T A R T U R I I K L I K Ü L I K O O L

Matemaatilise analüüsi kateeder

ÜHTLASE KOONDUVUSE STRUKTUUR SUUNATUD PEREDEGA

Diplomitöö

Teostaja: Matemaatikateaduskonna
V kursuse üliõpilane
Riho L e p p

Juhendaja: füüs.-matem.dokt.prof.
Gunnar K a n g r o

Tartu 1970

SISSEJUHATUS

Esimesena uuris ühtlase koonduvuse aksiomatiseerimisega seotud küsimusi Goetz [3], kes tõi sisse läheduse mõiste Frèchet ' ruumi(ruum, kus defineeritud piirväärtuse mõiste jadade jaoks, vt. [4]). Töös [3] aksiomatiseeritakse lähedussuhe (n) jadade jaoks nii, et oleks täidetud tingimused

1) alati $\{x_i\} n \{x_i\}$
2) kui $\{x_i\} n \{y_i\}$, siis $\{y_i\} n \{x_i\}$
3) kui $\{x_i\} n \{y_i\}$ ja $\{y_i\} n \{z_i\}$, siis $\{x_i\} n \{z_i\}$
4) $x = y$ parajasti siis, kui $\{x_i\} n \{y_i\}$, kus $x_i = x$ ja $y_i = y$ iga $i \in N$ korral
5) kui $\{x_i\} n \{y_i\}$, siis $\{x_{i_j}\} n \{y_{i_j}\}$ suvalise indeksite jada i_j korral.

Selliselt defineeritud ruumi nimetab Goetz ühtlaseks L-ruumiks. Kui on veel täidetud aksioom 6:

6) $\{x_i\} n \{y_i\}$, kui igas indeksite osajadas leidub selline osajada i_j, et $\{x_{i_j}\} n \{y_{i_j}\}$, siis saame ühtlase L^x-ruumi.

Edaspidi kohtame abstraktset ühtlase koonduvuse mõistet Cooki ja Fischeri artiklis [2], kus on aluseks Fischeri poolt artiklis [7] defineeritud piirruumi ehk koonduvuse ruumi mõiste. Töös [2] Cook ja Fischer rakendavad Weili ühtlase struktuuri (vt. [1]) aksioome filtritele ja saadud struktuuri nimetavad ühtlase koonduvuse struktuuriks. Tähistagu $\underline{F}(X \times X)$ kõigi filtrite süsteemi hulgal $X \times X$. Kui $\{A\}$ on hulkade süsteem, mis moodustab filtri baasi, siis nende hulkade poolt genereeritud filtrit tähistame $[\{A\}]$. Kui $\mathcal{F}$ on filter, siis $\mathcal{F}^{-1}=\{F^{-1}: F\in\mathcal{F}\}$, ja kui $\mathcal{F},\mathcal{G}\in \underline{F}(X\times X)$, siis $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}=[\{F\circ G: F\in\mathcal{F}, G\in\mathcal{G}\}]$, kus $F\circ G\neq\emptyset$ iga $F\in\mathcal{F}$ ja $G\in\mathcal{G}$ korral.

Kui $\mathcal{J}\subset\underline{F}(X\times X)$ rahuldab nõudeid:

(U_1) $[\Delta]\in\mathcal{J}$

(U_2) kui $\mathcal{F}\in\mathcal{J}$, siis $\mathcal{F}^{-1}\in\mathcal{J}$

(U_3) kui $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathcal{J}$, siis $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\in\mathcal{J}$ (kui $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ eksisteerib)

(I_1) kui $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathcal{J}$, siis $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\in\mathcal{J}$

(I_2) kui $\mathcal{F}\in\mathcal{J}$, siis kui $\mathcal{F}\leq\mathcal{G}\in\underline{F}(X\times X)$, siis $\mathcal{G}\in\mathcal{J}$,

Siis $\mathcal{J}$ nimetatakse ühtlase koonduvuse struktuuriks hulgal X .

Veidi teist teed on läinud Biesterfeldt [8]. Tema poolt defineeritud ühtlase koonduvuse struktuurid põhinevad väitele, et erinevus " ühtlase " ja " hariliku" (pidevuse, koonduvuse) vahel seisneb ainult kvantorite vahetuses : " Iga x ja iga $\alpha>0$ korral leidub $\beta>0$, et ...." ning " Iga $\alpha>0$ korral leidub selline $\beta>0$, et iga x korral ....". Biesterfeldt " ühtlustab " Fischeri piirruumi aksioome. Tulemusena saab ta kolm ühtlase koonduvuse ruumi liiki ja kolm kvaasiühtlase koonduvuse ruumi liiki , olenevalt " ühtlustatavate " aksioomide arvust. Kõik need ruumid on aga erinevad Cook-Fischeri ühtlase koonduvuse ruumist.

Diplomitöös antakse Cook-Fischeri poolt defineeritud ühtlase koonduvuse struktuur suunatud peredega ja uuritakse saadud struktuuri omadusi. Näidatakse, millal ühtlase koonduvuse struktuur suunatud peredega määrab ära koonduvuse struktuuri suunatud peredega [9], ja millal ühtlase struktuuri. Defineeritakse ühtlaselt pideva kujutuse mõiste ja Cauchy pere mõiste. Lõpuks vaadatakse ühtlase koonduvuse struktuuri ka funktsionaalruumis.

§ 2. Põhimõisted ja tähistused

Olgu D suunatud hulk (vt. [1]), siis <u>suunatud pereks</u> nimetatakse paari ($s, \geqslant$), kus s on funktsioon ja $\geqslant$ suund s määramispiirkonnas (vt. [1]). Hulga X kõigi suunatud perede hulka tähistame $\underline{N}(X)$. Suunatud peresid hulgal tähistame väikeste tähtedega s, t, u, x, y, täpsemalt, $s=\{s_\alpha : \alpha \in A\}$, $t=\{t_\beta : \beta \in B\}$. Kui meil on kaks suunatud hulka $(D, \geqslant)$ ja $(E, >)$, siis $D \times E$ muutub suunatud hulgaks suunaga $\gg$, kui defineerida

$$(d, e) \gg (f, g) \Longleftrightarrow d \geqslant f,\ e > g.$$

Suunatud pere hulgal $X \times X$ on esitatav kujul $\{(x_\alpha, y_\beta) : (\alpha, \beta) \in A \times B\}$, kus A ja B on üldiselt erinevad suunatud hulgad. Suunatud peresid hulgal $X \times X$ tähistame tähtedega S, T, U. Kõigi suunatud perede süsteemi hulgal $X \times X$ tähistame $\underline{N}(X \times X)$. Kui $S=\{(s_\alpha, t_\beta) : (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ siis $S^{-1}=\{(t_\beta, s_\alpha) : (\beta, \alpha) \in B \times A\}$. Mingite $S, T \in \underline{N}(X \times X)$ korral $S \circ T$ tähistab suunatud peret

$\{(x_\alpha, w_\delta) : \exists v$, et $(x_\alpha, v) \in T$ ja $(v, w_\delta) \in S$, kus $(\alpha, \delta) \in A \times D\}$.

Suunatud peret $t=\{t_\beta : \beta\in B\}$ nimetatakse suunatud pere $s=\{s_\alpha : \alpha\in A\}$ <u>osapereks</u> parajasti siis, kui leidub funktsioon N määramispiirkonnaga B ja väärtuste piirkonnaga A, et oleks rahuldatud nõuded

(a) $t = s\circ N$ ehk $t_\beta = s_{N_\beta}$ iga $\beta\in B$ korral;

(b) iga $\alpha\in A$ korral leidub element $\beta\in B$ selline, et kui $\rho\geq\beta$, siis $N_\rho\geq\alpha$ (vt. [1]).

Analoogselt defineeritakse osapere ka suunatud perele $S\in \underline{N}(X\times X)$.

Suunatud pere s <u>kuulub hulka N alates teatud kohast (momendist)</u>, kui leidub indeks $\alpha\in A$, et iga $\beta\geq\alpha$, $\beta\in A$ korral $s_\beta\in N$. Suunatud pere s <u>asub sageli hulgas N</u>, kui iga $\alpha\in A$ korral leidub $\beta\in A$, et $\beta\geq\alpha$ ja $s_\beta\in N$.

3. Ühtlase koonduvuse struktuur suunatud peredega

<u>Definitsioon 1</u>. Me ütleme, et hulgal X on määratud <u>ühtlase koonduvuse struktuur</u>, kui leidub $\mathcal{S}\subset \underline{N}(X\times X)$, mis rahuldab nõudeid :

(N_1) $\bar{\Delta}=\{(x_\alpha, x_\beta)=(x,x) : (\alpha,\beta)\in A\times B,\ x\in X,\ A\times B\in\mathcal{A}\}\in\mathcal{S}$

kus $\mathcal{A}$ on kõikide indeksihulkade süsteem

(N_2) kui $S\in\mathcal{S}$, siis ka $S^{-1}\in\mathcal{S}$

(N_3) kui $S, T\in\mathcal{S}$ ja eksisteerib $S\circ T$, siis $S\circ T\in\mathcal{S}$

(N_4) kui $S\in\mathcal{S}$, siis iga ta osapere $T\in\mathcal{S}$

(N_5) kui $S=\{(x_\alpha, y_\beta) : (\alpha,\beta)\in A\times B\}\in\mathcal{S}$ ja $T=\{(z_\gamma, w_\delta) : (\gamma,\delta)\in C\times D\}\in\mathcal{S}$, siis ka $U=\{(t_\kappa, s_\ell) : (\kappa,\ell)\in K\times L\}\in\mathcal{S}$, kus

1° S ja T on U osapered,

2° $U = S \cup T = \{\{x_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{z_\gamma : \gamma \in G\}, \{y_\beta : \beta \in B\} \cup \{w_\delta : \delta \in D\}\}$,

3° S ja T säilitavad U osaperena oma järjestuse.

Kõigi ühtlase koonduvuse struktuuride süsteemi hulgal X tähistame sümboliga $\mathfrak{A}(X)$.

Ühtlase koonduvuse struktuur $\mathcal{S}$ defineerib hulgal X ka koonduvuse struktuuri suunatud peredega (vt. [9]). Suvalise $x \in X$ korral defineerime $\tau_\mathcal{S}\, x$ kui suunatud perede $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ süsteemi, kus

$$\{(y_\alpha, x_\beta) = (y_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S}.$$

Selle suunatud pere kirjutame edaspidi veidi lühemal kujul: $\{(y_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\}$.

