

ALBERT BORKVELL

**Tasapinnalise ja ruumilise
analüütilise geomeetria
põhijooni**

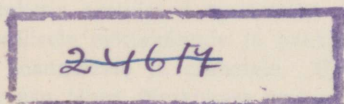
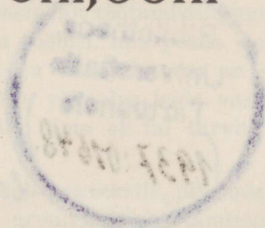


AKADEEMILISE KOOPERATIIVI KIRJASTUS

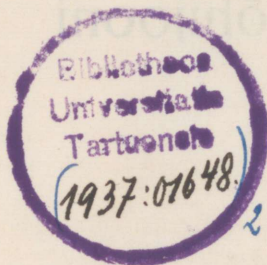
TASAPINNALISE JA RUUMILISE
ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA
PÕHIJOOINI

ALBERT BORKVELL

Tasapinnalise ja ruumilise
analüütilise geomeetria
põhijooni

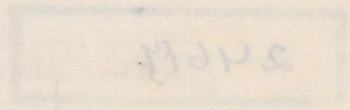


AKADEEMILISE KOOPERATIIVI KIRJASTUS
TARTU 1937



2-56649

A-10479



Eessõna.

Käesolev teos, mis on välja kujunenud tegelikust tööst Tallinna Tehnika-instituudis, seab oma eesmärgiks tutvustada üliõpilasi tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhielementidega ja seega varustada neid uurimisvahendiga, mis edaspidi on rakendatav nii matemaatiliste kui ka füüsikaliste ning tehniliste probleemide lahendamisel. Eriti viimast silmas pidades on ainepalad käsitletud lihtsal ja võimalikult konkreetsetel kujul. On loobutud pikkadest formaalsetest arutlustest, tõestustest ja mõttekäikudest kergemini mõistetava intuiitiivse selgituse kasuks ja seega püütud igati kergendada teose läbitöötamist. Tasapinnalist ja ruumilist osa pole hoitud lahus, vaid mõlemad osad on vastavalt töötamistingimustele Tallinna Tehnika-instituudis käsitletud peaaegu rööbiti, mis peaks olema meetoodiliselt täiesti vastuvõetav. Raamatu sisu kogu oma ulatuses on püütud koostada sääraselt, et raamatu kasutajal oleks võimalus leida vastus teatavale küsimusele otseselt vastavast paragraafist, ilma et tal tarvitseks selleks tervet teose eelnevat osa läbi töötada.

Raamatus on loobutud näidetest tekstis, piirdudes vaid mõningate põhjaneva tähtsusega küsimuste arvulise läbitöötamisega. Selle asemel on teos varustatud arvuka ja valitud harjutusülesannete koguga, mis on paigutatud iga peatüki lõppu ja mis on ühtlasi selgituseks ja täienduseks vastavas peatükis esitatud teoreetilisele osale. Nende harjutusülesannete hulgas esineb ka sääraseid, mis võimaldavad üliõpilasel vähese vaevaga tunduvalt täiendada tekstis arendatud teoreetilist materjali, juhtides seega teda iseisvale loogilisele mõttekäigule ja pakkudes samal ajal kontrolli varemini omandatud teadmiste ja oskuste. Ülesannete lahenduste kontrolliks on toodud raamatu lõpus ülesannete vastused ja valemite kasutamise kergenduseks ülesannete lahendamisel on raamatu lõppu eriosana paigutatud kõigi teoses esinevate valemite tabel.

Loodan, et käesolev teos suudab pakkuda vajalikku materjali eespooltähendatud eesmärgi taotlemisel ja rahuldada nõudeid, mis käsitletud ulatuses on vajalikud ühel või teisel alal nii matemaatiku kui ka füüsiku ja inseneri seisukohalt.

Tallinn, november 1937.

A. Borkvell.

I p e a t ü k k .

Determinandid.

§ 1. Permutatsioonid.

Kui meil on n elementi

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

mis moodustavad indeksite loomulikus järjestuses põhirühmitise ehk põhipermutatsiooni

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_n),$$

siis teame, et selle rühmitise elemente kahekaupa ümber paigutades saame

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

permutatsiooni ehk rühmitist, mis erinevad üksteisest ainult elementide järjestusega.

Olgu meil, näiteks, 5-st elemendist koosnev mingisugune permutatsioon

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$$

ja samadest elementidest teises järjestuses mõni teine permutatsioon

$$(a_2 a_4 a_1 a_3 a_5).$$

Esimesest permutatsioonist saame teise, kui elemente kahekaupa järk-järgult ümber paigutada. Paigutame esimeses permutatsioonis, näiteks, kõigepealt ümber a_1 ja a_2 , saame

$$(a_2 a_1 a_3 a_4 a_5),$$

siis saadud permutatsioonis paigutame ümber a_1 ja a_3 :

$$(a_2 a_3 a_1 a_4 a_5)$$

ning lõpuks paigutame ümber a_3 ja a_4 :

$$(a_2 a_4 a_1 a_3 a_5),$$

mis on eespool-esinev teine permutatsioon.

Esimesest permutatsioonist võime saada teise, kui me elemente kahekaupa järk-järgult ümber paigutame. Eesmärgile jõuame ka siis, kui me ainult kõrvuseisvaid elemente, s. o. naaberelemente permuteerime. Niisugust kahe mistahes elemendi ümberpaigutust nimetatakse *transpositsiooniks*.

Kui põhipermutatsioonis ümber paigutada mõned elemendid, siis öeldakse, et uues permutatsioonis moodustavad *inversiooni* need kaks elementi, mis ei esine põhipermutatsioonis nõutud järjestuses, s. o. kui üks neist, mis põhipermutatsioonis oleks teisele eelnev element, esineb teisest tagapool. Nii permutatsioonis

$$(a_2 a_5 a_4 a_1 a_3)$$

a_2 moodustab inversiooni a_1 -ga, a_5 moodustab inversiooni a_4 -ga, a_1 -ga ja a_3 -ga ning a_4 moodustab inversiooni a_1 -ga ja a_3 -ga. Seega on selles permutatsioonis kuus inversiooni: $(a_2 a_1)$, $(a_5 a_4)$, $(a_5 a_1)$, $(a_5 a_3)$, $(a_4 a_1)$ ja $(a_4 a_3)$.

Kõige suurem inversioonide arv on põhipermutatsioonile vastavas vastaspermutatsioonis

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1).$$

Inversioonide arv on siin

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 3 + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Iga permutatsioon sisaldab kas paaritu või paarisarvu inversioone või 0 inversiooni (põhipermutatsioon). Selle järgi jaotatakse ka permutatsioonid paaritu klassi ja paarisklassi permutatsioonideks, kusjuures 0 inversiooni sisaldav permutatsioon loetakse paarisklassi permutatsioonide hulka.

On arusaadav, et permutatsioonis naaberelementide ümber-

paigutusel inversioonide arv muutub ühe võrra (kas kasvab või kahaneb). Kui permutatsioonis

$$(a_4 a_2 a_3 a_1 a_5 a_6 a_8 a_7)$$

näiteks elemendid a_3 ja a_8 ümber paigutada, siis võime seda ümberpaigutust teha naaberelementide transpositsioonide abil, viies a_3 esiteks a_1 taha, siis a_5 taha, siis a_6 taha ja lõpuks a_8 taha; seega saame 4 transpositsiooniga permutatsiooni

$$(a_4 a_2 a_1 a_5 a_6 a_8 a_3 a_7).$$

Edasi, toome a_8 nüüd a_6 ette, siis a_5 ette ja lõpuks a_1 ette, tehes seega veel 3 transpositsiooni, s. o. 1 võrra vähem kui enne. Kokku $4 + 3 = 7$ transpositsiooniga saame otsitava permutatsiooni

$$(a_4 a_2 a_8 a_1 a_5 a_6 a_3 a_7).$$

Üldiselt, kui permutatsioonis kaks elementi ümber paigutada, siis võime ühe elemendi elasi viia, teda järk-järgult ümber paigutades järgnevate naaberelementidega. Oletame, et see toimub k korda (k transpositsiooniga). Siis võime teise elemendi tagasi tuua, teda järk-järgult ümber paigutades eelnevate naaberelementidega. See toimub siis $(k - 1)$ transpositsiooniga. Seega kahe elemendi ümberpaigutuseks naaberelementide kaudu kulub $k + (k - 1) = (2k - 1)$ transpositsiooni. $(2k - 1)$ on paaritu arv. Täheleb, inversioonide arv kahe mistahes elemendi ümberpaigutusega muutub paaritu arvu võrra. Sellest järeldub, et iga transpositsiooni puhul paaritu klassi permutatsioon muutub paarisklassi permutatsiooniks, ja ümberpöörduvalt: paarisklassi permutatsioon muutub paaritu klassi permutatsiooniks.

Kui meil on $n!$ permutatsiooni, mis on alati paarisarv, kui $n \geq 2$, siis ka öeldust järeldub, et paaritu ja paarisklassi permutatsioonide on ühepalju, s. o. $\frac{n!}{2}$ paaritu klassi ja $\frac{n!}{2}$ paarisklassi permutatsiooni.

Kui ühest permutatsioonist saadakse teine permutatsioon kahel teel, üks kord k transpositsiooniga ja teine kord m transpositsiooniga, siis on k ja m kas mõlemad paaritud või mõlemad paarisarvud. Kui näiteks paarisklassi permutatsioonist k ja m transpositsiooniga saame ühe ja sama uue paarisklassi permutatsiooni, siis on k ja m mõlemad paarisarvud; kui aga paarisklassi

permutatsioonist k ja m transpositsiooniga saame ühe ja sama uue paaritu klassi permutatsiooni, siis on k ja m mõlemad paari-
tud arvud.

§ 2. Determinandi definitsioon.

Olgu meil n^2 arvu või elementi järgmiselt korraldatud

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1(n-2)}, & a_{1(n-1)}, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2(n-2)}, & a_{2(n-1)}, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots, & a_{3(n-2)}, & a_{3(n-1)}, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{n(n-2)}, & a_{n(n-1)}, & a_{nn}, \end{array}$$

kus kahekordsetest indeksitest esimene näitab rida ja teine veergu, milles element asetseb.

Niisugune n^2 elemendi või arvu korraldis, kus esineb n rida ja n veergu, nimetatakse ruutmatriksiks ehk lihtsalt matriksiks. Selle matriksi arvude diagonaal (lugedes ülalt vasemalt alla paremale poole)

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

on selle matriksi peadiagonaal. Matriksi elementide teise diagonaali (a_{1n} kuni a_{n1}) nimetame kõrvaldiagonaaliks.

Võtame matriksi 3^2 elemendiga

$$\begin{array}{ccc} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{array}$$

ja moodustame neist 9 elemendist 3 elemendi kaupa kõikide võimalikkude korrutiste summa nii, et igas korrutises oleks iga kord igast reast ja igast veerust ainult üks element. Seega igas korrutises peavad esinema kõik indeksid 1, 2 ja 3, ja ka kõik tähed a , b ja c .

Peadiagonaali elementidest a_1 , b_2 ja c_3 moodustame esimese korrutise

$$a_1 b_2 c_3,$$

milles matriksi igast reast ja igast veerust esineb ainult üks element.

Et igas korrutises peab esinema igast reast ja ka igast veerust ainult üks element, siis kõik $a b c$ korrutised saame, kui permuteerime indekseid 1, 2 ja 3, mis annab $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutatsiooni:

$$a_1 b_2 c_3, a_1 b_3 c_2, a_2 b_3 c_1, a_2 b_1 c_3, a_3 b_1 c_2, a_3 b_2 c_1.$$

Samad korrutised saame ka, kui jätta indekseite järjestus endiseks ja permuteerida tähti a , b ja c . Tähti permuteerides saame

$$a_1 b_2 c_3, a_1 c_2 b_3, b_1 c_2 a_3, b_1 a_2 c_3, c_1 a_2 b_3, c_1 b_2 a_3,$$

mis on suuruselt samad korrutised kui eelmisedki.

Loeme peadiagonaali elementidest moodustatud korrutisele

$$a_1 b_2 c_3$$

vastava indekseite järjestuse põhipermutatatsiooniks ja märgime teistest permutatsioonidest kõik paarisklassi permutatsioonid pluss-märgiga ja paaritu klassi permutatsioonid miinus-märgiga.

Esimeses reas on indekseite suhtes esimene, kolmas ja viies permutatsioon paarisklassi permutatsioonid, seega pluss-märgiga; teine, neljas ja kuues permutatsioon on paaritu klassi permutatsioonid, seega miinus-märgiga. Permutatsioonide klasse arvestades võime kirjutada permutatsioonid järgmiselt:

$$+ a_1 b_2 c_3, - a_1 b_3 c_2, + a_2 b_3 c_1, - a_2 b_1 c_3, + a_3 b_1 c_2, - a_3 b_2 c_1.$$

Teises reas on tähtede suhtes esimene, kolmas ja viies permutatsioon paarisklassi permutatsioonid; teine, neljas ja kuues permutatsioon on paaritu klassi permutatsioonid. Seega võime kirjutada:

$$+ a_1 b_2 c_3, - a_1 c_2 b_3, + b_1 c_2 a_3, - b_1 a_2 c_3, + c_1 a_2 b_3, - c_1 b_2 a_3.$$

Võrreldes esimeses ja teises reas esinevaid korrutisi näeme, et nad on paarikaupa nii suuruselt kui märkidelt isekeskis võrdsed. Seega ka esimese rea liikmete summa on võrdne teise rea liikmete summaga.

Kui arvestada märke, siis nende kuue korrutise summa nimetatakse maatriksi

$$\begin{array}{ccc} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{array}$$

determinandiks ja tähistatakse järgmiselt

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 = \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3, \end{aligned}$$

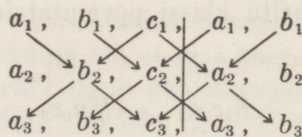
kus Δ_3 tähendab kolmerealist ehk kolmanda järgu determinanti, kusjuures maatriksi determinandi tähisena paigutatakse kahe vertikaalse kriipsu vahele.

Peadiagonaali elementidest moodustatud korrutist nimetatakse determinandi pealiikmeks ja determinant tähistatakse tema kaudu ka järgmiselt:

$$\Delta_3 = \sum \pm a_1 b_2 c_3,$$

kus Σ tähendab korrutiste summat, mis saadakse pealiikme $a_1 b_2 c_3$ indeksite või tähtede permuteerimisel, võttes paarisklassi permutatsioonid pluss-märgiga ja paaritu klassi permutatsioonid miinus-märgiga.

Kolmanda järgu determinandi lahendamiseks märgime järgmise skeemi



kirjutades determinandile lisaks sama determinandi esimese ja teise veeru. Võttes peadiagonaali ja sellega rööbikute diagonaalide elementide korrutised pluss-märgiga ning kõrvaldiagonaali

ja sellega rööbikute diagonaalide elementide korrutised miinusmärgiga, saame

$$\Delta_3 = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3,$$

mis on identne eespool-saadud kolmanda järgu determinandi arendusreaga.

Analoogiliselt toimime, kui meil on kolmanda järgu determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

mille elemendid on tähistatud kahekordsete indeksitega, kus esimene indeks näitab determinandi rida ja teine indeks determinandi veergu, milles element asetseb.

Võttes selle determinandi pealiikme

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

ja permuteerides esimesi indekseid ning arvestades nende indeksite suhtes paaris- ja paaritu klassi permutatsioone, saame

$$\begin{aligned} &+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &- a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}, \end{aligned}$$

mis on identne eespool-saadud esimese reaga, kus permuteerusid indekseid 1, 2 ja 3. Permuteerides teisi indekseid ja arvestades nende indeksite suhtes paaris- ja paaritu klassi permutatsioone, saame

$$\begin{aligned} &+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

mis on identne eespool-saadud teise reaga, kus permuteerusid tähed a , b ja c . Seega

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Teise järgu determinant on

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esimese järgu determinant $|a|$ on lihtsalt a .

Kui kolmanda järgu determinandi arendusreas (näit. teises arendusreas) rühmitada liikmed kahekaupa ja võtta neis ühine tegur sulgude ette, siis näeme, et

$$\Delta_3 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

milles sulgavaldised kujutavad teise järgu determinante:

$$\Delta_3 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Neljanda järgu determinant

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

annab $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ liiget. Permuteerides esimesi või teisi indekseid, saame

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - \\ & - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + \\ & + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - \\ & - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + \\ & + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - \\ & - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}. \end{aligned}$$

Üldiselt, kui meil on n järgu determinant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn},$$

siis võtame peadiagonaali elemendid $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ ja moodustame neist pealiikme

$$a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn},$$

milles igast reast ja igast veerust esineb ainult üks element. Kui arvestada selle korrutise elementide esimesi või teisi indekseid, siis kujutab see rühmitis põhipermutatsiooni. Permuteerides ainult esimesi indekseid saame kõik teised permutatsioonid, kusjuures kõik paarisklassi permutatsioonid võtame pluss-märgiga ja paaritu klassi permutatsioonid miinus-märgiga. Kõikide nende permutatsioonide summa

$$\begin{aligned} &+ a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} - \\ &- a_{21}a_{12}a_{33} \dots a_{nn} + \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &- \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

on ülaltähendatud determinandi väärtus.

Permuteerides ainult teisi indekseid, saaksime samad permutatsioonid samade märkidega.

§ 3. Determinandi omadused.

1) Determinandi väärtus ei muutu, kui read ümber vahetada veergudega, s o.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mõlemas determinandis on peadiagonaali elemendid ühed ja samad ning ühes ja samas järjestuses. Mõlema determinandi pealiige on

$$a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

Permuteerides pealiikme esimesi või teisi indekseid saame determinandi definitsiooni põhjal teised determinandi liikmed, kokku $P_n = n!$ liiget, mille summa määrab nii esimese kui ka teise determinandi ühise väärtuse.

2) Kui determinandi ühe rea või veeru kõik elemendid on 0-id, siis on determinandi väärtus 0, s. o.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Kui arendame esimese või teise determinandi definitsiooni põhjal kõikide võimalikkude korrutiste summaks, kus igas korrutises oleks iga kord igast reast ja igast veerust ainult üks element, siis näeme, et igas korrutises esineb 0 ühe tegurina. Seega on determinandi arendusrea kõik liikmed võrdsed 0-ga ja järelikult ka determinandi väärtus on 0.

3) Kui determinandi kaks rida või veergu ümber vahetada, siis muutub determinandi märk, s. o.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kahe rea ümbervahetusel determinandi pealiikmes vahetavad ümber kahe elemendi esimesed indeksid. Siin toimub esimeste indeksite suhtes üks või $(2k - 1)$ transpositsiooni ja pealiige kui paarisklassi permutatsioon muutub paaritu klassi permutatsiooniks ning omab seega vastupidist märki. Teised liikmed, mis on saadud esimese determinandi pealiikmest, näiteks paarisarvu transpositsioonidega, saadakse nüüd teise determinandi pealiikmest paaritu arvu transpositsioonidega ja omavad seega vastasmärki. Järelikult, esimese ja teise determinandi kõik liikmed on isekeskis absoluutselt võrdsed, kuid vastasmärkidega.

Kui determinandis ümber vahetada kaks veergu, siis toimub sama nähtus, opereerides ainult teiste indeksitega.

Kui determinandis on mitu rida või veergu ümber vahetatud, siis on determinant pluss-märgiga, kui pealiige on paarisklassi permutatsioon, ja miinus-märgiga, kui pealiige on paaritu klassi permutatsioon.

4) Kui determinandi kahe rea või veeru vastavad elemendid on isekeskis võrdsed, siis on determinandi väärtus 0, s. o.

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{12}, & a_{14}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{22}, & a_{24}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{32}, & a_{34}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n2}, & a_{n4}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Kui vahetada ümber teine ja kolmas veerg, siis saame sama determinandi vastasmärgiga. Kuid suurus, mille väärtus on ühelt poolt positiivne ja teiselt poolt negatiivne, on üks ja sama ainult siis, kui ta on 0, s. o. kui $\Delta_n = -\Delta_n$, siis $2\Delta_n = 0$ ja $\Delta_n = 0$.

5) Kui determinandi ühe rea või veeru elemendid korrutada ühe ja sama arvuga m , siis determinandi väärtus kasvab m korda, s. o.

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ ma_{21}, & ma_{22}, & \dots, & ma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & ma_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & ma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & ma_{nn} \end{vmatrix} = \\ = m \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Et determinandi arendusrea igas liikmes esineb determinandi igast reast ja igast veerust ainult üks element, siis esineb tegurina igas liikmes ka arv m , mis on ühe rea või veeru elementide tegur, ja mille võime tuua üldiselt sulgude ette ja seega ka determinandi tähise ette.

6) Kui determinandi ühe rea või veeru elemendid on võrdelised vastavalt teise rea või veeru elementidega, siis on determinandi väärtus 0.

Arvestades determinandi eelmisi omadusi, võime kirjutada:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ma_{12} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ma_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ma_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ma_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= m \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} & \dots & ma_{2n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

§ 4. Alamdeterminandid.

Meil on teada, et determinandi

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

arendusrea iga liige sisaldab igast reast ja igast veerust ainult ühe elemendi. Et determinandis on n^2 elementi ja ta arendusreas $n!$ liiget, siis sellest nähtub, et üht ja sama elementi sisaldavad mitu arendusrea liiget, kui $n > 2$.

Eraldame arendusreas näiteks determinandi esimese rea elementidega

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$$

liikmed. Kogume ühte rühma need liikmed, mis sisaldavad a_{11} ;

teise rühma liikmed, mis sisaldavad a_{12} ; kolmandasse rühma liikmed, mis sisaldavad a_{13} , jne., ning viimasesse rühma need liikmed, mis sisaldavad a_{1n} . Võtame rühmades ühised tegurid a_{11} , a_{12} , a_{13} , ..., a_{1n} sulgude ette ja märgime need avaldised, mis jäävad sulgudesse, vastavalt

$$A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1n},$$

siis saame determinandi kujus

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Kui eraldame determinandi arendusreas determinandi mistahes rea, näiteks k -rea elemendid

$$a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn},$$

siis analoogiliselt toimides saaksime determinandi kujus

$$\Delta_n = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3} + \dots + a_{kn}A_{kn},$$

kus $a_{k1}A_{k1}$ tähendab determinandi arendusrea nende liikmete summat, mis sisaldavad tegurina elemendi a_{k1} , jne.

Samuti, kui eraldame mistahes veeru, näiteks m -veeru, elemendid

$$a_{1m}, a_{2m}, a_{3m}, \dots, a_{nm},$$

siis determinant väljenduks kujus

$$\Delta_n = a_{1m}A_{1m} + a_{2m}A_{2m} + a_{3m}A_{3m} + \dots + a_{nm}A_{nm}.$$

Allpool näeme, et sulgavaldised

$$A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1n}$$

$$A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}, \dots, A_{kn}$$

$$A_{1m}, A_{2m}, A_{3m}, \dots, A_{nm}$$

kujutavad samuti determinante, kuid väiksema arvu elementidega kui seda on determinant Δ_n . Seepärast nimetatakse neid a l a m -determinantideks ehk minoorideks.

Võtame kõigepealt kolmanda järgu determinandi

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + \\ + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$$

ja eraldame arendusreas determinandi esimese rea elemendid. Kogume ühte rühma liikmed, mis sisaldavad a_1 ; teise rühma liikmed, mis sisaldavad b_1 , ja kolmandasse rühma liikmed, mis sisaldavad c_1 . Saame

$$\Delta_3 = a_1(b_2 c_3 - c_2 b_3) - b_1(a_2 c_3 - c_2 a_3) + c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix},$$

kus sulgavaldised kujutavad teise järgu determinante, mis on kolmanda järgu determinandi esimese rea elementide a_1 , b_1 ja c_1 alamdeterminandid.

Neid alamdeterminante kõrvutades algdeterminandiga Δ_3 näeme, et elemendi a_1 alamdeterminant saadakse, kui ära jätame algdeterminandis selle rea ja selle veeru, milles esineb a_1 , s. o. esimese rea ja esimese veeru; elemendi b_1 alamdeterminant saadakse, kui ära jätame algdeterminandis selle rea ja selle veeru, milles esineb b_1 , s. o. esimese rea ja teise veeru, ja elemendi c_1 alamdeterminandi saame, kui ära jätame algdeterminandis jälle selle rea ja selle veeru, milles esineb c_1 , s. o. esimese rea ja kolmanda veeru.

Esimese alamdeterminandi märk on siin pluss, teisel miinus ja kolmandal pluss. Kui esimese alamdeterminandi märk on pluss, siis teiste alamdeterminantide märgid saame määrata determinandi veergude ümberkorraldamisel nõnda, et alamdeterminandi ees olev element saaks esimese rea ja esimese veeru esimeseks elemendiks. Seega

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1, & a_1, & c_1 \\ b_2, & a_2, & c_2 \\ b_3, & a_3, & c_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} c_1, & a_1, & b_1 \\ c_2, & a_2, & b_2 \\ c_3, & a_3, & b_3 \end{vmatrix},$$

millest võime järeldada, et teine alamdeterminant tuleb võtta miinus-märgiga, sest siin teeme veergude suhtes ühe transpositsiooni (paaritu arv), ning kolmas determinant tuleb võtta pluss-

märgiga, sest siin teeme veergude suhtes kaks transpositsiooni (paarisarv).

Võtame sama kolmanda järgu determinandi ja eraldame ta arendusreas determinandi teise veeru elemendid, s. o. b_1 , b_2 ja b_3 . Siis saame

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= -b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + b_2(a_1c_3 - c_1a_3) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) = \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kus sulgavaldised kujutavad determinandi Δ_3 teise veeru elementide b_1 , b_2 ja b_3 alamdeterminante, mis saadakse determinandist Δ_3 , kui ära jätta see rida ja see veerg, milles asetseb vastavalt b_1 , b_2 või b_3 . Elemendi b_1 alamdeterminant on miinus-märgiga, sest b_1 saamiseks esimese rea ja esimese veeru esimeseks elemendiks on vaja veergude suhtes teha üks transpositsioon; elemendi b_2 alamdeterminant on pluss-märgiga, sest b_2 saamiseks esimese rea ja esimese veeru esimeseks elemendiks on vaja teha veergude suhtes üks transpositsioon ja ridade suhtes teine transpositsioon, seega kokku kaks transpositsiooni; elemendi b_3 alamdeterminant on miinus-märgiga, sest b_3 saamiseks esimese rea ja esimese veeru esimeseks elemendiks on vaja teha veergude suhtes üks transpositsioon ja ridade suhtes kaks transpositsiooni, kokku kolm transpositsiooni.

Edasi võtame n järgu determinandi

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ja kogume selle determinandi arendusreas ühte rühma kõik liikmed, mis sisaldavad determinandi esimese rea esimese elemendi a_{11} ; teise rühma kogume kõik liikmed, mis sisaldavad determinandi esimese rea teise elemendi a_{12} , jne., ning viimasesse rühma kogume kõik liikmed, mis sisaldavad determinandi esimese rea viimase elemendi a_{1n} . Saame

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

kus A_{11} on alamdeterminant, mille arendusrea liikmetes puuduvad determinandi esimese rea ja esimese veeru elemendid, A_{12} on alamdeterminant, mille arendusrea liikmetes puuduvad determinandi esimese rea ja teise veeru elemendid, jne., A_{1n} on alamdeterminant, mille arendusrea liikmetes puuduvad determinandi esimese rea ja viimase veeru elemendid.

Et leida selle determinandi mistahes elemendi, näiteks a_{km} , alamdeterminant, kus k tähendab rida ja m veergu, milles see element asetseb, selleks korraldame determinandi nii, et k -rida saaks esimeseks reaks, tehes seega ridade suhtes $(k-1)$ transpositsiooni; saame

$$\Delta_n = (-1)^{k-1} \cdot \Delta_n'$$

Edasi korraldame saadud determinandi nii, et m -veerg saaks esimeseks veeruks, tehes veergude suhtes $(m-1)$ transpositsiooni; seega kokku $(k-1) + (m-1) = k+m-2$ transpositsiooni.

Siis

$$\Delta_n = (-1)^{k+m-2} \cdot \Delta_n''$$

mis on sama kui

$$\Delta_n = (-1)^{k+m} \cdot \Delta_n'''$$

Seega n järgu determinandi elemendi a_{km} alamdeterminant A_{km} on:

$$(-1)^{k+m} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(m-1)} & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \dots & a_{(k-1)(m-1)} & a_{(k-1)(m+1)} & \dots & a_{(k-1)n} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)(m-1)} & a_{(k+1)(m+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(m-1)} & a_{n(m+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tähendab, et leida determinandi mistahes elemendi a_{km} alamdeterminant, tuleb determinandis kustutada see rida ja see veerg, milles esineb tähendatud element, ning sel teel saadud determinant korrutada $(-1)^{k+m}$ -ga, kus k näitab rida ja m veergu, milles asetseb element a_{km} .

Determinandi alamdeterminantideks lahutamise teel lahendatakse determinant, s. o. leitakse determinandi arvuline väärtus.

Siin n järgu determinant lahutatakse $(n-1)$ järgu determinantideks, $(n-1)$ järgu determinandid $(n-2)$ järgu determinantideks jne. Näiteks, neljanda järgu determinandi

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 5, & 3 \\ -1, & 2, & -1, & 4 \\ 2, & -1, & 1, & 3 \\ 3, & -5, & 4, & 1 \end{vmatrix}$$

esimese rea elementide järgi alamdeterminantideks lahutades saame ta väärtuse:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2, & -1, & 4 \\ -1, & 1, & 3 \\ -5, & 4, & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1, & -1, & 4 \\ 2, & 1, & 3 \\ 3, & 4, & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ 5 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2, & 4 \\ 2, & -1, & 3 \\ 3, & -5, & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2, & -1 \\ 2, & -1, & 1 \\ 3, & -5, & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot \left[2 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 4, & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 3 \\ -5, & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 1 \\ -5, & 4 \end{vmatrix} \right] - \\ &- 1 \cdot \left[-1 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 4, & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 4 \end{vmatrix} \right] + \\ &+ 5 \cdot \left[-1 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 3 \\ -5, & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 3, & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 3, & -5 \end{vmatrix} \right] - \\ &- 3 \cdot \left[-1 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 1 \\ -5, & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 2, & -5 \end{vmatrix} \right] = \\ &= 2 \cdot [2(1-12) + 1(-1+15) + 4(-4+5)] - \\ &- 1[-1(1-12) + 1(2-9) + 4(8-3)] + \\ &+ 5[-1(-1+15) - 2(2-9) + 4(-10+3)] - \\ &- 3[-1(-4+5) - 2(8-3) - 1(-10+3)] = -160. \end{aligned}$$

Alamdeterminante kasutades nähtub, et determinant sisaldab veel kaks allpool-esityatud olulist omadust.

1) Kui determinandi ühe rea või veeru elemendid kujutavad kahe (positiivse või negatiivse) arvu summasid, siis see determinant on võrdne kahe samajärgulise determinandi summaga, kusjuures nende elementideks on eelmise determinandi elemendid, välja arvatud selle rea või veeru elemendid, kus esinevad kahe arvu summad; selle rea või veeru elementideks on ühel determinandil nende summade esimesed liidetavad ja teisel determinandil teised liidetavad.

Kui, näiteks, determinandi Δ_n teine veerg kujutab summasid, s. o.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} + b_1, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + b_2, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32} + b_3, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2} + b_n, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix},$$

siis lahutame determinandi teise veeru elementide järgi alamdeterminantideks ja saame

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a_{12} + b_1)A_{12} + (a_{22} + b_2)A_{22} + \dots + (a_{n2} + b_n)A_{n2} = \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + \dots + a_{n2}A_{n2} + \\ &+ (b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} + \dots + b_nA_{n2}) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11}, & b_1, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & b_2, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & b_3, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & b_n, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) Kui determinandi ühe rea (veeru) elementidega liita mõne teise rea (veeru) vastavad elemendid, mis kõik on korrutatud ühe ja sama (positiivse või negatiivse) arvuga m , siis determinandi väärtus ei muutu.

Kui näiteks determinandi

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

teise veeru elemendid liita vastavalt viimase veeru elementidega, mis korrutatud arvuga m , siis

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} + ma_{1n}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + ma_{2n}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32} + ma_{3n}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2} + ma_{nn}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n.$$

Selles veendume, arendades saadud determinanti teise veeru elementide järgi:

$$\begin{aligned} & (a_{12} + ma_{1n})A_{12} + (a_{22} + ma_{2n})A_{22} + \\ & + (a_{32} + ma_{3n})A_{32} + \dots + (a_{n2} + ma_{nn})A_{n2} = \\ & = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + \dots + a_{n2}A_{n2} + \\ & + m(a_{1n}A_{12} + a_{2n}A_{22} + a_{3n}A_{32} + \dots + a_{nn}A_{n2}) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} + m \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{1n}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{2n}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{3n}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{nn}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

sest teise determinandi väärtus, kus teise ja viimase veeru elemendid on vastavalt võrdsed, on 0.

Kasutades determinandi kaht viimast omadust, võime eespool-esineva neljanda järgu determinandi

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 5, & 3 \\ -1, & 2, & -1, & 4 \\ 2, & -1, & 1, & 3 \\ 3, & -5, & 4, & 1 \end{vmatrix}$$

lahendada lihtsamal teel. Lahutame esimese rea elementidest kolmanda rea vastavad elemendid, saame

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0, & 2, & 4, & 0 \\ -1, & 2, & -1, & 4 \\ 2, & -1, & 1, & 3 \\ 3, & -5, & 4, & 1 \end{vmatrix}.$$

Edasi korrutame teise veeru elemendid -2 -ga ja liidame kolmanda veeru vastavate elementidega, saame

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0, & 2, & 0, & 0 \\ -1, & 2, & -5, & 4 \\ 2, & -1, & 3, & 3 \\ 3, & -5, & 14, & 1 \end{vmatrix},$$

mille lahutame siis alamdeterminantideks esimese rea elementide järgi

$$\Delta_4 = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1, & -5, & 4 \\ 2, & 3, & 3 \\ 3, & 14, & 1 \end{vmatrix}.$$

Korrutame nüüd saadud kolmanda järgu determinandi esimese rea elemendid 2 -ga ja liidame teise rea vastavate elementidega

$$\Delta_4 = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1, & -5, & 4 \\ 0, & -7, & 11 \\ 3, & 14, & 1 \end{vmatrix}$$

ja siis korrutame esimese rea elemendid 3 -ga ja liidame kolmanda rea vastavate elementidega, saame

$$\Delta_4 = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1, & -5, & 4 \\ 0, & -7, & 11 \\ 0, & -1, & 13 \end{vmatrix},$$

mille lahutame nüüd alamdeterminantideks esimese veeru elementide järgi

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= -2 \cdot \left[-1 \cdot \begin{vmatrix} -7, & 11 \\ -1, & 13 \end{vmatrix} \right] = \\ &= -2 \cdot [-1 \cdot (-91 + 11)] = -160. \end{aligned}$$

Kui determinandi reas või veerus esineb ühine tegur, siis toome selle kõigepealt determinandi ette. Näiteks, determinandi

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4, & 2, & 6 \\ 8, & 1, & 3 \\ 2, & -1, & 9 \end{vmatrix}$$

esimeses reas on ühine tegur 2, esimeses veerus on samuti ühine tegur 2 ja kolmandas veerus on ühine tegur 3. Seega

$$\Delta_3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 4, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 3 \end{vmatrix},$$

kus nüüd esimese rea elementidest lahutades teise rea vastavad elemendid, leiame determinandi väärtuse:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 12 \cdot \begin{vmatrix} -3, & 0, & 0 \\ 4, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 3 \end{vmatrix} = -36 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -36 \cdot (3 + 1) = -144. \end{aligned}$$

§ 5. Lineaarsed võrrandsüsteemid.

Võtame kaks võrrandit kahe tundmatuga x ja y :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2. \end{aligned}$$

Nende lahendamisel x -i leidmiseks korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled $+B_2$ -ga ja teise võrrandi mõlemad pooled $-B_1$ -ga; y -i leidmiseks korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled $-A_2$ -ga ja teise võrrandi mõlemad pooled $+A_1$ -ga, s. o.

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y = C_1 & \parallel \cdot + B_2 \\ A_2x + B_2y = C_2 & \parallel \cdot - B_1 \end{aligned} \quad \left\| \begin{array}{l} \cdot - A_2 \\ \cdot + A_1 \end{array} \right.$$

Pärast korrutamist ja liitmist saame

$$\begin{aligned} (A_1B_2 - B_1A_2)x &= C_1B_2 - B_1C_2 \\ (A_1B_2 - B_1A_2)y &= A_1C_2 - C_1A_2, \end{aligned}$$

millest

$$x = \frac{C_1B_2 - B_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}, \quad y = \frac{A_1C_2 - C_1A_2}{A_1B_2 - B_1A_2}.$$

Siin lahendite lugejad ja nimetajad kujutavad teise järgu determinante, s. o.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2'}{\Delta_2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2''}{\Delta_2},$$

kus lahendite ühine nimetaja

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

mis moodustub tundmatute ees olevatest kordajatest, nimetatakse võrrandsüsteemi

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

determinandiks.

Kui meil on kolm võrrandit kolme tundmatuga x , y ja z :

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3,$$

siis tundmatu z kaotamiseks korrutame üks kord esimese ja teise võrrandi mõlemad pooled vastavalt $+C_2$ -ga ja $-C_1$ -ga, ning teine kord teise ja kolmanda võrrandi mõlemad pooled vastavalt $+C_3$ -ga ja $-C_2$ -ga, s. o.

$$\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot + C_2 \\ \cdot - C_1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \cdot + C_3 \\ \cdot - C_2 \end{array} \right.$$

Pärast korrutamist ja liitmist ning tundmatute eraldamist saame kaks võrrandit kahe tundmatuga x ja y :

$$(A_1C_2 - C_1A_2)x + (B_1C_2 - C_1B_2)y = D_1C_2 - C_1D_2$$

$$(A_2C_3 - C_2A_3)x + (B_2C_3 - C_2B_3)y = D_2C_3 - C_2D_3.$$

Kaotame neist võrrandeist tundmatu y . Korrutame esimese võrrandi mõlemad pooled avaldisega $(B_2C_3 - C_2B_3)$ ja teise

võrrandi mõlemad pooled avaldisega $(C_1B_2 - B_1C_2)$ ning liidame võrrandid, saame ühe võrrandi ühe tundmatuga x :

$$(A_1C_2 - C_1A_2)(B_2C_3 - C_2B_3)x - (A_2C_3 - C_2A_3)(B_1C_2 - C_1B_2)x = \\ = (D_1C_2 - C_1D_2)(B_2C_3 - C_2B_3) - (D_2C_3 - C_2D_3)(B_1C_2 - C_1B_2),$$

millest

$$x = \frac{D_1B_2C_3 - D_1C_2B_3 + C_1D_2B_3 - B_1D_2C_3 + B_1C_2D_3 - C_1B_2D_3}{A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_2B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3}$$

Vastavalt sellele arvutusele leiame y ja z :

$$y = \frac{A_1D_2C_3 - A_1C_2D_3 + C_1A_2D_3 - D_1A_2C_3 + D_1C_2A_3 - C_1D_2A_3}{A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_2B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3}$$

$$z = \frac{A_1B_2D_3 - A_1D_2B_3 + D_1A_2B_3 - B_1A_2D_3 + B_1D_2A_3 - D_1B_2A_3}{A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_2B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3}$$

Võttes aluseks lahendite lugejate ja nimetajate suhtes § 2 käsitletud determinandi definitsiooni, näeme, et need kujutavad kolmanda järgu determinantide arendusridu. Seega võime võrrandi lahendid kirjutada järgmiselt:

$$x = \frac{\sum \pm D_1B_2C_3}{\sum \pm A_1B_2C_3} = \frac{\begin{vmatrix} D_1, & B_1, & C_1 \\ D_2, & B_2, & C_2 \\ D_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_3'}{\Delta_3}$$

$$y = \frac{\sum \pm A_1D_2C_3}{\sum \pm A_1B_2C_3} = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & D_1, & C_1 \\ A_2, & D_2, & C_2 \\ A_3, & D_3, & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_3''}{\Delta_3}$$

$$z = \frac{\sum \pm A_1B_2D_3}{\sum \pm A_1B_2C_3} = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_3'''}{\Delta_3},$$

ja võrrandi parempoolne osa

$$m_1 A_{11} + m_2 A_{21} + m_3 A_{31} + \dots + m_n A_{n1} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_1, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ m_2, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ m_3, & a_{32}, & a_{33}, & \dots, & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n',$$

mis saadakse, kui võrrandsüsteemi determinandis Δ_n esimese veeru elementideks võtta võrrandsüsteemis esinevad vabaliikmed $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. Seega

$$x_1 = \frac{\Delta_n'}{\Delta_n}.$$

x_1 on määratud, kui $\Delta_n \neq 0$. Kui aga $\Delta_n = 0$, siis ei ole võrrandsüsteemil ühtegi lahendit. Kui $\Delta_n = 0$ ja $\Delta_n' = 0$, siis võrrandsüsteemil on määramata palju lahendeid.

Analoogiliselt x_1 leidmisega võime leida ka teised tundmatud x_2, x_3, \dots, x_n . Leiame üldiselt tundmatu x_k , kus $1 \leq k \leq n$.

x_k leidmiseks kasutame võrrandsüsteemi k -veeru elementide alamdeterminante

$$A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, \dots, A_{nk},$$

lahutades võrrandsüsteemi determinandi Δ_n k -veeru elementide järgi arendusreaks:

$$\Delta_n = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + a_{3k} A_{3k} + \dots + a_{nk} A_{nk}.$$

x_k leidmiseks kõrvaldame teised tundmatud $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, korrutades võrrandsüsteemis esimese võrrandi A_{1k} -ga, teise võrrandi A_{2k} -ga, kolmanda võrrandi A_{3k} -ga jne., ning viimase võrrandi A_{nk} -ga. Saadud võrrandid liidame ja eraldame tundmatud:

§ 6. Harjutusülesanded.

1. Leida teise järgu determinandi väärtus:

a) $\begin{vmatrix} 5, & 7 \\ 2, & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -10, & 5 \\ -6, & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \cos \alpha, & \sin \alpha \\ \sin \alpha, & \cos \alpha \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin \alpha, & \cos \alpha \\ \tan \alpha, & \cot \alpha \end{vmatrix}$

2. Leida kolmanda järgu determinandi väärtus:

a) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ -1, & 8, & 3 \\ 1, & 4, & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2, & 12, & 4 \\ 1, & 10, & 2 \\ 2, & 2, & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5, & 4, & 2 \\ 1, & 2, & 4 \\ 7, & 3, & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1+x, & 1, & 1 \\ 1, & 1+y, & 1 \\ 1, & 1, & 1+z \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a+b, & a, & b \\ b, & a+b, & a \\ a, & b, & a+b \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c \\ a^2, & b^2, & c^2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \\ \sin \alpha, & \sin \beta, & \sin \gamma \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} \sin \alpha, & 1, & \cos \alpha \\ \sin \beta, & 1, & \cos \beta \\ \sin \gamma, & 1, & \cos \gamma \end{vmatrix}$

3. Leida neljanda järgu determinandi väärtus:

a) $\begin{vmatrix} 3, & 2, & 1, & 1 \\ 2, & 1, & 1, & 2 \\ -1, & 1, & 2, & 1 \\ 2, & 2, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3, & -1, & 2, & 1 \\ 4, & -1, & 4, & 2 \\ 5, & 3, & 3, & 3 \\ 6, & 5, & 2, & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 6, & 0, & 5, & 3 \\ 1, & -1, & 2, & 1 \\ 3, & 1, & 3, & 0 \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix}$

4. Lahendada determinantide abil võrrandsüsteemid:

a) $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{array} \right\}$ b) $\left. \begin{array}{l} 12x - 7y = 1 \\ 5x + 11y = 70 \end{array} \right\}$ c) $\left. \begin{array}{l} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + y + z = 6 \end{array} \right\}$

d) $\left. \begin{array}{l} x - 8y - 3z = -2 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ 2x - z = 1 \end{array} \right\}$ e) $\left. \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{array} \right\}$ f) $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{array} \right\}$

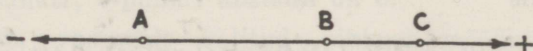
g) $\left. \begin{array}{l} 8x - 2y + 5z = 9 \\ 20x + 3y - 3z = 16 \\ 6x - 5y + 7z = -1 \end{array} \right\}$ h) $\left. \begin{array}{l} 7x + 4y - 9z + 5v = 4 \\ 3x + 5y + 8z - 15v = 20 \\ 9x - 7y + 12z + 25v = -4 \\ x + 3y - 11z + 11v = 0,2 \end{array} \right\}$

II peatükk.

Koordinaatide süsteemid.

§ 7. Sirglõigud.

Olgu antud sirge ja sellel sirgel kaks punkti A ja B (1. joon.). Need punktid määravad sirglõigu AB . Punktid A ja B on sirglõigu AB või sirglõigu BA otsapunktid: üks on alguspunkt ja teine lõpupunkt. Kui punkt A lugeda alguspunktiks ja punkt B



1. joonis.

lõpupunktiks, siis tuleb kirjutada sirglõik AB ; kui aga punkt B lugeda alguspunktiks ja punkt A lõpupunktiks, siis tuleb kirjutada sirglõik BA . Planimeetrias vaadeldi harilikult sirglõigu AB absoluutset pikkust, kus ei tehtud vahet sirglõigu alguspunkti ja ta lõpupunkti vahel; seal sirglõigud AB ja BA loeti ekvivalentseteks. Kuid paljudes geomeetrilistes ja mehaanilistes küsimustes ei ole oluline üksnes sirglõigu absoluutne pikkus, vaid ka sirglõigu suund. Ei ole ükspuha, kas punkt liigub sirgel punktist A punkti B või punktist B punkti A . Sirglõigud AB ja BA on küll võrdsed pikkuselt, kuid ei ole samad suunalt. Kui näiteks suunda punktist A punkti B poole loeme positiivseks, siis vastupidine suund punktist B punkti A poole on negatiivne. Seega

$$BA = -AB \text{ ehk } AB + BA = 0.$$

Kui sirgel esinevad mitu sirglõiku, siis nende võrdlemiseks loeme positiivses suunas võetud sirglõigud positiivseteks ja vastasuunas võetud sirglõigud negatiivseteks. Näiteks, kui 1. joonisel

lugeda sirge suund vasemalt paremale positiivseks, siis sirglõik AB on positiivne ja sirglõik CB negatiivne.

Kui punkt liigub sirgel punktist A paremale poole, siis loeme sirglõikude AB ja BC summaks selle sirglõigu, mis punkt pidevalt liikudes kulgeb punktist A punktini C , s. o.

$$AB + BC = AC,$$

kusjuures teise sirglõigu alguspunkt ühtib esimese sirglõigu lõpupunktiga. Esimese sirglõigu alguspunkt kujutab nende sirglõikude summa alguspunkti ja teise sirglõigu lõpupunkt nende lõpupunkti.

Kui punkt liigub sirgel punktist A punkti C ja siis punktist C punkti B , siis äraکیدud sirglõikude summa

$$AC + CB = AC - BC = AB.$$

Kui punkt liigub sirgel punktist A punkti B , edasi punktist B punkti C , siis punktist C punkti B ja lõpuks punktist B punkti A , siis

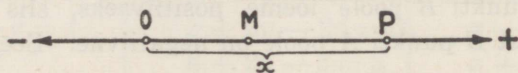
$$AB + BC + CB + BA = AC + CA = AA = 0,$$

millest

$$AC = -CA.$$

§ 8. Punkti määramine sirgel.

Et punkti määrata sirgel, selleks võtame sellel sirgel mingi punkti O (2. joon.), mille loeme kõikide sellele sirgele paigutatavate sirglõikude alguspunktiks ehk 0-punktiks. 0-punkti ühele poole — näiteks paremale poole — mineva suuna loeme positiivseks; siis vasemale poole minev suund on negatiivne.



2. joonis.

Igale punktile P sirgel vastab sirglõik OP , ja ümberpöörduvalt, igale sirglõigule OP vastab punkt P ja nimelt tema otsapunkt, s. o. lõpupunkt. Punktidele, mis asetsevad 0-punktist pare-

mal pool, vastavad positiivse suunaga sirglõigud, ja punktidele, mis asetsevad 0-punktist vasemal pool, negatiivse suunaga sirglõigud. Seega punkti P asendi sirgel määrab sirglõigu OP suund ja ta pikkus teatavais mõõduühikuis.

Kui näiteks mõõduühikuks on pikkus OM , kus punkt M nimetatakse ü h i k u p u n k t i k s, siis sirglõigus OP on

$$\frac{OP}{OM} = x$$

mõõduühikut. Arv x väljendab antud mõõduühikutes sirglõigu OP pikkust. Kui sirglõigu OP suund on positiivne, siis on ka x positiivne; kui sirglõigu OP suund on negatiivne, siis on x negatiivne. Seega arvu x absoluutne väärtus määrab sirglõigu OP pikkuse ja märk ta suuna sirgel. Järelikult arv x määrab ka sirglõigu OP otsapunkti (lõpupunkti) P asendi sellel sirgel ning seda arvu nimetatakse punkti P k o o r d i n a a d i k s ehk a b s t s i s s i k s. Punkti abstsiss on positiivne, kui punkt asetseb paremal pool 0-punkti, ja negatiivne, kui punkt asetseb vasemal pool 0-punkti; 0-punkti abstsiss on 0.

Tähendab, vastavalt valitud pikkuse mõõduühiku puhul igale punktile sirgel vastab üks ja ainult üks kindel positiivne või negatiivne arv x , s. o. punkti abstsiss, ja ümberpöörduvalt, igale positiivsele või negatiivsele arvule x vastab sirgel üks ja ainult üks kindel punkt. Seega punkti asend sirgel on tema abstsissi abil ü h e s e l t määratud.

§ 9. Nurgad.

Kahest sirgest moodustatud nurga mõiste on analoogiline kahe punktiga määratud sirglõigu mõistega. Nagu sirglõigu puhul on oluline mitte üksnes tema absoluutne pikkus, vaid ka suund, nii ka nurga puhul tuleb tähelepanu pöörata nurga absoluutsele suurusele ja ka suunale, s. o. sellele, missuguses suunas nurk moodustub. Nurga absoluutne suurus mõõdetakse kas kraadides, minutites, sekundites ja nende osades, kus nurga mõõduühikuks loetakse kesknurk, mis toetub $\frac{1}{360}$ osale ringjoonest, või radiaal- ehk absoluutmõõdus, kus nurga mõõduühikuks loetakse kesknurk, mis toetub ringi kaarele, mille pikkus on võrdne

ringi raadiusega. See nurk on ligikaudu võrdne $57^{\circ}47'45''$ ja teda nimetatakse *r a d i a a n i k s*. Sel juhul nurga suuruseks loetakse arv, mis näitab, mitu korda radiaan sisaldub selles nurgas.

Ringjoone pikkus on $2\pi r$, kus r on ringi raadius. Ringjoone pikkuse suhe ringi raadiusega on konstantne suurus 2π . Kui ringi kaart mõõdame kaare ja raadiuse suhtega, siis ringjoone pikkus kujutab nimeta arvu $2\pi \approx 6,2832$, poolringjoone pikkus arvu $\pi \approx 3,1416$, veerandringjoone pikkus arvu $\frac{\pi}{2} \approx 1,5708$, jne. Arvu 1 kujutab ringi kaar, mille pikkus on võrdne ringi raadiusega ja mis sisaldab

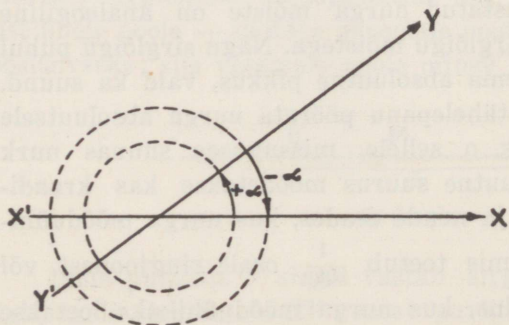
$$\frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57,3^{\circ} \approx 3438' \approx 206265''.$$

Nii näeme, et ringi kaari on võimalik mõõta nimeta arvude abil. Et kesknurk mõõdetakse temale vastava kaarega, siis kaart kujutav nimeta arv on ühtlasi vastava kesknurga mõõt, mida nimetatakse nurga radiaal- ehk absoluutmõõduks. Seega nurgale, milles

360°	vastab	nimeta	arv	2π
270°	"	"	"	$\frac{3\pi}{2}$
180°	"	"	"	π
90°	"	"	"	$\frac{\pi}{2}$
1°	"	"	"	$\frac{\pi}{180}$

ja üldiselt nurgale, milles α° , vastab nimeta arv $x = \frac{\alpha\pi}{180}$, millest $\alpha^{\circ} = \frac{180^{\circ}x}{\pi}$.

Kahest sirgest $X'X$ ja $Y'Y$ (3. joon.) moodustatud nurk tasa-



3. joonis.

pinnal loetakse positiivseks, kui nurk on saadud esimese sirge pöörlemisel kellaosuti liikumisele vastassuunas. Kui üks sirgetest pöörleb kellaosuti liikumise suunas, siis tekib negatiivne nurk. Me võime aga määrata nurgale määramata palju väär-

tusi, sest et näiteks sirge $Y'Y$ suund ei muutu, kui me teda pöörame täisringide kaupa ühele või teisele poole. Kuid ühe nurga väärtuse võime ikka valida nii, et see oleks positiivne ja väiksem kui 2π . Kui see nurga väärtus on α , siis teised väärtused on $\alpha + 2k\pi$, kus $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Nurk sirgete $X'X$ ja $Y'Y$ vahel loetakse positiivseks ja märgitakse järgmiselt

$$(X'X, Y'Y) = \alpha + 2k_1\pi$$

ning nurk sirgete $Y'Y$ ja $X'X$ vahel loetakse negatiivseks ja märgitakse

$$(Y'Y, X'X) = -\alpha - 2k_2\pi,$$

kus $k_1, k_2 = 0, +1, +2, +3, \dots$

Neid nurki liites saame

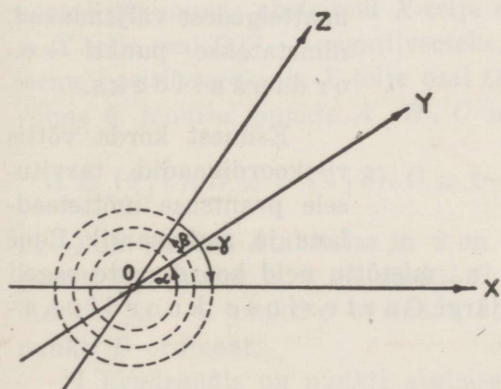
$$(X'X, Y'Y) + (Y'Y, X'X) = 2(k_1 - k_2)\pi = 2k\pi,$$

millest

$$(X'X, Y'Y) = -(Y'Y, X'X) + 2k\pi,$$

kus k võib olla: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Kui meil on tasapinnal kolm ühest punktist väljuvat kiirt OX, OY ja OZ , mis moodustavad nurgad α, β ja γ (4. joon.), siis



4. joonis.

$$(OX, OY) = \alpha + 2k_1\pi$$

$$(OY, OZ) = \beta + 2k_2\pi$$

$$(OZ, OX) = -\gamma - 2k_3\pi,$$

kus k_1, k_2 ja k_3 on positiivsed täisarvud või 0. Et

$$\alpha + \beta = \gamma \text{ ehk}$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 0,$$

siis

$$(OX, OY) + (OY, OZ) + (OZ, OX) =$$

$$= 2k_1\pi + 2k_2\pi - 2k_3\pi = 2(k_1 + k_2 - k_3)\pi = 2k\pi,$$

kus k on positiivne või negatiivne täisarv või 0. Kuid meil on alati võimalus valida nurgad nii, et $k = 0$; siis

$$(OX, OY) + (OY, OZ) + (OZ, OX) = 0,$$

ehk

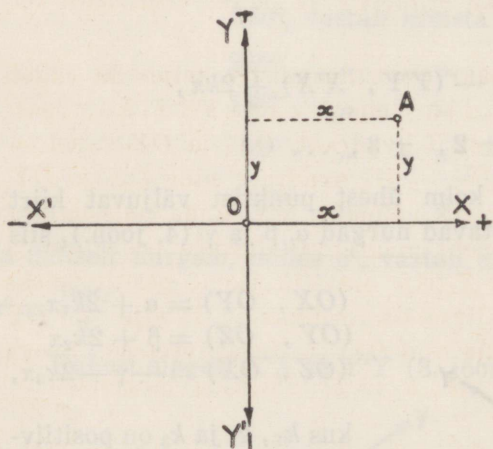
$$(OX, OZ) + (OZ, OX) = 0,$$

millest

$$(OX, OZ) = -(OZ, OX).$$

§ 10. Punkti määramine tasapinnal.

Ristkoordinaadid. Punkti asendi määramiseks tasapinnal võtame kaks risti lõikuvat sirget $X'X$ ja $Y'Y$ (5. joon.), mille lõikepunkti O loeme 0-punktiks. Need kaks rist-sirget nimetatakse koordinaattelgedeks. Punkti asukoht tasapinnal määratakse kindlaks ta kauguste abil koordinaattelgedest. Arve, mis neid punkti kaugusi koordinaattelgedest väljendavad, nimetatakse punkti koordinaatideks.



5. joonis.

Esimest korda võttis ristkoordinaadid tarvitusele prantsuse mõtteteadlane ja matemaatik René

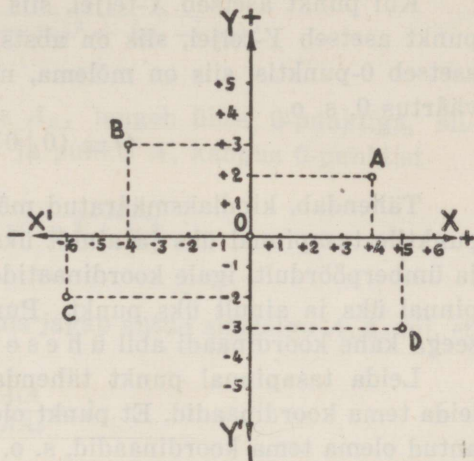
Descartes (Cartesius) 1637. a., mistõttu neid koordinaate sageli nimetatakse ka tema nime järgi Cartesiuse koordinaatideks.

Kui valime vabalt mõne mõõduühiku nii, et tasapinnal asetseva punkti A (5. joon.) kaugus esimesest teljest on y mõõduühikut ja teisest teljest x mõõduühikut, siis selle punkti A koordi-

naadid on x ja y , mis määravad ka punkti A asukoha tasapinnal. Seda punkti tähistatakse järgmiselt:

$$A \equiv (x | y),$$

s. o. punkt A , mille koordinaadid on x ja y . Üht koordinaati, s. o. x , nimetatakse punkti A abstsissiks, ja teist, s. o. y , punkti A ordinaadiks. Vastavalt neile nimetustele nimetame ühe koordinaattelje abstsissiteljeks ($X'X$) ehk X -teljeks ja teise — ordinaatteljeks ($Y'Y$) ehk Y -teljeks. Punkti abstsissi kirjutame sulgudes ikka esimesele ja punkti ordinaadi teisele kohale.



6. joonis.

Ristkoordinaattelgede paar (koordinaadistik, teljestik) jagab tasapinna neljaks veerandiks ehk kvadrantiks. Tasapinna osa OX ja OY vahel on I kvadrant, OX' ja OY vahel — II kvadrant, OX' ja OY' vahel — III kvadrant ning OX ja OY' vahel — IV kvadrant. Et oleks võimalik ära tunda, missuguses veerandis punkt asetseb, selleks määrame telgedele positiivse ja negatiivse suuna: abstsissid X -telje osal OX loeme positiivseteks ja X -telje osal OX' — negatiivseteks, ordinaadid Y -telje osal OY loeme positiivseteks ja Y -telje osal OY' — negatiivseteks. Seega võime 6. joonisel punkte A , B , C ja D tähistada järgmiselt:

$$A \equiv (4 | 2), B \equiv (-4 | 3), C \equiv (-6 | -2), D \equiv (5 | -3),$$

kus 4 on punkti A abstsiss ja 2 on punkti A ordinaat, — 4 on punkti B abstsiss ja 3 on punkti B ordinaat, — 6 on punkti C abstsiss ja — 2 punkti C ordinaat, 5 on punkti D abstsiss ja — 3 punkti D ordinaat.

I kvadrandis on punkti abstsiss ja ordinaat mõlemad positiivsed, II kvadrandis on punkti abstsiss negatiivne ja ordinaat positiivne, III kvadrandis on punkti abstsiss ja ordinaat mõlemad

negatiivsed, IV kvadrantis on punkti abstsiss positiivne ja ordinaat negatiivne.

Kui punkt asetseb X -teljel, siis on ordinaadi väärtus 0; kui punkt asetseb Y -teljel, siis on abstsissi väärtus 0, ja kui punkt asetseb 0-punktil, siis on mõlema, nii abstsissi kui ka ordinaadi väärtus 0, s. o.

$$O \equiv (0 | 0).$$

Tähendab, kindlaksmääratud mõõduühiku puhul vastab igale punktile tasapinnal üks ja ainult üks koordinaatide paar ($x | y$), ja ümberpöörduvalt, igale koordinaatide paarile ($x | y$) vastab tasapinnal üks ja ainult üks punkt. Punkti asukoht tasapinnal on seega kahe koordinaadi abil üheselt määratud.

Leida tasapinnal punkt tähendab analüütilises geomeetrias leida tema koordinaadid. Et punkt oleks tasapinnal antud, peavad antud olema tema koordinaadid, s. o. abstsiss ja ordinaat.

1. ülesanne. Leida kahe punkti $A_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $A_2 \equiv (x_2 | y_2)$ kaugus teineteisest.

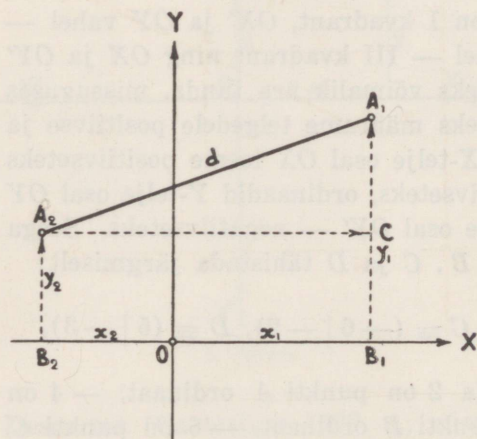
Märgime teljestikus vabalt punktid A_1 ja A_2 (7. joon.). Ühendame nad sirglõiguga ja tõmbame punktist A_2 ristjoone ordinaadile y_1 , saame täisnurkse kolmnurga, milles ühe kaateti pikkus on abstsisside vahe $x_1 - x_2$, sest

$$B_2B_1 + B_1O + OB_2 = 0,$$

millest

$$\begin{aligned} B_2B_1 &= -B_1O - OB_2 = \\ &= OB_1 - OB_2 = x_1 - x_2, \end{aligned}$$

ja teise kaateti pikkus on ordinaatide vahe $y_1 - y_2$, sest



7. joonis.

$$CA_1 + A_1B_1 + B_1C = 0,$$

millest

$$CA_1 = -A_1B_1 - B_1C = B_1A_1 - B_1C = y_1 - y_2,$$

ning hüpoteenuusi pikkus d on otsitav kaugus. Pythagorase lauset kasutades saame

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Kui teine punkt, näiteks A_2 , langeb ühte 0-punktiga, siis tema koordinaadid on $(0 | 0)$ ja punkti A_1 kaugus 0-punktist

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

2. ülesanne. Leida punkt A , mis jagab antud sirglõigu A_1A_2 nii, et

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \lambda.$$

Olgu tasapinnal antud sirglõik A_1A_2 (8. joon.), mille otsapunktid on

$$A_1 \equiv (x_1 | y_1)$$

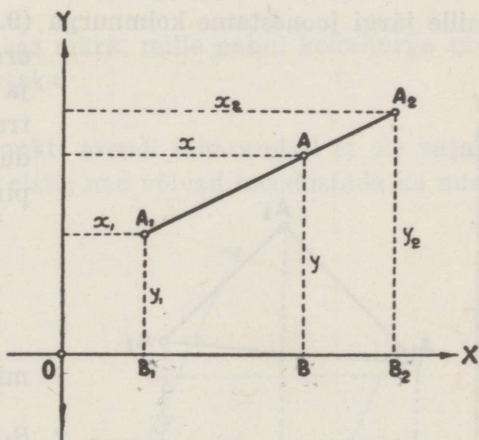
ja

$$A_2 \equiv (x_2 | y_2).$$

Otsitav punkt olgu

$$A \equiv (x | y).$$

Märgime punktide A_1 , A ja A_2 ordinaadid $A_1B_1 = y_1$, $AB = y$ ja $A_2B_2 = y_2$. Jooniselt näeme, et



8. joonis.

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \lambda.$$

Et

$$B_1B + BO + OB_1 = 0$$

$$BB_2 + B_2O + OB = 0,$$

siis

$$B_1B = OB - OB_1 = x - x_1$$

$$BB_2 = OB_2 - OB = x_2 - x.$$

Asendades saame

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda,$$

millest

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Märkides punktidest A_1 , A ja A_2 abstsissid saame analoogiliselt

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Kui $\lambda = 1$, siis A on sirglõigu keskpunkt, mille koordinaadid on

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ja } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. ülesanne. Leida kolmnurga pindala tema tippude kaudu.
Olgu kolmnurga tipud

$$A_1 \equiv (x_1 | y_1), A_2 \equiv (x_2 | y_2), A_3 \equiv (x_3 | y_3),$$

mille järgi joonestame kolmnurga (9. joon.). Kolmnurga tippude ordinaadid, kolmnurga küljed ja X -telg moodustavad kolm trapetsit, mille pindalade kaudu võime saada kolmnurga pindala S . Et

$$\begin{aligned} B_1B_2 + B_2O + OB_1 &= 0 \\ B_2B_3 + B_3O + OB_2 &= 0 \\ B_1B_3 + B_3O + OB_1 &= 0, \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} B_1B_2 &= OB_2 - OB_1 = x_2 - x_1 \\ B_2B_3 &= OB_3 - OB_2 = x_3 - x_2 \\ B_1B_3 &= OB_3 - OB_1 = x_3 - x_1, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} S &= \text{pindala } (A_1A_2B_2B_1) + \text{pindala } (A_2A_3B_3B_2) - \\ &\quad - \text{pindala } (A_1A_3B_3B_1) = \\ &= \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2} + \frac{(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)}{2} - \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

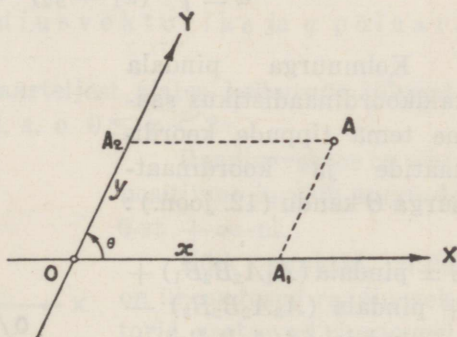
See determinant võib anda nii positiivseid kui ka negatiivseid tulemusi. Kui lugeda kolmnurga tippe kellaosuti liikumisele vastassuunas, siis saame determinandi väärtuse positiivseks; luges aga kolmnurga tippe kellaosuti liikumise suunas, saame determinandi sama väärtuse miinus-märgiga. Piirdudes kolmnurga pindala absoluutse suurusega, võime jätta ka märgi tähele panemata. Võib ka tarvitada kolmnurga pindala determinandi ees kaks märki, kirjutades

$$S = \pm \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

ning jättes lõpptulemuses see märk, mille puhul kolmnurga pindala suurus osutub positiivseks.

Kaldkoordinaadid. Punkti asendi määramisel ei ole vajalik, et koordinaatteljed oleksid risti; nad võivad moodustada ka nurga $\theta \neq 90^\circ$. Siis saame kaldkoordinaadid (10. joon.).

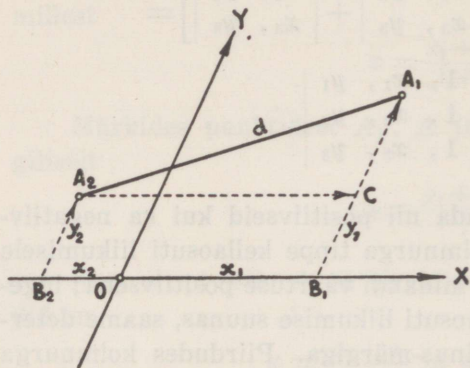
Võtame kaldkoordinaadistikus vabalt mingi punkti A ja tõmbame sellest punktist rööpjooned X - ja Y -teljele. Punkt A määrab täielikult X - ja Y -teljel saadud sirglõikude OA_1 ja OA_2 pikkused x ja y , mis saadakse punktist A tõmmatud rööpjoontega Y - ja X -teljele. Ja ümberpöör-



10. joonis.

dult, sirglõikude OA_1 ja OA_2 pikkused x ja y määravad punkti asendi tasapinnal, kui punktidest A_1 ja A_2 tõmmata vastavalt

rööpjooned Y - ja X -teljele, kusjuures nende lõikepunkt määrab punkti asendi.



11. joonis.

$$d^2 = A_2C^2 + CA_1^2 - 2 \cdot A_2C \cdot CA_1 \cdot \cos (A_2C, CA_1) = \\ = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \theta,$$

millest

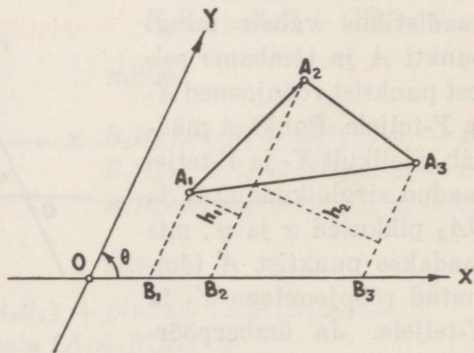
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \theta}.$$

Kui $\theta = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \theta = 0$ ja

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Kolmnurga pindala kaldkoordinaadistikus saame tema tippude koordinaatide ja koordinaatnurga θ kaudu (12. joon.):

$$S = \text{pindala } (A_1A_2B_2B_1) + \text{pindala } (A_3A_2B_3B_2) - \text{pindala } (A_1A_3B_3B_1) = \\ = \frac{(y_1 + y_2)h_1}{2} + \frac{(y_3 + y_2)h_2}{2} - \frac{(y_1 + y_3)(h_1 + h_2)}{2}.$$



12. joonis.

Et

$$h_1 = (x_2 - x_1) \sin \theta, \quad h_2 = (x_3 - x_2) \sin \theta$$

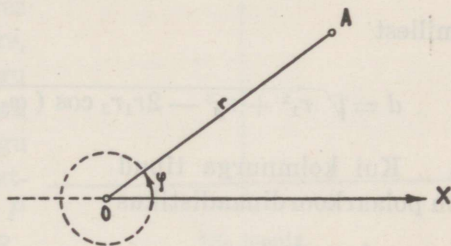
ja

$$h_1 + h_2 = (x_3 - x_1) \sin \theta,$$

siis

$$S = \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \sin \theta}{2} + \frac{(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \sin \theta}{2} - \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) \sin \theta}{2} = \pm \frac{\sin \theta}{2} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}.$$

Polaarkoordinaadid. Märgime tasapinnal mingi kindla punkti ehk pooluse O (13. joon.) ja mingsuguses kindlas suunas seda poolust läbiva sirge ehk polaartelje OX . Siis võime määrata tasapinnal mistahes punkti A asendi kauguse $OA = r$ ja nurga φ kaudu, mille moodustab r sirgega OX . Suurused r ja φ on punkti A polaarkoordinaadid, s. o.



13. joonis.

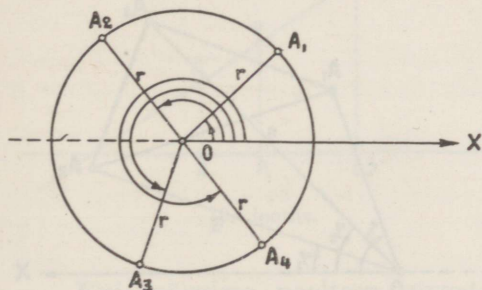
$$A \equiv (r | \varphi),$$

kusjuures r nimetatakse raadiusvektoriks ja φ polaar-nurgaks.

Polaarnurka loetakse polaarteljest alates kellaosuti liikumisele vastassuunas 0° -st 360° -ni, s. o. $0 \leq \varphi < 2\pi$.

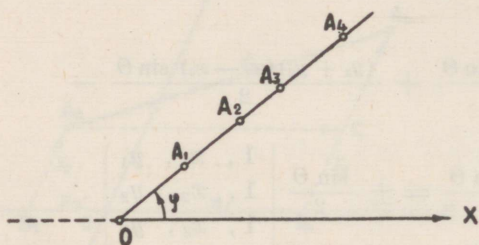
Raadiusvektor on alati positiivne ja võib muutuda 0-st $+\infty$ -ni.

Kõik punktid, mille on ühesugused raadiusvektorid, asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt on pooluses (14. joon.). Kõik punktid, mille on ühesugused polaar-nurgad, asetsevad



14. joonis.

poolusest väljuval kiirel (15. joon.), kusjuures poolus on ainus punkt, mis määratakse ühe tingimusega $r=0$, sest sel juhul nurk φ on määramatu.



15. joonis.

Polaarkoordinaadistikus punktide

$$A_1 \equiv (r_1 | \varphi_1) \text{ ja } A_2 \equiv (r_2 | \varphi_2)$$

kauguse d leidmiseks määrame raadiusvektorid r_1 ja r_2 ning polaarnurgad φ_1 ja φ_2 (16. joon.); saame kolmnurga OA_1A_2 , milles

$$\begin{aligned} d^2 &= OA_1^2 + OA_2^2 - 2 \cdot OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned}$$

millest

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

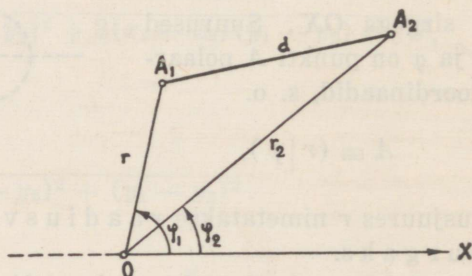
Kui kolmnurga tipud on polaarkoordinaadistikus

$$A_1 \equiv (r_1 | \varphi_1),$$

$$A_2 \equiv (r_2 | \varphi_2),$$

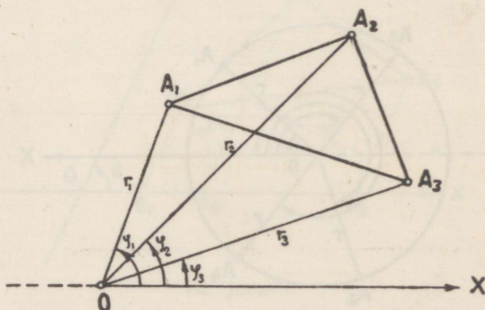
$$A_3 \equiv (r_3 | \varphi_3),$$

siis kolmnurga pindala (17. joon.)



16. joonis.

$$\begin{aligned} S &= \pm \frac{1}{2} [r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ &+ r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - \\ &- r_1 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)] = \\ &= \pm \frac{1}{2} [r_1 r_2 (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \\ &- \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) + \\ &+ r_2 r_3 (\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - \\ &- \cos \varphi_3 \sin \varphi_2) - \\ &- r_1 r_3 (\sin \varphi_3 \cos \varphi_1 - \\ &- \cos \varphi_3 \sin \varphi_1)] = \end{aligned}$$



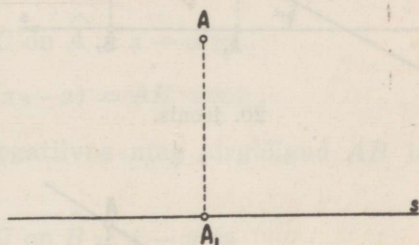
17. joonis.

$$= \pm \frac{1}{2} \left[-r_1 r_2 \begin{vmatrix} \cos \varphi_1, & \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_2, & \sin \varphi_2 \end{vmatrix} - r_2 r_3 \begin{vmatrix} \cos \varphi_2, & \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_3, & \sin \varphi_3 \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + r_1 r_3 \begin{vmatrix} \cos \varphi_1, & \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_3, & \sin \varphi_3 \end{vmatrix} \right] = \pm \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} r_2 r_3, & \sin \varphi_1, & \cos \varphi_1 \\ r_1 r_3, & \sin \varphi_2, & \cos \varphi_2 \\ r_1 r_2, & \sin \varphi_3, & \cos \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

§ 11. Punkti ja sirglõigu projektsioon.

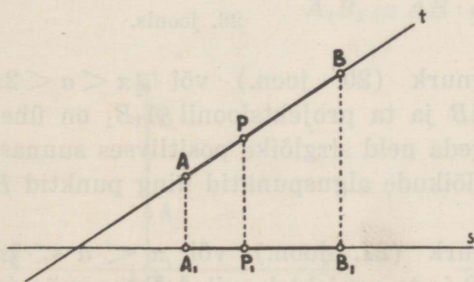
a) Olgu tasapinnal punkt A ja sirge s (18. joon.). Punkti A projektsiooniks sellel sirgel loetakse punkt A_1 , mis on punktist A lastud ristjoone ja sirge s lõikepunkt, kusjuures sirge s nimetatakse projektsiooniteljeks.

Kui tasapinnal on kaks sirget s ja t (19. joon.), kusjuures sirge s on projektsiooniteljeks, siis sirgel t asetseva sirglõigu AB projektsiooniks sirgel s on sirglõik $A_1 B_1$, mis on sirglõigu AB kõikide punktide P projektsioonide kogu, s. o. kui punkt P kulgeb punktist A punkti B , siis tema projektsioon P_1 kulgeb



18. joonis.

punktist A_1 punkti B_1 , kus punktid A_1 ja B_1 on sirglõigu AB otsapunktide projektsioonid. Seega sirglõigu AB projektsiooniks on projektsiooniteljel sirglõik $A_1 B_1$, mille otsapunktideks on antud sirglõigu AB otsapunktide A ja B projektsioonid. Tähen­dab, et leida sirglõigu projektsioon projektsiooniteljel, on vaja ainult leida selle sirglõigu otsapunktide projektsioonid, mille vaheline sirglõik kujutab siis antud sirglõigu projektsiooni.



