja vasaku poole samaväärsus selles, et loodusnähtuste kirjeldamisel on ükskõik, kas me kasutame paremakäe või vasakukäe koordinaadistikku. Teiste sõnadega: me loeme täiesti loomulikuks, et füüsikaseadused peavad olema invariant-

sed ruumikoordinaadistiku peegeldamise (operatsiooni  $P$ ) suhtes. Piltlikult võib eelöeldut sõnastada ka nii:

Iga looduses esinev protsess võib tegelikkuses toimuda ka nii, nagu ta meile peeglis paistab.<sup>1</sup> See tähendab, et loodus on peegelsümmeetriline. Iga objekti peegelpilt on niisugune, nagu võiks olla ka looduses esinev objekt. Iga liikumine, mida me näeme peeglis, võiks niisugusena ka looduses toimuda.

Missuguseid järeldusi võime siit teha elementaarosakeste kohta?

Kirjeldagu elementaarosakest hamiltoniaan  $H$ . Kui osake on peegelsümmeetriline objekt, siis peab hamiltoniaan ruumiteljestiku peegeldamise korral muutumatuks jääma:  $H' = H$ .

Lineaarses ruumis, kus mõjub operaator  $H$ , vastaku ruumiteljestiku peegelduse operaatorile  $P$  operaator  $\mathcal{P}$  Eelmises punktis määratud arvud  $\lambda = \pm 1$  on operaatori  $\mathcal{P}$  omaväärtused. Lineaarse ruumi vektorid  $\psi$  teisenevad ruumiteljestiku peegelduse korral eeskirja

$$\psi' = \mathcal{P}\psi \quad (1.151)$$

järgi. Vastavalt reeglile (I;1,12) teiseneb operaator  $H$  siis

$$H' = \mathcal{P}H\mathcal{P}^{-1}. \quad (1.152)$$

---

<sup>1</sup> Harilik peegel muudab tegelikult vastupidiseks ainult ühe ruumitelje suuna. See on teisendus, mis erineb teisendusest  $P$  ainult ühe täiendava pöörde poolest telje risttasandis. Seetõttu võime operatsiooni  $P$  asemel piltlikkuse mõttes rääkida ka lihtsalt harilikust peegeldusest.

Kui aga  $H' = H$ , järgneb siit

$$\mathcal{P}H - H\mathcal{P} = 0. \quad (1.153)$$

Ruumipeegeldust esitav operaator  $\mathcal{P}$  kommuteerub energia operaatoriga  $H$ . See tähendab, et elementaarosakest saab üheaegselt energiaga iseloomustada ka operaatori  $\mathcal{P}$  omaväärtusega. Operaator  $\mathcal{P}$  kirjeldab mõõdetavat füüsikalist suurust, mis pealegi on liikumise konstant.

Füüsikalist suurust, mida kirjeldab operaator  $\mathcal{P}$ , nimetatakse paarsuseks.

Paarsus on füüsikaline suurus, mille jäävuse seaduse saime eeldusest, et elementaarosakese hamiltoniaan on peegelsümmeetrilise ehitusega, s. o. et nii elementaarosakesed ise kui ka nendega toimuvad reaktsioonid on peegelsümmeetrilised. Kui peaks selguma, et mõnedes elementaarosakeste reaktsioonides peegelsümmeetria puudub, siis ei saa niisugustes reaktsioonides ka paarsus jääv suurus olla.

Eespool nägime, et operaatoril  $\mathcal{P}$  on ainult kaks omaväärtust:  $\lambda = \pm 1$ . Vastavalt sellele saab osakese paarsus olla ainult kas  $+1$  või  $-1$ . Esimesel juhul öeldakse, et osake on paaris, teisel juhul  $-$  et osake on paaritus olekus.

Kõiki osakesi, mis kirjelduvad kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma üheste esituste järgi, nimetatakse bosoniteks (niisugusteks osakesteks on kõik mesonid ja "valguseosake" — kvant). Elmises punktis nägime, et üheste esituste järgi teiseenevaid suurusi saab jagada pärisruusteks ja pseudosuurusteks. Osakesel, mida kirjeldab päris-

suurus ( $\lambda = +1$ ), on paarsus  $+1$ . Osakesel, mida kirjeldab pseudosuurus ( $\lambda = -1$ ), on paarsus  $-1$ . Ühete esituste järgi kirjelduvatel osakestel on paarsus määratud. Bosonitel on paarsus määratud suurus.

Näiteks on kindlaks tehtud, et  $\pi$ -mesonitel ja K-mesonitel on spinn null ja paarsus  $-1$ . See tähendab, et nende mesonite kirjeldamisel kasutatava lineaarse ruumi moodustavad pseudoskalaarid, mis ruumikoordinaadistiku peegeldamisel teisenevad eeskirja (1,149b) järgi.

Kõiki osakesi, mis kirjelduvad kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma kaheste esituste järgi, nimetatakse fermionideks. Fermionid on näiteks elektron, prooton, neutrino, neutron jne. Kaheste esituste järgi teisenevad suurused on määratud ainult kuni märgi täpsusega ja seetõttu neid päris-suurusteks ja pseudosuurusteks jaotada ei saa. Et  $\psi$  enda märk ei ole määratud, siis ei ole oluline, kas  $\psi$ -le mõjuva operaatori  $\mathcal{P}$  omaväärtus  $\lambda$  on  $+1$  või  $-1$ . Kaheste esituste järgi kirjelduvate osakeste paarsus ei ole üheselt määratud. Fermionide korral me paarsuse väärtusest üheselt rääkida ei saa; saame rääkida ainult kahe fermioni suhtelisest paarsusest (kas kaks fermioni on ühesuguste või erinevate paarsustega). Me ei saa öelda, missugune on protoni ja neutroni paarsus, kas  $+1$  või  $-1$ , küll aga saame kindlaks teha, et need on ühesuguse paarsusega osakesed.

## § 17. Aditiivsed ja multiplikatiivsed jäävuseadused.

Eespool me vaatlesime mitmeid jäävuseadusi: energia, impulsi, pöördimpulsi ja paarsuse jäävust kirjeldavaid seadusi. Nägime, et teatud tingimustel kommuteeruvad neid suurusid kirjeldavad operaatorid Hamiltoni operaatoriga, millest järeldus, et suurused peavad olema liikumise konstandid. Lähem uurimine näitab aga, et kõik need jäävuseadused ei ole ühesuguse iseloomuga.

Energia, impulsi ja pöördimpulsi jäävuse seadused saime, kui uurisime kolmedimensioonilise ruumi infinitesimaalteisendusi. Vastavalt sellele saime aditiivsed jäävuseadused, s. o. seadused, mille kohaselt jääv on suuruste summa. Näiteks energia jäävuse seadus ütleb meile, et juhul, kui protsessist võtab osa mitu osakest, on jääv kõigi nende osakeste energiatega summa.

Paarsuse jäävuse seaduse saime peegeldusteisenduste kaudu; peegeldusteisendustel aga infinitesimaalteisendusi ei ole. Vastavalt sellele, et me uurisime suuri teisendusi, saime paarsuse jäävuse seaduse multiplikatiivse jäävusseadusena. Kui protsessist võtab osa mitu osakest, siis on jäävaks suuruseks nende osakeste paarsuste korrutis.

Illustreerime eelöeldut täpsema skeemiga.

Olgu antud kaks osakest, mida kirjeldagu esitusruumi vektorid  $\psi_1$  ja  $\psi_2$  kui energia operaatori omavektorid. Osakeste energiad määratakse siis võrrandest

$$\begin{aligned} H_1 \psi_1 &= E_1 \psi_1, \\ H_2 \psi_2 &= E_2 \psi_2, \end{aligned} \quad (1.154)$$

kus  $H_1$  ja  $H_2$  on vastavalt osakeste energia operaatorid. Eespool nägime, et energia operaator on infinitesimaalope-  
 raator, mis määrab aja telje nihke; valemite (1.48), (1.50)  
 ja (1.54) abil saame aja telje nihet kirjeldavad operaatorid  
 avaldada

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \left( I - \frac{E_1}{\hbar c} H_1 \right), \\ \mathcal{D}_2 &= \left( I - \frac{E_2}{\hbar c} H_2 \right). \end{aligned} \quad (1.155)$$

Esimene neist operaatoreist mõjub vektorite  $\psi_1$  ruumis ja  
 teine - operaatorite  $\psi_2$  ruumis.

Loeme nüüd need osakesed üheks füüsikaliseks süsteemiks.  
 Kui me interaktsiooni osakeste vahel ei arvesta, siis kirjel-  
 dab seda süsteemi vektor  $\phi$ , mis avaldub vektorite  $\psi_1$  ja  
 $\psi_2$  otsekorrutisena:

$$\phi = \psi_1 \times \psi_2 = \psi_1 \psi_2. \quad (1.156)$$

Vektorite  $\phi$  ruumis kirjeldab aja alguspunkti nihet operaator

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \left( I - \frac{E_1}{\hbar c} \mathcal{H} \right), \quad (1.157)$$

kus

$$\mathcal{H} = (I \times H_2) + (H_1 \times I) \quad (1.158)$$

on kahe osakese süsteemi energia operaator. Silmas pidades  
 võrrandeid (1.154), saame arvutada

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \psi_1 \psi_2 &= (E_1 + E_2) \psi_1 \psi_2 \quad ; \\ \mathcal{H} \phi &= (E_1 + E_2) \phi. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Süsteemi energia on võrdne osakeste energiatega summaga. Ener-  
 gia on aditiivne suurus ja vastavalt sellele on tema jäävuse  
 seadus aditiivne jäävuseseadus.

Vaatleme nüüd võrdluseks kahest osakesest koosneva süsteemi paarsust. Olgu esimese osakese paarsuse operaator  $\mathcal{P}_1$  ja teise osakese paarsuse operaator  $\mathcal{P}_2$ . Nende operaatorite omaväärtused olgu vastavalt  $p_1$  ja  $p_2$  ( $p_1$  ja  $p_2$  võivad mõlemad omandada väärtusi  $\pm 1$ , nagu eespool nägime).

Paarsus määratakse võrranditest

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 \psi_1 &= p_1 \psi_1, \\ \mathcal{P}_2 \psi_2 &= p_2 \psi_2.\end{aligned}\quad (1.160)$$

Operaatorid  $\mathcal{P}_1$  ja  $\mathcal{P}_2$  pole midagi muud kui ruumikoordinaatistiku peegeldust kirjeldavad operaatorid vastavalt vektorite  $\psi_1$  ja  $\psi_2$  ruumides.

Loeme nüüd kaks osakest ühiseks füüsikaliseks süsteemiks. Seda süsteemi kirjeldab vektor  $\phi = \psi_1 \psi_2$ . Vektorite  $\phi$  ruumis kirjeldab ruumikoordinaatistiku peegeldust operaator

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, \quad (1.161)$$

mis ongi kahest osakesest koosneva süsteemi paarsuse operaatoriks. Võrrandite (1.160) abil saab nüüd lihtsalt arvutada

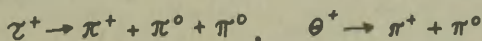
$$\begin{aligned}\mathcal{P} \psi_1 \psi_2 &= p_1 p_2 \psi_1 \psi_2; \\ \mathcal{P} \phi &= p_1 p_2 \phi,\end{aligned}\quad (1.162)$$

millest ongi näha, et süsteemi paarsus on süsteemi moodustavate osakeste paarsuste korrutisega võrdne. Paarsus on multiplikatiivne suurus ja vastavalt sellele on ka paarsuse jäävuse seadus multiplikatiivne jäävuse seadus.

## § 18. Paarsuse mittejäävus nõrgas interaktsioonis.

Kuni 1956. aastani olid kõik füüsikud kindlalt veendunud, et paarsus on kõigis looduseprotsessides jääv suurus. Oli teada ainult üks fakt, mis paarsuse jäävuse seaduse alusel näis kummalisena.

Kuni 1956. aastani arvati, et raskeid metastabiilseid mesoneid on kahte liiki,  $\tau$ -mesonid ja  $\theta$ -mesonid. Massid, spinnid ja laengud olid neil mesonitel võrdsed, erinevus oli ainult lagunemisskeemis. Esimene neist mesonitest lagunes kolmeks  $\pi$ -mesoniks, teine ainult kaheks  $\pi$ -mesoniks vastavalt skeemile



(indeks + või ° mesoni tähise juures tähistab vastavalt kas positiivselt laetud või neutraalset mesonit).

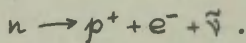
$\pi$ -mesonite paarsus oli eksperimentaalselt määratud - see on -1. Kolme  $\pi$ -mesoni kogupaarsus on järelikult -1 ja kahe  $\pi$ -mesoni kogupaarsus +1. Kui siis oletada, et eelnimetatud protsessides on paarsus jääv suurus, peab  $\tau$ -mesoni paarsus olema -1 ja  $\theta$ -mesoni paarsus +1. Tundus aga kummalisena, et looduses on osakesed, mis kõigi muude omaduste poolest on ühesugused, ainult paarsused on neil erinevad. Seda nõndanimetatud " $\tau$ - $\theta$  mõistatust" ei osatudki lahendada enne, kui Ameerika Ühendriikides töötavad hiina füüsikud T.D. Lee ja C.N. Yang esitasid 1956. aasta suvel täiesti uue küsimuse: kas paarsus on ikka kõigis elementaarosakeste protsessides jääv suurus?

Kõik elementaarosakeste protsessid toimuvad interaktsioonide mõjul, mida on kolm põhiliki (gravitatsiooniline interaktsioon elementaarosakeste protsessides nähtavasti olulist osa ei mängi - on selleks liiga nõrk - ja temast me siinkohal ei räägi):

1° Tugevad interaktsioonid, mis põhjustavad näiteks tuumajõude. Tugeva interaktsiooni mõjul toimuv protsess kestab umbes  $10^{-23}$  sekundit. Et võrrelda seda interaktsiooni teistega, võtame tema suhteliseks tugevuseks 1.

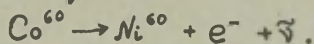
2° Elektromagnetilised interaktsioonid, mis põhjustavad näiteks elektrilisi ja magnetilisi jõude. Elektromagnetilise interaktsiooni suhteline tugevus on  $1/137$ ; tema mõjul toimuv protsess kestab umbes  $10^{-21}$  sekundit.

3° Nõrgad interaktsioonid, mille mõjul toimuvad protsessid kestavad umbes  $10^{-10}$  sekundit. Võrreldes eelmistega on see interaktsioon tunduvalt nõrgem, tema suhteliseks tugevuseks on  $10^{-14}$ . Nõrga interaktsiooni toimel laguneb enamuse metastabiilsetest osakestest, lagunevad muuhulgas ka eelnimetatud  $\tau$  ja  $\theta$  mesonid. Nõrga interaktsiooni mõjul toimub ka  $\beta$ -protsess:

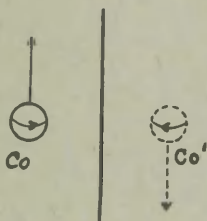


Lee ja Yang uurisid olemasolevat kirjandust ja avastasid oma suureks üllatuseks, et paarsuse jäävuse seadust nõrgas interaktsioonis põlnud keegi veel eksperimentaalselt kontrollinud - seda seadust loeti õigeks hea usu peale. Lee ja Yang esitasid idee, kuidas kontrollida paarsuse jäävuse seaduse kehtivust  $\beta$ -protsessis. Et paarsuse jäävuse seadus oli otseselt seotud protsessi peegelsümmeetriaga, siis

tuli selle seaduse kontrollimiseks kindlaks teha, kas  $\beta$ -  
 protsess on ikka peegelsümmeetriline või mitte. Uurimise al-  
 la võeti  $\text{Co}^{60}$  tuuma  $\beta$ -lagunemine:



$\text{Co}^{60}$  tuuma spinn on nullist erinev. Tuuma spinni vek-  
 tor määrab seega ruumis teatud eelissuuna. Et spinni vektor  
 on pseudovektor, mille komponendid ruumikoordinaadistiku  
 peegeldumisel ei muutu, siis peab spinni vektor selle juu-  
 res ise vastupidiseks muutuma, nagu on näidatud joonisel 8.



Joon. 8.

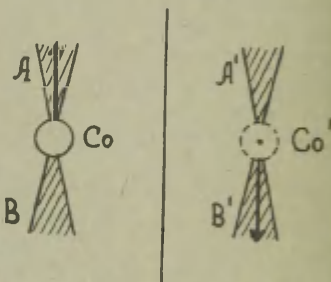
Et spinni vektori suuna muutumist peegeldamisel piltlikult mõista, võib spinni ette kujutada kui pöördimpulssi, mille tingib osakese pöörlemine ümber oma telje. Koobalti tuuma  $\text{Co}$  "pöörlemissuunda" kujutab joonisel nooleke ↻ ;

tuuma peegelpildi  $\text{Co}'$  pöörlemissuund on siis vastupidine ja seda kujutab nooleke ↻. On näha, et spinni vektorid vastavad just nimetatud pöörlemissuundadele.

Eksperimendi korraldamiseks orienteeriti kõigi  $\text{Co}^{60}$  tuumade spinnid magnetvälja abil ühesuunalisteks ja uuriti siis, kui suur osa tuuma lagunemisel väljalendavatest elektronidest läheb spinni vektori suunas, kui suur osa vastassuunas. Jooniselt 9 on näha, et need elektronid, mis lendavad välja spinni vektori suunas (sektor A), näivad peegelpildis spinni vektorile vastassuunas lendavat. Ja vastupidi: need elekt-

ronid, mis väljuvad tuumadest spinni vektorile vastassuunas (sektor B), näivad peegelpildis spinni vektori suunas lenda-  
vat. Üeldust on näha, et  $Co$  tuuma  $\beta$ -lagunemine on peegel-  
sümmeetriline ainult sel juhul,

kui spinni vektori suunas ja sel-  
le vastassuunas väljub ühepalju  
elektrone. Ainult niisugusel ju-  
hul saab paarsus uuritavas prot-  
sessis jääv suurus olla. Kui aga  
spinni vektori suunas kiirgub näi-  
teks rohkem elektrone kui vastas-  
suunas, siis ei ole protsess pee-  
gelsümmeetriline (peegelpildil kiirguks siis spinni vektori



Joon. 9.

suunas vähem elektrone kui vastassuunas) ja paarsus selles  
protsessis jääv olla ei saa.

Mõõtmiste tulemused olid üllatavad: osutus, et spinni  
vektori suunas kiirguvate elektronide arv oli 40 % suurem  
kui vastassuunas kiirguvate elektronide arv. Siit järgnes  
otseselt, et paarsus  $\beta$ -protsessis ei ole jääv suurus. Nii  
võisid Lee ja Yang juba küllaldase alusega väita, et nõrga  
interaktsiooni protsessides ei ole paarsus jääv suurus. Ei  
eksisteeri kahte erinevat mesonit -  $\tau$ -mesonit ja  $\theta$ -me-  
sonit, on olemas ainult üks meson (seda hakati nimetama K-  
mesoniks), mis võib laguneda nii, et paarsuse jäävust see-  
juures ei ole. K-meson on paarsusega -1 osake. Kui ta la-  
guneb kolmeks  $\pi$ -mesoniks ( $\tau$ -lagunemise skeem), toimub  
see kooskõlas paarsuse jäävuse seadusega. Kui K-meson lagu-

neb aga kaheks  $\pi$ -mesoniks ( $\theta$ -lagunemise skeem), rikutakse paarsuse jäävuse seadust.

On üllatav, et paarsuse jäävuse seaduse rikkumine nõrgas interaktsioonis avastati alles 1956. aastal. Füüsikute käsutuses olevate tehniliste vahendite poolest oleks võinud seda katset juba parkümmend aastat varem teostada. Pealegi ei olnud tegemist väikese vaevalt märgatava efektiga, vaid tunduva kõrvalekaldumisega oodatust (40 %). Paarsuse mittejäävuse kindlakstegemine nõrga interaktsiooni korral on kõige tähelepanuväärsem avastus füüsikas viimase 20 aasta jooksul. T.D. Lee ja C.N. Yang said selle avastuse eest 1957. aastal Nobeli füüsikapreemia.

Hiljem on eelkirjeldatud katsele hulgaliselt analoogilisi katseid tehtud ja praegu võime täie kindlusega väita, et nõrga interaktsiooni protsessides ei ole paarsus jääv suurus. See tähendab, et nõrga interaktsiooni protsesse kirjeldavad valemid ei ole ruumikoordinaadistiku peegeldamise suhtes invariantid. Viimasele faktile võib anda kaks seletust:

a) Ruumil ei ole peegelsümmeetria omadust, s.o. paremakäe koordinaadistik ruumis ei ole samaväärne vasakukäe koordinaadistikuga.

b) Elementaarosakesed ei ole peegelsümmeetrilised objektid, vaid neil on teatud spiraalsuse omadus (vasakukäe ja paremakäe spiraalsusega osakesed, mis peegelteisenduse korral teineteiseks üle lähevad).

Kaasajal eelistatakse teist seletust. Ruumi loetakse

peegelsümmeetriliseks, elementaarosakesi üldiselt aga mitte. Igat elementaarosakest iseloomustab teatud suurus - spiraalsus, mis peegeldusteisenduse korral oma märki muudab. Spiraalsus tugeva ja elektromagnetilise interaktsiooni korral protsessi asümmeetriat ei põhjusta, küll teeb ta seda aga nõrga interaktsiooni protsessides. Ja vastavalt sellele on paarsus tugeva interaktsiooni ja elektromagnetilise interaktsiooniprotsessides jääv suurus, nõrga interaktsiooni protsessides aga mitte.

Kui katse näitas, et paarsus  $P$  (ruumi peegelduse operaator) kõigis protsessides jäävat füüsikalist suurust ei kirjelda, tehti oletus, et jäävat suurust kirjeldab operaator  $CP$ .  $C$  tähistab siin nn. laengulise konjugeerimise operaatorit, millega me tutvume hiljem. Sisuliselt tähendab operaator  $C$  osakese muutmist antiosakeseks. Suuruse  $CP$  jäävus ütleb, et kõik meie maailmas toimuvad füüsikalised protsessid, kui neid peeglist vaadata, näivad seal toimuvat nii, nagu nad toimuksid antiosakestest koosnevas maailmas.

Täiesti üldiselt on näidatud, et kaasaegsed elementaarosakeste teooriad on invariantseid operatsiooni  $CPT$  suhtes.  $T$  tähistab siin aja suuna muutmise operaatorit. Erijuhul, kui teooria on invariantne  $CP$  suhtes, siis peab ta olema eraldi invariantne ka  $T$  suhtes. Viimast invarianttsust võiks piltlikult illustreerida järgmiselt: Kõik, mida me näeme toimuvat tagurpidi jooksvas filmis, võiks meie maailmas ka tegelikult toimuda, kui selleks konkreetsed füüsikalised tingimused luua.

Veidi rohkem kui aasta tagasi on avastatud üks eksperimentaalne fakt, mis näib vastu rääkivat nn. СРТ teoreemile (mis väidab, et teooria on igal juhul invariantne teisenduse СРТ suhtes). Missugustele füüsikalistele järeldustele see fakt viib, pole veel selge. Need järeldused võivad puudutada isegi kaasaegse elementaarosakeste teooria põhialuseid.

#### K i r j a n d u s .

1. Любарский, Г.Я., Теория групп и ее применение в физике, Москва 1957.
2. Гельфанд, И.М., Минлос, Р.А., Шапиро, З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва 1960.
3. Наймарк, М.А., Линейные представления группы Лоренца, Москва 1958.
4. Мэтьюс, П., Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, Москва 1959.
5. Сборник статей: Новые свойства симметрии элементарных частиц, Москва 1957.

## II p e a t ü k k .

### LORENTZI RÜHMA LÕPLIKUDIMENSIOONILISED ESITUSED JA NENDE RAKENDUSI FÜÜSIKAS.

#### § 1. Lorentzi omarühma esituste peamine erinevus pöörete rühma esitustest.

Nii Lorentzi rühm kui ka ruumi pöörete rühm on mõlemad Lie rühmad, kuid nad erinevad oluliselt teineteisest kompaktsuseomaduse poolest.

Lie rühma nimetatakse kompaktses, kui rühma elemente määravad parameetrid muutuvad üle lõpliku kinnise piirkonna.

Ruumi pöörete rühm on kompaktnen rühm. Näiteks kolme-dimensioonilises ruumis võime koordinaadistiku pöörde määrata kolme Euleri nurgaga, mis muutuvad  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ . Lorentzi rühm on aga mittekompaktnen; näiteks spetsiaalseid Lorentzi teisendusi (I;3.11) määrava parameetri  $\nu$  muutumispiirkond on lahtine<sup>1</sup>:  $0 \leq \nu < C$ .

<sup>1</sup> Silmas pidades ainult reaalsuse-imaginaarsuse tingimusi, on valemi (I;3.11) juures kirjutatud  $\nu \leq C$ . Tegelikult

Tingituna kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma kompaktsusest on tema esitustel kaks olulist omadust:

1° Pöörete rühma kõik taandumatud esitused on lõpliku-dimensioonilised. Eelmises peatükis me leidsimegi kõik kolme-dimensioonilise ruumi pöörete rühma esitused.

2° Pöörete rühma kõik esitused on unitaarsed esitused. See tähendab, et esitusruumis on alati võimalik vektorite skalaarkorrutist nii defineerida, et see oleks rühma elemen-tidele vastavate teisenduste suhtes invariantne. Üeldus on lihtne veenduda:

Teisenduses (1.2) on matriksid  $S_k$  hermiitilised,  $S_k^* = S_k$ , ja parameetrid  $\varepsilon_k$  puhtimaginaarsed (vt. (I;2.36)). Järelikult

$$(I + \varepsilon_k S_k)^* = (I - \varepsilon_k S_k) = (I + \varepsilon_k S_k)^{-1}, \quad (2.1)$$

mis näitabki, et on tegemist unitaarse teisendusega, mis ska-laarkorrutise väärtust ei muuda.

Et Lorentzi rühm on mittekompaktne, siis ei ole tema esitustel kumbagi eelnimetatud omadustest. Lorentzi rühmal on nii lõplikudimensioonilisi kui ka lõpmatudimensioonilisi taandumatud esitusi. Seejuures võivad unitaarsed olla ainult lõpmatudimensioonilised esitused; lõplikudimensioonilised esi-tused unitaarsed ei ole. Lihtne on näiteks veenduda, et uni-taarsuseomadus puudub Lorentzi rühma teisendusel

---

annab aga  $v < c$  lõpmatute kordajatega teisenduse, millel füüsikalist tähendust ei ole. Spetsiaalse Lorentzi rühma ele-mendid määratakse parameetriga  $v$ , mis muutub piirkonnas  $0 \leq v < c$ .

$$\left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} \right), \quad (2.2)$$

kus infinitesimaaloperaatorid on antud valemitega (I;2.83) ja  $\varepsilon_{\rho\sigma}$  rahuldavad reaalsuse-imaginaarsuse tingimusi (I;2.90).

Käesolevas kursuses me piirdume ainult Lorentzi rühma lõplikudimensiooniliste esituste uurimisega.

