

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Kindlustus- ja finantsmatemaatika õppekava

Hans Erik Atonen

# Ameerika optsioonide hindamine

## Monte Carlo meetodiga

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: PhD Toomas Raus

Tartu 2021

# AMEERIKA OPTSIOONIDE HINDAMINE MONTE CARLO MEETODIGA

Magistritöö

Hans Erik Atonen

## Lühikokkuvõte

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida Ameerika optsiooni hindamist Monte Carlo meetoditega. Magistritöös vaadeldakse kahte meetodit: juhusliku hinnapuu meetod ja Monte Carlo vähimruutude meetodit. Töös esmalt tutvustatakse optsioone, Monte Carlo simuleerimist ja Ameerika optsioonide hindamise probleemi. Järgnevalt kirjeldatakse juhusliku hinnapuu meetodi olemust ning Monte Carlo vähimruutude meetodi olemust. Lõpuks antakse ülevaade nii juhusliku hinnapuu meetodi tulemustest kui ka Monte Carlo vähimruutude meetodi tulemustest.

**CERCS teaduseriala:** P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

**Märksõnad:** Ameerika optsioon, Monte Carlo meetod, binoommeetod, finantsmatemaatika.

# PRICING AMERICAN OPTIONS USING MONTE CARLO METHODS

Master thesis

Hans Erik Atonen

## **Abstract**

The goal of this thesis is to examine Monte Carlo methods used for pricing American options. The two methods examined in the thesis are the random forest method and the least square Monte Carlo method. In addition, there is an interest in how different parameters influence the option price. The first part of the thesis gives an overview of options, Monte Carlo simulations and the problems of pricing an American option. Then an overview of the random forest method and the least square Monte Carlo method is given. Finally, both the results of the random forest method and the least square Monte Carlo method are presented.

**CERCS research specialisation:** P160 Statistics, operations research, programming, financial and actuarial mathematics.

**Key Words:** American option, Monte Carlo method, binomial method, financial mathematics.

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>1 Optsioon ja optsiooni hind</b>	<b>5</b>
1.1 Optsioon . . . . .	5
1.2 Black-Scholesi mudel optsiooni hindamiseks . . . . .	6
1.3 Binoommeetod . . . . .	9
<b>2 Ameerika optsiooni hindamine Monte Carlo meetoditega</b>	<b>13</b>
2.1 Monte Carlo meetod . . . . .	13
2.2 Probleemid Ameerika optsiooni hindamisel Monte Carlo meetodiga . . . . .	15
2.3 Juhusliku hinnapuu Monte Carlo meetod . . . . .	17
2.3.1 Ülalt hinnang . . . . .	18
2.3.2 Alt hinnang . . . . .	22
2.3.3 Juhusliku hinnapuu genereerimine . . . . .	25
2.3.4 Sügavuti töötlemine . . . . .	26
2.4 Monte Carlo vähimruutude meetod . . . . .	28
2.4.1 Monte Carlo vähimruutude meetodi idee . . . . .	28
2.4.2 Monte Carlo vähimruutude meetodi numbriline näide . . . . .	31
<b>3 Numbrilised tulemused</b>	<b>37</b>
3.1 Juhusliku hinnapuu meetodi tulemused . . . . .	37
3.2 Monte Carlo vähimruutude meetodi tulemused . . . . .	42
3.3 Meetodite võrdlus . . . . .	48
<b>Kokkuvõte</b>	<b>51</b>
<b>Kasutatud kirjandus</b>	<b>52</b>

# Sissejuhatus

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida Ameerika optsioonide hindamist Monte Carlo meetoditega.

Opsioon on tuletisväärtpaberi vorm, mis annab omanikule õiguse, kuid mitte kohustuse, osta või müüa määratud ajaks tulevikus, teatud finantsvara, eelnevalt kokkulepitud hinnaga. Opsioonide teooria üks tähtsamaid probleeme on optsioonide korrektse hinna määramine. Euroopa optsioon on optsioon, mida saab realiseerida kindla hinnaga optsiooni eluea lõpus. Euroopa optsiooni hinda saab leida Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi lahendina, kuid keerulisemate optsioonide nagu Ameerika optsioonide korral ei ole see võimalik [4]. Ameerika optsioonide peamiseks raskuseks on vajadus leida optimaalne realiseerimishetk ja sellele hetkele vastav hind [2].

Töö koosneb kahest suurest osast: teoreetilisest ja praktilisest. Teoreetilises osas algselt kirjeldame erinevaid optsioone ning optsioonide olulisemaid definitsioone ja mõisteid. Järgnevalt selgitame Ameerika optsioonide hindamist Monte Carlo meetoditega ning sellega kaasnevaid probleeme. Viimasena anname ülevaate nii juhusliku hinnapuu meetodist, mille pakkusid välja Mark Broadie ja Paul Glasserman, kui ka Monte Carlo vähimruutude meetodist, mille pakkusid välja Francis Longstaff ja Eduardo Schwartz.

Praktilises osas teeme numbrilisi simulatsioone ja hindame bermuuda ja Ameerika optsiooni väärtusi erinevate algparameetrite korral. Lisaks uurime, kuidas hinnad käituvad, kui suurendame juhusliku hinnapuu meetodis harude arvu, ning kuidas hinnad käituvad, kui suurendame simulatsiooni radade ehk hinnateede arvu. Samuti võrdleme juhusliku hinnapuu meetodit Monte Carlo vähimruutude meetodiga bermuuda optsiooni hindamisel, kui meil on neli realiseerimis hetke.

Töö kirjutamiseks kasutasime tarkvaraprogrammi Latex ning meetodid kirjutasime tarkvaras Python. Autori tehtud joonised valmisid tarkvaras MetaPost ja Python.

# 1. Optsioon ja optsiooni hind

## 1.1 Optsioon

Järgnev peatükk põhineb allikatel [5] ja [4].

Opsioon on tuletisväärtpaberi vorm, mis annab omanikule õiguse, kuid mitte kohustuse, osta või müüa määratud ajaks tulevikus, teatud finantsvara, eelnevalt kokkulepitud hinnaga. Optsiooni, mis annab omanikule õiguse osta kindla hinnaga, nimetatakse ostuoptsiooniks (ingl k *call option*) samas kui optsiooni, mis annab õiguse müüa kindla hinnaga, nimetatakse müügioptsiooniks (ingl k *put option*). Määratud aega, mille jooksul ostu- või müügiotsust saab realiseerida, nimetatakse täitmisaajaks  $T$  (ingl k *maturity*) ja kokkulepitud hinda nimetatakse täitmishinnaks  $K$  (ingl k *strike / exercise price*).

Alusvara on optsiooni hinna aluseks olev finantsvara ning selleks võivad olla aktsiad, võlakirjad, indeksid, valuutad, teised optsioonid jne. Sõltuvalt sellest, millal saab optsiooni realiseerida, jagatakse Euroopa ja Ameerika optsioonideks.

Euroopa optsioon on optsioonilepingu versioon, mis piirab selle realiseerimist täitmisaajaga  $T$ . Teisisõnu, kui alusvara, näiteks aktsia, on hinnas liikunud, ei saa optsiooni omanik ennetähtaegselt oma optsiooni realiseerida. Selle asemel toimub ostu või müügi realiseerimine ainult optsiooni lõpptähtpäeval.

Võttes arvesse Euroopa optsiooni omadusi defineerime ostu- ja müügioptsiooni väljamakse funktsioonid. Olgu meil ajahetkel  $T$  ostuoptsioon, mille täitmishind on  $K$ . Kui alusvara hind  $S_T$  ajahetkel  $T$  on suurem kui täitmishind  $K$ , siis optsiooni omanik kasutab oma õigust osta alusvara hinnaga  $K$  ning tal on see võimalik turul kõrgema hinnaga  $S_T$  müüa, aga kui  $S_T \leq K$  siis optsiooni omanik ei kasuta oma õigust osta alusvara. Kasutades seda loogikat saame leida tulu, mida ostuoptsioon annab omanikule, ajahetkel  $T$  järgneva valemiga:

$$P(S_T) = \begin{cases} S_T - K, & \text{kui } S_T > K. \\ 0, & \text{kui } S_T \leq K \end{cases}.$$

Kasutades tähistust

$$f^+ := \max\{f, 0\}$$

saame kirjutada ostuoptsiooni tulu ajahetkel  $T$  järgnevalt:

$$P(S_T) = (S_T - K)^+.$$

Sarnase loogika järgi saame leida müügioptsiooni tulu ajahetkel  $T$ :

$$P(S_T) = (K - S_T)^+.$$

Kui Euroopa optsiooni saab realiseerida ainult kindlaksmääratud kuupäeval, siis Ameerika optsioon annab optsiooni omanikule õiguse, aga mitte kohustuse, realiseerida oma õigust osta või müüa mis tahes ajahetkel  $t \leq T$ .

Arvestades Ameerika optsiooni omadusi on ostuoptsiooni tulu optsiooni realiseerimise hetkel  $t$  kujul

$$P(S_t) = (S_t - K)^+, \text{ kus } t \leq T,$$

ning müügioptsiooni tulu kujul

$$P(S_t) = (K - S_t)^+, \text{ kus } t \leq T.$$

Opsioon, mis on Ameerika ja Euroopa optsiooni vahepealne, nimetatakse Bermuda optsiooniks ning see piirab optsiooni realiseerimist ettemääratud diskreetsetele ajahetkedele  $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots \leq t_M = T$ , kus  $M$  tähistab ajahetkede arvu ja  $T$  on täitmisaeg.

## 1.2 Black-Scholesi mudel optsiooni hindamiseks

Järgnev peatükk põhineb allikal [5], kui ei ole viidatud teisiti.

Juhuslikku protsessi  $W(t), t \geq 0$  nimetatakse Wieneri protsessiks ehk Browni liikumiseks (ingl k *standard Brownian Motion*), kui

- $W(0) = 0$  tõenäosusega 1.
- Wieneri protsessi juurdekasvud  $W(t + u) - W(t)$  on normaaljaotusega juhuslikud suurused keskväärtusega 0 ning dispersiooniga  $u$ :  $W(t + u) - W(t) \approx N(0, u)$ ;
- Wieneri protsessi mittelõikuvad muudud ehk juurdekasvud (*increments*) on sõltumatud, see tähendab juhuslikud suurused  $W(t + u) - W(t)$  ja  $W(s + v) - W(s)$  on sõltumatud, kui lõikude  $[t, t + u]$  ja  $[s, s + v]$  ühisosa on null.;

- Wieneri protsess  $W(t)$  on pidev aja  $t$  järgi tõenäosusega 1 [8].

Protsess  $X(t)$  on Wieneri protsess nihkega  $\mu > 0$  ja difusioonikoeffitsientiga  $\sigma^2 > 0$ , kui protsess

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma}$$

on Wieneri protsess.

See tähendab, et

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t), \forall t \geq 0.$$

ja me saame moodustada protsessi  $X(t)$  kasutades Wieneri protsessi  $W(t)$  järgnevalt

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t).$$

Selleks, et määrata optiooni hinda ajahetkel  $t < T$  on vaja teada alusvara hinna käitumist ja järgnevalt eeldame, et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t), \quad (1.1)$$

kus suurus  $\mu$  iseloomustab alusvara oodatavat tulusust ja suurus  $\sigma$  iseloomustab alusvara tulususe volatiilsust.

Valemist (1.1) saab lihtsalt tuletada diferentsiaalvõrrandi logaritmitud hinna jaoks ([6]):

$$d \ln S_t = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Vaatame järgnevalt Euroopa optiooni ja teeme järgmised eeldused:

- alusvara turg on arbitraaživaba, mis tähendab, et turul ei õnnestu moodustada portfelli, mille hind hetkel  $t = 0$  on null ning mille väärtus mingil ajahetkel  $t > 0$  on mistahes stsenaariumi korral mittenegatiivne ning mingi positiivse tõenäosuse korral on positiivne;
- puuduvad tehingukulud;
- lühikese positsiooni võtmine on turul lubatud ehk on võimalus müüa laenatud aktsiat ning hiljem selle aktsia tagasiostmine ja omanikule tagastamine;
- väärtpaberite ostu ja müügi kogus ei ole piiratud;
- väärtpaberite ostmine ja müümine toimub pidevalt;

- alusvaralt ei maksta dividende optsiooni eluea jooksul;  
Sellest eeldusest saab loobuda, kui makstavad dividendid on eelnevalt teada. Dividende võidakse maksta diskreetse aja tagant või pidevalt optsiooni eluea jooksul.
- alusvara hind järgib geomeetrilist Wieneri protsessi ehk käitub vastavalt valemile (1.1);
- riskivaba intressimäär  $r$  ja volatiilsus  $\sigma$  on konstandid või ajast sõltuvad funktsioonid [8].

Selliste eelduste korral saab näidata, et Euroopa optsiooni hind  $V = V(S_t, t)$  peab rahuldama teist järgu osatuletistega diferentsiaalvõrrandit ehk nn. Black-Scholesi võrrandit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Sellel diferentsiaalvõrrandil on lõpmata palju lahendeid [9]. Selleks, et võrrandil oleks üheselt määratud hind, tuleb seada lõpplingimused ehk optsiooni hind ajahetkel  $t = T$  on võrdne tuluga.

$$V(S_T, T) = P(S_T).$$

Kui riskivaba intressimäär ja volatiilsus on konstantsed või ajast sõltuvad funktsioonid, siis saab analüütiliselt leida Euroopa optsiooni hinna Black-Scholesi võrrandi lahendina.

Euroopa ostuoptsiooni hind hetkel  $t = 0$  konstantse intressimäära ja volatiilsuse korral on:

$$V(0) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

ning müügioptsiooni hind hetkel  $t = 0$ :

$$V(0) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1),$$

kus  $N(x)$  on standardiseeritud normaaljaotuse  $N(0, 1)$  jaotusfunktsioon

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

ja

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = \frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Enamustel juhtudel keerulisemate optsoonide korral ei ole võimalik tuletada analüütilist lahendist optiooni hinna leidmiseks nagu Euroopa optiooni korral. Sellisel juhul tuleb kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid hinna leidmiseks nagu võremeetodid, mille hulka kuuluvad binoom- ja trinoommeetod, diferentsmeetodid ja Monte Carlo meetodid. Diferentsmeetodid seisnevad optiooni hinda rahuldava differentsiaalvõrrandi numbrilises lahendamises. Monte Carlo meetodites simuleeritakse alusvara hinna käitumist ja sel teel leitakse iga hinna tee korral väljamakse ajahetkel  $T$  ja optiooni hind on nende väljamaksete diskonteeritud keskmine.

### 1.3 Binoommeetod

Järgnev peatükk põhineb allikatel [1], [5] ja [8], kui ei ole viidatud teisiti.