Teoreem 1. Olgu $\mathcal{S}$ ühtlase koonduvuse struktuur hulgal X ja $\{y_\alpha : \alpha \in A\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$ parajasti siis, kui $\{(y_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S}$. Siis $\tau_\mathcal{S}$ on koonduvuse struktuur hulgal X .

Tõestus. Et suunatud pere $\{(x_\alpha, x_\beta) = (x, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ on Δ osapere, siis $\{(x_\alpha, x_\beta) = (x, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S}$ ja seega konstantne pere $\{x_\alpha = x : \alpha \in A\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$. Kui suunatud pere $\{y_\beta : \beta \in B\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$, siis vaadeldes ta suvalist osaperet $\{z_\gamma : \gamma \in G\}$, näeme, et ka $\{z_\gamma : \gamma \in G\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$, sest kui $\{(y_\beta, x) : (\beta, \delta) \in B \times D\} \in \mathcal{S}$, siis ka $\{(z_\gamma, x) : (\gamma, \delta) \in G \times D\} \in \mathcal{S}$, ehk $\{z_\gamma : \gamma \in G\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$, aksioomi (N_4) järgi. Lõpuks, olgu kaks suunatud peret $\{y_\alpha : \alpha \in A\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$ ja $\{z_\beta : \beta \in B\} \in \tau_\mathcal{S}\, x$, st. $\{(y_\alpha, x) : (\alpha, \delta) \in A \times D\} \in \mathcal{S}$ ja $\{(z_\beta, x) : (\beta, \delta) \in B \times D\} \in \mathcal{S}$. Siis (N_5) järgi leidub suunatud pere

$$\{(y_\alpha, x) : (\alpha, \delta) \in A \times D\} \cup \{(z_\beta, x) : (\beta, \delta) \in B \times D\} =$$
$$= \{\{y_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{z_\beta : \beta \in B\}, x; \delta \in D\},$$

mis kuulub süsteemi $\mathcal{S}$. Seega suunatud pere $\{y_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{z_\beta : \beta \in B\} \in \tau_\mathcal{S} x$ ja rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$.

Ühtlase koonduvuse struktuuride hulgal $\mathfrak{A}(X)$ võib sisse tuua ka osalise järjestuse: kui $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathfrak{A}(X)$, siis $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$ parajasti siis, kui $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$; Siis ütleme, et $\mathcal{S}_2$ ~~on~~ peenem kui $\mathcal{S}_1$, või et $\mathcal{S}_1$, on jämedam kui $\mathcal{S}_2$. Kui $\mathcal{S}_1 \leq \mathcal{S}_2$, siis ka $\tau_{\mathcal{S}_1} \leq \tau_{\mathcal{S}_2}$, st. $\tau_{\mathcal{S}_1} \supset \tau_{\mathcal{S}_2}$ (vt. [9]). See tuleneb vahetult $\tau_\mathcal{S}$ definitsioonist. Kui $\{\mathcal{S}_\nu : \nu \in N\}$ on ühtlase koonduvuse struktuuride pere, siis $\sup_{\nu \in N} \mathcal{S}_\nu = \bigcap_{\nu \in N} \mathcal{S}_\nu$.

Lause 1. Olgu $\{\mathcal{S}_\nu : \nu \in N\} \in \mathfrak{A}(X)$. Siis

$$\tau_{\sup_{\nu \in N} \mathcal{S}_\nu} = \sup_{\nu \in N} \tau_\nu.$$

Tõestus. Suunatud pere $s \in \tau_{\sup \mathcal{S}_\nu} x$ parajasti siis, kui $(s, x) = \{(s_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \sup_{\nu \in N} \mathcal{S}_\nu = \bigcap_{\nu \in N} \mathcal{S}_\nu$. Teiseltpoolt $s = \{s_\alpha : \alpha \in A\} \in \sup_{\nu \in N} \tau_{\mathcal{S}_\nu} x$ parajasti siis, kui $s \in \bigcap_{\nu \in N} \tau_{\mathcal{S}_\nu} x$ ja seega parajasti siis, kui

$$(s, x) = \{(s_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \bigcap_{\nu \in N} \mathcal{S}_\nu$$

Definitsioon 2. (vt. [9]). Me ütleme, et koonduvuse struktuur τ rahuldab eralduvuse aksioomi T_1, kui

$$(T_1) \quad x \neq y \Rightarrow \{y_\alpha = y : \alpha \in A\} \notin \tau x$$

ja rahuldab eralduvuse aksioomi T_2 ehk koonduvuse ruum on separaatne, kui

$$(T_2)\quad x \neq y \Rightarrow \tau x \cap \tau y = \phi$$

Lause 2. Olgu $\tau_{\mathcal{S}}$ ühtlase koonduvuse struktuuri $\mathcal{S}$ poolt indutseeritud koonduvuse struktuur hulgal X, siis, kui $(X, \tau_{\mathcal{S}})$ on T_1-ruum, on ta ka T_2-ruum.

Tõestus. Eeldame, et $\{z_\alpha : \alpha \in A\} \in \tau_{\mathcal{S}} x \cap \tau_{\mathcal{S}} y$. Siis $\{(z_\alpha, x) : (\alpha, \gamma) \in A \times C\} \in \mathcal{S}, \{(z_\alpha, y) : (\alpha, \delta) \in A \times D\} \in \mathcal{S}$ ja (N_2) ning (N_3) tõttu saame

$$\{(x, z_\alpha) : (\gamma, \alpha) \in C \times A\} \circ \{(z_\alpha, y) : (\alpha, \delta) \in A \times D\} = \{(x, y) : (\gamma, \delta) \in C \times D\} \in \mathcal{S}.$$

Kui nüüd $\tau_{\mathcal{S}}$ rahuldab T_1-aksioomi, siis $x = y$, st. $\tau_{\mathcal{S}}$ rahuldab ka T_2-aksioomi.

Järeldus. Ühtlase koonduvuse ruum $(X, \mathcal{S})$ on separaatne parajasti siis, kui

$$\{(x, y) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S} \Rightarrow x = y.$$

4. Vahekord Cooki ja Fischeri poolt defineeritud ühtlase koonduvuse struktuuriga

Vaatleme vahekorda suunatud perede ja filtrite vahel (vt. [1]).

Lemma 1. Kui $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ on suunatud pere hulgal X, siis süsteem kõikidest sellistest hulkadest, millesse see suunatud pere $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ satub teatud momendist alates, on filter hulgal X.

Olgu $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \in \underline{N}(X)$ ja $\beta \in A$. Hulka $x(\beta) = \{x_\alpha : \alpha \geq \beta, \alpha \in A\}$ nimetatakse (β poolt määratud) $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ jäägiks (vt. [6]). Kõigi nende jääkide süsteem

$x^* = \{x(\beta) : \beta \in A\}$ on filtribaas. Seega näeme, et iga suunatud pere määrab üheselt ära ühe filtri. Vastupidine kehtib ainult teatud erijuhul (vt. [6]).

Olgu $\mathcal{F}$ filter hulgal X ja A paaride hulk $\{(x,F) : x \in F,\ F \in \mathcal{F}\}$. Ütleme, et $(y,G) \geqslant (x,F)$ parajasti siis, kui $G \subset F$. Defineerime funktsiooni $f(x,F) = x$.

Lemma 2. Filter $\mathcal{F}$ koosneb parajasti kõigist hulkadest H, kuhu suunatud pere $\{f(x,F) : (x,F) \in A\}$ satub teatud momendist alates.

Teoreem 2. Ühtlase koonduvuse struktuur suunatud peredega määrab üheselt ära ühtlase koonduvuse struktuuri Cook-Fischeri järgi.

Tõestus. I. Olgu antud ühtlase koonduvuse struktuur aksioomidega $(N_1)-(N_5)$. Seame igale suunatud perele vastavusse ühe filtri eespooltoodud viisil. Tuleb näidata, et saadud filtrite süsteem, mille tähistame sümboliga $\mathcal{J}$, rahuldab sissejuhatuses antud Cook-Fischeri ühtlase koonduvuse struktuuri aksioome. Et $\bar{\Delta} \in \mathcal{S}$, siis vaatame ta kõiki jääke. Kõik jäägid sisaldavad diagonaali suunatud pere $\bar{\Delta}$ definitsiooni tõttu. Kui nüüd vaadelda hulki $A \subset X \times X$, mis kõik sisaldavad diagonaali, siis saame filtri hulgal $X \times X$, mille baasiks on diagonaal Δ, seega $[\Delta] \in \mathcal{J}$ ja (U_1) kehtib. Aksioom (U_2) järeldub vahetult aksioomist (N_2). Aksioomide (J_1) ja (J_2) kehtivus järeldub tööst [9], sest lemma 1 tõestus on kergelt ülekantav ka korrutisruumi $X \times X$. Nüüd (U_3) kehtivus. Olgu kaks filtrit $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{F}$, mis on määratud vastavalt suunatud peredega $T, S \in \mathcal{S}$ ja eksisteerigu $S \circ T \in \mathcal{S}$. Siis

$S^* = \{S_{ji} : j \in D,\ i \in E\}$ on filtri $\mathcal{F}$ baasiks, kus $S_{ji} = \{(x_\alpha, y_\beta) : \alpha \geqslant j,\ \beta > i\}$. Aksioomi (U_3) kehtivuseks piisab näidata, et filtribaas $S^* \circ T^*$ on peenem kui filtribaas $(S \circ T)^*$, st. suvalise $A \in (S \circ T)^*$ korral leidub $B \in S^* \circ T^*$, et $B \subset A$. Võtame suvalise $(S \circ T)_{il} \in (S \circ T)^*$, kus

$$(S \circ T)_{il} = \{(x_\alpha, w_\delta) : \alpha \geqslant i,\ \delta \geqslant l\}.$$

Kuid $(S \circ T)_{il} = \{(x_\alpha, w_\delta) : \exists v$, et $(x_\alpha, v) \in T_i,\ (v, w_\delta) \in S_l\}$, kus $T_i = \{(x_\alpha, y_\beta) : \alpha \geqslant i,\ \beta \in G\}$, $S_l = \{(z_\gamma, w_\delta) : \gamma \in D,\ \delta \geqslant l\}$. Olgu $B = S_{ij} \circ T_{kl}$ suvaliste $i \in D$ ja $k \in G$ korral. Siis $B = S_{ij} \circ T_{kl} \subset (S \circ T)_{il}$. Seega filter, mille baas on $S^* \circ T^*$, on peenem kui filter, mille baas on $(S \circ T)^*$ mistõttu filter $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ baasiga $S^* \circ T^*$ kuulub süsteemi $\mathcal{J}$ aksioomi (J_2) tõttu.

