

75460
L. Ruumet - G. Rägo

MATEMAATIKA
TÄIENDUSÕPIK

*gümnaasiumi tead-
haru III ja IV klassile*

Osaku Eesti Kirjastus

L. RUUMET — G. RÄGO

MATEMAATIKA

TÄIENDUSÕPIK

GÜMNAASIUMI REAALHARU III JA IV KLASSILE

35183



TARTU EESTI KIRJASTUS



A-15468

2-56790

Matemaatika õpikud gümnaasiumile.

Peatoimetaja: O. Silde.

-
-
- A. Vihman, Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.
 - E. Etverk, Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.
 - A. Vihman, Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.
 - E. Etverk, Geomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
 - K. Maasik, Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.
 - K. Ratassepp, Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
 - K. Ratassepp, Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
 - E. Etverk, Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
 - G. Rägo, Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.
 - L. Ruumet—G. Rägo, Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru III ja IV klassile.
 - L. Ruumet—G. Rägo, Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalaru V klassile.
 - K. Ratassepp, Matemaatilised tabelid.

Sisukord.

§	1.	Juurvõrrand	5
§	2.	Nurga absoluutühik	12
λ	§	3. Eksponentvõrrand	18
λ	§	4. Logaritmivõrrand	22
×	§	5. Arvude ja logaritmid skaalad	25
×	§	6. Arvutamine logaritmilise arvutuslükatiga	32
+	§	7. Kahe nurga summa ja vahe siinus ja koosinus	54
×	§	8. Kahe nurga summa ja vahe tangens	63
×	§	9. Kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens. Poolnurga siinus ja koosinus	64
+	§	10. Siinuste ja koosinuste summa ja vahe korrutiseks teisendamise	69
×	§	11. Tangenslause	73
×	§	12. Poolnurgalause	78
×	§	13. Goniomeetrilised võrrandid	82
×	§	14. Sfääriline kolmnurk	91
×	§	15. Sfäärilise trigonomeetria siinuslause ja koosinuslause	94
×	§	16. Sfäärilise trigonomeetria siinuslause ja koosinuslause rakendusi	98

§ 1. Juurvõrrand.

Juurvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb juuremärgi all.

Juurvõrranditeks on näiteks järgmised võrrandid:

$$\sqrt{3x - 8} = 4 \qquad \sqrt{x + 12} - \sqrt{x + 3} = 1$$

$$x^2 - x\sqrt{x} - 8 = 0 \qquad \sqrt[3]{x^2 + 2} = \sqrt{x + 4}.$$

Me käsitleme üksikasjalisemalt ainult neid juurvõrrandeid, milles tundmatu esineb ruutjuure märgi all; need ruutjuurvõrrandid on lihtsaimad juurvõrrandid; nad esinevad sagedamini kui teised ja nende lahendamisel selguvad küllaldaselt ka muude juurvõrrandite lahendamise olulisemad küsimused.

Juurvõrrandi lahendamiseks sel teel, et kohaselt valitud astendamiste kaudu vabaneme juuremärkidest ja asendame seega juurvõrrandi hariliku 1., 2., või ka veelgi kõrgema astme võrrandiga. Võtte selgitamiseks toome järgmised näited:

Näide 1. Nõutagu lahendada juurvõrrand

$$\sqrt{31 - 5x} = 4.$$

Et võrdsete suuruste ruudud on võrdsed, siis

$$(\sqrt{31 - 5x})^2 = 4^2$$

ehk $31 - 5x = 16$

ehk $15 = 5x$

ehk $x = 3.$

Asetades leitud arvu kontrollimise otstarbel antud võrrandisse ja tähele pannes, et vasakul poolel seisev juur on positiivne, saame siin

$$\sqrt{31 - 5 \cdot 3} \quad \text{ehk} \quad \sqrt{31 - 15} \quad \text{ehk} \quad \sqrt{16} \quad \text{ehk} \quad 4,$$

seega sama arvu, mis seisab paremal poolel. Niisiis arv $x = 3$ rahuldab antud võrrandit.

N ä i d e 2. Nõutagu lahendada juurvõrrand

$$3\sqrt{x^2 + 15} - 2x = 10.$$

Kui siin tõstaksime võrrandi mõlemad pooled ruutu, siis saaksime vasakul poolel teiste liikmete hulgas ka kahekordse arvude $3\sqrt{x^2 + 15}$ ja $2x$ korrutise; seega jääks juuravaldis $\sqrt{x^2 + 15}$ ikkagi veel võrrandisse püsima ja eesmärk, saada sellest juurest vabaks, poleks saavutatud. Seepärast talitame teisiti: jättes võrrandi ühele poolele juuravaldise, kogume kõik muud liikmed teisele poolele; võrrand omab siis kuju:

$$3\sqrt{x^2 + 15} = 2x + 10.$$

Tõstes nüüd võrrandi kummagi poole ruutu, saame

$$9(x^2 + 15) = (2x + 10)^2$$

ehk, peale sulgude avamist, koondamist ja taandamist,

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendid on:

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = 7.$$

Nagu näitab nende arvude asetamine lähtevõrrandisse, rahuldab seda nii üks kui teine arv.

N ä i d e 3. Nõutagu lahendada juurvõrrand

$$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 5} = 1.$$

Kui siin tõstaksime võrrandi mõlemad pooled ruutu, siis saaksime vasakul poolel teiste liikmete hulgas kahekordse juurte korrutise. Et hoiduda niisuguseist keerulisist avaldisist, viime ühe juure, näiteks teise, paremale poolele; see annab:

$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+5}.$$

Tõstes nüüd võrrandi kummagi poole ruutu ja koondades, saame:

$$x - 3 = 2\sqrt{x+5}.$$

Tõstes uuesti kummagi poole ruutu ja uuesti koondades, jõuame juurtest vabale võrrandile

$$x^2 - 10x - 11 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendamine annab kaks vastust:

$$x_1 = 11 \quad \text{ja} \quad x_2 = -1.$$

Kontrollime leitud arvude kõlblikkust antud võrrandi lahenditena. Asetades esimese neist lähtevõrrandisse, saame vasakul poolel:

$\sqrt{2 \cdot 11 + 3} - \sqrt{11 + 5}$ ehk $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ ehk $5 - 4$ ehk 1 ;
see on sama arv, mis seisab paremal poolel. Niisiis arv $x = 11$ rahuldab antud võrrandit. Asetades teise arvu lähtevõrrandisse, saame vasakul poolel:

$$\sqrt{2 \cdot (-1) + 3} - \sqrt{-1 + 5} \quad \text{ehk} \quad \sqrt{1} - \sqrt{4}$$

$$\text{ehk} \quad 1 - 2 \quad \text{ehk} \quad -1;$$

et paremal poolel seisab $+1$, siis arv $x = -1$ antud võrrandit ei rahulda; ta on antud võrrandi väärilahend. Sellest näeme, et võrrandi

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+5} = 1$$

ja temast teisendamise teel saadud võrrandi

$$x^2 - 10x + 11 = 0$$

lahendid ei ühti; lähte- ja lõppvõrrand pole sama-
väär sed. Selle põhjus peitub asjaolus, et me võrrandi
teisendamisel kõrvuti lubatavate toimingutega
(sarnaste liikmete koondamine, liikme üleviimine võrrandi
ühelt poolelt teisele liikme märgimuuduga, võrrandi poolte
ühe ja sama arvuga korrutamine ja jagamine) kasuta-
sime ka veel astendamise tehet. Et astendamise teh-
tega võrrandi teisendamisel võib kaasneda väärilahendite
tekkimine, selles võime veenduda lihtsa näite abil. Võtame
lihtsaima võrrandi

$$x - a = 0,$$

mille ainsaks lahendiks on $x = a$. Viies võrrandi vaba
liikme paremale poolele, saame

$$x = a;$$

tõstes mõlemad pooled ruutu, näeme, et

$$x^2 = a^2$$

ehk

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Kirjutades viimase võrrandi kujul

$$(x + a)(x - a) = 0,$$

järeldame, et peab olema:

$$\text{kas } x - a = 0 \quad \text{või} \quad x + a = 0,$$

teiste sõnadega:

$$\text{kas } x = a \quad \text{või} \quad x = -a.$$

Neist kahest arvust rahuldab lähtevõrrandit vaid esimene;
teine rahuldab küll teisendatud võrrandit $x^2 - a^2 = 0$,
mitte aga lähtevõrrandit; ta on lähtevõrrandi suhtes
väär lahend. Õeldust järeldame, et juurvõrrandi tei-
sendamisel astendamise teel võib esile kerkida väärlahen-
deid. Seepärast

juurvõrrandi lahendamise tulemused tuleb igal juhul asetada
lähtevõrrandisse lahendi kõlblikkuse otsustamiseks.

N ä i d e 4. Nõutagu lahendada võrrand

$$\sqrt{\frac{2x+7}{3x+1}} - \sqrt{\frac{x}{3x+1}} - 1 = 0.$$

Vabaneme kõigepealt nimetajaist. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooli avaldisega $\sqrt{3x+1}$. See annab võrrandi

$$\sqrt{2x+7} - \sqrt{x} - \sqrt{3x+1} = 0.$$

Eraldades ühe siin esinevast kolmest juurest, näiteks viimase, üleviimise teel paremale poolele, saame:

$$\sqrt{2x+7} - \sqrt{x} = \sqrt{3x+1}$$

ehk, ruutu tõstes ja koondades,

$$\sqrt{(2x+7)x} = 3.$$

Saadust uuesti ruutu tõstes ja koondades tuleme ruutvõrrandi juurde

$$2x^2 + 7x - 9 = 0,$$

mille lahendamine annab

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = -4\frac{1}{2}.$$

Kontrollimine näitab, et esimene arv on lähtevõrrandi lahend, teine aga on väärilahend, sest selle asetamine lähtevõrrandi vasakusse polesse annab

$$\sqrt{\frac{4}{25}} - \sqrt{\frac{9}{25}} - 1 \quad \text{ehk} \quad \frac{2}{5} - \frac{3}{5} - 1 \quad \text{ehk} \quad -1\frac{1}{5},$$

mitte aga nulli.

Kokkuvõttes:

juurvõrrandi lahendamiseks vabaneme kõigepealt murdudest; siis eraldame ühe esinevaist juurtest, võttes tema ainsa liikmena võrrandi ühele poolele; vabaneme sellest juurest astendamise teel

ja teostame tulemusel võimalikud koondamised ja taandamised; vajaduse korral kordame võtet, kuni on saadud juurtest vaba võrrand; lahendame selle võrrandi ja asetame leitud arvud kontrolliks lähevõrrandisse.

Ülesanded.

1. Lahenda järgmised juurvõrrandid:

1. $\sqrt{3x} = 9$

2. $\sqrt{4x + 21} = 7$

3. $\sqrt{10x + 46} = \sqrt{7x + 37}$

4. $\sqrt{19x + 6} - \sqrt{36x - 11} = 0$

5. $\sqrt{x + 7} - \sqrt{2(x - 1)} = 0$

6. $3\sqrt{3x - 5} = 5\sqrt{x - 1}$

7. $\sqrt{4x - 3} = 0,6\sqrt{2x^2 + 7}$

8. $12 - \sqrt{x^2 + 10x} = 0$

9. $\sqrt{x + 12} = x$

10. $\sqrt{x^2 - 16} = \frac{3}{5}x$

2. Lahenda järgmised juurvõrrandid:

1. $\sqrt{5x + 10} + x = 8$ 6. $x + \sqrt{x(x - 48)} = 60$

2. $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$ 7. $3x - 2\sqrt{x^2 - 3x - 6} = 14$

3. $\sqrt{2x} - x + 4 = 0$ 8. $\sqrt{x^2 + 32} - 2 = x$

4. $\frac{1}{2}x + 4 = 3\sqrt{x}$ 9. $2a - \sqrt{x^2 - 8a} = 1$

5. $4x + 2\sqrt{5 - 4x} = 5$ 10. $a^2 - nx = n\sqrt{x^2 + a^2}$

3. Lahenda järgmised juurvõrrandid:

1. $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$
2. $\sqrt{x} - \sqrt{x-33} = 3$
3. $1 + \sqrt{2x} - \sqrt{x+7} = 0$
4. $\sqrt{x+7} = \sqrt{5} + \sqrt{x}$
5. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{6-x} = 4$
6. $1 = \sqrt{x} + \sqrt{3x-1}$
7. $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a+b}$
8. $\sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2+x} = a+b$

4. Lahenda järgmised juurvõrrandid:

1. $\sqrt{x} = \sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1}$
2. $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{7x+4}$
3. $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}$
4. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-8} = \sqrt{13x-3}$
5. $3\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+9} = 6\sqrt{x+1}$

5. Näita, et võrrandil

$$x - \sqrt{169 - x^2} = 17$$

pole lahendeid.

6. Allpool on antud 4 valemit. Määra igaühest neist suurus, mis on märgitud püstsulgudes.

1. $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$ [v]
2. $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ [s]
3. $v = \sqrt{2gh}$ [h]
4. $q = \frac{2}{3}b\sqrt{2gh^3}$ [h]

7. Arvuta

1. suurus J valemist $b = \sqrt[3]{\frac{12J}{a}}$, kui $a = 0,6$;
2. „ H „ $a = \sqrt[4]{\frac{16H}{5\sqrt{3}}}$, kui $a = 1,2$;
3. „ W „ $v = \sqrt[3]{\frac{4W}{\pi}}$, kui $v = 0,8$.

8. Lahenda võrrandid:

1.
$$\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
2.
$$\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}$$
3.
$$\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}$$
4.
$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 0$$
5.
$$\sqrt{5a+x} + \sqrt{5a-x} = \frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$$

§ 2. Nurga absoluutühik.

Nurga mõõtmine rajatakse babüloonlaste ajast saadik täisnurgale; selle üks üheksakümnendik võetakse nurkade mõõtmise ühikuks ja nimetatakse nurgakraadiks. Vajaduse korral jaotatakse nurgakraad 60 nurgaminutiks, nurgaminut omakord 60 nurgasekundiks. Nurkade mõõtmisel kraadides ja kraadi alajaotustes räägime nurkade mõõtmisest kraadmõõdus. Paljudes küsimustes on aga kohasem teine nurkade mõõtmise viis, mille selgitamisele kohe asume. Olgu antud

mingi nurk AOB ja olgu tema suurus kraadmõõdus α (joonis 1). Joonestame nurga haarade vahele ümber nurga tipu kui keskpunkti kaared vabalt võetud raadiustega r_1, r_2, r_3, \dots . Olgu saadud kaarte pikkused vastavalt s_1, s_2, s_3, \dots . Need kaared on võrdelised raadiustega ja seepärast on

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \dots$$

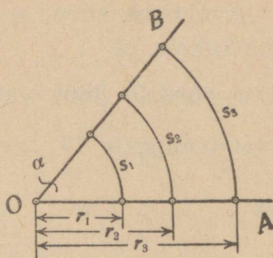
See tähendab, et nurgale AOB , kui kesknurgale, vastab küll kuitahes palju kaari s_1, s_2, s_3, \dots , kuid ikka ainult üks kaare ja raadiuse jagatis. Olgu r mingi raadius ja s selle raadiusega ümber nurga tipu kui keskpunkti joonestatud kaar nurga α haarade vahel. Siis

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \dots = \frac{s}{r}.$$

Tähistame selle muutumatu suhte tähega x , s. t. kirjutame

$$\frac{s}{r} = x.$$

Õeldu põhjal igale nurgale α vastab ainult üks arv x . Nurga α suurenedes või vähenedes 2, 3, 4, ... korda suureneb või väheneb ka kaar s ja seega ka suhe $\frac{s}{r}$ ehk arv x niisama palju kordi. Teiste sõnadega: igale nurgale α vastab oma arv x ja nurga α muutudes muutub tamaga võrdeliselt ka arv x . Ümberpöörduvalt: igale arvule x vastab oma nurk α ja arvu x muutudes muutub temaga võrdeliselt ka nurk α . Seega võime nurga suurust anda arvu x kaudu. Et kaare ja raadiuse suhe on nimeta ehk absoluutne arv, siis arvu x nimetatakse nurga absoluutmõõduks. Niisiis:



Joonis 1.

nurga absoluutmõõduks nimetatakse nurgale vastava kaare ja selle raadiuse suhet.

Avaldame arvud α ja x teineteise kaudu. Selleks paneme tähele, et

täispöördele 360° vastab ringjoone pikkus $2\pi r$,

seega nurgale 1° „ „ kaarepikkus $\frac{2\pi r}{360}$

ja „ „ α° „ „ „ „ $\frac{2\pi r \alpha}{360}$.

Niisiis nurgale α° vastab nurga absoluutmõõt

$$x = \frac{2\pi r \alpha}{360r}$$

ehk nurga α° absoluutmõõt

$$x = \frac{\pi \alpha}{180}.$$

Ümberpöördult, nurga absoluutmõõdule x vastab kraadmõõt

$$\alpha = \frac{180x}{\pi}.$$

Nurka, mille absoluutmõõt on 1, nimetatakse r a d i a a n i k s. Võttes nurga kraadmõõdu valemis x -i väärtuseks arvu 1, saame, et

$$\text{radiaan} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

ehk, teisiti,

$$\text{radiaan} \approx 57^\circ 18'.$$

Võttes nurga absoluutmõõdu valemis α väärtuseks 1, saame, et

$$1 \text{ kraad} = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani}$$

ehk, teisiti,

$$1 \text{ kraad} \approx 0,0175 \text{ radiaani.}$$

Nurgad

0° 30° 45° 60° 90°

avalduvad absoluutmõõdus kujul

0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$;

nurgad

120° 180° 270° 360°

vastavalt kujul

$\frac{2\pi}{3}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π .

Sageli on vaja leida trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi absoluutmõõdus antud nurga puhul. Et saaks tabeleid kasutada, avaldame kõigepealt nurga kraadmõõdus ja otsime selle järgi meile vajalikud suurused. Näiteks on

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 1 = \tan 57^\circ 18' = 1,5577$$

$$\cot 0,25 = \cot 14^\circ 20' = 3,9137.$$

Ülesanne 1. Olgu ringi raadius r . Anna valem kesknergale x vastava kaare pikkuse arvutamiseks.

Lahendus. Nurga absoluutmõõtu määravast võrdusest

$$x = \frac{s}{r}$$

järeldub, et

$$s = xr$$

ehk, sõnades,

kesknurgale vastav kaare pikkus võrdub nurga absoluutmõõdu ja raadiuse korrutisega.

Ülesanne 2. Olgu ringi raadius r . Anna valem kesknergale x vastava sektori pindala arvutamiseks.

L a h e n d u s. Tähistame kõnesoleva sektori pindala tähega S . Täispöördele vastab ringi täispindala, s. t., et

nurgale 2π vastab pindala πr^2 .

Et sektori pindala on võrdeline sektori nurga suurusega, siis

nurgale 1 vastab pindala $\frac{\pi r^2}{2\pi}$ ehk $\frac{1}{2} r^2$

ja järelikult

nurgale x vastab pindala $\frac{1}{2} r^2 x$.