## § 2. Lorentzi omarühma lõplikudimensioonilised taandamatud esitused.

Lorentzi omarühm on määratud lõpmata väikeste teisendustega

$$x' = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} \right) x, \quad (2.3)$$

kus infinitesimaaloperaatorid  $J_{\rho\sigma}$  rahuldavad vahetuseeskirju

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -\delta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \delta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}. \quad (2.4)$$

Lie-Cartani teoreemi järgi rahuldavad samu vahetuseeskirju rühma kõigi esituste infinitesimaaloperaatorid. Teisendusele (2.3) vastab esitusruumis teisendus

$$\psi' = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \right) \psi, \quad (2.5)$$

kus operaatorid  $S_{\rho\sigma}$  tuleb määrata tingimusest

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = -\delta_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} S_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho} S_{\mu\sigma} - \delta_{\nu\sigma} S_{\mu\rho}. \quad (2.6)$$

Konkreetselt saab siit

$$[S_{12}, S_{23}] = -S_{31}, \quad [S_{14}, S_{24}] = -S_{12},$$

$$[S_{23}, S_{31}] = -S_{12}, \quad [S_{12}, S_{34}] = 0$$

$$[S_{31}, S_{12}] = -S_{33}, \quad \text{jne.}$$

Et määrata tingimust (2.6) rahuldavaid operaatoreid, võtame alguses otsitavateks suurusteks nende lineaarkombinatsioonid analoogiliselt kombinatsioonidele (I; 2.85):

$$X_k = -\frac{i}{2} \left( \frac{1}{2} e_{k\ell m} S_{\ell m} + S_{k4} \right), \quad (2.7)$$

$$Y_k = -\frac{i}{2} \left( \frac{1}{2} e_{k\ell m} S_{\ell m} - S_{k4} \right). \quad (2.8)$$

Kasutades vahetuseeskirju (2.6) on nüüd lihtne kindlaks teha, et uued operaatorid rahuldavad eeskirju

$$[X_k, X_\ell] = i e_{k\ell m} X_m, \quad (2.9)$$

$$[Y_k, Y_\ell] = i e_{k\ell m} Y_m, \quad (2.10)$$

$$[X_k, Y_\ell] = 0 \quad (2.11)$$

Operaatorid  $X_k$  ja  $Y_k$  omaette rahuldavad täpselt samu vahetuseeskirju mis kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma infinitesimaaloperaatorid (vt. (1.3)). Operaatorid  $X_k$  aga kommuteeruvad operaatoritega  $Y_k$ . Siit järgneb, et me võime operaatoritele  $X_k$  ja  $Y_k$  eraldi rakendada eelmise peatüki esimeses ja teises punktis toodud arutlust ja ka tulemused on täpselt samad nagu seal.

Kolmedimensioonilise ruumi puhul nägime, et üheaegselt

oli võimalik viia diagonaalkujju operaatoreid  $S_3$  ja  $S^2 = S_\kappa S_\kappa$ . Kui taandumatu esitus oli antud  $n = 2s+1$  dimensioonilises ruumis, siis oli operaatori  $S^2$  omaväärtuseks  $s(s+1)$  ja operaatori  $S_3$  omaväärtusteks

$$-s, -s+1, \dots, s-1, s.$$

Arv  $s$  võis omandada väärtusi  $0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$

Täiesti analoogiliselt saame antud juhul:

Üheaegselt on võimalik diagonaalkujju viia operaatoreid

$$X_3, X^2 = X_\kappa X_\kappa$$

ja

$$Y_3, Y^2 = Y_\kappa Y_\kappa.$$

Seejuures on  $X^2$  omaväärtus  $j(j+1)$  ja  $X_3$  omaväärtused

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j,$$

kus arv  $j$  võib omandada väärtusi

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$$

Operaatori  $Y^2$  omaväärtuseks on  $\kappa(\kappa+1)$  ja operaatori  $Y_3$  omaväärtuseks

$$m_\kappa = -\kappa, -\kappa+1, \dots, \kappa-1, \kappa,$$

kus arv  $\kappa$  võib olla

$$\kappa = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$$

Õeldust on näha, et Lorentzi rühma esitus määratakse kahe indeksiga ( $j, \kappa$ ). Esimest neist nimetatakse tihti punkteerimata indeksiks, teist punkteeritud indeksiks.

Operaatoritel  $X^2$  ja  $X_3$  on erinevaid omavektoreid

$\psi_{mj}$   $2j+1$  ja operaatoritel  $Y^2$  ning  $Y_3$  erine-

vaid omavektoreid  $\varphi_{m_\kappa} 2\kappa+1$  tükki. Ühised omavektorid kõigile nimetatud operaatoritele ( $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ ) võime avaldada  $\varphi_{m_j} \varphi_{m_\kappa}$ . Neid on  $(2j+1)(2\kappa+1)$  tükki, mis tähendab, et indeksitega ( $j, \kappa$ ) määratud esitus on esitus  $n=(2j+1)(2\kappa+1)$  dimensioonilises ruumis.

Analoogiliselt valemitele (1.25) saame kirjutada:

$$X_3 \varphi_{m_j} = m_j \varphi_{m_j}, \quad (2.12)$$

$$(X_1 + iX_2) \varphi_{m_j} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j+1)} \varphi_{m_{j+1}}, \quad (2.13a)$$

$$(X_1 - iX_2) \varphi_{m_j} = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)} \varphi_{m_{j-1}}; \quad (2.13b)$$

$$Y_3 \varphi_{m_\kappa} = m_\kappa \varphi_{m_\kappa}, \quad (2.14)$$

$$(Y_1 + iY_2) \varphi_{m_\kappa} = \sqrt{\kappa(\kappa+1) - m_\kappa(m_\kappa+1)} \varphi_{m_{\kappa+1}}, \quad (2.15a)$$

$$(Y_1 - iY_2) \varphi_{m_\kappa} = \sqrt{\kappa(\kappa+1) - m_\kappa(m_\kappa-1)} \varphi_{m_{\kappa-1}}. \quad (2.15b)$$

Valemitest (2.13) ja (2.15) on näha, et mõjudes operaatoritega  $X_1 + iX_2$ ,  $X_1 - iX_2$ ,  $Y_1 + iY_2$  ja  $Y_1 - iY_2$  võib omafunktsiooni indeksid soovikohaselt muuta. Nende operaatorite abil saame antud omavektori  $\varphi_{m_j} \varphi_{m_\kappa}$  mistahes teiseks omavektoriiks muuta. See tähendab, et esitus on taandumatu (esitusruumis ei ole invariantseid alamruume).

Lorentzi omarühma indeksitega ( $j, \kappa$ ) määratud taandumatu esitust tähistame edaspidi  $D^{j\kappa}$ .

Lihtne on näha, et juhul, kui üks indeksitest on võrdne nulliga, langeb Lorentzi rühma esitus ühte kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma esitusega. Kui näiteks  $\kappa = 0$ , s. o.  $Y_\kappa = 0$ , siis on esitus määratud ainult operaatorite-

ga  $X_k$ , mis rahuldavad samu vahetuseeskirju kui kolme-  
 mensioonilise ruumi pöörete rühma infinitesimaaloperaatorid  
 (1.3). Järelikult võime kirjutada

$$D^{j0} = D^j. \quad (1.16)$$

Analoogiliselt saame

$$D^{0k} = D^k. \quad (2.17)$$

Oletame, et vektorite  $\phi$  ruumis mõjub Lorentzi rühma  
 esitus  $D^{jk}$ :

$$\phi' = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \right) \phi. \quad (2.18)$$

Peame silmas, et  $\varepsilon_{kl}$  on reaalsed suurused ja  $\varepsilon_{k4}$  - ima-  
 ginaarsed. Infinitesimaaloperaatorid  $S_{\rho\sigma}$  peavad kaasope-  
 raatori moodustamisel käituma samuti nagu Minkowski ruumis  
 mõjuvad operaatorid  $J_{\rho\sigma}$  (vt. (I; 2.83)):  $S_{\rho\sigma}^* = -S_{\rho\sigma}$ . Nii saa-  
 me teisenduseeskirjast (2.18) kaaskompleksi võttes

$$\phi^{**} = \phi^* \left( I - \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} S_{kl} + \varepsilon_{k4} S_{k4} \right). \quad (2.19)$$

Viimase võime kirjutada hariliku teisenduseeskirjana

$$\phi^{**} = \phi^* \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} \bar{S}_{\rho\sigma} \right), \quad (2.20)$$

kus

$$\bar{S}_{kl} = -S_{kl}, \quad \bar{S}_{k4} = S_{k4}. \quad (2.21)$$

Näeme, et teisendusest (2.18) kaaskompleksi võtmine on ekvi-  
 valentne infinitesimaaloperaatorite  $S_{\rho\sigma}$  asendamisele ope-  
 raatoritega  $\bar{S}_{\rho\sigma}$  valemite (2.21) kohaselt. See asendamine  
 omakorda tähendab aga, et valemites (2.7) ja (2.8) asenduvad  
 operaatorid  $X_k$  operaatoritega  $-Y_k$  ja operaatorid  $Y_k$   
 operaatoritega  $-X_k$ . Teiste sõnadega: indeksid  $j$  ja  $k$   
 vahetavad kohad. Nii võime öelda:

Kui esitus  $D^{i^k}$  mõjub funktsioonide  $\phi$  ruumis, siis esitus  $D^{k^j}$  mõjub kaaskomplekssete funktsioonide  $\phi^*$  ruumis. Kui suurus  $\phi$  teiseneb esituse  $D^{i^k}$  järgi, siis suurus  $\phi^*$  teiseneb esituse  $D^{k^j}$  järgi.

§ 3. Lorentzi rühma lõplikudimensiooniliste esituste otsekorrutis.

Anname kõigepealt lõpmata väikest Lorentzi teisendust kirjeldavale operaatorile

$$I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \quad (2.22)$$

teise kuju. Selleks toome parameetrite  $\varepsilon_{\rho\sigma}$  asemele nende lineaarkombinatsioonid

$$\varepsilon_k = i \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{\ell m} + \varepsilon_{k4} \right), \quad (2.23)$$

$$\varepsilon'_k = i \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{\ell m} - \varepsilon_{k4} \right).$$

Arvutame nüüd eelmiste valemite ja valemite (2.7), (2.8) abil järgmise avaldise:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k X_k + \varepsilon'_k Y_k &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{\ell m} + \varepsilon_{k4} \right) \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} S_{ij} + S_{k4} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{\ell m} - \varepsilon_{k4} \right) \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} S_{ij} - S_{k4} \right). \end{aligned}$$

Silmas pidades, et

$$\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{kij} = \delta_{\ell i} \delta_{mj} - \delta_{\ell j} \delta_{mi}, \quad (2.24)$$

saame eelmisest

$$\varepsilon_k X_k + \varepsilon'_k Y_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma}.$$

Teisenduse (2.22) saame järelikult avaldada

$$\begin{aligned} I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} &= I + \varepsilon_k X_k + \varepsilon'_k Y_k = \\ &= (I + \varepsilon_k X_k) \times (I + \varepsilon'_k Y_k). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Näeme, et mingis esituses  $D^{j'n}$  määratud teisendus avaldub kahe teisenduse otsekorrutisena. Otsekorrutise teguritel on seejuures kindel tähendus. Kui võtame  $Y_k = 0$ , saame eelmisest valemist teisenduse

$$I + \varepsilon_k X_k,$$

mis kuulub esitusse  $D^{j'o}$ . Analoogiliselt  $X_k = 0$  juhul saame sealt teisenduse

$$I + \varepsilon'_k Y_k,$$

mis kuulub esitusse  $D^{o'k}$ . Valem (2.25) ütleb meile järelikult, et esitust  $D^{j'k}$  võib alati avaldada kahe esituse otsekorrutisena:

$$D^{j'k} = D^{j'o} \times D^{o'k}. \quad (2.26)$$

Moodustame nüüd kahe lõplikudimensioonilise esituse  $D^{j'k}$  ja  $D^{j'k'}$  otsekorrutise. Valemi (2.26) abil saame selle avaldada

$$D^{j'k} \times D^{j'k'} = D^{j'o} \times D^{o'k} \times D^{j'o} \times D^{o'k'}. \quad (2.27)$$

Kui me maatriksite otsekorrutises tegurite järjekorra vahetame, saame tulemuse, mis erineb eelmisest ainult selle poolest, et ruumis antud baasivektorid on ümber nummerdatud. Esituse korral pole meil aga oluline, missugune on esitusruumis antud baas. Järelikult võime esituste otsekorrutises vabalt tegurite järjestust muuta, ilma et sellest sisuliselt

midagi oleneks. Valemi (2.27) asemel võime siis kirjutada

$$D^{j^k} \times D^{j'^{k'}} = D^{j^0} \times D^{j'^0} \times D^{0^k} \times D^{0^{k'}}. \quad (2.28)$$

$D^{j^0}$  ja  $D^{j'^0}$  on kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma esitused. Sama rühma esituseks on siis ka otsekorrutis,  $D^{j^0} \times D^{j'^0}$ , mis taandub valemi (1.107) kohaselt järgmiste taandumatute esituste otsesummaks:

$$D^{j^0} \times D^{j'^0} = \sum_{j=|j-j'|}^{j+j'} D^{j^0}. \quad (2.29)$$

Analoogiliselt saame arvutada

$$D^{0^k} \times D^{0^{k'}} = \sum_{k=|k-k'|}^{k+k'} D^{0^k}. \quad (2.30)$$

ja valem (2.28) avaldub nüüd

$$D^{j^k} \times D^{j'^{k'}} = \sum_{j=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{k=|k-k'|}^{k+k'} (D^{j^0} \times D^{0^k}). \quad (2.31)$$

Kasutades veel kord valemit (2.26), saamegi taandamisvalemi Lorentzi rühma esituste otsekorrutise jaoks:

$$D^{j^k} \times D^{j'^{k'}} = \sum_{j=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{k=|k-k'|}^{k+k'} D^{j^k}. \quad (2.32)$$

#### § 4. Minkowski ruumi spinorid.

Minkowski ruumi  $m_1 + m_2$  järku spinoriks nimetatakse suurus, mis Lorentzi omateisenduste korral teiseneb esituse  $[D^{j^0}]^{m_1} \times [D^{0^k}]^{m_2}$  järgi. Astmenäitaja tähistab siin esituste otsekorrutises olevate tegurite arvu, näiteks

$$[D^{i_0}]^{m_1} = \underbrace{D^{i_0} \times D^{i_0} \times \dots \times D^{i_0}}_{m_1}$$

Antud definitsioonist on näha, et esimest järku spinooreid on Minkowski ruumis kaks: spinooreid, mis teisenevad esituse  $D^{i_0}$  järgi, nimetame esimest liiki esimest järku spinooriteks, ja spinooreid, mis teisenevad esituse  $D^{0i}$  järgi, teist liiki esimest järku spinooriteks. Vaatame konkreetseid erijuhte:

Esimest liiki esimest järku spinoor.

See on suurus, mis teiseneb esituse  $D^{i_0}$  järgi:  $j = \frac{1}{2}$ ,  $\kappa = 0$ . Järelikult  $y_\kappa = 0$  ja  $X_\kappa$  on kaherealised spinnmaatriksid (vt. 1.29) ja (1.31)):

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Et  $y_\kappa = 0$ , saame valemitest (2.7) ja (2.8):

$$S_{\ell m} = i e_{\ell m \kappa} X_\kappa, \quad (2.34)$$

$$S_{\kappa \mu} = \frac{1}{2} e_{\kappa \ell m} S_{\ell m}. \quad (2.35)$$

Silmas pidades  $X_\kappa$  avaldise (2.33), saame infinitesimaaloperaatorid

$$S_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad S_{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{31} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

$$S_{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{24} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{34} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Esimest liiki esimest järku spinoor teiseneb Lorentzi oma-teisenduste korral eeskirja

$$\psi' = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \right) \psi \quad (2.37)$$

kohaselt, kusjuures infinitesimaaloperaatorid on antud konkreetselt matriksitega (2.36).

Kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühma esitus  $D^{\frac{1}{2}}$  on kahene. Et  $D^{\frac{1}{2}0} = D^{\frac{1}{2}}$ , siis on järelikult kahene ka Lorentzi rühma esitus  $D^{\frac{1}{2}0}$ . Esimest liiki esimest järku spinor on ainult kuni märgi täpsuseni määratud suurus.

Teist liiki esimest järku spinor.

See on suurus, mis teiseneb esituse  $D^{0\frac{1}{2}}$  järgi:  $j=0$ ,  $k = \frac{1}{2}$ . Järelikult  $X_k=0$  ja  $Y_k$  on kaherealised spinnmatriksid:

$$y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Asetades valemitesse (2.7) ja (2.8)  $X_k=0$ , saame

$$S_{lm} = i e_{lmk} y_k, \quad (2.39)$$

$$S_{k4} = -\frac{1}{2} e_{klm} S_{lm}. \quad (2.40)$$

Kasutades  $y_k$  avaldisi (2.38), saame nüüd infinitesimaaloperaatorid (varustame need operaatorid indeksiga "prim", et vältida äravahetamist operaatoritega (2.36)):

$$\begin{aligned} S'_{12} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad S'_{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S'_{31} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ S'_{14} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad S'_{24} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S'_{34} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Teist liiki esimest järku spinor teiseneb Lorentzi teisenduste korral eskirja

$$\psi' = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\sigma'} S'_{\sigma\sigma'} \right) \psi \quad (2.42)$$

järgi, kusjuures infinitesimaaloperaatorid  $S'_{\sigma\sigma'}$  on antud matriksitega (2.41).

Nii nagu esitus  $D^{i_0}$ , on ka esitus  $D^{o_i}$  kahene. Ka teist liiki esimest järku spinoor on ainult kuni märgi täpsusega määratud suurus.

Bispiinor.

Vaatleme esimest järku spinoorite teisenemist aja telje peegeldamisel, s. o. teisenduse

$$x_k \rightarrow x_k, \quad x_4 \rightarrow -x_4 \quad (2.43)$$

korral. Peegeldatud ajateljega koordinaadistikus võtab koordinaadistiku teisendusvalem

$$x'_4 = x_4 + \varepsilon_{45} x_5$$

kuju

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k + \varepsilon_{k\ell} x_\ell - \varepsilon_{k4} x_4, \\ x'_4 &= x_4 - \varepsilon_{4\ell} x_\ell. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Viimasest näeme, et aja telje peegeldamine on ekvivalentne  $\varepsilon_{k4}$  märgi muutmisega. Esimest ja teist liiki spinoorite teisenduseeskirjadest (2.37) ja (2.42) on näha, et  $\varepsilon_{k4}$  märgi muutmine omakorda on ekvivalentne  $S_{k4}$  märgi muutmisele.

$S_{k4}$  märgi muutmine aga vahetab valemities (2.7) ja (2.8) operaatorid  $X_k$  ja  $Y_k$ . Seega muutub ajatelje peegeldamisel esimest liiki spinoor teist liiki spinooriks ja vastupidi.

Siit näeme, et esimest liiki spinoorid ja teist liiki spinoorid omavahel ei moodusta esitusruumi üldise Lorentzi rühma jaoks, kus esinevad ka peegeldusteisendused. Samuti ei moodusta nad aja telje peegelduste suhtes kinnist ruumi.

Et saada esimest järku spinoorite ruumi, kus oleks antud ka üldise Lorentzi rühma esitus, tuleb moodustada esimest

ja teist liiki spinnorite otsesumma. Moodustame neljakomponendilise suuruse

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

mille kaks esimest komponenti on esimest liiki spinnor ja kaks viimast komponenti teist liiki spinnor. Niisugust kahest spinnorist koostatud suurust nimetame bispinnoriks. Ajatelje peegeldamisel teiseneb bispinnor  $\chi \rightarrow \chi''$ , kus

$$\chi'' = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Esimest järku bispinnor on suurus, mis teiseneb Lorentzi rühma esituse  $D^{\frac{1}{2}0} + D^{0\frac{1}{2}}$  järgi. Bispinnorite ruumis mõjub lineaarteisenduste (2.37) ja (2.42) otsesumma

$$\chi' = \begin{pmatrix} I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} & 0 \\ 0 & I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} S'_{\rho\sigma} \end{pmatrix} \chi,$$

mille võime teisiti kirjutada

$$\chi' = \left( I + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \right), \quad (2.47)$$

kus

$$S_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} S_{\rho\sigma} & 0 \\ 0 & S'_{\rho\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

on bispinnorite ruumis mõjuvad infinitesimaaloperaatorid. Pidades silmas avaldisi (2.36) ja (2.41) saame infinitesimaaloperaatorid kirjutada:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & S_{23} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
S_{31} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & S_{14} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & (2.49) \\
S_{24} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & S_{34} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nii nagu valemities (2.36) ja 2.41), on ka siin infinitesimaalmaatricsid antud teatud kindlas baasis. Baasi muutmisel mingi unitaarteisendusega muutub vastavalt ka infinitesimaalmaatricsite konkreetne kuju.

Väärib tähelepanu fakt, et Lorentzi rühma esitusi määravate infinitesimaalmaatricsite vahetuseeskirja (2.6) saab rahuldada erikujuliste operaatoritega

$$S_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} (\gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho), \quad (2.50)$$

kus operaatorid  $\gamma^\sigma$  peavad rahuldama järgmisi vahetuseeskirju

$$\gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho = 2 \delta_{\rho\sigma}. \quad (2.51)$$

Lähtudes tingimusest (2.51) on võimalik operaatoreid määrata. Osutub, et  $\gamma^\sigma$  on neljarealsed maatriksid ja valemiga (2.50) antud infinitesimaaloperaatorid mõjuvad just bispinorite ruumis. On lihtne kontrollida, et maatriksid (2.49) saame arvutada valemist (2.50), kui valime

$$\begin{aligned}
 \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

Need maatriksid rahuldavad tõepoolest vahetuseeskirju (2.51).

Vahetuseeskirju (2.51) rahuldavaid maatrikseid nimetakse Diraci maatriksiteks. Avaldised (2.52) annavad Diraci maatriksite kuju ühes kindlas baasis. Baasi muutmisel unitaar-teisenduse abil muutuvad vastavalt ka Diraci maatriksite konkreetsete kujud.

### Kõrgemat järku spinorid.

Analoogiliselt eelnevale saame uurida ka kõrgemat järku spinoreid. Esimest järku spinorid, sealhulgas ka bispinor, on kahesed suurused; nad on määratud ainult kuni märgi täpsusega. Kaheseid suurusi on ka kõrgemat järku spinorite hulgas.

Spinori definitsioonist on näha, et  $m_1 + m_2$  järku spinorid moodustavad esitusruumi ka kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühmale. Selles ruumis mõjub esitus  $[0^i]^{m_1 + m_2}$ .

Eespool nägime, et esitus  $D^{\frac{1}{2}}$  on kahene; kahesed on järelikult ka kõik esitused, kus  $m_1 + m_2$  on paaritu arv, ja ühesed esitused, kus  $m_1 + m_2$  on paarisarv. Et Lorentzi rühma sisaldab erijuhuna ka kolmedimensioonilise ruumi pöördeid, siis kehtib eelöeldu ka Lorentzi rühma esituste kohta.

Paarisjärku spinnorid on ühesed suurused, paaritud järku spinnorid on määratud aga kuni märgi täpsusega. Seda tulemust võib veel teisiti sõnastada, kui pidada silmas, et valemite (2.26), (2.16) ja (2.17) abil võime Lorentzi rühma mistahes esituse avaldada

$$D^{jk} = D^{j^0} \times D^{0k} = D^j \times D^k .$$

Siit on näha, et esitus  $D^{jk}$  on ühene sel juhul, kui  $D^j$  ja  $D^k$  on mõlemad kas ühesed või kahesed. Juhul, kui üks neist on ühene, teine kahene, on ka esitus  $D^{jk}$  kahene.

Eelmises peatükis nägime, et  $D^j$  on ühene sel juhul, kui  $j$  on täisarv, ja kahene sel juhul, kui  $j$  on pool paaritust täisarvust. Järelikult võime öelda:

Lorentzi rühma lõplikudimensiooniline esitus  $D^{jk}$  on ühene, kui  $k+j$  on täisarv, ja on kahene, kui  $k+j$  on pool paaritust arvust. Nii on näiteks esitus  $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  ühene, sest  $k+j=1$ , ja esitus  $D^{\frac{1}{2}1}$  kahene, sest  $k+j = \frac{3}{2}$ .

## § 5. Minkowski ruumi tensorid.

Minkowski ruumi  $n$  järku tensoriks nimetatakse suurust, mis Lorentzi omateisenduste korral teiseneb esituse  $[D^{\frac{1}{2}i}]^n$  järgi. Seda definitsiooni loetakse õigeks ka

$n=0$  juhul, kusjuures  $[D^{ii}]^0 = D^{00}$  on esitus, kus kõigile rühma elementidele on vastavusse seatud ühikteisendus. Esituse  $D^{00}$  järgi teiseneb skalaar (null järku tensor), mille teisenemiseeskiri on

$$\psi' = \psi. \quad (2.53)$$

Vaatleme nüüd nullist kõrgemat järku tensoreid.

### Esimest järku tensor.

Esimest järku tensor on suurus, mis Lorentzi omateisenduste korral teiseneb esituse  $D^{ii}$  järgi:

$$D^{ii} = D^{i0} \times D^{0i}.$$

Näeme, et esimest järku tensor avaldub kahe esimest järku spinatori - esimest ja teist liiki spinatori otsekorrutisena. Esimest järku tensori teisenemiseeskirja saame siis spinatorite teisenemiseeskirjade (2.37) ja (2.42) otsekorrutisena:

$$\phi' = (I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} S'_{\rho\sigma}) \phi, \quad (2.54)$$

kus

$$S'_{\rho\sigma} = (S_{\rho\sigma} \times I) + (I \times S'_{\rho\sigma}). \quad (2.55)$$

Silmas pidades  $S_{\rho\sigma}$  ja  $S'_{\rho\sigma}$  konkreetseid kujusid (2.36) ja (2.41) saame

$$S'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S'_{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 S'_{31} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & S'_{34} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 S'_{24} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & S'_{34} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

On lihtne näidata, et need on samad Minkowski ruumis mõjuvad operaatorid  $J_{\rho\sigma}$ , mis on antud avaldistega (I; 2.83), ainult teises baasis väljendatuna. Esimest järku tensor on jäljelikult vektor.

Et veenduda eelöeldus, võtame unitaarmaatriksi

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

ja moodustame avaldise  $U S'_{\rho\sigma} U^*$ . Arvutus näitab, et

$$J_{\rho\sigma} = U S'_{\rho\sigma} U^*, \tag{2.58}$$

kus  $S'_{\rho\sigma}$  on antud valemitega (2.56) ja  $J_{\rho\sigma}$  valemitega (I; 2.83). Viimane annab infinitesimaaloperaatori kuju Cartesiuse koordinaadistikus (s. o. koordinaadistikus, kus aegruumi vektor avaldub  $(x_k, ict)$ ), esimene aga sama operaatori teljestikus, mis saadakse Cartesiuse teljestikust teisenduse (2.57) abil.