5. Ühtlaselt pidevad kujutused

Olgu $(X, \mathcal{S})$ ühtlase koonduvuse ruum ja φ kujutus hulgast X ühtlase koonduvuse ruumi $(Y, \mathcal{J})$. Sümboliga $\varphi \times \varphi$ tähistame kujutust hulgast $X \times X$ hulka $Y \times Y$, mille väärtus punktis $(x, y) \in X \times X$ on $(\varphi(x), \varphi(y)) \in Y \times Y$. Kujutus φ on <u>ühtlaselt pidev</u> hulgal X parajasti siis kui $(\varphi \times \varphi) \cdot \mathcal{S} \subset \mathcal{J}$. Kujutus φ on <u>ühtlane isomorfism</u>, kui φ ja φ^{-1} on mõlemad ühtlaselt pidevad.

<u>Definitsioon 3</u>. Suunatud peret $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ nimetame $\mathcal{S}$-Cauchy pereks parajasti siis, kui

$$\{(x_\alpha, x_\beta) : (\alpha, \beta) \in A \times A\} \in \mathcal{S}.$$

$\mathcal{S}$-Cauchy pere omadusi uurime hiljem.

<u>Lause 3.</u> Olgu $\varphi : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{J})$ ühtlaselt pidev

kujutus. Siis

1) Kujutus φ on $(\tau_{\mathcal{S}}, \tau_{\mathcal{J}})$ -pidev hulgal X

2) $\mathcal{S}$-Cauchy pere ühtlaselt pidev kujutus on $\mathcal{J}$-Cauchy pere.

<u>Tõestus</u>. 1) Olgu $\{y_\alpha : \alpha \in A\} \in \tau_{\mathcal{S}} x$, siis $\{(y_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S}$, $\{(\varphi(y_\alpha), \varphi(x)) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{J}$, st. $\{\varphi(y_\alpha) : \alpha \in A\} \in \tau_{\mathcal{J}} \varphi(x)$.

2) Olgu $\Delta = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ $\mathcal{S}$-Cauchy pere, st. $\{(x_\alpha, x_\beta) : (\alpha, \beta) \in A \times A\} \in \mathcal{S}$. Kujutuse φ ühtlase pidevuse tõttu $\{(\varphi(x_\alpha), \varphi(x_\beta)) : (\alpha, \beta) \in A \times A\} \in \mathcal{J}$ st. $\{\varphi(x_\alpha) : \alpha \in A\}$ on $\mathcal{J}$-Cauchy pere.

<u>Lause 4.</u> Olgu $\varphi : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ ja $\psi : (Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{U})$ ühtlaselt pidevad kujutused. Siis $\psi \circ \varphi : (X, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{U})$ on ühtlaselt pidev kujutus.

<u>Tõestus</u>. Eelduse järgi $(\varphi \times \varphi)\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ ja $(\psi \times \psi)\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Seega $(\psi \times \psi)(\varphi \times \varphi)\mathcal{S} \subset (\psi \times \psi)\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ ja et $(\psi \times \psi)(\varphi \times \varphi) = (\psi \circ \varphi) \times (\psi \circ \varphi)$, siis $(\psi \circ \varphi) \times (\psi \circ \varphi)\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$.

<u>Lause 5.</u> Olgu X hulk, $\varphi : X \to (Y, \mathcal{S})$. Siis hulgal X leidub selline jämedaim ühtlase koonduvuse struktuur $\mathcal{J}$, et φ on ühtlaselt pidev hulgal X .

<u>Tõestus</u>. Olgu $\mathcal{J} = \{S \in \underline{N}(X \times X) : (\varphi \times \varphi) S \in \mathcal{S}\}$. Aksioomi (N_1) kehtivuse näitamiseks vaatleme hulka $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ ja siis $(\varphi \times \varphi)\Delta_X = \{(\varphi(x), \varphi(x)) : x \in X\}$. Et φ on kujutus, siis $(\varphi \times \varphi)\Delta_X \subset \Delta_Y$. Vaatleme nüüd suunatud peret $\bar{\Delta}_Y = \{(y_\alpha, y_\beta) = (y, y) : (\alpha, \beta) \in A \times B, y \in Y, A \times B \in \mathcal{A}\}$ ja $\{(\varphi(x_\alpha), \varphi(x_\beta)) = (\varphi(x), \varphi(x)) = (y, y) : (\alpha, \beta) \in A \times B, x \in X, A \times B \in \mathcal{A}\}$. Viimase suunatud pere võib kirjutada kujul $(\varphi \times \varphi)\bar{\Delta}_X$. Et φ on kujutus, siis $(\varphi \times \varphi)\bar{\Delta}_X \subset \bar{\Delta}_Y$. Suunatud pere $(\varphi \times \varphi)\bar{\Delta}_X$ on suunatud pere $\bar{\Delta}_Y$ osapere ja seega $(\varphi \times \varphi)\bar{\Delta}_X \in \mathcal{S}$ ehk $\bar{\Delta}_X \in \mathcal{J}$. Aksioomi (N_2) tõestus:

et $((\varphi\times\varphi)S)^{-1}=(\varphi\times\varphi)S^{-1}$, siis kui $S\in\mathcal{J}$, ka $S^{-1}\in\mathcal{J}$. Aksioomi (N_3) tõestuseks näitame, et $(\varphi\times\varphi)(S\circ T)\subset((\varphi\times\varphi)S)\circ((\varphi\times\varphi)T)$. Selleks võtame suunatud pere $(\varphi\times\varphi)(S\circ T)$ mingi punkti $(\varphi(x_\alpha),\varphi(w_\sigma))$. Vaatame punkti (x_α,w_σ), mis φ definitsiooni järgi kuulub suunatud peresse $S\circ T$. Seega leidub v, et $(x_\alpha,v)\in T$ ja $(v,w_\sigma)\in S$. Siis $(\varphi(x_\alpha),\varphi(v))\in(\varphi\times\varphi)T$ ja $(\varphi(v),\varphi(w_\sigma))\in(\varphi\times\varphi)S$ ehk $(\varphi(x_\alpha),\varphi(w_\sigma))\in((\varphi\times\varphi)S)\circ((\varphi\times\varphi)T)$. Seega $(\varphi\times\varphi)(S\circ T)$ on suunatud pere $((\varphi\times\varphi)S)\circ((\varphi\times\varphi)T)$ osapere ja $(\varphi\times\varphi)(S\circ T)\in\mathcal{S}$ ning $S\circ T\in\mathcal{J}$, kui $S,T\in\mathcal{J}$. Aksioomi (N_4) kehtivus: kui suunatud pere T on S osapere, siis ka $(\varphi\times\varphi)T$ on $(\varphi\times\varphi)S$ osapere. Ka (N_5) kehtivus järeldub vahetult φ definitsioonist, sest $((\varphi\times\varphi)S)\cup((\varphi\times\varphi)T)=(\varphi\times\varphi)(S\cup T)$ ja kehtivad nõuded $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$.

Lõpuks näitame, et saadud $\mathcal{J}$ on jämedaim ühtlase koonduvuse struktuur, mille korral φ on ühtlaselt pidev. Olgu $\mathcal{J}_1$ selline ühtlase koonduvuse struktuur hulgal X, et φ on ühtlaselt pidev ja võtame suunatud pere $S\in\mathcal{J}_1$. Siis $(\varphi\times\varphi)S\in\mathcal{S}$ ja $S\in\mathcal{J}$. Seega $\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}$ ehk $\mathcal{J}_1\geqslant\mathcal{J}$.

Lause 6. Olgu X hulk, $(X_\alpha,\mathcal{J}_\alpha)\ \alpha\in A$ ühtlase koonduvuse ruumide pere ja $\varphi_\alpha: X\longrightarrow X_\alpha \quad (\alpha\in A)$ kujutuste pere. Siis leidub selline jämedaim ühtlase koonduvuse struktuur hulgal X, et kõik kujutused φ_α on ühtlaselt pidevad hulgal X.

Tõestus. Olgu $\mathfrak{S}_\alpha=\{S\in \underline{N}(X\times X):(\varphi_\alpha\times\varphi_\alpha)S\in\mathcal{J}_\alpha\}$. Lause 5 järgi on $\mathfrak{S}_\alpha$ selline jämedaim ühtlase koonduvuse struktuur, et φ_α on ühtlaselt pidev hulgal X. Olgu $\mathcal{J}=\sup\limits_{\alpha\in A}\mathfrak{S}_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in A}\mathfrak{S}_\alpha$. Definitsiooni järgi

$\bigcap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha \subset \sigma_\nu$ iga $\nu\in A$ korral, st. $\mathcal{J}\geqslant\sigma_\nu$ iga $\nu\in A$ korral. Seega $(\varphi_\nu\times\varphi_\nu)\mathcal{J}\subset(\varphi_\nu\times\varphi_\nu)\sigma_\nu$ ja et $(\varphi_\nu\times\varphi_\nu)\sigma_\nu\subset\mathcal{J}_\nu$, siis $(\varphi_\nu\times\varphi_\nu)\mathcal{J}\subset\mathcal{J}_\nu$ iga $\nu\in A$ korral. Seega φ_ν on ühtlaselt pidev hulgal X iga $\nu\in A$ korral. Olgu nüüd $\mathcal{J}_1$ selline koonduvuse struktuur hulgal X, et kõik kujutused φ_α on ühtlaselt pidevad, ja olgu antud mingi suunatud pere $T\in\mathcal{J}_1$. Siis $(\varphi_\alpha\times\varphi_\alpha)T\in\mathcal{J}_\alpha$ st. $T\in\sigma_\alpha$ definitsiooni järgi. See kehtib iga $\alpha\in A$ korral, nii et $T\in\bigcap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha=\mathcal{J}$.

Seega $\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}$ ehk $\mathcal{J}\leq\mathcal{J}_1$.

Olgu $(X_\alpha,\mathcal{J}_\alpha)_{\alpha\in A}$ ühtlase koonduvuse ruumide pere. Sellist jämedaimat ühtlase koonduvuse struktuuri $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{J}_\alpha$ hulgal $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha$, et iga $P_\beta:\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha\to(X_\beta,\mathcal{J}_\beta)$ on ühtlaselt pidev, nimetame <u>ühtlase koonduvuse korrutisstruktuuriks</u>. Lause 6 põhjal $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{J}_\alpha$ eksisteerib ja

$$\mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{J}_\alpha=\sup_{\alpha\in A}\sigma_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}\sigma_\alpha$$

kus $\sigma_\alpha=\{S\in\underline{N}(\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha\times\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha):(P_\alpha\times P_\alpha)S\in\mathcal{J}_\alpha\}$.