Niisiis, tegurite järjekorda muutes,

$$S = \frac{1}{2} x r^2$$

ehk, sõnades,

sektori pindala võrdub tema kesknurga absoluutmõõdu ja raadiuse ruudu korrutise poolega.

Ülesanded.

9. Anna radiaani suurus kraadmõõdus peenelt ühe sekundini.

10. Avalda järgmised nurgad absoluutmõõdus:

$$22^{\circ}30' \quad 7^{\circ}30' \quad 14^{\circ}24' \quad 11^{\circ}15'$$

11. Avalda järgmised nurgad absoluutmõõdus:

$$36^{\circ}12' \quad 41^{\circ}36' \quad 138^{\circ}54'$$

12. Avalda kraadmõõdus järgmised absoluutmõõdus antud nurgad:

$$\frac{\pi}{12} \quad \frac{4\pi}{9} \quad \frac{11\pi}{20} \quad \frac{3\pi}{5} \quad \frac{11\pi}{12}$$

13. Avalda kraadmõõdus järgmised absoluutmõõdus antud nurgad:

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{6}{7} & \frac{9}{10} \\ 0,42 & 1,36 & 2,76 & 3,1415. \end{array}$$

14. Avalda kraadmõõdus nurgad, mille absoluutmõõt on

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \log 12 \quad \sin 65^\circ.$$

15. Kui suur täiendusnurk vastab nurgale

$$\frac{\pi}{24} \quad \frac{4\pi}{9} \quad \frac{5\pi}{12} \quad \frac{3\pi}{20} ?$$

16. Kui suur kõrvunurk vastab nurgale

$$\frac{2}{3} \pi \quad \frac{5}{6} \pi \quad \frac{4}{7} \pi \quad \frac{11}{12} \pi ?$$

17. Kolmnurga kaks nurka on 59° ja 69° . Kui suur on kolmnurga kolmas nurk radiaanides mõõtes?

18. Missugust kuju omavad valemid

$$\begin{array}{ll} \sin (90^\circ - a) = \cos a & \tan (90^\circ - a) = \cot a \\ \sin (180^\circ + a) = -\sin a & \cot (270^\circ - a) = \tan a, \end{array}$$

kui nurki mõõta absoluutmõõdus?

19. Kui pikk kaar raadiusega 1,245 vastab kesknurgale, mille absoluutmõõt on 6,28?

20. Kui suur on sektori pindala, kui ringi raadius on 0,9842 ja sektori kesknurk on 0,4235?

21. Kui suur on sektori kesknurk, kui tema raadius on 12 cm ja pindala on $56,52 \text{ cm}^2$?

§ 3. Eksponentvõrrand.

Eksponentvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb astendajas või juurijas.

Eksponentvõrrandid on näiteks järgmised võrrandid:

$$4^x = 256 \qquad 9 \cdot 3^{2x} + 10 \cdot 3^{-2x} = 91 \qquad \sqrt[x]{7} = 2.$$

Üldist eksponentvõrrandite lahendamise juhust pole võimalik anda. Mõnikord õnnestub niisugust võrrandit lahendada kirjutades teda kahe, sama alusega astme võrrandina; sageli laheneb võrrand hõlpsasti kummagi poole logaritmimise teel; mõnikord on tulus võtta otsitava astendajaga aste uueks tundmatuks, määrata eeskätt see ja siis juba selle järgi leida otsitav astendaja.

Tutvume nende võtetega näidete varal.

Näide 1. Olgu antud lahendada eksponentvõrrand

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+4} = \frac{64}{729}.$$

Pannes tähele, et $64 = 2^6$ ja $729 = 3^6$, võime võrrandi parema poole kirjutada kujul $\frac{2^6}{3^6}$ ehk $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ ehk $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$; seega

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}.$$

Astmed on võrdsed, alused on võrdsed, seega peavad olema võrdsed ka astendajad; järelikult

$$2x + 4 = -6;$$

siit saame, et

$$2x = -10$$

ja seega

$$x = -5.$$

N ä i d e 2. Olgu antud lahendada eksponentvõrrand

$$1,7^x = 3,767.$$

Et võrdsete suuruste logaritmid on võrdsed, siis

$$x \cdot \log 1,7 = \log 3,767$$

ehk

$$x = \frac{\log 3,767}{\log 1,7}$$

ehk, tabelite järgi,

$$x = \frac{0,5760}{0,2304}$$

ehk

$$x = 2,5.$$

N ä i d e 3. Olgu antud lahendada võrrand

$$2^x + 3 \cdot 2^{x-2} = 28.$$

Võtame vasakul poolel 2^x sulgude ette; siis saame

$$2^x (1 + 3 \cdot 2^{-2}) = 28$$

ehk

$$2^x \left(1 + \frac{3}{2^2}\right) = 28$$

ehk, taandades $\frac{7}{4}$ -ga,

$$2^x = 16.$$

Kirjutades selle võrrandi kujul

$$2^x = 2^4$$

saame lõpuks

$$x = 4.$$

N ä i d e 4. Olgu antud lahendada eksponentvõrrand

$$12^{1+x} + 12^{1-x} = 25.$$

Kirjutame selle võrrandi kujul

$$12 \cdot 12^x + 12 \cdot 12^{-x} = 25$$

ehk

$$12 \cdot 12^x + 12 \cdot \frac{1}{12^x} = 25.$$

Võtame astme 12^x uueks tundmatuks. Tähistades seda näiteks tähega u , saame viimase võrrandi kirjutada nii:

$$12 \cdot u + 12 \cdot \frac{1}{u} = 25$$

ehk, vabanedes nimetajast,

$$12u^2 - 25u + 12 = 0.$$

Lahendades selle ruutvõrrandi, saame kaks lahendit:

$$u_1 = \frac{4}{3} \qquad u_2 = \frac{3}{4}.$$

Tähistades neile lahendeile vastavad x -i väärtused tähtedega x_1 ja x_2 , leiame, et

$$12^{x_1} = \frac{4}{3} \qquad 12^{x_2} = \frac{3}{4}.$$

Et $\frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$, siis on $x_2 = -x_1$. Astendaja x_1 määrame logaritmime teel:

$$x_1 \cdot \log 12 = \log 4 - \log 3,$$

seega

$$x_1 = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 12}$$

ehk, võttes siin esinevad logaritmid tabelist ja tehes nõutavad tehted,

$$x_1 = 0,1158$$

ja järelikult

$$x_2 = -0,1158.$$

Ülesanded.

22. Lahenda järgmised võrrandid (logaritme kasutamata):

1. $5^x = 3125$
2. $2^x = 8192$
3. $7^{-x} = 1$
4. $32^x = 2$
5. $27^{\frac{1}{x}} = 3$
6. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{625}{16}$
7. $1,5^{0,4x} = \frac{16}{81}$
8. $12^{x-3} = \frac{1}{144}$
9. $0,3^{2x+5} = 0,027$
10. $0,6^{\frac{x}{2}} = 0,216$

23. Lahenda järgmised võrrandid (logaritme kasutamata):

1. $3^{\sqrt{x}} = 243$
2. $5^{x^2-3x} = 625$
3. $\sqrt[x]{a} = a^x$
4. $(a^{1-x})^x = a^x$
5. $(4^{3-x})^{2-x} = 1$
6. $(10^{5-x})^{6-x} = 100$

24. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2^x = 3^x$
2. $1,23^x = 4,259$
3. $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 4\sqrt{3}$
4. $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 5^{10}$
5. $(\sqrt[7]{14})^x = 26$
6. $\sqrt[x]{7} = 2,646$
7. $\sqrt[x]{1,371} = \sqrt[10]{10}$
8. $x^{\log x} = 4,885$

25. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2^x - 2^{x-2} = 3$
2. $10^x + 10^{x-1} = 0,11$
3. $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$
4. $9 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 5500$

26. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $40 \cdot 3^x - 3^{2x} = 351$

5. $9 \cdot 9^x - 10 \cdot 9^{-x} = 91$

2. $7 \cdot 2^{3x} - 2^{6x} = 10$

6. $5^{2x} - 7 \cdot 5^x - 450 = 0$

3. $2^x + 4^x = 272$

7. $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$

4. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$

8. $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257.$

§ 4. Logaritmivõrrand.

Logaritmivõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmi tähise all.

Logaritmivõrrandid on näiteks võrrandid:

$$\log(x+2) - \log x = 0,0792$$

$$(\log x)^2 + 2 \log x + 0,9094 = 0.$$

Üldist logaritmivõrrandite lahendamise juhust pole võimalik anda. Mõnikord õnnestub logaritmivõrrandit teisendada nii, et saab logaritmidevahelist seost asendada arvudevahelise seosega ja sellest siis juba määrata tundmatut.

Tutvume võttega näidete varal.

Näide 1. Nõutagu lahendada võrrand

$$\log(x+2) - \log x = 0,0792.$$

Paremal poolel seisev arv on, nagu näeme tabelist, $\log 1,2$, seega

$$\log(x+2) - \log x = \log 1,2$$

ehk

$$\log \frac{x+2}{x} = \log 1,2;$$

arvestades tõsiasja, et võrdsete logaritmidel puhul on võrdsed ka arvud, saame võrrandi

$$\frac{x+2}{x} = 1,2;$$

järelikult

$$x + 2 = 1,2x$$

ja seega

$$x = 10.$$

Asetades tulemuse kontrolliks lähtevõrrandisse, saame vasakul poolel

$\log(10 + 2) - \log 10$ ehk $\log 12 - 1$ ehk $1,0792 - 1$ ehk $0,0792$, nagu seisab paremal poolel.

N ä i d e 2. Olgu antud lahendada logaritmivõrrand

$$\log(x+2) + \log(x-5) = \log 6 + \log x.$$

Kirjutades sama võrrandi kujul

$$\log(x+2)(x-5) = \log 6x$$

järeldame, et

$$(x+2)(x-5) = 6x$$

ehk

$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

Rakendades ruutvõrrandi lahendamise valemit, leiame

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -1.$$

Asetades esimese lahendi lähtevõrrandisse, leiame vasakul poolel

$$\begin{aligned} \log(10+2) + \log(10-5) & \text{ ehk } \log 12 + \log 5 \\ & \text{ ehk } \log 5 \cdot 12 \quad \text{ ehk } \log 60 \end{aligned}$$

ja paremal poolel

$$\log 6 + \log 10 \quad \text{ ehk } \log 6 \cdot 10 \quad \text{ ehk } \text{samuti } \log 60.$$

Asetades teise lahendi lähtevõrrandisse, leiame vasakul poolel

$$\log(-1+2) + \log(-1-5) \quad \text{ehk} \quad \log 1 + \log(-6) \\ \text{ehk} \quad \log(-6).$$

Et negatiivsetel arvudel pole logaritme, siis arv $x_2 = -1$ ei saa olla antud võrrandi lahend.

Käsiteldud näidetest järeldub, et logaritmivõrrandi teisendamisel seoseks logaritmialuste arvude vahel võib õigeile lahendeile lisanduda v ä ä r l a h e n d e i d. Seetõttu tuleb iga leitud lahend kontrolliks asetada lähtevõrrandisse.

Ülesanded.

27. Lahenda järgmised logaritmivõrrandid:

1. $\frac{\log x}{1 - \log 2} = 2$
2. $\log(x + \sqrt{3}) = -\log(x - \sqrt{3})$
3. $5 \log x - \log 288 = 3 \log \frac{x}{2}$
4. $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 5,480$
5. $(\log x)^2 + \log x = 0,9094$

28. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $\frac{1}{2} \log(x - 9) + \log \sqrt{2x - 1} = 1$
2. $\log(x - 2)^3 + 3 \log(x - 5) = 3$
3. $\log(x - 3) + \log(x + 4) = 1 + \log 3$
4. $\log(x - 2) - 1 = \frac{1}{2} \log 13,75 - \log \sqrt{2x + 1}$
5. $\log(x - 5) - \log 0,5 = 1,623 - \log x$

§ 5. Arvude ja logaritmid skaalad.

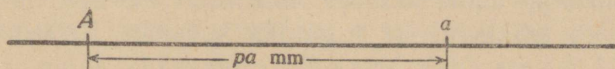
Regulaarne skaala.

Kujutame arvud

$\dots - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, \dots$

lõikudena sirgel. Selleks võtame mõne sirge kujutamisel teljeks; valime ühe tema punkti, näiteks punkti A , alguseks; märgime noolega telje positiivse suuna ja valime kujutamiseühiku, näiteks p mm. Siis arv a kujutub lõiguna, mille suund on määratud arvu a märgiga, ja mille pikkus on pa mm. Kanname arvudele $\dots - 3, - 2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots$ vastavad lõigud teljele ja kirjutame nende lõikude lõppkriipsude juurde arvud, mida lõigud kujutavad. Samal viisil, nagu kujutasime täisarve, mõtleme kujutatuna ka murdarve (kümnendikud, sajandikud jne.). Telge ühes temal märgitud kriipsudega nimetatakse regulaarseks skaalaks. Regulaarse skaala jaotised on võrdsed: kriipsud skaalal järgnevad teineteisele võrdsete vahede järel. Regulaarseks skaalaks on, näiteks, meetripuul märgitud skaala, termomeetri skaala ja vedrukaalu skaala.

Olgu meie ees regulaarne skaala (joonis 2), millel

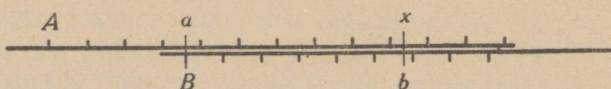


Joonis 2.

kujutamiseühikuks on p mm. Võtame skaalal mingi kriipsu; olgu see märgitud arvuga a . Siis skaala konstruktsiooniviisi põhjal kriipsu kaugus alguspunktist

$$Aa = pa \text{ mm.}$$

Arvuskaalad võimaldavad arvutamist mehhaniseerida. Olgu, näiteks, kaks ühesugust regulaarset skaalat seatud teineteise vastu nii (joonis 3), et ülemise skaala kriipsu a vastas seisab alumisel skaalal algkriips B .



Joonis 3.

Küsime, missugune kriips seisab ülemisel skaalal alumise skaala kriipsu b vastas? Märkides otsitava kriipsu tähega x , näeme, et

$$Ax = Aa + ax$$

ehk

$$Ax = Aa + Bb$$

ehk

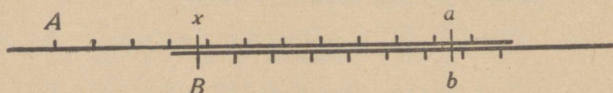
$$px = pa + pb$$

ehk

$$x = a + b.$$

See tähendab, et seades ülemise skaala kriipsu a vastu kriipsu B alumisel, leiame selle skaala kriipsu b vastas ülemisel skaalal arvude a ja b summa.

Lükkame nüüd alumise skaala nii kaugele vasakule poole, et skaala kriips b satuks kohakuti kriipsuga a .



Joonis 4.

Küsime, missugune kriips seisab ülemisel skaalal alumise skaala algkriipsu B vastas? Märkides otsitava kriipsu tähega x , näeme (joonis 4), et

$$Ax = Aa - xa$$

ehk

$$Ax = Aa - Bb$$

ehk

$$px = pa - pb$$

ehk

$$x = a - b.$$

See tähendab, et seades ülemise skaala kriipsu a vastu alumise skaala kriipsu b , leiame selle skaala alguspunkti B vastas ülemisel skaalal arvude a ja b vahe.

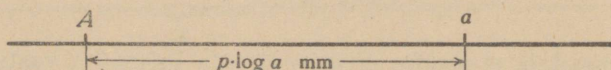
Logaritmiline skaala.

Võtame logaritmid tabelist esimese 10 täisarvu logaritmid kolme kohaga:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log a$	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000

ja kujutame need logaritmid graafiliselt lõikudena. Selleks valime mingi sirge kujutamisteljeks (joonis 5), mingi punkti sel teljel, näiteks punkti A , alguseks, märgime noolega telje positiivse suuna ja valime kujutamisühiku, näiteks p mm. Siis $\log a$ kujutub lõiguna, mille pikkus on $p \cdot \log a$ mm. Kanname $\log 1, \log 2, \log 3, \dots$ kujutuslõigud teljele ja märgime iga säärase lõigu lõpukriipsu juurde arvu, mille logaritmi lõik kujutab. Õeldu järgi lähtekriipsu juurde tuleb kirjutada arv 1, sest $\log 1 = 0$. Samal viisil, nagu kujutasime täisarvude 1, 2, 3, ... 10 logaritme, kujutame ka arvude 1,1; 1,2; 1,3 ... 2,1; 2,2, ... logaritme ja mõtleme kujutatuna ka kõigi muude arvude logaritme.

Telge ühes temal märgitud kriipsudega nimetatakse logaritmiliseks skaalaks. Skaala osa, mis vastab vahemikule 1-st 10-ni, nimetame skaala põhilõiguks. Nagu näeme, logaritmiline skaala pole regulaarne: jaotised ei järgne siin teineteisele võrdsete vahemikkude järel.



Joonis 5.

Olgu meie ees logaritmiline skaala (joonis 5), mille kujutamiseühik on p mm. Võtame skaalal mingi kriipsu; olgu see märgitud arvuga a . Siis skaala konstruktsiooni viisi põhjal kriipsu a kaugus alguspunktist A ehk lõik

$$Aa = p \cdot \log a \text{ mm.}$$

Logaritmilise skaala põhiomadus.

Vaatleme kõrvu arvuvahemikuga

$$1, 2, 3, \dots a \dots 8, 9, 10$$

ka arvuvahemikku

$$10, 20, 30, \dots a \cdot 10 \dots 80, 90, 100.$$

Me teame, et

$$\log a \cdot 10 = \log a + \log 10$$

ehk, vahetades liidetavate järjekorda ja asendades $\log 10$ arvuga 1,

$$\log a \cdot 10 = 1 + \log a,$$

ja seega

$$p \cdot \log a \cdot 10 = p + p \cdot \log a.$$

Siit järeldub, et logaritmilise skaala kriipsud 10, 20, 30, ... 80, 90, 100 saadakse, nihutades kriipsud 1, 2, 3, ... 8, 9, 10 kujutamiseühiku võrra paremale poole.

Vaatleme edasi kõrvu arvuvahemikuga

$$1, 2, 3, \dots a, \dots 8, 9, 10$$

ka arvuvahemikku

$$0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ \dots \ \frac{a}{10}, \dots 0,8 \ 0,9 \ 1,0.$$

Me teame, et

$$\log \frac{a}{10} = \log a - \log 10$$

ehk, vahetades paremal poolel liikmete järjekorda,

$$\log \frac{a}{10} = -\log 10 + \log a$$

ehk teisiti,

$$\log \frac{a}{10} = -1 + \log a$$

ja seega

$$p \cdot \log \frac{a}{10} = -p + p \cdot \log a.$$

Siit järeldub, et logaritmilise skaala kriipsud

0,1, 0,2, 0,3 ... 0,8, 0,9, 1,0 saadakse nihutades kriipsud 1, 2, 3, ... 8, 9, 10 kujutamiseühiku võrra vasemale poole.