Kirjutame seosed vektori komponentide vahel mõlemas teljestikus. Eeskirja (2.54) kohaselt teiseneva suuruse komponente nummerdame kahe indeksiga, mis mõlemad omandavad väärtusi 1, 2:

$$\phi_{i_k} = \psi_i \psi_k. \quad (2.59)$$

Teist liiki spinoori indeksile on seejuures alla kirjutatud punkt (sellest ka eespool antud nimetus - punkteeritud indeks).  $\phi$  on järelikult järgmine neljakomponendiline suurus

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Vektori komponendid Cartesiuse teljestikus  $F$ , saame arvutada

$$F' = U\phi. \quad (2.61)$$

Järelikult

$$F_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} (-\phi_{11} + \phi_{22}), \quad F_3 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\phi_{12} + \phi_{21}), \quad (2.62)$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{11} + \phi_{22}), \quad F_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\phi_{12} + \phi_{21}).$$

Näeme, et vektorit võime uurida kas spinoorruumide kaudu määratud koordinaadistikus (suurus  $\phi$ ) või Cartesiuse koordinaadistikus (suurus  $F'$ ). Käesolevas eelistame kasutamisel viimast moodust. Niisugusel juhul võime defineerida:

Vektoriks nimetame suurust  $F$ , mis Lorentzi omateisenduse

$$x'_\nu = a_{\nu\sigma} x_\sigma \quad (2.63)$$

korral teiseneb eeskirja

$$F'_\nu = a_{\nu\sigma} F_\sigma \quad (2.64)$$

järgi.

### Teist järku tensor.

Teist järku tensor on suurus, mis teiseneb esituse  $D^{ii} \times D^{ii}$  järgi, s. o. mis teiseneb nagu kahe vektori otsekorrutis. Teisiti võime öelda:

Teist järku tensor on suurus  $F'_{\nu\sigma}$ , mis Lorentzi oma-teisenduse (2.63) korral teiseneb eeskirja

$$F'_{\nu\sigma} = a_{\nu\alpha} a_{\sigma\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.65)$$

järgi.

Teist järku tensor on taanduv suurus; taandamisvalemi (2.32) kohaselt

$$D^{ii} \times D^{ii} = D^{11} + D^{10} + D^{01} + D^{00} . \quad (2.66)$$

16-komponendiline tensor taandub üheksakomponendilise, kahe kolmekomponendilise ja ühekomponendilise suuruse otsesummaks. Näitame nüüd, et nendeks suurusteks on sümmeetriline tensor, mille jälg on null, iseendale duaalne antisümmeetriline tensor, iseendale antiduaalne antisümmeetriline tensor ja skalaar (tensori jälg).

Lahutame tensori  $F'_{\nu\sigma}$  kõigepealt sümmeetrilise tensori  $N_{\nu\sigma}$  ja antisümmeetrilise tensori  $A_{\nu\sigma}$  summaks:

$$F'_{\nu\sigma} = N_{\nu\sigma} + A_{\nu\sigma} , \quad (2.67)$$

kus

$$N_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} (F'_{\nu\sigma} + F'_{\sigma\nu}) , \quad (2.68)$$

$$A_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} (F'_{\nu\sigma} - F'_{\sigma\nu}) . \quad (2.69)$$

Et teisenduse (2.65) korral jääb sümmeetriline tensor sümmeetriliseks ja antisümmeetriline tensor antisümmeetriliseks

seks, siis moodustavad suurused  $N_{\nu\sigma}$  ja  $A_{\nu\sigma}$  invariantseid alamruumid. Mõlemas alamruumis antud esitus on omakorda veel taanduv:

Sümmeetriline tensor laguneb

$$N_{\nu\sigma} = N_{\nu\sigma}^0 + \frac{1}{4} S \delta_{\nu\sigma}, \quad (2.70)$$

kus

$$N_{\nu\sigma}^0 = N_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} S \delta_{\nu\sigma} \quad (2.71)$$

on sümmeetriline tensor, mille jälg on null ja

$$S = N_{\nu\nu}^0 = N_{\nu\nu} \quad (2.72)$$

on tensori jälg - oma teisenelemomaduste poolest skalaar.

Antisümmeetriline tensor laguneb

$$A_{\nu\sigma} = A_{\nu\sigma}^+ + A_{\nu\sigma}^-, \quad (2.73)$$

kus

$$A_{\nu\sigma}^+ = \frac{1}{2} (A_{\nu\sigma} + A_{\nu\sigma}^D) \quad (2.74)$$

on iseendale duaalne tensor ja

$$A_{\nu\sigma}^- = \frac{1}{2} (A_{\nu\sigma} - A_{\nu\sigma}^D) \quad (2.75)$$

iseendale antiduaalne tensor.

$$A_{\nu\sigma}^D = \frac{1}{2} e_{\nu\sigma\rho\lambda} A_{\rho\lambda} \quad (2.76)$$

tähistab siin tensorile  $A_{\nu\sigma}$  duaalset tensorit (vt.(I;2.118)).

Sellega olemegi teist järku tensori tema taandumata- teks osadeks jaotanud.

### Kõrgemat järku tensorid.

Analoogiliselt eelnevale võime n-järku tensori defineerida kui suuruse  $F_{x_1 x_2 \dots x_n}$ , mis teisenduse (2.63) korral teiseneb eeskirja

$$F'_{x_1 x_2 \dots x_n} = a_{x_1 l_1} a_{x_2 l_2} \dots a_{x_n l_n} F_{l_1 l_2 \dots l_n} \quad (2.77)$$

kohaselt. Teist ja kõik kõrgemat järku tensorid on taanduvad suurused. Käesolevas me kõrgemat järku tensoreid ja nende taanduvust lähemalt ei uuri. Olgu siinkohal ainult niipalju öeldud, et tensori taandumatud osad on alati kindla sümmeetria- ja duaalsuseomadusega (täielikult sümmeetriline tensor, täielikult antisümmeetriline tensor, osaliselt sümmeetrilised ja osaliselt antisümmeetrilised tensorid).

### § 6. Elektromagnetilise välja teisenemisomadused.

Käesoleva kursuse esimeses osas (vt. (I; 3.106)) määrasime me elektromagnetilise välja potentsiaalide kaudu suuruse

$$F_{\nu\sigma} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma}, \quad (2.78)$$

mida nimetasime elektromagnetilise välja tensoriks. Näitame nüüd, et see nimetus on õigustatud - tegemist on teist järku antisümmeetrilise tensoriga.

Teeme Lorentzi teisenduse

$$x'_\nu = a_{\nu\alpha} x_\alpha, \quad (2.79a)$$

mille pöördteisenduseks on

$$x_\alpha = a_{\alpha\nu} x'_\nu. \quad (2.79b)$$

Viimase abil saame

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = a_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \quad (2.80)$$

Et välja potentsiaal on vektor, siis teiseneb ta eeskirja

$$A'_\sigma = a_{\sigma\beta} A_\beta \quad (2.81)$$

järgi. Rakendades valemeid (2.80) ja (2.81) saame nüüd

$$F'_{\nu\sigma} = \frac{\partial A'_\sigma}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'^\sigma} = a_{\nu\alpha} a_{\sigma\beta} \left( \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right),$$

või teisiti

$$F'_{\nu\sigma} = a_{\nu\alpha} a_{\sigma\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.82)$$

mis ütlebki, et  $F'_{\nu\sigma}$  on teist järku tensor.

Moodustame tensorist  $F'_{\nu\sigma}$  eeskirja (2.76) järgi duaalse tensori  $F'^D_{\nu\sigma}$ :

$$F'^D_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\sigma\rho\lambda} F_{\rho\lambda}. \quad (2.83)$$

Komponentides väljakirjutatuna on see

$$\begin{aligned} F'^D_{12} &= F_{34}, & F'^D_{34} &= F_{12}, \\ F'^D_{23} &= F_{14}, & F'^D_{14} &= F_{23}, \\ F'^D_{31} &= F_{24}, & F'^D_{24} &= F_{31}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Et mõista viimaste seoste füüsikalist sisu, meenutame valemite (I; 3.113), mis andis elektromagnetilise välja tensori komponendid magnetvälja komponentide  $H_k$  ja elektrivälja komponentide  $E_k$  kaudu:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Siit on näha, et

$$\vec{H}^D = -i\vec{E}, \quad \vec{E}^D = i\vec{H}. \quad (2.85)$$

Elektriväli ja magnetväli ei ole iseendaga duaalsed ega antiduaalsed suurused. See tähendab, et elektriväli omaette ja magnetväli omaette ei moodusta Lorentzi rühma esitust. Lorentzi rühma esitused saame, kui moodustame iseendaga duaalse suuruse

$$\vec{\xi}^+ = \vec{H} - i\vec{E} \quad (2.86)$$

ja iseendaga antiduaalse suuruse

$$\vec{\xi}^- = \vec{H} + i\vec{E} . \quad (2.87)$$

Suurustega  $\vec{\xi}^+$  ja  $\vec{\xi}^-$  määratud vektorruumides on antud Lorentzi rühma taandumatud esitused. Suurused  $\vec{E}$  ja  $\vec{H}$  ei moodusta Lorentzi teisenduste suhtes kinnist ruumi. Viimasel asjaolul on väga suur praktiline tähtsus, mis seisneb selles, et üleminekul uude inertsiaalsüsteemi lisandub magnetväljale elektriväli ja elektriväljale magnetväli. Liikumise abil on võimalik elektri- ja magnetvälju vastastikku teineteiseks teisendada - see on nähtus, millele tugineb kogu meie elektrotehnika. Juhul, kui elektri- ja magnetväli eraldi moodustaksid Lorentzi rühmale esitusruumi, oleks peaaegu kogu meie kaasaegne elektrotehnika võimatu.

Vaatleme nüüd konkreetselt, kuidas teisenevad elektri- ja magnetväli üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise. Vaatleme konkreetsuse mõttes juhtu, kus uus inertsiaalsüsteem liigub vana suhtes kolmanda telje suunas kiirusega  $v$ , s. o. uue süsteemi kiirus vanas süsteemis on antud vektoriga  $\vec{v} = (0, 0, v)$ . Üleminekut vanast süsteemist uude kirjeldab niisugusel juhul spetsiaalne Lorentzi teisendus (I; 3.6):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 0 & \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Silmas pidades teisendusmaatriksit (2.88) ja tensori teisemiseeskirja (2.82) saame nüüd arvutada

$$F'_{23} = a_{2\alpha} a_{3\sigma} F_{\alpha\sigma} = a_{3\sigma} F_{2\sigma} = \frac{F_{23} + i\frac{v}{c} F_{24}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.89)$$

Analoogiliselt tuleb

$$F'_{34} = \frac{F_{34} + i\frac{v}{c} F_{41}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad F'_{12} = F_{12};$$

$$F'_{14} = \frac{F_{14} - i\frac{v}{c} F_{13}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad F'_{24} = \frac{F_{24} - i\frac{v}{c} F_{23}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.89a)$$

$$F'_{34} = F_{34}.$$

Kui avaldame elektromagnetilise välja tensori komponendid elektri ja magnetvälja vektorite komponentide kaudu, saame eelmistest:

$$H'_1 = \frac{H_1 + \frac{v}{c} E_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad H'_2 = \frac{H_2 - \frac{v}{c} E_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad H'_3 = H_3, \quad (2.90)$$

$$E'_1 = \frac{E_1 - \frac{v}{c} H_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E'_2 = \frac{E_2 + \frac{v}{c} H_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E'_3 = E_3.$$

Siit on näha, et kuigi ühes inertsiaalsüsteemis on elektriväli null (näit.  $\vec{E} = 0$ ), ei ole ta seda teises inertsiaalsüsteemis ( $\vec{E}' \neq 0$ ). Sama kehtib ka magnetvälja kohta.

Vaatleme nüüd valemite (2.90) erijuhtu, kui inertsiaalsüsteemide omavaheline kiirus ei ole liiga suur. Selleks loeme neis valemites  $\frac{v^2}{c^2} = 0$ , kuid  $\frac{v}{c} \neq 0$ . Saame

$$H'_1 = H_1 + \frac{v}{c} E_2, \quad H'_2 = H_2 - \frac{v}{c} E_1, \quad H'_3 = H_3, \quad (2.91)$$

$$E'_1 = E_1 - \frac{v}{c} H_2, \quad E'_2 = E_2 + \frac{v}{c} H_1, \quad E'_3 = E_3.$$

Need ei ole midagi muud kui valemid

$$\vec{H}' = \vec{H} + \frac{1}{c} [\vec{E} \times \vec{v}] \quad (2.92)$$

ja

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{1}{c} [\vec{H} \times \vec{v}] \quad (2.93)$$

komponentides avaldatuna ( $\vec{v} = (0, 0, v)$ ). Saime valemid, mis kirjeldavad elektri- ja magnetvälja teisenemist üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise juhul, kui süsteemide omavaheline kiirus ei ole liiga suur.

Vaatleme kahte erijuhtu.

Olgu süsteemis  $K$  mingis ruumipiirkonnas elektriväli null, magnetväli aga nullist erinev:  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{H} \neq 0$ . Süsteemis  $K'$  on aga nii magnetväli kui ka elektriväli nullist erinevad:

$$\vec{H}' = \vec{H}, \quad (2.94)$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} [\vec{H} \times \vec{v}].$$

Seejuures on vektorid  $\vec{H}'$ ,  $\vec{E}'$  ja  $\vec{v}$  kõik omavahel risti. Toodud näitele vastab järgmine füüsikaline olukord: magnetpulga läheduses viibiva ja selle suhtes liikumatu vaatleja

jaoks on magnetpulgale ainult magnetväli. Teise vaatleja jaoks aga, kes liigub magnetpulgale suhtes kiirusega  $\vec{v}$ , ümbritseb magnetpulgale peale magnetvälja veel elektriväli, mis on risti magnetvälja suunaga ja magnetpulgale ja iseenda omavahelise liikumise suunaga.

Vaatleme nüüd juhtu, kus süsteemis  $K$  on magnetväli null, elektriväli aga nullist erinev:  $\vec{H} = 0$ ,  $\vec{E} \neq 0$ . Süsteemis  $K'$  on need väljad jälle mõlemad nullist erinevad, kusjuures vektorid  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  ja  $\vec{v}$  on kõik omavahel risti. Sellele erijuhule vastab järgmine füüsikaline olukord: elektrilaengu suhtes liikumatu vaatleja jaoks ümbritseb laengut ainult puhas elektriväli. Teise vaatleja jaoks, kes liigub laengu suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt, ümbritseb laengut samasugune elektriväli, nagu seda väidab esimene vaatlejagi, kuid sellele elektriväljale lisandub magnetväli, mis on risti elektriväljaga ja laengu ja vaatleja omavahelise kiiruse suunaga.

### § 7. Lorentzi omarühma esitused skalaarses Hilberti ruumis. Masskeskme kiiruse jäävuse seadus.

Vaatleme nüüd Lorentzi omarühma esitust skalaarses Hilberti ruumis, mille vektorid  $\psi$  on funktsioonid ruumikoordinaatidest  $x_k$  ja ajakoordinaadist  $x_4$ :

$$\psi = \psi(x_\nu). \quad (2.95)$$

Teostame teisenduse

$$x'_\nu = x_\nu + \epsilon_{\nu\sigma} x_\sigma. \quad (2.96)$$

Analoogiliselt kolmedimensioonilise ruumi pöörete rühmale teiseneb ka nüüd esitusruumi vektor

$$\psi'(x_i) = \psi(x_i), \quad (2.97)$$

s. o.

$$\psi'(x_i + \varepsilon_{05} x_5) = \psi(x_i).$$

Kasutades reaksarendust, saame siit analoogiliselt valemile (1.72) teisenemiseeskirja

$$\psi'(x_i) = \left[ I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{L}_{\alpha\beta} \right] \psi(x_i), \quad (2.98)$$

kus

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (2.99)$$

on Hilberti ruumis mõjuvad infinitesimaaloperaatorid. Eelmise peatüki 9. punktis me uurisime nendest operaatoritest kolme,  $\mathcal{L}_{ix}$ , füüsikalist tähendust. Nägime, et nad kirjeldavad orbitaalset pöördimpulssi. Käesolevas punktis vaatleme lähemalt ülejäänud kolme operaatori,  $\mathcal{L}_{xy}$ , tähendust.

Juhul, kui hamiltoniaan on Lorentzi teisenduste suhtes invariantne, peavad operaatorid  $\mathcal{L}_{xy}$  ja muidugi siis ka operaatorid

$$H_{xy} = \hbar \left( x_x \frac{\partial}{\partial x_y} - x_y \frac{\partial}{\partial x_x} \right) \quad (2.100)$$

temaga kommuteeruma:

$$[H, H_{xy}] = 0. \quad (2.101)$$

See tähendab, et  $H_{xy}$  on jääv suurus. Missugune on selle jääva suuruse füüsikaline tähendus?

Silmas pidades valemuid (1.53) ja (1.54) saame (2.101) avaldada

$$H_{\kappa\kappa} = c \left( t p_{\kappa} - \frac{1}{c^2} x_{\kappa} H \right). \quad (2.102)$$

Juhul, kui me kirjeldaksime mitmest osakesest koosnevat süsteemi, tuleks meil moodustada üksikuid osakesi kirjeldavate esituste otsekorrutis (võrdle näiteks eelmise peatüki 11. punkt). Üksikute esituste infinitesimaaloperaatorid tuleb sel juhul liita ja jäävaks suuruseks saaksime siis (2.102) asemel

$$c \sum_i \left( t p_{\kappa}^{(i)} - \frac{1}{c^2} x_{\kappa}^{(i)} H^{(i)} \right). \quad (2.103)$$

Viimases avaldises olevad suurused on operaatorid. Et aga hõlbustada arutluse füüsikalise mõtte väljatoomist, oletame, et meil on operaatorite asemel tegemist harilike arvudega. Teiste sõnadega öeldes tähendab see, et me vaatleme mikroosakeste asemel makroosakesi, mille kirjeldamisel võime piirduda reaalarvudega. Käesoleva kursuse kolmandas osas näeme, missugustel juhtudel on niisugune operaatorite asendamine arvudega lubatud.

Niisiis loeme avaldises (2.103) kõik suurused harilikeks arvudeks.  $p_{\kappa}^{(i)}$  tähistab  $i$ -nda osakese impulssi,  $H^{(i)}$  - energiat ja  $x_{\kappa}^{(i)}$  -koordinaati. Summeerimine toimub valemis (2.103) üle kõigi süsteemi moodustavate osakeste. Suuruse (2.103) jäävuse seaduse võime siis avaldada

$$\sum_i \left( t p_{\kappa}^{(i)} - \frac{1}{c^2} x_{\kappa}^{(i)} H^{(i)} \right) = \text{const}. \quad (2.104)$$

Et kinnise süsteemi korral on ka süsteemi koguenergia  $\sum_i H^{(i)}$  jääv suurus, siis võime eelmise asemel kirjutada

$$\frac{\sum_l x_k^{(i)} H^{(i)}}{\sum_l H^{(i)}} - c^2 \frac{\sum_l p_k^{(i)}}{\sum_l H^{(i)}} t = \text{const.} \quad (2.105)$$

Või teisiti

$$X_k - V_k t = \text{const.} \quad (2.106)$$

kus

$$X_k = \frac{\sum_l x_k^{(i)} H^{(i)}}{\sum_l H^{(i)}} \quad (2.107)$$

on teatud kindel punkt süsteemi sees ja

$$V_k = c^2 \frac{\sum_l p_k^{(i)}}{\sum_l H^{(i)}} \quad (2.108)$$

teatud konstantne kiirus:

Valemiga (2.107) määratud punkti nimetatakse süsteemi masskeskmeks või inertsikeskmeks. Valemid (2.107) ja (2.108) on relativistlikuks üldistuseks klassikalisest mehhaanikast tuntud valemitele masskeskme koordinaatide ja süsteemi kuiterviku liikumise kiiruse määramiseks. Viimased saame, kui oletame, et osakeste liikumise kiirus on väga väike. Sel juhul on energia väärtuseks praktiliselt omaenergia,  $H^{(i)} = m_o^{(i)} c^2$ , ja impulsi väärtuseks  $p_k^{(i)} = m_o^{(i)} v_k^{(i)}$ . Valemite (2.107) ja (2.108) asemel saame siis klassikalisest mehhaanikast tuntud valemid

$$X_k^o = \frac{\sum_l m_o^{(i)} x_k^{(i)}}{\sum_l m_o^{(i)}} \quad (2.109)$$

$$V_k^o = \frac{\sum_l m_o^{(i)} v_k^{(i)}}{\sum_l m_o^{(i)}} \quad (2.110)$$

Jäävuse seadus (2.106) on süsteemi masskeskme kiiruse jäävuse seadus: süsteemi masskese liigub konstantse kiiru-

sega (ühtlaselt ja sirgjooneliselt), kui süsteemile väliseid jõude ei mõju.

### § 8. Üldise Lorentzi rühma tensoresitustest.

Valemist (I; 2.97) on näha, et üldise Lorentzi rühma elemendid saame Lorentzi omarühma elementidest, kui rakendame kolme peegeldusoperatsiooni:

$P_r$  - kolme ruumitelje peegeldus (ruumiline inversioon),

$P_t$  - ajatelje peegeldus (aja inversioon),

$P$  - nii ruumi- kui ajatelgede üheaegne peegeldamine;

$$P = P_r P_t .$$

Kui lisada neile operatsioonidele ühikteisenduse  $e$ , saame neljast elemendist koosneva Abeli rühma, mille korrutustabel on järgmine:

	$e$	$P_r$	$P_t$	$P$	
$e$	$e$	$P_r$	$P_t$	$P$	
$P_r$	$P_r$	$e$	$P$	$P_t$	
$P_t$	$P_t$	$P$	$e$	$P_r$	
$P$	$P$	$P_t$	$P_r$	$e$	

(2.111)

Et see rühm on peegelduste rühm, mille kõik elemendid omavahel kommuteeruvad, siis on rühma ainukesteks taandumatuteks esitusteks ühedimensioonilised esitused, s. o. igale peegeldusoperaatorile saab vastavusse seada arvu  $\pm 1$ . Järelikult on sellel rühmal võimalik neli erinevat esitust; tähis-

tame neid  $D_0, D_1, D_2, D_3$  :

Esituse saame, kui võtame vastavuse

$$\begin{aligned} e &\rightarrow 1, & P_t &\rightarrow 1, \\ P_r &\rightarrow 1, & P &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Analoogiliselt saame teised esitused järgmiste vastavuste kaudu:

$$D_1 \quad \begin{aligned} e &\rightarrow 1, & P_t &\rightarrow -1, \\ P_r &\rightarrow 1, & P &\rightarrow -1; \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$D_2: \quad \begin{aligned} e &\rightarrow 1, & P_t &\rightarrow 1, \\ P_r &\rightarrow -1, & P &\rightarrow -1; \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$D_3: \quad \begin{aligned} e &\rightarrow 1, & P_t &\rightarrow -1, \\ P_r &\rightarrow -1, & P &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Juhul, kui me omarühma elemente tähistame  $A^{(*)}$ , moodustub üldine Lorentzi rühm järgmistest elementidest:

$$L = \{A^{(*)}, P_r A^{(*)}, P_t A^{(*)}, P A^{(*)}\}. \quad (2.116)$$

Üldise Lorentzi rühma iga element avaldub omarühma elemendi ja peegelduste rühma (2.111) elemendi korrutisena. Et nende rühmade elemendid aga omavahel ei kommuteeru, siis me ei saa öelda, et üldine rühm on omarühma ja peegelduste rühma otsekorrutis. Järelikult ei saa me üldise rühma esituste leidmisel ilma pikemata rakendada ka reeglit (I; 1.40). Õnneks selgub siiski, et n.-ö. erandi korras on nimetatud reegel antud juhul rakendatav. Veendume selles.

Tähistame Lorentzi omarühma esituse elemente  $D(\lambda)$  ja peegelduste rühma (2.111) esituse elemente  $\lambda_k$ . Mõlemad nad

rahuldavad esitustingimust:

$$\mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_i) = \mathcal{D}(g_i g), \quad (2.117)$$

$$\lambda_k \lambda_{k'} = \lambda_{kk'}. \quad (2.118)$$

Moodustame nüüd korrutise  $\lambda_k \mathcal{D}(g)$  ja näitame, et see rahuldab samuti esitustingimust:

$$\lambda_k \mathcal{D}(g_i) \cdot \lambda_{k'} \mathcal{D}(g_i') = \lambda_k \lambda_{k'} \mathcal{D}(g_i) \mathcal{D}(g_i'),$$

sest  $\lambda_k$  on arvud, mis maatriksitega  $\mathcal{D}(g)$  kommuteeruvad.<sup>1</sup> Rakendades esitustingimusi (2.117) ja (2.118) saamegi nüüd

$$\lambda_k \mathcal{D}(g_i) \cdot \lambda_{k'} \mathcal{D}(g_i') = \lambda_{kk'} \mathcal{D}(g_i g_i'). \quad (2.119)$$

Elemendid  $\lambda_k \mathcal{D}(g_i)$  rahuldavad esituse tingimust ja on järelikult üldise Lorentzi rühma esituse elementideks.

Vastavalt sellele, et peegelduste rühmal on nelja tüüpi esitusi, on ka üldisel Lorentzi rühmal nelja tüüpi tensoresitusi. Loetleme need:

1) Kui võtame peegelduste rühma esituse  $D_0$ , siis ei muuda tensorid ühegi peegelduse korral märki. Tensori teisendamiseeskiri on siis

$$F'_{x_1 x_2 \dots x_n} = a_{x_1 \nu_1} a_{x_2 \nu_2} \dots a_{x_n \nu_n} F_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}. \quad (2.117)$$

Erinevalt eeskirjast (2.77) tähistavad  $a_{ki}$  siin mitte ainult omarühma teisenduste elemente, vaid juba üldise rühma elemente.

<sup>1</sup> Üldisemal juhul, kui  $\lambda_k$  ei ole arv, vaid ka teatud maatriks, tuleb  $\lambda_k \mathcal{D}(g)$  asemel võtta  $\text{Sp} \lambda_k \mathcal{D}(g)$ , mis kindlasti rahuldab esitustingimust. Lorentzi rühma juhul

$$\text{Sp} \lambda_k = \lambda_k.$$

Tensoreid, mis teisenevad üldise Lorentzi rühma esituse (2.117) järgi, nimetatakse päristensoriteks.

2) Kui võtame peegelduste rühma esituse  $D_3$ , siis saame üldise rühma teisenduste korral tensori teisenemiseeskirja

$$F'_{x_1 x_2 \dots x_n} = \det(a_{\nu\sigma}) a_{x_1 \nu_1} a_{x_2 \nu_2} \dots a_{x_n \nu_n} F_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \quad (2.118)$$

Teguril  $\det(a_{\nu\sigma})$  on just niisugune märk nagu vaja: ruumitelgede peegelduste korral  $-1$ , ajatelje peegelduse korral  $-1$  ja kõigi nelja telje peegelduse korral  $+1$ .

Tensoreid, mis teisenevad üldise Lorentzi rühma esituse (2.118) järgi, nimetatakse pseudotensoriteks.

3) Kui võtame peegelduste rühma esituse  $D_4$ , saame tensori teisenemiseeskirja

$$F'_{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{a_{44}}{|a_{44}|} a_{x_1 \nu_1} a_{x_2 \nu_2} \dots a_{x_n \nu_n} F_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \quad (2.119)$$

Tegur  $\frac{a_{44}}{|a_{44}|}$  arvestab siin märgi muutust ajatelje peegeldamisel ja kõigi nelja telje peegeldamisel.

Tensoreid, mis teisenevad üldise Lorentzi rühma esituse (2.119) järgi, nimetatakse aja-pseudotensoriteks.

4) Kui võtame peegelduste rühma esituse  $D_2$ , saame tensori teisenemiseeskirja

$$F'_{x_1 x_2 \dots x_n} = \det(a_{\nu\sigma}) \frac{a_{44}}{|a_{44}|} a_{x_1 \nu_1} a_{x_2 \nu_2} \dots a_{x_n \nu_n} F_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} \quad (2.120)$$

Tensoreid, mis teisenevad selle eeskirja järgi, nimetatakse ruumi-pseudotensoriteks.

