Ea 45/53

K. RATASSEPP

ALGEBRA ÕPIK

KESKKOOLI X KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"
TALLINN 1945

A
APM
2/25170

A - 91330

K. RATASSEPP

ALGEBRA ÕPIK

KESKKOOLI X KLASSILE

2849

RK „PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1945

ARHIIVKOGU

Bibliotheca
Universitatis
Tartuensis
(1945: 0506)

25170

Peatükk I.

Logaritm.

§ 1. Arvu kümnendlogaritm.

Mõnede tehete teostamist on võimalik tunduvalt kergendada, kui arvud, millega tehteid tuleb teha, kirjutame ühe ja sama arvu astmetena. Teades näiteks, et

$$32 = 2^5, \qquad 512 = 2^9 \quad \text{ja} \quad 16384 = 2^{14},$$

võime korrutise $32 \cdot 512$ arvutada järgmiselt:

$$32 \cdot 512 = 2^5 \cdot 2^9 = 2^{14} = 16384.$$

Arvu kirjutamine astmena kergendab eriti juurimise teostamist. Sel viisil leiame näiteks, et

$$\sqrt[7]{16384} = \sqrt[7]{2^{14}} = 2^2 = 4.$$

Samuti on võimalik kergendada jagamise ja astendamise teostamist.

Et ülalkirjeldatud arvutamise kergendamise võte oleks alati rakendatav, peame oskama iga arvu kirjutada ühe ja sama arvu astmena. Valime selleks arvuks meie arvusüsteemi aluse, s. o. arvu 10. Seega peame oskama leida iga arvu a puhul niisugust astendajat x, et

$$10^x = a.$$

Niisugust arvu x nimetatakse arvu a k ü m n e n d l o g a r i t m i k s ehk logaritmiks alusel 10 ja tähistatakse sümboliga $\log a$; seega

arvu kümnendlogaritm on arv, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Selle definitsiooni järgi

$$\log a = x, \quad \text{kui} \quad 10^x = a.$$

Elimineerides kahest viimasest võrdusest arvu x, saame võrduse

$$10^{\log a} = a;$$

elimineerides sealtsamast arvu a, saame võrduse

$$\log 10^x = x.$$

Mõlemad saadud võrdused väljendavad kümnendlogaritmi definitsiooni. Viimast neist on sobiv kasutada mõnede arvude kümnendlogaritmide leidmisel. Nii leiame näiteks, et

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3;$$
$$\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2;$$

$$\log \sqrt[3]{0{,}1} = \log \sqrt[3]{10^{-1}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{3}.$$

Arvu logaritmi leidmist nimetatakse selle arvu logaritmimiseks. Arvu, mida logaritmitakse, nimetatakse logaritmitavaks.

Järgnevatel lehekülgedel tegeleme ainult kümnendlogaritmidega, seepärast nimetame neid edaspidi lihtsalt logaritmideks.

Ülesanded.

1. Kujutada järgmised arvud kümne astmetena ja anda nende arvude logaritmid:

1. 100	2. 1000	3. 10000	4. 1000000
10	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{10000}$
0,1	0,001	0,0001	0,0000001
5. $\sqrt{10}$	6. $\sqrt[3]{10}$	7. $\sqrt[5]{10}$	8. $\sqrt[10]{10}$
$\sqrt{10^3}$	$\sqrt[3]{10^2}$	$\sqrt[5]{10^3}$	$\sqrt{10^n}$
$\sqrt{0{,}1}$	$\sqrt[3]{0{,}001}$	$\sqrt[5]{0{,}001}$	$\sqrt[4]{0{,}0001}$

2. Leida järgmiste avaldiste väärtused ja anda nende väärtuste logaritmid:

1.	2.	3.
10^4	$10^{\frac{1}{2}}$	$10^{-\frac{1}{2}}$
10^6	$10^{\frac{1}{3}}$	$10^{-\frac{1}{3}}$
10^{-2}	$10^{1\frac{1}{2}}$	$10^{-\frac{2}{3}}$
10^{-4}	$10^{\frac{1}{4}}$	$10^{-1\frac{1}{3}}$
10^0	$10^{2\frac{1}{4}}$	$10^{-2\frac{1}{2}}$

3. Kasutades ruut- ja kuupjuurte tabeleid, leida arvud, mille logaritmid on:

1.	2.	3.	4.
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$

4. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1.	2.	3.
$10^{\log 100}$	$10^{-\log 3}$	$10^{\log 6} : 10^{\log 2}$
$10^{\log 1}$	$10^{-\log 5}$	$10^{\log 20} : 10^{\log 4}$
$10^{\log 2}$	$10^{-\log 0{,}25}$	$(10^{\log 4})^2$
$10^{\log 0{,}6}$	$10^{\log 3} \cdot 10^{\log 4}$	$(10^{\log 2})^3$
$10^{\log \frac{1}{4}}$	$10^{\log 2} \cdot 10^{\log 5}$	$\sqrt{10^{\log 36}}$

§ 2. Logaritmi omadusi.

Logaritmi omaduste selgitamiseks näitame kõigepealt, et

kui arv a asetseb kahe arvu p ja q vahel, siis tema logaritm asetseb arvude p ja q logaritmide vahel,

s. o. kui

$$p < a < q,$$

siis ka

$$\log p < \log a < \log q.$$

Kasutades arvude p, a ja q avaldamiseks võrdusi

$$p = 10^{\log p} \qquad a = 10^{\log a} \qquad q = 10^{\log q},$$

saame

$$10^{\log p} < 10^{\log a} < 10^{\log q}.$$

Võttes aksioomina tõde, et ühe ja sama aluse 10 puhul suuremale astmele vastab ka suurem astendaja, saame

$$\log p < \log a < \log q,$$

m. o. t. t.

Eelmisest järeldub, et

arvu kasvamisel kasvab ka tema logaritm,

s. t. kui on tegemist arvudega $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ja seejuures

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n,$$

siis eelneva põhjal

$$\log a_1 < \log a_2 < \log a_3 < \ldots < \log a_n.$$

Andes nüüd võrduses

$$\log 10^x = x$$

suurusele x väärtused

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots$$

leiame, et arvude

$$10^0 \quad 10^1 \quad 10^2 \quad 10^3 \ldots$$

ehk arvude

$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \ldots$$

logaritmid on vastavalt

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots$$

Sellest näeme kõigepealt, et

arvu 1 logaritm on 0.

Et iga arv, mis on suurem kui 1, kas asetseb reas 1, 10, 100 ... või peitub selle rea kahe arvu vahel, siis iga nii-

suguse arvu logaritm kas asetseb reas 0, 1, 2, ... või peitub selle rea kahe arvu vahel. Sellest järeldame, et

arvust 1 suuremate arvude logaritmid on positiivsed.

Andes samas võrduses suurusele x väärtused

0 —1 —2 —3 . . .

leiame, et arvude

10^0 10^{-1} 10^{-2} 10^{-3} . . .

ehk arvude

1 0,1 0,01 0,001 . . .

logaritmid on vastavalt

0 —1 —2 —3 . . .

Et iga arv, mis on suurem kui 0, kuid väiksem kui 1, kas asetseb reas 1, 0,1, 0,01, ... või peitub selle rea kahe arvu vahel, siis iga niisuguse arvu logaritm kas asetseb reas 0, —1, —2, ... või peitub viimase rea kahe arvu vahel. Sellest järeldame, et

arvust 1 väiksemate positiivsete arvude logaritmid on negatiivsed.

Kokkuvõttes võime öelda, et

positiivse arvu logaritm on kas negatiivne, null või positiivne, vastavalt sellele, kas see positiivne arv on väiksem kui 1, võrdne 1-ga või on suurem kui 1.

Eelnevast selgub ka, et astendaja x igal väärtusel on 10^x positiivne; seega ei leidu niisugust x väärtust, mille puhul 10^x oleks negatiivne; järelikult

negatiivsel arvul ei ole logaritmi.

Ülesanded.

5. Arvutada järgmiste astmete väärtused:

1.	2.	3.	4.	5.
$(\frac{1}{2})^2$	$0{,}2^{-2}$	$0{,}16^{\frac{1}{2}}$	1^3	3^{-2}
$(\frac{1}{2})^3$	$0{,}2^{-1}$	$0{,}16^{\frac{1}{4}}$	1^4	3^{-1}
$(\frac{1}{2})^4$	$0{,}2^0$	$0{,}16^{\frac{3}{4}}$	1^5	3^2

ja järeldada, missuguste positiivsete astendatavate puhul on kehtiv lause, et suuremale astmele vastab suurem astendaja.

6. Leida, missugused järgmistest logaritmidest on positiivsed ja missugused on negatiivsed:

$\log 2$, $\log \frac{1}{3}$, $\log 0{,}04$, $\log 600$.

7. Leida, missuguse kahe järjestikuse täisarvu vahel asetseb igaüks järgmistest logaritmidest:

$\log 5$, $\log 20$, $\log 5300$,
$\log 0{,}3$, $\log 0{,}007$, $\log \frac{1}{16}$.

§ 3. Logaritmi graafik.

Et kujutada graafiliselt $\log a$ muutumist arvu a muutumisel, tuleks anda a-le rida väärtusi, arvutada neile vastavad $\log a$ väärtused, kujutada saadud a ja $\log a$ väärtuspaarid punktidena ja ühendada need punktid kõvera abil. Etteantud arvu logaritmi arvutamine nõuab aga, nagu näeme järgmises paragrahvis, tunduvat aega ja vaeva. Et kiiremini eesmärgile jõuda, selleks kasutame vastupidist teed: anname ette mitte a väärtused, vaid mõned lihtsad $\log a$ väärtused, nagu

$$-1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4},\ 0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ 1,$$

ja arvutame neile logaritmi väärtustele vastavad a väärtused. Viimaste arvutamine toimub järgmisel viisil:

kui $\log a = -1$, siis $a = 10^{-1} = 0{,}1$;

seega $\log 0{,}1 = -1$;

kui $\log a = -\frac{1}{2}$, siis $a = 10^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}32$;

seega $\log 0{,}32 \approx -\frac{1}{2} = -0{,}5$;

kui $\log a = -\frac{1}{4}$, siis $a = 10^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{0{,}1}} \approx 0{,}56$;

seega $\log 0{,}56 \approx -\frac{1}{4} = -0{,}25$;

. . . . . .

Niiviisi arvutust jätkates saame koostada järgmise tabeli:

a	0,1	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
$\log a$	—1	—0,5	—0,25	0	0,25	0,50	0,75	1

Saadud tabeli põhjal joonestame logaritmi graafiku (joonis 1), võttes arvu a kujutamisel ühikuks 10 mm ja $\log a$ kujutamisel ühikuks 100 mm.

Joonestatud graafikust saame leida 0,1 ja 10 vahel asetsevate arvude logaritme. Näiteks on

$$\log 2 \approx 0{,}30 \qquad \log 5 \approx 0{,}70 \qquad \log 9 \approx 0{,}95.$$

Seda graafikut saame kasutada ka vastupidiseks ülesandeks: määrata —1 ja +1 vahel asetsevatele logaritmidele vastavaid arve.
Näiteks leiame, et

$$\text{kui } \log a = 0{,}54, \text{ siis } a \approx 3{,}5.$$

Graafikust leitavad $\log a$ ja a väärtused on l i g i k a u d s e d. Suurema täpsuse saavutamiseks, kui seda võimaldab joonis, tuleb kasutada numbrilisi võtteid.

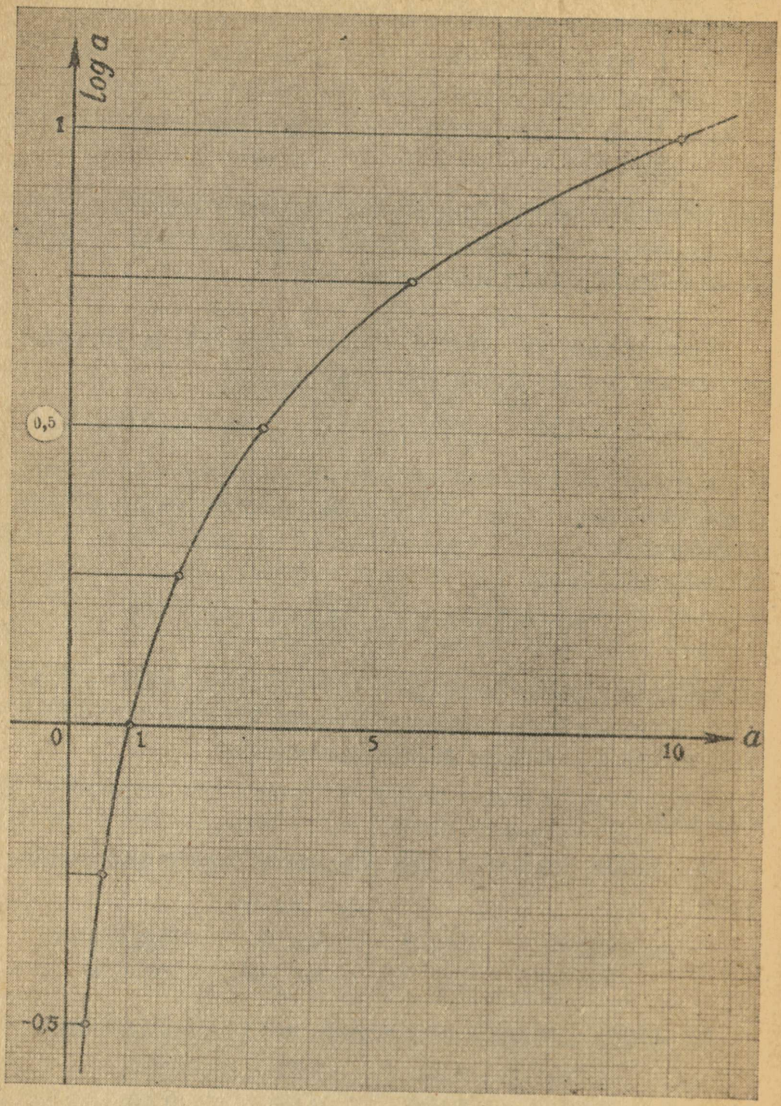
Ülesanded.

8. Leida joonise 1 abil järgmiste logaritmide väärtused:

log 3, log 4, log 5, log 8,
log 0,4, log 0,5, log 0,7, log 0,8.

9. Leida joonise 1 abil arvud, mille logaritmid on:

0,14, 0,20, 0,54, 0,85,
—0,10, —0,20, —0,25, —0,40.



Joonis 1.

§ 4. Logaritmi arvutamise näide.

Olgu antud mingi arv, näiteks arv 3. Leiame selle arvu logaritmi arvutamise teel. Tähistame otsitava tähega x. Logaritmi definitsiooni kohaselt arv x peab rahuldama nõuet

$$10^x = 3.$$

Tähistame otsitava logaritmi täisosa tähega α, kümnendikud tähega β, sajandikud tähega γ jne.; siis astendaja x esineb kujul

$$x = \alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots$$

Nõude kohaselt

$$10^{\alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots} = 3.$$

Murdosa kohad α, β, γ, ... määrame üksteise järel proovimise teel. Et 10^0 ehk 1 on väiksem kui 3, seevastu 10^1 ehk 10 on aga juba suurem kui 3, siis α peab olema 0. Et leida arvu β, selleks asendame α leitud väärtusega; saame

$$10^{\frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots} = 3.$$

Astendame viimase võrduse kummagi poole 10-ga; see annab

$$10^{\beta + \frac{\gamma}{10} + \cdots} = 59049.$$

Et $10^4 = 10000$ on väiksem kui 59049, seevastu $10^5 = 100000$ on aga juba suurem kui 59049, siis β peab olema 4. Samal viisil, nagu praegu leidsime β, leiame edasi γ. Selleks asendame β leitud väärtusega ja jagame saadud võrduse kummagi poole arvuga 10^4; saame

$$10^{\frac{\gamma}{10} + \cdots} = 5{,}9049.$$

Kui kumbki võrduse pool astendada 10-ga, siis saame

$$10^{\gamma+\cdots} = 51538629,\ldots$$

kus kohad koma järel on jäetud kirjutamata.

Et 10^7 on väiksem kui $51538629,\ldots$, seevastu 10^8 aga juba suurem sellest arvust, siis $\gamma = 7$.

Seega arvu x esimesed kaks kohta on leitud ja $x = 0{,}47\ldots$, kus punktid asendavad veel tundmatuid kohti.

Asendades x võrduses $10^x = 3$ tema väärtusega, saame

$$10^{0{,}47\cdots} = 3.$$

Seega on

$$\log 3 = 0{,}47\ldots$$

Põhimõtteliselt võiks, sama teed edasi minnes, leida ka arvu x järgnevad kohad. Raskendavaks asjaoluks on vaid see, et tuleb arvutada arvude kümnendaid astmeid. Töö on aga õige lihtne, kui on kasutada arvude kümnendate astmete tabel.

Tekib küsimus, kas kümnendmurd

$$\alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots$$

on ratsionaalne või irratsionaalne arv. Oletame esimest. Kui x on ratsionaalne arv, siis võime teda kirjutada ikka hariliku murruna; omandagu ta peale võimalikku taandamist kuju $\frac{m}{n}$. Siis oleks

$$10^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Astendades selle võrduse kummagi poole arvuga n, saame

$$10^m = 3^n.$$

Vasakpoolne arv koosneb vaid tegureist 2 ja 5, parempoolne arv tegureist 3. Niisuguse kahe arvu võrdumine on võimatu. Järelikult ei saa olla murdu $\frac{m}{n}$, mille puhul oleks

$$10^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Seega kümnendmurd

$$a + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \dots$$

ei saa taanduda harilikuks murruks, teiste sõnadega, log 3 on irratsionaalne arv.

Ülesanded.

10. Arvutada log 2 ligikaudne väärtus kolmekohalise murdosaga, teades, et $1{,}024^{10} = 1{,}268$ ja $1{,}268^{10} = 10{,}72$.

§ 5. Logaritmi kirjutusviis.

Täisarvuliste astendajatega kümne astmeil on ka täisarvulised logaritmid;

näiteks

$$\log 10000 = \log 10^4 = 4,$$
$$\log 0{,}0001 = \log 10^{-4} = -4.$$

Võib tõestada, et kõigi teiste ratsionaalsete arvude logaritmid on irratsionaalsed. Niisugused logaritmid avalduvad lõpmatute kümnendmurdudena, mis ei taandu harilikeks murdudeks. Nii on

$$\log 3 = 0{,}47712 \dots,$$
$$\log 0{,}041 = -1{,}38722 \dots$$

Logaritmid antakse ligikaudsetena, tavaliselt kas 4, 5 või 7 kohaga. Enamik tegelikkuse poolt seatud ülesandeid ei vaja lahendamiseks enam kui neljakohalisi logaritme. Me kirjutame neid kujul

$$\log 3 = 0{,}4771,$$
$$\log 0{,}041 = -1{,}3872,$$

pidades meeles, et võrdusmärki siin üldiselt ikka tuleb mõista ligikaudse võrdumise sümbolina.

Logaritm koosneb täisosast ja murdosast; näiteks on log 473 = 2,6749; siin on logaritmi täisosa 2 ja murdosa 0,6749; edasi log 0,0854 = —1,0685; siin on täisosa —1 ja murdosa —0,0685.

On otstarbekohane logaritme kirjutada nii, et nende murdosa igal juhul on positiivne. Kui logaritm on negatiivne, siis liidame selle murdosaga arvu 1 ja et logaritmi väärtus ei muutuks, lahutame tema täisosast samuti arvu 1.

Näidis.

$$\log 0{,}041 = -1{,}3872 = -1 + (-0{,}3872) =$$
$$= (-1 - 1) + (1 - 0{,}3872) =$$
$$= -2 + 0{,}6128.$$

Lühiduse otstarbel kirjutame tulemuse nii:

$$\log 0{,}041 = \bar{2}{,}6128.$$

Seda kirjutist loeme järgmiselt:

log 0,041 on kaks miinusega, koma kuuskümmend üks kakskümmend kaheksa.

Ülesanded.

11. Teisendada järgmised negatiivsed arvud nii, et nende murdosad oleksid positiivsed:

1.	2.	3.	4.
—0,6	—0,8	—1,2	—1,7
—1,0	—2,65	—3,12	—1,98
—2,046	—3,557	—4,000	—3,0021

12. Teisendada järgmised negatiivsed arvud nii, et nende murdosad oleksid negatiivsed:

1.	2.	3.	4.
$\bar{1}$,3	$\bar{1}$,8	$\bar{2}$,4	$\bar{2}$,9
$\bar{2}$,73	$\bar{3}$,82	$\bar{1}$,301	$\bar{1}$,477
$\bar{3}$,000	$\bar{2}$,903	$\bar{3}$,8062	$\bar{4}$,6911

13. Arvutada järgmised summad:

$\bar{2},1 + 1,7$ $\quad \bar{1},5 + 3,2$ $\quad \bar{1},2 + \bar{2},5$

$\bar{2},7 + 1,8$ $\quad \bar{1},7 + \bar{1},4$ $\quad 3,8 + \bar{2},3$

14. Kirjutada järgmised vahed positiivse murdosaga arvudena:

$2,8 - 3,5$ $\quad 0,7 - 2,4$ $\quad 1,2 - 1,7$

$\bar{2},5 - 0,8$ $\quad \bar{2},6 - 1,2$ $\quad \bar{3},4 - 1,9$

$5,4 - \bar{1},2$ $\quad 0,5 - \bar{1},6$ $\quad \bar{2},3 - \bar{1},8$

15. Kirjutada järgmised korrutised positiivse murdosaga arvudena:

$3 \cdot \bar{1},2$ $\quad 4 \cdot \bar{1},4$ $\quad 2 \cdot \bar{2},9$ $\quad 5 \cdot \bar{1},7$

$10 \cdot \bar{1},3$ $\quad 10 \cdot \bar{2},4$ $\quad 12 \cdot \bar{1},6$ $\quad 15 \cdot \bar{1},8$

16. Kirjutada järgmised jagatised positiivse murdosaga arvudena:

$\bar{2},8 : 2$ $\quad \bar{4},7 : 2$ $\quad \bar{3},48 : 3$ $\quad \bar{1},4384 : 2$

$\bar{1},4 : 2$ $\quad \bar{3},6 : 2$ $\quad \bar{2},53 : 3$ $\quad \bar{2},2668 : 3$

$\bar{3},6 : 4$ $\quad \bar{1},6 : 5$ $\quad \bar{4},24 : 10$ $\quad \bar{1},2291 : 9$

§ 6. Logaritmi täisosa määramine.

Arvu logaritmi täisosa määramisel eeldame, et negatiivsed logaritmid on ikka kirjutatud niisugusel kujul, et nende murdosad on p o s i t i i v s e d. Tõestame, et siis on kehtiv järgmine teoreem:

Arvu a korrutamisel arvuga 10^m, kus m on täisarv, jääb arvu logaritmi murdosa endiseks, täisosa aga muutub arvu m absoluutväärtuse võrra suuremaks või väiksemaks, vastavalt sellele, kas m on positiivne või negatiivne.

Tõestuseks korrutame võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

kummagi poole arvuga 10^m ; saame

$$10^m \cdot a = 10^m \cdot 10^{\log a}$$

ehk

$$10^m \cdot a = 10^{m + \log a}.$$

Logaritmi definitsiooni järgi saame viimasest võrdusest, et

$$\log (10^m \cdot a) = m + \log a;$$

sellest nähtub, et arvu $10^m \cdot a$ logaritm erineb arvu a logaritmist täisarvu m võrra; seetõttu arvu $10^m \cdot a$ ja arvu a logaritmide murdosad on samad.

Teades, et

$$\log 3 = 0{,}4771,$$

võime eespool-tõestatud teoreemi põhjal öelda, et

$\log 30 = 1{,}4771$, $\log 300 = 2{,}4771$, $\log 30000 = 4{,}4771$,
$\log 0{,}3 = \bar{1}{,}4771$, $\log 0{,}03 = \bar{2}{,}4771$, $\log 0{,}0003 = \bar{4}{,}4771$.

Neist näidetest nähtub, et logaritmi täisosa kohta on kehtivad järgmised reeglid:

1. **Arvudel, mis on suuremad kui 1, on logaritmi täisosa ühe võrra väiksem selle arvu täisosa numbrite arvust.**

2. **Kümnendmurdudel, mis on väiksemad kui 1, on logaritmi täisosa negatiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub nullide arvuga selle arvu alguses (kaasa arvatud ka ühelisi tähistav 0).**

Nende reeglite põhjendamiseks paneme tähele, et kõik ühekohalise täisosaga arvud asetsevad 1 ja 10 vahel; järe-

likult nende arvude logaritmid asetsevad 0 ja 1 vahel; seega on nende arvude logaritmide täisosa 0. Nii näiteks on log 7,85 = 0,8949.

