TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

390

TARTU 1976

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XVIII

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 390 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XVIII

ТАРТУ 1976

ПОИСК ВЫВОДА ПРИ ПОМОЩИ СЕМАНТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

§ I. Игра для построения семантической модели

Расcматривается логика, похожая на интуиционистскую, только с той разницей, что в ней существуют и бесконечные формулы. В [3] была задана дедуктивная система для формул такого типа. В данной статье ставят целью по формуле найти ее вывод, в случае, если формула окажется выводимой. Для этого стараются, исходя из предполагаемой невыводимости, сконструировать для формулы семантическую модель [2], в которой формула не была бы истинной. Метод конструкции задается в виде игры, аналогичной игре в [I], но приспособленной к семантической модели из [2].

Все понятия используются в смысле статей [2] и [3], содержание которых предполагается известным.

Применяются следующие символы:

I. Все символы, которые нужны для записи формул. В дальнейшем для краткости будем формулы обозначать символами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}, \ldots$, а множества высказываний - символами $\mu, \nu, \ldots$.

2. Символы $\alpha, \beta, \ldots,$ обозначающие аспекты.

3. Символы $\xi, \eta, \ldots;$ обозначающие цепи.

4. Символы $\Omega, \Pi, \ldots,$ обозначающие выборы направлений.

5. Символы $\leqslant$, $=:$, $-$, $\Rightarrow$, $\sim$.

Выражениями называются записи следующих видов:

I. Запись вида $\alpha \leqslant \beta$. Содержательный смысл: "аспект α абстрактнее аспекта β ".

2. Запись вида $\alpha =: \xi$. Содержательный смысл: "аспект α принадлежит цепи ξ ".

3. Запись вида $\Omega \Rightarrow \mu$. Содержательный смысл: " выбор направлений Ω стремится к множеству тех аспектов, в которых истинно хоть одно высказывание множества μ ".

4. Запись вида $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$. Содержательный смысл: "выбор направлений Ω стремится к множеству таких аспектов α, при которых существует семейство объектов $\langle a_\iota : \iota \in J \rangle$ такое,

что $a_\iota \in \mathfrak{D}(\alpha, a''_\iota)$, где a''_ι, $\iota \in J$, – типы свободных переменных формулы $\mathfrak{A}$, и что присваивание свободным переменным формулы $\mathfrak{A}$ значения a_ι, $\iota \in J$, превращает формулу $\mathfrak{A}$ в высказывание, истинное в α ".

5. Запись вида $\xi \sim \Omega$. Содержательный смысл: "цепь ξ согласуется с выбором направлений Ω ".

6. Запись вида $(P)_\alpha$. Содержательный смысл: "объект P принадлежит классу $\mathfrak{D}(\alpha, a'')$ ", где a'' – тип константы P.

7. Запись вида $(\mathfrak{A})_\alpha$. Содержательный смысл: "высказывание $\mathfrak{A}$ истинно в аспекте α ", т.е. α принадлежит значению истинности высказывания $\mathfrak{A}$.

8. Запись вида $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$. Содержательный смысл: "высказывание $\mathfrak{A}$ не истинно в аспекте α ".

9. Запись вида $(\mathfrak{A})_{-\xi}$. Содержательный смысл "высказывание $\mathfrak{A}$ не истинно ни в одном аспекте цепи ξ ".

Всякая совокупность выражений представляет собой некоторую информацию о предполагаемой модели. Теперь мы введем для этой совокупности некоторые ограничения, требуя, чтобы информация некоторого вида, которая тривиальным образом вытекает из выражений данной совокупности, была уже явно высказана в выражениях совокупности. Таким образом, получается понятие ситуации, которое мы теперь определим.

Ситуацией называется всякое множество выражений Σ, удовлетворяющее следующим условиям:

I. Если во множестве Σ имеются выражения $\alpha \leq \beta$ и $(P)_\alpha$ (или $\alpha \leq \beta$ и $(\mathfrak{A})_\alpha$), то имеется выражение $(P)_\beta$ (соответственно $(\mathfrak{A})_\beta$).

2. Если во множестве Σ имеются выражения $(\mathfrak{A})_{-\xi}$ и $\alpha =: \xi$, то имеется и выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$.

3. Если во множестве Σ хотя бы для одного символа α имеется выражение $(\bigvee_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ или $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha$, то хотя бы для некоторого Ω имеется и выражение $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$ (соответственно $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$).

4. Если во множестве Σ имеется тройка выражений $(\bigvee_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$, $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$ или тройка $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha$, $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$, $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$, то имеется и тройка $\xi \sim \Omega$, $\alpha =: \xi$, $(\mathfrak{B})_{-\xi}$. Кроме того, требуется, что, если во множестве Σ содержится пара выражений $(\bigvee_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$ или $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha$, $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$, то в нем содержится по меньшей мере еще две пары выражений $\xi \sim \Omega$, $\alpha =: \xi$ и $\eta \sim \Omega$, $\alpha =: \eta$.

Всякое множество выражений Σ можно превратить в ситуацию при помощи следующей процедуры, которую мы будем называть замыканием данного множества. Процедура состоит из четырех этапов.

I. Если во множестве Σ имеется выражение $(P)_\alpha$ (или $(\mathfrak{A})_\alpha$) и $\alpha \leq \alpha_1, \alpha_1 \leq \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \leq \beta$, то прибавляется выражение $(P)_\beta$ (соответственно $(\mathfrak{A})_\beta$), если этого выражения во множестве не было. Это делается одновременно для всех случаев в данном множестве, достигая таким образом выполненности первого условия ситуации.

2. Если во множестве Σ имеются выражения $(\mathfrak{A})_{-\xi}$ и $\alpha =: \xi$, то прибавляется $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$. Одновременным применением этой операции ко всем $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ из множества Σ достигается выполненность второго условия, сохраняя при этом выполненность первого условия ситуации.

3. Если для высказывания вида $\bigvee_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota$ (или $\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A}$) во множестве Σ имеется хоть одно выражение вида $(\bigvee_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ (соответственно $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha$), то к множеству Σ прибавляется (в случае его отсутствия) выражение $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$ (соответственно $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$), где Ω в случае прибавления отличается от символов, уже имеющихся в выражениях множества Σ.

Таким образом достигается выполненность третьего условия ситуации, сохраняя выполненность двух первых условий.

4. Для каждых α и Ω, при которых после третьего этапа во множестве окажутся выражения $(\bigvee_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ и $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$ (соответственно $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha$ и $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$), прибавляется в случае отсутствия для каждого высказывания $\mathfrak{B}$, для которого имеется выражение $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$, тройка выражений $\xi \sim \Omega$, $\alpha =: \xi$, $(\mathfrak{B})_{-\xi}$ с символом ξ, не имеющемся во множестве. Если для данного α выражений вида $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$ нет или их только одно, то прибавляется соответственно две разные пары или одна пара выражений вида $\xi \sim \Omega$, $\alpha =: \xi$ с новыми символами (символом) ξ. Таким образом достигается выполненность четвертого условия ситуации, сохраняя выполненность трех первых условий, в том числе и второго условия, так как при прибавлении выражений $(\mathfrak{B})_{-\xi}$ и $\alpha =: \xi$ во множестве уже имеется выражение $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$.

Игра состоится между двумя лицами, называемыми детерминистом и индетерминистом. Смысл игры в том, что детерминист пробует доказать, что модели, описанной данной ситуацией, не может существовать, а индетерминист защищает возможность описываемой модели. Для этого детерминист прибавляет по ниже описанным правилам к ситуации новые выражения, истинность которых вытекает из информации, задаваемой ситуацией, пытаясь дойти до противоречия. Некоторые правила имеют разветвление, т.е. из данной ситуации вытекает, что истинно хоть одно выражение из некоторого семейства. В этом случае индетерминист выбирает из этого семейства выражение, которое предполагает истинным.

Данная игра не является игрой в классическом смысле, так как она, в общем, может оканчиваться только в пользу детерминиста, а индетерминист может только тянуть игру до бесконечности. Переходы от одной ситуации к другой, которые совершаются по правилам, приведенным ниже, определяются детерминистом, только при правилах с разветвлением предусматривается ответный переход индетерминиста.

Правила следующие:

I а. Если в ситуации имеется выражение $(\bigwedge_{\iota\in J}\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, то произойдет разветвление через все $\iota\in J$, где в каждой ветви прибавляется к ситуации выражение $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$.

I б. Если в ситуации имеется выражение $(\bigwedge_{\iota\in J}\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, то можно прибавить выражение $(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ с произвольным $\iota\in J$.

II а. Если в ситуации имеется выражение $(\bigvee_{\iota\in J}\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, то можно прибавить выражение $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$ с произвольным $\iota\in J$.

II б. Если в ситуации имеются выражения $(\bigvee_{\iota\in J}\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, $\alpha=:\xi$, $\xi\sim\Omega$ и $\Omega\Rightarrow\{\mathfrak{A}_\iota:\iota\in J\}$, то прибавляются выражения $\beta=:\xi$, $\alpha\leq\beta$ и пройзойдет разветвление через $\iota\in J$, где в каждой ветви прибавляется выражение $(\mathfrak{A}_\iota)_\beta$. Здесь β должен не встречаться до этого в ситуации.

III а. Если в ситуации имеется выражение $(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})_{-\alpha}$, то прибавляется $\alpha\leq\beta$, $(\mathfrak{A})_\beta$ и $(\mathfrak{B})_{-\beta}$ с аспектом β, невстречавшимся в ситуации.

III б. Если в ситуации имеется выражение $(\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B})_\alpha$, то произойдет разветвление на две ветви, где в одной прибавляется выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, а в другой $(\mathfrak{B})_\alpha$.

IV а. Если в ситуации имеется выражение $(\neg\mathfrak{A})_{-\alpha}$, то прибавляются выражения $\alpha\leq\beta$ и $(\mathfrak{A})_\beta$ с аспектом β, невстречавшимся в ситуации.

IV б. Если в ситуации имеется выражение $(\neg\mathfrak{A})_\alpha$, то прибавляется $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$.

Va. Если в ситуации имеется выражение $(\forall\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{A})_{-\alpha}$, то прибавляется выражение $\alpha\leq\beta$ с аспектом β, невстречавшимся в ситуации, множество выражений $(P_\iota)_\beta$, где каждая P_ι – константа типа переменной x'_ι, невстречавшаяся в ситуации, и выражение $(\mathfrak{A}')_{-\beta}$, где $\mathfrak{A}'$ получается из формулы $\mathfrak{A}$ заменой переменных x'_ι на константы P_ι.

V б. Если в ситуации имеются выражение $(\forall\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{A})_\alpha$ и (может быть, пустая) совокупность выражений вида $(P)_\alpha$, если термы a'_ι, $\iota\in J$, имеют тип переменных x'_ι и из констант содержат только указанные константы P, то прибавляется выражение

$$\left(\int_{\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle}\mathfrak{A}\right)_\alpha.$$

VI а. Если в ситуации имеются выражение $(\exists\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{A})_{-\alpha}$ и совокупность выражений вида $(P)_\alpha$, а термы a'_ι, $\iota\in J$, такие, как в случае правила V б., то прибавляется выражение

$$\left(\int_{\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle}\mathfrak{A}\right)_{-\alpha}.$$

VI б. Если в ситуации имеются выражения $(\exists\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{A})_\alpha$, $\alpha=:\xi$, $\xi\sim\Omega$ и $\Omega\Rightarrow\mathfrak{A}$, то прибавляются выражения $\beta=:\xi$, $\alpha\leq\beta$ с аспектом β, невстречавшимся в ситуации, семейство выражений $(P_\iota)_\beta$ с константами P_ι, $\iota\in J$, типа переменных x'_ι, невстречавшимися в ситуации, и выражение $(\mathfrak{A}')_\beta$, где $\mathfrak{A}'$ – такое же высказывание, как в случае правила V а.

VII. Если в ситуации имеются выражения $(P\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle)_\alpha$ и $(P\langle b'_\iota:\iota\in J\rangle)_{-\alpha}$, где $a'_\iota=b'_\iota$ в случае термов элементарного типа, а в противоположном случае $a'_\iota = d\langle x'^\iota_\eta:\eta\in J_\iota\rangle\mathfrak{A}_\iota$ и $b'_\iota=d\langle y'^\iota_\eta:\eta\in J_\iota\rangle\mathfrak{B}_\iota$, то прибавляется выражение $\alpha\leq\beta$ с аспектом β, невстречавшимся в ситуации и произойдет разветвление через те $\iota\in J$, при которых a'_ι и b'_ι – термы неэлементарного типа. Для каждого ι получается две ветви. В обоих прибавляется семейство выражений $(c'^\iota_\eta)_\beta, \eta\in J_\iota$, где c'^ι_η – константы типа переменных x'^ι_η и y'^ι_η (ведь эти переменные имеют одинаковый тип), невстречавшиеся в ситуации; в одной из этих двух ветвей прибавляются еще выражения $(\mathfrak{A}'_\iota)_\beta$ и $(\mathfrak{B}'_\iota)_{-\beta}$, а в другой – выражения $(\mathfrak{A}'_\iota)_{-\beta}$ и $(\mathfrak{B}'_\iota)_\beta$, где $\mathfrak{A}'_\iota$ и $\mathfrak{B}'_\iota$ получаются из формул $\mathfrak{A}_\iota$ и $\mathfrak{B}_\iota$ соответственно заменой переменных x'^{i}_{η}, соответственно y'^{i}_{η}, $\eta \in J_i$, на константы c'^{i}_{η}.

В ходе игры только детерминист выбирает очередное правило и выражения из ситуации, на которые правило применяется. Роль индетерминиста в игре состоит только в выборе ветви в случае разветвления. Имеется в виду, что после каждого применения правила и, в случае разветвления, выбора ветви, полученная совокупность выражений превращается в ситуацию при помощи замыкания.

Игра начинается с исходной ситуации, состоящей из выражения $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ и множества выражений вида $(A)_{\alpha}$, где в роли A будут все константы высказывания $\mathfrak{A}$. Ведь высказывание $\mathfrak{A}$ тавтологично в точности тогда, когда модель, описанная такой ситуацией, неосуществима. Цель детерминиста - достигнуть т.н. выигрышную ситуацию, где имелось бы или выражение $(\Lambda_{\emptyset})_{-\alpha}$, или выражение $(V_{\emptyset})_{\alpha}$, или пара выражений $(P\langle a'_i : i \in J\rangle)_{\alpha}$, $(P\langle a'_i : i \in J\rangle)_{-\alpha}$, где a'_i, $i \in J$, - термы элементарных типов. Эти случаи являются в точности такими, в которых применением некоторого правила можно получить разветвление с пустым множеством ветвей. Цель индетерминиста - избежать такой ситуации.

Стратегией детерминиста для игры с исходной ситуацией Σ_0 будем называть любую минимальную совокупность K пар (Σ, π), где Σ есть ситуация, а π есть некоторый конкретный способ применения некоторого правила на ситуацию Σ, в случае разветвления без указания ответа индетерминиста, удовлетворяющую следующим условиям.

1) Пара (Σ_0, π) принадлежит K при некотором π.

2) Если $(\Sigma, \pi) \in K$ и Σ' есть ситуация, получаемая из ситуации Σ в результате применения правила π (в случае разветвления любая из них), и если Σ' не является выигрышной ситуацией, то в K имеется и некоторая пара (Σ', π').

Стратегия называется стратегией выигрыша, если из нее нельзя выделить последовательность $(\Sigma_0, \pi_0), (\Sigma_1, \pi_1), \dots, (\Sigma_n, \pi_n), \dots$, где при каждом n ситуация Σ_{n+1} получается из ситуации Σ_n по правилу π_n (в случае разветвления после подходящего ответа индетерминиста).

Путем игры будем называть конечное или счетное множество ситуаций $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$, где для каждого $i < n$ ситуацию

Σ_{i+1} можно получить из ситуации Σ_i по некоторому правилу π_i, притом в случае правила с разветвлением в состав перехода включается и ответ индетерминиста. Если все пары (Σ_i, π_i) содержатся в стратегии K, то мы будем говорить о пути стратегии K. В случае, если переход от ситуации Σ_1 к ситуации Σ_2 совершается по некоторому правилу с разветвлением и Σ_2 получается в случае выбора значения индекса ι_0 со стороны индетерминиста, то мы будем говорить, что путь $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n, \ldots$ находится на ветви с индексом ι_0.

Ситуация называется 0-детерминированной, если для нее имеет место один из случаев, являющимся целью детерминиста.

Пусть для ординала $\varkappa$ детерминированность меньших порядков определена. Ситуация называется $\varkappa$-детерминированной, если детерминист может применением некоторого правила получить либо ν-детерминированную ситуацию с $\nu < \varkappa$, либо в случае разветвления через индекс ι в каждой ветви ν_ι-детерминированную ситуацию с $\nu_\iota < \varkappa$.

Ситуация называется детерминированной, если она $\varkappa$-детерминированная при некотором ординале $\varkappa$. Непосредственно ясно, что детерминист имеет стратегию выигрыша в точности тогда, когда исходная ситуация детерминированная.

Таким же образом как и в [I] доказывается

Основная лемма: Если ситуация детерминированная, то из нее можно извлечь детерминированную подситуацию, состоящую из (может быть, пустого) множества выражений вида $(\mathfrak{A})_\alpha$ и $(P)_\alpha$ и, может быть, одного выражения вида $(\mathfrak{B})_{-\alpha}$, где α во всех этих выражениях один и тот же аспект; кроме них в этой подситуации имеются лишь те выражения, которые необходимы для удовлетворения условиям ситуации и которые прибавились бы в процессе замыкания.

Всякую детерминированную подситуацию такого вида будем называть ядром детерминированной ситуации.

Аналогично доказательству в [I] доказывается и в данном случае

Теорема I. Если детерминист имеет стратегию выигрыша, то высказывание, содержащееся в исходной ситуации, выводимо в смысле статьи [3].

§ 2. Устранимые индексы

В ходе игры детерминист может применять правила $\vee\delta$ и

VIa, используя при этом сколь угодно сложные термы $a'_i, i \in J$. Возникает вопрос: можно ли для данной исходной ситуации указать некоторую границу сложности для этих термов, не лишая при этом детерминиста возможности выиграть. Другими словами, можно ли доказать, что если детерминист вообще имеет стратегию выигрыша, то он имеет и такую стратегию выигрыша, в которой термы, использованные правилами Vб и VIa, не переступают эту границу сложности.

Пусть детерминист имеет некоторую стратегию выигрыша. Термы, использованные правилами Vб и VIa, могут быть сколь угодно громоздкими из-за того, что могут содержать сколь угодно длинные конъюнкции и дизъюнкции, сколь угодно длинные семейства переменных в кванторах и предикаты сколь угодно сложного типа. Посмотрим теперь для данной стратегии являются ли в этих конъюнкциях и дизъюнкциях все члены, в этих кванторах все переменные, а в этих предикатах все аргументные места существенными или можно от некоторых из них избавиться.

Стратегия выигрыша для данной детерминированной исходной ситуации Σ_0 состоит из совокупности K детерминированных ситуаций с $\Sigma_0 \in K$ и из функции f, указывающей для каждой $\Sigma \in K$ правило $f(\Sigma)$, которое детерминист может применить на Σ и которое в результате дает - в случае разветвления может быть в каждой ветви различную - ситуацию $\Sigma' \in K$ с меньшим порядком детерминированности, чем Σ. При этом мы выбираем совокупность K минимальной, так что никакое ее подмножество, содержащее Σ_0, с сужением функции f, не оказалось стратегией выигрыша. Очевидно, что при этом каждая $\Sigma \in K$ должна быть достигаема, исходя с Σ_0, конечным числом шагов, применяя правила в согласии с функцией f. Чтобы (K,f) была стратегия выигрыша, в K не может быть бесконечной последовательности ситуаций, полученных по f.

Выражениями данной стратегии (K,f) будем называть каждое выражение любой ситуации $\Sigma \in K$. Высказываниями стратегии (K,f) будем называть высказывания, содержащиеся в ее выражениях, а константами и переменными стратегии (K,f) - константы и переменные, содержащиеся в ее высказываниях или в термах, примененных правилами Vб и VIa в случаях, когда функция f укажет это применение для некоторой $\Sigma \in K$. В действительности каждая переменная данной стратегии либо имеется в Σ_0, либо вводится применением правила Vб или VIа в составе терма, а каждая константа данной стратегии либо имеется в исходной ситуации, либо вводится применением Vа, VIб или VII.

Рассмотрим некоторый терм α', примененный в стратегии (т.е. примененный правилом Vб или VIа по указанию функции f). Пусть x'_0 - некоторая переменная, связанная в терме α' функциональным квантором. Тогда тот функциональный квантор находится или в префиксе терма или в префиксе некоторого его подтерма. В последнем случае можно указать вхождение некоторой константы или переменной x'_1, которому этот подтерм является аргументом. Если x'_1 опять окажется связанным функциональным квантором, то, исходя от неё, найдем таким же образом x'_2 и т.д. Так как этот процесс не может продолжаться бесконечно, то некоторая x'_n окажется или константой, или переменной, связанной с квантором общности, квантором существования или функциональным квантором префикса терма α'. Эту x'_n будем называть прадедом переменной x'_0 в терме α'.

Константы и переменные и стратегии делаются на определенные и сотворенные в соответствии со следующим правилом.

а) Все константы и переменные исходной ситуации определенные.

б) Переменная, связанная квантором общности или квантором существования в некотором терме α', примененном в стратегии - сотворенная.

в) Переменная, находящаяся в префиксе некоторого терма α', примененного в стратегии, - определенная или сотворенная в зависимости от переменной, подставляемой термом α'.

г) Переменная, связанная функциональным квантором в матрице терма α', примененного в стратегии, определенная или сотворенная в зависимости от ее прадеда в терме α'.

д) Константа, введенная стратегией правилом Vа, VIб или VII, - определенная или сотворенная в зависимости от переменной, которая заменяется этой константой.

Интуитивный смысл этого разделения состоит в том, что тип определенной константы или переменной некоторым образом уже имеется в ситуации Σ_0, тип сотворенной константы или переменной создается в ходе стратегии.

Индексами, введенными данной стратегией, называются индексы следующих трех видов:

а) индексы конъюктивных и дизъюнктивных членов для конъюкций и дизъюнкций, находящихся в термах, примененных в стратегии;

б) индексы переменных в кванторах общности и в кванторах существования, связывающих сотворенные переменные,

в) индексы, находящиеся в типах сотворенных переменных, в их подтипах и т.д.

При этом индексы, введенные разными термами или, хоть и вводятся одним и тем же термом a', но находятся в нем в разных местах (для индекса в типе переменной разные вхождения этой переменной не считаются разными местами), считаются различными. Но индекс, раз уже введенный и находящийся в некотором выражении, отождествляется с соответствующими индексами в выражениях, возникающих от данного выражения в результате применения правил игры.

Пусть M - некоторое подмножество множества введенных индексов. Мы будем говорить, что применение правила $f(\Sigma)$ на ситуацию Σ в данной стратегии зависит от множества M, если в процессе достижения ситуации Σ, исходя от Σ_0, применяется правило с разветвлением через индексы (т.е. правило I а, IIб или VII) и путь к Σ находится на ветви, соответствующей некоторому $\iota \in M$. Мы будем говорить, что подстановка переменной x'_ι некоторым термом зависит от M, если применение правила подстановки зависит от M или если $\iota \in M$.

Мы будем говорить, что ситуация Σ зависит от множества M в данной стратегии, если или Σ возникает в результате применения правила, зависящего от M, или применение этого правила имеет разветвление через индексы и Σ соответствует некоторому $\iota \in M$.

Пусть $\mathfrak{B}$ - некоторая подформула некоторого высказывания $\mathfrak{A}$ данной стратегии. Мы будем говорить, что вхождение переменной x' или константы a' подчиняется в $\mathfrak{B}$ множеству M, если это вхождение содержится в $\mathfrak{B}$ в некоторой конъюнкции $\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota$ или некоторой дизъюнкции $V_\iota \mathfrak{A}_\iota$ в члене $\mathfrak{A}_\iota$, где $\iota \in M$ или в формуле вида $P\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle$ в терме a'_ι, где $\iota \in M$.

Отметим, что при подстановке терма вместо переменной каждый индекс в типе переменной совпадает с некоторым индексом в префиксе терма, а, значит, ему соответствует некоторая переменная, которая в матрице терма может находиться только свободно. Так как подстановка некоторого типа в общем сопровождается подстановками более простых типов, то сказанное имеет место и для этих подстановок. Таким образом, мы можем при подстановках говорить о переменной в префиксе терма подстановки, соответствующей данному индексу в типе подставляемой переменной.

Мы будем говорить, что подмножество M множества всех введенных индексов удовлетворяет условиям устранимости, если для каждого $\iota \in M$ выполнено одно из следующих условий, соответственно характеру индекса ι.

а) Если ι есть индекс конъюнктивного или дизъюнктивного члена, то каждое такое применение в данной стратегии правила Iб, соответственно IIа, где используется индекс ι, зависит от M.

б) Если ι есть индекс переменной x'_ι в кванторе общности или в кванторе существования в некотором терме a', примененном в стратегии, то или применение терма a' зависит от M или каждое вхождение переменной x'_ι в терме a' подчиняется множеству M; также, если константа c', полученная от x'_ι, применением правила V а или VIб, встречается в терме b', примененном в стратегии, то или это применение терма b' зависит от M, или каждое вхождение константы c' подчиняется множеству M в матрице терма b'.

в) Если ι есть индекс в типе, подтипе и т.д. сотворенной переменной x', то или индекс переменной x' в своем кванторе принадлежит M, или при каждой подстановке переменной x', если подстановка не зависит от M, каждое вхождение переменной, соответствующей индексу ι, подчиняется множеству M в матрице терма подстановки; в случае, если в терме a', вводящем переменную x' независимо от M, имеются подтермы, префикс которых содержит переменную y' с индексом ι, то все вхождения переменной y' в матрице терма a' должны подчиняться множеству M, также, если константа c', полученная применением правила VII из переменной y', встречается в терме b', примененном в стратегии, то или применение терма $\mathfrak{b}'$ зависит от M, или каждое вхождение константы c' подчиняется множеству M в матрице терма $\mathfrak{b}'$.

Пусть множество M удовлетворяет условиям устранимости.

Пусть α' есть терм, примененный в стратегии. Обозначим через α'^* терм, полученный из терма α' следующим образом: из всех конъюнкций и дизъюнкций в матрице терма удаляют члены, индексы которых принадлежат M, из кванторов удаляют переменные, индексы которых в этом кванторе принадлежат M, а из подформул вида $P\langle \mathfrak{b}'_\iota : \iota \in I\rangle$ матрицы терма удаляют те термы $\mathfrak{b}'_\iota$, при которых $\iota \in M$. Таким образом упрощаются типы сотворенных переменных. Удалять надо, конечно, те части, - которые не входят в состав другой удаляемой части. Сокращение кванторов не причиняет возникновения свободных переменных, так как из-за условий б) и в) устранимости в α'^* не будет вхождений этих переменных в области действия квантора.

Пусть Σ - некоторая ситуация данной стратегии, не зависящая от M. Обозначим через Σ^* множество записей, полученное из Σ таким образом, что во всех высказываниях ситуации Σ делают преобразования, аналогичные тем, при помощи которых получались термы α'^* от термов α'; кроме того, выбрасывают из Σ все выражения вида $(P)_\alpha$, где P - константа, полученная в результате применения правила Vа, VIб или VII, если переменная, из которой P этим правилом получили, в своем кванторе носила индекс $\iota \in M$, а типы остальных констант упрощаются подходящим образом. Определим функцию f^* так, что $f^*(\Sigma^*)$ обозначает то же правило, что и $f(\Sigma)$, но примененное на соответствующее выражение из Σ^*; в случае правила Vб и VIа, применяя вместо каждого терма подстановки α' соответствующий α'^*. Множество множеств Σ^* через все Σ, не зависящих от M, обозначим через K^*. Докажем теперь, что каждое Σ^* является ситуацией, а (K^*, f^*) - стратегией.

Так как каждая ситуация Σ, не зависящая от M, получена из Σ_0 в результате некоторого конечного числа n применений правил игры, притом в случае разветвления, выбирая ветвь, индекс которой не принадлежит M, то мы, применяя индукцию по n, докажем, что Σ^* - ситуация, что на нее можно применить правило $f^*(\Sigma^*)$ и что результатами в этом случае будут в точности те ситуации, которые имеют вид $(\Sigma')^*$, где в качестве Σ' будут те результаты правила $f(\Sigma)$, которые не зависят от M. Другими словами, если $f(\Sigma)$ - правило без разветвления и дает результат Σ', то результатом правила $f^*(\Sigma^*)$ будет $(\Sigma')^*$. Если $f(\Sigma)$ имеет разветвление, то $f^*(\Sigma^*)$ имеет разветвление через индексы, не принадлежащие M, и результатом в каждой такой ветви будет $(\Sigma')^*$, где Σ' - результат для $f(\Sigma)$ в соответствующей ветви.

Так как $(\Sigma_0)^* = \Sigma_0$ из-за отсутствия в Σ_0 введенных индексов, то $(\Sigma_0)^*$ - ситуация. Пусть для некоторого n множество Σ^* - ситуация. Просмотрим все случаи по характеру правила $f(\Sigma)$.

Пусть правило $f(\Sigma)$ есть Iб. Тогда Σ содержит выражение $(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, а правилом $f(\Sigma)$ прибавляется $(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ при некотором ι. Так как Σ и $\Sigma \cup \{(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha\}$ не зависят от M, то $\iota \bar{\in} M$. Поэтому выражение $\{(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha\}^*$ или короче $(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)^*_\alpha$ - содержащееся в Σ^*, имеет конъюнктивный член с индексом ι и, следовательно, $f^*(\Sigma^*)$ применимо на Σ^*, а в результате его получим ситуацию $\Sigma^* \cup \cup \{(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha\}^* = (\Sigma \cup \{(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha\})^*$.

В случае правила IIа доказательство аналогичное.

Рассмотрим правило Iа. Тогда Σ содержит выражение $(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, а в результате правила $f(\Sigma)$ получается разветвление, где в каждой ветви прибавлено по одному выражению вида $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$. По предположению Σ не зависит от M. Из результатов правила $f(\Sigma)$ не зависят от M те ситуации, которые соответствуют значениям индекса ι, не принадлежащим M. Ситуация Σ^* содержит выражение $(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)^*_{-\alpha}$, которое представляет конъюнкцию через те ι, которые не принадлежат M. Значит, правило $f^*(\Sigma^*)$ применимо на Σ^*, задавая в результате разветвление через значения ι, не принадлежащие M, с прибавленным выражением $(\mathfrak{A}_\iota)^*_{-\alpha}$ в каждой ветви. Но так как $\Sigma^* \cup \{(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}\}^* = (\Sigma \cup \{(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}\})^*$, то мы и получим желаемый результат.

В случае правила IIб доказательство аналогичное.

Рассмотрим правило IIIб. Тогда Σ содержит выражение $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})_\alpha$, а в результате применения правила получаются две ветви, где в одной прибавлено $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, а в другой - $(\mathfrak{B})_\alpha$.

По предположению Σ, а значит, и обе полученные ситуации независимы от M. Тогда Σ^* содержит выражение $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})^*_{\alpha}$. Следовательно, правило $f^*(\Sigma^*)$ применимо на Σ^*. В результате получаются две ветви, где в одной прибавлено выражение $(\mathfrak{A})^*_{-\alpha}$, а в другой – $(\mathfrak{B})^*_{\alpha}$. Из-за равенств $\Sigma^* \cup \{(\mathfrak{A})_{-\alpha}\}^* = (\Sigma \cup \{(\mathfrak{A})_{-\alpha}\})^*$ и $\Sigma^* \cup \{(\mathfrak{B})_{\alpha}\}^* = (\Sigma \cup \{(\mathfrak{B})_{\alpha}\})^*$ и получается желаемый результат.

В случае правил IIIа, IVа и IVб доказательство аналогичное, только с той разницей, что здесь имеется только одна ветвь.

Рассмотрим правило Vа. Тогда Σ, по предположению независима от M, содержит выражение $(\forall < x'_{\iota} : \iota \in J > \mathfrak{A})_{-\alpha}$. Правилом $f(\Sigma)$ прибавляются выражения $\alpha \leq \beta$, $(P_{\iota})_{\beta}$ (через $\iota \in J$) и $(\mathfrak{A}')_{-\beta}$, где $\mathfrak{A}'$ получено из формулы $\mathfrak{A}$ заменой переменных x'_{ι}, $\iota \in J$, на константы P_{ι}. Полученная ситуация тоже независима от M. Множество Σ^* содержит выражение $(\forall < x'_{\iota} : \iota \in J > \mathfrak{A})^*_{-\alpha}$. Индексы переменных в кванторе этого выражения пробегают $J \setminus M$, также упрощаются и типы этих переменных. Применением правила Vа прибавляются выражения $\alpha \leq \beta$, $(P_{\iota})^*_{\alpha}$ (через $\iota \in J \setminus M$) и $(\mathfrak{A}')^*_{-\beta}$, так как в $(\forall < x'_{\iota} : \iota \in J > \mathfrak{A})^*_{-\alpha}$ переменных x'_{ι}, $\iota \in J \cap M$ не может быть. Но $\Sigma^* \cup \{\alpha \leq \beta, (\mathfrak{A}')^*_{-\beta}\} \cup \{(P_{\iota})^*_{\beta} : \iota \in J \setminus M\}$ и есть $(\Sigma \cup \{\alpha \leq \beta, (\mathfrak{A}')_{-\beta}\} \cup \{(P_{\iota})_{\beta} ; \iota \in J\})^*$.

В случае правила VIб доказательство аналогичное.

В случае правила VII в Σ имеются выражения $(P < a'_{\iota} : \iota \in J >)_{\alpha}$ и $(P < b'_{\iota} : \iota \in J >)_{-\alpha}$. Применением правила $f(\Sigma)$ получается разветвление, где каждый $\iota \in J_1$ (индексы неэлементарных термов) дает две ветви, в которых прибавлены выражения $\alpha \leq \beta$, $(c'^{\iota}_{\eta})_{\beta}$ (через $\eta \in J_{\iota}$) и $(\mathfrak{A}'_{\iota})_{\beta}$ и $(\mathfrak{B}'_{\iota})_{-\beta}$ или $(\mathfrak{A}'_{\iota})_{-\beta}$ и $(\mathfrak{B}'_{\iota})_{\beta}$, как указано в правиле VII. Ситуация Σ по предположению независима от M, но из полученных ситуаций окажутся независимыми от M только те, которые соответствуют индексу $\iota \in J_1 \setminus M$. Ситуация Σ^* содержит выражения $(P < a'_{\iota} : \iota \in J >)^*_{\alpha}$ и $(P < b'_{\iota} : \iota \in J >)^*_{-\alpha}$, где тип константы P упрощен. Применением правила VII получается разветвление по 2 ветви для каждого $\iota \in J_1 \setminus M$. В каждой ветви прибавлены выражения $\alpha \leq \beta$, (c'^{ι}_{η}) (через

$\eta\in J_\iota\setminus M)$, так как префиксы соответствующих термов содержат только эти индексы и $(\mathfrak{A}'_\iota)^*_\beta$ и $(\mathfrak{B}'_\iota)^*_{-\beta}$ или $(\mathfrak{A}'_\iota)^*_{-\beta}$ и $(\mathfrak{B}'_\iota)^*_\beta$ соответственно. Но таким образом мы и получаем ситуацию $(\Sigma\cup\{(\mathfrak{A}'_\iota)^*_\beta, (\mathfrak{B}'_\iota)^*_{-\beta}\}\cup\{(C'^\iota_\eta)_\beta : \eta\in J_\iota\})^*$ или $(\Sigma\cup\{(\mathfrak{A}'_\iota)_{-\beta}, (\mathfrak{B}'_\iota)_\beta\}\cup\{(C'^\iota_\eta)_\beta : \eta\in J_\iota\})^*$.

Пусть формула $\mathfrak{A}$ такая, что x'_ι, $\iota\in J$, - переменные, не содержащиеся в $\mathfrak{A}$ связанно, и пусть $\mathfrak{A}^*$, полученная от $\mathfrak{A}$ указанным образом (т.е. сокращением кванторов, дизъюнкций, конъюнкций и типов), не содержит переменных x'_ι, $\iota\in J\cap M$, также не содержит переменных, носящих в $\mathfrak{A}$ в функциональном кванторе индекс $\iota\in M$. Пусть a'_ι, $\iota\in J/M$ - термы, удовлетворяющие также последнему условию. Пусть подстановка

$$\int_{\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle} \mathfrak{A}$$

допустима. Так как тип терма a'_ι, $\iota\in J\setminus M$, упрощается таким же образом, как и тип переменной x'_ι, то подстановка этих термов после упрощения в $\mathfrak{A}^*$ тоже допустима.

Индукцией по типу подстановки и рангу формулы $\mathfrak{A}$ доказывается, что результатом последней подстановки будет

$$\left(\int_{\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle} \mathfrak{A}\right)^*.$$

Рассмотрим правило $\forall$б. Тогда Σ по предположению независимая от M, содержит выражение $(\forall\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle\,\mathfrak{A})_\alpha$, а в результате правила $f(\Sigma)$ прибавляется

$$\int_{\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle} \mathfrak{A}$$

Тогда в Σ^* имеется выражение $(\forall\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle\,\mathfrak{A})^*_\alpha$, которое, являясь выражением, не содержит свободных переменных. Так как, по предположению, термы, полученные сокращением термов a'_ι, $\iota\in J\setminus M$, не содержат константы, невходящих в Σ^*, то подстановка их вместо x'_ι, $\iota\in J\setminus M$, в Σ^* по правилу $\forall$б допустима. По условиям устранимости сокращенные термы не содержат свободных переменных.

Получается выражение

$$\left(\int_{\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle} \mathfrak{A}\right)^*_\alpha.$$

Таким образом получим ситуацию

$$\Sigma^*\cup\left\{\left(\int_{\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle} \mathfrak{A}\right)\right\}^* = \left(\Sigma\cup\left\{\left(\int_{\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle} \mathfrak{A}\right)\right\}\right)^*.$$

В случае правила VIа доказательство аналогичное.

Таким образом, на каждое $\Sigma^* \in K^*$ правило $f^*(\Sigma^*)$ применимо и результаты тоже принадлежат K^*. Кроме того, в K^* не может существовать бесконечной последовательности ситуаций по функции f^*, так как такая последовательность соответствовала бы последовательности в K по функции f. Следовательно, (K^*, f^*_*) является стратегией выигрыша с исходной ситуацией $\Sigma^*_0 = \Sigma_0$.

Итак, имеет место

<u>Теорема 2.</u> Если множество индексов удовлетворяет условиям устранимости, то из всякой стратегии можно получить стратегию в результате устранения всех индексов этого множества.

§ 3. Конструкция множества устранимых индексов

Поставим себе задачу сконструировать множество M, которое удовлетворило бы условию устранимости и было бы возможно обширнее.

Пусть M_0 есть множество всех введенных индексов. Определим убывающую последовательность множеств, определяя M_{n+1}, исходя из множества M_n, следующим образом.

Индекс $\iota \in M_n$ мы считаем принадлежащим в M_{n+1}, если ι, в зависимости от его характера, удовлетворяет одному из следующих условий.

а) В случае, если ι есть индекс члена в конъюнкции или в дизъюнкции, то каждое применение правила Iб соответственно IIа, где применен индекс ι, зависит от множества M_n.

б) Если ι есть индекс переменной x' кванторе общности или в кванторе существования, то или применение терма a', вводящую переменную x', зависит от M_n или каждое вхождение переменной x' в терме a' подчиняется множеству M_n; кроме того, при каждой константе, полученной из этой переменной правилом V а или VIб, и при каждом терме, подстановка которого правилом Vб или VIа не зависит от M_n, вхождение этой константы в данном терме подчиняется множеству M_n.

в) Если ι есть индекс в типе сотворенной переменной x', то или индекс переменной x' в своем кванторе принадлежит M_n, или при каждой подстановке, не зависящей от M_n, в матрице терма подстановки каждое вхождение переменной, соответствующей индексу ι, подчиняется множеству M_n; в случае, если в терме α', входящем x' независимо от M_n, имеются подтермы с индексом ι в префиксе, то все вхождения переменной y' с индексом ι должны в матрице терма α' подчиняться множеству M_n; кроме того, если константа c', полученная применением правила VII от переменной с индексом ι, встречается в терме b', примененном в стратегии, то или это применение терма b' зависит от M_n, или каждое вхождение константы c' подчиняется множеству M_n в матрице терма b'.

Пусть $M = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} M_n$.

Проверим условия устранимости для множества M.

Пусть некоторый $\iota \in M$ есть индекс члена в дизъюнкции или конъюнкции. Если условие устранимости не выполнено для ι, то должно быть некоторое применение правила Iб, соответственно IIа, использующее индекс ι и не зависящее от M. Значит, для каждого разветвления, предшествующего данной операции, индекс данной ветви не принадлежит M. Пусть число этих разветвлений есть k. Для каждого $i = 1, \dots, k$ можно указать такое число n_i, что индекс данной ветви в i-том разветвлении не принадлежит M_{n_i}. Выбирая $n = \max(n_1, \dots, n_k)$, мы получим, что никакой из индексов данной ветви не входит в M_n. Но в этом случае данная операция не зависит от M_n и поэтому $\iota \bar{\in} M_{n+1}$, что противоречит предположению $\iota \in M$.

Пусть $\iota \in M$ есть индекс переменной в кванторе общности или в кванторе существования в некотором терме, примененном в данной стратегии независимо от M. Если условие устранимости не выполнено, то или существует вхождение этой переменной, которое в данном терме не подчиняется множеству M, или существует константа, которая заменяет эту переменную в стратегии в результате правила Vа или VIб и которая встречается, не подчиняясь множеству M, в некотором терме α', примененном в стратегии независимо от M.

В первом случае пусть имеется в данном терме k_1 дизъюнкций, конъюнкций и термов, в состав которых входит это вхождение переменной и k_2 разветвлений до применения этого терма. Для каждого из этих $k_1 + k_2$ случаев можно указать число n_i такое, что индекс данного члена конъюнкции, соответственно дизъюнкции или терма, или индекс ветви не принадлежит M_{n_i}. Выбирая $n = \max(n_1, \cdots, n_{k_1+k_2})$, мы получим, что данное вхождение переменной окажется не подчиненным множеству M_n. Поэтому $\iota \bar{\in} M_{n+1}$, что противоречит предположению $\iota \in M$.

Во втором случае пусть применению данного терма α' предшествуют k_1 разветвлений, а в самом терме данное вхождение константы входит в k_2 термов и членов дизъюнкций и конъюнкций. Для каждого из этих k_1 разветвлений найдем такое число n_i, что индекс данной ветви не принадлежит M_{n_i}, также и для каждого из данных k_2 случаев найдем n_i такое, что индекс данного терма или дизъюнктивного, соответственно конъюнктивного члена не принадлежит M_{n_i}. Наконец, найдем число n_0 такое, что индекс переменной, подставляемой термом α', в своем кванторе не принадлежит M_{n_0}. Аналогично выбирая $n = \max(n_0, n_1, \cdots, n_{k_1+k_2})$, получаем $\iota \bar{\in} M_{n+1}$.

Если $\iota \in M$ есть индекс в типе переменной x' и условие устранимости не выполнено, то или индекс переменной x' в своем кванторе не принадлежит M и существует подстановка переменной x', не зависящая от M, где некоторое вхождение переменной, соответствующей индексу ι, не подчиняется множеству M в терме подстановки, или некоторое вхождение переменной с индексом ι не подчиняется множеству M в терме, вводящем переменную x' независимо от M, или имеется константа, которая заменяет переменную с индексом ι в результате правила VII и которая встречается, не подчиняясь множеству M, в терме, примененном в стратегии независимо от M. В первом случае надо найти n_i для каждого разветвления до подстановки и для каждого дизъюнктивного или конъюнктивного члена и каждого терма, содержащих данное вхождение переменной с индексом ι, также и n_0 такое, что индекс переменной x' в своем кванторе не принадлежит M_{n_0}. Далее, выбирая $n = \max n_i$, получаем противоречие аналогично предыдущему. Во втором и третьем случае доказательство аналогично предыдущим случаям.

Итак, полученное множество удовлетворяет условию устранимости.

Если высказывание в исходной ситуации конечное, то, отбрасывая в каждом разветвлении все ветви, соответствующие индексам из M_0, сохраняем только конечные разветвления. Так как бесконечной последовательности ситуаций не может быть, то независимыми от M_0 могут быть только конечное число ситуаций. Таким же образом, отбрасывая все конъюнктивные и дизъюнктивные члены и термы, соответствующие индексам из M_0, также удаляя из кванторов все переменные, которые после этого не имеют вхождений в области действия квантора, получим, что в этих ситуациях все выражения, также и все термы подстановок, независимых от M_0, превращаются в конечные. Так как вне множества M_1 может $\iota \in M_0$ оказаться только в этом случае, если не выполнено некоторое из условий а), б) или в) в определении множества M_{n+1}, если в качестве M_n взять M_0, то из-за конечности числа рассматриваемых применений правил, числа рассматриваемых ситуаций и числа рассматриваемых вхождений переменных и констант, получим, что $M_0 \setminus M_1$ конечно. Продолжая таким образом, получим, что и для каждого n множество $M_n \setminus M_{n+1}$ конечно, значит $M_0 \setminus M$ не более чем счетно.

Если высказывание в исходной ситуации имеет бесконечную мощность $\varkappa$, то аналогичное доказательство дает, что $M_0 \setminus M_1$ не превышает мощности $\varkappa$, также и каждое из множеств $M_n \setminus M_{n+1}$, следовательно, и множество $M_0 \setminus M$.

Из этого рассуждения вытекает

Теорема 3. Если при исходной ситуации с конечным высказыванием имеется стратегия выигрыша, то эту стратегию можно выбирать и так, что термы подстановок не более чем счетны. При исходной ситуации с бесконечным высказыванием можно стратегию выбирать так, что мощность термов подстановок не превышает мощности исходного высказывания.

§ 4. Производные ситуации

Пусть Σ - некоторая ситуация и $\varkappa$ - наименьшая бесконечная мощность, которую не превышает длина ни одного выражения в Σ. Тогда ситуацией, производной от Σ, называем любую ситуацию Σ', которую можно получить из Σ следующим способом.

Для каждого выражения вида $(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha} \in \Sigma$ прибавляется некоторое выражение вида $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, если такого в Σ нет.

Для каждого выражения $(\Lambda_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha \in \Sigma$ прибавляются все выражения $(\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, которые в Σ не имеются.

Для каждого выражения вида $(\vee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha} \in \Sigma$ прибавляются все выражения $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, которые в Σ не имеются.

Для каждой четверки выражений $(\vee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, $\alpha =: \xi$, $\xi \sim \Omega$, $\Omega \to \{\mathfrak{A}_\iota \; \iota \in J\}$ в Σ прибавляется некоторая тройка выражений $\beta =: \xi$, $\alpha \leq \beta$, $(\mathfrak{A}_\iota)_\beta$, если такой тройки в Σ не имеется.

Для каждого выражения $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})_{-\alpha} \in \Sigma$ прибавляется тройка выражений $\alpha \leq \beta$, $(\mathfrak{A})_\beta$, $(\mathfrak{B})_{-\beta}$, если ее нет в Σ.

Для каждого выражения $(\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B})_\alpha \in \Sigma$ прибавляется или $(\mathfrak{A})_{-\alpha_1}$ или $(\mathfrak{B})_{\alpha_1}$ если ни одного, ни другого в Σ нет.

Для каждого выражения $(\neg \mathfrak{A})_{-\alpha} \in \Sigma$ прибавляется пара выражений $\alpha \leq \beta$, $(\mathfrak{A})_{\beta_1}$ если этой пары в Σ не было.

Для каждого выражения $(\neg \mathfrak{A})_\alpha \in \Sigma$ прибавляется выражение $(\mathfrak{A})_{-\alpha_1}$ если этого выражения нет в Σ.

Для каждого выражения $(\forall \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_{-\alpha} \in \Sigma$ прибавляется в случае отсутствия совокупность выражений, состоящая из выражения $\alpha \leq \beta$, семейства выражений $(P_\iota)_\beta$ через $\iota \in J$ и выражения $(\mathfrak{A}')_{-\beta}$, где $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой переменных x'_ι, $\iota \in J$, на P_ι.

Для каждого выражения $(\forall \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha \in \Sigma$ прибавляются все выражения

$$\Big(\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle} \mathfrak{A} \Big)_\alpha ,$$

которых до сих пор в Σ не было, где в роли a'_ι будут все термы типа переменной x'_ι, которые имеют длину не больше мощности $\varkappa$ и содержат только те константы, которые содержатся в выражениях $(P)_\alpha \in \Sigma$. Термы, которые отличаются друг от друга только обозначением связанных переменных, отождествляются, поэтому полученные выражения образуют множество, а не собственный класс.

Для каждого выражения $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_{-\alpha} \in \Sigma$ прибавляются все выражения

$$\Big(\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle} \mathfrak{A} \Big)_{-\alpha} ,$$

не содержащиеся в Σ, где в роли a'_ι, $\iota \in J$, будут такие же термы, как и в предыдущем случае.

Для каждой четверки выражений $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\alpha$, $\alpha =: \xi$, $\xi \sim \Omega$, $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$ прибавляется в случае отсутствия совокупность выражений, состоящее из выражений $\beta =: \xi$, $\alpha \leq \beta$, семейства выражений $(P_\iota)_\beta$ через $\iota \in J$ и выражения $(\mathfrak{A}')_\beta$, где $\mathfrak{A}'$ – такое же высказывание, как в предыдущем.

Для каждой пары выражений $(P\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle)_\alpha$ и $(P\langle b'_\iota : \iota\in J\rangle)_{-\alpha}$, где $a'_\iota = b'_\iota$ в случае термов элементарного типа, а в противоположном случае $a'_\iota = \delta\langle x'^{\iota}_\eta : \eta\in J_\iota\rangle\mathfrak{A}$ и $b'_\iota = \delta\langle y'^{\iota}_\eta : \eta\in J_\iota\rangle\mathfrak{B}_\iota$, прибавляется в случае отсутствия совокупность выражений, состоящаяся из выражения $\alpha\leq\beta$ из семейства выражений $(c'^{\iota}_\eta)_\beta$ через $\eta\in J_\iota$ при некотором таком $\iota\in J$, где a'_ι и b'_ι – термы неэлементарного типа, и из пары выражений $(\mathfrak{A}'_\iota)_\beta$, $(\mathfrak{B}'_\iota)_{-\beta}$ или $(\mathfrak{A}')_{-\beta}$, $(\mathfrak{B}'_\iota)_\beta$, где $\mathfrak{A}'_\iota$ и $\mathfrak{B}'_\iota$ получены из $\mathfrak{A}_\iota$ и $\mathfrak{B}_\iota$ соответственно заменой переменных x'^{ι}_η, $\eta\in J_\iota$, на c'^{ι}_η.

Для прибавлений, при которых имеется выбор, надо выражение "в случае отсутствия" ("если его нет в $\sum$ ") понимать в нестрогом смысле, т.е. производной считается и такая ситуация, где и в противном случае прибавлено некоторое выражение, соответственно другому выбору.

После этого $\sum'$ превращается в ситуацию уже со стандартной процедурой.

Как видно, производная ситуация $\sum'$ определена через $\sum$ неоднозначно, так как при выражениях $(\Lambda_\iota\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, $(V_\iota\mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, $(\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B})_\alpha$ и парах выражений $(P\langle a'_\iota : \iota\in J\rangle)_\alpha$, $(P\langle b'_\iota : \iota\in J\rangle)_{-\alpha}$ имеется некоторый произвол прибавления. Производной ситуации не существует, если при некотором из этих выражений (или пар выражений) множество возможностей для прибавлений окажется пустым. С другой стороны, $\sum'$ может совпадать и с $\sum$, если все требуемые для прибавления выражения уже имеются в $\sum$. В таком случае $\sum$ называется полной ситуацией.

Будем называть деревом любое непустое частично упорядоченное множество, в котором

а) для каждого элемента ι множество элементов, предшествующих ι, конечно и линейно упорядочено,

б) для каждых элементов ι_1 и ι_2 существует наибольший элемент ι_3 такой, что $\iota_3\leq\iota_1$ и $\iota_3\leq\iota_2$.

Каждое дерево имеет наименьший элемент, которой мы будем называть корнем дерева.

Деревообразным семейством ситуаций будем называть отображение, ставящее каждому элементу ι некоторого дерева в соответствие некоторую ситуацию, если выполнены следующие условия:

I. Корню дерева поставлена в соответствие некоторая $(\mathfrak{T})_\alpha$

исходная ситуация.

2. Если элементу ι поставлена в соответствие некоторая ситуация Σ, то элементам, непосредственно следующим ι, поставлены в соответствие в точности все ситуации, производные от Σ.

Ветвями деревообразного семейства будем называть сужение данного отображения на любое максимальное линейно упорядоченное подмножество данного дерева. Ясно, что каждая ветвь является или конечным кортежом или счетной последовательностью ситуаций. В случае полноты могут ситуации на ветви и повторяться.

Из определения производной ситуации вытекает, что если Σ - детерминированная ситуация, то ситуация Σ', производная от Σ, имеет меньший порядок детерминированности. Поэтому, если исходная ситуация в деревообразном семействе детерминированная, то каждая ветвь имеет конечную длину. Полная ситуация Σ_0 никогда не может быть детерминирована, так как существует бесконечная последовательность ситуаций, тождественных с Σ_0.

Какое будет деревообразное семейство, если исходная ситуация не детерминирована? Проблема сводится к вопросу: можно ли для любой недетерминированной ситуации Σ найти производную от нее недетерминированную ситуацию Σ' ?

Пусть Σ - недетерминированная ситуация. Чтобы фиксировать производную ситуацию Σ', надо фиксировать выборы прибавляемых выражений при выражениях вида $(\wedge_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, $(\vee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})_\alpha$ и пар выражений вида $(P\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle)_\alpha$, $(P\langle b'_\iota : \iota \in J\rangle)_{-\alpha}$ в Σ. Сделаем это так, что при выражениях $(\wedge_\iota \mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$ и $(\vee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\alpha$ выбираем наименьший такой индекс ι, что прибавление выражения $(\mathfrak{A}_\iota)_{-\alpha}$, соответственно $(\mathfrak{A}_\iota)_\beta$, не превращает ситуации Σ в детерминированную. Такой ι для каждого выражения указанных видов найдется из-за недетерминированности Σ. В случае выражения $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})_\alpha$ прибавляем $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$, если это не причиняет детерминированности, в противоположном случае $(\mathfrak{B})_\alpha$. В случае пары $(P\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle)_\alpha$, $(P\langle b'_\iota : \iota \in J\rangle)_{-\alpha}$ выбираем наименьший такой индекс ι, что прибавление совокупности выражений $\alpha \leq \beta$, $(c'^{\iota}_{\eta})_\beta$ через $\eta \in J_\iota$, $(\mathfrak{A}'_\iota)_\beta$, $(\mathfrak{B}'_\iota)_{-\beta}$ (или $(\mathfrak{A}'_\iota)_{-\beta}$, $(\mathfrak{B}'_\iota)_\beta$ вместо двух последних) не причиняет детерминированности. В случае, если для данного ι имеются обе возможности, то предпочитать случай $(\mathfrak{A}'_\iota)_\rho$, $(\mathfrak{B}'_\iota)_{-\rho}$.

Таким образом, Σ' однозначна определена из-за однозначности остальных прибавлений.

Ясно, что, если Σ, недетерминирована, то каждое из данных прибавлений оставляет ее недетерминированной. Каким будет результат, если одновременно сделать некоторое конечное число из данных прибавлений?

Так как одновременное применение прибавлений без произвольного выбора может быть рассмотрено как применение их вподряд, то вопрос возникает только в связи с прибавлением с произвольным выбором, которые, как видно, соответствуют правилам с разветвлением. Проблема в том, можно ли выборы, которые избегают детерминированности, сделать независимыми друг от друга, или сделанный выбор для некоторого выражения уже заставляет нас изменить выбор при некотором другом выражении, чтобы избежать детерминированности?

Если ситуация, полученная указанным образом, была бы детерминирована, то она имела бы детерминированное ядро. Но так как прибавления, соответствующие правилам IIб, и VII, дают выражения с новыми аспектами, а прибавления, соответствующие правилам Iа и IIIб, дают выражения вида $(\mathfrak{A})_{-\alpha}$ (правило IIIб дает это в случае произвола), то ядро может содержать результат только одного из этих прибавлений. Но тогда было бы возможно получить детерминированную ситуацию, применяя прибавление с данным выбором, а затем, может быть, конечное число прибавлений без произвола. Это, конечно, невозможно из-за недетерминированности ситуации Σ. Итак, одновременное применение любого конечного числа прибавлений указанным образом не причиняет детерминированности.

Перейдем снова к ситуации Σ'. Ясно, что если Σ недетерминирована, то Σ' не может быть 0 - детерминирована, так как выражения, необходимы для 0-детерминированности, должны возникать в результате одного или двух прибавлений.

Пусть для некоторого ординала $\varkappa$ известно, что недетерминированная ситуация Σ не может указанным образом дать ситуации Σ', порядок детерминированности был бы меньше $\varkappa$.

Предположим, что в случае некоторой недетерминированной

Σ получается указанным образом $\varkappa$-детерминированная ситуация Σ'. Тогда из ситуации Σ' можно получить в результате некоторого из правил игры некоторую ситуацию (или ситуации) Σ_0 с порядком детерминированности, меньшим $\varkappa$. Но это правило использует только такое множество выражений из $\Sigma' \setminus \Sigma$, которые могут быть получены в результате конечного числа прибавлений. Но в таком случае мы могли бы применить в начале это конечное число прибавлений, получая из Σ таким образом недетерминированную ситуацию Σ_1, затем применить на Σ_1 данное правило игры, получая таким образом недетерминированную ситуацию Σ_2 (в случае разветвления в некоторой ветви), а затем применить на Σ_2 все остальные прибавления, получая таким образом ситуацию Σ_0. Но это значит, что ситуация Σ_2', полученная из Σ_2 таким же образом, как Σ' из Σ, содержит Σ_0 и поэтому тоже имеет порядок детерминированности, меньший $\varkappa$, в противоречии с предположением индукции.

Следовательно, если Σ недетерминирована, то и Σ' недетерминирована. Аналогичным образом Σ'', Σ''' и т.д. недетерминированы. Значит, из каждой недетерминированной ситуации исходит последовательность $\{\Sigma^{(n)} : n \in N\}$ недетерминированных ситуаций такая, что $\Sigma^{(n+1)} = \Sigma^{(n)\prime}$.

Но $(\bigcup_n \Sigma^{(n)})' = \bigcup_n \Sigma^{(n)}$, так как каждый комплект выражений из $\bigcup_n \Sigma^{(n)}$, который причиняет некоторое прибавление, уже содержится в некоторой $\Sigma^{(n)}$, поэтому результат прибавления содержится в $\Sigma^{(n+1)}$. Следовательно, $\bigcup_n \Sigma^{(n)}$ – полная ситуация.

Итак, мы доказали следующие теоремы

Теорема 4. Каждую недетерминированную ситуацию можно расширить до полной ситуации.

Теорема 5. Все ветви деревообразного семейства конечны в точности в том случае, если исходная ситуация детерминирована. В этом случае деревообразное семейство указывает и стратегию выигрыша для детерминиста. Для этого надо начиная с концевых ситуаций, найти те выражения, которые причиняют ее детерминированность, также и правила, в результате которых они возникают.

Литература

1. Т а у т с А., Игра для построения семантики высказываний в обобщенных моделях Бета. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 342, 1974, 13-28.
2. Т а у т с А., Семантическая модель для бесконечных формул. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 355, 1975, 7-19.
3. Т а у т с А., Формальный вывод тавтологичных высказываний в псевдобулевых алгебрах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 336, 1974, 3-30.

Поступило
19 IУ 1974

TULETUSE OTSING SEMANTILISE MUDELI ABIL

A. Tauts

R e s ü m e e

Esitatakse mäng valemi tautoloogiliseks kontrolliks,mis on analoogiline mängule artiklis [1], kuid kohandatud artiklis [2] toodud mudelile. Artikli [1] tulemused jäävad seejuures kehtima. Peale selle tõestatakse, et predikaatide substitueerimisel võib piirduda vaid piiratud võimsusega valemitega. Võimsuse piiriks on loenduv võimsus, kui lähtevalem on lõplik, vastupidisel juhul aga tuleb piiriks võtta lähtevalemi võimsus. Seda tulemust kasutades näidatakse, kuidas otsida võidustrateegiat, seega ka lähtevalemi tuletust.

DIE SUCHE DER DEDUKTION MIT HILFE DES SEMANTISCHEN MODELLS

A. Tauts

Z u s a m m e n f a s s u n g

Man legt ein Spiel zum Prüfen der Tautologie von Formeln dar, das dem Spiel in dem Artikel [1] analog, jedoch dem Modell in dem Artikel [2] angepaßt ist. Die Resultate von [1] bleiben dabei gelten. Außerdem wird bewiesen,daß man bei der Substitution der Prädikate die Länge der Formeln beschränken kann.Nämlich kann man sich bei einer endlichen Ausgangs-

formel mit überzählbaren Formeln begnügen, bei einer unendlichen Ausgangsformel ist die Länge dieser die Grenze.Mit Hilfe dieses Resultates wird gezeigt, wie man die Siegesstrategie, also auch die Deduktion der Ausgangsformel suchen kann.

СИЛЬНАЯ ТАВТОЛОГИЯ И КОНСТРУКЦИЯ КОНТРАМОДЕЛИ ДЛЯ НЕВЫВОДИМЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

В данной статье, как и в [I], рассматриваются бесконечные формулы высших порядков, которые как и [2], интерпретируются в семантических моделях способом, являющимся обобщением интерпретирования формул интуиционистской логики моделями Бета. Однако в понятие нормальности модели вводится модификация следующим образом.

Пусть μ - некоторый класс термов, содержащий и все подтермы каждого своего элемента. Тогда для каждого ординала ι мы будем через μ_ι обозначать класс термов, содержащихся в μ и имеющих ранг не больше ι. Как известно, каждый неэлементарный терм определяет формулу, которую мы получаем, если снимем от терма его префикс. При этом ранг формулы совпадает с рангом терма. Поэтому классы μ и μ_ι можно рассматривать и как классы формул, если нас не интересуют элементарные термы, содержащиеся в этих классах. В частном случае, если μ - класс всех термов, то μ_ι есть класс всех термов, имеющих ранг не больше ι.

Теперь определим понятие μ - нормальности индуктивным способом, известным нам из [I] и [2], применяя промежуточными понятиями в ходе индукции понятия μ_ι - нормальности для всех ординалов ι. Единственная разница по сравнению с индукцией из [I] и [2] в том, что вместо всех формул $\mathfrak{A}$, имеющих ранг не меньше ι, надо рассмотреть формулы, соответствующие термам из класса μ_ι. В частном случае, если μ есть класс всех термов, то понятие μ_ι - нормальности совпадает с понятием ι-нормальности в смысле статей [I] и [2], а понятие μ-нормальности совпадает с понятием нормальности.

В данной статье мы будем обращать особое внимание на такие случаи, где μ является множеством, а не собственным классом. Отметим, что в случае, если μ - класс всех термов, не только μ, но и классы μ_ι являются собственными классами.

Если в роли μ рассматривать всевозможные множества термов, то их можно упорядочить по включению. Ясно, что если $\nu < \mu$, то всякая μ-нормальная модель является и ν-нормальной.

Высказывание $\mathfrak{A}$ будем называть сильно тавтологичным, если существует такое множество термов μ, что при любой μ-нормальной модели, позволяющей интерпретировать высказывание $\mathfrak{A}$, и при любой интерпретации констант высказывания $\mathfrak{A}$ в данной модели, значение истинности высказывания $\mathfrak{A}$ оказывается равным наибольшему элементу данной псевдобулевой алгебры. Конечно, множество μ следует выбирать так, чтобы все термы, возникающие в ходе вычисления значения истинности высказывания $\mathfrak{A}$, содержались в μ.

Непосредственно из определения вытекает, что множество μ не определено однозначно, так как вместе с множеством μ указанным условиям удовлетворяют и все множества обширные его, так как при расширении множества μ условие μ-нормальности будет более строгим.

Исследуем связь сильной тавтологичности и выводимости в смысле [3].

Если высказывание выводимо, то оно и сильно тавтологично, так как всякий вывод нуждается лишь в некотором множестве подстановок и множество μ можно выбирать подходящим образом. Поэтому доказательство, которое в [3] дано для тавтологичности, сохраняет силу и для сильной тавтологичности.

Но верно ли и обратное? Для этого требуется, что для всякого невыводимого высказывания $\mathfrak{A}$ и всякого множества термов μ, содержащего все подтермы всех своих элементов, существует μ-нормальная модель и интерпретация высказывания $\mathfrak{A}$ в этой модели такие, что значением истинности высказывания $\mathfrak{A}$ будет не наибольший элемент данной псевдобулевой алгебры. Будем эту модель искать в виде семантической модели [2].

Пусть высказывание $\mathfrak{A}$ не выводимо. Тогда в игре [4], с исходной ситуацией $(\mathfrak{A})-\alpha$, детерминист не имеет стратегию выигрыша. Определим понятие μ-полной ситуации аналогично понятию полной ситуации [4], с отличием только в том, что в случае существования в ситуации выражения $(\forall \langle x_\iota^j : \iota \in J\rangle \mathfrak{A})_\beta$

или $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_{-\beta}$ требуется существование всех выражений вида $(\mathfrak{A}')_\beta$, соответственно $(\mathfrak{A}')_{-\beta}$, где в роли $\mathfrak{A}'$ будут результаты подстановок всеми термами, полученными из термов множества μ заменой их констант такими константами P (соответствующего типа), для которых имеются в ситуации выражения $(P)_\beta$. Аналогично доказательству из [4] доказывается, что всякую недетерминированную ситуацию можно расширить до μ-полной ситуации. Пусть $\sum$ есть μ-полная ситуация, являющаяся расширением ситуации $\{(\mathfrak{A})_\alpha\}$. Конструкцию модели мы проведем способом, аналогичным методу Такахаши [5].

Будем называть буквой любой аспектный символ из $\sum$ вместе с конечным (может быть, пустым) кортежем из символов + и – . При этом аспектный символ будем называть основой буквы, а кортеж – приложением буквы. Мы будем говорить, что буква $\bar{a}$ проще буквы $\bar{b}$, если основы этих букв совпадают, а приложение буквы $\bar{a}$ является начальным отрезком приложения буквы $\bar{b}$. В этом же случае буква $\bar{b}$ сложнее, чем $\bar{a}$.

Будем называть словом любой конечный кортеж букв, удовлетворяющий следующим условиям:

I) Основой первой буквы является α.

2) Если в слове букве $\bar{b}$ непосредственно следует буква $\bar{c}$, а основами букв $\bar{b}$ и $\bar{c}$ являются β и γ соответственно, то существует кортеж аспектных символов $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ $(n \geqslant 1)$, где $\beta_0 = \beta$, $\beta_n = \gamma$, а для каждого $i < n$ существует в $\sum$ выражение вида $\beta_i < \beta_{i+1}$.