Korrutise $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha$ koonduvusstruktuur, kus (X_α,τ_α) on koonduvuse ruum iga $\alpha\in A$ korral, on defineeritud diplomitöös [9] kui selline jämedaim koonduvuse struktuur hulgal $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha$, et kõik projektsioonid P_α on pidevad.

<u>Lause 7</u>. Ühtlase koonduvuse korrutisstruktuuri poolt määratud koonduvuse struktuur on korrutise koonduvusstruktuur.

<u>Tõestus.</u> Olgu $x\in\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha$ ja τ korrutise koonduvusstruktuur, st.

$$\tau x=\{s\in\underline{N}(\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha):P_\alpha(s)\in\tau_{\mathcal{J}_\alpha}P_\alpha(x),\alpha\in A\}.$$

Ühtlase koonduvuse korrutisstruktuuri poolt defineeritud koonduvuse struktuur on esitatav kujul

$$\tau_{\mathsf{X}_\alpha \mathcal{J}_\alpha}x=\{s\in\underline{N}(\mathop{\mathsf{X}}_\alpha X_\alpha):(P_\alpha\times P_\alpha)(s,x)\in\mathcal{J}_\alpha,\alpha\in A\}.$$

Kuid $P_\alpha(s) \in \tau_{\mathcal{J}_\alpha} P_\alpha(x)$ parajasti siis, kui $(P_\alpha(s), P_\alpha(x)) \in \mathcal{J}_\alpha$ ja seega parajasti siis, kui $(P_\alpha \times P_\alpha)(s, x) \in \mathcal{J}_\alpha$. Seega $\tau x = \tau_{\mathsf{X}_\alpha \mathcal{J}_\alpha} x$.

<u>Lause 8.</u> Kujutus $\varphi : (X, \mathcal{J}) \to \mathsf{X}_\alpha (X_\alpha, \mathcal{J}_\alpha)$ on ühtlaselt pidev hulgal X parajasti siis, kui $P_\alpha \circ \varphi$ on ühtlaselt pidev iga $\alpha \in A$ korral.

<u>Tõestus.</u> Kui φ on ühtlaselt pidev hulgal X, siis $P_\alpha \circ \varphi$ on ühtlaselt pidev hulgal X lause 4 põhjal. Vastupidi olgu $P_\beta \circ \varphi$ ühtlaselt pidev iga β korral. Et $(P_\beta \times P_\beta)(\varphi \times \varphi) = (P_\beta \circ \varphi) \times (P_\beta \circ \varphi)$, siis $(P_\beta \times P_\beta)(\varphi \times \varphi)\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_\beta$ iga $\beta \in A$ korral. Võtame mingi suunatud pere $S \in (\varphi \times \varphi)\mathcal{J}$ st. $S = (\varphi \times \varphi)T$, kus $T \in \mathcal{J}$. Siis $(P_\beta \times P_\beta)(\varphi \times \varphi)T \in \mathcal{J}_\beta$ iga $\beta \in A$ korral. Kuid $(\varphi \times \varphi)T \in \sigma_\beta$ iga $\beta \in A$ korral, kus

$$\sigma_\beta = \{ S \in \underline{N}(\mathsf{X}_\alpha X_\alpha \times \mathsf{X}_\alpha X_\alpha) : (P_\beta \times P_\beta) S \in \mathcal{J}_\beta \}$$

ja seega $(\varphi \times \varphi)T \in \bigcap_{\beta \in A} \sigma_\beta$. Järelikult $(\varphi \times \varphi)\mathcal{J} \subset \bigcap_{\beta \in A} \sigma_\beta$, mistõttu φ on ühtlaselt pidev hulgal X.

6. Indutseeritud ühtlase koonduvuse struktuurid

Kasutades lauset 5, võime defineerida ühtlase koonduvuse struktuuri hulga X mistahes alamhulgal $A \subset X$. Olgu $(X, \mathcal{J})$ ühtlase koonduvuse ruum ja $A \subset X$. Siis lause 5 järgi eksisteerib selline jämedaim ühtlase koonduvuse struktuur $\mathcal{J}_A$ hulgal A, et $\varphi : (A, \mathcal{J}_A) \to (X, \mathcal{J})$ on ühtlaselt pidev. Struktuuri $\mathcal{J}_A$ nimetame hulgal A <u>indutseeritud ühtlase koonduvuse struktuuriks</u>, ruumi $(A, \mathcal{J}_A)$ aga ruumi $(X, \mathcal{J})$ ühtlase koonduvuse alamruumiks.

Edaspidi kasutame siiski indutseeritud ühtlase koonduvuse struktuuri teist definitsiooni, millega opereerimine on mugavam.

Olgu $(X, \mathscr{S})$ ühtlase koonduvuse ruum ja A hulga X mingi alamhulk. Vaatleme kõiki suunatud peresid hulgas $X \times X$, mis asuvad sageli hulgas $A \times A$. Kõikide selliste suunatud perede hulka tähistame sümboliga $N_{A \times A}$. Olgu $\underline{N}(A \times A)$ suunatud perede süsteem hulgal $A \times A$. Tähistame sümboliga σ_A kujutust, mis seab igale suunatud perele Δ, mis asub sageli hulgas A, vastavusse suunatud pere Δ_A hulgast A. Vaatame kujutust

$$(\sigma_A \times \sigma_A) : (\mathscr{S} \cap N_{A \times A}) \longrightarrow \underline{N}(A \times A),$$

kus igale suunatud perele $S \in \mathscr{S} \cap N_{A \times A}$ seatakse vastavusse suunatud pere $S_A \in \underline{N}(A \times A)$, st. $(\sigma_A \times \sigma_A)(S) = S_A$. Kehtib

<u>Lause 9.</u> Suunatud perede süsteem $\mathscr{S}_A = (\sigma_A \times \sigma_A)(\mathscr{S} \cap N_{A \times A})$ on ühtlase koonduvuse struktuur hulgal A.

<u>Tõestus.</u> Vaatame suunatud peret

$\bar{\Delta}_A = \{(x_\alpha, x_\beta) = (x, x) : (\alpha, \beta) \in D \times B, x \in A, D \times B \in \mathscr{R}\}$.

Et $\Delta_A \subset A$ ja et $\bar{\Delta}_A \in N_{A \times A}$ parajasti siis, kui $\Delta_A \subset A$, siis $\mathscr{S} \cap \bar{\Delta}_A = \bar{\Delta}_A$, sest $\bar{\Delta}_A$ on suunatud pere $\bar{\Delta}$ osapere, ja et $(\sigma_A \times \sigma_A)\bar{\Delta}_A = \bar{\Delta}_A$ siis $\bar{\Delta}_A \in \mathscr{S}_A$. Vaatame mingit suunatud peret $S_A \in \mathscr{S}_A$. Siis $S_A^{-1} = ((\sigma_A \times \sigma_A) S)^{-1} = (\sigma_A \times \sigma_A)(S^{-1})$. Kui suunatud pere $S_A \in \mathscr{S}_A$, siis leidub suunatud pere $S \in \mathscr{S} \cap N_{A \times A}$, nii et $(\sigma_A \times \sigma_A)(S) = S_A$. Kui suunatud pere $S \in \mathscr{S} \cap N_{A \times A}$, siis ka $S^{-1} \in \mathscr{S} \cap N_{A \times A}$. Seega $(\sigma_A \times \sigma_A)(S^{-1}) = S^{-1}{}_A \in \mathscr{S}_A$. Vaatame nüüd suunatud peresid $S_A \in \mathscr{S}_A$ ja $T_A \in \mathscr{S}_A$, kusjuures eksisteerigu suunatud pere $S_A \circ T_A$. Teatavasti $S_A = (\sigma_A \times \sigma_A) S$ ja $T_A = (\sigma_A \times \sigma_A) T$. Uurime suunatud peret

$((\sigma_A\times\sigma_A)S)\circ((\sigma_A\times\sigma_A)T)$. Et $((\sigma_A\times\sigma_A)S)\circ((\sigma_A\times\sigma_A)T)=$ $=(\sigma_A\times\sigma_A)(S\circ T)$ ja $S\circ T\in\mathcal{S}\cap N_{A\times A}$, siis $S_A\circ T_A\in\mathcal{S}_A$. Olgu mingi suunatud pere $S_A\in\mathcal{S}_A$ ja vaatame ta osaperet T_A . Kui $S_A\in\mathcal{S}_A$, siis leidub $S\in\mathcal{S}\cap N_{A\times A}$, nii et $(\sigma_A\times\sigma_A)(S)=S_A$. Teatavasti $S_A\in\mathcal{S}$ (sest suunatud pere S_A on suunatud pere S osapere) ja kujutus $\sigma_A\times\sigma_A$ jätab nii suunatud pere S_A kui ta iga osapere T_A paigale. Järelikult $T_A\in\mathcal{S}_A$. Vaatame suunatud peresid $S_A\in\mathcal{S}_A, T_A\in\mathcal{S}_A$ ja mingit suunatud peret U_A , mis nende perede suhtes rahuldab tingimusi $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$. Definitsiooni järgi leiduvad suunatud pered $S, T\in N_{A\times A}$, nii et $(\sigma_A\times\sigma_A)(S)=S_A$ ja $(\sigma_A\times\sigma_A)(T)=T_A$. Võtame suunatud pere U , mis perede S ja T suhtes rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$. Et S ja T on U osapered, siis $U\in N_{A\times A}$. Kuid suunatud pere U väärtuste hulka kuuluvad kõik suunatud pere U_A väärtused, seega U_A on U osapere ja $U_A\in\mathcal{S}\cap N_{A\times A}$. Kujutus $\sigma_A\times\sigma_A$ jätab suunatud pere U_A paigale, järelikult $U_A\in(\sigma_A\times\sigma_A)(\mathcal{S}\cap N_{A\times A})=\mathcal{S}_A$.

<u>Lause 10.</u> Kehtib võrdus $\tau_{\mathcal{S}_A}=\tau_{\mathcal{S}}/A$.

