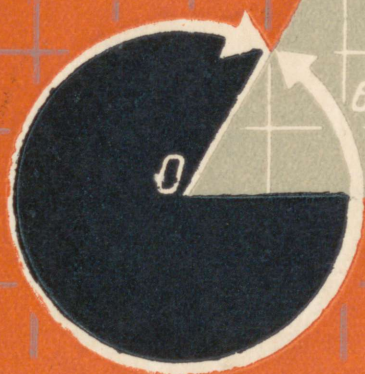


E.ETVERK

O.PRINITS

A.VIHMAN



60°

A

MATEMAATIKA

IX KLASSILE

A - 27667

E. ETVERK, O. PRINITS, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

IX KLASSILE

2. väljaanne



KIRJASTUS «VALGUS» • TALLINN 1966

Kaanejukundus *G. Pant*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

TARTU ÜLISKOOLI
RAAMATUKOGU

I. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

§ 1. JÄÄVAD JA MUUTUVAD SUURUSED.

Iga nähtuse uurimisel kohtume kaht erinevat liiki suurustega. Ühtedel neist on antud nähtuse puhul ainult üks väärtus, kuna teistel on neid väärtusi enam kui üks.

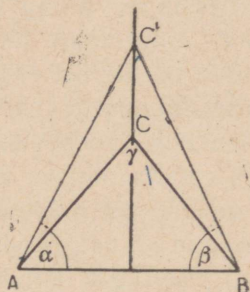
Näide 1. Auto sõitmisel mööda maanteed on näiteks koorma kaal ikka 3 tonni ja autos sõitvate inimeste arv 2, kuna aga bensiini hulk paagis järjest väheneb, sõidu kiirus kord suureneb, kord väheneb ning läbitud tee pikkus kogu aeg suureneb.

Näide 2. Vee keemisel kolvis on vee temperatuur ikka 100°C , vee hulk kolvis aga järjest väheneb.

Suurust, millel on antud nähtuse puhul ainult üks väärtus, nimetatakse selle nähtuse puhul jäävaks suuruseks ehk konstandiks, kuna suurust, millel on antud nähtuse puhul enam kui üks väärtus, nimetatakse muutuvaks suuruseks.

Missugused suurused näidetes 1 ja 2 on jäävad ja missugused muutuvad?

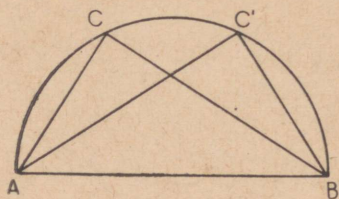
Näide 3. Võrdhaarse kolmnurga tipu C liikumisel piki kõrgussirget (joon. 1) on kolmnurga aluse AB pikkus ja kolmnurga sisenurkade summa jäävad suurused, kuid kolmnurga kõrgus, külgede BC ja AC pikkused, kõik nurkade suurused, kolmnurga ümbermõõt ja pindala — muutuvad suurused.



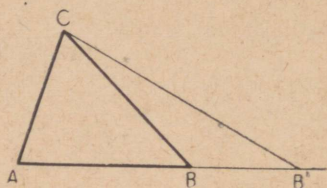
Joon. 1.

Ülesandeid.

1. Ringi diameetrile toetuva kolmnurga tipp liigub piki ringjoont (joon. 2). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?

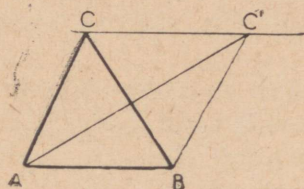


Joon. 2.



Joon. 3.

2. Kolmnurga tipp B liigub piki alussirget AB (joon. 3). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?



Joon. 4.

3. Kolmnurga aluse vastastipp liigub piki alusega paralleelset sirget (joon. 4). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?

Toodud näitest 3 ja ülesannetest ilmneb, et suurus, mis ühe küsimusseade puhul on muutuv, võib teise küsimusseade puhul osutada jäävaks.

Missugused suurused on toodud näidete juures sellised?

Missugused suurused on kõigi näidete juures muutuvad?

Missugused suurused on kõigi näidete juures jäävad?

Nimeta suurusi, mis osutuvad alati jäävaiks.

§ 2. FUNKTSIONAALNE SÖLTUVUS.

Eelmises paragrahvis toodud näites 3 kolmnurga elementide muutumise kohta paneme tähele, et seal esinevad muutuvad suurused on niiviisi üksteisega seotud, et ühe muutuva suuruse väärtuse andmisega on kõigi teiste muutuvate suuruste väärtused määratud. Tõepoolest, kui kolmnurga alus $AB = 2,8$ cm ja kõrguseks võtta näiteks 2,9 cm, siis liikuva tipu C asukohaks saame punkti C' ja mõõtmise või arvutamise teel leiame, et kolmnurga nurgad on 64° , 64° ja 52° , külg $AC' = 3,2$ cm jne. Niisamuti saame kõrguse igal antud väärtuse puhul leida teiste muutuvate suuruste vastavad väärtused.

Kui ühe muutuva suuruse igale võimalikule väärtusele vastab teise muutuva suuruse üks kindel väärtus, siis viimast suurust nimetatakse esimese suuruse funktsiooniks ehk esimesest suurusest sõltuvaks muutujaks.

Suurust, millest sõltub funktsioon, nimetatakse **sõltumatuks muutujaks** ehk **argumendiks**.

Toodud näites 3 on seega kolmnurga nurkade suurused, haarade pikkused, übermõõt ja pindala kõrguse funktsioonid ja kõrgus on neile kõigile argumendiks. Seejuures argumendiks oleksime võinud valida ka mõne teise muutuva suuruse selles kolmnurgas, näiteks haara AC pikkuse. Siis kõrgus oleks osutunud selle funktsiooniks.

* Kirjeldatud seost kahe muutuva suuruse vahel, kus ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse üks kindel väärtus, nimetatakse **funktsionaalseks sõltuvuseks**. Niisuguses sõltuvuses on näiteks

ruudu pindala ja külje pikkus,
ringjoone pikkus ja tema raadiuse pikkus,
läbitud tee pikkus ja liikumise aeg (kui liikumise kiirus on konstantne),
elektrivoolu tugevus ja vooluahela takistus (jääva pinge puhul)
jne.

Suurustevahelise sõltuvuse all mõistame edaspidi ikka funktsionaalset sõltuvust, kuigi seda mõistet kasutatakse mõnikord laiemas tähenduses. Toome mõned näited, kus sõna «sõltub» esineb laiemas tähenduses.

Inimese raskus sõltub tema pikkusest,
koolis saadud hinne sõltub õppimiseks kulutatud ajast,
sillast ülekäijate arv sõltub kellaajast,
pesu kuivamise aeg sõltub tuule tugevusest jne.

Nende näidete puhul ei määra ühe suuruse väärtus sõltuva suuruse väärtust. Näiteks, kui on teada, et keegi on 160 cm pikk, siis ei saa kindlalt öelda, et tema raskus on näiteks 60 kg; ei kehti ka seaduspärasust, et kui kodus õppimiseks kulutab õpilane näiteks 1 tunni, siis saab hinde 3, ja kui kolm tundi, siis hinde 5 jne.

Seega pole mitte kõik suurustevahelised sõltuvused funktsionaalsed.

Ülesandeid.

4. Nimeta jäävaid ja muutuvaid suurusi ühenduses
 - a) spordivõistlusega,
 - b) koolitunniga,
 - c) kinoseansiga.

5. Nimeta suurusi, mis on funktsionaalses sõltuvuses
 - a) ruudu küljega,
 - b) ringi raadiusega.
6. Nimeta suurusi, mis pole funktsionaalses sõltuvuses
 - a) läbitud tee pikkusega,
 - b) kellaajaga.

§ 3. FUNKTSIOONI ESITUSVIISID.

Funktsioon on antud, kui on teada eeskiri, mille järgi toimub antud argumendi väärtustele vastavate funktsiooni väärtuste leidmine. See eeskiri antakse tavaliselt kas avaldisena, tabelina või graafikuna.

1. Funktsiooni analüütiline esitusviis.

Funktsioon on esitatud analüütiliselt, kui eeskiri funktsiooni väärtuste leidmiseks on antud matemaatilise avaldise kujul.

Olgu antud matemaatilised avaldised:

$$2x; \tan x; \frac{1}{x+2}; x-1; \frac{5-x}{3+x^2} \text{ jne.}$$

või ka

$ax+b$, ax^2+bx+c , kus a , b ja c on konstandid.

Kui neis avaldistes esinevat tähte x vaadelda argumendi tähi-sena, siis need avaldised on funktsioonideks, sest igale x väärtusele vastab üks kindel avaldise väärtus. Seega on need avaldised x funktsioonid. Matemaatilise avaldise lühemaks üleskirjutamiseks kasutatakse sageli uut tähte. Näiteks võib tähistada avaldist $ax+b$, kus a ja b on konstandid, tähega y , s.t.

$$y=ax+b.$$

Nüüd võime aga öelda, et y -ga tähistatud suurus on x funktsioon, sest igale x väärtusele vastab kindel y väärtus.

2. Funktsiooni tabeliline esitusviis.

Funktsioon on esitatud tabeliliselt, kui on antud tabel, milles esitatakse argumendi väärtused ja neile vastavad funktsiooni väärtused.

Nii näiteks esitab tabel

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

funktsiooni y sõltuvust argumentist x .

Üldiselt, kui argumenti x väärtuseks on $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ja neile vastavaiks funktsiooni y väärtusteks $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, siis funktsiooni y väärtuste tabel näeb välja järgmine:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Olgu funktsioon antud analüütiliselt, s. t. avaldisena. Andes nüüd selle funktsiooni argumentide erinevaid väärtusi, saame koostada funktsiooni väärtuste tabeli. Kui argumentil võib olla lõpmata palju väärtusi, siis pole võimalik esitada niisugust väärtuste tabelit, mis sisaldaks funktsiooni kõiki väärtusi. Olenevalt sellest, missugused väärtused valime argumentidele, võime saada antud funktsioonile väga mitmesuguseid väärtuste tabeleid.

Näiteks olgu antud funktsioon $y = \frac{5-x}{3+x^2}$. Võttes argumenti väärtuseks 0, 1, 2, $\dots$, 6, saame tabeli

x	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{5-x}{3+x^2}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{19}$	0	$-\frac{1}{39}$

Andes aga argumentidele väärtuseks $-5, -3, -1, 0, 2, 4$, saame tabeli

x	-5	-3	-1	0	2	4
$\frac{5-x}{3+x^2}$	$\frac{5}{-14}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{19}$

3. Funktsiooni graafiline esitusviis ehk graafik.

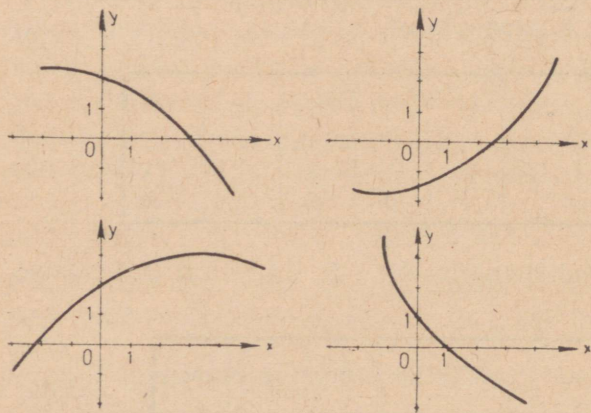
Joonisel 5 on esitatud koordinaatteljestikes mitmesuguseid kõveraid. Ka need esitavad muutuvate suuruste x ja y vahelist funktsionaalset sõltuvust, sest igale x väärtusele saab jooniselt mõõta vastava kindla y väärtuse.

Seega,

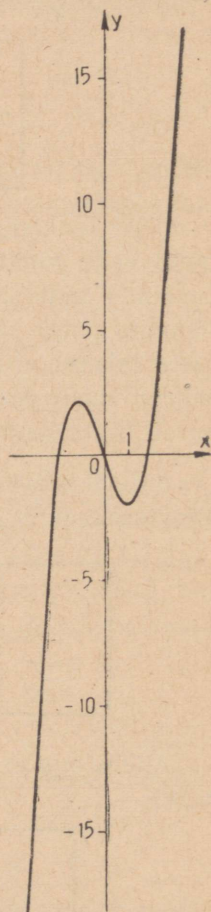
funktsiooni graafiliseks esituseks on joon koordinaatteljestikus.

Et vaatluse all on ainult ühesed funktsioonid, s. t. funktsioonid, kus igale argumendi väärtusele vastab ainult üks funktsiooni väärtus, siis vaatleme ka ainult niisuguseid graafikuid, kus igale abstsissi väärtusele vastab ainult üks ordinaadi väärtus.

Kui funktsiooni avaldis on antud, siis võime selle abil esitada tema väärtuste tabeli. Vaadeldes vastavaid arvupaare tasapinna punktide koordinaatidena ja ühendades siis need punktid sujuva kõveraga, saame mingi joone — selle funktsiooni graafiku.



Joon. 5.



Joon. 6.

Olgu funktsiooni analüütiliseks esituseks näiteks

$$y = x^3 - 3x,$$

siis üheks tema tabeliliseks esituseks on

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-2	2	0	-2	2	18

mille abil saame graafiku (joon. 6).

Mida täpsema graafiku tahame saada, seda tihedamalt peab meil olema antud punkte.

*

Tutvustame funktsiooni analüütilise, tabelilise ja graafilise esitusviisiga. Esimesel juhul on funktsiooni väärtused leitavad arvutamise teel, teisel juhul on teatud hulk funktsiooni väärtusi ette antud ning kolmandal juhul saame funktsiooni väärtused mõõtmise teel.

Matemaatilisest avaldisest on võimalik leida funktsiooni väärtust kõigi väärtuste korral, mis sobivad argumendi väärtusteks.

Tabel annab meile ainult teatud piiratud hulga funktsiooni väärtusi.

Graafikult saame funktsiooni väärtusi mõõta joonisega piiratud ulatuses.

Nii näiteks ei ole jooniselt 5 võimalik mõõta argumendi väärtusele 10 vastavat funktsiooni väärtust. Et nii tabel kui graafik annavad meile funktsiooni väärtusi ainult piiratud ulatuses, siis tuleb nimetatud kolmest funktsiooni esitusviisist lugeda kõige täielikumaks analüütilist esitust, s. t. avaldist või vastavat valemit.

Ülesandeid.

7. Esita järgmiste suuruste vaheline sõltuvus analüütiliselt:

- a) ringjoone pikkus ja ringi raadius; $C = 2\pi r$
- b) võrdkülgse kolmnurga pindala ja külje pikkus; $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- c) korrapärase kuusnurga übermõõt ja apoteem;

d) kera pindala ja kera suurringi pindala;

e) antud ruumalaga silindri kõrgus ja põhja raadius.

8. Esita ruudu ümbermõõdu $ü$ ja ruudu külje pikkuse a vaheline sõltuvus analüütiliselt ja tabeliliselt, kui külje pikkuseks on 1; 2; ...; 10.

9. Esita võrdkülgse kolmnurga pindala S ja külje pikkuse a vaheline sõltuvus analüütiliselt ja tabeliliselt, kui külje pikkuseks on 1; 1,5; 2; 2,5; ...; 5.

10. Esita jalakäija poolt läbitud tee pikkuse s ja käimiseks kulutatud aja t vaheline sõltuvus analüütiliselt ja tabeliliselt, kui on teada, et jalakäija käis ühtlaselt $5,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja kui t väärtuseks on 1; 2; 3; ...; 6.

11. On antud funktsioonide väärtuste tabelid. Vastavad funktsiooni avaldised ei ole tabelis õiges järjekorras. Leia nende õige järjekord.

Funktiooni avaldis	Argumendi väärtused					
	-2	-1	0	1	2	3
4 $3x-5$	1			-1		-3
7 $\frac{2x}{x^2+1}$	2		3			-3
5 x^2-2	3	1	1		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
6 $\frac{2-x}{x+3}$	4			-2	1	
2 $3-2x$	5	-1		-1		
8 x^2+3x	4					$-\frac{1}{6}$
1 $\frac{3}{x-4}$	$2-\frac{4}{5}$	-1				
3 $\frac{1-x}{x^2+1}$	-2	-2				

12. Joonesta see tabel endale vihikusse, esita seal funktsiooni avaldised õiges järjekorras ja täida kogu tabel.

13. Esita funktsioon $\frac{3+4x-5x^2}{2x^2-1}$ tabeliliselt, kui argumendi väärtuseks on:

a) 0; 1; 2; 3; 4.

b) -4; -3; -2; -1.

c) $-\frac{5}{3}$; -1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{5}{3}$.

x	0	1	2	3	4	-4	-3	-2	-1
y									

14. Esita funktsioon $\frac{2x^2+1}{4x^2-1}$ tabeliliselt, kui argumendi väärtuseks on:

a) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

b) 0,11; 0,12; 0,13; 0,14.

c) $-\frac{4}{7}$; $-\frac{2}{7}$; 0; $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{7}$.

15. Leia joonisel 5 toodud graafikutest mõõtmise teel argumendi väärtustele -2, -1, 0, 1 ja 2 vastavad funktsioonide väärtused.

16. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt, kui argumendi väärtuseks on 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4:

1) $y=5x-3$,

4) $y=-2x^2+3x$;

2) $y=\frac{1+x}{x^2}$,

5) $y=x^3-2x^2$.

3) $y=\frac{2}{2+x}$,

17. Esita ülesandes 16 antud funktsioonide graafikud saadud tabelite järgi.

§ 4. JOONE VÖRRAND.

Joonisel 6 esitatud joon on funktsiooni $y=x^3-3x$ graafik.

Punkt $P(4; 52)$ asetseb sellel joonel, sest asendades x vörduses $y=x^3-3x$ arvuga 4 ja y arvuga 52, jääb võrdus kehtima. Me ütleme, et punkti P koordinaadid rahuldavad antud võrdust.

Punkt $Q(4; 42)$ ei asetse sellel joonel, sest asendades x vörduses $y=x^3-3x$ arvuga 4 ja y arvuga 42, ei jää võrdus kehtima. Me ütleme, et punkti Q koordinaadid ei rahulda antud võrdust.

Nimeta 3 punkti, mis antud võrdust rahuldavad, ja 3 punkti, mis seda võrdust ei rahulda!

Et joonisel 6 esitatud joon on funktsiooni $y = x^3 - 3x$ graafik, siis peavad selle joone iga punkti koordinaadid rahuldama võrdust $y = x^3 - 3x$. Teisiti öeldes, iga sellel joonel suvaliselt valitud punkti ehk nn. suvalise punkti koordinaadid rahuldavad võrdust $y = x^3 - 3x$.

Suvalise punkti koordinaate tähistame tähtedega x ja y , sest on ilmne, et punkt $(x; y)$ rahuldab antud võrdust.

Joone võrrandiks nimetatakse võrrandi kujul väljendatud seost joone suvalise punkti koordinaatide x ja y vahel.

Seega joonisel 6 esitatud joone võrrandiks on $y = x^3 - 3x$.

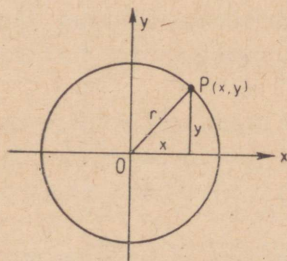
Joone võrrandi kuju ei ole üheselt määratud. Kandes liikmeid ühelt võrrandi poolelt teisele või korrutades kõiki liikmeid ühe ja sama nullist erineva arvuga, võime saada antud joone võrrandile mitmeid eri kujusid. Nii on joonisel 6 esitatud joone võrrandiks ka näiteks $y - x^3 + 3x = 0$ või $2y - 2x^3 = -6x$. Niisuguste teisenduste abil saadud võrrandeid rahuldavad needsamad arvupaarid, mis esialgsel võrrandilki. Me ütleme, et nende teisenduste abil saame antud võrrandiga samaväärsed võrrandid.

Antud joone võrrandit rahuldavad selle joone kõigi punktide koordinaadid ja ei rahulda ühegi väljaspool seda joont võetud punkti koordinaadid.

§ 5. JOONE VÕRRANDI NÄITEID.

1. Ringjoone võrrand.

Ülesanne. Leida võrrand ringjoonele, mille keskpunkt on koordinaatide alguses ja mille raadius on r (joon. 7).



Joon. 7.

Et ringjoon on antud punktist antud kaugusel ühes ja samas tasapinnas asetsevate punktide hulk, siis, nagu näeme jooniselt 7, on ringjoone suvalise punkti $P(x; y)$ koordinaadid seotud raadiusega järgmise võrduse abil:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \quad (\text{missuguse teoreemi põhjal?}).$$

Saadud võrrandit nimetatakse **ringjoone võrrandiks**.

Avaldades ringjoone võrrandist y , saame

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

s. t. ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis, esitab kahe funktsiooni

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ ja } y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

graafikuid.

Ülalpool x -telge asuv poolringjoon on funktsiooni $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks ja allpool x -telge asuv poolringjoon funktsiooni $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks.

2. Koordinaattelgedevahelise nurga poolitaja.

Ülesanne. Leida võrrand sirgele, mis poolitab koordinaattelgedevahelised nurgad I ja III veerandis (joon. 8).

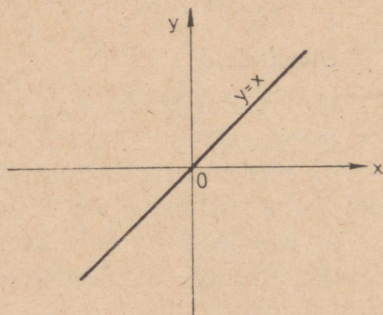
Et nurgapoolitaja on niisuguste punktide hulk, kus iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel, siis on vaadeldaval sirgel asetseva punkti abstsiss ja ordinaat võrdsed.

See tõsiasi lubab meid otsitava sirge võrrandi esitada kujul

$y = x \text{ ehk } y - x = 0,$

kus x ja y tähendavad vaadeldava joone suvalise punkti koordinaate.

Leitud joone võrrand $y = x$ on vaadeldav funktsiooni analüütilise esitusena ja seega on koordinaattelgedevahelise I ja III veerandi nurga poolitaja funktsiooni $y = x$ graafikuks.



Joon. 8.

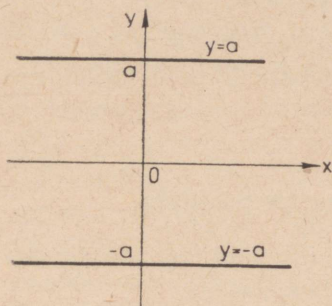
3. x -teljega paralleelsete sirgete võrrandid.

Ülesanne. Leida võrrandid sirgetele, mis on paralleelsed x -teljega ja asetsevad temast a ühiku kaugusel (joon. 9).

Sirge, mille kõik punktid asetsevad antud sirgest samal kaugusel, on antud sirgega paralleelne sirge.

Seega on meid huvitavatest sirgetest ühel kõigi punktide ordinaadid võrdsed a -ga, teisel $-a$ -ga. See tõsiasi lubabki nende sirgete võrrandeid esitada kujul

$$y=a \text{ ja } y=-a,$$



Joon. 9.

kus a tähendab vaadeldava joone suvalise punkti ordinaati. Teiselt poolt on saadud võrdsed vaadeldavate valemitega, s. t. nad esitavad mingi funktsiooni analüütilist eeskirja. Eeskiri $y=a$ ei sisalda argumenti. See tähendab, et olenemata argumenti väärtusest on funktsiooni väärtus alati a .

Seega on x -teljega paralleelsed sirged konstandina avalduvate funktsioonide graafikuteks.

Ülesandeid.

18. a) Kas punkt $P(-1; 0)$ asetseb joonel, mille võrrandiks on $y=x^4-x^2$?

b) Kas punktid $P(0; 5)$, $Q(-2; 3)$ ja $R(1; 1,5)$ asetsevad joonel, mille võrrandiks on $2x^2-3xy+y-5=0$?

c) Kas joon $x^2+4y^2-2(x+y)-6=0$ läbib punkti $(2; -1)$?

19. Missugused järgnevatest joontest läbivad koordinaatide alguspunkti:

a) $x^2(2x+y)-3y^2(x+5)=4$,

c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$,

b) $(x^2+y^2)^2-2(x-y)=6x^3$,

d) $3x-4y=0$?

20. a) Leia võrrand y -teljega paralleelsele sirgele.

b) Leia võrrand koordinaattelgedevahelise nurga II ja IV veerandi poolitajale.

c) Avalda koordinaattelgede võrrandid.

21. Leia järgmistest võrranditest ringjoone raadius:

a) $x^2+y^2=25$

b) $x^2+y^2=0,81$

c) $x^2+y^2=\frac{121}{169}$

d) $2x^2+2y^2=288$

22. Leia eelmises ülesandes antud ringjoonte pikkused ja vastavate ringide pindalad.

23. Näita, et kui ringjoone keskpunkti koordinaadid on a ja b ning raadius on r , siis ringjoone võrrandiks on

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

24. Tuleta võrrand ringjoonele, mille raadius on 2 ja keskpunkt asub punktis:

a) $A(1; 4)$, b) $B(-2; 3)$, c) $C(-2,3; -4,1)$.

KORDAMISÜLESANDEID.

25. Kolmnurga ABC tipp A liigub piki küljega AB ristuvat ja punkti A läbivat sirget. Missugused suurused osutuvad siin muutuvaks? Nimeta suurus, millest sõltuvad need muutuvad suurused.

26. Leia järgmiste muutuvate suuruste paaride hulgast need, mis on funktsionaalses sõltuvuses:

- | | |
|---|---------------------------|
| a) ühtlasel liikumisel etteantud ajavahemiku vältel keha poolt läbitud tee pikkus | liikumise kiirus |
| b) auto kiirus | paagis olev bensiini hulk |
| c) rongi liikumiskiirus | rongi kaal |
| d) veerõhk allveelaevale | allveelaeva sügavus |
| e) antud kõrgusega ristküliku pindala | ristküliku alus |
| f) õhu hulk antud klassiruumis | klassi õpilaste arv |
| g) saapatalla paksus | käidud tee pikkus |
| h) metallvarda pikkus | temperatuur |
| i) vabalt langeva keha poolt läbitud tee pikkus | langemise aeg |
| j) sõidupileti hind | sõidetud tee pikkus |
| k) ostjate arv kaupluses | kellaaeg |
| l) toa temperatuur | ahju kütmise kestus |

27. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt ja graafiliselt:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$; b) $y = \frac{1}{1+x^2}$.

28. Esita funktsioon graafiliselt, kui tema tabeliline esitus on:

a)

x	-2	0	2	4	6	8
y	2	1	0	-2	-1	0

b)

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
y	-2	0	-1	-0,5	0	1	0,5

29. Leia sirgete $x = -2$ ja $x = 5$ vaheline kaugus.

30. a) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgetest $y = -4$ ja $y = 2$ võrdsel kaugusel.

b) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgetest $x = -5$ ja $x = -1$ võrdsel kaugusel.

c) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgest $x = -3$ kaks korda kaugemal kui sirgest $x = -1$.

d) Leia võrrand sirgele, mis asub sirgele $y = 5$ kolm korda lähemal kui sirgele $y = 1$.

31. Kirjuta ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguses ja

a) raadius on 1,5;

b) raadius on 2;

c) ringjoone pikkus on 6;

d) ringjoone pikkus on 2,4;

e) ringi pindala on 14;

f) ringi pindala on 5,22.

32. On antud joonte võrrandid:

$$x = 3; y = -2; x^2 + y^2 = 4; y = x; y = -\frac{2}{3}x + 2$$

ja punktid:

$$A(1; 1); B(0; -2); C(3; 0); D(0; 0); E(\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

Leia, missugustel antud joontest need punktid asetsevad.

II. LINEAARNE FUNKTSIOON.

LINEAARSE FUNKTSIOONI UURIMINE I.

§ 6. LINEAARNE FUNKTSIOON JA TEMA PÕHIOMADUS.

Eelmises peatükis tutvusime funktsiooni *analüütilise*, *tabelilise* ja *graafilise* esitusviisiga. Nagu teada, ei ole tabelilises esituses praktiliselt võimalik esitada kõiki funktsiooni väärtusi, kui neid on lõpmata palju. Ka graafiline esitus on piiratud ulatusega. Analüütilisest esitusest on aga võimalik arvutamise teel leida igale argumendi väärtusele vastavat funktsiooni väärtust. Seepärast kasutamegi edaspidi üksikute funktsioonide defineerimiseks matemaatilist avaldist.

Lineaarseks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis esitub avaldisena $ax+b$, kus a ja b on antud arvud ($a \neq 0$).

Vaatleme lineaarse funktsiooni $-3x+2$ kahte tabelilist esitust.

x	-3	-1	1	3	5
$-3x+2$	11	5	-1	-7	-13

x	-4	-1	2	5	8
$-3x+2$	14	5	-4	-13	-22

Nimetame argumendi kahe väärtuse vahet argumendi muuduks ja tähistame seda sümboliga Δx . Funktsiooni kahe väärtuse vahet nimetame funktsiooni muuduks ja tähistame sümboliga Δy .

Toodud näites on esimesel juhul $\Delta x=2$ ja $\Delta y=-6$ ning teisel juhul $\Delta x=3$ ja $\Delta y=-9$. Näeme, et võrdsetele argumentide muutudele vastavad võrdsed funktsiooni muudud.

Moodustame nüüd funktsiooni ja argumenti vastavate muutude suhted. Näeme, et need on võrdsed

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Tõestame, et see võrdelisuse omadus tuleb ilmsiks kõikide lineaarsete funktsioonide juures.

Lineaarse funktsiooni põhiomadus:

lineaarse funktsiooni muut on võrdeline argumenti muuduga, kusjuures võrdeteguriks on funktsiooni avaldises esinev argumenti kordaja, s. t.

$$\Delta y = a \Delta x.$$

Moodustame tabeli, kus esimeses reas on argumenti väärtused ja teises neile vastavad funktsiooni väärtused:

x	$x + \Delta x$
$ax + b$	$a(x + \Delta x) + b$

Funktsiooni väärtuste vahe ehk funktsiooni muut on

$$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - (ax + b).$$

Avades sulud ja koondades saamegi, et

$$\Delta y = a \cdot \Delta x.$$

Kui $\Delta x=1$, siis $\Delta y=a$, s. t. lineaarse funktsiooni avaldises argumenti kordaja näitab, kui palju muutub funktsiooni väärtus, kui argumenti väärtus kasvab ühe ühiku võrra.

Ülesanne.

33. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt, võttes üks kord $\Delta x = \frac{1}{3}$ ja teine kord $\Delta x = -2,5$. Leia vastavad Δy väärtused ning seejärel ka suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ väärtused. Võrdle tulemust x kordajaga.

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ c) $y = 0,2x - 1,5$

§ 7. LINEAARSE FUNKTSIOONI GRAAFIK.

Tuginedes lineaarse funktsiooni põhiomadusele tõestame, et **lineaarse funktsiooni graafikuks on sirge**.

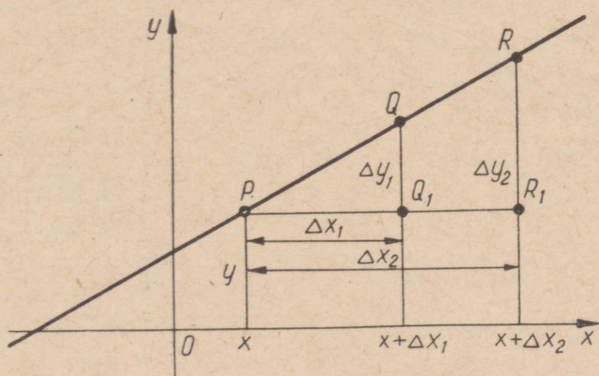
Selleks näitame, et kui punktid P ja Q on lineaarse funktsiooni graafiku kaks suvalist punkti, siis asetseb nende punktide poolt määratud sirgel ka selle graafiku iga kolmas punkt R .

Tähistades lineaarse funktsiooni avaldise $ax + b$ tähega y , saame võrduse

$$y = ax + b,$$

mida peavad rahuldama lineaarse funktsiooni graafiku iga punkti koordinaadid. Olgu punkt $P(x, y)$ selle graafiku suvaliseks punktiks (joon. 10).

Muutugu argument Δx_1 võrra. Sellele vastab joonisel punkt $Q_1(x + \Delta x_1; y)$. Argumendi muutumise tagajärjel muutub ka funkt-



Joon. 10.

sioon Δy_1 võrra. Jõuame punkti $Q(x+\Delta x_1; y+\Delta y_1)$. Ühendades punktid P_1, Q_1 ja Q sirglõikudega, tekib kolmnurk.

Muutugu nüüd argument Δx_2 võrra. Selle tagajärjel muutub funktsioon Δy_2 võrra. Saame joonisel punktid $R_1(x+\Delta x_2; y)$ ja $R(x+\Delta x_2; y+\Delta y_2)$ ning nende abil kolmnurga PR_1R .

Kolmnurgad PQ_1Q ja PR_1R on täisnurksed. Lineaarse funktsiooni põhiomaduse järgi

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = a,$$

s. t. et vaadeldavates kolmnurkades täisnurkade lähisküljed on võr-
delised. Seega

$$\triangle PQ_1Q \sim \triangle PR_1R.$$

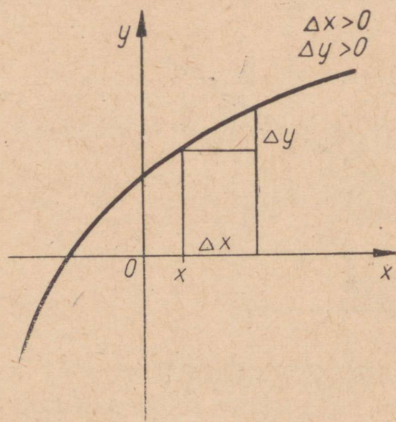
Siit järeldub, et

$$\angle Q_1PQ = \angle R_1PR.$$

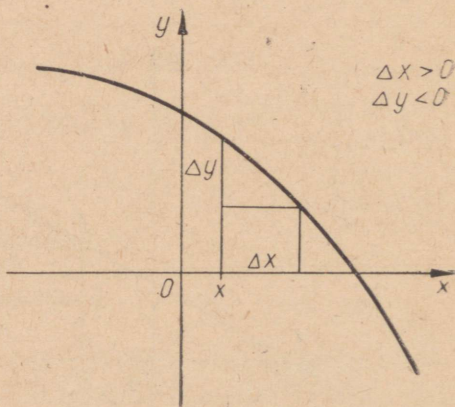
Teame, et punktid P, Q_1 ja R_1 asetsevad nende võrdsete nurkade ühel haaral, järelikult peavad punktid P, Q ja R asetsema nende võrdsete nurkade teisel haaral. Seega asetseb punkt R punktidega P ja Q määratud sirgel.

§ 8. KASVAV JA KAHANEV LINEAARNE FUNKTSIOON.

Joonisel 11 ja 12 on esitatud kaks funktsiooni graafiliselt. Esi-
meselt jooniselt näeme, et argumenti väärtuste suurenedes suu-



Joon. 11.



Joon. 12.

renevad ka funktsiooni väärtused, teiselt aga näeme, et argumendi väärtuste suurenedes funktsiooni väärtused vähenevad.

Võttes nüüd argumendi mingi väärtuse x ning lastes argumentil muutuda Δx võrra, kusjuures $\Delta x > 0$, siis esimesel juhul $\Delta y > 0$ ja teisel juhul $\Delta y < 0$.

Funktsiooni nimetatakse kasvavaks funktsiooniks, kui positiivsetele argumendi muutudele vastavad positiivsed funktsiooni muudud.

Funktsiooni nimetatakse kahanevaks funktsiooniks, kui positiivsetele argumendi muutudele vastavad negatiivsed funktsiooni muudud.

Seega on esimene vaadeldud funktsioonidest kasvav ja teine kahanev.

Lineaarse funktsiooni põhiomaduse kohaselt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Kui nüüd $\Delta x > 0$ ja $\Delta y > 0$, siis ka $a > 0$. Ümberpöörduvalt, kui $a > 0$ ja $\Delta x > 0$, siis on ka $\Delta y > 0$, s. t.

lineaarne funktsioon $y = ax + b$ on kasvav siis, kui $a > 0$.

Kui aga $\Delta x > 0$ ja $\Delta y < 0$, siis $a < 0$. Ümberpöörduvalt, kui $a < 0$ ja $\Delta x > 0$, siis on $\Delta y < 0$, s. t.

lineaarne funktsioon $y = ax + b$ on kahanev siis, kui $a < 0$.

Joonesta koordinaatteljestikku ühe kasvava ja ühe kahaneva lineaarse funktsiooni graafik!

Ülesandeid.

34. Missugused järgmistest funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

a) $y = \frac{2}{3}x + 5$

d) $y = -\frac{2}{3}x + 5$

b) $y = -\frac{2}{3}x + 5$

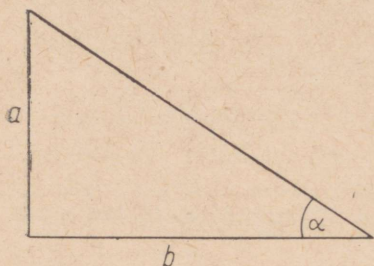
c) $y = \frac{-2}{3}x - 5$

SIRGE VÖRRAND.

Teame, et lineaarse funktsiooni $y=ax+b$ graafikuks on sirge. Et võrdus $y=ax+b$ on võrrand, mis seob sirge mistahes punkti koordinaate, siis on see võrdus **sirge võrrandiks**. Seame nüüd ülesandeks selgitada, missugune geomeetiline tähendus on sirge võrrandis $y=ax+b$ esinevatel arvudel a ja b .

§ 9. NÜRINURGA TANGENS.

Et leida lineaarse funktsiooni avaldisest $ax+b$ konstandi a geomeetrilist tähendust, peame laiendama tangensi mõistet nürinurkadele. Teame, et täisnurkses kolmnurgas (joon. 13) teravnurga tangens on võrdne vastaskaateti ja lähiskaateti suhtega, s. t.



Joon. 13.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Edaspidi näitame (vt. § 76), et teravnurga α ja nürinurga $180^\circ - \alpha$ tangens erinevad ainult märgi poolest.

$$\tan (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

Näiteks

$$\tan 150^\circ = \tan (180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Teades nüüd, kuidas avaldub nürinurga tangens, võime öelda, et

igale nurgale 0° kuni 180° vastab üks kindel tangensi väärtus.

Et nurga muutudes 0° -st kuni 90° -ni vastavad tangensi väärtused on positiivsed ja sealjuures kogu aeg kasvavad ning nurga muutudes 90° -st kuni 180° -ni on vastavad tangensi väärtused negatiivsed ja samuti kogu aeg kasvavad, siis

ei leidu kaht nurka vahemikus 0° -st kuni 180° -ni, millele vastaks üks ja sama tangensi väärtus.

Ülesandeid.

35. Leia nurga α tangens, kui α on:

- a) 135° , b) 120° , c) 150° .

36. VIII klassis kasutusel olevate tabelite abil leia

- a) $\tan 100^\circ$ d) $\tan 162^\circ$
b) $\tan 115^\circ$ e) $\tan 144^\circ$
c) $\tan 170^\circ$ f) $\tan 95^\circ$

37. VIII klassis kasutusel olevate tabelite abil leia x , kui

- a) $\tan x = -0,213$ e) $\tan x = 0,466$
b) $\tan x = -0,727$ f) $\tan x = -5,14$
c) $\tan x = 1,66$ g) $\tan x = -14,3$
d) $\tan x = 3,73$ h) $\tan x = -0,052$

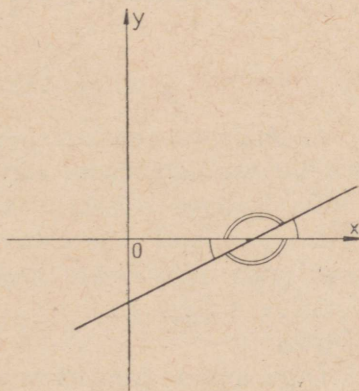
38. Mõõda jooniselt nurga suurus ja leia selle tangens, kui nurga üheks haaraks on x -telje positiivne pool ja teiseks haaraks alguspunktist lähtuv antud punkti läbiv kiir. Antud punktiks on:

- a) $A(2; 1)$ d) $D\left(-\frac{8}{5}; 1,2\right)$
b) $B(-3; 3)$ e) $E(7,6; 12,3)$
c) $C\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{7}\right)$ f) $F\left(-6,12; \frac{12}{5}\right)$

§ 10. TÕUSUNURK JA TÕUS.

Koordinaattelgi lõikav sirge moodustab x -teljega kaks paari võrdseid nurki (joon. 14). Miks need nurgad on paariti võrdsed? Nurgad, mis asuvad ülalpool x -telge, on suuruselt erinevad. Kuidas nimetatakse neid nurki?

Sirge tõusunurgaks nimetatakse sirge ja x -telje vahelist nurka, mis asub ülalpool x -telge ja mille x -teljel asuv haar on tipust paremal.



Joon. 14.

Tõusunurk on seega kas teravnurk või nürinurk.

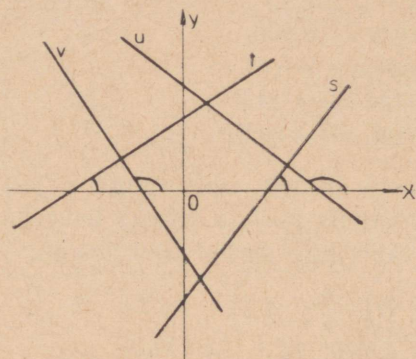
Sirget, mille tõusunurk on teravnurk, nimetatakse **tõusvaks** sirgeks.

Sirget, mille tõusunurk on nürinurk, nimetatakse **langevaks** sirgeks.

Sirge tõusunurga tangensit nimetatakse sirge tõusuks.

Et tõusva sirge tõusunurk on teravnurk, siis **tõusva sirge tõus on positiivne**.

Et langeva sirge tõusunurk on nürinurk, siis **langeva sirge tõus on negatiivne**.



Joon. 15.

Ülesandeid.

39. Leia malli abil joonisel 15 esitatud sirgete s , t , u ja v tõusunurgad. Missugused neist sirgeist on tõusvad, missugused langevad?

40. Tee kindlaks, missugused järgnevatest lausetest on õiged, missugused valed:

a) funktsiooni $y=2x+6$ graafik on tõusev sirge; *tõus*

b) funktsiooni $y=3x-1$ graafik on langev sirge; *long*

c) funktsiooni $y=-5x+3$ graafik on tõusev sirge; *long*

d) funktsiooni $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$ graafik on langev sirge. *tõus*

§ 11. ALGVÄÄRTUS JA ALGORDINAAT.

Funktsiooni väärtust, mis saadakse argumendi väärtusel 0, nimetatakse **funktsiooni algväärtuseks**. Nii on näiteks funktsiooni $y=2x-3$ algväärtuseks -3 . Lineaarse funktsiooni algväärtusele vastab graafikul ordinaattelje ja vastava sirge lõikepunkti ordinaat, mida nimetatakse **algordinaadiks**.

Sirge algordinaadile vastab seega lineaarse funktsiooni algväärtus.

Olgu antud sirge võrrand

$$y=ax+b.$$

Kui siin $x=0$, siis $y=b$. Seega

sirge algordinaadiks on sirge võrrandis $y=ax+b$ esinev vabaliige.

§ 12. TÕUSU JA ALGORDINAADIGA MÄÄRATUD SIRGE VÕRRAND.

Teisendame sirge võrrandi $y=ax+b$ kujule, kus a on avaldatud:

$$a = \frac{y-b}{x}.$$

Jooniselt 16 näeme, et

$$\frac{y-b}{x} = \tan \alpha.$$

Neist kahest võrdusest järeldub, et

$a = \tan \alpha,$

s. t. et

sirge võrrandis $y=ax+b$ esitab x kordaja a sirge tõusu.

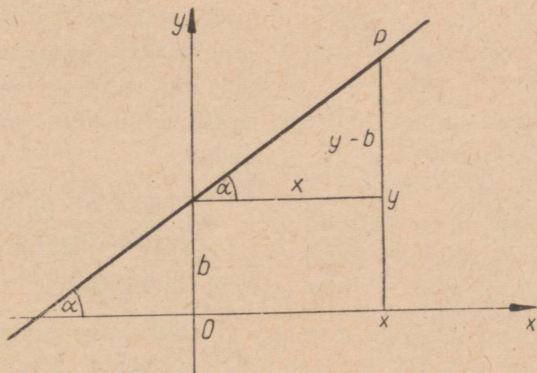
Seega sirge võrrandis $y=ax+b$ esinevad arvud a ja b esitavad vastavalt sirge tõusu ja algordinaati.

Seega

sirge $y=ax+b$ on määratud oma tõusu ja algordinaadiga.
Ümberpöörduvalt,

kui sirge on määratud oma tõusu ja algordinaadiga, siis on tema võrrandiks $y=ax+b$.

Näita seda, tuginedes joonisele 15!



Joon. 16.

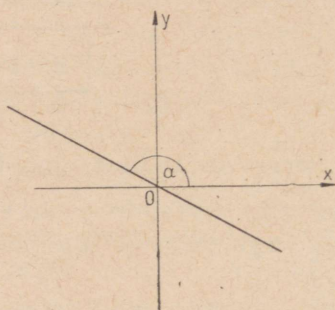
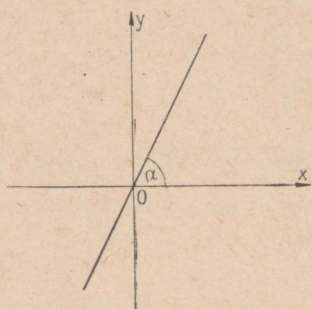
Et sirge võrrand $y=ax+b$ on ühtlasi lineaarse funktsiooni esituseks valemi kujul, siis võime nüüd täpsustada, missuguste suurustega määratud sirge on lineaarse funktsiooni graafikuks.

Lineaarse funktsiooni graafikuks on tõusu ja algordinaadiga määratud sirge.

§ 13. KOORDINAATIDE ALGUSPUNKTI LÄBIVA SIRGE VÖRRAND. PARALLEELSESED SIRGED.

Kui sirge $y=ax+b$ läbib koordinaatide alguspunkti (joon. 17), siis on tema algordinaat null, s. t.

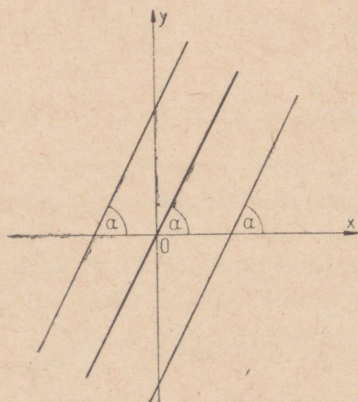
$$b=0.$$



Joon. 17.

Ja seega

koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrandiks on $y=ax$.



Joon. 18.

Sirgega $y=ax$ paralleelsetel sirgetel on temaga võrdne tõusunurk (joon. 18). Miks? Et võrdsete nurkade tangensid on võrdsed, siis sirgega $y=ax$ paralleelse sirge tõus on samuti a . Seega,

sirged on paralleelsed, kui nende tõusud on võrdsed.

Ümberpöörduvalt,

kui kahe sirge tõusud on võrdsed, siis need sirged on paralleelsed.

Tõepoolest, teame, et kui sirgete tõusud on võrdsed, siis on ka nende tõusunurgad võrdsed. Sirged, mis lõikavad kolmandat sirget nii, et nende kaasnurgad on võrdsed, on aga paralleelsed.

Ülesandeid.

41. 1) Esita koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand, kui sirge tõusunurk on:

- | | |
|----------------|----------------|
| a) 30° | d) 42° |
| b) 60° | e) 122° |
| c) 135° | f) 169° |

2) Esita koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand, kui sirge läbib antud punkti:

- | | |
|---------------|----------------|
| a) $A(2; 4)$ | c) $C(4; -4)$ |
| b) $B(-3; 4)$ | d) $D(-5; -4)$ |

42. Kui suured on ülesandes 41 leitud sirgete tõusud?

43. a) Missugused järgmistest sirgetest on paralleelsed?

$$y=3x-5; 4-3x=y; 3x=5-y; y-3x=1.$$

b) Esita sirgega $y=-\frac{1}{2}x+1$ paralleelsete sirgete võrrandeid.

§ 14. SIRGE ÜLDVÕRRAND JA SELLE ERIKUJUD.

Teame, et joone võrrandit võib teisendada.

Missugused teisendused on lubatud?

Nii võime sirge võrrandi $y=ax+b$ teisendada kujule $cax - cy + cb = 0$.

Tähistades $ca=A$, $-c=B$ ja $cb=C$, saame sirge võrrandiks

$$Ax + By + C = 0,$$

mida nimetataksegi **sirge üldvõrrandiks**. Et on tegemist joone võrrandiga, siis ei tohi A ja B samaaegselt võrduda nulliga, sest siis ei sisaldaks võrrand joone suvalise punkti koordinaate.

1° Olgu $A=0$, $B \neq 0$ ja $C \neq 0$. Nüüd teisendub üldvõrrand kujule

$$y = -\frac{C}{B},$$

mis esitab, nagu teame, x -teljega paralleelse sirge võrrandit.

2° Olgu $A \neq 0$, $B=0$ ja $C \neq 0$. Nüüd teisendub üldvõrrand kujule

$$x = -\frac{C}{A},$$

mis esitab, nagu teame, y -teljega paralleelse sirge võrrandit.

3° Olgu $A \neq 0$, $B \neq 0$ ja $C=0$. Nüüd teisendub üldvõrrand kujule

$$Ax + By = 0 \text{ ehk } y = -\frac{A}{B}x,$$

mis on koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand.

4° Olgu $A \neq 0$, $B=0$ ja $C=0$. Nüüd teisendub üldvõrrand kujule

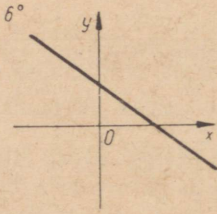
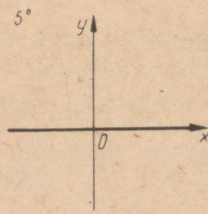
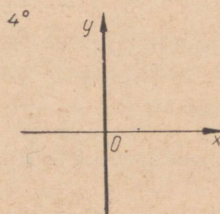
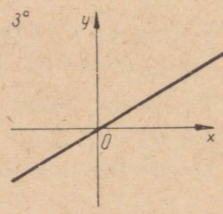
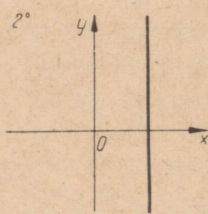
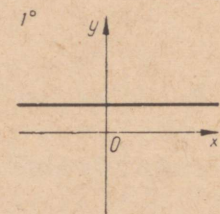
$$Ax = 0 \text{ ja siit } x = 0,$$

mis on y -telje võrrand.

5° Olgu $A=0$, $B \neq 0$ ja $C=0$. Nüüd teisendub üldvõrrand kujule

$$By = 0 \text{ ja siit } y = 0,$$

mis on x -telje võrrand.



Joon. 19.

6° Juhul, kui $A \neq 0$, $B \neq 0$ ja $C \neq 0$, on üldvõrrand teisendatav kujule

$$y = ax + b, \text{ kus } a \neq 0 \text{ ja } b \neq 0,$$

mis esitab koordinaattelgi väljaspool alguspunkti lõikava sirge võrrandit.

Et need 6 juhtu hõlmavad kõik võimalikud sirge asendid koordinaatteljestikus (joon. 19), seetõttu nimetataksegi võrrandit $Ax + By + C = 0$ sirge üldvõrrandiks.

Ülesandeid.

44. On antud sirgete võrrandid

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1;$

c) $\frac{x}{-\frac{2}{3}} - \frac{y}{-\frac{3}{5}} = 1;$

b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1;$

d) $-\frac{x}{3,2} + \frac{y}{5,4} = 1.$

- 1) Kui suur on nende sirgete tõus ja algordinaat?
- 2) Missuguste lineaarsete funktsioonide graafikuiks on need sirged?
- 3) Missugused neist funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

45. Leia sirge võrrandid, kui

- a) tõusunurk on 60° ja algordinaat -2 ;
- b) tõusunurk on 35° ja algordinaat 3 ;
- c) tõusunurk on 160° ja algordinaat $2,31$;
- d) tõusunurk on 110° ja algordinaat $-4,6$;
- e) tõus on $1,2$ ja algordinaat $2,1$;
- f) tõus on $-3,2$ ja algordinaat -19 .

46. Joonesta koordinaatteljestikku vabalt kaks sirget. Leia mõõtmise teel kummagi sirge tõusunurk ja algordinaat. Esita nende sirgete võrrandid.

47. Leia iga sirge algordinaat, tõus ja tõusunurk, kui sirge võrrandiks on:

1) $x - y + 1 = 0$

5) $x - 3y - 3 = 0$

2) $3x + 2y - 4 = 0$

6) $2x + 5y = 0$

3) $5x - 3y = 0$

7) $2,3x + 4,6y - 0,1 = 0$

4) $\frac{3}{4}y + \frac{2}{3}x - 3 = 0$

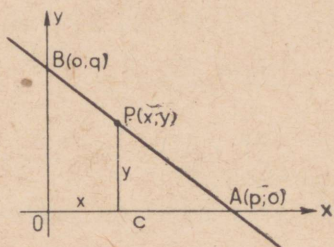
8) $0,12x - 1,6y = \frac{4}{5}$

48. Missugused ülesandes 47 esitatud võrrandeile vastavaist sirgeist läbivad koordinaatide alguspunkti?

49. Missugustes punktides lõikavad ülesandes 47 esitatud võrrandeile vastavad sirged koordinaattelgi?

§ 15. SIRGE VÖRRAND TELGLÕIKUDES.

Eespool vaatlesime sirge võrrandit $y=ax+b$ ja selgitasime, mis on seda sirget määravateks suurusteks. Lahendame nüüd ühe vastupidise ülesande. Olgu ette antud sirget määravad suurused ja ülesandeks on leida seos võrrandi kujul sirget määravate suuruste ja tema suvalise punkti koordinaatide vahel.



Joon. 20.

Ülesanne. Leida võrrand sirgele, mis lõikab koordinaattelgi punktides $A(p; 0)$ ja $B(0; q)$, kus $p \neq 0$ ja $q \neq 0$ (joon. 20).

Et sirge on määratud oma kahe punktiga, siis on antud ülesandes sirgjoont määravateks suurusteks punktide A ja B koordinaadid. Selle joone suvaliseks punktiks olgu punkt $P(x; y)$. Ülesandeks on leida võrrand, mis seoks punktide A , B ja P koordinaate.

Jooniselt 20 näeme, et

$$\triangle OBA \sim \triangle CPA \text{ (miks?)},$$

ja seega

$$\frac{CP}{OB} = \frac{CA}{OA}.$$

Et $CP=y$; $OB=q$; $CA=p-x$ ja $OA=p$, siis

$$\frac{y}{q} = \frac{p-x}{p}$$

ehk

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,}$$

mis esitabki otsitavat sirge võrrandit. Viimast võrrandit nimetatakse **sirge võrrandiks telglõikudes**.

Kui võrrelda saadud võrrandit sirge üldvõrrandiga, siis millega võrduvad nüüd A , B ja C ?

Ülesandeid.

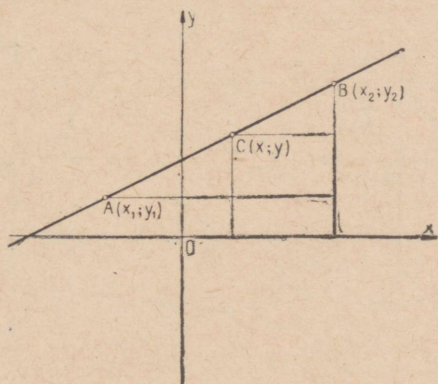
50. Esita võrrand sirgele, mille lõikepunktid koordinaattelgedega A ja B on antud:

- | | |
|-----------------|-------------|
| a) $A(5; 0)$ | $B(0; 2)$ |
| b) $A(2; 0)$ | $B(0; 4)$ |
| c) $A(-3; 0)$ | $B(0; -1)$ |
| d) $A(-2,5; 0)$ | $B(0; 1,5)$ |

51. Leia punktid, kus alljärgnevad sirged lõikavad koordinaattelgi

- | | |
|--------------------------------------|-------------------|
| a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ | d) $2x + 3y = 1$ |
| b) $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$ | e) $x + y = 2$ |
| c) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 1$ | f) $-2x - 5y = 3$ |

Joonesta need sirged!



Joon. 21.

52. Missuguste funktsioonide graafikuid esitavad ülesande 50 lahendamisel leitud sirged?

53. Näita, et kui sirge läbib punkte $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$, siis esitub tema võrrand kujul $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Selleks leia jooniselt 21 sarnased kolmnurgad ja esita vastavate külgede võrdelisuus koordinaatide kaudu.

LINEAARSE FUNKTSIOONI UURIMINE II.

§ 16. LINEAARSE FUNKTSIOONI NULLKOHT.

Funktsiooni nullkohaks nimetatakse seda argumendi väärtust, mille puhul funktsiooni väärtus on 0.

Seega leiame lineaarse funktsiooni

$$y = ax + b$$

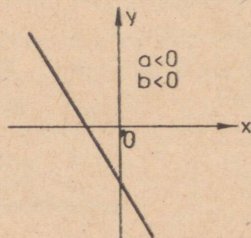
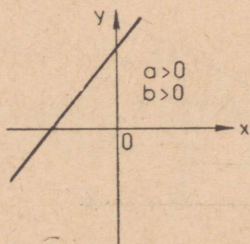
nullkoha, kui lahendame võrrandi

$$ax + b = 0.$$

Lahendades saame

$$x = -\frac{b}{a}$$

Graafikul vastab lineaarse funktsiooni nullkohale sirge $y = ax + b$ ja x -telje lõikepunkt, s. o. punkt, mille abstsiss $x = -\frac{b}{a}$.



Joon. 22.

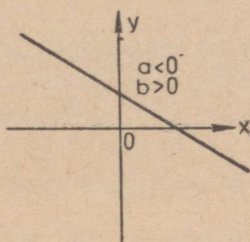
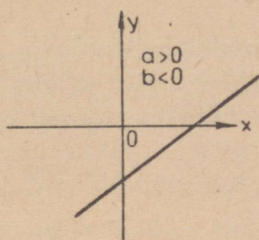
a) Kui a ja b on s a m a d e.märkidega, s. t. kui

$$a > 0 \text{ ja } b > 0 \text{ või } a < 0 \text{ ja } b < 0,$$

siis lineaarse funktsiooni nullkoht

$$x = -\frac{b}{a}$$

on negatiivne (joon. 22).



Joon. 23.

b) Kui a ja b on erinevate märkidega, s. t. kui

$$a > 0 \text{ ja } b < 0 \text{ või } a < 0 \text{ ja } b > 0,$$

siis lineaarse funktsiooni nullkoht

$$x = -\frac{b}{a}$$

on positiivne (joon. 23).

c) Kui $b=0$, siis ka

$$x = -\frac{b}{a} = 0,$$

s. t. lineaarse funktsiooni nullkohaks on koordinaatide alguspunkt.