Üldiselt: vaatleme kõrvu arvuvahemikuga

$$1, 2, 3, \dots a, \dots 8, 9, 10$$

arvuvahemikku

$$1 \cdot 10^n, 2 \cdot 10^n, 3 \cdot 10^n, \dots a \cdot 10^n, \dots 8 \cdot 10^n, 9 \cdot 10^n, 10 \cdot 10^n.$$

Me teame, et

$$\log a \cdot 10^n = \log a + n \cdot \log 10$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$\log a \cdot 10^n = n + \log a$$

ja seega

$$p \cdot \log a \cdot 10^n = p \cdot n + p \log a.$$

Siit järeldub, et vahemikule

$$1 \cdot 10^n, 2 \cdot 10^n, \dots 9 \cdot 10^n, 10 \cdot 10^n$$

vastav logaritmilise skaala osa saadakse, lükates skaala osa 1, 2, ... 9, 10 edasi n kujutamisühiku võrra paremale või vasemale poole vastavalt sellele, kas n on positiivne või negatiivne arv.

Õeldust näeme, et logaritmilise skaala osa, mis vastab vahemikule 1, 2, 3, ... 9, 10, kordub muutumatult arvu-
vahemikkude puhul

$$10, 20, 30, \dots 90, 100$$

$$100, 200, 300, \dots 900, 1000$$

jne. ning samuti arvuvahemikkude puhul

$$0,1, 0,2, 0,3, \dots 0,9, 1,0$$

$$0,01, 0,02, 0,03, \dots 0,09, 0,1$$

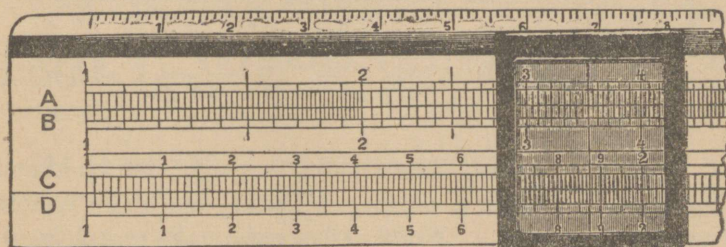
jne. See tähendab, et logaritmiline skaala saadakse, märkides teljel skaala põhilõigu, edasi veel kord sama põhilõigu, veel kord sama põhilõigu jne. lõpmata positiivses suunas ning samuti ka negatiivses suunas. Logaritmilise skaalaga töötamiseks piisab seepärast, kui valmistada endale vaid skaala põhilõik. Vastavalt vajadusele kujutab ta siis kord vahemikku 1 kuni 10, teine kord vahemikku 10 kuni 100, kolmas kord vahemikku 0,01 kuni 0,1 jne.

Logaritmiline skaala ei anna nii piltlikku kujutlust arvu ja logaritmi vahelisest seosest, kui seda annab logaritmikõver. Selle skaala suureks paremuseks logaritmikõveraga võrreldes on aga see, et ta võimaldab arvutamist logaritmidega teostada mehhaanilisel teel. Arvutamise mehhaniseerimine saavutatakse logaritmiliste

ja logaritmiliste ning regulaarsete skaalade otstarbekohase teineteise vastu seadmisega. Seda võimaldav vahend kannab logaritmilise arvutuslükati nime.

Arvutuslükati kirjeldus.

Arvutuslükatil (joonis 6) on kolm osa: varras, lükati ja märkija. Varras moodustab arvutuslükati põhiosa; selles tehtud väljalõikesse mahub lükati, mida väljalõikes saab kergesti edasi-tagasi nihutada. Märkija on väike klaasplaat, mida võib sellekohase raami abil piki var-



Joonis 6.

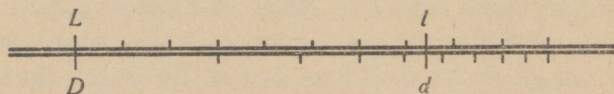
rast edasi-tagasi liigutada. Märkija kannab keskel vertikaalset kriipsu. Selle kriipsu abil leiame, missugused arvud seisavad teineteise vastas kahel teineteise vastu seatud skaalal. Varras kannab kahte logaritmilist skaalat A ja D, kusjuures D-skaala kujutamisühik on 2 korda pikem A-skaala kujutamisühikust. Kummagi skaala algkriips kannab märki 1. Vahetegemiseks algkriipsude vahel üksikutel skaaladel nimetame neid algkriipse sama tähega, millega märgime skaalatki. Skaala A haarab arvuvahemikku 1 kuni 100, skaala D — arvuvahemikku 1 kuni 10. Varda kaldu lõigatud esikülg ja püsti lõigatud tagakülg kannavad mm-jaotust, mis võimaldab varrast tarbe korral kasutada ka mõõdupuuna.

Lükati ülempool kannab kahte skaalat B ja C , kusjuures B on ühtiv skaalaga A ja C on ühtiv skaalaga D . Keerates lükati ümber, leiame tema tagumisel küljel kolm skaalat: regulaarse skaala L , sama kujutamisühikuga nagu skaalal D ; skaala S , millel on kujutatud $\log \sin \alpha$, sama kujutamisühikuga nagu skaalal A , ja lõpuks skaala T , millel on kujutatud $\log \tan \alpha$, sama kujutamisühikuga nagu skaalal D .

§ 6. Arvutamine logaritmilise arvutuslükatiga.

1. Arvu logaritmi leidmine ja arvu leidmine logaritmi järgi.

Tõmbame vardast lükati välja ja paigutame ta tagasi alumise küljega üles. Võtame vaatlusele skaala D vardal ja skaala L lükatil. Olgu kummagi puhul kujutamisühikuks p mm. Seame skaalad kohakuti nii, et nende alguspunktid ühtivad (joonis 7). Võtame alumisel skaalal



Joonis 7.

mingi kriipsu; kandku see märki d ; seisku selle vastas ülemisel skaalal kriips märgiga l . Siis skaalade konstruktsiooniviisi kohaselt logaritmilisel skaalal

$$Dd = p \cdot \log d \text{ mm}$$

ja regulaarsel

$$Ll = p \cdot l \text{ mm.}$$

Et

$$Dd = Ll,$$

siis

$$p \cdot \log d = p \cdot l$$

ehk

$$\log d = l.$$

See tähendab, et kui alumisel skaalal võtame kriipsu, mis märgitud arvuga d , siis ülemisel skaalal selle vastas seisab kriips, mille märgiks on $\log d$. Lühemalt: alumise skaala arvu d vastas seisab ülemisel skaalal arvu d logaritmi.

Nagu tabelitegagi töötamisel, nii saame ka siin ära lugeda üksnes logaritmi murdosas; logaritmi täisosa määratakse sama reegli järgi, mida kasutame tabelitega töötamisel.

Näited.

Antud arvud:	4,8	23,9	147	0,00538
Leitud logaritmid:	0,681	1,378	2,167	$\bar{3},730$.

Seost

$$\log d = l$$

võime tõlgendada aga ka nõnda, et ülemisel skaalal võetud logaritmi vastas seisab alumisel skaalal logaritmile vastav arv.

Näited:

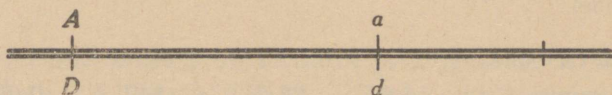
Antud logaritmid:	0,258	1,396	3,582	$\bar{2},794$
Leitud arvud:	1,81	24,9	3820	0,0623.

Nagu tabelitegagi töötamisel, nii saame ka siin ainult arvu numbrid; koma asendi (või vajaduse korral juurdekirjutamisele tulevate nullide arvu) määrame logaritmi täisosa järgi.

Logaritmilistel arvutuslükatitel, mille kujutamisühik on 250 mm, on võimalik nii arve kui ka nende logaritme ära lugeda kolmekohaliselt. Ülalkirjeldatud kahe skaala vastuseade asendab seega täielikult kolmekohaliste logaritmide tabelit.

2. Arvuruudu ja arvuruutjuureleidmine.

Tõmbame vardast lükati välja ja paneme selle ajutielt kõrvale. Võtame vaatlusele vardal märgitud skaalad A ja D . Olgu skaala D kujutamisühikuks p mm; siis on skaala A kujutamisühikuks $\frac{p}{2}$ mm. Seame skaalad A ja D teineteise vastu nii, et nende alguskriipsud oleksid kohakuti (joonis 8).



Joonis 8.

Võtame alumisel skaalal mingi kriipsu; märkigu seda arv d . Seisku selle vastas ülemisel skaalal kriipsu märgiga a . Siis skaalade konstruktsiooniviisi järgi

$$Dd = p \cdot \log d \text{ mm}$$

ja

$$Aa = \frac{p}{2} \cdot \log a \text{ mm.}$$

Et

$$Dd = Aa,$$

siis

$$p \cdot \log d = \frac{p}{2} \log a$$

ehk

$$\log d = \frac{1}{2} \log a$$

ehk

$$2 \log d = \log a$$

ehk

$$\log d^2 = \log a$$

ehk

$$d^2 = a.$$

See tähendab, et alumise skaala arvu d vastas seisab ülemisel skaalal selle arvu ruut.

Töötamisel skaaladel võtame sealt ainult arvu numbrid; koma koha arvu kirjutises määrame, leides peast vastuse ümmarguse väärtuse.

Näited.

Antud arvud:	1,58	2,96	5,24	8,75
Leitud ruudud:	2,50	8,75	27,4	76,8.

Kirjeldatud viisil saame vahemikust 1 kuni 10 pärinevate arvude ruudud. Väljaspool seda vahemikku asetsevad arvud kirjutame nn. standardkirjutusviisil; nimelt kujutame nad korrutistena nii, et esimene tegur mahuks vahemikku 1 kuni 10, teine aga oleks 10-ne aste.

Nii on

$$3470 = 3,47 \cdot 10^3 \quad 0,0782 = 7,82 \cdot 10^{-2}.$$

Kui näiteks

$$d = 0,000593,$$

siis kirjutame

$$d = 5,93 \cdot 10^{-4}$$

ja saame

$$d^2 = 5,93^2 \cdot 10^{-8} = 35,1 \cdot 10^{-8} = 0,000000351.$$

Seost

$$d^2 = a$$

võime tõlgendada aga ka nõnda, et

$$d = \sqrt{a}.$$

See tähendab, et ülemisel skaalal võetud arvu vastas seisab alumisel skaalal arvu ruutjuur.

Näited.

Antud arvud:	2,80	11,8	40,0	96,5
Leitud ruutjuured:	1,67	3,44	6,35	9,81.

Nii saame leida kõigi vahemikust 1 kuni 100 pärinevate arvude ruutjuured. Väljaspool seda vahemikku asetsevad arvud kirjutame standardkirjutusviisil nii, et esimene tegur mahuks vahemikku 1 kuni 100, teine aga oleks 10 aste paarisarvulise astendajaga. Nii saame näiteks, et

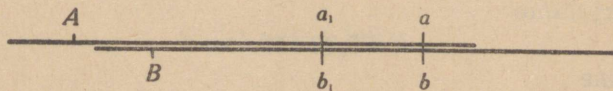
$$\sqrt{5930} = \sqrt{59,30 \cdot 10^2} = \sqrt{59,30} \cdot \sqrt{10^2} = 7,7 \cdot 10 = 77$$

ja

$$\begin{aligned} \sqrt{0,000834} &= \sqrt{8,34 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{8,34} \cdot \sqrt{10^{-4}} = \\ &= 2,84 \cdot 10^{-2} = 0,0284. \end{aligned}$$

3. Võrdeliste suuruste käsitlemine.

Vaatleme koos vardal märgitud skaalaga A lükatil märgitud skaalat B . Olgu mõlema skaala ühine kujutamiseühik $\frac{p}{2}$ mm. Seame need skaalad kuidagiviisi teineteise



Joonis 9.

vastu; seisku näiteks ülemise skaala arvu a vastas alumisel skaalal arv b (joonis 9) ja arvu a_1 vastas arv b_1 .

Me näeme jooniselt, et lõigud a_1a ja b_1b on võrdsed:

$$a_1a = b_1b,$$

seega

$$Aa - Aa_1 = Bb - Bb_1.$$

Tuletades meelde, et $Aa = \frac{p}{2} \cdot \log a$ mm, $Aa_1 = \frac{p}{2} \cdot \log a_1$ mm, $Bb = \frac{p}{2} \cdot \log b$ mm ja $Bb_1 = \frac{p}{2} \cdot \log b_1$ mm, saame

$$\frac{p}{2} \log a - \frac{p}{2} \log a_1 = \frac{p}{2} \log b - \frac{p}{2} \log b_1,$$

ehk

$$\log a - \log a_1 = \log b - \log b_1$$

•
ehk

$$\log \frac{a}{a_1} = \log \frac{b}{b_1}$$

ehk

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

ehk

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Arvud a ja b , a_1 ja b_1 olid v a b a l t võetud kaks paari teineteise vastas seisvaid arve. Kui a_2 ja b_2 oleks kolmas paar teineteise vastas seisvaid arve, saaksime

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

seega üldiselt

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

Me võime järelikult öelda, et kahe ühtiva logaritmilise skaala kõrvuseadel kohakuti seisvad arvud on võrdelised. Sama tõsiasja võime tõlgendada ka teisiti ja nimelt: kui vaatleme skaalade A ja B vahelist pilu kui murrujoont, siis võrduste rida

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

ütleb, et kahe logaritmilise skaala teineteise vastu seadmisel kõik skaaladevahelise pilu kui murrujoone poolt tekitatud murrud on võrdsed.

Rakendame praegusõnastatud tõsiasja mõõtude teisendamiseks.

Näide 1. Me teame, et

$$5^{\circ} \text{C} = 4^{\circ} \text{R}.$$

Seades ülemisel skaalal võetud arvu 5 vastu alumise skaala arvu 4, saame nüüd igale ülemisel skaalal võetud Celsiuse temperatuurile alumisel skaalal ära lugeda vastava Reaumur'i temperatuuri. Nii saame näiteks järgmise tabeli kokkukuuluvaid väärtusi:

C	−7,8	−5,2	+3,9	+11,2
R	−6,2	−4,2	+3,1	+9,0

Näide 2.

On teada, et kiirus $18 \frac{\text{km}}{\text{t}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$. Seame ülemisel skaalal võetud arvu 18 vastu alumisel skaalal arvu 5, siis saame igale ülemisel skaalal võetud kiirusele mõõdus $\frac{\text{km}}{\text{t}}$ alumisel skaalal seisva võrdse kiiruse mõõdus $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$. Nii

saame näiteks järgmise tabeli kokkukuuluvaid kiiruste väärtusi:

$\frac{\text{km}}{\text{t}}$	6	10	24	38	56
$\frac{\text{m}}{\text{sek}}$	1,66	2,76	6,63	12,9	15,6.

Omadust, et kahe ühtiva logaritmilise skaala kõrvuseadel kohakuti seisvad arvud on võrdelised, võime ära kasutada küsimuse otsustamiseks, kas kokkukuuluvate väärtuste tabeliga antud suurused on võrdelised või mitte. Olgu näiteks antud tabel:

u	3,2	7,8	13,5	24,8	39,6	42,1
v	5,0	12,2	21,0	38,8	62,0	65,7

Seades ülemise skaala arvu 3,2 vastu alumise skaala arvu 5,0, näeme, et on ligikaudu kohakuti arvud 7,8 ja 12,2, arvud 13,5 ja 21,0 jne. Seega suurused u ja v on võrdeslied.

4. Võrrete lahendamine.

Olgu kaks ühtivat logaritmilist skaalat seatud teineteise vastu ja olgu a ja b ning m ja n kaks paari teineteise vastas seisvaid arve. Nagu eespool nägime, kehtib siis võrre:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

Kui 3 selles võrdes esinevast arvust on teada, saame 4. määrata. Olgu näiteks lahendada võrre

$$\frac{2,3}{3,5} = \frac{x}{7,8}.$$

Seame ülemise skaala arvu 2,3 alumise skaala arvu 3,5 vastu; otsime alumisel skaalal arvu 7,8; tema vastas seisab ülemisel skaalal arv x ; meie näite puhul on selleks arvuks 5,2.

Tarbe korral tuleb võrret enne tema lahendamist teisendada.

N ä i d e. Olgu lahendada võrre:

$$\frac{17,6}{0,0384} = \frac{x}{5,26}.$$

Korrutades kummagi poole nimetajad 1000-ga, saame:

$$\frac{17,6}{38,4} = \frac{x}{1000 \cdot 5,26}$$

ehk

$$\frac{17,6}{38,4} = \frac{0,001x}{5,26}.$$

Asetades arvud 17,6 ja 38,4 kohakuti, leiame arvu 5,26 vastas 2,41, seega

$$0,001x = 2,41$$

ja

$$x = 2410.$$

Käsiteldud võrrete lahendamisevõtet võime tulusalt ära kasutada ülesande lahendamiseks: mitu % moodustab arv a arvust b ? Olgu otsitav protsentide arv x . Siis

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}.$$

Et arvu x leida, seame skaalad A ja B teineteise vastu nii, et ülemise skaala arv a seisaks kohakuti alumise skaala avuga b ; alumise skaala arvu 100 vastas seisab siis ülemisel otsitav arv x .

Näiteks on

$$\frac{31}{73} = 42,5\%, \quad \frac{27}{168} = 16\%.$$

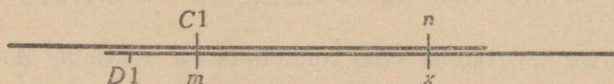
Võrdeliste suuruste käsitlemisel ja võrrete lahendamisel võib kasutada skaalade A ja B asemel skaalaid C ja D . Kaks korda suurema kujutamishüki tõttu on arvude lugemine neil skaaladel kergem kui skaaladel A ja B .

5. Arvude korrutamine.

Nõutagu arvutada korrutis $x = m \cdot n$. Kirjutame kolme arvu m , n ja x vahelise seose võrde kujul:

$$\frac{1}{m} = \frac{n}{x}.$$

Selle võrde lahendamine x -i suhtes toimub ülalsetatud viisil: seame ülemise skaala arvu 1 vastu alumise skaala arvu m ; siis seisab ülemise skaala arvu n vastas alumisel skaalal otsitav korrutis x (joonis 10).



Joonis 10.

Ülaltoodud korrutamisevõtet saame põhjendada ka otseselt: Olgu skaalad C ja D seatud teineteise vastu, nagu ülal öeldud. Siis (joonis 10)

$$Dx = Dm + mx$$

ehk

$$Dx = Dm + Cn;$$

järelikult

$$p \cdot \log x \text{ mm} = p \cdot \log m \text{ mm} + p \cdot \log n \text{ mm}$$

ehk

$$\log x = \log m + \log n$$

ehk

$$\log x = \log m \cdot n,$$

seega

$$x = m \cdot n.$$

Korrutamisel vajalik tegurite logaritmid liitmine teostatakse siin mehhaaniliselt kahe logaritmilise skaala kohase teineteise vastu seadmisega.

Näited.

$$7,58 \cdot 1,24 = 9,40$$

$$1,86 \cdot 1,94 = 3,60.$$

Kui tegurid m ja n ei kuulu vahemikku 1 kuni 10, siis kasutame korrutise teisendamise võtet.