Binoommeetod võimaldab mugavalt leida optiooni hinna  $V(0)$  hetkel  $t = 0$ , mis teeb binoommeetodi robustseks ja laialdaselt kasutatavaks, seetõttu kasutame seda võrdlusmeetodina.

Jagame pideva aja  $t$  diskreetseteks osadeks. Kasutame järgnevaid tähistusi:

- $M$  - ajahetkede arv;
- $\Delta t := \frac{T}{M}$  - ajaperioodi pikkus;
- $t_i := i \cdot \Delta t$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$  - ajahetked;
- $S_i := S_{t_i}$  - alusvara hind ajahetkel  $t_i$ .

Liikudes ajahetkest  $t_i$  ajahetke  $t_{i+1}$  on igas hinnapuu sõlmes kaks võimalust. Alusvara hind tõuseb teguri  $U$  võrra või langeb teguri  $D$  võrra,  $S_{i+1} = S_i \cdot U$  või  $S_{i+1} = S_i \cdot D$ ,  $\forall i$ . Alusvara hinna tõusu tõenäosus on  $p$  ja languse tõenäosus on  $1 - p$ . Selleks, et määrata binoommeetodi parameetrid  $U$ ,  $D$ , ja  $p$  kasutame kahte tingimust. Esiteks arbitraaži puudumise tingimusest järeldub, et alusvara hinna oodatav

tõus peab võrduma riskivaba vara kasvuga. Seega kehtib

$$\mathbf{E}[S_{i+1}] = S_i \cdot e^{r\Delta t}, \quad (1.2)$$

kus  $\mathbf{E}$  on tinglik keskväärtus tingimusel, et hind ajahetkel  $t_i$  on teada.

Teiselt poolt, binoommeetodi põhjal

$$\mathbf{E}[S_{i+1}] = S_i(pU + (1-p)D), \quad (1.3)$$

ning seostest (1.2), (1.3) järeldub et

$$e^{r\delta t} = pU + (1-p)D. \quad (1.4)$$

Teiseks peab binoommudelil alusvara hinna varieeruvus olema kooskõlas alusvara hinna ette antud varieeruvusega, mida iseloomustab parameeter  $\sigma$ . Kui alusvara hind käitub vastavalt diferentsiaalvõrrandile (1.1), siis

$$D[S_{i+1}] = \sigma^2 S_i^2 \Delta t.$$

Binoommudeli põhjal aga

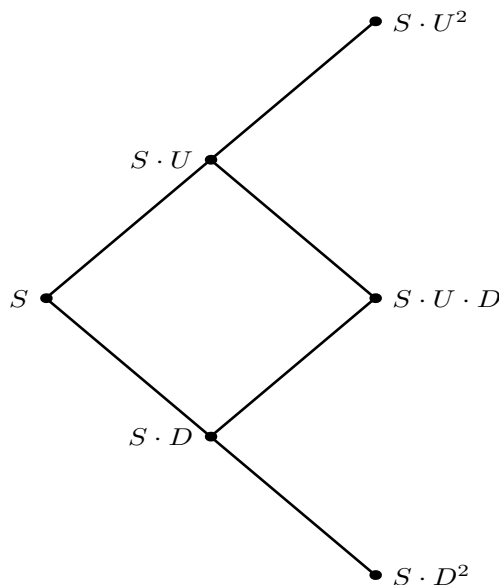
$$\begin{aligned} \mathbf{D}[S_{i+1}] &= \mathbf{E}[(S_{i+1})^2] - (\mathbf{E}[S_{i+1}])^2, \\ &= S_i^2 pU^2 + S_i^2 (1-p)D^2 - S_i^2 (pU + (1-p)D)^2 \\ &= S_i^2 (pU^2 + (1-p)D^2 - e^{2r\Delta t}). \end{aligned}$$

Selleks, et binoommeetodi hind koonduks Black-Scholesi võrrandi lahendiks, peab kehtima võrdus

$$pU^2 + (1-p)D^2 - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t), \quad (1.5)$$

kus  $o(\Delta t)$  on lõpmatu väike suurus  $\Delta t$  suhtes. Võrrandite süsteemil (1.4), (1.5) on lõpmata palju erinevaid lahendeid, üheks võimalikuks lahendiks on valida  $U$ ,  $D$  ja  $p$  järgnevalt:

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r\Delta t} - D}{U - D}; \\ U &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}; \\ D &= \frac{1}{U} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$



Joonis 1.1: Binoommeetodi alusvara hinnapuu

Joonisel 1.1 on kujutatud alusvara hinna liikumist binoommeetodis. Märkame, et alates ajahetkest  $t_2$  hakkavad erinevate stsenaariumite korral alusvara hinnad kattuma. Alusvara hind on sama:  $S_0UD$ , kui liikuda esmalt üles ja siis alla või kui liikuda esmalt alla ja siis üles. See tähendab, et täitmisajal  $T = M \cdot \Delta t$  on alusvaral üksnes  $M + 1$  võimaliku hinda:  $S_0U^jD^{M-j}$ , kus  $0 \leq j \leq M$ .

Opsiooni hinna leidmiseks ajahetkel  $t = 0$  tuleb leida igale sõlmele vastav alusvara hind ajahetkel  $t = T$ :

$$S_{j,M} = S_0U^jD^{M-j}, \text{ kus } 0 \leq j \leq M.$$

Seejärel saame leida ajahetkel  $T$  sõlmes  $j$  opsiooni hinna, mis on võrdne opsiooni tuluga

$$V_{j,M} = P(S_{j,M}), \text{ kus } j = 0, \dots, M.$$

Järgmisena arvutame opsiooni hinnad ajahetkedel  $t_{M-1}, t_{M-2}, \dots, 0$  liikudes rekursiivselt ajas ettepoole.

**Euroopa opsioon.** Euroopa opsiooni korral arvutatakse rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes opsiooni hind vastavalt valemile:

$$V_{j,i} = e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}), \text{ kus } 0 \leq j \leq i \text{ ja } i = M-1, M-2, \dots, 0.$$

Väärtus  $V_{0,0}$  ongi opsiooni hind hetkel  $t = 0$ .

**Ameerika optsoon.** Ameerika optsooni korral leitakse optsooni hind vastavalt valemitele:

$$\begin{aligned}S_{j,i} &= S_0 U^j D^{i-j}, \text{ kus } j = 0, \dots, i, \\V_{j,i}^{\text{cont}} &= e^{-r\Delta t} (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}), \\V_{j,i} &= \max\{P(S_{j,i}), V_{j,i}^{\text{cont}}\}.\end{aligned}$$

Siin väärtus  $V_{j,i}^{\text{cont}}$  tähistab optsooni hinda ajahetkel  $t_i$ , kus me ei lõpeta seda optsooni, vaid hoiaime järgmise perioodini. Liikudes ajas ettepoole kontrollime igal ajahetkel  $t_i$  optsooni hinna puhul, kas suurim hind saadakse ajahetkel  $t_i$  optsooni realiseerimisel või hoides optsooni järgmise ajahetkeni.

# 2. Ameerika optsiooni hindamine

## Monte Carlo meetoditega

### 2.1 Monte Carlo meetod

Järgnev peatükk põhineb allikatel [7], [9], kui ei ole viidatud teisiti.

Monte Carlo meetod on simuleeritud juhuslike arvude kasutamine arvuliste tulemuste saamiseks. Sageli kasutatakse Monte Carlot kui integraali väärtuse hindamise meetodina. Teame, et kui  $f$  on mingi funktsioon,  $X$  on pidev juhuslik suurus ja  $f_X$  on juhusliku suuruse  $X$  tihedusfunktsioon, siis kehtib

$$\mathbf{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)f_X(x)dx.$$

Oletame, et tahame leida määratud integraali

$$\mu = \int_a^b f(x)dx,$$

ja defineerime funktsiooni

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f_X(x)} & ,\text{kui } x \in [a, b] \\ 0 & ,\text{kui } x \notin [a, b] \end{cases},$$

kus tihedusfunktsioon  $f_X(x) > 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

Selle järgi saame leida määratud integraali keskväärtuste kaudu

$$\mu = \int_a^b \frac{f(x)f_X(x)}{f_X(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx = \mathbf{E}[g(x)].$$

Genereerides jaotusest  $X$  valimi  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , saab keskväärtust hinnata järgnevalt:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i).$$

Kuna  $g(x)$  on integreeruv, siis suurte arvude seaduse (ingl k *law of large numbers*) põhjal

$$\hat{\mu} \rightarrow \mu \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Selleks, et Monte Carlo meetodi hinnangu varieeruvust vähendada luuakse  $k$  suurusega valim jaotusest ja nendele vastava suurusega valim antiteetilisest jaotusest. Kui valim  $n_1, \dots, n_k$  on sõltumatud ja ühtlaselt jaotatud jaotusest  $N(0, 1)$ , siis antiteetiline valim oleks  $-n_1, \dots, -n_k$ .

Opsiooni hinna leidmisel arvestatakse alusvara hinnaliikumist kui juhusliku protsessi, mida saab simuleerida. Euroopa opsiooni korral määrab opsiooni hinna simuleeritud alusvarade keskmine tulu täitmisajal  $T$  ja ei sõltu alusvara liikumisest muudel ajahetkedel. Kui alusvarahind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile (1.1), siis riskineutraalse tõenäosusmõõdu  $Q$  korral alusvara hind käitub vastavalt võrrandile

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

kus  $W_t$  on Wieneri protsess tõenäosusmõõdu  $Q$  korral. Viimase diferentsiaalvõrrandi lahend on esitatav kujul [4]

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(t)},$$

kus  $W(t)$  on normaaljaotusega juhuslik suurus, millel on keskväärtus 0 ja standardhälvega  $\sqrt{T}$ . Sama jaotus on ka  $\sqrt{T}Z$  korral, kui  $Z$  on standardse normaaljaotusega, mis tähendab, et saame alusvara hinna  $S_T$  kirjutada valemiga

$$S_T = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}. \quad (2.1)$$

Seega opsiooni hind on lognormaalse jaotusega.

Euroopa opsiooni hind on võrdne diskonteeritud keskmise tulu väärtusega ehk

$$V = e^{-rT} \mathbf{E}[P(S_T)],$$

kus  $K$  on täitmishind.

Korrates simulatsioone piisavalt palju kordi, saame leida oodatava opsiooni hinna võttes simulatsioonidest saadud hindade keskmise. Võtame simulatsioonide arvaks  $n$  ning tähistame  $i$ -nda simulatsiooni hinda kui  $V_i = e^{-rT} P(S_{T,i})$ . Nii saame opsiooni hinnaks

$$\hat{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i.$$

Suurte arvude seaduse pärast saame jälle öelda, et

$$\hat{V} \rightarrow V \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Hinna dispersiooni saame leida valemiga:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \hat{V})^2.$$

Tsentraalse piirteoreemi põhjal järeldub, et

$$\frac{\hat{V} - V}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1).$$

Euroopa optsiooni korral on iga simuleeritud alusvara korral vaja teada hinda ajahetkedel  $t_0$  ja  $T$ . Keerulisemate optsiooni hindade leidmisel on sageli vaja simuleerida alusvara hinnaliikumist mitme ajahetke jooksul, mitte ainult alg- ja lõppajahetke korral. Nägime valemis (2.1) kuidas simuleerida alusvara hinna  $S_T$ , kui on teada  $S_0$ . Sama loogikaga töötab ka alusvara hinna  $S_{t_{i+1}}$  simuleerimisel, kui on teada alusvara hind  $S_{t_i}$ . Saame järgneva valemi:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

kus  $Z_1, \dots, Z_m$  on sõltumatud standardse normaaljaotuse väärtused.

Ameerika optsioon on keerulisem optsioon, kus on alusvara hinda vaja teada pidevalt, sest Ameerika optsiooni kehtivusaja jooksul peab optsiooni valdaja pidevalt jälgima alusvara hinda ja otsustama, kas optsiooni tulevikuhind on suurem kui hetkeline tulu. Ameerika optsiooni hinda  $V(0)$  saab leida järgmise valemiga:

$$V(0) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbf{E}_Q(e^{-r\tau} P(S_\tau) | S_0),$$

kus  $Q$  on riskineutraalne tõenäosusmõõt ja  $\tau$  on optsiooni realiseerimisaeg.

## 2.2 Probleemid Ameerika optsiooni hindamisel Monte Carlo meetodiga

Järgnev peatükk põhineb artiklil [2].

Peamiseks raskuseks Ameerika tüüpi optsioonide hindamises on vajadus leida optimaalne realiseerimishetk. Standardsed simulatsiooni meetodid on nn. "edasi" suunatud algoritmid, st et optsiooni alusvara simuleeritakse liikudes ajas edasi. Pärast seda leitakse genereeritud radadele vastavad tulud, võttes arvesse kindlaks määratud optsiooni realiseerimis loogikat. Siis võetakse kõigi radade diskonteeritud tulu ja

leitakse nende keskmine, mis ongi optsiooni hinna lähisväärtus. Seevastu hindamis-  
meetodid, mida kasutatakse Ameerika tüüpi optsioonide korral, peaksid kasutama  
nn. "tagasi" suunatud algoritme. Mis tähendab, et täitmisajal  $T$  on tulu väärtus ker-  
gelt leitav. Kuid liikudes ajas ettepoole tuleb optimaalne optsiooni realiseerimishetk  
ja vastav hind leida dünaamilise programmeerimisega (*dynamic programming*).

Vaatame ühe alusvaraga ostuoptsiooni, mille alusvaralt makstakse pidevalt di-  
vidende. Euroopa optsioonide hinna leidmisel tüüpiline lähenemisviis on kasutada  
simuleerimist, et leida riskineutraalse tõenäosuse korral keskväärtus

$$V_0 = \mathbf{E}[e^{-rT}P(S_T)],$$

kus  $r$  on intressimäär,  $T$  optsiooni täitmisae ja  $S_T$  alusvara hind ajahetkel  $T$ . Ameerika  
optsiooni korral on eesmärk leida

$$V_0 = \max_{\tau} \{\mathbf{E}[e^{-r\tau}P(S_{\tau})]\},$$

üle kõigi optsiooni eluea esineva ajahetkede  $\tau$ .