Ülesandeid.

54. Missuguse märgiga on järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = -2x + 1$

4) $y = -0,462x + \frac{12}{533}$

2) $y = 3x - 3$

5) $y = \frac{63}{47}x - 2,56$

3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

6) $y = x + 5$

55. Teisendades võrrandid sobivale kujule, tee kindlaks, missuguse märgiga on saadavate lineaarsete funktsioonide nullkohad:

1) $4x - 6y + 3 = 0$

3) $\frac{15}{43}x - \frac{61}{18}y + 1 = 0$

2) $21x + 46y - 100 = 0$

4) $-8,43x + 9,34y + 0,105 = 0$

56. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}$

3) $-3x + 0,6y - \frac{2}{3} = 0$

2) $y = 5,32x + 10,64$

4) $\frac{4}{5}x - \frac{7}{8}y + 5,2 = 0$

57. Missuguse lineaarse funktsiooni nullkoha leidmise ülesandele sa jõuad järgmiste võrrandite lahendamisel?

a) $9x + 6 = 10(9 - \frac{1}{2}x)$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$

c) $0,36x - 3,4 = 0,3(0,4x - 1,2)$

d) $\frac{5-x}{8} = \frac{18-5x}{12}$

e) $2 - \frac{3x-7}{4} = \frac{x+17}{5}$

Missugused sinu poolt leitud funktsioonidest on kasvavad, misugused kahanevad?

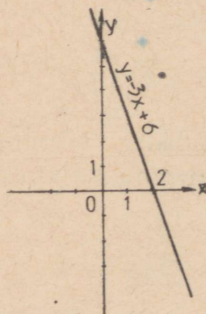
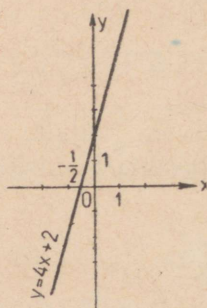
Tee leitud funktsiooni avaldisest kindlaks, missuguse märgiga on selle funktsiooni nullkoht.

Leia nullkohad.

§ 17. LINEAARSE FUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUS-PIIRKOND.

Olgu antud 2 niisugust lineaarset funktsiooni, et ühe graafikuks oleks tõusev, teise graafikuks langev sirge.

Nullkohast paremal on tõusev sirge ülalpool x -telge, s. t. funkt-



Joon. 24.

siooni väärtused on seal positiivsed. Nullkohast vasakul on see sirge aga allpool x -telge ja funktsiooni väärtused on seal negatiivsed. Langeva sirge puhul on vastupidi.

Olgu antud näiteks funktsioonid $y=4x+2$ ja $y=-3x+6$ (joon. 24). Neist esimese graafikuks on tõusev, teise graafikuks langev sirge. Et esimese funktsiooni nullkohaks on $x=-\frac{1}{2}$ ja teise funktsiooni nullkohaks $x=2$, siis

$$4x+2>0, \text{ kui } x>-\frac{1}{2}, \text{ ja } 4x+2<0, \text{ kui } x<-\frac{1}{2};$$

$$-3x+6>0, \text{ kui } x<2, \text{ ja } -3x+6<0, \text{ kui } x>2.$$

Funktsiooni positiivsuspiirkonnaks nimetatakse argumendi nende väärtuste piirkonda, millele vastavad funktsiooni väärtused on positiivsed.

Funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks nimetatakse argumendi nende väärtuste piirkonda, millele vastavad funktsiooni väärtused on negatiivsed.

Nii on funktsiooni $4x+2$ positiivsuspiirkonnaks $x>-\frac{1}{2}$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x<-\frac{1}{2}$ ning funktsiooni $-3x+6$ positiivsuspiirkonnaks $x<2$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x>2$.

Ülesandeid.

58. Leia järgmiste funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $y=3x-5$

d) $y=-x+3$

b) $y=2x+7$

e) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}$

c) $y=-4x-1$

f) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{7}$

59. Leia järgmiste funktsioonide nullkoht ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $y=x-2$

e) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

b) $y=5x+1$

f) $y=-0,4x-0,1$

c) $y=-2x+3$

g) $y=4\frac{1}{5}x$

d) $y=-3x-5$

h) $y=-\frac{4}{3}x$

LINEAARNE VÖRRATUS.

§ 18. LINEAARSE VÖRRATUSE LAHENDAMISEST.

Leida antud funktsiooni $ax+b$ positiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtused, mille puhul $ax+b>0$.

Leida antud funktsiooni $ax+b$ negatiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtused, mille puhul $ax+b<0$.

Kirjutusi $ax+b>0$ ja $ax+b<0$ nimetatakse **lineaarseteks võrratusteks**.

Niisiis, selle asemel, et öelda:

leida funktsiooni $ax+b$ positiivsuspiirkond,

võib öelda:

lahendada võrratus $ax+b>0$.

§ 19. VÖRRATUSTE OMADUSED.

Näitame nüüd, et võrrandi lahendamisel kasutatavad võtted

1) liikmete ühelt poolelt teisele ülekandmine tema märgi vastupidiseks muutmisega, s. t. võrrandi mõlemale poolele ühe ja sama arvu liitmine,

2) võrrandi mõlema poole korrutamine ühe ja sama arvuga, on rakendatavad ka võrratuse lahendamisel.

Vaatleme esmalt mõningaid võrratuste omadusi.

Olgu a ja b kaks arvu, mille kohta on teada, et

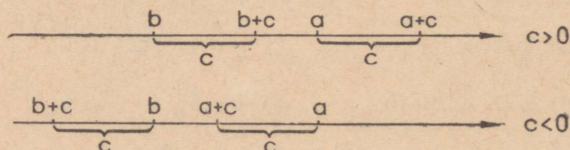
$$a > b.$$

See tähendab, et arvule a vastav punkt on arvteljel arvule b vastavast punktist paremal (joon. 25).

1° Kui liita võrratuse mõlema poolega üks ja sama arv, näiteks c , mis võib olla nii positiivne kui ka negatiivne, siis saame samapidise võrratuse, s. t.

$$\text{kui } a > b, \text{ siis ka } a+c > b+c.$$

Selle omaduse kehtivus selgub jooniselt 25.



Joon. 25.

Too arvulisi näiteid!

2° Kui korrutada võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama positiivse arvuga, siis saame samapidise võrratuse, s. t.

$$\text{kui } a > b \text{ ja } m > 0, \text{ siis } am > bm.$$

Too arvulisi näiteid!

Selle omaduse tõestamiseks kasutame omadust 1°. Liidame võrratuse $a > b$ mõlema poolega $-b$, siis saame

$$a - b > 0.$$

Et arv $(a - b)$ on positiivne ja ka m on positiivne, siis on ka nende korrutis positiivne, s. t.

$$(a - b)m > 0$$

ehk

$$am - bm > 0.$$

Liites võrratuse mõlema poolega bm , saamegi

$$am > bm.$$

3° Kui korrutada võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama negatiivse arvuga, siis saame vastupidise võrratuse, s. t.

$$\text{kui } a > b \text{ ja } n < 0, \text{ siis } an < bn.$$

Too arvulisi näiteid!

Tõestamiseks lahutame võrratuse $a > b$ mõlemast poolest b (ehk liidame $-b$), saame

$$a - b > 0.$$

Et n on negatiivne ja et negatiivse ja positiivse arvu korrutis on negatiivne, siis

$$(a - b)n < 0,$$

millest

$$an - bn < 0.$$

Liites võrratuse mõlema poolega bn , saamegi

$$an < bn.$$

Eelmises paragrahvis käsitletud võrratuse omadused kehtivad ka tundmatut sisaldava võrratuse korral, sest iga tundmatut sisaldav võrratus muutub arvõrratuseks, kui anname tundmatule mingi niisuguse arvulise väärtuse, mis seda võrratust rahuldab. Nii saame antud võrratust

$$ax + b > 0$$

lahendada järgmiselt:

- 1) liidame võrratuse mõlema poolega $-b$, saame

$$ax > -b;$$

- 2) korrutame võrratuse mõlemaid pooli $\frac{1}{a}$ -ga:

$$\text{kui } a > 0, \text{ saame } x > -\frac{b}{a},$$

$$\text{kui } a < 0, \text{ saame } x < -\frac{b}{a}.$$

Seega oleme saanud võrratuse lahendamiseks järgmised juhised.

1. Võrratuse liikmeid võib üle kanda võrratuse ühelt poolt teisele, muutes selle liikme ees oleva märgi vastupidiseks.

2. Võrratuse mõlemaid pooli võib korrutada ühe ja sama arvuga: kui see arv on positiivne, jääb võrratuse märk muutmata, kui see arv on negatiivne, tuleb võrratuse märk muuta vastupidiseks.

Näiteid.

1. Lahendada võrratus:

$$3x - 12 < 0.$$

Viies -12 võrratuse teisele poolele, saame

$$3x < 12.$$

Jagades 3-ga, saame

$$x < 4.$$

Tulemuse kontrollimiseks võtame mõne arvulise väärtuse, mis rahuldab tingimust $x < 4$, näiteks 1 ja $\frac{1}{3}$. Asetame need väärtused algvõrratusse. Saame $-9 < 0$ ja $-11 < 0$, mis on õiged. Tuleb muidugi silmas pidada, et niisugune kontroll pole täielik.

Seega $x < 4$ on antud võrratuse lahendiks.

2. Lahendada võrratus:

$$\frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4.$$

Korrutame võrratuse mõlemad pooled 10-ga, saame

$$35 - 5x - 30 < 6 + 8x - 40.$$

Koondame ning kanname tuntud liikmed ühele, tundmatud teisele poolele:

$$\begin{aligned} 5 - 5x &< 8x - 34; \\ -5x - 8x &< -34 - 5; \\ -13x &< -39. \end{aligned}$$

Jagades -13 -ga, saame

$$x > \frac{-39}{-13}$$

ehk

$$x > 3.$$

Tulemuse kontrollimiseks asetame algvõrratusse x asemele näiteks arvud 4 ja 10. Saame $-\frac{3}{2} < -\frac{1}{5}$ ja $-\frac{9}{2} < \frac{23}{5}$, mis on õiged. Seega $x > 3$ on antud võrratuse lahendiks.

Nagu juba eespool märgitud, on võrratuse lahendiks mitte tundmatu üksainus väärtus, vaid väärtuste piirkond. Nii rahuldavad esimest võrratust kõik x väärtused, mis on väiksemad kui 4, ja teist kõik x väärtused, mis on suuremad kui 3.

Ülesandeid.

60. Lahenda järgmised võrratused:

1) $5(x-2) - 9 < 11$

2) $8(10-x) > 5(x+3)$

③ $5(z+1) + 6(z+2) < 9(z+3)$

4) $8(3y-1) > 30 + 9(5y-11) - 2(7-2y)$

⑤ $x - 1 < \frac{2x+1}{3}$

⑥ $x + \frac{12-x}{4} > \frac{26-x}{2}$

$$7) \frac{9x+7}{2} \left(x - \frac{7x-2}{7} \right) < 36$$

$$8) \frac{x+10}{3} + \frac{16x-3}{20} - \frac{7x-6}{4} > \frac{x-3}{2} + \frac{3(x-3)}{10}.$$

§ 21. LINEAARSE VÖRRATUSESÜSTEEMI LAHENDAMINE.

Olgu antud kaks ühe tundmatuga võrratust ja nõutagu leida selle tundmatu niisugune väärtuste piirkond, mis rahuldaks mõlemat antud võrratust. Niisugust ülesannet nimetatakse **võrratuse-süsteemiks** ja tähistatakse loogelise suluga võrratuste ees nagu võrrandisüsteemigi. Näiteks on

$$a) \begin{cases} 4-2x > 0 \\ 1+3x < 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{2x-11}{4} + \frac{13-2x}{2} < 2x \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5}(x-1) + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{3x-4}{2} > 1 \\ 2x+7 < 5 \end{cases}$$

võrratusesüsteemid.

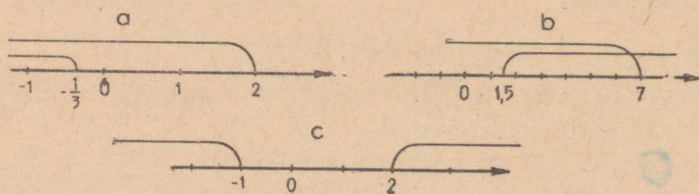
Lahendades neis võrratusesüsteemides eraldi kummagi võrratuse, teisenduvad need järgmisteks võrratusesüsteemideks:

$$a) \begin{cases} x < 2 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x > 1,5 \\ x < 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

Esitame need tulemused arvteljel (joon. 26).



Joon. 26.

Nagu näeme, võime võrratusesüsteemi lahendamisel saada kaht liiki tulemusi:

1) mõlema võrratuse lahendite piirkonnad osaliselt kattuvad (joon. 26, a ja b) (erandjuhul võivad ka täiesti kattuda);

2) mõlema võrratuse lahendite piirkonnad ei kattu (joon. 26, c).

Kattuvate piirkondade puhul on piirkondade ühine osa võrratusesüsteemi lahendiks.

Kui üksikute võrratuste lahendite piirkonnad ei kattu, siis võrratusesüsteemil lahend puudub.

Nagu näeme, on juhtudel a) ja b) kattuvad piirkonnad, juhul c) mitte kattuvad. Seega juhtudel a) ja b) on võrratusesüsteemil lahend olemas. Need on vastavalt

$$x < -\frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad 1,5 < x < 7.$$

Juhul c) aga võrratusesüsteemil lahend puudub.

§ 22. LINEAARSE VÕRRATUSESÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE.

Lineaarse võrratusesüsteemi graafiline lahendamine tähendab leida üks järgnevatest abstsissi väärtuste piirkondadest:

- a) piirkond, kus mõlemad sirged on ülalpool x -telge;
- b) piirkond, kus mõlemad sirged on allpool x -telge;
- c) piirkond, kus üks sirge on ülal-, teine allpool x -telge.

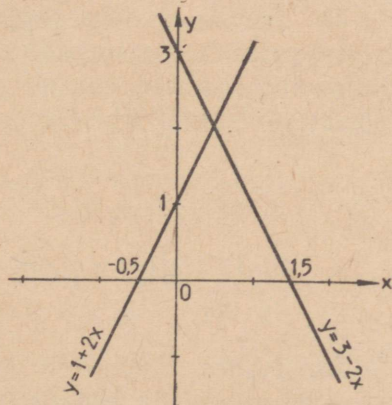
Joonisel 27 on antud funktsioonide $y=1+2x$ ja $y=3-2x$ graafikud.

Lahendada võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 1+2x > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases}$$

tähendab leida see x väärtuste piirkond, kus mõlemad sirged on ülalpool x -telge. Nagu jooniselt näeme, on selle ülesande lahendiks

$$-0,5 < x < 1,5.$$



Joon. 27.

Lahenda sellesama graafiku abil võrratusesüsteemid

$$\begin{cases} 1+2x < 0 \\ 3-2x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+2x > 0 \\ 3-2x < 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 1+2x < 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases}$$

Ülesandeid.

61. Lahenda järgmised võrratusesüsteemid:

$$1) \begin{cases} 2(10-7x) < 28 \\ 5x - (2x-7) > 11 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x - 0,3x < 4,5x + 2 \\ 0,1x - 0,1 < 0,15x - 5,1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{14} > 14 \\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}x > 38 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} < \frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} \\ \frac{8-x}{6} - \frac{5-4x}{3} > \frac{x+6}{6} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{3x+2}{18} - \frac{5x-8}{24} > \frac{3(2x+1)}{36} - \frac{x-1}{2} - \frac{2}{9} \\ \frac{26x-51}{52} - \frac{2(1-3x)}{13} > x - \frac{20x-(10-3x)}{156} \end{cases}$$

62. Teades, et kahe teguri korrutis on positiivne, kui mõlemad tegurid on samamärgilised, ja negatiivne, kui mõlemad tegurid on erimärgilised, lahenda järgmised ülesanded, taandades need võrratusesüsteemi lahendamisele:

$$1) (x-3)(x+4) > 0$$

$$2) (x+2)(x+5) < 0$$

$$3) \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(3x - \frac{1}{3}\right) < 0$$

$$4) (2x-0,42)(3x-2,31) > 0.$$

63. Teades, et murd on positiivne, kui lugeja ja nimetaja on samamärgilised, ja negatiivne, kui lugeja ja nimetaja on erinevate märkidega, lahenda järgmised ülesanded, taandades need võrratusesüsteemi lahendamisele:

$$1) \frac{x-3}{2x+1} < 0$$

$$5) \frac{4x+3}{2x-7} > 1$$

$$2) \frac{5x+1}{x} > 0$$

$$6) \frac{-3x+5}{4x} < 2$$

$$3) \frac{-3x-7}{(5x+6)^2} < 0$$

$$7) \frac{-2x}{4-3x} > 3$$

$$4) \frac{(-3x+6)^2}{3-2x} > 0$$

$$8) \frac{2-5x}{2x-5} < -1$$

64. Lahenda graafiliselt järgmised võrratusesüsteemid:

$$1) \begin{cases} 2-3x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2-3x < 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2-3x > 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2-3x < 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 5x+2 > 0 \\ -3x+4 < 0 \end{cases}$$

65. Kahekohalise arvu kümneliste number on üheliste numbrist 1 võrra suurem. Leia see arv, teades, et ta on suurem kui 77 ja väiksem kui 96.

66. Kui antud kahekohalise arvuga liita pool temast, siis saame 128-st suurema, kuid 130-st väiksema arvu. Leia see arv.

ARITMEETILINE PROGRESSIOON.

§ 23. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Lineaarse funktsiooni väärtuste jada, mis on saadud argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, ..., nimetatakse aritmeetiliseks progressiooniks.

Näiteks lineaarsetest funktsioonidest $2x+3$, $-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ ja $0,2x-2$ saame aritmeetilised progressioonid

5, 7, 9, 11, ...

$\frac{2}{3}$, 0, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, ...

-1,8; -1,6; -1,4; -1,2, ...

Aritmeetilise progressiooni arve nimetatakse vastavalt tema esimeseks, teiseks, kolmandaks jne. liikmeks.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

aritmeetilise progressiooni, s. t. on antud üks lineaarne funktsioon tabeliliselt:

x	1	2	3	...	$n-1$	n	...
$ax+b$	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n	...

Lineaarse funktsiooni põhiomaduse kohaselt vastavad võrdsetele argumendi muutudele võrdsed funktsiooni muudud.

Aritmeetilise progressiooni korral $\Delta x = 1$. Valemist $y = a \cdot \Delta x$ järeldub nüüd, et $\Delta y = a$, s. t. et

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = a.$$

Seega,

aritmeetilises progressioonis on iga liikme (alates teisest) ja temale eelneva liikme vahe jääv suurus.

Samuti vastupidi,

kui antud arvude jada $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ liikmete vahel kehtivad võrdused

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = a,$$

siis see jada on aritmeetiline progressioon.

Näiteks on jada

$$6, 4, 2, 0, -2, \dots$$

aritmeetiline progressioon, sest

$$4 - 6 = 2 - 4 = 0 - 2 = -2 - 0 = -2.$$

Seevastu jada

$$6, 3, 2, 1, -2$$

aga pole aritmeetiline progressioon, sest

$$3 - 6 \neq 2 - 3 = 1 - 2 \neq -2 - 1.$$

On saanud tavaks aritmeetilise progressiooni vahet tähistada tähega d (lad. k. *differentia* — vahe). Eespool toodud näidete juures on aritmeetilise progressiooni vaheks vastavalt 2, $-\frac{3}{2}$ ja 0,2.

§ 24. ARITMEETILISELE PROGRESSIOONILE VASTAVA LINEAARSE FUNKTSIOONI LEIDMINE.

1. Olgu ülesandeks leida aritmeetilise progressiooni

$$-5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots$$

kümnes ja sajase liige.

Otsitavad liikmed võime saada, kui jätkame antud progressiooni kirjutamist, liites viimasele liikmele progressiooni vahe. Jätkamine 10. liikmeni toimub suhteliselt kiiresti:

$$-5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.$$

Seega 10. liige on 31. Hoopis aeganõudvam oleks progressiooni väljakirjutamine 100. liikmeni. Ka ei ole selle pika arvaja üleskirjutamisel eksimise võimalused välditud. Seetõttu on siin otstarbekohasem leida see lineaarne funktsioon, mille väärtuste jada antud aritmeetiline progressioon esitab.

Olgu otsitavaks lineaarseks funktsiooniks $y=ax+b$. Et antud progressiooni vahe $d=4$ ja et $d=a$, siis otsitav funktsioon esitub kujul

$$y=4x+b.$$

b on lineaarse funktsiooni algväärtus. Seega tuleb leida otsitava funktsiooni see väärtus, mis vastab argumendi väärtusele 0. Seda on aga antud progressiooni abil võimalik leida, lahutades 1. liikmest, s. o. argumendi väärtusele 1 vastavast funktsiooni väärtusest progressiooni vahe. Vaadeldava näite korral on $b=-5-4=-9$. Otsitavaks funktsiooniks on seega

$$y=4x-9.$$

Et progressiooni liikmed on selle funktsiooni väärtusteks argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, ..., siis peavad väärtuspaarid (1; -5), (2; -1), (3; 3) jne. saadud võrrandit rahuldama. Kontrolli seda!

Olgu $x=100$. Siis $y=4 \cdot 100-9=391$. Seega on progressiooni 100. liige 391.

2. Lahendame vaadeldud probleemi ka üldiselt.

Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Need arvud on otsitava lineaarse funktsiooni vastavateks väärtusteks argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, ..., n .

Seame ülesandeks leida vastav lineaarne funktsioon.

Teame juba, et otsitavas lineaarses funktsioonis $y = ax + b$ on $a = d$ ja $b = a_1 - d$. Otsitav funktsioon on seega

$$y = dx + a_1 - d$$

ehk

$$y = a_1 + (x - 1)d.$$

§ 25. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI ÜLDLIHKME VALEM.

Et aritmeetilise progressiooni korral argument omandab ainult väärtused $1, 2, 3, 4, \dots, n$, millele vastavateks funktsiooni väärtusteks on $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$, siis asendatakse saadud valemis x n -ga ja y a_n -ga. Saame valemi

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Seda võrdust nimetatakse **aritmeetilise progressiooni üldliikme valemiks**.

Nii on aritmeetilise progressiooni

$$-5, -1, 3, 7, \dots$$

üldliikme valemiks

$$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 4.$$

Ülesandeid.

67. Leia alljärgnevatele funktsioonidele vastavad aritmeetilised progressioonid:

a) $-3x + 1$; b) $5x + 2$; c) $\frac{3}{4}x - 1$; d) $2,3x - 1,2$.

68. Leia alljärgnevatele progressioonidele vastavad lineaarsed funktsioonid:

- a) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- b) $8, 3, -2, -7, -12, \dots$
- c) $-1,6; -1,2; -0,8; -0,4, \dots$
- d) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \dots$
- e) $2\frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1\frac{3}{4}, \dots$
- f) $3,14; 3; 2,86; 2,72, \dots$

69. Leia igale ülesandes 68 esitatud aritmeetilisele progressioonile üldliikme valem.

70. Kirjuta üles aritmeetilise progressiooni esimesed 10 liiget, kui üldliikme valem on:

a) $a_n = 3 + (n-1) \cdot \frac{3}{4}$

b) $a_n = -5 + (n-1) \cdot (-1,5)$

c) $a_n = \frac{2}{3} + (n-1) \cdot \frac{7}{6}$

d) $a_n = -4,3 + (n-1) \cdot (-0,12)$

§ 26. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI OMADUS.

Olgu vaja leida aritmeetilise progressiooni teatud hulga liikmete summa, s. t. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Kui progressiooni liikmete arv on väike, siis on selle summa leidmine lihtne. Näiteks progressiooni $-3, -1, 1, 3, 5$ summaks on 5. Kui aga liikmete arv on suur, siis on summa arvutamine küllaltki aeganõudev. Sel juhul kasutatakse vastavat valemit, mille tuletamisele asumegi.

Eelkõige tutvume aga aritmeetilise progressiooni omadusega:

aritmeetilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Vaatleme aritmeetilist progressiooni

$$-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15.$$

Siin on esimese ja viimase liikme summa

$$-6 + 15 = 9$$

ning algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summad:

$$-3 + 12 = 9;$$

$$0 + 9 = 9;$$

$$3 + 6 = 9.$$

Et aritmeetilise progressiooni teise liikme saame, kui esimesele liikmele liidame progressiooni vahe, ning eelviimase liikme saame, kui viimasest liikmest lahutame vahe, s. t.

$$a_2 = a_1 + d \text{ ja } a_{n-1} = a_n - d,$$

siis nende summa

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$

ongi võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Samasuguse arutluse teel võime veenduda, et algusest ja lõpust kolmanda, neljanda jne. liikme summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Selle omaduse kehtivust saame selgitada ka järgmise arutlusega.

Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Näeme, et lõpust teise liikme indeks on $n-1$, lõpust kolmanda liikme indeks $n-2$ jne. Lõpust k -nda liikme indeks on seega $n-k+1$. Teoreem väidab, et

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Üldliikme valemi järgi

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

ja

$$a_{n-k+1} = a_1 + (n-k+1-1)d.$$

Niisiis

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d.$$

Avades sulud ja koondades saame

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + kd - d + a_1 + nd - kd = a_1 + a_1 + (n-1)d.$$

Et

$$a_1 + (n-1)d = a_n,$$

siis saamegi, et

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Kui osutub, et progressiooni liikmete arv on paaritu, siis keskmise liikme kahekordne on võrdne esimese ja viimase liikme summaga. Tõepoolest, kui $\bar{a}$ on keskmine liige, siis leidub niisugune k väärtus, mille puhul

$$a_k = a_{n-k+1} = \bar{a}.$$

Saadud valemi kohaselt

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$

ja seega

$$2\bar{a} = a_1 + a_n.$$

Siit

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_n}{2},$$

s. t. progressiooni keskmine liige on võrdne esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmisega.

§ 27. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Leiame nüüd valemi aritmeetilise progressiooni n liikme summa arvutamiseks.

Tähistades n liikme summa tähega S_n , võime kirjutada

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Esitame selle summa kaks korda: üks kord on liidetavateks progressiooni liikmed antud järjestuses, teine kord vastupidises järjestuses.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Üksteise all asetsevate liikmete summa on teatavasti jääv ja võrdne esimese ning viimase liikme summaga. Seega

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

ja siit

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Seega,

aritmeetilise progressiooni summa on võrdne äärmiste liikmete aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Teades, et $a_n = a_1 + (n-1)d$, võime aritmeetilise progressiooni summa valemi esitada veel kujul

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Ülesandeid.

71. Leia aritmeetilise progressiooni n -es liige, kui

$$a) \quad a_1 = 3 \qquad d = -2 \qquad n = 16$$

$$b) \quad a_1 = -\frac{2}{3} \qquad d = \frac{1}{3} \qquad n = 13$$

$$c) \quad a_1 = 2,5 \qquad d = -1,2 \qquad n = 26$$

72. Leia aritmeetilise progressi summa, kui

a) $a_1=6$ $a_n=76$ $n=15$

b) $a_1=10$ $a_n=-19$ $n=30$

c) $a_1=3,4$ $d=2,1$ $n=14$

d) $a_1=\frac{5}{6}$ $d=\frac{4}{3}$ $n=12$

73. Täida järgnev tabel:

a_1	d	n	a_n	S_n
$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{8}$	
-10		6	-20	
	$-\frac{1}{4}$	13	1	
	2	15	-10	
14,5	0,7		32	
$-37\frac{1}{2}$	4		$46\frac{1}{2}$	
-10	-2	6		
5,2	0,4	43		
0,7		30		108
		10	-37	-55

74. Mitu silma on kokku ühel täringul? **24.**

75. Mitu lööki teeb ööpäeva jooksul kell, kui ta lööb ainult täistunde, alates 1 kuni 12?

76. Mitu lööki teeb ööpäeva jooksul Tartu raekoja kell, kui ta lööb täistunde alates 1 kuni 12 ja lisaks sellele iga veerandtunni ajal 1 löögi, pooltunni ajal 2 lööki, kolmveerand tunni ajal 3 lööki ja täistunni ajal 4 lööki?

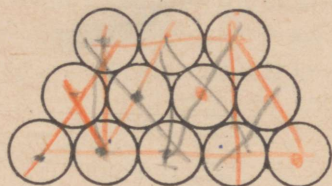
77. Leia esimese 100 täisarvu summa.

78. Leia esimese 100 paarisarvu summa.

79. Leia esimese 100 paaritu arvu summa.

80. Vabalt langev keha läbib esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m rohkem kui eelnevas. Leida: a) kui pika tee läbib see keha 21 sekundiga, b) mitu sekundit langeb keha 500 m kõrguselt.

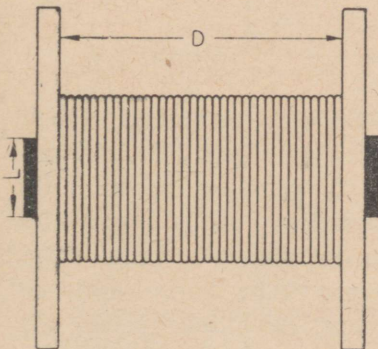
81. Kahe linna vahelise gaasijuhtme ehitamiseks valmistatud 25 m pikkused torud olid laotud tehase õuele 8 suurde täpselt ühesuurusesse kuuerealistesse virna, nii nagu näidatud joonisel 28. Alumises reas oli 20 toru. Leia: a) mitu toru oli igas virnas, b) kui pikk oli ehitatav gaasijuhe.



Joon. 28.

82. Jalgratturite matkagrupp otsustas pärast ühtlast kahe-tunnist sõitu, kui oli läbitud 24 km, tõsta igas järgnevas tunnis keskmist kiirust 2 km võrra tunnis. Mis kellaajal jõudis matkagrupp sihtkohta, kui väljuti kell 7 hommikul ja kogu tee pikkus oli 114 km?

83. Maja katus koosneb kahest võrdsest trapetsikujulisest ja kahest võrdsest kolmnurgakujulisest osast. Trapetsikujulise osa räästapoolsele küljele pandi 240 kivi ja igasse järgmisse ritta kaks kivi vähem kui eelmisse. Kolmnurgakujulise osa harjapoolsele viimasele reale pandi üks kivi ja igas eelmises reas oli kaks kivi rohkem. Teades, et kivide ridade arv nii trapetsikujulistel kui ka kolmnurgakujulistel osadel oli 30, leia, mitu kivi kulus katuse katmiseks.



Joon. 29.

Kui transpordil purunemise ja defektidega kivide osale langes

3,7% kogu tellimusest, siis ca mitmele kivile oli esitatud tellimus, kui katus sai täielikult kaetud ja ülejääki polnud?

84. Rullile, mille mõõtmed on D ja L (joon. 29), on mähitud telefonikaabel, mille läbimõõt on d cm. Kui palju kaablit mahub 1., 2., 3., ..., n . kihile, kui iga järgnev kiht on keritud eelmisele täpselt peale, mitte vahekohtadesse? Kui pikk on rullile mähitud kaabel, kui $D=0,9$ m, $L=0,8$ m, $d=4$ cm ja kihte on 25?

85. Kolhoosi üldkoosolek võttis 1961. a. algul kohustuse tõsta 20 aasta jooksul piimatoodang 3-kordseks, kusjuures piimatoodangu juurdekasv iga aasta kohta kavandati ühtlane. Kui palju kohustus kolhoos piima tootma 1965. a., 1972. a. ja 1980. a., kui 1961. a. piimatoodang oli 760 tonni?

86. Aritmeetilise progressiooni n -es liige on 1800% esimesest liikmest ning liikmete arv ja liikmete summa suhtuvad nagu 1 : 19. Leida esimene liige.

87. Leida aritmeetilise progressiooni liikmete arv, kui esimene liige on 2,5% ja vahe 7,5% n -dast liikmest.

LINEAARNE INTERPOLATSIOON.

§ 28. LINEAARSE INTERPOLATSIOONI VALEM.

Olgu antud mingi funktsiooni väärtuste tabel. Vaatame näiteks väljavõtet ruutjuurte tabelist:

x	3,2	3,3	3,4	3,5
y	1,79	1,82	1,84	1,87

Huvitagu meid y väärtus, kui x väärtus on 3,33. Esitatud tabeli ulatuses on argumendi muuduks 0,1; sellele vastavad funktsiooni muudud on 0,03; 0,02 ja 0,03. Et viimaste erinevus on küllaltki väike, siis võime vaatluse all oleva funktsiooni antud argumendi väärtuste vahemikus lugeda ligikaudu lineaarseks. Seda enam võime selle funktsiooni lugeda lineaarseks kahe kõrvuti asetseva tabeliväärtuse vahel. Kui argumendi muut on küllalt väike, siis tuleb see lineaarsuse omadus ilmsiks iga funktsiooni juures.

Interpolatsiooniks¹ nimetatakse funktsiooni väärtuste tabeli täiendamist vahepealsete väärtustega. Lineaarse interpolatsiooni korral vaadeldakse funktsiooni antud väärtuste vahel lineaarse funktsioonina.

Tuletame nüüd **lineaarse interpolatsiooni valemi**.

Olgu antud mingi funktsiooni väärtuste tabel:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

Leiame argumenti väärtusele $x_1 + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse $y_1 + \Delta y$. Et me loeme funktsiooni vahemikus x_1 -st x_2 -ni lineaarseks, siis graafikul ühendab neid punkte sirge.

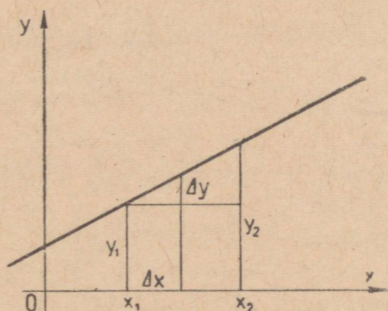
Jooniselt 30 näeme, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (põhjenda seda!).}$$

Sellest

$$\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x.$$

Seega otsitav funktsiooni väärtus



Joon. 30.

$$y_1 + \Delta y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \Delta x.$$

Näide. Kasutades eelmisel leheküljel toodud tabelit, leiame $\sqrt{3,33}$. Sel juhul

$$\Delta y = \frac{1,84 - 1,82}{3,4 - 3,3} \cdot 0,03 = \frac{0,02}{0,1} \cdot 0,03 = 0,006$$

ja otsitavaks funktsiooni väärtuseks on $1,82 + 0,006 = 1,826$.

¹ *interpolatio* (lad. k.) — vahelelũke.

§ 29. LINEAARSE INTERPOLATSIOONI RAKENDAMINE.

Vaatleme, kuidas on lineaarset interpolatsiooni rakendatud koolides kasutusel olevais V. Bradise tabelis.

Toome väljavõtte näiteks kuupide tabelist

N	0	1	2	3		7	8	9
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2		416,8	418,5	420,2

Otseselt leitavad on siit kolmekohaliste arvude 7,40 kuni 7,49 kuubid. Nii on näiteks

$$7,43^3 = 410,2, \quad 7,47^3 = 416,8.$$

Kui tahame saada aga neljakohalise arvu kuupi, siis kasutame lineaarset interpolatsiooni. Leiame näiteks $7,422^3$. Tähistame

$$\begin{aligned} x_1 &= 7,42; & x_2 &= 7,43; \\ y_1 &= 408,5; & y_2 &= 410,2; \\ \Delta x &= 0,002, \end{aligned}$$

siis

$$\Delta y = \frac{410,2 - 408,5}{7,43 - 7,42} \cdot 0,002 = \frac{1,7}{0,01} \cdot 0,002 = 0,34 \approx 0,3$$

ja seega $7,422^3 = 408,5 + 0,3 = 408,8$.

Need lineaarse interpolatsiooni abil leitavad Δy väärtused on esitatud V. Bradise tabelites parandusveergudes. Vaatluse all olev rida jätkub seal veergudega

1	2	3	4	5
2	3	5	7	8

Siit leiamegi, et argumendi kahele neljanda koha ühikule vastab funktsiooni kolm neljanda koha ühikut jne.

Seega, et tabelist leida $7,422^3$, võtame tabelist $7,42^3$ ja liidame 2-le vastava paranduse, s. o. $408,5 + 0,3 = 408,8$.

Kui tahame selle tabeli abil leida aga näiteks

$$7,487^3,$$

siis võtame tabelist $7,49^3$ ja lahutame 3-le vastava paranduse, s. o. $420,2 - 0,5 = 419,7$.

Parandusveergude kasutamine toimub samal viisil ka teiste tabelite juures.

Näiteks olgu antud väljavõte siinuste tabelist

A	0'	6'	12'	...	48'	54'	60'		1'	2'	3'
54°	0,8090	8100	8111	...	8171	8181	0,8192	35°	2	3	5
	60'	54'	48'	...	12'	6'	0'	A			

Siit leiame näiteks, et $\sin 54^\circ 12' = 0,8111$, $\sin 54^\circ 50' = 0,8174$ ja $\sin 54^\circ 10' = 0,8108$.

Viimasel juhul võtame tabelist $\sin 54^\circ 12'$ ja lahutame sellest 2'-le vastava paranduse, s. o. $0,8111 - 0,0003 = 0,8108$.

Siinuste tabelit kasutatakse ka koosinuste tabelina, sest nagu teada, on $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$. Nii on $\cos 35^\circ 12' = 0,8171$, $\cos 35^\circ 59' = 0,8092$. Koosinuse väärtuste leidmisel tuleb arvestada, et nurga suurenemisel koosinuse väärtused vähenevad.

Ülesandeid.

88. On antud tabel

x	9,10	9,11	9,12	9,13	9,14
x^2	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54

Leia lineaarse interpolatsiooni valemit kasutades x^2 , kui $x = 9,106$; 9,114; 9,121; 9,138.

89. On antud siinuste tabel

15°	15°10'	15°20'	15°30'	15°40'	15°50'	16°
0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756

Leia lineaarse interpolatsiooni valemit kasutades $\sin \alpha$, kui
 $\alpha = 15^\circ 06'; 15^\circ 12'; 15^\circ 27'; 15^\circ 38'; 15^\circ 43'; 15^\circ 55'$.

90. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) $\sin 15^\circ 42'; \sin 82^\circ 13'; \sin 62^\circ 53'; \cos 2^\circ 18'; \cos 52^\circ 49'; \cos 77^\circ 8';$

b) $\tan 30^\circ 12'; \tan 53^\circ 16'; \tan 72^\circ 47'; \cot 18^\circ 18'; \cot 34^\circ 15'; \cot 65^\circ 5'.$

91. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) $3,14^2; 5,42^2; 9,47^2; 2,143^2; 4,276^2; 8,033^2;$

b) $\sqrt{7,44}; \sqrt{28,8}; \sqrt{94,7}; \sqrt{1,972}; \sqrt{6,409}; \sqrt{39,25}; \sqrt{47,12}; \sqrt{84,86}.$

c) $1,292^3; 2,045^3; 3,917^3; 8,435^3.$

92. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) ringjoone pikkus, kui diameetri pikkus on:

4; 15; 6,47; 5,321; 8,972; 2,651;

b) ringi pindala, kui diameetri pikkus on:

1,422; 3,563; 6,743; 8,106; 9,327.

93. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia järgmiste arvude pöördväärtused:

1,192; 2,435; 3,569; 8,888; 9,052.

§ 30. LINEAARSE VÖRRANDISÜSTEEMI UURIMINE.

Teame, et lineaarvõrrandisüsteemi lahendi olemasolu küsimust saab selgitada geomeetriliselt, kui esitada koordinaatteljestikus võrrandeile vastavad sirged. Kui need sirged

1° lõikuvad, siis on süsteemil lahend olemas ja sealjuures üksainus;

2° on paralleelsed, siis süsteemil lahend puudub;

3° ühtivad, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid.

Selgitame nüüd, tuginedes tõusu ja algordinaadi mõistele, kui-

das saab võrrandisüsteemist kohe välja lugeda, missugusega nimetatud kolmest juhust on tegemist.

Vaatleme täheliste kordajatega lineaarset võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} q_1x + p_1y = m_1 \\ q_2x + p_2y = m_2. \end{cases}$$

Rakendame selle süsteemi uurimiseks võrdlemisvõtet. Selleks tuleb mõlemast võrrandist avaldada y :

$$\begin{cases} y = -\frac{q_1}{p_1}x + \frac{m_1}{p_1} \\ y = -\frac{q_2}{p_2}x + \frac{m_2}{p_2}. \end{cases}$$

Need võrrandid on tõlgendatavad sirge võrranditena, mille tõusud on vastavalt $-\frac{q_1}{p_1}$ ja $-\frac{q_2}{p_2}$ ning algordinaadid $\frac{m_1}{p_1}$ ja $\frac{m_2}{p_2}$.

Asendame selles süsteemis kordajad järgmiselt:

$$-\frac{q_1}{p_1} = a_1; \quad \frac{m_1}{p_1} = b_1; \quad -\frac{q_2}{p_2} = a_2 \text{ ja } \frac{m_2}{p_2} = b_2.$$

Võrrandisüsteem esitub siis kujul:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi lahendi olemasoluks on tarvilik, et need sirged lõikuksid, sest ainult siis leidub niisugune x väärtus, millele vastavad y väärtused on võrdsed.

Oletame, et nende sirgete tõusud on võrdsed, s. t. et

$$-\frac{q_1}{p_1} = -\frac{q_2}{p_2} \text{ ehk } a_1 = a_2.$$

x kordaja sirge võrrandis tähendab sirge tõusunurga tangensit. Olgu esimese võrrandiga määratud sirge tõusunurk α_1 ja teisel α_2 , siis

$$\tan \alpha_1 = a_1 \text{ ja } \tan \alpha_2 = a_2.$$

Et nende võrduste paremad pooled on võrdsed, siis on ka

$$\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2.$$

Et nurga α muutumisel 0° -st 180° -ni vastab igale nurga väärtusele üks kindel tan α väärtus, siis järeldub viimasest võrdusest, et

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Seega juhul, kui sirgete tõusud on võrdsed, on võrdsed ka nende tõusunurgad. See tähendab aga, et vaadeldavad sirged on paralleelsed või ühtivad, sest kaasnurgad α_1 ja α_2 on võrdsed ainult paralleelsete või ühtivate sirgete juures.

Et võrdust $-\frac{q_1}{p_1} = -\frac{q_2}{p_2}$ saab esitada kujul

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

siis juhul, kui lineaarses võrrandisüsteemis on tundmatute kordajad võrdelised, puudub sellel süsteemil lahend või neid on lõpmata palju.

Kui tõusude võrdsuse tingimusele lisandub algordinaatide võrdsuse tingimus, s. t. et ka

$$\frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2} \text{ ehk } b_1 = b_2,$$

siis need sirged peavad ühtima.

Tingimused

$$-\frac{q_1}{p_1} = -\frac{q_2}{p_2} \text{ ja } \frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2}$$

saame esitada ka teisiti, kasutades võrde põhiomadust:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Neist võrdustest järeldub aga, et

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Seega,

kui võrrandisüsteemis ainult tundmatute kordajad on võrdelised, siis on vastavad sirged paralleelsed ja võrrandisüsteemil lahend puudub. Kui aga nii tundmatute kordajad kui ka vabaliikmed on võrdelised, siis sirged ühtivad ja võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid.

Nii näiteks pole võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$$

lahendit, sest vastavad sirged on paralleelsed $\left(\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{1}\right)$.
Võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendeid, sest vastavad sirged ühtivad $\left(\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}\right)$.

Oletame nüüd, et

$$-\frac{q_1}{p_1} \neq -\frac{q_2}{p_2} \text{ ehk } a_1 \neq a_2,$$

s. t. et sirgete tõusud ei ole võrdsed. Sellest järeldub, et ka tõusunurgad ei ole võrdsed, sest kui

$$\tan \alpha_1 \neq \tan \alpha_2,$$

siis ka

$$a_1 \neq a_2.$$

Seega on nüüd kaasnurgad erineva suurusega ja sirged lõikuvad olenemata sellest, kas algordinaadid on võrdsed või erinevad. Juhul, kui algordinaadid on võrdsed $b_1 = b_2 = b$, siis asub sirgete lõikepunkt ordinaatteljel ja tema koordinaadid on 0 ja b . Süsteemi lahendiks on siis

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = b. \end{cases}$$

Ülesandeid.

94. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -x - y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

95. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid võrdlusmeetodiga:

$$1) \begin{cases} 0,6x - 3,2y = 2,8 \\ 2,2x + 1,4y = -6,3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -3,1x + 0,2y = 1,9 \\ 0,6x - 1,3y = 0,7 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{2}{3}x - 2 = \frac{1}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y = 8\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1\frac{3}{4} \end{cases}$$

96. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid kas asendus- või liitmisvõttega:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 1,5x + 2,3y = -1 \\ 0,3x + 0,4y = -0,2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 14y = 47 \\ 2x - 21y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 0,7x + 0,3y = 12,7 \\ 0,3y + 0,4x = 9,7 \end{cases}$$

97. Selgita, missugustel järgmistest süsteemidest on üks lahend, lõpmata palju lahendeid või lahendid puuduvad:

$$1) \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{1}{2}y = x - 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + y = 5 - x \\ 2x - 10 = 2y \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y - x = 7 \\ y + 3x = 21 \end{cases}$$

98. Leia sirgete lõikepunkt:

$$1) \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3} \\ y = 2\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y = 4,32 - 2,16x \\ y = -15,6 + 6,51x \end{cases}$$

KORDAMISÜLESANDEID.

99. On antud lineaarsed funktsioonid:

$$a) y = x - 2$$

$$c) y = -2x + 3$$

$$b) y = 5x + 1$$

$$d) y = -3x - 5$$

$$e) y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

$$g) y = 4\frac{1}{5}x$$

$$f) y = -0,4x - 0,1$$

$$h) y = -\frac{4}{3}x$$

a) Missugused nendest funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

b) Kasutades trigonomeetriliste funktsioonide tabelleid, leia, kui suure nurga moodustavad vastavad sirged x -teljega.

c) Tee kindlaks, mis märgiga on nende funktsioonide nullkohad.

d) Leia nende funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

100. a) Leia kõigi kolmega jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 300 (incl.).

b) Leia kõigi kolmega mittejaguvate arvude summa samas vahemikus.

c) Leia kõigi 5-ga jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 1000 (incl.).

101. Jaota 10 mõõtu vilja kümnele isikule nõnda, et iga järgmine saab $\frac{1}{8}$ mõõtu vähem kui eelmine (Ahmes, ca 1700 a. e. m. a.).

102. Näita, et kui aritmeetilise progressiooni esimene liige on $n^2 - n + 1$ ja vahe on 2, siis n liikme summa on n^3 .

103. Leia

a) progressiooni

$-12, -7, -2, 3, \dots$ 236. liige ja 12. liige,

b) progressiooni

$0, -3, -6, -9, \dots$ 101. liige ja 11. liige.

c) progressiooni

$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, \dots$ 555. liige ja 5. liige.

104. Lahenda järgmised võrratused.

$$1) \frac{x-1}{4} + \frac{2x+3}{2} > \frac{4-x}{3}$$

$$2) \frac{1}{3} - \frac{2-3x}{6} < \frac{4x+1}{12} + \frac{1-x}{4}$$

$$3) \frac{3x-5}{30} > \frac{6-5x}{75}$$

105. Lahenda järgmine võrratusesüsteem ja võrratused.

$$1) \begin{cases} \frac{4-3x}{20} - \frac{2-5x}{36} > 1\frac{2}{3} \\ \frac{x-2}{9} + \frac{6-2x}{15} < 3\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$2) (5-3x)(6+7x) > 0$$

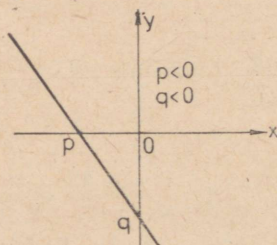
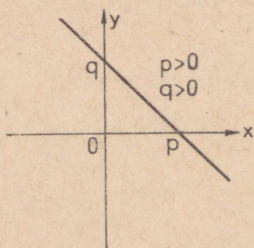
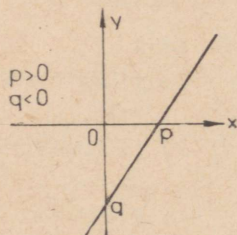
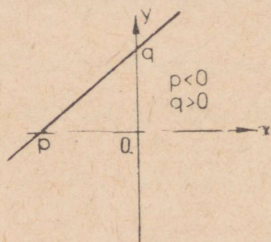
$$3) \frac{8-2x}{x-5} < 0.$$

106. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} \frac{1}{2} \left(y + \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{5} (x+2) = 1,1 \\ x - 2y + 4 = \frac{1}{4} \left[2x + 3 \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{2} - y = \left\{ \frac{1}{3} [x - 5(y - 0,3)] - 1 \right\} + 1,2 \\ 3 \left[1 - \frac{2-3(x-y)}{5} \right] + 6,94 = 2(3x-1) \end{cases}$$

107. Joonisel 31 on esitatud neli koordinaattelgi lõikavat sirget. Missuguste sirgete võrrandis on x kordaja positiivne, negatiivne? Miks?



Joon. 31

108. Leia sirgete $y=2x-1$ ja $y=-x+2$ lõikepunkt.

109. Leia võrrandid sirgele, mis läbib punkte $A(-3; 0)$ ja $B(0; 2)$, ja sirgele, mis läbib punkte $C(2; 0)$ ja $D(0; -2)$. Leia nende sirgete lõikepunkt.

110. Leia sirge $y=-2x+2$ ja ringjoone $x^2+y^2=4$ lõikepunktid.

111. Leia sirge $y=0,3x+3$ ja ringjoone $x^2+y^2=9$ lõikepunktid.

112. Leia sirge $y=2x-1$ ja ringjoone $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ lõikepunktid.

113. Leia sirge $y=-4x+3$ ja parabooli $y=\frac{1}{2}x^2$ lõikepunktid.

114. Leia sirge $y=2x-1$ ja hüperbooli $y=\frac{1}{x}$ lõikepunkt.

III. RUUTFUNKTSIOON.

§ 31. RUUTFUNKTSIOON JA TEMA GRAAFIK.

Ruutfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis esitub avaldisena ax^2+bx+c , kus a , b ja c on antud arvud ($a \neq 0$).

VIII klassis kasutasime ruutfunktsiooni graafiku joonestamiseks järgmist teed:

1° koostasime antud funktsiooni avaldise järgi ühe tema väärtuste tabeli,

2° kandsime tabeli väärtuspaaridele vastavad punktid koordinaatteljestikku,

3° ühendasime need punktid sujuva joonega.

Saadud graafikut nimetatakse parabooliks.

§ 32. PARABOOLI DEFINITSIOON JA JOONESTAMINE.

Eespool (§ 4) tuletasime mõnele joonele võrrandi siis, kui joon oli defineeritav mingi kindla omadusega punktide hulgana.

Kuidas defineeritakse antud sirgega paralleelset sirget, nurgapoolitajat ja ringjoont?

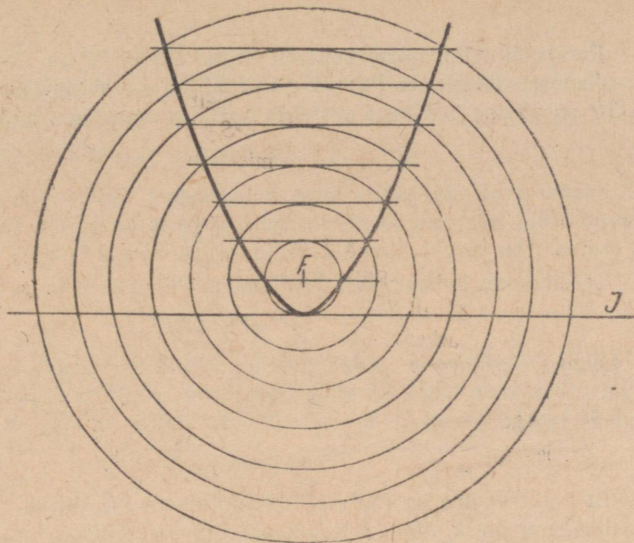
Ka parabool on defineeritav punktide hulgana järgmiselt:

parabooliks nimetatakse niisugust joont tasapinnal, mille iga punkt asetseb ühest etteantud punktist ja ühest etteantud sirgest samal kaugusel.

Etteantud punkti nimetatakse fookuseks ja etteantud joont juhtjooneks.

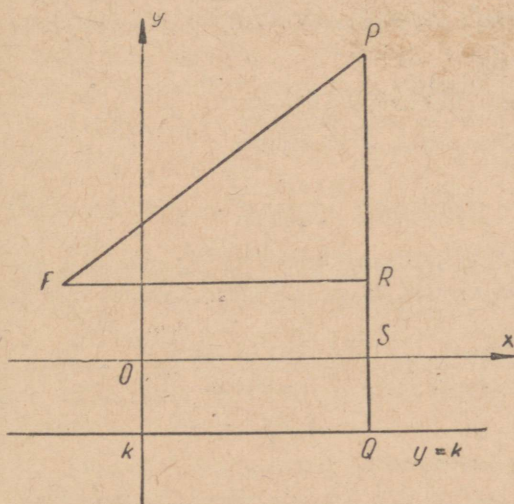
Tuginedes definitsioonile on võimalik kergesti parabooli joonestada. Selleks tõmbame rea ringjooni, mille keskpunkt on fookuses, ja märgime kõigil ringjoontel need punktid, mis on juhtjoonest selle ringjoone raadiuse kaugusel (vt. joon. 32).

Joon. 32.



§ 33. PARABOOLI VÖRRAND.

Et tuletada parabooli võrrandit, valime teljestiku nii, et x -telg oleks paralleelne juhtjoonega (joon. 33), siis on juhtjoone võrrandiks $y=k$, kus k on konstant. Fookuseks olgu mingi punkt väljaspool juhtjoont. Olgu selleks $F(m, n)$.



Joon. 33.

Parabooli mistahes punktiks olgu $P(x, y)$. Kui parabool on antud, siis on teada arvud k , m ja n . Et leida parabooli võrrandit, tuleb neid arve kasutades leida seos parabooli mistahes punkti koordinaatide x ja y vahel.

Parabooli definitsiooni kohaselt lõigud PQ ja FP on võrdsed $PQ=FP$.

Jooniselt näeme, et $PQ=PS+SQ$. Et PS on võrdne punkti P ordinaadiga ja SQ on võrdne juhtjoone mistahes punkti ordinaadiga, s. o. k -ga, siis

$$PQ=y-k.$$

FP saame avaldada täisnurksest kolmnurgast PRF . Selle kolmnurga tipu R koordinaadid selguvad jooniselt: tema abstsiss on võrdne punkti P abstsissiga ja ordinaat on võrdne punkti F ordinaadiga. Seega $R(x, n)$.

Täisnurksest kolmnurgast PRF saame Pütagorase lause põhjal, et

$$FP^2=FR^2+PR^2.$$

Lõigu FR pikkus on võrdne punktide R ja F abstsisside vahe absoluutväärtusega: $|x-m|$ ning lõigu PR pikkus on võrdne punktide P ja R ordinaatide absoluutväärtusega $|y-n|$. Et $|x-m|^2=(x-m)^2$ ja $|y-n|^2=(y-n)^2$, siis

$$FP^2=(x-m)^2+(y-n)^2.$$

Et $PQ=FP$, siis ka $PQ^2=FP^2$. Nüüd on nii PQ kui ka FP avaldatud meile vajalike suuruste k, m, n, x ja y kaudu. Saame võrduse

$$(y-k)^2=(x-m)^2+(y-n)^2.$$

Seda võrrandit on võimalik lihtsustada järgmiselt.

1° Avame sulud:

$$y^2-2ky+k^2=x^2-2mx+m^2+y^2-2ny+n^2.$$

2° Viime kõik liikmed, mis sisaldavad tegurit y , võrduse vasakule poolele ja kõik teised liikmed paremale poolele:

$$y^2-2ky-y^2+2ny=x^2-2mx+m^2+n^2-k^2.$$

3° Koondame sarnased liikmed:

$$(-2k+2n)y=x^2-2mx+m^2+n^2-k^2.$$

4° Jagame võrrandi mõlemad pooled y kordajaga:

$$y = \frac{1}{-2k+2n} x^2 - \frac{2m}{-2k+2n} x + \frac{m^2+n^2-k^2}{-2k+2n}. \quad (*)$$

Et x^2 ja x kordaja ning vabaliige koosnevad konstantsetest suurustest, siis on nad ka ise konstandid. Tähistame need konstandid lihtsuse mõttes a, b ja c -ga, s. t.

$$\frac{1}{-2k+2n} = a; \quad -\frac{2m}{-2k+2n} = b \quad \text{ja} \quad \frac{m^2+n^2-k^2}{-2k+2n} = c,$$

siis saame parabooli võrrandiks

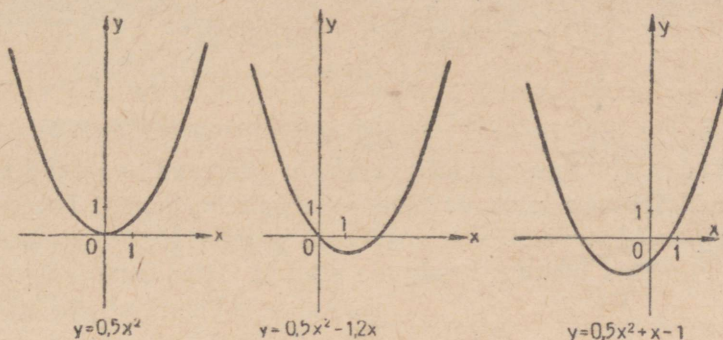
$$y=ax^2+bx+c.$$

Et tulemuseks on ruutfunktsioon, siis leiab kinnitust VIII klassis ruutfunktsiooni graafikule antud nimetus, et

ruutfunktsiooni graafikuks on parabool.

*

Joonisel 34 on esitatud VIII klassis tundma õpitud ruutfunktsioonide graafikud. Nagu neilt jooniseilt nähtub, sõltub parabooli võrrand tema asendist koordinaatteljestiku suhtes. Ja nimelt järgmiselt.



Joon. 34.

1° Kui parabool ei läbi koordinaatide alguspunkti, siis tema võrrandis $y = ax^2 + bx + c$ on c nullist erinev.

2° Kui parabool läbib koordinaatide alguspunkti, siis on $c = 0$ ja parabooli võrrand esitub kujul $y = ax^2 + bx$.

3° Kui parabooli haripunkt asub koordinaatide alguspunkti, siis on $b = c = 0$ ja parabooli võrrand esitub kujul $y = ax^2$.

Teame ka, et parabool avaneb ülespoole, kui $a > 0$, ja allapoole, kui $a < 0$.

Ülesandeid.

115. a) Missugust tingimust peavad täitma konstandid m , n ja k , et parabooli võrrandis (*) puuduks vabaliige? Mis järelduse sa teed sellest parabooli asetsemise kohta koordinaatide alguspunkti suhtes?

b) Missugust tingimust peab täitma konstant m , et parabooli võrrandis (*) puuduks lineaarne liige? Mis järelduse sa teed sellest fookuse asukoha kohta?