Теперь определим отношение $\leqslant$ между словами следующим образом: если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ слова, то $\bar{a} \leq \bar{b}$ в точности тогда, когда для каждой буквы в слове $\bar{a}$ в слове $\bar{b}$ имеется буква, совпадающая с этой или являющаяся более сложной. Кроме того, каждое слово снабжают совокупностью направлений следующим образом: каждому слову ставят в соответствие одно т.н. экстранаправление, а кроме того по одному направлению для каждого направления – символа Ω из $\sum$, удовлетворяющего следующему условию: в $\sum$ имеется пара выражений вида $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$ и $(\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\gamma$ или $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$ и $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\gamma$, где γ есть основа последней буквы данного слова. Непосредственными конкретизациями данного слова в экстранаправлении считаются все ее непосредственные конкретизации в смысле отношения $\leqslant$. Непосредственными конкретизациями в направлении, соответствующему символу Ω (такие направления будем называть простыми), считаются слова, получаемые от данного слова прибавлением одной буквы, основа которой есть аспектсимвол, введенный в процессе порождения ситуации Σ с использованием выражений $\Omega \Rightarrow \{\mathfrak{A}_\iota : \iota \in J\}$, $(\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota)_\beta$, $\xi \sim \Omega$, $\beta := \xi$ или $\Omega \Rightarrow \mathfrak{A}$, $(\exists \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{A})_\beta$, $\xi \sim \Omega$, $\beta := \xi$, а приложение которой является пустым кортежом.

Проверим, является ли полученная структура правильной семантической структурой, если аспектами считать слова. Так как транзитивность отношения $\leqslant$ между словами не вызывает сомнений, то множество всех слов окажется частично упорядоченным. Далее, так как каждому слову предшествует только конечное множество слов, а с другой стороны, для каждого слова и каждого направления имеются непосредственные конкретизации (их не меньше двух, так как в случае экстранаправления каждую букву можно усложнить двумя способами, а в случае простого направления, соответствующего символу Ω, имеется в Σ не менее двух пар выражений вида $\xi \sim \Omega$, $\beta := \xi$, где β - основа последней буквы данного слова), то все цепи имеют вид последовательности. Остается проверить три условия правильности семантической структуры.

I) Если $\bar{a} \leq \bar{b}$, то существует выбор направлений такой; что $\bar{b}$ принадлежит некоторой цепи, начинающего с $\bar{a}$ и согласующаяся с данным выбором направлений. Это решается тривиально. Можно для каждого слова выбирать экстранаправления, тогда можно двигаться от $\bar{a}$ до $\bar{b}$ конечным числом шагов, переходя на каждом шагу на непосредственную конкретизацию.

2) Множество, состоящее только из слова $\bar{a}$, исчерпает только такие слова $\bar{b}$, для которых имеет место $\bar{a} \leq \bar{b}$. Для этого надо доказать, что если $\bar{a} \leq \bar{b}$ не имеет места, то при каждом выборе направлений существует цепь, начинающаяся с $\bar{b}$, согласующаяся с данным выбором направлений и не содержащая ни одного слова $\bar{c}$ со свойством $\bar{a} \leq \bar{c}$. Но если $\bar{a} \leq \bar{b}$ не имеет места, то в слове $\bar{a}$ имеется буква $\bar{a}_i$ такая, что в слове $\bar{b}$ нет этой буквы, также и не более сложной буквы. Теперь какой ни был бы выбор направлений, всегда можно построить последовательность из слов с тем же свойством, начинающаяся с $\bar{b}$ и в каждой точке

продолжающаяся в согласии с данным выбором направлений. Это вытекает из того, что каждое слово имеет не менее двух непосредственных конкретизаций в любом направлении и хоть одна из них сохраняет указанное свойство.

3) Если $\bar{a} \le \bar{b}$ и множество А исчерпает слово $\bar{a}$, то оно исчерпает и слово $\bar{b}$. Пусть выбор направлений Ω реализует исчерпаемость слова $\bar{a}$ множеством А. Определим выбор направлений Ω' следующим образом. Пусть $\bar{c}$ - такое слово, что $\bar{c} \le \bar{b}$, слово $\bar{c}$ находится на цепи, начинающейся с $\bar{a}$ и согласующейся с Ω, и никакая непосредственная конкретизация $\bar{d}$ слова $\bar{c}$ в направлений $\Omega(\bar{c})$ не удовлетворяет условию $\bar{d} \le \bar{b}$. Такое слово $\bar{c}$ существует, а именно, на некоторой цепи, начинающейся с $\bar{a}$ и согласующейся с Ω, так как слову $\bar{b}$ предшествует только конечное множество слов. Если $\bar{c} = \bar{b}$, то вопрос решен, так как Ω' можно выбирать равным Ω на цепях, начинающихся с $\bar{b}$. В случае $\bar{c} < \bar{b}$ направление $\Omega(\bar{c})$ простое, так как в случае экстранаправления из-за $\bar{c} < \bar{b}$ непременно некоторая непосредственная конкретизация $\bar{d}$ слова $\bar{c}$ удовлетворило бы неравенству $\bar{d} \le \bar{b}$. Тогда определим $\Omega'(\bar{b})$ как простое направление, соответствующее тому же символу, что и $\Omega(\bar{c})$. Из-за $\bar{c} < \bar{b}$ это допустимо, так как основа последней буквы слова $\bar{c}$ является и основой некоторой буквы слова $\bar{b}$. Пусть теперь $\bar{b}_1$ - произвольная непосредственная конкретизация слова $\bar{b}$ в направлении $\Omega'(\bar{b})$. Она получается из $\bar{b}$ прибавлением некоторой буквы $\bar{c}$. Но тогда для слова $\bar{c}$ существует в направлении $\Omega(\bar{c})$ непосредственная конкретизация $\bar{a}_1$, полученная из $\bar{c}$ прибавлением той же буквы $\bar{c}$. Но тогда выбор направлений Ω реализует исчерпаемость слова $\bar{a}_1$ множеством А и, кроме того, имеет место $\bar{a}_1 \le \bar{b}_1$. А это значит, что мы можем $\Omega'(\bar{b}_1)$ определить аналогичным образом. Продолжая таким образом, мы получаем частичный выбор направлений Ω', определяющий цепи, начинающиеся с $\bar{b}$. Этот частичный выбор можно продолжать до полного выбора произвольным образом. Если теперь выбор Ω' не реализовал бы исчерпаемость слова $\bar{b}$ множеством А, то существовала бы последовательность $\bar{b}, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n, \dots$ слов такая, что при всех n слово $\bar{b}_{n+1}$ есть непосредственная конкретизация слова $\bar{b}_n$ в направлении $\Omega'(\bar{b}_n)$ и что никакое из слов $\bar{b}_n$ не следует

5

никакому элементу множества A. Но тогда существует последовательность слов $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ такая, что $\bar{a}_n \leq \bar{b}_n$ при всех n. Кроме того, все слова $\bar{a}_n$ находятся в возрастающем порядке на цепи, начинающейся с $\bar{a}$ и согласующейся с Ω. Но тогда некоторое $\bar{a}_n$ следует некоторому элементу множества A, и из этого вытекает такое же свойство и для $\bar{b}_n$.

Следовательно, у нас есть правильная семантическая структура.

Определим для каждой константы P из $\sum$ множества слов P^* следующим образом: $\bar{a} \in P^*$, если в $\sum$ есть выражение $(P)_\beta$, где β есть основа последней буквы слова $\bar{a}$. Множество P^* всегда окажется значением истинности, так как в случае $\bar{a} \bar{\in} P^*$ в каждом направлении существует непосредственная конкретизация $\bar{b}$ слова $\bar{a}$ со свойством $\bar{b} \bar{\in} P^*$, а значит, для каждого выбора направлений можно составить и цепь из слов с тем же свойством.

Для каждого высказывания $\mathfrak{B}$, содержащего только константы из $\sum$, определим множества слов $[\mathfrak{B}]^b$ и $[\mathfrak{B}]^\#$ следующим образом: $\bar{a} \in [\mathfrak{B}]^b$, если a исчерпается множеством таких слов $\bar{b}$, что в $\sum$ имеется выражение $(\mathfrak{B})_\beta$; $\bar{a} \in [\mathfrak{B}]^\#$, если нет слова $\bar{b}$, где $\bar{a} \leq \bar{b}$, такого что в $\sum$ имеется выражение $(\mathfrak{B})_{-\beta}$. Здесь β – в обоих случаях основа последней буквы слова $\bar{b}$.

Эти множества являются значениями истинности. Для $[\mathfrak{B}]^b$ это вытекает прямо из определения, а для $[\mathfrak{B}]^\#$ это вытекает из того, что если $\bar{a} \bar{\in} [\mathfrak{B}]^\#$, то имеется $\bar{b}$, $\bar{a} \leq \bar{b}$, с вышеуказанным свойством $(\mathfrak{B})_{-\beta} \in \sum$, а так как в каждом направлении имеется непосредственная конкретизация слова $\bar{b}$ с таким же свойством, то для каждого выбора направлений имеется и цепь, начинающаяся с $\bar{b}$ и состоящая из слов с таким же свойством. Следовательно, $\bar{b}$ не исчерпается множеством $[\mathfrak{B}]^\#$, но в этом случае и $\bar{a}$ не исчерпается этим множеством.

Наконец, для каждой пары термов a' и b' одинакового типа, не содержащих свободных переменных и содержащих только константы из $\sum$, определим множество слов $[a' \simeq b']$ следующим образом:

I) в случае термов элементарного типа $[a' \simeq b']$ есть множество всех слов или пустое множество в зависимости от того, совпадают a' и b' или нет.

2) в случае, если a' имеет вид $d\langle x'_\iota : \iota\in J\rangle\mathfrak{B}$ и b' имеет вид $d\langle y'_\iota : \iota\in J\rangle\mathfrak{C}$, то $\bar{\mathfrak{a}}\in[a'\approx b']$ в точности тогда, когда нет слова $\bar{\mathfrak{b}}$ с $\bar{\mathfrak{a}}\leq\bar{\mathfrak{b}}$ такого, что для некоторого семейства констант $\langle c'_\iota : \iota\in J\rangle$ имелось бы в $\sum$ пара выражений $(\mathfrak{B}')_\beta$ и $(\mathfrak{C}')_{-\beta}$ или $(\mathfrak{B}')_{-\beta}$ и $(\mathfrak{C}')_\beta$. Здесь β имеет предыдущее значение, а $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{C}'$ получены из $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ заменой их свободных переменных соответствующими константами c'_ι. И множество $[a'\approx b']$ окажется всегда значением истинности. В случае элементарных термов это непосредственно ясно, а в случае неэлементарных термов это вытекает из того, что при $\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\in}\,[a'\approx b']$ с указанного в определении слова $\bar{\mathfrak{b}}$ можно при каждом выборе направлений начинать цепь, состоящую из слов с таким же свойством, как слово $\bar{\mathfrak{b}}$. А если $\bar{\mathfrak{b}}$ не исчерпается множеством $[a'\approx b']$, то и $\bar{\mathfrak{a}}$ не исчерпается им.

<u>Лемма I.</u>

Имеют место неравенства:

0) $[\mathfrak{B}]^b\leq[\mathfrak{B}]^\#$.

I) $[\bigwedge_\iota\mathfrak{B}_\iota]^b\leq\bigwedge_\iota[\mathfrak{B}_\iota]^b\leq\bigwedge_\iota[\mathfrak{B}_\iota]^\#\leq[\bigwedge_\iota\mathfrak{B}]^\#$.

2) $[\bigvee_\iota\mathfrak{B}_\iota]^b\leq\bigvee_\iota[\mathfrak{B}_\iota]^b\leq\bigvee_\iota[\mathfrak{B}_\iota]^\#\leq[\bigvee_\iota\mathfrak{B}_\iota]^\#$.

3) $[\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}]^b\leq[\mathfrak{B}]^\#\to[\mathfrak{C}]^b\leq[\mathfrak{B}]^b\to[\mathfrak{C}]^\#\leq[\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}]^\#$.

4) $[\neg\mathfrak{B}]^b\leq\neg[\mathfrak{B}]^\#\leq\neg[\mathfrak{B}]^b\leq[\neg\mathfrak{B}]^\#$.

5) $[\forall\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{B}]^b\leq\bigwedge_\nu(\bigwedge_{p\in\nu}p^*\to\bigwedge_{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle:\forall_\iota a'_\iota\in A(\nu)}$
$[\int_{\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle}\mathfrak{B}]^b\leq\bigwedge_\nu(\bigwedge_{p\in\nu}p^*\to\bigwedge_{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle:\forall\iota a'_\iota\in\nu}[\mathfrak{B}']^\#)\leq$
$\leq[\forall\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{B}]^\#$

6) $[\exists\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{B}]^b\leq\bigvee_\nu(\bigwedge_{p\in\nu}p^*\wedge(\bigvee_{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle:\forall\iota a'_\iota\in\nu}[\mathfrak{B}']^b)\leq$

$\leq\bigvee_\nu(\bigwedge_{p\in\nu}p^*\wedge(\bigvee_{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle:\forall\iota a'_\iota\in A(\nu)}[\int_{\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle}^{\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle}\mathfrak{B}]^\#\leq[\exists\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{B}]^\#$.

7) $(\bigwedge_{\iota\in J}[a'\approx b'])\wedge[P\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle]^b\leq[P\langle b'_\iota:\iota\in J\rangle]^\#$.

Здесь в случае 5) и 6) ν пробегает все подмножества множества констант в $\sum$, $A(\nu)$ есть множество таких термов, которые можно получить из элементов множества μ заменой констант на константы множества ν, а $\mathfrak{B}'$ есть высказывание, полученное из формулы $\mathfrak{B}$ заменой переменных

$x'_\iota,\ \iota \in J,$ на константы a'_ι.

Доказательство.

0) Пусть $\bar{a} \bar{\in} [\mathfrak{B}]^\#$. Тогда существует $\bar{b}$ с основой β последней буквы такое, что $\bar{a} \leq \bar{b}$ и $(\mathfrak{B})_{-\beta} \in \Sigma$. Как известно, с $\bar{b}$ можно при любом выборе направлений начинать цепь, состоящую из слов с такими же свойствами. Из-за недетерминированности ситуации Σ вытекает из того, что $\bar{b}$ не может принадлежать $[\mathfrak{B}]^b$. Но тогда и $\bar{a} \bar{\in} [\mathfrak{B}]^b$.

I) Левое неравенство вытекает из того, что если в Σ есть $(\Lambda_\iota \mathfrak{B}_\iota)_\beta$, то там есть и $(\mathfrak{B}_\iota)_\beta$ для всех ι. Среднее неравенство вытекает из 0), а правое из того факта, что если в Σ есть $(\Lambda_\iota \mathfrak{B}_\iota)_{-\beta}$, то там есть и $(B_\iota)_{-\beta}$ для некоторого ι.

2) Левое неравенство вытекает из того, что если выбор направлений Ω дает цепи, начинающиеся с $\bar{a}$ такие, что на каждой из них есть слово $\bar{b}$ с такой основой β последней буквы, что в Σ есть $(V_\iota \mathfrak{B}_\iota)_\beta$, то Ω можно без ограничения общности выбирать и так, что для таких $\bar{b}$ всякая непосредственная конкретизация в направлении $\Omega(\bar{b})$ есть слово с основой γ последней буквы, так что в Σ есть $(\mathfrak{B}_\iota)_\gamma$ при некотором ι. Среднее неравенство вытекает из 0), а правое из того, что если в Σ есть $(V_\iota \mathfrak{B}_\iota)_{-\beta}$, а значит и $(\mathfrak{B}_\iota)_{-\beta}$ при всех ι для основы β последней буквы некоторого слова $\bar{b}$, то для каждого выбора направлений с $\bar{b}$ начинается цепь слов с таким же свойством.

3) Левое неравенство вытекает из того, что если в Σ есть $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})_\beta$, то там есть либо $(\mathfrak{B})_{-\beta}$, либо $(\mathfrak{C})_\beta$. Среднее неравенство вытекает из 0), а правое неравенство из того, что если в Σ есть $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})_{-\beta}$, то там есть и $\beta \leq \gamma$, $(\mathfrak{B})_\gamma$, $(\mathfrak{C})_{-\gamma}$.

4) Получается так же, как и в случае 3), только $(\mathfrak{C})_\beta$ и $(\mathfrak{C})_{-\gamma}$ надо опускать.

5) Левое неравенство вытекает из того, что если в Σ есть $(\forall \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{B})_\beta$ и $(P)_\beta$ для всех $P \in \nu$, то для каждого семейства термов $\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle$, где $a'_\iota \in A(\nu)$ при всех ι в Σ имеется и $\left(\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle} \mathfrak{B} \right)_\beta$. Среднее неравенство вытекает из 0) и из того, что в левой стороне конъюнкция в сукцеденте имеет больше членов. Правое неравенство вытекает из того, что если в Σ есть $(\forall \langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{B})_{-\beta}$, то там есть и $\beta \leq \gamma$, некоторое множество ν выражений вида

$(P)_\gamma$ и выражение $(\mathfrak{B}')_{-\gamma}$, где $\mathfrak{B}'$ получено из $\mathfrak{B}$ заменой переменных x'_ι, $\iota \in J$, константами из ν.

6) Левое неравенство вытекает из того, что если выбор направлений Ω дает цепи, начинающиеся с $\bar{a}$ такие, что на каждой из них есть слово $\bar{b}$ с такой основой β последней буквы, что в Σ есть $(\exists\langle x'_\iota : \iota \in J\rangle \mathfrak{B})_\beta$, то Ω можно без ограничения общности выбирать и так, что для таких $\bar{b}$ всякая непосредственная конкретизация в направлении $\Omega(\bar{b})$ есть слово с основой γ последней буквы, так что в Σ есть некоторое множество ν выражение вида $(P)_\gamma$ и выражение $(\mathfrak{B}')_\gamma$, где $\mathfrak{B}'$ получено из $\mathfrak{B}$ заменой переменных x'_ι, $\iota \in J$, на константы из ν. Среднее неравенство вытекает из 0) и из того, что дизъюнкция в скобках имеет в правой стороне больше членов. Правое неравенство вытекает из того, что если в Σ есть $(\exists\langle x'_\iota : \iota \in J\rangle \mathfrak{B})_{-\beta}$, где β - основа последней буквы некоторого слова $\bar{b}$, то для каждого выбора направлений начинается с $\bar{b}$ цепь слов с таким же свойством. А следовательно, если γ - основа последней буквы для некоторого слова в этой цепи, то для любого множества константов ν или отсутствует в Σ выражение $(P)_\gamma$ для некоторого $P \in \nu$ или в Σ имеется $\left(\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J\rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle} \mathfrak{B}\right)_{-\beta}$, где a'_ι при $\iota \in J$ принадлежат $A(\nu)$.

7) Пусть $\bar{a} \in [P\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle]^b$ и $\bar{a} \in [P\langle b'_\iota : \iota \in J\rangle]^\#$. Тогда существует $\bar{b}$ с основой β последней буквы такое, что $\bar{a} \leq \bar{b}$ и в Σ имеется $(P\langle b'_\iota : \iota \in J\rangle)_{-\beta}$. Пусть Ω - выбор направлений, реализующий исчерпаемость слова $\bar{b}$ множеством слов, имеющих такую основу γ последней буквы, что в Σ имеется $(P\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle)_\gamma$. Существует цепь, начинающая с $\bar{b}$ и сохраняющее условие $(P\langle b'_\iota : \iota \in J\rangle)_{-\delta} \in \Sigma$ для основы δ последней буквы слова. Поэтому можно без ограничения общности предполагать, что слово $\bar{b}$ выбрано так, что в Σ есть $(P\langle a'_\iota : \iota \in J\rangle)_\beta$. Но в том случае существует $\iota \in J$ такое, что $\bar{b}$, а значит и $\bar{a}$ не принадлежат $[a'_\iota \approx b'_\iota]$.

Теперь индукцией по типу определим классы объектов нашей модели вместе с их значением истинности существования, одновременно и значение истинности равенства между объектами и еще отношение $a \approx a'$, где a - объект, а a' - терм того же типа. Пусть α'' - элементарный тип. Тогда объектами типа a'' выбираем по одному объекту для каждой константы a' типа a''. Значением истинности a^* существования этого объекта a будем считать множество слов $(a')^*$ при данной константе. Если a – объект, соответствующий данной константе a', то будем считать $a \approx a'$ верным, в противном случае нет. Значением истинности равенства $a = b$ считаем пустое множество слов, если a и b соответствуют разным константам, и множество a^*, если a и b совпадают, т.е. $a \approx a'$ и $b \approx a'$.

Пусть теперь $a'' = \langle a''_\iota : \iota \in J \rangle$ – такой тип, что для типов a''_ι, $\iota \in J$, уже определены объекты вместе с их значением истинности существования, также и значение истинности равенства и отношение $\approx$.

Пусть теперь $a' = \mathfrak{z}\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle \mathfrak{B}$ – терм типа a'', полученный из терма в μ заменой его констант константами из Σ. Пусть $v = \bigwedge_p p^*$ есть конъюнкция значений истинности p^* по всем константам p из терма a'. Тогда считаем объектами типа a'' каждую функцию a, ставящую каждому слову $\bar{a}$ из множества v и каждому семейству объектов $\langle a_\iota : \iota \in J \rangle$, где a_ι – объект типа a''_ι, содержащий слово $\bar{a}$ в своем значении истинности существования, в соответствии + или – ("истина" или "ложь"), если эта функция удовлетворяет следующим условиям:

I) для каждого семейства аргументов $\langle a_\iota : \iota \in J \rangle$ множество слов, при котором получается значение +, является значением истинности.

2) функция экстенциональна, т.е. если при данном слове имеют место $a_\iota = b_\iota$ при всех $\iota \in J$, то $a\langle a_\iota : \iota \in J \rangle = a\langle b_\iota : \iota \in J \rangle$ при данном слове.

3) Если $a_\iota \approx a'_\iota$ при каждом $\iota \in J$, то $(\bigwedge_\iota a^*_\iota) \wedge v \wedge \wedge \Big[\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle} \mathfrak{B}\Big]^b \leq a\langle a_\iota : \iota \in J \rangle \leq \Big[\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle} \mathfrak{B}\Big]^\# \wedge v \wedge (\bigwedge_\iota a^*_\iota)$, где эти неравенства надо понимать как равенства между значениями истинности (a^*_ι есть значение истинности существования для a_ι.

Значение истинности существования данного объекта считаем равным v. Для данного объекта a и терма a' считаем верным $a \approx a'$.

Класс всех объектов типа a'' получим, если учтем все функции a, удовлетворяющие указанным условиям хоть при некотором терме a' типа a'', имеющем вышеописанный характер.

Если a и b – объекты типа α'', то значение истинности отношения $a = b$ получается следующим образом: $a = b$ имеет место при данном слове $\bar{a}$, если это слово входит в значение истинности существования обоих объектов и объекты a и b как функции ведут себя одинаково при всех словах $\bar{b}$, удовлетворяющих неравенству $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Индукцией по типу переменной x' определим терм с основной переменной x'.

Если x' – переменная элементарного типа, то терм с основной переменной x' – сама переменная x'.

Пусть x' – переменная типа $\alpha'' = \langle \alpha''_\iota : \iota \in J \rangle$ и пусть $\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle$ – семейство термов с основными переменными $x'_\iota, \iota \in J$, соответственно. Тогда терм $a' = d\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle x' \langle a'_\iota : \iota \in J \rangle$ – терм с основной переменной x'.

Если P есть константа типа α'' и a' есть терм с основной переменной x' того же типа, то терм с основной константой P получается из терма a' заменой переменного x' на константу P.

Индукцией по типу можно убедиться, что если $\mathfrak{B}$ есть формула со свободными переменными $x'_\iota, \iota \in J$, а $a'_\iota, \iota \in J$, – термы со основными константами $P_\iota, \iota \in J$, соответственно, то $\int_{\langle x'_\iota : \iota \in J \rangle}^{\langle a'_\iota : \iota \in J \rangle} \mathfrak{B}$ есть высказывание, которое можно получить заменой переменных $x'_\iota, \iota \in J$, на соответствующие константы P_ι.

<u>Лемма 2</u>.

1) Если P есть константа из Σ, а a' есть терм с основной константой P, то в модели существует объект a со свойством $a \approx a'$.

2) Если a и b – объекты модели, имеющие одинаковый тип, такие, что $a \approx a'$ и $b \approx b'$, а $[a = b]^*$ есть значение истинности их равенства, то $[a = b]^* \leq [a' \approx b']$.

Докажем оба пункта леммы единой индукцией по типу константы P, соответственно объектов a и b.

В случае элементарного типа пункт 1) получается прямо из определения, а в пункте 2) будет $[a = b]^* \leq [a' \approx b']$, так как в обеих сторонах будет пустое множество, если a' и b' – разные термы, а в случае совпадающих термов в правой стороне будет множество всех слов.

Пусть теперь $\alpha'' = \langle \alpha''_\iota : \iota \in J \rangle$ – такой тип, что для

типов $a''_\iota,\ \iota\in J$, оба пункта леммы имеют место. Пусть P – константа типа a'', а $\bar{a}\in P^*$. Определим функцию a следующим образом: пусть $\langle a_\iota:\iota\in J\rangle$ – семейство объектов типов $a''_\iota,\ \iota\in J$ и пусть слово $\bar{a}$ принадлежит их значению истинности существования. Пусть $a_\iota\approx a'_\iota$ при каждом $\iota\in J$. Тогда считаем $a\langle a_\iota:\iota\in J\rangle$ в слове $\bar{a}$ равным $+$ в точности тогда, когда $\bar{a}$ исчерпается множеством слов $\bar{b}$, удовлетворяющих следующим условиям:
существуют термы $b'_\iota,\ \iota\in J$, имеющие типы a'' соответственно такие, что $\bar{b}\in[P'\langle b'_\iota:\iota\in J\rangle]^b$ и существуют $b_\iota,\ \iota\in J$, с $b_\iota\approx b'_\iota$ и $\bar{b}\in[a_\iota=b_\iota]^*$. Тогда прямо из определения вытекает, что множество таких слов, при которых $a\langle a_\iota:\iota\in J\rangle=+$, является значением истинности. Экстенциональность вытекает из того, что если $\langle c_\iota:\iota\in J\rangle$ – такое семейство объектов, что $c_\iota\approx\approx c'_\iota$ при $\iota\in J$, а в $\bar{a}$ имеет место $a_\iota=c_\iota$ при всех $\iota\in J$, то $\bar{b}\in[b_\iota=c_\iota]^*$ при всех $\iota\in J$, как это вытекает из транзитивности равенства. Остается доказать $[P\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle]^b\wedge\wedge a^*\wedge(\wedge_\iota a^*_\iota)\leq a\langle a_\iota:\iota\in J\rangle\leq[P\langle a'_\iota:\iota\in J\rangle]^*\wedge a^*\wedge(\wedge_\iota a^*_\iota)$. Левое неравенство получается из того, что в качестве термов $b'_\iota,\ \iota\in J$, можно взять и термы a'_ι. Правое неравенство доказывается аналогично пункту 7 леммы I, применяя предположения индукции.

Пусть a и b – объекты типа a'', пусть $a\approx a'$ и $b\approx b'$, $a'=d\langle y_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{B}$, $b'=d\langle y_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{C}$. Предположим, что $\bar{a}\bar{\in}[a'\approx b']$. Тогда существует слово $\bar{b}$ с основой β последней буквы такое, что $\bar{a}\leq\bar{b}$ и, кроме того, существуют константы $c'_\iota,\ \iota\in J$, типов a''_ι соответственно, такие, что в Σ имеются $(\mathfrak{B}')_\beta$ и $(\mathfrak{C}')_{-\beta}$, где $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{C}'$ получены из $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ соответственно заменой переменных $y_\iota,\ \iota\in J$, на c'_ι. Но по предположению индукции существуют объекты $c_\iota,\ \iota\in J$, соответствующие термам с основными константами c'_ι. Но из-за $\bar{b}\in[\mathfrak{B}']^b$, $\bar{b}\bar{\in}[\mathfrak{C}']^*$ получаем, что в слове $\bar{b}$ имеют место $a\langle c_\iota:\iota\in J\rangle=+$, $b\langle c_\iota:\iota\in J\rangle=-$. Из этого вытекает, что $\bar{a}\bar{\in}[a=b]^*$.

<u>Теорема</u>. Пусть $\mathfrak{B}$ такое высказывание, что каждый его терм можно получить из термов множества μ заменой констант и переменных подходящим образом, пусть φ – такая интерпретация высказывания $\mathfrak{B}$, что при каждом его константе P_ι имеет место $\varphi(P_\iota)\approx a'_\iota$. Тогда значение истинности m высказывания $\mathfrak{B}$ удовлетворяет нера-

венствам: $\left[\int_{\langle P_i : i\in j\rangle}^{\langle a'_i : i\in j\rangle} \mathfrak{B}\right]^{b} \leq m \leq \left[\int_{\langle P_i : i\in j\rangle}^{\langle a'_i : i\in j\rangle} \mathfrak{B}\right]^{\#}$,
где при подстановке константы P_i следует рассматривать как переменные.

Теорема доказывается индукцией по пунктам определения формулы, применяя лемму I.

Так как каждая формула как истинностная функция является и экстенциональной, то в качестве следствия из теоремы получим, что в случае, если $\mathfrak{B}$ есть часть некоторого терма из μ, это истинностная функция является объектом модели, т.е. что модель μ-нормальна. Кроме того, так как $[\mathfrak{A}]^{\#}$ не является множеством всех слов, то, выбирая интерпретацию φ так, что $\varphi(P_i) \approx a'_i$ для каждой константы P_i из $\mathfrak{A}$, где a'_i есть терм с основной константой P_i – а по лемме 2 такая интерпретация возможна – то значение истинности высказывания $\mathfrak{A}$ не является множеством всех слов. Следовательно, $\mathfrak{A}$ не сильно тавтологично. Итак, мы получим наш основной результат.

Высказывание выводимо в точности тогда, когда оно сильно тавтологично.

Литература

1. **Т а у т с А., Семантическая интерпретация формул в обобщенных моделях Бета и псевдо-булевых алгебрах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 9-20.**
2. **Т а у т с А., Семантическая модель для бесконечных формул. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 7-19.**
3. **Т а у т с А., Формальный вывод тавтологичных высказываний в псевдобулевых алгебрах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 3-30.**
4. **Т а у т с А., Поиск вывода при помощи семантической модели. Уч. зап. Тартуск. ун-та, настоящий сб., 3-42.**
5. **T a k a h a s h i M., Cut elimination theorem and Brouwerian-valued models far intuitionistie type theory. Comment. Math. Univ. St. Paul. 19 (1971), 55-72.**

Поступило
15 I 1975

TUGEV TAUTOLOOGIA JA KONTRAMUDELI KONSTRUEERIMINE MITTETULETATAVATE VALEMITE JAOKS

A. Tauts

R e s ü m e e

Mudelit lõpmatute valemite jaoks mitteklassikalises loogikas nimetatakse mingi termide hulga μ korral μ-normaalseks, kui iga term hulgast μ, juhul, kui tema konstantide väärtusteks võtta antud mudeli objektid, esitab samuti antud mudeli objekti. Valemit nimetatakse tugevalt tautoloogiliseks, kui leidub termide hulk μ nii et valemi tõeväärtuseks igas μ-normaalses mudelis on maksimaalne element. Tõestatakse, et valem on tuletatav parajasti siis, kui ta on tugevalt tautoloogiline.

DIE STARKE TAUTOLOGIE UND DAS KONSTRUIEREN DES KONTRAMODELLS FÜR NICHTABLEITBARE FORMELN

A. Tauts

Z u s a m m e n f a s s u n g

Ein Modell für unendliche Formeln der nichtklassischen Logik wird bei einer Menge μ von Termen μ-normal genannt, wenn jeder Term aus der Menge μ ein Objekt des gegebenen Modells darstellt, falls die Werte der Konstanten dieses Terms Objekte des gegebenen Modells sind. Eine Formel wird stark tautologisch genannt, wenn es eine Menge μ von Termen gibt, so daß in jedem μ-normalen Modell das maximale Element der Wahrheitswert dieser Formel ist. Es wird bewiesen, daß eine Formel genau dann ableitbar ist, wenn sie stark tautologisch ist.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛИКОЛЬЦОИДОВ

Э. Реди

Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей работе мы продолжим исследование поликольцоидов, начатое автором в [3]. Сперва изложим некоторые свойства конгруэнций поликольцоидов, известные для универсальных алгебр [7].

Затем находим условия плотной вложимости для левых идеалов поликатегорий и на основе соответствующих конструкций докажем представимость произвольной поликатегории в виде подполикатегории подходящей симметрической поликатегории. Поликатегория является частным случаем поликольцоида при $\Omega = \phi$. Автор имеет доказательство теоремы о представлении и для поликольцоидов, однако из-за трудоемкости соответствующей конструкции эта теорема не включена в настоящую заметку.

Общая теория плотных вложений развита Л.М.Глускиным [I]. Аналогичные вопросы для систем Менгера исследовал Я.Хенно [5,6]. Все понятия и определения, которыми мы пользуемся без определений, можно найти в работах [2-4] автора.

Пусть $\mathcal{A} = (I, \mathcal{J}, \mathcal{A}^j_{i_1^m}, \Omega, \Pi)$ - поликольцоид (определение см. [3], стр. 63).

Определение I. Набор

$$\Theta = (\Theta^j_{i_1^m};\ (i_1^m; j) \in \mathcal{J}),$$

где $\Theta^j_{i_1^m}$ для каждого $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$ является конгруэнцией Ω-алгебры $\mathcal{A}^j_{i_1^m}$, называется конгруэнцией поликольцоида $\mathcal{A}$, если из $a_1 \equiv a_2 (\Theta^{j_u}_{i_1^m})$, $b_1 \equiv b_2 (\Theta^k_{j_1^p})$ следует, что $a_1 \pi^u b_1 \equiv a_2 \pi^u b^2$ $(\Theta^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p})$ для любых $a_1, a_2 \in \mathcal{A}^{j_u}_{i_1^m}$, $b_1, b_2 \in \mathcal{A}^k_{j_1^p}$; $1 \leq u \leq p$; $(i_1^m; j_u)$, $(j_1^p; k) \in \mathcal{J}$.

Пусть $({}^\lambda\Theta;\ \lambda \in \Lambda)$ - произвольное семейство конгруэнций поликольцоида $\mathcal{A}$. Пересечением этого семейства называется набор

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\Theta = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\Theta^j_{i_1^m};\ (i_1^m; j) \in \mathcal{J}) \tag{I}$$

и объединением называется набор

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\Theta = (\bigvee_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\Theta^j_{i_1^m};\ (i_1^m; j) \in \mathcal{J}), \tag{2}$$

состоящий из объединений эквивалентностей (см. [7], стр.I8). Как известно, $a \equiv b (\bigvee_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\Theta^j_{i_1^m})$ тогда и только тогда, когда существуют конечная последовательность элементов $x_0 = a, x_1, \dots,$

$x_n = b$ из $\mathfrak{A}^{j}_{i_1^m}$ и последовательность конгруэнций ${}^{\lambda_1}\theta, \ldots, {}^{\lambda_n}\theta$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$, такие что $x_{t-1} \equiv x_t({}^{\lambda_t}\theta^{j}_{i_1^m})$ $(t = 1, \ldots, n)$.

Предложение I. Пересечение любого семейства конгруэнций поликольцоида $\mathfrak{A}$ является конгруэнцией поликольцоида $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Из леммы IO.I Грецера (см. [7], стр.50) известно, что $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta^{j}_{i_1^m}$ является конгруэнцией Ω-алгебры $\mathfrak{A}^{j}_{i_1^m}$. Легко проверить и второе условие определения I.

Предложение 2. Объединение любого семейства конгруэнций поликольцоида $\mathfrak{A}$ является конгруэнцией поликольцоида $\mathfrak{A}$.

Доказательство. По лемме IO.2 Грецера (см. [7], стр.50) $\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta_{i_1^m}$ является конгруэнцией Ω-алгебры $\mathfrak{A}^{j}_{i_1^m}$. Проверка выполнимости второго условия определения I для $\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta$ проводится аналогично доказательству упомянутой леммы (последовательности, связывающие пары элементов, преобразуются в последовательности одинаковой длины). Проделаем это преобразование.

Пусть $a_1 \equiv a_2(\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta^{j_u}_{i_1^m})$, $b_1 = b_2(\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta^{k}_{j_1^r})$, т.е. пусть существуют элементы $x_0 = a_1, x_1, \ldots, x_n = a_2$, $y_0 = b_1, y_1, \ldots, y_r = b_2$ такие, что

$$x_{t-1} \equiv x_t({}^{\lambda_t}\theta^{j_u}_{i_1^m}) \ (t = 1, \ldots, n), \quad y_{l-1} \equiv y_l({}^{\rho_l}\theta^{k}_{j_1^r}) \ (l = 1, \ldots, r),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \rho_1, \ldots, \rho_r \in \Lambda$. Прибавим r раз элемент a_2 в конец первой последовательности и n раз b_1 в начало второй. Элементы преобразованных последовательностей обозначим соответственно через

$$x'_0 = a_1, \ x'_1 = x_1, \ldots, x'_{n-1} = x_{n-1}, \ x'_n = a_2, \ldots, x'_{n+r} = a_2,$$
$$y'_0 = b_1, \ldots, y'_n = b_1, \ y'_{n+1} = y_1, \ldots, y'_{n+r-1} = y_{r-1}, \ y'_{n+r} = b_2.$$

Тогда имеют место соотношения

$$x'_{t-1} \equiv x'_t({}^{\lambda_t}\theta^{j_u}_{i_1^m}), \quad y'_{t-1} \equiv y'_t({}^{\lambda_t}\theta^{k}_{j_1^r}) \quad (t = 1, \ldots, n),$$
$$x'_{n+l-1} \equiv x'_{n+l}({}^{\rho_l}\theta^{j_u}_{i_1^m}), \quad y'_{n+l-1} \equiv y'_{n+l}({}^{\rho_l}\theta^{k}_{j_1^r}) \quad (l = 1, \ldots, r).$$

Теперь последовательность

$$x'_0\pi^u y'_0 = a_1\pi^u y'_1, \ldots, x'_{n+r}\pi^u y'_{n+r} = a_2\pi^u b_2$$

такова, что $x'_{t-1}\pi^u y'_{t-1} \equiv x'_t\pi^u y'_t({}^{\mu_t}\theta^{k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^r})$ $(t = 1, \ldots, n+r)$, где $\mu_t = \lambda_t$ $(t = 1, \ldots, n)$, $\mu_{n+l} = \rho_l$ $(l = 1, \ldots, r)$. Следовательно,

$$a_1\pi^u b_1 \equiv a_2\pi^u b_2(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta^{k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^r}).$$

Значит, $\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\theta$ является конгруэнцией поликольцоида $\mathfrak{A}$.

Предложение доказано.

Определим включение конгруэнций естественным образом, считая $\theta \leq \Psi$ для двух конгруэнций на $\mathcal{A}$, если при любой $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$ из $a \equiv b(\theta_{i_1^m}^j)$ следует $a \equiv b(\Psi_{i_1^m}^j)$. Совокупность всех конгруэнций на $\mathcal{A}$ образует относительно включения частично упорядоченное множество.

Предложение 3. Если $({}^\lambda\theta; \lambda \in \Lambda)$ является направленной системой конгруэнций поликольцоида $\mathcal{A}$, то объединение $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\theta$ совпадает с теоретико-множественным объединением $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} {}^\lambda\theta$.

Доказательство совсем аналогично доказательству леммы 10.3 Грецера (см. [7], стр. 51) и поэтому не приводится.

Теорема I. Пусть $\mathcal{A}$ - поликольцоид и $a, b \in \mathcal{A}_{i_1^m}^j$ произвольные неравные элементы поликольцоида $\mathcal{A}$. Тогда существует максимальная конгруэнция $\Psi(a, b)$, которая разделяет эти элементы.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 10.6 Грецера (см. [7], стр. 57) будем рассматривать совокупность $\mathcal{E} = \{\theta \mid a \not\equiv b(\theta)\}$ конгруэнций поликольцоида $\mathcal{A}$, разделяющих элементы a и b. Множество $\mathcal{E}$ непусто, поскольку конгруэнция равенства разделяет элементы a и b. Множество $\mathcal{E}$ является частично упорядоченным относительно теоретико-множественного включения конгруэнций. Пусть C - возрастающая цепь конгруэнций из $\mathcal{E}$. Тогда набор $\Psi = \bigvee(\Phi \mid \Phi \in C)$ является конгруэнцией, совпадающей (в силу предложения 3) с теоретико-множественным объединением $\bigcup(\Phi \mid \Phi \in C)$. Поэтому $x \equiv y(\Psi_{i_1^m}^j)$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y(\Phi_{i_1^m}^j)$ для какой-то $\Phi \in C$. Ввиду этого $a \not\equiv b(\Psi_{i_1^m}^j)$ поскольку $a \not\equiv b(\Phi_{i_1^m}^j)$ при всякой $\Phi \in C$. Значит, предположения леммы Цорна выполнены, и $\mathcal{E}$ имеет максимальный элемент $\Psi(a, b)$.

Следствие I. Для любой системы множеств $H = \{\mathcal{H}_{i_1^m}^j \subseteq \mathcal{A}_{i_1^m}^j; (i_1^m; j) \in \mathcal{J}\}$ существует максимальная конгруэнция, разделяющая все элементы из всех $\mathcal{H}_{i_1^m}^j$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы для всякой пары различных элементов $a, b \in \mathcal{H}_{i_1^m}^j$ существует максимальная конгруэнция $\Psi'(a, b)$, разделяющая a и b. Пусть θ является пересечением всех $\Psi(a, b)$, где $a, b \in \mathcal{H}_{i_1^m}^j$ $(a \neq b)$, $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$. Тогда θ разделяет все элементы из всех $\mathcal{H}_{i_1^m}^j$.

Если θ' строго больше конгруэнции θ, то при некоторой грани $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$ существует хотя бы одна пара элементов $a, b \in \mathcal{H}_{i_1^m}^j$, конгруэнтных по $\theta'^j_{i_1^m}$, но не конгруэнтных по $\theta_{i_1^m}^j$. Условие $x \not\equiv y(\theta_{i_1^m}^j = \bigcap \Psi(a, b)_{i_1^m}^j)$ означает, что хотя бы для одной пары $a', b' \in \mathcal{H}_{i_1^m}^j$ $(a' \neq b')$ имеем $x \not\equiv y(\Psi(a', b')_{i_1^m}^j)$. По выбору конгруэнции $\Psi(a',b')$ получим, что $a' \equiv b'(\theta'^{j}_{i_1^m})$, т.е. θ' склеивает хотя бы два различных элемента из $\mathcal{H}^{j}_{i_1^m}$.

Следствие доказано.

Пусть θ, Φ конгруэнции поликольцоида $\mathcal{A} = (J, \mathcal{J}, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}, \Omega, \Pi)$, причем $\theta \leq \Phi$. Тогда определим отношение Φ/θ на $\mathcal{A}/\theta$ следующим образом: $\Phi/\theta = (\Phi^{j}_{i_1^m}/\theta^{j}_{i_1^m};\ (i_1^m; j) \in \mathcal{J})$, где классы конгруэнции $[a]_\theta \equiv [b]_\theta\ (\Phi^{j}_{i_1^m}/\theta^{j}_{i_1^m})$ тогда и только тогда, когда $a \equiv b\,(\Phi^{j}_{i_1^m})$ для всех $a, b \in \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}$, $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$.

<u>Предложение 4</u>. Φ/θ является конгруэнцией факторполикольцоида $\mathcal{A}/\theta = (J, \mathcal{J}, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}/\theta^{j}_{i_1^m}, \Omega, \Pi)$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству леммы II.2 Грецера (см. [7], стр. 59) и поэтому не приводится.

Пусть Ψ есть конгруэнция факторполикольцоида $\mathcal{A}/\theta$. Определим бинарное отношение $\bar\Psi$ на $\mathcal{A}$ следующим образом: $\bar\Psi = (\bar\Psi^{j}_{i_1^m};\ (i_1^m; j) \in \mathcal{J})$, где $a \equiv b\,(\bar\Psi^{j}_{i_1^m})$ тогда и только тогда, когда $[a]_\theta \equiv [b]_\theta\ (\Psi^{j}_{i_1^m})$.

<u>Предложение 5</u>. $\bar\Psi$ является конгруэнцией поликольцоида $\mathcal{A}$ и $\theta \leq \bar\Psi$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству леммы II.3 Грецера (см. [7], стр. 60) и поэтому опускается.

<u>Предложение 6</u>. Пусть θ является конгруэнцией поликольцоида $\mathcal{A} = (J, \mathcal{J}, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}, \Omega, \Pi)$. Соответствия $\Psi \to \bar\Psi$ (Ψ конгруэнция на $\mathcal{A}/\theta$) и $\Phi \to \Phi/\theta$ ($\theta \leq \Phi$ – конгруэнция на $\mathcal{A}$) являются взаимно обратными взаимно однозначными и они сохраняют теоретико-множественное включение.

<u>Доказательство</u>. В виду предложений 4 и 5 Φ/θ является конгруэнцией на $\mathcal{A}/\theta$ и $\bar\Psi$ является конгруэнцией на $\mathcal{A}$, содержащей конгруэнцию θ. Легко проверить, что $\overline{\Phi/\theta} = \Phi$ для всех конгруэнций Φ на $\mathcal{A}$, содержащих θ, и что $\bar\Psi/\theta = \Psi$ для всех конгруэнций Ψ на $\mathcal{A}/\theta$. Также можно показать, что из $\Psi_0 \leq \Psi_1$ следует $\bar\Psi_0 \leq \bar\Psi_1$ и из $\Phi_0 \leq \Phi_1$ следует $\Phi_0/\theta \leq \Phi_1/\theta$.

<u>Предложение 7</u>. Пусть θ – конгруэнция поликатегории $\mathcal{A} = (J, \mathcal{J}, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ и пусть $\mathcal{B} = (J', \mathcal{J}', \mathcal{B}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ является левым идеалом в $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B}/\theta$ является левым идеалом в $\mathcal{A}/\theta$.

<u>Доказательство</u>. Для любых $[b]_\theta \in \mathcal{B}^{j_u}_{i_1^m}/\theta^{j_u}_{i_1^m}$, $[a]_\theta \in \mathcal{A}^{k}_{j_1^r}/\theta^{k}_{j_1^r}$ имеем $[b]_\theta \pi^u [a]_\theta = [b\pi^u a] \in \mathcal{B}^{k}_{j_1^{u-1}; i_1^m; j_{u+1}^r}/\theta^{k}_{j_1^{u-1}; i_1^m; j_{u+1}^r}$. Значит, $\mathcal{B}/\theta$ – левый идеал в $\mathcal{A}/\theta$.

Предложение доказано.

Пусть $(J, \mathcal{J})$ – произвольный (π-замкнутый) полиграф (определение см. [2], стр. 32) и $(J, \hat{J})$ - его рефлексивное замыкание, т.е. минимальный его надполиграф, содержащий все грани вида $(i;i) \in J^2$. Ясно, что $\hat{J}$ получается из J прибавлением всех отсутствующих пар $(i;i)$, $i \in J$, другие грани не добавляются.

<u>Определение 2</u>. Мы будем говорить, что подполикатегория (левый идеал, правый идеал) $\mathcal{B}$ существен в $\mathcal{A}$, если всякая ненулевая конгруэнция поликатегории $\mathcal{A}$ индуцирует ненулевую конгруэнция на $\mathcal{B}$.

Пусть полиграфы (J, J) и $(J, \mathcal{K})$ таковы, что $\hat{J} \subseteq \mathcal{K}$. Обозначим через $\mathcal{K}_{\mathcal{K}}$ класс всевозможных поликатегорий над полиграфом $(J, \mathcal{K})$.

<u>Определение 3</u>. Будем говорить, что левый (правый) идеал $\mathcal{B} = (J, J, \mathcal{B}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ поликатегории $\mathcal{A} = (J, J, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ является плотно вложенным в классе $\mathcal{K}_{\mathcal{K}}$, если I) $\mathcal{B}$ существенный левый (правый) идеал поликатегории $\mathcal{A}$; 2) всякая собственная надполикатегория из класса $\mathcal{K}_{\mathcal{K}}$ поликатегории $\mathcal{A}$ имеет ненулевую конгруэнцию, индуцирующую на $\mathcal{B}$ нулевую конгруэнцию.

<u>Определение 4</u>. Элемент $e \in \mathcal{A}^i_i$ называется левой единицей поликольцоида $\mathcal{A}$, если для любой грани $(j_1^{u-1}, i, j_{u+1}^{r}; k) \in J$, и любого элемента $b \in \mathcal{A}^k_{j_1^{u-1} i j_{u+1}^r}$ $(1 \le u \le r)$ имеет место соотношение $e \pi^u b = b$.

Если поликольцоид $\mathcal{A}$ имеет для любой грани $(i;i) \in J$ соответствующую левую единицу, то назовем $\mathcal{A}$ <u>левоунитарным</u>. Левоунитарный поликольцоид над рефлексивным полиграфом называется <u>строго левоунитарным</u>.

Мы хотим показать, что всякую поликатегорию $\mathcal{A} = (J, J, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ можно вложить в строго левоунитарную поликатегорию $\mathcal{C}_J = (J, \hat{J}, \mathcal{C}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ в качестве существенного левого идеала так, чтобы всякий левый идеал поликатегории $\mathcal{A}$ является левым идеалом в $\mathcal{C}_J$.

Ясно, что, если полиграф (J, J) рефлексивен $(J = \hat{J})$ и каждое $\mathcal{A}^i_i$ содержит левую единицу поликатегории $\mathcal{A}$, то можно взять $\mathcal{C}_J = \mathcal{A}$. Поэтому будем предполагать, что множество J^* всех индексов $i \in J$, при которых грань $(i;i) \notin J$ или множество $\mathcal{A}^i_i$ не содержит левую единицу, непусто. Отсутствие левой единицы в $\mathcal{A}^i_i$ означает, что для всякого элемента $a \in \mathcal{A}^i_i$ существуют грань $(j_1^{u-1}, i, j_{u+1}^r; k) \in J$ и элемент $b \in \mathcal{A}^k_{j_1^{u-1} i j_{u+1}^r}$ такие, что $a \pi^u b \ne b$.

Доказательству приведенного утверждения предшествуют построение набора $\mathcal{W}_{\hat{j}}$ и изложение нескольких лемм. Займемся построением набора $\mathcal{W}_{\hat{j}}$.

Пусть $E=\{e_i;\, i\in J^*\}$ есть индексированное множество такое, что $E\cap\tilde{A}=\emptyset$, где

$$\tilde{A}=\bigcup_{(i_1^m;j)\in\hat{J}}\mathcal{A}^{j}_{i_1^m}. \tag{4}$$

Определим множество $\mathcal{W}^{j}_{i_1^m}$ $((i_1^m;j)\in\hat{J})$ слов α следующим образом:

ОI. Для всякой грани $(i_1^m;j)\in\hat{J}$ символы из $\mathcal{A}^{j}_{i_1^m}$ являются словами в $\mathcal{W}^{j}_{i_1^m}$.

О2. Если $j\in J^*$, то e_j является словом в $\mathcal{W}^{j}_{j}$.

О3. Всевозможные выражения вида $\langle a, e_j\rangle$, где $a\in\mathcal{A}^{j}_{i_1^m}$, $j\in J^*$, являются словами в $\mathcal{W}^{j}_{i_1^m}$.

Слова считаются равными тогда и только тогда, когда они графически совпадают. Определим на построенном наборе множеств слов частичные бинарные операции $\pi^1,\pi^2,\dots$ следующим образом: как обычно (в поликатегориях), операция π^u применима ко всяким словам $\alpha\in\mathcal{W}^{j_u}_{i_1^m}$, $\beta\in\mathcal{W}^{k}_{j_1^r}$ при $1\leq u\leq r$. Произведение $\alpha\pi^u\beta\in\mathcal{W}^{k}_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^r}$ определим по следующей таблице, где $a\in\mathcal{A}^{j_u}_{i_1^m}$, $b\in\mathcal{A}^{k}_{j_1^r}$:

	b	e_{j_u}	$\langle b, e_k\rangle$	
a	$a\pi^u b$	$\langle a, e_{j_u}\rangle$	$\langle a\pi^u b, e_k\rangle$	1
e_{j_u}	b	e_{j_u}	$\langle b, e_k\rangle$	2
$\langle a, e_{j_u}\rangle$	$a\pi^u b$	$\langle a, e_{j_u}\rangle$	$\langle a\pi^u b, e_k\rangle$	3
	1	2	3	

<u>Замечание I</u>. Произведение $\alpha\pi^u\beta\in\tilde{A}$ тогда и только тогда, когда $\beta\in\tilde{A}$. Действительно, все элементы первого столбца принадлежат $\tilde{A}$, а ни один из элементов второго и третьего столбца не принадлежит $\tilde{A}$.

<u>Замечание 2</u>. Для $j_u\in J^*$ слово e_{j_u} из $\mathcal{W}^{j_u}_{j_u}$ является левой единицей относительно операции $\pi^1,\pi^2,\dots$ в наборе

$$\mathcal{W}_{\hat{j}}=(J,\hat{J},\mathcal{W}^{j}_{i_1^m},\Pi), \tag{5}$$

т.е. выполняется равенство

$$e_{j_u}\pi^u\beta=\beta \tag{6}$$

для всякого слова $\beta \in W^{k}_{j\bar{h}}$, $1 \le u \le p$. Последнее видно из второй строки нашей таблицы.

Замечание 3. Если произведение $\alpha\pi^1 e_j$ существует, то

$$\alpha\pi^1 e_j = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \notin \widetilde{A}, \\ \langle\alpha, e_j\rangle, & \text{если } \alpha \in \widetilde{A}. \end{cases} \qquad (7)$$

Это утверждение мы получим, рассмотрев второй столбец таблицы.

Замечание 4. Если произведение $\alpha\pi^u\langle b, e_k\rangle$ определено, то

$$\alpha\pi^u\langle b, e_k\rangle = \langle\alpha\pi^u b, e_k\rangle. \qquad (8)$$

Мы получим эту формулу из третьего столбца таблицы, если сравним его с первым.

Замечание 5. Учитывая первую строку, мы получим из третьей, что

$$\langle a, e_{j_u}\rangle\pi^u\beta = a\pi^u\beta. \qquad (9)$$

Замечание 6. Если $\mathfrak{D} = (J', j', \mathfrak{D}^m_{i_1}, \Pi)$ является левым идеалом поликатегории A, то $a\pi^u d \in \widetilde{D}$ при любых $a \in \widetilde{W}$, $d \in \widetilde{D}$. В самом деле, ввиду формул (6) и (9) имеем, что

$$e_{j_u}\pi^u d = d, \quad \langle a, e_{j_u}\rangle\pi^u d = a\pi^u d.$$

Значит, эти произведения принадлежат $\widetilde{D}$.

Лемма I. Частичные бинарные операции $\pi^1, \pi^2, \ldots$ удовлетворяют закону ассоциативности, т.е. для всех $\alpha \in W^{i_u}_{i_1 m}$, $\beta \in W^{k_v}_{j\bar{h}}$, $\gamma \in W^{l}_{k_1 r}$, $1 \le u \le p$, $1 \le v \le r$ выполняется равенство[I]

$$(\alpha\pi^u\beta)\pi^v\gamma = \alpha\pi^{u\oplus v}(\beta\pi^v\gamma). \qquad (10)$$

Доказательство. Будем рассматривать все возможности для видов слов α, β, γ.

AI. Если $\alpha = e_{j_u}$, то при любых β и γ (ввиду замечания 2) имеем

$$(e_{j_u}\pi^u\beta)\pi^v\gamma = \beta\pi^v\gamma = e_{j_u}\pi^{u\oplus v}(\beta\pi^v\gamma).$$

A2. Если $\alpha = e_j$, то $k_v = j$, $u = p = 1$, $u\oplus v = v$. Поэтому получим

$$(\alpha\pi^1 e_j)\pi^v\gamma \underset{(7)}{=} \begin{cases} \alpha\pi^v\gamma \underset{(6)}{=} \alpha\pi^v(e_j\pi^v\gamma), & \text{если } \alpha \notin \widetilde{A}, \\ \langle\alpha, e_j\rangle\pi^v\gamma \underset{(9)}{=} \alpha\pi^v\gamma \underset{(6)}{=} \alpha\pi^v(e_j\pi^v\gamma), & \text{если } \alpha \in \widetilde{A}. \end{cases}$$

A3. Пусть $\gamma = e_k$. Тогда $v = r = 1$, $u\oplus v = u$, $k_v = k = l$.

A3.I. Если $\beta = b \in \widetilde{A}$, то ввиду замечания I получим

I В работе пользуемся обозначением $u\oplus v = u + v - 1$ для всех целых чисел $u \ge 0$, $v > 0$.

$$\alpha\pi^u(b\pi^1 e_k) \underset{(7)}{=} \alpha\pi^u\langle b, e_k\rangle \underset{(8)}{=} \langle \alpha\pi^u b, e_k\rangle \underset{(7)}{=} (\alpha\pi^u b)\pi^1 e_k.$$

A3.2. Если $\beta = \langle b, e_k\rangle$, то имеем

$$(\alpha\pi^u\langle b, e_k\rangle)\pi^1 e_k \underset{(8)}{=} \langle \alpha\pi^u b, e_k\rangle \underset{(7)}{=} \langle \alpha\pi^u b, e_k\rangle \underset{(8)}{=} \alpha\pi^u\langle b, e_k\rangle \underset{(7)}{=} \alpha\pi^u(\langle b, e_k\rangle\pi^1 e_k).$$

A4. Пусть $\gamma = c \in \tilde{A}$.

A4.I. Пусть также $\beta = b \in \tilde{A}$.

A4.I.I. Если и $\alpha = a \in \tilde{A}$, то равенство (IO) выполняется, так как оно верно для элементов поликатегории A.

A4.I.2. Если $\alpha = \langle a, e_{j_u}\rangle$, то ввиду последнего элемента первого столбца нашей таблицы имеем

$$(\langle a, e_{j_u}\rangle\pi^u b)\pi^v c = (a\pi^u b)\pi^v c \underset{A4.1.1}{=} a\pi^{u\oplus v}(b\pi^v c) = \langle a, e_{j_u}\rangle\pi^{u\oplus v}(b\pi^v c).$$

A4.2. Пусть $\beta = \langle b, e_{k_v}\rangle$. Тогда имеем

$$(\alpha\pi^u\langle b, e_{k_v}\rangle)\pi^v c \underset{(8)}{=} \langle \alpha\pi^u b, e_{k_v}\rangle\pi^v c \underset{(9)}{=} (\alpha\pi^u b)\pi^v c \underset{A4.1}{=} \alpha\pi^{u\oplus v}(b\pi^v c) \underset{(9)}{=} \alpha\pi^{u\oplus v}(\langle b, e_{k_v}\rangle\pi^v c).$$

A5. Пусть, наконец, $\gamma = \langle c, e_l\rangle$. Тогда имеем

$$\alpha\pi^{u\oplus v}(\beta\pi^v\langle c, e_l\rangle) \underset{(8)}{=} \alpha\pi^{u\oplus v}\langle \beta\pi^v c, e_l\rangle \underset{(8)}{=} \langle \alpha\pi^{u\oplus v}(\beta\pi^v c), e_l\rangle \underset{A4}{=}$$
$$= \langle(\alpha\pi^u\beta)\pi^v c, e_l\rangle \underset{(8)}{=} (\alpha\pi^u\beta)\pi^v\langle c, e_l\rangle.$$

Этим все возможности исчерпаны и ассоциативность доказана.

<u>Лемма 2</u>. Частичные операции $\pi^1, \pi^2, \ldots$ удовлетворяют закону частичной коммутативности, т.е. при $1 \le u < v \le n$ для всех $\alpha \in W_{i_1}^{k_m}$, $\beta \in W_{j_1}^{v k_v}$, $\gamma \in W_{k_1}^{l}$ выполняется равенство

$$\alpha\pi^u(\beta\pi^v\gamma) = \beta\pi^{m\oplus v}(\alpha\pi^u\gamma). \tag{II}$$

<u>Доказательство</u>. Сперва заметим, что здесь $n \ge 2$ и поэтому $\gamma \notin E$. Значит теперь меньше возможностей для типов слов α, β, γ чем при доказательстве ассоциативности.

KI. Пусть $\alpha = e_{k_u}$. Тогда $m = 1$, $m \oplus v = v$ и в силу замечания 2 для любых β и γ имеем

$$e_{k_u}\pi^u(\beta\pi^v\gamma) = \beta\pi^v\gamma = \beta\pi^v(e_{k_u}\pi^u\gamma).$$

K2. Пусть $\beta = e_{k_v}$. Тогда опять ввиду замечания 2 получим

$$\alpha\pi^u(e_{k_v}\pi^v\gamma) = \alpha\pi^u\gamma = e_{k_v}\pi^{m\oplus v}(\alpha\pi^u\gamma).$$

K3. Пусть $\gamma = c \in \tilde{A}$.

K3.I. Если $\alpha = a \in \tilde{A}$, $\beta = b \in \tilde{A}$, то равенство (II) выполняется, ибо все три элемента принадлежат поликатегории A.

K3.2. Пусть $\alpha = a \in \tilde{A}$, но $\beta = \langle b, e_{k_v}\rangle$. Тогда получим

$$a\pi^u(\langle b, e_{k_v}\rangle\pi^v c) \underset{(9)}{=} a\pi^u(b\pi^v c) \underset{K3.1}{=} b\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c) \underset{(9)}{=} \langle b, e_{k_v}\rangle\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c).$$

K3.3. Если $\alpha = \langle a, e_{k_u}\rangle$ и $\beta = b \in \tilde{A}$, то также имеем

$$\langle a, e_{k_u}\rangle\pi^u(b\pi^v c) \underset{(9)}{=} a\pi^u(b\pi^v c) \underset{K3.1}{=} b\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c) \underset{(9)}{=} b\pi^{m\oplus v}(\langle a, e_{k_u}\rangle\pi^u c).$$

К3.4. При $\alpha = \langle a, e_{k_u}\rangle$ и $\beta = \langle b, e_{k_v}\rangle$ опять получим

$$\langle a, e_{k_u}\rangle\pi^u(\langle b, e_{k_v}\rangle\pi^v c) \underset{(9)}{=} \langle a, e_{k_u}\rangle\pi^u(b\pi^v c) \underset{(9)}{=} a\pi^u(b\pi^v c) \underset{K3.1}{=}$$
$$= b\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c) \underset{(9)}{=} \langle b, e_{k_v}\rangle\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c) \underset{(9)}{=} \langle b, e_{k_v}\rangle\pi^{m\oplus v}(\langle a, e_{k_u}\rangle\pi^u c).$$

К4. Пусть, наконец, $\gamma = \langle c, e_l\rangle$. Тогда имеем

$$\alpha\pi^u(\beta\pi^v\langle c, e_l\rangle) \underset{(8)}{=} \alpha\pi^u\langle\beta\pi^v c, e_l\rangle \underset{(8)}{=} \langle\alpha\pi^u(\beta\pi^v c), e_l\rangle \underset{K3}{=}$$
$$= \langle\beta\pi^{m\oplus v}(\alpha\pi^u c), e_l\rangle \underset{(8)}{=} \beta\pi^{m\oplus v}\langle\alpha\pi^u c, e_l\rangle \underset{(8)}{=} \beta\pi^{m\oplus v}(\alpha\pi^u\langle c, e_l\rangle).$$

Этим равенство (II) проверено и лемма доказана.

Следствие 2. Набор $\mathcal{W}_{\hat{J}}$ является сторого левоунитарной поликатегорией.

Доказательство. В силу лемм I и 2 набор $\mathcal{W}_{\hat{J}}$ является поликатегорией, а ввиду замечания 2 при $j \in J^*$ элементы e_j являются левыми единицами поликатегории $\mathcal{W}_{\hat{J}}$. При $j \in J \setminus J^*$ множество A^j_j содержит левую единицу e_j поликатегории A. Покажем, что этот элемент является левой единицей в $\mathcal{W}_{\hat{J}}$. Это в самом деле так, поскольку

$$e_j\pi^u\langle b, e_k\rangle \underset{(8)}{=} \langle e_j\pi^u b, e_k\rangle = \langle b, e_k\rangle$$

при любом $b \in A^k_{j_1^{u-1}; j; j^{\tilde{u}}_{u+1}}$.

Лемма 3. Всякая конгруэнция поликатегории $\mathcal{W}_{\hat{J}}$, которая ненулевая на $\tilde{A} \cup E$, является ненулевой и на $\tilde{A}$.

Доказательство. Пусть Θ конгруэнция поликатегории $\mathcal{W}_{\hat{J}}$ и пусть Θ ненулевая на $\tilde{A} \cup E$. Это означает, что существуют грань $(i_1^m; j) \in \hat{J}$ и элементы $x_1, x_2 \in (\tilde{A} \cup E)^j_{i_1^m}$ причем $x_1 \neq x_2$ такие, что $x_1 \equiv x_2(\Theta)$. Если $(i_1^m; j) \neq (j; j)$ (для некоторого $j \in J^*$), то $(\tilde{A} \cup E)^j_{i_1^m} = A^j_{i_1^m}$ и Θ является тривиальным образом ненулевой на $\tilde{A}$. Поэтому пусть $x_1 = a \in A^j_j$ и $x_2 = e_j \in E$ (случай $x_1 = e_j$, $x_2 = a$ аналогичен в силу симметричности отношения Θ). Поскольку $j \in J^*_k$, то существуют грань $(j_1^{u-1}, j, j^{\tilde{u}}_{u+1}; k) \in \hat{J}$ и элемент $b \in A_{j_1^{u-1} j j^{\tilde{u}}_{u+1}}$ такие, что $a\pi^u b \neq b$. Так как Θ конгруэнция, то из $a \equiv e_j(\Theta)$ вытекает, что $a\pi^u b \equiv e_j\pi^u b(\Theta)$, т.е. $a\pi^u b \equiv b(\Theta)$. Значит, Θ является ненулевой и на подполикатегории A.

Теорема 2. Всякую поликатегорию $A = (J, \hat{J}, A^j_{i_1^m}, \Pi)$ можно вложить в строго левоунитарную поликатегорию $C_{\hat{J}} = (J, \hat{J}, C^j_{i_1^m}, \Pi)$ в качестве существенного левого идеала так, что всякий левый идеал поликатегории A является левым идеалом в $C_{\hat{J}}$.

Доказательство. Исходя из произвольной поликатегории $\mathcal{A}$, для которой $J^{*} \neq \emptyset$, нами построена строго левоунитарная поликатегория $\mathcal{W}_{\hat{J}}$, которая содержит $\mathcal{A}$ в качестве собственной подполикатегории. Известно также (в силу замечания 6), что всякий левый идеал поликатегории $\mathcal{A}$ является левым идеалом поликатегории $\mathcal{W}_{\hat{J}}$.

Пусть Θ максимальная конгруэнция поликатегории $\mathcal{W}_{\hat{J}}$, являющаяся нулевой на $\tilde{A} \cup E$, т.е. разделяющая все элементы из всех $(\tilde{A} \cup E)^{j}_{i_1 \dots i_m}$. Такая конгруэнция существует ввиду следствия I. Введем обозначение

$$\mathcal{C}_{\hat{J}} = \mathcal{W}_{\hat{J}}/\Theta = (J, \hat{J}, \mathcal{W}^{j}_{i_1 \dots i_m}/\Theta^{j}_{i_1 \dots i_m}, \Pi).$$

Поскольку $\mathcal{W}_{\hat{J}}$ есть строго левоунитарная поликатегория, то факторполикатегория $\mathcal{C}_{\hat{J}}$ также является строго левоунитарной. Так как Θ является нулевой на $\mathcal{A}$, то поликатегорию $\mathcal{A}$ можно вложить в поликатегорию $\mathcal{C}_{\hat{J}}$. Поэтому в дальнейшем будем $\mathcal{A}$ считать подполикатегорией в $\mathcal{C}_{\hat{J}}$.

