TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

541

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 541 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1980

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОСНОВНЫМ ПОНЯТИЯМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Т. Мелс

Случайные переменные общего типа рассматриваются обычно как измеримые отображения вероятностного пространства в некоторое измеримое или топологическое пространство (см. /3/). Такой подход при всей своей наглядности и простоте не всегда является самым экономичным и естественным. Нам кажется, например, что иногда ограничения типа измеримости удобнее ввести не явно, а путем фиксирования некоторого достаточно богатого и практически важного класса функций, сохраняющих свойство отображения быть случайным переменным. Вероятностные распределения при таком подходе естественно представлять функционалами, подобно интегралам Даниэля, что в теории вероятностей не менее естественно, чем абстрактная теория меры и интеграла.

В данной статье сделана попытка представить некоторые основные понятия теории вероятностей в функциональной форме. Вводятся общие случайные элементы (называемые бэровскими), их функционалы распределения и условные операторы распределения. Ввиду ограниченности объема статьи, затронуты лишь основные черты функционального подхода. Для числовых случайных величин и векторов функциональный подход был последовательно применен в университетском учебнике по теории вероятностей и математической статистике /4/. Аналогичный подход для случайных элементов на вполне регулярном топологическом пространстве развивается в первой части диссертации /2/, а также в некоторых статьях, указанных в /2/. В настоящей статье априорные структуры (топологические, алгебраические) на множество значений случайных элементов не вводятся. Впервые рассматриваются маргинальная структура и операторы условного распределения.

§ 1. Бэровские случайные элементы

1.1. Обозначим Ω - множество элементарных событий, R - числовая прямая, X - пространство отображений $\Omega \to R$, объявляемых случайными величинами. Предположим, как принято в теории вероятностей, что X содержит все постоянные функции и, кроме того, замкнут относительно поточечных операций сложения, умножения и образования $\sup$ и $\inf$ любых двух своих элементов. У нас это предположение относительно X является первой из двух аксиом теории вероятностей, см. /4/. Указанные свойства пространства случайных элементов будем называть конечными свойствами (к.с.), а термином "счетные свойства" (с.с.) называем свойства, усиливающие к.с. дополнительным требованием, что все поточечные верхние грани счетных подсемейств принадлежат X, если только они существуют как функции $\Omega \to R$, мажорированные элементами X.

Понятия к.с. и с.с. применимы , кроме X, к произвольному классу вещественных функций на фиксированной области определения. Ниже мы будем пользоваться ими без особых комментариев.

1.2. Пусть M - множество (значений случайного элемента) и F - некоторый класс числовых функций $M \to R$. Бэровскими случайными элементами (б.с.э.) формата (F, X) на M называем такие отображения $x: \Omega \to M$, где суперпозиция fx принадлежит X при всех $f \in F$. Класс б.с.э. формата (F, X) на M обозначим $B(M, F, X)$.

Пусть M_1, M_2 - множества, B - некоторый класс б.с.э. на M_2, а H - некоторое множество отображений $M_1 \to M_2$. Бэровским случайным элементом формата (H, B) называем всякое отображение $x: \Omega \to M_1$, где суперпозиция hx принадлежит B при всех $h \in H$. Класс всех б.с.э. формата (H, B) на M обозначим $B(M, H, B)$.

<u>Предложение</u> 1. Если H, F и HF - соответственно классы отображений $M_1 \to M_2$, $M_2 \to R$ и их суперпозиций fh ($h \in H$ и $f \in F$), то

$$B(M_1, H, B(M_2, F, X)) = B(M_1, HF, X). \qquad (1)$$

Доказательство. Если $x \in B(M_1, H, B(M_2, F, X))$, то при всех $h \in H$ имеем $hx \in B(M_2, F, X)$, т.е. при всех $f \in F$ верно

$f h x \in X$. Поэтому $x \in B(M_1, HF, X)$, так что левая часть (1) содержится в правой. Аналогично доказывается обратное включение.

1.3. Если F_1 и F_2 - классы функций $f: M \to R$ и $F_1 \subset F_2$, то $B(M, F_2, X) \subset B(M, F_1, X)$. Если, кроме того, $B(M, F_1, X) = B(M, F_2, X)$, то формат (F_2, X) называем расширением формата (F_1, X). Формат называем максимальным, если он совпадает с любым своим расширением. Если из форматного класса F^* максимального формата (F^*, X) исключить все неограниченные функции, то получим максимальный ограниченный формат.

Предложение 2. Всякий формат (F, X) имеет максимальное расширение. Форматный класс F^* максимального формата (F^*, X), а также форматный класс максимального ограниченного формата обладают с.с.

Доказательство. Обозначим F^* класс всех функций $f^*: M \to R$ со свойством: для всех $x \in B(M, F, X)$ верно $f^* x \in X$. Тогда $B(M, F, X) \subset B(M, F^*, X)$. Но $F \subset F^*$ и поэтому также $B(M, F^*, X) \subset B(M, F, X)$. Значит, формат (F^*, X) является расширением формата (F, X). В силу своего определения он оказывается максимальным расширением исходного формата (F, X). Осталось еще убедиться, что F^* обладает с.с. (тогда и его подкласс ограниченных функций обладает с.с.). Докажем, что F^* содержит верхнюю грань всякого счетного поточечно ограниченного подсемейства, остальные же с.с. доказываются аналогично.

Итак, пусть $f_1^*, f_2^*, \ldots \in F^*$ и $f^* = \sup\{f_1^*, f_2^*, \ldots\} < \infty$ (поточечно). Надо показать $f^* \in F^*$ т.е. что при любом $x \in B(M, F, X)$ верно $f^* x \in X$. Но поскольку $f_i^* x \in X$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $f^* x = \sup\{f_1^* x, f_2^* x, \ldots\} < \infty$, в силу того, что X обладает с.с., действительно имеем $f^* x \in X$. Предложение доказано.

Отметим, что доказанное предложение верно также и для форматов (F, B), где B - класс б.с.э. В силу предложения 2 можно полагать, что форматный класс F обладает с.с., не ограничивая этим общности.

1.4. Событиями называем предикаты вида $\{x(\omega) < t\}$, где $x \in X$ и $t \in R$, а также и их области истинности в Ω (см. /4/). Класс всех событий обозначим $\Sigma(X)$ или Σ. В силу того, что X имеет с.с., $\Sigma(X)$ оказывается σ-алгеброй (см. /4/).

Бэровскими событиями называем предикаты $\{fx(\omega)<t\}$, где $f\in F$, $x\in B(M,F,X)$ и $t\in R$. Класс бэровских событий обозначим $\Sigma(M,F,X)$.

Предложение 3. Имеет место равенство

$$\Sigma(M,F,X)=\begin{cases}\Sigma(X), & \text{если } F \text{ содержит непостоянную функцию,}\\ \{\emptyset,\Omega\}, & \text{если } F \text{ состоит из постоянных функций.}\end{cases}$$

Доказательство. Если f - постоянная функция, то имеем $\{fx(\omega)<t\}=\emptyset$ или Ω. Предположим теперь существование непостоянной функции $f\in F$. В силу определения бэровских событий, всегда $\Sigma(M,F,X)\subset\Sigma(X)$, и достаточно доказать обратное включение. Пусть $A\in\Sigma(X)$. Берем $a,b\in M$ так, что $f(a)<f(b)$ и определим отображение

$$x(\omega)=\begin{cases}a, & \text{если } \omega\in A,\\ b, & \text{если } \omega\in A^c.\end{cases}$$

Тогда при любой $h\in F$ предикат $\{hx<t\}$ является событием для всех $t\in R$, откуда вытекает (см. /4/), что $hx\in X$ для всех $h\in F$. Это значит, что $x\in B(M,F,X)$. Но $A=\{fx<t\}$, где $t=f(b)$. Поэтому $A\in\Sigma(M,F,X)$ и предложение доказано.

1.5. Примером б.с.э. являются обычные случайные величины и векторы. Менее тривиальный пример представляют случайные числовые функции на некотором множестве T. Их можно рассматривать как б.с.э. класса $B(R^T,F,X)$, где R^T - класс числовых функций на T, а F состоит из т.н. цилиндрических функционалов (см. /1/). Согласно определению, цилиндрический функционал f имеет представление $f\varphi=h_f(\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_{n_f}))$, где $\varphi\in R^T$, $h_f(a_1,\dots,a_{n_f})$ - измеримая функция n_f вещественных аргументов и $t_1,\dots,t_{n_f}$ - зависящие только от f элементы в T. В данном случае F обладает к.с., а максимальный форматный класс состоит из всех функционалов, измеримых относительно σ-алгебры цилиндрических множеств в R^T.

1.6. Другой пример б.с.э. - это кортеж $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ n экземпляров б.с.э. некоторого класса $B(M,F,X)$. Такой кортеж называем бэровским случайным вектором (б.с.в.), а класс всех б.с.в. обозначим $B_n(M,F,X)$. Чтобы показать, каким б.с.э.

соответствуют б.с.в. класса $B_n(M, F, X)$, введем следующие классы функций $M^n \to R$:

1) класс $F^{\odot n}$ всех тензорных произведений $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$, где $f_i \in F$;
2) тензорная степень $F^{\otimes n}$ класса F (т.е. линейная оболочка класса $F^{\odot n}$);
3) класс F^{+n} всех функций $\varphi: M^n \to R$ специального вида

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = h(f_{11}(a_1), f_{12}(a_1), \ldots \\ \ldots, f_{1k_1}(a_1), f_{21}(a_2), \ldots, f_{nk_n}(a_n)), \quad (2)$$

где $k_1, \ldots, k_n \geq 0$, функция $h: R^{k_1 + \ldots + k_n} \to R$ ограничена и измерима, а $f_{11}, \ldots, f_{nk_n} \in F$ (здесь h, k_i и f_{ij} зависят от φ);
4) подкласс F^{cn} в F^{+n} функций вида (2), где h - непрерывна.

Классы $F^{\otimes n}$, F^{+n} и F^{cn} обладают, очевидно, к.с.

Предложение 4. Если $1 \in F$, то имеют место равенства

$$B_n(M, F, X) = B(M^n, F^{+n}, X) = B(M^n, F^{cn}, X) = B(M^n, F^{\otimes n}, X) \\ = B(M^n, F^{\odot n}, X).$$

Доказательство. Если $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ - б. с. в. класса $B_n(M, F, X)$, то $f_{ij}(x_i) \in X$ при всех $f_{ij} \in F$ и поэтому также $\varphi x \in X$ при всех $\varphi \in F^{+n}$. Значит, $B_n(M, F, X) \subset B(M^n, F^{+n}, X)$. Далее, в силу включений $F^{\odot n} \subset F^{\otimes n} \subset F^{cn} \subset F^{+n}$ имеем

$$B(M^n, F^{+n}, X) \subset B(M^n, F^{cn}, X) \subset B(M^n, F^{\otimes n}, X) \subset B(M^n, F^{\odot n}, X).$$

Осталось лишь доказать, что $B(M^n, F^{\odot n}, X) \subset B_n(M, F, X)$. Берем $g = 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes f \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \in F^{\odot n}$, где тензорный сомножитель $f \in F$ стоит на i-том месте. Тогда $gx \in X$, но $gx = f x_i$. В силу произвольности $f \in F$ заключаем $x_i \in B(M, F, X)$. Поэтому $x \in B_n(M, F, X)$. Предложение доказано.

§ 2. Распределения бэровских случайных элементов

2.1. Распределения случайных величин $x \in X$ представляем функционалами распределения (ф.р.) $P_x: F \to R$ на некотором достаточно богатом классе F измеримых функций $f: R \to R$ (например, на классе всех непрерывных ограниченных функций или на классе индикаторов борелевских множеств)*. Ф.р.P_x существуют для всех $x \in X$ и он линеен ($P_x(\alpha f + \beta h) = \alpha P_x f + \beta P_x h$), непрерывен (если $x_i \downarrow 0$ поточечно, то $P_x f_i \to 0$), неотрицателен ($f \geqslant 0 \Rightarrow P_x f \geqslant 0$) и нормирован ($P_x 1 = 1$). Указанные свойства, характерные для ф.р., будем называть свойствами функционала распределения (с.ф.р.). Любой функционал, обладающий с.ф.р., называем ф.р.

2.2. Функционал распределения б.с.э. $x \in B(M, F, X)$ определяем для ограниченных функций $f \in F$ равенством

$$P_x f = P_{fx} I, \tag{3}$$

где $I: R \to R$ - тождественное отображение, а P_{fx} - ф. р. случайной величины fx. Класс всех ф.р. б.с.э. класса $B(M, F, X)$ обозначим $\Phi(M, F, X)$. Любой $P_x \in \Phi(M, F, X)$ обладает с.ф.р. Для выяснения корректности определения (3) и описания возможных областей определения ф.р. б.с.э., очень полезной оказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 - классы ограниченных на M вещественных функций, являющиеся линейными решетками и содержащие постоянные функции. Обозначим Σ_1 и Σ_2 - минимальные σ-алгебры на M, обеспечивающие измеримость функций соответственно классов F_1 и F_2. Тогда условие

$$\Sigma_2 \subset \Sigma_1$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы любой функционал P_1 на F_1, имеющий с.ф.р., допускал бы однозначное продолжение (с сохранением с.ф.р.) на F_2.

Доказательство см. в /2/.

Произвольный класс функций на M называем достаточной областью определения функционала распределения (д.о.о.ф.р.), если любой ф.р. однозначно продолжается с него на максимальный ограниченный форматный класс (см. 1.3). Согласно теореме 1, форматный класс F является д.о.о.ф.р., если он являет-

* Существование P_x вытекает из второй аксиомы теории вероятностей, см. /4/. Для ступенчатых измеримых $f: R \to R$ определим $P_x f = E f x$, а затем продолжаем P_x на более обширный класс функций, используя, например, теорему 1.

ся линейной решеткой и содержит постоянную функцию (например, если F имеет к.с.). Класс F является д.о.о.ф.р. также и тогда, когда ф.р. продолжается с него однозначно на некоторую линейную решетку функций. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что ф.р. задан на некоторой д.о.о.ф.р.

2.3. Доказанное в предложении 1 равенство (1)

$$B(M_1, H, B(M_2, F, X)) = B(M_1, FH, X)$$

порождает некоторое отображение $H \times B(M_1, FH, X) \to B(M_2, F, X)$. Действительно, любые $h \in H$ и $x \in B(M_1, FH, X)$ определяют однозначно б.с.э. $hx \in B(M_2, F, X)$. Отображению $x \to hx$ соответствует отображение ф.р. $P_x \to P_{hx}$. Более общим образом, если $P \in \Phi(M_1, FH, X)$ и $h \in H$, то правило $f \to Pfh$ задает ф.р. класса $\Phi(M_2, F, X)$. Введем для него специальное обозначение $marg_h P$:

$$marg_h Pf = Pfh. \tag{4}$$

Естественно назвать $marg_h P$ маргинальным функционалом ф.р.P. Максимальная область определения $marg_h P$ состоит в точности из таких функций f, где fh входит в максимальную область определения P.

Отметим, что если F и FH - д.о.о.ф.р., то совокупность маргинальных функционалов $marg_h P$ ($h \in H$) определяет P однозначно. Однако более интересным является вопрос, при каких условиях произвольная совокупность функционалов P_h ($h \in H$) является набором маргинальных функционалов для некоторого ф.р. P.

2.4. Чтобы ответить на этот вопрос, несколько обобщаем ситуацию предыдущего пункта. Пусть Ξ - некоторый класс отображений $\xi : M \to M_\xi$, где множество M_ξ зависит от ξ. Пусть, далее F_ξ - класс функций $f : M_\xi \to R$. Будем говорить, что набор $\langle M, \Xi, M_\xi, F_\xi (\xi \in \Xi)\rangle$ есть маргинальная структура на M, если для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ существуют $\xi \in \Xi$ и отображения $\eta_1 : M_\xi \to M_{\xi_1}$ и $\eta_2 : M_\xi \to M_{\xi_2}$, где $\xi_1 = \eta_1 \xi$, $\xi_2 = \eta_2 \xi$ и $f_1\eta_1, f_2\eta_2 \in F_\xi$ при $f_1 \in F_{\xi_1}$, $f_2 \in F_{\xi_2}$. Взаимную связь функций в маргинальной структуре поясняет следующая схема:

$$\begin{tikzcd} & & M_{\xi_1} \arrow[dr, "f_1"] & \\ M \arrow[r, "\xi"] & M_\xi \arrow[ur, "\eta_1"] \arrow[dr, "\eta_2"'] & & R \\ & & M_{\xi_2} \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd} .$$

<u>Теорема</u> 2. Пусть $\langle M, \Xi, M_\xi, F_\xi \ (\xi \in \Xi)\rangle$ - маргинальная структура на M и $F = \{f\xi \mid \xi \in \Xi, f \in F_\xi\}$. Предполагаем, что классы F и F_ξ $(\xi \in \Xi)$ являются линейными решетками ограниченных функций и содержат также постоянные функции. Пусть дано еще семейство функционалов $P_\xi \in \Phi(M_\xi, F_\xi, X)$, где $\xi \in \Xi$. Тогда нижеследующие условия 1^0 и 2^0 эквивалентны.

1^0 Существует такой функционал $P \in \Phi(M, F, X)$, что

$$P_\xi = marg_\xi P \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Xi . \tag{5}$$

2^0 Функционалы P_ξ удовлетворяют условию согласованности

$$\text{если} \quad h_к \xi_к \uparrow h\xi, \quad \text{то} \quad P_{\xi_к} h_к \uparrow P_\xi h . \tag{6}$$

Кроме того, из 2^0 вытекает единственность функционала P, удовлетворяющего (5).

Доказательство. Пусть $P \in \Phi(M, F, X)$ и для всех $\xi \in \Xi$ $marg_\xi P = P_\xi$. Тогда, если $h_к \xi_к \uparrow h_0 \xi_0$, где $h_к \in F_{\xi_к}$ и $h_к \xi_к \in F$ $(к = 0, 1, \ldots)$, то имеем $P_{\xi_к} h_к = P h_к \xi_к \uparrow P h_0 \xi_0 = P_{\xi_0} h_0$. Поэтому из 1^0 вытекает 2^0.

Чтобы доказать обратную импликацию, построим, исходя из P_ξ, функционал P. Определим

$$Pf = P_\xi h \quad \text{для всех} \quad f = h\xi \in F \tag{7}$$

и убедимся, что P имеет с.ф.р. ((5) вытекает из (7) немедленно). Прежде всего заключаем из (6), что значение Pf не зависит от конкретного представления $f = h\xi$ и поэтому определение (7) корректно.

Докажем линейность P. Пусть $f' = h'\xi' \in F$ и $f'' = h''\xi'' \in F$. Используя то, что $\langle M, \Xi, M_\xi, F_\xi \ (\xi \in \Xi)\rangle$ является маргинальной структурой, берем ξ, η' и η'' так, что $\xi' = \eta'\xi$ и $\xi'' = \eta''\xi$. Тогда $\alpha f' + \beta f'' = (\alpha h_1 + \beta h_2)\xi$, где $h_1 = h'\eta'$ и $h_2 = h''\eta''$ принадлежат F_ξ. Поскольку F_ξ - линейная решетка, то $h = (\alpha h_1 + \beta h_2) \in F_\xi$, так что

$$P(\alpha f' + \beta f'') = Ph\xi = P_\xi h = P_\xi(\alpha h_1 + \beta h_2) =$$
$$= \alpha P_\xi h_1 + \beta P_\xi h_2 = \alpha P f' + \beta P f''$$

и линейность P доказана. Непрерывность функционала P вытекает непосредственно из (6). Для доказательства неотрицательности P берем $f \geqslant 0$, где $f \in F$. Пусть, например, $f = h\xi$. Учтя $h \geqslant \inf(h, 0) \equiv h^-$, где $h^- \in F_\xi$ (F_ξ - линейная решетка!), имеем $Pf = P_\xi h \geqslant P_\xi h^-$. Поскольку $f \geqslant 0$, то $h^-\xi = f^- = 0$ и поэтому $Pf \geqslant 0$, т.е. P неотрицателен.

Чтобы убедиться в нормированности P, берем $1_{M_\xi} \in F_\xi$. Тогда $1 = P_\xi 1_{M_\xi} = P 1_{M_\xi}\xi = P1_M$. Этим доказано, что P обладает с.ф.р. Единственность функционала P, удовлетворяющего (7), вытекает из теоремы 1 и того, что F - линейная решетка ограниченных функций с $1 \in F$. Теорема доказана.