Näide.

$$\begin{aligned} 574 \cdot 0,000196 &= 5,74 \cdot 10^2 \cdot 1,96 \cdot 10^{-4} = \\ &= 5,74 \cdot 1,96 \cdot 10^{-2} = 11,21 \cdot 10^{-2} = 0,1121. \end{aligned}$$

Korrutise arvutamist võib toimetada ka skaaladel A ja B .

6. Arvude jagamine.

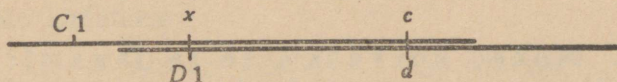
Nõutagu arvutada jagatis $x = \frac{c}{d}$. Kirjutame kolme arvu c , d ja x vahelise seose kujul

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{1}.$$

Selle võrde lahendamine x -i suhtes võib toimuda eespoolseletatud viisil: seame ülemise skaala arvu c vastu alumise skaala arvu d ; siis seisab alumise skaala arvu 1 vastas üle-

misel skaalal arv x . Jagamiseks kasutame kas skaalasid C ja D või skaalasid A ja B .

Ülaltoodud jagamisvõtet saame põhjendada ka otse-
selt: Olgu skaalad C ja D seatud teineteise vastu, nagu
ülal öeldud. Siis (joonis 11).



Joonis 11.

$$Cx = Cc - xc$$

ehk

$$Cx = Cc - Dd$$

ehk

$$p \cdot \log x = p \cdot \log c - p \cdot \log d$$

ehk

$$\log x = \log c - \log d$$

ehk

$$\log x = \log \frac{c}{d}$$

ehk

$$x = \frac{c}{d}.$$

Jagamisel vajalik jagatava ja jagaja logaritmide
lahutamine teostatakse siin mehhaaniliselt kahe logaritmi-
lise skaala kohase teineteise vastu seadmisega.

Näited.

$$\frac{9,8}{6,7} = 1,46$$

$$\frac{5,75}{7,35} = 0,781.$$

Kui üks või mõlemad arvudest c ja d ei kuulu vahe-
mikku 1 kuni 10, siis kasutame jagatise teisendamise võtet.

Näide.

$$\begin{aligned}\frac{0,0712}{34,8} &= \frac{7,12 \cdot 10^{-2}}{3,48 \cdot 10^1} = \frac{7,12}{3,48} \cdot 10^{-3} = \\ &= 2,05 \cdot 10^{-3} = 0,00205.\end{aligned}$$

7. Mõned korrutamise ja jagamise erijuhud.

1. Olgu arvutada murd

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Märgime korrutise $\frac{a}{b} \cdot m$ tähega u ; siis

$$x = \frac{u}{n} \cdot \frac{p}{q};$$

märgime edasi korrutise $\frac{u}{n} \cdot p$ tähega v ; siis

$$x = \frac{v}{q}.$$

Otsitav x arvutatakse järgmiselt: esiteks määrame abiarvu u ; ilma et seda arvu skaalalt loeksime, määrame edasi abiarvu v ja edasi, ilma et seda arvu skaalalt loeksime, otsitava arvu x .

Näide. Olgu arvutada murd

$$x = \frac{7 \cdot 9 \cdot 13}{8 \cdot 17 \cdot 5}.$$

Saame: $\frac{7 \cdot 9}{8} = 7,9$, mida me ära ei loe, aga kohe korrutame

murruga $\frac{13}{17}$; saame 6,03, mida me ära ei loe, vaid kohe

jagame 5-ga; saame 1,20.

Kui arvud langevad väljapoole vahemikku 1 kuni 10, kasutame murru teisendamist.

Näide. Olgu arvutada murd

$$x = \frac{316 \cdot 0,0913 \cdot 0,285}{0,45 \cdot 1,49 \cdot 0,3765}.$$

Me kirjutame

$$x = \frac{3,16 \cdot 10^2 \cdot 9,13 \cdot 10^{-2} \cdot 2,85 \cdot 10^{-1}}{4,5 \cdot 10^{-1} \cdot 1,49 \cdot 10^2 \cdot 3,765 \cdot 10^{-1}} = \frac{3,16 \cdot 9,13 \cdot 2,85}{4,5 \cdot 1,49 \cdot 3,77} \cdot 10^{-1}.$$

Koma asukoha määramiseks leiame viimatikirjutatud murru ligikaudse väärtuse, toimetades vajalikud tehted peast:

$$\frac{3 \cdot 9 \cdot 3}{5 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{81}{20} \approx 4.$$

Seda arvestades saame arvutuslükati abil, et

$$x = 3,26 \cdot 10^{-1} = 0,326.$$

2. Olgu arvutada korrutis $x = m^2 \cdot n$.

Võtame skaalal D arvu m ; selle vastas on skaalal A arv m^2 ; ilma seda ära lugemata lükkame skaala B arvu n arvu 1 alla skaalal A ja loeme B skaalal arvu m^2 vastas nõutava x -i.

Näide. Olgu $x = \pi \cdot 4,72^2$.

$$\text{Saame } x = 70,0.$$

3. Olgu arvutada jagatis $x = \frac{m^2}{n}$.

Võtame skaalal D arvu m , leiame selle vastas skaalal A arvu m^2 ; ilma seda ära lugemata seame tema vastu

skaala B arvu n ja leiame skaala B märgi 1 vastas skaalal A otsitava arvu x .

Näide. Olgu $x = \frac{0,48^2}{0,92}$.

Saame

$$x = \frac{4,8^2 \cdot 10^{-2}}{9,2 \cdot 10^{-1}} = \frac{4,8^2}{9,2} \cdot 10^{-1} = 2,5 \cdot 10^{-1} = 0,25.$$

4. Olgu arvutada juur $x = \sqrt{m \cdot n}$.

Leiame skaalal A korrutise $m \cdot n$ ja loeme selle vastas skaalal D nõutava juure.

Näide. $x = \sqrt{3,4 \cdot 14,8} = 7,09$.

5. Olgu arvutada juur $x = \sqrt{\frac{m}{n}}$.

Leiame skaalal A jagatise $\frac{m}{n}$ ja selle vastas skaalal D nõutava juure.

Näide. $x = \sqrt{\frac{8,72}{3,14}} = 1,64$.

6. Olgu arvutada korrutis $x = m\sqrt{n}$.

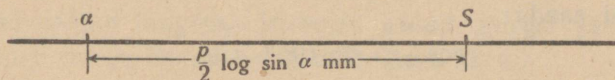
Leiame skaalal A arvu n , selle vastas skaalal D arvu \sqrt{n} ja korrutame selle skaala C abil arvuga m .

Näide. $x = 9,81\sqrt{53,8} = 74,8$.

8. Logsin α skaala ja selle kasutamine.

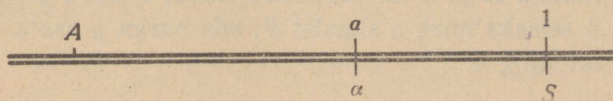
Olgu α mingi nurk 0° ja 90° vahel; leiame tabelist selle nurga siinuse logaritmi ja kujutame selle logaritmi kujutamishiku $\frac{p}{2}$ abil lõiguna sirgel, lähtudes punktist S (joonis 12).

Et võetud nurgavahemikus $\sin \alpha$ on suurem kui 0 ja väiksem kui 1, siis tema logaritm on negatiivne ja tuleb kujutamisele punktist S vasemal pool. Saadud lõigu lõpukriipsu märgime tähega a . Võttes nurga α väärtused küllalt tihedalt ja toimetades iga võetud väärtuse puhul eespool-seletatud viisil, saame $\log \sin \alpha$ skaala.



Joonis 12.

$\sin \alpha$ suurim väärtus vastab 90° -sele nurgale ja on 1; selle siinuse väärtuse logaritm on null; järelikult $\log \sin \alpha$ skaala algkriips S tuleb märkida 90° -ga. Seame $\log \sin \alpha$ skaala S kõrvuti $\log a$ skaalaga A . Seisku kriipsu a vastas kriips a (joonis 13). Loeme skaalal A kujutatuna vahemikud 0,01 kuni 0,1 ja edasi 0,1 kuni 1,0.



Joonis 13.

Siis lõik

$$\overline{a1} = -\overline{1a} = -\frac{p}{2} \log a$$

ja

$$\overline{a90^\circ} = -\overline{90^\circ a} = -\frac{p}{2} \log \sin \alpha.$$

Et

$$\overline{a90^\circ} = \overline{a1},$$

siis

$$-\log \sin \alpha = -\log a$$

ja seega

$$\sin \alpha = a.$$

See tähendab, et võttes skaalal S kriipsu α^0 , saame selle vastas skaalal A $\sin \alpha$ väärtuse, ja ümberpöörduvalt: võttes skaalal A mingi murdväärtuse α , leiame selle vastas skaalal S nurga α , mille siinuseks on võetud α väärtus. Õeldust on selge, et skaalade A ja S vastuseade asendab täielikult kolmekohalised siinuse tabelid. Skaala S võimaldab ka koosinuste väärtusi saada:

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha).$$

Näiteks on

$$\cos 68^\circ 15' = \sin 31^\circ 45' = 0,526.$$

S -skaala võimaldab mehhaniseerida kolmnurga lahendamist siinuslause abil. Olgu näiteks antud kolmnurk oma elementidega a , α ja β . Siis on

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Seame skaalad A ja S nii teineteise vastu, et arvu a vastas skaalal A seisaks nurk α skaalal S ; siis nurga β vastas seisab otsitav külg b .

Näide. $a = 34,5$ m, $\alpha = 43^\circ 15'$, $\beta = 36^\circ 20'$.

$\alpha + \beta = 79^\circ 35'$, seega $\gamma = 100^\circ 25'$, $\sin \gamma = \sin 79^\circ 35'$.

Siinuslausest

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

saame siis, et

$$b = 29,7; \quad c = 50,0.$$

9. Log $\tan \alpha$ skaala ja selle kasutamine.

Log $\tan \alpha$ skaala T ehitatakse samadel põhimõtetel nagu log $\sin \alpha$ skaalagi, võttes kujutamisühikuks ühiku,

mida kasutatakse skaalal D . Seades skaalad T ja D teineteise vastu nii, et skaala D parempoolne 1 on kohakuti skaalal T märgitud 45° -ga, näeksime, et teineteisega kohakuti seisvate kriipsude a ja d puhul kehtib seos:

$$\tan \alpha = d.$$

See võimaldab tangensi leidmist antud nurga järgi ja vastupidi nurga leidmist antud tangensi järgi.

Nurkade puhul, mis on suuremad kui 45° , kasutame tangensi leidmiseks valemit

$$\tan \alpha = \cot (90^{\circ} - \alpha) = \frac{1}{\tan (90^{\circ} - \alpha)}$$

ja kootangensi leiame valemist

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Näiteks on

$$\tan 25^{\circ} = 0,466, \quad \tan 68^{\circ} = \frac{1}{\tan 22^{\circ}} = 2,48,$$

$$\cot 32^{\circ}40' = \frac{1}{\tan 32^{\circ}40'} = 1,56.$$

Skaala T kasutamine ühenduses skaalaga D toimub analoogiliselt skaalade S ja A kasutamisega.

N ä i d e. Täisnurkses kolmnurgas olgu

$$a = 16,1 \text{ m}, \quad b = 20,2 \text{ m}.$$

Siis

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{16,1}{20,2},$$

seega

$$\alpha = 38^{\circ}30'.$$

Ülesanded.

29. Määra arvutuslükatil järgmiste arvude logaritmid:

1,25	74,3	0,452	0,0584
0,00745	3850	17,9	42100

30. Määra arvutuslükatil arvud, mille logaritmid on:

0,405	3,965	$\bar{1},664$	$\bar{3},092$
0,746	1,374	$\bar{2},835$	$\bar{1},540$

31. Määra arvutuslükatil järgmiste arvude ruudud:

3,5	6,72	83,2	0,162
1,74	2,58	569	0,028
4,08	3,14	1240	0,0076

32. Määra arvutuslükatil järgmiste arvude ruutjuured:

2,4	7,42	13	14,7
42	39	68	1,54
4,75	8,45	19,2	8,25

33. Määra arvutuslükatil järgmiste arvude ruutjuured:

278	5680	7940	345,6
0,692	0,0246	0,834	0,0748
0,00758	0,105	0,00095	0,00052

M 34. On teada, et 21 tolli \approx 54 cm. Mitu cm on 8, 15, 37, 45, 92 tolli?

M 35. Mitu tolli on 25, 40, 52, 66, 84 cm?

M 36. On teada, et nurga absoluutmõõt x ja kraadmõõt a suhtuvad nagu arvud π ja 180. Kui suur on nurga absoluutmõõt, kui tema kraadmõõt on

22° 34° 78° 112° 150°?

M 37. Kui suur on nurga kraadmõõt, kui tema absoluutmõõt on

0,128 0,425 1,32 2,72 3,14?

M 38. Mõõtmise andis järgmise tabeli kokkukuuluvaid x ja y väärtusi:

x	1,28	3,56	5,92	7,04	10,4	16,8
y	3,64	10,8	16,8	20,0	29,5	47,6

Kas suurused x ja y on võrdelised?

H 39. Lahenda järgmised võrdded:

$$\frac{x}{17} = \frac{4,2}{15} \qquad \frac{19,6}{1,54} = \frac{x}{28} \qquad \frac{3,72}{4,80} = \frac{6,42}{x}$$

M 40. Jaota lõik 132 cm võrdeliselt arvudega 5, 7 ja 11.

F 41. Uushõbe sulam sisaldab 16 osa vaske, 8 osa niklit ja 7 osa tsinki. Kui palju kulub igast metallist 47 kg uushõbeda valmistamiseks?

M 42. Koolis on 112 mees- ja 64 naisõpilast. Mitu % moodustavad meesõpilased kõigist õpilastest?

G 43. Majas on 5 korterit kuuüridega Rmk.
8,50 12,40 27,60 35,00 ja 62,80.

Üürid alandatakse 15% võrra. Kui suured tulevad uued üürid?

44. Arvuta järgmised korrutised:

1,7 · 3,9	4,07 · 2,05	2,54 · 4,45
1,15 · 1,92	6,72 · 1,05	6,9 · 6,2
1,56 · 5,28	4,25 · 9,42	1,23 · 9,05
3,03 · 1,6	4,4 · 2,8	5,87 · 8,62

45. Arvuta järgmised korrutised:

170 · 385	56 · 72	587 · 0,75
42,6 · 50,4	2,92 · 45,2	18,3 · 1060
0,285 · 72,4	0,675 · 0,094	0,0385 · 20,6

M 46. Koosta ringi ümbermõõtude tabel, kui läbimõõ-
dud on:

1,54	2,85	3,42	4,58	8,27 cm.
------	------	------	------	----------

47. Arvuta järgmised jagatised:

8,7 : 2,3	9,34 : 3,14	1,00 : 3,75
4,58 : 1,76	9,7 : 1,82	6,18 : 8,36
4,3 : 3,7	2,48 : 6,85	2,84 : 7,33

48. Arvuta järgmised jagatised:

215 : 782	5,63 : 440	3,33 : 103
4,52 : 0,387	0,768 : 25,6	0,554 : 0,392
28,5 : 0,0042	1 : 0,0675	864 : 0,0375

M 49. Kolme joonise mõõtmed

75 × 54	112 × 86	48 × 82
---------	----------	---------

tuleb vähendada vastavalt suhtes 1:1,8, 1:2,4 ja 1:3,2.
Kui suured on jooniste vähendatud mõõtmed?

G 50. Üks meremiil on 1,852 km. Mitu meremiili on
1000 km?

51. Arvuta avaldised:

$$x = \frac{1,8 \cdot 1,04 \cdot 3,14}{2,46 \cdot 8,42}$$

$$u = \frac{248 \cdot 6,34 \cdot 0,025}{492 \cdot 0,158}$$

$$z = \frac{1,2 \cdot 27 \cdot 38,5 \cdot 0,64}{1,5 \cdot 32 \cdot 4,68 \cdot 17,8}$$

$$v = \frac{432 \cdot 38,4 \cdot 0,0246 \cdot 0,98}{0,00000648 \cdot 42500 \cdot 0,175}$$

52. Arvuta avaldised:

$$x = 8,62^2 \cdot 0,375$$

$$u = 2,46^2 : 8,6$$

$$y = 0,948^2 \cdot 0,725$$

$$v = 5,30^2 : 64,8$$

$$z = \pi \cdot 1,72^2$$

$$w = 0,24^2 : 0,072$$

53. Arvuta juured:

$$\sqrt{3,14 \cdot 7,84}$$

$$\sqrt{84,6 \cdot 134}$$

$$\sqrt{0,0533 \cdot 2,64}$$

$$\sqrt{2,16 \cdot 9,48}$$

$$\sqrt{0,0026 \cdot 482}$$

$$\sqrt{0,33 \cdot 26,5}$$

54. Arvuta juured:

$$\sqrt{\frac{22}{7}}$$

$$\sqrt{\frac{72,5}{0,425}}$$

$$\sqrt{\frac{0,56}{74,5}}$$

$$\sqrt{\frac{9,8}{3,6}}$$

$$\sqrt{\frac{0,62}{0,018}}$$

$$\sqrt{\frac{3,2 \cdot 4,7}{5,9}}$$

55. Arvuta korrutised:

$$3,48 \cdot \sqrt{7,52}$$

$$0,82 \cdot \sqrt{0,424}$$

$$1,74\sqrt{0,149}$$

$$0,0174 \cdot \sqrt{125}$$

$$0,0526 \cdot \sqrt{382}$$

$$0,88\sqrt{11,1}$$

56. Leia

$$\sin 38^{\circ}24'$$

$$\sin 54^{\circ}12'$$

$$\sin 68^{\circ}15'$$

$$\tan 40^{\circ}45'$$

$$\tan 51^{\circ}0'$$

$$\tan 22^{\circ}30'$$

57. Leia nurk α , kui

$$\sin \alpha = 0,159$$

$$\sin \alpha = 0,725$$

$$\sin \alpha = 0,0475$$

$$\tan \alpha = 0,635$$

$$\tan \alpha = 0,246$$

$$\tan \alpha = 0,0782$$

58. Leia

$$\cos 28^{\circ}16'$$

$$\cos 48^{\circ}54'$$

$$\cos 75^{\circ}06'$$

$$\cot 34^{\circ}10'$$

$$\cot 62^{\circ}42'$$

$$\cot 80^{\circ}10'$$

59. Leia nurk α , kui

$$\cos \alpha = 0,725$$

$$\cos \alpha = 0,207$$

$$\cos \alpha = 0,075$$

$$\cot \alpha = 0,595$$

$$\cot \alpha = 1,27$$

$$\cot \alpha = 2,59$$

E 60. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et

$$c = 28,4 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad \alpha = 36^{\circ}50'.$$

E 61. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et

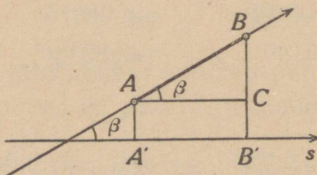
$$a = 142 \text{ m} \quad \text{ja} \quad b = 228 \text{ m}.$$

§ 7. Kahe nurga summa ja vahe siinus ja koosinus.