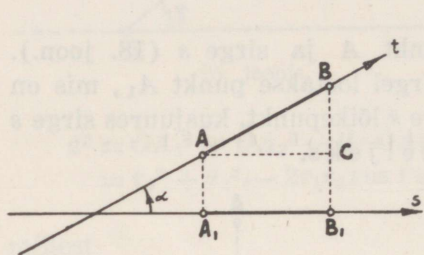
19. joonis.

Kui märgime nooltega sirgete s ja t positiivsed suunad (20.—23. joon.) ning tähistame tähega α selle nurga, mille moo-

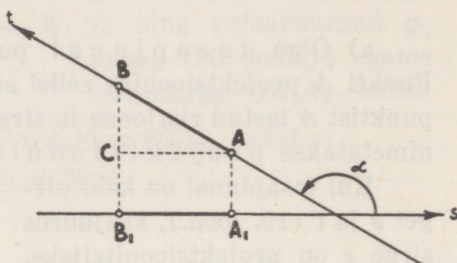
dustavad nende sirgete positiivsed suunad (kiired), siis sirglõigu AB projektsioon A_1B_1 on võrdne sirglõigu AB ja tähendatud nurga koosinuse korrutisega, s. o.

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha,$$

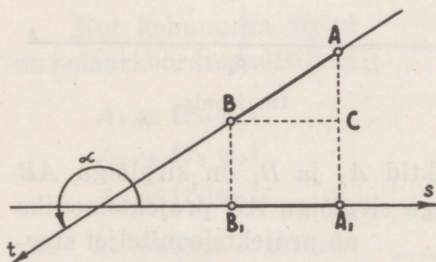
kus sirglõigud AB ja A_1B_1 — olenedes suunast — väljenduvad positiivsete või negatiivsete arvudena.



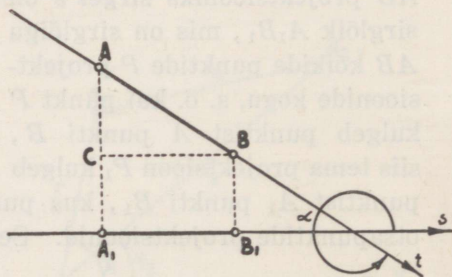
20. joonis.



21. joonis.



22. joonis.



23. joonis.

Kui nurk α on teravnurk (20. joon.) või $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ (23. joon.), siis sirglõigul AB ja ta projektsioonil A_1B_1 on ühesugused märgid, sest kui lugeda neid sirglõike positiivses suunas, siis on punktid A ja A_1 sirglõikude alguspunktid ning punktid B ja B_1 lõpupunktid.

Kui nurk α on nürinurk (21. joon.) või $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ (22. joon.), siis sirglõigul AB ja ta projektsioonil A_1B_1 on märgid vastupidised, sest lugedes mõlemaid sirglõike positiivses suunas on punkt A sirglõigu AB alguspunkt ja punkt A_1 sirglõigu A_1B_1 lõpupunkt; punkt B on sirglõigu AB lõpupunkt ja punkt B_1 sirglõigu A_1B_1 alguspunkt.

Kui sirgel t asetsevast punktist A (20. ja 21. joon.) või punktist B (22. ja 23. joon.) tõmmata sirglõik $AC \parallel s$ või $BC \parallel s$, siis 20. joonisel kolmnurgas ABC on $\hat{A} = \alpha$ ja

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha,$$

kus $\cos \alpha$ on positiivne ning sirglõigud AB ja A_1B_1 ühesuguste märkidega.

23. joonisel kolmnurgas ABC on $\hat{B} = 2\pi - \alpha$ ja

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos (2\pi - \alpha) = AB \cdot \cos \alpha,$$

kus $\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ on samuti positiivne ning sirglõigud AB ja A_1B_1 ühesuguste märkidega.

21. joonisel kolmnurgas ABC on $\hat{A} = \pi - \alpha$ ja

$$A_1B_1 = -AB \cdot \cos (\pi - \alpha) = AB \cdot \cos \alpha,$$

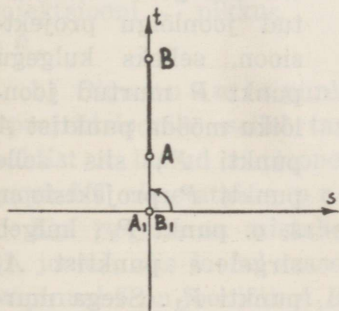
kus $-\cos (\pi - \alpha) = \cos \alpha$ on negatiivne ning sirglõigud AB ja A_1B_1 isesuguste märkidega.

22. joonisel kolmnurgas ABC on $\hat{B} = \alpha - \pi$ ja

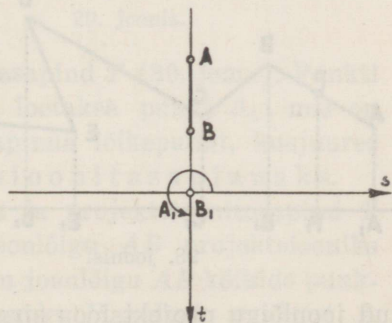
$$A_1B_1 = -AB \cdot \cos (\alpha - \pi) = -AB \cdot \cos (\pi - \alpha) = AB \cdot \cos \alpha,$$

kus $-\cos (\alpha - \pi) = \cos \alpha$ on negatiivne ning sirglõigud AB ja A_1B_1 isesuguste märkidega. Seega igal juhul

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha.$$



24. joonis.



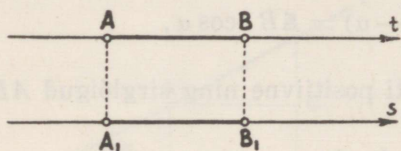
25. joonis.

Kui sirge t on risti sirgega s , siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (24. joon.) või $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (25. joon.) ja sirglõigu AB projektsiooni A_1B_1 pikkus on 0, sest

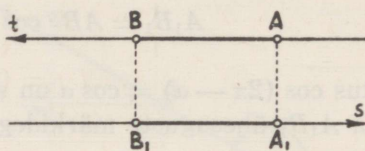
$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \frac{\pi}{2} = AB \cdot \cos \frac{3}{2}\pi = AB \cdot 0 = 0.$$

Seega sirgete ristseisu korral sirglõigu AB projektsioon sirgel s on punkt ja nimelt sirgete lõikepunkt.

Kui sirge t on rööbiti sirgega s ja temaga ühise suunaga (26. joon.), siis $\alpha = 0$ ja sirglõigu AB projektsiooni A_1B_1 pikkus



26. joonis.



27. joonis.

on võrdne sirglõigu AB pikkusega ja sama märgiga, sest

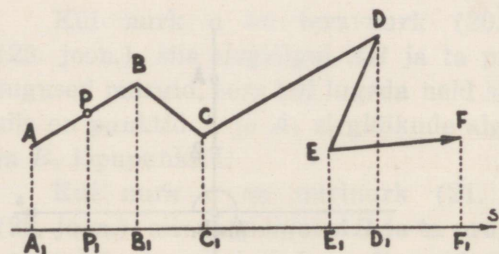
$$A_1B_1 = AB \cdot \cos 0 = AB.$$

Kui sirge t on rööbiti sirgega s , kuid vastassuunaga (27. joon.), siis $\alpha = \pi$ ja sirglõigu AB projektsiooni A_1B_1 pikkus on võrdne sirglõigu AB pikkusega, kuid vastasmärgiga, sest

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \pi = -AB.$$

Võtame tasapinnal mistahes murtud joonlõigu $ABCDEF$ (28. joon.) ja määrame ta suuna punktist A punkti F poole. Et

saada sirgel s selle murtud joonlõigu projektsioon, selleks kulgegu punkt P murtud joonlõigu mööda punktist A punkti F , siis selle punkti P projektsioon, s. o. punkt P_1 , kulgeb sirgel s punktist A_1 punkti F_1 . Seega mur-



28. joonis.

tud joonlõigu projektsioon sirgel s on sirglõik A_1F_1 , mille alguspunkt A_1 on murtud joonlõigu alguspunkti A projektsioon ja lõpu-

punkt F_1 on murtud joonlõigu lõpupunkti F projektsioon. Tähen-
 dab, murtud joonlõigu projektsioon on võrdne tema lülide (sirg-
 lõikude) projektsioonide summaga, s. o.

$$\begin{aligned} (ABCDEF)_s &= (AB)_s + (BC)_s + (CD)_s + (DE)_s + (EF)_s = \\ &= A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1F_1 = A_1F_1. \end{aligned}$$

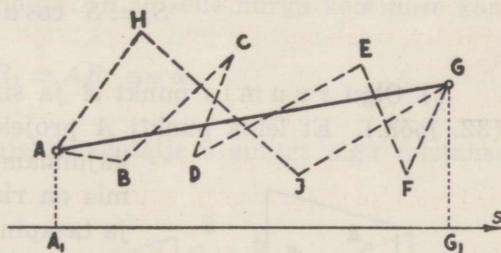
Kui tähistame nurgad, mis projektsioonitelg s järk-järgult
 moodustab üksikute murtud joone lülidega, tähtedega $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$
 α_4 ja α_5 , s. o.

$$\begin{aligned} (s, AB) &= (A_1B_1, AB) = \alpha_1 \\ (s, BC) &= (B_1C_1, BC) = \alpha_2 \\ (s, CD) &= (C_1D_1, CD) = \alpha_3 \\ (s, DE) &= (D_1E_1, DE) = \alpha_4 \\ (s, EF) &= (E_1F_1, EF) = \alpha_5, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} A_1F_1 &= AB \cdot \cos \alpha_1 + BC \cdot \cos \alpha_2 + CD \cdot \cos \alpha_3 + \\ &+ DE \cdot \cos \alpha_4 + EF \cdot \cos \alpha_5. \end{aligned}$$

On arusaadav, et ühise alguspunktiga A (29. joon.) ja ühise
 lõpupunktiga G isesuguste murtud joonte $(ABCDEF G)$ ja $(AHIG)$
 projektsioonid on võrd-
 sed ja samad, mis sirg-
 lõigu AG projektsioon-
 gi, s. o. A_1G_1 . Kui mur-
 tud joon on kinnine,
 s. o. alguspunkt ühtib
 lõpupunktiga, siis ta
 projektsiooni pikkus
 on 0.

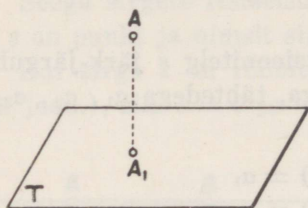


29. joonis.

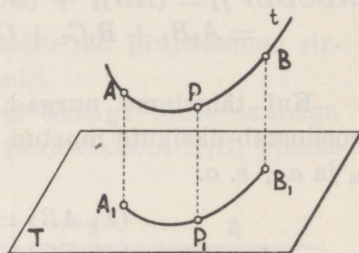
b) Olgu ruumis punkt A ja tasapind T (30. joon.). Punkti
 A projektsiooniks sellel tasapinnal loetakse punkt A_1 , mis on
 punktist A lastud ristjoone ja tasapinna lõikepunkt, kusjuures
 tasapind T nimetatakse projektsioonitasapinnaks.

Kui ruumis on mistahes joon t ja projektsioonitasapind T
 (31. joon.), siis joonel t asetseva joonlõigu AB projektsiooniks
 tasapinnal T on joonlõik A_1B_1 , mis on joonlõigu AB kõikide punk-
 tide P projektsioonide kogu. Kui punkt P kulgeb punktist A
 punkti B , siis tema projektsioon P_1 kulgeb punktist A_1 punkti B_1 .

Sirglõigu projektsiooni leidmiseks projektsioonitasapinnal on vaja ainult leida selle sirglõigu otsapunktide projektsioonid, mille vaheline sirglõik kujutab siis antud sirglõigu projektsiooni.



30. joonis.

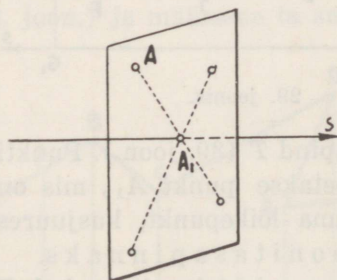


31. joonis.

Kolmnurga ja üldse n -nurga projektsiooni leidmiseks projektsioonitasapinnal on vaja ainult leida selle kolmnurga või n -nurga tippude projektsioonid. Viimaseid sirglõikudega ühendades saame kolmnurga või n -nurga projektsiooni. Kui kolmnurga pindala on S , tema projektsiooni pindala S_1 ja kolmnurga kaldenurk projektsioonitasapinnaga α , siis

$$S_1 = S \cdot \cos \alpha.$$

c) Olgu ruumis punkt A ja sirge s kui projektsioonitelg (32. joon.). Et leida punkti A projektsioon sellel sirgel, selleks

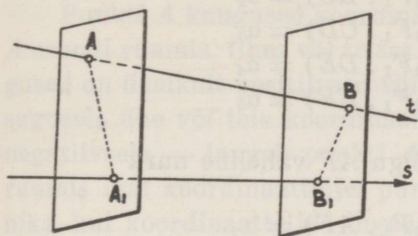


32. joonis.

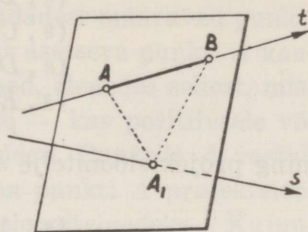
kujundame läbi punkti A tasapinna, mis on risti sirgega s . Siis sirge s ja tasapinna lõikepunkt A_1 on punkti A projektsiooniks sirgel s . Seega sellel tasapinnal asetseva iga punkti projektsiooniks on punkt A_1 . Kui ruumis on kaks sirget s ja t , siis võivad nad lõikuda, olla rööbikud või kiivad. Kui neist sirge s lugeda projektsiooniteljeks (33. joon.), siis sirgel t asetseva sirglõigu AB projekt-

siooniks sirgel s on sirglõik A_1B_1 , kus selle otsapunktid A_1 ja B_1 on sirglõigu AB otsapunktide A ja B projektsioonid. Tähen-
dab, et leida ruumis sirglõigu AB projektsioon projektsiooniteljel,

on vaja kujundada läbi selle sirglõigu otsapunktide A ja B tasapinnad, mis on risti projektsiooniteljega s . Need on rööbikud tasapinnad. Nende tasapindade lõikepunktid projektsiooniteljega s on sirglõigu AB projektsiooni A_1B_1 otsapunktid A_1 ja B_1 .



33. joonis.



34. joonis.

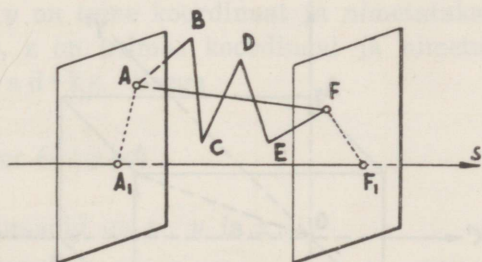
Kui sirglõik AB asetseb tasapinnal, mis on risti projektsiooniteljega s (34. joon.), siis selle sirglõigu projektsiooniks on punkt A_1 , sest sirglõigu AB iga punkt asetseb sellel tasapinnal.

Kui ruumis määrata sirgete s ja t positiivsed suunad ja nendest suundadest (kiirtest) moodustatud nurk tähistada tähelga α , siis samadel kaalutlustel kui tasapinnalgi, on sirglõigu AB projektsioon A_1B_1 võrdne sirglõigu AB ja selle nurga koosinuse korrutisega, s. o.

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha,$$

kusjuures sirglõik AB projektsioonitelje s suhtes olgu mistahes asendis.

Kiivsirgete puhul saame nurga α , kui ühte sirget rööplükkega edasi nihutada nõnda, et ta teist sirget lõikaks.



35. joonis.

Murtud joonlõigu ($ABCDEF$) projektsioon sirgel s on võrdne tema lülide (sirglõikude) projektsioonide summaga (35. joon.). Projektsiooni pikkus ei olene murtud joonlõigu kujust, vaid ainult ta otsapunktide asendist. Seega murtud

joonlõigu ($ABCDEF$) projektsioon on sama, mis sirglõigu AF projektsioongi, s. o. A_1F_1 .

Kui projektsioonitelje s ja murtud joonlõigu lülide vahelised nurgad on

$$(s, AB) = (A_1F_1, AB) = \alpha_1$$

$$(s, BC) = (A_1F_1, BC) = \alpha_2$$

$$(s, CD) = (A_1F_1, CD) = \alpha_3$$

$$(s, DE) = (A_1F_1, DE) = \alpha_4$$

$$(s, EF) = (A_1F_1, EF) = \alpha_5$$

ning projektsioonitelje s ja sirglõigu AF vaheline nurk

$$(s, AF) = (A_1F_1, AF) = \alpha,$$

siis

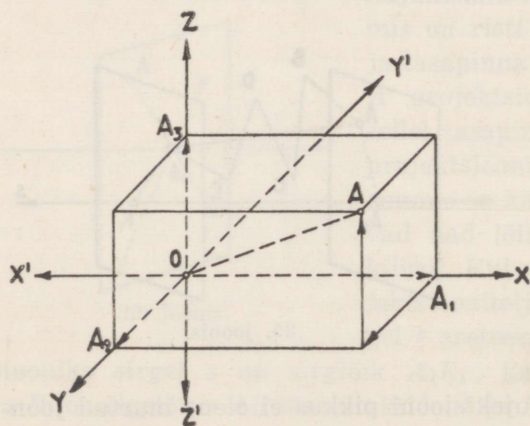
$$(AF)_s = A_1F_1 = AF \cdot \cos \alpha = AB \cdot \cos \alpha_1 + BC \cdot \cos \alpha_2 + CD \cdot \cos \alpha_3 + DE \cdot \cos \alpha_4 + EF \cdot \cos \alpha_5.$$

Kui ruumis murtud joonlõigu lõpupunkt langeb ühte ta alguspunktiga, siis on murtud joone projektsiooni pikkus 0.

§ 12. Punkti määramine ruumis.

Ristkoordinaadid. Punkti määramiseks ruumis valime mingi punkti O , mis loeme 0-punktiks, ja tõmbame sellest punktist kolm

üksteisega ristiolevat sirget $X'X$, $Y'Y$ ja $Z'Z$ (36. joon.), mis loeme koordinaattelgedeks. Üks on X -telg, teine Y -telg ja kolmas Z -telg. Alates 0-punktist loeme nende suunad paremale, ette- ja ülespoole positiivseteks, vastasuunad negatiivseteks. Seega telgede osad OX , OY ja OZ



36. joonis.

on positiivse suunaga ja telgede osad OX' , OY' ja OZ' — negatiivse suunaga.

Koordinaatteljed kahekaupa määravad ruumis kolm ristsापिन्दा, nn. k o o r d i n a a t t a s a p i n d a: XY -tasapind, XZ -tasapind ja YZ -tasapind, mis jagavad ruumi kaheksaks ruumiosaks ehk o k t a n d i k s.

Punkti A kaugused koordinaattasapindadest määravad punkti A asendi ruumis. Ühes või teises ruumiosas asetseva punkti A kaugused on üksikult positiivsed või negatiivsed, olenedes sellest, misugusele ühe või teie koordinaattelje osale — kas positiivsele või negatiivsele — langeb punkti A projektsioon. Punktile A vastab ruumis igal koordinaatteljel punkt, mis on punkti A projektsiooniks, kui koordinaatteljed lugeda projektsioonitelgedeks. Kujundame läbi punkti A kolm tasapinda, mis on risti koordinaattelgedega. Nende tasapindade ja koordinaattelgede löikepunktid A_1 , A_2 ja A_3 on punkti A projektsioonid vastavalt X -, Y - ja Z -teljel. Punktide A_1 , A_2 ja A_3 abil võime määrata punkti A asukoha ruumis. Seega punkti A asukoha määramiseks on enne vaja määrata ja teada punkti A projektsioonide asukohad koordinaattelgedel. Kui punkti A_1 kaugus 0-punktist on x mõõduühikut, punkti A_2 kaugus 0-punktist y mõõduühikut ja punkti A_3 kaugus 0-punktist z mõõduühikut, siis neid arve x , y ja z loeme punkti A koordinaatideks, mis on ühtlasi punkti A kaugused vastavatest koordinaattasapindadest. x on positiivne, kui punkt A_1 asetseb teljeosal OX , ja negatiivne, kui asetseb teljeosal OX' ; y on positiivne, kui asetseb teljeosal OY , ja negatiivne, kui asetseb teljeosal OY' ; z on positiivne, kui asetseb teljeosal OZ , ja negatiivne, kui asetseb teljeosal OZ' . x on punkti A esimene koordinaat ja nimetatakse punkti A a b s t s i s s i k s, y on teine koordinaat ja nimetatakse punkti A o r d i n a a d i k s, z on kolmas koordinaat ja nimetatakse punkti A a p l i k a a d i k s. Seega

$$A \equiv (x | y | z),$$

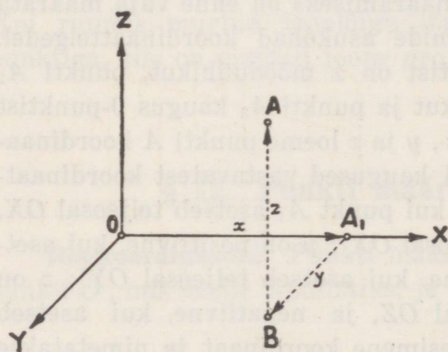
s. o. punkt A , mille koordinaadid on x , y ja z .

Kui punkt A asetseb XY -tasapinnal, siis punkti A aplikaat $z = 0$; kui punkt asetseb XZ -tasapinnal, siis punkti ordinaat $y = 0$; ja kui punkt asetseb YZ -tasapinnal, siis punkti abstsiss $x = 0$.

Kui punkt A asetseb X -teljel, siis punkti ordinaat ja aplikaat on mõlemad 0, s. o. $y = z = 0$; kui punkt asetseb Y -teljel, siis on punkti abstsiss ja aplikaat 0, s. o. $x = z = 0$; ja kui punkt asetseb Z -teljel, siis on punkti abstsiss ja ordinaat 0, s. o. $x = y = 0$. Kui punkt A on 0-punktis, siis $x = y = z = 0$.

Et kolme antud koordinaadi x , y ja z järgi leida punkti A asukoht ruumis, selleks märgime koordinaattelgedel kolm punkti A_1 , A_2 ja A_3 nõnda, et $OA_1 = x$, $OA_2 = y$, $OA_3 = z$. Edasi kujundame läbi punktide A_1 , A_2 ja A_3 kolm tasapinda, millest esimene on risti X -teljega, teine Y -teljega ja kolmas Z -teljega. Nende tasapindade ühine lõikepunkt on otsitav punkt A , mille koordinaadid on x , y ja z .

Läbi punkti A kujundatud kolm tasapinda koos koordinaat-tasapindadega moodustavad risttahuka, mille servad OA_1 , OA_2 ja OA_3 kujutavad punkti A koordinaate x , y ja z , mis on ühtlasi risttahuka diagonaali OA projektsioonid koordinaattelgedel.



37. joonis.

Kuid punkti A konstrueerimiseks tema koordinaatide x , y ja z järgi on ka küllaldane, kui märgime, näiteks, X -teljel sirglõigu $OA_1 = x$ mõõduühikut (37. joon.). Selle sirglõigu lõpupunkti A_1 tõmbame XY -tasapinnal Y -teljele rööpsirglõigu $A_1B = y$ mõõduühikuga (ette- või tahapoole, arvestades y -i märki), ja lõpuks selle sirglõigu lõpupunkti B

tõmbame Z -teljele rööpsirglõigu $BA = z$ mõõduühikut (üles- või allapoole, arvestades z -i märki). Nii saame kolmelülilise murtud joonlõigu OA_1BA , mille lõpupunkt A kujutab punkti, mille koordinaadid on x , y ja z .

Ümberpöörduvalt, punkti A koordinaatide leidmiseks on ka küllaldane, kui laseme punktist A normaali ühele koordinaattasapinnale, näiteks XY -tasapinnale. Saame sirglõigu AB , kus punkt B on punkti A projektsioon XY -tasapinnal. Punktist B tõmbame ristjoone X -teljele, saame sirglõigu BA_1 , kus punkt A_1 on punkti

A projektsioon X -teljel. Siis murtud joonlõik ABA_1O määrab punkti A kolm koordinaati: $OA_1 = x$, $A_1B = y$, $BA = z$.

Tähendab, kindlaksmääratud mõõduühiku puhul vastab igale punktile ruumis üks ja ainult üks koordinaatide kolmik $(x | y | z)$, ja ümberpöörduvalt, igale koordinaatide kolmikule $(x | y | z)$ vastab ruumis üks ja ainult üks punkt. Punkti asukoht ruumis on seega kolme koordinaadi abil üheselt määratud.

Leida ruumis punkt tähendab analüütilises geomeetrias leida tema koordinaadid. Et punkt oleks ruumis antud, peavad antud olema tema koordinaadid, s. o. abstsiss, ordinaat ja aplikaat.

Ülesanne. Leida punkt A , mis jagab antud sirglõigu A_1A_2 nii, et

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \lambda.$$

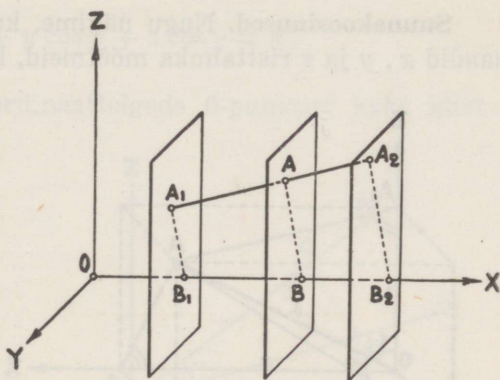
Olgu ruumis antud sirglõik A_1A_2 (38. joon.), mille otsapunktid on

$$A_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$$

ja

$$A_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2).$$

Otsitava punkti A koordinaadid olgu x , y ja z , ning punktide A_1 , A ja A_2 projektsioonid X -teljel vastavalt punktid B_1 , B ja B_2 . Jooniselt näeme, et



38. joonis.

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \lambda,$$

sest kahe sirge lõigud rööptasapindade vahel on võrdelised.

Et ruumis

$$B_1B + BO + OB_1 = 0$$

$$BB_2 + B_2O + OB = 0,$$

millest

$$B_1B = -BO - OB_1 = OB - OB_1 = x - x_1$$

$$BB_2 = -B_2O - OB = OB_2 - OB = x_2 - x,$$

siis asendades saame

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda,$$

millest

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Projektides punktid A_1 , A ja A_2 Y - ja Z -teljele saame analoogiliselt

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

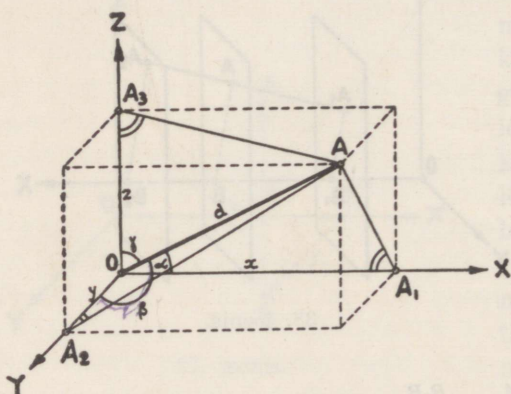
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Kui $\lambda = 1$, siis sirglõigu A_1A_2 keskpunkti koordinaadid

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Suunakoosinused. Nagu nägime, kujutavad punkti A koordinaadid x , y ja z risttahuka mõõtmeid, kusjuures punkt A on rist-

tahuka üheks tipuks ja sirglõik OA tema diagonaaliks. Kui loeme diagonaali OA suuna punktist O punkti A poole positiivseks, siis moodustab diagonaal koordinaattelgedele positiivsete suundadega nurgad α , β ja γ (39. joon.), mis on diagonaali suuna nurgad. Suunanurgad võivad muutuda vahemikus 0 -st kuni π -ni. Kui d on diagonaali OA pikkus ja punkti $A \equiv (x | y | z)$ projektsioonid koordinaattelgedel on punktid A_1 , A_2 ja A_3 , siis



39. joonis.

kus $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ nimetatakse sirglõigu OA ja ühtlasi ka temaga ühtepidi suunatud sirge suunakoosinusteks.

$$OA_1 = x = d \cos \alpha$$

$$OA_2 = y = d \cos \beta$$

$$OA_3 = z = d \cos \gamma,$$

kus $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ nimetatakse sirglõigu OA ja ühtlasi ka temaga ühtepidi suunatud sirge suunakoosinusteks.

OA on risttahuka diagonaal ja tema projektsioonid koordinaattelgedel OA_1 , OA_2 ja OA_3 on risttahuka servad; seega

$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$$

ehk

$$d^2 = d^2 \cos^2 \alpha + d^2 \cos^2 \beta + d^2 \cos^2 \gamma,$$

millest

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

s. o. suunakoosinuste ruutude summa on võrdne ühega.

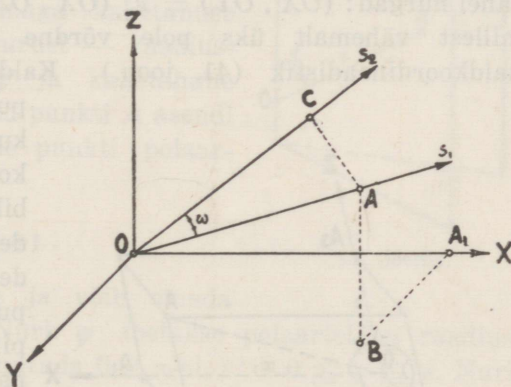
Korrutades avaldisi

$$x = d \cos \alpha, \quad y = d \cos \beta, \quad z = d \cos \gamma$$

vastavalt $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ -ga ning liites saadusi, saame risttahuka diagonaali ja tema suunakoosinuste funktsionaalse seose

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d.$$

Väljugu ruumis koordinaattelgede 0-punktist kaks kiirt s_1 ja s_2 , nii et s_1 moodustab koordinaattelgede positiivsete suundadega nurgad α_1 , β_1 ja γ_1 ning s_2 vastavalt α_2 , β_2 ja γ_2 . Kiirte s_1 ja s_2 vaheline nurk olgu ω (40. joon.). Võtame esimesel kiirel punkti A . Projektime ühelt poolt sirglõigu OA teisele kiirele ja teiselt poolt murtud joonlõigu OA_1BA samale kiirele. Et sirglõigu OA ja murtud joonlõigu OA_1BA otsapunktid langevad ühte, siis on nende projektsioonid võrdsed ja seega ühelt poolt



40. joonis.

$$OC = OA \cdot \cos \omega$$

ning teiselt poolt

$$OC = OA_1 \cdot \cos \alpha_2 + A_1B \cdot \cos \beta_2 + BA \cdot \cos \gamma_2,$$

kus

$$OA_1 = OA \cdot \cos \alpha_1, \quad A_1B = OA \cdot \cos \beta_1, \quad BA = OA \cdot \cos \gamma_1.$$

Seega

$$OA \cdot \cos \omega = OA \cdot \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + OA \cdot \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \\ + OA \cdot \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

ehk

$$\cos \omega = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Erijuhul, kui nurk $\omega = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \omega = 0$ ja

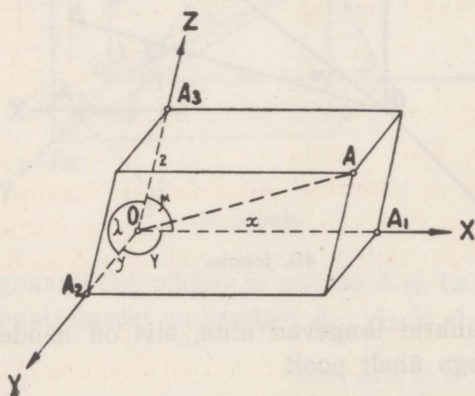
$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0,$$

mis on kahe kiire või kahe ruumilise sirge ristseisu tingimus, kusjuures sirged võivad lõikuda või olla kiivad.

Ühtepidi suunatud rööpsirgete suunakoosinused on võrdsed; vastupidi suunatud rööpsirgete suunakoosinused on absoluutselt võrdsed, kuid vastupidiste märkidega.

Kaldkoordinaadid. Kui koordinaatteljed moodustavad omavahel nurgad: $(OX, OY) = \nu$, $(OX, OZ) = \mu$ ja $(OY, OZ) = \lambda$, millest vähemalt üks pole võrdne täisnurgaga, siis tekib kaldkoordinaadistik (41. joon.). Kaldkoordinaadistikus saame

punkti A koordinaadid, kui kujundame läbi punkti A kolm tasapinda, mis on rööbikud koordinaattasapindadega ja moodustavad nendega rööptahuka. Läbi punkti A kujundatud tasapinnad lõikuvad koordinaattelgedega punktides A_1 , A_2 ja A_3 , mis määravad koordinaattelgedel sirglõigud



41. joonis.

$$OA_1 = x, \quad OA_2 = y, \\ OA_3 = z.$$

Nende kolme sirglõigu pikkused x , y ja z kui rööptahuka servade mõõtardvud määravad punkti A asukoha ruumis, mis on rööp-

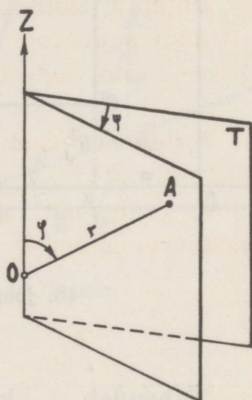
tahuka 0-punktis asetseva tipu vastastipp. Seega $OA_1 = x$, $OA_2 = y$ ja $OA_3 = z$ on punkti A koordinaadid ning

$$A \equiv (x | y | z),$$

kusjuures koordinaattelgede vahelised nurgad on:

$$(OX, OY) = \nu, (OX, OZ) = \mu, (OY, OZ) = \lambda.$$

Polaarkoordinaadid. Punkti asendi ruumis võime määrata ka polaarkoordinaatide abil. Polaarkoordinaatide aluseks võetakse ruumis mingi kindel tasapind — polaartasapind, sellel tasapinnal kindel sirge — polaartelg, ja sellel sirgel kindel punkt — poolus. Olgu tasapind T (42. joon.) polaartasapind, sirge OZ — polaartelg ja punkt O sellel sirgel — poolus. Punkti A asendi määramiseks ruumis ühendame punkti A poolusega O , saame sirglõigu r , mis moodustab polaarteljega nurga φ ; siis kujundame läbi punkti A ja polaartelje OZ tasapinna, mis moodustab polaartasapinnaga kahetahuse nurga ψ . Need kolm suurust — raadiusvektor r , polaarnurk φ ja kahetahune polaarnurk ψ — määravad punkti A asendi ruumis ja on seega selle punkti polaarkoordinaadid, s. o.



42. joonis.

$$A \equiv (r | \varphi | \psi).$$

r on alati positiivne ja võib omada väärtusi 0-st $+\infty$ -ni. Nurk φ loetakse polaarteljest raadiusvektori r poole ja võib muutuda 0-st π -ni, s. o. $0 \leq \varphi \leq \pi$. Nurk ψ loetakse polaartasapinnast ja võib muutuda 0-st 2π -ni, s. o. $0 \leq \psi < 2\pi$.

Kõik punktid, millel on ühesugused raadiusvektorid r , asetsevad kera pinnal, mille raadius on r ja keskpunkt on pooluses O . Kõik punktid, millel on ühesugused polaarnurgad φ , asetsevad koonilisel pinnal, kus koonuse tipuks on poolus O ja telglõike tipunurgaks 2φ . Kõik punktid, millel on ühesugused kahetahused polaarnurgad ψ , asetsevad pooltasapinnal, mille piiriks ühelt poolt on polaartelg.

§ 13. Koordinaatide teisendamine.

Tasapinnal. Geomeetriliste kujundite uurimistes on tihti otsarbekohane koordinaatide teisendamine koordinaattelgede rööplükkega ja koordinaattelgede pööramise teel, mis lihtsustab geomeetriliste kujundite analüütilist uurimist. Polaarkoordinaate võime muuta Cartesiuse koordinaatideks ja ümberpöördult.

a) Kui koordinaadistikus OXY (43. ja 44. joon.) x ja y on mõne punkti A koordinaadid ning a ja b uute telgede $O'X'$ ja $O'Y'$

O -punkti koordinaadid endise teljestiku suhtes, siis rööplükkel saadud uues teljestikus $O'X'Y'$ sama punkti A koordinaadid x' ja y' (nii rist- kui ka kaldkoordinaadistikus) rahuldavad tingimusi

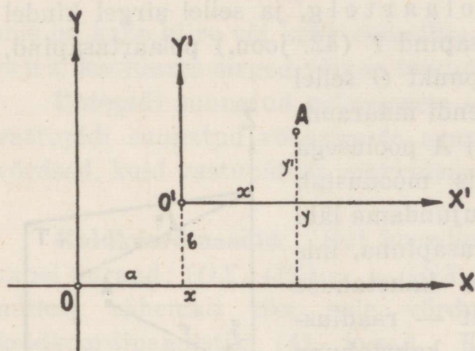
$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

ehk

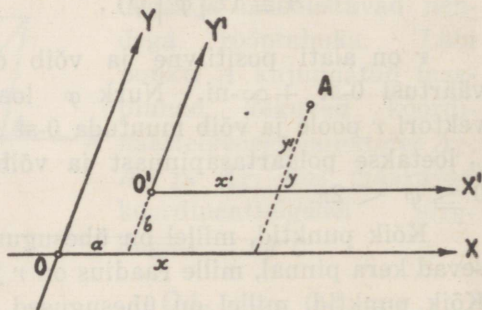
$$x = a + x'$$

$$y = b + y'$$



43. joonis.

Tähendab, koordinaattelgede rööpteisendamisel punkti abstsiss on võrdne tema uue abstsissi ja uue O -punkti abstsissi summaga ning punkti ordinaat on võrdne tema uue ordinaadi ja uue O -punkti ordinaadi summaga.



44. joonis.

b) Kui endistel ja uutel koordinaattelgedel on üks ja sama O -punkt ning uued teljed on pööratud endiste telgede suhtes nurga α võrra (45. ja 46. joon.), kusjuures punkti A koordi-

naadid teljestikus OXY on x ja y ning pööratud teljestikus $OX'Y'$ on x' ja y' , siis leiame joonistelt, et

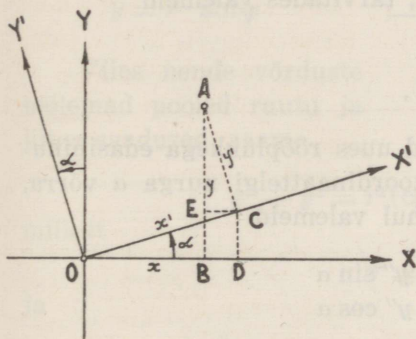
$$\begin{aligned} OB + BD + DO &= 0 \\ BA + AE + EB &= 0, \end{aligned}$$

millest

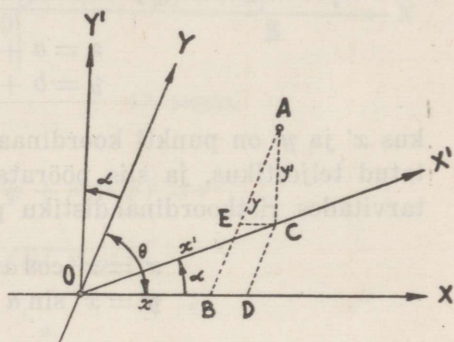
$$\begin{aligned} OB &= OD - BD = OD - EC \\ BA &= BE + EA = DC + EA, \end{aligned}$$

kus

$$OB = x \text{ ja } BA = y.$$



45. joonis.



46. joonis.

Ristkoordinaatide puhul (45. joon.):

$$OD = x' \cos \alpha, \quad EC = y' \sin \alpha$$

ja

$$DC = x' \sin \alpha, \quad EA = y' \cos \alpha.$$

Neid asendades saame

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Kaldkoordinaatide puhul (46. joon.), kasutades siinuslauset:

$$OD = \frac{x' \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \quad EC = \frac{y' \sin \alpha}{\sin \theta}$$

ja

$$DC = \frac{x' \sin \alpha}{\sin \theta}, \quad EA = \frac{y' \sin(\theta + \alpha)}{\sin \theta},$$

saame

$$x = \frac{x' \sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta} - \frac{y' \sin \alpha}{\sin \theta}$$
$$y = \frac{x' \sin \alpha}{\sin \theta} + \frac{y' \sin (\theta + \alpha)}{\sin \theta},$$

kus θ on nii endiste kui ka uute koordinaattelgedede vaheline nurk ja α on telgedede pöördenurk, mida loeme positiivses suunas 0-st 2π -ni.

c) Kui uutal koordinaattelgedel on uus 0-punkt $O' \equiv (a | b)$ ja ühtlasi ka uued suunad, mis erinevad endistest nurga α võrra, siis võime punkti uute koordinaatide leidmiseks enne teostada koordinaattelgedede rööpteisendamise, tarvitades valemeid

$$x = a + x'$$
$$y = b + y',$$

kus x' ja y' on punkti koordinaadid uues rööplükkega edasinihutatud teljestikus, ja siis pöörata koordinaattelgi nurga α võrra, tarvitades ristkoordinaadistiku puhul valemeid

$$x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$$
$$y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha$$

ja kaldkoordinaatide suhtes valemeid

$$x' = \frac{x'' \sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta} - \frac{y'' \sin \alpha}{\sin \theta}$$
$$y' = \frac{x'' \sin \alpha}{\sin \theta} + \frac{y'' \sin (\theta + \alpha)}{\sin \theta},$$

kus x'' ja y'' on punkti koordinaadid pööratud teljestikus, või ümberpöördult: enne pöörata koordinaattelgi nurga α võrra ja siis telgedede rööpteisendamisel viia koordinaatide 0-punkt punkti $O' \equiv (a | b)$. Saame ristkoordinaatide suhtes

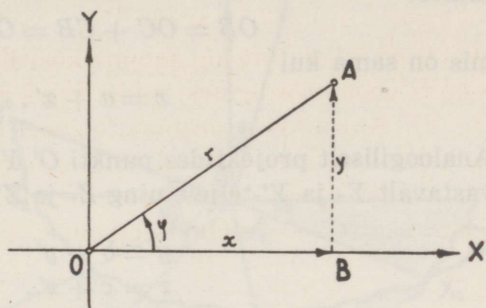
$$x = a + x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$$
$$y = b + x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha$$

ja kaldkoordinaatide suhtes

$$x = a + \frac{x'' \sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta} - \frac{y'' \sin \alpha}{\sin \theta}$$
$$y = b + \frac{x'' \sin \alpha}{\sin \theta} + \frac{y'' \sin (\theta + \alpha)}{\sin \theta}.$$

d) Olgu punkt $A \equiv (r | \varphi)$ polaarkoordinaadistikus (47. joon.). Teisendame punkti polaarkoordinaadid ristkoordinaatideks ja ümberpöördukt. Kui O on poolus ja OX polaartelg, siis loeme ristkoordinaadistikus polaartelje X -teljeks ja pooluse O -punktiks. Punkti A ristkoordinaadid olgu x ja y . Täisnurksest kolmnurgast OBA näeme, et

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \\y &= r \cdot \sin \varphi.\end{aligned}$$



47. joonis.

Viies nende võrduste mõlemad pooled ruutu ja liites saadused, saame

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2,$$

millest

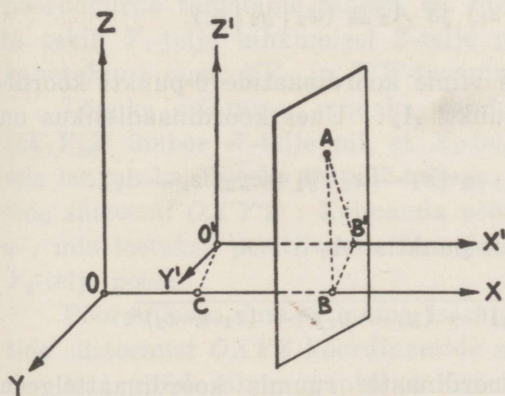
$$r = |\sqrt{x^2 + y^2}|$$

ja

$$\cos \varphi = \frac{x}{|\sqrt{x^2 + y^2}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|\sqrt{x^2 + y^2}|},$$

kus nüüd x ja y märgid määravad polaarnurga φ veerandi.



48. joonis.

Ruumis. a) Olgu ruumis ristkoordinaadistiku $OXYZ$ suhtes punkti A koordinaadid x , y ja z (48. joon.) ja sama punkti koordinaadid koordinaattelgede rööpteisendamisel saadud koordinaadistikus $O'X'Y'Z'$ vastavalt x' , y' ja z' . Uute koordinaattelgede O -punkti koordinaadid endiste

telgede suhtes olgu a , b ja c , s. o. $O' \equiv (a | b | c)$. Projekttime punkti O' X -teljele ja punkti A X - ja X' -teljele, saame

$$OB + BC + CO = 0,$$

millest

$$OB = OC + CB = OC + O'B',$$

mis on sama kui

$$x = a + x'.$$

Analoogiliselt projektides punkti O' Y - ja Z -teljele ning punkti A vastavalt Y - ja Y' -teljele ning Z - ja Z' -teljele, saame

$$y = b + y'$$

$$z = c + z'.$$

Seega punkt A uute koordinaatidega on

$$A \equiv (x' | y' | z') \equiv (x - a | y - b | z - c).$$

Kui ruumilise punkti A_1 koordinaadid on x_1 , y_1 ja z_1 , siis tema kaugus (d) 0-punktist on ristküliku diagonaali pikkus, mille mõõtmed on x_1 , y_1 ja z_1 , s. o.

$$d^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

millest

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Et leida kahe punkti

$$A_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1) \text{ ja } A_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$$

kaugus teineteisest, selleks viime koordinaatide 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega punkti A_2 . Uues koordinaadistikus on

$$A_2 \equiv (0 | 0 | 0) \text{ ja } A_1 \equiv (x_1 - x_2 | y_1 - y_2 | z_1 - z_2).$$

Seega punkti A_1 kaugus punktist A_2

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

b) Teisendame ristkoordinaate ruumis koordinaattelgede pööramise teel.

Olgu meil ruumis kaks ristkoordinaatide süsteemi $OXYZ$ ja $OX'Y'Z'$ ühise 0-punktiga O (49. joon.). Et koordinaatide süsteemist $OXYZ$ saada süsteem $OX'Y'Z'$, selleks võtame, näiteks, XY - ja $X'Y'$ -tasapinnad, mis lõikuvad sirges joones OX_1 .

Tõmbame 0-punkti sellele lõikjoonele OX_1 mõlemal tasapinnal ristjooned OY_1 ja OY_2 ning teeme nüüd kolm koordinaatide süsteemi pööramist ümber kolme isesuguse telje.

Kõigepealt pöörame koordinaatide süsteemi $OXYZ$ ümber Z -telje nii, et X -telg langeks ühte XY - ja $X'Y'$ -tasapindade lõikjoonega OX_1 .

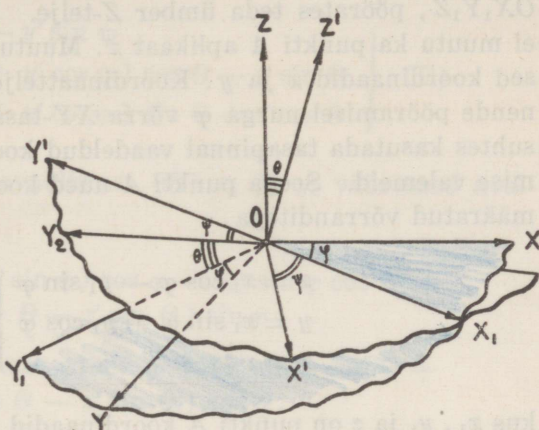
Siis Y -telg võtab asendi OY_1 ja tekib uus koordinaatide süsteem OX_1Y_1Z , kus nüüd X - ja Y -telg on edasi nihkunud, oletame, nurga φ võrra. Pöördenurga φ loeme positiivseks, kui ta tekib X -telje pööramisel Y -telje poole.

Nüüd pöörame saadud koordinaatide süsteemi OX_1Y_1Z ümber X_1 -telje nii, et Z -telg langeks ühte Z' -teljega. Seejuures langevad ühte ka XY - ja $X'Y'$ -tasapind, ning Y_1 -telg saab Y_2 -teljeks. Saame kolmanda koordinaatide süsteemi OX_1Y_2Z' , kusjuures pöördenurga tähistame tähega Θ , mis loetakse positiivseks, kui ta tekib Y_1 -telje nihkumisel Z -telje poole. Nurk Θ on ühtlasi kahetahune nurk XY - ja $X'Y'$ -tasapinna vahel.

Lõpuks pöörame viimaks saadud koordinaatide süsteemi OX_1Y_2Z' ümber Z' -telje nii, et X_1 -telg langeks ühte X' -teljega; siis langeb ka Y_2 -telg ühte Y' -teljega. Saame otsitava koordinaatide süsteemi $OX'Y'Z'$. Kolmanda pöördenurga tähistame tähega ψ , mis loetakse positiivseks, kui ta tekib X_1 -telje nihkumisel Y_2 -telje poole.

Pööramisega ümber kolme isesuguse telje saime koordinaatide süsteemist $OXYZ$ koordinaatide süsteemi $OX'Y'Z'$.

Kui nüüd mingi punkti A koordinaadid endises süsteemis $OXYZ$ on x , y ja z ning uues süsteemis $OX'Y'Z'$ on x' , y' ja z' ,



49. joonis.

siis endistelt koordinaatidelt ülemineku seosed uutele koordinaatidele saame ülal tähendatud kolme pööramise teel.

Kõigepealt läheme koordinaatide süsteemilt $OXYZ$ süsteemile OX_1Y_1Z , pöörates teda ümber Z -telje. Et Z -telg ei muutu, siis ei muutu ka punkti A aplikaat z . Muutuvad ainult punkti A teised koordinaadid x ja y . Koordinaatteljed OX ja OY muutuvad nende pööramisel nurga φ võrra XY -tasapinnal; siis tuleb nende suhtes kasutada tasapinnal vaadeldud koordinaattelgedete teisendamise valemeid. Seega punkti A uued koordinaadid x_1 , y_1 ja z on määratud võrranditega

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y &= x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}),$$

kus x_1 , y_1 ja z on punkti A koordinaadid uues süsteemis OX_1Y_1Z .

Edasi läheme koordinaatide süsteemilt OX_1Y_1Z süsteemile OX_1Y_2Z' , pöörates teda ümber X_1 -telje. Siin X_1 -telje asend ei muutu, seega ei muutu ka punkti A abstsiss x_1 . Kuid muutuvad punkti A teised koordinaadid y_1 ja z . Koordinaatteljed OY_1 ja OZ muutuvad nende pööramisel nurga Θ võrra Y_1Z -tasapinnal. Seega punkti A koordinaadid

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ y_1 &= y_2 \cos \Theta - z' \sin \Theta \\ z &= y_2 \sin \Theta + z' \cos \Theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}),$$

kus x_1 , y_2 ja z' on punkti A koordinaadid süsteemis OX_1Y_2Z' .

Lõpuks läheme koordinaatide süsteemilt OX_1Y_2Z' süsteemile $OX'Y'Z'$, pöörates teda ümber Z' -telje. Nüüd Z' -telje asend ei muutu, seega ei muutu ka punkti A aplikaat z' . Siin muutuvad punkti A koordinaadid x_1 ja y_2 . X_1 -telje ja Y_2 -telje pööramine toimub X_1Y_2 - ehk $X'Y'$ -tasapinnal. Seega punkti A koordinaadid

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x' \cos \psi - y' \sin \psi \\ y_2 &= x' \sin \psi + y' \cos \psi \\ z' &= z' \end{aligned} \right\} \quad (\text{C}),$$

kus x' , y' ja z' on punkti A koordinaadid otsitavas süsteemis $OX'Y'Z'$.

Et saada ülemineku valemid lõppkujus, selleks kõrvaldame eespool-olevatest avaldistest ülemineku koordinaadid: x_1 , y_1 ja y_2 . Paigutame avaldistest (C) x_1 ja y_2 väärtused avaldistesse (B):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x' \cos \psi - y' \sin \psi \\ y_1 &= (x' \sin \psi + y' \cos \psi) \cos \Theta - z' \sin \Theta \\ z &= (x' \sin \psi + y' \cos \psi) \sin \Theta + z' \cos \Theta \end{aligned} \right\} \text{ (D)}$$

ja siis paigutame neist avaldistest (D) x_1 ja y_1 väärtused avaldistesse (A), saame

$$\begin{aligned} x &= (x' \cos \psi - y' \sin \psi) \cos \varphi - (x' \sin \psi \cos \Theta + \\ &\quad + y' \cos \psi \cos \Theta - z' \sin \Theta) \sin \varphi; \\ y &= (x' \cos \psi - y' \sin \psi) \sin \varphi + (x' \sin \psi \cos \Theta + \\ &\quad + y' \cos \psi \cos \Theta - z' \sin \Theta) \cos \varphi; \\ z &= (x' \sin \psi + y' \cos \psi) \sin \Theta + z' \cos \Theta. \end{aligned}$$

Avame sulud ja eraldame sulgude ette punkti A uued koordinaadid x' , y' ja z' , saame koordinaatide teisendamise valemid, mis nimetatakse Euler'i valemiteks:

$$\begin{aligned} x &= x' (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta) + \\ &\quad + y' (-\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta) + \\ &\quad + z' \sin \varphi \sin \Theta; \\ y &= x' (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta) + \\ &\quad + y' (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta) - \\ &\quad - z' \cos \varphi \sin \Theta; \\ z &= x' \sin \psi \sin \Theta + y' \cos \psi \sin \Theta + z' \cos \Theta \end{aligned}$$

ehk lihtsalt

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z', \end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta \\ a_2 &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta \\ a_3 &= \sin \varphi \sin \Theta; \end{aligned}$$

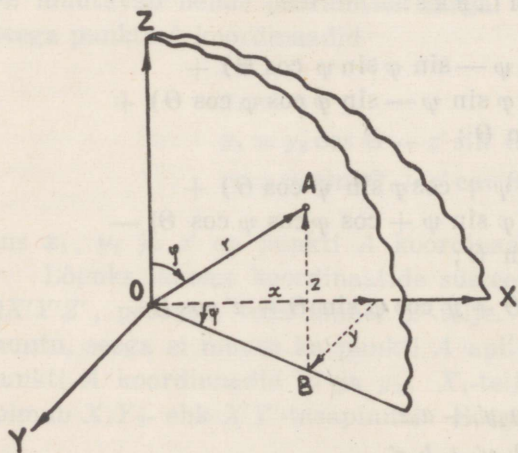
$$\begin{aligned}
 b_1 &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta \\
 b_2 &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta \\
 b_3 &= -\cos \varphi \sin \Theta ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \sin \psi \sin \Theta \\
 c_2 &= \cos \psi \sin \Theta \\
 c_3 &= \cos \Theta .
 \end{aligned}$$

Koordinaattelgede teisendamisel rööplükke ja ka telgede pööramise teel, kui uus 0-punkt on $O' \equiv (a | b | c)$, saame

$$\begin{aligned}
 x &= a + a_1x' + a_2y' + a_3z' \\
 y &= b + b_1x' + b_2y' + b_3z' \\
 z &= c + c_1x' + c_2y' + c_3z' .
 \end{aligned}$$

c) Lõpuks koostame veel teisendamise valemid üleminekuks polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele ja ümberpöördult. Loeme polaartasapinna XZ -tasapinnaks, polaartelje Z -teljeks ja pooluse 0-punktiks (50. joon.). Kui r , φ ja ψ on punkti A polaarkoordinaadid, x , y ja z on punkti A ristkoordinaadid ning OB on OA projektsioon XY -tasapinnal, siis



50. joonis.

$$\begin{aligned}
 z &= r \cos \varphi \\
 OB &= r \sin \varphi \\
 x &= OB \cdot \cos \psi = \\
 &= r \sin \varphi \cos \psi \\
 y &= OB \cdot \sin \psi = \\
 &= r \sin \varphi \sin \psi .
 \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \varphi \cos \psi \\
 y &= r \sin \varphi \sin \psi \\
 z &= r \cos \varphi .
 \end{aligned}$$

Astendades ja liites saame .

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r^2(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + \cos^2 \varphi) = \\ &= r^2[\sin^2 \varphi (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + \cos^2 \varphi] = r^2,\end{aligned}$$

millest

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Et $0 \leq \varphi \leq \pi$, siis

$$\cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

kus polaarnurk φ on teravnurk, kui z on positiivne, ja nürinurk, kui z on negatiivne.

Et $0 \leq \psi < 2\pi$, siis märgime

$$\cos \psi = \frac{x}{r \sin \varphi} \text{ ja } \sin \psi = \frac{y}{r \sin \varphi},$$

kus

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Siin

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}},$$

sest et $0 \leq \varphi \leq \pi$. Saame

$$\cos \psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

kus nüüd x ja y märgid määravad kahetahuse polaarnurga ψ veerandi.

§ 14. Harjutusülesanded.

A. Tasapinnal.

5. Määrata vabalt valitud mõõduühiku puhul sirgel punktid, mille abstsissid on: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{0,5}$.
6. Määrata antud punkti abstsissi a kaudu sirgel punktid, mille abstsissid on: \sqrt{a} ; $\sqrt{2a}$; $a\sqrt{2}$.
7. Määrata sirgel punktid, mille abstsissid rahuldavad võrrandit $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
8. Leida sirglõigu AB pikkus ja suund, kui ta otsapunktide A ja B abstsissid on vastavalt 5 ja -2 .
9. Ristkoordinaadistikus on antud punkt $A \equiv (5 | -2)$. Leida punkt, mis antud punktiga on sümmeetriline: a) X -telje suhtes, b) Y -telje suhtes, c) O -punkti suhtes.
10. Polaarkoordinaadistikus on antud punkt $A \equiv (3 | \frac{2\pi}{3})$. Leida punkt, mis on antud punktiga sümmeetriline: a) pooluse suhtes, b) polaartelje suhtes.
11. Missuguses vahekorras on sirgel asetsevate punktide koordinaadid, kui sirge poolitab koordinaatnurga?
12. Mismoodi muutuvad sirgel asetsevate punktide koordinaadid, kui sirge on rööbik abstsisssteljega? ordinaatteljega?
13. Punkt $C \equiv (7 | -2)$ on sirglõigu AB keskpunkt. Leida punkt B , kui $A \equiv (2 | 3)$.
14. Punktid $C_1 \equiv (1 | 2)$ ja $C_2 \equiv (3 | 4)$ jagavad sirglõigu AB kolmeks võrdseks osaks. Leida punktid A ja B .
15. Leida sirglõigu AB projektsioonide pikkused koordinaattelgedel, kui sirglõigu otsapunktid on $A \equiv (3 | 7)$ ja $B \equiv (5 | 6)$. $\theta = 90^\circ$.

16. Ruudu külje pikkuseks on 4 mõõduühikut. Leida ruudu tipude koordinaadid, kui ruudu diagonaalid lugeda koordinaattelgedeks.

17. Rombi külje pikkuseks on 2 mõõduühikut. Leida rombi tipude koordinaadid, kui rombi pikem diagonaal lugeda abstsistteljeks ja lühem diagonaal ordinaatteljeks. Rombi teravnurk $= \frac{\pi}{3}$.

18. Rombi külje pikkuseks on 3 mõõduühikut. Leida rombi tipude koordinaadid, kui rombi küljed lugeda koordinaattelgedeks.

19. Korrapärase 6-nurga külje pikkuseks on 6 mõõduühikut. Leida kuusnurga tippude ristkoordinaadid, kui koordinaattelgede 0-punktiks on 6-nurga keskpunkt ja X -telg läbib 6-nurga kaks vastastippu.

20. Leida ristkoordinaadistikus punktide kaugus teineteisest:

a) $A \equiv (6 | 8)$, $B \equiv (2 | 3)$

b) $A \equiv (4 | -5)$, $B \equiv (3 | 5)$

c) $A \equiv (8 | -1)$, $B \equiv (-6 | 3)$

d) $A \equiv (-15 | -8)$, $B \equiv (-8 | -12)$

e) $A \equiv (4,1 | -4,1)$, $B \equiv (17,3 | -11,9)$

f) $A \equiv (\frac{2}{5} | -4\frac{1}{2})$, $B \equiv (2\frac{2}{5} | -8\frac{3}{4})$.

21. Leida kaldkoordinaadistikus punktide kaugus teineteisest:

a) $A \equiv (1 | 10)$, $B \equiv (7 | 2)$, $\theta = 60^\circ$

b) $A \equiv (0 | -4)$, $B \equiv (7 | -2)$, $\theta = 30^\circ$

c) $A \equiv (-5 | 4)$, $B \equiv (-1 | -5)$, $\theta = 45^\circ$

d) $A \equiv (5,4 | 6,2)$, $B \equiv (7,5 | 2,8)$, $\theta = 120^\circ$.

22. Leida polaarkoordinaadistikus punktide kaugus teineteisest:

a) $A \equiv (6 \mid 80^\circ)$, $B \equiv (4 \mid 20^\circ)$

b) $A \equiv (5 \mid 25^\circ)$, $B \equiv (8 \mid 55^\circ)$

c) $A \equiv (10 \mid 146^\circ)$, $B \equiv (3 \mid 72^\circ)$

d) $A \equiv (3 \mid \frac{\pi}{4})$, $B \equiv (4 \mid \pi)$.

23. Leida kolmnurga külgede pikkused ja perimeeter, kui kolmnurga tipud on:

a) $A \equiv (3 \mid -8)$, $B \equiv (3 \mid -1)$, $C \equiv (-3 \mid 3)$, $\theta = 90^\circ$

b) $A \equiv (4 \mid 0)$, $B \equiv (0 \mid 3)$, $C \equiv (4 \mid 15)$, $\theta = 60^\circ$

c) $A \equiv (0 \mid 0)$, $B \equiv (2 \mid 4)$, $C \equiv (-4 \mid -2)$, $\theta = 90^\circ$

d) $A \equiv (3 \mid 6)$, $B \equiv (-6 \mid -3)$, $C \equiv (6 \mid -8)$,
 $\theta = 30^\circ$

e) $A \equiv (3,3 \mid 5,5)$, $B \equiv (14,4 \mid 4,8)$, $C \equiv (8,5 \mid 9,7)$,
 $\theta = 90^\circ$

f) $A \equiv (-5,2 \mid 2,6)$, $B \equiv (-10,6 \mid -1,8)$,
 $C \equiv (2,1 \mid -8,8)$, $\theta = 45^\circ$

g) $A \equiv (-4,5 \mid 0)$, $B \equiv (5\frac{1}{3} \mid -\frac{2}{3})$, $C \equiv (-1 \mid 10\frac{1}{2})$,
 $\theta = 90^\circ$

h) $A \equiv (-5\frac{1}{3} \mid -2\frac{1}{2})$, $B \equiv (-\frac{1}{2} \mid 6\frac{1}{3})$, $C \equiv (8\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4})$,
 $\theta = 120^\circ$

i) $A \equiv (10 \mid 90^\circ)$, $B \equiv (15 \mid 60^\circ)$, $C \equiv (6 \mid 30^\circ)$

j) $A \equiv (3 \mid 120^\circ)$, $B \equiv (8 \mid 30^\circ)$, $C \equiv (5 \mid 300^\circ)$

k) $A \equiv (6,4 \mid 250^\circ)$, $B \equiv (5,2 \mid 312^\circ)$, $C \equiv (6,3 \mid 12^\circ)$.

24. Leida nelinurga külgede ja diagonaalide pikkused, kui nelinurga tipud on:

a) $A \equiv (-6 \mid 10)$, $B \equiv (-7 \mid -4)$, $C \equiv (3 \mid -9)$,
 $D \equiv (10 \mid 4)$, $\theta = 90^\circ$

b) $A \equiv (5 \mid -1)$, $B \equiv (0 \mid -11)$, $C \equiv (-8 \mid -2)$,
 $D \equiv (-3 \mid 6)$, $\theta = 60^\circ$

$$\begin{aligned} c) \quad A &\equiv (-3,3 \mid -12,4), \quad B \equiv (-10,5 \mid 0,5), \\ C &\equiv (0,5 \mid 4,8), \quad D \equiv (5,2 \mid -3,3), \quad \theta = 30^\circ. \end{aligned}$$

25. Näidata, et ristkoordinaadistikus kolmnurk tippudega $A \equiv (6 \mid 5)$, $B \equiv (1 \mid 10)$ ja $C \equiv (3 \mid 2)$ on täisnurkne.

26. Leida ristkoordinaadistikus kolmnurga tipud, kui kolmnurga külgede keskpunktid on: $A_1 \equiv (-2 \mid 1)$, $B_1 \equiv (2 \mid 3)$ ja $C_1 \equiv (4 \mid -1)$.

27. Leida ristkoordinaadistikus kolmnurga mediaanide pikkused, kui kolmnurga tipud on:

$$a) \quad A \equiv (-8 \mid -2), \quad B \equiv (4 \mid 10), \quad C \equiv (6 \mid -4)$$

$$b) \quad A \equiv (0 \mid -6), \quad B \equiv (4 \mid 3), \quad C \equiv (-5 \mid 10)$$

$$c) \quad A \equiv (-7,3 \mid 3,5), \quad B \equiv (-9,1 \mid 2,7), \quad C \equiv (1,1 \mid -10,9).$$

28. Leida ristkoordinaadistikus kolmnurga mediaanide keskpunktid, kui kolmnurga tipud on:

$$a) \quad A \equiv (-6 \mid 6), \quad B \equiv (14 \mid 2), \quad C \equiv (-2 \mid 10)$$

$$b) \quad A \equiv (0 \mid 0), \quad B \equiv (15 \mid -3), \quad C \equiv (2 \mid -9)$$

$$c) \quad A \equiv (-2,6 \mid -1,5), \quad B \equiv (1,4 \mid 12,3), \quad C \equiv (18,8 \mid -11,9).$$

29. Rööpküliku kolm tippu on $A_1 \equiv (1 \mid 1)$, $A_2 \equiv (2 \mid 2)$ ja $A_3 \equiv (3 \mid -1)$. Leida neljas tipp A_4 .

30. Rööpküliku ühe külje otsapunktid on $A_1 \equiv (2 \mid 1)$ ja $A_2 \equiv (-3 \mid 4)$ ning diagonaalide lõikepunkt $M \equiv (-1 \mid 0)$. Leida rööpküliku tipud A_3 ja A_4 .

31. Leida kolmnurga pindala, kui ta tipud on:

$$a) \quad A \equiv (1 \mid 2), \quad B \equiv (3 \mid 4), \quad C \equiv (4 \mid 1), \quad \theta = 90^\circ$$

$$b) \quad A \equiv (2 \mid -1), \quad B \equiv (-3 \mid 1), \quad C \equiv (0 \mid 2), \quad \theta = 60^\circ$$

$$c) \quad A \equiv (-3 \mid 2), \quad B \equiv (1 \mid 3), \quad C \equiv (-2 \mid 3), \quad \theta = 30^\circ$$

$$d) \quad A \equiv (2 \mid -2), \quad B \equiv (-2 \mid -8), \quad C \equiv (7 \mid -3), \\ \theta = 45^\circ$$

- e) $A \equiv (2 | 3)$, $B \equiv (3 | 3)$, $C \equiv (-4 | 3)$, $\theta = 90^\circ$
- f) $A \equiv (3,4 | -2,5)$, $B \equiv (-5,2 | -8,7)$,
 $C \equiv (-7,6 | 4,3)$, $\theta = 120^\circ$
- g) $A \equiv (-4a | -7a)$, $B \equiv (5a | 2a)$, $C \equiv (-a | 10a)$,
 $\theta = 90^\circ$
- h) $A \equiv (10 | 90^\circ)$, $B \equiv (15 | 60^\circ)$, $C \equiv (6 | 30^\circ)$
- i) $A \equiv (3 | 120^\circ)$, $B \equiv (8 | 30^\circ)$, $C \equiv (5 | 60^\circ)$
- j) $A \equiv (9 | \frac{\pi}{10})$, $B \equiv (12 | \frac{4\pi}{15})$, $C \equiv (10 | \frac{3\pi}{5})$.

32. Leida nelinurga pindala, kui ta tipud on:

- a) $A \equiv (2 | 6)$, $B \equiv (8 | -3)$, $C \equiv (-4 | -4)$,
 $D \equiv (-7 | 5)$, $\theta = 90^\circ$
- b) $A \equiv (-3 | -10)$, $B \equiv (6 | -5)$, $C \equiv (8 | -2)$,
 $D \equiv (4 | 0)$, $\theta = 60^\circ$
- c) $A \equiv (-2 | 3)$, $B \equiv (1 | -2)$, $C \equiv (3 | 3)$,
 $D \equiv (1 | 1)$, $\theta = 30^\circ$.

33. Ühe kolmnurga tippude ristkoordinaadid on $(-3 | 7)$, $(2 | 5)$ ja $(1 | 2)$. Leida teise kolmnurga pindala, mille tipud on esimese kolmnurga külgede keskpunktides.

34. Leida punktide $(-4 | 0)$, $(0 | 3)$, $(0 | -1)$, $(3 | -3)$ ja $(1 | 1)$ polaarkoordinaadid.

35. Punktide polaarkoordinaadid on $(1 | 45^\circ)$, $(3 | 210^\circ)$ ja $(2 | 315^\circ)$. Leida vastavad ristkoordinaadid.

36. Punkti polaarkoordinaadid on $(10 | 30^\circ)$. Leida selle punkti ristkoordinaadid, kui poolus on punktis $(2 | 3)$ ja polaartelg on rööbik X -teljega.

37. Leida punkti $A \equiv (9 | -1)$ polaarkoordinaadid, kui poolus on punktis $(3 | 5)$ ja polaartelg rööbik Y -teljega.

38. Leida ristkoordinaadistikus punkt B , mis asetseb punktist $A \equiv (3 | 2)$ 12 mõõduühiku kaugusel, kui punkte ühendav sirgloik moodustab X -teljega nurga 60° .

39. Leida X -teljel punkt, mille kaugused 0-punktist ja punktist $A \equiv (-5 | 3)$ on võrdsed. $\theta = 90^\circ$.
40. Leida ristkoordinaadistikus punkt, mille kaugused koordinaattelgedest ja punktist $A \equiv (3 | 6)$ on võrdsed.
41. Leida ristkoordinaadistikus punkt, mille kaugus X -teljest ja punktist $A \equiv (-5 | 2)$ on 10.
42. Ristkoordinaadistikus sirglõik otsapunktidega $A \equiv (x | 5)$ ja $B \equiv (-2 | y)$ jaguneb punktis $C \equiv (1 | 1)$ pooleks. Leida punkti A abstsiss ja punkti B ordinaat.
43. Leida ristkoordinaadistikus kolmnurga mediaanide lõikepunkt, kui kolmnurga tipud on $A \equiv (1 | 2)$, $B \equiv (0 | 5)$ ja $C \equiv (-2 | 3)$.
44. Ristkoordinaadistikus kolmnurga tipud on: $A \equiv (1 | -4)$, $B \equiv (3 | -8)$ ja $C \equiv (5 | 0)$. Leida punktid, milles mediaanid jagunevad kolmeks võrdseks osaks.
45. Leida koordinaatnurk θ , kui punkti $A \equiv (10 | -4)$ kaugus punktist $B \equiv (7 | -1)$ on 3 mõõduühikut.
46. Ristkoordinaadistikus kahe sarnase kolmnurga ühise nurga tipp on $A \equiv (3 | -6)$. Leida suurema kolmnurga teised tipud, kui väiksema kolmnurga teised tipud on $B \equiv (6,2 | -3,6)$ ja $C \equiv (5 | 1)$ ning sarnaste kolmnurkade vastavate külgede suhe on 2:5.
47. Ristkoordinaadistikus leida punkt, mille kaugused punktidest $A \equiv (-5 | 1)$, $B \equiv (3 | -5)$ ja $C \equiv (2 | 2)$ on võrdsed.
48. Leida koordinaatnurk θ , kui kolmnurga tipud on $A \equiv (3 | -2)$, $B \equiv (1 | 4)$ ja $C \equiv (-5 | -1)$ ning pindala $S = 11,5$ ruutmõõduühikut.
49. Korrapärase kuusnurga külje pikkus on 3 mõõduühikut. Leida kuusnurga tippude polaarkoordinaadid, kui pooluseks on kuusnurga üks tipp ja polaarteljeks kuusnurga kül.

50. Näidata, et kolmnurk on korrapärase, kui ta tipud on $A \equiv (5 \mid \frac{\pi}{2})$, $B \equiv (8 \mid \frac{5\pi}{6})$ ja $C \equiv (3 \mid \frac{7\pi}{6})$.
51. Polaarteljel leida punkt, mis asetseb punktist $A \equiv (4\sqrt{2} \mid \frac{\pi}{2})$ 5 mõõduühiku kaugusel.
52. Leida punkti $A \equiv (-2 \mid 3)$ koordinaadid uues koordinaadistikus, kui telgede rööplükkel saadud uue 0-punkti koordinaadid on: a) $(4 \mid 5)$, b) $(4 \mid -5)$, c) $(-4 \mid 5)$, d) $(-4 \mid -5)$. $\Theta = 90^\circ$.
53. Kahes ühtepidi suunatud teljestikus punkti A koordinaadid on $(9 \mid -5)$ ja $(0 \mid 12)$. Leida 0-punktide koordinaadid ühe ja teise teljestiku suhtes. $\Theta = 90^\circ$.
54. Kahes ühtepidi suunatud teljestikus punkti A koordinaadid on $(8 \mid -3)$ ja $(-2 \mid -7)$. Leida 0-punktide kauguse keskkohta koordinaadid ühe ja teise teljestiku suhtes. $\Theta = 90^\circ$.
55. Ühes kaldkoordinaadistikus on punkt $A \equiv (1 \mid 2)$ ja teises koordinaadistikus, mille 0-punkt on rööplükkega viidud punkti $O' \equiv (-1 \mid 3)$, on punkt $B \equiv (2 \mid -1)$. Leida sirg lõigu AB pikkus.
56. Ühe ja sama punkti koordinaadid kahes rööptelgedega koordinaadistikus on $(2 \mid 5)$ ja $(-3 \mid 6)$. Leida ühe süsteemi 0-punkti koordinaadid teise süsteemi suhtes ja ümberpöördult.
57. Ristkoordinaadistikus on punkt $A \equiv (2\sqrt{2} \mid -\frac{V^2}{2})$. Leida sama punkti koordinaadid uues koordinaadistikus, kui koordinaattelgi pöörata 45° võrra.
58. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatetid, mille pikkus on 2 mõõduühikut, langevad ühte koordinaattelgedega. Uues teljestikus X -telg jääb muutumata, kuid Y -telg langeb ühte kolmnurga hüpotenuusiga. Leida koordinaatide teisendamise valemid.

59. Kaldkoordinaadistikus ($\Theta \equiv 60^\circ$) on punkt $A \equiv (-1 | 4)$. Leida sama punkti koordinaadid uues koordinaadistikus, kui koordinaattelgi pöörata 45° võrra.
60. Leida ristkoordinaadistikus punkt B , mis on punktiga $A \equiv (4 | 2\sqrt{3})$ sümmeetriline, kui sümmeetriateljeks on sirge, mis läbib 0-punkti ja moodustab X -teljega nurga 60° .
61. Leida võrrandi $x^2 - y^2 = 4(x - y + 2)$ kuju teisendatud koordinaatides, viies ristkoordinaatide 0-punkti punkti $O' \equiv (2 | 2)$ ja pöörates telgi 45° võrra.
62. Kaldkoordinaadistikus, mille $\Theta = 120^\circ$, esineb võrrand $x^2 + y^2 - xy = 9$. Missuguse kuju omandab see võrrand, kui koordinaattelgi pöörata nurga $\alpha = 30^\circ$ võrra?
63. Punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $xy + 3x - 2y - 6 = 0$. Missugust võrrandit rahuldavad samade punktide koordinaadid uues teljestikus, kui koordinaatide 0-punkt rööplükkega viia punkti $O' \equiv (2 | -3)$?

B. Ruumis.

64. Missuguste koordinaatidega määratakse punktid X -teljel? Y -teljel? Z -teljel?
65. Missuguste koordinaatidega määratakse punktid XY -tasapinnal? XZ -tasapinnal? YZ -tasapinnal?
66. Missuguste koordinaatidega määratakse punktid tasapinnal, mis on rööbik XY -tasapinnaga? XZ -tasapinnaga? YZ -tasapinnaga?
67. Missuguste koordinaatidega määratakse punktid sirgel, mis on rööbik X -teljega? Y -teljega? Z -teljega?
68. Leida punkt, mis on punktiga $A \equiv (2 | -3 | -1)$ sümmeetriline: a) XY -tasapinna suhtes; b) XZ -tasapinna suhtes; c) YZ -tasapinna suhtes; d) X -telje suhtes; e) Y -telje suhtes; f) Z -telje suhtes; g) 0-punkti suhtes.