2.5. Теорему 2 можно использовать для задания или построения ф.р.б.с.э. Пусть, например, $M = R^T$ как в пункте 1.5, а Ξ - класс конечномерных проекций $\xi: R^T \to R^{\{t_1,\dots,t_n\}}$ (т.е. $M_\xi = R^{\{t_1,\dots,t_n\}}$ и при $\varphi \in R^T$ $\xi\varphi = \langle\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_n)\rangle$). Если F_ξ - класс измеримых функций $h: R^{\{t_1,\dots,t_n\}} \to R$, то $\langle R^T, \Xi, M_\xi, F_\xi\,(\xi \in \Xi)\rangle$ есть маргинальная структура, а $F = \{h\xi \mid \xi \in \Xi,\ h \in F_\xi\}$ состоит из всех цилиндрических функционалов. Допустим, что даны некоторые функционалы P_ξ ("конечномерные распределения"), которые согласованы между собой так, как это требуется в теореме Колмогорова /1/, стр. 65. С помощью средств этой теоремы можно установить для P_ξ свойство (6). Поэтому в $\Phi(R^T, F, X)$ существует единственный ф.р., имеющий P_ξ в качестве маргинальных функционалов. Разумеется, этот функционал единственным образом расширяется на форматный класс F^* максимального ограниченного формата б.с.э. $B(R^T, F, X)$ и дает т.н. меру случайного процесса.

2.6. Будем строить (тензорное) произведение ф.р. б.с.э. $P_1, \dots, P_n$ $\Phi(M, F, X)$ или, что равносильно, распределение б.с.в., компоненты которого независимы и имеют распределения $P_1, \dots, P_n$.

<u>Предложение 5</u>. Если класс F ограниченных функций содержит постоянную функцию и является д.о.о.ф.р.б.с.э. класса $B(M, F, X)$, то класс $F^{\otimes n} = \{f_1 \otimes \dots \otimes f_n \mid f_1, \dots, f_n \in F\}$ является д.о.о.ф.р.б.с.в. класса $B_n(M, F, X)$.

Доказательство вполне аналогично доказательству частного случая этого предложения при $M = \mathbb{R}$, который приводится в /4/, стр. 194.

Из теоремы 1 и предложений 4 и 5 вытекает, что если F - линейная решетка ограниченных функций и содержит единицу, то ф.р.б.с.в. $x \in B_n(M, F, X)$ однозначно определяется своими значениями от функций $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$, где $f_1, \ldots, f_n \in F$. Кроме того, любой ф.р. на $F^{\otimes n}$ допускает тогда однозначное продолжение до ф.р. на F^{+n}. Используем этот факт для построения произведения ф.р. $P_1, \ldots, P_n$. Определим функционал

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \to P_1 f_1 \cdot \ldots \cdot P_n f_n \qquad (8)$$

для всех $f_i \in F$ (F - д.о.о.ф.р., $1 \in F$). Функционал (8) нормирован и неотрицателен. Он и непрерывен: если при $i \to \infty$ $f_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes f_n^{(i)} \downarrow 0$ (поточечно), то можно считать, что для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$ $f_k^{(i)} \downarrow 0$ и, значит, $P_k f_k^{(i)} \downarrow 0$. Для доказательства линейности функционала (8) достаточно установить его аддитивность. Пусть

$$f_1' \otimes \ldots \otimes f_n' + f_1'' \otimes \ldots \otimes f_n'' = f_1 \otimes \ldots \otimes f_n. \qquad (9)$$

Не умаляя общности можно в (9) считать, что $f_i = f_i' = f_i''$ при всех значениях i, за исключением, быть может, только одного (скажем, $i = k$), при котором $f_k = f_k' + f_k''$. В силу этого замечания аддитивность функционала (8) очевидна.

Стало быть, функционал (8) является ф.р. и может быть однозначно продолжен на класс F^{+n}. Мы называем функционал, определенный формулой (8), (тензорным) произведением функционалов $P_1, \ldots, P_n$ и обозначим $P_1 \otimes \ldots \otimes P_n$. Вычислить $P_1 \otimes \ldots \otimes P_n$, где f - ограниченная функция, можно последовательным интегрированием функции f по отдельным аргументам, соответственно функционалами $P_1, \ldots, P_n$ (см. /2/, стр.50).

2.7. Если $P \in \Phi(M^n, F^{+n}, X)$, то n координатных проекций $M^n \to M$ определяют n маргинальных функционалов $marg_1 P, \ldots, marg_n P$. Поскольку $marg_i P \in \Phi(M, F, X)$, то можно определить произведение $marg_1 P \otimes \ldots \otimes marg_n P$, которое обозначим короче $P^{\otimes}$ и называем рандомизацией ф.р.P. Если $x_1, \ldots, x_n \in B(M, F, X)$ и $P_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle} = P^{\otimes}_{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle}$, то б.с.э. $x_1, \ldots, x_n$ называем независимыми.

§ 3. Операторы условных распределений

3.1. В данном параграфе вводим операторы условных распределений (о.у.р.), которые представляют условные распределения б.с.э. относительно заданного б.с.э. Всюду в параграфе предполагаем, что б.с.э. имеют максимальный ограниченный формат (F, X). Функционалы распределения вида $P_{x,y}$, где $x, y \in B(M, F, X)$, понимаем как ф.р. б.с.в. $\langle x, y \rangle$.

Предложение 6. Если $x, y \in B(M, F, X)$ и $f \in F$ ((F, X) – максимальный ограниченный формат), то существует такая функция $\varphi \in F$, что

$$P_{x,y} f \otimes h = P_y (\varphi \cdot h) \quad \text{для всех } h \in F. \tag{10}$$

Кроме того, если φ_1 и φ_2 удовлетворяют (10), то случайные величины $\varphi_1 y$ и $\varphi_2 y$ – эквивалентны.

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in F$ существует (в силу максимальности формата (F, X)) такая функция $\varphi \in F$, что

$$P_{x,y} (f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi)^2 = \inf_{g \in F} P_{x,y} (f \otimes 1 - 1 \otimes g)^2 \tag{11}$$

(φy есть наилучший линейный прогноз по y для случайной величины fx). Пусть φ – некоторая функция, удовлетворяющая (11). Покажем, что она удовлетворяет (10). Допуская противное, берем, не ограничивая общности, функцию h так, что

$$P_{x,y} f \otimes h > P_y (\varphi \cdot h).$$

Введем для краткости обозначения $P_{x,y}(f \otimes h - 1 \otimes (\varphi \cdot h)) = a$ и $P_y h^2 = b$. Тогда $a > 0$ и $b > 0$. Имеем, следовательно,

$$P_{x,y}(f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi - 1 \otimes ah/b)^2 = P_{x,y}(f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi)^2 - a^2/b .$$

Однако это противоречит (11): если $\varphi' = \varphi + ah/b$, то $\varphi' \in F$ и

$$P_{x,y}(f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi')^2 < C,$$

где C есть нижняя грань в (11). Следовательно, φ удовлетворяет (10). Если φ_1 и φ_2 – две такие функции, то согласно (10) $P_y((\varphi_1 - \varphi_2) \cdot h) = 0$ для всех $h \in F$. В частности, это

4

верно для $h = \varphi_1 - \varphi_2$. Поэтому $P_y(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = 0$, что равносильно $\varphi_1 y \sim \varphi_2 y$. Предложение доказано.

3.2. Заданное равенством (10) соответствие $f \to \varphi$ (оно в общем случае неоднозначное) называем оператором условного распределения (о.у.р.) и обозначим $P_{x/y}$. Согласно предложению 6, значение о.у.р. определено до эквивалентности случайной величины φy. Для вычисления $P_{x/y}$ можно использовать либо (10), либо (11).

Теорема 3. Оператор условного распределения $P_{x/y}$ обладает на максимальном ограниченном формате F следующими свойствами:

1^0 $P_{x/y}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 P_{x/y} f_1 + \alpha_2 P_{x/y} f_2$ (линейность);

2^0 $P_{x/y} 1 = 1$ (нормированность);

3^0 если $f \geqslant 0$, то существует такая функция $\varphi \geqslant 0$, что $P_{x/y} f = \varphi$ (неотрицательность);

4^0 если $f_i \downarrow 0$ поточечно, то существует такая последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, что $P_{x/y} f_i = \varphi_i$ и $\varphi_i \downarrow 0$ поточечно (непрерывность).

Доказательство. (1^0) Имеем

$$P_{x,y}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \otimes h = \alpha_1 P_{x,y} f_1 \otimes h + \alpha_2 P_{x,y} f_2 \otimes h =$$

$$= \alpha_1 P_y(\varphi_1 \cdot h) + \alpha_2 P_y(\varphi_2 \cdot h) = P_y((\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) \cdot h).$$

(2^0) Имеем

$$P_{x,y} 1 \otimes h = P_y h = P_y(1 \cdot h).$$

(3^0) Пусть $f \geqslant 0$, $P_{x/y} f = \varphi$. Исходим из (11). Тогда, учтя $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где $\varphi_+ = \sup(0, \varphi)$, $\varphi_- = \inf(0, \varphi)$, имеем

$$P_{x,y}(f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi)^2 = P_{x,y}(f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi_+ - 1 \otimes \varphi_-)^2 =$$

$$= P_{x,y}(f \otimes 1 - 1 \otimes \varphi_+)^2 + P_{x,y} 1 \otimes \varphi_-^2 - 2P_{x,y} f \otimes \varphi_-.$$

В последнем выражении два последних слагаемых неотрицательны. Поэтому, согласно (11), должно быть $P_{x,y}\, 1 \otimes \varphi_-^2 = P_y \varphi_-^2 = 0$. Значит, $\varphi y \sim \varphi_+ y$ и если $\varphi_- \neq 0$, то всегда можно заменить φ на φ_+.

(4^0) Пусть $f_i \downarrow 0$, $P_{x/y} f_i = \psi_i$, $f_i - f_{i+1} = g_i$ и $P_{x/y} g_i = \zeta_i$.

Используя линейность $P_{x/y}$, получаем

$$\psi_{i+1} = \psi_1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \ldots - \zeta_i .$$

Используя неотрицательность $P_{x/y}$, можно выбрать функции ψ_1, ψ_2, ... так, что $\psi_1 \geqslant \psi_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. В силу компактности в топологии поточечной сходимости множества неотрицательных функций, меньших ψ_1, существует некоторая функция $\psi \geqslant 0$ так, что $\psi_i \downarrow \psi$ поточечно и $\psi \in F$. Итак, для $h \geqslant 0$ имеем $\psi_i \cdot h \downarrow \psi \cdot h$ (а также, конечно, $f_i \otimes h \downarrow 0$). Используя общее свойство непрерывности ф.р., получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P_y(\psi_i \cdot h) & = & P_{x,y}\, f_i \otimes h \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_y(\psi \cdot h) & & 0, \end{array}$$

из которой видно, что $P_y(\psi \cdot h) = 0$. Заменим ψ_i на $\varphi_i = \psi_i - \psi$. Тогда $\varphi_i \geqslant 0$ и $\varphi_i \downarrow 0$. Но

$$P_y(\varphi_i \cdot h) = P_y((\psi_i - \psi)\cdot h) = P_y(\psi_i \cdot h) = P_{x,y}\, f_i \otimes h.$$

Значит, $P_{x/y}\, f_i = \varphi_i$, где $\varphi_i \downarrow 0$. Теорема доказана.

3.3. Пусть $x, y \in B(M, F, X)$, где F - максимальный ограниченный формат.

<u>Предложение</u> 7. Б.с.э. x и y независимы тогда и только тогда, когда

$$P_{x/y}\, f = P_x\, f \quad \text{для всех } f \in F. \qquad (12)$$

В частности, (12) верно, если y - постоянный б.с.э. .

Доказательство получается непосредственно из следующей цепочки равенств, которые следует читать для доказательства необходимости (12) слева направо, а для доказательства достаточности справа налево:

$$P_{x,y} f \otimes h = P_x \otimes P_y(f \otimes h) = P_x f \cdot P_y h = P_y((P_x f)\cdot h).$$

Предложение 8. Если функция $g: M \to M$ такая, что при $y \in B(M, F, X)$ всегда и $gy \in B(M, F, X)$, а класс F удовлетворяет условиям предложения 5, то следующие условия 1^0 и 2^0 эквиваленты:

1^0 $x \sim gy$;

2^0 $P_{x/y} f = fg$ (композиция f и g) при всех $f \in F$.

Доказательство. Если $x \sim gy$, то, следуя правилам оперирования с ф.р., получаем

$$P_{x,y} f \otimes h = P_{gy,y} f \otimes h = P_{y,y} fg \otimes h = P_y(fg \cdot h),$$

что доказывает $1^0 \Rightarrow 2^0$. С другой стороны, если существует такая функция g, что $P_{x/y} f = fg$ при всех $f \in F$, то

$$P_{x,y} f \otimes h = P_y((fg)\cdot h) = P_{gy,y} f \otimes h.$$

Согласно предположению, функции вида $f \otimes h$, где $f, h \in F$, образуют д.о.о.ф.р.б.с.в. (см. предложение 5). Поэтому $P_{x,y} = P_{gy,y}$, что равносильно $x \sim gy$.

Литература

1. Г и х м а н И.И., С к о р о х о д А.В. Теория случайных процессов I. Москва, 1971.
2. М е л с Т.Э. Корреляционные функционалы на функциональных пространствах случайных элементов (диссертация). Тарту, 1973.
3. П р о х о р о в Ю.В., Р о з а н о в Ю.А. Теория вероятностей. Москва, 1967.
4. T i i t, E., P a r r i n g, A., M ö l s, T. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tallinn, 1977.

A FUNCTIONAL APPROACH TO SOME BASIC CONCEPT'S OF THE PROBABILITY THEORY

T. Mõls

S u m m a r y

Baire random variables on a set M are defined as all possible functions $x: \Omega \longrightarrow M$ with the property: $f x \in X$ for all $f \in F$, where Ω denotes the chance space, R is the number scale, X is the set of all numerical random variables and F is some fixed vector lattice of bounded transformations $M \longrightarrow R$. The topology on M is not involved.

The distribution of a Baire random variable is represented by distribution functional $P_x: F \longrightarrow R$, defined as $P_x f = E f x$, where E means the expectation of $f x$.

Some other general concepts as marginal transformations, randomisation and conditional distribution functionals are also introduced.

ОБЩЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПОЛНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ

А.-М. Парринг

I. Введение

Пусть дан случайный вектор[I] $x'_* = (x_0, x_1, \dots, x_p) = [x_0 \vdots x']$ с вектором средних μ_* и дисперсионной матрицей Σ_*. **Функцией линейной регрессии** (ФЛР) для компонента x_0 называется линейная функция $\ell(\alpha_*, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$, которая является наилучшим линейным приближением компоненту x_0 в смысле наименьших квадратов, т.е.

$$E(x_0 - \ell(\alpha_*, x))^2 = \min_{x_* \in R_{p+1}} E(x_0 - \ell(x_*, x))^2$$

(здесь R_{p+1} - $(p + I)$-мерное эвклидово пространство).

Расчленим дисперсионную матрицу Σ_* и вектор средних μ_* на блоки

$$\Sigma_* = \begin{bmatrix} b_{00} & \vdots & b'_0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ b_0 & \vdots & \Sigma \end{bmatrix}, \quad \mu_* = [\mu_0 \vdots \mu'] .$$

Как известно (см. /4/, стр. 236), вектор коэффициентов линейной регрессии $\alpha'_* = [\alpha_0 \vdots \alpha']$ при условии, что Σ^{-1} существует, является решением системы

$$\begin{cases} \alpha = \Sigma^{-1} b_0 \\ \alpha_0 = \mu_0 - \alpha' \mu . \end{cases} \qquad (I)$$

Применимость линейного приближения характеризуется множественным коэффициентом корреляции (МКК)

$$\rho = \sqrt{b'_0 \Sigma^{-1} b_0 / b_{00}} \qquad (2)$$

Аналогично можно определить ФЛР для компонента x_0 используя некоторое подмножество аргументов $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ вектора x. Обозначим через K_1 множество индексов выбранных аргу-

---

I Вектора рассмотрим как $p \times 1$ -матрицу. Квадратные скобки используются для обозначения блочной структуры матрицы. Здесь символом x' обозначен блок $(x_1, \dots x_p)$.

ментов, $K_1=\{i_1,\dots,i_m\}$, а через $\overline{K}_1$ - дополнение этого множества до множества $\{0, I, \dots, p\}$. Пусть $(x_*^{\overline{K}_1})' = (x_{i_1},\dots,x_{i_m})$. **Неполной** ФЛР (НФЛР) называется линейная функция

$$\ell_1(\beta_*, x_*^{\overline{K}_1}) = \beta_0 + \beta_1 x_{i_1} + \dots + \beta_m x_{i_m},$$

удовлетворяющая условию

$$E(x_0 - \ell_1(\beta_*, x_*^{\overline{K}_1}))^2 = \min_{\gamma_* \in R_{m+1}} E(x_0 - \ell_1(\gamma_*, x_*^{\overline{K}_1}))^2. \qquad (3)$$

Применимость неполного линейного приближения характеризуется неполным МКК (НМКК). Различные НФЛР ℓ_1 и ℓ_2 можно считать равноценными приближениями компоненту x_0 если соответствующие НМКК ρ_1 и ρ_2 являются равными.

В практических задачах ρ_1 и ρ_2 неизвестны, возможно определить только их выборочные оценки. Цель настоящей статьи - определить общее асимптотическое распределение выборочных оценок НМКК.

2. Ампутированная матрица и ее производная

Обозначим множество индексов $\{0, I, \dots, p\}$ символом K_*, множество индексов $\{I, \dots, p\}$ символом K, подмножество множества K - символом K_i и дополнение множества K_i до множества K_* - символом $\overline{K}_i$. Символом n_i обозначим количество элементов множества K_i. Пусть A - некоторая $(p+1)\times(p+1)$-матрица (кратко - $A \in \mathcal{M}^{(p+1)\times(p+1)}$). Ампутированной матрицей называем матрицу ${}^{K_i}A^{K_j}$ полученную из матрицы A удалением тех строк, номера которых принадлежат к множеству K_j и тех столбцов, номера которых принадлежат к множеству K_i.

Пример I. Пусть $A \in \mathcal{M}^{4\times 4}$, $K_* = \{0,1,2,3\}$, $K_1=\{1,2\}$ и $K_2=\{1,2,3\}$. Тогда

$${}^{K_1}A^{K_2} = (a_{00} \quad a_{03}).$$

Пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{M}^{(p+1)\times(p+1)}$. Производная матрицы $\mathcal{Y}$ по матрице $\mathcal{X}$ определяется формулой[2]

$$\partial\mathcal{Y}/\partial\mathcal{X} = \mathcal{Y} \otimes \partial/\partial\mathcal{X}, \qquad (4)$$

где $\partial/\partial\mathcal{X}$ - оператор дифференцирования; $\partial/\partial\mathcal{X} = (\partial/\partial x_{ij})$, $i,j=0,1,\dots,p$ (см. /3/).

---

[2] Символом $A\otimes B$ обозначается прямое произведение матриц, $A\otimes B = [a_{ij} B]$.

Обозначим через I_p единичную матрицу, $I_p \in \mathfrak{M}^{p\times p}$, а через $I_{p,(i)}$ - столбец с номером i этой матрицы ($i = 0, 1, \dots, p-1$). Из определения матричной производной (4) вытекает, что[3]

$$\partial \mathfrak{X} / \partial \operatorname{vec} \mathfrak{X} = [\, I_{p+1} \otimes I_{p+1,(j)} \,], \; j = 0, 1, \dots, p.$$

Так как (см. /3/) при произвольных матрицах $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, при которых произведение $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ определено

$$\partial(\mathcal{Y}\mathcal{Z})/\partial\mathfrak{X} = \partial\mathcal{Y}/\partial\mathfrak{X}\,(\mathcal{Z}\otimes I_{p+1}) + (\mathcal{Y}\otimes I_{p+1})\,\partial\mathcal{Z}/\partial\mathfrak{X}, \qquad (5)$$

а ${}^{K_i}\mathfrak{X}^{K_j} = I_{p+1}^{K_j}\, \mathfrak{X}\, {}^{K_i}I_{p+1}$, получим

$$\partial\, {}^{K_i}\mathfrak{X}^{K_j} / \partial \operatorname{vec} \mathfrak{X} = D = [\, D_{\ell,1} \,], \; \ell = 1, \dots, p - n_j, \qquad (6)$$

$$D_{\ell,1} = {}^{K_i}I_{p+1} \otimes I_{p+1,(i_\ell)}, \quad i_\ell \in \overline{K}_j.$$

3. Выборочные оценки НФЛР и НМКК

Пусть $K_1, \dots, K_t$ - некоторые фиксированные множества индексов. Обозначим через ℓ_i НФЛР, удовлетворяющее условию (3) при множестве K_i. Выборочная оценка $a_{i*}' = [\, a_{i0} : a_i' \,]$ вектора коэффициентов неполной регрессии α_{i*} определяется формулой, аналогичной формуле (I)

$$\begin{cases} a_i = \left({}^{\overline{K}_i}S_*^{\overline{K}_i}\right)^{-1} \left({}^{K}S_*^{\overline{K}_i}\right) \\ a_{i0} = \bar{x}_0 - a_i' \, \bar{x}^{\overline{K}_i}, \end{cases} \qquad (7)$$

где S_* и $\bar{x}_*$ - выборочная дисперсионная матрица и вектор выборочных средних соответственно.