Seega on ülalantud reegel ühekohalise täisosaga arvude kohta õige. Kuid varemini tõestatud teoreemi abil saame nüüd järeldada, et reegel on kehtiv iga arvu kohta; tõepoolest, iga n-kohalise täisosaga arvu saab sama numbritega kirjutatud ühekohalise täisosaga arvust, kui seda korrutada arvuga 10^{n-1}. Selle korrutamise tagajärjel logaritmi täisosa, mis enne oli 0, saab võrdseks arvuga $n - 1$, mis on kokkukõlas ülalantud reegliga. Näiteks arvu 785 saame arvust 7,85 selle korrutamisel arvuga 10^{3-1} ehk 10^2. Et log 7,85 täisosa on 0, siis log 785 täisosa peab olema 3 — 1 ehk 2.

Korrutades ühekohalise täisosaga arvu teguriga 10^{-n}, saame arvu, mille kirjutis algab n nulliga. Sellel korrutamisel arvu logaritmi täisosa muutub n võrra väiksemaks. Et enne korrutamist arvu logaritmi täisosa oli 0, siis peale korrutamist on see $-n$. Seega on ülalantud reegel õige ka 1-st väiksemate arvude puhul.

Ülaltoodust järeldub, et arvude 1 ja 10 vahel asetsevate arvude logaritmide tundmisest piisab, et saada kõigi teiste arvude logaritme. Kui näiteks on teada, et

$$\log 5{,}27 = 0{,}7218,$$

siis saame kohe log 52,7, log 527, log 5270 jne., samuti log 0,527, log 0,0527 jne.

Ülesanded.

17. Kui suured on järgmiste logaritmide täisosad?

1. log 19	2. log 82	3. log 345
log 7	log 5793	log 11
log 765,8	log 1,764	log 4739,48

18. Kui suured on järgmiste logaritmide täisosad?

1.	2.	3.
log 0,7	log 0,084	log 0,00076
log 0,0163	log 0,00357	log 0,9837
log 0,00002	log 0,0101	log 0,00400

§ 7. Logaritmide tabel.

Nagu allpool näeme, omavad logaritmid suurt väärtust arvutusabinõuna. Logaritmide kiireks ja hõlpsaks leidmiseks on koostatud logaritmide tabelid. Et logaritmi täisosa määramine ülaltoodud eeskirja järgi toimub vaevata, siis antakse logaritmide tabeleis ainult logaritmide murdosad. Juuresolevalt näeme väljalõiget neljakohaliste logaritmide tabelist:

Num	Log
...	....
478	6794
479	6803
480	6812
481	6821
482	6830
483	6839
484	6848
...	....

Esimese veeru pealkiri N u m on ladinakeelse sõna *numerus* lühend ja tähendab arvu. Tabeli kasutamist logaritmi leidmiseks antud arvu järgi ja arvu leidmiseks antud logaritmi järgi selgitavad järgmised 4 ülesannet.

Ü l e s a n n e 1. Leida arvu 4,83 logaritm.

L a h e n d u s. Eelmises paragrahvis antud reegli järgi on selle arvu logaritmi täisosa 0; tema murdosa on niisama suur, kui arvu 483 logaritmi murdosa. Et viimane on tabeli järgi 6839, siis

$$\log 4{,}83 = 0{,}6839.$$

Ülesanne 2. Leida arv, mille logaritm on $\bar{2},6830$.

Lahendus. Et antud logaritmi täisosa on -2, siis peab otsitav arv algama kahe nulliga. Neile nullidele järgnevad kohad on määratud logaritmi murdosaga 6830. Nagu tabelist selgub, vastab sellele logaritmi murdosale arv 482. Seega

$$\bar{2},6830 = \log 0,0482$$

ja otsitav arv on 0,0482.

Ülesanne 3. Leida arvu 4796 logaritm.

Lahendus. Selle arvu logaritmi täisosa on 3. Tema murdosa, mida tabelis ei leidu, määrame järgmiselt. Arvu 4790 logaritmi murdosa on 6803, arvu 4800 logaritmi murdosa on 6812; seega arvu kasvades 10 võrra kasvab logaritmi murdosa 9 viimase koha ühiku võrra. Lugedes arvu ja logaritmi juurdekasvud võrdelisteks, näeme, et arvu juurdekasvule 6 vastab logaritmi juurdekasv $\frac{6 \cdot 9}{10} = 5,4$ ehk ümmarguselt 5 viimase koha ühikut.

Seega arvu 4796 logaritmi murdosa on 6808 ja

$$\log 4796 = 3,6808.$$

Seda logaritmi leidmise võtet märgime kokkuvõtlikult järgmises skeemis:

$$\begin{array}{rr} \log 4790 = 3,6803 & \\ 6 \qquad\quad 5 & \\ \hline \log 4796 = 3,6808 & \end{array}$$

Ülesanne 4. Leida arv, mille logaritm on 1,6836.

Lahendus. Murdosale 6830 vastab arvude veerus 482 ehk 4820; murdosa kasvades 9 viimase koha ühiku võrra kasvab arv ise 10 võrra; lugedes logaritmi ja arvu

juurdekasvud võrdelisteks, näeme, et murdosa juurdekasvule 6 vastab arvu juurdekasv $\frac{6}{9}$. 10 ehk $\frac{20}{3}$ ehk ümmarguselt 7; seega on otsitava arvu numbrid 4827. Et otsitava arvu logaritmi täisosa on 1, siis arv ise on 48,27. Seda arvu leidmise võtet märgime kokkuvõtlikult järgmises skeemis:

$$\begin{array}{rr} 1{,}6830 = \log & 48{,}20 \\ 6 & 7 \\ \hline 1{,}6836 = \log & 48{,}27 \end{array}$$

Ülesanded.

19. Kirjutada järgmiste arvude logaritmid, määrates nende täisosa peast ja võttes nende murdosa tabelist:

1.	2.	3.	4.
19	23	37	65
74	79	86	98
130	280	450	890
274	338	641	973
497	521	763	888

20. Kasutades logaritmide tabelit, leida järgmiste sümbolite väärtused:

1.	2.	3.	4.
log 30	log 300	log 0,3	log 0,03
log 700	log 0,7	log 7000	log 0,007
log 86	log 8,6	log 860	log 0,0086
log 4,83	log 4830	log 0,483	log 0,000483
log 958	log 95800	log 9,58	log 0,00958

21. Leida logaritmide tabeli abil järgmiste arvude logaritmid:

1.	2.	3.	4.
0,87	0,34	0,575	0,982
1,4	5,7	3,79	8,46
60,8	47,3	59,7	78,2
0,05	0,067	0,0145	0,0653
0,0082	0,0195	0,00418	0,000781

22. Leida logaritmide tabeli abil arvud, mille logaritmid on:

1.	2.	3.
0,0719	0,2068	1,2856
2,6902	1,7993	3,9823
$\bar{1}$,4314	0,8751	$\bar{2}$,9685
3,2989	2,8007	0,5988
$\bar{2}$,1790	$\bar{1}$,2765	$\bar{1}$,7050

23. Kasutades logaritmide tabelit, määrata järgmiste arvude logaritmid:

1.	2.	3.
$1{,}3 \cdot 10^{4}$	$5{,}8 \cdot 10^{6}$	$9{,}7 \cdot 10^{8}$
$38{,}7 \cdot 10^{-2}$	$59{,}6 \cdot 10^{-4}$	$7{,}54 \cdot 10^{-6}$
$0{,}084 \cdot 10^{-3}$	$0{,}62 \cdot 10^{-5}$	$0{,}0092 \cdot 10^{-4}$

24. Leida logaritmide tabeli abil järgmiste arvude logaritmid:

1.	2.	3.	4.
2582	3094	6768	8346
35,74	56,65	580,8	7,344
7,833	0,06348	95720	0,6104
0,4560	1,745	0,6389	9,372
0,005962	0,0009834	837,5	748900

25. Leida tabeli abil arvud, mille logaritmid on:

1.	2.	3.
0,9157	1,9482	2,9892
2,7106	0,8290	1,9040
$\bar{1}$,6174	$\bar{2}$,6613	$\bar{1}$,6450
$\bar{3}$,3394	$\bar{1}$,4526	$\bar{2}$,0316
0,8735	$\bar{3}$,7908	$\bar{4}$,6080

26. Leida tabeli abil järgmiste arvude logaritmid, ümardades arvud enne neljakohalisteks:

1.	2.	3.
6538,76	903764	10,8975
72,7462	5,69728	0,010083
8,56956	1850063	0,00207486
0,0123456	0,0076543	9754682
0,00078935	0,0891347	34678,910

27. Allpool on antud rida logaritme. Leida tabeli abil logaritmitavad, ümardades logaritmid enne neljakohalisteks:

1.	2.	3.
1,17613	0,010574	$\bar{1}$,45667
2,39875	0,377592	$\bar{2}$,700937
3,04967	0,476150	$\bar{4}$,790164
0,48927	1,93456	0,39848
0,03584	3,72184	0,00478

28. Kujutada järgmised arvud 10 astmetena:

1.	2.	3.	4.
2,3	356	0,153	0,0247
4,8	7805	0,3472	0,00681
84	8325	0,4851	0,000734

29. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1.	2.	3.
$10^{0,3010}$	$10^{\bar{1},6021}$	$10^{-0,2941}$
$10^{0,7076}$	$10^{\bar{2},7380}$	$10^{-1,9191}$
$10^{1,4771}$	$10^{\bar{2},6940}$	$10^{-2,1923}$

30. 1. Kui suur on

$$\log\log 10 \qquad \log\log 2 \qquad \log\log 6310?$$

2. Leida arv x, teades, et $\log\log x = \bar{2},9210$.

3. Leida arv x, teades, et $\log\log x = \bar{1},6128$.

§ 8. Avaldiste logaritmimine.

Avaldise logaritmi avaldamist avaldises esinevate arvude logaritmide abil nimetatakse avaldise logaritmimiseks.

Logaritmimine toimub järgmise nelja teoreemi alusel.

1. **Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.**

Eespool (§6) tutvusime juba selle lause erijuhtumiga, kui üks tegureist on 10^m, kusjuures m on mingi täisarv. Seal nägime, et

$$\log (a \cdot 10^m) = \log a + m,$$

ehk

$$\log (a \cdot 10^m) = \log a + \log (10^m).$$

Siin tõestame selle lause üldjuhtumi:

T õ e s t u s. Olgu korrutises kaks tegurit a ja b ning olgu teada ka nende tegurite logaritmid. Logaritmi definitsiooni järgi kirjutame

$$a = 10^{\log a}$$

ja

$$b = 10^{\log b}.$$

Korrutades nende võrduste vasakuid pooli teineteisega ja paremaid pooli teineteisega, leiame, et

$$ab = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldame siit, et

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Saab tõestada, et väide on õige ka siis, kui tegureid on enam kui kaks. Olgu korrutises kolm tegurit a, b ja c.

Siis eelmise põhjal

$$\log (abc) = \log (ab \cdot c) = \log ab + \log c = \\ = \log a + \log b + \log c.$$

2. Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

Tõestus. Olgu jagatav a ja jagaja b. Et

$$a = 10^{\log a}$$

ja

$$b = 10^{\log b},$$

siis

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{\log a}}{10^{\log b}} = 10^{\log a - \log b}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Järeldus. Võttes jagatise logaritmi valemis $a = 1$ ja sellele vastavalt $\log a = 0$, leiame

$$\log \frac{1}{b} = -\log b,$$

millest nähtub, et

arvu ja tema pöördarvu logaritmid erinevad ainult märgilt.

3. Astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega.

Tõestus. Olgu astendatav a ja astendaja n. Astendades võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

kummagi poole arvuga n, saame

$$a^n = (10^{\log a})^n$$

ehk

$$a^n = 10^{n \log a}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub viimasest võrdusest, et

$$\log a^n = n \log a.$$

4. Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

Tõestus. Olgu juuritav a ja juurija n. Võttes võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

mõlemast poolest n-nda juure, saame

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{10^{\log a}}$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = 10^{\frac{\log a}{n}}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub viimasest võrdusest, et

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$$

Ülesanded.

31. Logaritmida järgmised avaldised:

1. pq pqr $3ab$ $2\pi r$ $9 \cdot 78\, mn$
2. $\frac{p}{q}$ $\frac{pq}{r}$ $\frac{ab}{cd}$ $\frac{5\, mn}{abc}$ $\frac{47\, uv}{8\, st}$

32. Logaritmida järgmised avaldised:

1. a^2 a^4 $(ab)^3$ ab^4 $a^3 : b^2$
2. $a^2 b^3$ $2\pi r^2$ $\frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\frac{p^2}{q^3 r^2}$
3. $\sqrt{a}$ $\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[5]{ab}$ $a\sqrt[3]{b}$ $\sqrt{a^3}$
4. $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^4}$ $\sqrt[4]{(ab)^5}$ $\sqrt[4]{ab^5}$ $\frac{a}{\sqrt{b}}$

§ 9. Logaritm arvutusvahendina.

Mitmekohaliste arvude korrutiste, jagatiste, astmete ja juurte otsene arvutamine on üldiselt tülikas töö. Seejuures tuleb sageli arvutada hulgaliselt ka niisuguseid kohti, mis tulemuses tuleb kustutada, sest et neil kohtadel ülesande loomu järgi ei ole mõtet.

Olgu näiteks arvutada $0{,}4726^5$. Otsene arvutamine annaks tulemuses 20 kohta koma järel; neist kohtadest säilitaksime vahest kõigest 4 ja kustutaksime kõik 16 ülejäänut.

Väga tunduvat aja ja vaeva kokkuhoidu võimaldab siin logaritmide kasutamine. Seda selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada $0{,}4726^5$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x; siis

$$x = 0{,}4726^5.$$

Siit

$$\log x = 5 \cdot \log 0{,}4726.$$

Leiame nüüd tabeli abil $\log 0{,}4726$, korrutame selle 5-ga ja otsime saadusele kui logaritmile vastava arvu x. Töö kujuneb nii:

$$\log 0{,}4726 = \bar{1}{,}6745,$$
$$5 \log 0{,}4726 = \bar{2}{,}3725,$$

seega

$$\log x = \bar{2}{,}3725$$

ja

$$x = 0{,}02358$$

ehk ümardatult

$$0{,}4726^5 = 0{,}0236.$$

Ülesanne 2. Arvutada jagatis

$$\frac{17{,}85^2 \cdot 9{,}357}{0{,}3814 \cdot 5{,}382^3}.$$

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Siis

$$\log x = 2 \cdot \log 17{,}85 + \log 9{,}357 -$$
$$- (\log 0{,}3814 + 3 \cdot \log 5{,}382).$$

Arvutused teostame korrastatult, käesoleval juhtumil näiteks järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{rrr} 2\cdot\log 17{,}85 & = 2\cdot 1{,}2516 = & 2{,}5032 \\ \log\ 9{,}357 & = & 0{,}9711 \\ \hline & & 3{,}4743 \\ \log\ 0{,}3814 & = & \bar{1}{,}5814 \\ 3\cdot\log\ 5{,}382 & = 3\cdot 0{,}7310 = & 2{,}1930 \\ \hline & & 1{,}7744 \\ \hline & \log x = & 1{,}6999 \\ & x = 50{,}11. & \end{array}$$

Ülesanne 3. Arvutada jagatis

$$\frac{\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c}},$$

kui $a = 0{,}07845$, $b = 10{,}68$ ja $c = 3984$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Avaldist logaritmides saame siis, et

$$\log x = \tfrac{1}{2}\log a + \tfrac{2}{3}\log b - \tfrac{1}{5}\log c.$$

Tähtede antud arvulistel väärtustel on seega

$$\log x = \tfrac{1}{2}\log 0{,}07845 + \tfrac{2}{3}\log 10{,}68 - \tfrac{1}{5}\log 3984.$$

Arvutustöö võib korraldada siin näiteks järgmise skeemi järgi:

$$\begin{array}{rrr} \frac{1}{2}\log 0{,}07845 & = \frac{1}{2}\cdot\bar{2}{,}8946 = & \bar{1}{,}4473 \\ \frac{2}{3}\log 10{,}68 & = \frac{2}{3}\cdot 1{,}0286 = & 0{,}6857 \\ \hline & & 0{,}1330 \\ \frac{1}{5}\log 3984 & = \frac{1}{5}\cdot 3{,}6003 = & 0{,}7201 \\ \hline & \log x = & \bar{1}{,}4129 \\ & x = 0{,}2588. & \end{array}$$

Ülesanne 4. Arvutada

$$\sqrt[5]{\frac{a^2 x^3}{(a^2+x)^4}},$$

kui $a = 14{,}9$ ja $x = 31{,}5$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega u. Avaldist u logaritmides saame:

$$\log u = \tfrac{1}{5}[2\log a + 3\log x - 4\log(a^2 + x)].$$

Asetades tähtede asemele nende väärtused, leiame, et

$$\log u = \tfrac{1}{5}[2\log 14{,}9 + 3\log 31{,}5 - 4\log(14{,}9^2 + 31{,}5)].$$

Arvutussammud on järgmised:

määrame püstsulgudes seisva avaldise esimese kahe liikme summa;

arvutame ümmargustes sulgudes seisva avaldise;

leiame püstsulgudes seisva avaldise kolmanda liikme;

määrame log u ja selle järgi u väärtuse.

Otstarbekalt korrastatult võiks olla arvutuste kirjapanek siin näiteks järgmine:

$$\begin{aligned}
2\log 14{,}9 &= 2 \cdot 1{,}1732 = 2{,}3464\\
3\log 31{,}5 &= 3 \cdot 1{,}4983 = 4{,}4949\\
&\qquad\qquad\qquad\quad 6{,}8413\\
\log 14{,}9^2 &= 2{,}3464\\
14{,}9^2 &= 222\\
&\qquad\quad 31{,}5\\
14{,}9^2 + 31{,}5 &= 253{,}5\\
4\log 253{,}5 &= 4 \cdot 2{,}4040 = 9{,}6160\\
5\log u &= \bar{3}{,}2253\\
\log u &= \bar{1}{,}4451\\
u &= 0{,}2787.
\end{aligned}$$

Ülesanded.

33. Arvutada logaritmide abil järgmised korrutised ja kontrollida tulemusi logaritme kasutamata:

$2{,}36 \cdot 64{,}4$ $\quad$ $3{,}28 \cdot 6{,}95$ $\quad$ $2{,}64 \cdot 32{,}5$

34. Arvutada logaritmide abil järgmised korrutised:

1. $23{,}6 \cdot 567$
   $15{,}68 \cdot 2{,}968$
   $7462 \cdot 0{,}009517$
   $808{,}2 \cdot 0{,}0008438$
   $0{,}9876 \cdot 0{,}05412$

2. $8{,}34 \cdot 16{,}9 \cdot 671$
   $6{,}125 \cdot 0{,}8032 \cdot 0{,}01879$
   $15{,}09 \cdot 306{,}2 \cdot 0{,}07654$
   $70{,}06 \cdot 0{,}007825 \cdot 652$
   $0{,}0714 \cdot 0{,}6398 \cdot 0{,}0043$

35. Arvutada logaritmide abil järgmised jagatised ja kontrollida tulemusi logaritme kasutamata:

$38{,}1 : 5{,}12$ $\quad 2880 : 6{,}81$ $\quad 389 : 604$

36. Arvutada logaritmide abil järgmised jagatised:

1. $\dfrac{802}{44390}$ $\quad \dfrac{19{,}84}{5{,}912}$ $\quad \dfrac{100{,}5}{567{,}8}$

2. $\dfrac{4{,}062}{0{,}5968 \cdot 3{,}92}$ $\quad \dfrac{47{,}08 \cdot 6{,}082}{17{,}86}$ $\quad \dfrac{35{,}84}{3{,}265 \cdot 7{,}602}$

3. $\dfrac{1{,}054 \cdot 36{,}96}{15{,}72 \cdot 4{,}006}$ $\quad \dfrac{16{,}68 \cdot 0{,}9508}{19{,}88 \cdot 0{,}08616}$ $\quad \dfrac{0{,}1058 \cdot 0{,}04052}{0{,}08465 \cdot 0{,}009061}$

37. Arvutada logaritmide abil järgmised astmed ja kontrollida tulemusi logaritme kasutamata:

$50{,}4^2$ $\quad 45{,}9^3$ $\quad 3{,}93^3$ $\quad 1{,}71^3$ $\quad 14{,}8^4$

38. Arvutada logaritmide abil järgmised astmed:

753^3 $\quad 502^4$ $\quad 645^5$ $\quad 22{,}1^{10}$ $\quad 1{,}21^{10}$

39. Arvutada logaritmide abil järgmised astmed:

1. $1{,}793^3$
   $29{,}95^4$
   $1{,}057^5$
   $0{,}0789^2$
   $0{,}7364^3$

2. $31 \cdot 19^4$
   $89^2 \cdot 38^3$
   $\left(\dfrac{15}{23}\right)^5$
   $\left(\dfrac{85}{74}\right)^{-2}$
   $\left(\dfrac{113}{355}\right)^3$

3. $(3{,}142 \cdot 2{,}718)^3$
   $\left(\dfrac{54{,}86}{63{,}58}\right)^2$
   $\left(\dfrac{7{,}473}{5{,}086}\right)^5$
   $\left(\dfrac{0{,}9085}{1{,}456}\right)^{-1}$
   $\left(\dfrac{0{,}5947}{0{,}0506}\right)^{-3}$

40. Arvutada logaritmide abil järgmised juured:

$\sqrt{49{,}7}$ $\sqrt{0{,}0635}$ $\sqrt{0{,}935}$ $\sqrt{70{,}4}$

$\sqrt[3]{756}$ $\sqrt[3]{0{,}00402}$ $\sqrt[5]{43600}$ $\sqrt[6]{0{,}171}$

41. Arvutada logaritmide abil järgmised juured:

1. $\sqrt{13}$ **2.** $\sqrt[3]{19}$ **3.** $\sqrt[5]{187}$

$\sqrt{35}$ $\sqrt[3]{2058}$ $\sqrt[4]{5431}$

$\sqrt{0{,}7543}$ $\sqrt[3]{0{,}9048}$ $\sqrt[5]{0{,}0784}$

$\sqrt{3{,}845}$ $\sqrt[3]{0{,}00864}$ $\sqrt[4]{0{,}3580}$

$\sqrt{\frac{95}{74}}$ $\sqrt[3]{45\frac{3}{7}}$ $\sqrt[5]{\frac{29}{52}}$

42. Arvutada logaritmide abil järgmised juured:

1. $\sqrt{17^3}$ **2.** $\sqrt[3]{109^2}$ **3.** $\sqrt[4]{75^3}$

$\sqrt[5]{11{,}28^2}$ $\sqrt[4]{0{,}917^3}$ $\sqrt[3]{1{,}234^5}$

$\sqrt[3]{0{,}872^4}$ $\sqrt{0{,}0576^3}$ $\sqrt[5]{0{,}0098^3}$

$\sqrt[4]{\left(\frac{23}{29}\right)^3}$ $\sqrt[3]{\left(\frac{10}{57}\right)^2}$ $\sqrt{\left(\frac{355}{113}\right)^5}$

43. Logaritmida järgmised avaldised:

1. mn^2 **2.** $\sqrt{ab^2c^3}$ **3.** $3m^2 : \sqrt{7n^3}$

$(ax)^3$ $ab^2\sqrt[3]{c^2}$ $\sqrt{a} : \sqrt{b^2}$

$\frac{5a^4}{17b^5}$ $\sqrt{\frac{pq}{s^3}}$ $\sqrt{a}\sqrt{b}$

44. Arvutada logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\dfrac{2{,}68^2 \cdot 19{,}64}{586{,}8}$

$\dfrac{4{,}56^3 \cdot 0{,}08824}{36{,}54 \cdot 0{,}6502}$

$\dfrac{0{,}964^3 \cdot 0{,}4982}{80{,}26 \cdot 0{,}346^2}$

2. $\dfrac{0{,}876 \cdot \sqrt{72}}{8{,}405}$

$\dfrac{1{,}06\sqrt[3]{3{,}867}}{45{,}66\sqrt{0{,}5480}}$

$\sqrt{0{,}382\sqrt{0{,}6666}}$

45. Logaritmida järgmised avaldised:

1. $(a+x)^3$

$24a^2(a+x)^5$

$\dfrac{(a-b+c)^2}{\sqrt{3abc}}$

$\dfrac{(m-n)^2}{(m+1)^2}$

2. $\dfrac{a-b}{m}$

p^2+q^2

$\sqrt{l^2-h^2}$

$\dfrac{1}{a(m+n)^2}$

3. $\sqrt{\dfrac{ax}{a-x}}$

$\dfrac{ax}{2\sqrt{a^2+x^2}}$

$\sqrt[3]{H(H^2-a^2)}$

$\sqrt[5]{m^2(m+x)^3}$

46. Arvutada logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $(735{,}4 + 278{,}9) : 51{,}43$

$\pi(66{,}44 - 39{,}87)^2$

$\pi(7{,}69^2 - 3{,}24^2)$

$(1{,}07^{10} - 1) : (1{,}07 - 1)$

2. $\sqrt{32{,}5^2 + 49{,}9^2}$

$\sqrt{83{,}71^2 - 58{,}17^2}$

$\sqrt{25{,}43(25{,}43^2 - 6{,}72^2)}$

$\sqrt[5]{0{,}984^2(0{,}984+1{,}456)^3}$

47. Lahendada logaritmide abil järgmised võrrandid:

1. $3{,}518x = 1$

$x^2 = 0{,}9716$

$\dfrac{22}{7}x^2 = 10$

$9x^3 = 84{,}1$

$x^2 = \sqrt[3]{42}$

2. $x^3 = \dfrac{0{,}9874}{0{,}0301}$

$x^3 = \dfrac{2{,}48 \cdot 792}{\pi}$

$x^5 = 300$

$29x^4 = 17$

$\sqrt{x} = \sqrt[3]{120}$

48. Olgu $F = \frac{Pv^2}{2gs}$. Arvutada F väärtus, kui $P = 0{,}78$, $v = 3{,}25$, $g = 9{,}81$ ja $s = 12{,}7$.

49. Olgu $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$. Arvutada S väärtus, kui $V = 0{,}4892$.

50. Olgu $V = \sqrt{\frac{S^3}{36\pi}}$. Arvutada V väärtus, kui $S = 21{,}65$.

51. Olgu $C = gh - \sqrt{gh}$. Arvutada C väärtus, kui $g = 9{,}81$ ja $h = 129$.

52. Olgu $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Arvutada s väärtus, kui $a = 37{,}4$, $n = 9$ ja $q = 1{,}28$.