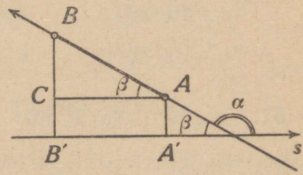
Seame endile küsimuse, kuidas arvutada kahe nurga summa ja vahe siinust ja koosinust, kui kummagi nurga siinus ja koosinus on teada. Suuruste $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\sin(\alpha - \beta)$ ning $\cos(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$ avaldiste tuletamise rajame kahele teoreemile, mis kohe sõnastame ja tõestame.

Lõigu projektsiooniteoreem. Lõigu projektsioon mingile suunaga sirgele võrdub lõigu pikkuse ja lõigu ning sirge vahelise nurga koosinuse korrutisega.

Tõestus. Olgu AB (joonis 14 a ja b) lõik suunaga punktist A punkti B poole ja s sirge noolega märgitud



Joonis 14a.



Joonis 14b.

suunaga. Olgu $A'B'$ lõigu projektsioon sirgele s . Pikendas lõigu AB , saame nurga α , mille lõik AB moodustab sirgega s . Tõmmates AC rööbiti sirgega s , saame nurga BAC , mida tähistame β -ga. Joonisel a näidatud lõigu AB ja sirge s vastastikusel asetumisel on $\beta = \alpha$, joonisel b seevastu $\beta = 180^\circ - \alpha$. Vaatame kolmnurgas ABC kaatetit AC suunata lõiguna. Siis:

Esimesel juhul saame

$$A'B' = + AC.$$

Et $AC = AB \cdot \cos \beta$

ja $\cos \beta = \cos \alpha$,

siis $A'B' = AB \cdot \cos \alpha$

Teisel juhul saame

$$A'B' = - AC.$$

Et $AC = AB \cdot \cos \beta$

ja $\cos \beta = \cos (180^\circ - \alpha) = - \cos \alpha$,

siis $A'B' = AB \cdot \cos \alpha$.

Niisiis on tõestatav teoreem kehtiv lõigu ja sirge iga-sugusel asetumisel.

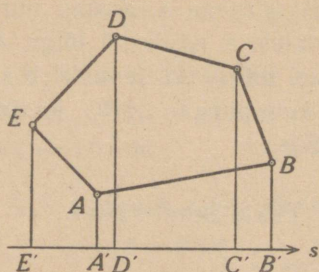
Olgu edasi tegemist mingi murdjoonega $ABCDE$, mis algab punktis A ja lõpeb punktis E ja mille külgedeks on lõigud AB, BC, CD, DE . Lõiku, mis algab murdjoone alguspunktis ja lõpeb murdjoone lõpp-punktis, nimetame murdjoone **r e s u l t a n d i k s**. Meie juhul on selleks resultatiks lõik AE .

Projekttime kõik eespool-nimetatud lõigud mingile suunaga sirgele s . Nende lõikude projektsioonide kohta kehtib siis järgmine teoreem:

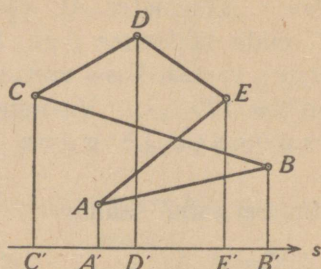
Murdjoone projektsiooni teoreem. Murdjoone resultatilõigu projektsioon mingile suunaga sirgele on võrdne murdjoone külglõikude projektsioonide summaga.

Tõestus. Olgu $ABCDE$ mingi murdjoon (joonis 15a ja b) ja s suunaga sirge. Olgu murdjoone külglõikude AB, BC, CD, DE projektsioonid sellele sirgele tähistatud

$A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$. Need projektsioonid on positiivsed või negatiivsed, vastavalt sellele, kas nende suund ühtib



Joonis 15a.



Joonis 15b.

sirge s suunaga või mitte. Nii ühest kui teisest joonisest näeme, et

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' = A'E';$$

selles võrduses aga peitubki tõestatav lause.

Asume $\sin(\alpha + \beta)$ valemi tuletamisele. Olgu esiteks nii nurk α kui ka nurk β teravnurgad. Kujutame

nurga α ühikringis, võttes tema esimeseks haaraks rõhtdiameetri OA , ja nurga β , võttes selle esimeseks haaraks nurga α teise

haara; siis $\widehat{AOB} = \alpha$,

$\widehat{BOC} = \beta$ ja $\widehat{AOC} =$

$= \alpha + \beta$. Joonestame nur-

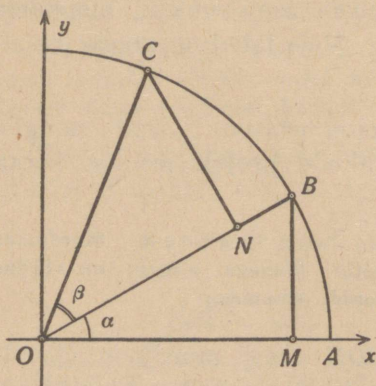
kade α ja β siinuslõigud

MB ja NC ja vaatleme

murdjoont $OMBNC$ (joo-

nis 16). Tema resultant-

lõiguks on OC . Projekti-



Joonis 16.

des murdjoone ja selle resultandi püstdiameetrile, saame murdjoone projektsiooni teoreemi järgi, et

$$OC \text{ proj.} = OM \text{ proj.} + MB \text{ proj.} + BN \text{ proj.} + NC \text{ proj.}$$

ja edasi lõigu projektsiooni teoreemi järgi, et

$$OC \cdot \cos [90^\circ - (\alpha + \beta)] = OM \cdot \cos 90^\circ + MB \cdot \cos 0^\circ + \\ + BN \cdot \cos (90^\circ + \alpha) + NC \cdot \cos \alpha.$$

Nagu näeme joonisest, on

$$OC = 1, OM = \cos \alpha, MB = \sin \alpha, \\ BN = 1 - \cos \beta \quad \text{ja} \quad NC = \sin \beta;$$

saadud võrdusis esinevaid koosinusi aga saab kujutada lihtsamini, nimelt:

$$\cos [90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin (\alpha + \beta), \\ \cos 90^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1$$

ja

$$\cos (90^\circ + \alpha) = -\cos [180^\circ - (90^\circ + \alpha)] = \\ = -\cos (90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha.$$

Seega

$$1 \cdot \sin (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot 0 + \sin \alpha \cdot 1 + \\ + (1 - \cos \beta) (-\sin \alpha) + \sin \beta \cos \alpha$$

ehk, peale koondamist,

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

Jättes nurkade α , β ja $\alpha + \beta$ kohta kehtima samad eeldused, nagu ülal, ja tuginedes samale joonisele, leiame valemi ka $\cos (\alpha + \beta)$ jaoks. Vaatleme selleks jälle murdjoont $OMBNC$ ja tema resultanti OC . Projektides kummagi rõhtdiameetrile, saame murdjoone projektsiooni teoreemi järgi, et

$$OC \text{ proj.} = OM \text{ proj.} + MB \text{ proj.} + BN \text{ proj.} + NC \text{ proj.}$$

ja edasi, lõigu projektsiooni teoreemi järgi, et

$$OC \cdot \cos(\alpha + \beta) = OM \cdot \cos 0^\circ + MB \cdot \cos 90^\circ + \\ + BN \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + NC \cdot \cos(90^\circ + \alpha).$$

Et

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{ja} \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha,$$

siis

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot 1 + \sin \alpha \cdot 0 + \\ + (1 - \cos \beta) \cdot (-\cos \alpha) + \sin \beta \cdot (-\sin \alpha)$$

ehk, peale koondamist,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Näitame, et valem $\sin(\alpha + \beta)$ jaoks jääb kehtivaks, kui nurga α suurendame 90° võrra.

Nurga α asendamisega nurgaga $90^\circ + \alpha$ valem omab kuju:

$$\sin[(90^\circ + \alpha) + \beta] = \\ = \sin(90^\circ + \alpha) \cos \beta + \sin \beta \cos(90^\circ + \alpha). \quad (*)$$

Näitame, et see valem on õige.

$$\text{Valemi vasak pool } \sin[(90^\circ + \alpha) + \beta] = \\ = \sin(180^\circ - 90^\circ - \alpha - \beta) = \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \\ = \cos(\alpha + \beta).$$

Valemi paremal poolel esineva $\sin(90^\circ + \alpha)$ asemele võime kirjutada $\sin(180^\circ - 90^\circ - \alpha)$ ehk $\sin(90^\circ - \alpha)$ ehk $\cos \alpha$, $\cos(90^\circ + \alpha)$ asemele aga $-\sin \alpha$.

Asetades valemisse (*)

$\sin [(90^\circ + \alpha) + \beta]$, $\sin (90^\circ + \alpha)$ ja $\cos (90^\circ + \alpha)$ asemele saadud väärtused, saame:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

mis on aga varem tuletatud valem.

Seega

$$\begin{aligned} \sin [(90^\circ + \alpha) + \beta] &= \\ &= \sin (90^\circ + \alpha) \cos \beta + \sin \beta \cos (90^\circ + \alpha), \end{aligned}$$

s. t., et valem $\sin (\alpha + \beta)$ jaoks jääb kehtivaks nurga α suurendamisel 90° võrra.

Samal viisil tõestaksime, et valem $\cos (\alpha + \beta)$ jaoks jääb kehtivaks, kui nurka α suurendame 90° võrra, ja edasi, et valemid $\sin (\alpha + \beta)$ ja $\cos (\alpha + \beta)$ jaoks jäävad kehtivaks, kui nurka α suurendame $2 \cdot 90^\circ$, $3 \cdot 90^\circ \dots$, üldse täisarv kordi 90° võrra.

Et kirjutises $\sin (\alpha + \beta)$ ja $\cos (\alpha + \beta)$ nurgad α ja β esinevad samaväärselt, siis kandub kõik nurga α kohta öeldu sõna-sõnalt üle ka nurga β kohta. Sellest järeldub, et nurkade summa siinuse ja koosinuse valemid jäävad kehtivaks, kui nii nurka α kui ka nurka β suurendame 90° mõne kordse võrra.

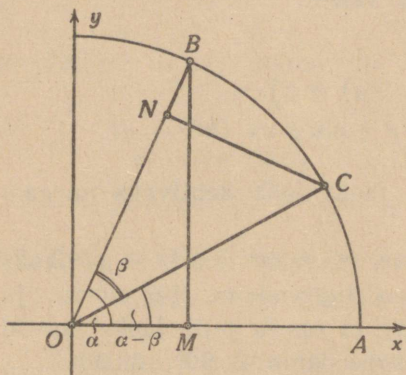
Olgu nüüd α_1 ja β_1 mingi 2 kuitahes suurt nurka. Jagades neid 90° -ga ja märkides tekkivad jäägid tähtedega α ja β , võime kirjutada

$$\alpha_1 = \alpha + m \cdot 90^\circ \quad \text{ja} \quad \beta_1 = \beta + n \cdot 90^\circ.$$

Nurk α_1 erineb α -st ja nurk β_1 erineb β -st vaid 90° täisarvulise kordse võrra. Järelikult valemid $\sin (\alpha_1 + \beta_1)$ ja $\cos (\alpha_1 + \beta_1)$ jaoks on samad, mis $\sin (\alpha + \beta)$ ja $\cos (\alpha + \beta)$ jaoks. Niisiis ülalt tuletatud valemid kahe nurga

summa siinuse ja koosinuse jaoks kehtivad igasuguste nurkade puhul.

Asume $\sin(\alpha - \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$ valemite tuletamisele. Olgu α ja β teravnurgad ja $\alpha > \beta$. Kujutame nurga α ühikringis (joonis 17), võttes tema esimeseks



Joonis 17.

haaraks rõhtdiameetri OA , ja nurga $-\beta$, võttes tema esimeseks haaraks nurga α teise haara; siis $\widehat{AOB} = \alpha$, $\widehat{BOC} = \beta$ ja $\widehat{AOC} = \alpha - \beta$. Joonestame nende nurkade siinuslõigud ja vaatleme murdjoont $OMBNC$ ja tema resultanti OC . Projektiides mõlemad püstidiaameetrile, saame

$$OC \text{ proj.} = OM \text{ proj.} + MB \text{ proj.} + BN \text{ proj.} + NC \text{ proj.},$$

teiste sõnadega

$$OC \cdot \cos [90^\circ - (\alpha - \beta)] = OM \cdot \cos 90^\circ + MB \cdot \cos 0^\circ + \\ + BN \cdot \cos (90^\circ + \alpha) + NC \cdot \cos (180^\circ - \alpha)$$

ehk

$$1 \cdot \sin(\alpha - \beta) = \\ = \cos \alpha \cdot 0 + \sin \alpha \cdot 1 + (1 - \cos \beta) \cdot (-\sin \alpha) + \\ + \sin \beta \cdot (-\cos \alpha),$$

seega

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

Projektides sama murdjoone ja tema resultandi rõht-
diametrile, saame

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Analoogiliselt $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha + \beta)$ valemite üld-
kehtivuse tõestusega võib näidata, et ka nurkade vahe-
siinuse ja koosinuse valemid jäävad kehtivaks igasuguste
nurkade puhul.

Kokkuvõttes:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Ülesanded.

M 62. Lähtudes võrdusest $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ arvuta
sin 75° täpne väärtus.

M 63. Arvuta avaldised $\sin(45^\circ - \alpha)$ ja $\sin(\alpha - 30^\circ)$
ja lihtsusta tulemused.

M 64. Olgu α nurk III veerandis ja β nurk IV veeran-
dis ja olgu $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ja $\cos \beta = \frac{12}{13}$. Arvuta $\sin(\alpha - \beta)$.

T 65. Näita, et

$$\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(45^\circ - \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ.$$

T 66. Näita, et

$$\frac{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

T 67. Näita, et on kehtivad järgmised samasused:

1. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta = \sin \alpha$

2. $\cos(\alpha - \beta) \cdot \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin \beta = \cos \alpha$.

T 68. Näita, et on kehtivad järgmised samasused:

1. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

2. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

T 69. Näita avaldiste arendamise teel, et

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha).$$

M 70. Milleks taanduvad $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\sin(\alpha - \beta)$ valemid, kui neis võtta $\alpha = 90^\circ$? — kui neis võtta $\alpha = 180^\circ$?

M 71. Lähtudes võrdusest $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ arvuta $\cos 15^\circ$ täpne väärtus.

M 72. Arenda avaldised $\cos(45^\circ - \alpha)$ ja $\cos(\alpha - 60^\circ)$ ja lihtsusta tulemused.

T 73. Näita, et

$$\cos(120^\circ - \alpha) + \cos \alpha + \cos(120^\circ + \alpha) = 0.$$

M 74. Olgu teada, et $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ja $\cos \beta = \frac{3}{5}$. Arvuta $\cos(\alpha - \beta)$ väärtus.

M 75. Olgu α niisugune nurk IV veerandis, et $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, ja olgu β niisugune nurk II veerandis, et $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Arvuta $\cos(\alpha - \beta)$ väärtus.

M 76. Arvuta vahe

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

teades, et $\sin \alpha = 0,625$ ja $\sin \beta = 0,8$.

M 77. Milleks taandub $\cos(\alpha - \beta)$ valem erijuhul, kui $\alpha = \beta$?

M 78. Milleks taandub $\cos(\alpha - \beta)$ valem erijuhul, kui $\alpha = 180^\circ$?

H 79. Lihtsusta järgmised murrud:

1.
$$\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$$

2.
$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}$$

3.
$$\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}$$

4.
$$\frac{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \beta + \cos(\alpha + \beta) \sin \beta}$$

T 80. Näita, et

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta} = \tan \alpha.$$

§ 8. Kahe nurga summa ja vahe tangens.

Me teame tangensi, siinuse ja koosinuse vahelisest seosest, et

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)};$$

seega

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Jagades viimase murru lugejat ja nimetajat korrutisega $\cos \alpha \cos \beta$, taandades ja uuesti rakendades tangensi, siinuse ja koosinuse vahelist seost, leiame, et

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

Võttes endises mõttekäigus summa $\alpha + \beta$ asemel vahe $\alpha - \beta$, saame

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

Kokkuvõttes:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}.$$

Ülesanded.

M 81. Lähtudes võrdusest $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ arvuta $\tan 75^\circ$ täpne väärtus.

M 82. Arenda avaldis

$$\tan(135^\circ - \alpha) + \tan(135^\circ + \alpha)$$

ja lihtsusta tulemus.

T 83. Näita, et

$$\tan(45^\circ + \alpha) \cdot \tan(45^\circ - \alpha) = 1.$$

M 84. Kui suur on $\tan(\alpha + \beta)$, kui $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$?

§ 9. Kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens.

Poolnurga siinus ja koosinus.

Võttes valemis

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

nurga β võrdsena nurgaga α , saame kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi avaldised:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Asendades neis valemeis nurga α nurgaga $\frac{\alpha}{2}$, saame nurga α funktsioonide avaldised poolnurga funktsioonide kaudu:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Võttes $\cos 2\alpha$ valemis $\cos^2 \alpha$ asemel üks kord $1 - \sin^2 \alpha$, teine kord $\sin^2 \alpha$ asemel $1 - \cos^2 \alpha$, saame:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Kahte viimatisaadud võrdust võime kirjutada ka sageli rakendamist leidvate valemitega:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha,$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

Asendades viimastes võrdustes nurga α nurgaga $\frac{\alpha}{2}$, saame valemite järjekorda muutes, et

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Neist võrdustest saame valemid poolnurga siinuse ja koosinuse määramiseks:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Ülesanded.

M 85. Olgu teada, et $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Arvuta $2 \sin \alpha$ ja $\sin 2 \alpha$.

M 86. Olgu teada, et $\cos \beta = \frac{1}{2}$. Arvuta $2 \cos \beta$ ja $\cos 2 \beta$.

M 87. Olgu teada, et $\tan \gamma = \frac{2}{5}$. Arvuta $2 \tan \gamma$ ja $\tan 2 \gamma$.

M 88. Olgu ϱ nurk II veerandis ja olgu $\sin \varrho = \frac{4}{5}$. Arvuta $\sin 2 \varrho$ ja $\cos 2 \varrho$.

M 89. Olgu ε nurk III veerandis ja olgu $\tan \varepsilon = \frac{1}{7}$. Arvuta $\sin 2 \varepsilon$ ja $\cos 2 \varepsilon$.

M 90. Olgu $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$. Arvuta $\tan \alpha$.

M 91. Avalda $\sin 2 \alpha$ ainuüksi $\sin \alpha$ kaudu ja $\cos 2 \alpha$ ainuüksi $\cos \alpha$ kaudu.

E 92. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on $\frac{5}{13}$. Kui suur on tipunurga siinus ja koosinus?