Для упрощения дальнейших вычислений введем обозначения

$$\Sigma_i = {}^{\overline{K}_i}\Sigma_*^{\overline{K}_i}, \quad S_i = {}^{\overline{K}_i}S_*^{\overline{K}_i}, \quad s_i = {}^{K}S_*^{K_i}. \qquad (8)$$

Выборочная оценка НМКК определяется формулой, аналогичной

---

[3] Символом $\operatorname{vec} A$ обозначается векторное представление матрицы, если $A \in \mathfrak{M}^{m\times n}$, то $(\operatorname{vec} A)' = (a_{00}, \dots, a_{m-1,0}, \dots, a_{0,n-1}, \dots, a_{m-1,n-1})$.

формуле (2)

$$r_i = \sqrt{s_i' \, S_i^{-1} s_i / s_{00}} \; . \qquad (9)$$

Следующие выводы основываются на известной теореме[4] (см. /I/, стр. I08).

Теорема I. Пусть $\{y_n\}$ - последовательность случайных векторов, $\sqrt{n}\,(y_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma)$, а g (g: $R_p \to R_k$) некоторая вектор-функция, дважды дифференцируемая в окрестности точки μ. Тогда

$$\sqrt{n}\,(g(y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \varphi' \Sigma \varphi), \qquad (I0)$$

где $\varphi = \partial(g'(y)) / \partial y \,|_{y=\mu}$.

Асимптотическим распределением выборочной дисперсионной матрицы является нормальное распределение. Результат доказан в /5/. Приводим соответствующую теорему.[5]

Теорема 2. Пусть случайный вектор $x_* \in \mathcal{H}^4$. Тогда

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(S_* - \Sigma_*) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Psi), \qquad (II)$$

причем

$$\Psi = {}_*\bar{M}_4 - \mathrm{vec}\,\Sigma_* (\mathrm{vec}\,\Sigma_*)',$$

а символом ${}_*\bar{M}_4$ обозначена матрица четвертых центральных моментов вектора x_*,

$${}_*\bar{M}_4 = E((x_* - \mu_*) \otimes (x_* - \mu_*)' \otimes (x_* - \mu_*) \otimes (x_* - \mu_*)').$$

Обозначим через $r' = (r_1^2, \ldots, r_t^2)$ вектор, компонентами которого являются квадраты НМКК. Из формулы (9) видно, что r является вектор-функцией выборочной дисперсионной матрицы, которая по теореме 2 асимптотически нормальна. Убедимся, что если Σ_j^{-1} существуют при $j = I, \ldots, t$, то предполо-

[4] Символом $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ обозначается сходимость вектора по распределению.

[5] Символом $\mathcal{H}^k$ обозначен класс случайных векторов, у которых существуют все моменты порядка k.

жения теоремы I выполнены, и вычислим дисперсионную матрицу асимптотического распределения вектора r .

4. Асимптотическое распределение вектора НМКК

Пусть $K_1, \dots, K_t$ - некоторые фиксированные множества индексов, $K_j = \{ j_1, \dots, j_{n_j} \}$, а $r_1^2, \dots, r_t^2$ соответствующие выборочные НМКК, определенные формулой (9). Вычислим $\partial r / \partial \operatorname{vec} S_*$ и убедимся, что r дважды дифференцируемый в окрестности точки $\operatorname{vec} \Sigma_*$ если только все Σ_j^{-1} существуют, ($j = 1, \dots, t$).

Используя соотношение (5), найдем сперва

$$\partial r_j^2 / \partial \operatorname{vec} S_* = \frac{1}{s_{00}} \left(\frac{\partial (s_j' S_j^{-1} s_j)}{\partial \operatorname{vec} S_*} - r_j^2 \frac{\partial s_{00}}{\partial \operatorname{vec} S_*} \right), \qquad (12)$$

а

$$\frac{\partial (s_j' S_j^{-1} s_j)}{\partial \operatorname{vec} S_*} = \left(\frac{\partial s_j'}{\partial \operatorname{vec} S_*} - (a_j' \otimes I_P) \frac{\partial S_j}{\partial \operatorname{vec} S_*} \right) a_j +$$

$$+ (a_j' \otimes I_P) \frac{\partial s_j}{\partial \operatorname{vec} S_*} ,$$

где $P = (p+1)^2$.

По формуле (6) можем написать

$$\partial S_j / \partial \operatorname{vec} S_* = \dot{W} = [W_{\ell,1}] , \quad \ell = 1, \dots, n_j , \qquad (13)$$

$$W_{\ell,1} = {}^{\bar{K}_j} I_{p+1} \otimes I_{p+1,(j_\ell)} , \quad j_\ell \in K_j , \quad W_{\ell,1} \in \mathfrak{M}^{(p+1)^2 \times n_j} ,$$

$$\partial s_j' / \partial \operatorname{vec} S_* = W_{0,1} = {}^{\bar{K}_j} I_{p+1} \otimes I_{p+1,(0)} ,$$

$$\partial s_j / \partial \operatorname{vec} S_* = \operatorname{vec} (I_{p+1,(0)} \otimes {}^{\bar{K}_j} I_{p+1}) ,$$

$$\partial s_{00} / \partial \operatorname{vec} S_* = I_{P,(0)} ,$$

откуда

$$\partial (s_j' S_j^{-1} s_j) / \partial \operatorname{vec} S_* \big|_{S_* = \Sigma_*} = (W_{0,1} - (\alpha_j' \otimes I_P) W) \alpha_j +$$

$$+ (\alpha_j' \otimes I_P) \operatorname{vec} (I_{p+1,(0)} \otimes {}^{\bar{K}_j} I_{p+1}).$$

Обозначим $\varkappa_j' = [\,1 \,\vdots\, -\alpha_j'\,]$. Учитывая равенство (см. /3/)

$$(C' \otimes A)\,\mathrm{vec}\, B = \mathrm{vec}\,(A B C), \tag{I4}$$

получим

$$\partial(s_j' S_j^{-1} s_j)/\partial\,\mathrm{vec}\, S_* \big|_{S_*=\Sigma_*} = \Big(\sum_{\ell=0}^{n_j} \varkappa_{j,\ell} W_{\ell,1} + I_{p+1,(0)} \otimes {}^{\bar{K}_j}I_{p+1}\Big)\alpha_j .$$

Из формулы (I3) следует

$$\sum_{\ell=0}^{n_j} \varkappa_{j,\ell} W_{\ell,1} = {}^{\bar{K}_j}I_{p+1} \otimes \sum_{\ell=0}^{n_j} \varkappa_{j,\ell}\, I_{p+1,(s,\ell)} = {}^{\bar{K}_j}I_{p+1} \otimes \gamma_j ,$$

где $\gamma_j' = [\,1 \,\vdots\, -\alpha_j'\, I_{p+1}^{\bar{K}_j}\,]$. Так как

$${}^{\bar{K}_j}I_{p+1}\, \alpha_j = I_{p+1,(0)} - \gamma_j , \tag{I5}$$

последняя производная еще упрощается

$$\partial(s_j' S_j^{-1} s_j)/\partial\,\mathrm{vec}\, S_* \big|_{S_*=\Sigma_*} = (I_{p+1,(0)} - \gamma_j) \otimes \gamma_j +$$
$$+ I_{p+1,(0)} \otimes (I_{p+1,(0)} - \gamma_j) = I_{P,(0)} - \gamma_j \otimes \gamma_j .$$

Заменив полученные результаты в (I2), получим

$$\partial r_j^2 / \partial\,\mathrm{vec}\, S_* \big|_{S_*=\Sigma_*} = \frac{1}{\sigma_{00}}\big((1-\rho_j^2) I_{P,(0)} - \gamma_j \otimes \gamma_j\big).$$

Отсюда видно, что вектор r дважды дифференцируемый в окрестности точки $\mathrm{vec}\,\Sigma_*$, если только существуют матрицы Σ_j^{-1}, $j = 1, \ldots, t$. Матрица φ, использованная в формуле (I0), имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\sigma_{00}} [\,\varphi_{1,j}\,], \quad j = 1, \ldots, t, \quad \varphi_{1,j} \in \mathcal{M}^{P \times 1},$$

$$\varphi_{1,j} = (1 - \rho_j^2) I_{P,(0)} - \gamma_j \otimes \gamma_j .$$

Предположим, что $x_* \in \mathcal{H}^4$. Тогда выполнены и предположения теоремы 2 и из теорем I и 2 следует

$$\sqrt{n}\,(r - \varrho) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{1}{\delta_{00}^2} T\right),$$

где символом ϱ обозначен вектор $(\varrho_1^2, \varrho_2^2, \ldots, \varrho_t^2)$, а $T = \delta_{00}^2 \varphi' \Psi \varphi$. Вычислим элемент $t_{\ell,j}$ асимптотической дисперсионной матрицы T

$$t_{\ell,j} = \varphi_{1,\ell}' \Psi \varphi_{1,j} = \varphi_{1,\ell}' ({}_*\overline{M}_4 - \mathrm{vec}\,\Sigma_* (\mathrm{vec}\,\Sigma_*)')\varphi_{1,j}.$$

Используя соотношение (I4), можем написать

$$\varphi_{1,\ell}' \,\mathrm{vec}\,\Sigma_* = ((1-\varrho_\ell^2) I_{P,(0)}' - \gamma_\ell' \otimes \gamma_\ell')\,\mathrm{vec}\,\Sigma_* =$$

$$= \delta_{00}(1-\varrho_\ell^2) - \gamma_\ell' \Sigma_* \gamma_\ell.$$

Но ввиду соотношения (I5)

$$\gamma_\ell' \Sigma_* \gamma_\ell = \delta_{00}(1-\varrho_\ell^2),$$

откуда $\varphi_{1,\ell}' \,\mathrm{vec}\,\Sigma_* = 0$, $\ell = 1, \ldots, t$. Вычислим произведение $\varphi_{1,\ell}' \, {}_*\overline{M}_4 \, \varphi_{1,j}$. Расчленим матрицу ${}_*\overline{M}_4$ на блоки:

$${}_*\overline{M}_4 = [({}_*\overline{M}_4)_{i,j}], \quad i,j = 0, 1, \ldots, p,$$

где

$$({}_*\overline{M}_4)_{i,j} = E((x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)(x_* - \mu_*)(x_* - \mu_*)').$$

Символом ${}_*\overline{M}_{4,(0)}$ обозначим первый столбец матрицы ${}_*\overline{M}_4$. Учитывая правила умножения блочных матриц и равенство ${}_*\overline{M}_{4,(0)} = \mathrm{vec}\,({}_*\overline{M}_4)_{0,0}$ получим

$$t_{\ell,j} = (1-\varrho_\ell^2)(1-\varrho_j^2)\,m_{0000} - (1-\varrho_\ell^2)\,\gamma_j' ({}_*\overline{M}_4)_{0,0}' \gamma_j - \tag{I6}$$
$$-(1-\varrho_j^2)\,\gamma_\ell' ({}_*\overline{M}_4)_{0,0} \gamma_\ell + \gamma_\ell' C \gamma_j,$$

причем $C = (c_{i,k})$, $c_{i,k} = \gamma_\ell' ({}_*\overline{M}_4)_{i,k} \gamma_j$, $i,j = 0, 1, \ldots, p$.

Представим доказанное теоремой.

Теорема 3. Пусть случайный вектор $x_* \in \mathcal{H}^4$, даны множества индексов $K_1, \ldots, K_t$ и среди компонентов вектора $x_*^{K_i}$

нет линейно зависимых ($i = 1, \dots, t$). Тогда для вектора $r' = (r_1^2, r_2^2, \dots, r_t^2)$ имеет место

$$\sqrt{n}\,(r - \rho) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{1}{\delta_\infty^2} T\right),$$

где $T = (t_{\ell,j})$; $\ell, j = 1, \dots, t$, а элемент $t_{\ell,j}$ определен равенством (16).

Пример 2. Пусть $x_* = (x_0, x_1, x_2)$. Предположим, что вектор x_* центрированный, нормированный и имеет нормальное распределение, $x_* \sim N(0, \Sigma_*)$, где

$$\Sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ \rho_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{2\}$, таким образом **рассмотрим** две НФЛР $\ell_1 = \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} x_1$ и $\ell_2 = \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} x_2$.

Используя теорему 3, вычислим дисперсионную матрицу асимптотического распределения. Как известно, (см. /1/, стр. 57), в данном случае

$$({}_*\bar{M}_4)_{i,j} = b_{*(i)} b'_{*(j)} + b_{*(j)} b'_{*(i)} + b_{i,j} \Sigma_*.$$

По формуле (15) $\tau_1 = (1, -\rho_1, 0)$ и $\tau_2 = (1, 0, -\rho_2)$. По формуле (16) получим отсюда

$$T = \begin{pmatrix} 4\rho_1^2(1-\rho_1^2)^2 & (3-2a)(1-a) + \rho_1^2\rho_2^2 \\ (3-2a)(1-a) + \rho_1^2\rho_2^2 & 4\rho_2^2(1-\rho_2^2)^2 \end{pmatrix},$$

где $a = \rho_1^2 + \rho_2^2$.

Как видим, несмотря на то, что компоненты x_1 и x_2 независимы, соответствующие НМКК являются асимптотически зависимыми.

Литература

I. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. Москва, I963.

2. Ланкастер П. Теория матриц. Москва, I975.

3. MacRae E.C. Matrix Derivatives with an Application to an Adaptive Linear Decision Problem. "Ann. of Stat.", 1974, 2, N^o 2, 337-346.

4. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их приложения. Москва, I963.

5. Парринг А.-М. Вычисление асимптотических характеристик функций выборки. - Уч. зап. Тартуского ун-та, I979, вып. 492, 86-90.

6. Парринг А.-М. Оценка функции линейной регрессии и ее асимптотическое поведение. - Уч. зап. Тартуского ун-та, I979, вып. 492, 9I-99.

THE ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF INCOMPLETE MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENTS

A.-M. Parring

S u m m a r y

Let $x'_* = (x_0, x_I, \ldots, x_p)$ be a random vector, which has finite fourth moments. The incomplete regression function for component x_0 is a linear function $\alpha_0 + \alpha_1 x_{i_1} + \ldots + \alpha_m x_{i_m}$, satisfying the condition of least-squares. (Here $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ is an arbitrary subset of components $x_1, \ldots, x_p$). The appropriateness of this approximation is characterized by incomplete multiple correlation coefficient ϱ_i^2 (IMCC).

In the present paper it is proved that the asymptotic distribution of random vector $(r_1^2, \ldots r_t^2)$, where r_i^2 is the sampling estimation of IMCC ϱ_i^2, is a multivariate normal distribution. The parameters of this distribution are calculated in the paper.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТАХ

Т. Колло

В статье приведены асимптотические распределения собственных векторов выборочных ковариационной и корреляционной матриц и условия сходимости к этим предельным распределениям. С помощью полученных результатов возможно выделить существенные компоненты при применении метода главных компонент в анализе данных для сравнительно широкого класса распределений исходной выборки.

I. <u>Понятия и обозначения матричного исчисления</u>. Пусть $M = (m_{ij})$ - $(p \times q)$-матрица. <u>Матричным вектором</u> $\operatorname{vec} M$ называется (pq)-вектор

$$\operatorname{vec} M = (m_{11}, \dots, m_{p1}, m_{12}, \dots, m_{p2}, \dots, m_{1q}, \dots, m_{pq})'.$$

По p-вектору A определенная диагональная (pxp)-матрица A_{diag} имеет на главной диагонали координаты $a_1, \dots, a_p$ вектора A, а по (pxp)-матрице M определенная диагональная (pxp)-матрица M_{diag} получена из M заменой всех элементов вне главной диагонали нулями. Называем операцию M_{diag} диагонализацией матрицы (вектора) M и в дальнейшем предположим, что операция диагонализации всегда выполняется раньше других операций над матрицами. Единичную матрицу порядка p обозначим через I_p.

<u>Переставленная единичная матрица</u> $I_{p,q}$ является $(pq \times pq)$-матрицей, составленной из $(p \times q)$-блоков таким образом, что ij-ый элемент ji-го блока равен единице, а остальные элементы равны нулю. <u>Прямое произведение</u> $M \otimes N$ $(p \times q)$-матрицы M и $(r \times s)$-матрицы N определено следующим образом:

$$M \otimes N = [M n_{ij}] \qquad (i = 1, \dots, r; \; j = 1, \dots, s).$$

<u>Поэлементное произведение</u> $M * N$ $(p \times q)$-матриц $M = (m_{ij})$ и $N = (n_{ij})$ определяется по равенству

$$(M * N)_{ij} = m_{ij} n_{ij} \qquad (i = 1, \dots, p; \; j = 1, \dots, q),$$

где через $(M * N)_{ij}$ обозначается ij-ый элемент матрицы.

2. Асимптотическое распределение выборочной ковариационной матрицы. Исходим из р-мерной выборки X объема n, где столбцы X_i являются независимыми одинаково распределенными р-векторами с первыми моментами $EX_i = \mu$; $DX_i = \Sigma$. Выборочная ковариационная матрица S определяется по равенству

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})', \tag{1}$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Если генеральная совокупность характеризована нормальным распределением $N(\mu, \Sigma)$, имеет место сходимость

$$\sqrt{n}\, vec\,(S - \Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \varphi), \tag{2}$$

где

$$\varphi = (I_{p^2} + I_{p,p})(\Sigma \otimes \Sigma). \tag{3}$$

(Здесь и в дальнейшем через $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ обозначаем сходимость по распределению). Сходимость (2) была фактически доказана уже Гиршиком (см. /5/). Оказывается, что сходимость (2) имеет место для целого класса исходных распределений. В статье /4/ доказано, что имеет место следующий результат.

Теорема I. Если $X = (X_1, \ldots, X_n)$ - выборка объема n, то при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\sqrt{n}\, vec\,(S - \Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \varkappa),$$

если $M_4(X_i) < \infty$, где

$$\varkappa = \bar{M}_4(X_i) - vec\,\Sigma\,(vec\,\Sigma)'.$$

Через $M_4(X_i)$ обозначен момент четвертого порядка вектора X_i:

$$M_4(X_i) = E(X_i \otimes X_i' \otimes X_i \otimes X_i'),$$

$$\bar{M}_4(X_i) = E\left[(X_i-\mu)\otimes(X_i-\mu)'\otimes(X_i-\mu)\otimes(X_i-\mu)'\right].$$

Из теоремы I вытекает теорема 2 (доказательство см. /3/).

<u>Теорема 2</u>. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ выборка объема n, с моментами $EX_i = \mu$, $DX_i = \Sigma$ и $M_4(X_i) < \infty$

Тогда при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(S-\Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\varphi),$$

если

$$\bar{M}_4(X_i) = \varphi + \mathrm{vec}\,\Sigma\,(\mathrm{vec}\,\Sigma)',$$

где φ определена равенством (3).

Теорема 2 является обобщением вышеуказанного результата Гиршика о сходимости по распределению выборочной ковариационной матрицы S в случае нормально распределенной исходной выборки, так как условие для $\bar{M}_4(X_i)$ в этом случае выполнено.