Teisenduseeskirjadest (2.117) - (2.120) on näha, et kahe tensori korrutis on üldiselt uut tüüpi tensor. Esitame

tabeli, mis näitab korrutisena saadava tensori tüüpi. Tabelis on kasutatud tähiseid:  $T$  - päristensor,  $T_t$  - aja-pseudotensor,  $T_r$  - ruumi-pseudotensor ja  $T_{rt}$  - pseudotensor.

	$T$	$T_t$	$T_r$	$T_{rt}$
$T$	$T$	$T_t$	$T_r$	$T_{rt}$
$T_t$	$T_t$	$T$	$T_{rt}$	$T_r$
$T_r$	$T_r$	$T_{rt}$	$T$	$T_t$
$T_{rt}$	$T_{rt}$	$T_r$	$T_t$	$T$

(2.121)

On näiteks lihtne näha, et Minkowski ruumi vektor  $x_\alpha$  on pärisvektor. Omaaeg  $dt = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  on ilmselt aja-pseudoskalaar. Neljadimensiooniline kiirus  $u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$  on tabeli (2.121) järgi siis ilmselt aja-pseudovektor.

Toome lõpuks veel tabelid, mis näitavad skalaaride ja vektorite teisenemist koordinaadistiku peegelduste korral.

Skalaar  $\psi$  muutub peegelduste korral  $\psi \rightarrow \psi'$ . Järgnevas tabelis on antud  $\psi'$  väärtused vastavalt peegelduse ja skalaari tüübile:

	Päris-skalaar	Aja-pseudo-skalaar	Ruumi-pseudo-skalaar	Pseudo-skalaar
$P_r$	$\psi$	$\psi$	$-\psi$	$-\psi$
$P_t$	$\psi$	$-\psi$	$\psi$	$-\psi$
$P$	$\psi$	$-\psi$	$-\psi$	$\psi$

Järgmises tabelis on näidatud vektori ruumilise ja ajalise osa teisenemist koordinaadistiku peegeldamisel vastavalt vektori tüübile:

	Pärisvektor	Aja-pseudo-vektor	Ruumi-pseudo-vektor	Pseudo-vektor
$P_r$	$-\psi_i, \psi_4$	$-\psi_i, \psi_4$	$\psi_i, -\psi_4$	$\psi_i, -\psi_4$
$P_t$	$\psi_i, -\psi_4$	$-\psi_i, \psi_4$	$\psi_i, -\psi_4$	$-\psi_i, \psi_4$
$P$	$-\psi_i, -\psi_4$	$\psi_i, \psi_4$	$\psi_i, \psi_4$	$-\psi_i, -\psi_4$

### § 9. Mittehomogeense Lorentzi rühma esitustest.

Mittehomogeenne Lorentzi rühm (I; 2.114) on määratud lõpmata väikeste teisendustega

$$x'_\nu = x_\nu + \epsilon_{\nu\sigma} x_\sigma + \epsilon_\nu. \quad (2.122)$$

Vaatleme vastavaid teisendusi Hilberti ruumis, kusjuures oletame, et Hilberti ruumi vektorid on üldiselt mitmekomponendilised suurused (erandjuhul võib olla tegemist ka ühekomponendiliste suurustega, s. o. skalaarse Hilberti ruumiga). Selleks vaatleme algul erijuhtu  $\epsilon_{\nu\sigma} = 0$ . Mittehomogeensest Lorentzi rühmast jääb siis ainult ruumi ja aja nihete rühm, mille esitused on antud valemitega (1.48) ja (1.50):

$$\psi' = (I + \epsilon_\nu P_\nu) \psi, \quad (2.123)$$

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} . \quad (2.124)$$

Erijuhul, kui  $\varepsilon_\nu = 0$ , saame mittehomogeensest Lorentzi rühmast Lorentzi omarühma, mille esituse  $n$ -dimensioonilises vektorruumis annab valem (2.5)

$$\psi'_1 = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma} S_{\nu\sigma} \right) \psi_1 \quad (2.125)$$

ja esituse skalaarses Hilberti ruumis valem (2.98):

$$\psi'_2 = \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma} \mathcal{L}_{\nu\sigma} \right) \psi_2 . \quad (2.126)$$

$S_{\nu\sigma}$  tähistavad siin  $n \times n$  infinitesimaalmatrikseid ja

$$\mathcal{L}_{\nu\sigma} = x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (2.127)$$

skalaarses Hilberti ruumis mõjuvaid operaatoreid. Kui moodustame esituste (2.125) ja (2.126) otsekorrutise, saame Lorentzi omarühma esituse Hilberti ruumis, mille moodustavad  $n$ -komponendilised vektorid, mille komponendid on ruumi- ja ajakoordinaatide funktsioonid:

$$\psi' = \left[ I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma} M_{\nu\sigma} \right] \psi ; \quad \psi = \psi_1 \psi_2 , \quad (2.128)$$

kus

$$M_{\nu\sigma} = x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\nu} + S_{\nu\sigma} . \quad (2.128)$$

Üldjuhul, kui kõik teisendust määravad parameetrid on nullist erinevad, saame teisendusele (2.122) vastava teisenduse Hilberti ruumis:

$$\psi' = \left[ I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma} M_{\nu\sigma} + \varepsilon_\nu \mathcal{P}_\nu \right] \psi , \quad (2.129)$$

kus

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \quad (2.130)$$

ja

$$M_{\nu\sigma} = x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - x_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\nu} + S_{\nu\sigma} . \quad (2.131)$$

Maatriksid  $S_{\nu\sigma}$  viimases avaldises rahuldavad vahetuseeskirju (2.6).

Lihtne on nüüd kontrollida, et operaatorid  $M_{\nu\sigma}$  ja  $\mathcal{P}_\sigma$  teisenduses (2.129) rahuldavad järgmisi vahetuseeskirju:

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = -\delta_{\alpha\mu} M_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} M_{\beta\mu} + \delta_{\beta\mu} M_{\alpha\nu} - \delta_{\beta\nu} M_{\alpha\mu} , \quad (2.132)$$

$$[M_{\alpha\beta}, \mathcal{P}_\nu] = \delta_{\beta\nu} \mathcal{P}_\alpha - \delta_{\alpha\nu} \mathcal{P}_\beta , \quad (2.133)$$

$$[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\sigma] = 0 . \quad (2.134)$$

Eeskirju (2.132) - (2.134) peavad rahuldama infinitesimaaloperaatorid kõigis mittehomogeense Lorentzi rühma esitustes.

Infinitesimaaloperaatoritest moodustatud operaatoreid, mis kommuteeruvad kõigi infinitesimaaloperaatoritega, nimetatakse rühma invariantideks. Rühma taandumatuid esitusi saab klassifitseerida rühma invariantide omaväärtuste järgi.

Eeltoodud vahetuseeskirjadest on näha, et

$$[\mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\lambda] = 0, \quad [\mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu, M_{\rho\sigma}] = 0 .$$

Järelikult on mittehomogeense rühma üheks invariantdiks

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu . \quad (2.133)$$

Edasi saab arvutada

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\rho} \mathcal{P}_\mu M_{\nu\rho}, \mathcal{P}_\sigma \right] &= \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\rho} \mathcal{P}_\mu [M_{\nu\rho}, \mathcal{P}_\sigma] = \\ &= \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\rho} \mathcal{P}_\mu (\delta_{\rho\sigma} \mathcal{P}_\nu - \delta_{\nu\sigma} \mathcal{P}_\rho) = 0 \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\left[ \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\varrho} \mathcal{P}_\mu M_{\nu\varrho}, M_{\alpha\beta} \right] = \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\varrho} [\mathcal{P}_\mu, M_{\alpha\beta}] M_{\nu\varrho} + \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\varrho} \mathcal{P}_\mu [M_{\nu\varrho}, M_{\alpha\beta}] = 0.$$

Rühma invariantideks on seega ka

$$W_\lambda = \frac{1}{2} e_{\lambda\mu\nu\varrho} \mathcal{P}_\mu M_{\nu\varrho}. \quad (2.134)$$

Viimased neli operaatorit  $W_\lambda$  omavahel aga ei kommuteeru.

Seepärast moodustame operaatori

$$W_\lambda W_\lambda = \frac{1}{4} e_{\lambda\mu\nu\varrho} e_{\lambda\alpha\beta\gamma} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\alpha M_{\nu\varrho} M_{\beta\gamma}, \quad (2.135)$$

mis kommuteerub nii kõigi operaatoritega  $W_\lambda$  kui ka operaatoriga  $\mathcal{P}^2$ . Et anda invariantidele (2.135) lihtsamat kuju, kasutame seost

$$\begin{aligned} e_{\lambda\mu\nu\varrho} e_{\lambda\alpha\beta\gamma} &= \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} \delta_{\varrho\gamma} - \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\gamma} \delta_{\varrho\beta} - \\ &- \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha} \delta_{\varrho\gamma} + \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\gamma} \delta_{\varrho\alpha} + \\ &+ \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu\alpha} \delta_{\varrho\beta} - \delta_{\mu\gamma} \delta_{\nu\beta} \delta_{\varrho\alpha}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Saame

$$W_\lambda W_\lambda = \frac{1}{2} \mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta M_{\alpha\nu} M_{\beta\nu}. \quad (2.137)$$

Asetame siia operaatori (2.131) konkreetse kuju. Lihtsa arvutuse teel veendume, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu \left( x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \left( x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) - \\ - \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \left( x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \left( x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu \left( x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) S_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathcal{P}_\nu \mathcal{P}_\nu S_{\alpha\beta} \left( x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) - \\ - \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \left( x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) S_{\beta\nu} - \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta S_{\alpha\nu} \left( x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Järelikult jääb invariantidist (2.137)

$$W_\lambda W_\lambda = \frac{1}{2} \mathcal{P}^2 S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} - \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta S_{\alpha\gamma} S_{\beta\gamma}, \quad (2.138)$$

või kui jagada invariantiga (2.133):

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} - \frac{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta}{\mathcal{P}^2} S_{\alpha\gamma} S_{\beta\gamma}. \quad (2.139)$$

Niisugusel kujul kasutame edaspidi mittehomoogeense Lorentzi rühma teist invarianti.

### § 10. Mittehomoogeense Lorentzi rühma invariantide füüsikaline interpretatsioon.

Eespool juba nägime, et suurust

$$P_\nu = -i\hbar \mathcal{P}_\nu \quad (2.140)$$

tuleb tõlgendada kui energia-impulsi operaatorit. Mittehomoogeense Lorentzi rühma esimese invarianti (2.133) võime siis valida

$$m_0^2 = -\frac{1}{c^2} P_\nu P_\nu, \quad (2.141)$$

mis ilmselt tähendab seisumassi. Mittehomoogeense Lorentzi rühma esimeseks invariantiks on seisumass (täpsemini seisumassi ruut).

Võtame nüüd omavahel kommuteeruvad operaatorid  $S^2 = -\hbar^2 \mathcal{M}$  ja  $S_3 = \frac{i\hbar^2}{m_0 c} W_3$  ning selgitame nende füüsikalist tähendust:

$$S^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \frac{P_\alpha P_\beta}{m_0^2 c^2} S_{\alpha\gamma} S_{\beta\gamma} \right], \quad (2.142)$$

$$S_3 = -\frac{\hbar}{2 m_0 c} e_{3\mu\nu\rho} P_\mu M_{\nu\rho}. \quad (2.143)$$

Uurime neid operaatoreid taustsüsteemis, kus impulsi operaatori kolm esimest komponenti on nullid. Impulsi neljanda komponendi jaoks saame siis valemist (2.141):

$$P_4 = im_0c.$$

Niisuguses taustsüsteemis (see on osakesega seotud taustsüsteem) saame (2.142) ja (2.143) asemel:<sup>1</sup>

$$S^2 = -\frac{\hbar^2}{2} S_{ik} S_{ik} = \hbar^2 S_x S_x \quad (2.144)$$

$$S_3 = -i\hbar S_{12}, \quad (2.145)$$

kus suurused

$$S_x = -ie_{k\ell m} S_{\ell m}$$

rahuldavad vahetuseeskirju (1.3). Osakesega seotud taustsüsteemis kirjeldab operaator  $S^2$  spinni ruutu, mille omaväärtusteks on  $\hbar^2 s(s+1)$ ,  $s=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  ja operaator  $S_3$  spinni kolmanda komponendi omaväärtustega  $\hbar s_3$ ,

$$s_3 = -s, -s+1, \dots, s-1, s.$$

Näeme, et osakesega seotud taustsüsteemis tähendab operaator  $S^2$  spinni ruudu operaatorit ja operaator  $S_3$  spinnvektori kolmanda komponendi operaatorit. Operaator (2.142) on siis spinni ruudu operaatori relativistlikuks üldistuseks ja operaator (2.145) - spinni kolmanda komponendi relativistlikuks üldistuseks. Analoogiliselt viimasele saame defineerida vektori

$$S_\lambda = -\frac{\hbar}{2m_0c} e_{\lambda\mu\nu\varrho} P_\mu M_{\nu\varrho}, \quad (2.146)$$

<sup>1</sup> Et osakesega seotud taustsüsteemis on osakese impulss null, siis on null ka tema orbitaalne pöördimpulss ja  $M_{ik} = S_{ik}$

mida tuleb vaadata kui spinni vektori relativistlikku üldis-  
tust. Osakesega seotud taustsüsteemis läheb vektori (2.146)  
neljas komponent nulliks ja kolm esimest komponenti annavad  
hariliku spinni vektori komponendid.

Et operaator  $S^2$  on invariant, siis tema omaväärtused  
Lorentzi teisenduste korral ei muutu. Seega võime ilma pike-  
mata väita, et täpselt samuti nagu operaatoril (2.144) aval-  
duvad ka operaatori (2.142) omaväärtused  $\frac{1}{2}\hbar^2 s(s+1)$ , kus  
 $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Esitusruumi dimensioon on seejuures an-  
tud  $n = 2s + 1$ .

Kokkuvõttes võime öelda: Mittehomogeense Lorentzi rüh-  
ma esitusi saab iseloomustada selle esituse kaudu kirjelda-  
tava osakese seisumassi ruuduga ja spinni ruuduga. Osakese  
seisumass ja spinni operaatorite relativistlik kuju järgne-  
vad otseselt mittehomogeensest Lorentzi rühmast. Seetõttu  
pakub see rühm füüsikas suurt huvi.

Vaatleme lõpuks spinni operaatori omaväärtusi paaril  
lihtsamal konkreetsel juhul:

1) Ühedimensioonilise esituse (skalaarse esituse) kor-  
ral  $S_{\alpha\beta} = 0$  ja järelikult ka  $S^2 = 0$ . See on esitus, mi-  
da iseloomustab arv  $s = 0$ .

2) Kahedimensioonilises esituses on infinitesimaalope-  
raatorid  $S_{\alpha\beta}$  antud valemitega (2.36). On lihtne kontrol-  
lida, et need maatriksid rahuldavad tingimust

$$S_{\alpha\nu} S_{\beta\nu} = -\frac{3}{4} \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.147)$$

millest saame

$$S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = -3. \quad (2.148)$$

Kui paneme need avaldised valemisse (2.142) ja arvestame seisumassi avaldist (2.141), saame

$$S^2 = \frac{3}{4} \hbar^2.$$

See tähendab, et antud juhul  $\zeta = \frac{1}{2}$ .

3) Vaatleme veel mittehomogeense Lorentzi rühma esitust neljadimensioonilises vektorruumis, kus lihtsuse mõttes valime baasi nii, et infinitesimaaloperaatoritel oleks kuju  $S_{\rho\sigma} = \mathcal{J}_{\rho\sigma}$  (vt. käesoleva peatüki § 5). Valemi (I; 2.82) kohaselt on siis maatriksi  $\mu$ -ndas reas ja  $\nu$ -ndas veerus element

$$(S_{\rho\sigma})^{\mu\nu} = \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu} \delta_{\sigma\mu}. \quad (2.149)$$

Arvutame valemi (2.142) järgi nüüd operaatori  $S^2$  elemendi, mis asetseb  $\mu$ -ndas reas ja  $\nu$ -ndas veerus:

$$(S^2)^{\mu\nu} = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{2} (S_{\rho\mu})^{\mu\lambda} (S_{\lambda\nu})^{\lambda\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{m_0^2 c^2} (S_{\mu\rho})^{\mu\lambda} (S_{\lambda\nu})^{\lambda\nu} \right],$$

või (2.149) arvestades

$$(S^2)^{\mu\nu} = 2\hbar^2 \left( \delta_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{m_0^2 c^2} \right). \quad (2.150)$$

Maatriks  $S^2$  ei ole ühikmaatriksi kordne, nagu see taandumatu esituse korral peaks olema. Mittehomogeense Lorentzi rühma esitus neljadimensioonilises ruumis on taanduv. Neljakomponendiline vektor on taandumatu suurus homogeense Lorentzi rühma suhtes, mittehomogeense rühma suhtes on ta aga taanduv suurus. Esitus neljadimensioonilises ruumis sisaldab nii  $\zeta=1$  kui ka  $\zeta=0$  esitust.

Leiame täiendava tingimuse, mis eraldaks vaadeldud esitusest spinnile 1 vastava esituse. Selleks kirjutame operaatorit

tori  $S^2$  omaväärtuse probleemi  $s=1$  korral:

$$(S^2)^{\mu\nu} \psi_\nu = 2 \hbar^2 \psi_\mu. \quad (2.151)$$

$\psi_\nu$  tähistab siin esitusruumi 4-komponendilist vektorit. Silmas pidades avaldist (2.150) saame

$$\left( \partial_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{m_0^2 c^2} \right) \psi_\nu = \psi_\mu,$$

millest järgneb

$$P_\mu P_\nu \psi_\nu = 0. \quad (2.152)$$

See tingimus on rahuldatud, kui  $P_\nu \psi_\nu = 0$ , s. o. kui

$$\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (2.153)$$

Vektori  $\psi_\nu$  4-dimensiooniline divergents peab olema null. Tingimust (2.153) nimetatakse Lorentzi tingimuseks. Kui me nõuame 4-dimensiooniliselt vektorilt, et ta täidaks Lorentzi tingimust, siis kirjeldab niisuguse vektor spinniga 1 olekuid.

#### K i r j a n d u s .

1. Наймарк, М.А., Линейные представления группы Лоренца, Москва 1958.
2. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Теория поля, Москва 1960.
3. Огневецкий, В.И., Полубаринов, И.В., Спин и симметрии взаимодействий, сб. "Международная зимняя школа теоретической физики", т. 2, ОИЯИ, 1964.

### III p e a t ü k k .

#### RELATIVISTLIKULT INVARIANTSED VÖRRANDID.

##### § 1. Välja võrrandid.

Võrranditega kirjeldame teoreetilises füüsikas füüsikaliste objektide käitumist. Näiteks mehhaanika probleemides huvitab meid punktmassi või keha liikumine ruumis. See tähendab, et võrrandid peavad meile määrama keha koordinaadid aja funktsioonidena. Tüüpiline on siin juht, kus otsitavaid funktsioone  $x_{\alpha}(t)$  on lõplik arv, mis väljendab seda, et mehhaanilise süsteemi vabadusastmete arv on lõplik.

19. sajandil andis J.C. Maxwell elektromagnetilise välja teooria. Väli on niisugune füüsikaline objekt, mis täidab pidevalt teatud ruumipiirkonna. Väli võib olla igas ruumpunktis erineva väärtusega, mis, üldiselt rääkides, pealegi muutub ajas. Otsitavat suurust, mille peavad määrama välja võrrandid, nimetatakse välja potentsiaaliks. Välja potentsiaal on üldiselt funktsioon ruumi- ja ajakoordinaatidest; näiteks elektromagnetilise välja korral on otsitavaks suuruseks  $A_{\nu}(\vec{x}, t)$ . Otsitav funktsioon oleneb ainult ajast sel juhul, kui fikseerime ruumikoordinaadi, s. o. kui vaatleme välja muutumist ühes kindlas ruumpunktis. Sel juhul saaksime üles-

ande, mis on analoogiline klassikalise mehhaanika ülesandele. Välja punkti fikseerimiseks on meil lõpmata palju võimalusi. Seega võime välja piltlikult ette kujutada kui mehhaanilist süsteemi, millel on lõpmata palju vabadusastmeid.

Koos välja mõistega tuli füüsikasse lähimõju printsiip. Ükski mõju ei saa levida silmapilkselt lõplikule kaugusele, vaid mõjud saavad levida ainult väljapunktist naaberpunkti. Kõik mõjud osakeste vahel saavad realiseeruda ainult välja vahendusel. Nii näiteks kannab elektromagnetiline väli elekt-rilaengutevahelist mõju üle.

Välja allikateks võivad olla osakesed, kuid väli võib eksisteerida looduses ka vabalt, ilma allikateta (näit. ruumis vabalt leviv elektromagnetiline laine).

Füüsika põhivõrrandite süsteem on järgmine:

1° Osakese liikumise võrrandid, mis kirjeldavad osakese liikumist antud väljas.

2° Välja võrrandid, mis kirjeldavad välja muutumist ajas ja ruumis ning välja allikate mõju väljale.

Teiselt poolt, välja ja osakese vaheliste protsesside uurimisel me kasutame järgmisi põhimõisteid:

a) vaba osake,

b) vaba väli,

c) interaktsioon osakese ja välja vahel, mis ilmneb ühelt poolt selles, et osake on välja allikaks ja teiselt poolt selles, et väli suunab osakese liikumist.

Õeldust on näha, et füüsika põhivõrrandite jaotamine osakese liikumise võrranditeks ja välja võrranditeks ei ole hästi põhjendatud, sest need mõlemad võrrandid kirjeldavad osakese ja välja interaktsioonist tingitud nähtusi.

Välja võrrandite ja liikumisvõrrandite ühendamine oli A. Einsteini üheks peamiseks taotluseks. A. Einstein tahtis luua puhast väljafüüsikat, milles osakest vaadeldakse kui niisugust kohta väljas, kus energia tihedus on väga suur. Kui ruumipunkti on mingil põhjusel kontsentreerunud energia  $E$ , siis on selles ruumipunktis olemas mass  $m = \frac{E}{c^2}$ . Seda programmi A. Einsteinil ei õnnestunud teostada. Väljavõrrandite ja liikumisvõrrandite ühendamine õnnestus tal ainult üldises relatiivsusteoorias - selgus, et liikumisvõrrandeid võib seal vaadelda kui välja võrrandite integreeruvustingimusi. Hiljem näidati, et välja võrrandite ja liikumisvõrrandite ühendamine üldises relatiivsusteoorias õnnestus ainult tänu sellele, et välja võrrandid on seal mittelineaarsed.

Kaasaegses füüsikas on osakese ja välja probleemidele leitud Einsteini taotlustest hoopis erinev lahendus. Väljade kvantteooriat, mille käsitlemisele me asume käesoleva kursuse kolmandas osas, võime vaadelda kui puhast väljafüüsikat. Ainult see väli ei ole klassikaline väli, vaid kvantiseeritud väli.

Vaatleme nüüd, missuguseid üldisi nõudeid peaksid täitma välja võrrandid:

1<sup>o</sup> Et kehtib lähimõju printsiip, siis huvitab meid välja käitumine ainult mingis punktis ja selle naaberpunktides. See tähendab, et välja võrrandid peavad olema diferentsiaalvõrrandid.

2<sup>o</sup> Mõõtmised näitavad, et elektromagnetilise välja korral kehtib superpositsiooniprintsiip: elektromagnetilised lai-

ned superponeeruvad ruumis nii, et nad üksteist ei sega. Piltlikult öeldes tähendab see seda, et valguskiire hajumine valguskiirelt ei ole võimalik. Superpositsiooniprintsiibi matemaatiliseks väljenduseks on nõue, et võrrandi lahendite lineaarkombinatsioon oleks võrrandile ka lahendiks. Niisuguse omadusega on ainult lineaarsed võrrandid. Superpositsiooniprintsiip nõuab seda, et elektromagnetilise välja võrrandid oleksid lineaarsed.

Analoogiliselt elektromagnetilisele väljale nõutakse harilikult, et superpositsiooniprintsiip kehtiks kõigi väljade korral. See nõue tähendab, et välja võrrandid peavad olema lineaarsed võrrandid.

3<sup>o</sup> Ruumi ja aja homogeensuse nõue ütleb, et kõigis ruumpunktides ja kõigil ajahetkedel peab väli ühesuguselt käituma. Sellest järgneb, et kordajad vabade väljade võrrandites ei tohi olla ruumikoordinaatide ja ajakoordinaadi funktsioonid. Välja võrrandid peavad olema konstantsete kordajatega võrrandid.

4<sup>o</sup> Relatiivsuspriintsiip nõuab, et välja võrrandid oleksid kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugused. See tähendab, et välja võrrandid peaksid olema Lorentzi teisenduste suhtes invariantset; nad peavad olema nn. relativistlikult invariantset võrrandid.

5<sup>o</sup> Üldiselt rääkides võivad välja võrrandid olla kõrgemat järku võrrandid. Praktiliselt on seni siiski piisanud ainult esimest ja teist järku võrranditest; ainult mõnel erijuhul on kasutatud ka kõrgemat järku võrrandeid.

Kokkuvõttes võime seega oelda:

Välja võrrandid peavad olema lineaarsed, konstantsete kordajatega relativistlikult invariantset esimest ja teist järku diferentsiaalvõrrandid.

Niisuguseid võrrandeid ei ole kuigi palju. Käesolevas peatükis me vaatlemegi olulisemaid neist. Meie kursuse ülejäänud osa eesmärgiks on relativistlikult invariantsete võrrandite füüsikaline interpreteerimine. Matemaatilises mõttes ühte ja sama võrrandit saab seejuures tõlgendada niiõelda kolmel tasemel:

- a) klassikalise väljateooria võrranditena,
- b) kvantmehhaanika võrranditena (kus nad faktiliselt on osakese liikumist kirjeldavad võrrandid),
- c) väljade kvantteooria võrranditena.

Esimesele nendest tõlgendustest on pühendatud kursuse järgmine peatükk, kusjuures eelkõige vaadeldakse elektromagnetilist välja (teistel väljadel otsest klassikalises füüsikas ilmnevat tähendust ei ole). Gravitatsiooniväli, mida saab ka klassikalise füüsika tasemel uurida, on mittelineaarne väli ja temaga me käesolevas kursuses ei tegele.

Relativistlikult invariantsete võrrandite tõlgendamisele kvantmehhaanika võrranditena ja väljade kvantteooria võrranditena on pühendatud käesoleva kursuse kolmas osa.

## § 2. Lagranžiaan ja välja võrrandid.

Välja võrrandid tuletame samuti, nagu me seda tegime osakese liikumise võrranditega, variatsioonprintsibi abil.

Kirjeldagu välja mõjuintegraal

$$S = \int L d^4x, \quad (3.1)$$

kus integreerimine toimub üle aeg-ruumi teatud piirkonna. Integraali all olev funktsioon (nn. lagranžiaani tihedus) peab olema Lorentzi teisenduste suhtes invariantne. Peale selle tuleb lagranžiaani tihedus valida igal konkreetsel juhul nii, et lagranžiaanist saadavad välja võrrandid rahuldaksid kõiki eelmises punktis loetletud tingimusi. Muuhulgas, kui me piirdume ainult teist järku võrranditega, peab  $L$  olema funktsioon välja potentsiaalidest  $\psi$  ja nende esimestest tuletistest aeg-ruumi koordinaatide järgi:

$$L = L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\right). \quad (3.2)$$

Kui  $L$  oleneks ka  $\psi$  kõrgemat järku tuletistest, saaksime välja võrrandid kõrgemat kui teist järku võrranditena.