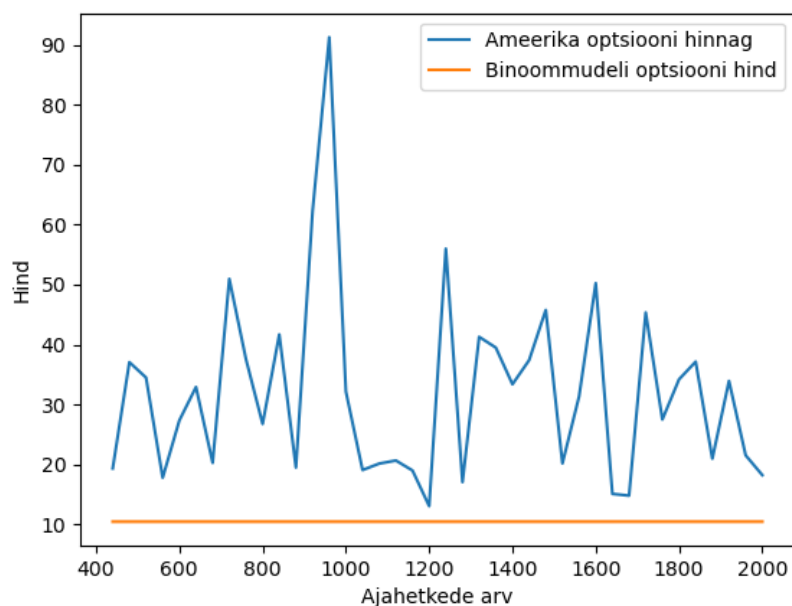
Vaatleme ajahetki  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$  ja simuleerime ajahetkede-  
le vastava alusvara hindade  $S_0, S_1, \dots, S_T$  liikumise. Siis arvutame rajale vastava  
diskonteeritud optsiooni hinna ning kordame seda protseduuri mitme raja korral.  
Lõpuks leiame kõigi simuleeritud radade korral keskmise hinna. Peamine küsimus  
on, mis loogika järgi arvutada rajale vastava diskonteeritud optsiooni hind.

Kui optimaalne ajahetk  $t_j \in [0, T]$  Ameerika optsiooni realiseerimiseks alusvara  
hinna  $S_j$  korral, oleks teada, siis rajale vastav diskonteeritud optsiooni hind oleks  
 $e^{-rt_j}P(S_j)$ . Kuid see ajahetk ei ole teada ja on vaja simulatsiooni kaudu hinnata.  
Paneme tähele, et kui leida optsiooni hind vastavalt valemile:

$$V_0 = \max_{i=0,1,\dots,m} e^{-rt_i}P(S_i), \tag{2.2}$$

siis, sellisel juhul ülehinnatakse optsiooni hinda, kuna

$$\max_{i=0,1,\dots,m} e^{-rt_i}P(S_i) \geq e^{-rt_j}P(S_j).$$



Joonis 2.1: Valemiga (2.2) leitud optiooni hind võrreldes binoommeetodi hinnaga.

Joonisel 2.1 on näha, kuidas valemi (2.2) põhjal leitud optiooni hind on ülehinnatud ja ei lähene binoommeetodiga leitud optiooni hinnale.

Järgnevates peatükkides tutvustame kahte simulatsiooni meetodit, millega hinnata Ameerika optiooni.

## 2.3 Juhusliku hinnapuu Monte Carlo meetod

Järgnev peatükk ja selle alam peatükid põhinevad allikatel [2] ja [4], kui ei ole viidatud teisiti.

Broadie Glassermani juhusliku hinnapuu (ingl k *Random forest*) meetod annab kaks hinnangut optiooni hinnale, ühe ülalt ning teise alt ja mõlemad hinnangud koonduvad tegelikule väärtusele. Järgnevalt selgitame Broadie Glassermani meetodi ideed.

Juhusliku hinnapuu meetodi simulatsioon põhineb Markovi ahela jadal  $S_0, S_1, \dots, S_m$ . Olgu optiooni eluiga  $[0, T]$  ja me jagame eluea  $m$  ajahetkeks, kus väärtus  $S_i$  iseloomustab alusvara hinda ajahetkel  $t_i$ . Määrame hargneva parameetri  $b \geq 2$ . Alates alghinnast  $S_0$  simuleerime  $b$  sõltumatut järgnevat sõlme  $S_1^1, \dots, S_1^b$ . Igas sõlmes  $S_1^i$  simuleerime  $b$  sõltumatut järeltulijat  $S_2^{i1}, \dots, S_2^{ib}$ . Nii jätkatakse kuni jõuame viimase,

ajahetke sõlmedeni.

Oletame, et  $\hat{V}_n(b)$  ja  $\hat{v}_n(b)$  on  $n$  sõltumatu simulatsiooni vaatluste keskmised, hargneva parameetri  $b$  väärtuse korral. Oletame et optiooni hinna  $V_0$  hetkel  $t = 0$  jaoks on nad vastavalt ülalt ja alt hinnang:

$$\mathbf{E}[\hat{V}_n(b)] \geq V_0 \geq \mathbf{E}[\hat{v}_n(b)]. \quad (2.3)$$

Oletame, et mingi suuruse  $H_n(b)$  korral

$$\hat{V}_n(b) \pm H_n(b),$$

on kehtiv 95% usaldusintervall  $\mathbf{E}[\hat{V}_n(b)]$  jaoks. Lisaks oletame, et mingi suuruse  $L_n(b)$  korral

$$\hat{v}_n(b) \pm L_n(b),$$

on kehtiv 95% usaldusintervall  $\mathbf{E}[\hat{v}_n(b)]$  jaoks. Võttes alt hinnangu usaldusintervallist madalamaks väärtuseks ja ülalt hinnangu usaldusintervallist ülemiseks väärtuseks, saame intervalli

$$\left( \hat{v}_n(b) - L_n(b), \hat{V}_n(b) + H_n(b) \right), \quad (2.4)$$

mis sisaldab tundmatut väärtust  $V_0$  tõenäosusega 90%. Seega kahe hinnangu kombineerimisel saame luua sobiva usaldusintervalli. Juhusliku hinnapuu meetodis  $\mathbf{E}[\hat{V}_n(b)]$  ja  $\mathbf{E}[\hat{v}_n(b)]$  koonduvad lõpuks optiooni hinnaks  $V_0$  kui  $b \rightarrow \infty$  ja suurused  $H_n(b)$  ning  $L_n(b)$  kahanevad nulliks kui  $n \rightarrow \infty$ . Järelikult parameetri  $b$  kasvades kahaneb intervall punktis (2.4) väärtuse  $V_0$  juurde.

Juhusliku hinnapuu meetodis leiame optiooni hinna võttes ülemise hinnangu ja alumise hinnangu keskmise ajahetkel  $t = 0$

$$V_0 = \frac{\hat{v}_n(b) + \hat{V}_n(b)}{2}.$$

### 2.3.1 Ülalt hinnang

Juhusliku hinnapuu kaudu määrame igale sõlmele ülalt ja alt hinnangud liikudes ajas tagasi ettepoole. Teame, et Ameerika optiooni hind ajahetkel  $t_i$  alusvara hinna  $S_i = s$  korral on maksimum tulust  $P(s)$ , kui lõpetame optiooni, ning diskonteeritud optiooni hinnast, kui hoiame optiooni järgmise perioodini:

$$V_i = \max\{P(s), \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot V_{i+1} | S_i = s]\}, \text{ kus } i = 0, \dots, m - 1. \quad (2.5)$$

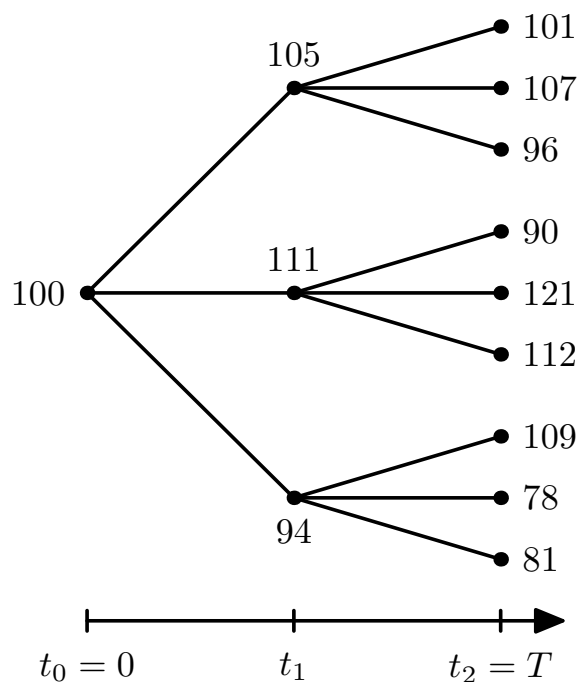
Olgu optsiooni hinna ülalt hinnanguks  $\hat{V}_i^j$  sõlmes  $S_i^j$ , kus  $j = 1, \dots, b$ . Viimase ajahetke  $t_m$  sõlmede korral võtame:

$$\hat{V}_m^j = P(S_m^j). \quad (2.6)$$

Sealt ajas ettepoole liikudes leiame optsiooni hinna ülalt hinnangud sõlmedes järgneva valemiga:

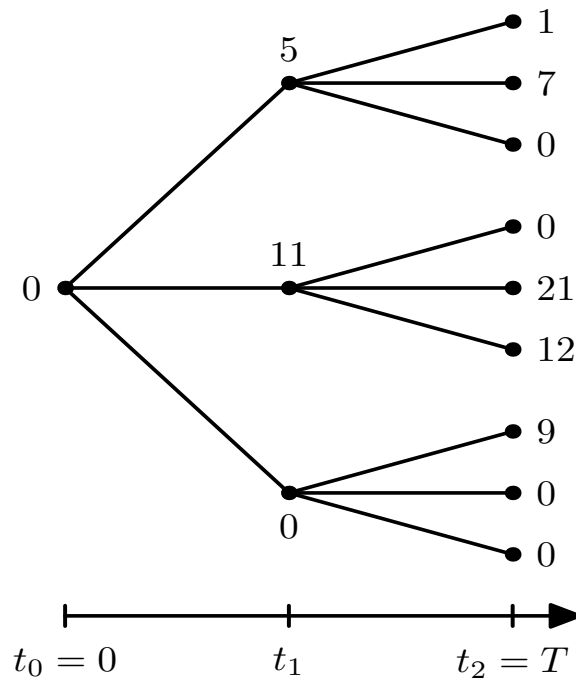
$$\hat{V}_i^j = \max \left\{ P(S_{i+1}^j), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{V}_{i+1}^j \right\}. \quad (2.7)$$

Toome lihtsa numbrilise näite, et paremini mõista juhusliku hinnapuu meetodi ülalt hinnangu leidmise loogikat. Olgu meil Ameerika ostuoptsioon, mille hind ajahetkel  $t_0$  on 100, täitmishind on samuti 100 ja intressimäär on 0. Optsiooni saab kasutada ajahetkedel  $t_0$ ,  $t_1$  ja  $t_2$ . Joonisel 2.2 on juhusliku hinnapuu näide.



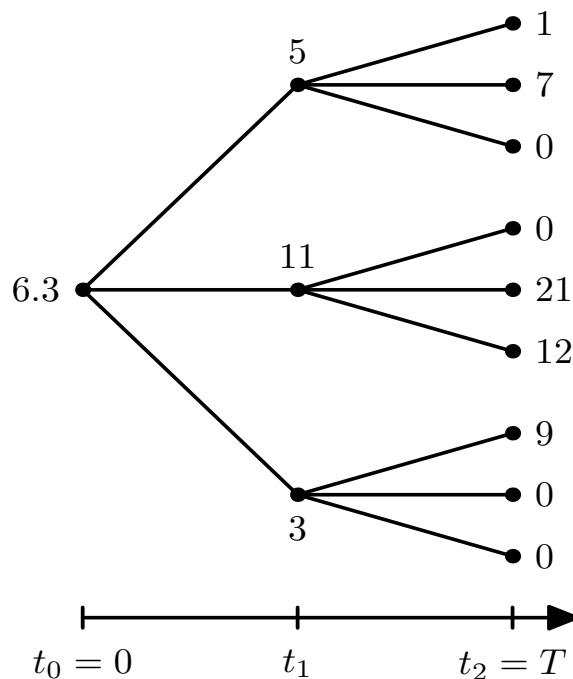
Joonis 2.2: Genereeritud juhuslik hinnapuu

Ülalt hinnangu leidmiseks on vaja teada iga ajahetke väljamakse tulu. Selleks realiseerime ostuoptsioonil väljamakse funktsiooni, mille tulemused on joonisel 2.3.



Joonis 2.3: Alusvaradelt saadud tulu

Opsiooni hinna ülalt hinnangu arvutust on näha jooniselt 2.4.



Joonis 2.4: Ülalt hinnangu arvutuste tulemused

Vaatame ajahetke  $t_1$  esimese sõlme arvutust. Võtame kõik esimesele sõlmele järgnevate sõlmede hinnad ja leiame keskmise, milleks on  $\frac{1+7+0}{3} \approx 2,7$ . Järgmisena võtame sõlme väljamakse tulu, milleks on 5. Võrdleme keskmist 2,7 väljamakse

tuluga ning võtame suurema väärtuse, milleks on 5. Sellega oleme leidnud selle optiooni hinnale esimese sõlme ülalt hinnangu. Ajahetke  $t_1$  optiooni hinnale teise sõlme hinnanguks on  $\max\{\frac{21+12+0}{3}, 11\} = 11$ , . Optiooni hinnale kolmanda sõlme hinnanguks ajahetkel  $t_1$  on  $\max\{\frac{9+0+0}{3}, 0\} = 3$ . Optiooni hinnale ülalt hinnanguks saame  $\max\{\frac{5+11+3}{3}, 0\} = 6, 3$ .

## Ülalt hinnangu omadus

Näitame, et ülalt hinnang on tõepoolest ülemiseks tõkkeks ehk

$$\mathbf{E}[\hat{V}_i^j | S_i^j] \geq V_i^j. \quad (2.8)$$

Esiteks märkame, et väide kehtib alati viimasel ajahetkel valemi (2.6) pärast.

Järgmisena näitame, et kui (2.8) kehtib  $i + 1$  korral, siis see kehtib ka  $i$  korral.

Valemi (2.7) põhjal saame

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{V}_i^j | S_i^j] &= \mathbf{E} \left[ \max \left\{ P(S_i^j), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{V}_{i+1}^j \right\} \middle| S_i^j \right] \\ &\geq \max \left\{ P(S_i^j), \mathbf{E} \left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{V}_{i+1}^j \middle| S_i^j \right] \right\} \\ &= \max \{ P(S_i^j), \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{V}_{i+1}^j | S_i^j] \} \\ &\geq \max \{ P(S_i^j), \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot V_{i+1}^j | S_i^j] \} \\ &= V_i^j. \end{aligned}$$

Siin esimene võrratus kehtib Jenseni võrratuse pärast, järgnev võrdus kehtib kuna sõlme  $S_i^j$  järeltulijad on statistiliselt sõltumatud ja ühesuguse jaotusega. Viimane võrratus kehtib induktsiooni hüpoteesi  $i + 1$  tõttu ja viimane võrdus tuleb valemist (2.5).