Пусть Ψ произвольная ненулевая конгруэнция поликатегории $\mathcal{C}_{\hat{J}}$. Конгруэнция Ψ индуцирует согласно предложению 5 на поликатегории $\mathcal{W}_{\hat{J}}$ конгруэнцию $\bar{\Psi}$, строго содержащую конгруэнцию Θ. Поэтому в силу выбора конгруэнции Θ соотношение $\bar{\Psi}$ склеивает элементы из $\tilde{A} \cup E$. По лемме 3 теперь получим, что $\bar{\Psi}$ склеивает элементы из $\tilde{A}$. В силу предложения 6 и того, что Θ не склеивает элементов из $\tilde{A} \cup \cup E$, конгруэнция Ψ сама должна являться ненулевой на подполикатегории $\mathcal{A}$. Значит, $\mathcal{A}$ есть существенная подполикатегория в $\mathcal{C}_{\hat{J}}$, где $\mathcal{C}_{\hat{J}}$ строго больше поликатегории $\mathcal{A}$.

Ввиду предложения 7 из замечания 6 вытекает, что всякий левый идеал поликатегории $\mathcal{A}$ является левым идеалом в $\mathcal{C}_{\hat{J}}$.

Следствие 3. Если поликатегория $\mathcal{A} = (J, J, \mathcal{A}^{j}_{i_1 \dots i_m}, \Pi)$ содержит левый идеал $\mathcal{B}$, плотно вложенный в классе $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ (где $\hat{J} \subseteq \mathcal{H}$), то $J = \hat{J}$ и поликатегория $\mathcal{A}$ является строго левоунитарной.

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ не была бы строго левоунитарной, то по предыдущей теореме мы могли бы построить собственную надполикатегорию $\mathcal{C}_{\hat{J}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{H}}$ поликатегории $\mathcal{A}$ такую, что все левые идеалы поликатегории $\mathcal{A}$ являются левыми идеалами в $\mathcal{C}_{\hat{J}}$, причем всякая ненулевая конгруэнция Φ поликатегории $\mathcal{C}_{\hat{J}}$ индуцирует ненулевую конгруэнцию на $\mathcal{A}$. Но тогда Φ индуцирует ненулевую конгруэнцию и на $\mathcal{B}$, что противоречило бы второму требованию плотного вложения для $\mathcal{B}$.

Следствие доказано.

Образуем систему множеств $M=(M_j\,;\,j\in J)$, положив

$$M_j=\bigcup_{(i_1^m;j)\in\hat{\jmath}(j)} W^j_{i_1^m}, \qquad (12)$$

где $\hat{\jmath}(j)$ подмножество всех граней из $\hat{\jmath}$, которые имеют концом элемент $j\in J$, и $\hat{\jmath}$-симметрическую поликатегорию $\mathcal{S}_{\mathfrak{J}}(M)$ (см. [2], стр. 33). Определим набор отображений $\varphi=(\varphi^j_{i_1^m}\,;\,(i_1^m;j)\in\mathfrak{J})$ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{S}_{\mathfrak{J}}(M)$ следующим образом:

$$\alpha_1^m(a\varphi^j_{i_1^m})=\alpha_1\pi^1\ldots\alpha_m\pi^m a \qquad (13)$$

для всех $(\alpha_1^m)\in M_{i_1^m}$, $a\in\mathcal{A}^j_{i_1^m}$. Отметим, что определение корректно, поскольку элемент $\alpha_1\pi^1\ldots\alpha_m\pi^m a\in M_j$.

Напомним, что операция π^u определена в симметрической поликатегории $\mathcal{S}_{\mathfrak{J}}(M)$ следующим образом: произведением функций $f\in\mathcal{S}^{j_u}_{i_1^m}(M)$, $g\in\mathcal{S}^k_{j_1^p}(M)$ является функция $f\pi^u g$, определенная формулой

$$\alpha_1^{m\oplus p}(f\pi^u g)=\alpha_1^{u-1}(\alpha_u^{m\oplus u}f)\alpha_{m+u}^{m\oplus p}g \qquad (14)$$

для всех $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m\oplus p})=(\alpha_1^{m\oplus p})\in M_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}=M_{j_1}\times\ldots\times M_{j_{u-1}}\times M_{i_1}\times\ldots\times M_{i_m}\times M_{j_{u+1}}\times\ldots\times M_{j_p}$.

<u>Лемма 4</u>. Отображение φ является гомоморфизмом поликатегорий, т.е. для любых $a\in\mathcal{A}^{j_u}_{i_1^m}$, $b\in\mathcal{A}^k_{j_1^p}$, $1\le u\le p$, $(i_1^m;j_u)\in\mathfrak{J}$, $(j_1^p;k)\in\mathfrak{J}$ выполняется равенство

$$(a\pi^u b)\varphi^k_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}=(a\varphi^{j_u}_{i_1^m})\pi^u(b\varphi^k_{j_1^p}).$$

<u>Доказательство</u>. Действительно, для любого набора $(\alpha_1^{m\oplus p})\in M_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}$ ввиду формулы (28) из [3] имеем

$$\alpha_1^{m\oplus p}[(a\pi^u b)\varphi^k_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}]\underset{(13)}{=}\alpha_1\pi^1\ldots\alpha_{m\oplus p}\pi^{m\oplus p}(a\pi^u b)=$$

$$=\alpha_1\pi^1\ldots\alpha_{u-1}\pi^{u-1}(\alpha_u\pi^1\ldots\alpha_{m\oplus u}\pi^m a)\pi^u\alpha_{m+u}\pi^{u+1}\ldots\alpha_{m\oplus p}\pi^p b\underset{(13)}{=}$$

$$=\alpha_1^{u-1}(\alpha_u\pi^1\ldots\alpha_{m\oplus u}\pi^m a)\alpha_{m+u}^{m\oplus p}(b\varphi^k_{j_1^p})\underset{(13)}{=}$$

$$=\alpha_1^{u-1}[\alpha_u^{m\oplus u}(a\varphi^{j_u}_{i_1^m})]\alpha_{m+u}^{m\oplus p}(b\varphi^k_{j_1^p})\underset{(14)}{=}$$

$$=\alpha_1^{m\oplus p}[(a\varphi^{j_u}_{i_1^m})\pi^u(b\varphi^k_{j_1^p})].$$

<u>Теорема 3</u>. Всякая поликатегория представима в виде подполикатегории подходящей симметрической поликатегории.

<u>Доказательство</u>. Исходя от произвольной поликатегории $\mathcal{A}=(J,\mathfrak{J},\mathcal{A}^j_{i_1^m},\Pi)$, мы построили симметрическую поликатегорию $\mathcal{S}_{\mathfrak{J}}(M)$ и гомоморфизм φ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{S}_{\mathfrak{J}}(M)$. Остается показать, что φ

является мономорфизмом. Это действительно так. Для произвольных $a, b \in A^1_{i_1^m}$, $a \neq b$, $(i_1^m; j) \in J$ вычислим

$$e_{i_1} \cdots e_{i_m}(a\varphi^1_{i_1^m}) \underset{(13)}{=} e_{i_1}\pi^1 \cdots e_{i_m}\pi^m a \underset{(6)}{=} a,$$

$$e_{i_1} \cdots e_{i_m}(b\varphi^1_{i_1^m}) \underset{(13)}{=} e_{i_1}\pi^1 \cdots e_{i_m}\pi^m a \underset{(6)}{=} b.$$

Поэтому $a\varphi^1_{i_1^m} \neq b\varphi^1_{i_1^m}$ и φ является взаимно однозначным.

Теорема доказана.

Литература

1. Г л у с к и н Л. М., О плотных вложениях. Матем. сб., 1963, 61 (103), № 2, 175-206.
2. Р е д и Э., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 31-61.
3. Р е д и Э., О симметрических поликольцоидах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 61-99.
4. Р е д и Э., О поликатегории многоместных отношений и поликольцоиде частных многоместных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 3-26.
5. Х е н н о Я., Плотно вложенные левые идеалы систем Менгера I. Изв. АН ЭстССР. Физ. мат., 1973, 22, №2, 123-130.
6. Х е н н о Я., Плотно вложенные левые идеалы систем Менгера II. Изв.АН ЭстССР Физ.мат., 1973, 22, №4, 365-372.
7. G r ä t z e r, G., Universal algebra, Princenton, 1968.

Поступило
9 I 1975

POLÜRINGOIDIDE ESITAMISEST

E. Redi

R e s ü m e e

Töö algul tõestatakse polüringoidide kongruentside mõned omadused. Seejärel tuletatakse polükategooria vasakpoolsete ideaalide tihedalt sisestatuse tingimused. Lõpuks tõestatakse teoreem selle kohta, et iga polükategooria on esitatav sobiva sümmeetrilise polükategooria alampolükategooriana.

ABOUT A REPRESENTATION OF POLYRINGOIDS

E. Redi

S u m m a r y

In the present paper some properties of congruences of polyringoids are stated. It has been proved that if a polycategory (a polyringoid with $\Omega = \emptyset$) $\mathcal{A} = (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{A}^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ has a densely embedded left ideal then $\mathcal{A}$ contains a complete system of left units $E = (e_i ; i \in \mathcal{I})$, where $e_i \pi^u b = b$ for arbitrary $b \in \mathcal{A}^{k}_{j_1^{u-1}, i, j_{u+1}^{r}}$, $(j_1^{u-1}, i, j_{u+1}^{r}; k) \in \mathcal{J}$, $1 \leq u \leq r$.

It has been shown that every polycategory can be represented as a subpolycategory of a symmetric polycategory.

Ω-КОЛЬЦА, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ ПОЛИГОНЫ n-СВОБОДНЫ

В. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей статье применительно к полигонам над Ω-кольцом рассматривается одно обобщение понятия свободы Ω-алгебры в некотором многообразии Ω-алгебр, называемое нами n-свободой. Статья посвящена описанию (с точностью до эквивалентности) Ω-колец, с нулем, над которыми все полигоны являются n-свободными. В § I вводятся необходимые понятия, конкретизируется постановка вопроса и приводятся необходимые примеры. В § 2 доказаны вспомогательные результаты, преимущественно относящиеся к циклическим полигонам и полигонам над Ω-телами. Формулировки и окончательные доказательства основных результатов данной статьи содержатся в § 3.

§ I. Вводные понятия

Пусть Ω - некоторая сигнатура. Множество A называется Ω-кольцом (см. [6]), если

К.I. A является Ω-алгеброй, обозначаемой A^{Ω},

К.2. A является мультипликативно записанной полугруппой,

К.3. для любой n-арной ($n \geq 1$) операции $\omega \in \Omega$ и произвольных $a, c_1, \ldots, c_n \in A$ выполняется

$$a(c_1 \cdots c_n \omega) = (ac_1) \cdots (ac_n)\omega, \quad (c_1 \cdots c_n \omega)a = (c_1 a) \cdots (c_n a)\omega$$

К.4. если ν - нульарная операция из Ω и 0_ν - фиксируемый ею в A элемент, то

$$a0_\nu = 0_\nu a = 0_\nu$$

для любого $a \in A$.

Понятие Ω-кольца, таким образом, является естественным обобщением понятий полукольца, кольца, дистрибутивной структуры, полугруппы.

С каждым Ω-кольцом связана категория правых (левых) полигонов над ним. Множество M называется правым полигоном над Ω-кольцом A или просто A-полигоном (см. [4]), если

П.I. M является Ω-алгеброй, обозначаемой M^{Ω}, П.2. для любых $m \in M$, $a \in A$ определено $ma \in M$, причем $(ma)b = m(ab)$ для любых $m \in M$; $a, b \in A$,

П.3. для любой n-арной $(n \geq 1)$ операции $\omega \in \Omega$ и произвольных $m, m_1, \ldots, m_n \in M$; $a, a_1, \ldots, a_n \in A$ выполняется
$$m(a_1 \ldots a_n \omega) = (ma_1) \ldots (ma_n)\omega, \quad (m_1 \ldots m_n \omega)a = (m_1 a) \ldots (m_n a)\omega$$

П.4. если $O_{\nu M}$ – элемент из M, фиксируемый нульарной операцией $\nu \in \Omega$, то для произвольных $m \in M$, $a \in A$ выполняется
$$mO_\nu = O_{\nu M} \cdot a = O_{\nu M}.$$

Заметим, что это определение полигона над Ω-кольцом совпадает с определением представления Ω-кольца в работе [6].

Из определения Ω-кольца и полигона над ним следует, что все нульарные операции из Ω, если они имеются, фиксируют в Ω-кольце A (произвольном A-полигоне M) один и тот же элемент 0 (O_M), являющийся одноэлементной подалгеброй [6]. Действительно, для любых нульарных операций $\nu, \mu \in \Omega$, ввиду К.4.,
$$O_\nu = O_\nu O_\mu = O_\mu$$
и тогда, ввиду П.4.,
$$O_{\nu M} = O_{\nu M} \cdot O_\nu = O_{\nu M} O_\mu = O_{\mu M}.$$

Для произвольной n-арной $(n \geq 1)$ операции $\omega \in \Omega$, ввиду К.3. и П.3.,
$$O_\nu \ldots O_\nu \omega = (O_\nu O_\nu) \ldots (O_\nu O_\nu)\omega = (O_\nu \ldots O_\nu \omega) O_\nu = O_\nu,$$
$$O_{\nu M} \ldots O_{\nu M} \omega = (O_{\nu M} O_\nu) \ldots (O_{\nu M} O_\nu)\omega = (O_{\nu M} \ldots O_{\nu M} \omega) O_\nu = O_{\nu M}.$$

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что множество нульарных операций из Ω не пусто, т.е. Ω-кольцо A содержит нуль 0. Такое Ω-кольцо A мы называем Ω-кольцом с нулем. В этом случае каждый A-полигон M содержит наименьший одноэлементный подполигон O_M. Назовем A-полигон M ненулевым, если $O_M \neq M$. Всюду также будем предполагать, что Ω-кольцо A содержит мультипликативную единицу 1 $(1 \neq 0)$, т.е. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого $a \in A$ и все A-полигоны являются унитарными, т.е. для любого элемента m из произвольного A-полигона M

выполняется $m1 = m$.

Отображение $\mathcal{A}$-полигонов $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ называется $\mathcal{A}$-гомоморфизмом (или просто гомоморфизмом), если φ есть гомоморфизм Ω-алгебры $\mathcal{M}^{\Omega}$ в Ω-алгебру $\mathcal{K}^{\Omega}$ и, кроме того, $\varphi(ma) = \varphi(m)a$ для произвольных $m \in \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ - кольцо (моноид), то $\mathcal{A}$-гомоморфизмы совпадают с гомоморфизмами модулей (обычных полигонов).

Пусть $\mathfrak{U}$ - некоторое многообразие Ω-алгебр. Назовем Ω-алгебру $\mathcal{M} \in \mathfrak{U}$ n-свободной в $\mathfrak{U}$ если в $\mathcal{M}$ существует такая система образующих $\{m_i \mid i \in J\}$, что всякое отображение этих образующих в не более, чем n элементов произвольной Ω-алгебры $\mathcal{L} \in \mathfrak{U}$ может быть продолжено до гомоморфизма из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}$. В этом случае систему $\{m_i \mid i \in J\}$ будем называть системой n-свободных образующих Ω-алгебры $\mathcal{M}$. При бесконечном n понятия свободы и n-свободы совпадают, поскольку для продолжения отображения системы образующих до гомоморфизма достаточно, чтобы это отображение сохраняло все соотношения между образующими. Но это следует в данном случае из того, что все соотношения могут быть записаны в счетном алфавите ([1], стр. 177). Иначе обстоит дело, когда n - конечное число. Для любого конечного n всякая Ω-алгебра $\mathcal{M}$, свободная в многообразии $\mathfrak{U}$ будет, очевидно, и n-свободной в $\mathfrak{U}$. Обратное, вообще говоря, не выполняется. Пример, иллюстрирующий это, мы приведем чуть позднее в интересующей нас ситуации.

Совокупность всех $\mathcal{A}$-полигонов над Ω-кольцом $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является многообразием Ω-алгебр, однако, ее можно рассматривать как многообразие Ω'-алгебр, где $\Omega' = \{\Omega, \cdot\mathcal{A}\}$ состоит из всех операций из Ω и унарных операций, соответствующих умножению справа на элементы из $\mathcal{A}$. Рассматриваемое Ω-кольцо $\mathcal{A}$, поскольку оно само является $\mathcal{A}$-полигоном, можно также рассматривать как Ω'-алгебру $\mathcal{A}^{\Omega'}$.

Пусть $\Lambda(\mathcal{A})$ есть многообразие $\mathcal{A}$-полигонов (или Ω'-алгебр), порожденное $\mathcal{A}$-полигоном $\mathcal{A}$, т.е. $\Lambda(\mathcal{A}) = HSP(\mathcal{A}^{\Omega'})$ (см. [8], стр. 152). Известно ([1], стр. 186), что в многообразии Ω-алгебр, где Ω - произвольная сигнатура, существуют свободные Ω-алгебры, значит в $\Lambda(\mathcal{A})$ существуют свободные, следовательно, и n-свободные $\mathcal{A}$-полигоны для любого n.

В настоящей статье решается вопрос: над каким Ω-кольцом $\mathcal{A}$ все ненулевые $\mathcal{A}$-полигоны из $\Lambda(\mathcal{A})$ являются n-свободными в $\Lambda(\mathcal{A})$? Оказывается, что все ненулевые $\mathcal{A}$-полигоны из $\Lambda(\mathcal{A})$ n-свободны в $\Lambda(\mathcal{A})$ для некоторого $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда Ω-кольцо $\mathcal{A}$ эквивалентно либо некоторому телу, либо двухэлементному моноиду $\{I,0\}$. Другими словами, это имеет место когда $\Lambda(\mathcal{A})$ эквивалентно либо многообразию векторных пространств над некоторым телом, либо многообразию множеств с отмеченным элементом, и, следовательно, когда все ненулевые $\mathcal{A}$-полигоны из $\Lambda(\mathcal{A})$ свободны в $\Lambda(\mathcal{A})$ Заметим, что существуют Ω-кольца, над которыми все ненулевые полигоны из соответствующего многообразия являются I-свободными, но не все - свободными. Таким, например, будет двухэлементная дистрибутивная структура $\{I,0\}$.

<u>Теорема 0</u>. Существуют Ω-кольцо $\mathcal{A}$ с нулем и $\mathcal{A}$-полигон $M \in \Lambda(\mathcal{A})$, являющийся 2-свободным, но не 3-свободным в $\Lambda(\mathcal{A})$.

<u>Доказательство</u>. Пусть множество $\mathcal{A}$ совпадает с множеством натуральных чисел с нулем 0 и Ω состоит из нульарной операции, фиксирующей элемент 0, и одной тернарной операции ω Операция ω определена на $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$xyz\omega = \begin{cases} \min\{x,y,z\}, & \text{если, } x, y, z \text{ - попарно различные числа} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Умножением в $\mathcal{A}$ считаем обычное умножение натуральных чисел. Легко проверить, что $\mathcal{A}$ является Ω-кольцом с нулем 0 и единицей I.

Ясно, что в многообразии $\Lambda(\mathcal{A})$ будут выполняться тождества

$$x_1 x_2 x_2 \omega = 0, \qquad 0 x_1 x_2 \omega = 0,$$
$$x_1 x_2 x_3 \omega = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} \omega, \tag{I}$$

где σ - любая подстановка на множестве $\{I,2,3\}$, поскольку эти тождества выполняются в $\mathcal{A}$.

Пусть F_3 - свободный A-полигон из $\Lambda(A)$ с тремя свободными образующими f_1, f_2, f_3. Рассмотрим A-полигон $F_3/\rho \in \Lambda(A)$, где ρ - минимальная конгруэнция на F_3, склеивающая элементы $f = f_1 f_2 f_3 \omega$ и $0 \in F_3$. Покажем, что A-полигон $M = F_3/\rho$ является 2-свободным в $\Lambda(A)$, но не 3-свободным.

Вначале покажем, что из $(f_i, g) \in \rho$ следует $f_i = g$ для любого $i = 1,2,3$. Действительно, пусть, для определенности, $(f_1, g) \in \rho$ для некоторого $g \in F_3$. Это, ввиду теоремы 3 ([8], стр. 54), означает, что найдутся элементы $z_0 = f_1, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = g$ из F_3 и унарные алгебраические функции $p_1, \dots, p_n$ на Ω-алгебре F_3, так что

$$\{z_{i-1}, z_i\} = \{p_i(f), p_i(0)\}$$

для каждого $i = 1, \dots, n$. В частности, $\{f_1, z_1\} = \{p_1(f), p_1(0)\}$. Покажем, что $z_1 = f_1$. Для этого покажем, что функция $p_1(x)$ не зависит от x.

Если $p_1(x)$ зависит от x, то тогда индукцией по рангу $p_1(x)$, ввиду тождеств (I), получим $p_1(0) = 0$. Следовательно, $f_1 \neq p_1(0)$ и значит $f_1 = p_1(f)$. Отображение $f_1 \to 1 \in A$, $f_2 \to 0 \in A$, $f_3 \to 0 \in A$ может быть продолжено до гомоморфизма $\varphi : F_3 \to A$. При этом

$$\varphi(f) = \varphi(f_1 f_2 f_3 \omega) = \varphi(f_1)\varphi(f_2)\varphi(f_3)\omega = 100\omega = 0,$$

т.е.

$$1 = \varphi(f_1) = \varphi(p_1(f)) = p'(\varphi(f)) = p'(0) = 0$$

(здесь $p'(x)$ - унарная алгебраическая функция на $A^{\Omega'}$, получающаяся из $p_1(x)$ применением гомоморфизма φ). Получили противоречие.

Таким образом, функция $p_1(x)$ не зависит от x и значит $p_1(f) = p_1(0)$, т.е. $f_1 = z_1$. Аналогично, индукцией по числу n легко показать, что $f_1 = z_n = g$.

Мы показали, что для любого $i = 1,2,3$ будет $[f_i] = \{f_i\}$ (через $[g]$ мы обозначаем класс конгруэнции ρ, содержащий элемент $g \in F_3$). Поэтому ни один из классов $[f_i]$ не выражается через остальные и $[f_1]$, $[f_2]$, $[f_3]$ составляют единственную минимальную систему образующих A-полигона $M = F_3/\rho$. Покажем, что они составляют систему 2-свободных образующих.

Пусть B - произвольный A-полигон из $\Lambda(A)$ и b_1, b_2 - любые элементы из B. Пусть χ является произвольным отображением множества $\{[f_1], [f_2], [f_3]\}$ на множество $\{b_1, b_2\}$, для определенности пусть $[f_1] \to b_1$, $[f_2] \to b_2$, $[f_3] \to b_2$. Отображение $f_1 \to b_1$, $f_2 \to b_2$, $f_3 \to b_2$ можно продолжить до гомоморфизма $\varphi: F_3 \to B$ и пусть σ - конгруэнция на F_3, соответствующая гомоморфизму φ. Так как $\varphi(f) = \varphi(f_1 f_2 f_3 \omega) = b_1 b_2 b_2 \omega = 0 = \varphi(0)$, то $(f, 0) \in \sigma$, а поскольку ρ была минимальной конгруэнцией на F_3, склеивающей f и 0, то для любых $x, y \in F_3$ из $(x, y) \in \rho$ следует $(x, y) \in \sigma$ и значит $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Пусть теперь $\varphi': M \to B$ такое отображение, что

$$\varphi'[x] = \varphi(x)$$

для любого $x \in F_3$. Однозначность отображения φ' следует из того, что для произвольных $x, y \in F$, равенство $[x] = [y]$, т.е. $(x, y) \in \rho$, влечет, как мы видели $\varphi(x) = \varphi(y)$. Из того, что φ есть гомоморфизм, легко следует, что φ' есть также гомоморфизм. Ясно, что гомоморфизм φ' есть продолжение отображения χ. Таким образом, A-полигон M является 2-свободным в $\Lambda(A)$. Однако он не 3-свободен, ибо отображение $\psi: [f_1] \to 1 \in A$, $[f_2] \to 2 \in A$, $[f_3] \to 3 \in A$ не может быть продолжено до некоторого гомоморфизма $\psi: M \to A$, ввиду

$$\psi([f_1][f_2][f_3]\omega) = \psi[f_1 f_2 f_3 \omega] = \psi[0] = 0,$$

$$(\psi[f_1])(\psi[f_2])(\psi[f_3])\omega = 123\omega = 1 \neq 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что по образцу построенного в теореме 0 примера для любого $n \geq 2$ можно привести пример Ω-кольца A, над которым существует n-свободный A-полигон в $\Lambda(A)$, не являющийся $(n+1)$-свободным.

§ 2. Циклические полигоны. Ω-тела

Пусть A является Ω-кольцом с нулем 0 и единицей I $(0 \neq 1)$ и пусть $\Lambda(A) = HSP(A^{\Omega})$. Через Ω_n обозначим совокупность всех n-арных операций из Ω.

Лемма I. Для произвольной унарной операции $\omega \in \Omega_1$ найдется элемент $z \in A$, коммутирующий с любым элементом и такой, что $m\omega = mz$ для любого элемента m из произвольного A-полигона M.

Доказательство. Из условия П.3 следует

$$m\omega = (m1)\omega = m(1\omega) = mz \quad ,$$

где $z = 1\omega$. Для любого $a \in A$ имеем

$$a\omega = (a1)\omega = a(1\omega) = az,$$
$$a\omega = (1a)\omega = (1\omega)a = za,$$

т.е. $za = az$. Лемма доказана.

Отношение ρ на Ω-кольце A назовем правой конгруэнцией $_\Omega\Omega$-кольца A, если ρ есть конгруэнция Ω-алгебры A и для любых $a, b, c \in A$ из условия $(a,b) \in \rho$ следует $(ac, bc) \in \rho$. Назовем ρ двусторонней конгруэнцией на A, или просто конгруэнцией, если, кроме того, из $(a,b) \in \rho$ следует $(ca, cb) \in \rho$.

Пусть ρ - правая конгруэнция на Ω-кольце A. Рассмотрим фактор-множество A/ρ и для произвольных $a, b \in A$ положим

$$[a]b = [ab] , \tag{2}$$

где через $[a]$ обозначен класс конгруэнции ρ, содержащий элемент $a \in A$. Простой проверкой условий П.I.-П.4. легко убедиться, что условие (2) задает на A/ρ структуру A-полигона. Ясно, что A-полигон A/ρ принадлежит $\Lambda(A)$ и является циклическим, т.е. с одним образующим $[1] \in A/\rho$

Верно и обратное, а именно

Лемма 2. Каждый циклический A-полигон изоморфен A-полигону A/ρ, где ρ - подходящая правая конгруэнция Ω-кольца A.

Доказательство. Пусть M - произвольный циклический A-полигон и m - его образующий, т.е. $M = mA$. Положим

$$(a, b) \in \rho \Leftrightarrow ma = mb . \tag{3}$$

Легко проверить, что ρ есть правая конгруэнция Ω-кольца A и $M \cong A/\rho$ Лемма доказана.

Будем говорить, что правая конгруэнция ρ Ω-кольца A порождается элементом $m \in M$, если ρ задается условием (3). Через $\mathbf{1}_A$ будем обозначать единичную конгруэнцию на A, склеивающую все элементы из A в один элемент, а через $\mathbf{0}_A$ будем обозначать нулевую конгруэнцию, не склеивающую никакие различные элементы из A. Конгруэнции $\mathbf{1}_A$ и $\mathbf{0}_A$ будем называть тривиальными. Ясно, что конгруэнция $\mathbf{1}_A$ порождается элементом $0 \in A$, а $\mathbf{0}_A$ порождается элементом $1 \in A$. Пусть σ, π - правые конгруэнции на Ω-кольце A. Скажем, что σ больше π ($\sigma \geqslant \pi$), если для произвольных $a, b \in A$ из условия $(a, b) \in \pi$ следует $(a, b) \in \sigma$. Правая конгруэнция $\pi \neq \mathbf{1}_A$ на Ω-кольце A называется максимальной, если из условия $\pi \leqslant \sigma$ для некоторой правой конгруэнции $\sigma \neq \mathbf{1}_A$ на A следует $\pi = \sigma$. Идеалом (двусторонним, правым, левым) Ω-кольца A называется подмножество в A, замкнутое относительно операций из Ω и являющееся идеалом (двусторонним, правым, левым) в полугруппе $(A, \cdot)$.

Пусть M - произвольный A-полигон из $\Lambda(A)$. Как уже отмечалось в § I.I, M можно рассматривать как Ω'-алгебру, где $\Omega' = \{\Omega, \cdot A\}$, принадлежащую многообразию $\Lambda(A)$. Такое рассмотрение A-полигонов как Ω'-алгебр часто будет нам удобным, поскольку тогда применимы все понятия и теоремы, имеющие смысл для произвольных универсальных алгебр. Через $\overline{\Omega}$ обозначим совокупность главных производных операций ([2], стр. I53-I54) от Ω'. Для произвольных $a_1, \ldots, a_n \in A$ и произвольной n-арной ($n \geqslant 1$) операции p из $\overline{\Omega}$, т.е. $p \in \overline{\Omega}_n$, элемент $p(a_1, \ldots, a_n)$ условимся обозначать $\sum\limits_p a_i$. Аналогичное обозначение примем и для элементов любого A-полигона.

<u>Лемма 3</u>. (см. [8], стр. 72, лемма 8). Пусть M - произвольный A-полигон и пусть $\psi: M \to \mathcal{L}$ является A-гомоморфизмом в A-полигон $\mathcal{L}$. Для произвольной n-арной ($n \geqslant 1$) главной производной операции $p \in \overline{\Omega}_n$ и любых $m_1, \ldots, m_n \in M$ выполняется

$$\psi\left(\sum_p^n m_i\right) = \sum_p^n \psi(m_i). \qquad (4)$$

<u>Следствие I</u>. Для произвольной n-арной ($n \geqslant 1$) главной производной операции $p \in \overline{\Omega}$ и любых $a_1, \ldots, a_n$ из A и любого элемента m из произвольного A-полигона M

$$m\left(\sum_i^r a_i\right) = \sum_i^r (ma_i) .$$

Действительно, отображение $\psi : A \to M$ такое, что $\psi(a) = ma$ для любого $a \in A$ является A-гомоморфизмом A-полигона A в M. Тогда по лемме I.3, ввиду (4),

$$m\left(\sum_i^r a_i\right) = \psi\left(\sum_i^r a_i\right) = \sum_i^r \psi(a_i) = \sum_i^r (ma_i) .$$

<u>Теорема I</u>. Пусть A - произвольное Ω-кольцо с нулем. Следующие условия равносильны:

I) все ненулевые циклические A-полигоны I-свободны в $\Lambda(A)$;

2) все ненулевые циклические A-полигоны свободны в $\Lambda(A)$;

3) на Ω-кольце A отсутствуют нетривиальные правые конгруэнции.

<u>Доказательство</u>. Импликация 2) $\Longrightarrow$ I) очевидна. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) следует из того, что если на Ω-кольце A отсутствуют нетривиальные правые конгруэнции, то всякий ненулевой циклический A-полигон по лемме 2 изоморфен A-полигону A, который, очевидно, является свободным циклическим A-полигоном.

Докажем, что I) $\Rightarrow$ 3). Пусть все ненулевые циклические A-полигоны I-свободны в $\Lambda(A)$ и на A существует нетривиальная правая конгруэнция ρ. Покажем, что это предположение приведет нас к противоречию.

Ясно, что $(1,0) \notin \rho$, ибо в противном случае $(1a, 0a) \in \rho$, т.е. $(a, 0) \in \rho$ для любого $a \in A$ и $\rho = 1_A$. Рассмотрим A-полигон A как Ω'-алгебру, тогда, очевидно, ρ есть конгруэнция Ω'-алгебры $A^{\Omega'}$. По следствию 6.4 ([I], стр. 103) существует максимальная конгруэнция π на Ω'-алгебре $A^{\Omega'}$, такая, что $\pi \geq \rho$ и $(1,0) \notin \pi$. Возвращаясь к A-полигону A, получим, что π - максимальная правая конгруэнция на Ω-кольце A и $\pi \geq \rho$.

Покажем, что в A найдется элемент $i \in A$, порождающий правую конгруэнцию π. Полигон A/π является циклическим с образующим [I] и, по предположению I-свободным. Пусть $\Sigma = \{[a_1], \dots, [a_n], \dots\}$ система I-свободных образующих A-полигона A/π. Отображение $\psi : \Sigma \to 1 \in A$ по условию может быть продолжено до A-гомоморфизма

$\psi : A/\pi \longrightarrow A$. Положим $b = \psi[1]$. Тогда, ввиду $[1]a_1 = [a_1]$, получим

$$1 = \psi[a_1] = \psi([1]a_1) = (\psi[1])a_1 = ba_1. \tag{5}$$

Если для некоторых $c, d \in A$ верно $(c,d) \in \pi$, то $[1]c = [c] = [d] = [1]d$ и поэтому

$$bc = (\psi[1])c = \psi[c] = \psi[d] = (\psi[1])d = bd. \tag{6}$$

Условие (6) означает, что правая конгруэнция τ на A, порожденная элементом $b \in A$, больше π. Ввиду максимальности π, отсюда следует, что либо $\tau = \pi$, либо $\tau = \mathbf{1}_A$. Если $\tau = \mathbf{1}_A$, то $(1,0) \in \tau$ и тогда $b \cdot 1 = b0$, т.е. $b = 0$, что противоречит условию (5). Следовательно, $\tau = \pi$ и элемент $b \in A$ порождает правую конгруэнцию π.

Теперь покажем, что элемент $b^2 \in A$ порождает правую конгруэнцию σ, которая строго больше π. Ясно, что $\sigma \geq \pi$. Действительно, если $(c,d) \in \pi$, то $bc = bd$ и тогда $b^2c = b^2d$, т.е. $(c,d) \in \sigma$. Если $\sigma = \mathbf{1}_A$, то, как мы уже видели, отсюда следует $b^2 = 0$, что противоречит условию (5). Ввиду максимальности π, будет $\sigma = \pi$. Покажем, однако, что это не так. Действительно, пусть $c, d \in A$ такие элементы, что $(c,d) \in \pi$ и $c \neq d$. Такие элементы найдутся ввиду нетривиальности π. Тогда

$$b(a_1c) = (ba_1)c = c \neq d = (ba_1)d = b(a_1d),$$

т.е. $(a_1c, a_1d) \notin \pi$. В то же время $bc = bd$ и, следовательно,

$$b^2(a_1c) = b(ba_1)c = bc = bd = b(ba_1)d = b^2(a_1d),$$

т.е. $(a_1c, a_1d) \in \sigma$. Полученное противоречие доказывает импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Теорема доказана.

Следствие 2. Если все ненулевые циклические A-полигоны 1-свободны в $\Lambda(A)$, то полугруппа $(A,\cdot)$ является полугруппой с левым сокращением, т.е. из $ab = ac$ и $a \neq 0$ следует $b = c$ для любых $a, b, c \in A$.

Действительно, правая конгруэнция ρ, порожденная элементом $a \in A$ по теореме 1 должна быть тривиальной, но ввиду $a \neq 0$ будет $\rho = \mathbf{0}_A$. Тогда, поскольку $(b,c) \in \rho$ имеем $b = c$.

Произвольное Ω-кольцо $\mathcal{A}$ (с нулем) назовем Ω-телом, если полугруппа $(\mathcal{A},\cdot)$ является группой (с нулем). Назовем Ω-кольцо $\mathcal{A}$ Ω-полем, если $\mathcal{A}$ является Ω-телом и полугруппа $(\mathcal{A},\cdot)$ коммутативна.

Следующая теорема приводит нас к рассмотрению Ω-тел.

Теорема I.2. Если все ненулевые $\mathcal{A}$-полигоны из $\Lambda(\mathcal{A})$ являются I-свободными в $\Lambda(\mathcal{A})$, то Ω-кольцо $\mathcal{A}$ является Ω-телом.

Доказательство. Если для каждого $a \neq 0$ из Ω-кольца $\mathcal{A}$ правый идеал $a\mathcal{A}$ совпадает с $\mathcal{A}$, то, поскольку $\mathcal{A}$ содержит единицу, каждый ненулевой элемент из $\mathcal{A}$ имеет правый обратный. Но тогда $(\mathcal{A},\cdot)$ есть группа с нулем и $\mathcal{A}$ является Ω-телом.

Предположим, что существует $a \neq 0$ из $\mathcal{A}$, такой, что $a\mathcal{A} \neq \mathcal{A}$. Покажем, что это предположение приводит к возможности построения $\mathcal{A}$-полигона, не являющегося I-свободным в $\Lambda(\mathcal{A})$.

Пусть $\{d_i \mid i \in \mathcal{N}\}$ – счетное множество символов, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел $(0 \notin \mathcal{N})$. Для каждого $i \in \mathcal{N}$ образуем свободный циклический $\mathcal{A}$-полигон $\mathfrak{D}_i = d_i\mathcal{A}$ с образующим d_i, т.е. $\mathfrak{D}_i = \{d_i c \mid c \in \mathcal{A}\}$. Пусть $i, j \in \mathcal{N}$ и $i < j$. Построим отображение ψ_{ji} из $\mathfrak{D}_i$ в $\mathfrak{D}_j$ следующим образом:

$$\psi_{ji}(d_i c) = d_j a^{j-i} c$$

для произвольного $c \in \mathcal{A}$, где a – фиксированный в начале доказательства элемент со свойством $a\mathcal{A} \neq \mathcal{A}$. Из равенств

$$[\psi_{ji}(d_i c)]f = (d_j a^{j-i} c)f = d_j a^{j-i} cf = \psi_{ji}(d_i cf),$$

$$\psi_{ji}(\sum_k^{\omega} d_i c_k) = \psi_{ji}[d_i(\sum_k^{\omega} c_k)] = (d_j a^{j-i})\sum_k^{\omega} c_k = \sum_k^{\omega}(d_j a^{j-i} c_k) = \sum_k^{\omega}\psi_{ji}(d_i c_k)$$

для произвольных $c, f, c_1, \dots, c_n \in \mathcal{A}$, $\omega \in \Omega_n (n \geq 1)$, следует, что ψ_{ji} есть $\mathcal{A}$-гомоморфизм из $\mathfrak{D}_i$ в $\mathfrak{D}_j$. Для произвольного $i \in \mathcal{N}$ в качестве $\psi_{ii} : \mathfrak{D}_i \to \mathfrak{D}_i$ возьмем тождественное отображение $\mathcal{A}$-полигона $\mathfrak{D}_i$. Тогда для произвольных $i, j, k \in \mathcal{N}$ с условием $i \leq j \leq k$ имеем

$$\psi_{kj}\psi_{ji}(d_i c) = \psi_{kj}(d_j a^{j-i} c) = d_k a^{k-j} a^{j-i} c = d_k a^{k-i} c = \psi_{ki}(d_i c)$$

для каждого $c \in \mathcal{A}$, т.е. $\psi_{kj}\psi_{ji} = \psi_{ki}$ (в вышеприведенной формуле считаем a^0 равным $1 \in \mathcal{A}$). Таким образом, система Ω-алгебр $\{\mathcal{D}_i \mid i \in N\}$ вместе с гомоморфизмами $\{\psi_{ji} \mid j, i \in N\}$ является прямой ([8], стр. 129). Существует Ω-алгебра $\mathcal{D}$, являющаяся прямым пределом ([8], стр. 130) этой системы. Напомним, что $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{i\in N} \mathcal{D}_i /_{\equiv}$, где отношение $\equiv$ определяется следующим образом:

$x \equiv y \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_i,\ y \in \mathcal{D}_j$ для некоторых $i, j \in N$ и существует такой $k \in N$, что $k \geq i$, $k \geq j$ и $\psi_{ki}(x) = \psi_{kj}(y)$

Известно, что всякое многообразие алгебр замкнуто относительно взятия прямых пределов ([8], стр. 156), а так как все Ω'-алгебры $\mathcal{D}_i$ принадлежат $\Lambda(A)$, то и $\mathcal{D}$ принадлежит $\Lambda(A)$, т.е. $\mathcal{D}$ является A-полигоном из $\Lambda(A)$. По предположению, $\mathcal{D}$ является 1-свободным A-полигоном.

Вначале покажем, что A-полигон $\mathcal{D}$ не является циклическим. Предположим противное, пусть $\bar{d}$ - образующий A-полигона $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D} = \bar{d}A$ (через $\bar{x}$ мы обозначим класс отношения $\equiv$, содержащий элемент $x \in \bigcup\limits_{i\in N}\mathcal{D}_i$). Тогда $d \in \bigcup\limits_{i\in N}\mathcal{D}_i$ и существуют также $i \in N$, $c \in A$, что $d = d_i c$. По определению операций из Ω' на прямом пределе $\mathcal{D}$ имеем $\bar{x}b = \overline{xb}$ для любых $x \in \bigcup\limits_{i\in N}\mathcal{D}_i$, $b \in A$. Поэтому $\bar{d} = \overline{d_i c} = \bar{d}_i c$. Поскольку $\bar{d}A = \mathcal{D}$ найдется $f \in A$, такой, что $\bar{d}f = \bar{d}_{i+1}$ т.е. $\bar{d}f = \bar{d}_i cf = \bar{d}_{i+1}$. Таким образом, $\bar{d}_i cf = \bar{d}_{i+1}$, а это означает, что $d_i cf \equiv d_{i+1}$, т.е. найдется такой $l \in N$, что $l \geq i+1$ и выполняется $\psi_{li}(d_i cf) = \psi_{l,i+1}(d_{i+1})$, т.е.

$$d_l a^{l-i} cf = d_l a^{l-i-1}.$$

Отсюда следует, что $a^{l-i} cf = a^{l-i-1}$, или, что то же самое $a^{l-i-1}(acf) = a^{l-i-1}$. Так как $a \neq 0$, то по следствию 2 последнее равенство можно $l-i-1$ раз сократить слева на $a \in A$ и мы получим $acf = 1$, что противоречит условию $aA \neq A$. Следовательно, $\mathcal{D}$ не является циклическим A-полигоном.

Теперь покажем, что утверждение о том, что $\mathcal{D}$ является 1-свободным A-полигоном в $\Lambda(A)$, приводит к противоречию. Пусть $\bar{d}$ и $\bar{d}'$ - некоторые элементы из $\mathcal{D}$, входящие в систему 1-свободных образующих A-полигона $\mathcal{D}$ и $\bar{d} \neq \bar{d}'$ Тогда $d = d_i c$, $d' = d_j f$ для некоторых $i, j \in N$, $c, f \in A$. Ясно, что $c, f \neq 0$. Пусть для определенности $j \geq i$, тогда,

ввиду
$$\psi_{ji}(d_i c) = d_j a^{j-i} c = \psi_{jj}(d_j a^{j-i} c) \quad ,$$
имеем $d_i c = d_j a^{j-i} c$, т.е.
$$\overline{d} = \overline{d_i c} = \overline{d_j a^{j-i} c} = \overline{d_j} a^{j-i} c. \qquad (7)$$

Берем отображение φ', переводящее систему I-свободных образующих A-полигона $\mathfrak{D}$ в единицу $1 \in A$ из Ω-кольца A, в частности $\varphi'(\overline{d}) = \varphi'(\overline{d}') = 1$. Это отображение может быть продолжено до A-гомоморфизма $\varphi : \mathfrak{D} \to A$, такого, что $\varphi(\overline{d}) = \varphi(\overline{d}') = 1$. Пусть $z = \varphi(\overline{d}_j) \in A$. Тогда
$$1 = \varphi(\overline{d}') = \varphi(\overline{d_j f}) = \varphi(\overline{d}_j) f = zf,$$
$$1 = \varphi(\overline{d}) = \varphi(\overline{d_j a^{j-i} c}) = \varphi(\overline{d}_j) a^{j-i} c = z a^{j-i} c,$$
т.е. $zf = z a^{j-i} c = 1$. Отсюда, ввиду следствия 2, получаем $f = a^{j-i} c$. Но тогда
$$\overline{d}' = \overline{d_j f} = \overline{d_j a^{j-i} c} = \overline{d_i c} = \overline{d},$$
что противоречит предположению $\overline{d}' \neq \overline{d}$. Теорема доказана.

Продолжим доказательство вспомогательных утверждений.

Пусть B – прямой квадрат A-полигона A, т.е. совокупность всевозможных пар элементов из A, на которых операции из $\Omega' = \{\Omega, \cdot A\}$ действуют покомпонентно. Ясно, что A-полигон B принадлежит $\Lambda(A)$. Через $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ обозначим, соответственно, элементы (I,0) и (0,I) из B, а через $\mathfrak{D}$ обозначим множество $\{(a,0), (0,c) \mid a, c \in A\}$. Очевидно, $\mathfrak{D} \subset B$.

Лемма 4. Пусть A является Ω-телом. Обозначим через C подполигон A-полигона $B = A \times A$, порожденный элементами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$. Тогда либо

I) $C = B$ и существует бинарная главная производная операция $p' = p'(x,y) \in \overline{\Omega}$, такая, что $p'(a,0) = p'(0,a) = a$ для любого $a \in A$, либо

2) $C = \mathfrak{D}$ и не существует бинарной главной производной операции $p = p(x,y) \in \overline{\Omega}$ с условием $p(a,0) \neq 0$, $p(0,b) \neq 0$ для некоторых $a, b \in A$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{D} = \overline{e}_1 A \cup \overline{e}_2 A$, то имеем $\mathfrak{D} \subseteq C \subseteq B$. Предположим, что $C = \mathfrak{D}$. Пусть $p = p(x,y) \in \overline{\Omega}_2$ и существуют такие $a, b \in A$, что $p(a,0) = c \neq 0$, $p(0,b) =$

$= d \neq 0$. Ясно, что операция ρ действует на элементах из B покомпонентно. Тогда

$$\rho(\bar{e}_1 a, \bar{e}_2 b) = \rho((a,0),(0,b)) = (\rho(a,0), \rho(c,b)) = (c,d)$$

но $(c,d) \notin \mathfrak{D}$, следовательно, такой операции $\rho \in \bar{\Omega}_2$ не существует и реализуется случай 2).

Предположим теперь, что $\mathfrak{D} \subset C$ $(\mathfrak{D} \neq C)$. Тогда существует элемент $\bar{c} = (a,b) \in C$, где $a, b \neq 0$. Это значит (см. [8], лемма 3, стр. 46), что найдется бинарная главная производная операция $\rho = \rho(x,y) \in \bar{\Omega}_2$ такая, что $\bar{c} = \rho(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, т.е.

$$(a,b) = \bar{c} = \rho(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \rho((1,0),(0,1)) = (\rho(1,0), \rho(0,1))$$

и, следовательно,

$$\rho(1,0) = a \neq 0, \qquad \rho(0,1) = b \neq 0.$$

Поскольку $(A, \cdot)$ является группой с нулем, существуют a^{-1}, $b^{-1} \in A$. Определим теперь операцию $\rho' = \rho'(x,y)$ следующим образом:

$$\rho'(x,y) = \rho(xa^{-1}, yb^{-1}) \quad .$$

Из определения главной производной операции следует, что $\rho'(x,y)$ тоже будет такой операцией. Тогда для произвольного $d \in A$, ввиду следствия I,

$$\rho'(d,0) = \rho(da^{-1},0) = da^{-1}\cdot\rho(1,0) = da^{-1}a = d,$$
$$\rho'(0,d) = \rho(0, d b^{-1}) = d b^{-1}\cdot\rho(0,1) = d b^{-1} b = d$$

и для произвольного элемента $(c,d) \in B$ имеем

$$\rho'(\bar{e}_1 c, \bar{e}_2 d) = \rho'((c,0),(0,d)) = (\rho'(c,0), \rho'(0,d)) =$$
$$= (c,d),$$

т.е. $C = B$ и реализуется случай I). Лемма доказана.

Если все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ являются n-свободными в $\Lambda(A)$ при некотором $n \geq 1$, то тогда они, очевидно, и I-свободны в $\Lambda(A)$. В этом случае, по теореме 2, Ω-кольцо A является Ω-телом и, следовательно, применима лемма 4. В дальнейшем наше рассмотрение пойдет по двум направлениям, соответствующим двум случаям в утверждении леммы 4.

<u>Лемма 5</u>. Пусть Ω-кольцо A является Ω-телом и пусть выполнено условие I) леммы 4, т.е. элементы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$

порождают весь $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{B}$ является 2-свободным, то существует такой $\mathcal{A}$-гомоморфизм $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, что $\varphi(\bar{e}_1) \neq 0$, $\varphi(\bar{e}_2) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\rho' = \rho'(x, y) \in \bar{\Omega}_2$ операция, обладающая свойством $\rho'(a, 0) = \rho'(0, a) = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Ее существование обусловлено условием I) леммы 4. Для произвольных $a, b \in \mathcal{A}$ положим

$$a + b = \rho'(a, b)$$

и тогда $a + 0 = 0 + a = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Распространим $\rho'(x, y)$ обычным образом на $\mathcal{B}$, получая

$$(a, b) + (c, d) = \rho'((a, b), (c, d)) = (\rho'(a, c), \rho'(b, d)) = (a + c, b + d).$$

Для любого элемента $\bar{b} = (a, c) \in \mathcal{B}$ имеем $\bar{b} = (a, c) = (a + 0, 0 + a) = (a, 0) + (0, c) = \bar{e}_1 a + \bar{e}_2 c$. По предположению, $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{B}$ является 2-свободным и пусть $\{\bar{b}_i = (a_i, c_i) \mid i = 1, \ldots, n, \ldots\}$ – система его 2-свободных образующих.

Легко видеть, что число 2-свободных образующих $\mathcal{A}$-полигона $\mathcal{B}$ больше единицы. В противном случае, если элемент $\bar{b}_1 = (a_1, c_1)$ порождает весь $\mathcal{A}$-полигон $\mathcal{B}$, то найдутся элементы $f, d \in \mathcal{A}$, такие что $\bar{b}_1 f = \bar{e}_1$ и $\bar{b}_1 d = \bar{e}_2$, т.е.

$$(a_1 f, c_1 f) = (1, 0), \qquad (a_1 d, c_1 d) = (0, 1).$$

Тогда, поскольку $(\mathcal{A}, \cdot)$ есть группа с нулем, из $a_1 f = 1$ и $a_1 d = 0$ следует $d = 0$, что противоречит условию $c_1 d = 1$.

Теперь покажем, что существует такой $\mathcal{A}$-гомоморфизм $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, что $\varphi(\bar{e}_1) \neq 0$, $\varphi(\bar{e}_2) \neq 0$. Заметим, что произвольный $\mathcal{A}$-гомоморфизм $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, ввиду леммы 3, сохраняет определенное нами сложение $x + y = \rho'(x, y)$. Пусть $\eta : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ такой $\mathcal{A}$-гомоморфизм, что $\eta(\bar{b}_1) = 1$, $\eta(\bar{b}_i) = 0$ при $i = 2, \ldots, n, \ldots$

I) Если $\eta(\bar{e}_1) \neq 0$, $\eta(\bar{e}_2) \neq 0$, то примем $\varphi = \eta$.

2) Если $\eta(\bar{e}_1) = 0$, $\eta(\bar{e}_2) = 0$, то $\eta(\bar{b}_1) = \eta(\bar{e}_1 a_1 + \bar{e}_2 c_1) = \eta(\bar{e}_1) a_1 + \eta(\bar{e}_2) c_1 = 0$, что противоречит $\eta(\bar{b}_1) = 1$.

3) Если $\eta(\bar{e}_1) = a \neq 0$, $\eta(\bar{e}_2) = 0$, то

$$0 = \eta(\bar{b}_2) = \eta(\bar{e}_1 a_2 + \bar{e}_2 c_2) = \eta(\bar{e}_1) a_2 + \eta(\bar{e}_2) c_2 = a a_2 ,$$

т.е. $a_2 = 0$, ввиду $a \neq 0$, и $\bar{b}_2 = \bar{e}_2 c_2 = (0, c_2)$. Рассмотрим тогда такой $\mathcal{A}$-гомоморфизм $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, что $\mu(\bar{b}_2) = 1$,

$\mu(\bar{b}_i)=0$ для всех i $(i\neq 2)$. Ясно, что $\mu(\bar{e}_2)\neq 0$, ибо в противном случае $\mu(\bar{b}_2)=\mu(\bar{e}_2)c_2=0$. Если $\mu(\bar{e}_1)\neq 0$, то мы достигли цели и положим $\varphi=\mu$. Если же $\mu(\bar{e}_1)=0$, то

$$0=\mu(\bar{b}_1)=\mu(\bar{e}_1)a_1+\mu(\bar{e}_2)c_1=\mu(\bar{e}_2)c_1,$$

т.е. $c_1=0$ и $\bar{b}_1=(a_1,0)=\bar{e}_1a_1$. Теперь в качестве гомоморфизма $\varphi: B\to A$ возьмем A-гомоморфизм $\nu: B\to A$, такой, что $\nu(\bar{b}_1)=\nu(\bar{b}_2)=1$, $\nu(\bar{b}_i)=0$ для всех i $i\neq 1,2$. Ясно, что $\nu(\bar{e}_1)\neq 0$, $\nu(\bar{e}_2)\neq 0$, ибо в противном случае

$$\nu(\bar{b}_1)=\nu(\bar{e}_1)a_1=0 \quad \text{или} \quad \nu(\bar{b}_2)=\nu(\bar{e}_2)a_2=0 .$$

4) Случай $\eta(\bar{e}_1)=0$, $\eta(\bar{e}_2)\neq 0$ аналогичен случаю 3). Таким образом, найдется A-гомоморфизм $\varphi: B\to A$, такой что $\varphi(\bar{e}_1)\neq 0$, $\varphi(\bar{e}_2)\neq 0$. Лемма доказана.

В следующей лемме рассматривается другая возможность, соответствующая случаю 2) леммы 4.

<u>Лемма 6</u>. Пусть Ω-кольцо A является Ω-телом и выполнено условие 2) леммы 4, т.е. элементы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ порождают в A-полигоне $B=A\times A$ подполигон $D=\{(a,0),(0,b)\mid a,b\in A\}$. Если A-полигон D является I-свободным в $\Lambda(A)$, то существует A-гомоморфизм $\psi: D\to A$ такой, что $\psi(\bar{e}_1)\neq 0$, $\psi(\bar{e}_2)\neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Ясно, что D не является циклическим A-полигоном. Если $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ – элементы из D, входящие в систему I-свободных образующих и $\bar{d}_1,\bar{d}_2\in\bar{e}_1A$, то покажем, что $\bar{d}_1=\bar{d}_2$. Действительно, $\bar{d}_1=\bar{e}_1a=(a,0)$, $\bar{d}_2=\bar{e}_1b=(b,0)$ для некоторых $a,b\in A$. Тогда

$$\bar{d}_1=(a,0)=(bb^{-1}a,0)=(b,0)b^{-1}a=\bar{d}_2(b^{-1}a)$$

Отображение φ, переводящее всю систему I-свободных образующих A-полигона D в единицу $1\in A$, можно продолжить до гомоморфизма и тогда

$$1=\varphi(\bar{d}_1)=\varphi(\bar{d}_2b^{-1}a)=\varphi(\bar{d}_2)b^{-1}a=b^{-1}a,$$

т.е. $b=a$, $\bar{d}_1=\bar{d}_2$.

Отсюда следует, что у A-полигона D всего два I-свободных образующих $\bar{d}_1,\bar{d}_2\in D$ и $\bar{d}_1=\bar{e}_1a=(a,0)$, $\bar{d}_2=\bar{e}_2b=(0,b)$ для некоторых $a,b\in A$. Отображение $\{\bar{d}_1,\bar{d}_2\}\to 1\in A$ можно продолжить до A-гомоморфизма $\psi: D\to A$. Тогда

$$\psi(\bar{e}_1) = \psi(\bar{d}_1 a^{-1}) = a^{-1} \neq 0, \quad \psi(\bar{e}_2) = \psi(\bar{d}_2 b^{-1}) = b^{-1} \neq 0.$$

Лемма доказана.

§ 3 Описание Ω-колец, все полигоны над которыми n-свободны

В настоящем параграфе мы дадим описание (с точностью до эквивалентности) Ω-кольца A, над которым все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ являются n-свободными при некотором $n \geq 2$. При этом, как мы покажем, нам достаточно предполагать, что все такие A-полигоны 2-свободны в $\Lambda(A)$. Уже в этом случае все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ оказываются свободными в $\Lambda(A)$.

Вначале докажем вспомогательные утверждения. Полукольцо H (с мультипликативным нулем 0) назовем полутелом, если $(H, \cdot)$ – группа (с нулем 0).

Лемма 7. Пусть H является полутелом с нулем 0 и $h + 0 = 0 + h = h$ для любого $h \in H$. Если на H отсутствуют нетривиальные конгруэнции, то H либо тело, либо двухэлементная дистрибутивная структура.

Доказательство. Предположим сначала, что найдутся такие ненулевые элементы $g, h \in H$, что $g + h = 0$. Тогда для любого $f \in H$ будет

$$f + hg^{-1}f = gg^{-1}f + hg^{-1}f = (g+h)g^{-1}f = 0,$$

т.е. $(H, +)$ – группа и H – тело.

Предположим теперь, что такие $g, h \in H$ не найдутся. Тогда элемент 0 оказывается внешним в H, т.е. из $ef = 0$ следует $e = 0$ или $f = 0$ и из $e + f = 0$ следует $e = f = 0$. Отношение, склеивающее все ненулевые элементы из H в один класс и оставляющее 0 в другом классе, будет очевидно конгруэнцией. По предположению эта конгруэнция тривиальна и тогда непременно совпадает с $\mathbf{0}_H$. Следовательно, $H = \{1, 0\}$ причем $1 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ Лемма доказана.

Следствие 3. Пусть H является полутелом с нулем 0 и $h + 0 = 0 + h = h$ для любого $h \in H$. Все ненулевые H-полумодули из $\Lambda(H)$ являются 2-свободными в $\Lambda(H)$ тогда и только тогда, когда H является телом.

Доказательство. Достаточность. Если H - тело, то все H-полумодули из $\Lambda(H)$, суть H-модули и, следовательно ([5], теорема I2) все ненулевые H-полумодули из $\Lambda(H)$ свободны, а значит и 2-свободны.

Необходимость. По теореме I на полутеле H отсутствуют нетривиальные конгруэнции и, следовательно, по лемме 7 H является либо телом, либо двухэлементной дистрибутивной структурой $\{1,0\}$. Покажем, что вторая возможность приводит к противоречию.

Берем коммутативную полугруппу идемпотентов с нулем $M = \{m_1, m_2, 0\}$, в которой $m_1 + m_2 = m_1$. Легко видеть, что определив естественным образом действие H на M, мы получим H-полумодуль из $\Lambda(H)$. По условию M является 2-свободным H-полумодулем и тогда m_1, m_2 - его 2-свободные образующие. Отображение $m_1 \to 0$, $m_2 \to 1$ должно продолжаться до H-гомоморфизма $\varphi : M \to H$ и тогда

$$0 = \varphi(m_1) = \varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2) = 0 + 1 = 1.$$

Полученное противоречие доказывает следствие.

Пусть на множестве G заданы две универсальные алгебры, соответственно с системами операций Ω и Ω^*. Будем говорить, что Ω-алгебра G эквивалентна Ω^*-алгебре G, если в G всякая операция из Ω^* является главной производной операцией от операций системы Ω и наоборот ([2], стр. I54). Если всякая Ω-алгебра G из многообразия Ω-алгебр $\mathfrak{A}$ эквивалентна Ω^*-алгебре G из многообразия $\mathfrak{A}^*$ и наоборот, то скажем, что многообразие Ω-алгебр $\mathfrak{A}$ эквивалентно многообразие Ω^*-алгебр $\mathfrak{A}^*$

Теорема 3. Пусть A является Ω-телом (с нулем 0) и пусть выполняется условие I) леммы I.4, т.е. $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ порождают весь A-полигон $B = A \times A$. Если все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ являются 2-свободными в $\Lambda(A)$, то на произвольном A-полигоне $M \in \Lambda(A)$, в том числе и на A, можно определить бинарную операцию "+" так, что $(A, +, \cdot)$ есть тело и Ω-тело A эквивалентно телу $(A, +, \cdot)$, а A-полигон M эквивалентен векторному пространству $(M, +)$ над телом $(A, +, \cdot)$.

Доказательство. Для произвольных элементов m_1 и m_2 из произвольного A-полигона $M \in \Lambda(A)$ положим

$$m_1 + m_2 = p'(m_1, m_2) \ ,$$

где p' – бинарная главная производная операция из условия I) леммы 4. В частности, для любых $a, b \in A$ положим $a + b = p'(a, b)$ и тогда $a + 0 = 0 + a = a$.

По лемме 5 существует такой A-гомоморфизм $\varphi : B \to A$, что $\varphi(\bar{e}_1) = a \neq 0$, $\varphi(\bar{e}_2) = c \neq 0$ при некоторых $a, c \in A$. Для произвольных $b_1, \ldots, b_n, g_1, \ldots, g_n \in A$ и $\omega \in \Omega_n (n \geq 2)$ имеем

$$(b_1 + g_1) \ldots (b_n + g_n)\omega = (aa^{-1}b_1 + cc^{-1}g_1) \cdots (aa^{-1}b_n + cc^{-1}g_n)\omega =$$
$$= [\varphi(\bar{e}_1)a^{-1}b_1 + \varphi(\bar{e}_2)c^{-1}g_1] \ldots [\varphi(\bar{e}_1)a^{-1}b_n + \varphi(\bar{e}_2)c^{-1}g_n]\,\omega =$$
$$= [\varphi(\bar{e}_1 a^{-1}b_1 + \bar{e}_2 c^{-1}g_1)] \cdots [\varphi(\bar{e}_1 a^{-1}b_n + \bar{e}_2 c^{-1}g_n)]\,\omega =$$
$$= [\varphi(a^{-1}b_1, c^{-1}g_1)] \cdots [\varphi(a^{-1}b_n, c^{-1}g_n)]\,\omega =$$
$$= \varphi((a^{-1}b_1) \ldots (a^{-1}b_n)\omega, (c^{-1}g_1) \ldots (c^{-1}g_n)\omega) =$$
$$= \varphi(a^{-1}(b_1 \ldots b_n\omega), c^{-1}(g_1 \cdots g_n\omega)) = \varphi[\bar{e}_1 a^{-1}(b_1 \cdots b_n\omega) + \bar{e}_2 c^{-1}(g_1 \cdots g_n\omega)] =$$
$$= \varphi(\bar{e}_1)a^{-1}(b_1 \ldots b_n\omega) + \varphi(\bar{e}_2)c^{-1}(g_1 \cdots g_n\omega) = b_1 \cdots b_n\omega + g_1 \cdots g_n\omega .$$

Отсюда, для любых $a_1 \cdots a_n \in A$ и произвольной операции $\omega \in \Omega_n (n \geq 2)$ следует

$$a_1 \cdots a_n\omega = (a_1 + 0)(0 + a_2) \ldots (0 + a_n)\omega = a_1 0 \ldots 0\omega + 0a_2 \ldots a_n\omega =$$
$$= a_1 0 \cdots 0\omega + (0+0)(a+0)(0+a_3) \cdots (0 + a_n)\omega =$$
$$= a_1 0 \ldots 0\omega + 0a_2 0 \cdots 0\omega + 00a_3 \cdots a_n\omega = \cdots$$
$$\cdots = a_1 0 \cdots 0\omega + 0a_2 0 \cdots 0\omega + \cdots + 0 \cdots 0a_n\omega =$$
$$= a_1 r_1^\omega + a_2 r_2^\omega + \cdots + a_n r_n^\omega ,$$

где $r_i^\omega = \underbrace{0 \ldots 0}_{i-1} 1 0 \cdots 0\omega$, т.е. произвольная операция $\omega \in \Omega_n (n \geq 2)$ в A является главной производной операцией от "+" и умножений справа на элементы из A. Унарные операции из Ω, по лемме I, тоже таковы. Таким образом, Ω-тело A эквивалентно алгебре $(A,+,\cdot)$.

Покажем теперь, что алгебра $(A,+,\cdot)$ является полутелом. Для этого, очевидно, надо показать, что $(A,+)$ - абелева полугруппа и проверить дистрибутивность. Заметим вначале, что так как операции из $\Omega' = \{\Omega, \cdot A\}$, а значит и операции из $\bar{\Omega}$, определены на элементах из A-полигона B покомпонентно, то выполняются следующие равенства:

$$\bar{e}_1 a + \bar{e}_2 b = (a,b) = \bar{e}_2 b + \bar{e}_1 a \ , \tag{8}$$

$$\bar{e}_1 a + (\bar{e}_2 b + \bar{e}_2 d) = (a, b+d) = (\bar{e}_1 a + \bar{e}_2 b) + \bar{e}_2 d \ , \tag{9}$$

$$(\bar{e}_1 a + \bar{e}_2 b) d = (ad, bd) = \bar{e}_1 ad + \bar{e}_2 bd \tag{10}$$

для произвольных $a, b, d \in A$. Обозначая теперь,как и прежде, $a = \varphi(\bar{e}_1) \neq 0$, $c = \varphi(\bar{e}_2) \neq 0$, для произвольных $c, d \in$ $\in A$ ввиду (8), имеем

$$\begin{aligned} b+d &= aa^{-1}b + cc^{-1}d = \varphi(\bar{e}_1)a^{-1}b + \varphi(\bar{e}_2)c^{-1}d = \\ &= \varphi(\bar{e}_1 a^{-1} b + \bar{e}_2 c^{-1} d) = \varphi(\bar{e}_2 c^{-1} d + \bar{e}_1 a^{-1} b) = \\ &= d + b. \end{aligned}$$

Для любых $b, d, g \in A$, ввиду (9), будет

$$\begin{aligned} b+(d+g) &= aa^{-1}b + (cc^{-1}d + cc^{-1}g) = \\ &= \varphi(\bar{e}_1 a^{-1} b + (\bar{e}_2 c^{-1} d + \bar{e}_2 c^{-1} g)) = \\ &= \varphi((\bar{e}_1 a^{-1} b + \bar{e}_2 c^{-1} d) + \bar{e}_2 c^{-1} g) = \\ &= (b+d)+g. \end{aligned}$$

Для произвольных $b, d, g \in A$, ввиду (10), будет

$$\begin{aligned} (b+d)g &= (aa^{-1}b + cc^{-1}d)g = \varphi(\bar{e}_1 a^{-1} b + \bar{e}_2 c^{-1} d)g = \\ &= \varphi(\bar{e}_1 a^{-1} bg + \bar{e}_2 c^{-1} dg) = bg + dg \ , \end{aligned}$$

а ввиду следствия I,

$$g(b+d) = g \cdot \rho'(b,d) = \rho'(gb, gd) = gb + gd.$$

Таким образом, Ω-тело A эквивалентно полутелу $(A,+,\cdot)$.

Мы показали, что для любой операции $\omega \in \Omega_n (n \geq 2)$ в Ω'-алгебре A выполняется тождество

$$x_1 \cdots x_n \omega = x_1 r_1^{\omega} + \cdots + x_n r_n^{\omega} \ ,$$

причем все $r_i^{\omega} \in A$ и операция $x + y = \rho'(x,y)$ коммутативна, ассоциативна и $x + 0 = x$. А поскольку $\Lambda(A) =$

$= HSP(A^{\Omega'})$, то отсюда следует, что такие тождества выполняются в любой Ω'-алгебре на $\Lambda(A)$, т.е. в любом A-полигоне из $\Lambda(A)$. Следовательно, произвольный A-полигон M из $\Lambda(A)$ эквивалентен полумодулю $(M, +)$ над полутелом $(A, +, \cdot)$. Так как для попарно эквивалентных алгебр гомоморфизмы сохраняются, то все полумодули над полутелом $(A, +, \cdot)$ являются 2-свободными в $\Lambda(A)$. Тогда по следствию 3 $(A, +, \cdot)$ будет телом и теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы сформулируем два вспомогательных утверждения. Как и в доказательстве теоремы 3, через r_i^{ω} $(1 \le i \le n)$ обозначим элемент $\underbrace{0 \ldots 0}_{i-1} 1 0 \ldots 0\, \omega$, где $\omega \in \Omega_n$ $(n \geqslant 2)$.

