

Per. A-1169  
-305



TARTU RIIKLIKU ÜIKKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893. a.                      VIÑIK 305 ВЫПУСК                      ОСНОВАНЫ в 1893 г.

МАТЕМАТИКА- JA МЕННААНИКА-  
АЛАСЕИД ТÕИД

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ  
И МЕХАНИКЕ

XII



ТАРТУ 1972

Rev. A-1169  
-305

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893. a. VIHİK 305 ВЫПУСК      ОСНОВАНЫ в 1893 г.

---

**МАТЕМАТИКА- JA МЕННААНИКА-  
АЛАСЕИД ТÕИД**

**ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ  
И МЕХАНИКЕ**

**XII**

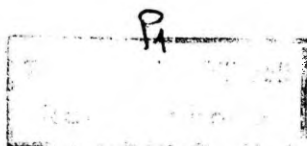
**TARTU 1972**

Redaktsioonikolleegium:

G. Kangro (esimees), S. Baron (vast. toimetaja), J. Hion, Ü. Lepik, Ü. Lumiste,  
E. Reimers (toimetaja), E. Tamme.

Редакционная коллегия:

Г. Кангро (председатель), С. Барон (отв. редактор), Ю. Лепик, Ю. Лумисте,  
Э. Реймерс (редактор), Э. Тамме, Я. Хион.



71523

# СВЯЗЬ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ БЕТА С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ПСЕВДО-БУЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ

А. Таугс

Кафедра математического анализа

В книге [2] приведено понятие модели Бета. В данной статье обобщается это понятие на случай, когда модель может иметь и больше, чем счетную мощность. В сущности эти элементы интерпретируются как степени конкретизации некоторой системы понятий.

Пусть у нас имеется некоторое частично упорядоченное множество  $M$ . Будем называть *цепью*<sup>1</sup> всякое такое непустое линейно упорядоченное множество  $A \subset M$ , для которого не существует  $\beta \in M \setminus A$  такого, что  $\alpha < \beta$  для всех  $\alpha \in A$ . Применяя лемму Цорна, легко доказывается, что для каждого  $\alpha \in M$  существует цепь  $A$  такая, что  $\alpha \in A$ .

Частично упорядоченное множество  $M$  мы будем называть *обобщенной моделью Бета*, если для каждого  $\alpha \in M$  и  $\beta \in M$ , для которых  $\alpha \leq \beta$  не имеет места, существует цепь  $A$  такая, что  $\beta \in A$ , и в  $A$  нет такого элемента  $\gamma$ , для которого  $\alpha \leq \gamma$ . Элементы обобщенной модели Бета будем называть *аспектами*. Если  $\alpha \leq \beta$ , то будем говорить, что аспект  $\alpha$  *абстрактнее* аспекта  $\beta$ , а аспект  $\beta$  *конкретнее* аспекта  $\alpha$ , или иначе — аспект  $\beta$  является *конкретизацией* аспекта  $\alpha$ .

Если  $M$  — обобщенная модель Бета, то множество  $A \subset M$  будем называть *значением истинности*, если выполнены следующие условия:

- 1) если  $\alpha \in A$  и  $\alpha < \beta$ , то  $\beta \in A$ ;
- 2) если  $\alpha \notin A$ , то существует цепь  $B$  такая, что  $\alpha \in B$  и  $B \cap A = \emptyset$ .

Из транзитивности отношения  $<$  и определения обобщенной модели Бета следует, что любой аспект  $\alpha$  определяет значение истинности, элементами которого будут в точности все конкрети-

---

<sup>1</sup> Отметим, что такое понятие цепи несколько отличается от более распространенного применения этого термина.

зации аспекта  $\alpha$ , включая и самого  $\alpha$ . В общем, такие значения истинности не исчерпывают всю систему значений истинности. Отметим, что вся модель  $M$  и пустой класс являются значениями истинности. Значения истинности будут частично упорядочены по включению. Наибольшим из них будет вся модель  $M$ , наименьшим — пустой класс  $\emptyset$ . Кроме того, если  $\{A_i : i \in I\}$  есть некоторая совокупность значений истинности данной обобщенной модели Бета  $M$ , то  $\bigcap_i A_i$  тоже является значением истинности, которое мы будем обозначать через  $\bigwedge_i A_i$  и называть *конъюнкцией* значений истинности  $A_i, i \in I$ . Оно является нижней гранью значений истинности  $A_i, i \in I$ . Отметим, что  $\bigcup_i A_i$  может не быть значением истинности, но верхняя грань значений истинности  $A_i, i \in I$ , все-таки существует. Это значение истинности, которое мы будем обозначать через  $\bigvee_i A_i$  и называть *дизъюнкцией* значений истинности  $A_i, i \in I$  определим следующим образом:  $\alpha \in \bigvee_i A_i$  в точности<sup>2</sup> тогда, когда каждая цепь, содержащая  $\alpha$ , пересекается с множеством  $\bigcup_i A_i$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — два значения истинности обобщенной модели Бета  $M$ . Определим множество  $C \subset M$  по следующему:  $\alpha \in C$  в точности тогда, когда каждая конкретизация аспекта  $\alpha$ , принадлежащая  $A$ , принадлежит и  $B$ . Множество  $C$  является значением истинности и именно наибольшим из таких значений истинности  $X$ , при которых имеет место  $A \wedge X \leq B$ . Значение истинности  $C$  будем называть *импликацией* значений истинности  $A$  и  $B$  и обозначать через  $A \rightarrow B$ .

При таких соглашениях система всех значений истинности данной обобщенной модели Бета  $M$  окажется псевдо-булевой алгеброй (см. [1]). Как и во всякой псевдо-булевой алгебре здесь дополнительно определяются операции *отрицания* и *эквиваленции* следующими равенствами соответственно:  $\neg A = A \rightarrow \theta$ , где  $\theta$  — наименьший элемент псевдо-булевой алгебры, и  $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ . В случае обобщенной модели Бета эти определения сводятся к следующему:  $\alpha \in \neg A$  в точности тогда, когда  $A$  не содержит ни одной конкретизации аспекта  $\alpha$ , и  $\alpha \in A \leftrightarrow B$  в точности тогда, когда для каждого  $\beta \geq \alpha$  принадлежности  $\beta \in A$  и  $\beta \in B$  равносильны.

Если  $\alpha$  — такой аспект, что его единственной конкретизацией является он сам, то для каждого значения истинности  $A$  имеет место либо  $\alpha \in A$ , либо  $\alpha \in \neg A$ . Из этого вытекает, что если в данной обобщенной модели Бета  $M$  каждая цепь имеет последний элемент, то  $A \vee \neg A = M$  для любого значения истинности  $A$ , т. е. в таком случае система значений истинности будет булевой алгеброй. В частности, это имеет место для всех конечных обобщенных моделей Бета.

<sup>2</sup> Т. е. тогда и только тогда.

Отметим еще, что если  $M$  есть обобщенная модель Бета, то её система значений истинности без наименьшего значения истинности тоже оказывается обобщенной моделью Бета. Действительно, если  $A$  и  $B$  — такие значения истинности, что  $A \leq B$  не имеет места, то существует  $\alpha \in A \setminus B$ . Следовательно, существует и цепь  $C$  такая, что  $\alpha \in C$  и  $C \cap B = \emptyset$ . Без ограничения общности можем предполагать, что  $\alpha$  — первый элемент множества  $C$ . Как известно, каждый элемент цепи  $C$  определяет значение истинности. Эти значения истинности тоже образуют цепь, так как значение истинности  $\emptyset$  было отброшено. Если к началу цепи прибавить  $A$ , то получаем цепь, содержащую  $A$  и не имеющую элементов, меньших  $B$ .

Как известно, и совокупность всех открытых множеств произвольного топологического пространства тоже является псевдо-булевой алгеброй, если открытые множества упорядочить по включению. Поэтому не безынтересно знать, какое отношение имеется между псевдо-булевыми алгебрами, определяемыми топологическими пространствами, и псевдо-булевыми алгебрами, определяемыми обобщенными моделями Бета. Отметим, что обе они являются полными псевдо-булевыми алгебрами, т. е. каждое подмножество имеет верхнюю и нижнюю грань.

Чтобы исследовать эту проблему, рассмотрим топологическое пространство  $\{a, b\}$ , где открытыми множествами являются  $\emptyset$ ,  $\{a\}$  и  $\{a, b\}$ . Возникает псевдо-булева алгебра, элементы которой мы будем обозначать через  $A_0, A_1$  и  $A_2$  соответственно; при этом имеет место  $A_0 < A_1 < A_2$ . Эту псевдо-булеву алгебру нельзя задать обобщенной моделью Бета, так как после отбрасывания элемента  $A_0$  не получается обобщенной модели Бета.

Итак, существует псевдо-булева алгебра, задаваемая топологическим пространством, но не задаваемая обобщенной моделью Бета.

Теперь поставим обратный вопрос: пусть у нас имеется псевдо-булева алгебра, заданная некоторой обобщенной моделью Бета  $M$ ; можно ли задать эту же псевдо-булеву алгебру топологическим пространством.

Будем называть точками пространства все цепи модели  $M$ . Каждому значению истинности  $A$  поставим в соответствие множество цепей  $G_A$ , состоящее из всех таких цепей  $B$ , при которых  $A \cap B \neq \emptyset$ . При этом, если  $A_1 \neq A_2$ , например, если существует аспект  $\alpha \in A_1 \setminus A_2$ , то существует цепь  $B$  такая, что  $\alpha \in B$  и  $B \cap A_2 = \emptyset$ ; значит  $B \in G_{A_1} \setminus G_{A_2}$ , т. е.  $G_{A_1} \neq G_{A_2}$ . Итак, разные значения истинности определяют разные множества.

Пусть теперь  $\{A_i : i \in I\}$  есть некоторая совокупность значений истинности. Так как  $\bigvee_i A_i$  есть тоже значение истинности, то существует  $G_{\bigvee_i A_i}$ . Если теперь  $B \in G_{\bigvee_i A_i}$ , то существует  $\alpha \in B \cap \bigvee_i A_i$ . Но в силу определения дизъюнкции цепь  $B$  должна

в этом случае пересекаться с некоторым  $A_i$ , т. е.  $B \in G_{A_i}$ . Обратно, если  $B \in G_{A_i}$  при некотором  $i \in I$ , то очевидно  $B \in G_{\bigvee_i A_i}$ . Следовательно,  $G_{\bigvee_i A_i} = \bigcup_i G_{A_i}$ .

Пусть теперь  $\{A_1, \dots, A_n\}$  есть некоторое конечное множество значений истинности. Пусть  $B \in \bigcap_i G_{A_i}$ , т. е.  $B \in G_{A_i}$  при  $i = 1, \dots, n$ . Значит, для каждого  $i = 1, \dots, n$  существует  $\alpha_i \in B \cap A_i$ . Так как  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  — конечное подмножество линейно упорядоченного множества  $B$ , то в нем имеется наибольший элемент  $\alpha_n$ . Из соотношений  $\alpha_i \leq \alpha_n$  и  $\alpha_i \in A_i$  и из определения значения истинности вытекает, что  $\alpha_n \in A_i$ . Итак,  $\alpha_n \in B \cap A_i$  при  $i = 1, \dots, n$ ; значит,  $\alpha_n \in B \cap (\bigcap_i A_i)$ . Но, так как  $\bigcap_i A_i$  является значением истинности  $\bigwedge_i A_i$ , то мы получили, что  $B \in G_{\bigwedge_i A_i}$ . Обратно, если  $B \in G_{\bigwedge_i A_i}$ , то очевидно  $B \in G_{A_i}$  при  $i = 1, \dots, n$ , т. е.  $B \in \bigcap_i G_{A_i}$ . Значит,  $G_{\bigwedge_i A_i} = \bigcap_i G_{A_i}$ .

Наибольшее значение истинности есть  $M$ , а наименьшее —  $\emptyset$ . Множеством  $G_M$  будет множество всех цепей, а  $G_\emptyset$  — пустое множество.

Итак, мы доказали, что система всех множеств вида  $G_A$ , где  $A$  пробегает всю систему значений истинности модели  $M$ , удовлетворяет условиям системы открытых множеств топологического пространства. Кроме этого, как мы видели, эти открытые множества находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями истинности модели  $M$ . При этом, если  $A_1 \leq A_2$ , то и  $G_{A_1} \subseteq G_{A_2}$ , а если  $A_1 \leq A_2$  не имеет места, т. е. если существует  $\alpha \in A_1 \setminus A_2$ , то, как мы видели, существует  $B \in G_{A_1} \setminus G_{A_2}$ . Значит, соответствие  $A \longleftrightarrow G_A$  сохраняет порядок, т. е. является изоморфизмом между полученными псевдо-булевыми алгебрами.

Таким образом, мы получили, что *класс псевдо-булевых алгебр, задаваемых обобщенными моделями Бета, более узкое, чем класс псевдо-булевых алгебр, задаваемых топологическими пространствами.*

Рассмотрим еще вопрос релятивизации. Пусть у нас есть обобщенная модель Бета  $M$  и  $A$  — некоторое значение истинности этой модели. Тогда это значение истинности как самостоятельное множество тоже частично упорядочено. Цепями в нем будут пересечения с множеством  $A$  тех цепей модели  $M$ , которые пересекаются с  $A$ . Непосредственно из определения вытекает, что  $A$  — тоже обобщенная модель Бета. Значениями истинности в этой модели будут в точности те значения истинности  $B$  из первоначальной модели, при которых имеет место  $B \leq A$ . Операции

полученной псевдо-булевой алгебры, рассматриваемые как операции между элементами первоначальной псевдо-булевой алгебры, будем называть соответствующими операциями *относительно*  $A$ . Следовательно, релятивизированные операции определены в первоначальной псевдо-булевой алгебре только для тех элементов  $B$ , при которых  $B \leq A$ , и результат тоже удовлетворяет этому условию.

В случае, когда  $A = \{\beta: \beta \geq a\}$ , где  $a$  — некоторый конкретный аспект, то  $A$  называется обобщенной моделью Бета, суженной аспектом  $a$ .

Такую же релятивизацию можно сделать и в топологическом пространстве, так как каждое открытое множество  $G$  есть самостоятельное топологическое пространство, в котором открытыми множествами будут открытые множества первоначального пространства, содержащиеся в  $G$ .

Пусть теперь  $M$  — некоторая псевдо-булева алгебра и  $A \in M$ . Если  $M(A) = \{B: B \leq A\}$ , то  $M(A)$  частично упорядочено. Если некоторое непустое множество из  $M(A)$  имеет верхнюю или нижнюю грань в  $M$ , то тот же элемент будет верхней или нижней гранью этого множества и в  $M(A)$ . Для пустого множества, конечно, верхней гранью в обоих множествах  $M$  и  $M(A)$  будет наименьший элемент из  $M$ , а нижней гранью будет наибольший элемент из  $M$  и  $M(A)$  соответственно. Последним является элемент  $A$ .

Пусть теперь  $B \in M(A)$  и  $C \in M(A)$ . Тогда  $(B \rightarrow C) \wedge A \in M(A)$ . Кроме того,  $[(B \rightarrow C) \wedge A] \wedge B = [B \wedge (B \rightarrow C)] \wedge A \leq C$ , а с другой стороны, если  $X \in M(A)$  и  $X \wedge B \leq C$ , то  $X \leq A$ ,  $X \leq B \rightarrow C$ , а, значит,  $X \leq (B \rightarrow C) \wedge A$ . Значит,  $(B \rightarrow C) \wedge A$  является импликацией элементов  $B$  и  $C$  в  $M(A)$ .

Следовательно,  $M(A)$  — псевдо-булева алгебра. Релятивизированной дизъюнкцией и конъюнкцией являются сужения этих операций из псевдо-булевой алгебры  $M$  на  $M(A)$ , кроме конъюнкции пустого множества элементов, результатом которой будет  $A$ . Результатом релятивизированной импликации элементов  $B$  и  $C$  из  $M(A)$  будет  $(B \rightarrow C) \wedge A$ . Кроме того, если  $M$  полна, то и  $M(A)$  полна.

## Литература

1. Rasiowa, H., Sikorski, R., The mathematics of metamathematics. Warszawa, 1963.
2. Schütte, K., Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Berlin—Heidelberg, 1968.

Поступило  
15 II 1972

## OLDISTATUD BETHI MUDELITE SEOS TOPOLOOGILISTE PSEUDO-BOOLE'I ALGEBRATEGA

A. Tauts

### Resümee

Uldistatud Bethi mudeliks nimetatakse artiklis iga osaliselt järjestatud hulka  $M$  järgmise omadusega: kui  $\alpha \in M$  ja  $\beta \in M$  ning ei kehti  $\alpha \leq \beta$ , siis leidub ahel, mille elemendiks on  $\beta$  ja mille ükski element ei järgne elemendile  $\alpha$ ; siin mõeldakse ahela all hulga  $M$  sellist lineaarselt järjestatud osahulka, mida ei saa ülemisest otsast pikendada. Uldistatud Bethi mudeli  $M$  osahulka  $A$  nimetatakse tõeväärtuseks, kui 1) ta sisaldab koos iga oma elemendiga ka kõik sellele järgnevad, ja 2) iga elementi, mis ei kuulu hulka  $A$ , läbib ahel, mis ei lõiku hulgaga  $A$ . Tõeväärtuste hulk, järjestatud sisalduvuse järgi, moodustab pseudo-Boole'i algebra. Artiklis tõestatakse, et sellisel viisil saadud pseudo-Boole'i algebrate klass moodustab osa selliste pseudo-Boole'i algebrate klassist, mida topoloogiliste ruumidega defineerida saab.

## DER ZUSAMMENHANG DER VERALLGEMEINERTEN BETH-MODELLE MIT TOPOLOGISCHEN PSEUDO-BOOLESCHEM ALGEBREN

A. Tauts

### Zusammenfassung

Als ein verallgemeinertes Beth-Modell wird in dem Artikel jede partiell geordnete Menge mit der folgenden Eigenschaft genannt: wenn  $\alpha \in M$ ,  $\beta \in M$  gelten und  $\alpha \leq \beta$  nicht gilt, dann gibt es eine Kette  $A$ , solche, daß  $\beta \in A$ , und kein Element von  $A$  dem Element  $\alpha$  folgt; hier bedeutet «Kette» jede solche linear geordnete Teilmenge von  $M$ , die man von der obersten Seite nicht verlängern kann. Eine Teilmenge  $A$  von  $M$  wird ein Wahrheitswert genannt, wenn:

1) wenn  $\alpha \in A$  und  $\beta \geq \alpha$ , dann  $\beta \in A$ ;

2) wenn  $\alpha \in A$  nicht gilt, dann gibt es eine solche Kette  $B$ , daß  $\alpha \in B$  und kein Element von  $B$  der Menge  $A$  angehört.

Die Menge der Wahrheitswerte, nach dem Enthaltensein geordnet, bildet eine pseudo-Boolesche Algebra. In dem Artikel wird bewiesen, daß jede in solcher Weise gebildete pseudo-Boolesche Algebra auch durch einen topologischen Raum definiert werden kann, aber nicht umgekehrt.

## СЕМАНТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ В ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ БЕТА И В ПСЕВДО-БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

Предположим, что у нас имеется некоторый (конечный или бесконечный, может быть и пустой) класс символов, которые мы будем называть *элементарными типами*. Определим понятие *типа* по следующему:

1) Каждый элементарный тип есть тип.

2) Если  $I$  — произвольное множество, то семейство  $\langle a''_i : i \in I \rangle$ , где все  $a''_i$  — типы, тоже есть тип.

Здесь  $I$  может быть бесконечным или конечным, в том числе и пустым множеством.

Любую систему типов, полученную таким образом, исходя из некоторого класса элементарных типов, будем называть *сигнатурой*.

Пусть сигнатура фиксирована. Чтобы определить понятие формулы в данной сигнатуре, предположим, что в нашем распоряжении находятся следующие символы:

1) для каждого типа  $a''$  класс символов, называемых *константами* типа  $a''$ ;

2) для каждого типа  $a''$  класс символов  $\{x'_i{}^{a''}\}$ , называемых *переменными* типа  $a''$ , где  $i$  пробегает класс всех ординалов;

3) четыре символа логических операций:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  и  $\neg$ , называемые соответственно *конъюнкцией*, *дизъюнкцией*, *импликацией* и *отрицанием*;

4) три кванторных символа:  $\forall$ ,  $\exists$  и  $\exists!$ , называемые *квантором общности*, *квантором существования* и *функциональным квантором*.

Теперь определим понятия *терма* и *формулы*, указывая при этом какие переменные считаются *связанными переменными* в каждом терме и в каждой формуле. При этом мы применяем понятие бесконечного выражения, приведенное в [2].

Определение индуктивно.

1) Каждая константа и каждая переменная некоторого элементарного типа есть терм данного типа. Терм такого вида не имеет связанных переменных.

2) Если  $\mathfrak{A}$  — формула и  $\langle x'_i : i \in I \rangle$  — семейство разных переменных, не связанных в формуле  $\mathfrak{A}$ , то  $\mathfrak{A} \langle x'_i : i \in I \rangle$  — терм типа  $\langle a''_i : i \in I \rangle$ , где  $a''_i, i \in I$ , — тип переменной  $x'_i$ . Связанными переменными данного термина считаются связанные переменные формулы  $\mathfrak{A}$  и переменные  $x'_i, i \in I$ .

3) Если  $P$  — переменная или константа типа  $\langle a''_i : i \in I \rangle$ , а  $\langle a'_i : i \in I \rangle$  — семейство термов типов  $a''_i, i \in I$ , то  $P \langle a'_i : i \in I \rangle$  — формула. В этой формуле связанными переменными считаются связанные переменные термов  $a'_i, i \in I$ .

4) Если  $\mathfrak{A}$  — формула, то  $\neg \mathfrak{A}$  — формула. Связанными переменными в формуле  $\neg \mathfrak{A}$  считаются связанные переменные формулы  $\mathfrak{A}$ .

5) Если  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  — формулы, у которых нет переменных, содержащихся несвязанными в одной, а связанными в другой из данных формул, то  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  — формула. Связанными переменными в ней считаются связанные переменные формул  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ .

6) Если  $\langle \mathfrak{A}_i : i \in I \rangle$  — такое семейство формул, что нет переменных, содержащихся несвязанными в одной, а связанными в другой из данных формул, то  $\bigvee_i \mathfrak{A}_i$  и  $\bigwedge_i \mathfrak{A}_i$  — формулы. Связанными в них считаются связанные переменные формул  $\mathfrak{A}_i, i \in I$ .

7) Если  $\mathfrak{A}$  — формула и  $\langle x'_i : i \in I \rangle$  — семейство разных переменных, не связанных в формуле  $\mathfrak{A}$ , то  $\forall \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{A}$  и  $\exists \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{A}$  — формулы. Связанными переменными в них считаются связанные переменные формулы  $\mathfrak{A}$  и переменные  $x'_i, i \in I$ .

Множество  $I$  может в любом правиле, где оно встречается, быть бесконечным или конечным, в том числе и пустым множеством.

Переменная, содержащаяся в некоторой формуле, но не связанная в ней, называется *свободной переменной* данной формулы. Формула называется *высказыванием*, если в ней нет свободных переменных.

Пусть  $\mathfrak{A}$  — некоторая формула. Все свободные переменные формулы  $\mathfrak{A}$  образуют семейство  $\langle x'_i : i \in I \rangle$ , где каждое  $i \in I$  есть пара  $\langle x'', \mu \rangle$ , где  $x''$  — тип и  $\mu$  — ординальный индекс переменной  $x'_i$ . Семейство  $\langle x''_i : i \in I \rangle$  типов переменных  $x'_i, i \in I$ , есть тип, который мы будем называть *типом формулы*  $\mathfrak{A}$ .

Каждому терму и каждой формуле поставим в соответствие ординал, который мы будем называть *рангом* термина, соответственно, формулы. Ранг определяется индуктивно следующим образом:

1) Терм элементарного типа имеет ранг 0.

2) Терм вида  $\mathfrak{d}\langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{M}$  имеет тот же ранг, что и формула  $\mathfrak{M}$ .

3) Рангом любой формулы  $\mathfrak{M}$  считаем наименьший ординал, который больше рангов всех термов, примененных правил 3) в ходе построения формулы  $\mathfrak{M}$ .

Семантическая интерпретация формул, которую мы здесь изложим, получается естественным образом при обобщении понятия модели Бета, описанного в [3].

Мы будем говорить, что задана *бетовская модель* данной сигнатуры, если:

1) Задана некоторая обобщенная модель Бета  $M$  (см. [1]).

2) Для каждого  $\alpha \in M$  и типа  $\alpha''$  данной сигнатуры задан класс объектов  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha'')$ , удовлетворяющий следующим условиям:

2а) Если  $\alpha < \beta$ , то при каждом  $\alpha''$  имеет место  $\mathcal{O}(\alpha, \alpha'') \equiv \mathcal{O}(\beta, \alpha'')$ .

2б) Если  $a$  — такой объект, что при данных  $\alpha \in M$  и  $\alpha''$  каждая цепь в  $M$ , содержащая  $\alpha$ , содержит и такой  $\beta \in M$ , что  $a \in \mathcal{O}(\beta, \alpha'')$ , то  $a \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha'')$ .

3) Если  $\alpha''$  есть тип данной сигнатуры, имеющий вид  $\langle \alpha''_i, i \in I \rangle$  и  $a \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha'')$ , то паре  $\langle \alpha, a \rangle$  поставлен в соответствие некоторый класс семейств вида  $\langle a_i, i \in I \rangle$ , где при каждом  $i \in I$  имеет место  $a_i \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha''_i)$ . Этот класс обозначим через  $\mathcal{T}(\alpha, a)$ . При этом должны быть выполнены следующие условия:

3а) Если  $\alpha < \beta$ , то при каждом  $\alpha''$  и  $a \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha'')$  имеет место  $\mathcal{T}(\alpha, a) \subseteq \mathcal{T}(\beta, a)$ .

3б) Если  $\langle a_i : i \in I \rangle$  — такое семейство объектов, что при каждом  $i \in I$  имеет место  $a_i \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha''_i)$ , а  $\langle a_i : i \in I \rangle \notin \mathcal{T}(\alpha, a)$ , то в  $M$  существует такая цепь  $B$ , что  $\alpha \in B$  и при каждом  $\beta \in B$  имеет место  $\langle a_i : i \in I \rangle \notin \mathcal{T}(\beta, a)$ .

3в) Если  $\alpha'' = \langle \alpha''_i : i \in I \rangle$  и  $a \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha'')$ , а  $\langle a_i : i \in I \rangle$  и  $\langle b_i : i \in I \rangle$  — такие семейства, что при каждом  $i \in I$  имеют место  $a_i \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha''_i)$  и  $b_i \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha''_i)$ , а при каждом  $\beta \geq \alpha$  справедливо равенство  $\mathcal{T}(\beta, a_i) = \mathcal{T}(\beta, b_i)$ , то принадлежности  $\langle a_i : i \in I \rangle \in \mathcal{T}(\alpha, a)$  и  $\langle b_i : i \in I \rangle \in \mathcal{T}(\alpha, a)$  равносильны.

Предположим, что  $\langle \alpha''_i : i \in I \rangle$  — некоторое семейство типов данной сигнатуры, а  $\langle a_i : i \in I \rangle$  — семейство объектов. Предположим, что существует хоть один такой  $\alpha \in M$ , что при всех  $i \in I$  имеет место  $a_i \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha''_i)$ . Тогда множество всех таких  $\alpha \in M$ , для которых  $a_i \in \mathcal{O}(\alpha, \alpha''_i)$  при всех  $i \in I$ , является обобщенной моделью Бета. Это множество мы называем *моделью, суженной семейством объектов*  $\langle a_i : i \in I \rangle$ . Отметим, что полученное множество является значением истинности в первоначальной обобщенной модели Бета (см. [1]).

В общем пусть  $\mathfrak{M}$  есть бетовская модель некоторой сигнатуры, а  $M$  — обобщенная модель Бета, являющаяся основой модели  $\mathfrak{M}$ , и пусть  $M_1$  — некоторое значение истинности в  $M$ . Тогда мы автоматически снабжаем каждый  $\alpha \in M_1$  классами  $O(\alpha, \alpha'')$  и  $T(\alpha, \alpha)$  из модели  $\mathfrak{M}$ , получая таким образом бетовскую модель с основой  $M_1$ . Всякое сужение модели на некоторое значение истинности надо в дальнейшем понимать в этом смысле.

Пусть у нас имеется бетовская модель некоторой сигнатуры и класс констант той же сигнатуры. Пусть  $\varphi$  — отображение, ставящее каждой из данных констант в соответствие некоторый такой объект  $a$ , что при каждом аспекте  $\alpha$  имеет место  $a \in O(\alpha, a'')$ , где  $a''$  — тип данной константы. Всякое такое  $\varphi$  будем называть *интерпретацией* данных констант в данной модели  $\mathfrak{M}$ .

Пусть  $\varphi$  — интерпретация некоторого класса констант в некоторой бетовской модели  $\mathfrak{M}$ . Тогда  $\varphi$  называется *интерпретацией формулы*  $\mathfrak{A}$ , когда  $\mathfrak{A}$  — формула, все константы которой принадлежат данному классу.

Отметим, что если константам поставлены в соответствие такие объекты, что есть хоть один такой аспект  $\alpha$ , что при каждой константе  $a'$  из этого класса объект  $a = \varphi(a')$  содержится в  $O(\alpha, a'')$ , где  $a''$  — тип константы  $a'$ , то такое  $\varphi$  будет интерпретацией данных констант в модели, суженной аспектом  $\alpha$  (см. [1]), а также в модели, суженной семейством объектов, являющихся значениями отображения  $\varphi$ .

Теперь определим *0-исчисление* таким образом, что некоторым тройкам  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$ , где  $\mathfrak{A}$  — высказывание,  $\mathfrak{M}$  — бетовская модель, а  $\varphi$  — интерпретация высказывания  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , поставим в соответствие подмножество обобщенной модели Бета  $M$ , являющейся основой для модели  $\mathfrak{M}$ . Это подмножество будем обозначать через  $A^\varphi(\mathfrak{A})$ . Отображение, ставящее  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$  в соответствие  $A^\varphi(\mathfrak{A})$ , определим индуктивно по следующему:

1) Если  $\mathfrak{A}$  состоит из единственной константы  $P$ , где тип  $P$  — пустое семейство, то  $A^\varphi(\mathfrak{A})$  существует и  $a \in A^\varphi(\mathfrak{A})$  тогда и только тогда, когда  $T(\alpha, \varphi(P))$  содержит пустое семейство.

2) Если  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\bigwedge_i \mathfrak{A}_i$  и при каждом  $i \in I$  существует  $A^\varphi(\mathfrak{A}_i)$ , то  $A^\varphi(\mathfrak{A})$  существует, причем  $a \in A^\varphi(\mathfrak{A})$  в точности тогда, когда  $a \in \mathfrak{A}_i^\varphi(\mathfrak{A}_i)$  при всех  $i \in I$ .

3) Если  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\bigvee_i \mathfrak{A}_i$  и при каждом  $i \in I$  существует  $A^\varphi(\mathfrak{A}_i)$ , то  $A^\varphi(\mathfrak{A})$  существует и  $a \in A^\varphi(\mathfrak{A})$  в точности тогда, когда любая цепь, которой принадлежит  $a$ , пересекается с некоторым  $A^\varphi(\mathfrak{A}_i)$ .

4) Если  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\neg \mathfrak{B}$  и  $A^\varphi(\mathfrak{B})$  существует, то существует и  $A^\varphi(\mathfrak{A})$ , причем  $a_0 \in A^\varphi(\mathfrak{A})$  в точности тогда, когда для всех  $a \geq a_0$  имеет место  $a \notin A^\varphi(\mathfrak{B})$ .

5) Если  $\mathfrak{M}$  имеет вид  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$  и если  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{B})$  и  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{C})$  существуют, то существует  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$ , и  $\alpha_0 \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$  в точности тогда, когда для всех  $\alpha \geq \alpha_0$ , для которых имеет место  $\alpha \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{B})$ , будет  $\alpha \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{C})$ .

6) Если  $\mathfrak{M}$  имеет вид  $\forall \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{B}$ , где каждая  $x'_i$  — переменная некоторого типа  $x''_i$ , и  $\mathfrak{B}'$  — некоторое высказывание, полученное от  $\mathfrak{B}$  таким путем, что каждая переменная  $x'_i$ ,  $i \in I$ , заменена некоторой константой  $a'_i$  типа  $x''_i$ , не содержащейся в  $\mathfrak{B}$ , если для каждого аспекта  $\alpha$  и каждого семейства объектов  $\langle a_i : i \in I \rangle$  с  $a_i \in \mathbf{O}(\alpha, x''_i)$ ,  $i \in I$ , существует  $\mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$ , где  $\varphi'$  — интерпретация высказывания  $\mathfrak{B}'$  в сужении  $\mathfrak{M}'$  модели  $\mathfrak{M}$  аспектом  $\alpha$ , являющаяся таким продолжением для  $\varphi$ , что  $\varphi'(a'_i) = a_i$ , то существует  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$  и  $\alpha_0 \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$  в точности тогда, когда для каждых  $\alpha \geq \alpha_0$  и семейства объектов  $\langle a_i : i \in I \rangle$ , где  $a_i \in \mathbf{O}(\alpha, x''_i)$  при всех  $i \in I$ , имеет место  $\alpha \in \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$ .

7) Если  $\mathfrak{M}$  имеет вид  $\exists \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{B}$  и если для каждых аспекта  $\alpha$  и семейства  $\langle a_i : i \in I \rangle$ , где  $a_i \in \mathbf{O}(\alpha, x''_i)$ , существует  $\mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$  (здесь  $x''_i, \mathfrak{B}', \mathfrak{M}'$  и  $\varphi'$  имеют такое же значение, что и в правиле 6), то  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$  существует и  $\alpha_0 \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$  в точности тогда, когда каждая цепь, содержащая  $\alpha_0$ , содержит и такой аспект  $\alpha$ , что существует семейство  $\langle a_i : i \in I \rangle$  такое, что  $a_i \in \mathbf{O}(\alpha, x''_i)$  при каждом  $i \in I$  и  $\alpha \in \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$ .

Из определения вытекает, что  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{M})$  в 0-исчислении определено в точности тогда, когда  $\varphi$  есть интерпретация в модели  $\mathfrak{M}$  такого высказывания  $\mathfrak{M}$ , в ходе построения которого правило 3) в определении формулы применено только в случае пустого множества  $I$ , т. е.  $\mathfrak{M}$  является высказыванием ранга 0.

Пусть  $\mathfrak{M}$  есть формула ранга 0 и типа  $\langle a''_i : i \in I \rangle$ . Тогда после подстановки констант  $a'_i$ ,  $i \in I$ , не содержащихся в  $\mathfrak{M}$ , вместо свободных переменных в  $\mathfrak{M}$  мы получим некоторое высказывание  $\mathfrak{M}'$  ранга 0. Пусть  $\mathfrak{M}$  — бетовская модель той же сигнатуры, что и формула  $\mathfrak{M}$ , а  $\varphi$  — интерпретация формулы  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{M}$ . Пусть теперь  $\alpha$  — некоторый аспект из модели  $\mathfrak{M}$ , а  $\mathfrak{M}'$  — модель, полученная сужением модели  $\mathfrak{M}$  аспектом  $\alpha$ . Теперь можно найти всевозможные интерпретации  $\varphi'$  высказывания  $\mathfrak{M}'$  в  $\mathfrak{M}'$ , которые являются продолжениями интерпретации  $\varphi$ . Для этого надо константам  $a'_i$ ,  $i \in I$ , поставить в соответствие объекты  $a_i$  из соответствующих классов  $\mathbf{O}(\alpha, a''_i)$ . Определим теперь класс  $\mathbf{T}(\alpha, \mathfrak{M}^\varphi)$  как класс тех семейств  $\langle a_i : i \in I \rangle$ , при которых  $\alpha \in \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{M}')$ .

Бетовскую модель  $\mathfrak{M}$  будем называть 0-нормальной, если для каждой модели  $\mathfrak{M}'$ , полученной из  $\mathfrak{M}$  путем сужения некоторым семейством объектов, выполнено следующее условие: для каждой формулы  $\mathfrak{M}$  ранга 0 произвольного типа  $a''$  и интерпретации  $\varphi$  формулы  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{M}'$  существует такой объект  $a$ , что  $a \in \mathbf{O}(\alpha, a'')$

при каждом аспекте  $a$  в  $\mathfrak{M}'$  и  $T(a, a) = T(a, \mathfrak{A}^\varphi)$  для всех аспектов  $a$  в  $\mathfrak{M}'$ .

Из этого вытекает аналогичное свойство для всех  $\mathfrak{M}'$ , полученных из  $\mathfrak{M}$  при помощи сужения на некоторое значение истинности. Действительно, такая модель является частью некоторой модели  $\mathfrak{M}''$ , полученной из  $\mathfrak{M}$  путем сужения некоторым семейством объектов, причем  $\varphi$  является и интерпретацией формулы  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}''$ .

Определим теперь 1-исчисление также отображением, ставящим тройкам  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$  в соответствие некоторый  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A} \subset M$ , требуя при этом, чтобы  $\mathfrak{M}$  была 0-нормальна. В определение 1-исчисления входят правила 2)–7) из определения 0-исчисления, а правило 1<sub>0</sub>) заменено на следующее правило:

1<sub>1</sub>) Пусть высказывание  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $P \langle a'_i : i \in I \rangle$ , где  $P$  есть константа типа  $a'' = \langle a''_i : i \in I \rangle$ , а каждое  $a'_i$  есть или константа элементарного типа, или терм вида  $\mathfrak{d} \langle x_v'^i : v \in I_i \rangle \mathfrak{B}_i$ , где  $\mathfrak{B}_i$  — формула ранга 0. Тогда  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) существует и определяется по следующему. Пусть  $a = \varphi(P)$  и пусть для тех  $i \in I$ , при которых  $a'_i$  является константой элементарного типа,  $a_i = \varphi(a'_i)$ . Для тех  $i \in I$ , при которых  $a'_i$  имеет вид  $\mathfrak{d} \langle x_v'^i : v \in I_i \rangle \mathfrak{B}_i$ , в качестве объекта  $a_i$  выбираем некоторый такой объект из пересечения по  $\alpha \in M$  классов  $\mathbf{O}(\alpha, a''_i)$ , что при всех  $\alpha$  имеет место равенство  $T(\alpha, a_i) = T(\alpha, \mathfrak{B}_i)$ . Такой объект существует, так как модель 0-нормальна. Тогда  $a \in \mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) в точности тогда, когда  $T(a, a)$  содержит семейство  $\langle a_i : i \in I \rangle$ .

Отметим, во-первых, что в силу условия 3в) в определении модели некоторый произвол выбора элементов  $a_i$ , который здесь имеется, не причиняет произвола в определении 1-исчисления. Во-вторых, если  $\mathfrak{M}$  является 0-нормальной, то и  $\mathfrak{M}'$ , которая имеется в правилах 6) и 7), тоже 0-нормальна. Поэтому эти правила применимы и в 1-исчислении. В-третьих, если  $I$  — пустое множество, то 1<sub>1</sub>) совпадает с 1<sub>0</sub>), так что при 0-нормальной модели 1-исчисление является продолжением 0-исчисления. В-четвертых, из правил 1<sub>1</sub>) и 2)–7) вытекает, что  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) определено, если  $\mathfrak{M}$  есть 0-нормальная модель, а  $\mathfrak{A}$  — высказывание ранга 0 или 1.

Пусть  $\mu$  — некоторый ординал и пусть для всех  $\mu' < \mu$  определены понятия  $\mu'$ -исчисления и  $\mu'$ -нормальности. Пусть притом классы  $\mu'$ -нормальных моделей убывают при увеличении  $\mu'$ , а  $\mu'$ -исчисление отображает тройку  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$  в  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A} \subset M$ , где  $\mathfrak{M}$  — бетовская модель, которая  $\mu''$ -нормальна при всех  $\mu'' < \mu'$ ,  $\mathfrak{A}$  — высказывание, ранг которого не больше  $\mu'$ ,  $\varphi$  — интерпретация высказывания  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , а  $M$  — обобщенная модель Бета, являющаяся основой для  $\mathfrak{M}$ . Кроме того, пусть каждое  $\mu'$ -исчисление при моделях, для которых оно определено, явля-

ется продолжением всех  $\mu''$ -исчислений с  $\mu'' < \mu'$ . Тогда  $\mu$ -исчисление определяется правилами 1 <sub>$\mu$</sub> ) и 2)–7), где правило 1 <sub>$\mu$</sub> ) отличается от правила 1) только тем, что  $\mathfrak{B}_i$  — формулы ранга  $\mu_i < \mu$ , модель  $\mathfrak{M}$  является  $\mu'$ -нормальной при всех  $\mu' < \mu$  и  $T(\alpha, \mathfrak{A}^{\varphi_i})$  для любого  $\alpha \in M$  рассматривается относительно  $\mu$ -исчисления. Если теперь  $\mathfrak{M}$  —  $\mu'$ -нормальная модель при всех  $\mu' < \mu$ ,  $\mathfrak{A}$  — высказывание, ранг которого не больше  $\mu$ , а  $\varphi$  — интерпретация  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , то  $\mu$ -исчисление отображает тройку  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$  в  $\mathbf{A}^{\varphi}(\mathfrak{A})$ . При этом  $\mu$ -исчисление является продолжением всех  $\mu'$ -исчислений при моделях, для которых оно определено.

Теперь определим  $\mu$ -нормальность следующим образом: бетовская модель, являющаяся  $\mu'$ -нормальной при всех  $\mu' < \mu$ , называется  $\mu$ -нормальной, если выполнено условие, аналогичное условию 0-нормальности, рассматривая в последнем в роли  $\mathfrak{A}$  формулы, ранг которых не больше  $\mu$ , а  $T(\alpha, \mathfrak{A}^{\varphi})$  для  $\alpha \in M$  относительно  $\mu$ -исчисления.

Бетовская модель  $\mathfrak{M}$  называется *нормальной*, если она  $\mu$ -нормальна при всех ординалах  $\mu$ . При нормальной модели существуют все  $\mu$ -исчисления. Если  $\mathfrak{A}$  — высказывание ранга  $\mu_0$ , а  $\varphi$  — интерпретация высказывания  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , то существует  $\mathbf{A}^{\varphi}(\mathfrak{A})$  во всех  $\mu$ -исчислениях, где  $\mu \geq \mu_0$ . При этом  $\mathbf{A}^{\varphi}(\mathfrak{A})$  одинаковое во всех  $\mu$ -исчислениях, в которых оно существует.

Теперь определим *исчисление* как отображение, ставящее тройке  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$ , где  $\mathfrak{M}$  — нормальная модель,  $\mathfrak{A}$  — любое высказывание и  $\varphi$  — интерпретация высказывания  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , в соответствие множество  $\mathbf{A}^{\varphi}(\mathfrak{A})$ , которое совпадает с множеством  $\mathbf{A}^{\varphi}(\mathfrak{A})$  во всех таких  $\mu$ -исчислениях, в которых это множество определено.

Отметим, что так как принадлежность некоторого аспекта  $\alpha$  в  $\mathbf{A}^{\varphi}(\mathfrak{A})$  зависит только от той части модели  $\mathfrak{M}$ , основой которой является  $\{\beta : \beta \geq \alpha\}$ , то эта принадлежность сохраняется и во всех суженных моделях, содержащих  $\alpha$ .

Пусть  $\mathfrak{M}$  — нормальная модель, пусть  $a$  — некоторый объект, а  $a''$  — такой тип, что  $a \in \mathbf{O}(\alpha, a'')$  при некоторых  $\alpha$ . Из условия 2) определения модели вытекает, что множество таких  $\alpha$  является значением истинности. Назовем это *значением истинности существования* объекта  $a$ . Притом, если  $a'' = \langle a''_i : i \in I \rangle$  и  $\langle a_i : i \in I \rangle$  есть некоторое семейство объектов, то семейство  $\langle a_i : i \in I \rangle$  может по определению принадлежать к  $T(\alpha, a)$  только при таких  $\alpha$ , хотя не обязательно при всех таких  $\alpha$ , при которых  $a \in \mathbf{O}(\alpha, a'')$  и  $a_i \in \mathbf{O}(\alpha, a''_i)$  при каждом  $i \in I$ . Множество таких  $\alpha$ , при которых последние отношения имеют место, есть конъюнкция значений истинности существования объектов  $a$  и всех  $a_i$ ,  $i \in I$ . Подмножество этой конъюнкции, состоящее из тех  $\alpha$ , при которых действительно имеет место  $\langle a_i : i \in I \rangle \in T(\alpha, a)$ , как вытекает из условия 3) определения модели, тоже

является значением истинности. Это значение истинности будем называть *значением истинности отношения*  $a \langle a_i : i \in I \rangle$ . Кроме того, если  $\langle b_i : i \in I \rangle$  — другое семейство объектов, и такое, что для каждого  $i \in I$ , при котором  $a_i \neq b_i$ , тип  $a''_i$  имеет вид  $\langle x''_i : v \in I_i \rangle$ , то из условия Зв) определения модели вытекает, что значение истинности

$$\bigwedge_{i, a_i \neq b_i} \bigwedge_{\langle x''_i : v \in I_i \rangle} (a_i \langle x''_i : v \in I_i \rangle^* \leftrightarrow b_i \langle x''_i : v \in I_i \rangle^*)$$

меньше или равно значению истинности

$$a \langle a_i : i \in I \rangle^* \leftrightarrow a \langle b_i : i \in I \rangle^*.$$

Здесь  $a \langle a_i : i \in I \rangle^*$ ,  $a \langle b_i : i \in I \rangle^*$ ,  $a_i \langle x''_i : v \in I_i \rangle^*$  и  $b_i \langle x''_i : v \in I_i \rangle^*$  обозначают значения истинности этих отношений,  $\bigwedge_{\langle x''_i : v \in I_i \rangle}$  обозначает конъюнкцию по всевозможным семействам объектов соответствующих типов.

Пусть высказывание  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $P$ , где  $P$  — константа, тип которой есть пустое семейство. Если  $\varphi$  — некоторая интерпретация, то из правила 1<sub>0</sub>) в определении исчисления вытекает, что  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A})$  есть значение истинности отношения  $\varphi(P)$ .

Из условий 2), 3), 4) и 5) определения исчисления вытекает, что если  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\bigwedge_i \mathfrak{A}_i$ ,  $\bigvee_i \mathfrak{A}_i$ ,  $\neg \mathfrak{B}$  или  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$  и  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A}_i)$  при всех  $i \in I$  (соответственно  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{B})$  и  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{C})$ ) — значения истинности, то  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A})$  — тоже значение истинности и равняется соответственно  $\bigwedge_i \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A}_i)$ ,  $\bigvee_i \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A}_i)$ ,  $\neg \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{B})$  или  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{C})$ . Пусть  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\forall \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{B}$ , где каждая  $x'_i$  — переменная типа  $x''_i$ . Пусть  $\mathfrak{B}'$  определено как в условии 6) определения исчисления. Пусть  $\varphi'$  — такое продолжение отображения  $\varphi$ , что новым константам высказывания  $\mathfrak{B}'$  соответствуют объекты  $a_i$ ,  $i \in I$ . Пусть  $\mathfrak{M}'$  — бетовская модель, полученная от  $\mathfrak{M}$  сужением объектами  $a_i$ ,  $i \in I$ . Тогда  $\mathfrak{M}'$  совпадает с конъюнкцией значений истинности существования объектов  $a_i$ ,  $i \in I$ . Предположим, что при каждом таком  $\varphi'$  получим значение истинности  $\mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$  в бетовской модели  $\mathfrak{M}'$ . Оно является значением истинности и в  $\mathfrak{M}$ . Если при некоторой  $\varphi'$  множество  $M'$  пустое, то и  $\mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$  пусто.

Из условия 6) определения исчисления вытекает, что  $\alpha_0 \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A})$  в точности тогда, когда при любой  $\varphi'$  каждый  $\alpha \geq \alpha_0$  из  $M'$  принадлежит  $\mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$ , где  $\varphi''$  есть  $\varphi'$  как интерпретация для  $\mathfrak{B}'$  в сужении модели  $\mathfrak{M}$  аспектом  $\alpha$ . Но  $\alpha \in \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$  равносильно тому, что  $\alpha \in \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}')$ . Это значит, что  $\alpha_0 \in \mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A})$  равносильно требованию, что при любой  $\varphi'$  имеет место  $\alpha_0 \in (M' \rightarrow \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}'))$ . Следовательно,  $\mathbf{A}^\varphi(\mathfrak{A}) = \bigwedge_{\varphi'} (M' \rightarrow \mathbf{A}^{\varphi'}(\mathfrak{B}'))$ . В последнем выражении все логические операции рассматриваются в смысле модели  $\mathfrak{M}$ .

Пусть  $\mathfrak{M}$  имеет вид  $\exists \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{B}$ , а  $\mathfrak{B}'$ ,  $\varphi'$  и  $\mathfrak{M}'$  определены как в предыдущем. Пусть  $\mathbf{A}^{\varphi'}$  ( $\mathfrak{B}'$ ) для каждого  $\varphi'$  есть значение истинности. Тогда из условия 7) определения исчисления вытекает, что  $\alpha_0 \in \mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{M}$ ) в точности тогда, когда каждая цепь, содержащая  $\alpha_0$ , пересекается с  $\mathbf{A}^{\varphi'}$  ( $\mathfrak{B}'$ ) при некоторой  $\varphi'$ . Но это значит, что  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{M}$ ) =  $\bigvee_{\varphi'} \mathbf{A}^{\varphi'}$  ( $\mathfrak{B}'$ ). Дизъюнкция здесь, конечно, рассматривается в смысле модели  $\mathfrak{M}$ .

Из правила  $I_\mu$ ) вытекает, что  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{M}$ ) является значением истинности и в том случае, если  $\mathfrak{M}$  имеет вид  $P \langle a'_i : i \in I \rangle$ . В этом случае  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{M}$ ) есть значение истинности отношения  $a \langle a_i : i \in I \rangle$ , где  $a = \varphi(P)$ ,  $a_i = \varphi(a'_i)$ , если  $a'_i$  — терм элементарного типа, а если  $a'_i$  имеет вид  $d \langle x'_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle \mathfrak{B}_i$ , то в качестве  $a_i$  будет такой объект, что значения истинности отношения  $a_i \langle x'_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle$ , с одной стороны, и формулы  $\mathfrak{B}_i$ , с другой стороны, как истинностные функции совпадают.

Теперь мы способны обобщать семантическую интерпретацию формул на всякую полную псевдо-булеву алгебру.

*Моделью* будем называть произвольную полную псевдо-булеву алгебру  $M$  вместе с классами объектов  $\mathbf{O}(a'')$  для каждого типа  $a''$  данной сигнатуры, если:

- 1) каждому  $a \in \mathbf{O}(a'')$  поставлен в соответствие  $a^* \in M$ ;
- 2) если тип  $a''$  имеет вид  $\langle a''_i : i \in I \rangle$ ,  $a \in \mathbf{O}(a'')$  и  $a_i \in \mathbf{O}(a''_i)$  при каждом  $i \in I$ , то семейству  $a \langle a_i : i \in I \rangle$  поставлен в соответствие некоторый элемент  $a \langle a_i : i \in I \rangle^* \in M$ , такой, что  $a \langle a_i : i \in I \rangle^* \leq a^* \wedge (\bigwedge_i a_i^*)$ ;
- 3) если тип  $a''$  имеет вид  $\langle a''_i : i \in I \rangle$ ,  $a \in \mathbf{O}(a'')$ ,  $a_i \in \mathbf{O}(a''_i)$ ,  $b_i \in \mathbf{O}(a''_i)$  при каждом  $i \in I$ , и при  $a_i \neq b_i$  тип  $a''_i$  имеет вид  $\langle x''_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle$ , то

$$\bigwedge_{i, a_i \neq b_i} \bigwedge_{\langle x''_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle} (a_i \langle x''_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle^* \leftrightarrow b_i \langle x''_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle^*) \leq (a \langle a_i : i \in I \rangle^* \leftrightarrow a \langle b_i : i \in I \rangle^*),$$

где конъюнкция  $\langle x''_{i\nu} : \nu \in I_i \rangle$  обозначает конъюнкцию по всевозможным семействам объектов из соответствующих классов  $\mathbf{O}(x''_{i\nu})$ .

*Интерпретацией* будем называть отображение  $\varphi$ , ставящее каждой константе  $a'$  типа  $a''$  в соответствие такой объект  $a$  из  $\mathbf{O}(a'')$ , что  $a^*$  есть наибольший элемент псевдо-булевой алгебры  $M$ .

Если  $M$  есть псевдо-булева алгебра и  $M' = \{A : A \leq A_0\}$ , то сужение модели  $\mathfrak{M}$ , определенной на  $M$ , на псевдо-булеву алгебру  $M'$  состоит в том, что  $a^*$  и  $a \langle a_i : i \in I \rangle^*$  заменяются на  $a^* \wedge A_0$  и  $a \langle a_i : i \in I \rangle^* \wedge A_0$  соответственно при каждом объекте  $a$  и семействе объектов  $\langle a_i : i \in I \rangle$ .

Исчисление определяется отображением, ставящим некоторым тройкам  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$ , где  $\mathfrak{M}$  — модель,  $\mathfrak{A}$  — высказывание, а  $\varphi$  — интерпретация высказывания  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , в соответствие некоторый  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ )  $\in M$ , где  $M$  — псевдо-булева алгебра, являющаяся основой модели  $\mathfrak{M}$ .

Определим 0-исчисление следующими правилами.

1) Если  $P$  — константа, тип которой — пустое семейство, то при  $\mathfrak{A}$ , имеющем вид  $P$ , имеет место  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) =  $\varphi(P) < >^*$ .

$$2) \mathbf{A}^\varphi (\bigwedge_i \mathfrak{A}_i) = \bigwedge_i \mathbf{A}^\varphi (\mathfrak{A}_i).$$

$$3) \mathbf{A}^\varphi (\bigvee_i \mathfrak{A}_i) = \bigvee_i \mathbf{A}^\varphi (\mathfrak{A}_i).$$

$$4) \mathbf{A}^\varphi (\neg \mathfrak{A}) = \neg \mathbf{A}^\varphi (\mathfrak{A}).$$

$$5) \mathbf{A}^\varphi (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = \mathbf{A}^\varphi (\mathfrak{A}) \rightarrow \mathbf{A}^\varphi (\mathfrak{B}).$$

6) Если  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\forall \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{B}'$  есть высказывание, полученное от  $\mathfrak{B}$  подстановкой вместо  $x'_i, i \in I$ , констант  $a'_i$ , не содержащихся в  $\mathfrak{B}$ , то  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) =  $\bigwedge_{\varphi'} (\bigwedge_i a^*_i \rightarrow \mathbf{A}^{\varphi'} (\mathfrak{B}'))$ , где в качестве  $\varphi'$  будут всевозможные продолжения  $\varphi$  на константы  $a'_i, i \in I$ , причем  $a_i$  суть  $\varphi'(a'_i)$ , а  $\varphi'$  рассматривается интерпретацией в сужении модели  $\mathfrak{M}$  на псевдо-булеву алгебру  $M' = \{A : A \leq \bigwedge_i a^*_i\}$ . В выражении значения  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) все логические операции рассматриваются в смысле псевдо-булевой алгебры  $M$ .

7) Если  $\mathfrak{A}$  имеет вид  $\exists \langle x'_i : i \in I \rangle \mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{B}'$  определено так, как и в предыдущем правиле, то  $\mathbf{A}^\varphi$  ( $\mathfrak{A}$ ) =  $\bigvee_{\varphi'} \mathbf{A}^{\varphi'} (\mathfrak{B}')$ , где  $\varphi'$  имеет тот же смысл, что и в предыдущем правиле.

Таким образом, каждому высказыванию ранга 0 поставлен в соответствие некоторый элемент из  $M$ , а, значит, каждой формуле ранга 0 — функция от ее свободных переменных, аргументы которой принимают значения из классов объектов соответствующих типов, а значениями функции будут элементы псевдо-булевой алгебры  $M$ . Эту функцию мы обозначим через  $\mathfrak{A}^\varphi$ .

Модель  $\mathfrak{M}$  называем 0-нормальной, если для каждой формулы  $\mathfrak{A}$  ранга 0, для любой модели  $\mathfrak{M}'$ , полученной от  $\mathfrak{M}$  сужением на  $M' = \{B : B \leq A\}$ , где  $A$  — произвольный элемент псевдо-булевой алгебры  $M$ , и для любой интерпретации  $\varphi$  формулы  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}'$  существует такой объект  $a \in \mathbf{O}(a'')$ , где  $a''$  — тип формулы  $\mathfrak{A}$ , что в  $\mathfrak{M}'$  имеет место  $a^* = A$  и что  $a < x_i : i \in I >^*$  как истинностная функция от  $x_i, i \in I$ , совпадает с  $\mathfrak{A}^\varphi$ . Здесь  $x_i, i \in I$ , суть свободные переменные формулы  $\mathfrak{A}$ .

Для 0-нормальных моделей получается 1-исчисление от 0-исчисления заменой правила 1<sub>0</sub>) на правило:

1<sub>1</sub>) Если  $\mathfrak{M}$  имеет вид  $P \langle a'_i : i \in I \rangle$ , где каждое  $a'_i$  есть или константа элементарного типа или терм вида  $\mathbf{d} \langle x^i_\nu : \nu \in I_1 \rangle \mathfrak{B}_i$ , где  $\mathfrak{B}_i$  — формула ранга 0, то  $\mathbf{A}^\Phi(\mathfrak{M}) = \mathbf{a} \langle a_i : i \in I \rangle^*$ , где  $\mathbf{a} = \varphi(P)$  и  $a_i = \varphi(a'_i)$ , если  $a'_i$  — константа элементарного типа, а в случае если  $a'_i = \mathbf{d} \langle x^i_\nu : \nu \in I_1 \rangle \mathfrak{B}_i$ , то  $a_i$  есть такой объект, что  $a^*_i$  есть наибольший элемент псевдо-булевой алгебры  $M$  и что  $a_i \langle x^i_\nu : \nu \in I_1 \rangle^*$  как истинностная функция совпадает с  $\mathfrak{B}_i$ .

Пусть теперь  $\mu$  — такой ординал, что при всех  $\mu' < \mu$  определены понятия  $\mu'$ -нормальности моделей и  $\mu'$ -исчисления, так что если модель  $\mathfrak{M}$  является  $\mu'$ -нормальной при  $\mu'' < \mu'$ , если ранг высказывания  $\mathfrak{A}$  не больше  $\mu'$ , то  $\mathbf{A}^\Phi(\mathfrak{M})$  определено в  $\mu'$ -исчислении. Тогда  $\mu$ -исчисление определяется для таких моделей, которые  $\mu'$ -нормальны при всех  $\mu' < \mu$ , и всех высказываний, ранг которых не больше  $\mu$ . Определение  $\mu$ -исчисления состоит из правил 2)–7) и из правила 1 <sub>$\mu$</sub> ), аналогичного правилу 1<sub>1</sub>), отличающегося от правила 1<sub>1</sub>) только тем, что  $\mathfrak{B}_i$  — формулы ранга  $\mu_i < \mu$  и  $\mathfrak{B}_i$  рассматривается в смысле  $\mu_i$ -исчисления.

Модель, которая  $\mu'$ -нормальна при всех  $\mu' < \mu$ , будем называть  $\mu$ -нормальной, если она удовлетворяет условию, получаемому из условия 0-нормальности таким путем, что в качестве формулы  $\mathfrak{A}$  рассматриваются все формулы, ранг которых не больше  $\mu$ , понимая при этом обозначение  $\mathfrak{A}^\Phi$  в смысле  $\mu$ -исчисления. Модель называется *нормальной*, если она  $\mu$ -нормальна при всех ординалах  $\mu$ . Для такой модели определены  $\mu$ -исчисления при всех  $\mu$ . Если  $\mathfrak{A}$  — высказывание, а  $\varphi$  — интерпретация  $\mathfrak{A}$  в нормальную модель  $\mathfrak{M}$ , то  $\mathbf{A}^\Phi(\mathfrak{M})$  существует и одинаково при всех  $\mu$ -исчислениях, начиная с  $\mu$ , равного рангу высказывания  $\mathfrak{A}$ . Отображение, ставящее тройке  $\langle \mathfrak{M}, \varphi, \mathfrak{A} \rangle$  в соответствие такое  $\mathbf{A}^\Phi(\mathfrak{M})$ , мы будем называть *исчислением*.

В частном случае, если в качестве псевдо-булевой алгебры является псевдо-булева алгебра, задаваемая некоторой обобщенной моделью Бета, то изложенное понятие исчисления в псевдо-булевых алгебрах совпадает, как мы видели, с понятием исчисления в обобщенных моделях Бета, определенным в предыдущем.

## Литература

1. Таутс А., Связь обобщенных моделей Бета с топологическими псевдо-булевыми алгебрами. Настоящий сборник, стр. 3–8.
2. Кагр, С., Languages with expressions of infinite length. Amsterdam, 1964.
3. Schütte, K., Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Berlin—Heidelberg, 1968.

Поступило  
24 II 1972

# VALEMITE SEMANTILINE INTERPRETATSIOON ÜLDISTATUD BETHI MUDELITES JA PSEUDO-BOOLE'I ALGEBRATES

A. Tauts

Resümee

Teatavasti interpreteeritakse intuitsionistlikku loogikat Bethi mudelite abil. Käesolevas artiklis üldistatakse see interpretatsioon üldistatud Bethi mudelitele (vt. autori eelmine artikkel käesolevas kogumikus). Artikli lõpul näidatakse, kuidas selline interpretatsioon kandub üle mistahes täielikute pseudo-Boole'i algebradele.

## DIE SEMANTISCHE INTERPRETATION VON FORMELN DURCH VERALLGEMEINERTE BETH-MODELLE UND PSEUDO-BOOLESCHE ALGEBREN

A. Tauts

Zusammenfassung

Die in diesem Artikel gegebene Interpretation von Formeln unterscheidet sich von den üblichen Interpretationen durch Beth-Modelle in dieser Hinsicht, daß:

- 1) man verallgemeinerte Beth-Modelle betrachtet, die auch auf Grund unüberzählbarer partiell geordneter Mengen definiert sind;
- 2) die Interpretation auch unendliche Formeln umfaßt;
- 3) das Prädikatensystem typisiert ist.

Am Ende des Artikels wird ein noch allgemeiner Begriff der Interpretation gegeben, wobei statt der verallgemeinerten Beth-Modelle beliebige vollständige pseudo-Boolesche Algebren betrachtet werden.

# СЕМЕЙСТВА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ В АФФИННО-СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Парринг

Кафедра алгебры и геометрии

## Введение

В работе рассматривается семейство  $2m$ -мерных симплектических плоскостей в  $2n$ -мерном аффинно-симплектическом пространстве. В проективно-симплектическом пространстве такие семейства рассматривал Р. М. Гейдельман [3], построив для них некоторые дифференциальные формы  $\Phi_1, \dots, \Phi_{2m}$  степени  $2, \dots, 4m$ . Эти формы являются симметрическими многочленами симплектических инвариантов, через которые выражаются стационарные углы, а коэффициенты этих форм есть тензоры, выражающиеся через величины семейства окрестности первого порядка. Такие же формы найдены для окрестностей высшего порядка. Более детальное обозрение полученных результатов дано в [2].

В настоящей работе, исходя из идей работы [6], семейство симплектических плоскостей трактуется как расслоение, слоями которого являются плоскости семейства. На каждом слое этого расслоения действует группа симплектических движений, которая представима в виде полупрямого произведения  $T_{2m} * Sp$  векторной группы  $T_{2m}$  и симплектической группы. На этом расслоении естественным образом возникает внутренняя связь, которая дает возможность исследовать это расслоение.

В § 1 работы дано понятие симплектического пространства и описание симплектической группы  $Sp$  и ее алгебры Ли  $'Sp$ . Эти понятия можно найти в том или ином виде в работах [1, 3, 5, 8, 12, 14]. После этого в §§ 2 и 3 находим структурные уравнения рассматриваемого расслоения и важнейшие тензоры семейства. Использование в § 4 понятия длины симплектического бивектора и угла между симплектическими бивекторами (см. [14]), открывает возможность рассматривать в § 5 с новой точки зрения вопрос о стационарных углах между 2-мерными

симплектическими плоскостями. Получены в аффинной трактовке формы  $\Phi_1, \dots, \Phi_{2m}$  работы [3]. Далее, в § 6 вводятся понятия стрикционной индикатрисы и ее подмножества фокальной поверхности. Наконец, в § 7 к изучению расслоения симплектических плоскостей привлекаются понятия кривизны и кручения внутренней связности, а также указывается на возможность классифицировать дупараметрические семейства по кривизне.

## § 1. Понятие симплектического пространства

Пусть задано вещественное аффинное пространство  $A_N$ . Формы Пфаффа  $\omega^I$  и  $\omega^I{}_K$  ( $I, K, \dots = 1, \dots, N$ ) в формулах перемещения

$$\begin{aligned} dM &= \omega^I e_I, \\ de_I &= \omega^K{}_I e_K \end{aligned} \quad (1.1)$$

репера  $\{M, e_1, \dots, e_N\}$  пространства  $A_N$  удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{aligned} d\omega^I &= \omega^K \wedge \omega^I{}_K, \\ d\omega^I{}_K &= \omega^L{}_K \wedge \omega^I{}_L. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть  $\alpha, \beta$  — произвольные вещественные числа и  $x, y, z$  — произвольные векторы.

**Определение.** Симплектическим пространством  $Sr_N$  называется аффинное пространство  $A_N$ , в котором задано скалярное произведение  $(x, y)$ , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad (x, y) &= -(y, x), \\ 2^\circ \quad (\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z), \end{aligned} \quad (1.3)$$

3° не существует вектора  $a$ , такого, что  $(a, x) = 0$ .

Если  $x = x^I e_I, y = y^I e_I$ , то на основе 2° получим

$$(x, y) = g_{IK} x^I y^K, \quad (1.4)$$

где

$$g_{IK} = (e_I, e_K), \quad (1.5)$$

и в силу 1°

$$g_{IK} = -g_{KI}. \quad (1.6)$$

Из 3° вытекает, что  $\det |g_{IK}| \neq 0$ , а из этого, в свою очередь, следует, что размерность симплектического пространства должна быть четной, т. е.  $N = 2n$ .

Переход к новому реперу  $\{M; 'e_1, \dots, 'e_{2n}\}$  осуществляется преобразованием  $(a^I, a^I{}_K)$  аффинной группы, которая изоморфна полупрямому произведению  $T_{2n} * GL(2n, R)$  векторной группы  $T_{2n}$  и полной линейной группы  $GL(2n, R)$ . Здесь  $a^I$  являются координатами начала  $M$  и  $a^I{}_K$ -базисных векторов  $'e_I$ . Из (1.5) следует, что  $'g_{IK} = ('e_I, 'e_K)$  выражаются через  $g_{IK}$  по формулам

$$'g_{IK} = a^L{}_I g_{LM} a^M{}_K. \quad (1.7)$$

Если мы введем матричные обозначения  $G = \|g_{IK}\|$ ,  $A = \|a^I_K\|$  и будем считать индексом строки матрицы первый, соответственно верхний индекс, то (1.7) принимает вид

$$'G = A^T G A. \quad (1.8)$$

Здесь  $T$  — знак транспонирования. Разложим  $A$  и  $'G$  по формуле Тейлора:

$$A = E + \omega + \dots, \quad 'G = G + dG + \dots,$$

где  $E$  — единичная матрица и  $\omega$  — элемент алгебры Ли линейной группы  $GL(2n, R)$ . Подставляя эти разложения в (1.8) и приравнивая члены первой степени, получаем

$$dG = \omega^T G + G \omega. \quad (1.9)$$

Этот же результат можно получить из (1.5) после дифференцирования с помощью (1.1):

$$dg_{IK} = g_{LK} \omega^L_I + g_{IL} \omega^L_K. \quad (1.10)$$

Таким образом,  $\omega = \|\omega^I_K\|$ . Используя (1.6), можем (1.9) писать в виде

$$dG = \omega^T G - (\omega^T G)^T. \quad (1.11)$$

При фиксированной кососимметрической матрице  $G$  в группе  $GL(2n, R)$  выделяется подгруппа  $Sp(G) = \{A \mid A \in GL(2n, R), A^T G A = G\}$ , которая называется *симплектической группой*. Соответствующая подгруппа  $T_{2n} * Sp(G)$  в аффинной группе  $T_{2n} * GL(2n, R)$  изоморфна группе симплектических движений. Если рассмотрим множество реперов, преобразующихся друг в друга при помощи  $T_{2n} * Sp(G)$ , то для них  $dG = 0$ . Из (1.11) следует

$$\omega^T G = (\omega^T G)^T, \quad (1.12)$$

т. е. в этом случае  $\omega^T G$  становится симметрической матрицей. В частном случае, когда

$$G = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E \\ -E & 0 \end{array} \right\|, \quad (1.13)$$

группу  $Sp(G)$  обозначим  $Sp$ . Здесь  $0$  и  $E$  — соответственно нулевая и единичная матрица порядка  $n$  (см. [5]). Реперы, относительно которых  $G$  имеет вид (1.13), называются *симплектическими реперами*. Группа  $T_{2n} * Sp$  сохраняет симплектичность репера. В симплектическом репере формула (1.4) принимает, в силу (1.13), вид:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \sum_{i=1}^n x^i y^{n+i}. \quad (1.14)$$

<sup>1</sup> Часто  $G$  берется в виде

$$G = \left\| \begin{array}{ccc} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_n \end{array} \right\|,$$

где диагональные клетки имеют вид  $G_i = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|$  (см. [8, 12]).

Из определения группы  $Sp$  следует, что каждый ее элемент имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix},$$

где  $A_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — матрицы порядка  $n$ , удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} A^{T_1}A_3 &= (A^{T_1}A_3)^T, \\ A^{T_2}A_4 &= (A^{T_2}A_4)^T, \\ A^{T_1}A_4 &= A^{T_3}A_2 + E. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из первых соотношений следует, что  $A^{T_1}A_3$  и  $A^{T_2}A_4$  симметричны. Кроме того, для  $A \in Sp$  известно, что  $\det |A| = 1$ . Действительно, в [8] показано, что элементарные делители матрицы  $A$  всегда получаются следующими парами

$$\begin{aligned} \text{a) } & (\lambda - \rho)^m, (\lambda - \rho^{-1})^m, \quad \rho \neq \pm 1, \\ \text{b) } & (\lambda + 1)^{2m+1}, (\lambda + 1)^{2m+1}, \\ \text{c) } & (\lambda - 1)^{2m+1}, (\lambda - 1)^{2m+1}, \end{aligned}$$

за исключением делителей вида  $(\lambda \pm 1)^{2m}$ . Отсюда непосредственно следует, что  $\det |A'| = 1$ , где  $A' = S^{-1}AS$  — нормальная форма Жордана для  $A$ . Поэтому,  $\det |A'| = \det |A|$ .

Часто полезно знать «элементарные» элементы группы  $Sp$ , порождающие в виде их произведения любой элемент группы  $Sp$ . При них базисные векторы преобразуются следующим образом (см. [13]):

$$'e_i = e_i + \lambda e_{i+n} \quad (\alpha \neq i) \quad (1.16a)$$

или

$$\begin{aligned} 'e_\alpha &= e_\alpha \\ 'e_{i+n} &= e_{i+n} + \lambda e_i \\ 'e_\alpha &= e_\alpha \quad (\alpha \neq i+n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 'e_i &= \lambda e_i \\ 'e_{i+n} &= \frac{1}{\lambda} e_{i+n} \end{aligned} \quad (1.16b)$$

$$'e_\alpha = e_\alpha \quad (\alpha \neq i, i+n),$$

$$\begin{aligned} 'e_i &= e_i + \lambda e_{j+n} \\ 'e_j &= e_j + \lambda e_{i+n} \quad (\alpha \neq i, j) \\ 'e_\alpha &= e_\alpha \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 'e_{i+n} &= e_{i+n} + \lambda e_j \\ 'e_{j+n} &= e_{j+n} + \lambda e_i \\ 'e_\alpha &= e_\alpha \quad (\alpha \neq i+n, j+n), \end{aligned} \quad (1.16c)$$

или

$$\begin{aligned} 'e_i &= e_i + \lambda e_j \\ 'e_{j+n} &= e_{j+n} - \lambda e_{i+n} \\ 'e_\alpha &= e_\alpha \quad (\alpha \neq i, j+n). \end{aligned}$$

В этих формулах  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $\alpha = 1, \dots, 2n$ .

Познакомимся еще со строением элемента алгебры Ли  $'Sp$  группы  $Sp$ . Для этого представим  $\omega$  в виде:

$$\omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_4 \end{vmatrix}.$$

Из (1.12) следует, что

$$\omega_2 = \omega^{T_2}, \quad \omega_3 = \omega^{T_3}, \quad \omega_1 + \omega^{T_4} = 0. \quad (1.17)$$

Итак,  $\omega$  имеет следующее строение:

$$\omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & -\omega^{T_1} \end{vmatrix},$$

где  $\omega_2$  и  $\omega_3$  симметричны. Из формул (1.4), (1.5) и (1.12) вытекает следующее соотношение:

$$(\omega \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{x}, \omega \mathbf{y}), \quad (1.18)$$

т. е.  $\omega$  определяет некоторое кососимметрическое преобразование векторов симплектического пространства.

## § 2. Структурные уравнения расслоенного пространства семейства плоскостей

Пусть в  $Sp_{2n}$  задано  $a$ -параметрическое семейство симплектических  $2m$ -мерных плоскостей  $Sp_{2m}$ , образующих в соответствующем грасмановом многообразии  $a$ -мерное дифференцируемое подмногообразие; последнее обозначим  $B_a(2m, 2n)$ . Если  $\theta^\alpha (\alpha, \beta, \dots = 1, \dots, a)$  составляет репер в каждой точке некоторой области  $U \subset B_a(2m, 2n)$ , то система Пфаффа  $\theta^\alpha = 0$  вполне интегрируема, т. е.

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

и первые интегралы этой системы определяют координаты точки из  $U$ . При фиксации точки имеем  $\theta^\alpha = 0$ , заданное семейство определяет расслоенное пространство с базой  $B_a(2m, 2n)$ , слоями которого являются плоскости  $Sp_{2m}$  семейства. Симплектическая метрика индуцирует естественную связность в этом расслоенном пространстве. Именно, для каждой плоскости семейства получается ее ортогональное дополнение, вследствие чего на расслоенном пространстве возникает горизонтальное распределение, определяющее связность (ср. [6]).

Выберем в  $Sp_{2n}$  следующий репер: начало репера  $M$  и векторы  $\mathbf{e}_i (i, j, \dots = 1, \dots, 2m)$  пусть находятся на плоскости семейства, а остальные векторы  $\mathbf{e}_p (p, q, \dots = 2m+1, \dots, 2n)$  пусть перпендикулярны к ней. Такой репер называется *полука-ноническим*. Так как  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_p) = 0$ , то в этом репере

$$\|g_{IK}\| = \begin{vmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{pq} \end{vmatrix}.$$

Из (1.10) следует, что

$$g_{pq}\omega^p_i + g_{ij}\omega^j_q = 0, \quad (2.2)$$

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ih}\omega^h_j. \quad (2.3)$$

Введем  $g^{jh}$ , определенные равенством  $g_{ij}g^{jh} = \delta^k_i$ . Тогда (2.2) дает

$$\omega^k_q = g_{qp}g^{ki}\omega^p_i. \quad (2.4)$$

Если фиксировать точку базы  $B_a(2m, 2n)$ , то  $\theta^\alpha = 0$ . При этом фиксируется и плоскость семейства — слой над этой точкой. Из (1.1) следует, что тогда

$$\omega^p = 0, \quad \omega^p_i = 0. \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$\omega^p = \Lambda^p_\alpha \vartheta^\alpha, \quad \omega^p_i = \Lambda^p_{i\alpha} \vartheta^\alpha. \quad (2.6)$$

С помощью (1.2) и (2.6) найдем структурные уравнения рассматриваемого расслоенного пространства:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega^i_j + \Omega^i, \\ d\omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \Omega^i_j. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь

$$\Omega^i = \omega^p \wedge \omega^i_p = P^i_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta = \frac{1}{2} T^i_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta, \quad (2.8)$$

$$\Omega^i_j = \omega^p_j \wedge \omega^i_p = Q^i_{j\alpha\beta} \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta = \frac{1}{2} R^i_{j\alpha\beta} \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} P^i_{\alpha\beta} &= g_{pq}g^{ij}\Lambda^p_\alpha\Lambda^q_{j\beta}, \\ Q^i_{j\alpha\beta} &= g_{pq}g^{il}\Lambda^p_{j\alpha}\Lambda^q_{l\beta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

и

$$T^i_{\alpha\beta} = 2P^i_{[\alpha\beta]}, \quad R^i_{j\alpha\beta} = 2Q^i_{j[\alpha\beta]}. \quad (2.11)$$

Значит, формы  $\Omega^i$  и  $\Omega^i_j$  являются полубазовыми. По [4] (см. также [7]) на расслоении  $B_a(2m, 2n)$  возникает однозначно определенная аффинная симплектическая связность с формами связности  $\omega^i$  и  $\omega^i_j$ . Здесь 2-формы  $\Omega^i$  и  $\Omega^i_j$  называются, соответственно, *формами кручения* и *кривизны*. При внешнем дифференцировании из (2.7) получаются тождества Бианки

$$\begin{aligned} d\Omega^i &= \omega^k \wedge \Omega^i_k - \Omega^k \wedge \omega^i_k, \\ d\Omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \Omega^i_k - \Omega^k_j \wedge \omega^i_k, \end{aligned} \quad (2.12)$$

а из (2.3) соотношения

$$g_{kj}\Omega^k_i + g_{ik}\Omega^k_j = 0. \quad (2.13)$$

Если ввести матрицы  $G_1 = \|g_{kj}\|$ ,  $\Omega = \|\Omega^k_i\|$ , то из последнего получаем

$$G_1\Omega = (G_1\Omega)^T,$$

т. е.  $G_1\Omega$  симметрична.

**Примечание.** С каждым слоем расслоенного пространства  $B_a(2m, 2n)$  связано  $2(n-m)$ -направление, которое определяется как ортогональное дополнение к слою. В полуканоническом репере это  $2(n-m)$ -направление задается векторами  $e_{2m+1}, \dots, e_{2n}$ . Возникает векторное расслоение с  $a$ -мерной базой, которое мы обозначим  $B'_a(2(n-m), 2n)$ ; его слоями являются указанные  $2(n-m)$ -направления.

Для  $B'_\alpha(2(n-m), 2n)$  удовлетворяется вторая из формул (2.6). Структурные уравнения этого расслоения состоят из (2.1) и

$$d\omega^p_q = \omega^i_q \wedge \omega^p_i + \Omega^p_q. \quad (2.14)$$

Здесь

$$\Omega^p_q = \omega^i_q \wedge \omega^p_i = Q^p_{q\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta = \frac{1}{2} R^p_{q\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta,$$

где

$$Q^p_{q\alpha\beta} = g_{qr} g^{ki} \Lambda^r_{i\alpha} \Lambda^p_{k\beta}, \quad (2.15)$$

$$R^p_{q\alpha\beta} = 2Q^p_{q[\alpha\beta]}. \quad (2.16)$$

Аналогично, как в случае расслоения  $B_\alpha(2m, 2n)$ , также в  $B'_\alpha(2(n-m), 2n)$  возникает линейная симметрическая связность с формами связности  $\omega^p_q$  и формами кривизны  $\Omega^p_q$ .

### § 3. Тензоры семейства

При помощи уравнений семейства (2.6) можно определить целый ряд тензоров расслоений  $B_\alpha(2m, 2n)$ .

После внешнего дифференцирования и применения леммы Картана, из (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda^p_\alpha &= \Lambda^p_{h\alpha} \omega^h + \Lambda^p_{\alpha\beta} \theta^\beta, & \Lambda^p_{[\alpha\beta]} &= 0, \\ \nabla \Lambda^p_{i\alpha} &= \Lambda^p_{i\alpha\beta} \theta^\beta, & \Lambda^p_{i[\alpha\beta]} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda^p_\alpha &= d\Lambda^p_\alpha + \Lambda^q_\alpha \omega^p_q - \Lambda^p_\beta \theta^\beta_\alpha, \\ \nabla \Lambda^p_{i\alpha} &= d\Lambda^p_{i\alpha} + \Lambda^q_{i\alpha} \omega^p_q - \Lambda^p_{j\alpha} \omega^j_i - \Lambda^p_{i\beta} \theta^\beta_\alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Теперь из (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} \nabla P^i_{\alpha\beta} &= Q^i_{h\alpha\beta} \omega^h + P^i_{\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma, \\ \nabla Q^i_{j\alpha\beta} &= Q^i_{j\alpha\beta\gamma} \theta^\gamma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} P^i_{\alpha\beta\gamma} &= g_{pq} g^{ij} (\Lambda^p_{\alpha\gamma} \Lambda^q_{j\beta} + \Lambda^p_\alpha \Lambda^q_{j\beta\gamma}), \\ Q^i_{j\alpha\beta\gamma} &= g_{pq} g^{il} (\Lambda^p_{j\alpha\gamma} \Lambda^q_{l\beta} + \Lambda^p_{j\alpha} \Lambda^q_{l\beta\gamma}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Кроме того, здесь  $P^i_{[\alpha\beta\gamma]} = Q^i_{j[\alpha\beta\gamma]} = 0$ , как это следует из (3.4) или (2.12), после подстановок из (2.3) и (2.9). Формулы, аналогичные (3.3), получаем для  $P^i_{(\alpha\beta)}$ ,  $Q^i_{j(\alpha\beta)}$  и  $T^i_{\alpha\beta}$ ,  $R^i_{j\alpha\beta}$ , если мы в (3.3) выделяем соответственно симметрическую и кососимметрическую части.

Таким образом,  $\Lambda^p_{i\alpha}$ ,  $Q^i_{j\alpha\beta}$ ,  $Q^i_{j(\alpha\beta)}$  и  $R^i_{j\alpha\beta}$  являются тензорами, а  $\Lambda^p_\alpha$ ,  $P^i_{\alpha\beta}$ ,  $P^i_{(\alpha\beta)}$  и  $T^i_{\alpha\beta}$  — тензоры только при фиксации точки на слое расслоенного пространства.

Определим еще один симметрический тензор формулой

$$Q_{\alpha\beta} = Q^i{}_{i\alpha\beta}. \quad (3.5)$$

Симметричность этого тензора следует из (2.10). Он дает возможность определить на базисном многообразии  $B_a(2m, 2n)$  новое скалярное произведение, которое определяется коэффициентами второго уравнения (2.6) семейства плоскостей. В дальнейшем мы предполагаем, что  $\det |Q_{\alpha\beta}| \neq 0$ . Тогда существует симметрический тензор  $Q^{\alpha\beta}$ , такой что  $Q_{\alpha\beta}Q^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ . С помощью  $Q^{\alpha\beta}$  получаем новый кососимметрический тензор

$$Q_{ij} = g_{pq} \Lambda^p{}_{i\alpha} \Lambda^q{}_{j\beta} Q^{\alpha\beta}. \quad (3.6)$$

Кососимметрическим тензором является также

$$V_{ij} = \sum_{\alpha} g_{pq} \Lambda^p{}_{i\alpha} \Lambda^q{}_{j\alpha}. \quad (3.7)$$

На каждом слое найдется такой симплектический репер, относительно которого заданный кососимметричный тензор  $Q_{ij}$  имеет следующую матрицу компонентов (см. [13]):

$$\begin{vmatrix} 0 & A^T \\ -A & 0 \end{vmatrix},$$

где  $A$  имеет клеточно-диагональный вид с диагональными клетками Жордана следующих типов:

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Здесь  $\lambda_0$  — корень характеристического полинома  $\det |Q^{h_i} - \lambda \delta^{h_i}| = 0$ ,  $Q^{h_i} = Q_{ij} g^{jh}$ . Корень  $\lambda_0$  может равняться и нулю. Если  $\lambda_0$  — комплексное число, т. е.  $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ , то соответствующую клетку матрицы  $A$  можно привести к виду

$$\begin{vmatrix} A_0 & E & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 & E \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_0 \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

где

$$A_0 = \begin{vmatrix} \mu_0 & -\nu_0 \\ \nu_0 & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\mu_0$  может равняться нулю.

Так как корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения  $\det |Q^{h_i} - \lambda \delta^{h_i}| = 0$  не изменяются при преобразовании репера на слое, то они являются инвариантами слоя, т. е. инвариантами в каждой точке  $B_a(2m, 2n)$ . Возникают поля этих инвариантов  $\lambda_i = \lambda_i(P)$ ,  $P \in B_a(2m, 2n)$ .

С помощью тензора  $Q^i_{j\alpha\beta}$  можно определить следующие новые тензоры:

$$Q_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = Q^{[i_1}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots Q^{i_k]}_{i_k \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (3.10)$$

$$R_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = Q_{[\alpha_1 \dots \alpha_{2k}]} = \frac{1}{2^k} R^{[i_1}_{\alpha_1 \alpha_2} \dots R^{i_k]}_{i_k \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (3.11)$$

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = Q_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2k})}, \quad (3.12)$$

где  $k = 1, 2, \dots, 2m$ . При  $k = 1$  отсюда получим:  $S_{\alpha_1 \alpha_2} = Q_{\alpha_1 \alpha_2}$ ,  $R_{\alpha_1 \alpha_2} = 0$ .

**Примечание.** Применяя (3.2), получим  $\nabla Q^p_{q\alpha\beta} = 0 \pmod{\theta^p}$ . Следовательно,  $Q^p_{q\alpha\beta}$  и  $R^p_{q\alpha\beta}$  — тензоры расслоения  $B'_\alpha(2(n-m), 2n)$ . Тензорами  $B'_\alpha(2(n-m), 2n)$  являются еще

$$'Q_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = Q^{[p_1}_{p_1 \alpha_1 \alpha_2} \dots Q^{p_k]}_{p_k \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (3.13)$$

$$'R_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = 'Q_{[\alpha_1 \dots \alpha_{2k}]} = \frac{1}{2^k} R^{[p_1}_{p_1 \alpha_1 \alpha_2} \dots R^{p_k]}_{p_k \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}}, \quad (3.14)$$

$$'S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = 'Q_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2k})}, \quad (3.15)$$

где  $k = 1, 2, \dots, 2(n-m)$ . При этом

$$'S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}. \quad (3.16)$$

Из формул (3.10)–(3.16) следует  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} = 0$ , если  $k > \min(m, n-m)$ .

Тензоры  $R_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}$  индуцируют на  $B_\alpha(2m, 2n)$  следующие  $2k$ -формы

$$\Omega_{2k} = R_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_{2k}} = \frac{1}{2^k} \Omega^{i_1}_{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega^{i_k}_{i_k}.$$

Отсюда при помощи (2.12), следует, что  $d\Omega_{2k} = 0$ , т. е.  $2k$ -формы  $\Omega_{2k}$  замкнуты.

Все  $\Omega_{2k} = 0$ , если все  $\Omega^i_j = 0$ .

#### § 4. Угол между двумерными симплектическими плоскостями

Определяем угол между двумерными симплектическими плоскостями в  $Sp_{2n}$ , применяя формулу угла, данную в [14].

Так как  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  при любом  $\mathbf{x} \in Sp_{2n}$ , то нет никакой возможности определить длину вектора и, следовательно, угла между векторами. Но для бивекторов это можно сделать.

Пусть в  $Sp_{2n}$  задано два бивектора  $\mathbf{u} = u^{IK} e_I \wedge e_K$  и  $\mathbf{v} = v^{LM} e_L \wedge e_M$ , где  $e_I \wedge e_K (= -e_K \wedge e_I)$  — базис бивекторного пространства. Их скалярное произведение  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  определяется формулой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^{IK} v^{LM} g_{IL} g_{KM}. \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что это скалярное произведение коммутативно и линейно, т. е.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$  и  $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , где  $\alpha, \beta$  — любые вещественные числа, а  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  — любые бивекторы. Из (4.1) получаем

$$(\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_K, \mathbf{e}_L \wedge \mathbf{e}_M) = 2(g_{IL}g_{KM} - g_{IM}g_{KL}), \quad (4.2)$$

при этом имеют место следующие правила перестановки:

$$(\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_K, \mathbf{e}_L \wedge \mathbf{e}_M) = -(\mathbf{e}_K \wedge \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_L \wedge \mathbf{e}_M) = -(\mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_K, \mathbf{e}_M \wedge \mathbf{e}_L) = \\ = (\mathbf{e}_L \wedge \mathbf{e}_M, \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_K).$$

Коммутативность скалярного произведения  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  гарантирует, что в общем случае  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$ , а это дает возможность определить длину  $|\mathbf{u}|$  бивектора  $\mathbf{u}$  формулой

$$|\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u^{IK}u^{LM}g_{IL}g_{KM}. \quad (4.3)$$

Длина бивектора может оказаться и мнимой. Действительно, в симплектическом репере (4.3) имеет вид

$$|\mathbf{u}|^2 = 2 \sum_{A, B=1}^n (u^{AB}u^{A+n, B+n} - u^{A, B+n}u^{A+n, B}). \quad (4.4)$$

Возьмем такой симплектический репер, в котором  $u^{ij}$  имеет самый простой вид. Эти виды заданы формулами (3.8) и (3.9). Если все клетки Жордана у  $u^{ij}$  имеют вид (3.8) с вещественными диагональными элементами, то из (4.4) следует:

$$|\mathbf{u}|^2 = 2(s_1\lambda_1^2 + s_2\lambda_2^2 + s_\varphi\lambda_\varphi^2) \geq 0.$$

Здесь  $s_1, s_2, \dots, s_\varphi$  — степени, а  $\varphi$  — число элементарных делителей. Отсюда следует, что  $|\mathbf{u}| = 0$  только тогда, когда  $\lambda_1 = \dots = \lambda_\varphi = 0$ . Если некоторая клетка Жордана имеет вид (3.9), т. е.  $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ , где  $\mu_0 \neq 0$  и  $\nu_0 \neq 0$  — комплексное собственное значение, то в сумме (4.4) появляются члены типа  $\mu_0^2 - \nu_0^2$ . В таких случаях может оказаться, что  $|\mathbf{u}|^2 < 0$ .

Если  $|\mathbf{u}| \neq 0$ ,  $|\mathbf{v}| \neq 0$ , то угол  $\varphi$  между бивекторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  определяется формулой:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}. \quad (4.5)$$

Здесь возникают следующие типы углов:

а) При любых  $\alpha, \beta$  имеет место  $|\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}|^2 \geq 0$  (или  $|\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}|^2 \leq 0$ ). Тогда  $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ , т. е.  $\varphi$  — вещественное число.

б) Имеет место  $|\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}| \leq (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . Тогда существует вещественное число  $\psi$ , такое что  $\cos \varphi = \operatorname{ch} \psi = \cosh \psi$ , т. е. угол  $\varphi = i\psi$  — чисто мнимое число.

с) Имеет место  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq -|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$ . Тогда существует вещественное  $\psi$ , такое что  $\cos \varphi = -\operatorname{ch} \psi = \cos(\pi - i\psi)$ , т. е. угол  $\varphi = \pi - i\psi$ , где  $\psi \neq 0$ .

д) Имеет место  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 [|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|]^{-2} \leq 0$ . Тогда существует вещественное  $\psi \neq 0$ , такое что

$$\cos \varphi = i \operatorname{sh} \psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\psi\right).$$

Мы применим формулу (4.5) в случае, когда  $\mathbf{u}$  — простой бивектор:

$$\mathbf{u} = 2! x_1^{I_1} x_2^{K_1} \mathbf{e}_I \wedge \mathbf{e}_K,$$

где  $\mathbf{x}_1 = x_1^I \mathbf{e}_I$  и  $\mathbf{x}_2 = x_2^{I_1} \mathbf{e}_{I_1}$ , и 2-плоскость, параллельная в векторам  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ , симплектична, т. е. площадь  $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|$  параллелограмма на векторах  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  не равна нулю. Здесь формула площади является частным случаем общей формулы объема

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2m}) = \frac{(2m)!}{2^m m!} |x_1^{I_1} \dots x_{2m}^{I_{2m}} g_{I_1 I_{m+1}} \dots g_{I_m I_{2m}}|$$

параллелепипеда на векторах  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2m}$ . При таких предположениях (4.3) дает  $|\mathbf{u}|^2 = 2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^2 > 0$ . Значит, в определении угла (4.5) в случае простых бивекторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  возможность д) отпадает.

**Определение.** Углом между симплектическими 2-плоскостями называется угол между простыми бивекторами, определяющимися этими 2-плоскостями.

**Пример.** Пусть в  $Sp_4$  заданы две 2-плоскости, и на них, соответственно, векторы  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (s, 0, 0, 0)$  и  $\mathbf{y}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (0, 0, 1, t)$ . Этим плоскостям соответствуют простые бивекторы  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , матрицы координат которых следующие:

$$u^{IJ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad v^{IJ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -t & -t & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

По (4.4) длины  $|\mathbf{u}| = |s|$ ,  $|\mathbf{v}| = |t + 1|$ . Данные плоскости симплектичны при любых значениях параметров  $s, t$ , кроме  $s = 0$ ,  $t = -1$ . Так как  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = s/2$ , то

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{s}{|s| |t + 1|}.$$

При изменении параметров  $s, t$  с  $s \neq 0$  и  $t \neq -1$  плоскости остаются симплектическими и между ними реализуются все типы углов а), б) и с).

## § 5. Стационарные углы

Пусть в  $Sp_{2n}$  заданы две плоскости  $U$  и  $V$ , на которых заданы некоторые базисы  $\{x_1, \dots, x_{2l}\}$  и  $\{y_1, \dots, y_{2k}\}$ . Пусть еще заданы симплектические 2-плоскости  $U_1 \subset U$ ,  $V_1 \subset V$ , определенные ими простые бивекторы

$$u = u^{ab} x_a \wedge x_b, \quad v = v^{cd} y_c \wedge y_d, \quad (5.1)$$

где  $a, b = 1, \dots, 2l$ ;  $c, d = 1, \dots, 2k$ . Не ограничивая общности, можно предположить  $(u, u) = (v, v) = 1$ . Найдем стационарный угол  $\varphi$  между  $U$  и  $V$ . При этом *стационарным углом* называем такой угол  $\varphi$ , при котором  $\cos \varphi$  имеет стационарное значение. У нас  $\cos \varphi = (u, v)$ . Нахождение стационарного значения  $\cos \varphi$  при сделанных предположениях равносильно задаче нахождения стационарного значения функции Лагранжа

$$\mathfrak{B} = (u, v) + \frac{\lambda}{2} [(u, u) - 1] + \frac{\mu}{2} [(v, v) - 1],$$

где  $\lambda, \mu$  — постоянные. Используя (5.1), линейность скалярного произведения и условия стационарности

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u^{ab}} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v^{cd}} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} (x_a \wedge x_b, v - \cos \varphi u) &= 0, \\ (y_c \wedge y_d, u - \cos \varphi v) &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Мы применяем найденные уравнения для нахождения стационарных углов двух бесконечно близких плоскостей  $\pi$  и  $\pi'$  семейства симплектических  $2m$ -мерных плоскостей. В результате получается некоторая интерпретация тензоров  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}$ , которая в аффинно-симплектическом случае и в новом изложении соответствует интерпретации, найденной для проектно-симплектического случая в [3].