Märgime, et Jenseni võrratus on kujul:

$$\mathbf{E}[g(X)] \geq g(\mathbf{E}[X]),$$

kui  $g$  on kumer funktsioon,  $\mathbf{E}|g(X)| < \infty$  ja  $\mathbf{E}|X| < \infty$  [6].

## Ülalt hinnangu koonduvus

Defineerime  $\bar{V}_0$  kui  $n$  simulatsiooni korral leitud optiooni ülalt hinnangute  $\hat{V}_0^i$  keskmise:

$$\bar{V}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{V}_0^i}{n},$$

ja olgu  $V_0$  optiooni hind ajahetkel  $t = 0$ .

Lisaks defineerime ära juhusliku väärtuse  $X$   $p$ -normi kui  $(E|X|^p)^{1/p}$ .

Artiklis [2] on loodud järgnev teoreem ülalt hinnangu kohta.

**Teoreem.** Eeldame  $\mathbf{E}[|P(S_i)|^{p'}] < \infty$  iga  $t$  ja mingi  $p' > 1$  korral. Siis  $\bar{V}_0$  koondub optiooni hinnaks  $V_0$   $p$ -normi järgi iga  $0 < p < p'$  korral, kui  $b \rightarrow \infty$  ja  $n$  on suvaline ( $n$  võib olla lõplik, aga võib ka läheneda lõpmatusse). Ülalt hinnang  $\bar{V}_0$  koondub optiooni hinnaks  $V_0$  tõenäosuse järgi ja seega on ülalt hinnang  $\bar{V}_0$  mõjususe hinnanguks optiooni hinnale  $V_0$ .

Hinnangu mõjususest järeldub, et

$$E[\hat{V}_0] \rightarrow V_0.$$

### 2.3.2 Alt hinnang

Alt hinnangu leidmiseks, kasutame täpselt sama juhusliku hinnapuud ja sõlmi nagu ülalt hinnangu leidmiseks.

Olgu optiooni hinna alt hinnang  $\hat{v}_i^j$  sõlmes  $S_i^j$ . Ajahetke  $t_m$  sõlmede korral võtame alt hinnanguks

$$\hat{v}_m^j = P(S_m^j).$$

Ajahetkel  $t_i$  sõlmes  $j$  leiame esmalt iga  $k = 1, \dots, b$  korral suuruse

$$\hat{v}_{ik}^j = \begin{cases} P(S_i^j) \text{ kui } \frac{1}{b-1} \sum_{j=1, j \neq k}^b e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{v}_{i+1}^j \leq P(S_i^j); \\ e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{v}_{i+1}^j \text{ vastasel juhul} \end{cases},$$

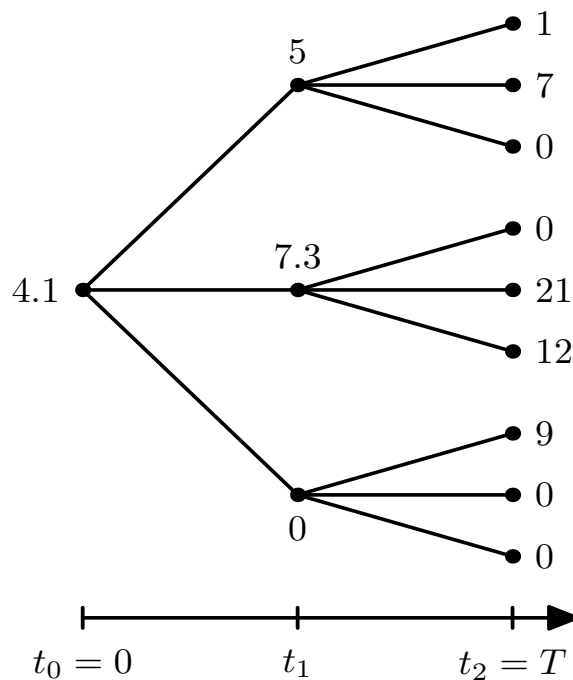
ning alt hinnangu leiame vastavalt valemile:

$$\hat{v}_i^j = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{v}_{ik}^j.$$

Kasutame alt hinnangu näites sama puud, mis oli esitatud Joonisel 2.2.

Alt hinnangu leidmiseks on taas vaja teada iga ajahetke väljamakse tulu. Selleks realiseerime ostuoptioonil väljamakse funktsiooni, mille tulemused on joonisel 2.3.

Alt hinnangu arvutuse tulemusi on näha jooniselt 2.5.



Joonis 2.5: Alt hinnangu arvutuste tulemused

Vaatame ajahetke  $t_1$  teise sõlme arvutust. Esiteks jätame välja teisele sõlmele järgneva esimese sõlme ajahetkel  $t_2$ , milleks on hind 0. Leiame suuruse  $\hat{v}_{11}^2$  kasutades teisi teisele sõlmele järgnevaid sõlme saame tulemuseks  $\frac{21+12}{2} = 16,5$ . Nüüd võrdleme tulemust väljamakse tuluga ja näeme, et  $16,5 > 11$ , järelikult  $\hat{v}_{11}^2 = 0$ . Järgmisena jätame välja teisele sõlmele järgneva teise sõlme, mille hind on 21. Teiste sõlmede tulemus on  $\frac{0+12}{2} = 6$ , mis tähendab, et  $11 \geq 6$ , järelikult  $\hat{v}_{12}^2 = 11$ . Viimasena jätame välja teisele sõlmele järgneva kolmanda sõlme, mille hind on 12. Nüüd on teiste sõlmede tulemus  $\frac{0+21}{2} = 10,5$ , mis on taas väiksem kui väljamakse tulu. Seega saame  $\hat{v}_{13}^2 = 11$ . Leides nende kolme suuruse keskmise saame  $\frac{0+11+11}{3} \approx 7,3$ . Sellega oleme leidnud selle optsiooni hinnale teise sõlme alt hinnangu. Järgime sama loogikat kõigi teiste sõlmede jaoks ja leiame ajahetkel  $t_1$  optsiooni hinnale esimese sõlme alt hinnangu, milleks saame  $\frac{5+5+5}{3} = 5$ . Optsiooni hinnale kolmanda sõlme alt hinnanguks saame  $\frac{0+0+0}{3} = 0$  ja optsiooni hinnale alt hinnanguks saame  $\frac{5+7,3+0}{3} = 4,1$ .

## Alt hinnangu omadus

Tõestame induktsiooniga, et alt hinnang tõepoolest igas sõlmes alahindab optiooni hinda ehk

$$\mathbf{E}[\hat{v}_i^j | S_i^j] \leq V_i^j. \quad (2.9)$$

Olgu

$$Y_i^j = \frac{1}{b-1} \sum_{k=1, j \neq k}^b e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{v}_{i+1}^k. \quad (2.10)$$

Kuna  $Y_i^j$  ja  $\hat{v}_i^j$  on sõltumatud fixeeritud  $S_{t_i}$  korral, siis saame

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{v}_{ik}^j | S_i^j] &= \mathbf{E}[P(S_i^j) \cdot 1_{P(S_i^j) \geq Y_{i+1}^j}], \\ &+ \mathbf{E}[e^{-r} \hat{v}_i^j \cdot 1_{P(S_i^j) < Y_{i+1}^j}], \\ &= P(S_i^j) \cdot \mathbf{P}(P(S_i^j) \geq Y_{i+1}^j | S_i^j), \\ &+ \mathbf{E}[e^{-r} \hat{v}_i^j] \cdot \mathbf{P}(P(S_i^j) < Y_{i+1}^j | S_i^j), \\ &= P(S_i^j) \cdot p + \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \hat{v}_i^j] \cdot (1 - p). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et  $\mathbf{E}[\hat{v}_i^j | S_i^j] = \mathbf{E}[\hat{v}_{ik}^j]$  iga  $k = 1, \dots, b$  korral. Selle põhjal saame

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{v}_i^j | S_i^j] &= P(S_i^j) \cdot p + \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot \hat{v}_i^j | S_i^j] \cdot (1 - p), \\ &\leq P(S_i^j) \cdot p + \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot V_{i+1}^j | S_i^j] \cdot (1 - p), \\ &\leq \max\{P(S_i^j), \mathbf{E}[e^{-r \cdot (t_{i+1} - t_i)} \cdot V_{i+1}^j | S_i^j]\}, \\ &= V_i^j. \end{aligned}$$

Alt hinnangu koonduvuse kohta kehtib analoogiline teoreem kui ülalt hinnangu kohta.

Näitame veel induktsiooniga, et iga teekonna korral igas ajahetkes on alt hinnang alati väiksem või võrdne ülalt hinnanguga ehk

$$\hat{V}_i^j \leq \hat{V}_i^j.$$

Esiteks on selge, et see võrratus kehtib ajahetkel  $t_m = T$ , sest  $\hat{V}_m^j = \hat{v}_m^j = P(S_m^j)$ . Induktsiooni hüpotees on  $\hat{V}_{i+1}^j \leq \hat{V}_{i+1}^j$ , kus  $j = 1, \dots, b$ .

Olgu  $Y_i^j$  defineeritud sama moodi kui valemis (2.10). Kui kõik  $Y_i^j$  väärtused on väiksemad või võrdsed väärtusega  $P(S_i^j)$ , siis  $\hat{v}_{ik}^j = P(S_i^j)$ , kus  $j = 1, \dots, b$  ja

seetõttu  $\hat{v}_i^j = P(S_i^j) \leq \hat{V}_i^j$ . Eeldame, et vähemalt üks väärtus  $Y_i^j$  on suurem kui  $P(S_i^j)$ , siis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{v}_{ik}^j &= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b (P(S_i^j) 1_{\{P(S_i^j) \geq Y_i^j\}} + e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j 1_{\{P(S_i^j) < Y_i^j\}}), \\
&= \left( \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b 1_{\{P(S_i^j) \geq Y_i^j\}} \right) P(S_i^j) + \left( \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b 1_{\{P(S_i^j) < Y_i^j\}} \right), \\
&\quad \times \frac{\sum_{j=1}^b e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j 1_{\{P(S_i^j) < Y_i^j\}}}{\sum_{j=1}^b 1_{\{P(S_i^j) < Y_i^j\}}}, \\
&= pP(S_i^j) + (1-p) \frac{\sum_{j=1}^b e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j 1_{\{P(S_i^j) < Y_i^j\}}}{\sum_{j=1}^b 1_{\{P(S_i^j) < Y_i^j\}}}. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Eeldame nüüd, et  $Y_i^1, \dots, Y_i^g$  on suuremad kui  $P(S_i^j)$  ja  $Y_i^{g+1}, \dots, Y_i^b$  on väiksemad või võrdsed väärtusega  $P(S_i^j)$ . Saame nüüd valemis (2.11) murru ümber kirjutada kui  $g^{-1} e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j$ . Iga  $d \leq g < f \leq b$  korral on  $Y_i^d > Y_i^f$ , mille tõttu  $e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^d \leq e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^f$ . Seega,

$$\max\{e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^1, \dots, e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^g\} \leq \min\{e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^{g+1}, \dots, e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^b\}.$$

Millest järeldub

$$\frac{1}{g} \sum_{j=1}^g e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j \leq \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j. \tag{2.12}$$

Kasutades valemis (2.11) ja (2.12) ning induktsiooni järeldust saame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{v}_{ik}^j &\leq pP(S_i^j) + (1-p) \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{v}_{i+1}^j, \\
&= pP(S_i^j) + (1-p) \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{V}_{i+1}^j, \\
&\leq \max \left\{ P(S_i^j), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b e^{-r(t_{i+1}-t_i)} \hat{V}_{i+1}^j \right\}, \\
&= \hat{V}_i.
\end{aligned}$$

### 2.3.3 Juhusliku hinnapuu genereerimine

Alusvara genereerimiseks Ameerika optsioonil, mis maksab pidevalt dividende ja järgib geomeetrilise Browni liikumise protsessi, eeldame, et alusvara hind  $S_t$  rahuldab

stohhastilist differentiaalvõrrandid

$$dS_t = S_t[(r - \delta)dt + \sigma dW_t],$$

kus  $W_t$  on standardne Browni liikumise protsess,  $r$  on intressimäär,  $\delta$  on dividendimäär ja  $\sigma > 0$  on volatiilsuse parameeter. Siis  $\ln(S_i/S_{i-1})$  on normaaljaotusega, mille keskväertus on  $(r - \delta - \sigma^2/2)(t_i - t_{i-1})$  ja standardhälve  $\sigma(t_i - t_{i-1})$ . Kui  $S_{i-1}$  on teada, siis  $S_i$  saab arvutada järgneva valemiga

$$S_i = S_{i-1}e^{(r-\delta-\sigma^2/2)(t_i-t_{i-1})+\sigma\sqrt{t_i-t_{i-1}}W},$$

kus  $W$  on standardsest normaaljaotusest juhuslik suurus.

Korvoptsoon on selline optsoon, mille väljamakse suurus sõltub mitme alusvara hinnast. Vaatame näiteks sellist Ameerika korvoptsooni, kus väljamakse funktsioon ostuoptsooni korral on  $\max_{i=1,\dots,k}(S^i - K)^+$  ja müügioptsooni korral on  $\max_{i=1,\dots,k}(K - S^i)^+$ . Alusvara hindade kohta eeldame, et nad järgivad korreleeritud geomeetrilise Browni liikumise protsessi, st,

$$dS_t^i = S_t^i[(r - \delta_i)dt + \sigma_i dW_t^i],$$

kus  $W_t^i$  on standardne Browni liikumise protsess ja  $W^i$  ning  $W^j$  vaheline korrelatsioonikordaja on  $\rho_{ij}$ . Lihtsuse huvides võtame numbrilistes tulemustes  $\delta_i = \delta$  ja  $\rho_{ij} = \rho \forall i, j = 1, \dots, k$ , kus  $i \neq j$ .

### 2.3.4 Sügavuti töötlemine

Juhusliku hinnapuu meetodil esineb kaks piirangut. Esiteks vajab meetod  $m^b$  sõlme, mis tähendab, et ajaperioodide arv  $m$  peab olema piiratud kuna valides suure ajaperioodide arvu, kasvaks sõlmede arv liiga kiirelt. Seetõttu on juhusliku hinnapuu meetod mõeldud enamasti Bermuuda tüüpi optsooni hindamiseks, kus optsooni saab realiseerida ajahetkedel  $t_0, t_1, \dots, t_m$  suhteliselt väikese  $m$  korral.

Teine probleem juhusliku hinnapuu meetodiga on selle rakendamine isegi suhteliselt väikese ajaperioodide arvu korral. Naiivne viis implementeerida juhusliku hinnapuu meetodit oleks genereerida kõik  $m^b$  sõlme( $m$  ajaperioodi hargneva parameetriga  $b$ ) ja seejärel arvutada ülalt ning alt hinnang rekursiivselt nagu kirjeldasime

varem. Märgates, et hinnangud igas sõlmes sõltuvad ainult sellest sõlmest hargnenud alampuust, saame vähendada nõutavat mälu mahtu. Kasutades seda märkust on mälu vaja maksimaalselt hoida  $mb + 1$  sõlme väärtusi.