<u>Лемма I.8</u>. Пусть $\omega \in \Omega_n$ $(n \geqslant 2)$ произвольная операция на Ω-кольце A. Если существуют i, j $(i \ne j,\ \begin{smallmatrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{smallmatrix})$ такие что $r_i^{\omega} \ne 0$, $r_j^{\omega} \ne 0$, то существует бинарная операция $\rho = \rho(x, y) \in \Omega$, для которой $\rho(1,0) \ne 0$ $\rho(0,1) \ne 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $i < j$. Положим

$$\rho(x, y) = \underbrace{(x0)\ldots(x0)}_{i-1}\underbrace{(x1)(x0)\ldots(x0)}_{j-i}(y1)(x0)\ldots(x0)\omega$$

Ясно, что $\rho = \rho(x, y) \in \Omega$ и $\rho(1,0) = r_i^{\omega} \ne 0$, $\rho(0,1) = r_j^{\omega} \ne 0$. Лемма доказана.

Пусть S - моноид с нулем, т.е. S является Ω-кольцом, где $\Omega = \Omega_0$.

<u>Лемма 9</u>. Все ненулевые S-полигоны над моноидом S с нулем 0 являются I-свободными тогда и только тогда, когда $S = \{1, 0\}$.

<u>Доказательство</u>. <u>Достаточность</u> очевидна.

<u>Необходимость</u>. По теореме 2, S - группа с нулем. Тогда, очевидно, отношение на S, склеивающее все ненулевые элементы из S в один, является конгруэнцией на S. По теореме I эта конгруэнция тривиальная, т.е. $S = \{1, 0\}$. Лемма доказана.

<u>Теорема 4</u>. Пусть A является Ω-телом и выполнено условие 2) леммы 4, т.е. элементы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ порождают в A-полигоне $B = A \times A$ подполигон $D = \bar{e}_1 A \cup \bar{e}_2 A$. Если все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ являются I-свободными в $\Lambda(A)$, то Ω-кольцо A эквивалентно двухэлементному моноиду $\{1, 0\}$ и всякий A-полигон $M \in \Lambda(A)$ эквивалентен множеству M с отмеченным элементом 0_M.

Доказательство. Покажем, что всякая операция $\omega\in\Omega_n (n\geq 2)$ зависит самое большее от одного аргумента. Пусть $\omega\in\Omega_n (n\geq 2)$ произвольная операция из Ω. По условию 2) леммы 4 не существует бинарной операции $\rho\in\Omega$ со свойством $\rho(a,0)\neq 0$, $\rho(0,b)\neq 0$ для некоторых $a,b\in A$. Тогда по лемме I.8 существует самое большое одно число $i\ (1\leq i\leq n)$, такое, что $r_i^\omega\neq 0$. Это значит, что для любого $j\ (j\neq i,\ 1\leq j\leq n)$ $r_j^\omega=0$. Зафиксируем это число i. (В случае, если $r_j^\omega=0$ для всех j, зафиксируем произвольное i, $1\leq i\leq n$).

Применим теперь операцию ω к подходящим элементам из $\mathfrak{D}$. Для любых $a_1,\dots,a_n\in A$ и любого $j\ (j\neq i)$, ввиду покоординатного применения операции ω к элементам из $\mathfrak{D}$, имеем

$$(\bar e_1 a_1)\dots(\bar e_1 a_{j-1})(\bar e_2 a_j)(\bar e_1 a_{j+1})\dots(\bar e_1 a_n)\omega=(a_1,0)\dots$$
$$\dots(a_{j-1},0)(0,a_j)(a_{j+1},0)\dots(a_n,0)\omega=(a_1\dots a_{j-1}0a_{j+1}\dots a_n\omega,\ a_j r_j^\omega)=$$
$$=(a_1\dots a_{j-1}0a_{j+1}\dots a_n\omega,\ 0)=\bar e_1(a_1\dots a_{j-1}0a_{j+1}\dots a_n\omega),$$

т.е.

$$(\bar e_1 a_1)\dots(\bar e_1 a_{j-1})(\bar e_2 a_j)(\bar e_1 a_{j+1})\dots(\bar e_1 a_n)\omega=\bar e_1(a_1\dots a_{j-1}0a_{j+1}\dots a_n\omega).\quad (II)$$

По лемме 6 существует A-гомоморфизм $\psi:\mathfrak{D}\to A$, такой что $\psi(\bar e_1)=g\neq 0$, $\psi(\bar e_2)=c\neq 0$. Применяя ψ к обеим частям равенства (II), получим

$$(ga_1)\dots(ga_{j-1})(ca_j)(ga_{j+1})\dots(ga_n)\omega=g(a_1\dots a_{j-1}0a_{j+1}\dots a_n\omega).$$

Для произвольных $b_1,\dots,b_n\in A$, полагая в вышеприведенном равенстве $a_1=g^{-1}b_1,\dots,a_{j-1}=g^{-1}b_{j-1},\ a_j=c^{-1}b_j,\ a_{j+1}=g^{-1}b_{j+1},\dots,a_n=g^{-1}b_n$, получим

$$b_1\dots b_n\omega=b_1\dots b_{j-1}0\,b_{j+1}\dots b_n\omega.$$

Поскольку эта формула справедлива для любого $j\ (j\neq i,\ 1\leq j\leq n)$, то

$$b_1\dots b_n\omega=b_i r_i^\omega. \quad (12)$$

Отсюда видно, что всякая операция $\omega\in\Omega_n (n\geq 2)$ является главной производной операцией от умножений справа на элементы из A. Из леммы I следует, что таковыми являются и унарные операции из Ω, следовательно, Ω-тело A эквивалентно моноиду $(A,\cdot)$. Из условия $\Lambda(A)=HSP(A^{\Omega})$ следует, что в любом A-полигоне $M\in\Lambda(A)$ выполняются соотношения, аналогичные соотношению (I2), т.е. M эквивалентен полигону над моноидом $(A,\cdot)$. Поскольку все полигоны из $\Lambda(A)$ над Ω-кольцом A были I-свободны, они I-свободны как полигоны над моноидом $(A,\cdot)$. По лемме 9, $A = \{1,0\}$. Теорема доказана.

Теорема 5. Все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ над Ω-кольцом A являются n-свободными при некотором $n \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда Ω-кольцо A эквивалентно либо некоторому телу, и значит $\Lambda(A)$ эквивалентно многообразию векторных пространств над этим телом, либо моноиду $\{1,0\}$, т.е. $\Lambda(A)$ эквивалентно многообразию множества с отмеченным элементом, и, следовательно, когда все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ свободны в $\Lambda(A)$.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Если все ненулевые A-полигоны из $\Lambda(A)$ n-свободны при некотором $n \geqslant 2$, то все они 2-свободны и тем более I-свободны. Тогда по теореме 2 Ω-кольцо A является Ω-телом и, следовательно, применима лемма 4. Теперь остается применить теорему 3 и теорему 4. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, описание Ω-кольца A, данное в теореме 5, не сохраняется при $n=1$, что подтверждает пример двухэлементной дистрибутивной структуры $\{1,0\}$.

Следствие 4. Пусть Λ - произвольное многообразие A-полигонов над Ω-кольцом A и $A^{\Omega'} \in \Lambda$. Все ненулевые A-полигоны из Λ свободны в Λ тогда и только тогда, когда $\Lambda = \Lambda(A)$ и Ω-кольцо A эквивалентно либо некоторому телу, либо моноиду $\{1,0\}$.

Действительно, ввиду $A^{\Omega'} \in \Lambda$, будет $\Lambda(A) \subseteq \Lambda$. Пусть $F \in \Lambda(A)$ свободный в $\Lambda(A)$ полигон со счетным числом свободных образующих. По условию F свободен и в Λ, следовательно, $\Lambda = \Lambda(A)$. Теперь остается применить теорему 5.

В заключение докажем еще одно следствие[1] из полученных результатов, представляющее интерес с точки зрения теории универсальных алгебр. Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторое многообразие абелевых (определение см. [3], стр. 32, [6], стр. 9) Ω-

[1] Автор благодарен С.В.Полину, обратившему его внимание на это следствие.

алгебр и множество нульарных операций из Ω не пусто, т.е. $\Omega_0 \neq \phi$. Тогда, как показано в ([3], стр. 32) в каждой Ω-алгебре $M \in \mathfrak{A}$ имеется ровно один выделенный элемент 0_M, который является наименьшей одноэлементной подалгеброй в M. Этот элемент 0_M будем называть нулем, а многообразие $\mathfrak{A}$ - абелевым многообразием Ω-алгебр с нулем. Назовем некоторое Ω-кольцо A коммутативным, если коммутивна его мультипликативная полугруппа $(A, \cdot)$.

<u>Лемма I0</u>. Пусть $\mathfrak{A}$ - невырожденное абелево многообразие Ω-алгебр с нулем. Существует коммутативное Ω-кольцо A с нулем 0 и единицей 1 $(1 \neq 0)$ такое, что всякая Ω-алгебра M из $\mathfrak{A}$ эквивалентна A-полигону M и $\mathfrak{A}$ эквивалентно многообразию A-полигонов (как Ω'-алгебр).

<u>Доказательство</u>. Через $\bar{A}$ обозначим свободную Ω-алгебру в $\mathfrak{A}$ с одним свободным образующим $\bar{e} \in \bar{A}$. Через A обозначим множество эндоморфизмов Ω-алгебры $\bar{A}$. Известно (см. [3], стр. 35), что A является Ω-кольцом (в терминах книги [3] - дистрибутивной Ω-полугруппой), причем единицей Ω-кольца A является тождественный автоморфизм Ω-алгебры $\bar{A}$, а нулем - эндоморфизм 0, такой, что $0(\bar{a}) = 0_{\bar{A}}$ для любого $\bar{a} \in \bar{A}$. Кроме того, аддитивная Ω-алгебра A^{Ω} полученного Ω-кольца A изоморфна $\bar{A}$. Действительно, каждому элементу $\bar{a} \in \bar{A}$ поставим в соответствие эндоморфизм $a \in A$, такой, что $a(\bar{e}) = \bar{a}$ и наоборот, каждому $a \in A$ поставим в соответствие элемент $a(\bar{e}) \in \bar{A}$. Легко проверить, ввиду абелевости Ω-алгебры $\bar{A} \in \mathfrak{A}$, что построенные соответствия определяют изоморфизм Ω-алгебр A^{Ω} и $\bar{A}$.

Покажем теперь, что произвольную Ω-алгебру $M \in \mathfrak{A}$ можно превратить в A-полигон. Пусть m - произвольный элемент из M. Поскольку $\bar{e} \in \bar{A}$ является свободным образующим, отображение $\bar{e} \to m$ однозначно продолжается до гомоморфизма $\varphi_m : \bar{A} \to M$, так что $\varphi_m(\bar{e}) = m$. Для произвольного $a \in A$ определим

$$ma = \varphi_m a(\bar{e}) \in M . \tag{I3}$$

Сразу заметим, что поскольку для единицы 1 из Ω-кольца A

выполняется $1(\bar{e}) = \bar{e}$, то, ввиду (I3),

$$m1 = \varphi_m 1(\bar{e}) = \varphi_m(\bar{e}) = m,$$

а поскольку каждый гомоморфизм Ω-алгебр из $\mathfrak{A}$ сохраняет нули, то

$$m0 = \varphi_m 0(\bar{e}) = \varphi_m(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{M}}.$$

Заметим также, что из (I3) следует равенство

$$\varphi_m a = \varphi_{ma}\ , \tag{I4}$$

поскольку $\varphi_m a(\bar{e}) = ma = \varphi_{ma}(\bar{e})$.

Проверим выполнение условий П.I–П.4 относительно введеной операции (I3).

П.I. $\mathcal{M}$ является Ω-алгеброй по определению.

П.2. Для произвольных $m \in \mathcal{M}$; $a, b \in \mathcal{A}$, ввиду (I3) и (I4),

$$m(ab) = \varphi_m ab(\bar{e}) = (\varphi_m a) b(\bar{e}) = \varphi_{ma} b(\bar{e}) = (ma)b\ .$$

П.3. Для произвольных $\omega \in \Omega_n (n>0)$, $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ $m, m_1, \ldots, m_n \in \mathcal{M}$ имеем

$$m(a_1 \ldots a_n \omega) = \varphi_m (a_1 \ldots a_n \omega)(\bar{e}) = \varphi_m (a_1(\bar{e}), \ldots, a_n(\bar{e})\omega) =$$
$$= \varphi_m a_1(\bar{e}) \ldots \varphi_m a_n(\bar{e})\omega = (ma_1) \ldots ma_n \omega,$$

$$(m_1 \ldots m_n \omega)a = \varphi_{m_1 \ldots m_n \omega} a(\bar{e}),$$

но

$$\varphi_{m_1 \ldots m_n \omega}(\bar{e}) = m_1 \ldots m_n \omega = \varphi_{m_1}(\bar{e}) \ldots \varphi(\bar{e})\omega =$$
$$= (\varphi_{m_1} \ldots \varphi_{m_n} \omega)(\bar{e})\ ,$$

т.е. $\varphi_{m_1 \ldots m_n \omega} = \varphi_{m_1} \ldots \varphi_{m_n} \omega$ и тогда

$$\varphi_{m_1 \ldots m_n \omega} a(\bar{e}) = (\varphi_{m_1} \ldots \varphi_{m_n} \omega) a(\bar{e}) =$$
$$= (\varphi_{m_1} a(\bar{e}) \ldots (\varphi_{m_n} \bar{a}(e))\omega = (m_1 a) \ldots (m_n a)\omega,$$

т.е. $(m_1 \ldots m_n \omega)a = (m_1 a) \ldots (m_n a)\omega$.

П.4. Как уже отмечалось $m0 = 0_{\mathcal{M}}$ и $0_{\mathcal{M}} a = \varphi_{0_{\mathcal{M}}} a(\bar{e}) = 0_{\mathcal{M}}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $m \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M}$ является $\mathcal{A}$-полигоном, или Ω'-алгеброй, где $\Omega' = \{\Omega, \cdot\mathcal{A}\}$.

Для того, чтобы показать, что Ω-алгебра $\mathcal{M}$ эквивалентна Ω'-алгебре $\mathcal{M}$, очевидно, достаточно показать, что для любого $a \in \mathcal{A}$ операция $\cdot a \in \Omega'$ является главной производной операцией от Ω. Действительно, $ma = \varphi_m a(\bar{e}) = \varphi_m(\bar{a})$, где $\bar{a} = a(\bar{e}) \in \bar{A}$. Поскольку Ω-алгебра $\bar{A}$ порождалась элементом $\bar{e}$, то найдется главная производная операция $p = p(x)\ \Omega$, такая, что $p(\bar{e}) = \bar{a}$. Тогда $ma = \varphi_m(\bar{a}) = \varphi_m p(\bar{e}) = p(\varphi_m(\bar{e})) = p(m)$. Таким образом, операция $\cdot a$ является главной производной операцией от Ω и Ω-алгебра M эквивалентна Ω'-алгебре (A-полигону) M. Лемма теперь будет доказана, если мы покажем коммутативность полугруппы $(A,\cdot)$.

Пусть a, b – произвольные элементы из A, т.е. произвольные эндоморфизмы Ω-алгебры $\bar{A}$. Так как $\bar{e}$ – свободный образующий Ω-алгебры $\bar{A}$, то нам достаточно показать, что $ab(\bar{e}) = ba(\bar{e})$ или $a(\bar{b}) = b(\bar{a})$, где $b(\bar{e}) = \bar{b}$, $a(\bar{e}) = \bar{a}$. Поскольку $\bar{A}$ – свободная Ω-алгебра в $\mathfrak{A}$, порожденная элементом $\bar{e}$, то элементы $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ выражаются в виде слов $p(x)$ и $q(x)$ от $\bar{e}$, т.е. $\bar{a} = p(\bar{e})$, $\bar{b} = q(\bar{e})$, где p, q – главные производные операции от Ω. Индукцией по длине слов p и q легко показать, что операции p и q перестановочны на $\bar{A}$ и поэтому

$$ab(\bar{e}) = a(\bar{b}) = a(q(\bar{e})) = q(a(\bar{e})) = q(\bar{a}) = q(p(\bar{e})) =$$
$$= pq(\bar{e}) = p(\bar{b}) = p(b(\bar{e})) = b(p(\bar{e})) = b(\bar{a}) = ba(\bar{e}) ,$$

т.е. $ab = ba$. Лемма доказана.

На основании леммы 10 и следствия 4 получаем

Следствие 5. Пусть $\mathfrak{A}$ – невырожденное абелево многообразие Ω-алгебр с нулем. Все ненулевые Ω-алгебры из $\mathfrak{A}$ свободны в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ эквивалентно либо многообразию векторных пространств над подходящим полем, либо многообразию множеств с отмеченным элементом.

Следствия 4 и 5 согласуются с результатами, анонсированными С.Гивантом [7] об описании произвольных многообразий Ω-алгебр, в которых каждая Ω-алгебра свободна.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доценту Я.В.Хиону за внимание к работе.

Литература

1. К о н П., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
2. К у р о ш А.Г., Лекции по общей алгебре. Москва, 1973.
3. П л о т к и н Б.И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1969.
4. С к о р н я к о в Л.А., Радикалы в Ω-кольцах. - В кн. Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1972, 283-299.
5. С к о р н я к о в Л.А., Гомологическая классификация колец. Матем. вестн., 1967, 4, 415-434.
6. Х и о н Я.В., Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. Тр. Моск. мат. об-ва, 1965, 14, 3-47.
7. G i v a n t S.R., A representation theorem for universal classes of algebras in which all members are free, Notices AMS, 19:7 (1973) p. A-767.
8. G r ä t z e r G., Universal algebra, Princeton (N.J.), 1968.

Поступило
12 II 1975

Ω-RINGID ÜLE MILLE KÕIK POLÜGOONID ON n-VABAD

V. Fleischer

R e s ü m e e

Tuuakse sisse n-vaba Ω-algebra mõiste Ω-algebrate muutkonnas, mis on tavalise vaba algebra mõiste üldistuseks. Olgu A suvaline nulli ja ühikuga Ω-ring ja $\mathcal{L}(A)$ - A-polügoonide muutkond, mille tekitab A-polügoon A. Artiklis on antud kõigi selliste Ω-ringide kirjeldus, üle mille kõik muutkonna $\mathcal{L}(A)$ polügoonid on n-vabad.

Ω-RINGS, ALL POLYGONS OVER WHICH ARE n-FREE

V. Fleischer

Summary

Let $\mathfrak{A}$ be a variety of Ω-algebras. An Ω-algebra $\mathcal{M} \in \mathfrak{A}$ is called n-free in $\mathfrak{A}$ if there exists such a system of generators $\mathcal{K} = \{m_i \mid i \in J\}$ in $\mathcal{M}$ that any mapping of $\mathcal{K}$ in a subset with not more than n elements of an arbitrary Ω-algebra $\mathcal{N} \in \mathfrak{A}$ can be extended to a homomorphism $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

Let $\mathcal{A}$ be an Ω-ring with a unit and zero. The variety of $\mathcal{A}$-polygons which is generated by the $\mathcal{A}$-polygon $\mathcal{A}$ is denoted by $\Lambda(\mathcal{A})$.

Theorem. All $\mathcal{A}$-polygons from $\Lambda(\mathcal{A})$ are n-free, where $n \geqslant 2$, iff $\mathcal{A}$ is equivalent either to some skew field or to the monoid $\{1,0\}$, i.e. $\Lambda(\mathcal{A})$ is equivalent either to a variety of vector spaces over some skew field, or to the variety of pointed sets.

The descriptions of Ω-rings, over which all polygons are free, and Abelian varieties with zero, in which all algebras are free, are obtained as corollaries.

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП КВАТЕРНИОНОВ

П. Пуусемп

Кафедра алгебры и геометрии

При изучении полугрупп эндоморфизмов групп, естественно, возникает вопрос, когда из изоморфизма полугрупп всех эндоморфизмов групп G и H следует изоморфизм самих групп G и H. Будем говорить, что группа G определяется своей полугруппой эндоморфизмов $\mathrm{End}\,G$, если всегда из изоморфизма $\mathrm{End}\,G \simeq \mathrm{End}\,H$, где H - группа, следует изоморфизм групп G и H. Аналогичный вопрос формулируется для колец эндоморфизмов абелевых групп. Вопрос об определяемости групп своими полугруппами эндоморфизмов мало исследован. Можно отметить лишь работу автора [3], где доказано, что каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов. Зато во многих работах исследован вопрос об определяемости абелевых групп своими кольцами эндоморфизмов. Например, Бэр [8] доказывает, что каждая коммутативная p-группа определяется своим кольцом эндоморфизмов (см. также Корнер [9], Вольфсон [II], Себельдин [4-5]).

В настоящей статье докажем, что обобщенные группы кватернионов определяются своими полугруппами эндоморфизмов. Как следствие, получим оттуда, что гамильтоновы группы также определяются своими полугруппами эндоморфизмов. Напомним, что конечная группа G называется гамильтоновой, если каждая подгруппа группы G является в ней нормальным делителем.

В работе будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathrm{End}\,G$ - полугруппа всех эндоморфизмов группы G;

$\mathrm{Aut}\,G$ - группа всех автоморфизмов группы G;

$X \leq Y$ - X является подмножеством множества Y;

C_n - циклическая группа порядка n;

Z_n - кольцо вычетов по модулю n

$N \triangleleft G$ - N является нормальным делителем группы G;

$\langle a, b, \dots ; N, M, \dots \rangle$ – подгруппа, порожденная элементами $a, b, \dots$ и подмножествами $N, M, \dots$;

$\hat{g}$ – внутренний автоморфизм, порожденный элементом g;

$C_G(a)$ – централизатор элемента a в группе G;

$\mathfrak{D}(x) = \{ y \in \mathrm{Aut}\, G \mid yx = xy = x \}$, где $x \in \mathrm{End}\, G$ и G – рассматриваемая группа.

Легко проверить, что $\mathfrak{D}(x)$ является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\, G$.

§ I. Предварительные леммы

Обобщенной группой кватернионов Q_n называется группа, задаваемая следующими определяющими соотношениями:

$$a^{2^n} = 1, \quad b^2 = a^{2^{n-1}}, \quad ba = a^{-1}b, \tag{I}$$

где $n \geqslant 2$. Группа Q_2 называется группой кватернионов. В силу соотношений (I) каждый элемент группы Q_n выражается единственным образом в виде $a^i b^j$, где $i \in Z_{2^n}$, $j \in Z_2$. Индукцией по m можно убедиться, что в группе Q_n имеет место равенство

$$ba^m = a^{-m}b. \tag{2}$$

Поэтому легко проверить, что в группе Q_n имеет место следующий закон возведения в степень:

$$(a^i b^j)^k = \begin{cases} a^{ik} & \text{если } j = 0, \\ a^{2^{n-1}\ell} & \text{если } j = 1,\ k = 2\ell, \\ a^{2^{n-1}\ell + i} b, & \text{если } j = 1,\ k = 2\ell + 1. \end{cases} \tag{3}$$

<u>Лемма I</u>. Отображение $\tau : Q_n \to Q_n$, где

$$a\tau = a^i b^j, \quad b\tau = a^k b^\ell, \quad (a^s b^t)\tau = (a\tau)^s (b\tau)^t \tag{4}$$

и $i, k, s \in Z_{2^n}$, $j, \ell, t \in Z_2$, является эндоморфизмом группы Q_n тогда и только тогда, когда четверка (i, j, k, ℓ) удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $i = 2^{n-1} i'$, $k = 2^{n-1} k'$, где $k', i' \in Z_2$, и $j = \ell = 0$;

2) $j = 0$; $\ell = 1$; $i, k \in Z_{2^n}$, $i \equiv 1 \pmod 2$;

3) если $n = 2$, то а) $j = 1$, $\ell = 0$; $i, k \in Z_{2^n}$, $k \equiv 1 \pmod 2$;

б) $j = \ell = 1$; $i + 1 \equiv k \pmod 2$; $i, k \in Z_{2^n}$.

Доказательство. Так как каждый эндоморфизм группы полностью определен образами образующих элементов группы, то ясно, что каждый эндоморфизм группы Q_n имеет вид (4). Предположим теперь, что имеют место равенства (4). В этом случае $\tau \in \mathrm{End}\, Q_n$ тогда и только тогда, когда τ сохраняет определяющие соотношения (I) группы Q_n.

Пусть $j = l = 0$. Теперь τ сохраняет соотношения (I) тогда и только тогда, когда $a^{i2^n} = 1$, $a^{2k} = a^{i2^{n-1}}$, $a^{k+i} = a^{k-i}$. Из второго и третьего равенства получаем $2i \equiv 0 \pmod{2^n}$, $i2^{n-1} \equiv 2k \pmod{2^n}$. Отсюда в силу $n \geqslant 2$ сразу следует условие 1).

Пусть $j = 0$, $l = 1$. В этом случае τ сохраняет соотношения (I) тогда и только тогда, когда $a^{i2^n} = 1$, $(a^i b)^2 = a^{i2^{n-1}}$, $a^k b a^i = a^{-i+k} b$. Второе равенство дает согласно формуле (3) $a^{2^{n-1}} = a^{i2^{n-1}}$. Отсюда следует условие 2).

Предположим, что $j = 1$, $l = 0$. Отображение τ сохраняет соотношения (I) тогда и только тогда, когда $(a^i b)^{2^n} = 1$, $a^{2k} = (a^i b)^{2^{n-1}}$, $a^{k+i} b = (a^i b)^{-1} a^k$. В силу равенств (2) и (3) отсюда получим условия $2^{2(n-1)} \equiv 0 \pmod{2^n}$, $2k \equiv 2^{2n-3} \pmod{2^n}$ и $-k + 2^{n-1} \equiv k \pmod{2^n}$, т.е. $2^{2n-3} \equiv 2k \equiv 2^{n-1} \pmod{2^n}$. Это возможно лишь в случае $n = 2$ и $k \equiv 1 \pmod 2$.

Пусть $j = l = 1$. Теперь τ сохраняет соотношения (I) тогда и только тогда, когда $(a^i b)^{2^n} = 1$, $(a^i b)^2 = (a^i b)^{2^{n-1}}$, $a^k b a^i b = (a^i b)^{-1} a^k b$. В силу равенств (2) и (3) отсюда получим условия $2^{2(n-1)} \equiv 0 \pmod{2^n}$, $2^{n-1} \equiv 2^{2n-3} \pmod{2^n}$ и $2i - k + 2^{n-1} \equiv k \pmod{2^n}$. Это возможно лишь в случае $n = 2$ и $i + 1 \equiv k \pmod 2$. Следовательно, условие 3) также выполняется. Лемма доказана.

Лемма 2. Среди отображений (4) собственными эндоморфизмами группы Q_n являются те и только те, у которых $j = l = 0$, $i = i' 2^{n-1}$, $k = k' 2^{n-1}$, где $i', k' \in Z_2$. Собственные эндоморфизмы группы Q_n образуют четырехэлементную полугруппу с нулевым умножением.

Доказательство. Пусть $\tau \in \mathrm{End}\, Q_n$. Тогда τ имеет вид (4). Если $j = l = 0$, то по лемме I $a\tau, b\tau \in \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ и τ является собственным эндоморфизмом. Если $j = 0$, $l = 1$ и $i \equiv 1 \pmod 2$, то $\langle a\tau \rangle = \langle a \rangle$, $a^{-k}(b\tau) = b$ и поэтому

$a, b \in Q_n\tau$ и $Q_n = \langle a, b \rangle = Q_n\tau$, т.е. $\tau \in \mathrm{Aut}\, Q_n$. Пусть $n = 2$. Если $j = 1$, $l = 0$, $k \equiv 1 \pmod 2$, то $\langle b\tau \rangle = \langle a \rangle$, $a^{-i} \cdot (a\tau) = b$ и $a, b \in Q_2\tau$, т.е. $\tau \in \mathrm{Aut}\, Q_2$. Если $j = l = 1$, то $(b\tau) \cdot (a\tau) = a^k b a^i b = a^{k-i} b^2 = a^{k-i+2}$ (см. формулу (2)) и из условия $k - i \equiv 1 \pmod 2$ следует, что $\langle (b\tau) \cdot (a\tau) \rangle = \langle a \rangle$. Но тогда $b = a^{-i} \cdot (a\tau) \in Q_2\tau$ и $Q_2\tau = Q_2$, т.е. $\tau \in \mathrm{Aut}\, Q_2$.

Следовательно, собственными эндоморфизмами группы Q_n являются те эндоморфизмы τ, у которых $j = l = 0$, $i = i' 2^{n-1}$, $k = k' 2^{n-1}$, $i', k' \in Z_2$. Количество их равно 4 и ввиду $Q_n\tau \leq \langle a^{2^{n-1}} \rangle$ и $a^{2^{n-1}}\tau = (a\tau)^{2^{n-1}} = 1$ их произведение равно нулю. Лемма доказана.

Лемма 3. При $n > 2$ группа $\mathrm{Aut}\, Q_n$ изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad i, k \in Z_{2^n}, \ (i, 2) = 1, \tag{5}$$

относительно обычного умножения матриц и ее порядок равен 2^{2n-1}. При $n = 2$ порядок $\mathrm{Aut}\, Q_2$ равен 24 и ее силовская 2-подгруппа совпадает с группой матриц (5), где $n = 2$.

Доказательство. По леммам I и 2 ясно, что автоморфизмы группы Q_n задаются формулами (4), где выполнены условия 2) или 3) леммы I. Пусть $j = 0$, $l = 1$. Тогда для выбора i и k получим соответственно 2^{n-1} и 2^n различных возможностей, т.е. имеем $2^{n-1} \cdot 2^n = 2^{2n-1}$ автоморфизмов, для которых $j = 0$, $l = 1$. При $n > 2$ такими автоморфизмами исчерпывается вся группа $\mathrm{Aut}\, Q_n$. При $n = 2$ получим еще автоморфизмы, определяемые условием 3) леммы I. Если $j = 1$, $l = 0$, то аналогично случаю $j = 0$ $l = 1$ получим $2^{2n-1} = 2^3 = 8$ автоморфизмов такого типа. Еще имеем 8 автоморфизмов, где $j = l = 1$ (ведь $n = 2$) Следовательно, $\mathrm{Aut}\, Q_2 = 2^{2.2-1} + 2^{2.2-1} + 8 = 24$ и

$$|\mathrm{Aut}\, Q_n| = \begin{cases} 24, & \text{если } n = 2, \\ 2^{2n-1}, & \text{если } n > 2 \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим через

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

автоморфизм τ, где $j=0,\ l=1$, т.е. $a\tau=a^i$, $b\tau=a^kb$, $i,k\in Z_{2^n}$, $(i,2)=1$. Пусть еще

$$\tau'=\begin{pmatrix} i' & 0 \\ k' & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $a\tau'=a^{i'}$, $b\tau'=a^{k'}b$. Тогда $a(\tau\tau')=a^{ii'}$, $b(\tau\tau')=(a^kb)\tau'=$ $=a^{ki'+k'}b$ и, следовательно,

$$\tau\tau'=\begin{pmatrix} i & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i' & 0 \\ k' & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ii' & 0 \\ ki'+k' & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Правило (7) совпадает с правилом умножения матриц. Следовательно, матрицы вида (5) образуют подгруппу в группе $\mathrm{Aut}\,Q_n$. Так как порядок этой подгруппы равен 2^{2n-1}, то в силу равенства (6) ясно, что эта подгруппа является силовской 2-подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Q_n$ (ведь при $n=2$ имеем $2^{2n-1}=8$). В случае $n>2$ $\mathrm{Aut}\,Q_n$ является 2-группой и, следовательно, изоморфна указанной группе матриц. Лемма доказана.

Лемма 4. Группа $\mathfrak{D}(x)$ является 2-группой для каждого собственного ненулевого эндоморфизма x группы Q_n.

Доказательство. Так как $\mathfrak{D}(x)\leqslant \mathrm{Aut}\,Q_n$, то при $n>2$ $\mathfrak{D}(x)$ является в силу леммы 3 2-группой для каждого $x\in \mathrm{End}\,Q_n$. Поэтому предположим, что $n=2$.

Обозначим через $\mu_{i',k'}$ собственный эндоморфизм, задаваемый условиями I) леммы I. Группа $\mathfrak{D}(\mu_{i',k'})$ состоит из всех $\tau\in \mathrm{Aut}\,Q_2$, для которых $\tau\cdot\mu_{i',k'}=\mu_{i',k'}\cdot\tau=\mu_{i',k'}$.

Пусть

$$\tau\in\mathfrak{D}(\mu_{i',k'}),\quad a\tau=a^ib^j,\quad b\tau=a^kb^l.$$

Определим i,j,k,l. Так как $j,l\in Z_2$ и $\tau\in \mathrm{Aut}\,Q_2$, то для выбора j и l имеем три возможности. Если $j=0$, $l=1$, то $(i,2)=1$ по лемме I и

$$a(\tau\mu_{i',k'})=a^i\mu_{i',k'}=(a^{i'2})^i=a^{2ii'}=a^{2i'}=a\mu_{i',k'}=a(\mu_{i',k'}\tau),$$

$$b(\tau\mu_{i',k'})=(a^kb)\mu_{i',k'}=a^{2ki'+2k'},$$

$$b(\mu_{i',k'}\tau)=a^{2k'i}=a^{2k'}=b\mu_{i',k'}.$$

Отсюда $2ki' + 2k' \equiv 2k' \pmod 4$, т.е. $ki' \equiv 0 \pmod 2$. Последнее сравнение имеет в случае $i' = 0$ 8 решений относительно i и k (ведь $i, k \in Z_4$, $(i,2)=1$) и в случае $i' = 1$ 4 решения.

Расположим полученные числа элементов $\tau \in \mathfrak{D}(\mu_{i',k'})$ в таблице (заполним ее первый столбец):

i',k' \ j,l	0,1	1,0	1,1	$\lvert\mathfrak{D}(\mu_{i',k'})\rvert$
0,I	8	–	–	8
I,0	4	–	4	8
I,I	4	4	–	8

Если $j=1$, $l=0$, то $(k,2)=1$ по лемме I и

$$a(\tau\mu_{i',k'}) = (a^i b)^{\mu_{i',k'}} = a^{2ii'+2k'},$$
$$a(\mu_{i',k'}\tau) = a^{2i'}\tau = (a^i b)^{2i'} = b^{2i'} = a^{2i'} = a\mu_{i',k'},$$
$$b(\tau\mu_{i',k'}) = a^{2ki'},\ b(\mu_{i',k'}\tau) = a^{2k'}\tau = (a^i b)^{2k'} =$$
$$= a^{2k'} = b\mu_{i',k'},$$

откуда получим сравнения $ii' + k' \equiv i' \equiv k' \pmod 2$. Так как $\mu_{0,0} = 0$ и $\mathfrak{D}(0)$ нас не интересует, то $i' = k' = 1$ и $i \equiv 0 \pmod 2$. Следовательно, в данном случае имеем 4 элемента в $\mathfrak{D}(\mu_{1,1})$, ибо имеем 4 возможности для выбора значений k, i. Этим заполнен второй столбец таблицы.

Если $j = l = 1$, то $i+1 \equiv k \pmod 2$ и как раньше получим сравнения

$$i' \equiv i'i + k' \pmod 2,\quad ki' \equiv 0 \pmod 2. \tag{8}$$

Если $i \equiv 0 \pmod 2$, то $k \equiv 1 \pmod 2$ и сравнения (8) примут вид $i' \equiv 0 \equiv k' \pmod 2$, т.е. $\mu_{i',k'} = 0$. Если $i \equiv 1 \pmod 2$, то $k \equiv 0 \pmod 2$ и сравнения (8) равносильны сравнению $k' \equiv 0 \pmod 2$. Для выбора i и k имеем 4 возможности. Поэтому $\mathfrak{D}(\mu_{i',0})$ содержит 4 автоморфизма τ такого типа (т.е. со свойством $j = l = 1$), а

$\mathfrak{D}(\mu_{i,1})$ не содержит ни одного автоморфизма такого типа. Теперь мы можем заполнить третий и четвертый столбец таблицы.

Так как по лемме 2 $\operatorname{End} Q_2 \setminus (\operatorname{Aut} Q_2 \cup \{0\}) = \{\mu_{1,1}, \mu_{1,0}, \mu_{0,1}\}$, то из таблицы видно, что $|\mathfrak{D}(x)| = 8$, т.е. $\mathfrak{D}(x)$ является 2-группой для каждого ненулевого собственного эндоморфизма x группы Q_2. Лемма доказана.

Докажем еще некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5. Если конечная группа $G \neq \langle 1 \rangle$ имеет не более четырех эндоморфизмов, то группа G изоморфна группе C_n, где $n \in \{2,3,4\}$.

Доказательство. Пусть группа G конечна, $G \neq \langle 1 \rangle$ и $|\operatorname{End} G| \leqslant 4$. Известно, что каждая некоммутативная группа, отличающаяся от симметрической группы S_3, имеет не менее 8 автоморфизмов (Врис и Миранда [10], теорема 6). Известно (см. [2], стр. 106), что $|\operatorname{Aut} S_3| = |S_3| = 6$. Следовательно, группа G коммутативна и $G = C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_t}$. Явно мы получим эндоморфизм группы G, если берем по одному эндоморфизму каждого сомножителя и применим их покомпонентно к элементам из G. Поэтому $4 \geqslant |\operatorname{End} G| \geqslant |\operatorname{End} C_{n_1}| \cdot \ldots \cdot |\operatorname{End} C_{n_t}| = n_1 \cdots n_t = |G|$ и $G \simeq C_2 \times C_2$ или $G \simeq C_m$, $m \in \{2,3,4\}$. Легко проверить, что $|\operatorname{End}(C_2 \times C_2)| > 4$. Поэтому $G \simeq C_m$, $m \in \{2,3,4\}$. Лемма доказана.

Лемма 6. Если $x \in \operatorname{End} G$, $\operatorname{Im} x$ – коммутативна, $g \in C_G(\operatorname{Im} x)$, то $\hat{g} \in \mathfrak{D}(x)$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Im} x$ коммутативна, то коммутант G' группы G содержится в $\operatorname{Ker} x$ и

$$h(\hat{g}x) = (g^{-1}hg)x = (g^{-1}hgh^{-1} \cdot h)x = $$
$$= ((g^{-1}hgh^{-1})x) \cdot (hx) = hx$$

для каждого $h \in G$ (ведь $g^{-1}hgh^{-1} \in G' \leqslant \operatorname{Ker} x$). С другой стороны, $h(x\hat{g}) = hx$ для каждого $h \in G$, ибо $g \in C_G(\operatorname{Im} x)$. Следовательно, $\hat{g}x = x\hat{g} = x$ и $\hat{g} \in \mathfrak{D}(x)$. Лемма доказана.

Лемма 7. Если силовская p-подгруппа (холловская p'-подгруппа) P конечной группы G содержится в центре $Z(G)$ группы G, то .

$$G = P \times Q,$$

где Q - холловская p'-подгруппа (силовская p-подгруппа) группы G.

Доказательство. Пусть $|G| = p^m p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$, где p, p_i - различные простые числа, и P - силовская p-подгруппа (холловская p'-подгруппа) конечной группы G и $P \leq Z(G)$. Тогда $P \triangleleft G$ и числа $|P| = p^m$ $(|P| = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n})$ и $[G:P]$ взаимно просты. По теореме Шура (см. [I], стр. 36) существует такая подгруппа Q группы G, что $|Q| = [G:P]$ и $G = P \leftthreetimes Q$. Так как $|G| = |P \leftthreetimes Q| = |P| \cdot |Q|$, то $|Q| = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ $(|Q| = p^m)$. Поэтому Q - холловская p'-подгруппа (силовская p-подгруппа) группы G и в силу $P \leq Z(G)$ имеем $G = P \times Q$. Лемма доказана.

Лемма 8. Если собственные эндоморфизмы конечной группы $G \neq \langle 1 \rangle$ образуют четырехэлементную полугруппу с нулевым умножением, то группа G неразложима в полупрямое произведение своих нетривиальных подгрупп и не является циклической.

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Предположим, что группа G разлагается в полупрямое произведение $G = H \leftthreetimes K$. Рассмотрим идемпотент x, соответствующий полупрямому разложению $G = H \leftthreetimes K$ (см. [3]). В силу предположения $x = 0$ или $x = 1$, т.е. $\operatorname{Ker} x = H = G$ или $\operatorname{Im} x = K = G$. Следовательно, группа G неразложима в полупрямое произведение своих нетривиальных подгрупп.

Предположим, что G - циклическая: $G = \langle a \rangle \simeq C_m$. Так как группа C_m разлагается в прямое произведение своих примарных подгрупп, то по первой части доказательства $m = p^t$, p - простое число. Группа $G = C_p$ не удовлетворяет требованиям. Поэтому $t > 1$. Рассмотрим $\lambda \in \operatorname{End} G$, заданный формулой $a\lambda = a^p$. В силу $\lambda\lambda = 0$ имеем $a^{p^2} = 1$, т.е. $t = 2$ и $G \simeq C_{p^2}$. Так как $|\operatorname{End} C_{p^2} \setminus \operatorname{Aut} C_{p^2}| = p \neq 4$, то получено противоречие. Следовательно, группа G не циклична. Лемма доказана.

§ 2. Основная теорема

В § I мы убедились, что полугруппа эндоморфизмов обобщенной группы кватернионов $G = Q_n$ удовлетворяет следующим двум условиям:

I) собственные эндоморфизмы группы G образуют четырехэлементную полугруппу с нулевым умножением;

2) подгруппа $\mathfrak{D}(x)$ группы $\mathrm{Aut}\, G$ является 2-группой для каждого ненулевого собственного эндоморфизма x группы G.

Нашей целью является доказать, что наоборот, если полугруппа эндоморфизмов конечной группы G удовлетворяет условиям I) и 2), то $G \simeq Q_n$ для некоторого n.

В следующих леммах предположим всюду, что G - конечная группа, полугруппа эндоморфизмов которой удовлетворяет условиям I) и 2).

Лемма 9. Если $x \in T(G) = \mathrm{End}\, G \setminus (\mathrm{Aut}\, G \cup \{0\})$, $\mathrm{Im}\, x$ коммутативна и множество простых чисел Π не содержит 2, то все неединичные Π-элементы группы G не могут лежать в $C_G(\mathrm{Im}\, x)$. Если в G существует холловская Π-подгруппа, то она не может лежать в $C_G(\mathrm{Im}\, x)$.

Доказательство. Пусть $x \in T(G)$, $\mathrm{Im}\, x$ коммутативна, и $2 \notin \Pi$, Π - множество простых чисел. Пусть g - Π-элемент группы G и $g \in C_G(\mathrm{Im}\, x)$. По лемме 6 $\hat{g} \in \mathfrak{D}(x)$. Так как $\hat{g}$ является Π-элементом группы $\mathrm{Aut}\, G$, то по условию 2) $\hat{g} = 1$, т.е. $g \in Z(G)$. Теперь ясно, что если все Π-элементы группы G содержатся в $C_G(\mathrm{Im}\, x)$, то они содержатся также в $Z(G)$. В таком случае силовская p-подгруппа P группы G $(p \in \Pi,\ O(g) \vdots p)$ содержится в $Z(G)$ и по лемме 7 $G = P \times Q$, где Q - холловская p'-подгруппа группы G. В силу леммы 8 $Q = \langle 1 \rangle$ (ведь по выбору $P \neq \langle 1 \rangle$), т.е. $G = P$ и G коммутативна. Теперь в силу леммы 8 получено противоречие. Поэтому все неединичные Π-элементы не могут лежать в $C_G(\mathrm{Im}\, x)$. Совершенно аналогично доказывается второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма IO. $\mathrm{Im}\, x \simeq C_2$ для каждого ненулевого собственного эндоморфизма x группы G.

Доказательство. Пусть x – собственный ненулевой эндоморфизм группы G. Если $\tau \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)$, то $x \cdot \tau \in$ $\in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$. При этом $x \cdot \tau \neq x \cdot \tau'$, если $\tau \neq \tau'$, $\tau, \tau' \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)$. По условию I) имеем $|\mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)| \leq 4$, откуда по лемме 5 вытекает, что $\mathrm{Im}\, x \simeq C_n$ для некоторого $n \in \{2, 3, 4\}$. Покажем, что $n = 2$, т.е. $\mathrm{Im}\, x \simeq C_2$.

Предположим, что $n \in \{3, 4\}$. Докажем, что $\mathrm{Im}\, x$ является единственной подгруппой группы G, изоморфной группе C_n. Предположим, что $\mathrm{Im}\, x \simeq B \leq G$, $\mathrm{Im}\, x \neq B$. Пусть $\varphi : \mathrm{Im}\, x \to B$ – изоморфизм. Ясно, что $x \cdot \varphi \in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$ и $x \cdot \varphi \neq x \cdot \tau$ для каждого $\tau \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)$. Поэтому при $n = 4$ получим более четырех собственных эндоморфизмов группы G: $x \cdot \varphi$, $x \cdot \tau$, $\tau \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x) \simeq \mathrm{End}\, C_4$. Это противоречит условию I). При $n = 3$ будет $\mathrm{Im}\, x \simeq C_3$ и $(\mathrm{Im}\, x)\varphi \cap \mathrm{Im}\, x = B \cap \mathrm{Im}\, x = \langle 1 \rangle$. Поэтому при $\tau, \tau' \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)$, $\tau, \tau' \neq 0$, собственные ненулевые эндоморфизмы $x \cdot \tau$ и $x \cdot \tau' \cdot \varphi$ группы G различны. Имеем 4 таких эндоморфизма, ибо $\mathrm{Im}\, x \simeq C_3$. Поэтому G имеет более 4 собственных эндоморфизмов (ведь также $0 \in$ $\in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$), что противоречит условию I). Следовательно, подгруппа $\mathrm{Im}\, x$ является единственной подгруппой группы G, изоморфной группе C_n. Так как для каждого $g \in G$ выполняется $(\mathrm{Im}\, x)^{g} \simeq \mathrm{Im}\, x$, то $\mathrm{Im}\, x \triangleleft G$.

Пусть $n = 3$. Согласно теореме 4.2.I из [6] существует силовская 3-подгруппа S, так что $S \geqslant \mathrm{Im}\, x$. Кроме того, включение $S \geqslant \mathrm{Im}\, x$ имеет место для каждой силовской 3-подгруппы S, ибо $\mathrm{Im}\, x \triangleleft G$ и все силовские подгруппы по данному простому числу сопряжены. Так как $\mathrm{Im}\, x$ – единственная циклическая подгруппа порядка 3 групп G и S, то S является циклической (см. [6], теорема 12.5.2). Пусть S фиксировано и $S = \langle a \rangle \simeq C_{3^m}$. Ясно, что $O(a^{3^{m-1}}) = 3$. Поскольку $\mathrm{Im}\, x$ является единственной циклической подгруппой третьего порядка в G, то $\mathrm{Im}\, x = \langle a^{3^{m-1}} \rangle$. Так как $a \in C_G(\langle a^{3^{m-1}} \rangle) = C_G(\mathrm{Im}\, x)$, то $S = \langle a \rangle \leq C_G(\mathrm{Im}\, x)$ и получено противоречие с леммой 9 (взять там $\Pi = \{3\}$). Следовательно, $n \neq 3$.

Пусть $n = 4$. Тогда $\mathrm{Im}\, x = \langle a \rangle \simeq C_4$ для некоторого $a \in G$. Имеем $\mathrm{Im}\, x \triangleleft G$, т.е. трансформирование произвольным $g \in G$ переводит эту группу в себя. Поскольку a^2 является ее единственным элементом второго порядка и трансформирование сохраняет порядки, то $g^{-1}a^2g = a^2$ и $g \in C_G(a^2)$ при произвольном $g \in G$. Пусть $a \cdot \mathrm{Ker}\, x$ – образующий элемент группы $G/\mathrm{Ker}\, x \simeq \mathrm{Im}\, x \simeq C_4$. Обозначим через y эндоморфизм, получаемый как произведение естественного гомоморфизма $G \to G/\mathrm{Ker}\, x$ и гомоморфизма $\varphi : G/\mathrm{Ker}\, x = \langle a\, \mathrm{Ker}\, x \rangle \to G$, заданного формулой $(a\, \mathrm{Ker}\, x)\varphi = a^2$. Ясно, что $y \in T(G)$. Так как $\mathrm{Im}\, y = \langle a^2 \rangle$ и, как мы установили, $g \in C_G(\mathrm{Im}\, y) = C_G(a^2)$ при любом $g \in G$, то также все $2'$-элементы группы G содержатся в $C_G(\mathrm{Im}\, y)$. В силу леммы 9 это возможно лишь в случае, когда G является 2-группой. Так как $\mathrm{Im}\, x$ является единственной подгруппой порядка 4 в группе G, то по теореме I2.5.3 книги [6] группа G циклична. Это противоречит лемме 8. Следовательно, $n \neq 4$. Поэтому $n = 2$ и лемма доказана.

<u>Лемма II</u>. Группа G является $\{2,3\}$-группой.

<u>Доказательство</u>. Пусть x – собственный ненулевой эндоморфизм группы G. Тогда по лемме IO $\mathrm{Im}\, x = \langle a \rangle \simeq C_2$ для некоторого $a \in G$. Пусть g – $\{2,3\}'$-элемент группы G. Если $ga \neq ag$, то $\langle g \rangle$ не содержится в $C_G(a)$ и $\langle g \rangle \cap C_G(a)$ является собственной подгруппой в $\langle g \rangle$ и порождается элементом g^m, где m – делитель числа $n = o(g)$. Но тогда $m \geqslant 5$ и $g, g^2, g^3, g^4 \in C_G(a)$. Это означает, что $x \cdot \hat{g}, x \cdot \hat{g}^2, x \cdot \hat{g}^3, x \cdot \hat{g}^4$ отличны от x. Если здесь $x \cdot \hat{g}^i = x \cdot \hat{g}^j$, $i > j$, то $x \cdot \hat{g}^{i-j} = x$, $i-j \in \{1,2,3\}$, что невозможно. Значит, x, $x \cdot \hat{g}, \ldots, x \cdot \hat{g}^4$ отличны друг от друга и принадлежат $T(G)$, что противоречит условию I). Следовательно, $ga = ag$ и $g \in C_G(\mathrm{Im}\, x)$. Отсюда следует в силу леммы 9 (если Π – совокупность всех простых чисел p, где $p \notin \{2,3\}$), что группа G не обладает неединичными $\{2,3\}'$-элементами. Значит, G является $\{2,3\}$-группой и лемма доказана.

Фиксируем для дальнейших рассуждений x и a как и в лемме II, т.е. $\mathrm{Im}\, x = \langle a \rangle \simeq C_2$. Обозначим через P силовскую 2-подгруппу группы G, содержащую элемент a (она существует по теореме 4.2.I из [6]).

<u>Лемма I2</u>. Если $|G| \vdots 3$, то для каждой силовской 3-подгруппы Q группы G имеем:

$$C_Q(a) \leq Z(G), \tag{9}$$
$$[G : C_G(a)] = [Q : C_Q(a)] = 3, \tag{10}$$
$$\mathrm{End}\, G \setminus (\mathrm{Aut}\, G \cup \{o\}) = \{x,\ x\cdot\hat{b},\ x\cdot\hat{b}^2\} \tag{11}$$

для каждого $b \in Q \setminus C_Q(a)$.

Доказательство. Предположим, что $|G| \vdots 3$ и Q – силовская 3-подгруппа группы G. По лемме 9 $Q \nleq C_G(a)$. Поэтому существует $b \in Q$ такой, что $ba \neq ab$. Так как b является 3-элементом, $|\Gamma(G)| = 3$ и $\mathrm{Im}\, x = \langle a \rangle$, то x, $x\cdot\hat{b}$, $x\cdot\hat{b}^2$ являются различными элементами из $\Gamma(G)$ и $\Gamma(G) = \{x,\ x\cdot\hat{b},\ x\cdot\hat{b}^2\}$. Поскольку $x\cdot\hat{g} \in \Gamma(G)$ для каждого $g \in G$, то ясно, что $[G : C_G(a)] = 3$. В силу того, что $1, b$ и b^2 трансформируют a в разные элементы и $[G : C_G(a)] = 3$, имеем $[Q : C_Q(a)] = 3$.

По лемме 6 $\hat{g} \in \mathfrak{D}(x)$ для каждого $g \in C_Q(a) \leq Q$. Поскольку $\mathfrak{D}(x)$ является 2-группой, то $\hat{g} = 1$ для каждого $g \in C_Q(a)$, т.е. $C_Q(a) \leq Z(G)$. Все утверждения леммы доказаны.

Обозначим через N централизатор образов всех ненулевых собственных эндоморфизмов группы G, т.е. $N = C_G(\{a,\ a\hat{b},\ a\hat{b}^2\})$, где $b \in Q \setminus C_Q(a)$ (см. лемму 12). Пусть

$$|G| = 3^m \cdot 2^n.$$

Лемма 13. Пусть $|G| \vdots 3$ (т.е. $m \geq 1$) и Q – произвольная силовская 3-подгруппа группы G. Тогда $N \triangleleft G$ и

$$|G/N| = 2\cdot 3,\quad G/N \simeq (\mathrm{Ker}\, x/N) \leftthreetimes (PN/N), \tag{12}$$
$$\mathrm{Ker}\, x/N = \langle bN \rangle \simeq C_3 \quad \text{для каждого } b \in Q \setminus C_Q(a), \tag{13}$$
$$PN/N = \langle cN \rangle \simeq C_2 \quad \text{для некоторого } c \in P. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку $y\cdot\hat{g} \in \Gamma(G)$, если $y \in \Gamma(G)$ и $g \in G$, то $g^{-1}\cdot\{a, a\hat{b}, a\hat{b}^2\}\cdot g = \{a, a\hat{b}, a\hat{b}^2\}$ для каждого $g \in G$. Так как равенство $kh = hk$ $(k, h \in G)$ равносильно равенству $g^{-1}kg\cdot g^{-1}hg = g^{-1}hg\cdot g^{-1}kg$ для каждого $g \in G$, то из последнего равенства следует, что $g^{-1}\cdot C_G(\{a, a\hat{b}, a\hat{b}^2\})\cdot g = C_G(\{a, a\hat{b}, a\hat{b}^2\})$, т.е. $g^{-1}\cdot N\cdot g = N$ и $N \triangleleft G$.

По включению (9) ясно, что $C_Q(a) \leq N$. Так как

$[Q:C_Q(a)]=3$, то $|N| \vdots 3^{m-1}$. Если бы $|N| \vdots 3^m$, то в N существовала бы силовская 3-подгруппа Q', являющаяся также силовской 3-подгруппой в G. Тогда было бы $Q'=C_{Q'}(a)$, что противоречит (IO). Поэтому $|N|$ не делится на 3^m. В силу $|G/N|=|G|:|N|$ ясно, что

$$|G/N| = 3\cdot 2^r$$

для некоторого $r \geqslant 0$. Покажем, что $r \neq 0$ (позднее получим $r=1$).

Если $r=0$, то $G/N \simeq C_3$ и в силу $b \notin N$ будет $G/N = \langle bN\rangle$, где $b\in Q\setminus C_Q(a)$. Пусть 3^t – порядок элемента b. Рассмотрим эндоморфизм y группы G, получаемый как произведение естественного гомоморфизма $G \to G/N$ и гомоморфизма $\varphi: G/N = \langle bN\rangle \longrightarrow G$, где $(bN)\varphi = b^{3^{t-1}}$. Ясно, что $y \in T(G)$. По построению $\operatorname{Im} y = \langle b^{3^{t-1}}\rangle \simeq C_3$, что противоречит лемме IO. Следовательно, $r\neq 0$.

Покажем, что подгруппа PN/N выделяется в G/N в качестве полупрямого сомножителя. Пусть $g\in P$. Тогда g порождает подстановку π_g на множестве $\tilde{T}(G)$ по правилу $y\pi_g = y\cdot\hat{g}$, $y\in T(G)$. Так как $|T(G)|=3$, то циклы подстановки π_g могут иметь длины I,2,3. Поскольку g – 2-элемент, то по определению подстановки π_g ясно, что ее порядок является степенью числа 2. С другой стороны, порядок подстановки π_g равен наименьшему общему кратному длин ее циклов (см. теорема 5.I.2 книги [6]). Следовательно, подстановка π_g является тождественной или имеет порядок 2, т.е. $\pi_g^2=1$. Поэтому $y\cdot\hat{g}^2=y$ для каждого $y\in T(G)$ и $g^2\in N$. Отсюда следует, что каждый неединичный элемент группы PN/N имеет порядок 2, т.е. группа PN/N коммутативна.

Поскольку $PN/N \simeq P/P\cap N$ – 2-группа и $[G/N : PN/N] = \frac{|G|}{|PN|}$ не делится на 2, то PN/N является силовской 2-подгруппой группы G/N и в силу $|G/N| = 3\cdot 2^r$ имеем $[G/N:PN/N]=3$. Если $PN/N \triangleleft G/N$, то $PN\triangleleft G$ и $G/PN \simeq (G/N)/(PN/N) \simeq C_3$, что невозможно. Поэтому $PN/N \ntriangleleft G/N$. В силу $[G/N : PN/N]=3$ подгруппа PN/N группы G/N совпадает со своим нормализатором. При этом PN/N коммутативна и является силовской 2-подгруппой группы G/N. Поэтому выполнены предположения теоремы I4.3.I книги [6] и в группе G/N существует такой нормальный делитель $H/N \lhd G/N$, что в качестве представителей смежных классов по H/N можно выбрать элементы группы PN/N. Другими словами, это означает, что

$$G/N = (H/N) \leftthreetimes (PN/N). \qquad (I5)$$

Отметим, что $H \neq G$, ибо в противном случае $PN/N = \langle 1 \rangle$ и $[G/N : PN/N] = |G/N| = |H/N| = 3$, $G/N \simeq C_3$, что невозможно. Поскольку $|G/N| = 3 \cdot 2^{\nu}$ и PN/N есть силовская 2-подгруппа в G, то $|PN/N| = 2^{\nu}$, $\nu \geqslant 1$, и $[G : PN] = 3$

Докажем, что $\nu = 1$ и $G/H \simeq C_2$, т.е. $PN/N \simeq C_2$ (ведь $PN/N \simeq (G/N)/(H/N) \simeq G/H$). Так как PN/N является элементарной абелевой 2-группой и $PN/N \simeq G/H$, $|PN/N| = 2^{\nu}$, то существуют такие $a_1, \dots, a_\nu \in G$, что

$$G/H = \langle a_1 H \rangle \times \dots \times \langle a_\nu H \rangle, \quad \langle a_i H \rangle \simeq C_2.$$

Пусть $b \in Q \setminus C_Q(a)$. По равенству (II) элементы a, $a\hat{b}$, $a\hat{b}^2$ различны. Рассмотрим эндоморфизмы τ_i, μ_i и λ_i группы G, определяемые следующим образом:

$$\tau_i = \varepsilon \pi_i \alpha_i, \quad \mu_i = \varepsilon \pi_i \beta_i, \quad \lambda_i = \varepsilon \pi_i \gamma_i,$$

где $\varepsilon : G \longrightarrow G/H$ – естественный гомоморфизм, π_i – проекция G/H на подгруппу $\langle a_i H \rangle \simeq C_2$ и $(a_i H)\alpha_i = a$, $(a_i H)\beta_i = a\hat{b}$, $(a_i H)\gamma_i = a\hat{b}^2$ $(i = 1, \dots, \nu)$. По построению ясно, что τ_i, μ_j, λ_k являются различными элементами из $T(G)$ $(i, j, k \in \{1, \dots, \nu\})$. Поскольку $|T(G)| = 3$, то $\nu = 1$ и $T(G) = \{\tau_1, \mu_1, \lambda_1\}$, $\operatorname{Ker}\tau_1 = \operatorname{Ker}\mu_1 = \operatorname{Ker}\lambda_1 = H$. Так как $x \in T(G)$, то $H = \operatorname{Ker} x$. Следовательно, равенства (I2) имеют место (см. (I5)). Равенство (I4) имеет место в силу $\nu = 1$.

В начале доказательства было отмечено, что $b \notin N$ для каждого $b \in Q \setminus C_Q(a)$. С другой стороны, $b \in \operatorname{Ker} x$ так как все 3-элементы содержатся в $\operatorname{Ker} x$, ибо $\operatorname{Im} x \simeq C_2$. В силу равенств (I2) и (I4) $\operatorname{Ker} x/N \simeq C_3$. Отсюда следует справедливость равенства (I3). Лемма доказана.

Теорема I4. Конечными группами G, полугруппы эндоморфизмов $\operatorname{End} G$ которых удовлетворяют условиям:

I) собственные эндоморфизмы группы G образуют четырехэлементную полугруппу с нулевым умножением;

2) подгруппа $\mathfrak{D}(x)$ группы $\mathrm{Aut}\, G$ является 2-группой для каждого ненулевого собственного эндоморфизма x группы G, являются обобщенные группы кватернионов и только они.

Доказательство. Если $G = Q_n$, то группа G удовлетворяет условиям 1) и 2) (см. леммы 2 и 4). Предположим, наоборот, что G удовлетворяет условиям 1) и 2). По лемме 11 G является $\{2,3\}$-группой. Покажем, что G является 2-группой.

Предположим, что $|G| \vdots 3$ и пусть x, a, N и P имеют свои предыдущие значения. Покажем сначала, что $G' = \mathrm{Ker}\, x$. Поскольку $\mathrm{Im}\, x = \langle a \rangle \simeq C_2$ коммутативна, то $G' \leq \mathrm{Ker}\, x$. Пусть $G/G' = \langle b_1 G' \rangle \times \cdots \times \langle b_k G' \rangle$, где порядки элементов b_i являются степенями простых чисел чисел 2 и 3. Фиксируем $i \in \{1, \dots, k\}$ и выберем такое t, что $o(b_i G') = o(b_i^t)$. Рассмотрим эндоморфизм τ_i группы G, получаемый как произведение естественного гомоморфизма $G \to G/G'$, проекции $G/G' \to \langle b_i G' \rangle$ и гомоморфизма $\varphi : \langle b_i G' \rangle \to \langle b_i^t \rangle$, где $(b_i G')\varphi = b_i^t$. По построению $\mathrm{Ker}\, \tau_i = \langle G', b_j \mid j = 1, \dots, k;\ j \neq i \rangle$. Ранее мы убедились, что группа G некоммутативна. Поэтому $G' \neq \langle 1 \rangle$ и $\tau_i \in T(G)$. По лемме 13 $\mathrm{Ker}\, x = \mathrm{Ker}\, y$ для каждого $y \in T(G)$. Поэтому ясно, что $\mathrm{Ker}\, x = \mathrm{Ker}\, \tau_i$. Но при $i \neq j$ имеем $\mathrm{Ker}\, \tau_i \neq \mathrm{Ker}\, \tau_j$. Следовательно, $k = 1$ и $\mathrm{Ker}\, \tau_1 = G' = \mathrm{Ker}\, x$.

Пусть N_{33} – силовская 3-подгруппа группы N. Так как N_3 содержится в некоторой силовской 3-подгруппе Q группы G и $N_3 \leq C_Q(a)$ по определению N, то по включению (9) $N_3 \leq Z(G)$. Поэтому $N_3 \leq Z(N)$ и по лемме 8

$$N = N_3 \times N_2, \tag{16}$$

где N_2 – силовская 2-подгруппа группы N. Поскольку $N \lhd G$, то $N_2, N_3 \lhd G$.

Фиксируем $c \in P$ со свойством $PN/N = \langle cN \rangle \simeq C_2$ (см. формулу (14) и возьмем $b \in Q \setminus C_Q(a)$, где Q – некоторая силовская 3-подгруппа группы G. По равенствам (12)–(14) ясно, что $(c^{-1}N)(bN)(cN)$ равен bN или

$b^{-1}N$, т.е. $c^{-1}bc = bn_2n_3$ или $c^{-1}bc = b^{-1}n_2n_3$ при некоторых $n_2 \in N_2$, $n_3 \in N_3$ (ведь $N = N_3 \times N_2$ в силу (16)). Если $c^{-1}bc = bn_2n_3$, то группа G/N коммутативна и $N \geqslant G'$, что невозможно ввиду $|G/N| = 2\cdot 3$ и $G/G' = G/\mathrm{Ker}\, x \simeq \mathrm{Im}\, x \simeq C_2$. Следовательно,

$$c^{-1}bc = b^{-1}n_2n_3, \quad n_2 \in N_2, \; n_3 \in N_3. \tag{17}$$

Пусть t является решением сравнения $2t \equiv -1 \pmod{O(n_3)}$. Это сравнение разрешимо, ибо $O(n_3)$ – степень простого числа 3. Обозначим $b' = bn_3^t$. Тогда в силу $n_3 \in N_3 \leqslant Z(G)$ элемент b' является также 3-элементом и

$$c^{-1}b'c = c^{-1}bc \cdot n_3^t = b^{-1}n_2n_3 \cdot n_3^t = b^{-1}n_2n_3^{-t} =$$
$$= n_3^{-t}b^{-1}n_2 = (bn_3^t)^{-1}n_2 = b'^{-1}n_2.$$

При этом $\langle bN \rangle = \langle b'N \rangle$. Поэтому в равенстве (17) можно предполагать, что $n_3 = 1$, т.е.

$$c^{-1}bc = b^{-1}n_2, \quad n_2 \in N_2. \tag{18}$$

Докажем, что $Q = \langle b \rangle$ (напомним, что мы выбрали $b \in Q$). В силу условий (12)–(14) и (16) имеем $G = \langle b, c, N_2, N_3 \rangle$. Поэтому $\langle b, c, N_2 \rangle \lhd G$, ибо $N_3 \leqslant Z(G)$, и $G/\langle b, c, N_2 \rangle$ является коммутативной группой, порождаемой 3-элементами $n \cdot \langle b, c, N_2 \rangle$, где $n \in N_3$. Следовательно, группа $G/\langle b, c, N_2 \rangle$ является единичной группой или 3-группой. Если она неединичная 3-группа, то по первой теореме Силова (см. [6], стр. 55) существует $M \lhd G$ со свойством $G/M \simeq C_3$, что невозможно. В противном случае существует $y \in T(G)$, для которого $\mathrm{Im}\, y \simeq C_3$; в G можно выбрать элемент d третьего порядка и положить $y = \varepsilon \cdot \varphi$, где $\varepsilon : G \to G/M$ – естественный гомоморфизм, $\varphi : G/M \to \langle d \rangle$ – изоморфизм, а это противоречит лемме 10. Следовательно, $G/\langle b, c, N_2 \rangle = \langle 1 \rangle$ и $G = \langle b, c, N_2 \rangle$. Отсюда в силу $N_2 \lhd G$ и равенства (18) следует, что $\langle b, N_2 \rangle \lhd G$. Так как $G/\langle b, N_2 \rangle$ порождается элементом $c \cdot \langle b, N_2 \rangle$ и c – 2-элемент, то $[G : \langle b, N_2 \rangle]$ – степень числа 2 и все 3-элементы группы G содержатся в $\langle b, N_2 \rangle$. Поэтому $Q \leqslant \langle b, N_2 \rangle$. Поскольку $N_2 \lhd G$ и b – 3-элемент, то $\langle b \rangle \cap N_2 = \langle 1 \rangle$ и $\langle b, N_2 \rangle = N_2 \leftthreetimes \langle b \rangle$. Отсюда в силу $b \in Q$ следует, что $Q = \langle b \rangle$.

Теперь докажем, что $C_G(b)$ содержит элемент второго порядка. По равенству (I4) $c^2 \in N$. Поскольку c 2-элемент, то $c^2 \in N_2$ и $[G : N_2 Q] = 2$, ибо $G = \langle c, b, N_2 \rangle$ и, как установлено, $N_2 Q = \langle N_2, b \rangle \triangleleft G$. Отсюда следует, что $G = cN_2 Q \cup N_2 Q$.

Имеем две возможности: а) $cN_2 Q \cap N_G(Q) = \phi$, б) $cN_2 Q \cap N_G(Q) \neq \phi$. Покажем, что случай а) невозможен. Если имеет место случай а), то $N_G(Q) \leq N_2 Q$. По теореме 4.2.4 книги [6] имеем $N_G(N_2 Q) = N_2 Q$. Этим получено противоречие, ибо $G \neq N_2 Q$ (ведь $N_2 \leq N \leq \operatorname{Ker} x$ и $b \in \operatorname{Ker} x$ по равенству (I3)).