EI 93. Näita, et täisnurkses kolmnurgas kehtivad järgmised seosed:

1. $\sin 2 \alpha = \sin 2 \beta$ 3. $\cos 2 \alpha + \cos 2 \beta = 0$

2. $\frac{2ab}{c^2} = \sin 2 \alpha$ 4. $\frac{2ab}{a^2 - b^2} = \tan 2 \beta$

5
94. Näita, et

$$\tan(\alpha + 45^\circ) + \tan(\alpha - 45^\circ) = 2 \tan 2\alpha.$$

T
95. Näita, et

$$2 \sin(45^\circ + \alpha) \sin(45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha.$$

T
96. Näita, et on kehtivad järgmised võrdused:

1. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$

3. $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \tan \alpha$

2. $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

4. $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

M
97. Kasutades kahekordse nurga funktsioonide valemeid, anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne ja logaritmidega arvutamiseks sobiv kuju:

1. $1 - 2 \sin^2 \alpha$

4. $2 - \sin 2\alpha \cdot \tan \alpha$

2. $\tan \alpha + \cot \alpha$

5. $\frac{1}{2} (\cot \alpha - \tan \alpha)$

3. $(1 + \cos 2\alpha) \tan \alpha$

6. $1 + \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha$

M
98. Kasutades kahekordse nurga funktsioonide valemeid, anna järgmistele avaldistele võimalikult lihtne ja logaritmidega arvutamiseks sobiv kuju:

1. $\frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha}$

4. $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$

2. $\frac{\sin 2\alpha}{2 \tan \alpha}$

5. $\frac{2 \cot \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$

3. $\frac{\cos 2\alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$

6. $\frac{1 - \cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$

T
99. Näita, et

1. $2 \sin(90^\circ - \alpha) \sin \alpha = \sin 2\alpha$

2. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

$$3. \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$4. \frac{1}{1 - \tan \alpha} - \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \tan 2\alpha$$

$$5. \tan(\alpha + 45^\circ) + \tan(\alpha - 45^\circ) = 2 \tan 2\alpha$$

$$6. 2 \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha$$

M 100. On teada, et $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sellest lähtudes arvuta $\sin 22^\circ 30'$, $\cos 22^\circ 30'$ ja $\tan 22^\circ 30'$.

M 101. On teada, et $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sellest lähtudes arvuta $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ ja $\tan 15^\circ$.

M 102. Olgu α nurk IV veerandis ja olgu $\cos \alpha = \frac{119}{169}$. Arvuta $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$.

M 103. Lähtudes valemist $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ jaoks anna valem $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ arvutamiseks.

M 104. Olgu $\cos \alpha = 0,6$. Arvuta $\tan \frac{\alpha}{2}$.

E 105. Omagu võrdhaarne kolmnurk tipunurka, mille koosinus on $-\frac{7}{25}$. Kui suured on alusnurga siinus ja koosinus?

T 106. Näita, et

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha$$

ja

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha.$$

107. Näita, et

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ja

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

108. Näita, et

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

109. Näita, et

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

110. Tõesta, et on kehtivad järgmised samasused:

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

§ 10. Siinuste ja koosinuste summa ja vahe korrutiseks teisendamine.

Avaldiste väärtuste arvutamisel logaritmidega, mõnikord ka murdude taandamisel, on otstarbekohane teendada siinuste ja koosinuste summad ja vahed korrutisteks. Näiteks võime kirjutada, et

$$\begin{aligned} \sin 50^\circ + \sin 40^\circ &= \sin (45^\circ + 5^\circ) + \sin (45^\circ - 5^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 5^\circ + \cos 45^\circ \sin 5^\circ + \sin 45^\circ \cos 5^\circ - \\ &\quad - \cos 45^\circ \sin 5^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 5^\circ. \end{aligned}$$

Sama võtet kasutame ka üldjuhul. Olgu α ja β mingid 2 nurka. Näitame kõigepealt, et ikka on võimalik leida kahte

teist nurka u ja v nii, et α esineks nende s u m m a n a, β aga nende v a h e n a. Tõepoolest, nõudest, et oleks

$$\alpha = u + v$$

$$\beta = u - v,$$

järeldub, et

$$2u = \alpha + \beta,$$

$$2v = \alpha - \beta$$

nii, et

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$v = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Asume siinuste summa teisendamisele. Eespool-õeldu põhjal on

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin (u + v) + \sin (u - v) = \\ &= \sin u \cos v + \cos u \sin v + \sin u \cos v - \cos u \sin v = \\ &= 2 \sin u \cos v \end{aligned}$$

ehk

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Samal viisil leiame, et

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Koosinuste summa puhul saame:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \cos (u + v) + \cos (u - v) = \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v + \cos u \cos v + \sin u \sin v = \\ &= 2 \cos u \cos v \end{aligned}$$

ehk

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Samal viisil leiame, et

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Kokkuvõttes:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Saadud võrdustes on võimalik pooli vahetada ja seega kahe nurga siinuste ja koosinuste korrutisi kirjutada summa või vahena.

Kahe tangensi summa saab logaritmitava kuju, kui avaldame tangensid siinuste ja koosinuste kaudu:

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}$$

ehk

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Analoogiliselt talitame tangensite vahe puhul ja ka koo-tangensite summa ja vahe puhul.

Ülesanded.

111. Teisenda järgmised summad ja vahed korrutisteks:

1. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

5. $\cos 37^\circ + \cos 49^\circ$

2. $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$

6. $\sin 17^\circ - \sin 3^\circ$

3. $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$

7. $\cos 5^\circ - \sin 25^\circ$

4. $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$

8. $\sin 7^\circ + \cos 3^\circ$

M 112. Kirjuta avaldised

$$\sin 14 \alpha + \sin 6 \alpha$$

ja

$$\cos 7 \alpha - \cos 11 \alpha$$

korrutistena.

M 113. Olgu x teravnurk. Arvuta kahel viisil tema suurus, teades, et

1. $\cos x = \sin 32^\circ + \sin 28^\circ$

2. $\sin x = \sin 50^\circ + \cos 80^\circ$.

M 114. Kirjuta järgmised avaldised korrutistena:

1. $\sin (30^\circ + \alpha) + \sin (30^\circ - \alpha)$

2. $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

M 115. Kirjuta järgmised murrud võimalikult lihtsal kujul:

1. $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ}$

2. $\frac{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 20^\circ}$

T 116. Näita, et

1. $\frac{\sin 26^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 26^\circ + \cos 10^\circ} = \cot 72^\circ$

2. $\frac{\sin 5^\circ + \sin 47^\circ}{\cos 5^\circ - \cos 47^\circ} = \cot 21^\circ$.

117. Kirjuta järgmised korrutised summana või vahena:

1. $2 \sin 40^\circ \cos 20^\circ$

5. $\sin 3 \alpha \cdot \sin \alpha$

2. $2 \cos 20^\circ \sin 70^\circ$

6. $\sin 7 \alpha \cdot \cos 9 \alpha$

3. $\cos 50^\circ \cdot \cos 30^\circ$

7. $\sin 5 \alpha \cdot \sin 10 \alpha$

4. $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$

8. $\cos \alpha \cdot \cos 3 \alpha$

M) 118. Kirjuta järgmised avaldised üksliikme kujul:

1. $\sin \alpha + 1$

3. $\cos \alpha + 1$

2. $1 - \cos \alpha$

4. $1 - \sin \alpha$

5. $\frac{1 \pm \sin \alpha}{\cos \alpha}$

T) 119. Näita, et

$$1 + \tan \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}$$

ja

$$1 - \tan \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin (45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

§ 11. Tangenslause.

Siinuslause järgi on kolmnurga küljed a ja b ja nende külgedega vastasnurgad α ja β seotud võrdusega

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Sellest seosest a , b , α ja β vahel saab tuletada seose $a + b$, $a - b$, $\frac{a + \beta}{2}$ ja $\frac{\alpha - \beta}{2}$ vahel, mis kannab tangenslause nime. Selleks otstarbeks kirjutame ülal seisva võrde kujul

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Liites kummalegi poolele 1 ja lahutades kummastki poolest 1, saame

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 \quad \text{ja} \quad \frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - 1$$

ehk

$$\frac{a + b}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta} \quad \text{ja} \quad \frac{a - b}{b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \beta}.$$

Jagades viimased võrdused liikmeti, saame

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

ehk, teisendades siinuste summa ja vahe korrutisteks,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Taandades ja jagades viimase murru lugejat ja nimetajat avaldisega $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, näeme, et

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Kokkuvõttes:

kolmnurga kahe külje summa suhtub samade külgede vahesse nagu vastasolevate nurkade poolsumma tangens suhtub nurkade poolvahe tangensisse,

ehk, valemi kujul,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Tangenslause leiab endale tähtsaima rakenduse kolmnurga lahendamisel, kui on antud kaks külge ja nende vaheline nurk, näiteks a , b ja γ . Selle juhu käsitlemine on võimalik ka koosinuslause abil, kuid see tee on tülikas, sest suur osa

arvutusi tuleb teha logaritmideta. Tangenslause lubab kogu tööd korraldada tunduvalt hõlpsamini, nagu edasi näeme.

Et a ja b on teada, siis saame kohe leida $a + b$ ja $a - b$. Teadaoleva nurga γ abil saame arvutada nurka $\frac{\alpha + \beta}{2}$; tõepoolest

$$a + b = 180^\circ - \gamma,$$

seega

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Et $\tan(90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \cot \frac{\gamma}{2}$, siis tangenslausest võib kirjutada ka kujul

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\cot \frac{\gamma}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

Sellest võrdest saame määrata $\tan \frac{\alpha - \beta}{2}$, seega ka nurga $\frac{\alpha - \beta}{2}$. Teades nurkade α ja β poolsummat ja poolvahet, leiame kergesti ka nurgad α ja β ise. Tundmatu külje c määrame siinuslause abil.

Näide. Olgu antud lahendada kolmnurk, kui

$$a = 38,74 \quad b = 20,46 \quad \gamma = 24^\circ 42'.$$

Arvutused võib korraldada järgmiselt:

Nurkade α ja β määramine:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 24^\circ 42' = 155^\circ 18'$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\alpha + \beta}{2} = 77^\circ 39' & \log \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \log(a - b) + & \\ a + b = 59,20 & + \log \cot \frac{\gamma}{2} - \log(a + b) & \\ a - b = 18,28 & \log(a - b) = 1,2620 & \\ \frac{\gamma}{2} = 12^\circ 21' & \log \cot \frac{\gamma}{2} = 0,6596 & \\ & - \log(a + b) = \bar{2},2277 & 1,7723 \\ \hline & \log \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = 0,1493 & \\ & \frac{\alpha - \beta}{2} = 54^\circ 40' & \\ & \frac{\alpha + \beta}{2} = 77^\circ 39' & \\ & \alpha = 132^\circ 19' & \beta = 22^\circ 59' \end{array}$$

Külje c arvutamine:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$$

$$\log a = 1,5882$$

$$\log \sin \gamma = \bar{1},6210$$

$$- \log \sin \alpha = 0,1311 \quad \bar{1},8689 \quad 47^\circ 41'$$

$$\log c = 1,3403$$

$$c = 21,90$$

K o n t r o l l : Koosinuslause järgi peab olema :

$\alpha = 132^{\circ} 19'$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma$
$\beta = 22^{\circ} 59'$	$\log 2 = 0,3010$
$\gamma = 24^{\circ} 42'$	$\log a = 1,5882$
$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} 00'$	$\log b = 1,3109$
	$\log \cos \gamma = \bar{1},9583$
	$\log 2 ab \cos \gamma = 3,1584$
	$2 ab \cos \gamma = 1440$

$$a^2 = 38,74^2 = 1501$$

$$b^2 = 20,46^2 = 418,7$$

$$a^2 + b^2 = 1919,7$$

$$2 ab \cos \gamma = 1440$$

$$a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma = 479,7 \qquad c^2 = 21,90^2 = 479,6$$

V a s t u s : $\alpha = 132^{\circ} 19'$, $\beta = 22^{\circ} 59'$, $c = 21,90$.

Ülesanded.

E 120. Kolmnurgas on külg $a = 672$ m, külg $b = 254$ m ja nurk $\gamma = 58^{\circ}$. Kui suured on nurgad α ja β ?

E 121. Kolmnurgas on külg $b = 38,9$ cm, külg $c = 25,6$ cm ja nurk $\alpha = 56^{\circ} 38'$. Määra nurgad β ja γ .

E 122. Kolmnurgas on külg $b = 4a$, nurk $\gamma = 128^{\circ}$. Kui suured on nurgad α ja β ?

E 123. Lahenda kolmnurk kord koosinuslause, kord tangenslause abil, teades, et

$$a = 56, \qquad b = 22 \qquad \text{ja} \qquad \gamma = 52^{\circ} 50'.$$

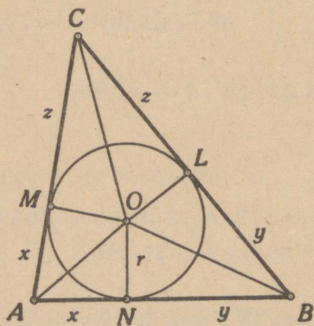
124. Lahenda kolmnurk, teades, et

- | | | | |
|----|-------------|-------------|---------------------------|
| 1. | $a = 412$ | $b = 520$ | $\gamma = 123^\circ 32'$ |
| 2. | $b = 36,70$ | $c = 52,68$ | $\alpha = 24^\circ 16'$ |
| 3. | $a = 2,296$ | $c = 1,680$ | $\beta = 29^\circ 52'$ |
| 4. | $b = 40,32$ | $c = 32,14$ | $\alpha = 75^\circ 40'$ |
| 5. | $a = 30,98$ | $b = 68,02$ | $\gamma = 86^\circ 46'$. |

§ 12. Poolnurgalause.

Poolnurga lause annab seose kolmnurga poolte nurkade tangensite ja kolmnurga külgedega vahel ja võimaldab kolmnurga nurki määrata, kui küljed on teada.

Asume lause tõestamisele. Olgu ABC (joonis 18) kolmnurk külgedega a , b , ja c . Võtame abiks kolmnurga



Joonis 18.

sisse joonestatud ringi. Selle ringi keskpunkti saamiseks tõmbame kolmnurga kahe nurga poolitajad; nende lõikepunkt O on otsitav ringi keskpunkt. Puudutagu ring kolmnurga külgi punktides L , M ja N . Lõigud OL , OM ja ON on siis ringi raadiused: $OL = OM = ON = r$. Et samast välispunktist ringile joonestatud puutujate

lõigud on võrdsed, siis $AM = AN$, $BN = BL$, $CL = CM$. Lühema kirjutuse otstarbel märgime need lõigud vastavalt tähtedega x , y ja z . Siis

$$\begin{aligned} y + z &= a \\ z + x &= b \\ x + y &= c, \end{aligned}$$

millest liites saame

$$2(x + y + z) = a + b + c.$$

Kasutades kolmnurga übermõõdu jaoks tähist $2p$, leiame, et

$$x + y + z = p$$

ja seepärast

$$x = p - a$$

$$y = p - b$$

$$z = p - c.$$

Kolmnurk ABC jaotub oma kolme nurgapoolitaja kaudu kolmeks kolmnurgaks BOC , COA ja AOB , millede pindalad on vastavalt $\frac{1}{2}ra$, $\frac{1}{2}rb$ ja $\frac{1}{2}rc$. Seega kolmnurga ABC pindala

$$S = \frac{1}{2} r (a + b + c)$$

ehk

$$S = rp.$$

Heron'i valemi järgi

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

järelikult

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

Vaadeldes täisnurkset kolmnurka AON , näeme, et

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x}$$

ehk, avaldades r ja x suuruste a , b , c ja p kaudu,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

ehk, nimetajat juure alla viies ja taandades,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Analoogilise ehitusega avaldised saame ka kahe teise poolnurga tangensi jaoks.

Kokkuvõttes:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Tuletatud valemid lubavad antud külgede järgi määrata kolmnurga poolte nurkade tangensid, siit edasi poolnurgad ja lõpuks nurgad ise. Töötamine poolnurga tangensite valemitega on tunduvalt kergem kui töötamine koosinuslausega, sest poolnurga tangensite valemid lubavad otsest logaritmimeist. See asjaolu on eriti suure väärtusega, kui on tegemist mitmekohaliste andmetega.

Ü l e s a n n e. Kolmnurga küljed on meetrites:

$$a = 31,54 \qquad b = 46,50 \qquad c = 63,40.$$

Määra kolmnurga suurim nurk.

L a h e n d u s. Et kolmnurgas suurim nurk asetseb suurima külje vastas, siis otsitavaks nurgaks on nurk γ . Poolnurga tangensi valemi järgi

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

seega, tõstes võrduse pooled ruutu ja logaritmid,es,

$$\begin{aligned} 2 \log \tan \frac{\gamma}{2} &= \log (p-a) + \log (p-b) - \\ &\quad - \log p - \log (p-c). \end{aligned}$$

Arvutused võib korraldada nii:

Abisuuruste arvutamine:

$$a = 31,54$$

$$b = 46,50$$

$$c = 63,40$$

$$a + b + c = 141,44$$

$$p = 70,72$$

$$p - a = 39,18$$

$$p - b = 24,22$$

$$p - c = 7,32$$

Nurga γ arvutamine:

$$\log(p - a) = 1,5931$$

$$\log(p - b) = 1,3842$$

$$-\log p = \bar{2},1505$$

$$-\log(p - c) = \bar{1},1355$$

$$2 \log \tan \frac{\gamma}{2} = 0,2633$$

$$\log \tan \frac{\gamma}{2} = 0,1317$$

$$\frac{\gamma}{2} = 53^{\circ} 33'$$

$$\gamma = 107^{\circ} 6'$$

Vastus: $\gamma = 107^{\circ} 6'$.

Ülesanded.

125. Kolmnurga küljed on 19, 34 ja 49. Määra kolmnurga nurgad.

126. Lahenda kolmnurk, teades, et tema küljed on 89, 321 ja 395.

127. Määra kolmnurga väikesim nurk, kui kolmnurga külgedeks on 13, 14 ja 15 cm.

128. Kolmnurga küljed on meetrites: $a = 1415$; $b = 1585$; $c = 2140$. Leia nurk β .

129. Lahenda kolmnurk andmeil:

	a	b	c
1.	333	444	555
2.	3,75	2,66	1,57
3.	45,30	64,50	38,40

§ 13. Goniomeetrilised võrrandid.

Goniomeetriliseks võrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb mingi trigonomeetrilise funktsiooni tähise all.

Goniomeetrilised võrrandid on näiteks võrrandid

$$2 \sin^2 x = 1,4 \quad \sin x + \cos x = 1 \quad \tan 2x = 3 \tan x.$$

Goniomeetrilised võrrandid jaotuvad järgmiseks kolmeks põhitüübiks:

I. Võrrandid, mis sisaldavad tundmatu nurga ühtainust funktsiooni, nagu näiteks

$$\cot x = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ või } 3 \sin^2 u - 2 \sin u + 1 = 0.$$

II. Võrrandid, mis sisaldavad tundmatu nurga mitut funktsiooni, nagu näiteks

$$4 \tan x + 3 \cot x - 1 = 0 \quad \text{või} \quad (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{2}.$$

III. Võrrandid, mis sisaldavad üht või mitut trigonomeetrilist funktsiooni, mille argument on kas tundmatu ise või selle lineaaravaldis, nagu näiteks

$$\begin{aligned} & \tan(x + 30^\circ) = \tan 2x \\ \text{või} & \quad \sin(x + 45^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1. \end{aligned}$$

Üldisi meetodeid goniomeetriliste võrrandite lahendamiseks pole võimalik anda. Mõningaid üksikuid võtteid, mis tavaliselt rakendamisele tulevad, selgitame näiteil.