Так как условия сходимости по распределению последовательности $\{\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(S-\Sigma)\}$ к закону $N(0,\varphi)$ в теореме 2 являются трудно проверяемыми, построим аналог матрицы S - матрицу $S^*(n)$, для которой при $n\to\infty$ имеет место сходимость

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(S^*(n)-\Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\varphi)$$

в предположениях теоремы I. Матрица $S^*(n)$ определяется по равенству

$$S^*(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{(n)} y_i^{(n)'}, \qquad (4).$$

где

$$y_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} \left(X_j - \frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n^2} X_\ell\right) \quad (i = 1,\ldots,n), \qquad (5)$$

а $\{X_j\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных p-векторов.

Доказано (см. /3/), что имеет место

Теорема 3. Пусть система случайных р-векторов $y_i^{(n)}$ ($i = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$) получена из последовательности независимых и одинаково распределенных р-векторов X_i ($i = 1, 2, \ldots$) по формуле (5). Предположим, что $EX_i = \mu$, $DX_i = \Sigma$ и $M_4(X_i) < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\ (S^*(n) - \Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \varphi),$$

где φ и $S^*(n)$ определены соответственно равенствами (3) и (4).

3. Асимитотическое оценивание в методе главных компонент.

Обозначим случайный р-вектор, характеризующий распределение генеральной совокупности, через ξ. Тогда вектор главных компонент $C = (C_1, \ldots, C_p)$, найденный по ковариационной матрице, определяется равенством

$$\xi = \Gamma C, \tag{6}$$

где $(p \times p)$ - матрица коэффициентов главных компонент Γ определяется равенствами

$$\Sigma \Gamma = \Gamma \Lambda;$$

$$\Gamma' \Gamma = \Lambda,$$

где Λ - матрица собственных значений матрицы Σ.

Выборочный аналог G матрицы Γ определяется равенствами

$$SG = GL;$$

$$G'G = L,$$

где L - диагональная матрица собственных значений выборочной ковариационной матрицы S.

Если в матрице исходных данных X имеются большие различия в шкалах измерения признаков, следует применять метод главных компонент исходя из корреляционной матрицы, а не ковариационной матрицы. В таком случае $(p \times p)$-матрица ν коэффициентов главных компонент определена равенствами

$$P\nu = \nu \Delta;$$

$$\nu' \nu = \Delta,$$

где Δ - диагональная матрица собственных значений теоретической корреляционной матрицы P вектора ξ. Вектор главных компонент $K = (K_1, \ldots, K_p)$, найденный по корреляционной матрице, определен по равенству

$$\xi = \nu K. \qquad (7)$$

Выборочный аналог матрицы ν - случайная матрица W определена следующими уравнениями:

$$RW = WD;$$

$$W'W = D,$$

где D - диагональная матрица собственных значений $d_i (i = 1, 2, \ldots)$ выборочный корреляционной матрицы R.

Так как вектор ξ в практических задачах неизвестен, как и матрицы Γ и ν, то для векторов главных компонент C и K получим по равенствам (6) и (7) случайные $(p \times n)$ - матрицы Y и Z, соответственно,

$$X = GY; \qquad (8)$$

$$X = WZ. \qquad (9)$$

Из равенств (8)-(9) видно, что случайные векторы X_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ представляются линейными комбинациями главных компонент.

Целью применения метода главных компонент является представление исходных данных в виде, позволяющего удобно истолковать сущность исследуемого объекта с помощью сжатия информации. Для этого следует корректно определить количество главных компонент, детермирующих исследуемый объект. Количество существенных компонент определяем следующим образом. Построим для векторов коэффициентов главных компонент G_i (или W_i - зависимо от применяемой модели) доверительные эллипсоиды при уровне значимости α и тем выясним значимость соответствующего главного компонента.

Чтобы построить доверительный эллипсоид для вектора G_i (W_i), необходимо знать его распределение. Так как распределение векторов $G_i (W_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ неизвестно даже в случае нормально распределенной исходной выборки, следует применить их асимптотическое распределение. Для векторов G_i $(i = 1, \ldots, p)$ предельное вероятностное поведение определяется следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть для p-мерной выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ объема n, при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(S - \Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \varphi),$$

где φ определена равенством (3). Если в диагональной матрице Λ собственных значений λ_i ковариационный матрицы Σ вектора X_k $(1 \le k \le n)$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0$ и в матрице $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$ - $\Gamma'\Gamma = \Lambda$ - собственные векторы Γ_i матрицы Σ соответственно упорядочены, то при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ (G_i - \Gamma_i) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \zeta^i) \quad (1 \le i \le p),$$

где G_i $(1 \le i \le p)$ - вектор выборочных коэффициентов главных компонент, найденный по ковариационной матрице, а

$$\zeta^i = \lambda_i^2\, \Gamma M^i M^i \Gamma' + \frac{1}{4}\Gamma_i \Gamma_i' \quad (1 \le i \le p),$$

где диагональная матрица M^i определена через собственные значения λ_i матрицы Σ:

$$(M^i)_{jj} = \begin{cases} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} & i \ne j\ ,\ j = 1, \dots, p\,; \\ (2\lambda_i)^{-1} & i = j\,. \end{cases}$$

В случае нормальной исходной выборки этот результат для координат вектора G_i был получен Гиршиком (см. /5/). Если в качестве исходной последовательности возьмем S от n, то, используя теорему 2, по хорошо известному результату о предельном распределении функции от исходной последовательности (см. /1/, стр. 108) получим утверждение теоремы.

Предельное распределение векторов W_i $(i = 1, \dots, p)$ определяется следующей теоремой.

Теорема 5. Пусть для p-мерной выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ объема n, при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(S - \Sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \varphi),$$

где φ определена равенством (3). Если в диагональной матрице Δ собственных значений δ_i теоретической корреляционной матрицы P вектора X_k $(1 \le k \le n)$ $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_p > 0$ и в матрице $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ - $\nu'\nu = \Delta$ - собственные векторы

ν_i матрицы P соответственно упорядочены, то при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ (W_i - \nu_i) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \pi^i),$$

где $W_i\ (1 \leq i \leq p)$ - вектор выборочных коэффициентов главных компонент, найденных по корреляционной матрице, а

$$\pi^i = \frac{1}{4}\nu_i \nu_i' + C^i\big[\delta_i^2 I_p - \delta_i(E^i(I_p + \delta_i\Delta^{-1}) + \tag{10}$$

$$+ (I_p + \delta_i\Delta^{-1})E^i) + \frac{1}{2}(I_p + \delta_i\Delta^{-1})F^i(I_p + \delta_i\Delta^{-1})\big]C^{i\prime},$$

где

$$C^i = \nu A^i;$$

$$E^i = \nu'(\nu_i)^2_{diag}\,\nu;$$

$$F^i = \nu'(\nu_i)_{diag}(P * P)(\nu_i)_{diag}\,\nu;$$

а диагональная матрица $A^i\ (1 \leq i \leq p)$ определена равенством

$$(A^i)_{jj} = \begin{cases} (\delta_i - \delta_j)^{-1} & i \neq j,\quad j = 1,\ldots,p; \\ (2\delta_i)^{-1} & i = j. \end{cases}$$

В статье /2/ утверждение теоремы 5 доказано в предположении нормальности исходной выборки. Так как в указанном доказательстве не используется нормальность распределения, а только предельное распределение матрицы S, то по теореме 2 доказательство теоремы 5 непосредственно следует из соответственного доказательства в случае нормально распределенной исходной выборки.

Результаты теорем 4 и 5 применяемы при оценке существенности главных компонент следующим образом. Для больших значений объема выборки n считаем, что векторы $\sqrt{n}\ (G_i - \Gamma_i)$; $\sqrt{n}(W_i - \nu_i)\ (1 \leq i \leq p)$ распределены нормально по законам $N(0, \zeta^i)$; $N(0, \pi^i)$ соответственно. Тогда

$$G_i \sim N(\Gamma_i, \tfrac{1}{n}\zeta^i);$$

$$W_i \sim N(\nu_i, \tfrac{1}{n}\pi^i).$$

9

Оценку существенности проведем на примере векторов G_i. Для векторов W_i проверка происходит совершенно аналогично.

Доверительный эллипсоид $V_{\alpha,p}$ для векторов Γ_i при уровне значимости α имеет следующий вид:

$$V_{\alpha,p} = (x-\Gamma_i)'(\zeta^i)^{-1}(x-\Gamma_i) \leq \chi^2_{\alpha,p} .$$

Тогда проверить надо пару следующих гипотез:

$$H_0: \ 0 \in V_{\alpha,p} ;$$

$$H_1: \ 0 \bar{\in} V_{\alpha,p} .$$

При проверке гипотез теоретические матрицы Γ_i и $(\zeta^i)^{-1}$ придется заменить их оценками из конкретной выборки: $\widehat{\Gamma}_i$ и $(\widehat{\zeta^i})^{-1}$. Содержательную гипотезу H_1 можно принять при уровне значимости α, если

$$\widehat{\Gamma}_i'(\widehat{\zeta^i})^{-1}\widehat{\Gamma}_i > \chi^2_{\alpha,p} ,$$

а нулевую в противном случае.

После проверки существенности различия от нуля всех векторов Γ_i (i = I, ..., p) мы выделим только те, для которых имеет место содержательная гипотеза H_1 и можем не учитывать остальных. Это хорошо согласуется с представлением исходной выборки по равенству (8) (по равенству (9)).

Вторым этапом при применении метода главных компонент является обычно вращение матрицы коэффициентов главных компонент, т.е. матрица коэффициентов главных компонент Γ (или ν) заменяется матрицей $\Gamma\mathcal{O}$(или $\nu\mathcal{O}$), где $\mathcal{O}$ - ортогональная матрица.

Тогда выборочные аналоги вращенных матриц Γ и ν получают вид:

$$G \to G\mathcal{O} = G^* ;$$

$$W \to W\mathcal{O} = W^* .$$

Для определения существенности столбцов вращенной матрицы коэффициентов главных компонент G^* следует вывести предельное распределение для матрицы G^*. Так как собственные векторы G_i и G_j матрицы S являются независимыми, если $i \neq j$ (i, j = I, ..., p), то, учитывая теорему 4, получим при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(G-\Gamma)\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\zeta),$$

где

$$\zeta=\begin{pmatrix}\zeta^1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \zeta^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \zeta^p\end{pmatrix}.$$

Нас интересует предельное распределение вектора

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(G^*-EG^*)=\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(G\mathcal{O}-\Gamma\mathcal{O})=$$

$$=\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(G-\Gamma)\mathcal{O}.$$

Используя следующее простое тождество:

$$\mathrm{vec}\,G\mathcal{O}=(I_p\otimes\mathcal{O}')\,\mathrm{vec}\,G,$$

можно интересующий нас вектор представить в виде

$$\sqrt{n}\ (I_p\otimes\mathcal{O}')\,\mathrm{vec}\,(G-\Gamma).$$

Отсюда

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(G^*-EG^*)\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,(I_p\otimes\mathcal{O}')\zeta(I_p\otimes\mathcal{O})),$$

по свойству нормального распределения (см. /I/, стр. 52).

Для вращенной матрицы коэффициентов главных компонент W^*, найденных по корреляционной матрице, получим предельное распределение в следующем виде

$$\sqrt{n}\ \mathrm{vec}\,(W^*-EW^*)\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,(I_p\otimes\mathcal{O}')\,\widetilde{\pi}\,(I_p\otimes\mathcal{O})),$$

где

$$\widetilde{\pi}=\begin{pmatrix}\widetilde{\pi}^1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \widetilde{\pi}^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\pi}^p\end{pmatrix},$$

а $\mathfrak{R}^i$ $(1 \leq i \leq p)$ определен равенством (10).

Проверка существенности различия векторов G_i^* и W_i^* от нуля происходит аналогично соответственной проверки для векторов G_i и W_i.

Замечание. Приведенные в 3 пункте асимптотические результаты имеют место при сходимости матрицы S по распределению к закону $N(0, \varphi)$. Если в модели главных компонент вместо S взять матрицу $S^*(n)$, определенную по равенству (4), и R построить, используя матрицу $S^*(n)$, то утверждения теорем 4 и 5 останутся в силе, если там S заменить на $S^*(n)$.

Литература

1. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963.
2. Колло Т. Некоторые понятия матричного исчисления с применением в математической статистике. Труды ВЦ ТГУ, Тарту, 1977, вып. 40, 30-51.
3. Колло Т. О предельном распределении выборочной ковариационной матрицы. Труды ВЦ ТГУ, Тарту, 1978, вып. 42, 3-18.
4. Парринг А.-М. Вычисление асимптотических характеристик функций выборки.-Уч. зап. ТГУ, Труды по мат. и мех., вып. 492, Тарту, 1979, 86-90.
5. Girchick, M.A., On the sampling theory of roots of determinantal equations. Ann. Math. Statist., 1939, 10, 203-244.

TESTING HYPOTHESIS OF PRINCIPAL COMPONENTS

T. Kollo

Summary

The main results of the paper are presented in Theorems 4 and 5. The asymptotic distribution of coefficients is presented in Theorem 4 for the principal components, received from covariance matrix and in Theorem 5 for the model obtained from correlation matrix. These results are presented for the class of samples including normal distribution. An algorithm for selecting statistically significant principal components is given by testing the hypothesis on the basis of asymptotic distributions derived in this paper.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОВЕРКЕ ДОСТАТОЧНОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРАМЕТРОВ В НОРМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Т. Мелс

В статье показано, как инвариантность симметричного центрального нормального распределения относительно ортогональных преобразований пространства позволяет в некоторых случаях исследовать и использовать структуру критических множеств сложных гипотез. Кроме того, геометрический подход, принятый в статье, дает простой метод использования симметрию нормального распределения без явного привлечения F- , t- или χ^2-распределенных статистиков. Основой для этого служит равномерность распределения точки пересечения нормального вектора с единичной сферой в симметричном случае.

Результаты статьи могут быть применены для обнаружения скрытого двухуровневого фактора в дисперсионном анализе(пример 2), для выяснения выскакивающих данных в нормальной совокупности (пример 1), для проверки нормальности случайной величины (пример 3) и в некоторых других случаях, которые сводятся к проверке того, достаточно богат ли набор параметров в линейной модели теории наименьших квадратов.

§ 1. Определение критического события

1.1. Пусть случайный вектор $У$ имеет предположительно n-мерное нормальное распределение

$$У \sim \mathcal{N}_n(K\beta, \sigma^2 I) \qquad (1)$$

со средним $K\beta$ и дисперсионной матрицей $\sigma^2 \cdot I$ (σ^2 - число, I - единичная матрица). Предположим, как принято в линейном анализе, что плановая $(n \times m)$-матрица K известна и имеет ранг r, а $(m \times 1)$-вектор β параметров и дисперсия σ^2 - неизвестны. Обозначим через $У$ также и конкретное значение вектора $У$,

$$У = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

где числовые компоненты $У$ известны из эксперимента. Полученную методом наименьших квадратов (/1/, стр. 195) оценку матрицы β обозначим $\mathring{\beta}$,

$$\mathring{\beta} = (K^TK)^-K^TУ\ , \qquad (2)$$

где матрица A^- - обобщенно обратная к A. Теперь, если верно (1), то остаток

$$Z_K = У - K\mathring{\beta} = (1 - K(K^TK)^-K^T)У \qquad (3)$$

имеет нормальное маргинальное распределение в $q = (n-r)$-мерном подпространстве W, которое определяется в n-мерном евклидовом пространстве E_n проектором

$$Q_W = 1 - K(K^TK)^-K^T. \qquad (4)$$

Действительно, учитываем

$$Z_K \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 Q_W)$$

и берем ортогональную $(n \times n)$-матрицу C, которая задает вращение подпространства W (и поэтому перестановочна с проектором Q_W). Тогда

$$C Z_K \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 C \cdot Q_W C^T) = \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 Q_W)\ , \qquad (5)$$

так что распределение Z_K действительно инвариантно в W.

Отметим, что именно инвариантность распределения остатка (3) является тем предположением, которое используется в статье, аналитический вид плотности вектора $У$ нигде в дальнейшем не учитывается. С другой стороны, хорошо известно (/2/, стр. 609), что при некоторых условиях на K остаток Z_K распределен инвариантно только в случае нормального вектора $У$.

1.2. Итак, из (5) ясно, что распределение точки пересечения вектора $Z_K = Q_W У$ (или его продолжения) с единичной сферой $\mathcal{S}_W$ пространства W - равномерное на $\mathcal{S}_W$ (точнее, является мерой Хаара относительно группы вращений $\mathcal{S}_W$). Допустим теперь, что независимо от значения Z_K, в W фиксированы некоторые векторы φ_i, которые составляют множество $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, где $k \geqslant 1$. Каждое одномерное подпространство, соответствующее некоторому вектору из M, пересечет $\mathcal{S}_W$ в двух точках. Берем около каждой такой точки, центром в этой точке, сегмент сферы $\mathcal{S}_W$ и рассматриваем событие, состоящее в пересечении Z_K (или его кратного) со сферой $\mathcal{S}_W$ в одном из выбранных сегментов. Это событие называем критическим и обозначим A_M:

$$A_M = \{\xi_\varphi \geqslant 1-\rho^2 \text{ для некоторого } \varphi \in M\}, \qquad (6)$$

где

$$\xi_\varphi = (Z_K, \varphi)^2 / \|Z_K\|^2 \|\varphi\|^2, \qquad (7)$$

(Z_K, φ) обозначает скалярное произведение векторов, а ρ – радиус сегмента.

Чтобы оценивать вероятность события A_M, используем геометрический подход. Пусть к – число векторов в M, $s(\rho)$ – площадь сегмента радиуса ρ, а S – площадь единичной сферы $\mathcal{S}_W$. В силу равномерного распределения точки пересечения Z_K с $\mathcal{S}_W$ получаем неравенство для вероятности PA_M события A_M:

$$PA_M \leqslant 2k\, s(\rho)/S, \qquad (8)$$

где знак равенства стоит в случае непересекающихся сегментов. Итак, оценивание вероятности PA_M сведено в (8) чисто к геометрическим вычислениям.

1.3. Имеется и отличная от предыдущего возможность оценить PA_M. Вводим обозначение

$$A_\varphi = \{\xi_\varphi \geqslant 1-\rho^2\}.$$

Тогда ясно, что

$$PA_M \leqslant \sum_{\varphi \in M} PA_\varphi. \qquad (9)$$

Используя теперь то, что

$$(n-r-1)(Z_K, \varphi/\|\varphi\|)^2/(\|Z_K\|^2-(Z_K, \varphi/\|\varphi\|)^2) \sim F(1, n-r-1),$$

где $F(1, f)$ обозначает F – распределение с 1 и f степенями свободы, получим

$$(n-r-1)(\xi_\varphi^{-1}-1)^{-1} \sim F(1, n-r-1). \qquad (10)$$

Это означает, что оценку (9) для PA_M можно найти также с помощью F-распределения.

Оба рассмотренных метода дадут, конечно, одинаковые оценки для PA_M, что можно даже использовать для геометрического определения и вычисления F-распределения с одной степенью свободы для числителя. Но для нас геометрический подход удобен тем, что позволяет более детально выяснить обстоятельства, ответственные за знак неравенства в (8) или в (9), а также выяснить, как сильно неравенство в (8) отличается от равенства.

1.4. Предположим теперь, что либо из (8), либо из (9) найдено такое значение ρ_α для радиуса ρ, что

$$\alpha = 2\kappa s(\rho_\alpha)/S, \tag{11}$$

где α - заданный (требуемый) уровень значимости (например, $\alpha = 0{,}05$). Используя (известные) матрицы К и У, из (3) можно найти числовое значение вектора Z_K и проверить, превышает ли ξ_φ для некоторого φ из М заданное число $1-\rho_\alpha^2$. Если событие A_M действительно имеет место, а вероятность α достаточно мала, то мы должны сомневаться в правильности предположений (1). Составляя множество М специальным образом, можно таким путем получить критерий отклонения (1) в пользу некоторой интересующей нас альтернативы. Реализации этой идеи посвящена дальнейшая часть статьи.

§ 2. Оценка сверху вероятности критического события

2.1. Оцениваем в (8) площадь $s(\rho)$ сегмента радиуса ρ. Можно полагать, что при малых ρ площадь $s(\rho)$ приближенно равна площади сечения единичного q-мерного шара с $(q-1)$-мерной гиперплоскостью, отделяющей сегмент от сферы (или шара). Поскольку сечение q-мерного шара с $(q-1)$-мерной гиперплоскостью является $(q-1)$-мерным шаром, то площадь такого сечения, приближенно равная $s(\rho)$, равна объему $(q-1)$-мерного шара радиуса ρ.