116. Tuleta parabooli võrrand, kui juhtjoone võrrandiks on $y = -1$ ja fookuseks on punkt $F(0, 1)$.

117. Kuidas asetseb parabool koordinaatteljestiku suhtes, kui tema võrrand on:

✓ a) $y = x^2 + 3x$;

d) $y = 2x^2 - 2$;

✓ b) $y = x^2 - 3x$;

e) $y = 2 - 2x^2$;

✓ c) $y = 3x - x^2$;

f) $y = 1 + 2x - x^2$?

118. Kuidas asetseb parabool $y = ax^2 + bx + c$ koordinaatteljes-
tikus, kui

a) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$;

b) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$?

§ 34. PARABOOLI HARIPUNKT.

Kui parabool avaneb ülespoole, siis on haripunkti ordinaat väiksem, kui selle parabooli mistahes teise punkti ordinaat.

Näide 1. Olgu antud parabooli võrrand $y = 2x^2 + 4x - 3$. Seame ülesandeks leida vastava parabooli haripunkti koordinaadid. Selleks teisendame ruutfunktsiooni avaldist järgmiselt: võtame kahes esimeses liikmes 2 sulgude ette ja täiendame sulgudesse

jäänud kaksliikme $x^2 + 2x$ täisruuduks. Et avaldise väärtus ei muutuks, tuleb lahutada 2:

$$y = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 - 2.$$

Siit

$$y = 2(x + 1)^2 - 5.$$

Kui nüüd $x = -1$, siis $y = -5$. Iga teise x väärtuse puhul on $(x + 1)^2$ positiivne ja y väärtus suurem kui -5 . Punkt $(-1; -5)$ on antud parabooli haripunktiks (joon. 35).

Näide 2. Olgu antud parabooli võrrand $y = -3x^2 - 4x + 1$. Teisendame seda avaldist samal viisil nagu eelmistki:

$$y = -3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + 1 + \frac{4}{3};$$

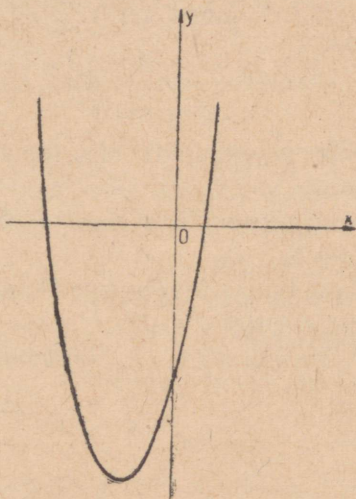
$$y = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 2\frac{1}{3}.$$

Kui $x = -\frac{2}{3}$, siis $y = 2\frac{1}{3}$. Kui $x \neq -\frac{2}{3}$, siis on $y < 2\frac{1}{3}$.

Punkt $(-\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3})$ on antud parabooli haripunktiks (joon. 36).

Teisendame nüüd parabooli üldkujulist võrrandit

$$y = ax^2 + bx + c.$$



Joon. 35.

Võtame esimeses kahes liikmes a sulgude ette

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c.$$

Teisendame sulgavaldise täisruuduks, liites sulgudes $\frac{b^2}{4a^2}$ ning, et võrdus jääks keh-
tima, lahutame väljaspool sulge $\frac{b^2}{4a}$.

Saame

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

ehk

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Parabooli haripunktiks on punkt $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$.

Tähistades avaldise $b^2 - 4ac$ tähega D , võime parabooli haripunkti koordinaadid esitada kujul

$$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a} \right).$$

Ülesandeid.

119. Leia järgmiste paraboolide haripunktid.

a) $y = x^2 - 6x + 10$

f) $y = -2,4x^2 + 0,24x - 0,096$

b) $y = x^2 + 4x - 2$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$

c) $y = 2x^2 - 2x - 2$

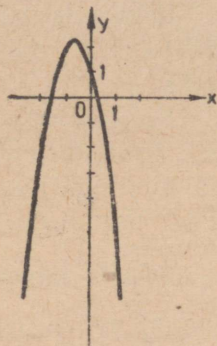
h) $y = 3x^2 - 18x + 27$

d) $y = -3x^2 - 4x + 1$

i) $y = 2x^2 + 16$

e) $y = 0,4x^2 + 4x + 10$

j) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{27}$



Joon. 36.

§ 35. RUUTFUNKTSIOONI EKSTREEMUMKOHAD.

Kui ruutfunktsiooni graafikuks olev parabool avaneb ülespoole, siis tema haripunkti abstsiss on argumendi väärtuseks, mille korral ruutfunktsioon omab vähima ehk nn. minimaalse väärtuse. Seda argumendi väärtust nimetatakse ruutfunktsiooni miinimumkohaks.

Esimesele näitele (§ 34) tuginedes võime öelda, et funktsiooni $2x^2+4x-3$ miinimumkohaks on $x=-1$ ja miinimumväärtuseks -5 .

Kui ruutfunktsiooni graafikuks olev parabool avaneb allapoole, siis tema haripunkti abstsiss on argumenti väärtuseks, mille korral ruutfunktsiooni väärtus on suurim ehk nn. m a k s i m a a l n e. Seda argumenti väärtust nimetatakse ruutfunktsiooni **maksimumkohaks**.

Teisele näitele (§ 34) tuginedes võime öelda, et funktsiooni $-3x^2-4x+1$ maksimumkohaks on $x=-\frac{2}{3}$ ja maksimaalseks väärtuseks $2\frac{1}{3}$.

Nii funktsiooni maksimumkohti kui ka miinimumkohti nimetatakse ühe nimetusega — **ekstreemumkohad**. Vastavaid funktsiooni väärtusi nimetatakse **ekstreemväärtusteks**.

Ülesandeid.

120. Leia järgmiste funktsioonide ekstreemumkohad ja ekstreemväärtused. Tee kindlaks, kas ekstreemumkoht on maksimum- või miinimumkoht.

a) x^2+2x-2

e) $-x^2+12x-35$

b) x^2-4x+4

f) $-4x^2+4x-1$

c) $3x^2-8x-3$

g) $-3x^2+2x+8$

d) $4x^2-4x-3$

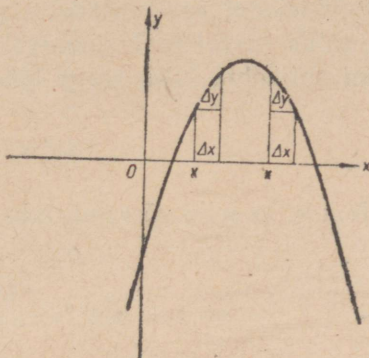
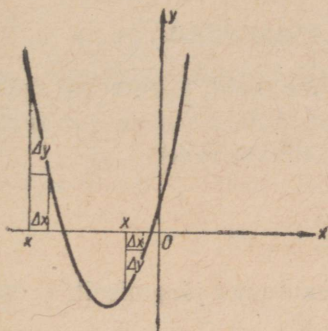
h) $-5x^2+4x-7$

§ 36. RUUTFUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE.

Joonisel 37 on esitatud ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafikud juhul, kui $a>0$, ja juhul, kui $a<0$.

Võtame esimesel graafikul haripunkti vasakul ühe abstsissi väärtuse x ja tõmbame sellele vastava ordinaatlõigu. Muutugu nüüd x positiivse muudu Δx võrra, siis y muutub negatiivse muudu Δy võrra. See omadus kehtib iga x puhul, mis on haripunkti abstsissist vasakul.

Paremal pool haripunkti vastab aga positiivsele muudule Δx y positiivne muut Δy . See omadus kehtib iga x puhul, mis on haripunkti abstsissist paremal.



Joon. 37.

Tähistades haripunkti abstsissi kui vastava funktsiooni ekstreemukohta x_e , võime seega öelda, et

kui $a > 0$, siis ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$ on kahanev piirkonnas $x < x_e$ ja kasvav piirkonnas $x > x_e$.

Jälgides joonist võime öelda, et

kui $a < 0$, siis ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$ on kahanev piirkonnas $x > x_e$ ja kasvav piirkonnas $x < x_e$.

Nii on näiteks § 34 vaadeldud ruutfunktsioon

$$y = 2x^2 + 4x - 3$$

kahanev, kui $x < -1$, ja kasvav, kui $x > -1$, ja funktsioon

$$y = -3x^2 - 4x + 1$$

kasvav, kui $x < -\frac{2}{3}$, ja kahanev, kui $x > -\frac{2}{3}$.

Ülesandeid.

121. Leia funktsioonide

a) $x^2 - 3x + 5$

b) $-2x^2 + 3x - 2$

c) $5x^2 - 10x + 25$

d) $-4x^2 - 6x + 9$

maksimum- või miinimumpunktid ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

§ 37. RUUTFUNKTSIOONI NULLKOHAD.

Funktsiooni nullkohtadeks nimetasime neid argumendi väärtusi, mille korral funktsiooni väärtus on null. Et leida ruutfunktsiooni nullkohti, tuleb seega lahendada ruutvõrrand

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Teame, et selle võrrandi lahendid avalduvad järgmiselt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Selles valemis esinevat juuritavat $b^2 - 4ac$ nimetatakse diskriminandiks ja tähistatakse tähega D , s. t.

$$b^2 - 4ac = D.$$

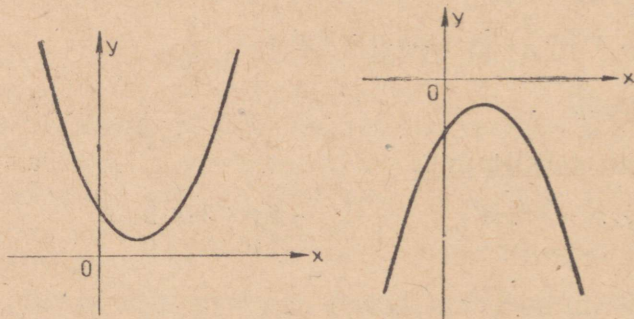
Teame samuti, et ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$

- 1° lahendid puuduvad, kui $D < 0$,
- 2° on 2 ühtivat lahendit, kui $D = 0$,
- 3° on 2 erinevat lahendit, kui $D > 0$.

Graafikul vastavad ruutfunktsiooni nullkohtadele parabooli ja x -telje lõikepunktide abstsissid.

Selgitame nüüd eespool loetletud tingimusi ruutfunktsiooni nullkohtade olemasolu kohta graafiku abil.

a) Parabool võib koordinaatteljestikus asetseda nii, et ta ei lõika x -telge (joon. 38), s. t. et sel juhul vastaval ruutfunktsioonil



Joon. 38.

pole nullkohti. Niisuguse juhuga on tegemist siis, kui pärast ruutkolmliikme teisendamist kujule

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}$$

on kas

$$1) a > 0 \text{ ja } -\frac{D}{4a} > 0$$

või

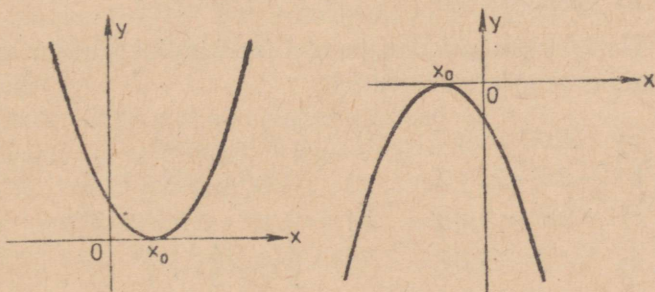
$$2) a < 0 \text{ ja } -\frac{D}{4a} < 0.$$

Nii esimesest kui teisest tingimusest järeldub, et

$$D < 0.$$

b) Parabool võib teljestikus asetseda nii, et tal on x -teljega ainult üks ühine punkt. See on siis, kui x -telg on parabooli puutujaks (joon. 39). Sel juhul asetseb haripunkt x -teljel ja järelikult haripunkti ordinaat on null, s. t. et $-\frac{D}{4a} = 0$ ja siit

$$D = 0.$$

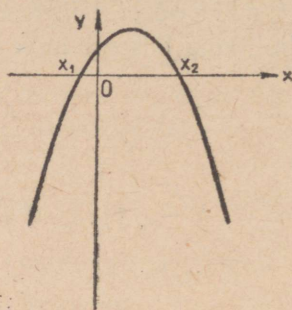
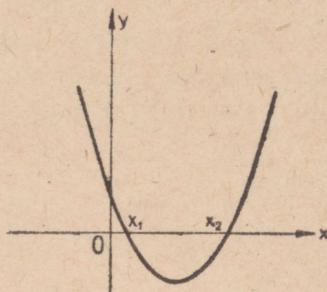


Joon. 39.

c) Kolmandaks võimaluseks on, et paraboolil on x -teljega 2 lõikepunkti, s. t. et vastaval ruutfunktsioonil on kaks erinevat nullkohta (joon. 40). Kahe erineva nullkoha olemasolu korral peavad a ja haripunkti ordinaat olema erinevate märkidega, s. t.

$$\text{kui } a > 0, \text{ siis } -\frac{D}{4a} < 0 \text{ ja}$$

$$\text{kui } a < 0, \text{ siis } -\frac{D}{4a} > 0.$$



Joon. 40.

Nii esimesest kui teisest tingimusest järeldub, et
 $D > 0$.

Ülesandeid.

122. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

a) $2x^2 - x - 3$

c) $-2x^2 - 3x + 6$

b) $9x^2 + 10x - 27$

d) $x^2 - 2x + 1$

123. Haripunkti leidmise kaudu tee kindlaks, mitu nullkohta on järgmistel ruutfunktsioonidel:

a) $5x^2 - 6x + 7$

f) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

b) $-3x^2 - 3x - 3$

g) $0,4x^2 + 2,6x - 14,5$

c) $8x^2 + x + 3$

h) $-0,2x^2 - 0,75x + 17$

d) $-x^2 - x + 6$

i) $-\frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{7}$

e) $2x^2 - 7x - 10$

§ 38. RUUTFUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUSPIIRKONNAD.

Kui oskame leida ruutfunktsiooni nullkohti, siis saame raskusteta välja kirjutada ka need argumendi väärtuste piirkonnad, kus funktsioon on positiivne (positiivsuspiirkonnad), või piirkonnad, kus funktsioon on negatiivne (negatiivsuspiirkonnad).

Vaatleme positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade määramist eraldi juhtudel, kui ruutfunktsioonil nullkohti pole, kui tal on kaks võrdset nullkohta ja kui tal on kaks erinevat nullkohta.

a) Kui ruutfunktsioonil nullkohad puuduvad, siis on parabool kõigi oma punktidega ühel pool x -telge: kui $a > 0$, siis on ta sellest ülalpool, kui $a < 0$, siis allpool (joon. 38).

Missugustel tingimustel puuduvad ruutfunktsioonil nullkohad?

Järelikult, kui neile tingimustele lisandub, et $a > 0$, siis on ruutfunktsioon positiivne iga x väärtuse korral, ja kui $a < 0$, siis on ruutfunktsioon negatiivne iga x väärtuse korral.

b) Kui ruutfunktsioonil on kaks võrdset nullkohta, siis kõigi argumendi väärtuste korral, mis on nullkohast erinevad, on ruutfunktsioon positiivne, kui $a > 0$, ja negatiivne, kui $a < 0$.

See selgub jooniselt 39.

Tõepoolest, kui ruutfunktsiooni kahekordseks nullkohaks on $x = x_0$, siis:

1) kui $a > 0$, on $ax^2 + bx + c > 0$ siis, kui $x > x_0$, ja ka siis, kui $x < x_0$;

2) kui $a < 0$, on $ax^2 + bx + c < 0$ siis, kui $x > x_0$, ja ka siis, kui $x < x_0$.

Esimesel juhul ei ole ruutfunktsioonil negatiivsuspiirkonda, teisel juhul ei ole ruutfunktsioonil positiivsuspiirkonda.

c) Kui ruutfunktsioonil on kaks erinevat nullkohta, siis on tal olemas nii positiivsus- kui ka negatiivsuspiirkond.

Olgu nullkohtadeks $x = x_1$ ja $x = x_2$, kus $x_1 < x_2$ (joon. 40). Jooniselt näeme, et

1) kui $a > 0$, on $ax^2 + bx + c > 0$ siis, kui $x < x_1$
ja kui $x > x_2$, ning $ax^2 + bx + c < 0$
siis, kui $x_1 < x < x_2$;

2) kui $a < 0$, on $ax^2 + bx + c > 0$ siis, kui $x_1 < x < x_2$,
ning $ax^2 + bx + c < 0$ siis, kui $x < x_1$ ja kui $x > x_2$.

Ülesandeid.

124. Leia järgmiste funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $-2x^2 - 7x + 3$

b) $3x^2 - x - 10$

c) $-2x^2 + 4x + 16$

d) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$

e) $x^2 - 5x + 8$

f) $-2x^2 - 10$

§ 39. RUUTVÖRRATUSE LAHENDAMINE.

Leida antud ruutfunktsiooni ax^2+bx+c positiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtuste piirkonnad, mille puhul

$$ax^2+bx+c>0.$$

Leida antud ruutfunktsiooni ax^2+bx+c negatiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtuste piirkonnad, mille puhul

$$ax^2+bx+c<0.$$

Kirjutusi

$$ax^2+bx+c>0 \text{ ja } ax^2+bx+c<0$$

nimetatakse ruutvõrratusteks. Seega oleme eelmises paragrahvis juba tutvunud ruutvõrratuse lahendamisega.

N ä i d e. Lahendada võrratus

$$3x^2+5x-2<0,$$

s. t. leida funktsiooni $3x^2+5x-2$ negatiivsuspiirkond.

Leiame kõigepealt nullkohad, milleks lahendame ruutvõrrandi

$$3x^2+5x-2=0.$$

Siit

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6}$$

ja nullkohad $x_1 = \frac{1}{3}$ ja $x_2 = -2$.

Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis on nii antud funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks kui ka antud võrratuse lahendiks

$$-2 < x < \frac{1}{3}$$

Kui ruutvõrratus ei ole normaalkujus, s. t. kujus

$$ax^2+bx+c \geq 0,$$

siis tuleb ta eelkõige sellisele kujule teisendada, kasutades lineaarse võrratuse lahendamisel tundmaõpitud teisendusi.

Ülesandeid.

125. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

$$\begin{array}{ll} 1) & x^2 - 2x + 1 > 0 \\ 2) & -x^2 + 9x - 14 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3) & 3x^2 + 2x + 1 < 0 \\ 4) & 6x^2 - x - 12 < 0. \end{array}$$

126. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

$$\begin{array}{ll} 1) & \frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} < \frac{x+5}{6} \\ 2) & \frac{x(x-7)}{3} - 1 > \frac{11x}{10} - \frac{x-4}{3} \\ 3) & \frac{(x+3)^2}{5} + 1 - \frac{(3x-1)^2}{5} < \frac{x(2x-3)}{2} \end{array}$$

127. Missuguste m väärtuste korral on järgmistel ruutfunktsioonidel ainult positiivsed väärtused?

$$\begin{array}{ll} \bullet 1) & x^2 + 2x + m \\ \bullet 2) & x^2 - 3x - m \\ \bullet 3) & x^2 + 2x + m - 10 \\ \bullet 4) & mx^2 - 10x - 5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 5) & (m+1)x^2 - 4x + 3 \\ 6) & x^2 - (m-2)x + 2m \\ 7) & x^2 + (m+3)x + 6m - 1 \\ 8) & x^2 - (m-5)x - 2 - 3m \end{array}$$

128. Missuguste m väärtuste korral on järgnevate võrrandite lahendid reaalsed ja erinevad, reaalsed ja võrdsed ning missuguste m väärtuste korral pole võrrand lahenduv?

$$\begin{array}{ll} \bullet 1) & (5m+1)x^2 + (7m+3)x + 3m = 0 \\ 2) & (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0 \\ 3) & x^2 + 2(m-1)x + 3m^2 + 5 = 0 \end{array}$$

KORDAMISÜLESANDEID.

129. Leia järgmiste funktsioonide graafikute haripunktid, kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, nullkohad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

$$\begin{array}{ll} a) & -x^2 + 3x - 4 \\ b) & 3x^2 + 4x - 7 \end{array} \quad \begin{array}{ll} c) & 0,5x^2 + 1,5x + 5 \\ d) & 3x^2 + 2x + 2 \end{array}$$

e) $2x^2 - 6x$

g) $x^2 + 6$

f) $-4x^2 + 3x$

h) $-3x^2 + 9$

130. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemiskiir-
konnad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

a) $3x^2 + 3x - 3$

d) $-2x^2 - 6x + 3$

b) $2x^2 - 5$

e) $-3x^2 + 9x$

c) $-x^2 + 2x - 1$

f) $-x^2 - 4$

131. Leia järgmiste funktsioonide ühine positiivsuspiirkond.

a) $y = 2x - 1$

$y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = -x^2 + x + 2$

$y = -x - 1$

132. Leia järgmiste funktsioonide ühine negatiivsuspiirkond.

a) $y = x - 2$

$y = 2x^2 - 4x - 16$

b) $y = -3x^2 + 2x + 5$

$y = -x + 3$

133. Lahenda järgmised võrratused.

a) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$

d) $2 - \frac{x-3}{x-2} < \frac{x-2}{x-1}$

b) $\frac{x-1}{x^2+4x+2} < 0$

e) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} > 0$

c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$

f) $3 - \frac{2x-17}{x-5} < \frac{x-5}{x+2}$

134. Missuguse tingimuse korral sirge $y = ax + b$ ja ringjoon
 $x^2 + y^2 = r^2$

a) lõikuvad kahes punktis,

b) puutuvad,

c) ei lõiku?

135. a) On teada, et ruutfunktsioonil on suurim väärtus 25, kui $x = 0,5$, ja väärtus 24, kui $x = 0$. Leia see ruutfunktsioon.

b) Leia ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ kordajad, kui tema ekstreemumpunktiks on $H(6; -12)$ ja nullkohaks $N(8; 0)$.

c) Leia ruutfunktsioon, kui on teada, et tema ekstreemumpunktiks on $H(-2; 7)$ ja tema graafik läbib punkti $(0; 15)$.

136. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $x^2 + ab = (a + b)x$

b) $x^2 - ax + ab = b^2$

c) $x^2 - 3nx + 2n^2 = 0$

d) $x^2 - 2nx + n^2 = 0$

e) $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$

f) $a + x = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$

g) $\frac{2x}{x+b} + \frac{x}{x-b} = \frac{b^2}{4x^2 - 4b^2}$

h) $\frac{5a^2}{4x^2 - a^2} = \frac{2x}{2x-a} - \frac{x}{2x+a}$

i) $\frac{2x}{x-b} + \frac{12x^2}{b^2 - x^2} = \frac{b-x}{x+b}$

j) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{x} = \frac{1}{m+n+x}$

IV. TEHTED ASTMETE JA JUURTEGA. ASTMEFUNKTSIOONID.

§ 40. TEHTED ASTMETEGA NATURAALARVULISTE ASTENDAJATE KORRAL.

Nagu teada,

astendamine on võrdsetest teguritest koosneva korrutise
arvutamine.

Astme definitsioonist järeldub, et

$$1^n = 1 \text{ ja } 0^n = 0.$$

Negatiivsete arvude korrutamise juhisest järeldame, et

negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne ja paaritu arvulise astendajaga aste on negatiivne.

Näiteid.

$$(-4)^2 = 16;$$

$$(-4)^3 = -64;$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \text{ sest } 2n \text{ on paarisarv;}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}, \text{ sest } 2n-1 \text{ on paaritu arv.}$$

Astme definitsioonist on näha, et astendajaks võib olla iga positiivne täisarv, mis on suurem kui 1. Erijuhul, kui astendaja $n=1$, mõistame astet a^n arvu a -na:

$$a^1 = a.$$

Ülesandeid.

137. Arvuta järgmised astmed:

1) 2^5

2) $(-2)^3$

3) $0,3^2$

4) $(-0,9)^4$

3^5

$(-2)^6$

$0,5^3$

$(-0,02)^5$

5^5

$(-3)^5$

$0,01^4$

$(-0,1)^6$

138. Arvuta järgmised astmed:

1) 56^2	2) $(-12)^2$	3) $(-a)^9$	4) $(-b)^3$
$0,03^4$	$(-17)^3$	$(-b)^5$	$(-a)^{10}$
$1,7^4$	$(-0,2)^6$	$(-n)^8$	$(-m)^{11}$

139. Arvuta järgmised astmed:

1) 10^3	2) 20^5	3) $0,1^6$	4) $(-0,1)^9$
10^9	30^4	$0,1^3$	$(-0,1)^5$
10^6	40^3	$0,1^5$	$(-10)^7$

5) $(-6)^2 + (-4)^3 + (-2)^5$
 $7^2 + (-5)^3 + (-1)^{10}$
 $(-1)^{10} \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^4$

140. Arvuta järgmised astmed:

1) $(-c)^{2n+1}$	2) $(+2)^3 \cdot (-3)^2$
$(-x)^{2n}$	$(-3)^3 \cdot (+2)^2$
$(-x)^{2m-1}$	$(-4)^4 \cdot (-2)^2$

Tehted astmetega toimuvad järgmiste eeskirjade järgi:

1. Korrutise astendamisel astendatakse iga tema tegur ja saadud astmed korrutatakse.

Sümbolites:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Kui vahetame võrduse $(ab)^n = a^n b^n$ pooled, siis saame valemi võrdsete astendajatega astmete korrutamiseks:

$$a^n b^n = (ab)^n,$$

mida võime sõnastada järgmiselt:

2. Võrdsete astendajatega astmete korrutamisel astendavad korrutatakse ja saadud korrutis astendatakse antud astendajaga.

Näiteid.

$$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4 = 10\,000;$$

$$2,5^3 \cdot 8^3 = (2,5 \cdot 8)^3 = 20^3 = 8000.$$

3. Murru astendamisel astendatakse tema lugeja ning nimetaja ja esimene tulemus jagatakse teisega.

Sümbolites:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Näiteid.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81};$$

$$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8};$$

$$\left(\frac{2a}{5b}\right)^2 = \frac{4a^2}{25b^2}.$$

Kui vahetame võrduse $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ pooled, siis saame juhise võrdsete astendajatega astmete jagamiseks:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

mida sõnastame nõnda:

4. Võrdsete astendajatega astmete jagamisel astendatav jagatavas jagatakse astendatavaga jagajas ja tulemus astendatakse antud astendajaga.

Näiteid.

$$24^2 : 12^2 = (24 : 12)^2 = 4;$$

$$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27;$$

$$\frac{(6ab)^5}{(3b)^5} = \left(\frac{6ab}{3b}\right)^5 = (2a)^5 = 32a^5.$$

5. Võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse ja tulemusega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Näiteid.

$$8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5;$$

$$a^3 \cdot a^7 = a^{3+7} = a^{10}.$$

Kui vahetame võrduse $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pooled, siis saame valemi astme teisendamiseks, kui astendaja on summa:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

6. Astet, mille astendaja on summa, saab kirjutada astmete korrutisena.

Näiteid.

$$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x;$$

$$0,3 \cdot 10^7 = 0,3 \cdot 10 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^6.$$

7. Võrdsete alustega astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas, kui viimane astendaja on eelmisest suurem, ja tulemusega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n, a \neq 0.$$

Näiteid.

$$\frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27;$$

$$a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2.$$

8. Astme astendamisel astendajad korrutatakse ja saadud korrutisega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites väljendub viimane teoreem nii:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Näiteid.

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2 = 2^6 = 64;$$

$$(2a^2b^3)^4 = 2^4 a^8 b^{12} = 16a^8b^{12};$$

$$(a^3 + a^4)^2 = a^3 \cdot 2 + 2a^{3+4} + a^4 \cdot 2 = a^6 + 2a^7 + a^8.$$

Võrdustest $(a^m)^n = a^{mn}$ ja $(a^n)^m = a^{mn}$ järeldub, et

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Näiteid.

$$a^6 - x^2 = (a^3)^2 - x^2 = (a^3 + x)(a^3 - x);$$

$$a^6 - x^3 = (a^2)^3 - x^3 = (a^2 - x)(a^4 + a^2x + x^2).$$

Ülesandeid.

141. Arenda järgmised astmed:

1) $(4 \cdot 1,5)^2$

$(2 \cdot 5)^5$

$(4,5 \cdot 2)^3$

2) $(5mn)^3$

$(-4ab)^2$

$(-4uv)^4$

$$3) \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(-3\frac{2}{3}\right)^3$$

$$4) \left(-\frac{er}{4d}\right)^5$$

$$\left(-\frac{3h}{5mn}\right)^3$$

$$\left(-\frac{0,7anx}{0,01bz}\right)^2$$

142. Leia lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

$$1) 2^3 \cdot 5^3$$

$$2) 3^2 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$$

$$45^2 \cdot 2^2$$

$$13^7 \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^7$$

$$2,5^5 \cdot 4^5$$

$$\left(5\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3\frac{3}{4}\right)^2$$

143. Arvuta peast järgmiste avaldiste väärtused:

$$1) 16^3 : 4^3 = 64$$

$$2) \left(1\frac{7}{8}\right)^3 : \left(6\frac{1}{4}\right)^3$$

$$3) \frac{5^3 \cdot 12^3}{6^3}$$

$$9^5 : 18^5 = \frac{1}{2}$$

$$2,25^2 : 0,45^2$$

$$\frac{15^2 \cdot 4^2}{8^2 \cdot 5^2}$$

$$160^3 : 640^3 = \frac{1}{64}$$

$$0,75^3 : 2,4^3$$

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{2^5}{5^5}$$

144. Kirjuta järgmised korrutised astmetena:

$$1) c \cdot c^2 \cdot c^3 = c^6$$

$$k^2 \cdot k^3 \cdot k^3 = k^8$$

$$n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4 \cdot n^5 = n^{15}$$

$$2) x^{m+1} x^{m+2} = x^3$$

$$y^{n+3} y^{2n-1} = y^{4+2}$$

$$z^{p+5} z^{p-5} = z^{2p}$$

145. Kirjuta järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

$$1) 3u \cdot 5u^2$$

$$(-6r^2) \cdot 7r^3$$

$$aN^4 \cdot bN^3$$

$$2) 6x \cdot 0,4x^2 \cdot 0,1x^3$$

$$0,1D \cdot (-0,2D^2) \cdot 0,3D^3$$

$$\left(-\frac{3}{5}w^2\right) \cdot 2\frac{1}{2}w^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}w^3\right)$$

146. Kirjuta järgmised jagatised astmetena:

$$1) n^3 : n^5 = n^{-2}$$

$$q^6 : q = q^5$$

$$r^4 : r^4 = n^0$$

$$2) p^n : p^{n-1} = p^1$$

$$q^{n+3} : q^n = q^3$$

$$d^{m+1} : d^{n+1} = d^{m-n}$$

147. Kirjuta järgmised jagatised võimalikult lühidalt:

$$1) \frac{a^5 b^3}{a^2 b}$$

$$\frac{9x^4 y^3 z^2}{54x^2 y^2 z}$$

$$\frac{8a^4}{5b^6} : \frac{16a^2}{25b^8}$$

$$2) \frac{a^{2n} b^{5m}}{a^n 6^{3m}}$$

$$\frac{x^{m+8} y^{n-5}}{x^{m-2} y^{n-7}}$$

$$\frac{a^{2n+2}}{b^{m-4}} : \frac{a^{n+3}}{b^{3n-1}}$$

$$3) 3,6x^6 y^5 z^8 : 5,6x^2 y^3 z^4$$

$$7n^{2q} : 0,14n^{q-3}$$

$$1,72m^{p+6} : 4,3^{p+2}$$

148. Arenda järgmised astmed:

$$1) (4a)^3 = 64a^3$$

$$(3mn)^3 = 27m^3 n^3$$

$$\left(-\frac{4a}{7H}\right)^2 = \frac{16a^2}{49H^2}$$

$$2) (-2h)^4 = 16h^4$$

$$\left(+\frac{50Q}{60R}\right)^3 = \frac{125Q^3}{216R^3}$$

$$\left(-\frac{0,2cU}{0,5d}\right)^4 = \frac{16c^4 U^4}{625d^4}$$

149. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

$$1) (-N^3) \cdot (2N)^5$$

$$(4u^2)^2 \cdot (-u^3)^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}q\right)^3 \cdot (6q)^2$$

$$2) (-2f)^3 : (5f)^2$$

$$(96ax)^4 : (16x)^4$$

$$(36nD)^5 : (-81D)^5$$

150. Arenda järgmised astmed:

$$1) (m^2)^3$$

$$(u^{2n})^3$$

$$(Q^2)^{n+1}$$

$$2) \left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{4}{7} \cdot \frac{m}{q^2}\right)^3$$

$$\left(\frac{au^2}{bv^2}\right)^4$$

151. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \left(\frac{2x}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{6x}{5a}\right)^2$$

$$\left(-\frac{4m}{5n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^4$$

$$\left(\frac{7u}{4v}\right)^4 \cdot \left(\frac{2Nv}{7u}\right)^3$$

$$2) \left(-\frac{1}{N}\right)^3 : \left(\frac{N^3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{a}{x}\right)^2 : \frac{3}{4} \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\left(\frac{4c}{5D^2}\right)^2 : \left(\frac{0,2}{D^3}\right)^2$$

152. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) (ax)^m : (bx)^m$$

$$2) (8Nu)^{2a-1} : (-2u)^{2a-1}$$

$$(3cu)^n : (cdu)^n$$

$$\left(\frac{2p}{3q}\right)^{2n+1} : \left(-\frac{3q}{2p}\right)^{2n+1}$$

$$(-pqr)^{2t} : (-pq^{2t})$$

$$\left(\frac{a^2}{5Q}\right)^{2m} : \left(\frac{5a}{Q}\right)^{m+2}$$

153. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \left(\frac{2}{5}\right) L^n \cdot \frac{3}{2} L \cdot 6L^3$$

$$2) \frac{1}{4} x^p \cdot \frac{4}{5} x^{p+2} \cdot \frac{2}{5} x^{2p+1}$$

$$u^a \cdot u^{a+b} \cdot u^{a+b+c}$$

$$7H^m \cdot 0,2H^{m+1} \cdot 0,5H^{m+2}$$

$$D^n \cdot D^{n-m} \cdot D^{m-p}$$

$$N^{x+2} \cdot N^{x-3} \cdot N^{2-2x}$$

154. Arenda järgmised korrutised:

$$1) (a^2 + a^4) \cdot (a + a^3)$$

$$4) (2p^4 + 5q^3) \cdot (2p^4 - 5q^3)$$

$$2) (a^6 - a^5) \cdot (a^5 + a^4)$$

$$5) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$3) (u^3 + v^2) \cdot (u^3 - v^2)$$

$$6) \left(2s^3 + \frac{1}{t^3}\right) \cdot \left(s^3 - \frac{1}{t^3}\right)$$

155. Arenda järgmised binoomide astmed:

$$1) (a^2 + b^2)^2$$

$$4) (3x^3 - 5x^5)^2$$

$$7) (a^2 + b^2)^3$$

$$2) \left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{a^2}{b^2}\right)^2$$

$$5) (m^2n^3 + m^3n^2)^2$$

$$8) (a^3 - b^3)^3$$

$$3) (a^4 - a^2)^2$$

$$6) \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$9) (m^3 + m^2)^3$$

§ 41. ASTMEFUNKTSIOONID.

Kui astme alust vaadelda muutuva suurusena, siis esitab aste nn. astmefunktsiooni. Nii näiteks on x^2 , x^3 ja x^4 vastavalt teise, kolmanda ja neljanda astme funktsioonid.

Lähemalt oleme juba tuttavad teise astme ehk ruutfunktsiooniga. Astmefunktsioon x^2 on erijuht üldisest ruutfunktsioonist $ax^2 + bx + c$. Tutvume lähemalt kuupfunktsiooniga $y = x^3$.

Me oleme tuttavad kera ruumala valemiga

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Igale r väärtusele vastab kindel ruumala suurus.

Seega on kera ruumala raadiuse funktsioon. Siin on tegemist funktsiooniga $y=ax^3$, kus $a=\frac{4}{3}\pi$.

Võtame lähema vaatluse alla juhu, kus $a=1$. Koostame funktsiooni $y=x^3$ väärtuste tabeli:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^3	-8	-3,4	-1	-0,1	0	0,1	1	3,4	8

Esitame vastavad punktid koordinaatteljestikus ja ühendame need ladusa kõveraga (joon. 41).

Saadud joont nimetatakse **kuupparabooliks**.

Uurime funktsiooni $y=x^3$, tuginedes tema graafikule.

Kõigepealt paneme tähele, et funktsiooni $y=x^3$ graafikuks on tõusev joon. Kui argumenti mingi väärtus saab positiivse muudu, siis saab ka funktsioon positiivse muudu. Argumenti kasvades funktsioon kasvab. Kontrolli seda vähemalt kolme argumenti väärtuse juures!

Seega,

funktsioon $y=x^3$ on kasvav.

Nii graafikult kui ka funktsiooni valemist on kergesti näha, et

funktsiooni $y=x^3$ nullkohaks on $x=0$.

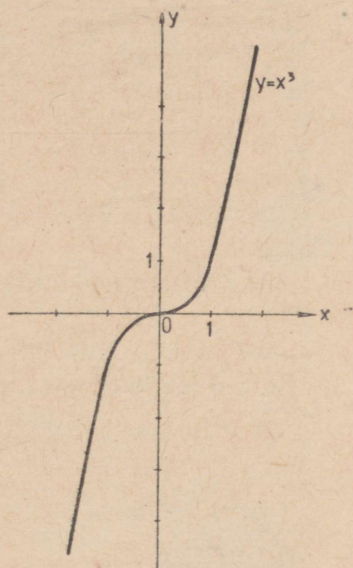
Nüüd võime kohe kirjutada, et

funktsiooni $y=x^3$ positiivsuspiirkonnaks on $x>0$ ja negatiivsuspiirkonnaks on $x<0$.

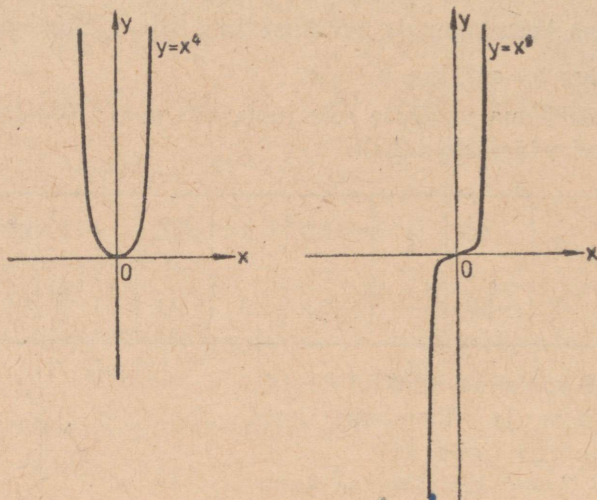
Ülesandeid ja küsimusi.

156. Uurida funktsioone $y=x^4$ ja $y=x^5$ nende graafikute abil (joon. 42).

157. Mille poolest erinevad funktsioonide $y=x^2$ ja $y=x^4$ graafikud?



Joon. 41.



Joon. 42.

158. Mille poolest erinevad funktsioonide $y=x^3$ ja $y=x^5$ graafikud?

159. Missugust funktsiooni nimetatakse kasvavaks (kahanevaks)?

160. Mis on funktsiooni positiivsus- (negatiivsus-)piirkond?

161. Leia joonise 43 abil järgmiste arvude kuubid:

1) 1,5; 1,6; 2,2; 3,6; 4,8;

2) 2,4; 2,8; 3,2; 4,4; 4,9.

162. Kasutades joonist 43 ja kera ruumala ligikaudset valemit

$$V \approx 4,2r^3,$$

arvuta kera ruumala, kui raadius on

1,7 cm; 2,3 cm; 3,5 dm; 3,8 m; 4,7 mm.

163. Kasutades joonist 43 ja kera ruumala ligikaudset valemit

$$V \approx 0,52d^3,$$

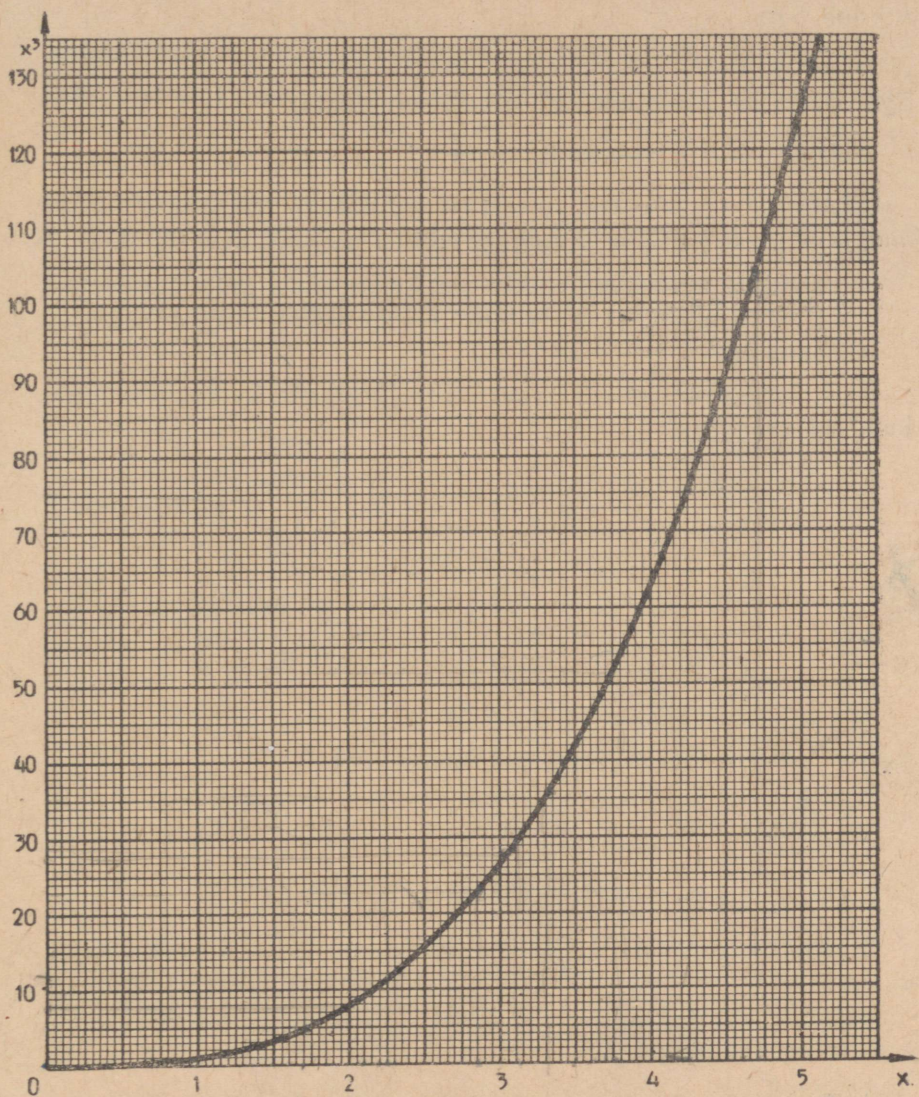
arvuta kera ruumala, kui diameeter on

1,9 cm; 3,1 cm; 4,6 dm; 4,5 dm.

164. Leia joonise 43 abil arv x , kui x^3 on

1) 18; 12; 40; 30; 94.

2) 10; 50; 60; 70; 130.



Joon. 43.

§ 42. ARVU KUUPJUUR.

Arv, mille kuup on 27, võrdub 3-ga ja arv, mille kuup on 125, võrdub 5-ga.

Arvu 3 nimetatakse arvu 27 kuupjuureks ja märgitakse sümboliga $\sqrt[3]{27}$ (loe «kuupjuur kahekümne seitsmest»).

Seega $\sqrt[3]{27}=3$ ja $\sqrt[3]{8}=2$.

Et $(-9)^3=-729$, siis $\sqrt[3]{-729}=-9$. Seega, negatiivse arvu kuupjuur on negatiivne. Kuupjuur nullist on null, sest $0^3=0$.

Antud arvu kuupjuureks ehk kolmandaks juureks nimetatakse niisugust arvu, mille kuup võrdub antud arvuga.

Ülesandeid.

165. Leia graafiku abil (joon. 43) järgmiste kuupjuurte ligikaudsed väärtused:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{21} \approx 2,8 & 2) \sqrt[3]{8} = 2 & 3) \sqrt[3]{-23} \approx -2,8 \\ \sqrt[3]{15} \approx 2,5 & \sqrt[3]{11} \approx 2,2 & \sqrt[3]{-29} \approx -3,1 \\ \sqrt[3]{92} \approx 4,5 & \sqrt[3]{28} \approx 3 & \sqrt[3]{-36} \approx -3,3 \\ \sqrt[3]{120} \approx 4,9 & \sqrt[3]{75} \approx 4,2 & \sqrt[3]{-52} \approx -3,7 \end{array}$$

Näide. $\sqrt[3]{-46} = -\sqrt[3]{46} \approx -3,6$.

166. Arvuta peast järgmised kuupjuured:

$$1) \sqrt[3]{1000} \quad 2) \sqrt[3]{64} \quad 3) \sqrt[3]{216}$$

§ 43. KUUPIDE TABELI KASUTAMISEST.

Koolis kasutatavais V. Bradise tabelleis on antud arvude 1 kuni 10 kuubid.

Tekib küsimus, kuidas leida ühest väiksemate ja kümnest suuremate arvude kuupe.

Näiteid.

1) Leida $0,235^3$.

Tabelis leidub $2,35^3$. Teisendame arvu $0,235$ korrutiseks nii, et saaksime kasutada kuupide tabelit.

$$0,235^3 = (0,1 \cdot 2,35)^3 = 0,1^3 \cdot 2,35^3 = 0,001 \cdot 12,98 = 0,01298.$$

2) Leida $(24,7)^3$.

$$(24,7)^3 = (10 \cdot 2,47)^3 = 10^3 \cdot 2,47^3 = 1000 \cdot 15,07 = 15070.$$

Kuupide tabelit kasutatakse ka kuupjuurte leidmiseks.

Kuupjuure leidmiseks arvust, mis kuulub vahemikku 1 kuni 1000, otsime kuupide tabeli sees leiduvate arvude hulgast antud arvule lähima. Otsitava arvu saame vastava rea ja vastava veeru numbritest. Kui soovitakse saada täpsemat tulemust, siis arvestatakse ka parandusveerge.

Näiteid.

1. $\sqrt[3]{13}=?$

$$\sqrt[3]{12,98}=2,35$$

$$2 \dots 01$$

$$\sqrt[3]{13} = 2,351$$

2. $\sqrt[3]{12,78}=?$

$$\sqrt[3]{12,81}=2,34$$

$$3 \dots 02$$

$$\sqrt[3]{12,78}=2,338$$

Ulesandeid.

167. Leia tabelist järgmiste arvude kuubid:

1) 9,2

56

3,75

2,44

2) 7,8

47

8,92

7,66

3) 0,47

0,56

0,375

0,244

168. Leia tabelist järgmiste arvude kuupjuured:

1) 2,58

61,34

51,70

728

2) 3,76

59,26

246

896

§ 44. KUUBI JA KUUPJUURE LEIDMINE LÜKATI ABIL.

1. Arvutuslükati skaala K.

Lükati korpuse esiküljel on peale skaalade A , B , C ja D ka skaala K . See asub esikülje ülemisel äärel (vt. joon. 44).

Skaala K on valmistatud kolm korda väiksemas mõõdus kui skaalad C ja D .

Skaala K koosneb kolmest konstruktsioonilt ühesugusest osast: esimesel neist on kujutatud arvud 1-st 10-ni, teisel 10-st 100-ni ja

kolmandal 100-st 1000-ni. Mõnel lükatil on nullid nimetatud arvude lõpus trükkimata jäetud.

Mõõdu vähendamise tõttu on skaalal K jaotuskriipse vähem kui skaaladel C ja D , samuti ka vähem kui skaaladel A ja B .

Konstruksioonilt on skaala K kõik kolmandikud ühesugused ja sarnased põhiskaalaga D .

Skaalal K tähendab iga väikseim kriipsuvahe

vahemikus	1 kuni	2 arvu	0,02,
„	2 „	5 „	0,05,
„	5 „	10 „	0,1,
„	10 „	20 „	0,2,
„	20 „	50 „	0,5,
„	50 „	100 „	1,
„	100 „	200 „	2,
„	200 „	500 „	5,
„	500 „	1000 „	10.

169. Joonesta alljärgnev tabel oma vihikusse ja täida kõik vee-
rud lükatilt loetud tüvenumbritega.

D	C	B	A	K
1,43	1—3—1	1—7—1	2—0—5	2—9—2
1,56	1—4—2	2—0—2	2—4—3	3—8—0
1,70	1—5—5			
1,77	1—6—2			
1,89	1—7—2			
20,1	1—8—4			
21,9	2—0—0			
24,8	1—1—5			
26,1	2—3—8			
30,6	2—7—9			
319	2—9—2			
359	3—2—8			
442	4—0—3			
474	4—3—3			
548	5—0—0			
6,70	6—1—3			
7,68	7—0—2			
8,22	7—5—0			
8,45	7—7—1			
8,95	8—1—6			
9,15	8—3—5			
9,45	6—6—5			
9,50	1—6—7			
9,65	2—1—8			
9,75	4—3—5			

Näpunäide. Tabeli täitmisel toimime nii:

- 1) märgime niidiga põhiskaalal D arvu 1,43;
- 2) nihutame skaalal C asuva arvu, mille tüvenumbrid on 1—3—1, märkija niidi alla;
- 3) loeme niidi alt skaalal B asuva arvu tüvenumbrid 1—7—1 ja kirjutame need tabelisse veergu B ;
- 4) skaalal A on siis niidiga märgitud arvu tüvenumbrid 2—0—5, need kirjutame veergu A ;
- 5) skaalal K on niidi all oleva arvu tüvenumbrid 2—9—2, need kirjutame veergu K .

2. Arvu kuubi leidmine lükatil.

Märkides niidiga põhiskaalal D näiteks arvu 2, näeme, et niidi all skaalal K on arv $8=2^3$ (joon. 44). Arv 2 skaalal D ja arv 2^3 skaalal K on kohakuti. Samuti on neil skaaladel kohakuti arvud 3 ja $3^3=27$. Üldiselt, arv a skaalal D ja arv a^3 skaalal K on kohakuti (joon. 45).

Võib öelda, et skaalad D ja K koos kujutavad kuupide tabelit. Niisiis, et leida lükatil antud arvu kuupi, märgime skaalal D selle arvu ja loeme niidi alt skaalal K antud arvu kuubi.



Joon. 45

Näiteid.

$$1,86^3 = 6,43;$$

$$2,54^3 = 16,4;$$

$$6,35^3 = 256.$$

Kui antud arv on 1-st väiksem või 10-st suurem, siis nihutame koma selles arvus nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel, ning korrutame või jagame siis vastavalt 10-ga või kümne astmega.

Näiteid.

$$1) 4250^3 = (4,25 \cdot 1000)^3 = 4,25^3 \cdot 10^9 = 77 \cdot 10^9;$$

$$2) 35^3 = (3,5 \cdot 10)^3 = 3,5^3 \cdot 1000 = 43 \cdot 1000 = 43\,000;$$

$$3) 0,2^3 = (2 : 10)^3 = 8 : 1000 = 0,008;$$

$$4) 0,042^3 = (4,2 : 100)^3 = 74 : 1\,000\,000 = 0,000074.$$

Ülesandeid.

Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust.

170. 1) $1,1^3 = 1,33$	2) $3,5^3 = 42,8$
$1,5^3 = 3,38$	$6,8^3 = 314$
$1,68^3 = 4,74$	$8,5^3 = 614$
$2,2^3 = 10,6$	$9,35^3 = 817$

171. 1) $0,9^3 = 0,729$	2) $0,75^3 = 0,422$
$0,6^3 = 0,216$	$0,7^3 = 0,343$
$0,8^3 = 0,512$	$0,3^3 = 0,027$
$0,5^3 = 1,125$	$0,4^3 = 0,064$

172. 1) $23^3 = 12\ 200$	2) $14,5^3 = 3050$
$22,3^3 = 11\ 100$	$16,1^3 = 4200$
$18^3 = 5830$	$17,4^3 = 5270$
$34^3 = 39\ 300$	$26,7 = 19\ 000$

173. Leia lükati abil järgmiste arvude kuubid.

1) 4,05	2) 0,08	3) 6,05
2,14	1,24	12,5
8,05	0,061	5,65
0,252	3,44	4,55
4) 1,81	5) 0,54	6) 9,31
4,52	5,2	25,6
2,25	6,78	14,3
0,912	5,61	5,31

3. Kuupjuure leidmine.

Märkides skaalal K näiteks arvu 8, on niidi all skaalal D arv $2 = \sqrt[3]{8}$. Samuti on skaala K arv 27 kohakuti skaala D arvuga $3 = \sqrt[3]{27}$. Kohakuti on ka arv 343 skaalal K ja $7 = \sqrt[3]{343}$ skaalal D . Üldiselt, kui niidiga on märgitud skaalal K mingi arv a , siis skaalal D on märgitud a -ga kohakuti seisev arv $\sqrt[3]{a}$. Seega asendavad skaalad K ja D kuupjuurte tabelit. (Joon. 46)



Joon. 46

Kui antud arv on 1 ja 10 vahelt, siis kuupjuure leidmisel sellest arvust märgime ta skaala K vasakpoolisel osal ning niidi alt skaalalt D loeme kuupjuure sellest arvust.

Näide. $\sqrt[3]{4,5} = 1,65$.

Kui antud arv on 10 ja 100 vahel, siis kuupjuure leidmiseks märgime ta skaala K keskmisel osal ja niidi alt skaalalt D leiame otsitava kuupjuure.

Näide. $\sqrt[3]{26,5} = 2,98$.

Juhul kui antud arv on vahemikust 100 kuni 1000, siis märgime ta skaala K parempoolisel osal ja niidi alt skaalalt D leiame otsitava kuupjuure.

Näide. $\sqrt[3]{430} = 7,55$.

Ülesandeid.

174. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust.

1) $\sqrt[3]{3} = 1,44$

2) $\sqrt[3]{60} = 3,92$

$\sqrt[3]{6,2} = 1,84$

$\sqrt[3]{52,5} = 3,74$

$\sqrt[3]{7,4} = 1,95$

$\sqrt[3]{55,5} = 3,82$

$\sqrt[3]{9,3} = 2,1$

$\sqrt[3]{76} = 4,24$

3) $\sqrt[3]{600} = 8,43$

4) $\sqrt[3]{690} = 8,84$

$\sqrt[3]{350} = 7,05$

$\sqrt[3]{520} = 8,04$

$\sqrt[3]{420} = 7,5$

$\sqrt[3]{360} = 7,11$

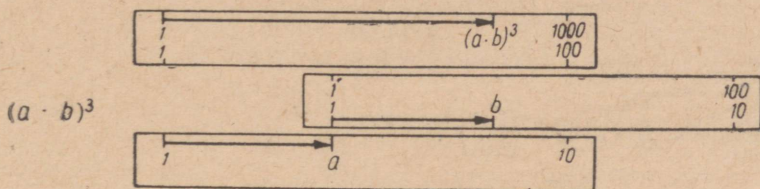
$\sqrt[3]{740} = 9,05$

$\sqrt[3]{720} = 8,96$

175. Leia lükati abil kuupjuured järgmistest arvudest.

- | | | |
|--------|--------|---------|
| 1) 8,2 | 2) 385 | 3) 1,72 |
| 16 | 265 | 5,2 |
| 29,5 | 640 | 75 |
| 345 | 780 | 59 |

4. Korrutise kuubi arvutamine.



Joon. 47.

Näide. Arvutada $(1,25 \cdot 2,15)^3$.

Leiame skaalade C ja D abil korrutise $1,25 \cdot 2,15$ ning määrgime ta skaalal D . Sellega oleme ühtlasi märkinud skaalal K otsitava kuubi tüvenumbrid 1—9—2. Niisiis

$$(1,25 \cdot 2,15)^3 = 19,2.$$

Samal viisil arvutatakse ka kuupide korrutis, sest $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$.

Ülesandeid.

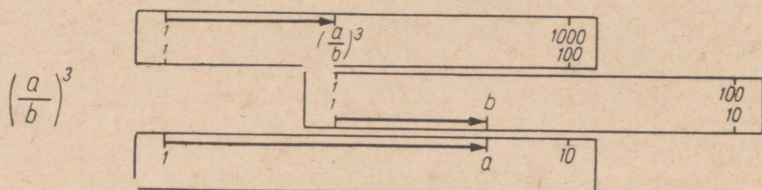
176. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $(2,6 \cdot 0,423)^3 = 1,33$ | 2) $(0,232 \cdot 7,25)^3 = 4,74$ |
| $(1,85 \cdot 1,89)^3 = 42,8$ | $(1,28 \cdot 6,65)^3 = 614$ |
| $(1,24 \cdot 1,21)^3 = 3,38$ | $(0,37 \cdot 5,95)^3 = 10,6$ |
| $(2,38 \cdot 2,86)^3 = 314$ | $(2,53 \cdot 4,75)^3 = 1730$ |

177. Arvuta.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $(1,3 \cdot 0,85)^3$ | 2) $0,464^3 \cdot 3,64^3$ |
| $(3,7 \cdot 0,95)^3$ | $2,56^3 \cdot 3,35^3$ |
| $(2,25 \cdot 1,22)^3$ | $0,75^3 \cdot 2,95^3$ |
| $(2,45 \cdot 2,85)^3$ | $5,1^3 \cdot 3,75^3$ |

5. Jagatise kuubi arvutamine.



Joon. 48.

Näide. Arvutada $\left(\frac{7,45}{2,86}\right)^3$.

Selleks et leida jagatise kuubi, märgime jagatava 7,45 skaalal D , siis paneme skaala C arvu 2,86 niidi alla. Jagatis on nüüd skaalal D skaala C alguskriipsu 1 kohal; märgime jagatise niidiga, siis on ühtlasi skaalal K märgitud jagatise kuubi, mille tüvenumbrid on 1—7—6.

$$\left(\frac{7,45}{2,86}\right)^3 = 17,6.$$

Samal viisil arvutatakse ka kuupide jagatis, sest

$$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

Ülesandeid.

178. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust.

1) $\left(\frac{7}{4,5}\right)^3 = 3,77$

2) $\left(\frac{6,3}{7,5}\right)^3 = 0,59$

$\left(\frac{8,7}{5,6}\right)^3 = 3,75$

$\left(\frac{5}{8,2}\right)^3 = 0,225$

$\left(\frac{2,16}{1,54}\right)^3 = 2,76$

$\left(\frac{41,5}{27,2}\right)^3 = 3,66$

$\left(\frac{5,55}{6,15}\right)^3 = 0,730$

$\left(\frac{0,83}{0,15}\right)^3 = 170$

179. Arvuta.

$$1) \left(\frac{45,2}{1,81} \right)^3$$

$$\left(\frac{22,5}{4,56} \right)^3$$

$$\left(\frac{0,912}{0,541} \right)^3$$

$$\left(\frac{6,78}{5,61} \right)^3$$

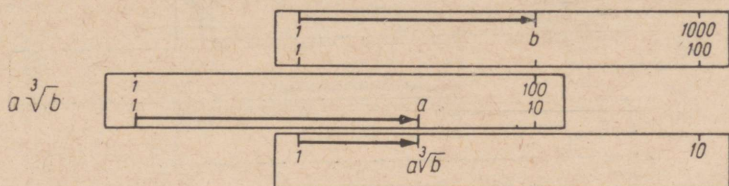
$$2) \left(\frac{8,05}{6,05} \right)^3$$

$$\left(\frac{12,5}{4,2} \right)^3$$

$$\left(\frac{22,2}{1,65} \right)^3$$

$$\left(\frac{41,5}{2,35} \right)^3$$

6. Kuupjuure korrutamine arvuga.



Joon. 49.