53. Olgu $v^2 = u^2 + 2gs$. Arvutada v väärtus, kui $u = 26{,}4$, $g = 9{,}81$ ja $s = 27{,}35$.

54. Risttahuka põhjaks on ruut küljega 0,4578 m; risttahuka kõrgus on 0,6834 m. Arvutada risttahuka ruumala.

55. Kolmnurga alus on 4,860 meetrit, kolmnurga kõrgus on 0,7692 meetrit. Arvutada kolmnurga pindala.

56. Ringi raadius on 25,38 cm. Kui pikk on selle ringjoone kaar, mis vastab kesknurgale 34°28′?

57. Täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab hüpotenuusi osadeks 193,6 mm ja 78,4 mm. Arvutada kolmnurga kõrgus.

58. Ristküliku küljed on 123,5 m ja 376,4 m. Arvutada ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg.

59. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 4560 m ja 8407 m. Arvutada kolmnurga hüpotenuus.

60. Vaskkuubid servadega 13,84 cm ja 8,63 cm sulatatakse üheks kuubiks. Kui suur on selle kuubi serv?

§ 10. Arvu logaritm kümnest erineval alusel.

Varemantud logaritmi definitsiooni järgi nimetatakse arvu kümnendlogaritmiks sellist arvu, millega kümmet astendades saame antud arvu. Üldistame nüüd logaritmi mõistet, andes tema definitsiooni järgmiselt:

arvu logaritmiks antud alusel nimetatakse niisugust arvu, millega logaritmi alust astendades saame antud arvu.

Selle definitsiooni järgi on x arvu a logaritm alusel b, kui

$$b^x = a.$$

Arvu a logaritmi alusel b märgitakse sümboliga

$$\log_b a.$$

Nii on näiteks

$$\log_2 8 = 3, \text{ sest } 2^3 = 8;$$

$$\log_3 \tfrac{1}{3} = -1, \text{ sest } 3^{-1} = \tfrac{1}{3};$$

$$\log_{0,2} 25 = -2, \text{ sest } 0{,}2^{-2} = 25.$$

Logaritmide aluseks kõlbab iga positiivne arv, välja arvatud arv 1. Viimane ei kõlba logaritmide aluseks, sest kõik arvu 1 astmed on võrdsed. Ka negatiivsed arvud ei kõlba logaritmide alusteks, sest negatiivse arvu mõnel astmel, nagu

$$(-2)^{\frac{1}{2}}, \quad (-10)^{\frac{1}{2}}, \quad (-10)^{-\frac{1}{2}},$$

puudub arvväärtus. Tegeliku arvutamise seisukohalt ei oma logaritmid kümnest erinevail aluseil suuremat tähtsust, sest arvutamisel kasutatakse ikka kümnendlogaritme.

Kui arvude kümnendlogaritmid on teada, saame määrata arvude logaritme ka teistel alustel. Selgitame seda järgmise ülesandega.

Ülesanne. Leida $\log_3 7$, kasutades kümnendlogaritmide tabeleid.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Siis

ehk $$x = \log_3 7$$
$$3^x = 7.$$

Logaritmides viimase võrdluse mõlemaid pooli, saame

seega $$x \log 3 = \log 7,$$
$$x = \frac{\log 7}{\log 3}.$$

Võttes tabelist $\log 7$ ja $\log 3$, saame
$$x = \frac{0{,}8451}{0{,}4771}$$

ehk $$\log_3 7 = 1{,}771.$$

Ülesanded.

61. Asendada järgmised võrdused teistega, kasutades ühtainsat logaritmi sümbolit:

1. $32 = 2^5$; $16 = 4^2$; $729 = 3^6$; $2048 = 2^{11}$
2. $3 = \sqrt{9}$; $1 = 12^0$; $0{,}25 = 2^{-2}$; $8 = 4\sqrt{4}$
3. $6^1 = 6$; $216 = 6^3$; $b = \sqrt{a}$; $5^{-2} = 0{,}04$

62. Kontrollida järgmiste võrduste kehtivust:

1. $\log_2 64 = 6$; $\log_7 49 = 2$; $\log_4 64 = 3$; $\log_3 81 = 4$
2. $0 = \log_a 1$; $-1 = \log_5 0{,}2$; $\frac{1}{2} = \log_{100} 10$; $\frac{2}{3} = \log_8 4$
3. $\log_{81} 27 = 0{,}75$; $\log_5 0{,}008 = -3$; $\log_8 \frac{1}{128} = -2\frac{1}{3}$; $\log_{0{,}1} 100 = -2$

63. Anda järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\log_2 8$; $\log_2 16$; $\log_2 64$; $\log_2 1024$
2. $\log_3 9$; $\log_3 81$; $\log_5 5$; $\log_a a^3$
3. $\log_2 \frac{1}{4}$; $\log_3 \frac{1}{81}$; $\log_4 2$; $\log_{27} 3$
4. $\log_4 8$; $\log_{25} 125$; $\log_9 \frac{1}{27}$; $\log_4 \frac{1}{32}$

§ 11. Eksponentvõrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu esineb astendajas või juurijas, nimetatakse eksponentvõrrandiks.

Eksponentvõrrandid on näiteks järgmised võrrandid:

$$2^x = 32, \qquad 3^{2x} + 3^{x+1} = 90,$$

$$\sqrt[x]{243} = 3.$$

Allpool tutvume näidiste varal eksponentvõrrandite lahendamise tähtsamate juhtudega.

N ä i d i s 1. Olgu antud lahendada kaheliikmeline eksponentvõrrand

$$2^x = 32.$$

Selle võrrandi liikmeid on võimalik kujutada ühe ja sama arvu astmetena:

$$2^x = 2^5.$$

Tuginedes tõsiasjale, et arvudest 0 ja 1 erineva arvu astmed on võrdsed ainult siis, kui astendajad on võrdsed, järeldame, et

$$x = 5.$$

N ä i d i s 2. Kui kaheliikmelise eksponentvõrrandi liikmeid ei suudeta kujutada ühe ja sama arvu astmetena, siis kasutatakse võrrandi mõlema poole logaritmimise võtet, tuginedes tõsiasjale, et võrdsete arvude logaritmid on võrdsed. Näiteks võrrand

$$6^x = 14{,}7$$

laheneb nii, et võetakse võrdseks võrrandi kummagi poole logaritmid

$$x \log 6 = \log 14{,}7,$$

millest avaldame tundmatu:

$$x = \frac{\log 14{,}7}{\log 6}$$

ehk, võttes tabelist logaritmide väärtused,

$$x = \frac{1{,}1673}{0{,}7782}$$

ehk

$$x = 1{,}5.$$

Näidis 3. Olgu vaja lahendada võrrand

$$2^{x+2} + 5 \cdot 2^x = 72.$$

Võttes võrrandi vasakul poolel avaldise 2^x sulgude ette, saame

$$2^x(2^2 + 5) = 72$$

ehk taandades 9-ga

$$2^x = 8.$$

Et $8 = 2^3$, siis on

$$x = 3.$$

Näidis 4. Olgu antud lahendada võrrand

$$3^{2x} - 3^{x+1} = 54.$$

Kirjutades selle võrrandi kujul

$$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 54 = 0$$

ja võttes avaldise 3^x uueks tundmatuks, mille tähistame tähega y, saame ruutvõrrandi

$$y^2 - 3y - 54 = 0,$$

mille lahendid on

$$y_1 = 9 \text{ ja } y_2 = -6.$$

Seega avaldise 3 väärtus on kas 9 või —6. Kuid et positiivse arvu aste ei või olla negatiivne arv, siis pole olemas niisugust tähe x väärtust, mille puhul oleks

$$3^x = -6.$$

Seega lähtevõrrandi ainsaks lahendiks on tähe x väärtus, mille puhul on

$$3^x = 9.$$

Et $9 = 3^2$, siis

$$x = 2.$$

Ülesanded.

64. Lahendada järgmised võrrandid (kasutamata logaritme):

1. $3^x = 729$
2. $2^x = 512$
3. $256^x = 4$
4. $16^{\frac{1}{x}} = 2$
5. $\sqrt[x]{125} = 5$
6. $2^x = \frac{1}{32}$
7. $5^x = 0{,}04$
8. $27^x = 9$
9. $(\sqrt{2})^x = 16$
10. $4^x = 2\sqrt{2}$

65. Lahendada järgmised võrrandid (kasutamata logaritme):

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$
2. $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{625}{81}$
3. $1{,}5^{x+1} = \frac{32}{243}$
4. $1{,}1^{x-3} = \frac{1}{121}$
5. $27 \cdot 4^x = 64 \cdot 3^x$
6. $0{,}2^{2x-3} = 0{,}008$
7. $3^x = (\sqrt{3})^{x+4}$
8. $5^x = (\sqrt[3]{5})^{x-2}$
9. $2^x = 4\sqrt[3]{4}$
10. $3^{x+2} = \frac{1}{9}\sqrt[4]{27}$

66. Lahendada järgmised võrrandid (kasutamata logaritme):

1. $3^{x^2} = 27 \cdot 3^x$
2. $5^{x^2} = 625 \cdot 5^{3x}$
3. $4^{x^2+x} = 8^{3x-1}$
4. $(5^{1-x})^x = 5^x$
5. $(a^{3-x})^{2-x} = 1$
6. $(30^{5-x})^{x-6} = \frac{1}{900}$

67. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $10^x = 20$
2. $2^x = 5$
3. $5^{\frac{x}{2}} = 8{,}55$
4. $3{,}42^x = 40$
5. $(\sqrt{6})^x = 60$
6. $4 \cdot 7^{x-1} = 64$
7. $(\frac{1}{6})^x = 4\sqrt{3}$
8. $2^x = 3^x$
9. $2^{x+1} = 3^x$
10. $\sqrt[x]{1{,}371} = \sqrt[10]{10}$

68. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $2^x - 2^{x-3} = 7$
2. $3^x + 3^{x+2} = 30$
3. $5^x + 5^{x-5} = 625{,}2$
4. $7^x + 7^{x-0{,}4} = 27$
5. $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$
6. $9 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 5500$

69. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x = 24$
2. $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 99$
3. $5^{2x} - 7 \cdot 5^x - 450 = 0$
4. $3^x + 9^x = 756$
5. $9 \cdot 9^x - 10 \cdot 9^{-x} = 91$
6. $4^{x+1} + 64 \cdot 4^{-x} = 257$

70. Arvutada avaldiste 3^{2a}, 3^{a^2} ja 3^{2^a} väärtused, kui $3^a = 12$.

71. Olgu $a^b = c$. Väljendada avaldis a^{b^3}

1. ainuüksi tähtede a ja c kaudu;
2. ainuüksi tähtede b ja c kaudu.

72. Asendada võrrand $\log_2 3 = x$ eksponentvõrrandiga ja lahendada see.

73. Eelmise ülesande eeskujul arvutada järgmised logaritmid:

$$\log_3 15,\ \log_2 28,\ \log_{100} 30,\ \log_{2{,}718} 10.$$

§ 12. Logaritmvõrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavas, nimetatakse logaritmvõrrandiks.

Logaritmvõrrandid on näiteks järgmised võrrandid:

$$\log (x + 1) - \log x = 0{,}3,$$
$$(\log x)^2 - 3 \log x + 2 = 0.$$

Allpool tutvume näidiste varal logaritmvõrrandite mõne tähtsama lahendamisvõttega.

Näidis 1. Olgu antud lahendada võrrand

$$\log x + \log (x - 3) = 1.$$

Seda võrrandit on võimalik kirjutada niisugusel kujul, et tema kumbki pool esineb mingi avaldise logaritmina:

$$\log x\,(x - 3) = \log 10.$$

Tuginedes tõsiasjale, et logaritmid on võrdsed ainult siis, kui logaritmitavad on võrdsed, võime selle võrrandi asendada võrrandiga

$$x\,(x - 3) = 10$$

ehk võrrandiga

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Viimase võrrandi lahendid on 5 ja — 2.

Asendades lähtevõrrandis tähe x arvuga —2, saame vasakul poolel avaldised log (—2) ja log (—5), milledel puudub arvväärtus. Seepärast ruutvõrrandi lahend —2 ei saa olla antud logaritmvõrrandi lahendiks.

Teostades kontrolli lahendiga 5, saame lähtevõrrandi vasakul poolel

$$\log 5 + \log 2 \text{ ehk } \log 10 \text{ ehk } 1,$$

s. o. sama arvu, mis seisab võrrandi paremal poolel. Seega antud logaritmvõrrandi ainus lahend on 5.

Sellest näidisest selgub, et logaritmvõrrandiga antud logaritmide vahelise seose asendamisel logaritmitavate vahelise seosega võime saada lahendeid, mille puhul mõni logaritmitav omandab negatiivse väärtuse, mistõttu võrrand kaotab mõtte. Seepärast peab selgitama iga leitud lahendi kõlblikkust tema asetamisega lähtevõrrandisse.

Näidis 2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\log x \cdot (\log x + 2) = 3.$$

Avades sulud, saame võrrandi

$$(\log x)^2 + 2 \log x - 3 = 0,$$

milles võib $\log x$ lugeda tundmatuks.
Selle võrrandi lahendid on

$$\log x_1 = 1 \text{ ja } \log x_2 = -3.$$

Siit järeldame, et

$$x_1 = 10 \text{ ja } x_2 = 0{,}001.$$

Nende väärtuste asetamisel antud võrrandisse selgub, et mõlemad arvud rahuldavad seda võrrandit.

Ülesanded.

74. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log x - \log 2 = \log 3$
2. $\log (x - 1) = 2 - 2 \log 5$
3. $\log (x + 9) = \log 3x$
4. $\log (x + a) = -\log (x - a)$
5. $\log (x - a) = \log x - \log a$
6. $\log (x + a) = \log x + a$
7. $\log x^2 = \log x + 0{,}3010$
8. $\log (3x^2 + 7) - \log (3x - 2) = 1.$

75. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log (x-2) + \log (x-5) = 1$
2. $\log (x^2-10x+25) = \log (x-5) + \log 3$
3. $\log (x-2) + \log (x-1) = 1 + \log 2$
4. $\frac{1}{3} \log (271 + 3\sqrt{2x}) - 1 = 0$
5. $\log (x-2) - 1 = \frac{1}{2} \log 13{,}75 - \log \sqrt{2x+1}$
6. $x^{\log x} = 10$
7. $x_1^{\log x} = 100x$
8. $\log x \cdot \log 2x = 0{,}0995$

76. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log_2 (x + 2\frac{1}{2}) = 2 \log_2 x - 1$
2. $\log_3 (2x+7) = 5 - \log_3 (x-1)$
3. $\log_3 x \cdot \log_3 9x = 24$
4. $\log_2 x + \log_8 x + 8 = 0$
5. $\log_5 x = \log_{25} 2x$

Peatükk II.

Arvjadad.

§ 13. Aritmeetiline jada.

Aritmeetiliseks jadaks nimetatakse niisugust arvude jada, milles iga arvu ja sellele eelneva arvu vahe on muutumatu.

Nii on paarituarvude jada

1, 3, 5, 7, 9, . . .

aritmeetiline jada, sest

$$3-1=5-3=7-5=9-7=\ldots;$$

seevastu algarvude jada

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . .

ei ole aritmeetiline jada, sest

$$3-2\neq 5-3.$$

Aritmeetilist jada moodustavaid arve nimetame selle jada elementideks ehk liikmeiks. Jada liikmeid tähistame sümbolitega

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,$$

1, 2, 3, . . . n on liikmete järjenumbrid; nad näitavad, mitmendal kohal liige jadas asetseb. Arve a_1 ja a_n nimetame vastavalt jada esimeseks ja viimaseks liikmeks. Jada liikme ja eelneva liikme vahet nimetame jada vaheks. Jada vahet tähistame tähega d. Jada vahe võib olla positiivne või negatiivne. Aritmeetilist jada nimetatakse tõusvaks, kui jada vahe on positiivne, ja alanevaks, kui jada vahe on negatiivne.

Ülesanded.

77. Kirjutada 6-liikmeline aritmeetiline jada, mille esimene liige on 2 ja vahe on 5.

78. Kirjutada 12-liikmeline aritmeetiline jada, mille esimene liige on 4 ja teine liige on $4\frac{3}{4}$.

79. Kirjutada 7-liikmeline aritmeetiline jada, mille esimene liige on 10 ja vahe on —3.

80. Aritmeetilise jada 5. liige on 17 ja 6. liige 24. Kui suur on selle jada 7. liige?

81. Aritmeetilise jada 9. liige on 22 ja 11. liige on 28. Kui suur on selle jada 10. liige?

§ 14. Aritmeetilise jada üldliige.

Olgu antud aritmeetiline jada

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_n,$$

mille vahe on d. Kohal k seisev jada liige on a_k; selle ees, kohal $k - 1$ seisev liige on a_{k-1}. Aritmeetilise jada definitsiooni järgi

$$a_k - a_{k-1} = d$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} + d.$$

See tähendab, et

aritmeetilise jada iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja jada vahe summaga.

Andes järjenumbrile k väärtused 2, 3, 4, ... n, saame

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

jne. Analoogia põhjal kirjutame üldiselt

$$a_k = a_1 + (k - 1)\, d.$$

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui $k = 1$; tõepoolest, valemi parem pool omandab siis kuju

$$a_1 + (1 - 1)\, d = a_1 + 0 \cdot d = a_1.$$

Vastavalt k väärtusele on a_k kas esimene, teine, kolmas või mõni muu liige. Seda liiget a_k nimetame seepärast jada üldliikmeks. Et jada üldliikme valemis esinev arv $k - 1$ näitab, mitu liiget seisab jadas liikme a_k ees, siis võime selle valemi sõnastada järgmiselt:

aritmeetilise jada liige võrdub summaga, mis saadakse esimese liikme liitmisel jada vahe ja kõigi eelnevate liikmete arvu korrutisega.

Kui üldliikme valemis esinevast neljast suurusest

$$a_1,\ d,\ k,\ a_k$$

3 suurust on teada, siis saame ikka arvutada neljanda. Näidisena toome järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Aritmeetilise jada esimene liige on 15, jada vahe on —4. Kui suur on jada kümnes liige?

Lahendus. Võttes aritmeetilise jada üldliikme valemis k väärtuseks 10 ja asendades a_1 ning d antud väärtustega, saame

$$a_{10} = 15 + (10 - 1) \cdot (-4) = 15 + 9 \cdot (-4) = \\ = 15 - 36 = -21.$$

Vastus. Jada 10. liige on —21.

Ülesanne 2. Aritmeetilise jada esimene liige on $-8\frac{1}{2}$; jada vahe on $3\frac{1}{2}$. Mitmes liige on $12\frac{1}{2}$?

Lahendus. Andmeiks on

$$a_1 = -8\tfrac{1}{2},\ d = 3\tfrac{1}{2},\ a_k = 12\tfrac{1}{2};$$

otsitavaks on k. Asetades andmed aritmeetilise jada üldliikme valemisse, saame

$$12\tfrac{1}{2} = -8\tfrac{1}{2} + (k - 1) \cdot 3\tfrac{1}{2};$$

siit leiame, et

$$k = 7.$$

Vastus. $12\frac{1}{2}$ on antud jada 7. liige.

82. Avaldada iga järgmise jada puhul k-ndal kohal seisev liige (jada üldliige) arvu k kaudu.

1. 3, 5, 7, 11, ...
2. 7, 15, 23, 31, 39, ...
3. —100, —95, —90, —85, —80, ...
4. 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, 2, ...
5. $2\frac{1}{3}$, 3, $3\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{3}$, 5, ...

83. Aritmeetilise jada 1. liige on 3 ja vahe on 4. Leida selle jada 8. liige.

84. Leida aritmeetilise jada 7. ja 11. liige, kui jada 1. liige on 6 ja vahe on $2\frac{1}{2}$.

85. Leida aritmeetilise jada 10. ja 15. liige, kui jada 1. liige on 14 ja 2. liige on 20.

86. Sportlane hüppas kõrgust esimesel treeningukuul keskmiselt 170 cm. Tema keskmine saavutis tõusis igal kuul 5 cm võrra. Mitu sentimeetrit hüppas ta keskmiselt 5. kuul?

87. Ratsanik ratsutas 1. tunnis 20 km ja igas järgnevas tunnis 0,4 km võrra vähem kui eelnevas. Mitu kilomeetrit ratsutas ta 6. tunnis?

88. Galileo Galilei avastas kehade langemise seaduse, mis kõlab järgmiselt: vabalt langev keha kulgeb 1. sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m võrra enam kui eelnevas. Mitu meetrit kulgeb vabalt langev keha 3. sekundis? Mitu meetrit kulgeb ta 9. sekundis?

89. Ülesvisatud keha kulgeb õhuta ruumis igas sekundis 9,8 m vähem kui eelnevas sekundis. Mitu meet-

rit kulgeb ülesvisatud keha 8. sekundis, kui ta 1. sekundis kulgeb 100 m?

90. Leida aritmeetilise jada 1. liige, kui 9. liige on 53 ja vahe on 4.

91. Leida aritmeetilise jada 1. liige, kui 15. liige on 68 ja vahe on $-2\frac{1}{2}$.

92. Leida aritmeetilise jada vahe, kui 1. liige on 7 ja 17. liige on 87.

93. Leida aritmeetilise jada vahe, kui 1. liige on 125 ja 25. liige on 65.

94. Aritmeetilise jada 1. liige on 3 ja 31. liige on 48. Leida jada vahe.

95. Paigutada arvude 7 ja 35 vahele 6 niisugust arvu, et tekiks aritmeetiline jada.

96. Sportlane tõukab kuuli esimesel treeningunädalal 15,58 m. Mitme sentimeetri võrra peaks iga järgneva nädala saavutis ületama eelneva nädala oma, et 7. nädalal korraldatavail võistlusil sportlane saaks tõugata kuuli 16 m?

97. Paigutada arvude 100 ja 40 vahele 4 niisugust arvu, et tekiks aritmeetiline jada.

98. Aritmeetilise jada esimene liige on 8 ja vahe on 7. Mitmes liige selles jadas on 120?

99. Aritmeetilise jada 1. liige on $-2,5$ ja 2. liige on 1. Mitmes liige selles jadas on 39,5?

100. Mitu liiget on aritmeetilises jadas, mille 1. liige on 6, 2. liige on $10\frac{1}{3}$ ja viimane liige on 136?

101. Mitu 7-ga jaguvat arvu on arvude 28 ja 154 vahel?

102. Trapetsikujulisel peenral on esimeses reas 23 taime, teises 26, kolmandas 29 ja viimases reas 89 taime. Mitu rida taimi on peenral?