Напомним, что объем q-мерного шара радиуса R равен (/3/, стр. 138)

$$V_R = \pi^{q/2} R^q / \Gamma(q/2+1), \tag{12}$$

а площадь q-мерной сферы радиуса R можно найти дифференцированием (12):

$$S_R = 2\pi^{q/2} R^{q-1} / \Gamma(q/2). \tag{13}$$

Таким образом,

$$s(\rho) \approx \pi^{\frac{q-1}{2}} \rho^{q-1} / \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right). \tag{14}$$

Теперь можно из (13), (14) и (11) выразить α как функцию ρ и q или $\rho = \rho_\alpha$ как функцию α и $q = n-r$,

$$\rho_\alpha \approx \left(\alpha\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-r+1}{2}\right) / \left(\kappa\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)\right)\right)^{1/(n-r-1)}. \tag{15}$$

Вероятность события (6) практически не превышает α, если $\rho = \rho_\alpha$.

2.2. К сожалению формула (14) и вместе с ней формула (15) недостаточно точны при больших размерностях $n-r$ и при $\alpha/\kappa > 0{,}01$. Путем непосредственного вычисления можно найти для площади точное выражение

$$s(\rho) = \frac{2\pi^{\frac{q-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)} \int\limits_{\sqrt{1-\rho^2}}^{1} (1-x^2)^{\frac{q-3}{2}}\, dx , \tag{16}$$

где интеграл вычисляется заменой $x = \sin\psi$. Обозначая $\delta = \arcsin\sqrt{1-\rho^2}$ и (для дальнейшего)

$$h = 1 - \sqrt{1-\rho^2} , \tag{17}$$

получаем

$$\int\limits_{1-h}^{1} = \begin{cases} 2^{3-q} \sum\limits_{\kappa=0}^{\frac{q-3}{2}} \frac{1}{2\kappa+1} C_{q-2}^{\frac{q-3}{2}-\kappa} \left[(-1)^\kappa - \sin(2\kappa+1)\delta\right] & \text{при нечетном } q, \\ 2^{2-q}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) C_{q-2}^{\frac{q}{2}-1} - \sum\limits_{\kappa=1}^{\frac{q}{2}-1} \frac{1}{\kappa} C_{q-2}^{\frac{q}{2}-\kappa-1} \cdot \sin(2\kappa\delta)\right] & \text{при четном } q. \end{cases} \tag{18}$$

2.3. Формула (18) может иметь практическую ценность только при небольших q. Если $\rho^2 q < 4$, то более удобно вычислить $s(\rho)$ следующим образом. Выразим в (16)

$$1 - x^2 = z(2 - z),$$

где $z = 1 - x$, и заметим, что в области интегрирования z – мало (поскольку $z \lesssim 2/q$). Разлагая $(2 - z)^{(q-3)/2}$ по степеням z и почленно интегрируя полученный (конечный или бесконечный) ряд, получим для площади сегмента следующее точное выражение:

$$s(\rho) = \frac{(2\pi h)^m}{\Gamma(m)}\left(\frac{1}{m} - \frac{(m-1)}{1!(m+1)2}h + \frac{(m-1)(m-2)}{2!(m+2)2\cdot 2}h^2 - \ldots\right), \qquad (19)$$

где $2m = q - 1$, а высота сегмента h определена в (17).

2.4. При больших q, когда (19) неприемлема из-за слишком медленной сходимости, площадь $s(\rho)$ можно вычислить асимптотической формулой, которую сейчас выводим. Обозначим для удобства

$$p = (q - 3)/2 \quad \text{и} \quad \xi = (p + 1)^{-1} = 2/(q - 1).$$

Тогда

$$\int (1 - x^2)^p dx = \int (x^{-\xi} - x^{2-\xi})^p \, dx^{2-\xi}/(2 - \xi).$$

Используем теперь соотношение

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1 - x^{2-\xi}}{x^{-\xi} - x^{2-\xi}}\right)^p = \lim_{q\to\infty}(1 - u)^{1/(2u)}, \qquad (21)$$

где

$$u = 1 - x^{2-\xi} = 1 - x^{2(q-2)/(q-1)}. \qquad (22)$$

В (21) сходимость при $0{,}5 < x < 1$ сравнительно быстрая (предел достигается с достаточной для практики точностью уже при $q > 25$).

Итак, при больших p имеем

$$\int_{1-h}^{1}(1-x^2)^p\,dx \approx (2-\zeta)^{-1}\int_0^{1-(1-h)^{2-\zeta}} u^p(1-u)^{-\frac{1}{2u}}\,du. \qquad (23)$$

Аппроксимируем

$$f(u) \equiv (1-u)^{-\frac{1}{2u}} \approx au + b, \qquad (24)$$

где

$$b = (1-u_0)^{-\frac{1}{2u_0}} - au_0,$$

$$u_0 = 1-(1-h)^{2-\zeta} = 1-(1-h)^{\frac{2(q-2)}{q-1}} \qquad (25)$$

и

$$a = \frac{d}{du}f(u)\Big|_{u=u_0}$$

(конкретный вид выражения a не существенен). Хотя левая часть в (24) только мажорирует правую, при $u = u_0$ аппроксимация дает точное значение, что важно, поскольку лишь в окрестности u_0 интегранд в (23) дает существенный вклад в значение интеграла.

Подставляя (24) в (23), получим для интеграла в (16) асимптотически точное при $q \to \infty$ приближение

$$\int_{1-h}^{1} \approx (1-u_0)^{-\frac{1}{2u_0}}\, u_0^{\frac{q-1}{2}}/(q-2), \qquad (26)$$

где u_0 определено в (25).

Если использовать (26) и известный ряд Стирлинга для $\ln\Gamma(x+1)$, то получим из (11) асимптотическую формулу для α:

$$\alpha \approx \frac{2\kappa}{\sqrt{2\pi(q-2)}}\exp\frac{1}{2}\Big[(q-1)\ln(u_\alpha(q-2)) - \qquad (27)$$

$$-\frac{1}{u_\alpha}\ln(1-u_\alpha) - (q-2)\ln(q-3) - 1\Big],$$

где

$$u_\alpha = 1 - (1 - \rho_\alpha^2)^{(q-2)/(q-1)}. \tag{28}$$

Формула (27) достаточно точна и удобна при $q \geqslant 30$. Она всегда мажорирует α. Некоторые значения $\alpha/2к$, вычисленные из (27), приведены в таблице 1 вместе с точными значениями, которые найдены из (19). Параллельно приведены оценки, вычисленные как отношение выражений (14) и (13).

Таблица 1

Сравнение оценок для $\alpha/2к$ с точными значениями

ρ^2	q	Точное значение $\alpha/2к$ из (19)	Минорирующая оценка (14):(13)	Мажорирующая оценка (27)/2к
1	2	3	4	5
0,001	5	$1{,}8756 \cdot 10^{-7}$	$1{,}8750 \cdot 10^{-7}$	$2{,}3812 \cdot 10^{-7}$
	10	$4{,}0919 \cdot 10^{-15}$	$4{,}0902 \cdot 10^{-15}$	$4{,}4808 \cdot 10^{-15}$
	20	$2{,}8577 \cdot 10^{-30}$	$2{,}8564 \cdot 10^{-30}$	$2{,}9773 \cdot 10^{-30}$
	30	$2{,}3237 \cdot 10^{-45}$	$2{,}3226 \cdot 10^{-45}$	$2{,}3861 \cdot 10^{-45}$
	50	$1{,}7939 \cdot 10^{-75}$	$1{,}7931 \cdot 10^{-75}$	$1{,}8220 \cdot 10^{-75}$
0,01	5	$1{,}8813 \cdot 10^{-5}$	$1{,}8750 \cdot 10^{-5}$	$2{,}3907 \cdot 10^{-5}$
	10	$1{,}2988 \cdot 10^{-10}$	$1{,}2934 \cdot 10^{-10}$	$1{,}4230 \cdot 10^{-10}$
	20	$9{,}0739 \cdot 10^{-21}$	$9{,}0328 \cdot 10^{-21}$	$9{,}4567 \cdot 10^{-21}$
	30	$7{,}3792 \cdot 10^{-31}$	$7{,}3446 \cdot 10^{-31}$	$7{,}5791 \cdot 10^{-31}$
	50	$5{,}6976 \cdot 10^{-51}$	$5{,}6702 \cdot 10^{-51}$	$5{,}7876 \cdot 10^{-51}$
0,1	5	$1{,}9413 \cdot 10^{-3}$	$1{,}8750 \cdot 10^{-3}$	$2{,}4921 \cdot 10^{-3}$
	10	$4{,}2690 \cdot 10^{-6}$	$4{,}0902 \cdot 10^{-6}$	$4{,}7068 \cdot 10^{-6}$
	20	$2{,}9952 \cdot 10^{-11}$	$2{,}8564 \cdot 10^{-11}$	$3{,}1324 \cdot 10^{-11}$
	30	$2{,}4395 \cdot 10^{-16}$	$2{,}3226 \cdot 10^{-16}$	$2{,}5116 \cdot 10^{-16}$
	50	$1{,}8860 \cdot 10^{-26}$	$1{,}7931 \cdot 10^{-26}$	$1{,}9186 \cdot 10^{-26}$
	100	$1{,}3317 \cdot 10^{-51}$	$1{,}2647 \cdot 10^{-51}$	$1{,}3430 \cdot 10^{-51}$

§ 3. Оценка снизу вероятности критического события

3.1. Изучаем, при каких условиях в (8) имеет место равенство. Введем обозначение

$$\tau = \max_{\varphi, \psi \in M, \varphi \neq \psi} \frac{|(\varphi, \psi)|}{\|\varphi\| \cdot \|\psi\|} \tag{29}$$

и пусть ρ_α имеет тот смысл, что и выше. Тогда, если ω есть наибольший угол между двумя радиус-векторами сферы $\mathcal{S}_W$, которые пересекают один и тот же сегмент (имеющий площадь $\alpha S/2к$), то

$$\rho_\alpha^2 = \sin^2(\omega/2) = (1 - \cos\omega)/2 .$$

Пусть λ - наименьший угол между двумя векторами φ_1 и φ_2 из М (т.е. $\tau = \cos\lambda$). Увидим, что сегменты (радиуса ρ_α), имеющие центры в точках пересечения $\mathcal{S}_W$ с одномерными подпространствами множества М, существенно не пересекаются, если $\omega \leq \lambda$ или $\cos\omega \geq \cos\lambda$, т.е. если

$$1 - 2\rho_\alpha^2 \geq \tau . \tag{30}$$

Это и есть условие равенства в (8).

3.2. Конкретизируем (30) в одном частом случае. Будем считать q большим, а $\tau = q^{-1}$ и к = $q + 1$ (такой случай встречается ниже). Тогда, если взять в (30) равенство, то (см. /17/)

$$(1 - h)^2 = (q+1)/(2q) \approx 0,5 \quad ,$$

а далее из (25) находим $u_0 \approx 0,5$. Подставляя это асимптотическое значение u_0 в (26), с помощью (16), (13) и (11) приходим к асимптотическому равенству

$$\alpha \approx (q+1)\Gamma(\tfrac{q-2}{2})/(2^{\frac{q-3}{2}}\cdot\Gamma(\tfrac{q-1}{2})\sqrt{\pi}). \tag{31}$$

Если уровень значимости меньше значения (31), то в (8) можно ожидать равенства.

Условие (31) показывает, что пределы для q сравнительно строгие: при α =0,05 в (8) имеется равенство лишь при $q \leq 15$, а при α = 0,01 в случае $q \leq 20$. Дополнительная проверка точной формулой (19) показывает, что в случаях α = 0,05 и α = 0,01 знак равенства в (8) имеет место соответственно только при $q \leq 12$ и $q \leq 17$. Таким образом, при сделанных предположениях относительно τ и к, лишь при сравнительно небольших q мы не теряем в мощности, считая α в (11) истинным уровнем значимости.

3.3. Если условие (30) не выполнено, то можно, хотя и довольно грубо, оценить степень нарушенности равенства в (8) следующим образом. Пусть r_1 и r_2 - радиус-векторы сферы $\mathcal{S}_W$, направленные вдоль φ_1 и φ_2, где $(r_1, r_2) = \tau$ и $(r_1, r_2) \geqslant 0$. Обозначим $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ - сегменты радиуса ρ_α вокруг r_1 и r_2 на $\mathcal{S}_W$. Берем ортогональную координатную систему в W так, что

$$\mathcal{S}_W = \{(z_1, \ldots, z_q) \mid z_1^2 + \ldots + z_q^2 = 1\},$$

$$r_1 = (c_1, c_2, 0, \ldots, 0)^T \text{ и}$$

$$r_2 = (-c_1, c_2, 0, \ldots, 0)^T,$$

где $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Поскольку еще $-c_1^2 + c_2^2 = (r_1, r_2) = \tau$, то

$$c_2^2 = (\tau + 1)/2. \tag{32}$$

Сегменты, определенные векторами r_1 и r_2, являются соответственно множествами

$$\mathcal{S}_1 = \{(z_1, \ldots, z_q) \mid z_1^2 + \ldots + z_q^2 = 1,\ c_1 z_1 + c_2 z_2 \geqslant \mu_\alpha\} \text{ и}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(z_1, \ldots, z_q) \mid z_1^2 + \ldots + z_q^2 = 1, -c_1 z_1 + c_2 z_2 \geqslant \mu_\alpha\},$$

где

$$\mu_\alpha = \sqrt{1 - \rho_\alpha^2}. \tag{33}$$

Из геометрических соображений ясно, что максимальный диаметр d общей части $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ равен максимальному диаметру множества

$$\{(z_1, \ldots, z_q) \mid z_1^2 + \ldots + z_q^2 = 1,\ c_1 z_1 + c_2 z_2 = -c_1 z_1 + c_2 z_2 = \mu_\alpha\} = \{(0, \mu_\alpha/c_2, z_3, \ldots, z_q) \mid z_3^2 + \ldots + z_q^2 = 1 - \mu_\alpha^2/c_2^2\},$$

так что

$$d = 2\sqrt{1 - \mu_\alpha^2 / c_2^2}. \tag{34}$$

Если $\mu_\alpha > c_2$, то $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ (это условие равносильно условию (30)). Если же $\mu_\alpha < c_2$, то $(q-1)$-мерная площадь области $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ не превышает $s(\sqrt{1-\mu^2/c_2^2})$. Когда в М имеется к векторов, то площадь сферы $\mathcal{S}_W$, покрытая сегментами критического множества, больше

$$2к\, s(\rho_\alpha) - 2к(к-1)\cdot s(\sqrt{1-\mu_\alpha^2/c_2^2}) = 2к\cdot s(\rho_\alpha)\cdot(1-\eta),$$

где

$$\eta = (к-1)\cdot s(\sqrt{1-\mu_\alpha^2/c_2^2})/\, s(\rho_\alpha) \qquad (35)$$

есть максимально возможное относительное уменьшение суммарной площади сегментов за счет их пересечения. Таким образом, для вероятности PA_M критического события A_M установлены пределы

$$(1-\eta)\alpha \leqslant PA_M \leqslant \alpha. \qquad (36)$$

Насчет вычисления η отметим, что если имеется некоторый метод А вычисления α по заданному радиусу ρ, $\alpha = A(\rho) = A(\rho_\alpha)$, то определяя

$$\alpha_1 = A(\sqrt{1-\mu_\alpha^2/c_2^2}),$$

имеем

$$\eta = (к-1)\alpha_1/\alpha. \qquad (37)$$

3.4. Рассматриваем отдельно частный случай $\tau = q^{-1}$ при больших q, когда асимптотическая формула (27) применима. Чтобы конкретизировать (37) в этом случае, будем искать α_1 как функцию α и q. Пусть по α и q найдено u_α (например, путем обращения (27)). Используя, далее, u_α и q вычислим вспомогательный параметр u_1 - значение выражения (28), где ρ_α заменен на $\rho_1 = d/2$ из (34). Вычисления $(u_\alpha, q) \to u_1$ можно выполнить по схеме

$$\left.\begin{array}{l} u_\alpha \xrightarrow{(28)} \rho_\alpha^2 \xrightarrow{(33)} \mu_\alpha \\[2ex] q \longrightarrow \tau \xrightarrow{(32)} c_2^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(34)} \frac{d}{2} = \rho_1 \xrightarrow{(28)} u_1,$$

которая равносильна формуле

$$u_1 = 1 - \left(\frac{2q}{q+1}\right)^{(q-2)/(q-1)} (1 - u_\alpha). \qquad (38)$$

Используя найденное значение u_1 в (27) вместо u_α, можно определить α_1, а затем по (37) и η. Этот путь ведет к асимптотической формуле

$$\eta = (к - 1)\sqrt{(u_1/u_\alpha)^{q-1}(1 - u_1)^{-1/u_1}(1 - u_\alpha)^{1/u_\alpha}} \; . \qquad (39)$$

Формула (39) применяется по схеме

$$\alpha \xrightarrow{(27)} u_\alpha \xrightarrow{(38)} u_1 \xrightarrow{(39)} \eta \; .$$

В таблице 2 даны некоторые значения η, соответствующие $\alpha = 0,05$ и вычисленные по (39) для $q \geq 30$, а для $q \leq 12$ по результатам раздела 3.2. Как видно в таблице, во многих практических задачах разностью между $PA_М$ и α можно пренебречь (напомним, что $(1 - \eta)\alpha \leq PA_М \leq \alpha$).

Таблица 2

Значения нижнего предела $(1 - \eta)\alpha$ вероятности критического события $A_М$ при $\tau = q^{-1}$, $к = q + 1$ и $\alpha = 0,05$

q	≤ 12	30	60	120	200	350	500	10^3	10^4	10^5
η	.000	.014	.047	.082	.106	.128	.140	.159	.199	.222
$(1-\eta)\alpha$	.050	.049	.048	.046	.045	.044	.043	.042	.040	.039

§ 4. Построение критического события для проверки достаточности множества параметров. Примеры

4.1. Продолжаем тематику первого параграфа. Рассматриваем проверку нулевой гипотезы

$$H_0: \; EY = K\beta \qquad (40)$$

против альтернативы

$$H_1: \; EY = (K \vdots L)\begin{pmatrix}\beta \\ \cdots \\ \gamma\end{pmatrix} = K\beta + L\gamma, \qquad (41)$$

где вектор γ и матрица L неизвестны, однако L является элементом заданного конечного множества $\mathcal{L}$ матриц L, обладающих свойством

$$\text{ранг}(K \vdots L) = \text{ранг}(K) + 1. \qquad (42)$$

В терминологии дисперсионного анализа (41) и (42) означают, что на компоненты вектора y действует неучтенный в (1) фактор с двумя уровнями, которые непосредственно наблюдать невозможно (L неизвестно).

Чтобы проверить гипотезу (41), вводим в рассмотрение остатки

$$Z_{K:L} = (1 - (K:L)((K:L)^T(K:L))^-(K:L)^T)y \qquad (43)$$

(ср. с (3)). Как легко вытекает из (42), матрица L в (43) может быть заменена (если она уже не есть) такой $(n\times 1)$-матрицей φ_L, что

$$K^T\varphi_L = 0 \qquad (44)$$

и

$$Z_{K:L} = Z_{K:\varphi_L}, \qquad (45)$$

где остаток $Z_{K:\varphi_L}$ определяется аналогично (43). Из (44) следует, в частности, $\varphi_L \in W$. Как и в 1.2, составляем из векторов φ_L множество

$$M = \{\varphi_L \mid L \in \mathcal{L}\}$$

и соответствующее критическое событие (6). В настоящем контексте естественно преобразовать критическое событие к более удобному для вычисления виду. Отметим, что

$$\|Z_{K:\varphi_L}\|^2 = \|Z_K\|^2 - (Z_K,\varphi_L/\|\varphi_L\|)^2$$

и учтем (45). Тогда событие (6) принимает вид

$$A_M = \{\|Z_{K:L}\|^2/\|Z_K\|^2 \leqslant \rho_\alpha^2 \text{ для некоторого } L \in \mathcal{L}\} \qquad (46)$$

или, в более привычном для теории наименьших квадратов виде

$$A_M = \{\min_{L\in\mathcal{L}} \inf_{\beta,\gamma} \|y - K\beta - L\gamma\|^2/\inf_{\beta}\|y - K\beta\|^2 \leqslant \rho_\alpha^2\}. \qquad (47)$$

4.2. Чтобы выразить из (11) по заданному максимально допустимому уровню значимости α критическое значение ρ_α, необходимо знать к - количество векторов в М. Рассматриваем вычисление к в важном частном случае, где матрицы К и L содержат только нули или единицы или могут быть преобразованы к такому виду без изменения линейной модели (41), в частности, - вектора У. Это - случай дисперсионного анализа. Предположим дополнительно, что $(1,\dots,1)^T \in \mathcal{V}(K)$, где $\mathcal{V}(K) \subset E$ - линейное пространство, порожденное столбцами матрицы К. Пространство $\mathcal{V}(K)$ можно определить проектором

$$Q_{W^\perp} = 1 - Q_W = K(K^TK)^-K^T$$

(см. (4)). У $Q_{W^\perp}$ имеется r = ранг(К) ортогональных собственных векторов с собственным значением 1 ("единичные собственные вектора"), все остальные $(n - r)$ векторов имеют собственное значение 0 ("нулевые собственные вектора"). Условимся называть две координаты сродственными, если их числовые значения совпадают у всякого единичного собственного вектора матрицы $Q_{W^\perp}$ (Говоря здесь о координатах, мы имеем в виду ту координатную систему, где дана К). Сродственность как отношение эквивалентности порождает классы сродственных координат. Пусть $\{\psi_1,\dots,\psi_r\}$ - такая система единичных собственных векторов проектора $Q_{W^\perp}$, что у ψ_i только в i-том классе значения сродственных координат не нули. Поскольку векторы $\psi_1,\dots,\psi_r$ образуют ортогональный базис в W, то у любого вектора $\varphi \in W$ сродственные координаты имеют одинаковое значение. Это свойство характеризует векторы в W и, в частности, столбцы матрицы К.