69. Neljatahuse korrapärase püramiidi $SA_1A_2A_3A_4$ iga serv on võrdne 2 mõõduühikuga, tipp S asetseb Z -teljel ja põhipind langeb ühte XY -tasapinnaga, kusjuures põhiserv A_1A_2 on risti Y -teljega. Leida punktide S , A_1 , A_2 , A_3 ja A_4 koordinaadid.
70. Leida punkti $A \equiv (4 \mid -3 \mid 5)$ kaugus 0-punktist ja koordinaattelgedest.
71. Leida punktide $A_1 \equiv (-1 \mid 0 \mid 1)$ ja $A_2 \equiv (1 \mid 2 \mid 2)$ kaugus teineteisest.
72. Leida tetraeedri servade pikkused, kui tetraeedri tipud on: $A_1 \equiv (0 \mid 0 \mid 0)$, $A_2 \equiv (-1 \mid 2 \mid -3)$, $A_3 \equiv (2 \mid -1 \mid 3)$, $A_4 \equiv (1 \mid 2 \mid 1)$.
73. Z -teljel leida punkt, mis asetseks ühesugusel kaugusel punktidest $A \equiv (-4 \mid 1 \mid 7)$ ja $B \equiv (3 \mid 5 \mid -2)$.
74. YZ -tasapinnal leida punkt, mis asetseks ühesugusel kaugusel punktidest $A \equiv (3 \mid 1 \mid 2)$, $B \equiv (4 \mid -2 \mid -2)$ ja $C \equiv (0 \mid 5 \mid 1)$.
75. Sirglõigu otsapunktid on $A \equiv (1 \mid 1 \mid 1)$ ja $B \equiv (1 \mid 2 \mid 0)$. Leida sirglõigu jaotuspunkt C , mis jagab sirglõigu nagu 2:1.
76. Sirglõigu AB jaotuspunkt C jagab sirglõigu nagu 5:2. Leida sirglõigu otsapunkt B , kui $A \equiv (3 \mid 7 \mid 4)$ ja $C \equiv (8 \mid 2 \mid 3)$.
77. Sirglõik A_0A_5 on jaotatud viieks võrdseks osaks, kusjuures jaotuspunktid $A_1 \equiv (3 \mid -5 \mid 7)$ ja $A_4 \equiv (-2 \mid 4 \mid -8)$. Leida A_0 , A_2 , A_3 ja A_5 .
78. Kahes ühtepidi suunatud teljestikus punkti A koordinaadid on $(1 \mid 1 \mid 1)$ ja $(7 \mid 3 \mid -5)$. Leida: a) 0-punktide koordinaadid ühe ja teise teljestiku suhtes; b) 0-punktide kauguse keskkoha koordinaadid ühe ja teise teljestiku suhtes.
79. Missugused on koordinaattelgede suunakoosinused?

80. Missugused on koordinaattasapindadel asetsevate sirgete suunakoosinused?
81. Sirge suunanurgad $\alpha = \beta = 60^\circ$. Leida γ .
82. Kas sirge võib moodustada ristkoordinaadistikus suunanurgad $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$ ja $\gamma = 60^\circ$?
83. Leida sirge suunakoosinuste väärtus, kui $\alpha = \beta = \gamma$.
84. Leida sirge suunakoosinuste väärtused, kui sirge läbib ristkoordinaadistikus 0-punkti ja punkti $A \equiv (2 \mid -2 \mid -1)$.
85. Leida ristkoordinaadistikus sirge suunakoosinused, kui sirge läbib punktid:
- a) $A \equiv (1 \mid 1 \mid 2)$ ja $B \equiv (2 \mid 1 \mid 1)$
- b) $A \equiv (2 \mid 5 \mid -1)$ ja $B \equiv (5 \mid 1 \mid 11)$
- c) $A \equiv (-2 \mid 2 \mid 5)$ ja $B \equiv (2 \mid -1 \mid 5)$.
86. Sirge läbib ristkoordinaadistikus 0-punkti ja punkti $A \equiv (6 \mid 3 \mid 2)$. Leida nurkade koosinused, mille sirge moodustab koordinaattasapindadega.
87. Ristkoordinaadistikus sirge moodustab koordinaattasapindadega nurgad φ_1 , φ_2 ja φ_3 . Leida funktsionaalne seos nende nurkade koosinuste vahel.
88. Kui suur on nurkade XOY ja YOZ nurgapoolitajate vaheline nurk?
89. Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud ristkoordinaadistikus on $A \equiv (0 \mid 2 \mid -3)$, $B \equiv (4 \mid 4 \mid 1)$ ja $C \equiv (-1 \mid 0 \mid -1)$.
90. Missuguse geomeetrilise kujundi tippe kujutavad ristkoordinaadistikus punktid $A \equiv (3 \mid 1 \mid 4)$, $B \equiv (6 \mid 4 \mid 4)$, $C \equiv (4 \mid 3 \mid 2)$ ja $D \equiv (5 \mid 2 \mid 6)$?

91. Kolmnurga kaks tippu ristkoordinaadistikus on $A \equiv (-4 | -1 | 2)$ ja $B \equiv (3 | 5 | -6)$. Leida kolmas tipp C , kui kolmnurga külje AC keskpunkt asetseb Y -teljel ja külje BC keskpunkt XZ -tasapinnal.
92. Sirge läbib punktid $A \equiv (1 | 2 | -1)$ ja $B \equiv (-1 | 2 | 1)$. Leida sellel sirgel punkt P , mis asetseb punktidest A ja B üheloos, nõnda et $AP:BP = 2$.
93. Leida suhted λ_1 , λ_2 ja λ_3 , milles koordinaattasapinnad jagavad sirglõigu, mille otsapunktid on $A \equiv (2 | -1 | 7)$ ja $B \equiv (4 | 5 | -2)$.
94. Näidata, et tetraeedri vastasservade keskpunkte ühendavad sirglõigud lõikuvad ühes punktis ja jagunevad selles punktis pooleks.
95. Leida tetraeedri pindala, kui tetraeedri tipud ristkoordinaadistikus on $A \equiv (2 | 2 | 2)$, $B \equiv (2 | 2 | -2)$, $C \equiv (2 | -2 | 2)$ ja $D \equiv (-2 | 2 | 2)$.
96. Leida tetraeedri ruumala, kui tetraeedri tipud ristkoordinaadistikus on $A \equiv (1 | 1 | 1)$, $B \equiv (1 | 1 | -1)$, $C \equiv (1 | -1 | 1)$ ja $D \equiv (-1 | 1 | 1)$.
97. Leida kolmnurga raskuspunkt M , kui kolmnurga tipud ristkoordinaadistikus on $A \equiv (5 | 1 | 12)$, $B \equiv (2 | 5 | 0)$ ja $C \equiv (11 | 3 | 8)$.
98. Leida tetraeedri raskuspunkt M , kui tetraeedri tipud on $A \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$, $B \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$, $C \equiv (x_3 | y_3 | z_3)$ ja $D \equiv (x_4 | y_4 | z_4)$.
99. Leida kera raadius r , kui ristkoordinaadistikus punktid $A \equiv (0 | 0 | 0)$, $B \equiv (2 | 0 | 0)$, $C \equiv (0 | 3 | 0)$ ja $D \equiv (0 | 0 | 6)$ asetsevad kera pinnal.
100. Leida kera keskpunkt K ja raadius r , kui ristkoordinaatide 0-punkt ning punktid $A \equiv (1 | 3 | 0)$, $B \equiv (0 | 0 | -4)$ ja $C \equiv (4 | 0 | 0)$ asetsevad kera pinnal.

101. Kolmes ühtepidi suunatud ristkoordinaadistikus ühe 0-punkt teise suhtes on $O' \equiv (2 | 4 | -3)$ ja teise 0-punkt kolmanda suhtes on $O'' \equiv (-5 | 6 | -2)$. Kolmnurga üks tipp esimeses koordinaadistikus on $A \equiv (8 | 0 | -4)$, teine tipp teises koordinaadistikus $B \equiv (-1 | 5 | 3)$ ja kolmas tipp kolmandas koordinaadistikus $C \equiv (2 | -3 | -3)$. Leida kolmnurga külgede pikkused ja pindala.

102. Punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

Missugust võrrandit rahuldavad samade punktide koordinaadid uues teljestikus, kui koordinaatteljed on pööratud nurkade $\varphi = 30^\circ$, $\psi = 60^\circ$ ja $\Theta = 90^\circ$ võrra?

103. Punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$3x^2 + y^2 - 2xz + 2x - 6y + 4z - 5 = 0.$$

Missugust võrrandit rahuldavad samade punktide koordinaadid uues teljestikus, kui koordinaatide 0-punkt rööplükkega viia punkti $O' \equiv (2 | 3 | 7)$?

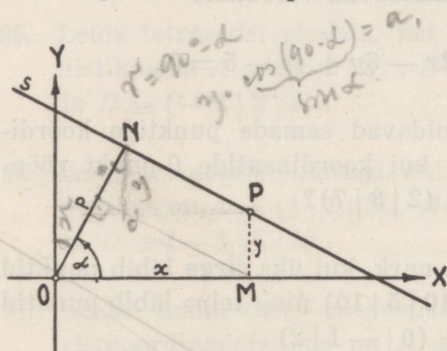
104. Leida kahe sirge vaheline nurk, kui üks sirge läbib punktid $A_1 \equiv (0 | 0 | 0)$ ja $A_2 \equiv (10 | 5 | 10)$ ning teine läbib punktid $B_1 \equiv (-2 | 1 | 3)$ ja $B_2 \equiv (0 | -1 | 2)$.

III peatükk.

Sirge tasapinnal.

§ 15. Sirge normaalvõrrand.

Võtame tasapinnal ristkoordinaatteljed ja määrame nende abil sirge asendi tasapinnal. Selles koordinaadistikus sirge võib a) lõigata mõlemaid telgi erinevates punktides, või b) läbida 0-punkti, või c) olla rööbik ühe või teise teljega.



51. joonis.

Sirge s (51. joonis.) asend tasapinnal on määratud, kui on teada sirge kaugus ehk normaali ON pikkus p koordinaattelgede 0-punktist kuni sirgeni ja nurk α , mille normaal moodustab X -telje positiivse suunaga.

Märgime sirgel s vabalt mingi punkti $P \equiv (x|y)$. Kui punkt P muudab sellel sirgel oma asendit, siis muutuvad ka ta koordinaadid x ja y , s. o. sirge isesugustele punktidele vastavad isesugused abstsissid ja isesugused ordinaadid. Et x ja y on sirgel s asetseva mistahes vabalt võetud punkti P koordinaadid, siis on nad muutuvad suurused ja neid nimetatakse j o o k s v a t e k s k o o r d i n a a t i d e k s.

Jooksvate koordinaatide x ja y ning konstantsete suuruste p ja α vahel funktsionaalse seose saamiseks projektime murtud joonlõigu $OMPN$ normaalile ON . Murtud joonlõigu $OMPN$ projektsioon normaalil ON on normaal ise, s. o.

$$OM \cdot \cos \alpha + MP \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + PN \cdot \cos \frac{\pi}{2} = ON$$

ehk

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

See on koordinaatide x ja y vahel valitsev lineaarne seos punktis P . Et aga P on mistahes punkt sirgel s , siis see seos on kehtiv kõigis punktides, mis asetsevad sirgel s . Seega on saadud seos sirge võrrand, mida nimetatakse tema erikuju järgi sirge normaalvõrrandiks.

Leitud võrrand on jooksvate koordinaatide x ja y suhtes esimese astme võrrand. Selles võrrandis esineb neli suurust: jooksvad koordinaadid x ja y , mis on muutuvad suurused, ning p ja α , mis on konstantsed suurused ühe ja sama sirge puhul.

Konstantsed suurused p ja α määravad sirge asendi tasapinnal. Sirge on antud, kui on antud tema võrrand

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

Et antud punkt asetseks sirgel, selleks peavad selle punkti koordinaadid rahuldama sirge võrrandit, s. o. kui jooksvate koordinaatide asemele paigutada antud punkti koordinaadid, siis peab sirge võrrandis võrdusmärk jääma kehtivaks. Ei jää aga võrdusmärk kehtivaks, siis ei asetse punkt sirgel.

Kui sirge normaalvõrrandis $p = 0$, siis võrrand

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$$

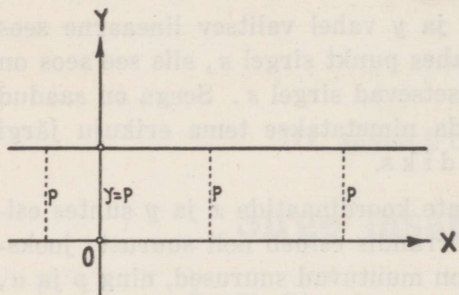
kujutab 0-punkti läbivat sirget. Siin võib nurka α vaadelda kui täiendusnurka nurgale $\frac{\pi}{2} - \alpha$, mille sirge s moodustab X -telje positiivse suunaga.

Kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \alpha = 0$ ja $\sin \alpha = 1$ ning sirge normaalvõrrand omab kuju

$$y = p,$$

mis kujutab X -teljega rööbikut sirget (52. joon.). X -teljega rööbikul sirgel asetseva iga punkti ordinaadi väärtus on konstantne suurus p , ja ümberpöörduvalt, kui sirgel asetseva

iga punkti ordinaadi väärtus on konstantne suurus, siis on sirge rööbik X -teljega. Konstantne suurus p võib olla positiivne või negatiivne, olenedes sellest, kas sirge löikab Y -telje positiivset või negatiivset osa.



52. joonis.

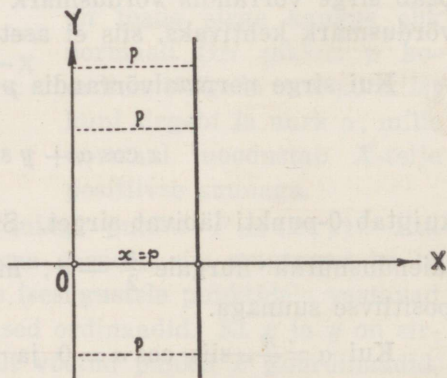
ning sirge normaalvõrrand omab kuju

$$x = p,$$

mis kujutab Y -teljega rööbikut sirget (53. joon.). Y -teljega rööbikul sirgel asetseva iga punkti abstsissi väärtus on konstantne suurus p , ja ümberpöörduvalt, kui sirgel asetseva iga punkti abstsissi väärtus on konstantne suurus, siis on sirge rööbik Y -teljega, kus konstantne suurus p võib olla positiivne või negatiivne, olenedes sellest, kas sirge löikab X -telje positiivset või negatiivset osa.

Kui siin $p = 0$, siis

$$x = 0$$



53. joonis.

kujutab Y -teljega ühtelangevat sirget, mis on ühtlasi Y -telje võrrand.

§ 16. Sirge üldvõrrand.

Sirget määrav normaalvõrrand

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

on jooksvate koordinaatide x ja y suhtes lineaarne võrrand, mis on erikuju sirge võrrandi üldkujust

$$Ax + By + C = 0.$$

Seega iga sirget tasapinnal võime kujutada jooksvate koordinaatide x ja y suhtes esimese astme võrrandina, ja ümberpöördult, iga esimese astme võrrand kujutab tasapinnal sirget, mille iga punkti koordinaadid x ja y on omavahel funktsionaalses seoses. See funktsionaalne seos väljendub esimese astme võrrandis, kusjuures võrrandi konstantsed suurused A , B ja C võivad olla mistahes ratsionaalsed või irratsionaalsed arvud.

Kui on antud sirge võrrand

$$Ax + By + C = 0,$$

siis võime joonestada selle sirge tasapinnal. Teame, et sirge joonestamiseks on vaja leida kaks punkti. Et leida kaks punkti, mis asetseksid sirgel, selleks anname sirge võrrandis abstsissile x kaks teineteisest erinevat väärtust ja leiame kaks vastavat ordinaadi y väärtust. Nii saame kahe punkti koordinaadid. Neid punkte tasapinnal märkides ja sirgega läbides, saame antud võrrandile vastava joone.

Kõige lihtsam võte antud võrrandi järgi sirget joonestada on see, kui võtame kaks punkti koordinaattelgedel, s. o. sirge ja koordinaattelgedede lõikepunktid. Kui punkt asetseb X -teljel, siis punkti ordinaat $y = 0$ ja abstsiss $x = -\frac{C}{A}$. Kui punkt asetseb Y -teljel, siis punkti abstsiss $x = 0$ ja ordinaat $y = -\frac{C}{B}$. Märkides telglõigud $x = -\frac{C}{A}$ ja $y = -\frac{C}{B}$, siis nende telglõikude otsapunktid määravad sirge asendi tasapinnal.

Et sirge võrrandi üldkujust

$$Ax + By + C = 0$$

saada sirge võrrandi normaalkuju, selleks leiame niisuguse normiva teguri N , millega tuleb korrutada üldkujus antud võrrandi mõlemaid pooli, nii et x -i koefitsient kujuneks $\cos \alpha$ väärtuseks, y -i koefitsient $\sin \alpha$ väärtuseks ja vabaliige normaali p pikkuseks. Korrutame võrrandi üldkuju mõlemad pooled normiva teguriga N , saame

$$NAx + NBy + NC = 0,$$

mis kujutab sirge normaalvõrrandit ainult siis, kui

$$NA = \cos \alpha, \quad NB = \sin \alpha, \quad NC = -p.$$

Tõstame viimastest võrdustest kaks esimest ruutu ja liidame need, saame

$$N^2A^2 + N^2B^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

ehk

$$N^2(A^2 + B^2) = 1,$$

millest normiv tegur

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Normiva teguri märgiks tuleb võtta vastasmärk võrrandi vabaliikmele C , sest, nagu nägime, $NC = -p$. Seega

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\mp \sqrt{A^2 + B^2}}$$

ja sirge võrrandi normaalkuju on

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

§ 17. Sirge võrrand telgloikudes.

Olgu sirge antud võrrandiga

$$Ax + By + C = 0$$

ja lõigaku koordinaattelgi punktides P_x ja P_y (54. joon.). Siis tekivad telgloigud $OP_x = a$ ja $OP_y = b$. Need telgloigud oma otsapunktidega P_x ja P_y määravad samuti sirge asendi tasapinnal. Punkti P_x koordinaadid on a ja 0 . Punkt P_x asetseb sirgel ja seega ta koordinaadid rahuldavad sirge võrrandit

$$Ax + By + C = 0,$$

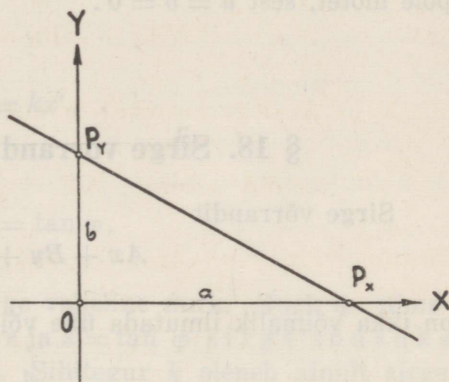
s. o.

$$Aa + C = 0,$$

millest

$$A = -\frac{C}{a}.$$

Analoogiliselt punkti P_y koordinaadid b ja 0 rahuldavad sama sirge võrrandit. Seega



54. joonis.

$$Bb + C = 0,$$

millest

$$B = -\frac{C}{b}.$$

Paigutame A ja B väärtused võrrandisse

$$Ax + By + C = 0$$

A ja B asemele, saame

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0$$

ehk

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

mis on sirge võrrand telgloikudega a ja b vastavalt X - ja Y -teljel.

Kui sirge on rööbik Y -teljega, siis $b = \infty$ ja $\frac{y}{b} = 0$ ning võrrand omab kuju

$$\frac{x}{a} = 1 \text{ ehk } x = a.$$

Kui sirge on rööbik X -teljega, siis $a = \infty$ ja $\frac{x}{a} = 0$ ning võrrand omab kuju

$$\frac{y}{b} = 1 \text{ ehk } y = b.$$

Kui sirge läbib 0 -punkti, siis sirge võrrandil telglõikudes pole mõtet, sest $a = b = 0$.

§ 18. Sirge võrrand ilmutatud kujus.

Sirge võrrandit

$$Ax + By + C = 0$$

on ikka võimalik ilmutada ühe või teise muutuja suhtes, näiteks

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Tähistades lihtsuse mõttes

$$-\frac{A}{B} = k \text{ ja } -\frac{C}{B} = b,$$

saame

$$y = kx + b,$$

mis on sirge võrrandi ilmutatud kuju.

Saadud ilmutatud kujuks võime teisendada iga esimese astme võrrandi, välja arvatud juhtum, kui $B = 0$, sest siis

$$Ax + C = 0,$$

millest

$$x = -\frac{C}{A} = a,$$

mis kujutab Y -teljega rööbikut sirget.

Kui sirge võrrandi ilmutatud kujus $x = 0$, siis $y = b$. Seega sirge lõikab Y -telge punktis $P_y \equiv (0 | b)$ (55. joon.). Tähendab, konstantne suurus b sirge võrrandi ilmutatud kujus on telglõik Y -teljel.

Et leida teise konstantse suuruse k geomeetriline tähendus, selleks viime 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega punkti $P_y \equiv (0 | b)$. Siis sirgel vabalt võetud punkt $P \equiv (x | y)$ on $P \equiv (x' | y' + b)$ ja sirge võrrand uutes koordinaatides

$$y' + b = kx' + b$$

ehk

$$y' = kx',$$

millest

$$k = \frac{y'}{x'} = \tan \varphi,$$

kus φ on X -telje ja antud sirge vaheline nurk. Nurk φ nimetatakse sirge tõusunurgaks ja $k = \tan \varphi$ sirge tõusuks ehk sirge sihiteguriks. Sihitegur k oleneb ainult sirge võrrandi koefitsientidest

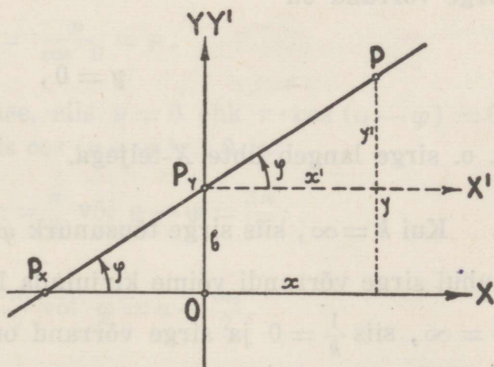
A ja B ; ta ei olene koefitsiendist C . Nii k kui ka b võivad omada väärtusi $-\infty$ -st $+\infty$ -ni.

Kui sirge läbib 0-punkti, siis $b = 0$ ja sirge võrrand omab kuju

$$y = kx.$$

Kui sirge $y = kx$ läbib I ja III kvadranti, siis sihitegur k on positiivne, sest koordinaatide x ja y märgid on ühesugused.

Läbib aga sirge $y = kx$ II ja IV kvadranti, siis on k negatiivne, sest koordinaatide x ja y märgid on siis isesugused.



55. joonis.

Et 0-punkti läbivat sirget joonestada, selleks valime peale 0-punkti veel mingi teise punkti. Teise punkti saame, kui paigutame sirge võrrandisse $y = kx$ abstsissi x asemele mingi vabalt võetud (nullist erineva) väärtuse, millele vastab üks ja ainult üks ordinaadi y väärtus. Nende x ja y väärtuste järgi märgime teise punkti. Saadud punkt koos 0-punktiga määrab sirge $y = kx$ asendi tasapinnal.

Kui $k = 1$, siis sirge tõusunurk $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ja 0-punkti läbiva sirge võrrand on

$$y = x.$$

Sel juhul on sirge I ja III kvadrantis koordinaatnurga poolitaja.

Kui $k = -1$, siis sirge tõusunurk $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, sest $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$, ja 0-punkti läbiva sirge võrrand on

$$y = -x.$$

See sirge on II ja IV kvadrantis koordinaatnurga poolitaja.

Kui $k = 0$, siis sirge tõusunurk $\varphi = 0$, sest $\tan 0 = 0$, ja sirge võrrand on

$$y = 0,$$

s. o. sirge langeb ühte X -teljega.

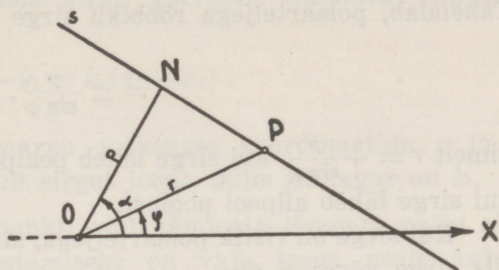
Kui $k = \infty$, siis sirge tõusunurk $\varphi = \frac{\pi}{2}$, sest $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$. Sel puhul sirge võrrandi võime kirjutada kujus $x = \frac{1}{k} \cdot y$. Kui nüüd $k = \infty$, siis $\frac{1}{k} = 0$ ja sirge võrrand omab kuju

$$x = 0,$$

mis kujutab Y -teljega ühtelangevat sirget.

§ 19. Sirge polaarvõrrand.

Võtame polaartelje OX (56. joon.) ja mistahes sirge s . Tõmbame poolusest O sirgele s normaali $ON = p$ ja märgime nurga polaartelje ja normaali vahel tähega α . Suurused p ja α määravad täielikult sirge s asendi tasapinnal. Võtame sirgel s mistahes punkti $P \equiv (r | \varphi)$, kus r ja φ on punkti P polaarkoordinaadid. Siis täisnurksest kolmnurgast NOP saame



56. joonis.

$$p = r \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$

ehk

$$r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)},$$

mis on sirge polaarvõrrand, kus r ja φ on jooksvad polaarkoordinaadid.

Kui $\varphi = \alpha$, siis

$$r = \frac{p}{\cos 0} = p.$$

Kui sirge läbib pooluse, siis $p = 0$ ehk $r \cdot \cos(\alpha - \varphi) = 0$. Et r on muutuv suurus, siis $\cos(\alpha - \varphi) = 0$ ja

$$\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ või } \alpha - \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

millest

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2} \text{ või } \varphi = \alpha - \frac{3\pi}{2}.$$

Kui sirge on rööbik polaarteljega, siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ või $\frac{3\pi}{2}$: kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis sirge võrrand on

$$r = \frac{p}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{p}{\sin \varphi};$$

kui $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, siis

$$r = \frac{p}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)} = -\frac{p}{\sin \varphi}.$$

Tähendab, polaarteljega rööbiku sirge võrrand on

$$r = \pm \frac{p}{\sin \varphi},$$

nimelt $r = +\frac{p}{\sin \varphi}$, kui sirge läheb pealpool poolust, ja $r = -\frac{p}{\sin \varphi}$, kui sirge läheb allpool poolust.

Kui sirge on ristik polaarteljega, siis $\alpha = 0$ või π : kui $\alpha = 0$, siis sirge võrrand on

$$r = \frac{p}{\cos(-\varphi)} = \frac{p}{\cos \varphi};$$

kui $\alpha = \pi$, siis

$$r = \frac{p}{\cos(\pi - \varphi)} = -\frac{p}{\cos \varphi}.$$

Seega polaarteljega ristiku sirge võrrand on

$$r = \pm \frac{p}{\cos \varphi},$$

nimelt $r = +\frac{p}{\cos \varphi}$, kui sirge läheb paremal pool poolust, ja $r = -\frac{p}{\cos \varphi}$, kui sirge läheb vasemal pool poolust.

§ 20. Sirge läbi ühe punkti.

Leiame sirge, mille sihitegur on k ja mis läbib kindla punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, kus x_1 ja y_1 on antud konstantsed koordinaadid.

Kui sirge, mille võrrandi ilmutatud kuju on

$$y = kx + b,$$

läbib punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, siis selle punkti koordinaadid x_1 ja y_1 peavad rahuldama sirge võrrandit, s. o. kui paigutame jooks-

vate koordinaatide x ja y asemele punkti P_1 koordinaadid x_1 ja y_1 , siis peab kehtima võrdus

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Lahutame selle võrduse sirge võrrandi ilmutatud kujust, saame

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

See võrrand on lineaarne jooksvate koordinaatide x ja y suhtes ja kujutab järelikult sirget joont, mille sihitegur on k .

Teame, et läbi ühe punkti võib tõmmata lõpmata palju sirgeid; kindla sirge joonestamiseks on vaja teada peale antud punkti veel sihiteguri k väärtus, mis esineb võrrandis.

Kui sihiteguri k all mõista arvu, mis võib omada mitmesuguseid väärtusi, siis võrrand $y - y_1 = k(x - x_1)$ kujutab kiirte kimpu ehk sirgete kogu, mis kõik läbivad punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, kus punkt P_1 on nende kiirte keskpunkt ja k kiirte kimbu p a r a m e e t e r.

§ 21. Sirge läbi kahe punkti.

Olgu antud punktid $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$.

Kui sirge

$$y = kx + b$$

läbib neid punkte, siis nende punktide koordinaadid x_1 ja y_1 ning x_2 ja y_2 peavad rahuldama sirge võrrandit, s. o.

$$y_1 = kx_1 + b$$

ja

$$y_2 = kx_2 + b.$$

Lahendades viimaseid k suhtes leiame sirge sihiteguri punktide P_1 ja P_2 koordinaatide kaudu

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Asetame k väärtuse sirge võrrandisse

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

saame

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

ehk

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

See võrrand on lineaarne jooksvate koordinaatide suhtes, järelikult kujutab sirget joont. See on sirge võrrand läbi kahe antud punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$. Võrrand näitab, et sirge määramiseks on küllalt kahest antud punktist, sest võrrandis esinevad peale jooksvate koordinaatide x ja y ainult kahe antud punkti koordinaadid x_1 ja y_1 ning x_2 ja y_2 .

Et ka mõni kolmas punkt $P_3 \equiv (x_3 | y_3)$ asetseks sellel sirgel, siis peavad kolmanda punkti P_3 koordinaadid rahuldama saadud võrrandit, s. o.

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

See on tingimus, et kolm punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$ ja $P_3 \equiv (x_3 | y_3)$ asetseksid ühel ja samal sirgel.

§ 22. Nurk kahe sirge vahel.

Kahe antud sirge võrrandid olgu

$$y = k_1x + b_1 \text{ ja } y = k_2x + b_2.$$

Esimene sirge moodustagu X -teljega nurga φ_1 ja teine φ_2 (57. joon.). Sirgetevaheline otsitav nurk olgu ω . Sirged moodus-

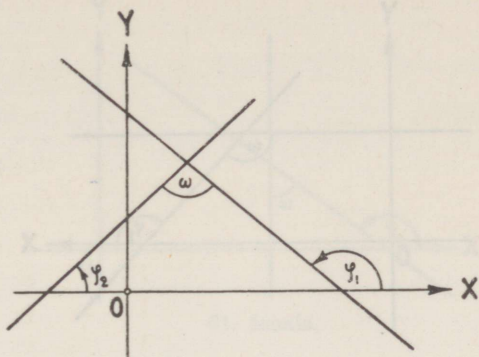
tavad X -teljega kolmnurga, kusjuures ω ja φ_2 on kolmnurga sisenurgad, kuid φ_1 on välisnurk. Seega

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \omega,$$

millest

$$\omega = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Kui nurgad on võrdsed, siis on ka nende tangensid võrdsed, s. o.



57. joonis.

$$\tan \omega = \tan (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2}{1 + \tan \varphi_1 \tan \varphi_2}$$

ehk

$$\tan \omega = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

kus $\tan \varphi_1 = k_1$ ja $\tan \varphi_2 = k_2$.

Kui sirgete võrrandid esinevad üldkujus

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ ja } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

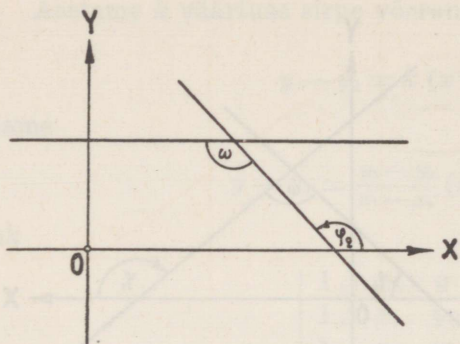
kus

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \text{ ja } k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

siis k_1 ja k_2 väärtusi asendades saame sirgetevahelise nurga tangensi kujus

$$\tan \omega = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

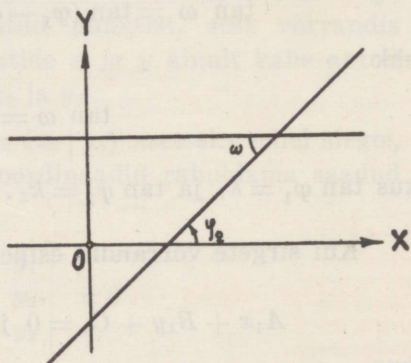
Kui nurga ω tangensi väärtus on positiivne, siis saame sirgetevahelise nurga, mis $< \frac{\pi}{2}$, sest teravnurga tangens on positiivne; kui aga nurga ω tangensi väärtus on negatiivne, siis saame sirgetevahelise nurga, mis $> \frac{\pi}{2}$, sest nürinurga tangens on negatiivne.



58. joonis.

Tabelitest leiame alati teravnurga. Missugune nurk kahe sirge vahel võtta — kas terav- või nürinurk — oleneb muidugi iga kord küsimuse või ülesande iseloomust. Näiteks, arvutades kolmnurga nurki, peame nurgad valima nõnda, et sisenurkade summa oleks võrdne π .

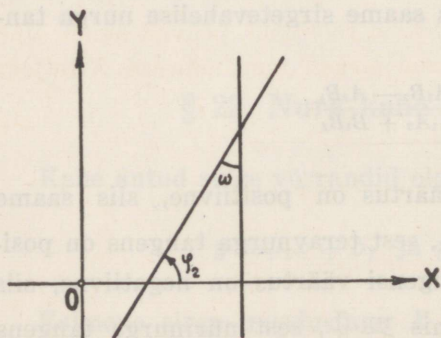
Kui üks sirgetest, näiteks $y = k_1x + b_1$, on rööbik X -teljega, siis ta võrrand on $y = b_1$ ja sirgetevaheline nurk ω on sama, mis teine sirge $y = k_2x + b_2$ moodustab X -teljega, s. o. $\omega = \varphi_2$ (58. ja 59. joonis.), mille leiame sihiteguri k_2 järgi:



59. joonis.

$$\tan \varphi_2 = \tan \omega = k_2.$$

Kui üks sirgetest, näiteks $y = k_1x + b_1$, on rööbik Y -teljega, siis ta võrrand on $x = a$ ja sirgetevaheline nurk ω on selle nurga täiendusnurk kuni $\frac{\pi}{2}$, mille teine sirge $y = k_2x + b_2$ moo-



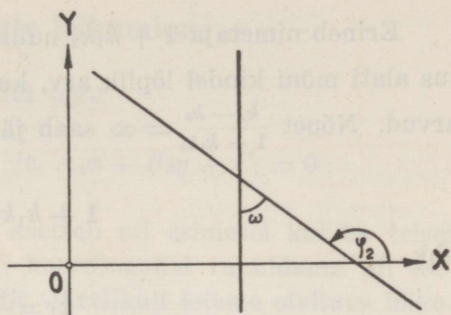
60. joonis.

dustab X -teljega, s. o.

$$\varphi_2 \pm \omega = \frac{\pi}{2} \text{ ehk } \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \mp$$

$\mp \omega$ (60. ja 61. joon.), mille
leiame sihitegurit k_2 järgi:

$$\tan \varphi_2 = \tan \left(\frac{\pi}{2} \mp \omega \right) = k_2.$$



61. joonis.

§ 23. Sirgete rööp- ja ristseis.

Kui sirged

$$y = k_1x + b_1 \text{ ja } y = k_2x + b_2$$

on rööbikud, siis nendevaheline nurk $\omega = 0$ või π ja

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} = \tan 0 = \tan \pi = 0.$$

Et murdarv oleks võrdne 0-ga, peab murru lugeja olema võrdne 0-ga, s. o.

$$k_1 - k_2 = 0$$

ehk

$$k_1 = k_2.$$

Tähendab, et kaks sirget oleksid rööbikud, peavad nende sihitegurid olema võrdsed. Säärased sirged moodustavad X -teljega võrdsed nurgad.

Kui sirged

$$y = k_1x + b_1 \text{ ja } y = k_2x + b_2$$

on ristikud, siis nendevaheline nurk $\omega = \frac{\pi}{2}$ ja

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} = \tan \frac{\pi}{2} = \infty.$$

Erineb nimetaja $1 + k_1k_2$ nullist, siis on murru $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$ väärtus alati mõni kindel lõplik arv, kui k_1 ja k_2 on lõplikud kindlad arvud. Nõuet $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} = \infty$ saab järelikult täita ainult sellega, et

$$1 + k_1k_2 = 0$$

ehk

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Tähendab, et kaks sirget oleksid ristikud, peavad nende sihtegurid olema vastamisi pöördväärtused vastupidise märgiga. Säärased sirged moodustavad X -teljega nurgad φ ja $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

Kui sirged on antud võrranditega üldkujus

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{ja} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

siis sirgete rööpseisu tingimus on

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

ja ristseisu tingimus

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Seega rööbikute sirgete võrrandeid võib esitada kujus

$$\begin{aligned} Ax + By + C_1 &= 0 \\ Ax + By + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

ja ristikute sirgete võrrandeid

$$\begin{aligned} Ax + By + C_1 &= 0 \\ Bx - Ay + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

§ 24. Sirgete lõikumine.

Kahe antud sirge võrrandid olgu

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ja } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Et kahe sirge lõikepunkt asetseb nii esimesel kui ka teisel sirgel, siis peavad selle punkti koordinaadid rahuldama nii esimese kui ka teise sirge võrrandit. Järelikult leiame otsitava lõikepunkti koordinaatide x ja y väärtused, kui lahendame võrrandid x ja y suhtes. Neid lahendades leiame, et

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1, & B_1 \\ -C_2, & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & -C_1 \\ A_2, & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Sirged lõikuvad ühes punktis, kui nimetaja $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Kui aga $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, siis sirged lõikuvad lõpmatutes, nad on rööbikud, sest nende sihitegurid on võrdsed, s. o.

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} = k.$$

Kui nimetaja $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ ja ka üks lugejatest, näiteks, $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$, siis langevad sirged ühte, sest siis

$$-\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2} = b.$$

Sel juhul on ka teine lugeja $A_2C_1 - A_1C_2 = 0$, sest

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Kui märgime

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \mu,$$

siis

$$A_1 = \mu A_2, \quad B_1 = \mu B_2, \quad C_1 = \mu C_2.$$

Tähendab, kui kaks sirget $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ langevad ühte ehk kujutavad üht ja sama sirget, siis üks sirge võrrand saadakse teisest, korrutades tema liikmeid mingisuguse 0-st erineva konstantse teguriga μ .

Et kolm sirget

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

läbiksid ühe ja sama punkti, selleks peavad esimese kahe sirge lõikepunkti koordinaadid

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \text{ ja } y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

rahuldama kolmandat võrrandit, s. o.

$$A_3 \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

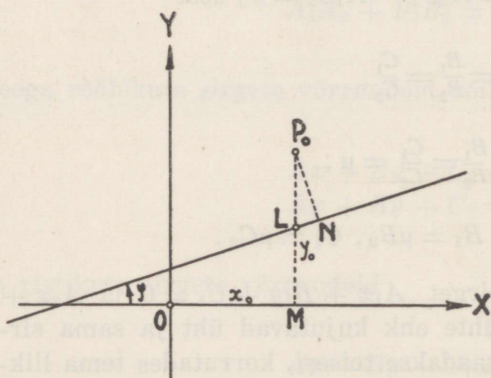
ehk

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

mis on ühtlasi tingimus, et kolm tähendatud sirget läbivad ühe ja sama punkti.

§ 25. Punkti kaugus sirgest.

Olgu antud punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ ja sirge $y = kx + b$ (62. joon.). Punkti kaugus sirgest on sirgele tõmmatud rist-



62. joonis.

lõigu P_0N pikkus, mille märgime tähega d . Tõmmates punktist P_0 ordinaadi y_0 , saame täisnurkse $\triangle LP_0N$, kusjuures selle kolmnurga nurk punktis P_0 on sama-sugune, nagu nurk sirge ja X -telje vahel (külgede ristseisu tõttu), s. o. φ . On aga nurk sirge ja X -telje vahel suurem kui $\frac{\pi}{2}$, s. o. $\varphi > \frac{\pi}{2}$, siis

kolmnurga nurk tipus P_0 oleks $\pi - \varphi$. Täisnurksest $\triangle LP_0N$ saame

$$d = LP_0 \cdot \cos \varphi$$

ehk

$$d = \frac{LP_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{LP_0}{\sqrt{1 + k^2}},$$

sest

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}.$$

LP_0 leiame järgmiselt:

$$LP_0 = MP_0 - ML = y_0 - ML;$$

et punkt L asetseb antud sirgel, siis selle punkti koordinaadid x_0 ja ML peavad rahuldama sirge võrrandit $y = kx + b$, s. o.

$$ML = kx_0 + b$$

ja

$$LP_0 = y_0 - (kx_0 + b).$$

Paigutades LP_0 väärtuse avaldisse

$$\frac{LP_0}{\sqrt{1 + k^2}},$$

saame

$$d = \frac{y_0 - (kx_0 + b)}{\sqrt{1 + k^2}},$$

mis väljendab punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ kaugust sirgest $y = kx + b$.

Kasutades saadud valemit, tuleb ruutjuur võtta niisuguse märgiga (+ või -), et d väärtus oleks ikka positiivne, kui piirdume pikkuse d absoluutväärtusega.

Punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ kauguse sirgest $Ax + By + C = 0$ saame, kui paigutame saadud avaldisse

$$k = -\frac{A}{B} \text{ ja } b = -\frac{C}{B};$$

siis kauguse absoluutväärtus on

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

§ 26. Harjutusülesanded.

105. Leida sirge, kui ta lõikab Y -telge punktis $y = 5$ ja moodustab X -teljega nurga, mille siinus $= \frac{2}{3}$.
106. Leida sirge, mis lõikab Y -telge punktis $y = -2$ ja moodustab X -teljega kaks korda suurema nurga kui sirge $y = 3x + 3$.
107. Kas punktid $P_1 \equiv (1 | 5)$, $P_2 \equiv (2 | 5)$, $P_3 \equiv (0,5 | 6)$ ja $P_4 \equiv (-1 | 0)$ asetsevad sirgel $y = 2x + 3$?
108. Missugune on tarvilik ja piisav tingimus, et punkt $P \equiv (x_1 | y_1)$ asetseks sirgel $Ax + By + C = 0$?
109. Punktid $P_1 \equiv (-2 | y)$, $P_2 \equiv (x | 2)$, $P_3 \equiv (13 | y)$ ja $P_4 \equiv (x | -5,5)$ asetsevad sirgel $3x + 5y + 11 = 0$. Leida puuduvate koordinaatide väärtused.
110. Avaldada sirge võrrandid telglõikudes: a) $3x + 2y - 6 = 0$; b) $6x - y - 3 = 0$; c) $x - y - 1 = 0$; d) $2x - 3y + 7 = 0$.
111. Avaldada sirge võrrandid normaalkujus: a) $3x + 4y + 15 = 0$; b) $6x - 8y - 9 = 0$; c) $2x + 2y\sqrt{3} - 7 = 0$; d) $x + y + 5 = 0$.
112. Rombi diagonaalid on võrdsed 8 ja 6 mõõduühikuga ja kujutavad ühtlasi koordinaattelgi. Leida rombi külgede võrrandid.
113. Sirgel $2x + 3y + 1 = 0$ leida punkt P , mis oleks ühekaugusel punktidest $P_1 \equiv (1 | 3)$ ja $P_2 \equiv (-1 | -5)$.
114. Sirgel $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ leida punkt P , mis oleks ühekaugusel punktidest $P_1 \equiv (1 | 4)$ ja $P_2 \equiv (-1 | -2)$.
115. Leida punkt P , mis oleks ühekaugusel punktidest $P_1 \equiv (2 | 3)$, $P_2 \equiv (4 | 2)$ ja $P_3 \equiv (-1 | 0)$.
116. Parallelogrammi kahe külje võrrandid on $x + y - 1 = 0$ ja $3x - y + 4 = 0$ ning diagonaalide lõikepunkt $M \equiv (3 | 3)$. Leida parallelogrammi kahe teise külje võrrandid.

117. Leida sirge, mis läbib punkti $P \equiv (2 | -1)$ ja moodustab X -teljega kaks korda suurema nurga kui sirge $x - 3y + 4 = 0$.
118. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga tipud on:
- $P_1 \equiv (4 | 2)$, $P_2 \equiv (-5 | 4)$, $P_3 \equiv (-2 | -3)$
 - $P_1 \equiv (3 | -1)$, $P_2 \equiv (0 | 5)$, $P_3 \equiv (0 | 4)$
 - $P_1 \equiv (2 | 0)$, $P_2 \equiv (0 | 0)$, $P_3 \equiv (-1 | -2)$
 - $P_1 \equiv (-4,4 | -3,3)$, $P_2 \equiv (-7,6 | 4,8)$,
 $P_3 \equiv (2,6 | 0,2)$
 - $P_1 \equiv (a | b)$, $P_2 \equiv (a | a + b)$, $P_3 \equiv (b | a + b)$.
119. Leida kolmnurga mediaanide võrrandid, kui kolmnurga tipud on:
- $P_1 \equiv (5 | 9)$, $P_2 \equiv (15 | -3)$, $P_3 \equiv (-5 | 3)$
 - $P_1 \equiv (-6 | -3)$, $P_2 \equiv (4 | -7)$, $P_3 \equiv (-1 | 5)$
 - $P_1 \equiv (8,8 | 6,2)$, $P_2 \equiv (-4,1 | 1,3)$, $P_3 \equiv (2,4 | -10,2)$.
120. Kolmnurga üks külg lõikab X -telge punktis $x = 5$ ja Y -telge punktis $y = 3$; teised küljed läbivad punkti $P \equiv (2 | -4)$ ja neid punkte, milles esimene külg lõikab X - ja Y -telge. Leida kolmnurga külgede ja mediaanide võrrandid.
121. Nelinurga tipud on: $P_1 \equiv (3 | -3)$, $P_2 \equiv (4 | 3)$, $P_3 \equiv (-5 | 2)$ ja $P_4 \equiv (-3 | -5)$. Leida nelinurga külgede ja diagonaalide võrrandid ning külgede ja diagonaalide tõusunurgad.
122. Leida kolmnurga nurgad, kui kolmnurga külgede võrrandid on:
- $x - y - 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $2x - y + 6 = 0$
 - $x - 3y - 9 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$
 - $5x - 3y - 15 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$
 - $2x - 3y = 0$, $3x + 2y = 0$, $4x + y - 12 = 0$
 - $x + 2 = 0$, $2x - y - 5 = 0$, $5x + 2y + 10 = 0$.

123. Leida kolmnurga nurgad, kui kolmnurga tipud on:
- $P_1 \equiv (2 | 1)$, $P_2 \equiv (0 | -1)$, $P_3 \equiv (-2 | 0)$
 - $P_1 \equiv (3 | 3)$, $P_2 \equiv (2 | 2)$, $P_3 \equiv (3 | 0)$
 - $P_1 \equiv (1 | -3)$, $P_2 \equiv (-2 | 1)$, $P_3 \equiv (-3 | -2)$
 - $P_1 \equiv (-4 | -2)$, $P_2 \equiv (-1 | 2)$, $P_3 \equiv (3,5 | 3,5)$
 - $P_1 \equiv (1,5 | 1,5)$, $P_2 \equiv (-2 | 5)$, $P_3 \equiv (1 | 1)$.
124. Sirge, mille sihitegur $k_1 = \frac{5}{8}$, moodustab teise sirgega nurga $\omega = 120^\circ 41'$. Leida teise sirge sihitegur k_2 .
125. Missugused nurgad moodustuvad nelinurga diagonaalide lõikepunktis, kui nelinurga tipud on: $P_1 \equiv (5 | 5)$, $P_2 \equiv (-1 | 4)$, $P_3 \equiv (-3 | 0)$ ja $P_4 \equiv (4 | -1)$?
126. Missugused nurgad moodustuvad kolmnurga mediaanide lõikepunktis, kui kolmnurga tipud on: $P_1 \equiv (6 | 5)$, $P_2 \equiv (-4 | -2)$ ja $P_3 \equiv (4 | -4)$?
127. Leida sirge, mis läbib punkti $P \equiv (4 | -6)$ ja on rööbik sirgega: a) $y = 2x - 4$; b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$; c) $4x - 5y + 15 = 0$; d) $y = 3$; e) $x = -2$.
128. Leida sirge, mis läbib punkti $P \equiv (-2 | 3)$ ja on ristik sirgega: a) $y = -3x + 5$; b) $y = \frac{4}{3}x - 2$; c) $x + 3y - 12 = 0$; d) $y = -5$; e) $x = -2$.
129. Sirge läbib punkte $P_1 \equiv (1 | 2)$ ja $P_2 \equiv (-1 | -5)$. Leida teine sirge, mis oleks rööbik esimesega ja läbiks punkti $P_3 \equiv (2 | -3)$.
130. Sirge läbib punkte $P_1 \equiv (4 | 3)$ ja $P_2 \equiv (-2 | 1)$. Leida teine sirge, mis oleks ristik esimesega ja läbiks punkti $P_3 \equiv (1 | 2)$.
131. Sirge $y = 5x + 1$ lõikepunktides koordinaattelgedega on tõmmatud ristjooned antud sirgele. Leida ristjoonte võrrandid.

132. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid, kui kolmnurga tipud on:

a) $P_1 \equiv (3 | 5)$, $P_2 \equiv (5 | -3)$, $P_3 \equiv (0 | -1)$

b) $P_1 \equiv (2 | -2)$, $P_2 \equiv (1 | -1)$, $P_3 \equiv (-4 | -4)$

c) $P_1 \equiv (-2 | 0)$, $P_2 \equiv (0 | 5)$, $P_3 \equiv (3 | -2)$

d) $P_1 \equiv (0 | 0)$, $P_2 \equiv (5 | -3)$, $P_3 \equiv (2 | 4)$.

133. Antud on kaks punkti $P_1 \equiv (2 | 3)$ ja $P_2 \equiv (12 | 5)$. Leida abstsisssteljel punkt P nõnda, et $P_1 \hat{P} P_2$ oleks täisnurk.

134. Leida sirgete lõikepunkt:

a) $2x - 3y - 1 = 0$ ja $3x - y - 2 = 0$

b) $4x - 2y - 1 = 0$ ja $2x - y + 2 = 0$.

135. Leida kolmnurga tipud, kui kolmnurga külgede võrrandid on:

a) $x - y = 0$, $x + y - 3 = 0$, $2x - y + 6 = 0$

b) $y + 2 = 0$, $2x + y - 2 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$

c) $y = 0$, $5x + 2y - 10 = 0$, $5x - 3y + 15 = 0$

d) $x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$, $2x + 3y + 3 = 0$

e) $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x - 4 = 0$

f) $x - 2y - 2 = 0$, $3x - y - 6 = 0$, $x + y - 2 = 0$.

136. Leida nelinurga tipud, kui nelinurga külgede võrrandid on:

$$x + y + 8 = 0, \quad x + y - 4 = 0, \quad 2x - 3y + 6 = 0 \text{ ja} \\ 2x - 3y - 18 = 0.$$

137. Leida nelinurga diagonaalide lõikepunkt, kui nelinurga külgede võrrandid on:

$$2x - 5y + 20 = 0, \quad 3x + 2y - 27 = 0, \quad 2x - 5y - 18 = 0 \\ \text{ja } 3x + 2y + 11 = 0.$$

138. Leida täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetite võrrandid, kui hüpotenuusi võrrand on $3x - y + 5 = 0$ ja täisnurga tipp on $P \equiv (4 | -1)$.
139. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid, kui kolmnurga külgede võrrandid on: $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ ja $2x - y + 3 = 0$.
140. Leida sirge, mis läbib punkti $P_1 \equiv (4 | 1)$ ja punkti P_2 , mis on sirgete $y = \frac{2}{3}x - 5$ ja $y = -1\frac{1}{8}x$ lõikepunkt.
141. Leida sirge, mis läbib sirgete $2x - 3y - 8 = 0$ ja $x - 2y - 5 = 0$ lõikepunkti ja on rööbik sirgega $3x - 2y + 2 = 0$.
142. Leida sirge, mis läbib sirgete $x - y - 3 = 0$ ja $2x + 3y - 11 = 0$ lõikepunkti ja on ristik sirgega $5x - 4y - 17 = 0$.
143. Leida sirge, mis läbib sirgete $3x - y - 3 = 0$ ja $4x + 3y - 4 = 0$ lõikepunkti ja on ristik esimese sirgega.
144. Leida sirge, mis läbib punkti $P \equiv (1 | 2)$ ja moodustab sirgega $x - y + 5 = 0$ nurga $\omega = 45^\circ$.
145. Leida sirge, mis läbib sirgete $2x - y - 3 = 0$ ja $x + y - 6 = 0$ lõikepunkti ja moodustab sirgega $3x - 5 = 0$ nurga $\omega = 45^\circ$.
146. Leida kolmnurga pindala, kui ta külgede võrrandid on $3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ ja $x + y - 1 = 0$.
147. Kolmnurga külgede võrrandid on: $7x + 4y - 23 = 0$, $x - y + 3 = 0$ ja $3x + 8y + 8 = 0$. Leida kolmnurga: a) külgede pikkused, b) mediaanide pikkused, c) mediaanide võrrandid ja d) pindala.
148. Kas kolm sirget lõikuvad ühes ja samas punktis:
- a) $x + 3y - 1 = 0$, $5x + y - 10 = 0$, $3x - 5y - 8 = 0$
- b) $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$, $3x + y + 5 = 0$
- c) $3x - y + 6 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$, $2x - y + 5 = 0$?

149. Näidata, et sirged $y = 5x - 6$, $y = 6x - 8$, $y = x + 2$, $y = 2x$ ja $y = \frac{1}{2}x + 3$ lõikuvad ühes punktis.
150. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga üks tipp on $P \equiv (3 | -4)$ ning kahe kõrguse võrrandid on $2x - 7y - 6 = 0$ ja $7x - 2y - 1 = 0$.
151. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga üks tipp on $P \equiv (-4 | 2)$ ning kahe mediaani võrrandid on $3x + 5y - 12 = 0$ ja $3x - 2y + 2 = 0$.
152. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga üks tipp on $P \equiv (2 | -4)$ ning kahe nurgapoolitaja võrrandid on $x - 3y - 6 = 0$ ja $x + y - 2 = 0$.
153. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga kaks tippu on $P_1 \equiv (2 | 1)$ ja $P_2 \equiv (4 | 9)$ ning kõrguste lõikepunkt $M \equiv (3 | 4)$.
154. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga külgede keskpunktid on $K_1 \equiv (1 | 2)$, $K_2 \equiv (7 | 4)$ ja $K_3 \equiv (3 | -4)$.
155. Kolmnurga kahe külje võrrandid on $x + y - 1 = 0$ ja $y + 1 = 0$ ja mediaanide lõikepunkt $M \equiv (-1 | 0)$. Leida kolmnurga kolmanda külje võrrand.
156. Leida 0-punkti kaugused sirgetest $15x - 8y - 51 = 0$ ja $4x + 3y + 35 = 0$.
157. Kolmnurga kaks tippu on $P_1 \equiv (2 | 2)$ ja $P_2 \equiv (3 | 0)$ ning mediaanide lõikepunkt $M \equiv (3 | 1)$. Leida kolmnurga kolmas tipp P_3 .
158. Leida kolmnurga kõrguste pikkused, kui kolmnurga tipud on:
- $P_1 \equiv (2 | 0)$, $P_2 \equiv (0 | 3)$, $P_3 \equiv (-2 | -1)$
 - $P_1 \equiv (-4 | -5)$, $P_2 \equiv (-2 | 6)$, $P_3 \equiv (5 | 1)$
 - $P_1 \equiv (2,4 | -5,2)$, $P_2 \equiv (-1,6 | 7,8)$,
 $P_3 \equiv (-10,4 | -0,8)$.

159. Leida sirge, mis läbib punkti $P_1 \equiv (-2 | 2)$ ja mille kaugus punktist $P_2 \equiv (-3 | 0)$ on 6.
160. Leida sirge, mis läbib punkti $P \equiv (-2 | 6)$ ja mille kaugus 0-punktist on 5.
161. Sirgete $x + 2y - 11 = 0$ ja $2x - y - 2 = 0$ lõikepunktist tõmmata kolmas sirge, mille kaugus 0-punktist on 5.
162. Leida rööbikute sirgete $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ja $y = -\frac{1}{2}x + 2$ kaugus teineteisest.
163. Leida rööbikute sirgete $3x + 4y - 15 = 0$ ja $3x + 4y + 20 = 0$ kaugus teineteisest.
164. Kahe rööbiku sirge $3x + 2y - 5 = 0$ ja $6x + 4y + 3 = 0$ vahel leida kolmas sirge, mis asetseks kummastki eelmisest ühekaugusel.
165. Leida sirge, mis läbib punkti $P \equiv (5 | 2)$ ja eraldab võrdseid telglõigud.
166. Leida sirge, mis läbib punkti $P_1 \equiv (1 | 2)$ ja asetseb punktidest $P_2 \equiv (2 | 3)$ ja $P_3 \equiv (4 | -5)$ ühekaugusel.
167. Läbi punkti $P \equiv (0 | 1)$ kujundada sirge nii, et tema sirglõik sirgete $2x + y - 8 = 0$ ja $x - 3y + 10 = 0$ vahel jaguneks punktis P kaheks võrdseks osaks.
168. Leida sirge, mille kaugus sirgest $3x - 4y - 10 = 0$ on 3.
169. Kolmnurga tipud on $P_1 \equiv (3 | -4)$, $P_2 \equiv (-1 | 2)$ ja $P_3 \equiv (-2 | -5)$. Leida teise kolmnurga külgede võrrandid, kui need küljed läbivad antud kolmnurga tipud ja on rööbikud vastaskülgedega.
170. Trapetsi aluste võrrandid on $2x + y - 5 = 0$, ja $4x + 2y - 7 = 0$. Leida trapetsi kõrguse pikkus.

171. Näidata, et sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ vaheliste nurkade nurgapoolitajate võrrandid on

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

172. Lahendada eelmine ülesanne, kui sirged on antud võrranditega $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$.

173. Leida nurgapoolitajate võrrandid, kui nurki moodustavad sirged:

a) $3x + 4y - 9 = 0$, $12x + 9y - 8 = 0$

b) $4x + 7y - 29 = 0$, $x + 8y - 26 = 0$.

174. Leida punkti $P \equiv (2 | 1)$ peegelduspunkt sirgest $x + 2y - 1 = 0$.

175. Valgusekiir punktist $P_1 \equiv (2 | 3)$ peegeldub sirgest $x + y + 1 = 0$ punkti $P_2 \equiv (1 | 1)$. Leida langeva ja peegelduva kiire võrrand.

176. Parallelogrammi kahe külje võrrandid on $x + 2y + 1 = 0$ ja $2x + y - 3 = 0$ ja diagonaalide lõikepunkt $M \equiv (1 | 2)$. Leida parallelogrammi teiste külgede võrrandid.

177. Kolmnurga kaks tippu on $P_1 \equiv (1 | 2)$ ja $P_2 \equiv (-1 | -1)$ ning nurgapoolitaja võrrand on $2x + y - 1 = 0$. Leida kolmas tipp.

178. Missugusteks muutuvad sirgete $x + y - 1 = 0$ ja $5x - 2y - 7 = 0$ võrrandid, kui Y -telge pöörata -45° võrra?

179. Leida sirge polaarvõrrand, lähtudes sirge võrrandist ristkoordinaatides $y = kx + b$, võttes 0-punkti pooluseks ja X -telje polaarteljeks.

180. Sirge lõikab polaartelge 5 negatiivse ühiku kaugusel poolusest ja moodustab polaarteljega nurga $\alpha = 45^\circ$. Leida sirge võrrand.

181. Sirge lõikab polaartelge 10 positiivse ühiku kaugusel poolusest ja moodustab polaarteljega nurga $\alpha = 120^\circ$. Leida sirge võrrand.

182. Sirge läbib pooluse ja moodustab polaarteljega nurga $\alpha = 20^\circ$. Leida sirge võrrand.
183. Sirge on rööbik polaarteljega ja läbib punkti $P \equiv (1 \mid 30^\circ)$. Leida sirge võrrand.
184. Sirge on ristik polaarteljega ja läbib punkti $P \equiv (8 \mid 110^\circ)$. Leida sirge võrrand.
185. Leida sirge läbi punktide $P_1 \equiv (r_1 \mid \varphi_1)$ ja $P_2 \equiv (r_2 \mid \varphi_2)$.
186. Leida sirge läbi punktide:
- $P_1 \equiv (8 \mid 60^\circ)$ ja $P_2 \equiv (5 \mid 30^\circ)$
 - $P_1 \equiv (2 \mid 140^\circ)$ ja $P_2 \equiv (3 \mid 75^\circ)$
 - $P_1 \equiv (1 \mid 20^\circ)$ ja $P_2 \equiv (4 \mid 80^\circ)$
 - $P_1 \equiv (3 \mid 245^\circ)$ ja $P_2 \equiv (3 \mid 45^\circ)$
 - $P_1 \equiv (10 \mid 310^\circ)$ ja $P_2 \equiv (6 \mid 260^\circ)$
 - $P_1 \equiv (5 \mid \frac{\pi}{12})$ ja $P_2 \equiv (8 \mid \frac{5\pi}{12})$.
187. Leida sirge, mis läbib punkti $P_1 \equiv (r_1 \mid \varphi_1)$ ja on rööbik sirgega $r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$.
188. Leida sirge, mis läbib punkti $P_1 \equiv (r_1 \mid \varphi_1)$ ja on ristik sirgega $r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$.
189. Leida punkti $P_0 \equiv (r_0 \mid \varphi_0)$ kaugus sirgest $r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$.
190. Leida punkti kaugus sirgest:
- $P \equiv (6 \mid 20^\circ)$, $r = \frac{2}{\cos(80^\circ - \varphi)}$
 - $P \equiv (10 \mid 45^\circ)$, $r = \frac{3}{\cos(15^\circ - \varphi)}$
 - $P \equiv (15 \mid 70^\circ)$, $r = \frac{4}{\cos(65^\circ - \varphi)}$.

IV peatükk.

Tasapind.

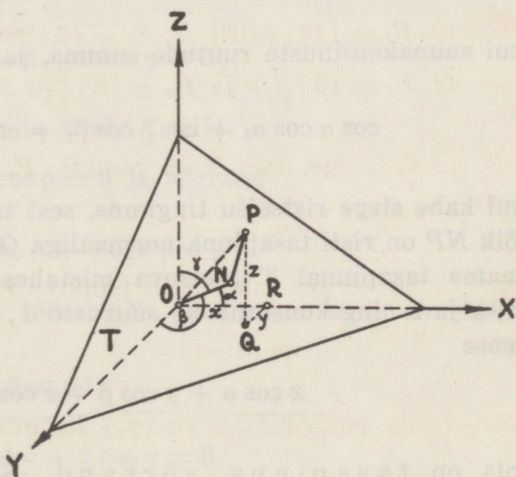
§ 27. Tasapinna normaalvõrrand.

Tasapinna T (63. joon.) asend ruumilises ristkoordinaadistikus on määratud, kui on teada tasapinna kaugus ehk normaali ON pikkus p koordinaattelgede 0-punktist kuni tasapinnani ja nurgad α , β ja γ , mis normaal ON moodustab X -, Y - ja Z -telje positiivsete suundadega.

Märgime tasapinnal T punkti

$$P \equiv (x | y | z),$$

kus x , y ja z on tasapinnal T asetseva mistahes vabalt võetud punkti P koordinaadid. x , y ja z on seega jooksvad koordinaadid. Punkti P koordinaatide x , y ja z ning tema



63. joonis.

kauguse OP vahel 0-punktist on kehtiv seos $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Murtud joonlõigu ONP projektsioonid koordinaattelgedel on vastavalt punkti P koordinaadid x , y ja z , s. o.

$$x = ON \cdot \cos \alpha + NP \cdot \cos \alpha_1$$

$$y = ON \cdot \cos \beta + NP \cdot \cos \beta_1$$

$$z = ON \cdot \cos \gamma + NP \cdot \cos \gamma_1,$$

kus $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ on normaali ON ning $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ ja $\cos \gamma_1$ on sirglõigu NP suunakoosinused.

Korrutades eelmisi võrdusi vastavalt $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ -ga

$$x \cos \alpha = ON \cdot \cos^2 \alpha + NP \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1$$

$$y \cos \beta = ON \cdot \cos^2 \beta + NP \cdot \cos \beta \cdot \cos \beta_1$$

$$z \cos \gamma = ON \cdot \cos^2 \gamma + NP \cdot \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1$$

ja liites saadud võrdusi, saame

$$\begin{aligned} & x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \\ & = ON \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + \\ & + NP \cdot (\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1). \end{aligned}$$

Siin

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

kui suunakoosinuste ruutude summa, ja

$$\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 = 0,$$

kui kahe sirge ristseisu tingimus, sest tasapinnal T asetsev sirglõik NP on risti tasapinna normaaliga ON . Tähistades $ON = p$, saame tasapinnal T asetseva mistahes punkti P koordinaatide x , y ja z ning konstantsete suuruste α , β , γ ja p vahel järgmise seose

$$\underline{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p},$$

mis on tasapinna võrrand. See võrrand nimetatakse tasapinna normaalvõrrandiks.

Tasapinna normaalvõrrand on jooksvate koordinaatide x , y ja z suhtes lineaarne. Temas esinevad jooksvad koordinaadid x , y ja z , mis on muutuvad suurused, ning α , β , γ ja p , mis on konstantsed suurused ühe ja sama tasapinna puhul.

Nurkadega α , β ja γ , mis normaal ON moodustab X -, Y - ja Z -telje positiivsete suundadega, mõõdetakse ka kahetahused nur-

gad, mis tasapind moodustab vastavalt YZ -, XZ - ja XY -tasapinnaga.

a) Kui tasapinna normaalvõrrandis $p = 0$, siis võrrand

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

kujutab 0-punkti läbivat tasapinda. Siin võib nurki α , β ja γ vaadelda kui täiendusnurki nurkadele $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$ ja $\frac{\pi}{2} - \gamma$, mille moodustab tasapind X -, Y - ja Z -teljega.

b) Kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \alpha = 0$ ja tasapinna normaalvõrrand omab kuju

$$y \cos \beta + z \cos \gamma = p.$$

Sel juhul tasapind lõikab ainult Y - ja Z -telge ning on rööbik X -teljega.

Kui siinjuures veel $p = 0$, siis saame võrrandi

$$y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

mis kujutab tasapinda, mis läbib X -telje.

c) Kui $\beta = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \beta = 0$ ja võrrand

$$x \cos \alpha + z \cos \gamma = p$$

kujutab tasapinda, mis lõikab X - ja Z -telge ning on rööbik Y -teljega.

Kui ka $p = 0$, siis võrrand

$$x \cos \alpha + z \cos \gamma = 0$$

kujutab tasapinda, mis läbib Y -telje.

d) Kui $\gamma = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \gamma = 0$ ja võrrand

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = p$$

kujutab tasapinda, mis lõikab X - ja Y -telge ning on rööbik Z -teljega.

Kui ka $p = 0$, siis võrrand

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = 0$$

kujutab tasapinda, mis läbib Z -telje.

e) Kui $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, siis $\gamma = 0$ ja tasapinna normaalvõrrand omab kuju

$$z = p,$$

mis kujutab X -ja Y -teljega ja ühtlasi ka XY -tasapinnaga rööbikut ning XZ - ja YZ -tasapinnaga ristikut tasapinda. See tasapind lõikab Z -telge 0 -punktist p ühiku kaugusel.

Kui siinjuures veel $p = 0$, siis võrrand

$$z = 0$$

kujutab XY -tasapinnaga ühtelangevat tasapinda. Seega võrrand $z = 0$ on ühtlasi XY -tasapinna võrrand.

f) Kui $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$, siis $\beta = 0$ ja võrrand

$$y = p$$

kujutab Y -telge lõikavat tasapinda, mis on rööbik X - ja Z -teljega ning ühtlasi ka XZ -tasapinnaga.

Kui ka $p = 0$, siis tasapind langeb ühte XZ -tasapinnaga, mille võrrand on

$$y = 0.$$

g) Kui $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, siis $\alpha = 0$ ja võrrand

$$x = p$$

kujutab X -telge lõikavat tasapinda, mis on rööbik Y - ja Z -teljega ning ühtlasi ka YZ -tasapinnaga.

Kui ka $p = 0$, siis saame YZ -tasapinna võrrandi

$$x = 0.$$

§ 28. Tasapinna üldvõrrand.

Tasapinda määrav normaalvõrrand

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

on esimese astme võrrand, mis võib ka esineda üldkuju

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

kus konstantsed suurused A , B , C ja D on vastavalt võrdelised suurustega $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ja $-p$. Seega iga tasapinda võime esitada esimese astme võrrandiga, ja ümberpöörult, iga esimese astme võrrand kujutab tasapinda, mille iga punkti koordinaadid x , y ja z on omavahel funktsionaalses seoses. See funktsionaalne seos väljendub esimese astme võrrandis, kusjuures võrrandi konstantsed suurused A , B , C ja D võivad olla mistahes ratsionaalsed või irratsionaalsed arvud.

Uurides analoogiliselt tasapinna normaalvõrrandi uurimiskäiguga tasapinna üldvõrrandi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

järgi tasapinna asendit ruumis, näeme, et kui võrrandis $D = 0$, siis võrrand

$$Ax + By + Cz = 0$$

kujutab 0-punkti läbivat tasapinda.

Kui A , B või C on 0, siis võrrandid

$$By + Cz + D = 0$$

$$Ax + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + D = 0$$

kujutavad tasapindu, mis on rööbikud vastavalt X -, Y - või Z -teljega.

Kui A , B või C ja D on 0, siis võrrandid

$$By + Cz = 0$$

$$Ax + Cz = 0$$

$$Ax + By = 0$$

kujutavad tasapindu, mis läbivad vastavalt X -, Y - või Z -telje.

Kui $A = B = 0$, või $A = C = 0$, või $B = C = 0$, siis võrrandid

$$Cz + D = 0$$

$$By + D = 0$$

$$Ax + D = 0$$

kujutavad tasapindu, mis on rööbikud vastavalt XY -, XZ - või YZ -tasapinnaga.

Kui $A = B = 0$, või $A = C = 0$, või $B = C = 0$, ja $D = 0$, siis võrrandid

$$Cz = 0 \text{ ehk } z = 0$$

$$By = 0 \text{ ,, } y = 0$$

$$Ax = 0 \text{ ,, } x = 0$$

kujutavad vastavalt XY -, XZ - või YZ -tasapinda.

Et tasapinna võrrandi üldkuju

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

muuta tasapinna normaalvõrrandiks, selleks leiame niisuguse normiva teguri N , millega tuleb korrutada võrrandi üldkuju mõlemaid pooli, nii et x -i koefitsient kujuneks $\cos \alpha$ väärtuseks, y -i koefitsient $\cos \beta$ väärtuseks, z -i koefitsient $\cos \gamma$ väärtuseks ja vabaliige normaali p pikkuseks. Korrutame võrrandi üldkuju mõlemad pooled normiva teguriga N , saame

$$NAx + NBy + NCz + ND = 0,$$

mis kujutab tasapinna normaalvõrrandit, kui

$$NA = \cos \alpha, \quad NB = \cos \beta, \quad NC = \cos \gamma, \quad ND = -p.$$

Tõstame neist kolm esimest võrdust ruutu

$$N^2A^2 = \cos^2\alpha, \quad N^2B^2 = \cos^2\beta, \quad N^2C^2 = \cos^2\gamma$$

ja liidame

$$N^2(A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

saame

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

mis on võrrandi normiv tegur, kusjuures märk tuleb võtta vastupidine vabaliikme D märgile, sest $ND = -p$. Seega

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad p = \frac{D}{\mp \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ja tasapinna võrrandi normaalkuju on

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Kui näiteks tasapind on antud võrrandiga

$$x - y - \sqrt{2}z + 6 = 0,$$

mille normiv tegur

$$N = -\frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 2}} = -\frac{1}{2},$$

siis selle tasapinna normaalvõrrand on

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 3 = 0,$$

kus $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$ ja $\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Seega $\alpha = \frac{2\pi}{3}$,
 $\beta = \frac{\pi}{3}$ ja $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Kui tasapind läbib 0-punkti, siis normiva teguri märk on määramatu. Sel juhul normiv tegur võib olla nii positiivne kui ka negatiivne. Kui näiteks 0-punkti läbiva tasapinna võrrand on

$$x - y - \sqrt{2}z = 0,$$

siis tasapinda määrav normaalvõrrand võib esineda kas kujus

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0,$$

kus $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$ ja $\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, või kujus

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0,$$

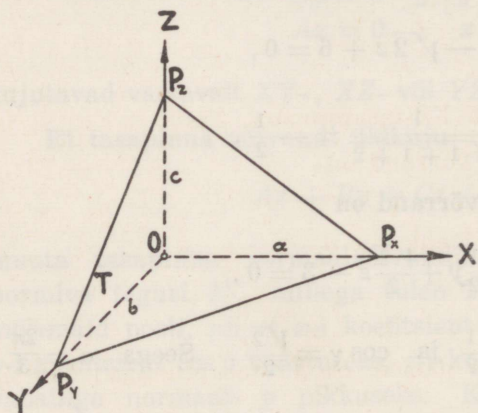
kus $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ ja $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 29. Tasapinna võrrand telglõikudes.

Kui tasapind T , mille võrrand üldkujus on

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

lõikab koordinaattelgi punktides P_x , P_y ja P_z (64. joon.), siis tekivad telglõigud 0-punktist kuni tasapinna ja koordinaattelgede lõikepunktideni. Olgu telglõik X -teljel a , Y -teljel b ja Z -teljel c . Need kolm telglõiku a , b ja c oma otsapunktidega P_x , P_y ja P_z määravad samuti tasapinna asendi ruumis.



64. joonis.

Punktid P_x , P_y ja P_z asetsevad tasapinnal T ja nende koordinaadid on vastavalt $(a \mid 0 \mid 0)$, $(0 \mid b \mid 0)$ ja $(0 \mid 0 \mid c)$. Need koordinaadid peavad rahuldama tasapinna võrrandit, s. o.

$$Aa + D = 0$$

$$Bb + D = 0$$

$$Cc + D = 0,$$

millest

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Paigutades need väärtused tasapinna üldvõrrandisse A , B ja C asemele, saame

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

ehk

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

mis on tasapinna võrrand telglõikudega a , b ja c .

Kui tasapind on rööbik Z -teljega, siis $c = \infty$ ja $\frac{z}{c} = 0$ ning tasapinna võrrand telglõikudes omab kuju

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Kui tasapind on rööbik Y -teljega, siis $b = \infty$ ja $\frac{y}{b} = 0$ ning võrrand omab kuju

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1.$$

Kui tasapind on rööbik X -teljega, siis $a = \infty$ ja $\frac{x}{a} = 0$ ning võrrand on

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Kui tasapind on rööbik YZ -tasapinnaga, siis $b = c = \infty$ ja $\frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 0$ ning tasapinna võrrand on

$$\frac{x}{a} = 1 \text{ ehk } x = a,$$

kus a on telglõik X -teljel.

Analoogiliselt arvutades näeme, et XZ -tasapinnaga rööbiku tasapinna võrrand on

$$y = b$$

ja XY -tasapinnaga rööbiku tasapinna võrrand on

$$z = c.$$

Kui tasapind läbib 0-punkti, siis tasapinna võrrandil telglõikudes pole mõtet, sest siis $a = b = c = 0$.

§ 30. Tasapind läbi kolme punkti.

Kui tasapind, mille võrrand üldkujus on

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

läbib antud punkti ruumis $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$, siis selle punkti koordinaadid rahuldavad tasapinna võrrandit, s. o.

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Lahutame saadud võrduse tasapinna võrrandi üldkujust, saame

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

ehk

$$\frac{A}{C}(x - x_1) + \frac{B}{C}(y - y_1) + (z - z_1) = 0,$$

mis on lineaarne võrrand jooksvate koordinaatide x , y ja z suhtes. See on tasapinna võrrand, kui tasapind läbib antud punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$. Siin esinevad ka konstantsed suurused A , B ja C .

Et aga kolm punkti ruumis määravad tasapinna asendi, selleks valime veel kaks punkti $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$ ja $P_3 \equiv (x_3 | y_3 | z_3)$. Et tasapind läbiks ka neid punkte, peavad nende punktide koordinaadid rahuldama eelmist võrrandit, s. o.

$$\frac{A}{C}(x_2 - x_1) + \frac{B}{C}(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) = 0$$

$$\frac{A}{C}(x_3 - x_1) + \frac{B}{C}(y_3 - y_1) + (z_3 - z_1) = 0.$$

Saadud avaldistest leiame $\frac{A}{C}$ ja $\frac{B}{C}$ väärtused

$$\frac{A}{C} = \frac{\begin{vmatrix} z_1 - z_2 & y_2 - y_1 \\ z_1 - z_3 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & z_1 - z_2 \\ x_3 - x_1, & z_1 - z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1, & z_1, & x_1 \\ 1, & z_2, & x_2 \\ 1, & z_3, & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}}.$$

Neid väärtusi paigutades võrrandisse

$$\frac{A}{C}(x - x_1) + \frac{B}{C}(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

avaldiste $\frac{A}{C}$ ja $\frac{B}{C}$ asemele, saame otsitava tasapinna võrrandi, kui tasapind läbib kolm punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$, $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$ ja $P_3 \equiv (x_3 | y_3 | z_3)$:

$$\begin{vmatrix} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} (x - x_1) + \begin{vmatrix} 1, & z_1, & x_1 \\ 1, & z_2, & x_2 \\ 1, & z_3, & x_3 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0$$

ehk

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Et ka mõni neljas punkt $P_4 \equiv (x_4 | y_4 | z_4)$ asetseks sellel tasapinnal, siis peavad neljanda punkti P_4 koordinaadid rahuldama saadud võrrandit, s. o.

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 31. Nurk kahe tasapinna vahel.