Näide. Arvutada $5,7 \cdot \sqrt[3]{72,5}$.

Märgime skaala K keskmisel osal arvu 72,5, sellega on ühtlasi skaalal D märgitud $\sqrt[3]{72,5}$. Korrutame kuupjuure arvuga 5,7. Selleks tõmbame keele lõppkriipsu, s. o. skaala C arvu 10 niidi alla. Seejärel märgime niidiga skaalal C arvu 5,7. Niidi alt skaalalt D saame otsitava arvu tüvenumbrid 2—3—8.

$$5,7 \cdot \sqrt[3]{72,5} = 23,8.$$

Ülesandeid.

180. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust.

$$1) 3,5 \cdot \sqrt[3]{1,33} = 3,85$$

$$0,72 \cdot \sqrt[3]{614} = 6,12$$

$$3,42 \cdot \sqrt[3]{314} = 23,3$$

$$5,2 \cdot \sqrt[3]{3,4} = 7,82$$

$$2) 2,86 \cdot \sqrt[3]{4,74} = 4,8$$

$$5,45 \cdot \sqrt[3]{42,8} = 19,1$$

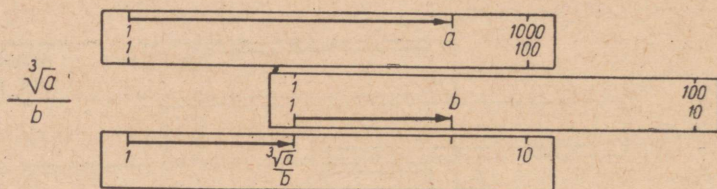
$$6,55 \cdot \sqrt[3]{12} = 14,8$$

$$7,25 \cdot \sqrt[3]{520} = 58,3$$

181. Arvuta.

$$\begin{array}{ll}
 1) \ 2 \cdot \sqrt[3]{1,26} = 2,16 & 2) \ 1,8 \cdot \sqrt[3]{94,8} \\
 1,35 \cdot \sqrt[3]{1,91} = 1,67 & 2,2 \cdot \sqrt[3]{5,9} \\
 4,25 \cdot \sqrt[3]{41} = 17,6 & 3,85 \cdot \sqrt[3]{34,5} \\
 1,55 \cdot \sqrt[3]{175} = & 2,65 \cdot \sqrt[3]{34,2}
 \end{array}$$

7. Kuupjuure jagamine arvuga.



Joon. 50.

Näide. Arvutada $\frac{\sqrt[3]{345}}{6,8}$.

Märgime skaalal K (parempoolsel osal) niidiga arvu 345. Sellega on skaalal D märgitud arv $\sqrt[3]{345}$. Lükame seejärel keele nii, et niidi alla skaalal C tuleb arv 6,8. Jagatise leiame skaalalt D kohakuti skaala C alguskriipsuga 1. Sealt leiame jagatise tüve numbrid 1—0—3. Seega

$$\frac{\sqrt[3]{345}}{6,8} = 1,03.$$

Ülesandeid.

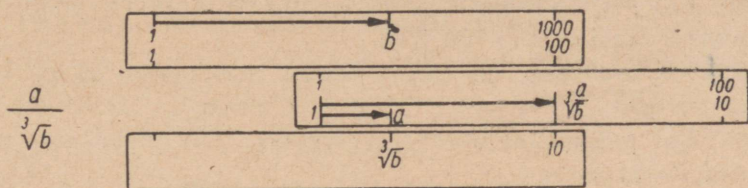
182. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust.

$$\begin{array}{ll}
 1) \ \frac{\sqrt[3]{3}}{0,52} = 2,77 & 2) \ \frac{\sqrt[3]{52,5}}{2,54} = 1,48 \\
 \frac{\sqrt[3]{18}}{1,31} = 2 & \frac{\sqrt[3]{6,12}}{0,72} = 2,54 \\
 \frac{\sqrt[3]{21,5}}{0,75} = 3,7 & \frac{\sqrt[3]{7,4}}{0,655} = 2,97
 \end{array}$$

183. Arvuta.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt[3]{12} : 1,55 \approx 1,48 \quad (2) \quad \sqrt[3]{32} : \pi \\
 & \sqrt[3]{25} : 2,5 = 1,17 \quad \sqrt[3]{72} : 5,5 \\
 & \sqrt[3]{600} : 8,15 \approx 1,03 \quad \sqrt[3]{1200} : 5,2
 \end{aligned}$$

8. Arvu jagamine kuupjuurega.



Joon. 51.

Näide. Arvutada $\frac{24,5}{\sqrt[3]{56}}$.

Märgime skaala K keskmisel osal arvu 56. Sellega on skaalal D märgitud arv $\sqrt[3]{56}$. Nüüd nihutame keelt nii, et skaala C arv 24,5 tuleb niidi alla. Skaala D lõppkriipsu 10 kohalt loeme skaalalt C jagatise tüvenumbrid 6—4—0. Niisiis

$$\frac{24,5}{\sqrt[3]{56}} = 6,4.$$

Ülesandeid.

184. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust.

$$1) \quad \frac{7,85}{\sqrt[3]{55,5}} = 2,04$$

$$\frac{8,2}{\sqrt[3]{21,5}} = 2,95$$

$$\frac{12,6}{\sqrt[3]{247}} = 1,95$$

$$\frac{6,45}{\sqrt[3]{124}} = 1,29$$

$$2) \quad \frac{4,2}{\sqrt[3]{1,38}} = 3,77$$

$$\frac{5,45}{\sqrt[3]{7,6}} = 2,77$$

$$\frac{8,4}{\sqrt[3]{49}} = 2,29$$

$$\frac{52}{\sqrt[3]{460}} = 6,77$$

185. Arvuta.

$$1) 1,82 : \sqrt[3]{760}$$

$$2) 57,5 : \sqrt[3]{880}$$

$$1,88 : \sqrt[3]{245}$$

$$36 : \sqrt[3]{136}$$

$$9,1 : \sqrt[3]{11,8}$$

$$31,8 : \sqrt[3]{63}$$

$$18,1 : \sqrt[3]{47,5}$$

$$85,6 : \sqrt[3]{860}$$

186. Kui palju kaalub klaasist kuup, mille serva pikkus on 47,5 mm? Klaasi erikaal on 2,25.

187. Kui pikk serv on vasest kuubil, mis kaalub 25 g? Vase erikaal on 8,93.

188. Kui palju kaalub rauast (erikaal 7,85) tõukekuul, mille läbimõõt $d = 11,36$ cm?

189. Kui palju kaalub tinast (erikaal 11,34) tõukekuul, mille läbimõõt on 8,78 cm?

190. Arvuta terasest (erikaal 7,85) tõukekuuli läbimõõt, kui kuuli raskus on 5 kg?

191. Kui suur on messingist (erikaal 8,5) tõukekuuli läbimõõt, kui kuuli kaal on 7,257 kg?

§ 45. LIGIKAUDSE ARVU KUUBI VEA ARVUTAMINE.

Ligikaudse arvu kuubi absoluutse vea ülemmäära valemi tuletamisel lähtume ligikaudsete arvude korrutise absoluutse vea ülemmäära ja ligikaudse arvu ruudu absoluutse vea ülemmäära valemitest.

Kui ligikaudsed arvud on $a(\pm \Delta a)$ ja $b(\pm \Delta b)$, siis

$$\Delta(ab) = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$$

ja

$$\Delta(a^2) = 2a \cdot \Delta a.$$

Vaadeldes ligikaudse arvu kuupi antud arvu ja ta ruudu korrutisena, saame

$$\begin{aligned} \Delta(a^3) &= \Delta(a \cdot a^2) = a \cdot 2a \cdot \Delta a + a^2 \cdot \Delta a = \\ &= 2a^2 \cdot \Delta a + a^2 \cdot \Delta a = 3a^2 \cdot \Delta a. \end{aligned}$$

$$\Delta(a^3) = 3a^2 \cdot \Delta a$$

Ligikaudse arvu kuubi relatiivse vea ülemmäära saamiseks jagame absoluutse vea ülemmäära ligikaudse kuubiga. Saame

$$\frac{3a^2 \cdot \Delta a}{a^3} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Viimasest avaldisest näeme, et ligikaudse arvu kuubi relatiivse vea ülemmäär võrdub selle ligikaudse arvu enda relatiivse vea ülemmäära kolmekordsega.

Näide. Arvutada ligikaudse arvu $17(\pm 0,2)$ kuup.

Lahendus. Arvutades lükati abil, saame

$$17^3 \approx 4910.$$

Absoluutse vea ülemmäär on

$$3 \cdot 17^2 \cdot 0,2 \approx 174.$$

Relatiivse vea ülemmäär:

$$\frac{174}{4910} \approx 3,5\%.$$

Vastus. $[17(\pm 0,2)]^3 \approx 4910(\pm 174)$ ehk ümardatult

$4900(\pm 200)$ või

$4900(\pm 3,5\%)$.

Ülesandeid.

192. Arvuta ligikaudse arvu kuup, selle absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär.

1) $8(\pm 0,01)$

2) $9(\pm 0,05)$

$12(\pm 0,02)$

$11(\pm 0,01)$

$15(\pm 0,1)$

$25(\pm 0,5)$

193. Kuubikujulise veepaagi seesmise serva pikkuse mõõtmisel saadi $1,75(\pm 0,005)$ m.

Arvuta paagi ruumala, tulemuse absoluutne viga liitrites ja relatiivne viga protsentides.

§ 46. LIGIKAUDSE ARVU KUUPJUURE VEA ARVUTAMINE.

Olgu ligikaudne arv a . Tähistame kuupjuure sellest arvust tähega x , nii et

$$x = \sqrt[3]{a}.$$

$$a = x^3.$$

Kuubi absoluutse vea valemi põhjal võime kirjutada:

$$\Delta a = 3 \cdot x^2 \cdot \Delta x.$$

Avaldades sellest võrdusest Δx , saame

$$\Delta x = \frac{\Delta a}{3x^2}$$

ehk, pannes x asemele $\sqrt[3]{a}$, saame

$$\Delta\left(\sqrt[3]{a}\right) = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Korrutades murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt[3]{a}$, saame kuupjuure absoluutse vea valemi kujul

$$\Delta(\sqrt[3]{a}) = \frac{\sqrt[3]{a}}{3a} \cdot \Delta a.$$

Jagades absoluutse vea ligikaudse kuupjuurega, saame kuupjuure relatiivse vea valemi:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{3a} \cdot \Delta a : \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Siit näeme, et kuupjuure relatiivne viga võrdub juuritava relatiivse vea kolmandikuga.

Näide. Leia kuupjuur ligikaudsest arvust 320 ($\pm 0,5$), selle absoluutne viga ja relatiivne viga.

Lahendus. $\sqrt[3]{320} \approx 6,84.$

Arvutame absoluutse vea ülemmäära:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{3a} \cdot \Delta a = \frac{6,84}{3 \cdot 320} \cdot 0,5 = 0,004.$$

Relatiivne viga on

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{0,5}{0,84} = \frac{0,5}{20,52} \approx 0,03 = 3\%.$$

Seega antud arvu kuupjuur on

$$6,84 (\pm 0,004) \text{ ehk}$$

$$6,84 (\pm 3\%).$$

Ülesandeid.

194. Leia kuupjuur antud ligikaudsest arvust, juure absoluutne viga ja relatiivne viga.

1) 93 ($\pm 0,5$)	2) 78 ($\pm 0,1$)
119 ($\pm 0,2$)	384 ($\pm 0,5$)
323 ($\pm 0,5$)	623 (± 1)

195. On teada, et kuubi ruumala on 100 liitrit, kusjuures ollakse kindel, et viga ei ületa 0,5 l.

Leia kuubi serva pikkus, selle absoluutne ja relatiivne viga.

§ 47. ARVU n -es JUUR.

*Positiivset arvu, mille teine aste võrdub antud positiivse arvuga, nimetame antud arvu **ruutjuureks**; positiivset arvu, mille kolmas aste võrdub antud positiivse arvuga, on arvu **kolmas juur**.*

Analoogiliselt eelnevaga ütleme, et arv 2 on arvu 32 viies juur, sest $2^5 = 32$.

Sümbolites:

$$\sqrt[5]{32} = 2.$$

Üldiselt,

positiivse arvu a n -ndaks juureks nimetatakse positiivset arvu, mille n -es aste on arv a .

Arvu a n -ndat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Nii on:

$$\sqrt[4]{2401} = 7, \text{ sest } 7^4 = 2401;$$

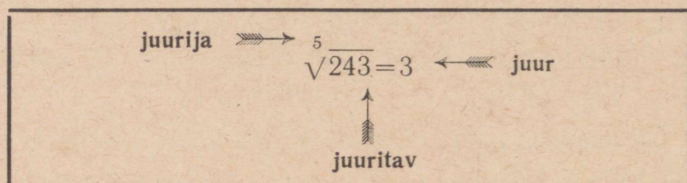
$$\sqrt[7]{128} = 2, \text{ sest } 2^7 = 128;$$

$$\sqrt[5]{0,00243} = 0,3, \text{ sest } 0,3^5 = 0,00243.$$

*n -nda juure leidmist mingist arvust nimetatakse selle arvu **juurimiseks** arvuga n .*

Juurimine on astendamise pöördtehe. Astendamine seisneb astme leidmises antud astendatava ja astendaja järgi, juurimine aga seisneb selles, et antud astme a ja astendaja n järgi leitakse niisugune astendatav x , et $x^n = a$. Seega juur $\sqrt[n]{a}$ on otsitav asten-

datav x , kui on antud aste a ja astendaja n . Sel puhul astet a ehk arvu, mida juuritakse, nimetatakse **juuritavaks** ja astendajat n ehk arvu, millega juuritakse, — **juurijaks**.



Juure definitsiooni järgi on juure $\sqrt[n]{a}$ n -es aste võrdne juuritavaga a , kui $a > 0$. Seega juure definitsiooni järeldusena saame samasuse:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Juure definitsioonist järeldub ka samasus:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ kui } a > 0.$$

Juurija n võib olla kas paaris- või paaritu arv. Kui n on paarisarv, siis peab juuritav a olema positiivne arv; tõepoolest, võrduse

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

vasak pool on paarisarvulise n puhul ikka positiivne arv, millest järeldub, et ka a on positiivne arv. Seega,

negatiivsetel arvudel pole paarisarvuliste juurijatega juuri.

Paarituarvulise juurija m ja negatiivse juuritava a korral leidub siisugune negatiivne arv, mille m -es aste võrdub negatiivse arvuga a .

Näiteks $\sqrt[3]{-8} = -2$, sest $(-2)^3 = -8$.

Uldiselt, olgu $a < 0$ ja $m = 2k + 1$, ning

$$\sqrt[m]{a} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga m , saame

$$a = x^m = x^{2k+1}.$$

Et siin $a < 0$, siis ka $x < 0$, sest ainult negatiivse arvu paaritu-arvulise astendajaga aste on negatiivne.

Niisiis, paarituarvulise juurijaga juurimisel võib juuritav olla nii positiivne kui ka negatiivne arv või null. Seega paarituarvulise juurija korral võib juurt defineerida järgmiselt:

arvu a n -ndaks juureks, kui n on paaritu arv, nimetatakse niisugust arvu, mille n -es aste võrdub arvuga a .

§ 48. JUURE LEIDMINE PROOVIMISE TEEL.

Vastavate tabelite olemasolu korral saab juuri hõlpsasti leida tabelitest. Tabelite puudumisel võib juure leidmine toimuda proovimise teel.

Leiame proovimise teel näiteks

$$\sqrt[5]{16807}.$$

Tarvis on leida arv, mille 5. aste on 16 807. Proovides leiame, et

$$2^5 = 32 < 16807, \quad 3^5 = 243 < 16807,$$

$$4^5 = 1024 < 16807, \dots, \quad 7^5 = 16807.$$

Seega,

$$\sqrt[5]{16807} = 7.$$

Ulesandeid.

196. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

$$\begin{array}{llll} 1) (\sqrt{5})^2 = 5 & 2) (\sqrt[3]{17})^3 = 17 & 3) (\sqrt[5]{37})^5 = 37 & 4) (\sqrt[n]{A})^n = A \\ \sqrt{19^2} = 19 & \sqrt[3]{12^3} = 12 & \sqrt[4]{7^4} = 7 & \sqrt[m]{C^m} = C \\ (\sqrt{23})^4 = 23^2 & (\sqrt[3]{16})^6 = 16^2 & (\sqrt[5]{7})^{10} = 49 & (\sqrt[n]{Q})^{2n} = Q^2 \\ 8\sqrt{49} = 56 & 4\sqrt[3]{27} = 12 & 8\sqrt[4]{256} = 32 & R\sqrt[p]{R^p} = R^2 \\ (5\sqrt{N})^2 = 25N & (2\sqrt[3]{5})^3 = 40 & (h^3\sqrt{u})^3 = h^6u & (f^3\sqrt[n]{f^{2n}})^n = f^{5n} \end{array}$$

197. Leia proovimise teel järgmised juured:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{169} = 13 & 2) \sqrt{361} = 19 & 3) \sqrt{529} = 23 \\ \sqrt[3]{512} = 8 & \sqrt[3]{1331} = 11 & \sqrt[3]{3,375} = 1,5 \\ \sqrt[4]{81} = 3 & \sqrt[4]{2401} = 7 & \sqrt[4]{0,0256} = 0,4 \end{array}$$

§ 49. IRRATSIONAALARVUD.

Ulesanne. Kui pikk tuleb võtta ruudu külge, et ruudu pindala oleks 2 ruutmeetrit?

Lahendus. Olgu nõutava ruudu külje pikkus x meetrit. Siis on tema pindala x^2 ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2 = 2.$$

Katsudes seda nõuet rahuldada täisarvuga näeme, et

$$1^2 = 1 < 2 \quad 2^2 = 4 > 2$$

ja veelgi suuremad on 3^2 , 4^2 , 5^2 jne. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet $x^2 = 2$ rahuldada murdarvuga, näiteks murru $\frac{a}{b}$.

Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on taandatud kujul. Sel juhul a ja b on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru $\frac{a}{b}$ nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algtegureiks lahutatuina:

$$\frac{a}{b} = \frac{h \cdot k \cdot l \dots n}{p \cdot q \cdot r \dots v},$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja tegureist. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{h \cdot h \cdot k \cdot k \cdot l \cdot l \dots n \cdot n}{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r \dots v \cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab olema

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

tähendab, kõnesolev murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korraga olla taandumatu ja taanduv. Seega meie nõuet ei rahulda murdarv. See tähendab, et ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.

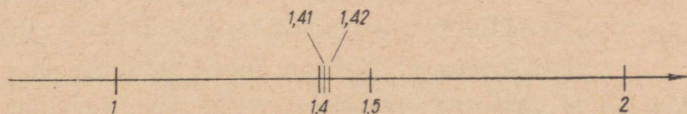
Esitatust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet $x^2=2$ täpselt rahuldada täis- või murdarvuga.

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada ligikaudu ja pealegi nii hästi kui iganes soovime.

Jätkates ruutjuure leidmist järk-järgult viga vähendades, näeme, et

$$\begin{aligned} 1 &< x < 2, \\ 1,4 &< x < 1,5, \\ 1,41 &< x < 1,42. \end{aligned}$$

Joonisel 52, millel kujutamisühikuks on 1 dm, on arvteljel kujutatud vahemikud arvust 1 arvuni 2, arvust 1,4 arvuni 1,5 ja arvust 1,41 arvuni 1,42 graafiliselt.



Joon. 52.

Vaadeldava vahemiku edasisel kitsendamisel saame:

$$\begin{aligned} 1,414 &< x < 1,415, \\ 1,4142 &< x < 1,4143, \\ 1,41421 &< x < 1,41422, \\ &\text{jne.} \end{aligned}$$

Nii seisab arv x suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasakpoolses tulbas seisavad x lähendid puuduga, parempoolses tulbas x lähendid liiaga. Vastavate lähendite vahe järjest väheneb: esimeses reas ei küüni vahe 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähendid juhivad neid x väärtusele:

$$x = 1,41421 \dots$$

Selles kirjutuses numbrite jada ei lõpe.

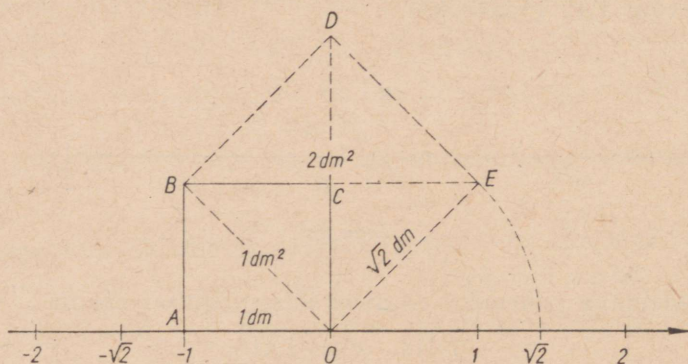
Tõepoolest, kui see poleks nii, siis seisaks meie ees tavaline kümnendmurd ning selle ruut oleks 2; eespool tõestatu põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on x lõputu kümnendmurd. Seda lõputut kümnendmurdu pole võimalik kirjutada ühegi hariliku murruna; vastasel korral leiduks niisugune harilik murd, mille ruut on 2.

Murru 1,41421... saamisluugu tagab, et tema ruut on 2:

$$(1,41421\dots)^2 = 2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputu kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga $\sqrt{2}$.

Vaatamata sellele, et $\sqrt{2}$ pole täpselt väljendatav ühegi täisarvu ega ühegi hariliku murru abil, on ometi võimalik anda täpne konstruktsioon sirgli ja joonlaua abil joonlõigu joonestamiseks, mille pikkus on täpselt $\sqrt{2}$ dm.



Joon. 53.

Kui ehitame ruudu $ABCO$ külje pikkusega 1 dm (joon. 53), siis selle pindala on 1 dm^2 . Kui nüüd pikendame ühe paari lähiskülgi oma pikkuse võrra ja võtame pikendatud küljed uue nelinurga $OBDE$ diagonaalideks, siis uus nelinurk on ruut pindalaga 2 dm^2 . Seda näeme sellest, et uus ruut koosneb neljast niisugusest tükist, nagu neid esialgses ruudus on kaks.

Uue ruudu külje pikkuse leidmiseks peame arvutama ruutjuure arvust 2, seega on see pikkus $\sqrt{2}$ dm. Jooniselt näeme, et uue ruudu külg on esialgsle ruudule diagonaaliks, seepärast võime öelda, et

kui ruudu külje pikkus on 1 pikkusühik, siis ruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$ pikkusühikut.

Samale tulemusele jõuame ka vaadeldes joonisel 53 täisnurket kolmnurka *OCE*. Selles $OC=1$ ja $CE=1$. Rakendades Pütagorase teoreemi, saame

$$OE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Kirjeldatud konstruktsioon võimaldab arvteljel konstrueerida punkti, mis vastab arvule $\sqrt{2}$.

Kandes lõigu *OE* punktist *O* alates arvteljele negatiivses suunas, saame punkti, mis kujutab sümboolit $-\sqrt{2}$.

Samuti nagu $\sqrt{2}$ korral, saab näidata, et $\sqrt{3}$ ei väljendu täpselt ühegi täisarvu ega ühegi murdarvu näol, kuid sirkli ja joonlaua abil saame ehitada lõigu pikkusega $\sqrt{3}$. Seda saab teha Pütagorase teoreemi rakendamisega: ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 1 ühik ja hüpotenuus on 2 ühikut, siis teise kaateti pikkus on $\sqrt{3}$ ühikut.

Kandes saadud kaateti arvteljele nullpunktist positiivses suunas, saame arvteljel punkti, mis vastab sümboolile $\sqrt{3}$.

Me teame, et kõik täisarvud ja kõik harilikud murrud (siinjuures peame silmas, et kõik lõplikud kümnendmurrud on avaldatavad ka harilike murdudena) moodustavad **ratsionaalarvude valla**. Et sümboolid $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ ei ole väljendatavad ei täisarvudena ega harilike murdudena, siis nad ei ole ratsionaalarvud. Et aga on olemas lõigud, mille pikkuste mõõt arvudeks on need sümboolid, siis tuleb need sümboolid lugeda arvudeks. Neid nimetatakse **irratsionaalarvudeks**.

Arvu, millele arvteljel leidub vastav punkt ja mida ei saa kirjutada ei täisarvuna ega hariliku murruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.

Loeme aksioomiks, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel üksainus punkt.

Kui näiteks arvude 1 ja 2 vahel oleks kõik ratsionaalarvud kujutatud arvteljel punktidenä, siis ei oleks arvtelje lõik punktide 1 ja 2 vahel veel punktidega täidetud, sest seal leidub veel kohta

punktidele, millele ei vasta ükski ratsionaalarv, vaid neile vastavad irratsionaalarvud, nagu näiteks arvud $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$.

Nagu $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$, nii on paljud juured, näiteks $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{10}$, irratsionaalarvud. Irratsionaalarvud on enamik trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi, ka arv $\pi = 3,14159265358979323846 \dots$ on irratsionaalarv.

Praktiliste arvutuste korral avaldame antud irratsionaalarvude ligikaudsed väärtused ratsionaalarvude (kümnnendmurdude) abil lubatava vea ülemmääraga ja teeme arvutused saadud ligikaudsete arvudega vastavate reeglite järgi.

Ülesandeid.

198. Ehita ruut külje pikkusega 2 ühikut ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut. Kui pikk on uue ruudu külg?

199. Ehita ruut külje pikkusega 2,5 cm ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut.

200. Ehita ruut külje pikkusega 5 cm ning selle abil 2 korda väiksema pindalaga ruut.

201. Ehita ruut pindalaga 36 cm^2 ning selle abil ruut pindalaga 18 cm^2 .

202. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{18} \text{ cm}$.

203. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{32} \text{ cm}$.

204. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik, mille pikkus on $\sqrt{5}$ ühikut.

205. Kujuta arv $\sqrt{5}$ arvteljel punktina; joonest arvteljel punkt, mis vastab arvu $\sqrt{5}$ vastand arvule.

206. Konstrueeri arvteljel punktid, mis kujutavad arve $\sqrt{13}$ ja $-\sqrt{13}$.

207. Leia tabelist irratsionaalarvude

1) $\sqrt{5}$ ja $\sqrt[3]{2}$

2) $\sqrt[3]{9}$ ja $\sin 10$

ligikaudsed väärtused täpsusega 0,01 ning arvuta nende summa, vahe, korrutise ja jagatise ligikaudsed väärtused.

Omaval ajal laiendasime arvuvalla, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalla murdarvudega ja saime ratsionaalarvude valla. Irratsionaalarvude loomisega ratsionaalarvude vahele tihendame arvuvalla veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümboolid, nagu

$$-1, -5, -7\frac{1}{2},$$

kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümboolid, nagu

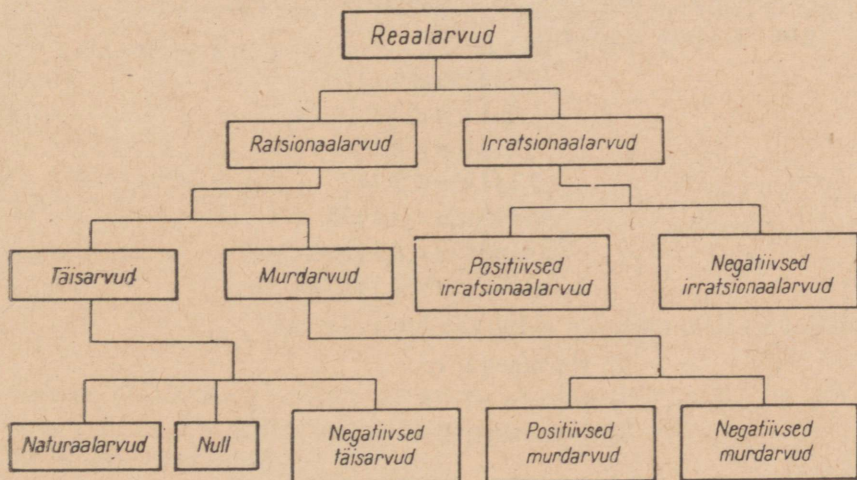
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5\frac{1}{2}}, \sqrt[7]{10,2}, -\sqrt[3]{4}, -\pi,$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas.

Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud moodustavad koos **reaalarvude valla**.

On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka reaalarvude vallas.

Joonisel 54 näeme reaalarvude liigitamise skeemi.



Joon. 54.

Eespool toodud arutlusest järeldame, et igale reaalarvule vastab arvteljel üks punkt. Tunnustame aksioomina, et ka igale punktile arvteljel vastab üks reaalarv.

Ülesandeid.

208. Kirjuta 1) viis ratsionaalarvu;
2) viis irratsionaalarvu;
3) viis täisarvu;
4) viis naturaalarvu.

209. Kirjuta võrratuste jada

$$1 < \sqrt{3} < 2;$$

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8;$$

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74;$$

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733;$$

$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321;$$

$$1,73204 < \sqrt{3} < 1,73205$$

põhjal $\sqrt{3}$ ligikaudne väärtus

- 1) täpsusega 0,1;
- 2) „ 0,01;
- 3) „ 0,001;
- 4) „ 0,0001.

210. Kirjuta võrratuste jada

$$3 < \pi < 4;$$

$$3,1 < \pi < 3,2;$$

$$3,14 < \pi < 3,15;$$

$$3,141 < \pi < 3,142;$$

$$3,1415 < \pi < 3,1416;$$

$$3,14159 < \pi < 3,14160;$$

$$3,141592 < \pi < 3,141593$$

põhjal irratsionaalarvu π ligikaudne väärtus

- 1) täpsusega 1;
- 2) täpsusega 0,1;
- 3) täpsusega 0,001.

§ 51. JUURTE OMADUS.

Mõistes juuritavat ja juurt positiivsete arvudena, saame tõestada teoreemi:

võrdsete juurijatega juurtest on suurem see, millel juuritav on suurem

ehk sümboolites, kui

$$a > b > 0,$$

siis ka

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Kui oletada, et $\sqrt[n]{a}$ ei ole suurem kui $\sqrt[n]{b}$, siis oleks

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b};$$

siis oleks ka

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leq \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

ehk juure definitsiooni põhjal

$$a \leq b,$$

mis on vastuolus eeldusega ($a > b$). Seega

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Järeldus. Arvust 1 suurema arvu n -es juur on suurem kui 1.

Tõestus. Kui

$$a > 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}.$$

Et

$$\sqrt[n]{1} = 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > 1.$$

Sellest omakorda järeldub, et arvust 1 väiksema positiivse arvu n -es juur on 1-st väiksem positiivne arv.

Sümboolites, kui

$$0 < a < 1, \text{ siis } 0 < \sqrt[n]{a} < 1.$$

Ülesandeid.

211. Leia proovimise teel järgmised juured täpsusega 0,1:

$$1) \sqrt{1,7} \quad 2) \sqrt[3]{1,2} \quad 3) \sqrt{0,8} \quad 4) \sqrt[3]{0,9}$$

$$5) \sqrt[4]{28}$$

$$\sqrt[4]{10}$$

$$6) \sqrt[5]{15}$$

$$\sqrt[5]{100}$$

$$7) \sqrt[5]{3,4}$$

$$\sqrt[5]{24,2}$$

§ 52. TEOREEMID TEHETEST JUURTEGA.

1. Teoreem juurte korrutamisest.

Võrdsete juurijatega juurte korrutamisel juuritavad korrutatakse ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Tõestus. Tähistame juurte korrutise tähega x , nii et

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n , saame

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = x^n$$

ehk korrutise astendamise juhise põhjal

$$(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = x^n;$$

et juure definitsiooni põhjal $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ja $(\sqrt[n]{b})^n = b$, siis tähendab eelmine võrdus, et

$$ab = x^n.$$

Seega x on arv, mille n -es aste on ab ; juure definitsiooni kohaselt

$$x = \sqrt[n]{ab}.$$

Võttes nüüd arvesse, et tähega x oli meil tähistatud $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, saame võrduse

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide.

$$\sqrt[3]{16cm^2} \cdot \sqrt[3]{4c^2m} = \sqrt[3]{64c^3m^3} = \sqrt[3]{(4cm)^3} = 4cm.$$

Vahetades tõestatud võrduse pooled, saame korrutise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

s. t.

korrutise juurimisel juuritakse iga tema tegur ja tulemused korrutatakse.

Näide.

$$\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{(x^2)^5} = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

Korrutise juurimise teoreemi rakendamisel peame arvestama asjaolu, et paarisarvulise juurija puhul ei saa seda teoreemi alati kasutada. Nimelt ei ole see teoreem rakendatav juhul, kui juurija on paarisarv ja kui juuritav teisendatakse korrutiseks, mille mõned tegurid on negatiivsed. Näiteks $\sqrt{30}$ on küll esitatav kujul $\sqrt{2 \cdot (-3) \cdot (-5)}$, kuid mitte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$, sest negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

Ülesandeid.

212. Leia peast järgmised juured:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{8 \cdot 27} = 6 & 2) \sqrt[3]{27 \cdot 125} = 15 & 3) \sqrt[3]{1000 \cdot 729} = 90 \\ \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3} & \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} & \sqrt[3]{\frac{216}{343}} = \frac{6}{7} \end{array}$$

213. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks juurte korrumtamise teoreemi:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 & 2) \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} & 3) \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} \\ \sqrt{162} \cdot \sqrt{0,5} = 9 & \sqrt{0,8} \cdot \sqrt{45} & \sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,6} \\ \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3 & \sqrt[3]{-7} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{7}} & \sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt[3]{18} \\ \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2 & \sqrt[3]{40\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} & \sqrt[3]{0,32} \cdot \sqrt[3]{-200} \\ \sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4} = 4 & \sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[4]{486} & \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{48} \end{array}$$

214. Lihtsusta järgmised avaldised, kasutades korrutise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{49a^2} = 7a & 2) \sqrt{121x^4} = 11x^2 & 3) \sqrt{a^2b^2} = ab \\
 \sqrt[3]{125u^3} = 5u & \sqrt[3]{-343f^6} = -7f^2 & \sqrt[3]{-p^3q^9} = -pq^3 \\
 \sqrt[4]{256g^4} = 4g & \sqrt[5]{k^5x^{10}} = kx^2 & \sqrt[7]{-128r^7} = -2r
 \end{array}$$

215. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} & 2) \sqrt[4]{\frac{243}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^9}{3}} & 3) \sqrt{\frac{1}{2}ax^3} \cdot \sqrt{288ax} \\
 \sqrt[3]{4c} \cdot \sqrt[3]{2c^2} & \sqrt[3]{9u} \cdot \sqrt[3]{-3u^5} & \sqrt[3]{m^{14}n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^7}{m^2}} \\
 \sqrt[4]{3N^2} \cdot \sqrt[4]{27N^2} & \sqrt[4]{48x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}x^5} & \sqrt[5]{9H^3} \cdot \sqrt[5]{27H^7}
 \end{array}$$

216. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} & 2) \sqrt[8]{5x} \cdot \sqrt[8]{3y} & 3) \sqrt[3]{-m} \cdot \sqrt[3]{-n} \\
 \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{15} & \sqrt[6]{-\frac{x^2}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2}{x^2}} & \sqrt[3]{1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{80}
 \end{array}$$

217. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks korrutise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{81 \cdot 169} & 2) \sqrt{196 \cdot 10^4} & 3) \sqrt{57600} \\
 \sqrt[3]{216 \cdot 27} & \sqrt[3]{7,29 \cdot 121} & \sqrt[3]{512000} \\
 \sqrt[3]{729 \cdot 1000} & \sqrt[3]{3375 \cdot 1331} & \sqrt[4]{81 \cdot 10^{12}}
 \end{array}$$

218. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

1) $\sqrt{50}$	2) $\sqrt{45}$	3) $\sqrt{32}$	4) $\sqrt{63}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{245}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{768}$
$\sqrt[3]{54}$	$\sqrt[3]{375}$	$\sqrt[3]{108}$	$\sqrt[3]{1512}$
$\sqrt[3]{-24}$	$\sqrt[3]{320}$	$\sqrt[3]{-1024}$	$\sqrt[3]{2000}$
$\sqrt[4]{512}$	$\sqrt[4]{240}$	$\sqrt[5]{486}$	$\sqrt[5]{-96}$

219. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1) $\sqrt{N^3}$	2) $\sqrt{a^5}$	3) $\sqrt{c^2n^3}$	4) $\sqrt{ax^4}$
$\sqrt{c^5h}$	$\sqrt{7m^2x^2}$	$\sqrt{4a^4b}$	$\sqrt{25f^4g^3}$
$\sqrt[3]{27c^5}$	$\sqrt[3]{16a^4}$	$\sqrt[3]{2a^2x^3}$	$\sqrt[3]{8a^3b^2}$
$\sqrt[3]{40cu^4}$	$\sqrt[3]{54h^6k}$	$\sqrt[3]{135u^3v^3}$	$\sqrt[3]{-64N^3}$
$\sqrt[4]{6a^4}$	$\sqrt[4]{64n^5}$	$\sqrt[4]{32P^6}$	$\sqrt[5]{81a^5x}$

220. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil ja teisenda tulemus nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a}$	2) $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{10n}$	3) $\sqrt{5A} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3A}$
$\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{ah}$	$\sqrt[3]{pq^2r^2} \cdot \sqrt[4]{p^2q}$	$\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{x}} \cdot \sqrt[3]{4x^3}$
$\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}$	$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{240}$
$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{75}$	$\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[4]{98}$	$\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[5]{96}$	$\sqrt[6]{2,5} \cdot \sqrt[6]{1,6} \cdot \sqrt[6]{48}$

2. Kuupjuure leidmine tabeli või lükati kasutamisega.

Teoreemi korrutise juurimisest kasutame kuupjuure leidmisel lükati või tabeli abil juhul, kui antud arv on 1-st väiksem või 1000-st suurem. Siis enne kuupjuure leidmist korrutame antud arvu vastavalt 1000-ga (1 000 000-ga) või 0,001-ga (0,000001-ga).

Näiteid.

1. $\sqrt[3]{0,009447} = \sqrt[3]{0,001 \cdot 9,447} = 0,1 \cdot 2,114 = 0,2114.$
2. $\sqrt[3]{11390} = \sqrt[3]{1000 \cdot 11,39} = 10 \cdot 2,25 = 22,5.$

Ülesandeid.

221. Leia tabelist järgmiste arvude kuupjuured:

1) 9994	2) 0,2794	3) 0,003667
1154	0,3422	0,004065
6623	0,1991	0,02102
7940	0,2172	0,07167

222. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust:

1) $\sqrt[3]{0,7} = 0,888$	2) $\sqrt[3]{0,02} = 0,272$
$\sqrt[3]{0,56} = 0,824$	$\sqrt[3]{0,035} = 0,327$
$\sqrt[3]{0,64} = 0,862$	$\sqrt[3]{0,042} = 0,348$
$\sqrt[3]{0,48} = 0,783$	$\sqrt[3]{0,0285} = 0,306$
$\sqrt[3]{0,34} = 0,698$	$\sqrt[3]{0,0335} = 0,322$

223. Leia lükati abil kuupjuur järgmistest arvudest:

1) 0,0483	2) 1728
0,8	68500
0,0025	343000

224. Kasutades kera ruumala valemit

$$V \approx 4,19r^3,$$

leia kera raadius, kui ruumala on 1) $33,7 \text{ dm}^3$; 2) $10,5 \text{ m}^3$;
3) $7,2 \text{ m}^3$.

225. Kasutades kera ruumala valemit

$$V \approx 0,52 d^3,$$

leia kera läbimõõt, kui ruumala on 1) 5190 cm^3 ; 2) 53040 mm^3 ;
3) $0,6404 \text{ m}^3$.

226. Leia kuubi serya pikkus, kui kuubi ruumala on
1) $0,523 \text{ m}^3$; 2) $0,0725 \text{ m}^3$; 3) 8577 cm^3 .

3. Teoreem juurte jagamisest.

Võrdsete juurijatega juurte jagamisel juuritav jagatavas jagatakse juuritavaga jagajas ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Tõestus. Tähistame antud juurte jagatise tähega x , siis

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x.$$

Astendades saadud võrduse kummagi poole arvuga n , saame

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = x^n$$

ehk jagatise astendamise eeskirja põhjal

$$\frac{\left(\sqrt[n]{a} \right)^n}{\left(\sqrt[n]{b} \right)^n} = x^n.$$

Juure definitsiooni põhjal

$$\frac{a}{b} = x^n.$$

Et x on arv, mille n -es aste on $\frac{a}{b}$, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Võrdustest

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x \text{ ja } x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

järeldame, et

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näide.

$$\frac{\sqrt[3]{cu^4}}{\sqrt[3]{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{cu^4}{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{c}\right)^3} = \frac{u}{c}.$$

Vahetades eespool tõestatud võrduse pooled, saame jagatise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

s. t.

murru juurimisel juuritakse tema lugeja ja nimetaja ning arvutatakse tulemuste jagatis.

Näide.

$$\sqrt[4]{\frac{256}{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{(ax^2)^4}} = \frac{4}{ax^2}.$$

Jagatise juurimise teoreemi ei saa kasutada siis, kui juuri ja on paarisarv ja jagatav või jagaja juuritavas on negatiivsed.

Ülesandeid.

227. Kirjuta järgmised avaldised juurtena üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{72} : \sqrt{2} &= 6 & 2) \sqrt{ab} : \sqrt{b} &= \sqrt{a} & 3) \sqrt[4]{b} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}} &= \sqrt[4]{\frac{b^4}{a}} \\ \sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5} &= 5 & \sqrt[3]{c^2} : \sqrt[3]{c} &= \sqrt[3]{c} & \sqrt[3]{N^2} : \sqrt[3]{\frac{1}{N}} &= N \\ \sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{17} &= \sqrt[3]{6} & \sqrt[3]{H^2u^2} : \sqrt[3]{Hu^2} &= \sqrt[3]{H} & \sqrt[3]{\frac{P}{Q^2}} : \sqrt[3]{\frac{Q}{p^2}} &= \frac{p}{Q} \end{aligned}$$

228. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[4]{8N^3u} : \sqrt[4]{\frac{N^2u}{2}} & \quad 2) \sqrt[4]{\frac{9ax^3}{25n^6}} : \sqrt[4]{\frac{a^5x}{n^2}} & 3) \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} \\ \sqrt[3]{\frac{H^2}{25u}} : \sqrt[3]{\frac{5u^2}{H}} & \quad \frac{\sqrt{a^2b-a^2c}}{\sqrt{b-c}} & \frac{\sqrt{(u+v)^2}}{\sqrt{u^2-v^2}} \\ \sqrt[3]{ab^2c^3} : \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64a^5b}} & \quad \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m^2-n^2}} & \frac{\sqrt[3]{a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{a(a+b)}} \end{aligned}$$

229. Kirjuta järgmised juurte jagatised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{llll}
 1) \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = 3 & 2) \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3} & 3) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} & 4) \frac{\sqrt{aN}}{\sqrt{N}} \\
 \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{5} & \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n} & \frac{\sqrt[3]{h^7}}{\sqrt[3]{h}} & \frac{\sqrt[3]{a^2h}}{\sqrt[3]{ah^2}} \\
 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}} = \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac^2}} & \frac{\sqrt{\rho x^3}}{\sqrt{\rho^2 x^2}} \\
 \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}} = \frac{1}{2} & \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{56}} = \frac{1}{2} & \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{c^2 u^2}} & \frac{\sqrt[3]{mx^2}}{\sqrt[3]{m^4 x^5}}
 \end{array}$$

230. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks jagatise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{llll}
 1) \sqrt{\frac{9}{64}} & 2) \sqrt{\frac{49}{81}} & 3) \sqrt{\frac{144}{25}} & 4) \sqrt{\frac{169}{289}} \\
 \sqrt[3]{6\frac{1}{4}} & \sqrt[3]{3\frac{4}{16}} & \sqrt[3]{7\frac{9}{16}} & \sqrt[3]{4\frac{21}{25}} \\
 \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} & \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} & \sqrt[3]{5\frac{23}{64}} & \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}} \\
 5) \sqrt[3]{\frac{5^2}{6^4}} & 6) \sqrt[3]{\frac{2^6}{7^3}} & 7) \sqrt[3]{\frac{236}{10^8}} & 8) \sqrt[3]{\frac{243}{10^{15}}} \\
 \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} & \sqrt[3]{\left(1\frac{9}{16}\right)^3} & \sqrt[3]{3\left(\frac{13}{81}\right)^2} & \sqrt[3]{\left(-\frac{32}{243}\right)^3}
 \end{array}$$

231. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi all oleksid võimalikult lihtsad avaldised:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt[3]{\frac{18}{25}} & 2) \sqrt[3]{\frac{16}{27}} & 3) \frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{125a}{27x^3}} \\
 12 \sqrt[3]{\frac{a^3}{16x^2}} & \sqrt[3]{1\frac{9x^3}{16a^2}} & 0,2 \sqrt[3]{1000Nu^3} \\
 10 \sqrt[3]{\frac{1}{8}M} & \frac{2}{7} \sqrt[3]{\frac{3}{4}m^2n^4} & 10 \sqrt[3]{\frac{H^2}{0,008}}
 \end{array}$$

4. Teoreem juure astendamisesest.

Juure astendamisel astendatakse juuritav ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümboolites:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0.$$

Tõestus. Kirjutame astme $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ korrutisena, siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}}.$$

Juurte korrutamise teoreemi põhjal võime nüüd kirjutada:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}_{m \text{ tegurit}} = \sqrt[n]{a^m}; \text{ seega}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$(\sqrt{5a^3})^3 = \sqrt{5^3a^9} = \sqrt{5^2a^8} \cdot \sqrt{5a} = 5a^4\sqrt{5a}.$$

Vahetades eespool tõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Selle võrduse mõtet võime sõnastada nii:

arvu astendamise ja saadud astme juurimise asemel võib arvu juurida ja siis saadud juurt astendada.

Näide.

$$\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{16}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{4^2}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{a^2h^2}{4^2}}\right)^3 = \left(\frac{ah}{4}\right)^3 = \frac{a^3h^3}{64}.$$

Valemit $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ei ole võimalik kasutada siis, kui juurija n on paarisarv ja astendatav a juuritavas on negatiivne.

Ülesanded.

232. Kirjuta järgmised astmed võimalikult väheste sümbo-
litega:

$$\begin{array}{lll}
 1) (\sqrt{5})^4 = 25 & 2) (\sqrt[3]{7})^5 = 7\sqrt[3]{49} & 3) (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5})^6 \\
 (\sqrt{3})^8 = 81 & (\sqrt[5]{a})^6 = a\sqrt[5]{a} & (\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6 \\
 (\sqrt{2})^{10} = 32 & (\sqrt[4]{x})^5 = x\sqrt[4]{x} & (\sqrt[4]{x} : \sqrt[4]{y})^5 \\
 (\sqrt[3]{3})^6 = 9 & (\sqrt[5]{b^2})^7 = b^2\sqrt[5]{64} & (\sqrt[4]{27} : \sqrt[4]{3})^2
 \end{array}$$

233. Arenda järgmised korrutised ja astmed.

$$\begin{array}{ll}
 1) (\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{3} & 2) (\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10}) = 11-10 \\
 (\sqrt{7}+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} & (\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2}) = \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{2}^2 = 3-8 = -5 \\
 3) (\sqrt{7}-1)^2 & 4) (2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2 \\
 (\sqrt{10}-\sqrt{8})^2 & (2\sqrt{8}-3)(9+4\sqrt{8}) \\
 (\sqrt{3}-1)^3 & (2\sqrt{6}-4\sqrt{3})^3
 \end{array}$$

234. Teisenda järgmised astmed nii, et juuremärgi all oleks
võimalikult vähe tegureid:

$$\begin{array}{lll}
 1) (\sqrt{2a^2})^3 & 2) (\sqrt[3]{4x^2})^2 & 3) \left(\sqrt{\frac{bc^3}{3a}}\right)^3 \\
 (\sqrt{3hu^2})^5 & (2\sqrt[3]{cu^6})^3 & \left(\sqrt{\frac{a^3x}{5u^3}}\right)^3 \\
 (\sqrt[3]{5c^2N^2})^2 & (\sqrt[4]{6R^2})^2 & \left(\sqrt{\frac{2m^3x^5}{n^4}}\right)^4 \\
 (\sqrt[4]{7p^4q^2})^4 & (\sqrt[4]{\pi R^3h})^2 & \left(\sqrt[3]{\frac{3c^5x^2}{4f^3}}\right)^4
 \end{array}$$

5. Teoreem astme juurimisest.

Kui juuritavaks on aste, mille astendaja on juurija kordne, s. t.
kui avaldises $\sqrt[n]{a^m}$ on $m=kn$, siis saab näidata, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k.$$

Astme juurimisel astendaja jagatakse juurijaga ja saadud jagatisega astendatakse astendatav juuritavas.

Tõestus. Avaldise a^{kn} võime kirjutada kujul $(a^k)^n$. Eelmise teoreemi ja juure definitsiooni põhjal saame nüüd, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k.$$

Näide.

$$\sqrt[7]{x^{21}} = x^{\frac{21}{7}} = x^3.$$

Teiseks juhtumiks, mis astme juurimisel märkimist väärrib, on see juhtum, kus juurijal ja juuritava astendajal on ühine tegur. Sel juhul saab juurt taandada, s. t.

juurijat ja juuritava astendajat võib jagada nende ühise teguriga.

Olgu juurija ja juuritava astendaja ühine tegur märgitud tähega k ; siis võime neid arve kirjutada kujul km ja kn ja juure taandamise teoreem avaldub kujul

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõestus. Tähistame $\sqrt[km]{a^{kn}}$ tähega x ; teatavasti aga $a^{kn} = (a^n)^k$, mistõttu ka

$$\sqrt[km]{(a^n)^k} = x$$

ehk eelmise teoreemi põhjal

$$(\sqrt[m]{a^n})^k = x.$$

Astendades võrduse mõlemad pooled arvuga m , saame

$$(\sqrt[m]{a^n})^{km} = x^m$$

ehk

$$a^n = x^m.$$

Et x on niisugune arv, mille m -es aste on a^n , siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[m]{a^n}.$$

Võttes arvesse, et tähega x tähistasime tõestuse algul avaldist $\sqrt[km]{a^{kn}}$, saamegi võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Näiteid.

$$\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{a^{3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2};$$

$$\sqrt[8]{4x^6y^4} = \sqrt[8]{2^2x^6y^4} = \sqrt[8]{(2x^3y^2)^2} = \sqrt[4]{2x^3y^2}.$$

Vahetades võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$$

pooled, saame juure laiendamise teoreemi:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[km]{a^{kn}},$$

s. t.

juurijat ja juuritava astendajat võib korrutada ühe ning sama arvuga.

Näiteid.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}; \quad \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^9}.$$

Ülesandeid.

235. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{3^4} = 9 & 2) \sqrt[3]{a^6} = a^2 & 3) \sqrt{a^2b^4} = ab^2 \\ \sqrt[4]{2^6} = 8 & \sqrt[4]{a^4b^8} = ab^2 & \sqrt[3]{125a^6} = 5a^2 \\ \sqrt[3]{64} = 4 & \sqrt[3]{27m^3n^6} = 3m^1n^2 & \sqrt[3]{8r^3} = 2r \end{array}$$

236. Taanda järgmised juured:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a} & 2) \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3]{a^2} & 3) \sqrt[4]{5^2} \\ \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a} & \sqrt[12]{a^4b^8} = \sqrt[3]{a^2b^2} & \sqrt[4]{64} \\ \sqrt[4]{a^2x^6} = \sqrt[4]{a^2x^2} & \sqrt[12]{\frac{x^6}{y^3}} = \sqrt[4]{\frac{x^2}{y}} & \sqrt[6]{9} \\ \sqrt[6]{a^2b^4} = \sqrt[3]{a^2b^2} & \sqrt[15]{u^5v^{10}} & \sqrt[6]{1000} \\ \sqrt[2n]{a^{2m}} = \sqrt[n]{a^m} & \sqrt[3n]{a^{3p}b^{9q}} & \sqrt[6]{\frac{25}{81}} \end{array}$$

237. Teosta juurte korrutamine või jagamine, juurt tarbe korral laiendades või taandades:

$$1) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2^4}$$

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}$$

$$2) \sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a}$$

$$\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[15]{a^2}$$

$$\sqrt[4]{b} : \sqrt{b}$$

6. Teoreem juure juurimisest.

Juure juurimisel juurijad korrutatakse ja tulemusega juuritakse antud juuritav arv.

Sümbolites:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Tõestus.

Tähistame avaldise $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ tähega x , nii et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x.$$

Astendame selle võrduse pooled arvuga m , saame

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = x^m$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = x^m.$$

Astendame nüüd saadud võrduse kummagi poole veel arvuga n , siis saame

$$(\sqrt[n]{a})^n = (x^m)^n$$

ehk

$$a = x^{mn}.$$

Juure definitsiooni põhjal ongi nüüd

$$x = \sqrt[mn]{a}.$$

Viimasest võrdusest ja võrdusest

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$$

järeldame, et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{D^{30}}} = \sqrt[15]{D^{30}} = D^{\frac{30}{15}} = D^2.$$

Nagu varem käsitletud võrdustes, nii võib ka kõnesolevas võrduses vahetada pooled; siis saame

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

või ka

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Seega on alati võimalik juurimist mingi kordarvuga mn teostada sel teel, et enne juuritakse näiteks arvuga n ja tulemust juuritakse arvuga m . Nii võime 4-nda juure arvust 625 leida sel teel, et leiame arvu 625 ruutjuure ja tulemusest veel kord ruutjuure:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5.$$

Analoogiliselt leiame $\sqrt[6]{27}$:

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{3} = 1,732.$$

Ülesandeid.

238. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgiga:

$$1) \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{13}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{29}} = \sqrt[2]{\sqrt{3}}$$

$$\underline{2)} \sqrt{\sqrt{N^3}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{h^3}}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{c^{10}}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4 x^3}}$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$$

$$3) \sqrt[3]{\sqrt{ab^3}}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{(3c^4)}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^3 b^6 c^9}}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{N^{10} f^{15}}}$$

$$\sqrt[3]{2x\sqrt{\frac{a}{2}}}$$

$$\underline{4)} \sqrt[4]{a^2 \sqrt{256b^8}}$$

$$\frac{1}{3} \sqrt[3]{81 \sqrt{16a^2 b^4}}$$

$$\sqrt[3]{27 \sqrt{a^3 b^{12}}}$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt[5]{32a^5 \sqrt{b^5}}$$

$$\sqrt[5]{a^{10} b^5}$$

239. Arvuta järgmiste juurte väärtused, kasutades ruut- ja kuupjuurte tabelleid:

$$\underline{1)} \sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[6]{36}$$

$$\sqrt[8]{81}$$

$$2) \sqrt[4]{16}$$

$$\sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[8]{625}$$

$$3) \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt[6]{144}$$

$$\sqrt[8]{1296}$$

$$4) \sqrt[4]{100}$$

$$\sqrt[6]{1331}$$

$$\sqrt[12]{10000}$$

§ 53. JUURAVALDISTE TEISENDAMISI.

Juuravaldisteks nimetame niisuguseid avaldisi, mis sisaldavad juuri.

Näiteks

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}; \left(10 - 2\sqrt[5]{100}\right)^2; \frac{1}{3 - \sqrt{5}}.$$

Nende avaldiste väärtusi saab arvutada vaid ligikaudu, mil-
leks asendame avaldises esinevad juured nende ligikaudsete vää-
rustega, tavaliselt 2-, 3- või 4-kohaliste kümnendmurdudega, ja
teostame avaldises näidatud tehted. Töö hõlbustamiseks on sageli
kohane avaldist enne teisendada. Teisendamise võtteist käsitame
kahte:

a) teguri toomine juuremärgi alt juuremärgi ette;

b) juure kaotamine murru nimetajast või lugejast.

Esimene teisendus põhineb kas korrutise või jagatise juurimise
teoreemil ja vastavalt sellele teostub see kas nii:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}$$

või nii:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a}.$$

Teine teisendus — juure kaotamine murru nimetajast või lugejast — toimub murru lugeja ja nimetaja korrutamisel kohaselt valitud juuravaldisega.

Näiteid.

$$1. \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b}.$$

$$2. \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt[3]{b^2}.$$

$$3. \quad \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$$

$$4. \quad \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

Nende teisendusvõtete kasutamist selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada avaldise

$$4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et kõigepealt leiame tabeli abil kõik antud avaldises esinevad juured, siis teostame nõutavad korrutamised ja seejärel liitmised ning lahutamised. Tunduvalt hõlpsamini jõuame eesmärgile antud avaldist teisendades. Nii saame:

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20} = \\ & = 4\sqrt{9 \cdot 7} - 5\sqrt{4 \cdot 7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} = \\ & = 4 \cdot 3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\ & = 12\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\ & = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Avaldise väärtuse arvutamine algkuju järgi nõuab 4 juurimis-, 2 korrutamise-, 2 lahutamistehte ja 1 liitmistehte, s. o. 10 tehte sooritamist. Avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab kõigest ühe juure leidmist ja üht korrutamist. Võttes tabelist $\sqrt{5}$ lähisväärtuse 2,236, saame avaldise väärtusena 4,472. Kontrolliks märgime, et $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$ ehk tabeli järgi 4,472.

Ülesanne 2. Arvutada avaldise $\frac{26}{5\sqrt{13}}$ väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et võtame tabelist $\sqrt{13}$ näiteks neljakohalise lähisväärtuse, korrutame selle 5-ga ja jagame 26 saadud korrutisega. Et hoiduda tülikast jagamistehtest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juure. Selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{13}$. Nii saame:

$$\frac{26}{5\sqrt{13}} = \frac{26 \cdot \sqrt{13}}{5 \cdot 13} = \frac{2}{5} \sqrt{13} = 0,4\sqrt{13}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab ühtainsat korrutamist, kui $\sqrt{13}$ lähisväärtus võetakse tabelist.

Ülesanne 3. Arvutada avaldise

$$\frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et leiame tabelist $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ näiteks neljakohalised lähisväärtused, arvutame nende vahe ja jagame 8 selle vahega. Et hoiduda tülikast jagamistehtest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juured. Selleks korrutame murru lugeja ja nimetaja summaga $\sqrt{19} + \sqrt{15}$:

$$\begin{aligned} \frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}} &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{(\sqrt{19} - \sqrt{15})(\sqrt{19} + \sqrt{15})} = \\ &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{19 - 15} = \frac{8}{4} (\sqrt{19} + \sqrt{15}) = 2(\sqrt{19} + \sqrt{15}). \end{aligned}$$

Antud avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab vaid üht liitmis- ja üht korrutamistehtet, kui $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ lähisväärtused on teada.