Et saada mõjuintegraalist välja võrrandeid, varieerime viimast välja potentsiaalide ja nende tuletiste kui sõltumatu muutujate järgi. Nõudes siis, et mõjuintegraali variatsioon oleks null,

$$\delta S = 0, \quad (3.3)$$

saame tingimused, mis ongi välja võrranditeks.

Võrrandis (3.3) tuleb tegelikult varieerida lagranžiaani tihedust:

$$\int \delta L d^4x = 0$$

või pikemalt väljakirjutatuna

$$\int \left[ \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}\right)} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}\right) \right] d^4x = 0.$$

Esimese variatsiooni ja esimese tuletise võtmise järjekorda võib muuta, mistõttu eelmise võib kirjutada

$$\int \left[ \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial (\delta \psi)}{\partial x_i} \right] d^4 x = 0.$$

Silmas pidades seda, et integreerimispiirkonna äärtel variatsioonid  $\delta \psi = 0$ , saame ositi integreerimise teel

$$\int \left[ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} \right] \delta \psi d^4 x = 0.$$

Et see oleks rahuldatud mistahes variatsioonide  $\delta \psi$  korral, peab kehtima

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)} = 0. \quad (3.4)$$

Need ongi välja võrrandid. Niipea, kui on antud lagranžiaani tihedus (3.2), saame eeskirja (3.4) järgi leida välja võrrandid.

### § 3. Maxwelli võrrandid.

Vaatleme nüüd konkreetselt elektromagnetilist välja kirjeldavaid võrrandeid.

Eksperimendiga kooskõlalise teooria saame, kui valime vaba elektromagnetilise välja mõjuintegraali

$$S^{(v)} = \frac{i}{16\pi c} \int F_{\nu\sigma} F_{\nu\sigma} d^4 x, \quad (3.5)$$

kus  $F_{\nu\sigma}$  on elektromagnetilise välja tensor. Kordaja  $\frac{i}{16\pi c}$  valik määrab lihtsalt mõõtühikute kasutatava süsteemi.

Lisame nüüd mõjuintegraalile (I; 3.97) vaba elektromagnetilise välja mõjuintegraali. Saame

$$S = - \int_a^b m_0 c^2 d\tau + \frac{e}{c} \int_a^b A_\nu dx_\nu + \frac{i}{4\pi c} \int F_{\nu\sigma} F_{\nu\sigma} d^4x, \quad (3.6)$$

mis kirjeldab laetud osakesest ja elektromagnetilisest väljast koosnevat süsteemi. Kui me varieerime mõjuintegraali (3.6) osakese koordinaatide järgi, saame osakese liikumise võrrandid (I; 3.105). Käesoleval juhul huvitab meid aga välja võrrandite saamine, milleks tuleb mõjuintegraali (3.6) varieerida välja potentsiaalide  $A_\nu$  järgi. Et esimene liidetav mõjuintegraali avaldises välja potentsiaale ei sisalda, siis annab ta viimaste järgi varieerimisel nulli. Seejärel jätame selle liikme algusest peale kõrvale. Teist liiget mõjuintegraali avaldises teisendame aga järgmisel viisil:

Avaldame laenguelemendi  $de$  järgmiselt:

$$de = \rho dV, \quad (3.7)$$

kus  $\rho$  tähistab laengu tihedust ja  $dV$  ruumielementi. Kogulaengu saame eelmisest

$$e = \int \rho dV. \quad (3.8)$$

Kui asendame selle laengu avaldise mõjuintegraali teise liikmesse, saame viimasel kujul

$$\frac{e}{c} \int_a^b A_\nu dx_\nu = \frac{1}{c} \int \rho A_\nu dx_\nu dV = \frac{1}{c} \int \rho A_\nu \frac{dx_\nu}{dt} dV dt = -\frac{i}{c^2} \int \rho \frac{dx_\nu}{dt} A_\nu d^4x,$$

kus  $dV dt = -\frac{i}{c} dV dx_4 = -\frac{i}{c} d^4x$ . Suurust

$$\rho \frac{dx_\nu}{dt} = j_\nu \quad (3.9)$$

nimetatakse vooluvektoriks. On näha, et vooluvektori kolm esimest komponenti on laengutiheduse ja kiiruse korrutis, neljas komponent on aga võrdeline laengutihedusega:  $j_\nu = (\rho \vec{v}, ic\rho)$

Silmas pidades eelöeldut, saame mõjuintegraali (3.6) väljapotentsiaalidest sõltuva osa kujul

$$S' = -\frac{i}{c^2} \int j_\nu A_\nu d^4x + \frac{i}{16\pi c} \int F_{\nu\sigma} F_{\nu\sigma} d^4x. \quad (3.10)$$

Lagranžiaani tiheduseks on järelikut

$$L = -\frac{i}{c^2} j_\nu A_\nu + \frac{i}{16\pi c} F_{\nu\sigma} F_{\nu\sigma}. \quad (3.11)$$

Leiame nüüd väljavõrrandid antud konkreetset juhul:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu} = -\frac{i}{c^2} j_\nu,$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma})} = \frac{\partial L}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma})} = \frac{i}{8\pi c} F_{\alpha\beta} (\delta_{\nu\beta} \delta_{\alpha\sigma} - \delta_{\nu\alpha} \delta_{\beta\sigma}) = \frac{i}{4\pi c} F_{\sigma\nu}.$$

Võrrand (3.4) on antud konkreetset juhul seega järgmine:

$$\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{4\pi}{c} j_\nu. \quad (3.12)$$

Peale selle, arvestades et

$$F_{\nu\sigma} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma},$$

saab lihtsalt kontrollida järgmise tingimuse kehtivust:

$$\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\rho\nu}}{\partial x_\sigma} = 0. \quad (3.13)$$

Võrrandeid (3.12) ja (3.13) nimetataksegi Maxwelli võrranditeks. Nimetatud valemities on need võrrandid kirjutatud ilmselt relativistlikult invariantset kujul. Esiatgu tule-tati nad teiselt kujul, kus nende relativistlik invariant-sus nii ilmselt silma ei paista, kuid mis see-eest annavad võr-randite füüsikalisesest sisust parema pildi. Läheme ka käes-olevas üle sellele kujule. Selleks kirjutame need võrrandid

elektrivälja vektori ja magnetvälja vektori jaoks.

Võtame näiteks võrrandis (3.12)  $\nu = 1$ . Saame

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1.$$

Silmas pidades elektromagnetilise välja tensori komponentide konkreetset tähendust (I; 3.113), saame

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_1. \quad (3.14)$$

Analoogiliselt saame  $\nu = 2$  ja  $\nu = 3$  korral

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_2, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_3. \quad (3.16)$$

Kolm viimast võrrandit saame lühidalt kokku kirjutada järgmiselt:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.17)$$

Siia lisame veel võrrandi

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (3.18)$$

mille saame võrrandist (3.12), kui võtame  $\nu = 4$ .

Analoogiliselt saame võrrandist (3.13) järgmised võrrandid:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (3.20)$$

Võrrandeid (3.19) ja (3.20) nimetatakse Maxwelli võrrandite esimeseks paariks, võrrandeid (3.17) ja (3.18) Maxwelli võrrandite teiseks paariks. Erijuhul, kui ruumis voolud ja laengud puuduvad, saame eelmistest vaba elektromagnetilist välja kirjeldavad võrrandid:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\
 \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\
 \operatorname{div} \vec{H} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Näeme, et vabas elektromagnetilises väljas on magnetväli ja elektriväli võrdväärised - võrrandid (3.21) on  $\vec{E}$  ja  $\vec{H}$  suhtes sümmeetrilised. Allikate poolst erinevad elektriväli ja magnetväli teineteisest aga tunduvalt:

Võrrandist (3.17) on näha, et pöörismagnetvälja<sup>1</sup> põhjustajaks võib olla elektrivälja muutumine ajas või ka elektrivool.

Võrrandist (3.19) on näha, et pööriselektrivälja põhjustajaks on magnetvälja muutumine ajas.

Võrrand (3.18) ütleb, et pöörisvaba elektrivälja allikaks on elektrilaeng.

Võrrand (3.20) ütleb, et pöörisvabal magnetväljal allikaid ei ole, s. o. pöörisvaba magnetvälja üldse ei eksisteeri.

---

<sup>1</sup> Välja, mille rootor on nullist erinev, nimetatakse pöörisväljaks, ja välja, mille divergents on nullist erinev - allikväljaks. Pöörisvälja jõujooned on kinnised kõverad, allikvälja jõujooned lahtised kõverad. Et  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$  sõltumata välja  $\vec{A}$  konkreetsest kujust, siis võime järeelda, et pöörisväljal ei ole kunagi allikaid.

#### § 4. D'Alemberti võrrand.

Olgu meil antud elektromagnetilise välja võrrandid (3.12) ja (3.13):

$$\frac{\partial F_{\sigma\gamma}}{\partial x_\sigma} = -\frac{4\pi}{c} j_\gamma,$$

$$\frac{\partial F_{1\sigma}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma 1}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma\gamma}}{\partial x_\sigma} = 0.$$

Teine neist võrranditest on rahuldatud, kui valime otsitava suuruse  $F_{\sigma\gamma}$  kujul

$$F_{\sigma\gamma} = \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\gamma}.$$

Esimene võrranditest kujuneb sel juhul

$$\frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial x_\sigma \partial x_\sigma} - \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x_\gamma \partial x_\sigma} = -\frac{4\pi}{c} j_\gamma. \quad (3.22)$$

Oletame nüüd, et elektromagnetiline väli rahuldab Lorentzi tingimust (2.153):

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\sigma} = 0. \quad (3.23)$$

Sel juhul saame võrrandist (3.22)

$$\square A_\gamma = -\frac{4\pi}{c} j_\gamma, \quad (3.24)$$

kus

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_\sigma \partial x_\sigma}$$

tähistab d'Alemberti operaatorit.

Näeme, et elektromagnetilise välja potentsiaal  $A_\gamma$  rahuldab mittehomogeenset d'Alemberti võrrandit (3.24) koos Lorentzi tingimusega (3.23). Vaba elektromagnetiline väli rahuldab võrrandit

$$\square A_\gamma = 0 \quad (3.25)$$

koos lisatingimusega

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\sigma} = 0. \quad (3.26)$$

On lihtne näha, et d'Alemberti võrrand on relativistlikult invariantne võrrand: kasutades valemeid (2.80), (2.81) ja Lorentzi teisenduse ortogonaalsusetingimusi, järgneb võrranditest

$$\frac{\partial^2 A'_\nu}{\partial x'_\sigma \partial x'_\sigma} = -\frac{4\pi}{c} j'_\nu, \quad \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = 0$$

otsekohe

$$\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\sigma \partial x_\sigma} = -\frac{4\pi}{c} j_\nu, \quad \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

Neil võrranditel on ühesugune kuju kõigis inertsiaalsüsteemides, mis tähendabki võrrandite relativistlikku invariantust.

Kui vaadelda vaba elektromagnetilist välja kirjeldavat d'Alemberti võrrandit (3.25) operaatoritevahelise võrrandina

$$\square = 0, \quad (3.27)$$

siis saame sellele võrrandile anda huvitava füüsikalise interpretatsiooni. Energia-impulsi operaatori (1.52) kaudu saame võrrandile (3.27) anda kuju

$$P_\nu P_\nu = 0. \quad (3.28)$$

See on relatiivsusteooriast tuntud tingimus (I; 3.85) energia- ja impulsivektori jaoks erijuhul, kui seisumass on null,  $m_0=0$ .

D'Alemberti võrrandile on iseloomulik, et võrrandis esinev operaator  $\square$  on relativistlikult invariantne operaator. Võrrand (3.24) ei esita mingeid tingimusi selle kohta, mis tüüpi suurus peab olema funktsioon, millele see operaator mõ-

jub. D'Alemberti võrrandi võib üles kirjutada ka skalaari, spinori jne. jaoks. Mõjudes operaatorseosega (3.27) skalaarile  $\psi$ , saame võrrandi

$$\square \psi = 0. \quad (3.29)$$

Kõige rohkem on rakendusi leidnud siiski d'Alemberti võrrand vektori jaoks koos lisatingimusega; need kirjeldavad elektromagnetilist välja.

### § 5. Klein-Gordoni võrrand.

Belmises punktis toodud arutlustest hakkab kohe silma lihtne võimalus d'Alemberti võrrandi üldistamiseks.

Kirjutame seose (3.28) niisuguse juhu jaoks, kui seisumass ei ole null. Saame

$$P_\nu P_\nu + m_0^2 c^2 = 0, \quad (3.30)$$

või silmas pidades energia-impulsi operaatori kuju (1.52)

$$\square - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0. \quad (3.31)$$

Selles seoses esinevad operaatorid on jällegi relativistlikult invariantid, nii et me võime selle operaatorseosega mõjuda mistahes tüüpi suurusele. Mõjudes seosega (3.31) skalaarile, saame Klein-Gordoni võrrandi skalaari jaoks

$$\left( \square - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0. \quad (3.32)$$

Niisugune võrrand sobib näiteks  $\pi$ -mesonite kirjeldamiseks. Kui rakendame seost (3.31) vektorile  $\psi_\nu$ , saame

$$\left(\square - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi_0 = 0, \quad (3.33)$$

Koos Lorentzi tingimusega

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} = 0. \quad (3.34)$$

sobib see võrrand spinniga 1 mesonite kirjeldamiseks. Analoomiliselt saab välja kirjutada Klein-Gordoni võrrandi tensorite ja teiste suuruste jaoks.

Analoomiliselt d'Alemberti võrrandile võib üles kirjutada ka mittehomogeense Klein-Gordoni võrrandi: näiteks (3.32) asemel

$$\left(\square - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = -\frac{4\pi}{c}q, \quad (3.34)$$

kus  $q$  tähistab välja  $\psi$  allikate tihedust.

Nagu kõiki relativistlikult invariantseid võrrandeid, võib ka Klein-Gordoni võrrandit saada variatsioonprintsiiibi kasutamisel. Et leida näiteks võrrandit (3.35), tuleb valida lagranžiaani tihedus järgmiselt

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} - \frac{m_0^2 c^2}{2\hbar^2} \psi^2 + \frac{4\pi}{c} q \psi. \quad (3.36)$$

Eeskirja (3.4) abil saame siit lihtsalt võrrandi (3.35).

Komplitseeritum on probleem, kui tahame saada variatsioonprintsiiibi abil võrrandit (3.33) koos lisatingimusega (3.34). Sel juhul tuleb lagranžiaani tihedus valida järgmine:

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} \right) \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} \right) - \frac{m_0^2 c^2}{2\hbar^2} \psi_0 \psi_0. \quad (3.37)$$

Siit saame välja võrrandi

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} \right) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi_0 = 0. \quad (3.38)$$

Võtame sellest võrrandist tuletise  $x_1$  järgi. Saame

$$\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} = 0. \quad (3.39)$$

Eeldades, et  $m_0 \neq 0$ , järgnebki siit Lorentzi tingimus (3.34) ja võrrand (3.38) kujuneb (3.33).

## § 6. Diraci võrrand.

Nägime, et Klein-Gordoni võrrand sobib nullist erineva seisumassiga osakese kirjeldamiseks. Kui seda võrrandit rakendati aga elektroniteoorias, selgus, et teooria tulemused ei ole kooskõlas eksperimendiga. Uue võrrandi, mis elektroni käitumist väga hästi kirjeldas, andis P.A.M. Dirac 1928. aastal. Tema mõttekäikude sisu oli järgmine:

Elektromagnetilist välja me võime kirjeldada kas d'Alemberti võrrandiga, mis on teist järku võrrand potentsiaalide jaoks, või Maxwelli võrranditega, mis on esimest järku võrrandid väljatugevuste jaoks. Nendel võrranditel on oluline erinevus. Otsitava funktsiooni käitumine koordinaatide teisendamisel ei ole d'Alemberti võrrandis millegagi määratud (nägime, et selle võrrandi võime kirjutada nihästi vektori kui ka skalaari jaoks), Maxwelli võrrandid määravad aga otsitava funktsiooni teisenemiseloomu täpselt (näit. rootorit või divergentsi me saame võtta ainult kolmekomponendilisest vektorist, mitte aga skalaarist). Selles mõttes sisaldab esimest järku võrrand väljatugevuste jaoks rohkem informatsiooni

kui teist järku võrrand väljapotentsiaalide jaoks.

Elektroniteoorias võiks olla analoogiline olukord. Klein-Gordoni võrrandit võime vaadelda kui teist järku võrrandit potentsiaali tüüpi suuruste jaoks. Meie eesmärgiks oleks aga leida sellele vastav esimest järku võrrand, mis määraks väljatugevuse tüüpi suurused. Ülesanne on vastupidine sellele, mida me uurisime käesoleva peatüki neljandas punktis. Seal me näitasime, kuidas Maxwelli võrranditest saab d'Alemberti võrrandi, mis koos lisatingimusega on kujus (3.22). Et teostada nimetatud punktis kirjeldatule vastupidist üleminekut, kirjutame võrrandi (3.22) järgmiselt

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left( \delta_{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - \delta_{\sigma\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) A_\sigma = - \frac{4\pi}{c} j_\nu,$$

millega oleme võrrandis esineva teist järku diferentsiaaleoperaatori lahutanud kaheks lineaarteguriks. Uueks otsitavaks funktsiooniks võtame nüüd suurused

$$F_{\sigma\nu} = \left( \delta_{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - \delta_{\sigma\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) A_\sigma = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu},$$

mis annabki meile Maxwelli võrrandid.

Teostame nüüd sama protseduuri Klein-Gordoni võrrandiga

$$\left( \square - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0. \quad (3.40)$$

Lahutame selles võrrandis esineva teist järku diferentsiaaloperaatori kaheks lineaarteguriks:

$$\left( \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \left( \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \phi = 0, \quad (3.41)$$

kus suurused  $\gamma^\nu$  on esialgu tundmatud suurused, mis tuleb määrata nii, et võrrand (3.41) langeks ühte võrrandiga (3.40).

On lihtne näha, et selleks peavad suurused  $\gamma^\nu$  rahuldama järgmisi vahetuseeskirju:

$$\gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\nu = 2\delta_{\nu\sigma}. \quad (3.42)$$

Analoogiliselt sellele, nagu tegime eelmisel juhul, loeme nüüd uuteks otsitavateks suurusteks

$$\left( \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0.$$

Võrrandist (3.41) saame siis

$$\left( \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0, \quad (3.43)$$

mis kannabki Diraci võrrandi nime.

Uurime nüüd lähemalt suuruste  $\gamma^\nu$  iseloomu. Me näeme, et suuruste  $\gamma^\nu$  vahetuseeskiri ühtib bispiinorite ruumis mõjuvate maatriksite vahetuseeskirjaga (2.51). Võrrandis (3.43) esinevad suurused  $\gamma^\nu$  võime valida neljarealistele maatriksitena, mis mõjuvad bispiinoritele. Siit järgneb otsekohe, et suurus  $\psi$  peab olema bispiinor (vt. ka järgmist punkti). Samuti nagu elektromagnetilise välja võrrandite korral, nii määras ka siin üleminek esimest järku võrrandile otsitava suuruse teisenemisomadused.

Kas suuruste  $\gamma^\nu$  määramine neljarealistele maatriksitena on ainuke võimalus? Võib-olla on maatriksitel  $\gamma^\nu$  veel teisi taandumatuid esitusi. Lihtne on näidata, et ei ole. Maatriksite  $\gamma^\nu$  esitus bispiinorite ruumis on ainuke.

Vaatleme hulka, kuhu kuuluvad maatriksid  $\gamma^\nu$  ja kus algebraliseks operatsiooniks on maatriksite korrutamine, mida loeme määratuks märgi täpsusega. Tuginedes eeskirjale (3.42) on lihtne veenduda, et sellel hulgal on ainult 16 erinevat elementi:

ühikmaatriks I, mille saame mistahes  $\gamma^\nu$  korrutamisel iseendaga

neli maatriksit  $\gamma^i$ ,  
 kuus maatriksit  $i\gamma^j\gamma^k$ ,  $j < k$ ,  
 neli maatriksit  $i\gamma^j\gamma^k\gamma^l$ ,  $j < k < l$ ,  
 üks maatriks  $\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l$ .

Et loetletud maatriksite hulgas on ühikmaatriks ja igale maatriksile vastav pöördmaatriks, siis on meil tegemist 16. järku lõpliku rühmaga. Esituste teooriast on teada lause, mis ütleb, et lõpliku rühma taandumatute esituste dimensioonide ruutude summa on võrdne rühma järguga. Et meie juhul  $16 = 4^2$ , siis ei saa teisi taandumatuid esitusi peale neljadimensioonilise esituse sellel rühmal olla.

Moodustame võrrandist (3.43) kaasvõrrandi. Saame

$$-\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \gamma^\nu + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\kappa} \gamma^\kappa - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi^* = 0, \text{ sest } \gamma^{\nu*} = \gamma^\nu.$$

Korrutades seda võrrandit paremalt suurusega  $\gamma^\mu$  ja pidades silmas, et  $-\gamma^\mu \gamma^\kappa = \gamma^\kappa \gamma^\mu$ , saame võrrandi

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma^\nu + \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} = 0, \quad (3.44)$$

kus

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^4. \quad (3.45)$$

Võrrandit (3.44) nimetatakse kaasvõrrandiks võrrandile (3.43).

Nii Diraci võrrandi kui ka tema kaasvõrrandi saame variatsioonprintsipi rakendamisel, kui valime lagranžiaani tiheduse järgmisel kujul:

$$L = -\frac{i\hbar}{2} \left( \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma^\nu \psi \right) + m_0 c i \bar{\psi} \psi. \quad (3.46)$$

Kui varieerime seda lagranžiaani  $\bar{\psi}$  järgi, saame võrrandi

(3.43), kui aga varieerime  $\psi$  järgi, saame võrrandi (3.44) (võrrandid saame eeskirja (3.4) kohaselt).

### § 7. Diraci võrrandi relativistlik invariantus.

Seame probleemi üldisemalt:

Olgu meil antud esimest järku diferentsiaalvõrrand

$$\left(\Gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \pm \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\psi = 0, \quad (3.47)$$

kus  $\Gamma^\nu$  on teatud maatriksid, mis mõjuvad suuruste  $\psi$  ruumis. Lorentzi teisenduste korral teisenegu suurused  $\psi$  järgmise eeskirja kohaselt:

$$\psi' = D\psi, \quad (3.48)$$

kus lõpmata väikeste teisenduste korral

$$D = I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma} S_{\nu\sigma}. \quad (3.49)$$

$S_{\nu\sigma}$  tähistab siin infinitesimaaloperaatoreid. Uurime nüüd, missugustel tingimustel on võrrand (3.47) relativistlikult invariantne, s. o. missugustel tingimustel võrrandist

$$\left(\Gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \pm \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\psi' = 0 \quad (3.50)$$

järgneb võrrand (3.47). Et

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = a_{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\sigma},$$

siis saame võrrandile (3.49) anda kuju

$$\left(\Gamma^\nu a_{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \pm \frac{m_0 c}{\hbar}\right)D\psi = 0. \quad (3.51)$$

ui korrutame seda vasakult operaatoriga

$$D^{-1} = I - \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\sigma} S_{\nu\sigma},$$

saame

$$\left( D^{-1} \Gamma^{\nu} D a_{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \pm \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0.$$

See võrrand langeb ühte võrrandiga (3.47) juhul, kui

$$D^{-1} \Gamma^{\nu} D a_{\nu\sigma} = \Gamma^{\sigma}. \quad (3.52)$$

Lõpmata väikeste teisenduste korral  $a_{\nu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma}$ .

Valemi (3.52) saame nüüd lihtsalt ümber kirjutada

$$\left( I - \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\lambda} S_{\rho\lambda} \right) \Gamma^{\nu} \left( I + \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\lambda} S_{\rho\lambda} \right) (\delta_{\nu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma}) = \Gamma^{\sigma}$$

või siit

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\lambda} (S_{\rho\lambda} \Gamma^{\sigma} - \Gamma^{\sigma} S_{\rho\lambda}) + \varepsilon_{\nu\sigma} \Gamma^{\nu} = 0.$$

Kirjutame viimase liikme selle võrduse vasakul poolel ümber järgmiselt:

$$\varepsilon_{\nu\sigma} \Gamma^{\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} \Gamma^{\rho} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\lambda} (\delta_{\sigma\lambda} \Gamma^{\rho} - \delta_{\rho\sigma} \Gamma^{\lambda}).$$

Asendame saadud avaldise eelmisesse võrdusesse ja peame silmas, et viimane peab kehtima mistahes  $\varepsilon_{\rho\lambda}$  korral. Selleks

$$S_{\rho\lambda} \Gamma^{\sigma} - \Gamma^{\sigma} S_{\rho\lambda} = \delta_{\sigma\lambda} \Gamma^{\rho} - \delta_{\rho\sigma} \Gamma^{\lambda}. \quad (3.53)$$

Saame tingimuse, mida peavad rahuldama maatriksid  $\Gamma^{\sigma}$  ja infinitesimaaloperaatorid, et esimest järku võrrand (3.47) oleks relativistlikult invariantne.

Diraci võrrandi korral

$$\Gamma^{\sigma} = \gamma^{\sigma} \quad \text{ja} \quad S_{\rho\lambda} = \frac{1}{4} (\gamma^{\rho} \gamma^{\lambda} - \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho})$$

ning tingimus (3.53) kujuneb

$$\frac{1}{4} (\gamma^{\rho} \gamma^{\lambda} \gamma^{\sigma} - \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} - \gamma^{\sigma} \gamma^{\rho} \gamma^{\lambda} + \gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho}) = \delta_{\sigma\lambda} \gamma^{\rho} - \delta_{\rho\sigma} \gamma^{\lambda}.$$

Vahetuseeskirjade (3.42) rakendamisel on lihtne näha, et viimane tingimus on täidetud. Järelikult on Diraci võrrand (3.43) Lorentzi teisenduste suhtes invariantne.

### § 8. Kemmer-Duffini võrrand.

Peale Diraci võrrandile vastava juhu on tingimusel (3.53) veel teine lahend. On kerge veenduda, et see tingimus on täidetud, kui valida

$$\Gamma^\nu = \beta^\nu \quad (3.54)$$

ja

$$S_{\rho\lambda} = \beta^\rho \beta^\lambda - \beta^\lambda \beta^\rho, \quad (3.55)$$

kusjuures maatriksid  $\beta^\nu$  rahuldavad vahetuseeskirju

$$\beta^\nu \beta^\sigma \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\sigma \beta^\nu = \delta_{\nu\sigma} \beta^\lambda + \delta_{\sigma\lambda} \beta^\nu. \quad (3.56)$$

See tähendab, et esimest järku võrrand

$$\left( \beta^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \psi = 0 \quad (3.57)$$

on relativistlikult invariantne võrrand.