Следовательно, $cN_2 Q \cap N_G(Q) \neq \phi$ и существуют такие $\tilde{n}_2 \in N_2$ и $\tilde{b} \in Q$, что $c\tilde{n}_2 \tilde{b} \in N_G(Q) = N_G(\langle b \rangle)$. Обозначим $\tilde{c} = c\tilde{n}_2$. Тогда в силу формулы (I8) имеем

$$\tilde{c}^{-1} b \tilde{c} = \tilde{n}_2^{-1} c^{-1} b c \tilde{n}_2 = \tilde{n}_2^{-1} b^{-1} \tilde{n}_2 = b^{-1} n_2'$$

для некоторого $n_2' \in N_2$, ибо $N_2 \triangleleft G$. Так как $c\tilde{n}_2\tilde{b}, \tilde{b} \in N_G(Q)$, то $\tilde{c} \in N_G(Q) = N_G(\langle b \rangle)$. Поэтому $n_2' = 1$ и

$$\tilde{c}^{-1} b \tilde{c} = b^{-1},$$

откуда

$$\tilde{c}^2 b = b \tilde{c}^2.$$

Элемент $\tilde{c} = c n_2$ является 2-элементом. При этом $\tilde{c}^2 \neq 1$, ибо в противном случае в силу равенств (I2) и (I4) $G = \langle \operatorname{Ker} x, c \rangle = \langle \operatorname{Ker} x, \tilde{c} \rangle \operatorname{Ker} x \leftthreetimes \langle \tilde{c} \rangle$, что невозможно (см. лемму 8). Отсюда следует существование элемента второго порядка $g \in G$, для которого

$$gb = bg. \tag{I9}$$

Так как $G / \operatorname{Ker} x \simeq C_2 \simeq \langle g \rangle$, то отображение $y : G \to G$, где $(c^i h)y = g^i$, $i \in Z_2$, $h \in \operatorname{Ker} x$, является собственным ненулевым эндоморфизмом группы G. Ввиду равенства (II) $y \in \{x, x \cdot \hat{b}, x \cdot \hat{b}^2\}$, т.е. $\operatorname{Im} y = \langle g \rangle = \operatorname{Im}(x \cdot \hat{b}^j) = \langle b^{-j} a b^j \rangle$ для некоторого $j \in \{0, 1, 2\}$. Отсюда следует, в силу (I9), что $g = b^{-j} a b^j$, $a = b^j g b^{-j} = g$ и $ab = ba$. Равенство $ab = ba$ противоречит первоначальному условию $b \in C_Q(a)$. Противоречие получается из предположения, что $|G|$ делится на 3. Следовательно, $|G|$ не делится на 3 и по лемме II ясно, что G является 2-группой. По лемме 8 группа G не является циклической. Поэтому существует $M \triangleleft G$ такой, что $G/M \simeq C_2 \times C_2$ (см. [I], стр. 32).

Покажем, что G обладает единственным элементом второго порядка. Пусть b, c - различные элементы второго порядка группы G. Можно предполагать, что $bc = cb$, ибо каждая конечная p-группа обладает нетривиальным центром (см. [6], теорема) и поэтому хотя бы один элемент второго порядка содержится в центре. Пусть

$$G/M = \langle tM \rangle \times \langle uM \rangle \simeq C_2 \times C_2. \tag{20}$$

Рассмотрим гомоморфизмы $\tau_{t,i,j} = \varepsilon\pi_t\lambda_{i,j}$, $\tau_{u,i,j} = \varepsilon\pi_u\lambda'_{i,j}$, где $\varepsilon : G \to G/M$ - естественный гомоморфизм; π_t и π_u - проекции группы G/M соответственно на подгруппы $\langle tM \rangle$ и $\langle uM \rangle$, а гомоморфизмы $\lambda_{i,j} : \langle tM \rangle \to \langle b^i c^j \rangle$ и $\lambda'_{i,j} : \langle uM \rangle \to \langle b^i c^j \rangle$ заданы соответственно формулами $(tM)\lambda_{i,j} = b^i c^j$, $(uM)\lambda'_{i,j} = b^i c^j$. В силу построения ясно, что $\tau_{t,i,j}, \tau_{u,i,j} \in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$. При этом $\tau_{t,1,0}, \tau_{t,0,1}, \tau_{t,1,1}, \tau_{u,1,0}, \tau_{u,0,1}, \tau_{u,1,1}$ являются различными элементами из $T(G)$. Это противоречит равенству $|T(G)| = 3$. Следовательно, группа G обладает только одним элементом второго порядка. При этом она является нециклической 2-группой. По теореме I2.5.2 книги [6] группа G является обобщенной группой кватернионов, т.е. $G \simeq Q_n$ для некоторого n. Теорема доказана.

Следствие I. Каждая обобщенная группа кватернионов определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

Действительно, если $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, Q_n$, то группа G конечна (см. Эльперин [7], теорема 2) и по теореме I4 $G \simeq Q_m$ для некоторого $m \geq 2$. Так как $|\mathrm{End}\, Q_n| = 4 + |\mathrm{Aut}\, Q_n|$, то $|\mathrm{Aut}\, Q_n| = |\mathrm{Aut}\, Q_m|$, откуда ввиду леммы 3 легко вывести, что $m = n$, т.е. $G \simeq Q_n$.

Следствие 2. Каждая гамильтонова группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

Доказательство. Пусть H - гамильтонова группа, G - группа и $\mathrm{End}\, H \simeq \mathrm{End}\, G$. Известно, что $H = Q_2 \times A$ для некоторой абелевой группы A (см. [6], стр. 2I3). По теореме I.I3 работы [3] группа G разлагается в прямое произведение $G = B \times C$, $\mathrm{End}\, B \simeq \mathrm{End}\, Q_2$ и $\mathrm{End}\, C \simeq \mathrm{End}\, A$. По следствию I $B \simeq Q_2$. Поскольку каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов (см. [3], теорема 4.2), то $C \simeq A$. Поэтому $G \simeq H$ и следствие доказано.

Литература

1. К э р т и с Ч., Р а й н е р Ч., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва, 1969.
2. П у у с е м п П., Полугруппы эндоморфизмов двух классов метациклических групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 100-119.
3. П у у с е м п П., Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975,
4. С е б е л ь д и н А. М., Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов. Мат. заметки, 1972, II, № 4, 403-408.
5. С е б е л ь д и н А. М., Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга I с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов I. Мат. заметки, 1973, 14, № 6, 867-878.
6. Х о л л М., Теория групп. Москва, 1962.
7. A l p e r i n, J. L., Groups with finitely many automorphisms. Pacif. J. Math., 1962, 12, № 1, 1-5.
8. B a e r, R., Automorphism rings of primary Abelian operator groups. Ann. Math., 1943, 44, 192-227.
9. C o r n e r, A. L., Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring. Proc. London Math. Soc., 1963, 13, № 52, 687-710.
10. V r i e s, de e H., M i r a n d a, d e A. B., Groups with a small number of automorphisms. Math. Z., 1958, 68, 450-464.
11. W o l f s o n, K. G., Isomorphisms of the endomorphism rings of a class of torsion-free modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, № 4, 589-594.

Поступило

15 I 1975

ÜLDISTATUD KVATERNIOONIDE RÜHMADE ENDOMORFISMI-RÜHMAD

P. Puusemp

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis tõestatakse, et lõplik rühm G on isomorfne mingi üldistatud kvaternioonide rühmaga parajasti siis, kui rühma G endomorfismipoolrühm End G rahuldab kahte järgmist tingimust:

1) rühma G pärisendomorfismid moodustavad 4-elemendilise poolrühma nullkorrutamisega;

2) rühma G automorfismide rühma Aut G alamrühm $\mathfrak{D}(x) = \{y \in \mathrm{Aut}\, G \mid yx = xy = x\}$ on 2-rühm.

Sellest tulemusest järeldatakse, et üldistatud kvaternioonide rühmad ja Hamiltoni rühmad (Hamiltoni rühm - lõplik rühm, mille kõik alamrühmad on normaaljagajateks) määratakse ära oma endomorfismipoolrühmaga.

DIE ENDOMORPHISMENHALBGRUPPEN DER VERALLGEMEINERTEN QUATERNIONENGRUPPEN

P. Puusemp

Z u s a m m e n f a s s u n g

In diesem Artikel zeigen wir, daß die endliche Gruppe G dann und nur dann zur verallgemeinerten Quaternionengruppe isomorphisch ist, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

1) die Halbgruppe T der echten Endomorphismen hat 4 Elemente und $xy = 0$ für alle x und y aus T;

2) die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{D}(x) = \{y \in \mathrm{Aut}\, G \mid yx = xy = x\}$ ist 2^t (t - eine ganze Zahl, die von x abhängig ist) für jedes x aus $T \setminus \{0\}$.

Aus diesem Resultat folgt daß die verallgemeinerten Quaternionengruppen durch ihre Endomorphismenhalbgruppen bestimmt sind.

ПОЛУГРУППА ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОЛУПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ЦИКЛИЧЕСКИХ p-ГРУПП

П. Пуусемп

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

Обозначим через $\mathcal{G}_p$ класс всех p-групп G, являющихся полупрямым произведением $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ двух своих циклических подгрупп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ (p - фиксированное простое число). В данной статье мы найдем по свойствам полугруппы $\operatorname{End} G$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G принадлежала классу $\mathcal{G}_p$ (теоремы II и I8). Еще мы дадим абстрактную характеристику полугруппы $\operatorname{End} G$ при $G \in \mathcal{G}_p$ (теоремы I4 и 24), откуда следует, что каждая группа G класса $\mathcal{G}_p$ определяется своей полугруппой всех эндоморфизмов $\operatorname{End} G$ (следствия I5 и 25), т.е. из изоморфизма $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} H$ (H - группа) следует изоморфизм $G \simeq H$.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$\hat{g}$ - внутренний автоморфизм, порожденный элементом g;

C_t - циклическая группа порядка t;

$\langle a, b, \ldots, A, B, \ldots \rangle$ - подгруппа, порожденная элементами $a, b, \ldots$ и подмножествами $A, B, \ldots$;

$J(G)$ - совокупность всех идемпотентов полугруппы $\operatorname{End} G$;

$J_0(G) = J(G) \setminus \{0, 1\}$;

$P(x) = \{y \in \operatorname{End} G \mid yx = xy = x\}$, $x \in \operatorname{End} G$;

$K(x) = \{y \in \operatorname{End} G \mid yx = xy = y\}$, $x \in \operatorname{End} G$;

$V(x) = \{y \in \operatorname{Aut} G \mid yx = x\}$, $x \in \operatorname{End} G$;

$\mathcal{D}(x) = \{y \in \operatorname{Aut} G \mid yx = xy = x\}$, $x \in \operatorname{End} G$;

$\mathcal{J}(x) = \{y \in \operatorname{End} G \mid yx = xy = 0\}$, $x \in \operatorname{End} G$;

$H(x) = \{y \in \operatorname{End} G \mid xy = y,\ yx = 0\}$, $x \in \operatorname{End} G$;

$T(G) = \operatorname{End} G \setminus (\operatorname{Aut} G \cup \{0\})$;

(s,t) – наибольший общий делитель чисел s, t;
$S^{\times}$ – мультипликативная полугруппа кольца S;
S^{*} – мультипликативная группа кольца S с единицей.

Так как подмножества $\mathcal{J}(x)$, $P(x)$ и $k(x)$ образуют подполугруппы в полугруппе $\mathrm{End}\,G$, то будем их рассматривать как полугруппы. Аналогично, множества $\mathcal{V}(x)$ и $\mathcal{D}(x)$ образуют подгруппы в $\mathrm{Aut}\,G$ и будем их рассматривать как группы. Ясно, что $\mathcal{D}(x)$ – подгруппа в $\mathcal{V}(x)$, состоящая из обратимых элементов полугруппы $P(x)$.

§ I. Вспомогательные леммы

Известны следующие леммы:

Лемма А ([3], лемма I.I). Если $x \in \mathcal{J}(G)$ то $G = \mathrm{Ker}\,x \leftthreetimes \mathrm{Im}\,x$ и $\mathrm{Im}\,x = \{g \in G \mid gx = x\}$. Наоборот, если $G = H \leftthreetimes K$, то существует единственный $x \in \mathcal{J}(G)$ такой, что $H = \mathrm{Ker}\,x$ и $K = \mathrm{Im}\,x$.

Определение. Если $G = H \leftthreetimes K$, то тот единственный $x \in \mathcal{J}(G)$, определенный второй частью леммы А, будем называть идемпотентом, соответствующим полупрямому разложению $G = H \leftthreetimes K$. Будем также говорить, что полупрямое произведение $G = H \leftthreetimes K$ соответствует идемпотенту x.

Лемма В ([3], теорема 4.2). Каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

Лемма С ([3], лемма I.6). Если $x \in \mathcal{J}(G)$, то полугруппы $\mathrm{End}(\mathrm{Im}\,x)$ и $k(x)$ изоморфны.

Лемма D ([3], лемма I.4). Если K – подгруппа группы G, $y \in \mathcal{J}(G)$ и $\mathrm{Im}\,y \leqslant K$, то $K = (K \cap \mathrm{Ker}\,y) \leftthreetimes \mathrm{Im}\,y$.

Лемма Е ([3], лемма I.5). Если $x, y \in \mathrm{End}\,G$ и $xy = yx$, то $(\mathrm{Im}\,x)y \leqslant \mathrm{Im}\,x$ и $(\mathrm{Ker}\,x)y \leqslant \mathrm{Ker}\,x$, т.е. $y|_{\mathrm{Im}\,x} \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\,x)$ и $y|_{\mathrm{Ker}\,x} \in \mathrm{End}(\mathrm{Ker}\,x)$.

Докажем еще некоторые леммы.

Лемма I. Если $x \in \mathcal{J}(G)$ и $y \in P(x)$, то $y|_{\mathrm{Im}\,x} = 1_{\mathrm{Im}\,x}$, $y|_{\mathrm{Ker}\,x} \in \mathrm{End}(\mathrm{Ker}\,x)$ и полугруппа $P(x)$ изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $\mathrm{End}(\mathrm{Ker}\,x)$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{J}(G)$ и $y \in P(x)$. Тогда $yx = xy = x$ и по лемме Е $y|_{\mathrm{Im}\,x} \in \mathrm{End}(\mathrm{Im}\,x)$ и $y|_{\mathrm{Ker}\,x} \in \mathrm{End}(\mathrm{Ker}\,x)$. В силу $xy = x$ имеем $y|_{\mathrm{Im}\,x} = 1_{\mathrm{Im}\,x}$. По лемме А $G = \mathrm{Ker}\,x \leftthreetimes \mathrm{Im}\,x$. Если $y, y' \in P(x)$ и $y \neq y'$, то в силу $y|_{\mathrm{Im}\,x} = 1_{\mathrm{Im}\,x} = y'|_{\mathrm{Im}\,x}$ имеем $y|_{\mathrm{Ker}\,x} \neq y'|_{\mathrm{Ker}\,x}$.

Поэтому ясно, что отображение $y \to y|_{\mathrm{Ker}\,x}$ является мономорфизмом из полугруппы $P(x)$ в полугруппу $\mathrm{End}(\mathrm{Ker}\,x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $x \in J(G)$, то $H(x) = \{y \in \mathrm{End}\,G / (\mathrm{Ker}\,x)y = \langle 1 \rangle, (\mathrm{Im}\,x)y \leq \mathrm{Ker}\,x\}$.

Доказательство. Пусть $x \in J(G)$ и $y \in H(x)$. По определению множества $H(x)$ имеем $xy = y$, $yx = 0$, откуда $\mathrm{Ker}\,x \leq \mathrm{Ker}\,y$, т.е. $(\mathrm{Ker}\,x)y = \langle 1 \rangle$ и $(\mathrm{Im}\,x)y \leq \mathrm{Im}\,y \leq \mathrm{Ker}\,x$. Пусть, наоборот, $y \in \mathrm{End}\,G$ и $(\mathrm{Ker}\,x)y = \langle 1 \rangle$, $(\mathrm{Im}\,x)y \leq \mathrm{Ker}\,x$. Тогда по лемме А любой $g \in G$ можно представить в виде $g = kh$, где $k \in \mathrm{Im}\,x$, $h \in \mathrm{Ker}\,x$ и $kx = k$. Поэтому $ky \in \mathrm{Ker}\,x$ и

$$g(yx) = (kh)(yx) = ((ky)(hy))x = (ky)x = 1 = g0,$$

$$g(xy) = (kh)(xy) = ((kx)(hx))y = ky = (ky)\cdot(hy) = (kh)y = gy,$$

т.е. $yx = 0$, $xy = y$ и $y \in H(x)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $x \in \mathrm{End}\,G$ и $y \in \mathrm{Aut}\,G$, то $y \in V(x)$ тогда и только тогда, когда $g^{-1}(gy) \in \mathrm{Ker}\,x$ при каждом $g \in G$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{End}\,G$ и $y \in \mathrm{Aut}\,G$. Если $g^{-1}(gy) \in \mathrm{Ker}\,x$ при каждом $g \in G$, то $(g^{-1}\cdot(gy))x = 1$, т.е. $g(yx) = gx$ и $x = yx$, $y \in V(x)$. Наоборот, предположим, что $g \in G$ и $y \in V(x)$. Тогда $yx = x$, $(gy)x = gx$, $g^{-1}\cdot(gy) \in \mathrm{Ker}\,x$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $x \in \mathrm{End}\,G$ и группа $\mathrm{Im}\,x$ коммутативна, то $\hat{g} \in V(x)$ при каждом $g \in G$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{End}\,G$, $g \in G$ и группа $\mathrm{Im}\,x \simeq G/\mathrm{Ker}\,x$ коммутативна. Поэтому коммутант G' группы G содержится в $\mathrm{Ker}\,x$. Пусть $h \in G$. Тогда $h^{-1}\cdot h\hat{g} = [h, g] \in G' \leq \mathrm{Ker}\,x$ и $(h^{-1}\cdot h\hat{g})x = 1$, т.е. $h\hat{g}x = hx$. Поэтому $\hat{g}x = x$ и $\hat{g} \in V(x)$. Лемма доказана.

Определим на множестве $J(G)$ всех идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\,G$ бинарное отношение σ следующим образом:

$x \sigma y$ тогда и только тогда, когда $xy = y$ и $yx = x$.

Лемма 5. Если $x, y \in J(G)$, то $x \sigma y$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,x = \mathrm{Ker}\,y$.

Доказательство. Пусть $x \sigma y$, $x, y \in J(G)$. Тогда $xy = y$, $yx = x$ и поэтому $\mathrm{Ker}\,x \leq \mathrm{Ker}\,y$, $\mathrm{Ker}\,y \leq \mathrm{Ker}\,x$, т.е. $\mathrm{Ker}\,x = \mathrm{Ker}\,y$. Пусть, наоборот, $x, y \in J(G)$ и $\mathrm{Ker}\,x = \mathrm{Ker}\,y$. По лемме А каждый $g \in G$ имеет вид $g = kh$, где $k \in \operatorname{Im} x$, $h \in \operatorname{Ker} x$, $kx = k$. Поэтому

$$g(xy) = (kh)(xy) = ky = (kh)y = gy,$$

т.е. $xy = y$. Аналогично, $yx = x$. Следовательно, $x\sigma y$. Лемма доказана.

Ясно, что σ является эквивалентностью на $J(G)$. Обозначим через $[x]_\sigma$ тот класс эквивалентности, куда принадлежит идемпотент x.

§ 2. Некоторые сведения о группах класса $\mathcal{G}_p$

Пусть $G \in \mathcal{G}_p$. Тогда

$$G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle, \qquad (1)$$

где $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ - циклические p-подгруппы группы G. Группа G задается следующими определяющими соотношениями:

$$a^{p^\alpha} = b^{p^\beta} = 1, \quad b^{-1}ab = a^r, \quad \alpha, \beta \geq 1, \qquad (2)$$

где r удовлетворяет условию

$$r^{p^\beta} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}. \qquad (3)$$

Свойства группы G с определяющими соотношениями (2) подробно изучены в работах Линденберга [9-12] и Кинга [8]. В частности, там показано, что каждый элемент группы G единственным образом выражается в виде

$$b^j a^i \; (j \in Z_{p^\beta},\ i \in Z_{p^\alpha})$$

и в группе G справедливы следующие законы умножения и возведения в степень:

$$(b^j a^i)(b^{j'} a^{i'}) = b^{j+j'} a^{i r^{j'} + i'}, \qquad (4)$$

$$(b^j a^i)^n = b^{nj} a^{i t_{j,n}}, \qquad (5)$$

где

$$t_{j,n} = 1 + r^j + r^{2j} + \ldots + r^{j(n-1)}.$$

По лемме 1.1 работы [9] число r в соотношениях (2) представимо в виде

$$r = 1 + \gamma p^\delta, \quad (\gamma, p) = 1, \quad 1 \leq \delta \leq \alpha. \qquad (6)$$

Обозначим через $G_{p,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$ группу с определяющими соотношениями (2), где r удовлетворяет условию (6).

Сформулируем три леммы по работе Линденберга [I2] (стр. 203-204). Отметим, что группа G называется модулярной, если структура ее подгрупп является модулярной.

Лемма F. Группа $G_{p,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$ немодулярна тогда и только тогда, когда $\alpha>1$, $p=2$, $r\equiv -1 \pmod 4$ т.е. $p=2$, $\delta=1$.

Лемма G. Модулярную группу $G_{p,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$ можно задать следующими определяющими соотношениями:

$$\bar{a}^{p^{\bar{\alpha}}} = \bar{b}^{p^{\bar{\beta}}} = 1, \quad \bar{b}^{-1}\bar{a}\bar{b} = \bar{a}^{1+p^{\bar{\delta}}},$$

где

$$\bar{\alpha} = \alpha + \max\{0, \beta-\alpha\}, \quad \bar{\beta} = \min\{\alpha,\beta\},$$

$$\bar{\delta} = \delta + \max\{0, \beta-\alpha\}.$$

Лемма H. Если $G_{2,\alpha,\beta,1,\gamma} = \langle a', b'\rangle \neq \langle a'\rangle \leftthreetimes \langle b'\rangle$, $\langle a'\rangle \triangleleft G_{2,\alpha,\beta,1,\gamma}$, то группу $G_{2,\alpha,\beta,1,\gamma}$ можно задать следующими определяющими соотношениями:

$$\bar{a}^{2^{\alpha}} = \bar{b}^{2^{\beta}} = 1, \quad \bar{b}^{-1}\bar{a}\bar{b} = \bar{a}^{-1+2^{\alpha-\beta}}.$$

Наконец отметим, что в работе [2] найдена полугруппа $\operatorname{End} G_{p,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$ и подробно изучены ее свойства при $p>2$, $\alpha=2$, $\beta=1$. В работе Линденберга [I2] определена мощность группы $\operatorname{Aut} G_{p,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$.

§ 3. Полупрямое произведение двух циклических p-групп определяется своей полугруппой эндоморфизмов

В данном параграфе дадим необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G принадлежала классу $\mathcal{G}_p$, и покажем, что каждая группа из класса $\mathcal{G}_p$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов (p - нечетно). Случай $p=2$ рассмотрим в § 4.

Установим сначала некоторые свойства полугруппы эндоморфизмов для группы из класса $\mathcal{G}_p$. Пусть $G\in\mathcal{G}_p$. Тогда группу G можно задать определяющими соотношениями (2) при некоторых α, β, r. Обозначим через x идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (I). Тогда $\operatorname{Ker} x = \langle a\rangle$, $\operatorname{Im} x = \langle b\rangle$ и по лемме А $bx = b$.

Лемма 6. Полугруппа $K(x)$ изоморфна полугруппе End C_{p^β}. Существует такой $y \in K(x)$, что $|H(x) \cap J(y)| = p$.

Доказательство. Так как по лемме С $K(x) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x)$, то в силу $\mathrm{Im}\, x = \langle b \rangle \simeq C_{p^\beta}$ первое утверждение леммы имеет место.

Обозначим через y отображение $(b^j a^i)y = b^{jp}$, $j \in Z_{p^\beta}$, $i \in Z_{p^\alpha}$. Поскольку отображение $b^j \longmapsto b^{jp}$ является эндоморфизмом группы $\langle b \rangle$ и $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, то по лемме I.2 работы [3], $y \in \mathrm{End}\, G$. Так как $(b^j a^i)(yx) = ((b^j a^i)y)x = b^{jp}x = b^{jp} = (b^j a^i)y$ и $(b^j a^i)(xy) = ((b^j x)(a^i x))y = b^j y = b^{jp}$, то $yx = xy = y$ и $y \in K(x)$. Покажем, что $|H(x) \cap J(y)| = p$.

Пусть $z \in H(x) \cap J(y)$. Так $z \in H(x)$, то по лемме 2 $az = 1$ и $bz = a^i$ при некотором $i \in Z_{p^\alpha}$. Ввиду $z \in J(y)$ имеем $zy = yz = 0$, т.е.

$$a^{ip} = b^p z = (by)z = b(yz) = b0 = 1,$$
$$ip \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad i \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-1}}.$$

Наоборот, если задать отображение z формулами $az = 1$, $bz = a^i$, где $i \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-1}}$, то z можно продолжить до эндоморфизма группы G, ибо оно явно сохраняет первое и третье из соотношений (2), а второе в силу $ip \equiv 0$. Так как $\mathrm{Ker}\, x = \langle a \rangle$, $\mathrm{Im}\, x = \langle b \rangle$, то по лемме 2 $z \in H(x)$. Поскольку $a(zy) = 1$, $a(yz) = 1z = 1$, $b(zy) = a^i y = 1$, $b(yz) = b^p z = a^{ip} = 1$, то $zy = yz = 0$ и $z \in J(y)$. Поэтому $z \in H(x) \cap J(y)$. Следовательно, $|H(x) \cap J(y)| = |\{i \in Z_{p^\alpha} | i \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-1}}\}| = p$ и лемма доказана.

Лемма 7. Идемпотент x удовлетворяет условиям: $P(x) \simeq \mathrm{End}\, C_{p^\alpha}$; $J_0(G) \cap P(x) = \{x\}$.

Доказательство. По лемме I и определению элементов a и b полугруппа $P(x)$ состоит из эндоморфизмов вида

$$ay = a^i, \quad by = b, \quad i \in Z_{p^\alpha}. \qquad (7)$$

Так как $(ay)^{p^\alpha} = 1$, $(by)^{p^\beta} = 1$, $(by)^{-1}(ay)(by) = b^{-1}a^i b = (b^{-1}ab)^i = a^{ni} = (ay)^n$ для каждого $i \in Z_{p^\alpha}$, то $P(x)$ состоит из всех отображений вида (7). Поэтому ясно, что $P(x) \simeq \mathrm{End}\, C_{p^\alpha}$. По определению x ясно, что $x \in J_0(G) \cap P(x)$. Так как группа C_{p^α} не разлагается в полупрямое произведение своих нетривиальных подгрупп, то в силу леммы А ясно, что $\mathrm{End}\, C_{p^\alpha} \simeq$ $\simeq P(x)$ содержит лишь два идемпотента: нулевой и единичный. Нулем полугруппы $P(x)$ является x и единицей I. Поэтому в силу $1 \notin J_0(G)$ ясно, что $J_0(G) \cap P(x) = \{x\}$. Лемма доказана.

Лемма 8. Существует такой $z \in T(G)$, что $xz = 0$, $zx = z$.

Доказательство. Рассмотрим отображение z, заданное формулами

$$az = b^{p^{\beta-1}}, \quad bz = 1.$$

Так как $(az)^{p^\alpha} = 1$, $(bz)^{p^\beta} = 1$, $(bz)^{-1}(az)(bz) = b^{p^{\beta-1}}$ и ввиду условий (6) $r \equiv 1 \pmod{p}$, то $b^{p^{\beta-1}} = b^{rp^{\beta-1}} = (az)^r$ и соответствие z сохраняет определяющие соотношения (2). Поэтому $z \in \mathrm{End}\, G$ и в силу $z \notin \mathrm{Aut}\, G$, $z \neq 0$ имеем $z \in T(G)$. При этом

$$a(xz) = (ax)z = 1z = 1, \quad b(xz) = (bx)z = bz = 1, \quad a(zx) =$$
$$= (az)x = b^{p^{\beta-1}}x = b^{p^{\beta-1}} = az, \quad b(zx) = 1x = 1 = bz,$$

т.е. $xz = 0$ и $zx = z$. Лемма доказана.

Лемма 9. Группа $V(x)$ разлагается в полупрямое произведение $V(x) = A \leftthreetimes D(x)$, где A - некоторая p-подгруппа группы $V(x)$. При $p = 2$ группа $V(x)$ является 2-группой. Группа $D(x)$ изоморфна группе $\mathrm{Aut}\, C_{p^\alpha}$.

Доказательство. По лемме 3 группа $V(x)$ состоит из таких автоморфизмов y, для которых $a^{-1}\cdot(ay) \in \mathrm{Ker}\, x = \langle a \rangle$ и $b^{-1}(by) \in \mathrm{Ker}\, x$, т.е. из автоморфизмов вида

$$ay = a^i, \quad by = ba^j, \quad i, j \in Z_{p^\alpha}. \tag{8}$$

Поскольку y автоморфизм, то в равенствах (8) $(i, p) = 1$. Так как

$$(by)^{-1}(ay)(by) = a^{-j}b^{-1}a^i ba^j = a^{-j}(b^{-1}ab)^i a^j =$$
$$= a^{-j}a^{ri}a^j = a^{ri} = (ay)^r,$$

то среди отображений вида (8) автоморфизмами группы G являются только те, у которых

$$(i, p) = 1, \quad (ba^j)^{p^\beta} = 1. \tag{9}$$

Наоборот, отображения (8), удовлетворяющие (9), задают автоморфизмы группы G. Действительно, тогда y сохраняет соотношения (2) и в силу $(i, p) = 1$ имеем $\langle ay \rangle = \langle a \rangle$,

$b = (by)a^{-j} \in \langle by, ay \rangle$, т.е. $\langle by, ay \rangle = \langle b, a \rangle = G$. Для любого такого y будет $a(yx) = 1 = ax$, $b(yx) = b = bx$, т.е. $y \in V(x)$. Следовательно, группа $V(x)$ состоит из всевозможных отображений вида (8), где выполнены условия (9).

Группа $\mathfrak{D}(x)$ состоит из тех элементов $y \in V(x)$, для которых $xy = x$. Так как $ax = 1$ и $bx = b$, то равенство $xy = x$ равносильно равенству $by = b$. Поэтому по (8) получаем

$$\mathfrak{D}(x) = \{y \mid ay = a^i,\ by = b,\ i \in Z_{p^\alpha},\ (i,p) = 1\}. \qquad (10)$$

По равенству (10) ясно, что $\mathfrak{D}(x) \simeq \operatorname{Aut} C_{p^\alpha}$.

Обозначим

$$A = \{y \mid ay = a,\ by = ba^j,\ j \in Z_{p^\alpha},\ (ba^j)^{p^\beta} = 1\}. \qquad (11)$$

Тогда $A \leqslant V(x) \leqslant \operatorname{Aut} G$. Из (8), (9) следует, что A есть множество тех автоморфизмов из $V(x)$, которые оставляют элемент a инвариантным и поэтому является подгруппой в $V(x)$. Если $y, y' \in A$, $by = ba^j$, $by' = ba^{j'}$, то верно равенство $b(yy') = ba^{j+j'}$. Поэтому ясно, что группа A изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы кольца Z_{p^α} и поэтому является p-группой.

Покажем, что $V(x) = A \leftthreetimes \mathfrak{D}(x)$. В силу равенств (10) и (11) ясно, что $A \cap \mathfrak{D}(x) = \langle 1 \rangle$. Если $y \in V(x)$ и $ay = a^i$, $by = ba^j$, то зададим отображения u, v формулами $au = a^i$, $bu = b$, $av = a$, $bv = ba^j$. Тогда из (10) и (11) следует, что $u \in \mathfrak{D}(x)$, $v \in A$. Явно $y = uv$. Поэтому $V(x) = \mathfrak{D}(x) \cdot A$.

Пусть $z \in A$ и $w \in \mathfrak{D}(x)$. Тогда $az = a$, $bz = ba^j$, $aw = a^i$ и $bw = b$ при некоторых $i, j \in Z_{p^\alpha}$. В силу (10) существует такое i', что $ii' \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Тогда $aw^{-1} = a^{i'}$, $bw^{-1} = b$ и

$$a(w^{-1}zw) = a^{i'}(zw) = a^{i'}w = a^{ii'} = a,$$

$$b(w^{-1}zw) = b(zw) = (ba^j)w = ba^{ij}.$$

Поэтому $w^{-1}zw \in A$ и $A \triangleleft V(x)$. Следовательно, $V(x) = A \leftthreetimes \mathfrak{D}(x)$.

При $p = 2$ имеем $|\mathfrak{D}(x)| = |\operatorname{Aut} C_{2^\alpha}| = 2^{\alpha-1}$ и A является 2-группой. Поэтому при $p = 2$ группа $V(x)$ является 2-группой. Лемма доказана.

<u>Лемма 10.</u> $J(x) \simeq (p^{\alpha-\delta} Z_{p^\alpha})^\times$, где δ определено условием (6).

Доказательство. Если $y \in J(x)$, то $xy = yx = 0$, откуда $b \in \operatorname{Im} x \leqslant \operatorname{Ker} y$, $\operatorname{Im} y \leqslant \operatorname{Ker} x = \langle a \rangle$, что дает

$$by = 1, \quad ay = a^i, \quad i \in Z_{p^\alpha}. \tag{I2}$$

Наоборот, все эндоморфизмы y группы G вида (I2) принадлежат к $J(x)$, ибо $bx = b$, $x = 1$ и

$$b(yx) = (by)x = 1 = by = (bx)y = b(xy),$$
$$a(yx) = (ay)x = a^i x = 1 = ax = a(xy).$$

Среди отображений (I2) сохраняют определяющие соотношения (2) и являются эндоморфизмами лишь те, для которых $(by)^{-1}(ay)(by) = (ay)^r$, т.е.

$$a^i = a^{ir} = a^{i(1+\gamma p^\delta)}, \quad i \equiv i(1+\gamma p^\delta) \pmod{p^\alpha},$$
$$i\gamma p^\delta \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad i \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-\delta}},$$

ибо $(\gamma, p) = 1$. Следовательно, $J(x)$ состоит из всех отображений вида (I2), где $i \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-\delta}}$. Поэтому ясно, что $J(x) \simeq (p^{\alpha-\delta} Z_{p^\alpha})^+$ и лемма доказана.

Мы предположили, что $G \in \mathcal{G}_p$, и показали существование идемпотента $x \in J(G)$, удовлетворяющего условиям леммы 6–I0. Оказывается, что имеет место и обратное утверждение. Так как доказательство обратного утверждения существенно зависит от четности простого числа p, то будем в дальнейшем рассматривать отдельно случаи $p > 2$ и $p = 2$.

Теорема II. Для того, чтобы конечная группа G принадлежала классу $\mathcal{G}_p$, $p > 2$, необходимо и достаточно, чтобы существовал идемпотент $x \in J(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:

I) $K(x) \simeq \operatorname{End} C_{p^\beta}$ при некотором $\beta \geqslant 1$;

2) существует такой $y \in K(x)$, что $|H(x) \cap J(y)| = p$;

3) $V(x) = A \leftthreetimes \mathfrak{D}(x)$, где A – p-группа и $\mathfrak{D}(x)$ – циклическая группа;

4) существует такой $z \in T(G)$, что $xz = 0$, $zx = z$;

5) $J_0(G) \cap P(x) = \{x\}$.

Для указанного x подгруппы $\operatorname{Im} x$ и $\operatorname{Ker} x$ группы G цикличны и $G = \operatorname{Ker} x \leftthreetimes \operatorname{Im} x$, $\operatorname{Im} x \simeq C_{p^\beta}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \in \mathcal{G}_p$. Тогда группу G можно задать определяющими соотношениями (2) при некоторых α, β, r. Обозначим через x идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (I). Условия I), 2), 5) и 4) выполнены в силу лемм 6–8. Поскольку при $p>2$ группа $\mathrm{Aut}\, C_{p^\alpha}$ циклична ([I3], теорема 9.I), то в силу леммы 9 имеет место условие 3). Необходимость доказана.

Прежде чем доказать достаточность, докажем две леммы.

<u>Лемма I2</u>. Пусть группа G конечна и существует идемпотент $x \in \mathrm{End}\, G$, удовлетворяющий условиям I) и 2) теоремы II. Тогда $\mathrm{Im}\, x \simeq C_{p^\beta}$, $\mathrm{Ker}\, x$ содержит ровно одну подгруппу порядка p; силовские p-подгруппы группы $\mathrm{Ker}\, x$ цикличны при $p>2$, при $p=2$ они цикличны или изоморфны обобщенной группе кватернионов Q_n.

<u>Доказательство</u>. Пусть выполнены предположения леммы. По лемме C и условию I) $\mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x) \simeq \mathrm{End}\, C_{p^\beta}$, откуда по лемме B $\mathrm{Im}\, x \simeq C_{p^\beta}$. Пусть

$$N = \mathrm{Ker}\, x, \quad \mathrm{Im}\, x = \langle b \rangle \simeq C_{p^\beta}.$$

Тогда по лемме A

$$G = N \leftthreetimes \langle b \rangle. \tag{I3}$$

Возьмем элемент y, удовлетворяющий условию 2), т.е. $y \in K(x)$ и $|H(x) \cap J(y)| = p$. Ввиду $y \in K(x)$ имеем $yx = xy$. По лемме E тогда $(\mathrm{Im}\, x)y \leq \mathrm{Im}\, x$ и равенство $\mathrm{Im}\, x = \langle b \rangle$ дает, что $by = bj$ для некоторого $j \in Z_{p^\beta}$. Докажем, что $j \equiv 0 \pmod p$. Берем $z \in H(x) \cap J(y)$, $z \neq 0$. По лемме 2 $(\mathrm{Ker}\, x)z = Nz = \langle 1 \rangle$ и $bz \in (\mathrm{Im}\, x)z \leq \mathrm{Ker}\, x$. Далее, $bz \neq 1$, иначе из (I3) следовало бы $z=0$. Так как $\langle b \rangle$ p-группа, то bz является неединичным p-элементом группы $\mathrm{Ker}\, x$ В силу $z \in J(y)$ имеем $yz = 0$ и, следовательно, $b(yz) = bjz = (bz)j = 1$, т.е.

$$j \equiv 0 \pmod p, \tag{I4}$$

ибо bz – неединичный p-элемент группы $\mathrm{Ker}\, x$.

Установим теперь, что N содержит только одну подгруппу порядка p. Пусть c – произвольный элемент подгруппы N, для которого $c^p = 1$ (только что было установлено, что такие существуют). Определим гомоморфизм $w(c)$, являющийся произведением естественного гомоморфизма $N \leftthreetimes \langle b \rangle \to \langle b \rangle$ и гомоморфизма, заданного отображением $b \to c$, т.е.

$$b\,w(c) = c, \quad N\,w(c) = \langle 1 \rangle. \tag{I5}$$

15

Так как $y \in K(x)$ и $xy = y$, то $N = \operatorname{Ker} x \leq \operatorname{Ker} y$. Поэтому

$$N(yw(c)) = (Ny)w(c) = \langle 1 \rangle,$$

$$N(w(c)y) = (Nw(c)y) = \langle 1 \rangle, \quad b(w(c)\cdot y) = cy = 1.$$

В силу сравнения (I4) имеем $b(yw(c)) = b\dot{d}w(c) = cd = 1$. Следовательно, $yw(c) = w(c)\cdot y = 0$, т.е. $w(c) \in J(y)$. По равенствам (I5) и лемме 2 ясно, что $w(c) \in H(x)$. Поэтому $w(c) \in H(x) \cap J(y)$. Так как N содержит элементы порядка p и $w(c) \in H(x) \cap J(y)$ для каждого $c \in N$, где $c^p = 1$, причем из $c \neq c_1$ следует $w(c) \neq w(c_1)$, то в силу равенства $|H(x) \cap J(y)| = p$ ясно, что группа N содержит только одну подгруппу порядка p.

Теперь применим теорему I2.5.2 книги [5], согласно которой каждая силовская p-подгруппа группы $N = \operatorname{Ker} x$ при $p > 2$ является циклической и при $p = 2$ циклической или обобщенной группой кватернионов Q_n. Лемма доказана.

<u>Лемма I3</u>. Пусть группа G конечна и существует идемпотент $x \in \operatorname{End} G$ удовлетворяющий условиям I)–4) теоремы II. Тогда группа G разрешима, все холловские p'-подгруппы группы G содержатся в $N = \operatorname{Ker} x$ и при $p > 2$ группа G разлагается в полупрямое произведение $G = S \leftthreetimes C$, где S и C – соответственно холловская p'- и силовская p-подгруппа группы G.

<u>Доказательство</u>. Пусть выполнены предположения леммы. Сохраним обозначения леммы I2.

По условию 3) группа $V(x)$ разрешима как расширение разрешимой группы A при помощи разрешимой группы $\mathcal{L}(x)$ ([I], стр. I7I). Так как $\operatorname{Im} x$ коммутативна, то согласно лемме 4 $\hat{G} = \{\hat{g} \mid g \in G\} \leq V(x)$. Поэтому группа $\hat{G} \simeq G/Z(G)$ разрешима, а тогда разрешима и G как расширение группы $Z(G)$ при помощи $\hat{G}$. Следовательно, группа G (а также группа $V(x)$) обладает холловскими p'-подгруппами, которые все между собой сопряжены (см. [5], теорема 9.3.I).

Докажем, что все холловские p'-подгруппы группы G лежат в N. Пусть S_1 – произвольная холловская p'-подгруппа группы G. Поскольку в силу (I3) $|G| = |N|\cdot|\langle b \rangle|$ и b – p-элемент, то $|N| \vdots |S_1|$. Поэтому каждая холловская p'-подгруппа группы $\mathcal{N}$ (они существуют ввиду разрешимости группы $\mathcal{N}$) является холловской p'-подгруппой группы G. Отсюда следует ввиду $\mathcal{N} \triangleleft G$ и сопряженности холловских p'-подгрупп группы G, что $S_1 \leq \mathcal{N}$.

Покажем, что G имеет такую холловскую p'-подгруппу S для которой $\hat{S} \leq \mathfrak{D}(x)$ и $b \in \mathcal{N}_G(S)$. Так как $\hat{S}_1 = \{\hat{g} \mid g \in S_1\} \leq \mathcal{V}(x)$ является p'-группой и группа $\mathcal{V}(x)$ разрешима, то существует холловская p'-подгруппа $\mathcal{G}_2$ группы $\mathcal{V}(x)$, для которой $\hat{S}_1 \leq \mathcal{G}_2$ ([5], теорема 9.3.I). По условию 3) имеем $|\mathcal{V}(x)| = |A| \cdot |\mathfrak{D}(x)|$, откуда следует, что каждая холловская p'-подгруппа группы $\mathfrak{D}(x)$ является холловской p'-подгруппой группы $\mathcal{V}(x)$ ибо A – p-группа. Поэтому существует холловская p'-подгруппа $\mathcal{G}_3$ группы $\mathcal{V}(x)$, которая содержится в $\mathfrak{D}(x)$. Подгруппы $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_3$ группы $\mathcal{V}(x)$ сопряжены, т.е.

$$\mathcal{G}_3 = \psi^{-1} \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \psi$$

для некоторого $\psi \in \mathcal{V}(x)$. В силу $\hat{S}_1 \leq \mathcal{G}_2$ и $\psi^{-1} \cdot \hat{g} \cdot \psi = \widehat{g\psi}$ $(g \in G)$ имеем $\psi^{-1} \cdot \hat{S}_1 \cdot \psi = \widehat{S_1\psi} \leq \psi^{-1} \cdot \mathcal{G}_2 \cdot \psi = \mathcal{G}_3 \leq \mathfrak{D}(x)$. Обозначим $S = S_1\psi$. Тогда S – холловская p'-подгруппа группы G, для которой $\hat{S} \leq \mathfrak{D}(x)$. Ранее было отмечено, что каждая холловская p'-подгруппа группы G содержится в $\mathcal{N}$. Поэтому $S \leq \mathcal{N}$.

Если $s \in S$, то $\hat{s} \in \mathfrak{D}(x)$ по построению и $x\hat{s} = x$, т.е. $b = bx = b(x\hat{s}) = (bx)\hat{s} = b\hat{s} = s^{-1}bs$, ибо $b = bx$. Следовательно,

$$b \in C_G(S) \leq \mathcal{N}_G(S). \tag{16}$$

Теперь установим, что существует такой p-элемент $a \in \mathcal{N}_G(S)$ что $\langle a \rangle$ является силовской p-подгруппой группы $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} x$. По условию 4) существует $z \in \mathcal{T}(G)$, для которого $xz = 0$, $zx = z$, т.е. $\langle b \rangle = \operatorname{Im} x \leq \operatorname{Ker} z$ и $\operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} x$. При этом $\operatorname{Ker} z \neq G$, ибо $z \neq 0$. Группа $G/_{\operatorname{Ker} z}$ является циклической p-группой, так как она изоморфна подгруппе $\operatorname{Im} z$ циклической группы $\operatorname{Im} x = \langle b \rangle$. Поэтому $\operatorname{Ker} z \geq G'$ и, следовательно, $M \triangleleft G$ для каждого $M \geq \operatorname{Ker} z$, M – подгруппа группы G. В частности, $\langle \operatorname{Ker} z, \mathcal{N}_G(S) \rangle \triangleleft G$. Обозначим $B = \langle \operatorname{Ker} z, \mathcal{N}_G(S) \rangle$. Тогда $\mathcal{N}_G(B) = G$. Так как из $\mathcal{N}_G(S) \leq B \leq G$ всегда следует, что $\mathcal{N}_G(B) = B$ ([1], стр. 179), то $B = G$, т.е.

$$\langle \operatorname{Ker} z, \mathcal{N}_G(S) \rangle = G. \qquad (17)$$

Обозначим через $a \operatorname{Ker} z$ образующий элемент группы $G/_{\operatorname{Ker} z}$. Так как $\operatorname{Ker} z \lhd G$ и имеет место (17), то $G = \mathcal{N}_G(S)\operatorname{Ker} z$ и можно предполагать, что $a \in \mathcal{N}_G(S)$.

В силу равенства (13) $a = b^i n$ при некоторых $i \in Z_{p^\beta}$, $n \in \mathcal{N}$. Так как $b \in \operatorname{Ker} z$, то $\langle a \operatorname{Ker} z \rangle = \langle n \operatorname{Ker} z \rangle$. Ввиду $b, a \in \mathcal{N}_G(S)$ также $n = b^{-i} a \in \mathcal{N}_G(S)$. Поэтому можно предполагать, что $a \in \mathcal{N}$. Если $o(a) = p^m t$, $(t, p) = 1$, то a^t является p-элементом и $\langle a^t \operatorname{Ker} z \rangle = \langle a \operatorname{Ker} z \rangle$, ибо $\langle a \operatorname{Ker} z \rangle = G/_{\operatorname{Ker} z}$ – циклическая p-группа. Поэтому можно предполагать, что a является p-элементом.

Предположим, что $p > 2$. По лемме 12 каждая силовская p-подгруппа группы $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} x$ циклична. Следовательно, $a \in \langle a^* \rangle$ для некоторой силовской p-подгруппы $\langle a^* \rangle$ группы $\mathcal{N}$. В силу $G/_{\operatorname{Ker} z} = \langle a \cdot \operatorname{Ker} z \rangle$ имеем $G/_{\operatorname{Ker} z} = \langle a^* \operatorname{Ker} z \rangle = \langle a \operatorname{Ker} z \rangle$. Если $\langle a \rangle \neq \langle a^* \rangle$, то ввиду $a \in \langle a^* \rangle$ имеем $a = a^{*ip}$ для некоторого i и

$$\langle a \operatorname{Ker} z \rangle = \langle a^{*ip} \operatorname{Ker} z \rangle = \langle a^* \operatorname{Ker} z \rangle = G/_{\operatorname{Ker} z}.$$

Однако $G/_{\operatorname{Ker} z}$ является ввиду $z \neq 0$ неединичной p-группой и в ней $a^* \operatorname{Ker} z$ и $a^{*ip} \operatorname{Ker} z$ не могут порождать одну подгруппу. Поэтому $\langle a \rangle = \langle a^* \rangle$ и $\langle a \rangle$ является силовской p-подгрупой группы $\mathcal{N}$.

Установим, наконец существование нужного полупрямого разложения. Поскольку $|G| = |\mathcal{N}| \cdot |\langle b \rangle|$, $\langle a \rangle$ – силовская p-подгруппа группы $\mathcal{N}$ и b p-элемент, то порядок силовской p-подгруппы группы G равен $|\langle a \rangle| \cdot |\langle b \rangle|$. Так как $\langle b \rangle \leqslant \mathcal{N}_G(S)$ и $G = \mathcal{N} \leftthreetimes \langle b \rangle$, то по лемме D $\mathcal{N}_G(S) = (\mathcal{N}_G(S) \cap \mathcal{N}) \leftthreetimes \langle b \rangle$. В силу $a \in \mathcal{N}_G(S) \cap \mathcal{N}$ порядок силовской p-подгруппы группы $\mathcal{N}_G(S)$ также равен $|\langle a \rangle| \cdot |\langle b \rangle|$. Поэтому группа $\mathcal{N}_G(S)$ содержит хоть одну силовскую p-подгруппу C группы G. Далее $S \lhd \langle S, C \rangle = SC$, ибо $C \leqslant \mathcal{N}_G(S)$, и в силу $S \cap C = \langle 1 \rangle$ имеем $\langle S, C \rangle = S \leftthreetimes C$. Так как по определению силовских и холловских подгрупп $|S| \cdot |C| = |G| = |S \leftthreetimes C|$, то $G = S \leftthreetimes C$. Лемма доказана.

Доказательство достаточности для теоремы 11. Предположим, что существует $x \in J(G)$, удовлетворяющий условиям 1)–5) теоремы II, и докажем, что $G \in \mathcal{G}_p$ (p – нечетное простое число). По лемме 13 $G = S \leftthreetimes C$, где S – холловская p'-подгруппа и C – силовская p-подгруппа группы G. Сохраним обозначения лемм 12 и 13. Обозначим через y идемпотент, соответствующий полупрямому разложению $G = S \leftthreetimes C$, т.е. $S = \mathrm{Ker}\, y$, $C = \mathrm{Im}\, y$.

Докажем, что $y \in P(x)$. Так как $S \triangleleft G$, то $S \triangleleft \langle S, C_1 \rangle$ и ввиду $S \cap C_1 = \langle 1 \rangle$ имеем $\langle S, C_1 \rangle = S \leftthreetimes C_1$ для произвольной силовской p-подгруппы C_1 группы G. В силу $|S \leftthreetimes C_1| = |S| \cdot |C_1| = |S| \cdot |C| = |G|$ ясно, что $G = S \leftthreetimes C_1$. Поэтому можно предполагать, что $b \in C$. Поскольку $\mathrm{Im}\, x = \langle b \rangle \leqslant C = \mathrm{Im}\, y$ и по лемме A $ky = k$ для каждого $k \in \mathrm{Im}\, y$, то $xy = x$. Имеем также $k(yx) = (ky)x = kx$ для каждого $k \in \mathrm{Im}\, y = C$. Согласно лемме 13, все холловские p'-подгруппы группы G содержатся в $N = \mathrm{Ker}\, x$. Поэтому $S = \mathrm{Ker}\, y \leqslant \mathrm{Ker}\, x$ и $S(yx) = \langle 1 \rangle = Sx$. Поскольку yx и x действуют на C и S одинаково, то в силу $G = S \leftthreetimes C$ имеем $yx = x$. Следовательно, $xy = yx = x$ и $y \in P(x)$.

Заметим, что $y \neq 0$, ибо $b \in C = \mathrm{Im}\, y$. Будет также $x \neq y$, ибо $\mathrm{Ker}\, x$ содержит p-элемент a и $\mathrm{Ker}\, y = S$ не содержит ни одного p-элемента. Из условия 5) следует теперь, что $y = 1$, т.е. $S = \langle 1 \rangle$ и G является p-группой. Из леммы 12 вытекает, что $\mathrm{Ker}\, x = N$ является циклической p-группой. В силу равенства (13) ясно, что $G \in \mathcal{G}_p$. Теорема доказана.

Остается показать, что группы класса $\mathcal{G}_p$ (p – нечетное простое число) можно различить по их полугруппам эндоморфизмов.

<u>Теорема 14</u>. Пусть p – нечетное простое число β, α – натуральные числа, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Для того, чтобы конечная группа G была изоморфна группе $G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал $x \in J(G)$, удовлетворяющий условиям 1)–5) теоремы II и условиям:

6) $\mathfrak{D}(x) \simeq \mathrm{Aut}\, C_{p^\alpha}$;

7) $J(x) \simeq (p^{\alpha-\delta} Z_{p^\alpha})^\times$ $(1 \leqslant \delta \leqslant \alpha)$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть $G = G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$ и имеют место равенства (1), (2) и (6), где $\mu = 1$. Обозначим через x идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (1). Справедливость условий 1)–5) следует сразу из

теоремы II. Справедливость условий 6) и 7) вытекает из лемм 9 и IO. Необходимость доказана.

<u>Достаточность</u>. Пусть группа G конечна и $x \in J(G)$ удовлетворяет условиям I)-7). По лемме A

$$G = \operatorname{Ker} x \leftthreetimes \operatorname{Im} x.$$

Согласно теореме II $G \in \mathcal{G}_p$ и группы $\operatorname{Ker} x$, $\operatorname{Im} x$ цикличны, $\operatorname{Im} x \simeq C_{p^\beta}$. Поэтому существуют такие $a, b \in G$ и μ что

$$\operatorname{Ker} x = \langle a \rangle \simeq C_{p^\mu}, \quad \operatorname{Im} x = \langle b \rangle \simeq C_{p^\beta}.$$

Так как $\operatorname{Ker} x \triangleleft G$, то существует такое r, что $b^{-1}ab = a^r$. На стр. 107 мы отметили, что r представимо в виде $r = 1 + \lambda p^\tau$, где $(\lambda, p) = 1$, $1 \leq \tau \leq \mu$. По лемме 9 (взяв там $\alpha = \mu$) получаем $\mathcal{D}(x) \simeq \operatorname{Aut} C_{p^\mu}$. Из леммы IO(взяв там $\alpha = \mu$, $\delta = \tau$) заключаем $J(x) \simeq (p^{\mu-\tau} Z_{p^\mu})^x$. В силу условия 6) $\operatorname{Aut} C_{p^\mu} \simeq \operatorname{Aut} C_{p^\alpha}$, откуда $|\operatorname{Aut} C_{p^\mu}| = p^{\mu-1}(p-1) = |\operatorname{Aut} C_{p^\alpha}| = p^{\alpha-1}(p-1)$, т.е. $\alpha = \mu$. В силу условия 7) $(p^{\alpha-\delta} Z_{p^\alpha})^x \simeq (p^{\mu-\tau} Z_{p^\mu})^x$, откуда $|(p^{\alpha-\delta} Z_{p^\alpha})^x| = p^\delta = |(p^{\mu-\tau} Z_{p^\mu})^x| = p^\tau$, т.е. $\delta = \tau$. Следовательно, $G \simeq G_{p,\alpha,\beta,\delta,\lambda}$. В силу $p>2$ и леммы F группа G модулярна. Так как ввиду $\beta \leq \alpha$

$$\alpha + \max\{0, \beta-\alpha\} = \alpha, \quad \min\{\alpha, \beta\} = \beta, \quad \delta + \max\{0, \beta-\alpha\} = \delta,$$

то по лемме G ясно, что $G \simeq G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$. Теорема доказана.

<u>Следствие I5</u>. Каждая группа из класса $\mathcal{G}_p$, $p>2$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

<u>Доказательство</u>. По леммам F и G каждая группа из класса $\mathcal{G}_p$, $p>2$ представима в виде $G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$, $\alpha \geq \beta$. Пусть $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$, $\alpha \geq \beta$. Тогда полугруппа $\operatorname{End} G$ конечна и поэтому группа G также конечна ([6], теорема 2).

При изоморфизме $\varphi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$ полугруппа $K(x)$ отображается на полугруппу $K(x\varphi)$. Действительно, по определению $K(x) = \{y \in \operatorname{End} G \mid yx = xy = y\}$. Если $y \in K(x)$, то $yx = xy = y$, откуда $(y\varphi)(x\varphi) = (x\varphi)(y\varphi) = y\varphi$ для любого $y\varphi = \operatorname{End} G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$ и $y\varphi \in K(x\varphi)$. Поэтому $K(x)\varphi \leq K(x\varphi)$, $K(x) \leq K(x\varphi)\varphi^{-1}$. Аналогично имеем для изоморфизма φ^{-1} включения $K(x\varphi)\varphi^{-1} \leq K(x\varphi\varphi^{-1}) = K(x)$, $K(x\varphi) \leq K(x)\varphi$. Следовательно, $K(x)\varphi = K(x\varphi)$. Аналогично проверяется, что

$$J(x)\varphi = J(x\varphi),\ \ V(x)\varphi = V(x\varphi),\ \ \mathcal{D}(x)\varphi = \mathcal{D}(x\varphi),$$
$$P(x)\varphi = P(x\varphi),\ \ H(x)\varphi = H(x\varphi), \tag{18}$$
$$T(G)\varphi = T(G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}),\ \ J_0(G)\varphi = J_0(G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}).$$

Так как $(K\cap L)\varphi = K\varphi \cap L\varphi$ при $K, L \leqslant \mathrm{End}\, G$, то в силу $K(x)\varphi = K(x\varphi)$ и равенств (18) ясно, что изоморфизм φ сохраняет свойства 1)-7). Поэтому по теореме 14 группы G и $G_{p,\alpha,\beta,\delta,1}$ изоморфны. Следствие доказано.

§ 4. О классе $\mathcal{G}_p$ при $p=2$

В данном параграфе продолжим исследования класса $\mathcal{G}_p$. Теперь остается лишь рассмотреть случай $p=2$. Сначала докажем некоторые леммы.

Обозначим через $H \lambda K$ полупрямое произведение групп H и K при помощи гомоморфизма $\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}\, H$, т.е. группу $H \underset{\varphi}{\lambda} K = \{(k,h)_\varphi \mid k\in K,\ h\in H\}$ с правилом умножения

$$(k,h)_\varphi \cdot (k',h')_\varphi = (kk', h(k'\varphi)\ h')_\varphi \tag{19}$$

(см. [1], стр. 65-66).

<u>Лемма 16.</u> Если $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(K, \mathrm{Aut}\, H)$ и существует такой $x \in \mathrm{Aut}\, H$, что $\psi = \varphi \cdot \hat{x}$, то соответствие

$$(k,h)_\varphi \xrightarrow{H} (k, hx)_\varphi \tag{20}$$

определяет изоморфизм между группами $H \lambda K$ и $H \lambda K$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(k,h)_\varphi,\ (k',h')_\varphi \in H \underset{\varphi}{\lambda} K$. Тогда в силу (19) и (20) имеем

$$[(k,h)_\varphi \cdot (k',h')_\varphi]T = (kk', h(k'\varphi)\cdot h')_\varphi T =$$
$$= (kk', [h(k'\varphi)\cdot h']x)_\psi = (kk', [h(k'\varphi)]x \cdot (h'x))_\psi =$$
$$= (kk', [(h(xx^{-1}))(k'\varphi)]x \cdot (h'x))_\psi =$$
$$= (kk', [(hx)(x^{-1}\cdot(x'\varphi))]x \cdot (h'x))_\psi =$$
$$= (kk', (hx)(x^{-1}\cdot(k'\varphi)\cdot x)\cdot(h'x))_\psi =$$
$$= (kk', (hx)((k'\varphi)\hat{x})\cdot(h'x))_\psi =$$

$$=(kk',\ (hx)(k'(\varphi\cdot\hat{x}))\cdot(h'x))_\varphi=$$

$$=(kk',\ (hx)(k'\psi)\cdot(h'x))_\psi=(k,hx)_\psi\cdot(k',h'x)_\psi=$$

$$=[(k,h)_\varphi T]\cdot[(k',h')_\varphi T],$$

т.е. T является гомоморфизмом. Так как x является автоморфизмом группы H, то ясно, что T является мономорфизмом. Если $(k,h)_\psi\in H\underset{\psi}{\lambda} K$, то $(k,hx^{-1})\xrightarrow{T}(k,h)_\psi$, т.е. T является эпиморфизмом. Следовательно, T - изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма I7. Если $G=Q_n\lambda\langle c\rangle$, $Q_n=\langle a,b\mid a^{2^n}=1,\ b^2=a^{2^{n-1}},\ ab=ba^{-1}\rangle$ - обобщенная группа кватернионов $(n\geqslant 2)$ и порядок элемента c равен 2^u $(u\geqslant 1)$, то группа G изоморфна группе со следующими определяющими соотношениями:

$$a^{2^n}=1,\quad b^2=a^{2^{n-1}},\ ab=ba^{-1},\ c^{2^u}=1,\ c^{-1}ac=a^t,\ c^{-1}bc=a^{2^v}b,\tag{2I}$$

где t,v - подходящим образом выбранные натуральные числа.

Доказательство. Отметим, что $Q_n\lambda\langle c\rangle\simeq Q_n\underset{\alpha}{\lambda}\langle c\rangle$, где $\alpha:\langle c\rangle\longrightarrow \mathrm{Aut}\,Q_n$ гомоморфизм, сопоставляющий элементу c автоморфизм $c\alpha: g\longrightarrow c^{-1}gc$, $g\in Q_n$, группы Q_n. В работе [4] (лемма 3) доказано, что одной из силовских 2-подгрупп группы $\mathrm{Aut}\,Q_n$ является группа матриц

$$A=\left\{\begin{pmatrix} i & 0\\ k & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; i,k\in Z_{2^n},\ (i,2)=1\right\}$$

с обычным умножением. Вполне возможно, что $c\alpha\notin A$. В таком случае рассмотрим силовскую 2-подгруппу A_1 группы $\mathrm{Aut}\,Q_n$, содержащую $\langle c\rangle$. Так как силовские подгруппы сопряжены между собой, то существует $x\in \mathrm{Aut}\,Q_n$ такой, что $A=x^{-1}\cdot A_1\cdot x=A_1\hat{x}$. Тогда $(c\alpha)\hat{x}=c(\alpha\cdot\hat{x})\in A$. Поэтому в силу изоморфизма $Q_n\underset{\alpha}{\lambda}\langle c\rangle\simeq Q_n\underset{\alpha\cdot\hat{x}}{\lambda}\langle c\rangle$ (см. лемму I6) можно сразу предполагать, что $c\alpha\in A$ (в противном случае надо вместо α рассмотреть $\alpha\cdot\hat{x}$).

Обозначим

$$\|i,k\|=\begin{pmatrix} i & 0\\ k & 1\end{pmatrix},\qquad c\alpha=\|t,k\|.$$

В группе A имеет место равенство

$$\|i',k'\|^{-1}\cdot\|t,k\|\cdot\|i',k'\|=\|t,-k't+ki'+k'\|.\tag{22}$$

Здесь i' и k' можно выбрать так, что $-k't+ki'+k'=ki'+$ $+k'(1-t)\equiv 2^{\nu}(\mathrm{mod}\,2^n)$ для некоторого ν. Действительно, представим k и $1-t$ в виде $k=k_0 2^{k_1}$, $1-t=t_0 2^{t_1}$, $(k_0,2)=$ $=(t_0,2)=1$. Если $k_1\geqslant t_1$, то при $i'=1$, $k'=\frac{1}{t_0}\cdot 2^{k_1-t_1}\cdot(1-k_0)$ получим $ki'+k'(1-t)\equiv 2^{k_1}(\mathrm{mod}\,2^n)$, если $k_1<t_1$, то при $i'=\frac{1}{k_0}$, $k'=0$ получим $ki'+k'(1-t)\equiv$ $\equiv 2^{k_1}(\mathrm{mod}\,2^n)$ ($\frac{1}{t_0}$ и $\frac{1}{k_0}$ существуют в силу $(t_0,2)=$ $=(k_0,2)=1$).

Для таких i' и k' в силу равенства (22) имеем

$$\|i',k'\|^{-1}\cdot(c\alpha)\cdot\|i',k'\|=\|t,2^{\nu}\|=c\,(\alpha\cdot\widehat{\|i',k'\|}).$$

Поэтому ввиду леммы 16 можно предполагать, что $c\alpha=\|t,2^{\nu}\|$. Учитывая значение матрицы $\|t,2^{\nu}\|$ (см. [4], стр.), получим

$$a(c\alpha)=a^t=c^{-1}ac,\qquad b(c\alpha)=a^{2^{\nu}}b=c^{-1}bc.$$

Так как $G=Q_n\leftthreetimes\langle c\rangle=\langle a,b\rangle\leftthreetimes\langle c\rangle$ и $c^{-1}ac=a^t$, $c^{-1}bc=a^{2^{\nu}}b$, то, учитывая связь между a и b, ясно, что группа G задается определяющими соотношениями (21). Лемма доказана.

<u>Теорема 18.</u> Для того, чтобы конечная группа G принадлежала классу $\mathcal{G}_2$, необходимо и достаточно, чтобы существовал $x\in J(G)$, удовлетворяющий условиям:

1) $K(x)\simeq \mathrm{End}\,C_{2\beta}$ при некотором $\beta\geqslant 1$;

2) существует такой $y\in K(x)$, что $|H(x)\cap J(y)|=2$;

3) $V(x)$ является 2-группой;

4) $P(x)\simeq \mathrm{End}\,C_{2\alpha}$ при некотором $\alpha\geqslant 1$.

Для указанного x подгруппы $\mathrm{Im}\,x$ и $\mathrm{Ker}\,x$ группы G цикличны и $G=\mathrm{Ker}\,x\leftthreetimes\mathrm{Im}\,x$, $\mathrm{Im}\,x\simeq C_{2\beta}$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть $G\in\mathcal{G}_2$ и имеют место (1), (2) и (6), где $p=2$. Обозначим через x идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (1). Тогда справедливость условий 1)–4) следует из лемм 6, 7 и 9. Необходимость доказана.

Предположим, наоборот, что группа G конечна и существует $x\in J(G)$, удовлетворяющий условиям 1)–4) теоремы 18. По лемме А

$$G=\mathrm{Ker}\,x\leftthreetimes\mathrm{Im}\,x.$$

Докажем еще некоторые леммы про x.

Лемма I9. Если группа G конечна и существует $x \in J(G)$, удовлетворяющий условиям I)-4), то группа G является 2-группой.

Доказательство. По лемме I2 $\mathrm{Im}\, x \simeq C_{2^\beta} \simeq G/_{\mathrm{Ker}\, x}$. По лемме 4 $\hat{g} \in V(x)$ для каждого $g \in G$. Поэтому $\hat{G} = \{\hat{g} \mid g \in G\} \leqslant \leqslant V(x)$ и в силу $\hat{G} \simeq G/Z(G)$ и условия 3) $G/_{Z(G)}$ является 2-группой. Так как группа G разрешима как расширение разрешимой группы $Z(G)$ при помощи разрешимой группы $G/_{Z(G)}$, то G обладает холловскими 2'-подгруппами (см. [I], стр. I77). Так как $G/Z(G)$ и $G/_{\mathrm{Ker}\, x} \simeq \mathrm{Im}\, x$ являются 2-группами, то также как в доказательстве леммы I3 получаем, что все холловские 2'-подгруппы группы G содержатся в $Z(G) \cap \cap \mathrm{Ker}\, x$. По лемме 7 работы [4] имеем

$$G = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathcal{X} \leftthreetimes \mathcal{Y}, \tag{23}$$

где $\mathcal{X}$ - холловская 2'-подгруппа и $\mathcal{Y}$ - силовская 2-подгруппа группы G. Ясно, что $\mathcal{X} \leqslant \mathrm{Ker}\, x$. В силу сопряженности силовских 2-подгрупп и равенства (23) ясно, что $\mathcal{Y}$ является единственной силовской 2-подгруппой группы G. Поэтому $\mathrm{Im}\, x \leqslant \mathcal{Y}$ (ведь $\mathrm{Im}\, x \simeq C_{2^\beta}$).