Пусть  $\{e_i\}$  и  $\{e'_i\}$  — базисы двух бесконечно близких плоскостей  $\pi$  и  $\pi'$  нашего семейства. Применяем (5.2) к этим плоскостям:

$$(e_i \wedge e_j, v - \cos \varphi \cdot u) = 0, \quad (5.3)$$

$$(e'_i \wedge e'_j, u - \cos \varphi \cdot v) = 0.$$

Подставляя в (5.3)

$$e'_i \wedge e'_j = e_i \wedge e_j + d(e_i \wedge e_j) + \frac{1}{2} d^2(e_i \wedge e_j) + o_{ij},$$

$$v = u + du + \frac{1}{2} d^2 u + \xi,$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + o,$$

$$\operatorname{ch} \psi = 1 + \frac{\psi^2}{2} + o_1$$

и приравнивая нулю члены одного порядка, получаем для случаев а), б) и с) соответственно:

$$\begin{aligned}
 (e_i \wedge e_j, du) &= 0 \\
 (e_i \wedge e_j, d^2u + \varphi^2 u) &= 0, \\
 (d(e_i \wedge e_j), du) &= \varphi^2 (e_i \wedge e_j, u) \\
 (e_i \wedge e_j, du) &= 0 \\
 (e_i \wedge e_j, d^2u - \psi^2 u) &= 0, \\
 (d(e_i \wedge e_j), du) &= -\psi^2 (e_i \wedge e_j, u) \\
 (e_i \wedge e_j, u) &= 0 \\
 (e_i \wedge e_j, du) &= 0 \\
 (e_i \wedge e_j, d^2u + \psi^2 u) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

В случае с) первое уравнение дает  $u^{ij} = 0$ , т. е.  $|u| = 0$ , но у нас  $|u| = 1$ . Следовательно, среди стационарных углов между двумя бесконечно близкими симплектическими  $2m$ -плоскостями нет угла типа с). В интересах одновременного исследования случаев а) и б) переходим и в случае б) к обозначению  $\varphi$  вместо  $\psi$ . Чтобы переписать (5.4) в координатном виде, найдем выражения для  $d(e_i \wedge e_j)$  и  $du$

$$\begin{aligned}
 d(e_i \wedge e_j) &= de_i \wedge e_j + e_i \wedge de_j = 2(\omega_{[j}^k e_{i]} \wedge e_k + \omega_{[j}^p e_{i]} \wedge e_p), \\
 du &= d(u^{ij} e_i \wedge e_j) = \nabla u^{ij} e_i \wedge e_j + 2u^{ij} \omega_{[j}^p e_{i]} \wedge e_p.
 \end{aligned}$$

Теперь первые соотношения (5.4) дают  $\nabla u^{ij} = 0$ . Это значит, что  $u$  должен быть тензором на слое. Следовательно, в этом случае,

$$du = 2u^{ij} \omega^p_{ij} e_i \wedge e_p.$$

Из последних трех соотношений (5.4) следует

$$u^{k[n} g^{m]i} \omega^p_{ij} \omega^q_{hk} g_{pq} = \pm \varphi^2 / 2 u^{k[n} \delta^{m]}. \tag{5.5}$$

Обозначая

$$B^m_k = g^{mi} \omega^p_{ij} \omega^q_{hk} g_{pq} \mp \varphi^2 / 2 \delta^m_k,$$

из (5.5) получаем

$$u^{k[n} B^m]_k = 0. \tag{5.6}$$

Матричный вид этой формулы таков:

$$BU - (BU)^T = 0, \tag{5.7}$$

где  $B = \|B_k^m\|$ ,  $U = \|u^{kn}\|$ .

Познакомимся теперь со структурой матрицы  $B$ . Обозначим через  $\Psi = \|\Psi_{ik}\|$  матрицу с элементами

$$\Psi_{ik} = \omega^p_{ij} \omega^q_{hk} g_{pq} = A^p_{i\alpha} \Lambda^{q\beta}_{j\beta} g_{pq} \partial^\alpha \partial^\beta.$$

Так как  $\Psi_{ik} = -\Psi_{ki}$ , то  $\Psi$  имеет структуру

$$\Psi = \begin{vmatrix} K_1 & L \\ -L^T & K_2 \end{vmatrix},$$

где  $K_1$ ,  $K_2$  и  $L$  — матрицы порядка  $m$ , первые две из которых кососимметричны. Для изучения структуры  $\Psi^l_k = g^{li} \Psi_{ik}$  предположим, что базисные векторы  $e_i$  составляют в плоскости  $\pi$  семейства симплектический репер, т. е.

$$\|g^{ij}\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & 0 \end{array} \right\|. \quad (5.8)$$

Относительно этого симплектического репера получаем

$$\|\Psi^i_k\| = \left\| \begin{array}{cc} L^T & -K_2 \\ K_1 & L \end{array} \right\|,$$

и, следовательно,

$$B = \left\| \begin{array}{cc} L^T \mp \frac{\varphi^2}{2} E & -K_2 \\ K_1 & L \mp \frac{\varphi^2}{2} E \end{array} \right\|.$$

При этом симплектический репер можно выбрать так, чтобы  $U$  имел вид

$$U = \left\| \begin{array}{cc} 0 & U_1 \\ -U_1^T & 0 \end{array} \right\|.$$

При этом  $U_1$  имеет клеточно диагональный вид. Теперь (5.7) можно переписать в следующем виде:

$$K_1 U_1 = (K_1 U_1)^T, \quad K_2 U_1 = (K_2 U_1)^T,$$

$$\left( L^T \mp \frac{\varphi^2}{2} E \right) U_1 + \left[ \left( L \mp \frac{\varphi^2}{2} E \right) U_1 \right]^T = 0.$$

Обозначая  $K_1$ ,  $-K_2$  и  $L^T \mp (\varphi^2/2)E$  одним символом  $A$ , для последних соотношений получаем общий вид:

$$A U_1 + U_1^T A = 0. \quad (5.10)$$

Из простоты бивектора  $U$  следует, что  $\text{rang } U = 2$ . Следовательно,

$$U_1 = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

причем  $\lambda_0 \neq 0$  — вещественное число. Теперь из (5.10), в свою очередь, следует, что у матрицы  $A$  элементы первого столбца и первой строки все равны нулю. Это влияет и на структуру матрицы  $B$ . У нее столбцы и строки с индексами 1 и  $m+1$  состоят из нулей. Таким образом,  $\det |B| = 0$ , т. е.  $\det |\Psi^i_k - \mu \delta^i_k| = 0$ , причем  $\mu = \pm \varphi^2/2$ . Полученное уравнение для  $\mu$  имеет вид

$$\mu^{2m} - \Phi_1 \mu^{2m-1} + \Phi_2 \mu^{2m-2} - \dots + \Phi_{2m} = 0, \quad (5.11)$$

где

$$\Phi_1 = \Psi^i_k = g^{hi} \omega^p \omega^q \delta^k_h g_{pq} = Q^h_{k(\alpha\beta)} \theta^\alpha \theta^\beta = Q_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta,$$

$$\Phi_2 = Q^{[i}_{i_1 \alpha_2} Q^{j]}_{j_1 | \alpha_3 \alpha_4} \theta^{\alpha_1} \theta^{\alpha_2} \theta^{\alpha_3} \theta^{\alpha_4},$$

$$\Phi_{2m} = \Psi^{[i_1 \dots i_{2m}]}_{i_1 \dots i_{2m}} = Q^{[i_1}_{i_1 (\alpha_1 \alpha_2} \dots Q^{i_{2m}]}_{i_{2m} | \alpha_{4m-1} \alpha_{4m}} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_{4m}}.$$

Применяя (3.12), формулы для  $\Phi_k$  можно переписать следующим образом:

$$\Phi_k = S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{2k}, \quad (5.12)$$

где  $k = 1, \dots, 2m$ .

Так как  $\Psi_{ik}$  — косимметрическая матрица, то  $\Psi = \|\Psi_{ik}\|$  является симметрическим преобразованием векторного пространства, натянутого на векторы  $e_1, \dots, e_{2m}$ , т. е. при любых  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  из этого пространства будет  $(\mathbf{x}, \Psi\mathbf{y}) = (\Psi\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Следовательно, (5.11) имеет всегда четнократные корни (см. [8]). Игак, в левой части (5.11) полный квадрат. Поэтому (5.11) равносильно следующему уравнению:

$$\mu^m + A_1 \mu^{m-1} + A_2 \mu^{m-2} + \dots + A_m = 0, \quad (5.13)$$

где

$$\sum_{\substack{i,j=k \\ i,j \leq m}} A_i A_j = (-1)^k \Phi_k. \quad (5.14)$$

Здесь  $k = 1, \dots, 2m$ , а  $i, j$  изменяются, начиная от 0, так что  $i + j = k$  и  $i, j \leq m$ , причём  $A_0$  считаем равным 1. Из (5.14) последовательно найдем  $A_1, \dots, A_m$ .

Итак, для того, чтобы найти стационарные углы, надо составить уравнение (5.13), корни которого определяют стационарные углы. После этого из (5.5) найти соответствующие симплектические бивекторы. Если бивектор простой, тогда он определяет симплектическое 2-направление. Угол между этим бивектором и ему близким бивектором первого порядка является стационарным.

Из (5.12) следует также геометрическая интерпретация тензоров  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2k}}$ .

Величины  $\Phi_k$  ( $k = 1, \dots, 2m$ ) зависят от выбора вектора  $\mathbf{X} \in T_x$ . Здесь  $T_x$  — касательное пространство базы расслоения  $B_a(2m, 2n)$  в точке  $\mathbf{x}$ , слоением над которой является симплектическая  $2m$ -плоскость  $\pi$ . При каждом векторе  $\mathbf{X}$  надо вычислить значения форм  $\Phi_k$ . Стационарные углы пары  $(\pi, \pi')$  бесконечно близких плоскостей расслоения  $B_a(2m, 2n)$  зависят от того, каким вектором  $\mathbf{X}$  определяется направление, в котором мы берем  $\pi'$ . Если на некотором векторе  $\mathbf{X}$  все корни (5.11) равны числу  $\mu_0 \neq 0$ , то плоскости  $\pi$  и  $\pi'$  называются *изоклинными на векторе  $\mathbf{X}$* . Для каждой 2-плоскости  $\pi_1 \subset \pi$  существует тогда такая 2-плоскость  $\pi'_1 \subset \pi$  такая, что угол между ними является стационарным углом. При этом стационарные углы между такими 2-плоскостями равны (см. [10]). Если при векторах  $a\mathbf{X}$ , коэффициент  $a$  — любое вещественное число, пары плоскостей  $(\pi, \pi')$  изоклинные, тогда расслоение  $B_a(2m, 2n)$  называем *локально изоклинным в направлении  $\{a\mathbf{X}\}$* . Если при всех векторах  $\mathbf{X}$ , пары  $(\pi, \pi')$  изоклинные, тогда называем расслоение  $B_a(2m, 2n)$  *локально изоклинным*.

## § 6. Стрикционная индикатриса и фокальная поверхность

Введем понятие стрикционной индикатрисы. Пусть заданы две плоскости семейства плоскость  $\{M, e_i\}$  и близкая к ней плоскость  $\{M', e'_i\}$  ( $i = 1, \dots, 2m$ ). Рассмотрим прямые, которые ортогонально пересекают эти плоскости, и интересуемся точками пересечения этих прямых с плоскостью  $\{M, e_i\}$ . Радиусы-векторы  $X, X'$  точек пересечения любой такой прямой с указанными плоскостями представимы в виде

$$X = M + x^i e_i, \quad X' = X + \Delta X, \quad (6.1)$$

где

$$\Delta X = dX + \xi_1, \quad e'_i = e_i + de_i + \xi_2. \quad (6.2)$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — векторы, бесконечно малые второго порядка. Из условий ортогональности искомым прямым к данным плоскостям следует:

$$(\Delta X, e_i) = 0, \quad (\Delta X, e'_i) = 0.$$

Подставляя сюда  $\Delta X$  и приравнявая нулю члены одного порядка, получаем:

$$(dX, e_i) = 0, \quad (dX, de_i) = 0. \quad (6.3)$$

Дифференцирование первого из соотношений (6.1) дает

$$dX = (\dot{\omega}^i + \nabla x^i) e_i + (\omega^p + x^i \omega^p_i) e_p. \quad (6.4)$$

Имея в виду (6.4), из отношений (6.3) следует, соответственно,

$$dX = (\omega^p + x^i \omega^p_i) e_p, \quad (P_{i\alpha\beta} + x^h Q_{hi\alpha\beta}) \partial^\alpha \partial^\beta = 0. \quad (6.5)$$

Решение  $x^i$  системы (6.5) определяет при помощи (6.1) точку  $X$  основания общего перпендикуляра. При любом фиксированном направлении  $\{\partial^\alpha\}$  существование точек  $X$  зависит от совместности или несовместности системы (6.5). Если  $\det |Q_{hi\alpha\beta} \partial^\alpha \partial^\beta| \neq 0$ , то существует только одна точка  $X$ . Множество всех точек  $X = M + x^i e_i$ , где  $x^i$  удовлетворяют системе (6.5) при некотором направлении, называется *стрикционной индикатрисой* в начале репера в точке  $M$ .

При  $\det |Q_{\alpha\beta}| \neq 0$  открывается возможность свернуть  $P_{i\alpha\beta} + x^h Q_{hi\alpha\beta}$  симметрическим тензором  $Q^{\alpha\beta}$ , образуя при помощи последнего уравнение

$$P_i + x^h Q_{hi} = 0, \quad (6.6)$$

где  $P_i = P_{i\alpha\beta} Q^{\alpha\beta}$ ,  $Q_{hi} = Q_{hi\alpha\beta} Q^{\alpha\beta}$ . Если еще  $\det |Q_{hi}| \neq 0$ , то система (6.6) имеет только одно решение  $\omega^h = P_i Q^{hi}$ . Точка  $W = M + \omega^i e_i$  — инвариантная точка, так как

$$\begin{aligned} \nabla \omega^h &= \nabla (P_i Q^{hi}) = \nabla P_{i\alpha\beta} Q^{\alpha\beta} Q^{hi} = Q_{li\alpha\beta} Q^{\alpha\beta} \omega^l = \\ &= Q_{li} Q^{hi} \omega^l = -\omega^h \pmod{\partial^\alpha} \end{aligned}$$

и

$$dW = dM + d\omega^i e_i - \omega^i de_i = (\nabla \omega^i + \omega^i) e_i = 0 \pmod{\partial^\alpha}.$$

Эту точку  $W$  называем *точкой Вагнера*, так как она является аналогом точки построенной в [15].

Примечание. Здесь можно определить еще целый ряд инвариантных точек. Для этого определим тензоры  ${}_{(l)}Q_{\alpha_1 \alpha_2} = S_{\alpha_1 \dots \alpha_{2l}} Q^{\alpha_3 \alpha_4} \dots Q^{\alpha_{2l-1} \alpha_{2l}}$  ( $l = 2, \dots, m$ ),  ${}_{(l)}Q^{\alpha_1 \alpha_2}$  (если  $\det |{}_{(l)}Q_{\alpha_i \alpha_j}| \neq 0$ ),  ${}_{(l)}Q_{ij} = Q_{ij\alpha\beta} {}_{(l)}Q^{\alpha\beta}$ ,  ${}_{(l)}Q^{ij}$  (если  $\det |{}_{(l)}Q_{ij}| \neq 0$ ). При этом  ${}_{(l)}Q_{\alpha\beta} = {}_{(l)}Q_{\beta\alpha}$ ,  ${}_{(l)}Q_{ij} = -{}_{(l)}Q_{ji}$ . Точки  $W = M + {}_{(l)}\omega^i e_i$ , где  ${}_{(l)}\omega^i = {}_{(l)}Q^{ij} P_{j\alpha\beta} {}_{(l)}Q^{\alpha\beta}$ , также инвариантны. Аналогично можно составить системы

$${}_{(l)}P_i + x^k {}_{(l)}Q_{ki} = 0, \quad (6.7)$$

где

$${}_{(l)}P_i = P_{i\alpha\beta} {}_{(l)}Q^{\alpha\beta}, \quad {}_{(l)}Q_{ki} = Q_{k\alpha\beta} {}_{(l)}Q^{\alpha\beta}.$$

Выделяем теперь некоторое подмножество стрикционной индикатрисы. Точка  $X = M + x^i e_i$  на плоскости  $\pi$  семейства называется фокусом, если  $dX$ , имеет значение принадлежащее  $\pi$ . Следовательно, точка  $X$  является фокусом, если перемещение (6.4) точки  $X$  не имеет компонентов на векторах  $e_p$ . Итак, координаты  $x^i$  фокуса  $X$  удовлетворяют системе

$$(\Delta^p_\alpha + x^i \Delta^p_{i\alpha}) \theta^\alpha = 0. \quad (6.8)$$

Отсюда видим, что существование фокуса зависит от направления  $\{\theta^\alpha\}$ . Направления, найденные из (6.8), называются *фокальными направлениями*. Множество всех фокусов называется *фокальной поверхностью*. Если систему (6.8) свернуть с  $\Delta^i_{j\beta} g_{pq} \theta^p$ , то получаем систему (6.5). Следовательно, все фокусы являются точками стрикционной индикатрисы.

Среди фокусов могут быть (в весьма частных случаях) и такие точки, которые являются фокусами при любых фокальных направлениях. Если такие фокусы существуют, то они удовлетворяют системе:

$$\Delta^p_\alpha + x^i \Delta^p_{i\alpha} = 0. \quad (6.9)$$

Все решения этой системы являются решениями и каждой из систем (6.5), (6.7), и (6.8).

Так как  $\Delta^p_\alpha$  при переносе начала в новую точку  $M' = M + x^i e_i$  преобразуется следующим образом:

$$\Delta^p_\alpha = \Delta^p_\alpha + x^i \Delta^p_{i\alpha}, \quad (6.10)$$

то после переноса начала в точку, где  $x^i$  удовлетворяют (6.9), получим  $\Delta^p_\alpha = 0$ . Следовательно, также  $\Delta^i = 0$ . Если система (6.9) совместна, то такие точки существуют. Все они составляют поверхность, которая в каждой своей точке касается некоторой плоскости семейства. В общем случае такая поверхность, конечно, не существует.

## § 7. Исследование семейства плоскостей по кручению и кривизне

При преобразовании репера

$$\begin{aligned} M' &= M + x^i e_i, \\ e'_i &= A^j_i e_j \end{aligned} \quad (7.1)$$

формы  $\omega^p, \omega^p_i, \omega^i_p$  преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega^p &= \omega^p + x^i \omega^p_i, \\ \omega^p_i &= A^j_i \omega^p_j, \\ \omega^i_p &= \tilde{A}^i_j \omega^j_p.\end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, получаем формулы преобразования форм кручения и кривизны:

$$\begin{aligned}\Omega^i &= (\Omega^h + x^j \Omega^h_j) \tilde{A}^i_k, \\ \Omega^i_j &= A^k_j \Omega^i_k \tilde{A}^i_l,\end{aligned}\tag{7.2}$$

где  $\tilde{A}^i_l$  — обратная матрица к матрице  $A^l_k$ . Снова мы видим, что формы кривизны составляют тензорную 2-форму (они связаны только с плоскостью семейства), а формы кручения составляют тензорную форму только при фиксированном начале репера. Введем следующие обозначения:  $\Omega = \Omega^i e_i$ ,  $\Omega_j = \Omega^i_j e_i$ . Из (7.1) и (7.2) следует, что эти векторные 2-формы преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega + x^j \Omega_j, \\ \Omega_j &= A^k_j \Omega_k,\end{aligned}$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** а) Если  $\Omega = 0$  в точках  $M_\alpha = M + x^i_{(\alpha)} e_i$ , то  $\Omega = 0$  во всех точках плоскости, натянутой на точки  $M_\alpha$ .

б) Если форма  $\Omega$  в точках  $M_\alpha = M + x^i_{(\alpha)} e_i$  перпендикулярна (параллельна) плоскости, натянутой на точки  $M_\alpha$ , то она перпендикулярна (параллельна) к ней во всех точках этой плоскости.

в) Если векторы  $\Omega_j$  перпендикулярны к симплектической плоскости  $\Delta$ , принадлежащей  $2m$ -плоскости семейства, то на  $\Delta$  вектор  $\Omega$  не изменяется. В случае параллельности  $\Omega_j$  и перпендикулярности  $\Omega$  к  $\Delta$  векторная 2-форма  $\Omega$  на  $\Delta$  не изменяется.

Доказательство. а) Обозначим плоскость, натянутую на  $M_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ), через  $\pi$ , а формы кручения в точке  $M_\alpha$  — через  $\Omega^i_{(\alpha)}$ . По предположению  $\Omega^i_{(\alpha)} = 0$ , т. е.  $\Omega^i_{(0)} = -x^j_{(\alpha)} \Omega^i_j$ . Здесь  $\Omega^i_{(0)}$  — формы кручения в точке  $M$ . В любой точке  $X = M + a^\alpha x^j_{(\alpha)} e_j$ ,  $\sum a^\alpha = 1$ , плоскости  $\pi$  имеем

$$\Omega^i = \Omega^i_{(0)} + a^\alpha x^j_{(\alpha)} \Omega^i_j = \Omega^i_{(0)} - (a^1 + \dots + a^s) \Omega^i_{(0)} = 0.$$

б) По предположению  $(\Omega_{(\alpha)}, \mathbf{x}) = 0$ , где  $\mathbf{x}$  — произвольный вектор плоскости  $\pi$ , т. е.  $(\Omega_{(0)}, \mathbf{x}) = -x^j_{(\alpha)} (\Omega_j, \mathbf{x})$ . В любой точке  $X = M + a^\alpha x^j_{(\alpha)} e_j$  плоскости  $\pi$  имеем  $(\Omega, \mathbf{x}) = (\Omega_{(0)} + a^\alpha x^j_{(\alpha)} \Omega_j, \mathbf{x}) = (\Omega_{(0)}, \mathbf{x}) - (a^1 + \dots + a^s) (\Omega_{(0)}, \mathbf{x}) = 0$ . В случае параллельности  $\Omega$  к  $\pi$ , берем  $s$  первых базисных векторов на плоскости  $\pi$ . Тогда в точках  $M_\alpha$  для кручения получаем  $\Omega^{i_2}_{(\alpha)} = 0$  ( $i_2 = s+1, \dots, 2m$ ). В любой точке  $X$  плоскости  $\pi$  для  $\Omega$  координаты  $\Omega^{i_2} = 0$ . Теперь для доказательства утверждения придется переписать формулы части а) для индексов  $i_2 = s+1, \dots, 2m$  вместо  $i = 1, \dots, 2m$ .

с) Здесь тоже берем  $2m_1 = \dim \Delta$  первых базисных векторов на  $\Delta$ , а остальные перпендикулярно к ним. Теперь в любой точке  $X = M + x^i e_i$ , ( $i, j_1 = 1, \dots, 2m_1$ ) плоскости  $\Delta$  имеем  $'\Omega^i = \Omega^i + x^j \Omega^{i_j}$ . В случае перпендикулярности  $\Omega_j$  к  $\Delta$  получаем  $\Omega^{i_j} g_{i_k} = 0$ , а из (2.13) получаем  $\Omega^{i_j} = 0$ . Следовательно,  $'\Omega^i = \Omega^i$ . В случае параллельности  $\Omega_j$  к  $\Delta$  следует  $\Omega^{i_2} = 0$  ( $i_2 = 2m_1 + 1, \dots, 2$ ) и снова, при помощи (2.13), следует  $\Omega^{i_2} = 0$ . Таким образом,  $'\Omega^{i_1} = \Omega^{i_1} + x^{j_1} \Omega^{i_1 j_1}$ ,  $'\Omega^{i_2} = \Omega^{i_2}$ . Если вектор  $\Omega$  перпендикулярен плоскости  $\Delta$  (т. е.  $\Omega^{i_1} = 0$ ), то он на  $\Delta$  не изменяется. Теорема доказана.

В общем случае у  $\Omega$  при переходе от точки к точке плоскости изменяются компоненты, параллельные  $\Delta$ .

Из формулы (7.3) непосредственно следует

**Теорема 2.** Если  $\Omega$  хотя бы при одном начале  $M$  репера принадлежит линейной оболочке  $L(\Omega_j)$  векторов  $\Omega_j$ , то существует, по крайней мере, одна точка  $'M = M + x^i e_i$ , где  $\Omega = 0$ .

**Теорема 3.** Если в некотором 2-мерном направлении касательного пространства  $T_x$  базы расслоения  $V_a(2m, 2n)$  векторы  $\Omega_j$  линейно независимы, то существует такая однозначно определенная точка  $'M = M + x^i e_i$ , где  $'\Omega$  в рассматриваемом 2-мерном направлении равняется нулю.

**Доказательство.** Базисные формы  $\vartheta^\alpha$  можно выбрать так, чтобы для данного двумерного направления базисными были  $\vartheta^1$  и  $\vartheta^2$ . Тогда  $x^i$  для определения точки  $'M$  найдем при помощи (7.3) из системы  $T^{i_{12}} + x^j R^{i_{j12}} = 0$ . По предположению  $\det |R^{i_{j12}}| \neq 0$  и, следовательно, последняя система имеет только одно решение. В найденной точке  $'T^{i_{12}} = 0$ . Теорема доказана.

## § 8. Классификация двухпараметрических семейств симплектических плоскостей по кривизне

В случае двухпараметрического семейства симплектических плоскостей открывается возможность классифицировать их по форме кривизны  $\Omega^i_j = R^{i_{j12}} \vartheta^1 \wedge \vartheta^2$ . Из формулы (2.13) следует, что  $\|R^{i_{j12}}\|$  можно рассматривать как матрицу кососимметрического преобразования слоя. Ниже мы приводим классификацию этих матриц по их каноническим видам, используя при этом канонизацию, данную в [13]. Тем самым мы получим также некоторую классификацию двухпараметрических семейств симплектических плоскостей, которую мы намерены использовать в наших следующих публикациях.

При нахождении канонических видов матрицы  $\|R^{i_{j12}}\|$  следует рассматривать задачу собственных значений

$$(R^{i_{j12}} - \lambda \delta^{i_j}) x^j = 0. \quad (8.1)$$

В зависимости от типа собственных значений, некоторым их группам соответствуют диагональные клетки матрицы  $\|R^{i_{j12}}\|$ , строение которых ниже объясняется. Типов собственных значе-

ний четыре:  $\lambda_0 \neq 0$  — вещественно,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$  ( $\mu_0 \neq 0$ ) и  $\lambda_0 = i\nu_0$ .

Вещественные ненулевые собственные значения у (8.1) существуют только в виде пар  $\lambda_0$  и  $-\lambda_0$ . Каждой такой паре соответствует пара элементарных делителей  $(\lambda - \lambda_0)^k$  и  $(\lambda + \lambda_0)^k$  матрицы  $\|R^{i_{j12}}\|$ , определяющей следующую клетку:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & \\ & & & -\lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & -1 & -\lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0 & 0 & \dots & -\lambda_0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \dots & -1 & -\lambda_0 \end{array} \right\|, \quad (8.2)$$

где 0 является  $(k \times k)$ -мерной нуль-матрицей.

Среди элементарных делителей, соответствующей нулевым собственным значениям  $\lambda_0 = 0$ , есть только пары типа  $\lambda^k$  и  $\lambda^k$ , если  $k = 2l + 1$ . Каждой такой паре соответствует клетка вида (8.2), причем  $\lambda_0 = 0$ . Остальные элементарные делители (степенной показатель у них четен) пар не составляют. Их приходится делить на группы по одинаковым степенным показателям. Каждой такой группе соответствует и группа клеток. Пусть в некоторой такой группе число элементарных делителей, имеющих степенной показатель  $k = 2l$ , равно  $r$ . Тогда этой группе приписывается сигнатура  $s$ . Это целое число может быть положительным и отрицательным, и, кроме того, оно удовлетворяет требованиям:  $0 \leq |s| \leq r$ ,  $r = s \pmod{2}$ . Рассматриваемой группе элементарных делителей соответствует  $1/2(r - |s|)$  клеток вида (8.2) и еще  $|s|$  клеток. При  $s \geq 0$  эти клетки имеют вид:

$$\left\| \begin{array}{cccc} & & & 0 \ 1 \\ & & & 1 \ 0 \\ & 0 & & \\ & & & 0 \ 1 \\ & & & 1 \ 0 \\ 0 & & & \\ & 0 \ 1 & & \\ & 1 \ 0 & & \\ & & & 0 \ 1 \\ & & & 1 \ 0 \\ & & & 1 \end{array} \right\| \quad (8.3)$$

или

$$\left( \begin{array}{cccc}
 & & & 0 \ 1 \\
 & & & 1 \ 0 \\
 & 0 & & & & 0 \ 1 \\
 & & & & & 1 \ 0 \\
 & & & & & & 1 \\
 0 & & & & & & & 0 \\
 & 0 \ 1 \\
 & 1 \ 0 \\
 & & & 0 \ 1 \\
 & & & 1 \ 0
 \end{array} \right), \quad (8.4)$$

в зависимости от четности или нечетности  $l$ . Здесь 0 есть  $(l \times l)$ -мерная нуль-матрица. При  $s \leq 0$  в клетках (8.3) и (8.4) приходится переменять только ненулевые четверти у обеих матриц.

Для всех комплексных собственных значений  $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$  ( $\mu_0 \neq 0$ ,  $\nu_0 \neq 0$ ) соответствующие элементарные делители делятся на четвертки  $(\lambda - \lambda_0)^k$ ,  $(\lambda + \lambda_0)^k$ ,  $(\lambda - \bar{\lambda}_0)^k$ ,  $(\lambda + \bar{\lambda}_0)^k$ . Здесь  $\bar{\lambda}_0$  — комплексно сопряженное число. Каждой такой четвертке соответствует клетка вида

$$\left( \begin{array}{cccc}
 \mu_0 & -\nu_0 & 1 & 0 \\
 \nu_0 & \mu_0 & 0 & 1 \\
 & & \mu_0 & -\nu_0 \\
 & & \nu_0 & \mu_0 \\
 & & & \mu_0 & -\nu_0 \\
 & & & \nu_0 & \mu_0 \\
 & & & & -\mu_0 & -\nu_0 \\
 & & & & \nu_0 & -\mu_0 \\
 & & & & -1 & 0 \\
 & & & & 0 & -1 \\
 & 0 & & & & -1 & 0 & -\mu_0 & -\nu_0 \\
 & & & & & 0 & -1 & \nu_0 & -\mu_0
 \end{array} \right), \quad (8.5)$$

где 0 есть  $(2k \times 2k)$ -мерная нуль-матрица. Если собственное значение  $\lambda = i\nu_0$  — чисто мнимое, то вместе с  $(\lambda - i\nu_0)^k$  всегда будет элементарным делителем и  $(\lambda + i\nu_0)^k$ . Число таких пар среди элементарных делителей может быть любое натуральное число  $r$ . Этой группе элементарных делителей аналогично приписывается сигнатура  $s$ , удовлетворяющая условиям  $0 \leq |s| \leq r$ ,  $r \equiv s \pmod{2}$ . Каждой такой группе элементарных делителей соответствует  $\frac{1}{2}(r - |s|)$  клеток вида (8.4), причем  $\mu_0 = 0$ , и  $|s|$  клеток вида



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & -\nu_0 & & & & & \\
 -\nu_0 & 0 & & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
 & 0 & -\nu_0 & 1 & & & \\
 -1 & -\nu_0 & 0 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 0 & -\nu_0 & & \\
 & & & -\nu_0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & -\nu_0 & 1 \\
 & & & & & -1 & -\nu_0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & -\nu_0 \\
 & & & & & & & -\nu_0 & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & 1 & -\nu_0 \\
 & & & & & & & & -1 & -\nu_0 & 0
 \end{array}$$

$(k=4l)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & -\nu_0 & & & & & \\
 -\nu_0 & 0 & & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
 & 0 & -\nu_0 & 1 & & & \\
 -1 & -\nu_0 & 0 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 0 & -\nu_0 & & \\
 & & & -\nu_0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & -\nu_0 & 1 \\
 & & & & & -1 & -\nu_0 & 0 \\
 & & & & & & & -1 & -\nu_0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & -\nu_0 & 1 \\
 & & & & & & & -1 & -\nu_0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1 & -\nu_0 \\
 & & & & & & & & & 0 & -\nu_0 \\
 & & & & & & & & & -\nu_0 & -1
 \end{array}$$

$(k=4l+2)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & -\nu_0 & & & & & \\
 -\nu_0 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & \nu_0 & & & \\
 & & \nu_0 & 0 & & & \\
 & & \boxed{0} & -\nu_0 & 1 & & \\
 & & 1 & -\nu_0 & 0 & & \\
 & & & 1 & & 0 & \nu_0 \\
 & & & & & \nu_0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & \nu_0 \\
 & & & & & & & \nu_0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & -\nu_0
 \end{array}$$

$(k=2m+1)$

в зависимости  $k$ . Все типы матриц  $A_1$  и  $A_2$  составлены из  $4 \times 7$  матриц, которые выделены пунктиром, при этом матрицы

$$\begin{vmatrix} 0 & \pm v_0 \\ \pm v_0 & 0 \end{vmatrix}$$

находятся на диагоналях матриц  $A_1$  и  $A_2$ . Изменения происходят в начале ( $3 \times 7$  матрица пишется без одного столбца) и в конце (не уместающиеся элементы  $3 \times 7$  матрицы сдвинуты вперед по строке на первые нулевые места) матриц  $A_1$  и  $A_2$ .

Пусть матрица

$$\|R^{i_{j12}}\| = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{vmatrix}$$

имеет некоторое число клеток

$$K_i = \begin{vmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{vmatrix}$$

указанных типов, тогда для  $\|R^{i_{j12}}\|$  получаем канонический вид, если все  $A_i, B_i, C_i, D_i$  пишем в одном и том же порядке соответственно на диагоналях матриц  $R_1, R_2, R_3, R_4$ .

Пример. Канонические виды кривизны  $R^{i_{j12}}$  семейств типа  $B_2(2, 2n)$  следующие:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где  $\alpha \neq 0$ .

## Литература

1. Вейль Г., Классические группы их инварианты и представления. Москва, 1947.
2. Гейдельман Р. М., Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. (Итоги науки. ВИНТИ АН СССР)». М., 1967, 323—374.
3. Гейдельман Р. М., Основы теории семейств подпространств в симплектических пространствах. Матем. сб., 1961, 55, № 1, 7—34.
4. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, 2, 275—382.
5. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии. Москва, 1960.
6. Лумисте Ю. Г., К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, 192, 12—46.
7. Лумисте Ю. Г., Связности в однородных расслоениях. Матем. сб., 1966, 69, № 3, 434—469.
8. Мальцев А. И., Основы высшей алгебры. Москва—Ленинград, 1948.
9. Номидзу К., Группа Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1966.
10. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
11. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, 1967.
12. Широков П. А., Тензорное исчисление. Казань, 1961.
13. Яглом И. М., Квадратичные и кососимметричные билинейные формы в вещественном симплектическом пространстве. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии. механ. и физ. Моск. ун-т, 1950, 8, 364—381.

14. Яглом И. М., О линейных подпространствах симплектического пространства. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, механ. и физ. Моск. ун-т, 1952, 9, 309—318.
15. Wagner, V., Differential geometry of the family of  $R_k$ 's in  $R_n$  and of the family of totally geodesic  $S_{k-1}$ 's in  $S_{n-1}$  of positive curvature. Матем. сб., 1942, 10, 165—212.

Поступило  
29 II 1972

## SÜMPLEKTIILISTE TASANDITE PARVED AFIINSES SÜMPLEKTIILISES RUUMIS

A. Parring

Resümee

Artiklis vaadeldakse  $2m$ -mõõtmeliste sümplektiliste tasandite parve  $2n$ -mõõtmelises afiinses sümplektilises ruumis. Lähtudes töös [6] antud ideedest, vaadeldakse sümplektilist tasandiparve kui kihtkonda, kusjuures kihtideks on parve sümplektilised tasandid. Leitakse (§-d 2, 3) selle kihtkonna struktuurivõrandid ning edaspidiseks vajalikud tensorid. I. M. Jaglomi töös [14] antud sümplektilise bivectori pikkuse ja sümplektiliste bivectorite vahelise nurga mõiste abil (§ 4) avaneb võimalus uuest vaatekohast vaadelda  $2m$ -mõõtmeliste sümplektiliste tasandite vahelisi statsionaarseid nurki. Afiinses käsitluses on leitud töös [3] antud vormid  $\Phi_1, \dots, \Phi_{2m}$ . Järgnevas (§ 6) antakse striktsioonindikatrissi ja tema alamhulga — fokaalpinna mõiste. Lõpuks uuritakse (§ 7) sümplektiliste tasandite kihikondi siseseostuse kõveruse ja väände abil ning näidatakse (§ 8) võimalus kaheparametriliste parvede klassifitseerimiseks siseseostuse kõveruse järgi.

## DIE SCHAREN SYMPLEKTIKCHER EBENEN IM AFFINEN SYMPLEKTISCHEN RAUM

A. Parring

Zusammenfassung

Im Artikel werden die Scharen der  $2m$ -dimensionalen symplektischen Ebenen im  $2n$ -dimensionalen affinen symplektischen Raum betrachtet. Ausgehend von den Ideen der Arbeit [6] wird die symplektische Ebenschar als Faserraum behandelt, wobei die Fasern symplektische Ebenen sind. Für diesen Faserraum findet man Strukturgleichungen und weiterhin notwendige Tensoren (§§ 2, 3). Die von Jaglom in der Arbeit [14] gegebenen Begriffe der Längen des Bivectors und des Winkels zwischen zwei Bivektoren (§ 4) ermöglichen, die stationären Winkel zwischen den  $2m$ -dimensionalen symplektischen Ebenen von neuem Standpunkt zu betrachten (§ 5). In der Arbeit [3] gegebene Formen  $\Phi_1, \dots, \Phi_{2m}$  sind in affiner Behandlung gefunden. Zuletzt (§ 6) werden die Begriffe der Striktionindikator und ihrer Untermenge — Fokalfläche gegeben. Zum Schluß untersucht man den Faserraum der symplektischen Ebenen mit Hilfe der Krümmungs- und Torsionsformen des inneren Zusammenhangs (§ 7) und zeigt man die Möglichkeit, die zweiparametrischen Scharen nach der Krümmung des inneren Zusammenhangs zu klassifizieren (§ 8).

## ФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ФОКАЛЬНОЙ ПСЕВДО- КОНГРУЭНЦИИ В $R_4$

Л. Туулметс

Кафедры алгебры и геометрии

Классы конгруэнций в трехмерном евклидовом пространстве  $R_3$  к настоящему времени изучены довольно глубоко; основные результаты их исследования собраны в монографии С. П. Финикова [12]. Однако классы псевдоконгруэнций прямых в  $R_4$ , т. е. двухпараметрических семейств прямых или линейчатых гиперповерхностей  $V_3$  в  $R_4$  четырехмерного евклидова пространства, исследованы еще сравнительно мало. Некоторые наиболее интересные классы рассмотрены в работах [2—3] и в наших предыдущих публикациях [9—10].

В настоящей статье, с целью создания основы для дальнейших исследований, мы рассмотрим фокальные подповерхности фокальной псевдоконгруэнции (линейчатой гиперповерхности  $V_3$  ранга два) в евклидовом пространстве  $R_4$ , которое может быть или собственно-евклидовым пространством  ${}^0R_4$  или псевдоевклидовым пространством  ${}^1R_4$ . В последнем случае предполагается, что образующие фокальной псевдоконгруэнции  $V_3$  находятся внутри изотропного конуса (т. е. имеют «временно-подобные» направления).

В статье построены канонические ортонормированные подвижные реперы фокальных поверхностей, найдены коэффициенты их вторых квадратичных форм, а также их кривизны и кручения. Доказано, что если фокальная псевдоконгруэнция в  $R_4$  не является ни изотропной, ни цилиндрической, а также не вырождается в конгруэнцию в  $R_3$  и ее фокальные поверхности не вырождаются в линии, то 1) обе ее фокальные поверхности не могут быть одновременно минимальными или гиперплоскими, 2) на ее фокальных поверхностях не существует асимптотических линий (индикатриса нормальной кривизны не проходит через начало репера). Полученные формулы будут использованы в дальнейших сообщениях в настоящем сборнике, где будут исследованы специальные классы фокальных псевдоконгруэнций, фокальные поверхности которых имеют некоторые интересные геометрические свойства.

Отметим, что двумерные поверхности в  $R_4$  или в  $R_n$  были объектами исследования многих авторов, например, [1, 4—6, 7—8]. В настоящей статье, в отличие от других работ, двумерные поверхности рассматриваются не самостоятельно, а в связи с фокальными псевдоконгруэнциями как их фокальные поверхности. Все связанные с ними величины выражаются через объекты, характеризующие фокальную псевдоконгруэнцию.

## § 1. Канонические реперы фокальных поверхностей

К каждой образующей присоединяем ортонормированный подвижный репер так, чтобы (см. [10]):

1) начальная точка репера  $M$  находилась в центре образующей,

2) единичный (при  ${}^0R_4$ ) или мнимо-единичный (при  ${}^1R_4$ ) вектор  $e_0$  был направлен вдоль прямолинейной образующей,

3) единичный вектор  $e_3$  был направлен вдоль нормали поверхности  $V_3$  в центре образующей,

4) ортонормированные векторы  $e_i$  ( $i, j, k = 1, 2$ ),

а) были ортогональными к предыдущим векторам,

б) находились на касательной плоскости фокальной псевдоконгруэнции и

в) делили пополам углы между гиперсферическими изображениями главных поверхностей.

Тогда в формулах

$$dM = \omega^I e_I, \quad de_I = \omega^K{}_I e_K, \quad (I, J, K, \dots = 0, 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

определяющих инфинитесимальное смещение подвижного репера, имеют место равенства

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^0{}_I = \varepsilon \omega^J{}_0, \quad \omega^0{}_i = -\omega^i{}_0, \quad \omega^I{}_I = 0(!), \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon = -(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = \pm 1$ , ( $\rho = 1, 2, 3$ ), а фокальная псевдоконгруэнция определяется следующей системой пфаффовых уравнений [2, 10]

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, & \omega^3_0 &= 0, \\ \omega^1_0 &= t\omega^2, & \omega^3_1 &= f\omega^1 + c\omega^2, \\ \omega^2_0 &= u\omega^1, & \omega^3_2 &= c\omega^1 + tu^{-1}f\omega^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Величины  $t, v, f, c$  являются величинами первого порядка. Продолженная система имеет в силу (1.1—3) следующий вид

$$\begin{aligned} \omega^2_1 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ t\omega^0 &= \mu\omega^1 + \nu\omega^2, \\ dt &= [u\nu - (t+u)\tau]\omega^1 + \vartheta\omega^2, \\ du &= \varphi\omega^1 + [u\mu + (t+u)\sigma]\omega^2, \\ df &= (\xi - ut^{-1}c\mu)\omega^1 + [\pi + (2\tau - ut^{-1}\nu)c]\omega^2, \\ dc &= \left(\pi - f\mu + \frac{t-u}{u}f\sigma\right)\omega^1 + \left(\frac{t}{u}\xi - \frac{tf}{u^2}\varphi + 2c\sigma - 2f\tau\right)\omega^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где величины  $\sigma, \tau, \mu, \nu, \vartheta, \varphi, \xi, \pi$  являются величинами второго порядка и предполагается, что  $tu(t+u) \neq 0$ . Если  $t+u = 0$ ,

то имеем дело с изотропной фокальной псевдоконгруэнцией [3, 9], фокальные поверхности которой мнимы, а если  $tu = 0$ , то фокальная псевдоконгруэнция является цилиндрической или конической. Эти частные случаи не будут рассматриваться. Из общего рассмотрения исключаем также случай, когда фокальная псевдоконгруэнция вырождается в конгруэнцию на гиперплоскости. При внешнем дифференцировании системы (1.4), получаем

$$\begin{aligned} d\sigma \wedge \omega^1 + \nabla\tau \wedge \omega^2 &= 0, \\ d\mu \wedge \omega^1 + \nabla\vartheta \wedge \omega^2 &= 0, \\ (u\nabla v - (t+u)\nabla\tau) \wedge \omega^1 + \nabla\vartheta \wedge \omega^2 &= 0, \\ \nabla\varphi \wedge \omega^1 + [ud\mu + (t+u)d\sigma] \wedge \omega^2 &= 0, \\ (\nabla\xi - ut^{-1}cd\mu) \wedge \omega^1 + (\nabla\pi + 2c\nabla\tau - ut^{-1}c\nabla v) \wedge \omega^2 &= 0, \\ \left( \nabla\pi - fd\mu + \frac{t-u}{u}fd\sigma \right) \wedge \omega^1 + \\ + \left( \frac{t}{u}\nabla\xi - \frac{tf}{u^2}\nabla\varphi + 2cd\sigma - 2f\nabla\tau \right) \wedge \omega^1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla v &= dv - v^1\omega^1, & \nabla\xi &= d\xi - \xi^1\omega^1, \\ \nabla\tau &= d\tau - \tau^1\omega^1, & \nabla\varphi &= d\varphi - \varphi^1\omega^2, \\ \nabla\vartheta &= d\vartheta - \vartheta^1\omega^1, & \nabla\pi &= d\pi - \pi^1\omega^1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

и

$$\begin{aligned} \tau^1 &= -\sigma^2 - \tau^2 - \sigma\mu - \frac{u}{t}v\tau + c^2 - \frac{t}{u}f^2 - \varepsilon tu, \\ v^1 &= -\frac{1}{t}\mu\vartheta + 2\frac{u}{t}v^2 - \mu^2 - \frac{u+2t}{t}v\tau - \sigma\mu + \varepsilon t(t-u), \\ \vartheta^1 &= \left( \frac{u}{t}v - 2\tau \right) \vartheta + t\sigma v + t\mu\tau, \\ \varphi^1 &= 2(u+\sigma)\varphi + u\mu\tau - \frac{u^2}{t}(\sigma+\mu)v, \\ \xi^1 &= \left( \frac{t-4u}{u}\sigma - 2\mu \right) \pi + \left( \frac{t}{u^2}\varphi + 3\tau \right) \xi + \frac{f}{u}\sigma\vartheta - \\ &\quad - \left( \frac{2t}{u^2}\varphi + \tau \right) \frac{f}{u}\varphi + 2c\tau \left( \frac{t-2u}{u}\sigma - \frac{t+u}{t}\mu \right) + \\ &\quad + f\sigma^2 \left( -\frac{t^2}{u^2} - 4\frac{t}{u} + 1 \right) + 2f\frac{u-t}{u}\mu\sigma + \\ &\quad + \frac{3u-t}{t}c\sigma v + 2f \left( c^2 - \frac{t}{u}f^2 - \varepsilon tu \right), \\ \pi^1 &= -(2\mu+\sigma)\xi + \left( 2\frac{u}{t}v - 3\tau \right) \pi + \left( \frac{f}{u}\mu + \frac{c}{t}v \right) \varphi + \\ &\quad + 2f\tau \left( \frac{t+u}{t}\mu + \frac{t-u}{u}\sigma \right) + \sigma \left( \frac{t-u}{t}fv + \frac{t-3u}{t}c\mu \right) + \\ &\quad + c \left[ -\frac{u}{t}\mu^2 + 2\sigma^2 - 2c^2 + 2\frac{t}{u}f^2 + \varepsilon u(3t-u) \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Второе продолжение системы (1.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \sigma_i \omega^i, & \text{или} & & d\sigma &= S\omega^1 + S_1\omega^2, \\
 d\tau &= \tau_i \omega^i, & & & d\tau &= (S_1 + \tau^1)\omega^1 + S_2\omega^2, \\
 d\mu &= \mu_i \omega^i, & & & d\mu &= T\omega^1 + T_1\omega^2, \\
 d\nu &= \nu_i \omega^i, & & & d\nu &= (T_1 + \nu^1)\omega^1 + T_2\omega^2, \\
 d\vartheta &= \vartheta_i \omega^i, & & & d\vartheta &= \vartheta_1\omega^1 + U\omega^2, \\
 d\varphi &= \varphi_i \omega^i, & & & d\varphi &= U_1\omega^1 + \varphi_2\omega^2, \\
 d\xi &= \xi_i \omega^i, & & & d\xi &= (V + \xi^1)\omega^1 + V_1\omega^2, \\
 d\pi &= \pi_i \omega^i, & & & d\pi &= (V_1 + \pi^1)\omega^1 + \frac{t}{u} V\omega^2,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$\vartheta_1 = \vartheta^1 + uT_2 - (t+u)S_2$ ,  $\varphi_2 = \varphi^1 + uT_2 + (t+u)S$ ,  
и  $S, S_1, S_2, T, T_1, T_2, U, U_1, V, V_1$  являются новыми неизвестными величинами третьего порядка.

Точка  $\mathbf{F} = \mathbf{M} + \rho\mathbf{e}_0$  на образующей фокальной псевдоконгруэнции является фокусом, если  $d\mathbf{F} \parallel \mathbf{e}_0$  (см. [3]). Здесь  $\rho$  обозначает расстояние фокуса от центра образующей. Так как, в силу (1.1) и (1.3)

$$d\mathbf{F} = (\omega^0 + d\rho)\mathbf{e}_0 + (\omega^1 + \rho t\omega^2)\mathbf{e}_1 + (\rho u\omega^1 + \omega^2)\mathbf{e}_2,$$

то условие фокуса приводит к системе

$$\begin{aligned}
 \omega^1 + \rho t\omega^2 &= 0, \\
 \rho u\omega^1 + \omega^2 &= 0,
 \end{aligned}$$

которая должна иметь нетривиальное решение относительно  $\omega^1$  и  $\omega^2$ . Таким образом для фокусов  $\rho_1 = \rho$  и  $\rho_2 = -\rho$ , где

$$\rho = -\frac{1}{\sqrt{tu}}, \tag{1.9}$$

и точки  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \rho\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{M} - \rho\mathbf{e}_0$  становятся фокусами образующей фокальной псевдоконгруэнции.

Касательными векторами фокальных поверхностей будут в таком случае векторы

$$d\mathbf{F}_1 = \Omega^i \mathbf{f}_i, \quad d\mathbf{F}_2 = {}^* \Omega^i \mathbf{f}_i, \quad (i=1, 2). \tag{1.10}$$

В выражениях (1.10) в случае первой фокальной поверхности

$$\Omega^1 = \omega^0 + d\rho, \quad \Omega^2 = M^{-1}_0 (\sqrt{u}\omega^1 + \sqrt{t}\omega^2), \tag{1.11}$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{f}_2 = M_0 \rho (\sqrt{t}\mathbf{e}_1 + \sqrt{u}\mathbf{e}_2), \tag{1.12}$$

где  $M_0 = \sqrt{\frac{tu}{t+u}}$ , а в случае второй фокальной поверхности

$${}^* \Omega^1 = \omega^0 - d\rho, \quad {}^* \Omega^2 = M^{-1}_0 (\sqrt{u}\omega^1 - \sqrt{t}\omega^2), \tag{1.13}$$

$${}^* \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_0, \quad {}^* \mathbf{f}_2 = M_0 \rho (\sqrt{t}\mathbf{e}_1 - \sqrt{u}\mathbf{e}_2). \tag{1.14}$$

Отметим, что

$$d\rho = \rho_i \omega^i, \tag{1.15}$$

где в силу (1.4) и (1.9)

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= -0,5\rho^3 \{t\varphi + u^2\nu - u(t+u)\tau\}, \\
 \rho_2 &= -0,5\rho^3 \{u\vartheta + tu\mu + t(t+u)\sigma\}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Выберем векторы  $f_\alpha$  и  $*f_\alpha$  ( $\alpha = 2, 3$ ) так, чтобы базисы  $\{f_\alpha\}$  и  $\{*f_\alpha\}$  ( $a, b, \dots = 1, 2, 3, 4$ ) являлись полными ортонормированными базисами фокальных поверхностей соответственно  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$ . При таком выборе упомянутых векторов по аналогии с формулами (1.1), можем написать

$$df_a = \Omega^b{}_a f_b, \quad d*f_a = *\Omega^b{}_a *f_b, \quad (1.17)$$

а векторам  $f_a$  и  $*f_a$ , в силу (1.12), (1.14) будут

$$f_1 = e_0, \quad f_2 = M e_1 + N e_2, \quad f_3 = -N e_1 + M e_2, \quad f_4 = e_3, \quad (1.18)$$

$$*f_1 = e_0, \quad *f_2 = M e_1 - N e_2, \quad *f_3 = N e_1 + M e_2, \quad *f_4 = e_3, \quad (1.19)$$

где

$$M = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+u}}, \quad N = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{t+u}}. \quad (1.20)$$

Выражаем векторы  $e_i$  через векторы  $f_\alpha$  и  $*f_\alpha$ . Тогда

$$e_0 = f_1, \quad e_1 = M f_2 - N f_3, \quad e_2 = N f_2 + M f_3, \quad e_3 = f_4, \quad (1.21)$$

и

$$e_0 = *f_1, \quad e_1 = M *f_2 + N *f_3, \quad e_2 = -N *f_2 + M *f_3, \quad e_3 = *f_4. \quad (1.22)$$

Относительно пространства  ${}^1R_4$  отметим следующее. Если фокальные поверхности фокальной псевдоконгруэнции прямых, внутренних относительно изотропного конуса, в  ${}^1R_4$  не вырождаются в точки или линии, то они являются всегда псевдоевклидовыми поверхностями.

Формами  $\Omega^b{}_a$  и  $*\Omega^b{}_a$ , в силу (1.1—4) и (1.17—22), будут

$$\begin{aligned} \Omega^4{}_1 &= 0, & \Omega^4{}_2 &= \varepsilon \Omega^2{}_1, & \Omega^4{}_3 &= \varepsilon \Omega^3{}_1, \\ \Omega^4{}_2 &= (jM + cN) \omega^1 + (cM + tu^{-1}jN) \omega^2, \\ \Omega^4{}_3 &= (cM - jN) \omega^1 + (tu^{-1}jM - cN) \omega^2, \\ \Omega^2{}_1 &= uN \omega^1 + tM \omega^2, \\ \Omega^3{}_1 &= uM \omega^1 - tN \omega^2, \\ \Omega^3{}_2 &= (\sigma + A) \omega^1 + (\tau + B) \omega^2, \end{aligned} \quad (1.23)$$

и

$$\begin{aligned} *\Omega^4{}_1 &= 0, & *\Omega^4{}_2 &= \varepsilon * \Omega^2{}_1, & *\Omega^4{}_3 &= \varepsilon * \Omega^3{}_1, \\ *\Omega^4{}_2 &= (jM - cN) \omega^1 + (cM - tu^{-1}jN) \omega^2, \\ *\Omega^4{}_3 &= (cM + jN) \omega^1 + (tu^{-1}jM + cN) \omega^2, \\ *\Omega^2{}_1 &= -uN \omega^1 + tM \omega^2, \\ *\Omega^3{}_1 &= uM \omega^1 + tN \omega^2, \\ *\Omega^3{}_2 &= (\sigma - A) \omega^1 + (\tau - B) \omega^2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\varrho}{2(t+u)} [u^2 v - u(t+u)\tau - t\varphi], \\ B &= \frac{\varrho}{2(t+u)} [-tu\mu - t(t+u)\sigma + u\vartheta]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Векторы  $f_\alpha$  и  $*f_\alpha$  являются инвариантными нормальными векторами соответственно фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$ . Для различия этих нормальных векторов будем называть  $f_4$  *главным*

нормальным вектором и  $f_3$  бинормальным вектором фокальной поверхности  $\{F_1\}$ . Аналогичные названия введем и случае фокальной поверхности  $\{F_2\}$ .

## § 2. Квадратичные формы фокальных поверхностей фокальной псевдоконгруэнции

Из формул (1.10) следует, что первые квадратичные формы фокальных поверхностей следующие:

$$\{F_1\}: ds^2 = -\varepsilon(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2, \quad (2.1)$$

$$\{F_2\}: d^*s^2 = -\varepsilon(*\Omega^1)^2 + (*\Omega^2)^2. \quad (2.2)$$

Вторые квадратичные формы фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  фокальной псевдоконгруэнции выражаются соответственно в виде (см. [7]).

$$\varphi^4 = \Omega^k_i \Omega^i, \quad \varphi^3 = \Omega^3_i \Omega^i, \quad (i, j, k, \dots = 1, 2)$$

или

$$\begin{aligned} \varphi^4 &= b^4_{ij} \Omega^i \Omega^j, & \varphi^3 &= b^3_{ij} \Omega^i \Omega^j, \\ * \varphi^4 &= * \Omega^k_i * \Omega^i, & * \varphi^3 &= * \Omega^3_i * \Omega^i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

или

$$* \varphi^4 = * b^4_{ij} * \Omega^i * \Omega^j, \quad * \varphi^3 = * b^3_{ij} * \Omega^i * \Omega^j. \quad (2.4)$$

Вторые квадратичные формы  $\varphi^4$  и  $*\varphi^4$  будем называть *главными* квадратичными формами, а формы  $\varphi^3$  и  $*\varphi^3$  — *побочными* квадратичными формами соответственно поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$ .

Для нахождения коэффициентов  $b^{\alpha}_{ij}$  и  $*b^{\alpha}_{ij}$  ( $\alpha = 3, 4$ ) квадратичных форм (2.3—4) вначале выражаем главные формы  $\omega^1$  и  $\omega^2$  через главные формы фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$ . Из соотношений (1.11) и (1.13) в силу (1.15) и (1.20) найдем

$$\omega^i = L^i_j \Omega^j \quad \text{и} \quad \omega^i = *L^i_j * \Omega^j, \quad (2.5)$$

где приняты следующие обозначения

$$L^1_1 = \frac{1}{N\Delta}, \quad L^1_2 = -\frac{1}{\Delta} \left( \frac{\nu}{t} + \varrho_2 \right), \quad (2.6)$$

$$L^2_1 = -\frac{1}{M\Delta}, \quad L^2_2 = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\mu}{t} + \varrho_1 \right),$$

$$*L^1_1 = \frac{1}{N^*\Delta}, \quad *L^1_2 = -\frac{1}{*\Delta} \left( \frac{\nu}{t} - \varrho_2 \right), \quad (2.7)$$

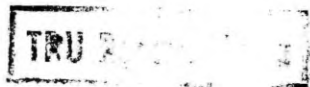
$$*L^2_1 = -\frac{1}{M^*\Delta}, \quad *L^2_2 = \frac{1}{*\Delta} \left( \frac{\mu}{t} - \varrho_1 \right),$$

где, в свою очередь,

$$\Delta = M_0^{-1} \left[ \sqrt{t} \left( \frac{\mu}{t} + \varrho_1 \right) - \sqrt{u} \left( \frac{\nu}{t} + \varrho_2 \right) \right], \quad (2.8)$$

$$*\Delta = M_0^{-1} \left[ -\sqrt{t} \left( \frac{\mu}{t} - \varrho_1 \right) - \sqrt{u} \left( \frac{\nu}{t} - \varrho_2 \right) \right], \quad (2.9)$$

или, в силу (1.4),



$$\Delta = 0,5M_0^{-1} \left( -\frac{1}{u\sqrt{u}}\varphi + \frac{t+u}{t\sqrt{u}}\tau - \frac{3\sqrt{u}}{t}\nu + \frac{1}{t\sqrt{t}}\vartheta + \frac{t+u}{u\sqrt{t}}\sigma + \frac{3}{\sqrt{t}}\mu \right), \quad (2.8')$$

$$*\Delta = 0,5M_0^{-1} \left( -\frac{1}{u\sqrt{u}}\varphi + \frac{t+u}{t\sqrt{u}}\tau - \frac{3\sqrt{u}}{t}\nu - \frac{1}{t\sqrt{t}}\vartheta - \frac{t+u}{u\sqrt{t}}\sigma - \frac{3}{\sqrt{t}}\mu \right), \quad (2.9')$$

причем предполагается, что фокальные поверхности являются невырожденными поверхностями, т. е.

$$\Delta \neq 0 \quad \text{и} \quad *\Delta \neq 0. \quad (2.10)$$

Введем еще обозначения

$$E_1 = 0,5M_0^{-1} \left( -\frac{1}{u\sqrt{u}}\varphi + \frac{t+u}{t\sqrt{u}}\tau - \frac{3\sqrt{u}}{t}\nu \right), \quad (2.11)$$

$$E_2 = 0,5M_0^{-1} \left( \frac{1}{t\sqrt{t}}\vartheta + \frac{t+u}{u\sqrt{t}}\sigma + \frac{3}{\sqrt{t}}\mu \right),$$

которые позволяют переписать (2.8'—9') в виде

$$\Delta = E_1 + E_2 \quad \text{и} \quad *\Delta = E_1 - E_2. \quad (2.12)$$

Заменив в соотношениях (1.21—22) формы  $\omega^1, \omega^2$  эквивалентными им выражениями из (2.5), на основании (2.2), (2.4), (2.6—13), (1.18), (1.14), (1.23) получим

$$b^4_{11} = b^4_{12} = 0, \quad b^4_{22} = (fM + cN)L^1_2 + (cM + tu^{-1}fN)L^2_2, \quad (2.13)$$

$$b^3_{11} = uML^1_1 - tNL^2_1, \quad (2.14)$$

$$b^3_{12} = uML^1_2 - tNL^2_2,$$

$$b^3_{22} = (\sigma + A)L^1_2 + (\tau + B)L^2_2,$$

$$*b^4_{11} = *b^4_{12} = 0, \quad *b^4_{22} = (fM - cN)*L^1_2 + (cM - tu^{-1}fN)*L^2_2, \quad (2.15)$$

$$*b^3_{11} = uM*L^1_1 + tN*L^2_1,$$

$$*b^3_{12} = uM*L^1_2 + tN*L^2_2,$$

$$*b^3_{22} = (\sigma - A)*L^1_2 + (\tau - B)*L^2_2, \quad (2.16)$$

или

$$b^4_{11} = b^4_{12} = 0, \quad b^4_{22} = \frac{\gamma^4_1 + \gamma^4_2}{E_1 + E_2}, \quad (2.13')$$

$$b^3_{11} = \frac{2\sqrt{tu}}{E_1 + E_2}, \quad b^3_{12} = \frac{\beta^3_1 + \beta^3_2}{E_1 + E_2}, \quad b^3_{22} = \frac{\gamma^3_1 + \gamma^3_2}{E_1 + E_2}, \quad (2.14')$$

$$*b^4_{11} = *b^4_{12} = 0, \quad *b^4_{22} = \frac{\gamma^4_1 - \gamma^4_2}{E_1 - E_2}, \quad (2.15')$$

$$*b^3_{11} = \frac{-2\sqrt{tu}}{E_1 - E_2}, \quad *b^3_{12} = \frac{\beta^3_1 - \beta^3_2}{E_1 - E_2}, \quad *b^3_{22} = \frac{\gamma^3_1 - \gamma^3_2}{E_1 - E_2}, \quad (2.16')$$

$$\begin{aligned} \gamma^4_1 &= M_0 \left( \frac{c}{t\sqrt{u}} \mu - \frac{f}{t\sqrt{u}} \nu + \frac{f\sqrt{t}}{u} \varrho_1 - \frac{c}{\sqrt{t}} \varrho_2 \right), \\ \gamma^4_2 &= M_0 \left( \frac{f}{u\sqrt{t}} \mu - \frac{c}{t\sqrt{t}} \nu + \frac{c}{\sqrt{u}} \varrho_1 - \frac{f}{\sqrt{u}} \varrho_2 \right), \\ \beta^3_1 &= \frac{M_0}{2} \left( \frac{1}{u\sqrt{u}} \varphi - \frac{t+u}{t\sqrt{u}} \tau - \frac{\sqrt{u}}{t} \nu \right), \\ \beta^3_2 &= \frac{M_0}{2} \left( \frac{1}{t\sqrt{t}} \vartheta + \frac{t+u}{u\sqrt{t}} \sigma - \frac{1}{\sqrt{t}} \mu \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^3_1 &= \frac{1}{2\rho(t+u)} \left[ \left( -\frac{1}{t} \vartheta + \frac{t+u}{u} \sigma + \mu \right) \varrho_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{u} \varphi - \frac{t+u}{t} \tau + \frac{u}{t} \nu \right) \varrho_2 + \frac{2(t+u)}{t\sqrt{tu}} (\mu\tau - \nu\sigma) \right], \\ \gamma^3_2 &= \frac{1}{2\rho(t+u)} \left[ \left( -\frac{1}{t} \vartheta + \frac{t+u}{u} \sigma + \mu \right) \frac{\mu}{t} + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{u} \varphi - \frac{t+u}{t} \tau + \frac{u}{t} \nu \right) \frac{\nu}{t} + \frac{2(t+u)}{\sqrt{tu}} (\tau\varrho_1 - \sigma\varrho_2) \right]. \end{aligned}$$

На основании соотношений (2.3—4), (2.13) и (2.15) главные квадратичные формы фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  имеют вид

$$\varphi^4 = b^4_{22} (\Omega^2)^2, \quad (2.18)$$

$${}^* \varphi^4 = {}^* b^4_{22} ({}^* \Omega^2)^2. \quad (2.19)$$

Векторами нормальных кривизн (см. [7]) фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  будут соответственно

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\varphi^4}{ds^2} \mathbf{f}_4 + \frac{\varphi^3}{ds^2} \mathbf{f}_3, \quad \mathbf{k}_2 = \frac{{}^* \varphi^4}{d^* s^2} {}^* \mathbf{f}_4 + \frac{{}^* \varphi^3}{d^* s^2} {}^* \mathbf{f}_3, \quad (2.20)$$

а векторами средних кривизн  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  являются

$$\mathbf{h}_1 = H^\alpha \mathbf{f}_\alpha, \quad \mathbf{h}_2 = {}^* H^\alpha \mathbf{f}_\alpha.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{h}_1$  выражаются через коэффициенты квадратичных форм в ортонормированном репере следующим образом ([7], стр. 253)

$$H^\alpha = -\varepsilon b^{\alpha}_{11} + b^{\alpha}_{22}. \quad (2.21)$$

Здесь  $H^4$  будем называть *главной средней кривизной* и среднюю кривизну  $H^3$  — *побочной средней кривизной* фокальной поверхности  $\{F_1\}$  (аналогично в случае  $\{F_2\}$ ).

В силу (2.21), (2.13') и (2.15') они равны:

$$\begin{aligned} H^4 &= b^4_{22}, & H^3 &= -\varepsilon b^3_{11} + b^3_{22}, \\ {}^* H^4 &= {}^* b^4_{22}, & {}^* H^3 &= -\varepsilon {}^* b^3_{11} + {}^* b^3_{22}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Если  $b^4_{22} = 0$  (или  $*b^4_{22} = 0$ ), то, в силу (2.18—19) имеем  $\varphi^4 = 0$  или  $*\varphi^4 = 0$  и на основании (2.20) можно сказать, что вектор нормальной кривизны  $k_1$  (или  $k_2$ ) поверхности  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) находится на оси  $f_3$  (или  $*f_3$ ). Фокальная поверхность  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) находится тогда в некотором трехмерном пространстве, т. е. является гиперплоской в  $R_4$ .

Если обе фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  неизотропной, нецилиндрической фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$  одновременно являются гиперплоскими, то они находятся в трехмерном пространстве, натянутом на векторы  $e_0, e_1, e_2$ . Следовательно, в этом случае псевдоконгруэнция вырождается в конгруэнцию в  $R_3$ .

**Теорема 1.** *Если неизотропная, нецилиндрическая фокальная псевдоконгруэнция в  $R_4$  не вырождается в конгруэнцию в  $R_3$ , то ее обе фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  не могут одновременно быть минимальными.*

**Доказательство.** Двумерная поверхность  $V_2$  в четырехмерном пространстве  $R_4$  является минимальной, если средние кривизны равны нулю, т. е.  $H^\alpha = 0$ . Фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  будут, в силу (2.22), минимальными, если

$$\begin{aligned} b^4_{22} &= 0, & -\varepsilon b^3_{11} + b^3_{22} &= 0, \\ *b^4_{22} &= 0, & -\varepsilon *b^3_{11} + *b^3_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Но из последних соотношений следует, что обе фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  являются гиперплоскими и фокальная псевдоконгруэнция вырождается в конгруэнцию в  $R_3$ . Теорема доказана.

### § 3. Геометрические характеристики фокальной псевдоконгруэнции

1. Гауссовы кривизны и кручения фокальных поверхностей. Гауссова кривизна  $K$  двумерной поверхности в четырехмерном пространстве определяется, как известно ([7], стр. 254), из уравнения

$$D\Omega^2_1 = -K\Omega^1 \wedge \Omega^2, \quad (3.1)$$

где  $D\Omega^2_1 = \Omega^3_1 \wedge \Omega^2_3 + \Omega^4_1 \wedge \Omega^2_4$ .

В случае фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  фокальной псевдоконгруэнции из соотношений (1.23—24) на основании (1.20), (1.25) найдем

$$D\Omega^2_1 = -*K_1\omega^1 \wedge \omega^2, \quad D*\Omega^2_1 = -*K_2\omega^1 \wedge \omega^2, \quad (3.2)$$

где обозначено

$$*K_1 = G_1 + G_2, \quad *K_2 = G_1 - G_2, \quad (3.3)$$

и

$$G_1 = 0,5(t+u)^{-3,2} [t\sqrt{t}\varphi + 3u\sqrt{t}(t+u)\tau - u^2\sqrt{t}v], \quad (3.4)$$

$$G_2 = 0,5(t+u)^{-3,2} [-u\sqrt{u}\vartheta + 3t\sqrt{u}(t+u)\sigma + tu\sqrt{u}\mu].$$

Из соотношений (1.9) и (1.11), в силу (2.5—10) вытекает, что

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = \Delta \omega^1 \wedge \omega^2, \quad * \Omega^1 \wedge * \Omega^2 = * \Delta \omega^1 \wedge \omega^2. \quad (3.5)$$

На основании найденных соотношений (3.1—5) и (2.12) получаем следующие выражения для гауссовых кривизн фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  соответственно

$$K_1 = \frac{G_1 + G_2}{E_1 + E_2}, \quad K_2 = \frac{G_1 - G_2}{E_1 - E_2}. \quad (3.6)$$

Гауссовы кручения фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  определяются соответственно из выражений (см. [7])

$$\begin{aligned} \Omega^3_1 \wedge \Omega^4_1 + \Omega^3_2 \wedge \Omega^4_2 &= \kappa_1 \Omega^1 \wedge \Omega^2, \\ * \Omega^3_1 \wedge * \Omega^4_1 + * \Omega^3_2 \wedge * \Omega^4_2 &= \kappa_2 * \Omega^1 \wedge * \Omega^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следовательно, в случае фокальной псевдоконгруэнции, в силу (2.13') и (2.15'), гауссовы кручения следующие

$$\kappa_1 = b^3_{12} b^4_{22}, \quad \kappa_2 = * b^3_{12} * b^4_{22}. \quad (3.8)$$

В силу (2.13'—16') и (2.17)

$$\kappa_1 = \frac{(\beta^3_1 + \beta^3_2)(\gamma^4_1 + \gamma^4_2)}{(E_1 + E_2)^2} = \frac{\beta^3_1 \gamma^4_1 + \gamma^3_2 \gamma^4_2 + \gamma^3_1 \gamma^4_2 + \gamma^3_2 \gamma^4_1}{E^2_1 + E^2_2 + 2E_1 E_2}, \quad (3.9)$$

$$\kappa_2 = \frac{(\beta^3_1 - \beta^3_2)(\gamma^4_1 - \gamma^4_2)}{(E_1 - E_2)^2} = \frac{\beta^3_1 \gamma^4_1 + \beta^3_2 \gamma^4_2 - (\beta^3_1 \gamma^4_2 + \beta^3_2 \gamma^4_1)}{E^2_1 + E^2_2 - 2E_1 E_2},$$

или

$$\kappa_1 = \frac{I_1 + I_2}{J_1 + J_2}, \quad \kappa_2 = \frac{I_1 - I_2}{J_1 - J_2}, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \beta^3_1 \gamma^4_1 + \beta^3_2 \gamma^4_2, & J_1 &= E^2_1 + E^2_2, \\ I_2 &= \beta^3_1 \gamma^4_2 + \beta^3_2 \gamma^4_1, & J_2 &= 2E_1 E_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

2. Линии кривизны. Линии кривизны (по Картану) фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$  определяются соответственно системами ([7], стр. 255)

$$\begin{aligned} * \Omega^1 * \Omega^2_4 - * \Omega^2 * \Omega^1_4 &= 0, & \Omega^1 \Omega^2_4 - \Omega^2 \Omega^1_4 &= 0, \\ * \Omega^1 * \Omega^2_3 - * \Omega^2 * \Omega^1_3 &= 0, & \Omega^1 \Omega^2_3 - \Omega^2 \Omega^1_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

которым на основании (2.3—4), (2.13) и (2.15) можно придать вид

$$b^4_{22} \Omega^1 \Omega^2 = 0, \quad b^3_{12} [(\Omega^1)^2 + \varepsilon (\Omega^2)^2] + (b^3_{22} + \varepsilon b^3_{11}) \Omega^1 \Omega^2 = 0, \quad (3.13)$$

$$* b^4_{22} * \Omega^1 * \Omega^2 = 0, \quad * b^3_{12} [(* \Omega^1)^2 + \varepsilon (* \Omega^2)^2] + (* b^3_{22} + \varepsilon * b^3_{11}) * \Omega^1 * \Omega^2 = 0. \quad (3.14)$$

Линии кривизны поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  существуют, если системы (3.13) и (3.14) совместны, т. е. если соответственно

$$b^4_{22} b^3_{12} = 0 \quad \text{и} \quad * b^4_{22} * b^3_{12} = 0.$$

В силу (3.8) последние равенства равносильны тому, что гауссовы кривизны  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  равны нулю. Если  $\kappa_1 = 0$  или  $\kappa_2 = 0$ , то соответственно  $\{F_1\}$  или  $\{F_2\}$  имеют по два семейства ортогональных линий кривизны. Если фокальная поверхность  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) не является гиперплоской ( $b^4_{22} \neq 0$  или  $*b^4_{22} \neq 0$ ), то на  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) существуют два семейства линий кривизны тогда и только тогда, когда

$$b^3_{12} = 0 \quad (\text{или } *b^3_{12} = 0). \quad (3.15)$$

3. Асимптотические линии. Асимптотические линии есть линии нулевой нормальной кривизны ([7], стр. 255). Вдоль асимптотических линий фокальной поверхности  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) вектор нормальной кривизны  $k_1$  (или  $k_2$ ) является нулевым вектором и на основании (2.20) имеем  $\varphi^4 = 0$  и  $\varphi^3 = 0$  (или  $*\varphi^4 = 0$  и  $*\varphi^3 = 0$ ). В силу (2.3—4) и (12.18—19) последние соотношения равносильны следующим: при  $\{F_1\}$

$$b^4_{22}(\Omega^2)^2 = 0, \quad b^3_{11}(\Omega^1)^2 + 2b^3_{12}\Omega^1\Omega^2 + b^3_{22}(\Omega^2)^2 = 0, \quad (3.16)$$

и при  $\{F_2\}$

$$*b^4_{22}(*\Omega^2)^2 = 0, \quad *b^3_{11}(*\Omega^1)^2 + 2*b^3_{12}*\Omega^1*\Omega^2 + *b^3_{22}(*\Omega^2)^2 = 0. \quad (3.17)$$

Оба уравнения (3.16) (или 3.17) определяют по два направления на поверхности  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ). Если одно из направлений определяемых первым уравнением системы (3.16) (или (3.17)) совпадает с направлением, определяемым вторым уравнением системы (3.16) (или (3.17)), то это направление является асимптотическим направлением. В общем случае на двумерной поверхности  $V_3$  в  $R_4$  существует либо две (несовпадающие или совпадающие), либо одна, либо ни одна асимптотическая линия.

**Теорема 2.** Если фокальная поверхность  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) не изотропной нецилиндрической фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$  не является гиперплоской, то на ней не существует асимптотических линий.

Доказательство. Если  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) не является гиперплоской, то  $b^4_{22} \neq 0$  (соответственно  $*b^4_{22} \neq 0$ ) и направления, определяемые уравнениями (3.16) (или 3.17), совпадают тогда и только тогда, когда  $b^3_{11} = 0$  (или  $*b^3_{11} = 0$ ). Но, в силу (2.14'), (2.16') имеем  $b^3_{11} \neq 0$  (или соответственно  $*b^3_{11} \neq 0$ ). Теорема доказана.

4. Индикатриса нормальной кривизны. Индикатрисы нормальной кривизны фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  фокальной псевдоконгруэнции  $V_3$  в  $R_4$  определяются соответственно следующими параметрическими уравнениями (см. [7], стр. 253):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{ds^2} \varphi^4 & *x &= \frac{1}{d*s^2} *\varphi^4, \\ y &= \frac{1}{ds^2} \varphi^3 & *y &= \frac{1}{d*s^2} *\varphi^3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

которые, учитывая (2.3—4), (2.18—19), можно представить в виде

$$x = \frac{b^{4_{22}}(\Omega^2)^2}{-\varepsilon(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2}, \quad y = \frac{b^{3_{11}}(\Omega^1)^2 + 2b^{3_{12}}\Omega^1\Omega^2 + b^{3_{22}}(\Omega^2)^2}{-\varepsilon(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2}, \quad (3.19)$$

и

$${}^*x = \frac{{}^*b^{4_{22}}({}^*\Omega^2)^2}{-\varepsilon({}^*\Omega^1)^2 + ({}^*\Omega^2)^2}, \quad y = \frac{{}^*b^{3_{11}}({}^*\Omega^1)^2 + 2{}^*b^{3_{12}}{}^*\Omega^1{}^*\Omega^2 + {}^*b^{3_{22}}({}^*\Omega^2)^2}{-\varepsilon({}^*\Omega^1)^2 + ({}^*\Omega^2)^2} \quad (3.20)$$

В случае  ${}^0R_4$  коэффициент  $\varepsilon = -1$  и в параметрических уравнениях индикатрисы нормальной кривизны фокальной поверхности  $\{F_1\}$  можно провести следующую замену параметра

$$\Omega^1 = ds \cos \varphi, \quad \Omega^2 = ds \sin \varphi, \quad (3.21)$$

тогда новые параметрические уравнения индикатрисы будут следующие

$$\begin{aligned} x &= b^{4_{22}} \sin^2 \varphi, \\ y &= b^{3_{11}} \cos^2 \varphi + 2b^{3_{12}} \cos \varphi \sin \varphi + b^{3_{22}} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.22)$$

или

$$\begin{aligned} x &= 0,5b^{4_{22}} - 0,5b^{4_{22}} \cos 2\varphi, \\ y &= 0,5(b^{3_{11}} + b^{3_{22}}) + 0,5(b^{3_{11}} - b^{3_{22}}) \cos 2\varphi + b^{3_{12}} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.22')$$

Исключив параметр  $\varphi$  из уравнений (3.22) получаем общее уравнение индикатрисы нормальной кривизны в виде

$$[(b^{3_{11}} - b^{3_{22}})^2 + 4(b^{3_{12}})^2]x^2 + (b^{4_{22}})^2y^2 + 2(b^{3_{11}} - b^{3_{22}})b^{4_{22}}xy + 2b_0x - 2b^{3_{11}}(b^{4_{22}})^2y + (b^{3_{11}}b^{4_{22}})^2 = 0, \quad (3.23)$$

где  $b_0 = [b^{3_{11}}(b^{3_{22}} - b^{3_{11}}) - 2(b^{3_{12}})^2](b^{4_{22}})^2$ .

Инварианты относительно преобразования ортонормированного репера следующие

$$I_3 = \begin{vmatrix} (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})^2 + 4(b^{3_{12}})^2 & (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})b^{4_{22}} & b_0 \\ (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})b^{4_{22}} & (b^{4_{22}})^2 & -b^{3_{11}}(b^{4_{22}})^2 \\ b_0 & -b^{3_{11}}(b^{4_{22}})^2 & b^{2_{11}}(b^{4_{22}})^2 \end{vmatrix}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})^2 - 4(b^{3_{12}})^2 & (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})b^{4_{22}} \\ (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})b^{4_{22}} & (b^{4_{22}})^2 \end{vmatrix},$$

$$I_1 = (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})^2 + 4(b^{3_{12}})^2 + (b^{4_{22}})^2,$$

или

$$\begin{aligned} I_3 &= -4(b^{4_{22}}b^{3_{12}})^4 \leq 0, \\ I_2 &= 4(b^{4_{22}}b^{3_{12}})^2 \geq 0, \\ I_1 &= (b^{3_{11}} - b^{3_{22}})^2 + 4(b^{3_{12}})^2 + (b^{4_{22}})^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Аналогичные выражения получаются для фокальной поверхности  $\{F_2\}$  в  ${}^0R_4$ .

В случае же  ${}^1R_4$  коэффициент  $\varepsilon = 1$  и в параметрических уравнениях нормальной кривизны фокальной поверхности  $\{F_1\}$  можно заменить параметр

$$\Omega^1 = ds \operatorname{sh} \varphi, \quad \Omega^2 = ds \operatorname{ch} \varphi,$$

тогда новые параметрические уравнения индикатрисы следующие

$$\begin{aligned} x &= b^4_{22} \operatorname{ch}^2 \varphi, \\ y &= b^3_{11} \operatorname{sh}^2 \varphi + 2b^3_{12} \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi + b^3_{22} \operatorname{ch}^2 \varphi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} b^4_{22} + \frac{1}{2} b^4_{22} \operatorname{ch} 2\varphi, \\ y &= \frac{1}{2} (b^3_{22} - b^3_{11}) + \frac{1}{2} (b^3_{11} + b^3_{22}) \operatorname{ch} 2\varphi + b^3_{12} \operatorname{sh} 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.25')$$

Исключением параметра  $\varphi$  из уравнений (3.25) получаем общее уравнение индикатрисы в виде:

$$\begin{aligned} &[(b^3_{11} + b^3_{22})^2 - 4(b^3_{12})^2]x^2 + (b^4_{22})^2 y^2 - 2(b^3_{11} + b^3_{22})b^4_{22}xy + \\ &+ 2[2(b^3_{12})^2 - (b^3_{11})^2 - b^3_{11}b^4_{22}]b^4_{22}x + 2b^3_{11}(b^4_{22})^2 y + (b^3_{11}b^4_{22})^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Инварианты следующие

$$\begin{aligned} I_3 &= -4(b^4_{22}b^3_{12})^4 \leq 0, \\ I_2 &= -4(b^4_{22}b^3_{12})^2 \leq 0, \\ I_1 &= (b^3_{11} + b^3_{22})^2 - 4(b^3_{12})^2 - (b^4_{22})^2. \end{aligned}$$

Инварианты  $I_2$  и  $I_3$  найдены аналогично соответствующим инвариантам в (3.24), а  $I_1$  является разностью коэффициентов у квадратичных членов в (3.26). Аналогичные выражения получаются в случае  $\{F_2\}$  в  ${}^1R_4$ .

Из соотношений (3.18—26), (2.13'—16') и (3.8) следует

**Теорема 3.** Если фокальная поверхность  $\{F_1\}$  или  $\{F_2\}$  в  $R_4$  (в  ${}^0R_4$  и в  ${}^1R_4$ ) не является гиперплоскостью ( $b^4_{22} \neq 0$  или  ${}^*b^4_{22} \neq 0$ ), то индикатриса нормальной кривизны:

1) не проходит через начало репера (асимптотических линий нет),

2) является вырожденной линией, если гауссово кручение равно нулю ( $\kappa_1 = 0$  или  $\kappa_2 = 0$ ), т. е.  $b^3_{12} = 0$  (или  ${}^*b^3_{12} = 0$ ),

3) является центральной линией с центром в точке  $O(\frac{1}{2}b^4_{22}, \frac{1}{2}(b^3_{22} - b^3_{11}))$  (или  ${}^*O(\frac{1}{2}{}^*b^4_{22}, \frac{1}{2}({}^*b^3_{22} - {}^*b^3_{11}))$ ), если она не является вырожденной. В случае  ${}^0R_4$  она эллипс, в случае  ${}^1R_4$  — гипербола (с точки зрения аффинной классификации).

#### § 4. Фокальные поверхности нормальной фокальной псевдоконгруэнции в $R_4$

Одним частным случаем фокальной псевдоконгруэнции является нормальная фокальная псевдоконгруэнция (см. [9]). Условие нормальности равносильно требованию, чтобы уравнение  $\omega^0 = 0$  было вполне интегрируемым, т. е. чтобы в ортогональном репере имело место равенство

$$t = u. \quad (4.1)$$

Из соотношений (1.4) на основании (3.12) получим

$$\varphi = t(\nu - 2\tau), \quad \vartheta = t(\mu + 2\sigma). \quad (4.2)$$

В силу (3.12—13), (2.11), (2.13'—16') и (2.17) коэффициенты квадратичных форм фокальных поверхностей фокальной псевдоконгруэнции следующие

$$\begin{aligned}
 b^4_{11} &= b^4_{12} = 0, & b^4_{22} &= \frac{f+c}{2}, \\
 b^3_{11} &= \frac{2t}{E_1+E_2}, & b^3_{12} &= \frac{\sqrt{2}}{E_1+E_2}(\sigma-\tau), \\
 b^3_{22} &= \frac{1}{t(E_1+E_2)} [2\sigma^2 + 2\tau^2 + (\sigma+\tau)(\mu-\nu)]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{aligned}
 {}^*b^4_{11} &= {}^*b^4_{12} = 0, & {}^*b^4_{22} &= \frac{f-c}{2}, \\
 {}^*b^3_{11} &= -\frac{2t}{E_1-E_2}, & {}^*b^3_{12} &= -\frac{\sqrt{2}}{E_1-E_2}(\sigma+\tau), \\
 {}^*b^3_{22} &= \frac{1}{t(E_1-E_2)} [-2\sigma^2 - 2\tau^2 + (\tau-\sigma)(\mu+\nu)],
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned}
 E_1 + E_2 &= \frac{2\sqrt{2}}{t}(\sigma+\tau+\mu-\nu) \neq 0, \\
 E_1 - E_2 &= \frac{2\sqrt{2}}{t}(-\sigma+\tau-\mu-\nu) \neq 0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В случае нормальной конгруэнции имеет место следующая

**Теорема 4.** Если при невырожденной в конгруэнцию нормальной фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$  выполнено любое из следующих трех условий:

1° гауссовы кривизны фокальных поверхностей  $K_1$  и  $K_2$  равны нулю,

2° гауссовы кручения фокальных поверхностей  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  равны нулю,

3° на обеих фокальных поверхностях существуют два семейства линий кривизны, то выполнены все три условия.

Доказательство. При нормальной фокальной псевдоконгруэнции гауссовы кривизны и кручения фокальных поверхностей, в силу (3.14—16), выражаются в виде

$$K_1 = b^3_{11}b^3_{22} - (b^3_{12})^2 = \frac{t(\sigma+\tau)}{\sqrt{2}(E_1+E_2)}, \tag{4.6}$$

$$K_2 = {}^*b^3_{11}{}^*b^3_{22} - ({}^*b^3_{12})^2 = -\frac{t(\tau-\sigma)}{\sqrt{2}(E_1-E_2)},$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= b^3 {}_1 b^4 {}_2 = \frac{(f+c)(\sigma-\tau)}{\sqrt{2}(E_1+E_2)}, \\ \kappa^2 &= {}^* b^3 {}^* b^4 {}_2 = \frac{(f-c)(\sigma+\tau)}{\sqrt{2}(E_1-E_2)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если нормальная псевдоконгруэнция не вырождается в конгруэнцию, то  $f^2 + c^2 \neq 0$ , и теорема следует из соотношений (3.15) и (4.3—7).

На основании (4.3—7) следует, что на фокальной поверхности  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) нормальной фокальной псевдоконгруэнции существуют два семейства линий кривизн тогда и только тогда, когда

$$\sigma - \tau = 0 \quad (\text{или } \sigma + \tau = 0). \quad (4.8)$$

Если при обеих фокальных поверхностях  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  нормальной фокальной псевдоконгруэнции выполнены условия теоремы 4, то, в силу (4.3—4) и (4.6—7),

$$\sigma = \tau = 0. \quad (4.9)$$

Назовем этот класс *нормальной псевдоконгруэнцией  $K\kappa$*  и докажем его существование.

Нормальная фокальная псевдоконгруэнция, на основании (1.3—4), (4.1—2), определяется следующей системой пфаффовых уравнений

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^4_0 = t\omega^2, \quad \omega^3_1 = f\omega^1 + c\omega^2, \quad (4.10)$$

$$\omega^3_0 = 0, \quad \omega^2_0 = t\omega^1, \quad \omega^3_2 = c\omega^1 + f\omega^2,$$

продолжение которой приводит к системе

$$\begin{aligned} \omega^2_1 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ t\omega^0 &= \mu\omega^1 + \tau\omega^2, \\ d \ln t &= (\nu - 2\tau)\omega^1 + (\mu + 2\sigma)\omega^2, \\ df &= (\xi - c\mu)\omega^1 + [\pi + c(2\tau - \nu)]\omega^2, \\ dc &= (\pi - f\mu)\omega^1 + (\xi + 2c\sigma - f\nu)\omega^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В случае нормальной фокальной псевдоконгруэнции  $K\kappa$  система (4.11), в силу (4.9) упрощается. При внешнем дифференцировании первого уравнения  $\omega^2_1 = 0$  (см. (4.9) и (4.11)), получаем конечное соотношение

$$c^2 = \varepsilon t^2 + f^2, \quad (4.12)$$

откуда при дифференцировании найдем

$$\xi = f\nu + c\mu, \quad \pi = f\mu + c\nu. \quad (4.13)$$

Итак, в силу (4.9) и (4.12—13), систему (4.11) можем переписать в виде

$$\begin{aligned} \omega^2_1 &= 0, & d \ln t &= v\omega^1 + \mu\omega^2, \\ t\omega^0 &= \mu\omega^1 + v\omega^2, & d \ln f &= v\omega^1 + \mu\omega^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из двух последних уравнений системы (4.14) следует, что

$$f = \lambda_0 t, \quad \text{где } \lambda = \text{const}, \quad (4.15)$$

и, благодаря соотношению (4.12),

$$c = \pm t \sqrt{\varepsilon + \lambda^2_0}. \quad (4.16)$$

При внешнем дифференцировании системы (4.14) найдем

$$d\mu \wedge \omega^1 + \nabla v \wedge \omega^2 = 0, \quad \nabla v \wedge \omega^1 + d\mu \wedge \omega^2 = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\nabla v = dv + 2(\mu^2 - v^2)\omega^1,$$

откуда при помощи леммы Картана получаем

$$d\mu = x\omega^1 + y\omega^2, \quad dv = [y - 2(\mu^2 - v^2)]\omega^1 + z\omega^2. \quad (4.18)$$

В результате проделанного, (в силу (4.9—18)), имеем, что  $s_1 = 2$ , число Картана  $Q = 2$  и число новых неизвестных величин третьего порядка  $N = 2$ . Следовательно,  $Q = N$  (см. [12]), система является в инволюции, нормальная фокальная псевдоконгруэнция  $K\kappa$  существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Относительно геометрических свойств нормальной фокальной псевдоконгруэнции  $K\kappa$  можно отметить, что в силу (4.6—9) ее фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  имеют нулевые гауссовы кривизны и кручения.

## Литература

1. Березина Л. Я., К теории поверхностей многомерного пространства. Рига, 1965.
2. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей  $V_3$  в  $R_4$ . Матем. сб., 1960, 50, № 2, 203—220.
3. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Минимальные конгруэнции  $V_3$  в евклидовом пространстве  $R_4$ . Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962, № 1, 74—82.
4. Рамазанова К. Ш., К теории двумерных поверхностей в  $E_4$ . Волжск. матем. сб., 1965, 3, 296—311.
5. Рамазанова К. Ш., Классификация двумерных поверхностей  $E_4$  по типу конгруэнций несобственных прямых I и II рода. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1966, 126, № 1, 41—49.
6. Рамазанова К. Ш., Теория кривизны  $X_2$  в  $E_4$ . Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 6, 137—143.
7. Риманова геометрия в ортогональном репере. По лекциям Э. Картана. Москва, 1960.
8. Тутаев Л. К., К дифференциальной геометрии линий и поверхностей в пространстве Минковского. Тр. I респ. конф. матем. Белоруссии. Минск, 1965, 290—307.

9. Туулметс Л., Нормальные квазиконгруэнции  $V_3$  в  $R_4$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 109—121.
10. Туулметс Л., Вторая средняя огибающая изотропной конгруэнции в  $R_4$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 37—41.
11. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
12. Фиников С. П., Теория конгруэнций. Москва—Ленинград, 1950.

Поступило  
26 II 1972

## FOKAALSE PSEUDOKONGRUENTSI FOKAALPINNAD RUUMIS $R_4$

L. Tuulmets

Resümee

Käesolevas töös on uuritud fokaalse pseudokongruentsi (joonhüerpinna astakuga 2) fokaalpindu neljamõõtmelises eukleidilises ruumis  $R_4$  (mis võib olla kas päriseukleidiline ruum  $R_4$  või pseudoeukleidiline ruum  $R_4$ ). On konstrueeritud fokaalpindade kanoonilised ortonormeeritud reeperid, leitud fokaalpindade ruutvormid, Gaussi kõverused ja väänded, normaalkõveruste indikatrissid ja uuritud kõverus- ja asümptootjooni.

On tõestatud, et kui fokaalne pseudokongruents ei ole silindriline, isotroopne ega kidunud ning ka tema fokaalpinnad ei ole kidunud, siis tema

- 1) mõlemad fokaalpinnad ei ole samaaegselt minimaalpinnad,
- 2) mõlemad fokaalpinnad ei ole samaaegselt hüpertasandilised,
- 3) fokaalpindadel ei eksisteeri asümptootjooni.

Fokaalse pseudokongruentsi erijuhtudest on vaadeldud normaalset fokaalset pseudokongruentsi, seejuures on lähemalt uuritud viimase sellist erijuhtu, kus mõlemad fokaalpinnad on null Gaussi kõverusega a null Gaussi väändega pinnad. On tõestatud selle erijuhu olemasolu.

## FOCAL SURFACES OF THE FOCAL PSEUDOCONGRUENCE IN THE SPACE $R_4$

L. Tuulmets

Summary

In this paper some focal surfaces of the focal pseudocongruence (of the ruled hypersurface with the rank of 2) in the Euclidean space  $R_4$  (proper Euclidean space  ${}^0R_4$  or pseudo-Euclidean space  ${}^1R_4$ ) have been investigated.

Their geometrical characters such as canonic frames, quadratic forms, Gaussian curvatures, Gaussian torsions, indicatrices of the normal curvatures have been constructed and the line of curvatures and asymptotical lines investigated.

It the focal pseudocongruence is neither cylindrical, isotropic nor degenerated and its focal surfaces are not degenerated then (i) both the focal surfaces are not minimal at the same time (ii) both the focal surfaces are not hyperplanar at the same time (iii) there are no asymptotic lines on the focal surfaces.

From the special cases of the focal pseudocongruence that of the normal focal pseudocongruence has been considered and that of both the focal surfaces of the normal focal pseudocongruence being of the zero Gaussian curvatures and of the zero Gaussian torsion specially dealt with. The existence of the latter has been proved.

## ФОКАЛЬНАЯ ПСЕВДОКОНГРУЭНЦИЯ РИБОКУРА В $R_4$

Л. Туулметс и Э. Вага

Кафедра алгебры и геометрии

В трехмерном евклидовом пространстве  $R_3$  хорошо известен класс конгруэнций Рибокура, характеризуемый тем, что торсы (развертывающиеся поверхности) такой конгруэнции пересекают ее среднюю поверхность по сопряженной системе (см. [8]). Среди конгруэнций Рибокура в  $R_3$  существуют нормальные и изотропные конгруэнции, а также конгруэнции, у которых средняя поверхность — плоскость (см. [8]).

В настоящей работе исследуется в евклидовом пространстве  $R_4$  аналог конгруэнции Рибокура. Пространство  $R_4$  может быть в данном случае как собственно-евклидовым пространством  ${}^0R_4$ , так и псевдо-евклидовым пространством Лоренца — Минковского  ${}^1R_4$ . Во втором случае рассматривается только случай прямых, внутренних относительно изотропного конуса.

Фокальную псевдоконгруэнцию  $V_3$  в  $R_4$  (семейство образующих линейчатой гиперповерхности ранга 2) будем называть *фокальной псевдоконгруэнцией Рибокура*, если ее торсы пересекают ее среднюю поверхность по сопряженной системе.

Ниже доказывается, что нецилиндрическая фокальная псевдоконгруэнция Рибокура в  $R_4$  существует и является либо изотропной, либо нормальной фокальной псевдоконгруэнцией. Каждая изотропная (но не каждая нормальная) фокальная псевдоконгруэнция является фокальной псевдоконгруэнцией Рибокура. Если фокальная псевдоконгруэнция не является ни гиперповерхностью, ни цилиндрической фокальной псевдоконгруэнцией, то ее средняя поверхность не может быть плоскостью.

В настоящей статье рассматриваются *только нецилиндрические фокальные псевдоконгруэнции*. Для простоты они называются фокальными псевдоконгруэнциями.

В параграфах 1—2 исследуются неизотропные фокальные псевдоконгруэнции, а в § 3 изотропные фокальные псевдоконгруэнции.

## § 1. Неизотропные фокальные псевдоконгруэнции Рибокура

К каждой образующей фокальной псевдоконгруэнции  $V_3$  в  $R_4$  (т. е. в  ${}^0R_4$  или в  ${}^1R_4$ ) присоединяем канонический ортонормированный репер так, как это сделано в статье [6], т. е. начальная точка репера  $O$  находится в центре образующей, единственный (в  ${}^0R_4$ ) или мнимоединичный (в  ${}^1R_4$ ) вектор  $e_0$  направлен вдоль образующей, единичный вектор  $e_3$  направлен вдоль нормали поверхности  $V_3$ , единичные векторы  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ) находятся на касательной к  $V_3$  плоскости и делят пополам углы между главными поверхностями (см. [4, 6]).