103. Mitmendal kohal seisab liige 2,25 aritmeetilises jadas 1,05; 1,10; 1,15; ... ?

104. Kui suur on ühekohaliste loomulike arvude [1] hulk? — kahekohaliste loomulike arvude hulk? — kolmekohaliste loomulike arvude hulk? — neljakohaliste loomulike arvude hulk?

105. Raamatul on 500 lehekülge. Kui palju trükinumbreid on tarvis raamatu lehekülgede nummerdamiseks?

106. Mitu aritmeetilise jada 9, 13, ... liiget on väiksemad kui 100?

107. Mitu aritmeetilise jada 137, 123, ... liiget on positiivsed?

108. Leida aritmeetilise jada 7. liige, kui selle jada 4. liige on 21 ja 11. liige on —28.

109. Aritmeetilise jada 21. liige on 103 ja 33. liige on 157. Leida selle jada 27. liige.

110. Aritmeetilise jada 1. liige on 7, jada vahe 5 ja liikmete arv 21. Kui suur on jada liige, mis asetseb jada keskel?

111. Olgu aritmeetilise jada liige $a_2 = 17$ ja $a_{101} = -16$. Kui suur on liige a_1?

112. Olgu aritmeetilise jada liige $a_{37} = 4{,}6$ ja $a_{73} = 8{,}2$. Missugused on esimesed 3 jada liiget?

113. Olgu aritmeetilise jada liige $a_{13} = 89$, $a_{57} = 397$ ja $a_n = 502$. Leida arv n.

---

[1] Loomulikeks arvudeks nimetatakse positiivseid täisarve 1, 2, 3, ...

114. Aritmeetilise jada 14. liige on 66, 134. liige on 666 ja viimane liige on 6666. Kui suur on jada 1. liige ja kui palju on jadas liikmeid?

115. Täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks on kolm järjestikust aritmeetilise jada liiget, mille vahe on 7. Arvutada kolmnurga külgede mõõtarvud.

116. Näidata, et avaldise $3 + 5x$ väärtused moodustavad aritmeetilise jada, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud 1, 2, 3, ...

117. Näidata, et avaldise $10 - \frac{1}{2}x$ väärtused moodustavad aritmeetilise jada, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud.

118. Näidata, et avaldise x^2+4 väärtused ei moodusta aritmeetilist jada, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud.

119. Näidata, et täisarvude jada liikmete ruutude järjestikused vahed moodustavad aritmeetilise jada.

§ 13. Aritmeetilise jada summa.

Aritmeetilise jada liikmete summat nimetatakse aritmeetilise jada summaks ehk aritmeetiliseks reaks.

Summa tähisena kasutame tähte s; seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Hõlpsamini jõuame eesmärgile aritmeetilise jada summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks kirjutame otsitava summa üks kord alates esimese liikmega, teine kord alates viimase liikmega:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d];$$
$$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-1)d].$$

Nii kirjutades satuvad kohakuti jada esimene ja viimane liige, teine ja eelviimane liige, kolmas ja eel-eelviimane liige jne. Nende võrduste teineteisega kohakuti olevate liikmete liitmisel leiame, et

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \\ + \ldots + (a_1 + a_n).$$

Siit näeme, et

aritmeetilise jada algusest ja lõpust ühekaugusel asetsevate liikmete summad on võrdsed.

Saadud võrduse parem pool koosneb nii mitmest liidetavast $a_1 + a_n$, kui palju on liikmeid antud aritmeetilises jadas; seega

$$2s = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

millest

$$s = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Tulemuse võime sõnastada nõnda:

aritmeetilise jada summa võrdub jada esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Tuletatud summa valemi rakendamist selgitame järgmiste ülesannetega.

Ülesanne 1. Arvutada esimese n loomuliku arvu summa.

Lahendus. Et need arvud moodustavad aritmeetilise jada, siis nõutav summa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Ülesanne 2. Arvutada esimese n paarituarvu summa.

Lahendus. Esimesed n paarituarvu moodustavad aritmeetilise jada 1, 3, 5, ... $2n - 1$; seega nõutav summa

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2.$$

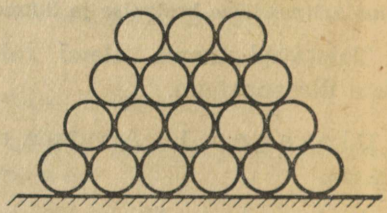
120. Mitu silma on kogusummas täringu 6 tahul?

121. Mitu lööki lööb öö-päeva jooksul seinakell, mis märgib ainult täied tunnid vastava arvu löökidega?

122. Tööline on pandud käivitama ja valvama 12 kudumismasinat. Iga masin koob tunnis 8 m riiet. Tööline käivitab esimese masina kl. 7 ja teised 5-minutiste ajavahemikkude järele. Mitu meetrit riiet on masinad kudunud kella 15-ks?

123. Vabaõhuteatris on vaatlejate istekohad asetatud amfiteatriliselt, ringides ümber ringikujulise näitelava. Esimese istmeteringi raadius on 6 m, teise 7 m, kolmanda 8 m jne. viimaseni, mille raadius on 20 m. Arvates iga vaatleja kohta 0,5-meetrise osa istepingist, arvutada rahvahulk, mis teatri pinkidele ära mahub. Arvutamisel võtta ümmarguselt $\pi = 3$.

124. Suurem hulk sama läbimõõduga torusid on laotud virna, nagu näitab joon. 2. Alumises reas on neid 20, järgnevas 19, järgnevas 18 jne. 6-ni. Mitu toru on virnas?



Joonis 2.

125. Tallu viiva tee äärde istutatakse 100 puud, paigutades nad iga 5 m järele. Esimese puu kaugus talu õues asetsevast kaevust on 20 m. Iga puud kastetakse 1 ämbri veega. Kui pika tee käiks ära puid kastev mees, kui ta peaks iga ämbritäie vett võtma kaevust ja kandma puuni, alustades oma teed kaevult ja lõpetades selle sealsamas?

126. Trapetsikujuline katus on kaetud katusekividega. Laiemal küljel asetseb 80 kivi, igas järgnevas reas kaks kivi vähem kui eelnevas. Teades, et kivide ridu on 20, leida katuse katmiseks kulunud kivide arv.

127. On antud aritmeetiline jada 4, 1, —2, ... Leida jada esimese 20 liikme summa.

128. Täita tühjad kohad järgmises tabelis:

Jada number	Esimene liige a_1	Jada vahe d	Liikmete arv n	Viimane liige a_n	Jada summa s_n
1.	11	—3	12		
2.	—16	4	20		
3.	— 7		15	21	
4.	8		21	—32	
5.	19	—11		—25	
6.	—10	6		56	

129. Aritmeetilises jadas on 9 liiget, teise ja kaheksanda liikme summa on 15. Kui suur on jada summa?

130. 1. Arvutada esimese 100 loomuliku arvu summa.
2. Arvutada esimese 100 paarisarvu summa.
3. Arvutada esimese 100 paarituarvu summa.

131. Kui suur on kõigi kolmekohaliste loomulike arvude summa?

132. Arvutada kõigi 3-ga jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 200.

133. Arvutada kõigi 5-ga jaguvate arvude summa vahemikus 99 kuni 1001.

Ex bibl. ülik. Tart.

134. Aritmeetilise jada vahe on —2; jada viimane liige on —10 ja jada summa on —24. Arvutada jada esimesed 5 liiget.

135. 9-liikmelise aritmeetilise jada summa on 558 ja esimene liige on 52. Leida jada vahe.

136. 10-liikmelise aritmeetilise jada summa on 10 ja jada vahe on —3. Leida jada esimene liige.

137. Kui suured on viisnurga nurgad, kui nad moodustavad aritmeetilise jada, mille vahe on 20^0?

138. Kui suured on kuusnurga nurgad, kui nad moodustavad aritmeetilise jada, mille esimene liige on 80^0?

139. Jaotada 10 mõõtu vilja kümnele isikule nõnda, et iga järgmine saab $\frac{1}{8}$ mõõtu vähem kui eelmine. (A h m e s, umbes 1700 a. e. u. a.)

140. Mitu liiget on aritmeetilises jadas, mille esimene liige on 12, vahe 4,2 ja summa 696?

141. Mitu liiget on aritmeetilises jadas, mille esimene liige on —20, teine liige —15 ja summa 1000?

142. Saapavabrik sai tellimise 13 200 saapapaarile. Sotsialistliku võistluse korras pidi vabrik esimesel nädalal valmistama 100 paari saapaid päevas ja igal järgneval nädalal suurendama oma päevast toodangut 50 paari võrra. Mitme nädalaga oli tellimine täidetud?

143. Mitu meetrit kulgeb vabalt langev keha t sekundi jooksul? (Vt. nr. 88.)

144. Mitme sekundiga kulgeb vabalt langev keha 314 m? (Vt. nr. 88. ja 143.)

145. Hulknurga nurgad moodustavad aritmeetilise jada 70^0, 90^0, 110^0, ... Mitu nurka on hulknurgal?

146. Kas on võimalik niisugune hulknurk, mille nurgad moodustaksid aritmeetilise jada 45^0, 55^0, 65^0, ...?

147. Mitu paarituarvu 1, 3, 5, ... peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks 500?

148. Mitu loomulikku arvu 1, 2, 3, ... peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks arvu 1000?

149. Kujutada arv 325 aritmeetilise reana, teades, et esimene liige on 1 ja viimane liige on 64.

150. Näidata, et esimese $2n + 1$ loomuliku arvu summa on jaguv arvuga $2n + 1$.

151. On antud aritmeetiline jada:

$$(a + x)^2, \quad a^2 + x^2, \quad (a - x)^2, \ldots$$

Leida selle jada n liikme summa.

152. Leida 11 järjestikust loomulikku arvu, mille summa võrdub järgneva 10 järjestikuse loomuliku arvu summaga.

153. Mitu järjestikust loomulikku arvu peab võtma, alates arvust 3, et nende summa võrduks järgneva 5 järjestikuse loomuliku arvu summaga?

154. Aritmeetilise jada esimene liige on $n^2 - n + 1$ ja jada vahe on 2. Näidata, et siis n liikme summa on n^3. Kasutada seda tõestuseks et $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$ jne.

§ 16. Geomeetriline jada.

Geomeetriliseks jadaks nimetatakse niisugust arvude jada, milles iga arvu ja sellele eelneva arvu jagatis on muutumatu.

Nii on arvu 2 astmete jada

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \ldots$$

geomeetriline jada, sest

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \ldots;$$

seevastu täisarvude ruutude jada

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$$

ei ole geomeetriline jada, sest

$$\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4}.$$

Geomeetrilist jada moodustavaid arve nimetame selle jada elementideks ehk liikmeiks. Nagu aritmeetilise jada puhul, nii tähistame ka geomeetrilise jada liikmeid sümbolitega

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$$

ja nimetame esimest ja viimast neist arvudest vastavalt jada esimeseks ja jada viimaseks liikmeks. Geomeetrilise jada liikme ja eelneva liikme jagatist nimetame selle jada teguriks. Jada teguri tähistame tähega q.

Geomeetrilise jada teguri märgi ja absoluutväärtuse järgi saab jada iseloomustada järgmiselt:

1. Kui jada tegur on positiivne ($q > 0$), siis kõik jada liikmed on ühe ja sama märgiga; seda näeme näiteks jadade puhul

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$$

ja

$$-2,\ -6,\ -18,\ -54,\ -162,$$

kus kummaski $q = 3$.

2. Kui jada tegur on negatiivne ($q < 0$), siis jada liikmete märgid vahelduvad; see juhtum esineb meil näiteks jada puhul

$$2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,$$

kus $q = -3$.

3. Kui jada teguri absoluutväärtus on suurem kui 1, siis jada liikmete absoluutväärtused kasvavad; seda näeme näiteks jadade puhul

4, 6, 9, 13,5, 20,25, kus $q = 1{,}5$;
—4, —6, —9, —13,5, —20,25, kus $q = 1{,}5$;
4, —6, 9, —13,5, 20,25, kus $q = -1{,}5$.

4. Kui jada teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1, siis jada liikmete absoluutväärtused kahanevad; seda näeme näiteks jadade puhul

405, 135, 45, 15, 5, kus $q = \frac{1}{3}$;
—405, —135, —45, —15, —5, kus $q = \frac{1}{3}$;
405, —135, 45, —15, 5, kus $q = -\frac{1}{3}$.

Ülesanded.

155. Kirjutada 6-liikmeline geomeetriline jada, mille esimene liige on 4 ja tegur on 3.

156. Kirjutada 7-liikmeline geomeetriline jada, mille esimene liige on 32 ja tegur on $\frac{1}{2}$.

157. Geomeetrilise jada esimene liige on 1, jada tegur on $\frac{2}{3}$. Määrata jada esimesed 5 liiget.

158. Geomeetrilise jada esimene liige on 7776, jada tegur on $\frac{5}{6}$. Anda jada esimesed 5 liiget.

159. Geomeetrilise jada 1. liige on 16 ja 2. liige on 24. Kui suur on selle jada 3. liige?

160. Geomeetrilise jada 7. liige on 108 ja 8. liige on 36. Kui suur on selle jada 9. liige?

161. Geomeetrilise jada 4. liige on 10 ja 5. liige on 25. Leida jada 3. liige.

162. Geomeetrilise jada 6. liige on 15 ja 7. liige on 21. Leida selle jada 8. liige.

163. Geomeetrilise jada 12. liige on 28 ja 13. liige on 49. Leida selle jada 11. liige.

§ 17. Geomeetrilise jada üldliige.

Olgu antud geomeetriline jada

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,$$

mille tegur on q. Kohal k seisev jada liige on a_k; selle ees, kohal $k-1$ seisev liige on a_{k-1}. Geomeetrilise jada definitsiooni järgi on

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} \cdot q.$$

See tähendab, et

geomeetrilise jada iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja jada teguri korrutisega.

Andes arvule k järjest väärtused 2, 3, 4, ... n, saame

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

jne. Analoogia põhjal kirjutame üldiselt

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}.$$

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui $k = 1$; tõepoolest, valemi parem pool omandab siis kuju

$$a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1.$$

Vastavalt k väärtusele on liige a^k kas jada esimene, teine, kolmas või mõni muu liige. Seda liiget a_k nimetame seepärast j a d a ü l d l i i k m e k s. Et jada üldliikme valemis esinev arv $k-1$ näitab, mitu liiget seisab jadas liikme a_k ees, siis võime selle valemi sõnastada järgmiselt:

geomeetrilise jada liige võrdub arvuga, mis saadakse jada esimese liikme korrutamisel jada teguri astmega, milles astendajaks on kõigi eelnevate liikmete arv.

Kui üldliikme valemis esinevast neljast suurusest

$$a_1,\ q,\ k,\ a_k$$

3 suurust on teada, siis saame ikka arvutada neljanda. Näidisena toome järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Geomeetrilise jada esimene liige on 1000, jada tegur on $\frac{1}{2}$. Kui suur on jada 11. liige?

Lahendus. Võttes geomeetrilise jada üldliikme valemis $a_1 = 1000$, $q = \frac{1}{2}$ ja $k = 11$, saame

$$a_{11} = 1000 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{11-1} = 1000 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{1000}{1024}$$

ehk taandades

$$a_{11} = \frac{125}{128}.$$

Ülesanne 2. Geomeetrilise jada esimene liige on 5, kaheksas liige $\frac{5}{2187}$. Kui suur on jada tegur?

Lahendus. Andmeiks on

$$a_1 = 5,\quad k = 8,\quad a_k = \frac{5}{2187};$$

otsitavaks on q. Asetades andmed geomeetrilise jada üldliikme valemisse, saame

$$\frac{5}{2187} = 5 \cdot q^{8-1},$$

seega

$$\frac{1}{2187} = q^7$$

ehk

$$q^7 = \frac{1}{2187}.$$

Logaritmides saame

$$7 \log q = -\log 2187,$$

millest

$$\log q = -\frac{\log 2187}{7}.$$

Logaritmide tabeli abil leiame

$$\log 2187 = 3{,}3398,$$

seega

$$\log q = -0{,}4771,$$

ehk

$$\log \frac{1}{q} = 0{,}4771,$$

millest

$$\frac{1}{q} = 3{,}000$$

ja

$$q = \tfrac{1}{3}.$$

Ülesanded.

164. Geomeetrilise jada esimene liige on 15, jada tegur on 2. Kui suur on jada 5. liige?

165. Geomeetrilise jada 1. liige on 6 ja 2. liige on 6,3. Kui suur on jada 10. liige?

166. Geomeetrilise jada esimene liige on 2,6, jada tegur on 1,75. Kui suur on 20. liige?

167. Leida geomeetrilise jada 32, 48, 72, ... kuues liige.

168. Leida geomeetrilise jada $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, ... kümnes liige.

169. Leida geomeetrilise jada $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{8}$, ... seitsmes liige.

170. On antud arvude jada, mille iga liige moodustab 25% eelnevast liikmest. Näidata, et see jada on geomeetriline jada. Kui suur on jada tegur?

171. On antud arvude jada, mille iga liige moodustab 120% eelnevast liikmest. Näidata, et need arvud moodustavad geomeetrilise jada. Kui suur on jada tegur?

172. Määrata geomeetrilise jada tegur, kui jada iga liige on 1% võrra suurem eelnevast.

173. Määrata geomeetrilise jada tegur, kui jada iga liige on 3% võrra väiksem eelnevast.

174. Õhukindlas anumas on 24 g õhku. Õhupumba iga tõmbega imetakse $\frac{1}{5}$ anumas olevast õhust. Mitu grammi õhku on jäänud anumasse 15 tõmbe järel?

175. Õhupumba kupli all on õhk normaalrõhumisel. Pumba iga tõmbega imetakse kupli alt 2% seal olevast õhust. Kui suur on õhurõhumine kupli all 20 tõmbe järel?

176. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelneva aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu 4. aastal, kui ta 1. aastal kasvab 25 cm võrra?

177. Tööstuse toodangut kavatsetakse suurendada iga aasta 15% võrra võrreldes eelneva aastaga. Mitme protsendi võrra suureneb tööstuse toodang viisaastaku jooksul?

178. Klaasplaat laseb läbi 96% temale langevast valguse hulgast, neelates ülejäänud osa. Kui suure osa temale langevast valguse hulgast laseb läbi kümnest niisugusest plaadist koosnev pakk?

179. Ühekordse klaasiga aken neelab 15% temale langevast valgusest. Mitu protsenti valgusest neelab kahe- ja kolmekordse klaasiga aken?

180. Vaadist, milles on 150 liitrit puhast piiritust, võetakse 10 korda järgemööda 5 liitrit piiritust, täites iga kord tühjaks jäänud ruumi veega. Kui palju puhast piiritust jääb veel vaati?

181. Näidata, et geomeetrilise jada mistahes liige on temale eelneva ja temale järgneva liikme keskmine võrdeline ehk geomeetriline keskmine.

182. Määrata geomeetrilise jada 10. liige, teades, et 9. liige on 6 ja 11. liige on 54.

183. Määrata geomeetrilise jada 23. liige, teades, et 22. liige on $\frac{8}{9}$ ja 24. liige $\frac{32}{81}$.

184. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada 1. liige on $\frac{1}{2}$ ja 5. liige on $\frac{1}{162}$.

185. Klaveri a-keele võnkearv on 435, a'-keele (järgmise kõrgema oktaavi a) võnkearv on 2 korda suurem. Vahepealsete keelte: ais, h, c', cis', d', dis', e', f', fis', g' ja gis' võnkearvud koos keelte a ja a' võnkearvudega moodustavad geomeetrilise jada. Leida selle jada ja c'-keele võnkearv.

186. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada 1. liige on 20 ja 7. liige on 312 500.

187. NSVL-is toodeti 1925. a. $3 \cdot 10^6$ t ja 1937. a. $18 \cdot 10^6$ t terast. Mitme protsendi võrra suurenes keskmiselt iga-aastane terase toodang võrreldes eelneva aastaga?

188. 20-st täiesti ühesugusest klaasplaadist koosnev pakk laseb läbi 60% esimesele plaadile langevast valguse hulgast. Kui suure osa temale langevast valguse hulgast laseb läbi üksik plaat?

189. Logaritme kasutamata määrata geomeetrilise jada tegur, kui jada 2. liige on 6 ja 11. liige on 118 098.

190. Geomeetrilise jada 5. liige on 9, sama jada 8. liige on 72. Anda jada esimesed kolm liiget.

191. Paigutada arvude 1 ja 2197 vahele kaks niisugust arvu, et tekiks geomeetriline jada.

192. Paigutada arvude $\frac{10}{243}$ ja 21 870 vahele 11 niisugust arvu, et tekiks geomeetriline jada.

193. Paigutada arvude 2 ja 17 vahele 3 niisugust arvu, et tekiks geomeetriline jada.

194. On antud geomeetriline jada 1, 2, 4, . . . Paigutada iga kahe järjestikuse liikme vahele üks arv nõnda, et antud arvud koos vahelepaigutatud arvudega moodustaksid jälle geomeetrilise jada.

195. Geomeetrilise jada esimene liige on 3 ja tegur on 2. Mitmes liige selles jadas on 3072?

196. Geomeetrilise jada esimene liige on $\frac{1}{16}$ ja tegur on 4. Mitmes liige selles jadas on 4096?

197. Mitmes liige geomeetrilises jadas 6, 12, 24, . . . on $3 \cdot 2^{16}$?

198. Mitmes liige geomeetrilises jadas 625, 250, 100, . . . on $2^{10} \cdot 5^{-6}$?

199. Mitu liiget geomeetrilises jadas 1000, 500, 250, . . . on suuremad kui $12\frac{1}{2}$?

200. Mitu liiget geomeetrilises jadas $\frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \frac{10}{27}, \ldots$ on suuremad kui 0,0001?

201. Õhurõhumise kohta pealpool maapinda kehtib seadus: 100-meetrisele tõusule vastab õhurõhumise vähenemine 1,2% võrra. Arvutada, kui suur on õhurõhumine 400 m kõrgusel, kui maapinnal valitseb normaalne rõhu-

mine. Arvutada, missuguses kõrguses on õhurõhumine 665 mm, kui maapinnal valitseb 750-millimeetrine rõhumine.

202. Radioaktiivse aine uraan X_1 aatomeist laguneb öö-päeva vältel 2,8%. Mitme öö-päeva vältel laguneb pool selle aine aatomitest?

203. Arvud 6, x ja 96 moodustavad antud järjekorras geomeetrilise jada. Määrata arv x.

204. Määrata arv a, kui arvud a—2, a ja $a + 4$ moodustavad geomeetrilise jada.

205. Määrata arvud x ja y, kui arvud 8, x, y ja 27 moodustavad geomeetrilise jada.

206. Missuguse arvu võrra peab suurendama arve 3, 5 ja 8, et saadused moodustaksid geomeetrilise jada?

207. Aritmeetilise jada esimene liige on 2. Jada esimene, neljas ja kümnes liige moodustavad geomeetrilise jada. Leida aritmeetilise jada vahe.

208. On antud kolm avaldist:

$$x + 3, \qquad x + 7, \qquad 4x - 2.$$

Määrata tähe x väärtus esiteks nõnda, et antud kolm avaldist moodustaksid aritmeetilise jada, ja teiseks nõnda, et antud kolm avaldist moodustaksid geomeetrilise jada.

209. Näidata, et geomeetrilise jada liikmete logaritmid moodustavad aritmeetilise jada.

§ 18. Geomeetrilise jada summa.

Geomeetrilise jada liikmete summat nimetatakse geomeetrilise jada summaks ehk geomeetriliseks reaks.

Summa tähisena kasutame tähte s; seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Kiiremini jõuame eesmärgile geomeetrilise jada summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks avaldame liikmed a_2, a_3, $\ldots$ a_n esimese liikme ja jada teguri kaudu ning korrutame saadud võrduse

$$s = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

kummagi poole teguriga q

$$sq = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame

$$sq - s = -a_1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + a_1q^n$$

ehk

$$s(q-1) = a_1q^n - a_1,$$

millest

$$s = \frac{a_1\,q^n - a_1}{q-1}$$

ehk

$$s = a_1\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Et geomeetrilise jada viimane liige a_n võrdub avaldisega a_1q^{n-1}, siis geomeetrilise jada summa valemis võib avaldise a_1q^n ehk $a_1q^{n-1} \cdot q$ asendada avaldisega a_nq. Nii saame summa valemi teisendi

$$s = \frac{a_nq - a_1}{q-1},$$

mida on sobiv kasutada, kui on antud jada esimene liige a_1, viimane liige a_n ja jada tegur q.