Ülesanne 4. Vabastada murru

$$\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{4} + \sqrt{2}}}$$

nimetaja juurtest.

Lahendus. Laiendame antud murdu arvude $\sqrt[3]{4}$ ja $\sqrt[3]{2}$ vahe mittetäieliku ruuduga. Saame

$$\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{4} + \sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2^2} - \sqrt{4} \cdot 2 + \sqrt{2^2}}}{\frac{3}{(\sqrt{4} + \sqrt{2})(\sqrt{4^2} - \sqrt{4} \cdot 2 + \sqrt{2^2})}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{16} - 2 + \sqrt{4}}}{4 + 2} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{4}}}{6}.$$

Ülesanne 5. Vabastada murru

$$\frac{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4}}{3}$$

lugeja juurtest.

Lahendus. Laiendame murdu arvude $\sqrt[3]{7}$ ja $\sqrt[3]{4}$ summa mittetäieliku ruuduga.

Saame

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4}}{3} &= \frac{(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2} + \sqrt[3]{7 \cdot 4} + \sqrt[3]{4^2})}{3(\sqrt[3]{7^2} + \sqrt[3]{7 \cdot 4} + \sqrt[3]{4^2})} = \\ &= \frac{3}{3(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{16})} = \frac{1}{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{28} + 2\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

Ülesandeid.

240. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

$$\begin{array}{llll} 1) \sqrt{\frac{1}{2}} & 2) \sqrt{\frac{2}{3}} & 3) \sqrt{1\frac{1}{2}} & 4) \sqrt{3\frac{1}{7}} \\ \sqrt{\frac{3}{20}} & \sqrt{\frac{5}{12}} & \sqrt{1\frac{5}{18}} & \sqrt{2\frac{1}{50}} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{9}} & \sqrt[3]{\frac{3}{4}} & \sqrt[3]{\frac{1}{2}} & \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \end{array}$$

241. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne täisavaldis:

$$1) \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{m}{2n}}$$

$$3) \sqrt[4]{\frac{5x}{8a}}$$

$$4) \sqrt[5]{\frac{p}{q^3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^2}{d^3}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{m^5}{n}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{250}{3x}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{243}{49a^3}}$$

242. Kirjuta järgmised juuravaldised kujul, mille nimetajas puudub juur, ja arvuta avaldiste väärtused:

$$1) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$4) \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{7}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[3]{27}}$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{6}}$$

$$\frac{6}{\sqrt{18}}$$

$$\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$$

243. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille nimetajas ei esine juurt:

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$2) \frac{a}{\sqrt[3]{a}}$$

$$3) \frac{m}{\sqrt[3]{2n}}$$

$$4) \frac{3p}{\sqrt[3]{3q}}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{125}}$$

$$\frac{a^2}{x\sqrt{ax}}$$

$$\frac{4xy}{\sqrt{2xy^3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$$

244. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille nimetajas ei esine juurt, ja arvuta avaldiste väärtused:

$$1) \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$2) \frac{21}{5+\sqrt{2}}$$

$$3) \frac{12}{5-\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$\frac{19}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}}$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4}$$

245. Anna järgmistele murdudele kuju, mille nimetaja on juurevaba:

$$1) \frac{\frac{n}{\sqrt{u}-1}}{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-\sqrt{x}}}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$$

$$2) \frac{\frac{\omega}{\omega\sqrt{\omega}+1}}{\frac{10x}{\sqrt{x}+\sqrt{5x}}}$$

$$\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$$

$$3) \frac{\frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}}{\frac{a+2\sqrt{x}}{a-2\sqrt{x}}}$$

$$\frac{u-2\sqrt{u}}{u+3\sqrt{u}}$$

246. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille lugejas ei esine juurt:

$$1) \frac{1-\sqrt{a}}{1-a}$$

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{a-2\sqrt{x}}{a+2\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{1+\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1-\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1+\sqrt{a}+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a}}$$

$$3) \frac{1-\sqrt{a}+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{m}+1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{n}-1}{3}$$

247. Koonda järgmised juuravaldised:

$$1) 6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$$

$$8\sqrt{3}-5\sqrt{3}$$

$$m\sqrt{7}+n\sqrt{7}$$

$$a\sqrt{z}-2\sqrt{z}$$

$$2) 10\sqrt[3]{5}-9\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[5]{4}+4\sqrt[5]{4}$$

$$a\sqrt[3]{x}+b\sqrt[3]{x}$$

$$k\sqrt[n]{a}+\frac{n}{k}\sqrt[n]{a}$$

$$3) a\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$m\sqrt[3]{d}-2n\sqrt[3]{d}$$

$$\sqrt[4]{3f}-5\sqrt[4]{3f}$$

$$a^2\sqrt[5]{b}-a\sqrt[5]{b}$$

248. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste ja lihtsate juurte abil:

$$1) 8\sqrt{7}+5\sqrt[3]{7}-10,7\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}$$

$$3\sqrt{10}+\sqrt[3]{10}-5,5\sqrt[3]{10}-0,7\sqrt{10}$$

$$2\sqrt{N}-\sqrt{M}+4\sqrt{N}-6\sqrt{M}$$

$$\sqrt[3]{H}+3\sqrt{H}-2\sqrt{H}+\sqrt[3]{H}$$

$$\begin{array}{l}
2) \quad 6\sqrt{3}-7\sqrt{12}+\sqrt{75}-3\sqrt{48}+3\sqrt{108}+\sqrt{300} \\
\quad \quad \quad \sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{40}+9\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{432} \\
\quad \quad \quad 6\sqrt{18}-5\sqrt[3]{54}-4\sqrt{72}+4\sqrt[3]{1024} \\
\quad \quad \quad 5\sqrt[3]{72}-7\sqrt{45}+11\sqrt[3]{9000}-10\sqrt{180} \\
3) \quad 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \qquad \qquad \qquad 4) \quad 5\sqrt{3} : (2\sqrt{12}) \\
\quad \quad \quad 2\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{12} \cdot \frac{3}{5} \sqrt[3]{32} \qquad \qquad \qquad \sqrt{48} : \left(\frac{1}{3} \sqrt{3}\right) \\
\quad \quad \quad 5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{18} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{20} \qquad \qquad \qquad \frac{3}{5} \sqrt{56} : (3\sqrt{8}) \\
\quad \quad \quad \frac{2}{3} \sqrt[3]{3} \cdot 7\sqrt[3]{18} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[3]{16} \qquad \qquad \qquad \sqrt{91} : \left(\frac{3}{4} \sqrt{39}\right)
\end{array}$$

249. Leides tabelist vastavate arvude ruut- ja kuupjuured, arvuta järgmiste juuravaldiste väärtused:

$$\begin{array}{lll}
1) \quad \sqrt{3} + \sqrt{5} & 2) \quad \sqrt{7} - \sqrt{5} & 3) \quad \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2} \\
\quad \quad \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} & \quad \quad \quad \sqrt{14} & \quad \quad \quad \sqrt{35} \\
\quad \quad \quad \sqrt{21} & \quad \quad \quad \sqrt{98} & \quad \quad \quad \sqrt[3]{45} \\
4) \quad \sqrt[3]{5} - \sqrt{3} & 5) \quad \sqrt{50} - \sqrt{28} + \sqrt{35} & \\
\quad \quad \quad \sqrt[3]{49} & \quad \quad \quad 2\sqrt{15} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75} & \\
\quad \quad \quad \sqrt[3]{448} & \quad \quad \quad \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{200} &
\end{array}$$

250. Teisenda järgmised korrutised nii, et kõik tegurid oleksid juuremärgi all:

$$\begin{array}{lll}
1) \quad 2\sqrt{5} & 2) \quad b\sqrt[3]{c^2} & 3) \quad ax^2\sqrt[3]{a} \\
\quad \quad \quad h^2\sqrt{u} & \quad \quad \quad N^2\sqrt[5]{N} & \quad \quad \quad 3D^2\sqrt[3]{3D} \\
\quad \quad \quad c^2\sqrt{\frac{b}{c}} & \quad \quad \quad 4x\sqrt[3]{\frac{m}{16x^2}} & \quad \quad \quad \frac{1}{2}a^2u^3\sqrt[3]{\frac{4}{au^2}}
\end{array}$$

251. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne avaldis:

$$1) \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$2) 3N \sqrt{N^2 - \frac{5}{9} N^2}$$

$$\sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{4x^2 - \frac{19}{25} x^6}$$

$$2\pi \sqrt{r^2 - \frac{3}{8} r^2}$$

$$\sqrt{\frac{12}{25} R^4 - \frac{4}{25} R^2}$$

252. Lihtsusta järgmised korrutised:

$$1) \frac{2}{a} \sqrt{3x} \cdot \frac{5}{a} \sqrt{6x}$$

$$2) \sqrt{N} (\sqrt{N} - a\sqrt{aN})$$

$$m^2 \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot 3\sqrt{m}$$

$$\sqrt{2x} (\sqrt{2} + \sqrt{x})$$

$$h^2 \sqrt[3]{2u} \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{4u^2}$$

$$m\sqrt{n} (\sqrt{mn} - 5m\sqrt{n})$$

$$\pi \sqrt{aR^2} \cdot \frac{5R^2}{3} \sqrt[3]{a^2 R}$$

$$3\sqrt{cD} (\sqrt{cD} + 2\sqrt{aD})$$

§ 54. JUURVÖRRANDITE LAHENDAMISE NÄITEID.

Võrrandit, milles tundmatu esineb juuritavas, nimetatakse juurvõrrandiks.

Juurvõrrandid on näiteks võrrandid

$$\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 3$$

ja

$$\sqrt[3]{x+50} = 4.$$

Seevastu võrrand

$$x\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

ei ole juurvõrrand, sest tundmatu ei esine juuritavas.

Et lahendada juurvõrrand, selleks tuleb teda enne niisuguseks teisendada, et üheski juuritavas ei esineks tundmatut.

Allpool selgitame lähemalt juurvõrrandite lahendamise võtteid kahe näite varal.

1. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x - \sqrt{x+2} = 10.$$

Kui võrrandi vabastamiseks juurest tõstaksime ta otsekohe ruutu, siis võrrandi vasakul poolel peale juurevabade liikmete saaksime ka liikmete x ja $-\sqrt{x+2}$ kahekordse korrutise; seega

jääks juur $\sqrt{x+2}$ ikkagi võrrandisse püsima. Seepärast talitame nii, nagu eespool öeldud: viime juure võrrandi ühele poolele ja kogume kõik muud liikmed teisele poolele; siis võrrand omandab kuju:

$$x-10=\sqrt{x+2}.$$

Tõstes selle võrrandi pooled ruutu, saame võrrandi

$$(x-10)^2=x+2$$

ehk pärast sulgude avamist ja koondamist

$$x^2-21x+98=0.$$

Selle võrrandi lahendid on 14 ja 7.

Asendades lähtevõrrandis tähe x ruutvõrrandi lahendiga 14, saame võrrandi vasakul poolel $14-\sqrt{14+2}$ ehk 10, s. o. sama arvu, mis seisab paremal poolel. Seega ruutvõrrandi lahend 14 on ka antud juurvõrrandi lahendiks.

Tehes sedasama ruutvõrrandi teise lahendiga, arvuga 7, saame juurvõrrandi vasakul poolel $7-\sqrt{7+2}$ ehk 4. Et aga paremal poolel seisab 10, siis arv 7 juurvõrrandit ei rahulda.

Arv 7 rahuldab küll võrrandit $x+\sqrt{x+2}=10$, kuid mitte antud võrrandit.

Sellest nähtub, et lähtevõrrand ja temast poolte astendamisel saadud võrrand pole s a m a v ä ä r s e d, s. o. mitte kõik astendamisel saadud võrrandi lahendid pole ühtlasi ka lähtevõrrandi lahenditeks.

*Lõppvõrrandi lahendit, mis ei rahulda lähtevõrrandit, nimetatakse lähtevõrrandi **võõrlahendiks**.*

Arv 7 on seega antud juurvõrrandi võõrlahend ja selle võrrandi ainsaks lahendiks on 14.

Kõigest öeldust järeldub, et võrrandi teisendamisel astendamise teel võib tekkida võõrlahendeid. Seepärast

alati tuleb selgitada, missugused juurvõrrandi lahendamise tulemustest rahuldavad seda võrrandit.

Ülesandeid.

253. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{5x}=10$

6) $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{2x^2-2x}$

2) $x-\sqrt{3x}=0$

7) $\sqrt[3]{10x+46}=\sqrt[3]{7x+43}$

3) $\sqrt{x}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$

8) $\sqrt{x^2+10x}=12$

4) $\sqrt{x-1}-3=0$

9) $\sqrt{6x+25}-x=3$

5) $x-3+\sqrt{x^2-1}=0$

10) $3x-4\sqrt{x-32}=0$

254. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{2x}=8$

6) $\sqrt{x+7}=x$

2) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{z}{8}}=z$

7) $y-2=\sqrt{y}$

3) $\sqrt[3]{5x}=x$

8) $\sqrt{10u-24}=u$

4) $\sqrt[3]{x^2}=9$

9) $x-11\sqrt{x}+24=0$

5) $\sqrt[5]{v^5}=1024$

10) $x+1=\sqrt{2x+4}$

255. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x+8}=x+2$

4) $\sqrt{2x}-x=4$

2) $\sqrt{x+8}=-x-2$

5) $4x+2\sqrt{5-4x}=5$

3) $\sqrt{x^2+16}+x=8$

6) $2a-\sqrt{x^2-8a}=1$

2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+5}=1,$$

milles peale juurevaba liikme esineb kaks ruutjuurt tundmatuga juuritavas.

Kui tõstaksime ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, siis vasakul poolel saaksime peale juurevabade liikmete ka juurte kahekordse korrutise. Et vältida selle keerulise avaldise tekkimist, teisendame võrrandit nii, et jätame vasakule poolele ainult ühe juure, näiteks esimese:

$$\sqrt{3x+4}=1+\sqrt{x+5}.$$

Tõstes nüüd võrrandi pooled ruutu, saame:

$$3x+4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$$

ehk pärast koondamist ja taandamist

$$x-1=\sqrt{x+5}.$$

Tõstes uuesti mõlemad pooled ruutu, saame pärast koondamist võrrandi

$$x^2-3x-4=0.$$

Selle võrrandi lahendid on 4 ja -1 .

Tehes lähtevõrrandis asendused $x=4$ ja $x=-1$, veendume, et esimene neist rahuldab lähtevõrrandit, teine aga ei rahulda. Seega antud võrrandi ainsaks lahendiks on 4.

Ülesandeid.

256. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}+1=0$

2) $\sqrt{x}-\sqrt{x-28}=2$

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{6}$

4) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+\sqrt{5}$

5) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$

6) $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$

7) $\sqrt{x}+\sqrt{3x-a}=\sqrt{a}$

257. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 1 cm võrra pikem kui üks kaatet ja kolmnurga übermõõt on 56 cm. Leia kolmnurga küljed.

258. Täisnurkse kolmnurga kaatetite vahe on 7 cm ja kolmnurga übermõõt 30 cm. Leia kolmnurga küljed.

259. Kolmnurga kahe külje suhe on 5:8, kolmas külg on 39 cm ja sellele tõmmatud kõrgus 24 cm. Leia kolmnurga kaks külge.

260. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

2) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-11}=\sqrt{x-3}$

- 3) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x+5} = \sqrt{17x-4}$
- 4) $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-19} = \sqrt{3x+4}$
- 5) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{7x-27} = \sqrt{3x+4}$
- 6) $5\sqrt{3x+4} - 3\sqrt{2x-5} = 4\sqrt{3x-5}$
- 7) $x + \sqrt{2ax+x^2} = a$
- 8) $2a - \sqrt{2ax+x^2} = x$
- 9) $\sqrt{x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}$
- 10) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}$
- 11) $\sqrt{3x+a+2b} - \sqrt{3x+a-2b} = 2\sqrt{x-a}$
- 12) $\sqrt{ax+b^2} + \sqrt{2b(x-a)} = \sqrt{ax+4bx+b^2}$

3. Võrrandi

$$\sqrt[3]{4+x} + \sqrt[3]{5-x} = 3$$

lahendamisel kasutame valemit

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Saame

$$(\sqrt[3]{4+x} + \sqrt[3]{5-x})^3 = 27$$

ehk

$$4+x+5-x+3\sqrt[3]{4+x} \cdot \sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{4+x} + \sqrt[3]{5-x}) = 27,$$

$$9+3\sqrt[3]{4+x} \cdot \sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{4+x} + \sqrt[3]{5-x}) = 27.$$

Et antud võrrandi järgi

$$\sqrt[3]{4+x} + \sqrt[3]{5-x} = 3,$$

siis saame

$$9+3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{4+x} \cdot \sqrt[3]{5-x} = 27$$

ehk

$$\sqrt[3]{(4+x)(5-x)} = 2,$$

siit

$$x^2 - x - 12 = 0,$$

millest

$$x_1 = 4, x_2 = -3.$$

Kontroll näitab, et mõlemad leitud arvud rahuldavad antud võrrandit.

Ülesandeid.

261. Lahenda järgmised võrrandid.

$$1) \sqrt[3]{7+x} + \sqrt[3]{9-x} = 4$$

$$2) \sqrt[3]{25+x} - \sqrt[3]{6+x} = 1$$

$$3) \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{7-x} = 3$$

$$4) \sqrt[3]{3x+2} - \sqrt[3]{3x-5} = 1$$

§ 55. ASTENDAJA 0.

Olgu a mingi arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Me teame, et siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n.$$

Laiendame nüüd astme mõistet nii, et ka siis, kui $m = n$ või $m < n$, kehtiks võrdus

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Kui $m = n$ ja $a \neq 0$, siis

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{n-n} = a^0.$$

Avaldisel a^0 ei ole astme senise definitsiooni järgi mõtet.

Et vaadeldaval juhul, kui $m = n$, $a^m = a^n$ ja et kahe võrdse arvu jagatis on 1, siis tuleb sümbolit a^0 mõista arvuna 1:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Nii on

$$7^0 = 1 \quad (-9)^0 = 1 \quad \left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1.$$

Võrdust $a^0 = 1$ loetakse õigeaks ainult siis, kui $a \neq 0$; 0^0 jäetakse aga ilma arvu tähenduseta.

Kui $m < n$ ja $a \neq 0$, siis

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)}, \text{ kus } n-m > 0.$$

Saadud avaldisel kui negatiivse astendajaga astmel pole astme senise definitsiooni järgi mõtet.

Kirjutame vaadeldava astmete jagatise murru kujul ja jagame selle murru lugejat ja nimetajat arvuga a^m :

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

seega

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ kui } m < n.$$

Niisiis tuleb avaldist $a^{-(n-m)}$ mõista naturaalarvulise astendajaga astme a^{n-m} pöördväärtusena:

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Tähistades vahet $n-m$ üheainsa tähega r , näeme, et

$$\boxed{a^{-r} = \frac{1}{a^r}}.$$

Nii on

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

ja

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

Astme mõiste laiendamisel võtsime aluseks, et jääks kehtima võrdsete alustega astmete jagamise reegel. Saab näidata, et ka teised tehted, mis kehtivad naturaalarvulise astendajaga astmete korral, jäävad kehtima samuti täisarvulise astendajaga astmete korral.

Näiteks on

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}.$$

Tõepoolest,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Samuti

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

Tõepoolest,

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Samuti

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n,$$

sest

$$a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n.$$

Iga avaldist, milles esineb negatiivseid astendajaid, saame murrujoone abiksvõtmisel kirjutada nii, et esineksid vaid positiivsed astendajad. Näiteks

$$n^2 x^3 \cdot \frac{2}{5} n^{-3} x^{-2} = \frac{2}{5} n^{-1} x = \frac{2x}{5n}.$$

Tehnikaalases praktikas kasutatakse negatiivset astendajat sageli. Allpool on toodud mõned näited, mil kasutatakse negatiivset astendajat.

1) Parema ülevaate saamiseks füüsikalistest konstantidest, kui konstandid on väiksed kümnendmurrud. Nii kirjutame näiteks joonpaisumise koefitsiendid järgmiselt:

plaatina	$0,90 \cdot 10^{-5}$
raud	$1,20 \cdot 10^{-5}$
kuld	$1,42 \cdot 10^{-5}$
vask	$1,65 \cdot 10^{-5}$.

Kirjutades vase joonpaisumise koefitsiendi negatiivset astendajat kasutamata, saame $1,65 \cdot 10^{-5} = 0,0000165$.

2) Väikeste mõõtühikute puhul, näiteks:

$$1 \text{ mikromeeter} = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-3} \text{ mm};$$

$$1 \text{ nanomeeter} = 10^{-9} \text{ m} = 10^{-6} \text{ mm}.$$

$$\text{Vesiniku aatomi läbimõõt on } 10^{-8} \text{ cm};$$

$$\text{aatomituuma läbimõõt on ligikaudu } 10^{-12} \text{ cm};$$

$$\text{elektroni läbimõõt on } 3 \cdot 10^{-13} \text{ cm};$$

$$\text{vesiniku aatomi mass on } 1,65 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

3) Murrujoone vältimiseks mõõtühikute nimetuste kirjutustes, näiteks:

kiiruse mõõtühik $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kirjutatakse $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

kiirenduse mõõtühik $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ kirjutatakse $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;

tiheduse mõõtühik $1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ kirjutatakse $1 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.

Ülesandeid.

262. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1) 3^{-2}	2) 6^{-2}	3) 2^{-5}	4) 10^{-7}
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(1\frac{3}{5}\right)^{-2}$	$\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$
$1,7^{-2}$	$0,9^{-1}$	$2,4^{-3}$	$3,6^{-2}$
$4^0 \cdot 5^{-2}$	$2^5 \cdot 3^{-4}$	$(-1)^4 \cdot 8^{-2}$	$(-4)^{-1} \cdot 10^{-3}$
$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot 2^{-3}$	$\left(-\frac{16}{7}\right)^{-2} \cdot 4^4$	$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2} \cdot 6^0$	$(-0,2)^{-5} \cdot 10^3$

263. Kirjuta järgmised murrud nimetajaist vabade avaldistena:

1) $\frac{1}{a^2}$	2) $\frac{1}{x^3}$	3) $\frac{1}{m}$	4) $\frac{1}{u^5}$
$\frac{2}{n^3}$	$\frac{4}{v}$	$\frac{5}{N^6}$	$\frac{a}{b^4}$
$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{2x^3}$	$\frac{u}{3v^4}$	$\frac{m}{p^2p^6}$
$\frac{0,7}{cx^2}$	$\frac{5a}{z^3}$	$\frac{9a}{8b^2u^3}$	$\frac{8}{10c^2u^4}$
$\frac{100}{\pi D^2}$	$\frac{3c^3}{10gh^2}$	$\frac{0,2p}{q^2r^3}$	$\frac{7s^3}{23rh^2}$

264. Kirjuta järgmised avaldised nõnda, et neis esineksid ainult positiivsed astendajad:

1) a^{-1}	2) $3b^0$	3) $2^{-1}c^{-1}$
N^{-2}	$5u^{-3}$	$7^{-1}m^{-2}$
$4h^{-3}$	$8ab^{-2}$	$0,9a^{-2}x^{-3}$
$\frac{3^0}{x^{-4}}$	$\frac{m}{2n^{-3}}$	$\frac{4a}{5bc^{-2}}$
$\frac{7a^{-1}}{N^{-2}u^{-3}}$	$\frac{m^{-2}n^{-3}}{15p^{-2}}$	$\frac{7au^{-5}}{3a^{-3}u^0}$

265. Kasutades arvu 10 astmeid avalda:

1) 1 km meetrites

1 mm sentimeetrites

1 kg milligrammides

0,7 ha ruutmeetrites

1,4 l kuupsentimeetrites

2) 1 m millimeetrites

a cm meetrites

s m² aarides

V cm³ liitrites

P g tonnides

$1 \cdot 10^3$
 $a \cdot 10^2$
 $5 \cdot 10^{-2}$
 $V \cdot 10^{-3}$
 $P \cdot 10^6$

266. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1) $7^3 \cdot 7^{-4}$

2) $3 \cdot 5^6 \cdot 5^{-8}$

3) $7,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}$

$5^3 : 5^{-1}$

$2 \cdot 10^6 : 10^{-6}$

$3,43 \cdot 10^{-6} : (0,49 \cdot 10^{-8})$

$4^5 \cdot 4^{-3}$

$5,7 \cdot 9^{-3} : 9^0$

$8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,125 \cdot 10^{12}$

$3^{-6} : 3^{-4}$

$10^4 : (5 \cdot 10^{-2})$

$1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^0$

$10^{-4} : 10^{-7}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 : (2 \cdot 10^{-3})$

$2,25 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^3$

267. Kirjuta järgmised arvud kümne astme kordsetena:

1) 70

2) 900

3) 1400

4) 1750 000

$\frac{9}{10}$

$\frac{13}{100}$

$\frac{325}{1000}$

$\frac{112}{10000}$

$\frac{11}{20}$

$\frac{7}{500}$

$\frac{15}{4000}$

$\frac{283}{500000}$

$\frac{0,72}{0,025}$

$\frac{3,2}{1,375}$

$\frac{1,11}{5,0081}$

$\frac{0,033}{0,000765}$

0,72

3,2

1,11

0,033

0,025

1,375

5,0081

0,000765

268. Teosta järgmised tehted ja kirjuta tulemus, kasutades vaid positiivseid astendajaid:

1) $a^5 : a^0$

2) $8,5q^{-3} : 1,5q^{-5}$

3) $5a^{-4}x^2 : a^2$

$h^{10} : (-h)^0$

$10p^{-5} \cdot 0,2p^8$

$3a^0b^{-2} \cdot \frac{2}{3}b^{-3}$

$3m^5 \cdot (-n)^{-1}$

$\frac{3}{2}u^3 : 6u^{-2}$

$f^0g^1h^2 \cdot \frac{7}{18}f^{-2}g^{-1}h^0$

269. Lihtsusta järgmised avaldised ja teisenda tulemused nõnda, et neis esineksid üksnes positiivsed astendajad:

1) $(N^{-2})^2 \cdot \frac{1}{N^4}$

2) $\left(\frac{1}{2}m^3\right)^{-2} \cdot \frac{4}{m^6}$

3) $(0,1a^2x^{-1})^2 \geq 0,01a^2x^2$

$(a^{-1})^{-3} = a^3$

$(0,3h^{-2})^{-1} = \frac{10}{3}h^2$

$(1,2H \cdot 5H)^{-2} = \frac{1}{25H^4}$

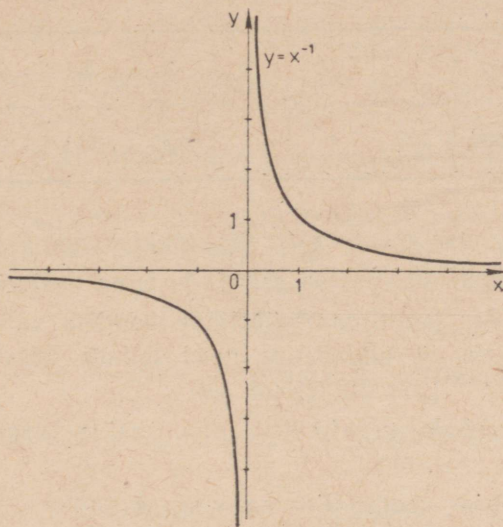
$(cu^{-2})^{-2} = \frac{c^4}{u^4}$

$(3ax^4)^{-3} = \frac{1}{27a^3x^{12}}$

$\left(\frac{1}{2}x^{-1} \cdot 3x^{-2}\right)^{-4} = \frac{16}{81}x^6$

§ 57. FUNKTSIOONID $y=x^{-1}$ JA $y=x^{-2}$.

Funktsioon $y=x^{-1}$ ehk $y=\frac{1}{x}$ esitab x ja y vahelist pöördvõrdelist sõltuvust. Selle funktsiooni graafikuks on hüperbool (joon. 55).



Joon. 55.

Uurime nüüd funktsiooni $y=x^{-1}$ tema graafiku põhjal. Kõigepealt näeme, et see graafik koosneb kahest harust: üks asub teljestiku I veerandis, teine III veerandis. Et 0-ga jagada ei saa, siis kohal $x=0$ funktsioonil väärtus puudub. Paneme tähele, et kui x väärtus läheneb nullile negatiivselt poolelt, siis funktsiooni väärtus on negatiivne ja kasvab absoluutväärtuse poolest kuitahes suureks.

Kui aga argumendi väärtus läheneb nullile positiivselt poolelt, siis funktsiooni väärtus on positiivne ja kasvab kuitahes suureks.

Mis sünnib funktsiooni x^{-1} väärtustega, kui x väärtus on negatiivne ja ta absoluutväärtus saab kuitahes suureks?

Mis sünnib funktsiooni x^{-1} väärtustega, kui x väärtus kasvab positiivsena kuitahes suureks?

Graafikult ilmneb, et funktsioon $y=x^{-1}$ on kahanev. Selgita seda!

Edasi näeme, et vaadeldaval funktsioonil nullkohti pole ning et ta positiivuspiirkonnaks on $x > 0$ ja negatiivuspiirkonnaks $x < 0$.

Funktsiooni $y = x^{-2}$ graafiku joonestamiseks koostame tema väärtuste tabeli:

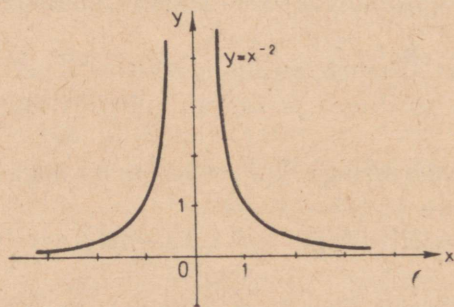
x	0,01	0,1	0,5	1	2	3	4	5
x^{-2}	10000	100	4	1	0,25	0,11	0,06	0,04

Et $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ja $x^2 = (-x)^2$, siis funktsiooni x^{-2} väärtus ei muutu, kui argumenti väärtus asendada tema vastandavuga.

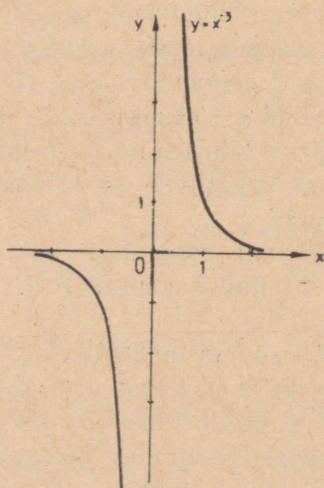
Konstrueerides koordinaatteljestikus nende väärtuspaaridele vastavad punktid ja ühendades need ladusa kõveraga, saame funktsiooni $y = x^{-2}$ graafiku (joon. 56).

Tuginedes sellele graafikule, anna vastus järgmistele küsimustele.

- Missugustes veerandites asub see graafik?
- Kas leidub argumenti väärtusi, mille korral ei saa funktsiooni väärtust leida? Miks?
- Missuguse argumenti väärtuste piirkonnas on funktsioon kasvav, missuguses kahanev?



Joon. 56.



Joon. 57.

d) Kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus läheneb nullile negatiivselt (positiivselt) poolelt?

e) Kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi absoluutväärtus kasvab negatiivses (positiivses) suunas?

Ülesanne.

270. Joonisel 57 on antud funktsiooni $y=x^{-3}$ graafik. Uuri seda funktsiooni graafiku põhjal!

§ 58. MURRULISE ASTENDAJAGA ASTE.

Olgu a mingi positiivne arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Astme juurimise teoreemi järgi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

kui arv m on arvu n kordne. Astendaja $\frac{m}{n}$ on siis täisarv. Sel puhul sümbol $a^{\frac{m}{n}}$ tähendab $\frac{m}{n}$ teguri korrutist, milles kõik tegurid on võrdsed arvuga a .

Laiendame nüüd astme mõistet murrulise astendajaga astme puhuks. Selleks loeme võrduse

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

kehtivaks ka siis, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv. Seega

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

iga täisarvulise m ja n korral.
Selle kokkuleppe kohaselt

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7,$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(27)^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}.$$

Saab näidata, et kõik tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on täis- või murdarvud.

Näiteks on

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[q]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Iga avaldist, milles esineb murrulisi astendajaid, saab kirjutada juuremärgi abil nii, et esineksid vaid täisarvulised astendajad.

Näide.

$$\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{-\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 3}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Et juurt saab kirjutada murrulise astendajaga astmena ja murrulise astendajaga astet saab kirjutada juuremärgi abil, siis arvutuste asemel juurtega võib sooritada arvutused murrulise astendajaga astmetega ja ümberpöörduvalt.

Kumba eelistada, kas juuremärki või murrulist astendajat, see sõltub lahendatavast probleemist. Mõnikord on otstarbekohasem esimene, mõnikord teine viis.

Ülesandeid.

271. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $9^{\frac{1}{2}}$

2) $16^{\frac{3}{2}}$

3) $27^{\frac{1}{3}}$

4) $64^{\frac{2}{3}}$

$1,44^{\frac{1}{2}}$

$0,001^{\frac{5}{3}}$

$0,343^{\frac{4}{3}}$

$0,729^{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{4}{3}}$

272. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

$$\begin{aligned} \sqrt{5x} &= 5^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} & 7\sqrt[3]{c^2} &= 7c^{\frac{2}{3}} & 0,1\sqrt[3]{D^2} &= 10^{-1} D^{\frac{2}{3}} & \sqrt[5]{(3cu)^3} &= 3^{\frac{3}{5}} c^{\frac{3}{5}} u^{\frac{3}{5}} \\ 0,7\sqrt[5]{a^2b^3} &= 7 \cdot 10^{-1} a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{5}} & \frac{3}{4}x\sqrt[4]{H^2u^4} &= \frac{3}{4}xH^{\frac{1}{2}}u & \frac{1}{2}\sqrt[3]{N^4x} &= \frac{1}{2}N^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}} & \sqrt[5]{A^3x^5} &= A^{\frac{3}{5}}x \\ \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} &= a^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{5\sqrt{k}} &= 5^{-1}k^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt[5]{u^2}} &= u^{-\frac{2}{5}} & \sqrt[3]{\frac{m}{n^2}} &= \frac{m^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} = m^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

273. Kirjuta järgmised avaldised juurtena:

$$\begin{aligned} 1) 19^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{19} & 2) 7^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{7} & 3) 83^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{83} & 4) 100^{\frac{5}{6}} &= \sqrt[6]{100^5} \\ N^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{N} & u^{\frac{4}{3}} &= \sqrt[3]{u^4} & a^{\frac{3}{5}} &= \sqrt[5]{a^3} & x^{\frac{5}{2}} &= \sqrt{x^5} \\ (2h)^{\frac{4}{3}} &= \sqrt[3]{(2h)^4} & \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{3}} &= \sqrt[3]{\frac{m^5}{2^5}} & (10f)^{0,1} &= \sqrt[10]{10f} & (mn^2)^{0,3} &= \sqrt[10]{(mn^2)^3} \end{aligned}$$

274. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[3]{a^{-2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} & 2) \sqrt[5]{x^{-3}} &= \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} & 3) \frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{a} &= \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{a} & 4) \sqrt[4]{c^{-1}d^{-3}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{cd^3}} \\ \frac{a}{\sqrt{a+bx}} &= \frac{a}{\sqrt[2]{a+bx}} & \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} &= \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} & \frac{5}{\sqrt{2px}} &= \frac{5}{\sqrt[2]{2px}} & \frac{7}{10\sqrt{mn^2}} &= \frac{7}{10\sqrt[2]{mn^2}} \\ \sqrt[5]{\left(\frac{2}{N}\right)^3} &= \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{N^3}} & \sqrt{\frac{b}{a+bx}} &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx}} & \sqrt[3]{\frac{a^2}{cx}} &= \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{cx}} & \sqrt[4]{\frac{\pi D^2}{S^3}} &= \frac{\sqrt[4]{\pi D^2}}{\sqrt[4]{S^3}} \end{aligned}$$

275. Kirjuta järgmised avaldised, kasutamata negatiivseid ja murrulisi astendajaid:

$$\begin{aligned} 1) 27^{-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} & 2) 36^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} & 3) 8^{-\frac{4}{3}} &= \frac{1}{8^{\frac{4}{3}}} & 4) 64^{-\frac{3}{4}} &= \frac{1}{64^{\frac{3}{4}}} \\ 0,343^{-\frac{1}{3}} &= \frac{1}{0,343^{\frac{1}{3}}} & 0,01^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{0,01^{\frac{1}{2}}} & 0,0016^{-\frac{3}{4}} &= \frac{1}{0,0016^{\frac{3}{4}}} & 0,0169^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{0,0169^{\frac{3}{2}}} \\ \left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\left(\frac{25}{64}\right)^{\frac{1}{2}}} & \left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{3}{2}}} & \left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{\left(\frac{216}{125}\right)^{\frac{2}{3}}} & \left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}} &= \frac{1}{\left(\frac{625}{256}\right)^{\frac{3}{4}}} \\ 3a^{-\frac{3}{4}}f^{\frac{3}{4}} &= \frac{3}{a^{\frac{3}{4}}f^{\frac{3}{4}}} & \left(\frac{3c}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{\left(\frac{3c}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} & (5k\omega^3)^{-\frac{1}{3}} &= \frac{1}{(5k\omega^3)^{\frac{1}{3}}} & \left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{-\frac{2}{3}} &= \frac{1}{\left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

276. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

$$\begin{array}{llll}
 1) a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} & 2) d^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{3}} & 3) f^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}} & 4) h^0 \cdot h^{\frac{3}{4}} \\
 N^{\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{4}} & u \cdot u^{-\frac{2}{3}} & p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^0 & x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
 x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} & l^0 \cdot l^{-\frac{3}{2}} & D^{\frac{1}{3}} \cdot D^{-\frac{3}{4}} & c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

277. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

$$\begin{array}{llll}
 1) A : A^{\frac{1}{2}} & 2) c^2 : c^{\frac{1}{3}} & 3) x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{3}{2}} & 4) a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{2}{5}} \\
 c^2 : c^{-\frac{1}{3}} & f^{\frac{5}{6}} : f^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{3}{4}} : h^{\frac{2}{3}} & u^{\frac{2}{3}} : u^{-2} \\
 N^{-1} : N^{\frac{3}{2}} & z^{\frac{4}{5}} : z^{-1} & q^0 : q^{-\frac{1}{2}} & l^{\frac{1}{3}} : l^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

278. Kirjuta järgmised avaldised juuremärke kasutamata, toimeteta nõutavad tehted ja anna tulemus juure kujul:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} & 2) \sqrt[4]{c^3} : \sqrt{c} & 3) \sqrt{3x} \cdot \sqrt[3]{9x^2} \\
 \sqrt[3]{D^2} \cdot \sqrt{D^3} & \sqrt[3]{h^4} : \sqrt{h} & \sqrt[4]{a^3x^2} : \sqrt[3]{a^2x^2}
 \end{array}$$

279. Kirjuta järgmised avaldised, kasutades ainult positiivseid täisarvulisi astendajaid:

$$\begin{array}{llll}
 1) (x^0)^{\frac{1}{2}} & 2) (h^2)^{\frac{3}{2}} & 3) (u^{-1})^{\frac{2}{3}} & 4) (D^{-1})^{-\frac{1}{2}} \\
 (a^{\frac{2}{3}})^3 & (N^{-1})^{\frac{2}{3}} & (c^{-2})^{-\frac{1}{3}} & (x^{-\frac{1}{3}})^6 \\
 N^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{3}{5}} & (2u^{\frac{3}{4}})^4 & x : x^{-\frac{3}{4}} & H^2 : H^{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

KORDAMISÜLESANDEID.

280. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left(\frac{2}{3}a^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4a^2}\right)^2 & 2) \left(\frac{2u}{v}\right) \cdot \left(\frac{3v}{2u}\right)^3 \\
 \left(\frac{4x^3}{y^2}\right)^2 : \left(-\frac{2x}{y}\right)^3 & \left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1} : \left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1}
 \end{array}$$

281. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32} \quad 2) \sqrt[4]{a^{-13}} : \sqrt[4]{a^{-1}} \quad 3) \sqrt[n]{a^{-3n}b^{2n}}$$

$$\sqrt[3]{750} : \sqrt[3]{6} \quad \sqrt[3]{a^{3n+3}} : \sqrt[n]{a^{n+3}} \quad \sqrt[5]{-a^{16}} : \sqrt[5]{a}$$

282. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \sqrt[3]{\frac{27a^3}{64}} + 2\sqrt[4]{\frac{81b^8}{16}} \quad 2) \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) \quad \frac{\sqrt{m^2p - m^2q} - \sqrt{n^2p - n^2q}}{\sqrt{p - q}}$$

283. Vabasta järgmiste murdude nimetajad juurtest:

$$1) \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \quad 2) \frac{1}{\sqrt[3]{5+1}} \quad 3) \frac{8+3\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{25}}} \quad \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{2\sqrt{2} - 5\sqrt{5}}$$

284. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \frac{3}{\sqrt{3}} \quad 2) \frac{16}{\sqrt[3]{8}} \quad 3) \frac{21}{\sqrt{7}} \quad 4) \frac{30}{\sqrt[3]{\frac{3}{25}}}$$

$$\frac{h}{\sqrt[3]{h}} \quad \frac{a}{b\sqrt[3]{a^2}} \quad \frac{c^2}{a\sqrt{c}} \quad \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$$

285. Lihtsusta järgmised juured ning leia nende väärtused ruut- ja kuupjuurte tabelite abil:

$$1) \sqrt{\frac{2}{25}} \quad 2) \sqrt[3]{\frac{3}{8}} \quad 3) \sqrt[4]{\frac{10}{81}} \quad 4) \sqrt[4]{\frac{1}{625}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{6}} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9 \cdot 64}}$$

286. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate juurte abil ja koonda:

$$1) \sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \frac{1}{6}\sqrt{245} - \sqrt{24\frac{1}{2}}$$

$$2) \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{\frac{a^5}{8}} - 3a \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

287. Arenda järgmiste kaksliikmete ruudud:

$$1) (\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$$

$$2) \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{3}{ab}} \right)^2$$

288. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$1) \sqrt{\frac{25}{27}} : 10 - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$2) \sqrt{3 - \frac{6a}{b} + \frac{3a^2}{b^2}}$$

$$3) \frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$$

$$4) \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + 1 \right)$$

289. Lihtsusta avaldised:

$$\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}, \quad \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[6]{a^4}}.$$

290. a) Näita, et $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

b) Koosta ruutvõrrandid, mille lahendid on:

$$1) 2 + \sqrt{3} \text{ ja } 2 - \sqrt{3} \qquad 2) -3 + \sqrt{5} \text{ ja } -3 - \sqrt{5}$$

$$3) \frac{5 - \sqrt{7}}{6} \text{ ja } \frac{5 + \sqrt{7}}{6} \qquad 4) \frac{-9 - \sqrt{11}}{10} \text{ ja } \frac{-9 + \sqrt{11}}{10}$$

291. Teisenda järgmised avaldised sellisteks, et nende nimetajais poleks juurt:

$$\frac{1}{n\sqrt{3}-1} - \frac{1}{n\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

292. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$1) (-5)^3 - (-2)^0 + (-1)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

$$2) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

293. Vabasta järgmised avaldised negatiivseist astendajaist ja lihtsusta tulemus:

$$1) (a^5 - a^{-3}) : (a - a^{-3}) \quad 2) (a^{-4} - a^{-6}) : (a^{-2} + a^{-3}).$$

294. 1) Näita, et $a = b^{\pm 1}$, kui $a + b^{-1} = b + b^{-1}$.

2) Näita, et

$$(a-b)^{-2} - (a+b)^{-2} = 4ab(a^2 - b^2)^{-2}.$$

3) Arenda avaldis $(a^x - a^{-x})^2$.

295. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

296. Kirjuta järgmised avaldised juurtena, kasutades ainult positiivseid juurijaid:

$$\begin{array}{lll} 1) ax^{\frac{1}{2}} & 2) (ab)^{\frac{2}{3}} & 3) (x-y)^{1\frac{1}{2}} \\ a^{-\frac{1}{3}} & a(2n)^{-\frac{3}{4}} & (u+v)^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

297. 1) Arenda korrutis $(x^{\frac{1}{2}} - 5)(x^{\frac{1}{2}} + 4)$.

2) Arenda avaldis $\left(a^x - a^{\frac{1}{x}}\right)^2$.

298. Taanda murd $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

299. Näita, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{9}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

300. Lihtsusta avaldised:

$$\sqrt{10} : 0,81^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{25} \cdot (0,04)^{\frac{1}{6}}, \quad 0,16^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{5}.$$

301. Leia avaldise $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0,4}$ väärtus.

302. Lihtsusta järgmised korrutised ja jagatised:

$$1) (\sqrt[3]{3x^2})^2 \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{81x^5}}$$

$$4) 5c^2 : \left(2,5c \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\right)$$

$$2) \sqrt{\frac{2x}{9}} : \left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{6x}$$

$$5) \sqrt[3]{\frac{s}{t}} (5s)^{\frac{1}{3}}$$

$$3) \frac{3}{7} a \sqrt[3]{2x^2} : (6\sqrt{a})$$

$$6) \left(\frac{1,5}{2} a\right)^3 : \left(\frac{0,375}{a}\right)^3$$

303. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate ja väheste juurte abil:

$$1) 6\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$2) 8,5\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}$$

$$3) \sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3x}{\sqrt{x}} - 4x^3 \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

304. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

$$1) 144^3 : 72^3$$

$$\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$$

$$9^{-\frac{1}{2}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0,25^{-1\frac{1}{2}}$$

$$2) \sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$$

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{-1}$$

$$\left[\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right]^3$$

305. Kirjuta avaldis ainult ühe juuremärgi abil:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} \sqrt[4]{a^5} \sqrt{\frac{1}{a}}}$$

306. Arenda binoomi ruut:

$$\left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2$$

307. Lihtsusta avaldis:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$$

308. Lahenda järgmised võrrandid:

- 1) $x + \sqrt{16 + x^2} = 8$
- 2) $\sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$
- 3) $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$
- 4) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$
- 5) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} - 2 \sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{7}{3}$

309. Alljärgnevatel võrranditel mõnel lahend puudub. Tee kindlaks, missugusel.

- 1) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x-1} = 1$
- 2) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5} = 2$
- 3) $\sqrt{x+11} = 1 + \sqrt{x+6}$
- 4) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+6} + 7 = 0$
- 5) $\sqrt{5x-9} - \sqrt{5x-16} = 1$
- 6) $\sqrt{10x-1} + \sqrt{10x+6} + 7 = 0$
- 7) $a\sqrt{x+1} = b\sqrt{x-1}$
- 8) $\sqrt{x+b^2} = b + \sqrt{x-2b}$
- 9) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}$
- 10) $\sqrt{4x-3a} - \sqrt{x-3a} = \sqrt{x+6a}$

310. Arvuta.

- 1) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- 2) $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- 3) $\left(39\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$
- 4) $\left[9^{-\frac{1}{4}} + \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right] \cdot \left[9^{-\frac{1}{4}} - \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$
- 5) $\left[\left(3+5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3-5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$
- 6) $\left[\left(5+11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(5-11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

311. Näita, et

$$1) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2};$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{9};$$

$$3) \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$4) 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} = 18^{\frac{1}{2}}.$$

312. Lihtsusta, juuremärki kasutamata:

$$1) \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} : \left[\frac{b^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a} - (ab)^{\frac{1}{2}} \right], \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$2) \left\{ a^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{-\frac{4}{3}} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$3) \frac{a}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$4) \left[a^{\frac{1}{2}} + (ab^2 + c)^{\frac{1}{2}} \right] : \left[b \cdot a^{\frac{1}{2}} + b(ab^2 + c)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$5) \left[\frac{3}{(1+a)^{\frac{1}{2}}} + (1-a)^{\frac{1}{2}} \right] : \left[\frac{3}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}} + 1 \right]$$

$$6) \frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x-a)^{\frac{1}{2}}}{(x+a)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{kus } x > a.$$

$$7) \frac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x-3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{kus } x > 3.$$

$$V. \frac{6}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}.$$

313. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1) (2x)^{\frac{1}{2}} = 8$$

$$3) x^{\frac{2}{3}} = 9$$

$$2) (5x)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$4) (x+7)^{\frac{1}{2}} = x$$

$$5) (x-1)^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$$

$$8) x+1 = (2x+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$6) x-3 + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$9) 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{-\frac{1}{2}} = 8$$

$$7) x-11x^{\frac{1}{2}} + 24 = 0$$

$$10) 2(x-2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$11) (x+7)^{\frac{1}{2}} = (3x+19)^{\frac{1}{2}} - (x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$12) (5x+4)^{\frac{1}{2}} - (2x-1)^{\frac{1}{2}} = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$13) (4x-3)^{\frac{1}{2}} = (3x-1) \cdot (3x-5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$14) 3 \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}} = (2x+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$15) (x-2)^{\frac{1}{2}} + (2x+3)^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$16) (2x+2)^{\frac{1}{3}} - (2x-7)^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$17) (76+x)^{\frac{1}{3}} + (76-x)^{\frac{1}{3}} = 8$$

V. GEOMEETRILISED TEISENDUSED TASAPINNAL.

§ 59. GEOMEETRILISE TEISENDUSE MÕISTE.

1. Geomeetrilise teisenduse definitsioon ja näiteid.

Geomeetriliseks teisenduseks tasapinnal nimetatakse tasapinna antud punktidest mingi eeskirja järgi uute punktide tuletamist.

Antud punktideks võivad siin olla kas tasapinna üksikud punktid või mingi sellel tasapinnal asetseva kujundi (lõigu, ringjoone jm.) punktid või lõpuks selle tasapinna kõik punktid. Antud punktide hulka nimetatakse **originaalkujundiks** ehk lihtsalt **originaaliks**.

Antud punktidest tuletatud uusi punkte nimetatakse antud punktidele antud teisenduses vastavateks punktideks ehk antud punktide **teisenditeks**. Üleminek originaalkujundi juurest tema teisendi juurde ongi teisendus.

Eeskirji, mis ütleb, kuidas antud punktide järgi leida nende teisendeid, on **teisenduseeskirji**. Allpool näeme, et teisenduseeskirji antakse mõnikord sõnalise juhisena, mõnikord valemiga või geomeetrilise konstruktsioonina.

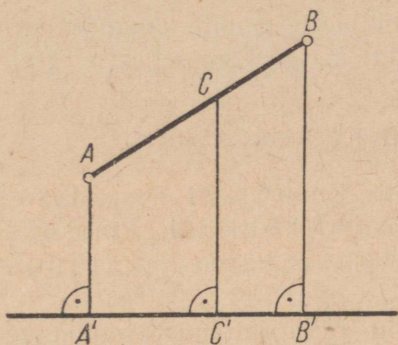
Kui teisendus on niisugune, et originaali igal punktil leidub ainult üks teisend ja viimane kujutab ainult üht originaali punkti, siis teisendust nimetatakse **üksüheseks**.

Vaatleme neid mõisteid ühenduses mõne näitega.

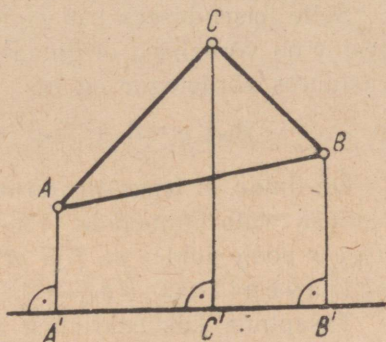
Näide 1. Tasapinnal on antud sirge ja väljaspool seda lõik AB (joon. 58). Loeme lõigu mistahes punkti C teisendiks antud sirge punkti C' , kus punktist C antud sirgele tõmmatud ristsirge lõikab antud sirget, s. o. punkti C teisendiks loeme tema ristprojektsiooni antud sirgel.

Siin on originaalkujundiks lõik AB ja tema teisendiks on lõik $A'B'$. Vastavus originaali ja teisendi punktide vahel on üksühene: lõigu igal punktil on ainult üks projektsioon ja projektsiooni iga punkt kujutab ainult üht lõigu punkti.

Näide 2. Antud on kolmnurk ABC ja seda mitte lõikav sirge



Joon. 58.

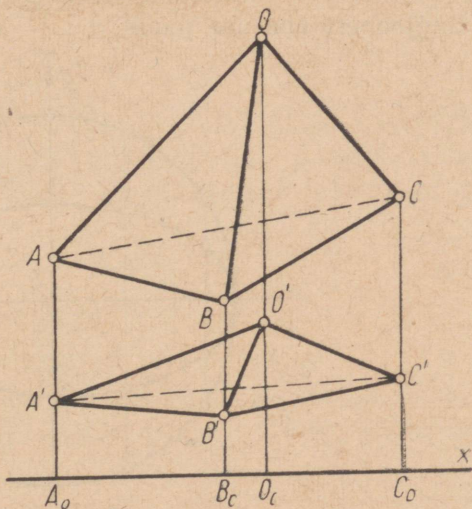


Joon. 59.

(joon. 59). Mõistame siin kolmnurga all kinnist murdjoont (mitte sellega piiratud tasapinnatükki) ja loeme kolmnurga mistahes punkti teisendiks tema ristprojektsiooni antud sirgel. Siis kolmnurga külje AB teisendiks on lõik $A'B'$, külje BC teisendiks lõik $B'C'$, külje AC teisendiks lõik $A'C'$ ja kogu kolmnurga teisendiks samuti lõik $A'B'$.

Siin originaali (kolmnurga ABC) igale punktile vastab üks teisendi (lõigu $A'B'$) punkt, kuid teisendi iga punkt (välja arvatud A' ja B') kujutab originaali kaht punkti. Näiteks teisendi punkt C' on kolmnurga tipu C teisendiks, aga ka külje AB selle punkti teisendiks, kus see külg lõikub sirgega CC' . See-
ga vastavus originaali ja teisendi punktide vahel ei ole üksühene.

Näide 3. Tasapinnal on antud sirge x ja sellest ühel pool mingi kujund, näiteks kolmnurkse püramiidi kujutis $OABC$ (joon. 60). Teisendame kujundit nii, et originaali punkt ja selle teisend asetsevad sirgest x ühel ja samal pool selle sirge ühel ja samal ristsirgel, kusjuures teisendi ja originaalpunkti kaugused sirgest x on jääva suhtega m (joonisel 60 $m = \frac{1}{3}$).



Joon. 60.

Selle teisenduseeskirja puhul punktide teisendite kaugused sirgest x on võrdelised originaalpunktide kaugustega sellest sirgest, kusjuures võrdetegur on m :

$$A_0A' = mA_0A; B_0B' = mB_0B; C_0C' = mC_0C \text{ jne.}$$

On ilmne, et teisendus on üksühene. Kui $0 < m < 1$, siis seda teisendust võib nimetada tasapinna kokkusurumiseks sirge x poole suhtes m . Kui $m > 1$, siis teisendus on tasapinna väljavenitamine.

Tasapinna kokkusurumist (samuti väljavenitamist) on kerge avaldada valemities, kui selleks sirgeks, mille poole ta kokku surutakse, võtta üks koordinaattelg. Näiteks, kui tasapinna kokkusurumine toimub x -telje poole suhtes m , siis originaalpunktil ja tema teisendil on üks ja sama abstsiss, kuid teisendi ordinaat on originaali ordinaadi m -kordne (vrd. joon. 60). Tähistades originaalpunkti koordinaate x ja y , tema teisendi koordinaate x' ja y' , saame valemid:

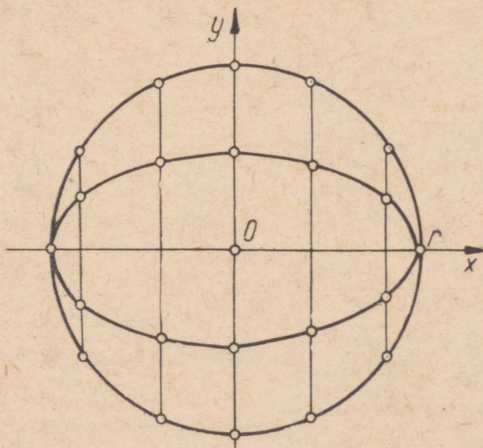
$$x' = x, \quad (1)$$

$$y' = my. \quad (2)$$

Niisiis, punkt $A(x; y)$ teisendub punktiks $A'(x; my)$.

2. Ellips ringjoone teisendina.

Kasutades tasapinna kokkusurumist x -telje poole, tuletame ringjoonest ühe uue joone.



Joon. 61.

Olgu koordinaatteljestikus antud ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja raadius on r . Leiame joone, milleks teisendub see ringjoon, kui tasapind x -telje poole kokku suruda suhtes m , ja tuletame selle joone võrrandi.

Joonise tegemisel oletame, et $m = \frac{1}{2}$. Ringjoone teisendamiseks võtame sellel rea punkte ja vähendame iga punkti ordinaati 2 korda (joon. 61). Ringjoone punktide teisendid asetsevad ühel uuel joonel, mida nimetatakse **ellipsiks**.

Ellipsi võrrandi tuletamiseks kirjutame esmalt ringjoone võrrandi

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Nüüd avaldame punktis 1 saadud teisendusvalemitest (1) ja (2) x ja y teisendatud punkti koordinaatide x' ja y' kaudu:

$$x = x',$$

$$y = \frac{y'}{m}.$$

Asendades ringjoone võrrandis x ja y saadud avaldistega, saame seose ellipsi suvalise punkti koordinaatide x' ja y' vahel, s. t. ellipsi võrrandi:

$$(x')^2 + \left(\frac{y'}{m}\right)^2 = r^2.$$

Anname võrrandile esmalt kuju

$$\frac{(x')^2}{r^2} + \frac{(y')^2}{(mr)^2} = 1.$$

Asendades selles r tähega a ja mr tähega b ning tähistades ellipsi suvalise punkti koordinaate nüüd tähtedega x ja y (kuni edasi vaatleme ainult seda joont), saame ellipsi võrrandi nn. k a n o o n i l i s e l kujul:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Leiame saadud võrrandi põhjal, kus ellips lõikab koordinaattelgi. Lõikumisel x -teljega on punkti ordinaat $y=0$. Võrrandist järeldub siis, et

$$x^2 = a^2,$$

seega

$$x = \pm a.$$

Niisiis lõikab ellips x -telge punktides $(a; 0)$ ja $(-a; 0)$. Nende punktide vahelist lõiku (mille pikkus on $2a$) nimetatakse ellipsi pikemaaks teljeks.