Mälumahu vähendamise idee seisneb puu sügavuti töötlemises ja genereerimises. Sügavuti töötlemise algoritmis töötleme korraga ühte haru, selle asemel et genereerida kõik harud korraga.

Vaatame nelja ajahetkega juhusliku hinnapuud (sellise puu korral  $m = 3$ ), kus algselt genereerime järgmised sõlmed (vaata ka joonis 2.6):

1, 11, 111, 1111.

See tähendab, et oleme jõudnud viimasesse ajahetkesse ja me ei saa minna sügavamale, nii et loome viimases ajahetkes kõik sõlmed:

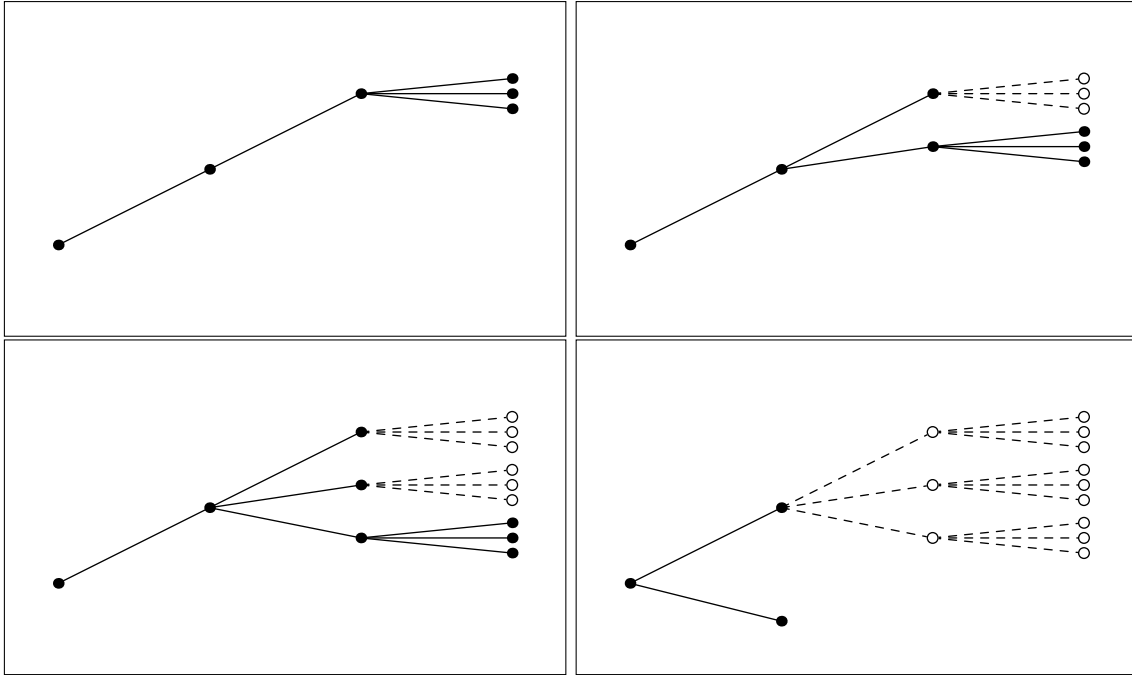
1112, ..., 111*b*.

Nendest sõlmedest lähtudes saame arvutada hinnangud sõlmes 111. Me võime nüüd mälust eemaldada kõik sõlmed, mis hargnesid sõlmest 111. Järgmisena genereerime sõlme 112 ja sellest hargnevad sõlmed:

1121, 1122, ..., 112*b*.

Kui oleme leidnud hinnangud sõlmes 112, saame taas mälust eemaldada kõik sõlmed, mis hargnesid sõlmest 112. Kordame hinnangute leidmise protsessi sõlmedes 113, ..., 11*b*, mis saab omakorda mälust eemaldada pärast seda, kui kasutame neid hinnangute leidmiseks sõlmes 11. Kordame hinnangute leidmise protsessi sõlmedes 12, ..., 1*b*, et saada hinnangud esialgses sõlmes 1.

Selle algoritmi neli etappi on illustreeritud puul, kus  $m = 3$  ja  $b = 3$ , joonisel 2.6. Katkendjooned näitavad harusid, mis on varem loodud, töödeldud ja mälust eemaldatud.



Joonis 2.6: Sügavuti puu töötlemine. Täidetud ringid näitavad sõlme, mis on praegu mälus; Tühjad ringid näitavad sõlme, mida on varem töödeldud ja unustatud.

Selle meetodi maksimaalsed mälu maht saavutatakse hinnangute leidmisel sõlmes  $1b$ . Vahepeal enne hinnangute leidmist sõlmes  $1b$  peame me teadma sõlmi  $1b1, \dots, 1bb$ . Vahepeal enne seda on meil omakorda vaja teada sõlmi  $1bb1, \dots, 1bbb$ . Seega peame igal sammul säilitama kuni  $b$  sõlme, pluss esialgne sõlm, mille tulemuseks on kokku  $mb + 1$  sõlme.

## 2.4 Monte Carlo vähimruutude meetod

### 2.4.1 Monte Carlo vähimruutude meetodi idee

Järgnev peatükk ja selle alam peatükid põhinevad allikatel [3] ja [4], kui ei ole viidatud teisiti.

Longstaff ja Schwartz pakkusid välja vähimruutude Monte Carlo (ingl k *Least-Squares Monte Carlo*) meetodi, mis püüab leida optimaalse Ameerika optsiooni realiseerimishetke lähendit. Kui iga simuleeritud tee korral on optimaalne realiseerimishetk teada, siis saame optsiooni hinna leida kui realiseerimishetkede diskonteeritud tulude keskmise.

Jagame optsiooni eluea  $[0, T]$   $m$  võrdseks osaks ning olgu  $\Delta t = T/m$  ning  $t_i =$

$i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Esimene etapp Monte Carlo vähimruutude meetodi korral on alusvara hindade liikumise genereerimine. Olgu simuleeritud hinnateede arv  $n$ .

Järgmisena leiame iga hinnatee  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$  korral ajahetkel  $t = T$  optsiooni hinna

$$\hat{V}_j(S_m^j, t_m) = P(S_m^j),$$

kus  $S_m^j$  on alusvara hind hetkel  $T = m\Delta t$   $j$ -nda hinnatee korral.

Edasi liigume aja ettepoole võttes  $i = m - 1, m - 2, \dots, 0$ .

Olgu  $V^{cont}(S_i)$  optsiooni hind hetkel  $t_i$ , kui optsiooni omanik ei kasuta oma õigust optsiooni osta või müüa ajahetkel  $t_i$ , edaspidi nimetame seda ka optsiooni jätkuväärtuseks (ingl k *continuation value*). Jätkuväärtus ajahetkel  $t_i$ , kus alusvara hind on  $s$ , avaldub kujul

$$V^{cont}(S_i) = e^{-r\Delta t} \mathbf{E}[V(S_{i+1}, t_{i+1}) | S_i = s],$$

kus

$$V(S_{i+1}, t_{i+1}) = \max\{P(S_{i+1}), V^{cont}(S_{i+1})\},$$

on optsiooni hind hetkel  $t_{i+1}$ .

Kui mingi hinnatee korral hetkel  $t_i$  optsiooni lõpetamisel saadav tulu on positiivne, siis optsiooni hinna leidmiseks tuleb tulu võrrelda optsiooni jätkuväärtusega ning optsiooni hinnaks võetakse neist suurim väärtus. Optsiooni jätkuväärtuse hindamiseks mingi hinnatee korral tuleb hinnata suurust  $e^{-r\Delta t} \mathbf{E}[V(S_{i+1}, t_{i+1}) | S_i = s]$  ning seda tehakse lineaarse regressioonimudeli abil. Vaadeldakse lineaarset regressioonimudelit kujul

$$y_{ij} = \sum_{r=0}^{M-1} \beta_r \psi_r(S_i^j) + \epsilon_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n_i,$$

kus  $\psi_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, M - 1$  on mingid baasfunktsioonid,  $n_i$  on nende hinnateede arv, millede korral optioon on rahas hetkel  $t_i$  ja

$$y_{ij} = e^{-r\Delta t} \hat{V}_j(S_{i+1}^j, t_{i+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

on optsiooni hinnatud jätkuväärtused nende teede korral, kus optioon on rahas hetkel  $t_i$ .

Seega

$$\hat{V}_j^{cont}(S_i^j) = \sum_{r=0}^{M-1} \hat{\beta}_r \psi_r(S_i^j),$$

kus  $\hat{\beta}_r$  on vähimruutude meetodil leitud kordajate  $\beta_r$  hinnangud. Edasi leitakse optsiooni hind hetkel  $t_i$  ja  $j$ -nda hinnatee korral vastavalt valemile

$$\hat{V}_j(S_i^j, t_i) = \begin{cases} P(S_{t_i}^j) & , \text{kui } P(S_i^j) \geq \hat{V}_j^{cont}(S_i^j) \\ e^{-r\Delta t} \hat{V}_j(S_{i+1}^j, t_{i+1}) & , \text{vastasel juhul} \end{cases},$$

Kui optsioon ei ole rahas, siis optsiooni hinna leiame ajahetkel  $t_i$  ja  $j$ -nda hinnatee korral vastavalt valemile

$$\hat{V}_j(S_i^j, t_i) = e^{-r\Delta t} \hat{V}_j(S_{i+1}^j, t_{i+1}).$$

Opsiooni hinna hetkel  $t = 0$  leiame kui hindade  $\hat{V}_j(S_0^j, t_0)$  keskmise:

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{V}_j(S_0^j, t_0).$$

Märgime, et ülaltoodud algoritm on samaväärne algoritmiga, kus hinnatee  $j$  korral leitakse eespool kirjeldatud viisil vähim ajahetk  $t_{i_j}$ , mille korral optsiooni lõpetamisel saadav tulu on suurem kui hinnatud jätkuväärtus ning optsiooni hind leitakse kui diskonteeritud tulude keskmine:

$$\hat{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{-r_{i_j} \Delta t} P(S_{i_j}^j).$$

Artiklis [3] on baasfunktsioonidena vaadeldud astmefunktsioone ning Laguerre funktsioone. Astmefunktsioonide korral

$$\psi_0(S) = 1, \psi_1(S) = S, \dots, \psi_{m-1}(S) = S^{m-1}.$$

Tähistades

$$\mathbf{Y} = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{M-1})^T,$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{in_i})^T,$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & S_i^1 & \dots & (S_i^1)^{M-1} \\ 1 & S_i^2 & \dots & (S_i^2)^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & S_i^{n_i} & \dots & (S_i^{n_i})^{M-1} \end{pmatrix}.$$

saame regressioonimudeli kirjutada kujul

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Vähimruutude meetodil leitakse mudeli parameetrid järgmiselt ([10]):

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (2.13)$$

Laguerre baasfunktsioonid on kujul

$$\begin{aligned} \psi_0(S) &= L_0(S) = e^{-\frac{S}{2}}, \\ \psi_1(S) &= L_1(S) = e^{-\frac{S}{2}}(1 - S), \\ \psi_2(S) &= L_2(S) = e^{-\frac{S}{2}}\left(1 - 2S + \frac{S^2}{2}\right), \\ \psi_{M-1}(S) &= L_{M-1}(S) = e^{-\frac{S}{2}} \frac{e^S}{(M-1)!} \frac{d^{M-1}}{dS^{M-1}}(S^{M-1} - e^{-S}). \end{aligned}$$

Märgime, et kui Laguerre baasfunktsioonide arv on 3, siis regressioonimudeli parameetrid hetkel  $t_i$  avalduvad vastavalt valemile (2.13) kujul ([11]):

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n_i} L_0^2(S_i^j) & \sum_{j=1}^{n_i} L_0(S_i^j)L_1(S_i^j) & \sum_{k=1}^{n_i} L_0(S_i^j)L_2(S_i^j) \\ \sum_{j=1}^{n_i} L_1(S_i^j)L_0(S_i^j) & \sum_{j=1}^{n_i} L_1^2(S_i^j) & \sum_{j=1}^{n_i} L_1(S_i^j)L_2(S_i^j) \\ \sum_{j=1}^{n_i} L_2(S_i^j)L_0(S_i^j) & \sum_{j=1}^{n_i} L_2(S_i^j)L_1(S_i^j) & \sum_{j=1}^{n_i} L_2^2(S_i^j) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n_i} L_0(S_i^j)y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n_i} L_1(S_i^j)y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n_i} L_2(S_i^j)y_{ij} \end{pmatrix}.$$

Artiklis [3] on tõestatud Monte-Carlo vähimruutude meetodil leitud optiooni hinna koonduvus optiooni täpseks hinnaks juhul, kui optiooni saab realiseerida vaid kahel ajahetkel ning simulatsioonide arv läheneb lõpmatusse, kuid Clement, Lamberton ja Potter tõestasid Monte Carlo vähimruutude meetodil leitud hinna koonduvuse ka juhul kui optiooni täitmishetkede arv on lõplik.

## 2.4.2 Monte Carlo vähimruutude meetodi numbriline näide

Illustreerime lihtsa numbrilise näite abil Monte Carlo vähimruutude meetodi loogikat. Olgu meil Ameerika ostuoptioon, mille puhul ei maksta dividende. Optiooni ostuvõimalust saab kasutada ajahetkedel  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t_3$ . Optiooni alusvara hind ajahetkel  $t_0$  on 100 ja täitmishind on samuti 100. Oletame lihtsuse huvides, et optiooni võimalike täitmiskuupäevade vaheline periood on 1 aasta ja riskivaba intressimäär on 5%. Tabelis 2.1 on näha 10 simuleeritud alusvara hinna rada.

Tabel 2.1: Genereeritud alusvarade hinnaliikumised

Rada	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	100	98	99	104
2	100	106	112	121
3	100	95	97	91
4	100	99	91	88
5	100	104	101	96
6	100	107	117	111
7	100	105	102	96
8	100	93	84	87
9	100	96	92	97
10	100	101	105	110

Järgmisena leiame iga raja ning iga ajahetke jaoks optiooniga seotud tulu, kui optioon lõpetatakse antud ajahetkel. Lihtne on näha, et tulu on suurem nullist, kui alusvara hind  $S > 100$ . Näeme, et ajahetkel  $t = 3$  on optioon rahas 1., 2., 6. ja 10. raja korral. Tabelis 2.2 on toodud iga raja kohta tulufunktsiooni väärtused optiooni realiseerimisel.