Uurime nüüd lähemalt maatriksite  $\beta^\nu$  iseloomu. Arvutus näitab, et maatriksid  $\beta^\nu$  võime valida järgmises kujus:

$$\beta^\nu = \frac{1}{2} \left[ (\gamma^\nu \times I) + (I \times \gamma^\nu) \right]. \quad (3.58)$$

Vahetuseeskirju (3.56) rahuldavad 16-realised maatriksid

(3.58). Esiialgu pole meil veel selge, kas maatriksite

esitus (3.58) on taanduv või taandumatu. Et lahendada seda

probleemi, vaatame, kui palju on maatriksite  $\beta^\nu$  erinevaid korrutisi. Kui lisame neile korrutistele ka ühikmaatriksi,

siie saame järgmised avaldised:

- 1 ühikmaatriks  $I$  ,  
 4 maatriksit  $\beta^v$  ,  
 16 maatriksit  $\beta^v \beta^\sigma$  ,  
 24 maatriksit  $\beta^v \beta^\sigma \beta^\rho$  ,  $v < \rho$  ,  
 36 maatriksit  $\beta^v \beta^\sigma \beta^\rho \beta^\tau$  ,  $v < \rho$  ,  $\sigma < \lambda$  , (3.59)  
 24 maatriksit  $\beta^v \beta^\sigma \beta^\rho \beta^\lambda \beta^\tau$  ,  $v < \rho < \tau$  ,  $\sigma < \lambda$  ,  
 16 maatriksit  $\beta^v \beta^\sigma \beta^\rho \beta^\lambda \beta^\tau \beta^\delta$  ,  $v < \rho < \tau$  ,  $\sigma < \lambda < \delta$  ,  
 4 maatriksit  $\beta^1 \beta^2 \beta^3 \beta^4 \beta^5 \beta^6$  ,  $\sigma < \lambda < \delta$  ,  
 1 maatriks  $\beta^1 \beta^2 \beta^3 \beta^4 \beta^5 \beta^6 \beta^7 \beta^8$  .

Kokku saame seega ainult 126 erinevat korrutist. Et kõik need maatriksid on linearselt sõltumatud, siis võime neid baasimaatriksiteks valida.

On selge, et 126 baasimaatriksist ei piisa meelevaldse  $16 \times 16$  maatriksi üleskirjutamiseks. Esitus (3.58) ei saa olla taandumatu esitus, vaid peab taanduma niisuguste taandumatute esituste summaks, et taandumatute esituste maatriksitel oleks kokku ainult 126 elementi. Sel juhul on võimalik esitusruumides mõjuvaid meelevaldseid maatrikseid baasimaatriksite (3.59) lineaarkombinatsioonina avaldada.

Et

$$126 = 10^2 + 5^2 + 1^2 ,$$

siis võiks oodata, et maatriksite  $\beta^v$  taandumatud esitused on üherealine, viierealine ja kümnerealine esitus. Nii see tõepoolest on.

Maatriksite  $\beta^v$  10-realine taandumatu esitus on antud



$$\beta^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Need maatriksid (mis analoogiliselt Diraci maatriksitele on määratud unitaarteisenduse täpsusega) kannavad 10-realiste Kemmer-Duffini maatriksite nime. Peale vahetuseeskirja (3.56) rahuldavad need maatriksid tingimust

$$\beta^m \beta^v \beta^j \beta^m = 6. \quad (3.60)$$

5-realised Kemmer-Duffini maatriksid võib (jällegi unitaarteisenduse täpsusega) välja kirjutada

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Peale vahetuseeskirja (3.56) rahuldavad need maatriksid veel tingimust

$$\beta^{\mu} \beta^{\nu} \beta^{\nu} \beta^{\mu} = 4. \quad (3.61)$$

Ja lõpuks saame üherealise esituse Kemmer-Duffini maatriksitele, kui võtame  $\beta^{\nu} = 0$ . See on triviaalne esitus, mis füüsikaliselt ei paku huvi.

Näeme, et meil on olemas kaks Kemmer-Duffini võrrandit (3.57). Üks neist määrab 5-komponendilise suuruse  $\psi^{(s)}$ , teine 10-komponendilise suuruse  $\psi^{(10)}$  vastavalt sellele, kas me asetame võrrandisse maatriksite  $\beta^{\nu}$  asemele 5-realised või 10-realised maatriksid.

Kemmer-Duffini maatriksitel puuduvad pöördmaatriksid, mistõttu Kemmer-Duffini võrrandite uurimine on keerukam kui Diraci võrrandi uurimine. Kemmer-Duffini teoorias mängivad olulist osa järgmised regulaarsed maatriksid:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2\beta^1\beta^1 - 1, & \eta_3 &= 2\beta^3\beta^3 - 1, \\ \eta_2 &= 2\beta^2\beta^2 - 1, & \eta_4 &= 2\beta^4\beta^4 - 1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

ja nendest moodustatud maatriks

$$\eta_5 = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4. \quad (3.63)$$

Need maatriksid rahuldavad järgmisi vahetuseeskirju:

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = \eta_4^2 = I, \quad \eta_{\nu} \eta_{\sigma} = \eta_{\sigma} \eta_{\nu}; \quad (3.64)$$

$$\eta_{\nu} \beta_{\sigma} = -\beta_{\sigma} \eta_{\nu}, \quad \sigma \neq \nu; \quad \eta_{\nu} \beta_{\sigma} = \beta_{\sigma} \eta_{\nu}, \quad \sigma = \nu; \quad (3.65)$$

$$\eta_{\sigma} \beta_{\nu} + \beta_{\nu} \eta_{\sigma} = 0. \quad (3.66)$$

Et  $\beta^{\nu\mu} = \beta^{\nu}$ , siis kaasvõrrandi moodustamine võrrandist (3.57) annab

$$-\frac{\partial \psi^*}{\partial x_4} \beta^4 + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \beta^k + \frac{m_0 c}{\hbar} \psi^* = 0.$$

Korrutame seda võrrandit paremalt maatriksiga  $\eta_4$ . Arvestades vahetuseeskirju (3.65), saame siis kaasvõrrandi võrrandile (3.57):

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \beta^\nu - \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} = 0, \quad (3.67)$$

kus

$$\bar{\psi} = \psi^* \eta_4. \quad (3.68)$$

Võrrandid (3.57) ja (3.67) võib saada ka variatsioonprintsiibi rakendamisel, kui valida lagranžiaani tihedus järgmisel kujul:

$$H \sim \frac{i}{2} \left( \bar{\psi} \beta^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \beta^\nu \psi \right) + \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} \psi. \quad (3.69)$$

Varieerides seda lagranžiaani tihedust  $\bar{\psi}$  järgi, saame võrrandi (3.57) ja varieerides  $\psi$  järgi, saame võrrandi (3.67).

#### Kirjandus.

1. Наймарк, М.А., Линейные представления группы Лоренца, Москва 1958.
2. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Теория поля, Москва 1960.
3. Умэдзава, Х., Квантовая теория поля, Москва 1958.

## IV p e a t ü k k .

### RELATIVISTLIKULT INVARIANTSETE VÖRRANDITE KÄSITLEMINE KLASSIKALISE VÄLJATEOORIA VÖRRANDITENA. KLASSIKALINE ELEKTRODÜNAAMIKA.

#### § 1. Noetheri teoreem.

Urime nüüd eelmises peatükis leitud relativistlikult invariantseid võrrandeid klassikalist välja määravate võrranditena. Väljateoorias mängib erilist osa Noetheri teoreem, mille oluline sisu avaldub juba klassikalises väljateoorias. Sellepärast pühendamegi esimese osa käesolevast peatükist selle teoreemi ja mõningate tema järelduste uurimisele.

Noetheri teoreem: Kui on rahuldatud välja võrrandid ja mõjuintegraal on invariantne  $s$ -parameetrilise pidevate teisenduste rühma suhtes, siis on väljal  $s$  liikumise integraali (ajas jäävat suurust).

Neid ajas jäävaid suurusi nimetatakse ka välja invariantideks ja nad avaldavad teatud kombinatsioonidena välja potentsiaalidest ja nende tuletistest.

Noetheri teoreemi tõestamiseks vaatleme koordinaatide

lõpmata väikest teisendust, mis on määratud  $g$  väikese para-  
meetriga  $\delta\omega^i$  :

$$x'_j = x_j + \delta x_j, \quad (4.1)$$

kus

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^g X_{ij} \delta\omega^i. \quad (4.2)$$

$X_{ij}$  on siin suurused, mille konkreetne kuju määrab konkreet-  
se teisenduse.

Teisendusele (4.1) vastaku välja potentsiaalide  $\varphi_i(x)$   
teisendus

$$\varphi'_i(x') = \varphi_i(x) + \delta\varphi_i, \quad (4.3)$$

kus

$$\delta\varphi_i = \sum_{j=1}^g \psi_{ij} \delta\omega^j. \quad (4.4)$$

Suuruse  $\psi_{ij}$  konkreetne kuju oleneb jällegi konkreetsest  
teisendusest. Indeks  $i$  valemities (4.3), (4.4) ja ka edas-  
pidi nummerdab välja potentsiaali komponente ja omandab nii  
palju väärtusi, kui palju neid komponente on (mitte tingima-  
ta ainult kolm väärtust). Argument ( $x$ ) tähistab seda, et  
välja potentsiaal on ruumikoordinaatide ja ajakoordinaadi  
funktsioon.

Nõuame nüüd, et teisenduse (4.1) korral oleks mõjuinteg-  
raali variatsioon null:

$$\delta \int L(x) d^4x = 0. \quad (4.5)$$

Antud juhul koosneb mõjuintegraali variatsioon nii lagranži-  
aani tiheduse variatsioonist kui ka integreerimispiirkonna  
variatsioonist. Valemi (4.5) võime pikemalt välja kirjutada:

$$\int \delta L(x) d^4x + \int L(x) \delta(d^4x) = 0. \quad (4.6)$$

Integreerimispiirkonna variatsiooni arvutame järgmiselt:

Et integreerimispiirkonna varieerimine tähendab iga koordinaadi varieerimist

$$dx_\nu \rightarrow dx_\nu + \delta(dx_\nu),$$

siis

$$\delta(d^4x) = \frac{d^4x}{dx_\nu} \delta(dx_\nu) = d^4x \frac{\partial(\delta x_\nu)}{\partial x_\nu}. \quad (4.7)$$

Lagranžiaani variatsiooni saame arvutada

$$(4.8)$$

$$\delta L = \bar{\delta} L + L'(x') - L'(x),$$

kus

$$\bar{\delta} L = L'(x) - L(x) \quad (4.9)$$

tähistab lagranžiaani kuju variatsiooni. Et tegemist on lõpmata väikeste teisendustega, piirdume reaksarendustes ainult kuni esimest järku liikmetega. Saame

$$L'(x') - L'(x) = \frac{\partial L'}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = \frac{\partial L}{\partial x_\nu} \delta x_\nu, \quad (4.10)$$

sest lagranžiaan  $L'$  erineb lagranžiaanist  $L$  ainult esimest järku lõpmata väikeste liikmete poolest.

Lagranžiaani kuju variatsioon avaldub

$$\begin{aligned} \bar{\delta} L &= L(\psi_i + \bar{\delta}\psi_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu} + \bar{\delta}(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu})) - L(\psi_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu}) = \\ &= \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial \psi_i} \bar{\delta}\psi_i + \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu})} \bar{\delta}(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu}) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

kus  $\bar{\delta}\psi_i$  tähistab väljapotentsiaali kuju variatsiooni. Kasutame nüüd välja võrrandit (3.4) ja muudame variatsiooni ja

tuletise operatsioonide järjekorra. Siis saame eelmise asemel

$$\bar{\delta}L = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu})} \bar{\delta} \psi_i \right]. \quad (4.12)$$

Järelikult võime  $\delta L$  avaldise (4.8) kirjutada

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu})} \delta \psi_i \right] + \frac{\partial L}{\partial x_\nu} \delta x_\nu. \quad (4.13)$$

Asetades avaldised (4.7) ja (4.13) valemisse (4.6) saame nüüd

$$\int d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu})} \bar{\delta} \psi_i + L \delta x_\nu \right] = 0. \quad (4.14)$$

Jääb veel üle leida välja potentsiaali kuju variatsioon.

Analoogiliselt valemile (4.8) saame

$$\bar{\delta} \psi_i = \delta \psi - (\psi'(x') - \psi'(x)) = \delta \psi - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} \delta x_\nu, \quad (4.15)$$

või valemite (4.2) ja (4.4) kasutamisel

$$\bar{\delta} \psi_i = \sum_{j=1}^s \left( \psi_{ij} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\rho} X_j^\rho \right) \delta \omega^j. \quad (4.16)$$

Tingimuse (4.14) saame nüüd kirjutada

$$\int d^4x \sum_{j=1}^s \frac{\partial \theta_j^\nu}{\partial x_\nu} \delta \omega^j = 0, \quad (4.17)$$

kus

$$\theta_j^\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu})} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\rho} X_j^\rho - \psi_{ij} \right) - L X_j^\nu. \quad (4.18)$$

Et tingimus (4.17) kehtiks mistahes  $\delta \omega^j$  korral, peab kehtima

$$\frac{\partial \theta_j^\nu}{\partial x_\nu} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.19)$$

Suuruse  $\theta_j^\nu$  neljadimensiooniline divergents peab võrduma

nulliga. Tingimusest (4.19) saame lihtsalt määrata jäävad suurused. Selleks integreerime seda tingimust üle kogu ruumi. Saame

$$\int \frac{\partial \theta_j^v}{\partial x_k} dV + \int \frac{\partial \theta_j^k}{\partial x_k} dV = 0. \quad (4.20)$$

Gaussi lause põhjal teisendame teise nendest integraalidest pindintegraaliks

$$\int \frac{\partial \theta_j^k}{\partial x_k} dV = \oint \theta_j^k dS_k, \quad (4.21)$$

kus integreerimine toimub üle lõpmatutes oleva pinna. Väljateoorias oletatakse alati, et lõpmatutes on kõik välja potentsiaalid nullid. Sel juhul on lõpmatutes ka  $\theta_j^k = 0$  ja integraal (4.21) annab nulli. Tingimusest (4.20) saame

$$\frac{d}{dx_k} \int \theta_j^k dV = 0, \quad (4.22)$$

mis ütleb, et

$$C_j = \int \theta_j^k dV, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (4.23)$$

on ajas jääv suurus.

Nõudest, et mõjuintegraal oleks invariantne  $S$ -parameetrilise teisenduse suhtes, saime  $S$  jäävat suurust  $C_j$ . Sellega on Noetheri teoreem tõestatud.

On näha, et suurus  $\theta_j^v$  ei ole üheselt määratud; me võime talle alati lisada liikme

$$\frac{\partial f_j^{v\sigma}}{\partial x_\sigma}, \quad (4.24)$$

kus  $f_j^{v\sigma}$  on funktsioon, mis rahuldab tingimust

$$f_j^{v\sigma} = -f_j^{\sigma v}. \quad (4.25)$$

Jäävad suurused selle asenduse tagajärjel ei muutu.

## § 2. Välja energia ja impulss.

Vaatleme nüüd konkreetselt koordinaadistiku nihet, s.o. teisendust (4.1), kus

$$\delta x_\nu = \delta \omega^\nu \quad (4.26)$$

on väikesed nihet määravad arvud. Sel juhul

$$X_\sigma^\nu = \delta_{\nu\sigma} . \quad (4.27)$$

Tensorid ja spinoorid ei muutu koordinaadistiku nihke korral, s. o. antud juhul

$$\Psi_{i\nu} = 0 . \quad (4.28)$$

Asetame need konkreetsed avaldised valemisse (4.18). Saame teist järku tensori

$$T_{\nu\sigma} = - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\sigma} + L \delta_{\nu\sigma} , \quad (4.29)$$

mida nimetatakse välja energia-impulsi tensoriks. See tensor rahuldab pidevuse võrrandit (4.19):

$$\frac{\partial T_{\nu\sigma}}{\partial x_\nu} = 0 , \quad (4.30)$$

millest järgnevad jäävad suurused

$$P_\sigma = \int T_{\nu\sigma} dV . \quad (4.31)$$

Suurust  $P_\sigma$  nimetatakse välja energia-impulsi vektoriks.  $-ic T_{44}$  on siis energia tiheduse avaldis.

## § 3. Välja pöördimpulss ja spinn.

Vaatleme 4-dimensioonilise koordinaadistiku pööret, s.o. teisendust (4.1), kus

$$\delta x_\nu = \varepsilon_{\nu\sigma} x_\sigma. \quad (4.32)$$

Selle võime kirjutada

$$\delta x_\nu = X_{\rho\lambda}^\nu \varepsilon_{\rho\lambda}, \quad (4.33)$$

kus

$$X_{\rho\lambda}^\nu = \frac{1}{2} (\delta_{\nu\rho} x_\lambda - \delta_{\nu\lambda} x_\rho). \quad (4.34)$$

Välja potentsiaal teiseneb Lorentzi teisenduste korral eeskirja (2.5) järgi, s. o.

$$\delta\psi_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} \sum_{j=1}^s S_{\rho\sigma}^{ij} \psi_j, \quad (4.35)$$

kus indeksid  $i$  ja  $j$  nummerdavad infinitesimaalmatriksite  $S_{\nu\sigma}$  ridu ja veerge. Antud juhul tuleb seega võtta

$$\psi_{i(\rho\sigma)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s S_{\rho\sigma}^{ij} \psi_j. \quad (4.36)$$

Kui me asetame avaldised (4.34) ja (4.36) valemisse (4.18), saame kolmandat järku tensori

$$M_{\rho\lambda}^\nu = 2\theta_{\rho\lambda}^\nu = T_{\nu\rho} x_\lambda - T_{\nu\lambda} x_\rho - \sum_i \frac{\partial L_i}{\partial (\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu})} \sum_{j=1}^s S_{\rho\lambda}^{ij} \psi_j, \quad (4.37),$$

mis rahuldab pidevuse võrrandit

$$\frac{\partial M_{\rho\lambda}^\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (4.38)$$

$T_{\nu\rho}$  tähistab siin välja energia-impulsi tensorit (4.29).

Tensorit  $M_{\rho\lambda}^\nu$  nimetatakse välja kogupöördimpulsi tensoriks.

Skalaarse välja erijuhul, kui  $S_{\rho\lambda} = 0$ ,

$$M_{\rho\lambda}^\nu = T_{\nu\rho} x_\lambda - T_{\nu\lambda} x_\rho. \quad (4.39)$$

Seda osa kogupöördimpulsi tensorist nimetatakse välja orbitaalse pöördimpulsi tensoriks. Mitmekomponendiliste väljade korral on liige

$$S_{p\lambda}^v = - \sum_L \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\lambda} \right)} \sum_{j=1}^s S_{p\lambda}^{ij} \psi_j \quad (4.40)$$

nullist erinev. Seda liiget nimetatakse välja spinni tenso-riks. Klassikalises väljateoorias kirjeldab see tensor väl-ja polarisatsiooniomadusi.

Pidevuse võrrandist (4.38) saame järgmised jäävad suu-rused:

$$M_{p\lambda} = \int M_{p\lambda}^4 dV . \quad (4.41)$$

#### § 4. Välja laeng ja vooluvektor.

Eespool me vaatlesime välja lagranžiaani tiheduse olene-vust välja potentsiaalidest  $\psi_i$ . Juhul, kui välja potent-siaalid on kompleksed funktsioonid, sõltub lagranžiaani ti-hedus nii välja potentsiaalidest  $\psi_i$  kui ka nendele kaas-komplekssetest suurustest  $\psi_i^*$ . Et aga suuruste  $\psi_i$  ja  $\psi_i^*$  variatsioonid loetakse sõltumatuteks, siis ei muuda nimetatud asjaolu eelmistes arutlustes midagi. Silmas tuleb pidada ai-nult seda, et sõltumatute välja potentsiaalide hulgas oleks valemite arvesse võetud nii  $\psi_i$  kui ka  $\psi_i^*$ .

Lagranžiaani tihedus on reaalarv korrutatud imaginaar-ühikuga, milles võib veenduda näiteks valemist (4.29):  $L$  on suuruse  $T_{44}$  avaldises üks liidetavaid; suurus  $-icT_{44}$  aga, nagu näha valemist (4.31), kirjeldab välja energia tihedust. Energia tihedus  $-icT_{44}$  peab olema reaalarv ja reaalarv peab olema siis ka lagranžiaani tihedus  $-icL$ .

Et lagranžiaani tihedus on puhtimaginaararv, siis peab kompleksne välja potentsiaal tema avaldises alati olema kor-  
rutatud iseenda kaaskompleksiga (näit. lagranžiaanid (3.46)  
ja (3.69) rahuldavad seda nõuet). See aga tähendab, et lag-  
ranžiaani tihedus peab olema invariantne teisenduse

$$\varphi_i \rightarrow e^{i\alpha} \varphi_i, \quad \varphi_i^* \rightarrow e^{-i\alpha} \varphi_i^* \quad (4.42)$$

suhtes. Seda teisendust nimetatakse esimest liiki kalibreerimisteisenduseks (või ka esimest liiki gradientteisenduseks).<sup>1</sup>

Vaatleme nüüd, missuguse jääva suuruse annab teisendus (4.42). Lõpmata väikese teisendusena on see

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_i + i\alpha \varphi_i, \quad \varphi_i^* \rightarrow \varphi_i^* - i\alpha \varphi_i^*, \quad (4.43)$$

s. o. antud juhul tuleb meil võtta

$$\begin{aligned} \psi_i &= i\varphi_i \quad \text{kõigi } \varphi_i \text{ jaoks ja} \\ \psi_i &= -i\varphi_i^* \quad \text{kõigi } \varphi_i^* \text{ jaoks.} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Et koordinaadid antud teisenduse korral ei muutu, siis

$$X^{\nu} = 0. \quad (4.45)$$

Asetame (4.44) ja (4.45) avaldise (4.18), kusjuures peame silmas, et summeerimine toimub nii üle kõigi  $\varphi_i$  kui ka üle kõigi  $\varphi_i^*$  indeksite. Saame

$$J^{\nu} = i \sum_l \left( \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{\nu}})} \varphi_l^* - \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial \varphi_l^*}{\partial x_{\nu}})} \varphi_l \right), \quad (4.46)$$

mis rahuldab pidevuse võrrandit

$$\frac{\partial J^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0. \quad (4.47)$$

<sup>1</sup> Teist liiki kalibreerimisteisenduseks (või ka teist liiki gradientteisenduseks) nimetatakse teisendust (I;3.107).

Vektorit  $\mathbf{j}^v$  nimetatakse vooluvektoriks. See võib olla nii elektrivool kui ka mõnest muust laengust tingitud vool, kui väli vastavat laengut kannab. Näiteks elektrivoolu korral tuleb avaldis (4.46) korrutada suurusega  $e$ , millel on elektrilaengu dimensioon. Pidevusevõrrandist (4.47) järgneb siis jääv suurus

$$Q = e \int \mathbf{j}^v dV, \quad (4.48)$$

mis ilmselt on elektrilaeng. Suurust  $e \mathbf{j}^v$  võime vaadata kui välja elektrilaengu tihedust.

### § 5. Interaktsioonis olevad väljad.

Seni me käsitlesime ainult üksiku vaba väljaga seotud probleeme. Tegelikult ei ole vaba väli üldse vaadeldav objekt - selleks, et välja mõõta, peab väli võtma osa interaktsiooni protsessidest mõõteaparatuuriga, s. o. üldiselt rääkides teiste väljadega ja nende allikatega.

Vaatleme lähemalt väljade interaktsiooni probleeme.

Analoogiliselt sellele, nagu me koostasime elektromagnetilisest väljast ja osakesest koosneva süsteemi lagranžiaani (vt. mõjuintegraal (3.6)), teeme seda ka siin. Mitmest omavahel interaktsioonis olevast väljast koosnevat süsteemi kirjeldame lagranžiaaniga

$$H = \sum_i H^{(i)} + H_{int}, \quad (4.49)$$

kus  $\sum_i H^{(i)}$  on vabu välju kirjeldavate lagranžiaanide summa ja  $H_{int}$  - väljade omavahelist interaktsiooni kirjeldav

lagranžiaan.  $H_{int}$  peab olema relativistlikult invariantne suurus (invariantne nii 4-dimensioonilise koordinaadistiku pöörete kui ka nihete suhtes) ja sisaldama kõigi nende väljade potentsiaale, mille interaktsiooni ta kirjeldab. Niisugusel juhul on ka kogu süsteemi kirjeldav lagranžiaan invariantne koordinaadistiku nihete ja pöörete suhtes, mis tähendab, et ka väljade süsteemil on olemas jäävad suurused - energia-impulsi vektor ja pöördimpulsi tensor.

Erilist huvi pakub juht, kui interaktsioonilagranžiaan  $H_{int}$  oleneb ainult väljade potentsiaalidest, mitte aga nende tuletistest. Valemitest (4.31) ja (4.29) on näha, et väljade kogumpulss avaldub sel juhul üksikute väljade impulsside summana,

$$P_k = \sum_j \int T_{jk}^{(j)} dV = \sum_j P_k^{(j)}, \quad (4.50)$$

kus sulgudes olev indeks  $j$  tähistab  $j$ -ndale väljale vastavat suurust. Väljade süsteemi energia tihedus tuleb niisugusel juhul

$$T_{44} = \sum T_{44}^{(j)} - H_{int}. \quad (4.51)$$

Koguenergia tihedus on võrdne üksikute väljade energia tiheduste summaga miinus interaktsioonist tingitud energia tihedus  $H_{int}$ . Interaktsioonis olevate väljade koguenergia on väiksem kui üksikute väljade energiatega summa.

Valemist (4.40) on veel näha, et juhul, kui  $H_{int}$  ei sisalda väljapotentsiaalide tuletisi, on väljade süsteemi koguspinn võrdne üksikute väljade spinnide summaga.

Ei ole tingimata vajalik, et interaktsioonilagranžiaan

$L_{int}$  peaks olema invariantne kalibreerimisteisenduse (4.42) suhtes. Niisuguse invarianttsuse nõude võib seada lagranžiaanile ainult sel juhul, kui on vaja saada laengu tüüpi suuruse jäävuse seadust.

Vaatleme lõpuks konkreetse näitena elektromagnetilisest ja elektron-positronväljast koosnevat süsteemi, mida kirjeldagu lagranžiaani tihedus

$$L = L^{(e)} + L^{(e-p)} + L_{int}, \quad (4.52)$$

kus  $L^{(e)}$  on vaba elektromagnetilise välja lagranžiaani tihedus (vt. (3.5))

$$L^{(e)} = \frac{i}{4\pi c} F_{\nu\sigma} F_{\nu\sigma}, \quad (4.53)$$

$L^{(e-p)}$  - vaba elektron-positronvälja kirjeldava lagranžiaani tihedus (3.46)

$$L^{(e-p)} = -\frac{i\hbar}{2} \left( \bar{\psi} \gamma^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma^\nu \psi \right) + m_0 c i \bar{\psi} \psi \quad (4.54)$$

ja  $L_{int}$  nende väljade interaktsiooni kirjeldava lagranžiaani tihedus

$$L_{int} = -\frac{e}{c} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi A_\nu. \quad (4.55)$$

$e$  on siin nõndanimetatud seosekonstant, mis iseloomustab seda, kui tugevasti on väljad  $\bar{\psi}$  ja  $\psi$  seotud väljaga  $A_\nu$ . Oma füüsikalise tähenduse poolest on see seosekonstant lihtsalt elektrilaeng. Ülejäänud arvuline kordaja  $L_{int}$  avaldises on valitud nii, et edaspidi saadavad valemid tuleksid sobivates mõõtühikutes.