В таком репере фокальная псевдоконгруэнция определяется следующей системой пфаффовых уравнений (см. [6])

$$\omega^3 = \omega^3_0 = 0; \quad \omega^1_0 = t\omega^2; \quad \omega^2_0 = u\omega^1; \quad (1.1)$$

$$\omega^3_1 = f\omega^1 + c\omega^2; \quad \omega^3_2 = c\omega^1 + tu^{-1}f\omega^2 \\ t \cdot u(t+u) \neq 0, \quad (1.2)$$

т. е. фокальная псевдоконгруэнция не является ни изотропной ( $t+u=0$ ), ни цилиндрической ( $t \cdot u = 0$ ) (см. [1]). В дальнейшем под фокальными псевдоконгруэнциями мы всегда будем подразумевать нецилиндрические фокальные псевдоконгруэнции. В случае изотропной фокальной псевдоконгруэнции выбранный репер является полуканоническим репером, так как при  $t+u=0$  положение векторов  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ) не фиксировано.

Продолжение системы (1.1) приводит к следующей:

$$\omega^2_1 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ t\omega^0 = \mu\omega^1 + \nu\omega^2, \\ dt = \{uv - (t+u)\tau\}\omega^1 + \vartheta\omega^2, \\ du = \varphi\omega^1 + \{u\mu + (t+u)\sigma\}\omega^2, \\ dc = \left(\pi - \mu f + \frac{t-u}{u}f\sigma\right)\omega^1 + \left(\frac{t}{u}\xi - \frac{tf}{u^2}\varphi + 2c\sigma - 2f\tau\right)\omega^2, \\ df = \left(\xi - \frac{u}{t}c\mu\right)\omega^1 + \left\{\pi + \left(2\tau - \frac{u}{t}\nu\right)c\right\}\omega^2, \quad (1.3)$$

где величины  $t, u, f, c$  являются величинами первого, а величины  $\sigma, \tau, \mu, \nu, \vartheta, \varphi, \xi, \pi$  — величинами второго порядка.

Вторичные формы связаны следующими соотношениями, вытекающими из структуры пространства  $R_4$ :

$$\omega^0_I = \varepsilon\omega^I_0, \quad \omega^i_\rho = -\omega^\rho_i; \quad \omega^I_I = 0 \quad (1.4)$$

(по  $I$  не суммировать!)

$$\varepsilon = -(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0) = \pm 1 \quad (\varrho = 1, 2, 3; I, J, K, \dots = 0, 1, 2, 3).$$

При продолжении двух первых уравнений (1.3), получим:

$$d\mu = T\omega^1 + T_1\omega^2, \quad d\nu = (T_1 + \nu^1)\omega^1 + T_2\omega^2, \quad (1.5)$$

где

$$\nu^1 = -\frac{1}{t}\mu\vartheta + 2\frac{u}{t}\nu^2 - \frac{u+2t}{t}\nu\tau - \sigma\mu - \mu^2 + \varepsilon t(t-u), \quad (1.6)$$

а  $T, T_1, T_2$  — величины третьего порядка.

В выбранном репере торсы фокальной псевдоконгруэнции определяются (см. [2]) уравнением

$$u(\omega^1)^2 - t(\omega^2)^2 = 0. \quad (1.7)$$

Найдем теперь касательные векторы  $f_i$  средней поверхности фокальной псевдоконгруэнции. В силу (1.3) имеем

$$do = f_i \Omega^i \quad (i=1, 2), \quad (1.8)$$

где

$$\Omega^i = \frac{1}{t} \omega^i, \quad (1.9)$$

$$f_1 = \mu e_0 + t e_1, \quad f_2 = \nu e_0 + t e_2. \quad (1.10)$$

Дополним систему векторов (1.10) до полного базиса в  $R_4$ , выбирая

$$f_3 = e_0, \quad f_4 = e_3. \quad (1.11)$$

Легко проверить, что система векторов  $\{f_a\}$ , ( $a = 1, 2, 3, 4$ ) линейно независима, т. е. репер  $\{O, f_a\}$  является аффинным репером первого порядка для средней поверхности фокальной псевдоконгруэнции.

Дифференциалы касательных векторов средней поверхности выражаются в виде

$$df_i = \Omega^a f_a, \quad (1.12)$$

где в силу (1.1—3, 4—6, 10)

$$\Omega^1_1 = \frac{1}{t} (\mu \omega^1_0 + dt),$$

$$\Omega^2_1 = \frac{1}{t} (\mu \omega^2_0 + t \omega^2_1),$$

$$\Omega^3_1 = d\mu - \frac{1}{t} \mu dt + \left( \varepsilon t - \frac{1}{t} \mu^2 \right) \omega^1_0 - \frac{1}{t} \nu (\mu \omega^2_0 + t \omega^2_1),$$

$$\Omega^4_1 = t \omega^3_1, \quad (1.13)$$

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{t} (\nu \omega^1_0 - t \omega^2_1),$$

$$\Omega^2_2 = \frac{1}{t} (dt + \nu \omega^2_0),$$

$$\Omega^3_2 = d\nu - \frac{1}{t} \nu dt - \frac{1}{t} \nu \mu \omega^1_0 + \left( \varepsilon t - \frac{1}{t} \nu^2 \right) \omega^2_0 + \mu \omega^2_1,$$

$$\Omega^4_2 = t \omega^3_2.$$

Вторичными квадратичными формами двухмерной поверхности в  $R_4$  (см. [3], стр. 252) являются:

$$\varphi^\beta = \Omega^\beta_i \Omega^i \quad (\beta = 3, 4), \quad (1.14)$$

которые принимают вид

$$\varphi^\beta = b^\beta_{ij} \Omega^i \Omega^j, \quad (1.15)$$

если учитывать, что

$$\Omega^\beta_i = b^\beta_{ij} \Omega^j. \quad (1.16)$$

В случае средней поверхности фокальной псевдоконгруэнции коэффициенты  $b^{\beta}_{ij}$  квадратичных форм  $\varphi^{\beta}$  в силу (1.1—3; 5—6, 9, 13) следующие:

$$\begin{aligned} b^4_{11} &= t^2 f, & b^3_{11} &= tT - 2uv\mu - tv\sigma + (t+u)\mu\tau, \\ b^4_{12} &= b^4_{21} = t^2 c, & b^3_{12} &= b^3_{21} = tT_1 - \mu\vartheta - t\mu^2 - tv\tau + \varepsilon t^3, \\ b^4_{22} &= t^3 u^{-1} f, & b^3_{22} &= tT_2 - v\vartheta + t(\tau - v)\mu. \end{aligned} \quad (1.17)$$

**Теорема 1.** *Если существует неизотропная фокальная псевдоконгруэнция Рибокура в  $R_4$ , то она является нормальной фокальной псевдоконгруэнцией. Каждая нормальная фокальная псевдоконгруэнция не является нормальной фокальной псевдоконгруэнцией Рибокура.*

**Доказательство.** Если направления  $e = (\xi^1, \xi^2)$  и  $f = (\eta^1, \eta^2)$  на средней поверхности сопряжены, то удовлетворяются условия

$$b^{\beta}_{ij} \xi^i \eta^j = 0. \quad (1.18)$$

Нас интересуют направления, по которым торсы пересекут среднюю поверхность. Из уравнения торсов (1.7) вытекает, что такие направления определяются векторами

$$e = (\sqrt{u}, \sqrt{t}), \quad f = (-\sqrt{u}, \sqrt{t}). \quad (1.19)$$

Требование о сопряженности их направлений на средней поверхности приводит к условиям

$$tb^{\beta}_{22} - ub^{\beta}_{11} = 0, \quad (1.20)$$

которые мы в дальнейшем будем называть *условиями Рибокура*.

В силу (1.17) они принимают следующий вид:

$$ft^2(t+u)(t-u) = 0, \quad (1.21)$$

$$t(tT_2 - uT) - tv\vartheta + t^2\mu(\tau - v) + tu(v\sigma - \mu\tau) + u^2\mu(2v - \tau) = 0. \quad (1.22)$$

На основании (1.2) здесь уравнение (1.21) дает

$$f(t-u) = 0.$$

Условие неизотропности  $t+u \neq 0$  влечет за собой  $f \neq 0$ , потому, что при  $f = 0$  фокальная псевдоконгруэнция является минимальной  $V_3$  в  $R_4$ , а каждая минимальная фокальная псевдоконгруэнция является изотропной (см. [2]). Таким образом, уравнение (1.21) удовлетворяется только тогда, когда

$$t - u = 0. \quad (1.23)$$

Последнее является условием нормальности фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$  (см. [4]). Этим первая часть теоремы 1 доказана. Второе условие Рибокура (1.22) для нормальной фокальной псевдоконгруэнции в силу (1.23) принимает вид

$$T_2 - T - v\sigma - \mu\tau = 0. \quad (1.24)$$

Оно не удовлетворяется тождественно, следовательно, и вторая часть теоремы 1 доказана.

## § 2. Нормальная фокальная псевдоконгруэнция Рибокура в $R_4$

**Теорема 2.** *Нормальная неизотропная фокальная псевдоконгруэнция Рибокура существует в  $R_4$  и определяется с произволом шести функций одного аргумента.*

Доказательство. Указанная псевдоконгруэнция в  $R_4$  определяется системой пфаффовых уравнений (1.1) при условии нормальности (1.23) и условии Рибокура (1.24). Учитывая первое из этих условий, в (1.3), получаем

$$\begin{aligned} t\omega^0 &= \mu\omega^1 + \nu\omega^2, \\ \omega^2_1 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ d \ln t &= (\nu - 2\tau)\omega^1 + (\mu + 2\sigma)\omega^2, \\ df &= (\xi - c\mu)\omega^1 + \{\pi + (2\tau - \nu)c\}\omega^2, \\ dc &= (\pi - f\mu)\omega^1 + (\xi - f\nu + 2c\sigma)\omega^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система ковариантов для (2.1) сводится к

$$\begin{aligned} \nabla\mu \wedge \omega^1 + \nabla\nu \wedge \omega^2 &= 0, \\ d\sigma \wedge \omega^1 + \nabla\tau \wedge \omega^2 &= 0, \\ (\nabla\nu - 2\nabla\tau) \wedge \omega^1 + (\nabla\mu + 2d\sigma) \wedge \omega^2 &= 0, \\ (\nabla\xi - c\nabla\mu) \wedge \omega^1 + (\nabla\pi + 2c\nabla\tau - c\nabla\nu) \wedge \omega^2 &= 0, \\ (\nabla\pi - f\nabla\mu) \wedge \omega^1 + (\nabla\xi - f\nabla\nu + 2cd\sigma) \wedge \omega^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla\mu &= d\mu + \mu^1\omega^1, & \nabla\xi &= d\xi + \xi^1\omega^1, \\ \nabla\nu &= d\nu + \nu^1\omega^1, & \nabla\pi &= d\pi + \pi^1\omega^1, \\ \nabla\tau &= d\tau + \tau^1\omega^1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

и использованы обозначения

$$\begin{aligned} \mu^1 &= -\tau\mu - \nu\sigma, \\ \nu^1 &= 2\mu^2 + 3\mu\sigma + 3\nu\tau - 2\nu^2, \\ \tau^1 &= \sigma^2 + \tau^2 + \mu\sigma - \tau\nu + \varepsilon t^2 + f^2 - c^2, \\ \xi^1 &= (3\sigma + 2\mu)\pi + (\tau - 2\nu)\xi + \\ &+ 2c(\mu\tau + \sigma\tau - \nu\sigma) + f(\mu^2 - \nu^2 + 2\nu\tau), \\ \pi^1 &= (3\tau - 2\nu)\pi + (2\mu + \sigma)\xi + \\ &+ c(2c^2 - 2\varepsilon t^2 + 2\mu\sigma - 2\sigma^2 - 2\tau\nu + \mu^2 - \nu^2) - 2f(\tau\mu + c f). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.2) при помощи леммы Картана, учитывая условие Рибокура (1.24), находим, что

$$\begin{aligned} d\mu &= T_2\omega^1 + T_1\omega^2, \\ d\nu &= (T_1 - \nu^1)\omega^1 + T_2\omega^2, \\ d\sigma &= Q\omega^1 + Q_1\omega^2, \\ d\tau &= (Q_1 - \tau^1)\omega^1 + \left(-Q - \frac{1}{2}\mu^1\right)\omega^2, \\ d\xi &= (V - \xi^1)\omega^1 + V_1\omega^2, \\ d\pi &= (V_1 - \pi^1)\omega^1 + V\omega^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $T_1, T_2, Q, Q_1, V, V_1$  — новые величины третьего порядка. Из систем (2.2) и (2.5) вытекает, что  $s_1 = 5$ ;  $s_2 = 1$ ;  $Q = 7$ ;  $N = 6$ . Из  $N < Q$  следует, что систему надо продолжать (см. [7]).

Дифференцируя (2.5) внешним образом, получаем:

$$\begin{aligned}
 \nabla T_2 \wedge \omega^1 + \nabla T_1 \wedge \omega^2 &= 0, \\
 \nabla T_1 \wedge \omega^1 + \nabla T_2 \wedge \omega^2 &= 0, \\
 \nabla Q \wedge \omega^1 + \nabla Q_1 \wedge \omega^2 &= 0, \\
 \nabla Q_1 \wedge \omega^1 + \nabla Q \wedge \omega^2 &= 0, \\
 \nabla V \wedge \omega^1 + \nabla V_1 \wedge \omega^2 &= 0, \\
 \nabla V_1 \wedge \omega^1 + \nabla V \wedge \omega^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 \nabla T_1 &= dT_1 + a_1 \omega^1, \\
 \nabla T_2 &= dT_2 + a_2 \omega^1, \\
 \nabla Q &= dQ + a_3 \omega^1, \\
 \nabla Q_1 &= dQ_1 + a_4 \omega^1, \\
 \nabla V &= dV + a_5 \omega^1, \\
 \nabla V_1 &= dV_1 + a_6 \omega^1,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

и где  $a_x$ , ( $x = 1, 2, \dots, 6$ ) зависят только от величин первого, второго и третьего порядка в системах (1.1) и (2.15). При помощи леммы Картана из (2.6) получаем следующие выражения

$$\begin{aligned}
 \nabla T_1 &= X_1 \omega^1 + X_2 \omega^2, \\
 \nabla T_2 &= X_2 \omega^1 + X_1 \omega^2, \\
 \nabla Q &= X_3 \omega^1 + X_4 \omega^2, \\
 \nabla Q_1 &= X_4 \omega^1 + X_3 \omega^2, \\
 \nabla V &= X_5 \omega^1 + X_6 \omega^2, \\
 \nabla V_1 &= X_6 \omega^1 + X_5 \omega^2,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

где  $X_x$  — новые величины четвертого порядка. Из систем (2.6) и (2.8) вытекает, что  $s_1 = 6$ ;  $s_2 = 0$ ;  $Q = N = 6$ . Система в инволюции (см. [7]) и теорема 2 доказана.

### § 3. Изотропная фокальная псевдоконгруэнция Рибокура в $R_4$

Для изотропной фокальной псевдоконгруэнции репер, выбранный нами в § 1, является полуканоническим репером, так как положение векторов  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ) не фиксировано. В случае изотропной фокальной псевдоконгруэнции существуют ортогональные асимптотические направления (см. [2]). Для полной канонизации репера направим векторы  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ) по асимптотическим направлениям в ортогональной плоскости.

В таком репере изотропная фокальная псевдоконгруэнция определяется (см. [5]) системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{aligned}\omega^3 &= \omega^3_0 = 0, & \omega^3_1 &= c\omega^2, \\ \omega^1_0 &= t\omega^2, & \omega^3_2 &= c\omega^1, \\ \omega^2_0 &= -t\omega^1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где  $t \cdot c \neq 0$ . Если  $t = 0$ , то изотропная фокальная псевдоконгруэнция является нормальной фокальной псевдоконгруэнцией, которая вырождается в конус. В случае  $c = 0$  фокальная псевдоконгруэнция вырождается в гиперплоскость.

Докажем следующую теорему.

**Теорема 3.** *Каждая невырожденная изотропная фокальная псевдоконгруэнция в  $R_4$  является фокальной псевдоконгруэнцией Рибокура.*

**Доказательство.** В выбранном репере торсы изотропной фокальной псевдоконгруэнции определяются уравнением

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0.\tag{3.2}$$

За новый аффинный базис в  $R_4$  можно брать систему (1.10—11), так как векторы  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) лежат на касательной плоскости средней поверхности изотропной фокальной псевдоконгруэнции. В силу того, что главные формы  $\Omega^i$  определяются в виде (1.9), торсы пересекают среднюю поверхность по направлениям

$$e = (1, -i); \quad f = (1, i), \quad (i^2 = -1).\tag{3.3}$$

Требование о сопряженности направлений (3.3) на средней поверхности изотропной фокальной псевдоконгруэнции приводит нас к уравнениям (1.18), которые в силу (3.3) удовлетворены при всех значениях коэффициентов  $b^{\beta}_{ij}$ . Тем самым и доказана теорема 3.

#### § 4. Теорема о средней поверхности фокальной псевдоконгруэнции в $R_4$

В пространстве  $R_3$  среди конгруэнций Рибокура существуют такие, у которых средняя поверхность является плоскостью. Существует ли аналог такой конгруэнции Рибокура в пространстве  $R_4$ ? Ответ на этот вопрос дает следующая

**Теорема 4.** *Если средняя поверхность фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$  является плоскостью, то такая фокальная псевдоконгруэнция является конгруэнцией прямых в гиперплоскости  $R_3$  пространства  $R_4$ .*

**Доказательство.** Если средняя поверхность фокальной псевдоконгруэнции является плоскостью, то дифференциалы касательных векторов  $df$  средней поверхности не имеют компонентов вдоль нормальных векторов средней поверхности.

1) Для неизотропной фокальной псевдоконгруэнции это, в силу (1.17) и (1.2), возможно при  $f = c = 0$ . Но в последнем случае, в силу (1.1), неизотропная фокальная псевдоконгруэнция является конгруэнцией прямых в гиперплоскости  $R_3$  пространства  $R_4$ .

2) Для изотропной фокальной псевдоконгруэнции нужно сперва найти коэффициенты  $b^{\beta}_{ij}$ . В силу выбора репера в § 3, коэффициенты  $b^{\alpha}_{ij}$  определяются в виде

$$b^4_{11} = b^4_{22} = 0, \quad b^4_{12} = b^4_{21} = t^2 c. \quad (4.1)$$

Если средняя поверхность изотропной фокальной псевдоконгруэнции является плоскостью, то в силу (3.1) и (4.1) получаем, что  $c = 0$ . В последнем случае изотропная фокальная псевдоконгруэнция является конгруэнцией прямых в гиперплоскости  $R_3$  пространства  $R_4$ .

Теорема 4 доказана. Ясно, что следствием из теоремы 4 является: *среди нецилиндрических и невырожденных в гиперплоскости псевдоконгруэнций Рибокура в  $R_4$  не существует такой, у которой средняя поверхность являлась бы плоскостью.*

## Литература

1. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей  $V_3$  в  $R_4$ . Матем. сб., 1960, 50, № 2, 203—220.
2. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Минимальные конгруэнции  $V_3$  в евклидовом пространстве  $R_4$ . Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962. № 1, 74—82.
3. Риманова геометрия в ортогональном репере (по лекциям Картана). Москва, 1960.
4. Туулметс Л., Нормальные квазиконгруэнции  $V_3$  в  $R_4$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 109—121.
5. Туулметс Л., Вторая средняя огибающая изотропной конгруэнции в  $R_4$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 37—44.
6. Туулметс Л., Фокальные поверхности псевдоконгруэнции в  $R_4$ . Настоящий сборник, стр. 46—62.
7. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва — Ленинград, 1948.
8. Фиников С. П., Геометрия конгруэнции. Москва — Ленинград, 1950.

Поступило  
25 II 1972

## RIBAUOURI FOKAALNE PSEUDOKONGRUENTS RUUMIS $R_4$

L. Tuulmets ja E. Vaga

Resümee

Töös uuritakse selliseid sirgete kaheparameetrilisi parvi  $\infty^2$   $R_1$  astakuga 2 eukleiidilises ruumis  $R_4$  (päriseukleiidilises ruumis  ${}^0R_4$  või pseudoeukleiidilises ruumis  ${}^1R_4$ ), mis rahuldavad analoogilisi tingimusi nagu Ribaucouri kongruentsid eukleiidilises ruumis  $R_3$ .

Ribaucouri fokaalseks pseudokongruentsiks nimetame fokaalset pseudokongruentsi  $V_3$  ruumis  $R_4$ , mille torsid lõikuvad keskpinnaga mõõda konjugeeritud süsteemi.

Osutub, et selliselt defineeritud fokaalne pseudokongruents eksisteerib ruumis  $R_4$  ja on kas isotroopne või normaalne. Seejuures iga isotroopne (minimaalne) fokaalne pseudokongruents on ka Ribaucouri fokaalne pseudokongruents, mida aga ei saa öelda iga normaalse fokaalse pseudokongruentsi kohta.

Tõestatakse, et mittesilindriline fokaalne pseudokongruents, mille kesk-pind on tasand, osutub ise hüpertasandiks.

## FOCAL PSEUDOCONGRUENCE OF RIBAUCCOUR IN SPACE $R_4$

L. Tuulmets and E. Vaga

### SUMMARY

In this paper the family of straight lines  $\infty^2R_1$  with rank 2, which satisfies conditions analogical to those of congruence of Ribaucour in Euclidean space  $R_3$  is investigated in Euclidean space  $R_4$  (Euclidean space proper  ${}^0R_4$  or pseudo-Euclidean space  ${}^1R_4$ ).

The focal pseudocongruence of Ribaucour in the Euclidean space  $R_4$  has been defined in the same way as the corresponding class of the congruence in Euclidean space  $R_3$ : the focal pseudocongruence  $V_3$  in space  $R_4$ , the torses of which intersect with the middlesurface along the conjugate system, has been called the focal pseudocongruence of Ribaucour.

In this paper the following theorems have been proved:

**Theorem 1.** *If the nonisotropical focal pseudocongruence of Ribaucour exists in space  $R_4$ , it is a normal focal pseudocongruence. Each normal focal pseudocongruence is not a normal focal pseudocongruence of Ribaucour.*

**Theorem 2.** *The normal nonisotropical focal pseudocongruence of Ribaucour exists in  $R_4$  and depends on six functions of one argument.*

**Theorem 3.** *Each isotropical (minimal) focal pseudocongruence is a focal pseudocongruence of Ribaucour.*

**Theorem 4.** *If the middlesurface of focal pseudocongruence in space  $R_4$  is a plane, the focal pseudocongruence is a congruence in the hyperplane.*

# ФОКАЛЬНЫЕ ПСЕВДОКОНГРУЭНЦИИ В $R_4$ , ФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРЫХ ИМЕЮТ НУЛЕВЫЕ ГАУССОВЫ КРИВИЗНЫ ИЛИ КРУЧЕНИЯ

Л. Туулметс и Т. Пюсса

Кафедра алгебры и геометрии

Классы двупараметрических семейств прямых в трехмерном евклидовом пространстве  $R_3$  (конгруэнций) изучены уже достаточно хорошо. Однако классы двупараметрических семейств прямых (псевдоконгруэнций) в  $R_4$  исследованы сравнительно мало [2—6].

В настоящей работе изучаются некоторые классы неизотропных нецилиндрических фокальных псевдоконгруэнций<sup>1</sup> в евклидовом пространстве  $R_4$  (последнее может быть или собственно-евклидовым пространством  ${}^0R_4$  или псевдоевклидовым пространством  ${}^1R_4$ ; в случае  ${}^1R_4$  предполагается, что образующие фокальной псевдоконгруэнции  $V_3$  находятся внутри изотропного конуса). Рассмотрены классы фокальных псевдоконгруэнций, у которых

1) гауссовы кривизны фокальных поверхностей равны нулю;

2) гауссовы кручения фокальных поверхностей равны нулю. При этом предполагается, что ни одна из фокальных поверхностей не лежит в гиперплоскости.

Доказывается существование псевдоконгруэнций упомянутых классов и также их пересечения, исследуются важнейшие геометрические свойства их фокальных поверхностей.

Настоящая работа примыкает к статье [7], где изучались фокальные псевдоконгруэнции, фокальные поверхности которых имеют постоянные гауссовы кривизны, отличные от нуля.

## § 1. Геометрические характеристики фокальной псевдоконгруэнции

Пусть к каждой образующей фокальной псевдоконгруэнции  $V_3$  в  $R_4$  присоединен ортонормированный подвижный репер так,

<sup>1</sup> Они в дальнейшем, для краткости, называются просто фокальными псевдоконгруэнциями.

чтобы начальная точка  $M$  репера находилась в центре образующей, единичный (при  ${}^0R_4$ ) или мнимоединичный (при  ${}^1R_4$ ) вектор  $e_0$  был направлен вдоль образующей, единичный вектор  $e_3$  — вдоль нормали к гиперповерхности  $V_3$  в точке  $M$ , ортонормированные векторы  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ) находились на распределительных подповерхностях (см. [4]). Теперь формы инфинитезимального перемещения подвижного репера выражаются следующим образом:

$$dM = \omega^I e_I, \quad de_I = \omega^K_I e_I \quad (I, J, K, \dots = 0, 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

где

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^0_I = \varepsilon \omega^J_0, \quad \omega^0_i = -\omega^i_0, \quad \omega^I_I = 0 \quad (I) \quad (1.2)$$

и

$$\varepsilon = -(e_0, e_0) = \pm 1, \quad (\varrho = 1, 2, 3).$$

В случае такого ортонормированного репера фокальная псевдоконгруэнция определяется следующей системой пфаффовых уравнений в евклидовом пространстве  $R_4$  (см. [4])

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, & \omega^1_0 &= t\omega^2, & \omega^3_1 &= f\omega^1 + c\omega^2, \\ \omega^3_0 &= 0, & \omega^2_0 &= u\omega^1, & \omega^3_2 &= c\omega^1 + \frac{t}{u}f\omega^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где величины  $t, u, f, c$  являются величинами первого порядка. Путем внешнего дифференцирования системы (1.3) с учетом соотношения (1.1—2) и леммы Картана получаем продолженную систему:

$$\begin{aligned} t\omega^0 &= \mu\omega^1 + \nu\omega^2, \\ \omega^2_1 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ dt &= [u\nu - (t+u)\tau]\omega^1 + \vartheta\omega^2, \\ du &= \varphi\omega^1 + [u\mu + (t+u)\sigma]\omega^2, \\ df &= \left[ \xi - \frac{u}{t}c\mu \right]\omega^1 + \left[ \pi + \left( 2\tau - \frac{u}{t}\nu \right)c \right]\omega^2, \\ dc &= \left[ \pi - \mu f + \frac{t-u}{u}f\sigma \right]\omega^1 + \left[ \frac{t}{u}\xi - \frac{t}{u^2}f\varphi + 2c\sigma - 2f\tau \right]\omega^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где величины  $\mu, \nu, \sigma, \tau, \vartheta, \varphi, \xi, \pi$  являются величинами второго порядка. Здесь предполагается, что  $t \cdot u(t+u) \neq 0$ , т. е. не рассматриваются изотропные цилиндрические и конические фокальные псевдоконгруэнции [1, 3]. Не рассматривается также случай, когда фокальная псевдоконгруэнция вырождается в конгруэнцию в  $R_3$ , т. е. предполагается, что  $f^2 + c^2 \neq 0$ .

Дальнейшее исследование опирается существенно на ниже следующие формулы (1.5—16), вывод которых можно найти в [5]. Эти формулы описывают важнейшие геометрические свойства фокальных поверхностей общей фокальной псевдоконгруэнции.

Вторыми квадратичными формами фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  являются соответственно

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= b^3_{ij} \Omega^i \Omega^j, & * \varphi^3 &= * b^3_{ij} * \Omega^i * \Omega^j, \\ \varphi^4 &= b^4_{ij} \Omega^i \Omega^j, & * \varphi^4 &= * b^4_{ij} * \Omega^i * \Omega^j, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где коэффициенты квадратичных форм следующие

$$\begin{aligned} b^4_{11} &= b^4_{12} = 0, & b^4_{22} &= \frac{\gamma^4_1 + \gamma^4_2}{E_1 + E_2}, \\ b^3_{11} &= \frac{2\sqrt{tu}}{E_1 + E_2}, & b^3_{12} &= \frac{\beta^3_1 + \beta^3_2}{E_1 + E_2}, & b^3_{22} &= \frac{\gamma^3_1 + \gamma^3_2}{E_1 + E_2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

и

$$\begin{aligned} * b^4_{11} &= * b^4_{12} = 0, & * b^4_{22} &= \frac{\gamma^4_1 - \gamma^4_2}{E_1 - E_2}, \\ * b^3_{11} &= -\frac{2\sqrt{tu}}{E_1 - E_2}, & * b^3_{12} &= \frac{\beta^3_1 - \beta^3_2}{E_1 - E_2}, & * b^3_{22} &= \frac{\gamma^3_1 - \gamma^3_2}{E_1 - E_2}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

здесь, в свою очередь,

$$\begin{aligned} \gamma^4_1 &= M_0 \left( -\frac{c}{t\sqrt{u}} \mu - \frac{f}{t\sqrt{u}} \nu + \frac{f\sqrt{t}}{u} \varrho_1 - \frac{c}{\sqrt{t}} \varrho_2 \right) \\ \gamma^4_2 &= M_0 \left( -\frac{f}{u\sqrt{t}} \mu - \frac{c}{t\sqrt{t}} \nu - \frac{c}{\sqrt{u}} \varrho_1 - \frac{f}{\sqrt{u}} \varrho_2 \right) \\ \beta^3_1 &= \frac{M_0}{2} \left( \frac{1}{u\sqrt{u}} \varphi - \frac{t+u}{t\sqrt{u}} \tau - \frac{\sqrt{u}}{t} \nu \right), \\ \beta^3_2 &= \frac{M_0}{2} \left( \frac{1}{t\sqrt{t}} \vartheta + \frac{t+u}{u\sqrt{t}} \sigma - \frac{1}{\sqrt{t}} \mu \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma^3_1 &= \frac{\sqrt{tu}}{2(t+u)} \left[ \left( -\frac{1}{t} \vartheta + \frac{t+u}{u} \sigma + \mu \right) \varrho_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{u} \varphi - \frac{t+u}{t} \tau + \frac{u}{t} \nu \right) \varrho_2 + \frac{2(t+u)}{t\sqrt{tu}} (\mu\tau - \nu\sigma) \right], \\ \gamma^3_2 &= \frac{\sqrt{tu}}{2(t+u)} \left[ \left( -\frac{1}{t} \vartheta + \frac{t+u}{u} \sigma + \mu \right) \frac{\mu}{t} + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{u} \varphi - \frac{t+u}{t} \tau + \frac{u}{t} \nu \right) \frac{\nu}{t} + \frac{2(t+u)}{\sqrt{tu}} (\tau\varrho_1 - \sigma\varrho_2) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= -0,5(tu)^{-3} [t\varphi + u^2\nu - u(t+u)\tau], \\ \varrho_2 &= -0,5(tu)^{-3} [u\vartheta + tu\mu + t(t+u)\sigma], \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$E_1 = \frac{M_0^{-1}}{2} \left( -\frac{1}{u\sqrt{u}} \varphi + \frac{t+u}{t\sqrt{u}} \tau - \frac{3\sqrt{u}}{t} \nu \right), \quad (1.10)$$

$$E_2 = \frac{M_0^{-1}}{2} \left( \frac{1}{t\sqrt{t}} \vartheta + \frac{t+u}{u\sqrt{t}} \sigma + \frac{3}{\sqrt{t}} \mu \right),$$

$$M_0 = \sqrt{tu/\sqrt{t+u}}.$$

Здесь предполагается, что фокальные поверхности не вырождаются в линии, т. е.

$$E_1 + E_2 \neq 0, \quad E_1 - E_2 \neq 0. \quad (1.11)$$

Требуется также, чтобы

$$b^4_{22} = 0, \quad {}^*b^4_{22} = 0; \quad (1.12)$$

в противном случае, когда  $b^4_{22} = 0$  (или  ${}^*b^4_{22} = 0$ ), фокальная поверхность  $\{F_1\}$  (или  $\{F_2\}$ ) является поверхностью трехмерного пространства. Этот случай, таким образом, исключается из рассмотрения. Заметим, что при  $b^4_{22} = {}^*b^4_{22} = 0$  фокальная псевдоконгруэнция вырождается в конгруэнцию в  $R_3$  [5].

Координаты векторов средних кривизн фокальных поверхностей определяются формулами

$$\begin{aligned} H^4 &= b^4_{22}, & H^3 &= -\varepsilon b^3_{11} + b^3_{22}, \\ {}^*H^4 &= {}^*b^4_{22}, & {}^*H^3 &= -\varepsilon {}^*b^3_{11} + {}^*b^3_{22}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Гауссовы кривизны фокальных поверхностей выражаются в виде

$$K_1 = \frac{G_1 + G_2}{E_1 + E_2}, \quad K_2 = \frac{G_1 - G_2}{E_1 - E_2}, \quad (1.14)$$

где

$$G_1 = \frac{1}{2(t+u)^{3/2}} [t\sqrt{t}\varphi + 3u\sqrt{t}(t+u)\tau - u^2\sqrt{t}\nu],$$

$$G_2 = \frac{1}{2(t+u)^{3/2}} [-u\sqrt{u}\vartheta + 3t\sqrt{u}(t+u)\sigma + tu\sqrt{u}\mu],$$

а гауссовы кручения фокальных поверхностей определяются формулами

$$\kappa_1 = b^3_{12}b^4_{22}, \quad \kappa_2 = {}^*b^3_{12}{}^*b^4_{22}. \quad (1.16)$$

Если  $\kappa_1 = 0$  или  $\kappa_2 = 0$ , т. е.  $b^3_{12} = 0$  или  ${}^*b^3_{12} = 0$ , то соответственно  $\{F_1\}$  или  $\{F_2\}$  имеют два семейства ортогональных линий кривизны (в смысле Картана).

## § 2. Фокальная псевдоконгруэнция $K$

1. Существование  $K$ -фокальной псевдоконгруэнции. Фокальную псевдоконгруэнцию, у которой гауссовы кривизны фокальных поверхностей одновременно равны нулю, будем называть  $K$ -фокальной псевдоконгруэнцией (или фокальной псевдоконгруэнцией  $K$ ). Она определяется условиями

$K_1 = 0$  и  $K_2 = 0$ , откуда в силу (1.14) следует, что  $G_1 = G_2 = 0$ , или же, учитывая выражения (1.15) для величин  $G_1$  и  $G_2$ , получаем

$$\varphi = \frac{u}{t} [uv - 3(t+u)\tau],$$

$$\vartheta = \frac{t}{u} [u\mu + 3(t+u)\sigma].$$

В случае фокальной псевдоконгруэнции  $K$  система пфаффовых уравнений (1.3) сохраняет свой прежний вид, однако продолженная система (1.4) принимает, в силу (2.1), следующую форму:

$$t\omega^0 = \mu\omega^1 + \nu\omega^2,$$

$$\omega^2_1 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2,$$

$$dt = [uv - (t+u)\tau]\omega^1 + \frac{t}{u} [u\mu + 3(t+u)\sigma]\omega^2,$$

$$du = \frac{u}{t} [uv - 3(t+u)\tau]\omega^1 + [u\mu + (t+u)\sigma]\omega^2, \quad (2.2)$$

$$df = \left( \xi - \frac{u}{t} c\mu \right) \omega^1 + \left[ \pi + \left( 2\tau - \frac{u}{t} \nu \right) c \right] \omega^2,$$

$$dc = \left( \pi - f\mu + \frac{t-u}{u} f\sigma \right) \omega^1 + \left[ \frac{t}{u} \xi - f\nu + 2c\sigma + \frac{f}{u} (3t+u)\tau \right] \omega^2.$$

Чтобы доказать существование  $K$ -фокальной псевдоконгруэнции, продифференцируем систему (2.2) внешним образом:

$$d\mu \wedge \omega^1 + \nabla\nu \wedge \omega^2 = 0,$$

$$d\sigma \wedge \omega^1 + \nabla\tau \wedge \omega^2 = 0,$$

$$\left[ \frac{u^2}{t} \nabla\nu - 3 \frac{u}{t} (t+u) \nabla\tau \right] \wedge \omega^1 + [ud\mu + (t+u)d\sigma - A_\tau\omega^1] \wedge \omega^2 = 0,$$

$$[u\nabla\nu - (t+u)\nabla\tau] \wedge \omega^1 + \left[ td\mu + 3 \frac{t}{u} (t+u)d\sigma - A_\sigma\omega^1 \right] \wedge \omega^2 = 0, \quad (2.3)$$

$$\left( \nabla\xi - \frac{u}{t} cd\mu \right) \wedge \omega^1 + \left( \nabla\pi + 2cd\tau - \frac{u}{t} cd\nu \right) \wedge \omega^2 = 0,$$

$$\left( \nabla\pi - fd\mu + \frac{t-u}{u} fd\sigma \right) \wedge \omega^1 +$$

$$+ \left[ \frac{t}{u} \nabla\xi - fd\nu + 2cd\sigma + \frac{f}{u} (3t+u)d\tau \right] \wedge \omega^2 = 0,$$

где

$$\nabla\nu = d\nu - \nu^1\omega^1, \quad \nabla\xi = d\xi - \xi^1\omega^1,$$

$$\nabla\tau = d\tau - \tau^1\omega^1, \quad \nabla\pi = d\pi - \pi^1\omega^1,$$

$$\nu^1 = -\varepsilon t(u-t) + \frac{2u}{t} \nu^2 - 2\mu^2 - \frac{2t+u}{t} \nu\tau - \frac{3t+4u}{u} \mu\sigma,$$

$$\tau^1 = -\varepsilon tu - \frac{t}{u} f^2 + c^2 - \sigma^2 - \tau^2 - \mu\sigma + \frac{u}{t} \nu\tau,$$

$$A_{\sigma} = tv\sigma + u\mu\tau + 3\frac{1}{u}(u - 3t)(t + u)\tau\sigma,$$

$$A_{\tau} = -\frac{u}{t}(t + 2u)v\sigma + \frac{u}{t}(2t + 3u)\mu\tau - \frac{3}{t}(t + u)(t - 3u)\tau\sigma$$

и  $\xi^1$  и  $\pi^1$  являются выражениями, составленными из величин первого и второго порядка.

Для нахождения числа Картана  $Q$  для системы (2.3), составим таблицу (см. [8]):

	$d\mu$	$dv$	$d\sigma$	$d\tau$	$d\xi$	$d\pi$
(2.3) <sub>1</sub>	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^1$	$\xi^2$	—	—
(2.3) <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—
(2.3) <sub>3</sub>	$t\xi^2$	$u\xi^1$	$3\frac{t}{u}(t+u)\xi^2$	$-(t+u)\xi^1$	—	—
(2.3) <sub>4</sub>	$u\xi^2$	$\frac{u^2}{t}\xi^1$	$(t+u)\xi^2$	$-3\frac{t}{t}(t+u)\xi^1$	—	—
(2.3) <sub>5</sub>	$-\frac{u}{t}c\xi^1$	$-\frac{u}{t}\xi^2$	—	$2c\xi^2$	$\xi^1$	$\xi^2$
(2.3) <sub>6</sub>	$-f\xi^1$	$-f\xi^2$	$\frac{t-u}{u}f\xi^1 + 2c\xi^2$	$\frac{f}{u}(3t+u)\xi^2$	$\frac{t}{u}\xi^2$	$\xi^1$

Ранг соответствующей матрицы  $s_1 = 6$ , т. е.  $Q = s_1 = 6$ . Применяя лемму Картана к системе (2.3), получаем

$$\begin{aligned} d\sigma &= S\omega^1 + S_1\omega^2, \\ d\tau &= (S_1 + \tau^1)\omega^1 + S_2\omega^2, \\ d\mu &= T\omega^1 + T_1\omega^2, \\ dv &= (T_1 + v^1)\omega^1 + T_2\omega^2, \\ d\xi &= U\omega^1 + U_1\omega^2, \\ d\pi &= \left( U_1 - 2cS_1 - 2c\tau^1 + \frac{u}{t}cv^1 + \pi^1 \right)\omega^1 + U_2\omega^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$S = \frac{1}{t}(uS_2 + A),$$

$$T = \frac{1}{t}[uT_2 - 4(t+u)S_2 + B],$$

$$U = \frac{u}{t}U_2 - \frac{u}{t}\left[ 2\frac{f}{u}(t+u)S_1 + 2cS - fv^1 - \frac{f}{u}(3t+u)\tau^1 \right] + \xi^1,$$

$$A = -u(\mu\tau - v\sigma) - 3(t+u)\tau\sigma,$$

$$B = -(2t+3u)v\sigma + (3t+4u)\mu\tau + 12(t+u)\tau\sigma$$

и  $S_1, S_2, T_1, T_2, U_1, U_2$  — новые неизвестные величины. Число линейно независимых величин третьего порядка равняется  $N = 6$ .

Следовательно, система (1.3) + (2.2) + (2.4) находится в инволюции (см. [8]). Следовательно, неизотропная нецилиндрическая фокальная псевдоконгруэнция в евклидовом пространстве  $R_4$ , у которой гауссовы кривизны фокальных поверхностей равны нулю, существует и определяется с произволом шести функций одного аргумента.

2. Некоторые геометрические свойства фокальных поверхностей. Выведем формулы, выражающие важнейшие геометрические свойства фокальных поверхностей  $K$ -фокальной псевдоконгруэнции. Учитывая условия (2.1), найдем вторые квадратичные формы (1.5—10) фокальных поверхностей

$$\varphi^4 = \frac{1}{t+u} (tj + c\sqrt{tu}) (\Omega^2)^2,$$

$$\varphi^3 = \frac{1}{p_1} \left[ \frac{t^2 u^2}{\sqrt{t+u}} (\Omega^1)^2 + 2tu (\sigma\sqrt{t} - \tau\sqrt{u}) \Omega^1 \Omega^2 + \right. \\ \left. + \sqrt{t+u} (\sigma\sqrt{t} - \tau\sqrt{u})^2 (\Omega^2)^2 \right],$$

$$*\varphi^4 = \frac{1}{t+u} (tj - c\sqrt{tu}) (*\Omega^2)^2,$$

$$*\varphi^3 = \frac{1}{p_2} \left[ \frac{t^2 u^2}{\sqrt{t+u}} (*\Omega^1)^2 + 2tu (\sigma\sqrt{t} + \tau\sqrt{u}) *\Omega^1 *\Omega^2 + \right. \\ \left. + \sqrt{t+u} (\sigma\sqrt{t} + \tau\sqrt{u})^2 (*\Omega^2)^2 \right],$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2} tu M_0 (E_1 + E_2) = u (\mu\sqrt{t} - \nu\sqrt{u}) + (t+u) (\sigma\sqrt{t} + \tau\sqrt{u}),$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} tu M_0 (E_1 - E_2) = u (\mu\sqrt{t} + \nu\sqrt{u}) + (t+u) (\sigma\sqrt{t} - \tau\sqrt{u}),$$

и согласно (1.11)  $p_1 \neq 0$ ,  $p_2 \neq 0$ . Векторы средних кривизн фокальных поверхностей определяются следующими формулами:

$$H^4 = \frac{1}{t+u} (tj + c\sqrt{tu}),$$

$$H^3 = \frac{1}{p_1 \sqrt{t+u}} [(t+u) (\sigma\sqrt{t} - \tau\sqrt{u})^2 - \varepsilon t^2 u^2],$$

$$*H^4 = \frac{1}{t+u} (tj - c\sqrt{tu}),$$

$$*H^3 = \frac{1}{p_2 \sqrt{t+u}} [(t+u) (\sigma\sqrt{t} + \tau\sqrt{u})^2 - \varepsilon t^2 u^2].$$

Гауссовы кручения фокальных поверхностей  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  выражаются в виде

$$\kappa_1 = \frac{tu}{\rho_1(t+u)} (ft + c\sqrt{tu}) (\sigma\sqrt{t} - \tau\sqrt{u}),$$

$$\kappa_2 = \frac{tu}{\rho_1(t+u)} (ft - c\sqrt{tu}) (\sigma\sqrt{t} + \tau\sqrt{u}).$$

Так как гауссовы кручения  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в общем случае не равны нулю, то на фокальных поверхностях линии кривизны не существуют. Поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  имеют два семейства ортогональных линий кривизны тогда и только тогда, когда  $\sigma = \tau = 0$ .

### § 3. Фокальная псевдоконгруэнция $\kappa$

1. Существование  $\kappa$ -фокальной псевдоконгруэнции. Фокальную псевдоконгруэнцию, у которой гауссовы кручения фокальных поверхностей одновременно равны нулю, будем называть  $\kappa$ -фокальной псевдоконгруэнцией (или фокальной псевдоконгруэнцией  $\kappa$ ). Фокальная псевдоконгруэнция  $\kappa$  определяется условиями  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0$ , которым, учитывая (1.16), можно придать вид

$$b^3_{12} \cdot b^4_{22} = 0, \quad {}^*b^3_{12} \cdot {}^*b^4_{22} = 0,$$

откуда, в силу (1.12), следует, что

$$b^3_{12} = 0, \quad {}^*b^3_{12} = 0. \quad (3.1)$$

На основании (1.6—7) и (1.8) получим из (3.1) условия, выделяющие  $\kappa$ -фокальную псевдоконгруэнцию

$$\varphi = \frac{u}{t} [uv + (t+u)\tau],$$

$$\vartheta = \frac{t}{u} [u\mu - (t+u)\sigma]. \quad (3.2)$$

Система пфаффовых уравнений (1.3), при переходе к  $\kappa$ -фокальной псевдоконгруэнции, остается прежней. Продолженная система, в силу (3.2), имеет следующий вид:

$$t\omega^0 = \mu\omega^1 + \nu\omega^2,$$

$$\omega^2_1 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2,$$

$$dt = [uv - (t+u)\tau]\omega^1 + \frac{t}{u} [u\mu - (t+u)\sigma]\omega^2, \quad (3.3)$$

$$du = \frac{u}{t} [uv + (t+u)\tau]\omega^1 + [u\mu + (t+u)\sigma]\omega^2,$$

$$df = \left( \xi - \frac{u}{t} c\mu \right) \omega^1 + \left[ \pi + \left( 2\tau - \frac{u}{t} \nu \right) c \right] \omega^2,$$

$$dc = \left( \pi - f\mu + \frac{t-u}{u} f\sigma \right) \omega^1 + \left[ \frac{t}{u} \xi - f\nu - \frac{f}{u} (t+3u)\tau + 2c\sigma \right] \omega^2.$$

Отсюда при помощи внешнего дифференцирования получаем

$$d\mu \wedge \omega^1 + \nabla v \wedge \omega^2 = 0,$$

$$d\sigma \wedge \omega^1 + \nabla \tau \wedge \omega^2 = 0,$$

$$[u \nabla v - (t+u) \nabla \tau] \wedge \omega^1 + \left[ t d\mu - \frac{t}{u} (t+u) d\sigma - B_\sigma \right] \wedge \omega^2 = 0, \quad (3.4)$$

$$\left[ \frac{u^2}{t} \nabla v + \frac{u}{t} (t+u) \nabla \tau \right] \wedge \omega^1 + [u d\mu + (t+u) d\sigma - B_\tau] \wedge \omega^2 = 0,$$

$$\left( \nabla \xi - \frac{u}{t} c d\mu \right) \wedge \omega^1 + \left( \nabla \pi + 2c d\tau - \frac{u}{t} c d\nu \right) \wedge \omega^2 = 0,$$

$$\left[ \nabla \pi - f d\mu + \frac{t-u}{u} f d\sigma \right] \wedge \omega^1 +$$

$$+ \left[ \frac{t}{u} \nabla \xi - f d\nu - \frac{f}{u} (t+3u) d\tau + 2c d\sigma \right] \wedge \omega^2 = 0,$$

где

$$\nabla v = dv - v^1 \omega^1, \quad \nabla \xi = d\xi - \xi^1 \omega^1,$$

$$\nabla \tau = d\tau - \tau^1 \omega^1, \quad \nabla \pi = d\pi - \pi^1 \omega^1,$$

$$v^1 = -\varepsilon t(u-t) + \frac{2u}{t} v^2 - 2\mu^2 + \frac{2t+u}{t} v\tau - \frac{3t+4u}{u} \mu\sigma,$$

$$\tau^1 = -\varepsilon t u - \frac{t}{u} f^2 + c^2 - \sigma^2 - \tau^2 - \mu\sigma + \frac{u}{t} v\tau,$$

$$B_\sigma = u\mu\tau + t\nu\sigma - \frac{(t+u)^2}{u} \tau\sigma,$$

$$B_\tau = -\frac{u}{t} (2t+u)\mu\tau + \frac{u}{t} (3t+2u)\nu\sigma + \frac{(t+u)^2}{t} \tau\sigma$$

и  $\xi^1$  и  $\pi^1$  являются некоторыми выражениями, составленными из величин первого и второго порядков. Аналогично, как в § 2, находим, что  $s_1 = 6$ ,  $s_2 = 0$ , и число Картана  $Q = 6$ . Применяя лемму Картана к системе (3.4), получаем такие же уравнения, как в системе (2.4), где теперь

$$S = \frac{1}{t} (uS_2 + A),$$

$$T = \frac{1}{t} (uT_2 + B),$$

$$U = \frac{u}{t} U_2 - \frac{u}{t} \left[ 2cS - \frac{2f}{u} (t+u) S_1 - f v^1 - \frac{f}{u} (3u+t) \tau^1 \right] + \xi^1,$$

$$A = \nu\nu\sigma - u\mu\tau + (t+u)\tau\sigma$$

$$B = (2t+u)\nu\sigma - t\mu\tau$$

и  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  — новые неизвестные величины. Число линейно независимых величин третьего порядка равняется:  $N = 6$ ,  $Q = N$ , и система (1.3) + (3.3) + (2.4) находится в инволю-

ции (см. [8]). Следовательно, неизотропная нецилиндрическая фокальная псевдоконгруэнция, у которой гауссовы кручения фокальных поверхностей равны нулю, существует и определяется с произволом шести функций одного аргумента в евклидовом пространстве  $R_4$ .

2. Некоторые свойства фокальных поверхностей. Найдем вторые квадратичные формы, кривизны и кручения фокальных поверхностей  $\kappa$ -фокальной псевдоконгруэнции (см. (1.5—16), (3.2)). Имеем:

$$\varphi^4 = \frac{1}{2(t+u)} (tf + c\sqrt{tu}) (\Omega^2)^2,$$

$$\varphi^3 = \frac{1}{2\sqrt{t+u}} \left[ \frac{t^2u}{q_1} (\Omega^1)^2 + \frac{t\sigma + \tau\sqrt{tu}}{\sqrt{t}} (\Omega^2)^2 \right],$$

$$*\varphi^4 = \frac{1}{2(t+u)} (tf - c\sqrt{tu}) (*\Omega^2)^2,$$

$$*\varphi^3 = \frac{1}{2\sqrt{t+u}} \left[ \frac{t^2u}{q_2} (*\Omega^1)^2 + \frac{t\sigma - \tau\sqrt{tu}}{\sqrt{t}} (*\Omega^2)^2 \right],$$

где

$$q_1 = \frac{1}{4} tM_0(E_1 + E_2) = \mu\sqrt{t} - \nu\sqrt{u},$$

$$q_2 = -\frac{1}{4} tM_0(E_1 - E_2) = \mu\sqrt{t} + \nu\sqrt{u},$$

и согласно (1.11)  $q_1 \neq 0$  и  $q_2 \neq 0$ . Векторы средних кривизн определяются формулами

$$H^4 = \frac{tf + c\sqrt{tu}}{2(t+u)},$$

$$H^3 = \frac{1}{2q_1\sqrt{t(t+u)}} [q_1(t\sigma + \tau\sqrt{tu}) - \varepsilon t^2u\sqrt{t}],$$

$$*H^4 = \frac{tf - c\sqrt{tu}}{2(t+u)},$$

$$*H^3 = \frac{1}{2q_2\sqrt{t(t+u)}} [q_2(t\sigma - \tau\sqrt{tu}) - \varepsilon t^2u\sqrt{t}].$$

Гауссовыми кривизнами фокальных поверхностей являются

$$K_1 = \frac{tM_0}{2q_1} (\sigma\sqrt{t} + \tau\sqrt{u}),$$

$$K_2 = \frac{tM_0}{2q_2} (\sigma\sqrt{t} - \tau\sqrt{u}).$$

Так как  $\kappa_1 = 0$  и  $\kappa_2 = 0$ , то фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$   $\kappa$ -фокальной псевдоконгруэнции имеют два семейства ортогональных линий кривизны.

#### § 4. Фокальная псевдоконгруэнция $K\kappa$

В предыдущих параграфах были изучены классы  $K$ - и  $\kappa$ -фокальных псевдоконгруэнций. Представляет определенный интерес рассмотреть класс фокальных псевдоконгруэнций, который является пересечением классов  $K$  и  $\kappa$  ( $K\kappa$ -фокальная псевдоконгруэнция).

Фокальную псевдоконгруэнцию, у которой гауссовы кривизны и кручения фокальных поверхностей одновременно равны нулю, будем называть  *$K\kappa$ -фокальной псевдоконгруэнцией* (или *фокальной псевдоконгруэнцией  $K\kappa$* ). Она определяется условиями  $K_1 = K_2 = 0$  и  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ , или, в силу (2.1) и (3.2),

$$\tau = \sigma = 0. \quad (4.1)$$

Подстановка условия (4.1) в (2.1) или (3.2) дает

$$\varphi = \frac{u^2}{t} v, \quad \vartheta = t\mu. \quad (4.2)$$

Продолженная система (1.4) на основании (4.1—2) имеет в данном случае следующий вид

$$\begin{aligned} \omega^2_1 &= 0, \\ t\omega^0 &= \mu\omega^1 + \nu\omega^2, \\ dt &= \nu\omega^1 + t\mu\omega^2, \\ du &= \frac{u^2}{t} \nu\omega^1 + u\mu\omega^2, \\ df &= \left( \xi - \frac{u}{t} c\mu \right) \omega^1 + \left( \pi - \frac{u}{t} c\nu \right) \omega^2, \\ dc &= (\pi - f\mu)\omega^1 + \left( \frac{t}{u} \xi - f\nu \right) \omega^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (4.3) следует, что  $d \ln u = d \ln t$ , и

$$u = \lambda t, \quad \text{где } \lambda = \text{const} \text{ и } \lambda \neq 0, -1. \quad (4.4)$$

Если  $\lambda = 1$ , имеем дело с нормальной фокальной псевдоконгруэнцией  $K\kappa$ , существование которой доказано в статье [5].

Внешним дифференцированием первого уравнения системы (4.3) получим конечное соотношение

$$f^2 = \lambda(c^2 - \varepsilon\lambda t^2), \quad (4.5)$$

дифференциальное следствие которого дает

$$\xi = \lambda(f\nu + c\mu), \quad \pi = f\mu + \lambda c\nu. \quad (4.6)$$

Итак, в силу (4.4—6), систему (4.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} t\omega^0 &= u\omega^1 + \nu\omega^2, \\ d \ln t &= \lambda\nu\omega^1 + \mu\omega^2, \\ d \ln c &= \lambda\nu\omega^1 + \mu\omega^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из двух последних уравнений системы (4.7) вытекает, что

$$c = \lambda' t, \quad \text{где } \lambda' = \text{const}, \quad (4.8)$$

вследствие чего из соотношения (4.5) получаем

$$f = \pm t \sqrt{\lambda(\lambda'^2 - \varepsilon\lambda)}. \quad (4.9)$$

Таким образом, система пфаффовых уравнений (1.3), которая определяет  $K\kappa$ -фокальную псевдоконгруэнцию, в силу (4.4), (4.8–9), имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, & \omega^1_0 &= t\omega^2, & \omega^3_1 &= \pm t \sqrt{\lambda(\lambda'^2 - \varepsilon\lambda)} \omega^1 + \lambda' t \omega, \\ \omega^3_0 &= 0, & \omega^2_0 &= \lambda t \omega^1, & \omega^3_2 &= \lambda' t \omega^1 \pm \frac{t}{\lambda} \sqrt{\lambda(\lambda'^2 - \varepsilon\lambda)} \omega^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Внешним дифференцированием получим из системы (4.7), что

$$d\mu \wedge \omega^1 + \nabla v \wedge \omega^2 = 0, \quad \nabla v \wedge \omega^1 + \frac{1}{\lambda} d\mu \wedge \omega^2 = 0, \quad (4.11)$$

где

$$\nabla v = dv - v^1 \omega^1, \quad v^1 = 2\lambda v^2 - 2\mu^2 - \varepsilon t^2(\lambda - 1),$$

откуда, в силу леммы Картана

$$\begin{aligned} d\mu &= T\omega^1 + T_1\omega^2, \\ dv &= (T_1 + v^1)\omega^1 + T_2\omega^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$T_2 = \lambda^{-1}T \quad (4.13)$$

и  $T, T_1$  — новые неизвестные величины. Из систем (4.7), (4.12) вытекает, что  $s_1 = 2, s_2 = 0, Q = 2, Q = N$ . Следовательно, система (4.10) + (4.7) + (4.12) находится в инволюции (см. [8]). Фокальная псевдоконгруэнция, у которой гауссовы кривизны и кручения фокальных поверхностей одновременно равны нулю, существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента. Так как этот класс фокальных псевдоконгруэнций имеет фокальные поверхности, гауссовы кривизны и кручения которых равны нулю, то фокальные поверхности  $\{F_1\}$  и  $\{F_2\}$  имеют два семейства ортогональных линий кривизны.

Фокальная псевдоконгруэнция называется *фокальной псевдоконгруэнцией Рибокура*, если ее торсы пересекают ее среднюю поверхность по сопряженной системе. В [6] доказывается, что фокальная псевдоконгруэнция Рибокура является или изотропной или нормальной; нормальная фокальная псевдоконгруэнция является псевдоконгруэнцией Рибокура, если имеет место

$$T_2 - T - v\sigma - \mu\tau = 0. \quad (4.14)$$

**Теорема.** *Каждая нормальная фокальная псевдоконгруэнция  $K$  является нормальной фокальной псевдоконгруэнцией Рибокура, но не наоборот.*

**Доказательство.** Фокальная псевдоконгруэнция  $K\kappa$  является нормальной фокальной псевдоконгруэнцией  $K\kappa$ , если  $\lambda = 1$  (см. (4.4)). Тогда, в силу (4.1) и (4.13),  $\tau = \sigma = 0, T_2 = T$  и условие (4.14) удовлетворимо тождественно. Теорема доказана. Следовательно, классы фокальных псевдоконгруэнций  $K, \kappa$  и  $K\kappa$  имеют с классом фокальных псевдоконгруэнций Рибокура непустое пересечение.

## Литература

1. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей  $V_3$  в  $R_4$ . Матем. сб., 1960, 50, № 2, 203—220.
2. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А. Минимальные конгруэнции  $V_3$  в евклидовом пространстве  $R_4$ . Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962, № 1, 74—82.
3. Туулметс Л., Вторая средняя огибающая изотропной конгруэнции в  $R_4$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 37—43.
4. Туулметс Л., Нормальные квазиконгруэнции  $V_3$  в  $R_4$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 109—121.
5. Туулметс Л., Фокальные поверхности фокальной псевдоконгруэнции в  $R_4$ . Настоящий сборник, стр. 46—62.
6. Туулметс Л., Вага Э., Фокальная псевдоконгруэнция Рибокура в  $R_4$ . Настоящий сборник, стр. 63—71.
7. Туулметс Л., Тамм Э., Фокальные псевдоконгруэнции с постоянными инвариантами в  $R_4$ . Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1972, 21, 370—378.
8. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва — Ленинград, 1948.

Поступило  
9 III 1972

## FOKAALSED PSEUDOKONGRUENTSID RUUMIS $R_4$ , MILLE FOKAALPINNAD ON NULLIGA VÖRDSE GAUSSI KÖVERUSEGA VÕI VÄÄNDEGA

L. Tuulmets ja T. Püssa

### Resümee

Käesolevas töös on uuritud neljamõõtmelises eukleedilises ruumis  $R_4$  (see võib olla kas päriseukleediline ruum  ${}^0R_4$  või pseudoekleediline ruum  ${}^1R_4$ ) mittesisotroopse ja mittesilindrilise fokaalse pseudokongruentsi klasse, mille korral fokaalpinna

- 1) Gaussi kõverused võrduvad nulliga;
- 2) Gaussi väänded võrduvad nulliga;
- 3) Gaussi kõverused ja väänded mõlemad võrduvad nulliga.

Tõestatakse nende klasside olemasolu ja uuritakse fokaalpinna geomeetriselisi omadusi.

## FOKALE STRAHLENPSEUDOKONGRUENZEN IM $R_4$ , WELCHE DIE BRENNFLÄCHEN MIT VERSCHWINDENDEN GRAUßSCHEN KRÜMMUNGEN ODER WINDUNGEN BESITZEN

L. Tuulmets und T. Püssa

### Zusammenfassung

Im folgenden Artikel werden im 4-dimensionalen euklidischen Raum  $R_4$  diejenigen fokalen Strahlenpseudokongruenzen, d. h. die Scharen von geradlinigen Erzeugern der Hyperflächen mit 2-parametrischen Scharen von Tangentialhyperebenen behandelt, welche die Brennflächen mit verschwindenden Gaußschen Krümmungen oder Windungen in  $R_4$  besitzen. Es wird ihre Existenz gezeigt; ebenso werden die wichtigsten Formeln für ihre Brennflächen festgestellt.

## ПОДГРУППЫ ЛИ С МАКСИМАЛЬНЫМИ ДВУМЕРНЫМИ НЕЛИНЕЙЧАТЫМИ ОРБИТАМИ В КОМПЛЕКСНОМ $P_3(\mathbb{C})$

В. Спесивых

Кружок СНО при кафедре алгебры и геометрии

Если на многообразии  $M$  действует группа Ли  $G$ , то, следуя [3], *кооднородностью пары  $(M, G)$*  называется разность между размерностью  $M$  и размерностью максимальных орбит. В настоящей работе найдены, с точностью до внутреннего автоморфизма, такие связные комплексные подгруппы Ли  $G$  проективной группы  $GP(3, \mathbb{C})$ , действующие естественным образом в комплексном проективном пространстве  $P_3(\mathbb{C})$ , что  $(P_3(\mathbb{C}), G)$  имеет комплексную кооднородность 1 и максимальные орбиты являются нелинейчатыми поверхностями. Соответствующие орбиты в вещественном случае рассматривал еще Ли [4] (где они называются  $W$ -поверхностями Ли). Заметим, что стационарная подгруппа квадрики  $Q_2 \subset P_3(\mathbb{C})$  не принадлежит к числу этих подгрупп  $G$ , потому что орбита точки, не принадлежащей квадрике, имеет комплексную размерность 3.

Исследование опирается на теорему Э. Картана ([1], стр. 247), в силу которой подмногообразие однородного пространства является орбитой некоторой подгруппы Ли фундаментальной группы пространства тогда и только тогда, когда все его дифференциальные инварианты — коэффициенты в выражениях форм инфинитезимального перемещения канонического репера подмногообразия через главные формы — являются постоянными.

Ниже, используя эту теорему, в  $P_3(\mathbb{C})$  найдены:

1) все максимальные нелинейчатые орбиты с комплексной размерностью 2, а также их уравнения;

2) все плоскости, инвариантные относительно соответствующих стационарных подгрупп орбит, а, следовательно, и все орбиты комплексного аффинного пространства  $A_3(\mathbb{C})$ .

Автор благодарит своего научного руководителя проф. Ю. Г. Лумисте за советы и замечания, сделанные в процессе написания данной работы.

## § 1. Орбиты в $P_3(\mathbf{C})$

Репер  $\mathfrak{R}$  проективного пространства  $P_3(\mathbf{C})$  состоит из четырех аналитических точек  $E_0, E_1, E_2, E_3$ . Его инфинитезимальное перемещение определяется уравнениями

$$dE_i = \omega^j E_j \quad (i, j=0, 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

где формы Пфаффа удовлетворяют следующим структурным уравнениям (см. [2]):

$$\begin{cases} d\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j \\ \omega^0_0 + \omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Рассмотрим в пространстве  $P_3(\mathbf{C})$  поверхность  $m = m(u, v)$ ; комплексные параметры  $u$  и  $v$  будем называть *главными*. Положение произвольного репера  $\mathfrak{R}$  в  $P_3(\mathbf{C})$  определяется пятнадцатью комплексными параметрами, которые мы будем называть *вторичными*. Формы Пфаффа  $\omega^j_i$  при фиксированных главных параметрах (т. е. соответствующие формы от дифференциалов вторичных параметров) и дифференцирование по вторичным параметрам будем обозначать соответственно символами  $\pi^j_i$  и  $\delta$ . Тогда имеем

$$\delta E_i = \pi^j_i E_j.$$

Нахождение канонического репера заключается в нахождении такого репера, все аналитические точки которого инвариантно геометрически связаны с поверхностью в ее данной точке и являются потому функциями одних только главных параметров. Эта задача равносильна приведению форм  $\pi^j_i$  к нулю.

В монографии [2] найден канонический репер для нелинейчатой поверхности гиперболического типа (т. е. поверхности, обладающей действительными асимптотическими линиями) в действительном проективном пространстве  $P_3$ . Для этого репера

$$\begin{aligned} \omega^3_0 &= 0, & \omega^3_1 &= \omega^2_0, & \omega^3_2 &= \omega^1_0, \\ \omega^2_1 &= \omega^1_0, & \omega^1_2 &= \omega^2_0, \\ \omega^0_0 &= -\omega^3_3 = 3(A\omega^1_0 + B\omega^2_0), \\ \omega^1_1 &= -\omega^2_2 = B\omega^2_0 - A\omega^1_0, \\ \omega^1_3 &= \omega^0_2 = C\omega^1_0 + D\omega^2_0, \\ \omega^0_3 &= D\omega^1_0 + E\omega^2_0, \\ \omega^2_3 &= \omega^0_1 = E\omega^1_0 + F\omega^2_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти формулы удобно представить с помощью матрицы пар коэффициентов разложения форм  $\omega^j_i$  по формам  $\omega^1_0, \omega^2_0$ :

$$\left\| \begin{array}{cc|cc|cc} 3A & 3B & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E & F & -A & B & 1 & 0 & 0 & 1 \\ C & D & 0 & 1 & A & -B & 1 & 0 \\ D & E & C & D & E & F & -3A & -3B \end{array} \right\|. \quad (1.3')$$

Рассматривая формулы (1.3) над полем комплексных чисел, мы получим соответствующие формулы для нелинейчатой поверхности в комплексном проективном пространстве  $P_3(\mathbf{C})$ , где различие между гиперболическими и эллиптическими поверхностями

исчезает. Согласно теореме Э. Картана, упомянутой во введении, полагаем все инварианты поверхности  $A, B, C, D, E, F$  постоянными. Найдем теперь, в этом предположении, условия интегрируемости, проинтегрировав внешним образом уравнения (1.3). Получим систему

$$\begin{aligned} d\omega^1_0 &= -2B\omega^1_0 \wedge \omega^2_0, & d\omega^2_0 &= 2A\omega^1_0 \wedge \omega^2_0, \\ F &= C, \\ 4AB &= 1 - 2C, \\ 2EB &= 3AC, \\ 2AD &= 3BC, \\ BD &= AE. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решим сначала систему из последних четырех уравнений. Если  $A = 0$ , то сразу получаем, что  $B = 0, C = 1/2, D$  и  $E$  — произвольные. В противном случае, исключив  $E$  и  $C$  из последних трех уравнений, приходим к соотношению

$$D(A^3 - B^3) = 0.$$

Если теперь  $D = 0$ , то  $E = C = 0$  и  $4AB = 1$ . Если же  $A^3 = B^3$ , то получаем три решения

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= B, & D &= E = \frac{3}{2}C = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - 2A^2\right); \\ 2) \quad B &= \varepsilon_1 A, & D &= \varepsilon_2 E = \frac{3}{2}\varepsilon_1 C = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 A^2\right); \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — комплексные корни третьей степени из единицы. Но если мы от исходного репера  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$ , присоединенного к поверхности, перейдем к реперу  $(E_0, \varepsilon_1 E_1, \varepsilon_2 E_2, E_3)$ , то уравнения (1.3), соответствующие первому решению, в новом репере полностью совпадут с уравнениями (1.3), отвечающими второму и третьему решениям при замене параметра  $A$  на  $\varepsilon_2 A$ . Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением только первого решения. Суммируем полученные решения в виде таблицы

	$A$	$B$	$C=F$	$D$	$E$
$P_{C1}$	$A \neq 0$	$\frac{1}{4A}$	0	0	0
$P_{C2}$	$A \neq 0$	$A$	$\frac{1-4A^2}{2}$	$3 \cdot \frac{1-4A^2}{4}$	$3 \cdot \frac{1-4A^2}{4}$
$P_{C3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$D$	$E$

Каждому из полученных решений отвечает определенная подгруппа группы проективных преобразований, являющаяся стационарной подгруппой соответствующей орбиты. При этом подгруппа, отвечающая решению  $P_c 3$ , является абелевой, а подгруппы, отвечающие решениям  $P_c 1$  и  $P_c 2$  — неабелевыми. Для абелевой подгруппы решение первых двух уравнений (1.4) тривиально:

$$\omega^1_0 = du, \quad \omega^2_0 = dv.$$

В противном случае решение представимо в виде

$$2A\omega^1_0 = du + e^{2u} dv, \quad 2B\omega^2_0 = du - e^{2u} dv.$$

## § 2. О существовании инвариантной плоскости

Поставим перед собой следующую проблему. Пусть точка  $E_0$  описывает некоторую орбиту в  $P_3(\mathbb{C})$ . Сможет ли при этом некоторая произвольная точка, фиксированная относительно канонического репера, описывать плоскость? Другими словами, существует ли плоскость, инвариантная относительно стационарной подгруппы орбиты? Пусть  $\mathfrak{M}$  — матрица (2.3'). Преобразуем репер  $\mathfrak{E}$  с помощью матрицы  $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{B}\mathfrak{E},$$

где

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и  $a, b, c$  — неизвестные. Это преобразование сохранит точку  $E_0$ , а остальные точки преобразует так:

$$E'_1 = aE_0 + E_1, \quad E'_2 = bE_0 + E_2, \quad E'_3 = cE_0 + E_3.$$

Следовательно, этим преобразованием можно  $E'_1, E'_2$  и  $E'_3$  поместить на любую наперед заданную плоскость, не проходящую через  $E_0$ . В новом репере  $\mathfrak{E}$  вместо матрицы  $\mathfrak{M}$  получается

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{B}^{-1}.$$

Для нахождения инвариантной плоскости надо в матрице  $\mathfrak{M}'$  на местах  $\omega^0_1, \omega^0_2, \omega^0_3$  приравнять к нулю полученные коэффициенты и решать систему относительно  $a, b, c$ . Ниже анализируются результаты решения этой системы во всех трех случаях:  $P_c 1, P_c 2$  и  $P_c 3$ .

Случай  $P_c 1$ . Из решения  $P_c 1$  системы (1.4) следует:

$$\omega^0_1 = \omega^0_2 = \omega^0_3 = 0.$$

Равенство нулю форм  $\omega^0_i$  означает, что подгруппа стационарности орбиты  $P_c 1$  оставляет инвариантной и плоскость  $(E_1, E_2, E_3)$ .

Анализ системы уравнений с неизвестными  $a, b, c$  покажет, что эта плоскость будет единственной инвариантной плоскостью.

Случай  $P_c 2$ . Совершим сначала преобразование репера согласно матрице

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A + \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ A + \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4A^2 + 8A + 3}{4} & A + \frac{1}{2} & A + \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\|.$$

Тогда матрица (1.3') преобразуется к виду

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 2A - \frac{1}{2} & | & 2A - \frac{1}{2} & 1 & | & 0 & 0 & | & 1 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 & | & 1 \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 2A + 1 & | & 2A + 1 & 2A + 1 & | & 2A + 1 & -2A + \frac{1}{2} & | & -2A + \frac{1}{2} & | & 1 \end{array} \right\|.$$

Если же над репером  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  совершить преобразование, заданное матрицей

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\left(A - \frac{1}{2}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 3\left(A - \frac{1}{2}\right) & 0 & 1 & 0 \\ \frac{52A^2 - 48A + 11}{4} & 3\left(A - \frac{1}{2}\right) & 3\left(A - \frac{1}{2}\right) & 1 \end{array} \right\|,$$

то матрица (1.3') переходит к

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} & 1 & | & 0 & 0 & | & 1 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 2A - \frac{3}{2} & | & -2A + \frac{3}{2} & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 & | & 1 \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 1 & -2A + \frac{3}{2} & | & 2A - \frac{3}{2} & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 8A^2 - 6A + 1 & | & 3(2A - 1) & 3(2A - 1) & | & 8A^2 - 6A + 1 & -\frac{3}{2} & | & -\frac{3}{2} & | & 1 \end{array} \right\|.$$

Здесь указанные матрицы перехода и только они приводят матрицы разложения к такому виду, где  $'\omega^0_1 = '\omega^0_2 = '\omega^0_3 = 0$ , т. е. найдены все инвариантные плоскости. Прямая их пересечения является инвариантной прямой.

Случай  $P_3$ . В этом случае тоже преобразуем репер согласно матрице

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + ab & b & a & 1 \end{array} \right\|,$$

где  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношениям

$$E = a^2 + b, \quad D = a + b^2.$$

При заданных  $D$  и  $E$  эта система в поле комплексных чисел всегда имеет решения. Матрица разложения примет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} -a & -b & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2a & 2b & 1 & a & b \end{array} \right\|.$$

Равенство нулю форм  $\omega^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) свидетельствует о переходе к такому реперу, в котором точки  $(E'_1, E'_2, E'_3)$  оказываются расположенными на некоторой плоскости. Полученные выше результаты обобщает

**Теорема 1.** *Стационарные подгруппы орбит общего случая в  $P_3(\mathbb{C})$  всегда оставляют инвариантной некоторую плоскость.*

### § 3. Орбиты гиперболического типа в аффинных пространствах $A_3(\mathbb{C})$ и $A_3$

Выбрав инвариантную плоскость из теоремы 1 в качестве «бесконечно удаленной», мы можем перейти к комплексному аффинному пространству  $A_3(\mathbb{C})$ . Действительно, вводя обозначение  $\omega^j = \omega^j - \delta^j_i \omega^0$ , где  $\delta^j_i$  — символ Кронекера, мы получаем, учитывая  $\omega^0_1 = \omega^0_2 = \omega^0_3 = 0$ , что пфаффовы формы  $\omega^j$  ( $j \neq 0$ ) удовлетворяют уравнениям Маурера—Картана аффинной подгруппы группы проективных преобразований. Это позволяет не заниматься дополнительным изучением орбит пространства  $A_3(\mathbb{C})$ . Правда, как следует из полученных уравнений орбит в  $P_3(\mathbb{C})$ , в пространстве  $A_3(\mathbb{C})$  их будет больше (например, в случае  $P_3$  переход к  $A_3(\mathbb{C})$  возможен двумя путями). При этом представляет интерес.

**Теорема 2.** *Все нелинейчатые поверхности, являющиеся орбитами в  $P_3(\mathbb{C})$ , являются орбитами и в  $A_3(\mathbb{C})$ .*

Если теперь перейти от комплексного к действительному проективному пространству, то можно сказать, что данная работа полностью описывает орбиты гиперболического типа в действительном проективном пространстве  $P_3$ . Орбиты эллиптического типа (т. е. поверхности, не имеющие действительных асимптотических линий) в  $P_3$  требуют дополнительного изучения.

#### § 4. Интегрирование уравнений орбит

Найдем уравнения орбит для каждого из полученных решений системы (1.4) с учетом соотношений (1.2).

Орбита  $P_c 1$ . В этом случае

$$\omega^1_0 = -\frac{1}{2A}(du + e^{-2u} dv), \quad \omega^2_0 = -2A(du - e^{-2u} dv)$$

и

$$dE_0 = -3du E_0 - \frac{1}{2A}(du + e^{-2u} dv)E_1 - 2A(du - e^{-2u} dv)E_2,$$

$$dE_1 = e^{-2u} dv E_1 - \frac{1}{2A}(du + e^{-2u} dv)E_2 - 2A(du - e^{-2u} dv)E_3,$$

$$dE_2 = -2A(du - e^{-2u} dv)E_1 - e^{-2u} dv E_2 - \frac{1}{2A}(du + e^{-2u} dv)E_3,$$

$$dE_3 = 3du E_3.$$

Из последнего уравнения сразу получим  $E_3 = e^{3u}\mathfrak{P}$ , где  $\mathfrak{P}$  — некоторая постоянная точка в  $P_3(\mathbb{C})$ . Из второго и третьего уравнений системы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_2}{\partial u^2} &= E_2 + \left(4A^2 - \frac{3}{2A}\right)e^{3u}\mathfrak{P}, \\ \frac{\partial^2 E_2}{\partial u \partial v} &= e^{-2u} \left(\frac{\partial E_2}{\partial u} + E_2\right) + \left(\frac{1}{2A} - 4A^2\right)e^{u}\mathfrak{P}, \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} E_2 &= \left[ \left(\frac{1}{4A} + 2A^2\right)v^2 e^{-u} - \left(\frac{1}{4A} + 2A^2\right)ve^u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \left(4A^2 - \frac{3}{2A}\right)e^{3u} \right] \mathfrak{P} + (e^u - 2ve^{-u})\mathfrak{Q} + e^{-u}\mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Тогда из третьего уравнения находим, что

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2A} \left[ \left(\frac{1}{4A} + 2A^2\right)(ve^{-u} + e^u)v + \left(\frac{1}{16A} - \frac{3}{2}A^2\right)e^{3u} \right] \mathfrak{P} + \\ &\quad + \frac{1}{2A} (2ve^{-u} - e^u)\mathfrak{Q} + \frac{1}{2A} e^{-u}\mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Наконец, первое уравнение системы дает

$$\begin{aligned} E_0 &= \left[ \left(A^3 - \frac{1}{64A^3}\right)ve^u - 2\left(A + \frac{1}{4A}\right)^2 v^2 e^{-u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} - A^3 - \frac{1}{64A^3}\right)e^{3u} + \frac{1}{3} \left(4A^3 - \frac{1}{16A^3}\right)v^3 e^{-3u} \right] \mathfrak{P} + \\ &\quad + \left[ \left(\frac{1}{16A^2} - \frac{1}{2}A\right)e^u + ve^{-u} \left(\frac{1}{4A^2} + 2A\right) + \left(\frac{1}{4A^2} - 2A\right)v^2 e^{-3u} \right] \mathfrak{Q} + \\ &\quad + \left[ -\left(\frac{1}{8A^2} + A\right)e^{-u} + \left(2A - \frac{1}{4A^2}\right)ve^{-3u} \right] \mathfrak{R} + e^{-3u}\mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно выписать параметрические уравнения данной орбиты, приняв репер  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$  в качестве координатного.

Орбита  $P_{-2}$ . Для упрощения интегрирования преобразуем в этом случае репер  $(E_0, E_1, E_2, E_3)$  с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4A} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4A} & \frac{1}{4A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4A} & -\frac{1}{4A} & 0 \\ A^2 + 2A + \frac{3}{4} & A + \frac{1}{2} & A + \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь  $d'\omega'_0 = 0$ ,  $d'\omega'_2 = \omega'_0 \wedge \omega'_2$ , и, следовательно, можем положить  $\omega'_0 = du$ ,  $\omega'_2 = e^u dv$ , тогда

$$dE'_0 = \left(1 - \frac{1}{4A}\right) du E'_0 + du E'_1 + e^u dv E'_2,$$

$$dE'_1 = \frac{1}{4A} du E'_1 + \frac{1}{8A^2} du E'_3,$$

$$dE'_2 = \frac{1}{2A} e^u dv E'_1 - \frac{1}{4A} du E'_2 - \frac{1}{8A^2} e^u dv E'_3,$$

$$dE'_3 = 2(2A+1) du E'_1 + \left(\frac{1}{4A} - 1\right) du E'_3.$$

Из второго и последнего уравнений системы получаем

$$\frac{\partial^2 E'_1}{\partial u^2} + \frac{2A-1}{2A} \frac{\partial E'_1}{\partial u} - \frac{3+12A}{16A^2} E'_1 = 0, \quad \frac{\partial E'_1}{\partial v} = 0,$$

откуда при  $A \neq -1$

$$E'_1 = e^{\frac{3}{4A}u} \mathfrak{P} + e^{-(1+\frac{1}{4A})u} \mathfrak{Q}.$$

Из второго уравнения находим, что

$$E'_3 = 4A e^{\frac{3}{4A}u} \mathfrak{P} - 4A(2A+1) e^{-(1+\frac{1}{4A})u} \mathfrak{Q},$$

а из третьего уравнения системы

$$E'_2 = e^{-\frac{1}{4A}u} \left[ \left(1 + \frac{1}{A}\right) v \mathfrak{Q} + \mathfrak{R} \right].$$

Используя первое уравнение, получаем, что при  $A \neq 1$

$$E'_0 = \frac{A}{A-1} e^{\frac{3}{4A}u} \mathfrak{P} + \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{A}\right) v^2 e^{(1-\frac{1}{4A})u} - e^{-\frac{1}{4A}u} \right] \mathfrak{Q} + \\ + v e^{(1-\frac{1}{4A})u} \mathfrak{R} + e^{(1-\frac{1}{4A})u} \mathfrak{S}.$$

В выделившихся случаях аналогично находим, что при  $A = -\frac{1}{2}$

$$E'_0 = -\frac{1}{2} \left[ v^2 e^{\frac{5}{4}u} + \left( u + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{3}{4}u} \right] \mathfrak{P} - \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}u} \mathfrak{Q} + \\ + v e^{\frac{5}{4}u} \mathfrak{R} + e^{\frac{5}{4}u} \mathfrak{S},$$

а при  $A = 1$

$$E'_0 = u e^{\frac{3}{4}u} \mathfrak{P} + [v^2 e^{\frac{3}{4}u} - e^{-\frac{1}{4}u}] \mathfrak{Q} + v e^{\frac{3}{4}u} \mathfrak{R} + e^{\frac{3}{4}u} \mathfrak{S}.$$

Орбита  $P_{c3}$ . Здесь имеют место соотношения  $d'\omega^1_0 = d'\omega^2_0 = 0$ , следовательно, можем положить  $'\omega^1_0 = du$ ,  $'\omega^2_0 = dv$ . В общем случае процесс интегрирования довольно громоздкий, поскольку приходится решать кубическое уравнение с двумя параметрами. Ограничимся рассмотрением частного случая  $a = b$ , или  $D = E$ . Тогда

$$dE'_0 = -a(du + dv)E'_0 + duE'_1 + dvE'_2, \\ dE'_1 = a(du - dv)E'_1 + duE'_2 + dvE'_3, \\ dE'_2 = dvE'_1 - a(du - dv)E'_2 + duE'_3, \\ dE'_3 = (du + 2a dv)E'_1 + (2a du + dv)E'_2 + a(du + dv)E'_3.$$

Из последних трех уравнений получаем соотношение

$$d(E'_1 + E'_2 + E'_3) = (1 + a)(du + dv)(E'_1 + E'_2 + E'_3),$$

откуда

$$E'_3 = e^{(1+a)(u+v)} \mathfrak{P} - E'_1 - E'_2.$$

Это позволяет сократить число уравнений и неизвестных до трех

$$dE'_0 = -a(du + dv)E'_0 + duE'_1 + dvE'_2, \\ dE'_1 = [a du - (1 + a) dv]E'_1 + (du - dv)E'_2 + e^{(1+a)(u+v)} dv \mathfrak{P}, \\ dE'_2 = (dv - du)E'_1 - [(1 + a) du - a dv]E'_2 + e^{(1+a)(u+v)} du \mathfrak{P}.$$

Отсюда получаем соотношение

$$d[(1 - 2a)E'_0 + E'_1 + E'_2] = \\ = -a(du + dv)[(1 - 2a)E'_0 + E'_1 + E'_2] + e^{(1+a)(u+v)}(du + dv) \mathfrak{P},$$

из которого, при  $a \neq -1/2$ , следует

$$E'_2 = (2a - 1)E'_0 - E'_1 + \frac{1}{1 + 2a} e^{(1+a)(u+v)} \mathfrak{P} + e^{-a(u+v)} \mathfrak{Q}.$$

Это также упрощает систему. Теперь

$$dE'_0 = -[a du + (1 - a) dv]E'_0 + (du - dv)E'_1 + \\ + \frac{1}{1 + 2a} e^{(1+a)(u+v)} dv \mathfrak{P} + e^{-a(u+v)} dv \mathfrak{Q}, \\ dE'_1 = (2a - 1)(du - dv)E'_0 - [(1 - a) du + a dv]E'_1 + \\ + \frac{1}{1 + 2a} e^{(1+a)(u+v)}(du + 2a dv) \mathfrak{P} + e^{-a(u+v)}(du - dv) \mathfrak{Q}.$$

Теперь нетрудно получить

$$\frac{\partial^2 E'_0}{\partial u^2} = \frac{\partial E'_0}{\partial u} + (1 - a - a^2)E'_0 + \frac{1}{1+2a} e^{(1+a)(u+v)} \mathfrak{R} + e^{-a(u+v)} \mathfrak{Q},$$

$$\frac{\partial^2 E'_0}{\partial u \partial v} = (a^2 + a - 1)E'_0 + \frac{a}{1+2a} e^{(1+a)(u+v)} \mathfrak{R} - (1+a) e^{-a(u+v)} \mathfrak{Q},$$

откуда при  $a \neq -3/2$  и  $a \neq 1/2$

$$E'_0 = \frac{1}{(1+2a)(2a+3)} e^{(1+a)(u+v)} \mathfrak{R} + \frac{1}{1-2a} e^{-a(u+v)} \mathfrak{Q} +$$

$$+ e^{\lambda_1 u + \frac{1-a-a^2}{\lambda_1} v} \mathfrak{R} + e^{\lambda_2 u + \frac{1-a-a^2}{\lambda_2} v} \mathfrak{S},$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a^2 + a - \frac{3}{4}}.$$

Выделяющиеся частные случаи дают:

1) при  $a = -\frac{1}{2}$ ,

$$E'_0 = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(u+v)} [(u+v-1) \mathfrak{R} + \mathfrak{Q}] + e^{\mu_1 u + \mu_2 v} \mathfrak{R} + e^{\mu_2 u + \mu_1 v} \mathfrak{S},$$

где  $\mu_1 = -\frac{1}{2} + i$ ,  $\mu_2 = -\frac{1}{2} - i$ .

2) при  $a = -\frac{3}{2}$ ,

$$E'_0 = -\frac{1}{4} (u^2 - u + 5) e^{-\frac{1}{2}(u+v)} \mathfrak{R} + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{2}(u+v)} \mathfrak{Q} +$$

$$+ (u-1) e^{-\frac{1}{2}(u+v)} \mathfrak{R} + e^{-\frac{1}{2}(u+v)} \mathfrak{S}.$$

3) при  $a = \frac{1}{2}$ ,

$$E'_0 = \frac{1}{8} e^{\frac{3}{2}(u+v)} \mathfrak{R} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(u+v)} (u^2 - u + 4) \mathfrak{Q} +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}(u+v)} [(u-1) \mathfrak{R} + \mathfrak{S}].$$

## Литература

1. Картан Э., Теория конечных непрерывных групп. Москва, 1963.
2. Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии. Москва, 1960.
3. Hsiang Wu-Si, Lawson H., Blaine J., Minimal submanifolds of low cohomogeneity. J. Diff. Geom., 1971, № 1-2, 1-38.
4. Lie, S., Gesammelte Abhandlungen, Band VI. Leipzig — Oslo, 1922—1934.

Поступило  
13 III 1972

# LIE ALAMRÜHMAD MAKSIMAALSETE KAHEMÖÖTMELISTE MITTEJOONORBIITIDEGA KOMPLEKSSES RUUMIS $P_3(C)$

V. Spesivõhh

Resümee

Töös on leitud kõik kompleksse ruumi  $P_3(C)$  mittejoonpinnad, millel toimib projektiivne teisenduste transitiivne rühm. Selliseid pindu nimetatakse ka orbii- tideks Lie teisenduste rühmade teooria mõttes. Uurimus tugineb E. Cartani teo- reemile [1], mille kohaselt kõik selliste pindade diferentsiaalvariandid peavad olema konstantsed.

Töös on leitud:

- 1) kõik maksimaalsed mittejoonorbiidid kompleksse dimensiooniga 2;
- 2) kõik tasandid, mis on invariantseid vastavate orbii- tide stationsaarsus- alarühmade suhtes, järelikult ka kompleksse afiinse ruumi  $A_3(C)$  kõik orbii- did.

## LIE'S UNTERGRUPPEN MIT MAXIMALEN ZWEIDIMENSIONALEN NICHT-GERADLINIGEN ORBITEN IM KOMPLEXEN $P_3(C)$

V. Spesivich

Zusammenfassung

Im Artikel sind alle nicht-geradlinigen Flächen im komplexen  $P_3(C)$ , die eine transitive Gruppe projektiver Transformationen zulassen, bestimmt worden. Solche Flächen nennt man auch Orbiten im Sinne der Theorie der Lie Trans- formationsgruppen. Die Bestimmung dieser Flächen gründet sich auf dem Ge- samtsatz von E. Cartan [1], daß bei solchen Flächen alle Differentialinvarian- ten fest sein müssen.

Hier werden bestimmt:

- 1) alle maximalen nicht-geradlinige Orbiten mit der komplexen Dimension 2 und ihre Gleichungen;
- 2) alle Ebenen, welche in bezug auf entsprechende stationäre Untergruppen invariant bleiben, folglich auch alle Orbiten des komplexen Affinenraum  $A_3(C)$ .

## О ДВУМЕРНЫХ ОРБИТАХ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ $P_3$ И ИХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Фляйшер

Кружок СНО при кафедре алгебры и геометрии

Настоящая работа тесно соприкасается со статьей [7]. Рассматриваются те же самые задачи, однако в случае действительного проективного пространства  $P_3$ , вместо комплексного  $P_3(\mathbb{C})$ ; кроме того, исследуются свойства однородных пространств орбит. В первой части работы, опираясь на теорему Э. Картана ([4], стр. 247), найдены все связанные двухпараметрические подгруппы Ли  $G$  проективной группы  $GP(3)$ , действующие в  $P_3$  таким образом, что пара  $(P_3, G)$  имеет кооднородность 1 и максимальные орбиты являются нелинейчатыми поверхностями. Дана сравнительная характеристика орбит в комплексном  $P_3(\mathbb{C})$  и в действительном  $P_3$ . Отметим, что изучением поверхностей, инвариантных относительно  $G \subset GP(3)$ , занимались, кроме С. Ли [12], еще В. Бляшке [11] (в случае аффинного пространства) и Ж. Фавар [9] (в случае эквиаффинного пространства). Во второй части работы среди всех однородных пространств рассматриваемых орбит выделяются редуکتивные однородные пространства, которые, как известно, [13], допускают каноническую инвариантную аффинную связность без кручения. Общая теория исследования таких пространств разработана А. М. Васильевым в [2]. Она с успехом применяется рядом авторов для исследования конкретных однородных пространств (см. [1, 3, 5]). Выяснение вопроса о редуکتивности каждого из изучаемых однородных пространств сводится нами к решению определенных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Полностью решается вопрос о том, какие из этих пространств являются редуکتивными и какие нет. Здесь интересно отметить следующее. Однородное пространство невырожденных квадрик, также являющихся орбитами в  $P_3$ , но уже кооднородностью 0, изучено Б. А. Розенфельдом в [6], где доказано, что оно является редуکتивным и даже симметрическим. В работе [8] выяснилось, что в случае аффинного пространства среди этих пространств лишь пространства центральных квадрик будут реду-

тивными (но уже не симметрическими). Интересен тот факт, что для большинства пространств орбит, рассматриваемых в данной работе, свойство редуцируемости при переходе от  $A_3$  к  $P_3$  теряется (однородные пространства квадратик, наоборот, приобретают его, как указано выше). Отметим также, что ни одно из пространств, рассматриваемых нами орбит, не является симметрическим.

Пользуясь случаем, автор выражает признательность своему научному руководителю проф. Ю. Г. Лумисте за ценные советы и постоянное внимание в ходе написания данной работы.

## § 1. Канонический репер

В теории поверхностей в  $P_3$  широко используется (см. [9, 10]) канонизация репера с помощью асимптотических линий. Однако в действительном  $P_3$  в случае поверхностей эллиптического типа эта канонизация не выполнима без выхода в комплексную область. Поэтому нам приходится начать с процесса построения репера чисто вещественным путем.

В качестве реперов нулевого порядка, связанных с точкой  $m$  рассматриваемой поверхности, выберем реперы, имеющие точку  $m$  своей первой вершиной  $E_0$ . Тогда  $\pi^1_0 = \pi^2_0 = \pi^3_0 = 0$ , и формы  $\omega^i_0$  становятся главными, то есть будут содержать дифференциалы только от главных параметров. Реперами первого порядка будут реперы, у которых плоскость  $(E_0E_1E_2)$  является касательной плоскостью к поверхности в точке  $m$ , тогда

$$\omega^3_0 = 0. \quad (1.1)$$

Продифференцировав это соотношение внешним образом и применяя лемму Картана, найдем

$$\omega^3_1 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega^3_2 = b\omega^1 + c\omega^2, \quad (1.2)$$

предварительно положив  $\omega^k_0 = \omega^k$  ( $k \neq 0$ ). Эти соотношения показывают, что формы  $\omega^3_1$  и  $\omega^3_2$  стали теперь главными, т. е.  $\pi^3_1 = \pi^3_2 = 0$ .

Резюмируем результаты в следующей таблице:  
Реперы порядка 1: десять параметров,

$$\omega^3 = 0, \quad (1.3)$$

$$\omega^3_1 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega^3_2 = b\omega^1 + c\omega^2.$$

Вторичные компоненты:

$$\pi^0_0, \pi^0_1, \pi^1_1, \pi^2_1, \pi^0_2, \pi^1_2, \pi^2_2, \pi^0_3, \pi^1_3, \pi^2_3,$$

причем

$$\pi^0_0 + \pi^1_1 + \pi^2_2 + \pi^3_3 = 0.$$

Из уравнений (1.2) получаем внешним дифференцированием

$$\begin{aligned}
& [da + a(\omega^0 + \omega^3 - 2\omega^1) - 2b\omega^2] \wedge \omega^1 + \\
& + [db - a\omega^2 + b(\omega^0 + \omega^3 - \omega^1 - \omega^2) - c\omega^2] \wedge \omega^2 = 0, \quad (1.4) \\
& [db - a\omega^2 + b(\omega^0 + \omega^3 - \omega^1 - \omega^2) - c\omega^2] \wedge \omega^1 + \\
& + [dc + c(\omega^0 + \omega^3 - 2\omega^2) - 2b\omega^2] \wedge \omega^2 = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку величины в скобках будут линейными комбинациями форм  $\omega^1$  и  $\omega^2$ , их вариации по вторичным параметрам равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned}
\delta a + a(\pi^0 + \pi^3 - 2\pi^1) - 2b\pi^2 &= 0, \\
\delta b - a\pi^2 + b(\pi^0 + \pi^3 - \pi^1 - \pi^2) - c\pi^2 &= 0, \quad (1.5) \\
\delta c + c(\pi^0 + \pi^3 - 2\pi^2) - 2b\pi^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\delta(ac - b^2) + 2(ac - b^2)(\pi^0 + \pi^3 - \pi^1 - \pi^2) = 0,$$

т. е. выражение  $ac - b^2$  определено с точностью до множителя. Мы не будем изучать случай, когда  $ac - b^2 = 0$ , который соответствует разветвляющимся поверхностям, исключенным нами из рассмотрения. В остальных случаях можно нормировать реперы порядка 1, взяв

$$ac - b^2 = \pm 1.$$

В формулах (1.5) содержатся кроме диагональных форм  $\pi^i$ , от которых, как показано в [10], зависит лишь нормирование вершин репера, только формы  $\pi^2_1$  и  $\pi^2_2$ , зависящие от выбора точек  $E_1$  и  $E_2$  в касательной плоскости. Та или иная фиксация этих форм приведет к выбору тех или иных направлений в данной точке поверхности.

Используя рассуждения, аналогичные изложенным в [9], получаем, что возможна следующая фиксация

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = \varepsilon, \quad (1.6)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ . Случай  $\varepsilon = 1$  назовем эллиптическим, а случай  $\varepsilon = -1$  — гиперболическим по аналогии с поверхностями в аффинном унимодулярном пространстве [9]. Фиксация (1.6) геометрически означает, что точки  $E_1$  и  $E_2$  принадлежат сопряженным направлениям в точке  $m$  поверхности.