Tabel 2.2: Optiooni tulu

Rada	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0	4
2	0	6	12	21
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	4	1	0
6	0	7	17	11
7	0	5	2	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	1	5	10

Järgmisena vaatame ajahetke  $t = 2$ . Kui optsoon on ajahetkel  $t = 2$  rahas ehk optsooni hind on suurem kui täitmishind, siis peab optsooni omanik otsustama, kas realiseerida oma õigust alusvara osta või jätkata optsooniga. Kui optsoon ei ole rahas, siis meil ei ole vaja midagi otsustada. Simuleeritud radadest on viie raja (2; 5; 6; 7; 10) korral optsoon rahas.

Olgu  $S_2$  rahas olevate optsoonide korral alusvara hindade vektor ajahetkel  $t = 2$  ja  $Y_2$  olgu rahas olevate optsoonide korral diskonteeritud ajahetke  $t = 3$  tulude ehk optsooni väärtuste vektor. Tulemused on tabelis 2.3.

Tabel 2.3: Vektorite  $S_2$  ja  $Y_2$  väärtused

Rada	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	$S_2$	$Y_2$
1	0	0	0	4	-	-
2	0	0	12	21	112	$21e^{-0,05}$
3	0	0	0	0	-	-
4	0	0	0	0	-	-
5	0	0	1	0	101	$0e^{-0,05}$
6	0	0	17	11	117	$11e^{-0,05}$
7	0	0	2	0	102	$0e^{-0,05}$
8	0	0	0	0	-	-
9	0	0	0	0	-	-
10	0	0	5	10	105	$10e^{-0,05}$

Hindame nüüd optsooni jätkuväärtust hetkel  $t = 2$ . Selleks kasutame lineaarset regressiooni kujul

$$Y_{2,j} = \beta_0 + \beta_1 S_{2,j} + \beta_2 (S_{2,j})^2.$$

Vähimruutude meetodil hinnates saame optsooni jätkuväärtuse hinnanguks

$$V_{2,j}^{cont} = -2497,46 + 45,31S_{2,j} - 0,20(S_{2,j})^2.$$

Nüüd võrdleme optsooni hinnatud jätkuväärtust optsooni tuluga. Hinnatud jätkuväärtus ning optsooni tulu on toodud tabelis 2.4.

Tabelis olevate tulemuste põhjal peaksime optsooniga jätkama radade 2 ja 10 korral ning optsooni kasutama radade 5, 6 ja 7 korral.

Tabel 2.4: Optsiooni realiseerimise otsused ajahetkel  $t = 2$

Rada	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Väljamakse	Jätkamine
1	0	0	0	4	-	-
2	0	0	0	21	12	18,2
3	0	0	0	0	-	-
4	0	0	0	0	-	-
5	0	0	1	0	1	-2,2
6	0	0	17	0	17	11,2
7	0	0	2	0	2	1,7
8	0	0	0	0	-	-
9	0	0	0	0	-	-
10	0	0	0	10	5	10,9

Järgmisena vaatame ajahetke  $t = 1$ . Kui optioon on ajahetkel  $t = 1$  rahas, siis peab optiooni omanik taas otsustama, kas realiseerida oma õigust alusvara osta või jätkata optiooniga. Kui optioon ei ole rahas, siis meil ei ole vaja midagi otsustada. Simuleeritud radadest on viie raja (2; 5; 6; 7; 10) korral optioon rahas.

Olgu  $S_1$  rahas olevate optioonide korral alusvara hindade vektor ajahetkel  $t = 1$  ja  $Y_1$  olgu rahas olevate optioonide korral diskonteeritud ajahetke  $t = 2$  või  $t = 3$  tulude ehk optiooni väärtuste vektor. Tulemused on tabelis 2.5.

Tabel 2.5: Vektorite  $S_1$  ja  $Y_1$  väärtused

Rada	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	$S_1$	$Y_1$
1	0	0	0	4	-	-
2	0	6	0	21	106	$21e^{-0,05 \cdot 2}$
3	0	0	0	0	-	-
4	0	0	0	0	-	-
5	0	4	1	0	104	$1e^{-0,05}$
6	0	7	17	0	107	$17e^{-0,05}$
7	0	5	2	0	105	$2e^{-0,05}$
8	0	0	0	0	-	-
9	0	0	0	0	-	-
10	0	1	0	10	101	$10e^{-0,05 \cdot 2}$

Hindame nüüd optiooni jätkuväärtust hetkel  $t = 1$ . Selleks kasutame lineaarset regressiooni kujul

$$Y_{1,j} = \beta_0 + \beta_1 S_{1,j} + \beta_2 (S_{1,j})^2.$$

Vähimruutude meetodil hinnates saame optiooni jätkuväärtuse hinnanguks

$$V_{1,j}^{cont} = 12167,50 - 235,66S_{1,j} + 1,14(S_{1,j})^2.$$

Nüüd võrdleme optiooni hinnatud jätkuväärtust optiooni tuluga. Hinnatud jätkuväärtus ning optiooni tulu on toodud tabelis 2.4.

Tabelis olevate tulemuste põhjal peaksime optiooniga jätkama radade 2, 6, 7 ja 10 korral ning optiooni kasutama raja 5 korral.

Tabel 2.6: Optsooni realiseerimise otsused ajahetkel  $t = 1$

Rada	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Väljamakse	Jätkamine
1	0	0	0	4	-	-
2	0	0	0	21	6	11,7
3	0	0	0	0	-	-
4	0	0	0	0	-	-
5	0	4	0	0	4	3,7
6	0	0	17	0	7	19,2
7	0	0	2	0	5	6,6
8	0	0	0	0	-	-
9	0	0	0	0	-	-
10	0	0	0	10	1	8,8

Lõpuks leiame optsooni hinna, mis on diskonteeritud tulude keskmine. Hinnaks saame

$$\frac{4e^{-0,05} + (17 + 2)e^{-0,05 \cdot 2} + (4 + 21 + 10)e^{-0,05 \cdot 3}}{10} = 7,094.$$

## 3. Numbrilised tulemused

Järgnevas peatükis uurime Monte Carlo meetodil leitud Ameerika optsioonide hindu. Monte Carlo algoritmid, mida optsiooni hindade leidmiseks tehti, programmeeriti programmeerimiskeeles Python.

Tabelis 1 tulemuste korral on toodud võrduseks ka originaal artiklis saadud tulemused.

### 3.1 Juhusliku hinnapuu meetodi tulemused

Selles peatükis uurime juhusliku hinnapuu meetodil leitud ameerika ostuoptsiooni hindu.

Juhusliku hinnapuu meetodis on keeruline hinnata Ameerika optsiooni, mida võib realiseerida paljudel ajahetkedel. Järgnevalt vaatame juhusliku hinnapuu meetodi korral bermuuda optsiooni hindamist, kus me saame optsiooni realiseerida neljal ajahetkel  $\{0, T/3, 2T/3, T\}$ . Vastavalt sellele me jagame optsiooni eluea kolmeks perioodiks.

Juhusliku hinnapuu meetodi kaudu hinna leidmiseks simuleerisime 100 hinnapuud, leidsime vastavalt optsiooni alusvara simulatsioonile iga hinnatee korral optsiooni hinna ajahetkel  $t = 0$  ja võtsime kõigi hindade keskmise, et saada lõplik optsiooni hind. Binoommeetodi puhul kasutasime 2000 ajasammu, sest rohkemate ajasammude kasutamise korral optsiooni hind erines või varieerus vähem kui 0,001 võrra. Seetõttu võime binoommeetodi leitud hinda vaadelda optsiooni täpse hinnana kuna need erinevused olid nii väikesed.

Parameetrid, mida optsiooni hindade leidmiseks kasutasime olid:

- optsiooni täitmiskuupäev  $T = 1$  aastat;
- alusvara alghind  $S_0 \in \{70, 80, 90, 100, 110, 120, 130\}$ ;
- täitmishind  $K = 100$ ;
- volatiilsus  $\sigma = 0,2$ ;
- riskivaba intressimäär  $r = 0,05$ ;

- dividendimäär  $\delta = 0, 1$ ;
- ajaperioodide arv 3.
- harude arv  $b = 50$

Juhusliku hinnapuude hind on leitud valemiga:

$$V_0 = \frac{\theta + \Theta}{2},$$

kus  $\theta$  on alt hinnang ja  $\Theta$  on ülalt hinnang.

Tabel 3.1: Ameerika ostuoptsioon hinnad ühe alusvara põhjal

$S_0$	Binoom	Artikli tulemused			Autori tulemused		
	Hind	Alt hinnang	Ülalt hinnang	Hind	Alt hinnang	Ülalt hinnang	Hind
		$\theta$	$\Theta$		$\theta$	$\Theta$	
70	0,121	0,115	0,117	0,116	0,116	0,118	0,117
80	0,670	0,649	0,662	0,656	0,650	0,662	0,656
90	2,303	2,251	2,316	2,283	2,274	2,347	2,310
100	5,729	5,628	5,824	5,730	5,586	5,783	5,685
110	11,343	10,998	11,603	11,296	11,186	11,802	11,494
120	20,0	19,743	20,329	20,164	19,863	20,366	20,115
130	30,0	29,763	30,154	30,077	29,860	30,232	30,046

Tulemustest on näha, et suurim protsendiline erinevus võrreldes meie leitud hindasid binoommeetodi hindadega on  $\frac{0.117-0.121}{0.121} \times 100\% = -3.306\%$ , kui  $S_0 = 70$ . Ka artiklis toodud hindade suurim protsendiline erinevus võrreldes binoommeetodiga on  $\frac{0.116-0.121}{0.121} \times 100\% = -4.132\%$ , kui  $S_0 = 70$ . Nii meie kui ka artiklis toodud hindade suurim absoluutne erinevus võrreldes binoommeetodiga on väiksem kui 0.2 ühikut.

Leidsime ka hindadele vastavad usaldusintervallid tabelis 3.2. Usaldusintervallide leidmisel kasutasime valemit:

$$\left[ \max \left\{ P(S_0), \theta - z_{\alpha/2} \frac{s(\theta)}{\sqrt{n}} \right\}; \Theta + z_{\alpha/2} \frac{s(\Theta)}{\sqrt{n}} \right],$$

kus  $n$  on simulatsioonide arv,  $z_{\alpha/2}$  on  $\alpha/2$  kvantiil standardse normaaljaotuse puhul ja  $s(\theta)$  ning  $s(\Theta)$  on ülalt ja alt hinnangu valimi standardhälve.

Tabel 3.2: Usaldusvahemikud ühe alusvaraga hinnatud Ameerika ostuoptsioonide jaoks

$S_0$	Artikli tulemused		Autori tulemused	
	Hind	Usaldus- vahemik	Hind	Usaldus- vahemik
70	0,116	[ 0,108; 0,124]	0,117	[ 0,109; 0,125]
80	0,656	[ 0,624; 0,688]	0,656	[ 0,620; 0,692]
90	2,283	[ 2,187; 2,382]	2,310	[ 2,207; 2,413]
100	5,730	[ 5,502; 5,952]	5,685	[ 5,443; 5,923]
110	11,296	[ 10,732; 11,789]	11,494	[ 11,003; 12,066]
120	20,164	[ 20,000; 20,442]	20,115	[ 20,000; 20,568]
130	30,077	[ 30,000; 30,235]	30,046	[ 30,000; 30,416]

Tabelites 3.3 ja 3.4 on toodud ameerika korvoptsioonide hinnad, kui korvis on vastavalt kaks ja viis alusvara ning tegemist on ostuoptsiooniga. Mitme alusvara korral olid alusvara hinnad ajahetkel  $t = 0$  samad ehk  $S_0^1 = S_0^2 = S_0$ .

Tabelites 3.3 ja 3.4 leidsime ka erinevuse meie hinna ja artikli hinna vahel valemiga:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_2} \cdot 100\%,$$

kus  $V_2$  on artiklis toodud hind ja  $V_1$  on meie leitud hind.

Märgime, et korvoptsioonide korral ei ole võimalik tavalise binoommeetodiga korvoptsiooni hinda leida.

Tabel 3.3: Ameerika ostuoptsioon hinnad kahe alusvara korral

$S_0$	Artikli tulemused			Autori tulemused			Erinevus
	Alt	Ülalt	Hind	Alt	Ülalt	Hind	
	hinnang $\theta$	hinnang $\Theta$		hinnang $\theta$	hinnang $\Theta$		
70	0,247	0,250	0,249	0,237	0,240	0,238	-4,418%
80	1,225	1,246	1,235	1,263	1,289	1,276	3,320%
90	4,019	4,116	4,067	4,038	4,150	4,094	0,664%
100	9,228	9,487	9,358	9,209	9,475	9,342	-0,002%
110	16,775	17,241	17,008	16,728	17,185	16,957	-0,300%
120	25,747	26,369	26,058	25,390	26,049	25,719	-1,301%
130	35,541	36,254	35,898	35,613	36,346	35,980	0,228%

Tabeli 3.3 on näha, et meie poolt leitud hinnad on kohati erinevad artiklis toodud hindadest, kuid mida suuremaks muutuvad hinnad, seda väiksemaks muutuvad erinevused. Suurim protsentuaalne erinevus  $-4.418\%$  tuleb kui alusvarade alghind on 70, kuid absoluutne erinevus on  $0.249 - 0,238 = 0,011$  ühikut.

Tabel 3.4: Ameerika ostuoptsioon hinnad viie alusvara korral

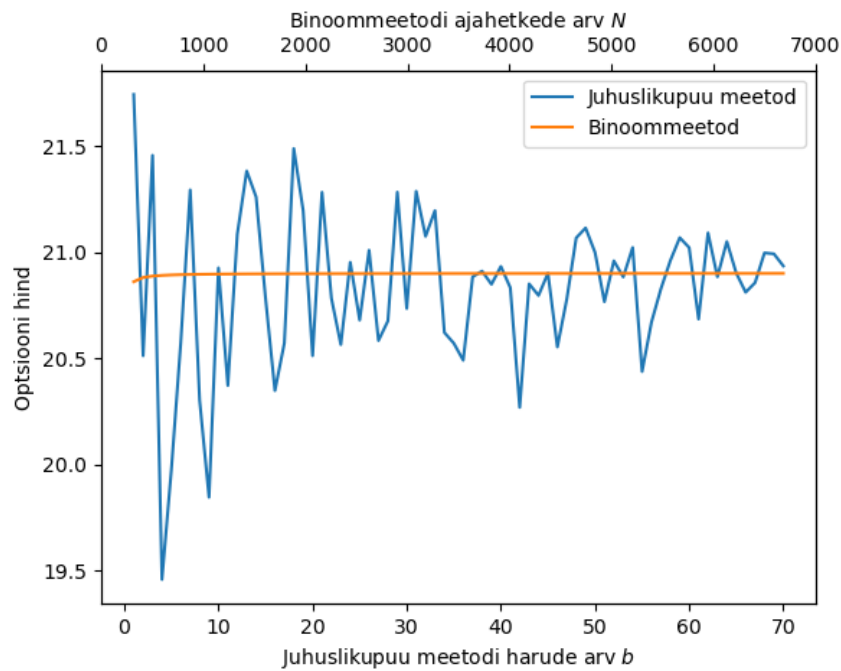
$S_0$	Artikli tulemused			Autori tulemused			Erinevus
	Alt	Ülalt	Hind	Alt	Ülalt	Hind	
	hinnang $\theta$	hinnang $\Theta$		hinnang $\theta$	hinnang $\Theta$		
70	0,556	0,561	0,558	0,555	0,560	0,557	0,179%
80	2,641	2,681	2,661	2,652	2,693	2,673	-0,451%
90	7,799	7,941	7,870	7,735	7,877	7,806	0,813%
100	15,832	16,118	15,975	15,941	16,227	16,084	-0,682%
110	25,607	26,022	25,815	25,636	26,029	25,833	-0,07%
120	36,379	36,847	36,613	36,123	36,610	36,367	0,672%
130	47,053	47,618	47,335	46,976	47,533	47,254	0,171%

Tabeli 3.4 tulemuste põhjal näeme, et meie leitud hindade ja artiklis toodud

hindade erinevus on alati alla 1%.