Обозначим через y идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (23). Тогда

$$\mathcal{X} = \mathrm{Ker}\, y \leqslant \mathrm{Ker}\, x, \ \mathrm{Im}\, x \leqslant \mathcal{Y} = \mathrm{Im}\, y.$$

Докажем, что $y \in P(x)$. В силу $\mathrm{Im}\, x \leqslant \mathrm{Im}\, y$ имеем $xy = x$, ибо по лемме A $ky = k$ для каждого $k \in \mathrm{Im}\, y$. Поскольку $gy = g$ при $g \in \mathrm{Im}\, y$, то $g(yx) = gx$ для каждого $g \in \mathrm{Im}\, y$. Ввиду $\mathrm{Ker}\, x \geqslant \mathrm{Ker}\, y$ имеем $g(yx) = gx = 1$ для каждого $g \in \mathrm{Ker}\, y$. Поэтому $yx = x$ (ведь $G = \mathrm{Ker}\, y \leftthreetimes \mathrm{Im}\, y$). Следовательно, $yx = xy = x$, т.е. $y \in P(x)$. Отметим, что $y \neq x$. Действительно, по лемме I2 $\mathrm{Ker}\, x$ содержит элемент порядка 2, но $\mathcal{X} = \mathrm{Ker}\, y$ не содержит элемента порядка 2.

Полугруппа $P(x)$ содержит идемпотенты x и 1. Так как группа C_{2^α} не разлагается в полупрямое произведение своих нетривиальных подгрупп, то в силу условия 4) $P(x)$ имеет 2 идемпотента: x и 1 ($x \neq 1$, ибо $\mathrm{Ker}\, x$ содержит элемент порядка 2; x является нулем в $P(x)$. Поскольку $y \in P(x)$, $y^2 = y$, $y \neq x$, то $y = 1$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\, y = \mathcal{X} = \langle 1 \rangle$ и по (23) $G = \mathcal{Y}$, т.е. группа

G является 2-группой. Лемма доказана.

Лемма 20. Пусть группа G конечна и существует $x \in \in \mathfrak{I}(G)$, удовлетворяющий условиям I)–4). Если $\operatorname{Ker} x = Q_n$ $(n \geqslant 2)$, то $P(x) \simeq \operatorname{End} C_4$ и, следовательно, полугруппа $P(x)$ содержит ровно два обратимых элемента.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Ker} x = Q_n = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1,\ b^2 = a^{2^{n-1}},\ ab = ba^{-1} \rangle$. По лемме I2 $\operatorname{Im} x \simeq C_{2^\beta}$. Пусть $\operatorname{Im} x = \langle c \rangle \simeq C_{2^\beta}$. Тогда $G = Q_n \leftthreetimes \langle c \rangle$, ибо по лемме А $G = \operatorname{Ker} x \leftthreetimes \operatorname{Im} x$. По лемме I7 группа G задается определяющими соотношениями (2I), где $\alpha = \beta$, $\operatorname{Ker} x = Q_n = \langle a, b \rangle$ и $\operatorname{Im} x = \langle c \rangle$.

Рассмотрим отображение

$$c \longmapsto c, \quad a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto a^{2^{n-1}}, \tag{24}$$

и покажем, что оно сохраняет определяющие соотношения (2I) группы G. Сразу видно, что отображение (24) сохраняет первое, третье, четвертое и пятое соотношения из (2I). Второе соотношение из (2I) отображается в равенство $(a^{2^{n-1}})^2 = 1$, которое в силу $a^{2^n} = 1$ выполняется. Шестое равенство отображается в равенство $c^{-1} \cdot a^{2^{n-1}} \cdot c = a^{2^{n-1}}$, которое также имеет место, ибо $c^{-1} \cdot a^{2^{n-1}} \cdot c = (c^{-1} a c)^{2^{n-1}} = a^{t 2^{n-1}} = a^{2^{n-1}}$ в силу $(t, 2) = 1$. Следовательно, отображение (24) определяет эндоморфизм группы G. Обозначим этот эндоморфизм через z.

Покажем теперь, что $P(x) \simeq C_4$, т.е. в условии 4) должно быть $\alpha = 2$. Так как $cx = c$ и $a, b \in \operatorname{Ker} x$, то

$$c(xz) = cz = c = cx, \quad c(zx) = cx,$$

$$a(xz) = 1 = ax, \quad b(zx) = a^{2^{n-1}} x = 1 = bx,$$

т.е. $xz = zx = x$ и $z \in P(x)$. По построению $z \neq x$, z – необратимый элемент полугруппы $P(x)$ ($P(x)$ – полугруппа с единицей I и с нулем x). Поэтому в условии 4) случай $\alpha = 1$ невозможен, ибо при $\alpha = 1$ имеем $P(x) = \operatorname{End} C_2$. $P(x) = \{x, 1\} \ni z$, $z \neq x$, $z \neq 1$. Следовательно, $\alpha > 1$.

С другой стороны, произведение двух необратимых элементов полугруппы $P(x)$ всегда равно нулю, ибо $Q_n = \operatorname{Ker} x$, $P(x)$ изоморфна подполугруппе полугруппы $\operatorname{End}(\operatorname{Ker} x)$ (см. лемму I) и собственные эндоморфизмы группы Q_n образуют полугруппу с нулевым умножением (см. [4], лемма 2). Поэтому в условии 4) имеем $\alpha = 2$ (при $\alpha > 2$ группа $C_{2^\alpha} = \langle d \rangle$ имеет собственный эндоморфизм $d \to d^2$, квадрат которого не равняется нулю). Следовательно, $P(x) \simeq \mathrm{End}\, C_4$ и она содержит ровно два обратимых элемента. Лемма доказана.

Доказательство достаточности для теоремы I8. Пусть группа G конечна и существует $x \in J(G)$, удовлетворяющий условиям I)-4). Докажем, что $G \in \mathcal{G}_2$. Так как $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x$ и по лемме I2 $\mathrm{Im}\, x = \langle c \rangle \simeq C_{2^\beta}$, то достаточно доказать, что $\mathrm{Ker}\, x$ является циклической. Если мы покажем, что $\mathrm{Ker}\, x \neq Q_n$, то в силу леммы I2 ясно, что группа $\mathrm{Ker}\, x$ – циклическая 2-группа. Сохраним обозначения леммы 20.

Предположим, что $\mathrm{Ker}\, x = Q_n$. Рассмотрим отображения $\tau_{i,k}$:

$$c \mapsto c, \quad a \mapsto a^i, \quad b \mapsto a^k b, \quad i, k \in Z_{2^n} \quad (i,2) = 1 \tag{25}$$

и найдем условия, при которых они сохраняют определяющие соотношения (2I) группы G, т.е. когда они определяют эндоморфизмы группы. Для того необходимо и достаточно, что

$$(a^k b)^2 = a^{i 2^{n-1}}, \quad c^{-1} a^i c = a^{it}, \tag{26}$$

$$a^{i+k} b a^i = a^k b, \tag{27}$$

$$c^{-1} a^k b c = a^{2^{\nu} i + k} b. \tag{28}$$

В силу $ab = ba^{-1}$ имеем $a^k b = b a^{-k}$. Поэтому $(a^k b)^2 = a^k b a^k b = b a^{-k} a^k b = b^2 = a^{2^{n-1}} = a^{i 2^{n-1}}$, ибо $(i,2) = 1$. Ясно, что $c^{-1} a^i c = (c^{-1} a c)^i = (a^t)^i = a^{it}$. Следовательно, равенства (26) выполнены для каждых $k, i \in Z_{2^n}$, $(i,2) = 1$. В аналогичных условиях имеет место также (27), ибо $a^{i+k} b a^i = b a^{-(i+k)} a^i = b a^{-k} = a^k b$. Равенство (28) примет вид

$$a^{kt + 2^{\nu}} = a^{2^{\nu} i + k},$$

ибо $c^{-1} a^k b c = c^{-1} a^k c \cdot c^{-1} b c = (c^{-1} a c)^k \cdot c^{-1} b c = a^{kt} a^{2^{\nu}} b = a^{kt + 2^{\nu}} b$. Поэтому оно равносильно сравнению

$$kt + 2^{\nu} \equiv 2^{\nu} i + k \pmod{2^n}. \tag{29}$$

Следовательно, отображения (25) определяют эндоморфизм группы G тогда и только тогда, когда имеет место сравнение (29).

При этом все эти эндоморфизмы являются автоморфизмами, ибо $\langle c, a^i, a^k b \rangle = \langle c, a, b \rangle = G$ в силу $(i,2) = 1$. Так как $cx = c$, $bx = ax = 1$ согласно определению $\mathrm{Im}\, x$ и

$\operatorname{Ker} x$, то

$$c(x\tau_{i,k}) = c\tau_{i,k} = c = cx, \quad c(\tau_{i,k}x) = c = cx,$$
$$b(x\tau_{i,k}) = 1 = bx, \quad b(\tau_{i,k}x) = (a^k b)x = 1 = bx,$$
$$a(x\tau_{i,k}) = 1 = ax, \quad a(\tau_{i,k}x) = a^i x = 1 = ax,$$

т.е. $x\tau_{i,k} = \tau_{i,k}x = x$ и $\tau_{i,k} \in P(x)$.

Поскольку $P(x)$ содержит только два обратимых элемента (см. лемму 20), то сравнение (29) имеет не более двух решений относительно i и k, где $(i,2)=1$. Так как при $r>0$ имеются решения $(1,0)$; $(1,2^{n-1})$ и $(2^{n-r},0)$, то $r=0$. Ввиду $r=0$ сравнение (29) принимает вид

$$i \equiv 1 + k(t-1) \pmod{2^n}. \tag{30}$$

В силу $(t,2)=1$ имеем $(1+k(t+1),2)=1$ для каждого $k \in Z_{2^n}$, т.е. сравнение (30) имеет для каждого $k \in Z_{2^n}$ хотя бы одно решение (i,k). Так как $n \geqslant 2$, имеем по крайней мере 4 решения. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{Ker} x \neq Q_n$. Следовательно, $\operatorname{Ker} x$ циклична и $G \in \mathcal{G}_2$. Теорема I8 доказана.

Теперь мы хотим показать, что группы из класса $\mathcal{G}_2$ определяются своими полугруппами эндоморфизмов. Для этого нам нужно исследовать условия изоморфизма групп из $\mathcal{G}_2$. Эти условия будут даны в теореме 24, предыдущие леммы являются подготовительными к ней.

<u>Лемма 2I</u>. Если $r, r' \in Z_{2^\alpha}^*$, $r' = r + 2^{\alpha-1}$ и порядок элемента r группы $Z_{2^\alpha}^*$ не меньше чем 4, то $\langle r \rangle = \langle r' \rangle$ в группе $Z_{2^\alpha}^*$.

<u>Доказательство</u>. Условия леммы могут выполняться лишь при $\alpha > 3$. Именно, $Z_{2^\alpha}^* = \langle 1 \rangle$ при $\alpha = 1$, $Z_{2^\alpha}^* \simeq C_2 \times C_{2^{\alpha-2}}$ при $\alpha \geqslant 2$ (см. [I3], теорема 9.I) и при $\alpha \leqslant 3$ эта группа содержит лишь элементы второго порядка. Элементами второго порядка в $C_2 \times C_{2^{\alpha-2}}$ являются элементы $b^i a^{j 2^{\alpha-3}}$, где $C_2 = \langle b \rangle$, $C_{2^{\alpha-2}} = \langle a \rangle$, $i, j \in Z_2$, i и j не равняются одновременно нулю. Поэтому $Z_{2^\alpha}^*$ содержит 3 элемента второго порядка (ведь $\alpha > 3$). Элементами второго порядка в группе $Z_{2^\alpha}^*$ являются -1, $1+2^{\alpha-1}$ и $-1+2^{\alpha-1}$ (для проверки достаточно возвести их просто в квадрат).

Проверим, что $1+2^{\alpha-1}$ является именно тем элементом второго порядка, который содержится в компоненте $C_{2^{\alpha-2}}$. Действительно, если $1+2r_0 \in Z_{2^\alpha}^*$ является элементом порядка >2, то $(1+2r_0)^2 \in C_{2^{\alpha-2}}$ и его степень, которая имеет порядок 2, имеет вид $(1+2r_0)^{2s} = 1+2s\cdot 2r_0 + C_{2s}^2(2r_0)^2+\ldots$, т.е. вид $(1+2r_0)^{2s} = 1+4t$. Так как $\alpha>3$, то $-1 \not\equiv 1+4t \pmod{2^\alpha}$ и $-1+2^{\alpha-1} \not\equiv 1+4t \pmod{2^\alpha}$, т.е. $1+4t \neq -1$, $1+4t \neq -1+2^{\alpha-1}$ в группе $Z_{2^\alpha}^*$.

Покажем, что $\langle r\rangle = \langle r'\rangle$. Так как порядок элемента r больше двух, то его квадрат r^2 содержится в $C_{2^{\alpha-2}}$ и при некотором i элемент $(r^2)^i = r^{2i}$ имеет порядок 2, т.е.

$$r^{2i} \equiv 1 + 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha} \qquad (31)$$

для некоторого i. Ввиду $(r,2)=1$ получим из (31) $r(r^{2i}-1) \equiv r2^{\alpha-1} \equiv 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}$, $r^{2i+1} \equiv r + 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}$. Следовательно, $r' = r+2^{\alpha-1} = r^{2i+1}$, откуда следует $\langle r\rangle = \langle r'\rangle$, ибо группа $Z_{2^\alpha}^*$ является 2-группой. Лемма доказана.

Лемма 22. Пусть $r=1+2\gamma$ и $r'=1+2\gamma'$ – элементы порядка 2^τ группы $Z_{2^\alpha}^*$ и $\tau>1$, $\alpha>1$, $(\gamma,2)=(\gamma',2)=1$. Тогда группы $G=\langle a,b \mid a^{2^\alpha}=b^{2^\beta}=1,\ b^{-1}ab=a^r\rangle$ и $\bar G = \langle a',b' \mid a'^{2^\alpha}=b'^{2^\beta}=1,\ b'^{-1}a'b'=a'^{r'}\rangle$ изоморфны, т.е. $G_{2,\alpha,\beta,1,\gamma} \simeq G_{2,\alpha,\beta,1,\gamma'}$.

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. В силу $Z_{2^\alpha}^* = C_2 \times C_{2^{\alpha-2}}$ имеем $r^2, r'^2 \in C_{2^{\alpha-2}}$. При этом r^2 и r'^2 – элементы одинакового порядка $2^{\tau-1}$ в $C_{2^{\alpha-2}}$. Поэтому существует i такой, что $r^2=(r'^2)^i = r'^{2i}$ $((i,2)=1$, ибо $o(r^2)=o(r'^2)=2^{\tau-1})$. Из определения $\bar G$ следует, что $b'^{-i}a'b'^i = a'^{r'^i}$ (см. формулу (4)). Возьмем в $\bar G$ новые образующие $\bar a = a'$, $\bar b = b'^i$. В силу $(i,2)=1$ ясно, что $\bar G = \langle \bar a, \bar b\rangle$. Обозначим $\bar r = r'^i$. Тогда $\bar b^{-1}\bar a\bar b = a^{\bar r}$ и $\bar G = \langle \bar a,\bar b \mid \bar a^{2^\alpha} = \bar b^{2^\beta}=1,\ \bar b^{-1}\bar a\bar b = \bar a^{\bar r}\rangle$. Так как $\bar r = r'^i = (1+2\gamma')^i = 1+2i\gamma' + C_i^2(2\gamma')^2 + \ldots = 1+2(\gamma' i + 2C_i^2\gamma'^2 + \ldots)$, то $\bar r$ имеет вид $\bar r = 1+2\bar\gamma$, где $(\bar\gamma,2)=1$. Поскольку $r=1+2\gamma$, $(\gamma,2)=1$, то $(1+\gamma+\bar\gamma,2)=1$ и в силу $r^2 = r'^{2i} = \bar r^2$ имеем

$$r^2-\bar r^2 = (1+2\gamma)^2-(1+2\bar\gamma)^2 = 4(\gamma-\bar\gamma+\gamma^2-\bar\gamma^2) = 4(\gamma-\bar\gamma)(1+\gamma+\bar\gamma) \equiv 0 \pmod{2^\alpha},$$

$$\gamma-\bar\gamma \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-2}}.$$

Поэтому $r-\bar{r}=2(\gamma-\bar{\gamma})\equiv (\mathrm{mod}\ 2^{\alpha-1})$ и $\bar{r}=r+2^{\alpha-1}$ или $\bar{r}=r$. Если $\bar{r}=r+2^{\alpha-1}$, то по лемме 21 (ведь $\tau>1$) $\langle r\rangle=\langle\bar{r}\rangle$. Следовательно, $\langle r\rangle=\langle\bar{r}\rangle$ и поэтому группы G и $\bar{G}$ изоморфны (см. [7], лемма 8). Лемма доказана.

Лемма 23. Пусть $G=G_{2,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$, где $\delta=1$, $\alpha>1$. Обозначим через x идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (1). Тогда

$$[C_{\mathrm{Aut}\,G}(x):\mathfrak{D}(x)]=2^{\beta-\tau},$$

где 2^τ – порядок элемента r в группе $Z^*_{2^\alpha}=C_2\times C_{2^{\alpha-2}}$.

Доказательство. По предположению $\mathrm{Ker}\,x=\langle a\rangle$, $\mathrm{Im}\,x=\langle b\rangle$ и имеют место (1)–(3), где $p=2$. Группа $C_{\mathrm{Aut}\,G}(x)=\{y\in\mathrm{Aut}\,G\,|\,yx=xy\}$ состоит в силу леммы Е из автоморфизмов y вида

$$ay=a^i,\quad by=b^j,\ i\in Z_{2^\alpha},\ j\in Z_{2^\beta},\ (i,2)=(j,2)=1. \qquad (32)$$

Наоборот, все автоморфизмы y вида (32) принадлежат в $C_{\mathrm{Aut}\,G}(x)$, ибо в силу $bx=b$, $ax=1$ имеем

$$a(yx)=a^ix=1,\quad a(xy)=1,\quad a(yx)=a(xy),$$

$$b(yx)=b^jx=b^j,\quad b(xy)=by=b^j,\quad b(yx)=b(xy).$$

Среди отображений (32) сохраняют определяющие соотношения (2) лишь те, для которых $b^{-j}a^ib^j=a^{ri}$, т.е. (см. (4)) $b^{-j}a^ib^j=a^{ir^j}=a^{ri}$, $ir^j\equiv ri\ (\mathrm{mod}\ 2^\alpha)$, $r^j\equiv r\ (\mathrm{mod}\ 2^\alpha)$ и

$$r^{j-1}\equiv (\mathrm{mod}\ 2^\alpha). \qquad (33)$$

По формуле (10) группа $\mathfrak{D}(x)$ состоит из автоморфизмов (32), где $j=1$. Поэтому в силу (32) и (33) ясно, что $[C_{\mathrm{Aut}\,G}(x):\mathfrak{D}(x)]$ равен количеству таких $j\in Z_{2^\beta}$, для которых $(j,2)=1$ и имеет место сравнение (33).

Пусть 2^τ – порядок элемента r в группе $Z^*_{2^\alpha}=C_2\times C_{2^{\alpha-2}}$. Так как $\delta=1<\alpha$, то $r\neq1$ (см. (6)). Еще имеем $1\leqslant\tau\leqslant\leqslant\max\{1,\alpha-2\}$ в силу определения τ. Из сравнения (3) (при $p=2$) следует, что $\tau\leqslant\beta$. Сравнение (33) равносильно $j-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^\tau)$ и, следовательно,

$$[C_{\mathrm{Aut}}(x):\mathfrak{D}(x)]=2^{\beta-\tau}.$$

Лемма доказана.

Теорема 24. Пусть группа G конечна и существует $x\in\in\mathfrak{I}(G)$, удовлетворяющий условиям 1)–4) теоремы 18 и условию

5) $\mathcal{J}(x) \simeq (2^{\alpha-\delta} Z_{2^\alpha})^\times$, где $\delta \le \alpha$.

Тогда имеем:

I Если $\alpha = 1$, то $G = \langle a, b \mid a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = 1,\ ab = ba \rangle$.

II Если $\alpha > 1$, $\delta \ge 2$, то $G = \langle a, b \mid a^{2^{\alpha'}} = b^{2^{\beta'}} = 1,\ b^{-1}ab = a^{1+2^{\delta'}} \rangle$, где $\alpha' = \alpha + \max\{0, \beta-\alpha\}$, $\beta' = \min\{\beta, \alpha\}$, $\delta' = \delta + \max\{0, \beta-\alpha\}$.

III Если $\alpha > 1$, $\delta = 1$, $|[x]_\sigma| \ne 2^\alpha$, то $G = \langle a, b \mid a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1+2^{\alpha-\beta}} \rangle$.

IV Если $\alpha > 1$, $\delta = 1$, $|[x]_\sigma| = 2^\alpha$, $[C_{\mathrm{Aut}\, G}(x) : \mathfrak{D}(x)] = 2^{\beta-\tau} \ne 2^{\beta-1}$, то $G = \langle a, b \mid a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = 1,\ b^{-1}ab = a^r \rangle$, где r - произвольный элемент порядка 2^τ вида $r = 1 + 2\gamma$, $(\gamma, 2) = 1$, в группе $Z_{2^\alpha}^*$. При этом различные r порядка 2^τ указанного вида определяют изоморфные группы.

V Если $\alpha > 1$, $\delta = 1$, $|[x]_\sigma| = 2^\alpha$, $[C_{\mathrm{Aut}\, G}(x) : \mathfrak{D}(x)] = 2^{\beta-\tau} = 2^{\beta-1}$, то в случае $|\tilde{2} \cdot \mathcal{N}(x)| \ne 2$ имеем $G = \langle a, b \mid a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ и в случае $|\tilde{2} \cdot \mathcal{N}(x)| = 2$ имеем $G = \langle a, b \mid a^{2^\alpha} = b^{2^\beta} = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1+2^{\alpha-1}} \rangle$, где $\tilde{2}$ - элемент 2 из $Z_{2^\beta}^\times = K(x)$.

Доказательство. Пусть G - конечная группа и $x \in \mathfrak{I}(G)$ удовлетворяет условиям I)-4) теоремы I8 и условию 5). По теореме I8 $G \in \mathcal{G}_2$, $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x$, группы $\mathrm{Ker}\, x$, $\mathrm{Im}\, x$ - цикличны и $\mathrm{Im}\, x = \langle b \rangle \simeq C_{2^\beta}$. Ввиду цикличности группы $\mathrm{Ker}\, x$ существуют такие a и λ, что $\mathrm{Ker}\, x = \langle a \rangle \simeq C_{2^\lambda}$. В силу $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ существует такое r, что $b^{-1}ab = a^r$. По лемме 7 (взяв там $\alpha = \lambda$) имеем $P(x) \simeq \mathrm{End}\, C_{2^\lambda}$. По условию 4) $P(x) \simeq \mathrm{End}_{2^\alpha}$. Поэтому $|\mathrm{End}\, C_{2^\alpha}| = 2^\alpha = |\mathrm{End}\, C_{2^\lambda}| = 2^\lambda$, т.е. $\lambda = \alpha$, $\mathrm{Ker}\, x = \langle a \rangle \simeq C_{2^\alpha}$.

Покажем, что $G \simeq G_{2,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$ для некоторого γ. Так как r представимо в виде $r = 1 + \gamma 2^{\delta'}$, $\delta' \le \alpha$, $(\gamma, 2) = 1$, то по лемме I0 (взяв там $p = 2$, $\delta = \delta'$) имеем $\mathcal{J}(x) \simeq (2^{\alpha-\delta'} Z_{2^\alpha})^\times$. В силу условия 5) $|\mathcal{J}(x)| = |(2^{\alpha-\delta} Z_{2^\alpha})^\times| = 2^\delta = |(2^{\alpha-\delta'} Z_{2^\alpha})^\times| = 2^{\delta'}$, т.е. $\delta' = \delta$ и $G \simeq G_{2,\alpha,\beta,\delta,\gamma}$ для некоторого γ. Отметим, что параметры $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ заданы уже в условиях I)-5).

Покажем справедливость утверждений I-V. Если $\alpha = 1$, то в силу $1 \le \delta \le \alpha$ также $\delta = 1$ и $r = 1 + 2\gamma \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$. Поэтому верно утверждение I. Если $\alpha > 1$, $\delta \ge 2$, то по лемме F группа G модулярна и в силу леммы G имеет место утверждение II.

Пусть в остальной части доказательства $\alpha > 1$ и $\delta = 1$.

По лемме F группа G тогда немодулярна.

Оценим число элементов в классе $[x]_\delta$. Для этого покажем, как элементам класса $[x]_\sigma$ можно сопоставить элементы из Z_{2^α}. Предположим, что $y \in [x]_\sigma$. По лемме 5 $\operatorname{Ker} y = \operatorname{Ker} x = \langle a \rangle$, т.е. $ay = 1$. Так как $bx = b$ (ведь $\operatorname{Im} x = \langle b \rangle$) и $yx = x$, то $(b^{-1} \cdot (by))x = (bx)^{-1} (byx) = (bx)^{-1} \cdot (bx) = 1$ и $b^{-1} \cdot (by) \in \operatorname{Ker} \alpha = \langle a \rangle$, т.е.

$$by = ba^i, \quad ay = 1 \tag{34}$$

для некоторого $i \in Z_{2^\alpha}$. Поэтому в силу $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ ясно, что $|[x]_\sigma| \leq 2^\alpha$ и все элементы из $[x]_\sigma$ имеют вид (34). Если отображение y вида (34) принадлежит полугруппе $\operatorname{End} G$, то в силу

$$by^2 = (by)y = (ba^i)y = (by)(ay)^i = by, \quad ay^2 = 1 = ay,$$

$$b(xy) = by, \quad a(xy) = 1 = ay,$$

$$b(yx) = (ba^i)x = (bx)(ax)i = bx, \quad a(yx) = 1 = ax,$$

имеем $y \in [x]_\sigma$. Все отображения вида (34) сохраняют определяющие соотношения $a^{2^\alpha} = 1$ и $b^{-1}ab = a^r$:

$$(ay)^{2^\alpha} = 1, \quad (by)^{-1}(ay)(by) = (by)^{-1} \cdot 1 \cdot (by) = 1 = (ay)^r.$$

Следовательно, отображение вида (34) является эндоморфизмом группы G тогда и только тогда, когда $(by)^{2^\beta} = 1$, т.е. $(ba^i)^{2^\beta} = 1$.

Если $|[x]|_\sigma \neq 2^\alpha$, то в силу предыдущего абзаца существует такой $i \in Z_{2^\alpha}$, что отображение (34) не является эндоморфизмом. Тогда $G \neq \langle a \rangle \leftthreetimes \langle ba^i \rangle$, так как в случае $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle ba^i \rangle$ идемпотент z полугруппы $\operatorname{End} G$, соответствующий данному полупрямому разложению, должен удовлетворять $az = 1$, $bz = (bz)(az)^i = (ba^i)z = ba^i$, т.е. совпасть с отображением (34). Поэтому выполнены предположения леммы H (при $a' = a$, $b' = ba^i$). Из леммы H следует справедливость утверждения III.

Предположим теперь, что $|[x]_\sigma| = 2^\alpha$. В силу предпоследнего абзаца $(ba^j)^{2^\beta} = 1$ для каждого $j \in Z_{2^\alpha}$. Пусть 2^τ – порядок элемента r в группе $Z^*_{2^\alpha}$. Так как $\delta = 1$ и $\alpha > 1$, то в случае $\tau > 1$ по лемме 23 будет $[C_{\operatorname{Aut} G}(x) : \mathfrak{D}(x)] = 2^{\beta-\tau} \neq 2^{\beta-1}$. Из-за $\delta = 1$ имеем $r = 1 + 2\gamma$, где $(\gamma, 2) = 1$. При различных r порядка 2^τ по лемме 22 получаются изоморфные группы. Следовательно, справедливо утверждение IV.

Предположим, что $\tau = 1$. Тогда r является элементом второго порядка в $Z^*_{2^\alpha}$, т.е. $r \in \{-1, 1+2^{\alpha-1}, -1+2^{\alpha-1}\}$. В силу $\delta = 1$ имеем $r = 1+2\gamma$, $(\gamma, 2) = 1$. Поэтому при $r = 1+2^{\alpha-1}$ получим $2\gamma \equiv 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}$, $\gamma \equiv 2^{\alpha-2} \pmod{2^{\alpha-1}}$, что возможно лишь при $\alpha = 2$. Но при $\alpha = 2$ имеем $1+2^{\alpha-1} = 1+2 = 3 \equiv -1 \pmod{2^\alpha}$, $r = -1$. Следовательно, всегда

$$r \in \{-1, -1+2^{\alpha-1}\}.$$

Найдем группу $V(x)$ в данном случае. Как отмечено в лемме 9, $V(x)$ состоит из всевозможных отображений вида (8), где выполнены условия (9). Поскольку $(ba^j)^{2^\beta} = 1$ для каждого $j \in Z_{2^\alpha}$, то $V(x)$ состоит из всех отображений z вида

$$az = a^i, \quad bz = ba^j, \quad i, j \in Z_{2^\alpha}, \quad (i, 2) = 1.$$

Пусть $\widetilde{2u} \in k(x) = Z^\times_{2^\beta} = \mathrm{End}\, C_{2^\beta} \simeq \mathrm{End}(\mathrm{Im}\, x) = \mathrm{End}\langle b\rangle$ является элементом $2u$ из $Z^\times_{2^\beta}$, $(u, 2) = 1$. Подсчитаем число элементов во множестве $\widetilde{2u} \cdot V(x)$. Имеем $a\widetilde{2u} = 1$, $b\widetilde{2u} = b^{2u}$. Найдем $\widetilde{2u} \cdot z$ для $z \in V(x)$:

$$\begin{aligned} a(\widetilde{2u} \cdot z) &= (a\widetilde{2u})z = 1, \quad b(\widetilde{2u} \cdot z) = (b\widetilde{2u})z = \\ &= b^{2u}z = (ba^j)^{2u} = ((ba^j)^2)^u = \\ &= (b^2a^{j(1+r)})^u = b^{2u}a^{j(1+r)t_{2,u}} \end{aligned}$$

(см. формулу (5)). Следовательно, $|\widetilde{2u} \cdot V(x)|$ равен количеству различных элементов вида $b^{2u}a^{j(1+r)t_{2,u}}$, где $j \in Z_{2^\alpha}$. При $r = -1$ всегда $b^{2u}a^{j(1+r)t_{2,u}} = b^{2u}$ и тогда $|\widetilde{2u} \cdot V(x)| = 1$. Для каждого натурального числа k число $(1+2\mu)^{2k} = 1 + 2k \cdot 2\mu + C^2_{2k}(2\mu)^2 + \dots$ имеет вид $(1+2\mu)^{2k} = 1 + 2s_k$. Поэтому в силу $r = 1+2\gamma$, $(\gamma, 2) = 1$ имеем $t_{2,u} = 1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2(u-1)} = 1 + (1+2\mu)^2 + \dots + (1+2\mu)^{u-1} = 1 + (1+2s_1) + \dots + (1+2s_{u-1}) = u + 2(s_1 + \dots + s_{u-1})$, откуда ввиду $(u, 2) = 1$ получим $(t_{2,u}, 2) = 1$. Следовательно, в случае $r = -1+2^{\alpha-1}$ из равенства $j^{(1+r)t_{2,u}} = j'^{(1+r)t_{2,u}}$ следует, что $j(1+r) = j'(1+r)$, $j^{2^{\alpha-1}} = j'^{2^{\alpha-1}}$, $j \equiv j' \pmod 2$. Поэтому при $r = -1+2^{\alpha-1}$ имеем $|\widetilde{2u} \cdot V(x)| = 2$. Следовательно,

$$|\widetilde{2u} \cdot V(x)| = \begin{cases} 1, & \text{если } r = -1, \\ 2, & \text{если } r = -1+2^{\alpha-1}. \end{cases} \tag{35}$$

Взяв в равенстве (35) $u = 1$, легко понять, что имеет место утверждение V. Теорема доказана.

Следствие 25. Каждая группа из класса $\mathcal{G}_2$ определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{G}_2$ и $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, \bar{G}$, где $\bar{G}$ – некоторая группа. Поскольку из конечности полугруппы $\mathrm{End}\, G$ следует конечность полугруппы $\mathrm{End}\, \bar{G}$, то группа $\bar{G}$ конечна (см. [6], теорема 2). По теореме I8 существует $x \in J(G)$, удовлетворяющий условиям I)–4) теоремы I8. По лемме IO x удовлетворяет условию 5) теоремы 24 при некотором δ.

Пусть $\varphi : \mathrm{End}\, G \longrightarrow \mathrm{End}\, \bar{G}$ – заданный изоморфизм. Как отмечено в доказательстве следствия I5, множества $J(x)$, $k(x)$, $\mathfrak{D}(x)$, $V(x)$ и т.д. сохраняются при изоморфизме φ. Поэтому $x\varphi \in J(\bar{G})$ и $x\varphi$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям I)–5) (при тех же α, β, δ) и по теореме I8 $\bar{G} \in \mathcal{G}_2$. Если мы покажем еще, что φ сохраняет $[x]_\sigma$ и $|\tilde{2} \cdot V(x)|$, то для x и $x\varphi$ выполнены одинаковые предположения в утверждениях I–V теоремы 24 и поэтому по теореме ясно, что группы G и $\bar{G}$ определены определяющими соотношениями одинакового типа, т.е. группы G и $\bar{G}$ изоморфны.

Покажем, что φ сохраняет $[x]_\sigma$, т.е. $[x]_\sigma \varphi = [x\varphi]_\sigma$. Пусть $y \in [x]_\sigma$. По определению отношения σ имеем $xy = y$, $yx = x$, откуда $(x\varphi)(y\varphi) = y\varphi$, $(y\varphi)(x\varphi) = x\varphi$, т.е. $y\varphi \in [x\varphi]_\sigma$. Следовательно, $[x]_\sigma \varphi \leq [x\varphi]_\sigma$, $[x]_\sigma \leq [x\varphi]_\sigma \varphi^{-1}$. Аналогично для φ^{-1} и $x\varphi$ получим $[x\varphi]_\sigma \varphi^{-1} \leq [(x\varphi)\varphi^{-1}]_\sigma = [x]_\sigma$, $[x\varphi]_\sigma \leq [x]_\sigma \varphi$. Поэтому $[x]_\sigma \varphi = [x\varphi]_\sigma$.

Покажем теперь, что φ сохраняет $|\tilde{2} \cdot V(x)|$. Здесь $\tilde{2}$ является элементом 2 в $k(x) = \mathrm{End}\, C_{2^\beta} = Z_{2^\beta}^{\times}$. Поскольку также $k(x\varphi) = \mathrm{End}\, C_{2^\beta} = Z_{2^\beta}^{\times}$, то для различения обозначим элемент 2 в $k(x\varphi)$ через $\bar{2}$. При $\beta = 1$ имеем $\tilde{2} = 0$, $\bar{2} = 0$ и в силу $0\varphi = 0$ получим

$$|\tilde{2} \cdot V(x)| = |0 \cdot V(x)| = |\{0\}| = 1 =$$
$$= |0 \cdot V(x\varphi)| = |\bar{2} \cdot V(x\varphi)|.$$

Поэтому при $\beta = 1$ число $|\tilde{2} \cdot V(x)|$ сохраняется. Пусть $\beta > 1$. Тогда свойствами $(2u)^\beta = 0$, $(2u)^{\beta-1} \neq 0$ в полугруппе $Z_{2^\beta}^{\times}$ обладают лишь элементы $2u$ с нечетными u. Поэтому $\tilde{2}\varphi = \overline{2u}$ для некоторого нечетного числа u. В силу равенства (35) имеем $|\overline{2u} \cdot V(x\varphi)| = |\bar{2} \cdot V(x\varphi)|$. Следовательно,

$$|\tilde{z}\cdot \mathcal{V}(x)| = |(\tilde{z}\cdot \mathcal{V}(x))\varphi| = |(\tilde{z}\varphi)\cdot(\mathcal{V}(x)\varphi)| =$$
$$= |\widetilde{zu}\cdot \mathcal{V}(x\varphi)| = |\tilde{z}\cdot \mathcal{V}(x\varphi)|$$

и число $|\tilde{z}\cdot \mathcal{V}(x)|$ сохраняется в изоморфизме φ для каждого $\beta \geqslant 1$. Следствие доказано.

Из следствий I5 и 25 получаем:

Следствие 26. Каждая конечная p-группа (p - простое число), являющая полупрямым произведением двух своих циклических подгрупп, определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

Литература

I. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., Основы теории групп. Москва, I972.

2. Пуусемп П. Полугруппы эндоморфизмов двух классов метациклических групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I974, 336, I00-II9.

3. Пуусемп П., Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I975, 366, 76-I04.

4. Пуусемп П., Полугруппы эндоморфизмов обобщенных групп кватернионов. Настоящий сб., 84-I03.

5. Холл М., Теория групп. Москва, I962.

6. Alperin, J.L., Groups with finitely many automorphisms. Pacif. J. Math., 1962, 12, N° 1, 1-5.

7. Basmaji, B.G., On the isomorphisms of two metacyclic groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 22, N°1, 175-182.

8. King, B., Presentations of metacyclic groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, 8, 103-131.

9. Lindenberg, W., Über die Struktur zerfallender bizyklischer p-Gruppen. J. für reine u. angew. Math., 1970, 241, 118-146.

10. Lindenberg, W., Über die Struktur zerfallender nicht-modularer bizyklischer 2-Gruppen. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1970, № 29, 1-63.

11. Lindenberg, W., Struktur und Klassifizierung bizyklischer p-Gruppen. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1970, № 40, 1-36.

12. Lindenberg, W., Die Ordnungen der Automor-

phismengruppen von zerfallenden bizyklischen p-Gruppen. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1972, № 57, 203-215.

13. P a s s m a n, D., Permutation groups. New York, 1968.

Поступило
15 II 1975

KAHE TSÜKLILISE p-RÜHMA POOLOTSEKORRUTISE ENDOMORFISMIPOOLRÜHM

P. Puusemp

R e s ü m e e

Artiklis tõestatakse, et kahe tsüklilise p-rühma poolotsekorrutis määratakse ära oma endomorfismipoolrühmaga.

DIE ENDOMORPHISMENHALBGRUPPE DES HALBDIREKTEN PRODUKTS VON ZWEIEN ZYKLISCHEN p-GRUPPEN

P.Puusemp

Z u s a m m e n f a s s u n g

In diesem Artikel zeigen wir, daß halbdirektes Produkt von zwei zyklischen p-Gruppen durch seine Endomorphismenhalbgruppe bestimmt ist.

РАДИКАЛЫ В ПОЧТИ-КОЛЬЦАХ

К. Каарли

Кафедра алгебры и геометрии

Начало (§§ 2, 3) настоящей статьи посвящено полупримарным почти-кольцам, введенным автором в [3]. В § 2 характеризуются 0-неприводимые модули над полупримарным почти-кольцом. В § 3 вводится идеал $D(R)$. Показывается, что $D(R)$ является прямым слагаемым модуля R_R, выясняются структура идеала $D(R)$ и некоторые свойства разложения $R = D(R) \dot{+} T$.

Остальная часть работы посвящена радикалам почти-колец. Основная проблема: как связаны радикал почти-кольца и радикал подсистемы. Доказывается, что

I) $J_0(B) \supseteq J_0(R) \cap B$, если B - правый квазиидеал слабо артинова или дистрибутивно порожденного почти-кольца R;

2) $J_1(S) \subseteq J_1(R) \cap S$ для любого идеала S

3) $J_2(S) = J_2(R) \cap S$ для любого квазиидеала S.

Более полные результаты удается получить для полупримарных почти-колец. При этом существенно применяются результаты работы [3] и первых параграфов настоящей статьи.

Например, даются достаточные условия для идеальной наследственности 0-радикала (теорема 9), описываются почти-кольца, все гомоморфные образы которых 0-полупросты (теорема IO). Особо следует отметить теорему I8, которая решает проблему, поставленную Хартнеем в [IO]. Теорема утверждает, что идеал, порожденный квазирадикалом артинова почти-кольца, совпадает с $J_0(R)$.

§ I. Основные понятия

С простейшими понятиями теории почти-колец (модуль, подмодуль, идеал модуля, правый квазиидеал, правый идеал, квазиидеал, идеал) можно познакомиться по работам [3, 6]. Дадим здесь только определения радикалов и тех понятий, которые были введены автором в [3].

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$S \triangleleft R$ — S - идеал почти-кольца R;

$H \triangleleft_R G$ — H - идеал R-модуля G;

$S \lhd_R R$ или $S \lhd_r R$ S – правый идеал почти-кольца R;
(A) идеал, порожденный подмножеством A;
$(A)_r$ правый идеал, порожденный подмножеством A.

Если A и B суть подмножества R-модуля G, то обозначим

$$(B:A)_R = \{r \in R \mid Ar \subseteq B\}.$$

Для любого R-модуля G обозначим

$$\mathcal{G}(G_R) = \{g \in G \mid gR = G\}$$

$$G_R^0 = \{g \in G \mid gR = 0\}.$$

Введем на R-модуле G так называемую R-эквивалентность σ_R:

$$g_1 \sigma_R g_2 \Leftrightarrow \forall_{r \in R} \quad g_1 r = g_2 r.$$

Модуль G_R называется

- абелевым, если $(G, +)$ – абелева группа и $(g_1 + g_2)r = g_1 r + g_2 r$ при всех $g_1, g_2 \in G$ и $r \in R$;
- циклическим, если $\mathcal{G}(G_R) \neq \emptyset$ и $G \neq 0$.
- строго циклическим, если $GR \neq 0$ и $G = \mathcal{G}(G_R) \cup G_R^0$;
- простым, если G не имеет R-идеалов, отличных от 0 и G,
- вполне простым, если $GR \neq 0$ и при любом идеале $S \lhd R$ либо $GS = 0$, либо G – простой S-модуль;
- 0-неприводимым, если он цикличен и прост;
- Δ-неприводимым[1], если а) G 0-неприводим, б) для каждого $g \in G$ найдется $x \in R$, так что $g \sigma_R (gx)$, в) всякий ненулевой подмодуль вида gR есть прямая сумма 0-неприводимых R-модулей;
- I-неприводимым, если он строго цикличен и прост;
- 2-неприводимым, если $GR \neq 0$ и G не содержит подмодулей отличных от 0 и G.

Обозначим через $\mathfrak{M}_R^i$, $i = 0, 1, 2, \Delta$, класс всех i-неприводимых R-модулей. Тогда

$$\mathfrak{M}_R^0 \supseteq \mathfrak{M}_R^\Delta \supseteq \mathfrak{M}_R^1 \supseteq \mathfrak{M}_R^2. \qquad (I)$$

---

[1] Понятие Δ-неприводимого модуля было введено Хартнеем в [10]. Чтобы охватить случай почти-колец без единицы, нам пришлось добавить к его определению условие б).

Идеал $\bigcap_{G\in\mathfrak{M}_R^i}(0:G)_R$ называется <u>i-радикалом</u> почти-кольца R и обозначается через $\mathcal{J}_i(R)$. В силу (I) имеем

$$\mathcal{J}_0(R)\subseteq \mathcal{J}_{1/2}(R)\subseteq \mathcal{J}_1(R)\subseteq \mathcal{J}_2(R).$$

Почти-кольцо R называется i-радикальным, если $R=\mathcal{J}_i(R)$ и i-полупростым, если $\mathcal{J}_i(R)=0$. Если R имеет точный i-неприводимый модуль, то R называется i-примитивным.

Правый идеал A почти-кольца R назовем <u>i-модулярным</u>, если $R/A\in\mathfrak{M}_R^i$ и R имеет левую единицу e по модулю A (т.е. $er-r\in A$ при всех $r\in R$). Известно ([6], предложение 2.6), что при $i=1,2$ пересечение всех i-модулярных правых идеалов совпадает с $\mathcal{J}_i(R)$. Аналогичное утверждение можно доказать и для случая $i=\frac{1}{2}$. Однако пересечение всех 0-модулярных правых идеалов не обязательно совпадает с $\mathcal{J}_0(R)$ и называется <u>квазирадикалом</u>. Последний обозначается через $Q(R)$.

Пусть L - под-почти-кольцо почти-кольца R. Будем говорить, что L -модуль <u>M допускает продолжение</u> до R-модуля, если можно так определить композицию $(m,r)\to m\circ r\in M$, что M превращается в R-модуль и $m\ell=m\circ\ell$ для всех $\ell\in L$.

Почти-кольцо K назовем <u>матричным</u>, если оно изоморфно либо кольцу всех матриц над телом (т.е. кольцу всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства G), либо почти-кольцу $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где G/ρ - конечно-порожденный свободный $\Gamma,0$-полигон [3]. В обоих случаях группа G превращается естественным образом в K-модуль. Обозначим один из модулей, возникающих таким путем, через $m(K)$. (В принципе при различных изоморфизмах могут получиться неизоморфные модули). Однако позже мы покажем, что в интересующей нас ситуации модуль $m(K)$ не зависит от выбранного изоморфизма (следствие 4).

Для удобства ссылок сформулируем здесь некоторые основные свойства матричных почти-колец, которые легко вытекают из доказанных в [3] результатов.

<u>Лемма I.</u> Пусть K - матричное почти-кольцо. Тогда

I) $m(K)$ является точным строго циклическим K-модулем;

2) $K=\tilde{\sum_{i=1}^{n}}{}^{\cdot} K_i$, где $K_i\simeq_K m(K)$ и K_i являются аннуляторами некоторых подмножеств из $m(K)$;

3) K имеет левую единицу.

Доказательство. Если K является кольцом, то все утверждения следуют из теоремы плотности ([2], стр. 49). Если же K не является кольцом, то они верны в силу предложений I и 2 из [3].

Лемма 2. Пусть матричное почти-кольцо K содержится в качестве идеала в почти-кольце R. Тогда

I) K-модуль $m(K)$ допускает продолжение до R-модуля;

2) множества K_i являются правыми идеалами почти-кольца R;

3) $m(K) \simeq_R K_i$.

Доказательство. I) В силу леммы I введенный там K-модуль K_1 является циклическим: $K_1 = kK$. Поэтому

$$K_1 R = (kK)R = k(KR) \subseteq kK = K_1,$$

т.е., K_1 является правым квазиидеалом почти-кольца R и тем самым R-модулем. Пользуясь изоморфизмом $K_1 \simeq_K m(K)$, структуру R-модуля можно перенести с K_1 на $m(K)$.

2) В силу леммы I имеем $K_i = (0 : \mathcal{X}_i)_K$, где $\mathcal{X}_i \subseteq m(K)$. Так как $m(K)$ является R-модулем, то по лемме A из [3] получаем $K_i \lhd_r R$.

Утверждение 3) следует непосредственно из определения структуры R-модуля на $m(K)$. Лемма доказана.

Почти-кольцо назовем артиновым, если оно удовлетворяет условию минимальности для правых квазиидеалов.

Почти-кольцо назовем полупримарным, если в нем существует ряд идеалов

$$0 = R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_n = R, \qquad (2)$$

факторы которого либо нильпотентны, либо являются матричными почти-кольцами.

Класс всех полупримарных почти-колец обозначим через $\mathfrak{A}$ а ряд (2) назовем $\mathfrak{A}$-рядом. В [3] доказано (теорема 7), что класс $\mathfrak{A}$ включает все артиновы почти-кольца.

Пусть U и V являются идеалами почти-кольца R и $U \subset V$. Фактор V/U назовем тривиальным, если $V^2 \subset U$; минимальным, если между U и V нет других идеалов и простым, если V/U - простое почти-кольцо.

Известно (см. [3], лемма 14), что каждое полупримарное почти-кольцо имеет приведенный $\mathfrak{A}$-ряд, то есть $\mathfrak{A}$-ряд, все

18

матричные факторы которого минимальны.

Нам будет часто полезна следующая простая лемма и ее следствие.

<u>Лемма 3</u>. Пусть R - почти-кольцо, $M_1, M_2 \triangleleft R$, $M_1 \subset M_2$, $S \triangleleft_r R$ и $S_i = S \cap M_i$, $i = 1,2$. Тогда S_2/S_1 изоморфно правому идеалу почти-кольца R/M_1, содержащемуся в M_2/M_1. В частности, из нильпотентности M_2/M_1 следует нильпотентность S_2/S_1

<u>Доказательство</u>. По второй теореме об изоморфизмах имеем

$$S_2/S_1 = (S\cap M_2)/(S\cap M_1) = (S\cap M_2)/(S\cap M_2\cap M_1) \simeq$$
$$\simeq (S\cap M_2 + M_1)/M_1 \subseteq M_2/M_1, \tag{3}$$

где $S\cap M_2 + M_1 \triangleleft_r R$.

<u>Следствие I</u>. Пусть R - почти-кольцо, $M_1, M_2, S \triangleleft R$, $M_1 \subset M_2$ и $S_i = M_i \cap S$, $i = 1,2$. Если $S_2 + M_1 = M_2$, то $S_2/S_1 \simeq M_2/M_1$. Этот изоморфизм является также R-модульным и он устанавливает взаимно однозначное соответствие между идеалами (правыми идеалами) почти-кольца R/S_1, содержащимися в S_2/S_1, и идеалами (правыми идеалами) почти-кольца R/M_1, содержащимися в M_2/M_1.

<u>Доказательство</u>. Так как $S_2 + M_1 = M_2$, то по формуле (3) имеем $S_2/S_1 \simeq M_2/M_1$. Поскольку этот изоморфизм естественный, то он является также R-модульным.

Последнее утверждение следствия мы получим, если убедимся, что изоморфизм (3) есть ограничение естественного гомоморфизма

$$\varphi : R/S_1 = R/(S_1\cap M_1) \longrightarrow R/M_1$$

Но действительно, из второй теоремы об изоморфизмах известно, что изоморфизм (3) индуцируется естественным гомоморфизмом $\gamma : S_2 + M_1 \to (S_2+M_1)/M_1$ (ограничение γ на S_2 является эпиморфизмом и его ядром служит $S_2\cap M_1 = S_1$). Поскольку у нас $M_1, S_1 \triangleleft R$, то γ есть ограничение естественного гомоморфизма $R \to R/M_1$ а изоморфизм (3) - ограничение гомоморфизма φ, что и требовалось доказать.

§ 2. О-неприводимые модули над полупримарными почти-кольцами

В этом параграфе дается описание О-неприводимых модулей над полупримарным почти-кольцом в терминах факторов его приведенного M-ряда. Для этого сначала выясним некоторые свойства идеалов полупримарного почти-кольца.

Теорема I. Всякий ненулевой идеал полупримарного почти-кольца содержит либо ненулевой нильпотентный идеал, либо минимальный идеал с ненулевым квадратом. Минимальный идеал с ненулевым квадратом полупримарного почти-кольца является матричным почти-кольцом.

Доказательство. Пусть $R \in \mathfrak{A}$, $0 \neq S \triangleleft R$ и R_i, $i=1,2,\dots,n$, суть члены приведенного $\mathfrak{A}$-ряда для R. Обозначим $S_i = S \cap R_i$. Берем первый член R_{i+1} приведенного $\mathfrak{A}$-ряда, такой что $S_{i+1} \neq 0$. Если R_{i+1}/R_i нильпотентен, то по лемме 3 нильпотентен и S_{i+1}/S_i. Значит, в силу $S_i = 0$ идеал S содержит ненулевой нильпотентный идеал S_{i+1}.

Пусть R_{i+1}/R_i является матричным фактором. Из $S_i = 0$ и $S_{i+1} \neq 0$ следует $S_{i+1} \nsubseteq R_i$, откуда в силу приведенности $\mathfrak{A}$-ряда и следствия I получаем

$$S_{i+1} = S_{i+1}/S_i \simeq R_{i+1}/R_i. \tag{4}$$

Поскольку R_{i+1}/R_i есть матричный фактор приведенного $\mathfrak{A}$-ряда, то этот изоморфизм дает, что S_{i+1} является минимальным идеалом с ненулевым квадратом.

Пусть теперь S - минимальный идеал и $S^2 \neq 0$. Тогда $S_{i+1} \neq 0$ влечет $S_{i+1} = S$. Докажем, что фактор R_{i+1}/R_i не нильпотентен. Из $S_i = 0$ и нильпотентности R_{i+1}/R_i по лемме 3 следовала бы нильпотентность $S = S_{i+1}/S_i$. Докажем индукцией по классу нильпотентности, что этого не может быть. Если $S^k \neq 0$, но $S^{k+1} = 0$, то $S^k \subseteq (0:S)_S \subseteq S$. Поскольку $(0:S)_S \triangleleft R$ (см. [3], лемма А) и S - минимальный идеал, то $S^k \neq 0$ дает $(0:S)_S = S$. Значит, $S^2 = 0$, противоречие.

Следовательно, R_{i+1}/R_i является матричным фактором и из (4) получаем, что $S = S_{i+1} \simeq R_{i+1}/R_i$. Теорема доказана.

Предложение I. Если R_{i+1}/R_i есть матричный фактор приведенного $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца R, то $G = m(R_{i+1}/R_i)$ является 0-неприводимым R-модулем и $(0:G)_R \cap R_{i+1} = R_i$.

Доказательство. По определению G есть R_{i+1}/R_i-модуль. В силу леммы 2 он является R/R_i-модулем, следовательно, и R-модулем.

Докажем, что модуль G_R 0-неприводим. Если R_{i+1}/R_i является матричным кольцом над телом, то это следует из теоремы плотности ([2], стр. 49), так как тогда $gR \geq gR_{i+1} =$

$= G$ при любом ненулевом $g \in G$.

Пусть теперь $R_{i+1}/R_i \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma, 0}(G/_g, G)$. Ввиду приведенности $\mathfrak{A}$-ряда фактор R_{i+1}/R_i является минимальным идеалом почти-кольца R/R_i. Следовательно, по предложению 7 из [3] имеем $G \in \mathfrak{M}^{o}_{R/R_i}$. Очевидно, тогда также $G \in \mathfrak{M}^{o}_{R}$. Поскольку G точен как R_{i+1}/R_i-модуль (лемма I), то он точен и над R/R_i и ядро R-модуля G пересекается с R_{i+1} по R_i.

Следствие 2. Если S - минимальный идеал с ненулевым квадратом полупримарного почти-кольца R то $m(S)$ - 0-неприводимый R-модуль и $(0 : m(S))_R \cap S = 0$.

Доказательство. Идеал S является матричным почти-кольцом в силу теоремы I и поэтому $m(S)$ определен. Утверждение следствия вытекает из предложения I, если мы покажем, что S можно включить в приведенный $\mathfrak{A}$-ряд почти-кольца R в качестве первого члена.

По предложению I4 из [3] имеем $R/S \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, в R/S существует приведенный $\mathfrak{A}$-ряд.

$$0 \subset R_1/S \subset R_2/S \subset \cdots \subset R_n/S = R/S.$$

Так как S является матричным почти-кольцом, то ряд

$$0 \subset S \subset R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R_n = R$$

будет приведенным $\mathfrak{A}$-рядом для R.

Предложение 2. Минимальный идеал S с ненулевым квадратом полупримарного почти-кольца R является прямой суммой минимальных правых идеалов, каждый из которых R - изоморфен модулю $m(S)$.

Доказательство. Идеал S является матричным почти-кольцом по теореме I. В силу леммы I имеем $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где $S_i \simeq_S m(S)$. Далее, по лемме 2 $m(S)$ является R-модулем, $S_i \simeq_R m(S)$ и S_i являются правыми идеалами почти-кольца R. Согласно следствию 2 имеем $m(S) \in \mathfrak{M}^{o}_{R}$. Следовательно, 0-неприводимыми будут и все R-модули S_i. Поэтому R-модули S_i не содержат R-идеалов, отличных от 0 и S_i и тем более являются минимальными правыми идеалами почти-кольца R.

Следствие 3. Каждый матричный фактор R_{i+1}/R_i приведенного $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца R есть прямая сумма минимальных правых идеалов почти-кольца R/R_i, каждый из которых R-изоморфен 0-неприводимому R-модулю $m(R_{i+1}/R_i)$

Доказательство. Данный фактор является минимальным идеалом с ненулевым квадратом почти-кольца R/R_i, полупримарного по предложению I4 из [3]. Поэтому применимо предложение 2.

Теперь мы перейдем к получению основного результата настоящего параграфа, состоящего в том, что каждый 0-неприводимый модуль над идеалом полупримарного почти-кольца есть фактормодуль некоторого модуля $m(R_{i+1}/R_i)$. Перед этим докажем еще одну лемму.

Лемма 4. Если $G \in \mathfrak{M}^0_R$, $S \lhd R$ и $GS \neq 0$, то $\mathcal{G}(G_S) = \mathcal{G}(G_R)$. В частности, G_S является циклическим модулем и $GS = G$.

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{G}(G_S) \subseteq \mathcal{G}(G_R)$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in \mathcal{G}(G_R)$. По лемме C из [3] тогда $gS \lhd_R G$. Если было бы $gS = 0$, то в силу $S \lhd R$ мы получили бы $GS = (gR)S = g(RS) \subseteq gS = 0$, противоречие. Следовательно, $gS \neq 0$ и благодаря 0-неприводимости модуля G_R мы получаем $gS = G$.

Теорема 2. Пусть $R \in \mathfrak{A}$, $S \lhd R$, $G \in \mathfrak{M}^0_S$ и R_j - члены некоторого приведенного $\mathfrak{A}$-ряда для R. Если R_{i+1} есть первый такой член $\mathfrak{A}$-ряда, что $G(S \cap R_{i+1}) \neq 0$, то R_{i+1}/R_i является матричным фактором и G есть гомоморфный образ модуля $m(R_{i+1}/R_i)_S$.

Доказательство. Обозначим $S_j = S \cap R_j$ и пусть i - минимальное такое число, что $GS_{i+1} \neq 0$. (оно существует, поскольку $GS_n = G(S \cap R) = GS \neq 0$).

Докажем сначала, что S_{i+1}/S_i является прямой суммой некоторых правых идеалов почти-кольца R/S_i, каждый из которых R-изоморфен R-модулю $m(R_{i+1}/R_i)$. Так как $S_{i+1} \lhd S$ и $GS_{i+1} \neq 0$, то по лемме 4 имеем $GS_{i+1} = G$. Поэтому $GS^k_{i+1} = G$ при любом натуральном k и ни одна из степеней S^k_{i+1} не содержится в $(0:G)_S$. Поскольку по выбору i имеем $GS_i = 0$ и $S_i \subseteq (0:G)_S$, то из этого следует ненильпотентность почти-кольца S_{i+1}/S_i. Так как по лемме 3 S_{i+1}/S_i изоморфен правому идеалу почти-кольца R_{i+1}/R_i, то ненильпотентен также фактор R_{i+1}/R_i. Следовательно, он является матричным. В силу выбора i имеем $S_{i+1} \not\subseteq R_i$ и ввиду минимальности фактора R_{i+1}/R_i получим $S_{i+1} + R_i = R_{i+1}$. Следствие I дает теперь

$$S_{i+1}/S_i \simeq R_{i+1}/R_i. \qquad (5)$$

По следствию 3 существуют $L_j \triangleleft_r R$, $j=1,\dots,m$, такие что $R_{i+1}/R_i = \sum_{j=1}^{m} L_j/R_i$ и $L_j/R_i \simeq {}_R m(R_{i+1}/R_i)$. Пусть при изоморфизме (5) правому идеалу L_j/R_i соответствует K_j/S_i. Следствие I дает теперь $K_j \triangleleft_r R$ и $K_j/S_i \simeq {}_R m(R_{i+1}/R_i)$.

Далее, поскольку $G S_{i+1} \neq 0$, то по лемме 4 найдется такой $g \in \mathcal{G}(G_S)$, что $g S_{i+1} = G$. Поэтому должен найтись и такой j, что $g K_j \neq 0$. Так как $g \in \mathcal{G}(G_S)$, $K_j \triangleleft_r S$ и $G \in \mathfrak{M}^o_S$, то отсюда по лемме C из [3] следует $g K_j = G$. Отображение $\varphi : K_j \to G$, заданное правилом $\varphi(k_j) = g k_j$, является S-гомоморфизмом из K_j на G. В силу выбора i имеем $g S_i = 0$. Таким образом, $S_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ и φ можно пропустить через $K_j/S_i \simeq {}_R m(R_{i+1}/R_i)$. Теорема доказана.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $R \in \mathfrak{A}$, R_i суть члены некоторого приведенного $\mathfrak{A}$-ряда для R и $G \in \mathfrak{M}^o_R$. Тогда $G \simeq_R m(R_{i+1}/R_i)$, где R_{i+1} – первый такой член $\mathfrak{A}$-ряда, что $G R_{i+1} \neq 0$. При различных i 0-неприводимые модули $m(R_{i+1}/R_i)$ неизоморфны.

<u>Доказательство</u>. Первое утверждение следует из теоремы 2, если взять в ней $S = R$, так как ненулевой гомоморфизм из 0-неприводимого модуля $m(R_{i+1}/R_i)_R$ является изоморфизмом. Второе следует из того, что по предложению I различные модули $m(R_{i+1}/R_i)$ имеют различные ядра.

<u>Следствие 4.</u> Если R_{i+1}/R_i – матричный фактор приведенного $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца R, то R-модуль $m(R_{i+1}/R_i)$ определен однозначно с точностью до изоморфизма.

<u>Доказательство</u>. Допустим, что в качестве $m(R_{i+1}/R_i)$ можно выбрать еще некоторый модуль G. Тогда по предложению I $G \in \mathfrak{M}^o_R$ и $(0:G)_R \cap R_{i+1} = R_i$. В силу теоремы 3 модуль G изоморфен некоторому $m(R_{j+1}/R_j)$, $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Второе утверждение той же теоремы дает $G \not\simeq m(R_{j+1}/R_j)$, если $i \neq j$. Таким образом, $G \simeq_R m(R_{i+1}/R_i)$.

<u>Следствие 5</u>. Всякое полупримарное почти-кольцо имеет лишь конечное число неизоморфных 0-неприводимых модулей.

<u>Следствие 6</u>. Любые два $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца имеют равное количество матричных факторов.

§ 3. Идеал $D(R)$

Рассмотрим цепочки идеалов почти-кольца, где все факторы минимальны и нетривиальны.

Лемма 5. В полупримарном почти-кольце R не существует бесконечных возрастающих цепочек идеалов

$$0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots \tag{6}$$

с минимальными нетривиальными факторами.

Доказательство. По условию S_{i+1}/S_i является минимальным идеалом с ненулевым квадратом почти-кольца R/S_i, полупримарного в силу предложения I4 из [3]. По следствию 2 имеем $(0:m(S_{i+1}/S_i))_{R/S_i} \cap (S_{i+1}/S_i) = 0$ и $m(S_{i+1}/S_i) \in \mathfrak{M}^{\circ}_{R/S_i}$, откуда $m(S_{i+1}/S_i) \in \mathfrak{M}^{\circ}_R$. Поэтому ядро R-модуля $m(S_{i+1}/S_i)$ пересекается с S_{i+1} по S_i. В частности, при $i<k$ идеал $(0:m(S_{i+1}/S_i))_R \cap S_{i+1} = S_i$ строго меньше $(0:m(S_{k+1}/S_k))_R \cap S_{i+1} = S_{i+1}$, т.е. ядра модулей $m(S_{i+1}/S_i)$ и $m(S_{k+1}/S_k)$ различны. Явно ядра изоморфных модулей совпадают. Следовательно, если бы цепочка (6) была бесконечной, мы получили бы противоречие со следствием 5 (над R имелось бы бесконечно много неизоморфных 0-неприводимых модулей).

Лемма 6. Пусть

$$0 = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n = S \tag{7}$$

некоторая цепочка идеалов почти-кольца R с максимальным числом членов, все факторы которого минимальны и нетривиальны. Тогда S не зависит от выбора цепочки.

Доказательство. Пусть

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_m = N$$

другая цепочка с теми же свойствами, что и (7). Докажем индукцией по i, что $N_i \subseteq S$. Тогда получаем $N \subseteq S$. Обратное включение доказывается аналогично.

Имеем $N_0 \subseteq S$. Допустим, что $N_i \subseteq S$ и докажем, что тогда и $N_{i+1} \subseteq S$. Так как N_{i+1}/N_i – минимальный фактор, то из включений $N_i \subseteq S \cap N_{i+1} \subseteq N_{i+1}$ следует либо $S \cap N_{i+1} = N_{i+1}$, либо $S \cap N_{i+1} = N_i$. В первом случае $N_{i+1} \subseteq S$, что и требовалось доказать. Покажем, что другой случай приведет к противоречию.

Заметим, что в этом случае $(N_{i+1}+S) \cap N_{i+1} = N_{i+1}$, $S \cap N_{i+1} = N_i$ и $((N_{i+1}+S) \cap N_{i+1}) + S = N_{i+1} + S$. Следовательно, взяв в следствии I в качестве M_1, M_2 и S соответственно S, $N_{i+1}+S$ и N_{i+1}, получаем $(N_{i+1}+S)/S \simeq N_{i+1}/N_i$, причем минимальность фактора N_{i+1}/N_i влечет минимальность фактора $(N_{i+1}+S)/S$. Последнее противоречит максимальности цепочки (7). Лемма доказана.

Определим теперь идеал $D(R)$ следующим путем:

I) $S_0 = 0$.

2) Если идеалы $S_1, \dots, S_i$ уже определены и R/S_i имеет минимальные идеалы с ненулевым квадратом, то S_{i+1}/S_i считается равным одному из них. Если же R/S_i таких идеалов не имеет, то считаем $D(R) = S_i$.

Пусть $R \in \mathfrak{A}$. Тогда из леммы 5 следует, что описанный процесс кончается после конечного числа шагов, а в силу леммы 6 идеал $D(R)$ действительно не зависит от последовательности (7).

<u>Лемма 7</u>. Пусть R – почти-кольцо, $U, V \triangleleft R$, $U \subset V$ и почти-кольца U и V/U имеют левые единицы. Тогда существует $X \triangleleft_r R$, так что $V = U \dotplus X$ и V имеет левую единицу.

<u>Доказательство</u>. Так как U имеет левую единицу e_1, то имеем $R = U \dotplus Y$, где $Y = (0 : e_1)_R \triangleleft_r R$ (см. [3], лемма Е). Поскольку $U \subset V$, то $V = U \dotplus Y \cap V$, откуда $V/U \simeq Y \cap V$. Так как V/U имеет левую единицу, то и $Y \cap V$ имеет левую единицу e_2. Поскольку разложение $V = U \dotplus Y \cap V$ прямое, то $e_1 + e_2$ является левой единицей для V.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $R \in \mathfrak{A}$. Тогда

I) идеал $D(R)$ разлагается в прямую сумму минимальных правых идеалов почти-кольца R, являющихся 0-неприводимыми R-модулями;

2) $D(R)$ имеет левую единицу;

3) $D(R)$ является прямым слагаемым модуля R_R и его дополнение не имеет минимальных идеалов с ненулевым квадратом.

<u>Доказательство</u>. I) и 2). В силу определения $D(R)$ имеем цепочку идеалов

$$0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_m = D(R) \tag{8}$$

с минимальными нетривиальными факторами. Докажем индукцией по i, что утверждения I) и 2) верны для всех S_i, $i = 1, \dots m$.

При $i=1$ утверждение I) верно в силу предложения 2 и следствия 2. Так как S_1 является матричным почти-кольцом по теореме I и поэтому имеет левую единицу (лемма I), то верно и утверждение 2).