Lõikumisel y -teljega on punkti abstsiss $x=0$. Võrrandist järeldub siis, et

$$y^2 = b^2,$$

seega

$$y = \pm b.$$

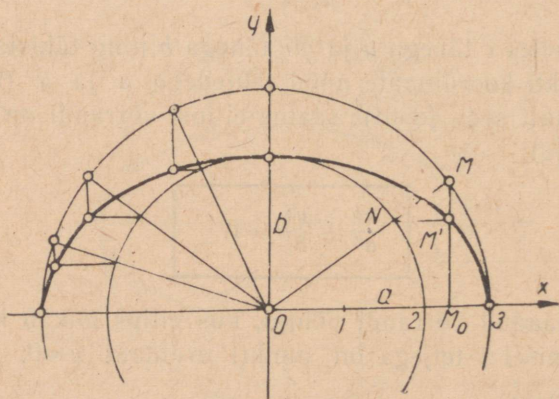
Niisiis, ellips lõikab y -telge punktides $(0; b)$ ja $(0; -b)$. Nende punktide vaheline lõik (mille pikkus on $2b$) on ellipsi lühem telg.

Ellipsi telgede lõikepunkti nimetatakse tema keskpunktiks ja telgede otspunkte tema haripunktideks. Lõik keskpunktist mingi haripunktini on ellipsi pooltelg.

Kui poolteljed on antud, siis ellips on määratud. Näiteks kui ellipsi poolteljed on $a=3$ ja $b=2$, siis tema võrrand on

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Antud ellipsi joonestamiseks joonestame koordinaatide alguspunkti ümber ringjoone raadiusega 3 ja vähendame ringjoone punktide ordinaate suhtes $m = \frac{2}{3}$.



Joon. 62.

Ringjoone punktide ordinaatide vähendamist saab teostada ilma mõõtmise ja arvutamiseta, nimelt üsna lihtsa konstruktsiooni abil. Selleks joonestame ümber ellipsi keskpunkti veel teise ringjoone, võttes viimase raadiuseks ellipsi lühema pooltelje (joon. 62). Välise ringjoone mingi punkti M teisendi saamiseks tõmbame selle punkti ordinaatlõigu MM_0 ja ühendame punkti M keskpunktiga O . Edasi joonestame punktist N , kus OM lõikab seesmist ringjoont, paralleeli x -teljega ja leiame selle paralleeli ja ordinaatlõigu MM_0 lõikepunkti. See lõikepunkt M' ongi punkti M otsitud teisend. Tõepoolest, M ja M' asetsevad x -teljest ühel ja samal pool ühel ja samal telje ristsirgel, kusjuures kiirteteoreemi põhjal nende punktide ordinaatide suhe võrdub pooltelgede b ja a suhtega:

$$M_0M':M_0M=ON:OM=b:a=m.$$

Leides niiviisi küllaldase hulga ringjoone punktide teisendeid, saame nende ühendamisel ellipsi.

3. Tasapinna teisendamine iseendaks.

Kui teisendamisele võetakse kogu tasapinna punktid ja nende teisendid täidavad jällegi kogu tasapinna, siis kõneldakse tasapinna teisendamisest iseendaks. Järgnevatel lehekülgedel vaadeldakse ikka selliseid teisendusi. Selgema kujutluse saamiseks neist teisendustest on kasulik tasapinda mõelda kahekordsena: ühel kahest kokkulangevast tasapinnast asetsevad originaalkujundid, teisel nende teisendid.

Tasapinna teisendamisel iseendaks võib juhtuda, et mõni punkt (sirge) ühtib oma teisendiga. Selliseid punkte (sirgeid) nimetatakse vaadeldava teisenduse kahekordseteks punktideks (sirgeteks). Näiteks tasapinna kokkusurumisel mingi sirge x poole on kahekordseteks punktideks kõik selle sirge punktid ja ainult need. Sama teisenduse juures on kahekordseteks sirgeteks sirge x ja kõik selle ristsirged, sest iga nimetatud sirge langeb ühte oma teisendiga. Seejuures sirge x koosneb ainult kahekordsetest punktidest, kuid teistel kahekordsetel sirgetel leidub ainult üks kahekordne punkt (lõikepunkt sirgega x).

Tasapinna teisendamisel iseendaks teisendub selle tasapinna iga kujund sama tasapinna teatud kujundiks. Kui kujundi iga kahe punkti vaheline kaugus on võrdne tema teisendi vastavate punk-

tide vahelise kaugusega, siis kujund ja tema teisend on võrdsed. Sellise omadusega teisendust nimetatakse **liikumisteisenduseks** ehk **liikumiseks**. Esimeses järjekorras ongi meie ülesandeks vaadelda liikumisteisendusi tasapinnal ja analüüsida liikumise liike. Teisenduste käsitlemisel lähtume lõikude, nurkade ja kolmnurkade võrdsuse mõistest, kasutamata liikumise mõistet, mis on meile veel tundmata, ja tuletame neist liikumise mõiste.

Ei tule arvata, et iga teisendus on liikumine. Näiteks tasapinna kokkusurumine mingi sirge poole pole liikumine, sest mõnede lõikude pikkused sel teisendusel muutuvad. Liikumisteisendused moodustavad kõige lihtsama (kuid väga tähtsa) geomeetriliste teisenduste rühma. Peale liikumisteisenduste vaatleme käesolevas peatükis veel **homoteetsust**, s. o. teisendust, mis võimaldab antud kujundist saada temaga sarnast kujundit.

Ülesandeid.

314. Arvtelje punktid $M(x)$ on teisendatud sama telje punktideks $M'(x')$ valemi järgi $x' = 3 - 2x$. Leia:

- 1) punktide $x = -2, 0$ ja 3 teisendid;
- 2) punktid, mille teisenditeks on punktid $x' = 9, -5$ ja 0 ;
- 3) antud teisenduse kahekordne punkt.

315. Abstsissitelje punktid on teisendatud ordinaattelje punktideks valemi järgi $y = 0,5x^2$. Leia punktide $x = 2, -3$ ja 4 teisendid. Missuguse punkti teisendiks on punkt $y = 18$? Milliseks y -telje osaks teisendub kogu x -telg?

316. On antud ringjoon ja selle mingi puutuja. Ühendame puutuja mingi punkti M ringjoone keskpunktiga O ning loeme punktile M vastavaks ringjoone selle punkti M' , milles ringjoon ja lõik OM lõikuvad. Tee joonis ja selgita selle abil, mis kujund ringjoonel vastab

- 1) puutuja mingile lõigule AB ;
- 2) puutepunktile;
- 3) kogu puutujale.

317. Kolmnurk, mille tipud on $A(-2; -3)$, $B(3; -1)$ ja $C(2; 3)$, projekteeritakse üks kord x -teljele, teine kord y -teljele. Leia tippude projektsioonid ja külgede projektsioonide pikkused ühel ja teisel juhul.

318. Joonesta ellips, mille poolteljed on 4 ja 3 , leides küllaldase hulga tema punkte.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Missugustes punktides see ellips lõikab koordinaattelgi? Kas ta läbib punkti $(-\sqrt{3}; 0,5)$? Skitseeri see ellips.

320. Skitseeri ellips, mis saadakse ringjoonest $x^2 + y^2 = 9$, kui tasapind y -telje poole kokku suruda nii, et kaugused sellest teljest väheneksid 3 korda. Leia saadud ellipsi poolteljed ja võrrand.

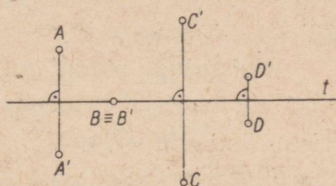
§ 60. TELJELINE SÜMMEETRIA.

1. Sirge suhtes sümmeetrilised punktid.

Olgu antud mingi sirge t ja väljaspool seda punkt M (joon. 63). Leiame punkti M' nii, et sirge t jääb lõigu MM' keskristsirgeks.



Joon. 63.



Joon. 64.

Selleks joonestame sirge $MM' \perp t$ ja võtame sellel punkti M' nii, et $M'M_0 = MM_0$, kus M_0 on sirgete MM' ja t lõikepunkt. Niisuguse omadusega punkti M' nimetatakse antud punktiga M sirge t suhtes sümmeetriliseks punktiks.

Lauset «Punkt M' on sirge t suhtes sümmeetriline punktiga M » kirjutame lühidalt kujul:

$$M' \equiv t(M).$$

On selge, et kui $M' \equiv t(M)$, siis ka $M \equiv t(M')$; seega võime kõnelda kahest teineteisega (sirge t suhtes) sümmeetrilisest punktist. Sirget t nimetatakse nende punktide sümmeetriateljeks.

Niisiis:

tasapinna kaks punkti on sellel tasapinnal asetseva sirge suhtes sümmeetrilised, kui see sirge on nende punktide ühenduslõigu keskristsirgeks.

Kui punkt asetseb sümmeetriateljel, siis loeme ta sümmeetriliseks iseendaga; igal muul juhul on punkt ja tema teisend kaks erinevat punkti (joon. 64).

2. Sümmeetriliste punktide põhiomadus.

Anname sirge suhtes sümmeetriliste punktide põhiomaduse järgmise teoreemi näol:

lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje punkti kahe selle telje suhtes sümmeetrilise punktiga, on omavahel võrdsed ning moodustavad teljega võrdsed nurgad.

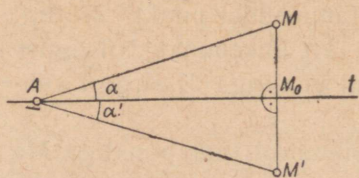
Tõepoolest, kui sümmeetriatelje t mingi punkti A ühendame punktidega M ja $M' \equiv t(M)$ (joon. 65), siis saame kaks täisnurkset kolmnurka AM_0M ja AM_0M' , mis on võrdsed tunnuse knk põhjal. Kolmnurkade võrdsusest järeldubki, et

$$AM = AM' \text{ ja } \alpha = \alpha'.$$

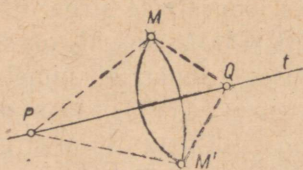
Kehtib ka pöördteoreem:

kui mingi punkt on kahest punktist võrdsetel kaugustel, siis asetseb ta nende punktide sümmeetriateljel.

Tõesti, kui $AM = AM'$ (joon. 65), siis kolmnurk AMM' on võrdhaarne ning järelikult tema kõrgussirge AM_0 poolitab aluse MM' , olles seega punktide M ja M' sümmeetriateljeks.



Joon. 65.



Joon. 66.

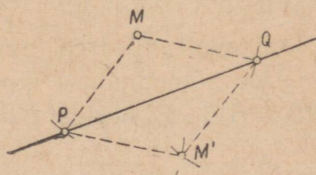
Vaadeldud teoreem võimaldab lahendada järgmise konstruktsioonülesande (kasutades ainult ühte sirget ja ühte ringjoont):

leida antud punktiga antud telje suhtes sümmeetriline punkt.

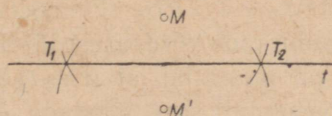
Lahendus. Võtame teljel t vabalt kaks punkti (P ja Q) ning tõmbame kummagi ümber ringjoone, mis läbib antud punkti M (joon. 66). Otsitav punkt M' peab asetsema kummalgi ringjoonel, järelikult on ta nende teine lõikepunkt.

Kui keskpunktid P ja Q võtta teljel mitte vabalt (nagu jooni-

sel 66), vaid võrdsetel kaugustel antud punktist M (nagu joonisel 67), siis punktide P , M , Q ja M' järjestikuse ühendamisel saadakse romb; igal muul juhul aga tekib romboid (joon. 66), s. o. nelinurk, mille kahe vastastipu lähisküljed on paariti võrdsed.



Joon. 67.



Joon. 68.

Pöördteoreemi alusel laheneb järgmine konstruktsioonülesanne:

leida kahe antud punkti sümmeetriatelg.

Lahendus. Leiame kaks niisugust punkti T_1 ja T_2 , mis asetsevad antud punktidest (M ja M') võrdsetel kaugustel (joon. 68). Neid läbiv sirge t ongi otsitav sümmeetriatelg.

3. Sirge suhtes sümmeetrilised kujundid.

Kahe kujundi teljelist sümmeetriat defineerime järgmiselt:

kujundid k ja k' on telje t suhtes sümmeetrilised, kui kummagi kujundi iga punkt on selle telje suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga.

Lauset «Kujund k' on telje t suhtes sümmeetriline kujundiga k » kirjutame edaspidi lühidalt nii:

$$k' \equiv t(k).$$

Antud definitsioonist lähtudes tõestame järgmise teoreemi:

sirgega antud telje suhtes sümmeetriliseks kujundiks on sirge; mõlemad sirged lõikavad sümmeetriatelge ühes ja samas punktis või on teljega paralleelsed.

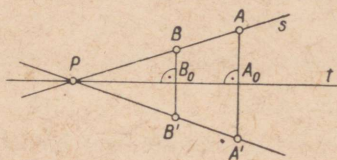
Tõestamisel eeldame esmalt, et antud sirge s lõikab telge t , näiteks punktis P (joon. 69). Võtame sirgel s mingi punkti A , leiame teisendi $A' \equiv t(A)$ ning veendume, et sirge $A'P$ ongi antud sirge s teisendiks. Selleks näitame, et kummagi sirge iga punkt on telje t suhtes sümmeetriline teise sirge mingi punktiga. Punkti P

kohta on see ilmne: $P' \equiv P$. Võtame nüüd ühel sirgetest, näiteks sirgel s , mingi punkti B ning tõmbame $BB_0 \perp t$ kuni lõikumiseni sirgega $A'P$ punktis B' . Siis

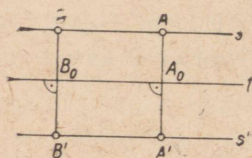
$$\Delta BPB_0 = \Delta B'PB_0,$$

sest neil on ühise külje PB_0 juures vastavalt võrdsed nurgad ($\angle BPB_0 = \angle B'PB_0$ sümmeetriliste punktide põhiomaduse alusel). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BB_0 = B'B_0$. Et ühtlasi $BB' \perp t$, siis on tõestatud, et $B' \equiv t(B)$.

Niisamuti saab tõestada, et sirge $A'P$ iga punkt on sümmeetriline sirge s mingi punktiga.

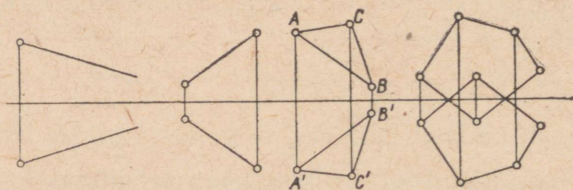


Joon. 69.



Joon. 70.

Kui sirge s on paralleelne teljega t (joon. 70), siis joonestame läbi punkti $A' \equiv t(A)$ sirge $s' \parallel s$ ning näitame, et endisel viisil leitud punkt B' on sümmeetriline punktiga B . Kolmnurkade võrdsuse asemel tuleb nüüd kasutada ristkülikute vastaskülgede võrdsust: $BB_0 = AA_0 = A'A_0 = B'B_0$.



Joon. 71.

Tõestatud teoreemist järeldub (joon. 71), et

kiirega sümmeetriline kujund on kiir, lõiguga sümmeetriline kujund on lõik, kolmnurgaga sümmeetriline kujund on kolmnurk, hulknurgaga sümmeetriline kujund on antud hulknurgaga samanimeline hulknurk.

4. Sümmeetriliste kujundite võrdsus.

Näitame, et

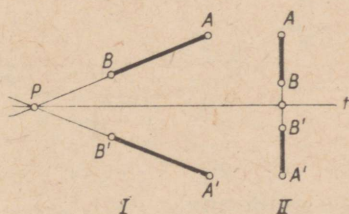
iga kaks teineteisega mingi telje suhtes sümmeetrilist kujundit on võrdsed.

Vaatleme esmalt lõikusid. Kui teineteisega sümmeetrilised lõigud on omavahel paralleelsed (joon. 70), siis nad on võrdsed kui ühe ja sama risküliku vastasküljed.

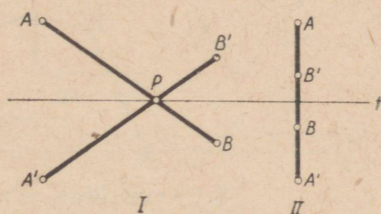
Kui sümmeetrilised lõigud pole paralleelsed ega lõika telge (nagu AB ja $A'B'$ joonistel 72, I ja 72, II), siis pikendame neid kuni teljega lõikumiseni mingis punktis P . Sümmeetriliste punktide põhiomaduse põhjal on siis $AP=A'P$ ja $BP=B'P$. Esimese võrduse pooltest teise võrduse pooli lahutades saame, et $AB=A'B'$.

Lõpuks, kui kahel sümmeetrilisel lõigul AB ja $A'B'$ leidub teljega ühine punkt P (joon. 73, I, II), siis saame endisel viisil võrdsused $AP=A'P$ ja $BP=B'P$, mille vastavate poolte liitmine näitab, et $AB=A'B'$.

Sümmeetriliste lõikude võrdsusest järeldub (tunnuse kkk põhjal) kahe sümmeetrilise kolmnurga võrdsus ja kolmnurkade võrdsusest kahe sümmeetrilise nurga võrdsus. Sümmeetriliste lõikude ja nurkade võrdsusest aga saab juba järeldada iga kahe sümmeetrilise kujundi võrdsust.



Joon. 72.



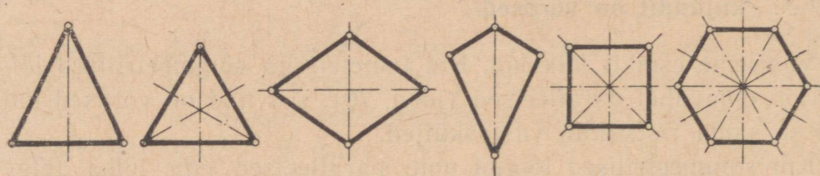
Joon. 73.

5. Iseendaga sümmeetriline kujund.

Leidub kujundeid, mis on mingi ühe (või mitme) sirge suhtes sümmeetrilised iseendaga. Iseendaga sümmeetrilised kujundid (joon. 74) on näiteks: võrdhaarne kolmnurk (üks sümmeetriatelge), võrdkülgne kolmnurk (kolm sümmeetriatelge), romb (kaks sümmeetriatelge), romboid (üks sümmeetriatelge), ruut (neli sümmeet-

riatelge), korrapärane kuusnurk (kuus sümmeetriatelge). Ringjoon aga on sümmeetriline iga sirge suhtes, mis läbib tema keskpunkti; seega

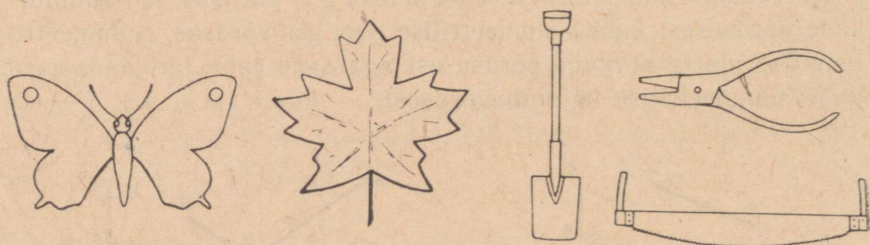
ringjoonel on lõpmata palju sümmeetriatelgi.



Joon. 74.

Iseendaga sümmeetrilise kujundi paljud omadused järelduvad kergesti tema sümmeetriast. Teades näiteks, et romb on sümmeetriline oma diagonaalsirge suhtes, järeldame kohe, et rombi diagonaal poolitab rombi nurga ning et rombi diagonaalid on omavahel risti ja poolitavad teineteist (põhjenda neid väiteid!).

Iseendaga sümmeetrilised on ka paljud looduslikud vormid ja inimese poolt valmistatud esemed (joon. 75).

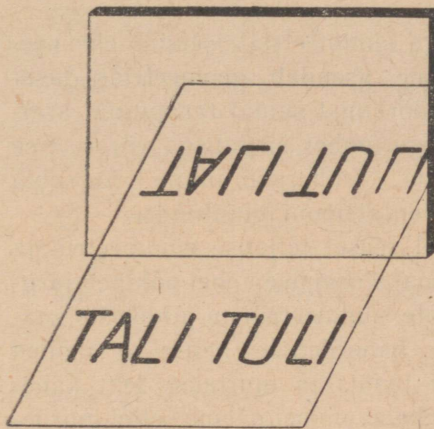


Joon. 75.

6. Peegeldus sümmeetriateisendusena.

Üleminekut antud kujundilt, temaga mingi sirge suhtes sümmeetrilisele kujundile nimetatakse antud kujundi **peegeldamiseks** (antud sirgest). Sirget nimetatakse siis **peegeldusteljeks**, peegeldamisel saadavat kujundit aga antud kujundi **peegelduseks**.

Sellist nimetust õigustab asjaolu, et kui asetada peegel joonise pinnaga risti (joon. 76), siis peeglist näeme antud joonisega sümmeetrilist joonist. Sümmeetriateljeks on peegli tasapinna ja joonise tasapinna lõikejoon.



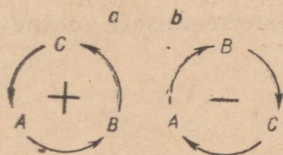
Joon. 76.



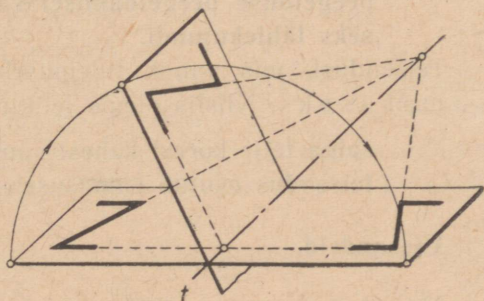
Joon. 77.

Kui peegeldatav objekt on ruumiline, siis ka peegeldus on ruumiline (joon. 77). Sel juhul on tegemist sümmeetriaga tasapinna suhtes.

Eespool nägime (vaata p. 4), et kujund ja tema peegeldus on võrdsed, seega peegeldamine sirgest on üks liikumistei-



Joon. 78.



Joon. 79.

sendus. Seda liikumist iseloomustab kolmnurga (üldiselt hulknurga) **tippude ringjärjestuse** ehk **kolmnurga orientatsiooni** muutumine. Tõepoolest, näiteks joonisel 71 on kolmnurga ABC orientatsioon positiivne (nagu joonisel 78, a), kuid peegeldatud kolmnurgal $A'B'C'$ on see negatiivne (joon. 78, b).

Kujund ja tema peegeldus on teineteisest saadavad tasapinna pööramise teel 180° võrra ümber peegeldustelje (joon. 79).



Joon. 80.

Seega sümmeetriateisendus ehk peegeldamine asendab geomeetrias tasapinna pööramist samal tasapinnal asetseva sirge ümber sirgnurga võrra. See tasapinna ümberpööramine kutsubki esile orientatsiooni muutumise.

Sellel seosel teljelise sümmeetria ja tasapinna pööramise vahel põhineb järgmine võtte sümmeetriliste pildikeste saamiseks: paberilehele kantakse mõned tinditilgakesed või tehakse mingi joonis ja murtakse leht kahekorra enne kui tint on kuivanud. Lehe avamisel näeme sellel murdejoone suhtes sümmeetrilist pilti (joon. 80).

7. Samasus kahekordse peegeldusena.

Olgu antud kujund k ja telg t . Leiame peegelduse $k' \equiv t(k)$. Nüüd võtame peegelduse k' lähtekujundiks ning endist telge kasutades leiame tema peegelduse k'' . Ilmselt saame teise peegeldamise tulemusena tagasi lähtekujundi k ; seega $k'' \equiv k$:

peegelduse peegeldamisel samast teljest saame tulemuseks lähtekujundi.

Teisendust, mis annab tulemuseks lähtekujundi, nimetatakse **s a m a s u s e k s**. Niisiis oleme leidnud, et

sama telje korral kahest sümmeetriateisendusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Ülesandeid.

321. Antud on kaks lõikuvat sirget. Leia nende sümmeetriateljed.

322. Antud on kaks paralleelset sirget. Leia nende sümmeetriateljed. Kui palju neid on?

323. a) Antud on kolmnurk ja seda mittelõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

b) Antud on kolmnurk ja seda lõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

324. Joonesta antud ringjoone mingi kõõlu suhtes sümmeetriline ringjoon. Mis tingimusel need kaks ringjoont ühtivad?

325. Kus asetsevad sümmeetriateisenduse kahekordsed punktid?

326. a) Missugused ringjooned vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

b) Missugused sirged vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

327. Lõika kahekorra murtud paberilehest mingi sümmeetriline puulehe kujutis.

328. a) Lõika paberist välja mingi teravnurkne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle ümberringjoone keskpunkt.

b) Lõika paberist välja mingi võrdhaarne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle siseringjoone keskpunkt.

329. Neljakordselt kokkumurtud paberilehe murdenurgast lõigatakse ära täisnurkne kolmnurk. Milline kuju on äralõigatud leheosal avatult?

330. Leia punktidega

$$(0; 3), (-2; 5), (4; -1), (-6; -4)$$

x -telje suhtes sümmeetrilised punktid.

331. Leia punktidega

$$(8; 0), (2; 3), (-6; 5), (0; -3)$$

y -telje suhtes sümmeetrilised punktid.

332. Leia punktiga $(2; 5)$ sümmeetriline punkt 1) x -telje suhtes, 2) y -telje suhtes ja 3) sirge $y=x$ suhtes.

333. Leia järgmiste sirgetega x -telje suhtes sümmeetrilised sirged: 1) $y=2x+1$; 2) $y=1,5$; 3) $y=1,5x$; 4) $x=3$; 5) $y=-x+a$.

334. a) Milline punkt on punktiga $(x; y)$ sümmeetriline x -telje suhtes, milline y -telje suhtes?

b) Kasutades ellipsi võrrandit ja eelmise ülesande tulemust, näita, et ellips on sümmeetriline nii x -telje kui ka y -telje suhtes.

335. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare.

336. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kui kahel ringjoonel leidub ühine punkt väljaspool nende keskpunkte läbivat sirget, siis neil leidub veel teine ühine punkt.

337. Kasutades sümmeetriat tõesta, et võrdhaarse trapetsi haarade pikendused lõikuvad aluse keskristsirgel.

1. Korduv peegeldamine.

Olgu antud kujund k ning kaks telge t_1 ja t_2 . Peegeldame kujundi k esmalt teljest t_1 ning siis saadud peegelduse teljest t_2 . Esimene peegeldus olgu k' ja teine k'' . Siis võime lühidalt kirjutada nii:

$$k' \equiv t_1(k); \quad k'' \equiv t_2(k').$$

Analoogiliselt võiksime kolmanda peegelduse (kolmandast teljest t_3) sümboolselt avaldada kujul

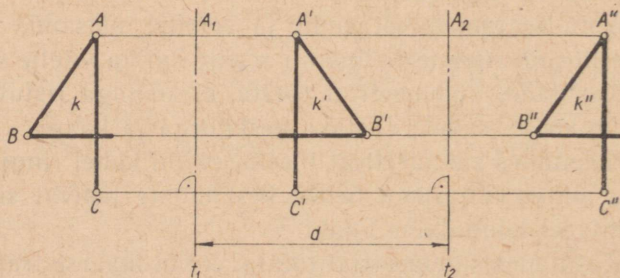
$$k''' \equiv t_3(k'').$$

Mõttekäigu jätkamisel võime nii jõuda kuitahes suurele peegelduste kordusarvule.

Järgnevalt hakkame uurima kujundite k ja k'' (s. t. antud kujundi ja tema kahekordse peegelduse) vastastikust asendit sõltuvalt peegeldustelgedele vastastikusest asendist. Et iga peegeldus muudab kujundi orientatsiooni vastupidiseks, siis kahekordne peegeldus on alati sama orientatsiooniga mis antud kujund.

2. Rööplüke kahe peegelduse tulemusena.

Olgu peegeldusteljed t_1 ja t_2 omavahel paralleelsed (joon. 81). Kujundite k ja k'' vastastikuse asendi uurimiseks võtame kujundi k kolm punkti A , B ja C ning leiame neile vastavad kujundi k'' punktid A'' , B'' ja C'' . Et sirged t_1 ja t_2 on paralleelsed, siis nende ristsirged AA' ja $A'A''$ ühtivad; järelikult punktid A , A' ja A'' asetsevad ühel sirgel. Niisamuti asetsevad ühel sirgel punktid B , B' ja



Joon. 81.

B'' ning ka punktid $C, C' C''$. Ühtlasi on $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ kui ühe ja sama sirge ristsirged.

Edasi näitame, et lõigud AA'', BB'' ja CC'' on võrdsed ja samasuunalised. Selleks avaldame need lõigud telgede vahelise kauguse d abil (joon. 81):

$$\begin{aligned} AA'' &= AA_1 + A_1A' + A'A_2 + A_2A'' = \\ &= 2A_1A' + 2A'A_2 = 2A_1A_2 = 2d. \end{aligned}$$

Niisamuti saaksime, et $BB'' = CC'' = 2d$. Et esitatud tulekus kehtiks antud kujundi ja telgede igasuguse vastastikuse asendi puhul, tuleks lõike $AA_1, A_1A', \dots$ vaadelda suunaga lõikudena. Meie juhul on võrdsete lõikude

$$AA'' = BB'' = CC'' = \dots$$

ühiseks suunaks suund telje t_1 poolt telje t_2 poole.

Nii on selgunud, et paralleelsete telgede korral kahe peegelduse järjestikune rakendamine annab teisenduse, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised.

Teisendust, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised, nimetatakse rööplükkeks (või lühemalt lihtsalt lükkeks).

Rööplükkel sirge teisendub temaga paralleelseks sirgeks või samaks sirgeks.

Tõepoolest, kui sirge on lükke sihiline (nagu sirge AA' joonisel 81), siis ta teisendub samaks sirgeks; kui ta pole lükke sihiline, siis ta teisendub temaga paralleelseks sirgeks (näiteks joonisel 81 $AB \parallel A''B''$, sest $ABB''A''$ on rööpkülik).

Et rööplüke koosneb kahest peegeldusest ja neist kumbki ei muuda kujundi suurust ega kuju, siis rööplükkel iga kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Tähendab, rööplüke on liikumisteisendus.

3. Rööplükke vektor.

Rööplükke kui teisenduse kirjeldamisel on otstarbekohane kasutada **vektori** mõistet.

Vektoriks nimetatakse suunaga lõiku, s. o. lõiku, mille üks otspunkt on loetud tema alguspunktiks ja teine lõpppunktiks.

Vektori suunaks on suund tema alguspunkti poolt lõpp-punkti poole. Kui alguspunkt ja lõpp-punkt ümber vahetada, siis vektori suund muutub vastupidiseks ja vektorist saab endise vek-tori vastandvektor. Peale suuna on vektoril kõik lõigu oma-dused, s. t. tal on kindel pikkus ja siht. Viimase määrab nurk, mille vektorit kandev sirge moodustab mingi kindla sirgega, näi-teks x -teljega.

Kaks vektorit loetakse võrdseiks, kui neil on üks ja sama pikkus, siht ja suund.

Vektori alguspunkti asukoha ehk vektori r a k e n d u s p u n k t i võib vabalt valida. Vektorit kasutatakse nende suuruste iseloomus-tamiseks, millel peale arvulise väärtuse on neid iseloomustav siht ja suund. Neid suurusi nimetatakse vektoriaalseteks ja nende hulka kuuluvad näiteks jõud, kiirus, kiirendus jm. Ka punktide nihe rööplükkel on vektoriaalne suurus, sest tal on peale pikkuse oma siht ja suund.

Vektoreid märgitakse trükis rasvaselt trükitud väikeste tähte-dega, kuna kirjas kasutatakse selleks noolekest tähe peal: $\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{v}$.

Vektorit, mis on paralleelne, samasuunaline ja pikkuselt võrdne punktide nihetega rööplükkel, nimetatakse lükke vektoriks.

Lükke vektorit tähistame tähega $\mathbf{v}$. Tähistades telgedevahelist vektorit (s. t. vektorit, mis läheb teljelt t_1 risti teljeni t_2) sümboliga $\mathbf{d}$, võime kirjutada:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{d},$$

kus $2\mathbf{d}$ tähendab vektorit, mis on vektoriga $\mathbf{d}$ samasuunaline, kuid temast 2 korda pikem. Niisiis võime öelda, et

paralleelsete telgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub peegel-dustelgede vahelise vektori kahekordsega.

Rööplükke kui teisendus on määratud, kui tema vektor $\mathbf{v}$ on antud. Seepärast võib kujundi k rööplüket märkida lihtsalt süm-boliga $\mathbf{v}(k)$, kus $\mathbf{v}$ tähendab lükke vektorit. Tähistades antud kujundist k rööplükkel saadava kujundi (ehk antud kujundi lükke-teisendi) tähega k' , võime lühidalt kirjutada:

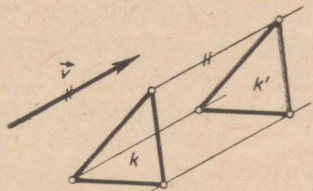
$$k' \equiv \mathbf{v}(k),$$

s. t. kujund k' on kujundi k rööplükke, kui lükke vektoriks on $\mathbf{v}$.

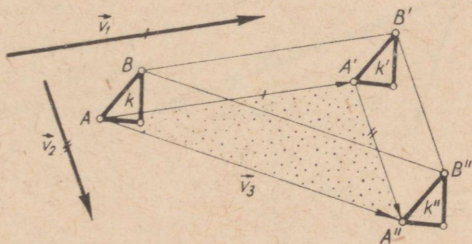
Eespool arendatud mõttekäik on pööratav; s. t. iga rööplüke on vaadeldav peegelduse peegeldusena, kusjuures peegeldusteljed on omavahel paralleelsed ja sihilt risti lükke vektoriga. Vastavas konstruktsioonis võtame esimese peegeldustelje risti lükke vektoriga (kuid muidu vabalt); teise telje aga joonestame esimesega paralleelselt nii, et see paikneks esimesest teljest lükke vektoriga määratud suunas ja sellest kaugusel, mis võrdub poolega lükke vektori pikkusest.

4. Rööplükke konstruktsioon.

Olgu antud kujund k ja lükke vektor $\mathbf{v}$ (joon. 82). Lükkekujundi $k' \equiv \mathbf{v}(k)$ saame järgmiselt. Kujundit k määravatest punktidest tõmbame lükke vektori $\mathbf{v}$ paralleelid ning kanname neile, alates kujundi punktidest, lükke vektori suunas lõigud, mis võrduvad selle vektori pikkusega. Nende lõikude lõpp-punktid määravadki otsitava lükkekujundi $k' \equiv \mathbf{v}(k)$.



Joon. 82.



Joon. 83.

Rakendame nüüd antud kujundile k järjestikku kaks rööplüket vektoritega vastavalt $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Olgu esimene tulemus $k' \equiv \mathbf{v}_1(k)$ ja teine $k'' \equiv \mathbf{v}_2(k')$. Võrdleme teise lükke tulemust k'' lähtekujundiga k (joon. 83). Selleks vaatleme kujundi k mingit lõiku AB ja sellele kujundeis k' ja k'' vastavaid lõike $A'B'$ ja $A''B''$. Et rööplükkel lõik teisendub temaga paralleelseks (erijuhul samasihiliseks) ja võrdseks lõiguks, siis

$$AB \parallel A'B' \text{ ja } A'B' \parallel A''B''.$$

Kuid siis $AB \parallel A''B''$, mistõttu $ABB''A''$ on rööpkülik ja järelikult $AA'' \parallel BB''$. Nii selgub, et kujund k'' on saadav kujundist k ainsa

rööplükkega, mille vektor $\vec{v}_3 = \vec{AA''}$. Viimase vektori loeme vekto-
rite $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ summaks ning avaldame kujul:

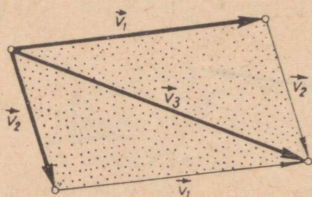
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Jooniselt 83 nähtub, et kahe vektori $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ liitmiseks tuleb
rööplükke abil teise liidetava alguspunkt teha ühtivaks esimese lii-
detava lõpp-punktiga (A') ning saadud murdjoone ($AA'A''$)
alguspunkt lugeda vektorite summa alguspunktiks, murdjoone
lõpp-punkt aga summa lõpp-punktiks. Niisiis on selgunud, et

**kahest rööplükkest koosnev teisendus osutub rööplükkeks,
mille vektor võrdub antud lükete vektorite summaga.**

Nimetades antud lüked komponentideks ning neist saadava
lükke resultandiks, tõestame lõpuks järgmise teoreemi:

resultantlücke ei sõltu komponentlükete järjekorrast.



Joon. 84.

Tõesti, liites vektoriga $\vec{v}_2$ vektori
 $\vec{v}_1$, saame summaks endise vektori
 $\vec{v}_3$ (joon. 84). Sellest järeldame, et
vektorite liitmiseks eespool antud
kolmnurga-reegli asemel võib kasu-
tada ka järgmist nn. rööpküliku-
reeglit:

**kui liidetavad vektorid on rööpküliku ühest tipust lähtu-
vateks külgevektoriteks, siis samast tipust lähtuv diago-
naalvektor osutub nende liidetavate summaks.**

Ülesandeid.

338. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende vahel mingi
kolmnurk. Joonesta kolmnurga peegeldus esmalt ühest sirgest,
siis saadud peegelduse peegeldus teisest sirgest. Kas tulemus
sõltub peegeldustelgede kasutamise järjekorrast?

339. Põhjenda väidet, et kolmnurk ja tema lücke on võrdsed.

340. Kas kolmnurga peegeldus ja lücke on võrdsed või mitte?
Mille poolest nad siiski erinevad?

341. Liida kaks vabalt võetud vektorit.

342. On antud kahe vektori summa ja üks liidetav. Konstrueeri teine liidetav.

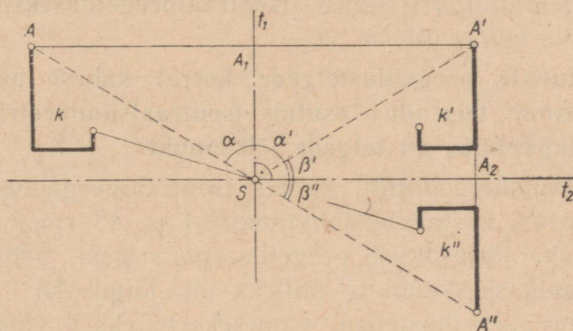
343. Põhjenda väidet, et rööplükkel kui teisendusel ei leidu kahekordseid punkte.

344. Milleks teisendub rööplükkel lükkevektori sihiline sirge ja milleks iga muu sirge?

345. Kolmnurgaga, mille tippudeks on punktid $A(4; -1)$, $B(5; 5)$ ja $C(2; 3)$, on teostatud rööplüke, mis viis tipu A koordinaatide alguspunkti. Leia tippude B ja C uued asukohad.

§ 62. TSENTRAALSÜMMEETRIA.

1. Tsentraalsümmeetria kahe peegelduse liitteisendusena. Peegeldame antud kujundi k teljest t_1 ning saadud peegelduse k' omakorda teljest t_2 , mis on risti teljega t_1 (joon. 85). Viimasel peegeldamisel saame kujundi k'' .



Joon. 85.

Tõestame, et kujundite k ja k'' vastavaid punkte ühendavad lõigud läbivad telgede lõikepunkti S ning poolituvad selles punktis, s. t. neil lõikudel on üks ja sama keskpunkt.

Selleks ühendame kujundi k mingi punkti A , samuti tema teised A' ja A'' telgede lõikepunktiga S (joon. 85). Edasi näitame, et nurk ASA'' on sirg nurk. Tõesti:

$$\begin{aligned}\angle ASA'' &= \alpha + \alpha' + \beta' + \beta'' = 2\alpha' + 2\beta' = \\ &= 2(\alpha' + \beta') = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Siin kasutasime tõsiasja, et nurgad, mis tekivad sümmeetriatelje punkti S ühendamisel kahe sümmeetrilise punktiga, on võrdsed

($\alpha = \alpha'$ ja $\beta' = \beta''$). Et nurk ASA'' on sirgnurk, siis punktid A , S ja A'' asetsevad ühel ja samal sirgel. Ühtlasi on punkt S lõigu AA'' keskpunktiks, sest sümmeetria tõttu $AS = A'S = A''S$. Analooiliselt kehtib see kujundite k ja k'' iga kahe teineteisele vastava punkti kohta. Sellega on väide tõestatud.

Kaht kujundit, mille vastavate punktide ühenduslõikudel on üks ja sama keskpunkt S , nimetatakse selle punkti suhtes sümmeetrilisteks.

Sellise omadusega punkti S nimetatakse nende kujundite **sümmeetriakeskpunktiks**. Teljelisest sümmeetriast eristamiseks nimetatakse sümmeetriat punkti suhtes **tsentraalsümmeetriaks** ning selles teineteisele vastavaid kujundeid **tsentraalsümmeetrilisteks kujunditeks**. Kahest tsentraalsümmeetrilisest kujundist kumbagi võib nimetada ka teise **peegelduseks** (sümmeetriakeskpunktist). Sümmeetriakeskpunkti võib sel puhul nimetada ka **peegelduskeskpunktiks** ja kirjeldatud teisendust **tsentraalpeegelduseks**. Esitatud arutlusi kokku võttes ütleme, et

ristuvate peegeldustelgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub tsentraalsümmeetriaks, mille keskpunktiks on telgede lõikepunkt.

Näitame ümberpöörduvalt, kuidas tsentraalpeegeldust, mis on antud ühe paari vastavate punktidega A ja A'' (joon. 85), saab asendada kahe järjestikuse peegeldusega sirgest. Selleks leiame esmalt peegelduskeskpunkti, milleks on lõigu AA'' keskpunkt. Edasi võtame peegeldusteljed: esimeseks teljeks t_1 võtame mistahes sirge läbi punkti S , kuna teiseks teljeks t_2 tuleb võtta sirgega t_1 ristuv sirge läbi punkti S . Kui nüüd leida punkt $A' \equiv t_1(A)$, siis punktid A' ja A'' on sirge t_2 suhtes sümmeetrilised. Tõepoolest, kolmnurk $A'SA''$ on võrdhaarne, sest

$$A'S = AS = A''S,$$

ja sirge t_2 poolitab tema tipunurga S :

$$\beta' = 90^\circ - \alpha' \text{ ja } \beta'' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha'.$$

Kuid võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja poolitab aluse ja on sellega risti, s. t. $A'' = t_2(A')$.

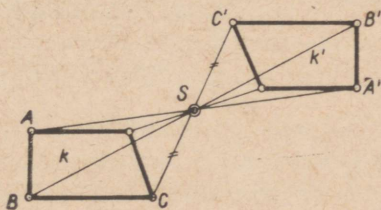
Kujundi k tsentraalsümmeetrilist teisendit ehk peegeldust punktist S märgitakse sümboliga $S(k)$; seega kirjutus $k' \equiv S(k)$ asendab lauset «Kujund k' on kujundi k peegeldus punktist S ».

On kerge pühjendada, et kujund ja tema peegeldus mistahes punktist S on võrdsed: $k=S(k)$. See näitab, et ka peegeldus punktist on liikumisteisendus: ta on tasapinna pööramine peegelduskeskpunkti ümber sirgurga võrra.

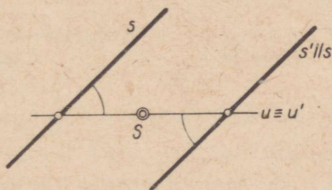
2. Tsentraalpeegelduse konstruktioon.

Kujundi tsentraalpeegeldus on määratud, kui peegelduskeskpunkt on antud. Konstruktioonis tõmbame antud kujundit määravatest punktidest $A, B, \dots$ sirged läbi peegelduskeskpunkti S (joon. 86) ning märgime igal sirgel punkti, mis on punktist S sama kaugel kui kujundi vastav punkt. Saadud punktid $A', B', \dots$ määravadki otsitava peegelduskujundi.

Kirjeldatud viisil saame igale peegelduskeskpunktist erinevale punktile vastavaks üheainsa punkti. Peegelduskeskpunkti loeme vastavaks iseendale, mistõttu see on vaadeldava teisenduse kahekordne punkt.



Joon. 86.



Joon. 87.

Iga sirge, mis läbib peegelduskeskpunkti, on tsentraalpeegelduse kahekordne sirge,

sest tema iga punkt teisendub sama sirge punktiks.

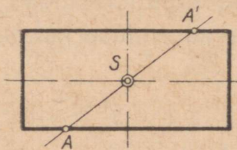
Iga sirge, mis ei läbi peegelduskeskpunkti, teisendub temaga paralleelseks sirgeks.

Tõepoolest, kui sirge s teisendub sirgeks s' (joon. 87), siis nende lõikamisel peegelduskeskpunkti S läbiva sirgega u tekib paar vastavaid punkte ja nende juurde paar vastavaid (seega võrdsed) nurki. Kuid need võrdsed nurgad on põiknurgad, mis tekivad kahe sirge s ja s' lõikamisel sirgega u . Järelikult on sirged s ja s' paralleelsed.

3. Iseendaga tsentraalsümmeetriline kujund.

Kujund võib olla mingi punkti suhtes sümmeetriline iseendaga. Sellise kujundi kohta öeldakse, et tal leidub sümmeetriakeskpunkt, ehk et ta on tsentraalsümmeetriline. Kindlasti on tsentraalsümmeetriline iga kujund, millel leidub kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge; säärase kujundi sümmeetriakeskpunktiks on telgede lõikepunkt. Näiteks ristküliku sümmeetriateljed (külgede keskrist-sirged) on teineteisega risti, mistõttu nende lõikepunkt S on ristküliku sümmeetriakeskpunktiks (joon. 88): iga sirge läbi selle punkti lõikab ristküliku külgi kahes punktis A ja A' , mis on sümmeetrilised punkti S suhtes.

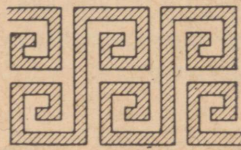
Kuid ristuvate sümmeetriatelgede olemasolu ei ole tarvilik



Joon. 88.



Joon. 89.



Joon. 90.

sümmeetriakeskpunkti olemasoluks. Näiteks on rööpkülik tsentraalsümmeetriline oma diagonaalide lõikepunkti S suhtes, sest see punkt on vastastippude ühenduslõikude ühiseks keskpunktiks, kuid rööpkülikul ei leidu ühtki sümmeetriatelge (joon. 89).

Tsentraalsümmeetria leiab laialdast rakendamist tarbeesemete kujundamisel, eriti kaunistusmotiivides (joon. 90).

4. Kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus.

Kui peegeldame mingi kujundi esmalt punktist S ja siis saadud peegelduse veel kord samast punktist S , siis saame tulemuseks lähtekujundi. Niisiis:

sama keskpunkti korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Edasi uurime teisendust, mis koosneb kahest tsentraalpeegeldusest, kusjuures peegelduskeskpunktid on erinevad. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

erinevate keskpunktide korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub esimesest keskpunktist teise viiva vektori kahekordsega.

Tõestus. Peegeldame antud kujundi k esmalt keskpunktist S_1 ning saadud peegelduse $k' \equiv S_1(k)$ omakorda teisest keskpunktist S_2 (joon. 91). Joonisel on vastavad teisenduskonstruktsioonid läbi viidud punktidega A ja B :

$$\begin{aligned} A' &\equiv S_1(A); & B' &\equiv S_1(B); \\ A'' &\equiv S_2(A'); & B'' &\equiv S_2(B'). \end{aligned}$$

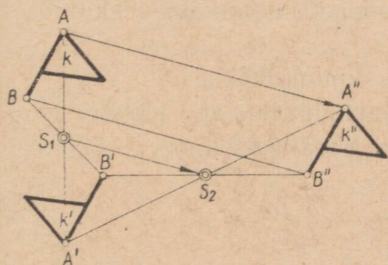
Ühendades punkti A punktiga A'' ja punkti B punktiga B'' , saame kaks kolmnurka $AA'A''$ ja $BB'B''$, millel on üks ja sama kesklõik S_1S_2 . Tõesti, konstruktsiooni järgi $AS_1 = A'S_1$ ja $A'S_2 = A''S_2$ ning samuti $BS_1 = B'S_1$ ja $B'S_2 = B''S_2$. Kolmnurga kesklõigu omaduste tõttu kumbki lõikudest AA'' ja BB'' on paralleelne lõiguga S_1S_2 ning võrdub tema kahekordsega. Lisaks sellele on lõigud AA'' ja BB'' samasuunalised, sest kumbki neist on samasuunaline lõiguga S_1S_2 . Sellega ongi tõestatud, et vaadeldav liitteisendus osutub tõesti rööplükkeks vektoriga.

$$\vec{v} = \vec{AA''} = \vec{BB''} = \dots = 2\vec{S_1S_2}.$$

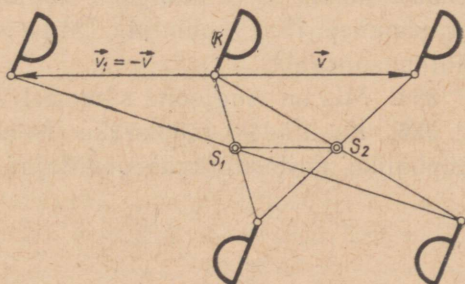
Teoreemist järeldame, et

kahe tsentraalpeegelduse tulemus sõltub peegeldamiste järjekorrast.

Tõesti, kui peegeldame enne punktist S_2 ja pärast punktist S_1 , siis tulemuse kui rööplükke vektoriks saame endise vektori vastandvektori (joon. 92):



Joon. 91.



Joon. 92.

$$\vec{v}_1 = 2 \vec{S}_2 \vec{S}_1 = -2 \vec{S}_1 \vec{S}_2 = -\vec{v}.$$

Teiseks järeldame (joon. 91), et

rööplükkest (vektoriga AA'') ja **tsentraalpeegeldusest** (keskpunktiga S_2) **koosnev teisendus osutub tsentraalpeegelduseks** (meie joonisel keskpunktiga S_1).

Ülesandeid.

346. Näita joonise abil, et kahe peegelduse puhul, mille teljed on teineteisega risti, tulemus ei sõltu peegeldamiste järjekorrast.

347. Koordinaatteljestikus on antud punktid $A(3; 2)$, $B(-4; 3)$, $C(-1; -2)$ ja $D(5; -3)$. Leia neile koordinaatide alguse suhtes sümmeetrilised punktid.

348. Koordinaatteljestikus on antud kolmnurk tippudega $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$ ja $C(4; 5)$. Leia sellele alguspunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk.

349. Koordinaatteljestikus on antud sirge $y=3-2x$. Joonesta sellele koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline sirge ja anna viimase võrrand.

350. Joonesta punktiga $A(1; 2)$ punkti $S(4; 3)$ suhtes sümmeetriline punkt ja määra selle koordinaadid.

351. Missugusel korrapärasel hulknurgal leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugusel ei leidu?

352. Veendu konstruktsiooni abil, et neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus, milles keskpunktideks on ühe rööpküliku järjestikused tipud, on samasus.

353. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

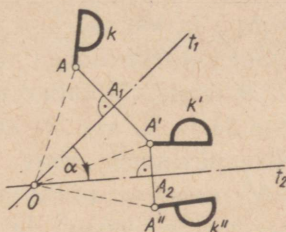
354. Mis on ringjoone sümmeetriakeskpunktiks?

355. Kasutades rööpküliku tsentraalsümmeetriat, tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

1. Pööre kui kahe peegelduse tulemus.

Peegeldame kujundit k järjestikku kahest teljest t_1 ja t_2 (joon. 93), mille vaheline suunaga teravnurk on α (suunaga esimese telje poolt teise poole). Saadud kujundid olgu $k' \equiv t_1(k)$ ja $k'' \equiv t_2(k')$. Viimast kujundit k'' nimetatakse kujundi k **pöördeks** ja üleminekut kujundilt k kujundile k'' kujundi k **pööramiseks** (lühemalt — pöördeks) punkti O ümber. Punkti O nimetatakse **pöördekeskpunktiks**. Seega

pööre on kahe peegelduse tulemus lõikuvate peegeldustelgedega korral; seejuures peegeldustelgede lõikepunkt on pöördekeskpunktiks.



Joon. 93.

Vaadeldav teisendus on liikumine, sest lähtekujund ja tema teisend on võrdsed.

2. Pöörde põhiomadus.

Pöörde põhiomadust väljendab järgmine teoreem:

kujundi punkti ja tema pöördeteisendit keskpunktiga ühendades saadakse võrdsed lõigud, mille vaheline nurk võrdub peegeldustelgedega vahelise teravnurga kahekordsega.

Tõestuseks võtame kujundil k mingi punkti A (joon. 93) ja leiame tema teisendid $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Siis on $OA = OA'$ kui lõigud, mis ühendavad sümmeetrilise punkti O telje suhtes kahe sümmeetrilise punktiga. Niisamuti $OA' = OA''$. Neist kahest võrdusest järeldub, et $OA = OA''$, millega väite esimene pool on tõestatud.

Edasi tuleb tõestada, et lõikude OA ja OA'' vaheline nurk $\angle AOA''$, mis on väiksem kui sirgnurk, võrdub telgede t_1 ja t_2 vahelise teravnurga α kahekordsega (joon. 93). Et sümmeetrilised lõigud OA ja OA' ning OA' ja OA'' moodustavad oma sümmeetria-telgedega võrdsed nurgad, siis

$$\angle AOA' = 2 \cdot \angle A_1OA',$$

$$\angle A'OA'' = 2 \cdot \angle A'OA_2.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel ja paremal poolel ühise teguri 2 sulgude ette toomisel saame:

$$\angle AOA'' = 2(\angle A_1OA' + \angle A'OA_2) = 2 \cdot \angle A_1OA_2$$

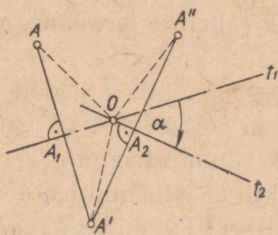
ehk

$$\angle AOA'' = 2\alpha.$$

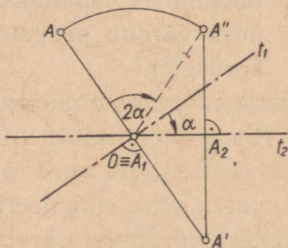
Tõestamisel kasutasime siin joonist, kus punkti A peegeldus A' langes telgede t_1 ja t_2 vahelise teravnurga sisse. Saab tõestada, et väide on õige ka punkti A teiste võimalike asendite puhul. Nii on võimalik näidata jooniste 94 ja 95 abil, et kui punkti A peegeldus A' langeb telgedevahelise nürinurga sisse, siis sirgnurgast suurem lõikude OA ja OA'' vaheline nurk võrdub telgedevahelise nürinurga kahekordsega. Nende nurkade lahutamisel täispöördest järeldub otsekohe, et sirgnurgast väiksem nurk $\angle AOA''$ võrdub endiselt telgedevahelise teravnurga kahekordsega.

Sellekohase joonise abil on kerge veenduda, et kui antud peegeldustelgi rakendada teises järjekorras (enne telge t_2 , siis telge t_1), siis kujund pöörduv sama suure nurga võrra, kuid vastassuunas.

Tõestatud teoreemi võib kokkuvõtlikumalt sõnastada ka järgmiselt:



Joon. 94.



Joon. 95.

kujundi pööramisel tema tasapinna mingi punkti ümber pöörduv kujundi iga punkt ühe ja sama nurga, nn. pöördenurga $\varphi = 2\alpha$ võrra,

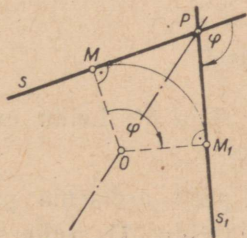
kus α on teravnurk nende telgede vahel, millest peegeldamine kutsub esile antud pöörde.

Kujundi k pööret, mille määravad keskpunkt O ja pöördenurk φ , märgime lühidalt kujul $O_\varphi(k)$.

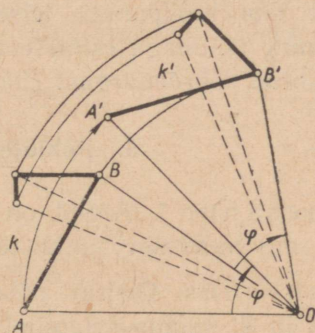
Kui pöördenurk $\varphi = 180^\circ$, siis pöörde osutub peegelduseks punktist O , sest peegeldusteljed on siis teineteisega risti.

3. Järeldusi pöörde põhiomadusest.

1) Kui kujundil k ja tema pöördel k' võtta mingi kaks teineteisele vastavat punkti, siis pöördekeskpunkt on neist punktidest võrdsetel kaugustel. Kuid kahest punktist võrdsetel kaugustel asetsev punkt on teatavasti nende punktide sümmeetriateljel. Järelikult



Joon. 96.



Joon. 97.

kujundi ja tema pöörde iga kahe teineteisele vastava punkti sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti.

2) Pöördekeskpunktist O (joon. 96) mingi sirgele s tõmmatud ristlõik OM teisendub pöördel keskpunktist O sirge teisendile tõmmatud ristlõiguks OM_1 . Järelikult $OM = OM_1$, s. t. pöördekeskpunkt on sirgest ja tema teisendist võrdsetel kaugustel. Kuid kahest sirgest võrdsetel kaugustel olev punkt asetseb nendevahelise nurga poolitajal. Järelikult

sirgjoone ja tema pöörde vahelise nurga poolitaja läbib pöördekeskpunkti.

- 3) Sirgjoone ja tema pöörde vaheline nurk, mille poolitaja ei läbi pöördekeskpunkti, võrdub pöördenurgaga,

sest võrreldavaid nurki nurgaga MPM_1 liites saame sirgnurga (joon. 96).

4. Pöörde konstruktsioon.

Pöördekeskpunkti O ja pöördenurga φ andmisega on kujundi pööre kui teisendus üheselt määratud. Pöörde konstrueerimisel tõmbame kujundi punktidest kaared ümber keskpunkti ja märgime igal kaarel kujundi punktile vastava punkti, kasutades antud pöördenurka φ . Leitud punkte õigesti ühendades saamegi pööratud kujundi (joon. 97).

Iga pöoret, mis on antud oma keskpunkti ja nurgaga, saab mitmeti esitada kahe peegelduse näol, kusjuures peegeldusteljed läbivad pöördekeskpunkti. Selleks võtame ühe telje (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti, teise telje aga nii, et telgedevaheline teravnurk (suunaga esimese telje poolt teise poole) võrduks poolega antud pöördenurgast (joonised 93 ja 94).

5. Põhiülesanded pöördest.

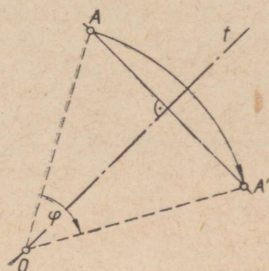
Ülesanne 1. Antud on kaks punkti A ja A' . Leida mingi pööre, mis teeks ühe punkti teisega ühtivaks.

Lahendus. Otsitav pöördekeskpunkt peab asetsema punktide A ja A' sümmeetriateljel (§ 63, p. 3, järeldus 1). Selle sümmeetriatelje t iga punkt O kõlbab pöördekeskpunktiks, kui pöördenurgaks võetakse nurk $\varphi = \angle AOA'$ (joon. 98). Ülesandel on seega lõpmata palju lahendeid.