Kaks tasapinda võivad lõikuda sirges joones või olla rööbikud. Olgu kahe lõikuva tasapinna võrrandid

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

ja nendevahelise kahetahuse nurga suurus ω . Tasapindade vahe-line nurk on võrdne koordinaattelgedele 0-punktist tasapindadele lastud ristjoonte vahelise nurgaga. Tähendab,

$$\cos \omega = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2,$$

kus $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ ja $\cos \gamma_1$ on esimesele tasapinnale lastud rist-joone suunakoosinused ning $\cos \alpha_2$, $\cos \beta_2$ ja $\cos \gamma_2$ on teisele tasa-pinnale lastud ristjoone suunakoosinused. Et

$$\begin{array}{l|l} \cos \alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} & \cos \alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \\ \cos \beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} & \cos \beta_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \\ \cos \gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} & \cos \gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \end{array}$$

siis

$$\cos \omega = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Kui tasapinnad

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

on rööbikud, siis $\omega = 0$ või π ja

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = \pm 1,$$

sest $\cos 0 = +1$ ja $\cos \pi = -1$. Sirgete rööpseisu puhul

$$\cos \alpha_1 = \pm \cos \alpha_2$$

$$\cos \beta_1 = \pm \cos \beta_2$$

$$\cos \gamma_1 = \pm \cos \gamma_2,$$

mis on sama kui

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

millest

$$\frac{A_1}{A_2} = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

mis on kahe tasapinna rööpseisu tingimus.

Kui tasapinnad on risti, siis nurk $\omega = \frac{\pi}{2}$ ja

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

ehk

$$\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0,$$

millest

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0,$$

mis on kahe tasapinna ristseisu tingimus.

§ 32. Tasapindade lõikumine.

Kolm tasapinda, mille võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

võivad lõikuda ühes, kahes või kolmes sirges joones või olla kõik isekeskis rööbikud. Kahe lõikjoone puhul on kolmest tasapinnast kaks tasapinda rööbikud; järelikult on rööbikud ka mõlemad lõikjooned. Kolme lõikjoone puhul võivad lõikjooned olla kõik rööbikud või lõikuda ühes punktis.

Kui kolme tasapinna kolm lõikjoont lõikuvad ühes punktis, siis öeldakse, et ka kolm tasapinda lõikuvad ühes punktis.

Kui kolm tasapinda langevad ühte, siis kahe tasapinna võrrandid saadakse kolmanda tasapinna võrrandist, korrutades viimase liikmeid kord mingisuguse 0-st erineva konstantse suurusga μ ja teine kord mingisuguse 0-st erineva konstantse suurusga ν , s. o.

$$A_1 = \mu A_3, \quad B_1 = \mu B_3, \quad C_1 = \mu C_3, \quad D_1 = \mu D_3$$

$$A_2 = \nu A_3, \quad B_2 = \nu B_3, \quad C_2 = \nu C_3, \quad D_2 = \nu D_3$$

ehk

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{B_1}{B_3} = \frac{C_1}{C_3} = \frac{D_1}{D_3} = \mu$$

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{B_2}{B_3} = \frac{C_2}{C_3} = \frac{D_2}{D_3} = \nu.$$

Kui kaks tasapinda, mille võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

lõikuvad, siis mistahes 0-st erineva konstantse suuruse ehk parametri λ puhul võrrand

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

kujutab esimese ja teise tasapinna lõikjoont läbivat kolmandat tasapinda, sest see võrrand on lineaarne ja iga punkti koordinaadid, mis rahuldavad kahe esimese tasapinna võrrandeid, rahuldavad ühtlasi ka kolmandat võrrandit.

Kui parameetrile λ anname mistahes positiivseid ja negatiivseid väärtusi ja ka 0, siis võrrand

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

kujutab tasapindade kimpu, s. o. tasapindade kogu, mis lõikuvad ühes ja samas sirges joones.

Et nüüd kolm tasapinda, mille võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

lõikuksid ühes sirges joones, selleks võtame esimese ja teise tasapinna lõikjoones lõikuvate tasapindade võrrandi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

mis on sama kui

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0.$$

Et selle võrrandiga määratud tasapind langeks ühte kolmanda tasapinnaga

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

selleks peab

$$\frac{A_3}{A_1 + \lambda A_2} = \frac{B_3}{B_1 + \lambda B_2} = \frac{C_3}{C_1 + \lambda C_2} = \frac{D_3}{D_1 + \lambda D_2},$$

mis on tingimus, et kolm tasapinda lõikuksid ühes ja samas sirges joones. Võttes selle võrde esimese ja teise osa, leiame λ väärtuse. Kui λ väärtus on niisugune, et ka võrde kolmas ja neljas osa on võrdne võrde esimese ja samuti ka teise osaga, siis võime järeldada, et kolm tasapinda lõikuvad ühes ja samas sirges joones.

Kui kolmest tasapinnast kaks tasapinda, näiteks esimene ja teine, on rööbikud ja lõikuvad kolmanda tasapinnaga, siis

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Kui kolm tasapinda, mille võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

lõikuvad kolmes rööbikus sirges joones, siis läbi esimese ja teise tasapinna lõikjoone võime kujundada tasapinna, mis oleks rööbik kolmanda antud tasapinnaga. Tasapindade võrrand, kui tasapinnad lõikuvad esimese ja teise tasapinna lõikjoones, on

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0.$$

Et see võrrand kujutaks kolmanda antud tasapinnaga rööbikut tasapinda, selleks peab

$$\frac{A_3}{A_1 + \lambda A_2} = \frac{B_3}{B_1 + \lambda B_2} = \frac{C_3}{C_1 + \lambda C_2}.$$

Võttes võrde esimese ja teise osa, leiame λ väärtuse. Kui λ väärtus on niisugune, et võrde kolmas osa on võrdne võrde esimese ja samuti ka teise osaga, siis kolm antud tasapinda lõikuvad kolmes rööbikus sirges joones. Kui aga siinjuures veel peale selle

$$\frac{D_3}{D_1 + \lambda D_2}$$

on võrdne võrde esimese (samuti ka teise ja kolmanda) osaga, siis kolm antud tasapinda lõikuvad ühes sirges joones.

Kui kolm tasapinda, mille võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

lõikuvad ühes punktis, mis siis asetseb nii esimesel kui ka teisel ja kolmandal tasapinnal, siis selle punkti koordinaadid peavad rahuldama nii esimese kui ka teise ja kolmanda tasapinna võrrandit. Seega otsitava lõikepunkti koordinaatide väärtused leiame, kui lahendame võrrandid jooksvate koordinaatide x , y ja z suhtes. Lahendades saame

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1, & B_1, & C_1 \\ -D_2, & B_2, & C_2 \\ -D_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & -D_1, & C_1 \\ A_2, & -D_2, & C_2 \\ A_3, & -D_3, & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & -D_1 \\ A_2, & B_2, & -D_2 \\ A_3, & B_3, & -D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}},$$

kusjuures kolmel antud tasapinnal on ühine lõplik lõikepunkt ainult siis, kui võrrandsüsteemi determinant

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On aga tähendatud determinant võrdne 0-ga, kuid x -i, y -i ja z -i lugejates esinevad determinandid ei ole võrdsed 0-ga, siis on tasapindade lõikepunkti koordinaadid määramata suured ja seega lõikepunkt asetseb lõpmatuses. Järelikult, tasapinnad on rööbikud ühe ja sama sirgega, s. o. nad võivad siis lõikuda ühes, kahes või kolmes rööbikus sirges joones.

Et neli tasapinda, mille võrrandid on

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 &= 0, \end{aligned}$$

lõikuksid ühes punktis, selleks peavad esimese kolme tasapinna ühise punkti koordinaadid

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1, & B_1, & C_1 \\ -D_2, & B_2, & C_2 \\ -D_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & -D_1, & C_1 \\ A_2, & -D_2, & C_2 \\ A_3, & -D_3, & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & -D_1 \\ A_2, & B_2, & -D_2 \\ A_3, & B_3, & -D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}}$$

rahuldama neljandat võrrandit, s. o.

$$A_4 \begin{vmatrix} -D_1, & B_1, & C_1 \\ -D_2, & B_2, & C_2 \\ -D_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} + B_4 \begin{vmatrix} A_1, & -D_1, & C_1 \\ A_2, & -D_2, & C_2 \\ A_3, & -D_3, & C_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ C_4 \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & -D_1 \\ A_2, & B_2, & -D_2 \\ A_3, & B_3, & -D_3 \end{vmatrix} + D_4 \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

ehk

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

mis on tingimuseks, et neli tähendatud tasapinda lõikuksid ühes ja samas punktis.

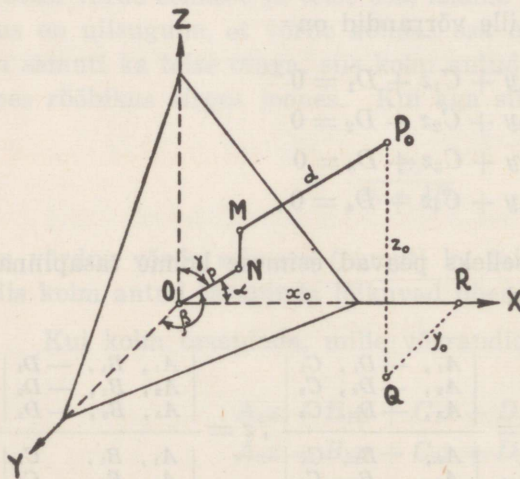
§ 33. Punkti kaugus tasapinnast.

Olgu antud tasapind võrrandina normaalkujus

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

ja punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ väljaspool tasapinda (65. joon.). Punkti

P_0 kaugus tasapinnast olgu $P_0M = d$.



65. joonis.

Märgime teljestikus punkti P_0 koordinaadid x_0, y_0 ja z_0 , tasapinna kauguse 0-punktist $ON = p$ ja ühendame tasapinnal asetsevad punktid M ja N , saame muratud joonlõigu

$$ORQP_0MN,$$

mille projektsioon

normaalil ON on normaali ON pikkus p , s. o.

$$p = OR \cdot \cos \alpha + RQ \cdot \cos \beta + QP_0 \cdot \cos \gamma + P_0M \cdot \cos \pi + \\ + MN \cdot \cos \frac{\pi}{2} = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - d,$$

millest

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p,$$

mis väljendab punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ kaugust tasapinnast $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$. Kui punkt P_0 ja 0-punkt asetsevad tasapinnast isepooltel, siis saame saadud valemi järgi kauguse d väärtuse positiivseks, ja kui punkt P_0 ja 0-punkt asetsevad tasapinnast ühel ja samal poolel, siis saame d väärtuse negatiivseks. Kuid me võtame punkti kaugust tasapinnast kui pikkusmõõtu absoluutsuuruseks.

Kui tasapind on antud üldvõrrandiga

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

siis 0-punkti kaugus sellest tasapinnast on

$$p = \left| \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

ja iga teise väljaspool tasapinda asetseva punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ kaugus tasapinnast on

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|,$$

sest viies 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$, saame

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0$$

ja

$$A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C(z' + z_0) + D = 0$$

ehk

$$Ax' + By' + Cz' + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0,$$

kus murru lugeja D muutub avaldiseks $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$.

Kui näiteks on antud punkt $P_0 \equiv (2 \mid -4 \mid 5)$ ja tasapind võrrandiga $2x - y + 6z - 10 = 0$, siis punkti P_0 kaugus sellest tasapinnast on

$$d = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 6 \cdot 5 - 10}{\sqrt{4 + 1 + 36}} = \frac{28}{\sqrt{41}} \approx 4,37.$$

§ 34. Harjutusülesanded.

191. Kas punktid $P_1 \equiv (4 \mid 1 \mid 2)$, $P_2 \equiv (2 \mid 1 \mid 3)$, $P_3 \equiv (7 \mid 1 \mid 2)$, $P_4 \equiv (3 \mid 0 \mid 4)$ ja $P_5 \equiv (0 \mid 4 \mid 2)$ asetsevad tasapinnal $3x - 5y + 2z - 17 = 0$?

192. Missuguseid tasapindu kujutavad võrrandid $x \pm y = 0$, $x \pm z = 0$ ja $y \pm z = 0$?

193. Missuguses eriseisus on tasapinnad, mille võrrandid on:
a) $3x + 2y - 6z = 0$; b) $x + y - 4 = 0$; c) $5x - 3z + 1 = 0$; d) $3y - 8z = 0$; e) $7y - 2 = 0$.

194. Tasapindade võrrandid $5x - 3y - 2z + 7 = 0$, $5x - z = 0$, $y + z = 0$, $x + 3 = 0$, $x + y + z - \sqrt{3} = 0$ ja $z = 0$ muuta normaalvõrranditeks.

195. Leida 0-punkti kaugus tasapindadest: $2x + 3y + 6z - 35 = 0$, $21x + 30y - 70z - 84 = 0$, $x - 2y + 2z + 21 = 0$, $15x - 10y + 6z - 190 = 0$.

196. Leida punkti $P \equiv (1 \mid 2 \mid 1)$ kaugus tasapinnast $x + 2y + 2z - 10 = 0$.

197. Leida kuubi serva pikkus, kui kuubi kolm tahku asetsevad koordinaattasapindadel, üks tipp on 0-punktis ja selle vastastipp asetseb tasapinnal $3x + y - 2z - 18 = 0$.

198. Leida tasapinnal $4x - 7y + 5z - 20 = 0$ punkt P nõnda, et sirgel, mis läbib 0-punkti ja punkti P , oleksid võrdsed suunakoosinused.

199. Leida tasapinna $2x - y + 2z + 9 = 0$ normaali suunakoosinused.
200. Leida tasapinna normaali suunakoosinused, kui tasapind moodustab telglõigud $a = 11$, $b = 55$ ja $c = 10$.
201. Leida tasapinna võrrand, kui 0-punktist väljuva ristjoone lõikepunkt selle tasapinnaga on $P \equiv (2 \mid 9 \mid -6)$.
202. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P_1 \equiv (8 \mid -7 \mid 5)$ ja on risti sirglõiguga P_1P_2 , mille otsapunkt $P_2 \equiv (2 \mid -1 \mid -2)$.
203. Leida koordinaattelgede lõikepunktid tasapinnaga $2x - y + 8z - 4 = 0$.
204. Leida tasapinna $x - 2y + z - 1 = 0$ normaali suunangad.
205. Leida koordinaattelgede lõikepunktid tasapinnaga $5x - y + 2z - 3 = 0$ ja selle tasapinna normaali suunakoosinused.
206. Näidata, et $A : B : C = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$, kus α , β ja γ on tasapinna $Ax + By + Cz + D = 0$ normaali suunanurgad.
207. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (5 \mid -7 \mid 4)$ ja moodustab võrdsed telglõigud.
208. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punktid $P_1 \equiv (5 \mid 1 \mid 7)$ ja $P_2 \equiv (4 \mid 0 \mid -2)$ ja on rööbik X -teljega.
209. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punktid $P_1 \equiv (1 \mid -5 \mid 1)$ ja $P_2 \equiv (3 \mid 2 \mid -2)$ ja on rööbik Y -teljega.
210. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (4 \mid -3 \mid -1)$ ja X -telje; Y -telje; Z -telje.
211. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (3 \mid -2 \mid 1)$ ja on ristik X -teljega; Y -teljega; Z -teljega.

212. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (3 | 2 | -7)$ ja on rööbik XY -tasapinnaga; XZ -tasapinnaga; YZ -tasapinnaga.

213. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ ja on rööbik tasapinnaga $Ax + By + Cz + D = 0$.

214. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (4 | -7 | 1)$ ja on rööbik tasapinnaga $3x - 7y + 5z - 12 = 0$.

215. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib 0-punkti ning punktid $P_1 \equiv (1 | 4 | 0)$ ja $P_2 \equiv (3 | -2 | 1)$.

216. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib kolm punkti:
a) $P_1 \equiv (7 | 6 | 7)$, $P_2 \equiv (5 | 10 | 5)$ ja $P_3 \equiv (-1 | 8 | 9)$
b) $P_1 \equiv (1 | 1 | 1)$, $P_2 \equiv (2 | 2 | 2)$ ja $P_3 \equiv (3 | 3 | 3)$.

217. Leida tasapinna võrrand, kui tasapinna määravad kolm punkti $P_1 \equiv (1 | 2 | 1)$, $P_2 \equiv (-2 | 1 | 2)$ ja $P_3 \equiv (-2 | -1 | 3)$.

218. Leida püramiidi kõrgus h tipust $P \equiv (0 | 6 | 4)$, kui ta põhja tipud on $P_1 \equiv (1 | -1 | 4)$, $P_2 \equiv (3 | 5 | 3)$ ja $P_3 \equiv (-2 | 11 | -5)$.

219. Leida tasapindade $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ ja $x + 2y + 2z - 7 = 0$ vaheline nurk ω .

220. Leida tasapindade $x + 2y - z + 1 = 0$ ja $x - y + 2z - 1 = 0$ vaheline see nurk, milles asetseb punkt $P \equiv (-1 | 1 | 1)$.

221. Missugused nurgad moodustab tasapind $Ax + By + Cz + D = 0$ koordinaattasapindadega?

222. Missugused nurgad moodustab tasapind $x + 2y - z + 1 = 0$ koordinaattasapindadega?

223. Leida tasapindade $x + 2y - z + 1 = 0$ ja $x - 2y - z - 1 = 0$ normaalide vaheline nurk.
224. Leida tetraeedri tahkude võrrandid, kui tetraeedri tipud on:
 $P_1 \equiv (1 | 1 | 1)$, $P_2 \equiv (-1 | 1 | 1)$, $P_3 \equiv (1 | -1 | 1)$ ja
 $P_4 \equiv (1 | 1 | -1)$.
225. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punktid
 $P_1 \equiv (2 | 0 | 0)$ ja $P_2 \equiv (0 | 2 | 0)$ ja asetseb 0-punktist
1 mõõduühiku kaugusel.
226. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind on rööbik tasapinnaga
 $20x - 4y - 5z + 7 = 0$ ja asetseb viimasest 6 mõõduühiku kaugusel.
227. Leida rööptasapindade $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ ja $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ kaugus teineteisest.
228. Leida rööptasapindade $3x + 2y - 6z - 35 = 0$ ja $3x + 2y - 6z - 56 = 0$ kaugus teineteisest.
229. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti
 $P \equiv (1 | 2 | 1)$ ja moodustab X - ja Y -teljega telglõigud 2 ja -3 .
230. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punktid
 $P_1 \equiv (8 | -3 | 1)$ ja $P_2 \equiv (4 | 7 | 2)$ ja on ristik tasapinnaga
 $3x + 5y - 7z - 21 = 0$.
231. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punktid
 $P_1 \equiv (5 | -4 | 3)$ ja $P_2 \equiv (-2 | 1 | 8)$ ja on ristik:
a) XY -tasapinnaga, b) YZ -tasapinnaga, c) XZ -tasapinnaga.
232. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib 0-punkti ja on ristik tasapindadega
 $x - y + z - 7 = 0$ ja $3x + 2y - 12z + 5 = 0$.
233. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti
 $P \equiv (1 | 1 | 1)$ ja on ristik tasapindadega $x + y + z - 1 = 0$ ja $2x - y - z + 1 = 0$.

234. Sirglõigu otsapunktid on $P_1 \equiv (7 | -4 | 4)$ ja $P_2 \equiv (1 | 3 | -2)$. Kujundada tasapind läbi punkti P_1 risti sirglõigule P_1P_2 .
235. Leida punkti $P \equiv (3 | -7 | 5)$ peegelduspunkt tasapinnast $2x - 6y + 3z - 42 = 0$.
236. Z-teljel leida punkt P , mis asetseks ühekaugusel tasapindadest $5x + z + 8 = 0$ ja $x + 4y - 3z - 2 = 0$.
237. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punktid $P_1 \equiv (2 | 0 | 0)$ ja $P_2 \equiv (0 | 2 | 0)$ ja moodustab tasapinnaga $x + y + z + 1 = 0$ nurga $\omega = 45^\circ$.
238. Leida tasapindade võrrandid, kui tasapinnad poolitavad kahetahused nurgad tasapindade $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ vahel, ja näidata, et nad on risti.
239. Leida tasapindade võrrandid, kui tasapinnad poolitavad kahetahuseid nurki, mille moodustavad tasapinnad $x - 2y + 2z + 21 = 0$ ja $7x + 24z - 50 = 0$.
240. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind poolitab kahetahuse nurga, mille tahud on $x - 2y + z - 1 = 0$ ja $x + 2y + z + 1 = 0$ ja milles asetseb punkt $P \equiv (-1 | 1 | 1)$.
241. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind asetseb ühekaugusel tasapindadest $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ ja $Ax + By + Cz + D_2 = 0$.
242. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind asetseb kahe rööptasapinna $x - 2y + z - 1 = 0$ ja $2x - 4y + 2z + 1 = 0$ vahel ja jaotab nende kauguse suhtes 1:3.
243. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib 0-punkti ning tasapindade $4x - y + 3z - 1 = 0$ ja $x + 5y - z + 2 = 0$ lõikjoone.

244. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (1 | 1 | 1)$ ning tasapindade $4x - y + 3z - 1 = 0$ ja $x + 5y - z + 2 = 0$ lõikjoone.
245. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind moodustab tasapindadega $x - 2y + z - 1 = 0$ ja $2x - y + z + 1 = 0$ ühise lõikjoone ja on rööbik: a) X -teljega, b) Y -teljega, c) Z -teljega.
246. Leida tasapindade lõikepunkt:
- a) $3x + 4y - 3z + 37 = 0$ b) $7x - 5y - 31 = 0$
 $6x - 7y + 2z - 95 = 0$ $4x - 11z + 43 = 0$
 $5x + 2y - 8z + 53 = 0$ $2x + 3y + 4z + 20 = 0$
- c) $x + y + z = 0$ d) $x - y + z - 1 = 0$
 $2x - 3y + 4z = 0$ $x + y - z - 2 = 0$
 $4x - 11y + 10z = 0$ $5x + y - z - 7 = 0$.
247. Leida tasapindade $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ lõikepunkt XY -tasapinnaga; XZ -tasapinnaga; YZ -tasapinnaga.
248. Kas tasapinnad lõikuvad ühes punktis või sirges joones:
- a) $2x + 3y + 5z - 1 = 0$, $x - 5y + 4z - 3 = 0$,
 $7x + y - 3z + 5 = 0$
- b) $5x + 2y - z - 11 = 0$, $4x - 7y + 3z - 2 = 0$,
 $13x - 4y - 5z - 9 = 0$?
249. Ühes sirges joones lõikuvate tasapindade võrrandist $x + 3y - 5 + \lambda(x - y - 2z + 4) = 0$ määrata selle tasapinna võrrand, mis moodustab võrdsed telglõigud X - ja Y -teljel.
250. Läbi tasapindade $x - z + 4 = 0$ ja $x + 5y + z = 0$ lõikjoone kujundada tasapind, mis moodustaks tasapinnaga $x - 4y - 8z + 12 = 0$ nurga 45° .

V p e a t ü k k .

Sirge ruumis.

§ 35. Sirge määramine ruumis.

Sirget ruumis võime vaadelda kui kahe tasapinna lõikejoont. Seega kaks lõikuvat tasapinda, mille võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

ja

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 ,$$

määravad sirge asendi ruumis.

Et aga läbi ühe sirge ruumis võib kujundada määramata palju tasapindu, siis ühe ja sama sirge määramiseks võib valida mistahes kaks tasapinda, mis läbivad selle sirge.

Kui sirge ei ole rööbik näiteks XY -tasapinnaga ega astese ka sellel tasapinnal, siis selle sirge läbib üks tasapind, mis on rööbik X -teljega, ning teine tasapind, mis on rööbik Y -teljega. Järelikult võime valida sirge määrajateks kaks tasapinda, millest üks on rööbik Y -teljega, s. o. tasapind

$$A_1x + C_1z + D_1 = 0 ,$$

ja teine on rööbik X -teljega, s. o. tasapind

$$B_2y + C_2z + D_2 = 0 ,$$

ehk ilmutatult

$$x = k_1z + b_1 \text{ ja } y = k_2z + b_2 ,$$

kus koefitsiendid A_1 ja B_2 ei ole võrdsed 0-ga, sest vastasel korral tasapinnad või üks tasapindadest oleks rööbik XY -tasapinnaga ja

sirge asetseks siis sellel tasapinnal ning oleks rööbik XY -tasapinnaga. Seega sirget võime vaadelda kui kahe niisuguse tasapinna lõikejoont, mis projektivad sirget XZ - ja YZ -tasapindadele. Võrrand $x = k_1z + b_1$ kujutab sirge projektsiooni XZ -tasapinnal ja võrrand $y = k_2z + b_2$ kujutab sirge projektsiooni YZ -tasapinnal. Siit järeldub, et sirge oleks antud, peavad olema antud tema projektsioonid XZ - ja YZ -tasapindadel võrranditega

$$x = k_1z + b_1 \text{ ja } y = k_2z + b_2,$$

kus konstantne suurus k_1 kujutab sirge projektsiooni sihitegurit XZ -tasapinnal, s. o. nurga tangensit, mille moodustab sirge projektsioon Z -teljega, ja konstantne suurus k_2 kujutab sirge projektsiooni sihitegurit YZ -tasapinnal, s. o. nurga tangensit, mille moodustab sirge projektsioon Z -teljega. Suurused k_1 ja k_2 määravad sirge projektsioonide sihi vastavalt XZ - ja YZ -tasapinnal; järelikult määravad nad ka sirge sihi ruumis ja seega on nad sirge sihitegurid.

Et leida konstantsete suuruste b_1 ja b_2 geomeetiline tähendus, selleks võtame $z = 0$; siis saame $x = b_1$ ja $y = b_2$, s. o. punkt $(b_1 | b_2 | 0)$, mis asetseb sirgel. See punkt asetseb XY -tasapinnal; b_1 ja b_2 on sirge jälje koordinaadid XY -tasapinnal.

Kui aga sirge on rööbik XY -tasapinnaga, siis üheks sirge määrajaks tasapinnaks võtame tasapinna, mis on rööbik XY -tasapinnaga, s. o. tasapinna

$$C_1z + D_1 = 0,$$

ja teiseks sirge määrajaks tasapinnaks võtame tasapinna, mis on rööbik Z -teljega, s. o. tasapinna

$$A_2x + B_2y + D_2 = 0,$$

ehk ilmutatult

$$z = c \text{ ja } x = ky + b.$$

Seega sirge asendi ruumis määravad võrrandid

$$x = k_1z + b_1 \text{ ja } y = k_2z + b_2,$$

kui sirge ei ole rööbik XY -tasapinnaga, või võrrandid

$$z = c \text{ ja } x = ky + b,$$

kui sirge on rööbik XY -tasapinnaga.

§ 36. Sirge kanooniline võrrand.

Oletame, et punkt $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ asetseb sirgel, s. o. tasapindade

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

ja

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

lõikejoonel, siis läbi selle punkti minevate tasapindade võrrandid omavad kuju

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0$$

ja

$$A_2(x - x_1) + B_2(y - y_1) + C_2(z - z_1) = 0.$$

Kõrvaldades neist võrranditest esiteks $(y - y_1)$ ja siis $(x - x_1)$, saame

$$(A_1B_2 - A_2B_1)(x - x_1) - (B_1C_2 - B_2C_1)(z - z_1) = 0$$

ja

$$(A_1B_2 - A_2B_1)(y - y_1) - (C_1A_2 - C_2A_1)(z - z_1) = 0,$$

millest

$$\frac{x - x_1}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_1}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z - z_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Tähistades

$$B_1C_2 - B_2C_1 = m, \quad C_1A_2 - C_2A_1 = n, \quad A_1B_2 - A_2B_1 = l,$$

saame

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l},$$

mis nimetatakse sirge kanooniliseks võrrandiks.

Sama resultaadi saame, kui punkt $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ asetseb sirgel, mille määravad võrrandid

$$x = k_1z + b_1 \quad \text{ja} \quad y = k_2z + b_2.$$

Kui punkt P_1 asetseb sirgel, siis selle punkti koordinaadid rahuldavad neid võrrandeid, s. o.

$$x_1 = k_1 z_1 + b_1 \text{ ja } y_1 = k_2 z_1 + b_2,$$

ning punkti P_1 läbivat sirget määravad võrrandid omavad kuju

$$\begin{aligned}x - x_1 &= k_1(z - z_1) \\ y - y_1 &= k_2(z - z_1).\end{aligned}$$

Kui tähistame

$$k_1 = \frac{m}{l} \text{ ja } k_2 = \frac{n}{l},$$

siis

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l}.$$

Kui sirge kanoonilises võrrandis võtame esimese ja teise suhte, s. o.

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n},$$

siis see võrrand kujutab tasapinda, mis projektib sirget XY -tasapinnale. Kui võtame esimese ja kolmanda suhte, s. o.

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{z - z_1}{l},$$

siis võrrand kujutab tasapinda, mis projektib sirget XZ -tasapinnale; ja kui võtame teise ja kolmanda suhte, s. o.

$$\frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l},$$

siis võrrand kujutab tasapinda, mis projektib sirget YZ -tasapinnale. Seega esimene võrre kujutab sirge projektsiooni XY -tasapinnal; teine võrre kujutab sirge projektsiooni XZ -tasapinnal, ja kolmas võrre kujutab sirge projektsiooni YZ -tasapinnal.

Kui tähistame tähega t sirge kanoonilise võrrandi võrdeteguri, s. o.

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l} = t,$$

siis saame võrrandite süsteemi

$$x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt, \quad z = z_1 + lt.$$

Need võrrandid väljendavad punktide koordinaate sirgel parameetri ehk abimuutuja t funktsioonidena ja nimetatakse seepärast sirge parameetristeks võrranditeks.

Kui näiteks sirge on antud võrranditega

$$\left. \begin{aligned} 5x - y - z + 1 &= 0 \\ x - y + z + 3 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

siis selle sirge kanoonilise võrrandi saame, kui ilmutame neist võrranditest ühe muutuja kord teise muutuja kaudu ja siis kolmanda muutuja kaudu, s. o.

$$x = \frac{y-2}{3} \text{ ja } x = \frac{z+1}{2},$$

kus nüüd sirge kanooniline võrrand on

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2},$$

või ilmutades y :

$$y = 3x + 2 \text{ ja } y = \frac{3z+7}{2},$$

siis sirge kanooniline võrrand esineb kujus

$$\frac{x + \frac{2}{3}}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z + \frac{7}{3}}{2},$$

või ilmutades z :

$$z = 2x - 1 \text{ ja } z = \frac{2y-7}{3},$$

saame sirge kanoonilise võrrandi

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{7}{2}}{3} = \frac{z}{2}.$$

Need kolm kanoonilist võrrandit kujutavad üht ja sama sirget, kusjuures esimeses võrrandis esinevad sirgel asetseva punkti koordinaadid $(0 | 2 | -1)$, teises võrrandis esinevad sirgel asetseva punkti koordinaadid $(-\frac{2}{3} | 0 | -\frac{7}{3})$ ja kolmandas võrrandis esinevad sirgel asetseva punkti koordinaadid $(\frac{1}{2} | \frac{7}{2} | 0)$.

Kui aga sirget määravad näiteks võrrandid

$$\left. \begin{aligned} x - 6y + 4z - 7 &= 0 \\ 3x + 3y - 2z + 7 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

siis nende võrrandite kanooniliseks kujuks teisendamisel x -i ilmutamisel y -i või z -i kaudu kaovad nii y kui ka z . Saame

$$x + 1 = 0.$$

Kõrvaldades x , leiame

$$3y - 2z + 4 = 0,$$

millest

$$\frac{y}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{või} \quad \frac{y + \frac{4}{3}}{2} = \frac{z}{3}.$$

Sel juhul sirge kanooniline võrrand esineb kujus

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$$

või

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y + \frac{4}{3}}{2} = \frac{z}{3}.$$

§ 37. Sirge suunakoosinused.

Kui sirge läbib punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$, siis ta kanooniline võrrand on

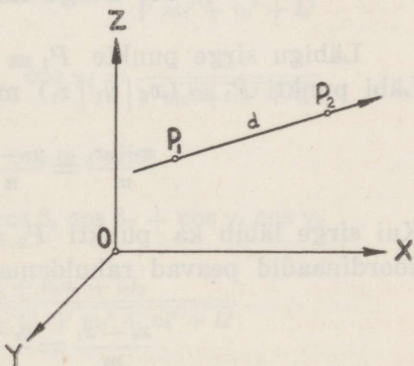
$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}.$$

Võtame sellel sirgel veel mingi teise punkti $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$ ja märgime sirge suuna punktist P_1 punkti P_2 (66. joon.). Punkti P_1 kaugus punktist P_2 olgu d ja sirge suunanurgad α , β ja γ . Sirglõigu P_1P_2 projektsioonid koordinaattelgedel on

$$x_2 - x_1 = d \cos \alpha$$

$$y_2 - y_1 = d \cos \beta$$

$$z_2 - z_1 = d \cos \gamma.$$



66. joonis.

Et punkt $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$ asetseb sirgel, siis kehtib võrdus

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{l}$$

ehk

$$\frac{\cos \alpha}{m} = \frac{\cos \beta}{n} = \frac{\cos \gamma}{l},$$

millest nähtub, et arvud m , n ja l on võrdelised sirge suunakoosinustega, ja seega on nad sirge sihiteguriteks.

Et

$$\frac{\cos \alpha}{m} = \frac{\cos \beta}{n} = \frac{\cos \gamma}{l} = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}},$$

siis sirge suunakoosinused on

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$

Kui, näiteks, $m = 0$, siis $\cos \alpha = 0$ ja sirge asetseb tasapinnal $x - x_1 = 0$, mis on rööbik YZ -tasapinnaga, ning moodustab X -teljega täisnurga.

Kui aga $m = n = 0$, siis $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ ja $\cos \gamma = \pm 1$, ning sirge asetseb tasapindadel $x - x_1 = 0$ ja $y - y_1 = 0$, mis on rööbikud vastavalt YZ - ja XZ -tasapindadega, s. o. sirge on rööbik Z -teljega.

§ 38. Sirge läbi kahe punkti.

Läbigu sirge punkte $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$.
Läbi punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ mineva sirge võrrand on

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l}.$$

Kui sirge läbib ka punkti $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$, siis selle punkti koordinaadid peavad rahuldama sirge võrrandit, s. o.

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{l}.$$

Paigutame sirge võrrandisse sihitegurite m , n ja l asemele neile vastavalt võrdelised suurused $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ ja $z_2 - z_1$, saame

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

mis on läbi kahe punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2 | z_2)$ mineva sirge võrrand.

Seega punkte $P_1 \equiv (-4 | 2 | 0)$ ja $P_2 \equiv (3 | -3 | 1)$ läbiva sirge võrrand on

$$\frac{x+4}{7} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{1}$$

või

$$\frac{x-3}{-7} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{-1}.$$

§ 39. Nurk kahe sirge vahel.

Olgu kahe sirge võrrandid

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{l_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{l_2}.$$

Kui α_1 , β_1 ja γ_1 on esimese sirge suunanurgad ning α_2 , β_2 ja γ_2 teise sirge suunanurgad, siis

$$\cos \alpha_1 = \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{n_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}}, \quad \cos \beta_2 = \frac{n_2}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{l_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{l_2}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}.$$

Kui nurk kahe sirge vahel on ω , siis

$$\cos \omega = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

ehk

$$\cos \omega = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}.$$

Kui $\omega = \frac{\pi}{2}$, siis $\cos \omega = 0$ ja

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0,$$

mis on kahe sirge ristseisu tingimus.

Kui aga $\omega = 0$ või π , siis

$$\cos \alpha_1 = \pm \cos \alpha_2$$

$$\cos \beta_1 = \pm \cos \beta_2$$

$$\cos \gamma_1 = \pm \cos \gamma_2,$$

mis on sama kui

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}} = \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

$$\frac{n_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}} = \frac{n_2}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

$$\frac{l_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}} = \frac{l_2}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}},$$

millest

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2}}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}$$

ehk

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2},$$

mis on kahe sirge rööpseisu tingimus.

§ 40. Nurk sirge ja tasapinna vahel.

Olgu sirge antud võrrandiga

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l}$$

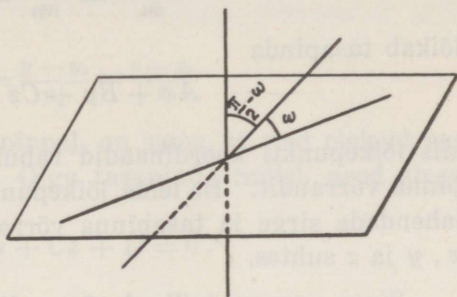
ja tasapind

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ning otsitav nurk olgu ω .

Nurk ω sirge ja tasapinna vahel on nurk sirge ja tema ristprojektsiooni vahel, kui sirge on projektitud samale tasapinnale. Nurk ω on ühtlasi antud sirge ja tasapinna normaali vahelise nurga täiendusnurk

kuni $\frac{\pi}{2}$ (67. joon.). Sellest järeldub, et leida sirge ja tasapinna vaheline nurk, võime leida tema täienduse nurga ($\frac{\pi}{2} - \omega$) antud sirge ja tasapinna normaali vahel. Kui normaali suunavahel on α , β ja γ ning antud sirge suunanurgad α_1 , β_1 ja γ_1 , siis



67. joonis.

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta_1 = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}$$

Et

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) = \sin \omega = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1,$$

siis

$$\sin \omega = \frac{Am + Bn + Cl}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$

Kui sirge on rööbik tasapinnaga, siis $\omega = 0$ või π ja $\sin \omega = 0$ ning

$$Am + Bn + Cl = 0,$$

mis on ühtlasi sirge ja tasapinna normaali ristseisu tingimus.

Kui sirge on ristik tasapinnaga, siis on ta rööbik tasapinna normaaliga ning

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l}.$$

§ 41. Sirge lõikumine tasapinnaga.

Kui sirge

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l}$$

lõikab tasapinda

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

siis lõikepunkti koordinaadid rahuldavad nii sirge kui ka tasapinna võrrandit. Et leida lõikepunkti koordinaadid, selleks tuleb lahendada sirge ja tasapinna võrrandid jooksvate koordinaatide x , y ja z suhtes.

Sirge parameetrilised võrrandid on

$$x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt, \quad z = z_1 + lt;$$

neid x , y ja z väärtusi tasapinna võrrandisse asetades saame

$$A(x_1 + mt) + B(y_1 + nt) + C(z_1 + lt) + D = 0$$

ehk

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + t(Am + Bn + Cl) = 0,$$

millest

$$t = - \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cl}.$$

Asetades t väärtuse sirge parameetrilistesse võrranditesse

$$x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt, \quad z = z_1 + lt,$$

leiame sirge ja tasapinna lõikepunkti koordinaadid x , y ja z , kui $Am + Bn + Cl \neq 0$.

Kui $Am + Bn + Cl = 0$ ja $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$, siis $t = \infty$ ja sirge on rööbik tasapinnaga.

Kui aga $Am + Bn + Cl = 0$ ja $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, siis $t = \frac{0}{0}$ on määramatu ja iga t vabalt võetud väärtus rahuldab võrdust

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + t(Am + Bn + Cl) = 0,$$

s. o. sirge iga punkt on ka tasapinna punkt. Sel juhul sirge asetseb tasapinnal.

§ 42. Kaks sirget tasapinnal.

Kui kaks sirget

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1}$$

ja

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{l_2}$$

asetsevad ühel ja samal tasapinnal, on sama, et nad oleksid ruumis rööbikud või lõikuksid. Olgu tasapind, millel need sirged asetsevad,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Tingimus, et esimene sirge asetseks tasapinnal, on

$$Am_1 + Bn_1 + Cl_1 = 0 \text{ ja } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

ja tingimus, et teine sirge asetseks samal tasapinnal, on

$$Am_2 + Bn_2 + Cl_2 = 0 \text{ ja } Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$$

Siin saime neli võrrandit nelja tundmatuga A , B , C ja D . Kaotame lahutamise teel teisest ja neljandast võrrandist D , saame

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2) = 0.$$

Jagame esimese ja kolmanda võrrandi C -ga, saame võrrandsüsteemi

$$\frac{A}{C} \cdot m_1 + \frac{B}{C} \cdot n_1 + l_1 = 0$$

$$\frac{A}{C} \cdot m_2 + \frac{B}{C} \cdot n_2 + l_2 = 0$$

tundmatutega $\frac{A}{C}$ ja $\frac{B}{C}$. Võrrandsüsteemi lahendades saame

$$\frac{A}{C} = \frac{\begin{vmatrix} -l_1 & n_1 \\ -l_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{n_1 l_2 - n_2 l_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & -l_1 \\ m_2 & -l_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}.$$

Paigutame need väärtused võrrandisse

$$\frac{A}{C} (x_1 - x_2) + \frac{B}{C} (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) = 0$$

$\frac{A}{C}$ ja $\frac{B}{C}$ asemele, saame

$$-\left| \begin{array}{cc} l_1, & n_1 \\ l_2, & n_2 \end{array} \right| (x_1 - x_2) - \left| \begin{array}{cc} m_1, & l_1 \\ m_2, & l_2 \end{array} \right| (y_1 - y_2) + \left| \begin{array}{cc} m_1, & n_1 \\ m_2, & n_2 \end{array} \right| (z_1 - z_2) = 0$$

ehk

$$\left| \begin{array}{ccc} x_1 - x_2, & m_1, & m_2 \\ y_1 - y_2, & n_1, & n_2 \\ z_1 - z_2, & l_1, & l_2 \end{array} \right| = 0,$$

mis on tingimus, et kaks sirget

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1} \quad \text{ja} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{l_2}$$

asetseksid ühel ja samal tasapinnal.

Kui sirged on antud võrranditega

$$\left. \begin{array}{l} x = k_1 z + b_1 \\ y = k_2 z + b_2 \end{array} \right\} \quad \text{ja} \quad \left. \begin{array}{l} x = k_1' z + b_1' \\ y = k_2' z + b_2' \end{array} \right\},$$

siis $l_1 = l_2 = 1$, $z_1 = z_2 = 0$, $m_1 = k_1$, $n_1 = k_2$, $m_2 = k_1'$, $n_2 = k_2'$, $x_1 = b_1$, $y_1 = b_2$, $x_2 = b_1'$ ja $y_2 = b_2'$ ning tingimus, et sirged asetseksid ühel ja samal tasapinnal, omab kuju

$$\left| \begin{array}{ccc} b_1 - b_1', & k_1, & k_1' \\ b_2 - b_2', & k_2, & k_2' \\ 0, & 1, & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} b_1 - b_1', & k_1 - k_1' \\ b_2 - b_2', & k_2 - k_2' \end{array} \right| = 0$$

ehk

$$\frac{k_1 - k_1'}{k_2 - k_2'} = \frac{b_1 - b_1'}{b_2 - b_2'}.$$

Et leida kahe sirge

$$\left. \begin{array}{l} 1) A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ 2) A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array} \right\}$$

ja

$$\left. \begin{array}{l} 3) A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ 4) A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{array} \right\}$$

lõikepunkt, on sama, kui leiame tasapindade (1), (2) ja (3) lõikepunkti ja kontrollime, kas selle leitud punkti koordinaadid rahuldavad tasapinna võrrandit (4).

§ 43. Punkti kaugus sirgest.

Olgu antud sirge

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l},$$

kus $(x_1 | y_1 | z_1)$ on sirgel asetseva mingi punkti P_1 koordinaadid. Asetsegu punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ väljaspool sirget. Märgime koordinaadistikus sirge, sellel punkti P_1 ja väljaspool seda sirget punkti P_0 (68. joon.), kus siis sirglõik $P_0M = d$ kujutab punkti P_0 kaugust d antud sirgest. Täisnurksest kolmnurgast P_1P_0M saame

$$P_0M^2 = P_1P_0^2 - P_1M^2.$$

Sirglõigu P_1P_0 pikkus tema otsapunktide P_1 ja P_0 koordinaatide kaudu on

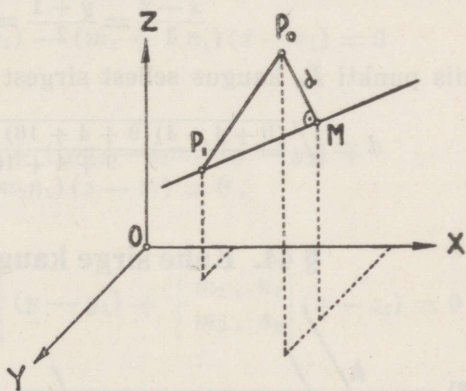
$$P_1P_0 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

ja sirglõik P_1M on sirglõigu P_1P_0 projektsioon antud sirgel, s. o.

$$P_1M = (x_0 - x_1) \cos \alpha + (y_0 - y_1) \cos \beta + (z_0 - z_1) \cos \gamma,$$

kus $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ on sirge suunakoosinused, kusjuures

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$



68. joonis.

Seega

$$P_1M = \frac{(x_0 - x_1)m + (y_0 - y_1)n + (z_0 - z_1)l}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}$$

ja

$$\begin{aligned} P_0M^2 &= (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - \\ &\quad - \frac{[(x_0 - x_1)m + (y_0 - y_1)n + (z_0 - z_1)l]^2}{m^2 + n^2 + l^2} = \\ &= \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)(m^2 + n^2 + l^2) - (Xm + Yn + Zl)^2}{m^2 + n^2 + l^2} \end{aligned}$$

ning punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ kaugus antud sirgest

$$d = \sqrt{\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)(m^2 + n^2 + l^2) - (Xm + Yn + Zl)^2}{m^2 + n^2 + l^2}},$$

kus

$$X = x_0 - x_1, \quad Y = y_0 - y_1, \quad Z = z_0 - z_1.$$

Kui on antud näiteks punkt $P_0 \equiv (2 | 1 | 3)$ ja sirge võrrandi

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4},$$

siis punkti P_0 kaugus sellest sirgest on

$$d = \sqrt{\frac{(0+4+4)(9+4+16) - (0+4+8)^2}{9+4+16}} \approx 1,74.$$

§ 44. Kahe sirge kaugus teineteisest.

Olgu antud sirged

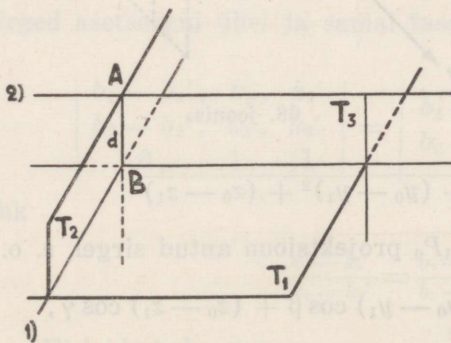
$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{l_1} \quad (1)$$

ja

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{l_2}. \quad (2)$$

Nende sirgete ühise ristlõigu pikkus on ühtlasi nende kaugus teineteisest. Selleks, et leida mõlema sirge ühine

ristjoon, kujundame läbi ühe sirge, näiteks läbi esimese sirge, tasapinna T_1 (69. joon.), mis oleks rööbik teise sirgega.



69. joonis.

Esimene sirge on tasapindade

$$l_1(x - x_1) - m_1(z - z_1) = 0$$

ja

$$l_1(y - y_1) - n_1(z - z_1) = 0$$

lõikjoon. Kõigi tasapindade võrrand läbi selle sirge on

$$l_1(x - x_1) - m_1(z - z_1) + \lambda[l_1(y - y_1) - n_1(z - z_1)] = 0$$

ehk

$$l_1(x - x_1) + \lambda l_1(y - y_1) - (m_1 + \lambda n_1)(z - z_1) = 0.$$

Et otsitav tasapind oleks rööbik teise sirgega, selleks peab olema

$$l_1 m_2 + \lambda l_1 n_2 - (m_1 + \lambda n_1) l_2 = 0,$$

millest

$$\lambda = \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{n_1 l_2 - n_2 l_1}.$$

Paigutades λ väärtuse võrrandisse

$$l_1(x - x_1) + \lambda l_1(y - y_1) - (m_1 + \lambda n_1)(z - z_1) = 0$$

λ asemele, saame

$$(n_1 l_2 - n_2 l_1)(x - x_1) + (l_1 m_2 - l_2 m_1)(y - y_1) + (m_1 n_2 - m_2 n_1)(z - z_1) = 0,$$

mis on sama kui

$$\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} (x - x_1) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0$$

ehk

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & m_1 & m_2 \\ y - y_1 & n_1 & n_2 \\ z - z_1 & l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 0,$$

mis on tasapinna T_1 võrrand, kui tasapind on rööbik teise sirgega.

Läbi esimese sirge kujundame veel tasapinna T_2 ja läbi teise sirge tasapinna T_3 , mis oleksid ristikud tasapinnaga T_1 . Sirglõik AB on tasapindade T_2 ja T_3 lõikjoon ja on ristik tasapinnaga T_1 ning seega ristik esimese sirgega, mis asetseb tasapinnal T_1 , ja ka teise sirgega, mis on rööbik tasapinnaga T_1 . See ühine ristlõik on sirgete kaugus teineteisest.

Punkt $(x_2 | y_2 | z_2)$ asetseb teisel sirgel ja selle kaugus leitud tasapinnast on

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & m_1, & m_2 \\ y_2 - y_1, & n_1, & n_2 \\ z_2 - z_1, & l_1, & l_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1, & l_1 \\ n_2, & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1, & m_1 \\ l_2, & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1, & n_1 \\ m_2, & n_2 \end{vmatrix}^2}},$$

mis on ühtlasi kahe sirge kaugus teineteisest.

Kui sirged on antud näiteks võrranditega

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

ja

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4},$$

siis nende sirgete kaugus teineteisest on

$$d = \frac{\begin{vmatrix} -6, & 3, & 2 \\ -5, & 1, & 3 \\ -3, & 2, & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 3 \end{vmatrix}^2}} =$$

$$= \frac{(-6) \cdot (-2) - 3 \cdot 29 + 2 \cdot 13}{\sqrt{4 + 64 + 49}} = \frac{-49}{\sqrt{117}} \approx 4,53.$$

§ 45. Harjutusülesanded.

251. Kas punktid $P_1 \equiv (1 | 2 | -1)$, $P_2 \equiv (0 | 0 | 0)$, $P_3 \equiv (0 | -1 | -1)$ ja $P_4 \equiv (1 | 0 | -2)$ asetsevad sirgel

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 5x + 2y - z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} ?$$

252. Muuta sirge võrrand

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y - 3z - 9 &= 0 \\ x - 2y + z + 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

kanooniliseks võrrandiks.

253. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (a | b | c)$ ja on rööbik sirgega

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}.$$

254. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (2 \mid -3 \mid -8)$ ja on rööbik sirgega

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{5}.$$

255. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (2 \mid -3 \mid -8)$ ja on rööbik Z -teljega.

256. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (2 \mid -5 \mid 3)$ ja on rööbik sirgega

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 3z - 1 &= 0 \\ 5x + 4y - z - 7 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

257. Leida sirgete geomeetriline koht, kui sirged läbivad punkti $P \equiv (a \mid b \mid c)$ ja on ristikud sirgega

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}.$$

258. Leida sirgete geomeetriline koht, kui sirged läbivad punkti $P \equiv (a \mid b \mid c)$ ja on ristikud sirgega

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{l}.$$

259. Leida sirgete geomeetriline koht, kui sirged läbivad 0-punkti ja on ristikud sirgega $x = y = z$.

260. Leida sirge

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z-1}{3}$$

suunakoosinused.

261. Leida sirge

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z - 2 &= 0 \\ x + y - 3z - 7 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

suunakoosinused.

262. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punktid $P_1 \equiv (3 \mid -2 \mid -1)$ ja $P_2 \equiv (5 \mid 4 \mid 5)$.

263. Leida tetraeedri servade võrrandid, kui tetraeedri tipud on $P_1 \equiv (0 \mid 0 \mid -2)$, $P_2 \equiv (4 \mid 0 \mid 5)$, $P_3 \equiv (5 \mid 3 \mid 0)$ ja $P_4 \equiv (-1 \mid 4 \mid -2)$.

✓ 264. Missuguse D väärtuse puhul sirge

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$$

lõikab Z -telge?

✓ 265. Missuguste B ja D väärtuste puhul sirge

$$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$$

asetseb XY -tasapinnal?

✓ 266. Leida sirge

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \\ 6x - y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

projektsioonide võrrandid koordinaattasapindadel.

✓ 267. Kas sirged

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3} \text{ ja } \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$$

asetsevad tasapinnal $4x + 3y - z + 3 = 0$?

✓ 268. Kas sirged

$$\begin{cases} x = 5z - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4z + 1 \\ y = 18z + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5z \\ y = -z \end{cases}$$

asetsevad tasapinnal $7x - 2y + 8z - 3 = 0$?

✓ 269. Kas sirged

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{0} \text{ ja } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{1}$$

asetsevad ühel ja samal tasapinnal?

✓ 270. Kas sirged

$$\begin{cases} x = 5z - 2 \\ y = -z + 3 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x = 4z + 7 \\ y = 2z - 24 \end{cases}$$

asetsevad ühel ja samal tasapinnal?

271. Kas sirged

$$\left. \begin{array}{l} 4x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{array} \right\} \text{ ja } \left. \begin{array}{l} 2x + y + z - 3 = 0 \\ 7x - 2y - 8z + 6 = 0 \end{array} \right\}$$

lõikuvad või on kiivad?

✓ 272. Leida punkti $P \equiv (4 | -3 | 1)$ projektsioon tasapinnal $x + 2y - z - 3 = 0$.

273. Leida sirgete

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$$

vaheline nurk.

274. Leida sirgete

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y - 7z + 8 = 0 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ ja } \left. \begin{array}{l} 4x + y + 3z - 21 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0 \end{array} \right\}$$

vaheline nurk.

275. Leida nurgad, mis sirged

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ ja } \left. \begin{array}{l} x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

moodustavad koordinaattelgedega.

✓ 276. Leida tetraeedri vastasservade vahelised nurgad, kui tetraeedri tipud on $P_1 \equiv (3 | -1 | 0)$, $P_2 \equiv (0 | -7 | 3)$, $P_3 \equiv (-2 | 1 | -1)$ ja $P_4 \equiv (3 | 2 | 6)$.

277. Kas võrrandid

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 7y + 2z - 1 = 0 \\ 7x + 3y - 4z + 6 = 0 \end{array} \right\} \text{ ja } \left. \begin{array}{l} 3x + y - 5z - 1 = 0 \\ 4x + 2y + z + 7 = 0 \end{array} \right\}$$

kujutavad üht ja sama sirget?

278. Sirge on antud võrranditega

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 5z - 3 = 0 \\ 3x + y - 2z - 1 = 0 \end{array} \right\};$$

kujutada sama sirge mingisuguste teiste võrranditega.

279. Näidata, et kahe sirge

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{l_1} \quad \text{ja} \quad \frac{x-x_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{n_2} = \frac{z-z_1}{l_2}$$

nurgapoolitajate võrrandid on

$$\frac{x-x_1}{m_1+m_2} = \frac{y-y_1}{n_1+n_2} = \frac{z-z_1}{l_1+l_2} \quad \text{ja} \quad \frac{x-x_1}{m_1-m_2} = \frac{y-y_1}{n_1-n_2} = \frac{z-z_1}{l_1-l_2}.$$

280. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (a | b | c)$ ja on ristik tasapinnaga $Ax + By + Cz + D = 0$.

281. Leida sirgete geomeetiline koht, kui sirged läbivad punkti $P \equiv (a | b | c)$ ja on rööbikud tasapinnaga $Ax + By + Cz + D = 0$.

282. Leida punktist $P \equiv (1 | 2 | 3)$ tasapindadele

$$a) 4x - 5y - 8z + 21 = 0, \quad b) 3x + 11y = 0, \quad c) z = 8$$

lastud ristjoonte võrrandid.

283. Leida sirget

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 4z - 12 &= 0 \\ x + 4y - 2z - 10 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

koordinaattasapindadele projektivate tasapindade võrrandid.

284. Leida sirge

$$\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

projektsioon tasapinnal $x - y + 3z + 8 = 0$.

285. Leida sirge

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + 4z + 5 &= 0 \\ x - 6y + 3z - 7 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

projektsioon tasapinnal $2x + 2y + z - 15 = 0$.

286. Leida l väärtus, kui sirge

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-2}{l}$$

on rööbik tasapinnaga $3x + 4y + 7z - 33 = 0$.

287. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (a | b | c)$, lõikab sirget

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}$$

ja on rööbik tasapinnaga $Ax + By + Cz + D = 0$.

288. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (-1 | 0 | 4)$, lõikab sirget

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$$

ja on rööbik tasapinnaga $3x - 4y + z - 10 = 0$.

289. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib 0-punkti ja lõikab sirget

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

ning on temaga ristik.

290. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (2 | 3 | 1)$ ja lõikab sirget

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

ning moodustab temaga täisnurga.

291. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (1 | 1 | 1)$ ja lõikab sirget

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z + 1 &= 0 \\ 2x - y + z - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ning on temaga ristik.

292. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid, kui kolmnurga tipud on $P_1 \equiv (2 | 0 | 0)$, $P_2 \equiv (4 | 1 | -2)$ ja $P_3 \equiv (-2 | 3 | -5)$.

293. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (1 | 1 | 1)$ ja lõikab sirgeid

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

294. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (-3 | 5 | -9)$ ja lõikab sirgeid

$$\left. \begin{aligned} y &= 3x + 5 \\ z &= 2x - 3 \end{aligned} \right\} \quad \text{ja} \quad \left. \begin{aligned} y &= 4x - 7 \\ z &= 5x + 10 \end{aligned} \right\}$$

295. Leida sirgeid

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{ja} \quad \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

lõikava ristjoone võrrand.

296. Leida sirgeid

$$\left. \begin{array}{l} x = 3z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{array} \right\} \text{ ja } \left. \begin{array}{l} y = 2x - 5 \\ z = 7x + 2 \end{array} \right\}$$

lõikava ristjoone võrrand.

297. Leida sirge võrrand, kui sirge on ristik sirgetega

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right\} \text{ ja } \left. \begin{array}{l} z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array} \right\}.$$

298. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (0 | -1 | 1)$ ja moodustab sirgega

$$\left. \begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \end{array} \right\}$$

täisnurga ning lõikab sirget

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{array} \right\}.$$

299. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (1 | 1 | 1)$ ja lõikab sirget

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

ning on ristik sirgega

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}.$$

300. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $P \equiv (1 | 2 | 3)$ ja lõikab Z -telge ning on ristik sirgega $x = y = z$.

301. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (a | b | c)$ ja on ristik sirgega

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}.$$

302. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (3 \mid -2 \mid -1)$ ja on ristik sirgega

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

303. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib 0-punkti ja on ristik sirgega

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{2}.$$

304. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib 0-punkti ja ristjoone punktist $P \equiv (1 \mid 1 \mid 0)$ sirgele

$$\begin{aligned} x &= z + 3 \\ y &= 2z + 3 \end{aligned}$$

305. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (a \mid b \mid c)$ ja sirge

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}.$$

306. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (2 \mid -3 \mid 1)$ ja sirge

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}.$$

307. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (2 \mid 0 \mid 1)$ ja sirge

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

308. Leida tasapinna võrrand, kui tasapinna määravad punkt $P \equiv (3 \mid 1 \mid -2)$ ja sirge

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}.$$

309. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (-2 \mid -1 \mid 1)$ ja sirge

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z + 5 &= 0 \\ 2x + y - z - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

310. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (-1 | -2 | 3)$ ja on rööbik sirgetega

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}.$$

311. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{l_1}$$

ja on rööbik sirgega

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{l_2}.$$

312. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

ja on rööbik sirgega

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

313. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ja on rööbik sirgega

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{l}.$$

314. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\left. \begin{aligned} x - 2y + z - 1 &= 0 \\ 2x - y - z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ja on rööbik sirgega

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y - 1 &= 0 \\ x - y + z - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

315. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ja on rööbik sirgega $x = y = z$.

316. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$$

ja on ristik tasapinnaga $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

317. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{n} = \frac{z+1}{0}$$

ja on ristik tasapinnaga $x - 2y - z - 1 = 0$.

318. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib sirge

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$$

ja on rööbik tasapinnaga $x + y - z + 15 = 0$.

319. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib punkti $P \equiv (2 | 5 | -3)$ ja on ristik tasapinnaga $5x - 2y + 3z - 8 = 0$ ning rööbik sirgega, mis läbib punkte $P_1 \equiv (1 | 4 | -3)$ ja $P_2 \equiv (2 | -6 | 7)$.

320. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib kaks rööbikut sirget

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l} \quad \text{ja} \quad \frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{l}.$$

321. Leida tasapinna võrrand, kui tasapinna määravad kaks rööbikut sirget

$$\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5} \quad \text{ja} \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}.$$

322. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib rööbikud sirged

$$\left. \begin{aligned} 3x + y - z + 2 &= 0 \\ 2x + y - 2z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{ja} \quad \left. \begin{aligned} 3x + y - z - 3 &= 0 \\ 2x + y - 2z - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

323. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib rööbikud sirged

$$\left. \begin{aligned} x &= 3z - 1 \\ y &= -7z + 4 \end{aligned} \right\} \quad \text{ja} \quad \left. \begin{aligned} x &= 3z + 8 \\ y &= -7z - 11 \end{aligned} \right\}.$$

324. Leida tasapinna võrrand, kui tasapinna määravad kaks lõikuvat sirget

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \text{ ja } \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}.$$

325. Leida tasapinna võrrand, kui tasapind läbib ristjoone punktist $P \equiv (1 | 1 | 1)$ sirgele

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

ja on ristik tasapinnaga $z = 0$.

326. Leida sirge

$$\frac{x+11}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+5}{1}$$

ja koordinaattasapindade vahelised nurgad.

327. Leida sirge

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

ja tasapinna $x + y + z - 1 = 0$ vaheline nurk.

328. Leida sirge

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 24 \\ 3x - z = -4 \end{array} \right\}$$

ja tasapinna $6x + 15y - 10z + 31 = 0$ vaheline nurk.

329. Missuguse A väärtuse puhul tasapind $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ on rööbik sirgega

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}?$$

330. Missuguste A ja B väärtuste puhul tasapind $Ax + By + 6z - 7 = 0$ on ristik sirgega

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}?$$

331. Leida sirge

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

ja tasapinna $2x + 3y + 3z - 8 = 0$ lõikepunkt.

332. Leida sirge

$$\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$$

ja tasapinna $x + 2y - 4z + 1 = 0$ lõikepunkt.

333. Leida sirge

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$$

ja tasapinna $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ lõikepunkt.

334. Leida sirge

$$\left. \begin{aligned} y &= -2x + 9 \\ z &= 9x - 43 \end{aligned} \right\}$$

ja tasapinna $3x - 4y + 7z - 33 = 0$ lõikepunkt.

335. Leida tasapinnal $x + y + z - 1 = 0$ sirge, mis lõikab sirget

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 \\ z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ja moodustab temaga täisnurga.

336. Leida tasapinnal $x + y + z + 1 = 0$ asetsevate sirgete võrrand, kui sirged on risti samal tasapinnal asetseva sirgega

$$\left. \begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y - z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

337. Leida sirge võrrand, kui sirge asetseb tasapinnal $x + y + z - 1 = 0$ ja lõikab sirgeid

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} x &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

338. Tasapind läbib punkti $P \equiv (1 | 1 | 1)$ ja on ristik sirgega

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Leida YZ-tasapinnal sirge, mis oleks rööbik tähendatud tasapinnaga.

339. Tasapind läbib sirge

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right\}$$

ja on rööbik sirgega

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ x = y \end{array} \right\}.$$

Leida punktist $P \equiv (1 | 1 | 1)$ sellele tasapinnale lastud ristjoone võrrand.

340. Tasapind läbib sirge

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ x = y \end{array} \right\}$$

ja on ristik tasapinnaga $2x - y + z - 1 = 0$.

Leida punktist $P \equiv (1 | 1 | 1)$ otsitavale tasapinnale lastud ristjoone võrrand.

341. Leida punkti $P \equiv (7 | 9 | 7)$ kaugus sirgest

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

342. Leida punktist $P \equiv (0 | -1 | 1)$ sirgele

$$\left. \begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \end{array} \right\}$$

tõmmatud ristlõigu pikkus ja võrrand.

343. Leida punkti $P \equiv (4 | 3 | 10)$ peegelduspunkt sirgest

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

344. Leida punktile $P \equiv (3 | 2 | 6)$ lähim punkt sirgel

$$\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

345. Sirgel

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{array} \right\}$$

leida punkt, mis asetseb ühekaugusel punktidest

$P_1 \equiv (-5 | -13 | -2)$ ja $P_2 \equiv (3 | 11 | 4)$.

346. Näidata, et kahe kiiva sirge

$$\left. \begin{aligned} x &= k_1 z + b_1 \\ y &= k_2 z + b_2 \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} x &= k_1' z + b_1' \\ y &= k_2' z + b_2' \end{aligned} \right\}$$

kaugus teineteisest on

$$d = \frac{|(b_1 - b_1')(k_2 - k_2') - (b_2 - b_2')(k_1 - k_1')|}{\sqrt{(k_1 - k_1')^2 + (k_2 - k_2')^2 + (k_1 k_2' - k_1' k_2)}}.$$

347. Leida sirgete

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$$

kaugus teineteisest.

348. Leida sirgete

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{ja} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+1}{1}$$

kaugus teineteisest.

349. Leida sirgete

$$\left. \begin{aligned} x + y - z - 1 &= 0 \\ 2x + y - z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} x + 2y - z - 2 &= 0 \\ x + y + 2z - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

kaugus teineteisest.

350. Leida risttahuka diagonaali kaugus temaga kiivatest servadest, kui risttahuka mõõtmed on 1, 2 ja 3.

VI peatükk.

Ringjoon.

§ 46. Ringjoone võrrand.

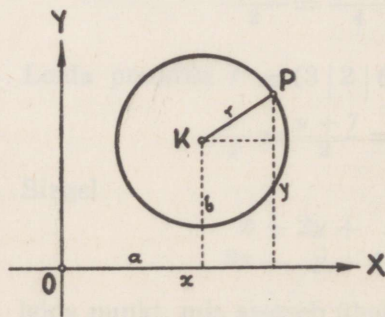
Joon, mille kõikide punktide koordinaadid tasapinnal rahuldavad üht ja sama tingimust, nimetatakse seda tingimust täitvate punktide geomeetriliseks kohaks. Et see tingimus väljenduks joonel asetseva punkti jooksvate koordinaatide x ja y kaudu, selleks peavad jooksvad koordinaadid isekeskis olema funktsionaalses seoses ja moodustama joone ehk geomeetrilise koha võrrandi, mis kehtib ainult siis, kui x ja y väljendavad ainult joonel asetseva mistahes punkti koordinaate.

Seega ringjoont võime vaadelda kui tasapinnal asetsevate sääraste punktide geomeetrilist kohta, mille iga punkti kaugus ühest kindlast punktist (keskpunktist) on konstantne suurus. Sellest järgneb, et ringjoon on määratud oma keskpunktiga ja raadiusega.

Olgu ringi keskpunkt $K \equiv (a | b)$ ja raadius r (70. joon.), mille loeme alati positiivseks.

Võtame ringjoonel vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$. Siis selle punkti kaugus keskpunktist K on koordinaatidega x ja y järgmises seoses

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



70. joonis.

See x -i ja y -i seos on kehtiv punkti P kohta. Et aga P on mistahes punkt ringjoonel, siis

see seos väljendab koordinaatide x ja y vastavust ringjoone iga punkti jaoks, ning saadud seos on seega ringjoone võrrand, kui keskpunktiks on $K \equiv (a | b)$ ja raadiuseks r .

Ringjoone võrrandit rahuldavad ainult ringjoonel asetsevate punktide koordinaadid, ja ümberpöörduvalt: kui mingi punkti koordinaadid rahuldavad ringjoone võrrandit, siis asetseb see punkt ringjoonel. Asetseb aga punkt, mille koordinaadid on x ja y , ringi sees, siis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2,$$

ja kui punkt koordinaatidega $(x | y)$ asetseb ringist väljas, siis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2.$$

Kui ringi keskpunkt asetseb X -teljel, siis $b = 0$ ja ringjoone võrrand on

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Kui punkt $P \equiv (x | y)$ asetseb ringjoonel $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, siis asetseb samal ringjoonel ka punkt $P' \equiv (x | -y)$, sest viimase punkti koordinaadid rahuldavad samuti seda ringjoone võrrandit. Ringjoon $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ on seega sümmeetriline X -telje suhtes, s. t. kui punkt P asetseb ringjoonel $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, siis asetseb samal ringjoonel ka punkt P' , mis on punkti P peegelduspunkt X -teljest. X -telg on seega ringjoone $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ sümmeetriatelg.

Kui ringi keskpunkt asetseb Y -teljel, siis $a = 0$ ja ringjoone võrrand on

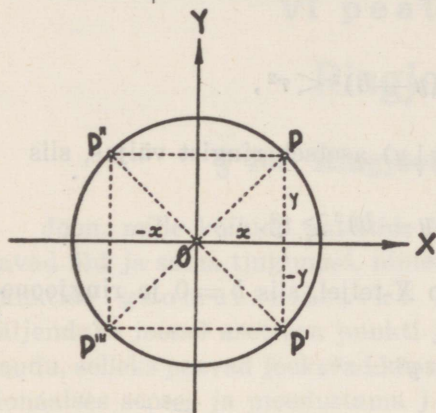
$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Kui punkt $P \equiv (x | y)$ asetseb ringjoonel $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, siis asetseb samal ringjoonel ka punkt $P'' \equiv (-x | y)$, sest viimase punkti koordinaadid rahuldavad samuti seda ringjoone võrrandit. Ringjoon $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ on seega sümmeetriline Y -telje suhtes, s. t. kui punkt P asetseb ringjoonel $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, siis asetseb samal ringjoonel ka punkt P'' , mis on punkti P peegelduspunkt Y -teljest. Y -telg on seega ringjoone $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ sümmeetriatelg.

Kui ringi keskpunkt asetseb 0-punktis (71. joon.), siis $a = b = 0$ ja ringjoone võrrand on

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kui punkt $P \equiv (x | y)$ asetseb ringjoonel $x^2 + y^2 = r^2$, siis asetsevad samal ringjoonel ka punktid $P' \equiv (x | -y)$ ja $P'' \equiv (-x | y)$, sest viimaste punktide koordinaadid rahuldavad samuti seda ringjoone võrrandit. Mõlemad koordinaatteljed on seega ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ sümmeetriateljed. Kui koordinaatteljed on ringjoone sümmeetriateljed, siis on ringjoon ka sümmeetriline 0-punkti suhtes, s. t. kui punkt $P \equiv (x | y)$ asetseb ringjoonel, siis asetseb samal ringjoonel ka punkt



71. joonis.

$P''' \equiv (-x | -y)$, mis on punktiga P sümmeetriline 0-punkti ehk ringi keskpunkti suhtes, sest punkti P''' koordinaadid rahuldavad samuti ringjoone võrrandit $x^2 + y^2 = r^2$.

Ringjoone võrrandi $x^2 + y^2 = r^2$ ilmutatud kujust

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ või } x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

näeme, et jooksev abstsiss x kui ka jooksev ordinaat y ei või omada reaalselt väärtust, mille absoluutne väärtus oleks suurem kui r . Jooksvate koordinaatide x ja y reaalsed väärtused peituvad seega vahemikus $-r$ -st $+r$ -ni.

Ringjoone võrrand on jooksvate koordinaatide x ja y suhtes teise astme võrrand, seepärast nimetatakse ringjoont teise järgu algebraliseks jooneks ehk teise järgu kõveraks.

Võrrand

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

on ringjoone võrrandi kinnine üldkuju. Sulgusid avades saame

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

ehk üldiselt

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

mis on ringjoone võrrandi lahtine üldkuju, milles ringi keskpunkti koordinaadid

$$a = -\frac{D}{2A} \text{ ja } b = -\frac{E}{2A}$$

ning raadiuse ruut

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Üldine teise astme võrrand kahe muutujaga x ja y on

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Võrreldes seda ringjoone võrrandi lahtise üldkujuga, näeme, et teise astme võrrand kujutab ringjoont ainult siis, kui muutujate x^2 ja y^2 kordajad on võrdsed ja puudub liige, mis sisaldab muutujate korrutise xy , ning peale selle $D^2 + E^2 > 4AF$.

Kui $D^2 + E^2 < 4AF$, siis on raadiuse väärtus imaginaarne ja võrrand ei kujuta sel juhul mingisugust reaalist geomeetrilist kohta.

Kui $D^2 + E^2 = 4AF$, siis ringi raadius $r = 0$ ja ainult üheainsa punkti koordinaadid

$$x = a = -\frac{D}{2A} \text{ ja } y = b = -\frac{E}{2A}$$

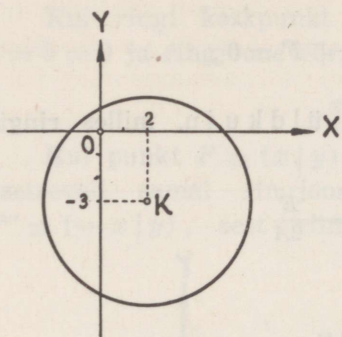
rahuldavad võrrandit. Sel juhul ringjoon koondub punktiks.

Et kujutada näiteks võrrandi

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

järgi koordinaadistikus ringjoont, selleks anname võrrandile kinise kuju, leides ringi keskpunkti koordinaadid a ja b ning raadiuse r :

$$a = -\frac{-4}{2} = 2, \quad b = -\frac{6}{2} = -3$$



72. joonis.

ja

$$r^2 = \frac{(-4)^2 + 6^2 - 4 \cdot (-3)}{4} = 16.$$

Paigutame a , b ja r^2 väärtused ringjoone võrrandisse

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

saame

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16,$$

mis kujutab ringjoont keskpunktiga $K \equiv (2 | -3)$ ja raadiusega $r = 4$ (72. joon.).

§ 47. Ringjoon ja sirge.

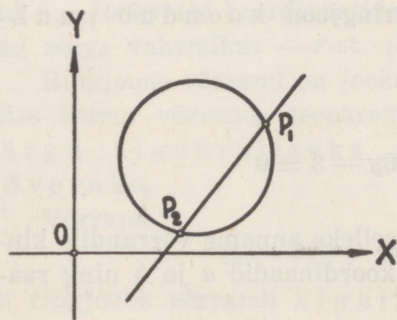
Kui ringjoonel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

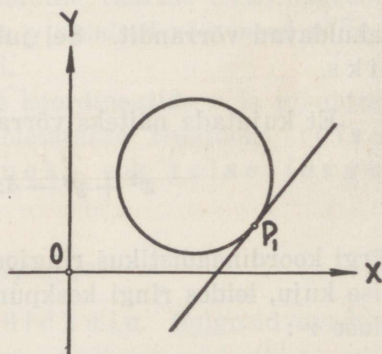
ja sirgel

$$Ax + By + C = 0$$

on ühised punktid, siis rahuldavad nende punktide koordinaadid nii ringjoone kui ka sirge võrrandit. Lahendades jooksvate koordinaatide x ja y suhtes ringjoone ja sirge võrrandid, näeme,



73. joonis.



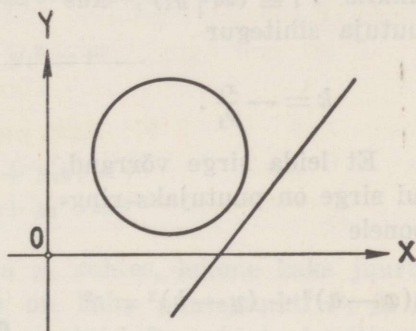
74. joonis.

et nende võrrandite lahendamisel võib esineda üldiselt kolm juhtu, kusjuures võrrandite ühised juured võivad olla: 1) reaalsed ja isesuurused, 2) reaalsed ja võrdsed ning 3) imaginaarsed või kompleksarvud. Seega ringjoonel ja sirgel võib olla kõige rohkem kaks ühist punkti.

Kui ringjoone ja sirge võrrandite juured on reaalsed ja isesuurused, siis on ringjoonel ja sirgel kaks ühist punkti, s. o. kaks lõikepunkti P_1 ja P_2 (73. joon.). Sirge on siis ringjoone lõikaja punktides P_1 ja P_2 , kusjuures sirglõik P_1P_2 on ringi kõõl ja erijuhul ringi diameeter, kui sirglõik P_1P_2 läbib ringi keskpunkti.

Kui ringjoone ja sirge võrrandite juured on reaalsed ja võrdsed, siis on ringjoone ja sirge mõlemad lõikepunktid ühtinud ühes punktis, s. o. puutepunktis P_1 (74. joon.). Sirge on siis ringjoone puutuja punktis P_1 .

Ringjoone (ja üldse kõverjoone) puutuja k s nimetatakse lõikaja piirasendit, kui üks lõikepunkt lõpmata läheneb teisele. Kui ringjoone ja sirge üks lõikepunkt P_2 läheneb teisele



75. joonis.

lõikepunktile P_1 ja langeb temaga ühte, siis sirge saab ringjoone puutujaks punktis P_1 ja on selles punktis risti ringi raadiusega.

Kui ringjoone ja sirge võrrandite juured on imaginaarsed või kompleksarvud, siis ringjoonel ja sirgel ei ole ühtegi ühist punkti, s. o. sirge asetseb täielikult väljaspool ringjoont (75. joon.).

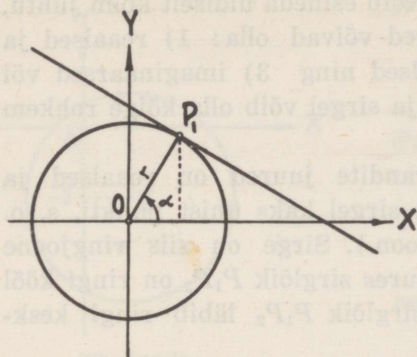
§ 48. Ringjoone puutuja. Polaar ja poolus.

Kui sirge on ringjoonele

$$x^2 + y^2 = r^2$$

puutujaks punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ (76. joon.), siis ta normaalvõrrand on

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = r,$$



76. joonis.

punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, kus puutuja sihitegur

$$k = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Et leida sirge võrrand, kui sirge on puutujaks ringjoonele

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, selleks teisendame koordinaattelgi rööplükkega nii, et ringi keskpunkt $K \equiv (a | b)$ saaks uueks 0-punktiks (77. joon.). Uues koordinaadistikus, kus jooksvad koordinaadid on x' ja y' ning punkti P_1 koordinaadid x'_1 ja y'_1 , puutuja võrrand on

$$x'_1 x' + y'_1 y' = r^2.$$

Et

$$x'_1 = x_1 - a, \quad y'_1 = y_1 - b, \quad x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

siis saame endises koordinaadistikus võrrandi

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2,$$

mis kujutab ringjoone $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ puutujat punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$.