Ülesanne 1. Geomeetrilise jada esimene liige on 3 ja jada tegur on 2. Arvutada selle jada esimese 6 liikme summa.

Lahendus. Kasutades summa valemit

$$s = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

leiame, et antud jada summa

$$s = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3\,(2^6 - 1) = 3\,(64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

Ülesanne 2. Geomeetrilise jada esimene liige on 1, viimane liige on 243 ja jada tegur on 3. Arvutada selle jada summa.

Lahendus. Kasutades summa valemit

$$s = \frac{a_n q - a_1}{q - 1},$$

leiame, et antud jada summa

$$s = \frac{243 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = 364.$$

Kui geomeetrilise jada tegur on väiksem kui 1, siis nimetaja jada summa valemis on negatiivne. Sel puhul on kohane teisendada murdu lugeja ja nimetaja märkide muutmisega. Nii saame geomeetrilise jada summa valemitest järgmised teisendid

$$s = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ja

$$s = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q},$$

mida kasutatakse juhtudel, kui $q < 1$.

Ülesanne 3. Leida summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}.$$

Lahendus. Siin on $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ja $n = 11$; järelikult nõutav summa

$$s = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{10}} =$$

$$= 2 - \frac{1}{1024} = 1\frac{1023}{1024}.$$

Märkus. Geomeetrilise jada summa valemit ei saa rakendada ainult sel juhul, kui $q = 1$. Tõepoolest, sellel q väärtusel valemi parem pool saab kuju $a_1 \cdot \frac{0}{0}$, milles esinev sümbol $\frac{0}{0}$ peaks jagamise definitsiooni järgi tähendama arvu, mis nulliga korrutamisel annab nulli; et iga arvu korrutamisel nulliga saame nulli, siis ei ole sümbolil $\frac{0}{0}$ ühest tähendust ja seega puudub ühene tähendus ka korrutisel $a_1 \cdot \frac{0}{0}$.

Kõnesoleval erijuhul, kus $q = 1$, saame geomeetrilise jada summa arvutada otseselt. Tõepoolest, tehtud eeldusel on kõik geomeetrilise jada liikmed võrdsed esimese liikmega a_1, järelikult

$$s = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1;$$

et liikmeid on n, siis

$$s = na_1.$$

Ülesanded.

210. Leida geomeetrilise jada 3, 6, 12, . . . esimese kaheksa liikme summa.

211. Leida geomeetrilise jada esimese 5 liikme summa, kui jada algab arvuga 2 ja rea tegur on 3.

212. Leida geomeetrilise jada $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ esimese kümne liikme summa.

213. Geomeetrilise jada esimene liige on 7, jada tegur on $\frac{3}{2}$. Arvutada jada esimese 12 liikme summa.

214. Kui suur on summa $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$?

215. Hindu kuningas Šiiram oli nõnda vaimustatud malemängust, et avaldas nõusoleku maksta mängu leiutajale Sissa Ibn Dahir'ile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades, ja nimelt 1 tera malelaua 1. ruudule, $1 \cdot 2$ tera teisele, $1 \cdot 2 \cdot 2$ kolmandale, $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 hl sisaldab ligikaudu $1{,}6 \cdot 10^6$ tera ja kaalub ümmarguselt 70 kg; ühe kaubavaguni kandejõud on 17 tonni.

216. Mõned haigust tekitavad bakterid poolituvad iga poole tunni tagant. Mitu bakterit on organismis 24 tundi pärast nakatust, millega organismi sattus 10 bakterit?

217. Kummipall, langenud mingilt kõrguselt põrandale, põrkab tagasi ja tõuseb kõrgusele, mis on $\frac{1}{3}$ langemiskõrgusest. Kui pika tee on kulgenud 3 m kõrguselt langetatud pall, kui ta neljandat korda puudutab põrandat?

218. Puu kõrguse aastane juurdekasv on 85% eelmise aasta juurdekasvust. Kui palju kasvab puu kõrgus 5 aastaga, kui ta esimesel aastal kasvab 30 cm?

219. Leida geomeetrilise jada $\sqrt{2}$, $2\sqrt{8}$, ... esimese 8 liikme summa.

220. Leida geomeetrilise jada $2\sqrt{3}$, 6, ... esimese 6 liikme summa.

221. Leida jada $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, ... esimese 10 liikme summa.

222. Leida jada $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$, ... esimese $2n$ liikme summa.

223. Leida jada $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{3}$, 1, ... esimese 6 liikme summa.

224. 7-liikmelise geomeetrilise jada esimene liige on 1 ja viimane 64. Määrata jada tegur ja summa.

225. Geomeetrilise jada 4. liige on 6, 12. liige on 1536. Kui suur on selle jada esimese 11 liikme summa?

226. On antud geomeetrilise jada 1. liige a ja 5. liige u. Kui suur on selle jada esimese 5 liikme summa?

227. Teisendada avaldis $1 + x + x^2$ üksliikmeks.

228. Teisendada avaldis $a^2 + ab + b^2$ üksliikmeks.

229. Lihtsustada avaldis $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$.

230. Lihtsustada avaldis $ab + a^2b^3 + a^3b^5 + a^4b^7$.

231. Lihtsustada avaldis
$k + 1 + (k + 1)^2 + (k + 1)^3 + \ldots + (k + 1)^6$.

232. 6-liikmelise geomeetrilise jada summa on 252, jada tegur on 2. Leida jada 1. liige.

233. 5-liikmelise geomeetrilise jada summa on 1562, rea tegur on 5. Leida jada 1. liige.

234. Leida geomeetrilise jada 1. liige, kui jada tegur on $\frac{1}{2}$ ja 6 liikme summa on $47\frac{1}{4}$.

235. Määrata nelinurga nurgad, kui nad moodustavad geomeetrilise jada, mille tegur on 3.

§ 19. Lõpmatu alaneva geomeetrilise jada summa.

Vaatleme, kuidas muutub alaneva geomeetrilise jada väärtus, kui selles jadas võetakse üha rohkem liikmeid. Selleks teisendame geomeetrilise jada summa valemit järgmiselt:

$$s = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}.$$

Viimase avaldise liige $\frac{a_1}{1 - q}$ ei sisalda jada liikmete arvu n; seega ta jääb muutumatuks suuruse n kasvamisel. Seevastu teine liige $\frac{a_1 q^n}{1 - q}$ sisaldab tegurina astet q^n; seega suuruse n kasvamisel teine liige muutub.

Et alaneva geomeetrilise jada tegur q on absoluutväärtuselt väiksem kui 1, siis astendaja n kasvamisel aste q^n muutub üha väiksemaks. Seetõttu ka liige $\frac{a_1 q^n}{1 - q}$ hakkab üha vähem erinema nullist; ta saab kuitahes vähe erinevaks nullist, kui jada liikmete arv on võetud küllalt suur.

Seega küllalt suure liikmete arvu puhul alaneva geomeetrilise jada summa on kuitahes vähe erinev avaldise

$$\frac{a_1}{1 - q}$$

väärtusest, kus a_1 ja q tähendavad jada esimest liiget ja tegurit.

Jada, mille liikmete hulk on piiramatu — igale liikmele järgneb veel liikmeid —, nimetatakse lõpmatuks jadaks.

Et on võimatu üles kirjutada lõpmatu jada kõiki liikmeid, siis lõpmatut jada kirjutatakse tema esimeste liikmete abil ja nende järele kirjutatakse kolm punkti (mida loetakse: „ja nii edasi"). Nii tähendab kirjutis

$$2, 1, \tfrac{1}{2}, \ldots$$

lõpmatut alanevat geomeetrilist jada, mille esimene liige on 2 ja tegur on $\frac{1}{2}$.

Ülal saadud avaldist $\frac{a}{1-q}$ nimetatakse lõpmatu geomeetrilise jada summa väärtuseks, kui a ja q on jada esimene liige ja tegur.

Selles tähenduses kirjutatakse:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}, \text{ kui } |q| < 1.$$

Vasakul pool võrdusmärki seisvat kirjutist nimetatakse ka lõpmatuks geomeetriliseks reaks. Paremal pool võrdusmärki on selle rea väärtus, avaldatuna üksliikme kujul.

Näidis 1. Lõpmatu alaneva geomeetrilise jada

$$2,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ldots$$

summa on

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

Näidis 2. Perioodilist kümnendmurdu 3,5222... mõistetakse summana

$$3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots,$$

mille liikmed alates kolmandast moodustavad lõpmatu alaneva geomeetrilise rea esimese liikmega $\frac{2}{100}$ ja teguriga $\frac{1}{10}$.

Seega

$$3{,}5222\ldots = 3\tfrac{1}{2} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots =$$

$$= 3\tfrac{1}{2} + \frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{10}} = 3\tfrac{1}{2} + \frac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{10}} = 3\tfrac{1}{2} + \frac{2}{90} = 3\frac{47}{90}.$$

Ülesanded.

236. Arvutada lõpmatu geomeetrilise rea $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ väärtus.

237. Leida lõpmatu geomeetrilise jada 4, 2, 1, ... summa väärtus.

238. Leida lõpmatu geomeetrilise rea $12 + 6 + 3 + \ldots$ väärtus.

239. Arvutada rea $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$ väärtus.

240. Arvutada rea $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \ldots$ väärtus.

241. Teisendada rida $1 + \sin a + \sin^2 a + \ldots$ üksliikmeks.

242. Määrata järgmiste ridade väärtused:

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$
2. $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \ldots$
3. $5 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \ldots$
4. $a + \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots$
5. $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots$
6. $u - \frac{u}{1-u} + \frac{u}{(1-u)^2} - \ldots$

243. Arvutada rea $\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots$ väärtus.

244. Arvutada rea $\sqrt{5} + \sqrt{2{,}5} + \sqrt{1{,}25} + \ldots$ väärtus.

245. Missugusel tingimusel lõpmatu geomeetriline jada $\frac{x}{4}, \frac{4}{x}, \ldots$ on alanev jada?

Mis on sel puhul jada summa väärtus?

246. Missuguste nurga a väärtuste puhul lõpmatu geomeetriline rida $1 + \tan a + \tan^2 a + \ldots$ on avaldatav üksliikmena?

Mis on sel puhul selle rea väärtuseks?

247. Missugusel tingimusel on lõpmatu geomeetriline rida

$$\frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3} - \ldots$$

avaldatav üksliikme kujul?

Kui suur on sel puhul rea väärtus?

248. Missugusel tingimusel saab lõpmatut geomeetrilist rida

$$a - b + \frac{b^2}{a} - \ldots$$ teisendada üksliikmeks?

Avaldada sel puhul rea väärtus.

249. On antud ruut, mille diagonaal on d. Ehitatakse ruut, mille diagonaaliks on antud ruudu külg; ehitatakse kolmas ruut, mille diagonaaliks on teise ruudu külg jne. Arvutada kõikide eespool-nimetatud ruutude pindalade summa.

250. Võrdkülgse kolmnurga külg on a. Sellesse kolmnurka kujutatakse ring; kolmnurga ühte nurka kujutatakse ring, mis puudutab esimest ringi ja nurga haarasid; samasse nurka kujutatakse ring, mis puudutab teist ringi ja nurga haarasid, jne. lõpmatult. Arvutada, missuguse osa kolmnurga pindalast moodustab nende ringide pindalade summa.

251. Võrdhaarse kolmnurga aluse pikkus on a, haara pikkus on b. Kolmnurka joonestatakse ringid niiviisi, et esimene puudutab alust ja mõlemat haara, teine puudutab esimest ringi ja mõlemat haara, kolmas eelmist ringi ja mõlemat haara jne. lõpmatult. Leida kõigi sel viisil tekkivate ringide ümbermõõtude summa.

252. Arendada murd $\frac{16}{33}$ kümnendmurruks. Kui suur on geomeetrilise rea esimene liige ja tegur, kui seda kümnendmurdu vaadelda geomeetrilise reana?

253. Arendada murd $\frac{1}{37}$ kümnendmurruks. Kui suur on tekkinud geomeetrilise rea esimene liige ja tegur?

254. Kirjutada järgmised perioodilised kümnendmurrud harilikkude murdudena:

1. 0,444 ...
   0,666 ...
   0,999 ...

2. 0,121212 ...
   0,252525 ...
   0,030303 ...

3. 0,2111 ...
   0,4232323 ...
   0,25161616 ...

255. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on 20 ja jada tegur on $\frac{3}{4}$. Leida jada esimene liige.

256. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on $2\frac{1}{2}$ ja jada tegur on 0,2. Leida jada esimene liige.

257. Lõpmatu geomeetrilise rea väärtus on 6 ja esimene liige on 4. Kui suur on tegur?

258. Leida lõpmatu geomeetrilise jada tegur, kui jada esimene liige on 1 ja jada summa on 5.

259. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on $\frac{4}{9}$ ja jada tegur on 0,1. Avaldada jada üldliige tema kohanumbri kaudu. Kirjutada jada summa lõpmatu kümnendmurruna.

260. Lõpmatu geomeetrilise jada summa on $\frac{16}{99}$ ja jada tegur on 0,01. Avaldada jada üldliige tema kohanumbri kaudu. Kirjutada jada summa lõpmatu kümnendmurruna.

261. Kujutada arv 6 lõpmatu geomeetrilise jada summana, võttes jada teguriks $\frac{1}{3}$.

262. Arendada avaldis $\frac{1}{1-a}$ geomeetriliseks reaks, mille tegur on a. Missuguste arvu a väärtuste puhul on antud avaldis selle rea väärtuseks?

§ 20. Liht- ja liitintress.

Võõra kapitali kasutamise korral kapitali kasutaja maksab selle omanikule kasutamise eest tasu; seda tasu nimetatakse intressiks. Intress arvatakse võrdeliseks kasutatava kapitali suurusega ja võrdeliseks kasutamise kestusega.

Intressi arvutamise alused määratakse kindlaks kapitali omaniku ja kasutaja vahelises kokkuleppes. Tavali-

selt märgitakse selles, mitu protsenti kapitalist moodustab ü h e aasta intress.

Arvu, mis näitab, missuguse osa kapitalist moodustab ühe aasta intress, nimetatakse intressimääraks.

Seega väljendust „kapital on laenatud või hoiustatud intressimääral 7%" või ka väljendust „kapital kannab 7% intressi" tuleb mõista nii, et kapitali kasutaja maksab kapitali omanikule selle kapitali ü h e a a s t a s e kasutamise eest intressi 7% kapitali suurusest.

Intressi arvutamisel on üldiselt kombeks lugeda aastat võrdseks mitte 365 või 366 päevaga, vaid 360 päevaga; sel puhul on kuu mitte 31, 30, 28 või 29 päeva, nagu kalendris, vaid ikka 30 päeva. Aasta ümardamine 360 päevaks hõlbustab tunduvalt intressi arvutamist: ühe kuu intress on ikka täpselt $\frac{1}{12}$ aastaintressist, 20 päeva intress $\frac{1}{18}$ aastaintressist, 10 päeva intress $\frac{1}{36}$ aastaintressist jne.

Intressi tasumine võib toimuda mitmeti; näiteks võib intressi tasuda ette kapitali kogu kasutamisaja eest; intressi võib tasuda kokkulepitud tähtaegadel osade kaupa; intressi võib tasuda kapitali kasutusaja lõpul; intressi võib kindlate ajavahemikkude järel liita kapitaliga, mistõttu kapital järk-järgult suureneb. Esimesel kolmel juhul ütleme, et kapital kannab l i h t i n t r e s s i, viimasel juhul — l i i t i n t r e s s i. Seega

kapital kasvab lihtintressil, kui intress arvutatakse kogu kapitali kasvamise kestusel kapitali algväärtuse ehk a l g k a p i t a l i järgi;

kapital kasvab liitintressil, kui intress kindlate ajavahemikkude järel liidetakse kapitaliga ja seega igas niisuguses ajavahemikus intress arvutatakse s e l l e väärtuse järgi, milleni kapital ajavahemiku alguseks oli kasvanud.

Kapitali liitintressilisel kasvamisel intressi liitmine kapitaliga toimub tavaliselt iga aasta lõpul.

Kapitali laene ja hoiulseismisi kestusega alla üht aastat nimetatakse harilikult lühiajalisteks, kapitali laene ja hoiulseismisi kestusega üle ühe aasta — pikaajalisteks.

Kapitali kasvamine lihtintressil esineb kõigi lühiajaliste laenude ja kapitali lühiajaliste hoiulseismiste puhul; kapitali kasvamine liitintressil esineb tavaliselt pikaajaliste laenude ja kapitali pikaajaliste hoiulseismiste puhul.

§ 21. Kapitali kasvamine lihtintressil.

Ülesanne 1. Kapital k rubla kannab aastas $p\%$ intressi. Kui suureks kasvab see kapital n aasta jooksul?

Lahendus. Kapitalilt saadav aastaintress on $k \cdot \frac{p}{100}$ rubla; seega n aasta intress on $k \cdot \frac{n \cdot p}{100}$ rubla. Järelikult kapitali suurus n-nda aasta lõpuks on rublades

$$k + k \cdot \frac{np}{100};$$

tähistades otsitavat tähega K, saame

$$K = k\left(1 + \frac{np}{100}\right).$$

Ülesanne 2. Kapital k rubla kannab aastas $p\%$ intressi. Kui suureks kasvab kapital n päeva jooksul?

Lahendus. Kapitalilt saadav

aastaintress on rublades $k \cdot \frac{p}{100}$,

ühe päeva intress „ „ $k \cdot \frac{p}{360 \cdot 100}$,

n päeva intress „ „ $k \cdot \frac{n \cdot p}{360 \cdot 100}$.

Järelikult kapitali suurus n-nda päeva lõpuks on rublades

$$k + k \cdot \frac{n \cdot p}{360 \cdot 100}$$

ehk

$$k\left(1 + \frac{np}{36000}\right).$$

Tähistades kapitali lõppväärtuse tähega K, saame ülesande vastuse kujul

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right).$$

Kui ülesannete 1 ja 2 lahendamisel saadud valemeis esinevast neljast suurusest k, p, n ja K on kolm suurust teada, siis neljanda saame ikka leida. Et need suurused esinevad kõnesolevais valemeis esimesel astmel, siis nõuab nende määramine antud suuruste järgi vaid lineaarvõrrandi lahendamist. Näiteina lahendame järgmised 2 ülesannet.

Ülesanne 3. Mitme päeva jooksul kapital k rubla, kandes $p\%$ intressi, kasvab summaks K rubla?

Lahendus. Eelnevast on teada et

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right)$$

ehk

$$K = k + \frac{knp}{36000};$$

seega

$$K - k = \frac{knp}{36000}$$

ehk

$$knp = 36000\,(K - k)$$

ja siit otsitav päevade arv

$$n = \frac{36000\,(K-k)}{kp}.$$

Ülesanne 4. Missugune kapital, kandes 6% intressi, kasvab 60 päeva jooksul summani 505 rubla?

Lahendus. Märgime otsitava kapitali tähega k. Varemini tuletatud valemist

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right)$$

leiame, et

$$k = \frac{K}{1 + \frac{np}{36000}}.$$

Asendades siin sümbolid K, n ja p nende antud väärtustega, saame

$$k = \frac{505}{1 + \frac{60 \cdot 6}{36000}}$$

ehk

$$k = \frac{505}{1 + \frac{1}{100}} = \frac{505 \cdot 100}{101} = 500.$$

Vastus. Otsitav kapital on 500 rubla.

Ülesanded.

263. Töölise hoiuarve on 31. detsembril 844 rubla. Summa seisab puutumata ning hoiukassa maksab $3\frac{1}{2}\%$ intressi. Kui suur summa seisab aasta pärast töölise nimel?

264. Järgmistes näidetes on antud kapital, intressimäär ja kapitali kasvamise kestus. Arvutada intress.

	Kapital rublades	Intressimäär	Aeg kuudes
1.	860	4 %	8
2.	675	$5\frac{1}{2}\%$	6
3.	2370	3,6%	4
4.	840	$2\frac{1}{2}\%$	11
5.	4860	4,2%	3

265. Järgmistes näidetes on antud kapital, intressimäär ja kapitali kasvamise kestus. Arvutada intress.

	Kapital rublades	Intressimäär	Aeg päevades
1.	128	$6\frac{2}{5}\%$	125
2.	576	$7\frac{1}{2}\%$	256
3.	4260	$4\frac{3}{4}\%$	200
4.	785	$2\frac{1}{3}\%$	40
5.	96,40	3 %	320

266. Järgmistes näidetes on antud hoiuletoodud summa, hoiuletoomise päev ja intressimäär. Arvutada aasta lõpuks kogunenud intress ja hoiusumma suurus järgmise aasta alguses.

	Summa rublades	Hoiuletoomise päev	Intressimäär
1.	240	1. VII	4 %
2.	585	15. X	3 %
3.	2954	10. V	$4\frac{1}{2}$ %
4.	3640	6. III	$2\frac{3}{4}$ %
5.	7654	20. VIII	$3\frac{1}{3}$ %

267. Teenistuja saab pangalt 2250 rubla laenu elamu taastamiseks $1\frac{1}{2}$ aasta peale 2 %-ga. Kui suur summa tuleb tal tähtajal pangale tasuda?

268. Töölisel on aasta algul töö-hoiukassas hoiul 2650 rubla. 24. aprillil ta võtab sellest summast 850 rubla välja. Hoiukassa maksab 3% intressi. Kui suur summa seisab töölisel hoiul järgmise aasta alguseks?

269. Kui suur hoiusumma annab 49 rubla intressi, olles hoiul 4 kuud $3\frac{1}{2}$ %-ga?

270. Kui suur on hoiusumma, mis olles 6 kuud 4 %-ga hoiul, kasvas 6120 rubla suuruseks?

271. Hoiusummale, mis oli 2%-ga 25. oktoobrist aasta lõpuni hoiukassas, arvas hoiukassa 23,40 rubla intressi juurde. Kui suur oli see hoiusumma järgneva aasta alguses?

272. Uusmaasaaja tasus 16. septembril 6070 rublaga sama aasta 16. veebruaril tehtud laenu ja selle intressi. Kui suur oli laen, kui intressi võeti 2% ?

273. Mitme protsendiga on hoiul 4200 rubla, mis aasta vältel kasvab 4326 rublaks?

274. Mitmel protsendil kasvab 4800 rubla 90 päeva jooksul 4827 rublaks?

275. Kooperatiivi vaba raha 2700 rubla oli 12. juunist 2. septembrini hoiukassas hoiul ja kasvas selle aja vältel 2721 rublaks. Mitu protsenti maksis hoiukassa intressi?

276. Missuguse aja vältel kasvab 2880 rubla, olles hoiul $2\frac{1}{2}$ %-ga, 2904 rublaks?

277. Missuguse aja vältel kasvab 900 rubla, olles hoiul $3\frac{1}{2}$ %-ga, 911,25 rublaks?

278. 22. jaanuaril anti 585 rubla 3 %-ga hoiule. Mis kuupäevaks see summa kasvab 600 rublaks?

§ 22. Kapitali kasvamine liitintressil.

Ülesanne. Kui suure summani kasvab kapital k rubla n aasta jooksul, kui intressimääraks on $p\%$ ja intress liidetakse kapitaliga iga aasta lõpul?

Lahendus. Tähistame kapitali lõppväärtuse rublades tähega K. Ühe aasta jooksul kasvab summa k rubla intressimääral $p\%$ summani rubla

$$k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

sellest näeme, et kapitali suurus aasta lõpul saadakse kapitali väärtusest aasta alguses korrutamisel teguriga $1+\frac{p}{100}$. Tähistame selle teguri lühiduse mõttes tähega q. Öeldu põhjal kasvab k rubla

1. aasta lõpuks summani rubla kq,
2. „ „ „ „ $kq \cdot q = kq^2$,
3. „ „ „ „ $kq^2 \cdot q = kq^3$,

. . . . . .

n. „ „ „ „ $kq^{n-1} \cdot q = kq^n$.