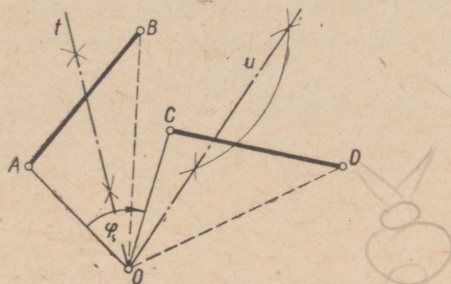
See lahendus näitab, et kahe punkti sümmeetriatelg on joon, millel asetsevad üht punkti teiseks teisendava pöörde keskpunktid.

Ülesanne 2. Antud on kaks võrdset lõiku. Leida pööre, mis teeb ühe lõigu teisega ühtivaks.

Lahendus. Olgu esimene lõik AB , teine CD (joon. 99). Leiame punktide A ja C sümmeetriatelje t ning punktide B ja D sümmeetriatelje u . Kui teljed t ja u lõikuvad, siis otsitavaks



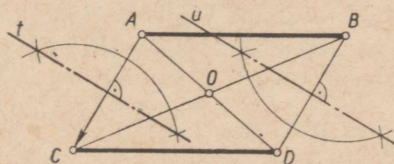
Joon. 98.



Joon. 99.

pöördekeskpunktiks on nende telgede lõikepunkt O ning pöördenurgaks $\varphi = \angle AOC$. Selle nurgaga võrdub nurk BOD , sest kumbki neist koosneb nurgast BOC ja veel võrdsete kolmnurkade AOB ja COD ühest nurgast (põhjenda nende kolmnurkade võrdsust, kasutades tunnust *kkk*).

Teise võimaliku lahenduse puhul saaksime keskpunktiks punkti, milles punktide A ja D sümmeetriatelg lõikab punktide B ja C sümmeetriatelge. Seega on sel ülesandel üldiselt kaks lahendust. Neist ühe puhul langeb punkt A ühte punktiga C , teise puhul punktiga D .

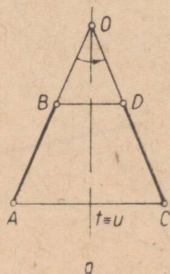


Joon. 100.

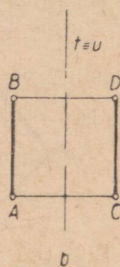
Kui punktipaaride A ja C ning B ja D (või A ja D ning B ja C) sümmeetriateljed ei lõiku, siis nad on paralleelsed või ühtivad.

Saab tõestada, et kui üks paar neist sümmeetriatelgedest on paralleelsed (näiteks $t \parallel u$, joon. 100), siis vastav pööre asendub rööplükkega (mille vektor joonisel 100 on $\vec{AC} = \vec{BD}$).

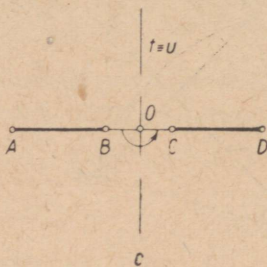
Kui üks paar neist sümmeetriatelgedest ühtib (näiteks $t \equiv u$, joon. 101–103), siis lõigud AB ja CD on sümmeetrilised selle ühise sümmeetriatelje suhtes. Kui lõigud AB ja CD ei ole paralleelsed selle teljega, siis nende lõikepunkt teljega on üheks



Joon. 101.



Joon. 102.

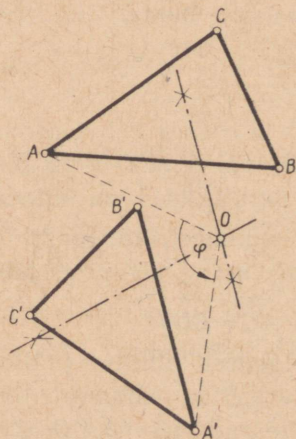


Joon. 103.

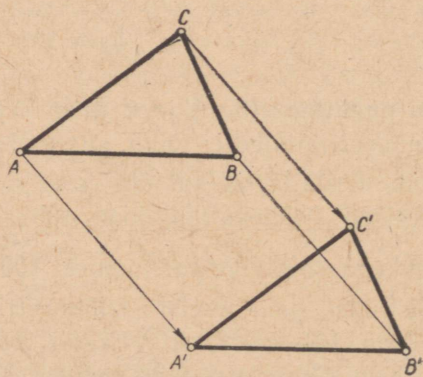
pöördekeskpunktiks (joon. 101 ja 103). Kui aga AB ja CD on paralleelsed teljega, siis pööre asendub jällegi rööplükkega, mille vektor on $\vec{AC} = \vec{BD}$ (joon. 102).

Ülesanne 3. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka. Leida pööre, mis teeb ühe kolmnurga teisega ühtivaks.

Lahendus. Antud võrdsed ja sama orientatsiooniga kolmnurgad olgu ABC ja $A'B'C'$ (joon. 104). Kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$ on võrdsed. Kui need küljed pole paralleelsed, siis leiame eelmise ülesande eeskujul pöörde, mis teeb punkti A ühtivaks punktiga A' ja punkti B ühtivaks punktiga B' . Et kolmnurgad on sama orientatsiooniga, siis punkt C satub leitud pöörde



Joon. 104.



Joon. 105.

puhul sirgest $A'B'$ samale poole, kus on punkt C' , ning kolmnurkade võrdseuse tõttu üks kolmnurk ühtibki teisega (joon. 104).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja samasuunalised, siis ei leidu pööret, mis teeks kolmnurgad ühtivaiks, küll aga leidub selleks sobiv rööplüke (joon. 105).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastassuunalised, siis ülesanne lahendub tsentraalpeegelduse abil.

Esitatud ülesannetest järeldame, et ka kaht võrdset ja sama orientatsiooniga hulknurka saab pöörde (või erijuhtumil rööplükke) abil teha ühtivaiks.

Ülesandeid.

356. Antud on võrdkülgne kolmnurk ja väljaspool seda N -tähe kujuline kujund. Peegelda kujundit järjestikku kolmnurga kahest küljest ja määra saadud pöörde keskpunkt ja pöördenurk.

357. Joonesta mingi ruut ja selle pööre ruudu keskpunkti ümber 45° võrra.

358. Mingisuguste nurkade võrra saab iga järgnevat kujundit pöörata tema keskpunkti ümber nii, et pööratud kujund ühtiks antud kujundiga: a) võrdkülgne kolmnurk, b) ruut, c) korrapärane kuusnurk, d) korrapärane viisnurk?

359. Antud on kaks lõikuvat sirget ja kummalgi üks punkt. Leia pööre, mis teeb ühe sirge ja sellel antud punkti vastavalt ühtivaks teise sirge ja sellel antud punktiga.

Näpunäide. Pöördekeskpunktiks on punkt, kus lõikuvad antud punktide sümmeetriatelg ja antud sirgete (üks) sümmeetriatelg. Ülesandel on kaks lahendust.

360. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$, mille vastavad küljed AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastassuunalised. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

361. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$ nii, et nende tipud B ja C' ühtivad. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

362. Leia pöörded, millega võrdhaarse kolmnurga ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

363. Leia pöörded, millega võrdhaarse trapetsi ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

364. Antud on kaks võrdset nurka. Leia pööre, millega neid saab teha ühtivaiks.

365. Antud on võrdhaarne kolmnurk. Leia pööre, mis teeb ühe alusnurga teisega ühtivaks.

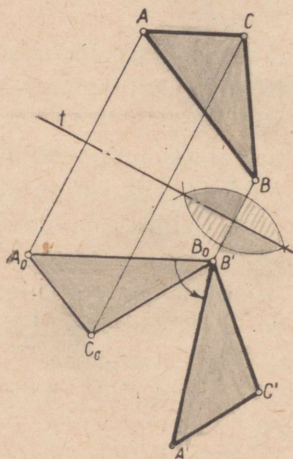
§ 64. LIIKUMINE TASAPINNAL.

Eespool tutvusime lihtsamate liikumistega tasapinnal, nimelt peegeldusega sirgest, rööplükkega, peegeldusega punktist ja pöördega. Seejuures liikumiseks tasapinnal nimetasime niisugust selle tasapinna teisendamist iseendaks, mille puhul selle tasapinna mistahes kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Et kõige lihtsam kujund, mille abil saab määrata teiste kujundite võrdsust, on kolmnurk, siis võime liikumiseks nimetada ka niisugust tasapinna teisendust iseendaks, mille puhul mistahes kolmnurk teisendub temaga võrdseks kolmnurgaks. Seega iga paar võrdseid kolmnurki määrab ühe liikumise tasapinnal. Ühenduses sellega tekib küsimus, kas ülalnimetatud liikumistega on ammendatud kõik liikumise liigid tasapinnal või mitte. Vastuse annab järgmine teoreem:

**iga liikumist tasapinnal saab vaadelda koosnevana üli-
malt kolmest peegeldusest.**

Eespool nägime, et antud võrdseid ja sama orientatsiooniga kolmnurki saab viia ühtivusse kas rööplükke või pöörde abil (§ 63, p. 5, ülesanne 3). Et mõlemad nimetatud teisendused koosnevad vaid kahest peegeldusest, siis on väide tõestatud kõigi niisuguste liikumiste kohta, mis on määratud kahe sama orientatsiooniga kolmnurga abil.

Eeldame nüüd, et antud võrdsetel kolmnurkadel ABC ja $A'B'C'$ on orientatsioonid vastandlikud (joon. 106). Peegeldame üht neist, näiteks kolmnurka ABC , sirgest t , mis on ühe paari vastavate tippude, näiteks B ja B' sümmeetriateljeks. Siis kolmnurga tippu B peegelduseks on tipp B' , aga tippude A ja C



Joon. 106.

peegeldused olgu vastavalt A_0 ja C_0 . Kolmnurk $A_0B'C_0$ on võrdne kolmnurgaga ABC , kuid vastandorientatsiooniga, s. t. ta on võrdne kolmnurgaga $A'B'C'$, millel on temaga ühine orientatsioon. See-tõttu võib juhtuda, et kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ühtivad. Sel juhul oleks väide tõestatud, sest liikumine, mis teeks antud kolmnurgad ühtivaiks, oleks peegeldus sirgest t . Kui aga kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ei ühti, siis saab neid panna ühtima pöörde abil ümber tipu B' , sest nad on võrdsed ja sama orientatsiooniga. Et pööre koosneb kahest peegeldusest, siis kuluks nüüd antud kolmnurkade ühteviimiseks kokku kolm peegeldust. Sellega on väide täielikult tõestatud.

Ülesandeid.

366. Antud on kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia kaks järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

367. Antud on kaks erineva orientatsiooniga võrdset kolmnurka, mis pole sümmeetrilised sirge suhtes. Leia kolm järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

368. Leia, missuguse lihtsama liikumisega saab asendada

- kaht rööplüket;
- rööplüket koos tsentraalpeegeldusega;
- kaht tsentraalpeegeldust;
- nelja peegeldust, kui peegeldustelgedeks on vaheldumisi kaks ristuvat sirget.

§ 65. LIIKUMISTEISENDUSTE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOON-ÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

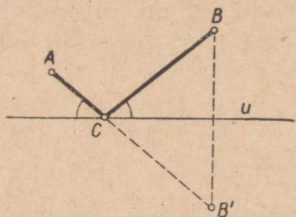
Liikumisteisendusi saab kasutada paljude teoreemide tõestamisel ja konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vaatleme mõnda näidet viimaselt alalt.

Teisenduste kasutamise meetod konstruktsioonülesannete lahendamisel seisneb selles, et vaadeldav kujund või selle mingi osa teisendatakse nii, et otsitav lahend (või lahendusviis) muutuks hõlpsamalt leitavaks. Selle meetodi sisu selgitavad lähemalt järgmised näited.

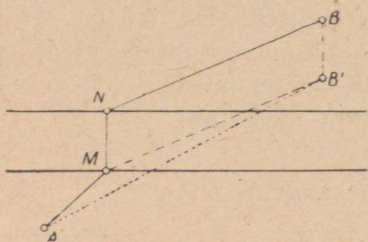
Näide 1. Ühel pool sirget u on antud kaks punkti A ja B .

Leida sirgel u punkt C nii, et lõikude summa (tee pikkus) $AC + CB$ oleks minimaalne (võimalikult väike).

Lahendus. Olgu ACB otsitav murdjoon (joon. 107). Tema pikkus ei muutu, kui lõik CB asendada sirge u suhtes sümmeetrilise lõiguga CB' . Nüüd peaks lühima pikkusega olema murdjoon ACB' . Ta on seda siis, kui punkt C asetseb sirgel AB' . Siit selgub, et otsitav punkt on sirgete u ja AB' lõikepunkt, kus $B' \equiv u(B)$.



Joon. 107.



Joon. 108.

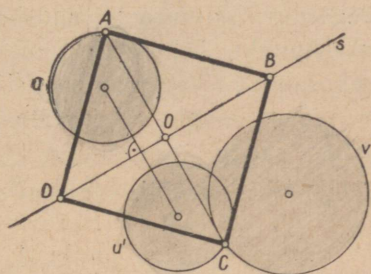
Märkus. Jooniselt selgub, et leitud punkti C puhul on võrdsed need teravnurgad, mis AC ja CB moodustavad sirgega u , s. t. lühim tee on see, mida mööda liigub valgus punktist A punktini B , peegeldudes sirgest u .

Näide 2. Ühel pool paralleelsete kallastega kanalit on küla A , teisel pool küla B . Üle kanali tuleb ehitada sild niisuguses kohas, et tee ühest külast teise oleks minimaalse pikkusega.

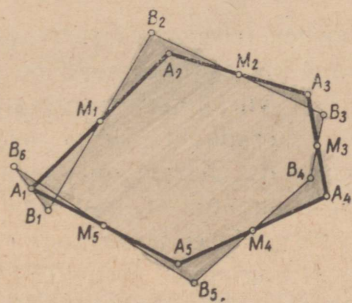
Lahendus. Oletame, et MN on nõutud silla asukoht, nii et murdjoon $AMNB$ on võimalik lühim tee, mis külasid ühendab (joon. 108). Anname teosale BN rööplükke, mille vektor on $\overrightarrow{NM}$, ning vaatleme uut murdjoont $AMB'B$, mille pikkus on võrdne endise murdjoone pikkusega. Et see pikkus oleks minimaalne, peaksid punktid A , M ja B' asetsema ühel sirgel. Siit selgub, et punkt M peab asetsema kohal, kus punkti A poolne kanali kallast lõikab sirget AB' .

Näide 3. Konstrueerida ruut, mille kaks vastastippu asetsevad antud sirgel ja ülejäänud tippudest üks asetseb ühel ja teine teisel antud ringjoonel.

Lahendus. Olgu antud sirgjoon s ja ringjooned u ja v (joon. 109). Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $ABCD$ on otsitav ruut, mille tipud B ja D asetsevad antud sirgel s , tipp A ringjoonel u ja tipp C ringjoonel v . Siis punktid A ja C on sümmeetrilised sirge s suhtes, sest ruudu diagonaalid ristuvad ja



Joon. 109.



Joon. 110.

poolitavad teineteist. Et punkt A asetseb ringjoonel u , siis temaga sirge s suhtes sümmeetriline punkt C asetseb ringjoonega u sirge s suhtes sümmeetrilisel ringjoonel u' . Siit selgub järgmine konstruksioon: 1) leiame ringjoone $u' \equiv s(u)$; 2) märgime, kui see on olemas, punkti, näiteks C , milles lõikuvad ringjooned v ja u' ; 3) leiame punkti $A \equiv s(C)$; 4) joonestame ruudu, mille diagonaali on lõik AC , järelikult on ruudu keskpunktiks sirgete s ja AC lõikepunkt O . Selle ruudu tipud B ja D satuvad sirgele s , sest nad on punktide A ja C võrdsetel kaugustel. Ruut $ABCD$ rahuldabki ülesande kõiki nõudeid.

Ülesande lahendite arv on võrdne ringjoonte u' ja v ühiste punktide arvuga. Kui need ringjooned ei lõiku, siis ülesandel pole lahendit; kui ringjooned puudutavad või lõikavad teineteist, siis ülesandel on vastavalt üks lahend või kaks lahendit; kui ringjooned v ja u' langevad ühte, siis on lahendeid lõpmata palju.

Näide 4. Konstrueerida viisnurk külgede antud keskpunktide järgi.

Lahendus. Olgu antud viisnurga külgede keskpunktid M_1, M_2, M_3, M_4 ja M_5 (joon. 110). Kui otsitava viisnurga esimest tippu A_1 peegeldada punktist M_1 , siis saadakse teine tipp A_2 , seda peegeldades punktist M_2 saadakse kolmas tipp A_3 jne.; lõpuks tipu A_5 peegeldamisel punktist M_5 saadakse uuesti tipp A_1 . Nii selgub, et punkt A_1 on viiest tsentraalpeegeldusest koosneva teisenduse kahekordne punkt, kui peegelduskeskpunktideks on punktid $M_1, \dots, M_5$. Et kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on rööplüke, rööplükkest ja tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga jälle tsentraalpeegeldus (§ 62, p. 4), siis neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on taas rööplüke, viiest tsentraalpeegeldusest

koosnev teisendus aga — tsentraalpeegeldus. Viimase teisenduse ainus kahekordne punkt on peegelduskeskpunkt. Tähendab, punkt A_1 on viiekordsel tsentraalpeegeldusel saadava tsentraalpeegelduse keskpunkt. Tema leidmiseks võtame tasapinna mistahes punkti B_1 , peegeldame seda punktist M_1 , saadud peegeldust B_2 uuesti punktist M_2 jne., kuni saame punkti B_6 . Et punktid B_1 ja B_6 on peegelduses teineteisele vastavad punktid, siis lõigu B_1B_6 keskpunkt ongi selle peegelduse keskpunkt, ühtlasi otsitav punkt A_1 . Viisnurga ülejäänud tipud leiame peegeldamise teel antud punktidest.

Ülesandeid.

369. Tasapinnal on antud kolm sirget: s , t ja u . Leia sirgel s punkt S , kui on teada, et sellega sirge t suhtes sümmeetriline punkt S' asetseb sirgel u .

370. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest ühel pool punktid A ja B . Leia sirgel s punkt M nii, et sirged AM ja BM moodustaksid sirgega s võrdsed nurgad.

371. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest teine teisel pool punktid A ja B . Leia sirgel s punkt M nii, et lõikude AM ja BM pikkuste vahe oleks võimalikult suur.

372. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja sirge t . Ehita ruut, mille kaks vastastippu asetsevad sirgel t ja ülejäänud tipud antud nurga haaradel või nende pikendustel üle tipu A .

373. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja selle sees punkt S . Joonesta läbi punkti S sirge nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolituks punktis S .

374. Tasapinnal on antud sirgjoon, ringjoon ja punkt. Joonesta läbi antud punkti sirge, mille lõik antud sirgjoone ja ringjoone vahel poolituks antud punktis.

375. Joonesta tasapinnaline seitsenurk külgede antud keskpunktide järgi.

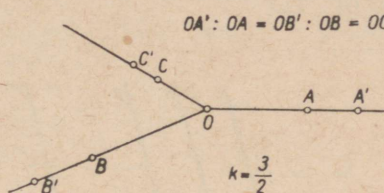
376. Joonesta läbi kahe antud ringjoone lõikepunkti sirge, mis ei läbi ringjoonte teist lõikepunkti ja millest need ringjooned lõikavad välja võrdsed kõõlud.

1. Homoteetsuse mõiste.

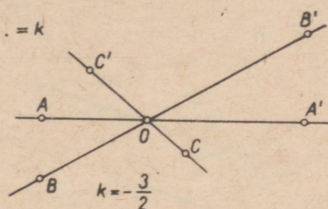
Homoteetsuseks tasapinnal nimetatakse järgmiste omadustega vastavust tasapinna punktide vahel:

1) iga punkti ja sellele vastava punkti ühendussirge läbib üht ja sama punkti O , mida nimetatakse **homoteetsuskeskpunktiks**.

2) iga kaks teineteisele vastavat punkti asetsevad homoteetsuskeskpunktist kas ühel pool (**päripidine homoteetsus**, joon. 111) või teine teisel pool (**vastupidine homoteetsus**, joon. 112);



Joon. 111.



Joon. 112.

3) kui M ja M' on kaks teineteisele vastavat punkti, siis lõikude suhe $OM':OM = k$ on jääv tasapinna kõigi punktide puhul. See jääv suhe, mida nimetatakse **homoteetsusteguriks**, on päripidise homoteetsuse korral positiivne ja vastupidise homoteetsuse korral negatiivne, sest esimesel juhtumil on lõigud OM ja OM' samasuunalised, teisel juhtumil aga vastassuunalised.

Homoteetsusteguri definitsioonist järeldub, et

$$OM' = k \cdot OM,$$

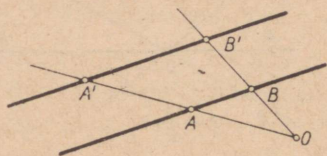
millest nähtub, et keskpunkti O ja teguri k andmisega on homoteetsus määratud, sest nende andmete korral saab igale punktile M leida temale vastavat punkti M' . Kui punkt M ühtib keskpunktiga O , siis ühtib viimasega ka teisend M' ; järelikult on keskpunkt homoteetsuse kahekordne punkt. Saab tõestada, et ta on homoteetsuse ainus kahekordne punkt.

2. Homoteetsuse tähtsamad omadused.

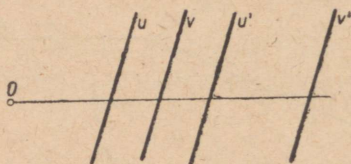
- 1) Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge teisendiks on seesama sirge, iga muu sirge teisendiks aga tema paralleel.

Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge kohta on väide ilmselt õige, sest homoteetsuse definitsiooni järgi on selle sirge punktide teisenditeks sellesama sirge punktid. Väite tõestamiseks homoteetsuskeskpunkti mitteläbiva sirge AB kohta eeldame, et homoteetsus on antud keskpunktiga O ja teguriga k (joon. 113). Leiame sirgel AB asetseva punkti, näiteks punkti A teisendi A' , ning joonestame temast läbi sirge, mis on paralleelne sirgega AB . Lõigaku sirge OB joonestatud sirget punktis B' . Siis kiirteteoreemi põhjal

$$OB' : OB = OA' : OA.$$



Joon. 113.



Joon. 114.

Et viimane suhe väljendab homoteetsustegurit, siis teeb sedasama ka esimene: $OB' : OB = k$. See näitab, et sirgel AB asetseva punkti B homoteetseks teisendiks on punkt B' sirgel $A'B'$. Ilmselt kehtib see nende sirgete kõigi punktide kohta.

- 2) Paralleelsetele sirgetele vastavad paralleelsed sirged,

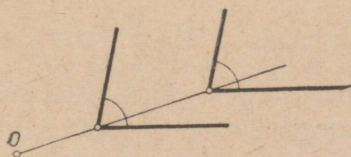
sest kui kaks sirget on paralleelsed, siis ka ühega ja teisega vastavalt paralleelsed sirged on omavahel paralleelsed (joon. 114). kui $u \parallel v$ ja $u' \parallel u$, $v' \parallel v$, siis $u' \parallel v'$.

- 3) Iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks,

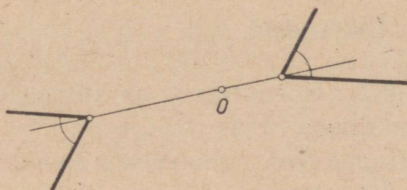
sest teisendatud nurga haarad on antud nurga haaradega vastavalt paralleelsed ja samasuunalised (joon. 115) või vastavalt paralleelsed ja vastassuunalised (joon. 116).

- 4) Iga kahe teineteisele vastava lõigu suhe võrdub homoteetsusteguriga,

sest kolmnurkade OAB ja $OA'B'$ sarnasuse tõttu (põhjenda seda, joon. 117) võime kirjutada:



Joon. 115.

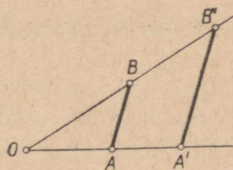


Joon. 116.

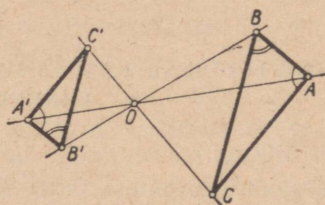
$$A'B' : AB = OA' : OA = k.$$

5) Iga kolmnurk (üldiselt iga kujund) teisendub temaga sarnaseks kolmnurgaks (kujundiks),

sest viimase kahe omaduse järgi nende nurgad on vastavalt võrdsed ja kõik vastavad lõigud on võrdelised (joon. 118).



Joon. 117.



Joon. 118.

Viimase omaduse tõttu nimetatakse homoteetsust ka **sarnasusteisenduseks** ning kahte homoteetset kujundit **perspektiivsarnasteks kujunditeks** (ehk sarnasteks kujunditeks sarnasusasendis). Kui ühega kahest perspektiivsarnasest kujundist teostada mingi liikumisteisendus, siis nende eriline vastastikune asend kaob ja me saame lihtsalt kaks sarnast kujundit. Seega võime öelda, et

kujundite sarnasus on homoteetsuse ja liikumisteisenduse järjestikusel rakendamisel püsima jääv kujundite omadus.

Lõpuks olgu märgitud, et kui homoteetsustegur $k=1$, siis homoteetsus osutub samasuseks (sest igale punktile vastavaks on siis see punkt ise); kui aga $k=-1$, siis homoteetsus osutub peegelduseks homoteetsuskeskpunktist.

377. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia mõõtmise teel homoteetsustegur. Vaatle kaht juhtumit: kui homoteetsus on päripidine ja kui ta on vastupidine.

378. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia konstruktsiooni teel mingile punktile vastav punkt.

379. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Konstrueeri vabalt võetud kolmnurgale vastav kolmnurk.

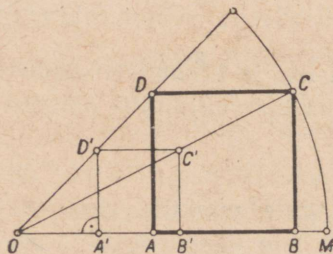
380. Põhjenda väidet, et ringjoonega, mille raadius on r , homoteetseks kujundiks on ringjoon raadiusega kr , kus k on homoteet-sustegur. (Kasuta omadust 4!)

381. Põhjenda väidet, et vastupidine homoteetsus koosneb päripidisest homoteetsusest ja tsentraalpeegeldusest.

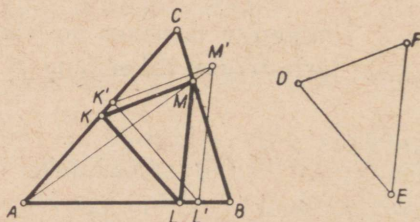
§ 67. HOMOTEETSUSE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

Nagu liikumisteisendusi, nii ka homoteetsust saab kasutada konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vastav nn. sarnasus-meetod seisneb selles, et esmalt konstrueeritakse otsitava kujundiga sarnane kujund ja siis homoteetsust kasutades otsitav kujund. Vaatleme selle meetodi rakendamist mõnede näidisülesannete lahendamisel.

Näide 1. Antud sektorisse MON joonestada ruut, mille kaks tippu asetsevad sektori raadiusel OM , kolmas tipp raadiusel ON ja neljas tipp kaarel MN (joon. 119).



Joon. 119.



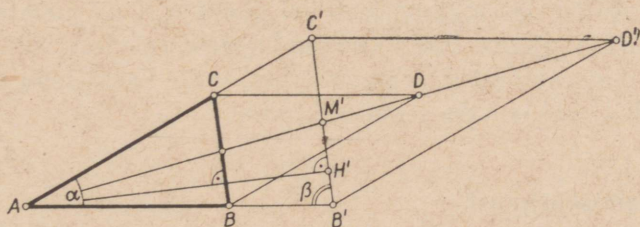
Joon. 120.

Lahendus. Joonestame algul mingi ruudu $A'B'C'D'$ (joon. 119), mille tipud A' ja B' asetsevad antud sektori raadiusel OM ja tipp D' sektori raadiusel ON (kuidas seda teha?). Pikendame lõiku OC' kuni lõikumiseni sektori kaarega punktis C , kui ta juba ei lõika seda kaart. Teisendame ruutu $A'B'C'D'$ homoteetselt, võttes keskpunktiks punkti O ja üheks paariks vastavateks punktideks punktid C' ja C ($k=OC:OC'$). Teisendamisel saame ruudu $ABCD$, mis täidab ülesande tingimusi. Lahend on ühene.

Näide 2. Joonestada kolmnurk, mille tipud asetsevad antud kolmnurga ABC külgedel ja küljed on vastavalt paralleelsed teise antud kolmnurga DEF külgedega.

Lahendus. Võtame küljel AC vabalt punkti K' ja joonestame esmalt otsitava kolmnurgaga KLM sarnase kolmnurga $K'L'M'$, mille tipp L' asetseb küljel AB ja mille küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga DEF külgedega (joon. 120). Kolmnurka $K'L'M'$ teisendame homoteetselt, võttes homoteetsuskeskpunktiks punkti A ja üheks vastavate punktide paariks punktid M' ja M , kus M on sirgete AM' ja BC lõikepunkt.

Näide 3. Konstrueerida kolmnurk, mille kaks nurka α ja β ning nurga α tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse summa on antud.



Joon. 121.

Lahendus. Konstrueerime otsitavaga sarnase kolmnurga $AB'C'$ (joon. 121), milles $\angle A = \alpha$, $\angle B' = \beta$ ja külge AB' on vabalt võetud. Edasi leiame tipust A tõmmatud mediaani AM' ja kõrguse AH' ning kanname kõrguse mediaani pikendusele. Nii saame tipust A tõmmatud mediaani ja kõrguse summaks lõigu AD' .

Samale sirgele AD' kanname alates punktist A otsitava kolmnurga mediaani ja kõrguse summa, saades lõigu AD . Otsitava kolmnurga ABC saame, kui kolmnurga $AB'C'$ teisendame homo-

teetselt, võttes keskpunktiks A ja üheks vastavate punktide paariks D' ja D . Punktid B ja C leiame paralleelide joonestamise teel: $DB \parallel D'B'$ ja $DC \parallel D'C'$.

Ülesandeid.

382. Joonesta antud kolmnurka ruut, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel.

383. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud mediaan.

384. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja nende nurkade tippudest tõmmatud mediaanide summa.

385. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud kõrguse ja bisektori summa.

386. Antud on kaks lõikuvat sirget ja väljaspool neid punkt. Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti ja puudutab antud sirgeid.

387. Joonesta antud kolmnurka ristkülik, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel, kui ristküliku küljed suhtuvad nagu 3:2.

388. Antud on ringjoon ja sellel punkt A . Leia punktist A välja antud ringjoone kõõlu keskpunkti geomeetriline koht.

389. Joonesta antud segmenti ruut, mille kaks tippu asetsevad segmenti alusel ja kaks segmenti kaarel.

Kordamisküsimusi.

390. Mida nimetatakse peegelduseks sirgest? Mida võib öelda kolmnurga ja tema peegelduse orientatsiooni kohta?

391. Mida nimetatakse rööplükkeks? Kuidas rööplüke avaldub peegelduste kaudu?

392. Mida nimetatakse peegelduseks punktist? Kuidas peegeldus punktist avaldub teljelise sümmeetria kaudu?

393. Missugust teisendust nimetatakse pöördeks punkti ümber? Missuguste andmetega on pööre määratud?

394. Missugust teisendust nimetatakse homoteetsuseks? Missugune seos on homoteetsuse ja sarnasuse vahel?

395. Nimeta homoteetsuse tähtsamaid omadusi.

396. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühest kaatetist ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest kaatetist?

397. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühe teravnurga poolitajast ja siis saadud peegeldust peegeldada teise teravnurga poolitajast?

398. Kuidas teisendub võrdkülgne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt kolmnurga ühest küljest ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest küljest?

399. Joonesta vabalt võetud isekülgse kolmnurga peegeldus esmalt ühe nurga poolitajast, siis saadud peegelduse peegeldus teise nurga poolitajast ja lõpuks viimase peegeldus kolmanda nurga poolitajast.

400. Missuguse kujundi moodustab täisnurkne kolmnurk koos

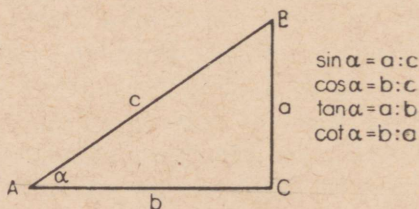
a) tema peegeldusega ühe kaateti suhtes;

b) tema peegeldusega hüpotenuusi keskpunkti suhtes?

VI. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

§ 68. TERAVNURGA ÜHE TRIGONOMEETRILISE FUNKTSIOONI JÄRGI SAMA NURGA TEISTE FUNKTSIOONIDE LEIDMINE.

Teravnurga iga trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi saab ehitada selle nurga, kui ehitada täisnurkne kolmnurk, mille vastavate külgede suhe on võrdne antud funktsiooni väärtusega. Saadud kolmnurgast võib nüüd leida vaadeldava nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtused (joon. 122).



Joon. 122.

Lahendame näitena ülesande:

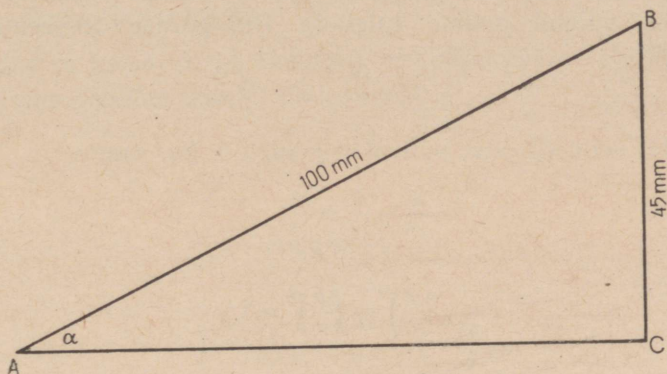
$\sin \alpha = 0,45$. Leia $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.

Lahendus. $\sin \alpha = 0,45 = 45 : 100$.

Ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 45 mm ja hüpotenuus 100 mm (joon. 123).

Mõõtmisel leiame, et teine kaatet on 89 mm (olgu märgitud, et teise kaateti suuruse võib leida ka arvutamise teel, rakendades Pütagorase teoreemi). Edasi saame, et

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= 89 : 100 = 0,89; \\ \tan \alpha &= 45 : 89 = 0,51; \\ \cot \alpha &= 89 : 45 = 1,98.\end{aligned}$$



Joon. 123.

Sellest näitest näeme, et kui teravnurga trigonomeetrilistest funktsioonidest üks on antud, siis kõigi teiste funktsioonide väärtusi saab selle antud väärtuse järgi leida.

Kui on kasutada nurgafunktsioonide tabelid, siis saab antud nurgafunktsiooni väärtuse järgi leida sama nurga ülejäänud kolm funktsiooni ka tabelite abil, leides esmalt antud funktsiooni väärtuse järgi nurga suuruse.

Ülesandeid.

401. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Leia graafiliselt $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.
402. $\cos \alpha = 0,75$. Leia graafiliselt $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.
403. $\tan \alpha = 1,5$. Leia graafiliselt $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\cot \alpha$.
404. $\cot \alpha = 2$. Leia graafiliselt $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$.
405. $\sin \alpha = 0,53$. Leia tabelite abil $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.
406. $\cos \alpha = 0,07$. Leia tabelite abil $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.
407. $\tan \alpha = 0,344$. Leia tabelite abil $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\cot \alpha$.
408. $\cot \alpha = 11,4$. Leia tabelite abil $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$.

§ 69. TERAVERNURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VAHELISED SEOSED.

1. Nurgafunktsiooni antud väärtuse järgi saab sama nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtusi leida ka arvutamise teel, kasutades valemeid, mis väljendavad nurgafunktsioonidevahelisi seoseid.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahelist seost väljendava valemi saame tuletada Pütagorase teoreemi abil (joon. 122):

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled c^2 -ga, saame

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

ehk

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Siit

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1,$$

mida kirjutatakse tavaliselt nõnda:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Ühe ja sama nurga siinuse ja koosinuse ruutude summa võrdub 1-ga.

See seos võimaldab $\sin \alpha$ väljendada $\cos \alpha$ kaudu ja ümberpöörduvalt:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

2. Tuletame seose ühe ja sama nurga siinuse, koosinuse ja tangensi vahel.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

ja

$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

seega

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

millest

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Teravnurga tangens võrdub selle nurga siinuse ja kootangensi jagatisega.

3. Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi vahelise seose tuletamiseks paneme tähele, et

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

ja

$$\cot \alpha = \frac{b}{a},$$

seega

$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi korrutis võrdub 1-ga.

Võrdusest $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ saame

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

ja

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Seega,

nurga kootangens ja tangens on teineteise pöördväärtused.

Seoseid

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide vahelisteks põhiseosteks. Need põhiseosed võimaldavad nurga ühe funktsiooni järgi arvutada ülejäänud kolme funktsiooni.

Seda selgitavad järgmised näited.

Näide 1. On teada, et $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Arvuta

1) $\cos \alpha$; 2) $\tan \alpha$; 3) $\cot \alpha$.

Lahendus. 1) Asendades võrduses

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$\sin \alpha$ antud väärtusega, saame

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

2) Kasutades võrdust

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

ning asendades seal $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ nende väärtustega, saame

$$\tan \alpha = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{12}.$$

3) Et nurga kootangens on sama nurga tangensi pöördväärtus, siis

$$\cot \alpha = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Näide 2. Avalda $\tan \alpha$ kaudu 1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$.

Lahendus. 1) Jagades võrduse

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

mõlemad pooled $\sin^2 \alpha$ -ga, saame

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

ehk

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

millest

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Siit saame

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

$$2) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Sellest

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}.$$

$$\text{Arvestades, et } \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}},$$

saame

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Näide 3. Avalda $\cot \alpha$ kaudu 1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$.

$$\text{Lahendus. 1) } \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\cot \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \alpha + 1}};$$

seega

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}.$$

$$2) \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}.$$

Näide 4. Avalda $\tan \alpha$ kaudu

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$\tan \alpha$ kaudu.

Lahendus. Jagades antud murru lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos^2 \alpha$, saame

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Ülesandeid.

409. Avalda $\tan \alpha$ kaudu $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ kaudu.

410. Väljenda vahe $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ funktsiooni $\sin \alpha$ kaudu.

411. Avalda summa $\tan \alpha + \cot \alpha$ funktsioonide $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu.

412. Väljenda $\tan \alpha$ kaudu avaldis

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

Näide 5. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan \alpha = 1 \frac{1}{2}$.

Lahendus. Jagades antud avaldise lugeja ja nimetaja arvuga $\cos \alpha$ ning asendades seejärel saadud avaldises $\tan \alpha$ antud väärtusega $1\frac{1}{2}$, saame:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{1\frac{1}{2} + 1}{1\frac{1}{2} - 1} = \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 5.$$

Ülesandeid.

413. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

414. Arvuta avaldise

$$\frac{4 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan \alpha = 2$.

415. On teada, et $\tan \alpha + \cot \alpha = 10$. Arvuta avaldise $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ väärtus.

*416. Arvuta $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ väärtus, kui on teada, et $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$.

Näide 6. Lihtsusta avaldist

$$\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha. \end{aligned}$$

Eespool saadud valemid nurga ühe funktsiooni avaldamiseks sama nurga teise funktsiooni kaudu on kokkuvõtlikult esitatud järgmises tabelis.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha =$	—	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	—	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	—

Need valemid hõlbustavad arvutusi ning kergendavad avaldiste lihtsustamist ja samasuste tõestamist.

Ülesandeid.

417. Lihtsusta järgmised avaldised:

- 1) $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
- 2) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$
- 3) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cot^2 \alpha$
- 4) $\cot \alpha \cdot \sin \alpha$
- 5) $\frac{1}{\cos \alpha} : \tan \alpha$
- 6) $1 - \sin \alpha \cdot \cot \alpha \cdot \cos \alpha$
- 7) $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cot \alpha}$
- 8) $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha}{1 : \cos \alpha}$
- 9) $\sin^2 52^\circ + \sin^2 38^\circ$
- 10) $\tan 41^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 49^\circ$
- 11) $\frac{\cos 31^\circ}{\cos 59^\circ} \cdot \frac{\sin 31^\circ}{\sin 59^\circ}$
- 12) $\frac{\cos 23^\circ}{\sin 67^\circ} : \frac{\sin 23^\circ}{\cos 67^\circ}$

418. Lihtsusta avaldised:

- 1) $\sin \alpha \cot \alpha + \cos \alpha$

$$2) 1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$3) (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$$

$$4) 2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$5) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

$$6) \cos \alpha \cdot \tan \alpha$$

$$7) \cot \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$8) \sin \alpha : \tan \alpha$$

$$9) \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$10) \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$11) \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$12) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$$

Näide 7. Tõesta, et

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cot^2 \alpha} = 1.$$

Lahendus. Tõestamiseks teisendame antud võrduse vasakut poolt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cot^2 \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Näide 8. Tõesta samasus

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Märkus. Mõnikord osutub samasuse tõestamisel otstarbekaks teisendada võrduse mõlemat poolt.

Ülesandeid.

419. Tõesta järgmised samasused:

$$1) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$2) \frac{4 - 5 \cos \alpha}{3 - 5 \sin \alpha} + \frac{3 + 5 \sin \alpha}{4 + 5 \cos \alpha} = 0$$

- 3) $\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$
- 4) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$
- 5) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$
- 6) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha$
- 7) $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = 1$
- 8) $\cot \alpha + \cos \alpha = \frac{\cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cot \alpha - \cos \alpha}$
- 9) $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \cos^2 \alpha$
- 10) $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
- 11) $\sin^2 \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha) = 1$
- 12) $\tan \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sin \alpha$

KORDAMISÜLESANDEID.

420. Esita vahe $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
- a) kahe nurga siinuste vahena;
b) kahe nurga koosinuste vahena.
421. Esita summa $1 + \sqrt{3}$
- a) kahe nurga tangensite summana;
b) kahe nurga kootangensite summana.
422. Esita summa $1 + \frac{1}{2} = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ + \cos 0^\circ + \cos 60^\circ$
- a) kahe nurga siinuste summana;
b) kahe nurga koosinuste summana.
423. Arvuta peast
- a) $\tan 57^\circ \cdot \tan 33^\circ = \tan^2 1$
- b) $\frac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ} = 1$
424. Arvuta: 1) $\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$; 6) $\sin 0^\circ - \tan 0^\circ$;
2) $\sin 60^\circ - \cos 45^\circ$; 7) $\sin 30^\circ + \tan 45^\circ$;
3) $\cos 30^\circ - \cos 45^\circ$; 8) $\cos 60^\circ - \cot 45^\circ$;
4) $\tan 45^\circ - \cot 45^\circ$; 9) $\cos 0^\circ - \sin 0^\circ$;
5) $\tan 45^\circ - \cos 0^\circ$; 10) $\sin 90^\circ - \cos 0^\circ$.

425. Arvuta 60° -se nurga ja 30° -se nurga siinuste suhe.
 426. Leia 45° -se nurga ja 60° -se nurga koosinuste suhe.
 427. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha - \sin(75^\circ - \alpha)}$$

väärtus, teades, et $\alpha = 45^\circ$.

428. Mast on toestatud vaieritega, mille pikkused on 10 m ja mis maapinnaga moodustavad nurga 60° . Kui kõrgel maapinnast on vaierid kinnitatud masti külge?

429. Jõud 10 kg on lahutatud kaheks komponentjõuks, mille suunad on teineteisega risti, kusjuures ühe komponendi suund moodustab antud jõu suunaga nurga 30° . Arvuta komponentide suurused.

430. Päike on silmapiiril 30° kõrgusel. Kase varju pikkus on sel ajal 50 m. Kui kõrge on kask?

431. Maasse püstilöödud teiba kõrgus maapinnast on 3 m ja ta varju pikkus 5 m. Leia päikese kõrgusnurk.

432. Lihtsusta avaldised:

1) $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

2) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

3) $\sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha)$

433. Tõesta samasused:

1) $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

2) $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

§ 70. NEGATIIVNE NURK.

Auto rooliratast saab pöörata kahes teineteisele vastupidises suunas. Kui rooliratast pööratakse kellaosuti liikumise suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb asendisse OB (joon. 124), siis auto esirattad pöörduvad paremale. Rooliratta pööramisel kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb asendisse OB_1 , pöörduvad esirattad vasakule. Loeme ühe pööramise suuna positiivseks, teise negatiivseks.

Positiivseks pöörlemise suunaks loetakse seda suunda, mis on vastupidine kellaosutite pöörlemise suunale.

Vankri vasakpoolsete rataste mutrid keeratakse kinni, kui pöörata neid positiivses suunas, parempoolsete rataste mutrite kinni-keeramiseks tuleb neid pöörata negatiivses suunas. Kellaosutid pöörlevad negatiivses suunas.

Igapäevases kõnekeeles nimetatakse pöörlemist positiivses suunas pöörlemiseks *vastupäeva* ning pöörlemist negatiivses suunas pöörlemiseks *päripäeva*.

Kui on teada, et auto rooliratast pöörati nurga võrra 120° , siis pole veel teada, kas kodar OA (joon. 124) läks asendisse OB või asendisse OB_1 , s. t. pole teada, kas sellel pöörlemisel tekkis nurk AOB või nurk AOB_1 .

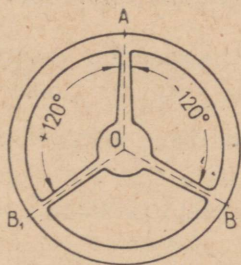
Pöörlemisel tekkiv nurk on määratud siis, kui on antud pöörde suurus ja pöörlemise suund.

Pöörlemisel tekkiva nurga loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub positiivses suunas, ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub negatiivses suunas.

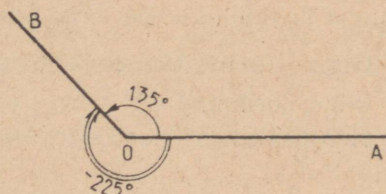
Negatiivse nurga mõõtarvu kirjutame märgiga miinus. Näiteks, kui kodar OA (joon. 124) on jõudnud negatiivses suunas pööreldes asendisse OB , siis on tekkinud nurk -120° . Kella minutiosuti pöörduv veerand tunniga -90° , poole tunniga -180° , kolmveerand tunniga -270° .

Vaatleme nurka, mis tekib kiire pöörlemisel tasapinnal oma otspunkti O ümber (joon. 125).

Kui kiir on pöörlemisel jõudnud asendist OA asendisse OB , siis on tekkinud nurk AOB . Nurga haara OA , millest kiir alustas



Joon. 124.



Joon. 125.

pöörlemist, nimetatakse **alghaaraks** ja haara OB , millel kiire pöörlemine lõppes, nimetatakse **lõpphaaraks**. Nurga tähistamisel kolme tähe abil kirjutatakse esikohale täht, mis asub alghaara juures. Joonisel 125 kujutatud nurka AOB võib mõista kahel viisil: kas positiivse nurgana 135° või negatiivse nurgana -225° . Nagu näeme, on nende nurkade absoluutväärtuste summa 360° . Kahe- suse vältimiseks on lepitud kokku, et sümbolid

$$\angle AOB, \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

tähendavad positiivseid nurki, kui teisiti pole öeldud.

Ülesandeid.



Joon. 126.

434. Millise nurga teeb pendel (joon. 126) võnkumisel

- a) asendist OD asendisse OA ?
- b) asendist OA asendisse OD ?

435. Missuguse nurga võrra pöörduv kella minutiosuti 5 minutiga? 20 minutiga? 45 minutiga?

436. Missuguse nurga võrra peab pöörama kella minutiosuti, et lükata kella tagasi 10 minuti võrra? 15 minuti võrra? 30 minuti võrra?

437. Kummalt pooluselt vaadatuna on Maa pöörlemise suund positiivne?

438. Kummal juhul, kas õmblemisel edaspidi või õmblemisel tagaspidi, on õmblusmasina hooratta pöörlemise suund negatiivne, kui masinale vaadata hoorattapoolsest otsast?

§ 71. NURK, MILLE ABSOLUUTVÄÄRTUS ÜLETAB TÄISPÖÖRDE.

Paistku meile diiselmootori hooratta pöörlemine positiivses suunas ja toimugu see kiirusega 1 täispööre sekundis (joon. 127).

Olgu kodarat tähistava kiire lähteasend OA , $\frac{1}{6}$ sekundi pärast on kiir pöördunud 60° võrra, jõudes asendisse OB . Kui hooratas pöörleb positiivses suunas edasi ja kiir OA läbib järjekorras asendid

$OC, OD, OE, OF, OA,$

siis öeldakse, et hooratas on pöördunud nurga võrra, mille suurus on vastavalt

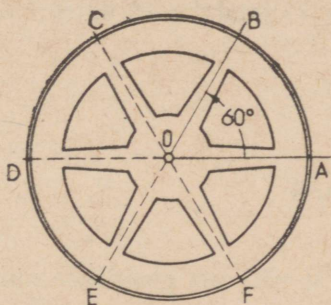
$$120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ.$$

Hooratta edasisel samasuunalisel pöörlemisel jõuab kiir OA teist korda asendisse OB . Nüüd on nurk, mille võrra hooratas on pöördunud, suurem kui 360° . Öeldakse, et see nurk on

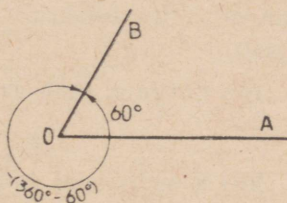
$$360^\circ + 60^\circ \text{ ehk } 420^\circ.$$

Kui hooratas pöörleb samas suunas edasi, läbib kiir OA teist korda oma lähteasendi ning jõuab kolmandat korda asendisse OB . Sel korral öeldakse, et tekkinud nurga suurus on

$$60^\circ + 2 \cdot 360^\circ \text{ ehk } 780^\circ.$$



Joon. 127.



Joon. 128.

Hooratta edasisel pöörlemisel jõuab kiir OA asendisse OB

$$3, 4, 5, \dots, k$$

korda. Tekkinud nurkade suurused on siis vastavalt

$$60^\circ + 3 \cdot 360^\circ, 60^\circ + 4 \cdot 360^\circ, 60^\circ + 5 \cdot 360^\circ, \\ \dots, 60^\circ + k \cdot 360^\circ,$$

kus k tähendab positiivset täisarvu.

Nurga mõistet sel viisil laiendades, s. o. kasutades nurka pöörde mõõduna, võib kõnelda kuitahes suurtest positiivsetest nurkadest.

Kui hooratas pöörleb aga näiteks negatiivses suunas, nii et kiir OA läbib järjekorras asendid

$$OF, OE, OD, OC, OB, OA, OF, OE,$$

siis tekkinud nurga suurus on vastavalt:

$$-60^\circ, -120^\circ, -180^\circ, -240^\circ, -300^\circ, -360^\circ, -420^\circ, -480^\circ.$$

Kui kiir OA (joon. 128) pöörleb negatiivses suunas ja jõuab esimest korda asendisse OB , siis tekib negatiivne nurk, mille absoluutväärtus on $360^\circ - 60^\circ$; seega selle nurga suurus on

$$-(360^\circ - 60^\circ) = 60^\circ - 360^\circ.$$

Kui kiir OA läbib pöörlemisel samas suunas asendi OB

$$2, 3, 4, \dots, k$$

korda, siis vastavad nurgad on

$$60^\circ - 2 \cdot 360^\circ, 60^\circ - 3 \cdot 360^\circ, 60^\circ - 4 \cdot 360^\circ, \dots, 60^\circ - k \cdot 360^\circ.$$

Seega kõik positiivsed ja negatiivsed nurgad, mille alghaaraks on kiir OA ja lõpphaaraks kiir OB , on väljendatavad ühise valemiga

$$60^\circ + k \cdot 360^\circ,$$

kus k on mistahes täisarv.

Üldiselt,

iga nurga x saab avaldada kujul

$$x = \alpha + k \cdot 360^\circ,$$

kus k on täisarv ja α on 360° -st väiksem positiivne nurk.

Näiteid.

1. $5764^\circ = 4^\circ + 16 \cdot 360^\circ$
2. $6038^\circ = 278^\circ + 16 \cdot 360^\circ$ ehk
 $6038^\circ = -82^\circ + 17 \cdot 360^\circ$
3. $-1000^\circ = 80^\circ - 3 \cdot 360^\circ$

Ülesandeid.

439. Lihvimisketta äärel asuv punkt liigub kiirusega $900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ketta läbimõõt on 4 dm. Kui suure nurga võrra pöörduv ketta raadius sekundis?

440. Elektrimootori rihmaratas teeb 900 pööret minutis. Mitme kraadi võrra pöörduv rihmaratta raadius sekundis?

441. Väljenda järgmised nurgad kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus $0 < \alpha < 360^\circ$.

- 1) 1117° ; 2) 1940° ; 3) 2720° ; 4) 1030° .

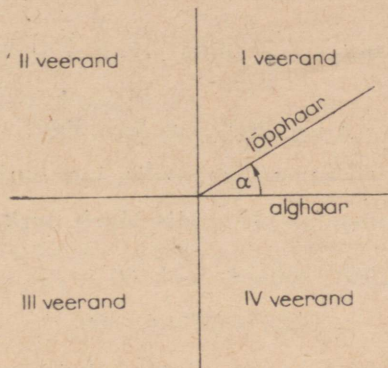
442. Väljenda järgmised nurgad kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$ ehk $|\alpha| < 180^\circ$.

- 1) 1420° ; 2) 1770° ; 3) 2020° ; 4) -2400° .

Jaotame tasapinna koordinaattelgedega neljaks **veerandiks**, mida nimetatakse positiivse pöörlemise suuna järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja neljandaks veerandiks.



Joon. 129.

Paigutame mingi nurga teljestikku nõnda, et ta tipp asub nullpunktis ja alghaar asub abstsisside positiivsel poolteljel. Nurga lõpphaar asub siis sõltuvalt nurga suurusest kas mõnel poolteljel või tasapinna esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis (joon. 129).

Nurkasid nimetatakse esimese, teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkadeks vastavalt sellele, mitmendas veerandis asetseb nurga lõpphaar, sõltumata sellest, mis suunas pööreldes ta sellesse asendisse on jõudnud.

Seega, positiivsed teravnurgad on esimese veerandi nurgad; positiivsed nürinurgad on teise veerandi nurgad; nurk, mis on suurem kui 180° ja väiksem kui 270° , on kolmanda veerandi nurk; nurk, mis on suurem kui 270° ja väiksem kui 360° , on neljanda veerandi nurk.

Negatiivne teravnurk on neljanda veerandi nurk, negatiivne nürinurk on kolmanda veerandi nurk jne.

On ilmne, et kui α on esimese, teise, kolmanda või neljanda veerandi nurk, siis on seda ka nurk

$$\alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus n on mistahes täisarv.

Veeranditesse kuuluvateks ei loeta nurki, mis on täisnurga kordsed:

$$0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \dots,$$

sest nende lõpphaarad asetsevad telgedel, mis jaotavad tasapinna veeranditeks.

Et leida, mitmendas veerandis antud nurk lõpeb, selleks tuleb ta avaldada kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ, \text{ kus } |\alpha| < 360^\circ.$$

Antud nurk lõpeb samas veerandis, kus nurk α .

Näide 1. Mitmendas veerandis lõpeb nurk 1500° ?

Lahendus. $1500 : 360 = 4$, jääk 60.

$$1500^\circ = 60^\circ + 4 \cdot 360^\circ.$$

Nurk 1500° on esimese veerandi nurk.

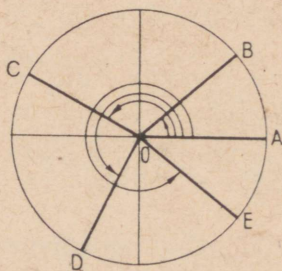
Näide 2. Mitmendas veerandis lõpeb nurk -800° ?

Lahendus. $-800^\circ = -80^\circ - 2 \cdot 360^\circ$.

Nurk -800° lõpeb neljandas veerandis.

Ülesandeid.

443. Mitmendasse veerandisse kuuluvad nurgad joonisel 130:



Joon. 130.

1) $\angle AOB$; 3) $\angle AOD$;

2) $\angle AOC$; 4) $\angle AOE$?

444. Mitmendasse veerandisse kuuluvad järgmised nurgad:

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1) 405° | 2) 200° | 3) -30° | 4) -370° |
| 600° | 300° | -100° | -500° |
| 840° | 700° | -170° | -600° |
| 250° | 950° | -400° | -800° |

445. Ehita sirkli ja joonlaua abil nurgad
1) 300° ; 2) -150° ; 3) -135° ; 4) 840° .

446. Ehita malli ja joonlaua abil nurgad
1) 1000° ; 2) -1000° ; 3) 500° ; 4) -500° .

§ 72. NURGA MÕÖDUÜHIKUD.

1. Kraad.

Kõige rohkem levinud nurga mõõduühik on nurgakraad.

Nurgakraad on $\frac{1}{90}$ täisnurgast ehk $\frac{1}{360}$ täispöördest.

Nurgakraadi sümboliks on 1° .

$$1^\circ = 60',$$

$$1' = 60''.$$

Maamõõtjad kasutavad praktilistel nurga mõõtmistel peaaegu eranditult kraadimõõtu.

2. Radiaan.

Radiaan on kesknurk, millele vastava kaare pikkus on võrdne raadiuse pikkusega (joon. 131).

Sellest definitsioonist järeldub, et täispööre on 2π radiaani, s. o.

$$360^\circ = 2\pi \text{ radiaani.}$$

Siit

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani}$$

ehk

$$1^\circ = 0,0175 \text{ radiaani.}$$

Et

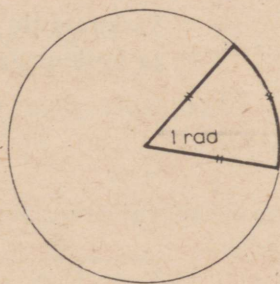
$$2\pi \text{ radiaani} = 360^\circ,$$

siis

$$1 \text{ radiaan} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \text{ kraadi}$$

ehk

$$1 \text{ radiaan} = 180^\circ \cdot \frac{1}{\pi} = 180^\circ \cdot 0,3185 = 57,2958^\circ$$



Joon. 131.

ehk

$$1 \text{ radiaan} = 57^{\circ}17'45''.$$

Üldiselt, kui mingi nurga suurus kraadimõõdus on n ja radiaanmõõdus x , siis

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{n}{360} \text{ ehk } \frac{x}{\pi} = \frac{n}{180},$$

millest

$$x = \frac{\pi n}{180}$$

ja

$$n = \frac{180x}{\pi}.$$

Kraadimõõdus antud nurga suuruse ümberarvutamiseks radiaanideks ja ümberpöörduvalt kasutatakse sellekohaseid tabeleid (V. M. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid, lk. 59—61).