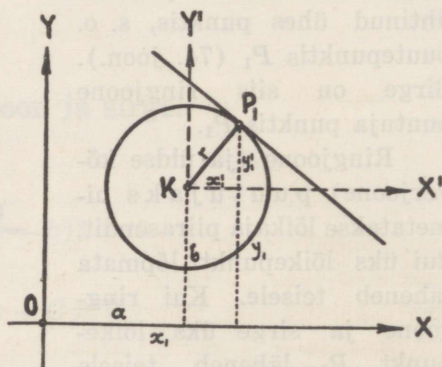
kus $p = r$. Korrutades sirge normaalvõrrandi mõlemaid pooli raadiusega r , saame

$$xr \cos \alpha + yr \sin \alpha = r^2$$

ehk

$$x_1 x + y_1 y = r^2,$$

sest $x_1 = r \cos \alpha$ ja $y_1 = r \sin \alpha$. Saadud sirge võrrand kujutab ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ puutujat



77. joonis.

Et punktist $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$, mis asetseb väljaspool ringi, tõmmata ringjoonele

$$x^2 + y^2 = r^2$$

puutuja, selleks tuleb leida puutepunkt $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, s. o. ta koordinaadid x_1 ja y_1 . Et punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ asetseb puutujal

$$x_1x + y_1y = r^2,$$

siis selle punkti koordinaadid rahuldavad puutuja võrrandit, s. o.

$$x_1x_0 + y_1y_0 = r^2,$$

ja et puutepunkt on ühtlasi ringjoone punkt, siis

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Lahendades võrrandid

$$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

puutepunkti koordinaatide x_1 ja y_1 suhtes, leiame kaks juurtepaari $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$, mis on kahe puutepunkti P_1 ja P_2 koordinaadid (78. joon.). Seega punktist $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ väljuvad ringjoonele $x^2 + y^2 = r^2$ kaks puutujat

$$x_1x + y_1y = r^2 \text{ ja } x_2x + y_2y = r^2.$$

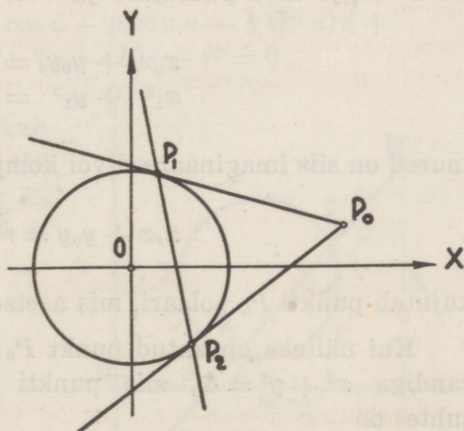
Kui võrrandis

$$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2$$

x_1 ja y_1 lugeda jooksvateks koordinaatideks x ja y , siis võrrand

$$x_0x + y_0y = r^2$$

kujutab sirget, mis moodustab koordinaattelgi lõigates telglõigud $\frac{r^2}{x_0}$ ja $\frac{r^2}{y_0}$, sest



78. joonis.

sellele võrrandile võib anda kuju

$$\frac{x}{\left(\frac{r^2}{x_0}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{r^2}{y_0}\right)} = 1.$$

Et mõlema puutepunkti P_1 ja P_2 koordinaadid rahuldavad seda võrrandit, siis see võrrand kujutab ühtlasi sirget, mis läbib puutepunktid P_1 ja P_2 .

Sellest nähtub, et antud punktist $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$, mis asetseb väljaspool ringi, tõmmata ringjoonele $x^2 + y^2 = r^2$ puutujad, võime joonestada telglõikude $\frac{r^2}{x_0}$ ja $\frac{r^2}{y_0}$ järgi sirge. See sirge lõikab siis ringjoont punktides P_1 ja P_2 , mis on punktist P_0 ringjoonele tõmmatud puutujate puutepunktid.

Sirget läbi puutepunktide P_1 ja P_2 nimetatakse punkti P_0 polaariks ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ suhtes ja ta võrrand on

$$x_0x + y_0y = r^2,$$

kusjuures punkt P_0 nimetatakse selle sirge pooluseks.

Kui poolus P_0 asetseb ringjoonel, siis polaar läbib pooluse ja on ringjoonele puutujaks pooluses P_0 . Seega iga puutuja on puutepunkti polaariks, ja ümberpöörduvalt: iga puutepunkt on puutuja pooluseks.

Kui punkt P_0 on ringi sees, siis sellest punktist ei saa tõmmata ringjoonele puutujaid ja võrrandite

$$\begin{aligned} x_0x_1 + y_0y_1 &= r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 &= r^2 \end{aligned}$$

juured on siis imaginaarsed või kompleksarvud. Sel juhul võrrand

$$x_0x + y_0y = r^2$$

kujutab punkti P_0 polaari, mis asetseb väljaspool ringi.

Kui näiteks on antud punkt $P_0 \equiv (-2 | 3)$ ja ringjoon võrrandiga $x^2 + y^2 = 4$, siis punkti P_0 polaar selle ringjoone suhtes on

$$2x - 3y + 4 = 0,$$

mis lõikab ringjoont punktides

$$P_1 \equiv (-2 | 0) \text{ ja } P_2 \equiv \left(\frac{10}{13} | \frac{24}{13} \right),$$

ning ringjoone puutujad punktist P_0 (kui sirged läbi kahe punkti P_0 ja P_1 ning P_0 ja P_2) on

$$x + 2 = 0 \text{ ja } 5x + 12y - 26 = 0.$$

§ 49. Punkti potents ringjoone suhtes. Potentsjoon ja potentspunkt.

Olgu antud ringjoon

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ja punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ väljaspool ringi (79. joon.). Kui punktist P_0 tõmmatud sirge lõikab ringjoont punktis $P \equiv (x | y)$ ja moodustab X -telje positiivse suunaga nurga α , siis

$$x = x_0 - d \cos \alpha, \quad y = y_0 - d \sin \alpha,$$

kus $d = P_0P$ on muutuv parameeter. Et punkt P asetseb ringjoonel, siis

$$(x_0 - d \cos \alpha - a)^2 + (y_0 - d \sin \alpha - b)^2 = r^2$$

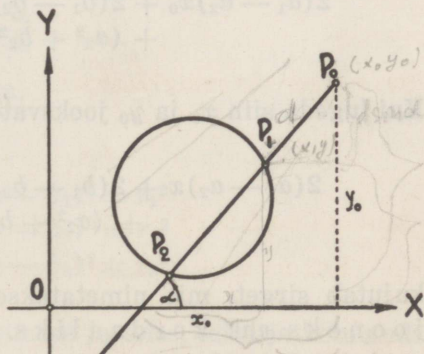
ehk

$$d^2 - 2(x_0 \cos \alpha - a \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - b \sin \alpha)d + (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0,$$

millest nähtub, et sirge lõikab ringjoont kahes punktis P_1 ja P_2 , mille kaugusi punktist P_0 väljendavad võrrandi juured d_1 ja d_2 , kusjuures

$$d_1 d_2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Kui võrrandi juured on



79. joonis.

võrdsed, s. o. $d_1 = d_2 = d$, siis sirge on ringjoone puutuja ja

$$d^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Kauguste d_1 ja d_2 korrutis ei olene nurgast α . Seega punktist P_0 tõmmatud mistahes sirge lõikub ringjoonega punktides, mille kauguste korrutis punktist P_0 on konstantne suurus. See konstantne suurus $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ nimetatakse punkti P_0 potentsiks ringjoone $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ suhtes.

Avaldisest $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ nähtub, et punkti potents on positiivne, kui punkt on väljaspool ringi; punkti potents on 0, kui punkt on ringjoonel, ja punkti potents on negatiivne, kui punkt on ringi sees.

Kui punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ asetseb väljaspool ringe

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2,$$

siis $(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - b_1)^2 - r_1^2$ on punkti P_0 potents esimese ringjoone suhtes $(x_0 - a_2)^2 + (y_0 - b_2)^2 - r_2^2$ on sama punkti potents teise ringjoone suhtes.

Et leida punkt, mille potentsid nii esimese kui ka teise ringjoone suhtes oleksid võrdsed, selleks peab

$$(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - b_1)^2 - r_1^2 = (x_0 - a_2)^2 + (y_0 - b_2)^2 - r_2^2$$

ehk

$$2(a_1 - a_2)x_0 + 2(b_1 - b_2)y_0 - (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0.$$

Kui lugeda siin x_0 ja y_0 jooksvateks koordinaatideks, siis võrrand

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0$$

kujutab sirget, mis nimetatakse mõlema ringjoone potentsjooneks ehk kordaaliks. Potentsjoonel asetseva mistahes punkti potentsid mõlema ringjoone suhtes on isekeskis võrdsed.

Kui punkt $P \equiv (x | y)$ kujutab mõlema ringjoone lõikepunkti, siis asetseb see punkt ka potentsjoonel, sest et siis avaldised

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

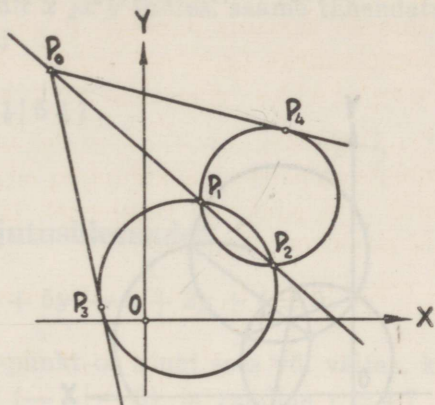
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

mõlemad üksikult kaovad. Seega potentsjoon läbib mõlema ringjoone lõikepunktid P_1 ja P_2 (80. joon.).

Kui ringjooned isekeskis puutuvad, siis on potentsjoon nende ühiseks puutujaks ringjoonte puutepunktis.

Kui ringjooned ei lõiku, siis ei ole ka potentsjoonel ringjoontega ühiseid punkte.

Kui potentsjoonel asetsevast punktist P_0 tõmmata mõlemale ringjoonele puutujad, siis asetsevad puutepunktid P_3 ja P_4 punktist P_0 ühekaugusel.



80. joonis.

Potentsjoone võrrandist nähtub, et potentsjoon on risti ringide keskjoonega kui sirgega läbi kahe punkti $(a_1 | b_1)$ ja $(a_2 | b_2)$, s. o. sirgega

$$y - b_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} (x - a_1),$$

mille sihitegur on potentsjoone sihiteguri

$$-\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

pöördväärtus vastupidise märgiga.

Kolme ringjoone

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

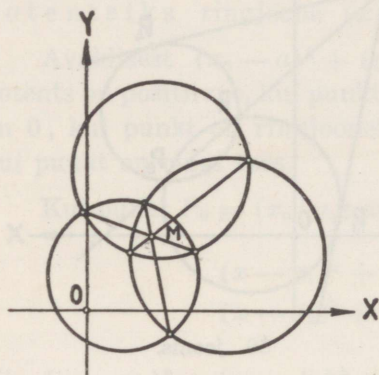
$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = r_3^2$$

puhul tekib kolm potentsjoont: esimese ja teise, teise ja kolmanda ning kolmanda ja esimese ringjoone potentsjooned, s. o.

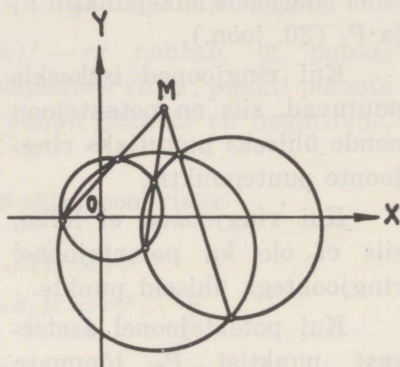
$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0$$

$$2(a_2 - a_3)x + 2(b_2 - b_3)y - (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) + (a_3^2 + b_3^2 - r_3^2) = 0$$

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y - (a_3^2 + b_3^2 - r_3^2) + (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) = 0.$$



81. joonis.



82. joonis.

Et neid võrrandeid liites vasakud pooled kaovad, siis sellest järeldub, et kõik kolm potentsjoont lõikuvad ühes ja samas punktis M (81. ja 82. joon.). See punkt nimetatakse nende kolme ringjoone potentspunktiks.

Näiteks ringjoonte

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 36$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 64$$

potentsjooned on

$$2(2 + 3)x + 2(5 - 6)y - (4 + 25 - 9) + (9 + 36 - 36) = 0$$

$$2(-3 - 1)x + 2(6 + 2)y - (9 + 36 - 36) + (1 + 4 - 64) = 0$$

$$2(1 - 2)x + 2(-2 - 5)y - (1 + 4 - 64) + (4 + 25 - 9) = 0$$

ehk

$$\begin{aligned}10x - 2y - 11 &= 0 \\2x - 4y + 17 &= 0 \\2x + 14y - 79 &= 0.\end{aligned}$$

Lahendades neist kaks võrrandit x ja y suhtes, saame tähendatud kolme ringjoone potentspunkti

$$M \equiv (2\frac{1}{8} | 5\frac{1}{3}).$$

§ 50. Harjutusülesanded.

351. Joonestada ringjoon $5x^2 + 5y^2 - x + 2y + 4 = 0$.
352. Kas koordinaattelgede 0-punkt on ringi sees või väljas, kui ringi keskpunkt on $K \equiv (-3 | -3)$ ja raadius $r = 4$?
353. Leida ringide keskpunktide kaugus teineteisest:
- a) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 3$
- b) $3x^2 + 3y^2 - 6y + 2 = 0$; $x^2 + y^2 - x + 8y + 13 = 0$.
354. Leida ringide $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 2x + 20y + 1 = 0$ keskjoone võrrand ja keskjoone kaugus 0-punktist.
355. Ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ leida punkt, mis oleks ühekaugusel punktidest $P_1 \equiv (1 | 3)$ ja $P_2 \equiv (-2 | 2)$.
356. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib kolm punkti:
- a) $P_1 \equiv (3 | 3)$, $P_2 \equiv (-3 | 3)$, $P_3 \equiv (3 | -3)$
- b) $P_1 \equiv (1 | 2)$, $P_2 \equiv (-5 | 2)$, $P_3 \equiv (4 | 2)$
- c) $P_1 \equiv (5 | 4)$, $P_2 \equiv (-7 | 6)$, $P_3 \equiv (-7 | 8)$
- d) $P_1 \equiv (-10 | 6)$, $P_2 \equiv (4 | -8)$, $P_3 \equiv (2 | -10)$.
357. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone võrrand, kui kolmnurga tipud on $P_1 \equiv (1 | 3)$, $P_2 \equiv (-2 | 1)$ ja $P_3 \equiv (-1 | -3)$.

358. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone võrrand, kui kolmnurga küljed on $x + 3y - 11 = 0$, $4x - 3y + 16 = 0$ ja $x - 2y - 1 = 0$.
359. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib 0-punkti ja ta keskpunkt on $K \equiv (10 | 4)$.
360. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P \equiv (7 | -5)$ ja ta keskpunkt on $K \equiv (6 | -2)$.
361. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P \equiv (-12 | -11)$ ja puudutab Y -telge punktis $y = -9$.
362. Leida ringjoonte üldine võrrand, kui ringjooned puudutavad koordinaattelgi.
363. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P \equiv (1 | 2)$ ja puudutab koordinaattelgi.
364. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte $P_1 \equiv (3 | 6)$ ja $P_2 \equiv (-3 | 4)$ ning puudutab X -telge.
365. Leida ringjoone võrrand, kui ringi ühe diameetri otsapunktid on $P_1 \equiv (-3 | 2)$ ja $P_2 \equiv (1 | 4)$.
366. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon puudutab sirget $Ax + By + C = 0$ ja ta keskpunktiks on 0-punkt.
367. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon puudutab sirget $x - y = 0$ ja ta keskpunktiks on $K \equiv (1 | 3)$.
368. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte $P_1 \equiv (3 | -2)$ ja $P_2 \equiv (-9 | 4)$ ning ta keskpunkt on sirgel $x + 2y - 10 = 0$.
369. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 13$ puutuja võrrand, kui puutepunkti abstsiss $x_1 = 3$ ja ordinaat $y_1 > 0$.
370. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 13$ puutuja võrrand, kui puutuja läbib punkti $P \equiv (-1 | 5)$.
371. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 5$ puutuja võrrand, kui puutuja on rööbik sirgega $x - y - 1 = 0$.

372. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 10$ puutujate võrrand, kui puutepunktideks on ringjoone ja sirge $x - 3y = 0$ lõikepunktid.
373. Leida ringjoone $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ puutuja võrrand, kui puutepunkt on $P \equiv (5 | 5)$.
374. Leida ringjoonte $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ ja $x^2 + (y + 1)^2 = 10$ vaheline nurk ω .
375. Missuguses nurgas näib ringjoon $x^2 + y^2 = 16$ punktist $P \equiv (8 | 0)$?
376. Leida sirgel $x + 2y - 1 = 0$ punkt, millest ringjoon $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ näib 60° nurgas.
377. Sirge $x - 5y - 2 = 0$ lõikab ringjoont $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ punktides P_1 ja P_2 . Leida kõõlu P_1P_2 pikkus ja keskpunkt.
378. Sirge $x + 2y - 1 = 0$ lõikab ringjoont punktis $P_1 \equiv (-1 | 1)$. Leida ringjoone võrrand ja teine lõikepunkt P_2 , kui ringi keskpunkt on $K \equiv (0,5 | 1,5)$.
379. Leida ringjoonel $5x^2 + 5y^2 + 2x - 12 = 0$ punkt, mille kaugused koordinaattelgedest on võrdsed.
380. Leida punkt, mille kaugused punktidest $P_1 \equiv (0,5 | 3)$, $P_2 \equiv (0 | 2)$ ja $P_3 \equiv (1 | -1)$ on võrdsed.
381. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ puutujate võrrandid, kui puutujad läbivad 0-punkti.
382. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P \equiv (1 | 1)$ ja puudutab sirgeid $x + 7y = 3$ ja $7x + y = 3$.
383. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P \equiv (2 | 1)$, puudutab ringjoont $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$ ja ta raadius on 1.
384. Leida ringjoonte $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ja $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ühiste puutujate võrrandid.

385. Ringjoone $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 14$ puutuja läbib punkti $P \equiv (7|8)$. Leida puutepunkti kaugus punktist P .
- 386. Leida punkti $P_0 \equiv (5|-3)$ polaar ringjoone $x^2 + y^2 = 16$ suhtes.
387. Leida sirge $2x - 3y - 6 = 0$ poolus ringjoone $x^2 + y^2 = 9$ suhtes.
388. Leida punktist $P_0 \equiv (5|8)$ ringjoonele $x^2 + y^2 = 25$ tõmmatud puutujate ja ringi kaare vaheline pindala.

389. Leida ringjoonte

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$$

potentsjoon.

390. Leida ringjoonte

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

potentspunkt.

VII peatük k.

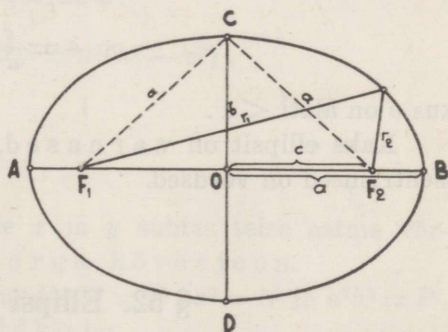
Ellips.

§ 51. Ellipsi määramine tasapinnal.

Definitsioon: Ellips on tasapinnal asetsevate sääraste punktide geometriline koht, kus iga punkti kauguste summa kahest kindlast punktist samal tasapinnal on konstantne suurus. Kindlaid punkte nimetatakse ellipsi fookusteks ja punkti kaugusi fookustest — ellipsi raadiusvektoriteks.

Olgu ellipsi fookused F_1 ja F_2 ning raadiusvektorid r_1 ja r_2 .

Märgime tasapinnal punktid F_1 ja F_2 (83. joon.), millesse kinnitame F_1 ja F_2 kauguse ületava pikkusega niidi otsad. Tõmbame pliiaatsiotsaga niidi pingule ja joonestame kõverjoone, nõnda et niit nihkuks mööda pliiaatsiotsa edasi-tagasi. Nii moodi saame kinnise kõverjoone, mis vastab definitsioonis ülesseatud tingimusele ning kujutab seega ellipsit, mille raadiusvektorid on muutuvad suurused, kuid nende summa jääb konstantseks, ja nimelt võrdseks võetud niidi pikkusega. Ühendame fookused F_1 ja F_2 sirglõiguga ja pikendame seda mõlemale poole kuni lõikumiseni ellipsiga, saame sirglõigu AB , mis on ellipsi suurtelg ehk fokaaltelg. Fokaaltelje keskkohast O , mis on ühtlasi ellipsi keskpunkt, tõmbame ristlõigu CD , mis kujutab ellipsi väikestelge. Punktid A, B, C ja D nimetatakse ellipsi laigipunktideks. Ellipsi keskpunkt O asetseb fookuste vahe keskkohal ja



83. joonis.

sele ning kujutab seega ellipsit, mille raadiusvektorid on muutuvad suurused, kuid nende summa jääb konstantseks, ja nimelt võrdseks võetud niidi pikkusega. Ühendame fookused F_1 ja F_2 sirglõiguga ja pikendame seda mõlemale poole kuni lõikumiseni ellipsiga, saame sirglõigu AB , mis on ellipsi suurtelg ehk fokaaltelg. Fokaaltelje keskkohast O , mis on ühtlasi ellipsi keskpunkt, tõmbame ristlõigu CD , mis kujutab ellipsi väikestelge. Punktid A, B, C ja D nimetatakse ellipsi laigipunktideks. Ellipsi keskpunkt O asetseb fookuste vahe keskkohal ja

jagab ellipsi teljed pooleks, s. o. pooltelgedeks a ja b , kus a on ellipsi fokaal- ehk suur pooltelg ja b — väike pooltelg. Fookuste kaugus ellipsi keskpunktist O on $OF_1 = OF_2 = c$, mis nimetatakse ellipsi lineaarseks ekstsentriseks.

Jooniselt näeme, et raadiusvektorite r_1 kõige väiksem pikkus on AF_1 ja kõige suurem pikkus F_1B . Samuti raadiusvektori r_2 kõige väiksem väärtus on BF_2 ja kõige suurem väärtus F_2A . Kui $r_1 = AF_1$, siis $r_2 = AF_2 = BF_1$. Kui $r_1 = BF_1$, siis $r_2 = BF_2 = AF_1$. Seega raadiusvektorite summa on võrdne suure teljega, s. o.

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Lineaarse ekstsentrise c väärtuse pooltelgede a ja b kaudu leiame kolmnurgast F_1CO või kolmnurgast F_2CO , kus $F_1C = F_2C = a$:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Lineaarse ekstsentrise suhet fokaalpooltelje pikkusega nimetatakse ellipsi numbriliseks ekstsentriseks. Kui tähistame ellipsi numbrilise ekstsentrise tähega e , siis

$$e = \frac{c}{a},$$

kus e on alati < 1 .

Kaks ellipsit on sarnased, kui nende numbrilised ekstsentrised on võrdsed.

§ 52. Ellipsi võrrand.

Võtame ellipsi teljed koordinaattelgedeks, nõnda et ellipsi keskpunkt oleks ühtlasi 0-punktiks ja fokaalitelg langeks ühte X -teljega (84. joon.). Märgime ellipsil vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$ ja raadiusvektorid sellest punktist r_1 ja r_2 , saame kaks täisnurkset kolmnurka: $\triangle F_1PM$ ja $\triangle F_2PM$, millest

$$r_1^2 = y^2 + (c + x)^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

$$r_2^2 = y^2 + (c - x)^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2.$$

Neid lahutades saame

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx,$$

millest

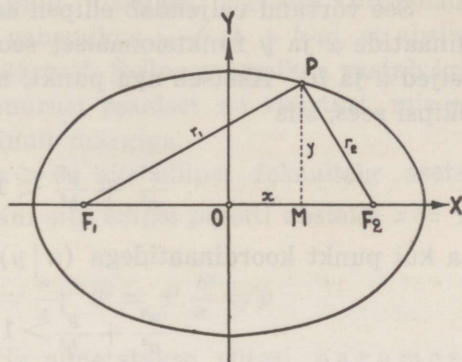
$$r_1 - r_2 = \frac{4cx}{r_1 + r_2} = \frac{2cx}{a}.$$

Võttes võrrandid

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a}$$

ja lahendades neid r_1 ja r_2 suhtes, saame raadiusvektorite pikkused



84. joonis.

$$r_1 = a + \frac{cx}{a} = a + ex$$

$$r_2 = a - \frac{cx}{a} = a - ex.$$

Paigutades raadiusvektori r_1 väärtuse $a + ex$ võrrandisse $r_1^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$ või raadiusvektori r_2 väärtuse $a - ex$ võrrandisse $r_2^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$, saame pärast liikmete korraldamist ellipsit kujutava võrrandi

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Et $a^2 - c^2 = b^2$, siis

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

mis on jooksvate koordinaatide x ja y suhtes teise astme võrrand. Seega on ellips teise järgu kõverjoon.

Kui tähistame saadud võrrandis $b^2 = M$, $a^2 = N$ ja $a^2b^2 = P$, siis saame ellipsi võrrandi üldkujuga

$$Mx^2 + Ny^2 = P,$$

kus M , N ja P on alati positiivsed suurused, kusjuures $M < N$. Võttes aga koordinaatteljed nõnda, et ellipsi fokaalitelg langeb ühte Y -teljega, siis ellipsi fookused asetsevad Y -teljel ja ellipsi võrrandis on siis $M > N$.

Kui jagame võrrandi mõlemad pooled a^2b^2 -ga, siis saame ellipsi võrrandi kanoonilises kujus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

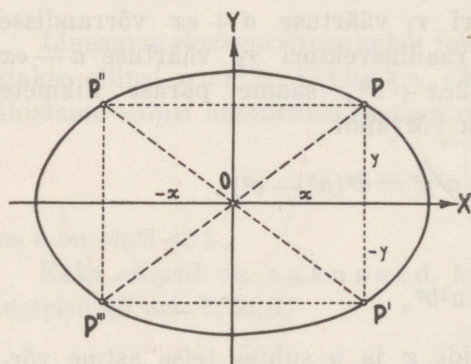
See võrrand väljendab ellipsil asetseva mistahes punkti koordinaatide x ja y funktsionaalset seost, kui on antud ellipsi poolteljed a ja b . Asetseb aga punkt, mille koordinaadid on x ja y , ellipsi sees, siis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

ja kui punkt koordinaatidega $(x|y)$ on ellipsisist väljas, siis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

Kui punkt $P \equiv (x|y)$ asetseb ellipsil, mille keskpunkt on 0-punktis, siis asetsevad samal ellipsil ka punktid $P' \equiv (x|-y)$ ja $P'' \equiv (-x|y)$ (85. joon.), sest viimaste punktide koordinaadid



85. joonis.

rahuldavad samuti ellipsi võrrandit. Ellips on seega sümmeetriline X - ja Y -telje suhtes, s. t. kui punkt P asetseb ellipsil, siis asetsevad samal ellipsil ka punkti P peegelduspunktid P' ja P'' koordinaattelgedest. Koordinaatteljed on seega ellipsi sümmeetriateljed. Kui koordinaatteljed on ellipsi sümmeetriateljed, siis on ellipsi ka sümmeetriline 0-punkti

suhtes, s. t. kui punkt $P \equiv (x|y)$ asetseb ellipsil, siis asetseb samal ellipsil ka punkt $P''' \equiv (-x|-y)$, mis on punktiga P sümmeetriline 0-punkti suhtes, sest punkti P''' koordinaadid rahuldavad samuti ellipsi võrrandit.

Ellipsi võrrandi ilmutatud kujudest

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ ja } x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

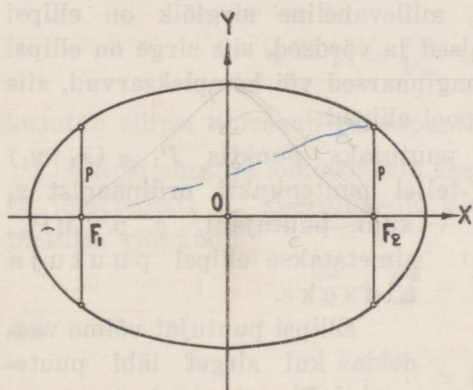
näeme, esiteks, et abstsissile x võib anda väärtusi ainult $-a$ -st $+a$ -ni, et saada reaalsel ordinaadi y väärtust. Selles vahemikus vastab iga x -i väärtusele kaks ühesuurust reaalsel y -i väärtust,

mis erinevad teineteisest ainult märgiga. Teiseks, ordinaadile y võib anda väärtusi ainult vahemikus $-b$ -st $+b$ -ni, et abstsiss x omaks vastavat reaalist väärtust. Selles vahemikus vastab igale y -i väärtusele ka kaks ühesuurust reaalist x -i väärtust, mis erinevad teineteisest samuti ainult märgiga.

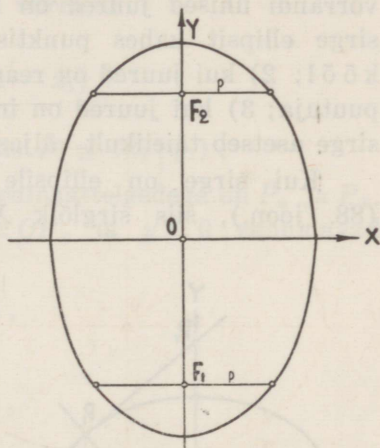
Kui ellipsi võrrandis $a > b$, siis ellipsi fokaaltelg asetseb X -teljel ja $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Kui siin ellipsi punkti abstsiss $x = \pm c$ (86. joon.), siis

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b}{a} \sqrt{b^2} = \pm \frac{b^2}{a} = p$$

on ellipsi pool fokaallaiust ja nimetatakse ellipsi parameet-riks.



86. joonis.



87. joonis.

Kui aga ellipsi võrrandis $a < b$, siis ellipsi fokaaltelg asetseb Y -teljel ja $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ning $e = \frac{c}{b}$. Kui siin $y = \pm c$ (87. joon.), siis ellipsi parameeter

$$p = x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - c^2} = \frac{a}{b} \sqrt{a^2} = \pm \frac{a^2}{b}.$$

Kui ellipsi poolteljed on võrdsed, s. o. $a = b$, siis saame ringjoone

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Tähendab, ringjoon on ellipsi erikuju, kui ellipsi mõlemad fookused ühtivad ja moodustavad ringi keskpunkti. Sel juhul $c = 0$ ja $e = 0$ ning parameeter muutub ringi raadiuseks.

§ 53. Ellipsi puutuja ja normaal. Polaar ja poolus.

Lahendades ellipsi võrrandi

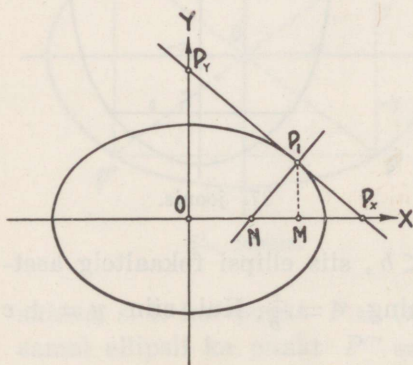
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

koos sirge võrrandiga

$$Ax + By + C = 0$$

jooksvate koordinaatide x ja y suhtes, leiame, et nii x kui ka y võib omada kõige rohkem kaks väärtust. Siin esinevad ellipsi ja sirge vastastikuse seisu suhtes samad juhud, mis esinesid eespool ringjoone ja sirge suhtes, ja nimelt: 1) kui ellipsi ja sirge võrrandi ühised juured on reaalsed ja isesuurused, siis lõikab sirge ellipsit kahes punktis, millevaheline sirglõik on ellipsi kõõl; 2) kui juured on reaalsed ja võrdsed, siis sirge on ellipsi puutuja; 3) kui juured on imaginaarsed või kompleksarvud, siis sirge asetseb täielikult väljaspool ellipsit.

Kui sirge on ellipsile puutujaks punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ (88. joon.), siis sirglõik X -teljel puutepunkti ordinaadist y_1 kuni puutujani, s. o. MP_x , nimetatakse ellipsi puutuja aluseks.



88. joonis.

Ellipsi puutujat võime vaadelda kui sirget läbi puutepunkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, s. o.

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

kus k on puutuja sihitegur, mis on ühtlasi ellipsile vastava funktsiooni tuletis punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$. Et ellipsit kujutava funktsiooni tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\frac{b^2}{a^2}x}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

ja punktist $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ puutuja sihitegur

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

siis võrrand

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

ehk teisendatult

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

kujutab ellipsi puutujat punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$.

Ristjoon puutujale puutepunktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ on ellipsi normaal selles punktis ja sirglõik X -teljel puutepunkti ordinaadist y_1 kuni normaalin, s. o. MN , on normaali alus.

Normaali võrrandis sihitegur on puutuja sihiteguri pöördväärtus vastupidise märgiga. Seega võrrand

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

kujutab ellipsi normaali puutepunktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$.

Ellipsi puutuja lõikepunktid koordinaattelgedega on P_x ja P_y . Et lõikepunkti P_x koordinaadid $x = OP_x$ ja $y = 0$ rahuldavad puutuja võrrandit

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1,$$

siis

$$\frac{x_1 \cdot OP_x}{a^2} = 1,$$

millest lõikepunkti P_x kaugus 0-punktist

$$OP_x = \frac{a^2}{x_1},$$

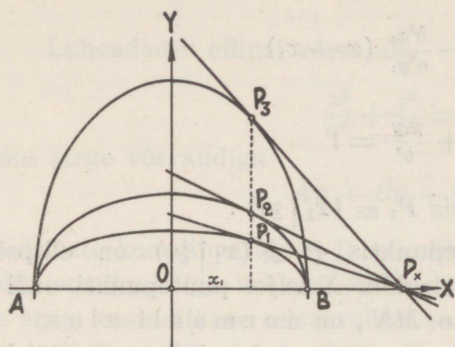
ja seega puutuja aluse pikkus

$$MP_x = OP_x - OM = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1},$$

kusjuures normaali aluse pikkus

$$NM = \frac{y_1}{\tan \widehat{P_1 NM}} = \frac{y_1}{\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Sellest nähtub, et puutuja ja X -telje lõikepunkti P_x kaugus 0-punktist ja puutuja aluse pikkus oleneb ainult ellipsi pool-



89. joonis.

telje a pikkusest ja puutepunkti P_1 abstsissi x_1 väärtusest. Joonestades rida ellipseid ühele ja samale teljele $AB = 2a$ (89. joon.) ja märkides neil punktid P_1, P_2, P_3 jne. nõnda, et kõigil neist oleks üks ja sama abstsiss x_1 , siis kõik puutujad punktides P_1, P_2, P_3 jne. lõikavad X -telge ühes ja samas punktis P_x .

Et ellipsi puutuja ja Y -telje löikepunkti P_y koordinaadid $x = 0$ ja $y = OP_y$ rahuldavad samuti puutuja võrrandit, siis saame

$$\frac{y_1 \cdot OP_y}{b^2} = 1,$$

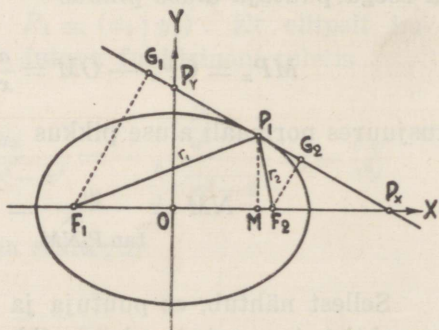
millest löikepunkti P_y kaugus 0-punktist

$$OP_y = \frac{b^2}{y_1}.$$

Selle löikepunkti kaugus 0-punktist oleneb ainult ellipsi pooltelje b pikkusest ja puutepunkti P_1 ordinaadi y_1 väärtusest. Siin samuti kõikide ühe ja sama teljega, mille pikkus $2b$, ellipsite puutujad punktides, millel üks ja sama ordinaat y_1 , lõikavad Y -telge ühes ja samas punktis P_y .

Kui ellipsi fookustest F_1 ja F_2 tõmmata puutujale ristjooned F_1G_1 ja F_2G_2 (90. joon.), siis sarnastest kolmnurkadest $P_xF_1G_1$ ja $P_xF_2G_2$:

$$\begin{aligned} \frac{F_1G_1}{F_2G_2} &= \frac{F_1P_x}{F_2P_x} = \\ &= \frac{\frac{a^2}{x_1} + c}{\frac{a^2}{x_1} - c} = \frac{a + ex_1}{a - ex_1} = \frac{r_1}{r_2}. \end{aligned}$$



90. joonis.

Seega täisnurksed kolmnurgad $P_1F_1G_1$ ja $P_1F_2G_2$ on sarnased ja

$$F_1\widehat{P_1P_y} = F_2\widehat{P_1P_x},$$

s. o. ellipsi raadiusvektorid r_1 ja r_2 puutepunktist P_1 moodustavad puutujaga võrdsed nurgad, ja järelikult, ellipsi normaali puutepunktis P_1 jagab raadiusvektorite vahelise nurga $F_1P_1F_2$ kaheks võrdseks osaks.

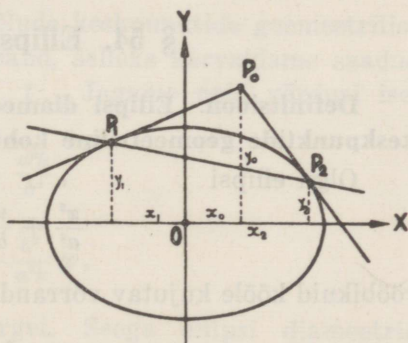
Et antud punktist $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$, mis asetseb väljaspool ellipsit, tõmmata ellipsile puutuja, selleks tuleb leida puutepunkt $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, s. o. ta koordinaadid x_1 ja y_1 . Puutepunkt P_1 on puutuja ja ellipsi ühine punkt, järelikult

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Neid võrrandeid x_1 ja y_1 suhtes lahendades leiame kahe puutepunkti koordinaadid $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$. Seega punktist P_0 väljub ellipsile kaks puutuja puutepunktidesse $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$ (91. joon.). Kui võrrandis

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1$$



91. joonis.

x_1 ja y_1 lugeda jooksvateks koordinaatideks, siis see võrrand kujutab sirget, mis moodustab koordinaattelgi lõigates telglõigud $\frac{a^2}{x_0}$ ja $\frac{b^2}{y_0}$ ning läbib puutepunktid P_1 ja P_2 . Täheleb, et leida punktist $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$, mis asetseb väljaspool ellipsit, väljuvate sirgete puutepunktid ellipsil, selleks võime joonestada telglõikude $\frac{a^2}{x_0}$ ja $\frac{b^2}{y_0}$ järgi sirge, mis lõikab ellipsit puutepunktides P_1 ja P_2 .

Sirge läbi puutepunktide P_1 ja P_2 on punkti P_0 polaarja ta võrrand on

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1,$$

kusjuures punkt P_0 on selle sirge poluseks.

Kui poolus P_0 asetseb ellipsil, siis polaar läbib pooluse ja on ellipsile puutujaks pooluseks P_0 . Seega ellipsi iga punkti polaariks on ellipsi puutuja selles punktis, ja überpöördukt: ellipsi iga puutuja pooluseks on puutepunkt.

Kui punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ on ellipsi sees, siis sellest punktist ei saa tõmmata ellipsile puutujaid ja võrrandite

$$\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

juured on siis imaginaarsed või kompleksarvud. Sel juhul võrrand

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

kujutab punkti P_0 polaari, mis asetseb väljaspool ellipsit.

§ 54. Ellipsi diameetrid.

Definitsioon: Ellipsi diameeter on ellipsi rööbikute kõõlude keskpunktide geomeetriline koht.

Olgu ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rööbikuid kõõle kujutav võrrand

$$y = kx + t,$$

kus t on muutuv parameeter. Ellipsi kõõlu keskpunkti leiame, kui lahendame ellipsi ja ta kõõlu võrrandi jooksvate koordinaatide x ja y suhtes, s. o.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + t)^2}{b^2} = 1,$$

millest

$$\left(\frac{b^2}{a^2} + k^2\right)x^2 + 2ktx + t^2 - b^2 = 0.$$

Kui selle ruutvõrrandi juured, mis on ühtlasi ellipsi ja ta kõõlu

lõikepunktide abstsissid, on x_1 ja x_2 , siis ellipsi kõõlu keskpunkti abstsiss

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ja ordinaat

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = k \frac{x_1 + x_2}{2} + t.$$

Et ruutvõrrandi juurte summa

$$x_1 + x_2 = -\frac{2kt}{\frac{b^2}{a^2} + k^2},$$

siis ellipsi kõõlu keskpunkti koordinaadid on

$$x = -\frac{kt}{\frac{b^2}{a^2} + k^2} \quad \text{jä} \quad y = \frac{\frac{b^2}{a^2} t}{\frac{b^2}{a^2} + k^2},$$

kus nüüd x -i ja y -i väärtus oleneb parameetri t väärtusest.

Et leida ellipsi rööbikute kõõlude keskpunktide geomeetrilise koha, s. o. ellipsi diameetri, võrrand, selleks kõrvaldame saadud võrdustest muutuva parameetri t . Jagame neid võrdusi isekeskis, saame

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2 k}{b^2},$$

millest

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k} x,$$

mis kujutab 0-punkti läbivat sirget. Seega ellipsi diameetrid läbivad ellipsi keskpunkti.

Üks rööbikutest kõõludest $y = kx + t$ läbib samuti ellipsi keskpunkti ja ta võrrand on

$$y = kx,$$

mis kujutab siis ka ellipsi üht diameetrit. Kui tähistame

$$k' = -\frac{b^2}{a^2 k},$$

millest

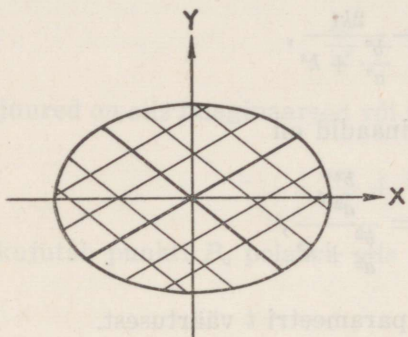
$$kk' = -\frac{b^2}{a^2},$$

siis nimetatakse ellipsi diameetrid

$$y = kx \quad \text{ja} \quad y = k'x$$

kaasdiameetriteks, milledest kumbki poolitab teisega rööbikud kõõlud (92. joon.).

Ellipsil on määramata palju diameetreid ja igale diameet-rile vastab kaasdiameeter, kusjuures kahe kaasdiameetri sihi-tegurite korrutis on konstantne suurus.



92. joonis.

Ellipsi kaasdiameetrite tingimusest

$$k' = -\frac{b^2}{a^2k}$$

nähtub, et kui üks diameetritest moodustab X -telje positiivse suunaga teravnurga, siis ta kaasdiameeter moodustab selle teljega nürinurga. Seega kaasdiameetrid ei lange kunagi ühte. Suurendades näiteks ühe diameetri sihiteguri k positiivset väärtust, kasvab ka ta kaasdiameetri sihiteguri k' algebraalne väärtus (sest ta negatiivne väärtus kahaneb). Sellest nähtub, et kui diameetrit pöörata näiteks kellaosuti liikumisele vastassuunas, siis samas suunas liigub ka ta kaasdiameeter.

Ellipsi kaasdiameetrite tingimus

$$k' = -\frac{b^2}{a^2k}$$

näitab, et kaasdiameetrid võivad olla risti ainult ühelainsal juhul, ja nimelt, kui $k = 0$ ja $k' = \infty$, mis rahuldavad ühtlasi sirgete ristseisu tingimust

$$k' = -\frac{1}{k}.$$

Sel puhul ellipsi kaasdiameetrid ühtivad ellipsi telgedega ja neid nimetatakse ellipsi peadiameetriteks.

Kui ellips muutub ringjooneks, s. o. $a = b$, siis igal juhul

$$k' = -\frac{1}{k},$$

mis näitab, et ringi kaasdiameetrid on alati risti.

§ 55. Ellipsi juhtjooned.

Võtame ellipsil

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

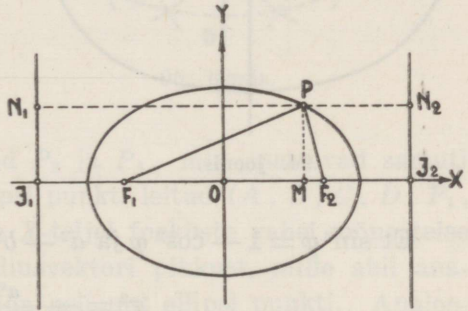
vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$ (93. joon.), mille kaugused fookustest on

$$PF_1 = a + ex = e\left(\frac{a}{e} + x\right)$$

$$PF_2 = a - ex = e\left(\frac{a}{e} - x\right),$$

kus $\frac{a}{e} > a$, sest $e < 1$. Märgime X -teljel punktid J_1 ja J_2 nõnda, et nende kaugus ellipsi keskpunktist oleks $\frac{a}{e}$. Tõmbame läbi punktide J_1 ja J_2 , mis asetsevad väljaspool ellipsit, ristjooned X -teljele. Need ristjooned nimetatakse ellipsi juhtjoonteks ja nende võrrandid on

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{ja} \quad x = +\frac{a}{e}.$$



93. joonis.

Punkti P kaugused juhtjoontest on

$$PN_1 = \frac{a}{e} + x = \frac{a + ex}{e}$$

$$PN_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}$$

ning punkti P kauguste suhe fookusest ja vastavast juhtjoonest

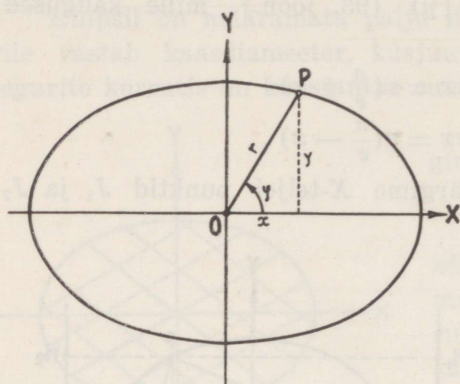
$$\frac{PF_1}{PN_1} = \frac{PF_2}{PN_2} = e$$

on konstantne suurus ja nimelt võrdne ellipsi numbrilise eks-tsentrismusega. Seega ellipsit võime vaadelda kui sääraste punktide geomeetrilist kohta, kus iga punkti kauguste suhe kindlast punktist (fookusest) ja kindlast sirgest (juhtjoonest) on konstantne suurus $e < 1$.

Kui ellips läheneb ringjoonele, siis kaugenevad juhtjooned ellipsist ja lähenevad lõpmatusele, s. o. kui $b \rightarrow a$, siis $OJ_1 \rightarrow -\infty$ ja $OJ_2 \rightarrow +\infty$.

§ 56. Ellipsi polaarvõrrand.

Olgu ellipsi keskpunkt polaarkoordinaatide pooluseks ja fokaaltelg polaarteljeks (94. joon.). Märgime ellipsil



94. joonis.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$, mille polaarkoordinaadid on r ja φ . Siis

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

ja ellipsi võrrand omab kuju

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

ehk

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Et $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ ja $a^2 - b^2 = c^2$, siis

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$$

ehk

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

millest

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}},$$

mis on ellipsi võrrand polaarkoordinaatides, kui ellipsi keskpunkt lugeda pooluseks.

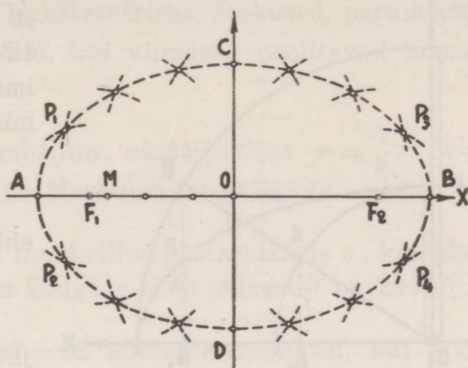
Kui $\varphi = 0$ või π , siis raadiusvektor r omab oma suurimat väärtust a , ja kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$ või $\frac{3\pi}{2}$, siis r omab väikesimat väärtust b .

§ 57. Ellipsi joonestamine.

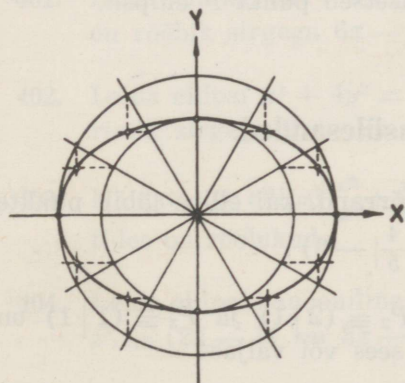
Ellipsit võime tema võrrandi järgi joonestada mitmel viisil. Vaatleme kahte neist.

1) Märgime antud ellipsi võrrandi järgi koordinaattelgedel ellipsi telgede pikkused $AB = 2a$ ja $CD = 2b$ ning fookused F_1

ja F_2 (95. joon.). Märgime X -teljel fookuste vahel mõne punkti M ja võtame AM üheks raadiusvektoriks ja MB teiseks raadiusvektoriks. Joonestame fookusest F_1 kaare raadiusega AM , samuti teisest fookusest F_2 kaare raadiusega MB . Need kaared lõikuvad kahes punktis P_1 ja P_2 , mis asetsevad ellipsil, sest nende kauguste summa fookustest on $2a$, s. o. $P_1F_1 + P_1F_2 = 2a$ ja $P_2F_1 + P_2F_2 = 2a$. Teeme sama konstruktsiooni fookustest F_2 ja F_1 , s. o. joonestame kaare raadiusega AM fookusest F_2 ja kaare raadiusega MB fookusest F_1 , saame lõikepunktid P_3 ja P_4 , mis asetsevad samuti ellipsil. Seega on kaheksa ellipsi punkti leitud ($A, B, C, D, P_1, P_2, P_3, P_4$). Edasi märgime X -teljel fookuste vahel mõne teise punkti, saame kaks uut raadiusvektori pikkust, mille abil analoogiliselt eelmisega võime leida neli uut ellipsi punkti. Analoogiliselt jätkates võime leida neljakaupa uusi ellipsi punkte niipalju, et nende arvust piisaks ellipsi joonestamiseks. Ühendades neid punkte pideva joonega, saame ellipsi.



95. joonis.

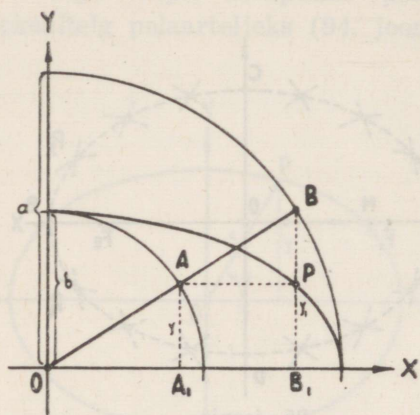


96. joonis.

X -teljele ning suurema ringjoone ja sirgete lõikepunktidest rööpjooned Y -teljele. Nende rööpjoonte lõikepunktid on ellipsi punktid. Ühendades saadud punkte pideva joonega saame ellipsi.

2) Joonestame ümber 0-punkti kaks ringjoont raadiustega a ja b (96. joon.). Tõmbame läbi 0-punkti mistahes sihis sirged, mis lõikavad ringjooni. Kui $a > b$, siis tõmbame väiksema ringjoone ja sirgete lõikepunktidest rööpjooned

Et sääraselt saadud punktid tõesti ellipsile kuuluvad, selleks vaatleme mõnda neist punktidest $P \equiv (x | y)$ (97. joon.). Ringjoonte lõikepunktid vabalt võetud sirgega olgu A ja B . Punkti A ordinaat on sama, mis punktil P , s. o. y . Punkti B ordinaat olgu y_1 . Sarnastes kolmnurkades OAA_1 ja OBB_1



97. joonis.

$$\frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}$$

ehk

$$y = \frac{b}{a} y_1$$

ja täisnurkses kolmnurgas OBB_1

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Paigutame y_1 väärtuse eelmisse avaldisse y_1 asemele, saame

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

mis on ellipsi võrrand. Järelikult, punkti P koordinaadid rahuldavad ellipsi võrrandit ja seega asetseb punkt P ellipsil.

§ 58. Harjutusülesanded.

- ✓ 391. Leida ellipsi kanooniline võrrand, kui ellips läbib punkte $P_1 \equiv (-3\frac{3}{5} | 4)$ ja $P_2 \equiv (4\frac{4}{5} | -3)$.
- ✓ 392. Kas punktid $P_1 \equiv (1 | 2)$, $P_2 \equiv (2 | 1)$ ja $P_3 \equiv (1 | 1)$ on ellipsi $4x^2 + 5y^2 = 21$ peal, sees või väljas?
- ✓ 393. Maakera tiirleb ümber Päikese ellipsit mööda, mille ühes fookuses asetseb Päike. Selle ellipsi suur telg on 300 000 000 km ja Päikese kaugus ellipsi keskpunktist 2 600 000 km. Kui suur on nimetatud ellipsi väike telg ja parameeter?

394. Leida ellipsi $10x^2 + 7y^2 = 140$ diameetri pikkus, kui diameeter lõikab ellipsit punktis, mille abstsiss $x = 2$. Misuguse nurga moodustab diameeter ellipsi lühema teljega?
395. Leida ellipsi $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{19} = 1$ ekstsentrisus, fookused, parameeter, juhtjooned ja diameetrid, kui viimased poolitavad koordinaatnurki.
396. Merkuuri orbiidi numbriline ekstsentrisus $e = \frac{1}{5}$. Leida ellips, mis oleks sarnane Merkuuri ringkäiguga.
397. Leida Maakera orbiidi numbriline ekstsentrisus e , kui Maakera lühema ja pikema kauguse suhe päikesest on $29:30$.
398. Leida ellipsi $7x^2 + 9y^2 = 63$ kõõlu otsapunktid, kui kõõlu võrrand on $x - 3y + 3 = 0$.
399. Leida ellipsi $7x^2 + 3y^2 = 19$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutepunkti ordinaat $y_1 = -2$ ja abstsiss $x_1 > 0$.
400. Leida ellipsi $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0 \equiv (-3 | 6)$.
401. Leida ellipsi $4x^2 + 5y^2 = 20$ puutuja võrrand, kui puutuja on rööbik sirgega $6x - 2y - 5 = 0$.
402. Leida ellipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ puutuja võrrand, kui puutuja on ristik sirgega $3x - 2y - 2 = 0$.
403. Näidata, et ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutujad diameetri otsapunktides on rööbikud.
404. Leida ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi puutuja punktis $P_1 \equiv (2 | -1)$ on $3x - y - 7 = 0$.
405. Leida ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi fookuste kaugus teineteisest on 2 ja juhtjoonte kaugus teineteisest on 10.
406. Leida ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi ühe punkti raadiusvektorid on 9 ja 15 ning juhtjoonte kaugus teineteisest on 36.

407. Leida ellipsi $x^2 + 5y^2 = 10$ diameetri $3x - 4y = 0$ kaasdiameeter.
408. Leida ellipsi $3x^2 + 5y^2 = 15$ diameetri võrrand, kui diameeter poolitab kõõlud, mis on rööbikud sirgega $2x - y - 1 = 0$.
409. Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diameetri $y = kx$ ja ta kaasdiameetri vaheline nurk.
410. Leida ellipsi $2x^2 + 9y^2 = 18$ kaasdiameetrite pikkused, kui nendevaheline nurk on 60° .
411. Leida ellipsi $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ kõõlu võrrand, kui kõõlu keskpunkt on $P \equiv (2 \mid -1)$.
412. Leida ellipsi $9x^2 + y^2 = 9$ diameetri võrrand, kui diameetri pikkus on $2\sqrt{5}$.
413. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi väike pooltelg on $2\sqrt{6}$ ja juhtjooned on $x \pm 10 = 0$.
414. Leida punkti $P_0 \equiv (1 \mid 1)$ polaar ellipsi $x^2 + 2y^2 = 4$ suhtes.
415. Leida raadiusvektorite vaheline maksimaalne nurk.
416. Ellipsisse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ on kujundatud ristkülik, mille küljed on rööbikud ellipsi telgedega. Kui suured on ristküliku maksimaalse pindala puhul ta küljed?
417. Leida ellipsi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ polaarvõrrand.
418. Leida ellipsi polaarvõrrand, kui pooluseks võtta üks fookustest ja polaartelg suunata ellipsi lähema lagipunkti poole.
419. Leida ellipsi polaarvõrrand, kui pooluseks võtta üks fookustest ja polaartelg suunata ellipsi kaugema lagipunkti poole.
420. Leida ellipsi parameetrilised võrrandid, võttes parameetriks nurk φ X -telje ja raadiusvektori vahel.

VIII peatükk.

Hüperbool.

§ 59. Hüperbooli võrrand.

Definitsioon: Hüperbool on tasapinnal asetsevate säärate punktide geomeetiline koht, kus iga punkti kauguste vahe kahest kindlast punktist samal tasapinnal on konstantne suurus. Kindlad punktid nimetatakse hüperbooli fookusteks ja punkti kaugused fookustest — hüperbooli raadiusvektoriteks.

Märgime tasapinnal kaks punkti F_1 ja F_2 (98. joon.), mis oleksid hüperbooli fookused. Ühendame need sirgega ja võtame selle sirge X -teljeks. Y -teljeks võtame ristjoone, mis poolitab fookuste kauguse teineteisest. Fookuste kaugus 0-punktist on hüperbooli lineaarne ekstsentrilisus c .

Olgu punkt $P \equiv (x|y)$ võetud hüperboolil ning r_1 ja r_2 selle punkti raadiusvektorid.

Siis täisnurksetest kolmnurkadest F_1PM ja F_2PM saame

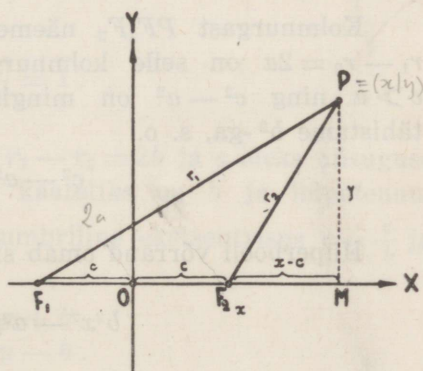
$$\begin{aligned} r_1^2 &= y^2 + (x + c)^2 = y^2 + x^2 + 2cx + c^2 \\ r_2^2 &= y^2 + (x - c)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2. \end{aligned}$$

Neid võrdusi teineteisest lahutades leiame, et

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$

ehk

$$\underbrace{(r_1 - r_2)}_{2a} (r_1 + r_2) = 4cx.$$



98. joonis.

Raadiusvektorite vahe $r_1 - r_2$ on definitsiooni põhjal konstantne suurus. Olgu see konstantne suurus $2a$, s. o.

$$r_1 - r_2 = 2a, \quad r_1 = 2a + r_2$$

siis

$$r_1 + r_2 = \frac{2cx}{a}. \quad 2r_2 = \frac{2cx}{a} - 2a;$$

Lahendades viimased võrrandid r_1 ja r_2 suhtes, saame

$$r_1 = \frac{c}{a}x + a$$

$$r_2 = \frac{c}{a}x - a.$$

Paigutades raadiusvektori r_1 väärtuse võrrandisse $r_1^2 = y^2 + x^2 + 2cx + c^2$ või r_2 väärtuse võrrandisse $r_2^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, saame pärast liikmete korraldamist hüperbooli võrrandi kujus

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Kolmnurgast PF_1F_2 näeme, et $2c$ on üks tema külj ja $r_1 - r_2 = 2a$ on selle kolmnurga teiste külgede vahe; seega $c > a$ ning $c^2 - a^2$ on mingisugune positiivne suurus, mille tähistame b^2 -ga, s. o.

$$c^2 - a^2 = b^2.$$

Hüperbooli võrrand omab siis kuju

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

mis kujutab teise järgu joont.

Kui tähistame saadud võrrandis

$$b^2 = M, \quad a^2 = N \quad \text{ja} \quad a^2b^2 = P,$$

siis saame hüperbooli võrrandi üldkuju

$$Mx^2 - Ny^2 = P,$$

kus M , N ja P on positiivsed suurused.

Kui jagame võrrandi mõlemad pooled a^2b^2 -ga, siis saame hüperbooli võrrandi kanoonilises kujus

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Selles võrrandis b tähendab kaatetit niisuguses kolmnurgas milles teiseks kaatetiks on a ja hüpoteenusiks c .

Suhe $\frac{c}{a} = e$ on hüperbooli numbriline ekstsentrismus, mille kaudu raadiusvektorid on

$$\begin{aligned} r_1 &= ex + a \\ r_2 &= ex - a, \end{aligned}$$

kus $e > 1$.

Kui loeksime fookusi ühendava sirge Y -teljeks, siis saaksime hüperbooli võrrandi üldkuju

$$Ny^2 - Mx^2 = P$$

ja kanooniline kuju oleks

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

kusjuures raadiusvektorite vahe $r_1 - r_2 = 2b$ ja a oleks niisuguse kolmnurga kaatet, kus teiseks kaatetiks on b ja hüpoteenusiks c . Sel juhul hüperbooli numbriline ekstsentrismus $e = \frac{c}{b}$ ja raadiusvektorid

$$\begin{aligned} r_1 &= ey + b \\ r_2 &= ey - b. \end{aligned}$$

§ 60. Hüperbooli kuju uurimine.

Hüperbooli võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ilmutatud kujust

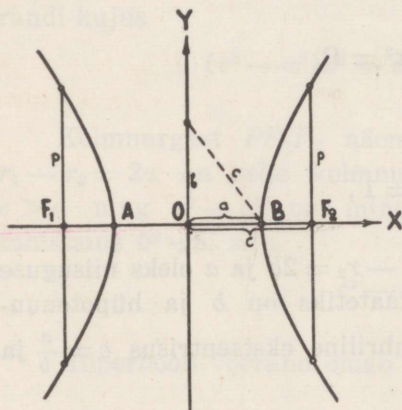
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

näeme, et abstsissile x võib anda väärtusi $+a$ -st $+\infty$ -ni ja $-a$ -st $-\infty$ -ni, et saada reaalselt ordinaadi y väärtust. Vahe-
mikus $-a < x < +a$ on ordinaadi y väärtus imaginaarne või
kompleksarv, s. o. selles vahemikus hüperboolil punkte ei ole.
Vahemikus $+a$ -st $+\infty$ -ni ja $-a$ -st $-\infty$ -ni vastab igale x -i
väärtusele ikka kaks ühesuurust reaalselt y -i väärtust, mis erine-
vad teineteisest ainult märgiga.

Kui ilmutame hüperbooli võrrandi abstsissi x suhtes, s. o.

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2},$$

siis näeme, et ordinaadile y võime anda iga väärtuse vahemikus
 $-\infty$ -st $+\infty$ -ni, et saada reaalselt abstsissi x väärtust. Siin iga
 y -i väärtusele vastab kaks ühe-
suurust reaalselt x -i väärtust,
mis erinevad teineteisest ainult
märgiga.



99. joonis.

Andes hüperbooli võrran-
dis abstsissile x rida väärtusi,
leiame hüperbooli punktid. Neid
pideva joonega ühendades saa-
me hüperbooli, mis kujutab
kaheharulist kõverjoont, kus-
juures harude haarad kaugene-
des X - ja Y -teljest lähevad lõp-
matusse, sest kui $x = \pm \infty$,
siis ka $y = \pm \infty$. Seega hüper-
bool on kaheharuline lahtine kõverjoon (99. joon.).

Kui $x = \pm a$, siis $y = 0$. Tähendab, hüperbool lõikab
 X -telge kahes punktis: $A \equiv (-a | 0)$ ja $B \equiv (+a | 0)$, mis
nimetatakse hüperbooli lagipunktideks. Lagipunktide
ühenduslõik AB on hüperbooli reaalselt ehk fokaal-
telg. Selle telje pikkus on $2a$. Seega hüperbooli raadiusvektorite vahe on
võrdne reaaltelje pikkusega. Reaalteljega keskpunktis risti on
hüperbooli imaginaartelg, mis hüperbooli ei lõika. Kui
 $x = 0$, siis $y = \pm b$ ja imaginaartelje pikkus on seega $2b$. Reaal-
telje ja imaginaartelje lõikepunkt on ühtlasi hüperbooli keskpunkt.

Kui $x = \pm c$, siis

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b}{a} \sqrt{b^2} = \pm \frac{b^2}{a} = p$$

on hüperbooli pool fokaallaiust ja nimetatakse hüperbooli parameetriks.

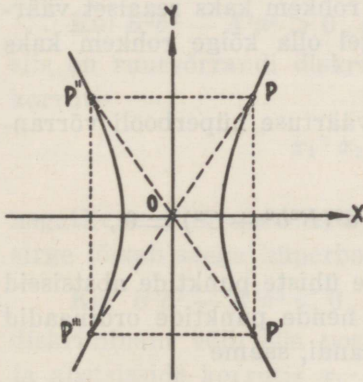
Kui hüperbooli reaaltelg ühtib Y -teljega, siis reaaltelje pikkus on $2b$ ja parameeter

$$p = x = \frac{a}{b} \sqrt{c^2 - b^2} = \frac{a}{b} \sqrt{a^2} = \pm \frac{a^2}{b}.$$

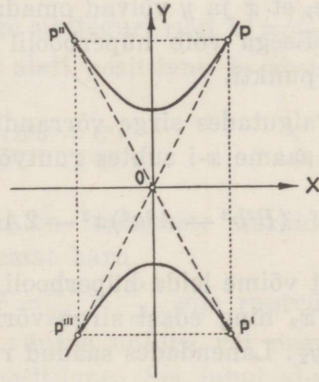
Koordinaatteljed on hüperbooli sümmeetriatelgedeks ja 0-punkt tema sümmeetria keskpunktiks. Sest kui punkt $P \equiv (x | y)$ asetseb hüperboolil

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{või} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

siis asetsevad ka selle punkti peegelduspunktid $P' \equiv (x | -y)$ X -teljest, $P'' \equiv (-x | y)$ Y -teljest ja $P''' \equiv (-x | -y)$ 0-punk-



100. joonis.



101. joonis.

tist samal hüperboolil, sest nende punktide koordinaadid rahuldavad samuti hüperbooli võrrandit (100. ja 101. joon.).

Hüperboolid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

nimetatakse ka aashüperboolideks.

Kui hüperbooli võrrandis $a = b$, siis võrrand

$$x^2 - y^2 = a^2$$

kujutab võrdhaarset hüperbooli. Hüperboolid

$$x^2 - y^2 = \pm a^2$$

on võrdhaarsed kaashüperboolid.

§ 61. Hüperbool ja sirge.

Et leida hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja sirge

$$Ax + By + C = 0$$

ühiseid punkte, selleks lahendame hüperbooli ja sirge võrrandid jooksvate koordinaatide x ja y suhtes. Võrrandeid lahendades näeme, et x ja y võivad omada kõige rohkem kaks reaalselt väärtust. Seega võib hüperboolil ja sirgel olla kõige rohkem kaks ühist punkti.

Paigutades sirge võrrandist y -i väärtuse hüperbooli võrrandisse, saame x -i suhtes ruutvõrrandi

$$(B^2b^2 - A^2a^2)x^2 - 2ACa^2x - a^2(B^2b^2 + C^2) = 0,$$

millest võime leida hüperbooli ja sirge ühiste punktide abstsissid x_1 ja x_2 ning edasi sirge võrrandist nende punktide ordinaadid y_1 ja y_2 . Lahendades saadud ruutvõrrandi, saame

$$x_{1,2} = \frac{ACa^2 \pm Bab\sqrt{(B^2b^2 - A^2a^2) + C^2}}{B^2b^2 - A^2a^2},$$

millest näeme, et hüperbooli ja sirge ühiste punktide reaalsus onoleb juurealusest avaldisest ehk ruutvõrrandi diskriminandist

$$(B^2b^2 - A^2a^2) + C^2,$$

mis võib olla positiivne, võrdne nulliga või negatiivne.

Kui ruutvõrrandi diskriminant on positiivne, siis võrrandi juured on reaalsed ja isesuured ning sirge lõikab hüperbooli kaht haru või üht haru kahes punktis, kusjuures neid lõikepunkte ühendav sirglõik nimetatakse hüperbooli kõõlaks. Et siin sirge läbib hüperbooli reaalsed punktid, siis nimetatakse neid punkte ühendavat sirglõiku ühtlasi hüperbooli reaalkõõlaks.

Kui ruutvõrrandi diskriminant on võrdne nulliga, siis võrrandi juured on reaalsed ja ühesuured ning sirge on hüperboolile puutujaks.

Kui ruutvõrrandi diskriminant on 0, siis võib ka juhtuda, et sirge lõikab hüperbooli ühes lõplikus ja teises lõpmatus punktis või mõlemad lõikepunktid on lõpmatuses.

Kui ruutvõrrandi diskriminant on negatiivne, siis võrrandi juured on imaginaarsed või kompleksarvud ja sirge asetseb väljaspool hüperbooli, s. o. ta läheb hüperbooli kahe haru vahelt läbi. Sel juhul sirge lõikab hüperbooli kahes imaginaarses punktis, millevaheline sirglõik nimetatakse hüperbooli imaginaarkõõlaks.

Kui $B^2b^2 - A^2a^2 > 0$, s. o. sirge sihteguri ruut $k^2 = \frac{A^2}{B^2} < \frac{b^2}{a^2}$, siis on ruutvõrrandi diskriminant alati positiivne ja abstsisside korrutis

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{a^2(B^2b^2 + C^2)}{B^2b^2 - A^2a^2}$$

negatiivne. Siin abstsissid x_1 ja x_2 on isesuguste märkidega ja sirge lõikab seega hüperbooli mõlemat haru.

Kui $B^2b^2 - A^2a^2 < 0$, s. o. $k^2 = \frac{A^2}{B^2} > \frac{b^2}{a^2}$, siis ruutvõrrandi diskriminant võib olla positiivne, võrdne nulliga või negatiivne ja abstsisside korrutis $x_1 \cdot x_2$ on positiivne. Sel juhul abstsissid x_1 ja x_2 on ühesuguste märkidega ja sirge lõikab hüperbooli üht haru kahes lõplikus punktis, kui $A^2a^2 - B^2b^2 < C^2$, või on hüperboolile puutujaks, kui $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$, või asetseb väljaspool hüperbooli, kui $A^2a^2 - B^2b^2 > C^2$.

Kui $B^2b^2 - A^2a^2 = 0$ ja $C \neq 0$, siis ühelt poolt näeme, et ruutvõrrand taandub lineaarseks võrrandiks

$$2ACx + B^2b^2 + C^2 = 0,$$

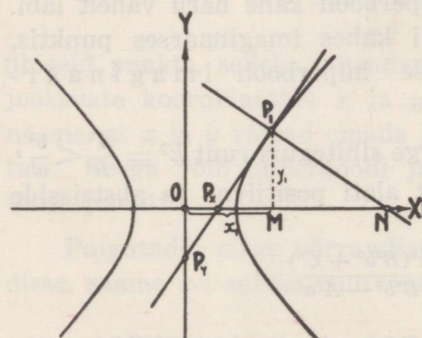
mis annab ühe lõpliku abstsissi väärtuse, ja teiselt poolt, ruutvõrrandi lahend annab teise määramata suure abstsissi väärtuse. Sel juhul sirge lõikab hüperbooli ühes lõplikus ja teises lõpmatus punktis. Kui aga $B^2b^2 - A^2a^2 = 0$ ja $C = 0$, siis $x_1 = +\infty$ ja $x_2 = -\infty$ ning sirge ja hüperbooli mõlemad lõikepunktid asetsevad ühel ja teisel pool lõpmatuses.

§ 62. Hüperbooli puutuja ja normaal. Polaar ja poolus.

Kui sirge on hüperboolile

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

puutujaks punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, siis puutujale ristjoon selles punktis on hüperbooli normaal (102. joon.). Sirglõik X -teljel



102. joonis.

puutuja ja X -telje lõikepunktist kuni puutepunkti ordinaadini y_1 , s. o. $P_x M$, on puutuja alus, ja sirglõik samal teljel puutepunkti ordinaadist y_1 kuni normaali ja X -telje lõikepunktini, s. o. MN , on normaali alus.

Hüperbooli puutuja on sirge läbi punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$, s. o.

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Et hüperbooli kujutava funktsiooni tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\frac{b^2}{a^2}x}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

ja punktist $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ puutuja sihitegur

$$k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

siis hüperbooli puutuja võrrand on

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

ehk teisendatult

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

ning hüperbooli normaali võrrand on

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

kus x_1 ja y_1 on puutepunkti koordinaadid.

Et puutuja ja X -telje lõikepunkti P_x koordinaadid $x = OP_x$ ja $y = 0$ ning puutuja ja Y -telje lõikepunkti P_y koordinaadid $x = 0$ ja $y = OP_y$, rahuldavad hüperbooli puutuja võrrandit, siis

$$\frac{x_1 \cdot OP_x}{a^2} = 1 \text{ ja } -\frac{y_1 \cdot OP_y}{b^2} = 1,$$

millest lõikepunkti P_x kaugus 0-punktist

$$OP_x = \frac{a^2}{x_1}$$

ja lõikepunkti P_y kaugus 0-punktist

$$OP_y = -\frac{b^2}{y_1}.$$

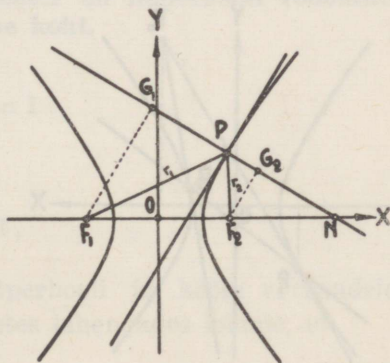
Seega puutuja aluse pikkus

$$P_x M = OM - OP_x = x_1 - \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1},$$

kusjuures normaali aluse pikkus

$$MN = \frac{y_1}{\tan \widehat{P_1 N M}} = \frac{y_1}{\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Sellest nähtub, et kui mitmel hüperboolil on ühine reaaltelg $2a$ ja nende hüperboolide puutepunktidel on üks ja sama abstsiss x_1 , siis kõik puutujad neis punktides lõikavad X -telge ühes ja samas punktis P_x . Kui hüperboolide ühiseks imaginaarteljeks on $2b$ ja puutepunktide ordinaadiks y_1 , siis puutujad neis punktides lõikavad Y -telge ühes ja samas punktis P_y .



103. joonis.

Võtame hüperboolil vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$ ja puutuja ning normaali selles punktis (103. joon.). Tõmbame fookustest F_1 ja F_2 normaale ristjooned F_1G_1 ja F_2G_2 . Siis sarnastest kolmnurkadest NF_1G_1 ja NF_2G_2 näeme, et

$$\frac{F_1G_1}{F_2G_2} = \frac{F_1N}{F_2N} = \frac{x+c+\frac{b^2x}{a^2}}{x-c+\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{ex+a}{ex-a} = \frac{r_1}{r_2},$$

millest järeldub, et täisnurksed kolmnurgad F_1PG_1 ja F_2PG_2 on sarnased ning

$$F_1\hat{P}G_1 = F_2\hat{P}G_2.$$

Tähendab, hüperbooli normaal punktis P moodustab raadiusvektoritega võrdsed nurgad ja puutuja samas punktis jagab raadiusvektorite vahelise nurga F_1PF_2 kaheks võrdseks nurgaks.

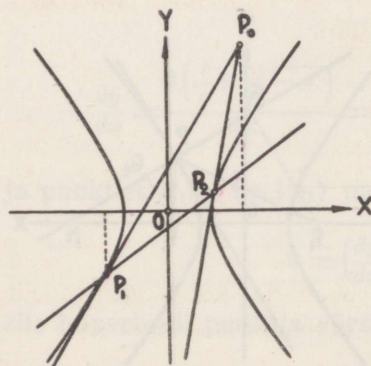
Kui punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ asetseb väljaspool hüperbooli, s. o. hüperbooli harude vahel, siis sellest punktist võib tõmmata hüperboolile

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kaks puutajat. Puutepunktide koordinaatide leidmiseks lahendame võrrandid

$$\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$



104. joonis.

puutepunktide koordinaatide x_1 ja y_1 suhtes. Saame kaks puutepunkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$ (104. joon.).

Kui võrrandis

$$\frac{x_0x_1}{a^2} - \frac{y_0y_1}{b^2} = 1$$

x_1 ja y_1 lugeda jooksvateks koordinaatideks, siis see võrrand kujutab sirget, mis läbib puutepunktid P_1 ja P_2 ning moodustab koordi-

naattelgi lõigates telglõigud $\frac{a^2}{x_0}$ ja $-\frac{b^2}{y_0}$, sest

$$\frac{x}{\left(\frac{a^2}{x_0}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{b^2}{y_0}\right)} = 1.$$

See sirge läbi punktide P_1 ja P_2 on punkti P_0 polaar ja punkt P_0 on selle sirge poolus.

Kui poolus P_0 asetseb hüperboolil, siis polaar läbib pooluse ja on hüperboolile puutujaks punktis P_0 .

Kui punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ on hüperbooli sees, s. o. hüperbooli haarade vahel, siis sellest punktist ei saa tõmmata hüperboolile puutujat ja võrrandite

$$\frac{x_0 x_1}{a^2} - \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

juured on siis imaginaarsed või kompleksarvud. Sel juhul sirge võrrand

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

kujutab punkti P_0 polaari, mis asetseb väljaspool hüperbooli.

§ 63. Hüperbooli diameetrid.

Definitsioon: Hüperbooli diameeter on hüperbooli rööbikute kõõlude keskpunktide geomeetriline koht.

Olgu hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rööbikuid kõõle kujutav võrrand

$$y = kx + t,$$

kus t on muutuv parameeter. Hüperbooli ja kõõlu võrrandeid jooksvate koordinaatide x ja y suhtes lahendades leiame, et

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - k^2\right)x^2 - 2ktx - t^2 - b^2 = 0,$$

millest kõõlu keskpunkti koordinaadid

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{kt}{\frac{b^2}{a^2} - k^2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = k \frac{x_1 + x_2}{2} + t = \frac{\frac{b^2}{a^2} t}{\frac{b^2}{a^2} - k^2}$$

on lõplikud suurused, kui $\frac{b^2}{a^2} - k^2 \neq 0$.