Kui varieerime lagranžiaani tihedust elektromagnetilise välja potentsiaalide järgi, saame eeskirja (3.4) kohaselt

$$\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\sigma} = +4\pi e i \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (4.56)$$

millele võib lisada  $F_{\sigma\nu}$  antisümmeetriat arvestava võrrandi (3.13)

$$\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (4.57)$$

Need on elektromagnetilise välja võrrandid.

Kui varieerime lagranžiaani tihedust (4.52) potentsiaali  $\bar{\psi}$  järgi, saame võrrandi

$$\gamma^\nu \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \psi - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi = 0. \quad (4.58)$$

Kaasvõrrandi sellele saame, kui varieerime lagranžiaani tihedust  $\psi$  järgi:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma^\nu + \frac{ie}{\hbar c} \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu + \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} = 0. \quad (4.59)$$

Võrrandid (4.58) ja (4.59) kirjeldavad elektron-positronvälja ja selle interaktsiooni elektromagnetilise väljaga.

Teostades välja potentsiaalidega  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  kalibreerimisteisenduse (4.43) saame elektron-positronvälja vooluvektori

$$j^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi. \quad (4.60)$$

Seda võime tõlgendada kui elektrivooluga võrdelist suurust. Juhul, kui valime elektrivoolu vektoriks

$$j_\nu = -ie c \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (4.61)$$

omandab võrrand (4.56) meile juba tuttava kuju (3.12).

Elektron-positronväli kannab elektrilaengut, mille avaldiseks tuleb

$$Q = e \int \bar{\psi} \gamma^4 \psi dV. \quad (4.62)$$

Et elektromagnetilise välja potentsiaalid  $A_\mu$  on oluliselt reaalsed suurused ( $A_\mu$  kirjutame puhtimaginaarsena ainult valemite kompaktsena üleskirjutuse eesmärgil), siis ei ole elektromagnetilisel väljal jäävat voolu. Elektromagnetiline väli ei kannu mingisugust laengut.

Klassikaline väljateooria kirjeldab välja laineomadusi. Väljade kvantteooria seevastu, nagu hiljem näeme, kirjeldab väljade korpuskulaaromadusi. Et elektron-positronväljal domineerivad korpuskulaaromadused (elektronide ja positronide kui korpusklite olemasolu), siis ei ole selle välja klassikalise teooria arendamisel mõtet. Analoogiliselt ei ole mõtet ka kõigi teiste ilmselt korpuskulaariseloomuga väljade klassikalisel teoorial (näit. mesonväljade klassikalisel teoorial). Kõiki niisuguseid välju tuleb uurida väljade kvantteooria abil. Ainukeseks väljaks, mille klassikaline teooria kirjeldab tegelikkust küllaltki suure täpsusega, on elektromagnetiline väli.<sup>1</sup> Elektromagnetilisel väljal domineerivad väikeste energiatega korral eelistatult just laineomadused.

Ülejäänud osa käesolevast peatükist pühendamegi elektromagnetilise välja klassikalise teooria mõningate küsimuste uurimisele. Teiste sõnadega: me uurime mõningaid füüsikalisi järeldusi, mis tulevad Maxwelli võrranditest.

---

<sup>1</sup> Peale elektromagnetilise välja on looduses veel teine väli - gravitatsiooniväli - mille klassikalise teooria arendamisel on mõtet. Gravitatsiooniväljaga seotud küsimusi me käesolevas kursuses ei puuduta, sest selle välja teooria ei mahu siin arendatava skeemi alla. Gravitatsioonivälja kirjeldavad mittelineaarsed diferentsiaalvõrrandid.

§ 6. Elektromagnetilise välja energia ja impulss.

Leiame eeskirja (4.29) järgi vaba elektromagnetilise välja energia-impulsi tensori. Kasutades lagranžiaani tihedust (4.53) saame

$$T_{\sigma\rho} = -\frac{i}{4\pi c} F_{\sigma\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\rho} + \frac{i}{16\pi c} F_{\lambda\nu} F_{\lambda\sigma} \delta_{\sigma\rho}. \quad (4.63)$$

Sümmetriseerime selle tensori, kasutades asjaolu, et me võime pidevuse võrrandit rahuldavatele suurustele juurde lisada (4.24) tüüpi avaldised. Võtame antud juhul

$$f_{\rho}^{\sigma\nu} = \frac{i}{4\pi c} F_{\sigma\nu} A_\rho, \quad (4.64)$$

s. o. lisame avaldisele (4.63) liikme

$$\frac{i}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\sigma\nu} A_\rho) = \frac{i}{4\pi c} F_{\sigma\nu} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} \quad (4.65)$$

( $F_{\sigma\nu}$  rahuldab vaba välja võrrandit  $\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = 0$ ). Saame elektromagnetilise välja energia-impulsi tensori kujul

$$T_{\sigma\rho} = -\frac{i}{4\pi c} F_{\sigma\nu} F_{\rho\nu} + \frac{i}{16\pi c} F_{\lambda\nu} F_{\lambda\sigma} \delta_{\sigma\rho}. \quad (4.66)$$

See tensor rahuldab loomulikult pidevuse võrrandit

$$\frac{\partial T_{\sigma\rho}}{\partial x_\sigma} = 0. \quad (4.67)$$

Lähtudes tensorist (4.66) arvutame nüüd elektromagnetilise välja energia tiheduse

$$W = -ic T_{44} = -\frac{1}{4\pi} F_{4\nu} F_{4\nu} + \frac{1}{16\pi} F_{\lambda\nu} F_{\lambda\nu}. \quad (4.68)$$

Kui asetame selles avaldises tensori  $F_{\sigma\rho}$  komponendid elektrivälja ja magnetvälja komponentidega (vt. I; 3.113)), saame elektromagnetilise välja energia tiheduse jaoks

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2). \quad (4.69)$$

Elektromagnetiline väli kannab energiat.

Vaatleme nüüd, missugune füüsikaline tähendus on energia-impulsi tensori komponentidel  $c^2 T_{\mu\nu}$  :

$$c^2 T_{\mu\nu} = -\frac{ic}{4\pi} F_{\mu\gamma} F_{\nu\gamma} \quad (4.70)$$

või elektri- ja magnetvälja komponentide kaudu

$$c^2 T_{14} = \frac{c}{4\pi} (E_2 H_3 - E_3 H_2),$$

$$c^2 T_{24} = \frac{c}{4\pi} (E_3 H_1 - E_1 H_3),$$

$$c^2 T_{34} = \frac{c}{4\pi} (E_1 H_2 - E_2 H_1).$$

Need moodustavad kolmekomponendilise vektori

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}), \quad (4.71)$$

mis kannab Poyntingi vektori nime. Et teha kindlaks selle vektori füüsikalist tähendust, vaatleme pidevuse võrrandit (4.67) juhul  $\varphi = 4$  :

$$\frac{\partial T_{64}}{\partial x_6} = 0. \quad (4.72)$$

Lihtsate teisenduste teel saame sellele anda kuju

$$-ic \frac{\partial T_{44}}{\partial t} + c^2 \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_\mu} = 0,$$

või teisiti

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div} \vec{\mathcal{P}}. \quad (4.73)$$

Integreerime viimast võrrandit üle mingi lõpliku ruumiosa:

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = - \int_V \text{div} \vec{\mathcal{P}} dV. \quad (4.74)$$

Gaussi lause põhjal võib selle kirjutada

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = - \oint \vec{\mathcal{P}} d\vec{s}, \quad (4.75)$$

kus paremal olev integraal on võetud üle seda ruumiosa piirava pinna.

Valemist (4.75) on näha, et Poyntingi vektor  $\vec{\mathcal{P}}$  kirjeldab energia voolamist elektromagnetilises väljas. Vasak pool nimetatud võrrandis tähendab vaadeldavas ruumiosas oleva elektromagnetilise välja energia muutumist ja parem pool energia voolu läbi seda ruumi piirava pinna. Juhul, kui energia vaadeldavas ruumiosas kahaneb (vasak pool võrduses (4.75) on negatiivne), peab  $\vec{\mathcal{P}} d\vec{s}$  olema positiivne. Energia voolu vektor on suunatud pinnast väljapoole, s. o. energia voolab vaadeldavast ruumiosast välja.

Näeme, et energia võib elektromagnetilises väljas voolata. Valem (4.71) näitab seejuures, et energia voolu suund on risti nii elektriväljaga kui ka magnetväljaga suunaga.

Juhul, kui me valemis (4.75) integreeriksime üle kogu ruumi, muutuks võrduse parem pool nulliks ( $\vec{\mathcal{P}}$  on lõpmatuses null) ja valem annaks meile elektromagnetilise välja energia jäävuse.

Näitame nüüd, et elektromagnetiline väli võib energiat ka osakestega vahetada. Selleks korrutame Maxwelli võrrandit (3.19) skalaarselt magnetväljaga  $\vec{H}$ , võrrandit (3.17) skalaarselt elektriväljaga  $\vec{E}$  ja lahutame esimesest võrrandist teise. Saame

$$\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = -\frac{1}{c} \left( \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{E} \vec{j}. \quad (4.76)$$

Kasutades arvustusreeglit

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}, \quad (4.77)$$

saame eelmise kirjutada

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}^2 + \vec{E}^2) - \frac{4\pi}{c} \vec{E} \vec{j}, \quad (4.78)$$

või teisiti

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{Y}} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \vec{E} \vec{j}. \quad (4.79)$$

Kui integreerime seda võrrandit üle kogu ruumi, saame analoogiliselt eelmisele

$$\frac{d}{dt} \int w dV = - \int \vec{E} \vec{j} dV. \quad (4.80)$$

Vooluvektor avaldub laengu tiheduse ja kiirusvektori korrutisena

$$\vec{j}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}). \quad (4.81)$$

Oletame lihtsuse mõttes, et meil on üksikutest punktlaengutest koosnev süsteem. Punktis 9 on näidatud, et punktlaengute süsteemi laengutihedus tuleb valida

$$\rho(\vec{x}) = \sum_A e_A \delta(\vec{x} - \vec{x}_A), \quad (4.82)$$

kus  $\delta(\vec{x} - \vec{x}_A)$  on deltafunktsioon. Niisugusel juhul saame

$$- \int \vec{E} \vec{j} dV = - \sum_A e_A \int \vec{E}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_A) \vec{v}(\vec{x}) dV,$$

või valemi (4.129) kohaselt

$$- \int \vec{E} \vec{j} dV = - \sum_A e_A \vec{E}(\vec{x}_A) \vec{v}(\vec{x}_A). \quad (4.83)$$

$\vec{E}(\vec{x})$  tähistab siin elektrivälja tugevust  $A$ -nda laengu asukohas ja  $\vec{v}(\vec{x}_A)$  -  $A$ -nda laengu liikumise kiirust.

Valemist (I; 3.118) on näha, et

$$e\vec{E}\vec{v} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (4.84)$$

kus  $\mathcal{E}$  on laengu kineetiline energia. Võrduse (4.80) asemel saame järelikult

$$\frac{d}{dt} \left[ \int w dV + \sum_A \mathcal{E}^{(A)} \right] = 0, \quad (4.85)$$

kus  $\mathcal{E}^{(A)}$  tähistab  $A$ -nda laengu kineetilist energiat. Sulatud süsteemis, mis koosneb elektromagnetilisest väljast ja laengutest, on välja energia ja laengute kineetilise energia summa jääv suurus. Välja ja laengute vahel toimub energia vahetus. Kui näiteks elektromagnetiline väli suurendab laengute kineetilist energiat, siis samal ajal tema oma energia väheneb.

Analoogiliselt võime uurida ka elektromagnetilise välja impulsiga seotud probleeme. Välja impulss on määratud valemi-  
ga (4.31)

$$P_k = \int T_{4k} dV, \quad (4.85)$$

s. o. suurus  $T_{4k}$  on välja impulsi tihedus. Et tensor  $T_{\nu\sigma}$  on sümmeetriline, siis näeme: Poyntingi vektor määrab ka elektromagnetilise välja impulsi tiheduse  $\vec{p}$  :

$$\vec{p} = \frac{1}{c^2} \vec{\mathcal{P}}; \quad \vec{p}_k = T_{4k}. \quad (4.86)$$

Kui kirjutame üles pidevuse võrrandi (4.67) juhul  $\varphi = k$ , siis näeme, et energia-impulsi tensori komponendid kirjeldavad impulsi voolamist:

$$\frac{\partial T_{4k}}{\partial t} + ic \frac{\partial T_{ek}}{\partial x_e} = 0. \quad (4.87)$$

Impulsi esimese komponendi voolu kirjeldab seega  $ic T_{e1}$ ,

teise komponendi voolu —  $icT_{12}$  ja kolmanda komponendi voolu —  $icT_{13}$ . Elektromagnetilisel väljal on ka impulss, mis samuti nagu energiagi väljas voolab. Impulsi voolu komponendid võime ka elektrivälja ja magnetvälja tugevuste kaudu avaldada. Impulsi esimese komponendi voolu kirjeldavad

$$icT_{11} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2 - 2E_1^2 - 2H_1^2),$$

$$icT_{21} = -\frac{1}{4\pi} (H_1 H_2 + E_1 E_2), \quad (4.88)$$

$$icT_{31} = -\frac{1}{4\pi} (H_1 H_3 + E_1 E_3).$$

Impulsi iga komponendi voolu kirjeldavad küll kolm arvu, kuid need arvud ei ole tegelikult vektori komponendid. Impulsi voolu kirjeldab 9-komponendiline suurus, mis on kolmedimensioonilise ruumi teist järku tensor.

### § 7. Elektromagnetilised lained.

Uurime nüüd lähemalt vaba elektromagnetilist välja, mida kirjeldab võrrand (3.25) ja lisatingimus (3.26):

$$\square A_\nu = 0, \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (4.90)$$

Vaatleme niisugust välja, kus  $A_4 = i\varphi = 0$ . Juhul, kui väljal allikad puuduvad, on see alati võimalik — selleks tuleb elektromagnetilise välja potentsiaaliga teha teisendus (I; 3.107),  $A_\nu \rightarrow A_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ , kusjuures funktsioon  $f$  valitakse nii, et  $\frac{\partial f}{\partial x_4} = -A_4$ . Elektrivälja ja magnetvälja tugevused ei muutu potentsiaali ümberkalibreerimise korral.

Toetudes eelöeldule, saame vaba elektromagnetilist väl-

ja kirjeldavad võrrandid

$$\square \vec{A} = 0, \quad (4.91)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (4.92)$$

Kui võtame esimesest võrrandist rootori ja arvestame, et

$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{H}$ , saame võrrandi magnetvälja vektori jaoks

$$\square \vec{H} = 0. \quad (4.93)$$

Analoogiliselt leiame (vt. (I; 3.108)) võrrandi elektrivälja vektori jaoks

$$\square \vec{E} = 0. \quad (4.94)$$

Võrrandi (4.91) lahendi võib kirjutada

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-ik_y x_y}, \quad (4.95)$$

kus  $\vec{A}_0$  on konstantne vektor ja  $k_y$  rahuldab tingimust

$$k_y k_y = 0. \quad (4.96)$$

Viimasest on näha, et

$$k_y = (\vec{k}, ik), \quad \text{kus} \quad k = \sqrt{k^2}. \quad (4.97)$$

Lahend (4.95) sisaldab õieti kaks sõltumatut lahendit - funktsiooni  $\vec{A}$  reaalosa ja imaginaarosa. Füüsikalised järeldused mõlemast lahendist on ühesugused. Uurime seepärast ainult lahendit, mis on (4.95) reaalosa:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(k_y x_y), \quad (4.98)$$

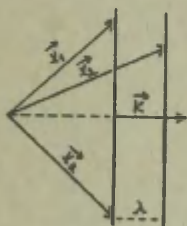
või teisiti

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}x - ckt). \quad (4.99)$$

Analoogiliselt saame lahendid võrranditele (4.93) ja (4.94)

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}_0 \cos(\vec{k}\vec{x} - c\kappa t), \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{x} - c\kappa t).\end{aligned}\quad (4.100)$$

Vaatleme kogu ruumi täitvat välja mingil kindlal aja-  
momendil  $t = t_0$ . Elektrivälja ja magnetvälja tugevus on  
ühesugune siis kõigis neis ruumipunktides, kus koosinuse ar-



Joon. 10.

gumendil  $\vec{k}\vec{x} - c\kappa t_0 = \kappa\left(\frac{\vec{k}\vec{x}}{\kappa} - ct_0\right)$   
on ühesugune väärtus (või erineb  
sellest väärtusest  $2\pi n$  võrra).  
Näeme, et argument on sama väärtu-  
tusega kõigis neis ruumipunkti-  
des, kus  $\vec{x}$  projektsioon  $\vec{k}$  suu-  
nale on ühesugune. Väljatugevus  
on ühesugune kõigis neis ruumi-

punktides, mis asetsevad vektorile  $\vec{k}$  risti oleval tasapin-  
nal. Samasugune väljatugevus on tasapinnal, mis on paralleel-  
ne esimese tasapinnaga ja mille kaugus esimesest on  $\frac{2\pi}{\kappa}n$ .  
Fikseeritud ajahetkel täidavad kogu ruumi elektri- ja magnet-  
väli, mis ruumis sinusoidaalselt muutuvad. Ühesuguse välja-  
tugevusega ruumipunktid asetsevad seejuures tasapindadel, mis  
on risti vektoriga  $\vec{k}$ . Minimaalset kaugust  $\frac{2\pi}{\kappa}$  kahe eri-  
neval tasapinnal oleva punkti vahel, kus väljatugevus on ühe-  
sugune, nimetatakse elektromagnetilise laine pikkuseks  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa}. \quad (4.101)$$

Lahenditest (4.100) on veel näha, et aja kasvamisel kasvab  
ka koordinaat  $\vec{x}$ , seejuures nii, et koordinaadivektori  
projektsioon  $\vec{k}$  suunale suureneb aja  $\Delta t$  jooksul  $c\Delta t$  võrra.

Võrdse väljatugevusega punktidest moodustatud tasapind liigub kiirusega  $C$  vektori  $\vec{k}$  suunas. Elektromagnetiline väli levib kiirusega  $C$ .

Fikseerime nüüd ruumpunkti ja vaatleme välja muutumist aja muutumisel selles ruumpunktis. Väli muutub ajas sinusoidaalse seaduse järgi ja omandab esialgse väärtuse jälle aja  $\Delta t$  pärast, kusjuures

$$\cos(\vec{k}\vec{x} - \kappa c(t + \Delta t)) = \cos(\vec{k}\vec{x} - \kappa c t).$$

Selleks peab kehtima  $\kappa c \Delta t = 2\pi$ , millest järgneb  $\Delta t = \frac{2\pi}{\kappa c}$ . Elektromagnetilise välja sageduseks nimetatakse suurust

$$\nu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\kappa c}{2\pi}. \quad (4.102)$$

Tihti kasutatakse ka elektromagnetilise välja ringsageduse mõistet, mis defineeritakse

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (4.103)$$

Lainepikkuse ja sageduse vahel tuleb siis seos

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (4.104)$$

Et uurida elektrivälja ja magnetvälja orientatsiooni elektromagnetilises väljas, selleks kirjutame lahendid (4.99) ja (4.100)

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t), \quad (4.105)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t), \quad (4.106)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t). \quad (4.107)$$

Lähtudes potentsiaali avaldisest (4.105) arvutame nüüd valemite (I; 3.108) järgi elektrivälja ja magnetvälja vektorid:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (\psi = 0)$$

Arvutus annab

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \frac{\partial(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}{\partial t} = \frac{\omega}{c} \dot{\vec{A}}, \quad (4.108)$$

kus  $\dot{\vec{A}}$  tähistab  $\vec{A}$  tuletist tema argumendi järgi. Analoo-  
giliselt saame arvutada

$$H_1 = \kappa_2 \dot{A}_3 - \kappa_3 \dot{A}_2, \quad ,$$

$$H_2 = \kappa_3 \dot{A}_1 - \kappa_1 \dot{A}_3, \quad ,$$

$$H_3 = \kappa_1 \dot{A}_2 - \kappa_2 \dot{A}_1$$

mida saab kokku võtta

$$\vec{H} = \vec{k} \times \dot{\vec{A}}. \quad (4.109)$$

Asendame siia  $\dot{\vec{A}}$  avaldise valemist (4.108). Saame

$$\vec{H} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}.$$

Et  $\omega = c\kappa$ , saab eelmise kirjutada

$$\vec{H} = \vec{k}_0 \times \vec{E}, \quad (4.110)$$

kus  $\vec{k}_0$  tähistab  $\vec{k}$  suunalist ühikvektorit.  $\vec{k}_0$  määrab  
elektromagnetilise laine liikumise suuna.

Seni on meil veel arvestamata lisatingimus (4.92). Võt-  
tes valemis (4.105) divergentsi, saame

$$\vec{k} \vec{A} = 0 \quad \text{ja siis ka} \quad \vec{k}_0 \vec{E} = 0. \quad (4.111)$$

Elektrivälja vektor on risti laine levimise suunda määrava  
vektoriga  $\vec{k}_0$ . Seosest (4.110) on lisaks näha, et magnet-  
välja vektor on risti nii elektrivälja vektoriga kui ka lai-  
ne levimise suunaga. Seega elektromagnetilises laines

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}_0.$$

Käesolevas punktis me leidsime elektromagnetilise välja ühe

erilahendi, mis on määratud kindla vektoriga  $\vec{k}$ . Teiste sõnadega: me leidsime ühe kindla sagedusega laine - monokromaatses laine. Üldiselt koosneb elektromagnetiline laine paljude sagedustega monokromaatsetest lainetest, mis kõik on ruumis, ilma et nad üksteist segaksid (et võrrandid on lineaarsed, siis kehtib superpositsiooniprintsiip). Matemaatiliselt avaldub niisugune laine monokromaatsetele lainetele vastavate lahendite lineaarkombinatsioonina; see lineaarkombinatsioon võib olla moodustatud üle diskreetsete  $\vec{k}$  väärtuste, aga võib olla ka niisugune, et  $\vec{k}$  omandab väärtusi pidevalt. Lahendite (4.106) ja (4.107) asemel oleksid siis lahendid

$$\vec{H} = \int \vec{H}_0(\vec{k}) \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t) d\vec{k}, \quad \vec{E} = \int \vec{E}_0(\vec{k}) \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t) d\vec{k}. \quad (4.112)$$

Üldist elektromagnetilist välja võib vaadata kui erinevates suundades levivate ja erinevate sagedustega tasapinnaliste lainete superpositsiooni.

### § 8. Doppleri efekt.

Elektromagnetilise välja võrrandid (3.17) kuni (3.20) (või nendega samaväärsed võrrandid (3.12) ja (3.13) on Lorentzi teisenduste suhtes invariantid. Muuhulgas järgneb sellest invariantisusest, et vaba elektromagnetilise välja levimise kiirus on kõigis inertsiaalsüsteemides  $c$ . Lihtne on aga näidata, et elektromagnetilise välja sagedus  $\omega$  (ja järelikult ka lainepikkus  $\lambda = \frac{c\omega}{2\pi}$ ) ei ole invariantne suurus, vaid sõltub inertsiaalsüsteemist.

Olgu inertsiaalsüsteemis  $K$  paigal elektromagnetilise kiirguse allikas, mis saadab välja laineid sagedusega  $\omega$ . Nende lainete kõik omadused on määratud lainevektoriga

$\kappa_3 = (\vec{\kappa}, i \frac{\omega}{c})$ . Olgu veel teine inertsiaalsüsteem  $K'$ , mis liikugu esimese süsteemi kolmanda ruumitelje suunas kiirusega  $V$ . Süsteemis  $K'$  olgu selle süsteemi suhtes liikumatu vaatleja. Elektromagnetiliste lainete allika kiirus vaatleja suhtes on järelikult  $V = -V$ .

Tingimusest (4.96) on näha, et  $\kappa_3$  on vektor; järelikult teiseneb ta samade eeskirjade (I; 3.7) järgi nagu koordinaatide vektorigi:

$$\begin{aligned} \kappa'_1 &= \kappa_1, & \kappa'_2 &= \kappa_2, \\ \kappa'_3 &= \frac{\kappa_3 + i \frac{V}{c} \kappa_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & \kappa'_4 &= \frac{\kappa_4 - i \frac{V}{c} \kappa_3}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Siit saab avaldada

$$\kappa_4 = \frac{\kappa'_4 + i \frac{V}{c} \kappa'_3}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.114)$$

$V$  tähistab siin inertsiaalsüsteemi  $K'$  kiirust inertsiaalsüsteemi  $K$  suhtes. Viime sellesse valemisse kiiruse  $V = -V$ , millega lainete allikas liigub vaatleja suhtes. Siis

$$\kappa_4 = \frac{\kappa'_4 - i \frac{V}{c} \kappa'_3}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.115)$$

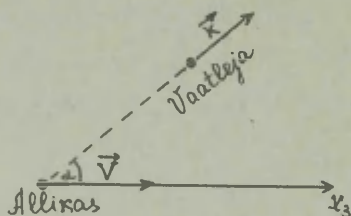
Asendame siia valemisse:

$\kappa'_3 = \kappa' \cos \alpha$ , kus  $\alpha$  on nurk kiirgusallika liikumise suuna ja laine levimissuuna vahel,

$\kappa'_4 = i \kappa'$ , kus  $\kappa' = \frac{\omega'}{c}$ . Siis saame

$$\omega' = \omega \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}. \quad (4.116)$$

See valem näitab, kuidas elektromagnetilise laine sagedus muutub üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise. Kui al-



Joon. 11.

lika suhtes liikumatu vaatleja jaoks on laine sagedus  $\omega$ , siis teise vaatleja jaoks, kelle suhtes kiirgusallikas liigub kiirusega  $V$ , on sagedus  $\omega'$  antud valemiga (4.116).

Kiirguse sageduse ole-  
nevust kiirgusallika liikumise

kiirusest nimetatakse Doppleri efektiks.

Vaatleme valemi (4.116) kahte erijuhtu:

Kui nurk  $\alpha$  ei ole lähedane arvule  $\frac{\pi}{2}$  ja  $v \ll c$ , saame (4.116) asemel

$$\omega' = \omega \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right). \quad (4.117)$$

Kiirguse sageduse muutumine on võrdeline allika liikumise kiirusega. Valemiga (4.117) kirjeldatavat efekti nimetatakse lineaarseks Doppleri efektiks. Valemist on näha, et juhul, kui kiirgusallikas läheneb vaatlejale ( $\cos \alpha > 0$ ), siis  $\omega' > \omega$ . Kui kiirgusallikas eemaldub vaatlejast ( $\cos \alpha < 0$ ), siis  $\omega' < \omega$ . Esimesel juhul on kiirguse sagedus suurem, teisel juhul väiksem, kui on sama kiirguse sagedus allikaga seotud inertsiaalsüsteemis.

Vaatleme teiseks erijuhuks Doppleri efekti kiirgusallika liikumise ristsuunas (nn. transversaalset Doppleri efekti).

Kui  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , saame valemist (4.116)

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} . \quad (4.118)$$

On näha, et  $\omega' < \omega$ . Liikuvalt allikalt saadud kiirguse sagedus on alati väiksem, kui on kiirguse sagedus allikaga seotud süsteemis. Selle efekti põhjuseks on aja dilatatsiooni nähtus ja ta esineb sõltumatult kiirgusallika liikumise suunast.