Продолжим канонизацию репера, исходя из соотношений (1.6). Если к уравнениям (1.4) применить лемму Картана, то, учитывая (1.6), получим:

Реперы порядка 2: семь параметров,

$$\begin{aligned}
\omega^3 &= 0, \quad \omega^3_1 = \omega^1, \quad \omega^3_2 = \varepsilon\omega^2, \\
\omega^0 + \omega^3 - 2\omega^1 &= a'\omega^1 + b'\omega^2, \quad (1.7) \\
-(\varepsilon\omega^2_1 + \omega^1_2) &= b'\omega^1 + c'\omega^2, \\
\varepsilon(\omega^0 + \omega^3 - 2\omega^2) &= c'\omega^1 + d'\omega^2.
\end{aligned}$$

Вторичные компоненты

$$\pi^0, \pi^1, \pi^2, \pi^3, \pi^2_1, \pi^2_2, \pi^3_2, \text{ причем } \pi^1_2 = -\varepsilon\pi^2_1, \pi^0 + \pi^3 = 0.$$

Дифференцируя (1.7) внешним образом, находим вариации коэффициентов  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  по вторичным параметрам:

$$\begin{aligned} \delta a' &= -a' \pi_0^0 - 3b' \pi_1^2 - 3(\pi_1^0 - \pi_1^3), \\ \delta b' &= -b' \pi_0^0 + (2c' - \varepsilon a') \pi_1^2 + (\varepsilon \pi_3^2 - \pi_0^2), \\ \delta c' &= -c' \pi_0^0 + (d' - 2\varepsilon b') \pi_1^2 - \varepsilon(\pi_1^0 - \pi_1^3), \\ \delta d' &= -d' \pi_0^0 - 3\varepsilon c' \pi_1^2 + 3(\pi_3^2 - \varepsilon \pi_0^2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \delta(a' + \varepsilon c') &= -(a' + \varepsilon c') \pi_0^0 + (b' + \varepsilon d') \pi_1^2 - 4(\pi_1^0 - \pi_1^3), \\ \delta(b' + \varepsilon d') &= -(b' + \varepsilon d') \pi_0^0 - \varepsilon(a' + \varepsilon c') \pi_1^2 + 4(\varepsilon \pi_3^2 - \pi_0^2). \end{aligned}$$

Это дает нам возможность произвести фиксацию без использования  $\pi_1^2$  (то есть без фиксирования конкретного направления на поверхности):

$$a' + \varepsilon c' = b' + \varepsilon d' = 0, \quad \pi_1^0 = \pi_1^3, \quad \pi_0^2 = \varepsilon \pi_3^2.$$

Уравнения (1.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \delta a' &= -a' \pi_0^0 - 3\varepsilon d' \pi_1^2, \\ \delta d' &= -d' \pi_0^0 + 3a' \pi_1^2. \end{aligned}$$

Исключение  $\pi_1^2$  дает

$$\delta(a'^2 + \varepsilon d'^2) = -2(a'^2 + \varepsilon d'^2) \pi_0^0,$$

то есть выражение  $a'^2 + \varepsilon d'^2$  определено с точностью до множителя. Если  $a'^2 + \varepsilon d'^2 = 0$ , то выделяются квадратики и линейчатые поверхности, исключенные из рассмотрения. В остальных случаях мы можем нормировать реперы третьего порядка, положив  $a'^2 + \varepsilon d'^2 = \pm 1$ . Случай  $a'^2 + \varepsilon d'^2 = -1$  возможен лишь при  $\varepsilon = -1$ , но поскольку  $E_1$  и  $E_2$  у нас равноправны, то поменяв их местами и заменив  $a'$  на  $-d'$  и  $d'$  и  $-a'$ , мы придем в точности к случаю  $a'^2 - d'^2 = 1$ . Здесь примем

$$a'^2 + \varepsilon d'^2 = 1.$$

тогда  $\pi_0^0 = \pi_3^3 = 0$ . Возвращаясь к предыдущим уравнениям в вариациях, мы видим, что можно определить реперы третьего порядка, полагая

$$a' = -1, \quad c' = \varepsilon, \quad b' = d' = 0.$$

Тогда  $\pi_1^2 = 0$ . Резюмируем в виде таблицы.

Реперы порядка 3: три параметра,

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, \quad \omega^3_1 = \omega^1, \quad \omega^3_2 = \varepsilon \omega^2, \\ \omega^1_1 &= -\omega^2_2 = \frac{1}{2} \omega^1, \quad \omega^0_0 + \omega^3_3 = 0, \quad \omega^2_1 + \varepsilon \omega^1_2 = -\omega^2, \\ \varepsilon \omega^0_2 - \omega^2_3 - 3\omega^2_1 &= d'' \omega^1 + e'' \omega^2, \\ \omega^0_1 - \omega^1_3 + \omega^0_0 + \frac{3}{2} \omega^1 &= e'' \omega^1 + f'' \omega^2, \\ \omega^0_1 - \omega^1_3 &= a'' \omega^1 + b'' \omega^2, \\ \omega^0_2 - \varepsilon \omega^2_3 &= b'' \omega^1 + c'' \omega^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Вторичные компоненты:  $\pi_0^0$ ,  $\pi_0^2$ ,  $\pi_0^3$ .

Дифференцируя последние два равенства (1.9) внешним образом и переходя к вариациям, убеждаемся в том, что можно положить  $a'' = b'' = c'' = 0$ , что влечет  $\pi_0^1 = \pi_0^2 = \pi_0^3 = 0$ .

Вторичных параметров больше нет. Репер четвертого порядка есть канонический репер, что мы отметим в следующей таблице. Канонический репер:

$$\omega^3=0, \quad \omega^3_1=\omega^1, \quad \omega^3_2=\varepsilon\omega^2, \quad \omega^1_1=-\omega^2_2=\frac{1}{2}\omega^1,$$

$$\omega^0_0=-\omega^3_3=3(A\omega^1+B\omega^2),$$

$$\omega^2_1=-\varepsilon\omega^1_2-\omega^2=\varepsilon B\omega^1-\left(A+\frac{1}{2}\right)\omega^2,$$

$$\omega^0_2=\varepsilon\omega^2_3=4(D\omega^1+E\omega^2), \quad (1.10)$$

$$\omega^0_1=\omega^1_3=2(\varepsilon E-C)\omega^1+2(\varepsilon F-D)\omega^2,$$

$$\omega^0_3=-\varepsilon(C+\varepsilon E)\omega^1-(D+\varepsilon F)\omega^2.$$

Эти формулы удобно представить с помощью матрицы пар коэффициентов разложений форм  $\omega^j_i$  по формам  $\omega^1, \omega^2$  равенством:

$$\mathfrak{A}=\|\omega^j_i\|=\|P^j_i|Q^j_i\|=\mathfrak{P}\omega^1+\mathfrak{Q}\omega^2, \quad (1.11)$$

где

$$\mathfrak{P}=\begin{vmatrix} 3A & 1 & 0 & 0 \\ 2(\varepsilon E-C) & 1/2 & \varepsilon B & 1 \\ 4D & -B & -1/2 & 0 \\ -(C+\varepsilon E) & 2(\varepsilon E-C) & 4\varepsilon D & -3A \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{Q}=\begin{vmatrix} 3B & 0 & 1 & 0 \\ 2(\varepsilon F-D) & 0 & -(A+1/2) & 0 \\ 4E & \varepsilon(A-1/2) & 0 & \varepsilon \\ -(D+\varepsilon F) & 2(\varepsilon F-D) & 4\varepsilon E & -3B \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты  $A, B, C, D, E, F$  в формулах (1.10) — абсолютные инварианты поверхности  $m$ . Но они не могут быть произвольными, так как пфаффовы формы  $\omega^j_i$  должны удовлетворять уравнениям структуры проективного пространства. Подстановкой уравнений (1.10) в уравнения структуры находим условия интегрируемости системы

$$\begin{cases} d\omega^1=-2B\omega^1\wedge\omega^2, & d\omega^2=2A\omega^1\wedge\omega^2, \\ 3A_{,2}-3B_{,1}+2\varepsilon F-6D=0, \\ A_{,1}+\varepsilon B_{,2}+6\varepsilon E-2C=-\frac{1}{2}-2\varepsilon B^2-2A^3, \\ 11(BD-AE)=\varepsilon(BF-AC)+2D_{,2}-2E_{,1}, \\ 7(\varepsilon BE+AD)=5(BC+\varepsilon AF)+\varepsilon E_{,2}-C_{,2}-\varepsilon F_{,1}+D_{,1}, \\ D_{,1}+\varepsilon F_{,1}-C_{,2}-\varepsilon E_{,2}+8AD+8\varepsilon AF=8BC+8\varepsilon BE, \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $dA=A_{,1}\omega^1+A_{,2}\omega^2$  и т. д.

## § 2. Стационарные подгруппы

В силу общей теоремы Э. Картана (см. [4], стр. 247) отыскание орбит некоторой подгруппы проективного пространства сводится к отысканию поверхностей с постоянными дифференциальными инвариантами.

Возвратимся к условиям интегрируемости (1.12), где теперь коэффициенты  $A, B, C, D, E, F$  — постоянные:

$$\begin{cases} d\omega^1 = -2B\omega^1 \wedge \omega^2, & d\omega^2 = 2A\omega^1 \wedge \omega^2, \\ F = 3\varepsilon D, \\ 6\varepsilon E - 2C = 1/2 - 2\varepsilon B^2 - 2A^2, \\ 11(BD - AE) = \varepsilon(BF - AC), \\ \quad BC - AD = \varepsilon(AF - BE), \\ 7(\varepsilon BE + AD) = 5(\varepsilon AF + BC). \end{cases} \quad (2.1)$$

Постараемся разрешить систему из последних пяти уравнений, которые содержат шесть неизвестных. Из последних двух уравнений этой группы подстановкой значения  $F$  получаем:

$$\begin{aligned} 4AD &= B(C + \varepsilon E), \\ 8AD &= B(7\varepsilon E - 5C), \end{aligned}$$

откуда

$$2B(C + \varepsilon E) = B(7\varepsilon E - 5C).$$

Если  $B = 0$ , то сразу получаем следующие решения:

$$1) A = B = 0, \quad C = 3\varepsilon E - \frac{1}{4}, \quad F = 3\varepsilon D,$$

( $D$  и  $E$  — параметры),

$$2) B = D = F = 0, \quad C = \frac{11}{8} \left( A^2 - \frac{1}{4} \right), \quad E = \frac{1}{8} \varepsilon \left( A^2 - \frac{1}{4} \right).$$

В противном случае

$$7C = 5\varepsilon E$$

и тогда при  $C \neq 0, D \neq 0$

$$B^2 = 3\varepsilon A^2.$$

Отсюда видно, что данное решение существует лишь при  $\varepsilon = 1$  и имеет вид

$$B = \pm \sqrt{3}A, \quad C = \frac{5(1 - 16A^2)}{64}, \quad D = \pm \frac{3\sqrt{3}(1 - 16A^2)}{64},$$

$$E = \frac{7(1 - 16A^2)}{64}, \quad F = \pm \frac{9\sqrt{3}(1 - 16A^2)}{64},$$

Равенство нулю одного из  $C$  или  $D$  необходимо влечет равенство нулю другого (при  $B \neq 0$ ), т. е. еще возможно решение  $C = D = 0$ , тогда  $E = F = 0$  и

$$B = \pm \sqrt{\varepsilon \left( \frac{1}{4} - A^2 \right)}.$$

Все полученные решения системы (2.1) запишем в виде таблицы:

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$P1$	0	0	$3\epsilon E - \frac{1}{4}$	$D$	$E$	$3\epsilon D$
$P2$	$A \neq 0$	0	$\frac{11}{8} \left( A^2 - \frac{1}{4} \right)$	0	$\frac{1}{8} \epsilon \left( A^2 - \frac{1}{4} \right)$	0
$P3$	$A^2 \neq \frac{1}{4}$	$\pm \sqrt{\epsilon \left( \frac{1}{4} - A^2 \right)}$	0	0	0	0
$P4$	$A \neq 0$	$\pm \sqrt{3} A$	$\frac{5(1 - 16A^2)}{64}$	$\pm \frac{3\sqrt{3}(1 - 16A^2)}{64}$	$\frac{7(1 - 16A^2)}{64}$	$\pm \frac{9\sqrt{3}(1 - 16A^2)}{64}$

Каждому из полученных решений будет отвечать определенная подгруппа группы проективных преобразований, являющаяся стационарной подгруппой соответствующей орбиты. При этом подгруппа, отвечающая решению  $P1$  является абелевой, а все остальные подгруппы — неабелевыми. Для абелевых подгрупп решение первых двух уравнений (2.1) тривиально

$$\omega^1 = du, \quad \omega^2 = dv.$$

В противном случае имеем

$$d(A\omega^1 + B\omega^2) = 0, \quad d(A\omega^1 - B\omega^2) = -4AB\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Обозначим

$$A\omega^1 + B\omega^2 = \omega^{1*}, \quad A\omega^1 - B\omega^2 = \omega^{2*}.$$

Тогда  $\omega^{1*} \wedge \omega^{2*} = -2AB\omega^1 \wedge \omega^2$  и

$$d\omega^{1*} = 0, \quad d\omega^{2*} = 2\omega^{1*} \wedge \omega^{2*}.$$

Следовательно, можем принять  $\omega^{1*} = du$ ,  $\omega^{2*} = e^{2u}dv$  и получить

$$\begin{aligned} 2A\omega^1 &= du + e^{2u}dv, \\ 2B\omega^2 &= du - e^{2u}dv. \end{aligned}$$

### § 3. Инвариантные плоскости

Пусть точка  $E_0$  описывает некоторую нелинейчатую орбиту в  $P_3$ . Существует ли плоскость, инвариантная относительно стационарной подгруппы орбиты?

Пусть  $\mathfrak{M}$  — матрица (1.11). Преобразуем исходный репер  $\mathfrak{E}$  с помощью матрицы  $\mathfrak{B}$  по формуле:

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{B}\mathfrak{E},$$

где

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и  $a, b, c$  — неизвестные. Это преобразование сохранит точку  $E_0$ , а остальные преобразует так:

$$E'_1 = aE_0 + E_1, \quad E'_2 = bE_0 + E_2, \quad E'_3 = cE_0 + E_3.$$

Следовательно, этим преобразованием можно точки  $E'_1, E'_2, E'_3$  поместить на любую наперед заданную плоскость, не проходящую через  $E_0$ . В новом репере  $\mathfrak{E}'$  матрица  $\mathfrak{M}$  заменяется матрицей

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{B}^{-1}.$$

Для нахождения инвариантной плоскости надо в матрице  $\mathfrak{M}'$  на местах  $\omega^0_1, \omega^0_2, \omega^0_3$  приравнять к нулю полученные коэффициенты и решить систему относительно  $a, b, c$ . Ниже анализируются результаты решения этой системы во всех случаях  $P1, P2, P3$  и  $P4$ .

Случай P1. В этом случае искомая система имеет решение

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \left( a^2 + \varepsilon b^2 + \frac{1}{2} \right), \\ 4D &= b \left( a - \frac{1}{2} \right), \\ 4\varepsilon E &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - a^2 + \varepsilon b^2 - a \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Всегда ли при заданных  $D$  и  $E$  можно найти вещественные  $a$  и  $b$ , удовлетворяющие (3.1)? Исключив из последних двух уравнений (3.1) неизвестное  $b$ , приходим к уравнению:

$$a^4 + \left( 8\varepsilon E - \frac{7}{4} \right) a^2 + \left( \frac{3}{4} - 8\varepsilon E \right) a + \left( 2\varepsilon E - 16\varepsilon D^2 - \frac{1}{8} \right) = 0.$$

Для исследования существования вещественных решений данного уравнения и нахождения числа их воспользуемся теоремой Штурма.

Пусть  $\varepsilon = 1$ . Тогда, в зависимости от  $D$ , при  $E > 7/32$  данное уравнение либо имеет два решения, либо не имеет решений; при  $E < 7/32$  оно может иметь четыре решения, два решения либо не иметь решения.

Пусть  $\varepsilon = -1$ . Опять в зависимости от  $D$  уравнение (3.2) при  $E > -7/32$  может иметь четыре решения, два решения либо не иметь решений; при  $E < -7/32$  либо нет решений, либо их число равняется двум. Ясно, что в случае отсутствия вещественных решений уравнения (3.2) выделение инвариантной плоскости невозможно.

Для тех  $D$  и  $E$ , при которых такая плоскость существует, с целью упрощения матрицы  $\mathfrak{A}'$ , совершим преобразование репера на самой плоскости ( $E'_1 E'_2 E'_3$ )

$$E''_1 = E'_1, \quad E''_2 = E'_2, \quad E''_3 = aE'_1 + \varepsilon bE'_2 + E'_3.$$

Тогда и только тогда в новом репере имеем

$$A' = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} -a & -b & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\varepsilon b & a - \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\varepsilon \left( a + \frac{1}{2} \right) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a + \frac{1}{2} & -b & -\varepsilon b & \frac{1}{2} & -a & b \end{array} \right\|.$$

Здесь  $\omega^0_1 = \omega^0_2 = \omega^0_3 = 0$ . Это означает, что существуют такие  $D$  и  $E$ , при которых данная подгруппа сохраняет инвариантной не только орбиту, но и плоскость ( $E''_1 E''_2 E''_3$ ).

Случай P2. Система

$$\left\{ \begin{array}{l} 3aA - \frac{5}{2} \left( A^2 - \frac{1}{4} \right) - a \left( a + \frac{1}{2} \right) - c = 0, \\ b \left( a - A - \frac{1}{2} \right) = 0, \\ b \left( 3A - a + \frac{1}{2} \right) = 0, \\ \frac{1}{2} \varepsilon \left( A^2 - \frac{1}{4} \right) - \varepsilon \left( A - \frac{1}{2} \right) a - b^2 - \varepsilon c = 0, \\ 6cA - \frac{3}{2} \left( A^2 - \frac{1}{4} \right) - ac + \frac{5}{2} a \left( A^2 - \frac{1}{4} \right) = 0, \\ b \left[ c + \frac{1}{2} \left( A^2 - \frac{1}{4} \right) \right] = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

имеет два вещественных решения.

Первое решение:

$$b=0, \quad a=A+\frac{1}{2}, \quad c=-\frac{1}{2} \left( A^2 - \frac{1}{4} \right).$$

С целью упрощения матрицы (1.11) совершим дополнительное преобразование репера на плоскости ( $E'_1 E'_2 E'_3$ )

$$E''_1 = E'_1, \quad E''_2 = E'_2, \quad E''_3 = \left( A + \frac{1}{2} \right) E'_1 + E'_3.$$

Тогда матрица (1.11) примет вид

$$\mathfrak{M}'_1 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 2A - \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 2A + 1 & 0 & 0 & 0 & -2A + \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (3.4)$$

Второе решение:

$$b=0, \quad a = \frac{3(2A-1)}{2}, \quad c = \frac{a(3-5a)}{18}$$

После преобразования

$$E''_1 = E'_1, \quad E''_2 = E'_2, \quad E''_3 = aE'_1 + E'_3$$

матрица

$$\mathfrak{A}'_2 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{2}{3}a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\varepsilon a & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \frac{4a(a+3)}{9} & 0 & 0 & \frac{2a(2a-3)}{9} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right\|. \quad (3.5)$$

Преобразования репера найдены так, что они и только они приводят матрицы  $\mathfrak{A}'_1$  и  $\mathfrak{A}'_2$  к такому виду, где  $\omega^0_1 = \omega^0_2 = \omega^0_3 = 0$ , то есть найдены все несовпадающие инвариантные плоскости. Прямая их пересечения является инвариантной прямой.

Случай P3. Для этой орбиты матрицы

$$\mathfrak{A} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 3A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \pm \varepsilon \sqrt{\varepsilon(1/4 - A^2)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp \sqrt{\varepsilon(1/4 - A^2)} & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3A & 0 \end{array} \right\|, \quad (3.6)$$

$$\mathfrak{Q} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \pm 3 \sqrt{\varepsilon(1/4 - A^2)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(A + 1/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(A - 1/2) & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 3 \sqrt{\varepsilon(1/4 - A^2)} & 0 \end{array} \right\|.$$

Здесь сразу  $\omega^0_1 = \omega^0_2 = \omega^0_3 = 0$ . Является ли полученная плоскость единственной инвариантной плоскостью? Ответ дает анализ системы уравнений относительно неизвестных  $a, b, c$ . Оказывается, что данная система, кроме нулевого решения при любом  $A$ , отраженного в матрице (3.6), имеет и ненулевое решение.

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad c = -3, \quad A = \frac{1}{4} \quad (\varepsilon = 1).$$

Это говорит о том, что существуют такие значения параметра  $A$ , при которых возможно выделение двух инвариантных плоскостей. Прямые их пересечения являются инвариантными прямыми.

Случай P4. Найденная система в поле действительных чисел имеет два решения.

Первое решение:

$$a = 3\left(A + \frac{1}{4}\right), \quad b = \pm 3\sqrt{3}\left(A + \frac{1}{4}\right), \quad c = -10A^2 - 6A - \frac{7}{8}.$$

После дополнительного преобразования репера

$$E''_1 = E'_1, \quad E''_2 = E'_2, \quad E''_3 = 3\left(A + \frac{1}{4}\right)E'_1 \pm 3\sqrt{3}\left(A + \frac{1}{4}\right)E'_2 + E'_3$$

матрицы

$$\mathfrak{P} = \begin{vmatrix} -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \mp\sqrt{3}(2A+3/4) & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{3}(2A+3/4) & -1/2 & 0 \\ 0 & 16A^2+9A+5/4 & \mp 3\sqrt{3}(A+1/4) & 3/4 \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathfrak{Q} = \begin{vmatrix} \mp 3\sqrt{3}/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2A+1/4 & 0 \\ 0 & -2A-5/4 & 0 & 1 \\ 0 & \mp 3\sqrt{3}(A+1/4) & 16A^2+3A-1/4 & \pm 3\sqrt{3}/4 \end{vmatrix}$$

Второе решение:

$$a = A - \frac{1}{4}, \quad b = \pm\sqrt{3}\left(A - \frac{1}{4}\right), \quad c = \frac{1}{8} - 2A^2.$$

Перейдем к новому реперу

$$E''_1 = E'_1, \quad E''_2 = E'_2, \quad E''_3 = \left(A - \frac{1}{4}\right)E'_1 \pm \sqrt{3}\left(A - \frac{1}{4}\right)E'_2 + E'_3.$$

Тогда матрицы

$$\mathfrak{P} = \begin{vmatrix} 2A+1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \pm\sqrt{3}/4 & 1 \\ 0 & \mp\sqrt{3}/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4-A & \pm\sqrt{3}(1/4-A) & -(2A+1/4) \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{Q} = \begin{vmatrix} \pm\sqrt{3}(2A+1/4) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1 \\ 0 & \pm\sqrt{3}(1/4-A) & 3(1/4-A) & \mp\sqrt{3}(2A+1/4) \end{vmatrix}.$$

Здесь тоже указанные преобразования и только они дают возможность перейти к такому реперу, где  $\omega^0_1 = \omega^0_2 = \omega^0_3 = 0$ . Полученные инвариантные плоскости не совпадают, следовательно, инвариантной является и прямая их пересечения. Сопоставив полученные результаты с аналогичными в [7], мы видим, что выделение инвариантной плоскости, характерное в комплексном  $P_3(\mathbb{C})$  для всех стационарных подгрупп двумерных нелинейчатых орбит, в действительном  $P_3$  возможно не всегда.

#### § 4. Переход к аффинному пространству

Выберем инвариантную плоскость (там, где ее удалось выделить) в качестве «бесконечно удаленной». Тогда можно перейти к действительному аффинному пространству. Действительно, вводя обозначение  $'\omega^j_i = \omega^j_i - \delta^j_i \omega^0_0$ , где  $\delta^j_i$  — символ Кронекера, с учетом  $\omega^0_i = 0 (i \neq 0)$ , мы получаем, что формы  $'\omega^j_i$  удовлетворяют структурным уравнениям аффинной подгруппы группы проективных преобразований.

Так как все рассматриваемые орбиты являются орбитами 2-параметрических подгрупп  $H$ , то при сужении проективной группы  $GP(3)$  в  $P_3$  до аффинной группы  $GA(3)$  (то есть стационарной подгруппы некоторой плоскости в  $P_3$ ) для того, чтобы орбита оставалась двумерной орбитой и относительно  $H \cap GA(3)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $H \subset GA(3)$  (ведь в противном случае  $H \cap GA(3)$  была бы 0- или 1-мерна и не могла бы породить 2-мерную орбиту). Другими словами, плоскость должна быть инвариантна относительно  $H$ .

Таким образом, нахождение 2-мерных орбит с дупараметрическими стационарными подгруппами в  $A_3$  сводится к нахождению всех плоскостей, инвариантных относительно найденных ранее дупараметрических подгрупп  $H \subset GP(3)$ . Это позволяет не заниматься дополнительным изучением орбит пространства  $A_3$ . Все они получатся из соответствующих орбит пространства  $P_3$  фиксацией действительной инвариантной плоскости в качестве «бесконечно удаленной». Но ведь в некоторых случаях инвариантную плоскость выделить не удалось? Это будет говорить о том, что среди нелинейчатых орбит в действительном  $P_3$  существуют «собственно-проективные» орбиты, не являющиеся орбитами в действительном  $A_3$  (ср. [7], теорема 2).

## § 5. Редуктивность однородных пространств орбит в $P_3$ и $A_3$

Пусть группа Ли  $G$  с инвариантными формами Маурера — Картана  $\omega^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) действует транзитивно на многообразии  $M$  и пусть  $H$  — стационарная подгруппа точки многообразия, выделяемая системой

$$\omega^a = 0 \quad (a = 1, \dots, r < n).$$

Известно, (см. [13]), что фактормногообразие  $G/H$ , являющееся однородным пространством с группой движений  $G$ , можно, в известном смысле, отождествить с многообразием  $M$ . Ввиду того, что  $H$  — подгруппа группы  $G$ , структурные уравнения Маурера — Картана принимают вид:

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \omega^b \wedge \omega^c - C^a_{b\alpha} \omega^b \wedge \omega^\alpha, \quad (5.1)$$

$$d\omega^\alpha = -\frac{1}{2} C^{\alpha}_{bc} \omega^b \wedge \omega^c - C^{\alpha}_{b\beta} \omega^b \wedge \omega^\beta - \frac{1}{2} C^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \\ (a, b, c = 1, \dots, r; \quad \alpha, \beta, \gamma = r+1, \dots, n).$$

Однородное пространство  $G/H$  с группой движений  $G$  и стационарной подгруппой  $H$  называется редуктивным, если в алгебре Ли  $g$  его группы движений существует линейное подпространство  $K$ , такое, что

$$g = h + K, \quad h \cap K = \{0\}, \quad [Kh] \subset K,$$

где  $h$  — подалгебра Ли стационарной подгруппы  $H$ , а третье условие означает замкнутость  $K$  относительно умножения Ли на элементы  $h$ . Линейное подпространство  $K$  называется оснащением подгруппы  $H$ . Если формы  $\omega^\alpha$  образуют дуальный базис подпространства  $K$ , то  $K$  является оснащением подгруппы  $H$  (однородное пространство  $G/H$  редуктивным) тогда и только тогда, когда

$$C^{\alpha}_{b\beta} = 0 \quad (5.2)$$

и симметрическим, когда

$$C^a_{bc} = 0. \quad (5.3)$$

В случае более общего базиса  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$  подгруппа  $H$  задается системой дифференциальных уравнений

$$\theta^a \equiv b^a_i \omega^i = 0.$$

Пусть систему форм  $\theta^a$  можно дополнить до полного дуального базиса алгебры  $g$  формами  $\omega^\alpha$ . Тогда дуальный базис дополнительного к  $h$  подпространства  $K$  можно представить в виде

$$\vartheta^\alpha = \omega^\alpha + p^\alpha_a \theta^a,$$

где  $p^\alpha_a$  — некоторые неизвестные постоянные. Условие редуктивности (5.2) означает, что в выражении для  $d\vartheta^\alpha$  (аналогич-

ном правой части в (5.1)) отсутствуют внешние произведения «разнородных» форм  $\theta^a \wedge \vartheta^a$  (которые аналогичны произведениям  $\omega^b \wedge \omega^b$  в (5.1)). Следовательно, задача нахождения оснащения сводится к решению системы линейных уравнений относительно  $p^a$ , получаемых приравнением к нулю коэффициентов при произведениях  $\theta^a \wedge \vartheta^a$ . Условие симметричности (5.3) означает, что в выражении для  $d\theta^a$  отсутствуют внешние произведения «однородных» форм  $\theta^1 \wedge \theta^b$ .

Перейдем к рассмотрению вопроса редуцируемости однородных пространств полученных выше орбит с действующей на них группой проективных преобразований, причем в каждом из случаев будем предполагать, что переход к такому реперу, в котором формы  $\omega^0_i = 0$  ( $i \neq 0$ ) уже осуществлен.

Получаемые системы для нахождения неизвестных  $p^a$  в общем случае весьма громоздки, и потому мы проиллюстрируем предложенный метод лишь на одном из примеров, а остальные результаты приведем в виде сводки.

Рассмотрим однородное пространство орбит  $P1$ . Из (3.3) получаем, что стационарная подгруппа  $H$  «точки» такого многообразия задается системой дифференциальных уравнений.

$$\theta^1 \equiv \omega^3 = 0,$$

$$\theta^2 \equiv \omega^3_1 - \omega^1 = 0,$$

$$\theta^3 \equiv \omega^3_2 - \varepsilon \omega^2 = 0,$$

$$\theta^4 \equiv -\omega^2_1 - \varepsilon b \omega^1 + \left(a - \frac{1}{2}\right) \omega^2 = 0,$$

$$\theta^5 \equiv -\omega^1_2 + b \omega^1 - \varepsilon \left(a + \frac{1}{2}\right) \omega^2 = 0,$$

$$\theta^6 \equiv -\omega^1_1 + \frac{1}{2} \omega^1 = 0,$$

$$\theta^7 \equiv -\omega^2_2 - \frac{1}{2} \omega^1 = 0,$$

$$\theta^8 \equiv -\omega^3_3 + a \omega^1 + b \omega^2 = 0,$$

$$\theta^9 \equiv -\omega^1_3 + \left(a + \frac{1}{2}\right) \omega^1 - b \omega^2 = 0,$$

$$\theta^{10} \equiv -\omega^2_3 - \varepsilon b \omega^1 + \left(\frac{1}{2} - a\right) \omega^2 = 0,$$

$$\theta^{11} \equiv \omega^0_1 = 0,$$

$$\theta^{12} \equiv \omega^0_2 = 0,$$

$$\theta^{13} \equiv \omega^0_3 = 0.$$

Однородное пространство орбит  $P1$  изоморфно однородному пространству  $GP(3)/H$  левых смежных классов проективной группы  $GP(3)$  по подгруппе  $H$ .

Из соотношений (5.4) видно, что базис подпространства  $K$  можно представить в виде

$$j^a = \omega^a + p^a \theta^a \quad (a=1, 2; a=1, \dots, 13).$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} d\theta^1 = & \left[ 2\theta^6 + \theta^7 + \theta^8 + \left( a + \frac{1}{2} \right) \theta^1 \right] \wedge \theta^4 + [\theta^5 - b \theta^1] \wedge \theta^2 + \\ & + d(p^1_a \theta^a) + * \omega^1, \\ d\theta^2 = & [\theta^4 - \varepsilon b \theta^1] \wedge \theta^4 + \left[ 2\theta^7 + \theta^6 + \theta^8 - \left( a - \frac{1}{2} \right) \theta^1 \right] \wedge \theta^2 + \\ & + d(p^2_a \theta^a) + * \omega^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d(p^a_\alpha \theta^\alpha) = & \theta^1 \wedge \{ 2ap^a_{1\beta^1} + 2bp^a_{1\beta^2} - (a+1/2)p^a_{2\beta^1} + bp^a_{2\beta^2} + \\ & + bp^a_{3\beta^1} + \varepsilon(a-1/2)p^a_{3\beta^2} - 2\varepsilon ab p^a_{\alpha\beta^1} + \\ & + [\varepsilon b^2 - (a-1/2)^2] p^a_{4\beta^2} + 2b(a+1/2)p^a_{5\beta^1} - \\ & - [b^2 + \varepsilon(1/4 - a^2)] p^a_{5\beta^2} + 1/2(a+1/2)p^a_{6\beta^1} - 1/2bp^a_{6\beta^2} - \\ & - 1/2(a+1/2)p^a_{7\beta^1} + 1/2bp^a_{7\beta^2} + [a(a+1/2) - \varepsilon b^2] p^a_{8\beta^1} + \\ & + b(1/2 - 2a)p^a_{8\beta^2} + [(a+1/2)^2 + \varepsilon b^2] p^a_{9\beta^1} - bp^a_{9\beta^2} - \\ & - \varepsilon bp^a_{10\beta^1} + [\varepsilon b^2 + (a-1/2)^2] p^a_{10\beta^2} + \theta^2 \wedge [-p^a_{1\beta^1} + \\ & + (a-1/2)p^a_{2\beta^1} + bp^a_{2\beta^2} - bp^a_{3\beta^1} + \varepsilon(a+1/2)p^a_{3\beta^2} + \\ & + \varepsilon bp^a_{4\beta^1} + (a-1/2)p^a_{4\beta^2} - (a+1/2)p^a_{5\beta^1} + bp^a_{5\beta^2} + \\ & + (a+1/2)p^a_{6\beta^1} - bp^a_{6\beta^2}] + \theta^3 \wedge [-p^a_{1\beta^2} + \varepsilon bp^a_{2\beta^1} - \\ & - (a-1/2)p^a_{2\beta^2} + (a+1/2)p^a_{3\beta^1} + bp^a_{3\beta^2} - (a+1/2)p^a_{3\beta^1} + \\ & + bp^a_{3\beta^2} + \varepsilon bp^a_{4\beta^1} + (a-1/2)p^a_{4\beta^2} - \varepsilon bp^a_{5\beta^1} + \\ & + (1/2 - a)p^a_{5\beta^2}] + \theta^4 \wedge [-\varepsilon p^a_{3\beta^2} - \varepsilon p^a_{3\beta^1} + \\ & + (a-3/2)p^a_{4\beta^1} - \varepsilon(a+1/2)p^a_{5\beta^1} + bp^a_{5\beta^1} - \\ & - \varepsilon(a+1/2)p^a_{6\beta^2} - bp^a_{7\beta^1} + \varepsilon(a+1/2)p^a_{7\beta^2} + bp^a_{8\beta^1} - \\ & - bp^a_{8\beta^2} - 2ap^a_{10\beta^1} + bp^a_{10\beta^2}] + \theta^5 \wedge [-p^a_{2\beta^2} - p^a_{3\beta^1} - \\ & - \varepsilon bp^a_{4\beta^2} + p^a_{5\beta^1} + bp^a_{5\beta^2} + \varepsilon bp^a_{6\beta^1} - (a-1)p^a_{6\beta^2} - \\ & - \varepsilon bp^a_{7\beta^1} + (a-1)p^a_{7\beta^2} + ap^a_{8\beta^2} + \varepsilon bp^a_{9\beta^1} + 2abp^a_{9\beta^2} - \\ & - \varepsilon bp^a_{10\beta^2}] + \theta^6 \wedge [-3p^a_{2\beta^1} - \varepsilon p^a_{3\beta^2} - 3\varepsilon bp^a_{4\beta^1} + \\ & + (2a-1)p^a_{4\beta^2} + bp^a_{5\beta^1} + p^a_{6\beta^1} - p^a_{7\beta^1} + 2ap^a_{8\beta^1} + \\ & + bp^a_{8\beta^2} + (a+1/2)p^a_{9\beta^1} - 2\varepsilon bp^a_{10\beta^1} + (1/2 - a)p^a_{10\beta^2}] + \\ & + \theta^7 \wedge [-p^a_{2\beta^1} - 3\varepsilon p^a_{3\beta^2} + (a-1/2)p^a_{4\beta^2} + 2bp^a_{5\beta^1} - \\ & - 3\varepsilon(a+1/2)p^a_{5\beta^2} + 1/2(p^a_6 - p^a_7)\beta^1 + ap^a_{8\beta^1} + 2bp^a_{8\beta^2} - \\ & - 2bp^a_{9\beta^2} - (a-1/2)p^a_{10\beta^2}] + \theta^8 \wedge [-\varepsilon bp^a_{\alpha\beta^1} + \\ & + (a-1/2)p^a_{4\beta^2} + bp^a_{5\beta^1} - \varepsilon(a+1/2)p^a_{5\beta^2} + \\ & + 1/2(p^a_6 - p^a_7)\beta^1 + ap^a_{8\beta^1} + bp^a_{8\beta^2} + (2a+1)p^a_{9\beta^1} - \\ & - 2bp^a_{9\beta^2} - 2\varepsilon bp^a_{10\beta^1} - (2a-1)p^a_{10\beta^2}] + \\ & + \theta^9 \wedge [-\varepsilon p^a_{5\beta^2} - p^a_{6\beta^1} + p^a_{8\beta^1} - (a-1/2)p^a_{9\beta^1} - \\ & - bp^a_{9\beta^2} - \varepsilon bp^a_{10\beta^1} - (1/2 - a)p^a_{10\beta^2}] + \theta^{10} \wedge [-p^a_{4\beta^1} - \\ & - \varepsilon p^a_{7\beta^2} + \varepsilon p^a_{8\beta^2} + bp^a_{9\beta^1} - \varepsilon(a+1/2)p^a_{9\beta^2} - \\ & - (a+1/2)p^a_{10\beta^1} - bp^a_{10\beta^2}] + \theta^{11} \wedge [-p^a_{4\beta^2} - p^a_{6\beta^1} - \\ & - (a+1/2)p^a_{11\beta^1} - bp^a_{11\beta^2} - bp^a_{12\beta^1} + \varepsilon(a+1/2)p^a_{12\beta^2} - \\ & - (a+1/2)p^a_{13\beta^1} + bp^a_{13\beta^2}] + \theta^{12} \wedge [-p^a_{5\beta^1} - p^a_{7\beta^2} + \\ & + \varepsilon bp^a_{11\beta^1} - (a-1/2)p^a_{11\beta^2} - (a-1/2)p^a_{12\beta^1} - \\ & + bp^a_{12\beta^2} + \varepsilon bp^a_{13\beta^1} + (a-1/2)p^a_{13\beta^2}] + \\ & + \theta^{13} \wedge [-p^a_{9\beta^1} - p^a_{10\beta^2} - p^a_{11\beta^1} - \varepsilon p^a_{12\beta^2} - 2ap^a_{13\beta^1} - \\ & - 2bp^a_{13\beta^2}] + \omega^a. \end{aligned}$$

Здесь  ${}^*\omega^\alpha$  и  $\omega^{*\alpha}$  содержат только «однородные» внешние произведения типа  $\Theta^a \wedge \Theta^b$  и  $\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta$ , для нас не существенные. Приравнявая к нулю коэффициенты при произведениях  $\Theta^a \wedge \vartheta^\alpha$  в выражениях для  $d\vartheta^\alpha$ , мы получаем систему линейных уравнений относительно  $p^a_\alpha$ . Перейдем к решению полученной системы.

1) Пусть  $b = 0$ . В выражении для  $d\vartheta^2$  из коэффициентов при  $\Theta^5 \wedge \vartheta^1$ ,  $\Theta^7 \wedge \vartheta^2$ ,  $\Theta^6 \wedge \vartheta^2$  и  $\Theta^8 \wedge \vartheta^2$  получаем

$$p^2_{10} = \frac{1}{5a^2 + 2a - \frac{9}{4}} = \frac{1}{2a^2 + 2a - \frac{3}{2}}, \quad \text{откуда} \quad a = \pm \frac{1}{2}.$$

При  $a = 1/2$  сразу же получаем противоречие. Если же  $a = -1/2$ , то система имеет следующее решение:

$$p^1_7 = p^1_8 = -p^1_9 = 1, \quad p^1_{11} = p^1_{13} = 1, \\ \text{все остальные } p^1_k = 0;$$

$$p^2_3 = p^2_5 = p^2_{12} = \frac{1}{2} \varepsilon, \quad p^2_{10} = -\frac{1}{2}, \quad p^2_{11} = p^2_{13},$$

все остальные  $p^2_k = 0$ .

2) Пусть  $b \neq 0$ . Из коэффициентов при  $\Theta^{10} \wedge \vartheta^1$ ,  $\Theta^9 \wedge \vartheta^2$ ,  $\Theta^4 \wedge \vartheta^2$  и  $\Theta^5 \wedge \vartheta^1$  находим

$$p^2_4 = b p^2_9 - \left(a + \frac{1}{2}\right) p^2_{10}, \quad p^2_2 = -\left(a + \frac{1}{2}\right) p^2_9 + \varepsilon b p^2_{10},$$

$$\varepsilon p^2_3 = b p^2_9 + \left(a - \frac{1}{2}\right) p^2_{10}, \quad \varepsilon p^2_5 = -b p^2_9 + \left(a - \frac{1}{2}\right) p^2_{10}.$$

Подстановка этих значений в коэффициенты при  $\Theta^6 \wedge \vartheta^1$  и  $\Theta^7 \wedge \vartheta^1$  приводит к  $(a + 1/2) p^2_9 = 0$ .

Если  $p^2_9 = 0$ , то и  $p^2_{10} = p^2_4 = 0$ , откуда  $p^2_1 = p^2_2 = p^2_3 = p^2_5 = 0$ . Далее, получаем  $a p^2_8 = 0$ ,  $b p^2_8 = -1$ , следовательно, можем взять  $a = 0$ ,  $p^2_8 = -1/b$ . Это быстро ведет к цели:

$$p^2_6 = p^2_7 = p^2_8 = -\frac{1}{b}, \quad p^2_{11} = 0, \quad p^2_{12} = \frac{4\varepsilon}{4\varepsilon b^2 - 1},$$

$$p^2_{13} = -\frac{2}{b(4\varepsilon b^2 - 1)}.$$

Приравнявая к нулю коэффициенты в выражении  $d\vartheta^1$ , получим систему, имеющую (при  $a = 0$ ) решение:

$$p^1_1 = 0, \quad p^1_2 = -\frac{1}{2}, \quad p^1_3 = p^1_5 = -\frac{1}{4b}, \quad p^1_4 = -\frac{1}{4\varepsilon b},$$

$$p^1_8 = -\frac{3}{4\varepsilon b^2}, \quad p^1_9 = 0,$$

$$p^1_{10} = \frac{1}{2\varepsilon b}, \quad p^1_6 = p^1_7 = -b p^1_{12} - \frac{1}{2} p^1_{13}, \quad p^1_{12} = -\frac{1}{2b} - 2\varepsilon b p^1_{13},$$

$$p^1_{13} = \frac{3}{2\varepsilon b^2(4\varepsilon b^2 - 1)}.$$

Здесь в эллиптическом случае при  $b = \pm 1/2$  система несовместна.

При  $a = -1/2$  система имеет следующее решение

$$\begin{aligned} p^{1_1} &= 0, & p^{1_2} &= \varepsilon b p^{1_{10}}, & \varepsilon p^{1_3} &= b p^{1_9} - p^{1_{10}}, & \varepsilon p^{1_5} &= -b p^{1_9} - p^{1_{10}}, \\ & & & & p^{1_4} &= b p^{1_9}, \\ p^{1_6} &= -b p^{1_{12}}, & p^{1_7} &= -b p^{1_{12}} - p^{1_9}, & p^{1_8} &= p^{1_7} + \varepsilon b p^{1_{10}}, \\ & & & & p^{1_{13}} &= -\frac{1}{2b} (p^{1_{10}} + \varepsilon p^{1_{12}}), \end{aligned}$$

$$p^{1_{11}} = p^{1_{13}} - p^{1_9},$$

причем здесь

$$3b p^{1_9} - 2p^{1_{10}} - b p^{1_8} = 0, \quad (1 - 4\varepsilon b^2) p^{1_9} - 6\varepsilon b p^{1_{10}} - p^{1_8} + 2 = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} p^{2_1} &= 0, & p^{2_2} &= \varepsilon b p^{2_{10}}, & \varepsilon p^{2_3} &= b p^{2_9} - p^{2_{10}}, & p^{2_4} &= b p^{2_9}, \\ & & & & \varepsilon p^{2_5} &= -b p^{2_9} - p^{2_{10}}, & p^{2_6} &= -b p^{2_{12}}, \\ p^{2_7} &= p^{2_9} - b p^{2_{12}}, & p^{2_8} &= p^{2_7} + \varepsilon b p^{2_{10}}, & p^{2_{11}} &= p^{2_{13}} - p^{2_9}, \\ & & & & p^{2_{13}} &= -\frac{1}{2b} (p^{2_{10}} + \varepsilon p^{2_{12}}), \end{aligned}$$

причем  $p^{2_8}$ ,  $p^{2_9}$  и  $p^{2_{10}}$  связаны соотношениями

$$2p^{2_{10}} - 3b p^{2_9} + b p^{2_8} + 1 = 0, \quad (1 - 4\varepsilon b^2) p^{2_9} - 6\varepsilon b p^{2_{10}} - 2p^{2_8} = 0.$$

В этом случае полученное решение определяется с произволом четырех параметров. Это означает, что допускаемые оснащающие подпространства подалгебры Ли стационарной подгруппы данной орбиты в алгебре Ли проективной группы, определяющие редуکتивную структуру, составляют четырехпараметрическое семейство.

Итак, однородное пространство орбит  $P1$  является редуکتивным лишь при

$$1) \quad a + \frac{1}{2} = 0, \quad b \text{ — любое};$$

$$2) \quad a = 0, \quad b \neq 0.$$

Аналогичным образом можно подойти к рассмотрению однородных пространств, образующими элементами («точками») которых являются орбиты  $P2$ ,  $P3$  и  $P4$ . В каждом из рассмотренных случаев подгруппы стационарности  $H$  будут различны. Следовательно, различны будут и системы уравнений для нахождения  $p^\alpha$ . Анализ полученных систем показывает, что все они имеют решения. Это говорит о том, что изучаемые однородные пространства не являются редуکتивными. Что касается вопроса о симметричности каждого из рассматриваемых пространств, то легко получить, что ни одно из них не является симметрическим. К примеру, в случае  $P1$ ,  $d\theta^1 = \theta^6 \wedge \theta^1 + \theta^7 \wedge \theta^1 + 2\theta^8 \wedge \theta^1 + \theta^1$ , где  $\theta^i$  — несущественные для нас внешние произведения и т. д. Аналогичную проверку осуществляем и в оставшихся случаях.

Перейдем к рассмотрению однородных пространств соответствующих орбит в  $A_3$  с группой аффинных преобразований в качестве группы движений. При изучении редуцируемости группа  $GP(3)$  заменяется на  $GA(3)$ , то есть исчезают  $\theta^{11}$ ,  $\theta^{12}$ ,  $\theta^{13}$ . Здесь приведем лишь полученные результаты.

1. Однородное пространство орбит  $P1$  является редуцируемым, за исключением тех, которые соответствуют значениям параметров

$$2) a = -\frac{3}{2}, \quad b = 0.$$

$$1) a = \frac{1}{2}, \quad b = 0;$$

2. Однородное пространство орбит  $P2.1$  не является редуцируемым.

3. Однородное пространство орбит  $P2.2$  является редуцируемым, за исключением тех, которые соответствуют значениям

$$a = -\frac{3}{2}; \quad a = -\frac{1}{2}; \quad a = \frac{1}{2}.$$

4. Однородное пространство орбит  $P3$  является редуцируемым, за исключением случаев, когда

$$A = \pm \frac{1}{4} \quad (\varepsilon = 1) \quad \text{и} \quad A = \pm \frac{1}{2} \quad (\varepsilon = -1).$$

5. Однородное пространство орбит  $P4.1$  является редуцируемым лишь при значении  $A = 0$ .

6. Однородное пространство орбит  $P4.2$  является редуцируемым, за исключением случаев  $A = \pm 1/2$ .

В  $A_3$ , как и в  $P_3$ , симметрических однородных пространств двумерных нелинейчатых орбит не существует.

## Литература

1. Белько И. В., Инвариантные аффинные связности в пространстве времени-подобных линейных элементов пространства Минковского. Вести. Белорусск. ун-та, 1971, сер. 1, № 1, 8—14.
2. Васильев А. М., Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, 2(9), 41—49.
3. Васильев А. М., Инвариантные аффинные связности в пространстве линейных элементов. Матем. сб., 1963, 60, № 4, 411—424.
4. Картап Э., Теория конечных непрерывных групп. Москва, 1963.
5. Петрушкевичуте Д., Вполне геодезические семейства пространственных кривых третьего порядка. Лит. матем. сб., 1963, 3, № 2, 115—122.
6. Розенфельд Б. А., Метрика и аффинная связность в пространствах плоскостей, сфер и квадрик. Докл. АН СССР, 1947, 57, № 6, 543—546.
7. Спесивых В., Подгруппы Ли с максимальными двумерными нелинейчатыми орбитами в комплексном  $P_3$ . Настоящий сборник, стр. 85—94.

8. Спесивых В., Фляйшер А., О редуکتивности однородных пространств пар «квадрика-линейный образ» в проективном пространстве  $P_3$ . Сб. студ. работ по алгебре и геом., Тартуск. ун-т, 1972, 85—101.
9. Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии. Москва, 1960.
10. Щербачов Р. Н., Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.
11. Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Band II. Berlin, 1923.
12. Lie, S., Gesammelte Abhandlungen, Band VI. Leipzig—Oslo, 1922—1934.
13. Nomizu, K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, 76, 33—65.

Поступило  
13 III 1972

## REAALSE PROJEKTIIVSE RUUMI $P_3$ KAHEMÕÕTMELISTEST ORBIITIDEST JA NENDE HOMOGEENSETEST RUUMIDEST

A. Fljaišer

Resümee

Käesolev töö on tihedalt seotud artikliga [7]. Vaadeldakse neidsamu ülesandeid, kuid reaalse projektiivse ruumi  $P_3$  puhul, samal ajal kui [7] käsitleb kompleksse  $P_3(\mathbb{C})$  juhtu. Lisaks sellele uuritakse orbiitide homogeensete ruumide omadusi.

Töö esimeses osas leitakse kõik kahemõõtmelised maksimaalsed orbiidid, mis ei osutu joonpindadeks, ja antakse orbiitide võrdlev iseloomustus ruumides  $P_3(\mathbb{C})$  ja  $P_3$ .

Töö teises osas vaadeldakse reduktiivseid homogeenseid ruume, millel on teatavasti kanooniline invariantne väändeta seostus [13]. Selliste ruumide uurimise üldise teooria on välja töötanud A. M. Vassiljev [2]. Iga küsimus uuritava homogeense ruumi reduktiivsusest taandatakse siin teatud konstantsete kordajatega lineaarvõrrandite süsteemi lahendamisele.

## ÜBER DIE ZWEIDIMENSIONALEN ORBITEN IN REELLEN $P_3$ UND IHRE KLEINSCHEN RÄUME

A. Fleischer

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eng mit dem Artikel [7] verbunden. Man betrachtet dieselben Problemen, aber im reellen projektiven Raum  $P_3$ , statt dem komplexen  $P_3(\mathbb{C})$ ; außerdem werden Eigenschaften der Kleinschen Räume der Orbiten untersucht.

Im ersten Teil des Artikels werden alle nicht-geradlinigen Flächen, die eine transitive Gruppe projektiver Transformationen zulassen (Orbiten im Sinne der Theorie der Transformationsgruppen), bestimmt. Hier ist auch die vergleichende Charakteristik der nicht-geradlinigen Orbiten in komplexen  $P_3(\mathbb{C})$  und reellen  $P_3$  gegeben.

Im zweiten Teil der Arbeit sind aus allen Kleinschen Räumen der betrachteten Orbiten reduktive Kleinsche Räume ausgesucht, welche, wie es bekannt ist [13], einen invarianten affinen Zusammenhang ohne Torsion zulassen. Die allgemeine Theorie für Forschung solcher Räume hat A. M. Wasiljev [2] ausgearbeitet. Die Aufklärung der Frage der Reduktivität jeden von den oben erwähnten Kleinschen Räumen ist bei uns auf Lösung bestimmten Lineargleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt.

# ОБ АФФИННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ И ПРИЗНАКАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $R_n$ . I

К. Рийвес

Кафедра математической статистики и программирования

Выпуклым многогранником  $U$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R_n$  называется пересечение произвольной конечной системы замкнутых полупространств. (Отметим, что в работах [2—4] множество  $U$  называется выпуклым многогранным множеством). По определению выпуклые многогранники задаются системой неравенств

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n &\leq E_1, \\ \dots &\dots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n &\leq E_m, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m$  — произвольное конечное число и для каждого  $k$  по крайней мере одно  $A_{ki} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Граничные гиперплоскости многогранника  $U$  задаются уравнениями

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n &= E_1, \\ \dots &\dots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n &= E_m. \end{aligned} \quad (2)$$

Совокупность тех точек, которые лежат на данных  $n - k$  линейно независимых граничных гиперплоскостях и удовлетворяют системе (1), образует  $k$ -мерную грань для  $U$  (здесь  $0 \leq k \leq n - 1$ ). При этом 0-мерные грани называются вершинами и 1-мерные грани ребрами многогранника  $U$  (см. [4], стр. 111—112).

Так как неравенства (1) могут служить ограничениями задачи линейного программирования, то вопрос о классификации многогранников является вопросом о характеристизации областей решений задачи линейного программирования.

Общие теоремы о представлении многогранников заданы в работах Юдина и Гольштейна [3, 4]. Кроме того, пересечения нескольких полупространств в случае  $n = 2$  и  $n = 3$  рассматриваются Солодовниковым [2]. Он указывает пути фактического нахождения вершин и неограниченных ребер соответствующих многогранников.

В настоящей работе дается аффинная классификация многогранников, являющихся пересечением двух замкнутых полупространств, указываются соответствующие аналитические признаки для получающихся типов в виде неравенств для определителей, составленных из коэффициентов неравенств (1). Кроме того, указаны координаты вершин и направляющие векторы соответствующих неограниченных граней. Пользуясь этими признаками и координатами вершин и направляющих векторов, можно установить, имеет ли задача линейного программирования с данным многогранником решений оптимальное решение или нет и вычислить его.

В случае трех пересекающихся замкнутых полупространств типов многогранников будет гораздо больше и аналитические признаки являются более сложными. Соответствующие результаты будут изложены в продолжении данной работы.

1. Приведение  $n$ -мерного случая к 2-мерному. Пусть многогранник  $U$  задается системой (1) и  $m = 2$ . Предположим, что ранг  $\rho$  матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \end{pmatrix}$$

определяется матрицей, стоящей в левом верхнем углу, т. е. рангом матрицы

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Если это не так, то всегда можно перенумерацией векторов выбранной координатной системы добиться, чтобы сделанное предположение выполнялось. Тогда пересечение многогранника  $U$ , заданного системой (1) при  $m = 2$ , с 2-мерной плоскостью

$$x_3 = \dots = x_n = 0, \quad (1.2)$$

является выпуклым многоугольником  $U_0$  на этой плоскости. При этом  $U_0$  определяется системой неравенств

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq E_1, \quad (1.3)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq E_2. \quad (1.4)$$

Так как в рассматриваемом случае  $\rho \leq 2$ , то с учетом теоремы о представлении многогранника (1) (см. [3], стр. 87; [4], стр. 118), тип многогранника  $U$  в  $R_n$ , задаваемого системой (1), определен типом многоугольника  $U_0$  на  $R_2$ , который задается системой (1.3), (1.4), в силу того, что  $U$  является прямой суммой  $U_0$  и некоторой подходяще выбранной  $(n - 2)$ -мерной плоскости ([3], стр. 85; [4], стр. 118). Последняя дополняет плоскость (1.2) многоугольника  $U_0$  до всего пространства  $R_n$ . Во всех конкретных случаях легко указать направляющие векторы этой дополнительной плоскости.

Во втором пункте мы и даем аффинную классификацию для пересечений двух замкнутых полуплоскостей на плоскости  $R_2$ , т. е. выпуклых многоугольников  $U_0$ , приводим их признаки и описания.

2. Пересечения двух замкнутых полуплоскостей на плоскости  $R_2$ . Пусть многоугольник  $U$  задан неравенствами (1.3), (1.4). Уравнениями граничных прямых  $d_1, d_2$  будут

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = E_1, \quad (2.1)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = E_2, \quad (2.2)$$

и их направляющими векторами  $d_1 = (-A_{12}, A_{11})$  и  $d_2 = (-A_{22}, A_{21})$  соответственно. Обозначим

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

**Предложение 1.** Если в системе (1.3), (1.4)

$$\rho = 2,$$

то она задает угол с вершиной  $X'$  и направляющими векторами сторон соответственно  $y_1 = (\text{sgn } D) (A_{12}, -A_{11})$ ,  $y_2 = (\text{sgn } D) (-A_{22}, A_{21})$ . Наоборот, для любого угла на плоскости  $R_2$  можно указать задающие его неравенства (1.3), (1.4), для которых  $\rho = 2$ .

Доказательство. Достаточность. Пусть для системы (1.3), (1.4) ранг  $\rho = 2$ , т. е.  $D \neq 0$ , тогда единственным решением линейной системы, составленной из уравнений (2.1) и (2.2), будет

$$x_1' = \frac{D_1}{D}, \quad x_2' = \frac{D_2}{D}, \quad (2.4)$$

где введены обозначения

$$D_1 = \begin{vmatrix} E_1 & A_{12} \\ E_2 & A_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & E_1 \\ A_{21} & E_2 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

С геометрической точки зрения найденные решения определяют координаты общей точки граничных прямых — точки пересечения  $X'$  с координатами  $x_1', x_2'$ . Точка  $X' = (x_1', x_2')$  является единственной вершиной рассматриваемого многоугольника  $U$ . Следовательно, сторонами для  $U$  могут быть только лучи.

Выберем, далее, точку  $X'' = (x_1'', x_2'')$  так, чтобы она удовлетворяла уравнению (2.1) и строго удовлетворяла неравенству (1.4), т. е.

$$\begin{aligned} A_{11}x_1'' + A_{12}x_2'' &= E_1, \\ A_{21}x_1'' + A_{22}x_2'' &< E_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Легко видеть, что такой выбор при  $D \neq 0$  всегда возможен. Аналогично выберем точку  $X''' = (x_1''', x_2''')$  так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} A_{11}x_1''' + A_{12}x_2''' &< E_1, \\ A_{21}x_1''' + A_{22}x_2''' &= E_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Поскольку  $X''$  лежит на прямой (2.1) с направляющим вектором  $\mathbf{d}_1 = (-A_{12}, A_{11})$ , то найдется такое действительное число  $l_2$ , что

$$X'' = X' + l_2(-A_{12}, A_{11}) = (x_1' - l_2 A_{12}, x_2' + l_2 A_{11}).$$

Аналогично получаем существование действительного числа  $l_3$  такого, что

$$X''' = X' + l_3(-A_{22}, A_{21}) = (x_1' - l_3 A_{22}, x_2' + l_3 A_{21}).$$

Теперь получаем по (2.6)

$$\begin{aligned} A_{11}x_1''' + A_{12}x_2''' &= A_{11}x_1' + A_{12}x_2' + l_3(-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}) = \\ &= E_1 - l_3 D < E_1. \end{aligned}$$

Аналогично выводим

$$\begin{aligned} A_{21}x_1'' + A_{22}x_2'' &= A_{21}x_1' + A_{22}x_2' + l_2(-A_{21}A_{12} + A_{22}A_{11}) = \\ &= E_2 + l_2 D < E_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$l_2 D < 0, \quad -l_3 D < 0.$$

Обозначим

$$\operatorname{sgn} D = \begin{cases} 1, & \text{если } D > 0, \\ -1, & \text{если } D < 0. \end{cases}$$

Тогда очевидно, что  $\operatorname{sgn} l_2 = -\operatorname{sgn} D$ ,  $\operatorname{sgn} l_3 = \operatorname{sgn} D$ . Мы получаем  $X'' = X' + |l_2|(\operatorname{sgn} D)(A_{12}, -A_{11})$ ,  $X''' = X' + |l_3|(\operatorname{sgn} D)(-A_{22}, A_{21})$ .

Обозначим

$$(\operatorname{sgn} D)(A_{12}, -A_{11}) = \mathbf{y}_1, \quad (\operatorname{sgn} D)(-A_{22}, A_{21}) = \mathbf{y}_2. \quad (2.8)$$

Выберем теперь точку  $X'$  за начало координат и векторы  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  за базисные векторы. Это возможно, так как векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  независимы, как направляющие векторы пересекающихся прямых (2.1) и (2.2), а векторы  $\mathbf{y}_1$  и  $\mathbf{y}_2$  им пропорциональны. Тогда любую точку  $X$  плоскости  $R_2$  можно представить формулой

$$\begin{aligned} X = (x_1, x_2) &= X' + b_1 \mathbf{y}_1 + b_2 \mathbf{y}_2 = \\ &= (x_1', x_2') + b_1(\operatorname{sgn} D)(A_{12}, -A_{11}) + b_2(\operatorname{sgn} D)(-A_{22}, A_{21}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= A_{11}x_1' + A_{12}x_2' + \\ &+ (\operatorname{sgn} D)[b_1(A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11}) + b_2(-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21})] = \\ &= E_1 + b_2(\operatorname{sgn} D)(-D) = E_1 - b_2|D|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= A_{21}x_1' + A_{22}x_2' + \\ &+ (\operatorname{sgn} D)[b_1(A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11}) + b_2(-A_{21}A_{22} + A_{22}A_{21})] = \\ &= E_2 + b_1(\operatorname{sgn} D)(-D) = E_2 - b_1|D|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точка  $X$  удовлетворяет неравенствам (1.3) и (1.4) тогда и только тогда, если

$$E_1 - b_2|D| \leq E_1,$$

$$E_2 - b_1|D| \leq E_2.$$

Но для этого необходимо и достаточно, чтобы в формуле (2.9) было  $b_1 \geq 0$ ,  $b_2 \geq 0$ .

Совокупность всех точек  $X = X' + b_1 y_1 + b_2 y_2$ , где  $X'$  — точка,  $y_1, y_2$  — линейно независимые векторы,  $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$  — произвольные числа, называется *углом с вершиной  $X'$  и направляющими векторами сторон  $y_1, y_2$* . Мы показали, что при  $D \neq 0$  совокупность решений системы (1.3), (1.4) совпадает с некоторым углом.

Необходимость. Пусть на двумерной плоскости  $R_2$  задан угол, т. е. множество точек (2.9), где  $X' = (x_1', x_2')$ ,  $y_1 = (y_1', y_2')$ ,  $y_2 = (y_1'', y_2'')$  и  $y_1, y_2$  не параллельны, т. е.  $y_1' y_2'' - y_2' y_1'' \neq 0$ . Покажем, что этот угол является пересечением двух полуплоскостей, заданных неравенствами (1.3), (1.4), для которых  $D \neq 0$ , т. е.  $q = 2$ . Пусть уравнения прямых, проходящих через  $X'$  и имеющих  $y_1, y_2$  соответственно направляющими векторами, суть

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = E_1 \quad (A_{11} = y_2', A_{12} = -y_1'), \quad (2.10)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = E_2 \quad (A_{21} = y_2'', A_{22} = -y_1''). \quad (2.11)$$

Если  $X'' = (x_1'', x_2'') = X' + y_1$ ,  $X''' = (x_1''', x_2''') = X' + y_2$  и

$$A_{11}x_1''' + A_{12}x_2''' < E_1,$$

$$A_{21}x_1'' + A_{22}x_2'' < E_2,$$

то выбираем за полуплоскости

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq E_1,$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq E_2.$$

(Если либо  $A_{11}x_1''' + A_{12}x_2''' > E_1$ , либо  $A_{21}x_1'' + A_{22}x_2'' > E_2$ , то возьмем за полуплоскость соответственно  $-A_{11}x_1 - A_{12}x_2 \leq -E_1$  или  $-A_{21}x_1 - A_{22}x_2 \leq -E_2$ , но после замены  $-A_{11}, -A_{12}, -E_1$  на  $A_{11}, A_{12}, E_1$  определенные полуплоскости задаются прежними неравенствами). По предположению в полученной системе  $D \neq 0$ . На основе первой части доказательства можно утверждать, что многоугольник, задаваемый этой системой неравенств, совпадает с углом именно с вершиной  $X'$  и направляющими векторами сторон  $y_1, y_2$ . Предложение 1 доказано.

Пусть  $q = 1$ , т. е.  $D = 0$ . Тогда линейная система (2.1), (2.2) решений не имеет. Геометрически это означает, что граничные прямые  $d_1$  и  $d_2$  не пересекаются, т. е. являются параллельными или совпадают. В силу сделанного относительно  $q$  предположения, можно всегда предположить, что в уравнениях (2.1) и (2.2), по крайней мере,  $A_{11}$  и  $A_{21}$  одновременно отличны от нуля, т. е.  $|A_{11}| + |A_{21}| \neq 0$ . Иначе, граничные прямые (или по крайней мере одна из них) были бы неопределенными.

В дальнейшем нам понадобится следующее обозначение, вытекающее из (2.5)

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & E_1 \\ A_{21} & E_2 \end{vmatrix} = (\operatorname{sgn} A_{11}) \begin{vmatrix} |A_{11}| & E_1 \\ \operatorname{sgn} A_{21} |A_{21}| & E_2 \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Так как по предположению  $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$ , то

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{1}{\lambda} \neq 0$$

(условие параллельности граничных прямых). Следовательно, система (1.3), (1.4) приводится к виду

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\leq E_1, \\ \lambda(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) &\leq E_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Предложение 2.** Если в системе (1.3), (1.4) ранг  $\rho = 1$  и  $\lambda > 0$ , то она задает полуплоскость (1.3) при

$$(\operatorname{sgn} A_{11})D_2 > 0,$$

полуплоскость (1.4) при

$$(\operatorname{sgn} A_{11})D_2 < 0$$

и совпадающие полуплоскости (1.3), (1.4) при

$$D_2 = 0.$$

Доказательство. Допустим, что в системе (1.3), (1.4) выполнены условия предложения 2. Тогда из (2.13) получится

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq E_1,$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq \frac{E_2}{\lambda} = \frac{E_2 |A_{11}|}{|A_{21}|}.$$

Так как левые части этих неравенств совпадают, то сравнение правых частей  $E_1$  и  $E_2 |A_{11}| / |A_{21}|$  дает следующие три возможности:

$$E_1 |A_{21}| - E_2 |A_{11}| < 0,$$

$$E_1 |A_{21}| - E_2 |A_{11}| > 0,$$

$$E_1 |A_{21}| - E_2 |A_{11}| = 0.$$

В последнем случае граничные прямые  $d_1$  и  $d_2$  совпадают и поэтому система неравенств (1.3), (1.4) вырождается в одно неравенство

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq E_1,$$

которое по определению определяет замкнутую полуплоскость.

Для получения формулы представления для полуплоскости выберем прямую  $d$  с направляющим вектором  $\mathbf{d}$ , пересекающуюся с прямой  $d_1 \equiv d_2$ , и обозначим точку пересечения через  $X'$ . Пусть  $\mathbf{d}$  выбран так, что он направлен в сторону полуплоскости, т. е. если  $X'' = X' + \mathbf{d}$ , то  $A_{11}x_1'' + A_{12}x_2'' < E_1$ . Тогда любая точка из полуплоскости  $U$  представляется в виде

$$X = X' + b\mathbf{d} + c\mathbf{d}_1, \quad (2.14)$$

где  $b \geq 0$ ,  $c$  — произвольное действительное число,  $\mathbf{d}_1 = (-A_{12}, A_{11})$  — направляющий вектор граничной прямой  $d_1$ .

Если  $E_1 |A_{21}| - E_2 |A_{11}| < 0$ , то система (1.3), (1.4) представима в виде

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq E_1 < \frac{E_2 |A_{11}|}{|A_{21}|},$$

которая опять-таки равносильна (1.3). Следовательно, системой (1.3), (1.4) и неравенством (1.3) определяется одна и та же полуплоскость.

В случае  $E_1|A_{21}| - E_2|A_{11}| > 0$  система (1.3), (1.4) равносильна неравенству

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq \frac{E_2|A_{11}|}{|A_{21}|} < E_1,$$

и поэтому система определяет полуплоскость (1.4). Предложение 2 доказано.

Допустим, что  $\rho = 1$ ,  $|A_{11}| + |A_{21}| \neq 0$  и  $A_{11}$ ,  $A_{21}$  разных знаков. Тогда

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{|A_{21}|}{|A_{11}|} < 0$$

и система (2.13) представляется в виде

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\leq E_1, \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\geq \frac{E_2}{\lambda} = -\frac{E_2|A_{11}|}{|A_{21}|}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Предложение 3.** Если в системе (1.3), (1.4) ранг  $\rho = 1$ ,  $\lambda < 0$ , и, кроме того,

$$(\operatorname{sgn} A_{11}) D_2 > 0, \quad (2.16)$$

то она задает полосу на плоскости  $R_2$  с граничными прямыми  $d_1$ ,  $d_2$ . Наоборот, для любой полосы на плоскости  $R_2$  можно указать задающие ее неравенства (1.3), (1.4), удовлетворяющие условиям первой половины настоящего предложения.

Доказательство. Достаточность. Пусть система (1.3), (1.4) удовлетворяет условиям предложения 3. Как мы показали, она приводится тогда к (2.15). Выберем на граничных прямых  $d_1$ ,  $d_2$  по точке  $X' = (x_1', x_2') \in d_1$ ,  $X'' = (x_1'', x_2'') \in d_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_{11}x_1' + A_{12}x_2' &= E_1, \\ A_{11}x_1'' + A_{12}x_2'' &= -\frac{E_2|A_{11}|}{|A_{21}|}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если на плоскости  $R_2$  выбрать базисными векторами  $X'X''$  и  $d_1 = (A_{12}, -A_{11})$ , которые по предположению являются линейно независимыми, и  $X' = (x_1', x_2')$  началом координат, то произвольная точка плоскости выражается следующим образом

$$X = (x_1, x_2) = X' + c_1 X'X'' + c_2 d_1,$$

где коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$  будут произвольными постоянными. В координатном виде имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + c_1(x_1'' - x_1') + c_2 A_{12}, \\ x_2 &= x_2' + c_1(x_2'' - x_2') - c_2 A_{11}. \end{aligned}$$

Вычислим с учетом (2.17)

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = A_{11}x_1' + A_{12}x_2' + c_1[(A_{11}x_1'' + A_{12}x_2'') - (A_{11}x_1' + A_{12}x_2')] + c_2(A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11}) = E_1 - c_1 \frac{E_2|A_{11}| + E_1|A_{21}|}{|A_{21}|}. \quad (2.18)$$

Неравенствами (2.15) будут

$$E_1 - c_1 \frac{E_2|A_{11}| + E_1|A_{21}|}{|A_{21}|} \leq E_1, \\ E_1 - c_1 \frac{E_2|A_{11}| + E_1|A_{21}|}{|A_{21}|} \geq - \frac{E_2|A_{11}|}{|A_{21}|}.$$

Отсюда в силу (2.12) и (2.16) следует, что точка  $X$  принадлежит многоугольнику  $U$  тогда и только тогда, когда

$$0 \leq c_1 \leq 1, \quad c_2 \text{ является произвольной}. \quad (2.19)$$

Но точки  $X = X' + c_1X''$  являются при условиях (2.19) точками отрезка  $[X', X'']$ , и их можно представить в виде

$$X = a_1X' + a_2X'', \quad a_1, a_2 \geq 0, \quad a_1 + a_2 = 1. \quad (2.20)$$

Следовательно, точки многоугольника  $U$ , определенного системой неравенств (1.3), (1.4) при  $\rho = 1$ ,  $\lambda < 0$ ,  $(\text{sgn } A_{11})D_2 > 0$ , представляются с учетом (2.19) и (2.20) уравнением

$$X = a_1X' + a_2X'' + cz, \quad (2.21)$$

где  $a_1, a_2 \geq 0$ ,  $c$  — произвольное число,  $a_1 + a_2 = 1$ ,  $X', X''$  — произвольные точки граничных прямых  $d_1, d_2$ ,  $z \equiv d_1$  — общий направляющий вектор неограниченных сторон многоугольника.

Множество точек, заданных соотношением (2.21), где  $X', X''$  — точки на различных параллельных прямых с направляющим вектором  $z$ , называется *полосой между заданными параллельными прямыми*.

Необходимость. Покажем теперь, что множество точек  $X$ , которые представляются равенством (2.21), является пересечением двух плоскостей (1.3) и (1.4), коэффициенты определяющих неравенств которых удовлетворяют условиям  $\rho = 1$ ,  $\lambda = A_{21}/A_{11} < 0$ ,  $(\text{sgn } A_{11})D_2 > 0$ . Действительно, пусть  $X' = (x_1', x_2')$ ,  $X'' = (x_1'', x_2'')$ ,  $z = (z_1, z_2)$ . Пусть уравнения прямых, проходящих соответственно через  $X'$  и  $X''$  с направляющим вектором  $z$ , суть

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = E_1 \quad (A_{11} = -z_2, A_{12} = z_1), \quad (2.22)$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = E_2 \quad (A_{21} = -z_2, A_{22} = z_1). \quad (2.23)$$

Эти прямые можно рассмотреть как граничные прямые таких полуплоскостей, для которых  $X'$  принадлежит полуплоскости с граничной прямой (2.23) и  $X''$  — с граничной прямой (2.22). Если

$$A_{11}x_1'' + A_{12}x_2'' < E_1, \\ A_{21}x_1' + A_{22}x_2' < E_2,$$

то выберем полуплоскости так, чтобы

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\leq E_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &\leq E_2. \end{aligned}$$

Когда либо  $A_{11}x_1'' + A_{12}x_2'' > E_1$ , либо  $A_{21}x_1' + A_{22}x_2' > E_2$ , то выбираем полуплоскостями соответственно либо  $-A_{11}x_1 - A_{12}x_2 \leq -E_1$ , либо  $-A_{21}x_1 - A_{22}x_2 \leq -E_2$ . Но после замены  $-A_{i1}$ ,  $-A_{i2}$ ,  $-E_i$ , где это нужно, соответственно на  $A_{i1}$ ,  $A_{i2}$ ,  $E_i$ , неравенства принимают прежний вид. В силу введенных обозначений всегда в одном неравенстве надо сделать указанную замену. Следовательно,  $\rho = 1$ ,  $\lambda = A_{21}/A_{11} < 0$ , и выполняется (2.16). Но тогда на основе первой части доказательства можем утверждать, что указанная система неравенств задает именно рассматриваемую полосу (2.21) на плоскости  $R_2$ .

**Предложение 4.** Если в системе (1.3), (1.4) ранг  $\rho = 1$ ,  $\lambda < 0$  и, кроме того,

$$(\operatorname{sgn} A_{11})D_2 = 0,$$

то она задает на плоскости  $R_2$  прямую. Наоборот, для произвольной прямой на плоскости  $R_2$  можно указать полуплоскости (1.3), (1.4), пересечением которых будет заданная прямая.

Доказательство. Действительно, пусть в системе неравенств выполняются условия предложения. Тогда с учетом (2.12) система (2.15) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\leq E_1, \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\geq E_1. \end{aligned}$$

Такая система равносильна уравнению

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = E_1, \quad (2.24)$$

которое определяет на плоскости  $R_2$  прямую. Значит, при сделанных предположениях многоугольником, определяемым системой (1.3), (1.4), будет прямая с уравнением (2.24). Каждая прямая представима в виде

$$X = X' + cz, \quad (2.25)$$

где  $X'$  — точка прямой,  $z \equiv d_1 = (-A_{12}, A_{11})$  — ее направляющий вектор.

Если же на плоскости  $R_2$  задана прямая с уравнением

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = E_1,$$

то ее можно определить и пересечением полуплоскостей

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\leq E_1, \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\geq E_1. \end{aligned}$$

Для последней системы условия настоящего предложения выполнены.

**Предложение 5.** Если в системе неравенств (1.3), (1.4) выполнены следующие условия:

$$\rho = 1, \quad \lambda = \frac{A_{21}}{A_{11}} < 0, \quad (\operatorname{sgn} A_{11})D_2 < 0, \quad (2.26)$$

то полуплоскости (1.3) и (1.4) общих точек не имеют, и многоугольник, определенный ими, будет пустым. Наоборот, если многоугольник (1.3), (1.4) не пуст, например,  $|A_{11}| + |A_{21}| \neq 0$ , то выполняются условия (2.26).

Доказательство. Действительно, при сделанных предположениях  $-E_2|A_{11}| > E_1|A_{21}|$ , а (2.15) принимает вид

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq E_1,$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq -\frac{E_2|A_{11}|}{|A_{21}|} > E_1.$$

Система является противоречивой, следовательно, не существует ни одной точки, координаты которых удовлетворяли бы системе (2.15). Многоугольник  $U$  будет пустым.

Наоборот, если многоугольник (1.3), (1.4) не пуст, то не могут удовлетворяться условия ни одного из предложений 1—4 — в каждом случае мы получили бы непустой многоугольник. Остается только возможность, что выполнены условия (2.26).

Тем самым нами доказано, что существует пять типов многоугольников на плоскости  $R_2$ , которые задаются системой неравенств (1.3), (1.4). На основании замечаний пункта 1 приведем полученные результаты в следующей таблице сразу для  $n$ -мерного случая.

Тип многогранника	Признаки типа	Размерность многогранника	Число граней соответствующих размерностей	
			$n-2$	$n-1$
двугранный угол	$\varrho = 2$	$n$	1	2
полупространство	$\varrho = 1, \lambda > 0$	$n$	0	1
слой	$\varrho = 1, \lambda < 0,$ $(\text{sgn } A_{11})D_2 > 0$	$n$	0	2
гиперплоскость	$\varrho = 1, \lambda < 0,$ $(\text{sgn } A_{11})D_2 = 0$	$n-1$	0	1
пустое множество	$\varrho = 1, \lambda < 0,$ $(\text{sgn } A_{11})D_2 < 0$	—	—	—

Учитывая свойства аффинных преобразований, при помощи трех последних столбцов таблицы легко проверить, что приведенная классификация инвариантна относительно аффинных преобразований. Это означает, что многогранники одного типа аффинно эквивалентны ([1], стр. 371—373) и многогранники разных типов не могут быть аффинно эквивалентными.

## Литература

1. Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии. Москва, 1968.
2. Солодовников А. С., Системы линейных неравенств. Москва, 1963.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование и конечные методы. Москва, 1963.
4. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование: методы и приложения. Москва, 1969.

## EUKLEIDILISE RUUMI $R_n$ KUMERATE HULKTAHUKATE KLASSIFIKATSIOONIST JA TUNNUSTEST

K. Riives

Resümee

Töös antakse ruumi  $R_n$  selliste hulktahukate afiinse klassifikatsioon ja tunnused kahe kinnise poolruumi lõikeks. Näidatakse kõigi viie eelmainitud hulktahukate vastavad analüütilised tunnused ning hulktahukatega geomoloogilised koordinaatsüsteemid.

## ABOUT AFFINE CLASSIFICATION AND CHARACTERISTICS OF POLYTOPES IN EUCLIDEAN SPACE

K. Riives

Summary

In the paper the affine classification of convex polytopes in  $n$ -dimensional Euclidean space, formed by the intersection of two closed semi-spaces, has been given in Euclidean space. Five types of such polytopes. For each of them corresponding analytical characteristics and special affine co-ordinate systems, geometrically significant, have been pointed out.

## О РЕФЛЕКСИВНОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Э. Кольк

Кафедра математического анализа

В статье обобщается теорема Сингера [11] об отношении рефлексивности и суммируемости в пространстве Банаха на пространство Фреше. Приведенные в теореме 2 характеристики слабой компактности в терминах суммируемости являются дословными аналогами соответствующих характеристик Пелчинского [8] для пространства Банаха.

Пусть  $X$  — пространство Фреше (т. е. метризуемое полное локально выпуклое пространство) и  $X'$  — сопряженное к нему.

Следуя [5], будем говорить, что пространство Фреше  $X$  имеет *свойство  $S(\omega S)$* , если для каждой ограниченной последовательности точек из  $X$  существуют регулярный матричный метод суммирования  $T$  и подпоследовательность,  $T$ -средние которой сходятся (слабо сходятся).

Последовательность  $(x_n)$  точек топологического векторного пространства  $X$  называется *топологическим базисом* (см. [2], стр. 619) в  $X$ , если каждому элементу  $x \in X$  отвечает такая единственная последовательность скаляров  $(a_n)$ , что ряд  $\sum a_n x_n$  сходится и имеет своей суммой элемент  $x$ . Топологический базис  $(x_n)$  называется *базисом Шаудера*, если все ассоциированные с  $(x_n)$  коэффициентные функционалы непрерывны на  $X$ .

Известно ([3], стр. 95—96), что всякий топологический базис в пространстве Банаха является базисом Шаудера. Ньонс ([4], стр. 431—432) распространил это утверждение на пространство Фреше.

Базис Шаудера  $(x_n)$  в  $X$  называется *ограниченно полным* ([9], стр. 281), если каждая ограниченная последовательность

$$\left( \sum_{k=1}^n c_k x_k \right),$$

где  $c_k$  скаляры, сходится.

Последовательность  $(y_n) \subset X$  называется *базисной* (см. [10], стр. 40), если она является базисом Шаудера для замкнутого подпространства  $[y_n]$ , порожденного множеством  $(y_n)$ .

Из одной теоремы Резерфорда (см. [9], теорема 4.1, стр. 284) вытекает, что пространство Фреше  $X$  с базисом  $(x_n)$  рефлексивно тогда и только тогда, когда каждая базисная последовательность в  $X$  ограниченно полна. Кадецом и Пелчинским (см. [1], стр. 315, следствие 5 из теоремы 2), с другой стороны, доказано, что пространство Фреше  $X$  рефлексивно тогда и только тогда, когда каждое подпространство с базисом рефлексивно. Отсюда непосредственно следует (ср. [6], стр. 374, теорема 2)

**Лемма 1.** *Пространство Фреше  $X$  рефлексивно тогда и только тогда, когда каждая базисная последовательность в  $X$  ограниченно полна.*

Для доказательства основной теоремы нам нужна еще

**Лемма 2.** *Базис Шаудера в пространстве Фреше  $X$  со свойством  $\omega S$  ограниченно полный.*

Доказательство следует из доказательства теоремы 3 Нишиуры и Ватермана (см. [5], стр. 56—57), если в ней заметить нормы полунормами.

**Теорема 1.** *Пусть  $X$  — пространство Фреше. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1°  $X$  рефлексивно;
- 2°  $X$  имеет свойство  $S$ ;
- 3°  $X$  имеет свойство  $\omega S$ .

Доказательство импликации  $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ . Если  $X$  рефлексивно, то каждая ограниченная последовательность  $(x_n) \subset X$  относительно слабо компактна и, следовательно, содержит слабо сходящуюся к какому-то элементу  $x \in X$  подпоследовательность (см. [2], стр. 751, теорема 8.12.1), которую мы опять обозначаем через  $(x_n)$ . Так как  $x \in M$ , где  $M$  — замкнутая выпуклая оболочка множества  $(x_n)$ , то по определению  $M$  существует последовательность выпуклых комбинаций из элементов  $x_n$ , сходящаяся к  $x$ . Поэтому, если топология пространства  $X$  определена метрикой  $d$ , то можно найти натуральное число  $k(1)$  и числа

$$a_{1h} \geq 0, \quad k=1, \dots, k(1), \quad \sum_{h=1}^{k(1)} a_{1h} = 1,$$

так что

$$d\left(\sum_{h=1}^{k(1)} a_{1h} x_h, x\right) < 1.$$

Дальше, последовательность  $(x_{k(1)+1}, \dots)$  имеет слабым предельным тот же элемент  $x$ . Повторяя предыдущее рассуждение, найдем числа

$$k(2), \quad a_{2k} \geq 0, \quad k=k(1)+1, \dots, k(2), \quad \sum_{h=k(1)+1}^{k(2)} a_{2h} = 1,$$

такие, что

$$d\left(\sum_{h=k(1)+1}^{k(2)} a_{2h} x_h, x\right) < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, вообще, для каждого индекса  $n$  существуют такие числа  $k(n)$  и

$$a_{nk} \geq 0, \quad k = k(n-1) + 1, \dots, k(n), \quad \sum_{k=k(n-1)+1}^{k(n)} a_{nk} = 1,$$

что

$$d\left(\sum_{k=k(n-1)+1}^{k(n)} a_{nk} x_k, x\right) < \frac{1}{n}.$$

Если теперь определить  $c_{nk} = a_{nk}$  при  $k = k(n-1) + 1, \dots, k(n)$  и  $c_{nk} = 0$  для остальных  $k$ , то  $T = (c_{nk})$  и есть метод суммирования требуемыми свойствами.

Импликация  $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$  очевидна.

Остается показать, что  $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ . Пусть  $X$  имеет свойство  $\omega S$  и пусть  $(x_n)$  — произвольная базисная последовательность в  $X$ . Так как свойство  $\omega S$  перенесется на подпространство  $X_1 = [x_n]$ , то, по лемме 2, базис  $(x_n)$  в  $X_1$  ограниченно полный. Следовательно, каждая базисная последовательность в  $X$  ограниченно полная и применение леммы 1 завершает доказательство теоремы.

Теорема 1 приводит к следующим характеристикам слабой компактности.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — слабо замкнутое ограниченное подмножество в пространстве Фреше  $X$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$1^\circ$   $A$  — слабо компактное множество;

$2^\circ$  для любой последовательности  $(x_n) \subset A$  найдется регулярная матрица  $(c_{nk})$  со свойствами:

1)  $c_{nk} \geq 0$  и  $c_{nk} = 0$  при  $k > k(n)$  ( $k, n = 1, 2, \dots$ ),

2)  $\sum_{k=1}^{k(n)} c_{nk} = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

3) последовательность  $\left(\sum_{k=1}^{k(n)} c_{nk} x_k\right)$  сходится;

$3^\circ$  для любой последовательности  $(x_n) \subset A$  существует такая регулярная матрица  $(c_{nk})$ , что последовательность  $\left(\sum_k c_{nk} x_k\right)$

слабо сходится к элементу пространства  $X$ .

Доказательство. Импликация  $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$  непосредственно вытекает из первой части доказательства теоремы 1.

Утверждение  $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$  тривиальное.

Не  $1^\circ \Rightarrow$  не  $3^\circ$ . Если  $A$  не слабо компактно, то по теореме 5 из [7], стр. 133, существуют базисная последовательность  $(y_n) \subset A$  и линейный непрерывный функционал  $y'_0 \in X'$ , так что  $\liminf y'_0 y_n > 0$ . Конец доказательства дословно повторяет Пелчинского (см. [8], стр. 116).

## Литература

1. Кадец М. И., Пелчиньски А., Базисные последовательности, биортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше. *Studia math.*, 1965, 25, 297—323.
2. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Москва, 1969.
3. Banach, S., *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa, 1932.
4. Newns, W. F., On the representation of analytical functions by infinite series. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A.*, 1953, 245, 429—468.
5. Nishiura, T., Waterman, D., Reflexivity and summability. *Studia math.*, 1963, 23, 53—57.
6. Pelczynski, A., A note on the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces". *Studia math.*, 1962, 21, 371—374.
7. Pelczynski, A., Some problems in Banach and Fréchet spaces. *Israel J. Math.*, 1964, 2, 132—138.
8. Pelczynski, A., A remark on the preceding paper of I. Singer. *Studia math.*, 1965, 26, 115—116.
9. Retherford, J. R., Bases, basic sequences and reflexivity of linear topological spaces. *Math. Ann.*, 1966, 164, 280—285.
10. Retherford, J. R., McArthur, C. W., Some remarks on bases in linear topological spaces. *Math. Ann.*, 1966, 164, 38—41.
11. Singer, I., A remark on reflexivity and summability. *Studia math.*, 1965, 26, 113—114.

Поступило  
17 II 1972

## REFLEKSIIVSUSEST JA SUMMEERUVUSEST FRÉCHET' RUUMIDES

E. Kolk

Resümee

Artiklis näidatakse, et Singeri [11] ja Pelczynski [8] teoreemid jäävad kehtima üleminekul Banachi ruumidelt Fréchet' ruumidele.

## ÜBER REFLEXIVITÄT UND SUMMIERBARKEIT IN FRÉCHETRÄUMEN

E. Kolk

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz beweist man, daß die Sätze von Singer [11] und Pelczynski [8] beim Übergang von den Banachräumen zu den Frécheträumen in Kraft bleiben.

## ЯДРО КНОППА И ЯДРО ПОЧТИ-СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ $m$

Л. Лооне

Кафедра математического анализа

### Введение

В статье [4] мы определили ядро элемента  $x$  из отделимого локально выпуклого пространства  $E$  как множество

$$K(x) = \bigcap_{i \in \mathfrak{J}} \overline{K_i(x)},$$

где  $\{K_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$  — базис фильтра в топологически сопряженном пространстве  $E'$ , образованный из выпуклых слабо замкнутых множеств. В этой же статье элемент, сходящийся по ядру, был определен как элемент, ядро которого содержит только одну точку.

В настоящей статье исследуются ядра в пространстве  $m$  всех ограниченных комплексных последовательностей  $x = \{\xi_k\}$  с нормой  $\sup |\xi_k|$ . Мы рассматриваем два ядра, оба — определенные фильтрами со счетным базисом, ограниченные элементы по которым совпадают с пространством  $m$ . Как доказано в [5], предложение 5 и [4], предложение 1, в таком случае эти ядра определяются каждый одним бикompактным множеством в пространстве  $m'$ . Одно из этих ядер — ядро Кноппа (см. [4], § 3), а другое — ядро почти-сходимости, определенное как множество всех банаховых пределов (см. [6], стр. 223, 224) в точке  $x$ . Целью настоящей статьи является изучение свойств этих ядер и отношения между ними.

В дальнейшем нам потребуются следующие результаты из статьи [4].

**Предложение 0.1.** Пусть  $K$  — множество в пространстве  $m'$ , топологически сопряженном к пространству  $m$ . Пусть  $A$  — линейный непрерывный оператор<sup>1</sup> на  $m$  и пусть  $K_A = \{ {}^t A f : f \in K \}$ , где  ${}^t A$  — сопряженный оператор к оператору  $A$ . Если  $K$  — слабо

<sup>1</sup> Мы говорим, что  $A$  оператор на  $m$ , если  $A : m \rightarrow m$ . Для матричного преобразования  $A = (a_{nk})$  это значит, что  $\sup_n \sum_k |a_{nk}| \leq M$ .

бикомпактное множество<sup>2</sup>, определяющее ядро в  $t$ , то и  $K_A$  определяет ядро в  $t$ , причем  $K(Ax) = K_A(x)$  для каждого  $x \in t$ .

Доказательство см. [4], стр. 129.

**Предложение 0.2.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — слабо бикомпактные множества в  $t'$ , определяющие ядра в  $t$ . Для того, чтобы  $K_1(x) \subset K_2(x)$  для всех  $x \in t$ , необходимо и достаточно, чтобы  $K_1 \subset K_2$ .

Доказательство. Это предложение является частным случаем предложения 2 статьи [4].

## § 1. Ядра, определенные множеством положительных функционалов в пространстве $t$

Обозначим через  $t$  множество всех ограниченных последовательностей, рассмотренное как топологическое векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Множество всех ограниченных последовательностей, рассмотренное как топологическое векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел, обозначим через  $m_0$ , а через  $\text{Re } t$  обозначим пространство всех вещественных последовательностей, рассматриваемое как векторное подпространство пространства  $m_0$ . Норма во всех этих пространствах определена через  $\|x\| = \sup |\xi_k|$ , где  $x = \{\xi_k\}$ .

Определим в  $\text{Re } t$  структуру порядка следующим образом: если  $x = \{\xi_k\}$  и  $y = \{\eta_k\}$ , то  $x \leq y$ , когда  $\xi_k \leq \eta_k$  для каждого  $k$ . Поскольку для каждого  $k$  координаты  $\xi_k$  и  $\eta_k$  суть вещественные числа, то при такой структуре пространством  $\text{Re } t$  является вполне решеточным пространством, причем топология в  $\text{Re } t$  согласуется со структурой порядка.

При данном определении порядка для каждого множества  $H$ , имеющего верхнюю грань в  $\text{Re } t$ , и для любой непрерывной и возрастающей на  $\text{Re } t$  числовой функции  $f$ , на  $\text{Re } t$  выполняется равенство

$$\sup_{x \in H} f(x) = f(\sup H) \quad (1.1)$$

(см. [2], гл. II).

**Лемма 1.1.** Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $\text{Re } t$  и  $f$  — положительный<sup>3</sup> непрерывный линейный функционал на  $\text{Re } t$ . Пусть  ${}^tA$  — сопряженный оператор к  $A$ . Тогда имеет место следующее соотношение

<sup>2</sup> Если ядро определяется фильтром, имеющим базис из слабо бикомпактных множеств, то множество, которое определяет то же самое ядро, назовем, как и в статье [4], слабо бикомпактным множеством, определяющим ядро.

<sup>3</sup> Мы говорим, что функционал  $f$  на  $\text{Re } t$  положителен, если  $\langle x, f \rangle \geq 0$  для всякого  $x \geq 0$ .

$$\|{}^tAf\|_{\text{Rem}} = \langle \alpha, f \rangle, \quad (1.2)$$

где  $\alpha = \{\alpha_n\}$  и  $\alpha_n = \sum_k |a_{nk}|$ .

Доказательство. По определению нормы

$$\|{}^tAf\|_{\text{Rem}} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, {}^tAf \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, f \rangle|.$$

Поскольку  $\text{Rem}$  — пространство вещественных последовательностей, и  $A$  — линейный непрерывный оператор, то

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, f \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Ax, f \rangle = \sup_{f \in H} \langle x, f \rangle, \quad (1.3)$$

где  $H = \{Ax : \|x\| \leq 1\}$ . Последовательность  $Ax$  имеет вид  $\{A_n x\}$ , с  $A_n x = \sum_k a_{nk} \xi_k$ . Легко вычисляются соотношения

$$\sup_{\|x\| \leq 1} H = \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} |A_n x| \right\} \quad (1.4)$$

и

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |A_n x| = \sum_k |a_{nk}| = \alpha_n. \quad (1.5)$$

Поскольку  $f$  — линейный и положительный функционал, то применимо соотношение (1.1). Следуя равенствам (1.1) и (1.3) — (1.5), получаем

$$\|{}^tAf\| = \sup_{x \in H} \langle x, f \rangle = \left\langle \left\{ \sup_{\|x\| \leq 1} |A_n x| \right\}, f \right\rangle = \langle \{\alpha_n\}, f \rangle,$$

что доказывает утверждение.

Обозначим через  $T$  множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, т. е. из  $x = \{\xi_k\} \in T$  вытекает, что найдется  $V$ , такое, что

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in V \\ 0 & \text{при остальных } k, \end{cases}$$

где  $V \subset N = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Множество  $T$  является тотальным множеством в пространстве  $m$  и в пространстве  $\text{Re } m$ .

Если функционал из  $m'$  является положительной функцией на подмножестве  $\text{Re } m$  пространства  $m$ , то говорим, что  $f$  — положительный функционал на  $m$ .

**Лемма 1.2.** *Линейный непрерывный функционал  $f$  на  $m$  является положительным тогда и только тогда, когда найдется однозначно определенный положительный линейный непрерывный функционал  $h$  на  $\text{Re } m$ , удовлетворяющий условию*

$$\langle x, f \rangle = \langle x_1, h \rangle + i \langle x_2, h \rangle, \quad (1.6)$$

где  $x = x_1 + ix_2$  и  $x_1, x_2 \in \text{Re } m$ .

Доказательство. Поскольку  $f \in m'$ , то найдется  $g$  такой, что

$$\langle x, f \rangle = \langle x, g \rangle - i \langle ix, g \rangle, \quad (1.7)$$

где  $g$  — однозначно определенный непрерывный (вещественный) линейный функционал<sup>4</sup> на  $m_0$  (см. [1], гл. II).

Необходимость. Если  $f \geq 0$ , то для каждого  $x \in \operatorname{Re} m$  с  $x \geq 0$  имеет место  $\langle ix, g \rangle = 0$ . Так как тотальное множество  $T$  в  $\operatorname{Re} m$  состоит из положительных элементов, то  $\langle ix, g \rangle = 0$  для каждого  $x \in \operatorname{Re} m$ . Пусть  $x$  — произвольный элемент из  $m$ . Найдутся однозначно определенные  $x_1$  и  $x_2$  из  $\operatorname{Re} m$ , такие, что  $x = x_1 + ix_2$ . Поскольку  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат  $m_0$ , то  $\langle x, g \rangle = \langle x_1, g \rangle + \langle ix_2, g \rangle$ . Имея в виду, что  $x_2 \in \operatorname{Re} m$ , из вышесказанного вытекает, что  $\langle ix_2, g \rangle = 0$  и  $\langle x, g \rangle = \langle x_1, g \rangle$ . Аналогично получим, что  $\langle ix, g \rangle = -\langle x_2, g \rangle$ . Учитывая (1.7), из этого следует, что

$$\langle x, f \rangle = \langle x_1, g \rangle + i\langle x_2, g \rangle. \quad (1.8)$$

Пусть  $h = g|_{\operatorname{Re} m}$  — сужение функции  $g$  (определенной на пространстве  $m_0$ ) на подпространство  $\operatorname{Re} m$ . Тогда из (1.8) следует (1.6), причем  $h$  — однозначно определенный линейный положительный функционал на  $\operatorname{Re} m$ .