I tüüp. Lihtsamal juhul seisab ülesanne nurga määramises teadaoleva trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi. Niisuguse ülesande ees seisame näiteks järgmiste võrrandite puhul:

$$\sin x = -0,5850 \quad \tan z = -\sqrt{2} \quad \cos u = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

Need võrrandid lahendatakse otseselt tabelite abil.

Näide 1. Lahendame võrrandi $\sin x = -0,5850$.

Siinuse väärtusele 0,5850 vastab tabelis nurk $35^{\circ} 48'$, seega siinuse väärtusele $-0,5850$ vastab nurk $180^{\circ} + 35^{\circ} 48'$ ehk $215^{\circ} 48'$ või ka nurk $360^{\circ} - 35^{\circ} 48'$ ehk $324^{\circ} 12'$. Et siinus on perioodiline funktsioon perioodiga 360° , siis võrrandi

$$\sin x = -0,5850$$

lahendid peituvad kõik valemite

$$x_1 = 215^{\circ} 48' + n \cdot 360^{\circ} \quad \text{ja} \quad x_2 = 324^{\circ} 12' + n \cdot 360^{\circ},$$

kus n on mistahes täisarv.

Näide 2. Lahendame võrrandi $\tan z = -\sqrt{2}$.

Võttes $\sqrt{2}$ nelja kohaga, saame $\tan z = -1,414$. Tangensi väärtusele 1,414 vastab tabelis nurk $54^{\circ} 44'$, seega vastab tangensi väärtusele $-1,414$ nurk $180^{\circ} - 54^{\circ} 44'$ ehk $125^{\circ} 16'$. Et tangens on perioodiline funktsioon perioodiga 180° , siis võrrandi

$$\tan z = -\sqrt{2}$$

lahendid peituvad kõik valemis

$$z = 125^{\circ} 16' + n \cdot 180^{\circ},$$

kus n on mistahes täisarv.

Nagu käsiteldud näiteis, nii ka igal muul juhul omavad trigonomeetrilised võrrandid lõpmata palju lahendeid. Selle tõsiasi põhjuseks on nende funktsioonide perioodsus.

Võrrandid, mis sisaldavad tundmatu nurga ainult üht trigonomeetrilist funktsiooni, lahendatakse sel viisil, et eeskätt määratakse see funktsioon ja selle leitud väärtuse järgi otsitakse funktsiooni tähise all seisev tundmatu nurk.

Näide 3. Lahendame võrrandi

$$2 \cos^2 x - \cos x = 3.$$

Viies vabaliikme vasakule poolele ja lahendades saadud ruutvõrrandi $\cos x$ suhtes, leiame, et

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad \cos x = -1.$$

Esimene väärtus ei saa tulla arvesse, sest koosinus võib olla ainult ≤ 1 . Teisele väärtusele vastab nurk 180° ; seega kõik võrrandi lahendid peituvad valemis

$$x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

II tüüp. Võrrandid, mis sisaldavad tundmatu nurga mitut funktsiooni, tuleb kõigepealt teisendada niisugusteks, mis sisaldavad ainult üht funktsiooni. See on alati võimalik, sest kõiki trigonomeetrilisi funktsioone võib avaldada mingi ühe funktsiooni kaudu.

Näide 4. Lahendame võrrandi

$$\tan x + 4 \cot x = 5.$$

Avaldades $\cot x$ funktsiooni $\tan x$ kaudu ja vabanedes nimetajast, saame antud võrrandi kirjutada kujul

$$\tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0,$$

mille lahendamine annab kaks väärtust $\tan x$ jaoks:

$$\tan x = 1 \quad \text{ja} \quad \tan x = 4.$$

Väikesim nurk, mis vastab esimesele väärtusele, on 45° ; väikesim nurk, mis vastab teisele väärtusele, on tabelite järgi $75^\circ 58'$. Seega võrrandi lahendid peituvad valemis

$$x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ \quad \text{ja} \quad x = 75^\circ 58' + n \cdot 180^\circ.$$

Võtetest, mis mõnikord võimaldavad hoiduda tülikast ühe funktsiooni avaldamisest teise kaudu, nimetame põhi-seoste, summa ja vahe funktsioonide avaldiste, kahekordse ja poolnurga valemite kasutamist.

N ä i d e 5. Lahendame võrrandi

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{2}.$$

Avades sulud, saame

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \sqrt{2}.$$

Et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, siis võime oma võrrandit kirjutada ka kujul

$$1 + \sin 2x = \sqrt{2}$$

ehk

$$\sin 2x = \sqrt{2} - 1$$

ehk

$$\sin 2x = 0,4142.$$

Tabelite järgi vastab sellele siinuse väärtusele nurk $24^\circ 28'$, järelikult ka nurk $180^\circ - 24^\circ 28'$ ehk $155^\circ 32'$. Seega

$$2x_1 = 24^\circ 28' + n \cdot 360^\circ \quad \text{ja} \quad 2x_2 = 155^\circ 32' + n \cdot 360^\circ$$

ehk

$$x_1 = 12^\circ 14' + n \cdot 180^\circ \quad \text{ja} \quad x_2 = 77^\circ 46' + n \cdot 180^\circ.$$

III tüüp. Goniomeetriliste võrrandite lahendamisel on kasulik silmas pidada argumentide seost, mille puhul ühenimeliste funktsioonide väärtused ühtivad. Siinuse puhul järgneb võrdusest

$$\sin x = \sin a,$$

et

$$x = a + n \cdot 360^\circ \quad \text{või} \quad x = 180^\circ - a + n \cdot 360^\circ.$$

Koosinuse puhul järgneb võrdusest

$$\cos x = \cos \alpha,$$

et

$$x = \alpha + n \cdot 360^\circ \text{ või } x = -\alpha + n \cdot 360^\circ.$$

Tangensi ja kootangensi puhul järgneb funktsioonide väärtuste ühtimisest, et argumendid erinevad $n \cdot 180^\circ$ võrra.

N ä i d e 6. Lahendame võrrandi

$$\tan 5x = \tan (3x - 60^\circ).$$

Ülalöeldu põhjal saame

$$5x = 3x - 60^\circ + n \cdot 180^\circ$$

ehk

$$2x = -60^\circ + n \cdot 180^\circ$$

ehk

$$x = -30^\circ + n \cdot 90^\circ$$

ehk, teisiti,

$$x = 60^\circ + m \cdot 90^\circ,$$

kus m on täisarv.

N ä i d e 7. Lahendame võrrandi

$$\sin 2x = \cos (45^\circ - x).$$

Teisendame võrrandi nii, et temas esineks ainult üks trigonomeetriline funktsioon. Et

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha),$$

siis võrrandi parem pool

$$\cos (45^\circ - x) = \sin [90^\circ - (45^\circ - x)]$$

$$\text{ehk } \sin (45^\circ + x),$$

seega

$$\sin 2x = \sin (45^\circ + x).$$

Järelikult

$$2x = 45^\circ + x + n \cdot 360^\circ$$
$$\text{või } 2x = 180^\circ - (45^\circ + x) + n \cdot 360^\circ,$$

$$\text{seega } x = 45^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ või } 3x = 135^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$\text{ehk } x = 45^\circ + n \cdot 120^\circ.$$

Et viimases valemis sisaldub ka eelmine, siis on lahendi üldvalem

$$x = 45^\circ + n \cdot 120^\circ.$$

Mõnikord õnnestub võrrandit teisendada nõnda, et paremal pool võrdusmärki seisab 0, vasak pool aga lahub tegureiks.

N ä i d e 8. Lahendame võrrandi

$$\cos x + \cos 2x = \sin x.$$

Kirjutades selle võrrandi kujul

$$(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

näeme, et vahe $\cos x - \sin x$ on kummaski liikmes ühiseks teguriks; seega võrrand omab kuju

$$(\cos x - \sin x) (1 + \cos x + \sin x) = 0.$$

Siit näeme, et peab olema

$$\begin{array}{cc} \text{kas} & \text{või} \\ \cos x - \sin x = 0 & 1 + \cos x + \sin x = 0. \end{array}$$

Esimesel juhul saame

$$x_1 = 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

Teisel juhul saame

$$\sin x + \cos x = -1$$

ehk

$$\sin x + \sin(90^\circ - x) = -1$$

ehk

$$2 \sin 45^\circ \cos(x - 45^\circ) = -1$$

ehk

$$\cos(x - 45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

järelikult

$$x - 45^\circ = 135^\circ + n \cdot 360^\circ$$

või

$$x - 45^\circ = 225^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Siit

$$x_2 = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$$

ja

$$x_3 = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$$

ehk

$$x_2 = (2 + 4n) \cdot 90^\circ$$

ja

$$x_3 = (3 + 4n) \cdot 90^\circ.$$

Ülesanded.

HM 130. Anna iga järgmise võrrandi puhul lahendi üldvalem:

1. $\sin \alpha = 0,9100$

5. $\sin \alpha = -0,625$

2. $\cos \beta = 0,2300$

6. $\cos \beta = -0,875$

3. $\tan \gamma = 0,7400$

7. $\tan \gamma = -1,1060$

4. $\cot \delta = 1,8190$

8. $\cot \delta = -0,4000$

131. Anna järgmiste võrrandite lahendi üldvalem:

1. $\sin(x + a) = \sin(90^\circ - a)$

2. $\cos 2x = \cos(x + 30^\circ)$

3. $\tan(3x - 60^\circ) = \tan(180^\circ - x)$

4. $\cot(x + 20^\circ) = \cot 2x$

132. Anna järgmiste võrrandite lahendi üldvalem:

1. $2 \sin^2 x = 1$ 3. $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$

2. $\cot^2\left(\frac{2x}{5}\right) = 2$ 4. $\tan^2 x - 6 \tan x + 5 = 0$

5. $\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$

6. $\tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$

133. Leia järgmiste võrrandite lahendid 0° ja 180° vahel:

1. $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$

2. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$

3. $4 \sin^2 x = 3 + 2 \cos x$

4. $5 \sin x + 6 \cos^2 x = 7$

5. $8 \sin^2 x - 2 \cos x = 5$

6. $3 \sin x + \cos x = 0$

7. $4 \cos x + 7 \sin x = 0$

8. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$

9. $2 \sin x - 9 \cos x = 7$

10. $2 \tan x + 3 \cot x = 5$

11. $\tan x + 9 \cot x = 10$

12. $4 \sin^2 x + \tan^2 x = 6.$

134. Anna järgmiste võrrandite lahendid 0° ja 360° vahel:

1. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$
2. $\cos 2x = 2 \cos x$
3. $\cos^2 x = \cos 2x$
4. $\sin x - \cos x = 1$
5. $2(1 - \cos x) = 3 \sin \frac{x}{2}$
6. $\cos x - 2 \sin x = \sin x \cdot \tan x$
7. $\tan(45^\circ + x) - 9 \tan x = 8$
8. $\sin(x + 60^\circ) = 1,5 \sin x + \cos x$

135. Anna järgmiste võrrandite lahendid 0° ja 360° vahel:

1. $\tan x = 3 \sin x$
2. $2 \sin^2 x = \sin x$
3. $\tan^3 x = \tan x$
4. $3 \tan^2 x = 2 \sin x$
5. $6 \cos^2 x = \frac{1}{\tan x}$

136. Jaota nurk 45° kahte ossa nii, et ühe osa tangens oleks kaks korda suurem teise osa tangensist.

137. Jaota nurk 90° kahte niisugusesse ossa, et nende osade siinused suhtuksid nagu 1:2.

138. Täisnurkses kolmnurgas on üks külge kahe teise külje keskmise võrdeline. Määra kolmnurga nurgad.

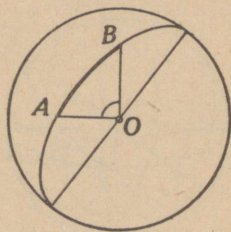
139. Kolmnurga kaks külge on 16 ja 10 meetrit. Esimese külje vastas olev nurk on kaks korda suurem kui teise külje vastas olev nurk. Kui suur on kolmnurga pindala?

§ 14. Sfääriline kolmnurk.

Kõigi kauguste ja nurkade määramisel oleme seni eeldanud, et kaugusi mõõdetakse sirgeid mööda ja nurkade haaradeks on kiired. Paljud mõõtmisülesanded maakera pinnal ja taevavõlvil nõuavad nende eelduste asendamist teistega. Olgu näiteks kahe sadamalinna S_1 ja S_2 geograafilised koordinaadid, laius ja pikkus vastavalt φ_1, λ_1 ja φ_2, λ_2 . Küsimust, kui pikk on otseseim veete nende sadamate vahel, ei saa lahendada lõigu S_1S_2 pikkuse määramise teel; otseseim tee, mis kohti S_1 ja S_2 ühendab, on maakera suurringjoon, mis läbib neid kohti, ja otseseima tee pikkus on selle suurringjoone kaare pikkus punktide S_1 ja S_2 vahel. Küsimus, missuguse nurga moodustab päikese näiv päevane tee taevavõlvil vaatepiiriga, nõuab nurga vaatlemist, mida piiravad kaks suurringjoont taevavõlvil. Kauguste, nurkade ja pindalade määramine kera pinnal on sfäärilise trigonomeetria ülesandeiks.

Olgu antud kera raadiusega r ja olgu A ja B (joonis 19) kaks punkti kera pinnal. Pannes neist kahest punktist ja kera keskkohast läbi tasapinna, näeme, et see tasapind lõikab kera suurringjoont mööda, mis läheb läbi punktide A ja B . Suurringjoone kaar AB on otseseim ja lühim tee punktide A ja B vahel.

Kaar AB sisaldab nii mitu kaarekraadi, kui mitu nurgakraadi sisaldab nurk AOB . Kaares AB sisalduva kraadide arvu c järgi



Joonis 19.

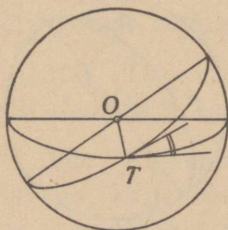
saab otsekohe määrata selle kaare pikkust pikkusmõõdus.

Tõepoolest,

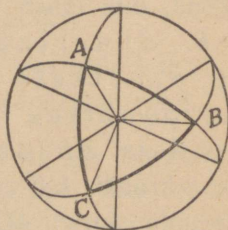
nurgale	360°	vastab suuringjoone	pikkus	$2\pi r$
„	1°	„	kaare pikkus	$\frac{2\pi r}{360}$
„	c°	„	„	pikkus $\frac{2\pi r c}{360} = \frac{\pi r c}{180}$.

Lõikugu kera kaks suuringjoont punktis T (joonis 20); siis needsamad suuringjooned lõikuvad ka veel diametraalselt vastasolevas punktis S . Nurga all, mis need suuringjooned moodustavad teineteisega lõikumisel punktis T , mõistame nurka puutujate vahel, mis punktis T on neile suuringjoontele tõmmatud. Need puutujad on risti raadiusega TO ; seega moodustavad nad lineaarse nurga, mis mõõdab suuringide tasapindade poolt piiratud kahetahulist nurka, mille servaks on TO . Niisiis nurk kahe suuringjoone vahel on võrdne kahetahuse nurgaga nende ringide tasapindade vahel.

Kahe suuringjoone poolt moodustatud nurka nime-tame lühidalt sfääriliseks nurgaks.



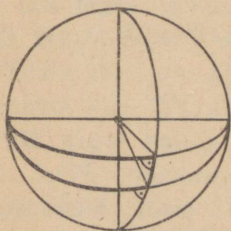
Joonis 20.



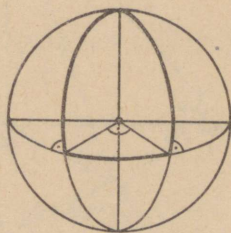
Joonis 21.

Olgu A , B ja C kolm punkti kera pinnal (joonis 21). Paneme punktidest A ja B , B ja C , C ja A läbi suuringid. Nende ringjoonte lühemate kaarte AB , BC ja CA poolt piiratud kerapinna osa nimetatakse sfääriliseks kolmnurgaks ABC . Punkte A , B ja C nimetatakse selle kolmnurga tippudeks, kaari AB , BC ja CA — sfäärilise kolmnurga külgedeks ja nurki, mis moodustavad kaared AC ja CB , CB ja BA , BA ja AC — vastavalt sfäärilise kolmnurga nurkadeks. Nii nurgad kui küljed antakse kraadides ja kraadi alajaotustes. Nurki tippude A , B ja C juures tähistame vastavalt α , β ja γ ; külgi nende nurkade vastas tähistame a , b ja c . Sfäärilises kolmnurgas on kõik küljed väiksemad kui 180° , samuti nurgad.

Sfäärilise kolmnurga külgede ja nurkade vahel kehtivad seosed on mitmeti sarnased tasapinnalise kolmnurga külgede ja nurkade vaheliste seostega. Näiteks on sfäärilises kolmnurgas kahe külje summa suurem kolmandast küljest, võrdsete nurkade vastas asetsevad võrdsed küljed ja suurema nurga vastas asetseb suurem külg. On aga ka olulisi erinevusi tasapinnaliste ja sfääriliste kolmnurkade vahel. Näiteks võib tasapinnalises kolmnurgas leiduda ainult üks täisnurk, sfäärilises kolmnurgas võib neid olla kaks (joonis 22a) või isegi kolm (joonis 22b).



Joonis 22a.



Joonis 22b.

Sfäärilises kolmnurgas võivad kõik kolm nurka olla isegi nürinurgad.

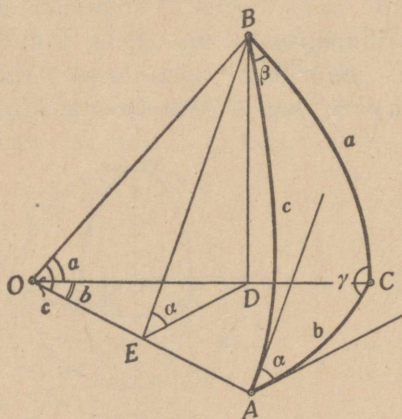
Sfäärilist kolmnurka, millel üks nurk on täisnurk, nimetatakse täisnurkseks sfääriliseks kolmnurgaks.

§ 15. Sfäärilise trigonomeetria siinuslause ja koosinuslause.

Kauguste ja nurkade määramine kera pinnal tugineb kahele teoreemile, mida nimetatakse sfäärilise trigonomeetria siinuslauseks ja sfäärilise trigonomeetria koosinuslauseks.

Siinuslause. Sfäärilises kolmnurgas on külgede siinused võrdelised vastasnurkade siinustega.