Et leida hüperbooli rööbikute kõõlude keskpunktide geomeetiline koht, s. o. hüperbooli diameetri võrrand, selleks kõrvaldame saadud võrdustest muutuva parameetri t . Jagades saame

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2 k}{b^2}$$

ehk

$$y = \frac{b^2}{a^2 k} x,$$

mis kujutab 0-punkti läbivat sirget. Seega hüperbooli diameetrid läbivad hüperbooli keskpunkti.

Üks rööbikutest kõõludest läbib 0-punkti ja ta võrrand on

$$y = kx,$$

mis kujutab siis ka hüperbooli üht diameetrit. Kui tähistame

$$k' = \frac{b^2}{a^2 k},$$

millest

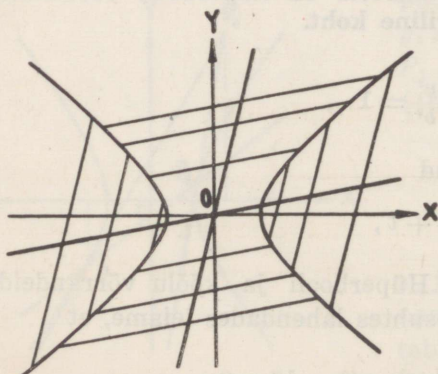
$$kk' = \frac{b^2}{a^2},$$

siis

$$y = kx \text{ ja } y = k'x$$

on hüperbooli kaasdiameetrid, milledest kumbki poolitab teisega rööbikud kõõlud (105. joon.).

Et hüperbooli kaasdiameetrite sihitegurite korrutis on positiivne konstantne



105. joonis.

suurus, siis sihitegurid on ühesuguste märkidega ja mõlemad kaasdiameetrid moodustavad X -telje positiivse suunaga kas teravnurgad või nürinurgad. Kui ühe diameetri sihiteguri absoluutväärtus $|k| < \frac{b}{a}$, siis diameeter lõikab hüperbooli mõlemat haru ja on seega hüperbooli reaaldiameeter. Tema kaasdiameetri sihiteguri absoluutväärtus on siis $|k'| > \frac{b}{a}$. Kaasdiameeter hüperbooli ei lõika ja on seega hüperbooli imaginaardiameetrik. Kaasdiameetritest on üks ikka reaaldiameeter ja teine imaginaardiameeter.

Et sihiteguri k kasvamisel sihitegur k' kahaneb ja ümberpöörduvalt, siis hüperbooli diameetri liikumisel, näiteks, kellaosuti liikumise suunas, ta kaasdiameeter liigub vastupidises suunas.

Kui $k = 0$ ja $k' = \infty$, siis on täidetud sirgete ristseisu tingimus

$$k = -\frac{1}{k'}$$

ja hüperbooli kaasdiameetrid on siis risti. Sel puhul kaasdiameetrid ühtivad hüperbooli telgedega ja neid nimetatakse hüperbooli peadiameetriteks. Üks on hüperbooli peareaaldiameeter ja teine peaimaginaardiameeter.

Võrdhaarse hüperbooli kaasdiameetrite sihitegurite korrutis

$$kk' = 1,$$

millest nähtub, et võrdhaarse hüperbooli kaasdiameetrid moodustavad X -telje positiivse suunaga nurgad, mille summa on $\frac{\pi}{2}$ või $\frac{3\pi}{2}$.

§ 64. Hüperbooli asümptoodid.

Kui ühe kaasdiameetri sihitegur $k = \pm \frac{b}{a}$, siis ka teise kaasdiameetri sihitegur $k' = \pm \frac{b}{a}$. Sel juhul kaasdiameetrid langevad ühte ja moodustavad ühise sirge, mis nimetatakse hüperbooli asümptoodiks.

Kui $k = k'$, siis

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

millest

$$k = \pm \frac{b}{a},$$

ja hüperbooli diameetri võrrand omab kuju

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{ ehk } \frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0,$$

mis kujutab hüperbooli kaht asümptooti.

Võrdleme asümptootide võrrandit hüperbooli võrrandiga

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a}x \left| \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right|.$$

Kui $|x| > a$, siis

$$\left| \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right| < 1$$

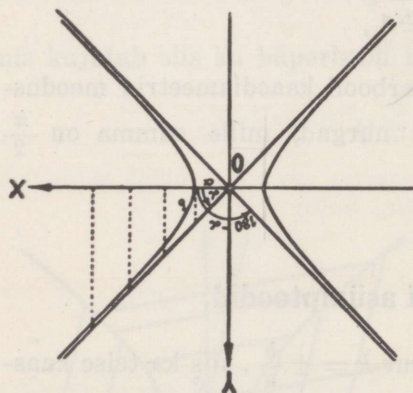
ja

$$\left| \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right| < \left| \frac{b}{a}x \right|,$$

s. o. ühe ja sama abstsissi väärtuse puhul hüperboolil asetseva punkti ordinaat on lühem kui asümptoodil asetseva punkti vastav ordinaat (106. joon.). Mida suuremaks saab x , seda lähemale

tuleb hüperboolil asetseva punkti ordinaat asümptoodil asetseva punkti vastavale ordinaadile, sest et kasvava $|x|$ pu-

hul $\left| \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right|$ väärtus läheneb piiramatult 1-le. See tähendab, et asümptoot tuleb hüperbooli haaradele kuitahes ligidale, kui $|x|$ piiramatult kasvab. Seega asümptooti võime vaadelda kui hüperbooli puutujaid lõpmatuses ehk kui hüperbooli diameetreid, mille lõike-



106. joonis.

punktid hüperbooliga on lõpmatuses.

Kui hüperbooli üks asümptoot moodustab X -telje positiivse suunaga nurga α , siis teine asümptoot moodustab sama teljega nurga $\pi - \alpha$.

§ 65. Hüperbooli juhtjooned.

Võtame hüperboolil

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$ (107. joon.), mille kaugused fookustest on

$$PF_1 = ex + a = e \left(x + \frac{a}{e} \right)$$

$$PF_2 = ex - a = e \left(x - \frac{a}{e} \right),$$

kus $\frac{a}{e} < a$, sest $e > 1$. Märgime X -teljel punktid J_1 ja J_2 nõnda, et nende kaugus hüperbooli keskpunktist oleks $\frac{a}{e}$. Tõmbame läbi punktide J_1 ja J_2 , mis asetsevad hüperbooli harude vahel, ristjooned X -teljele, saame hüperbooli juhtjooned, mille võrrandid on

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{ja} \quad x = +\frac{a}{e}.$$

Punkti P kaugused juhtjoontest on

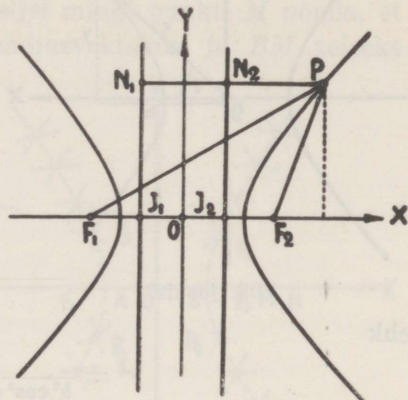
$$PN_1 = x + \frac{a}{e} = \frac{ex + a}{e}$$

$$PN_2 = x - \frac{a}{e} = \frac{ex - a}{e}$$

ning punkti P kauguste suhe fookusest ja vastavast juhtjoonest

$$\frac{PF_1}{PN_1} = \frac{PF_2}{PN_2} = e$$

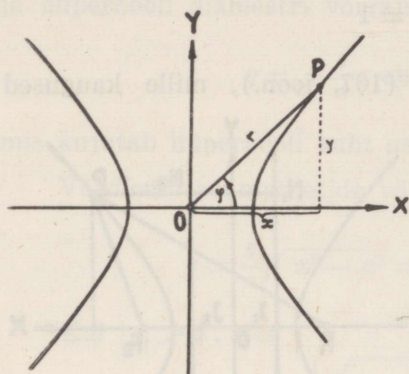
on konstantne suurus ja nimelt võrdne hüperbooli numbrilise eks-
tsentrisusega. Seega hüperbooli võime vaadelda kui sääraste
punktide geometrilist kohta, kus iga punkti kauguste suhe kind-
last punktist (fookusest) ja kindlast sirgest (juhtjoonest) on kons-
tantne suurus $e > 1$.



107. joonis.

§ 66. Hüperbooli polaarvõrrand.

Võtame hüperbooli keskpunkti polaarkoordinaatide pooluseks ja reaaltelje polaarteljeks (108. joon.). Märgime hüperboolil



108. joonis.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vabalt mingi punkti $P \equiv (x | y)$, mille polaarkoordinaadid on r ja φ . Et

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi,$$

siis hüperbooli võrrand omab kuju

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

ehk

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Et $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ ja $a^2 + b^2 = c^2$, siis

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 \varphi - a^2}$$

ehk

$$r^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \varphi - 1},$$

millest

$$r = \frac{b}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi - 1}},$$

mis on hüperbooli polaarvõrrand, kui hüperbooli keskpunkt lugeda pooluseks.

Kui $\varphi = 0$ või π , siis raadiusvektor r omab oma väikesimat väärtust a . Kui

$$e^2 \cos^2 \varphi - 1 = 0$$

ehk

$$b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi = 0,$$

millest

$$\tan \varphi = \pm \frac{b}{a},$$

siis $r = \infty$ ja ühtib hüperbooli ühe või teise asümptoodiga. Täheandab, hüperbooli puhul polaarnurk φ kulgeb ainult väärtusi $\arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$ -st $\arctan\left(+\frac{b}{a}\right)$ -ni.

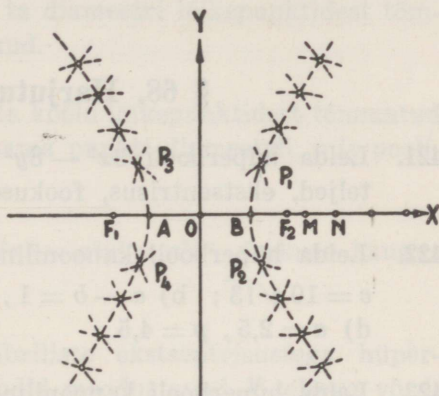
§ 67. Hüperbooli joonestamine.

1) Kasutades hüperbooli võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

märgime X -teljel fookused F_1 ja F_2 ning hüperbooli lagipunktid A ja B (109. joon.). Märgime X -teljel mingi punkti M nõnda, et $AM > 2a$ ja võtame AM üheks raadiusvektoriks ja BM teiseks

raadiusvektoriks. Joonestame fookusest F_1 kaare raadiusega AM , samuti teisest fookusest F_2 kaare raadiusega BM . Need kaared lõikuvad kahes punktis P_1 ja P_2 , mis asetsevad hüperboolil, sest nende kauguste vahe fookustest $P_1F_1 - P_1F_2 = 2a$ ja $P_2F_1 - P_2F_2 = 2a$. Teeme sama konstruktsiooni fookustest F_2 ja F_1 , s. o. joonestame kaare raadiusega AM fookusest F_2 ja kaare raadiusega BM fookusest F_1 , saame lõikepunktid P_3 ja P_4 , mis asetsevad hüperbooli teisel harul. Märgides X -teljel edasi mingi muu punkti N nõnda, et $AN > 2a$, saame kaks uut raadiusvektorit, mille abil analoogiliselt eelmisega leiame neli uut hüperbooli punkti. Analoogiliselt jätkates võime saada neljakaupa uusi hüperbooli punkte niipalju, et nende arvust piisaks hüperbooli joonestamiseks.



109. joonis.

110. joonis. Diagram 110: Construction of hyperbola points using a line. A coordinate system with X and Y axes is shown. Foci F1 and F2 are on the X-axis. A line segment is drawn through F1, intersecting the X-axis at point N. A point P is on the line. A circle is drawn centered at F1 with radius PN. A line segment is drawn through F2, intersecting the X-axis at point M. A point Q is on the line. A circle is drawn centered at F2 with radius QM. The intersection of the two circles is point P, which lies on the hyperbola. The hyperbola branches are shown as dashed lines.

110. joonis.

2) Märgime hüperbooli võrrandi järgi X -teljel fookused F_1 ja F_2 (110. joon.). Võtame liineali ja niidi niisugusena, et liineali pikkus oleks niidi pikkusest $2a$ võrra suurem. Liineali ühe otsa kinnitame fookusse F_1 nõnda, et ta saab selles punktis pöör-

duda. Liineali teise otsa külge kinnitame niidi ühe otsa ja niidi teise otsa fookusse F_2 . Kui pliatsiots P liineali liikumisel mööda liineali nõnda liigub, et niit on alati pingul, siis kujutab pliatsiots hüperbooli, sest

$$r_1 - r_2 = PF_1 - PF_2 = NF_1 - (NP + PF_2) = 2a.$$

Analoogiliselt saame Y -teljest teisel pool asetseva hüperbooli haru.

§ 68. Harjutusülesanded.

421. Leida hüperbooli $3x^2 - 8y^2 = 6$ reaali- ja imaginaar-poolteljed, ekstsentrisus, fookused, parameeter ja juhtjooned.
422. Leida hüperbooli kanooniline võrrand, kui a) $a + b = 50$, $c = 10\sqrt{13}$; b) $a - b = 1$, $c = \sqrt{221}$; c) $c = 5$, $p = 24$; d) $a = 2,5$, $p = 4,5$.
423. Leida hüperbooli kanooniline võrrand, kui hüperbool läbib punkte $P_1 \equiv (8 | -6)$ ja $P_2 \equiv (6 | -3)$.
424. Hüperboolil $2x^2 - 3y^2 = 8$ ja ta asümptoodil asetsevate punktide abstsiss on 6. Leida nende punktide ordinaatide vahe.
425. Leida hüperbooli $x^2 - y^2 = 5$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutepunkti ordinaat $y_1 = -2$ ja abstsiss $x_1 < 0$.
426. Leida hüperbooli $x^2 - 2y^2 = 8$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0 \equiv (1 | 1)$.
427. Leida hüperbooli $4y^2 - x^2 = 20$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0 \equiv (-8 | -1)$.
428. Leida hüperbooli $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ puutuja võrrand, kui puutuja läbib juhtjoone lõikepunkti X -teljega.
429. Leida hüperbooli $5x^2 - 4y^2 = 20$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on rööbik sirgega $3x - 2y = 0$.

430. Leida hüperbooli $x^2 - 4y^2 = 12$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on ristik sirgega $x + y - 1 = 0$.
431. Näidata, et kaashüperboolidel on ühised asümptoodid.
432. Näidata, et võrdhaarse hüperbooli asümptoodid on risti ja moodustavad X -teljega nurgad $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{3\pi}{4}$.
433. Näidata, et hüperbooli ja ta diameetri lõikepunktidest tõmmatud puutujad on rööbikud.
434. Näidata, et hüperbooli ja ta kõõlu lõikepunktidest tõmmatud puutujad läbivad ühe ja sama punkti diameetril, mis poolitab kõõlu.
435. Näidata, et hüperbooli $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ fookuse kaugus asümptoodist on b .
436. Näidata, et võrdsete numbriliste ekstsentrisustega hüperboolide vastavad asümptoodid moodustavad X -teljega võrdsed nurgad.
437. Näidata, et hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ iga puutuja moodustab asümptootidega kolmnurga, mille pindala $S = ab$.
438. Näidata, et asümptootide vahelise hüperbooli puutuja lõigu keskkohaks on puutepunkt.
439. Näidata, et hüperbooli puutuja lõik puutepunkti ja juhtjoone vahel näib fookusest 90° nurgas.
440. Näidata, et iga sirge, mille poolus asetseb hüperbooli asümptoodil, on asümptoodiga rööbik ja ühtib siis asümptoodiga, kui asümptoodil asetsev poolus on määramata kaugel.
441. Näidata, et hüperbooli $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ fookuste kauguste korrutis puutujast on b^2 .
442. Näidata, et hüperbooli iga punkti kauguste korrutis asümptootidest on konstantne suurus.

443. Näidata, et iga sirge, mis on rööbik asümptoodiga, lõikab hüperbooli ainult ühes punktis.
444. Leida asümptootide ja X -telje vahelised nurgad, kui hüperbooli numbriline ekstsentrisus $e = 1,8$.
445. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli reaal-pooltelg $a = 4$ ja asümptoodid on $y = \pm \frac{2}{3}x$.
446. Leida hüperbooli kanooniline võrrand, kui sirge $x - y - 3 = 0$ puutepunkt hüperbooliga on $P_1 \equiv (5 | 2)$.
447. Leida hüperbooli kanooniline võrrand, kui hüperbooli üks puutuja on $5x - 6y - 8 = 0$ ja asümptoodid on $x \pm 2y = 0$.
448. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli lagipunktid on ellipsi $5x^2 + 8y^2 = 40$ fookustes ja hüperbooli fookused on sama ellipsi lagipunktides.
449. Hüperboolil $9x^2 - 8y^2 = 72$ leida punkt, milles puutuja moodustab X -telje positiivse suunaga 120° nurga.
450. Leida hüperbooli $16x^2 - 9y^2 = 144$ puutuja, mille kaugused keskpunktist ja fookusest on võrdsed.
451. Leida hüperbooli $3x^2 - 5y^2 = 30$ puutujad punktis, milles sirge $3x - 5y = 0$ lõikab hüperbooli.
452. Leida hüperbooli $2x^2 - 3y^2 = 12$ kaasdiameetrite võrrandid, kui nendevaheline nurk on $\frac{\pi}{4}$.
453. Leida funktsionaalne seos hüperbooli numbrilise ekstsentrisuse e ja asümptootide vahelise nurga ω (asümptootnurga) vahel.
454. Mida kujutavad võrrandid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ja $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \infty$?
455. Leida hüperbooli $2x^2 - 9y^2 = 2$ polaarvõrrand.
456. Leida hüperbooli polaarvõrrand, kui pooluseks võtta üks fookustest ja polaartelge lugeda hüperbooli keskpunkti sihis.

457. Leida hüperbooli polaarvõrrand, kui pooluseks võtta üks fookustest ja polaartelge lugeda hüperbooli keskpunktile vastassihis.
458. Missuguse kuju omandab hüperbooli võrrand $x^2 - y^2 = a^2$, kui koordinaattelgi pöörata nurga $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ võrra?
459. Missuguse kuju omandab hüperbooli võrrand $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, kui uuteks koordinaattelgedeks võtta hüperbooli asümptootid?

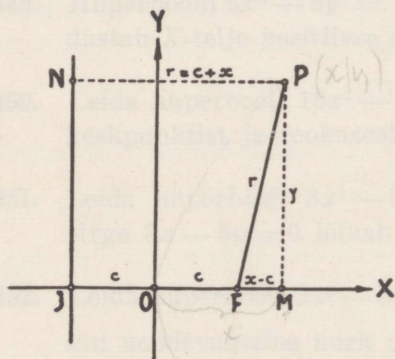
IX peatükk.

Parabool.

§ 69. Parabooli võrrand.

Definitsioon: Parabool on tasapinnal asetsevate säaraste punktide geomeetiline koht, kus iga punkti kaugused samal tasapinnal võetud kindlast punktist ja kindlast sirgest on võrdsed. Kindel punkt nimetatakse parabooli fookuseks ja kindel sirge juhtjooneks.

Parabooli punkti kaugus fookusest on parabooli raadiusvektor.



111. joonis.

Seega parabooli lineaarne ekstsentrilisus c , s. o. fookuse kaugus 0-punktist, on võrdne juhtjoone kaugusega 0-punktist.

Valime tasapinnal punkti $P \equiv (x | y)$ nõnda, et ta definitsiooni järgi asetseks paraboolil. Siis $PF = PN$ ja parabooli numbri-line ekstsentrilisus

$$e = \frac{PF}{PN} = 1.$$

ning raadiusvektor

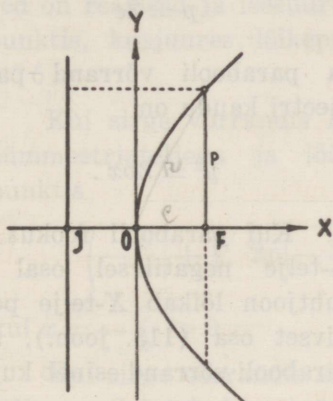
$$r = c + x.$$

Täisnurksest kolmnurgast PFM

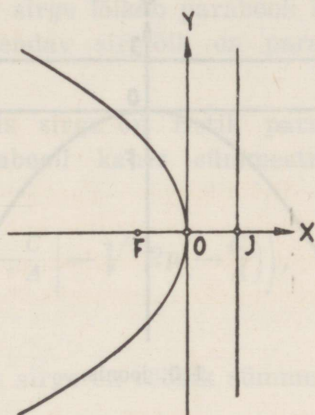
$$y^2 = r^2 - (x - c)^2 = (c + x)^2 - (x - c)^2,$$

millest

$$y^2 = 4cx,$$



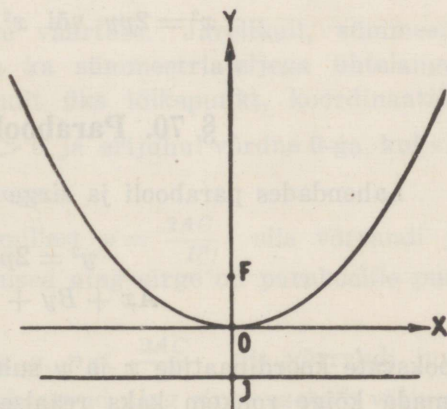
112. joonis.



113. joonis.

mis kujutab definitsiooniga määratud parabooli. Saadud võrrand on teise astme võrrand ja seega on parabool teise järgu joon.

Parabooli võrrandis $4c > 0$ ja seega ainult positiivsele x -i väärtusele vastab reaalne y -i väärtus. Siin abstsissi x igale positiivsele väärtusele vahemikus $0 \leq x < +\infty$ vastab kaks ordinaadi y reaalsel väärtust, mis erinevad teineteisest ainult märgiga. Kuid ordinaadi y nii positiivsele kui ka negatiivsele väärtusele vahemikus $-\infty < y < +\infty$

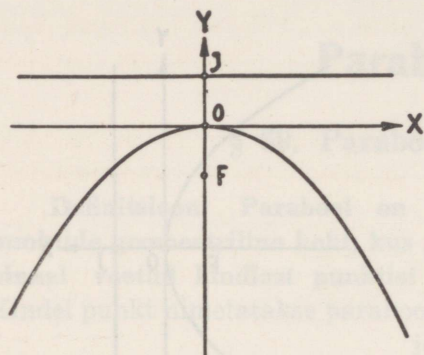


114. joonis.

vastab ainult üks abstsissi x reaalne positiivne väärtus. Parabool on seega 0-punkti ning esimest ja neljandat kvadranti läbiv üheharuline ja kahehaaraline lahtine kõverjoon ja ainult X -telg on ta sümmeetriateljeks (112. joon.).

Parabooli punkt 0-punkti on parabooli lagipunkt. Parabooli haarad kaugenevad järk-järgult X - ja Y -teljest ja lähevad lõpmatusse.

Parabooli pool fokaallaiust ehk parameeter



115. joonis.

$$p = 2c$$

ja parabooli võrrand parameetri kaudu on

$$y^2 = 2px.$$

Kui parabooli fookus on X -telje negatiivsel osal ja juhtjoon lõikab X -telje positiivset osa (113. joon.), siis parabooli võrrand esineb kujus

$$y^2 = -2px.$$

Kui parabooli sümmeetriateljeks on Y -telg, s. o. fookus asetseb Y -teljel ja juhtjoon lõikab Y -telge (114. ja 115. joon.), siis parabooli võrrand esineb kujus

$$x^2 = 2py \text{ või } x^2 = -2py.$$

§ 70. Parabool ja sirge.

Lahendades parabooli ja sirge võrrandid

$$y^2 = 2px$$

$$Ax + By + C = 0$$

jooksvate koordinaatide x ja y suhtes, leiame, et x ja y võivad omada kõige rohkem kaks reaalselt väärtust. Seega paraboolil ja sirgel võib olla kõige rohkem kaks ühist punkti.

Lahendades neid võrrandeid, saame x -i suhtes ruutvõrrandi

$$A^2x^2 + 2(AC - B^2p)x + C^2 = 0,$$

millest ühiste punktide abstsissid

$$x_{1,2} = \frac{B^2p - AC \pm B \sqrt{p(B^2p - 2AC)}}{A^2}.$$

Kui siin $B^2p - 2AC > 0$ ehk $p > \frac{2AC}{B^2}$, siis võrrandi juured on reaalsed ja isesuurused ning sirge lõikab parabooli kahes punktis, kusjuures lõikepunkte ühendav sirglõik on parabooli kõi.

Kui sirge võrrandis $B = 0$, siis sirge on ristik parabooli sümmeetriateljega ja lõikab parabooli kahes sümmeetrilises punktis

$$\left(-\frac{C}{A} \mid + \sqrt{2p\left(-\frac{C}{A}\right)}\right) \text{ ja } \left(-\frac{C}{A} \mid - \sqrt{2p\left(-\frac{C}{A}\right)}\right),$$

$$\text{kui } x = -\frac{C}{A} > 0.$$

Kui sirge võrrandis $A = 0$, siis sirge on rööbik sümmeetriateljega. Sel juhul ruutvõrrand

$$A^2x^2 + 2(AC - B^2p)x + C^2 = 0$$

taandub lineaarseks võrrandiks

$$2B^2px - C^2 = 0,$$

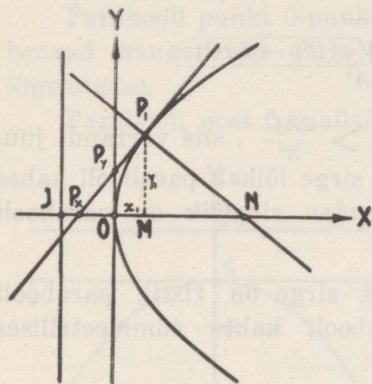
mis annab ainult ühe juure väärtuse. Järelikult, sümmeetriateljega rööbikul sirgel (ja ka sümmeetriateljega ühtelangeval sirgel) on parabooliga ainult üks lõikepunkt, koordinaatidega $\left(\frac{C^2}{2B^2p} \mid -\frac{C}{B}\right)$, kus $x = \frac{C^2}{2B^2p} > 0$ ja erijuhul võrdne 0-ga, kui sirge langeb ühte sümmeetriateljega.

Kui $B^2p - 2AC = 0$, millest $p = \frac{2AC}{B^2}$, siis võrrandi juured on reaalsed ja ühesuurused ning sirge on paraboolile puutujaks.

Kui $B^2p - 2AC < 0$, s. o. $p < \frac{2AC}{B^2}$, siis võrrandi juured on imaginaarsed või kompleksarvud ning sirge asetseb väljaspool parabooli, s. o. parabooli kumeruse pool.

§ 71. Parabooli puutuja ja normaal. Polaar ja poolus.

Kui üks sirge on paraboolile puutuja ja teine temaga rist-sirge normaaliks punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ (116. joon.), siis sirg-lõik X -teljel puutuja ja X -telje lõikepunktist P_x kuni puute-punkti ordinaadi y_1 aluseni M on puutuja alus, ja sirg-lõik samal tel-jel puutepunkti ordinaadi y_1 alu-sest M kuni normaali ja X -telje lõikepunktini N on normaali alus.



116. joonis.

Parabooli puutuja punktis $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ on

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

kus

$$k = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1} = \left[\frac{d(\sqrt{2px})}{dx} \right]_{x=x_1} = \frac{p}{\sqrt{2px_1}} = \frac{p}{y_1};$$

seega puutuja võrrand on

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1)$$

ehk teisendatult

$$y_1 y = p(x_1 + x)$$

ja parabooli normaali võrrand

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1),$$

kus x_1 ja y_1 on puutepunkti koordinaadid.

Puutuja ja koordinaattelgede lõikepunktide P_x ja P_y kaugused O -punktist leiame, kui paigutame nende punktide koordinaadid puutuja võrrandisse jooksvate koordinaatide x ja y asemele, s. o.

$$0 = p(x_1 + OP_x) \quad \text{ja} \quad y_1 \cdot OP_y = px_1 = \frac{y_1^2}{2},$$

millest

$$OP_x = -x_1 \quad \text{ja} \quad OP_y = \frac{y_1}{2}.$$

Seega puutuja aluse pikkus

$$P_x M = P_x O + OM = -OP_x + OM = 2x_1$$

ja normaali aluse pikkus

$$MN = \frac{y_1}{\tan \widehat{P_1 N M}} = y_1 \cdot \frac{p}{y_1} = p,$$

millest nähtub, et parabooli normaali alus on konstantne suurus p .

Kui parabooli lagipunkt $(0 | 0)$ on puutepunktiks, siis puutuja parabooli lagipunktis ühtib Y -teljega ja ta võrrand on $x = 0$. Normaali parabooli lagipunktis ühtib X -teljega ja ta võrrand on $y = 0$.

Et antud punktist $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$, mis asetseb väljaspool parabooli

$$y^2 = 2px,$$

tõmmata sellele paraboolile puutuja, selleks tuleb leida puutepunkti koordinaadid x_1 ja y_1 , lahendades võrrandid

$$\begin{aligned} y_0 y_1 &= p(x_1 + x_0) \\ y_1^2 &= 2px_1 \end{aligned}$$

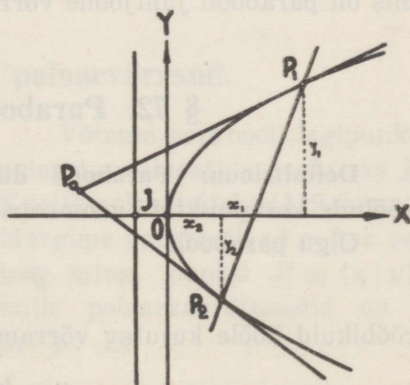
puutepunkti koordinaatide x_1 ja y_1 suhtes. Neid lahendades saame kaks puutepunkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2 | y_2)$ (117. joon.).

Kui võrrandis

$$y_0 y_1 = p(x_1 + x_0)$$

lugeda x_1 ja y_1 jooksvateks koordinaatideks, siis võrrand

$$y_0 y = p(x + x_0)$$



117. joonis.

kujutab sirget, mis läbib puutepunktid P_1 ja P_2 ning moodustab koordinaattelgi lõigates telglõigud $-x_0$ ja $\frac{px_0}{y_0}$, sest sellele

võrrandile saab anda kuju

$$\frac{x}{(-x_0)} + \frac{y}{\left(\frac{px_0}{y_0}\right)} = 1.$$

Sirge läbi punktide P_1 ja P_2 on punkti P_0 polaar, kusjuures punkt P_0 on selle sirge poolus.

Kui poolus P_0 on paraboolil, siis polaar on parabooli puutujaks punktis P_0 .

Kui punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0)$ on parabooli sees, s. o. parabooli haarade vahel, siis sellest punktist ei saa tõmmata paraboolile puutujat ja võrrandite

$$\begin{aligned}y_0 y_1 &= p(x_1 + x_0) \\ y_1^2 &= 2px_1\end{aligned}$$

juured on siis imaginaarsed või kompleksarvud. Sel juhul sirge võrrand

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

kujutab punkti P_0 polaari, mis asetseb väljaspool parabooli.

Parabooli fookuse $F \equiv \left(\frac{d}{2} | 0\right)$ polaariks on juhtjoon, sest fookuse koordinaate viimasesse võrrandisse asetades saame

$$x = -\frac{p}{2},$$

mis on parabooli juhtjoone võrrand.

§ 72. Parabooli diameetrid.

Definitsioon: Parabooli diameeter on parabooli rööbikute kõõlude keskpunktide geomeetriline koht.

Olgu parabooli

$$y^2 = 2px$$

rööbikuid kõõle kujutav võrrand

$$y = kx + t,$$

kus t on muutuv parameeter.

Lahendades parabooli ja kõõlu võrrandid, saame ruutvõrrandi

$$ky^2 - 2py + 2pt = 0,$$

mille juured määravad kõõlu otsapunktide ordinaadid y_1 ja y_2 , kusjuures kõõlu keskpunkti ordinaat

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k}.$$

Sellest nähtub, et vabalt võetud kõõlu keskpunkti ordinaat ei olene muutuvast parameetrist t . Seega konstantne suurus $\frac{p}{k}$ on kõikide rööbikute kõõlude keskpunktide ordinaat ja võrrand

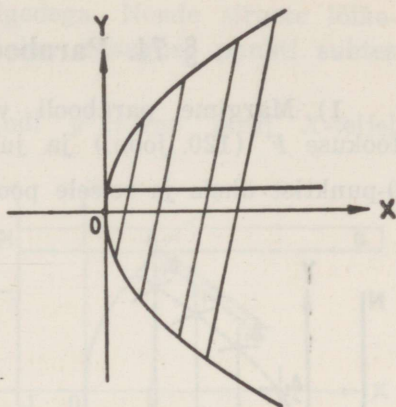
$$y = \frac{p}{k}$$

kujutab parabooli diameetrit, mis poolitab rööbikud kõõlud, mille sihitegur on k (118. joon.).

Parabooli diameetrid on rööbikud X -teljega, sest nende sihitegur $k' = 0$.

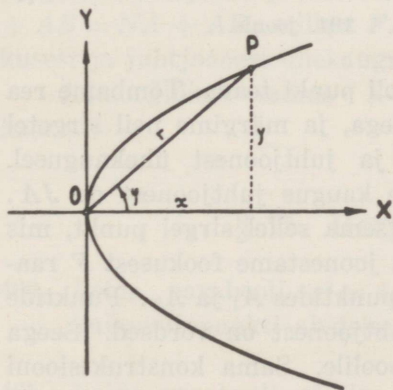
Kui rööbikute kõõlude sihitegur $k = \infty$, siis diameetri võrrand on $y = 0$, mis kujutab sümmeetriatelge ja on seega parabooli peadiameeter.

Et kõik parabooli diameetrid on isekeskis rööbikud, siis neil pole kaadiameetreid.



118. joonis.

§ 73. Parabooli polaarvõrrand.



119. joonis.

Võtame parabooli lagipunkti polaarkoordinaatide pooluseks ja X -telje polaarteljeks (119. joon.). Märgime paraboolil $y^2 = 2px$ vabalt mingi punkti $P \equiv (x|y)$, mille polaarkoordinaadid on r ja φ . Et

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi,$$

siis parabooli võrrand omab kuju

$$r^2 \sin^2 \varphi = 2pr \cos \varphi,$$

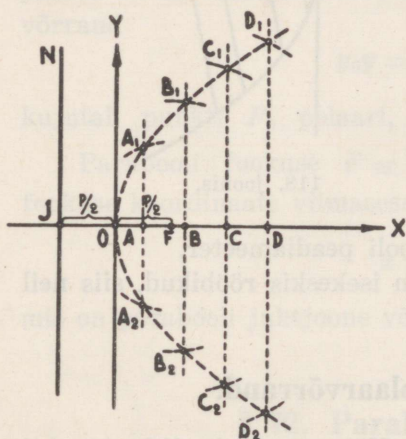
millest

$$r = \frac{2p \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi}.$$

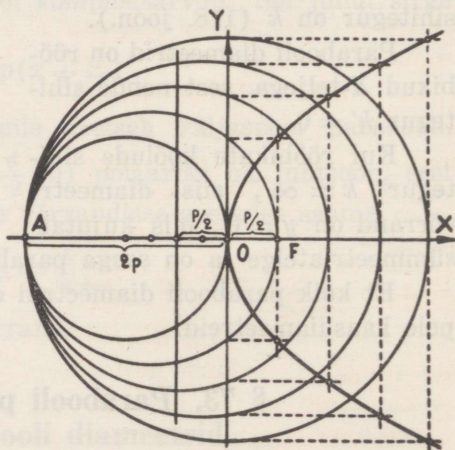
Siin polaarnurk φ kulgeb väärtusi 0-st $\frac{\pi}{2}$ -ni ja $\frac{3\pi}{2}$ -st 2π -ni. Kui $\varphi = 0$, siis $r = \infty$, ja kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$ või $\frac{3\pi}{2}$, siis $r = 0$.

§ 74. Parabooli joonestamine.

1) Märgime parabooli võrrandi $y^2 = 2px$ järgi X -teljel fookuse F (120. joon.) ja juhtjoone JN , võttes X -telge mööda 0-punktist ühele ja teisele poole $\frac{p}{2}$ ühikut. Teame, et parabool



120. joonis.

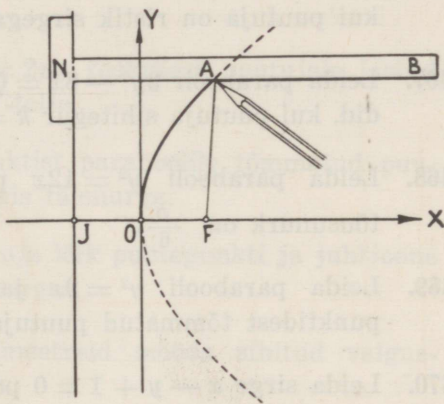


121. joonis.

läbib 0-punkti, seega on üks parabooli punkt teada. Tõmbame rea sirgeid, mis oleksid rööbikud Y -teljega, ja märgime neil sirgetel punktid, mis asetsevad fookusest ja juhtjoonest ühekaugusel. Esimesel sirgel asetsevate punktide kaugus juhtjoonest on JA . Niisama kaugel fookusest peab asetsema sellel sirgel punkt, mis kuulub paraboolile. Selle leidmiseks joonestame fookusest F raadiusega JA kaare, mis lõikab sirget punktides A_1 ja A_2 . Punktide A_1 ja A_2 kaugused fookusest ja juhtjoonest on võrdsed. Seega kuuluvad punktid A_1 ja A_2 paraboolile. Sama konstruktsiooni teeme teise sirge suhtes, võttes raadiuseks JB , saame punktid B_1 ja B_2 , mis kuuluvad paraboolile, jne.

2) Parabooli võrrandist $y^2 = 2px$ näeme, et y on $2p$ ja x keskmine võrdeline, s. o. $2p:y = y:x$. Et ringi diameetrit jagavast punktist kuni ringjooneni tõmmatud ristlõik on diameetri osade keskmine võrdeline, siis märgime X -teljel 0-punkti vasemal pool pikkuse $OA = 2p$ (121. joon.) ja tõmbame läbi punkti A ringjooned, mille keskpunktid asetsevad X -teljel ja mille raadiused on $> p$. Ringjoonte ja telgede lõikepunktidest tõmbame sirged, mis on ristikud telgedega. Nende sirgete lõikepunktid asetsevad paraboolil, sest iga niisuguse punkti suhtes kehtib võrre $2p:y = y:x$.

3) Märgime parabooli võrrandi $y^2 = 2px$ järgi X -teljel fookuse F ja tõmbame juhtjoone JN (122. joon.). Võtame liineali NB , mis liigub juhtjoont JN mööda, jäädes viimasega kogu aeg ristikuks. Liineaal NB jääb seega kogu aeg rööbikuks X -teljega. Kinnitame niidi ühe otsa liineali külge punktis B ja teise otsa fookusse F nõnda, et niidi pikkus oleks võrdne liineali pikkusega NB . Kui pliiatsiots A liineali liikumisel liineali mööda nõnda liigub, et niit on alati



122. joonis.

pingul, siis kujutab pliiatsiots parabooli, sest niidi pikkus $FA + AB = NA + AB$, millest $FA = NA$, s. o. punkt A asetseb fookusest ja juhtjoonest ühekaugusel ja seega on ta parabooli punkt.

Analoogiliselt saame X -teljest allpool asetseva parabooli haara.

§ 75. Harjutusülesanded.

460. Leida parabooli $y^2 = 4x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutepunkti abstsiss $x_1 = 1$ ja ordinaat $y_1 < 0$.
461. Leida parabooli $x^2 = y$ puutuja võrrand, kui puutepunkti koordinaadid on $(x_1 | y_1)$.

462. Leida parabooli $y^2 = 9x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0 \equiv (-8 \mid 3)$.
463. Leida parabooli $x^2 = 6y$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0 \equiv (5 \mid -4)$.
464. Leida parabooli $y^2 = 10x$ puutujad punktides, milles sirge $4x - y - 5 = 0$ lõikab parabooli.
465. Leida parabooli $y^2 = 2x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on rööbik sirgega $2x - y - 2 = 0$.
466. Leida parabooli $y^2 = 16x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on ristik sirgega $x - y - 7 = 0$.
467. Leida parabooli $3y^2 - 8x = 0$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja sihitegur $k = 1\frac{1}{3}$.
468. Leida parabooli $y^2 = 12x$ puutuja võrrand, kui puutuja tõusunurk on $\frac{\pi}{6}$.
469. Leida parabooli $y^2 = 9x$ ja sirge $2x - y - 2 = 0$ lõikepunktidest tõmmatud puutujate lõikepunkt.
470. Leida sirge $x - y + 1 = 0$ poolus parabooli $y^2 = 2x$ suhtes.
471. Leida parabooli $y^2 = 3,5x$ rööbikute kõõlude võrrand, kui neid kõõle poolitab diameeter $y = 2,5$.
472. Leida parabooli $y^2 = 8x$ kõõlu võrrand, kui kõõl läbib punkti $P_0 \equiv (5 \mid 2)$ ja teda poolitab diameeter $y = -3$.
473. Leida parabooli $y^2 = 6x$ kõõlu võrrand, kui kõõlu keskpunkt on $K \equiv (4 \mid 1)$.
474. Leida parabooli $y^2 = 3x$ diameetri võrrand, kui diameeter poolitab kõõlu $3x - 7y + 2 = 0$.
475. Leida parabooli $y^2 = 8x$ diameetri võrrand, kui diameeter moodustab kõõludega, mida ta poolitab, 45° nurga.
476. Leida parabooli $y^2 = 8x$ polaarvõrrand.

477. Leida parabooli polaarvõrrand, kui pooluseks võtta fookus ja polaarteljeks sümmeetriatelg, lugedes viimast fookusest parabooli lagipunkti poole.
478. Leida parabooli polaarvõrrand, kui pooluseks võtta fookus ja polaarteljeks sümmeetriatelg, lugedes viimast fookusest parabooli lagipunkti vastaspoolele.
479. Näidata, et parabooli ja diameetri lõikepunktist tõmmatud puutuja on rööbik kõõludega, mida diameeter poolitab.
480. Näidata, et parabooli puutuja jagab raadiusvektori ja diameetri vahelise nurga puutepunktis kaheks võrdseks nurgaks.
481. ^x Näidata, et parabooli $y^2 = 2px$ fookusest puutujale lastud ristjoon lõikab puutujat Y -teljel.
482. Näidata, et juhtjoone punktist paraboolile tõmmatud puutujad moodustavad isekeskis täisnurga.
483. Näidata, et parabooli puutuja lõik puutepunkti ja juhtjoone vahel näib fookusest 90° nurgas.
484. Näidata, et parabooli diameetreid mööda sihitud valguskiired koonduvad fookuses.
485. Näidata, et parabooli diameetritel asetsevate punktide polaarid on isekeskis rööbikud ja diameetri poolus asetseb seega lõpmatuses.
486. Näidata, et parabooli kõõlu otsapunktidest tõmmatud puutujad lõikuvad kõõlu poolitaval diameetril.
487. Näidata, et parabooli ja ta kõõlu vahelise segmendi pindala on võrdne kõõlu otsapunktidest tõmmatud puutujate ja selle kõõlu vahelise kolmnurga $\frac{2}{3}$ pindalaga.
488. Leida segmendi pindala, mille sirge $5x - y - 6 = 0$ moodustab parabooliga $y^2 = 5x$.
489. Autolambi paraboolse peegli diameeter on 20 cm ja sügavus 15 cm. Leida peegli läbilõikes saadava parabooli võrrand.

X peatükk.

Teise astme võrrandi uurimine.

§ 76. Joonte sümmeetria laused.

Teise astme võrrandi üldine kuju on

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

kus A, B, C, D, E ja F on konstantsed suurused. Nende konstantsete suuruste väärtustest olenevad vastava joone kuju ja tema asend teljestiku suhtes. Et uurida, milliseid jooni kujutab see võrrand mitmesuguste konstantsete koefitsientide esinemisel, selleks tuleb koordinaattelgede teisendamise teel lihtsustada võrrand, arvestades alljärgnevaid lauseid.

1. lause. Kui teise järgu joon on sümmeetriline 0-punkti suhtes, siis puuduvad ta võrrandis lineaarsed liikmed.

Kui joon on sümmeetriline 0-punkti suhtes ja $P \equiv (x | y)$ on joonel asetsev mistahes punkt, siis 0-punkti suhtes sümmeetriline punkt on $P' \equiv (-x | -y)$. Et mõlemad punktid asetsevad joonel, siis nende punktide koordinaadid peavad rahuldama joone võrrandit, s. o.

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 - Dx - Ey + F &= 0. \end{aligned}$$

Neid võrdusi teineteisest lahutades saame

$$Dx + Ey = 0.$$

See tingimus peab kehtima joone igas punktis, ka siis, kui $x = 0$ ja $y \neq 0$; sel juhul peab olema $E = 0$, ja ka siis, kui $y = 0$ ja

$x \neq 0$; sel juhul peab jälle olema $D = 0$. Et see tingimus kehtiks joone iga punkti suhtes, siis peab olema

$$D = E = 0.$$

Tähendab, kui joon on sümmeetriline 0-punkti suhtes, siis ta üldvõrrand esineb kujus

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

2. lause. Kui teise järgu joon on sümmeetriline X -telje suhtes, siis puuduvad ta võrrandis liikmed, milles y on esimeses astmes; kui aga joon on sümmeetriline Y -telje suhtes, siis puuduvad ta võrrandis liikmed, milles x on esimeses astmes.

Kui joon on sümmeetriline X -telje suhtes ja $P \equiv (x | y)$ on joonel asetsev mistahes punkt, siis X -telje suhtes sümmeetriline punkt on $P' \equiv (x | -y)$. Et mõlemad punktid asetsevad joonel, siis peavad nende punktide koordinaadid rahuldama joone võrrandit, s. o.

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ Ax^2 - Bxy + Cy^2 + Dx - Ey + F &= 0. \end{aligned}$$

Neid võrdusi teineteisest lahutades saame

$$y(Bx + E) = 0.$$

Et üldiselt $y \neq 0$, siis

$$Bx + E = 0.$$

See tingimus peab kehtima joone igas punktis. Et joone igas punktis x -l võib olla isesugune väärtus, siis see tingimus võib olla täidetud alati ainult siis, kui

$$B = E = 0.$$

Tähendab, kui joon on sümmeetriline X -telje suhtes, siis ta üldvõrrand esineb kujus

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0.$$

Kui joon on sümmeetriline Y -telje suhtes, siis saaksime, analoogiliselt eelmisega arvutades,

$$B = D = 0$$

ning teise järgu joone üldvõrrand omaks kuju

$$Ax^2 + Cy^2 + Ey + F = 0.$$

3. lause. Kui joon läbib 0-punkti, siis ta võrrandis konstantne liige on 0.

Kui joon läbib 0-punkti, siis peavad 0-punkti koordinaadid $(0|0)$ rahuldama joone võrrandit. Paigutades $x = 0$ ja $y = 0$ võrrandisse

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

saame

$$F = 0.$$

Tähendab, kui joon läbib 0-punkti, siis ta üldvõrrand esineb kujus

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0.$$

§ 77. Teise järgu joone keskpunkt.

Punkti, mille suhtes teise järgu joon on sümmeetriline, nimetatakse selle joone keskpunktiks. Joone keskpunkti leidmisel kasutame koordinaattelgede rööpteisendamist.

Kui teise astme võrrandis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D \neq 0$ ja $E \neq 0$, siis 1. lause põhjal võime järeldada, et joon, mille määrab see võrrand, ei ole sümmeetriline 0-punkti suhtes, s. o. koordinaattelgede 0-punkt ei ole joone keskpunktiks. Oletame, et keskpunkt on olemas ja asetseb kuski mujal. Kui viime 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega joone keskpunkti, siis saame 1. lause põhjal uute telgede suhtes võrrandi, milles peavad puuduma linearsed liikmed. Olgu keskpunkt $O' \equiv (a|b)$. Viime 0-punkti sellesse punkti, tarvitades koordinaatide teisendamisvormeid

$$\begin{aligned}x &= x' + a \\y &= y' + b,\end{aligned}$$

kus x' ja y' on jooksvad koordinaadid uues koordinaadistikus ($X'Y'$ -teljestikus). Paigutame võrrandisse x -i asemele $x' + a$ ja y -i asemele $y' + b$, saame

$$A(x' + a)^2 + B(x' + a)(y' + b) + C(y' + b)^2 + D(x' + a) + E(y' + b) + F = 0$$

ehk

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Aa + Bb + D)x' + (Ba + 2Cb + E)y' + (Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F) = 0.$$

Et uus 0-punkt $O' \equiv (a | b)$ oleks joone keskpunktiks, siis 1. lause põhjal peavad kaduma saadud võrrandist lineaarsed liikmed; seega

$$\begin{aligned} 2Aa + Bb + D &= 0 \\ Ba + 2Cb + E &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades need võrrandid a ja b suhtes, leiame joone keskpunkti koordinaadid

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \quad \text{ja} \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC},$$

kus nimetaja $B^2 - 4AC$ nimetatakse teise järgu joone invariantiks.

Kui invariant $B^2 - 4AC \neq 0$, siis on a ja b lõplikud suurused ning joonel on keskpunkt. Kui aga $B^2 - 4AC = 0$ ning $2CD - BE \neq 0$ ja $2AE - BD \neq 0$, siis a ja b on määramata suured ja joonel puudub seega keskpunkt.

Kui $B^2 - 4AC \neq 0$, siis — viies 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega punkti $O' \equiv (a | b)$ — joone võrrand uutes koordinaatides omab kuju

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F) = 0$$

ehk

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = P,$$

kui tähistame

$$P = -(Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F).$$

§ 78. Sümmeetriateljed.

Eelmises §-is saadud võrrandis

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = P$$

esineb liige $Bx'y'$. Seega 2. lause põhjal joon ei ole veel sümmeetriline ei X' - ega Y' -telje suhtes, s. o. joone sümmeetriateljed ei lange koordinaattelgedega ühte. Et liige $Bx'y'$ kaoks võrrandist, selleks pöörame koordinaattelgi nurga α võrra nõnda, et koordinaatteljed muutuksid sümmeetriatelgedeks.

Pöörame koordinaattelgi nurga α võrra, tarvitades koordinaatide teisendamisvalemeid

$$\begin{aligned}x' &= x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha \\y' &= x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha,\end{aligned}$$

kus x'' ja y'' on jooksvad koordinaadid pööratud koordinaadistikus ($X''Y''$ -teljestikus). Paigutame võrrandisse x' asemele $x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$ ja y' asemele $x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha$, saame

$$\begin{aligned}&A(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)^2 + \\&+ B(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha) + \\&+ C(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha)^2 = P\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}&(A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha)x''^2 + \\&+ (B \cos^2 \alpha - B \sin^2 \alpha - 2A \sin \alpha \cos \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha)x''y'' + \\&+ (A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha)y''^2 = P.\end{aligned}$$

Et uued teljed oleksid joone sümmeetriatelgedeks, siis peab 2. lause põhjal kaduma võrrandist liige, milles esineb korrutis $x''y''$. Selleks tuleb valida α niisugune, et

$$B \cos^2 \alpha - B \sin^2 \alpha - 2A \sin \alpha \cos \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

ehk

$$B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha = 0,$$

millest

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C},$$

kus 2α väärtuse võtame vahemikus 0° -st 180° -ni. Siis α on posi-

tiivne teravnurk, mille väärtuse võime leida ka võrrandist

$$B \cos^2 \alpha - B \sin^2 \alpha - 2A \sin \alpha \cos \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

kui jagame tema mõlemad pooled avaldisega $-B \cos^2 \alpha$, saame

$$\tan^2 \alpha + 2 \cdot \frac{A-C}{B} \tan \alpha - 1 = 0,$$

millest

$$\tan \alpha = -\frac{A-C}{B} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1},$$

kus ruutujuure väärtuse võtame ainult pluss-märgiga, et $\tan \alpha$ oleks positiivne ja seega nurk α vahemikus 0° -st 90° -ni.

Tähendab, pöörates koordinaattelgi leitud nurga α võrra, kaob võrrandist liige, milles esineb korrutis $x''y''$. Seega on igal keskpunktiga teise järgu joonel kaks sümmeetriatelge, mis lõikuvad joone keskpunktis $O' \equiv (a | b)$. Uute koordinaattelgede võrrandid, kui koordinaatteljed on joone sümmeetriatelgedeks, on

$$\begin{aligned} y - b &= k_1(x - a) \\ y - b &= k_2(x - a), \end{aligned}$$

kus

$$k_1 = \tan \alpha = -\frac{A-C}{B} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}$$

ja

$$k_2 = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{A-C}{B} - \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}.$$

Edasi leiame x''^2 ja y''^2 kordajad. Olgu need M ja N , s. o.

$$M = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha.$$

$$N = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

Neid võrdusi liites ja lahutades saame

$$M + N = A + C$$

$$M - N = (A - C) \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha,$$

kusjuures $A + C$ nimetatakse teise järgu joone teiseks invariantiks.

Et

$$\sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}},$$

millest

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 2\alpha} + 1} = \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1},$$

ja et

$$B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha = 0,$$

millest

$$A - C = \frac{B \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha},$$

siis

$$M - N = \frac{B \cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha} + B \sin 2\alpha = \frac{B}{\sin 2\alpha} = B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}.$$

Et nurga α valiku kohaselt $\sin 2\alpha$ on positiivne ja seega positiivne ka juuravaldis $\sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}$, siis viimasest võrdusest nähtub, et $M - N$ märk on sama kui kordaja B märk.

Lahendades võrrandid

$$M + N = A + C$$

$$M - N = B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}$$

M ja N suhtes, saame

$$M = \frac{A + C + B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2}$$

$$N = \frac{A + C - B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2},$$

kus M ja N on ikka reaalarvud, sest juurealune avaldis $\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1$ on alati positiivne.

Seega pärast koordinaattelgede pööramist nurga α võrra joone võrrand uutes koordinaatides omab kuju

$$Mx''^2 + Ny''^2 = P,$$

kusjuures uued teljed on joone sümmeetriatelgedeks.

§ 79. Teise astme võrrandile $Mx''^2 + Ny''^2 = P$ vastav
geomeetiline kuju.

Võrrand

$$Mx''^2 + Ny''^2 = P$$

kujutab geomeetrilist kohta, mille kuju ja omadused olenevad konstantsete suuruste M , N ja P väärtustest. Konstantsete suuruste M ja N väärtustest

$$M = \frac{A + C + B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2} = \frac{A + C + \sqrt{(A+C)^2 + B^2 - 4AC}}{2}$$

$$N = \frac{A + C - B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2} = \frac{A + C - \sqrt{(A+C)^2 + B^2 - 4AC}}{2}$$

nähtub, et kui $B^2 - 4AC < 0$, siis M ja N on ühesuguste märkidega, ja kui $B^2 - 4AC > 0$, siis on M ja N märgid vastupidised.

Kui M , N ja P on ühesuguste märkidega, siis võrrandile $Mx''^2 + Ny''^2 = P$ vastab ellips, kusjuures fokaalteljeks on X -telg, kui $M < N$, ja Y -telg, kui $M > N$.

Kui M ja N on ühesuguste märkidega ja P on neile vastasmärgiga, siis võrrand $Mx''^2 + Ny''^2 = P$ ei rahuldu reaalsete x'' ja y'' väärtustega ega määra seega mingisugust reaalselt geomeetrilist kohta.

Kui M ja N on ühesuguste märkidega ja $P = 0$, siis võrrandit $Mx''^2 + Ny''^2 = 0$ rahuldavad ainult 0-punkti koordinaadid $x'' = 0$ ja $y'' = 0$. Sel juhul võrrandile vastav geomeetiline koht on 0-punkt.

Kui M ja N on isesuguste märkidega ja $P \geq 0$, siis võrrandile $Mx''^2 + Ny''^2 = P$ vastab hüperbool, mille fokaalteljeks on X -telg, kui M ja P on ühesuguste märkidega, ja Y -telg, kui N ja P on ühesuguste märkidega.

Kui M ja N on isesuguste märkidega ja $P = 0$, siis võrrandit $Mx''^2 + Ny''^2 = 0$ ilmutades y'' suhtes, saame

$$y'' = x'' \sqrt{-\frac{M}{N}},$$

kus $\sqrt{-\frac{M}{N}}$ on reaalne suurus. Olgu $\sqrt{-\frac{M}{N}} = \pm k$, siis võrrand

$$y'' = \pm kx''$$

kujutab kaht 0-punktis lõikuvat sirget.

Vaatleme näiteks võrrandit

$$7x^2 - 8xy + y^2 + 14x - 8y - 2 = 0.$$

Siin $B^2 - 4AC = (-8)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = 36 > 0$. Võrrand kuulub seega hüperbooli rühma. Selle võrrandiga määratud kõvera keskpunkti koordinaadid on

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 14 - (-8) \cdot (-8)}{36} = -1$$

$$b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{2 \cdot 7 \cdot (-8) - (-8) \cdot 14}{36} = 0.$$

Viies 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega punkti $O' \equiv (-1 | 0)$, saame $X'Y'$ -teljestikus kõvera võrrandi kujus

$$7x'^2 - 8x'y' + y'^2 = 9,$$

sest

$$7a^2 - 8ab + b^2 + 14a - 8b - 2 = -9.$$

Pöörame koordinaattelgi nurga α võrra nii, et abstsissitelje tõus

$$k_1 = \tan \alpha = -\frac{A-C}{B} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1} =$$

$$= -\frac{7-1}{-8} + \sqrt{\left(\frac{7-1}{-8}\right)^2 + 1} = 2,$$

siis

$$\left. \begin{array}{l} M \\ N \end{array} \right\} = \frac{A + C \pm B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2} =$$

$$= \frac{7+1 \pm (-8) \sqrt{\left(\frac{7-1}{-8}\right)^2 + 1}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 9 \end{cases}$$

ja võrrand $X''Y''$ -teljestikus omab kanoonilist kuju

$$-x''^2 + 9y''^2 = 9 \text{ ehk } y''^2 - \frac{x''^2}{9} = 1,$$

mis kujutab hüperbooli, mille reaalteljeks on Y'' -telg (123. joon.).

Et X'' - ja Y'' -teljed (kui sümmeetriateljed) läbivad keskpunkti $O' \equiv \equiv (-1 | 0)$ ning omavad vastavalt tõususid $k_1 = 2$ ja $k_2 = -\frac{1}{2}$, siis nende telgede võrrandid on

$$y - 0 = 2(x + 1) \text{ ja}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

ehk

$$2x - y + 2 = 0 \text{ ja } x + 2y + 1 = 0,$$

kus viimane võrrand on reaaltelje võrrand.

Fookused $X''Y''$ -teljestikus on

$$F_1'' \equiv (0 | -\sqrt{10}) \text{ ja } F_2'' \equiv (0 | +\sqrt{10}),$$

sest $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$. Kasutades koordinaatide teisendamisvalemeid

$$x = a + x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha$$

$$y = b + x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha,$$

kus

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ja

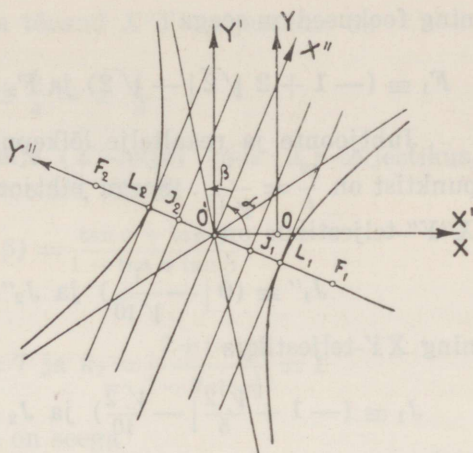
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

saame XY -teljestikus fookuste koordinaadid

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

ja

$$y_{1,2} = 0 \mp \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \mp \sqrt{2}$$



123. joonis.

ning fookused on seega

$$F_1 \equiv (-1 + 2\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}) \text{ ja } F_2 \equiv (-1 - 2\sqrt{2} \mid \sqrt{2}).$$

Juhtjoonte ja reaaltelje lõikepunktide kaugus kõvera keskpunktist on $\frac{b^2}{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Seega juhtjoonte lõikepunktid reaalteljega $X''Y''$ -teljestikus on

$$J_1'' \equiv (0 \mid -\frac{1}{\sqrt{10}}) \text{ ja } J_2'' \equiv (0 \mid +\frac{1}{\sqrt{10}})$$

ning XY -teljestikus

$$J_1 \equiv (-1 + \frac{\sqrt{2}}{5} \mid -\frac{\sqrt{2}}{10}) \text{ ja } J_2 \equiv (-1 - \frac{\sqrt{2}}{5} \mid \frac{\sqrt{2}}{10}),$$

sest

$$x_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$$

ja

$$y_{1,2} = 0 \mp \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Et juhtjoonte ühine tõus on $k_1 = 2$, siis nende võrrandid on

$$y \pm \frac{\sqrt{2}}{10} = 2(x + 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{5})$$

ehk

$$4x - 2y + 4 \mp \sqrt{2} = 0.$$

Puutujail lagipunktides on sama tõus $k_1 = 2$. Lagipunktid $X''Y''$ -teljestikus on

$$L_1'' \equiv (0 \mid -1) \text{ ja } L_2'' \equiv (0 \mid 1)$$

ning XY -teljestikus

$$L_1 \equiv (-1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \mid -\frac{1}{\sqrt{5}}) \text{ ja } L_2 \equiv (-1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \mid \frac{1}{\sqrt{5}});$$

seega lagipunkte läbivate puutujate võrrandid on

$$y \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = 2(x + 1 \mp \frac{2}{\sqrt{5}})$$

ehk

$$2x - y + 2 \mp \sqrt{5} = 0.$$

Hüperbooli asümptootide tõusud $X''Y''$ -teljestikus on

$$\tan \beta = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{3}.$$

Et $\tan \alpha = 2$ on imaginaartelje (X'' -telje) tõus XY -teljestikus, siis samas teljestikus asümptootide tõusud

$$k_{1,2} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

mille põhjal

$$k_1 = \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{3}} = 7 \text{ ja } k_2 = \frac{2 + (-\frac{1}{3})}{1 - 2 \cdot (-\frac{1}{3})} = 1$$

ning asümptootide võrrandid on seega

$$y - 0 = 7 \cdot (x + 1) \text{ ja } y - 0 = 1 \cdot (x + 1)$$

ehk

$$7x - y + 7 = 0 \text{ ja } x - y + 1 = 0.$$

§ 80. Keskpunktita teise järgu joon.

Eespool nägime, et kui võrrandis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B^2 - 4AC = 0$ ning $2CD - BE \neq 0$ ja $2AE - BD \neq 0$, siis joon ei ole keskpunkti, sest võrrandsüsteemil

$$2Aa + Bb + D = 0$$

$$Ba + 2Cb + E = 0$$

puudub sel korral ühine lahendus tundmatute a ja b suhtes. Sel juhul $B^2 = 4AC$ ja $B = \pm 2\sqrt{AC}$ ning võrrand omab kuju

$$Ax^2 \pm 2\sqrt{AC}xy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

milles kolm esimest liiget kujutavad kahe liikme summa või vahe ruutu, s. o.

$$(\sqrt{A} \cdot x \pm \sqrt{C} \cdot y)^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

kusjuures tingimus $B^2 = 4AC$ nõuab, et korrutis $4AC$ peab olema

positiivne, s. o. A ja C peavad olema ühesuguste märkidega. Kui A ja C on negatiivsed, siis muudame võrrandis kõigi liikmete märgid vastupidisteks, saame positiivsed A ja C väärtused, nii et avaldised \sqrt{A} ja \sqrt{C} võime saada ikka reaalsena.

Joonel

$$(\sqrt{A} \cdot x \pm \sqrt{C} \cdot y)^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ei ole keskpunkti, seepärast ei või ta koordinaattelgede teisendamisel saada sümmeetriliseks 0-punkti suhtes. Ta pole ka sümmeetriline ei X - ega Y -telje suhtes, sest võrrandis esinevad mõlema koordinaadi esimesed astmed (2. lause). Kuid ta võib olla sümmeetriline mõne teise sirge suhtes. Seega koordinaattelgede teisendamisel võib ta saada sümmeetriliseks kas ühe või teise koordinaattelje suhtes.

Pöörame koordinaattelgi nurga α võrra nõnda, et üks koordinaattelgedest saaks rööbikuks joone sümmeetriateljega. Paigutame võrrandisse

$$(\sqrt{A} \cdot x \pm \sqrt{C} \cdot y)^2 + Dx + Ey + F = 0$$

x ja y asemele

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

saame

$$[\sqrt{A} \cdot (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \pm \sqrt{C} \cdot (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)]^2 + D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0$$

ehk

$$[(\sqrt{A} \cdot \cos \alpha \pm \sqrt{C} \cdot \sin \alpha)x' + (-\sqrt{A} \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{C} \cdot \cos \alpha)y']^2 + (D \cos \alpha + E \sin \alpha)x' + (-D \sin \alpha + E \cos \alpha)y' + F = 0.$$

Valime nüüd nurga α niisugusena, et esimeses liikmes kas x' või y' kordaja muutuks 0-ks. Siis kaob võrrandist liige, milles on ühe koordinaadi ruut, ja ka liige, milles on mõlema koordinaadi korrutis. Olgu x' koefitsient 0, s. o.

$$\sqrt{A} \cdot \cos \alpha \pm \sqrt{C} \cdot \sin \alpha = 0,$$

millest

$$\tan \alpha = \mp \sqrt{\frac{A}{C}},$$

kus α võtame vahemikus -90° -st $+90^\circ$ -ni. Siis

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \mp \sqrt{\frac{A}{A + C}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = + \sqrt{\frac{C}{A + C}}$$

Siin $\tan \alpha$ on negatiivne, kui xy kordaja B on positiivne, ja $\tan \alpha$ on positiivne, kui B on negatiivne.

Leitud nurga α võrra koordinaattelgi pöörates kaovad võrrandist liikmed, milles esinevad x'^2 ja $x'y'$, ning võrrand omab uutes koordinaatides kuju

$$(-\sqrt{A} \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{C} \cdot \cos \alpha)^2 y'^2 + (D \cos \alpha + E \sin \alpha) x' + (-D \sin \alpha + E \cos \alpha) y' + F = 0$$

ehk lühidalt

$$Qy'^2 + Rx' + Sy' + F = 0,$$

kus

$$Q = A \sin^2 \alpha \mp 2\sqrt{AC} \cdot \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha = A + C$$

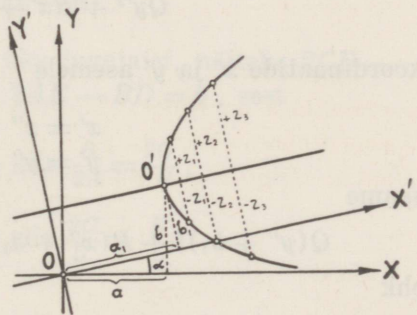
$$R = D \cos \alpha + E \sin \alpha = \frac{D\sqrt{C} \mp E\sqrt{A}}{\sqrt{A + C}}$$

$$S = -D \sin \alpha + E \cos \alpha = \frac{E\sqrt{C} \pm D\sqrt{A}}{\sqrt{A + C}}.$$

Saadud võrrandis on nüüd X' -telg rööbik joone sümmeetria-teljega, sest kui ilmutame võrrandi y' suhtes

$$y' = -\frac{S}{2Q} \pm \frac{\sqrt{S^2 - 4Q(Rx' + F)}}{2Q} = b_1 \pm z,$$

siis näeme, et uues koordinaatistikus joone ordinaat y' koosneb kahest osast: konstantsest suurusest b_1 ja muutuvast suurusest z (124. joon.). Muutuv suurus z iga x' väärtuse juures liitub ja lahutab ühest ja samast konstantsest suurusest b_1 . See tähendab, et joone joonestamiseks tuleb arvutada rida reaalseid z -i väärtusi, mis vastavad mitmesugustele x' vää-



124. joonis.

tustele, tõmmata X' -teljele rööbik sirge, mis asetseb temast b_1 ühiku kaugusel, ja märkida z -i ühesuurused positiivsed ja negatiivsed pikkused mõlemale poole sellest sirgest. Seega igale kõvera punktile selle sirge suhtes vastab samuti kõveral asetsev sümmeetriline punkt. Järelikult, kõvera sümmeetriatelg on sirge, mis on rööbik X' -teljega ja asetseb temast b_1 ühiku kaugusel.

Kui telgede pööramisel nurga α võrra muutub 0-ks ka kordaja S , siis joon

$$Qy'^2 + Rx' + F = 0$$

on juba sümmeetriline X' -telje suhtes (2. lause), ja kui muutub 0-ks kordaja R , siis võrrand omab kuju

$$Qy'^2 + Sy' + F = 0,$$

mida lahendades saame y' -le kaks konstantset väärtust

$$y' = c_1 \text{ ja } y' = c_2,$$

mis kujutavad geomeetriliselt kaht X' -teljega rööbikut sirget. Nad võivad ühte langeda, kui $c_1 = c_2$. On aga c_1 ja c_2 imaginaarsed või kompleksarvud, siis ei määra võrrand mingisugust reaalselt geomeetrilist kohta.

Oletame, et $R \neq 0$ ja $S \neq 0$. Et siis abstsissstelg saaks sümmeetriateljeks, selleks viime koordinaattelgede 0-punkti punkti $O' \equiv (a_1 | b_1)$, mis asetseb ühtlasi kõveral (124. joon.). Siis a_1 ja b_1 on punkti O' koordinaadid $X'Y'$ -teljestikus; b_1 on ühtlasi sümmeetriatelje kaugus X' -teljest.

Paigutame võrrandisse

$$Qy'^2 + Rx' + Sy' + F = 0$$

koordinaatide x' ja y' asemele

$$\begin{aligned} x' &= x'' + a_1 \\ y' &= y'' + b_1, \end{aligned}$$

saame

$$Q(y'' + b_1)^2 + R(x'' + a_1) + S(y'' + b_1) + F = 0$$

ehk

$$Qy''^2 + Rx'' + (2Qb_1 + S)y'' + (Qb_1^2 + Ra_1 + Sb_1 + F) = 0.$$

Et X'' -telg oleks joone sümmeetriateljeks, selleks peab kaduma võrrandist liige, milles y'' on esimeses astmes, s. o.

$$2Qb_1 + S = 0,$$

millest

$$b_1 = -\frac{S}{2Q},$$

mis on juba eespool-leitud konstantne suurus.

Et joon ühtlasi läbiks 0-punkti, selleks peab olema

$$Qb_1^2 + Ra_1 + Sb_1 + F = 0,$$

millest

$$a_1 = \frac{S^2 - 4QF}{4QR}.$$

Seega võrrand omab kuju

$$Qy''^2 + Rx'' = 0,$$

millele vastab parabol. Siit

$$y''^2 = -\frac{R}{Q}x'' \quad \text{ehk} \quad y''^2 = -\frac{D\sqrt{C+E}\sqrt{A}}{(A+C)^{\frac{3}{2}}}x''.$$

a_1 ja b_1 on punkti O' ehk parabooli lagipunkti koordinaadid $X'Y'$ -teljestikus. Kui XY -teljestikus tähistame sama punkti koordinaadid tähtedega a ja b , siis

$$a = a_1 \cos \alpha - b_1 \sin \alpha$$

$$b = a_1 \sin \alpha + b_1 \cos \alpha$$

ja parabooli sümmeetriatelje (X'' -telje) võrrand XY -teljestikus on

$$y - b = \tan \alpha \cdot (x - a).$$

Kui $B^2 - 4AC = 0$ ja ühtlasi üks lugejaist, näiteks $2CD - BE = 0$, siis on ka teine lugeja $2AE - BD = 0$, sest

$$\text{kui } B^2 - 4AC = 0, \text{ siis } \frac{B}{2A} = \frac{2C}{B},$$

$$\text{ja kui } 2CD - BE = 0, \text{ siis } \frac{2C}{B} = \frac{E}{D},$$

millest

$$\frac{B}{2A} = \frac{E}{D} \quad \text{ehk} \quad 2AE - BD = 0.$$

Sel juhul võrrand

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

omab kuju

$$(\sqrt{A} \cdot x \pm \sqrt{C} \cdot y)^2 + \frac{D}{\sqrt{A}} (\sqrt{A} \cdot x \pm \sqrt{C} \cdot y) + F = 0,$$

millest

$$\sqrt{A} \cdot x \pm \sqrt{C} \cdot y = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4AF}}{2\sqrt{A}}$$

ehk

$$2Ax + By + D \mp \sqrt{D^2 - 4AF} = 0,$$

mis kujutab kaht rööbikut sirget:

$$y = kx + b_1 \text{ ja } y = kx + b_2.$$

Need rööbikud sirged langevad ühte, kui $D^2 - 4AF = 0$. Kui aga $D^2 - 4AF < 0$, siis ei vasta võrrandile mingisugust reaalist geomeetrilist kohta.

Vaatleme näiteks võrrandit

$$3x^2 + 12xy + 12y^2 + 10x + 10y - 3 = 0.$$

See võrrand kuulub parabooli rühma, sest

$$B^2 - 4AC = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0.$$

Seepärast pöörame esiteks koordinaattelgi nurga α võrra. Siin

$$\tan \alpha = -\sqrt{\frac{A}{C}} = -\sqrt{\frac{3}{12}} = -\frac{1}{2}$$

$$Q = A + C = 3 + 12 = 15$$

$$R = \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}} = \frac{10\sqrt{12} - 10\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = 2\sqrt{5}$$

$$S = \frac{E\sqrt{C} + D\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}} = \frac{10\sqrt{12} + 10\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = 6\sqrt{5}$$

ja seega $X'Y'$ -teljestikus võrrand omab kuju

$$15y'^2 + 2\sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' - 3 = 0.$$

Kui viime 0-punkti koordinaattelgede rööplükkega parabooli lagipunkti $O' \equiv (a_1 | b_1)$, siis saame $X''Y''$ -teljestikus kanoonilise võrrandi (125. joon.)

$$15y''^2 + 2\sqrt{5}x'' = 0$$

ehk

$$y''^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{15}x'',$$

kusjuures lagipunkti koordinaadid $X'Y'$ -teljestikus on

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{S^2 - 4QF}{4QR} = \\ &= \frac{180 - 4 \cdot 15 \cdot (-3)}{4 \cdot 15 \cdot 2\sqrt{5}} = \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

ja

$$b_1 = -\frac{S}{2Q} = -\frac{6\sqrt{5}}{2 \cdot 15} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Rakendades koordinaatide teisendamisvalemeid

$$\begin{aligned} a &= a_1 \cos \alpha - b_1 \sin \alpha \\ b &= a_1 \sin \alpha + b_1 \cos \alpha, \end{aligned}$$

kus

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ja

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

leiame lagipunkti koordinaadid XY -teljestikus

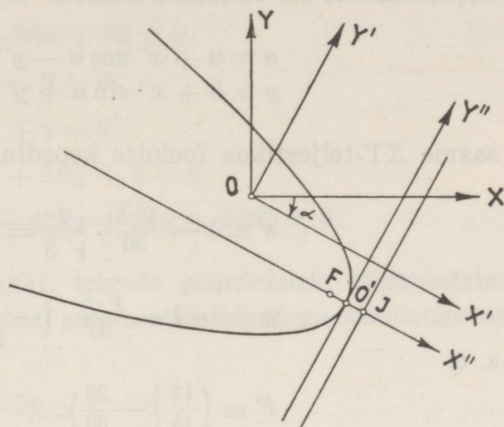
$$a = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1$$

ja

$$b = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -1,$$

kus nüüd parabooli sümmeetriatelje (X'' -telje) võrrand samas teljestikus on

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \text{ ehk } x + 2y + 1 = 0.$$



125. joonis.

Fookus $X''Y''$ -teljestikus on $F'' \equiv \left(-\frac{\sqrt{5}}{30} \mid 0\right)$. Kasutades koordinaatide teisendamisevalemeid

$$\begin{aligned}x &= a + x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha \\y &= b + x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha,\end{aligned}$$

saame XY -teljestikus fookuse koordinaadid

$$x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{30} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{14}{15}$$

$$y = -1 - \frac{\sqrt{5}}{30} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{29}{30},$$

s. o.

$$F' \equiv \left(\frac{14}{15} \mid -\frac{29}{30}\right).$$

Juhtjoon, olles risti sümmeetriateljega, omab tõusu 2 ja lõikab telge punktis J , mis on sümmeetriline fookusega lagi-punkti suhtes ja mille koordinaadid on

$$x = 1 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$$

ja

$$y = -1 - \frac{1}{30} = -\frac{31}{30}.$$

Siis juhtjoone võrrand on

$$y + \frac{31}{30} = 2\left(x - \frac{16}{15}\right) \text{ ehk } 12x - 6y - 19 = 0$$

ja lagi punkti läbiva puutuja võrrand

$$y + 1 = 2(x - 1) \text{ ehk } 2x - y - 3 = 0.$$

§ 81. Harjutusülesanded.

A. Leida kõvera keskpunkt ja kõvera võrrand uutes koordinaatides, kui koordinaattelgede rööpteisendamisel 0-punkt viia keskpunkti:

490. $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$

491. $4x^2 - 24xy + 11y^2 - 16x - 2y - 29 = 0$
 492. $x^2 - 4xy + y^2 - x + y + 1 = 0$
 493. $7x^2 + 12xy - 12y^2 - 36x + 72 = 0$
 494. $2x^2 - 4xy + 3y^2 - y - 2 = 0$
 495. $2x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y = 0$
 496. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$
 497. $36x^2 - 24xy + 29y^2 - 432x + 24y + 1260 = 0$.