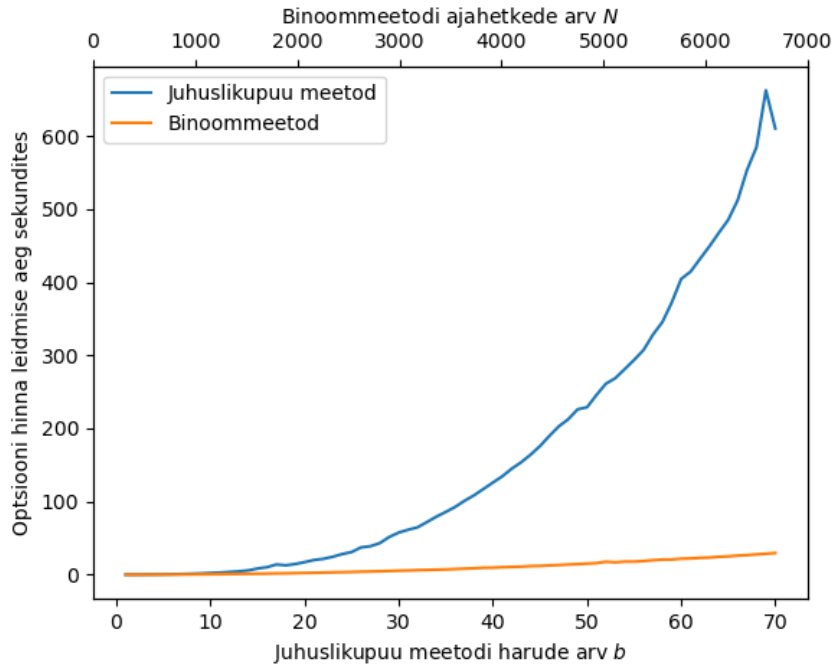
Uurime, kuidas ostuoptiooni hind käitub harude arvu  $b$  muutudes. Kasutatud parameetrid on

- optiooni täitmiskuupäev  $T = 1$  aastat;
- alusvara alghind  $S_0 = 200$ ;
- täitmishind  $K = 100$ ;
- volatiilsus  $\sigma = 0,2$ ;
- riskivaba intressimäär  $r = 0,05$ ;
- dividendimäär  $\delta = 0$ ;
- realiseerimis hetkede on  $\{0, T/3, 2T/3, T\}$ .



Joonis 3.1: Juhusliku hinnapuu meetodiga saadud ostuoptiooni hinna käitumine sõltuvalt harude arvust

Jooniselt 3.1 on näha, et juhusliku hinnapuu meetodiga leitud hind läheneb binoommeetodi hinnale, kuid üpris aeglaselt. Uurime ka kuidas harude arv mõjutab aega, mis kulub optiooni hinna leidmisele.



Joonis 3.2: Hinna leidmisele kulunud aeg juhusliku hinnapuu meetodi korral sõltuvalt harude arvust

Jooniselt 3.2 näeme, et juhusliku hinnapuu meetodi korral harude arvu kasvades hakkab hinna leidmiseks kulunud aeg kiiresti kasvama.

## 3.2 Monte Carlo vähimruutude meetodi tulemused

Esiteks võrdleme Monte Carlo vähimruutude meetodiga leitud ameerika müügioptsiooni hindu binoommeetodiga leitavate hindadega.

Parameetrid, mida optsiooni hindade leidmiseks kasutasime olid:

- Optsiooni täitmiskuupäev  $T \in \{1, 2\}$  aastat;
- Alusvara alghind  $S_0 \in \{36, 38, 40, 42, 44\}$ ;
- täitmishind  $K = 40$ ;
- volatiilsus  $\sigma \in \{0, 2; 0, 4\}$ ;
- riskivaba intressimäär  $r = 0,06$ ;

- dividendimäär  $\delta = 0$ ;
- ajaperioodide arv aastas on 50.

Monte Carlo vähimruutude meetodi hindade leidmiseks kasutasime 100000 hinnateed(50000 pluss 50000 antiteetilist).

Binoommeetodi puhul kasutasime taas 2000 ajasammu.

Meie kasutasime baasfunktsioonidena nii astme funktsioone kui ka Laguerre'i funktsioone, kuid artiklis olid kasutusel ainult Laguerre'i funktsioonid.

Tabel 3.5: Artiklis toodud Ameerika optsiooni hinnad ja autori tehtud koodidega leitud Ameerika optsiooni hinnad

			Artikli tulemus	Autori tulemused		
$S_0$	$\sigma$	T	Hind	Binoom	Astme baasfunktsioonid	Laguerre baasfunktsioonid
36	0,2	1	4,472	4,486	4,466	4,462
36	0,2	2	4,821	4,848	4,845	4,849
36	0,4	1	7,091	7,108	7,112	7,108
36	0,4	2	8,488	8,514	8,538	8,536
38	0,2	1	3,244	3,257	3,232	3,225
38	0,2	2	3,735	3,751	3,757	3,757
38	0,4	1	6,139	6,157	6,164	6,162
38	0,4	2	7,669	7,637	7,693	7,967
40	0,2	1	2,313	2,319	2,294	2,302
40	0,2	2	2,879	2,889	2,887	2,888
40	0,4	1	5,308	5,317	5,370	5,372
40	0,4	2	6,921	6,922	6,906	6,898
42	0,2	1	1,617	1,622	1,643	1,640
42	0,2	2	2,206	2,216	2,212	2,213
42	0,4	1	4,588	4,591	4,623	4,621
42	0,4	2	6,243	6,249	6,310	6,297
44	0,2	1	1,118	1,114	1,105	1,104
44	0,2	2	1,675	1,694	1,678	1,680
44	0,4	1	3,957	3,955	3,975	3,974
44	0,4	2	5,622	5,647	5,699	5,688

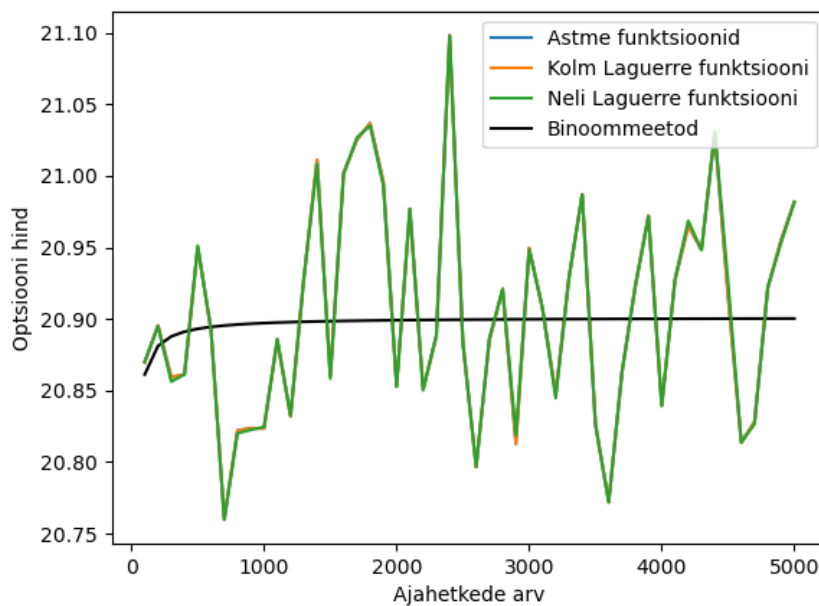
Tabelist 3.5 on näha, et astme baasfunktsioonidega meie saadud hindade suurim protsendiline erinevus võrreldes binoommeetodiga on  $\frac{1,643-1,622}{1,622} \times 100\% = 1,295\%$ , kus  $S = 42$ ,  $\sigma = 0,2$  ja  $T = 1$ . Meie Laguerre baasfunktsioonidega leitud hindade suurim protsendiline erinevus võrreldes binoommeetodiga on  $\frac{7,967-7,637}{7,637} \times 100\% = 4,321\%$ , kus  $S = 38$ ,  $\sigma = 0,4$  ja  $T = 2$ . Artiklis toodud hindade suurim protsendiline erinevus võrreldes binoommeetodiga on  $\frac{1,675-1,694}{1,694} \times 100\% = -1,122\%$ , kus  $S = 38$ ,

$\sigma = 0,4$  ja  $T = 2$ .

Uurime nüüd, kuidas Monte Carlo vähimruutude meetodil leitud bermuuda ostuoptiooni hind käitub ajahetkede või perioodide arvu muutudes.

Selleks kasutame järgmisi parameetreid:

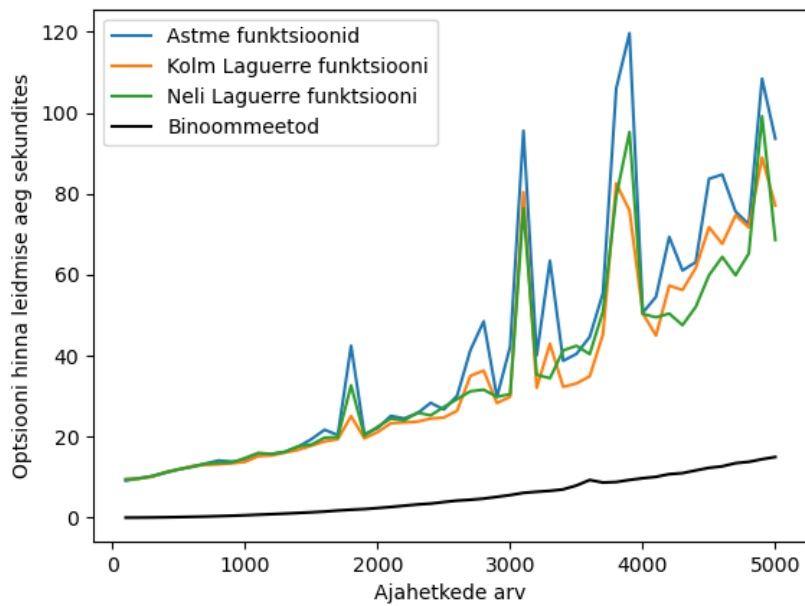
- optiooni täitmiskuupäev  $T = 1$  aastat;
- alusvara alghind  $S_0 = 200$ ;
- täitmishind  $K = 100$ ;
- volatiilsus  $\sigma = 0,2$ ;
- riskivaba intressimäär  $r = 0,05$ ;
- dividendimäär  $\delta = 0$ ;
- realiseerimis hetkede on  $\{0, T/3, 2T/3, T\}$ ;
- radade arv on 100000;
- perioodide arv on 50.



Joonis 3.3: Monte Carlo vähimruutude meetodiga saadud ostuoptiooni hinna käitumine sõltuvalt ajahetkede arvust erinevate baasfunktsioonide korral

Jooniselt 3.3 on näha, et Monte Carlo vähimruutude meetodi leitud hind ostsil-  
leerib binoommeetodi hinna ümber ning näeme, et varieeruvus ei vähene ajahetkede  
kasvades. Märkame ka, et meetod saavutab samad tulemused olenemata sellest, kas  
kasutatakse astme funktsioone või Laguerre funktsioone baasfunktsioonidena.

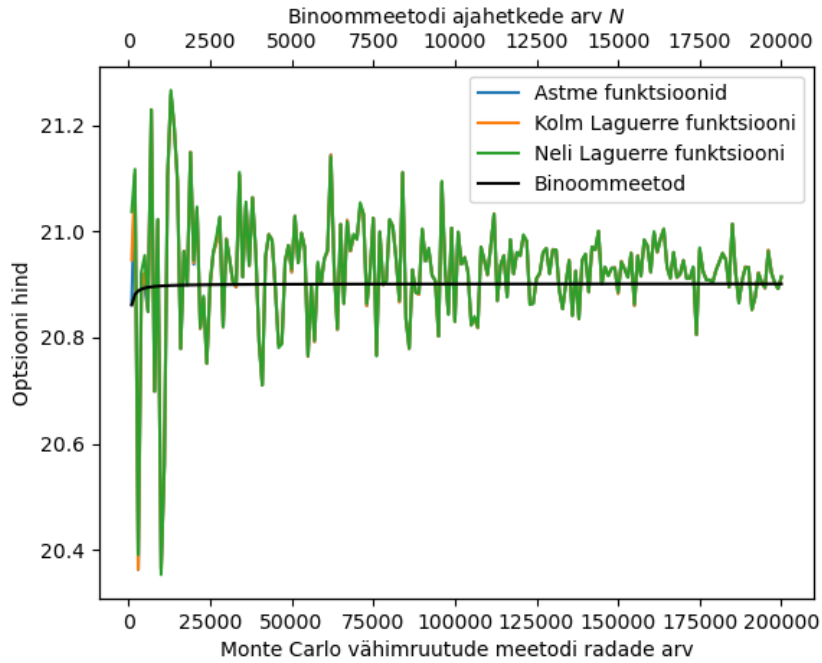
Uurime, kuidas ajahetkede arv mõjutab aega, mis kulub Monte Carlo vähimruutude  
meetodil optiooni hinna leidmisele.



Joonis 3.4: Hinna leidmisele kulunud aeg Monte Carlo vähimruutude meetodi korral  
sõltuvalt ajahetkede arvust erinevate baasfunktsioonide korral

Jooniselt 3.4 on näha, et binoommeetod on alati kiirem kui Monte Carlo vähimruutude  
meetod.