<u>Tõestus.</u> Teatavasti $\tau_{\mathcal{S}}/A=\sigma_A(\tau_{\mathcal{S}}\cap N_A)$ (vt. [9]) Koondugu $\{x_\alpha^A:\alpha\in D\}\in \underline{N}(A)$ punktiks $x\in A$, st. $\{x_\alpha^A:\alpha\in D\}\in\tau_{\mathcal{S}_A}x$. Definitsiooni järgi suunatud pere $\{(x_\alpha^A, x):(\alpha,\beta)\in D\times B\}\in\mathcal{S}_A$, st. leidub suunatud pere $\{(x_\alpha, x):(\alpha,\beta)\in E\times B\}\in\mathcal{S}\cap N_{A\times A}$, nii et

$$(\sigma_A\times\sigma_A)(\{(x_\alpha, x):(\alpha,\beta)\in E\times B\})=\{(x_\alpha^A, x):(\alpha,\beta)\in D\times B\}.$$

Seega

$$\{(\sigma_A(x_\alpha),\sigma_A(x)):(\alpha,\beta)\in E\times B\}=\{(\sigma_A(x_\alpha),x):(\alpha,\beta)\in E\times B\}\in\mathcal{S}_A.$$

Siis ka $\{(\sigma_A(x_\alpha), x) : (\alpha, \beta) \in E \times B\} \in \mathcal{S}$. Järelikult $\{\sigma_A(x_\alpha) : \alpha \in E\} \in \tau_{\mathcal{S}} x$. Kuid $\{\sigma_A(x_\alpha) : \alpha \in E\} \in N_A$, sest $\{(\sigma_A(x_\alpha), x) : (\alpha, \beta) \in E \times B\} \in N_{A \times A}$. Seega $\{\sigma_A(x_\alpha) : \alpha \in E\} \in \in \tau_{\mathcal{S}} \cap N_A$. Et kujutus σ_A jätab suunatud pere $\{\sigma_A(x_\alpha) : \alpha \in E\}$ paigale, siis $\{\sigma_A(x_\alpha) : \alpha \in E\} = = \{x_\alpha^A : \alpha \in D\} \in \tau_{\mathcal{S}} x / A$ .Vastupidi, kuulugu suunatud pere $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ struktuuri $\tau_{\mathcal{S}} x / A$, st. $\{x_\alpha^A : \alpha \in D\} \in \sigma_A(\tau_{\mathcal{S}} x \cap N_A)$. Definitsiooni järgi leidub $\{x_\alpha : \alpha \in E\} \in \tau_{\mathcal{S}} x \cap N_A$. Siis $\{(x_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in E \times B\} \in \mathcal{S}$ ja $\{(x_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in E \times B\} \in N_{A \times A}$. Järelikult $\{(x_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in E \times B\} \in \mathcal{S} \cap N_{A \times A}$. Siis aga $(\sigma_A \times \sigma_A)(\{(x_\alpha, x) : (\alpha, \beta) \in E \times B\} \in (\sigma_A \times \sigma_A)(\mathcal{S} \cap N_{A \times A})$ ehk $\{(x_\alpha^A, x) : (\alpha, \beta) \in D \times B\} \in \mathcal{S}_A$. Definitsiooni järgi suunatud pere $\{x_\alpha^A : \alpha \in D\} \in \tau_{\mathcal{S}_A} x$.

7. Cauchy pered

Olgu antud ühtlase koonduvuse ruum $(X, \mathcal{S})$. Teatavasti nimetame suunatud peret $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$. $\mathcal{S}$ <u>-Cauchy pereks</u> parajasti siis, kui $\{(x_\alpha, x_\beta) : (\alpha, \beta) \in A \times A\} \in \mathcal{S}$. Kõigi $\mathcal{S}$ -Cauchy perede hulka tähistame $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$.

<u>Lause 11.</u> Iga koonduv pere on $\mathcal{S}$ -Cauchy pere.

<u>Tõestus.</u> Koondugu suunatud pere $\{y_\beta : \beta \in B\}$ punktiks $x \in X$, st. $\{y_\beta : \beta \in B\} \in \tau_{\mathcal{S}} x$. Definitsiooni järgi $\{(y_\beta, x) : (\beta, \delta) \in B \times D\} \in \mathcal{S}$. Kuid (N_2) tõttu ka $\{(x, y_\beta) : (\delta, \beta) \in D \times B\} \in \mathcal{S}$ ja (N_3) tõttu

$$\{(y_\beta, x) : (\beta, \delta) \in B \times D\} \circ \{(x, y_\beta) : (\delta, \beta) \in D \times B\} = \{(y_\beta, y_\gamma) : (\beta, \gamma) \in B \times B\} \in \mathcal{S}$$

<u>Definitsioon 4.</u> Me ütleme, et kaks suunatud peret

$$s = \{s_\alpha : \alpha \in A\}, \quad t = \{t_\beta : \beta \in B\}$$

on ekvivalentsed $(s \sim t)$ parajasti siis, kui suunatud pere $s \cup t$, mis rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ aksioomis (N_5) on $\mathcal{S}$-Cauchy pere.

Lause 12. Olgu kaks $\mathcal{S}$-Cauchy peret $s, t \in \mathcal{C}_\mathcal{S}$. Siis $s \sim t$ parajasti siis, kui suunatud pere $(s,t) = \{(s_\alpha, t_\beta) : (\alpha, \beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S}$.

Tõestus. Kui $(s,t) \in \mathcal{S}$, siis (N_2) tõttu ka $(t,s) \in \mathcal{S}$. Et meil on tegemist $\mathcal{S}$-Cauchy peredega, siis ka $(s,s) \in \mathcal{S}$ ja $(t,t) \in \mathcal{S}$. Aksioomi (N_5) tõttu ka suunatud pere $(s,s) \cup (s,t) \cup (t,s) \cup (t,t) \in \mathcal{S}$. Et aga $(s,s) \cup (s,t) \cup (t,s) \cup (t,t) = (s \cup t, s \cup t)$, siis $(s \cup t, s \cup t) \in \mathcal{S}$ ja seega suunatud pere $s \cup t$ on $\mathcal{S}$-Cauchy pere, ehk $s \sim t$. Vastupidine väide tõestatakse analoogiliselt: olgu $s \sim t$ st. suunatud pere $s \cup t \in \mathcal{C}_\mathcal{S}$, ehk teisiti, suunatud pere $(s \cup t, s \cup t) \in \mathcal{S}$. Tõestuse esimese poole järgi ka $(s,t) \in \mathcal{S}$.

Teoreem 3. Suhe $\sim$ on ekvivalentsussuhe $\mathcal{S}$-Cauchy perede hulgal $\mathcal{C}_\mathcal{S}$.

Tõestus. Sümmeetria ja refleksiivsus järelduvad vahetult definitsioonist 4 ja lausest 12. Tõestame transitiivsuse Olgu $s \sim t$ ja $t \sim u$ ehk eelmise lause järgi $(s,t) \in \mathcal{S}$ ja $(t,u) \in \mathcal{S}$. Ka suunatud pere $(s,t) \cup (t,u)$, mis rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ aksioomis (N_5), kuulub ühtlase koonduvusestruktuuri $\mathcal{S}$. Tähistame suunatud pere $(s,t) \cup (t,u)$ sümboliga Φ. Võtame suvalise elemendi $(x_\alpha, y_\beta) \in (s,u)$. Kui element $z_\gamma \in t$, siis $(x_\alpha, z_\gamma) \in (s,t) \cup (t,u)$ ja $(z_\gamma, y_\beta) \in (s,t) \cup (t,u)$. Seega $(x_\alpha, y_\beta) \in ((s,t) \cup (t,u)) \circ ((s,t) \cup (t,u)) = \Phi \circ \Phi$. Aga $\Phi \circ \Phi \in \mathcal{S}$, sest $\Phi \in \mathcal{S}$, ja kompositsioon $\Phi \circ \Phi$ eksisteerib. Järelikult suunatud pere (s,u) on suunatud pere $\Phi \circ \Phi$

osapere ning aksioomi (N_4) põhjal $(s,u)\in\mathcal{S}$ ehk $s\sim u$.

Lause 13. Koondugu suunatud pere $s=\{s_\alpha:\alpha\in A\}$ punktiks $x\in X$ st. $s\in\tau_{\mathcal{S}}x$. Siis $s\sim t$ parajasti siis, kui $t\in\tau_{\mathcal{S}}x$.

Tõestus. Kui $s\in\tau_{\mathcal{S}}x$, siis definitsiooni põhjal suunatud pere $(s,x)=\{(s_\alpha,x):(\alpha,\beta)\in A\times B\}\in\mathcal{S}$. Lause 12 põhjal $s\sim x$ parajasti siis, kui $(s,x)\in\mathcal{S}$. Ekvivalentsussuhte tõttu $t\sim x$ parajasti siis, kui $t\sim s$. Kuid $t\sim x$ parajasti siis, kui suunatud pere $t=\{t_\beta:\beta\in B\}$ koondub punktiks x , st. $t\in\tau_{\mathcal{S}}x$.

Definitsioon 5. (vt. [9]). Olgu hulgal X antud koonduvuse struktuur τ . Punkt $x\in X$ on suunatud pere $s=\{s_\alpha:\alpha\in A\}$ kuhjumispunkt parajasti siis, kui leidub suunatud pere s selline osapere t , et $t\in\tau x$. Suunatud pere s kuhjumispunktide hulka tähistame sümboliga $\alpha(s)$.

Järeldus. Kui $s\in\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ ja $x\in\alpha(s)$, siis $s\in\tau_{\mathcal{S}}x$.

Tõestus. Et $x\in\alpha(s)$, siis leidub suunatud pere s selline osapere t , et $t\in\tau_{\mathcal{S}}x$. Suunatud pere s oli $\mathcal{S}$-Cauchy pere, st. $(s,s)=\{(s_\alpha,s_\beta):(\alpha,\beta)\in A\times A\}\in\mathcal{S}$. Seega ka $(s,t)=\{(s_\alpha,t_\beta):(\alpha,\beta)\in A\times B\}\in\mathcal{S}$, sest t oli s osapere. Lause 12 järgi $s\sim t$ ja lause 13 järgi $s\in\tau_{\mathcal{S}}x$.

Lause 14. Olgu $(\mathop{\times}\limits_\alpha E_\alpha,\ \mathop{\times}\limits_\alpha \mathcal{S}_\alpha)$ ühtlase koonduvuse ruumide $(E_\alpha,\mathcal{S}_\alpha)$ $(\alpha\in A)$ korrutis. Siis suunatud pere $s\in\mathcal{C}_{\mathop{\times}\limits_\alpha\mathcal{S}_\alpha}$ parajasti siis, kui $P_\alpha(s)\in\mathcal{C}_{\mathcal{S}_\alpha}$ iga $\alpha\in A$ korral.