Допустим, что S_i, $i \neq m$ имеет свойства I) и 2) из формулировки теоремы. В силу теоремы I фактор S_{i+1}/S_i является матричным и по лемме I имеет левую единицу. Следовательно, по лемме 7 левой единицей обладает и идеал S_{i+1}. Из леммы 7 получаем также

$$S_{i+1} = S_i \dotplus X \tag{9}$$

для некоторого правого идеала X. Учитывая индуктивное предположение, теперь достаточно показать, что X является прямой суммой минимальных правых идеалов почти-кольца R, являющихся 0-неприводимыми R-модулями. Для этого заметим, что

$$0 = S_i/S_i \subset S_{i+1}/S_i \subset \dots \subset S_m/S_i$$

является цепочкой типа (8) для R/S_i. При этом идеалу S_1 из (8) здесь соответствует S_{i+1}/S_i. Учитывая верность нашего индуктивного утверждения при $i=1$ получаем, что S_{i+1}/S_i является прямой суммой минимальных правых идеалов почти-кольца R/S_i, являющихся 0-неприводимыми R/S_i-модулями. Требуемое утверждение относительно X следует теперь из изоморфизма $X \simeq S_{i+1}/S_i$, вытекающего из (9) и следующего факта: каждый 0-неприводимый R/S-модуль является 0-неприводимым R-модулем.

3) Идеал $D(R)$ имеет левую единицу e в силу второго утверждения настоящей теоремы. Следовательно, имеем разложение $R_R = D(R) \dotplus T$, где $T = (0:e)_R$ ([3], лемма E). Поскольку $T \simeq R/D(R)$, то T не имеет минимальных идеалов с ненулевым квадратом в силу определения $D(R)$.

<u>Предложение 3</u>. Любой ненулевой правый идеал полупримарного почти-кольца R, содержащийся в $D(R)$ имеет левую единицу.

<u>Доказательство</u>. Заметим сначала, что $D(R)$ есть вполне приводимый R-модуль, т.е. каждый его идеал является прямым слагаемым. Действительно, это следует из известной теоремы ([5], стр. 48), так как $D(R)$ является прямой суммой простых R-модулей по теореме 4.

Пусть $0 \neq X \triangleleft_r R$ и $X \subseteq D(R)$. Ясно, что тог-

19

да $X \triangleleft_R D(R)$. Поскольку $D(R)$ вполне приводим, то найдется $Y \triangleleft_R D(R)$, так что $X \dotplus Y = D(R)$. Пусть e – левая единица для $D(R)$, существующая по теореме 4 и $e = e_1 + e_2$, где $e_1 \in X$ и $e_2 \in Y$. Для произвольного $x \in X$ имеем

$$x = ex = (e_1 + e_2)x = e_1 x + e_2 x,$$

откуда $e_2 x = -e_1 x + x$. Здесь $-e_1 x + x \in X$ в силу $X \triangleleft_R D(R)$ и $e_2 x \in Y$ из-за $Y \triangleleft_R D(R)$. Таким образом, $-e_1 x + x \in X \cap Y = 0$, $e_1 x = x$ и e_1 – левая единица для X.

Предложение 4. Если S – идеал полупримарного почти-кольца R, содержащийся в $D(R)$ и $R_R = S \dotplus U$, то U содержит все правые идеалы, пересекающиеся с S по нулю. В частности, U есть единственное дополнение для S.

Доказательство. Пусть $V \triangleleft_r R$ и $V \cap S = 0$. Берем элемент $v = s + u \in V$, где $s \in S$ и $u \in U$. Поскольку $V \cap S = U \cap S = 0$, то $vS = uS = 0$. Так как сумма $R_R = S \dotplus U$ – прямая, то отсюда получаем $sS = 0$. Этим доказано, что $WS = 0$, где W – проекция V на S. Множество W, как проекция правого идеала есть правый идеал, причем $W^2 = WS = 0$. Последнее равенство дает, в частности, что W не имеет ненулевых идемпотентов. Следовательно, $W = 0$ в силу предложения 3 и $V \subseteq U$.

Следствие 7. Если S – идеал полупримарного почти-кольца R, содержащийся в $D(R)$, то S имеет однозначно определенное дополнение в R_R.

Доказательство. По предложению 3 идеал S имеет левую единицу e и, следовательно, имеет дополнение $(0 : e)_R$ ([3], лемма E). Единственность дополнения обеспечивается предложением 4.

Исходя из предложения 4 можно доказать, что каждый правый идеал почти-кольца $R \in \mathfrak{A}$ имеет вид $U \dotplus V$, где $U, V \triangleleft_r R$, $U \subseteq D(R)$ и $V \subseteq T$, причем T – дополнение к $D(R)$.

Можно также показать, что $D(R)$ совпадает с введенным Скоттом в [13] идеалом $C(R)$.

§ 4. Радикал $\mathfrak{J}_2$

Приведем сначала некоторые сведения из общей теории радикалов. Класс почти-колец $\mathfrak{C}$ называется радикальным (в смысле Куроша-Амицура), если

I) $\mathfrak{C}$ замкнут относительно гомоморфных образов;

2) каждое почти-кольцо R имеет наибольший идеал, принадлежащий как почти-кольцо к $\mathfrak{C}$. Этот идеал обозначается через $\mathfrak{C}(R)$;

3) $\mathfrak{C}(R/\mathfrak{C}(R)) = 0$ при любом почти-кольце R.

Идеал $\mathfrak{C}(R)$ называется $\mathfrak{C}$-радикалом почти-кольца R. Почти-кольцо R называется <u>$\mathfrak{C}$-радикальным,</u> если $\mathfrak{C}(R) = R$ (т.е. $R \in \mathfrak{C}$) и <u>$\mathfrak{C}$-полупростым</u>, если $\mathfrak{C}(R) = 0$.

Так же как для колец, доказывается следующая теорема (см. [4], стр. I7).

<u>Теорема А</u>. Пусть всякий ненулевой идеал почти-кольца из некоторого класса $\mathfrak{L}$ имеет ненулевой гомоморфный образ из того же класса $\mathfrak{L}$. Тогда класс всех почти-колец, не имеющих ненулевых гомоморфных образов из $\mathfrak{L}$, является радикальным классом.

Полученный в теореме А радикальный класс называется <u>верхним радикальным классом</u>, определенным классом $\mathfrak{L}$.

В настоящем параграфе мы исходим из следующей проблемы: является ли $\mathfrak{J}_0$ радикалом в смысле Куроша-Амицура? Оказывается (см. предложение 6), что она равносильна другой проблеме: совпадают ли всегда $\mathfrak{J}_0(R)$ и $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{J}_0(R))$? Но на самом деле мы будем рассматривать более общий вопрос, а именно, как связаны $\mathfrak{J}_0(R)$ и $\mathfrak{J}_0(S)$, где S - некоторая подсистема почти-кольца R.

<u>Предложение 5</u>. Любой ненулевой идеал 0-полупростого почти-кольца имеет ненулевой 0-полупростой гомоморфный образ.

<u>Доказательство</u>. Пусть S - ненулевой идеал 0-полупростого почти-кольца R. Тогда найдется $G \in \mathfrak{M}_R^0$, такой что $GS \neq 0$, ибо в противном случае согласно определению $\mathfrak{J}_0(R)$ было бы $0 \neq S \leq \mathfrak{J}_0(R) = 0$. По лемме 4 G является циклическим S-модулем. Тогда в силу леммы Цорна G_S имеет максимальный идеал H. Фактор-модуль $G/H = G'$ явно 0-неприводим, как S-модуль. Рассмотрим почти-кольцо $S' = S/(0:G')_S$ (оно существует, поскольку $(0:G')_S \triangleleft S$ по лемме А из [3]). Оно будет искомым 0-полупростым гомоморфным образом, ибо обладает точным 0-неприводимым модулем G'. Предложение доказано.

В § 5,6 мы докажем независимо от настоящего параграфа, что ненулевой идеал i-полупростого почти-кольца является i-полупростым при $i = 1,2$ (следствия 13 и 16). Эти утверждения и предложение 5 дают согласно теореме А, что классы i-полупростых почти-колец, $i = 0,1,2$, определяют соответствующие верхние радикальные классы $\mathcal{K}_i$. Докажем некоторые простые утверждения о радикалах $\mathcal{K}_i$ и $\mathcal{J}_i$.

<u>Лемма 8</u>. Класс $\mathcal{K}_i$, $i = 0,1,2$, совпадает с классом всех i-радикальных почти-колец. При любом почти-кольце R имеем $\mathcal{K}_i(R) \subseteq \mathcal{J}_i(R)$.

<u>Доказательство</u>. По определению класс $\mathcal{K}_i$ состоит из тех почти-колец, которые не имеют ненулевых i-полупростых гомоморфных образов. Последними являются в точности почти-кольца, не имеющие i-неприводимых модулей, т.е. i-радикальные почти-кольца (если над R существуют i-неприводимые модули, то $R/\bigcap\limits_{G\in\mathfrak{M}_R^i}(0:G)_R$ будет i-полупростым).

Допустим, что $\mathcal{K}_i(R) \nsubseteq \mathcal{J}_i(R)$. Так как $R/\mathcal{J}_i(R)$ i-полупросто и $\mathcal{K}_i(R) + \mathcal{J}_i(R) \triangleleft R$, то применяя для $i = 0$ предложение 5, для $i = 1$ следствие 13 и для $i = 2$ следствие 16 получаем, что $(\mathcal{K}_i(R) + \mathcal{J}_i(R))/\mathcal{J}_i(R)$ имеет ненулевой i-полупростой гомоморфный образ. В силу изоморфизма

$$(\mathcal{K}_i(R) + \mathcal{J}_i(R))/\mathcal{J}_i(R) \simeq \mathcal{K}_i(R)/(\mathcal{K}_i(R) \cap \mathcal{J}_i(R))$$

это же верно относительно $\mathcal{K}_i(R)/(\mathcal{K}_i(R) \cap \mathcal{J}_i(R))$, что противоречит определению $\mathcal{K}_i(R)$. Лемма доказана.

<u>Предложение 6</u>. Следующие утверждения равносильны:

1) Радикал $\mathcal{J}_i$ является радикалом в смысле Куроша-Амицура.

2) В любом почти-кольце R имеет место

$$\mathcal{J}_i(\mathcal{J}_i(R)) = \mathcal{J}_i(R);$$

3) В любом почти-кольце R имеет место

$$\mathcal{K}_i(R) = \mathcal{J}_i(R).$$

<u>Доказательство</u>. 1) $\Longrightarrow$ 2). Это очевидно, поскольку в случае радикала Куроша-Амицура радикал любого почти-кольца радикален.

2) $\Longrightarrow$ 3). По лемме 8 имеем $\mathcal{K}_i(R) \subseteq \mathcal{J}_i(R)$. Если же $\mathcal{J}_i(\mathcal{J}_i(R)) = \mathcal{J}_i(R)$, то $\mathcal{J}_i(R)$ i-радикален и по лемме 8 будет $\mathcal{J}_i(R) \in \mathcal{K}_i$. Таким образом, $\mathcal{J}_i(R) \subseteq \mathcal{K}_i(R)$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Если $\mathcal{J}_i(R) = \mathcal{K}_i(R)$ во всех почти-кольцах R, то $\mathcal{J}_i$ является радикалом в смысле Куроша-Амицура,

так как таким является $\mathcal{K}_i$. Предложение доказано.

Пока не ясно, совпадают ли $\mathcal{K}_0(R)$ и $\mathcal{J}_i(R)$ во всех почти-кольцах. В настоящей работе это совпадение доказывается для классов слабо артиновых, дистрибутивно порожденных (д.п.) и полупримарных почти-колец. Исходя из теоремы I.3 статьи [7], совпадение можно доказать и для разрешимых почти-колец.

Лемма 9. Пусть S – под-почти-кольцо почти-кольца R и $i = 0,1,2,1$. Если

$$G \in \mathfrak{M}_R^0 \ \& \ GS \neq 0 \Rightarrow G_S \in \mathfrak{M}_S^i, \tag{10}$$

то $\mathcal{J}_i(S) \subseteq \mathcal{J}_i(R) \cap S$. Если каждый i-неприводимый S-модуль допускает продолжение до i-неприводимого R-модуля, то $\mathcal{J}_i(S) \supseteq \mathcal{J}_i(R) \cap S$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}_R^0$. Если $GS = 0$, то $G\mathcal{J}_i(S) \subseteq GS = 0$. Если же $GS \neq 0$, то в силу (10) и определения i-радикала тоже $G\mathcal{J}_i(S) = 0$. Следовательно, $\mathcal{J}_i(S)$ аннулирует все i-неприводимые R-модули и по определению i-радикала $\mathcal{J}_i(S) \subseteq \mathcal{J}_i(R)$.

Докажем второе утверждение. Пусть $G \in \mathfrak{M}_S^i$. По условию G можно рассматривать как R-модуль, причем $G \in \mathfrak{M}_R^i$. Тогда $G\mathcal{J}_i(R) = 0$ и ввиду произвольности G из $\mathfrak{M}_S^i$ получаем $\mathcal{J}_i(R) \cap S \subseteq \mathcal{J}_i(S)$. Лемма доказана.

Приступим к рассмотрению 0-радикала в слабо артиновых и д.п. почти-кольцах.

Назовем почти-кольцо R <u>слабо артиновым</u>, если каждая цепочка $rR \supseteq r^2R \supseteq \cdots$, где $r \in R$ стабилизируется после конечного числа шагов.

Элемент a почти-кольца R называется <u>квазирегулярным</u>, если $(\{at - t \mid t \in R\})_r = R$. Подмножество из R называется <u>квазирегулярным</u>, если все его элементы квазирегулярны. Известна

Теорема В ([12], теоремы 2.2 и 2.3). Квазирадикал любого почти-кольца является наибольшим квазирегулярным правым идеалом, а 0-радикал – наибольшим квазирегулярным идеалом.

Лемма 10. Для произвольного почти-кольца R эквивалентны следующие условия:

1) Элемент $a \in R$ квазирегулярен;
2) $(ta - t)_r = (t)_r$ при всех $t \in R$;
3) $(a^2 - a)_r = (a)_r$.

Доказательство. I) $\Rightarrow$ 2). Пусть a квазирегулярен. Ясно, что при любом t будет $(t)_r \supseteq (ta-t)_r$. Докажем обратное включение. Пусть $ta-t \in X \triangleleft_r R$, откуда $ta+X = t+X$ и $tau+X = tu+X$ для любого $u \in R$. Тогда $t(au-u) = tau-tu \in X$, т.е. $au-u \in (X:t)_R$. Так как элемент a квазирегулярен и $(X:t)_R \triangleleft_r R$ по лемме А из [3], то $R \subseteq (X:t)$, т.е. $tR \subseteq X$. В частности, $ta \in X$ и ввиду $ta-t \in X$ получаем $t \in X$. Следовательно, $(t)_r \subseteq (ta-t)_r$.

2) $\Rightarrow$ 3). В 2) надо брать $t=a$.

3) $\Rightarrow$ I). Пусть a не квазирегулярен, т.е. $(\{at-t \mid t \in R\})_r = X \neq R$. Если бы $a \in X$, то мы имели бы для любого $t \in R$ $at-t \in X$ и $t \in X$, т.е. $X = R$. Поэтому $a \notin X$, но $a^2-a \in X$. Таким образом, $(a^2-a)_r \neq (a)_r$.

Лемма II. Любой квазирегулярный правый квазиидеал A слабо артинова почти-кольца R состоит из нильпотентных элементов.

Доказательство. Пусть $a \in A$. В силу слабой артиновости существует такое n, что $a^n R = a^{n+1} R = a^{n+2} R$. При подходящем $t \in R$ имеем $a^{n+1} = a^{n+1}(at)$. Поскольку at квазирегулярен, то заменив в лемме I0 t на a^{n+1} и a на at, получаем $(a^{n+1})_r = (a^{n+1}(at) - a^{n+1})_r = 0$. Следовательно, $a^{n+1} = 0$. Лемма доказана.

Известна следующая лемма (см. например [I], стр. 32).

Лемма I2. Если R – д.п. почти-кольцо, то правый идеал $(X)_r$ состоит из всех элементов вида

$$\sum_{i=1}^{n} (-r_i \pm x_i d_i + m_i x_i + r_i),$$

где $x_i \in X$, $r_i \in R$, d_i – дистрибутивные элементы почти-кольца R и m_i – целые числа.

Лемма I3. Квазирегулярный элемент д.п. почти-кольца является квазирегулярным и в любом содержащем его правом квазиидеале.

Доказательство. Пусть a – квазирегулярный элемент д.п. почти-кольца R и $a \in B$, где B – правый квазиидеал. В силу леммы I0 имеем тогда $a \in (a^2-a)_r$, т.е. по лемме I2 существуют $t_1, \dots, t_n \in R$, дистрибутивные элементы $d_1, \dots, d_n \in R$ и целые числа $m_1, \dots, m_n$, так что

$$a = \sum_{i=1}^{n} (-t_i \pm (a^2-a)d_i + m_i(a^2-a) + t_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-t_i \pm (a^2 d_i - a d_i) + m_i (a^2 - a) + t_i).$$

Умножив последнее равенство слева на a, получаем

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n} (-t_i \pm [a(a^2 d_i) - a^2 d_i] + m_i (a^3 - a^2) + a t_i).$$

Так как $a^2, a^2 d_i, a t_i \in B$, то $a^2 \in X$, где $X = (\{ab - b \mid b \in B\})_B$. Поскольку $a^2 - a$ также принадлежит X, то и $a \in X$, а также $ab \in X$ для произвольного $b \in B$. Теперь $ab - b \in X$ влечет $b \in X$, т.е. $B = X$. Таким образом, a – квазирегулярный элемент почти-кольца B.

Теорема 5. Если R – слабо артиново или д.п. почти-кольцо и B – правый квазиидеал в R, то $J_0(B) \supseteq J_0(R) \cap B$ и $Q(B) \supseteq Q(R) \cap B$.

Доказательство. Множество $J_0(R) \cap B$ является идеалом почти-кольца B, а его элементы квазирегулярны в R в силу теоремы B. Если R – д.п. почти-кольцо, то теперь из леммы 13 следует, что $J_0(R) \cap B$ – квазирегулярный идеал почти-кольца B. Если R слабо артиново, то это же утверждение следует из леммы 11, так как все нильпотентные элементы квазирегулярны в B (см. [12], лемма 2.1). Таким образом, согласно теореме B $J_0(R) \cap B \subseteq J_0(B)$. Включение $Q(R) \cap B \subseteq Q(B)$ доказывается аналогично. Для этого надо всюду в доказательстве заменить слово "идеал" на "правый идеал" и $J_0(R)$ на $Q(R)$.

Следствие 8. Пусть R – слабо артиново или д.п. почти-кольцо. Тогда

1) каждый правый квазиидеал, содержащийся в $Q(R)$ 0-радикален.

2) $J_0(R) = J_0(J_0(R))$.

Доказательство. 1) Пусть $B \subseteq Q(R)$, где B – правый квазиидеал. По теореме 5 имеем тогда $Q(B) \supseteq B$. Поскольку обратное включение очевидно, то $Q(B) = B$. Следовательно, B является квазирегулярным идеалом самого себя и по теореме B получаем $B = J_0(B)$.

2) Так как $J_0(R)$ является квазирегулярным правым квазиидеалом и содержится в $Q(R)$ (см. теорему B), то утверждение 1) настоящего следствия дает $J_0(R) = J_0(J_0(R))$.

Укажем один случай, где $J_0(S) = J_0(R) \cap S$.

Предложение 7. Если S – д.п. идеал д.п. почти-кольца R, то

$$(G \in \mathfrak{M}_R^o) \& (GS \neq 0) \Rightarrow G \in \mathfrak{M}_S^o.$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}_R^o$ и $GS \neq 0$. Берем $g \in \mathcal{G}(G_R)$ и обозначим $X = (0 : g)_S$. По лемме 4 имеем $gS = G$. Значит, $G \simeq {}_R S/X$ и существует $a \in S$, такой что $ga = g$, $a \notin X$. Если $s \in S$, то $gs = (ga)s = g(as)$, следовательно,

$$s - as \in X \tag{II}$$

при любом $s \in S$.

Применяя лемму Цорна к совокупности правых идеалов почти-кольца S, не содержащих a и содержащих X, получаем, что S имеет максимальный правый идеал Y, содержащий X. Допустим, что $Y \neq X$. В силу изоморфизма $G \simeq_R S/X$ и 0-неприводимости модуля G_R имеем тогда $(Y)_R = S$. В частности, $a \in (Y)_R$, т.е. по лемме I2 найдутся $y_1, \dots, y_n \in Y$, $r_1, \dots, r_n \in R$, дистрибутивные элементы $d_1, \dots, d_n \in R$ и целые числа $m_1, \dots, m_n$, такие что

$$a = \sum_{i=1}^{n} (-r_i + y_i d_i + m_i y_i + r_i).$$

Умножим это равенство справа на a, учитывая, что $a = \sum_{j=1}^{k} \pm b_j$, где b_j – дистрибутивные элементы почти-кольца S. Получаем

$$\begin{aligned} a^2 &= \Big[\sum_{i=1}^{n} (-r_i + y_i d_i + m_i y_i + r_i)\Big]\Big[\sum_{j=1}^{k} \pm b_j\Big] = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Big[\pm \sum_{i=1}^{n} (-r_i + y_i d_i + m_i y_i + r_i)\Big] = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Big[\sum_{i=1}^{n} (-r_i b_j + y_i(d_i b_j) + m_i(y_i b_j) + r_i b_j)\Big]. \end{aligned}$$

Поскольку $S \triangleleft R$, то $r_i b_j$, $d_i b_j \in S$ и ввиду $y_i, y_i b_j \in Y$ будет $a^2 \in (Y)_S = Y$. Так как в силу (II) имеем $a^2 - a \in X \subseteq Y$, то и $a \in Y$. Теперь из (II) и $as \in Y$ следует $S \subseteq Y$, что противоречит предположению $Y \neq S$. Противоречие возникло из-за предположения $X \neq Y$.

Следовательно, S-модуль S/X является простым, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если S – д.п. идеал д.п. почти-кольца R, то $J_c(S) = J_c(R) \cap S$.

Доказательство. Включение " $\supseteq$ " доказано в теореме 6. В силу предложения 7 из $G \in \mathfrak{M}_R^o$ и $GS \neq 0$ следует $G \in \mathfrak{M}_S^o$.

Следовательно, применяя лемму 9, получаем $J_0(S) \subseteq J_0(R) \cap S$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 6, учитывая строение минимальных идеалов полупримарного почти-кольца, можно доказать, что 0-полупростое полупримарное почти-кольцо, у которого все идеалы дистрибутивно порождены, есть прямая сумма 2-примитивных д.п. почти-колец.

Остальная часть параграфа посвящается изучению 0-радикала в полупримарных почти-кольцах. Сначала мы установим, что в этом случае 0-радикал нильпотентен, а потом докажем некоторые структурные теоремы о 0-полупростых почти-кольцах.

<u>Теорема 7</u>. Если $R \in \mathfrak{A}$ и $S \triangleleft R$, то $J_0(S) \supseteq J_0(R) \cap S$.

<u>Доказательство</u>. Если $G \in \mathfrak{M}^0_S$, то согласно теореме 2 и предложению I существуют $G' \in \mathfrak{M}^0_R$ и идеал $H \triangleleft_S G'$, такие что $G \cong_S G'/H$. Так как по определению 0-радикала имеем $G' J_0(R) = 0$, то тем более $G'(J_0(R) \cap S) = 0 \subseteq H$, т.е. $G(J_0(R) \cap S) = 0$. Теорема доказана.

<u>Следствие 9</u>. Если $R \in \mathfrak{A}$, то $J_0(R) = J_0(J_0(R))$.

<u>Доказательство</u>. По теореме 7 имеем $J_0(J_0(R)) \supseteq J_0(R) \cap J_0(R) = J_0(R)$. Обратное очевидно.

<u>Следствие 10</u>. 0-радикал полупримарного почти-кольца нильпотентен.

<u>Доказательство</u>. Пусть $R \in \mathfrak{A}$. Тогда $J_0(R)$ 0-радикален в силу следствия 9. С другой стороны, $J_0(R)$ является полупримарным почти-кольцом по предложению I3 из [3]. Если бы его приведенный $\mathfrak{A}$-ряд имел матричные факторы, то по предложению I существовали бы 0-неприводимые $J_0(R)$-модули, что противоречило бы 0-радикальности $J_0(R)$. Следовательно, все факторы $\mathfrak{A}$-ряда для $J_0(R)$ нильпотентны и тем самым $J_0(R)$ сам нильпотентен.

<u>Теорема 8</u>. Следующие условия эквивалентны для полупримарного почти-кольца R.

I) Все 0-неприводимые R-модули вполне просты.

2) Все его минимальные нетривиальные факторы просты.

3) Если $G \in \mathfrak{M}^0_R$, $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$, то $G_S \in \mathfrak{M}^0_S$.

4) Если $G \in \mathfrak{M}^0_S$ и $S \triangleleft R$, то G допускает продолжение до R-модуля.

<u>Доказательство</u>. I) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $G \in \mathfrak{M}^0_R$, $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$. По лемме 4 модуль G_S цикличен, а в силу условия I) он прост. Следовательно, $G_S \in \mathfrak{M}^0_S$.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $G \in \mathfrak{M}^{o}_{S}$ и $S \lhd R$. По теореме 2 и предложению I существует $G' \in \mathfrak{M}^{o}_{R}$, такой что $G \simeq_S G'/H$, где $H \lhd_S G'$. Из последнего изоморфизма следует $G'S \neq 0$. По условию 3) тогда $G'_S \in \mathfrak{M}^{o}_{S}$, откуда $H = 0$. Таким образом, $G \simeq_S G'$ и G допускает продолжение до R-модуля.

4) $\Rightarrow$ I). Пусть $G \in \mathfrak{M}^{o}_{R}$, $S \lhd R$, $GS \neq 0$ и G имеет нетривиальный S-идеал H. По лемме 4 модуль G_S является циклическим. Следовательно, в силу леммы Цорна, H содержится в максимальном S-идеале F и $G/F \in \mathfrak{M}^{o}_{S}$. По условию 4) модуль G/F допускает продолжение до R-модуля. Обозначим соответствующее действие через "$\circ$", а элементы модуля G/F через $\bar{g}$, где $g \in G$.

Покажем, что $F \lhd_R G$. Пусть $g_1, g_2 \in G$ и $g_1 - g_2 \in F$. В силу цикличности модуля G_S найдутся $g \in G$ и $s_1, s_2 \in S$, такие что $g_1 = gs_1$ и $g_2 = gs_2$. При произвольном $r \in R$ имеем теперь

$$\overline{g_1 r} = \overline{g(s_1 r)} = \bar{g}(s_1 r) = \bar{g} \circ (s_1 r) = (\bar{g} \circ s_1) \circ r =$$
$$= (\bar{g} s_1) \circ r = \overline{g s_1} \circ r = \bar{g}_1 \circ r$$

и аналогично

$$\overline{g_2 r} = \bar{g}_2 \circ r.$$

Поскольку в силу $g_1 - g_2 \in F$ будет $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$, то из последних равенств следует $\overline{g_1 r} = \overline{g_2 r}$. Таким образом, $g_1 - g_2 \in F$ влечет $g_1 r - g_2 r \in F$, т.е. $F \lhd_R G$. Последнее противоречит 0-неприводимости модуля G_R. Значит, G – простой S-модуль.

2) $\Rightarrow$ I) Пусть $G \in \mathfrak{M}^{o}_{R}$, $S \lhd R$ и $GS \neq 0$. Берем первый член R_{i+1} произвольного приведенного $\mathfrak{N}$-ряда почти-кольца R, такой что $GR_{i+1} \neq 0$. В силу теоремы 3 тогда $G \simeq_R m(R_{i+1}/R_i)$. По условию 2) почти-кольцо R_{i+1}/R_i является простым. Если R_{i+1}/R_i не кольцо, то теперь предложение 7 из [3], примененное к R_{i+1}/R_i дает, что $m(R_{i+1}/R_i)$ является простым R_{i+1}/R_i-модулем. Если же R_{i+1}/R_i есть кольцо, то оно является кольцом всех линейных преобразований векторного пространства $m(R_{i+1}/R_i)$. В силу теоремы плотности тогда каждый ненулевой элемент модуля $m(R_{i+1}/R_i)_{R_{i+1}}$ служит образующим и в частности, $m(R_{i+1}/R_i)$ есть простой R_{i+1}-модуль.

Покажем, что $R_{i+1} = S \cap R_{i+1} + R_i \subseteq S + R_i$. Действительно, в противном случае ввиду приведенности $\mathfrak{A}$-ряда было бы $R_{i+1} \cap S \subseteq R_i$, откуда следовало бы

$$GS = (GR_{i+1})S = G(R_{i+1}S) \subseteq G(R_{i+1} \cap S) \subseteq GR_i = 0,$$

(здесь $G = GR_{i+1}$ в силу цикличности модуля $G_{R_{i+1}}$).

Так как $R_{i+1} \subseteq S + R_i$, то из простоты G как R_{i+1}-модуля следует его простота как $S + R_i$-модуля. Поскольку $GR_i = 0$ то из последнего, в свою очередь, следует простота модуля G_S.

I) $\Longrightarrow$ 2). Пусть идеалы $U, V \triangleleft R$, $U \subset V$, составляют в R минимальный нетривиальный фактор. Обозначим $R/U = \bar{R}$, $V/U = \bar{V}$. Тогда $\bar{V}$ является минимальным идеалом с ненулевым квадратом почти-кольца $\bar{R}$, а по предложению I4 из [3] имеем $\bar{R} \in \mathfrak{A}$. По теореме I $\bar{V}$ является матричным почти-кольцом. Если $\bar{V}$ есть кольцо матриц над телом, то оно простое по известной теореме ([2], стр. 64). Пусть далее $\bar{V}$ не кольцо. В силу следствия 2 имеем $m(\bar{V}) \in \mathfrak{M}^0_{\bar{R}} \subseteq \mathfrak{M}^0_R$, а ввиду условия I) модуль $m(\bar{V})_R$ является вполне простым. Очевидно, что тогда $m(\bar{V})$ вполне прост и как $\bar{R}$-модуль, и в частности, поскольку $m(\bar{V})\bar{V} \neq 0$, $m(\bar{V})$ является простым $\bar{V}$-модулем. Теперь предложение 7 из [3] дает, что $\bar{V}$ – простое почти-кольцо.

Теорема 9. Если R – полупримарное почти-кольцо и выполнено одно из условий теоремы 8, то $\mathfrak{J}_0(S) = \mathfrak{J}_0(R) \cap S$ при любом $S \triangleleft R$.

Доказательство. Включение " $\supseteq$ " имеет место в силу теоремы 7. Обратное включение следует из условия 3) теоремы 8 и леммы 9. Теорема доказана.

Существуют примеры, показывающие, что условия теоремы 8 не необходимы для наследственности 0-радикала. Мы получим необходимые и достаточные условия, если требуем полную простоту лишь некоторых 0-неприводимых модулей и простоту лишь минимальных факторов вида $S/\mathfrak{J}_0(R)$. Доказательства этих результатов будут опубликованы в дальнейшем.

Сейчас мы опишем полупримарные почти-кольца, любой гомоморфный образ которых 0-полупрост.

Теорема IO. Следующие условия равносильны для полупримарного почти-кольца R

I) Все гомоморфные образы 0-полупросты.

2) Все гомоморфные образы $\mathfrak{s}$-полупросты.

3) $R = D(R)$.

4) Почти-кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных правых идеалов.

5) $\mathcal{J}_{s}(R) = 0$.

Доказательство. I)$\Rightarrow$3) Пусть все гомоморфные образы почти-кольца R 0-полупросты и $D(R)$ содержится строго в R. Так как почти-кольцо $R/D(R)$, полупримарное по предложению I4 из [3], не имеет по определению $D(R)$ минимальных идеалов с ненулевым квадратом, то в силу теоремы I оно имеет ненулевые нильпотентные идеалы. Следовательно, $\mathcal{J}_0(R/D(R)) \neq 0$ ([I2], теорема 2.3), что противоречит условию I).

3) $\Longrightarrow$ I) Пусть $R = D(R)$, $U, V \triangleleft R$ и $U \subset V$. Так как идеал V имеет согласно предложению 3 левую единицу, то $V^n \not\subseteq U$ при любом n. Следовательно, R/U не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Ввиду полупримарности почти-кольца R/U ([3], предложение I4) из следствия I0 теперь получаем $\mathcal{J}_0(R/U) = 0$.

4) $\Longrightarrow$ 3) Допустим, что R не имеет ненулевых нильпотентных правых идеалов, но $R \neq D(R)$. Как и при доказательстве импликации I) $\Longrightarrow$ 3), получаем тогда, что $R/D(R)$ имеет ненулевой нильпотентный идеал $U/D(R)$. По теореме 4 существует такой правый идеал T, что $R = D(R) \dot{+} T$. Так как $D(R) \subset U$, то из этого получаем разложение $U = D(R) \dot{+} U \cap T$, откуда следует изоморфизм $U/D(R) \simeq U \cap T$. Следовательно, R содержит ненулевой нильпотентный правый идеал $U \cap T$, противоречие.

3) & I) $\Longrightarrow$ 5) Пусть $R = D(R)$ и каждый гомоморфный образ почти-кольца R 0-полупрост. Тогда, в частности, $\mathcal{J}_0(R) = 0$. Поэтому импликация будет доказана, если мы покажем, что все 0-неприводимые R-модули являются $\mathfrak{s}$-неприводимыми.

Пусть $G \in \mathfrak{M}^0_R$. Проверим условия б) и в) из определения $\mathfrak{s}$-неприводимого модуля.

По теореме 4 из условия 3) вытекает, что R имеет левую единицу e. Теперь $gr = (ge)r$ при всяком $r \in R$ следует, что $g \sigma_R (ge)$ при любом $g \in G$.

Из условия 3) и теоремы 4 также следует, что $R_R = \sum^{\cdot}_{i \in J} G_i$, где $G_i \in \mathfrak{M}^s_R$. Поскольку модули G_i – простые, то R_R является вполне приводимым модулем ([5], теорема 5.2). Следовательно, R-модуль gR, где $g \in G$, как гомоморфный образ модуля R_R является прямой суммой некоторой части модулей G_i, $i \in J$ ([5], стр. 48), т.е. услсвие в) выполнено.

5) $\Rightarrow$ 4) Пусть $J_s(R)=0$ и S – ненулевой нильпотентный правый идеал почти-кольца R. Тогда по определению $J_s(R)$ существует $G \in \mathfrak{M}^s_R$, такой что $GS \neq 0$, следовательно, найдется $g \in G$, так что $gS \neq 0$. По определению s-неприводимого модуля имеем $gR = \sum^{\bullet}_{i\in J} G_i$, где $G_i \in \mathfrak{M}^o_R$ и существует $e \in R$, так что $(ge) \sim_R g$. Пусть $ge = \sum_{i\in J} g_i$, где $g_i \in G_i$. Ясно, что $gS = (ge)S$. Поэтому для любого $h \in G_{i_0}$ найдется $s \in S$, такой что $h = ges = \sum_{i\in J} g_i s$, откуда $h = g_{i_0}s$, поскольку мы имеем дело с прямой суммой R-подмодулей. Значит, $g_{i_0}S = G_{i_0}$ и, в частности, в S найдется элемент s такой что $g_{i_0}s = g_{i_0}$. Теперь из нильпотентности S следует $g_{i_0} = 0$, что противоречит равенству $g_{i_0}S = G \neq 0$.

I) $\Longleftrightarrow$ 2) Явно 2) $\Rightarrow$ I). Докажем обратную импликацию. Пусть все ненулевые гомоморфные образы почти-кольца R 0-полупросты. Ясно, что этому условию удовлетворяют и все ненулевые гомоморфные образы R/U почти-кольца R. Теперь в силу уже выведенной импликации I) $\Rightarrow$ 5) получаем $J_s(R/U) = 0$ при любом $U \triangleleft R$.

Теорема доказана.

Следствие II. Гомоморфный образ полупримарного s-полупростого почти-кольца является s-полупростым.

Доказательство. Утверждение следует из эквивалентности I) $\Longleftrightarrow$ 5) и того, что свойство I) наследуется гомоморфными образами.

Следствие I2. Полупримарное s-полупростое почти-кольцо имеет левую единицу.

Доказательство. Утверждение следует из эквивалентности 3) $\Longleftrightarrow$ 5) и теоремы 4.

Примечание. Хартнеем в [IO] доказана эквивалентность условий 4) и 5) для артиновых д.п. почти-колец с единицей. Можно доказать, что на самом деле полупримарное д.п. s-полупростое почти-кольцо всегда имеет единицу.

§ 5. Радикалы $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_s$

Легко построить примеры, показывающие что $\mathcal{J}_1$ не является радикалом в смысле Куроша-Амицура. Для этого, в силу предложения 6, надо найти почти-кольцо R с $\mathcal{J}_1(\mathcal{J}_1(R)) \neq \mathcal{J}_1(R)$ (простейший соответствующий пример указан ниже). Тем более не всегда выполняется равенство $\mathcal{J}_1(S) = \mathcal{J}_1(R) \cap S$, где $S \triangleleft R$. Оказывается, что одностворонее включение все же выполняется (теорема II).

<u>Пример</u>. Пусть H - циклическая группа порядка 4 и R - множество всех преобразований r группы H, таких что $0r = 0$ и $(2H)r \subseteq 2H$. Можно показать, что R есть почти-кольцо, $\mathcal{J}_1(R) = S$, где $S = (0:2H)_R$ и $\mathcal{J}_1(S) = 0$.

<u>Предложение 8</u>. Все I-неприводимые R-модули являются вполне простыми.

<u>Доказательство</u>. Пусть $G \in \mathfrak{M}_R^1$, $S \triangleleft R$ и $GS \neq 0$. В силу леммы 4 имеем $\mathcal{G}(G_R) = \mathcal{G}(G_S)$ и G является строго циклическим S-модулем. Пусть $H \triangleleft_S G$, $H \neq G$. Тогда в силу строгой цикличности имеем $H \subseteq G_S^0$. Надо показать, что $H = 0$. Для этого рассмотрим отдельно случаи абелева и неабелева модуля G_S.

Если G является абелевым S-модулем, то также как это сделано в предложении IO из [3], можно убедиться, что $G_S^0 = 0$ (заметим, что предполагаемое в предложении IO условие E для получения этого результата не применяется). Следовательно, $H \subseteq G_S^0 = 0$.

Пусть теперь G является неабелевым S-модулем. По лемме 4 из [3] подмножество G_S^0 состоит из полных смежных классов по H, а в силу леммы 4 и строгой цикличности G_R имеем $G_S^0 = G_R^0$. Таким образом, $(h+g)r - gr = 0 - 0 \in H$ при всех $h \in H$, $g \in G_R^0$ и $r \in R$.

Чтобы доказать, что $H \triangleleft_R G$ надо еще проверить, что $(h+g)r - gr \in H$ при любых $h \in H$, $g \in \mathcal{G}(G_S)$ и $r \in R$. Для этого мы применим результаты статьи [3]. Напомним, что в [3] на G было введено следующее отношение τ_s:

$$g_1 \tau_s g_2 \iff \exists_{\gamma \in \mathrm{Aut}(G_s)} (\gamma g_1)\sigma_s g_2.$$

Из $g \in \mathcal{G}(G_s)$ следует в силу леммы 4 из [3], что $h + g \in \mathcal{G}(G_s)$. Если бы $(h+g)\bar{\tau}_s g$, то по теореме 4 из [3] существовал бы $s \in S$, такой что $(h+g)s \notin H$ и $gs = 0$, но это противоречило бы условию $(h+g)s - gs \in H$, вытекающему из

$H \triangleleft_S G$. Следовательно, $(h+g)\tau_S g$ и найдется $\gamma \in \in \mathrm{Aut}(G_S)$, такой что $(h+g)\sigma_S(\gamma g)$. В силу $h+g, \gamma g \in \mathcal{G}(G_S)$ и предложения 8 из [3] будет $(h+g)\sigma_R(\gamma g)$. Так как $g \in \in \mathcal{G}(G_S)$, то найдется такой $s \in S$, что $gr = gs$. Учитывая еще равенство $\mathrm{Aut}(G_S) = \mathrm{Aut}(G_R)$ ([3], лемма 7), получаем

$$(h+g)r - gr = (\gamma g)r - gr = \gamma(gr) - gr =$$
$$= \gamma(gs) - gs = (\gamma g)s - gs = (h+g)s - gs \in H.$$

Этим доказано, что $H \triangleleft_R G$. Значит, ввиду $G \in \mathfrak{M}_R^1$ получаем $H = 0$. Предложение доказано.

Теорема II. Если R – почти-кольцо и $S \triangleleft R$, то $\mathfrak{J}_1(S) \subseteq \mathfrak{J}_1(R) \cap S$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}_R^1$. Если $GS \neq 0$, то G_S является строго циклическим по лемме 4 и простым в силу предложения 8 и определения вполне простого модуля. Значит, $G_S \in \mathfrak{M}_S^1$. Лемма 9 дает теперь $\mathfrak{J}_1(S) \subseteq \mathfrak{J}_1(R)$.

Следствие I3. Ненулевой идеал I-полупростого почти-кольца I-полупрост.

В силу теоремы А следствие I3 дает, что класс всех I-полупростых почти-колец определяет верхний радикальный класс $\mathcal{K}_1$, который по лемме 8 состоит из всех I-радикальных почти-колец. Исследуем взаимосвязь между $\mathcal{K}_1(R)$ и другими радикалами в случае полупримарного R.

Предложение 9. Если $R \in \mathfrak{A}$, то

$$\mathfrak{J}_0(R) \subseteq \mathcal{K}_1(R) \subseteq \mathfrak{J}_1(R).$$

Доказательство. В силу следствия 9 получаем $\mathfrak{J}_0(R) = = \mathfrak{J}_0(\mathfrak{J}_0(R)) \subseteq \mathfrak{J}_1(\mathfrak{J}_0(R))$, т.е. $\mathfrak{J}_1(\mathfrak{J}_0(R)) = \mathfrak{J}_0(R)$ и поэтому $\mathfrak{J}_0(R) \in \mathcal{K}_1$ по лемме 8. Теперь первое включение следует из определения $\mathcal{K}_1(R)$.

Второе включение доказано в лемме 8. Предложение доказано.

Так как верны также включения $\mathfrak{J}_0(R) \subseteq \mathfrak{J}_s(R) \subseteq \mathfrak{J}_1(R)$, то можно ожидать, что существуют интересные связи между $\mathcal{K}_1(R)$ и $\mathfrak{J}_s(R)$. Как мы увидим, это действительно так.

Лемма I4. Ненулевой идеал полупримарного s-полупростого почти-кольца имеет ненулевой I-полупростой гомоморфный образ.

Доказательство. Пусть $R \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{J}_s(R) = 0$ и $0 \neq S \triangleleft R$. Нам достаточно показать, что S имеет некоторый I-неприводимый модуль G, тогда $S/(0:G)_S$ будет искомым гомоморфным образом. Для этого достаточно найти строго циклический S-модуль. Фактормодуль последнего по максимальному идеалу будет тогда I-неприводимым.

По теореме I0 имеем $R = D(R)$ и тогда согласно теореме 4 R есть конечная прямая сумма минимальных правых идеалов. Поэтому модуль R_R обладает композиционным рядом, откуда, в свою очередь, следует, что почти-кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов.

Пусть U – максимальный относительно свойства $U \subset S$ идеал почти-кольца R. Тогда $S' = S/U$ есть минимальный идеал почти-кольца $R' = R/U$, полупримарного по предложению I4 из [3]. Применяя импликацию 5) $\Rightarrow$ I) из теоремы I0 получаем $\mathcal{J}_0(R') = 0$. Значит, в частности R' не имеет ненулевых нильпотентных идеалов ([I2], теорема 2.3), откуда $S'^2 \neq 0$. По теореме I S' является тогда матричным почти-кольцом, следовательно, S' обладает по лемме I строго циклическим модулем $m(S')$. Последний является также строго циклическим как S-модуль. Лемма доказана.

Теорема I2. В полупримарном почти-кольце R имеет место включение

$$\mathcal{K}_1(R) \subseteq \mathcal{J}_s(R).$$

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{K}_1(R) \not\subseteq \mathcal{J}_s(R)$. Тогда $(\mathcal{K}_1(R) + \mathcal{J}_s(R))/\mathcal{J}_s(R)$ является ненулевым идеалом s-полупростого почти-кольца $R/\mathcal{J}_s(R)$. Согласно лемме I4 этот идеал имеет ненулевой I-полупростой гомоморфный образ. Поскольку $(\mathcal{K}_1(R) + \mathcal{J}_s(R))/\mathcal{J}_s(R) \simeq \mathcal{K}_1(R)/(\mathcal{J}_s(R) \cap \mathcal{K}_1(R))$, то это же верно относительно $\mathcal{K}_1(R)/(\mathcal{K}_1(R) \cap \mathcal{J}_s(R))$. Последнее противоречит определению $\mathcal{K}_1(R)$, так как тогда и $\mathcal{K}_1(R)$ имел бы ненулевой I-полупростой гомоморфный образ. Теорема доказана.

Следующая теорема дает достаточное условие для выполнения обратного включения.

Теорема I3. Если $R \in \mathfrak{N}$ и все 0-неприводимые R-модули вполне просты, то $\mathcal{K}_1(R) = \mathcal{J}_s(R)$.

Доказательство. Учитывая теорему I2, мы должны доказать включение $\mathcal{J}_s(R) \subseteq \mathcal{K}_1(R)$. В силу леммы 8 для этого достаточно показать, что $\mathcal{J}_s(R)$ I-радикален, т.е. $\mathcal{J}_s(R)$ не имеет I-неприводимых модулей.

Обозначим $U = \mathcal{J}_s(R)$ и предположим от противного, что $\mathfrak{M}^{\Delta}_{U} \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{M}^{\Delta}_{U}$ По импликации I) $\Longrightarrow$ 4) теоремы 8 модуль G допускает продолжение до R-модуля и последний R-модуль явно 0-неприводим. Покажем, что $G \in \mathfrak{M}^{\Delta}_{R}$. Если это так, то получено противоречие, так как по определению Δ-радикала тогда было бы $GU = 0$.

Проверим условия б) и в) из определения Δ-неприводимого модуля. При этом учтем, что $R/U \in \mathfrak{A}$ по предложению I4 из [3].

Если $g \in \mathcal{G}(G_U)$, то найдется $r \in R$, так что $gr = g$, т.е. $(gr)\sigma_R g$. Допустим, что $g \in G^{\circ}_{U}$ и покажем, что найдется $t \in R$, так что $(gt)\sigma_R g$. Так как $J_\Delta(R/U)=0$, то в силу следствия I2 почти-кольцо R/U имеет левую единицу $t+U$. Тогда $tr+U = r+U$ при любом $r \in R$, т.е. существует такой $u \in U$, что $tr = r+u$. Следовательно,

$$(gt)r = g(tr) = g(r+u) = gr + gu = gr,$$

откуда $(gt)\sigma_R g$.

Покажем, что каждый ненулевой подмодуль gR модуля G является прямой суммой 0-неприводимых модулей. Если $g \in \mathcal{G}(G_U)$, то это очевидно, поскольку $gR = G \in \mathfrak{M}^{\circ}_{R}$. Если же $g \in G^{\circ}_{U}$, то gR является гомоморфным образом R-модуля R/U. Действительно, U содержится в ядре гомоморфизма $r \to gr$ из R на gR. Так как $J_\Delta(R/U) = 0$, то $R/U = D(R/U)$ по теореме I0 и теорема 4 дает, что R/U есть прямая сумма 0-неприводимых R-модулей. Также как в доказательстве импликации 3) & I) $\Rightarrow$ 5) теоремы I0, получаем, что ненулевой гомоморфный образ gR модуля R/U имеет такое же строение. Теорема доказана.

<u>Следствие I4</u>. Если $R \in \mathfrak{A}$ и все 0-неприводимые R-модули вполне просты, то $J_\Delta(J_\Delta(R)) = J_\Delta(R)$.

<u>Доказательство</u>. Надо показать, что $\mathfrak{M}^{\Delta}_{J_\Delta(R)} = \emptyset$. Пусть все-таки $G \in \mathfrak{M}^{\Delta}_{J_\Delta(R)}$. Тогда G остается Δ-неприводимым и над $J_\Delta(R)/(0:G)_{J_\Delta(R)} = \bar{J}$ и будет над ним точным. Следовательно, $\bar{J}$ является Δ-полупростым почти-кольцом. Кроме того из $R \in \mathfrak{A}$ ввиду предложений I3 и I4 из [3] следует $\bar{J} \in \mathfrak{A}$. Теперь по лемме I4 почти-кольцо $\bar{J}$ имеет ненулевой I-полупростой гомоморфный образ и это же верно для $J_\Delta(R)$. Так как у нас $J_\Delta(R) = \mathcal{K}_1(R)$ (теорема I3), то $\mathcal{K}_1(R)$ имеет ненулевой I-полупростой гомоморфный образ, т.е.

не является I-радикальным, противоречие.

<u>Примечание</u>. Можно указать пример, показывающий существенность требования о полной простоте некоторых 0-неприводимых модулей в теореме I3. Существует конечное почти-кольцо R с различными $\mathcal{X}_1(R)$ и $J_s(R)$.

§ 6. Радикал J_2

Радикал J_2 является наиболее изученным среди радикалов, рассмотренных нами в настоящей работе. Однако вопрос о том, будет ли 2-радикал радикалом в смысле Куроша-Амицура, до сих пор не рассматривался. Положительное решение этой проблемы вытекало бы из результатов работы [9], но имеющееся там доказательство леммы 4.22 не полно, не хватает основного шага. Автор явно этого не заметил. В [9] утверждается, что $J_2(S) = S \cap J_2(R)$ даже при любом квазиидеале S из почтикольца R. Оказывается, что в самом деле это утверждение верно. При этом доказательство включения " $\subseteq$ " сравнительно просто и оно имеется в [9].

Докажем обратное включение. Для этого надо показать, что любой 2-неприводимый S-модуль можно продолжить до R-модуля. Это эквивалентно следующей лемме I5. Отметим, что именно утверждение этой леммы считалось в лемме 4.22 из [9] верным без доказательства.

<u>Лемма I5</u>. Пусть S - квазиидеал почти-кольца R и X - 2-модулярный правый идеал почти-кольца S. Тогда $X \triangleleft_R S$.

<u>Доказательство</u>. Так как $X \triangleleft_S S$, то X - нормальный делитель в $(S, +)$. Мы должны показать, что $(x+s)r - sr \in X$ при всех $x \in X$, $s \in S$, $r \in R$.

Рассмотрим отдельно два подслучая: а) $sS \subseteq X$, б) $sS \nsubseteq X$.

а) Покажем, что в этом случае $sR \subseteq X$. Предположим, что $sR \nsubseteq X$. Множество $sR + X$ является правым квазиидеалом почти-кольца S как сумма правого квазиидеала и правого идеала, притом $X \subseteq sR + X \subseteq S$. Ввиду 2-неприводимости модуля S/X из этого следует $sR + X = S$. Берем теперь произвольные $s_1, s_2 \in S$, представим s_1 в виде $s_1 = sr + x_1$, где $r \in R$, $x_1 \in X$ и рассмотрим произведение $s_1 s_2$.

$$s_1 s_2 = (sr + x_1)s_2 = sr s_2 - sr s_2 + (sr + x_1)s_2 .$$

Поскольку здесь $-(sr)s_2 + (sr + x_1)s_2 \in X$ ввиду $X \triangleleft_S S$, то $s_1 s_2 \in sRs_2 + X$ и $Ss_2 \subseteq sRs_2 + X$. Так как $Rs_2 \subseteq S$, $sS \subseteq X$, то последнее включение дает $S^2 \subseteq \subseteq sS + X \subseteq X$. Последнее невозможно ввиду наличия в S левой единицы по модулю X. Следовательно, $sR \subseteq X$.

Поскольку $X \triangleleft_S S$, то из $sS \subseteq X$ следует $(x+s)S \subseteq X$ и по выше доказанному $(x+s)R \subseteq X$, значит, $(x+s)r - sr \in X$.

б) В настоящем случае в силу $sS \nsubseteq X$ и $S/X \in \mathfrak{M}_S^2$ получаем $sS + X = S$. Определим $Y(s) = (X : s)_R$ и покажем, что $Y(s) = Y(x+s)$. Мы исходим из следующих двух фактов:

I. $Y(s) \cap S = Y(x+s) \cap S$;

2. Отображение $r + Y(s) \to sr + X$ осуществляет S-изоморфизм между $R/Y(s)$ и S/X.

Докажем первый из них. Во втором можно убедиться прямой проверкой (отображение эпиморфно из-за $sR + X = S$).

Берем $y \in Y(s) \cap S$. Тогда явно $y \in S$. Кроме того имеем $(x+s)y = (x+s)y - sy + sy$. В правой части последнего равенства $(x+s)y - sy \in X$, так как $X \triangleleft_S S$ и $sy \in X$ из-за $y \in Y(s)$. Таким образом, $(x+s)y \in X$, $y \in Y(x+s)$ и $Y(s) \cap S \subseteq Y(x+s) \cap S$. Обратное включение доказывается аналогично.

Приступим к доказательству равенства $Y(s) = Y(x+s)$. Так как $S/X \in \mathfrak{M}_S^2$, то ввиду 2. и $R/Y(s) \in \mathfrak{M}_S^2$. Следовательно, $Y(s)$ является максимальным подмодулем модуля R_S. Все сказанное верно и относительно $Y(x+s)$. Если $Y(s) \neq Y(x+s)$, то в силу их максимальности получаем $Y(x+s) + Y(s) = R$.

Выведем тепеь включение $S^2 \subseteq Y(s)$, для чего берем произвольные $s_1, s_2 \in R$ и представим s_1 в виде $s_1 = y + z$, где $y \in Y(x+s)$, $z \in Y(s)$. Поскольку $Y(s) \triangleleft_S R$, то

$$s_1 s_2 = (y + z)s_2 = ys_2 + z_1 , \tag{I2}$$

где $z_1 \in Y(s)$. Покажем, что $ys_2 \in Y(s)$. Действительно, $ys_2 \in S$, так как S - квазиидеал и $ys_2 \in Y(x+s)$ из-за $y \in Y(x+s) \triangleleft_S' R$. Поэтому $ys_2 \in Y(x+s) \cap S$ и ввиду I. будет $ys_2 \in Y(s)$. Из (I2) теперь получаем

$SS \subseteq Y(s)$, что означает
$$sS^2 \subseteq X. \tag{13}$$

Так как $sS + X = S$, то мы можем произвольный $s_1 \in S$ представить в виде $s_1 = ss_2 + x_1$, где $s_2 \in S$, $x_1 \in X$. Берем еще $s_3 \in S$ и рассмотрим произведение $s_1 s_3$. Поскольку $X \triangleleft_S S$, то получаем
$$s_1 s_3 = (ss_2 + x_1)s_3 = ss_2 s_3 + x_2, \tag{14}$$
где $x_2 \in X$. Ввиду (13) имеем $ss_2 s_3 \in X$. Таким образом, (14) дает $SS \subseteq X$, ложность которого установлена ранее. Противоречие возникло из-за допущения $Y(s) \neq Y(x+s)$. Следовательно, $Y(s) = Y(x+s)$.

Поскольку $sS \nsubseteq X$, то $S \nsubseteq Y(s)$. Установленная ранее максимальность $Y(s)$ влечет теперь равенство $R = Y(s) + S$. Представим $r \in R$ в виде $r = y + s_1$, где $y \in Y(s)$, $s_1 \in S$. Тогда
$$(x+s)r - sr = (x+s)(y+s_1) - s(y+s_1) =$$
$$= (x+s)y + [(x+s)s_1 - ss_1] - sy.$$

В последней сумме среднее слагаемое принадлежит X ввиду $X \triangleleft_S S$, а крайние лежат в X, поскольку $y \in Y(s) = Y(x+s)$. Лемма доказана.

<u>Следствие I5</u>. Если $T \triangleleft S \triangleleft R$ и S/T – 2-примитивное почти-кольцо, то $T \triangleleft R$.

<u>Доказательство</u>. Так как S/T 2-примитивно, то S имеет 2-модулярный правый идеал X, такой что $T = (X : S)_S$ ([I2], теорема I.3). Поскольку по лемме I4 имеем $X \triangleleft_R S$, то $T = (X : S)_R \cap S$ является идеалом почти-кольца R (см. [3], лемма A).

<u>Теорема I4</u>. Если S - квазиидеал почти-кольца R, то $J_2(S) = J_2(R) \cap S$.

<u>Доказательство</u>. Как уже отмечалось, в проверке нуждается лишь включение $J_2(S) \supseteq J_2(R) \cap S$. Пусть $G \in \mathfrak{M}^2_S$. Тогда найдется 2-модулярный правый идеал $X \triangleleft_S S$, такой что $G \simeq_S S/X$ ([8], предложение 3.I). В силу леммы I5 имеем $X \triangleleft_R S$. Таким образом, G можно продолжить до R-модуля и явно $G \in \mathfrak{M}^2_R$. По лемме 9 тогда $J_2(S) \supseteq J_2(R) \cap S$.

<u>Следствие I6</u>. Идеал 2-полупростого почти-кольца является 2-полупростым.

<u>Следствие I7</u>. Радикал J_2 является радикалом в смысле

Куроша-Амицура.

<u>Доказательство</u>. В силу предложения 6 надо убедиться, что $J_2(J_2(R)) = J_2(R)$. Последнее равенство следует из теоремы I4, если там брать $S = J_2(R)$.

§ 7. Связи с нильпотентностью

Известно, что 0-радикал артинова почти-кольца R является наибольшим нильпотентным идеалом, а квазирадикал – наибольшим нильпотентным правым идеалом ([I2], теорема 5.I). Так как включение $J_0(R) \subseteq Q(R)$ может быть строгим ([II], стр. I6), а $R/J_0(R)$ не имеет ненулевых нильпотентных правых идеалов, то возникает проблема: не совпадает ли $J_0(R)$ с идеалом, порожденным квазирадикалом. Эта проблема сформулирована Хартнеем в [IO]. Мы докажем, что квазирадикал полупримарного почти-кольца тоже нильпотентен и дадим положительное решение проблемы Хартнея в случае полупримарного почти-кольца. Параллельно докажем другую теорему: $J_2(R)$ совпадает с идеалом, порожденным всеми нильпотентными правыми квазиидеалами почти-кольца R.

<u>Теорема I5</u>. Квазирадикал полупримарного почти-кольца нильпотентен.

<u>Доказательство</u>. Пусть $R \in \mathfrak{A}$. Построим цепочку

$$0 \subseteq Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \dots \subseteq Q_n = Q(R),$$

где $Q_i = Q(R) \cap R_i$, а R_i – члены приведенного $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца R.

В силу леммы 3 нильпотентным факторам R_{i+1}/R_i соответствуют нильпотентные факторы Q_{i+1}/Q_i. Следовательно, если $Q(R)$ не нильпотентен, то должен существовать такой матричный фактор R_{i+1}/R_i, что $Q_{i+1} \neq Q_i$. Тогда Q_{i+1}/Q_i изоморфен по лемме 3 ненулевому правому идеалу почти-кольца R/R_i, содержащемуся в R_{i+1}/R_i. Так как наш $\mathfrak{A}$-ряд приведен, то R_{i+1}/R_i является минимальным идеалом с ненулевым квадратом почти-кольца R/R_i, полупримарного по предположению I4 из [3]. Таким образом, $R_{i+1}/R_i \subseteq D(R/R_i)$ и Q_{i+1}/Q_i изоморфен ненулевому правому идеалу почти-кольца R/R_i, содержащемуся в $D(R/R_i)$. В силу предложения 3 почти-кольцо Q_{i+1}/Q_i имеет тогда левую единицу $e + Q_i$. Теперь явно $(e)_r \not\subseteq Q_i$, но $(e^2-e)_r \subseteq Q_i$, откуда $(e)_r \neq (e^2-e)_r$. Следовательно, согласно лемме IO e не является квазирегулярным элементом почти-кольца R.

С другой стороны, по теореме 2.2 из [I2] $Q(R)$ является квазирегулярным правым идеалом и поскольку $e \in Q_{i+1} \subseteq Q$, то e должен быть квазирегулярным. Получено противоречие с ненильпотентностью $Q(R)$. Теорема доказана.

<u>Теорема I6</u>. Ненулевое полупримарное почти-кольцо является 2-полупростым тогда и только тогда, когда оно не имеет ненулевых нильпотентных правых квазиидеалов.

<u>Доказательство</u>. Необходимость условия хорошо известна ([I2], теорема 2.I). Докажем достаточность. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и R не имеет ненулевых нильпотентных правых квазиидеалов. По теореме I0 тогда $R = D(R)$ и $J_s(R) = 0$. Следовательно, достаточно доказать, что каждый s-неприводимый R-модуль 2-неприводим.

Пусть $G \in \mathfrak{M}_R^{s}$ и G содержит собственный подмодуль H. Тогда также $G \in \mathfrak{M}_R^{o}$ и по теореме 3 имеем $G \simeq_R$ $\simeq_R m(R_{i+1}/R_i)$, где R_{i+1}/R_i - матричный фактор приведенного $\mathfrak{A}$-ряда для R. Следовательно, G является по лемме I строго циклическим R_{i+1}/R_i-модулем и ввиду $H \neq G$ получаем

$$H(R_{i+1}/R_i) = 0. \tag{I4}$$

Так как R-модуль R_{i+1}/R_i есть по лемме I прямая степень модуля G, то в R_{i+1}/R_i содержится правый квазиидеал A/R_i почти-кольца R/R_i, R-изоморфный модулю H. Учитывая (I4), теперь получаем

$$(A/R_i)(A/R_i) \subseteq (A/R_i)(R_{i+1}/R_i) = 0,$$

т.е. R_{i+1}/R_i содержит нильпотентный правый квазиидеал почти-кольца R/R_i.

Так как $R = D(R)$, то по теореме 4 модуль R_R есть прямая сумма простых подмодулей. Поэтому он вполне приводим и, в частности, найдется $T \trianglelefteq_r R$, такой что $R = R_i \dotplus T$. Отсюда получаем канонический изоморфизм $\varphi : R_{i+1}/R_i \to R_{i+1} \cap T$ (каждому смежному классу по R_i сопоставляется его представитель, содержащийся в T), который является и почтикольцевым и R-модульным. Теперь $\varphi(A/R_i)$ является нильпотентным правым квазиидеалом почти-кольца R.

Ввиду предположения получаем $\varphi(A/R_i) = 0$, откуда $A/R_i = 0$ и $H = 0$. Следовательно, G не содержит собственных ненулевых подмодулей и тем самым является 2-неприводимым. Теорема доказана.

Примечание. Для артиновых почти-колец утверждение теоремы известно ([8], предложение 4.I).

Перейдем к доказательству основных результатов параграфа. Для этого нам понадобятся некоторые леммы. Докажем, что любой идеал S полупримарного почти-кольца имеет следующее свойство H (соответственно H'):

для любого правого квазиидеала (соответственно правого идеала) A, нильпотентного по модулю S, найдется нильпотентный правый квазиидеал (правый идеал) A_1, такой что $A \subseteq S + A_1$.

Лемма I6. Пусть S и U - идеалы почти-кольца R, $S \subset U$, почти-кольцо U/S нильпотентно и идеал S имеет свойство H (соответственно H'). Тогда U имеет свойство H (H').

Доказательство. Пусть A - правый квазиидеал почти-кольца R и $A^n \subseteq U$. В силу нильпотентности U/S имеем $A^{nm} \subseteq S$ при некотором m. По свойству H найдется нильпотентный правый квазиидеал A_1, такой что $A \subseteq S + A_1$. Поскольку $S \subseteq U$, то $A \subseteq U + A_1$, что и требовалось доказать. Параллельное утверждение про свойство H' доказывается аналогично.

Лемма I7. Пусть S и U - идеалы почти-кольца R, $S \subset U$, почти-кольцо U/S имеет левую единицу и идеал S имеет свойство $H(H')$. Тогда идеал U имеет тоже свойство $H(H')$.

Доказательство. Пусть A - правый квазиидеал почти-кольца R, такой что $A^n \subseteq U$. Так как U/S имеет левую единицу, то получаем разложение $R/S = U/S \dotplus T/S$, где $T \triangleleft_r R$ ([3], лемма E).

Пусть P/S - проекция $(A+S)/S$ на T/S. Покажем, что $P^n \subseteq S$. Пусть $p_1, \dots, p_n \in P$. Тогда найдутся $a_1, \dots, a_n \in A$, такие что $a_i = u_i + p_i$, где $u_i \in U$. Так как $U \triangleleft R$, то найдется такой $u \in U$, что $a_1 a_2 \cdots a_n = u + p_1 p_2 \cdots p_n$, откуда ввиду $A^n \subseteq U$ получаем $p_1 p_2 \cdots p_n \in U$ и $P^n \subseteq U$. Кроме того $P^n \subseteq T$ из-за $P \subseteq T$. Следовательно, $P^n \subseteq U \cap T = S$.

Так как S имеет свойство H, то найдется нильпотентный правый квазиидеал A_1, такой что $P \subseteq S + A_1$. Поскольку $A \subseteq P + U$, то получаем $A \subseteq U + S + A_1 = U + A_1$, а это означает, что U имеет свойство H.

Параллельное утверждение о свойстве H' доказывается аналогично, если учесть, что проекция правого идеала $(A+S)/S$ на T/S является вновь правым идеалом.

Лемма I8. Любой идеал полупримарного почти-кольца имеет свойства H и H'.

Доказательство. Пусть $R \in \mathfrak{A}$ и $S \lhd R$. Построим цепочку

$$0 = S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n = S, \qquad (I5)$$

где $S_i = S \cap R_i$ и R_i – члены приведенного $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца R. По лемме 3 нильпотентным факторам R_{i+1}/R_i соответствуют нильпотентные факторы S_{i+1}/S_i, а в случае матричного R_{i+1}/R_i ввиду приведенности $\mathfrak{A}$-ряда будет либо $S_i = S_{i+1}$, либо $R_{i+1}/R_i \simeq S_{i+1}/S_i$. Так как матричные почти-кольца имеют левые единицы (лемма I), то в итоге получаем, что факторы ряда (I5) либо нильпотентны, либо имеют левые единицы.

Очевидно, что нулевой идеал S_0 имеет свойства H и H'. Допустим, что идеал S_i уже обладает свойством $H(H')$. Тогда если S_{i+1}/S_i нильпотентен, то S_{i+1} обладает H (H') по лемме I6, а если S_{i+1}/S_i имеет левую единицу, то по лемме I7. Значит, S_{i+1} обладает тоже свойствами H и H'.

Лемма I9. Пусть идеал U почти-кольца R, порожденный всеми нильпотентными правыми квазиидеалами (правыми идеалами) почти-кольца R, удовлетворяет H (H'). Тогда R/U не имеет ненулевых нильпотентных правых квазиидеалов (правых идеалов).

Доказательство. Пусть A/U – правый квазиидеал почти-кольца R/U и $(A/U)^n = 0$. Тогда $A^n \subseteq U$ и по свойству H найдется нильпотентный правый квазиидеал A_1, такой что $A \subseteq U + A_1$. Так как ввиду определения U имеем $A_1 \subseteq U$, то $A \subseteq U$ и $A/U = 0$. Параллельное утверждение доказывается аналогично.

Теорема I7. Идеал, порожденный всеми нильпотентными правыми квазиидеалами полупримарного почти-кольца R совпадает с $J_2(R)$.

Доказательство. Пусть U – идеал, указанный в формулировке теоремы. Тогда $U \subseteq J_2(R)$ ([I2], теорема 2.I).