Asendades q tema väärtusega $1 + \frac{p}{100}$, saame

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Näidis. Kapital 1000 rubla, kasvades intressimääral 5%, muutub 20 aastaga lihtintressi kandes summaks rubla

$$1000 \cdot \left(1+\frac{5 \cdot 20}{100}\right)= 2000.$$

Sama kapital 1000 rubla, kasvades intressimääral 5%, muutub 20 aastaga liitintressi kandes summaks rubla

$$1000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^{20} = 1000 \cdot 1{,}05^{20} =$$
$$= 1000 \cdot 2{,}654 = 2654.$$

Kui valemis

$$K = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

esinevast neljast suurusest

$$k,\ p,\ n,\ K$$

kolm on teada, siis saame arvutada neljanda. Selle selgitamiseks lahendame järgmised 2 ülesannet.

Ülesanne 1. Kui suure summa peab paigutama hoiule intressimääral 4%, et ta 20 aasta jooksul kasvaks 2000 rubla suuruseks?

Lahendus. Rakendades varemini tuletatud valemit

$$K = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

saame andmeil

$$K = 2000,\ p = 4,\ n = 20,$$

et

$$2000 = k\left(1+\frac{4}{100}\right)^{20}$$

ehk

$$2000 = k \cdot 1{,}04^{20},$$

millest

$$k = \frac{2000}{1{,}04^{20}} = \frac{2000}{2{,}191} \approx 913.$$

Seega peab paigutama panka summa 913 rubla.

Ülesanne 2. Mitme aasta jooksul kapital kasvab kahekordseks, kui intressimääraks on 3%?

Lahendus. Antud juhul $K = 2k$ ja $p = 3$. Rakendades varemini tuletatud valemit

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

saame

$$2k = k\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n,$$

seega

$$2 = 1{,}03^n$$

ja

$$\log 2 = n \cdot \log 1{,}03,$$

millest

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}3010}{0{,}0128} \approx 23{,}5.$$

Seega kapital kahekordistub ümmarguselt 24 aastaga.

Ülesanded.

279. 100-rublane summa antakse aasta alguses hoiule. Hoiukassa maksab sellelt 2% intressi aastas, mis iga aasta lõpul lisatakse hoiusummale. Arvutada, kui suureks kasvab hoiusumma 1., 2., 3., 4. ja 5. hoiuaasta lõpuks. Arvutused teostada otseselt.

280. Kapital 4000 rubla kannab 4% liitintressi. Kui suureks kasvab kapital 15 aasta jooksul?

281. Kui suureks kasvab 5800 rubla suurune hoius 8 aasta jooksul, kandes 3% liitintressi?

282. Kui suureks kasvab 2600 rubla suurune hoius 10 aasta jooksul, kandes $2\frac{1}{2}$ % liitintressi?

283. Missuguseks summaks oleks kasvanud praeguseks ajaks 1 $ liitintressil 4%-ga aastas, kui ta oleks pandud kasvama Ameerika avastamisel (a. 1492)?

284. Kui suur summa, kandes $3\frac{1}{2}$% liitintressi, kasvab 20 aastaga 1000 rubla suuruseks summaks?

285. Kui suur hoiusumma, kandes 4% liitintressi, kasvab 6 aastaga 1000 rubla võrra?

286. Hoiukassasse on makstud 8 aasta eest summa 172 rubla. Vahepeal on see summa kasvanud 226,5 rublaks. Mitu protsenti liitintressi maksab hoiukassa?

287. Hoius 2500 rubla, kandes liitintressi, kasvas 17 aasta jooksul 3500 rubla suuruseks summaks. Kui suur oli intressimäär?

288. Moskvas oli 1931. a. 2,8 milj. elanikku. 1939. a. tõusis Moskva elanike arv 4,137 miljonile. Kui suur on iga-aastase juurdekasvu %?

289. Missuguse intressimäära puhul kapital kasvab 35 aasta jooksul kahekordseks, kui kasvamine toimub liitintressil?

290. Mitu protsenti liitintressi kannab kapital, kui ta 28 aasta jooksul kasvab kolmekordseks?

291. Mitme aasta jooksul kasvab 786 rubla suurune hoius, kandes $3\frac{1}{2}$ % liitintressi, 1000 rubla suuruseks?

292. Tööstuse sisseseade maksis uuena 150 000 rubla. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade vananemise ja kulumise arvel 8% eelkäivast väärtusest. Kui suurena arvestatakse sisseseade väärtust 10 aasta pärast?

293. Vabriku sisseseade maksis uuena 225 000 rubla. Kui kõrgelt tuleb hinnata vabriku sisseseadet 15 aasta pärast, kui iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade kulumise arvel 7% sisseseade eelmise aasta väärtusest?

294. Puumaja väärtus väheneb iga aastaga 2% võrra eelmise aasta väärtusest. Kui suur on maja väärtus 10 aasta pärast, kui ta praegune väärtus on 200 000 rubla?

295. Tööstuse sisseseade väärtus väheneb iga aastaga 7% võrra. Mitme aastaga on sisseseade väärtus langenud poolele esialgsest väärtusest?

Peatükk III.

Ühendid ja binoomrida.

§ 23. Ühendid.

Nii looduses kui inimtegevuse kõigil aladel näeme toimuvat ühtede esemete ühendamist teistega. Kõnelemisel ühendatakse üksikud häälikud sõnadeks ja sõnad lauseteks. Kirjutamisel ühendatakse üksikud tähed sõnakujudeks ja numbrid arvkujudeks. Arvutamisel ühendatakse üksikud arvud nende summaks, vaheks, korrutiseks ja jagatiseks. Algebras ühendatake üksikud sümbolid avaldisteks ja võrdusteks, geomeetrias punktid ja sirged kujunditeks. Looduses toimub keemiliste elementide ühinemine keemilisteks ühenditeks.

Asudes vaatlema kõigi niisuguste ühendamiste üldisi, matemaatilisi omadusi, nimetame ühendatavaid esemeid e l e m e n t i d e k s ja nende ühendamise tulemusi ü h e n d i t e k s. Üksikuid elemente tähistame tähtedega, näiteks *a*, *b*, *c*, . . . ja nende ühendeid tähistame nagu korrutisi *ab*, *ac*, *ba*, *abc*, *bca*, . . .

Ülesanded.

296. Koostada kõik võimalikud sõnakujud tähtedest *a*, *s*, *i*. Mitu sõnakuju saab neist moodustada?

297. Moodustada kõik väärtuselt erinevad kahe teguri korrutised, milledes teguritena esinevad suuruste *a*, *s* ja *i* esimesed astmed. Mitu niisugust korrutist on võimalik moodustada?

298. Koostada õpilaste X, Y ja Z kõik võimalikud järjestused rivis.

299. Koostada numbritest 1, 2, 3 ja 4 kõik võimalikud kolmekohalised arvkujud, milles ükski numbritest ei kordu. Mitu niisugust arvkuju saab koostada?

300. Koostada arvudest 1, 2, 3 ja 4 kõik võimalikud korrutised, milledes teguritena esinevad nende arvude esimesed astmed kolmekaupa. Mitu suuruselt erinevat korrutist on võimalik saada?

301. Võtta tasapinnal 5 punkti nii, et nende hulgas ei leidu kolme punkti, mis asetseks ühel ja samal sirgel, ja joonestada kõik võimalikud sirged läbi nende punktide. Mitu sirget saab joonestada?

302. Võtta tasapinnal 4 punkti nii, et need ei asetse ühel ja samal ringjoonel, ja joonestada kõik võimalikud ringjooned, mida need punktid määravad. Mitu ringjoont on võimalik joonestada?

On olemas ühendeid, millede puhul võib muuta nende elementide järjestust, ilma et nad ise seejuures sisuliselt muutuksid. Nii ei muutu korrutise väärtus, kui muudetakse tegurite järjestust: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Samuti ei muutu summa väärtus, kui muudetakse liidetavate järjestust: $2 + 4 + 7 = 2 + 7 + 4$. Seepärast kaht sedaliiki ühendit, kui nad sisaldavad ühtesid ja samu elemente erinevates järjestustes, loetakse üheks ja samaks ühendiks. Et näiteks üks korrutis erineks teisest, on tarvilik, et nad erineksid vähemalt ühe teguri poolest.

Ühendeid, mida loetakse üksteisest erinevaiks ainult siis, kui nad erinevad vähemalt ühe elemendi poolest, nimetatakse kombinatsioonideks.

Kommutatiivse tehtega koostatud avaldised, nagu summa ja korrutis, on kombinatsioonid.

Teiselt poolt on olemas ühendeid, mida nende iseloomust tingitult tuleb lugeda üksteisest erinevaiks ka siis, kui nad erinevad ainult oma elementide järjestuse poolest. Niisuguseiks ühendeiks on näiteks kahe arvu vahe ja jagatis; muutes arvude järjestust vahes või jagatises, muutub ka nende väärtus: $5 - 3 \neq 3 - 5$, samuti $5 : 3 \neq 3 : 5$. Samuti muutub arvkuju tähendus, kui muuta tema numbrite järjestust: $19 \neq 91$.

Ühendeid, mida loetakse üksteisest erinevaiks, kui nad erinevad elementide poolest või ka ainult nende järjestuse poolest, nimetatakse variatsioonideks.

Mittekommutatiivse tehtega koostatud avaldised, nagu vahe ja jagatis, on variatsioonid.

Ülesanded.

303. Kumba ühendite liiki kuuluvad Morse'i tähestiku tähed? Missugustest elementidest nad koosnevad?

304. Mis liiki ühendid on numbritega 1, 2 ja 4 kirjutatud arvkujud?

305. Mis liiki ühendid on arvudest 1, 2 ja 4 kahekaupa moodustatud summad, nagu $1 + 2$, $1 + 4$, $2 + 4$ jne.?

306. Missugusesse ühendite liiki kuulub igaüks järgmistest avaldistest:

1.	$2(a + b)$	4.	$a - b$	7.	$a : b$	10.	$\sqrt[b]{a}$
2.	$2a + b$	5.	$(a - b)^2$	8.	$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$	11.	$a^{\log b}$
3.	$\sin(a + b)$	6.	$\cos(a - b)$	9.	a^b	12.	$\log_b a$

§ 24. Variatsioonid.

Olgu antud 3 elementi a, b ja c. Moodustame nende kõik võimalikud variatsioonid, s. o. ühendid, mis üksteisest võivad erineda nii elementidelt kui ka nende järjestuselt. Elemente endid võime vaadelda kui variatsioone, milles elemendid esinevad ühekaupa.

Seega antud elementidest saame moodustada 3 variatsiooni ühekaupa:

$$a,\ b,\ c,$$

6 variatsiooni kahekaupa:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

ja 6 variatsiooni kolmekaupa:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Tuletame nüüd valemi, mis võimaldab leida, mitu variatsiooni on võimalik moodustada mingist arvust elementidest, ühendades neid ühe-, kahe-, kolme- jne. kaupa. Kõigi variatsioonide arvu, mis on võimalik moodustada n elementidest, ühendades neid m-kaupa ($m \leqslant n$), tähistame sümboliga V_n^m (loe: V n-ist m-kaupa).

Olgu antud n elementi: $a, b, c, d, \ldots g, h$. Elemente võime vaadelda kui nende variatsioone ühekaupa. Seega saab n elementidest n variatsiooni ühekaupa ehk

$$V_n^1 = n.$$

Ühendame nüüd antud elemendid variatsioonideks kahekaupa. Selleks ühendame esmalt elemendiga a kord b, kord c, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n-1$ elemendist. Nii saame $n-1$ variatsiooni kahekaupa, mille esimeseks elemendiks on a. Seejärel ühendame elemendiga b kord a, kord c, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n-1$ elemendist. Nii saame jälle $n-1$ variatsiooni kahekaupa, kõigil esimeseks elemendiks b. Ühendades nii iga elemendi iga elemendiga ülejäänud $n-1$ elemendist, saame kokku järgmised variatsioonid:

n rida	$ab,\ ac,\ ad,\ldots\ ag,\ ah$	($n-1$ variatsiooni),
	$ba,\ bc,\ bd,\ldots\ bg,\ bh$	($n-1$ „),
	$ca,\ cb,\ cd,\ldots\ cg,\ ch$	($n-1$ „),
	.....	.....
	$ga,\ gb,\ gc,\ldots\ldots\ gh$	($n-1$ „),
	$ha,\ hb,\ hc,\ldots\ldots\ hg$	($n-1$ „).

Et kõiki elemente on n ja et ühe ning sama elemendiga algavaid variatsioone kahekaupa on $n - 1$, siis n elemendist kahekaupa ühendatud elementide variatsioonide koguarv on $n(n-1)$ ehk

$$V_n^2 = n(n-1).$$

Nii on näiteks $V_3^2 = 3 \cdot (3—1) = 3 \cdot 2 = 6$ nagu selgus juba eespoolgi.

Ühendame nüüd antud elemendid variatsioonideks kolmekaupa. Selleks ühendame esmalt elementide a ja b variatsiooniga ab kord c, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n - 2$ elemendist. Nii saame $n - 2$ variatsiooni kolmekaupa, mis kõik algavad variatsiooniga ab. Seejärel ühendame variatsiooniga ac kord b, kord d jne., s. o. iga elemendi ülejäänud $n - 2$ elemendist. Nii saame $n - 2$ variatsiooni kolmekaupa, mis kõik algavad variatsiooniga ac. Nii ühendades iga kahekaupa moodustatud variatsiooniga iga elemendi ülejäänud $n - 2$ elemendist, saame järgmised variatsioonid kolmekaupa:

$n(n-1)$ rida

abc, abd,... abg, abh	($n-2$ variatsiooni),
acb, acd,... acg, ach	($n-2$ „),
adb, adc, adg, adh	($n-2$ „),
.....	.....
hga, hgb, ...	(n — 2 „).

Et kahekaupa variatsioone on $n(n-1)$ ja et ühe ja sama kahekaupa variatsiooniga algavaid kolmekaupa variatsioone on $n - 2$, siis n elemendist kolmekaupa moodustatud variatsioonide koguarv on $n(n-1)(n-2)$ ehk

$$V_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Nii on näiteks

$$V_3^3 = 3(3-1)(3-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

nagu nägime juba eespoolgi.

Analoogiliselt võib näidata, et

$$V_n^4 = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3),$$

$$V_n^5 = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$$

ja üldiselt

$$V_n^m = n(n-1)\,(n-2)\ldots\left[n-(m-1)\right].$$

Selle valemi võime sõnastada järgmiselt:

Variatsioonide arv n elemendist m-kaupa võrdub m järjestikuse loomuliku arvu korrutisega, milledest suurim on n.

Näidis 1. Leiame, mitmel erineval viisil on võimalik 7 kandidaadist määrata 4 isikut neljale erinevale ametikohale.

Seame ametikohad mingisse kindlasse järjekorda. Siis nende täitmise võimalused kujutavad endist kandidaatide ühendeid, milles kandidaatide järjestus on oluline, seega need ühendid on variatsioonid. Oma küsimusele vastuse saamiseks peame leidma variatsioonide arvu 7 elemendist 4-kaupa

$$V_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

Seega saab 7 kandidaadist 4 isikut paigutada neljale erinevale ametikohale 840 erineval viisil.

Näidis 2. Klassis on 11 eri õppeainet ja 6 eri õppetundi päevas. Leiame, mitmel viisil on võimalik koostada päevast tunniplaani.

Kõik võimalikud klassitundide jaotused päevas esitavad variatsioone 11 elemendist 6-kaupa. Seega klassi päevast tunniplaani on võimalik koostada V_{11}^6 ehk $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ ehk 332 640 erineval viisil.

Ülesanded.

307. Koostada elementide x, y ja z kõik võimalikud variatsioonid 2 elemendi kaupa.

308. Koostada elementide a, b, c ja d kõik võimalikud variatsioonid 2 elemendi kaupa.

309. Koostada elementide a, b, c ja d kõik võimalikud variatsioonid 3 elemendi kaupa.

310. Mitu kahekohalist arvkuju on võimalik kirjutada numbritega 1, 2, 3, 4 ja 5 nii, et iga number esineks arvkujus ainult üks kord?

311. Presiidium koosneb 10 isikust. Nad valivad endi seast esimehe, esimehe asetäitja ja sekretäri. Mitmel viisil on võimalik teostada valimist?

312. Mitmel viisil on võimalik ühe oktaavi helisid ühendada kolmkõlaks?

313. Arvutada V_5^5, V_6^4, V_7^4 ja V_8^3.

314. Lahendada võrrand $V_x^2 = 8x$.

315. Leida niisugune elementide arv, mille 20-kordne võrdub nendest elementidest 3-kaupa moodustatud variatsioonide arvuga.

316. Lahendada võrrand $V_x^3 = \frac{5}{12} V_{x+2}^3$.

§ 25. Permutatsioonid.

Variatsioonide eri liigi moodustavad variatsioonid, mis sisaldavad kõiki antud elemente ja seetõttu ei erine üksteisest elementidelt, vaid ainult nende järjestuselt. Need on variatsioonid n elemendist n-kaupa. Niisuguseid variatsioone nimetatakse permutatsioonideks. Näiteks elementide a ja b permutatsioonid on nende ele-

mentide variatsioonid kahekaupa: *ab* ja *ba*, ning kolme elemendi *a*, *b* ja *c* permutatsioonid on nende variatsioonid kolmekaupa: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* ja *cba*.

Kõigi permutatsioonide arvu, mis on võimalik moodustada n elemendist, tähistame sümboliga P_n (loe: P n-ist).

n elemendi permutatsioonide arv võrdub n elemendi n-kaupa moodustatud variatsioonide arvuga

$$P_n = V_n^n.$$

Seega permutatsioonide arvu jaoks saame valemi

$$P_n = n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ehk

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

n elemendi permutatsioonide arv võrdub esimese n loomuliku arvu korrutisega.

Esimese n loomuliku arvu korrutist nimetatakse arvu n faktoriaaliks ja tähistatakse sümboliga $n!$ loe: n faktoriaal). Seepärast võib permutatsioonide arvu valemit kirjutada ka kujul

$$P_n = n!$$

Näidis 1. Leiame, mitmel erineval viisil on võimalik moodustada rivi 6 õpilasest.

Et üksikud rivistused esitavad ühtede ja samade õpilaste ümberjärjestusi, siis need ühendid on permutatsioonid. Seega kõiki võimalikke viise rivi moodustamiseks 6 õpilasest on

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ülesanded.

317. Koostada elementide x, y ja z kõik võimalikud permutatsioonid.

318. Koostada elementide p, q, r ja s kõik võimalikud permutatsioonid.

319. Mitmel viisil on võimalik moodustada rivi 5 õpilasest?

320. Mitmel viisil on võimalik jaotada 7 töölist 7-le eri töökohale?

321. Arvutada P_8 ja P_9.

322. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1.	2.	3.
$2!$	$2 \cdot 3!$	$3! + 4!$
$3!$	$(2 \cdot 3)!$	$(3 + 4)!$
$4!$	$\frac{6!}{2}$	$\frac{8!}{6!}$
$5!$	$\left(\frac{6}{2}\right)!$	$\frac{9!}{4! \cdot 5!}$

323. Arvutada logaritmide abil 15!

§ 26. Kombinatsioonid.

Kui elementide *a, b* ja *c* kahekaupa moodustatud variatsioonidest

ab, ac, ba, bc, ca, cb

valime välja need ühendid, mis üksteisest erinevad vähemalt ühelt elemendilt, siis saame elementide *a, b* ja *c* kahekaupa moodustatud k o m b i n a t s i o o n i d. Need on näiteks

ab, ac, bc.

Moodustame nüüd iga üksiku kombinatsiooni elementide kõik võimalikud permutatsioonid

ab ac bc
ba ca cb .

Nii saame elementide *a, b* ja *c* kõik võimalikud ühendid, mis erinevad üksteisest kas elementidelt või nende järjestuselt, — need ühendid on elementide *a, b* ja *c* kõik võimalikud variatsioonid.

Sama mõttekäiku võime rakendada mistahes elementide arvu puhul. Selle mõttekäigu tulemust võime lühidalt väljendada lausega:

Kombinatsioonides elemente permuteerides saame variatsioonid.

Tähistame n elemendi m-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu sümboliga C_n^m ja tuletame selle arvu valemi.

Olgu n elemendist moodustatud kõik võimalikud kombinatsioonid m-kaupa. Et elementide arv kõigis kombinatsioonides on m, siis iga kombinatsiooni elementidest saab moodustada P_m permutatsiooni. Kõik need permutatsioonid kokku moodustavad antud elementide kõik võimalikud variatsioonid m-kaupa. Seega variatsioonide arv V_n^m võrdub kombinatsioonide arvu C_n^m ja permutatsioonide arvu P_m korrutisega

$$V_n^m = C_n^m \, P_m .$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga P_m, saame kombinatsioonide arvu valemi

$$C_n^m = \frac{V_n^m}{P_m}$$

ehk, asendades sümboli V_n^m ja P_m nende avaldistega,

$$C_n^m = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}.$$

Murdu

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$$

tähistatakse lühidalt sümboliga $\binom{n}{m}$ (loe: „n üle m-i“). Seega võime kirjutada, et

$$C_n^m = \binom{n}{m}.$$

Edaspidi kasutame sümboli C_n^m asemel lihtsamat sümbolit $\binom{n}{m}$.

Nii kirjutame näiteks, et 4 elemendi kahekaupa moodustatud kombinatsioonide arv on

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

ja 5 elemendi neljakaupa moodustatud kombinatsioonide arv

$$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

Näidis 1. Moodustame elementide *a, b, c, d, e* ja *f* kõik võimalikud kombinatsioonid kolme elemendi kaupa.

Et kombinatsioonides elementide järjestus pole oluline, siis võime valida mingi kindla järjestuse, milles esitame elemente üksikutes kombinatsioonides. Selleks sobib see järjestus, milles elemendid on antud. Võttes esimesed kolm elementi antud järjestuses, saame esimese kombinatsiooni *abc*. Kõik järgnevad kombinatsioonid moodustame nii, et varemsaadud kombinatsioonides esinevad elemendid järk-järgult asendame neile antud elementide reas järgnevate elementidega.

Asendades kombinatsiooni *abc* viimase elemendi *c* järk-järgult elementidega *d, e* ja *f,* saame kõik kombinatsioonid, milles esinevad elemendid *a* ja *b,* — nad moodustavad alltoodud tabeli 1. veeru.

abc			
abd acd	*bcd*		
abe ace ade	*bce bde*	*cde*	
abf acf adf aef	*bcf bdf bef*	*cdf cef*	*def*

Nüüd moodustame kõik puuduvad kombinatsioonid, milles esinevad elemendid *a* ja *c*. Selleks asendame 1. veeru

kombinatsioonides, alates teisest, elemendi *b* elemendiga *c*. Nii saame tabeli 2. veeru.

Et saada kõik puuduvad kombinatsioonid, milles esinevad elemendid *a* ja *d*, asendame 2. veeru kombinatsioonides, alates teisest, elemendi *c* elemendiga *d*. Nii saame tabeli 3. veeru.

Asendades 3. veeru teises kombinatsioonis elemendi *d* elemendiga *e*, saame ainsa veel puuduva kombinatsiooni, milles esinevad *a* ja *e*. Nii oleme saanud kõik kombinatsioonid, milles esineb element *a*, — nad moodustavad tabeli 1. osa (1., 2., 3. ja 4. veerg).

Nüüd moodustame kõik puuduvad kombinatsioonid, milles esineb element *b*. Selleks asendame tabeli 1. osa kombinatsioonides, alates 2. veerust, elemendi *a* elemendiga *b*. Nii saame tabeli 2. osa (5., 6. ja 7. veerg).

Asendades tabeli 2. osa kombinatsioonides, alates teisest veerust, elemendi *b* elemendiga *c*, saame kõik puuduvad kombinatsioonid, milles esineb element *c*, — nad moodustavad tabeli 3. osa (8. ja 9. veerg).

Asendades tabeli 3. osa teise veeru kombinatsiooni elemendi *c* elemendiga *d*, saame ainsa veel puuduva kombinatsiooni, milles esineb element *d*.

N i i oleme saanud k õ i k nõutavad kombinatsioonid. Saadud kombinatsioonide hulgas on ka kõik kombinatsioonid, milles esinevad elemendid *e* ja *f*. Tõesti, kui tahaksime veel moodustada mingi kombinatsiooni, milles esineb üks neist või mõlemad, siis teise ja kolmanda elemendina peaksime nendega ühendama veel kas *a*, *b*, *c* või *d*, kuid kõik kombinatsioonid nende elementidega on juba moodustatud. Üldse saime 20 kombinatsiooni. Sama arvu saame ka valemist

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \quad 2 \cdot 3} = 20.$$

Näidis 2. Leiame, mitmel viisil on võimalik valida 7 kandidaadist 4 isikut ühele ja samale ametile.