Tõestus. Kui suunatud pere $P_\alpha(s) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_\alpha}$ iga $\alpha \in A$ korral, siis $P_\alpha(s) \times P_\alpha(s) = (P_\alpha \times P_\alpha)(s,s) \in \mathcal{S}_\alpha$. Siit järeldub, et suunatud pere $(s,s) \in \mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{S}_\alpha$. Vastupidi, kui suunatud pere $s \in \mathcal{C}_{\mathsf{X}\mathcal{S}_\alpha}$, siis suunatud pere $P_\alpha(s) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_\alpha}$, sest iga kujutus P_α on teatavsti ühtlaselt pidev (definitsiooni järgi).

Definitsioon 6. Me nimetame ühtlase koonduvuse ruumi $(X, \mathcal{S})$ täielikuks, kui iga $\mathcal{S}$ -Cauchy pere temas koondub ($\tau_{\mathcal{S}}$ mõttes) .

Definitsioon 7(vt. [9]). Koonduvuse ruumi (X, τ) nimetatakse kompaktseks parajasti siis, kui iga suunatud pere $s = \{s_\alpha : \alpha \in A\}$ korral $\alpha(s) \neq \emptyset$, st. igal suunatud perel leidub koonduv osapere.

Definitsioon 8. Ühtlase koonduvuse ruumi $(X, \mathcal{S})$ nimetatakse prekompaktseks parajasti siis, kui iga suunatud pere $s = \{s_\alpha : \alpha \in A\}$ korral leidub selline suunatud pere $t \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$, et t on s osapere, st. igal suunatud perel leidub osapere, mis on $\mathcal{S}$ -Cauchy pere.

Lause 15. Separaatsete ühtlase koonduvuse ruumide $(E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ korrutis $(\mathop{\mathsf{X}}_\alpha E_\alpha, \mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{S}_\alpha)$ on täielik parajasti siis, kui iga $(E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ on täielik.

Tõestus. Olgu iga ühtlase koonduvuse ruum $(E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ täielik ja võtame suunatud pere $s \in \mathcal{C}_{\mathsf{X}_\alpha \mathcal{S}_\alpha}$. Siis suunatud pere $P_\alpha(s) \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_\alpha}$ ja koondub üheks punktiks x_α. Et ühtlase koonduvuse korrutisfunktsiooni poolt määratud koonduvuse struktuur on korrutise koonduvusstruktuur (lause 7,p.5), siis suunatud pere s koondub punktiks $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Vastupidi, olgu korrutisstruktuur $(\mathop{\mathsf{X}}_\alpha E_\alpha, \mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{S}_\alpha)$ täielik ja võtame suunatud pere $s^\alpha \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_\alpha}$. Siis suunatud pere $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha s^\alpha$ on $\mathop{\mathsf{X}}_\alpha \mathcal{S}_\alpha$ -Cauchy pere ja koondub punktiks $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, kusjuures suunatud pere s^{α} koondub punktiks x_{α}.

Lause 16. Täieliku ühtlase koonduvuse ruumi iga kinnine alamruum on täielik.

Tõestus. Olgu $(X, \mathcal{S})$ täielik ühtlase koonduvuse ruum. Olgu alamhulk $A \subset X$ kinnine ja suunatud pere $s^A \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_A}$ (vt. p.6). Siis suunatud pere $(s^A, s^A) \in \mathcal{S}_A$ ja definitsiooni järgi leidub suunatud pere $S \in \mathcal{S} \cap N_{A \times A}$, nii et $(\sigma_A \times \sigma_A) S = (s^A, s^A)$. Suunatud pere S esitub kujul $S = (s, s) = \{(s_{\alpha}, s_{\beta}) : (\alpha, \beta) \in B \times B\}$. Seega suunatud pere $(s, s) \in \mathcal{S}$ ja $s \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ ning et ruum $(X, \mathcal{S})$ on täielik, siis leidub punkt $x \in X$, nii et suunatud pere $s \in \tau_{\mathcal{S}} x$. Et alamhulk A on kinnine (vt. [9]), siis $x \in A$. Lause väide järeldub sellest, et suunatud pere $s^A \in \tau_{\mathcal{S}_A} x$ parajasti siis, kui suunatud pere $s \in \tau_{\mathcal{S}} x$.

Lause 17. Ühtlase koonduvuse ruum on kompaktne parajasti siis, kui ta on prekompaktne ja täielik.

Tõestus. Olgu ühtlase koonduvuse ruum $(X, \mathcal{S})$ prekompaktne ja täielik. Võtame suvalise suunatud pere $s = \{s_{\alpha} : \alpha \in A\}$ ja olgu $t = \{t_{\beta} : \beta \in B\} \in \underline{N}(X)$ ta osapere ja $\mathcal{S}$-Cauchy pere, st. $t \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$; Et ruum $(X, \mathcal{S})$ on täielik, siis suunatud pere t koondub ja seega $\alpha(s) \neq \emptyset$. Järelikult ühtlase koonduvuse ruum $(X, \mathcal{S})$ on kompaktne. Vastupidi, olgu ruum $(X, \mathcal{S})$ kompaktne ja mingi suunatud pere $s = \{s_{\alpha} : \alpha \in A\}$. Et hulk $\alpha(s) \neq \emptyset$, siis mingi punkt $x \in \alpha(s)$ ja leidub selline suunatud pere s osapere t, et $t \in \tau_{\mathcal{S}} x$ ehk, definitsiooni järgi, suunatud pere $(t, x) = \{(t_{\beta}, x) : (\beta, \gamma) \in B \times G\} \in \mathcal{S}$. Siis ka suunatud pere $(x, t) \in \mathcal{S}$ aksioomi (N_2) järgi ja (N_3) järgi suunatud pere $(t, t) \in \mathcal{S}$, st. ruum $(X, \mathcal{S})$ on prekompaktne. Ühtlase koonduvuse ruum $(\mathfrak{X}, \mathcal{S})$ on ka täielik antud eeldustel. Võtame mingi $\mathcal{S}$-Cauchy pere $s \in \mathcal{C}_\mathcal{S}$. Et ruum $(\mathfrak{X}, \mathcal{S})$ on kompaktne, siis $\alpha(s) \neq \phi$. Võtame mingi punkti $x \in \alpha(s)$. Siis leidub $\mathcal{S}$-Cauchy pere s mingi selline osapere t, et $t \in \tau_\mathcal{S} x$. Kuivõrd s oli $\mathcal{S}$-Cauchy pere, siis $(s,s) = \{(s_\alpha, s_\beta) : (\alpha,\beta) \in A \times A\} \in \mathcal{S}$. Seega ka suunatud pere $(s,t) = \{(s_\alpha, t_\beta) : (\alpha,\beta) \in A \times B\} \in \mathcal{S}$, sest (s,t) on (s,s) osapere. Lause 12 järgi $s \sim t$ ja lause 13 järgi suunatud pere s koondub punktiks x, st. $s \in \tau_\mathcal{S} x$.

8. Ühtlane struktuur

Vaatame, millal ühtlase koonduvuse struktuur määrab ära ühtlase struktuuri. Selleks kasutame Jefremovitši ja Schwatz'i poolt antud ühtlase struktuuri definitsiooni ekvivalentsete suunatud perede abil (vt. [5]). Jefremovitšil ja Schwartzil on kõik suunatud pered võetud üle ühe ja sama indeksihulga A. Vaatleme veidi üldisemat juhtu, kus iga suunatud pere on võetud üle erineva suunatud hulga.

Olgu $\mathfrak{A}_0$ ühtlane struktuur Weili järgi (vt. [1]). Ütleme, et kaks suunatud peret $s = \{s_\alpha : \alpha \in A\}$ ja $t = \{t_\beta : \beta \in B\}$ on ekvivalentsed $(s \sim t)$, kui suvalise $V \in \mathfrak{A}_0$ korral leidub indeks $\gamma' \in A \times B$, nii et suunatud pere $u = (s,t)$ kuulub iga indeksi $\gamma \geqslant \gamma'$ korral hulka V, kusjuures $\gamma \geqslant \gamma'$ parajasti siis, kui $\alpha > \alpha'$ ja $\beta \geqslant \beta'$. Selliselt defineeritud struktuur rahuldab nõudeid:

I Suunatud pere $s \sim s$. Järeldub lihtsalt väitest, et suvaline $V \in \mathfrak{A}_0$ sisaldab diagonaali Δ.

II Kui $s \sim t$, siis $t \sim s$. Järeldub väitest, et kui $V \in \mathfrak{A}_0$, siis ka $V^{-1} \in \mathfrak{A}_0$.

III Kui $s \sim t$ ja $t \sim u$, siis $s \sim u$, sest suunatud pere (s, u) kuulub hulka $V \circ V \subset V$ alates teatud momendist.

IV Kui meil on kaks ekvivalentset konstantset suunatud peret, $\{x_\alpha = x : \alpha \in A\}$ ja $\{y_\beta = y : \beta \in B\}$, siis $x = y$. Kui oletada, et $x \neq y$, siis suunatud pere $\{x_\alpha = x : \alpha \in A, y_\beta = y : \beta \in B\}$ kuulub igasse ühtlase struktuuri $\mathfrak{A}_0$ hulka V. Siis aga $\mathfrak{A}_0 = X \times X$, st. tegemist on triviaalse ühtlase struktuuriga, mida me aga ei vaatle.

V Indeksihulga G alamhulk G' on <u>konfinaalne</u> indeksihulgaga G, kui suvalise elemendi $\alpha \in G$ korral leidub element $\beta \in G'$, nii et $\beta \geq \alpha$. Kui $s \sim t$, siis indeksihulga $G = A \times B$ suvalise konfinaalse alamhulga G' korral ka suunatud pere $\{(s_\alpha, t_\beta) : (\alpha, \beta) \in G'\}$ kuulub teatavast momendist alates mingisse hulka $V \in \mathfrak{A}_0$.

VI Olgu $s \not\sim t$ st. suunatud pere $u = (s, t)$ ei asu mingis hulgas $V = \mathfrak{A}_0$ ühestki momendist alates. Seega suunatud pere u asub sageli hulga V täiendis. Järelikult leidub suunatud pere u osapere, mille iga osapere ei asu ühestki momendist alates hulgas V.

Seega ühtlane struktuur Weili järgi määras teatava uue struktuuri.

Kui kaks Weili struktuuri määravad ühe ja sama ühtlase struktuuri ekvivalentsete suunatud peredega, siis nad ühtivad, sest identsusoperaator on mõlemat pidi ühtlaselt pidev.