Tõestus. Olgu ABC (joonis 23) sfääriline kolmnurk ja olgu nurk γ täisnurk. Ühendame kolmnurga tipud kera keskpunktiga O . Joonestame punktist B



Joonis 23.

ristjoone sirgele OC , nii et $BD \perp OC$, ja paneme läbi BD tasapinna risti sirgema OA . Lõigaku see tasapind sektorit AOC sirget ED ja sektorit AOB sirget EB mööda. Siis on nii ED kui ka EB risti sirgema OA . Seega nurk BED on tahkude BOA ja AOC poolt moodustatud kahetahulise nurga lineaarseks nur-

gaks ja on seetõttu võrdne α -ga. Et nurk γ on täisnurk, siis tasapind BOC on risti tasapinnaga COA ; et BD asetseb tasapinnas BOC ja on risti sirgega OC , siis $\widehat{BDE} = 90^\circ$ ja kolmnurk BDE on täisnurkne. Järelikult

$$\sin \alpha = \frac{BD}{EB}$$

ehk, jagades lugejat ja nimetajat lõiguga OB ,

$$\sin \alpha = \frac{BD:OB}{EB:OB}$$

ehk

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$

ehk

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \sin c.$$

Samal viisil saame, et

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \sin c.$$

Järelikult

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{1}.$$

Et $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$, siis võime tulemuse kirjutada kujul:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Need kaks võrdust avaldavad siinuslause täisnurkse sfäärilise kolmnurga ACB kohta. Olgu nüüd ABC (joonis 24) mingi kaldnurkne sfääriline kolmnurk.

Joonestame punktist C suuringi risti kaarega AB nii, et $CD \perp AB$. Siis kolmnurk ABC jaotub kaheks täisnurkseks kolmnurgaks ADC ja BDC . Tähistame nende kolmnurkade ühise külje CD tähega h ; siis saame praegutõestatud lause järgi kolmnurgast BDC , et

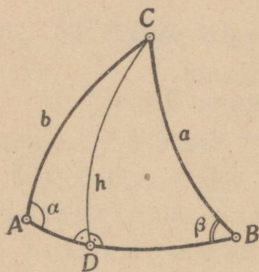
$$\frac{\sin a}{1} = \frac{\sin h}{\sin \beta}$$

ja kolmnurgast ADC , et

$$\frac{\sin b}{1} = \frac{\sin h}{\sin \alpha}$$

Jagades need kaks võrdust liikmeti teineteisega, saame

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$



Joonis 24.

ehk

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

Samal viisil leiaksime, et

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Seega siis

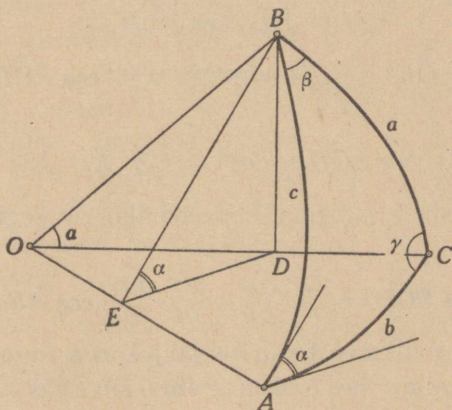
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Neis võrdustes peitub sfäärilise trigonomeetria siinuslause.

Koosinuslause. Sfäärilise kolmnurga külje koosinus on võrdne kahe teise külje koosinuste korrutisega, suurendatud samade külgede siinuste ja vastasnurga koosinuse korrutise võrra.

Olgu ABC mingi sfääriline kolmnurk (joonis 25). Ühendame tema tipud kera keskpunktiga O ja paneme

läbi tipu B tasapinna risti sirgega OA . Lõigaku see tasapind sektorit AOC mööda sirget ED ja sektorit AOB mööda sirget EB . Siis on nii ED kui ka EB risti sirgega OA ja nurk BED , olles tahkude AOB ja AOC poolt moodustatud kahetahulise nurga lineaarseks nur-



Joon. 25.

gaks, on võrdne α -ga. Kolmnurkades BOD ja BED saame nende ühise külje BD ruudu jaoks:

$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2 OB \cdot OD \cdot \cos \widehat{BOD}$$

$$BD^2 = EB^2 + ED^2 - 2 EB \cdot ED \cdot \cos \widehat{BED}.$$

Seega

$$\begin{aligned} OB^2 + OD^2 - 2 OB \cdot OD \cdot \cos \widehat{BOD} &= \\ = EB^2 + ED^2 - 2 EB \cdot ED \cdot \cos \widehat{BED} \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} 2 OB \cdot OD \cdot \cos \widehat{BOD} &= \\ = (OB^2 - EB^2) + (OD^2 - ED^2) + 2 EB \cdot ED \cdot \cos \widehat{BED}. \end{aligned}$$

Et kolmnurk OEB on täisnurkne täisnurgaga tipu E juures ja kolmnurk OED on täisnurkne täisnurgaga samuti tipu E juures, siis

$$OB^2 - EB^2 = OE^2, \quad OD^2 - ED^2 = OE^2$$

ja seepärast

$$\begin{aligned} 2 OB \cdot OD \cdot \cos \widehat{BOD} &= \\ &= OE^2 + OE^2 + 2 EB \cdot ED \cdot \cos \widehat{BED} \end{aligned}$$

ehk

$$OB \cdot OD \cdot \cos \widehat{BOD} = OE^2 + EB \cdot ED \cdot \cos \widehat{BED}.$$

Jagades võrduse mõlemad pooled korrutisega $OD \cdot OB$, saame:

$$\cos \widehat{BOD} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OE}{OB} + \frac{EB}{OB} \cdot \frac{ED}{OD} \cdot \cos \widehat{BED}$$

ehk, viimases liikmes tegurite järjekorda muutes,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Selle võrdusega on tõestatud sfäärilise kolmnurga koosinuslause.

Vahetades tsükliliselt tähti a , b , c , saame avaldised kahe teise külje koosinuse jaoks.

Kokkuvõttes:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta$$

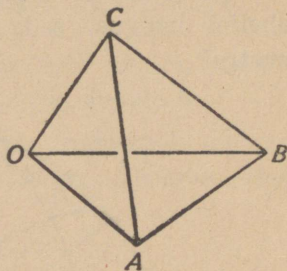
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \gamma.$$

§ 16. Sfäärilise trigonomeetria siinuslause ja koosinuslause rakendusi.

Lahendame mõned ülesanded koosinuslause ja siinuslause rakendamise viisi selgitamiseks.

Ülesanne 1. Kui suur on korrapärase tetraeedri tahknurk?

Lahendus. Korrapärane tetraeeder on kolmetahuline püramiid (joonis 26), mille kõik servad on võrdsed. Tähistame püramiidi tipu tähega O ja aluse tipud tähtedega A , B ja C . Kujutame ümber O kui keskpunkti kera raadiusega OA . Siis punktid A , B ja C määravad sellel keral sfäärilise kolmnurga, mille küljed a , b ja c on isekeskis võrdsed, ühise suurusega 60° : $a = b = c = 60^\circ$. Samuti on isekeskis võrdsed nurgad α , β ja γ , võrdudes tetraeedri tahknurgaga. Koosinuslausest



Joonis 26.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos \alpha,$$

saame, arvestades võrdust $a = b = c$, et

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cos \alpha$$

ehk

$$\cos a = \cos^2 a + (1 - \cos^2 a) \cos \alpha$$

ehk

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos^2 a}{1 - \cos^2 a}$$

ehk, taandades,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}.$$

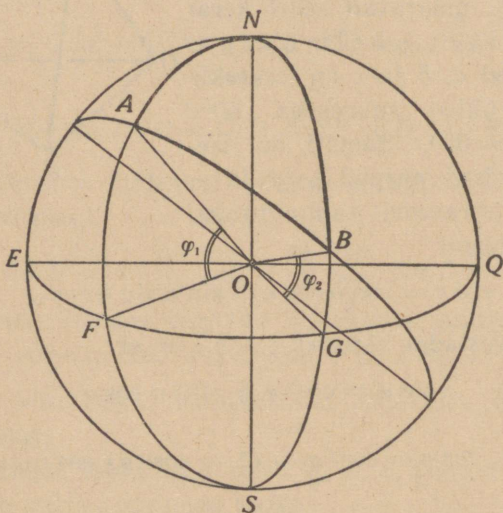
Et aga $\cos a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, siis

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3} = 0,3333,$$

millele vastab nurk $\alpha = 70^\circ 32'$.

Vastus. Tetraeedri tahknurk on $70^\circ 32'$.

Ülesanne 2. Kaks kohta maakera pinnal A ja B (joonis 27) omavad geograafilisi koordinaate $(\varphi_1 | \lambda_1)$ ja $(\varphi_2 | \lambda_2)$, kusjuures φ tähendab geograafilist laiust, λ — geograafilist pikkust. Kui suur on nende kohtade vaheline kaugus, seda kaugust maakera pinda mööda arvates?



Joonis 27.

Lahendus. Paneme suurringid läbi punkti A ja pooluse N , läbi punkti B ja pooluse N , lõpuks läbi punktide A ja B . Saame sfäärilise kolmnurga ANB . Olgu $EFGQ$ ekvaator. Siis näeme joonisest, et $\widehat{FA} = \varphi_1$, $\widehat{GB} = \varphi_2$, seega $\widehat{AN} = 90^\circ - \varphi_1$, $\widehat{BN} = 90^\circ - \varphi_2$. Edasi on $\widehat{EF} = \lambda_1$, $\widehat{EG} = \lambda_2$, seega $\widehat{FG} = \lambda_2 - \lambda_1$, järelikult ka nurk $\angle ANB = \lambda_2 - \lambda_1$. Tähistades tundmatu kauguse, s. o. kaare AB , tähega d , saame koosinuslause põhjal, et

$$\cos d = \cos (90^\circ - \varphi_1) \cos (90^\circ - \varphi_2) + \\ + \sin (90^\circ - \varphi_1) \sin (90^\circ - \varphi_2) \cos (\lambda_2 - \lambda_1)$$

ehk

$$\cos d = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ülesanne 3. Millises sihis peab lennuk väljuma kohast A , et lühemat teed mööda jõuda kohale B ?

Lahendus. Otsitav siht on määratud nurgaga NAB (joonis 27). Märkides selle tähega α , leiame siinuslause põhjal, et

$$\frac{\sin (90^\circ - \varphi_2)}{\sin \alpha} = \frac{\sin d}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}$$

ehk

$$\frac{\cos \varphi_2}{\sin \alpha} = \frac{\sin d}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}$$

ehk

$$\sin \alpha = \frac{\cos \varphi_2 \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin d}.$$

Viimases võrduses on teada φ_2 , $\lambda_2 - \lambda_1$ ja eelmisest ülesandest ka d , seega saame leida $\sin \alpha$ ja selle järgi ka nurga α .

Ülesanded.

140. Missuguse seose sfäärilise kolmnurga elementide vahel annab koosinuslause, kui kolmnurk on täisnurkne, näiteks nurk $\gamma = 90^\circ$?

141. Lahenda sfääriline kolmnurk, kui

$$1. \quad a = 48^\circ \quad b = 36^\circ \quad c = 72^\circ$$

$$2. \quad a = 65^\circ 12' \quad b = 80^\circ 42' \quad c = 124^\circ 50'$$

$$3. \quad a = 130^\circ 48' \quad b = 68^\circ 12' \quad c = 44^\circ 06'$$

142. Lahenda sfääriline kolmnurk, kui

$$a = 78^\circ \quad b = 60^\circ \quad \gamma = 110^\circ.$$

143. Kui pikk on õhutee Tallinna ja Berliini vahel, kui Tallinna ja Berliini geograafilised koordinaadid on vastavalt $59^{\circ}26' N$ ja $24^{\circ}48' E$ ning $52^{\circ}31' N$ ja $13^{\circ}24' E$?

144. Allpoolantud maakera kahe punkti geograafiliste koordinaatide järgi leia punktide vaheline lühim kaugus, samuti algkurs, millega lennuk ühest punktist teise lennates stardib, ja lõppkurs, millega ta jõuab sihtkohta.

- | | | |
|----|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. | $\varphi_1 = 43^{\circ}40' N$ | $\lambda_1 = 70^{\circ}5' W$ |
| | $\varphi_2 = 6^{\circ}15' N$ | $\lambda_2 = 12^{\circ}10' W$ |
| 2. | $\varphi_1 = 34^{\circ}45' N$ | $\lambda_1 = 139^{\circ}48' E$ |
| | $\varphi_2 = 37^{\circ}47' N$ | $\lambda_2 = 122^{\circ}30' E$ |
| 3. | $\varphi_1 = 48^{\circ}10' N$ | $\lambda_1 = 4^{\circ}5' W$ |
| | $\varphi_2 = 5^{\circ}0' N$ | $\lambda_2 = 62^{\circ}10' E$ |

§ 17. Ülesandeid kordamiseks.

145. Lahenda järgmised võrrandid:

- $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - b) = (a^2 - 1)b$
- $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 1 + \sqrt{x} - 3x$
- $(5\sqrt{x} - 2)^2 + (12\sqrt{x} - 9)^2 = (13\sqrt{x} - 9)^2$
- $a(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = b(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$
- $2n = \sqrt{2nx} + \sqrt{6nx - 4n^2}$
- $\sqrt{x^2 - x - 10} - \sqrt{x^2 - 11x} = 10$
- $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-4}$
- $\sqrt{7x} = \sqrt{3x+12} - \sqrt{3-x}$
- $2\sqrt{x-1} - \sqrt{10x+2} + \sqrt{2}\sqrt{x+1} = 0$
- $\sqrt{a^2 + bx} + \sqrt{a^2 - bx} = \sqrt{2abx}$

M 146. Määra valemist

$$V = \sqrt{\frac{1}{p + \frac{a}{r}}}$$

suurus r .

M 147. Kui suur on kraadmõõdus nurk, mille absoluutmõõt on $\sin 45^\circ$?

M 148. Kui suur on $\sin 1$, $\cos \frac{1}{2}$, $\tan \frac{1}{3}$ ja $\cot \frac{1}{4}$?

M 149. Kui suur kesknurk vastab kaarele 0,5 raadiuse puhul 0,8?

M 150. Kui suur nurk on sektoril, mille raadius on 1,414 ja pindala on 0,5?

M 151. Lahenda järgmine logaritmvõrrand:

$$2 + \log(x^2 - 0,004) = \log(x + 2) + \log 2.$$

H 152. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $4^{x+1} = 64 \cdot 2^{x+1}$

6. $\sqrt[8]{8^{2x-3}} = 32$

2. $(\frac{1}{9} \cdot 9^x)^x = 3^{2x+6}$

7. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$

3. $75^x \cdot 27^x = 1467$

8. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$

4. $x^{\log x} = 100x$

9. $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$

5. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

10. $24 \cdot 4^x - 4^{x+1} = 8^x \cdot 5$

M 153. Mitu kraadi on nurgas $\frac{18\pi}{7}$?

M 154. Olgu $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ja $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Arvuta $\cos(\alpha + \beta)$ ja $\sin(\alpha - \beta)$.

M 155. Olgu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ja $\sin \alpha = \frac{24}{25}$. Arvuta $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$.

M 156. Olgu $\sin \alpha - \cos \alpha = m$. Arvuta $\sin 2\alpha$.

M 157. Lihtsusta avaldis

$$\sin \theta + \sin (2\pi + \theta) + \sin (4\pi + \theta) + \sin (-\theta).$$

T 158. Näita, et

$$\sin \theta + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{4} + \theta \right) + \sin (3\pi + \theta) = 0.$$

T 159. Näita, et

$$[1 - \cos (270^\circ + \alpha)] [1 - \cos (270^\circ - \alpha)] = \cos^2 \alpha.$$

M 160. Lihtsusta avaldis

$$\frac{\pi \sin \alpha \tan (\pi + \alpha)}{\tan \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}.$$

4 161. Arvuta x -i väärtus järgmisest tema avaldisest:

$$1. x = \frac{\sin^2 (45^\circ + \alpha) - \sin^2 (45^\circ - \alpha)}{\cos^2 (45^\circ + \alpha) - \cos^2 (45^\circ - \alpha)}$$

$$2. x = \cos (36^\circ + \alpha) \cos (54^\circ - \alpha) - \sin (36^\circ + \alpha) \sin (54^\circ - \alpha)$$

$$3. x = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}$$

$$4. x = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} - \sin \alpha \tan \alpha$$

$$5. x = \cos^2 (45^\circ - \alpha) - \sin^2 (45^\circ - \alpha) - \sin 2\alpha$$

162. Anna järgmistele avaldistele logaritmitav kuju:

1. $\frac{1}{2} + \sin 20^\circ$

5. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 24^\circ$

2. $\frac{3}{4} - \sin^2 38^\circ$

6. $4 + 7 \cos a$

3. $5 + 6 \tan 56^\circ$

7. $8 - 3 \tan a$

4. $\frac{1}{2} + \cos 70^\circ$

8. $1 + \cot a$

163. Anna järgmistele avaldistele logaritmitav kuju:

1. $\sin a + \tan a$

6. $\frac{\sin a - \sin \beta}{\sin(a - \beta)}$

2. $\cos a - \cot a$

7. $\frac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a}$

3. $2 \sin a - \sin 2a$

8. $\frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}$

4. $2 \cos a + \sin 2a$

9. $\frac{\tan 2a \cdot \tan a}{\tan 2a - \tan a}$

5. $\frac{\sin a + \sin \beta}{\sin(a + \beta)}$

10. $\frac{1}{1 + \tan a \tan 2a}$

164. Leia kolmnurga nurgad, teades, et tema küljed on võrdelised arvudega 2, $\sqrt{6}$ ja $1 + \sqrt{3}$.

165. Näita, et täisnurkses kolmnurgas on kehtivad järgmised seosed:

1. $\sin 2a = \frac{2ab}{c^2}$

3. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{c-b}{2c}$

2. $\cos 2a = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$

4. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{c+b}{2c}$

5. $\frac{a}{b+c} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{c-b}{a}$

6. $\tan^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{c-a}{c+a} = \tan^2 \frac{\beta}{2}$

ET 166. Näita, et juhul, kui

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma,$$

kolmnurk on täisnurkne.

167. Lahenda võrrandid:

1. $\sin(x - 90^\circ) + \sin 90^\circ = \sin(x + 90^\circ)$

2. $2 \sin x = 3 \cos \frac{x}{2}$

3. $10(1 + \cos x) = 9 \sin x$

4. $\tan ax \cdot \cot bx = 1$

5. $\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3} = 0$

6. $\tan x + \cot x = 4 \cot 2x$

7. $\tan x - \cot x = \frac{4}{3} \sin 2x$

8. $1 + \tan x = \sqrt{3}(1 + \cot x)$

9. $\tan(45^\circ + x) = 3 \tan(45^\circ - x)$

10. $\sin 5x + \sin 3x = \cos x$

E 168. Täisnurkses kolmnurgas on üks kaatet 25 cm ja teise kaateti projektsioon hüpotenuusile 15 cm. Kui suur on kolmnurga väikesim nurk?

E 169. Täisnurkses kolmnurgas ABC nurga β poolitaja jaotab kaateti AC osadeks CD ja DA , mis suhtuvad nagu 1 : 2. Määra nurk β .

Hind Rmk. 3.—