Допустим теперь, не ограничивая общности (см. (42)), что L состоит из одного столбца (в котором только нули или единицы). Имеется 2^n возможностей составлять такую матрицу. Однако не все возможные матрицы из нулей и единиц удовлетворяют (42), а из тех, которые удовлетворяют (42), не все дадут разные пространства $\mathcal{V}(K:L)$. Действительно, если

$$Q_{W^\perp}L = L,$$

то $\mathcal{V}(K:L) = \mathcal{V}(K)$ и L не удовлетворяет (42). Пусть, далее, у L' значения в i-том классе сродственных координат совпадают со значениями тех же координат у L'', а во всех остальных классах значения координат могут быть у L' и L'' разные, но в пределах каждого класса постоянные (нули или единицы). Тогда L'' выражается линейно через $\psi_1, \dots, \psi_r$ и L'. Поэтому $\vartheta(K:L') = \vartheta(K:L'')$, так что альтернатива (41) при $L = L'$ совпадает с той же альтернативой при $L = L''$. Значит, в этом случае различие между L' и L'' - несущественное.

Число разных непостоянных наборов значений координат в i-том классе равно $2^{n_i} - 2$, где n_i - число сродственных координат в i-том классе. Поэтому во множество $\mathcal{L}$ не надо включать более чем

$$K_1 = \sum_{i=1}^{r} (2^{n_i} - 2)$$

разных матриц L с непостоянным набором значений точно в одном классе сродственных координат. Аналогично, во множество $\mathcal{L}$ претендует только

$$K_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (2^{n_{i_1}} - 2) \dots (2^{n_{i_p}} - 2)$$

разных матриц L, имеющих p непостоянных и $r-p$ постоянных наборов значений сродственных координат. В итоге остается $\sum_{p=1}^{r} K_p$ вариантов матриц L, где любые два варианта отличаются не менее чем по одному непостоянному набору значений сродственных координат. Однако и это число следует уменьшать еще в два раза, так как если

$$L'' = (1, \dots, 1)^T - L',$$

то $\vartheta(K:L') = \vartheta(K:L'')$, хотя здесь в L' и L'' одни и те же классы сродственных координат имеют постоянные значения, а в тех классах сродственных координат, где значения непостоянны, они у L' и L'' - разные. Учтя это, окончательно увидим, что существенно разных возможностей для составления L есть всего

$$K = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{r} \sum_{i_1 < \dots < i_p} (2^{n_{i_1}} - 2) \dots (2^{n_{i_p}} - 2) , \qquad (48)$$

где n_{i_j} - число координат в i_j-том классе сродственности.

4.3. П р и м е р 1. Анализ выброса. Экспериментатор измерял случайную величину, которая предположительно имеет нормальное распределение. Полученные данные после их упорядочения представлены в таблице 3, где видно, что одно измерение дало заметно отклоняющееся значение. Находится ли это измерение в согласии с предположением о нормальном распределении всех результатов измерения? В качестве альтернативы выдвигается возможность, что выброс есть следствие грубой ошибки. Пусть при этом известно, что грубая ошибка - явление редкое, так что вероятность совершить в одной серии измерений две или больше ошибок ничтожно мала.

В данном примере $K = (1, \ldots, 1)^T$ и

$$\|Z_K\|^2 = \sum_{i=1}^{12} (y_i)^2 - \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{12} y_i\right)^2 = 0{,}048567 ,$$

где $y_1, \ldots, y_{12}$ - результаты измерения. Если выброс объяс-

Таблица 3

Результаты измерения

2.25	2.28	2.28	2.30	2.31	2.31
2.31	2.32	2.34	2.36	2.37	2.45

нить действием фактора "ошибка", то

$$\mathcal{L} = \{L_1 = (1,0, \ldots, 0)^T,\ L_2 = (0,1,0, \ldots, 0)^T, \ldots,$$
$$L_{12} = (0, \ldots, 0,1)^T\}.$$

Векторы $L_1, \ldots, L_{12}$ не входят в $W^\perp$, поэтому нельзя составлять из них множества M. Элементами M могут быть векторы $Q_{W^\perp}L_i$ или их кратные. Мы берем $\varphi_i = 12\, Q_{W^\perp} L_i$, тогда

$$M = \{\varphi_1 = (-11,1,\ldots,1)^T, \ldots, \varphi_{12} = (1,\ldots,1,-11)^T\}. \qquad (49)$$

Согласно (47), критическое событие A_M происходит, как только выполняется неравенство в

$$\inf_i \|Z_{K:L_i}\|^2/\|Z_K\|^2 = \|Z_{K:L_{12}}\|^2/\|Z_K\|^2 = 0{,}41786 \le \rho_\alpha^2. \qquad (50)$$

Чтобы найти минимальное значение α, при котором неравенство в (50) выполняется, находим согласно (17) $h_\alpha = 1 - \sqrt{1 - 0.41786} = 0.23702$, а затем из (19) получаем $s(p) = 0.040355$. Поскольку, согласно (49), $k = 12$, то из (11) находим $\alpha = 0.04673$.

Интересуемся теперь точным уровнем значимости, равным

$РА_М$. Из (29) и (49) вытекает

$$\tau = |(\varphi_i,\varphi_j)|/\|\varphi_1\|^2 .$$

Рассматривая несколько более общий случай чем (49), предположим $\varphi_i = (a, b, \dots, b)$ и $\varphi_j = (b, a, b, \dots, b)$, где в силу (44) $(1, \dots, 1)\varphi_i = a + (n-1)b = 0$. Тогда

$$\frac{(\varphi_i,\varphi_j)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{2ab + (n-2)b^2}{a^2 + (n-1)b^2} = -\frac{1}{n-1} . \qquad (51)$$

В данном примере $n = 12$ и $\tau = 1/11 = 0{,}0909\dots$. Согласно (30), в (8) имеется равенство, если только

$$\rho_\alpha^2 \leqslant (1-\tau)/2 = 0{,}4545\dots .$$

Поскольку в данном случае $\rho_\alpha^2 = 0{,}4179$, то это условие выполнено и поэтому уровень значимости $РА_М$ точно равен 0,04673. То же самое видно в таблице 2: при $\alpha \leqslant 0{,}05$ и $q \leqslant 12$ верно $РА_М = \alpha$.

4.4. П р и м е р 2. (Проверка реальности гипотетического фактора). Размах крыльев имеющихся в коллекции 15 экземпляров (7 самцов, 8 самок) вида *sp.* приведены в таблице 4. Энтомолога удивляет то, что весь материал распадается по размаху на две группы. Является ли обнаруживаемая неоднородность случайностью или состоит вид *sp.* действительно из двух биологически обоснованных вариантов, например из разных видов или подвидов? Другими словами, энтомолога интересует, влияет ли на признак "размах" кроме фактора "пол" еще и некоторый другой фактор с двумя уровнями?

Размах крыльев, как и почти все метрические признаки морфологического характера, - полигенный и поэтому практически распределяется нормально. Это дает основание применять методику данной статьи. Описываем влияние фактора "пол" плановой матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}^T .$$

Стандартными приемами однофакторного дисперсионного анализа данных в таблице 4 получим, что остаточная сумма квадратов равна

$$\|Z_K\|^2 = 136{,}357 . \qquad (52)$$

Если кроме пола на размах влияет еще и неизвестный фактор с двумя уровнями, то матрица плана приобретает вид

$$(K:L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & & & & & & & & & & & & \gamma_{15} \end{pmatrix}^T$$

где $\gamma_i = 0$ или 1, а согласно пункта 4.2, $0 < \sum_{i=1}^{7} \gamma_i < 7$ или $0 < \sum_{i=1}^{8} \gamma_i < 8$. Согласно (48), вектор

$$L = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{15})^T , \qquad (53)$$

удовлетворяющий (42), может быть выбран

$$к = ((2^7 - 2)\cdot(2^8 - 2) + (2^7 - 2) + (2^8 - 2))/2 = 16192$$

существенно разным способом.

Для каждого L вида (53) можно вычислить методами двухфакторного дисперсионного анализа остаточную сумму квадратов $\| Z_{K:L} \|^2$. Чтобы найти минимальное значение $\| Z_{K:L} \|^2$ по всем возможным L, упорядочим отдельно всех самцов и всех самок по размаху крыльев (как уже сделано в таблице 4). Ясно, что ми-

Таблица 4

Размах крыльев x_j у представителей вида sp. и вспомогательные величины a_p

№	p	самцы x_j	самцы a_p	самки x_j	самки a_p
1		38		46	
	1		11695		21044
2		38		47	
	2		11708		21073
3		40		47	
	3		11710		21113
4		42		52	
	4		11702		21097
5		42		54	
	5		11698		21069
6		43		54	
	6		11691		21050
7		43		55	
	7				21029
8				55	

нимум $\|Z_{K:L}\|^2$ можно получить только при разделении вариационного ряда каждого пола на две половинки, одно из которых, возможно, пусто. Несложный анализ показывает, что разделение, которому соответствует искомый минимум, можно найти, вычисляя последовательно для всех $p = 1, \ldots, n_i - 1$ выражения

$$a_p = \frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)^2 + \frac{1}{n_i - p}\left(\sum_{j=p+1}^{n_i} x_j\right)^2 , \qquad (54)$$

где $x_1, \ldots, x_{n_i}$ - вариационный ряд измерений рассматриваемого пола ($n_i = 7$ или 8). Разбиение, минимизирующее остаточную сумму квадратов, определяется значением p, которому соответствует максимум a_p. Значения характеристики a_p, полученные для данных настоящего примера, даны в таблице 4, откуда видно, что остаточная сумма квадратов $\|Z_{K:L}\|^2$ достигает минимума при

$$L = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T.$$

Методами двухфакторного дисперсионного анализа находим этот минимум:

$$\min_{L \in \mathcal{L}} \|Z_{K:L}\|^2 = 10{,}3333\ldots . \qquad (55)$$

Отношение значений (55) и (52) равно $\rho_\alpha^2 = 0{,}07578$. Из формул (11), (13) и (14) получим (минорантную) оценку соответствующего значения α : $\alpha \approx 0{,}0006917$. Точное значение можно вычислить, если подставить $\rho^2 = 0{,}07578$ в (17) и применить затем (19). Тогда увидим, что по крайней мере на уровне значимости $\alpha = 0{,}0007155$ можно считать доказанным существование некоторого неизвестного фактора, влияющего на размах. Итак, есть веское основание искать причину неоднородности вида sp .

В предыдущем примере нормальность распределения была гарантирована биологическими соображениями и сомнения относились только к равенству $EY = K\beta$. Может случиться и так, что в $EY = K\beta$ сомнений нет, в то время как нормальность распределения требует проверки.

4.5. П р и м е р 3. (Проверка нормальности распределения). Было взято 20 чисел из таблицы равномерно распределенных случайных чисел (/4/, стр. 370, первые 20 чисел в первом столбце таблицы). Отношение сумм квадратов отклонений от арифметического среднего при оптимальном подразделении данных на две группы, к сумме квадратов отклонений без группировки равно $\rho_\alpha^2 = 0,1365$. Этому значению соответствует по (17) $h_\alpha = 0,07077$. Из (48) находим $к = 2^{19} - 1$, а из (19) и (11) получаем $\alpha = 0,00171$. Таким образом, рассматриваемые числа явно не распределены нормально.

Литература

1. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. Москва, 1968.
2. Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. Москва, 1972.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. Москва, 1975.
4. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. Москва, 1969.

GEOMETRIC APPROACH IN TESTING THE SUFFICIENCY OF PARAMETERS IN CASE OF A NORMAL LEAST SQUARES MODEL

T. Möls

S u m m a r y

If according to the null hypothesis the linear model adequately represents the mean values of a normal character in subsequent measurements, the normed prognosis reminder vector is uniformly distributed on the unit sphere. Testing of this hypothesis against an alternative one, which establishes possible clustering points for the residual vector, leads to the elementary geometric probability problems in multidimensional Euclidean space. In the present paper, the underlying theroy and the corresponding computation formulas (both exact and approximate) are presented. The practical use of the described methods is illustrated in detecting a latent factor in variance analysis and testing the normality hypothesis.

ЗАДАЧА ПАРНОГО КЛИРИНГА И АЛГОРИТМ ДЛЯ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Э.А. Тийт

I. Постановка проблемы

Задача парного клиринга (оптимального выбора пар из объектов двух типов) возникает во многих областях практического действия, например, при выборе супруга или супруги (т. н. брачный клиринг), при выборе профессии (т. н. профессиональный клиринг) и т.д. (см. /I-3/).

В настоящей статье излагается возможность формализации этой задачи и алгоритм для ее решения. Приведен и один пример из области брачного клиринга.

Пусть заданы два конечных множества объектов $\mathfrak{X} = (x_1, \ldots, x_N)$ и $\mathfrak{Y} = (y_1, \ldots, y_M)$, соответственно из метрических пространств R_x и R_y. Целью задачи парного клиригна является образование множества пар $\{(x_{i_k}, y_{j_k}), k = 1,2, \ldots, K\}$ так, что $i_k \neq i_h$, $j_k \neq j_h$, если $k \neq h$ и каждая пара (x_{i_k}, y_{j_k}) удовлетворяет некоторому условию оптимальности G, а число таких пар K по возможности большое.

Для формализации поставленной задачи и решения ее нам необходимы некоторые понятия, которые определим в следующем.

2. Обобщенное расстояние

Обозначаем класс всех непустых подмножеств пространства R_x через Q_x и класс всех непустых подмножеств пространства R_y через Q_y. В пространствах $Q_x \times Q_x$ и $Q_y \times Q_y$ определяются функции d_x и d_y соответственно

$$d_x(A,B) = \inf_{u \in A, v \in B} d(u,v),$$

$$d_y(A,B) = \inf_{u \in E, v \in F} d(u,v),$$

при любых $A, B \in Q_x$ и $E, F \in Q_y$.

В задачах клиринга предполагается, что заданы функции $\varphi_x : \mathfrak{X} \to Q_x$ и $\varphi_y : \mathfrak{Y} \to Q_y$, сопоставляющие каждой точке x_i множество $A_i \in Q_y$ и каждой точке y_j множество $B_j \in Q_x$. Эти функции называются функциями требования.

Определим для каждой пары точек (x_i , y_j) ($x_i \in \mathfrak{X}$, $y_j \in \mathfrak{Y}$) число $d(x_i, y_j)$ следующим образом:

$$d(x_i, y_j) = \alpha d_X(\{x_i\}, \varphi_Y(y_j)) + \beta d_Y(\{y_j\}, \varphi_X(x_i)), \qquad (1)$$

где α и β заданные неотрицательные числа. Величина (1) называется **обобщенным расстоянием.** Когда $\alpha\beta > 0$, то обобщенное расстояние имеет следующие свойства:

1° $d(x_i, y_j) \geq 0$; $d(x_i, y_j) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i \in \varphi_Y(y_j)$ и $y_j \in \varphi_X(x_i)$.

2° $d(x_i, y_j) = d(y_j, x_i)$.

Свойство треугольника в общем не сохраняется для обобщенных расстояний.

3. Матрица обобщенных расстояний

Все обобщенные расстояния между элементами множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ образуют матрицу $\mathfrak{D} = (d_{ij})$, где $d_{ij} = d(x_i, y_j)$, $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, M$.

В дальнейшем необходимо выделить из матрицы $\mathfrak{D}$ разные блоки (подматрицы). Для определения их целесообразно пользоваться индекс-множествами.

Пусть $\mathfrak{I}_0 = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathfrak{J}_0 = \{1, 2, \ldots, M\}$.

Если $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{J}$ заданные индекс-множества, $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}_0$, то $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ обозначает такую подматрицу (блок) матрицы $\mathfrak{D}$, которая содержит элементы d_{ij}, $i \in \mathfrak{I}$ и $j \in \mathfrak{J}$ и только те:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J}) = (d_{ij}), \quad i \in \mathfrak{I}, \quad j \in \mathfrak{J}.$$

Мощность множества A обозначается символом $\varkappa(A)$. Таким образом,

$$\varkappa(\mathfrak{I}_0) = N, \quad \varkappa(\mathfrak{J}_0) = M.$$

Пусть задано некоторое условие для элементов матрицы $\mathfrak{D}$, например

$$d_{ij} \leq g, \qquad (2)$$

где g заданное число. Обозначаем через G множество всех элементов матрицы $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условию (2):

$$G=\{d_{ij} : d_{ij} \leq g, i \in \mathfrak{I}_0, j \in \mathfrak{f}_0\}; \qquad (3)$$

условие (3) называем для простоты условием G.

В задаче клиринга считаем, что элементы x_i и y_j образуют G - оптимальную пару тогда и только тогда, когда $d_{ij} \in G$ и целью задачи клиринга является образование максимального числа G- оптимальных пар.

4. G-каноническое представление матрицы $\mathfrak{D}$.

Пусть задана матрица $\mathfrak{D}$ и фиксировано условие G так, что множество G непустое. Пусть непустые индекс-множества $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{f}_0$) выбраны так, что выполняется условие (4):

$$d_{ij} \notin G \quad \text{если} \quad ((i \in \mathfrak{I}) \cap (j \notin \mathfrak{f})) \cap ((i \notin \mathfrak{I}) \cap (j \in \mathfrak{f})). \qquad (4)$$

Тогда подматрица $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{f})$ называется G-блоком матрицы $\mathfrak{D}$ (см. рис. I). G -блок называется <u>атомарным</u>, если он не содержит G -блока, различного от самого себя.

Заметим, что каждой элемент d_{ij} матрицы $\mathfrak{D}$, удовлетворяющий условию G, **принадлежит только одному атомарному блоку.**

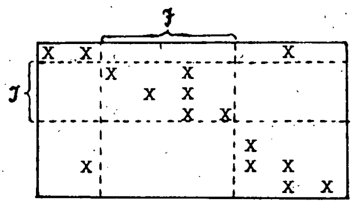

Рис. I

Матрица, содержащая G -блока $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{f})$; ($G$ -элементы d_{ij} обозначены крестиками).

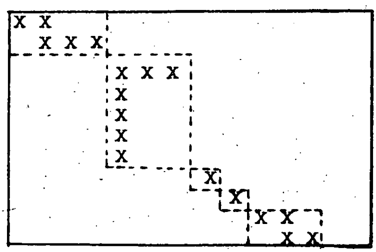

Рис. 2

G-каноническое представление матрицы;(атомарные G - блоки указаны пунктиром).

Пусть из матрицы $\mathfrak{D}$ выделены все возможные атомарные G-блоки $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{f}_1)$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_2, \mathfrak{f}_2)$, ..., $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_s, \mathfrak{f}_s)$. Тогда множество пар индекс-множеств $\mathfrak{L}(s) = \{(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{f}_1), ..,(\mathfrak{I}_2, \mathfrak{f}_2),$

$(\mathcal{J}_s, \mathcal{F}_s)\}$ называется G - каноническим представлением матрицы $\mathfrak{D}$ (см. рис. 2).