Достаточность. Если  $h$  — непрерывный линейный функционал на  $\operatorname{Re} m$ , то  $g, c \langle x, g \rangle = \langle x_1, h \rangle$ , где  $x = x_1 + ix_2$ , является непрерывным линейным функционалом на  $m_0$ . Каждый  $g \in m'_0$  однозначно определяет  $f \in m'$  по формуле (1.7), которая, при нашем выборе функционала  $g$ , совпадает с формулой (1.6). Если  $h$  является положительным, то, очевидно, положительным является и  $f$ . Лемма доказана.

Из определения множества, определяющего ядро, вытекает, что если  $K_1$  — множество, определяющее ядро в  $\operatorname{Re} m$ , состоящее из положительных функционалов из  $(\operatorname{Re} m)'$ , то  $K$ , определяемое функционалами из  $K_1$  по формуле (1.6), определяет ядро в  $m$ , причем для любого  $x \in \operatorname{Re} m$  имеет место  $K(x) = K_1(x)$ . В самом деле, если  $\mathfrak{B}_1 = \{B_i^1\}_{i \in \mathfrak{J}}$  — базис фильтра в  $(\operatorname{Re} m)'$ , определяющего ядро  $K_1(x)$ , то  $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$  (множества  $B_i$  определяется однозначно множеством  $B_i$  по формуле (1.6)) является базисом фильтра в  $m'$ , определяющего ядро  $K(x)$ . Поскольку соотношение (1.7) определяет гомеоморфизм между пространствами  $m'_0$  и  $m'$  для слабых топологий в них, то из того, что  $B_i^1$  — слабо бикомпактно, вытекает слабо бикомпактность множества  $B_i$ .

**Предложение 1.1.** Пусть  $L$  и  $K$  — выпуклые и слабо бикомпактные множества, определяющие ядро в пространстве  $m$ , причем  $f \geq 0$  для каждого  $f$  из  $L \cup K$ . Для того, чтобы имело место

$$L(x) \subset K(x) \quad \forall x \in m, \quad (1.9)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$L_1 \subset K_1, \quad (1.10)$$

где  $L_1$  и  $K_1$  — множества положительных функционалов из  $(\operatorname{Re} m)'$ , однозначно определенные множествами  $L$  и  $K$  при помощи формулы (1.6).

<sup>4</sup> Как известно, соотношение (1.7) определяет гомеоморфизм пространства  $m'$  на пространство  $m'_0$  для слабых топологий в них (см. [1], гл. IV).

Доказательство. По предложению 0.2 для включения (1.9) необходимо и достаточно, чтобы имело место включение  $L \subset K$ . По лемме 1.2 имеем  $L \subset K$  тогда и только тогда, когда  $L_1 \subset K_1$ , где  $L_1$  и  $K_1$  состоят из функционалов из  $(\text{Re } m)'$ , определенных по формуле (1.6) функционалами, соответственно, из  $L$  и  $K$ . Предложение доказано.

Теперь пусть  $B = (b_{nk})$  — матричное преобразование с вещественными  $b_{nk}$  и  $f \geq 0$ . По (1.6) имеем  $\langle Bx, f \rangle = \langle Bx_1, h \rangle + i \langle Bx_2, h \rangle$  с  $h \in (\text{Re } m)'$ . Отсюда следует, что

$$\|{}^t Bf\| \leq 2 \sup_{\|x\| \leq 1, x \in \text{Re } m} |\langle Bx, h \rangle|. \quad (1.11)$$

Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование с  $A = A_1 + iA_2$ , где  $A_1 = (\text{Re } a_{nk})$  и  $A_2 = (\text{Im } a_{nk})$ . По (1.6) для любого  $x \in \text{Re } m$  имеет место соотношение

$$\langle Ax, f \rangle = \langle A_1 x, h \rangle + i \langle A_2 x, h \rangle, \quad (1.12)$$

где  $h \in (\text{Re } m)'$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $L$  и  $K$  — слабо бикомпактные множества, определяющие ядро в пространстве  $m$ , причем  $f \geq 0$  для каждого  $f$  из  $L \cup K$ . Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $m$ . Для того, чтобы имело место

$$L(Ax) \subset K(x) \quad \forall x \in m, \quad (1.13)$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий<sup>5</sup>:

$$1^\circ L\text{-}\lim_n \sum_k |\text{Im } a_{nk}| = 0, \quad (1.14)$$

$$2^\circ L_{A_1} \subset K, \quad (1.15)$$

где  $A_1 = (\text{Re } a_{nk})$ .

Доказательство опирается на предложения 0.1 и 0.2.

Необходимость. Поскольку множество  $K$  состоит из положительных функционалов, то по предложению 0.2 функционалы  ${}^t A f$  должны быть положительными для любого  $f \in L$ . Ввиду (1.12), это означает, что для любого  $f \in L$  и  $x \geq 0$  имеет место  $\langle A_2 x, h \rangle = 0$ , где  $h \in (\text{Re } m)'$ , однозначно определен функционалом  $f$ . Поскольку элементы тотального множества  $T$  пространства  $\text{Re } m$  положительны, то

$$\langle A_2 x, h \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Re } m. \quad (1.16)$$

В силу (1.11) из этого следует

$$\|{}^t A_2 f\| = 0. \quad (1.16)$$

По лемме 1.1

$$\sup_{\|x\| \leq 1, x \in \text{Re } m} |\langle A_2, h \rangle| = \langle a_2, h \rangle, \quad (1.17)$$

где  $a_2 = \left\{ \sum_k |\text{Im } a_{nk}| \right\}$ . Поскольку последовательность  $a_2$  состоит

<sup>5</sup> Если последовательность  $x = \{\xi_k\}$  сходится по  $L$  к  $a$ , то обозначаем это или символом  $L\text{-}\lim x = a$ , или символом  $L\text{-}\lim \xi_k = a$ .

из вещественных чисел, то по (1.6)

$$\langle a_2, f \rangle = \langle a_2, h \rangle. \quad (1.18)$$

Из условий (1.11) и (1.16)–(1.18) следует, что

$$\|{}^t A_2 f\| = \langle a_2, f \rangle = 0. \quad (1.19)$$

Соотношение (1.19) имеет место для любого  $f \in L$ , и это равносильно условию (1.14).

Достаточность. Если

$$\langle \left\{ \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk} \right\}, f \rangle = 0 \quad \forall f \in L,$$

то из леммы 1.1 и формулы (1.6) вытекает, что  $\|{}^t A_2 f\| = 0$  для любого  $f \in L$ , где  $A_2 = (\operatorname{Im} a_{nk})$ . Значит,  ${}^t A_2 f = 0$ , что равносильно утверждению  ${}^t A f = {}^t A_1 f$ . Из этого следует, что  $L_{A_1} = L_A$ . Применяя предложение 0.2, получаем требуемое.

Предложение доказано.

**Следствие 1.2.1.** Пусть  $L$  и  $K$  — слабо бикомпактные множества, определяющие ядро в пространстве  $m$ , причем  $f \geq 0$  для каждого  $f$  из  $L \cup K$ . Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $m$ . Для того, чтобы имело место (1.13), необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^\circ L\text{-}\lim_n \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}| = 0, \quad (1.14)$$

$$2^\circ L_{1A_1} \subset K_1, \quad (1.20)$$

где  $L_1$  и  $K_1$  — множества положительных функционалов из  $(\operatorname{Re} m)'$  и  $L_{1A_1} = \{{}^t A_1 h : h \in L_1\}$ , где  $A_1 = (\operatorname{Re} a_{nk})$ .

Доказательство. Если  $g \in L_{A_1}$ , то найдется  $f \in L$  с  $\langle x, f \rangle = \langle x_1, h \rangle + i \langle x_2, h \rangle$  такой, что  ${}^t A_1 f = g$ . Поскольку  $\langle x, g \rangle = \langle A_1 x, f \rangle$ , то  $\langle x, g \rangle = \langle A_1 x_1, h \rangle + i \langle A_1 x_2, h \rangle$ . Так как  $A_1$  является матричным преобразованием из  $\operatorname{Re} m$  в  $\operatorname{Re} m$ , то

$$\langle x, g \rangle = \langle x_1, {}^t A_1 h \rangle + i \langle x_2, {}^t A_1 h \rangle. \quad (1.21)$$

Значит, множеством из  $(\operatorname{Re} m)'$ , соответствующим множеству  $L_{A_1}$ , является множество  $L_{1A_1}$ . Применяя предложения 1.1 и 1.2, получаем требуемое.

**Предложение 1.3.** Пусть  $L$  — слабо бикомпактное множество, определяющее ядро в пространстве  $m$ , с  $f \geq 0$  для каждого  $f \in L$ . Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $m$ , причем  $\left\{ \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}| \right\}$  сходится по  $L$ . Если для  $A$  имеет место

(1.14), то

$$L\text{-}\lim_n \sum_k |a_{nk}| = L\text{-}\lim_n \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}|. \quad (1.22)$$

Доказательство. Поскольку

$$\sum_k |a_{nk}| \leq \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}| + \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}|$$

и

$$\sum_k |a_{nk}| \geq \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}| - \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}|,$$

то из  $f \geq 0$  для каждого  $f \in L$  и из (1.22) вытекает, что

$$\langle \{ \sum_k |a_{nk}| \}, f \rangle \leq L \cdot \lim_n \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}|$$

и

$$\langle \{ \sum_k |a_{nk}| \}, f \rangle \geq L \cdot \lim_n \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}|,$$

из чего следует (1.22).

Предложение доказано.

**Предложение 1.4.** Пусть  $f$  — положительный функционал из  $m'$  и пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $m$  с

$$\langle \{ \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}| \}, f \rangle = 0. \quad (1.23)$$

Тогда

$$\| {}^t A f \| = \langle \alpha, f \rangle, \quad (1.24)$$

где  $\alpha = \{ \sum_k |a_{nk}| \}$ .

**Доказательство.** Пусть  $|A| = (|a_{nk}|)$ . Найдем норму  $\| {}^t |A| f \|$ . По определению

$$\| {}^t |A| f \| = \sup_{\|x\| \leq 1} | \langle |A| x, f \rangle |.$$

Пусть  $h$  — функционал на  $\operatorname{Re} m$ , определенный функционалом  $f$  при помощи формулы (1.6). Пусть

$$S_1 = \{ x : x = \{ \xi_{1k} + i \xi_{2k} \}, |\xi_{1k}| + |\xi_{2k}| \leq \sqrt{2} \quad \forall k \in N \}.$$

Тогда  $\{ x : \|x\| \leq 1 \} \subset S_1$ . Имея в виду это, получаем

$$\begin{aligned} \| {}^t |A| f \| &\leq \sup_{x \in S_1} | \langle |A| x, f \rangle | = \sup_{\substack{0 \leq x_1 + x_2 \leq \sqrt{2} e \\ x_1, x_2 \in \operatorname{Re} m}} \sqrt{ \langle |A| x_1, h \rangle^2 + \langle |A| x_2, h \rangle^2 } = \\ &= \sqrt{ 2 \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} e, {}^t |A| h \right\rangle^2 } = \langle \{ \sum_k |a_{nk}| \}, h \rangle. \end{aligned}$$

Имея в виду (1.6), получаем  $\| {}^t |A| f \| = \langle \alpha, f \rangle$ . По лемме 1.1

$$\| {}^t (\operatorname{Re} A) h \| = \langle \{ \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}| \}, h \rangle = \langle \{ \sum_k |\operatorname{Re} a_{nk}| \}, f \rangle = \langle \alpha, f \rangle,$$

так как  $\langle \{ \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}| \}, f \rangle = 0$ . Поскольку

$$\| {}^t (\operatorname{Re} A) h \| \leq \| {}^t A f \| \leq \| {}^t |A| f \|, \text{ то } \| {}^t A f \| = \langle \alpha, f \rangle.$$

Предложение доказано.

## § 2. Ядро Кноппа в пространстве $m$

Обозначим через  $K^\circ$  множество всех таких линейных непрерывных функционалов  $f$  на  $m$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1^\circ \|f\| = 1, (\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|), \quad (2.1)$$

$$2^\circ \langle e_k, f \rangle = 0, (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

$$3^\circ \langle e, f \rangle = 1, \quad (2.3)$$

$$4^\circ \langle x, f \rangle \geq 0 \quad \forall x \geq 0, \quad (2.4)$$

причем  $e = \{1, 1, 1, \dots\}$  и  $e_k = \{0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots\}$ , где 1 стоит на  $k$ -том месте.

**Лемма 2.1.** Если  $f \in (\text{Re } m)'$  удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3), то

$$\|f\|_{\text{Re } m} = 1 \quad (\|f\|_{\text{Re } m} = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in \text{Re } m} |\langle x, f \rangle|), \quad (2.5)$$

тогда и только тогда, когда  $f$  — положительная функция.

**Доказательство.** Необходимость. Рассуждая от противного, предположим, что найдется  $x_0 > 0$  такой, что  $\langle x_0, f \rangle < 0$ . Без ограничения общности можно предполагать, что  $\|x_0\| = 1$ . Тогда  $\|e - x_0\| \leq 1$  и  $\langle e - x_0, f \rangle = \langle e, f \rangle - \langle x_0, f \rangle > 1$ , что противоречит (2.5).

**Достаточность.** Пусть  $f \geq 0$ . Для положительных функционалов из  $(\text{Re } m)'$  применимо (1.1). Имея в виду, что

$$\sup\{x : \|x\| \leq 1, x \in \text{Re } m\} = e,$$

получим  $\|f\|_{\text{Re } m} = \langle e, f \rangle = 1$ .

**Лемма 2.2.** Множество  $K^{\circ_1}$  в  $(\text{Re } m)'$ , определяемое по соотношению (1.6) функционалами из  $K^{\circ}$ , является множеством всех функционалов из  $(\text{Re } m)'$ , которые удовлетворяют условиям (2.1), (2.2) и (2.3).

**Доказательство.** Непосредственно видно, что все функционалы из  $K^{\circ_1}$  удовлетворяют условиям (2.1), (2.2) и (2.3). Покажем, что из того, что для некоторого  $h$  из  $(\text{Re } m)'$  выполнены эти условия, вытекает, что  $h \in K^{\circ_1}$ . В самом деле, по лемме 2.1 функционал  $h$  положительный в  $(\text{Re } m)'$ . Учитывая это и лемму 1.2, получим, что соотношение (1.6) определяет  $f$ , удовлетворяющий условиям (2.2) — (2.4). Выполнимость условия (2.1) следует из (1.6), если иметь в виду, что  $S = \{x : \|x\| \leq 1\}$  содержится в множестве  $S_1$  (см. доказательство предложения 1.4). В самом деле, тогда

$$\|f\| \leq \sup_{x \in S_1} |\langle x, f \rangle| = 1,$$

из чего по (2.3) вытекает, что  $\|f\| = 1$ . Лемма доказана.

Имея в виду леммы 2.2 и 1.2, получаем, что множество  $K^{\circ}$  совпадает с множеством, определяющим ядро Кноппа в  $m$  (см. [4], § 3). Значит, ядро Кноппа определяется множеством положительных функционалов.

Пусть  $K^{\circ}(x)$  — ядро Кноппа элемента  $x$ .

**Предложение 2.1.** Пусть  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  — матричные преобразования на  $m$ , причем

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - b_{nk}| = 0. \quad (2.4)$$

Тогда для любого  $x \in m$  имеет место

$$K^\circ(Ax) = K^\circ(Bx). \quad (2.5)$$

Доказательство. Из (2.4) вытекает, что

$$\lim_n \sum_k |\operatorname{Im}(a_{nk} - b_{nk})| = 0,$$

откуда, по предложению 1.4, при  $f \in K^\circ$  имеет место  $\|{}^t(A - B)f\| = \langle \{\sum_k |a_{nk} - b_{nk}|\}, f \rangle$ . Имея в виду (2.4), получаем, что для любого  $f \in K^\circ$  имеет место  $\|{}^t(A - B)f\| = 0$ , т. е.  ${}^tAf = {}^tBf$ . Но это равносильно равенству  $K^\circ_A = K^\circ_B$ , что и доказывает предложение. Этот результат по существу первым доказал Кук (см. [6], гл. 5, § 4; гл. 6).

**Предложение 2.2** Пусть  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  — матричные преобразования  $s$

$$\lim_n \sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}| = \lim_n \sum_k |\operatorname{Im} b_{nk}| = 0.$$

Если  $K^\circ(Ax) \subset K^\circ(Bx)$  для любого  $x \in m$ , то  $K^\circ(\alpha) \subset K^\circ(\beta)$ , где  $\alpha = \{\sum_k |a_{nk}|\}$  и  $\beta = \{\sum_k |b_{nk}|\}$ .

Доказательство. Применив предложения 0.1 и 0.2, получаем, что из  $K^\circ(Ax) \subset K^\circ(Bx)$  для любого  $x \in m$  вытекает  $K^\circ_A \subset K^\circ_B$ . Тогда

$$\{\|{}^tAf\| : f \in K^\circ\} \subset \{\|{}^tBf\| : f \in K^\circ\}. \quad (2.6)$$

По предложению 1.4 для каждого  $f \in K^\circ$  имеют место  $\|{}^tAf\| = \langle \alpha, f \rangle$  и  $\|{}^tBf\| = \langle \beta, f \rangle$ . Значит, включение (2.6) равносильно включению  $K^\circ(\alpha) \subset K^\circ(\beta)$ . Предложение доказано.

### § 3. Ядро почти-сходимости в пространстве $m$

Банах ([8], стр. 28, 29) доказал существование инвариантного относительно сдвигов обобщенного предела, имеющего смысл для произвольных ограниченных последовательностей, т. е. он доказал существование функционалов  $f \in m'$ , удовлетворяющих следующим условиям:

$$1^\circ \langle e, f \rangle = 1, \quad (3.1)$$

$$2^\circ \langle x, f \rangle \geq 0 \quad \forall x \geq 0, \quad (3.2)$$

$$3^\circ \langle Sx, f \rangle = \langle x, f \rangle \quad \forall x \in m, \quad (3.3)$$

где  $x = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$  и  $Sx = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ .

В настоящее время значения этих функционалов в точке называются банаховыми пределами  $x$ . Лоренц [9] ввел понятие почти-сходящейся последовательности:  $x$  из  $m$  называется почти-сходящимся, если все его банаховы пределы равны между собой.

**Предложение 3.1.** Множество  $F$  всех функционалов  $f \in m'$ , удовлетворяющих условиям (3.1)—(3.3), определяет ядро в  $m$ .

**Доказательство.** Докажем, что множество  $F_1$ , определяемое множеством  $F$  по соотношению (1.6), определяет ядро в  $\text{Re } m$ . Из этого, как показано в § 1, вытекает требуемое.

Так как  $Se_0 = \theta$ ,  $Se_1 = e_0, \dots, Se_n = e_{n-1}$ , то из (3.3) получается, что  $\langle e_0, f \rangle = \langle Se_0, f \rangle = \langle \theta, f \rangle = 0$ . Имея в виду, что  $\langle Se_n, f \rangle = \langle e_{n-1}, f \rangle$ , получаем, что  $\langle e_n, f \rangle = 0$  для каждого  $n$ . По лемме 2.1 из этого вытекает, что множество  $F_1$  является множеством всех функционалов из  $(\text{Re } m)'$ , удовлетворяющих условиям (1.1)—(1.3) и (3.3), т. е.  $F_1$  — подмножество множества  $K_1^\circ$  (см. лемма 2.2), состоящее из функционалов, удовлетворяющих условию (3.3). По теореме 3 из [4] множество  $K_1^\circ$  — это слабо бикompактное множество, определяющее ядро в  $\text{Re } m$ .

Пусть  $\mathfrak{B}_1 = \{B^i\}_{i \in \mathfrak{J}}$  — базис фильтра из слабо бикompактных множеств, определяющий это ядро. Обозначим через  $D$  множество всех функционалов в  $(\text{Re } m)'$ , удовлетворяющих условию (3.3) Поскольку

$$D = \bigcap_{x \in m} \{f : \langle x - Sx, f \rangle = 0\},$$

то  $D$  выпукло и слабо замкнуто. Учитывая, что  $F \neq \emptyset$  и  $F_1 \subset K_1^\circ$ , получаем

$$B_i = D \cap B^i \neq \emptyset \quad \forall i \in \mathfrak{J}.$$

Значит,  $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$  — базис фильтра, определяющее ядро, причем все  $B_i$  — слабо бикompактные. Так как  $F_1 = D \cap K_1$ , то  $F_1$  является слабо бикompактным множеством. Поскольку

$$\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} B_i = F_1,$$

то  $F_1$  определяет в  $\text{Re } m$  то же самое ядро как и фильтр с базисом  $\mathfrak{B}$  (см. [4], предложение 1). Имея в виду вышесказанное, получаем требуемое.

Из определения почти-сходящихся последовательностей вытекает, что множеством  $c_F$  всех сходящихся по  $F$  элементов является множество почти-сходящихся последовательностей, причем для каждого  $x$  из  $c_F$  предел почти-сходимости и предел по ядру совпадают. В дальнейшем через  $F\text{-}\lim \xi_n = a$  будем обозначать, что  $x = \{\xi_n\}$  почти-сходится к  $a$ .

Лоренц (см. [9], § 5) ввел понятие сильной регулярности для матричных преобразований. А именно, преобразование  $A = (a_{nk})$  называется *сильно регулярным*, если оно суммирует все почти-сходящиеся последовательности, причем

$$\lim_n \sum_k a_{nk} \xi_k = F\text{-}\lim_n \xi_n.$$

Пусть  $c_F$  — множество почти-сходящихся последовательностей. Используя понятие ядра, мы можем сказать, что преобра-

зование  $A$  сильно регулярно тогда и только тогда, когда  $K^\circ(Ax) \subset F(x)$  для любого  $x \in c_F$ .

Возникает вопрос, при каких условиях включение  $K^\circ(Ax) \subset F(x)$  имеет место для всех  $x \in m$ . Ответом на него служит нижеследующее предложение.

**Предложение 3.2.** Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $m$ . Чтобы для каждого  $x \in m$  имело место

$$K^\circ(Ax) \subset F(x), \quad (3.4)$$

необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1^\circ \lim_n a_{nk} = 0 \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3.5)$$

$$2^\circ \lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \quad (3.6)$$

$$3^\circ \lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{nk+1}| = 0, \quad (3.7)$$

$$4^\circ \lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1. \quad (3.8)$$

**Доказательство.** По предложениям 0.1 и 0.2 включение (3.4) равносильно включению  $K^\circ_A \subset F$ .

Необходимость. Поскольку  $F \subset K^\circ$ , то условия (3.5), (3.6) и (3.8) необходимы, так как  $K^\circ$  определяет ядро Кноппа. Необходимость условия (3.7) вытекает из соотношения (3.3). В самом деле, для любого  $f \in K^\circ$  условие

$$\langle A(Sx - x), f \rangle = 0 \quad \forall x \in m, \quad (3.9)$$

равносильно условию

$$\langle Bx, h \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Re } m, \quad (3.10)$$

где  $B = (b_{nk})$  с  $b_{nk} = \text{Re}(a_{nk} - a_{nk+1})$  и  $h$  — функционал, определенный функционалом  $f$  по соотношению (1.6). Следовательно,  $\|{}^t B h\|_{\text{Re } m} = 0$ . Применив результат (1.2), получим, что условие (3.9) равносильно условию  $\langle \beta, h \rangle = 0$ , где  $\beta = \{\Sigma |b_{nk}|\}$ . По (1.6) получаем, что это равносильно условию  $\langle \beta, f \rangle = 0$ . Из последнего вытекает, что для того, чтобы имело место (3.9) для любого  $f \in K^\circ$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_n \sum_k |\text{Re}(a_{nk} - a_{nk+1})| = 0.$$

Так как имеет место (3.8), то это равносильно условию (3.7).

**Достаточность.** Если  $A = (a_{nk})$  удовлетворяет условиям (3.5) — (3.8), то для всякого  $f \in K^\circ$  функционал  $g = {}^t A f$  удовлетворяет условиям (3.1) — (3.3), т. е.  $g \in F$ .

Предложение доказано.

**Следствие 3.2.1.** Сильно регулярное матричное преобразование  $A = (a_{nk})$  удовлетворяет условию (3.4) для всех  $x \in m$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1.$$

**Доказательство.** Условия (3.5) — (3.8) необходимы и достаточны для сильной регулярности преобразования  $A = (a_{nk})$  на  $m$  (см. [9], § 5).

Кинг (см. [10]) ввел понятия почти-суммируемости и также почти-регулярного преобразования. Говорят, что метод  $A$  почти-суммирует последовательность  $x$ , если последовательность  $Ax$  почти-сходится. Говорят, что метод  $A$  почти-регулярен, если он почти-суммирует все сходящиеся последовательности, причем  $\lim \xi_n = F\text{-}\lim Ax$ . Используя понятие ядра, мы можем сказать, что метод  $A$  почти-регулярен тогда и только тогда, когда  $F(Ax) \subset K^\circ(x)$  для любого  $x \in c$ .

Сформулируем проблему: при каких условиях включение  $F(Ax) \subset K^\circ(x)$  имеет место для всякого  $x \in t$ ?

**Предложение 3.3.** Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $t$ . Чтобы для каждого  $x \in t$  имело место

$$F(Ax) \subset K^\circ(x), \quad (3.11)$$

необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1^\circ F\text{-}\lim a_{nk} = 0 \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3.12)$$

$$2^\circ F\text{-}\lim \sum_k^n a_{nk} = 1, \quad (3.13)$$

$$3^\circ F\text{-}\lim \sum_k^n |a_{nk}| = 1. \quad (3.14)$$

Доказательство опирается на предложения 0.1 и 0.2. Из последнего следует, что (3.11) равносильно включению  $F_A \subset K^\circ$ . Из определения множества  $K^\circ$  вытекает, что для этого необходимо и достаточно, чтобы имели место

$$\text{а) } \langle Ae_k, f \rangle = 0 \quad \forall f \in F \quad (k=0, 1, \dots),$$

$$\text{б) } \langle Ae, f \rangle = 1 \quad \forall f \in F,$$

$$\text{в) } \|tAf\| = 1 \quad \forall f \in F,$$

$$\text{г) } \langle Ax, f \rangle \geq 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Условия а) и б) равносильны соответственно условиям (3.12) и (3.13). Из предложения 1.4 и леммы 2.1 вытекает, что при условиях (3.12) и (3.13) условия в) и г) равносильны равенству (3.14).

Предложение доказано.

**Следствие 3.3.1.** Почти-регулярное преобразование  $A$  удовлетворяет условию (3.11) тогда и только тогда, когда

$$F\text{-}\lim \sum_k^n |a_{nk}| = 1.$$

Доказательство. Условия (3.12) и (3.13) необходимы и достаточны для почти-регулярности преобразования  $A = (a_{nk})$  на  $t$  (см. [10]).

Проблема, когда матричное преобразование почти-суммирует все почти-сходящиеся последовательности с

$$F\text{-}\lim \sum_k^n a_{nk} \xi_k = F\text{-}\lim \xi_n,$$

была поставлена Питерсеном (см. [11]). Используя понятие ядра, эту проблему можно сформулировать так: при каких условиях  $F(Ax) \subset F(x)$  для любого  $x \in c_F$ ? Возникает вопрос, когда такое включение имеет место для всех  $x \in t$ .

**Предложение 3.4.** Пусть  $A = (a_{nk})$  — матричное преобразование на  $m$ . Чтобы для каждого  $x \in m$  имело место

$$F(Ax) \subset F(x), \quad (3.15)$$

необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1^\circ F\text{-}\lim a_{nk} = 0 \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3.15)$$

$$2^\circ F\text{-}\lim \sum_k^n a_{nk} = 1, \quad (3.17)$$

$$3^\circ F\text{-}\lim \sum_k^n |a_{nk}| = 1, \quad (3.18)$$

$$4^\circ F\text{-}\lim \sum_k^n |a_{nk} - a_{nk+1}| = 0. \quad (3.19)$$

**Доказательство.** По предложению 0.2 включение (3.14) равносильно включению  $F_A \subset F$ . Поскольку  $F \subset K^\circ$ , то по определениям  $F$  и  $K^\circ$  для  $F_A \subset F$ , необходимо и достаточно, чтобы имели место

$$\begin{aligned} \text{а) } & F_A \subset K^\circ, \\ \text{б) } & \langle A(Sx - x), f \rangle = 0 \quad \forall x \in m, \quad \forall f \in F. \end{aligned} \quad (3.20)$$

По предложению 3.3 условия (3.16) — (3.18) необходимы и достаточны для а). Условие (3.20) равносильно условию

$$\langle Bx, h \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Re } m, \quad \forall h \in F_1 \quad (3.21)$$

где  $B = (b_{nk})$  с  $b_{nk} = \text{Re}(a_{nk} - a_{nk+1})$  и  $F_1$  — совокупность функционалов из  $(\text{Re } m)'$ , определенных функционалами из  $F$  условием (1.6). Аналогично доказательству предложения 3.2 можно показать, что условие (3.21) равносильно условию  $\langle \beta, f \rangle = 0$  для любого  $f \in F$ , где  $\beta = \{\sum_k |b_{nk}|\}$ . Но это, в свою очередь, равносильно условию

$$F\text{-}\lim \sum_k^n |\text{Re}(a_{nk} - a_{nk+1})| = 0,$$

из чего по предложению 1.3 и условию (3.18) вытекает (3.19). Предложение доказано.

## Литература

1. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер. Москва, 1967.
3. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
4. Лооне Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 125—135.
5. Лооне Л., Об ограниченных по ядру элементах в локально выпуклом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 86—90.
6. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.
7. Agnew, R. P., Cores of complex sequences and of their transforms by square matrices. Amer. J. Math., 1939, 61, 178—186.
8. V a n a c h, S., Operations Lineares. Warszawa, 1932.
9. L o r e n t z, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math., 1948, 80, 167—190.

10. King, J. Almost summable sequences. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17, 1219—1225.
11. Petersen, G. M., Almost convergence and the Buck-Pollard property. Proc. Amer. Math. Soc., 1960, 11, 469—477.

Поступило  
1 VI 1972

## KNOPPI TUUM JA PEAAGU KOONDUVUSE TUUM RUUMIS $m$

L. Loone

### Resümee

Käesolevas artiklis defineeritakse peaaegu koonduvuse tuum ruumis  $m$ . Tuum on defineeritud nii, et tema järgi koonduvate elementide hulk (vt. [14]) langeb kokku peaaegu koonduvate jadade hulgaga, kusjuures piir tuuma järgi koonduvuse mõttes ühtib piiriga peaaegu koonduvuse mõttes. Käesolevas artiklis vaadeldakse defineeritud tuuma vahekorda Knoppi tuumaga. Osutub, et range regulaarsuse (vt. [9]),  $L$ -regulaarsuse (vt. [11]) ja peaaeguregulaarsuse (vt. [10]) mõisteid maatriksmenetluse jaoks saab määrata Knoppi tuuma ja peaaegu koonduvuse tuuma vahekorra kaudu vastavalt ruumides  $c$  ja  $c_F$ . Iga mõiste määrab eri tüüpi sisalduvuse (vt. valemid (3.4), (3.11), (3.15)). Töös vaadeldakse ka, millal sellised sisalduvused kehtivad kogu ruumis  $m$ .

## KNOPP'S CORE AND ALMOST CONVERGENCY CORE IN SPACE $m$

L. Loone

### Summary

In this paper, an almost convergency core is defined in space  $m$  so that the set of elements convergent by core (see [4]) is the set of almost convergent sequences. Almost convergency core is defined so that core limit of  $x$  is identical with the limit of almost convergent sequence  $x$  for every  $x \in c_F$ . The author considers relations of Knopp's core and almost convergency core. The concepts of strong regularity [9],  $L$ -regularity [11] and almost regularity [10] for matrix transformations are defined by relations (see (3.4), (3.11), (3.15)) of Knopp's core and almost convergency core (in  $c$  and in  $c_F$ ). Then, conditions are found for those inclusions to hold for every  $x \in m$ .

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБР ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ

М. Абель

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

Пусть  $A$  — комплексная коммутативная банахова алгебра с единицей  $e_A$ , а  $\mathfrak{M}(A)$  — пространство всех максимальных идеалов алгебры<sup>1</sup>  $A$ . Число, соответствующее элементу  $a \in A$  при гомоморфном отображении банаховой алгебры  $A$  в поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, определяемом максимальным идеалом  $M \in \mathfrak{M}(A)$ , обозначаем через  $a^\wedge(M)$ . Таким образом, для каждого фиксированного элемента  $a \in A$  при изменении  $M$  в  $\mathfrak{M}(A)$ , получаем функцию  $a^\wedge$ , непрерывную на  $\mathfrak{M}(A)$ . При этом множество  $A^\wedge = \{a^\wedge : a \in A\}$  образует подалгебру алгебры  $C(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$  всех непрерывных комплексных функций на  $\mathfrak{M}(A)$ .

Пусть  $X$  — топологическое пространство. Множество всех непрерывных функций, определенных на  $X$  со значениями в  $A$ , обозначается через  $C(X, A)$ , а подмножество всех ограниченных функций из  $C(X, A)$  обозначается через  $C^*(X, A)$ . Как известно, множество  $C^*(X, A)$  образует банахову алгебру, если алгебраические операции над функциями определить поточечно, а норму функции  $f$  — равенством

$$\|f\| = \|f\|_{C^*(X, A)} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_A, \quad (1)$$

где  $\|\cdot\|_A$  — норма<sup>2</sup> алгебры  $A$ .

Вполне регулярное  $T_1$ -пространство  $X$  называется *псевдокомпактным* пространством, если каждая определенная на  $X$  вещественная непрерывная функция ограничена на  $X$  (см. [12], стр. 67). Каждый *бикомпакт*, т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство, есть псевдокомпактное пространство, но существуют псевдокомпактные пространства, не являющиеся бикомпактами (см. [9, 14]). В случае, когда  $X$  — псевдокомпактное пространство, алгебра  $C^*(X, A) = C(X, A)$ .

<sup>1</sup> Здесь и всюду в дальнейшем вместо комплексной коммутативной банаховой алгебры с единицей будем коротко говорить банахова алгебра или алгебра.

<sup>2</sup> Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что  $\|e_A\|_A = 1$ .

В книге [4], стр. 300, показано, что любое вполне регулярное  $T_1$ -пространство  $X$  имеет такое бикompактное расширение  $\beta X$ , что каждая функция  $f \in C^*(X, \mathbb{C})$  имеет единственное продолжение  $f^\beta \in C(\beta X, \mathbb{C})$ .

Пусть теперь  $X$  — псевдокомпактное пространство и функция  $f \in C(X, A)$ . Тогда множество  $Y = \{f(x) : x \in X\}$  является псевдокомпактным пространством как непрерывный образ псевдокомпактного пространства. Поскольку каждое псевдокомпактное метрическое пространство бикompактно (см. [16], стр. 226), то  $Y$  — бикompактное пространство. Поэтому существует единственное непрерывное продолжение<sup>3</sup>  $f_\beta$  функции  $f$ , определенное на  $\beta X$  со значениями в  $Y \subset A$  (см. [15], стр. 476, или [5], стр. 27). Значит, если  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — любая банахова алгебра, то каждая функция  $f \in C(X, A)$  имеет единственное продолжение  $f_\beta \in C(\beta X, A)$ .

В настоящей статье продолжается изучение свойств алгебры  $C^*(X, A)$ , начатое в [1, 2]. В § 2 описываются все максимальные идеалы, а также все нетривиальные линейные мультипликативные функционалы алгебры  $C^*(X, A)$  в случае, когда  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — любая банахова алгебра. Доказывается, что в данном случае пространства  $\mathfrak{M}(C(X, A))$  и  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$  гомеоморфны. В частном случае эти результаты доказаны в статьях [1, 11, 17].

В § 3 доказывается, что если  $X$  — псевдокомпактное пространство, то алгебра  $C(X, A)$  является регулярной<sup>4</sup> тогда и только тогда, когда алгебра  $A$  регулярна.

В § 4 изучается радикал<sup>5</sup> алгебры  $C^*(X, A)$ . Доказывается, что, если  $X$  — любое топологическое пространство и  $A$  — банахова алгебра с конечномерным радикалом<sup>6</sup>, или  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — произвольная банахова алгебра, то  $\text{Rad } C^*(X, A) = C^*(X, \text{Rad } A)$ . Доказывается: если  $X$  — топологическое пространство и  $A$  — банахова алгебра, то алгебра  $C^*(X, A)$  полупроста<sup>7</sup> тогда и только тогда, когда  $A$  — полупростая алгебра. Последний результат в частном случае доказан в статье [1].

<sup>3</sup> В случае, когда  $A = \mathbb{C}$ , продолжение  $f_\beta = f^\beta$ .

<sup>4</sup> См., например, [7], стр. 258—259.

<sup>5</sup> *Радикалом*  $\text{Rad } A$  алгебры  $A$  является пересечение всех максимальных идеалов алгебры  $A$ , или множество всех  $a \in A$ , удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|_A} = 0$$

(см. [3, 6, 7]).

<sup>6</sup> Если  $\text{Rad } A$  — конечное множество, то алгебра  $A$  называется *алгеброй с конечномерным радикалом* (см. [8]).

<sup>7</sup> Если  $\text{Rad } A$  содержит только нулевой элемент алгебры  $A$ , то  $A$  — полупроста (см. [3, 6, 7]).

В § 5 описывается изоморфизм между алгебрами  $C^*(X, A)$  и  $C^*(Y, B)$  в случае, когда  $X$  и  $Y$  — гомеоморфные топологические пространства, а  $A$  и  $B$  — топологически<sup>8</sup> изоморфные банаховы алгебры. Доказывается, что алгебры  $C^*(X, A)$  и  $C^*(X, C(\mathfrak{M}(A), C))$  топологически изоморфны, если  $X$  — любое топологическое пространство, а  $A$  — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра  $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), C)$ , в частности, если  $A$  является  $B^*$ -алгеброй, т. е. банаховой алгеброй с инволюцией  $a \rightarrow a^*$ , норма которой удовлетворяет условию  $\|aa^*\|_A = \|a\|_A^2$  для всех  $a \in A$ .

## § 2. Максимальные идеалы алгебры $C(X, A)$

Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $A$  — банахова алгебра и  $C^*(X, C) (\times) A$  — тензорное произведение алгебр  $C^*(X, C)$  и  $A$ , т. е. множество всех конечных сумм вида

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) a_k,$$

где  $f_k \in C^*(X, C)$  и  $a_k \in A$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Положив для всех  $x \in X$

$$\left( \sum_{k=1}^n f_k(x) a_k \right) (x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) a_k, \quad (2)$$

видим, что функции вида (2) непрерывны и ограничены на  $X$ . Поэтому  $C^*(X, C) (\times) A$  образует подалгебру алгебры  $C^*(X, A)$ .

Имеет место

**Предложение 1.** Если  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — банахова алгебра<sup>9</sup>, то  $C(X, C) (\times) A$  является равномерно плотной<sup>10</sup> подалгеброй алгебры  $C(X, A)$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $f \in C(X, A)$ . Тогда множество  $Y = \{f(x) : x \in X\}$  является бикомпактом. В силу этого, для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существуют определенные на  $Y$  вещественные непрерывные ограниченные функции  $\lambda_k$  и элементы  $a_k \in A$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ , такие, что

$$\|f - \sum_{k=1}^n (\lambda_k \circ f) (\times) a_k (x)\|_A \leq \varepsilon$$

независимо от  $x \in X$  (см. [11], стр. 246—247). Поэтому

$$\|f - \sum_{k=1}^n (\lambda_k \circ f) (\times) a_k\|_{C(X, A)} \leq \varepsilon.$$

Значит, подалгебра  $C(X, C) (\times) A$  равномерно плотна в алгебре  $C(X, A)$ .

<sup>8</sup> Взаимно непрерывный изоморфизм называется *топологическим изоморфизмом*.

<sup>9</sup> Предложение 1 остается в силе, если банахову алгебру  $A$  заменить банаховым пространством.

<sup>10</sup> Т. е. всюду плотной подалгеброй относительно равномерной топологии алгебры  $C(X, A)$ .

В случае, когда  $X$  — бикомпакт, предложение 1 известно<sup>11</sup> (см. [11], стр. 246; также [10], стр. 90).

**Теорема 1.** Если  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — банахова алгебра, то всякий нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры  $C(X, A)$  имеет вид

$$\Phi_{x, M}(f) = f_{\beta}(x) \hat{\wedge} (M), \quad (3)$$

где  $(x, M)$  — некоторая фиксированная точка в  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ .

Доказательство. Пусть

$$C_e(X) = \{f(X) e_A : f \in C(X, \mathbb{C})\}$$

и

$$C_A(X) = \{g_a \in C(X, A) : g_a(x) \equiv a, a \in A\}.$$

Эти множества образуют подалгебры алгебры  $C(X, A)$ . Если  $\Phi$  есть нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры  $C(X, A)$ , то  $\Phi$  является нетривиальным функционалом также на  $C_e(X)$  и на  $C_A(X)$ . Действительно, если функционал  $\Phi$  тривиален на  $C_e(X)$  или на  $C_A(X)$ , то  $\Phi$  остается тривиальным и на  $C(X, \mathbb{C})(X)A$ , ибо, в силу равенства

$$f(X)a = (f(X)e_A)g_a$$

для всех  $f \in C(X, \mathbb{C})$ ,  $a \in A$  и  $g_a \in C_A(X)$ , получаем

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k(X)a_k\right) = \sum_{k=1}^n \Phi[(f_k(X)e_A)g_{a_k}] = \sum_{k=1}^n \Phi(f(X)e_A)\Phi(g_{a_k})$$

для всех элементов из  $C(X, \mathbb{C})(X)A$ . Поэтому, по предложению 1, функционал  $\Phi$  является тривиальным и на всей алгебре  $C(X, A)$ , что невозможно.

Отметим, что отображение  $f(X)e_A \rightarrow f$  есть изоморфизм между алгебрами  $C_e(X)$  и  $C(X, \mathbb{C})$ , а отображение  $g_a \rightarrow a$  есть изоморфизм между алгебрами  $C_A(X)$  и  $A$ . Эти изоморфизмы обозначим соответственно через  $\mu$  и  $\nu$ . В силу этого,  $\Phi \circ \mu^{-1}$  и  $\Phi \circ \nu^{-1}$  являются нетривиальными линейными мультипликативными функционалами соответственно на  $C(X, \mathbb{C})$  и на  $A$ . Так как всякий нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры  $C(X, \mathbb{C})$  имеет вид

$$\varrho_x(f) = f^{\beta}(x),$$

где  $x$  — некоторая фиксированная точка в  $\beta X$  (см. [1], теорема 8), то существует такая точка  $x_0 \in \beta X$ , что

$$\Phi(f(X)e_A) = (\Phi \circ \mu^{-1})(f) = f^{\beta}(x_0).$$

Аналогично можно показать, что существует такой максимальный идеал  $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$ , что

$$\Phi(g_a) = (\Phi \circ \nu^{-1})(a) = a \hat{\wedge} (M_0).$$

Как выше отмечено, каждая функция из алгебры  $C(X, A)$  обладает единственным продолжением, которое принадлежит  $C(\beta X, A)$ . В силу этого,

<sup>11</sup> См. также [2], стр. 112.

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k(\times) a_k\right)_\beta = \sum_{k=1}^n (f_k)^\beta(\times) a_k \quad (4)$$

для всех функций из  $C(X, C) (\times) A$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k(\times) a_k\right) &= \sum_{k=1}^n (f_k)^\beta(x_0) (a_k)^\wedge(M_0) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (f_k)^\beta(\times) a_k\right) (x_0)^\wedge(M_0) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n f_k(\times) a_k\right)_\beta (x_0)^\wedge(M_0) \end{aligned}$$

для всех функций из  $C(X, C) (\times) A$ .

Пусть теперь  $f$  — любая функция алгебры  $C(X, A)$  и  $f_\beta$  — продолжение этой функции на  $\beta X$ . Тогда  $f_\beta \in C(\beta X, A)$  и, по предложению 1, существует последовательность  $\{(y_n)_\beta\} \in C(\beta X, C) (\times) A$ , сходящаяся к функции  $f_\beta$  в равномерной топологии алгебры  $C(\beta X, A)$ . При этом последовательность  $\{y_n\} \in C(X, C) (\times) A$  сходится к функции  $f$  в равномерной топологии алгебры  $C(X, A)$ .

Поскольку в каждой точке  $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}(A)$

$$|[f_\beta - (y_n)_\beta](x)^\wedge(M)| \leq \|f_\beta - (y_n)_\beta\|_{C(\beta X, A)},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)_\beta(x)^\wedge(M) = f_\beta(x)^\wedge(M)$$

в каждой фиксированной точке  $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}(A)$ . Поэтому, в силу непрерывности функционала  $\Phi$ ,

$$\Phi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)_\beta(x_0)^\wedge(M_0) = f_\beta(x_0)^\wedge(M_0).$$

Следовательно, каждый нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры  $C(X, A)$  имеет вид (3), где  $(x_0, M_0)$  — некоторая фиксированная точка в  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ .

**Следствие 1.** Если  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — банахова алгебра, то всякий максимальный идеал алгебры  $C(X, A)$  имеет вид

$$M_{x, M} = \{f \in C(X, A) : f_\beta(x)^\wedge(M) = 0\},$$

где  $(x, M)$  — некоторая фиксированная точка в  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ .

**Доказательство.** Так как  $M_{x, M}$  — ядро функционала  $\Phi_{x, M}$  в каждой фиксированной точке  $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}(A)$ , то описаны все максимальные идеалы алгебры  $C(X, A)$ , ввиду взаимно однозначного соответствия между всеми максимальными идеалами и всеми нетривиальными линейными мультипликативными функционалами банаховой алгебры.

**Следствие 2.** Если  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — банахова алгебра, то пространства  $\mathfrak{M}(C(X, A))$  и  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$  гомеоморфны.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7 статьи [1].

Теорема 1 и следствия 1 и 2 известны в случае, когда  $X$  — бикомпакт (см. [11], стр. 247—249), а также в случае, когда  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — полупростая самопрояженная банахова алгебра (см. [1], 69—70).

### § 3. Регулярность алгебры $C(X, A)$

В теории банаховых алгебр особую роль играют регулярные банаховы алгебры. Поэтому интересно узнать, при каких условиях алгебра  $C(X, A)$  является регулярной? Ответ на этот вопрос дает

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — банахова алгебра. Для того, чтобы алгебра  $C(X, A)$  была регулярной, необходима и достаточна регулярность алгебры  $A$ .

Доказательство. Необходимость. Пусть  $C(X, A)$  — регулярная банахова алгебра,  $\mathfrak{M}_0(A)$  — любое замкнутое подмножество пространства  $\mathfrak{M}(A)$ ,  $M_0$  — максимальный идеал алгебры  $A$ , не принадлежащий  $\mathfrak{M}_0(A)$ , а  $x_0$  — любая фиксированная точка пространства  $\beta X$ . Поскольку каждое одноточечное подмножество пространства  $\beta X$  замкнуто, то множество  $\{x_0\} \times \mathfrak{M}_0(A)$  замкнуто в  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ . Кроме этого, точка  $(x_0, M_0) \notin \{x_0\} \times \mathfrak{M}_0(A)$ . В силу гомеоморфизма между пространствами  $\mathfrak{M}(C(X, A))$  и  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ , образ  $\mathfrak{M}_0(C(X, A))$  подмножества  $\{x_0\} \times \mathfrak{M}_0(A)$  при этом гомеоморфизме замкнут в  $\mathfrak{M}(C(X, A))$ , а образ  $\mathbf{M}_{x_0, M_0}$  точки  $(x_0, M_0)$  не принадлежит  $\mathfrak{M}_0(C(X, A))$ . В силу регулярности алгебры  $C(X, A)$ , в  $C(X, A)$  существует такая функция  $f$ , что  $f^*(\mathbf{M}_{x_0, M_0}) \neq 0$  и  $f^*(\mathbf{M}_{x_0, M}) = 0$  для всех  $M \in \mathfrak{M}_0(A)$ .

Ввиду теоремы 1 и следствия 1, для всех  $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}(A)$  и  $f \in C(X, A)$  имеет место равенство

$$f^*(\mathbf{M}_{x, M}) = \Phi_{x, M}(f) = f_\beta(x) \wedge (M). \quad (5)$$

Поэтому  $f_\beta(x_0) \wedge (M_0) \neq 0$  и  $f_\beta(x_0) \wedge (M) = 0$  для всех  $M \in \mathfrak{M}_0(A)$ . Так как  $f_\beta(x_0) \in A$ , то алгебра  $A$  регулярна.

Достаточность. Пусть  $A$  регулярная банахова алгебра,  $\mathfrak{M}_0(C(X, A))$  — любое замкнутое подмножество пространства  $\mathfrak{M}(C(X, A))$  и  $\mathbf{M}_{x_0, M_0}$  — максимальный идеал алгебры  $C(X, A)$ , не принадлежащий  $\mathfrak{M}_0(C(X, A))$ . В силу гомеоморфизма между пространствами  $\mathfrak{M}(C(X, A))$  и  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ , образ  $X_0 \times \mathfrak{M}_0(A)$  подмножества  $\mathfrak{M}_0(C(X, A))$  при этом гомеоморфизме замкнут в  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ , а образ  $(x_0, M_0)$  точки  $\mathbf{M}_{x_0, M_0}$  не принадлежит  $X_0 \times \mathfrak{M}_0(A)$ . Поэтому множества  $X_0$  и  $\mathfrak{M}_0(A)$  замкнуты в  $\beta X$  и в  $\mathfrak{M}(A)$  соответственно. Так как точка  $(x_0, M_0)$  не принадлежит  $X_0 \times \mathfrak{M}_0(A)$ , то возможны следующие три случая: а)  $x_0 \notin X_0$  и  $M_0 \notin \mathfrak{M}_0(A)$ , б)  $x_0 \notin X_0$  и  $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$ , в)  $x_0 \in X_0$  и  $M_0 \notin \mathfrak{M}_0(A)$ .

Пусть точка  $x_0 \notin X_0$ . В силу нормальности пространства  $\beta X$ , по теореме Урысона, в алгебре  $C(\beta X, \mathbb{C})$  существует такая функция  $f^\beta$ , что  $f^\beta(x_0) = 1$  и  $f^\beta(x) = 0$  для всех  $x \in X_0$ . Поэтому, при помощи равенства (4) при  $n = 1$  и равенства (5), получаем

$$\begin{aligned} (f(\times) e_A)^\wedge (M_{x_0, M_0}) &= (f(\times) e_A)_{\beta(x_0)}^\wedge (M_0) = \\ &= f^\beta(x_0) e_A^\wedge (M_0) = \\ &= f^\beta(x_0) = 1 \end{aligned}$$

и

$$(f(\times) e_A)^\wedge (M_{x, M}) = f^\beta(x) = 0$$

для всех  $x \in X_0$ , независимо от того, принадлежит  $M_0$  множеству  $\mathfrak{M}_0(A)$  или нет. Итак, случаи а) и б) рассмотрены.

Пусть теперь  $x_0 \in X_0$  и  $e$  — единичная функция алгебры  $C(X, \mathbb{C})$ . Как известно (см. [1], стр. 55), алгебры  $C(X, \mathbb{C})$  и  $C(\beta X, \mathbb{C})$  изоморфны. Поэтому  $e^\beta$  является единичной функцией алгебры  $C(\beta X, \mathbb{C})$ , т. е.  $e^\beta(x) \equiv 1$  на  $\beta X$ . В силу регулярности алгебры  $A$ , в  $A$  существует такой элемент  $a$ , что  $a^\wedge(M_0) \neq 0$  и  $a^\wedge(M) = 0$  для всех  $M \in \mathfrak{M}_0(A)$ . Поскольку функция  $e(\times)a \in C(X, A)$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} (e(\times)a)^\wedge (M_{x_0, M_0}) &= (e(\times)a)_{\beta(x_0)}^\wedge (M_0) = e^\beta(x_0) a^\wedge (M_0) = \\ &= a^\wedge (M_0) \neq 0, \end{aligned}$$

и для всех  $M_{x, M} \in \mathfrak{M}_0(C(X, A))$

$$(e(\times)a)^\wedge (M_{x, M}) = a^\wedge (M) = 0,$$

ввиду равенства (4) при  $n = 1$  и равенства (5), то рассмотрен случай в) и, следовательно, алгебра  $C(X, A)$  регулярна.

**Следствие 3.** Если  $X$  — псевдокомпактное пространство и  $A$  — регулярная банахова алгебра, то граница Шилова алгебры  $C(X, A)$  гомеоморфна пространству  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ .

**Доказательство.** По теореме 2 алгебра  $C(X, A)$  регулярна. Поэтому в силу следствия 2 граница Шилова алгебры  $C(X, A)$  и пространство  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$  гомеоморфны (см., например, [7], стр. 263).

Следствие 3 известно в случае, когда  $A$  — полупростая самопрямая банахова алгебра (см. [1], стр. 70—71).

#### § 4. Радиал алгебры $C^*(X, A)$

Для решения многих задач важно знать радикал рассматриваемой алгебры. Следующая теорема дает характеристику радикала алгебры  $C^*(X, A)$ .

**Теорема 3.** Если  $X$  — топологическое пространство и  $A$  — банахова алгебра, то

$$\text{Rad } C^*(X, A) \subset C^*(X, \text{Rad } A), \quad (6)$$

а если, кроме того,  $X$  — псевдокомпактное пространство или

$A$  — банахова алгебра с конечномерным радикалом, то

$$\text{Rad } C^*(X, A) = C^*(X, \text{Rad } A). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть  $X$  — любое топологическое пространство и  $A$  — произвольная банахова алгебра. Тогда множество

$$\mathbf{M}_{x, M} = \{f \in C(X, A) : f(x) \wedge (M) = 0\},$$

где  $(x, M)$  — любая фиксированная точка в  $X \times \mathfrak{M}(A)$  образует максимальный идеал алгебры  $C^*(X, A)$ . Пусть функция  $f_0 \in \text{Rad } C^*(X, A)$ . Тогда  $f_0 \in \mathbf{M}_{x, M}$  для каждой точки  $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}(A)$ . Поэтому  $f_0(x) \wedge (M) \equiv 0$  на  $X \times \mathfrak{M}(A)$ . Отсюда следует, что  $f_0(x) \in \text{Rad } A$  для каждой точки  $x \in X$ . Значит, функция  $f_0 \in C^*(X, \text{Rad } A)$  и верно включение (6).

Чтобы доказать обратное включение  $C^*(X, \text{Rad } A) \subset \text{Rad } C^*(X, A)$ , предположим, во-первых, что  $X$  — псевдокомпактное пространство,  $A$  — банахова алгебра, функция  $f \in C(X, \text{Rad } A)$  и  $f_\beta$  — продолжение функции  $f$  на  $\beta X$ . Тогда на  $X \times \mathfrak{M}(A)$

$$f_\beta(x) \wedge (M) \equiv f(x) \wedge (M) \equiv 0.$$

Пусть  $F$  — функция, удовлетворяющая для всех  $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}(A)$  условию

$$F(x, M) = f_\beta(x) \wedge (M). \quad (8)$$

Эта функция непрерывна на  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$  (см. [17], лемма 2.2). Поскольку пространство  $X \times \mathfrak{M}(A)$  всюду плотно в  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$  (см. [1], лемма 6) и  $F(x, M) \equiv 0$  на  $X \times \mathfrak{M}(A)$ , то  $F(x, M) \equiv 0$  и на  $\beta X \times \mathfrak{M}(A)$ . Поэтому, в силу равенств (5) и (8)

$$f \wedge (\mathbf{M}_{x, M}) = 0$$

для всех  $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}(A)$ . Следовательно, по следствию 1, функция  $f \in \text{Rad } C(X, A)$  и равенство (7) доказано.

Пусть теперь  $X$  — любое топологическое пространство,  $A$  — банахова алгебра с конечномерным радикалом и функция  $f \in C^*(X, \text{Rad } A)$ . Тогда для всех  $x \in X$  предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|f^n(x)\|_A} = 0. \quad (9)$$

Покажем, что из выполнения условия (9) следует выполнение условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_{C^*(X, A)}} = 0. \quad (10)$$

Для этого, пусть

$$\text{Rad } A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

и

$$X_k(f) = \{x \in X : f(x) = a_k\},$$

где  $k = 1, 2, \dots, m$ . В силу условия (9) для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существуют такие числа  $N_k$ , что для всех  $x \in X_k$

$$\|f^n(x)\|_A < \varepsilon^n \quad (11)$$

при  $n > N_k$  с  $k = 1, 2, \dots, m$ . Так как неравенство (11) справедливо при  $n > N$  независимо от  $x \in X$ , где

$$N = \max_{1 \leq k \leq m} N_k,$$

то

$$\|f^n\|_{C^*(X, A)} \leq \varepsilon^n$$

при  $n > N$ . Следовательно, функция  $f$  удовлетворяет условию (10) и принадлежит  $\text{Rad } C^*(X, A)$ . Поэтому справедливо равенство (7). Теорема доказана.

В статье [1], стр. 62, показано, что  $C^*(X, A)$  является полупростой алгеброй, если алгебра  $A$  полупроста. Верно и обратное утверждение. Действительно, имеет место следующая

**Теорема 4.** Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $A$  — банахова алгебра. Для того, чтобы  $C^*(X, A)$  была полупростой алгеброй, необходимо и достаточно полупростота алгебры  $A$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть алгебра  $C^*(X, A)$  полупроста, элемент  $a \in \text{Rad } A$  и  $f$  — такая функция, что  $f(x) \equiv a$  на  $X$ . Тогда  $f \in C^*(X, A)$  и удовлетворяет условию (9) независимо от  $x \in X$ . В силу этого, для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N$ , что независимо от  $x \in X$  справедливо неравенство (11) при  $n > N$ . Отсюда следует, что функция  $f$  удовлетворяет условию (10) и принадлежит  $\text{Rad } C^*(X, A)$ . Так как алгебра  $C^*(X, A)$  полупроста, то  $f$  есть нулевой элемент алгебры  $C^*(X, A)$ . Поэтому элемент  $a$  является нулевым элементом алгебры  $A$ . Следовательно, алгебра  $A$  полупроста.

Достаточность<sup>12</sup> следует из включения (6).

## § 5. Изоморфизмы между алгебрами функций

Пусть  $\varphi$  — некоторый топологический изоморфизм между банаховыми алгебрами  $A$  и  $B$ , а  $\psi$  — некоторый гомеоморфизм между топологическими пространствами  $Y$  и  $X$ . Для каждой функции  $f \in C^*(X, A)$  функция  $\varphi \circ f \circ \psi$  является непрерывной на  $Y$  (как композиция непрерывных функций  $\varphi$ ,  $f$  и  $\psi$ ) со значениями в  $B$ . Так как

$$\|(\varphi \circ f \circ \psi)(y)\|_B \leq \|\varphi\| \| (f \circ \psi)(y) \|_A \leq \|\varphi\| \|f\|_{C^*(X, A)}$$

для каждого  $y \in Y$  и непрерывный изоморфизм  $\varphi$  ограничен, то функция  $\varphi \circ f \circ \psi \in C^*(Y, B)$ .

Аналогично, функция  $\varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1} \in C^*(X, A)$  для каждой функции  $g \in C^*(Y, B)$ . При этом отображение  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  отображает функцию  $\varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1}$  в функцию  $g$ . Следовательно,  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  отображает алгебру  $C^*(X, A)$  взаимно однозначно на алгебру  $C^*(Y, B)$ . Кроме этого, отображение  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  сохраняет алгебраические операции. Поэтому  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  является изоморфизмом.

<sup>12</sup> См. также [1], стр. 62 и 75.

Если алгебры  $A$  и  $B$  полупросты, то, по теореме 4, алгебры  $C^*(X, A)$  и  $C^*(Y, B)$  также полупросты. Поэтому изоморфизм  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  является топологическим как изоморфизм между полупростыми банаховыми алгебрами (см. [7], стр. 249).

Итак, нами доказана

**Теорема 5.** Если  $\varphi$  — некоторый топологический изоморфизм между банаховыми алгебрами  $A$  и  $B$ , а  $\psi$  — некоторый гомеоморфизм между топологическими пространствами  $Y$  и  $X$ , то отображение  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  является изоморфизмом между алгебрами  $C^*(X, A)$  и  $C^*(Y, B)$ . Если, кроме того, алгебры  $A$  и  $B$  полупросты, то изоморфизм  $f \rightarrow \varphi \circ f \circ \psi$  является топологическим.

Из теоремы 5 получаем

**Следствие 4.** Если  $X$  — топологическое пространство и  $A$  — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра  $A^\wedge$  равномерно замкнута<sup>13</sup>, то алгебры  $C^*(X, A)$  и  $C^*(X, A^\wedge)$  топологически изоморфны.

Доказательство следует из теоремы 5 при  $Y = X$  и  $B = A^\wedge$ , так как алгебры  $A$  и  $A^\wedge$  в данном случае топологически изоморфны (см. [6], стр. 103, или [13], стр. 39—40).

Из следствия 4 непосредственно вытекают следующие следствия.

**Следствие 5.** Если  $X$  — топологическое пространство и  $A$  — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра  $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$ , то алгебры  $C^*(X, A)$  и  $C^*(X, C(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C}))$  топологически изоморфны.

**Следствие 6.** Если  $X$  — топологическое пространство и  $A$  является  $V^*$ -алгеброй, то алгебры  $C^*(X, A)$  и  $C^*(X, C(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C}))$  топологически изоморфны.

## Литература

1. Абель М., Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 52—77.
2. Абель М., Об обобщении теоремы Неля. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 104—114.
3. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Москва, 1960.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
5. Куратовский К., Топология, т. 2. Москва, 1966.
6. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.
7. Наймарк М. А., Нормированные кольца. Москва, 1968.
8. Хелемский А. Я., О коммутативных нормированных кольцах с конечномерным радикалом. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем.-мех., 1964, 6, 7—16.
9. Gillman, L., Jerison, M., Rings of continuous functions. Princeton, New Jersey—London, 1960.

<sup>13</sup> Т. е. алгебра  $A$  является замкнутой подалгеброй алгебры  $C(\mathfrak{M}(A), \mathbb{C})$ .

10. Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc., 1955, **16**, 1—186.
11. Hausner, A., Ideals in a certain Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, 246—249.
12. Hewitt, E., Rings of real-valued continuous functions, I. Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 45—99.
13. Hoffman, K., Fundamentals of Banach algebras. Curitiba, 1962.
14. Novak, J., On a problem concerning completely regular sets. Fundam. math., 1954, **41**, №1, 103—104.
15. Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **41**, 375—481.
16. Tamano, H., A note on the pseudocompactness of the product of two spaces. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math., 1960, **33**, № 2, 225—230.
17. Yood, B., Banach algebras of continuous functions. Amer. J. Math., 1951, **73**, 30—42.

Поступило  
26 V 1972

## MONINGAID BANACHI ALGEBRA VÄÄRTUSTEGA FUNKTSIOONIALGEBRATE OMADUSI

M. Abel

Resümee

Olgu  $C^*(X, A)$  kõigi pidevate tõkestatud funktsioonide hulk, mis on defineeritud topoloogilisel ruumil  $X$ , ning mille väärtused kuuluvad kompleksesse kommutatiivsesse ühikuga Banachi algebrasse  $A$ . Hulk  $C^*(X, A)$  moodustab ühikuga kommutatiivse Banachi algebra, kui algebralised operatsioonid defineerida nagu tavaliselt funktsioonide korral ning funktsiooni norm seose (1) abil. Käesolevas artiklis jätkatakse algebra  $C^*(X, A)$  algebraliste ja topoloogiliste omaduste uurimist, mis on alustatud töödes [1, 2]. Üldistatakse töös [11] saadud tulemused juhule, kui  $X$  — on pseudokompaktnel ruumil ning  $A$  — kommutatiivne Banachi algebra. Samuti uuritakse algebra  $C^*(X, A)$  regulaarsust, radikaali ja poollightsust ning algebrate  $C^*(X, A)$  ja  $C^*(Y, B)$  vahelist isomorfismi juhul, kui  $X$  ja  $Y$  on topoloogilised ruumid ning  $A$  ja  $B$  on kommutatiivsed Banachi algebrad.

## SOME PROPERTIES OF ALGEBRAS OF FUNCTIONS WITH VALUES IN A BANACH ALGEBRA

M. Abel

Summary

Let  $C^*(X, A)$  denote the set of all bounded continuous functions defined over topological space  $X$  with values in a complex commutative Banach algebra  $A$  with unit. If we define addition, multiplication and scalar multiplication in the natural "pointwise" manner and norm by (1), then  $C^*(X, A)$  is a commutative Banach algebra with unit.

In the present paper the study of algebraical and topological properties of algebra  $C^*(X, A)$  are continued which were begun in [1, 2]. The results of [11] are generalized in the case when  $X$  is a pseudocompact space and  $A$  is a commutative Banach algebra with unit. The regularity, the radical and the semi-simplicity of algebra  $C^*(X, A)$  are studied also. The isomorphisms of the algebras  $C^*(X, A)$  and  $C^*(Y, B)$  are described in the case, when the Banach algebras  $A$  and  $B$  are topologically isomorphic and the topological spaces  $X$  and  $Y$  are homeomorphic.

## ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ МЕТОДА РИСА. II

Г. Кангро

Кафедра математического анализа

1. Введение Пусть  $x = \{\xi_k\}$  — сходящаяся последовательность с  $\xi = \lim \xi_k$ ,  $\lambda = \{\lambda_k\}$  — монотонно возрастающая положительная последовательность и

$$\beta_k = \lambda_k (\xi_k - \xi).$$

Последовательность  $x$  называется  $\lambda$ -сходящейся (соответственно  $\lambda$ -ограниченной), если существует  $\lim \beta_k$  (соответственно  $\beta_k = O(1)$ ). Обозначим<sup>1</sup>

$$c^\lambda = \{x: \exists \lim \beta_k\}, \quad m^\lambda = \{x: \beta_k = O(1)\}.$$

Говорят, что метод суммирования последовательностей  $A$  сохраняет  $\lambda$ -сходимость (или  $\lambda$ -консервативен), если  $A(c^\lambda) \subset c^\lambda$ , и сохраняет  $\lambda$ -ограниченность, если  $A(m^\lambda) \subset m^\lambda$ . Необходимые и достаточные условия для того, чтобы матричный метод суммирования сохранял  $\lambda$ -сходимость или  $\lambda$ -ограниченность, даны в статьях [3, 6].

Последовательность  $x$  называется  $A^\lambda$ -суммируемой (соответственно  $A^\lambda$ -ограниченной), если  $Ax \in c^\lambda$  (соответственно  $Ax \in m^\lambda$ ). Обозначим

$$c_A^\lambda = \{x: Ax \in c^\lambda\}, \quad m_A^\lambda = \{x: Ax \in m^\lambda\}.$$

Рассмотрим тауберовы теоремы с остаточным членом, при которых имеет место включение

$$c_A^\lambda \cap T \subset c^\mu,$$

если  $A$  сохраняет  $\lambda$ -сходимость (тауберова теорема для  $A^\lambda$ -суммируемости), или включение

$$m_A^\lambda \cap T \subset m^\mu,$$

если  $A$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность (тауберова теорема для  $A^\lambda$ -ограниченности). При этом  $T$  — некоторое множество последовательностей (определяет тауберово условие), а  $\mu = \{\mu_n\}$  — монотонно возрастающая положительная последовательность, зависящая от  $\lambda$  и  $T$ .

<sup>1</sup> При  $\lambda_k = O(1)$  положим  $m^\lambda = m$ , где  $m$  — множество всех ограниченных последовательностей.

Первую тауберову теорему с остаточным членом доказал Морделль [11] в 1928 г. для метода арифметических средних. В 1938 г. Боас [8] доказал аналогичную теорему при иных предположениях. Теорему Морделля обобщил в 1935 г. Хигаки [9] на метод Риса первого порядка  $(R, p_n)$ , а в 1948 г. Минакшисундарам и Раджагопал [10] на метод Риса любого положительного порядка. Все эти результаты представляют собой по существу тауберову теорему для  $P^\lambda$ -ограниченности ( $P$  — соответствующий метод Риса), но с тем различием, что вместо естественного (с точки зрения теории суммируемости) предположения, чтобы рассматриваемый метод сохранял  $\lambda$ -ограниченность, на последовательность  $\lambda$  налагаются разные ограничения, зависящие от метода доказательства.

Тауберову теорему для  $P^\lambda$ -суммируемости, где  $P = (R, p_n)$  — метод Риса первого порядка, доказал автор [7] в 1971 г. в частном случае  $\mu = \lambda$ . Главная цель настоящей статьи — доказать тауберову теорему для  $P^\lambda$ -суммируемости в общем случае (теорема 4). Для этого оказалось необходимым предварительно установить соответствующую теорему для  $P^\lambda$ -ограниченности (теорема 2), которая доказывается и для одностороннего тауберова условия (теорема 3). Устанавливаются также необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод  $P$  сохранял  $\lambda$ -ограниченность (теорема 1), нужные для доказательства теоремы 2. Частный случай теоремы 1, когда  $p_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  (метод Зигмунда  $(Z, \alpha)$ ), доказывали Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [1].

2. Сохранение  $\lambda$ -ограниченности методом Риса. Регулярный метод Риса  $(R, p_n)$  с  $p_n > 0$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность тогда и только тогда, когда найдется независящая от  $n$  и  $k$  постоянная  $M > 0$  такая, что

$$\frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{\lambda_k} \leq M \quad (1)$$

(см. [6], стр. 139). Из (1) вытекает

$$\frac{\lambda_n}{P_n} \leq M \frac{\lambda_k}{P_k} \quad (k \leq n) \quad (2)$$

(см. [6], лемма 1). При некоторых ограничениях, наложенных на величины  $p_n$ , условие (2) можно усилить до необходимого и достаточного условия.

**Теорема 1.** Регулярный метод Риса  $(R, p_n)$  с  $p_n > 0$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность тогда и, в случае  $P_n = O(P_{n-1})$  только тогда, когда существует число  $\gamma \in (0, 1)$  такое, что

$$\frac{\lambda_n}{P_n^\gamma} \leq L \frac{\lambda_k}{P_k^\gamma} \quad (k \leq n), \quad (3)$$

где  $L$  не зависит от  $n$  и  $k$ .

Доказательство. Необходимость. Допустим, что метод  $(R, p_n)$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность. Тогда в силу условий (2), так как  $p_n > 0$  и  $P_n \leq NP_{n-1}$  при некоторой постоянной  $N > 0$ , имеем

$$\sum_{v=k+1}^n \frac{p_v}{\lambda_v} \geq \frac{1}{MN} \frac{P_k}{\lambda_k} \sum_{v=k+1}^n \frac{p_v}{P_{v-1}}.$$

Применяя к функции  $\ln x$  теорему Лагранжа о среднем значении на сегменте  $[P_{v-1}, P_v]$ , находим

$$\ln \frac{P_v}{P_{v-1}} < \frac{p_v}{P_{v-1}}$$

и, следовательно,

$$\sum_{v=k+1}^n \frac{p_v}{\lambda_v} \geq \frac{1}{MN} \frac{P_k}{\lambda_k} \ln \frac{P_n}{P_k}.$$

Ввиду (1) и неравенства  $P_n \leq NP_{n-1}$ , откуда следует

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_k} < \frac{M^2 N^2}{\ln(P_n/P_k)} \frac{P_{n-1}}{P_k} \quad (k < n). \quad (4)$$

Определим постоянную  $C$  неравенством

$$\frac{M^2 N^2}{\ln C} \leq \frac{1}{2}$$

и сопоставим каждому  $k$  натуральное число  $m_k$  такое, что

$$P_{m_{k-1}} \leq CP_k < P_{m_k}. \quad (5)$$

Поскольку  $M \geq 1$ ,  $N > 1$ , то  $C > e^2$  и, следовательно,  $m_k > k$ . Из (4) при  $n = m_k$  в силу (5) вытекает

$$\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_k} < \frac{1}{2} C. \quad (6)$$

Ввиду (6) и правого из неравенств (5) при  $\gamma > 0$  находим

$$\frac{\lambda_{m_k}}{P_{m_k}^\gamma} < \frac{1}{2} C^{1-\gamma} \frac{\lambda_k}{P_k^\gamma},$$

или

$$\frac{\lambda_{m_k}}{P_{m_k}^\gamma} < \frac{\lambda_k}{P_k^\gamma}, \quad (7)$$

если  $\gamma$  вычислить из условия  $C^{1-\gamma} = 2$ . Тем самым  $\gamma \in (0, 1)$ .

Для фиксированного  $k$  определим по индукции последовательность натуральных чисел  $n_v$  следующим образом:

$$n_0 = m_k, \quad n_v = m_{n_{v-1}} \quad \text{при } v > 0.$$

Так как  $m_k > k$  при каждом  $k$ , то  $n_v > n_{v-1}$  и, следовательно,  $n_v \rightarrow \infty$ . Поэтому для каждого  $n \geq k$  существует  $n_v$  такое, что  $n_{v-1} \leq n < n_v$ . Применяя неравенство (7) последовательно при

<sup>2</sup> Считаем  $n_{-1} = 0$ .

$k = n_{v-1}, n_{v-2}, \dots, n_0$ , получаем

$$\frac{\lambda_n}{P^{\gamma_n}} < \frac{\lambda_{n_v}}{P^{\gamma_{n_v}}} \frac{P^{\gamma_{n_v}}}{P^{\gamma_n}} < \frac{\lambda_k}{P^{\gamma_k}} \frac{P^{\gamma_{n_v}}}{P^{\gamma_n}},$$

откуда, в силу неравенства  $P_{n_v} \leq NP_{n_v-1}$  и левого из неравенств (5) при  $k = n_{v-1}$ , вытекает

$$\frac{\lambda_n}{P^{\gamma_n}} < \frac{\lambda_k}{P^{\gamma_k}} N^{\gamma} C^{\gamma} \frac{P^{\gamma_{n_v-1}}}{P^{\gamma_n}}.$$

Отсюда и следует необходимость условия (3) с  $L = N^{\gamma} C^{\gamma}$ .

Достаточность. Если условие (3) выполнено, то<sup>3</sup>

$$\frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{\lambda_k} \leq \frac{L}{P_n^{1-\gamma}} \sum_{k=0}^n \frac{\rho_k}{P_k^{\gamma}} = L \frac{\sum_{k=0}^n \rho_k P_k^{-\gamma}}{\sum_{k=0}^n (P_k^{1-\gamma} - P_{k-1}^{1-\gamma})}. \quad (8)$$

Имеем

$$\frac{\rho_k P_k^{-\gamma}}{P_k^{1-\gamma} - P_{k-1}^{1-\gamma}} = \frac{\rho_k k^{-\gamma}}{1 - (1 - \rho_k P_k^{-1})^{1-\gamma}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - (1-x)^{1-\gamma}} = \frac{1}{1-\gamma} < \infty,$$

то существует постоянная  $K$  такая, что  $x/[1 - (1-x)^{1-\gamma}] \leq K$  при  $x \in (0, 1)$ . Поэтому из (8) следует условие (1) с  $M = KL$ . Теорема доказана.

3. Тауберова теорема для  $P^{\lambda}$ -ограниченности. Соответственно регулярному методу Риса  $P = (R, p_n)$  с  $p_n > 0$  образуем метод Риса  $Q = (R, q_n)$  с

$$Q_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{p_k}{P_{k-1}} \sigma_k\right) \quad (n > 0), \quad Q_0 = p_0 = 1, \quad (9)$$

где  $1 \leq \sigma_k \uparrow$ . Легко проверить, что

$$q_n = \frac{p_n}{P_{n-1}} \sigma_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{p_k}{P_{k-1}} \sigma_k\right) \quad (n > 1), \quad q_1 = p_1 \sigma_1, \quad q_0 = 1. \quad (10)$$

Ввиду регулярности метода  $P$  имеем  $\lim P_n = \infty$ , вследствие чего  $\sum p_k/P_{k-1}$  расходится. Поэтому  $\lim Q_n = \infty$ , так как  $\sigma_n \geq 1$ , и метод  $Q$  регулярен, ибо  $q_n > 0$ .

**Лемма 1.** Если регулярный метод  $P$  с  $p_n > 0$  и  $P_n = O(P_{n-1})$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность, то  $Q$  также сохраняет  $\lambda$ -ограниченность.

Доказательство. Согласно теореме 1 из  $\lambda$ -ограниченности метода  $P$  следует существование числа  $\gamma \in (0, 1)$  такого, что имеет место (3). Из (9) в силу  $\sigma_v \geq 1$  вытекает

<sup>3</sup> Положим  $P_{-1} = 0$ .

$$\frac{Q_n}{Q_k} = \prod_{\nu=k+1}^n \left( 1 + \frac{p_\nu}{P_{\nu-1}} \sigma_\nu \right) \geq \prod_{\nu=k+1}^n \frac{P_\nu}{P_{\nu-1}} = \frac{P_n}{P_k},$$

и, следовательно,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_k} \leq L \left( \frac{Q_n}{Q_k} \right)^\nu \quad (k \leq n).$$

По теореме 1 метод  $Q$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если регулярный метод  $P = (R, p_n)$  с  $p_n > 0$  и  $P_n = O(P_{n-1})$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность, то имеет место включение

$$m^\mu_Q \supset m^\lambda_P, \quad (11)$$

где  $\mu = \{\mu_n\}$ ,  $0 < \mu_n \uparrow$ ,  $\sigma_n = \lambda_n / \mu_n$ ,  $1 \leq \sigma_n \uparrow$ .

Доказательство. Включение (11) справедливо тогда и только тогда, когда метод  $A = QP^{-1}$  обладает свойством  $A(m^\lambda) \subset m^\mu$ . Обозначив  $A = (a_{nk})$ , имеем

$$a_{nk} = \frac{P_k}{Q_n} \Delta \frac{q_k}{p_k} \quad (k < n), \quad a_{nn} = \frac{P_n}{Q_n} \frac{q_n}{p_n} \quad (12)$$

(см. [2], стр. 109). Из формулы (10) с помощью (9) находим

$$\frac{q_k}{p_k} = \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} \sigma_k \quad (k > 0) \quad (13)$$

и, следовательно,

$$\Delta \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} = \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} \left( 1 - \frac{Q_k}{P_k} \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) = \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} \left( 1 - \frac{Q_k p_k}{q_k P_k} \sigma_k \right).$$

Ввиду формул (9) и (10) имеем

$$\frac{Q_k}{q_k} \frac{P_k}{p_k} = \frac{P_{k-1} + p_k \sigma_k}{P_k \sigma_k}, \quad (14)$$

вследствие чего и формулы (13)

$$\Delta \frac{Q_{k-1}}{P_{k-1}} = \frac{q_k}{P_k} \frac{1 - \sigma_k}{\sigma_k}. \quad (15)$$

Из формул (12)–(15) при помощи формулы разности произведения получаем

$$a_{nk} = \frac{q_k}{Q_n} (1 - \sigma_k) + \frac{Q_k}{Q_n} \Delta \sigma_k \quad (k < n), \quad a_{nn} = \frac{P_n \sigma_n}{P_{n-1} + p_n \sigma_n}. \quad (16)$$

Метод  $A$  обладает свойством  $A(m^\lambda) \subset m^\mu$  тогда и только тогда, когда (см. [6], стр. 138)

$$1^\circ \exists \lim_n a_{nk} = a_k,$$

$$2^\circ Ae \in m^\mu,$$

$$3^\circ \sum_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty,$$

$$4^\circ \mu_n \sum_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1),$$

причем в случае  $^4 \mu_n = O(1)$  условия 1° и 3° отпадают, а в условии 4° следует положить  $a_k = 0$ . Поскольку  $\lim Q_n = \infty$ , то  $a_k = 0$  и условия 1° и 3° выполнены, условие 2° также выполнено, ибо  $Ae = Q(P^{-1}e) = Qe = e$ . Тем самым для доказательства леммы надо показать, что

$$\mu_n \sum_{k=0}^n \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k} = O(1). \quad (17)$$

С помощью преобразования Абеля, так как  $\mu_k = \lambda_k / \sigma_k$ , находим

$$\sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\mu_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \sigma_k \sum_{v=0}^k \frac{q_v}{\lambda_v} + \sigma_n \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\lambda_k}, \quad (18)$$

откуда, ввиду условия  $\Delta \sigma_k \leq 0$  и леммы 1, следует

$$\frac{\mu_n}{Q_n} \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\mu_k} = O(1). \quad (19)$$

В силу условия  $\sigma_k \uparrow$  из (18) получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \sigma_k| \sum_{v=0}^k \frac{q_v}{\lambda_v} = \sigma_n \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\lambda_k} - \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\mu_k}.$$

Но так как  $\lambda_k \uparrow$ , то

$$\frac{\lambda_k}{Q_k} \sum_{v=0}^k \frac{q_v}{\lambda_v} \geq 1$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\Delta \sigma_k|}{\lambda_k} Q_k \leq \sigma_n \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\lambda_k}.$$

Отсюда на основе леммы 1 вытекает

$$\frac{\mu_n}{Q_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\Delta \sigma_k|}{\lambda_k} Q_k = O(1). \quad (20)$$

Из формулы (16) ввиду леммы 1 и условий (19) и (20) следует выполнение условия (17). Лемма доказана.

В соответствии с заданным рядом  $\sum u_n$  рассмотрим тауберо-во условие

$$\tau_n P_n u_n = O(p_n), \quad (21)$$

где предположим, что  $\tau_n$  удовлетворяет условиям

$$1 \leq \frac{\lambda_n}{\tau_n} \uparrow, \quad \lambda_n \tau_n \uparrow. \quad (22)$$

**Теорема 2.** Если регулярный метод Риса  $P = (R, p_n)$  с  $p_n > 0$  и  $P_n = O(P_{n-1})$  сохраняет  $\lambda$ -ограниченность, то из  $P^\lambda$ -ограниченности ряда  $\sum u_n$  и тауберова условия (21) следует  $\mu$ -ограниченность этого ряда при  $\mu_n = (\lambda_n \tau_n)^{1/2}$ .

<sup>4</sup> Следует иметь в виду, что в [6] при  $\mu_n = O(1)$  полагается  $t^\mu = c$ , а в настоящей заметке  $t^\mu = t$ .

Доказательство. При  $\sigma_n = \lambda_n/\mu_n$  обозначим<sup>5</sup>

$$\eta_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{Q_{k-1}}{Q_n}\right) u_k, \quad \eta = \begin{cases} \lim_n \eta_n, & \mu_n \neq O(1), \\ 0, & \mu_n = O(1), \end{cases}$$

и оценим оба члена в правой части тождества

$$\mu_n(\xi_n - \eta) = \mu_n(\xi_n - \eta_n) + \mu_n(\eta_n - \eta), \quad (23)$$

где  $\xi_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ , в отдельности. В силу (21) и (13) получаем

$$\xi_n - \eta_n = \frac{O(1)}{Q_n} \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{\mu_k},$$

ибо

$$\tau_k \sigma_k = \mu_k. \quad (24)$$

Отсюда ввиду (19) заключаем

$$\mu_n(\xi_n - \eta_n) = O(1).$$

Поскольку

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\tau_n}}, \quad (25)$$

то  $1 \leq \sigma_n \uparrow$  в силу первого из условий (22). Поэтому на основе леммы 2 справедливо включение (11), вследствие чего из-за  $P^\lambda$ -ограниченности ряда  $\sum u_n$  вытекает

$$\mu_n(\eta_n - \eta) = O(1).$$

Из (23) теперь следует  $\mu$ -ограниченность ряда  $\sum u_n$ . Теорема доказана.

4. Случай одностороннего тауберова условия. Оказывается, что теорема 2 справедлива и при одностороннем тауберовом условии, например, при правостороннем условии

$$\tau_n P_n u_n = O_R(p_n), \quad (26)$$

где  $\tau_n$  удовлетворяет условиям (22), если на метод  $P$  налагать дополнительное ограничение

$$p_n \sigma_n = O(P_{n-1}), \quad (27)$$

где  $\sigma_n$  определяется формулой (25). Отметим, что из (27) и  $\sigma_n \geq 1$  вытекает условие  $P_n = O(P_{n-1})$ .

**Теорема 3.** Если регулярный метод Риса  $P = (R, p_n)$  с  $p_n > 0$  удовлетворяет условию (27) и сохраняет  $\lambda$ -ограниченность, то из  $P^\lambda$ -ограниченности ряда  $\sum u_n$  и тауберова условия (26) следует  $\mu$ -ограниченность этого ряда при  $\mu_n = (\lambda_n \tau_n)^{1/2}$ .

Доказательство. Обозначив

$$\beta_n = \mu_n(\xi_n - \eta),$$

методом доказательства теоремы 2 мы можем установить неравенство

$$\beta_n = O_R(1).$$

<sup>5</sup> Полагаем  $Q_{-1} = 0$ .

Остается доказать справедливость неравенства

$$\beta_n = O_L(1).$$

С помощью преобразования Абеля ввиду (24) при  $k > 0$  находим

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} Q_{v-1} \mu_v = -(Q_{n+k} \eta_{n+k} - Q_n \eta_n) + Q_{n+k} \xi_{n+k} - Q_n \xi_n,$$

откуда

$$\sum_{v=n+1}^{n+k} (Q_{n+k} - Q_{v-1}) \mu_v = Q_{n+k} \eta_{n+k} - Q_n \eta_n - (Q_{n+k} - Q_n) \xi_n.$$

Следовательно,

$$\beta_n = A_n - B_n, \quad (28)$$

где

$$A_n = \mu_n \frac{Q_{n+k}(\eta_{n+k} - \eta) - Q_n(\eta_n - \eta)}{Q_{n+k} - Q_n},$$

$$B_n = \mu_n \frac{\sum_{v=n+1}^{n+k} (Q_{n+k} - Q_{v-1}) \mu_v}{Q_{n+k} - Q_n}.$$

Поскольку  $Q_n \uparrow \infty$ , то неравенство

$$Q_{r-1} \leq 2Q_n < Q_r \quad (29)$$

однозначно определяет натуральное число  $r = r(n)$ , причем  $r > n$ . Поэтому имеем  $r = n + k$  при некотором  $k = k(n) > 0$ . Из (29) находим

$$Q_{n+k} - Q_n > Q_n, \quad (30)$$

$$Q_{n+k-1} \leq 2Q_n.$$

В силу (9) и (27) имеем  $Q_n = O(Q_{n-1})$ , вследствие чего из последнего неравенства получаем

$$Q_{n+k} = O(Q_n). \quad (31)$$

Согласно лемме 2 справедлива оценка  $\mu_n(\eta_n - \eta) = O(1)$  и на основе (30) и (31) имеем  $A_n = O(1)$ .

Ввиду условий (26) и  $q_n > 0$  при помощи формул (13) и (24) находим

$$B_n = O_R(\mu_n) \sum_{v=n+1}^{n+k} \frac{p_v}{\tau_v P_v} = O_R(\mu_n) \sum_{v=n+1}^{n+k} \frac{q_v}{Q_{v-1} \mu_v},$$

откуда, в силу монотонности последовательности  $\{Q_{v-1} \mu_v\}$ , получаем

$$B_n = O_R(\mu_n) \frac{Q_{n+k} - Q_n}{\mu_{n+1} Q_n}$$

и, на основе (31),

$$B_n = O_R(1).$$

В силу соотношения  $A_n = O(1)$  из (28) заключаем  $\beta_n = O_L(1)$ . Теорема доказана.

5. Тауберова теорема для  $P^\lambda$ -суммируемости. Чтобы вывести тауберову теорему для  $P^\lambda$ -суммируемости, рассмотрим вспомогательные методы Риса  $Q^\alpha = (R, q^{\alpha_n})$  с  $\alpha \geq 1$ , где  $q^{\alpha_n}$  получается из  $q_n$  заменой  $\sigma_n$  на  $\alpha\sigma_n$ . Тем самым  $Q^1 = Q$ . Из доказательств лемм 1 и 2 без труда выявляется, что эти леммы остаются справедливыми также для методов  $Q^\alpha$ .

**Теорема 4.** Если регулярный метод Риса  $P = (R, p_n)$  с  $p_n > 0$  и  $P_n = O(P_{n-1})$  сохраняет  $\lambda$ -сходимость, то из  $P^\lambda$ -суммируемости ряда  $\sum u_n$  и тауберова условия (21) следует  $\mu$ -сходимость этого ряда при  $\mu_n = (\lambda_n \tau_n)^{1/2}$ .

Доказательство. При  $\sigma_n = \lambda_n/\mu_n$  обозначим <sup>6</sup>

$$\eta^{\alpha_n} = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{Q^{\alpha_{k-1}}}{Q^{\alpha_n}}\right) u_k, \quad \eta = \lim_n \eta^{\alpha_n},$$

и оценим оба члена в правой части тождества

$$\mu_n (\xi_n - \eta) = \mu_n (\xi_n - \eta^{\alpha_n}) + \mu_n (\eta^{\alpha_n} - \eta) \quad (32)$$

в отдельности. При этом  $\eta$  не зависит от  $\alpha$ , ибо метод  $Q^\alpha$ , ввиду регулярности метода  $Q^{\alpha P^{-1}}$ , совместен с  $P$ . В силу соотношений (21), (13) (где следует заменить  $\sigma_k$  на  $\alpha\sigma_k$ ) и (24) имеем

$$\begin{aligned} |\xi_n - \eta^{\alpha_n}| &\leq \frac{1}{Q^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^n Q^{\alpha_{k-1}} |u_k| = \frac{O(1)}{\alpha Q^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^n \frac{q^{\alpha_k} P_{k-1}}{\tau_k \sigma_k P_k} = \\ &= \frac{O(1)}{\alpha Q^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^n \frac{q^{\alpha_k}}{\mu_k}. \end{aligned}$$

Поскольку  $Q^{\alpha_k}/Q^{\alpha_n}$  при  $\alpha \uparrow$  монотонно убывает для фиксированных  $n$  и  $k \leq n$ , то выражение

$$|\alpha_n| = \frac{\mu_n}{Q^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^n \frac{q^{\alpha_k}}{\mu_k} = \mu_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{Q^{\alpha_k}}{Q^{\alpha_n}} + 1$$

ввиду  $\mu_n \uparrow$  монотонно убывает при  $\alpha \uparrow$  для каждого фиксированного  $n$ . Поэтому в силу  $Q^1 = Q$  и (19) имеем

$$|\alpha_n| = O(1) \quad (33)$$

и, следовательно,

$$\mu_n |\xi_n - \eta^{\alpha_n}| \leq \frac{H}{\alpha}, \quad (34)$$

где  $H$  не зависит от  $n$  и  $\alpha$ .

Так как для методов  $Q^\alpha$  лемма 2 верна, то имеет место включение

$$m_{Q^\alpha}^\mu \supset m_P^\lambda. \quad (35)$$

Но  $P$  — это  $\lambda$ -корегулярный метод (см. [4], пример 1) и, стало быть,  $\lambda$ -совершенный (см. [5], пример 4). Согласно

<sup>6</sup> Отметим, что  $Q^{\alpha_n} = \sum_{k=0}^n q^{\alpha_k}$ ,  $Q^{\alpha_{-1}} = 0$ .

одной теореме автора (см. [5], теорема 4) из (35) вытекает включение

$$c_{Q^{\alpha}}^{\mu} \supset c_P^{\lambda} \quad (36)$$

тогда и только тогда, когда

$$Q^{\alpha} e_{\nu}, Q^{\alpha} e, Q^{\alpha} e^{\lambda} \in c^{\mu}.$$

Поскольку

$$Q^{\alpha} e_{\nu} = q_{\nu}^{\alpha} \left\{ \frac{1}{Q_n^{\alpha}} \right\},$$

а  $\mu_n/Q_n^{\alpha} = o(1)$  ввиду (33) (см. [6], лемма 1), то  $Q^{\alpha} e_{\nu} \in c^{\mu}$ . Условие  $Q^{\alpha} e \in c^{\mu}$  следует непосредственно из равенства  $Q^{\alpha} e = e$ . Наконец, вследствие формулы (25) в силу первого из условий (22) имеем  $1 \leq \sigma_n \uparrow$ . Без ограничения общности можно предполагать, что  $\sigma_n \rightarrow \infty$ . Действительно, в случае  $\sigma_n = O(1)$  существуют конечные, отличные от нуля пределы  $\lim (\lambda_n/\mu_n)$ ,  $\lim (\mu_n/\lambda_n)$  и, следовательно,  $c^{\mu} = c^{\lambda}$ , так что можно считать  $\mu = \lambda$ . Но в этом случае включение (36) имеет место (см. [7], стр. 159). Так как

$$Q^{\alpha} e^{\lambda} = \left\{ \frac{1}{Q_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^n \frac{q^{\alpha_k}}{\lambda_k} \right\},$$

и, в силу леммы 1 и  $\sigma_n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_n \frac{\mu_n}{Q_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^n \frac{q^{\alpha_k}}{\lambda_k} = \lim_n \frac{1}{\sigma_n} \cdot \frac{\lambda_n}{Q_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^n \frac{q^{\alpha_k}}{\lambda_k} = 0,$$

то  $Q^{\alpha} e^{\lambda} \in c^{\mu}$ . Тем самым условие (36) выполнено.

Из равенства (32) ввиду (34) и (36) находим

$$\overline{\lim} \mu_n (\xi_n - \eta) \leq \frac{H}{\alpha} + \lim_n \mu_n (\eta^{\alpha_n} - \eta),$$

$$\underline{\lim} \mu_n (\xi_n - \eta) \geq -\frac{H}{\alpha} + \lim_n \mu_n (\eta^{\alpha_n} - \eta),$$

откуда, учитывая независимость  $\eta$  от  $\alpha$ , при  $\alpha \rightarrow \infty$  получаем

$$\overline{\lim} \mu_n (\xi_n - \eta) \leq \underline{\lim} \mu_n (\xi_n - \eta).$$

Тем самым ряд  $\sum \mu_n$  является  $\mu$ -сходящимся, чем завершается доказательство теоремы.

### Литература

1. Бари Н. К., Стечкин С. Б., Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 483—522.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I. Изв. АН ЭстССР. Физ., Матем., 1969, 18, № 2, 137—146.
4. Кангро Г., О  $\lambda$ -совершенности методов суммирования и ее применениях. I. Изв. АН ЭстССР. Физ., Матем., 1971, 20, № 2, 111—120.

5. Кангро Г., О  $\lambda$ -совершенности методов суммирования. II. Изв. АН ЭстССР, Физ., Матем., 1971, 20, № 4, 375—385.
6. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов,  $\lambda$ -ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 136—154.
7. Кангро Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 155—160.
8. Boas, R. P., Tauberian theorems for  $(C, 1)$  summability. Duke Math. J., 1938, 4, 227—230.
9. Higaki, N., Some theorems on Riesz's method of summation. Tôhoku Math. J., 1935, 41, 70—79.
10. Minakshisundaram, S., Rajagopal, C. T., An extension of a Tauberian theorem of L. J. Mordell. Proc. London Math. Soc., 1948, 50, № 4, 242—255.
11. Mordell, L. J., A summability convergence theorem. J. London Math. Soc., 1928, 3, 86—89.

Поступило  
12 V 1972

## JÄÄKLIHKMEGA TAUBERI TEOREEM RIESZI MENETLUSE JAOKS. II

G. Kangro

Resümee

Jada  $x = \{\xi_n\}$  nimetatakse  $\lambda$ -koonduvaks ( $\lambda = \{\lambda_n\}$ ,  $0 < \lambda_n \uparrow$ ), kui eksisteerib lõplik piirväärtus  $\lim \lambda_n (\xi_n - \xi)$ , kus  $\xi = \lim \xi_n$ , ja  $\lambda$ -summeeruvaks maatriksmenetlusega  $A$  ehk lühidalt  $A\lambda$ -summeeruvaks, kui jada  $Ax$  on  $\lambda$ -koonduv. Kasutades kiirusega summeeruvuse teooria meetodeid (vt. [3—6]), tõestatakse järgmine jääkliikmega Tauberi teoreem Riesz'i kaalutud keskmiste menetluse  $P = (R, p_n)$  jaoks. Kui regulaarne menetlus  $P$ , kus  $p_n > 0$  ja  $P_n = O(P_{n-1})$  ning  $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$ , on  $\lambda$ -konservatiivne ja kehtib (22), siis  $P\lambda$ -summeeruv rida  $\sum u_n$ , mis rahuldab Tauberi tingimust (21), on  $\mu$ -koonduv, kus  $\mu = \{(\lambda_n \tau_n)^{1/2}\}$ . Erijuhtum  $\tau_n = \lambda_n$  on käsitletud artiklis [7].