Докажем обратное включение. По лемме I8 идеал U имеет свойство H и по лемме I9 почти-кольцо R/U не имеет ненулевых нильпотентных правых квазиидеалов. Так как $R/U \in \mathfrak{A}$ в силу предложения I4 из [3], то теорема I6 дает $\mathfrak{J}_2(R/U) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{J}_2(R) \subseteq U$ (см. [6], следствие I.I).

Теорема I8. Идеал, порожденный квазирадикалом полупримарного почти-кольца R совпадает с $\mathfrak{J}_s(R)$.

Доказательство. По теореме I0 полупримарное s-полупростое почти-кольцо $R/\mathfrak{J}_s(R)$, не имеет ненулевых нильпотентных правых идеалов. Так как $Q(R)$ является нильпотентным (теорема I5), то $Q(R) \subseteq \mathfrak{J}_s(R)$ и также $(Q(R)) \subseteq \mathfrak{J}_s(R)$.

Докажем обратное включение. Поскольку $(Q(R))$ обладает по лемме I8 свойством H' и $(Q(R))$ содержит все нильпотентные правые идеалы ([I2], следствие 2.6), то $R/(Q(R))$ не имеет ненулевых нильпотентных правых идеалов. Следовательно, в силу теоремы I0 будет $\mathfrak{J}_s(R/(Q(R))) = 0$. Так же, как для радикалов $\mathfrak{J}_i$, $i = 0, 1, 2$, доказывается, что $\mathfrak{J}_s(R)$ есть пересечение всех идеалов, факторы по которым s-полупросты ([6], следствие I.I). Поэтому $\mathfrak{J}_s(R/(Q(R))) = 0$ дает $\mathfrak{J}_2(R) \subseteq (Q(R))$. Теорема доказана.

Литература

1. Г о я н И. М., Радикал Бэра для почти-колец. Изв. Акад. наук Молдавской ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 4, 32-38.
2. Д ж е к о б с о н Н., Строение колец. Москва, 1961.
3. К а а р л и К., Минимальные идеалы в почти-кольцах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 105-142.
4. К у р о ш А. Г., Радикалы колец и алгебр. Матем. сб., 1953, 33(75), № 1, 13-26.
5. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.
6. П о л и н С. В., Радикалы в $m\Omega$-почти-кольцах I. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 1, 64-75.
7. П о л и н С. В., Радикалы в $m\Omega$-почти-кольцах II. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 2, 63-71.
8. B e t s c h, G., Ein Radikal für Fastringe. Math. Z., 1962, 78, № 1, 86-90.

9. F a i n, C. G., Some structure theorems for near-rings. Doct. diss. Univ. Oklahoma, 1968.

10. H a r t n e y, J. F. T., On the radical theory of a distributively generated near-ring. Math. Scand., 1968, 23, № 2, 214-220.

11. L a x t o n, R. R., Prime ideals and the ideal-radical of a distributively generated near-ring. Math. Z., 1964, 83, № 1, 8-17.

12. R a m a k o t a i a h, D., Radicals for near-rings. Math. Z., 1967, 96, № 1, 45-56.

13. S c o t t, S. D., Formation radicals for near-rings. Proc. London Math. Soc., 1972, 25, № 3, 441-464.

Поступило
20 III 1974

RADIKAALID RINGOIDIDES

K. Kaarli

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis uuritakse ringoidide radikaale $\mathcal{J}_i$, $i=0,1,2,s$, mis on ringiteooriast tuntud Jacobsoni radikaali analoogideks. Põhitähelepanu on suunatud probleemile, kuidas on seotud ringoidi radikaal ja tema mingi alamsüsteemi (ideaal, kvaasiideaal jne.) radikaal. Näiteks tõestatakse, et suvaliste ringoidi R, tema ideaali S ja kvaasiideaali T korral kehtivad seosed: $\mathcal{J}_1(S) \subseteq \mathcal{J}_1(R)$, $\mathcal{J}_2(T) = \mathcal{J}_2(R) \cap T$.

Põhjalikumad tulemused on saadud autori poolt artiklis [3] defineeritud poolprimaarsete ringoidide jaoks. Muuhulgas lahendatakse selle ringoidide klassi korral üks artiklis [10] püstitatud probleem.

RADICALS IN NEAR-RINGS

K. Kaarli

S u m m a r y

In this paper the radicals $\mathcal{J}_i$, $i=0,1,2,s$, of near-rings are considered. Special attention has been paid to the relationship between the radical of a near-ring and radicals

of its subsystems (ideals, quasiideals). It has been proved for example that

1) $\mathcal{J}_0(S) \supseteq \mathcal{J}_0(R) \cap S$ for any right R-subgroup S of any d.g. near-ring R;

2) $\mathcal{J}_1(S) \subseteq \mathcal{J}_1(R) \cap S$ for any ideal S of any near-ring R;

3) $\mathcal{J}_2(S) = \mathcal{J}_2(R) \cap S$ for any quasiideal S of any near-ring R.

More detailed results have been achieved for semiprimary near-rings, introduced by author in [3]. Among others, the following theorems have been proved.

Theorem. For a semiprimary near-ring R the following assertions are equivalent.

1) If G is such a 0-irreducible R-module and S such an ideal of R that $GS \neq 0$, then G is a 0-irreducible S-module.

2) If S is an ideal of R and G is a 0-irreducible S-module, then the structure of R-module (inducing the given structure of S-module) can be defined on G.

3) Any minimal ideal with non-zero multiplication of any quotient near-ring of R is a simple near-ring.

О МАТРИЧНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ В НЕАРХИМЕДОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Х. Эспенберг

Эстонская Сельскохозяйственная Академия

I. Основные понятия и леммы

Поле K называется неархимедовым полем, если каждому элементу a поля K соответствует вещественное число $|a|$ называемое нормой элемента a, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $|a| \geqslant 0$, причем $|a| = 0$, лишь если $a = 0$,
2) $|a \pm b| \leqslant \max(|a|, |b|)$ для $a, b \in K$
3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Через N_K обозначим множество

$$N_K = \{|a|;\ a \in K\}.$$

Линейное пространство E над неархимедовым полем[1] K называется линейным неархимедовым пространством, если каждому элементу $x \in E$ сопоставлено вещественное число $\|x\|$, называемое нормой элемента x, причем соблюдены условия:

1) $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0$, лишь если $x = \theta$,
2) $\|x+y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$ для $x, y \in E$,
3) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ для $a \in K$, $x \in E$.

Через N_E обозначим множество

$$N_E = \{\|x\|;\ x \in E\}.$$

Во всей работе будем считать, что $N_E = N_K$.

Приведем некоторые следствия из аксиом нормы линейного неархимедового пространства E.

1. Имеет место неравенство[2]

$$\|\sum x_i\| \leqslant \sup \|x_i\| \qquad (x_i \in E) \tag{1}$$

(см. [1], стр. 107).

2. Имеет место равенство

$$\|x_0 + x_1\| = \|x_0\|, \qquad \text{если} \quad \|x_0\| > \|x_1\|$$

---

[1] В дальнейшем мы будем предполагать, что нормирование поля K нетривиальное.

[2] Вместо $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i$ будем писать $\sum x_i$.

(см. [2], стр. 41). Аналогично

$$\|\sum x_i\| = \|x_0\|, \qquad \text{если} \quad \|x_0\| > \|x_i\| \qquad (i = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Последовательность $\{X_n\}$ элементов линейного неархимедового пространства E называется последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$\|X_m - X_n\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m, n \geqslant n_0(\varepsilon). \quad (3)$$

Если в пространстве E каждая последовательность Коши сходится к некоторому пределу, также являющемуся элементом пространства E, то пространство E называется неархимедовым пространством Банаха или BN-пространством.

Таким образом, для сходимости последовательности $\{X_n\}$ в BN-пространстве необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3). Как показывает лемма 1, этому условию можно дать более эффективную форму.

Лемма 1. Для сходимости последовательности $\{X_n\}$ в BN-пространстве необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$\|X_{n+1} - X_n\| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon). \quad (4)$$

Условие (4) непосредственно следует из условия (3), а условие (3) следует из условия (4) на основе неравенства

$$\|X_m - X_n\| = \|\sum_{i=n}^{m-1} (X_{i+1} - X_i)\| \leqslant \max_{n \leqslant i \leqslant m-1} \|X_{i+1} - X_i\|.$$

Рассмотрим следующие множества последовательностей в BN-пространстве E: c - множество всех сходящихся последовательностей, m - множество всех ограниченных последовательностей, c_0 - множество всех последовательностей, сходящихся к нулю. Имеет место

Лемма 2. Множества c, m и c_0 являются BN-пространствами над полем $\mathcal{K}$ с нормой $\sup \|X_n\|$.

Доказательство утверждения леммы 2 для c и m дано в [5]. Аналогичное доказательство применимо в случае множества c_0

Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ - элементы BN-пространства E. Составим ряд $\sum x_n$. Частные суммы этого ряда

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} x_i .$$

Ряд $\sum x_n$ называется сходящимся, если последовательность частных сумм сходится. Так как $X_{n+1} - X_n = x_{n+1}$, то из леммы 1 вытекает

<u>Лемма 3</u>. Пусть E - BN-пространство. Ряд $\sum x_n$ $(x_n \in E)$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n\}$ является нуль-последовательностью.

Пусть E и F линейные неархимедовые пространства над полем K. Рассмотрим оператор $U(x)$ из E в F. Оператор $U(x)$ называется непрерывным в точке x_0, если из $x_n \to x_0$ следует $U(x_n) \to U(x_0)$. Оператор $U(x)$ называется непрерывным на E, если он непрерывен в каждой точке пространства E. Оператор $U(x)$ называется линейным, если

I) этот оператор аддитивен, т.е.

$U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in E$,

2) этот оператор однороден, т.е.

$U(ax) = aU(x)$ для всех $a \in K$, $x \in E$.

Точная нижняя граница постоянных M, удовлетворяющих условию

$$\|U(x)\| \leq M \|x\|$$

называется нормой оператора $U(x)$ и обозначается $\|U\|$.

Имеют место следующие леммы.

<u>Лемма 4</u>. Пусть E и F - BN-пространства над полем K и пусть G множество линейных непрерывных операторов из E в F. Для

$$\sup_{U \in G} \|U\| \leq M$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in E$ существовало число $M(x) > 0$ такое, что

$$\sup_{U \in G} \|U(x)\| \leq M(x)$$

(см. [3], стр. 125).

<u>Лемма 5</u>. Пусть E и F - линейные неархимедовые пространства над нетривиально нормированным полем K. Пусть $U(x)$ аддитивный оператор из E в F. Если существует число $M > 0$ такое, что для всех $x \in E$

$$\|U(x)\| \leq M \|x\|,$$

то оператор $U(x)$ непрерывен.

(см. [4]. стр. 683).

2. Матричные методы суммирования в BN-пространствах

Пусть E - BN-пространство над полем K. Рассмотрим треугольную матрицу $A=(a_{nk})$, где $a_{nk}\in\mathcal{K}$.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 6. Условия

$$\lim_n \sup_k |a_{nk}|=0 \tag{5}$$

и

$$\lim \left|\sum_{k\in H} a_{nk}\right| =0, \tag{6}$$

где H – любое подмножество множества неотрицательных целых чисел, эквивалентны.

Доказательство. Из условия (5) следует условие (6), так как

$$\left|\sum_{k\in H} a_{nk}\right| \leqslant \sup_{k\in H}|a_{nk}| \leqslant \sup|a_{nk}|.$$

Покажем, что из условия (6) следует условие (5). Предположим от противного, что $\lim\limits_n \sup\limits_k|a_{nk}|\neq 0$. Тогда найдется такое число $\varepsilon_0>0$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<n_3<\dots$ такая, что $\sup\limits_k|a_{nk}|\geqslant\varepsilon_0$ при $n=n_i$ $(i=1,2,3,\dots)$. Другими словами, в строках с номерами $n_1, n_2, n_3, \dots$ найдется по крайней мере один элемент с нормой, не меньше ε_0. Пусть первым таким элементом в n_1-ой строке будет $a_{n_1k_1}$ в n_2-ой строке $a_{n_2k_2}$ и т.д.

Возможны 2 случая:

I) элементы $a_{n_ik_i}$ $(i=1,2,\dots)$ стоят в первых k_0 столбцах матрицы A, т.е. $k_i<k_0$ $(i=1,2,\dots)$;

2) не существует такого числа k_0, чтобы $k_i<k_0$ для всех i.

В первом случае среди первых k_0 столбцов найдется по крайней мере один такой столбец, который содержит бесконечное число элементов $a_{n_ik_i}$. Пусть номер этого столбца l_0 Мы имеем $\lim|a_{nl_0}|\neq 0$. Это противоречит условию (6) при $H=\{l_0\}$. Во втором случае найдем, исходя из элемента $a_{n_1k_1}$ $(|a_{n_1k_1}|\geqslant\varepsilon_0)$ наименьший индекс $n_{i_1}\in\in\{n_i\}$ так, что $k_{i_1}>n_i$. Далее найдем наименьший индекс $n_{i_2}\in\{n_i\}$ так, что $k_{i_2}>n_{i_1}$ и т.д. Получим бесконечное множество индексов $H=\{k_1, k_{i_1}, k_{i_2},\dots\}$, которое является подмножеством множества $\{k_1, k_2, \dots\}$. При таком множестве H условие (6) не выполнено, так как по (2)

$$\left|\sum_{k\in H} a_{nk}\right|\geqslant\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad n=n_1, n_{i_1}, n_{i_2},\dots$$

Лемма 7. Условия

$$\lim_{n} \sup_{k} |a_{nk}| = 0 \tag{7}$$

и

$$\lim_{n} \sup_{k} |\Delta a_{nk}| = 0 \tag{8}$$

равносильны[1].

Доказательство. Из условия (7) следует условие (8), так как

$$\sup_{k} |\Delta a_{nk}| \leqslant \sup_{k} |a_{nk}|.$$

Покажем, что из условия (8) следует условие (7). Так как

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (a_{nk} - a_{n,k+1})\right| \leqslant \sup_{k} |\Delta a_{nk}|,$$

то по условию (7) $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=0}^{n} (a_{nk} - a_{n,k+1}) = 0$,

т.е.

$$\lim_{n} a_{n0} = 0. \tag{9}$$

Но из условий (8), (9) на основе неравенства

$$\sup_{k} |a_{nk}| = \sup_{k} \left|\sum_{i=1}^{k} (a_{ni} - a_{n,i-1}) + a_{n0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k} (|\Delta a_{nk}|, |a_{n0}|)$$

следует условие (7).

Рассмотрим треугольный метод суммирования A, который определяется матрицей $A = (a_{nk})$, где $a_{nk} \in K$. Пусть дан ряд $\sum x_n$ $(x_n \in E)$ с частичными суммами $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. Преобразуем последовательность $\{X_n\}$ в последовательность $\{X'_n\}$, где

$$X'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} X_k. \tag{10}$$

Наряду с преобразованием (10) мы будем применять и следующие преобразования:

преобразование

$$X'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k \tag{11}$$

ряда в последовательность;

преобразование

$$x'_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} x_k \tag{12}$$

ряда в ряд;

преобразование

$$x'_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} X_k \tag{13}$$

[1] $\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1}$ называется "разностью вперед" и составляется по второму индексу.

последовательности в ряд.

Метод суммирования в виде (10) можно всегда представить в виде (11), (12) или (13). Элементы соответствующих матриц $A=(a_{nk})$, $\mathfrak{A}=(\alpha_{nk})$, $\bar{\mathfrak{A}}=(\bar{\alpha}_{nk})$ и $\bar{A}=(\bar{a}_{nk})$ связаны равенствами[1]:

$$a_{nk} = \Delta\alpha_{nk} = \sum_{m=k}^{n}\Delta\bar{\alpha}_{mk} = \sum_{m=k}^{n}\bar{a}_{mk}, \tag{14}$$

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n}a_{n\nu} = \sum_{m=k}^{n}\bar{\alpha}_{mk} = \sum_{\nu=k}^{n}\sum_{m=k}^{n}\bar{a}_{m\nu}, \tag{15}$$

$$\bar{\alpha}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n}\Delta\alpha_{n\nu} = \bar{\Delta}\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n}\bar{a}_{n\nu}, \tag{16}$$

$$\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta}a_{nk} = \bar{\Delta}\Delta\alpha_{nk} = \Delta\bar{\alpha}_{nk}. \tag{17}$$

Пусть α и β – любые два множества из множеств c, m, c_0. Говорят, что ряд $\sum x_n$ принадлежит к классу α, если последовательность его частичных сумм принадлежит к классу α.

Ряд $\sum x_n$ или последовательность его частичных сумм $\{X_n\}$ называется A_α-суммируемым, если последовательность $\{X'_n\}$ или ряд $\sum x'_n$, полученные соответственно преобразованием (10), (11), (12) или (13), принадлежит к классу α. Ради простоты вместо A_c- и A_{c_0}-суммируемости мы говорим соответственно об A-суммируемости и A_0-суммируемости.

Обозначим через αA множество всех последовательностей, которые метод A переводит в последовательности класса α. В дальнейшем мы имеем дело со множествами cA, c_0A и mA.

Если метод $A=(a_{nk})$ преобразует каждую последовательность множества α в последовательность множества β, то будем писать

$$(a_{nk})\in(\alpha\to\beta).$$

Такое же обозначение мы будем применять в случае методов суммирования вида (11), (12) и (13). Так, например, $(\alpha_{nk})\in$ $\in(m\to c)$ означает, что метод (11) преобразует все ряды с ограниченными частичными суммами в сходящиеся последовательности.

---

[1] $\bar{\Delta}a_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,k}$ называется "разность назад" и составляется по первому индексу.

3. Теоремы о преобразовании последовательности в последовательность

Пусть $A = (a_{nk})$ – треугольный метод суммирования вида (10). Необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод A переводил каждую последовательность класса α в последовательность класса β назовем точными условиями для $(a_{nk}) \in (\alpha \to \beta)$.

В формулировках теорем этого параграфа встречаются следующие условия:

$$\lim a_k = 0, \tag{A_1}$$

$$\lim_n a_{nk} = 0, \tag{A_2}$$

$$\lim_n a_{nk} = a_k, \tag{A_3}$$

$$\lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0, \tag{A_4}$$

$$\lim_n \sup_k |a_{nk} - a_k| = 0, \tag{A_5}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 0, \tag{A_6}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = a, \tag{A_7}$$

$$\sup |a_{nk}| \le M. \tag{A_8}$$

При доказательстве теорем этого параграфа полезно иметь в виду следующую схему:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{(a_{nk}) \in (m \to c_0)} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{(a_{nk}) \in (c \to c_0)} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{(a_{nk}) \in (c_0 \to c_0)} \arrow[d] \\
\boxed{(a_{nk}) \in (m \to c)} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{(a_{nk}) \in (c \to c)} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{(a_{nk}) \in (c_0 \to c)} \arrow[d] \\
\boxed{(a_{nk}) \in (m \to m)} \arrow[r] & \boxed{(a_{nk}) \in (c \to m)} \arrow[r] & \boxed{(a_{nk}) \in (c_0 \to m)}
\end{tikzcd}$$

Из этой схемы, напрмер, явствует, что точные условия для $(a_{nk}) \in (m \to c)$ являются достаточными для $(a_{nk}) \in (c \to m)$, а необходимыми для $(a_{nk}) \in (m \to c_0)$.

В 1963 г. Монна [3] нашел точные условия для $(a_{nk}) \in (c \to c)$. Он доказал следующую теорему[1].

Теорема I. Для $(a_{nk}) \in (c \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (A_3), (A_7) и (A_8), причем $\lim x'_n = aX + \sum a_k (X_k - X)$, где $X = \lim X_n$.

Из теоремы I непосредственно следуют теоремы 2-4.

Теорема 2. Для $(a_{nk}) \in (c \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (A_2), (A_6) и (A_8).

Теорема 3. Для $(a_{nk}) \in (c_0 \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (A_3) и (A_8).

Теорема 4. Для $(a_{nk}) \in (c_0 \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (A_2) и (A_8).

Теорема 5. Для $(a_{nk}) \in (m \to m)$, $a_{nk} \in (c \to m)$ и $(a_{nk}) \in (c_0 \to m)$ необходимо и достаточно выполнение условия (A_8).

Доказательство. Необходимость. Надо показать, что условие теоремы необходимо для $(a_{nk}) \in (c_0 \to m)$.

Так как матрица (a_{nk}) треугольная, то $\sup |a_{nk}| \le M_n$.

Пусть $\xi = \{X_k\} \in c_0$,

$$T_n \xi = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} X_k .$$

Оператор T_n из c_0 в E линеен.

По лемме 5 оператор T_n непрерывен, ибо

$$\|T_n \xi\| = \|\sum_{k=0}^{n} a_{nk} X_k\| \le \sup_{k \le n} (|a_{nk}| \cdot \|X_k\|) \le M_n \|\xi\|.$$

Так как $\{T_n \xi\} \in m$ для всех $\xi \in c_0$, т.е. $\sup \|T_n \xi\| \le M(\xi)$ для всех $\xi \in c_0$, то по лемме 4 найдется число $M > 0$ такое, что

$$\sup_n \| T_n \| \le M . \tag{18}$$

Рассмотрим последовательность $\xi = \{X_k\}$, где[2]

$$X_k = \begin{cases} U & \text{при } k = k_0; \quad \text{причем } \|U\| = 1 \\ \theta & \text{при } k \ne k_0. \end{cases}$$

Получим $T_n \xi = a_{nk_0} U$,

---

[1] Отметим, что Монна доказал приведенную теорему в общем случае, т.е. без ограничения $a_{nk} = 0$ при $k > n$.

[2] Такая последовательность существует ввиду предположения $N_E = N_X$.

$$\|T_n \xi\| = |a_{nk_0}| \leq \|T_n\| \cdot \|\xi\| = \|T_n\|,$$

откуда

$$\sup_k |a_{nk}| \leq \|T_n\|. \qquad (19)$$

Из неравенств (18) и (19) следует условие теоремы.

Достаточность. Надо показать, что условие теоремы достаточно для $(a_{nk}) \in (m \to m)$. Действительно, из $\{x_k\} \in m$ и условия теоремы следует, что $\{x'_n\} \in m$:

$$\|x'_n\| = \|\sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k\| \leq \sup_k(|a_{nk}| \cdot \|x_k\|) \leq M \sup_k \|x_k\|.$$

Теорема 6. Для $(a_{nk}) \in (m \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (A_4).

Доказательство. Необходимость. Если $(a_{nk}) \in (m \to c_0)$, то, в частности метод A переводит все последовательности $\{x_k\}$, где либо $x_k = \theta$, либо $x_k = u \neq \theta$, в последовательности, сходящиеся к нулю. Таким образом,

$$\lim_n \|\sum_{k \in H} a_{nk} u\| = 0,$$

где H – любое подмножество неотрицательных целых чисел. Отсюда

$$\lim_n |\sum_{k \in H} a_{nk}| = 0.$$

Но по лемме 6 это условие равносильно условию теоремы.

Достаточность. Из $\{x_k\} \in m$ и условия теоремы следует, что

$$\lim_n \|x'_n\| \leq \lim_n \sup_k \|a_{nk} x_k\| \leq$$

$$\leq \lim_n \sup_k |a_{nk}| \cdot \sup_k \|x_k\| = 0,$$

т.е.

$$\{x'_n\} \in c_0.$$

Теорема 7. Для $(a_{nk}) \in (m \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (A_I), (A_3) и (A_5), причем

$$\lim x'_n = \sum a_k x_k. \qquad (20)$$

Доказательство. Достаточность. Из $\|x_k\| \leq M$ и условия (A_I) теоремы следует, что ряд в равенсте (20) сходится. Справедливость формулы (20) следует из условий (A_I) и (A_5) теоремы, так как

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k - \sum_{k} a_k x_k\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} (a_{nk} - a_k) x_k - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k \right\| \le \left\|\sum_{k=0}^{n} (a_{nk} - a_k) x_k\right\| + \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k\right\| \le$$

$$\le M \sup_{k\le n} |a_{nk} - a_k| + M \sup_{k>n} |a_k|.$$

Необходимость. Необходимость условия (A_3) следует из теоремы 1. Так как по вышеуказанному A-суммой последовательности $\{x_n\}$ является $\sum a_k x_k$, то для $(a_{nk}) \in (m \to c)$ необходима сходимость ряда $\sum a_k x_k$ при всех $\{x_k\} \in m$, т.е. условие (A_1).

Если $(a_{nk}) \in (m \to c)$, то по (20)

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} (a_{nk} - a_k) x_k = 0;$$

таким образом, $(a_{nk} - a_k) \in (m \to c_0)$, откуда по теореме 6 следует условие (A_5) теоремы.

4. Теоремы о преобразовании ряда в последовательность

Пусть задана матрица $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ преобразования (11). В формулировках теорем этого параграфа встречаются следующие условия:

$$\lim \alpha_k = 0, \tag{B_1}$$

$$\lim_n \alpha_{nk} = 0, \tag{B_2}$$

$$\lim_n \alpha_{nk} = \alpha_k, \tag{B_3}$$

$$\lim_n \Delta \alpha_{nk} = 0, \tag{B_4}$$

$$\exists \lim_n \Delta \alpha_{nk}, \tag{B_5}$$

$$\lim_n \sup_k |\alpha_{nk}| = 0, \tag{B_6}$$

$$\lim_n \sup |\alpha_{nk} - \alpha_k| = 0, \tag{B_7}$$

$$\sup |\alpha_{nk}| \le M. \tag{B_8}$$

Для доказательства последующих теорем полезна

Лемма 8. Ряд $\sum x_n$ имеет ограниченные частичные суммы тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Из леммы 8 при помощи теоремы 6 вытекает

Теорема 8. Для $(\alpha_{nk}) \in (m \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (B_6).

Из леммы 3 при помощи теоремы 4 вытекает

Теорема 9. Для $(\alpha_{nk}) \in (c \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (B_2) и (B_8).

Примечание. Необходимые и достаточные условия для $(\alpha_{nk}) \in (c \to c_0)$ можно вывести и из теоремы 2, заменив a_{nk} через $\Delta \alpha_{nk}$ на основе равенства (I4). Следовательно, полученные таким путем необходимые и достаточные условия

$$\lim_n \Delta\alpha_{nk} = 0,$$

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \Delta\alpha_{nk} = 0,$$

$$\sup |\Delta\alpha_{nk}| \leq M,$$

равносильны условиям теоремы 9.

Из леммы 8 при помощи теоремы 7 вытекает

Теорема I0. Для $(\alpha_{nk}) \in (m \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (B_1), (B_3) и (B_7).

Из леммы 3 при помощи теоремы 3 вытекает

Теорема II. Для $(\alpha_{nk}) \in (c \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (B_3) и (B_8).

Теорема I2. Для $(\alpha_{nk}) \in (m \to m)$, $(\alpha_{nk}) \in (c \to m)$ и $(\alpha_{nk}) \in (c_0 \to m)$ необходимо и достаточно выполнение условия (B_8).

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из леммы 8 при помощи теоремы 5. Если необходимое и достаточное условие для $(\alpha_{nk}) \in (m \to m)$ найти прямо из теоремы 5, заменяя α_{nk} на $\Delta\alpha_{nk}$, то ввиду равенства (I4) получим

$$\sup |\Delta\alpha_{nk}| \leq M, \tag{2I}$$

которое, следовательно, равносильно условию (B_8).

Учитывая равносильность этих условий, из теоремы 5 вытекают и остальные утверждения теоремы.

Теорема I3. Для $(\alpha_{nk}) \in (c_0 \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (B_4) и (B_8).

Доказательство следует из теоремы 4 при помощи равенства (I4) (ввиду равносильности условий (2I) и (B_8)).

Из теоремы 3 при помощи равенства (I4) вытекает

Теорема I4. Для $(\alpha_{nk}) \in (c_0 \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (B_5) и (B_8).

5. Теоремы о преобразовании ряда в ряд

Пусть задана матрица $\bar{\mathfrak{A}} = (\bar{\alpha}_{nk})$ преобразования (12). В формулировках теорем этого параграфа встречаются следующие условия:

$$\lim_n \bar{\alpha}_{nk} = 0, \tag{C_1}$$

$$\lim_n \Delta\bar{\alpha}_{nk} = 0, \tag{C_2}$$

$$\lim_n \sup_k |\bar{\alpha}_{nk}| = 0, \tag{C_3}$$

$$\lim_n \sup_k \left|\sum_{m=k}^{n} \bar{\alpha}_{mk}\right| = 0, \tag{C_4}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \bar{\alpha}_{nk} = 0, \tag{C_5}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \Delta\bar{\alpha}_{nk} = 0, \tag{C_6}$$

$$\sup |\bar{\alpha}_{nk}| \leq M. \tag{C_7}$$

Теорема 15. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (m \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (C_4).

Доказательство следует из теоремы 8 и равенства (15).

Теорема 16. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (c \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (C_5) и C_7).

Доказательство следует из теоремы 9 и равенства (15).

Теорема 17. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (c_0 \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (C_6).

Доказательство следует из теоремы 13 и равенства (15).

Теорема 18. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (m \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условия (C_3).

Доказательство следует из лемм 3 и 8 при помощи теоремы 6.

Теорема 19. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (c \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (C_1) и (C_7).

Доказательство следует из леммы 3 при помощи теоремы 4.

Теорема 20. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (c_0 \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (C_2) и (C_7).

Доказательство следует из леммы 3 при помощи теоремы 13.

Теорема 21. Для $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (m \to m)$, $(\bar{\alpha}_{nk}) \in c \to m)$ и $(\bar{\alpha}_{nk}) \in (c_0 \to m)$ необходимо и достаточно выполнение условия (C_7).

Доказательство следует из теоремы 12.

6. Теоремы о преобразовании последовательности в ряд

Пусть задана матрица $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$ преобразования (13). В формулировках теорем этого параграфа встречаются следующие условия:

$$\lim_n \bar{a}_{nk} = 0, \qquad (D_1)$$

$$\lim_n \sum_k \bar{a}_{nk} = 0, \qquad (D_2)$$

$$\lim_n \sup_k |\bar{a}_{nk}| = 0, \qquad (D_3)$$

$$\lim_n \sup_k \Big| \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk} \Big| = 0, \qquad (D_4)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} = 0, \qquad (D_5)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \bar{a}_{nk} = 0, \qquad (D_6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} = 0, \qquad (D_7)$$

$$\sup |\bar{a}_{nk}| \le M. \qquad (D_8)$$

Теорема 22. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (m \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условия (D_4).

Доказательство следует из теоремы 6 и равенства (14).

Теорема 23. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (c \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (D_6), (D_7) и (D_8).

Доказательство следует из теоремы 2 и равенства (14), так как

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk} =$$
$$= \lim_n \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{mk} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{mk}.$$

Теорема 24. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (c_0 \to c_0)$ необходимо и достаточно выполнение условий (D_6) и (D_8).

Доказательство следует из леммы 3 при помощи теоремы 16.

Теорема 25. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (m \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условия (D_3).

Доказательство следует из леммы 8 при помощи теоремы 18. Учитывая равенство (17), получим из этой теоремы другую формулировку для теоремы 7:

для $(a_{nk}) \in (m \to c)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_n \sup_k |\bar{\Delta} a_{nk}| = 0.$$

Теорема 26. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (c \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (D_1), (D_2) и (D_8).

Доказательство следует из леммы 3 при помощи теоремы 2.

Теорема 27. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (c_0 \to c)$ необходимо и достаточно выполнение условий (D_1) и (D_8).

Доказательство следует из леммы 3 при помощи теоремы 19.

Теорема 28. Для $(\bar{a}_{nk}) \in (m \to m)$, $(\bar{a}_{nk}) \in (c \to m)$ и $(\bar{a}_{nk}) \in$ $\in (c_0 \to m)$ необходимо и достаточно выполнение условия (D_8).

Доказательство следует из лемм 3 и 8 при помощи теоремы 21.

Литература

1. F l e i s c h e r, I., Sur les espaces normés non-archimédiens. Ind. Math., 1955, 17, 107-119.
2. I n g l e t o n, A.W., The Hahn-Banach theorem for non-archimedean-valued fields. Proc. Cambridge Philos.Soc., 1952, 48, 41-45.
3. M o n n a, A.F., Sur le theoréme de Banach-Steinhaus. Ind. Math., 1963, 25, 121-131.
4. M o n n a, A.F., Sur les espaces linéaires normés III. Ind. Math., 1946, 8, 682-689.
5. R a n g a c h a r i, M.S., S r i n i v a s a n, V.K., Matrix transformations in non-archimedian fields. Ind. Math., 1964, 26, 422-429.

Поступило
18 I 1975

MAATRIKSMENETLUSEST MITTEARHIMEEDILISTES BANACHI RUUMIDES

H.Espenberg

R e s ü m e e

Esimeses ja teises paragrahvis antakse BN-ruumi (mittearhimeedilise Banachi ruumi) definitsioon ning töös vajalikud põhimõisted ja lemmad.

Kolmandas paragrahvis leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kolmnurkne maatriksmenetlus $A = (a_{nk})$ (jada-jada teisendus) kuuluks klassi $(\alpha \to \beta)$, s.o. teisendaks iga jada $\{x_n\} \in \alpha$ jadaks $\{x_n'\} \in \beta$. Hulkadeks α

ja β on koonduvate jadade hulk c, nulljadade hulk c_0 ja tõkestatud jadade hulk m. Senini olid teada tarvilikud ja piisavad tingimused $(a_{nk}) \in (c \to c)$ jaoks (A.F.Monna [3]).

Paragrahvides 4-6 leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kolmnurkne maatriksmenetlus $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ (rida-jada teisendus), $\bar{\mathfrak{A}} = (\bar{\alpha}_{nk})$ (rida-rida teisendus), $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$ (jada-rida teisendus) kuuluks klassi $(\alpha \to \beta)$.

ÜBER MATRIXTRANSFORMATIONEN IN NICHTARCHIMEDISCHEN BANACH-RÄUMEN

H. Espenberg

Zusammenfassung

Im ersten und zweiten Paragraphen werden die Definition des bN-Raums (eines nichtarchimedischen Banach-Raums) und die nötigen Grundbegriffe und Lemmas gegeben.

Im dritten Paragraphen werden genaue Bedingungen dafür gefunden, daß eine dreieckige Folge-Folge-Matrixtransformation $A = (a_{nk})$ in die Klasse $(\alpha \to \beta)$ gehört, d.h., daß sie jede Folge $\{x_n\} \in \alpha$ in eine Folge $\{x'_n\} \in \beta$ überführt. Die Mengen α und β sind: c - die Menge der konvergenten Folgen, c_0 - die Menge der Nullfolgen und m - die Menge der beschränkten Folgen. Bisher waren die genauen Bedingungen für $(a_{nk}) \in (c \to c)$ bekannt (A.F.Monna [3]).

In den Paragraphen 4-6 werden die genauen Bedingungen dafür gefunden, daß eine dreieckige Reihe-Folge-Matrixtransformation $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$, eine Reihe-Reihe-Matrixtransformation $\bar{\mathfrak{A}} = (\bar{\alpha}_{nk})$, eine Folge-Reihe-Matrixtransformation $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$ in die Klasse $(\alpha \to \beta)$ gehören.

ОБ АФФИННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ И ПРИЗНАКАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R_n. IУ

К. Рийвес

Кафедра математической статистики и программирования

Пусть в n-мерном $(n \geqslant 1)$ евклидовом пространстве R_n задан выпуклый многогранник $\mathcal{U}$ (см. [2], стр. II6), координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ любой точки X которого удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x^{\nu} \leqslant b_i, \quad i=1,\ldots,m, \tag{I}$$

где $n \geqslant 1$; $m \geqslant 2$ - некоторое произвольно фиксированное натуральное число и для каждого i по крайней мере один $a_{i\nu} \neq 0$ и, кроме того, $\mathrm{rang}\, \|a_{i\nu}\| = \varrho$. Каждое неравенство системы (I) определяет замкнутое полупространство H_i пространства R_n с граничной гиперплоскостью Γ_i, заданной уравнением

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x^{\nu} = b_i. \tag{2}$$

В [3] был предложен метод получения аналитических признаков классов некоторой аффинно инвариантной классификации выпуклых многогранников $\mathcal{U}$. Классы этой классификации инвариантны относительно аффинных преобразований, но действие группы аффинных преобразований внутри класса не всегда транзитивное. В некоторых случаях класс содержит ℓ-параметрическое $(\ell \geqslant 1)$ семейство аффинно неэквивалентных многогранников одного типа. Задача классификации многогранников $\mathcal{U}$ была приведена к эквивалентной задаче классификации многогранников $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap R_\varrho \subset R_\varrho$, где без ограничения общности можно предполагать, что плоскость R_ϱ задается уравнениями $x^{\varrho+1} = \ldots = x^n = 0$. В таком случае $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + R_{n-\varrho}$, где направляющими векторами плоскости $R_{n-\varrho}$ будут векторы $\{z_t \mid t = \varrho+1, \ldots, n\}$ фундаментальной системы решений однородной системы

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x^{\nu} = 0. \tag{3}$$

При сделанных предположениях при любом $t=\varrho+1,\dots,n$ координаты $z_t^{\varrho+1},\dots,z_t^n$ не обращаются одновременно в нуль.

Различные классы многогранников $\mathcal{U}_0$ характеризованы числом r_0 его вершин, числом p_1 направляющих векторов его неограниченных ребер и при $p_1=0$ - числом $q_{\varrho-1}$ пар его параллельных граней $G_{\varrho-1}$. Отметим, что в настоящей работе число $q_{\varrho-1}$ маловажно - в рассматриваемых случаях оно всегда равно нулю. Множество всех вершин и направляющих векторов неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_0\subset R_\varrho$ в совокупности с векторами $z_t(t=\varrho+1,\dots,n)$ образуют множество определяющих элементов многогранника $\mathcal{U}\subset R_n$.

В [3] рассматривались некоторые конкретные примеры применения выработанной методики классификации и описания классов многогранников $\mathcal{U}$ (случаи, когда m- произвольное, $\varrho=1$; или $m=4$, $\varrho=2$). В настоящей работе представляются результаты, полученные для случаев $m=4$, $\varrho=3,4$. При этом применяются обозначения, введенные в [3] формулами (I.I0), (I.II), (I.I2). Напомним некоторые из них, например:

$$A_{i_1\dots i_\varrho}=\begin{Vmatrix} a_{i_11}\cdots a_{i_1\varrho}\\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_\varrho 1}\cdots a_{i_\varrho\varrho}\end{Vmatrix},\quad d_{i_1\dots i_\varrho}=\det A_{i_1\dots i_\varrho},\ g_{i_1\dots i_\varrho}=\operatorname{rang} A_{i_1\dots i_\varrho},$$

$$A^{\alpha|b}_{i_1\dots i_\varrho}=\begin{Vmatrix} a_{i_11}\cdots a_{i_1,\alpha-1}\,b_{i_1}\,a_{i_1,\alpha+1}\cdots a_{i_1\varrho}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_\varrho 1}\cdots a_{i_\varrho,\alpha-1}\,b_{i_\varrho}\,a_{i_\varrho,\alpha+1}\cdots a_{i_\varrho\varrho}\end{Vmatrix},\ \alpha=1,\dots,\varrho;\ d^{\alpha|b}_{i_1\dots i_\varrho}=\det A^{\alpha|b}_{i_1\dots i_\varrho},$$

$$\bar{A}_{ii_1\dots i_\varrho}=\begin{Vmatrix} a_{i1}\cdots a_{i\varrho}\,b_i\\ a_{i_11}\cdots a_{i_1\varrho}\,b_{i_1}\\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_\varrho 1}\cdots a_{i_\varrho\varrho}\,b_{i_\varrho}\end{Vmatrix},\quad \bar{d}_{ii_1\dots i_\varrho}=\det \bar{A}_{ii_1\dots i_\varrho}.$$

Признаки всевозможных классов многогранников $\mathcal{U}_0$ (а тем самым многогранников $\mathcal{U}$) задаются в терминах, введенных в [3] понятий $\mathcal{I}$-вырожденности ($\mathcal{I}=0,\dots,m-\varrho$), А-, АБ- или Б-вырожденности порядка τ $(1\le\tau\le\varrho-1)$ последовательности индексов $(i_1,\dots,i_\varrho)$ (определение I.2) и понятия К-допустимости ($\varkappa=0,\dots,m-\varrho$) или $\varkappa=1,\dots,m-\varrho+1$), соответственно либо последовательности $(i_1,\dots,i_\varrho)$, либо последовательности $(j_1,\dots,j_{\varrho-1})$ (определение I.3).

Повторим здесь для примера следующее.

Неупорядоченная последовательность $(i_1, \dots, i_\varrho)$ называется <u>J-вырожденной</u> (короче JВ), если $g_{i_1 \dots i_\varrho} = \varrho$ и при $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_\varrho\}$ точно J из определителей $d_{i i_1 \dots i_\varrho}$ равняются нулю $(J = 0, \dots, m-\varrho)$. Пусть $M_{i_1 \dots i_\varrho} = \{ i \mid d_{i i_1 \dots i_\varrho} = 0 \}$ (тогда $|M_{i_1 \dots i_\varrho}| = \varrho + J$) и пусть последовательность $(i_1, \dots, i_\varrho)$ является J-вырожденной $(J = 0, \dots, m-\varrho-1)$. Такая последовательность называется <u>К-допустимой</u> (короче КД), если существует точно К значений индекса $i \in \{1, \dots, m\} \setminus M_{i_1 \dots i_\varrho}$ таких, что $\operatorname{sgn} d_{i_1 \dots i_\varrho} = (-1)^\varrho \operatorname{sgn} d_{i i_1 \dots i_\varrho}$ $(K = 0, \dots, m-\varrho-J)$.

Доказательства результатов настоящей работы основываются на предложениях параграфа I работы [3]. С одной стороны, в них дано геометрическое истолкование упомянутых понятий (предложения I.3-I.5). С другой стороны, указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы однозначно определенная точка $X_{i_1 \dots i_\varrho} = (x^1_{i_1 \dots i_\varrho}, \dots, x^\varrho_{i_1 \dots i_\varrho})$ пересечения гиперплоскостей $\Gamma_i \, (i \in M_{i_1 \dots i_\varrho})$, где

$$x^\alpha_{i_1 \dots i_\varrho} = \frac{d^{\alpha|b}{}_{i_1 \dots i_\varrho}}{d_{i_1 \dots i_\varrho}}, \quad \alpha = 1, \dots, \varrho,$$

являлась вершиной многогранника $\mathcal{U}$ (предложение I.7). Условия того, чтобы направляющий вектор прямой пересечения гиперплоскостей $\Gamma_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_{\varrho-1}}$ $(j_1, \dots, j_{\varrho-1} \in M_{i_1 \dots i_\varrho})$ являлся направляющим вектором неограниченного ребра многогранника $\mathcal{U}$, выходящего из вершины $X_{i_1 \dots i_\varrho}$, даны в предложении I.8.

<u>I. Признаки пересечений четырех замкнутых полупространств в R_n при $\varrho = 3$.</u> По вышесказанному рассматривается задача классификации и описания многогранников $\mathcal{U}$, заданных неприводимой системой (I) при $m = 4$, $\varrho = 3$, т.е. системой

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x^\nu \le b_i, \qquad i = 1, \dots, 4, \tag{4}$$

в которой без ограничения общности предполагается, что

$$\varrho = \operatorname{rang} \|a_{i\nu}\| = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1\varrho} \\ \dots\dots\dots \\ a_{41} \dots a_{4\varrho} \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} \dots a_{i_1 \varrho} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i_\varrho 1} \dots a_{i_\varrho \varrho} \end{Vmatrix} = 3.$$

(Здесь неприводимость системы (4) означает, что если $\Gamma_i \equiv \Gamma_j$, $i \ne j$, то $\operatorname{sgn} a_{i\nu} = -\operatorname{sgn} a_{j\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$, или, что то же самое, $H_i \not\equiv H_j$ (см. [3])). Тогда пересечение $\mathcal{U} =$

$= \mathcal{U} \cap R_3 = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap R_3$, являющееся многогранником пространства R_3, задается системой

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_{i\alpha} x^\alpha \le b_i, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{5}$$

где все H_i различны, хотя некоторые из Γ_i могут совпадать. Решение поставленной задачи разбито на три этапа, которые будут рассмотрены отдельно.

I^0. Получение признаков взаимного расположения четырех плоскостей в пространстве R_3. Пусть в пространстве R_3 заданы четыре плоскости Γ_i $(i = 1, \cdots, 4)$ соответственно, уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_{i\alpha} x^\alpha = b_i, \tag{6}$$

и пусть $\rho = \operatorname{rang} \|a_{i\alpha}\| = 3$. Искомые аналитические признаки взаимного расположения так определенных плоскостей Γ_i даются в терминах или J-вырожденности $(\mathrm{J} = 0, 1)$ (короче $\mathrm{J}B$), или А-, или Б-вырожденности порядка I (короче $A_I B$, $Б_I B$) неупорядоченных четырех троек (i_1, i_2, i_3) индексов $i_1, i_2, i_3 \in \in \{1, \cdots, 4\}$ Из свойств определителей и определений типов вырожденности троек (i_1, i_2, i_3) следует, что при сделанных предположениях $m = 4$, $\rho = 3$ невозможна A_2-, или $Б_2$-, или $АБ_2$-вырожденность тройки (i_1, i_2, i_3). Задача нахождения признаков взаимного расположения данных четырех плоскостей Γ_i решается с учетом геометрического истолкования упомянутых понятий типов вырожденности, которое сформулировано для общего случая в виде предложений I.3, I.4 и следствия I.2 работы [3]. Результаты представляются в таблице I.

Предложение I. Комбинации типов вырожденности четырех различных троек индексов i_1, i_2, i_3, i_4, указанные случаями IА-IIIБ таблицы I, исчерпывают при $\rho = 3$ все возможности.

Сформулированный результат доказывается с помощью определений типов вырожденности, учитывая свойства определителей и предположения $m = 4$, $\rho = 3$.

Каждой из строк IА-IIIБ таблицы I соответствует предложение, дающее необходимые и достаточные условия для определения взаимного расположения плоскостей Γ_i, заданных системой (6). Сформулируем для примера предложение, соответствующее условиям IА.

Таблица I

Признаки взаимного расположения четырех плоскостей в R_3 при $\rho = 3$

№	Тип вырожденности тройки				Число точек пересечения	Параллельные плоскости	Совпадающие плоскости
	(i_1,i_2,i_3)	(i_1,i_2,i_4)	(i_1,i_3,i_4)	(i_2,i_3,i_4)			
IA	OB	OB	OB	OB	4	-	-
Б	IB	IB	IB	IB	I	-	-
IIA	OB	OB	OB	$A_I B$	3	-	-
Б	IB	IB	IB	$Б_I B$	I	-	-
IIIA	OB	OB	$A_I B$	$A_I B$	2	$\Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	-
Б	IB	IB	$Б_I B$	$Б_I B$	I	-	$\Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$

Предложение 2. Для того, чтобы четыре плоскости пространства R_3, задаваемые системой (6), пересекались в четырех различных точках, необходимо и достаточно, чтобы все четыре тройки (i_1, i_2, i_3) индексов $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, 4\}$ были О-вырожденными.

Доказательство предложения основывается на предложениях I.I и I.3 работы [3].

2^0. Перечисление и определение типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, заданных системой (4), и соответствующих им $\mathcal{U}_0 \subset R_3$. Если многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$ задан системой (4) при предположении $\rho = 3$, то с учетом характеристик τ_0, μ_1 соответствующего ему многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_3$ по общим формулам представления выпуклых многогранников ([4], стр. II8), любая точка $x \subset \mathcal{U}$ представима в виде

$$x = \sum_{u=1}^{\tau_0} \alpha_u x_u + \sum_{s=1}^{\mu_1} \beta_s y_s + \sum_{t=4}^{n} \gamma_t z_t, \tag{7A}$$

$$\alpha_u, \beta_s \geqslant 0, \quad \sum_{u=1}^{\tau_0} \alpha_u = 1, \quad -\infty < \gamma_t < +\infty. \tag{7Б}$$

Здесь точки x_u являются вершинами многогранника $\mathcal{U}_0$, векторы y_s - направляющими векторами его неограниченных ребер и векторы z_t образуют фундаментальную систему решений системы (3). (Отметим, что по определению множеством определяющих элементов многогранника $\mathcal{U}$ будет во введенных обозначениях $\{x_u, y_s, z_t \mid u=1,\dots,r_0;\ s=1,\dots,p_1;\ t=4,\dots,n\}$.) Ясно, что при $\mathcal{U}_0 \subset R_3$ будет $p_t=0,\ t=4,\dots,n$. При $p_1=0$ условимся считать $\sum_{s=1}^{p_1} p_s y_s = 0$.

Представим перечень определений типов рассматриваемых многогранников $\mathcal{U}_0 \subset R_3$ и $\mathcal{U} \subset R_n$, соответствующих различным комбинациям чисел r_0, p_1, в виде таблицы 2.

Таблица 2

Определения типов многогранников $\mathcal{U}_0 \subset R_3$ и $\mathcal{U} \subset R_n$ при $m=4$, $\rho=3$

№	r_0	p_1	$\mathcal{U}_0 \subset R_3$	$\mathcal{U} \subset R_n$	Размерность $\mathcal{U} \subset R_n$
I.	4	0	тетраэдр	призма над тетраэдром	n
2.	3	3	трехгранный конус с усеченной вершиной	n-мерный трехгранный конус с усеченной вершиной	n
3.	3	I	усеченная трехгранная призма	n-мерная усеченная трехгранная призма	n
4.	2	4	неправильный клин	n-мерный неправильный клин	n
5.	2	3	полуправильный клин	n-мерный полуправильный клин	n
6.	2	2	правильный клин	n-мерный правильный клин	n
7.	I	4	четырехгранный конус ранга 3	n-мерный четырехгранный конус ранга 3	n
8.	I	3	трехгранный конус	n-мерный трехгранный конус	n
9.	I	2	угол (на плоскости)	$(n-1)$-мерный двугранный угол	$n-1$
I0.	I	I	полупрямая	$(n-2)$-мерная полуплоскость	$n-2$
II.	I	0	точка	$(n-3)$-мерная плоскость	$n-3$
I2.	0	0	пустое множество	пустое множество	-

Каждой строке этой таблицы можно сопоставить определение. Приведем здесь для примера несколько из них.

Пусть многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$ задан системой (4), в которой $\varrho = 3$. Пусть, кроме того, соответствующий ему многогранник $\mathcal{U}_0 \subset R_3$, заданный системой (5), имеет две вершины $(r_0 = 2)$. Если при сделанных предположениях $p_1 = 4$, то $\mathcal{U}$ называется <u>n-мерным неправильным клином</u> ($\mathcal{U}_0$ - неправильный клин); если $p_1 = 3$, то $\mathcal{U}$ называется <u>n-мерным полуправильным клином</u> ($\mathcal{U}_0$ - полуправильный клин); если $p_1 = 2$, то $\mathcal{U}$ называется <u>n-мерным правильным клином</u> ($\mathcal{U}_0$ - правильный клин). Каждый определенный тип многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ имеет конкретную формулу представления (7). Например, формулой представления правильного n клина $\mathcal{U}$ будет

$$\mathcal{U} = \{X \mid X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \sum_{t=4} \gamma_t z_t,$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \ -\infty < \gamma_t < +\infty\}.$$

<u>Предложение 3</u>. Для многогранников $\mathcal{U}_0 \subset R_3$, заданных системой (5) при $\varrho = 3$, справедливы соотношения $r_0 \leqslant 4$, $p_1 \leqslant 4$, $q_2 = 0$. Двенадцать различных комбинаций характеристик (r_0, p_1, b) многогранников $\mathcal{U}_0 \subset R_3$, перечисленных в таблице 2, исчерпывают все возможности.

Доказательство этого предложения основывается на результатах этапа I^0, представленных в таблице I, и определениях вершин и направляющих векторов неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_0$ ([4], стр. III).

3^0. Аналитические признаки всех перечисленных на этапе 2^0 двенадцати типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, заданных системой (4) при предположении $\varrho = 3$, представлены в двух таблицах. При этом учитываются результаты этапа I^0, указанные в таблице I. Именно, признаки многогранников $\mathcal{U}$ - пересечений полупространств H_i $(i = 1, \dots, 4)$, взаимное расположение граничных гиперплоскостей Γ_i которых определяется признаками IA; IIA и IIIA, указываются в таблице 3 в терминах К-допустимости (К = 0,I) неупорядоченных троек (i_1, i_2, i_3) индексов $1, \dots, 4$. Если взаимное расположение гиперплоскостей Γ_i $(i = 1, \dots, 4)$ определено признаками IБ, IIБ, IIIБ таблицы I, то признаки соответствующих многогранников $\mathcal{U}$ даны в таблице 4 в терминах К-допустимости (К = I,2) неупорядоченных пар (i_1, i_2) индексов $1, \dots, 4$.

В таблицах 3 и 4 в некоторых случаях не указаны типы допустимости всех троек или пар индексов. С помощью определений типов вырожденности и допустимости последовательностей индексов (определения I.2-I.3 в [3]) и их геометрических истолкований (предложения I.3-I.6 из [3]) можно показать, что в таких случаях рассмотрение типов допустимости пропущенных последовательностей не дает дополнительной информации, так как эти типы либо не определены, либо совпадают с некоторыми другими. С учетом свойств определителей доказывается следующий результат.

Предложение 4. Комбинации типов допустимости четырех неупорядоченных троек (i_1, i_2, i_3) и шести пар (i_1, i_2), индексов $1, \dots, 4$, указанные в таблицах 3 и 4, исчерпывают при $\rho = 3$ все возможности.

Из таблиц 3,4 видно, что кроме трехгранного конуса и пустого множества все остальные десять типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, заданных системой (4) при $\rho = 3$, определяются точно одним комплектом признаков. Эти признаки (а в случаях n-мерного трехгранного конуса или пустого множества - серии всех определяющих их комплектов признаков) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы $\mathcal{U} \subset R_n$ был при $m = 4$, $\rho = 3$ многогранником рассматриваемого типа. Кроме того, при помощи предложений I.7, I.8 из [3] по полученным аналитическим признакам многогранников полностью определяется множество определяющих элементов $\{x_u, y_s \mid u = 1, \dots, r_0;\ s = 1, \dots, p_1\}$ многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_3$, а, следовательно, и множество $\{x_u, y_s, z_t \mid u = 1, \dots, r_0;\ s = 1, \dots, p_1;\ t = 4, \dots, n\}$ для $\mathcal{U} \subset R_n$. Чтобы таблицы 3, 4 не стали слишком громоздкими, упомянутые определяющие элементы в них не указаны. Конкретный пример формул для их вычисления дан в предложении 5. По вышесказанному, с каждой строкой (или со совокупностями строк {IA4, IIA3, IIIA2, IБ2, IIБI, IIIБI} и {IA5, IIA4, IIIA3}, соответственно) связано некоторое предложение. Сформулируем, например, одно из них (соответствующее IA3).

Предложение 5. Для того, чтобы многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$, заданный неприводимой системой (4) при $\rho = 3$ являлся n-мерным неправильным клином $(r_0 = 2,\ p_1 = 4)$, необходимо

Таблица 3

Признаки выпуклых многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ при $m=4, \rho=3$
в случаях IA, IIA, IIIA таблицы I

№	Тип многогранников $\mathcal{U} \subset R_n (m=4,\ \rho=3)$	Аналитические признаки типа				r_0	ρ_1
		(i_1,i_2,i_3)	(i_1,i_2,i_4)	(i_1,i_3,i_4)	(i_2,i_3,i_4)		
IA I.	n-мерная призма над тетраэдром	IД	IД	IД	IД	4	-
2.	n-мерный трехгранный конус с усеченной вершиной	IД	IД	IД	ОД	3	3
3.	n-мерный неправильный клин	IД	IД	ОД	ОД	2	4
4.	n-мерный трехгранный конус	IД	ОД	ОД	ОД	I	3
5.	пустое множество	ОД	ОД	ОД	ОД	-	-
IIA I.	n-мерная усеченная трехгранная призма	IД	IД	IД	-	3	I
2.	n-мерный полуправильный клин	IД	IД	ОД	-	2	3
3.	n-мерный трехгранный конус	IД	ОД	ОД	-	I	3
4.	пустое множество	ОД	ОД	ОД	-	-	-
IIIA I.	n-мерный правильный клин	IД	IД	-	-	2	2
2.	n-мерный трехгранный конус	IД	ОД	-	-	I	3
3.	пустое множество	ОД	ОД	-	-	-	-

Таблица 4

Признаки выпуклых многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ при $m=4$, $\varrho=3$
в случаях IБ; IIБ, IIIБ таблицы I

№	Тип многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ $(m=4,\ \varrho=3)$	Аналитические признаки типа						r_0	p_1
		(i_1,i_2)	(i_1,i_3)	(i_1,i_4)	(i_2,i_3)	(i_2,i_4)	(i_3,i_4)		
IБ I.	n-мерный четырехгранный конус ранга 3	2Д	IД	2Д	2Д	IД	2Д	I	4
2.	n-мерный трехгранный конус	2Д	2Д	IД	2Д	IД	IД	I	3
3.	$(n-3)$-мерная плоскость	IД	IД	IД	IД	IД	IД	I	0
IIБ I.	n-мерный трехгранный конус	2Д	2Д	-	2Д	-	-	I	3
2.	$(n-2)$-мерная полуплоскость	IД	IД	-	IД	-	-	I	I
IIIБ I.	n-мерный трехгранный конус	2Д	-	-	-	-	-	I	3
2.	$(n-1)$-мерный двугранный угол	IД	-	-	-	-	-	I	2

и достаточно, чтобы все четыре неупорядоченные тройки, составленные из индексов $1,\dots,4$, были 0-вырожденными, и чтобы две из них (например (i_1,i_2,i_3), (i_1,i_2,i_4)) являлись 1-допустимыми и две остальные $((i_1,i_3,i_4), (i_2,i_3,i_4))$ – 0-допустимыми. Вершинами многогранника $\mathcal{U}_0$ будут точки $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_{i_1 i_2 i_3}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_{i_1 i_2 i_3}$ и направляющими векторами его неограниченных ребер, соответственно,

$$y_1 = y'_{i_1 i_3} = \operatorname{sgn} d_{i_1 i_2 i_3} y_{i_1 i_3}, \quad y_2 = y'_{i_1 i_4} = \operatorname{sgn} d_{i_1 i_2 i_4} y_{i_1 i_4},$$

$$y_3 = y'_{i_2 i_3} = -\operatorname{sgn} d_{i_1 i_2 i_3} y_{i_2 i_3}, \quad y_4 = y'_{i_2 i_4} = -\operatorname{sgn} d_{i_1 i_2 i_4} y_{i_2 i_4},$$

где через $y_{\kappa\ell} (\kappa, \ell \in \{i_1,\dots,i_4\})$ обозначен вектор

$$y_{\kappa\ell} = \left(\begin{vmatrix} a_{\kappa 2} & a_{\kappa 3} \\ a_{\ell 2} & a_{\ell 3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{\kappa 3} & a_{\kappa 1} \\ a_{\ell 3} & a_{\ell 1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{\kappa 1} & a_{\kappa 2} \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} \end{vmatrix} \right).$$

Доказательство предложения аналогично доказательствам, приведенным в [2]. Оно основывается на определениях 0-вырожденности, 0- и 1-допустимости троек индексов и их геометрических истолкованиях (см. предложения 1.3, 1.5, 1.7 и 1.8 из [3]).

<u>2. Признаки пересечений четырех замкнутых полупространств в R_n при $\rho=4$</u>. Пусть многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$ является пересечением четырех замкнутых полупространств H_i, заданных линейными неравенствами

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x^\nu \leq b_i, \quad i=1,\dots,4, \tag{8}$$

для системы которых имеет место

$$\rho = \operatorname{rang} \|a_{i\nu}\| = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} a_{11} \cdots a_{1\rho} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{41} \cdots a_{4\rho} \end{Vmatrix} = 4.$$

Плоскость R_4, уравнениями которой являются $x^5 = \dots = x^n = 0$, пересекается при сделанных предположениях с $\mathcal{U}$ по $\mathcal{U}_0$ или $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + R_{n-\rho}$, где направляющими векторами плоскости $R_{n-\rho}$ можно выбрать фундаментальную систему решений $\{z_t \mid t=5,\dots,n\}$ системы (3). Тогда координаты $x^1,\dots,x^4$ произвольной точки многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_4$ удовлетворяют системе

$$\sum_{\alpha=1}^{4} a_{i\alpha} x^\alpha \leq b_i \quad i=1,\dots,4, \tag{9}$$

и граничные гиперплоскости $\Gamma_i \cap R_4 \subset R_4$ соответствующих замкнутых полупространств $H_i \cap R_4 \subset R_4$ задаются уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{4} a_{i\alpha} x^{\alpha} = b_i, \quad i=1,\dots,4. \qquad (10)$$

Также как в п. I, при сделанных предположениях решение задачи описания многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ можно разбить на три этапа.

I^0. Взаимное расположение четырех гиперплоскостей, заданных в R_4 системой (10), определено в силу предположения $\rho = 4$ однозначно. Действительно, система (10) имеет единственное решение, которое в упомянутых в начале настоящей работы обозначениях имеет вид

$$x^{\alpha}_{1234} = \frac{d^{\alpha|b}_{1234}}{d_{1234}}, \qquad \alpha = 1,\dots,4. \qquad (11)$$

С геометрической точки зрения, точка $\mathcal{X}_{1234} = (x^1_{1234}, \dots, x^4_{1234})$ является однозначно определенной точкой пересечения $\Gamma_1 \cap \dots \cap \Gamma_4 \cap R_4$. Во введенных нами терминах вырожденности последовательности $(1,\hat{2},3,4)$ индексов $1,\dots,4$ можно следующим образом дать аналитический признак, характеризующий рассматриваемый случай.

Предложение 6. Четыре гиперплоскости пространства R_4, заданные системой (10), пересекаются в однозначно определенной точке $\mathcal{X}_{1234}$ с координатами (11) тогда и только тогда, когда неупорядоченная последовательность $(1,2,3,4)$ индексов $1,\dots,4$ является 0-вырожденной $(m-\rho=0)$.

Всевозможные различные тройки гиперплоскостей (10) пересекаются в R_4 по прямым, направляющими векторами которых будут в обозначениях (I.10), (I.11) работы [3] векторы $y_{i_1 i_2 i_3}$ $(i_1, i_2, i_3 \in \{1,\dots,4\})$ с координатами

$$y^{\alpha}_{i_1 i_2 i_3} = d^{\hat{\alpha}}_{i_1 i_2 i_3} = (-1)^{\alpha} \begin{vmatrix} a_{i_1 1} \cdots a_{i_1,\alpha-1}\, a_{i_1,\alpha+1} \cdots a_{i_1 4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i_3 1} \cdots a_{i_3,\alpha-1}\, a_{i_3,\alpha+1} \cdots a_{i_3 4} \end{vmatrix}, \quad \alpha = 1,\dots,4. \qquad (12)$$

Все имеющиеся четыре вектора $y_{i_1 i_2 i_3}$ являются в R_4 линейно независимыми, так как матрица, столбцы которой составлены из их координат, будет присоединенной к матрице $\|a_{i\alpha}\|$ и по предположению $\det \|a_{i\alpha}\| \neq 0$ ([I], стр. 54).

2^0. Для перечисления типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, заданных системой (8) при $\rho = 4$, применяются результаты, полученные при описании взаимных расположений граничных гиперплоскостей Γ_i, пересекающихся полупространств H_i. Но в силу предложения 6 в настоящем случае существует единственная возможность.

Предложение 7. Для многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_4$, заданного системой (9) при $\varrho = 4$, справедливо $r_0 = 1$, $p_1 = 4$, $q_3 = 0$, т.е. его тип определен однозначно.

Определение. Пусть многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$ задан системой (8), в которой $\varrho = 4$. Соответствующий ему многогранник $\mathcal{U}_0 \subset R_4$ имеет одну вершину x_1 $(r_0 = 1)$ и четыре направляющих вектора y_s $(s = 1, \dots, p_1 = 4)$ неограниченных ребер. Множество точек x, представимых формулой ([4], стр. 118)

$$x = x_1 + \sum_{s=1}^{4} \beta_s y_s + \sum_{t=5}^{n} \gamma_t z_t, \quad \beta_s \geq 0, \quad -\infty < \gamma_t < +\infty$$

или, другими словами, многогранник $\mathcal{U}$ называется n-мерным четырехгранным конусом ранга 4 ($\mathcal{U}_0$ - четырехгранный конус ранга 4).

3^0. В силу результатов этапов 1^0 и 2^0 можно сформулировать основное предложение настоящего пункта.

Предложение 8. Для того, чтобы многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$, заданный системой (8), являлся n-мерным четырехгранным конусом ранга 4, необходимо и достаточно, чтобы однозначно определенная последовательность $(1,2,3,4)$ индексов $1, \dots, 4$ являлась 0-вырожденной (т.е. $\varrho = m = 4$). Вершиной x_1 соответствующего многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_4$ будет точка x_{1234} с координатами (11) и направляющими векторами его неограниченных ребер векторы

$$y_1 = y'_{123} = \operatorname{sgn} d_{1234}\, y_{123}, \quad y_2 = y'_{124} = -\operatorname{sgn} d_{1234}\, y_{124},$$

$$y_3 = y'_{134} = \operatorname{sgn} d_{1234}\, y_{134}, \quad y_4 = y'_{234} = -\operatorname{sgn} d_{1234}\, y_{234},$$

где координаты векторов $y_{i_1 i_2 i_3}$ $(i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, 4\})$ определяются формулой (12).

Доказательство предложения вполне аналогично доказательствам, приведенным в работе [2] и основывается на предложениях 1.7, 1.8 работы [3].

Литература

1. К у р о ш А.Г., Курс высшей алгебры. Москва, 1959.
2. Р и й в е с К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 116-126.
3. Р и й в е с К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. III. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 187-216.
4. Ю д и н Д.Б., Г о л ь ш т е й н Е.Г., Линейное программирование. Теория, методы и применения. Москва, 1969.

Поступило
14 I 1975

EUKLEIDILISE RUUMI R_n KUMERATE HULKTAHUKATE AFIINSEST KLASSIFIKATSIOONIST JA TUNNUSTEST. IV

K. Riives

R e s ü m e e

Käesolevas töös antakse ruumi R_n selliste kumerate hulktahukate afiinselt invariantne klassifikatsioon ja vastavate klasside analüütilised tunnused, mis on esitatavad nelja kinnise poolruumi lõikena, kui poolruume määrava lineaarse võrratuste süsteemi kordajate maatriksi astak ϱ on 3 ja 4. Seejuures kasutatakse töös [3] kirjeldatud klassifitseerimismeetodit. Kui $\varrho = 3$, siis eksisteerib kaksteist vaadeldavate hulktahukate klassi, juhul $\varrho = 4$ on klasse üksainus.

ABOUT AFFINE CLASSIFICATION AND CHARACTERS OF CONVEX POLYTOPES IN EUCLIDEAN SPACE R_n. IV

K. Riives

S u m m a r y

Let ϱ be the rank of the system of four linear in-

equalities. We consider the corresponding convex polytope in Euclidean space R_n where $\varrho = 3$ or $\varrho = 4$. In the paper an affinely invariant classification of such polytopes has been given by the method described in [3]. If $\varrho = 3$, there exist twelve types of the polytopes. If $\varrho = 4$, there exists only one type of the polytopes. The analytic characters of each type of the polytopes have been pointed out.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 390. ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ XVIII. На русском языке. Резюме на эстонском и английском языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Ответственный редактор Э. Реймерс. Корректоры В. Логинова, Л. Арива, К. Устaлу. Сдано в печать 15/04 1976. Бумага офсетная 30x45 1/4. Печ.листов 12,75. Учетно-изд. листов 11,17. Тираж 400. МВ 00775. Типография ТГУ, ЭССР, г. Тарту, ул. Пялсони, 14. Зак. № 870.
Цена 1 руб. 11 коп.

2 - 2