Edasi näitame, et suvaline ekvivalentsete suunatud peredega defineeritud ühtlane struktuur määrab Weili ühtlase struktuuri, mis ta tekitab. Olgu hulgal X antud ühtlane struktuur ekvivalentsete suunatud peredega, st. olgu iga kahe suunatud pere s ja t jaoks defineeritud, kas nad on ekvivalentsed $(s \sim t$ või mitte $(s \not\sim t)$, kusjuures ekvivalentsus rahuldab nõudeid I – VI . Siis ütleme, et hulk $V \subset X \times X$ kuulub hulkade süsteemi $\mathfrak{A}_0$ $(V \in \mathfrak{A}_0)$ parajasti siis, kui suvaliste suunatud perede s ja t korral $(s \sim t)$ leidub indeks $\varkappa = (\alpha, \beta) \in A \times B$, millest alates suunatud pere (s, t) kuulub hulka V. Defineerime nüüd uue ekvivalentsuse $\approx$ järgnevalt: suunatud pered s ja t on ekvivalentsed $(s \approx t)$, kui iga $V \in \mathfrak{A}_0$ korral leidub indeks $\varkappa = (\alpha, \beta) \in A \times B$, millest alates suunatud pere (s, t) kuulub hulka V. Ilmselt ekvivalentsus $\sim$ tekitab ekvivalentsuse $\approx$. Näitame, et kui $s \not\sim t$, siis ka $s \not\approx t$. Võtame aksioomi VI järgi indeksihulga $G = A \times B$ konfinaalse alamhulga G'. Näitame, et hulk $W = X \times X \setminus \{(x_\alpha, y_\beta) : (\alpha, \beta) \in G'\} \in \mathfrak{A}_0$. Oletame vastupidist. Siis leiduvad sellised ekvivalentsed suunatud pered $z = \{z_\sigma : \sigma \in D\}$, $w = \{w_\delta : \delta \in S\}$, et suunatud pere $v = (z, w)$ mingi osapere üle indeksihulga $E \subset D \times S$ ja et osapere $\{v_\xi : \xi \in E\} \notin W$. Aksioomi V järgi $\{z_\mu\} \sim \{w_\nu\}$ $((\mu, \nu) \in E)$ Kuid $\{(z_\mu, w_\nu) : (\mu, \nu) \in E\} \subset$ $\subset \{(x_\alpha, y_\beta) : (\alpha, \beta) \in G'\}$ mis aga on võimatu, sest aksioomi

VI järgi suunatud pere $\{(x_\alpha, y_\beta) : (\alpha,\beta)\in G'\}$ ei sisalda ühtegi ekvivalentset suunatud peret. Seega hulk $W\in\mathfrak{A}_0$. Siis suunatud pered s ja t pole ekvivalentsed uues mõttes $(s \not\approx t)$ üle indeksihulga G' ja seega ka üle indeksihulga G. Seega ekvivalentsus $\sim$ on samaväärne ekvivalentsusega $\approx$. Näitame veel, et selliselt saadud struktuur rahuldab Weili ühtlase struktuuri aksioome. Kui $V\in\mathfrak{A}_0$ ja $V\subset U\subset X\times X$, siis $U\in\mathfrak{A}_0$. Ka teine filtri aksioom järeldub vahetult: kui $V_1, V_2\in\mathfrak{A}_0$, siis iga suunatud pere kuulub teatud momendist alates neisse mõlemisse st. kuulub hulka $V_1\cap V_2$, kuivõrd suunatud hulgas suvaliste indeksite m_1 ja m_2 korral leidub indeks m_3, et $m_3\geqslant m_1$ ja $m_3\geqslant m_2$ (vt. [1]) See, et diagonaal kuulub igasse ühtlase struktuuri $\mathfrak{A}_0$ hulka V, järeldub ekvivalentsuse refleksiivsusest ja aksioomist IV. Kui $V\in\mathfrak{A}_0$, siis ka $V^{-1}\in\mathfrak{A}_0$. See aksioom järeldub sümmeetriaaksioomist II. Oletame, et aksioom : " suvalise $U\in\mathfrak{A}_0$ korral leidub selline $V\in\mathfrak{A}_0$, et $V\circ V\subset U$ " pole täidetud mingi $U\in\mathfrak{A}_0$ ja suvalise $V\in\mathfrak{A}_0$ korral, st. hulk $(X\times X\setminus U)\cap V\circ V\neq\emptyset$. Seega suvalise $V\in\mathfrak{A}_0$ korral leiduvad sellised punktid $(x_V, y_V)\in V$ ja $(y_V, z_V)\in V$, et punkt $(x_V, z_V)\notin U$. Nüüd defineerime sellise järjestuse $V'\geqslant V$ parajasti siis, kui $V'\subset V$. Hulk $\mathfrak{A}_0$ on nüüd suunatud hulk ja suunatud pere $\{x_V : V\in\mathfrak{A}_0\}\approx\{y_V : V\in\mathfrak{A}_0\}$ ja ka $\{y_V : V\in\mathfrak{A}_0\}\approx\{z_V : V\in\mathfrak{A}_0\}$, aga $\{x_V : V\in\mathfrak{A}_0\}\not\approx\{z_V : V\in\mathfrak{A}_0\}$. Kuivõrd ekvivalentsus $\approx$ on samaväärne ekvivalentsusega $\sim$, siis näeme, et ekvivalentsus $\sim$ pole transitiivne. Saime vastuolu aksioomiga III ja seega saadud struktuur rahuldab Weili ühtlase struktuuri aksioome.

Seega, selleks, et defineerida ühtlast struktuuri hulgal X, tuleb kahe suvalise suunatud pere $s=\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ ja $t=\{y_\beta : \beta \in B\}$ korral defineerida, millal nad on ekvivalentsed $(s \sim t)$, millal mitte, nii et oleks rahuldatud nõuded I - VI.

Kui lugeda kaks suunatud peret s ja t ekvivalentseteks definitsiooni 4 järgi, ja kui eeldada, et ühtlase koonduvuse ruum on separaatne, siis on täidetud tingimused I - V. Siit saamegi tingimused, millal ühtlase koonduvuse struktuur määrab ära ühtlase struktuuri.

Teoreem 4. Kui suvaliste suunatud perede $s,t \in \underline{N}(X)$ korral suunatud pere $s \cup t$, mis rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ aksioomis (N_6), ei ole $\mathcal{S}$-Cauchy pere ja leiduvad vastavalt peredele s ja t osapered s', t', millede iga osapere s'' ja t'' korral pere $s'' \cup t''$, mis rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, ei ole $\mathcal{S}$ - Cauchy pere, ja ruum $(X, \mathcal{S})$ on separaatne, siis ühtlase koonduvuse struktuur $\mathcal{S}$ määrab ära ühtlase struktuuri.

Kehtib ka vastupidine väide.

Teoreem 5. Iga ekvivalentsete suunatud peredega ühtlane struktuur määrab ära ühtlase koonduvuse struktuuri suunatud peredega.

Tõestus. Defineerime struktuuri $\mathcal{S}$ järgnevalt: suunatud pere $S=(s,t)=\{(x_\alpha, y_\beta) : (\alpha,\beta) \in A \times B\}$ kuulub süsteemi $\mathcal{S}$ parajasti siis, kui $s \sim t$. Siis aksioom (N_1) järeldab aksioomidest I ja IV, aksioom (N_2) aksioomist II, aksioom (N_3) aksioomist III, aksioom (N_4) aksioomist V ja aksioom (N_5) aksioomist VI, sest oletadest, et suunatud pered $S, T \in \mathcal{S}$, aga suunatud pere U, mis rahuldab nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, ei kuulu süsteemi $\mathcal{S}$, siis aksioomi VI järgi leidub suunatud pere U selline osapere U', mille iga osapere ei kuulu suunatud perede süsteemi $\mathcal{S}$. See aga on võimatu.

9. Ühtlase koonduvuse struktuurid funktsionaalruumides

Olgu $(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$ ühtlase koonduvuse ruum, X mingi hulk ja M hulga X mittetühi alamhulk. Siis mingi hulga $S \subset \mathcal{Y}^X \times \mathcal{Y}^X$ korral olgu

$$[S, M] = \{(\varphi(x), \psi(x)) : (\varphi, \psi) \in S, x \in M\}.$$

<u>Lause 18.</u> Suunatud perede süsteem $\mathcal{U}_M = \{\Phi \in \underline{N}(\mathcal{Y}^X \times \mathcal{Y}^X) : [\Phi, M] \in \mathcal{J}\}$ on ühtlase koonduvuse struktuur hulgal $\mathcal{Y}^X$.

<u>Tõestus.</u> Et $\Delta = \{(\varphi, \varphi) : \varphi \in \mathcal{Y}^X\}$, siis $[\Delta, M] \subset \Delta_{\mathcal{Y}}$. Teatavasti $\bar{\Delta}_{\mathcal{Y}} = \{(y_\alpha, y_\beta) = (y, y) : (\alpha, \beta) \in A \times B, y \in \mathcal{Y}, A \times B \in \mathcal{R}\}$. Vaatame suunatud peret

$$\{(\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x)) = (\varphi(x), \varphi(x)) = (y, y) : (\alpha, \beta) \in A \times B, \varphi \in \mathcal{Y}^X, A \times B \in \mathcal{R}\} = [\bar{\Delta}, M].$$