## A TAUBERIAN REMAINDER THEOREM FOR THE RIESZ METHOD. II

G. Kangro

Summary

A sequence is said to be  $\lambda$ -convergent ( $\lambda = \{\lambda_n\}$ ,  $0 < \lambda_n \uparrow$ ) if the finite limit  $\lim \lambda_n (\xi_n - \xi)$  with  $\xi = \lim \xi_n$  exists, and  $\lambda$ -summable by a matrix method  $A$  or briefly  $A\lambda$ -summable if the sequence  $Ax$  is  $\lambda$ -convergent. The next Tauberian remainder theorem for the Riesz method of weighted means  $P = (R, p_n)$  by the methods of the theory of summability with a given rapidity (see [3—6]) is proved. If the regular method  $P$  with  $p_n > 0$  and  $P_n = O(P_{n-1})$  (where  $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$ ) is  $\lambda$ -conservative and (22) is fulfilled then from the  $P\lambda$ -summability of a series  $\sum u_n$  and from the Tauberian condition (21) follows  $\mu$ -convergence of  $\sum u_n$ , where  $\mu = \{(\lambda_n \tau_n)^{1/2}\}$ . The special case  $\tau_n = \lambda_n$  is considered in [7].

## НЕСКОЛЬКО ОБОБЩЕННЫХ ТАУБЕРОВЫХ ТЕОРЕМ

Т. Сырмус

Кафедра математического анализа

Пусть  $A = (a_{nh})$  — нижняя треугольная матрица. Число-  
вому ряду<sup>1</sup>

$$\sum_k u_k \quad (1)$$

с последовательностью  $x = \{x_k\}$  его частичных сумм

$$x_k = \sum_{i=0}^k u_i \quad (2)$$

поставим в соответствие последовательность  $Ax = \{A_n\}$ , где

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k. \quad (3)$$

Через  $\alpha$  и  $\beta$  будем обозначать любые из классов  $m$ ,  $c$ ,  $sp$ ,  $a$  или  $an$  соответственно ограниченных, сходящихся, сходящихся к нулю, абсолютно или абсолютно к нулю сходящихся последовательностей. При этом ряд (1) называют  $\alpha A$ -суммируемым методом  $A$  к сумме  $S_A$ , если  $\{A_n\} \in \alpha$  и  $\lim A_n = S_A$  при  $\alpha \neq m$ ; если  $\alpha = m$ , то ряд (1) называют  $A$ -ограниченным.

Пусть  $B = (b_{nh})$  — другой треугольный метод суммирования. Тауберовыми теоремами (коротко  $T$ -теоремами) типа  $(\alpha A, \beta B)$  называются теоремы, в которых из предположения  $\{A_n\} \in \alpha$  выводят заключение  $\{B_n\} \in \beta$ , если при этом на члены ряда (1) накладывается дополнительное, так называемое тауберово условие (коротко  $T$ -условие).

В настоящей статье рассматриваются  $T$ -теоремы типа  $(\alpha A, \beta B)$  и типа  $(\alpha A, \beta)$ . Аналогичные  $T$ -теоремы рассматривались в статье [7] Э. Реймерса и статье [8]. В указанных выше статьях  $T$ -условия выражались через разности  $\Delta B_n$  и элементы методов  $A$  и  $B^{-1}$  или соответственно члены ряда (1), сложно связанные с  $B$ -преобразованием величин

<sup>1</sup> Всюду, где индексы суммирования или свободные индексы не указаны, они пробегают все значения  $0, 1, 2, \dots$ . При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_n x_n = \lim x_n.$$

$$\alpha_k^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left( \sum_{j=0}^i \alpha_{kj} \right) u_{i+1}.$$

В данной статье получены  $T$ -условия нового типа, где члены ряда (1) более просто связаны с элементами методов  $A$  и  $B$ .

В § 1 даны вспомогательные результаты. В § 2 рассматриваются  $T$ -теоремы типов  $(\alpha A, \beta B)$  и  $(\alpha A, \beta)$  с точными<sup>2</sup>  $T$ -условиями и приводятся некоторые примеры. В § 3 рассматриваются  $T$ -теоремы типов  $(\alpha A, \alpha B)$  с достаточными  $T$ -условиями и некоторые применения полученных теорем.

## § 1. Обозначения и одна лемма

### 1.1. Обозначения и условия суммируемости.

Пусть  $\alpha A = \{x : Ax \in \alpha\}$ ,

$$\alpha_{ki} = \sum_{j=0}^i \alpha_{kj} \quad (i=0, 1, \dots, k), \quad (4)$$

$$\alpha_k = \alpha_{kk} \quad (5)$$

и

$$\mathfrak{A}_{-1}(u) = 0, \quad \mathfrak{A}_{k-1}(u) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{ki} u_{i+1} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (6)$$

Аналогичные обозначения используем и для матрицы  $B = (b_{nk})$ . Определим последовательность

$$\mathfrak{D}_n^{AB}(u) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \mathfrak{A}_{n-1}(u) - \mathfrak{B}_{n-1}(u) \quad (n=1, 2, \dots), \quad (7)$$

причем будем полагать

$$\mathfrak{D}_0^{AB}(u) = 0.$$

Для ряда (1) и методов  $A$  и  $B$ , удовлетворяющих условию

$$\inf |\alpha_n| > 0, \quad (8)$$

имеют место равенства (см. [8], формула (13))

$$x_n = [A_n + \mathfrak{A}_{n-1}(u)] / \alpha_n$$

и

$$x_n = [B_n + \mathfrak{B}_{n-1}(u)] / \beta_n.$$

Из последних равенств вытекает формула

$$B_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} A_n + \mathfrak{D}_n^{AB}(u). \quad (9)$$

Говорят, что метод  $A$   $\alpha$ -включает метод  $B$ , если  $\alpha B \subseteq \alpha A$ . Аналогично при включении  $\beta B \subseteq \alpha A$  говорят, что метод  $A$   $\alpha$ -включает  $\beta B$ . Если  $B$  — единичный метод  $E$ , то  $\alpha$ -включение класса  $\beta E$ , т. е.  $\beta \subseteq \alpha A$  означает, что все  $x \in \beta$  являются  $\alpha A$ -суммируемыми. При этом будем писать  $A \in (\beta, \alpha)$ .

<sup>2</sup> О понятиях точных и достаточных  $T$ -условий см. [3] и [7].

Введем следующие условия для метода  $A = (a_{nk})$ :

$$\sum_{k=0}^n |a_{nk}| = O(1); \quad (a)$$

$$\lim a_n = a; \quad (b)$$

$$\lim_n a_{nk} = a_k; \quad (c)$$

$$\lim \sum_{k=0}^n |a_{nk} - a_k| = 0; \quad (d)$$

$$a_{mn} = O(1); \quad (e)$$

$$\sum_n \left| \sum_{v=k}^n \bar{\Delta}_n a_{nv} \right| = O(1). \quad (f)$$

Для включения  $c \subseteq cA$  необходимы и достаточны условия (a), (b) и (c), для  $t \subseteq tA$  условие (a), для  $m \subseteq cA$  условия (a), (c) и (d), для  $m \subseteq cnA$  условия (c) и (d) при  $a_k = 0$ , для  $c \subseteq cnA$  условия (a), (b) и (c) при  $a = a_k = 0$ , для  $cn \subseteq cnA$  условия (a) и (c) при  $a_k = 0$ , для  $a \subseteq aA$  условия (b), (c) и (f), для  $an \subseteq anA$  условия (c) при  $a_k = 0$  и (f).

1.2. Одна лемма. В нижеследующей лемме воспользуемся классом  $l = \{x : \Sigma |x_k| < \infty\}$  и последовательностью  $z = \{\beta_n/a_n\}$ , соответствующей методам  $A$  и  $B$ .

**Лемма 1.** Пусть  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  — треугольные методы, из которых  $A$  удовлетворяет условию (8). Для любой последовательности  $x \in aA$  справедливо утверждение  $\{\beta_n A_n / a_n\} \in \beta$  при

- 1°  $a \subseteq \beta = t, c, a$ , если  $z \in \beta$ ;
- 2°  $a \subseteq \beta = cn$ , если  $z \in t$ ;
- 3°  $a = \beta = an$ , если  $z \in a$ ;
- 4°  $a \subseteq t, \beta \subseteq cn$ , если  $z \in cn$ ;
- 5°  $a \subseteq t, \beta = a$ , если  $z \in l$ ;
- 6°  $a \subseteq a, \beta = an$ , если  $z \in an$ .

**Доказательство.** 1. Начнем с доказательства случая  $a = \beta = a$ . Покажем, что из  $x \in aA$  следует  $\{\beta_n A_n / a_n\} \in a$ , если  $z \in a$ . Поскольку по условию  $\Sigma |\Delta A_n| < \infty$  и  $\Sigma |\Delta(\beta_n/a_n)| < \infty$ , то верно как  $\Sigma |\Delta|\beta_n/a_n|| < \infty$ , так и  $\Sigma |A_{n+1}| |\Delta(\beta_n/a_n)| < \infty$ . Ввиду теоремы Дедекинда — Адамара (см. например [1], теорема 21.1) тогда сходится и ряд  $\Sigma |\beta_n \Delta A_n / a_n|$ . Из сходимости последних двух рядов ввиду равенства

$$\Delta \left( \frac{\beta_n}{a_n} A_n \right) = \frac{\beta_n}{a_n} \Delta A_n + A_{n+1} \Delta \left( \frac{\beta_n}{a_n} \right) \quad (10)$$

вытекает нужная нам оценка  $\Sigma |\Delta(\beta_n A_n / a_n)| < \infty$ .

2. В случае  $a = \beta = an$  получается утверждение леммы также из равенства (10) при  $z \in a$  и условии  $x \in anA$ .

3. При  $\alpha \in m$  и  $\beta = a$  утверждение леммы также следует из равенства (10) и условий  $z \in l$ ,  $x \in mA$ .

Справедливость утверждения леммы во всех остальных случаях очевидна.

## § 2. Общие теоремы с точными условиями

Рассмотрим общие  $T$ -теоремы типов  $(\alpha A, \beta B)$  и  $(\alpha A, \beta)$  с точными  $T$ -условиями.

2.1. Тауберовы теоремы типа  $(\alpha A, \beta B)$ . Из  $T$ -теорем указанного типа наиболее общей является

**Теорема 1.** Пусть методы  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  такие, что  $A$  удовлетворяет условию (8), а метод<sup>3</sup>

$$\mathcal{C} = (\delta_{nk} \beta_k \alpha_k^{-1}) \in (\alpha, \beta). \quad (11)$$

Для того, чтобы из  $x \in \alpha A$  следовало  $x \in \beta B$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\mathfrak{D}_n^{\alpha B}(u) \in \beta. \quad (12)$$

Доказательство. Отметим, во-первых, что для любой последовательности  $x$  и методов  $A, B$ , из которых  $A$  удовлетворяет условию (8), справедливо равенство (9). На основании условия (11) и предположения  $x \in \alpha A$  заключаем, что  $\{\beta_n A_n / \alpha_n\} \in \beta$ . Поэтому из равенства (9) следует, что условие (12) есть точное условие для того, чтобы из  $x \in \alpha A$  следовало  $x \in \beta B$ . Теорема доказана.

Поскольку условие (11) в теореме 1 в общем случае кажется сильно ограничительным, уместно отметить, что лемма 1 предоставляет возможность ослабить или вообще опустить это условие в случае конкретных пар  $\alpha$  и  $\beta$ . Так, например, для  $T$ -теорем типа  $(\alpha A, \alpha B)$  при  $\alpha = m, c$  и  $A, B \in (m, m)$  или соответственно  $A, B \in (c, c)$  условие (11) опускается, поскольку оно выполняется без дополнительных требований.

Для методов  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  при условиях  $a_n = a \neq 0$ ,  $\beta_n = b$  всегда верно утверждение  $\{\beta_n A_n / \alpha_n\} \in a$ , если  $x \in \alpha A$ . Понятно, что как в данном случае, так и в случае его нижеуказанного обобщения непосредственным следствием теоремы 1 является

**Теорема 2.** Пусть методы  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  такие, что для  $\{\alpha_n\}$  выполнено условие (8) и

$$\exists \lim a_n = a, \quad \exists \lim \beta_n = b, \quad (13)$$

или

$$\{\beta_n / \alpha_n\} \in a. \quad (14)$$

Для того, чтобы из  $x \in \alpha A$  следовало  $x \in \alpha B$  при  $\alpha = m, c$ ,  $sp$  или соответственно  $\alpha = a, ap$ , необходимо и достаточно выполнение условия (12) при  $\beta = a$ .

<sup>3</sup> Через  $\delta_{nk}$  обозначен символ Кронекера.

Нижеследующий пример поясняет, что из  $T$ -условия (12) в частном случае, когда  $A = (C, r + 1)$ ,  $B = (C, r)$  при  $r > -1$  и  $\alpha = c$ , вытекает известное (см. [9], теорема 65) точное  $T$ -условие

$$B_n^r = o(n^{r+1}) \quad (15)$$

для того, чтобы из  $x \in c(C, r + 1)$  последовало  $x \in c(C, r)$ .  
Здесь

$$B_n^0 = \sum_{h=1}^n k u_h \quad \text{и} \quad B_n^r = \sum_{h=0}^n B_k^{r-1}.$$

**Пример 1.** Пусть  $A = (C, r + 1)$ ,  $B = (C, r)$  и  $r > -1$ . Тогда  $\alpha_n = \beta_n = 1$  и для методов  $A, B$  выполняются условия (8), (13) и (14), а точное  $T$ -условие (12) принимает вид<sup>4</sup>

$$\mathfrak{D}_n^{AB}(u) = \frac{1}{(n+r+1)A_n^r} \sum_{h=1}^n k A_{n-h}^r u_h \in \alpha.$$

Из полученного точного  $T$ -условия в частном случае при  $\alpha = c$  вытекает эквивалентное  $T$ -условию (15) условие

$$\sum_{h=1}^n k A_{n-h}^r u_h = o(n^{r+1}).$$

Для установления связи некоторых  $T$ -теорем из данной статьи с соответствующими теоремами из статьи [8] выведем из теоремы 1 следующее

**Следствие 1.1.** Из  $x \in \alpha A$  следует  $x \in \beta B$  для метода  $B = (b_{nk})$ , удовлетворяющего условию  $\beta_n = O(1)$ , и метода  $A = (a_{nk})$ , удовлетворяющего

1° условию (8) при  $\alpha = \beta = t$  или соответственно  $cn$ , точно тогда, когда

$$\mathfrak{D}_n^{AB}(u) = O(1), \quad (16)$$

или соответственно

$$\mathfrak{D}_n^{AB}(u) = o(1); \quad (17)$$

2° условиям (8) и

$$\lim |a_n| = \infty \quad (18)$$

при  $\alpha = t$  и  $\beta = cn$  или соответственно  $\beta = c$ , точно тогда, когда выполнено (17) или соответственно

$$\exists \lim \mathfrak{D}_n^{AB}(u) = s \neq \pm \infty. \quad (19)$$

**Доказательство.** 1°. На основании условий  $\beta_n = O(1)$  и (8) заключаем, что  $\{\beta_n/a_n\} \in t$ . Поэтому из части 1° или соответственно 2° леммы 1 вытекает утверждение: если  $x \in \alpha A$ , то  $\{\beta_n A_n/a_n\} \in \alpha$  при  $\alpha = t$  или соответственно  $\alpha = cn$ . Но тогда условия (16) или соответственно (17) по теореме 1 являются точными условиями для того, чтобы из  $x \in \alpha A$  следовало  $x \in \alpha B$  при  $\alpha = t$  или соответственно  $\alpha = cn$ .

<sup>4</sup> Здесь, как обычно,  $A_n^r = \binom{n+r}{n}$ .

Аналогично при помощи части 4° леммы 1 доказываемся вторая часть данного следствия.

Также выводится из теоремы 1 на основании части 1° леммы 1

**Следствие 1.2.** Из  $x \in \alpha A$  следует  $x \in \beta B$  для метода  $B = (b_{nk})$ , удовлетворяющего условию (b), и метода  $A = (a_{nk})$ , удовлетворяющего условиям (8) и (b), точно тогда, когда выполняется условие (19).

2.2. Теоремы типа  $(\alpha A, \beta)$ . Тауберовы теоремы указанного типа получаются из теорем предыдущего пункта при  $B = E$ . Поскольку в этом случае  $\mathfrak{B}_{n-1}(u) = 0$ , а  $\beta_n = 1$ , то формулы (7) обращаются в

$$\mathfrak{D}_0^{AE}(u) = 0, \quad \mathfrak{D}_n^{AE}(u) = \alpha_n^{-1} \mathfrak{A}_{n-1}(u) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Таким образом равенство (9) переходит в

$$x_n = \alpha_n^{-1} A_n + \alpha_n^{-1} \mathfrak{A}_{n-1}(u), \quad (20)$$

а условие (11) в

$$\mathfrak{C}' = (\delta_{nk} \alpha_k^{-1}) \in (\alpha, \beta). \quad (21)$$

На основании приведенных равенств и теоремы 1 считаем доказанной следующую Т-теорему.

**Теорема 3.** Пусть метод  $A = (a_{nk})$  удовлетворяет условиям (8) и (21). Для того, чтобы из  $x \in \alpha A$  следовало  $x \in \beta$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\alpha_n^{-1} \mathfrak{A}_{n-1}(u) \in \beta.$$

Далее выведем из теоремы 3 следствие, содержащее в частных случаях как теорему 2.2.1 из статьи [7], так и теорему 2 из [8].

**Следствие 3.1.** Из  $x \in \alpha A$  следует  $x \in \beta$  для метода  $A = (a_{nk})$ , удовлетворяющего условию (8) и

а) условию  $\alpha_n = O(1)$  при  $\alpha = \beta = t$ , сн,

б) условию

$$\{\alpha_n^{-1}\} \in \alpha \quad (22)$$

при  $\alpha = \beta = a$ , ап,

в) условию (b) при  $\alpha = \beta = c$ ,

г) условию (18) при  $\alpha = t$ ,  $\beta = сн$  или соответственно  $\alpha = t$ ,  $\beta = c$ , точно тогда, когда

$$\{\mathfrak{A}_{n-1}(u)\} \in \beta$$

(для случаев а), б) и в)),

а в случае г)

$$\mathfrak{A}_{n-1}(u) = o(\alpha_n)$$

или соответственно

$$\exists \lim \mathfrak{A}_{n-1}(u) / \alpha_n = s \neq \pm \infty.$$

**Доказательство.** Проведем доказательство части б) при  $\alpha = \beta = a$ .

Из предположения  $\{A_n\} \in a$  и условий (8) и (22) на основании части 1° леммы 1, где  $B = E$ , заключаем, что  $\{A_n / \alpha_n\} \in a$ . Ввиду такой же аргументации

$$\{\mathfrak{A}_{n-1}(u)/a_n\} \in a, \quad (23)$$

если  $\{\mathfrak{A}_{n-1}(u)\} \in a$ . Но для последнего заключения справедливо и обратное утверждение. Действительно: поскольку предположено (23), (8) и (22), то

$$0 < |\alpha_n|^{-1} \leq M < \infty \text{ и } \mathfrak{A}_{n-1}(u) = O(1).$$

Поэтому на основании равенства

$$\Delta(\mathfrak{A}_{n-1}(u)/a_n) = \Delta \mathfrak{A}_{n-1}(u)/a_n + \mathfrak{A}_n(u) \Delta(1/a_n)$$

можем сказать, что  $\{\mathfrak{A}_{n-1}(u)\} \in a$ .

Итак, условие (22) необходимо и достаточно для выполнения условия (23) и справедливость доказываемой части б) следствия вытекает из теоремы 3.

Аналогично доказываются остальные случаи следствия 3.1.

Замечание. Части а), в) и г) следствия 3.1 можно получить и из следствий 1.1 и 1.2.

### § 3. Несколько тауберовых теорем с достаточными условиями

Из  $T$ -теорем с достаточными условиями ограничимся теоремами типа  $(\alpha A, \alpha B)$  и  $(\alpha A, \alpha)$  при  $\alpha = t$  или  $\alpha = c$ . Для этих случаев дадим общие легко проверяемые достаточные  $T$ -условия, пригодные довольно широким классам треугольных методов  $A$  и  $B$ .

3.1. Некоторые достаточные условия. Пусть из методов  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  первый удовлетворяет условию (8). Предположим, что для отличных от нуля чисел  $c_k$  выполняется условие

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} + b_{nk} \right| |c_k| = O(1). \quad (24)$$

В качестве достаточных  $T$ -условий для последовательности (2) в  $T$ -теоремах типа  $(\alpha A, \alpha B)$  воспользуемся следующими:

$$\sum_{j=0}^k \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nj} - b_{nj} \right) u_{k+1} = O \left( \left[ \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} + b_{nk} \right] c_k \right) \quad (25)$$

или

$$\sum_{j=0}^k \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nj} - b_{nj} \right) u_{k+1} = o \left( \left[ \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} + b_{nk} \right] c_k \right), \quad (26)$$

которые должны будут выполняться равномерно<sup>5</sup> относительно  $n$  в процессе  $k \rightarrow \infty$ .

Из  $T$ -условий (25) и (26) при  $B = E$  получаются  $T$ -условия

$$a_{nk} u_{k+1} = O(a_{nk} c_k) \quad (27)$$

или соответственно

$$a_{nk} u_{k+1} = o(a_{nk} c_k), \quad (28)$$

<sup>5</sup> Определение приведенного понятия дано в статье [8].

которые рассматривались в  $T$ -теоремах статьи [8] с их интерпретациями.

**3.2. Основные теоремы.** Докажем две наиболее общие  $T$ -теоремы типа  $(\alpha A, \alpha B)$  с достаточными  $T$ -условиями (25) и (26).

**Теорема 4.** Пусть методы  $A = (a_{nk})$ ,  $B = (b_{nk})$  и последовательность  $\{c_k\}$  такие, что выполняется условие (24) при  $A$ , удовлетворяющем условию (8) и  $B$  — условию (а). Если  $x \in mA$  и удовлетворяет условию (25) равномерно по  $n$ , то  $x \in mB$ .

Поскольку метод доказательства приведенной теоремы аналогичен методу доказательства теоремы 3 из статьи [8], мы опускаем доказательство.

**Теорема 5.** Пусть методы  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  удовлетворяют условиям (а), (б) и (с) при  $a_k = b_k = 0$ , метод  $A$  удовлетворяет условию (8), а последовательность чисел  $\{c_k\}$  такова, что выполняется (24). Если  $x \in cA$  и удовлетворяет условию (26) равномерно по  $n$ , то  $x \in cB$ .

**Доказательство.** Ввиду условия (26) для любого  $\varepsilon > 0$  фиксируем такой номер  $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ , чтобы

$$\left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} - \beta_{nk} \right| |u_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{M} \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} + b_{nk} \right| |c_k| \quad (29)$$

для  $n \geq k > N_1$ , где постоянную  $M$  определим ниже. При таких  $n$  и  $k$  напомним равенство

$$\mathfrak{D}_n^{AB}(u) = \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} - \beta_{nk} \right) u_{k+1} + \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} - \beta_{nk} \right) u_{k+1}. \quad (30)$$

Из условий (8), (б) и (с) при  $a_k = b_k = 0$  следуют равенства

$$\lim_n \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} - \beta_{nk} \right) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, N_1).$$

Поэтому для  $\varepsilon > 0$  можно определить такое  $N_2 > N_1$ , что при  $n > N_2$  и обозначении

$$\sum_{k=1}^{N_1} |u_{k+1}| = P$$

установится неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} - \beta_{nk} \right) u_{k+1} \right| < \frac{\varepsilon P}{M}.$$

Ввиду (29) при  $k = N_1 + 1, \dots, n-1$  и  $n > N_2$  можем написать

$$\sum_{k=N_1+1}^{n-1} \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} - \beta_{nk} \right| |u_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} + b_{nk} \right| |c_k|.$$

На основании равенства (30) с учетом последних двух неравенств теперь следует, что для  $n > N_2$  верна оценка

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_n^{AB}(u)| &< \frac{\varepsilon}{M} \left( P + \sum_{k=N_2+1}^{n-1} \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} a_{nk} + b_{nk} \right| |c_k| \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M} (P+Q), \end{aligned}$$

где  $Q$  — постоянная из условия (24). Если положить  $M = P+Q$ , то полученное неравенство и означает, что  $\mathfrak{D}_n^{AB}(u) = o(1)$ . Поскольку метод  $\mathfrak{C} = (\delta_{nk}\beta_k/\alpha_k) \in (c, c)$  при условиях (8), (a), (b) и (c), то условия (11) и (12) теоремы 1 выполнены для случая  $\alpha = \beta = c$ . Поэтому из теоремы 1 следует: если  $x \in cA$ , то  $x \in cB$ , что и доказывалось.

Для регулярных методов  $A$  и  $B$ , удовлетворяющих условию  $\alpha_n = \beta_n = 1$ , из теоремы 5 без трудностей вытекает

**Следствие 5.1.** Пусть регулярные методы  $A = (a_{nk})$  и  $B = (b_{nk})$  удовлетворяют условию  $\alpha_n = \beta_n = 1$ , а последовательность чисел  $\{c_k\}$  такова, что

$$\sum_{k=0}^n |a_{nk} + b_{nk}| |c_k| = O(1).$$

Если  $x \in cA$  и удовлетворяет условию

$$(a_{nk} - \beta_{nk}) u_{k+1} = o(|a_{nk} + b_{nk}| c_k) \quad (31)$$

равномерно по  $n \geq k$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $x \in cB$ .

В качестве применения следствия 5.1 рассмотрим пример на получение  $T$ -теоремы для конкретных методов суммирования и последовательности  $c_k = 1$ .

**Пример 2.** Пусть  $A = (R, p_k)$  — регулярный метод Риса и  $B = (C, 1)$ .

В данном случае  $T$ -условие (31) принимает вид

$$\left( \frac{p_k}{P_n} - \frac{k+1}{n+1} \right) u_{k+1} = o \left( \left[ \frac{p_k}{P_n} + \frac{1}{n+1} \right] c_k \right) \quad (32)$$

или при  $c_k = 1$

$$\left( \frac{p_k}{P_n} - \frac{k+1}{n+1} \right) u_{k+1} = o \left( \frac{p_k}{P_n} + \frac{1}{n+1} \right), \quad (33)$$

где  $k \rightarrow \infty$  и условия выполняются равномерно по  $n$ .

Понятно, что  $T$ -условием в данном случае также является

$$\left( \frac{|p_k|}{|P_n|} + \frac{k+1}{n+1} \right) u_{k+1} = o \left( \frac{p_k}{P_n} + \frac{1}{n+1} \right), \quad (34)$$

равномерно выполняемое по  $n$  при  $k \rightarrow \infty$ . При этом из условия (34) следует условие (33), так что (33) по сравнению с (34) есть ослабленное  $T$ -условие.

В частности, если  $(R, p_k) = (C, 1)$ , то условие (33) выполняется для любой последовательности  $x \in c(C, 1)$ , а (34) — для тех  $x \in c(C, 1)$ , которые удовлетворяют условию

$$(k+1)u_{k+1} = o(1),$$

т. е. известному  $T$ -условию для  $(C, 1)$ -суммируемости.

Поскольку для всякой последовательности  $|c_k| \geq 1$ , удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{p_k}{P_n} + \frac{1}{n+1} \right| |c_k| = O(1),$$

$T$ -условие (32) ослаблено по сравнению с (33), но случай  $\lim c_k = \pm \infty$  исключен, то  $T$ -условие (33) является в известном смысле оптимальным.

Таким образом, установлена следующая  $T$ -теорема как следствие из теоремы 5.

**Следствие 5.2.** Пусть метод Риса  $(R, p_k)$  регулярен. Если  $x \in c(R, p_k)$  и удовлетворяет условию (33), то  $x \in c(C, 1)$ .

В качестве обобщения следствия 5.2 приведем

**Следствие 5.3.** Пусть регулярный метод  $B = (b_{nk})$  удовлетворяет условию  $\beta_n = 1$  и  $A = (R, p_k)$  — регулярный метод Риса. Если  $x \in cB$  и удовлетворяет условию

$$\left( \beta_{nk} - \frac{p_k}{P_n} \right) u_{k+1} = o \left( b_{nk} + \frac{p_k}{P_n} \right) \quad (35)$$

равномерно по  $n \geq k$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $x \in c(R, p_k)$ .

Можно показать, как и в примере 2, что  $T$ -условие (35) является в известном смысле оптимальным  $T$ -условием.

Используя точные условия включения  $c(C, 1) \subseteq c(R, p_k)$  или  $c(R, p_k) \subseteq cB$ , т. е. (см. теорему Гарабедяна и Рандельса [10])

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\Delta p_k| + (n+1) |p_n| = O(P_n)$$

или соответственно (см. [2], стр. 219)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| P_k \Delta \left( \frac{b_{nk}}{p_k} \right) \right| + \left| \frac{P_n}{p_n} b_{nn} \right| = O(1),$$

можно показать, что условие (33) или соответственно (35) является в некотором смысле ослабленными  $T$ -условиями и для методов  $c(R, p_k) \subseteq cB$ .

3.3. Теоремы типа  $(\alpha A, \alpha)$  с достаточными условиями. Положив в теоремах 4 и 5 метод  $B = E$ , без трудностей получают следующие  $T$ -теоремы типа  $(\alpha A, \alpha)$  для случаев  $\alpha = t$  и  $\alpha = c$  с достаточными  $T$ -условиями (27) и (28).

**Теорема 6.** Пусть метод  $A = (a_{nk})$ , удовлетворяющий условию (8), и последовательность чисел  $\{c_k\}$  таковы, что

$$\sum_{k=0}^n |a_{nk}| |c_k| = O(a_n). \quad (36)$$

Если  $x \in tA$  и удовлетворяет условию (27) равномерно по  $n$ , то  $x \in t$ .

**Теорема 7.** Пусть метод  $A = (a_{nk})$  удовлетворяет условиям (8), (a), (b) и (c) при  $a_k = 0$ , а последовательность чисел  $\{c_k\}$  такова, что выполняется условие (36). Если  $x \in sA$  и удовлетворяет условию (28) равномерно по  $n$ , то  $x \in s$ .

Теорема 7 при  $c_k = 1$  есть следствие 2 из статьи [8] и соответствующем методе  $A$ .

Примерами применения теоремы 7 могут послужить примеры 1 и 2 из указанной статьи [8] (см. также [5, 6]). Следует отметить, что известные  $T$ -условия (60) и (61) (см. [8]) для методов Риса и соответственно логарифмических средних являются в известном смысле наилучшими, однако в рамках данной статьи  $o$ -условиями. Тауберова теорема типа  $(sA, c)$  для метода Риса с  $O$ -условиями вытекает как частный случай из  $T$ -теорем с остаточным членом для метода Риса (см. [4], стр. 159).

### Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191—232.
3. Кангро Г., О независимости тауберовых условий от порядка суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 122—130.
4. Кангро Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 155—160.
5. Кауфман Б. Л., О теоремах тауберова типа для логарифмических методов суммирования. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 1, 57—62.
6. Новикова Н. С., Теоремы тауберова типа для логарифмических средних. В сб. «Материалы межвузовск. конференции молодых ученых матем.» Харьков, 1966, 97—101.
7. Реймерс Э., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 23—51.
8. Сырмус Т., Теоремы тауберова типа для различных видов суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 103—117.
9. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
10. Garabedian, H. L., Randels, W. C., Theorems on Riesz means. Duke Math. J., 1938, 4, 529—533.

Поступило  
6 VII 1972

### MÕNED OLDISTATUD TAUBERI TEOREEMID

T. Sõrmus

Resümee

Olgu  $A$  normaalne ja  $B$  kolmnurkne summeerimismenetlus. Sümbolitega  $\alpha$  ja  $\beta$  tähistatakse suvalisi klasse jadaklassidest  $m, c, cn, a$  ja  $an$ .

Artiklis antakse üldised tarvilikud ja piisavad Tauberi tingimused ( $T$ -tingimused) selleks, et antud rea summeeruvusest menetlusega  $A$  mingil viisil  $\alpha$  järelduks selle rea summeeruvus menetlusega  $B$  viisil  $\beta$ . Need tingimused on oluliselt lihtsamad artiklites [7, 8] tuletatud  $T$ -tingimustest. Erijuhul, kus

$A = (C, r + 1)$ ,  $B = (C, r)$ ,  $r > -1$  ja  $a = \beta = c$ , saadakse tingimusest (12) tuntud (vt. [9], teoreem 65)  $T$ -tingimus (15). Tõos tuletatud tarvilike ja piisavate  $T$ -tingimuste kaudu tuletatakse ka efektiivsemad piisavad  $T$ -tingimused, mis osutuvad teatud mõttes optimaalseteks (vt. § 3).

## EINIGE ALLGEMEINE TAUBERSCHE SÄTZE

T. Sõrmus

### Zusammenfassung

Es sei  $A$  eines normales,  $B$  eines dreieckiges Matrixverfahren. Mit den Symbolen  $a$  und  $\beta$  bezeichnen wir die Folgenklassen  $m$ ,  $c$ ,  $cn$ ,  $a$  und  $an$ .

In dem vorliegenden Artikel werden einige allgemeine notwendige und hinreichende Tauber-Bedingungen ( $T$ -Bedingungen) für Tauber-Sätze ( $T$ -Sätze) des Typus  $(\alpha A, \beta B)$  gefunden, in denen aus der  $\beta B$ -Limitierbarkeit einer Folge die  $\alpha A$ -Limitierbarkeit resultiert. Diese  $T$ -Bedingungen sind wesentlich einfacher, als die vorhin bekannte (sie z. B. [7, 8]). Gleichzeitig ist der  $T$ -Satz (siehe z. B. [9], Satz 65) für der Cesàrosche Transformation  $A = (C, r + 1)$ ,  $B = (C, r)$ ,  $r > -1$  und den Fall  $a = \beta = c$  verallgemeinert.

Dabei werden auch einige effektive hinreichende  $T$ -Bedingungen (siehe den § 3) abgeleitet, die im gewissen Sinn optimal sind.

## О ДВОЙНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

И. Огиевецкий и А. Пидгайко

Днепропетровский государственный университет

В работе изучаются свойства двойных числовых последовательностей ограниченной вариации, рассматриваются связи между вариациями двойной последовательности и ее двойной подпоследовательности. Рассматриваются некоторые свойства так называемых вполне неубывающих последовательностей. Показывается, что любая последовательность ограниченной вариации представима разностью вполне неубывающих двойных последовательностей.

Принадлежащее Харди определение двойной числовой последовательности ограниченной вариации (см. [2]) формулируется следующим образом. Для двойной последовательности  $\{S_{mn}\}$  положим

$$\text{var}_n \{S_{mn}\} = \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n S_{mn}|, \quad (1)$$

$$\text{var}_m \{S_{mn}\} = \sum_{m=0}^{\infty} |\Delta_m S_{mn}|, \quad (2)$$

$$\text{var}_{m,n} \{S_{mn}\} = \sum_{m,n=0}^{\infty} |\Delta_{mn} S_{mn}|. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta_n S_{mn} = S_{mn} - S_{m,n+1}$ ,  $\Delta_m S_{mn} = S_{mn} - S_{m+1,n}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} S_{mn} &= \Delta_n \Delta_m S_{mn} = \Delta_m \Delta_n S_{mn} = \\ &= S_{mn} - S_{m+1,n} - S_{m,n+1} + S_{m+1,n+1}. \end{aligned}$$

Величины (1), (2), (3) определяют значения вариаций двойной последовательности  $\{S_{mn}\}$ . Говорят, что двойная последовательность  $\{S_{mn}\}$  имеет ограниченную вариацию<sup>1</sup>, если одно-

<sup>1</sup> Непрерывный аналог рассмотренного определения приводит к одному из возможных определений функции ограниченной вариации. Действительно, пусть  $\{x_m\}$  и  $\{y_n\}$  — некоторые последовательности, принадлежащие отрезкам  $(a, b)$  оси абсцисс и  $(c, d)$  оси ординат соответственно. Положим в (1), (2) и (3) числа  $S_{mn} = f(x_m, y_n)$  и пусть суммы в правых частях (1), (2) и (3) равномерно ограничены относительно любого выбора последовательностей  $\{x_m\}$  и  $\{y_n\}$ . Тогда говорят, что  $f(x, y)$  имеет ограниченную вариацию в прямоугольнике  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ .

временно ряд (1) сходится для всех  $m = 0, 1, \dots$ , ряд (2) сходится для всех  $n = 0, 1, \dots$  и ряд (3) сходится.

Отметим (ср. [2], теорема 6), что в предположении сходимости ряда (3) из сходимости ряда (1) для какого-либо фиксированного  $m$  (скажем  $k$ ), вытекает сходимость ряда (1) для всех  $m = 0, 1, \dots$ , ввиду равенства

$$\Delta_n S_{mn} = \Delta_n S_{kn} - \sum_{\mu=k}^{m-1} \Delta_{\mu n} S_{\mu n}.$$

Аналогично из сходимости ряда (3) и сходимости ряда (2) для какого-либо  $n$  (скажем  $l$ ) вытекает сходимость ряда (2) для всех  $n = 0, 1, \dots$ .

Пусть теперь  $m = m(\alpha)$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ , и  $n = n(\beta)$ ,  $\beta = 0, 1, 2, \dots$  — монотонно возрастающие целочисленные функции такие, что  $m(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $n(\beta) \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow \infty$ . Тогда любая подпоследовательность последовательности  $\{S_{mn}\}$  будет задаваться парой функций  $m = m(\alpha)$ ,  $n = n(\beta)$ . Установим связь между вариациями последовательности  $\{S_{mn}\}$  и ее произвольной подпоследовательности  $\{S_{m(\alpha), n(\beta)}\}$ .

**Теорема 1.** *Имеют место следующие неравенства*

$$\text{var}_{\alpha} \{S_{m(\alpha), n(\beta)}\} \leq \text{var}_m \{S_{m, n(\beta)}\}, \quad (4)$$

$$\text{var}_{\beta} \{S_{m(\alpha), n(\beta)}\} \leq \text{var}_n \{S_{m(\alpha), n}\}, \quad (5)$$

$$\text{var}_{\alpha, \beta} \{S_{m(\alpha), n(\beta)}\} \leq \text{var}_{m, n} \{S_{m, n}\}. \quad (6)$$

**Доказательство.** Неравенства (4) и (5) устанавливаются аналогично, поэтому ограничимся доказательством, например, (4). Так как

$$\Delta_{\alpha} S_{i(\alpha), j(\beta)} = \sum_{m=i(\alpha)}^{i(\alpha+1)-1} \Delta_m S_{m, j(\beta)},$$

то

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} |\Delta_{\alpha} S_{i(\alpha), j(\beta)}| \leq \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=i(\alpha)}^{i(\alpha+1)-1} |\Delta_m S_{m, j(\beta)}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |\Delta_m S_{m, j(\beta)}|.$$

Следовательно,  $\text{var}_{\alpha} \{S_{i(\alpha), j(\beta)}\} \leq \text{var}_m \{S_{m, j(\beta)}\}$ , что и доказывает (4).

Докажем неравенство (6). Так как

$$\Delta_{\alpha} S_{i(\alpha), j(\beta)} = \sum_{m=i(\alpha)}^{i(\alpha+1)-1} \Delta_m S_{m, j(\beta)}, \quad \Delta_{\beta} S_{i(\alpha), j(\beta)} = \sum_{n=j(\beta)}^{j(\beta+1)-1} \Delta_n S_{i(\alpha), n},$$

то

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta\alpha} S_{i(\alpha),j(\beta)} &= \Delta_{\beta} \Delta_{\alpha} S_{i(\alpha),j(\beta)} = \Delta_{\beta} \sum_{m=i(\alpha)}^{i(\alpha+1)-1} \Delta_m S_{m,j(\beta)} = \\ &= \sum_{m=i(\alpha)}^{i(\alpha+1)-1} \Delta_m \Delta_{\beta} S_{m,j(\beta)} = \sum_{m,n=i(\alpha),j(\beta)}^{i(\alpha+1)-1,j(\beta+1)-1} \Delta_{mn} S_{mn}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} |\Delta_{\alpha\beta} S_{i(\alpha),j(\beta)}| \leq \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} \sum_{m,n=i(\alpha),j(\beta)}^{i(\alpha+1)-1,j(\beta+1)-1} |\Delta_{mn} S_{mn}| \leq \sum_{m,n=0}^{\infty} |\Delta_{mn} S_{mn}|,$$

что и устанавливает (6).

**Следствие.** Двойная числовая последовательность имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, если имеет ограниченную вариацию любая ее двойная подпоследовательность.

Следующая теорема связывает вопрос о сходимости двойной числовой последовательности с вопросом об ограниченности ее вариации.

**Теорема 2.** Если двойная числовая последовательность имеет ограниченную вариацию, то существуют пределы  $\lim_n S_{m,n}$  ( $m = 0, 1, \dots$ ),  $\lim_m S_{m,n}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $\lim_{m,n} S_{m,n}$ .

Доказательство идентичного утверждения см. [1], стр. 277, теорема 9.

Введем класс вполне неубывающих числовых последовательностей следующим образом.

**Определение.** Последовательность  $\{S_{mn}\}$  называется вполне<sup>2</sup> неубывающей, если выполняются условия (а)  $\Delta_n S_{mn} \leq 0$  ( $m = 0, 1, \dots$ ), (б)  $\Delta_m S_{mn} \leq 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), (в)  $\Delta_{mn} S_{mn} \geq 0$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ).

Целесообразность введения этого класса заключается в том, что, как показывается ниже, любая двойная последовательность ограниченной вариации представима в виде разности некоторых вполне неубывающих последовательностей ограниченной вариации.

**Теорема 3.** Если последовательность  $\{S_{mn}\}$  вполне неубывающая и ограничена сверху, то она является последовательностью ограниченной вариации.

**Доказательство.** Так как  $\Delta_n S_{mn} \leq 0$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) и  $\{S_{mn}\}$  ограничена сверху, т. е.  $S_{mn} \leq M$  при некотором  $M = \text{const}$ , то  $\{S_{mn}\}$  сходится при каждом фиксированном  $m$ . Так как

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i S_{mi}| = - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i S_{mi} = -S_{m0} + S_{mn}$$

<sup>2</sup> Двойная последовательность  $\{S_{mn}\}$ , удовлетворяющая условиям (а) и (б), называется *неубывающей* (для нее  $S_{pq} \geq S_{mn}$ , если  $p \geq m$ ,  $q \geq n$ ). Известно, что если  $\{S_{mn}\}$  неубывает и ограничена сверху, то она сходится.

и  $\lim_n S_{mn}$  существует, то ряд (1) сходится при каждом данном  $m = 0, 1, \dots$ . Аналогичным образом доказываем сходимость ряда (2) при каждом  $n = 0, 1, \dots$ .

Так как последовательность  $\{S_{mn}\}$  не убывает и ограничена сверху, то существует  $\lim_{m,n} S_{mn}$ . Поэтому из равенства

$$\sum_{i,j=0}^{m-1, n-1} |\Delta_{ij} S_{ij}| = S_{00} - S_{m0} - S_{0n} + S_{mn},$$

вытекает сходимость ряда (3). Таким образом, теорема доказана.

**Теорема 4.** Если последовательность  $\{S_{mn}\}$  имеет ограниченную вариацию, то она представима в форме разности двух вполне неубывающих ограниченных последовательностей.

**Доказательство.** Для последовательности  $\{S_{m0}\}$  положим

$$\begin{aligned} p_{m0} &= \Delta_m S_{m0}, & \text{если } \Delta_m S_{m0} \geq 0, \\ p_{m0} &= 0, & \text{если } \Delta_m S_{m0} < 0, \\ q_{m0} &= -\Delta_m S_{m0}, & \text{если } \Delta_m S_{m0} < 0, \\ q_{m0} &= 0, & \text{если } \Delta_m S_{m0} \geq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что  $p_{m0} \geq 0, q_{m0} \geq 0, \Delta_m S_{m0} = p_{m0} - q_{m0}$ , откуда

$$S_{m0} = S_{00} - \sum_{k=0}^{m-1} p_{k0} + \sum_{k=0}^{m-1} q_{k0}. \quad (7)$$

Заметим, что так как  $\{S_{mn}\}$  имеет ограниченную вариацию, то ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{k0} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_{k0}$$

сходятся.

Аналогично, для последовательности  $\{S_{0n}\}$  положим

$$\begin{aligned} u_{0n} &= \Delta_n S_{0n}, & \text{если } \Delta_n S_{0n} \geq 0, \\ u_{0n} &= 0, & \text{если } \Delta_n S_{0n} < 0, \\ v_{0n} &= -\Delta_n S_{0n}, & \text{если } \Delta_n S_{0n} < 0, \\ v_{0n} &= 0, & \text{если } \Delta_n S_{0n} \geq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что  $u_{0n} \geq 0, v_{0n} \geq 0, \Delta_n S_{0n} = u_{0n} - v_{0n}$ , откуда

$$S_{0n} = S_{00} - \sum_{k=0}^{n-1} u_{0k} + \sum_{k=0}^{n-1} v_{0k}. \quad (8)$$

В силу того, что  $\{S_{mn}\}$  — последовательность ограниченной вариации, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_{0k}$$

сходятся.

Положим

$$\begin{aligned} P_{mn} &= \Delta_{mn} S_{mn}, & \text{если } \Delta_{mn} S_{mn} \geq 0, \\ P_{mn} &= 0, & \text{если } \Delta_{mn} S_{mn} < 0, \\ Q_{mn} &= -\Delta_{mn} S_{mn}, & \text{если } \Delta_{mn} S_{mn} < 0, \\ Q_{mn} &= 0, & \text{если } \Delta_{mn} S_{mn} \geq 0, \end{aligned}$$

причем  $P_{mn} \geq 0$ ,  $Q_{mn} \geq 0$ ,  $\Delta_{mn} S_{mn} = P_{mn} - Q_{mn}$ . Так как

$$S_{00} - S_{m0} - S_{0n} + S_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m-1, n-1} \Delta_{kl} S_{kl} = \sum_{k,l=0}^{m-1, n-1} P_{kl} - \sum_{k,l=0}^{m-1, n-1} Q_{kl},$$

то отсюда, используя (7) и (8), имеем

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= \sum_{k,l=0}^{m-1, n-1} P_{kl} + \sum_{k=0}^{m-1} q_{k0} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{0k} - \\ &- \left( \sum_{k,l=0}^{m-1, n-1} Q_{kl} + \sum_{k=0}^{m-1} p_{k0} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{0k} \right) + S_{00} = \\ &= \varphi(m, n) + \psi(m, n), \end{aligned}$$

причем  $S_{00}$  включаем в  $\varphi(m, n)$  или  $\psi(m, n)$ . Несложные вычисления дают

$$\Delta_n \varphi(m, n)_i = - \sum_{k=0}^{m-1} P_{kn} - v_{0n} \leq 0,$$

$$\Delta_m \varphi(m, n)_i = - \sum_{l=0}^{n-1} P_{ml} - q_{m0} \leq 0,$$

$$\Delta_{mn} \varphi(m, n)_i = P_{mn} \geq 0.$$

Следовательно,  $\varphi(m, n)$  вполне неубывающая. Аналогично получим, что и  $\psi(m, n)$  — вполне неубывающая последовательность. Ограниченность последовательностей  $\varphi(m, n)$  и  $\psi(m, n)$  следует из того, что они сконструированы из элементов  $\{S_{mn}\}$  — последовательности ограниченной вариации.

### Литература

1. Hamilton, H. J., On transformations of double series. Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 275—283.
2. Hardy, G. H., On the convergence of certain multiple series. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1917, 19, 86—95.

Поступило  
20 X 1971

## **TÖKESTATUD MUUDUGA KAHEKORDSETEST ARVJADADEST**

**I. Ogievetski ja A. Pidgaiko**

Resümee

Uuritakse Hardy mõttes tõkestatud muuduga kahekordsete jadade mõningaid lihtsamaid omadusi. Eriti näidatakse, et iga kahekordne tõkestatud muuduga jada avaldub kahe täielikult mittekahaneva kahekordse jada vahena.

## **ON DOUBLE SEQUENCES OF NUMBERS OF BOUNDED VARIATION**

**I. Ogievetski and A. Pidgaiko**

Summary

Some simple properties of double sequences of bounded variation in the sense of Hardy are studied. It is shown in particular that every double sequence of bounded variation appears as a difference of two completely nondecreasing double sequences.

## О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ДЛЯ МЕТОДОВ $A^{\alpha, \beta}$

С. Барон

Кафедра математического анализа

М. Тяхт

Кружок СНО при кафедре математического анализа

Пусть  $A = (a_{mnkl})$  — нормальный метод суммирования двойных числовых рядов<sup>1</sup>

$$\sum_{m,n} u_{mn}, \quad (1)$$

определенный преобразованием

$$U'_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl} u_{kl}. \quad (2)$$

Если двойная числовая последовательность  $\{U'_{mn}\}$  сходится (или<sup>2</sup>  $b$ -сходится,  $r$ -сходится, ограничена), то двойной ряд (1) называется  $A$ -суммируемым (соответственно  $A_b$ -суммируемым,  $A_r$ -суммируемым,  $A$ -ограниченным). Если же  $\{U'_{mn}\}$  сходится абсолютно, т. е. если

$$\sum_{m,n} |u'_{mn}| < \infty,$$

где<sup>3</sup>

$$u'_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl} u_{kl}, \quad (3)$$

то ряд (1) называется абсолютно  $A$ -суммируемым, или  $A_l$ -суммируемым.

Класс всех  $A_b$ -суммируемых (соответственно  $A_r$ -суммируемых,  $A$ -ограниченных,  $A_l$ -суммируемых) двойных рядов (1) обозначим через  $A_b$  (соответственно  $A_r$ ,  $A_0$  или  $A_l$ ).

<sup>1</sup> Если пределы изменения индексов у знаков  $\Sigma$  и  $O$  не указаны, то они пробегают все целочисленные значения от 0 до  $+\infty$ .

<sup>2</sup> Двойная последовательность  $\{U_{mn}\}$  называется  $b$ -сходящейся ( $r$ -сходящейся), если она сходится и ограничена (соответственно сходится и существуют все  $\lim_m U_{mn}$  и  $\lim_n U_{mn}$ ).

<sup>3</sup> Во всей статье пользуемся обозначением  $\bar{s}_{m,nkl} = \bar{\Delta}_{m,n} s_{m,nkl} = s_{m,nkl} - s_{m-1,nkl} - s_{m,n-1,kl} + s_{m-1,n-1,kl}$ , причем выражения с отрицательными индексами считаем равными нулю.

Пусть  $B = (\beta_{mnkl})$  — треугольный метод суммирования двойных рядов.

Комплексные числа  $\varepsilon_{mn}$  называются *множителями суммируемости типа*  $(A_b, B_r)$ , коротко  $\varepsilon_{mn} \in (A_b, B_r)$ , если любой  $A_b$ -суммируемый двойной ряд (1) порождает  $B_r$ -суммируемый двойной ряд

$$\sum_{m,n} \varepsilon_{mn} u_{mn}. \quad (4)$$

Остальные типы множителей суммируемости определяются аналогично.

Положим  $A = A^{\alpha, \beta}$ , где  $A^{\alpha, \beta}$  — факторизируемый нормальный метод с обратной матрицей  $A^{-1} = (\eta_{mnkl})$ , факторы  $A' = (\alpha'_{mk})$  и  $A'' = (\alpha''_{nl})$  которого имеют в своих обратных матрицах  $(\eta'_{mk})$  и  $(\eta''_{nl})$  соответственно  $\alpha + 2$  и  $\beta + 2$  отличных от нуля диагоналей, т. е.

$$\eta'_{mk} = 0 \text{ при } k < m - \alpha - 1, \quad \eta''_{nl} = 0 \text{ при } l < n - \beta - 1.$$

Как и в статьях [4, 5] обозначим

$$H\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha+1, n+\beta+1} \eta_{\mu\nu mn} \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$H'\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{m+\alpha+1} \eta_{\mu mn} \varepsilon_{\mu n},$$

$$H''\varepsilon_{mn} = \sum_{\nu=n}^{n+\beta+1} \eta_{m\nu mn} \varepsilon_{m\nu},$$

$$G\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha+1, n+\beta+1} (m+\alpha+2-\mu)(n+\beta+2-\nu) \eta_{\mu\nu mn} \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$G'\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{m+\alpha+1} (m+\alpha+2-\mu) \eta_{\mu mn} \varepsilon_{\mu n},$$

$$G''\varepsilon_{mn} = \sum_{\nu=n}^{n+\beta+1} (n+\beta+2-\nu) \eta_{m\nu mn} \varepsilon_{m\nu},$$

$$L'\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha+1, n+\beta+1} (m+\alpha+2-\mu) \eta_{\mu\nu mn} \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$L''\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha+1, n+\beta+1} (n+\beta+2-\nu) \eta_{\mu\nu mn} \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$K\varepsilon_{mn} = \sum_{k, l=m, n}^{m+\alpha, n+\beta} \sum_{\mu, \nu=k, l}^{m+\alpha, n+\beta} \eta_{\mu\nu kl} \varepsilon_{\mu\nu},$$

$$K'\varepsilon_{mn} = \sum_{k=m}^{m+\alpha} \sum_{\mu=k}^{m+\alpha} \eta_{\mu nk} \varepsilon_{\mu n},$$

$$K''\varepsilon_{mn} = \sum_{l=n}^{n+\beta} \sum_{\nu=l}^{n+\beta} \eta_{m\nu ml} \varepsilon_{m\nu}.$$

Мы не останавливаемся на том, как эти выражения выглядят для конкретных методов суммирования. Это легко получить, рассматривая одномерные аналоги по статье [3].

В настоящей статье докажем следующие теоремы, в которых предполагается, что  $a_{mn00} = 1$  (что имеет место для многих методов, имеющих практическое значение) и для всех  $0 \leq m, n \leq \alpha + 1, \beta + 1$  существуют конечные

$$D_{mn} = \sup_{k,l} |a_{k+m, l+n, k+m, l+n} \eta_{k+m, l+n, k, l}|,$$

а  $B$  является факторизируемым, причем  $\beta_{m n k l} = \beta'_{m k} \beta''_{n l}$ .

**Теорема 1.** Пусть факторы метода  $A^{\alpha, \beta}$  сохраняют сходимость и факторы метода  $B$  нормальны и регулярны, причем выполнены условия <sup>4</sup>:

$$b_{m+1, n, m+1, n} = O(b_{m n m n}), \quad b_{m, n+1, m, n+1} = O(b_{m n m n}), \quad (5)$$

$$\sum_{k,l=0}^{m-1, n-1} |b_{k l k l}^{-1} \Delta_{k l} b_{m n k l}| = O(1). \quad (6)$$

Для того, чтобы  $\varepsilon_{mn}$  были множителями суммируемости типов а)  $(A_r^{\alpha, \beta}, B)$ , б)  $(A_r^{\alpha, \beta}, B_b)$ , в)  $(A_r^{\alpha, \beta}, B_\tau)$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^\circ \varepsilon_{mn} = O(a_{m n m n} / \beta_{m n m n}),$$

$$2^\circ \sum_{m, n} |H \varepsilon_{mn}| < \infty,$$

$$3^\circ \beta''_{n n} \sum_m |H' \varepsilon_{mn}| = O(1), \quad \beta'_{m m} \sum_n |H'' \varepsilon_{mn}| = O(1),$$

$$4^\circ \sum_{k, l=0}^{m, n} |b_{m n, k+\alpha+2, l+\beta+2} G \varepsilon_{k l}| = O(1),$$

$$5^\circ \sum_{k=0}^m |b_{m n, k+\alpha+2, n} G' \varepsilon_{k n}| = O(1), \quad \sum_{l=0}^n |b_{m n m, l+\beta+2} G'' \varepsilon_{m l}| = O(1),$$

$$6^\circ \sum_l \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+\alpha+2} L' \varepsilon_{k l}| = O(1), \quad \sum_k \sum_{l=0}^n |b''_{n, l+\beta+2} L'' \varepsilon_{k l}| = O(1).$$

**Теорема 2.** Пусть факторы метода  $A^{\alpha, \beta}$  сохраняют сходимость, а факторы метода  $B$  нормальны, регулярны и удовлетворяют условиям (5) и (6). Для того, чтобы  $\varepsilon_{mn}$  были множителями суммируемости типов а)  $(A_b^{\alpha, \beta}, B)$ , б)  $(A_b^{\alpha, \beta}, B_b)$ , в)  $(A_b^{\alpha, \beta}, B_\tau)$ , необходимо и достаточно выполнение условий  $1^\circ - 6^\circ$  и

$$7^\circ \lim_n \beta''_{n n} H' \varepsilon_{mn} = 0, \quad \lim_m \beta'_{m m} H'' \varepsilon_{mn} = 0,$$

$$8^\circ \lim_{m, n} \sum_{k=0}^m |b_{m n, k+\alpha+2, l+\beta+2} G \varepsilon_{k l}| = \lim_{m, n} \sum_{l=0}^n |b_{m n, k+\alpha+2, l+\beta+2} G \varepsilon_{k l}| = 0,$$

<sup>4</sup> Всяду  $b_{m n k l} = \Delta_{k l} \beta_{m n k l}$ , т. е.  $(b_{m n k l}) = (b'_{m k}) \odot (b''_{n l})$  — матрица метода  $B$  преобразования последовательности в последовательность.

$$9^\circ \lim_m \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+\alpha+2} L' \varepsilon_{kl}| = 0, \quad \lim_n \sum_{l=0}^n |b''_{n, l+\beta+2} L'' \varepsilon_{kl}| = 0,$$

а в случае в), кроме того,

$$10^\circ \lim_m \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+\alpha+2} G \varepsilon_{kl}| = 0, \quad \lim_n \sum_{l=0}^n |b''_{n, l+\beta+2} G \varepsilon_{kl}| = 0,$$

$$11^\circ \lim_m \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+\alpha+2} G' \varepsilon_{kn}| = 0, \quad \lim_n \sum_{l=0}^n |b''_{n, l+\beta+2} G'' \varepsilon_{ml}| = 0,$$

$$12^\circ \lim_m (\beta_{mnmn} \varepsilon_{mn} / \alpha_{mnmn}) = 0, \quad \lim_n (\beta_{nmnl} \varepsilon_{mn} / \alpha_{nmnl}) = 0.$$

**Теорема 3.** Пусть факторы метода  $A^{\alpha, \beta}$  сохраняют ограниченность, а факторы метода  $B$  нормальны, регулярны и удовлетворяют условиям (5) и (6). Для того, чтобы  $\varepsilon_{mn}$  были множителями суммируемости типов а)  $(A_0^{\alpha, \beta}, B)$ , б)  $(A_0^{\alpha, \beta}, B_b)$ , в)  $(A_0^{\alpha, \beta}, B_r)$ , необходимо и достаточно выполнение условий  $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 5^\circ$  и

$$13^\circ \lim_n \beta''_{nn} \sum_m |H' \varepsilon_{mn}| = 0, \quad \lim_m \beta'_{mm} \sum_n |H'' \varepsilon_{mn}| = 0,$$

$$14^\circ \lim_{m, n} (\beta_{mnmn} \varepsilon_{mn} / \alpha_{mnmn}) = 0,$$

$$15^\circ \lim_{m, n} \sum_{k=0}^m |b_{mn, k+\alpha+2, n} G' \varepsilon_{kn}| = 0, \quad \lim_{m, n} \sum_{l=0}^n |b_{mnm, l+\beta+2} G'' \varepsilon_{ml}| = 0,$$

$$16^\circ \lim_m \sum_l \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+\alpha+2} L' \varepsilon_{kl}| = 0, \quad \lim_n \sum_k \sum_{l=0}^n |b''_{n, l+\beta+2} L'' \varepsilon_{kl}| = 0,$$

$$17^\circ \lim_{m, n} \sum_{k, l=0}^{m, n} |b_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2} G \varepsilon_{kl}| = 0,$$

а для случая в) вдобавок к ним еще  $10^\circ, 11^\circ$  и  $12^\circ$ .

**Теорема 4.** Пусть факторы метода  $A^{\alpha, \beta}$  сохраняют абсолютную сходимость факторы метода  $B$  нормальны, абсолютно регулярны и удовлетворяют условиям:

$$b_{mnmn} = O(b_{m+1, n, m+1, n}), \quad b_{nmnl} = O(b_{m, n+1, m, n+1}), \quad (7)$$

$$\sum_{m, n=k, l}^{\infty} |\bar{b}_{mnl}| = O(b_{klkl}). \quad (8)$$

Для того, чтобы  $\varepsilon_{mn}$  были множителями суммируемости типов а)  $(A_l^{\alpha, \beta}, B)$ , б)  $(A_l^{\alpha, \beta}, B_b)$ , в)  $(A_l^{\alpha, \beta}, B_r)$ , г)  $(A_l^{\alpha, \beta}, B_l)$ , необходимо и достаточно выполнение условий  $1^\circ$  и

$$2^\circ K \varepsilon_{mn} = O(1),$$

$$3^\circ \beta''_{nn} K' \varepsilon_{mn} = O(1), \quad \beta'_{mm} K'' \varepsilon_{mn} = O(1).$$

В статье [5] найдены множители суммируемости типов  $(A_{0}^{\alpha,\beta}, B_l)$ ,  $(A_b^{\alpha,\beta}, B_l)$  и  $(A_r^{\alpha,\beta}, B_l)$  даже для нефакторизируемых методов  $B$ , удовлетворяющих условиям (7) и (8). В случае, когда  $\alpha = \beta = 1$  и  $A^{1,1}$  есть метод взвешенных средних Риса  $P = (R, p_{mn})$ , теоремы<sup>5</sup> 1—4 доказаны в статьях [1, 8], не требуя от  $B$  выполнения условий (5) и (6). В случае, когда  $A^{\alpha,\beta}$  есть метод Чезаро  $S^{\alpha,\beta}$ , теоремы 1—4 известны при  $B = C^{\gamma,\delta}$  с  $\gamma, \delta \geq 0$ , хотя (см. [3], стр. 175—176) условия (6) и (8) выполнены при  $0 \leq \gamma, \delta \leq 1$  и при  $0 < \operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Re} \delta < 1$ .

Что касается множителей сходимости, то из теорем 1—3 при  $\alpha = \beta = 0$  и  $B = A^{0,0} = E$ , где  $E$  — метод сходимости, вытекают все известные результаты Харди, Мура, Кожима и Гамильтона (см. [7], стр. 30, 37 и 42), а множители суммируемости типов  $(P_b, E)$ ,  $(P_b, E_b)$ ,  $(P_b, E_r)$ ,  $(P_0, E)$ ,  $(P_0, E_b)$  и  $(P_0, E_r)$  найдены Кангро в [6] даже для нефакторизируемого  $P$ . Работа [6] Кангро — первая работа о множителях суммируемости двойных рядов после появления в 1938 году монографии Мура [10], посвященной множителям сходимости. В [6] Кангро дал новый метод нахождения основных эффективных необходимых условий для множителей суммируемости и тем самым ликвидировал сравнительно длительный застой в развитии теории множителей суммируемости двойных рядов, в то время как теория множителей суммируемости обыкновенных рядов интенсивно развивалась.

Доказательство теоремы 1. Аналогично как в доказательстве теоремы 3 из [4] получаем, что  $\varepsilon_{mn} \in (A_r^{\alpha,\beta}, B)$  тогда и только тогда, когда при

$$g_{mnl} = \sum_{\mu, \nu = k, l}^{k+\alpha+1, l+\beta+1} \beta_{m\nu\mu\nu} \eta_{\mu\nu kl} \varepsilon_{\mu\nu}$$

выполнены следующие условия

$$\sum_{k, l=0}^{m, n} |g_{mnl}| = O(1) \quad (m, n \geq N), \quad (b_1)$$

$$\exists \lim_{m, n} g_{mnl} = g_{kl}, \quad (d_1)$$

$$\exists \lim_{m, n} \sum_{k=0}^m g_{mnl} = g_l, \quad \exists \lim_{m, n} \sum_{l=0}^n g_{mnl} = g'_k, \quad (d_2)$$

$$\exists \lim_{m, n} \sum_{k, l=0}^{m, n} g_{mnl} = g, \quad (d_3)$$

<sup>5</sup> В теореме 4 достаточно требовать существование  $D_{m, n}$  лишь для  $0 \leq m, n \leq \alpha, \beta$ .

и  $\varepsilon_{mn} \in (A_r^{\alpha, \beta}, B_r)$  тогда и только тогда, когда выполнены условия  $(b_1)$  с  $N = 0$ ,  $(d_1)$ ,  $(d_2)$ ,  $(d_3)$  и

$$\exists \lim_m g_{m n k l} = g_{n k l}, \quad \exists \lim_n g_{m n k l} = g'_{m k l}, \quad (f_1)$$

$$\exists \lim_m \sum_{k=0}^m g_{m n k l} = g_{n l}, \quad \exists \lim_n \sum_{l=0}^n g_{m n k l} = g'_{m k}. \quad (f_2)$$

Достаточность. Ввиду регулярности факторов метода  $B$  условия  $(d_1)$  и  $(f_1)$  выполнены, причем (см. [4], стр. 29)  $g_{kl} = H\varepsilon_{kl}$ , а так как  $a_{mn00} = 1$ , то (см. [2], теорема 9.2) условия  $(d_2)$ ,  $(d_3)$  и  $(f_2)$  тоже выполнены, причем  $g_l = \alpha'_{00} H'' \varepsilon_{kl}$  и  $g = \varepsilon_{00}$ . Следовательно, для того, чтобы  $\varepsilon_{mn} \in (A_r^{\alpha, \beta}, B_r)$ , надо доказать, что из условий теоремы 1 вытекает условие  $(b_1)$  с  $N = 0$ .

Применяя преобразование Абеля — Харди, находим

$$g_{m n k l} = h_{m n k l} + e_{m n k l} + f_{m n k l} + \beta_{m n, k+\alpha+2, l+\beta+2} H \varepsilon_{k l},$$

где

$$h_{m n k l} = \sum_{\mu, \nu=k, l}^{k+\alpha+1, l+\beta+1} b_{m n \mu \nu} \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} \eta_{\kappa \lambda k l} \varepsilon_{\kappa \lambda},$$

$$e_{m n k l} = \sum_{\mu=k}^{k+\alpha+1} \Delta_{\mu} \beta_{m n \mu, l+\beta+2} \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{\mu, l+\beta+1} \eta_{\kappa \lambda k l} \varepsilon_{\kappa \lambda},$$

$$f_{m n k l} = \sum_{\nu=l}^{l+\beta+1} \Delta_{\nu} \beta_{m n, k+\alpha+2, \nu} \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{k+\alpha+1, \nu} \eta_{\kappa \lambda k l} \varepsilon_{\kappa \lambda}.$$

Ввиду регулярности факторов метода  $B$  условие  $2^\circ$  влечет за собой

$$\sum_{k, l=0}^{m, n} |\beta_{m n, k+\alpha+2, l+\beta+2} H \varepsilon_{k l}| = O(1).$$

Далее, применяя снова преобразование Абеля—Харди, получаем

$$h_{m n k l} = h^1_{m n k l} + h^2_{m n k l} + h^3_{m n k l} + h^4_{m n k l},$$

где

$$h^1_{m n k l} = \sum_{\mu, \nu=k, l}^{k+\alpha+1, l+\beta+1} \Delta_{\mu \nu} b_{m n \mu \nu} \cdot \sum_{s, t=k, l}^{\mu, \nu} \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{s, t} \eta_{\kappa \lambda k l} \varepsilon_{\kappa \lambda},$$

$$h^2_{m n k l} = \sum_{\mu=k}^{k+\alpha+1} \Delta_{\mu} b_{m n \mu, l+\beta+2} \cdot \sum_{s, t=k, l}^{\mu, l+\beta+1} \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{s, t} \eta_{\kappa \lambda k l} \varepsilon_{\kappa \lambda},$$

$$h^3_{m n k l} = \sum_{\nu=l}^{l+\beta+1} \Delta_{\nu} b_{m n, k+\alpha+2, \nu} \cdot \sum_{s, t=k, l}^{k+\alpha+1, \nu} \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{s, t} \eta_{\kappa \lambda k l} \varepsilon_{\kappa \lambda},$$

$$h^4_{m n k l} = b_{m n, k+\alpha+2, l+\beta+2} G \varepsilon_{k l}.$$

Аналогично, как на стр. 168 статьи [3], из условия 1° при помощи (5) и (6) выводим

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |h^1_{mnhkl}| = O(1) \sum_{\kappa,\lambda=0}^{\alpha+1,\beta+1} D_{\kappa\lambda} \sum_{\mu,\nu=0}^{\alpha+1,\beta+1} \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n} |\Delta_{kl} b_{mnhkl} / b_{khkl}| = O(1), \quad (9)$$

а ввиду условия 4°

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |h^4_{mnhkl}| = O(1).$$

Далее, так как

$$h^2_{mnhkl} = \sum_{\mu=k}^{k+\alpha+1} \Delta_{\mu} b_{mnh,\mu,l+\beta+2} \cdot \sum_{\kappa=k}^{\mu} (\mu+1-\kappa) \alpha'_{\kappa\kappa} \eta'_{\kappa\kappa} G'' \varepsilon_{kl}, \quad (10)$$

то (ср. [3], стр. 168) ввиду (5) и (6) и факторизируемости метода  $B$ , по второму из условий 5° имеем

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |h^2_{mnhkl}| = O(1) \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \sum_{\kappa=0}^{\mu} D_{\kappa 0} \sum_{k=\mu}^m |\Delta_{\kappa} b'_{m\mu} / b'_{\kappa\kappa}| \sum_{l=0}^n |b_{\kappa+k,\mu,\kappa+k,l+\beta+2} G'' \varepsilon_{\kappa+k,l}| = O(1). \quad (11)$$

Аналогичную оценку для  $h^3_{mnhkl}$  дает первое из условий 5° вместе с (5) и (6).

Для оценки выражения  $e_{mnhkl}$  применим к нему преобразование Абеля. Получаем

$$e_{mnhkl} = e^1_{mnhkl} + e^2_{mnhkl},$$

где

$$e^1_{mnhkl} = \sum_{\mu=k}^{k+\alpha+1} \Delta_{\mu}^2 \beta_{mnh,\mu,l+\beta+2} \cdot \sum_{s=k}^{\mu} \sum_{\kappa,\lambda=k,l}^s \eta_{\kappa\lambda kl} \varepsilon_{\kappa\lambda},$$

$$e^2_{mnhkl} = \Delta_k \beta_{mnh,k+\alpha+2,l+\beta+2} \cdot L' \varepsilon_{kl}.$$

Теперь, так как ввиду (5) и факторизируемости  $B$

$$e^1_{mnhkl} = O(1) \sum_{\mu=k}^{k+\alpha+1} |\Delta_{\mu} b'_{m\mu} / b'_{\mu\mu}| \sum_{\kappa=0}^{\mu-k} D_{\kappa 0} |b'_{\kappa+k,\mu,\kappa+k} H'' \varepsilon_{\kappa+k,l}|, \quad (12)$$

то, учитывая (6), второе из условий 3° влечет справедливость оценки

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |e^1_{mnhkl}| = O(1) \sum_{\kappa=0}^{\alpha+1} \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \sum_{k=\mu}^m |\Delta_{\kappa} b'_{m\mu} / b'_{\kappa\kappa}| = O(1).$$

Наконец, первое из условий 6° дает

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |e^2_{mnhkl}| = O(1) \sum_l \sum_{k=0}^m |b'_{m,k+\alpha+2} L' \varepsilon_{kl}| = O(1).$$

Аналогичные оценки для выражения  $f_{mnhkl}$  влекут за собой первое из условий 3° и второе из 6° при помощи (5) и (6).

Необходимость условия 2° вытекает непосредственно из (b<sub>1</sub>) и (d<sub>1</sub>) (ср. [7], стр. 12). Необходимость условий 1° и 3° вытекает из (b<sub>1</sub>). Доказательство последнего по существу такое же, как на стр. 27—28 статьи [4], если учесть, что любое условие, необходимое для  $\varepsilon_{mn} \in (Z_r, B)$ , подавно необходимо и для  $\varepsilon_{mn} \in (A_r^{\alpha, \beta}, B)$ , где  ${}^6 Z = A' \odot E''$  с  $E'' = (1)$ , ибо  $A'$  сохраняет сходимость.

Для получения других необходимых условий воспользуемся аналогичным как на стр. 168 статьи [3] тождеством

$$g_{mnhl} = h^1{}_{mnhl} + h^2{}_{mnhl} + h^3{}_{mnhl} + e^1{}_{mnhl} + f^1{}_{mnhl} + \\ + b_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2} G \varepsilon_{kl} + \Delta_k \beta_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2} \cdot L' \varepsilon_{kl} + \\ + \Delta_l \beta_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2} \cdot L'' \varepsilon_{kl} + \beta_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2} H \varepsilon_{kl}, \quad (13)$$

где

$$f^1{}_{mnhl} = \sum_{v=1}^{l+\beta+1} \Delta^2{}_v \beta_{mn, k+\alpha+2, v} \cdot \sum_{t=l}^v \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{k+\alpha+1, t} \eta_{\kappa\lambda kl} \varepsilon_{\kappa\lambda}. \quad (14)$$

Отсюда при  $l = n$  находим

$$g_{mnhn} = h^1{}_{mnhn} + b_{mn, k+\alpha+2, n} G' \varepsilon_{kn} + \beta_{mn, k+\alpha+2, n} H' \varepsilon_{kn}. \quad (15)$$

Ввиду необходимости условий (b<sub>1</sub>) и первого из 3°, учитывая регулярность метода  $B''$  и оценку (9), вытекающую из (5) и (6) и необходимого условия 1°, получаем необходимость условия

$$\sum_{k=0}^m |b_{mn, k+\alpha+2, n} G' \varepsilon_{kn}| = O(1) \quad (m, n \geq N). \quad (16)$$

Однако в (16) можно положить  $N = 0$ , ибо ввиду необходимости условия  $\varepsilon_{mn} = O(1)$  (см. [7], лемма 1) имеем  $G' \varepsilon_{kn} = O(1)$  при  $k \leq m < N$  для метода  $Z$  и при  $n < N$  для метода  ${}^6 Y = E' \odot A''$ , где  $E' = (1)$ , а так как факторы метода  $A = A_r^{\alpha, \beta}$  сохраняют сходимость, то  $Z_r \subset A_r$  и  $Y_r \subset A_r$  (ср. [4], стр. 27). Необходимость второго из условий 5° доказывается аналогично.

Далее, из (13) при  $m \rightarrow \infty$ , учитывая регулярность факторов метода  $B$ , получаем

$$g_{nhl} = f^1{}_{nhl} + b''_{n, l+\beta+2} L'' \varepsilon_{kl} + \beta''_{n, l+\beta+2} H \varepsilon_{kl}, \quad (17)$$

где

$$f^1{}_{nhl} = \lim_m f^1{}_{mnhl} = \sum_{v=1}^{l+\beta+1} \Delta_v b''_{nv} \cdot \sum_{\lambda=1}^v (v+1-l) \eta''_{\lambda\alpha''}{}_{\lambda\lambda} H' \varepsilon_{k\lambda}.$$

Учитывая (b<sub>1</sub>), можно записать

$$\sum_{k, l=0}^{p, n} |g_{mnhl}| = O(1) \quad (m, n \geq N).$$

Переходя здесь к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , применяя 2°, 3°, (5), (6) и регулярность метода  $B''$ , получаем из (17) необходимость второго из условий 6° при  $n \geq N$  и, следовательно, при всех  $n = 0, 1, \dots$

<sup>6</sup> Матрицы  $E'$  и  $E''$  треугольны.

Необходимость условия 4° при  $m, n \geq N$  (и, следовательно, при всех  $m, n = 0, 1, \dots$ ) по доказанному непосредственно вытекает из тождества (13) ввиду необходимости условия (b<sub>1</sub>). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Учитывая доказательство теоремы 1, нам остается доказать, что условия 1°—9° влекут за собой выполнение условий (см. [7], стр. 6)

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |g_{mnkl} - g_{kl}| = 0, \quad \lim_{m,n} \sum_{l=0}^n |g_{mnkl} - g_{kl}| = 0, \quad (d_4)$$

а условия 1°—12° влекут (d<sub>4</sub>) и

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |g_{mnkl} - g_{nkl}| = 0, \quad \lim_n \sum_{l=0}^n |g_{mnkl} - g'_{mkl}| = 0. \quad (f_4)$$

Начнем с первого из условий (d<sub>4</sub>), для чего воспользуемся разложением (13). Так как  $g_{kl} = H\varepsilon_{kl}$ , то для последнего слагаемого равенства (13) из условия 2° следует

$$\lim_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} |(\beta_{mn,k+\alpha+2,l+\beta+2} - 1) H\varepsilon_{kl}| = 0, \quad (18)$$

ибо  $\beta_{mnkl} = O(1)$ . Учитывая (12), получаем, что (5), (6) и второе из условий 7° влекут за собой

$$\sum_{k=0}^m |e^{t_{mnkl}}| = O(1) \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \sum_{\kappa=0}^{\mu} D_{\kappa 0} \sum_{k=\mu}^m |\Delta_k b'_{mk} / b'_{hk}| |b'_{\kappa+h, \kappa+k} H'' \varepsilon_{\kappa+h, l}| \rightarrow 0 \quad (19)$$

при  $m \rightarrow \infty$  и  $m, n \rightarrow \infty$  (ср. [2], стр. 111). Далее, (5) и первое из условий 3° ввиду регулярности  $B''$  влекут

$$\begin{aligned} \lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |f^1_{mnkl}| &= \\ &= \lim_n O(1) \sum_{\nu=l}^{l+\beta+1} |\Delta_{\nu} b''_{n\nu} / b''_{\nu\nu}| \sum_{\lambda=l}^{\nu} D_{0, \lambda-l} |b''_{\lambda\lambda}| \sum_k |H' \varepsilon_{k\lambda}| = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая (9), из условий 1°, (5) и (6) и регулярности  $B''$  вытекает

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h^1_{mnkl}| = \lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h^2_{mnkl}| = 0.$$

Далее, так как

$$h^3_{mnkl} = \sum_{\nu=l}^{l+\beta+1} \Delta_{\nu} b_{mn, k+\alpha+2, \nu} \sum_{\lambda=l}^{\nu} (\nu - \lambda + 1) \alpha''_{\lambda\lambda} \eta''_{\lambda l} G' \varepsilon_{k\lambda}, \quad (21)$$

то (5) и первое из условий 5° влекут за собой

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h^3_{mnkl}| = \lim_n O(1) \sum_{\nu=l}^{l+\beta+1} |\Delta_{\nu} b''_{n\nu} / b''_{\nu\nu}| \sum_{\lambda=0}^{\nu-l} D_{0\lambda} = 0.$$

Теперь первое из условий 8° дает

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h^k_{mnkl}| = 0.$$

Наконец, оценка седьмого и восьмого слагаемых разложения (13) вытекает непосредственно из условий 9° и первого из условий 6°.

Для проверки первого из условий (f<sub>4</sub>) воспользуемся равенствами (13) и (17). Тогда (5), (6) и первое из условий 12° дает (см. [2], стр. 111)

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |h^1_{mnkl}| = \lim_m \sum_{k=0}^m |h^2_{mnkl}| = 0, \quad (22)$$

ибо ввиду (5) и определения чисел  $D_{mn}$

$$h^1_{mnkl} = O(1) \sum_{\substack{k+\alpha+1, l+\beta+1 \\ \mu, \nu=k, l}} |\Delta_{\mu\nu} b_{m\mu\nu} / b_{\mu\nu\nu}| \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} \left| \frac{\beta_{\kappa\lambda\kappa\lambda}}{\alpha_{\kappa\lambda\kappa\lambda}} \varepsilon_{\kappa\lambda} \right|, \quad (23)$$

причем оценка, аналогичная (23), имеет место и для  $h^2_{mnkl}$ . Ввиду равенства (21) первое из условий 11° дает

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |h^3_{mnkl}| = 0.$$

Учитывая (20), из первого из условий 3° и регулярности фактора  $B'$  выводим

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |f^1_{mnkl} - f^1_{nkl}| = 0.$$

Далее, второе из условий 6° и условие 2° ввиду регулярности  $B'$  влекут

$$\lim_m \sum_k |(\beta'_{m, k+\alpha+2} - 1) L'' \varepsilon_{kl}| = 0, \quad \lim_m \sum_{k=0}^m |(\beta'_{m, k+\alpha+2} - 1) H \varepsilon_{kl}| = 0.$$

Учитывая (19) и первое из условий 10° и 9°, убеждаемся в выполнении первого из условий (f<sub>4</sub>). Второе из условий (f<sub>4</sub>) проверяется аналогично.

Необходимость. Учитывая доказательство теоремы 1, нам остается доказать необходимость условий 7°—12°. Необходимость условий 7° и 12° получаем из теоремы 13 и формул (43<sup>c</sup>) статьи Кангро [6].

Докажем сначала необходимость условий 9°. Для этого заметим, что из (d<sub>4</sub>) вытекает (ср. [6], стр. 26, и [1], стр. 236)

$$\lim_n \sum_{l=0}^n |g_{nkl} - g_{kl}| = 0. \quad (24)$$

Так как (5) и (6) и первое из условий 7° дает

$$\begin{aligned} \lim_n \sum_{l=0}^n |f^1_{nkl}| &= \\ &= \lim_n O(1) \sum_{l=0}^n \sum_{\nu=l}^{l+\beta+1} |\Delta_{\nu} b''_{n\nu} / b''_{\nu\nu}| \sum_{\lambda=l}^{\nu} |b''_{\lambda\lambda} H' \varepsilon_{kl}| = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

то, учитывая необходимость условия 2° и регулярность фактора  $B''$ , из (17) и (24) следует необходимость второго из усло-

вий 9°. Необходимость условий 8° следует по доказанному из (d<sub>4</sub>) при помощи тождества (13).

Далее, положив в первом из условий (f<sub>4</sub>) индекс  $l = n$ , учитывая тождество (15), оценку (22), вытекающую из 12°, и первое из условий 3°, получаем необходимость первого из условий 11°, так как  $g_{nkn} = \beta''_{nn} H' \epsilon_{kn}$  и фактор  $B'$  регулярен. Необходимость условий 10° следует из тождества (13) ввиду необходимости условий (f<sub>4</sub>). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Учитывая доказательства теорем 1 и 2, нам остается лишь убедиться в выполнении условия (см. [7], стр. 6)

$$\lim_{m,n} \sum'_{k,l=0}^{m,n} |g_{mnkl} - H \epsilon_{kl}| = 0. \quad (d_5)$$

Для этого воспользуемся тождеством (13), имея в виду, что факторы метода  $B$  регуляры. Учитывая (23), получаемое при помощи (5), убеждаемся в том, что условия (5), (6), 1° и 14° влекут за собой

$$\lim_{m,n} \sum'_{k,l=0}^{m,n} |h^1_{mnkl}| = 0, \quad (26)$$

ибо матрица  $(h^1_{mnkl})$  удовлетворяет условиям для преобразования  $bcn \rightarrow cn$  (см. [9], § 6, теорема 28). Далее ввиду (11) условия (5), (6) и вторые из 5° и 15° влекут (ср. [2], стр. 111)

$$\lim_{m,n} \sum'_{k,l=0}^{m,n} |h^2_{mnkl}| = 0.$$

Аналогичную оценку для  $h^3_{mnkl}$  дают первые из условий 5° и 15° вместе с (5) и (6). Такая же оценка для сумм четвертого и пятого слагаемых равенства (13) следует из условий 13° вместе с (12) и (14). И наконец, учитывая 16°, 17° и вытекающую из 2° оценку (18), убеждаемся в выполнении условия (d<sub>5</sub>).

Необходимость условий 13° и 14° дает теорема 12 и формула (42<sup>a</sup>) статьи Кангро [6]. Учитывая доказательство предыдущих теорем, нам остается лишь доказать необходимость условий 15°—17°.

Воспользуемся теперь вытекающими из (d<sub>5</sub>) необходимыми условиями

$$\lim_n \sum_{k,l=0}^{\infty,n} |g_{nkl} - H \epsilon_{kl}| = 0, \quad \lim_m \sum'_{k,l=0}^{m,\infty} |g'_{mkl} - H \epsilon_{kl}| = 0. \quad (27)$$

Из тождества (17), ввиду условий 2° и 13°, регулярности фактора  $B''$  и условий (6) и (27), получим необходимость первого из условий 16°.

Воспользовавшись вытекающим из (d<sub>5</sub>) условием

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |g_{mnkn} - H \epsilon_{kn}| = 0$$

и учитывая (15), (26), регулярность фактора  $B'$ , условия 2°

и 13°, получим необходимость первого из условий 15°. Необходимость условия 17° следует по доказанному из тождества (13) ввиду необходимости условия (d<sub>5</sub>). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Аналогично как в доказательстве теорем 1 и 2 из [4] получаем, что  $\varepsilon_{mn} \in (A_l^{\alpha, \beta}, B)$  тогда и только тогда, когда при

$$\gamma_{mnhl} = \sum_{\mu, \nu=k, l}^{m, n} \beta_{m\mu\nu} \zeta_{\nu k l} \varepsilon_{\mu\nu}, \quad \zeta_{mnhl} = \sum_{\kappa, \lambda=k, l}^{m, n} \eta_{m\kappa\lambda} = \zeta'_{mh} \zeta''_{nl},$$

выполнены следующие условия

$$\gamma_{mnhl} = O(1) \quad (m, n \geq N), \quad (b_3)$$

$$\exists \lim_{m, n} \gamma_{mnhl}, \quad (d_1)$$

и  $\varepsilon_{mn} \in (A_l^{\alpha, \beta}, B_l)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m, n=k, l}^{\infty} |\bar{\gamma}_{mnhl}| = O(1). \quad (g)$$

Достаточность. Покажем, что из условий теоремы 4 вытекает условие (g). При помощи преобразования Абеля—Харди получаем (ср. [5], стр. 190), что

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{mnhl} &= \bar{\beta}_{mnhl} K \varepsilon_{hl} + \\ &+ \sum_{\mu, \nu=k, l}^{m, n} \bar{b}_{m\mu\nu} \left( \sum_{\kappa, \lambda=\mu+1, \nu+1}^{\infty} - \sum_{\kappa, \lambda=k, \nu+1}^{\infty} - \sum_{\kappa, \lambda=\mu+1, l}^{\infty} \right) \zeta_{\kappa\lambda kl} \varepsilon_{\kappa\lambda} = \\ &= \bar{\beta}_{mnhl} K \varepsilon_{hl} + \chi_{mnhl} - \varphi_{mnhl} - \psi_{mnhl}. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично как на стр. 171—172 статьи [3] из условий (8), (7) и 1° вытекает

$$\sum_{m, n=k, l}^{\infty} |\chi_{mnhl}| = O(1) \sum_{\kappa, \lambda=0}^{\alpha, \beta} (\alpha+1-\kappa)(\beta+1-\lambda) D_{\kappa\lambda} = O(1).$$

Далее, так как  $B$  абсолютно регулярен, ввиду (вытекающего из факторизируемости и нормальности метода  $A^{\alpha, \beta}$ ) тождества (ср. [5], стр. 191 и 187)

$$\varphi_{mnhl} = \sum_{\nu=l}^n \Delta_{\nu} \bar{\beta}_{mnh\nu} \cdot \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \alpha''_{\lambda} \lambda \zeta''_{\lambda l} K' \varepsilon_{\kappa\lambda},$$

условия (7) и (8) и первое из условий 3°° влекут за собой

$$\begin{aligned} \sum_{m, n=k, l}^{\infty} |\varphi_{mnhl}| &= O(1) \sum_{\lambda=l}^{l+\beta} |\alpha''_{\lambda} \lambda \zeta''_{\lambda l} \beta''_{\lambda l} K' \varepsilon_{\kappa\lambda}| = \\ &= O(1) \sum_{\lambda=0}^{\beta} (\beta+1-\lambda) D_{0\lambda} = O(1). \end{aligned}$$

Аналогичная оценка для  $\psi_{mnhl}$  вытекает из условий (7) и (8) и второго из условий 3°°.

Таким образом, учитывая (28), условия  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ , (7) и (8) влекут за собой условие (g).

Необходимость условия  $2^\circ$  для  $\varepsilon_{mn} \in (A_l^{\alpha, \beta}, B)$  вытекает непосредственно из  $(b_3)$  и  $(d_1)$  (ср. [3], стр. 171). Далее, так как ввиду регулярности факторов метода  $B$  существует предел

$$\lim_m \gamma_{mnhn} = \sum_{\mu=h}^{h+\alpha} \beta''_{nn} \zeta_{\mu nhn} \varepsilon_{\mu n} = \beta''_{nn} K' \varepsilon_{kn},$$

то из условия  $(b_3)$  вытекает необходимость условия

$$\beta''_{nn} K' \varepsilon_{mn} = O(1) \quad (n \geq N). \quad (29)$$

Покажем, что здесь можно положить  $N = 0$ . Для этого, учитывая, что фактор  $A'$  сохраняет абсолютную сходимость, заметим, что условие  $2^\circ$  для  $\varepsilon_{nn} \in (Z_l, B)$  означает

$$\sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha, n+\beta} \zeta'_{\mu\nu} \delta_{\nu n} \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\mu=m}^{m+\alpha} \zeta'_{\mu n} \varepsilon_{\mu n} = O(1).$$

Умножая последнее на  $\beta''_{nn} \zeta''_{nn}$  при  $n < N$ , получаем, что (29) необходимо и при  $n < N$ . Аналогично доказывается необходимость второго из условий  $3^\circ$ . Доказательство необходимости условия  $1^\circ$  по существу такое же, как условия  $(\Lambda)$  на стр. 23—24 статьи [4], ибо  $A$  сохраняет абсолютную сходимость и  $\lim_{m, n} \beta_{mnhl} = 1$ . Теорема 4 доказана.

## Литература

1. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 225—240.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Барон С., Теоремы о множителях суммируемости для методов  $A_\alpha$ . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 165—178.
4. Барон С., О распространении метода Мура—Кангро на двойные ряды. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 7, 20—31.
5. Барон С., Об одном матричном преобразовании двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 183—193.
6. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
7. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.
8. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 155—169.
9. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 1936, **2**, 29—60.
10. Moore, C. N., Summable series and convergence factors. New York, 1938.

Поступило  
7 VIII 1972

## KAHEKORDSETE RIDADE SUMMEERUVUSTEGURID MENETLUSTE $A_{\alpha,\beta}$ JAKS

S. Baron ja M. Täht

Resümee

Olgu  $A_{\alpha,\beta}$  kahekordsete ridade (1) faktoriseeruv normaalne summeerimismenetlus, mille rida-jada teisenduse (2) faktorite pöördmaatriksites on vastavalt  $\alpha + 2$  ja  $\beta + 2$  nullist erinevat diagonaali. Olgu  $B$  kahekordsete ridade regulaarsete faktoritega faktoriseeruv normaalne summeerimismenetlus, mis rahuldab tingimusi (5) ja (6) või (7) ja (8). Artiklis leitakse kahekordsete ridade summeeruvustegurid juhtudel, kus rida (1) on menetlusega  $A_{\alpha,\beta}$  regulaarselt summeeruv, tőkestatult summeeruv, tőkestatult või absoluutselt summeeruv ja rida (4) on menetlusega  $B$  summeeruv, tőkestatult summeeruv, regulaarselt summeeruv või absoluutselt summeeruv. Käesolev artikkel koos artikliga [5] on artikli [3] tulemuste üldistus kahekordsetele ridadele.

## SUMMIERBARKEITSAKTOREN FÜR SUMMIERUNGSVERFAHREN $A_{\alpha,\beta}$ DER DOPPELREIHEN

S. Baron und M. Täht

Zusammenfassung

Es sei  $A_{\alpha,\beta}$  ein solches normales faktorisiertes Summierungsverfahren der Doppelreihen (1), dessen Faktoren der Umkehrmatrixen der Reihe-Folge-Transformation (2) genau  $\alpha + 2$  und  $\beta + 2$  von Null verschiedene Diagonale besitzen. Es sei  $B$  ein beliebiges normales mit regulären Faktoren faktorisiertes Summierungsverfahren der Doppelreihen. In diesem Artikel werden Summierbarkeitsfaktoren von den Typen  $(A, B)$ ,  $(A, B_b)$ ,  $(A, B_r)$  und  $(A_l, B_l)$  gefunden, wo  $A = A_r^{\alpha,\beta}$ ,  $A_b^{\alpha,\beta}$ ,  $A_o^{\alpha,\beta}$  oder  $A_l^{\alpha,\beta}$  und  $B$  die Einschränkungen (5) und (6) oder (7) und (8) erfüllen (die Indizes  $r$ ,  $b$  und  $l$  bedeuten bzw. die reguläre, beschränkte und absolute Summierbarkeit, das Symbol  $A_o$  bedeutet die  $A$ -Beschränktheit). Summierbarkeitsfaktoren von den übrigen Typen  $(A, B_l)$  sind in der Arbeit [5] abgeleitet. Für gewöhnliche Reihen sind alle entsprechenden Summierbarkeitsfaktoren durch dem Artikel [3] bekannt.

# О СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

В настоящей статье мы исследуем суммируемость почти всюду на отрезке  $e = [a, b]$  функциональных рядов вида<sup>1</sup>

$$\sum \xi_k \varphi_k(t), \quad (1)$$

где  $\varphi = \{\varphi_k\}$  — система функций, измеримых по Лебегу и почти всюду конечных на  $e$ , а  $x = \{\xi_k\} \in l^p$  ( $1 < p < \infty$ ). Мы воспользуемся методикой, разработанной в статье [8] для исследования сходимости почти всюду на  $e$  рядов вида (1), и, следовательно, наша статья является продолжением работы [8]. В ней мы доказали следующие леммы:

**Лемма 1.** Для того, чтобы измеримая на  $e$  функция  $g$  была конечной почти всюду на  $e$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  нашлось измеримое подмножество  $T_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$  такое, что

$$\int_{T_\varepsilon} |g(t)| dt < \infty.$$

**Лемма 2.** Для того, чтобы последовательность измеримых почти всюду конечных на  $e$  функций  $\{f_n\}$  была ограничена почти всюду на  $e$ , т. е. функция  $g = \sup |f_n|$  была конечной почти всюду на  $e$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  нашлись измеримое подмножество  $T_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_\varepsilon > 0$  такие, чтобы неравенство

$$\left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{mn}^\varepsilon(t) f_n(t) dt \right| \leq M_\varepsilon \quad (2)$$

выполнялось равномерно относительно всех измеримых непересекающихся подразделений  $\mathcal{N}^\varepsilon = \{\mathcal{N}_{mn}^\varepsilon\}$  множества  $T_\varepsilon$  на произвольное число  $m+1$  частей, где  $\chi_{mn}^\varepsilon$  — характеристическая функция множества  $\mathcal{N}_{mn}^\varepsilon$ .

<sup>1</sup> Если пределы изменения индексов у знака  $\Sigma$  не указаны, то они изменяются от 0 до  $+\infty$ , а свободные индексы принимают значения 0, 1, 2, .... Кроме того,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $\sup x_n = \sup_n x_n$ .

Нам нужна еще следующая

**Лемма 3.** Пусть  $P_n$  — непрерывные линейные операторы из пространства  $l^p$  в пространство  $TM_e$  всех измеримых по Лебегу конечных почти всюду на  $e$  функций. Для того, чтобы почти всюду на  $e$  существовал предел

$$\lim P_n x \quad (3)$$

для всех  $x \in l^p$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

1° предел (3) существовал почти всюду на  $e$  для всех  $x$  из некоторого тотального в  $l^p$  множества,

2° функция  $\sup |(P_n x)(t)|$  конечна почти всюду на  $e$  для всех  $x \in l^p$ .

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° очевидна.

Достаточность условий 1° и 2° вытекает из теоремы Банаха ([3], стр. 361), если в последней в качестве  $F$ -пространства  $X$  взять банахово пространство  $l^p$ , а в качестве пространства  $TM(S, \Sigma_S, \mu)$  — пространство  $TM_e$ .

Пусть  $A = (a_{nk})$  — треугольная матрица преобразования ряда в последовательность.