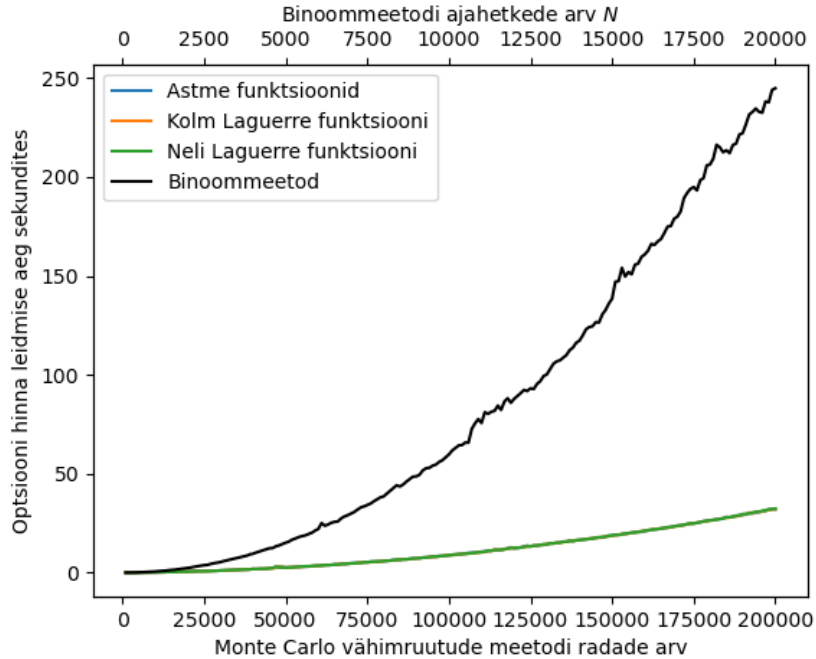
Järgnevalt uurime, kuidas radade arv mõjutab Monte Carlo vähimruutude mee-  
todiga saadud hinna käitumist.



Joonis 3.5: Monte Carlo vähimruutude meetodiga saadud ostuoptsooni hinna käitumine sõltuvalt radade arvust erinevate baasfunktsioonide korral

Jooniselt 3.5 on näha, et optsooni hind ei sõltu oluliselt valitud baasfunktsioonidest ja nende arvust. Lisaks märkame, et koondumine toimub, kuigi suhteliselt aeglaselt.

Uurime, kuidas radade arv mõjutab aega, mis kulub Monte Carlo vähimruutude meetodil optsooni hinna leidmisele.



Joonis 3.6: Hinna leidmisele kulunud aeg Monte Carlo vähimruutude meetori korral sõltuvalt radade arvust erinevate baasfunktsioonide korral

Jooniselt 3.6 on näha, et hinna leidmise aeg oluliselt ei sõltu baasfunktsioonide valikust ega nende arvust. Lisaks näeme, kui Monte Carlo vähimruutude meetodil radade arv kasvab, siis hinna leidmise aeg kasvab suhteliselt aeglaselt.

### 3.3 Meetodite võrdlus

Järgnevas peatükis me võrdleme juhusliku hinnapuu meetodit, Monte Carlo vähimruutude meetodiga. Kuna juhusliku hinnapuu meetod sobib eeskätt bermuuda optiooni hindamiseks, siis me teeme võrdluse läbi ka just bermuuda optiooni jaoks.

juhusliku hinnapuu kaudu hinna leidmiseks simuleerisime taas 100 puud, leidsime vastava hinna optioonile nendes puudes ja võtsime keskmise. Vähimruutude meetodite hindade leidmiseks kasutatakse 100000 (50000 pluss 50000 antiteetilist). Binoommeetodi puhul kasutasime taas 2000 ajasammu, sest kasutades rohkem ajasamme ei saanud väga erinevat hinda. Ülejäänud parameetrid, mida optiooni hindade leidmiseks kasutasime olid:

- Optiooni täitmiskuupäev  $T = 1$  aastat;
- Alusvara alghind  $S_0 \in \{170, 180, 190, 200, 210, 220, 230\}$ ;

- volatiilsus  $\sigma \in \{0, 2; 0, 4\}$ ;
- riskivaba intressimäär  $r = 0,05$ ;
- dividendimäär  $\delta = 0$ ;
- realiseerimis hetked on  $\{0, T/3, 2T/3, T\}$ ;
- juhusliku hinnapuu harude arv  $b = 50$ ;
- ajaperioodide arv Monte Carlo vähimruutude meetodil on 50.

Tabel 3.6: Vähimruutude meetodi võrdlus juhusliku hinnapuu meetodiga

		Binoom- meetod	MC vähimruutude meetod		Juhusliku hinnapuu meetod		
$S_0$	$\sigma$	Hind	Astme baas- funktsioonid	Laguerre baas- funktsioonid	Alumine hindaja $\theta$	Ülemine hindaja $\Theta$	Hind
170	0,2	6,422	6,361	6,361	6,509	6,571	6,540
170	0,4	19,548	19,771	19,759	19,281	19,736	19,509
180	0,2	10,179	10,303	10,303	9,936	10,049	9,992
180	0,4	24,490	24,345	24,324	24,466	25,119	24,792
190	0,2	15,020	15,162	15,162	14,840	15,035	14,937
190	0,4	30,029	29,907	30,000	29,956	30,831	30,394
200	0,2	20,893	20,887	20,887	20,746	21,078	20,912
200	0,4	36,030	35,736	35,653	35,394	26,500	35,947
210	0,2	27,720	27,519	27,519	27,542	28,024	27,783
210	0,4	42,546	42,251	42,132	41,555	42,911	42,233
220	0,2	35,329	35,340	35,340	34,771	35,422	35,096
220	0,4	49,494	48,853	49,064	48,372	50,130	49,251
230	0,2	43,582	43,548	43,534	42,950	43,856	43,403
230	0,4	56,798	56,763	56,794	56,353	58,423	57,388

Tabelist 3.6 on näha, et tulemused on suhteliselt erinevad. Olenemata alghinnast ja suuruselt  $\sigma$  suurim protsentuaalne erinevus binoommeetodi hinnaga on juhusliku

hinnapuu meetodi hinnal  $\frac{6,540-6,422}{6,422} \cdot 100\% = 1,837\%$ , kui  $S_0 = 170$  ja  $\sigma = 0,2$ . Suurim protsentuaalne erinevus binoommeetodi hinnaga on Monte Carlo vähimruutude meetodil nii astme kui ka Laguerre baasfunktsioonidega  $\frac{10,303-10,179}{10,179} \cdot 100\% = 1,219\%$ , kui  $S_0 = 180$  ja  $\sigma = 0,2$ . See tähendab, et nii Monte Carlo vähimruutude meetodi kui ka juhusliku hinnapuu meetodi hindade protsentuaalne erinevus on alati alla 2%. Märkame, et mida suurem on alusvara alghind seda väiksemaks muutuvad Monte Carlo vähimruutude meetodi ja juhusliku hinnapuu meetodi hindade protsentuaalne erinevus võrreldes binoommeetodi hindadega.

Kuigi hinnad on suhteliselt sarnased Monte Carlo vähimruutude meetodil ja juhusliku hinnapuu meetodil, siis hindade arvutusteks kuluv aeg on väga erinev. Monte Carlo vähimruutude meetod leidis nende parameeritega hinna 20 sekundiga, kuid juhusliku hinnapuu meetod leidis nende parameetritega hinna  $\approx 250$  sekundiga, mis on üle kümne korra kauem. Jooniselt 3.5 on näha, et radade arvuga 180000 kuni 200000 jääb Monte Carlo vähimruutude meetodi hind vahemikku 20,9 ühikut kuni 21 ühikut. Jooniselt 3.1 näeme, et kui juhusliku hinnapuu meetod kasutab 60 kuni 70 haru, siis hind varieerub vahemikus 20,7 ühikut kuni 21,3 ühikut. Nende hindade saamiseks kulub Monte Carlo vähimruutude meetodil umbes 60 sekundit, aga juhusliku hinnapuu meetodil kulub 60 haru korral 400 sekundit ja 70 haru korral 600 sekundit. See tähendab, et juhusliku hinnapuu meetodil võib kuluda kuni 10 korda kauem aega, kuid saadud tulemus on halvem kui Monte Carlo vähimruutude meetodi tulemus.

Kokkuvõttes näeme kui meil on tegemist tavalise lihtsa Ameerika optsiooniga, siis binoommeetod on kahtlemata täpsem ja kiirem, kuid Monte Carlo meetodid nii juhusliku hinnapuu, kui ka Monte Carlo vähimruutude meetod võimaldavad meil hinnata paljusi optsiooni tüüpe, mille puhul binoommeetodit ei saa kohandada. Näiteks korvoptsioonide korral või kui alusvara hinna korral on meil tegemist stohastilise volatiilsusega. Saame ka järeldada, et Monte Carlo vähimruutude meetod on parem kui juhusliku hinnapuu meetod nii täpsuse kui aja mõttes. Kuid samuti mõlema meetodi puhul näeme, et ühel juhul nii harude kasvades kui teisel juhul simulatsioonide kasvades, toimub koondumine täpselt hinnaks, kuid see koondumine on suhteliselt aeglane.

# Kokkuvõte

Magistritöö eesmärk oli uurida Ameerika optsioonide hindamist Monte Carlo meetodiga.

Töö teoreetilises osas kirjeldasime erinevaid optsoone ning optsoonide olulisemaid definitsioone ja mõisteid. Selgitasime Ameerika optsioonide hindamist Monte Carlo meetodiga ning sellega kaasnevad probleeme. Viimasena andsime ülevaate nii Juhusliku hinnapuu meetodist, kui ka Monte Carlo vähimruutude meetodist. Praktilises osas tegime numbrilisi simulatsiooni ja hindasime bermuuda ja Ameerika optsooni väärtusi erinevate algparameetrite korral. Lisaks uurisime, kuidas hinnad käituvad, kui suurendame juhusliku hinnapuu meetodis harude arvu, ning kuidas hinnad käituvad, kui suurendame simulatsiooni radade ehk hinnateede arvu. Samuti võrdlesime juhusliku hinnapuu meetodit Monte Carlo vähimruutude meetodiga bermuuda optsooni hindamisel, kui meil on neli realiseerimis hetke.

Juhusliku hinnapuu meetodi hinnad olid erinevad binoommeetodiga leitud hindadega. Nägime ka, et alusvarade arvu suurendes muutusid protsendilised erinevused binoommeetodi hindade ja juhusliku hinnapuu meetodi hindade vahel väiksemaks. Viie alusvaraga ostuoptsooni korral olid kõik erinevused väiksemad kui 1%. Märkasime ka, et harude arvu suurenedes hakkas juhusliku hinnapuu meetod koonduma binoommeetodi hinna juurde, kuid harude arvu suurenedes hakkas hinna leidmisele kulunud aeg väga kiirelt kasvama.

Monte Carlo vähimruutude meetodi hinnad hoolimata baasfunktsioonidest ega nende arvust olid samuti erinevad binoommeetodiga leitud hindadest. Nägime ka, et radade arvu suurenedes hakkas Monte Carlo vähimruutude meetodi hinnad koonduma binoommeetodi hindade juurde. Radade arvu suurenedes hakkas hinna leidmisele kulunud aeg kasvama, kuigi suhteliselt aeglaselt.

Võrreldes juhusliku hinnapuu meetodit Monte Carlo vähimruutude meetodiga, siis saadud hinnad olid küll erinevad binoommeetodi hindadest, kuid juhusliku hinnapuu meetodil kulub palju rohkem aega, et leida optsoonile hind. Lisaks peame meeles pidama, et juhusliku hinnapuu meetod on rohkem piiratud, sest sellega saab hinnata ainult bermuuda optsoone, kuid Monte Carlo vähimruutude meetodit saab kasutada nii bermuuda optsooni kui ka tavalise Ameerika optsooni korral.

# Kasutatud kirjandus

- [1] Paul Wilmott, Jeff Dewynne ja Sam Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. illustrated, reprint, revised. Oxford Financial Press, 1993. ISBN: 0952208202, 9780952208204.
- [2] Mark Broadie ja Paul Glasserman. „Pricing American-style securities using simulation“. *Journal of Economic Dynamics and Control* 21 (1997).
- [3] Francis Longstaff ja Eduardo Schwartz. „Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach“. *Review of Financial Studies* 14 (veebbruar 2001).
- [4] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. 1. väljaanne. Applications of Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 0387004513,9780387004518.
- [5] Rüdiger U. Seydel. *Tools for Computational Finance*. 5. väljaanne. Universitext. Springer, 2012. ISBN: 144712992X, 978-1-4471-2992-9, 978-1-4471-2993-6.
- [6] Kalev Pärna. *Martingaalide kursuse loengumaterjalid*. [https://courses.ms.ut.ee/MTMS.02.010/2016\\_fall/uploads/Main/Martingales2016.pdf](https://courses.ms.ut.ee/MTMS.02.010/2016_fall/uploads/Main/Martingales2016.pdf). Vaadatud: 2021-04-20. 2016.
- [7] Raul Kangro. *Monte Carlo meetodid kursuse loengumaterjalid*. [https://courses.ms.ut.ee/MTMS.01.033/2019\\_fall/uploads/Main/MC\\_2017.pdf](https://courses.ms.ut.ee/MTMS.01.033/2019_fall/uploads/Main/MC_2017.pdf). Vaadatud: 2021-04-20. 2018.
- [8] Toomas Raus. *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse kursuse loengumaterjalid*. [https://courses.ms.ut.ee/LTMS.00.017/2019\\_fall/uploads/Main/Sissejuhatusfinantsmatemaatikasse.Loengukonspekt2019.pdf](https://courses.ms.ut.ee/LTMS.00.017/2019_fall/uploads/Main/Sissejuhatusfinantsmatemaatikasse.Loengukonspekt2019.pdf). Vaadatud: 2021-04-20. 2019.
- [9] Raul Kangro. *Computational finance course materials*. [https://courses.ms.ut.ee/MTMS.02.039/2020\\_spring/uploads/Main/compfin20.pdf](https://courses.ms.ut.ee/MTMS.02.039/2020_spring/uploads/Main/compfin20.pdf). Vaadatud: 2021-04-20. 2020.
- [10] Meelis Käärrik. *Üldistatud lineaarsed mudelite loengumaterjalid*. <https://courses.ms.ut.ee/2021/glm/spring/Main/Lectures>. Vaadatud: 2021-05-20. 2021.

- [11] David Macias Ferrer. *Polynomial Regression through Least Square Method*.  
URL: <https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4845&view=html> (vaadatud 20.04.2021).

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Hans Erik Atonen,

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Ameerika optsioonide hindamine Monte Carlo meetodiga", mille juhendaja on Toomas Raus, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Hans Erik Atonen

25.05.2021