### § 9. Punktlaengu matemaatilisest kirjeldamisest.

#### $\delta$ - funktsioon.

Enne kui asuda allikatega elektromagnetilise välja uurimisele, vaatleme lähemalt küsimust, kuidas matemaatiliselt kirjeldada punktlaengut. Punktlaengu laengutihedus peab olema lõpmata suur (lõpliku suurusega laeng asetseb ruumipiirkonnas, mille mõõtmed on nullid). Kui vaadata algul ainult ühest ruumikoordinaadist sõltuvat juhtu, siis võime punktlaengu tiheduse kirjutada sümboliliselt järgmisel viisil:

$$\varphi(x) = e\delta(x) , \quad (4.119)$$

kus  $\delta(x)$  on nõndanimetatud  $\delta$ -funktsioon, mis rahuldab tingimusi

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{kui } x \neq 0, \\ \infty & \text{kui } x = 0, \end{cases} \quad (4.120)$$

kusjuures

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 . \quad (4.121)$$

Tänu viimasele tingimusele tuleb punktlaengu kogulaeng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = e \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = e. \quad (4.122)$$

Omadus (4.120) sobib küll  $\delta$ -funktsiooni omaduste piltlikuks seletamiseks, kuid pole tema matemaatiliselt korrektseks definitsiooniks. Valemite (4.120) ja (4.121) asemel võime  $\delta$ -funktsiooni defineerida järgmiselt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad (4.123)$$

kus  $f(x)$  võib olla mistahes funktsioon, millel on punktis  $x=0$  olemas vähemalt ühepoolsed piirväärtused. Valemiga (4.123) määratud funktsiooni (täpsemini öeldes funktsionaali) nimetatakse ühedimensiooniliseks  $\delta$ -funktsiooniks.

Näitame nüüd, et ühedimensioonilise  $\delta$ -funktsiooni võib konkreetselt esitada näiteks järgmisel kujul:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk. \quad (4.124)$$

Kontrolliks arvutame integraali

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-K}^K e^{ikx} dk dx = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin Kx}{x} dx. \end{aligned}$$

Viimane on tuntud Dirichlet' integraal

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin Kx}{x} dx = \frac{1}{2} [f(0+0) + f(0-0)], \quad (4.125)$$

kus  $f(0+0)$  tähistab funktsiooni  $f(x)$  parempoolset piirväärtust ja  $f(0-0)$  vasakpoolset piirväärtust punktis  $x=0$ . Juhul, kui funktsioon  $f(x)$  on punktis  $x=0$  pidev, saame eelmise arvutuse tulemusena

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (4.126)$$

See ütlebki, et funktsioonil (4.124) on  $\delta$ -funktsiooni omadused.

Mitmedimensioonilise  $\delta$ -funktsiooni defineerime kui ühedimensiooniliste  $\delta$ -funktsioonide korrutise. Näiteks kolmedimensioonilise  $\delta$ -funktsiooni võime kirjutada

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} d\vec{k}, \quad (4.127)$$

kus integreerimine toimub üle kolmedimensioonilise lõpmatu piirkonna.

Ruumikoordinaadistiku alguses asetseva punktlaengu tiheduse saame nüüd kirjutada

$$\varrho(\vec{x}) = e \delta(\vec{x}), \quad (4.128)$$

kus  $e$  on laengu suurus.

Valemiga (4.127) defineeritud  $\delta$ -funktsioon rahuldab tingimusele (4.123) analoogilist tingimust kolmedimensioonilisel juhul. Veelgi üldisemalt võime selle tingimuse kirja panna

$$\int \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{x}_0). \quad (4.129)$$

Kui teha integraalis (4.127) muutujate vahetus  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ , siis on lihtne veenduda, et  $\delta$ -funktsioon on paarisfunktsioon:  $\delta(-\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ .

§ 10. Coulombi seadus.

Uurime nüüd paigalseisva punktlaengu tekitatud välja.

See väli määratakse võrranditega

$$\square A_{\nu} = -\frac{4\pi}{c} j_{\nu}, \quad (4.130)$$

$$\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad (4.131)$$

kus  $j_{\kappa} = 0$  (kui laeng on paigal, siis voolu ei ole) ja

$j_4 = ic\rho(\vec{x})$ . On näha, et võrranditega pole vastuolus, kui

valida  $A_{\kappa} = 0$ . Võrranditest jääb siis

$$\square \psi = -4\pi \rho(\vec{x}), \quad (4.132)$$

$$\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (4.133)$$

Viimane ütleb, et otsitav potentsiaal  $\psi$  ei sõltu ajast.

Järelikult jääb võrrandis (4.132) d'Alemberti operaatorist

$\square$  järele ainult Laplace'i operaator  $\Delta$  ja võrrand kujuneb

$$\Delta \psi = -4\pi \rho(\vec{x}). \quad (4.134)$$

Olgu välja tekitajaks punktlaeng, mis olgu paigal ruumikoordinaadistiku alguspunktis. Niisuguse laengu tihedus on antud valemiga (4.128). Kui veel pidada silmas  $\delta$ -funktsiooni kuju (4.127), saame võrrandi (4.134) kirjutada

$$\Delta \psi = -\frac{e}{2\pi^2} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} d\vec{k}. \quad (4.135)$$

Selle võrrandi lahendi saame, kui korrutame võrrandit vasakult operaatoriga  $\Delta^{-1}$ :

$$\psi = -\frac{e}{2\pi^2} \Delta^{-1} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} d\vec{k}. \quad (4.136)$$

Määrame nüüd integraaloperaatori  $\Delta^{-1}$  mõju eksponentfunktsioonile  $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ . Selleks arvutame

$$\Delta e^{i\vec{k}\vec{x}} = -k^2 e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Kui korrutame seda vasakult operaatoriga  $\frac{\Delta^{-1}}{k^2}$ , saame

$$\Delta^{-1} e^{i\vec{k}\vec{x}} = -\frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{x}}. \quad (4.137)$$

Kasutades viimast valemit, saame lahendi (4.136) järgmise integraali kujul

$$\psi = \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k^2} d\vec{k}. \quad (4.138)$$

Et arvutada seda integraali, läheme üle kerakoordinaatidele

$$\begin{aligned} k_1 &= k \sin\theta \sin\varphi, & d\vec{k} &= k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi, \\ k_2 &= k \sin\theta \cos\varphi, & k\vec{x} &= kr \cos\theta. \\ k_3 &= k \cos\theta, \end{aligned}$$

Siis saame

$$\psi = \frac{e}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int \sin\theta e^{ikr \cos\theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

või pärast integreerimist üle polaarnurkade

$$\psi = \frac{2e}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} dk. \quad (4.139)$$

Määratud integraalide tabelitest võib leida, et

$$\int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} dk = \frac{\pi}{2r}. \quad (4.140)$$

Järelikult saame otsitava lahendi

$$\psi = \frac{e}{r}. \quad (4.141)$$

Punktlaengu tekitatud välja potentsiaal mingis ruumpunktis

on võrdeline laengu suurusega ja pöördvõrdeline ruumipunkti kaugusega punktlaengust. Arvutame nüüd elektrivälja tugevuse

$$\vec{E} = -\text{grad}\psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.142)$$

ja magnetvälja tugevuse

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (4.143)$$

Et  $\vec{A} = 0$ , siis meie konkreetsel juhul

$$\vec{H} = 0, \quad \vec{E} = -\text{grad}\psi, \quad (4.144)$$

või teisiti kirjutatult

$$E_k = -\frac{\partial \psi}{\partial x_k}. \quad (4.145)$$

Tuletise arvutamine annab

$$E_k = -e \frac{\partial}{\partial x_k} (x_e \ddot{x}_e)^{-\frac{1}{2}} = e x_k (x_e x_e)^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.146)$$

või teisiti

$$\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}, \quad (4.147)$$

kus  $\vec{r}_e = \frac{\vec{r}}{r}$  on raadiusvektorisuunaline ühikvektor. Punktlaengu elektrostaatiline väli on tsentraalsümmeetriline ja välja jõujooned radiaalsed.

Vaatleme lõpuks veel kahe punktlaengu vastastikust mõju juhul, kui mõlemad laengud on liikumatud.

Asetame laengu  $e$  poolt tekitatud välja (4.147) teise laengu  $e_1$ . Valemist (I; 3.117) on näha, et laengule mõjub siis jõud

$$\vec{F} = e_1 \vec{E}, \quad (4.148)$$

või kasutades valemit (4.147):

$$\vec{F} = \frac{ee_1}{r^2} \vec{r}. \quad (4.149)$$

Laeng  $e$  asetseb koordinaatide alguspunktis. Valemist on näha, et tema poolt mõjub laengule  $e_1$  jõud laenguid ühendava sirge sihis. Juhul, kui laengud on ühemärgilised ( $ee_1 > 0$ ), mõjub jõud  $\vec{r}_0$  suunas, s. o. laeng  $e$  tõukab laengut  $e_1$ . Juhul, kui laengud on isemärgilised ( $ee_1 < 0$ ), siis mõjub jõud  $\vec{r}_0$  vastassuunas, s. o. laengud tõmbuvad. Laengute vahel valitseva jõu suurus on võrdeline laengute korrutisega ja pöördvõrdeline laengutevahelise kauguse ruuduga. See on Coulombi seadus.

### § 11. Hilinevad potentsiaalid.

Uurime nüüd liikuvate laengute tekitatud elektromagnetilist välja, mille potentsiaalid rahuldavad võrrandeid

$$\square \varphi = -4\pi\rho, \quad (4.150)$$

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (4.151)$$

Nende mittehomogeensete võrrandite üldlahendid avalduvad homogeensete võrrandite üldlahendite ja mittehomogeensete võrrandite erilahendite summana. Homogeense võrrandi lahend kirjeldab vaba elektromagnetilist välja, mida me eespool juba käsitlesime. Seepärast piirdume käesolevas ainult mittehomogeensete võrrandite erilahendite uurimisega.

Eraldame ruumikoordinaadistiku alguses ruumielemendi ja tähistame selles olevat laengut  $de$ . Et laengud liiguvad, siis on  $de$  üldiselt aja funktsioon:  $de = de(t)$ . Määrame selle laenguelemendi tekitatud välja, s. o. lahendame võrrandi (4.150), kus

$$\varphi = de(t) \delta(\vec{x}). \quad (4.152)$$

$\delta(\vec{x})$  arvestab siin asjaolu, et laengutihedus on nullist erinev ainult koordinaatide alguspunktis, kus  $\vec{x} = 0$ . Et uuritav probleem on kerasümmeetriline, siis on otstarbekohane võrrandis (4.150) üle minna kerakoordinaatidele.

Juhul, kui otsitav funktsioon sõltub ainult polaarraadiusest, avaldub Laplace'i operaator teatavasti

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (4.153)$$

Võrrandi (4.150) võime siis kirjutada

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (4.154)$$

mis kehtib igal pool, välja arvatud laengu asukoht  $r = 0$ . Teeme selles võrrandis asenduse

$$\varphi = \frac{\chi(r, t)}{r}, \quad (4.155)$$

mis annab uue otsitava funktsiooni  $\chi$  jaoks

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.156)$$

Selle võrrandi üldlahend avaldub

$$\chi = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right), \quad (4.157)$$

kus  $f_1$  ja  $f_2$  on meelevaldsed funktsioonid. Võtame  $f_2 = 0$ . Sel juhul jääb  $\chi$  sõltuvaks ainult argumendist  $t - \frac{r}{c}$  ja lahendi (4.155) saame kirjutada

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (4.158)$$

Meelevaldse funktsiooni  $\chi$  valime nüüd nii, et lahend rahuldaks võrrandit (4.150) ka punktis  $r = 0$ , kus asetseb

laeng. On näha, et piirjuhul  $\lim_{r \rightarrow 0} \psi = \infty$ . See tähendab, et koordinaadistiku alguspunktile lähenemisel saavad  $\psi$  tuletised ruumikoordinaatide järgi väga suureks. Seepärast võime võrrandis (4.150) aja järgi tuletised ära jätta. Saame

$$\Delta \psi = -4\pi de \delta(\vec{x}). \quad (4.159)$$

Eelmises punktis nägime, et selle võrrandi lahendiks on

$$\psi = \frac{de}{r}. \quad (4.160)$$

Lahendid (4.158) ja (4.160) saame kokku võtta

$$\psi = \frac{de(t - \frac{r}{c})}{r}. \quad (4.161)$$

Näeme, et ajas muutuva suurusega punktlaengu potentsiaal mingis ruumpunktis on võrdeline laengu suurusega, mis on võetud aga mitte antud momendil  $t$ , vaid sellest varasemal ajamomendil  $t - \frac{r}{c}$ . Sisuliselt tähendab see, et laengu tekitatud mõju levib valguse kiirusega. Kui me oleme laengust kaugusel  $r$ , siis mõjub laeng meile niisugusena, nagu ta oli  $\frac{r}{c}$  võrra varasemal ajamomendil. Argumendist  $t - \frac{r}{c}$  sõltuvaid potentsiaale nimetatakse hilinevateks potentsiaalideks (või ka retardeeritud potentsiaalideks).

Et saada võrrandi (4.150) lahendit ulatusliku laengute jaotuse korral, kirjutame laenguelemendi

$$de = \rho dV, \quad (4.162)$$

kus  $\rho$  on laengutihedus ja  $dV$  ruumielement. Asendame selle avaldise potentsiaali valemisse (4.161) ja integreerime üle kogu ruumi. Saame

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{2} \rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) dV'. \quad (4.163)$$

Analoogilisel teel saame leida lahendi võrrandile (4.151):

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{2} \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) dV'. \quad (4.164)$$

Need on üldised avaldised hilinevate potentsiaalide jaoks.

Märgime lõpuks, et juhul, kui me oleksime lahendis (4.157) võtnud  $\vec{j}_3 = 0$ , oleksime saanud (4.163) ja (4.164) asemel

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{2} \rho(\vec{x}', t + \frac{r}{c}) dV', \quad (4.165)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{1}{2} \vec{j}(\vec{x}', t + \frac{r}{c}) dV'. \quad (4.166)$$

Neid potentsiaale nimetatakse ettejäädvateks potentsiaalideks (või ka avansseeritud potentsiaalideks). Need potentsiaalid kirjeldavad laengu ja voolu mõju väljale nii, et antud hetkel mõjub laeng niisugusena, nagu ta on alles aja  $\frac{r}{c}$  pärast.

Kas ettejäädvadel potentsiaalidel otsest füüsikalist tähendust on, pole veel selge.

## § 12. Liikuva punktlaengu potentsiaal.

Vaatleme meelevaldselt liikuvat punktlaengut, mille suurus olgu  $e$ . Kui me mõeldame selle laengu tekitatud välja ajamomendil  $t$ , siis mõjub see laeng niisugusena, nagu ta oli varasemal ajamomendil  $t'$ , kusjuures

$$t' + \frac{r(t')}{c} = t. \quad (4.167)$$

$r(t')$  tähistab siin kaugust laengu ja välja mõõtmiskoha vahel ajamomendil  $t'$ .

Valime taustsüsteemi nii, et ajamomendil  $t'$  on laeng selles liikumatu. Sel juhul saame laengu tekitatud välja potentsiaalid niisugustena, nagu me nad arvutasime 10. punktis:

$$\psi = \frac{e}{r(t')}, \quad \vec{A} = 0. \quad (4.168)$$

Et määrata neid potentsiaale meelevaldses inertsiaalsüsteemis, leiame relativistlikult invariantse avaldise, mis paigalseisva laengu erijuhul annaks potentsiaalid (4.168). Lihtne on näha, et niisuguseks avaldiseks on

$$A_\nu = -e \frac{u_\nu}{r_\sigma u_\sigma}. \quad (4.169)$$

$u_\nu$  tähistab siin laengu 4-dimensioonilise kiiruse vektorit (I; 3.101) ja  $r_\sigma = x_\sigma - x'_\sigma$ , kus  $x_\sigma$  on välja mõõtmist tähistava sündmuse koordinaadid ja  $x'_\sigma$  - koordinaadid sündmusele, et laeng on hetkel  $t'$  ruumpunktis  $\vec{x}'$ . Sündmused  $x_\sigma$  ja  $x'_\sigma$  on teineteisest eraldatud isotroopse intervalliga:

$$r_\sigma r_\sigma = 0 \quad \text{s.o.} \quad r_4 = i r. \quad (4.170)$$

Et

$$u_\nu = \frac{dx'_\nu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx'_\nu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{u}, ic), \quad (4.171)$$

siis on näha, et paigalseisva laengu erijuhul

$$\vec{A} = 0, \quad \psi = \frac{-ec}{ic r_4},$$

mis ühtib valemitega (4.168), kui pidada silmas tingimust (4.170). Järelikult on (4.169) tõepoolest üldine avaldis liikuva punktlaengu potentsiaalide jaoks. Kolmedimensioonilises kujus saame (4.169) kirjutada

$$\varphi = \frac{e}{(r - \frac{vz}{c})}, \quad (4.172)$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{c(r - \frac{vz}{c})}. \quad (4.173)$$

Need valemid määravad liikuva punktlaengu potentsiaalid, kusjuures tuleb silmas pidada, et kõik paremal pool antud suurused tuleb võtta ajamomendil  $t'$ .

### § 13. Liikuv laeng kui elektromagnetiliste lainete allikas.

Vaatleme koordinaadistiku alguspunkti läheduses liikuva laengu tekitatud välja suurel kaugusel mingis ruumpunktis  $P$ . Tähistame ruumpunkti  $P$  kaugusvektorit koordinaatide alguspunktist  $\vec{R}_0$  ja liikuva laengu kaugusvektorit koordinaatide alguspunktist  $\vec{r}'$ . Seejuures  $r' \ll R_0$ . Laengu ja punkti  $P$  vahelise kauguse saame siis

$$\vec{r} = \vec{R}_0 - \vec{r}', \quad (4.174)$$

millest järgneb

$$r = |\vec{R}_0 - \vec{r}'| = R_0 - \frac{\vec{R}_0 \cdot \vec{r}'}{R_0}. \quad (4.175)$$

Kõrgemat järku väikesed liikmed viskasime siin kõrvale.

Juhul, kui laeng kiirgab elektromagnetilisi laineid, siis eemalduvad need temast igas suunas kiirusega  $C$ . Tegemist on kerakujuliste lainetega ruumis. Kui me vaatame neid laineid aga küllalt suurelt kauguselt, siis võime keralaene mitte väga suuri osi lugeda praktiliselt tasapinnalisteks laineteks, nagu me neid uurisime punktis 7. Lainevek-

torisuunaline ühikvektor on sel juhul  $\vec{k}_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$ . Valemitest (4.108) ja (4.110) on näha, et elektri- ja magnetväli on omavahel risti ning neid saab arvutada potentsiaali  $A$  ajalise tuletise kaudu:

$$\vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{A}, \quad (4.176)$$

$$\vec{H} = \vec{k}_0 \times \vec{E}, \quad (4.177)$$

kus  $\vec{A}$  tähistab  $A$  tuletist aja järgi. Energia voolu vektor (4.71) tuleb

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{k}_0 = \frac{\omega^2}{4\pi c} |\vec{A}|^2 \vec{k}_0, \quad (4.178)$$

s. o. energia voolab liikuvast laengust eemale. Meil tuleb veel ainult lahendada küsimus: missugusel juhul on energia voolu vektor nullist erinev, s. o. missugusel juhul kiirgab liikuv laeng elektromagnetilisi laineid.

Kirjutame vektorpotentsiaali (4.173) avaldise üles suurte kauguste jaoks. Selleks teeme seal asenduse (4.175) ja võtame arvesse ainult suuri liikmeid. Saame

$$\vec{A} = \frac{ev(t')}{cR_0(1 - \frac{R_0 v(t')}{c})}. \quad (4.179)$$

Arvutame nüüd  $\vec{A}$  tuletise aja  $t$  järgi:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (4.180)$$

Et leida selles avaldises olev tegur  $\frac{\partial t'}{\partial t}$ , võtame tuletise valemist (4.170) järgnevast seosest

$$r(t') = c(t - t'). \quad (4.181)$$

Saame

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}). \quad (4.182)$$

Teiselt poolt

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (4.183)$$

Diferentseerides identsust  $r^2 = \vec{r}^2$ , saame

$$r \frac{\partial z}{\partial t'} = \vec{r} \frac{\partial \vec{z}}{\partial t'} = -\vec{r} \vec{v}(t'), \quad (4.184)$$

kus  $\vec{v}(t')$  tähistab laengu liikumise kiirust (miinusmärk on tingitud sellest, et  $\vec{r}(t')$  on suunatud laengu  $e$  juurest punkti  $P$ ; kiiruse  $\vec{v}(t')$  saamiseks tuleb tuletis võtta aga vastupidise suunaga vektorist). Eelmisest valemist saame

$$\frac{\partial z}{\partial t'} = -\frac{\vec{r} \vec{v}}{r}. \quad (4.185)$$

Kui asendame selle valemisse (4.183), järgneb

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\vec{r} \vec{v}}{r} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (4.186)$$

Võrrutades nüüd omavahel avaldised (4.182) ja (4.186), saame

$$c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = -\frac{\vec{r} \vec{v}}{r} \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (4.187)$$

millest järgneb

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} \vec{v}}{cr}}. \quad (4.188)$$

Valemi (4.180) võime järelilikult kirjutada

$$\vec{\dot{A}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{r} \vec{v}}{cr}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}. \quad (4.189)$$

$\vec{\dot{A}}$  on nullist erinev sel juhul, kui on nullist erinev  $\vec{A}$  tuletis  $t'$  järgi. Kui laengu liikumise kiirus ajast ei ole (kui laeng liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt), siis valemist (4.179) järgneb et  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'} = 0$  ja energia voolu vektor (4.178) on null. Ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuv laeng ei kiirga energiat. Küll aga kiirgab laeng energiat sel juhul, kui ta liigub kiirendusega.

Kiirendusega liikuv laeng kiirgab elektromagnetilisi laineid ja kaotab ise selle juures energiat.

K i r j a n d u s .

1. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Теория поля, Москва 1960.
2. Боголюбов, Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, Москва 1957.

## S i s u k o r d .

Sissejuhatus . . . . .	3
I. KOLMEDIMENSIOONILISE VEKTORRUUMI TEISENDUSRÜHMADE ESITUSED JA NENDE RAKENDUSI FÜÜSIKAS . . . . .	5
§ 1. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma lõplikudimensioonilised taandumatud esitu- sed . . . . .	5
§ 2. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma invariandi omaväärtused . . . . .	13
§ 3. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma mõningaid konkreetseid esitusi. . . . .	15
§ 4. Matemaatilise skeemi füüsikalisest interpre- teerimisest . . . . .	19
§ 5. Aja ja ruumi nihete rühma esitused. Energia ja impulss . . . . .	24
§ 6. Matemaatilise skeemi füüsikalisest interpre- teerimisest (järg) . . . . .	27
§ 7. Spinnvektori füüsikalisest tähendusest . . . . .	29
§ 8. Kolmedimensioonilise vektorruumi omateisenduste rühma esitus skalaarses Hilberti ruumis . . . . .	34
§ 9. Orbitaalne pöördimpulss . . . . .	38
§ 10. Omateisenduste rühma esituste otsekorrutis. . . . .	43
§ 11. Esituste otsekorrutise taandumise füüsikaline mõte. Süsteemi koguspinn. . . . .	50
§ 12. Kogupöördimpulss . . . . .	53
§ 13. Kolmedimensioonilise ruumi spinnorid . . . . .	55

§ 14. Kolmedimensioonilise ruumi tensorid . . . . .	58
§ 15. Kolmedimensioonilise vektorruumi täieliku ortogonaalse rühma esitused . . . . .	62
§ 16. Paarsus . . . . .	64
§ 17. Aditiivsed ja multiplikatiivsed jäävuse- seadused. . . . .	68
§ 18. Paarsuse mittejäävus nõrgas interaktsioonis.	71
II. LORENTZI RÜHMA LÕPLIKUDIMENSIOONILISED ESITUSED JA NENDE RAKENDUSI FÜÜSIKAS . . . . .	
§ 1. Lorentzi omarühma esituste peamine erinevus pöörete rühma esitustest. . . . .	78
§ 2. Lorentzi omarühma lõplikudimensioonilised taandumatud esitused . . . . .	80
§ 3. Lorentzi rühma lõplikudimensiooniliste esituste otsekorrutis . . . . .	85
§ 4. Minkowski ruumi spinatorid . . . . .	87
§ 5. Minkowski ruumi tensorid . . . . .	94
§ 6. Elektromagnetilise välja teisenemisomadused.	100
§ 7. Lorentzi omarühma esitused skalaarses Hilberti ruumis. Masskeskme kiiruse jäävuse seadus.	105
§ 8. Üldise Lorentzi rühma tensoresitustest. .	109
§ 9. Mittehomogeense Lorentzi rühma esitustest.	114
§ 10. Mittehomogeense Lorentzi rühma invariantide füüsikaline interpretatsioon . . . . .	118
III. RELATIVISTLIKULT INVARIANTSED VÕRRANDID. . . . .	
§ 1. Välja võrrandid . . . . .	123
§ 2. Lagranžiaan ja välja võrrandid . . . . .	127
§ 3. Maxwelli võrrandid . . . . .	129

§ 4.	D'Alemberti võrrand . . . . .	134
§ 5.	Klein-Gordoni võrrand . . . . .	136
§ 6.	Diraci võrrand . . . . .	138
§ 7.	Diraci võrrandi relativistlik invariantus.	142
§ 8.	Kemmer-Duffini võrrand. . . . .	144
IV.	RELATIVISTLIKULT INVARIANTSETE VÕRRANDITE KÄSIT- LEMINE KLASSIKALISE VÄLJATEOORIA VÕRRANDITENA. KLASSIKALINE ELEKTRODÜNAAMIKA . . . . .	150
§ 1.	Noetheri teoreem . . . . .	150
§ 2.	Välja energia ja impulsa . . . . .	155
§ 3.	Välja pöördimpulss ja spinn . . . . .	155
§ 4.	Välja laeng ja vooluvektor . . . . .	157
§ 5.	Interaktsioonis olevad väljad . . . . .	159
§ 6.	Elektromagnetilise välja energia ja impulss.	164
§ 7.	Elektromagnetilised lained. . . . .	169
§ 8.	Doppleri efekt . . . . .	174
§ 9.	Punktilaengu matemaatilisest kirjeldamisest. $\delta$ -funktsioon . . . . .	177
§ 10.	Coulombi seadus . . . . .	180
§ 11.	Hilinevad potentsiaalid . . . . .	183
§ 12.	Liikuva punktilaengu potentsiaal . . . . .	186
§ 13.	Liikuv laeng kui elektromagnetiliste lainete allikas . . . . .	188

Тартуский государственный университет  
ЭССР, г.Тарту, ул. Бликооли, 18

Х. Нилгане

ОСНОВНОЙ КУРС СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРЕТИ-  
ЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

II

На эстонском языке

---

Vastutav toimetaja P. Kard  
Korrektor E. Oja

---

ТШУ rotaprint 1967. Trükiroognaid 12,12.  
Tingtrükiroognaid 11,03. Arvestusroog-  
naid 8,85. Trükiarv 500. Paber 30x42.1/4.  
Paljundamisele antud 31. XII 1966.a.  
ME 11899. Tell. nr. 578.

Hind 26 kop.

Hind 26 kop.