**Определение.** Говорят, что ряд (1) является для всех  $x \in l^p$   $A$ -суммируемым почти всюду на  $e$ , если для всех  $x \in l^p$  последовательность  $\{(\sigma_n x)(t)\}$  сходится почти всюду на  $e$ , где

$$(\sigma_n x)(t) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \xi_k \varphi_k(t). \quad (4)$$

Для получения коэффициентных критериев  $A$ -суммируемости рядов (1) почти всюду на  $e$ , нам надо исследовать сходимость почти всюду на  $e$  последовательности

$$\{\lambda_n \sigma_n x\}, \quad (5)$$

где (здесь и всюду в дальнейшем)  $\lambda = \{\lambda_n\}$  — сходящаяся последовательность, для которой  $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$ .

Чтобы воспользоваться леммой 3 для исследования сходимости всюду на  $e$  последовательности (5) для всех  $x \in l^p$ , нам надо показать, что  $\lambda_n \sigma_n$  являются непрерывными линейными операторами из  $l^p$  в  $TM_e$ . Так как функции  $\varphi_k$  измеримы на  $e$  и операторы  $\lambda_n \sigma_n$  линейны, то нам достаточно установить лишь непрерывность операторов  $\lambda_n \sigma_n$  в нулевой точке  $\theta \in l^p$ . Пусть последовательность  $\{x_k\}$  сходится в пространстве  $l^p$  к  $\theta$ . Покажем, что при фиксированном  $n$  последовательность

$$\{\lambda_n \sigma_n x_k\} \quad (6)$$

сходится к нулевому элементу пространства  $TM_e$ , т. е. последовательность (6) сходится по мере к функции, равной нулю почти всюду на  $e$ . Действительно,

$$\|\lambda_n(\sigma_n x_k)(t)\| \leq \|x_k\| \lambda_n \left( \sum_{\nu=0}^n |a_{n\nu} \varphi_\nu(t)|^q \right)^{1/q};$$

следовательно, учитывая, что функция

$$\sum_{v=0}^n |\alpha_{nv} \varphi_v(t)|^q$$

конечна почти всюду на  $e$ , мы получаем, что последовательность (6) сходится при фиксированных  $n$  к нулю почти всюду на  $e$ , откуда, в свою очередь, вытекает сходимостъ последовательности (6) к нулю в пространстве  $TM_e$ .

Покажем теперь, что если существует предел

$$\lim \alpha_{nk} = \alpha_k, \quad (7)$$

то условие 1° леммы 3 выполнено для операторов  $\lambda_n \sigma_n$ . Действительно, тотальным множеством в пространстве  $l^p$  является множество элементов  $\{e_v\}$ , где  $e_v = \{\delta_{vh}\}$  и  $\delta_{vh}$  — символ Кронекера, вследствие чего надо установить сходимостъ последовательности (5) почти всюду на  $e$  при  $x = e_v$ . Но  $\lambda_n(\sigma_n e_v)(t) = \lambda_n \alpha_{nv} \varphi_v(t)$ . Следовательно, учитывая конечность почти всюду на  $e$  функции  $\varphi_v$ , получаем, что почти всюду на  $e$  существуют пределы

$$\lim \lambda_n \sigma_n e_v = \lambda_0 \alpha_v \varphi_v,$$

ибо существует предел  $\lim \lambda_n = \lambda_0$ , что и требовалось доказать.

## § 2. Суммируемость и функции Лебега

В параграфе 2 мы предполагаем, что система  $\varphi$  состоит из интегрируемых по Лебегу функций, а матрица  $A$  нормальна и удовлетворяет условию

$$\alpha_l \equiv \sum_{s=0}^l \max_{l \leq p \leq m} \left| \sum_{k=s}^l \alpha_{lk} \alpha_{pk} \eta_{ks} \right| = O(1), \quad (8)$$

где  $A^{-1} = (\eta_{ks})$  — матрица, обратная к  $A$ . Функции вида

$$L_n(t) \equiv L_n(t, \varphi, A) = \int_a^b |K_n(t, \tau)| d\tau, \quad (9)$$

где

$$K_n(t, \tau) \equiv K_n(t, \tau, \varphi, A) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \varphi_k(t) \varphi_k(\tau),$$

мы называем *функциями Лебега системы  $\varphi$*  для метода суммирования  $A$ .

Оказывается, что имеет место следующая

**Теорема 1.** Если нормальная матрица  $A$  удовлетворяет условиям<sup>2</sup> (7), (8) и

$$\lambda_n^2 L_n(t) = O_t(1) \quad (10)$$

почти всюду на  $e$ , то последовательность (5) сходится почти всюду на  $e$  для всех  $x \in l^2$ .

<sup>2</sup> Об обозначении  $O_t(1)$  см. [1], стр. 46.

Доказательство. Ввиду условия (7) достаточно лишь показать, что выполнено условие 2° леммы 3 с  $P_n = \lambda_n \sigma_n$ . Для этого в силу леммы 2 мы должны установить, что для каждого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in l^2$  найдутся измеримое подмножество  $T_{\varepsilon x} \subset \varepsilon$  с  $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_{\varepsilon x} > 0$  такие, что неравенство

$$A_m^{\varepsilon}(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \lambda_n(\sigma_n x)(t) dt \right| \leq M_{\varepsilon x} \quad (11)$$

выполняется для всех  $x \in l^2$  равномерно относительно всех измеримых непересекающихся подразделений  $\mathfrak{N}^{\varepsilon x} = \{\mathfrak{N}^{\varepsilon x}_{mn}\}$  множества  $T_{\varepsilon x}$  на произвольное число  $m+1$  частей, где  $\chi^{\varepsilon x}_{mn}$  — характеристическая функция множества  $\mathfrak{N}^{\varepsilon x}_{mn}$ .

Далее, ввиду условия (10) из леммы 1 при  $g = \sup \lambda_n^2 L_n$  выводим, что для каждого  $\varepsilon > 0$  найдутся измеримое подмножество  $T_\varepsilon \subset \varepsilon$  с  $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_\varepsilon > 0$  такие, чтобы

$$\int_{T_\varepsilon} \sup_n \lambda_n^2 L_n(t) dt \leq M_\varepsilon. \quad (12)$$

Покажем теперь, что в качестве множества  $T_{\varepsilon x}$  в условии (11) можно взять множество  $T_\varepsilon$  из условия (12). Действительно, изменяя порядок суммирования в неравенство (11), в силу неравенства Коши, имеем что

$$A_m^{\varepsilon}(x) \leq \|x\| (B_m^{\varepsilon})^{1/2}, \quad (13)$$

где

$$B_m^{\varepsilon} = \sum_{h=0}^m \left( \int_a^b \sum_{n=h}^m \chi^{\varepsilon}_{mn}(t) a_{nh} \lambda_n \varphi_h(t) dt \right)^2.$$

Заменяя здесь квадрат интеграла на двойной интеграл и изменяя три раза порядок суммирования, получаем оценку

$$B_m^{\varepsilon} \leq C_m^{\varepsilon} + D_m^{\varepsilon},$$

где

$$C_m^{\varepsilon} = \left| \int_a^b \int_a^b \sum_{l=0}^m \chi^{\varepsilon}_{ml}(v) \sum_{p=l}^m \chi^{\varepsilon}_{mp}(u) \lambda_l \lambda_p K'_{lp}(u, v) du dv \right|,$$

$$D_m^{\varepsilon} = \left| \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^m \chi^{\varepsilon}_{mp}(u) \sum_{l=p+1}^m \chi^{\varepsilon}_{ml}(v) \lambda_l \lambda_p K''_{lp}(u, v) du dv \right|,$$

$$K'_{lp}(u, v) = \sum_{h=0}^l \alpha_{lh} \alpha_{ph} \varphi_h(u) \varphi_h(v),$$

$$K''_{lp}(u, v) = \sum_{h=0}^p \alpha_{lh} \alpha_{ph} \varphi_h(u) \varphi_h(v).$$

Так как  $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$ , то из условия (8) и (12) при помощи обратной матрицы  $A^{-1}$  получаем, что

$$C_m^\varepsilon \leq O(1) \int_{T_\varepsilon} \max_{l \leq m} \int_{T_\varepsilon} \max_{l \leq p \leq m} \lambda_l^2 \left| \sum_{k=0}^l a_{lk} \alpha_{pk} \sum_{s=0}^k \eta_{ks} K_s(u, v) \right| du dv \leq \\ \leq O(1) \int_{T_\varepsilon} \sup_s \lambda_s^2 L_s(v) \max_{l \leq m} a_l dv \leq O(1) M M_\varepsilon.$$

Аналогично получаем оценку  $D_m^\varepsilon \leq O(1) M M_\varepsilon$ , откуда

$$B_m^\varepsilon \leq O(1) M_\varepsilon,$$

и, следовательно, в силу неравенства (13)

$$A_m^\varepsilon(x) \leq (O(1) M_\varepsilon)^{1/2} \|x\| = M_{\varepsilon x},$$

что и доказывает теорему 1.

**Следствие 1.1.** Если нормальная матрица  $A$  удовлетворяет условиям (7), (8) и (10) с  $\lambda_n \equiv 1$ , то ряд (1) почти всюду на  $e$  является  $A$ -суммируемым для всех  $x \in l^2$ .

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1, ибо в случае  $\lambda_n \equiv 1$  последовательность (5) совпадает с последовательностью (4).

**Следствие 1.2.** Если матрица  $A$  нормальна и удовлетворяет условиям (7), (8) и (10), то почти всюду на  $e$  для всех  $x \in l^2$

$$\lambda_n(\sigma_n x)(t) = O_t(1).$$

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 1.

Условиям (7) и (8) удовлетворяют многие классические методы суммирования. Например, метод Риса  $P$ , который задается треугольной матрицей

$$a_{nk} = (1 - P_{k-1}/P_n),$$

если существует предел  $\lim P_k$ ,

$$\sum_{k=0}^n |p_k| = O(P_n) \quad \text{и} \quad 0 < M_1 \leq p_{k+1}/p_k \leq M_2,$$

где  $p_k = P_k - P_{k-1}$ . Действительно, в силу формул (56) и (59) из [5] имеем, что

$$\sum_{k=s}^l a_{lk} \alpha_{pk} \eta_{ks} = \frac{P_s}{P_l P_p} (p_s + p_{s+1});$$

следовательно,

$$a_l \leq O(1) \frac{2}{P_l} \sum_{s=0}^{l+1} |p_s| = O(1).$$

В частности, если  $P_k = k + 1$ , то метод Риса  $P$  превращается в метод Чезаро  $C^1$ , для которого условие (8) тоже имеет место.

Следовательно, если  $\varphi$  ортогональная система и  $A = C^1$ , то следствие 1.1 превращается в теорему 3.3.1 из [1], а следствие 1.2. — в теорему 3.3.2 из [1]. Далее, если мы в теореме 1 положим  $A = P$  с  $P_n = 2^n$ , то, учитывая, что в таком случае  $P$ -суммируемость ряда (1) равносильно сходимости ряда (1), мы получаем теорему 1 работы [8].

### § 3. Коэффициентные критерии суммируемости

В настоящем параграфе мы рассматриваем такие методы суммирования  $A = (\alpha_{nk})$ , обратные матрицы которых имеют лишь конечное число  $\kappa + 2$  отличных от нуля диагоналей, т. е.  $\eta_{kv} \neq 0$  при  $v \leq k \leq v + \kappa + 2$  и  $\eta_{kv} = 0$  в остальных случаях. Класс таких методов суммирования мы обозначаем через  $\mathfrak{A}^\kappa$ . Оказывается, что методы суммирования  $P^k, C^k$  ( $k$  — целое число) и  $H^k$ , принадлежат классу  $\mathfrak{A}^k$ . Кроме того, мы предполагаем также, что

$$\eta_{s+j,s} \alpha_{s+k,s+j} = O(1) \quad (14)$$

для всех  $s \geq 0$  и  $0 \leq j \leq k \leq \kappa + 2$ .

Далее, мы предполагаем еще, что система  $\varphi$  удовлетворяет следующему условию:

( $E_{A_p}^A$ ) Для каждой  $\varepsilon > 0$  и  $x \in l^p$  найдутся измеримое подмножество  $T_{\varepsilon x} \subset e$  с  $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_{\varepsilon x} > 0$  такие, что

$$\sup_n \int_{T_{\varepsilon x}} |(\sigma_n x)(t)| dt \leq M_{\varepsilon x}.$$

Условие ( $E_{A_p}^A$ ) выполнено, например, в случае, когда  $\{\sigma_n x\}$  сходится в метрике пространства  $L_e$  для всех  $x \in l^p$ .

Пусть последовательность  $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$  удовлетворяет условиям  $\varepsilon_{k+1} = O(\varepsilon_k)$  и

$$\sum_{s=0}^m \max_{s+\kappa \leq n \leq m} \left| \sum_{k=s}^{s+\kappa} \eta_{ks} \varepsilon_k \alpha_{nk} \right| = O(1). \quad (15)$$

Теперь докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть для метода  $A \in \mathfrak{A}^\kappa$  выполнено условие (14), а система  $\varphi$  удовлетворяет условию ( $E_{A_p}^A$ ) и почти всюду на отрезке  $e$  для фиксированных  $x \in l^p$  имеет место неравенство

$$\varepsilon_n (\sigma_n x)(t) = O_\varepsilon(1), \quad (16)$$

где  $\varepsilon$  удовлетворяет условию (15). Тогда ряд (1) почти всюду на отрезке  $e$  является  $A$ -суммируемым для тех  $x \in l^p$ , для которых

$$\sum |\xi_k|^p |\varepsilon_k|^{-p} < \infty. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть  $x \in l^p$  удовлетворяет условию (17). По леммам 2 и 3 мы должны показать, что для каждого  $\varepsilon > 0$  найдутся подмножество  $T'_{\varepsilon x} \subset e$  с  $\text{mes } T'_{\varepsilon x} > b - a - 2\varepsilon$  и постоянная  $M'_{\varepsilon x} > 0$  такие, что неравенство

$$I_m^\varepsilon(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{mn}^{\varepsilon x}(t) (\sigma_n x)(t) dt \right| \leq M'_{\varepsilon x} \quad (18)$$

выполняется равномерно относительно каждого измеримых непересекающихся подразделений  $\mathfrak{N}^\varepsilon = \{\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon\}$  множества  $T'_{\varepsilon x}$  на произвольное число  $m+1$  частей. Пусть  $y = \{\eta_k\}$  с  $\eta_k = \xi_k / \varepsilon_k$ . Тогда в силу условия (17) последовательность  $y \in l^p$ . При помощи леммы 1 из условия (16) выводим, что для каждого  $\varepsilon > 0$

существует подмножество  $T_{\varepsilon y} \subset e$  с  $\text{mes } T_{\varepsilon y} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $N_{\varepsilon y} > 0$  такие, что

$$\int_{T_{\varepsilon y}} \sup_n |\varepsilon_n(\sigma_n y)(t)| dt \leq N_{\varepsilon y}. \quad (19)$$

Следовательно, если  $T'_{\varepsilon x} = T_{\varepsilon x} \cap T_{\varepsilon y}$ , то при помощи  $A^{-1}$  получаем, что

$$I^{\varepsilon}_m(x) \leq O^{\varepsilon}_m(x) + P^{\varepsilon}_m(x),$$

где

$$O^{\varepsilon}_m(x) = \left| \int_a^b \sum_{s=0}^m (\sigma_s y)(t) \sum_{n=s}^{s+\kappa-1} \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \beta_{sn} dt \right|,$$

$$P^{\varepsilon}_m(x) = \left| \int_a^b \sum_{s=0}^m (\sigma_s y)(t) \sum_{n=s+\kappa}^m \chi^{\varepsilon x}_{mn}(t) \beta_{ns} \kappa dt \right|,$$

$$\beta_{sn} = \sum_{k=s}^n \eta_{ks} \varepsilon_k \alpha_{nk},$$

$$\beta_{ns} \kappa = \sum_{k=s}^{s+\kappa} \eta_{ks} \varepsilon_k \alpha_{nk}.$$

Но

$$P^{\varepsilon}_m(x) \leq \max_{s \leq m} \int_{T_{\varepsilon x}} |(\sigma_s y)(t)| dt \sum_{s=0}^m \max_{s+\kappa \leq n \leq m} |\beta_{ns} \kappa|.$$

следовательно, в силу условий  $(E^A_p)$  и (15) имеем, что

$$P^{\varepsilon}_m(x) \leq M_{\varepsilon x} O(1).$$

Так как из условия (14) в силу условия (15) получаем, что

$$|\beta_{sn}| \leq O(1) |\varepsilon_s| (n+1-s),$$

то

$$O^{\varepsilon}_m(x) \leq O(1) \kappa \sum_{n=0}^{\kappa} \int_a^b \sum_{s=0}^m |\varepsilon_s (\sigma_s y)(t)| \chi^{\varepsilon x}_{m, n+s}(t) dt,$$

откуда при помощи (19) выводим, что

$$O^{\varepsilon}_m(x) \leq O(1) \kappa^2 N_{\varepsilon y}.$$

Итак, неравенство (18) имеет место, если положить  $M'_{\varepsilon x} = O(1) [M_{\varepsilon x} + \kappa^2 N_{\varepsilon y}]$ . Теорема доказана.

**Следствие 2.1.** Если для системы  $\varphi$  и метода  $A \in \mathfrak{A}^{\kappa}$  выполнены условия  $(E^A_2)$ , (14), (8), (7) и (10), где  $\lambda = \varepsilon$ , удовлетворяет условию (15), то ряд (1) почти всюду на  $e$  является  $A$ -суммируемым для тех  $x \in l^2$ , для которых

$$\sum \xi_k^2 \varepsilon_k^{-2} < \infty. \quad (20)$$

**Доказательство.** Из следствия 1.2. вытекает, что для всех  $x \in l^2$  почти всюду на отрезке  $e$  имеет место неравенство (16), откуда при помощи теоремы 2 следует  $A$ -суммируемость почти всюду на  $e$  ряда (1) для  $x \in l^2$ , удовлетворяющих условию (20).

#### § 4. Суммируемость методом Риса почти всюду

В этом параграфе мы рассматриваем метод Риса  $P$ . Для того, чтобы воспользоваться теоремами 1 и 2, мы потребуем, чтобы  $\rho_k > 0$  и

$$0 < M_1 \leq \rho_{k+1}/\rho_k \leq M_2. \quad (21)$$

Мы сформулируем сначала в виде отдельной теоремы одно следствие из теорем 1 и 2. Для этого нам нужны следующие результаты:

**Определение.** Числа  $\varepsilon_k$  называются множителями суммируемости типа  $(P, P)$ , если для каждого  $P$ -суммируемого ряда  $\sum u_k$  ряд  $\sum u_k \varepsilon_k$  является  $P$ -суммируемым.

**Лемма 4** (см. [5], стр. 220). Если числа  $\varepsilon_k$  являются множителями суммируемости типа  $(P, P)$ , то

$$1^\circ \sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty, \\ 2^\circ \sum |P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{\rho_k}| < \infty.$$

**Теорема 3.** Если метод Риса  $P$  удовлетворяет условиям (21) и (10) с  $\lambda = \varepsilon$ , где  $\varepsilon_k$  — множители суммируемости типа  $(P, P)$ , а система  $\varphi$  удовлетворяет условию  $(EP_2)$ , то ряд (1) является  $P$ -суммируемым для тех  $x \in I^2$ , для которых выполнено условие (20).

**Доказательство.** Так как  $P \in \mathfrak{A}^3$ , причем (см. [5], стр. 217)  $\eta_{kk} = P_k/\rho_k$ ,  $\eta_{k+1,k} = -P_k/\rho_k - P_k/\rho_{k+1}$  и  $\eta_{k+2,k} = P_k/\rho_{k+1}$ , то в силу условия (21) будет  $\eta_{kk} \alpha_{kk} \equiv 1$ ,  $\eta_{kk} \alpha_{k+1,k} = O(1)$ ,  $\eta_{k+1,k} \alpha_{k+1,k+1} = O(1)$ ,  $\eta_{k+2,k} \alpha_{k+2,k} = O(1)$  и  $\eta_{k+1,k} \alpha_{k+1,k} = O(1)$ , т. е. условие (14) имеет место. Так как  $\rho_k > 0$ , то существует предел  $\lim P_k$ , вследствие чего выполнено условие (7). Покажем еще, что последовательность  $\varepsilon$  из теоремы 3 удовлетворяет условию (15). По формуле (56) из [5] имеем, что

$$\sum_{k=s}^{s+\kappa} \eta_{ks} \varepsilon_k \alpha_{nk} = \frac{P_s}{P_n} \left( 1 + \frac{\rho_{s+1}}{\rho_s} \right) \Delta \varepsilon_s + \alpha_{n,s+1} P_s \Delta \frac{\Delta \varepsilon_s}{\rho_s}$$

вследствие чего

$$\max_{s+\kappa \leq n \leq m} \left| \sum_{k=s}^{s+\kappa} \eta_{ks} \varepsilon_k \alpha_{nk} \right| \leq M \left( |\Delta \varepsilon_s| + \left| P_s \Delta \frac{\Delta \varepsilon_s}{\rho_s} \right| \right).$$

Так как  $\varepsilon_k$  — множители суммируемости типа  $(P, P)$ , то по лемме 4 условие (15) имеет место. Следовательно, применимо следствие 2.1, откуда и вытекает  $P$ -суммируемость ряда (1) почти всюду на  $e$  для тех  $x \in I^2$ , для которых выполнено условие (20).

**Следствие 3.1.** Пусть система  $\varphi$  удовлетворяет для метода  $C^1$  условиям  $(EC_2)$  и (10), где  $\lambda = \varepsilon$  — квазивыпуклая последовательность положительных чисел, т. е.  $\sum k |\Delta^2 \varepsilon_k| < \infty$ . Тогда ряд (1) почти всюду на  $e$  является  $C^1$ -суммируемым, для тех  $x \in I^2$ , для которых выполнено условие (20).

Доказательство вытекает из теоремы 3 при  $P_k = k + 1$ , ибо тогда метод  $P$  превращается в метод  $C^1$ , для которого множителями суммируемости типа  $(C^1, C^1)$  являются квазивыпуклые последовательности (см., например, [2], стр. 160).

Следствие 3.1 в случае ортогональных систем превращается в теорему 3.3.3 из [1].

**Следствие 3.2.** Пусть система  $\varphi$  удовлетворяет для метода сходимости  $E$  условиям  $(E_{E_2})$  и (10) с  $\lambda = \varepsilon$ , где  $\sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty$ . Тогда ряд (1) сходится почти всюду на  $e$  для тех  $x \in l^2$ , которые удовлетворяют условию (20).

Доказательство вытекает из теоремы 3 при  $P_n = 2^n$ .

Следствие 3.2 показывает, что из теоремы 3 вытекает следствие 2.1 из [8].

Отметим, что в случае ортогональной системы  $\varphi$  в работах [7, 9] получены другие условия для  $P$ -суммируемости ряда (1) почти всюду на  $e$ . Так, например, там требуют, чтобы последовательность  $\varepsilon$  являлась монотонно убывающей, в то время как мы в теореме 3 требовали, чтобы  $\varepsilon_k$  были множителями суммируемости типа  $(P, P)$ , причем  $\varepsilon_{k+1} = O(\varepsilon_k)$ . Мы покажем теперь, что из наших условий, наложенных на последовательность  $\varepsilon$  не вытекает ее монотонное убывание и наоборот. Действительно, определяя последовательность  $\varepsilon$  формулой

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k p_k / P_k,$$

где

$0 < c_k \downarrow$ ,  $\sum c_k < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k c_k p_k / P_k \neq 0$  и  $\sum (-1)^k c_k p_k / P_k \neq 0$ ,  
имеем, что

$$\varepsilon_{n+1} / \varepsilon_n = 1 + (-1)^n c_n p_n / (P_n \varepsilon_n).$$

Так как  $\lim c_k p_k / P_k = 0$  и  $\lim \varepsilon_n \neq 0$ , то

$$\varepsilon_{n+1} = O(\varepsilon_n).$$

Кроме того, имеем, что

$$\Delta \varepsilon_k = (-1)^{k+1} c_k p_k / P_k.$$

Следовательно, из условий  $p_k > 0$  и  $\sum c_k < \infty$ , выводим

$$\sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty.$$

Далее, так как

$$\left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| = \left| P_k \Delta \frac{(-1)^k c_k}{P_k} \right| \leq 2c_k,$$

то

$$\sum \left| P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty.$$

Итак, условия 1° и 2° леммы 4 имеют место, в то время как последовательность  $\varepsilon$  не является монотонно убывающей.

Пусть теперь  $\varepsilon$  — такая монотонно убывающая последовательность, для которой расходится ряд

$$\sum k |\Delta^2 \varepsilon_k|.$$

Тогда числа  $\varepsilon_k$  не являются множителями суммируемости типа  $(P, P)$  при  $P_n = n + 1$  (см. [2], стр. 160), т. е. из монотонного убывания последовательности  $\varepsilon$  не вытекают наши условия.

Приведенные примеры показывают также, что следствие 2.1 при ортогональной системе  $\varphi$  и регулярис-монотонном методе  $A \in \mathfrak{U}^*$  не сравнимы с результатами работы [4] даже в случае, если в последней требовать, что регулярно-монотонный метод суммирования  $A \in \mathfrak{U}^*$ .

Теорема 3 показывает, что множители суммируемости типа  $(P, P)$  играют при исследовании  $P$ -суммируемости ряда (1) такую же роль, как и множители суммируемости с заданной скоростью при исследовании суммируемости с скоростью ортогональных рядов (см. [6], стр. 394).

Из теоремы 3 вытекает, что для исследования  $P$ -суммируемости ряда (1) почти всюду на  $e$  нам надо знать оценки функции Лебега для метода  $P$ . Следующая теорема показывает другую возможность для исследования  $P$ -суммируемости ряда (1) почти всюду, если система  $\varphi$  удовлетворяет следующему условию:

( $J_p$ ) Для каждого  $\varepsilon > 0$  найдутся измеримое подмножество  $T_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_\varepsilon > 0$  такие, что для частных сумм  $\{s_n x\}$  ряда (1) имеем при всех  $x \in l^p$

$$\sup_n \int_{T_\varepsilon} |(s_n x)(t)|^p dt \leq M_\varepsilon \|x\|.$$

**Теорема 4.** Пусть система  $\varphi$  удовлетворяет условию ( $J_p$ ), а метод  $P$  — условию

$$\sum_{k=0}^n |p_k| = O(P_n). \quad (22)$$

Для того, чтобы почти всюду на  $e$  ряд (1) был  $P$ -суммируемым для  $x_0 \in l^p$ , необходимо и достаточно, чтобы подпоследовательность  $\{s_{m_n} x_0\}$  сходилась почти всюду на  $e$ , где

$$1 < r_1 \leq P_{m_{n+1}} / P_{m_n} \leq r_2. \quad (23)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд (1) для  $x_0 \in l^p$  является  $P$ -суммируемым почти всюду на  $e$ , т. е. почти всюду на  $e$  существует предел

$$\lim (\sigma_n x_0)(t).$$

Тогда почти всюду на  $e$  подалажно существует предел

$$\lim (\sigma_{m_n} x_0)(t).$$

Покажем теперь что, почти всюду на  $e$  для всех  $x \in l^p$  существует предел

$$\lim (\tau_n x)(t), \quad (24)$$

где  $\tau_n x = \sigma_{m_n} x - s_{m_n} x$ . Так как  $\tau_n$  — непрерывный линейный

оператор из пространства  $l^p$  в пространство  $TM_e$ , для которого на тотальном множестве в пространстве  $l^p$  предел (24) существует, то по леммам 2 и 3 нам надо показать, что для каждого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in l^p$  найдутся подмножество  $T_{\varepsilon x} \subset e$  с  $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_{\varepsilon x} > 0$  такие, что неравенство

$$K_m^e(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon x} m_n(t) (\tau_n x)(t) dt \right| \leq M_{\varepsilon x} \quad (25)$$

имеет место равномерно относительно  $m$ .

Но в силу неравенств Гельдера для суммы и интеграла имеем, что

$$K_m^e(x) \leq (b-a)^{1/q} \left( \sum_{n=0}^m \int_{T_{\varepsilon x}} \left| \sum_{k=0}^{m_n} \frac{P_{k-1}}{P_{m_n}} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p dt \right)^{1/p},$$

откуда в силу условия  $(J_p)$  получаем, что

$$K_m^e(x) \leq (b-a)^{1/q} M_\varepsilon \left( \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^{m_n} |\xi_k|^p |P_{k-1}|^p / |P_{m_n}|^p \right)^{1/p}.$$

Изменяя порядок суммирования и воспользуясь неравенством (23), выводим

$$K_m^e(x) \leq (b-a)^{1/q} M_\varepsilon \|x\| \left( \sum_{\nu} (r^{p_1})^{-\nu} \right)^{1/p} = M_{\varepsilon x}.$$

Следовательно, предел (24) существует почти всюду на  $e$  для всех  $x \in l^p$ , откуда получаем необходимость условия теоремы 4.

Достаточность. Пусть почти всюду на  $e$  существует предел

$$\lim (s_{m_n} x_0)(t).$$

Так как предел (24) существует почти всюду на  $e$  для всех  $x \in l^p$ , то почти всюду на  $e$  существует предел

$$\lim (\sigma_{m_n} x_0)(t).$$

Покажем, что почти всюду на  $e$  существует предел  $\lim (\sigma_k x_0)(t)$ . Для этого достаточно в силу леммы 3 установить, что для всех  $x \in l^p$

$$\sup_n \max_{m_n \leq k \leq m_{n+1}} |(\sigma_k x)(t)|$$

конечен почти всюду на  $e$ . Так как по лемме 3 для всех  $x \in l^p$

$$\sup_n |(\sigma_{m_n} x)(t)| < \infty$$

почти всюду на  $e$ , то достаточно показать, что почти всюду на  $e$

$$\sup_{m_n < k < m_{n+1}} |(\sigma_k x)(t)| = O_t(1)$$

равномерно относительно  $n$ . По лемме 2 для этого достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in l^p$  нашлись измеримое подмножество  $T'_{\varepsilon x} \subset e$  с  $\text{mes } T'_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M'_{\varepsilon x} > 0$  такие, что равномерно относительно  $n$  выполняется неравенство

$$L^{\varepsilon}_n(x) = \left| \int_a^b \sum_{s=m_n+1}^{m_{n+1}-1} \chi^{\varepsilon x}_{ns}(t) (\sigma_s x)(t) dt \right| \leq M'_{\varepsilon x}. \quad (26)$$

Но

$$L^{\varepsilon}_n(x) \leq M^{\varepsilon}_n(x) + N^{\varepsilon}_n(x), \quad (27)$$

где

$$M^{\varepsilon}_n(x) = \left| \int_a^b \sum_{h=m_n+1}^{m_{n+1}-1} p_h(s_k x)(t) \sum_{s=k}^{m_{n+1}-1} P^{-1}_s \chi^{\varepsilon x}_{ns}(t) dt \right|,$$

$$N^{\varepsilon}_n(x) = \left| \int_a^b \sum_{k=0}^{m_n} p_h(s_k x)(t) \sum_{s=m_n+1}^{m_{n+1}-1} P^{-1}_s \chi^{\varepsilon x}_{ns}(t) dt \right|.$$

Следовательно, учитывая, что в силу условий  $(J_p)$  и (22) имеют место неравенства

$$M^{\varepsilon}_n(x) \leq (b-a)^{1/q} M_{\varepsilon} \|x\| O(1) (1+r_2) = M''_{\varepsilon x},$$

$$N^{\varepsilon}_n(x) \leq (b-a)^{1/q} M_{\varepsilon} \|x\| O(1) = M'''_{\varepsilon x},$$

мы из неравенства (27) выводим, что имеет место неравенство (26) с  $M'_{\varepsilon x} = M''_{\varepsilon x} + M'''_{\varepsilon x}$ . Теорема доказана.

Из теоремы 4 в случае ортогональной системы и  $p=2$  получаем теорему 2.8.7 из [1].

**Теорема 5.** Если при некотором  $a > 1$  для каждого натурального числа  $n$  найдется натуральное число  $\nu_n$  такое, что

$$n = \log_a P_{\nu_n}, \quad (28)$$

где  $P_{\nu} \uparrow$ , а система  $\varphi$  удовлетворяет условию  $(J_p)$ , то ряд (1) почти всюду на  $e$  является  $P$ -суммируемым для тех  $x \in l^p$ , для которых

$$\sum |\xi_k|^p \log^p a \log_a P_k < \infty. \quad (29)$$

Доказательство. По следствию 3.4 из [8] последовательность  $\{s_{m_n} x\}$  сходится почти всюду на  $e$  для тех  $x \in l^p$ , для которых

$$\sum_n \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |\xi_k|^p \log^p a n < \infty. \quad (30)$$

Ряд (30) сходится, если сходится ряд

$$\sum |\xi_k|^p \mu_k; \quad (31)$$

где  $u_k = \log^p a n$  для  $m_n \leq k < m_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Определим монотонно возрастающую функцию  $P$  так, чтобы  $P(n) = P_n$  и обозначим обратную функцию к ней через  $Q$ . Покажем, что

если в качестве последовательности  $\{m_n\}$  взять последовательность  $\{Q(a^n)\}$ , члены которой в силу условия (28) — натуральные числа, то выполнено условие (23). На самом деле, тогда  $P_{m_n} = P(Q(a^n)) = a^n$ , и, следовательно,

$$P_{m_{n+1}}/P_{m_n} = a > 1.$$

Итак,  $Q(a^n) \leq k < Q(a^{n+1})$ , откуда  $a^n \leq P_k < a^{n+1}$ , т. е.

$$n \leq \log_a P_k < n+1.$$

Следовательно,  $\mu_k = \log_a P_k$ , и из сходимости ряда (29) вытекает сходимость ряда (30). Так как последовательность  $\{m_n\}$  удовлетворяет условиям теоремы 4, то из сходимости почти всюду на  $e$  последовательности  $\{s_{m_n}x\}$  следует  $P$ -суммируемость ряда (1) почти всюду на  $e$ . Теорема доказана.

Если  $P_n = 2^n$ , то теорема 5 превращается в теорему 4 из [8], а если  $\varphi$  — ортогональная система, то теорема 5 превращается в теорему 2.8.8 из [1].

Примечание. В теореме 4 статьи [8] условие  $(J_p)$  надо заменить условием  $(J_p)$  настоящей статьи.

## Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
4. Ефимов А. В., О множителях Вейля для суммирования ортогональных рядов. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. конструктивн. теории функций». Баку, 1965, 363—367.
5. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191—232.
6. Кангро Г., О множителях типа Бора — Харди для заданной скорости. II. Изв. АН ЭССР. Физ., матем., 1969, 18, № 4, 387—395.
7. Осиленкер Е. П., О множителях Вейля для суммирования ортогональных рядов. Успехи матем. наук, 1967, 22, № 5, 175—176.
8. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 140—151.
9. Sanouchi, G., On the Riesz summability of Fourier' series. Tôhoku Math. J., (2), 1959, 11, 321—326.

Поступило  
25 II 1972

## FUNKTSIONAALRIDADE SUMMEERUVUS PEAAGU KÕIKJAL

H. Türrpu

Resümee

Käesolevas töös uuritakse kujul (1) esitatavate funktsionaalridade summeeruvust peaaegu kõikjal lõigis  $e$ . Leitakse maatriksmenetluste klass, mille puhul on Weyli tegureiks Lebesgue funktsioonide teatud tüüpi majorandid. Kuna ei eeldata, et rida (1) on ortogonaalrida, siis üldistavad saadud tulemused tuntud tulemusi ortogonaalridade summeeruvusest peaaegu kõikjal.

# FAST ÜBERALL SUMMIERBARKEIT DER FUNKTIONALREIHEN

H. Türnpu

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die Summierbarkeit fast überall in  $[a, b]$  solcher Funktionalreihen, die die Form (1) haben.

Es wird eine Klasse von solcher Matrixverfahren gefunden, bei den Weylische Faktoren Majorante gewisser Typen von Lebesgueschen Funktionen wird.

Wenn die Reihe (1) nicht bestimmt ein Orthogonalreihe ist, dann verallgemeinern die erzielten Ergebnisse die bekanten Bedingungen über die Summierbarkeit von Orthogonalreihen fast überall.

# О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

В настоящей статье мы исследуем сходимость почти всюду на отрезке  $e = [a, b]$  интегралов вида

$$\int_0^{\infty} \varphi(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $x \in L^p(0, \infty)$  ( $1 < p < \infty$ ), а ядро  $\varphi$  является для почти всех  $\tau \in (0, \infty)$  измеримой всюду конечной функцией на  $e$ , для которой всюду на  $e$  интеграл

$$\int_0^s |\varphi(t, \tau)|^q d\tau \quad (2)$$

конечен для всех  $0 < s < \infty$ . В частности  $\varphi$  может быть ортонормальным ядром (см. определение из [2], стр. 67), и, следовательно, из наших результатов вытекают условия для сходимости почти всюду на  $e$  интегралов по ортонормальным ядрам. Кроме того, если ядро  $\varphi$  и функция  $x$  постоянны на интервалах  $[k, k+1)$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то интеграл (1) превращается в ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \varphi_k(t), \quad (3)$$

где  $x = \{x_k\} \in l^p$  ( $1 < p < \infty$ ) и система  $\{\varphi_k\}$  состоит из функций, измеримых и всюду конечных на  $e$ . Сходимость рядов вида (3) мы исследовали в статье [5]. Следовательно, наши результаты обобщают некоторые результаты из работы [5]. Для исследования сходимости почти всюду на  $e$  интегралов вида (1) мы воспользуемся методикой, разработанной в статьях [6; 5].

Мы пользуемся следующими леммами из работы [6].

**Лемма 1.** Для того, чтобы измеримая функция  $g$  была конечной почти всюду на  $e$ , необходимо и достаточно, чтобы для

каждого  $\varepsilon > 0$  найдется измеримое подмножество  $T_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$  такое, что

$$\int_{T_\varepsilon} |g(t)| dt < \infty.$$

**Лемма 2.** Для того, чтобы последовательность измеримых почти всюду конечных на  $e$  функций  $\{f_n\}$  была ограничена почти всюду на  $e$ , т. е. функция  $g = \sup |f_n|$  была конечной почти всюду на  $e$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  нашлись измеримое подмножество  $T_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_\varepsilon > 0$  такие, чтобы неравенство

$$\left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi_{e_{mn}}^\varepsilon(t) f_n(t) dt \right| \leq M_\varepsilon \quad (4)$$

выполнялось равномерно относительно всех измеримых непесекающихся подразделений  $\mathfrak{N}_m^\varepsilon = \{\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon\}$  множества  $T_\varepsilon$  на произвольное число  $m + 1$  частей, где  $\chi_{e_{mn}}^\varepsilon$  — характеристическая функция множества  $\mathfrak{N}_{mn}^\varepsilon$ .

**Лемма 3.** Пусть  $P_n$  — непрерывные линейные операторы из пространства  $L^p(0, \infty)$  в пространство  $TM_\varepsilon$  — всех измеримых по Лебегу, конечных почти всюду на  $e$  функций. Для того, чтобы почти всюду на  $e$  существовал предел

$$\lim_n (P_n x)(t) \quad (5)$$

для всех  $x \in L^p(0, \infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы

1° предел (5) существовал почти всюду на  $e$  для всех  $x$  из некоторого тотального в  $L^p(0, \infty)$  множества,

2° функция

$$\sup_n |(P_n x)(t)|$$

была конечной почти всюду на  $e$  для всех  $x \in L^p(0, \infty)$ .

Отметим, что для сходимости почти всюду на  $e$  интеграла (1) для всех  $x \in L^p(0, \infty)$  необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на  $e$  для всех  $x \in L^p(0, \infty)$  сходились последовательности

$$(P_{s_n} x)(t) = \int_0^{s_n} \varphi(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где  $\{s_n\}$  — произвольная последовательность с  $\lim s_n = \infty$ .

Из условия (2) вытекает, что  $P_{s_n}$  — непрерывные линейные операторы из пространства  $L^p(0, \infty)$  в  $TM_\varepsilon$ . Действительно, так как аддитивность операторов  $P_{s_n}$  очевидна, то надо лишь установить их непрерывность в точке  $\theta \in L^p(0, \infty)$ . Пусть последовательность  $\{x_k\}$  сходится к нулю в пространстве  $L^p(0, \infty)$ . Покажем, что последовательность  $P_{s_n} x_k$  сходится почти всюду на  $e$  к нулю. Для этого заметим, что имеет место неравенство

$$|(P_{s_n} x_k)(t)| \leq \|x_k\| \left\{ \int_0^{s_n} |\varphi(t, \tau)|^q d\tau \right\}^{1/q}$$

откуда получаем в силу условия (2), что  $P_{s_n} x_k$  сходится к нулю почти всюду на  $e$  и тем более сходится по мере.

Покажем теперь, что условие 1° леммы 3 для операторов  $P_{s_n}$  выполнено. В самом деле, так как множество функций, постоянных на конечных отрезках, является тотальным множеством в  $L^p(0, \infty)$ , то надо лишь установить сходимость последовательности

$$P_{s_n} \chi_{[\alpha, \beta]}.$$

Но

$$\lim (P_{s_n} \chi_{[\alpha, \beta]})(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t, \tau) d\tau.$$

Следовательно, из условия (2) получаем, что  $\lim P_{s_n} \chi_{[\alpha, \beta]}$  конечна почти всюду на  $e$ , т. е. последовательность (6) сходится почти всюду на тотальном в  $L^p(0, \infty)$  множестве.

## § 2. Функции Лебега и сходимость почти всюду

В настоящем параграфе мы рассматриваем случай, когда  $x \in L^2(0, \infty)$  и условие (2) выполнено при  $q = 2$ . Кроме того, мы предположим, что почти всюду на  $e$  для всех  $0 < s < \infty$  существуют т. н. функции Лебега

$$L(s, t) = \int_a^b |K(u, t, s)| du, \quad (7)$$

где

$$K(u, t, s) = \int_0^s \varphi(t, \tau) \varphi(u, \tau) d\tau.$$

Пусть  $\lambda$  — невозрастающая положительная функция на  $(0, \infty)$ .

В этом случае имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть ядро  $\varphi$  такое, что имеет место условие (2) с  $q = 2$  и почти всюду на  $e$  для всех  $0 < s < \infty$  существуют функции Лебега (7). Если<sup>1</sup> почти всюду на  $e$

$$\lambda^2(s_n) L(s_n, t) = O_t(1), \quad (8)$$

то почти всюду на  $e$  для всех  $x \in L^2(0, \infty)$  сходится последовательность

$$\lambda(s_n) P_{s_n} x. \quad (9)$$

**Доказательство.** Из условия (8) в силу леммы 1 вытекает, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует измеримое подмножество  $T'_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T'_\varepsilon > b - a - \varepsilon/2$  и постоянная  $M'_\varepsilon > 0$  такие, чтобы

$$\int_{T'_\varepsilon} \sup \lambda(s_n) L(s_n, t) dt \leq M'_\varepsilon. \quad (10)$$

<sup>1</sup> Об обозначении  $O_t(1)$  см. [1], стр. 46.

Из условия (2) при  $q = 2$  выводим, что существует измеримое подмножество  $T''_\varepsilon \subset e$  с  $\text{mes } T''_\varepsilon > b - a - \varepsilon/2$  такое, что для всех  $0 < s < \infty$

$$\int_{T''_\varepsilon} \int_0^s \{\int_0^s [\varphi(t, \tau)]^2 d\tau\}^{1/2} dt < \infty.$$

Следовательно, по теореме Тонелли (см. [2], стр. 213) мы имеем, что

$$\int_{T''_\varepsilon} \int_0^s \varphi(t, \tau) x(\tau) d\tau dt = \int_0^s x(\tau) \int_{T''_\varepsilon} \varphi(t, \tau) dt d\tau. \quad (11)$$

Далее заметим, что операторы  $\lambda(s_n)P_{s_n}$  являются линейными непрерывными операторами из  $L^2(0, \infty)$  в  $TM_\varepsilon$ , для которых условие 1° леммы 3 выполнено. Следовательно, для сходимости почти всюду на  $e$  последовательности (9) для всех  $x \in L^2(0, \infty)$  достаточно выполнение условия 2° леммы 3 с  $p = 2$ . Для последнего в силу леммы 2 достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in L^2(0, \infty)$  существовали измеримое подмножество  $T_{\varepsilon x} \subset e$  с  $\text{mes } T_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_{\varepsilon x}$  такие, чтобы неравенство

$$A^{\varepsilon}_m(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon}_{mn}(t) \lambda(s_n) (P_{s_n} x)(t) \right| \leq M_{\varepsilon x} \quad (12)$$

имело место равномерно относительно всех измеримых непересекающихся подразделений  $\mathcal{N}^{\varepsilon, x}_m$  множества  $T_{\varepsilon x}$  на произвольное число  $m + 1$  частей.

Берем в качестве множества  $T_{\varepsilon x}$  множество  $T'_\varepsilon \cap T''_\varepsilon$ . Тогда в силу равенства (11) имеем, что

$$A^{\varepsilon}_m(x) \leq \|x\| (B^{\varepsilon}_m)^{1/2},$$

где

$$B^{\varepsilon}_m = \int_0^{\varepsilon_m} \left( \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{\varepsilon}_{mn}(t) \lambda(s_n) \varphi(t, \tau) \chi_n(\tau) dt \right)^2 d\tau$$

и  $\chi_n$  — характеристическая функция промежутка  $(0, s_n)$ .

Заменяя в выражении  $B^{\varepsilon}_m$  квадрат интеграла на двойной интеграл и заменяя порядок интегрирования и суммирования, выводим, что

$$B^{\varepsilon}_m = C^{\varepsilon}_m + D^{\varepsilon}_m,$$

где

$$C^{\varepsilon}_m = \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^m \chi^{\varepsilon}_{mp}(u) \lambda(s_p) \sum_{l=p}^m \chi^{\varepsilon}_{ml}(v) \lambda(s_l) K(u, v, s_p) du dv$$

и

$$D^{\varepsilon}_m = \int_a^b \int_a^b \sum_{l=0}^m \chi^{\varepsilon}_{ml}(v) \lambda(s_l) \sum_{p=l+1}^m \chi^{\varepsilon}_{mp}(u) \lambda(s_p) K(u, v, s_l) du dv.$$

Но

$$C_m^e \leq \int_{T_{ex}} \sup_p \lambda^2(s_p) L(s_p, u) du$$

и

$$D_m^e \leq \int_{T_{ex}} \sup_l \lambda(s_l) L(s_l, v) dv.$$

Следовательно, из условия (10) получаем, что

$$B_m^e \leq 2M'_e,$$

т. е. имеет место неравенство (12) с  $M_{ex} = \|x\| (2M'_e)^{1/2}$ . Теорема доказана.

Из теоремы 1 мы выводим следующие следствия.

**Следствие 1.1.** Пусть ядро  $\varphi$  удовлетворяет предположениям теоремы 1. Если почти всюду на  $e$

$$L(s_n, t) = O_t(1) \quad (13)$$

равномерно относительно  $n$ , то почти всюду на  $e$  сходится последовательность

$$P_{s_n} x$$

для всех  $x \in L^2(0, \infty)$ .

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1 при  $\lambda(s) \equiv 1$ .

**Следствие 1.2.** Пусть ядро  $\varphi$  удовлетворяет предположениям теоремы 1. Если почти всюду на  $e$

$$L(s, t) = O_t(1) \quad (14)$$

равномерно относительно  $0 < s < \infty$ , то интеграл (1) сходится почти всюду на  $e$  для всех  $x \in L^2(0, \infty)$ .

Доказательство. Из условия (14) следует, что неравенство (13) имеет место для всех последовательностей  $\{s_n\}$  с  $\lim s_n = \infty$ . Следовательно, по следствию 1.1 имеем, что для всех последовательностей  $\{s_n\}$  с  $\lim s_n = \infty$  почти всюду на  $e$  для всех  $x \in L^2(0, \infty)$  сходится последовательность  $P_{s_n} x$ , откуда и выводим сходимость почти всюду на  $e$  интеграла (1) для всех  $x \in L^2(0, \infty)$ .

**Следствие 1.3.** Пусть ядро  $\varphi$  удовлетворяет предположениям теоремы 1 и почти всюду на  $e$  имеет место неравенство (8). Тогда почти всюду на  $e$  имеет место неравенство

$$\lambda(s_n) (P_{s_n} x) (t) = O_t(1).$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1 и из лемм 3 и 1.

Примечание 1.1. Если  $x$  и  $\varphi$  постоянные на интервалах  $[k, k+1)$ , то теорема 1 превращается в теорему 1 из работы [5].

### § 3. Другое условие сходимости

В этом параграфе мы предполагаем, что ядро  $\varphi$  удовлетворяет следующему условию  $(E_p)$ :

Для каждого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in L^p(0, \infty)$  найдутся измеримое подмножество  $E_{\varepsilon x} \subset e$  с  $\text{mes } E_{\varepsilon x} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_{\varepsilon x} > 0$  такие, чтобы равномерно относительно  $u \in (0, \infty)$  имело место неравенство

$$\int_{E_{\varepsilon x}} \int_0^u |\varphi(t, \tau) x(\tau)| dt \leq N_{\varepsilon x}.$$

Условие  $(E_p)$  выполнено, например, для таких ядер  $\varphi$ , для которых интеграл (1) сходится в метрике  $L$  для всех  $x \in L^p(0, \infty)$ .

**Теорема 2.** Пусть ядро  $\varphi$  удовлетворяет условиям  $(E_p)$  и (2) с  $1/p + 1/q = 1$  и пусть  $\lambda$  — положительная невозрастающая на  $(0, \infty)$  функция, для которой

$$\int_0^u |d\lambda(u)| < \infty. \quad (15)$$

Если для всех  $x \in L^p(0, \infty)$  почти всюду на  $e$

$$\lambda(u) \int_0^u \varphi(t, \tau) x(\tau) d\tau = O_t(1), \quad (16)$$

то интеграл (1) сходится почти всюду на  $e$  для тех  $x \in L^p(0, \infty)$ , для которых

$$\int_0^\infty |x(\tau)|^p \lambda^{-p}(\tau) d\tau < \infty. \quad (17)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in L^p(0, \infty)$  удовлетворяет условию (17). Тогда функция  $z = x/\lambda \in L^p(0, \infty)$  и, следовательно, для нее имеет место неравенство (16), т. е. почти всюду на  $e$

$$\lambda(u) \int_0^u \varphi(t, \tau) z(\tau) d\tau = O_t(1).$$

Пусть  $\{s_n\}$  — положительная последовательность с  $\lim s_n = \infty$ . Из последнего неравенства выводим, что почти всюду на  $e$  недавно

$$\lambda(s_n) (P_{s_n} z)(t) = O_t(1),$$

откуда в силу леммы 1 получаем, что для каждого  $\varepsilon > 0$  найдутся измеримое подмножество  $T_{\varepsilon z}$  с  $\text{mes } T_{\varepsilon z} > b - a - \varepsilon$  и постоянная  $M_{\varepsilon z}$  такие, чтобы

$$\int_{T_{\varepsilon z}} \sup_n \lambda(s_n) |(P_{s_n} z)(t)| dt \leq M_{\varepsilon z}. \quad (18)$$

Теперь для подмножества  $T_{ex} = E_{ex} \cap T_{ex}$  с  $\text{mes } T_{ex} > b - a - 2\varepsilon$  при помощи интегрирования по частям получаем, что

$$F_m^e(x) \equiv \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{ex}_{mn}(t) (P_{s_n} x)(t) dt \right| \leq G_m^e(x) + H_m^e(x), \quad (19)$$

где

$$G_m^e(x) = \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{ex}_{mn}(t) \lambda(s_n) (P_{s_n} z)(t) dt \right|$$

и

$$H_m^e(x) = \left| \int_a^b \sum_{n=0}^m \chi^{ex}_{mn}(t) \int_0^{s_n} \int_0^u \varphi(t, \tau) z(\tau) d\tau d\lambda(u) dt \right|.$$

Так как в силу неравенства (18) имеем, что

$$G_m^e(x) \leq \int_{T_{ez}} \sup \lambda(s_n) |(P_{s_n} z)(t)| dt \leq M_{ez},$$

а в силу условия  $(E_p)$  и равенства (11) получаем, что

$$H_m^e(x) \leq \int_0^{s_n} \int_{E_{ez}} \int_0^u |\varphi(t, \tau) z(\tau) d\tau| dt |d\lambda(u)| \leq N_{ez} \int_0^\infty |d\lambda(u)|,$$

то из неравенств (19) и (16) выводим

$$F_m^e(x) \leq M_{ez} + N_{ez} N.$$

Следовательно, из лемм 3 и 2 вытекает сходимость почти всюду на  $e$  последовательности  $P_{s_n} x$ . Так как  $\{s_n\}$  — произвольная последовательность с  $\lim s_n = \infty$ , то тем самым мы установили сходимость почти всюду на  $e$  интеграла (1) для функций, удовлетворяющих условию (17).

**Следствие 2.1.** Пусть ядро  $\varphi$  удовлетворяет условиям (2) с  $q = 2$  и  $(E_2)$ . Пусть почти всюду на  $e$  существуют функции Лебега (7), а  $\lambda$  — положительная неубывающая функция, удовлетворяющая условию (15). Если почти всюду на  $e$

$$\lambda^2(s) L(s, t) = O_t(1)$$

равномерно относительно  $0 < s < \infty$ , то интеграл (1) сходится для тех  $x \in L^2(0, \infty)$ , для которых

$$\int_0^\infty x^2(\tau) \lambda^{-2}(\tau) d\tau < \infty.$$

**Доказательство.** По следствию 1.3 почти всюду на  $e$  для всех  $x \in L^2(0, \infty)$  имеет место неравенство (16), вследствие чего из теоремы 2 получаем утверждение следствия 2.1.

**Примечание 2.1.** Если  $\varphi$  — ортонормированное ядро, то из следствия 2.1 получаем одно утверждение теоремы 8 из [2] (стр. 76).

Примечание 2.2. Если ядро  $\varphi$  и функция  $x$  постоянны на интервалах  $[n, n+1)$ , то теорема 2 превращается в теорему 2 из [5].

Теоремы 1 и 2 распространяются на интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (1')$$

где  $\varphi$  — комплексная функция действительных переменных  $t$  и  $\tau$ , а сходимость интеграла (1') понимается в смысле главного значения по Коши (см. [7], стр. 598). Тогда надо функции Лебега определить следующим образом

$$L(s, t) = \int_a^b \int_{-s}^s |\varphi(t, \tau) \overline{\varphi(u, \tau)}| d\tau du.$$

Например, если  $\varphi(t, \tau) = e^{it\tau}$ , то интеграл (1') представляет собой преобразование Фурье

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} x(\tau) d\tau \quad (20)$$

функции  $x \in L^2(-\infty, \infty)$ . В силу теоремы Планшереля (см., например, [4], стр. 93) функция  $F$  существует для всех  $x \in L^2(-\infty, \infty)$  в смысле сходимости в пространстве  $L^2(-\infty, \infty)$ . Следовательно, условие  $(E_2)$  выполнено для  $\varphi(t, \tau) = e^{it\tau}$ . Мы исследуем теперь, когда интеграл (20) сходится к  $F$  почти всюду на  $(-\infty, \infty)$ . Для этого заметим, что при  $\varphi(t, \tau) = e^{it\tau}$

$$L(s, t) \leq M \ln(|s|+2).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} |d \ln^{-1/2}(|s|+2)| < \infty,$$

то по следствию 2.1 имеем, что интеграл (20) сходится почти всюду на  $e$  для тех  $x \in L^2(-\infty, \infty)$ , для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(\tau) \ln(|\tau|+2) d\tau < \infty. \quad (21)$$

Если берем  $a = k$  и  $b = k+1$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то имеем, что интеграл (20) сходится почти всюду на отрезках  $[k, k+1]$  и  $[-k-1, -k]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Обозначая через  $E^+_k$  и  $E^-_k$  множества меры нуль, на которых интеграл (20) расходится на отрезках  $[k, k+1]$  и  $[-k-1, -k]$  соответственно, имеем в силу равенства

$$\text{mes} \bigcup_{k=0}^{\infty} (E^+_k \cup E^-_k) = 0,$$

что интеграл (20) сходится почти всюду на  $(-\infty, \infty)$ . Так как интеграл (20) сходится в метрике  $L^2(-\infty, \infty)$  к  $F$ , то последовательность

$$F_n(t) = \int_{-s_n}^{s_n} e^{it\tau} x(\tau) d\tau$$

сходится тоже к  $F$  в метрике  $L^2(-\infty, \infty)$ . Следовательно, по теореме Рисса найдется подпоследовательность  $F_{n_k}$ , которая сходится к  $F(t)$  почти всюду на  $(-\infty, \infty)$ . Так как интеграл (20) сходится почти всюду на  $(-\infty, \infty)$ , то ее предел  $\Phi(t)$  равен  $F(t)$  почти всюду, т. е. интеграл сходится почти всюду к  $F(t)$ . Итак, мы получили известную теорему о сходимости преобразования Фурье почти всюду (см., например, [4], стр. 115, теорема 63):

**Следствие 2.2.** *Преобразование Фурье сходится почти всюду на  $(-\infty, \infty)$  для тех  $x \in L^2(-\infty, \infty)$ , для которых сходится интеграл (21).*

### Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Виленкин Н. Я., К теории ортогональных ядер. Успехи матем. наук, 1952, 7, № 3, 63—82.
3. Данфорд Н., Шварц Д. Ж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
4. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье. Москва, 1948.
5. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 140—151.
6. Тюрнпу Х., О суммируемости функциональных рядов почти всюду. Настоящий сборник, стр. 199—212.
7. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Москва, 1959.

Поступило  
15 II 1972

## INTEGRAALIDE KOONDUVUSEST PEAAEGU KÖIKJAL

H. Tüرنpu

Resümee

Käesolevas töös uuritakse kujus (1) esitatavate integraalide koonduvust peaaegu kõikjal. Tõestatakse kaks teoreemi, milles antakse piisavad tingimused integraalide (1) koonduvuseks peaaegu kõikjal Lebesgue funktsioonide ja osa-integraalide tõkete kaudu. Erijuhuna saadakse tulemused ortogonaalsete tuumadega integraalide ja kujus (3) esitatavate funktsionaalridade koonduvusest peaaegu kõikjal.

## THE ALMOST EVERYWHERE CONVERGENCE OF INTEGRALS

H. Tüرنpu

Summary

In the present paper the effective sufficient conditions for the almost everywhere convergence of the integrals (1) for every  $x \in L^p(0, \infty)$  are found. Using a modification of the variable index method, the well-known criterions of the almost everywhere convergence for orthogonal kernels and integral transformations (for example, the theorem of convergence almost everywhere of Fourier transformation) are generalized for the integrals in the form (1).

# О СУММИРУЕМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ МЕТОДАМИ ЭЙЛЕРА — КНОППА И ЧЕЗАРО

Э. Маргин

Кружок СНО при кафедре математического анализа

При изучении вопросов суммируемости ортогонального ряда обращает на себя внимание тот факт, что если сходится ряд, составленный из квадратов коэффициентов ортогонального ряда, регулярные методы Эйлера—Кноппа с точностью до нуль-множества равносильные (см. [3]). То же самое известно и о регулярных методах Чезаро (см. [1]).

В настоящей работе будем находить при какой скорости суммирования эти методы с точностью до нуль-множества равносильны, если сумма квадратов коэффициентов сходится с некоторой скоростью.

В § 1 приведем некоторые понятия, необходимые для последующего изложения, следующие два параграфа посвящены методам Эйлера—Кноппа: результаты об общих числовых рядах содержатся в § 2, в § 3 применяем полученные в § 2 результаты в случае ортогональных рядов. Последний параграф посвящен методам Чезаро.

## § 1. Обозначения и определения

Положительную неубывающую числовую последовательность<sup>1</sup>  $\lambda = \{\lambda_k\}$  будем называть *скоростью*.

Если  $\lambda$  — некоторая скорость, то  $\lambda^\alpha = \{\lambda^{\alpha_k}\}$ .

Последовательность  $\{\xi_k\}$  будем называть *сходящейся к пределу  $\xi$  со скоростью  $\lambda$* , если  $\lambda_k(\xi_k - \xi) = o(1)$ .

Приведем некоторые обозначения и определения, связанные с методами суммирования.

Для произвольного числового ряда

$$\sum u_k \tag{1}$$

с частичными суммами

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

---

<sup>1</sup> Если пределы изменения индексов не указаны, то индексы пробегают все целочисленные значения 0, 1, 2, ...

эйлеровы средние  $E^{q_n}$  определяются соотношением

$$E^{q_n} = \frac{1}{(1+q)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} U_k,$$

где  $q > 0$ , и чезаровские средние  $\sigma_n^\alpha$  соотношением

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha u_k.$$

Будем говорить, что ряд (1) *сильно*  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируем к числу  $U$  и писать

$$\sum u_k = U[C^\lambda, \alpha],$$

если выполняется условие

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k^2 (\sigma_k^{\alpha-1} - U)^2 = o(n).$$

Будем говорить, что ряд (1) *суммируем методом Эйлера—Кноппа*  $(E, q)$  к числу  $U$  со скоростью  $\lambda$ , или  $(E^\lambda, q)$ -суммируем, и писать

$$\sum u_k = U(E^\lambda, q),$$

если  $\lambda_n(E^{q_n} - U) = o(1)$ . Будем говорить, что ряд (1) *суммируем методом Чезаро*  $(C, \alpha)$  к числу  $U$  со скоростью  $\lambda$ , или  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируем, и писать

$$\sum u_k = U(C^\lambda, \alpha),$$

если  $\lambda_n(\sigma_n^\alpha - U) = o(1)$ .

При  $\lambda_n = O(1)$  это определение сводится к определению  $(E, q)$ -суммируемости (соответственно  $(C, \alpha)$ -суммируемости) ряда (1) (см. [5], стр. 227; [2], стр. 68).

Мы определили суммируемость со скоростью  $\lambda$ , как суммируемость с дополнительным условием, чтобы преобразованная последовательность сходилась со скоростью  $\lambda$ .

Ряд (1) называется *суммируемым методом Бореля* к сумме  $U$  (см. [5], стр. 229), если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_k \frac{x^k}{k!} U_k = U;$$

тогда будем писать

$$\sum u_k = U(B).$$

Несмотря на то, что метод Бореля не является матричным методом и мы не можем приписать к нему скорость так, как при  $(E, q)$ - и  $(C, \alpha)$ -методах, мы будем писать

$$\sum u_k = U(B^\lambda),$$

если

$$\sum u_k = U(B), \quad \lambda_n \left( e^{-n} \sum_k \frac{n^k}{k!} U_k - U \right) = o(1),$$

и будем говорить о  $B^\lambda$ -суммируемости ряда (1).

В дальнейшем будем рассматривать ортогональные ряды

$$\sum c_k \varphi_k(x) \quad (2)$$

на произвольном отрезке  $[a, b]$ . Понятие ортогональности вводим с помощью интеграла Стильтьеса—Лебега: система

$$\{\varphi_n\} \subset L^2_\mu = \left\{ f : \int_a^b f^2(x) d\mu(x) < \infty \right\}$$

называется ортогональной, если

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) d\mu(x) = \delta_{kl},$$

где  $\mu$  положительная, ограниченная, монотонно возрастающая на интервале  $[a, b]$  функция, производная которой обращается в нуль только на нуль-множестве (в смысле Лебега). Благодаря последнему предположению, всякое  $\mu$ -нуль-множество является также и нуль-множеством в смысле Лебега. Поэтому в дальнейшем под выражением «почти всюду» (будем сокращать *п. в.*) будем понимать «всюду на интервале  $[a, b]$ , за исключением нуль-множества в смысле Лебега».

## § 2. О $(E^\lambda, q)$ -суммируемости числовых рядов

В дальнейшем будем часто применять следующий результат из известной монографии Харди ([5], стр. 251), который сформулируем предложением.

**Предложение.** Пусть  $x > 0$  и

$$b_k(x) = e^{-x} \frac{x^k}{k!},$$

так что  $\sum b_k(x) = 1$ . Тогда:

1) наибольшим из  $b_k(x)$  является  $b_K(x)$ , где <sup>2</sup>

$$K = [x];$$

2) если  $k = K + h$  и  $1/2 < \xi < 2/3$ , то

$$\sum_{|h| > x^\xi} k^x b_k(x) = O(e^{-x^\alpha}),$$

где  $0 < \alpha < 2\xi - 1$  и  $x$  — любое фиксированное число;

3) если  $|h| \leq x^\xi$ , то

$$b_k(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi K}} e^{-\frac{h^2}{2K}} \left\{ 1 + O\left(\frac{|h|+1}{x}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{x^2}\right) \right\}.$$

В наших рассмотрениях часто будут фигурировать скорости  $\lambda$  из класса  $A$ , где

$$A = \{ \lambda : \lambda_n = O(\lambda_{[n-n^\xi]}), \xi < 2/3; \lambda_n = O((n+1)^\gamma), \gamma \geq 0 \}.$$

<sup>2</sup> В дальнейшем всегда  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .

Подчеркнем, что оба условия в этом определении существенны. Например, скорость  $\lambda$  с

$$\lambda_n = \alpha^{n^2}$$

при  $\alpha > 1$ , которая не удовлетворяет второму условию, удовлетворяет условию

$$\lambda_n = O(\lambda_{[n-n^2/4]})$$

и, следовательно, первому условию. В то же время существует такая скорость, которая удовлетворяет второму, но не удовлетворяет первому условию. Для доказательства рассмотрим скорость  $\lambda$ , где

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_{k^2_m} = \lambda_{k^2_m+1} = \dots = \lambda_{k^2_{m+1}-1} = m!,$$

где  $k_m$  выберем так, что

$$m! \leq k^2_m < (m+1)!$$

(целое число  $k^2_m$  существует, так как  $\sqrt{(m+1)!} - \sqrt{m!} = \sqrt{m!}(\sqrt{m+1} - 1) > 1$ , если  $m \geq 2$ ; а если  $m = 0$  или  $m = 1$ , то положим  $k^2_0 = k^2_1 = 1$ ). При данной скорости:

$$\frac{\lambda_n}{n+1} \leq 1,$$

но первое условие не выполнено, так как

$$\frac{\lambda_{k^2_m}}{\lambda_{k^2_m-1}} = m.$$

Класс  $\Lambda$  довольно широкий: например, скорости  $\lambda$  с  $\lambda_n = (n+1)^\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) принадлежат к классу  $\Lambda$ .

Известно, что из  $(E, q)$ -суммируемости ( $q > 0$ ) ряда (1) следует его суммируемость методом Бореля к той же сумме<sup>3</sup>. Докажем, что аналогичный результат имеет место и при скоростях.

**Лемма 1.** Если  $\lambda \in \Lambda$  и  $q > 0$ , то из  $(E^\lambda, q)$ -суммируемости ряда (1) следует его  $B^\lambda$ -суммируемость (к той же сумме).

**Доказательство.** Пусть  $\sum u_k = U(E, q) = U(B)$ . Можем считать, что  $U = 0$ , потому что предыдущие условия равносильны условиям  $\sum v_k = 0(E, q) = 0(B)$ , где  $v_0 = u_0 - U$  и  $v_k = u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Поэтому нам нужно из условий

$$\lambda_n E^{qn} = o(1)$$

вывести сходимость

$$\lambda_n e^{-n} \sum_k U_k \frac{n^k}{k!} = o(1).$$

<sup>3</sup> См. [5], стр. 230.

В силу равенства <sup>4</sup>

$$\lambda_n e^{-n} \sum_k U_k \frac{n^k}{k!} = e^{-(q+1)n} \lambda_n \sum_k E q_k \lambda_k \frac{\{(q+1)n\}^k}{\lambda_k k!}$$

нам остается доказать, что матрица  $(a_{nk})$  с

$$a_{nk} = \frac{e^{-(q+1)n} \lambda_n \{(q+1)n\}^k}{\lambda_k k!}$$

переводит все нуль-последовательности в нуль-последовательности. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий <sup>5</sup>

$$1^\circ \lim a_{nk} = 0,$$

$$2^\circ \sum_k^n |a_{nk}| = O(1).$$

Условие  $1^\circ$  легко проверяется: учитывая, что  $\lambda \in \Lambda$ , при всех  $k = 0, 1, \dots$  имеем

$$a_{nk} = O_k(e^{-n} n^k n^\nu) = o_k(1).$$

Для доказательства выполнения условия  $2^\circ$  разобьем сумму на следующие две части:

$$\sum_k |a_{nk}| = \sum_k a_{nk} = \sum_{k < \nu - \nu^\xi} a_{nk} + \sum_{k \geq \nu - \nu^\xi} a_{nk},$$

где  $\nu = n(q+1)$  и  $1/2 < \xi < 2/3$ .

Для первой части, применяя предложение, данное в начале параграфа, получаем

$$\sum_{k < \nu - \nu^\xi} a_{nk} = O(\lambda_n e^{-\nu}) = O(n^\nu e^{-n^\alpha}) = o(1),$$

так как  $\alpha = \alpha(\xi) > 0$ .

Для второй части, учитывая неравенство

$$\sum_{k \geq \nu - \nu^\xi} a_{nk} \leq \lambda_{[\nu]} e^{-\nu} \sum_{k \geq \nu - \nu^\xi} \frac{\nu^k}{k! \lambda_k}$$

и то, что из условия

$$\lambda_{[\nu]} = O(\lambda_{[\nu - \nu^\xi]})$$

следует

$$\lambda_{[\nu]} = O(\lambda_k) \quad (k \geq \nu - \nu^\xi),$$

получаем

$$\sum_{k \geq \nu - \nu^\xi} a_{nk} = O\left(e^{-\nu} \sum_{k \geq \nu - \nu^\xi} \frac{\nu^k}{k!}\right) = O(1),$$

чем и завершается доказательство.

Мы показали, что при всех  $q > 0$  метод  $B^\lambda$  сильнее методов  $(E^\lambda, q)$ . Рассмотрим теперь вопрос о включении методов  $(E^\lambda, q)$ .

<sup>4</sup> См. [5], стр. 231.

<sup>5</sup> См. [2], стр. 14.

Известно<sup>6</sup>, что при  $q > q' > 0$  метод  $(E, q)$  сильнее метода  $(E, q')$ . Следующая лемма показывает, что аналогичное утверждение справедливо и при  $(E^\lambda, q)$ -суммируемости.

Определим класс  $A_E$  как совокупность всех скоростей  $\lambda$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\lambda_n(k+1)}{(n+1)\lambda_k} = O(1), \quad k, n=0, 1, \dots, \quad k \leq n.$$

Класс  $A_E$  содержит, например, скорости  $\lambda_n = (n+1)^\nu$  ( $0 < \nu \leq 1$ ),  $\lambda_n = \ln(n+2)$ ,  $\lambda_n = \ln \ln(n+3)$  и др.

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda \in A_E$ . Если ряд (1) суммируем  $(E^\lambda, q')$ , то он и  $(E^\lambda, q)$ -суммируем к той же сумме при всех  $q > q' > 0$ .

Доказательство. Можем принять  $\sum u_k = 0(E^\lambda, q')$ , как в предыдущей лемме, так что докажем утверждение

$$\sum u_k = 0(E^\lambda, q) \quad (q > q').$$

Учитывая равенство<sup>7</sup>

$$\frac{\lambda_n}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} U_k = \frac{\lambda_n}{(r+1)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{r^{n-\nu}}{\lambda_\nu} \lambda_\nu E^{q'\nu},$$

где  $r = (q - q')/(q' + 1) > 0$ , остается проверить, что матрица  $(a_{nk})$  с

$$a_{nk} = \binom{n}{k} \frac{\lambda_n r^{n-k}}{(r+1)^n \lambda_k}$$

переводит нуль-последовательности в нуль-последовательности. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $(a_{nk})$  удовлетворяло условиям 1° и 2° со стр. 226.

Условие 1° легко проверяется: при всех  $k = 0, 1, \dots$  имеем

$$a_{nk} = O_k \left( \lambda_n \left( \frac{r}{r+1} \right)^n n^k \right) = O_k(1),$$

так как  $\lambda_n = O(n)$  и  $0 < r/(r+1) < 1$ .

Условие 2° следует из лемм 1 и 4 статьи [4], так как из условия  $\lambda \in A_E$  следует соотношение

$$\lambda_n = O(\lambda_{[n,2]}).$$

Переходим к основному результату этого параграфа — докажем одну теорему тауберова типа.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda \in A$ . Если ряд  $\sum \sqrt[k]{k} u_k^2$  сходится со скоростью  $\lambda^2$ , то из  $B^\lambda$ -суммируемости ряда (1) следует его сходимость со скоростью  $\lambda$ .

Доказательство. Пусть  $\sum u_k = U(B^\lambda)$ . Мы можем принять  $U = 0$ , так как все условия теоремы равносильны соответственным условиям для ряда  $\sum v_k = 0(B^\lambda)$ , где  $v_0 = u_0 - U$ ,  $v_k = u_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Поэтому нам нужно доказать, что последовательность  $\{\lambda_n U_n\}$  стремится к нулю, если

<sup>6</sup> См. [5], стр. 226.

<sup>7</sup> См. [2], стр. 120 и 117.

$$\lambda_n e^{-n} \sum_k U_k \frac{n^k}{k!} = o(1), \quad \lambda_n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{k} u_k^2 = o(1).$$

В силу равенства

$$\lambda_n U_n = \lambda_n e^{-n} \sum_k (U_n - U_k) \frac{n^k}{k!} + \lambda_n e^{-n} \sum_k U_k \frac{n^k}{k!}$$

остается доказать, что

$$\lambda_n e^{-n} \sum_k a_{nk} = o(1),$$

где  $a_{nk} = (U_n - U_k) n^k / (k!)^2$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_n e^{-n} \sum_k a_{nk} &= \lambda_n e^{-n} \left( \sum_{k < n - n^{\xi}} a_{nk} + \sum_{n - n^{\xi} \leq k \leq n + n^{\xi}} a_{nk} + \sum_{k > n + n^{\xi}} a_{nk} \right) = \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \end{aligned}$$

где  $1/2 < \xi < 2/3$ , и заметим (см. предложение в начале этого параграфа), что

$$\max_k e^{-n} \frac{n^k}{k!} = e^{-n} \frac{n^n}{n!}.$$

Далее, покажем с помощью предложения, что все величины  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) стремятся к нулю.

Во-первых, находим, что

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \lambda_n e^{-n} \sum_{k < n - n^{\xi}} (U_n - U_k) \frac{n^k}{k!} = \\ &= \lambda_n e^{-n} \sum_{k < n - n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sum_{v=k+1}^n u_v \leq \\ &\leq \lambda_n e^{-n} \sum_{k < n - n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sqrt{\sum_{v=k+1}^n \frac{1}{v}} \sqrt{\sum_{v=k+1}^n v \bar{v} u_v^2} = \\ &= O \left( \lambda_n e^{-n} \sqrt{n} \sum_{k < n - n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \right) = O(n^{\gamma} \sqrt{n} e^{-n^{\alpha}}) = o(1), \end{aligned}$$

так как  $\alpha = \alpha(\xi) > 0$ .

Во-вторых, рассмотрим  $\Sigma_3$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= -\lambda_n e^{-n} \sum_{k > n + n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sum_{v=n+1}^k u_v = \\ &= O \left( e^{-n} \sum_{k > n + n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sqrt{\sum_{v=n+1}^k \frac{1}{v}} \sqrt{\lambda_n^2 \sum_{v=n+1}^k v \bar{v} u_v^2} \right) = \\ &= O \left( n^{-1/4} e^{-n} \sum_{k > n + n^{\xi}} k^{1/2} \frac{n^k}{k!} \right) = O(n^{-1/4} e^{-n^{\alpha}}) = o(1). \end{aligned}$$

Величину  $\Sigma_2$  сначала разобьем на две части  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \lambda_n e^{-n} \sum_{n-n^{\xi} \leq k \leq n+n^{\xi}} (U_n - U_k) \frac{n^k}{k!} = \\ &= \lambda_n e^{-n} \sum_{n-n^{\xi} \leq k \leq n} \frac{n^k}{k!} \sum_{v=k+1}^n u_v - \lambda_n e^{-n} \sum_{n < k \leq n+n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sum_{v=n+1}^k u_v = \\ &= \sigma_1 - \sigma_2. \end{aligned}$$

Начнем с величины  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \lambda_n e^{-n} \sum_{n < k \leq n+n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sum_{v=n+1}^k u_v = \\ &= O \left( e^{-n} \sum_{n < k \leq n+n^{\xi}} \frac{n^k}{k!} \sqrt{\sum_{v=n+1}^k \frac{1}{v}} \sqrt{\lambda_n^2 \sum_{v=n+1}^k \sqrt{v} u_v^2} \right) = \\ &= O \left( n^{-1/4} e^{-n} \sum_{n < k \leq n+n^{\xi}} \sqrt{k-n} \frac{n^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что из условия

$$\lambda_n = O(\lambda_{[n-n^{\xi}]})$$

следует условие

$$\lambda_n = O(\lambda_k) \quad (k \geq n - n^{\xi}),$$

получаем аналогичную оценку для  $\sigma_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= O \left( e^{-n} \sum_{n-n^{\xi} \leq k \leq n} \frac{n^k}{k!} \sqrt{\sum_{v=k+1}^n \frac{1}{v}} \sqrt{\lambda_n^2 \sum_{v=k+1}^n \sqrt{v} u_v^2} \right) = \\ &= O \left( e^{-n} \frac{1}{\sqrt[4]{n-n^{\xi}+1}} \sum_{n-n^{\xi} \leq k \leq n} \sqrt{n-k} \frac{n^k}{k!} \right) = \\ &= O \left( n^{-1/4} e^{-n} \sum_{n-n^{\xi} \leq k \leq n} \sqrt{n-k} \frac{n^k}{k!} \right), \end{aligned}$$

так как при всех  $n = 1, 2, \dots$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n-n^{\xi}+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n-n^{2/3}+1}} \leq \sqrt[4]{M} \frac{1}{\sqrt[4]{n}},$$

где  $M$  — некоторое положительное число, удовлетворяющее условию  $M \leq \sqrt[3]{2} (M-1)$ .

Таким образом, для величины  $\Sigma_2$  получена оценка, которую мы теперь с помощью предложения преобразуем:

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= o\left(n^{-1/4}e^{-n} \sum_{n-n^{\xi} \leq h \leq n+n^{\xi}} \sqrt{|n-k|} \frac{n^k}{k!}\right) = \\
&= o\left(n^{-1/4}e^{-n} \sum_{|h| \leq n^{\xi}} |h|^{1/2} \frac{n^{n+h}}{(n+h)!}\right) = \\
&= o\left(n^{-1/4}n^{-1/2} \sum_{|h| \leq n^{\xi}} |h|^{1/2} e^{-h^2/(2n)}\right) = \\
&= o\left(n^{-1/4}n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{1/2} e^{-t^2/(2n)} dt\right) = \\
&= o\left(n^{-1/4}n^{-1/2} n n^{-1/4} \int_0^{\infty} x^{3/4-1} e^{-x} dx\right) = \\
&= o(\Gamma(3/4)) = o(1).
\end{aligned}$$

Следовательно, мы доказали, что

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = o(1),$$

и поэтому последовательность  $\{\lambda_n U_n\}$  стремится к нулю.

Замечание 1. Из хода предыдущего рассуждения видно, что мы могли бы получить более общий результат (причем доказательство такое же): если

$$\lambda_n^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{k} u_k^2 = o(1),$$

то из условия

$$\lim \lambda_n \left( e^{-n} \sum_k U_k \frac{n^k}{k!} - U \right) = \beta$$

следует, что

$$\lim \lambda_n (U_n - U) = \beta,$$

где  $\Sigma u_k = U(B)$ .

Замечание 2. Аналогичная теорема без скоростей (т. е. при  $\lambda_n \equiv 1$ ) следует очень просто из одной общей теоремы тауберова типа (см. [5], стр. 385), доказательство которой довольно трудное и к которой приписать скорости по-видимому нелегко.

### § 3. О $(E^\lambda, q)$ -суммируемости ортогональных рядов

В настоящем параграфе сначала введем скорость в одну лемму, которая доказана в статье [3] (стр. 358), потом, используя все полученные ранее результаты, докажем теорему, которая дает ответ задаче, установленной в начале статьи.

Пусть  $E_n^q(x)$  означают  $(E, q)$ -средние ортогонального ряда (2).

**Лемма 3.** Пусть  $\lambda \in A_E$ . Если коэффициенты ортогонального ряда (2) такие, что ряд

$$\sum \lambda^2_k c^2_k \quad (3)$$

сходится, то ряд<sup>8</sup>

$$\sum \lambda^2_n \sqrt{n} (E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x))^2 \quad (q > 0) \quad (4)$$

сходится п. в.

Доказательство. По теореме Леви достаточно показать, что

$$\sum d_n = \sum_a^b \lambda^2_n \sqrt{n} (E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x))^2 d\mu(x) < \infty.$$

Учитывая равенство<sup>9</sup>

$$E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x) = \frac{1}{(1+q)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{k}{n} c_k \varphi_k(x) \quad (n \geq 1),$$

можем писать:

$$\begin{aligned} \sum d_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2_n \sqrt{n}}{(1+q)^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \frac{k^2}{n^2} q^{2(n-k)} c^2_k = \\ &= O \left( \sum \frac{\sqrt{n}}{(1+q)^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 q^{2(n-k)} \lambda^2_k c^2_k \right). \end{aligned}$$

По оценке<sup>10</sup>

$$\binom{n}{k} q^{n-k} \leq M_q \frac{(1+q)^n}{\sqrt{n+1}},$$

где  $k, n = 0, 1, \dots, k \leq n, q > 0, M_q$  — некоторое положительное число, зависящее от  $q$ , имеем:

$$\begin{aligned} \sum d_n &= O \left( \sum \frac{1}{(1+q)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \lambda^2_k c^2_k \right) = \\ &= O \left( \sum \lambda^2_k c^2_k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k}}{(1+q)^n} \right) = \\ &= O(\sum \lambda^2_k c^2_k) = O(1), \end{aligned}$$

так как<sup>11</sup>

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k}}{(1+q)^n} = 1+q.$$

Лемма доказана.

<sup>8</sup> Считаем  $E^{q_{-1}}(x) \equiv 0$ .

<sup>9</sup> См. [3], стр. 358; [2], стр. 118.

<sup>10</sup> См. [5], стр. 252.

<sup>11</sup> См. [5], стр. 252, теорему 139.

Прежде чем приступить к доказательству основного результата, заметим, что  $\Lambda_E \subset \Lambda$ .

Действительно, если  $\lambda \in \Lambda_E$ , то  $\lambda_n = O(n)$  и при  $\xi < 2/3$  справедлива оценка

$$\frac{\lambda_n(n - n^{2/3})}{(n+1)\lambda_{[n-n^{2/3}]}} = O(1),$$

равносильная условию

$$\lambda_n(n^{1/3} - 1) = O(n^{1/3}\lambda_{[n-n^{2/3}]}),$$

из которого следует, что  $\lambda_n = O(\lambda_{[n-n^{2/3}]})$ .

В последующей теореме мы и будем рассматривать  $\lambda$  из класса  $\Lambda_E$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda \in \Lambda_E$  и ряд (3) сходится. Если ряд (2) при некотором  $p > 0$  является  $(E^\lambda, p)$ -суммируемым п. в., то он и  $(E^\lambda, q)$ -суммируем п. в. при всех  $q > 0$ .

Доказательство. Если  $q > p$ , то наше утверждение содержится в лемме 2.

При  $p > q$  справедливо соотношение<sup>12</sup>

$$\frac{\lambda_n}{(p+1)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} U_\nu(x) = \frac{\lambda_n}{(r+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{n-k} E^{q_k}(x),$$

где  $r = (p - q)/(q + 1)$ , так что последовательность  $\{E^{q_n}(x)\}$  является  $(E^\lambda, r)$ -суммируемой ( $r > 0$ ) п. в., что то же самое, ряд

$$\sum (E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x)) \quad (E^{q_{-1}}(x) \equiv 0)$$

$(E^\lambda, r)$ -суммируем п. в. Отсюда, в силу леммы 1, получим  $B^\lambda$ -суммируемость этого ряда п. в.

С другой стороны, по лемме 3, ряд (4) сходится п. в., так что п. в. справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \lambda_k^2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \sqrt{n} (E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x))^2 \leq \\ & \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^2 \sqrt{n} (E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x))^2 = o_x(1), \end{aligned}$$

откуда получим сходимость п. в. ряда

$$\sum \sqrt{n} (E^{q_n}(x) - E^{q_{n-1}}(x))^2$$

со скоростью  $\lambda^2$ .

Используя теорему 1, заключаем, что п. в. справедливо соотношение

$$\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (E^{q_k}(x) - E^{q_{k-1}}(x)) = o_x(1),$$

которое равносильно сходимости п. в. последовательности  $\{E^{q_n}(x)\}$  со скоростью  $\lambda$ , или, что то же самое, ряд (2) является

<sup>12</sup> См. [2], стр. 120 и 117.

$(E, q)$ -суммируемым со скоростью  $\lambda$  п. в., а это и требовалось доказать.

Введем еще два понятия. Пусть  $\Delta$  — некоторый класс скоростей.

Будем говорить, что скорость  $\lambda$  из класса  $\Delta$  является лучшей  $(E, q)$ -скоростью класса  $\Delta$ , если ряд (1) суммируем  $(E^\lambda, q)$ , но не является  $(E^\mu, q)$ -суммируемым ни при какой скорости  $\mu$  из класса  $\Delta$ , удовлетворяющей условию  $\lambda_n = o(\mu_n)$ .

Пусть ряд (1) суммируем  $(E^\lambda, q)$ , где  $\lambda \in \Delta$ . Будем говорить, что  $(E, q)$ -скорость  $\lambda$  данного ряда нельзя улучшить методом  $(E, p)$  в классе  $\Delta$ , если скорость  $\lambda$  — лучшая  $(E, p)$ -скорость класса  $\Delta$ .

Используя эти понятия, можем переформулировать только что доказанную теорему следующим образом:

**Теорема 3.** Пусть  $\lambda \in \Lambda_E$  и ряд (3) сходится. Если  $\lambda$  при некотором  $p > 0$  является лучшей  $(E, p)$ -скоростью класса  $\Lambda_E$ , то ее нельзя улучшить в классе  $\Lambda_E$  никакими  $(E, q)$ -методами с  $q > 0$ .

Итак, получили, что при суммировании ортогональных рядов (2), все  $(E^\lambda, q)$ -методы ( $q > 0$ ) равносильны, если  $\lambda \in \Lambda_E$  и ряд (3) сходится.

#### § 4. О $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируемости ортогональных рядов

Введем класс  $\Lambda_C$  как совокупность всех скоростей  $\lambda$ , удовлетворяющих при каком-либо числе  $\tau \in (0, 1/2)$  условию

$$\frac{\lambda_n(k+1)^\tau}{(n+1)^\tau \lambda_k} = O(1), \quad k, n=0, 1, \dots, \quad k \leq n.$$

**Лемма 4.** Пусть  $\lambda^{1/2} \in \Lambda_C$  и ряд (3) сходится. Если ряд (2) при некотором  $\alpha > 1/2$  является  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируемым п. в., то он также и сильно  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируем п. в.

Доказательство. Если в точках сходимости последовательности<sup>13</sup>  $\{\sigma_n^\alpha(x)\}$  положим  $U(x) = \lim \sigma_n^\alpha(x)$ , то последний член в неравенстве

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^n \lambda_v^2 (\sigma_v^{\alpha-1}(x) - U(x))^2 \leq \\ & \leq 2 \sum_{v=0}^n \lambda_v^2 (\sigma_v^{\alpha-1}(x) - \sigma_v^\alpha(x))^2 + 2 \sum_{v=0}^n \lambda_v^2 (\sigma_v^\alpha(x) - U(x))^2 \end{aligned}$$

п. в. имеет порядок  $o_x(n)$ . Поэтому наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что п. в. справедливо соотношение

$$\sum_{v=0}^n \lambda_v^2 (\sigma_v^{\alpha-1}(x) - \sigma_v^\alpha(x))^2 = o_x(n),$$

которое выполняется, если ряд<sup>14</sup>

<sup>13</sup> Через  $\sigma_n^\alpha(x)$  обозначим  $(C, \alpha)$ -средние ряда (2).

<sup>14</sup> См. [1], стр. 78.

$$\sum \frac{\lambda_v^2}{v+1} (\sigma_v^{\alpha-1}(x) - \sigma_v^\alpha(x))^2 \quad (5)$$

сходится п. в.

Так как справедливо равенство <sup>15</sup>

$$\sigma_v^{\alpha-1}(x) - \sigma_v^\alpha(x) = \frac{1}{A\alpha v} \sum_{k=0}^v A_{v-k}^{\alpha-1} k c_k \varphi_k(x),$$

$\lambda^{1/2} \in A_C$  и при  $\alpha > 1/2$  имеют место оценки <sup>16</sup>

$$\begin{aligned} (A_{v-k}^{\alpha-1})^2 &= O((v-k+1)^{2\alpha-2}) = O(A_{v-k}^{2\alpha-2}), \\ \frac{(v+1)^{4\tau-1}}{(A_v^\alpha)^2} &= O\left(\frac{(v+1)^{4\tau-1}}{(v+1)^{2\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{A_v^{2\alpha+1-4\tau}}\right), \end{aligned}$$

то сходимость п. в. ряда (5) следует из того, что

$$\begin{aligned} \sum \int_a^b \frac{\lambda_v^2}{v+1} (\sigma_v^{\alpha-1}(x) - \sigma_v^\alpha(x))^2 d\mu(x) &= \\ &= \sum \frac{\lambda_v^2}{a^2(v+1)(A_v^\alpha)^2} \sum_{k=0}^v (A_{v-k}^{\alpha-1})^2 k^2 c_k^2 = \\ &= O\left(\sum \lambda^2 c^2 k^2 k^{2-4\tau} \sum_{n=k}^\infty A_{v-k}^{2\alpha-2} / A_v^{2\alpha+1-4\tau}\right) = \\ &= O\left(\sum \lambda^2 c^2 k^2 k^{2-4\tau} / A_k^{2-4\tau}\right) = \\ &= O\left(\sum \lambda^2 c^2 k^2\right) = O(1) \end{aligned}$$

(ибо <sup>17</sup>  $\rho = 2\alpha + 1 - 4\tau > 0$ ,  $\rho - \sigma = 3 - 4\tau > 1$ ), чем и завершается доказательство.

Следующие три леммы относятся к числовым рядам.

**Лемма 5.** Если  $\lambda \in A_C$ , то условие

$$\sum_{v=0}^n \lambda^2 v \xi_v^2 = o(n)$$

равносильно условию

$$\lambda^2 n \sum_{v=0}^n \xi_v^2 = o(n).$$

Доказательство. Так как  $\{\lambda_n\}$  не убывает, то достаточность тривиальна.

Учитывая, что  $\lambda \in A_C$ , и применяя преобразование Абеля, получаем

$$\lambda^2 n \sum_{v=0}^n \xi_v^2 = O((n+1)^{2\tau} \sum_{v=0}^n \lambda^2 v \xi_v^2 (v+1)^{-2\tau}) =$$

<sup>15</sup> См. [1], стр. 76.

<sup>16</sup> См. [2], стр. 72.

<sup>17</sup> См. [2], стр. 74, формулу (15.18).

$$= O((n+1)^{2\tau} \sum_{\nu=0}^{n-1} ((\nu+1)^{-2\tau} - (\nu+2)^{-2\tau}) \sum_{k=0}^{\nu} \lambda^2_k \xi^2_k + \sum_{k=0}^n \lambda^2_k \xi^2_k),$$

где последний член имеет порядок  $o(n)$ . Первый член также имеет порядок  $o(n)$ , так как матрица  $(a_{nk})$ , с

$$\begin{aligned} a_{nk} &= (n+1)^{2\tau-1} ((k+1)^{-2\tau} - (k+2)^{-2\tau}) (k+1) & (k < n), \\ a_{nk} &= 0 & (k \geq n) \end{aligned}$$

переводит все нуль-последовательности в нуль-последовательности. Действительно, для этого необходимо и достаточно выполнение условий 1° и 2° со стр. 226. Выполнение условия 1° очевидно, выполнение же условия 2° вытекает из асимптотического равенства

$$(\nu+1)^{-2\tau} - (\nu+2)^{-2\tau} \sim 2\tau(\nu+1)^{-2\tau-1}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** Если  $\lambda \in \Lambda_C$  и  $\alpha > 1/2$ , то из сильной  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируемости ряда (1) следует его  $(C^\lambda, \alpha - 1/2 + \varepsilon)$ -суммируемость при любом  $\varepsilon > 0$ .

Доказательство. Можем считать, что  $\sum u_k = 0 [C^\lambda, \alpha]$ . В силу леммы 5 достаточно доказать, что из условия

$$\lambda^2_n \sum_{k=0}^n (\sigma_k^{\alpha-1})^2 = o(n)$$

следует

$$\lambda_n \sigma_n^{\alpha-1/2+\varepsilon} = o(1).$$

Это очевидно, так как справедлива оценка<sup>18</sup>

$$\sigma_n^{\alpha-1/2+\varepsilon} = o(n^{-1/2} \sqrt{\sum_{k=0}^n (\sigma_k^{\alpha-1})^2}).$$

**Лемма 7.** Если  $\lambda \in \Lambda_E$  и  $\beta > \alpha > 0$ , то из  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируемости ряда (1) следует его  $(C^\lambda, \beta)$ -суммируемость.

Доказательство. Можем считать, что  $\sum u_k = 0 [C^\lambda, \alpha]$ . Учитывая равенство (15.28) из [2], остается проверить, что матрица  $(a_{nk})$  с

$$a_{nk} = \frac{\lambda_n A_{n-k}^{\beta-\alpha-1} A_{\alpha k}}{A_{\beta n}^{\beta} \lambda_k}$$

переводит нуль-последовательности в нуль-последовательности. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий 1° и 2° со стр. 226.

Условие 1° легко проверяется: при всех  $k = 0, 1, \dots$  имеем

$$a_{nk} = O_k \left( \frac{\lambda_n n^{\beta-\alpha-1}}{n^\beta} \right) O_k \left( \frac{\lambda_n}{n^{1+\alpha}} \right) = O_k(1).$$

<sup>18</sup> См. [1], стр. 76.

Условие 2° следует из оценок

$$\frac{n+1}{A^{\beta n}} = O\left(\frac{1}{A^{\beta-1}}\right), \quad \frac{A^{\alpha_k}}{k+1} = O(A_k^{\alpha-1})$$

и из формулы (15.12) книги [2], учитывая, что  $\lambda \in \Lambda_E$ .

Теперь можем доказать основной результат этого параграфа.

**Теорема 4.** Пусть  $\lambda \in \Lambda_C$  и ряд (3) сходится. Если ряд (2) является  $(C^\lambda, \beta)$ -суммируемым п.в. при некотором  $\beta > 0$ , то он и  $(C^\lambda, \alpha)$ -суммируем п.в. при всех  $\alpha > 0$ .

**Доказательство.** По лемме 7, ряд (2) является  $(C^\lambda, [\beta + 1])$ -суммируемым п.в. Наше утверждение следует после  $2[\beta + 1]$  раз последовательного применения лемм 4 и 6.

Используя аналогичные понятия как в конце параграфа 3, можем эту теорему переформулировать следующим образом.

**Теорема 5.** Пусть  $\lambda \in \Lambda_C$  и ряд (3) сходится. Если  $\lambda$  при некотором  $\beta > 0$  является лучшей  $(C, \beta)$ -скоростью класса  $\Lambda_C$ , то ее нельзя улучшить в классе  $\Lambda_C$  никакими  $(C, \alpha)$ -методами с  $\alpha > 0$ .

## Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Зиза О. А., О суммировании ортогональных рядов методами Эйлера. Матем. сб., 1965, 66, № 3, 354—377.
4. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода суммирования Эйлера — Кноппа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 171—182.
5. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило  
21 II 1972

## ORTOGONAALRIIDADE KIIRUSEGA SUMMEERIMISEST EULER-KNOPPI JA CESARO MENETLUSTEGA

E. Martin

Resümee

Rida (1) nimetame  $(E^\lambda, q)$ -summeeruvaks (vastavalt  $(C^\lambda, \alpha)$ -summeeruvaks) summaks  $U$ , kui kehtib tingimus  $\lambda_n(E_n^q - U) = o(1)$  (vastavalt  $\lambda_n(\sigma_n^\alpha - U) = o(1)$ ), kus  $E_n^q$  (vastavalt  $\sigma_n^\alpha$ ) tähistab antud rea  $(E, q)$ -keskmist (vastavalt  $(C, \alpha)$ -keskmist) ja  $\lambda = \{\lambda_n\}$  on positiivne monotoonselt kasvav arvujada. Käesolevas artiklis näidatakse, et kõik  $(E^\lambda, q)$ -menetlused (vastavalt  $(C^\lambda, \alpha)$ -menetlused) on ortogonaalriidade (2) summeerimisel peaaegu kõikjal samaväärsed, kui  $q > 0$  (vastavalt  $\alpha > 0$ ), rida (3) koondub ja  $\lambda \in \Lambda_E$  (vastavalt  $\lambda \in \Lambda_C$ ).