B. Leida kõvera keskpunkt, telgede pöördenurk, sümmeetriateljed ja kõvera võrrand sümmeetriatelgedega ühtelangevas koordinaadistikus:

498. $x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$
 499. $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 9x - 5y - 8 = 0$
 500. $7x^2 + 12xy + 12y^2 - 40x - 48y - 1 = 0$
 501. $5x^2 - 3xy + y^2 + 55x - 22y + 160 = 0$
 502. $x^2 - 4xy + y^2 + 11x - 4y - 5,75 = 0$
 503. $12xy - 9y^2 - 4x + 7 = 0$
 504. $48x^2 + 55xy + 206x + 55y + 103 = 0$
 505. $4x^2 + 4xy + 4y^2 - 33x - 18y + 75,25 = 0$
 506. $x^2 - xy + y^2 - 1,3x + 6,8y + 13,03 = 0$
 507. $x^2 + xy - y^2 = 0$

C. Leida kõvera keskpunkt, telgede pöördenurk, sümmeetriateljed, fookused, juhtjooned ja kõvera võrrand sümmeetriatelgedega ühtelangevas koordinaadistikus:

508. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$
 509. $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$
 510. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8x + 8y + 20 = 0$
 511. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - 3y + \frac{7}{12} = 0$
 512. $4x^2 - 24xy + 11y^2 - 16x - 2y - 29 = 0$
 513. $20xy - 15y^2 - 8x + 16y + 1 = 0$
 514. $20xy - 15y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$

$$515. \quad 3x^2 - 3y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$$

$$516. \quad x^2 + 6xy + y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$517. \quad 9x^2 + 6xy + y^2 + 5x - 10 = 0$$

D. Leida telgede pöördenurk, parabooli lagipunkt, sümmeetriatelg, puutuja parabooli lagipunktis ja parabooli võrrand uutes koordinaatides:

$$518. \quad 9x^2 - 24xy + 16y^2 + 228x - 54y + 294 = 0$$

$$519. \quad x^2 - 2xy + y^2 + 18x + 10y - 38 = 0$$

$$520. \quad x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 45y + 100 = 0$$

$$521. \quad x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 1 = 0$$

$$522. \quad x^2 - 8xy + 16y^2 - 42x - 155y - 34 = 0$$

$$523. \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2x - 10y - 1 = 0$$

$$524. \quad x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

$$525. \quad 9x^2 + 6xy + y^2 - 5x - 10 = 0$$

$$526. \quad x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0$$

$$527. \quad y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$$

$$528. \quad x^2 + x + 2y + 3 = 0$$

$$529. \quad 2y^2 + 5x + y = 0$$

$$530. \quad x^2 + x - 3y = 0$$

$$531. \quad y^2 - 3x + 1 = 0$$

$$532. \quad x^2 + 4y - 5 = 0$$

E. Leida ellipsi ja hüperbooli keskpunkt, telgede pöördenurk, sümmeetriateljed, lagipunktid, fookused, juhtjooned, puutujad kõvera lagipunktides, hüperbooli asümptoodid ja kõvera kanooniline võrrand:

$$533. \quad 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$534. \quad 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$535. \quad 8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$$

$$536. \quad 2xy - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$537. \quad 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

538. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$
539. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 242x - 298y + 491 = 0$
540. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 170x + 310y - 1025 = 0$
541. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$
542. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x + 6y + 79,5 = 0$
543. $x^2 - 3xy + 5y^2 + 6x - 31y + 56 = 0$
544. $7x^2 - 8xy + y^2 + 2x - 5y - 2,75 = 0$
545. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 12y - 60 = 0$
546. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$
547. $13x^2 + 12xy + 4y^2 - 50x - 28y - 11 = 0$
548. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$
549. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$
550. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
551. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y = 0$
552. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 14x + 2y + 5 = 0$
553. $4xy + 4y - 1 = 0$
554. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x + 14y + 3 = 0$
555. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.
556. Näidata, et võrrand $y = \frac{k_1x + b_1}{k_2x + b_2}$ kujutab hüperbooli.
557. Näidata, et võrrand $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ kujutab parabooli.
558. Leida parabooli võrrand, kui sirged $x - y - 1 = 0$ ja $x + 2y - 1 = 0$ on parabooli puutujad ja fookus on punktis $F \equiv (1 | 1)$.
559. Leida ellipsi võrrand, kui sirge $x - y + 4 = 0$ on ellipsi puutuja ja fookused on $F_1 \equiv (1 | 3)$ ja $F_2 \equiv (-1 | 2)$.
560. Leida kõvera $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ puutuja võrrand, kui puutuja läbib punkti $P \equiv (3 | 4)$.
561. Leida kõvera $x^2 - xy - y^2 - 2x - y = 0$ normaali võrrand, kui normaal läbib punkti $P \equiv (4 | -3)$.

562. Leida teise järgu kõvera võrrand, kui kõver läbib punktide $P_1 \equiv (0 | 0)$, $P_2 \equiv (0 | 1)$ ja $P_3 \equiv (1 | 0)$ ning keskpunktiks on $K \equiv (2 | 3)$.
563. Leida punkti $P_0 \equiv (1 | -2)$ polaar kõvera $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ suhtes.
564. Leida punkti $P_0 \equiv (7 | 5)$ polaar kõvera $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ suhtes.
565. Leida kõvera $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ kõõlu võrrand, kui kõõlu otsapunktid on punktist $P_0 \equiv (3 | 1)$ tõmmatud sirgete puutepunktid kõveraga.
566. Leida kõvera $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ ja sirge $3x - y + 6 = 0$ ühistest punktidest tõmmatud puutujate lõikepunkt.

XI p e a t ü k k.

Teise järgu pinnad.

§ 82. Kerapinna võrrand.

Kerapind on säärane pind, mille iga punkti kaugus ühest kindlast punktist (keskpunktist) on konstantne suurus. Et leida kerapinna võrrand, selleks kujutame ristkoordinaadistikus kera, mille raadius olgu r ja keskpunkt $K \equiv (a | b | c)$. Võtame kerapinnal mistahes punkti $P \equiv (x | y | z)$, kus x , y ja z on jooksvad koordinaadid. Punkti P kaugus kera keskpunktist K on kera raadius r , järelikult

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

See võrrand väljendab kerapinnal asetsevate punktide koordinaatide seost kera keskpunkti koordinaatidega ja kera raadiusega ning on seega kerapinna ehk sfääri võrrand.

Kerapinna võrrandit rahuldavad ainult kerapinnal asetsevate punktide koordinaadid. Asetseb aga punkt, mille koordinaadid on x , y ja z , kera sees, siis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2,$$

ja kui punkt, koordinaatidega x , y ja z , asetseb kerast väljas, siis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 > r^2.$$

Kui kera keskpunkt asetseb XY -, XZ - või YZ -tasapinnal, siis vastavad kerapinna võrrandid omavad kuju

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 &= r^2 \\(x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 &= r^2 \\x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 &= r^2,\end{aligned}$$

kus esimesel juhul $c = 0$, teisel juhul $b = 0$ ja kolmandal juhul $a = 0$.

Kui kera keskpunkt asetseb X -, Y - või Z -teljel, siis saame vastavalt kerapinna võrrandid

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ x^2 + (y - b)^2 + z^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 + (z - c)^2 &= r^2,\end{aligned}$$

sest esimesel juhul $b = c = 0$, teisel juhul $a = c = 0$ ja kolmandal juhul $a = b = 0$.

Kui kera keskpunkt on 0-punktis, siis $a = b = c = 0$ ja kerapinna võrrand on

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Kerapinna võrrand on jooksvate koordinaatide suhtes teise astme võrrand, seepärast nimetatakse kerapinda teise järgu pinnaks.

Võrrand

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

on kerapinna võrrandi kinnine kuju. Avades selles võrrandis sulud, saame lahtise kuju

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0.$$

Et kolme muutujaga teise astme võrrandi üldine kuju on

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

siis kujutab see võrrand kerapinda ainult siis, kui $A = B = C$ ja $D = E = F = 0$. Sel juhul kerapinna võrrandi lahtine üldkuju on

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

kus kera keskpunkti koordinaadid

$$a = -\frac{G}{2A}, \quad b = -\frac{H}{2A}, \quad c = -\frac{I}{2A}$$

ja raadiuse ruut

$$r^2 = \frac{G^2 + H^2 + I^2 - 4AK}{4A^2}.$$

Kui $G^2 + H^2 + I^2 - 4AK < 0$, siis on r imaginaarne ja kerapinna võrrandit ei rahulda mingisugused reaalsed x , y ja z väärtused.

Näiteks, kerapinna võrrandis

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

$a = -1$, $b = 2$, $c = 0$ ja $r^2 = 9$. Seega kera keskpunkt on $K \equiv (-1 | 2 | 0)$ ja raadius $r = 3$ ning kerapinna võrrandi kinine kuju

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9.$$

Et kerapinna võrrandile on ikka võimalik anda kuju

$$x^2 + y^2 + z^2 + G'x + H'y + I'z + K' = 0,$$

milles esineb neli konstantset suurust G' , H' , I' ja K' , siis sellest nähtub, et kera määramiseks ruumis on vaja teada üldiselt neli tingimust. Seega näiteks neli mitte ühel ja samal tasapinnal asetsevat punkti määravad kera ruumis.

§ 83. Kerapinna puutujakoonus ja puutujatasapind. Polaartasapind ja poolus.

Kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ja punkte $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ ja $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ läbiva sirge

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

ühiste punktide koordinaadid rahuldavad nii kerapinna kui ka sirge võrrandit. Et punktid P_0 ja P_1 asetsevad antud sirgel, siis sellel sirgel iga kolmanda punkti P koordinaate võime avaldada kujus

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda},$$

kus punkt P jagab sirglõigu P_0P_1 nii, et

$$\frac{P_0P}{PP_1} = \lambda.$$

Et see kolmas punkt P asetseks ühtlasi kerapinnal, siis ta koordinaadid peavad rahuldama kerapinna võrrandit, s. o.

$$\left(\frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda}\right)^2 = r^2$$

ehk

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2)\lambda^2 + 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2)\lambda + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) = 0,$$

mis on λ suhtes teise astme võrrand ja millest nähtub, et sirge võib lõigata kerapinda kõige rohkem kahes punktis.

Kui selle võrrandi diskriminant

$$(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) > 0,$$

siis on sirgel kerapinnaga kaks ühist punkti. Leides λ väärtused λ_1 ja λ_2 , saame sirge ja kerapinna ühised punktid

$$\left(\frac{x_0 + \lambda_1 x_1}{1 + \lambda_1} \mid \frac{y_0 + \lambda_1 y_1}{1 + \lambda_1} \mid \frac{z_0 + \lambda_1 z_1}{1 + \lambda_1}\right) \text{ ja } \left(\frac{x_0 + \lambda_2 x_1}{1 + \lambda_2} \mid \frac{y_0 + \lambda_2 y_1}{1 + \lambda_2} \mid \frac{z_0 + \lambda_2 z_1}{1 + \lambda_2}\right).$$

Kui diskriminant

$$(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) = 0,$$

siis $\lambda_1 = \lambda_2$ ja sirge on kerapinnale puutujaks.

Kui diskriminant

$$(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) < 0,$$

siis λ -l pole reaalseid väärtusi ja sirge asetseb täielikult väljaspool kera.

Kui sirge on kerapinnale puutujaks ja sellel sirgel $P_0 \equiv (x_0 \mid y_0 \mid z_0)$ lugeda väljaspool kerapinda asetsevaks kindlaks punktiks ning P_1 lugeda muutuvaks ruumiliseks punktiks jooksvate koordinaatidega x , y ja z , siis võrrandit

$$(x_0x + y_0y + z_0z - r^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0$$

rahuldavad kerapinna kõikidel puutujatel asetsevate punktide koordinaadid, kui puutujad läbivad punkti P_0 . Need puutujad punktist P_0 moodustavad koonilise pinna ehk kerapinna puutujakoonuse. Seega teise astme võrrand

$$(x_0x + y_0y + z_0z - r^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0$$

kujutab kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ puutujakoonust, mille tipp on punktis $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

Puutujakoonuse võrrandist nähtub, et kui

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

siis samade x , y ja z väärtuste puhul ka

$$x_0x + y_0y + z_0z - r^2 = 0.$$

Viimane võrrand kujutab tasapinda. Iga punkti koordinaadid, mis rahuldavad selle tasapinna ja kerapinna võrrandit, rahuldavad ka ühtlasi puutujakoonuse võrrandit. Et tasapind lõikab kerapinda ringjoont mööda, mis on tasapinna, kera ja koonuse ühine joon, siis kerapinna puutujakoonus on seega ringkoonus.

Tasapind

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2$$

nimetatakse punkti P_0 polaartasapinnaks kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ suhtes, kusjuures punkt P_0 on selle tasapinna pooluseks.

Kui sirge

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

üks punktidest, näiteks $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$, asetseb kerapinnal $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, siis võrrandi $(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) \lambda^2 + 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2) \lambda + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) = 0$ vabaliige

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$$

ja λ üks väärtus on seega 0, s. o. $\lambda_1 = 0$, ning λ teine väärtus

$$\lambda_2 = -2 \cdot \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2}.$$

Kui kerapinna ja sirge üks lõikepunkt langeb teise lõikepunktiga

ühte, siis sirge saab kerapinnale puutujaks ja ka λ_2 saab seega 0-ks. Siis λ_2 avaldises murru lugeja

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2 = 0,$$

mis on tingimus, et sirge läbi punkti $P_1 \equiv (x_1 | y_1 | z_1)$ oleks kerapinnale $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ puutujaks punktis $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

Kui puutepunkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ kerapinnal lugeda kindlaks punktiks ja punkt P_1 muutuvaks jooksvate koordinaatidega x , y ja z , siis võrrand

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2$$

kujutab tasapinda, millel asetsevad kõik puutujad ühise puutepunktiga P_0 . Need puutujad moodustavad kerapinna puutujata sapinna, mille võrrand on seega

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2,$$

kus x_0 , y_0 ja z_0 on puutepunkti koordinaadid. Tähendab, kui punkt P_0 asetseb kerapinnal, siis polaartasapind läbib selle punkti ja on kerapinnale puutujatasapinnaks pooluses P_0 . Kui aga poolus P_0 on kera sees, siis sellest punktist ei saa kujundada kerapinnale puutujakoonust ja polaartasapind asetseb täielikult väljaspool kera.

Et leida tasapinna võrrand, kui tasapind on puutujatasapinnaks kerapinnale

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

punktis $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$, selleks teisendame koordinaattelgi rööplükkega nii, et kera keskpunkt $K \equiv (a | b | c)$ saaks uueks 0-punktiks. Uues koordinaadistikus, kus jooksvad koordinaadid on x' , y' ja z' ning punkti P_0 koordinaadid x'_0 , y'_0 ja z'_0 , puutujatasapinna võrrand on

$$x'_0x' + y'_0y' + z'_0z' = r^2.$$

Et

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 - a, & y'_0 &= y_0 - b, & z'_0 &= z_0 - c \\ x' &= x - a, & y' &= y - b, & z' &= z - c, \end{aligned}$$

siis endises koordinaadistikus puutujatasapinna võrrand on

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = r^2,$$

mis kujutab kerapinna $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ puutujatasapinda punktis $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

§ 84. Punkti potents kerapinna suhtes. Potentstasapind, potentsjoon ja potentspunkt.

Kui sirge, mille suunanurgad on α , β ja γ , läbib kindla punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ ja lõikab kerapinda

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

punktis $P \equiv (x | y | z)$, siis

$$x = x_0 + d \cos \alpha, \quad y = y_0 + d \cos \beta, \quad z = z_0 + d \cos \gamma,$$

kus $d = P_0P$ on muutuv parameeter. Et punkt P asetseb kerapinnal, siis

$$(x_0 + d \cos \alpha - a)^2 + (y_0 + d \cos \beta - b)^2 + (z_0 + d \cos \gamma - c)^2 = r^2$$

ehk

$$d^2 + 2[(x_0 - a) \cos \alpha + (y_0 - b) \cos \beta + (z_0 - c) \cos \gamma]d + (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2 = 0,$$

millest nähtub, et sirge lõikab kerapinda kahes punktis, mille kaugusi punktist P_0 väljendavad võrrandi juured d_1 ja d_2 , kusjuures juurte korrutis

$$d_1 d_2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2.$$

Kui võrrandi juured on võrdsed, s. o. $d_1 = d_2 = d$, siis sirge on kerapinnale puutujaks ja

$$d^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2.$$

Et kauguste d_1 ja d_2 korrutis ei olene sirge suunanurkadest, siis punktist P_0 tõmmatud mistahes sirge lõikab kerapinda punktides, mille kauguste korrutis punktist P_0 on konstantne suurus. See konstantne suurus

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2$$

nimetatakse punkti P_0 potentsiks kerapinna $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ suhtes. Potentsiavaldisest nähtub, et punkti potents on positiivne, kui punkt on väljaspool kera; punkti potents on 0, kui punkt on kerapinnal, ja punkti potents on negatiivne, kui punkt on kera sees.

Punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ potentsid kerapindade

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2$$

ja

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2$$

suhtes on

$$(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - b_1)^2 + (z_0 - c_1)^2 - r_1^2$$

ja

$$(x_0 - a_2)^2 + (y_0 - b_2)^2 + (z_0 - c_2)^2 - r_2^2.$$

Et leida punkt, mille potentsid esimese ja teise kerapinna suhtes oleksid võrdsed, selleks peab olema

$$\begin{aligned} & (x_0 - a_1)^2 + (y_0 - b_1)^2 + (z_0 - c_1)^2 - r_1^2 = \\ & = (x_0 - a_2)^2 + (y_0 - b_2)^2 + (z_0 - c_2)^2 - r_2^2 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} & 2(a_1 - a_2)x_0 + 2(b_1 - b_2)y_0 + 2(c_1 - c_2)z_0 - \\ & - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Kui selles avaldises lugeda x_0 , y_0 ja z_0 jooksvateks koordinaatideks, siis võrrand

$$\begin{aligned} & 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z - \\ & - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) = 0 \end{aligned}$$

kujutab tasapinda, mis nimetatakse mõlema kerapinna potentsitasapinnaks.

Potentstasapinnal asetseva mistahes punkti potentsid mõlema kerapinna suhtes on isekeskis võrdsed. Järelikult, potentstasapinna punktist mõlemale kerapinnale tõmmatud puutujad on võrdsed.

Kui punkt $P \equiv (x | y | z)$ asetseb mõlema kerapinna lõikejoonel, s. o. nende ühisel ringjoonel, siis asetseb see punkt ka nende kerapindade potentstasapinnal, sest et siis avaldised

$$\begin{aligned} & (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1^2 \\ & (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 - r_2^2 \end{aligned}$$

mõlemad üksikult hävivad. Seega potentstasapind läbib mõlema kerapinna lõikeringi.

Kui kerapinnad isekeskis puutuvad, siis on potentstasapind kerapindade ühiseks puutujatasapinnaks puutepunktis.

Kui kerad on teineteisest eemal, siis ei ole potentstasapinnal kerapindadega ühiseid punkte.

Potentstasapinna võrrandist

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) = 0$$

nähtub, et potentstasapind on risti kerade keskjoonega, kui sirgega läbi kerade keskpunktide $(a_1 | b_1 | c_1)$ ja $(a_2 | b_2 | c_2)$, s. o. sirgega

$$\frac{x - a_2}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_2}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_2}{c_1 - c_2}.$$

Kolme kerapinna

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2$$

puhul tekib kolm potentstasapinda: esimese ja teise, teise ja kolmanda ning kolmanda ja esimese kerapinna potentstasapinnad, s. o.

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) = 0$$

$$2(a_2 - a_3)x + 2(b_2 - b_3)y + 2(c_2 - c_3)z - (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) + (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - r_3^2) = 0$$

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z - (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - r_3^2) + (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) = 0.$$

Neid võrrandeid liites näeme, et vasakute poolte summa saab 0-ks. Seega potentstasapinnad lõikuvad ühes sirges joones, mis nimetatakse nende kolme kerapinna potentsjooneks, mille punktist kolmele kerapinnale tõmmatud puutujad on võrdsed. Potentsjoon on risti kerade kesktasapinnaga, kui tasapinnaga läbi kerade keskpunktide $(a_1 | b_1 | c_1)$, $(a_2 | b_2 | c_2)$ ja $(a_3 | b_3 | c_3)$, s. o. tasapinnaga

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & a_1, & b_1, & c_1 \\ 1, & a_2, & b_2, & c_2 \\ 1, & a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ehk } \begin{vmatrix} x - a_1, & y - b_1, & z - c_1 \\ a_2 - a_1, & b_2 - b_1, & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1, & b_3 - b_1, & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nelja kerapinna

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2$$

$$(x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 = r_4^2$$

puhul tekib kuus potentsstasapinda

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) = 0$$

$$2(a_1 - a_3)x + 2(b_1 - b_3)y + 2(c_1 - c_3)z - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - r_3^2) = 0$$

$$2(a_1 - a_4)x + 2(b_1 - b_4)y + 2(c_1 - c_4)z - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 - r_4^2) = 0$$

$$2(a_2 - a_3)x + 2(b_2 - b_3)y + 2(c_2 - c_3)z - (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) + (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - r_3^2) = 0$$

$$2(a_2 - a_4)x + 2(b_2 - b_4)y + 2(c_2 - c_4)z - (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) + (a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 - r_4^2) = 0$$

$$2(a_3 - a_4)x + 2(b_3 - b_4)y + 2(c_3 - c_4)z - (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - r_3^2) + (a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 - r_4^2) = 0,$$

mis kolme kaupa moodustavad neli potentsjoont, millest igaüks on risti vastava kolme kera kesktasapinnaga. Kesktasapinnad moodustavad siin tetraeedri, mille tipud on kerade keskpunktides. Seega iga potentsjoon on risti tetraeedri vastava tahuga.

Kuuest potentsstasapinna võrrandist nähtub, et kolm viimast võrrandit tuletuvad eelmisest kolmest võrrandist. Sellest järeldub siis, et tähendatud kuus potentsstasapinda ja järelikult ka tähendatud neli potentsjoont lõikuvad ühes ja samas punktis. See on nelja kerapinna potentspunkt, millest tõmmatud puutujad kerapindadele on isekeskis võrdsed.

§ 85. Silindriline pind.

Kui teise järgu pinda kujutavas võrrandis

$$F(x, y, z) = 0$$

puudub jooksev aplikaat z , s. o.

$$F(x, y) = 0,$$

siis XY -tasapinnal viimane võrrand kujutab mingisugust teise järgu joont. Sellel joonel asetseva mistahes punkti koordinaadid rahuldavad antud võrrandit. Seda võrrandit rahuldavad ka kõikide nende ruumiliste punktide koordinaadid, kus abstsiss x ja ordinaat y ühtivad vastavalt XY -tasapinnal asetseva joone mingi punkti abstsissiga ja ordinaadiga, s. t. nende ruumiliste punktide koordinaadid, mis projektuvad XY -tasapinnal asetsevale joonele. Niisugused ruumilised punktid asetsevad pinnal, mille moodustab sirge, mis on ja jääb rööbikuks Z -teljega, kui ta liigub XY -tasapinnal antud joont mööda. Pind, mille moodustab see sirge, liikudes antud joont mööda ja jäädes kogu aeg rööbikuks Z -teljega, nimetatakse silindriliseks pinnaks. Antud joon XY -tasapinnal on juhtjoon ja sirge, mis moodustab silindrilise pinna, on moodustaja. Seega võrrand $F(x, y) = 0$ kujutab silindrilist pinda, mille moodustaja on rööbik Z -teljega.

Võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kujutab ruumis silindrilist pinda, mis on rööbik Z -teljega ja mille lõikejoon XY -tasapinnaga on ellips. See on elliptilise silindri pind (126. joon.).

Võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kujutab silindrilist pinda, mis on rööbik Z -teljega ja mille lõikejoon XY -tasapinnaga on hüperbool. See on hüperboolse silindri pind. Võrrandid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

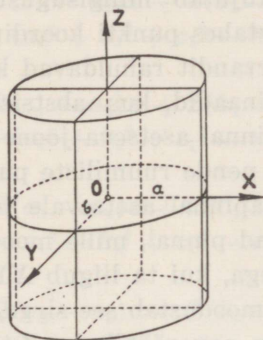
kujutavad hüperboolseid kaassilindreid, kusjuures nende ühised puutujatasapinnad määratakse kauguses

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

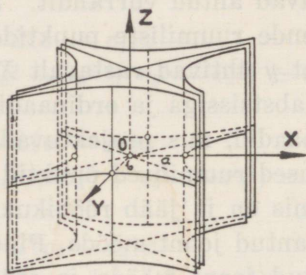
ehk

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ ja } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

nimetatakse nende asümptoottasapindadeks (127. joon.).



126. joonis.

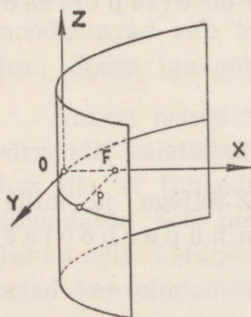


127. joonis.

Nii elliptiline kui ka hüperboolne silinder on sümmeetriline Z-telje suhtes.

Võrrand

$$y^2 = 2px$$



128. joonis.

kujutab silindrilist pinda, mis on rööbik Z-teljega ja mille lõikejoon XY-tasapinnaga on parabool. See on paraboolse silindri pind (128. joon.).

Arutades analoogiliselt eelmisega näeme, et võrrandid

$$F(y, z) = 0 \text{ ja } F(x, z) = 0$$

kujutavad silindrilisi pindu, mis on rööbikud vastavalt X- ja Y-teljega.

Teame, et kahe pinna lõikumisel tekib joon. Seega kaks pinda, mille võrrandid üldiselt on

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{ja} \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

määravad joone ruumis, kusjuures joone iga punkti koordinaadid rahuldavad mõlemat pinna võrrandit, sest et joon asetseb nii ühel kui ka teisel pinnal. Kuid neid pindu, mis määravad ühe ja sama joone ruumis, võib olla määramata palju, s. t. üht ja sama joont ruumis võib läbida määramata palju pindu. Meie aga valime joone määrajateks kaks kindlat pinda. Selleks kujundame läbi joone kaks silindrilist pinda: ühe rööbiti Z -teljega ja teise rööbiti Y -teljega. Nende silindriliste pindade võrrandid on

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{ja} \quad F_2(x, z) = 0,$$

kusjuures esimene kujutab ühtlasi joone projektsiooni XY -tasapinnal ja teine kujutab joone projektsiooni XZ -tasapinnal.

Analüütiliselt saame võrrandid

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{ja} \quad F_2(x, z) = 0$$

võrranditest

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{ja} \quad F_2(x, y, z) = 0$$

vastavalt z ja y kõrvaldamise teel.

Võrrand

$$F(x, y) = 0$$

kujutab silindrilist pinda, mis on rööbik Z -teljega. Üldjuhul ei tarvitse silindriline pind olla rööbik Z -teljega. Üldjuhul silindrilise pinna moodustaja on ja jääb rööbikuks mingi antud sihiga, kui ta liigub juhtjoont

$$\left. \begin{aligned} F_1(x', y', z') &= 0 \\ F_2(x', y', z') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

mööda. Kui m , n ja l on silindrilise pinna moodustaja sihitegurid, siis kõikide moodustajate võrrand on

$$\frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{l},$$

kus x' , y' ja z' on juhtjoonel asetseva mistahes punkti koordinaadid ja x , y ja z on moodustajatel asetsevate punktide koordinaadid. Kõrvaldades võrranditest

$$F_1(x', y', z') = 0$$

$$F_2(x', y', z') = 0$$

$$\frac{x-x'}{m} = \frac{y-y'}{n} = \frac{z-z'}{l}$$

koordinaadid x' , y' ja z' , saame otsitava silindrilise pinna võrrandi

$$F(x, y, z) = 0,$$

kus nüüd x , y ja z on silindrilisel pinnal asetseva mistahes punkti koordinaadid.

Olgu näiteks silindrilise pinna moodustaja rööbik sirgega

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

ja liikugu juhtjoont

$$\left. \begin{aligned} x'^2 + y'^2 + 2z'^2 &= 2 \\ x' - y' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

mööda. Kui $(x|y|z)$ on mistahes punkt silindrilisel pinnal, siis juhtjoonel asetsevat punkti $(x'|y'|z')$ läbiva moodustaja võrrand on

$$\frac{x-x'}{2} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z-z'}{0}.$$

Siit võime võtta kaks võrrandit ja lahendada need koos juhtjoone teise võrrandiga x' , y' ja z' suhtes, s. o.

$$x - x' = 2(y - y'), \quad z - z' = 0, \quad x' - y' = 0,$$

millest

$$x' = 2y - x, \quad z' = z, \quad y' = 2y - x.$$

Asetame leitud x' , y' ja z' väärtused juhtjoone esimesse võrrandisse x' , y' ja z' asemele, saame otsitava silindrilise pinna võrrandi

$$2(2y - x)^2 + 2z^2 = 2 \quad \text{ehk} \quad x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy = 1.$$

§ 86. Kooniline pind.

Koonilise pinna moodustab sirge liikudes mööda juhtjoont, läbides kogu aeg üht ja sama punkti, mis on koonuse tipp.

Kui juhtjoont kujutavad võrrandid

$$\left. \begin{aligned} F_1(x', y', z') &= 0 \\ F_2(x', y', z') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ja punkt $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ on koonuse tipp, siis koonuse moodustajate kui sirgete, mis läbivad punkti $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$ ja mistahes punkti $P \equiv (x' | y' | z')$ juhtjoonel, üldine võrrand on

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{z - z_0}{z' - z_0},$$

kus x', y' ja z' on juhtjoonel asetseva mistahes punkti koordinaadid ning x, y ja z on moodustajatel asetsevate punktide koordinaadid.

Kõrvaldades võrranditest

$$\left. \begin{aligned} F_1(x', y', z') &= 0 \\ F_2(x', y', z') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{z - z_0}{z' - z_0}$$

koordinaadid x', y' ja z' , saame koonilise pinna võrrandi

$$F(x, y, z) = 0,$$

kus x, y ja z on koonilisel pinnal asetseva mistahes punkti koordinaadid.

Oletame, et koonuse tipp P_0 on 0-punktis ja juhtjoone määravad näiteks võrrandid

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} &= 1 \\ z' &= c \end{aligned} \right\}$$

Siis moodustajate üldine võrrand on

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

sest $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Kõrvaldame neist võrranditest x' , y' ja z' . Kui $z' = c$, siis moodustajate võrrandist saame

$$x' = \frac{cx}{z} \quad \text{ja} \quad y' = \frac{cy}{z}.$$

Neid väärtusi esimesse võrrandisse asetades, saame koonilise pinna võrrandi

$$\frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2 z^2} = 1$$

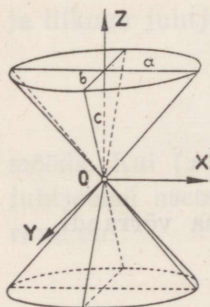
ehk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

mis kujutab teise järgu koonust, mille tipp on 0-punktis (129. joon.).

Märgime koonilise pinna võrrandi kujus

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{y^2}{b^2};$$



korrutame ja jagame selle võrrandi parempoolse osa vabalt võetud arvuga λ ja lahutame siis võrrandi mõlemad pooled teguriteks, saame

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = -\frac{y}{\lambda b} \cdot \frac{\lambda y}{b},$$

kus nüüd sirge

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \frac{y}{\lambda b} \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= -\frac{\lambda y}{b} \end{aligned} \right\}$$

iga λ väärtuse puhul asetseb koonilisel pinnal, sest kui koordinaadid x , y ja z rahuldavad sirge võrrandeid, siis rahuldavad nad samuti ka koonilise pinna võrrandit. Iga punkt, mis asetseb sellel sirgel, asetseb ühtlasi ka koonilisel pinnal. Järelikult, need sirge võrrandid on seega teise järgu koonuse moodustajate võrrandid, kui koonuse tipp on 0-punktis.

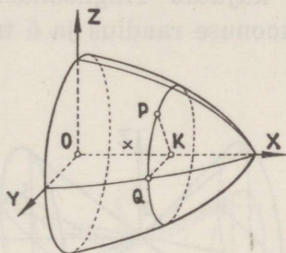
§ 87. Pöördpinnad.

Võrrand

$$F(x, y) = 0$$

kujutab mingit joont XY -tasapinnal. Selle joone pöörlemisel ümber X - või Y -telje tekib pöördpind. Olgu pöördpind saadud joone pöörlemisel ümber X -telje (130. joon.). Võtame sellel pinnal mingi punkti $P \equiv (x | y | z)$ ja kujundame läbi selle punkti tasapinna risti X -teljega (pöördteljega). Lõikes tekib ring, mille keskpunkt on $K \equiv (x | 0 | 0)$. Ringi raadiuse pikkus

$$PK = \sqrt{y^2 + z^2},$$



130. joonis.

mis on sama kui XY -tasapinnal ja antud joonel asetseva punkti Q ordinaat, kui punkti abstsiss on x . Seega võime joone võrrandis ordinaadi y asendada raadiuse väärtusega $\sqrt{y^2 + z^2}$, saame

$$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

Tähendab, et saada pinna võrrand, mille moodustab XY -tasapinnal asetsev joon pööreldes ümber X -telje, selleks tuleb joone võrrandis y asendada avaldisega $\sqrt{y^2 + z^2}$.

Kui XY -tasapinnal asetsev X -teljega rööbik sirge

$$y = b$$

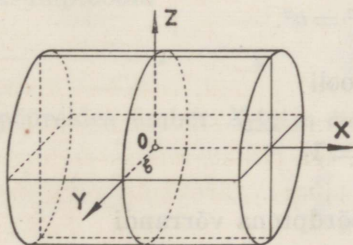
pöörleb ümber X -telje, siis saame silindrilise pöördpinna

$$\sqrt{y^2 + z^2} = b \text{ ehk } y^2 + z^2 = b^2,$$

kus b on pöörsilindri raadius (131. joon.).

Kui XY -tasapinnal asetsev 0 -punkti läbiv sirge

$$y = kx$$



131. joonis.

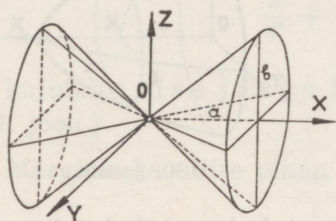
pöörleb ümber X -telje, siis saame koonilise pöördpinna

$$y^2 + z^2 = k^2 x^2.$$

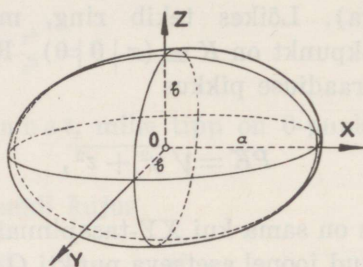
Tähistades $k = \frac{b}{a}$, siis

$$\frac{y^2 + z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 0,$$

mis kujutab ringkoonust, mille tipp on O -punktis. Siin b on koonuse raadius ja a ta kõrgus (132. joon.).



132. joonis.



133. joonis.

Kui XY -tasapinnal asetsev ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pöörleb ümber X -telje, siis saame pöördpinna võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1,$$

mis kujutab pöördellipsoidi (133. joon.). Kui $b = a$, siis saame kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

XZ -tasapinnal asetseva hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

pöörlemisel ümber X -telje saame pöördpinna võrrandi

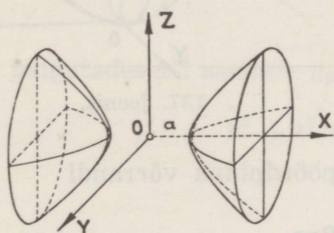
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1,$$

mis kujutab kahekattest pöördhüperboloidi (134. joon.). Hüperbooli

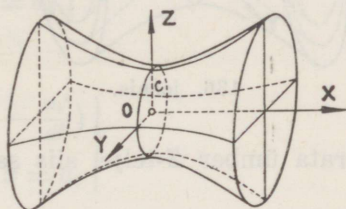
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

pöörlemisel ümber X -telje saame ühekattese hüperboloidi (135. joon.)

$$\frac{y^2 + z^2}{o^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



134. joonis.



135. joonis.

Hüperboloidid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = \pm 1$$

nimetatakse kaashüperboloidideks. Kaashüperboolide

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

asümptootid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

pöörelde ümber X -telje moodustavad koonilise pöördpinna

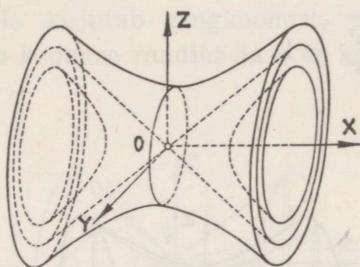
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 0,$$

mis puudutab tähendatud kaashüperboloide määramatus kauguses ja nimetatakse nende hüperboloidide asümptootkoo-

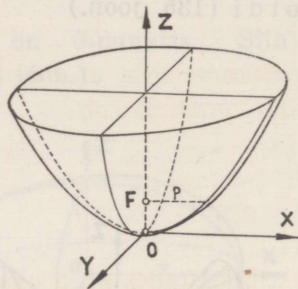
nuseks (136. joonis). Asümptootkoonus on kahekattese hüperboloidi ümber ja ühekattese hüperboloidi sees.

Kui XZ -tasapinnal asetsevat parabooli

$$x^2 = 2pz$$



136. joonis.



137. joonis.

pöörata ümber Z -telje, siis saame pöördpinna võrrandi

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

mis kujutab pöördparaboloidi (137. joonis).

§ 88. Ellipsoid.

Pind nimetatakse algebraliseks pinnaks, kui pinda kujutava võrrandi

$$F(x, y, z) = 0$$

vasak pool $F(x, y, z)$ on jooksvate koordinaatide x, y ja z suhtes täisratsionaalne funktsioon. Selle võrrandi aste määrab pinna järgu. Eespool nägime, et tasapind on esimese järgu pind. Kera-
pind ning eespool-vaadeldud silindriline ja kooniline pind on teise järgu pinnad, sest neid pindu kujutavad võrrandid olid teise astme võrrandid. Samuti pöördellipsoidid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mis saadakse XY -tasapinnal asetseva ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pöörlemisel vastavalt ümber X - ja Y -telje, kujutavad teise järgu pindu. Võtame neist näiteks pöördellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

ja lõikame teda tasapinnaga $x = a_0$. Lõikes saame ringjoone, mille võrrandid on

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} &= 1 \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\}$$

ehk, paigutades x -i asemele a_0

$$\left. \begin{aligned} y^2 + z^2 &= b^2 \left(1 - \frac{a_0^2}{a^2} \right) \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

kus nüüd ringi raadius

$$r = b \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}},$$

kusjuures $-a \leq a_0 \leq +a$. Tähendab, kui a_0 muutub piirides $-a$ -st $+a$ -ni, siis võrrandid

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} &= 1 \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\}$$

kujutavad ringjooni ellipsoidil.

Võtame ringjoone asemel ellipsi

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{a_0^2}{a^2} \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

mis asetseb tasapinnal $x = a_0$. Siin ellipsi poolteljed on

$$b \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}} \quad \text{ja} \quad c \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}}.$$

Kui nüüd a_0 muutub piirides $-a$ -st $+a$ -ni, siis ellips kujundab pinna, mille võrrandi leiame, kui kõrvaldame ellipsi võrranditest a_0 . Siis saame võrrandi

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Pind, mida kujutab saadud võrrand, on teise järgu pind ja nimetatakse kolme telje ellipsoidiks, mis lõikab X -telge punktides $x = \pm a$, Y -telge punktides $y = \pm b$ ja Z -telge punktides $z = \pm c$, kusjuures $2a$, $2b$ ja $2c$ on ellipsoidi teljed ehk peadiameetrid.

Lõigates saadud ellipsoidi XY -, XZ - ja YZ -tasapindadega, saame lõigetel vastavalt ellipsid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Kui ellipsoidi võrrandis $a = b = c$, siis võrrand

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

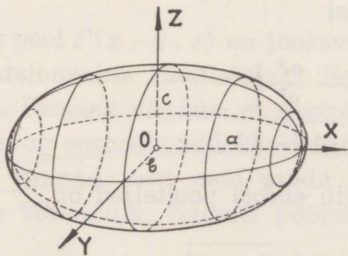
kujutab kerapinda.

Nagu nägime, ellipsoidi lõikumisel tasapinnaga $x = a_0$ tekib ellips pooltelgedega

$$b \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}} \quad \text{ja} \quad c \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}}.$$

Kui nüüd a_0 muutub piirides $-a$ -st $+a$ -ni, siis need poolteljed muutuvad, kuid jäävad võrdelisteks pooltelgedega b ja c , mis asetsevad YZ -tasapinnal. Seega ellipsoid on pind, mis saadakse ellipsi liikumisel mööda ellipseid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



138. joonis.

nõnda, et liikuv ellips, suuruselt muutudes, jääb kogu aeg rööbikuks YZ -tasapinnaga (138. joon.).

Ellipsoidi võrrandis esinevad ainult jooksvate koordinaatide teised astmed, seega on siis ellipsoid sümmeetriline 0 -punkti suhtes ja koordinaattasa-

pinnad on ellipsoidi sümmeetriatasapinnad ning koordinaatteljed ellipsoidi sümmeetriateljed, sest kui mistahes punkt $(x | y | z)$ asetseb ellipsoidil, siis punktid $(\pm x | \pm y | \pm z)$ asetsevad samuti sellel ellipsoidil.

Ellipsoidi lõikumisel tasapinnaga tekib ellips või erijuhul ringjoon. Ellipsoidi lõikumisel sirgega saame ellipsoidi kõõlu, otsapunktidega lõikepunktides.

Kui rööbikud tasapinnad lõikavad ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ringjooni mööda, siis üks neist rööbikutest tasapindadest läbib ellipsoidi keskpunkti (0-punkti) ja moodustab ringjoone raadiusega r . Kerapind

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

lõikab ellipsoidi sama ringjoont mööda. Kui nüüd ellipsoidi võrrandist lahutame kerapinna võrrandi, siis saame võrrandi

$$\frac{r^2 - a^2}{a^2} x^2 + \frac{r^2 - b^2}{b^2} y^2 + \frac{r^2 - c^2}{c^2} z^2 = 0,$$

mis peab kujutama pinda, millel asetseb samuti ringjoon raadiusega r .

Kui viimases võrrandis kõik kolm lugejat $r^2 - a^2$, $r^2 - b^2$ ja $r^2 - c^2$ on 0-st erinevad, siis kujutab see võrrand kas punkti (kui kõik lugejad on ühesuguste märkidega) või koonust, mille tipp on 0-punktis. Et lõiketaspind läbib samuti 0-punkti, siis ei saa ta koonust lõigata ringjoont mööda. Järelikult, et ringjoon raadiusega r asetseks pinnal, mida kujutab viimane võrrand, selleks peab siis vähemalt üks lugejatest $r^2 - a^2$, $r^2 - b^2$ või $r^2 - c^2$ olema võrdne 0-ga.

Oletame, et ellipsoidi võrrandis $a > b > c$. Siis $r^2 - a^2 \neq 0$ ja $r^2 - c^2 \neq 0$. Sest kui oleks $r^2 - a^2 = 0$, siis $r^2 - b^2$ ja $r^2 - c^2$ oleksid mõlemad positiivsed ja võrrand kujutaks sirget. Samuti kujutaks võrrand sirget, kui oleks $r^2 - c^2 = 0$, sest siis $r^2 - a^2$ ja $r^2 - b^2$ oleksid mõlemad negatiivsed.

Kui aga $r^2 - b^2 = 0$, siis on $r^2 - a^2$ ja $r^2 - c^2$ isesuguste märkidega ja võrrand

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2 = 0$$

kujutab kaht tasapinda

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = 0$$

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = 0,$$

mis läbivad Y -telje.

Et ellipsoidi ringjoonel asetsevate punktide koordinaadid peavad rahuldama võrrandeid

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

ja

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2 = 0,$$

siis sellest järeldub, et saadud tasapindade võrrandid kujutavad sääraseid tasapindu, mis lõikavad ellipsoidi ringjooni mööda. Samuti lõikavad ka ellipsoidi ringjooni mööda kõik nendega rööbikud tasapinnad, s. o. tasapinnad, mille võrrandid on

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = \mu$$

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = \nu,$$

kus μ ja ν on muutuvad parameetrid.

§ 89. Ellipsoidi diameeter ja diameetritasapind.

1. definitsioon: Ellipsoidi diameeter on rööplõigetega tekitatud ellipsite (erijuhul ringide) keskpunktide kogu.

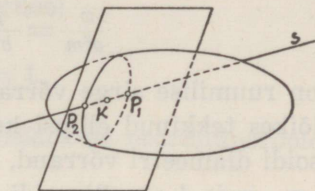
2. definitsioon: Ellipsoidi diameetritasapind on ellipsoidi rööbikute kõõlude keskpunktide kogu.

Olgu ellipsoidi

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

röökute lõiketasapindade ühise normaali sihitegurid m , n ja l ning ühes lõikes tekkinud ellipsi keskpunkt $K \equiv (x | y | z)$ (139. joon.). Kujutame lõike-
tasapinnal läbi punkti K vabalt mingi sirge s , mille parameet-
rilised võrrandid on

$$\begin{aligned}x' &= x + d \cos \alpha \\y' &= y + d \cos \beta \\z' &= z + d \cos \gamma,\end{aligned}$$



139. joonis.

kus x' , y' ja z' on sirgel s asetseva mistahes punkti koordinaadid, d on punkti $(x' | y' | z')$ kaugus punktist $K \equiv (x | y | z)$ ning α , β ja γ on sirge s suunanurgad.

Lahendades sirge parameetrilised võrrandid koos ellipsoidi võrrandiga koordinaatide x' , y' ja z' suhtes, saame võrrandi

$$\frac{(x + d \cos \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + d \cos \beta)^2}{b^2} + \frac{(z + d \cos \gamma)^2}{c^2} = 1$$

ehk

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}\right) d^2 + 2 \left(\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2}\right) d + \\ + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0,\end{aligned}$$

mis määrab sirge ja ellipsoidi lõikepunktide P_1 ja P_2 kaugused d_1 ja d_2 punktist K . Et kaugused d_1 ja d_2 punktist K on vastupidi suunatud ja absoluutselt võrdsed, siis

$$d_1 + d_2 = 0$$

ja seega võrrandis d kordaja on 0, s. o.

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2} = 0.$$

Kui viimases võrduses vaadelda $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$ ja $\frac{z}{c^2}$ kui mingi sirge sihitegureid, siis võrdus näitab, et see sirge on risti sirgega s . Et s oli lõiketasapinnal vabalt võetud sirge, mis läbib punkti K , siis sirge sihiteguritega $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$ ja $\frac{z}{c^2}$ on lõiketasap-

pinna normaali sihiline, mille sihitegurid olid m , n ja l . Sirgete rööpseisu tingimuse järgi on siis

$$\frac{x}{a^2 m} = \frac{y}{b^2 n} = \frac{z}{c^2 l},$$

mis on ruumilise sirge võrrand, mida rahuldavad ellipsoidi iga rööplõikes tekkinud ellipsi keskpunkti koordinaadid, ja on seega ellipsoidi diameetri võrrand, kus a , b ja c on ellipsoidi poolteljed ning m , n ja l on ellipsoidi rööbikute lõiketasapindade normaali sihitegurid. Võrrand näitab, et diameetrid läbivad ellipsoidi keskpunkti.

Kui võrrandis

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2} = 0$$

$\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ vaadelda kui ellipsoidi kõigi rööbikute kõõlude ühiseid suunakoosinusi, siis seda võrrandit rahuldavad kõigi nende rööbikute kõõlude keskpunktide koordinaadid. Järelikult kujutab siis see võrrand tasapinda, mis läbib ellipsoidi kõikide rööbikute kõõlude keskpunktid ja on seega ellipsoidi diameetritasapinna võrrand. Võrrand näitab, et diameetritasapinnad läbivad ellipsoidi keskpunkti.

Kui ellipsoidi diameeter läbib diameetritasapinnaga rööbikutes lõigetes tekkinud ellipsite keskpunktid, siis on diameetritasapind sellele diameetrile kaasdiameetritasapinna k s. Seega ellipsoidi diameetri

$$\frac{x}{a^2 m} = \frac{y}{b^2 n} = \frac{z}{c^2 l}$$

kaasdiameetritasapinna võrrand on

$$mx + ny + lz = 0.$$

Kui ellipsoidi diameetritasapind läbib diameetriga rööbikute kõõlude keskpunktid, siis on diameeter sellele diameetritasapinnale k a a s d i a m e e t r i k s. Ellipsoidi diameetritasapinna

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2} = 0$$

kaasdiameetri võrrand on siis

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}.$$

§ 90. Kahekattene hüperboloid.

Kui XZ -tasapinnal asetsev hüperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

pöörleb ümber X -telje, siis saame kahekattese pöördhüperboloidi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

Lõigates seda pöördpinda tasapinnaga $x = a_0$, saame lõikes ringjoone, mille võrrandid on

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2 + z^2}{c^2} &= \frac{a_0^2}{a^2} - 1 \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

kus ringi raadius

$$r = c \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} - 1},$$

kusjuures a_0 võib muutuda piirides $-\infty$ -st $-a$ -ni ja $+a$ -st $+\infty$ -ni.

Võtame ringjoone asemel ellipsi

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \frac{a_0^2}{a^2} - 1 \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

mis asetseb tasapinnal $x = a_0$. Siin ellipsi poolteljed on

$$b \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} - 1} \quad \text{ja} \quad c \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} - 1}.$$

Kui nüüd a_0 muutub piirides $-\infty$ -st $-a$ -ni ja $+a$ -st $+\infty$ -ni, siis ellips kujutab pinna, mille võrrandi leiame, kui kõrvaldame ellipsi võrranditest a_0 . Saame võrrandi

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

mis kujutab üldist kahekattest hüperboloidi.

Selle hüperboloidi lõikejooned XY - ja XZ -tasapindadega on hüperboolid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

kuid YZ -tasapinnaga sel hüperboloidil puudub reaalne lõikejoon.

Nagu nägime, hüperboloidi lõikumisel tasapinnaga $x = a_0$ tekib ellips pooltelgedega

$$b \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} - 1} \quad \text{ja} \quad c \sqrt{\frac{a_0^2}{a^2} - 1},$$

kus $|a_0| \geq a$. Sellest järeldub, et kahekattest hüperboloidi võime vaadelda kui pinda, mis saadakse ellipsi liikumisel mööda hüperboole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nõnda, et liikuv ellips, suuruselt muutudes, jääb kogu aeg rööbikuks YZ -tasapinnaga (vrd. 134. joon.).

Kahekattene hüperboloid on sümmeetriline 0-punkti suhtes ja koordinaattasapinnad on tema sümmeetriatasapindadeks ning koordinaatteljed sümmeetriatelgedeks.

§ 91. Ühekattene hüperboloid.

Kui XZ -tasapinnal asetsev hüperbool

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

pöörleb ümber X -telje, siis saame ühekattese pöördhüperboloidi

$$\frac{y^2 + z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Lõigates teda tasapinnaga $x = a_0$, saame lõikes ringjoone, mille võrrandid on

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2 + z^2}{c^2} &= 1 + \frac{a_0^2}{a^2} \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

kus ringi raadius

$$r = c \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{a^2}}$$

ja a_0 võib muutuda piirides $-\infty$ -st $+\infty$ -ni.

Võtame ringjoone asemel ellipsi

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 + \frac{a_0^2}{a^2} \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

mis asetseb tasapinnal $x = a_0$ ja kus ellipsi poolteljed on

$$b \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{a^2}} \quad \text{ja} \quad c \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{a^2}}.$$

Kui nüüd a_0 muutub piirides $-\infty$ -st $+\infty$ -ni, siis ellips kujundab pinna, mille võrrandi leiame, kui kõrvaldame ellipsi võrranditest a_0 . Saame võrrandi

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

mis kujutab üldist ühekattest hüperboloidi.

Lõigates saadud hüperboloidi YZ -, XY - ja XZ -tasapindadega, saame lõigetes vastavalt ühe ellipsi ja kaks hüperbooli

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Hüperboloidi lõikumisel tasapinnaga $x = a_0$ tekib ellips pooltelgedega

$$b \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{a^2}} \quad \text{ja} \quad c \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{a^2}}.$$

Kui nüüd a_0 muutub piirides $-\infty$ -st $+\infty$ -ni, siis need poolteljed muutuvad, kuid jäävad võrdelisteks pooltelgedega b ja c , mis asetsevad YZ -tasapinnal. Seega võime ühekattest hüperboloidi vaadelda kui pinda, mis saadakse ellipsi liikumisel mööda hüperboole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

nõnda, et liikuv ellips, suuruselt muutudes, jääb kogu aeg rööbi-kuks YZ -tasapinnaga (vrd. 135. joon.).

Ühekattene hüperboloid on sümmeetriline 0-punkti suhtes ja koordinaattasapinnad on tema sümmeetritasapindadeks ning koordinaatteljed sümmeetriatelgedeks.

Nii ühekattese kui ka kahekattese hüperboloidi asümptootkoonus on

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0.$$

Kui rööbikud tasapinnad lõikavad ühekattest hüperboloidi

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ringjooni mööda, siis üks neist rööbikutest tasapindadest läbib hüperboloidi keskpunkti (0-punkti) ja moodustab ringjoone raadiusega r . Kerapind

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

lõikab hüperboloidi sama ringjoont mööda. Lahutades hüperboloidi võrrandist kerapinna võrrandi, saame

$$\frac{r^2 - b^2}{b^2} y^2 + \frac{r^2 - c^2}{c^2} z^2 - \frac{r^2 + a^2}{a^2} x^2 = 0,$$

mis peab kujutama pinda, millel asetseb sama ringjoon raadiusega r .

Kui saadud võrrandis lugejad $r^2 - b^2$, $r^2 - c^2$ ja $r^2 + a^2$ on ühesuguste märkidega, siis võrrand kujutab koonust, mille tipp on 0-punktis. Kui $r^2 - b^2 < 0$ ja $r^2 - c^2 < 0$, siis võrrand kujutab punkti.

Oletame, et $b > c$. Siis $r^2 - c^2 \neq 0$. Sest kui oleks $r^2 - c^2 = 0$, siis $r^2 - b^2 = c^2 - b^2 < 0$ ja võrrand kujutaks sirget. Kui aga $r^2 - b^2 = 0$, siis $r^2 - c^2 = b^2 - c^2 > 0$ ja võrrand

$$\frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2 - \frac{b^2 + a^2}{a^2} x^2 = 0$$

kujutab kaht tasapinda

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = 0$$

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = 0,$$

mis läbivad Y -telje. Need ja nendega rööbikud tasapinnad

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = \mu$$

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = \nu$$

lõikavad ühekattest hüperboloidi ringjooni mööda.

Kui ühekattese hüperboloidi võrrandis

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

parempoolse osa korrutame ja jagame vabalt võetud arvuga λ ja lahutame võrrandi mõlemad pooled teguriteks

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = \lambda \left(1 + \frac{z}{c}\right) \cdot \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{z}{c}\right),$$

siis sirged

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= \lambda \left(1 + \frac{z}{c}\right) \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a} &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{z}{c}\right) \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= \lambda \left(1 - \frac{z}{c}\right) \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a} &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{z}{c}\right) \end{aligned} \right\}$$

iga λ väärtuse puhul asetsevad hüperboloidil, sest kui koordinaadid x , y ja z rahuldavad neid sirgete võrrandeid, siis rahuldavad nad ka hüperboloidi võrrandit. Seega ühekattesel hüperboloidil on kaks parve sirgjoonelisi moodustajaid. Ühenduses sellega ühekattest hüperboloidi nimetatakse teise järgu joonpinnaks.

§ 92. Elliptiline paraboloid.

Kui XZ -tasapinnal asetseva parabooli

$$x^2 = 2pz$$

pöörata ümber Z -telje, siis saame pöördparaboloidi

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

mille lõikumisel tasapinnaga $z = c_0$ tekib ringjoon, mille võrrandid on

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2pc_0 \\ z &= c_0 \end{aligned} \right\},$$

kus ringi raadius

$$r = \sqrt{2pc_0}$$

ja c_0 võib muutuda 0-st $+$ ∞ -ni.

Võtame jälle ringjoone asemel ellipsi

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2pc_0} + \frac{y^2}{2qc_0} &= 1 \\ z &= c_0 \end{aligned} \right\},$$

mis asetseb tasapinnal $z = c_0$. Siin ellipsi poolteljed on

$$\sqrt{2pc_0} \quad \text{ja} \quad \sqrt{2qc_0},$$

kus c_0 võib muutuda piirides 0-st $+$ ∞ -ni. Kui ellipsi võrranditest kõrvaldada c_0 , siis saame võrrandi

$$\frac{x^2}{2pz} + \frac{y^2}{2qz} = 1 \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

See võrrand kujutab teise järgu pinda, mis nimetatakse elliptiliseks paraboloidiks.

Elliptilise paraboloidi lõikumisel XZ -, YZ - ja XY -tasapindadega tekib kaks parabooli ja üks punkt (0-punkt)

$$x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2qz, \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0.$$

Seega elliptilist paraboloidi võime vaadelda kui pinda, mis saadakse ellipsi liikumisel mööda paraboole

$$x^2 = 2pz \quad \text{ja} \quad y^2 = 2qz$$

nõnda, et liikuv ellips, suuruselt muutudes, jääb kogu aeg rööbi-kuks XY -tasapinnaga (vrd. 137. joon.).

Elliptilise paraboloidi võrrandis on ainult x ja y teises astmes, seepärast on ka ainult XZ - ja YZ -tasapinnad selle paraboloidi sümmeetriatasapindadeks ja ainult Z -telg on sümmeetriateljeks.

§ 93. Hüperboolne paraboloid.

Kui elliptilise paraboloidi võrrandis

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

muuta märk q ees, saame hüperboolse paraboloidi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

mille lõikumisel XZ -tasapinnaga tekib parabool

$$x^2 = 2pz,$$

mille suhtes Z -telg on sümmeetriateljeks.

Tasapind $x = a_0$ lõikab seda paraboloidi parabooli mööda, mille võrrandid on

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= -2qz + \frac{qa_0^2}{p} \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\}$$

ehk

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= -2q \left(z - \frac{a_0^2}{2p} \right) \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\},$$

millest nähtub, et paraboolidel, mis asetsevad tasapindadel $x = a_0$, on üks ja sama parameeter ($-q$). Nende paraboolide sümmeetriateljed asetsevad XZ -tasapinnal ja on rööbikud Z -teljega, ning nende lagipunktide abstsissiks on $\frac{a_0^2}{2p}$.

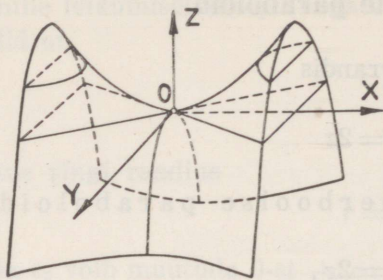
Et parabooli võrrand

$$x^2 = 2pz$$

$x = a_0$ väärtuste juures annab z -le samad väärtused, siis sellest järeldub, et parabooli

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= -2q \left(z - \frac{a_0^2}{2p} \right) \\ x &= a_0 \end{aligned} \right\}$$

lagipunktid asetsevad paraboolil $x^2 = 2pz$.



140. joonis.

Seega hüperboolset paraboloidi võime vaadelda kui pinda, mis saadakse parabooli liikumisel, kui parabooli parameeter on $(-q)$, sümmeetriatelg jääb XZ -tasapinnale ja lagipunkt liigub mööda parabooli $x^2 = 2pz$, (140. joon.). XY -tasapind lõikab seda paraboloidi sirgeid mööda, sest kui $z = 0$, siis

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,$$

millest

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

mis kujutavad kaht 0 -punktis lõikuvat sirget.

Et hüperboolse paraboloidi võrrandis on ainult x ja y teises astmes, siis on ainult XZ - ja YZ -tasapinnad selle paraboloidi sümmeetriatasapindadeks ja ainult Z -telg sümmeetriateljeks.

Hüperboolse paraboloidi lõikumisel tasapinnaga tekib hüperbool, parabool või kaks lõikuvat sirget.

Et leida hüperboolse paraboloidi moodustajate võrrandid, selleks korrutame ja jagame võrrandi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

parempoolse osa vabalt võetud arvuga λ ja lahutame võrrandi mõlemad pooled teguriteks, saame

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \frac{2\lambda z}{\lambda},$$

kus nüüd võrrandid

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \lambda \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{\lambda} \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \lambda \end{aligned} \right\}$$

kujutavad hüperboolsel paraboloidil asetsevat kaht parve sirgjoonelist moodustajaid. Hüperboolne paraboloid on seega teise järgu joonpind.

§ 94. Harjutusülesanded.

567. Leida kera raadius ja keskpunkt, kui kerapinna võrrand on:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5y - 8 = 0$.

568. Kas punktid $P_1 \equiv (1 | 2 | 3)$, $P_2 \equiv (-1 | -5 | 6)$ ja $P_3 \equiv (5 | -2 | 7)$ on kera sees, kerast väljas või kerapinnal, kui kerapinna võrrand on $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 43$.

569. Missugustes punktides X -telg lõikab kerapinda $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$?

570. Leida kerapinna $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0$ löikepunktid koordinaattelgedega ja näidata, et iga telje telglõikude korrutised on võrdsed.

571. Leida kerapinna võrrand, kui kera keskpunkt on $K \equiv (1 | 3 | -2)$ ja kerapind läbib 0-punkti.

572. Leida kerapinna võrrand, kui kerapind läbib 0-punkti ja punktid $A \equiv (2 | 0 | 0)$, $B \equiv (1 | 1 | 0)$ ja $C \equiv (1 | 0 | -1)$.

573. Leida kerapinna $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ keskpunkti kaugus tasapinnast $Ax + By + Cz + D = 0$.

574. Kas tasapind $2x - 5y + 3z - 7 = 0$ lõikab kerapinda $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 9x - 7y - 6z + 5 = 0$?

575. Leida kerapinna $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ keskpunktist tasapinnale $Ax + By + Cz + D = 0$ tõmmatud normaali võrrand.

576. Kas kerapinnal $x^2 + y^2 + z^2 = 2(ax + by + cz)$ ja tasapinnal $Ax + By + Cz = 0$ võib olla üks ühine punkt?

577. Leida kerapinna võrrand, kui kerapind, mille raadius on r , puudutab kõiki koordinaattasapindu.

578. Leida kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ja sirge löikepunktid, kui sirge läbib punkte $P_0 \equiv (5 | 2 | -1)$, $P_1 \equiv (4 | -2 | 7)$.

579. Määrata ringjoone võrrand ruumis.

580. Leida kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ ja tasapinna $z = 8$ lõikejoone projektsioon XY -tasapinnal.

581. Leida ringjoone

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ Ax + By + Cz + D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

projektsioon XY - ja XZ -tasapinnal.

582. Leida joone

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - z &= 0 \\ z &= x - 1 \end{aligned} \right\}$$

projektsioon XY -tasapinnal.

583. Leida kerapinna võrrand, kui kerapind läbib punkti $P \equiv (7 | -3 | 1)$ ja ringjoone

$$\left. \begin{aligned} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + z^2 &= 36 \\ 4x + y - z - 9 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

584. Leida kerapinna $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

585. Leida kerapinna $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ puutujakoonuse võrrand, kui koonuse tipp on 0-punktis.

586. Leida kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ puutujatasapinna lõikepunktid koordinaattelgedega, kui puutepunkti koordinaadid on x_0, y_0 ja z_0 .

587. Leida kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ja tasapinna $Ax + By + Cz + D = 0$ puutepunkt.

588. Leida kerapinna

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

puutujatasapinnad punktides, milles sirge

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$$

lõikab kerapinda.

589. Leida kerapinna võrrand, kui kerapind puudutab sirget

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-6}{4}$$

punktis $P_1 \equiv (1 \mid -4 \mid 6)$ ja sirget

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

punktis $P_2 \equiv (4 \mid -3 \mid 2)$.

590. Näidata, et kui sirge punktist P_0 lõikab kerapinda punktides P_1 ja P_2 , siis puutujatasapinnad neis punktides lõikuvad sirges joones, mis asetseb punkti P_0 polaartasapinnal.

591. Leida punkti $P_0 \equiv (x_0 \mid y_0 \mid z_0)$ potents kerapinna $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0$ suhtes.

592. Leida 0-punkti ning punktide $P_1 \equiv (0 \mid 2 \mid 3)$ ja $P_2 \equiv (5 \mid 1 \mid -4)$ potents kerapinna $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x - y + 2z - 7 = 0$ suhtes.

593. Leida kerapindade

$$A_1x^2 + A_1y^2 + A_1z^2 + G_1x + H_1y + I_1z + K_1 = 0$$

$$A_2x^2 + A_2y^2 + A_2z^2 + G_2x + H_2y + I_2z + K_2 = 0$$

potentstasapind.

594. Leida kerapindade

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$$

$$(x-7)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$$

potentstasapind.

595. Leida kerapindade

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y + 21 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z + 7 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8z + 8 = 0$$

potentsjoon.

596. Leida ringjoont

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

kujutavad silindrilised pinnad, mis on rööbikud Z - ja Y -teljega.

597. Leida silindrilise pinna võrrand, kui silindri moodustaja on rööbik X -teljega ja juhtjoone määravad võrrandid

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

598. Leida silindrilise pinna võrrand, kui silindri moodustaja on rööbik sirgega $x = y = z$ ja juhtjoone määravad võrrandid

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

599. Leida koonilise pinna võrrand, kui koonuse tipp on 0-punktis ja juhtjoone määravad võrrandid

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

600. Leida koonilise pinna võrrand, kui koonuse tipp on punktis $P_0 \equiv (4 | 0 | -3)$ ja juhtjoone määravad võrrandid

$$\begin{cases} 9y^2 + 25z^2 = 225 \\ x = 0 \end{cases}$$

601. Näidata, et koonuslõiked rööbikute tasapindadega on sarnased.

602. Leida ellipsoidi $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$ ja tasapinna $x + 4z - 4 = 0$ lõikejoone projektsioon XY -tasapinnal.

603. Leida ellipsoidi

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

ja sirge

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 6}{-3} = \frac{z + 2}{-2}$$

lõikepunktid.

604. Näidata, et ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

puutujakoonuse võrrand on

$$\left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0.$$

605. Näidata, et ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

polaartasapinna võrrand on

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1,$$

kui poolus on punktis $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

606. Näidata, et ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

puutujatasapinna võrrand on

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1,$$

kui puutepunktiks on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

607. Leida ellipsoidi

$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$$

puutujatasapinna võrrand, kui puutujatasapind on rööbik tasapinnaga $2x + 2y - 3z = 0$.

608. Näidata, et rööbikud tasapinnad lõikavad ellipsoidi sarnaseid ellipseid mööda.

609. Leida ellipsoidi

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1$$

diameetri

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$$

kaasdiameetritasapind ja diameetritasapinna

$$3x - 5y + 2z = 0$$

kaasdiameeter.

610. Leida ellipsoidi

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$$

diameetritasapindade võrrandid, kui tasapinnad lõikavad ellipsoidi ringjooni mööda.

611. Näidata, et koonuse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

polaartasapind läbib koonuse tipu ja ta võrrand on

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0,$$

kui poolus on punktis $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

612. Näidata, et koonuse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

puutujatasapinna võrrand on

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 0,$$

kui üheks puutepunktiks on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

613. Leida koonuse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0$$

puutujatasapind punktis $P_0 \equiv (4 | -6 | 4)$.

614. Leida hüperboloidi

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$$

ja sirge

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

lõikepunktid.

615. Näidata, et kahekattese hüperboloidi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

puutujatasapinna võrrand on

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1,$$

kui puutepunktiks on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

616. Näidata, et ühekattese hüperboloidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

puutujatasapinna võrrand on

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1,$$

kui puutepunktiks on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

617. Leida hüperboloidi

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$$

puutujatasapind punktis $P_0 \equiv (-6 | 2 | 6)$.

618. Leida hüperboloidi

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

puutujatasapinna võrrand, kui puutujatasapind läbib sirge

$$\frac{x}{3} = \frac{y+9}{3} = \frac{z}{1}.$$

619. Näidata, et elliptilise paraboloidi

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

puutujatasapinna võrrand on

$$\frac{x_0x}{p} + \frac{y_0y}{q} = z_0 + z,$$

kui puutepunktiks on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

620. Näidata, et hüperboolse paraboloidi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

puutujatasapinna võrrand on

$$\frac{x_0x}{p} - \frac{y_0y}{q} = z_0 + z,$$

kui puutepunktiks on $P_0 \equiv (x_0 | y_0 | z_0)$.

621. Leida paraboloidi

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{0,5} = 2z$$

ja sirge

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$$

löikepunktid.

Harjutusülesannete vastused.

§ 6.

1. a) 1 ; b) -10 ; c) $\cos 2\alpha$; d) $\cos \alpha - \sin \alpha$.
2. a) -46 ; b) -16 ; c) 48 ; d) $xy + xz + yz + xyz$; e) $2(a^3 + b^3)$; f) $(a-b)(b-c)(c-a)$; g) $6 \sin \frac{\alpha-\gamma}{2} \cos \frac{\alpha+\gamma}{2}$; h) $4 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\gamma}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2}$.
3. a) -8 ; b) -12 ; c) -72 .
4. a) $x=1$; $y=2$; b) $x=3$; $y=5$; c) $x=1$; $y=2$; $z=3$; d) $x=1$; $y=0$; $z=1$; e) $x=-2$; $y=3$; $z=1$; f) pole lahendeid ; g) $x=0,5$; $y=5$; $z=3$; h) $x=0$; $y=3$; $z=1$; $v=0,2$.

§ 14.

9. a) $A' \equiv (5 | 2)$; b) $A'' \equiv (-5 | -2)$; c) $A''' \equiv (-5 | 2)$.
10. a) $A' \equiv (3 | \frac{5\pi}{3})$; b) $A'' \equiv (3 | \frac{4\pi}{3})$.
13. $B \equiv (12 | -7)$.
14. $A \equiv (-1 | 0)$; $B \equiv (5 | 6)$.
15. $(AB)_x = 2$; $(AB)_y = -1$.
16. $(2\sqrt{2} | 0)$; $(0 | 2\sqrt{2})$; $(-2\sqrt{2} | 0)$; $(0 | -2\sqrt{2})$.
17. $(\sqrt{3} | 0)$; $(0 | 1)$; $(-\sqrt{3} | 0)$; $(0 | -1)$.
18. $(\pm 3 | \pm 3)$; $(0 | \pm 3)$; $(0 | 0)$; $(\pm 3 | 0)$.
19. $(6 | 0)$; $(3 | 3\sqrt{3})$; $(-3 | 3\sqrt{3})$; $(-6 | 0)$; $(-3 | -3\sqrt{3})$; $(3 | -3\sqrt{3})$.

20. a) $d \approx 6,4$; b) $d \approx 10,05$; c) $d \approx 14,56$; d) $d \approx 8,06$;
e) $d \approx 22,78$; f) $d \approx 4,69$.
21. a) $d \approx 7,21$; b) $d \approx 8,77$; c) $d \approx 6,79$; d) $d \approx 4,81$.
22. a) $d \approx 3,23$; b) $d \approx 4,44$; c) $d \approx 9,62$; d) $d \approx 2,83$.
23. a) $2p \approx 26,74$; b) $2p \approx 26,61$; c) $2p \approx 17,43$;
d) $2p \approx 36,96$; e) $2p \approx 25,47$; f) $2p \approx 26,36$;
g) $2p \approx 33,77$; h) $2p \approx 33,02$; i) $2p \approx 28,87$;
j) $2p \approx 25,98$; k) $2p \approx 23$.
24. a) $AB \approx 14,03$; $BC \approx 11,18$; $CD \approx 14,76$; $DA \approx 17,08$;
 $AC \approx 21,02$; $BD \approx 18,79$;
b) $AB \approx 13,23$; $BC \approx 8,54$; $CD \approx 11,36$; $DA \approx 7,55$;
 $AC \approx 13,53$; $BD \approx 15,72$;
c) $AB \approx 7,58$; $BC \approx 14,88$; $CD \approx 4,66$; $DA \approx 17,00$;
 $AC \approx 20,58$; $BD \approx 12,55$.
26. $A \equiv (-4 \mid 5)$; $B \equiv (8 \mid 1)$; $C \equiv (0 \mid -3)$.
27. a) $AA_1 \approx 13,93$; $BB_1 \approx 13,93$; $CC_1 \approx 11,31$;
b) $AA_1 \approx 12,51$; $BB_1 \approx 6,58$; $CC_1 \approx 13,47$;
c) $AA_1 \approx 8,28$; $BB_1 \approx 8,77$; $CC_1 \approx 16,81$.
28. a) $A_1 \equiv (0 \mid 6)$; $B_1 \equiv (5 \mid 5)$; $C_1 \equiv (1 \mid 7)$;
b) $A_1 \equiv (4,25 \mid -3)$; $B_1 \equiv (8 \mid -3,75)$;
 $C_1 \equiv (4,75 \mid -5,25)$;
c) $A_1 \equiv (3,75 \mid -0,65)$; $B_1 \equiv (4,75 \mid 2,8)$;
 $C_1 \equiv (9,1 \mid -3,25)$.
29. $A_4 \equiv (2 \mid -2)$. *wei* $A_4 = (4 \mid 0)$
30. $A_3 \equiv (-4 \mid -1)$; $A_4 \equiv (1 \mid -4)$.
31. a) $S = 4$; b) $S \approx 4,76$; c) $S = 0,75$; d) $S \approx 12,02$;
e) $S = 0$; f) $S \approx 54,85$; g) $S = 63a^2$; h) $S \approx 12$;
i) $S \approx 4,50$; j) $S \approx 33,96$.
32. a) $S = 99$; b) $S \approx 30,74$; c) $S = 3,75$.
33. $S = 2,125$.

34. $(4 \mid 180^\circ)$; $(3 \mid 90^\circ)$; $(1 \mid 270^\circ)$; $(3 \sqrt{2} \mid 315^\circ)$;
 $(\sqrt{2} \mid 45^\circ)$.
35. $(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{\sqrt{2}}{2})$; $(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \mid -\frac{3}{2})$; $(\sqrt{2} \mid -\sqrt{2})$.
36. $(2 + 5\sqrt{3} \mid 8)$.
37. $(6\sqrt{2} \mid 225^\circ)$.
38. $B \equiv (9 \mid 2 + 6\sqrt{3})$.
39. $(-3,4 \mid 0)$.
40. $(15 \mid 15)$ ehk $(3 \mid 3)$.
41. $(1 \mid 10)$ ehk $(-11 \mid 10)$.
42. $x = 4$; $y = -3$.
43. $(-\frac{1}{3} \mid \frac{10}{3})$.
44. $(3 \mid -4)$; $(4 \mid -2)$; $(3 \mid -6)$; $(2 \mid -4)$.
45. $\theta = \frac{\pi}{3}$.
46. $B_1 \equiv (11 \mid 0)$; $C_1 \equiv (8 \mid 11,5)$.
47. $(-1 \mid -2)$.
48. $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 \equiv 150^\circ$.
49. $(3 \mid 0)$; $(3\sqrt{3} \mid \frac{\pi}{6})$; $(6 \mid \frac{\pi}{3})$; $(3\sqrt{3} \mid \frac{\pi}{2})$;
 $(3 \mid \frac{2\pi}{3})$; $(0 \mid \frac{0}{0})$.
50. $AB = BC = CA = 7$.
51. $(1 \mid 0)$ ja $(7 \mid 0)$.
52. a) $(-6 \mid -2)$; b) $(-6 \mid 8)$; c) $(2 \mid -2)$; d) $(2 \mid 8)$.
53. $(9 \mid -17)$; $(-9 \mid 17)$.
54. $(3 \mid 2)$; $(-3 \mid -2)$.
55. $AB = 0$.
56. $(5 \mid -1)$; $(-5 \mid 1)$.

57. $A \equiv \left(\frac{3}{2} \mid -\frac{5}{2} \right)$.
58. $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 2$; $y = \frac{y'}{\sqrt{2}}$.
59. $A \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \mid \frac{5}{2} \right)$.
60. $B \equiv (1 \mid 3\sqrt{3})$.
61. $x''^2 + y''^2 - x''y'' = 4$.
62. $x'^2 + y'^2 - x'y' = 9$.
63. $x'y' = 0$.
68. a) $(2 \mid -3 \mid -1)$; b) $(2 \mid 3 \mid -1)$; c) $(-2 \mid -3 \mid -1)$; d) $(2 \mid 3 \mid 1)$; e) $(-2 \mid -3 \mid 1)$; f) $(-2 \mid 3 \mid -1)$; g) $(-2 \mid 3 \mid -1)$.
69. $S \equiv (0 \mid 0 \mid \sqrt{2})$; $A_1 \equiv (1 \mid 1 \mid 0)$; $A_2 \equiv (-1 \mid 1 \mid 0)$; $A_3 \equiv (-1 \mid -1 \mid 0)$; $A_4 \equiv (1 \mid -1 \mid 0)$.
70. $5\sqrt{2}$; $\sqrt{34}$; $\sqrt{41}$; 5.
71. $d = 3$.
72. $A_1A_2 = A_1A_3 = A_3A_4 = \sqrt{14}$; $A_1A_4 = \sqrt{6}$; $A_2A_3 = 3\sqrt{6}$; $A_2A_4 = 2\sqrt{5}$.
73. $(0 \mid 0 \mid \frac{14}{9})$.
74. $(0 \mid 1 \mid -2)$.
75. $C \equiv (1 \mid \frac{5}{3} \mid \frac{1}{3})$.
76. $B \equiv (10 \mid 0 \mid 2,6)$.
77. $A_0 \equiv (\frac{14}{3} \mid -8 \mid 12)$; $A_2 \equiv (\frac{4}{3} \mid -2 \mid 2)$; $A_4 \equiv (-\frac{1}{3} \mid 1 \mid -3)$; $A_5 \equiv (-\frac{11}{3} \mid 7 \mid -13)$.
78. a) $(6 \mid 2 \mid -6)$; $(-6 \mid -2 \mid 6)$; b) $(-3 \mid -1 \mid 3)$; $(3 \mid 1 \mid -3)$.
81. $\gamma_1 = 45^\circ$, $\gamma_2 = 135^\circ$.
82. Ei.
83. $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

84. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{3}$.
85. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 b) $\cos \alpha = \frac{3}{13}$, $\cos \beta = -\frac{4}{13}$, $\cos \gamma = \frac{12}{13}$;
 c) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$, $\cos \gamma = 0$.
86. $\cos \varphi_1 = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\cos \varphi_3 = \frac{2\sqrt{10}}{7}$.
87. $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 2$.
88. 60° .
89. 9.
90. Ruudu.
91. $C \equiv (4 \mid -5 \mid -2)$.
92. $P \equiv (-3 \mid 2 \mid 3)$.
93. $m_1 = \frac{7}{2}$, $m_2 = \frac{1}{5}$, $m_3 = -\frac{1}{2}$.
95. $S = 8(3 + \sqrt{3})$.
96. $V = 1\frac{1}{3}$.
97. $M \equiv (6 \mid 3 \mid 6\frac{2}{3})$.
98. $M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \mid \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \mid \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \right)$.
99. $r = 3,5$.
100. $K \equiv (2 \mid 1 \mid -1)$; $r = 3$.
101. $\sqrt{222}$; $\sqrt{214}$; $\sqrt{276}$; $S = 202,75$.
103. $3x'^2 + y'^2 - 2x'z' + 2 = 0$.
104. 90° .