Asendades n -kraadise kaare pikkuse arvutamisel valemis

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot n$$

arvu n avaldisega $\frac{180x}{\pi}$, saame

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{180x}{\pi} = rx,$$

s. t.

kesknurgale vastava kaare pikkus võrdub kaare raadiuse ja kesknurga radiaanmõõdu korrutisega.

Asendades ringi sektori pindala valemis

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

arvu s avaldisega rx , saame

$$S = \frac{r^2 x}{2}.$$

Seega,

sektori pindala võrdub tema nurga radiaanmõõdu ja raadiuse ruudu poole korrutisega.

Märkus. Nimetuse radiaan lühendiks on rad, kuid see nimetus jäetakse tavaliselt kirjutamata.

Nurga mõõtary radiaanmõõdus antakse sageli arvu π abil.

Näiteks selle asemel, et üteldä «nurk, mille suurus on 1,2 radiaani» või «... $\frac{\pi}{2}$ radiaani», öeldakse «nurk 1,2» või «nurk $\frac{\pi}{2}$ ».

Näiteid.

1. Mitu radiaani on 40° ?

Lahendus. $x = \frac{\pi \cdot 40}{180} = \frac{2\pi}{9} \approx 0,6981$.

Vastus. 40° on $\frac{2\pi}{9}$ ehk 0,6981 radiaani.

2. Avalda võrdkulgse kolmnurga nurga suurus radiaanides.

Lahendus. $x = \frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{\pi}{3}$.

Vastus. Võrdkulgse kolmnurga nurk on $\frac{\pi}{3}$ radiaani.

3. Avalda 1,5 rad kraadimõõdus.

Lahendus. $n = \frac{180 \cdot 1,5}{\pi} = \frac{270}{\pi} = 270 \cdot \frac{1}{\pi} = 270 \cdot 0,3185 =$
 $= 89,13^\circ = 89^\circ 7' 48''$.

Vastus. 1,5 rad on $89^\circ 7' 48''$.

4. Avalda kraadimõõdus järgmised radiaanmõõdus antud nurgad:

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{4}, \quad 2\pi.$$

Anna vastus tabeli kujul.

Lahendus. $n = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{180}{4} = 45$ (kraadi), jne.

$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°

Ülesandeid.

• 447. Avalda radiaanmõõdus:

1) 50° ; 2) $32,56^\circ$; 3) $114^\circ 36'$.

448. Avalda 1 radiaan

1) minutites; 2) sekundites.

449. Avalda kraadimõõdus:

1) 2 rad; 2) 3 rad; 3) 1,7 rad; 4) 2,15 rad.

450. Avalda radiaanmõõdus alljärgnevad kraadimõõdus antud nurgad:

30° , 60° , 120° , 150° , 210° , 240° .

Anna vastus tabeli kujul. Radiaanmõõdud kirjuta π abil.

451. Millega võrdub iga alljärgneva funktsiooni väärtus:

1) $\sin 0$	2) $\tan \frac{\pi}{6}$	3) $\tan \frac{\pi}{4}$	4) $\tan \frac{\pi}{3}$
$\cos 0$	$\cot \frac{\pi}{6}$	$\cot \frac{\pi}{4}$	$\cot \frac{\pi}{3}$
$\sin \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{2}$
$\cos \frac{\pi}{6}$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{\pi}{3}$	$\cos \frac{\pi}{2}$

452. Ülivõimsa elektrimootori ajamiratas teeb 12 000 pööret minutis. Väljenda selle ratta nurkkiirus ühikutes $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

453. Lihvimisketta nurkkiirus on 4500 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb lihvimisketas minutis?

454. Elektrigeneraatori ankru nurkkiirus on 50 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb ankur minutis?

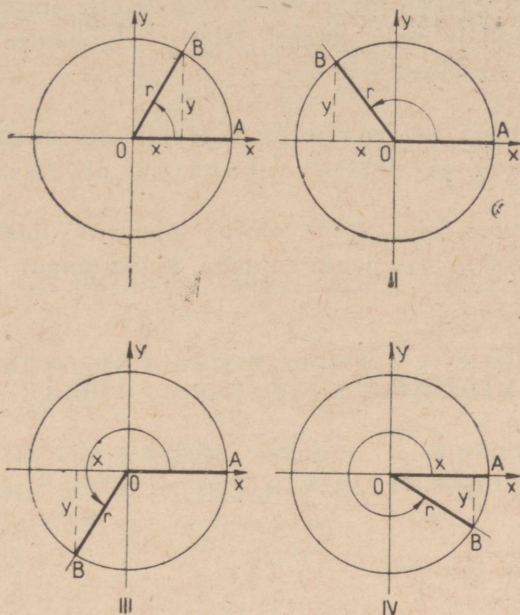
§ 73. MISTAHES SUURUSEGA NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimiseks mistahes nurga puhul toimime järgmiselt.

Olgu antud mistahes positiivne kesknurk $AOB = \alpha$, mis ei ole täisnurga kordne. Selle nurga lõpphaar võib asetseda kas esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis.

Joonestame nurga AOB kõigil neljal juhul, võttes alghaaraks abstsisside positiivse pooltelje (joon. 132, I, II, III, IV).

Valime nurga AOB lõppphaaral mingi punkti B . Tähistame selle punkti koordinaate tähtedega x ja y ning lõiku OB tähega r , kusjuures $r > 0$.



Joon. 132.

Lõpphaara pöörlemisel joonestab punkt B ringjoone, mille keskpunktiks on nurga tipp O ja raadius on r . Nimetame seda ringjoont trigonomeetriliseks ringjooneks. Olgu nurga α alghaaral asetsev raadius OA . Nüüd võime nurka vaadelda trigonomeetrilise ringjoone raadiuste OA ja OB vahelise kesknurgana.

Täisnurkse kolmnurga abil antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt saame juhtumil I, et

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \quad \tan \alpha = \frac{y}{x};$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}; \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

Ülejäänud juhtumitel defineerime trigonomeetrilised funktsioonid nendesamade võrdustega.

Nende mõistete abil saame järgmised üldised trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

kesknurga siinus võrdub lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja seda punkti läbiva trigonomeetrilise ringjoone raadiuse suhtega;

kesknurga koosinus võrdub lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja seda punkti läbiva trigonomeetrilise ringjoone raadiuse suhtega;

kesknurga tangens võrdub lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja abstsissi suhtega, kui abstsiss ei ole null;

kesknurga kootangens võrdub lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja ordinaadi suhtega, kui ordinaat ei ole null.

§ 74. PÕHISEOSTE KEHTIVUS MISTAHES NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PUHUL.

Kui trigonomeetrilise ringjoone mistahes punktiks on punkt $B(x; y)$, siis trigonomeetrilise ringjoone võrrand on $x^2 + y^2 = r^2$ (vt. § 5, 1).

Siit

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1.$$

Et $\frac{y}{r} = \sin \alpha$ ja $\frac{x}{r} = \cos \alpha$, kus α on mistahes kesknurk, siis kehtib iga kesknurga puhul seos

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Et

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha,$$

siis

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

nagu on teravnurga korralgi.

Mistahes nurga α tangensi ja kootangensi definitsiooni järgi

$$\tan \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

Korrutades viimaste võrduste vastavad pooled, saame

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Seega kõik kolm põhiseost jäävad kehtima mistahes nurga puhul, välja arvatud see juhtum, mil nurk α on täisnurga kordne.

Ilmselt jäävad siis kehtima mistahes nurga puhul ka kõik need seosed, mis järelduvad põhiseostest (vt. tabel § 69).

Ülesandeid.

455. Arvuta peast:

- 1) $\sin^2 500^\circ + \cos^2 500^\circ = 1$
- 2) $\sin^2 400^\circ + \sin 300^\circ + \cos^2 400^\circ = 1 + \sin 300^\circ$
- 3) $\tan 700^\circ \cdot \cot 700^\circ = 1$
- 4) $\tan 850^\circ \cdot \cot 850^\circ - \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
- 5) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1 = 2$
- 6) $2 - \sin^2 210^\circ - \cos^2 210^\circ = 1$

Nurga kootangens on tangensi pöördväärtus:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Nurga siinuse pöördväärtust nimetatakse koosekansiks ja tähistatakse sümboliga $\operatorname{cosec} \alpha$.

Seega

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Nurga koosinuse pöördväärtust nimetatakse seekansiks ja tähistatakse sümboliga $\sec \alpha$.

Seega

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

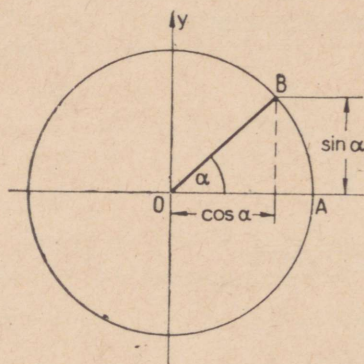
Õppides tundma nurga siinust, koosinust ja tangensit, ei ole vajadust eraldi uurida nende pöördväärtusi, seepärast me edaspidi sellest loobume.

§ 75. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VÄÄRTUSED LÕIKUDE PIKKUSTENA.

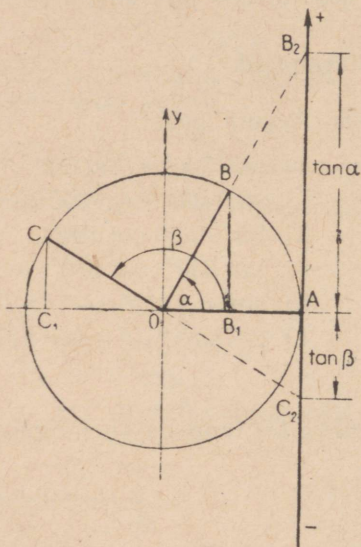
Trigonomeetrilist ringi, mille raadius on võrdne ühe pikkusühikuga, nimetatakse ühikringiks. Jooniselt 133 näeme, et

ühikringis nurga siinus võrdub lõpphaara ja ringjoone lõikepunkti ordinaadiga ja koosinus selle punkti abstsissiga.

Sõltuvalt sellest, missuguse märgiga on nimetatud punkti abstsiss ja ordinaat, on nurga vastav trigonomeetriline funkt-



Joon. 133.



Joon. 134.

sioon kas positiivne või negatiivne (kui ta nullist erineb). Nii on nurga siinus I ja II veerandis positiivne, III ja IV veerandis negatiivne; koosinus I ja IV veerandis positiivne, II ja III veerandis aga negatiivne.

Et saada lõiku, mille mõõtarm võrdub nurga tangensiga, selleks kasutame tangenstelge, s. o. ühikringi puutujat, mis on risti nurga alghaaraga punktis A (joon. 134). Tangenstelje positiivseks suunaks loeme y -telje positiivse suuna.

Näitame nüüd, et nurga haarade vaheline tangenstelje lõik kujutabki nii suuruselt kui märgilt nurga tangensit.

Vaatleme esmalt esimese veerandi nurka α (joon. 134). Kolmnurgast AOB_2 näeme, et

$$\tan \alpha = \frac{AB_2}{AO}.$$

Et ühikringis

$$OA = 1,$$

siis

$$\frac{AB_2}{OA} = \frac{AB_2}{1} = AB_2.$$

Seega

$$\tan \alpha = AB_2.$$

Juhul, kui nurk lõpeb teises veerandis, nagu nurk β joonisel 134, siis

$$\tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{C_1C}{OC_1}.$$

Et kolmnurgad OC_1C ja OAC_2 on sarnased, siis

$$\frac{C_1C}{OC_1} = \frac{AC_2}{OA} = \frac{AC_2}{1} = AC_2 \text{ ja}$$

$$\tan \beta = AC_2.$$

Et punkt C asub teises veerandis, siis jagatis $\frac{y}{x}$ on negatiivne ja seega ka $\tan \beta$ on negatiivne. Kooskõlas sellega on lõik AC_2 suunatud x -teljest alla poole ja seega negatiivne.

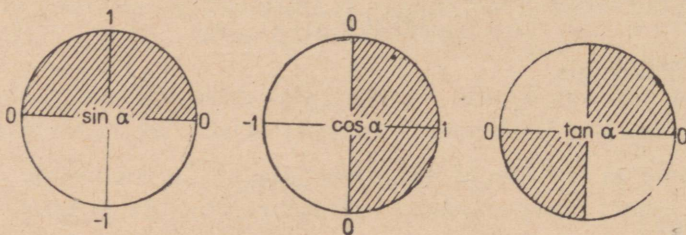
Kui nurk lõpeks kolmandas või neljandas veerandis, siis jõuaksime samasuguse arutlusega tulemusele, et

ühikringis nurga tangens võrdub kas nurga haarade vahelise tangenstelje lõigu või alghaara ja lõpphaara (üle keskpunkti võetud) pikenduse vahelise tangenstelje lõigu mõõtarvuga.

On kerge näha, et I ja III veerandi nurga tangens on positiivne, II ja IV veerandi nurga tangens aga negatiivne.

Joonis 135 annab ülevaate sellest, missugune märk on trigonomeetrilistel funktsioonidel igas veerandis ja missugused on funktsioonide väärtused nurkade 0° , 90° , 180° , 270° ja 360° korral. Joonisel on viirutatud need veerandid, milles nurga trigonomeetiline funktsioon on positiivne.

Tangenstelje lõiku ei ole olemas, kui nurk on 90° või 270° , sest neil juhtudel nurga lõpphaara pikendus ei lõika puutujat, vaid on sellega paralleelne.



Joon. 135.

Kuigi nurkadel 90° ja 270° tangens puudub, võime siiski jooniselt 134 näha, missugune on nurga tangens siis, kui nurk veidi erineb 90° -st ja kui ta veidi erineb 270° -st.

Kui nurk on veidi väiksem 90° -st, siis nurga tangens on väga suur positiivne arv. Kui nurk on veidi suurem 90° -st, siis nurga tangens on väga suure absoluutväärtusega negatiivne arv.

Milline on nurga tangens, kui nurk on veidi väiksem (suurem) 270° -st?

Ülesandeid.

456. Ehita sirkli ja joonlaua abil nurk α ning seejärel lõikudena $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$. Leia saadud jooniselt nende funktsioonide väärtused.

1) $\alpha = 135^\circ$; 2) $\alpha = 210^\circ$; 3) $\alpha = 285^\circ$.

457. Leia alljärgnevate trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

1) $\sin 180^\circ$

2) $\cos \pi$

3) $\tan 0^\circ$

$\sin \frac{3\pi}{2}$

$\cos 270^\circ$

$\tan \pi$

$\sin 2\pi$

$\cos 2\pi$

$\tan 2\pi$

458. Selgita nurga 90° tangensi puudumist, vaadeldes tangensit siinuse ja koosinuse jagatisena.

459. Selgita nurga 0° kootangensi puudumist, vaadeldes kootangensit tangensi pöördväärtusena.

1. Taandamine 360° -st väiksemale nurgale.

Trigonomeetriliste funktsioonide üldistest definitsioonidest järeldub, et nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused on määratud vastava nurga lõpphaara asendiga, sõltumata sellest, mitme täispöörde järel või mis suunas pöörlemisel ta sellesse asendisse jõudis. Kui nurk kasvab või kahaneb täispöörde või täispöörde kordse võrra, siis lõpphaar tuleb endisse asendisse. Seega,

trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel täispöörde või selle kordse võrra.

Sümbolites:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \text{ ehk } \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \text{ ehk } \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha,$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \tan \alpha \text{ ehk } \tan(\alpha + 2\pi k) = \tan \alpha,$$

kus k on mistahes täisarv.

Need valemid võimaldavad mistahes nurga trigonomeetrilise funktsiooni taandada 360° -st väiksema nurga funktsiooniks: selleks tarvitseb meil vaid antud nurk avaldada kujul

$$k \cdot 360^\circ + \alpha,$$

kus k on sobivalt leitud positiivne või negatiivne täisarv ja α on 360° -st väiksem positiivne nurk.

Näiteid.

$$1) \sin 2530^\circ = \sin(7 \cdot 360^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ$$

$$2) \tan(-1095^\circ) = \tan(-4 \cdot 360^\circ + 345^\circ) = \tan 345^\circ$$

Ülesandeid.

460. Avalda alljärgnevad funktsioonid 360° -st väiksema nurga funktsioonidenä:

$$1) \sin 395^\circ; 2) \cos 695^\circ; 3) \tan 1956^\circ; 4) \sin(-2783^\circ);$$

$$5) \cos(-730^\circ).$$

461. Avalda $\sin 900^\circ$ 360° -st väiksema nurga koosinuse kaudu.

462. Avalda $\cos 1000^\circ$ 360° -st väiksema nurga siinuse kaudu.

463. Avalda $\tan 400^\circ$ 360° -st väiksema nurga siinuse kaudu.

464. Avalda $\tan 600^\circ$ 360° -st väiksema nurga koosinuse kaudu.

465. Lihtsusta avaldised:

1) $\frac{1 - \sin^2 200^\circ}{1 - \cos^2 200^\circ}$

2) $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$

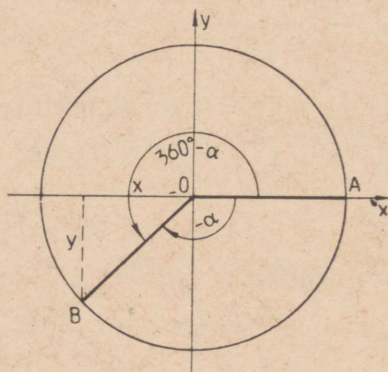
3) $\sin 210^\circ \cdot \cot 210^\circ$

4) $\cos 370^\circ \cdot \tan 370^\circ$

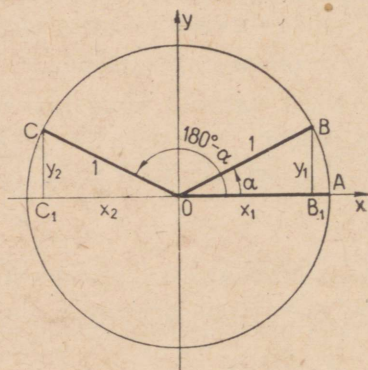
Võimalus mistahes nurga funktsiooni taandada 360° -st väiksema nurga funktsiooniks vabastab meid 360° -st suuremate nurkade funktsioonide uurimisest.

2. Taandamine positiivsele nurgale.

Vaadeldes eraldi negatiivse nurga funktsioone (joon. 136), saame:



Joon. 136.



Joon. 137.

$$\sin(-\alpha) = \frac{y}{r}, \quad \cos(-\alpha) = \frac{x}{r}, \quad \tan(-\alpha) = \frac{y}{x}.$$

Needsamad jagatised aga väljendavad ühtlasi positiivse nurga $(360^\circ - \alpha)$ funktsioone. Seega,

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= \sin(360^\circ - \alpha) \text{ ehk } \sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha), \\ \cos(-\alpha) &= \cos(360^\circ - \alpha) \text{ ehk } \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha), \\ \tan(-\alpha) &= \tan(360^\circ - \alpha) \text{ ehk } \tan(-\alpha) = \tan(2\pi - \alpha). \end{aligned}$$

Näide.

$$\sin(-310^\circ) = \sin(360^\circ - 310^\circ) = \sin 50^\circ.$$

3. Taandamine teravnurgale.

Eespool nägime, et kõikide negatiivsete nurkade ja kõikide 360° -st suuremate nurkade funktsioone saab avaldada 360° -st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide kaudu ehk, nagu öeldakse, saab taandada 360° -st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonideks. Nüüd näitame, et viimaseid saab taandada positiivsete teravnurkade funktsioonideks.

Paneme tähele, et kui α on teravnurk, siis teise veerandi nurga võib kirjutada kujul $180^\circ - \alpha$, kolmanda veerandi nurga kujul $180^\circ + \alpha$ ja neljanda veerandi nurga kujul $360^\circ - \alpha$.

Näiteks,

$$\text{teise veerandi nurk} \quad 160^\circ = 180^\circ - 20^\circ;$$

$$\text{kolmanda veerandi nurk} \quad 240^\circ = 180^\circ + 60^\circ;$$

$$\text{neljanda veerandi nurk} \quad 345^\circ = 360^\circ - 15^\circ.$$

Seetõttu esimesse veerandisse mittekuuluva nurga funktsiooni taandamiseks teravnurga funktsioonile piisab, kui leiame taandamisvalemid nurkade $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ja $360^\circ - \alpha$ funktsioonide jaoks.

Nurga $180^\circ - \alpha$ funktsioonide taandamisvalemite leidmiseks ehitame ühikringis teravnurga α ja nurga $180^\circ - \alpha$ (joon. 137).

Trigonomeetrilised funktsioonid on defineeritud lõpphaara mistahes punkti koordinaatide kaudu. Edaspidi kasutame lõpphaara seda punkti, mis asub ühikringjoonel.

Jooniselt näeme, et siis

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 \text{ ja } \sin(180^\circ - \alpha) = y_2,$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{1} = x_1 \text{ ja } \cos(180^\circ - \alpha) = -x_2.$$

Täisnurksetes kolmnurkades B_1OB ja C_1OC on

$$OB = OC,$$

$$\angle B_1OB = \angle C_1OC.$$

Seega

$$\triangle B_1OB = \triangle C_1OC,$$

millest järeldub, et

$$y_2 = y_1$$

ja

$$x_2 = x_1$$

(x_1 ja x_2 on vastassuunalised).

Nüüd saame, et

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

Niisiis, teise veerandi nurkade trigonomeetriliste funktsioonide taandamisel rakendame valemeid:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

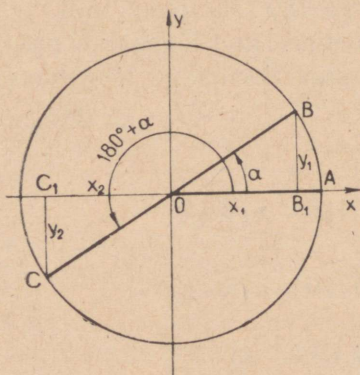
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$$

Nurga $180^\circ + \alpha$ funktsioonide taandamisvalemite saamiseks ehitame ühikringis nurgad α ja $180^\circ + \alpha$ (joon. 138). Arutledes samal viisil nagu eelmisel korral, saame:

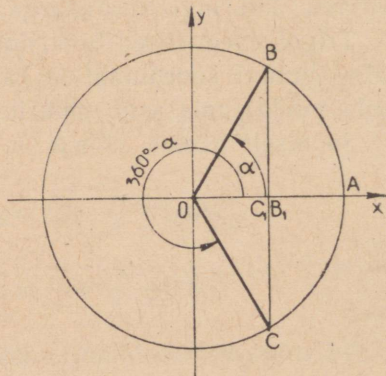
$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha.$$



Joon. 138.



Joon. 139.

Analoogiliselt saame neljanda veerandi nurga $360^\circ - \alpha$ (joon. 139) funktsioonide jaoks järgmised taandamisvalemid:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

Arvestades viimaseid taandamisvalemeid ja varem tähele pandud asjaolu, et nurga $(-\alpha)$ funktsioonid on samased nurga $360^\circ - \alpha$ funktsioonidega, saame

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

Taandamisvalemeid on kerge meeles pidada, pannes tähele, et

nurga $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ kui ka $360^\circ - \alpha$ funktsioon taandub nurga α samanimeliseks funktsiooniks: märk sõltub sellest, mis veerandis nurk lõpeb.

Näiteid.

$$1. \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$2. \sin 243^\circ = \sin(180^\circ + 63^\circ) = -\sin 63^\circ = -0,8910.$$

$$3. \sin 560^\circ = \sin(360^\circ + 200^\circ) = \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ = -0,3420.$$

$$4. \tan 275^\circ 24' = \tan(360^\circ - 84^\circ 36') = -\tan 84^\circ 36' = -10,58.$$

$$5. \tan(-2094^\circ) = \tan(-6 \cdot 360^\circ + 66^\circ) = \tan 66^\circ = 2,2460.$$

$$6. \tan(5\pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$7. \text{ Leia nurk } \alpha, \text{ teades, et } \tan \alpha = -1,9970 \text{ ja } 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Lahendus. Kasutades valemit

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha,$$

saame

$$\tan(180^\circ - \alpha) = 1,9970.$$

Tabelist leiame

$$180^\circ - \alpha = 63^\circ 24',$$

$$\alpha = 180^\circ - 63^\circ 24' = 116^\circ 36'.$$

Ülesandeid.

466. Kirjuta nurkade $90^\circ - \alpha$, $180^\circ - \alpha$ ja $180^\circ + \alpha$ funktsioonide taandamisvalemid, kui nurgad on väljendatud radiaanides.

467. Avalda positiivse nurga funktsioonina:

$$1) \sin(-300^\circ)$$

$$2) \cos(-300^\circ)$$

$$3) \sin(-330^\circ)$$

$$4) \cos(-315^\circ)$$

$$5) \tan(-315^\circ)$$

$$6) \tan(-340^\circ)$$

468. Arvuta peast:

1) $\sin 120^\circ$	2) $\cos 315^\circ$	3) $\tan 135^\circ$
$\sin 210^\circ$	$\cos 225^\circ$	$\tan 225^\circ$
$\sin 315^\circ$	$\cos 150^\circ$	$\tan 330^\circ$

469. Leia tabelite abil järgmiste nurkade siinused:

1) 112° ; $164^\circ 36'$; $178^\circ 18'$; $115^\circ 30'$.
2) 196° ; 212° ; $200^\circ 24'$; $308^\circ 12'$.

470. Leia tabelite abil järgmiste nurkade koosinused:

1) 99° ; 152° ; $170^\circ 42'$; $100^\circ 50'$.
2) 112° ; 315° ; $200^\circ 24'$; $308^\circ 12'$.

471. Leia tabelite abil järgmiste nurkade tangensid:

1) 114° ; 152° ; $160^\circ 06'$; $259^\circ 18'$.
2) 196° ; 293° ; $272^\circ 18'$; $342^\circ 40'$.

472. Taanda järgmised funktsioonid positiivse teravnurga funktsioonideks:

1) $\sin 200^\circ$	2) $\cos 310^\circ$	3) $\tan 192^\circ$
$\sin 115^\circ$	$\cos 164^\circ$	$\tan(-200^\circ)$
$\sin(-15^\circ)$	$\cos(-60^\circ)$	$\tan(-282^\circ)$
4) $\sin 460^\circ$	5) $\cos 540^\circ$	6) $\tan 499^\circ$
$\sin 693^\circ$	$\cos 982^\circ$	$\tan 654^\circ$
$\sin 850^\circ$	$\cos 754^\circ$	$\tan 815^\circ$

473. Leia nurk α , teades, et

1) $\cos \alpha = -0,9311$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
2) $\sin \alpha = 0,5000$ ja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
3) $\tan \alpha = 1$ ja $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

474. Taanda järgmised funktsioonid nurga α funktsioonideks:

1) $\sin(\pi + \alpha)$	2) $\tan(\pi - \alpha)$
$\sin(2\pi - \alpha)$	$\tan(2\pi - \alpha)$
$\sin(3\pi + \alpha)$	$\tan(2\pi + \alpha)$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Näide. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$.

475. Arvuta:

1) $\sin \frac{5\pi}{6}$ 2) $\tan \frac{5\pi}{6}$

Näide. $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

476. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

1) $\frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(360^\circ + \alpha)} + \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = 0$

2) $\frac{\sin(540^\circ - x) \cos(x - 180^\circ)}{\tan(900^\circ - x)} = \cos^2 x$

3) $\sin(\alpha - 30^\circ) + \sin(\alpha + 150^\circ) = 0$

4) $\tan(45^\circ + \alpha) = \cot(45^\circ - \alpha)$

5) $\cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha)$

6) $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$

477. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49^\circ + \sin(-49^\circ) + \cos 25^\circ - \cos(-25^\circ)$

2) $\cos 33^\circ - \cos 17^\circ - \cos(-33^\circ) - \sin 40^\circ +$
 $+ \cos(-17^\circ) - \sin(-40^\circ)$

3) $\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) - \tan(\alpha - \pi) - \tan(2\pi - \alpha)$

§ 77. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD.

Kujutame funktsiooni

$$y = \sin x$$

graafiliselt vahemikus

$$0 \leq x \leq 3\pi.$$

Selleks joonestame koordinaatteljestiku ja ühikringi, mille keskpunkti võtame x -teljel, nii nagu on tehtud joonisel 140.

Jaotades nüüd ühikringi näiteks 16-ks võrdseks osaks, saame nurgad suurusega $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \dots$. Iga nurga lõppraadiuse otspunktist joonestame lõigu, mille pikkus kujutab vastava nurga siinust, mõõdetud ühikringi raadiusega. Täispöõret, s. o. nurka 360° ehk 2π radiaani kujutab siis abstsissiteljel lõik pikkusega 6,28 ühikut ja nurka $\frac{\pi}{8}$ lõik, mille pikkus on ligikaudu 0,4 ühikut. Seejärel ehitame teljestikus üksteise järele punktid, mille abstsissiks on vastava nurga mõõtarv radiaanides ja ordinaadiks vastava

nurga siinus. Joonisel on nurkade lõppraadiuste otspunktid ja nendele nurkadele vastavad graafiku punktid märgitud numbritega 1, 2, 3, ...

Nurga siinuse graafikut võime jätkata nii positiivsete kui ka negatiivsete nurkade suunas kuitahes kaugemale, saades lõpmatu lainelise kõverjoone, mida nimetatakse **sinusoidiks**.

Funktsiooni

$$y = \cos x$$

graafiku võib ehitada samal viisil nagu siinuse graafiku, võttes nüüd graafiku punkti ehitamisel ordinaadiks lõigu, mille mõõtarv on võrdne vastava nurga koosinusega.

Nurga koosinuse graafiku võime aga ehitada ka järgmiselt. Arvestades valemeid

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \text{ ja } \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha),$$

saame:

$$\cos x = \sin(90^\circ - x) = \sin[180^\circ - (90^\circ - x)] = \sin(x + 90^\circ).$$

Seega,

$$\cos x = \sin(x + 90^\circ),$$

millest nähtub, et $\cos x$ graafiku saamiseks tuleb teljestikku, milles on ehitatud $\sin x$ graafik, nihutada x -telje suunas nõnda, et teljestiku algus läheb punkti $x = 90^\circ$ ehk, teisiti öeldes, $\cos x$ graafiku saame, kui $\sin x$ graafikut nihutame x -telje negatiivses suunas lõigu võrra, mis vastab 90° -le. Joonisel 140 on koosinuse graafik joonistatud punktiirjoonega.

Ülesandeid.

478. Otsusta joonise 140 abil:

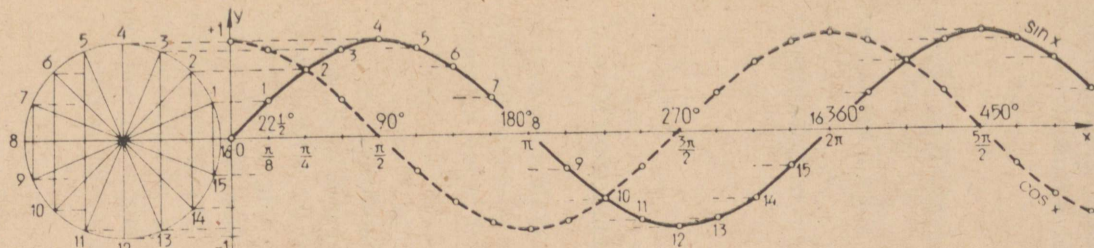
1) kuidas muutub nurga siinus, kui nurk kasvab 0° -st 90° -ni; 90° -st 270° -ni; 270° -st 450° -ni; 450° -st 540° -ni?

2) missugustes argumentdivahemikkudes $\cos x$ kasvab, missugustes kahaneb?

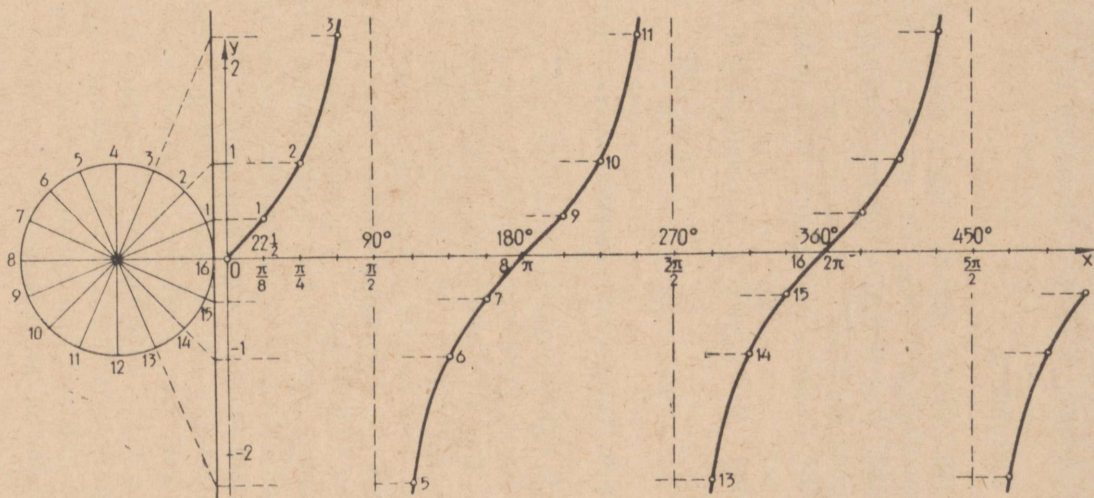
3) missuguste x väärtuste korral $\sin x = \cos x$?

4) missugused on funktsioonide $\sin x$ ja $\cos x$ positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad?

Nurga tangensi graafiku ehitamisel toimime samal viisil nagu eespool siinuse graafiku ehitamiselgi. Joonisel 141 on näidatud funktsiooni $y = \tan x$ graafiku ehitamine.



Joon. 140.



Joon. 141.

Et nurkadel 90° , 270° , $\dots$, $(2k+1) \cdot 90^\circ$ (kus k on mistahes täisarv) tangensi väärtus puudub, siis nurga tangensi graafik ei ole pidev joon, nagu seda on siinuse ja koosinuse graafikud, vaid katkeb 90° , 270° , $\dots$, $(2k+1)90^\circ$ kohal. Tangensi graafik koosneb seetõttu üksikutest üksteisest lahusolevatest harudest.

Ülesandeid.

479. Kuidas muutub $\tan x$, kui nurk x kasvab 0° -st 90° -ni; 90° -st 270° -ni; 270° -st 450° -ni?

480. Kas leidub niisugune vahemik, milles nurga kasvamisel tangens kahaneb?

481. Nimeta funktsiooni $\tan x$ positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

482. Missuguste x väärtuste korral

$$\tan x = 0?$$

§ 78. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PERIOODILISUS.

On nähtusi, mis korduvad iga ühe ja sama ajavahemiku tagant, näiteks aurumasina töötamisel auru jaotuskarbi klapi avanemine ja sulgumine, kella pendli võnkumine, tõukuri liikumine automootoris, planeedi tiirlemine ümber Päikese, öö ja päeva vaheldumine, aastaaegade vaheldumine, mere mõõnad ja tõusud, pulsilöögid jne. Sääraseid nähtusi nimetatakse **perioodilisteks**.

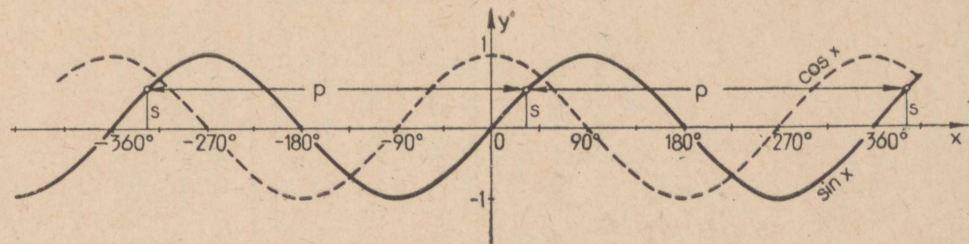
On funktsioone, mille muutumine toimub perioodiliselt. Kõige lihtsamate perioodiliste funktsioonide näideteks on trigonomeetrilised funktsioonid. Me nägime eespool, et ühegi trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka muudetakse 360° või selle kordse võrra. Otsime nüüd iga trigonomeetrilise funktsiooni jaoks niisugust väikseimat positiivset nurka p , mille puhul nurga x iga väärtuse korral nurga $x+p$ funktsioon on võrdne nurga x samanimelise funktsiooniga. Niisugust nurka p nimetatakse uuritava funktsiooni perioodiks.

Jooniselt 142 näeme, et

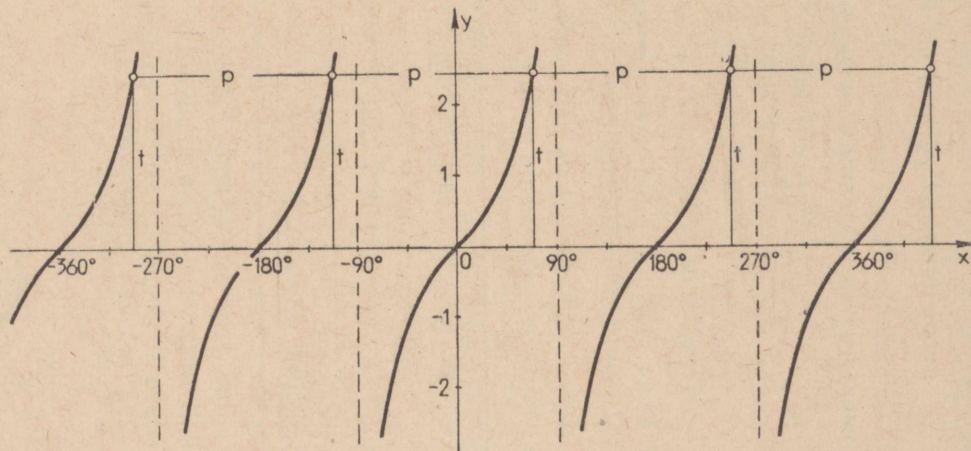
nurga siinuse ja koosinuse periood on 360° .

Taandamisvalemitest on teada, et

$$\tan(x+180^\circ) = \tan x.$$



Joon. 142.



Joon. 143.

Vaadeldes tangensi graafikut (joon. 143) näeme, et tõepoolest kordub tangensi väärtus t iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb 180° võrra ja et pole 180° -st väiksemat nurka p , mille korral $\tan(x+p) = \tan x$.

Seega,

nurga tangensi periood on 180° .

Et trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka suurendatakse või vähendatakse perioodi võrra, siis

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha,$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \tan \alpha,$$

kus k on mistahes täisarv.

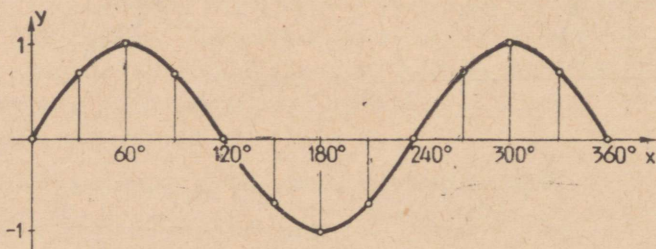
Näide. Kujuta funktsioon $y = \sin 1,5x$ graafiliselt ja selgita saadud joonise abil funktsiooni perioodilisust. Kui pikk on periood?

Lahendus. Koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli, võttes x väärtused vahemikust $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ iga 30° tagant.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$1,5x$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°	405°	450°	495°	540°
y	0°	0,70	1	0,70	0	-0,70	-1	-0,70	0	0,70	1	0,70	0

Valime telgedel ühikuks lõigu pikkusega 2 cm. Kujutagu ühiklõik nurgateljel nurka 1 radiaan, s. o. ligikaudu 60° (joon. 144).

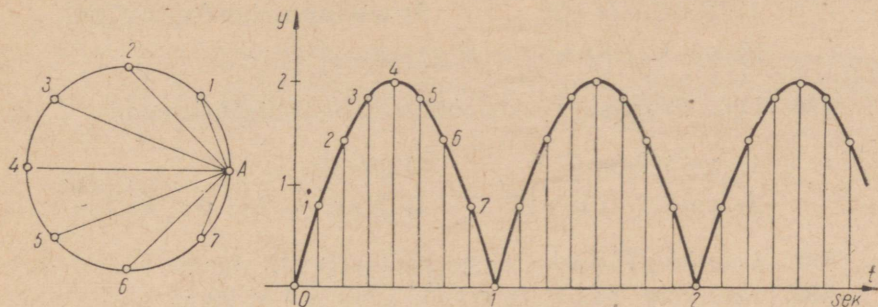
Jooniselt näeme, et antud funktsioon on perioodiline, perioodiga 240° ehk $\frac{4\pi}{3}$ radiaani.



Joon. 144.

Ülesandeid.

483. Joonisel 145 on kujutatud kõõlu pikkuse muutumine, kui kõõlu üks otspunkt A seisab paigal, teine otspunkt aga liigub ringjoonel, tehes ühe tiiru 1 sekundiga. Kas kõõlu pikkuse muutumine on perioodiline? Kui on, siis kui pikk on periood?



Joon. 145.

484. Kujuta alljärgnevad funktsioonid graafiliselt ja selgita siis graafiku abil funktsioonide perioodilisust. Kui pikk on periood?

1) $y = \sin 2x$

2) $y = \sin 3x$

3) $y = \sin \frac{x}{2}$

4) $y = \sin \frac{x}{3}$

485. Kujuta funktsioon graafiliselt ja selgita graafiku abil, kas funktsioon on perioodiline. Kui on, siis kui pikk on periood?

1) $y = 1 + \sin x$

2) $y = \sin x + \cos x$

3) $y = 2 \sin x$

4) $y = 3 \cos x$

Ülesandeid IX klassi kursuse kordamiseks.

486. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = 2x + 9$

3) $y = -\frac{1}{3}x + 1$

5) $y = \sin 2x$

2) $y = -x^2 + x - 12$

4) $y = 12 - x - 6x^2$

6) $y = \cos \frac{1}{3}x$

487. Leia järgmiste funktsioonide positiivsuspäätkonnad:

1) $y = 3x - 6$

3) $y = 24 - 17x - 20x^2$

2) $y = x^2 + 5x - 14$

4) $y = \sin x$, kui $0 \leq x \leq 4\pi$

488. Leia järgmiste funktsioonide negatiivsusiirkonnad:

1) $y = -0,3x + 1,5$

3) $y = 2x^2 + 3x - 2$

2) $y = -x^2 - 6x + 16$

4) $y = \cos x$, kui $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

489. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkonnad:

1) $y = x^2 + 3x + 22$

3) $y = \tan x$, kui $0 \leq x \leq 2\pi$,

2) $y = -x^2 - x + 2$

4) $y = x^4$

490. Leia järgmiste funktsioonide kahanemiskiirkonnad:

1) $y = x^2 + 3x - 10$;

3) $y = x^3$;

2) $y = 2x^2 - 13x + 15$;

4) $y = \sin x$, kui $0 \leq x \leq 3\pi$

491. Leia kõigi kahekohaliste paarisarvude summa.

492. Leia kõigi paaritute arvude summa 1-st 99-ni.

493. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige 19. Leia progressiooni esimene liige ja vahe.

494. Kaldpinda mööda liikuv kera läbib esimeses sekundis 0,5 m ja igas järgnevas 0,8 m rohkem. Kui pika tee läbib kera 10 sekundiga?

495. Arvuta avaldise

$$\frac{(x^2yz)^3 - (8yz)^2}{4x^3y^2 - 3x^5z^2}$$

väärtus, kui $x = -2$, $y = 5$ ja $z = -3$.

496. Leia lükati abil järgmiste arvude kuubid:

1) 15,4; 154; 288; 92,5; 0,0444; 0,007; 1729.

2) 2760; 17,85; 2970; 0,955; 0,3; 0,03; 1040.

497. Leia lükatil kuupjuured järgmistest arvudest:

1) 4320; 43200; 0,432; 0,22; 0,2; 100000; 0,01.

2) 0,0008; 72000000; 40500; 0,067; 0,129; 0,0125.

498. Arvuta:

1) $\sqrt[3]{14,8^2 + 6,7^3}$

2) $\sqrt[3]{328^2 - 260^2}$

3) $0,47^3 - 0,38^3$

4) $\sqrt[3]{7600000}$

5) $\sqrt[3]{56^2}$; $\sqrt[3]{455^2}$; $\sqrt[3]{0,79^2}$; $\sqrt[3]{0,006^2}$.

6) $\sqrt[3]{6,8^3}$; $\sqrt[3]{380^3}$; $\sqrt[3]{0,157^3}$; $\sqrt[3]{0,026^3}$.

499. Kuubi ruumala on 85 cm^3 . Leia kuubi ühe tahu pindala.
 500. Kui suur on kuubi ruumala, kui tahu pindala on $4,26 \text{ m}^2$?
 501. Lahenda proovimise teel võrrandid:

$$1) 4x^3 - 108 = 0$$

$$2) 3x^4 - 48 = 0$$

502. Järjesta suuruse järgi:

- 1) 3^9 ; $2,1^9$; 10^9 ; $(-9)^9$; $0,2^9$; $0,9^9$; $(-0,2)^9$; $(-31)^9$; $(-5)^9$.
 2) 3^{10} ; $2,1^{10}$; 10^{10} ; $(-9)^{10}$; $0,2^{10}$; $0,9^{10}$; $(-0,2)^{10}$; $(-31)^{10}$; $(-5)^{10}$.

503. Lihtsusta avaldisi:

$$1) (-2x \cdot 4yz^2)^3 \qquad 2) \frac{4^3 a^4 b^5 c^2}{4^2 a^7 b^3 c^3}$$

$$3) 3x^2 y^5 \cdot 2x^4 y^3 - (2x^3 y^4)^2 + \frac{12x^9 y^{10}}{3x^3 y^2}$$

504. Järjesta suuruse järgi:

- 1) 2^8 ; 2^{-8} ; $(-2)^8$; $(-2)^{-8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$
 2) 3^7 ; 3^{-7} ; $(-3)^7$; $(-3)^{-7}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-7}$
 3) 5^9 ; 5^{10} ; $(-5)^9$; $(-5)^{10}$; 5^{-9} ; 5^{-10} ; $(-5)^{-9}$; $(-5)^{-10}$; $(-5)^0$; 5^0 .

505. Lihtsusta avaldisi:

- 1) $3x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ 6) $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}}\right)^{-3}$
 2) $x^{-\frac{2}{5}} y^{\frac{1}{4}} : x^{-2\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{4}}$ 7) $\sqrt[3]{a^2 b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$
 3) $\left(x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{5}{6}}\right)^2 \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ 8) $\sqrt[3]{x^2 y^4 z} : \sqrt[4]{x^3 y^2 z^3}$
 4) $(a^4 b^6 c)^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c\right)^2$ 9) $(\sqrt{x^2 y})^4 \cdot (\sqrt{xy})^3$
 5) $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^4$ 10) $\left[(\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[2]{a^2 b})^2\right]^{\frac{1}{3}}$

506. Järjesta suuruse järgi:

- 1) $52^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$; $52^{-\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

$$2) 3^{\frac{1}{3}}; (-3)^{\frac{1}{3}}; \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}; \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}; 3^{-\frac{1}{3}}; (-3)^{-\frac{1}{3}}; \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}; \left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$3) 10^2; 10^{\frac{1}{2}}; 10^{-2}; 10^{-\frac{1}{2}}; 10^0; 10^3; 10^{-3}; 10^{\frac{1}{3}}; 10^{-\frac{1}{3}}.$$

507. Kirjuta järgmised murrud kujul, kus nimetaja on ratsionaalne:

$$1) \frac{1}{3^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 y}}$$

$$4) \frac{2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}}$$

$$2) \frac{1}{1 - \sqrt{14}}$$

$$5) \frac{xy}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$6) \frac{(2-a)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - (2-a)^{\frac{1}{2}}}$$

508. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1) 3\sqrt{x} - 75 = 0$$

$$4) \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x + 1} = 0$$

$$2) (2-x)^{\frac{1}{2}} - 7 = 0$$

$$5) (x+2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$3) (2y-1)^{\frac{1}{2}} - y = 0$$

509. Sarika pikkus maja seina kohalt katuse harjani on 3,8 m ja katuse kaldenurk on 35° . Leia aampalgi pikkus.

510. On antud lõik a ja nurk α . Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik:

$$1) a \sin \alpha;$$

$$2) a \cos \alpha.$$

511. Äratuskella kõlisti osuti on 6 peal. Kui suure nurga võrra peab seda osutit pöörama, et äratuskell kõliseks kell 8, kui kõlisti osutit saab pöörata tunniosuti pöörlemisele vastupidises suunas?

512. Hammasrattal on 72 hammast. Kui suure nurga võrra pöörduv hammasratas, kui ta pöörduv:

1) kellaosuti pöörlemisele vastupidises suunas 42; 300 hamba võrra?

2) kellaosuti pöörlemise suunas 24; 144 hamba võrra?

513. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49^\circ + \sin (-49^\circ) + \cos 25^\circ - \cos (-25^\circ)$

2) $\cos 33^\circ - \cos 17^\circ - \cos (-33^\circ) - \sin 40^\circ + \cos (-17^\circ) - \sin (-40^\circ)$

3) $\sin (\pi - 1) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

4) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \cos (\pi - \alpha)$

514. 1) Arvuta maakera ruumala, kui maakera raadius on 6371 km. Kui pikk oleks sama suure ruumalaga kuubi serv?

2) Kui pika tee läbib Maa aastas, tehes täistiiru ümber Päikeses? (Maa kaugus Päikesest on 149 700 000 km.)

3) Rauast kuup kaaluga 82,7 kg on asetatud rõhtsale lauale. Kui suurt rõhku avaldab kuup lauale? (Raua erikaal on $7,8 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.)

4) Vasktraadi kera kaalub 24,67 kG. Mitu meetrit traati on keras, kui traadi läbimõõt on 1,5 mm? (Vase erikaal on $8,9 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.)

515. Lahenda arvutuslükati abil järgmised ülesanded:

1) $0,722 \cdot 268$

$14,9 : 0,066$

$0,0304 : 9,23$

$3,14 \cdot 2030$

3) $0,0288^2$

137^3

8530^2

$0,046^3$

2) $56,6 \cdot 125,5$

$6200 : 19,8$

$0,87 : 52,3$

$942 : 40,7$

4) $\sqrt[3]{108000}$

$\sqrt[3]{0,01}$

$\sqrt[3]{675000}$

$\sqrt[3]{0,00007}$

5) $\sqrt[4]{28000}; \sqrt[6]{0,003}$

6) Leia x :

a) $x : 232 = 15,6 : 8,7; 59,3 : x = 692 : 7,4.$

b) $19,9 : 0,79 = x : 36,5; 0,0405 : 0,97 = 16,4 : x.$

7) $\frac{31,7 \cdot 9,25}{17,2}$

$\frac{91,5 \cdot 107 \cdot 3,90}{16,4 \cdot 0,54 \cdot 522}$

$\frac{0,281 \cdot 4,76 \cdot 18,9}{11,8 \cdot 0,647}$

$\frac{5200 \cdot 249}{3140 \cdot 178}$

8) Silikaatkivi standardmõõtmel on $6 \times 12 \times 25$ cm. Arvuta ühe kivi kaal, kui silikaatkivi erikaal on $2,1 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

9) Ristkülik, mille mõõtmed on 87,5 m ja 17,2 m, tuleb jaotada sirgetega, mis on paralleelsed lühema küljega, osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu 7 : 12 : 17. Leia osade pindalad ja mõõtmed.

10) Toa põranda mõõtmed on 4,26 m ja 3,72 m. Mitu 15 cm laiust ja 3,5 m pikkust lauda kulub selle põranda katmiseks, kui arvestada, et laudade parajaks saagimisel läheb kaduma 6% kogu materjalist.

11) Risttahuka mõõtmed on 56,7 cm, 67,5 cm ja 31,6 cm. Arvuta risttahuka tahkude diagonaalide pikkused.

12) Lahenda võrrandid:

$$a) 2,1x^2 - 4,7x - 5,85 = 0$$

$$b) 0,2x^2 + 1,82x - 7,87 = 0$$

516. Kumb on suurem, kas $\sin 1$ või $\sin 1^\circ$?

517. Missugustel x väärtustel funktsioon

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

on määratud?

518. Leia niisugused x väärtused, mille puhul avaldise $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$ väärtus on suurem kui 1?

519. Lahenda võrratus:

$$\tan \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$$

520. Lahenda võrrandid:

$$1) \sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$$

$$2) \sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$$

$$3) \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$$

$$4) x + x^{\frac{1}{2}} = 6$$

521. Lihtsusta avaldised:

$$1) \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} + \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$$

$$2) \left[a + (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} + \left[a - (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

522. Arvuta avaldise $\sin \alpha \cos \alpha$ väärtus, teades, et α ja β on täisnurkse kolmnurga teravnurgad ja et $\sin \alpha + \sin \beta = 1,4$.

523. Arvuta murru $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ väärtus, teades, et $\tan \alpha = 2,7$.

524. Kas on olemas niisugune nurk, mille puhul

1) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ja $\cos \alpha = \frac{1}{2}$?

2) $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$?

525. Arvuta $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\cot \alpha$, teades, et $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ja $\sin \alpha < 0$.

526. Arvuta kolmnurga nurga α funktsioonide väärtused, teades, et $\cos \alpha = -0,4$.

Sisukord.

I. Funktsionaalne sõltuvus. *O. Prints.*

§ 1. Jäävad ja muutuvad suurused	3
§ 2. Funktsionaalne sõltuvus	4
§ 3. Funktsiooni esitusviisid	6
§ 4. Joone võrrand	11
§ 5. Joone võrrandi näiteid	12
Kordamisülesandeid	15

II. Lineaarne funktsioon. *O. Prints.*

Lineaarne funktsiooni uurimine I.

§ 6. Lineaarne funktsioon ja tema põhiomadus	17
§ 7. Lineaarne funktsiooni graafik	19
§ 8. Kasvav ja kahanev lineaarne funktsioon	20

Sirge võrrand

§ 9. Nürinurga tangens	22
§ 10. Tõusunurk ja tõus	23
§ 11. Algväärtus ja algordinaat	24
§ 12. Tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrand	25
§ 13. Koordinaatide alguspunkti läbiva sirge võrrand. Paralleelsed sirged	26
§ 14. Sirge üldvõrrand ja selle erikujud	27
§ 15. Sirge võrrand telglõikudes	30

Lineaarne funktsiooni uurimine II.

§ 16. Lineaarne funktsiooni nullkoht	32
§ 17. Lineaarne funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond	34

Lineaarne võrratus.

§ 18. Lineaarne võrratuse lahendamisest	36
§ 19. Võrratuse omadused	36

§ 20. Lineaarse võrratuse lahendamine	38
§ 21. Lineaarse võrratusesüsteemi lahendamine	40
§ 22. Lineaarse võrratusesüsteemi graafiline lahendamine	41

Aritmeetiline progressioon.

§ 23. Aritmeetilise progressiooni mõiste	43
§ 24. Aritmeetilisele progressioonile vastava lineaarse funktsiooni leidmine	45
§ 25. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem	46
§ 26. Aritmeetilise progressiooni omadus	47
§ 27. Aritmeetilise progressiooni summa valem	49

Lineaarne interpolatsioon.

§ 28. Lineaarse interpolatsiooni valem	52
§ 29. Lineaarse interpolatsiooni rakendamine	54
§ 30. Lineaarse võrrandisüsteemi uurimine	56
Kordamisülesandeid	60

III. Ruutfunktsioon. O. Prints.

§ 31. Ruutfunktsioon ja tema graafik	64
§ 32. Parabooli definitsioon ja joonestamine	64
§ 33. Parabooli võrrand	65
§ 34. Parabooli haripunkt	68
§ 35. Ruutfunktsiooni ekstreemumkohad	69
§ 36. Ruutfunktsiooni kasvamine ja kahanemine	70
§ 37. Ruutfunktsiooni nullkohad	72
§ 38. Ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad	74
§ 39. Ruutvõrratuse lahendamine	76
Kordamisülesandeid	77

IV. Tehted astmete ja juurtega. Astmefunktsioonid. A. Vihman.

§ 40. Tehted astmetega naturaalarvuliste astendajate korral	80
§ 41. Astmefunktsioonid	86
§ 42. Arvu kuupjuur	90
§ 43. Kuupide tabeli kasutamisest	90
§ 44. Kuubi ja kuupjuure leidmine lükati abil	91
§ 45. Ligikaudse arvu kuubi vea arvutamine	102
§ 46. Ligikaudse arvu kuupjuure vea arvutamine	103
§ 47. Arvu n -es juur	105
§ 48. Juure leidmine proovimise teel	107
§ 49. Irratsionaalarvud	108
§ 50. Reaalarvud	113
§ 51. Juurte omadus	114
§ 52. Teoreemid tehetest juurtega	116

§ 53. Juuravaldiste teisendamisi	130
§ 54. Juurvõrrandite lahendamise näiteid	137
§ 55. Astendaja 0	142
§ 56. Negatiivne astendaja	143
§ 57. Funktsioonid $y=x^{-1}$ ja $y=x^{-2}$	147
§ 58. Murrulise astendajaga aste	149
Kordamisülesandeid	152

V. Geomeetrilised teisendused tasapinnal. E. Etverk.

§ 59. Geomeetrilise teisenduse mõiste	160
§ 60. Teljeline sümmeetria	167
§ 61. Rööplüke	176
§ 62. Tsentraalsümmeetria	181
§ 63. Pööre	187
§ 64. Liikumine tasapinnal	194
§ 65. Liikumisteisenduste kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel	195
§ 66. Homoteetsus tasapinnal	199
§ 67. Homoteetsuse kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel	202
Kordamisküsimusi	204

VI. Trigonomeetrilised funktsioonid. A. Vihman.

§ 68. Teravnurga ühe trigonomeetrilise funktsiooni järgi sama nurga teiste funktsioonide leidmine	206
§ 69. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed	207
§ 70. Negatiivne nurk	216
§ 71. Nurk, mille absoluutväärtus ületab täispöörde	218
§ 72. Nurga mõõduühikud	223
§ 73. Mistahes suurusega nurga trigonomeetrilised funktsioonid	226
§ 74. Põhiseoste kehtivus mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide puhul	228
§ 75. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused lõikude pikkustena	230
§ 76. Taandamisvalemid	233
§ 77. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud	239
§ 78. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus	242
Ülesandeid IX klassi kursuse kordamiseks	245

Этverk Элмар Германович
Принитс Олаф Иоханнесович
Вихман Арнольд Юрьевич
МАТЕМАТИКА ДЛЯ IX КЛАССА
Издание второе
На эстонском языке
Обложка Г. Пант
Издательство «Валгус»
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Kunstiline toimetaja H. Keigo
Tehniline toimetaja I. Vahre
Korrektorid E. Bitter ja M. Pall

Ladumisele antud 24. I 1966. Trükkimisele antud
22. IV 1966. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 16. Ar-
vestuspoognaid 11,23. Trükiarv 9500. Tellimise
nr. 595. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu,
Olikooli 17/19. I

Trükipaber nr. 3 — M. Gorki nim. Paberivabrik
nr. 1 — Leningrad

Hind 22 kop.

22 kop.

A
27667

...7839220

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00783922 0