G- каноническое представление $\mathcal{L}(s)$ определяет $s!$ различных возможных блок-диагональных форм матрицы $\mathfrak{D}$. Каждую из них возможно получить путем перестановки строк и столбцов исходной матрицы $\mathfrak{D}$.

<u>Теорема 1</u>. Каноническое представление матрицы $\mathfrak{D}$ является однозначной (до перестановки атомарных G-блоков).

<u>Доказательство</u>. Предполагаем, что существует два различных G-канонических представления матрицы $\mathfrak{D}$:

$$\mathcal{L}(s) = \{(\mathcal{J}_1, \mathcal{F}_1), \ldots, (\mathcal{J}_s, \mathcal{F}_s)\}$$

и

$$\mathcal{L}'(t) = \{(\mathcal{J}'_1\, \mathcal{F}'_1), \ldots, (\mathcal{J}'_t, \mathcal{F}'_t)\}, \quad \mathcal{L}(s) \neq \mathcal{L}'(t).$$

Значит, в одном представлении найдется G-блок, содержащий элементы из более чем одного блока второго представления. Пусть это - блок $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_f, \mathcal{F}_f)$ из представления $\mathcal{L}(s)$, который содержит элементы блоков $\mathfrak{D}(\mathcal{J}'_h, \mathcal{F}'_h)$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{J}'_e, \mathcal{F}'_e)$ из представления $\mathcal{L}'(t)$.

Вводим следующие индекс-множества:

$$\mathcal{J}_1^* = \mathcal{J}_f \cap \mathcal{J}'_h, \quad \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_f \cap \mathcal{F}'_h,$$

$$\mathcal{J}_2^* = \mathcal{J}_f \cap \mathcal{J}'_e, \quad \mathcal{F}_2' = \mathcal{F}_f \cap \mathcal{F}'_e$$

и докажем, что при сделанных предположениях блоки $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_1^*, \mathcal{F}_1^*)$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_2^*, \mathcal{F}_2^*)$ также являются G-блоками. С этой целью нам надо указать, что для блоков $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_1^*, \mathcal{F}_1^*)$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_2^*, \mathcal{F}_2^*)$ выполнено условие (4).

Рассмотрим блок $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_1^*, \mathcal{F}_1^*)$; пусть d_{ij} такой элемент, при котором $i \in \mathcal{J}_1^*$, $j \in \mathcal{F}_1^*$. Имеется две возможности: или $j \in \mathcal{F}_f$, или $j \notin \mathcal{F}_f$. Если $j \in \mathcal{F}_f$, то так как $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_f, \mathcal{F}_f)$ есть G-блок и $i \in \mathcal{J}_1^*$, значит и $i \in \mathcal{J}_f$, то $d_{ij} \in G$; если же $j \in \mathcal{F}_f$, то так как $\mathfrak{D}(\mathcal{J}'_h, \mathcal{F}'_h)$ есть G-блок и $i \in \mathcal{J}_1^*$, значит и $i \in \mathcal{J}_h$, то при $j \notin \mathcal{F}'_h$ также $d_{ij} \in G$. Таким образом, при $(i \in \mathcal{J}_1^*) \cap (j \notin \mathcal{F}_1^*)$ выполняется соотношение $d_{ij} \in G$. Аналогично докажем, что при $(i \in \mathcal{J}_1^*) \cap (j \in \mathcal{F}_1^*)$ также $d_{ij} \in G$, значит для блока $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_1^*, \mathcal{F}_1^*)$ выполнено условие (4).

Таким же образом докажем, что условие (4) выполняется и для блока $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_2^*, \mathcal{F}_2^*)$. Следовательно, атомарный G-блок $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_f, \mathcal{F}_f)$ содержит два G-блока $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_1^*, \mathcal{F}_1^*)$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{J}_2^*, \mathcal{F}_2^*)$, что противоречит определению **атомарности.**

Теорема доказана.

5. Образование идеальных пар на основании матрицы расстояний

Пусть $\mathfrak{D}$ - матрица обобщенных расстояний между элементами двух множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Пусть $\mathfrak{L}(\mathfrak{s})$ - G-каноническое представление этой матрицы. Требуется решить задачу парного клиринга, т.е. образовать максимальное возможное число G-оптимальных пар (т.е. таких пар, которые удовлетворяют условию G из представителей множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Из условия (4) вытекает, что G-оптимальную пару могут элементы x_i и y_j образовать только тогда, если d_{ij} принадлежит к некоторому G-блоку $\mathfrak{B}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$. Отсюда следует, что <u>для решения задачи клиринга достаточно решать эту задачу отдельно в каждом G-блоке</u>.

Заметим, что нахождение G-блоков может представить и некоторый содержательный интерес: именно элементы, принадлежащие к одному и тому же G-блоку, являются в некотором смысле близкими. Знание таких близких элементов может быть основой и для решения некоторых других задач (например, для группового клиринга, при котором каждому элементу одного множества определяют группу близких к нему элементов другого множества).

Для полного решения задачи парного клиринга нам необходимо решать две сравнительно самостоятельные задачи:

1. Нахождение G-канонического представления матрицы обобщенных расстояний $\mathfrak{D}$.
2. Образование максимального числа G-оптимальных пар на основании атомарного G-блока.

Далее мы излагаем алгоритмы для решения обоих поставленных задач.

6. G-каноническое представление матрицы $\mathfrak{D}$.

Пусть задана произвольная матрица $\mathfrak{D}$ и фиксировано условие G так, что множество G непустое. Образуем вектор $\mathrm{vec}\,\mathfrak{D} = (d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{NM})$, определяя тем упорядоченность среди элементов d_{ij} матрицы $\mathfrak{D}$. Пусть $d_{i_1 j_1}$ - первый элемент матрицы $\mathfrak{D}$, принадлежащий к множеству G:

Обозначаем $\mathfrak{I}^1 = \{i_1\}$

и определим множество $\mathcal{J}^1$:

$$\mathcal{J}^1=\{j: d_{i_1 j}\in G\}.$$

Пусть у нас определены индекс-множества J^t и $\mathcal{J}^t$. Определим J^{t+1} следующим образом:

$$J^{t+1}=\{i: d_{ij}\in G, \text{ если } j\in\mathcal{J}^t\}$$

аналогично

$$\mathcal{J}^{t+1}=\{j: d_{ij}\in G, \text{ если } i\in J^{t+1}\}.$$

Такие рассуждения продолжаются, пока на некотором r -ом шагу имеет место равенство

$$\mathcal{J}^r=\mathcal{J}^{r-1}.$$

Тогда имеет место и соотношение $J^{r+1}=J^r$ и определяя $J_1=J^r$, $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}^r$, мы получим атомарный G-блок $\mathfrak{D}(J_1, \mathcal{J}_1)$ (см. рис. 3).

Далее определим индекс-множества $J_0^{(1)}=J_0\setminus J_1$ и $\mathcal{J}_0^{(1)}=\mathcal{J}_0\setminus\mathcal{J}_1$. Если $\mathfrak{D}(J_0^{(1)}, \mathcal{J}_0^{(1)})$ содержит хотя бы один элемент $d_{ij}\in G$, то повторяем вышеописанный алгоритм и определим второй G-блок $\mathfrak{D}(J_2, \mathcal{J}_2)$ и т.д., пока после образования s-го G-блока $\mathfrak{D}(J_s, \mathcal{J}_s)$ один из индекс-множеств $J_0^{(s)}=J_0\setminus\bigcup_{i=1}^{s}J_i$ и $\mathcal{J}_0^{(s)}=\mathcal{J}_0\setminus\bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{J}_i$ окажется пустым или $\mathfrak{D}(J_0^{(s)}, \mathcal{J}_0^{(s)})$ не содержит элементов из множества G. Тогда множество $\mathcal{L}(s)=\{(J_1, \mathcal{J}_1), \ldots, (J_s, \mathcal{J}_s)\}$ и является G-каноническим представлением матрицы $\mathfrak{D}$.

7. Некоторые свойства атомарного G-блока

Исследуем некоторые простые свойства атомарного G-блока, полезные в дальнейшем. Для этого прежде всего вводим некоторые обозначения.

Пусть $\mathfrak{D}(J, \mathcal{J})$ - атомарный G-блок, $\varkappa(J)=n$, $\varkappa(\mathcal{J})=m$.

Обозначим $n^*=\min(n,m)$, $m^*=\max(n,m)$ и

$$p=\varkappa\{d_{ij}: d_{ij}\in G, i\in J, j\in\mathcal{J}\},$$

$$p_i=\varkappa\{d_{ij}: d_{ij}\in G, j\in\mathcal{J}\},$$

$$p^j=\varkappa\{d_{ij}: d_{ij}\in G, i\in J\}.$$

Понятно, что имеют место соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum p^j = p, \\ 1 \le p_i \le m; \ 1 \le p^j \le n. \end{cases} \tag{5}$$

Если $n^* = 1$, то G-блок $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ называется <u>тривиальным</u>. В дальнейшем предположим, что $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ нетривиальный атомарный блок.

Заметим, что если для некоторого элемента d_{ij} имеют место равенства

$$p_i = p^j = 1,$$

то этот элемент образует самостоятельный атомарный (тривиальный) G-блок. Следовательно, при нетривиальном атомарном G-блоке для каждого элемента d_{ij} $(i \in \mathfrak{I}, j \in \mathfrak{J})$ справедливо неравенство

$$p_i p^j > 1.$$

Элементы $d_{ij} \in G$, $i \in \mathfrak{I}$ и $j \in \mathfrak{J}$ называются G-элементами, а элементы $d_{ij} \notin G$, $i \in \mathfrak{I}$, $j \in \mathfrak{J}$, не-G-элементами G-блока $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$.

<u>Лемма 7</u>. Пусть $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{J}_1)$ и $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_2, \mathfrak{J}_2)$ - атомарные G-блоки матрицы $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{J}_1) \neq \mathfrak{D}(\mathfrak{I}_2, \mathfrak{J}_2)$. Тогда для объединения их в один атомарный G-блок необходимо заменить один не-G-элемент матрицы $\mathfrak{D}$ на G-элемент.

<u>Доказательство</u>. Пусть $d_{i_0 j_0}$ любой элемент, принадлежащий к одному из блоков $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{J}_2)$ и $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_2, \mathfrak{J}_1)$.
Ввиду условия (4) $d_{i_0 j_0} \in G^-$; заменим его на G-элемент.
Тогда элемент $d_{i_0 j_0}$ удовлетворяет условию (6).

$$\begin{cases} d_{i_0 j_0} \in G, \\ ((i_0 \in \mathfrak{I}_1) \cap (j_0 \in \mathfrak{J}_2)) \cup ((i_0 \in \mathfrak{I}_2) \cap (j_0 \in \mathfrak{J}_1)). \end{cases} \tag{6}$$

Легко увидеть, что теперь $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ $(\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2)$ стал атомарным G-блоком (см. рис. 4). Лемма доказана.

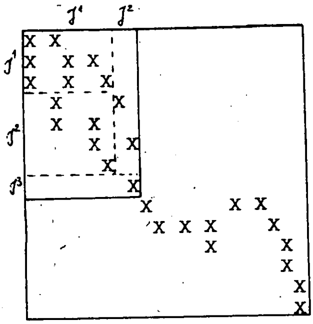

Рис. 3.
Выделение G-блока $\mathfrak{D}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$

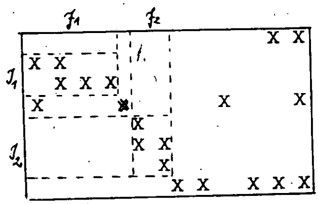

Рис. 4.
Объединение двух G-блоков. Объединяющий элемент изображен знаком $\divideontimes$.

Из доказательства леммы непосредственно вытекает следующее следствие:

Следствие. В результате замены одного не-G-элемента матрицы $\mathfrak{D}$ на G-элемент возможно объединить в один атомарный G-блок не более чем два атомарных G-блоков.

Теорема 2. Для каждого атомарного G-блока $\mathfrak{D}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ имеют место неравенства

$$m+n-1 \leq p \leq mn.$$

Доказательство. Последнее из этих неравенств очевидно. Докажем первое из них.

Предположим для определенности, что $m^* = m$ и $n^* = n$. Из неравенств (5) вытекает, что $p \geq m$. Рассмотрим случай $p = m$. Ввиду (5) тогда в каждом стобце блока $\mathfrak{D}$ имеется один и только один G-элемент, и, следовательно, каждая строка блока $\mathfrak{D}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ образует самостоятельный G-блок; их число равняется n . По лемме 1 и следствию 2 для их объединения необходимо не менее чем $n - 1$ G-элементов. Отсюда и вытекает, что $p \geq m + n - 1$. Теорема доказана.

8. Решение задачи парного клиринга на основе атомарного G-блока матрицы $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathcal{I}$ - индекс-множество, $\varkappa(\mathcal{I}) = n > 1$. Вектор $\vec{\mathcal{I}}$, образованный из элементов множества $\mathcal{I}$ в некотором фиксированном порядке, $\vec{\mathcal{I}} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, называется индекс-вектором, представляющим индекс-множество $\mathcal{I}$. Заметим, что из одного индекс-множества можно определить $n!$ различных индекс-векторов, представляющих его.

Если P - некоторая перестановка, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, а $\vec{J}$ - индекс-вектор, то и $P\vec{J}$ является индекс-вектором, представляющим то же самое индекс-множество J.

Пусть $\vec{J}_\nu$ и $\vec{j}_\nu$ - индекс-векторы, представляющие индекс-множества J_ν и j_ν, $J_\nu \subset J$, $j_\nu \subset j$. Если эти индекс-векторы удовлетворяют условию (7):

$$\begin{cases} \vec{J}_\nu = (i_1, \dots, i_K), \ \vec{j}_\nu = (j_1, \dots, j_K), \\ d_{i_l j_l} \in G, \quad l = 1, \dots, K, \end{cases} \qquad (7)$$

то они определяют решение задачи парного клиринга в форме множества пар $\mathcal{H}(K) = \{(x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, (x_{i_K}, y_{i_K})\}$. Мощность K этого решения равняется размерности обоих исходных индекс-векторов $\vec{J}_\nu$ и $\vec{j}_\nu$.

Решение $\mathcal{H}(K)$ называется <u>полным</u>, если в индекс-множествах $J \setminus J_\nu$ и $j \setminus j_\nu$ не существует элементов i_{K+1} и j_{K+1} таких, что индекс-векторы $\vec{J}_\omega = (i_1, \dots, i_K, i_{K+1})$ и $\vec{j}_\omega = (j_1, \dots, j_K, j_{K+1})$ удовлетворяли бы условию (7).

Среди всевозможных полных решений $\mathcal{H}(K)$, полученных на основании G-блока $\mathcal{D}(J, j)$, <u>оптимальными</u> считают все такие, которые имеют максимальную мощность. Мощность оптимального решения обозначается символом K^*. Каждое оптимальное решение однозначно определяется индекс-векторами $\vec{J}_\nu$, $\vec{j}_\nu$, притом $\varkappa(J_\nu) = \varkappa(j_\nu) = K^*$. Число оптимальных решений обозначаем буквой r.

Мы считаем поставленную задачу парного клиринга решенной, если найдено одно произвольное оптимальное решение $\mathcal{H}(K^*)$, определяемое индекс-векторами $\vec{J}_\nu$ и $\vec{j}_\nu$. Для этого нам целесообразно оценить мощность оптимального решения до нахождения этого решения.

9. <u>Оценивание мощности оптимального решения</u>

Из определения атомарного G-блока вытекают следующие неравенства для K^*:

$$\min(n^*, 2) \leq K^* \leq n^*.$$

Для уточнения оценки K вводим еще понятие <u>кирпича блока</u>.

Блок $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}^*, \mathfrak{J}^*)$ $(\mathfrak{I}^* \subset \mathfrak{I}, \mathfrak{J}^* \subset \mathfrak{J})$ называется вертикальным кирпичом, если он удовлетворяет условиям (8)

$$
\begin{aligned}
&d_{ij} \in G, \text{ если } (i \in \mathfrak{I}^*) \cap (j^* \in \mathfrak{J}^*),\\
&d_{ij} \notin G, \text{ если } (i \in \mathfrak{I}^*) \cap (j \notin \mathfrak{J}^*)\\
&n^* > m^*,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $n^* = \varkappa(\mathfrak{I}^*)$, $m^* = \varkappa(\mathfrak{J}^*)$.

Блок $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_*, \mathfrak{J}_*)$, где $\mathfrak{I}_* \subset \mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}_* \subset \mathfrak{J}$, называется горизонтальным кирпичом, если он удовлетворяет условиям (9):

$$
\begin{aligned}
&d_{ij} \in G, \text{ если } (i \in \mathfrak{I}_*) \cap (j \in \mathfrak{J}_*),\\
&d_{ij} \notin G, \text{ если } (i \notin \mathfrak{I}_*) \cap (j \in \mathfrak{J}_*),\\
&n_* < m_*,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $n_* = \varkappa(\mathfrak{I}_*)$, $m_* = \varkappa(\mathfrak{J}_*)$. Из определений вытекает, что из вертикального кирпича можно образовать точно m^* и из горизонтального кирпича - точно n_* G-пар.

Пусть в атомарном G-блоке $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ $(\varkappa(\mathfrak{I}) = n$, $\varkappa(\mathfrak{J}) = m)$ существует v вертикальных непересекающихся кирпичей $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{J}_1^*)$, ..., $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_v^*, \mathfrak{J}_v^*)$ и t горизонтальных непересекающихся кирпичей $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_*^1, \mathfrak{J}_*^1)$, ..., $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}_*^t, \mathfrak{J}_*^t)$. Из определений (8) и (9) вытекает, что все индекс-множества $\mathfrak{I}_h^*$ и $\mathfrak{I}_*^l$ непересекающиеся, также как и индекс-множества $\mathfrak{J}_h^*$ и $\mathfrak{J}_*^l$ $(h = 1, \ldots, v$; $l = 1, \ldots, t$).

По свойствам кирпичей ясно, что имеет место неравенство

$$
K^* \leq \min\left(n - \sum_{h=1}^{v} (n_h^* - m_h^*), m - \sum (m_*^l - n_*^l)\right),
\tag{10}
$$

а число различных оптимальных решений r удовлетворяет условиям

$$
1 \leq r \leq A_{n^*}^{m^*},
$$

где $A_{n^*}^{m^*} = m^*(m^*-1) \ldots (m^* - n^* + 1)$. Явно, что максимальное значение может K^* достигать в случае, когда G-блок $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ не содержит кирпичей, а r - в случае, когда $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ сам является кирпичом. В таком случае каждое полное решение G-оптимально.

10. Примеры

1. На рис. 5 изображен блок, при котором $p = n + m - 1$, $p^1 = n$, $p_1 = m$ и $p^j = p_i = 1$; $i = 2, \ldots, n$; $j = 2, \ldots, m$.

В блоке имеется один вертикальный кирпич $\mathfrak{D}((2, \ldots, n); 1)$ и один горизонтальный кирпичный блок $\mathfrak{D}(1; (2, \ldots, m))$. Размеры кирпичей соответственно $n^* = n-1$, $m^* = 1$ и $n_* = 1$, $m_* = m-1$. По формуле (10) получим

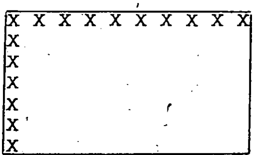

Рис. 5.
G-блок, описанный в примере 1.

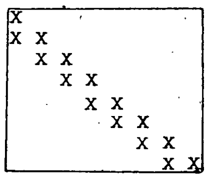

Рис. 6.
G-блок, описанный в примере 2.

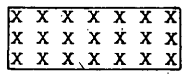

Рис. 7.
G-блок - крипич

В данном случае оптимальным решением является каждая пара пар $\mathcal{H}_{ij}(2) = \{(x_i, y_1), (x_1, y_j)\}$ $(i = 2, \ldots, n;\ j = 2, \ldots, m)$. Единственным неоптимальным полным решением является пара $\mathcal{H}(1) = (x_1, y_1)$.

2. На рис. 6 представляется блок, для которого $m = n$, $p = 2n - 1$ и блок не содержит кирпичей; $K^* = n$. Единственное оптимальное решение $\mathcal{H}(n) = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Решение $\mathcal{H}_1(n-1) = \{(x_1, y_2), \ldots, (x_{n-1}, y_n)\}$ **неоптимальное.**

3. На рис. 7 представлен G-блок - кирпич, при котором $p = mn$, $p^j = n$, $p_i = m$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Явно, что в данном случае $K^* = n^* = n$ и все решения оптимальны. Число оптимальных решений максимальное, $r = A_n^m$.