Et isikud valitakse ühele ja samale ametile (näiteks vedurijuhtideks), siis valitavate järjestus ühendites pole oluline. Seega need ühendid on kombinatsioonid ja nende arv on

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Näidis 3. Mitu suuruselt erinevat korrutist on võimalik moodustada arvudest a, b, c ja d?

Et korrutamise tehe on kommutatiivne, s. o. et korrutise suurus ei olene tegurite järjestusest, siis nõutavad ühendid on kombinatsioonid. Antud arvudest võime moodustada korrutisi, võttes tegureid nii kahe- kui kolme- ja neljakaupa. Seega otsitav korrutiste arv on

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$
$$= 6 + 4 + 1 = 11.$$

Tuletame nüüd kombinatsioonide arvu tähtsa omaduse, mis suurel määral lihtsustab kombinatsioonide arvu leidmist mõnedel juhtudel.

Kui n elemendist võetakse korduvalt m elementi nii, et iga järgnev ühend erineb eelnevast vähemalt ühe elemendi poolest, siis igakord järele jäänud $n - m$ elemendi ühendid erinevad üksteisest samuti vähemalt ühe elemendi poolest. Järelikult, kui n elemendist moodustatakse kombinatsioone m elemendi kaupa, siis ülejäänud elemendid moodustavad n elemendi kombinatsioonid $n-m$

elemendi kaupa: igale m-kaupa kombinatsioonile vastab üks $(n-m)$-kaupa kombinatsioon ja ümberpöördult. Seega n elemendist m elemendi kaupa ja $n-m$ elemendi kaupa moodustatud kombinatsioonide arvud on võrdsed:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Samale tulemusele jõuame, kui valemi

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{m!}$$

paremal poolel seisvat murdu laiendame avaldisega $(n-m)\,[n-(m+1)]\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ehk $(n-m)!$ Siis saame, et

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]\,(n-m)\,[n-(m+1)]\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{m!\,(n-m)!}$$

ehk

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Asendades selles valemis tähe m avaldisega $n-m$, leiame, et

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}.$$

Võrreldes viimast kaht valemit, järeldame, et

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

See ongi seos, mis võimaldab suurel määral lihtsustada kombinatsioonide arvu leidmist nimelt juhtudel, kui $m > \frac{n}{2}$.

Näiteks:

$$\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140.$$

Kui võrduses

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} ,$$

võtta $m=n$, siis saame võrduse

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0},$$

mille paremal poolel seisval sümbolil $\binom{n}{0}$ puudub sisu, nagu puudub sisu ütlusel: moodustada kombinatsioonid 0 elemendi kaupa. Kuid et võrduse paremal poolel seisval sümbolil $\binom{n}{n}$ on täiesti konkreetne sisu ja ta väärtus on 1, siis teeme kokkuleppe lugeda ka sümboli $\binom{n}{0}$ väärtuseks arvu 1, talle muud sisu andmata.

Ülesanded.

324. Koostada elementide p, q ja r kõik võimalikud kombinatsioonid 2 elemendi kaupa.

325. Koostada elementide a, b, c ja d kõik võimalikud kombinatsioonid 2 elemendi kaupa.

326. Koostada elementide a, b, c ja d kõik võimalikud kombinatsioonid 3 elemendi kaupa.

327. Koostada kõigi eelmises ülesandes saadud kombinatsioonide elementide permutatsioonid ja võrrelda neid a, b, c ja d 3 elemendi kaupa moodustatud variatsioonidega.

328. Mitmel viisil on võimalik arvudest 2, 3, 5 ja 7 moodustada korrutisi, milles need arvud esinevad teguritena kahekaupa?

329. Mitmel viisil on võimalik arvudest 1, 2, 3, 4 ja 5 moodustada summasid, milles need arvud esinevad liidetavatena kolmekaupa?

330. Tööjuhatajal on vaja 12 töölisest saata teatavale tööle 5 töölist. Mitmel viisil ta võib teostada tööliste valikut?

331. Mitmel viisil on võimalik jaotada 10 eset kahte rühma nii, et ühes rühmas oleks 7 ja teises 3 eset?

332. Mitu sirget saab joonestada läbi 6 punkti, mille hulgas pole kolme punkti, mis asetseks ühel ja samal sirgel?

333. Mitu ringjoont saab joonestada läbi 5 punkti, mille hulgas pole nelja punkti, mis asetseks ühel ja samal ringjoonel?

334. Mitu diagonaali on nelinurgal, viisnurgal, kuusnurgal?

335. Jaamas on 6 tagavarateed. Mitmel viisil on võimalik neile paigutada 3 rongi?

336. Mitu isesugust segu on võimalik valmistada 4 vedelikust?

337. 8 tähest $a, b, c, \ldots$ on moodustatud kombinatsioonid 3 tähe kaupa. Mitu kombinatsiooni nendest sisaldavad tähte a? Mitu kombinatsiooni sisaldavad tähti a ja b?

338. Arvutada $\binom{20}{18}$, $\binom{30}{27}$ ja $\binom{48}{46}$.

339. Lahendada võrrandid:

1. $\binom{x}{3} : \binom{x}{4} = 2$
2. $\binom{18}{x} = \binom{18}{x+2}$
3. $\binom{x+1}{x-1} = 28$
4. $\binom{x}{3} + \binom{x}{2} = 15(x-1)$
5. $\binom{x}{4} = \frac{15}{4} V_x^2$
6. $8\binom{x+1}{5} = 3 V_x^3$

§ 27. Erinevate vabaliikmetega binoomide korrutise arendis.

Varajasemast kursusest on tuttav kahe erinevate vabaliikmetega binoomi korrutise arendis:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Tutvume nüüd kolme ja enama säärase binoomi korrutise arendisega.

Korrutades $(x + a)\ (x + b)$ arendise binoomiga $x + c$, leiame, et

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) =$$
$$= [x^2 + (a+b)x + ab]\ (x+c) =$$
$$= x^3 + (a + b)\ x^2 + abx + cx^2 + (ac + bc)\ x + abc =$$
$$= x^3 + (a + b + c)\ x^2 + (ab + ac + bc)\ x + abc.$$

Samal viisil võime leida ka, et

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ (x + d) =$$
$$= x^4 + (a + b + c + d)\ x^3 +$$
$$+ (ab + ac + ad + bc + bd + cd)\ x^2 +$$
$$+ (abc + abd + acd + bcd)\ x + abcd.$$

Vaadeldes saadud arendisi, märkame neis järgmist seadusepärasust:

1. binoomide korrutise arendis on tähe x alanevate astmete järgi korraldatud polünoom, mille esimeses liikmes tähe x astendajaks on korrutatavate binoomide arv ja igas järgnevas liikmes tähe x astendaja väheneb 1 võrra; viimane liige ei sisalda tähte x (ehk tähe x astendaja on 0);

2. arendise esimese liikme kordaja on 1, teise liikme kordaja on korrutatavate binoomide vabaliikmete summa,

kolmanda liikme kordaja on kahekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summa,

neljanda liikme kordaja on kolmekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summa ja

viimane liige võrdub kõigi vabaliikmete korrutisega.

Tõestame nüüd, et seadusepärasusele, millele näeme alluvat kahe, kolme ja nelja binoomi korrutist, allub mistahes arvu binoomide korrutis. Seda saame teha, kui suu-

dame näidata, et kui see seadusepärasus on kehtiv n binoomi korrutise

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \ldots (x + g)$$

kohta, siis ta on kehtiv ka $n + 1$ binoomi korrutise

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \cdot \cdot \cdot (x + g)\ (x + h)$$

kohta.

Viimase väite tõestamiseks oletame, et

$$(x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + g) =$$
$$= x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + S_n,$$

kus S_1 tähistab vabaliikmete summat

$$a + b + c + \ldots + g,$$

kus S_2 tähistab kahekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summat

$$ab + ac + bc + \ \ldots\ + ag + bg + cg + \ldots,$$

S_3 tähistab kolmekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summat

$$abc + \ldots + abg + acg + bcg + \ldots,$$

jne. ning S_n tähistab kõigi vabaliikmete korrutist

$$abc \ldots g.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled binoomiga $x + h$, saame

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \ldots (x + g)\ (x + h) =$$
$$= (x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + S_n)\ (x + h) =$$
$$= x^{n+1} + S_1 x^n + S_2 x^{n-1} + \ldots + S_n x + hx^n +$$
$$+ hS_1 x^{n-1} + \ldots + hS_{n-1} x + hS_n =$$

$$= x^{n-1} + (S_1 + h)x^n + (S_2 + hS_1)\ x^{n-1} + \ldots + (S_n +$$
$$+ hS_{n-1})x + hS_n.$$

Vaadeldes praegu saadud $n + 1$ binoomi korrutise arendist veendume, et ta allub samale seadusepärasusele,

mida oletasime kehtivat n binoomi korrutise arendise kohta. Tõesti:

1. arendis on tähe x alanevate astmete järgi korraldatud polünoom, mille esimeses liikmes tähe x astendajaks on korrutatavate binoomide arv $n + 1$, igas järgnevas liikmes aga tähe x astendaja väheneb 1 võrra ja viimane liige ei sisalda tähte x;

2. arendise esimese liikme kordaja on 1,
teise liikme kordaja $S_1 + h$ on vabaliikmete summa, kaasa arvatud ka vabaliige h,
kolmanda liikme kordaja $S_2 + hS_1$ on kahekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summa, kaasa arvatud ka h, jne. ning viimane liige $S_n + hS_{n-1}$ on kõigi vabaliikmete korrutis.

Seega on tõestatud, et kui tähelepandud seadusepärasus on kehtiv n binoomi korrutise kohta, siis ta on kehtiv ka $n + 1$ binoomi korrutise kohta. Kuid eespool nägime, et nelja binoomi korrutis allub sellele seadusepärasusele; järelikult allub talle ka $4 + 1$ ehk 5 binoomi korrutis. Aga kui talle allub 5 binoomi korrutis, siis allub talle ka $5 + 1$ ehk 6 binoomi korrutis jne.

Seega on lõplikult tõestatud, et ülaltoodud seadusepärasus on kehtiv mistahes arvu binoomide korrutise kohta.

Ülesanded.

340. Arendada järgmised korrutised:

1. $(x + 2)\ (x + 4)$
2. $(x + 5)\ (x - 3)$
3. $(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3)$
4. $(x + 2)\ (x + 3)\ (x - 5)$
5. $(x + 10)\ (x + 6)\ (x - 15)$
6. $(x + 3)\ (x - 3)\ (x + 2)$
7. $(1 + a)\ (1 + 2a)\ (1 + 3a)$

341. Näidata, et ülaltoodud korrutise

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ (x + d)$$

arendis on õige.

342. Arendada järgmised korrutised:

1. $(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3)\ (x + 4)$
2. $(z + 2)\ (z + 3)\ (z - 1)\ (z - 4)$
3. $(1 + 2a)\ (1 + 3a)\ (1 + 4a)\ (1 - 5a)$
4. $(y + 1)\ (y + 3)\ (y + 5)\ (y + 7)\ (y + 9)$

343. Kui suur on kordaja korrutise

$$(x + 4)\ (x + 5)\ (x - 6)\ (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 3)$$

arendise liikmes, mille täht x esineb kolmandas astmes? Kui suur on selle arendise vabaliige?

§ 28. Binoomrida.

Olgu samasuses

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \ldots (x + g) =$$
$$= x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + S_n$$

kõik vabaliikmed võrdsed:

$$a = b = c = \ldots = g.$$

Siis samasuse vasak pool saab avaldiseks $(x + a)^n$. Samasuse paremal poolel seisev kordaja S_1 ehk vabaliikmete summa

$$a + b + c + \ldots + g$$

saab siis avaldiseks na, sest kõik liidetavad on siis võrdsed vabaliikmega a. Kordaja S_2 ehk kahekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summa

$$ab + ac + \ldots$$

saab siis avaldiseks $\binom{n}{2}a^2$, sest kõik korrutised saavad siis astmeteks a^2 ja korrutiste arv võrdub n elemendist

kahekaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga. Kordaja S_3 ehk kolmekaupa võetud vabaliikmete korrutiste summa

$$abc + \ldots$$

saab avaldiseks $\binom{n}{3}a^3$, sest kõik korrutised saavad astmeteks a^3 ja korrutiste arv võrdub n elemendist kolmekaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga. Üldiselt kordaja S_k saab avaldiseks $\binom{n}{k}a^k$. Viimane kordaja S_n ehk kõigi vabaliikmete korrutis

$$abc \ldots g$$

saab astmeks a^n.

Seega ülaltoodud samasusest saame uue samasuse

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \binom{n}{3}a^3x^{n-3} + \\ + \ldots + \binom{n}{k}a^kx^{n-k} + \ldots + a^n$$

ehk, asendades kombinatsioonide arvude sümbolid nende avaldistega,

$$(x + a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3} + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}a^kx^{n-k} + \ldots + a^n.$$

See samasus kujutab endast üldist kaksliikme astme arendise valemit. Seda nimetatakse Newtoni binoomvalemiks; valemi paremal poolel seisvat polünoomi nimetatakse binoomreaks.

Binoomi ruudu ja kuubi arendise valemid, milledega oleme tutvunud juba varemalt, on Newtoni binoomvalemi erikujudeks vastavalt astendaja n väärtusele 2 või 3. Nii on näiteks

$$(x + a)^3 = x^3 + \binom{3}{1}ax^2 + \binom{3}{2}a^2x + a^3 = \\ = x^3 + \frac{3}{1}ax^2 + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}a^2x + a^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Vaadeldes binoomrida, sedastame tema järgmisi tähtsamaid omadusi:

1. Binoomrea esimeses liikmes tähe x astendaja võrdub binoomi astendajaga n; igas järgnevas liikmes tähe x astendaja väheneb 1 võrra, kuni ta viimases liikmes saab võrdseks 0-ga. Seevastu tähe a astendaja on esimeses liikmes 0; igas järgnevas liikmes ta suureneb 1 võrra, kuni ta viimases liikmes saab võrdseks binoomi astendajaga n. Seetõttu tähtede x ja a astendajate summa püsib kõigis liikmeis muutumatuna ja võrdub binoomi astendajaga n.

2. Et binoomrea liikmelt liikmele tähe a astendaja suureneb 1 võrra, siis binoomreas on samapalju liikmeid kui astendajal väärtusi. Astendaja väärtused on: 0 ja loomulikud arvud 1-st kuni n-ini. Seega on binoomrea liikmete arv $n + 1$, s. o. 1 võrra suurem kui binoomi astendaja.

3. Binoomrea kordajateks on: esimesel liikmel arv 1, teisel liikmel binoomi astendaja n ehk $\binom{n}{1}$, kolmandal liikmel $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$ jne. Uldiselt $(k + 1)$ -se liikme kordaja on n elemendist k elemendi kaupa moodustatud kombinatsioonide arv

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!}.$$

Viimase liikme kordaja on $\binom{n}{n}$ ehk 1.

Arve $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{k}, \dots, \binom{n}{n}$ ehk

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2!}, \dots, \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{k!}, \dots, 1$$

nimetatakse ka b i n o o m k o r d a j a t e k s.

4. **Binoomrea algusest ja lõpust ühekaugusel seisvate liikmete kordajad on võrdsed:**

esimese ja viimase liikme kordaja on 1; teise ja eelviimase liikme kordajad on $\binom{n}{1}$ ja $\binom{n}{n-1}$, kuid $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$; kolmanda ja eel-eelviimase liikme kordajad on $\binom{n}{2}$ ja $\binom{n}{n-2}$, kuid $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$; jne.

5. Kui binoomrea liiget tähistada sümboliga L_{k+1}, milles täht k tähistab eelnevate liikmete arvu või $k + 1$ on liikme koha number, siis võime kirjutada, et

$$L_{k+1} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} a^k x^{n-k}.$$

See on binoomrea üldliikme valem; selle valemi järgi leiame rea mistahes liikme, kui asendame temas tähe k eelnevate liikmete arvuga.

6. Võrreldes binoomrea kaht järjestikust liiget:

$$L_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} a^k x^{n-k}$$

ja

$$L_{k+2} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)](n-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k(k+1)} a^{k+1} x^{n-(k-1)},$$

paneme tähele, et

binoomrea mingi liikme kordaja leidmiseks tuleb eelneva liikme kordaja korrutada tähe x astendajaga eelnevas liikmes ja jagada kõigi eelnevate liikmete arvuga

ehk sümbolites $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$.

Kasutades binoomrea omadusi 6 ja 4 on mingi konkreetse n puhul hõlpus saada rea liikmeid eelnevate liikmete kaudu.

Näidisena arvutame astmele $(x + a)^6$ vastava binoomrea liikmed. Esmalt kirjutame esimesed kaks liiget

$$x^6 + 6ax^5.$$

Kolmanda liikme kordaja saame, kui teise liikme kordaja 6 korrutame tähe x astendajaga 5 ja jagame kolmandale liikmele eelnevate liikmete arvuga 2; see kordaja on $\frac{6 \cdot 5}{2}$ ehk 15. Seega kolmas liige on

$$15a^2x^4.$$

Korrutades kordaja 15 astendajaga 4 ja jagades liikmete arvuga 3, saame neljanda liikme kordaja $\frac{15 \cdot 4}{3}$ ehk 20. Seega neljas liige on

$$20a^3x^3.$$

Viienda liikme kordajat ei tarvitse enam arvutada, sest viies liige algusest on kolmas lõpust (kuna binoomi kuuenda astme arendises on 7 liiget); seega viienda liikme kordaja võrdub kolmanda liikme kordajaga. Samuti on kuuenda liikme kordaja võrdne teise liikme kordajaga ja seitsmenda liikme kordaja võrdub esimese liikme kordajaga. Seega võime nüüd nõutava arendise kirjutada täielikult:

$$(x + a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + \\ + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

7. Nagu selgus eelmises punktis, binoomrea kordajad tekivad eelnevatest kordajatest, neid järjest vähenevate arvudega (n—1, n—2, ...) korrutades ja järjest suurenevate arvudega (2, 3, ...) jagades. Seetõttu kordajad algul suurenevad (seni kui korrutajad on suuremad kui jagajad), kuid hiljem hakkavad vähenema. Et algusest ja lõpust ühekaugusel seisvad kordajad on võrdsed, siis suurim kordaja esineb rea keskel. Kui rea liikmete arv on paaritu (s. o. kui binoomi astendaja on paarisarv), siis suurimaks kordajaks on keskmise liikme kordaja. Kui rea liikmete arv on paarisarv (s. o. kui binoomi astendaja on paaritu arv), siis real pole keskmist liiget, aga rea

keskel on kaks liiget võrdsete kordajatega, mis on suuremad kõigist teistest kordajatest. Nii on näiteks binoomi viienda astme arendise

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

keskel kaks liiget, mille kordaja 10 on suurem kõigist teistest. Nagu nägime eelmises punktis, on binoomi kuuenda astme arendise suurimaks kordajaks keskmise liikme kordaja 20.

8. **Binoomrea kordajate summa on 2^n.**

Tõesti, võttes Newtoni binoomvalemis $x = a = 1$, saame

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + 1.$$

Nii on näiteks kuuenda astme binoomrea kordajate summa

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6.$$

9. Asendades Newtoni binoomvalemis tähe a avaldisega $-a$, saame

$$(x - a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} - \ldots + \\ + (-1)^n a^n,$$

milles märgid + ja — esinevad vaheldumisi.

10. Võttes viimases võrduses $x = a = 1$, leiame, et

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n.$$

Seega

paaritutel kohtadel seisvate binoomkordajate summa võrdub paariskohtadel seisvate binoomkordajate summaga.

11. Liites n-ndama astme binoomrea kaks järjestikust kordajat $\binom{n}{k}$ ja $\binom{n}{k+1}$, leiame punktis 6 sedastatud binoomkordajate omaduse tõttu, et

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}+\frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}=$$
$$=\left(1+\frac{n-k}{k+1}\right)\binom{n}{k}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

ehk, asendades paremal poolel $\binom{n}{k}$ avaldisega $\frac{n!}{k!\,(n-k)}$,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Viimase võrduse parema poole võime esitada kujul

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!}.$$

See on aga $\binom{n+1}{k+1}$ ehk $(n+1)$-se astme binoomrea $(k+2)$-se liikme kordaja. Järelikult on

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

ehk lühidas sõnastuses:

binoomrea kahe järjestikuse kordaja summa võrdub ühe võrra kõrgema astme binoomrea kordajaga.

Nii on näiteks teise astme binoomrea esimese ja teise kordaja summa $1+2$ võrdne kolmanda astme binoomrea teise kordajaga 3 ning teise ja kolmanda kordaja summa $2+1$ võrdub kolmanda astme binoomrea kolmanda kordajaga 3. Samuti saame kolmanda astme binoomrea kordajate liitmisel neljanda astme binoomrea kordajad peale esimese ja viimase:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
. . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

$$1+3=4,\quad 3+3=6,\quad 3+1=4.$$

Nii võime järk-järgulise liitmise teel leida mistahes astme binoomrea kordajad. Arvutust on sobiv korraldada kõrvaloleva skeemi järgi, kirjutades kõrvuti seisvate kordajate summad liidetavate alla nende vahekohta ning saadud rida esimese ja viimase kordajaga 1 täiendades. Kui kõige ülemisse ritta kirjutada 1 kui 0-astme binoomkordaja (sest $(x+a)^0=1$) ja selle alla kaks ühte kui esimese astme binoomkordajad, siis tabel omandab kolmnurga kuju. Seda tabelit nimetatakse Pascali kolmnurgaks.

Ülesanded.

344. Arendada järgmised astmed binoomridadeks:

1. $(x+a)^4$
2. $(a+b)^5$
3. $(x+1)^7$
4. $(a-b)^6$
5. $(1-a)^8$
6. $(2a+b)^4$
7. $(a-3b)^5$
8. $(3a-2)^6$
9. $(4a-\frac{1}{2})^5$
10. $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)^4$
11. $(a^2+b)^5$
12. $(x^3-a^2)^6$
13. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4$
14. $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^6$
15. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

345. Lihtsustada ja arendada binoomridadeks järgmised avaldised:

1. $(x-1)^4(x-1)^3$
2. $(x+2)^3(x^2+4x+4)$
3. $[(a-b)^3]^3$
4. $\left(\sqrt{x+10}\right)^{10}$
5. $\sqrt[3]{(2x+5)^{18}}$
6. $\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}\right)^7$
7. $\frac{(x+1)^7}{x^3+3x^3+3x+1}$
8. $\frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^2-2x+1}$
9. $\frac{(x+a)^{10}}{(x+b)^3}$, kui $a=b=1$

346. Lihtsustada avaldis

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^6 + \left(\sqrt{3}-1\right)^6$$

347. Arendada ridadeks järgmised avaldised:

1. $(x+2)^4 + (x+3)^4$
2. $(a+3)^5 - (a+1)^5$

348. Leida $(a+b)^{10}$ arendise 5. liige.

349. Leida $(a-b)^{12}$ arendise 8. liige.

350. Leida $(x+y)^{14}$ arendise keskmine liige.

351. Leida $(x+a)^{12}$ arendise suurim kordaja.

352. Kui suur on $(x+y^2)^5$ arendises kordaja liikmel, milles tähtede x ja y astendajate summa on 7?

Peatükk IV.

Kordamisülesandeid.

353. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2^{\log_2 6}$ $\quad 3^{-\log_3 7}$ $\quad 10^{\log_{10} 5}$ $\quad 10^{0,6990}$ $\quad 10^{0,4786}$

2. $3^{2\log_3 5}$ $\quad 5^{\frac{1}{2}\log_5 36}$ $\quad 10^{2\log_{10} 3}$ $\quad 10^{1,5011}$ $\quad 10^{2,0294}$

3. $10^{\frac{2}{3}\log_{10} 8}$ $\quad 10^{-\frac{1}{4}\log_{10} 81}$ $\quad 10^{-\log_{10} 6}$ $\quad 10^{-0,9031}$ $\quad 10^{-1,8000}$

354. Leida järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\log_2 32$ $\quad \log_5 125$ $\quad \log_3 \frac{1}{9}$ $\quad \log_4 \frac{1}{2}$

2. $\log_2 0,25$ $\quad \log_5 0,04$ $\quad \log_2 \sqrt[3]{4}$ $\quad \log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. $\log_{10} 0,001$ $\quad \log_{10} \sqrt[3]{0,1}$ $\quad \log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{0,01}}$ $\quad \log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

355. Lahendada võrrandid:

1. $\log_x 49 = 2$ $\quad \log_x \frac{1}{8} = -3$ $\quad \log_3 x = 4$ $\quad \log_4 x = -2$

2. $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ $\quad \log_x \sqrt{125} = 1,5$ $\quad \log_{10} x = -2$ $\quad \log_{10} x = \frac{1}{2}$

3. $\log_x \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$ $\quad \log_x \sqrt{0,001} = 1,5$ $\quad \log_2 x = 7$ $\quad \log_{0,2} x = -3$

356. Kirjutada avaldised, mille logaritmid on:

1. $\log m + 2\log n$

   $\log a + \log b - (\log c + \log d)$

   $3\log a + 2\log b - 4\log c$

   $2\log x + 2\log y - 5\log z - 4\log u$

2. $2\log a + 2\log b$

   $3\log(a + b)$

   $\log(x + y) - \log(x - y)$

   $4\log u - 4\log v$

3. $\frac{1}{3}\log a$

   $\frac{m}{n}\log b$

   $\frac{1}{2}(\log a + 5\log b)$

   $\frac{1}{3}(2\log u - 4\log v)$

357. Lihtsustada avaldised:

1. $\log\sin x - \log\cos x$

   $\log\tan x + \log\cot x$

   $\log\tan x + \log\cos x$

2. $10^{\log\sin x}$

   $10^{\frac{1}{2}\log\sin x - \frac{1}{2}\log\cos x}$

   $10^{2\log\sin x} + 10^{2\log\cos x}$

358. Logaritmida järgmised avaldised:

1. $\frac{1}{m}\sqrt{\frac{ab}{a-b}}$

   $\sqrt[3]{\frac{mx^2}{(x-a)^2}}$

   $\sqrt[3]{\frac{ax+b^2}{2x\sqrt{a^2+b^2}}}$

2. $\frac{16a(a+1)^3}{\sqrt[3]{25\sqrt{a^2-1}}}$

   $\frac{a^2\sqrt{a(bx-c)}}{\sqrt[3]{ax+b}}$

   $\frac{1}{m^2\sqrt{a^2-x^2}}$

359. Arvutada logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt[3]{\dfrac{1{,}274^2}{\sqrt{0{,}9645}}}$

$$\frac{\sqrt[3]{28{,}9}\cdot\sqrt[4]{17{,}5^3}}{\sqrt[5]{6{,}149^2}}$$

$$\frac{3\sqrt{5\sqrt{6}}}{\sqrt[5]{11\sqrt{4\sqrt{124}}}}$$

2. $\dfrac{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}$

$$\sqrt{\frac{52-3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8{,}7}}}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{0{,}2}-\sqrt[3]{0{,}9}}$$

360. Arvutada avaldiste $\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$ väärtus, kui $a = 6{,}48$, $b = 8{,}62$, $c = 9{,}24$ ja $2p = a + b + c$.

361. Olgu $z^5 = \left(\frac{s}{t}\right)^4$. Kui suur on z, kui $s = 0{,}48$ ja $t = 1{,}51$?

362. Määrata valemist $C = e^{-rt}$ tähe C väärtus, kui $e = 2{,}718$, $r = 6$ ja $t = 0{,}7$.

363. Olgu $a = 2\sqrt{\dfrac{f}{\sqrt{3}}}$. Arvutada a väärtus, kui $f = 0{,}8457$.

364. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $25^x = \frac{1}{5}$
2. $25^x = 100$
3. $2^x - 2^{x-2} = 3$
4. $6^{x+1} + 6^x = 252$
5. $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x} = 216$
6. $3^x - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
7. $10^x - 5^{x-1}\cdot 2^{x-2} = 950$
8. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
9. $10^x = \sqrt[x]{3}$
10. $(\frac{1}{2}\cdot 4^x)^x = 8^{x+3}$

365. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\log x = -\log (x + 1)$
2. $\log (x - 2) = \log x - \log 2$
3. $100^{\log (x-10)} = 1000$
4. $0{,}1^{-x^2+5x-8} = 100$
5. $\log(2^x + x - 4) = x\,(1 - \log 5)$
6. $\log_x 10 = \log_{2x} 40$

366. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $x^5 = 20$
2. $6x^4 = 57$
3. $(x - 3)^3 = 60$
4. $(x - 5)^4 = 99{,}3$
5. $(x + 7)^5 = 340$
6. $(2x - 9)^{10} = 32$
7. $(x^2 - 27)^7 = 84$
8. $\left(\frac{x}{3} + 4\right)^3 = 124$

367. Cheops'i püramiidi põhjaks on ruut küljega 233 m; püramiidi kõrgus on 148 m. Käigud ja kambrid moodustavad väga väikese osa püramiidi ruumalast. Kivi erikaal, millest püramiid ehitatud, on 2,75. Mitu tonni kivimassi kulus püramiidi ehitamiseks?

368. Ringi läbimõõt on 13,58 cm. Arvutada ringi ümbermõõt ja pindala.

369. Baromeetritoru seesmine läbimõõt on 0,84 cm. Vaatluse ajal seisis elavhõbe 74,8 cm kõrgusel. Elavhõbeda erikaal on 13,60. Kui palju kaalub elavhõbedasammas?

370. Leida avaldise $\frac{23}{27} \cdot 14{,}4^4$ väärtus.

371. Leida avaldise $\frac{2k\,(t_2 - t_1)}{\log r_2 - \log r_1}$ väärtus, kui $k = 0{,}86$, $t_1 = 69{,}8$, $t_2 = 85{,}7$, $r_1 = 1{,}15$ ja $r_2 = 1{,}45$.

372. Lahendada võrrand $24{,}9x^5 = 2{,}84$.

373. Leida x-i väärtus, kui $10^x = 6^{20}$.

374. Kui suur peab olema ratta läbimõõt, et ta, tehes n pööret sekundis, kulgeks n km tunnis?

375. Leida, kumb arvudest 2^{160} ja 3^{100} on suurem.

376. Olgu teada, et $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. Näidata, et siis $a^2 + b^2 = 7ab$.

377. Arvutada logaritmide abil avaldis

$$(a^2 - b^2)\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta},$$

kui $a = 8{,}495$, $b = 4{,}324$, $\alpha = 46°38'$, $\beta = 36°48'$.

378. Lahendada võrrand $ab = \sqrt[x]{c}$.

379. Leida aritmeetilise jada $-4, -1, \ldots$ kümnes liige.

380. Leida aritmeetilise jada $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \ldots$ sajas liige.

381. Leida jada $-48, -45, -42, \ldots$ n-es liige.

382. Leida aritmeetilise jada 5. liige, kui jada 1. liige on 1 ja 10. liige on 100.

383. Mitu liiget aritmeetilises jadas 9, 14 ... on väiksemad kui 350?

384. Mitmes liige aritmeetilises jadas 15, 20, ... on 135?

385. Mitu liiget aritmeetilises jadas $-66, -59, \ldots$ on negatiivsed?

386. Mitmes liige aritmeetilises jadas 7, 13, ... on lähim arvule 210?

387. Määrata aritmeetiline jada, mille 1. liige on 1 ja 8. liige võrdub esimese 4 liikme summaga.

388. Aritmeetilise jada 5 liikme summa on 20 ja esimese 7 liikme summa on 98. Leida jada esimese 12 liikme summa.

389. Arvutada summa $7 + 11 + 15 + \ldots + 71$.

390. Arvutada esimese 60 loomuliku arvu summa.

391. Arvutada esimese 45 paarisarvu summa.

392. Kulgegu ülespaisatud keha esimeses sekundis 81 m; igas järgnevas sekundis ta tõuseb 4,5 m vähem kui eelnevas. Kui kaua kestab keha liikumine ülespoole?

393. Elektriventilaatori propeller teeb 1. sekundil pärast voolu katkestamist 50 pööret, 2. sekundil $46\frac{2}{3}$ pööret ja 3. sekundil $43\frac{1}{3}$ pööret. Kui kaua pärast voolu katkestamist kestab veel propelleri liikumine?

394. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga küljed moodustavad aritmeetilise jada?

395. Leida arv x, teades, et arvud $2x - 3$, $5x + 7$ ja $x - 11$ moodustavad aritmeetilise jada.

396. Mitu lööki teeb tornikell öö-päeva jooksul, kui ta märgib veerandtunni ühe löögiga, pooltunni kahe löögiga, kolmveerandtunni kolme löögiga, täistunni nelja löögiga ja kesköösť või keskpäevast möödunud tundide arvu vastava hulga löökidega?

397. Arvutada kõigi vahemikus 102 kuni 300 asetsevate kolmega jagumatute arvude summa.

398. Arvutada kõigi 7-ga jagumatute arvude summa vahemikus 100 kuni 300.

399. Olgu teada, et aritmeetilise jada liige $a_8 = 2a_{13}$. Näita, et siis $a_3 = 3a_{13}$.

400. Aritmeetilise jada üldliige $a_k = 4k + 1$. Määrata esimese n liikme summa.

401. On antud aritmeetiline jada üldliikmega $a = 27 - 2k$. Mitu liiget jada algusest arvates tuleb võtta, et saada summa 144?

402. Kui suur on aritmeetiline jada

$$a,\ 2a - x,\ 3a - 2x,\ \ldots$$

esimese n liikme summa?

403. On antud aritmeetiline jada:

$$(n-1),\ \frac{n^2+1}{n-1},\ \frac{(n+1)^2}{n-1},\ \ldots$$

Leida selle jada esimese n liikme summa.

404. Näidata, et järjestikuste loomulikkude arvude ruutude vahed moodustavad aritmeetilise jada.

405. Näidata, et avaldiste $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$ ja $x^2 + 2x - 1$ ruudud moodustavad aritmeetilise jada.

406. Kui suur on n järjestikuse täisarvu summa ja neile eelneva n järjestikuse täisarvu summa vahe?

407. Kui suur on n järjestikuse täisarvu ruutude summa ja neile eelneva n järjestikuse täisarvu ruutude summa vahe?

408. Leida $n + 1$ järjestikust täisarvu, mille summa võrdub n järgneva järjestikuse täisarvu summaga. Missugused on need arvud, kui n on 1, 2, 3, 4, 5?

409. Leida $n + 1$ järjestikust täisarvu, mille ruutude summa võrdub n järgneva järjestikuse täisarvu ruutude summaga. Missugused on need arvud, kui n on 1, 2, 3, 4, 5?

410. Geomeetrilise jada tegur on 3 ja jada 4. liige on 162. Leida jada 1. liige.

411. Leida geomeetrilise jada 1. liige ja tegur, kui jada 6. liige on 144 ja 3. liige 18.

412. Leida geomeetrilise jada 9. liige, kui jada 2. liige on 7 ja 7. liige 224.

413. Geomeetrilise jada 6. liige on mn^6 ja 4. liige on mn^2. Leida jada 1. liige.

414. Leida geomeetrilise jada 8. liige, kui 2. liige on 2 ja 3. liige on 3.

415. Leida 10-liikmelise geomeetrilise jada 1. liige, kui jada tegur on 2 ja jada summa on $2557\frac{1}{2}$.

416. Leida 8-liikmelise geomeetrilise jada summa, kui jada 3. liige on 29,7 ja jada 5. liige on 267,3.

417. Leida jada 2, 3, $4\frac{1}{2}$, ... kümnes liige ja jada kümne liikme summa.

418. Leida jada 2, $3\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, ... kümnes liige ja jada kümne liikme summa.

419. Olgu geomeetrilises jadas, mille tegur on q, paarisarv liikmeid. Näidata, et paarisarvulistel kohtadel seisvate liikmete summa on q korda suurem paarituarvulistel kohtadel seisvate liikmete summast.

420. Geomeetrilise jada esimese kahe liikme summa on $7\frac{1}{2}$ ning neljanda ja esimese liikme summa on $127\frac{1}{2}$. Leida jada tegur.

421. Geomeetrilise jada esimese kolme liikme summa on $3^3 - \frac{2^6}{3^6}$ ja esimese kuue liikme summa on $3^3 - \frac{2^{12}}{3^{15}}$. Leida jada 1. liige.

422. Leida geomeetrilise jada tegur, kui jada 1. liige on 3 ning 2. ja 3. liikme summa on 60.

423. Leida jada a, a^2, a^3, a^4, ... 20 liikme korrutis.

424. Leida jada ab, a^2b^3, a^3b^5, a^4b^7, ... n liikme korrutis.

425. Lihtsustada avaldis $1 + a + a^2 + \ldots + a^{13} + a^{14}$.

426. Lihtsustada avaldis $x^9 + x^8y + x^7y^2 + \ldots + xy^8 + y^9$.

427. Lihtsustada avaldis

$$1 + x + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots + (1 + x)^{12}.$$

428. Avaldada järgmiste geomeetriliste ridade väärtused:

$$\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + \ldots + \sin^{12} \varphi$$
$$\tan^2 \psi + \sin^2 \psi + \ldots + \sin^2 \psi \cdot \cos^6 \psi .$$

429. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga küljed moodustavad geomeetrilise jada?

430. Arvutada geomeetrilise jada 2, 3, ... esimese 5 liikme summa.

431. Arvutada summa $\sqrt{3} + 3 + \sqrt{27} + \ldots + 243$.

432. Mitmes liige jadas 2, 8, 32, ... on 8^{33}?

433. Leida arv x, kui arvud $x - 4$, x ja $x + 6$ moodustavad geomeetrilise jada.

434. Leida arv x, kui arvud x, $3x$ ja $x + 12$ moodustavad aritmeetilise jada.

435. Geomeetrilise jada igast liikmest lahutatakse temale eelnev liige. Näidata, et saadud vahed moodustavad geomeetrilise jada.

436. Leida kuusnurga nurgad, teades, et nad moodustavad geomeetrilise jada, mille tegur on 2.

437. Klaasplaat neelab 5% temale langevast valgusehulgast. Mitmest samasugusest plaadist koosnev pakk neelab 45% esimesele plaadile langevast valgusehulgast?

438. Leida, missuguses kõrguses on õhurõhumine 9% võrra väiksem kui maapinnal, teades, et 100-meetrisele tõusule vastab 1,2-protsendine õhurõhumise vähenemine.

439. Teades, et 100-meetrisele tõusule vastab 1,2-protsendine õhurõhumise vähenemine, näidata, et maapinna läheduses 11-meetrisele tõusule vastab 1-millimeetrine õhurõhumise vähenemine.

440. Puu kõrguse aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Kui palju kasvab puu 4 aastaga, kui ta esimesel aastal kasvab 24 cm?

441. On antud jada

$$1 + x,\quad 2 + 3x,\quad 4 + 5x,\quad 8 + 7x,\quad 16 + 9x, \ldots$$

Leida jada esimese 20 liikme summa.

442. Moodustagu avaldised

$$\frac{1}{b-a},\quad \frac{1}{2b}\quad \text{ja}\quad \frac{1}{b-c}$$

aritmeetilise jada. Näidata, et siis arvud a, b ja c moodustavad geomeetrilise jada.

443. Tõestada, et kahe arvu geomeetrilise keskmise logaritm on võrdne arvude logaritmide aritmeetilise keskmisega.

444. Arvutada lõpmatu geomeetrilise jada

$$25,\ 5,\ 1, \ldots$$

summa.

445. Arvutada lõpmatu geomeetrilise rea

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$$

väärtus.

446. Arvutada rea

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{72} + \dots$$

väärtus.

447. Teisendada järgmised perioodilised murrud harilikkudeks murdudeks:

1. 0,555...
   0,161616...
   1,717171...
2. 0,6888...
   2,3242424...
   8,2232323...

448. Arendada murd $\frac{3}{7}$ lõpmatuks geomeetriliseks reaks teguriga $\frac{1}{3}$.

449. Arendada arv 1 lõpmatuks geomeetriliseks reaks teguriga 0,1.

450. Arendada arv 2 lõpmatuks geomeetriliseks reaks teguriga 0,1.

451. Kui suureks kasvab 2800-rublane hoius, mis on hoiul $4\frac{1}{2}\%$-ga 20. maist sama aasta 1. oktoobrini?

452. Kui suur rahasumma, olles 3 kuud ja 10 päeva hoiul 3%-ga, kasvab hoiuaja lõpuks 726 rublaks?

453. Mitme protsendiga hoiul olles annab hoius 8 kuuga 3% intressi?

454. Mitme kuuga kasvab hoius 1,025-kordseks, kui hoiukassa maksab 4% intressi aastas?

455. Missuguse jada moodustavad hoiuselt 1, 2, 3, ... aasta jooksul saadava intressi summad, kui hoius kannab 1) lihtintressi, 2) liitintressi?

456. Kui suur hoius, kandes $3\frac{1}{2}\%$ liitintressi, kasvab 30 aastaga 20 000 rublaks?

457. Kui suureks kasvab 3700-rublane hoius 8 aastaga, kandes $4\frac{1}{2}\%$ liitintressi?

458. Mitu protsenti liitintressi peab kandma 1200-rublane hoius, et ta 6 aastaga kasvaks 7500 rublaks?

459. Leida, kui palju intressi saab 4 aasta jooksul 3200 rublalt,

1. kui kapital kannab 2% liitintressi,
2. „ „ „ 3% „
3. „ „ „ 5% „

Kas kolmandal juhul saadav intress võrdub esimesel ja teisel juhul saadavate intresside summaga?

460. Maakonna elanike arv kasvab 0,5% võrra aastas. Mitme protsendi võrra kasvab selle maakonna elanike arv 25 aasta jooksul?

461. Mitu protsenti lihtintressi peaks aastas maksma kapitalilt, et ta n aastaga kasvaks niisama suureks kui kandes $p\%$ liitintressi?

Näidiseid. 1. $n = 10$, $p = 5$. Arvutada nõutav intressimäär.

2. $n = 20$, $p = 5$. Arvutada nõutav intressimäär.

462. 12 aasta eest mets sisaldas 49 000 m^3 puitu. Sellest ajast on puidu hulk kasvanud 62 000 kuupmeetriks. Mitme protsendi võrra on kasvanud puidu hulk aastas?

463. Riigi metsatüki puiduhulka hinnati 1937. a. 1800 m^3-le. Kui suur on metsa puiduhulk 1947. a., kui metsa vahepeal ei raiuta ja puidu aastane juurdekasv on 2%?

464. Linna elanike arv kasvab aastas 3,8% võrra. Missugust elanike arvu võib oodata 10 aasta pärast, kui praegu linnas elab 62 400 inimest?

465. Väikelinna elanike arv on 10 aasta jooksul kasvanud 2148 hingelt 3796 hingele. Kui suur oleks selle linna elanike arv 10 aastat hiljem, kui linna elanikkonna kasvamine toimuks edasi niisama kiiresti nagu enneminigi?

466. Maakonna rahvaarv kasvab aastas $p^0/_{00}$ võrra. Mitme aasta järel on selle maakonna rahvaarv suurenenud $q\%$ võrra, võrreldes praeguse rahvaarvuga?

Näidis. $p = 21$, $q = 50$. Määrata nõutud aastate arv.

467. Õhupump tühjendab 100 edasi-tagasi käiguga röntgenitorus oleva õhu kuni ühe viiekümnetuhandendikuni alguses seal olnud õhuhulgast, imedes iga käiguga ühe ja sama protsendimäära torus parajasti olevast õhust. Kui suur on see protsendimäär?

468. Gruusia NSV-s toodeti elektrienergiat 1928. a. $42 \cdot 10^6$ kWh ja 1936. a. $436 \cdot 10^6$ kWh. Mitme protsendi võrra suurenes keskmiselt elektrienergia toodang aastas?

469. NSVL-i suurtööstus tootis 1928. a. saadusi 16,8 milj. rubla väärtuses, 1932. a. 38,8 milj. rubla väärtuses ja 1936. a. 80,9 milj. rubla väärtuses. Mitme protsendi võrra kasvas keskmiselt suurtööstuse toodang aastas 1) ajavahemikus 1928—1932, 2) ajavahemikus 1932—1936 ja 3) ajavahemikus 1928—1936?

470. Mitmel viisil on võimalik paigutada lauda istuma 5 inimest?

471. Mitu signaali on võimalik anda 7 erineva lipuga, kui igas signaalis võib kasutada ülimalt 5 lippu?

472. Moodustada tähtede a, b, c, d, e ja f kõik võimalikud variatsioonid 3 tähe kaupa.

473. Moodustada tähtede a, b, c, d, e ja f kõik võimalikud kombinatsioonid 3 tähe kaupa.

474. Mitmest elemendist on võimalik moodustada 120 kombinatsiooni 2 elemendi kaupa?

475. Mitmest esemest on võimalik moodustada 78 erinevat paari?

476. Arvutada V_{10}^{4}, $\binom{12}{8}$ ja P_9.

477. 10 tähest a, b, c, ... on moodustatud variatsioonid 5 tähe kaupa. Mitu variatsiooni sisaldavad tähte c? Mitu variatsiooni sisaldavad tähti c ja e?

478. Mitmest elemendist 3 elemendi kaupa moodustatud variatsioonide arv on 20 korda suurem kui elementide arv?

479. Moodustada tähtede a, b, c ja d kõik võimalikud permutatsioonid.

480. Arendada järgmised astmed binoomridadeks:

1. $(x + a)^6$
2. $(x - a)^8$
3. $(a^2 + b)^4$
4. $(a - 2b)^5$
5. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^5$
6. $\left(u - \frac{1}{u}\right)^6$

481. Leida $(x + a)^{10}$ arendise 4. liige.

482. Leida $(x - a)^{20}$ arendise keskmine liige.

483. Kui suur on $(x^2 + 3)^7$ arendise kordajate summa?

484. Arendada binoomridadeks avaldised:

1. $(x + a)^2\ (x + b)^3$, kui $a = b = 1$,
2. $[(x + a)\ (x + b)]^2$, kui $a = b = 2$.

485. Lihtsustada avaldis

$$1 + (x + 1) + (x + 1)^2 + (x + 1)^3 + (x + 1)^4.$$

486. Näidata, et kehtib samasus

$$a + \binom{n}{1}(a + 1) + \binom{n}{2}(a + 2) + \ldots + \binom{n}{n}(a + n) = \\ = \left(a + \frac{n}{2}\right) \cdot 2^n.$$

487. Näidata, et kehtib samasus

$$0^2 + \binom{n}{1} \cdot 1^2 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \ldots + \binom{n}{n} n^2 = \\ = n(n + 1) \cdot 2^{n-2}.$$

Sisukord.

Lk.

Peatükk I. Logaritm 3

§ 1. Arvu kümnendlogaritm 3

§ 2. Logaritmi omadusi 5

§ 3. Logaritmi graafik 8

§ 4. Logaritmi arvutamise näide 11

§ 5. Logaritmi kirjutusviis 13

§ 6. Logaritmi täisosa määramine 15

§ 7. Logaritmide tabel 18

§ 8. Avaldiste logaritmimine 22

§ 9. Logaritm arvutusvahendina 25

§ 10. Arvu logaritm kümnest erineval alusel 33

§ 11. Eksponentvõrrandid 35

§ 12. Logaritmvõrrandid 39

Peatükk II. Arvjadad 42

§ 13. Aritmeetiline jada 42

§ 14. Aritmeetilise jada üldliige 43

§ 15. Aritmeetilise jada summa 48

§ 16. Geomeetriline jada 53

§ 17. Geomeetrilise jada üldliige 56

§ 18. Geomeetrilise jada summa 63

§ 19. Lõpmatu alaneva geomeetrilise jada summa . 68

Lk.

§ 20. Liht- ja liitintress 72

§ 21. Kapitali kasvamine lihtintressil 74

§ 22. Kapitali kasvamine liitintressil 78

Peatükk III. Ühendid ja binoomrida 82

§ 23. Ühendid 82

§ 24. Variatsioonid 84

§ 25. Permutatsioonid 88

§ 26. Kombinatsioonid 90

§ 27. Erinevate vabaliikmetega binoomide korrutise arendis 97

§ 28. Binoomrida 101

Peatükk IV. Kordamisülesandeid 110

Vastutav toimetaja A. Humal. Ladumisele antud 11. VIII 1945. Trükkimisele antud 2. X 1945. Trükiarv 2200. Paber 56 : 79. 1/16. Trükitähti trükipoognas 34200. Arvutuspoognaid 7. Trükipoognaid 8. MB — 04794. Tellimise nr. 1313. Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu, Ülikooli tn. 21/23.

На эстонском языке.

К. Ратассепп. Алгебра, учебник для X класса средней школы.

RBL. 7.—

RBL. 7.—

Eb 15753

K. RATASSEPP — ALGEBRA ÕPIK KESKKOOLI X KLASSILE

K. RATASSEPP

ALGEBRA ÕPIK

KESKKOOLI X KLASSILE

RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1945