§ 26.

105. $y = \pm \frac{20}{21}x + 5$.
106. $3x + 4y + 8 = 0$.
107. P_1 asetseb sirgel.
109. $P_1 \equiv (-2 \mid -1)$, $P_2 \equiv (-7 \mid 2)$, $P_3 \equiv (13 \mid -10)$,
 $P_4 \equiv (5,5 \mid -5,5)$.

110. a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; b) $\frac{x}{0,5} + \frac{y}{-3} = 1$;
 c) $\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1$; d) $\frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{\frac{7}{3}} = 1$.
111. a) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 3 = 0$; b) $0,6x - 0,8y - 0,9 = 0$;
 c) $0,5x + 0,5\sqrt{3}y - 1,75 = 0$; d) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = 0$.
112. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \pm 1$; $\pm \frac{x}{4} \mp \frac{y}{3} = 1$.
113. $P \equiv (1,6 \mid -1,4)$.
114. $P \equiv (3 \mid 0)$.
115. $P \equiv (\frac{11}{6} \mid \frac{1}{8})$.
116. $x + y - 11 = 0$, $3x - y - 16 = 0$.
117. $3x - 4y - 10 = 0$.
118. a) $2x + 9y - 26 = 0$, $7x + 3y - 23 = 0$, $5x - 6y - 8 = 0$;
 b) $2x + y - 5 = 0$, $5x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$;
 c) $2x - 3y - 4 = 0$, $2x - y = 0$, $y = 0$;
 d) $81x + 32y - 462 = 0$, $23x + 5y - 70 = 0$, $5x - 10y - 11 = 0$;
 e) $x - a = 0$, $y - a - b = 0$, $ax + (a - b)y - (a^2 + ab + b^2) = 0$.
119. a) $3x + 5y - 30 = 0$, $x - 5 = 0$, $y - 3 = 0$;
 b) $4x - 15y - 21 = 0$, $16x + 15y + 41 = 0$, $x + 1 = 0$;
 c) $1065x - 965y - 3389 = 0$, $165x + 485y + 46 = 0$,
 $1395x + 5y - 3297 = 0$.
120. Kõljed: $3x + 5y - 15 = 0$, $4x - 3y - 20 = 0$,
 $7x + 2y - 6 = 0$;
 mediaanid: $11x - y - 26 = 0$, $10x + 7y - 21 = 0$,
 $x - 8y - 5 = 0$.
121. Kõljed: $6x - y - 21 = 0$, $x - 9y + 23 = 0$,
 $7x + 2y + 31 = 0$, $x - 3y - 12 = 0$;
 diagonaalid: $5x + 8y + 9 = 0$, $8x - 7y - 11 = 0$;
 nurgad: $\alpha_1 \approx 80^\circ 32'$, $\alpha_2 \approx 6^\circ 20'$, $\alpha_3 \approx 105^\circ 57'$,
 $\alpha_4 \approx 18^\circ 26'$, $\alpha_5 \approx 148^\circ$, $\alpha_6 \approx 48^\circ 49'$.

122. a) $\alpha = 90^\circ$, $\beta \approx 71^\circ 34'$, $\gamma \approx 18^\circ 26'$;
 b) $\alpha \approx 71^\circ 34'$, $\beta \approx 81^\circ 52'$, $\gamma \approx 26^\circ 34'$;
 c) $\alpha \approx 32^\circ 28'$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma \approx 57^\circ 32'$;
 d) $\alpha \approx 70^\circ 21'$, $\beta \approx 19^\circ 39'$, $\gamma = 90^\circ$;
 e) $\alpha \approx 26^\circ 34'$, $\beta \approx 21^\circ 48'$, $\gamma \approx 131^\circ 38'$.
123. a) $\alpha \approx 30^\circ 58'$, $\beta \approx 108^\circ 26'$, $\gamma \approx 40^\circ 36'$;
 b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta \approx 108^\circ 26'$, $\gamma \approx 26^\circ 34'$;
 c) $\alpha \approx 39^\circ 6'$, $\beta \approx 55^\circ 18'$, $\gamma \approx 85^\circ 36'$;
 d) $\alpha \approx 16^\circ 33'$, $\beta \approx 145^\circ 18'$, $\gamma \approx 18^\circ 9'$;
 e) $\alpha = 90^\circ$, $\beta \approx 8^\circ 8'$, $\gamma \approx 81^\circ 52'$.
124. $m_2' \approx 0,51$, $m_2'' \approx 1,3$.
125. $\omega \approx 77^\circ$.
126. $\omega_1 = \omega_2 \approx 37^\circ 36'$, $\omega_3 = \omega_4 \approx 65^\circ 29'$, $\omega_5 = \omega_6 \approx 76^\circ 55'$.
127. a) $2x - y - 14 = 0$; b) $2x + 3y + 10 = 0$;
 c) $4x - 5y - 46 = 0$; d) $y + 6 = 0$; e) $x - 4 = 0$.
128. a) $x - 3y + 11 = 0$; b) $5x + 4y - 2 = 0$;
 c) $3x - y + 9 = 0$; d) $y - 3 = 0$; e) $x + 2 = 0$.
129. $7x - 2y - 10 = 0$.
130. $3x + y - 3 = 0$.
131. $5x + 25y + 1 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$.
132. a) $5x - 2y - 5 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$, $x - 4y - 4 = 0$;
 b) $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$;
 c) $3x - 7y + 6 = 0$, $5x - 2y + 10 = 0$, $2x + 5y + 4 = 0$;
 d) $3x - 7y = 0$, $x + 2y + 1 = 0$, $5x - 3y + 2 = 0$.
133. $P' \equiv (7 + \sqrt{10} \mid 0)$, $P'' \equiv (7 - \sqrt{10} \mid 0)$.
134. a) $(\frac{5}{7} \mid \frac{1}{7})$; b) sirged on rööbikud.
135. a) $A \equiv (1,5 \mid 1,5)$, $B \equiv (-1 \mid 4)$, $C \equiv (-6 \mid -6)$;
 b) $A \equiv (2 \mid -1)$, $B \equiv (2,4 \mid -2,8)$, $C \equiv (1\frac{1}{3} \mid -2)$;
 c) $A \equiv (2 \mid 0)$, $B \equiv (0 \mid 5)$, $C \equiv (-3 \mid 0)$;
 d) $A \equiv (1 \mid 2)$, $B \equiv (-4,5 \mid 2)$, $C \equiv (1 \mid -1\frac{2}{3})$;

e) $A \equiv (0 \mid 0)$, $B \equiv (4 \mid -4)$, $C \equiv (4 \mid 4)$;

f) sirged lõikuvad punktis $(2 \mid 0)$.

136. $A \equiv (6 \mid -2)$, $B \equiv (1,2 \mid 2,8)$, $C \equiv (-1,2 \mid -6,8)$,
 $D \equiv (-6 \mid -2)$.

137. $(2 \mid 1)$.

138. $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$.

139. $5x - y + 3 = 0$, $17x + 34y - 38 = 0$, $22x + 33y - 35 = 0$.

140. $13x - y - 51 = 0$.

141. $3x - 2y - 7 = 0$.

142. $4x + 5y - 21 = 0$.

143. $x + 3y - 1 = 0$.

144. $x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$.

145. $x + y - 6 = 0$, $x - y = 0$.

146. $S = 2,5$.

147. a) $a \approx 8,06$; $b \approx 5,66$; $c \approx 8,54$;

b) $m_1 = 5,5$; $m_2 \approx 6,02$; $m_3 \approx 7,81$;

c) $x - 1 = 0$; $x - 12y + 3 = 0$; $5x + 6y - 7 = 0$;

d) $S = 22$.

148. a) Lõikuvad ühes punktis; b) ei lõiku ühes punktis;
c) lõikuvad ühes punktis.

149. $(2 \mid 4)$.

150. $2x + 7y + 22 = 0$; $7x + 2y - 13 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

151. $2x + y - 8 = 0$; $x - 3y + 10 = 0$; $x + 4y - 4 = 0$.

152. $x + 7y - 6 = 0$; $x - y - 6 = 0$; $7x + y - 10 = 0$.

153. $4x - y - 7 = 0$; $x + 3y - 31 = 0$; $x + 5y - 7 = 0$.

154. $3x + y - 25 = 0$; $x - 3y - 15 = 0$; $2x - y = 0$.

155. $x - y + 3 = 0$.

156. $d_1 = 3$; $d_2 = 7$.

157. $P_3 \equiv (4 \mid 1)$.

158. a) $AA_1 \approx 3,13$; $BB_1 \approx 3,39$; $CC_1 \approx 3,88$;
 b) $AA_1 \approx 10,11$; $BB_1 \approx 8,04$; $CC_1 \approx 7,78$;
 c) $AA_1 \approx 12,01$; $BB_1 \approx 10,97$; $CC_1 \approx 10,94$.
159. Niisugust sirget ei ole.
160. $3x - 2y + 18 \approx 0$ ja $7x + 20y - 106 \approx 0$.
161. $3x + 4y - 25 = 0$.
162. $d = 1,5$.
163. $d = 7$.
164. $12x + 8y - 7 = 0$.
165. $x + y - 7 = 0$ ja $x - y - 3 = 0$.
166. $4x + y - 6 = 0$ ja $3x + 2y - 7 = 0$.
167. $x + 4y - 4 = 0$.
168. $3x - 4y - 25 = 0$ ja $3x - 4y + 5 = 0$.
169. $7x - y - 25 = 0$; $x - 5y + 11 = 0$; $3x + 2y + 16 = 0$.
170. $h = 0,3\sqrt{5}$.
173. a) $3x - 3y + 19 = 0$; $3x - 3y - 5 = 0$;
 b) $x + 3y - 11 = 0$; $3x - y - 3 = 0$.
174. $P' \equiv (0,8 \mid -1,6)$.
175. Langev kiir: $5x - 4y + 2 = 0$;
 peegelduv kiir: $4x - 5y + 1 = 0$.
176. $x + 2y - 11 = 0$; $2x + y - 5 = 0$.
177. $P_3 \equiv (-2,6 \mid 6,2)$.
178. $x' + \sqrt{2}y' - 1 = 0$; $10x' + 3\sqrt{2}y' - 14 = 0$.
179. $r = \frac{b}{\sin \varphi - k \cos \varphi}$.
180. $r = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \cos(135^\circ - \varphi)}$.
181. $r = \frac{5\sqrt{3}}{\cos(30^\circ - \varphi)}$.

182. $\varphi = 20^\circ$.
183. $r = \frac{1}{2 \sin \varphi}$.
184. $r = \frac{8 \cos 70^\circ}{\cos \varphi}$.
185. $r = \frac{r_1 r_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1 \sin (\varphi_1 - \varphi) - r_2 \sin (\varphi_2 - \varphi)}$.
186. a) $r = \frac{80}{(8\sqrt{3} - 5) \cos \varphi - (8 - 5\sqrt{3}) \sin \varphi}$.
- b) $r = \frac{6 \sin 65^\circ}{(2 \sin 40^\circ - 3 \sin 75^\circ) \cos \varphi + (2 \cos 40^\circ + 3 \cos 75^\circ) \sin \varphi}$.
- c) $r = \frac{2\sqrt{3}}{(4 \sin 80^\circ - \sin 20^\circ) \cos \varphi - (4 \cos 80^\circ - \cos 20^\circ) \sin \varphi}$.
- d) $r = \frac{3 \sin 20^\circ}{(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin 65^\circ) \cos \varphi - (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos 65^\circ) \sin \varphi}$.
- e) $r = \frac{30 \sin 50^\circ}{(3 \cos 10^\circ - 5 \sin 50^\circ) \cos \varphi - (3 \sin 10^\circ + 5 \cos 50^\circ) \sin \varphi}$.
- f) $\frac{7\sqrt{3}}{12} r \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{r^2 - 10r \cos \left(r - \frac{\pi}{12} \right) + 25}$.
187. $r = \frac{r_1 \cos (\alpha - \varphi_1)}{\cos (\alpha - \varphi)}$.
188. $r = \frac{r_1 \sin (\alpha - \varphi_1)}{\sin (\alpha - \varphi)}$.
189. $d = r_0 \cos (\alpha - \varphi_0) - p$.
190. a) $d = 1$; b) $d = 2$; c) $d \approx 6,96$.

§ 34.

191. P_2 ja P_4 asetsevad tasapinnal.
192. Tasapinnad läbivad vastavalt Z -, Y - või X -telje ja kujutavad koordinaattasapindade nurgapoolitajaid.
193. a) Läbib 0-punkti; b) rööbik Z -teljega; c) rööbik Y -teljega; d) läbib X -telje; e) rööbik XZ -tasapinnaga.

194. $\frac{5}{\sqrt{38}}x - \frac{3}{\sqrt{38}}y - \frac{2}{\sqrt{38}}z + \frac{7}{\sqrt{38}} = 0$; $\frac{5}{\sqrt{26}}x - \frac{1}{\sqrt{26}}z = 0$;
 $\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0$; $x + 3 = 0$; $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} - 1 = 0$;
 $z = 0$.
195. $p_1 = 5$; $p_2 = \frac{84}{9}$; $p_3 = 7$; $p_4 = 10$.
196. $d = 1$.
197. 3.
198. $P \equiv (10 \mid 10 \mid 10)$.
199. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{3}$.
200. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{15}$, $\cos \gamma = \frac{11}{15}$.
201. $2x + 9y - 6z - 121 = 0$.
202. $6x - 6y + 7z - 125 = 0$.
203. $x = 2$; $y = -4$; $z = 0,5$.
204. $\alpha \approx 65^\circ 54'$; $\beta \approx 144^\circ 44'$; $\gamma \approx 65^\circ 54'$.
205. $x = 0,6$; $y = -3$; $z = 1,5$; $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{30}}$; $\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{30}}$;
 $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{30}}$.
207. $x + y + z - 2 = 0$.
208. $2y - z - 2 = 0$.
209. $3x + 2z - 5 = 0$.
210. $y - 3z = 0$; $x + 4z = 0$; $3x + 4y = 0$.
211. $x - 3 = 0$; $y + 2 = 0$; $z - 1 = 0$.
212. $z + 7 = 0$; $y - 2 = 0$; $x - 3 = 0$.
213. $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.
214. $3x - 7y + 5z - 66 = 0$.
215. $4x - y - 14z = 0$.
216. $3x + 5y + 7z - 100 = 0$.
217. $x + y + 3z - 6 = 0$.

218. $h = 3$.
219. $\cos \omega = \frac{8}{21}$.
220. $x - 1 = 0; y - 1 = 0; z - 1 = 0; x + y + z - 1 = 0$.
221. $\cos \alpha = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$
 $\cos \gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.
222. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$.
223. $\cos \omega = \frac{1}{3}$.
225. $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$.
226. $20x - 4y - 5z + 133 = 0$ ja $20x - 4y - 5z - 119 = 0$.
227. $d = \left| \frac{D_1 - D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$.
228. $d = 3$.
229. $3x - 2y + 7z - 6 = 0$.
230. $3x + y + 2z - 23 = 0$.
231. a) $5x + 7y + 3 = 0$.
232. $2x + 3y + z = 0$.
233. $y - z = 0$.
234. $6x - 7y + 6z - 94 = 0$.
235. $P' \equiv \left(\frac{9}{7} \mid -\frac{13}{7} \mid \frac{17}{7} \right)$.
236. $P \equiv (0 \mid 0 \mid 3)$.
237. $x + y + (4 + 3\sqrt{2})z - 2 = 0$.
238. $\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.
239. $4x - 50y - 22z + 675 = 0; 46x - 50y + 122z + 375 = 0$.
240. $x + z = 0$.
241. $Ax + By + Cz + \frac{D_1 + D_2}{2} = 0$.

242. $8x - 16y + 8z - 5 = 0$.
243. $9x + 3y + 5z = 0$.
244. $23x - 32y + 26z - 17 = 0$.
245. a) $3y - z + 3 = 0$; b) $x + z + 3 = 0$; c) $x + y + 2 = 0$.
246. a) $(5 \mid -7 \mid 8)$; b) $(3 \mid -2 \mid -5)$; c) ühist üksikut lõikepunkti ei ole; d) lõikepunkti ei ole.
247. $x = \frac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$; $y = \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$; $z = 0$.
248. a) Ühes punktis; b) ühes punktis.
249. $x + y + 8z - 14 = 0$.
250. $x + 20y + 7z - 12 = 0$ ja $x - z + 4 = 0$.

§ 45.

251. P_3 asetseb sirgel.
252. $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$.
253. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{l}$.
254. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+8}{5}$.
255. $\left. \begin{array}{l} x-2=0 \\ y+3=0 \end{array} \right\}$.
256. $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.
257. $m(x-a) + n(y-b) + l(z-c) = 0$.
258. $m(x-a) + n(y-b) + l(z-c) = 0$.
259. $x + y + z = 0$.
260. $\cos \alpha = \frac{4}{1^{\frac{2}{3}}}$, $\cos \beta = -\frac{1^{\frac{2}{3}}}{1^{\frac{2}{3}}}$, $\cos \gamma = -\frac{3}{1^{\frac{2}{3}}}$.
261. $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

262. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{3}$.
263. $\frac{x}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{3}$, $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5}$, $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$,
 $\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4}$, $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7}$, $\frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$.
264. $D = 3$.
265. $B = -6$; $D = -27$.
266. $9x - 4y + 13 = 0$; $15x - 8z + 3 = 0$; $5y - 6z - 14 = 0$.
267. Teine sirge asetseb tasapinnal.
268. Ei; jaa; ei.
269. Sirged asetsevad ühel ja samal tasapinnal.
270. Ei asetse.
271. On kiivad.
272. $P_1 \equiv (5 \mid -1 \mid 0)$.
273. $\cos \omega = \frac{7}{7}$.
274. $\cos \omega = \frac{4}{21}$.
275. 135° , 90° , 45° ; 45° , 135° , 90° .
276. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 90^\circ$.
277. Ei kujuta.
280. $\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$.
281. $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$.
282. a) $\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{-8}; \\ 11x - 3y - 5 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{aligned} \right\}$;
 c) $\left. \begin{aligned} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{aligned} \right\}$.
283. $4x + 5y - 32 = 0$; $11x + 10z - 78 = 0$; $11y - 8z - 8 = 0$.
284. $\frac{x+9}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$.

$$285. \begin{cases} 2x + 2y + z - 15 = 0 \\ 4x - 9y + 10z - 9 = 0 \end{cases}$$

$$286. l = -5.$$

$$287. \frac{x-a}{\begin{vmatrix} a-x_1, & b-y_1, & c-z_1 \\ m, & n, & l \\ 0, & -C, & B \end{vmatrix}} = \frac{y-b}{\begin{vmatrix} b-y_1, & c-z_1, & a-x_1 \\ n, & l, & m \\ 0, & -A, & C \end{vmatrix}} = \\ = \frac{z-c}{\begin{vmatrix} c-z_1, & a-x_1, & b-y_1 \\ l, & m, & n \\ 0, & -B, & A \end{vmatrix}}.$$

$$288. \frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}.$$

$$289. \frac{x}{33} = \frac{y}{-26} = \frac{z}{27}.$$

$$290. \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

$$291. \begin{cases} 5x - 5y + 4z - 4 = 0 \\ x - 3y - 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$292. \frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}.$$

$$293. \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

$$294. \begin{cases} 22x - y + 71 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$295. \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{4}.$$

$$296. \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ 4y + 20z + 17 = 0 \end{cases}$$

$$297. \frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{1} = \frac{z-z_1}{-1}.$$

$$298. \frac{x}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

$$299. \frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-5}.$$

$$300. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

$$301. m(x-a) + n(y-b) + l(z-c) = 0.$$

$$302. 4x - y + 3z - 11 = 0.$$

$$303. 4x + 5y - 2z = 0.$$

$$304. x - y + z = 0.$$

$$305. \begin{vmatrix} x-a, & y-b, & z-c \\ x_1-a, & y_1-b, & z_1-c \\ m, & n, & l \end{vmatrix} = 0.$$

$$306. x - 3y - z - 10 = 0.$$

$$307. x - y - 2z = 0.$$

$$308. 8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

$$309. x - 2y - z + 5 = 0.$$

$$310. 2x + 3y + z + 5 = 0.$$

$$311. \begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ m_1, & n_1, & l_1 \\ m_2, & n_2, & l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$312. x - 2y - 2z + 2 = 0.$$

$$313. (A_2m + B_2n + C_2l)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - (A_1m + B_1n + C_1l)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

$$314. 2x - y - z + 1 = 0.$$

$$315. x - 3y + 2z - 4 = 0.$$

$$316. 11x - 17y - 19z + 10 = 0.$$

$$317. x + z = 0.$$

$$318. x + y - z + 3 = 0.$$

$$319. 10x - 47y - 48z + 71 = 0.$$

$$320. \begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ m_1, & n_1, & l_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$321. 17x - 13y - 16z - 10 = 0.$$

$$322. 4x + 3y - 8z + 1 = 0.$$

323. $5x + 3y + 6z - 7 = 0$.
324. $8x - 22y + z - 48 = 0$.
325. $x - 2y + 1 = 0$.
326. $80^{\circ} 16'$; $147^{\circ} 41'$; $59^{\circ} 28'$.
327. $\sin \omega = \sqrt{0,6}$.
328. $\sin \omega = \frac{3}{133}$.
329. $A = -1$.
330. $A = 4$; $B = -8$.
331. $(1 | 1 | 1)$.
332. Sirge asetseb tasapinnal.
333. Sirge ja tasapind on rööbikud.
334. $(5 | -1 | 2)$.
335. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.
336. $x + y + z + 1 = 0$, $2x - y - z + D = 0$.
337. $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-1}$.
338. $x = 0$, $x + 2y + 3z + D = 0$.
339. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
340. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.
341. $d = \sqrt{22}$.
342. $d = 3$; $2x - 5y + 4z - 9 = 0$, $2x - z + 1 = 0$.
343. $P' \equiv (2 | 9 | 6)$.
344. $P' \equiv (3 | -1 | 0)$.
345. $P' \equiv (2 | -3 | 5)$.
347. $d = 7$.

$$348. d = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

$$349. d = 0.$$

$$350. d_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}; d_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}; d_3 = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

§ 50.

352. 0-punkt on ringi sees.

353. a) $d = 5$; b) $d \approx 5,02$.

354. $16x - 5y - 34 = 0$; $d \approx 2,03$.

355. $P_1' \equiv (0 | 1)$ ja $P_2' \equiv (0,6 | -0,8)$.

356. a) $x^2 + y^2 = 18$;

b) ringjoont ei ole, sest punktid asetsevad ühel ja samal sirgel;

c) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 42y + 25 = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 80 = 0$.

$$357. 7x^2 + 7y^2 - 15x + 5y - 70 = 0.$$

$$358. x^2 + y^2 - 6y - 41 = 0.$$

$$359. x^2 + y^2 - 20x - 8y = 0.$$

$$360. x^2 + y^2 - 12x + 4y + 30 = 0.$$

$$361. 3x^2 + 3y^2 + 38x + 18y + 81 = 0.$$

$$362. (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

$$363. x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \text{ ja } x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$364. 4x^2 + 4y^2 - 4x - 28y + 1 = 0 \text{ ja } 4x^2 + 4y^2 + 244x + 772y + 3721 = 0.$$

$$365. (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

$$366. x^2 + y^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}.$$

$$367. x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0.$$

368. $5x^2 + 5y^2 + 8x - 54y - 197 = 0$.
369. $3x + 2y - 13 = 0$.
370. $2x + 3y - 13 = 0$ ja $3x - 2y + 13 = 0$.
371. $x - y \pm \sqrt{10} = 0$.
372. $3x + y \pm 10 = 0$.
373. $4x + 3y - 35 = 0$.
374. $\omega \approx 63^\circ 26' 6''$.
375. $\omega = 60^\circ$.
376. $x = \frac{1 - 4\sqrt{21}}{5}$; $y = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{5}$.
377. $P_1P_2 \approx 5,52$.
378. $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.
379. $P_1 \equiv (1 | 1)$, $P_2 \equiv (-1,2 | -1,2)$.
380. $K \equiv (2,75 | 1,25)$.
381. $20x - 21y = 0$, $y = 0$.
382. $(2x - 7)^2 + (2y - 7)^2 = 50$ ja
 $(18x - 13)^2 + (18y - 13)^2 = 50$.
383. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ ja $(x - 2,8)^2 + (y - 0,4)^2 = 1$.
384. $4x - 3y - 10 = 0$, $y - 2 = 0$;
 $3x + 4y - 5 = 0$, $x - 1 = 0$.
385. $d = 6$.
386. $5x - 3y - 16 = 0$.
387. $P_0 \equiv (3 | -4,5)$.
389. $2x + 7y + 8 = 0$.
390. $M \equiv (-2 | -2)$.

§ 58.

391. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$.
392. P_1 on ellipsisist väljas, P_2 on ellipsisil ja P_3 on ellipsi sees.

393. $b = 149\,977\,465$ km ; $p = 149\,954\,933$ km .
394. $d \approx 8,55$; $\alpha \approx 62^{\circ} 7'$.
395. $e = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{26}}$; $c = \sqrt{7}$; $p = \frac{19}{\sqrt{26}}$.
396. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$.
397. $e = \frac{\sqrt{59}}{30}$.
398. $P_1 \equiv (-3 \mid 0)$, $P_2 \equiv (2,25 \mid 1,75)$.
399. $7x - 6y - 19 = 0$; $6x + 7y + 8 = 0$.
400. $x + 2y - 9 = 0$; $2x - y - 8 = 0$; $3x - 2y + 21 = 0$;
 $14x + 21y + 72 = 0$.
401. $3x - y \pm 7 = 0$.
402. $10x - 15y \pm 7 = 0$.
404. $3x^2 + 2y^2 = 14$.
405. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.
406. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$.
407. $4x + 15y = 0$.
408. $3x + 10y = 0$.
409. $\tan \omega = \frac{a^2 k^2 + b^2}{c^2 k}$.
410. $d_1 = 2\sqrt{3}$; $d_2 = 4\sqrt{2}$.
411. $5x - 4y - 14 = 0$.
412. $3x \pm y = 0$.
413. $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{24} = 1$ ehk $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$.
414. $x + 2y - 4 = 0$.
415. $\tan \omega = \frac{2bc}{b^2 - c^2}$.
416. $a\sqrt{2}$; $b\sqrt{2}$.

$$417. r = \frac{12}{\sqrt{16 - 7 \cos^2 \varphi}}.$$

$$418. r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

$$419. r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

$$420. x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

§ 68.

$$421. a = \sqrt{2}; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c = \frac{\sqrt{11}}{2}; \quad e = \frac{\sqrt{22}}{4};$$

$$F_1 \equiv \left(-\frac{\sqrt{11}}{2} \mid 0\right); \quad F_2 \equiv \left(\frac{\sqrt{11}}{2} \mid 0\right); \quad p = \frac{3\sqrt{2}}{8};$$

$$\sqrt{11}x \pm 4 = 0.$$

$$422. a) \frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{100} = \pm 1; \quad b) x^2 - \frac{y^2}{24} = \pm 1;$$

$$c) \frac{x^2}{6,25} - \frac{y^2}{11,25} = 1.$$

$$423. 27x^2 - 28y^2 = 720.$$

$$424. d \approx 0,28.$$

$$425. 3x - 2y + 5 = 0; \quad 2x + 3y + 12 = 0.$$

$$426. x + y - 2 = 0; \quad x - y - 6 = 0; \quad 5x - 7y + 2 = 0; \\ 7x + 5y + 210 = 0.$$

$$427. x - 3y + 5 = 0; \quad 3x + y - 15 = 0; \quad 3x + 21y + 45 = 0; \\ 21x - 3y - 35 = 0.$$

$$428. cx + ay \pm a^2 = 0.$$

$$429. \text{Puutujad: } 3x - 2y \pm 4 = 0.$$

$$430. \text{Puutujad: } x - y \pm 3 = 0; \quad \text{normaalid: } x + y \pm 5 = 0.$$

$$444. \alpha_1 \approx 56^\circ 15'; \quad \alpha_2 \approx 123^\circ 45'.$$

$$445. 4x^2 - 9y^2 = 16.$$

446. $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1.$

447. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$

448. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1.$

449. $P_1 \equiv (-1,6 \sqrt{5} \mid 0,6 \sqrt{5}).$

450. $8x \pm \sqrt{11}y - 20 = 0.$

451. $x - y \pm 2 = 0.$

452. $2x - y = 0; x - 3y = 0.$

453. $\cos \frac{\omega}{2} = \frac{1}{e}.$

455. $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11 \cos^2 \varphi - 9}}.$

456. $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$

457. $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$

458. $x'y' = \frac{a^2}{2}.$

459. $x'y' = \frac{c^2}{4}.$

§ 75.

460. $x + y + 1 = 0; x - y - 3 = 0.$

461. $y + y_1 = 2x_1x.$

462. $3x - 8y + 48 = 0; 8x + 3y - 164 = 0; 3x + 4y + 12 = 0; 4x - 3y - 34 = 0.$

463. $27x - 6y + 58 = 0; 2x + 9y - 2 = 0; x - 8y + 180 = 0; 8x + y - 120 = 0.$

464. $2x - 2y + 5 = 0; 8x + 4y + 5 = 0.$

465. $8x - 4y + 1 = 0; 8x + 16y - 9 = 0.$

466. $x + y + 4 = 0$; $x - y - 12 = 0$.
467. $8x - 6y + 3 = 0$; $24x + 32y - 41 = 0$.
468. $x - \sqrt{3}y + 9 = 0$.
469. $(-1 \mid 2,25)$.
470. $P_0 \equiv (1 \mid 1)$.
471. $y = 0,7x + b$.
472. $4x + 3y - 26 = 0$.
473. $3x - y - 11 = 0$.
474. $y = 3,5$.
475. $y \pm 4 = 0$.
476. $r = \frac{8 \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi}$.
477. $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$.
478. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$.
488. $\frac{25}{6}$.
489. $y^2 = \frac{20}{3} x$.
490. $O' \equiv (-1 \mid 2)$; $8x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 = 36$.
491. $O' \equiv (-1 \mid -1)$; $4x'^2 - 24x'y' + 11y'^2 = 20$.
492. $O' \equiv (\frac{1}{8} \mid -\frac{1}{8})$; $6x'^2 - 24x'y' + 6y'^2 + 5 = 0$.
493. $O' \equiv (1,8 \mid 0,9)$; $35x'^2 + 60x'y' - 60y'^2 + 198 = 0$.
494. $O' \equiv (0,5 \mid 0,5)$; $8x'^2 - 16x'y' + 12y'^2 = 9$.
495. $O' \equiv (1 \mid -1)$; $2x'^2 + 3x'y' + 2y'^2 = 1$.
496. Kõveral ei ole keskpunkti.
497. $O' \equiv (6,8 \mid 2,4)$; $36x'^2 - 24x'y' + 29y'^2 = 180$.
498. $O' \equiv (-2 \mid 2)$; $\alpha = 45^\circ$; $x - y + 4 = 0$, $x + y = 0$;
 $3x''^2 + y''^2 = 4$.

499. $O' \equiv (3 \mid -1)$; $\alpha = 45^0$; $x - y - 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$;
 $7x''^2 + y''^2 = 38$.
500. $O' \equiv (2 \mid 1)$; $\alpha \approx 56^0 19'$; $3x - 2y - 4 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$;
 $16x''^2 + 3y''^2 = 9$.
501. $O' \equiv (-4 \mid 5)$; $\alpha \approx 71^0 34'$; $3x - y + 17 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$;
 $x''^2 + 11y''^2 = 10$.
502. $O' \equiv (0,5 \mid 3)$; $\alpha = 45^0$; $2x - 2y + 5 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$;
 $3y''^2 - x''^2 = 9$.
503. $O' \equiv (\frac{1}{2} \mid \frac{1}{3})$; $\alpha \approx 26^0 34'$; $6x - 12y + 1 = 0$, $6x + 3y - 4 = 0$;
 $4y''^2 - x''^2 = 2$.
504. $O' \equiv (- \mid -2)$; $\alpha \approx 24^0 27'$; $5x - 11y - 17 = 0$,
 $11x + 5y + 21 = 0$; $121x''^2 - 25y''^2 = 110$.
505. $O' \equiv (4 \mid \frac{1}{4})$; $\alpha = 45^0$, $4x - 4y - 15 = 0$, $4x + 4y - 17 = 0$;
 $3x''^2 + y''^2 = -7$.
506. $O' \equiv (-1,4 \mid -4,1)$; $\alpha = 45^0$; $10x - 10y - 27 = 0$,
 $2x + 2y + 11 = 0$; $x''^2 + 3y''^2 = 0$.
507. $O' \equiv (0 \mid 0)$; $\alpha \approx 13^0 17'$; $(\sqrt{5} - 2)x - y = 0$, $x + (\sqrt{5} - 2)y = 0$;
 $x'' \mp y'' = 0$.
508. $O' \equiv (-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2})$; $\alpha = 45^0$; $x - y = 0$; $x + y + 1 = 0$;
 $F_1 \approx (1,49 \mid -2,49)$; $F_2 \approx (-2,49 \mid 1,49)$; $3x - 3y \pm 4\sqrt{15} = 0$;
 $\frac{x''^2}{2,5} + \frac{y''^2}{10} = 1$.
509. $O' \equiv (-0,2 \mid 0,4)$; $\alpha \approx 26^0 34'$; $x - 2y + 1 = 0$; $2x + y = 0$;
 $F_1 \approx (0,08 \mid -0,17)$; $F_2 \approx (-0,48 \mid 0,97)$; $5x - 10y + 5 \pm 10\sqrt{2} = 0$;
 $\frac{x''^2}{0,4} + \frac{y''^2}{0,8} = 1$.
510. $O' \equiv (-2 \mid -2)$; $\alpha = 45^0$; $x - y = 0$; $x + y + 4 = 0$;
 $\frac{x''^2}{0,2} + \frac{y''^2}{2} = -1$.
511. $O' \equiv (\frac{1}{3} \mid \frac{1}{6})$; $\alpha \approx 63^0 26'$; $4x - 2y - 1 = 0$; $3x + 6y - 2 = 0$;
 $x''^2 + \frac{y''^2}{6} = 0$.

512. $O' \equiv (-1 | -1)$; $\alpha \approx 36^\circ 52'$; $3x - 4y - 1 = 0$; $4x + 3y + 7 = 0$; $F_1 \approx (0,34 | -2,79)$; $F_2 \approx (-2,34 | 0,79)$; $3x - 4y - 1 \pm \sqrt{5} = 0$; $y''^2 - \frac{x''^2}{4} = 1$.
513. $O' \equiv (-0,2 | 0,4)$; $\alpha \approx 26^\circ 34'$; $x - 2y + 1 = 0$; $2x + y = 0$; $F_1 \equiv (0,3 | -0,6)$; $F_2 \equiv (-0,7 | 1,4)$; $2x - 4y + 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$; $\frac{y''^2}{0,25} - x''^2 = 1$.
514. $O' \equiv (-0,2 | 0,4)$; $\alpha \approx 26^\circ 34'$; $x - 2y + 1 = 0$; $2x + y = 0$; $x'' \pm 2y'' = 0$.
515. $O' \equiv (-\frac{2}{3} | -\frac{1}{3})$; $\alpha = 0^\circ$; $3y + 1 = 0$; $3x + 2 = 0$; $F_1 \equiv (-2 | -\frac{1}{3})$; $F_2 \equiv (\frac{2}{3} | -\frac{1}{3})$; $x = 0$; $3x + 4 = 0$; $\frac{x''^2}{0,(8)} - \frac{y''^2}{0,(8)} = 1$.
516. $O' \equiv (0,5 | -0,5)$; $\alpha = 45^\circ$; $x - y - 1 = 0$; $x + y = 0$; $F_1 \approx (1,11 | -1,11)$; $F_2 \approx (-0,11 | 0,11)$; $3x - 3y - 3 \pm \sqrt{6} = 0$; $\frac{y''^2}{0,5} - \frac{x''^2}{0,25} = 1$.
517. Kõveral ei ole keskpunkti.
518. $\alpha \approx 36^\circ 52'$; $O' \equiv (-2 | 3)$; $3x - 4y + 18 = 0$; $4x + 3y - 1 = 0$; $y''^2 = -6x''$.
519. $\alpha = 45^\circ$; $O' \equiv (1 | 2)$; $x - y + 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $y''^2 = -7\sqrt{2}x''$.
520. $\alpha \approx 63^\circ 26'$; $O' \equiv (-2 | -4)$; $x + 2y + 10 = 0$; $2x - y = 0$; $x''^2 = -\sqrt{5}y''$.
521. $\alpha = 45^\circ$; $O' \equiv (0,5 | 0,5)$; $x - y = 0$; $x + y - 1 = 0$; $y''^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x''$.
522. $\alpha \approx 14^\circ 2'$; $O' \equiv (-5 | 3)$; $x - 4y + 17 = 0$; $4x + y + 17 = 0$; $y''^2 = \frac{19}{\sqrt{17}}x''$.
523. $\alpha \approx 56^\circ 18'$; $O' \equiv (\frac{5}{13} | \frac{1}{13})$; $2x + 3y - 1 = 0$; $3x - 2y - 1 = 0$; $x''^2 = \frac{2}{\sqrt{13}}y''$.

524. $\alpha \approx 18^\circ 26'$; $O' \equiv (-\frac{49}{80} | -\frac{23}{80})$; $4x - 12y - 1 = 0$;
 $24x + 8y + 17 = 0$; $y''^2 = \frac{x''}{2\sqrt{10}}$.
525. $\alpha \approx 18^\circ 26'$; $O' \equiv (-1\frac{71}{80} | 6\frac{33}{80})$; $12x + 4y - 3 = 0$;
 $8x - 24y + 169 = 0$; $x''^2 = \frac{y''}{2\sqrt{10}}$.
526. Kaks rööbikut sirget: $x - y - 2 = 0$ ja $x - y + 1 = 0$.
527. $O' \equiv (-2 | -2)$; $x + 2 = 0$; $y + 2 = 0$; $y'^2 = 3x'$.
528. $O' \equiv (-\frac{1}{2} | -1\frac{3}{8})$; $2x + 1 = 0$; $8y + 11 = 0$; $x'^2 = -2y'$.
529. $O' \equiv (\frac{1}{40} | -\frac{1}{4})$; $40x - 1 = 0$; $4y + 1 = 0$; $y'^2 = -2,5x'$.
530. $O' \equiv (-\frac{1}{2} | -\frac{1}{12})$; $2x + 1 = 0$; $12y + 1 = 0$; $x'^2 = 3y'$.
531. $O' \equiv (\frac{1}{3} | 0)$; $3x - 1 = 0$; $y = 0$; $y'^2 = 3x'$.
532. $O' \equiv (0 | 1\frac{1}{4})$; $x = 0$; $4y - 5 = 0$; $x'^2 = -4y'$.
533. $O' \equiv (1 | 1)$; $\alpha = 45^\circ$; sümmeetriateljed: $x - y = 0$;
 $x + y - 2 = 0$; $F_1 \equiv (3 | -1)$; $F_2 \equiv (-1 | 3)$; juht-
jooned: $2x - 2y \pm 9 = 0$; puutujad: $x + y - 2 \mp \sqrt{2} = 0$;
 $x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$; $x''^2 + \frac{y''^2}{9} = 1$.
534. $O' \equiv (2 | 3)$; $\alpha \approx 63^\circ 26'$; sümmeetriateljed: $2x - y - 1 = 0$;
 $x + 2y - 8 = 0$; $F_1 \equiv (4 | 2)$; $F_2 \equiv (0 | 4)$; juhtjooned:
 $2x - y + 8 = 0$; $2x - y - 10 = 0$; puutujad: $x + 2y -$
 $-8 \mp 2\sqrt{5} = 0$; $2x - y - 1 \pm 3\sqrt{5} = 0$; $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$.
535. $O' \equiv (0 | 1)$; $\alpha \approx 63^\circ 26'$; sümmeetriateljed: $2x - y + 1 = 0$;
 $x + 2y - 2 = 0$; $F_1 \equiv (-3 | -5)$; $F_2 \equiv (3 | 7)$; juht-
jooned: $x + 2y - 29 = 0$; $x + 2y + 25 = 0$; puutujad:
 $x + 2y - 2 \mp 9\sqrt{5} = 0$; $2x - y + 1 \pm 6\sqrt{5} = 0$; kanoo-
niline võrrand: $\frac{x''^2}{81} + \frac{y''^2}{36} = 1$.
536. $O' \equiv (1 | 2)$; $\alpha = 45^\circ$; sümmeetriateljed: $x - y + 1 = 0$;
 $x + y - 3 = 0$; $F_1 \equiv (0 | 1)$; $F_2 \equiv (2 | 3)$; juhtjooned:
 $x + y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$; puutujad: $x + y - 3 \mp$
 $\mp \sqrt{6} = 0$; asümptoodid: $x - 1 = 0$; $y - 2 = 0$; kanoo-
niline võrrand: $x''^2 - y''^2 = 1$.

537. $O' \equiv (-1 | 2)$; $\alpha \approx 71^\circ 34'$; sümmeetriateljed: $3x - y + 5 = 0$; $x + 3y - 5 = 0$; $F_1 \equiv (-2 | -1)$; $F_2 \equiv (0 | 5)$; juhtjooned: $3x + y = 0$; $15x + 5y + 29 = 0$; puutujad: $3x + y - 9 = 0$; $3x + y + 11 = 0$; asümptoodid: $3x + 4y - 5 = 0$; $y - 2 = 0$; kanooniline võrrand: $x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$.
538. $O' \equiv (1 | 0)$; $\alpha \approx 14^\circ 2'$; sümmeetriateljed: $x - 4y - 1 = 0$; $4x + y - 4 = 0$; $F_1 \equiv (1 - 4\sqrt{2} | -\sqrt{2})$; $F_2 \equiv (1 + 4\sqrt{2} | \sqrt{2})$; juhtjooned: $8x + 2y - 8 \mp 25\sqrt{2} = 0$; puutujad: $4x + y - 4 \mp 5\sqrt{17} = 0$; asümptoodid: $x - y - 1 = 0$; $7x + 23y - 7 = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{25} - \frac{y''^2}{9} = 1$.
539. $\alpha \approx 22^\circ 37'$; $O' \equiv (1 | 1)$; sümmeetriatelg: $5x - 12y + 7 = 0$; $F \equiv (1\frac{6}{13} | 1\frac{5}{8})$; juhtjoon: $24x + 10y - 21 = 0$; puutuja: $12x + 5y - 17 = 0$; kanooniline võrrand: $y''^2 = 2x''$.
540. $\alpha \approx -53^\circ 8'$; $O' \equiv (-2,6 | 1,8)$; sümmeetriatelg: $4x + 3y + 5 = 0$; $F \equiv (-0,5 | -1)$; juhtjoon: $6x - 8y + 65 = 0$; puutuja: $3x - 4y + 15 = 0$; kanooniline võrrand: $y''^2 = -14x''$.
541. $\alpha = -45^\circ$; $O' \equiv (1 | 1)$; sümmeetriatelg: $x + y - 2 = 0$; $F \equiv (1,5 | 0,5)$; juhtjoon: $x - y + 1 = 0$; puutuja: $x - y = 0$; kanooniline võrrand: $y''^2 = -2\sqrt{2}x''$.
542. $O' \equiv (5 | -6,5)$; $\alpha \approx 26^\circ 34'$; sümmeetriateljed: $x - 2y - 18 = 0$; $4x + 2y - 7 = 0$; kanooniline võrrand: $x''^2 + \frac{y''^2}{6} = 0$.
543. $O' \equiv (3 | 4)$; $\alpha \approx 18^\circ 26'$; sümmeetriateljed: $x - 3y + 9 = 0$; $3x + y - 13 = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{6} + \frac{y''^2}{11} = -1$.
544. $O' \equiv (-1 | -1,5)$; $\alpha \approx 63^\circ 26'$; sümmeetriateljed: $4x - 2y + 1 = 0$; $x + 2y + 4 = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{9} - y''^2 = 0$.

545. Kaks rööbikut sirget: $2x - 3y + 6 = 0$; $2x - 3y - 10 = 0$.
546. $O' \equiv (1 | 1)$; $\alpha = 45^\circ$; sümmeetriateljed: $x + y - 2 = 0$; $x - y = 0$; $F_1 \equiv (1 + \sqrt{6} | 1 - \sqrt{6})$; $F_2 \equiv (1 - \sqrt{6} | 1 + \sqrt{6})$; juhtjooned: $3x - 3y + 8\sqrt{6} = 0$; puutujad: $x - y + 4\sqrt{2} = 0$; $x + y - 2 + 2\sqrt{2} = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{16} = 1$.
547. $O' \equiv (1 | 2)$; $\alpha \approx 26^\circ 34'$; sümmeetriateljed: $2x + y - 4 = 0$; $x - 2y + 3 = 0$; $F_1 \equiv (1 + 2\sqrt{3} | 2 - 4\sqrt{3})$; $F_2 \equiv (1 - 2\sqrt{3} | 2 + 4\sqrt{3})$; juhtjooned: $3x - 6y + 9 + 32\sqrt{3} = 0$; puutujad: $x - 2y + 3 + 8\sqrt{5} = 0$; $2x + y - 4 + 2\sqrt{5} = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{64} = 1$.
548. $O' \equiv (1 | 1)$; $\alpha \approx 33^\circ 42'$; sümmeetriateljed: $2x - 3y + 1 = 0$; $3x + 2y - 5 = 0$; $F_1 \equiv (-2 | -1)$; $F_2 \equiv (4 | 3)$; juhtjooned: $3x + 2y - 9 = 0$; $3x + 2y - 1 = 0$; puutujad: $3x + 2y - 5 + 2\sqrt{13} = 0$; asümptoodid: $x - 1 = 0$; $5x + 12y - 17 = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1$.
549. $O' \equiv (1 | 1)$; $\alpha \approx 26^\circ 34'$; sümmeetriateljed: $x - 2y + 1 = 0$; $2x + y - 3 = 0$; $F_1 \equiv (1 - 2\sqrt{2} | 1 - \sqrt{2})$; $F_2 \equiv (1 + 2\sqrt{2} | 1 + \sqrt{2})$; juhtjooned: $4x + 2y - 6 + 9\sqrt{2} = 0$; puutujad: $2x + y - 3 + 2\sqrt{5} = 0$; asümptoodid: $x - y = 0$; $x - 7y + 6 = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{9} - y''^2 = 1$.
550. $\alpha = 45^\circ$; $O' \equiv (2 | 1)$; sümmeetriatelg: $x - y - 1 = 0$; $F \equiv (3 | 2)$; juhtjoon: $x + y - 1 = 0$; puutuja: $x + y - 3 = 0$; kanooniline võrrand: $y''^2 = 4\sqrt{2}x''$.
551. $\alpha \approx -36^\circ 52'$; $O' \approx (0,52 | 0,86)$; sümmeetriatelg: $3x + 4y - 5 = 0$; $F \approx (2,52 | -0,64)$; juhtjoon: $4x - 3y + 13 = 0$; puutuja: $8x - 6y + 1 = 0$; kanooniline võrrand: $y''^2 = -10x''$.

552. $O' \equiv (2 \mid 1)$; $\alpha = 45^\circ$; sümmeetriateljed: $x - y - 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $F_1 \equiv (2 - \sqrt{1,5} \mid 1 - \sqrt{1,5})$; $F_2 \equiv (2 + \sqrt{1,5} \mid 1 + \sqrt{1,5})$; juhtjooned: $3x + 3y - 9 \mp 4\sqrt{6} = 0$; puutujad: $x + y - 3 \mp 2\sqrt{2} = 0$; $x - y - 1 \mp \sqrt{2} = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{4} + y''^2 = 1$.
553. $O' \equiv (-1 \mid 0)$; $\alpha = 45^\circ$; sümmeetriateljed: $x - y + 1 = 0$; $x + y + 1 = 0$; $F_1 \equiv (-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \mid -\frac{1}{2}\sqrt{2})$; $F_2 \equiv (\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \mid \frac{1}{2}\sqrt{2})$; juhtjooned: $2x + 2y + 2 \mp \sqrt{2} = 0$; puutujad: $x + y = 0$; $x + y + 2 = 0$; asümptoodid: $x + 1 = 0$; $y = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{0,5} - \frac{y''^2}{0,5} = 1$.
554. $O' \equiv (2 \mid 1)$; $\alpha = 45^\circ$; sümmeetriateljed: $x - y - 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $F_1 \equiv (2 - \sqrt{2,5} \mid 1 - \sqrt{2,5})$; $F_2 \equiv (2 + \sqrt{2,5} \mid 1 + \sqrt{2,5})$; juhtjooned: $5x + 5y - 15 \mp 2\sqrt{10} = 0$; puutujad: $x + y - 3 \mp 2\sqrt{2} = 0$; asümptoodid: $3x - y - 5 = 0$; $x - 3y + 1 = 0$; kanooniline võrrand: $\frac{x''^2}{4} - y''^2 = 1$.
555. $\alpha \approx -36^\circ 52'$; $O' \equiv (0 \mid 0)$; sümmeetriatelg: $3x + 4y = 0$; $F \equiv (0,4 \mid -0,3)$; juhtjoon: $10x + 10y + 1 = 0$; puutuja: $4x - 3y = 0$; kanooniline võrrand: $y''^2 = -2x''$.
558. $9x^2 + 6xy + y^2 - 16x - 32y + 16 = 0$.
559. $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 40y + 41 = 0$.
560. $7x - 2y - 13 = 0$ ja $x - 3 = 0$.
562. $5x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 2y = 0$.
563. $x - 6y + 1 = 0$. (+1 | -2)
564. Polaar on lõpmatuses.
565. Kõõl on punkti P_0 polaar: $5x + y + 2 = 0$.
566. Puutujate lõikepunkt on antud sirge poolus $P_0 \equiv (-3 \mid 1)$.

§ 93.

567. a) $r = 4$; $K \equiv (1 \mid -2 \mid 2)$; b) $r = 1$; $K \equiv (1 \mid 0 \mid 0)$;
 c) $r = \frac{\sqrt{89}}{4}$; $K \equiv (0 \mid \frac{5}{4} \mid 0)$.

568. P_1 on kera sees, P_2 on kerast väljas ja P_3 on kera pinnal.

569. $x = a \pm \sqrt{r^2 - b^2 - c^2}$.

570. $x = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 + 4AK}}{2A}$.

571. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 0$.

572. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

573. $d = \left| \frac{Aa + Bb + Cc + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$.

574. Lõikab.

575. $\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$.

576. Võib.

577. $x^2 + y^2 + z^2 - 2r(x + y + z - r) = 0$.

578. $(4\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3} \mid 1\frac{2}{3})$; $(4\frac{2}{7} \mid 1\frac{7}{7} \mid 1\frac{3}{7})$.

579. $\left. \begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 &= r^2 \\ Ax + By + Cz + D &= 0 \end{aligned} \right\}$.

580. $x^2 + y^2 = 36$.

581. $(A^2 + C^2)x^2 + (B^2 + C^2)y^2 + 2ABxy + 2ADx + 2BDy + D^2 - C^2r^2 = 0$.

582. $x^2 + y^2 - x + 1 = 0$.

583. $x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 10y + 2z + 7 = 0$.

584. $[(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c)]^2 - [(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2] \cdot [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2] = 0$.

585. $[ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)]^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2] = 0$.

$$586. P_x \equiv \left(\frac{r^2}{x_0} \mid 0 \mid 0 \right); P_y \equiv \left(0 \mid \frac{r^2}{y_0} \mid 0 \right); P_z \equiv \left(0 \mid 0 \mid \frac{r^2}{z_0} \right).$$

$$587. P_0 \equiv \left(-\frac{Ar^2}{D} \mid -\frac{Br^2}{D} \mid -\frac{Cr^2}{D} \right).$$

$$588. x - y + 2z - 3 = 0; x - y + 2z - 15 = 0.$$

$$589. (x + 5)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 121.$$

$$591. Ax_0^2 + Ay_0^2 + Az_0^2 + Gx_0 + Hy_0 + Iz_0 + K = 0.$$

$$592. -7; 23; 73.$$

$$593. (A_2G_1 - A_1G_2)x + (A_2H_1 - A_1H_2)y + (A_2I_1 - A_1I_2)z + A_2K_1 - A_1K_2 = 0.$$

$$594. 4x - 6y + 6z - 11 = 0.$$

$$595. \left. \begin{aligned} 5x - 3y + 3z + 7 = 0 \\ 2x - 4y - 2z + 1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$597. 2y^2 + 2z^2 - 2yz + 12y - 10z - 3 = 0.$$

$$598. x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1,5 = 0.$$

$$599. 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

$$600. 18y^2 + 50z^2 + 75xz + 225x - 450 = 0.$$

$$602. \text{Ellips: } x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

$$603. P_1 \equiv (2 \mid -3 \mid 0), P_2 \equiv (0 \mid 0 \mid 2).$$

$$607. 2x + 2y - 3z \pm 12 = 0.$$

$$609. x - z = 0; \frac{x}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{1}.$$

$$610. 16x \pm 13z = 0.$$

$$613. x - 2y - 4z = 0.$$

$$614. \text{Puutepunkt: } P_0 \equiv (9 \mid 4 \mid 2).$$

$$617. 4x - 12y + 9z - 6 = 0.$$

$$618. 3x - 2y - 3z - 18 = 0 \text{ ja } x - 3z = 0.$$

$$621. P_1 \equiv (4 \mid 1 \mid 3), P_2 \equiv (\infty \mid \infty \mid \infty).$$

Teoses esinevate valemite tabel.

A. Tasapinnal.

Punkt.

Kahe punkti kaugus teineteisest:

punktid $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$ ristkoordinaadistikus:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

punktid $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$ kaldkoordinaadistikus:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \theta};$$

punktid $(r_1 | \varphi_1)$ ja $(r_2 | \varphi_2)$ polaarkoordinaadistikus:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Kolmnurga pindala:

tipud $(x_1 | y_1)$, $(x_2 | y_2)$ ja $(x_3 | y_3)$ ristkoordinaadistikus:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix};$$

tipud $(x_1 | y_1)$, $(x_2 | y_2)$ ja $(x_3 | y_3)$ kaldkoordinaadistikus:

$$S = \pm \frac{\sin \theta}{2} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix};$$

tipud $(r_1 | \varphi_1)$, $(r_2 | \varphi_2)$ ja $(r_3 | \varphi_3)$ polaarkoordinaadistikus:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} r_2r_3, & \sin \varphi_1, & \cos \varphi_1 \\ r_1r_3, & \sin \varphi_2, & \cos \varphi_2 \\ r_1r_2, & \sin \varphi_3, & \cos \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

Sirglõigu jaotuspunkti koordinaadid, kui sirglõigu otsapunktid on $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Koordinaatide teisendamine:

rist- ja kaldkoordinaattelgede rööplüke:

$$x = a + x', \quad y = b + y';$$

ristkoordinaattelgede pööramine:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \end{aligned}$$

kaldkoordinaattelgede pööramine:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} - \frac{y' \sin \alpha}{\sin \theta} \\ y &= \frac{x' \sin \alpha}{\sin \theta} + \frac{y' \sin(\theta + \alpha)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Polaarkoordinaatide seos ristkoordinaatidega:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ r &= | \sqrt{x^2 + y^2} | \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{| \sqrt{x^2 + y^2} |} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{| \sqrt{x^2 + y^2} |} \end{aligned} \right.$$

Sirge.

Sirge võrrandid:

üldkuju:

$$Ax + By + C = 0;$$

ilmutatud kuju:

$$y = kx + b;$$

normaalkuju:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p;$$

telglõikudega a ja b :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

läbi ühe punkti $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1) ;$$

läbi kahe punkti $(x_1 | y_1)$ ja $(x_2 | y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ehk

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

polaarvõrrand:

$$r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)} .$$

Normiv tegur:

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Tingimus, et kolm punkti $(x_1 | y_1)$, $(x_2 | y_2)$ ja $(x_3 | y_3)$ asetsevad ühel sirgel:

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Nurk sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ehk $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ vahel:

$$\tan \omega = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} .$$

Sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ehk $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ rööpseisu tingimus:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ehk} \quad k_1 = k_2 .$$

Sirgete $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ehk $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ ristseisu tingimus:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{ehk} \quad k_1k_2 = -1 .$$

Tingimus, et kolm sirget $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ja $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ läbivad ühe ja sama punkti:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Punkti $(x_0 | y_0)$ kaugus sirgest $Ax + By + C = 0$ ehk $y = kx + b$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{y_0 - (kx_0 + b)}{\sqrt{1 + k^2}} \right|.$$

Ringjoon.

Ringjoone võrrandid:

kinnine kuju keskpunktiga $(a | b)$ ja raadiusega r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

keskpunktiga 0-punktis:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

lahtine kuju:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$\text{kus } a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A}, \quad r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}.$$

Ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ puutuja punktis $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1) \text{ ehk } x_1x + y_1y = r^2.$$

Ringjoone $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ puutuja punktis $(x_1 | y_1)$:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2.$$

Punkti $(x_0 | y_0)$ polaar ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ suhtes:

$$x_0x + y_0y = r^2.$$

Punkti $(x_0 | y_0)$ potents ringjoone $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ suhtes:

$$d_1d_2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Ringjoonte $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ ja $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ potentsjoon:

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0.$$

Ellips.

Ellipsi kanooniline võrrand:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

lineaarne ekstsentrisus:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ kui } a > b,$$

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \text{ kui } a < b;$$

numbriline ekstsentrisus:

$$e = \frac{c}{a} < 1, \text{ kui } a > b,$$

$$e = \frac{c}{b} < 1, \text{ kui } a < b;$$

raadiusvektorid:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a + ex \\ r_2 &= a - ex \end{aligned} \right\}, \text{ kui } a > b,$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= b + ey \\ r_2 &= b - ey \end{aligned} \right\}, \text{ kui } a < b;$$

parameeter:

$$p = \pm \frac{b^2}{a}, \text{ kui } a > b,$$

$$p = \pm \frac{a^2}{b}, \text{ kui } a < b.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja punktis $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \text{ ehk } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1;$$

puutuja ja koordinaattelgede lõikepunktide P_x ja P_y kaugused 0-punktist:

$$OP_x = \frac{a^2}{x_1}, \quad OP_y = \frac{b^2}{y_1};$$

$$\text{puutuja alus} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kõõlu $y = kx + t$ keskpunkti koordinaadid:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1);$$

$$\checkmark \text{ normaali alus} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

✓ Punkti $(x_0 | y_0)$ polaar ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ suhtes:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kõõlu $y = kx + t$ keskpunkti koordinaadid:

$$x = -\frac{kt}{\frac{b^2}{a^2} + k^2}, \quad y = \frac{\frac{b^2}{a^2} t}{\frac{b^2}{a^2} + k^2}.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kaasdiameetrid:

$$y = kx \text{ ja } y = -\frac{b^2}{a^2 k} x \text{ ehk } y = k'x, \text{ kus } kk' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ juhtjooned:

$$x = \mp \frac{a}{e}, \text{ kui } a > b,$$

$$y = \mp \frac{b}{e}, \text{ kui } a < b.$$

Ellipsi polaarvõrrand:

poolus 0-punktis:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}};$$

poolus fookuses:

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \varphi}.$$

Hüperbool.

Hüperboolide kanoonilised võrrandid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1;$$

lineaarne ekstsentrismus:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

numbriline ekstsentrismus:

$$e = \frac{c}{a} > 1, \text{ kui } a \text{ on hüperbooli reaalkooltelg,}$$

$$e = \frac{c}{b} > 1, \text{ kui } b \text{ on hüperbooli reaalkooltelg;}$$

raadiusvektorid:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= ex + a \\ r_2 &= ex - a \end{aligned} \right\}, \text{ kui } a \text{ on hüperbooli reaalkooltelg,}$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= ey + b \\ r_2 &= ey - b \end{aligned} \right\}, \text{ kui } b \text{ on hüperbooli reaalkooltelg;}$$

parameeter:

$$p = \pm \frac{b^2}{a}, \text{ kui } a \text{ on hüperbooli reaalkooltelg,}$$

$$p = \pm \frac{a^2}{b}, \text{ kui } b \text{ on hüperbooli reaalkooltelg.}$$

Vördhaarsete hüperboolide võrrandid:

$$x^2 - y^2 = \pm a^2.$$

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja punktis $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \text{ ehk } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1;$$

puutuja ja koordinaattelgede löikepunktide P_x ja P_y kaudu 0-punkti:

$$OP_x = \frac{a^2}{x_1}, \quad OP_y = -\frac{b^2}{y_1};$$

$$\text{puutuja alus} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}.$$

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ normaal punktis $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1);$$

$$\text{normaali alus} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Punkti $(x_0 | y_0)$ polaar hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ suhtes:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kõõlu $y = kx + t$ keskpunkti koordinaadid:

$$x = \frac{kt}{\frac{b^2}{a^2} - k^2}, \quad y = \frac{\frac{b^2}{a^2} t}{\frac{b^2}{a^2} - k^2}.$$

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kaasdiameetrid:

$$y = kx \text{ ja } y = \frac{b^2}{a^2 k} x = k'x, \text{ kus } kk' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Hüperboolide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ asümptoodid:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \text{ ehk } \frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0.$$

Hüperbooli juhtjooned:

$$x = \mp \frac{a}{e}, \text{ kui } a \text{ on hüperbooli reaalkõõlde pooltelg,}$$

$$y = \mp \frac{b}{e}, \text{ kui } b \text{ on hüperbooli reaalkõõlde pooltelg.}$$

Hüperbooli polaarvõrrand:

poolus 0-punktis:

$$r = \frac{b}{\sqrt{e^2 \cos^2 \varphi - 1}};$$

poolus fookuses:

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \varphi}.$$

Parabool.

Parabooli võrrand:

$$y^2 = 2px.$$

kus parameeter $p = 2c$;

raadiusvektor: $r = c + x$.

Parabooli $y^2 = 2px$ puutuja punktis $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1) \text{ ehk } y_1 y = p(x + x_1) ;$$

puutuja ja koordinaattelgede lõikepunktide P_x ja P_y kaugused 0-punktist:

$$OP_x = -x_1, \quad OP_y = \frac{y_1}{2};$$

puutuja alus $= 2x_1$.

Parabooli $y^2 = 2px$ normaal punktis $(x_1 | y_1)$:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1) ;$$

normaali alus $= p$.

Punkti $(x_0 | y_0)$ polaar parabooli $y^2 = 2px$ suhtes:

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Parabooli $y^2 = 2px$ kõõlu $y = kx + t$ keskpunkti ordinaat:

$$y = \frac{p}{k}.$$

Parabooli $y^2 = 2px$ diameeter:

$$y = \frac{p}{k}.$$

Parabooli $y^2 = 2px$ juhtjoon:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Parabooli polaarvõrrand:

poolus lagipunktis:

$$r = \frac{2p \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi};$$

poolus fookuses:

$$r = \frac{p}{1 \pm \cos \varphi}.$$

Üldine teise astme võrrand.

Kui võrrandis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B^2 - 4AC \leq 0$, siis koordinaattelgede rööplükkega viies 0-punkti punkti $O' \equiv (a | b)$ võrrand omab kuju

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = P,$$

kus

$$P = -(Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F),$$

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \text{ ja } b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC};$$

ning koordinaattelgede pööramisel nurga α võrra, saame võrrandi

$$Mx''^2 + Ny''^2 = P,$$

kus

$$M = \frac{A + C + B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2}$$

$$N = \frac{A + C - B \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}}{2}$$

ja

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C},$$

kusjuures sümmeetriatelgede võrrandid on

$$y - b = k_1(x - a)$$

$$y - b = k_2(x - a),$$

kus

$$k_1 = -\frac{A-C}{B} + \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}$$

$$k_2 = -\frac{A-C}{B} - \sqrt{\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 1}.$$

a) Kui $B^2 - 4AC < 0$ ja

$P > 0$, siis võrrand kujutab ellipsit,

$P = 0$, „ „ „ punkti,

$P < 0$, „ „ ei kujuta mingisugust reaalselt geomeetrilist kohta.

b) Kui $B^2 - 4AC > 0$ ja

$P \geq 0$, siis võrrand kujutab hüperbooli,

$P = 0$, „ „ „ kaht lõikuvat sirget.

- c) Kui $B^2 - 4AC = 0$ ja $2CD - BE \neq 0$ ning $2AE - BD \neq 0$, siis võrrand kujutab parabooli. Siin koordinaattelgedel pööramisel nurga α võrra võrrand omab kuju

$$Qy'^2 + Rx' + Sy' + F = 0,$$

kus

$$Q = A + C, \quad R = \frac{D\sqrt{C} \mp E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}}, \quad S = \frac{E\sqrt{C} \pm D\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}}$$

ja

$$\tan \alpha = -\sqrt{\frac{A}{C}}, \quad \text{kui } B \text{ on positiivne,}$$

$$\tan \alpha = +\sqrt{\frac{A}{C}}, \quad \text{kui } B \text{ on negatiivne,}$$

ning rööplükkega viies 0-punkti parabooli lagipunkti $O' \equiv (a_1 | b_1)$, saame võrrandi

$$Qy''^2 + Rx'' = 0 \quad \text{ehk} \quad y''^2 = -\frac{D\sqrt{C} \mp E\sqrt{A}}{(A+C)^{\frac{3}{2}}} x'',$$

kus

$$a_1 = \frac{S^2 - 4QF}{4QR} \quad \text{ja} \quad b_1 = -\frac{S}{2Q},$$

kusjuures sümmeetriatelje võrrand on

$$y - b = \tan \alpha \cdot (x - a),$$

kus

$$a = a_1 \cos \alpha - b_1 \sin \alpha$$

$$b = a_1 \sin \alpha + b_1 \cos \alpha$$

ja

$$\sin \alpha = \mp \sqrt{\frac{A}{A+C}}, \quad \cos \alpha = + \sqrt{\frac{C}{A+C}}.$$

- d) Kui $B^2 - 4AC = 0$ ja $2CD - BE = 2AE - BD = 0$, siis võrrand kujutab kaht rööbikut sirget

$$2Ax + By + D \mp \sqrt{D^2 - 4AF} = 0.$$

B. Ruumis.

Punkt.

Punktide $(x_1 | y_1 | z_1)$ ja $(x_2 | y_2 | z_2)$ kaugus teineteisest (ristkoordinaadistikus):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Sirglõigu jaotuspunkti koordinaadid, kui sirglõigu otsapunktid on $(x_1 | y_1 | z_1)$ ja $(x_2 | y_2 | z_2)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Ristkoordinaatide teisendamine:

koordinaattelgede rööpluke:

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z';$$

koordinaattelgede pööramine:

$$\begin{aligned}x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z',\end{aligned}$$

kus

$$a_1 = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta$$

$$a_2 = -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta$$

$$a_3 = \sin \varphi \sin \Theta;$$

$$b_1 = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta$$

$$b_2 = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta$$

$$b_3 = -\cos \varphi \sin \Theta;$$

$$c_1 = \sin \psi \sin \Theta$$

$$c_2 = \cos \psi \sin \Theta$$

$$c_3 = \cos \Theta.$$

Sirge suunakoosinused:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Kiirte vaheline nurk:

$$\cos \omega = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Polaarkoordinaatide seos ristkoordinaatidega:

$$\begin{array}{l|l} x = r \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ y = r \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = r \cos \varphi & \sin \psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \end{array}$$

Tasapind.

Tasapinna võrrandid:

üldkuju:

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

normaalkuju:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p;$$

telglõikudega a , b ja c :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;$$

läbi kolme punkti $(x_1 | y_1 | z_1)$, $(x_2 | y_2 | z_2)$ ja $(x_3 | y_3 | z_3)$:

$$\begin{vmatrix} 1, x, y, z \\ 1, x_1, y_1, z_1 \\ 1, x_2, y_2, z_2 \\ 1, x_3, y_3, z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Normiv tegur:

$$N = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Tingimus, et neli punkti $(x_1 | y_1 | z_1)$, $(x_2 | y_2 | z_2)$, $(x_3 | y_3 | z_3)$ ja $(x_4 | y_4 | z_4)$ asetsevad ühel tasapinnal:

$$\begin{vmatrix} 1, x_1, y_1, z_1 \\ 1, x_2, y_2, z_2 \\ 1, x_3, y_3, z_3 \\ 1, x_4, y_4, z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nurk tasapindade $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ vahel

$$\cos \omega = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Tasapindade $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ rööpseisu tingimus:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Tasapindade $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ristseisu tingimus:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Tasapindade kimp, mis läbibvad ühe ja sama sirge:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

ehk

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0,$$

kus λ on muutuv parameeter.

Tingimus, et kolm tasapinda $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ja $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ lõikuvad kolmes rööbikus sirges joones:

$$\frac{A_3}{A_1 + \lambda A_2} = \frac{B_3}{B_1 + \lambda B_2} = \frac{C_3}{C_1 + \lambda C_2}.$$

Tingimus, et kolm tasapinda $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ja $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ läbibvad ühe ja sama sirge:

$$\frac{A_3}{A_1 + \lambda A_2} = \frac{B_3}{B_1 + \lambda B_2} = \frac{C_3}{C_1 + \lambda C_2} = \frac{D_3}{D_1 + \lambda D_2}.$$

Tingimus, et neli tasapinda $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ ja

$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$ läbivad ühe ja sama punkti:

$$\begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1, D_1 \\ A_2, B_2, C_2, D_2 \\ A_3, B_3, C_3, D_3 \\ A_4, B_4, C_4, D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Punkti $(x_0 | y_0 | z_0)$ kaugus tasapinnast $Ax + By + Cz + D = 0$ ehk $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$

Sirge.

Sirge võrrandid:

üldkuju:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

sirge pole rööbik XY -tasapinnaga:

$$\left. \begin{aligned} x &= k_1z + b_1 \\ y &= k_2z + b_2 \end{aligned} \right\};$$

sirge on rööbik XY -tasapinnaga:

$$\left. \begin{aligned} x &= ky + b \\ z &= c \end{aligned} \right\};$$

kanooniline võrrand:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l};$$

läbi punkti $(x_1 | y_1 | z_1)$:

$$\left. \begin{aligned} x - x_1 &= k_1(z - z_1) \\ y - y_1 &= k_2(z - z_1) \end{aligned} \right\};$$

läbi kahe punkti $(x_1 | y_1 | z_1)$ ja $(x_2 | y_2 | z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

parameetrilised võrrandid:

$$x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt, \quad z = z_1 + lt.$$

Sirge suunakoosinused:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}};$$

$$\frac{\cos \alpha}{m} = \frac{\cos \beta}{n} = \frac{\cos \gamma}{l}.$$

Nurk sirgete $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1}$ ja $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} =$
 $= \frac{z - z_2}{l_2}$ vahel:

$$\cos \omega = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}.$$

Sirgete $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1}$ ja $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{l_2}$

rööpseisu tingimus:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Sirgete $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{l_1}$ ja $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{l_2}$

ristseisu tingimus:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0.$$

Nurk sirge $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l}$ ja tasapinna $Ax + By +$
 $+ Cz + D = 0$ vahel:

$$\sin \omega = \frac{Am + Bn + Cl}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$

Sirge $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{l}$ ja tasapinna $Ax + By +$
 $+ Cz + D = 0$ rööpseisu tingimus:

$$Am + Bn + Cl = 0.$$

Sirge $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}$ ja tasapinna $Ax + By + Cz + D = 0$ ristseisu tingimus:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l}.$$

Sirge $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}$ ja tasapinna $Ax + By + Cz + D = 0$ lõikepunkti koordinaadid:

$$x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt, \quad z = z_1 + lt,$$

kus

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cl}.$$

Tingimus, et sirge $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}$ asetseb tasapinnal $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\left. \begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Am + Bn + Cl &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Tingimus, et kaks sirget $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{l_1}$ ja $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{l_2}$ asetsevad ühel tasapinnal:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & m_1, & m_2 \\ y_1 - y_2, & n_1, & n_2 \\ z_1 - z_2, & l_1, & l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Punkti $(x_0 | y_0 | z_0)$ kaugus sirgest $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{l}$:

$$d = \sqrt{\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)(m^2 + n^2 + l^2) - (Xm + Yn + Zl)^2}{m^2 + n^2 + l^2}},$$

kus $X = x_0 - x_1$, $Y = y_0 - y_1$, $Z = z_0 - z_1$.

Sirgete $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{l_1}$ ja $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{l_2}$

kaugus teineteisest:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & m_1, & m_2 \\ y_1 - y_2, & n_1, & n_2 \\ z_1 - z_2, & l_1, & l_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1, & l_1 \\ n_2, & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1, & m_1 \\ l_2, & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1, & n_1 \\ m_2, & n_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Teise järgu pinnad.

Kerapinna võrrandid:

kinnine kuju keskpunktiga $(a | b | c)$ ja raadiusega r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2;$$

keskpunktiga 0-punktis:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

lahtine kuju:

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

kus

$$a = -\frac{G}{2A}, \quad b = -\frac{H}{2A}, \quad c = -\frac{I}{2A},$$

$$r = \frac{\sqrt{G^2 + H^2 + I^2 - 4AK}}{2A}.$$

Kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ puutujakoonus tipuga punktis $(x_0 | y_0 | z_0)$:

$$(x_0x + y_0y + z_0z - r^2)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0.$$

Kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ puutujatasapind punktis $(x_0 | y_0 | z_0)$:

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2.$$

Kerapinna $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ puutujatasapind punktis $(x_0 | y_0 | z_0)$:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = r^2,$$

Punkti $(x_0 | y_0 | z_0)$ polaartasapind kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ suhtes:

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2.$$

Tingimus, et sirge läbi punkti $(x_1 | y_1 | z_1)$ on kerapinnale $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ puutujaks punktis $(x_0 | y_0 | z_0)$:

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 - r^2 = 0.$$

Punkti $(x_0 | y_0 | z_0)$ potents kerapinna $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ suhtes:

$$d_1d_2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2.$$

Kerapindade $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2$ ja
 $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2$ potentsastapind:

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - r_1^2) + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - r_2^2) = 0.$$

Pöördpindade võrrandid:

silinder (ümbes X -telje):

$$y^2 + z^2 = b^2;$$

koonus (ümbes X -telje, tipuga 0-punktis):

$$\frac{y^2 + z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 0;$$

pöördellipsoid (ümbes X -telje):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1;$$

kahekattene pöördhüperboloid (ümbes X -telje):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1;$$

ühekattene pöördhüperboloid (ümbes X -telje):

$$\frac{y^2 + z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

pöördparaboloid (ümbes Z -telje):

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Teise järgu koonuse võrrand, kui koonuse tipp on 0-punktis:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Teise järgu koonuse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ moodustajate võrrandid:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \frac{y}{\lambda b} \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= -\frac{\lambda y}{b} \end{aligned} \right\}.$$

Kolme telje ellipsoidi võrrand:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Tasapindade võrrandid, kui tasapinnad lõikavad ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ringjooni mööda:}$$

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = \mu$$

$$\frac{x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} = \nu,$$

kui $a > b > c$ ja kus μ ja ν on muutuvad parameetrid.

Ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ diameetri võrrand:

$$\frac{x}{a^2 m} = \frac{y}{b^2 n} = \frac{z}{c^2 l},$$

kus m , n ja l on ellipsoidi rööplõigete normaali sihitegurid.

Ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ diameetritasapinna võrrand:

$$\frac{\cos \alpha}{a^2} x + \frac{\cos \beta}{b^2} y + \frac{\cos \gamma}{c^2} z = 0,$$

kus $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ on ellipsoidi rööbikute kõõlude suuna-koosinused.

Ellipsoidi diameetri $\frac{x}{a^2 m} = \frac{y}{b^2 n} = \frac{z}{c^2 l}$ kaasideametritasapinna võrrand:

$$mx + ny + lz = 0.$$

Ellipsoidi diameetritasapinna $\frac{\cos \alpha}{a^2} x + \frac{\cos \beta}{b^2} y + \frac{\cos \gamma}{c^2} z = 0$ kaasideometri võrrand:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}.$$

Üldise kahekattese hüperboloidi võrrand:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Üldise ühekattese hüperboloidi võrrand:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Tasapindade võrrandid, kui tasapinnad lõikavad ühekattest hüper-

boloidi $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ringjooni mööda:

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = \mu$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = \nu,$$

kus $b > c$ ning μ ja ν on muutuvad parameetrid.

Ühekattese hüperboloidi $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ moodustajate võr-

randid:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= \lambda \left(1 + \frac{z}{c}\right) \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a} &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{z}{c}\right) \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{x}{a} &= \lambda \left(1 - \frac{z}{c}\right) \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a} &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{z}{c}\right) \end{aligned} \right\}.$$

Elliptilise paraboloidi võrrand:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Hüperboolse paraboloidi võrrand:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Hüperboolse paraboloidi $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ moodustajate võrrandid:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \lambda \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2x}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{ ja } \left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2x}{\lambda} \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \lambda \end{aligned} \right\}.$$