4. На рис. 8. представлен G-блок, содержащий несколько кирпичных блоков. Это - вертикальный кирпич $\mathfrak{D}((6,7,9); 12)$ и два горизонтальные кирпича $\mathfrak{D}((1,2); (5,6,8,10))$ и $\mathfrak{D}(10; (4, 1, 3, 14))$. Оценку для максимального числа пар K^* найдем при помощи формулы (10):

$K^* \leqslant \min((10 - (3 - 1)), (14 - (4 - 2 + 3 - 1)) = 8$

	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4
I			x		x	x		x	x	x				
2					x	x	x	x		x	x	x		
3		x	x											
4		x	x											
5	x	x	x											
6												x		
7												x		
8			x											
9												x		
I0		x		x					x			x	x	x

Рис. 8.
G-блок, содержащий несколько кирпичей (пример 4).

непосредственной проверкой можно убедиться, что в данном случае $K^* = 7$. Одно возможное оптимальное решение следующее:

$$\mathcal{X}(7)=\{(x_1,y_9),(x_2,y_6),(x_3,y_3),(x_4,y_2),(x_5,y_1),(x_6,y_{12}),(x_{10},y_9)\}.$$

II. Диагональная форма атомарного G-блока

Пусть $\mathfrak{D}$ - атомарный G-блок размерности $n\times m$, а $\vec{J}$ и $\vec{j}$ - индекс-векторы, образованные из индекс-множеств $J_0 = \{1, \ldots, n\}$ и $j=\{1,\ldots,m\}$ соответственно.

Мы скажем, что матрица $\mathfrak{D}$ имеет диагональную форму, если $\mathfrak{D}(\vec{J}, \vec{j}) = d_{ij}$ удовлетворяет условию (11):

$$\begin{cases} d_{ii}\in G, \text{ если } i\in\{1,\ldots,K\}, K\leqslant n^*, \\ d_{ij}\notin G, \text{ если } (i\in\{K+1,\ldots,n\})\cap(j\in\{K+1,\ldots,m\}) \end{cases} \qquad (11)$$

(см. рис. 6 и 9).

Матрица $\mathfrak{D}$ имеет кусочно-диагональную форму, если выполняется одно из условий (11а) и (11б):

$$\begin{cases} d_{ij_i}\in G, \text{ если } i\in\{1,\ldots,K\}, j_i<j_{i+1}, K\leqslant n, j_K\leqslant m, \\ d_{ij}\notin G, \text{ если } (i\in\{K+1,\ldots,n\})\cap(j\in\{j_K+1,\ldots,m\}); \end{cases} \qquad (11а)$$

$$\begin{cases} d_{i_jj}\in G, \text{ если } j\in\{1,\ldots,K\}, i_j<i_{j+1}, K\leqslant m, i_K\leqslant n, \\ d_{ij}\in G, \text{ если } (i\in\{j_K+1,\ldots,n\}\cap\{K+1,\ldots,m\}). \end{cases} \qquad (11б)$$

В частном случае, когда в условиях (11), ($11^а$) и ($11^б$) соответственно $K = n^*$, $K = n$, $K^* = m$ или в случае строгих неравенств имеется частная диагональная или кусочно-диагональная форма.

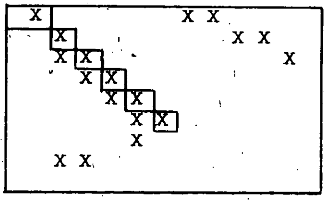

Рис. 9
Частичная диагональная форма

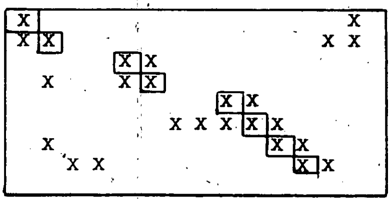

Рис. 10
Полная кусочно-диагональная форма

Каждой диагональной и кусочно-диагональной форме матрицы $\mathfrak{D}$ соответствует решение задачи парного клиринга; в случае; когда рассматриваемая форма полная, то решение является оптимальным.

Таким образом, решение задачи парного клиринга сводится к преобразованию матрицы $\mathfrak{D}$ в диагональную форму.

12. Алгоритм диагонализации G-блока

Пусть задан атомарный G-блок $\mathfrak{D}$. Нашей целью является нахождение таких индекс-векторов $\vec{I}$ и $\vec{J}$, чтобы выполнилось одно из условий (11), ($11^а$) или ($11^б$) при максимальном возможном значении K. Этого возможно добиться путем перестановки или столбцов или строк матрицы $\mathfrak{D}$.

Ниже мы излагаем простой алгоритм диагонализации матрицы $\mathfrak{D}$ путем перестановки столбцов.

На первое место поставим один из таких столбцов d^j, при которых $d_{1j} \in G$. Образуем (одноэлементные) индекс-векторы $\vec{I}_1 = (i_1)$ и $\vec{J}_1 = (j_1)$, где $i_1 = 1$ и $j_1 = j$.

Пусть определены индекс-векторы $\vec{I}_k = (i_1, \ldots, i_k)$ и $\vec{J}_k = (j_1, \ldots, j_k)$. Проверим, существует ли элемент d_{ij}, удовлетворяющий условиям (12):

$$d_{ij} \in G, \quad i = i_k + 1, \quad j \in J_k \tag{12}$$

Если такого элемента не существует, то найдем минимальное число l, $l > 1$, при котором выполняется условие ($12^а$).

$$d_{ij} \in G,\ i = i_k + l,\ j \notin \vec{J}_k, \qquad (12^a)$$

если такой элемент d_{ij} существует. Определим индекс-векторы $\vec{I}_{k+1}$ и $\vec{J}_{k+1}$ следующим образом:

$$\vec{I}_{k+1} = (\vec{I}_k \vdots i_{k+l}),\ \vec{J}_{k+1} = (\vec{J}_k \vdots j),$$

притом в случае, когда выполняется (12), то $l = 1$.

Если элемента d_{ij}, удовлетворяющего условию (12^a), не существует, то обозначим

$$\vec{I}_k = \vec{I} \quad \text{и} \quad \vec{J}_k = \vec{J}.$$

Тогда матрица $\mathcal{D}(\vec{I}, \vec{J})$ определяет решение задачи при $K = k$.

Если $K < K^*$, то полученное решение не является оптимальным и придется искать новое решение по заданному алгоритму. Число разных решений ограничено числом

$$\Pi_I = p_I \cdot p_2 \cdots p_n.$$

Аналогичный алгоритм применим и для перестановки строк; тогда число разных решений ограничено числом

$$\Pi^I = p^I \cdot p^2 \ldots p^m.$$

Так как оптимальных решений в общем случае более одного, то для достижения оптимального решения не надо рассматривать все решения.

I3. Сокращение размерности G-блока

До применения вышеизложенного алгоритма диагонализации G-блока целесообразно сократить размерность рассматриваемого G-блока путем выделения из него отдельных элементов и блоков и вычеркивания соответствующих строк и столбцов.

I. Выделяют все кирпичные блоки $\mathcal{D}(\mathcal{I}_l^*, \mathcal{J}_l^*)$, $l = 1, \ldots, \mathcal{L}$, определяют по каждому из них произвольным образом $n_l^* = \min(n_l, m_l)_{\mathcal{L}}$ G-оптимальных пар и вычеркнут как все столбцы d^j, $j \in \bigcup_{l=1} \mathcal{J}_l^*$ так и строки d_i, $i \in \bigcup_{l=1} \mathcal{I}_l^*$.

2. Выделяют все элементы d_{ij}, при которых

$$\min(p_i\, p^j) = 1 \qquad (13)$$

(притом учитывают матрицу $\tilde{D}$, из которой уже некоторые строки и столбцы на предыдущих шагах вычеркнуты), образуют G-оптимальную пару (x_i, y_j) и вычеркнут столбец d^j и строку d_i .

Этот шаг повторяется пока в оставшейся матрице не содержится элементов, удовлетворяющих условия (13).

Легко увидеть, что в результате такого предварительного выделения пар не ухудшится оптимальность получаемого решения, но существенно сокращается объем работы при диагонализации блока.

14. Образование пар при последовательности условий $G_1, G_2, \ldots, G_r$.

В некоторых задачах целесообразно применять последовательность условий G_1, G_2, ..., G_r. Если эти условия определяют включающиеся множества $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_r$, тогда условия упорядочены по строгости.

На первом шагу решается задача парного клиринга при наиболее строгом условии G_1 и определяют максимальное число K_1^* G_1-оптимальных пар; в эти пары входят элементы из множеств $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}_1 \subset \mathfrak{Y}$. Затем определяют множества $\overline{\mathfrak{X}}_1 = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}_1$ и $\overline{\mathfrak{Y}}_1 = \mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{Y}_1$ и на основании этих множеств решают задачу парного клиринга при условии G_2 и т.д. пока не исчерпаны все элементы из множеств $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ или рассмотрены все условия G_1, G_2, ..., G_r.

В результате получают решение задачи парного клиринга, при котором каждая полученная пара (x_i, y_j) характеризуется и "уровнем" h условия G_h , которому удовлетворяет их обобщенное расстояние d_{ij} .

14. Пример. Образование пар по данным объявлений, опубликованных в журнале "Ноорус" ("Молодость")

Начиная с января 1979 года в журнале "Ноорус" публикуются объявления людей, желающих познакомиться с целью выбора будущего супруга, будущей супруги. В 10 номерах журнала напечатано 140 таких объявлений, 2/3 из которых принадлежат женщинам. Редакцией принимаются только объявления холостых, разведенных, овдовевших людей возраста 23-35 лет, притом требуется короткая самохарактеристика по схеме, содержащей следующие данные: возраст, образование, профессия, семейное положение , наличие и число детей, место жительства, рост и краткая характеристика в свободной форме. В свободной форме излагаются и желания относительно будущего супруга (будущей супруги).

В самохарактеристиках большинство респондентов указали их любимые занятия (2-3 названия), некоторая часть (менее половины) заявили, что они некурящие и алкоголя не употребляют; некоторые (менее половины) охарактеризовали кое-какие черты своей личности, например, что они тихие или темпераментные и т.д.

В требованиях, предъявляемых будущему супругу (будущей супруге) чаще всего был указан возраст, притом женщины довольно часто еще выражали свое желание насчет образования, а также и роста будущего супруга. Иногда указывалось и желаемое место жительства (в основном Таллин).

Что касается характеристик, заданных в свободной форме, то здесь наблюдалась довольно скромная совместимость данных о себе и желаний, предъявленных к будущему супругу (будущей супруге).

Именно, самым важным считали мужчины то, чтобы будущая супруга - некурящая, и женщины, чтобы будущий супруг не алкоголик (более половины респондентов). Кроме того требовали, чтобы будущий супруг (будущая супруга) любил(а) домашний уют, любил(а) детей. Реже указали желаемые занятия.

На основании имеющейся информации мы вычисляли обобщенные расстояния между всеми женщинами и мужчинами, пользуясь формулой

$$d(x, y) = g(x, y) + h(x, y),$$

где x - мужчина, y - женщина и $g(x, y)$ - расстояние от мужчины x до идеала женщины y, а $h(x, y)$ - расстояние женщины y до идеального супруга - мужчины x.

Расстояния по объективным признакам (в том числе и употребление алкоголя и курение) вычислялись по формуле Хэмминга:

$$g(x,y) = \Sigma\, g_i(x,y),$$

где

$$g_i(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ принадлежит к идеальной области, выраженной у-ом, по } i\text{-ому признаку,} \\ 1, \text{ если } x \text{ не принадлежит по } i\text{-ому признаку к идеальной области, выраженной } y. \end{cases}$$

Если y не описала своего идеала относительно признака i, то считаем $g_i(x, y) = 0$ для всех x.

Аналогично вычисляется и объективный компонент $h^1(x, y)$ расстояния $h(x, y)$.

Второй, субъективный компонент расстояния вычислялся по формуле

$$g^2(x, y) = 2 - \{\text{число совпадающих признаков в самоописании } x \text{ и описании идеала } y\},$$

$$h^2(x, y) = 2 - \{\text{число совпадающих признаков в самоописании } y \text{ и описании идеала } x\}.$$

Такой несколько необычный вариант применялся ввиду весьма малой информативности имеющихся характеристик. Хотя величины $g^2(x, y)$ и $h^2(x, y)$ не являются обобщенными расстояниями, сумма

$$d(x, y) = g^1(x,y) + g^2(x, y) + h^1(x, y) + h^2(x, y)$$

обладает свойствами обобщенного расстояния (на нашем материале).

В таблице I приведена матрица $\mathfrak{D}$ обобщенных расстояний, между множествами $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$ и $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_3$, где $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{Y}_i$ соответственно мужчины и женщины, объявления которых опубликованы в i-том номере журнала. Отметим, что коды этих людей, записанные в таблице, заданы редакцией журнала. (см. таблица I).

Рассмотрим следующую последовательность условий:

$$G_1: \ d(x, y) = 0,$$

$$G_2: \ d(x, y) \leq 1,$$

$$G_3: \ d(x, y) \leq 3.$$

Решение задач при условии G_1 весьма просто: только $d(27, 25) = 0$, т.е. единственную вполне согласующуюся пару (по нашей методике) образуют мужчина с кодом 27 и женщина с кодом 25.

Таблица I

Матрица обобщенных расстояний $\mathcal{D}$ между мужчинами ($\mathcal{X}$) и женщинами ($\mathcal{Y}$)

$\mathcal{Y}$		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I0	2I	22	23	24
$\mathcal{X}$		I	2	5	8	9	24	25	28	29	30	3I	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4I	43	45	47
I	2	6	7	8	6	5	5	6	4	5	2	9	4	7	5	7	7	7	5	3	5	6	4	8	5
2	4	9	5	6	4	6	2	4	2	5	3	9	3	6	4	7	6	6	4	5	4	7	5	7	4
3	6	9	8	9	5	6	5	6	7	4	6	7	6	8	5	5	7	9	4	7	4	8	4	7	7
4	7	3	3	7	4	2	4	2	3	5	2	6	3	2	4	4	3	4	3	I	4	6	6	4	6
5	I0	7	7	8	4	5	5	8	4	4	4	8	3	7	5	7	7	9	5	4	6	4	6	8	6
6	26	8	6	5	3	6	5	6	4	4	4	9	5	5	5	4	7	5	4	5	6	7	7	5	5
7	27	6	4	5	5	6	4	0	4	5	4	7	4	3	4	4	3	4	4	5	2	6	5	4	4
8	42	8	8	9	7	7	4	6	5	6	2	7	3	6	4	7	7	9	4	4	4	7	6	8	6
9	44	7	5	I	3	7	2	3	2	3	2	4	3	3	4	4	3	4	4	4	4	6	4	5	4
I0	46	8	7	I0	5	6	8	7	6	3	3	7	4	6	4	5	8	9	3	4	6	6	8	7	6

При условии G_2 образуются две оптимальные пары (7, 39) и (44, 5).

При условии G_3 образуется 2 атомарных G_3-блока (см. рис. II) где G_3-элементы обозначены крестиками. Так как блок $\mathfrak{D}$(26, 8) - тривиальный, то этим сразу определяется и пара.

	30	24	28	32	29	38
3	x					
4	x	x	x	x		
42	x			x		
46	x				x	x
I0				x		

	8
26	x

Рис. II

Атомарные G_3-блоки, образованные из матрицы $\mathfrak{D}$ (таблица I)

	30	24	32	29	28	38
3	x					
4	x	x	x		x	
42	x		x			
46	x			x		x
			x			

Рис. I2

Диагональная форма атомарного G_3-блока, изображенного на рис. II

Второй атомарный блок имеет размерность 5х6, и для определения пар его необходимо диагонализировать. Так как в нем содержится два горизонтальных (Iх2) - кирпичных блока (4;24, 28) и (46; 29,38), то $K^* \leq \min(5, 6 - 2) = 4$. Перестановка столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

и дает одну из возможных частично-диагональных форм (см. рис. I2), определяющих одно оптимальное решение (3,30), (4, 24), (42,32), (46,29).

После этих процедур остались "свободными" еще мужчины с кодами 6 и I0. Если определить условие

$$G_4:\ d(x,y) \leq 4,$$

то возможно и для них найти партнерш, например образовать пары (6, 38) и (I0, 28).

Таким образом, полным решением задачи является множество пар:

G_1: ($d \leq 0$): (27, 25),
G_2: ($d \leq 1$): (7, 39), (44, 5),
G_3: ($d \leq 3$): (3, 30), (4, 24), (42, 32), (46, 29), (26,8),
G_4: ($d \leq 4$): (6, 38), (I0, 28).

Из 24 женщин "свободными" остались I4, соответственно с кодами I,2,3,3I,33,34,35,36,37,40,4I,43,45,47.

Понятно, что качество решения во многом зависит от качества информации, применяемой при решении поставленной задачи, в данной задаче такой информацией являются данные о себе и желаемом супруге (желаемой супруги), притом важной является совместимость этой информации.

Содержательный анализ решения, излагаемого в примере, не входит в рамки настоящей статьи.

Литература

1. Багатурова О.С., Кацнельсон М., Мамиконов А.Г., Якубовская Л.Н. Управление обменом ресурсов общего вида.Сб.: Вопросы кибернетики. Клиринговые системы. Москва,1978, 3-21.
2. Васильченко Л.С., Решетняк Ю.А. Брачный клиринг. Сб. Вопросы кибернетики. Клиринговые системы. Москва, 1978, 59-69.
3. Решетняк Ю.А. Применение тестов межличностных отношений к задачам брачного клиринга. Сб. Вопросы кибернетики. Клиринговые системы. Москва, 1978, 70-85.

THE PROBLEM OF CONSTITUTING OPTIMAL PAIRES AND AN ALGORITHM FOR SOLVING IT

E. Tiit

Summary

Let $R_{\mathfrak{X}}$ and $R_{\mathfrak{Y}}$ be metrical rooms with distances $d_{\mathfrak{X}}$ and $d_{\mathfrak{Y}}$ respectively. Let us assume that there exist "demand functions" $\varphi_{\mathfrak{X}}$ and $\varphi_{\mathfrak{Y}}$, $x \xrightarrow{\varphi_x} B_x$, $y \xrightarrow{\varphi_y} A_y$, where B_x and A_y are sets in rooms R_y and R_x respectively. The generalized distance between two points x and y ($x \in R_{\mathfrak{X}}$, $y \in R_{\mathfrak{Y}}$) is defined as follows:

$$d(x, y) = \alpha d_{\mathfrak{X}}(x, A_y) + \beta d_{\mathfrak{Y}}(y, B_x),$$

where α and β are real, $\alpha + \beta = 1$.

Let $\mathfrak{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and $\mathfrak{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ are the given finite sets in rooms $R_{\mathfrak{X}}$ and $R_{\mathfrak{Y}}$. The problem is to form the maximal possible set of pairs $K = \{(x_{i_1}, y_{j_1}), \ldots, (x_{i_k}, y_{j_k})\}$, where $x_{i_e} \in X, y_{j_e} \in Y, i_e \neq i_n$ and $j_e \neq j_n$ when $e \neq j$ and the condition

$$d(x_{i_e}, y_{j_e}) \leq g$$

with given g is filled.

The algorithm of forming pairs on the basis of matrice of generalized distances $D = (d_{ij})$ between the elements of sets $\mathfrak{X}$ and Y is given. The algorithm is illustrated by means of real statistical material of people, who are advertised in the journal "Noorus" (Youth) about their wish to marry. The elements x_i $(i = 1, \ldots, 24)$ are women and $y_j (j = 1, \ldots, 10)$ are men. The sets B_{xi} and A_{yj} constitute the sets of ideal partners for x_i and y_j respectively.

The pairs are formed on four levels (g = 0, I, 3 and 4) and so the maximal possible quality of pairs is achieved.

Содержание

Ученые записки Тартуского государственного
университета. Выпуск 541.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202 400, Тарту, ул. Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э.Тийт.
Корректоры В.Логинова. М.Тамм.
Сдано в печать 15.09.1980.
МВ05481.
Формат 30х45/4.
Бумага писчая.
Учетно-издательских листов 4,02.
Печатных листов 5,0.
Тираж 400.
Заказ № 943.
Цена 65 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, Тарту, ул.Пялсона,14.
2 - 2