Suunatud pere $[\bar{\Delta}, M]$ on suunatud pere $\bar{\Delta}_{\mathcal{Y}}$ osapere. Seega suunatud pere $[\bar{\Delta}, M] \in \mathcal{J}$ ehk $\bar{\Delta} \in \mathcal{U}_M$. Võtame suunatud pere $\Phi \in \mathcal{U}_M$, siis $[\Phi, M] \in \mathcal{J}$. Et $[\Phi, M]^{-1} = [\Phi^{-1}, M]$ ja et $[\Phi, M]^{-1} \in \mathcal{J}$, siis ka

suunatud pere $\Phi^{-1} \in \mathcal{U}_M$. Olgu kaks suunatud peret Φ ja Ψ süsteemist $\mathcal{U}_M$ ja eksisteerigu kompositsioon $\Phi \circ \Psi$. Näitame, et suunatud pere $[\Phi \circ \Psi, M]$ on suunatud pere $[\Phi, M] \circ [\Psi, M]$ osapere. Võtame mingi punkti $(\varphi, \psi) \in \Phi \circ \Psi$ ja ω nii, et $(\varphi, \omega) \in \Phi$ ja $(\omega, \psi) \in \Psi$. Siis iga $x \in M$ korral $(\varphi(x), \omega(x)) \in [\Phi, M]$ ja $(\omega(x), \psi(x)) \in [\Psi, M]$. Järelikult $(\varphi(x), \psi(x)) \in [\Phi, M] \circ [\Psi, M]$. Seega suunatud pere $[\Phi \circ \Psi, M]$ on suunatud pere $[\Phi, M] \circ [\Psi, M]$ osapere ja seega $[\Phi \circ \Psi, M] \in \mathcal{J}$ ehk $\Phi \circ \Psi \in \mathcal{U}_M$.
Olgu kaks suunatud peret Φ ja Ψ süsteemist $\mathcal{U}_M$ ja rahuldagu suunatud pere $\Phi \cup \Psi$ nõudeid $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$. Et suunatud perede $[\Phi \cup \Psi, M]$ ja $[\Phi, M] \cup [\Psi, M]$ väärtuste piirkonnad on võrdsed ja et suunatud pere $[\Phi, M] \cup [\Psi, M] \in \mathcal{J}$, siis suunatud pere $\Phi \cup \Psi \in \mathcal{U}_M$.
Kui Ψ on $\Phi \in \mathcal{U}_M$ mingi osapere, siis ka suunatud pere $[\Psi, M]$ on suunatud pere $[\Phi, M]$ osapere. Seega $\Psi \in \mathcal{U}_M$ ja suunatud perede süsteem $\mathcal{U}_M$ on ühtlase koonduvuse struktuur hulgal $\mathcal{Y}^{*}$.

Struktuuri $\mathcal{U}_M$ nimetame <u>ühtlase koonduvuse struktuuriks hulgal M</u>. Olgu Σ hulga $\mathcal{X}$ mittetühjade alamhulkade mittetühi hulk. Siis struktuuri

$$\mathcal{U}_\Sigma = \sup_{M \in \Sigma} \mathcal{U}_M = \bigcap_{M \in \Sigma} \mathcal{U}_M$$

me nimetame ~~ühtlase koonduvuse~~ <u>ühtlase koonduvuse struktuuriks perel Σ</u>. Kui suunatud pere $\Phi \in \tau_{\mathcal{U}_\Sigma} \varphi$, st. $(\Phi, \varphi) \in \mathcal{U}_\Sigma$, siis ütleme, et <u>suunatud pere Φ koondub ühtlaselt funktsiooniks φ perel Σ</u>.

On võimalik tuua mitmeid funktsionaalpere koondumise liike, sõltuvalt perest Σ .

<u>Definitsioon 9</u> (lihtne koonduvus). Olgu antud hulkade süsteem $\Sigma = \{\{x\} : x \in X\}$ ja suunatud pere $\Phi \in \underline{N}(Y^* \times Y^*)$ ning kujutus $P_x : \varphi \to \varphi(x)$. Siis $(P_x \times P_x)\Phi = [\Phi, \{x\}]$. Struktuuri $\sup\limits_{x \in X} \mathcal{U}_x$ tähistame sümboliga $\mathcal{U}_S$ ja vastavat koonduvuse struktuuri τ_S . Me ütleme, et funktsionaalpere Φ koondub funktsiooniks φ parajasti siis, kui $\Phi(x) \in \tau_S \varphi(x)$ iga $x \in X$ korral ja tähistame seda järgmiselt: $\Phi \in \tau_S \varphi$.

<u>Definitsioon 10</u> (ühtlane koonduvus).

Siin $\Sigma = \{\{X\}\}$. Tähistame $\mathcal{U}_\Sigma$ ja $\tau_{\mathcal{U}_\Sigma}$ vastavalt sümbolitega $\mathcal{U}_u, \tau_u$. Kui funktsionaalpere $\Phi \in \tau_u \varphi$, siis ütleme, et funktsionaalpere Φ koondub ühtlaselt funktsiooniks φ .

<u>Definitsioon 11</u> (kompaktne koonduvus). Olgu (X, τ) koonduvuse ruum. Siin Σ on hulga X kompaktsete alamhulkade pere. Tähistame struktuurid $\mathcal{U}_\Sigma$ ja $\tau_{\mathcal{U}_\Sigma}$ vastavalt $\mathcal{U}_c$ ja τ_c . Kui funktsionaalpere $\Phi \in \tau_c \varphi$, siis ütleme, et funktsionaalpere Φ koondub igal kompaktsel hulgal ühtlaselt funktsiooniks φ .

Olgu Σ_1 ja Σ_2 hulga X alamhulkade pered. Kui $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, siis $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \leq \mathcal{U}_{\Sigma_2}$, st. $\mathcal{U}_{\Sigma_1}$ on jämedam kui $\mathcal{U}_{\Sigma_2}$. Et suvaline hulga X alamhulkade pere Σ on hulga X kõigi alamhulkade süsteemi osahulk, siis $\mathcal{U}_\Sigma \leq \mathcal{U}_u$. Kui suvaline osahulkade süsteem Σ katab hulga X , siis $\mathcal{U}_S \leq \mathcal{U}_\Sigma$. Näitame , et kui $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, siis $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \leq \mathcal{U}_{\Sigma_2}$. Teatavasti

$\mathcal{U}_{\Sigma_1} \leq \mathcal{U}_{\Sigma_2}$ parajasti siis, kui $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \supset \mathcal{U}_{\Sigma_2}$. Kuid $\mathcal{U}_{\Sigma_1} = \sup_{M \in \Sigma_1} \mathcal{U}_M = \bigcap_{M \in \Sigma_1} \mathcal{U}_M$, $\mathcal{U}_{\Sigma_2} = \sup_{M \in \Sigma_2} \mathcal{U}_M = \bigcap_{M \in \Sigma_2} \mathcal{U}_M$. Kuid et $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, siis $\bigcap_{M \in \Sigma_2} \mathcal{U}_M \subset \bigcap_{M \in \Sigma_1} \mathcal{U}_M$. Seega $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \leq \mathcal{U}_{\Sigma_2}$.

<u>Lause 19.</u> Kui Σ on hulga $\ast$ kate, siis funktsionaalpere Φ ruumis $(\mathcal{Y}^*, \mathcal{U}_\Sigma)$ koondub parajasti siis, kui Φ on $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy pere ja funktsionaalpere koondub lihtsalt (definitsioon 9).

<u>Tõestus.</u> Kui Σ katab hulga $\ast$ ja funktsionaalpere Φ koondub ruumis $(\mathcal{Y}^*, \mathcal{U}_\Sigma)$, siis Φ on $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy pere ja Φ koondub lihtsalt, sest $\mathcal{U}_\Sigma \geq \mathcal{U}_S$. Vastupidi, olgu Φ $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy pere, mis koondub lihtsalt. Φ on $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy pere parajasti siis, kui Φ on $\mathcal{U}_M$-Cauchy pere iga $M \in \Sigma$ korral, kus $\mathcal{U}_\Sigma = \bigcap_{M \in \Sigma} \mathcal{U}_M$. Funktsionaalpere ~~m~~ Φ on $\mathcal{U}_M$-Cauchy pere parajasti siis, kui $(\Phi, \Phi) \in \mathcal{U}_M$ ehk $[\Phi \times \Phi, M] \in \mathcal{J}$. Kuid

$$[\Phi \times \Phi, M] = \{(\varphi(x), \psi(x)) : x \in M;\ \varphi, \psi \in \Phi\} = \bigcup_{x \in \ast} \Phi(x) \times \Phi(x).$$

Funktsionaalpere Φ koondub lihtsalt funktsiooniks φ parajasti siis, kui suunatud pere $(\Phi, \varphi) \in \mathcal{U}_S$ st. $[\Phi \times \varphi, \{x\}] \in \mathcal{J}$ iga $x \in \ast$ korral. Kuid funktsionaalpere Φ koondub ühtlaselt funktsiooniks φ hulgal M parajasti siis, kui $(\Phi, \varphi) \in \mathcal{U}_M$. Näitame, et suunatud pere $[\Phi \times \varphi, M]$ on suunatud pere $[\Phi \times \Phi, M] \circ [\Phi \times \varphi, x_0]$ osapere iga $x_0 \in M$ korral. Võtame iga fikseeritud $x_0 \in M$ korral

$$\Gamma = \left(\bigcup_{x \in M} (\Phi(x), \Phi(x)) \circ (\Phi(x_0), \varphi(x_0)\right) \supset \bigcup_{x \in M} ((\Phi(x), \Phi(x)) \circ (\Phi(x_0), \varphi(x_0)) \supset$$

$\supset (\Phi(x_0), \varphi(x_0))$. Siit võib järeldada, et $\Gamma \supset \bigcup_{x \in M} (\Phi(x), \varphi(x))$.

Seega funktsionaalpere Φ koondub funktsiooniks φ ühtlaselt suvalise $M \in \Sigma$ korral, järelikult Φ koondub ühtlaselt funktsiooniks φ ka hulkade süsteemil Σ .

KIRJANDUS

1. Келли Дж. Л., Общая топология . Москва, 1968.
2. Cook C. H., Fischer H.R., Uniform Convergence Structures. Math. Ann., 1967, 173, 290 - 306.
3. Goetz A., On a notion of uniformity for L-spaces of Fre'chet.Coll. Math., 1962, 9, 223 - 231.
4. Куратовский К, Топология 1, Москва 1966.
5. Ефремович В.А. , Шварц А.С., Новое определение равномерных пространств. ДАН СССР, 1953, 89, № 3, 393 - 396.
6. Bruns G., Schmidt J., Zur Äquivalentz von Moore - Smitle- - Folgen und Filtren. Math. Nachr., 1955, 13, 169-186.
7. Fischer H. R., Limesräumne. Math. Ann., 1959, 137, 269-303.
8. Biesterfeldt H.J., Uniformization of convergence spaces I. Math. Ann., 1968, 177, 31-42.
9. Kelder T., Koonduvus suunatud peredega. Diplomitöö, 1970.

РЕЗЮМЕ

В дипломном работе рассматривается структур равномерной сходимости определённые при помощи направленностей. Показывается, когда структура равномерной сходимости определённая при помощи направленностей, определяет структуру сходимости определённая при помощи направленностей, и когда определяет равномерную структуру. Даётся определение равномерной непрерывности и определение направленности Коши. Изучается их свойств. Наконец рассматривается структуру равномерной сходимости на функциональном пространстве, где определяется некоторые классы равномерной сходимости.

SISUKORD