# SUMMABILITY WITH SPEED OF ORTHOGONAL SERIES BY THE EULER-KNOPP AND CESÀRO METHODS

E. Martin

## Summary

The series (1) is said to be summable  $(E^\lambda, q)$  (resp.  $(C^\lambda, a)$ ) to  $U$ , if  $\lambda_n(E^{q_n} - U) = o(1)$  (resp.  $\lambda_n(\sigma^{\alpha_n} - U) = o(1)$ ) where  $\{E^{q_n}\}$  (resp.  $\{\sigma^{\alpha_n}\}$ ) denotes the transformed sequence of the series (1) and  $\lambda = \{\lambda_n\}$  is a positive increasing sequence. In the present paper it is shown that all the methods  $(E^\lambda, q)$  with  $q > 0$  (resp.  $(C^\lambda, a)$  with  $a > 0$ ) are equivalent in the summability of orthogonal series (2) almost everywhere if (3) is convergent and  $\lambda \in \Lambda_E$  (resp.  $\lambda \in \Lambda_C$ ).

# О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Кивинукк

Кафедра математического анализа

## § 1. Введение

В настоящей заметке попытаемся одним общим методом оценить порядок приближения периодических функций через ее модули гладкости в случае, когда приближение осуществляется линейными методами суммирования рядов Фурье.

Пусть  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) означает пространство измеримых  $2\pi$  — периодических функций, для которых

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\int_0^{2\pi} |x(t)|^p dt)^{1/p} < \infty & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \text{vrai sup } |x(t)| < \infty & \text{при } p = \infty. \end{cases} \quad (1.1)$$

Для каждой функции  $x \in L_p$  с рядом Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t), \quad (1.2)$$

рассмотрим функцию  $y$  с рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A_k \quad (1.3)$$

и линейный оператор

$$U_r x = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(r) A_k, \quad (1.4)$$

где  $\{g_k\}$  — последовательность функций с точкой сгущения  $\rho$  множества аргументов (натуральные аргументы будем обозначать через  $n$ ), причем  $g_0 \equiv 1$ . В дальнейшем мы предполагаем, что для всех  $x \in L_p$

$$\lim_{r \rightarrow \rho} U_r x = x,$$

т. е. в силу теоремы Банаха—Штейнгауза

$$1^\circ \lim_{r \rightarrow \rho} g_k(r) = 1 \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$2^\circ \|U_r\| = O(1)$$

(см. [4], стр. 485), где  $\|\cdot\|$  — норма в пространстве линейных непрерывных операторов  $(L_p; L_p)$ . Мы пишем  $U_n = Z_n^l$ , если  $g_k(n) = 1 - (k/n)^l$  при  $k < n$  и  $g_k(n) = 0$  при  $k \geq n$ . Оператор  $Z_n^l$  называется обычно нормальным средним Зигмунда порядка  $l$ .

Нам понадобится следующий результат М. Ф. Тимана (см. [5]):

если  $x \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) имеет ряд Фурье (1.2), то справедливо порядковое соотношение

$$\|x - Z_n^l x\|_p \asymp \begin{cases} \omega_l\left(x; \frac{1}{n}\right)_p & \text{для четных } l, \\ \omega_{l+1}\left(x; \frac{1}{n}\right)_p + n\omega_{l+1}\left(y; \frac{1}{n}\right)_p & \text{для нечетных } l, \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $y$  — функция, имеющая ряд Фурье (1.3). Здесь  $a_n \asymp b_n$  означает, что  $c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n$ , где положительные константы  $c_1, c_2$  не зависят от  $n$  (в соотношении (1.5) зависят лишь от  $l$ ).

Во втором параграфе мы распространяем оценку (1.5) сверху для любого оператора  $U_r$ ; там же и доказываем некоторые общие следствия.

В третьем параграфе показываем, что основная теорема применима почти для всех наиболее применяемых методов приближения.

## § 2. Основная теорема

Пусть  $V_p(k)$  — некоторая окрестность точки  $q$  (в общем зависящая от  $k$ ). Для функций  $G(k, r) = 1 - g_k(r)$  сформулируем следующее

**Условие А.** Пусть  $\varphi(v)$  — натуральнозначная линейная функция и в фиксированной точке  $r \in V_p(k)$  функция  $G$  разложима в степенной ряд

$$G(k, r) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v(r) k^{\varphi(v)} \quad (2.0)$$

с бесконечным радиусом сходимости, причем  $c_v(r) \geq 0$  (соответственно  $\leq 0$ ) или  $(-1)^v c_v(r) \geq 0$  (соответственно  $\leq 0$ ) и  $c_l(r) \neq 0$ .

Ради краткости обозначения, следующие результаты приведем только для  $\varphi(v) = v$ , но они верны и для общего случая.

Нам понадобится следующая

**Лемма.** Пусть  $G$  удовлетворяет условию А. Тогда для тригонометрических полиномов

$$T_m = \sum_{k=0}^m A_k$$

и

$$T_m^G = \sum_{k=1}^m G(k, r) A_k$$

( $A_k(t) = \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt$ ) порядка  $m$  при  $1 \leq p \leq \infty$  имеют места неравенства

$$\|T_m^G\|_p \leq |G(m, r)| \|T_m - Z_m^1 T_m\|_p, \quad \text{если } c_\nu(r) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

$$\|T_m^G\|_p \leq |G(-m, r)| \|T_m - Z_m^1 T_m\|_p, \quad \text{если } (-1)^\nu c_\nu(r) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

для  $r \in V_\rho(m) = \bigcap_{k=1}^m V_\rho(k)$ .

Доказательство. Фиксируем значение  $r \in V_\rho(m)$ . Из условия А следует цепь равенств

$$T_m^G = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(r) \sum_{k=1}^m k^\nu A_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(r) m^\nu \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^\nu A_k =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(r) m^\nu (T_m - Z_m^\nu T_m),$$

откуда получим

$$\|T_m^G\|_p \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu(r)| m^\nu \|T_m - Z_m^\nu T_m\|_p. \quad (2.1)$$

Установим теперь при  $l \leq \nu$  неравенство

$$\|T_m - Z_m^\nu T_m\|_p \leq \|T_m - Z_m^l T_m\|_p, \quad (2.2)$$

которое вместе с неравенством (2.1) и условием А завершает доказательство.

Имеет место

$$\|T_m - Z_m^\nu T_m\|_p = \left\| \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^\nu A_k \right\|_p =$$

$$= \frac{1}{m} \left\| \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^{\nu-1} B_k(t) \right\|_p,$$

где  $B_k(t) = \alpha_k \sin kt - \beta_k \cos kt$ . Следуя неравенству

$$\|T_m^* \|_p \leq m \|T_m\|_p$$

(см. [1], стр. 190), где  $T_m^*$  — сопряженный полином полинома  $T_m$ , получим

$$\|T_m - Z_m^\nu T_m\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^{\nu-1} A_k \right\|_p,$$

откуда по индукции вытекает (2.2)

Докажем теперь теорему, которая обобщает оценку (1.5) сверху почти для любого метода суммирования ряда Фурье.

**Теорема.** Пусть для функции  $G$  выполнено условие А и существует положительная функция  $t$  с  $t(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \rho$  такая, что окрестность  $V_\rho(t(r))$  не зависит от  $r$  и для целочисленной функции  $[t]$  имеет место

$$g_{[m(r)]}(r) = O(1) \quad \text{при} \quad c_\nu(r) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

или

$$g_{-[m(r)]}(r) = O(1) \quad \text{при} \quad (-1)^\nu c_\nu(r) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Тогда для каждой функции  $x \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) справедлива оценка

$$\|U_r x - x\|_p = \begin{cases} O_l \left\{ \omega_l \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & l \equiv 0 \pmod{2}, \\ O_l \left\{ \omega_{l+1} \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p + m(r) \omega_{l+1} \left( y; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & l \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (2.3)$$

для любого  $r$  из множества параметров оператора  $U_r$  и где  $y$  — функция, имеющая ряд Фурье (1.3)

**Доказательство.** Пусть  $T_m$  — тригонометрический полином наилучшего приближения порядка  $m$  функции  $x$ ,  $E_m^p(x)$  — соответствующее наилучшее приближение, а степенной ряд функции  $G$  обладает одинаковыми знаками. Мы имеем по линейности оператора  $U_r$ , что

$$\|U_r x - x\|_p \leq \|U_r x - U_r T_m\|_p + \|U_r T_m - T_m\|_p + \|T_m - x\|_p \leq (1 + \|U_r\|) E_m^p(x) + \|T_m^G\|_p,$$

откуда по лемме получим

$$\|U_r x - x\|_p \leq O\{E_m^p(x)\} + |G(m, r)| \|T_m - Z_m^l T_m\|_p. \quad (2.4)$$

Для разности  $T_m - Z_m^l T_m$ , прибавляя и вычитая разность  $Z_m^l x - x$ , получим

$$\|T_m - Z_m^l T_m\|_p \leq (1 + \|Z_m^l\|) E_m^p(x) + \|x - Z_m^l x\|_p,$$

в силу чего при помощи теоремы Джексона (см. [4], стр. 272, 338) и из результата М. Ф. Тимана (1.5) вытекает неравенство

$$\|T_m - Z_m^l T_m\|_p = \begin{cases} O_l \left\{ \omega_l \left( x; \frac{1}{m} \right)_p \right\} & \text{для четных } l, \\ O_l \left\{ \omega_{l+1} \left( x; \frac{1}{m} \right)_p + m \omega_{l+1} \left( y; \frac{1}{m} \right)_p \right\} & \text{для нечетных } l. \end{cases}$$

Включая последнее неравенство в оценку (2.4), применяя еще раз теорему Джексона и учитывая предположения относительно функции  $t = t(r)$  и то, что  $t(r)/[t(r)] \equiv O(1)$ , закончим доказательство. Аналогично получаем оценку (2.3) и для степенной ряда с чередующимися знаками.

Доказанная теорема имеет некоторые полезные следствия. Пусть  $E \in (L_p; L_p)$  есть тождественный оператор.

**Следствие 1.** В предположениях теоремы имеет место оценка  $\|(U_r - E)^{s,x}\|_p =$

$$= \begin{cases} O_{l,s} \left\{ \omega_{ls} \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & \text{если } ls \text{ — четное,} \\ O_{l,s} \left\{ \omega_{ls+1} \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p + m(r) \omega_{ls+1} \left( y; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & \text{если } ls \text{ — нечетное} \end{cases}$$

для всех  $x \in L_p (1 \leq p \leq \infty)$  и натуральных чисел  $s$ .

**Доказательство.** Из теоремы видно, что предположения о функции  $m = m(r)$  остаются верными и при  $G^s(k, r) = (1 - g_k(r))^s$ .

Проверим условие А для функции  $G^s$  при  $s = 2$ . Пусть нам даны два ряда

$$\sum_{v=l_1}^{\infty} u_v \quad \text{и} \quad \sum_{v=l_2}^{\infty} v_v,$$

тогда их произведение Коши имеет вид

$$\sum_{v=l_1+l_2}^{\infty} \omega_v,$$

где

$$\omega_v = \sum_{i=l_1+l_2}^v u_{v+l_1-i} v_{i-l_1}.$$

Из соотношения

$$(-1)^v \omega_v = \sum_{i=l_1+l_2}^v (-1)^{v+l_1-i} u_{v+l_1-i} (-1)^{i-l_1} v_{i-l_1}$$

следует выполнение предположения условия А относительно  $c_v(r)$  для  $G^2$ , так как в нашем случае  $u_v = v_v = c_v(r)k^v$ . Также известно, что радиус сходимости квадрата степенного ряда не уменьшается. Условие А проверено.

Учитывая равенства  $l_1 = l_2 = l$ , получаем наконец, что в правой части неравенства (2.3) вместо  $l$  надо писать  $2l$ . Доказательство для любого натурального  $s$  завершаем по индукции.

Пусть теперь операторы  $U'_r$  и  $U''_r$  определены соответственно функциям

$$G'(k, r) = \sum_{v=l_1}^{\infty} c'_v(r)k^v$$

и

$$G''(k, r) = \sum_{v=l_2}^{\infty} c''_v(r)k^v,$$

причем предполагаем, что множество параметров  $r$  для обоих операторов одно и то же.

**Следствие 2.** Пусть функция  $m = m(r)$  удовлетворяет предположениям теоремы для  $U'_r$  и  $U''_r$  и степенные ряды функ-

ций  $G'$  и  $G''$  одновременно с одинаковыми или с чередующимися знаками, тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \| (U'_r - E)^s (U''_r - E)^t x \|_p = \\ & = \begin{cases} O_l \left\{ \omega_l \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & \text{если } l - \text{четное,} \\ O_l \left\{ \omega_{l+1} \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p + m(r) \omega_{l+1} \left( y; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\} & \text{если } l - \text{нечетное} \end{cases} \end{aligned}$$

для всех  $x \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), где  $l = sl_1 + tl_2$ , а  $s, t$  — любые натуральные числа.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Что касается результатов следствий 1 и 2, то надо отметить, что оценки такого типа при  $p = \infty$  раньше рассмотрены В. В. Жуком (см. [2]). В следствиях 1 и 2 новыми моментами являются общее доказательство для натуральных и непрерывных параметров оператора  $U_r$  и установление функции  $m = m(r)$ , которая может быть и нелинейной.

**Следствие 3.** В предположениях теоремы имеет место оценка

$$\| U_r x - x \|_p = O_{l,p} \left\{ \omega_l \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}$$

для всех  $x \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ).

Доказательство достаточно провести только для нечетных  $l$ . По определению функции  $y$  производная  $y' = x^*$ , где  $x^*$  — тригонометрическая сопряженная функция функции  $x$  (см. [4], стр. 169). Учитывая свойства модуля гладкости (см. [4], стр. 116—117), получим неравенство

$$m(r) \omega_{l+1} \left( y; \frac{1}{m(r)} \right)_p \leq \omega_l \left( x^*; \frac{1}{m(r)} \right)_p \quad (2.5)$$

и

$$\omega_{l+1} \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \leq 2 \omega_l \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \quad (2.6)$$

Но для  $x \in L_p$  ( $1 < p < \infty$ ) имеет место неравенство М. Рисса (см. [4], стр. 169)

$$\| x^* \|_p \leq M_p \| x \|_p,$$

в силу чего из (2.5) следует неравенство

$$m(r) \omega_{l+1} \left( y; \frac{1}{m(r)} \right)_p \leq M_p \omega_l \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p.$$

Включая последнее неравенство вместе с (2.6) в оценку (2.3) при нечетном  $l$ , завершаем доказательство.

Такой же результат, используя существенно теорему Марцинкевича о мультипликаторах, раньше получил В. М. Кокилашвили (см. [3], леммы 1, 2), но только для случаев  $m(r) = 1 - r$  и  $m(n) = n$ .

**Следствие 4.** Пусть выполнено условие А для функции

$$G^0(k, r) = 1 - \frac{g_k(r)}{1 + O(m^{-l}(r))}.$$

Тогда при предположениях теоремы имеет место оценка

$$\|U_{rx} - x\|_p = \begin{cases} O_l \left\{ \omega_l \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & l - \text{четное}, \\ O_l \left\{ \omega_{l+1} \left( x; \frac{1}{m(r)} \right)_p + \omega_l \left( x^*; \frac{1}{m(r)} \right)_p \right\}, & l - \text{нечетное} \end{cases}$$

для любой  $x \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) и для которой существует  $x^* \in L_p$ .

Доказательство. Пусть функция  $1 - G^0$  определяет оператор  $U^0_r$ , для которого по теореме имеет место оценка (2.3). По определению оператора  $U^0_r$ , получим

$$\|U_{rx} - U^0_r x\|_p = O(m^{-l}(r) \|U_{rx}\|). \quad (2.7)$$

Так как

$$\liminf_{r \rightarrow p} m^l(r) \omega_l \left( z; \frac{1}{m(r)} \right)_p > 0$$

(см. [4], стр. 116), то существует константа  $C$  такая, что

$$m^{-l}(r) \leq C \omega_l \left( z; \frac{1}{m(r)} \right)_p, \quad (2.8)$$

где  $z = x$  или  $z = x^*$ . Теперь из неравенства

$$\|U_{rx} - x\|_p \leq \|U_{rx} - U^0_r x\|_p + \|U^0_r x - x\|_p$$

через неравенства (2.3), (2.7), (2.8) и (2.5) получим наше утверждение.

Отметим, наконец, что сопоставление следствия 1-4 допускает получать различные оценки типа (2.3).

### § 3. Применения

Оказывается, что для наиболее применяемых методов приближения выполнены вышеуказанные требования. Приведем краткий обзор о некоторых методах приближения.

1. Метод приближения Риса определяется функцией  $g_k(n) = (1 - (k/n)^\lambda)^p$  при  $0 \leq k \leq n$  и  $g_k(n) = 0$  при  $k \geq n$ , для которого условия основной теоремы таковы:

$$G(k, n) = \sum_{v=1}^p (-1)^v \binom{p}{v} \left( \frac{k}{n} \right)^{\lambda v} \quad (n \geq k);$$

$$l = \lambda; \quad m(n) = n.$$

2. Условия основной теоремы для метода Стеклова, определяемого функцией  $g_k(r) = (\sin kr/kr)^p$  ( $r > 0$ ), имеют следующий вид:

$$G(k, r) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} c_v(p) (kr)^{2v}$$

( $c_v(p)$  — положительные коэффициенты);  $l = 2$ ,  $m(r) = r^{-1}$ .

3. Функция  $g_k(r) = \exp(-k^2 r/4)$  соответствует методу приближения Гаусса—Вейерштрасса. Условия основной теоремы следующие:

$$G(k, r) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \frac{1}{v!} \left(\frac{r}{4}\right)^v k^{2v};$$

$$l = 2; m(r) = r^{-1}.$$

4. Метод приближения Джексона — Валле-Пуссена определяется функцией  $g_k(n) = 1 - (3/2)(k/n)^2 + (3/4)(k/n)^3$  при  $k \leq n$ ,  $g_k(n) = (1/4)(2 - k/n)^3$  при  $n \leq k \leq 2n$  и  $g_k(n) = 0$  при  $k \geq 2n$ , для которого условия основной теоремы выражаются следующим образом:  $G(k, n) = (3/2)(k/n)^2 - (3/4)(k/n)^3$  при  $n \geq k$ ;  $l = 2$ ;  $m(n) = n$ .

5. Функция  $g_k(n) = 1 - C \sin^p kh_n$  ( $0 < K_1 \leq nh_n \leq \pi - K_1$ ) при  $0 \leq k \leq n$  и  $g_k(n) = 0$  при  $k > n$  соответствует методу приближения Тригуба (отметим, что при  $C = 2$ ;  $p = 2$ ;  $h_n = \pi/2(2n + 1)$  получим метод Рогозинского). Условия основной теоремы следующие:

$$G(k, n) = \left( C \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{(kh_n)^{2v+1}}{(2v+1)!} \right)^p \quad \text{при } n \geq k;$$

$$l = p \text{ (учитывая следствие 1)}; m(n) = 1/h_n.$$

6. Условия основной теоремы для метода Абеля — Пауссона ( $g_k(r) = r^k$  при  $0 < r < 1$ ) имеют следующий вид:

$$G(k, r) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \frac{(k \ln r^{-1})^v}{v!};$$

$$l = 1; m(r) = 1/(1 - r).$$

7. Из следствия 4 получаем для метода Валле-Пуссена ( $g_k(n) = (n!)^2 / \{(n - k)!(n + k)!\}$  при  $k \leq n$  и  $g_k(n) = 0$  при  $k > n$ ) такие условия:

$$g_k(n) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!} \left(\frac{k^2}{n}\right)^v \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{при } n \geq Ck^2 \text{ (см. [6])};$$

$$l = 2; m(n) = \sqrt{n}.$$

8. Средние Валле-Пуссена порядка  $v$  определяется функцией  $g_k^v(n) = 1$  при  $k \leq v$ ,  $g_k^v(n) = (n - k + 1)/(n - v + 1)$  при  $v < k \leq n$  и  $g_k^v(n) = 0$  при  $k > n$ , для которых из следствия 4 получаем следующие условия:

$$g_k^v(n) = (1 - k/(n - v + 1)) (1 + O(v/n)) \quad \text{при } n \geq k > v;$$

$$l = 1; m(n) = n.$$

## Литература

1. Ахнезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1965.
2. Жук В. В., О линейных процессах аппроксимации. Тр. II-й Итог: конференции проф.-преподават. состава Новгородск. фил. Ленингр. электротехн. ин-та. Ч. 1, Новгород, 1969, 319—327.
3. Кокилашвили В. М., О приближении периодических функций. Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН ГрузССР, 1968, 34, 51—81.

4. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
5. Тиман М. Ф., О порядке приближения функции нормальными средними Зигмунда. Докл. АН СССР, 1968, 181, 29—34.
6. Рунск, Р. О., Über Konvergenzgeschwindigkeit linearer Operatoren in Banachräumen. On approximation Theory, Proc. of the Conf. held in the Math. Res. Inst. at Oberwolfach Black Forest, 1963, № 4—10, 96—106.

Поступило  
10 II 1972

## PERIOODILISTE FUNKTSIOONIDE LÄHENDAMISKIIRUSEST

A. Kivinukk

Resümee

Käesolevas töös on uuritud  $2\pi$ -perioodiliste mõõtuvate funktsioonide lähendamist operaatoritega (1.4).

Leitud tingimused jada  $\{g_k\}$  jaoks lubavad ühtselt seisukohast hinnata normi  $\|U_r x - x\|_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) nullile lähenemise kiirust vastavat järku siledusmoduli kaudu. Märgime, et erinevalt varasematest tõõdest selles suunas, on siin näidatud ka siledusmoduli argumenti sõltuvust jadast  $\{g_k\}$ .

Tulemused on suhteliselt efektiivselt rakendatavad enamlevinud lähenusmeetoditele.

## ÜBER DEN APPROXIMATIONSGRAD PERIODISCHER FUNKTIONEN

A. Kivinukk

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel ist ein allgemeines Verfahren für die Untersuchung des Approximationsgrades im Raum  $L_p$  mittels der Fourierreihe angegeben.

Es sei  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) der Raum von  $2\pi$ -periodischen meßbaren Funktionen mit der Norm (1.1). Jedem  $x \in L_p$ , die eine Fourierentwicklung (1.2) hat, läßt sich ein linearer Operator (1.4) zuordnen. Hier sind  $g_k$  (wo  $g_0 \equiv 1$ ) die Funktionen, deren Argumentbereich einen Häufungspunkt  $\varrho$  hat.

Wir formulieren eine Bedingung für die Funktionen  $G(k, r) = 1 - g_k(r)$ .

**Bedingung A.** Sei  $\varphi(v)$  eine lineare ganzzahlige Funktion so, daß für  $r \in V_\varphi(k)$  die Funktion  $G$  eine Reihenentwicklung (2.0) hat, deren Konvergenzradius unendlich ist und wo  $V_\varphi(k)$  eine Umgebung (im allgemeinen abhängig von  $k$ ) der Stelle  $\varrho$  ist.

Diese Bedingung läßt auf folgende Weise den Approximationsgrad durch den Stetigkeitsmodul abschätzen (für  $\varphi(v) = v$ ).

**Hauptsatz.** Ist die Bedingung A erfüllt und gibt es eine positive Funktion  $m = m(r)$  (mit  $m(r) \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow \varrho$ ) so, daß die Umgebung  $V_\varphi(m(r))$  unabhängig von  $r$  ist und für die ganzzahlige Funktion  $[m(r)]$  die Beziehungen

$$g_{[m(r)]}(r) = O(1) \quad \text{für} \quad c_v(r) \geq \delta \quad (\leq 0),$$

oder

$$g_{-[m(r)]}(r) = O(1) \quad \text{für} \quad (-1)^v c_v(r) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

gelten, dann gilt für alle  $x \in L_p$  und für beliebige Zahl  $r$  die Abschätzung (2.3), wo  $y$  — eine Funktion, die die Fourierentwicklung (1.3) hat.

Am Ende des Artikels ist gezeigt, daß der Hauptsatz sich für die meisten Approximationsverfahren anwenden läßt.

## НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ

М. ТЫННОВ

Кафедра математического анализа

В настоящей статье обобщаются некоторые результаты работ [1, 3]. Доказываются, когда  $(E, (F, T)) = (E, (F, T)_{TN})$  и когда  $\{\lambda_k\} \in (dV, E_{TN})$ . Кроме того, доказываются, когда  $E = E_{TN}$  и  $(E, T) = (E, T)_{TN}$ .

В статье мы пользуемся обозначениями статьи [1].

**Теорема 1.** Если  $E$  и  $F$  являются ВК-пространствами,  $P$  плотно в  $E$  и  $T$  удовлетворяет условию (K), то

$$(E, (F, T)) = (E, (F, T)_{TN}).$$

Доказательство. Поскольку  $(F, T)_{TN} \subset (F, T)$ , то

$$(E, (F, T)_{TN}) \subset (E, (F, T)).$$

Для доказательства обратного включения допустим, что  $\Lambda f^0 \in (F, T)$  для каждого  $f^0 \in E$ , где

$$f^0 = \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\Lambda f^0 = \sum \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда (см. [1], теорема 2.2, стр. 197)

$$\|\Lambda f^0\|_{(F, T)} = \pi \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_F \leq 1} |\langle \sigma(\omega, \Lambda f^0), g^0 \rangle| < \infty.$$

Из определения  $T$ -дополнительного пространства и из регулярности  $T$  вытекает, что

$$\sigma(\omega, \Lambda f^0) \in (F, T).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\sigma(\omega, \Lambda f^0)\|_{(F, T)} &= \pi \sup_{v \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_F \leq 1} |\langle \sigma(\omega, \Lambda f^0), \sigma(v, g^0) \rangle| = \\ &= \pi \sup_{v \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_F \leq 1} \left| \sum_k \tau_k(v) \tau_k(\omega) \lambda_k (a_k c_k + b_k d_k) \right| = \\ &= \pi \sup_{v \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_F \leq 1} \left| \left\langle \sum_k \tau_k(\omega) \lambda_k (a_k c_k + b_k d_k) \cos kt, \sum_k \tau_k(v) \cos kt \right\rangle \right| = \\ &= \pi \sup_{v \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_F \leq 1} |\langle \sigma(\omega, \Lambda f^0(t)), g^0(x+t), K(v, t) \rangle| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \sup_{\nu \in \Omega} \sup_{\|g^\circ\|_F \leq 1} |\langle \sigma(\omega, g^\circ(x+t)), \Lambda f^\circ(t), K(\nu, t) \rangle| \leq \\
&\leq \pi \sup_{\nu \in \Omega} \sup_{\|g^\circ\|_F \leq 1} \|\langle \sigma(\omega, g^\circ(x+t)), \Lambda f^\circ \rangle\|_C \cdot \|K(\nu, t)\|_L \leq \\
&\leq \sup_{\nu \in \Omega} \|K(\nu, t)\|_L \cdot \sup_{\|g^\circ\|_F \leq 1} \|\Lambda f^\circ(t)\|_{(F, T)} \cdot \|g^\circ(x+t)\|_F = \\
&= \sup_{\nu \in \Omega} \|K(\nu, t)\|_L \|\Lambda f^\circ\|_{(F, T)} \sup_{\|g^\circ\|_F \leq 1} \|g^\circ\|_F = \\
&= \sup_{\nu \in \Omega} \|K(\nu, t)\|_L \cdot \|\Lambda f^\circ\|_{(F, T)} = \\
&= K \|\Lambda f^\circ\|_{(F, T)},
\end{aligned}$$

где  $K = \sup_{\nu \in \Omega} \|K(\nu, t)\|_L$ .

Итак,

$$\|\sigma(\omega, \Lambda f^\circ)\|_{(F, T)} \leq K \|\Lambda f^\circ\| < \infty.$$

Тогда по принципу равномерной ограниченности последовательность норм операторов  $T(\omega_n) \Lambda f^\circ = \sigma(\omega_n, \Lambda f^\circ)$  ограничена и

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \|T(\omega) \Lambda \rho^\circ - \Lambda \rho^\circ\|_{(F, T)} = 0 \quad \forall \rho^\circ \in P.$$

А  $P$  плотно в  $E$ . Поэтому для каждой последовательности  $\omega_n \rightarrow \omega_0$

$$\lim_{\omega_n \rightarrow \omega_0} \|\sigma(\omega_n, \Lambda f^\circ) - \Lambda f^\circ\|_{(F, T)} = 0 \quad \forall f^\circ \in E.$$

Следовательно,  $\Lambda f^\circ \in (F, T)_{TN}$ .

Примечание 1. Теорема 1 имеет место и для некоторых методов  $T$ , для которых условие (К) не выполнено. Например, если  $T$  — метод сходимости, то теорема 1 остается в силе (см. [3], теорема 1, стр. 154). Для метода Чезаро это теорема известна (см. [3], теорема 1).

Примечание 2. Имеют место следующие равенства:

$$(L_p, T)_{TN} = L_{qTN} \quad \left(1 < p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right);$$

$$(C, T)_{TN} = L_{TN};$$

$$(V, T)_{TN} = dC_{TN};$$

$$(A, T)_{TN} = dC_{TN};$$

$$(L_\Phi, T)_{TN} = L_{\Psi TN}$$

(см. [1], стр. 196—198). Если  $T$  удовлетворяет условию (К), то

$$(L_p, T)_{TN} = L_q \quad \left(1 < p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

$$(L, T)_{TN} = C;$$

$$(C, T)_{TN} = (dV)_{TN} = L;$$

$$(V, T)_{TN} = (A, T)_{TN} = (dL_\infty)_{TN} = dC.$$

Поскольку  $P$  плотно в пространствах  $L_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $C$ ,  $L_\infty$  и  $A$ , то для этих пространств имеет место следующее

**Следствие 1.** Если  $T$  удовлетворяет условию (K), то

$$\begin{aligned}(E, (L, T)) &= (E, L_\infty) = (E, C); \\ (E, L_{\Psi TN}) &= (E, L_\Psi); \\ (E, dV) &= (E, dV_{TN}) = (E, L); \\ (E, (V, T)) &= (E, dC) = (E, (A, T)) = (L, dL_\infty); \\ (E, (dV, T)) &= (E, C_{TN}) = (E, C).\end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть  $F$  является ВК-пространством и  $T$  удовлетворяет условию (K). Тогда  $(F, T) = (F, T)_{TN}$ , тогда и только тогда, когда  $P$  плотно в  $(F, T)$ .

**Доказательство.** Если  $(F, T) = (F, T)_{TN}$ , то  $P$  плотно в  $(F, T)$ . Действительно, если  $f^0 \in (F, T) = (F, T)_{TN}$ , имеем

$$\lim_{\omega} \lim_n \left\| \sum_{k=1}^n \tau_k(\omega) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - f^0(x) \right\|_{(F, T)} = 0.$$

Это и значит, что  $P$  плотно в  $(F, T)$ .

Достаточность вытекает из теоремы 1, если  $E = (F, T)$  и  $\lambda_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

**Теорема 3.** Если  $P$  плотно в  $E$ , то для ВК-пространства  $E$  имеет место равенство  $E = E_{TN}$ , тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\omega} \|\sigma(\omega, f^0)\|_E < \infty.$$

**Доказательство** вытекает из теоремы Целлера о сходимости по отрезкам (см. [4], теорема 3.3).

**Примечание 3.** Из теоремы 3 вытекает и теорема Фейера.

**Примечание 4.** Поскольку  $P$  не плотно в  $L_\infty$ ,  $V$ ,  $(L, T)$ ,  $(C, T)$ ,  $(V, T)$ , то

$$\begin{aligned}(L, T) &\neq (L, T)_{TN} = C_{TN}; \\ (C, T) &\neq (C, T)_{TN} = L_{TN}; \\ (E, T) &\neq (V, T)_{TN} = C_{TN}.\end{aligned}$$

**Теорема 4.** Если  $E = ((E, T), T)$  и  $F = ((F, T), T)$ , то

$$(E, F) = ((F, T), (E, T)).$$

**Доказательство** следует из включения

$$((F, T), (E, T)) \subset (((E, T), T), ((F, T), T)) = (E, F).$$

(см. [1], стр. 199, теорема 4.4).

**Теорема 5.** Пусть  $E$  является ВК-пространством. Тогда  $\{\lambda_k\} \in (dV, E_{TN})$  тогда и только тогда, когда

$$K^0 = \sum \lambda_k \cos kx \in E_{TN}.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $f^0 = (a_k, b_k) \in dV$ , тогда  $\sum \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in E_{TN}$ . Отсюда  $\sum \lambda_k \cos kx \in E_{TN}$ , поскольку  $\sum \cos kx \in dV$ .

Достаточность. Пусть  $f^0 \in dV$  и  $K^0 \in E_{TN}$ . Тогда  $\|\sigma(\omega', Af^0) - \sigma(\omega'', Af^0)\|_E \leq$

$$\leq \frac{1}{\pi} \|\sigma(\omega', K^0) - \sigma(\omega'', K^0)\|_E \cdot \|f^0\|_{dV} = o(1).$$

$= o(1)$ . Отсюда и следует, что  $\{\lambda_k\} \in (dV, E_{TN})$ .

Примечание 5. В случае  $E = C$  теорема 5 известна (см. [2], стр. 143), в случае  $T = C^k$  теорема доказана Гёссом (см. [2], теорема 9).

## Литература

1. Тыннов М., Коэффициенты Фурье и множители суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 194—201.
2. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktoretheorem und Multiplikatoren. *Studia math.*, 1960, 19, 133—148.
3. Goes, G., Identische Multiplikatorenklassen und  $C_k$ -Basen in  $C_k$ -komplementären Fourierkoeffizientenräumen. *Math. Nachr.*, 1960, 21, 150—159.
4. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in  $FK$ -Räumen. *Math. Z.*, 1951, 55, 55—70.

Поступило  
13 III 1972

## MÕNED TEOREEMID MULTIPLIKAATORITEST

M. Tõnnov

Resümee

Artiklis uuritakse, millal on multiplikaatorite klassid  $(E, (F, T))$  ja  $(E, (F, T)_{TN})$  võrdsed. Ühtlasi tõestatakse tarvilik ja piisav tingimus selleks, et  $\{\lambda_k\} \in (dV, E_{TN})$ . Mittenegatiivse järguga Cesàro menetluse korral on saadud tulemused tõestatud artiklites [2, 3].

## EINIGE SÄTZE VON MULTIPLIKATOREN

M. Tõnnov

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel werden einige in [1, 3] bewiesene Sätze über die Multiplikatoren fortgesetzt. Hier beweist man, wann  $(E, (F, T)) = (E, (F, T)_{TN})$  sind und wann  $\{\lambda_k\} \in (dV, E_{TN})$  ist, dazu untersucht man auch wann  $E = E_{TN}$  und  $(E, T) = (E, T)_{TN}$  sind. Hier gebraucht man solche Bezeichnungen wie in dem Artikel [1].

## ЗАМЕЧАНИЯ О ЛОКАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ, ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ И СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ

С. Барон

Кафедра математического анализа

Пусть  $f$  — вещественная  $2\pi$ -периодическая функция, интегрируемая по Лебегу на  $(-\pi, \pi)$ . Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \quad (1)$$

является рядом Фурье функции  $f$ , а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nt - b_n \cos nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) \quad (2)$$

является сопряженным с рядом (1).

Пусть  $A$  — нормальный метод суммирования рядов с матрицей  $(a_{nk})$  преобразования ряда в последовательность и с матрицей  $(\bar{a}_{nk})$  преобразования ряда в ряд.

В статье [1] доказаны общие теоремы, дающие условия для того, чтобы  $|A|$ -суммируемость, т. е. абсолютная  $A$ -суммируемость, ряда<sup>1</sup>

$$\sum \lambda_n A_n(t) \quad (3)$$

являлась или не являлась локальным свойством функции  $f$ . В статье [2] найдены условия, чтобы  $|A|$ -суммируемость рядов (3) и

$$\sum \lambda_n B_n(t) \quad (4)$$

являлась локальным свойством<sup>2</sup> функции  $f$  в точке  $x$ . В статье

<sup>1</sup> Если пределы суммирования у знака  $\Sigma$  не обозначены, то суммирование ведется по индексу  $n$  от 0 до  $\infty$ . Во всех условиях и оценках свободные индексы принимают все значения  $1, 2, \dots$

<sup>2</sup> Говорят, что  $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) является локальным свойством функции  $f$  в точке  $x$ , если  $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) в точке  $x$  зависит от поведения  $f$  лишь из окрестности точки  $x$ . Говорят, что  $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) является локальным свойством функции  $f$ , если она является локальным свойством  $f$  в каждой точке  $x$ .

[3] такие общие теоремы доказаны для  $r$  раз продифференцированного ряда (3), т. е. для ряда

$$\sum \lambda_n \frac{d^r}{dt^r} A_n(t). \quad (5)$$

Из теорем статей [1, 2, 3] вытекают все известные для конкретных методов  $A$  и последовательностей  $\lambda = \{\lambda_n\}$  результаты о локальном свойстве  $|A|$ -суммируемости рядов (3), (4) и (5).

В статье [3] мы рассматривали более общие методы  $A$ , не ограничиваясь случаем  $p = 0$  как в [1, 2]. Кроме того, в [3] мы освободились от сильного ограничения  $\sum |\Delta \lambda_n| < \infty$ , которое накладывали на  $\lambda$  в статьях [1, 2], что дало возможность рассматривать и случаи  $\lambda_n \neq O(1)$ . Оказывается, что теоремы статьи [3], как видно из их доказательств, верны и при  $r = 0$ , и, тем самым, результаты статей [1, 2] можно улучшить. Например, освобождаемся от требования существования сопряженной функции при рассмотрении ряда (4). Кроме того, их можем применять также для  $r$  раз продифференцированного ряда (4), т. е. для ряда

$$\sum \lambda_n \frac{d^r}{dt^r} B_n(t) \quad (6)$$

(являющегося сопряженным для ряда (5), в чем легко убедиться сравнением коэффициентов Фурье обоих рядов). В частности, теорема 1 статьи [3] получает следующую (более общую) формулировку, где

$$\gamma_n = \lambda_n a_{nn}, \quad \omega_n = n^r \gamma_n.$$

**Теорема 1.** Если выполнены условия<sup>3</sup>

$$a_{nn} \in (|A|, |E|)$$

и

$$\sum |\omega_n| = \infty,$$

то  $|A|$ -суммируемость рядов (5) и (6) не<sup>4</sup> является локальным свойством функции  $f$ .

Таким образом, целью настоящей заметки является доказательство теоремы 1 и следующих теорем, в которых  $r = 0, 1, \dots$ ,  $q = 0, 1, \dots$ , а для  $s = 0, 1, \dots, p + 1$ , где  $p = 0, 1, \dots$ , обозначено

$$v^s_k = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^s \bar{a}_{nk}|.$$

<sup>3</sup> Числа  $\varepsilon_n$  называются множителями сходимости типа  $(|A|, |E|)$ , коротко  $\varepsilon_n \in (|A|, |E|)$ , если для каждого  $|A|$ -суммируемого ряда  $\sum u_n$  ряд  $\sum \varepsilon_n u_n$  абсолютно сходится.

<sup>4</sup> Говорят, что  $|A|$ -суммируемость ряда (3) (или (4)) не является локальным свойством функции  $f$ , если найдутся промежутки  $(x + a, x + \beta)$ , где  $0 < a < \beta < 2\pi$ , и функция, равная  $f$  в  $(x + a, x + \beta)$  и равная нулю в  $(x, x + a) \cup (x + \beta, x + 2\pi)$ , для которой ряд (3) (соответственно (4)) не является  $|A|$ -суммируемым в точке  $x$ .

**Теорема 2.** Пусть метод  $A$  при некотором  $p$  удовлетворяет условию

$$\gamma_n^{p+1} = O(a_{nn}). \quad (7)$$

Пусть  $A$  и  $\lambda$  при некотором  $q$  удовлетворяют условиям

$$\gamma_{n+k}^{p+1-k} \Delta^k (n^{-q} \lambda_n) = O(n^{-q} \gamma_n) \quad (k=1, \dots, p+1). \quad (8)$$

Если

$$\sum A_n^{p-1} (n+1)^{-q} |\gamma_n| < \infty, \quad (9)$$

$$\sum |\omega_n| < \infty, \quad (10)$$

то  $|A|$ -суммируемость ряда (5) при четном  $q$  и ряда (6) при нечетном  $q$  является локальным свойством функции  $f$ .

**Теорема 3.** Пусть  $A$  при некотором  $p$  удовлетворяет условию (7). Пусть  $A$  и  $\lambda$  удовлетворяют условиям (8) и (9) при некотором  $q$  и условиям

$$\sum (n+1)^{-1} |\omega_n| < \infty, \quad (11)$$

$$\omega_n = O(\omega_k) \quad (k < n), \quad (12)$$

$$\omega_n = O(\omega_{n+k}) \quad (k < n). \quad (13)$$

Если  $q$  четно и при четном  $r$

$$\sum |\omega_n A_n(x)| < \infty, \quad (14)$$

а при нечетном  $r$

$$\sum |\omega_n B_n(x)| < \infty, \quad (15)$$

то  $|A|$ -суммируемость ряда (5) является локальным свойством функции  $f$  в точке  $x$ .

Если  $q$  нечетно и при четном  $r$  выполнено (15), а при нечетном  $r$  выполнено (14), то  $|A|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством  $f$  в точке  $x$ .

Если  $A$  или  $\lambda$  не удовлетворяют условиям (11) или (12), то удобна

**Теорема 4.** Пусть  $A$  при некотором  $p$  удовлетворяет условию (7). Пусть  $A$  и  $\lambda$  удовлетворяют условиям (8) и (9) при некотором  $q$  и условиям

$$\sum (n+1)^{-2} |\omega_n| < \infty, \quad (16)$$

$$\omega_k = O(\omega_n) \quad (k < n), \quad (17)$$

$$\gamma_n = O(\gamma_{n-k}) \quad (2k < n). \quad (18)$$

Если  $q$  четно и при четном  $r$  выполнено (14), а при нечетном  $r$  выполнено (15), то  $|A|$ -суммируемость ряда (5) является локальным свойством  $f$  в точке  $x$ .

Если  $q$  нечетно и при четном  $r$  имеет место (15), а при нечетном  $r$  выполнено (14), то  $|A|$ -суммируемость ряда (6) является локальным свойством функции  $f$  в точке  $x$ .

В случае  $r = 0$  условие (17) не выполняется, например, для  $A$  с  $0 < a_{nn} \downarrow$  при  $\lambda = \{1\}$ . В таких случаях удобна следующая теорема — обобщение теоремы 26 статьи [2].

**Теорема 5.** Пусть  $A$  при некотором  $p$  удовлетворяет условию (7). Пусть  $A$  и  $\lambda$  удовлетворяют условиям (8) и (9) при некотором  $q$  и условиям

$$\gamma_n = O(\gamma_k) \quad (k < n), \quad (19)$$

$$k^2 \gamma_k = O(n^2 \gamma_n) \quad (k < n). \quad (20)$$

Если  $q$  четно и

$$\sum |\gamma_n A_n(x)| < \infty,$$

то  $|A|$ -суммируемость ряда (3) является локальным свойством функции  $f$  в точке  $x$ .

Если  $q$  нечетно и

$$\sum |\gamma_n B_n(x)| < \infty,$$

то  $|A|$ -суммируемость ряда (4) является локальным свойством функции  $f$  в точке  $x$ .

Доказательство теоремы 1 — такое же, как для теоремы 1 статьи [3]. Доказательство теорем 2, 3 и 4 при  $q = 0$  и  $r \geq 1$  дано в статье [3]. Покажем сначала, что теоремы 2, 3 и 4 из [3] верны и при  $r = 0$ . Действительно, при  $r = 0$  имеем  $Y_n(t) \equiv 0$  и, следовательно,  $H_n(x) = O(A_n^{p-1})$  (см. [3], стр. 164—166). Покажем также, что в теореме 4 статьи [3] можно при  $r \geq 0$  условие (19) заменить более слабым условием (18). Для этого надо рассмотреть лишь выражения  $M_1$  и  $M_{21}$  на стр. 170 статьи [3]. Но в  $M_{21}$  замена (19) на (18) допустима. Далее, обозначив  $[n/2] = m$ , имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)^r |\gamma_n B_{n-k}(x)| = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \left( \sum_{k=1}^m + \sum_{k=m+1}^{n-1} \right) k^{-2} (n-k)^r |B_{n-k}(x)| = M_{11} + M_{12}. \end{aligned}$$

Теперь, сравнивая  $M_{11}$  с  $M_{21}$ , находим, что (18) и (15) влекут за собой  $M_{11} < \infty$ . Далее, сравнивая  $M_{12}$  с  $M_{22}$ , также видим, что из (17), (16) и (15) следует

$$M_{12} = O(1) \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=m}^{n-1} n^{r-2} |B_{n-k}(x)| < \infty.$$

Пусть  $q \geq 0$ . Если  $\lambda_n = n^q \mu_n$ , то для ряда (5) при  $r \geq 0$  и четном  $q \geq 2$  имеем

$$\sum \lambda_n \frac{d^r}{dt^r} A_n(t) = (-1)^{q/2} \sum \mu_n \frac{d^{r+q}}{dt^{r+q}} A_n(t),$$

а для ряда (6) при  $r \geq 0$  и нечетном  $q$

$$\sum \lambda_n \frac{d^r}{dt^r} B_n(t) = (-1)^{(q+1)/2} \sum \mu_n \frac{d^{r+q}}{dt^{r+q}} A_n(t).$$

Теперь, так как  $\mu_n = n^{-q} \lambda_n$ , то из теорем 2—4 статьи [3], заменив в них  $\lambda_n$  на  $n^{-q} \lambda_n$ , получаем требуемое, ибо доказательств теоремы 5 сводится к получению оценки  $\sum |\lambda_n G_n(x)| < \infty$ , но эта оценка (учитывая доказательство теоремы 3 из [3]) непосредственно вытекает из доказательства теоремы 2б статьи [2]

Из теорем 1—5 настоящей заметки вытекают все известные для конкретных  $A$  и  $\lambda$  результаты о локальном свойстве  $|A|$ -суммируемости рядов (1)–(6). В частности, обозначив через  $Q$  метод взвешенных средних Риса  $(R, q_n)$  с  $Q_n = \exp(n/\ln n)$  при  $n \geq 2$ , из теоремы 1 вытекает (см. [3], стр. 159) следующий результат статьи [6] Бхатта:  $|Q(C, 1)|$ -суммируемость ряда (1) не является локальным свойством функции  $f$ .

Далее, обозначив через  $P$  метод Вороного—Нёрлунда  $(WN, p_n)$ , из теоремы 2 при  $p = 1$  и  $q = 0$  (даже из теоремы 4 статьи [2]) следует:  $|P(C, \alpha)|$ -суммируемость ряда (1) является локальным свойством функции  $f$  при выполнении условий  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\sum (n+1)^{-\alpha}/P_n < \infty$ ,  $0 \leq p_n \downarrow$ ; т. е. результат всей статьи [7]. Действительно, для метода  $P(C, \alpha)$  условие (7) выполнено при  $p = 1$ , ибо ввиду  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $0 \leq p_n \downarrow$

$$\begin{aligned} v^2_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \left| \sum_{v=k}^n \Delta \frac{p_{n-v}}{P_n} \Delta \frac{A_{v-k}^{\alpha-1}}{A_v^\alpha} \right| \leq \\ &\leq \sum_{v=k}^{\infty} \frac{|A_{v-k}^{\alpha-2}|}{A_v^\alpha} \sum_{n=v}^{\infty} \left| \Delta \frac{p_{n-v}}{P_n} \right| = \frac{O(1)}{A_k^\alpha P_k}. \end{aligned}$$

Далее, для метода Чезаро  $(C, \alpha)$  с  $\operatorname{Re} \alpha > -1$  можем в случае  $\lambda = \{1\}$  (ср. [3], стр. 171) сразу положить  $p = [\operatorname{Re} \alpha]$ , если взять  $q = 1$  при рассмотрении ряда (6) и  $q = 2$  при рассмотрении ряда (5). Тогда условия (7), (8) и (9) выполнены.<sup>5</sup> Условие (10) выполнено при  $\operatorname{Re} \alpha > r + 1$ , условие (11) — при  $\operatorname{Re} \alpha > r$ , условие (12) — при  $\operatorname{Re} \alpha \geq r$ , условия (13) и (18) выполнены при всех  $\alpha$  с  $\operatorname{Re} \alpha > -1$ , условие (16) — при  $\operatorname{Re} \alpha > r - 1$ , условие (17) — при  $\operatorname{Re} \alpha \leq r$ . Следовательно, из теорем 1—4 вытекают следующие следствия (ср. [3], стр. 172):  $|C, \alpha|$ -суммируемость каждого из рядов

$$\sum \frac{d^r}{dt^r} A_n(t) \quad (21)$$

и

$$\sum \frac{d^r}{dt^r} B_n(t) \quad (22)$$

не является локальным свойством  $f$  при  $-1 < \operatorname{Re} \alpha \leq r + 1$  и является локальным свойством при  $\operatorname{Re} \alpha > r + 1$ . Для ряда (22) при  $\alpha = r + 1$  и  $r \geq 1$  это получил Сингх ([10], теорема 1). Если  $r - 1 < \operatorname{Re} \alpha \leq r + 1$  и  $\sum (n+1)^{r-\operatorname{Re} \alpha} |A_n(x)| < \infty$ , то  $|C, \alpha|$ -суммируемость ряда (21) является локальным свойством функции  $f$  в точке  $x$  при четном  $r$  и ряда (22) при нечетном  $r$ , а если  $\sum (n+1)^{r-\operatorname{Re} \alpha} |B_n(x)| < \infty$ , то ряда (21)

<sup>5</sup> При  $q = 0$  условие (9) не выполняется для мнимых  $\alpha$  с  $\operatorname{Re} \alpha = 1, 2, \dots$

при нечетном  $r$  и ряда (22) при четном  $r$ . Последний результат при  $r = 0$  для  $\alpha > -1$  получили Юркат и Пейеримхофф ([8], теорема 5). Для ряда (22) в случае  $\alpha = r + 1$  с  $r \geq 1$  этот результат имеется в теореме 2 статьи Сингха [10], но его доказательство неубедительно, ибо он для цезаровских сумм

$$\bar{D}^p_n(t) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{p-1} \bar{D}_k(t)$$

сопряженного ядра  $\bar{D}_n$  пользуется неверной формулой ([10], стр. 742)

$$\bar{D}^p_n(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i(n+1/2)t}}{2 \sin(t/2)} u(p-1, n, t) \right\},$$

где

$$u(\beta, n, t) = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\beta e^{-ikt}.$$

В действительности же (см. [4], стр. 94)

$$\begin{aligned} \bar{D}^p_n(t) &= \sum_{k=0}^n A_{n-k}^p \sin kt = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^p e^{i(n-k)t} = \\ &= \operatorname{Im} \{ e^{int} u(p, n, t) \} = -\operatorname{Im} \{ N^3_n(t) + iN^2_n(t) \}, \end{aligned}$$

где (ср. [3], стр. 164)

$$N^3_n(t) = e^{-it} \sum_{\mu=1}^{p+1} A_n^{p+1-\mu} (1 - e^{-it})^\mu,$$

что при фиксированном  $\delta \in (0, \pi)$  и изменении  $t$  в  $[\delta, \pi]$  дает

$$\frac{d^r}{dt^r} N^3_n(t) = O(n^p).$$

В статье [11] Сингх находит условия, при которых  $|P(C, 1)|$ -суммируемость продифференцированного ряда (4) является локальным свойством  $\hat{f}$ , но его рассуждение (см. [11], стр. 464) неубедительно, ибо  $\sum (n+1)^{-1} |u_n| < \infty$  необходимо для  $|C, 1|$ -суммируемости ряда  $\sum u_n$ , но не достаточно.

Наконец, учитывая, что для метода  $P$  с  $0 \leq p_n \downarrow$  условие (20) выполнено ввиду

$$\Delta \frac{P_n}{n} = \frac{(n+1)P_n - nP_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{P_n - np_{n+1}}{n(n+1)} \geq 0,$$

то из теоремы 5 при  $p = 0$  и  $\lambda = \{1\}$  вытекает: если  $0 \leq p_n \downarrow$  и  $p_n = o(P_n)$ , то  $|P|$ -суммируемость ряда (3) (соответственно (4)) является локальным свойством  $\hat{f}$  в точке  $x$ , когда  $\sum |A_n(x)|/P_n < \infty$  (соответственно  $\sum |B_n(x)|/P_n < \infty$ ). Последние результаты при  $P_n \rightarrow \infty$  и дополнительных ограничениях  $\sum (n+1)^{-2} P_n < \infty$  или  $\sum (n+1)^{-1}/P_n < \infty$  получили Бхатт [5] и Саксена [9],

## Литература

1. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 106—120.
2. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 212—228.
3. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости продифференцированных рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 157—177.
4. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. II. Москва, 1965.
5. Bhatt, S. N., An aspect of local property of absolute Nörlund summability of Fourier series, Addendum. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1963, A29, № 1, 119—120.
6. Bhatt, S. N., An aspect of local property of absolute summability of a Fourier series. Univ. Allahabad Studies, 1970, 2, № 3, 239—242.
7. Hsiang, F. C., On a local property of  $|(N, p_n)(C, \alpha)|$  summability of Fourier series. Portug. math., 1970, 29, № 1, 27—29.
8. Jurkat, W., Peeyerimhoff, A., Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summerbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. II. Math. Z., 1965, 64, № 2, 151—158.
9. Saxena, A., An Aspect of Local Property of Absolute Nörlund Summability of the Conjugate Series of a Fourier Series. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1966, 14, № 4, 183—191.
10. Singh, V., An Aspect of Local Property of the Absolute Summability of the Conjugate Series of the  $r$ -th Derived Series of Fourier Series. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1969, 17, № 11, 739—744.
11. Singh, V., An aspect of local property of absolute summability of the conjugate series of the derived Fourier series. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1970, 18, № 8, 461—465.

Поступило  
4 VII 1972

## MÄRKUSED FOURIER' REA, DIFERENTSEERITUD FOURIER' REA JA KAASREA ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE LOKAALSUSE OMADUSE KOHTA

S. Baron

Resümee

Olgu  $f$  Lebesgue'i mõttes vahemikus  $(-\pi, \pi)$  integreeruv  $2\pi$ -perioodiline funktsioon ning (1) ja (2) olgu vastavalt funktsiooni  $f$  Fourier' rida ja kaasrida. Olgu  $\{\lambda_n\}$  — kompleksarvude jada. Artiklites [1, 2, 3] on leitud tingimused selleks, et ridade (3), (4) ja (5) absoluutne summeeruvus antud punktis  $x$  normaalse maatriksmenetlusega  $A$  oleks või ei oleks funktsiooni  $f$  lokaalne omadus, või oleks  $f$  lokaalne omadus punktis  $x$ . Käesolevas artiklis näidatakse, et nimetatud tulemused kehtivad üldisematel tingimustel ning on rakendatavad ka reale (6).

# REMARKS ON THE LOCAL PROPERTY OF ABSOLUTE SUMMABILITY OF THE FOURIER SERIES, ITS CONJUGATE SERIES AND DERIVED-FOURIER SERIES

S. Baron

## Summary

Let  $f$  be a periodic function with period  $2\pi$  integrable in the Lebesgue sense over  $(-\pi, \pi)$ . Let the Fourier series of  $f$  be (1) and its conjugate series be (2) and  $\lambda = \{\lambda_n\}$  be a sequence of complex numbers. In the papers [1, 2, 3] conditions are obtained for the normal matrix  $A = (a_{nk})$  and for  $\lambda$  under which the  $|A|$ -summability of the series (3), (4) and (5) at a given point  $x$  is or is not a local property of the generating function  $f$  or is a local property of  $f$  at the point  $x$ . In the present paper it has been proved that the theorems of [1, 2, 3] are true under more general suppositions and applicable also for the series (6).



Решение  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  системы (1), (2) будем называть *базисным решением* (вершиной), если система столбцовых векторов

$$A_{j_1} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ a_{2j_1} \\ \dots \\ a_{mj_1} \end{pmatrix}, \quad A_{j_2} = \begin{pmatrix} a_{1j_2} \\ a_{2j_2} \\ \dots \\ a_{mj_2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad A_{j_k} = \begin{pmatrix} a_{1j_k} \\ a_{2j_k} \\ \dots \\ a_{mj_k} \end{pmatrix},$$

соответствующих ненулевым координатам вектора  $X$ , линейно независима.

Пусть  $J$  — подмножество в  $\{1, 2, \dots, n\}$  (множестве индексов столбцов). Вектор  $X$  назовем  *$J$ -целочисленным*, если для него  $x_j$  — целое число при любом  $j \in J$ . Мы хотим найти условия, при которых все вершины многогранника (1), (2) являются  $J$ -целочисленными.

Возьмем произвольный минор

$$M = M(j_1, j_2, \dots, j_m) = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_m} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_m} \end{vmatrix}$$

$$(1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n)$$

$m$ -ого порядка матрицы  $A$ . Обозначим через  $M(0, j_2, \dots, j_m)$  — минор, полученный заменой первого столбца из  $M$  на столбец свободных членов. Аналогично введем  $M(j_1, 0, \dots, j_m)$  и т. д. Все эти миноры будем называть *сопряженными* к  $M$ . При этом  $J$ -сопряженными к  $M$  будем считать те из сопряженных к  $M$  миноров, у которых на свободные члены заменен столбец с индексом из  $J$ . Будем считать, что положительное число имеет одинаковый знак со всеми положительными, а также с нулем (аналогичное определение для отрицательных чисел). Минор  $M = M(j_1, j_2, \dots, j_m)$  матрицы  $A$  будем называть *базисным* для системы (1), если  $M \neq 0$  и имеет одинаковый знак со всеми своими сопряженными.

**Теорема 1.** *Все вершины многогранника (1), (2) тогда и только тогда  $J$ -целочисленны, когда всякий базисный минор многогранника является делителем всех своих  $J$ -сопряженных.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть все вершины многогранника  $J$ -целочисленны. Возьмем произвольный базисный минор  $M = M(j_1, j_2, \dots, j_m)$  матрицы  $A$ , имеющий  $J$ -сопряженные (т. е.  $\{j_1, \dots, j_m\} \cap J \neq \emptyset$ ). Рассмотрим решение системы (1), для которого все неизвестные кроме  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$  принимают значение 0. Такое решение определяется системой уравнений

$$a_{1j_1} x_{j_1} + a_{1j_2} x_{j_2} + \dots + a_{1j_m} x_{j_m} = a_{10},$$

$$a_{2j_1} x_{j_1} + a_{2j_2} x_{j_2} + \dots + a_{2j_m} x_{j_m} = a_{20},$$

$$\dots$$

$$a_{mj_1} x_{j_1} + a_{mj_2} x_{j_2} + \dots + a_{mj_m} x_{j_m} = a_{m0}.$$

Оно существует и единственно и вычисляется в силу  $M \neq 0$  по формулам Крамера. Имеем

$$x_{j_1} = \frac{M(0, j_2, \dots, j_m)}{M}, \quad x_{j_2} = \frac{M(j_1, 0, \dots, j_m)}{M}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad x_{j_m} = \frac{M(j_1, j_2, \dots, 0)}{M}.$$

Так как  $M$  — базисный минор и в числителях стоят его сопряженные, то все частные неотрицательны и вектор

$$(0, \dots, 0, x_{j_1}, 0, \dots, 0, x_{j_m}, 0, \dots, 0)$$

удовлетворяет не только (1), но и (2). Можно утверждать еще, что  $X$  есть базисное решение (вершина), ибо столбцовые векторы  $A_{j_1}, \dots, A_{j_m}$  линейно независимы в силу  $M \neq 0$ . Тогда по условию  $X$  есть  $J$ -целочисленный вектор. Но теперь из формул (1) следует, что, например,  $x_{j_1}$  есть целое число при  $j_1 \in J$  и  $M(0, j_2, \dots, j_m)$  делится на  $M$ . Стало быть,  $M$  есть действительно делитель всех своих  $J$ -сопряженных.

**Достаточность.** Пусть каждый базисный минор  $M$  матрицы  $A$  является делителем всех своих  $J$ -сопряженных. Возьмем произвольную вершину (базисное решение) системы (1), (2), для которого могут быть отличны от нуля только  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ . Можно предположить, что  $\{j_1, \dots, j_m\} \cap J \neq \emptyset$ . Тогда это решение удовлетворяет системе (1) и  $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$  вычисляются по формулам (3), где  $M = M(j_1, \dots, j_m)$  — соответствующий минор. Так как мы взяли базисное решение, то из формул (3) следует, что  $M$  имеет одинаковые знаки со всеми своими сопряженными, т. е. является базисным минором. Тогда по условию  $M$  является делителем всех своих  $J$ -сопряженных. Но теперь из формул (3) следует, что  $x_{j_k}$  является при  $j_k \in J$  целым числом. Теорема доказана.

Пусть теперь система (1), (2) такова, что не все вершины соответствующего многогранника  $J$ -целочисленны. Постараемся охарактеризовать, насколько такой многогранник отличается от многогранника с  $J$ -целочисленными вершинами.

Легко видеть, что для системы (1), (2) существует такое положительное целое число  $s$ , что у многогранника



Заметим, что вычисление сопряженных миноров для системы (1), (2) можно несколько упростить, если систему (1) предварительно преобразовать. Это можно сделать следующим образом.

Назовем, как обычно, *элементарными преобразованиями* системы (1) преобразования следующих двух видов:

1) умножение уравнения на  $-1$ ,

2) прибавление умноженного на целое число уравнения к другому.

Известно, что элементарные преобразования не меняют решений системы (1) и, кроме того, сохраняют целочисленность матриц  $A$  и  $B$ . Поэтому, если у многогранника (1), (2) все вершины целочисленны, то они будут целочисленными и у многогранника с преобразованной системой (1).

Покажем теперь, как упростить элементарными преобразованиями систему (1), точнее, ее свободные члены. Мы можем предположить, что система (1) не однородна (т. е. не все  $a_{i0} = 0$ ), ибо в однородном случае она определяет единственную вершину  $(0, \dots, 0)$ .

**Лемма 1.** *Если у системы (1) коэффициент  $a_{10} \neq 0$  и не все свободные члены делятся на  $a_{10}$ , то систему можно элементарными преобразованиями привести к виду, где  $0 < a'_{10} < |a_{10}|$ .*

Доказательство почти точно такое же, как у соответствующей леммы о многочисленных матрицах (см. [1], стр. 205), и поэтому мы его опустим.

**Теорема 3.** *Если система (1) не однородна, то ее можно элементарными преобразованиями привести к виду*

$$\begin{aligned} a'_{10} &= a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n, \\ 0 &= a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n, \\ &\dots \\ 0 &= a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n, \\ x_1 &\geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad a'_{10} > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

**Доказательство.** Так как система (1) не однородна, то у нее найдется свободный член  $a_{i0} \neq 0$ . Перестановкой строк (она обычным образом сводится к элементарным преобразованиям) переведем  $a_{i0}$  на первое место. Если теперь не все свободные члены делятся на новое  $a_{10}$ , то по лемме 1 уменьшим абсолютную величину  $a_{10}$ . Если все свободные члены еще не делятся на  $a_{10}$ , уменьшим  $a_{10}$  (снова по лемме 1). После конечного числа шагов мы должны непременно прийти к такому  $a'_{10}$ , на который все остальные свободные члены делятся. Вычтем после этого из каждой строки умноженную на подходящее число первую строку и получим, что все свободные члены, кроме  $a'_{10}$ , будут нулями. Теорема доказана.

**Следствие 1.** Для системы (6), (7) минор  $M \neq 0$  порядка  $t$  является базисным тогда и только тогда, если он имеет одинаковый знак с алгебраическими дополнениями всех своих элементов первой строки.

**Следствие 2.** Если система имеет вид (6), (7), то  $J$ -сопряженными для базисного минора  $M$  являются умноженные на  $a'_{10}$  алгебраические дополнения  $A_{1j}$  его элементов первой строки, где  $j \in J$ .

Из следствий 1 и 2 вытекает

**Теорема 4.** Все вершины многогранника (6), (7) тогда и только тогда  $J$ -целочисленны, если всякий его базисный минор  $M$  является делителем всех произведений  $a'_{10}A_{1j}$ , где  $A_{1j}$  суть алгебраические дополнения его элементов первой строки.

Рассмотрим теперь условие  $J$ -целочисленности всех вершин для выпуклого многогранника, заданного при помощи системы неравенств

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сначала сведем систему неравенств обычным образом к системе уравнений, введя дополнительные переменные

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{10} - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \\ x_{n+2} &= a_{20} - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ x_{n+m} &= a_{m0} - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим многогранник

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= a_{20} \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= a_{m0}, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что вершины (базисные решения) многогранников (1), (2) и (11), (12) находятся во взаимно однозначном соответствии. Вершину для первого многогранника получим, если из вершины  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$  второго многогранника возьмем первые  $n$  координат  $(x_1, \dots, x_n)$ . Из вершины первого многогранника получим вершину второго, если дополнительно вычислим  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  по формулам (10). Тогда для  $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$  окажется, что  $J$ -целочисленные вершины одного многогранника переходят в  $J$ -целочисленные вершины другого.

Чтобы формулировать условия целочисленности вершин многогранника (8), (9), обобщим понятие базисного минора на миноры произвольного (а не только  $m$ -ого) порядка. Пусть  $M$  — минор  $l$ -го ( $l < m$ ) порядка матрицы  $A$ . Его сопряженные миноры определим обычным образом. Допустим, что  $M$  содержит строки с индексами  $i_1 < \dots < i_l$  и не содержит строк с индексами  $i_{l+1} < \dots < i_m$ . *Характеристическим определителем* для  $M$  назовем определитель, полученный дополнением  $M$  какой-нибудь  $i_p$ -ой ( $l+1 \leq p \leq m$ ) строкой и столбцом свободных членов, и умножением полученного определителя на  $(-1)^{p+i_p}$ . Минор  $M \neq 0$  назовем базисным, если он одного знака со всеми сопряженными и характеристическими определителями.

**Теорема 5.** *Все вершины многогранника (8), (9) будут  $J$ -целочисленны тогда и только тогда, если все базисные миноры (любого порядка) матрицы  $A$  являются делителями всех своих  $J$ -сопряженных.*

**Доказательство.** Сведем вопрос о  $J$ -целочисленности вершин многогранника (8), (9) к соответствующему вопросу для многогранника (11), (12), где можно применить теорему 1. Для этого установим соответствие между произвольными минорами матрицы  $A$  и минорами  $m$ -го порядка матрицы

$$A' = (AE) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем также формулы, связывающие эти миноры и их сопряженные миноры.

Возьмем произвольный минор  $M$  порядка  $l$  матрицы  $A$ , составленный из строк с индексами  $i_1 < \dots < i_l$  и столбцов с индексами  $j_1 < \dots < j_l$ . Пусть номера остальных строк матрицы  $A$  будут  $i_{l+1} < \dots < i_m$ . Дополним теперь  $M$  строками  $i_{l+1}, \dots, i_m$  и столбцами с индексами  $n + i_{l+1}, \dots, n + i_m$  и обозначим полученный минор (матрицы  $A'$ ) через  $M'$ . Минор  $M'$  легко выразить через  $M$ . Именно, разложим  $M'$  по последнему столбцу (в нем всюду стоят нули кроме единицы на  $i_m$ -ом месте. Тогда  $M'$  сведется к некоторому определителю  $(m-1)$ -го порядка, умноженному на  $(-1)^{m+i_m}$ . Разложив полученный определитель последовательно по  $(m-1)$ -му,  $\dots$ ,  $(l+1)$ -му столбцам, получим

$$M' = (-1)^{(l+1)+\dots+m+i_{l+1}+\dots+i_m} M. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь сопряженный к  $M'$  определитель  $M'_1$ , полученный заменой одного из его первых  $l$  столбцов на столбец свободных членов. Очевидно, что при этом  $M$  также заменится

на соответствующий сопряженный определитель  $M_1$ . Прделав для  $M'_1$  такое разложение как для  $M'$ , получим

$$M'_1 = (-1)^{(l+1)+\dots+m+i_{l+1}+\dots+i_m} M_1. \quad (14)$$

Приступим теперь к доказательству необходимости условия  $J$ -целочисленности. Пусть все вершины многогранника (8), (9) являются  $J$ -целочисленными. Возьмем произвольный базисный минор  $M$  матрицы  $A$  и покажем, что он будет делителем всех своих  $J$ -сопряженных. Для этого установим сначала, что соответствующий минор  $M'$  является базисным в  $A'$ .

Пусть минор  $M$  является базисным, т. е. в частности знак  $M$  совпадает со знаками всех его сопряженных. Тогда из формул (13) и (14) следует, что знак минора  $M'$  совпадает со знаками тех его сопряженных  $M'_1$ , где заменялся один из первых  $l$  столбцов.

Заменяем теперь в  $M'$  на свободные члены один из его последних  $m-l$  столбцов, например,  $p$ -ый ( $l+1 \leq p \leq m$ ). Разложим полученный минор  $M'_2$  последовательно по  $m$ -му,  $\dots$ ,  $\dots$ ,  $(p+1)$ -му,  $(p-1)$ -му,  $\dots$ ,  $(l+1)$ -му столбцу. Получим

$$M'_2 = (-1)^{(l+1)+\dots+(p-1)+(p+1)+\dots+m+i_{l+1}+\dots+i_{p-1}+i_{p-1}+\dots+i_m} M_2, \quad (15)$$

где  $M_2$  есть характеристический минор для  $M$ , полученный добавлением  $i_p$ -ой строки и столбца свободных членов. Используем снова, что  $M$  — базисный минор, т. е.

$$(-1)^{p+i_p} \operatorname{sgn} M = \operatorname{sgn} M_2. \quad (16)$$

Тогда из формул (13), (14), (15) и (16) следует

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} M' &= (-1)^{(l+1)+\dots+m+i_{l+1}+\dots+i_m} \operatorname{sgn} M = \\ &= (-1)^{(l+1)+\dots+(p-1)+(p+1)+\dots+m+i_{l+1}+\dots+i_{p-1}+i_{p-1}+\dots+i_m} \operatorname{sgn} M_2 \\ &= \operatorname{sgn} M'_2. \end{aligned}$$

Стало быть, знак минора  $M'$  совпадает и со знаками тех его сопряженных, которые получены заменой одного из последних  $m-l$  столбцов. Следовательно  $M'$  является базисным минором порядка  $m$  матрицы  $A'$ .

По условию все вершины многогранника (8), (9) являются  $J$ -целочисленными. Тогда, как мы показали, все вершины многогранника (11), (12) также  $J$ -целочисленны. Поэтому по теореме 1 все базисные миноры  $M'$  порядка  $m$  матрицы  $A'$  являются делителями своих  $J$ -сопряженных миноров  $M'_1$ . Так как  $M$  и его  $J$ -сопряженные, а также  $M'$  и его  $J$ -сопряженные отличаются по формулам (13), (14) самое большее лишь знаками, то отсюда следует, что  $M$  есть делитель всех своих  $J$ -сопряженных. Необходимость условия доказана.

**Достаточность.** Пусть теперь всякий базисный минор  $M$  (любого порядка) матрицы  $A$  является делителем всех своих  $J$ -сопряженных. Покажем, что тогда все вершины многогранника (8), (9) будут целочисленными. Возьмем произвольную вершину (базисное решение)  $X' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$  системы (11), (12) и пусть у него могут быть отличными от нуля только координаты с данными  $m$  индексами. Если это суть индексы от  $n+1$  до  $n+m$  (последние), то соответствующее решение системы (8), (9) есть  $(0, \dots, 0)$ , и автоматически целочисленно. Если же наши индексы все содержатся в  $\{1, 2, \dots, n\}$ , то вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяет неравенствам (8) как равенствам и  $X$  является  $J$ -целочисленным по теореме 1. Остается рассмотреть случай, когда среди этих индексов имеются как большие  $n$  (пусть это будут  $n+i_{l+1} < \dots < n+i_m$ ), так и не превосходящие  $n$  (обозначим их через  $j_1 < \dots < j_l$ ). Возьмем ненулевой минор  $M'$  порядка  $m$ , соответствующий этим индексам ( $M' \neq 0$ , ибо  $X'$  — базисное решение). Так как  $X'$  — базисное решение, то  $M'$  имеет одинаковые знаки со всеми своими сопряженными.

Обозначим теперь через  $i_1 < \dots < i_l$  индексы от 1 до  $m$ , не входящие в  $\{i_{l+1}, \dots, i_m\}$ . Берем минор  $M$  из  $A$ , составленный из строк  $i_1, \dots, i_l$  и столбцов  $j_1, \dots, j_l$ . Тогда  $M'$  можно получить из  $M$  конструкцией, указанной в начале доказательства. Как мы установили,  $M'$  имеет одинаковые знаки со своим сопряженным  $M'_1$ , где замена производилась в  $A$ , и сопряженным  $M'_2$ , где замена сделана в  $E$ . По установленной в первой половине доказательства связи между  $M$  и  $M'$ ,  $M_1$  и  $M'_1$ ,  $M_2$  и  $M'_2$  мы заключаем, что знак минора  $M$  совпадает со знаками всех его сопряженных миноров  $M_1$  и характеристических определителей  $M_2$ . Тогда по предположению  $M$  является делителем всех своих  $J$ -сопряженных. Поскольку  $M$  и  $M'$ ,  $M_1$  и  $M'_1$  отличаются, как мы показали, только знаками, то  $M$  является делителем всех своих  $J$ -сопряженных и в том случае, если он содержит столбцы из  $A$  и из  $E$ . Но тогда по теореме 1 все вершины многогранника (11), (12) будут  $J$ -целочисленными. Следовательно,  $J$ -целочисленны и все вершины многогранника (8), (9). Теорема доказана.

## Литература

1. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре. Москва, 1966.
2. Гофман А. Дж., Краскал Дж. Б., Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников. В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». Москва, 1959, 325—347.
3. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование. Москва, 1969.

4. Хеллер И., Томпкинс Ч. Б., Обобщение одной теоремы Даницга. В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». Москва, 1959, 348—354.

Поступило  
13 III 1972

## KUMERA HULKNURGA TIPPUDE TÄISARVULISUSEST

J. Hion

Resümee

Antakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et antud kumera hulktahuka kõik tipud oleksid täisarvulised. Vastus antakse nii võrrandisüsteemi abil defineeritud kui ka võrratustega antud hulktahuka jaoks.

## CONDITIONS FOR ALL VERTICES OF A CONVEX POLYTOPE HAVING INTEGER COORDINATES

J. Hion

Summary

Necessary and sufficient conditions for all vertices of a convex polytope having integer coordinates are given. The answer is given in terms of determinants. Cases where the polytope is defined by equations or by inequalities are treated separately.

## О ПОЛУЧЕНИИ ОТСЕЧЕНИЙ В В-АЛГОРИТМЕ

А. Лейтен

Кафедра вычислительной математики

При изложении методов отсечения в целочисленном линейном программировании часто не рассматривают получения отсечений, а просто исходят из некоторого неравенства

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j \geq \gamma_0, \quad (1)$$

коэффициенты  $\gamma_j$  которого однозначно определяются по некоторому правилу, доказывая, что это неравенство является правильным отсечением (см., например, [1]). В общем случае схема доказательства правильности отсечения (1) всегда позволяет определить отсечение неоднозначно. В таком случае найдется некоторое семейство отсечений, среди которых одно отсечение (как правило, рассматриваемое неравенство (1)) является наиболее эффективным (т. е. отсекает из множества допустимых решений соответствующей линейной задачи наибольшую часть). Здесь надо отметить, что во многих случаях нахождение наиболее эффективного отсечения для данного класса отсечений является весьма трудной задачей (см., например, [3]). В настоящей заметке рассматривается такое семейство отсечений для В-алгоритма для решения задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными ([1, 2]). В процессе выделения наиболее эффективного отсечения удалось также усилить отсечение, предложенное Ю. Ю. Финкельштейном ([1, стр. 158]).

Переходим к выделению отсечений типа В-алгоритма.

Пусть рассматривается частично целочисленная задача линейного программирования, в которой все целочисленные переменные булевы: найти лексикографический максимум вектора

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (4)$$

$$x_j \leq 1, \quad j \in N' = \{1, 2, \dots, n_i\} \subset N, \quad (5)$$

$$x_j \text{ — целые, } j \in N'. \quad (6)$$

В [1] излагается В-алгоритм Ю. Ю. Финкельштейна для решения задачи (2)–(6). По теореме 4.1 книги [1], стр. 158, неравенство

$$\sum_{j \leq i-1} ((1 - 2x_j^r)x_j + x_j^r) + (1 - x_i) \geq 1 \quad (7)$$

является правильным отсечением. Здесь  $X^r = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$  — оптимальный план задачи (2)–(5) на  $r$ -ой итерации,  $x_i^r$  — не целое,  $i = \min \{p \mid x_p^r \text{ — не целое; } p \in N'\}$ .

Следуя доказательству этой теоремы, будем искать правильное отсечение среди линейных неравенств

$$\sum_{j \leq i-1} (a_j(x_j^r)x_j + b_j(x_j^r)) + (1 - x_i) \geq 1, \quad (8)$$

где  $a_j(x_j^r)$ ,  $b_j(x_j^r)$  — некоторые функции от  $x_j^r$ , выражения которых определяются ниже.

Так как неравенство (8) должно быть отсечением, то потребуем выполнения следующего условия:

$$a_j(x_j^r)x_j^r + b_j(x_j^r) = 0, \quad j \leq i-1, \quad x_j^r = 0, 1. \quad (9)$$

Действительно, тогда имеем

$$\sum_{j \leq i-1} (a_j(x_j^r)x_j^r + b_j(x_j^r)) + (1 - x_i^r) = 1 - x_i^r < 1,$$

так что условие отсечения выполняется.

Переходим к требованию правильности отсечения (8). Для любого плана  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задачи (2)–(6) имеет место (см. [1], стр. 158)

$$(x_1^r, \dots, x_i^r) > (x_1, \dots, x_i). \quad (10)$$

Здесь возможны два случая: 1)  $x_i = 0$ ; 2)  $x_i = 1$ . В случае 1) требуем выполнения условия

$$a_j(x_j^r)x_j + b_j(x_j^r) \geq 0, \quad j \leq i-1, \quad x_j, x_j^r = 0, 1. \quad (11)$$

Легко убедиться, что теперь неравенство (8) выполняется.

В случае 2) имеем  $x_i = 1 > x_i^r$ , и из (10) следует, что

$$(x_1^r, \dots, x_{i-1}^r) > (x_1, \dots, x_{i-1}),$$

так что для некоторого  $k \leq i-1$  имеем

$$1 = x_k^r > x_k = 0.$$

Требуем теперь выполнения условия (11) и неравенства

$$b_j(1) \geq 1, \quad j \leq i-1. \quad (12)$$

Так как некоторая пара значений  $x_{j_0}^r = 1, x_{j_0} = 0$  ( $j_0 \leq i-1$ ) в случае 2) всегда найдется, то в (8) имеем сумму

$$a_{j_0}(1) \cdot 0 + b_{j_0}(1) \geq 1,$$

так что неравенство (8) и в этом случае выполняется.

Условия (9), (11), (12) эквивалентны следующей системе:

$$\begin{aligned} b_j(0) &= 0, \\ b_j(1) &\geq 1, \\ a_j(0) &\geq 0, \\ a_j(1) &= -b_j(1), \\ &j \leq i-1. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, ограничения (13) определяют семейство отсечений (8) типа *B*-алгоритма.

При условиях задачи (2)–(6), неравенство (8) будет тем сильнее, чем меньше являются коэффициенты  $a_j(0), a_j(1), b_j(0), b_j(1)$ . Легко убедиться, что наилучшие значения этих коэффициентов следующие:

$$b_j(0) = 0, \quad b_j(1) = 1, \quad a_j(0) = 0, \quad a_j(1) = -1. \quad (14)$$

Здесь дальнейшее уменьшение  $a_j(1)$  не может дать более эффективного отсечения, так как при  $a_j(1) < -1$  величина  $b_j(1)$  начинает увеличиваться. Функции  $a_j(x_j^r), b_j(x_j^r)$  можно в данном случае (см. (14)) определить, например, следующим образом:

$$a_j(x_j^r) = -x_j^r, \quad b_j(x_j^r) = x_j^r,$$

так что наиболее эффективное отсечение (8) типа *B*-алгоритма имеет вид

$$\sum_{j \leq i-1} (-x_j^r x_j + x_j^r) + (1 - x_i) \geq 1. \quad (15)$$

Неравенство (7) получается при

$$b_j(0) = 0, \quad b_j(1) = 1, \quad a_j(0) = 1, \quad a_j(1) = -1.$$

Из системы (13) следует, что  $a_j(0)$  можно здесь уменьшить, оставляя другие коэффициенты  $a_j(1), b_j(0), b_j(1)$  прежними. Таким образом, в общем случае отсечение (15) является эффективнее отсечения (7), предложенного в [1].

### Литература

1. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование. Москва, 1969.
2. Финкельштейн Ю. Ю., О решении задач дискретного программирования специального вида. Экономика и матем. методы, 1965, 1, № 2, 262–270.
3. Balas, E., Intersection cuts — a new type of cutting planes for integer programming. Oper. Res., 1971, 19, № 1, 19–39.

Поступило  
13 III 1972

## LÖIGETE KONSTRUEERIMISEST *B*-ALGORITMIS

A. Leiten

Resümee

Käesolevas lühiuurimuses konstrueeritakse löikekitsenduste klass, mida saab kasutada selliste kahendmuutujatega lineaarsete planeerimisülesannete lahendamiseks, milles nõutakse tundmatute vektori leksikograafilist maksimiseerimist.

## ZUR KONSTRUKTION DER SCHNITTE IM *B*-ALGORITHMUS

A. Leiten

Zusammenfassung

Das zu lösende lineares Optimalproblem habe die folgende Gestalt: der Vektor (2) ist unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (3)—(6) lexikographisch zu minimieren. In dem vorliegenden Artikel wird eine Menge der Schnitte (d. h. der zusätzlichen Einschränkungen) konstruiert, ausgehend von dem *B*-Algorithmus von Finkelstein [2, 1]. In dem Artikel beweist man, daß es möglich ist, einen besseren Schnitt zu konstruieren, als in den Arbeiten [2, 1].

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЕ

Ю. Лепик

Кафедра теоретической механики

М. Змирев

Кружок СНО при кафедре теоретической механики

Задача о распространении и взаимодействии плоских волн высокой амплитуды в толстой пластине решена в [1] методом характеристик. В данной статье та же задача решается методом конечных элементов. Приводится численный пример, из которого вытекает, что совпадение результатов, найденных обоими методами, сравнительно хорошее.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную пластину со свободными поверхностями  $x = 0$  и  $x = h$ . Пусть на поверхности  $x = 0$  действует динамическая сжимающая нагрузка  $\sigma = \sigma_0 \exp(-\beta t)$ , распределенная равномерно по всей поверхности пластины. Зависимость напряжение-деформация будем определять из диаграммы Гюгонио:

$$\sigma = \begin{cases} L(1 - e)^{-k} + M & \text{при } \sigma > \sigma_A, \\ E_1 e & \text{при } \sigma \leq \sigma_A. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $L$ ,  $M$ ,  $k$ ,  $E_1$ ;  $\sigma_A$  — характерные постоянные для материала ( $\sigma_A$  — предел упругости по Гюгонио); напряжение  $\sigma$  и деформацию  $e$  будем считать положительными в случае сжатия. Предположим, что давление  $\sigma$ , приложенное к пластине, настолько большое, что можно считать нагрузку и разгрузку материала происходящими по единой кривой; влиянием температуры и скоростью деформирования будем пренебрегать.

Обозначим через  $\rho_0$  плотность недеформированного материала, а через  $u$  и  $v$  — перемещение и скорость в направлении оси  $x$ . Так как  $e = -\partial u/\partial x$ , то уравнение движения имеет форму

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

К этому уравнению принадлежат еще следующие краевые и начальные условия:

- 1)  $\sigma = \sigma_0 \exp(-\beta t)$  при  $x=0$ ,
- 2)  $\sigma=0, e=0$  при  $x=h$ ,
- 3)  $\sigma=e=u=v=0$  при  $t=0$ .

Поставленную задачу будем решать методом конечных элементов. Как известно (см., например, [2]), этот метод дает хорошие результаты лишь тогда, когда введена искусственная вязкость. В данном случае мы будем использовать т. н. квадратичную вязкость, которая вычисляется по формуле

$$q = C_0^2 \rho_0 \frac{A}{V} \left( \frac{V \cdot}{V} \right)^2. \quad (1.3)$$

Здесь  $C_0$  — некоторая постоянная,  $A$  — площадь ячейки,  $V$  — ее объем,  $V \cdot / V = -e \cdot x = \partial v / \partial x$ . Вычисленное по формуле (1.3) значение  $q$  следует добавить к напряжению  $\sigma$ .

## 2. Алгоритм решения

Предложенный алгоритм решения является видоизменением метода Уилкинса [3] и состоит в следующем.

Разделим толщину пластины на участки с координатами  $x_j$ ; индекс  $j$  может иметь значения  $j = 1, 2, \dots, N$ . Выбираем также некоторый шаг по времени, определяемый соотношением  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ .

В дальнейшем будем использовать следующую символику. Если мы имеем некоторую функцию  $F(x, t)$ , то ее значение в точке  $x_j$  в момент времени  $t^n$  обозначим  $F_j^n$ , т. е.  $F_j^n = F(x_j, t^n)$ . В дальнейшем целесообразно использовать и дробные индексы, они определяются формулами

$$\begin{aligned} F^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(F^{n+1} + F^n), & F^{n-1/2} &= \frac{1}{2}(F^n + F^{n-1}), \\ F_{j+1/2} &= \frac{1}{2}(F_{j+1} + F_j), & F_{j-1/2} &= \frac{1}{2}(F_j + F_{j-1}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Delta t^{n+1/2} = t^{n+3/2} - t^{n+1/2}.$$

Дифференцирование по времени проводим по формулам

$$(F \cdot)^{n+1/2} = \frac{F^{n+1} - F^n}{\Delta t^{n+1/2}}, \quad (F \cdot)^n = \frac{F^{n+1/2} - F^{n-1/2}}{\Delta t^n}; \quad (2.2)$$

дифференцирование по координате  $x$  согласно формулам

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{j+1/2} = \frac{F_{j+1} - F_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j = \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}}. \quad (2.3)$$

Разделим среду на следующие ячейки по массе

$$m_{j+1/2} = \frac{\rho_0}{V_0} (x_{j+1}^0 - x_j^0) = \frac{\rho}{V_{j+1/2}} (x_{j+1} - x_j). \quad (2.4)$$

Индексом нуль здесь обозначены значения соответствующих величин в недеформированном состоянии, т. е. в начальный момент времени  $t = 0$ . Без ограничения общности можем выбрать  $V_0 = 1$ , тогда  $V = \rho_0/\rho$ .

Допустим теперь, что поставленная нами задача решена для момента времени  $t = t^n$  и даем алгоритм, позволяющий построить решения для момента времени  $t = t^{n+1}$ . Этот алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Перепишем уравнение (1.2) в форме

$$v_{j+1/2}^{n+1/2} = v_{j+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t^n}{\rho_0} \frac{\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n}{x_{j+1} - x_j}.$$

2. Учитывая, что  $v = du/dt$ , имеем для перемещений

$$u_{j+1/2}^{n+1} = u_{j+1/2}^n + \Delta t^{n+1/2} v_{j+1/2}^{n+1/2}.$$

3. Вычисляем координаты деформированной сетки

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \Delta t^{n+1/2} v_j^{n+1/2}.$$

4. Из соотношения  $e = -du/dx$  найдем

$$e_j^{n+1} = - \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}}{x_{j+1/2}^{n+1} - x_{j-1/2}^{n+1}}.$$

5. Уравнение неразрывности дает  $V = -V\partial v/\partial x$  или в конечных разностях

$$V_j^{n+1} = V_j^n - V_j^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \frac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2}}{x_{j+1/2}^{n+1/2} - x_{j-1/2}^{n+1/2}}.$$

Эту формулу следует еще преобразовать, так как на правой стороне стоит неизвестная величина  $V_j^{n+1/2}$ . Учитывая (2.4) и соотношение  $\rho = \rho_0/(1 - e)$ , находим

$$\frac{V_j^{n+1/2}}{x_{j+1/2}^{n+1/2} - x_{j-1/2}^{n+1/2}} = \frac{\rho_j^{n+1/2}}{\rho_0 \Delta x_0} = \frac{1}{\Delta x_0 (1 - e_j^{n+1/2})},$$

причем  $\Delta x_0 = x_{j+1/2}^0 - x_{j-1/2}^0$ .

Теперь получим искомую формулу в виде

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t^{n+1/2}}{\Delta x_0} \frac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2}}{1 - e_j^{n+1/2}}.$$

6. Введя искусственную вязкость по формуле (1.3), учитывая  $V'/V = -\partial v/\partial x$ , находим

$$q_j^{n+1} = \frac{C_0^2 \rho_0 A_j^{n+1}}{V_j^{n+1}} \left( \frac{v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j-1/2}^{n+1}}{x_{j+1/2}^{n+1} - x_{j-1/2}^{n+1}} \right)^2,$$

или

$$q_j^{n+1} = \frac{C_0^2 \rho_0}{V_j^{n+1}} (v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j-1/2}^{n+1})^2.$$

7. Вычисляем давление  $\sigma$  из формулы (1.1), добавляя к найденному значению еще член с искусственной вязкостью; это дает

$$\sigma_j^{n+1} = \begin{cases} L(1 - e_j^{n+1})^{-k} + M + q_j^{n+1} & \text{при } \sigma_j^{n+1} > \sigma_A, \\ E_1 e_j^{n+1} + q_j^{n+1} & \text{при } \sigma_j^{n+1} \leq \sigma_A. \end{cases}$$

8. Вычисляем скорость распространения волн  $a$  по формуле

$$a_j^{n+1} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial e} \right)_j^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} - \sigma_{j-1/2}^{n+1}}{x_{j+1/2}^{n+1} - x_{j-1/2}^{n+1}}}.$$

9. Остается еще выяснить, как выбрать шаг по времени, чтобы рекомендуемая схема решения была устойчива.

Условие устойчивости возьмем в виде

$$\Delta t^{n+3/2} \leq \frac{1}{3} \min_j \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Здесь  $a$  — скорость волн,  $b = 2C_0(V'/V)\Delta x$ , следовательно,

$$b_{j+1}^{n+1} = 2C_0 \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}}{\Delta t^{n+1/2}} \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j+1}^n}{V_{j+1}^{n+1}}.$$

10. Удовлетворим граничные условия

$$\sigma_j^{n+1} = \sigma_0 \exp(-\beta t^{n+1}), \quad \sigma_N^{n+1} = 0.$$

Теперь мы имеем все необходимые данные для вычисления искомых величин для момента времени  $t^{n+1}$ .

Отметим, что величина  $q_j$  вычисляется только в том случае, если  $v_{j+1/2} - v_{j-1/2} < 0$  и  $V_{j+1}^{n+1} - V_{j+1}^n < 0$ , а величина  $b_{j+1}$ , если  $V_{j+1}^{n+1} - V_{j+1}^n < 0$ , в противном случае они обе приравняются нулю.

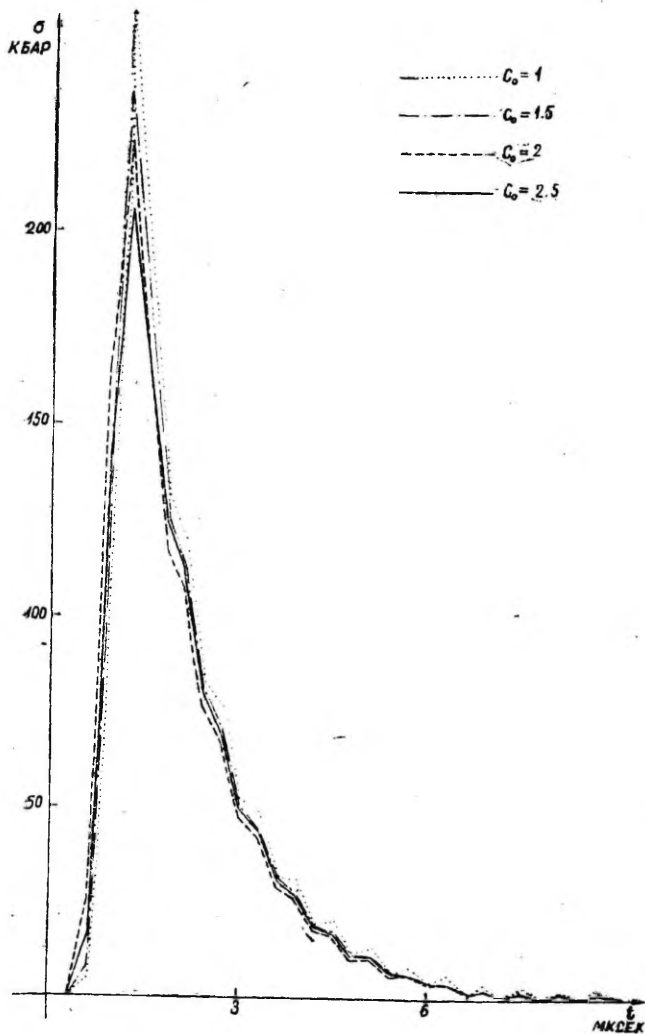
Для более эффективного использования машинного времени следует закончить вычисления при достижении невозмущенной области пластины. Это можно сделать следующим образом: если  $x_l^{n+1} \neq x_l^n$ , а  $x_{l+1}^{n+1} = x_{l+1}^n$ , то возмущенная зона распространяется до координаты  $x_l^{n+1}$  и не имеет смысла проводить вычисления для индексов больших, чем  $l + 1$ .

### 3. Результаты и выводы

Алгоритм решения из п. 2 был реализован в языке АКИ на ЭВМ «Минск-22». Толщина пластины  $h$  была разбита на 300 равных частей. Закон давление-время был взят в форме

$$\sigma = 3 \cdot 10^5 \exp(-0,805 \cdot 10^6 t),$$

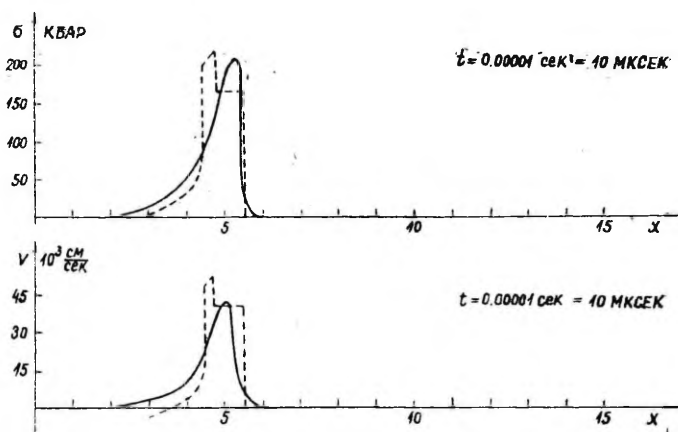
характеристики материала имели значения  $L = 142,5 \cdot 10^3$ ,  $M = -67,12 \cdot 10^3$ ,  $\sigma_A = 165000$ ,  $k = 6$ ,  $E = 2 \cdot 10^6$ .



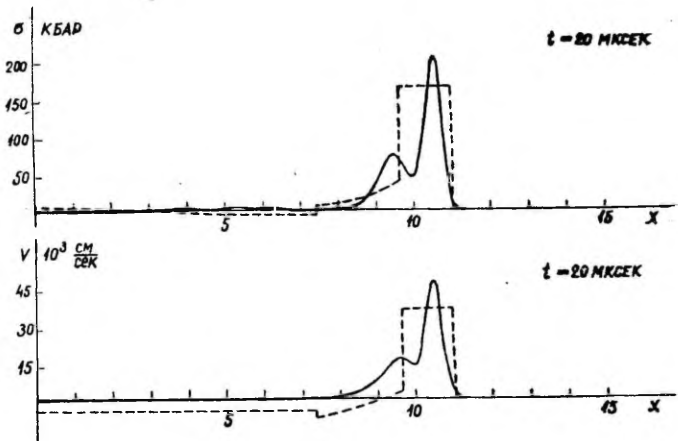
Фиг. 1.

Работа с различными значениями коэффициента  $C_0$  в выражении для квадратичной вязкости (1.3) показала, что оптимальным значением этого коэффициента можно считать  $C_0 = 2$ ; значение  $C_0 < 2$  не обеспечивает достаточное демпфирование паразитических волн (фиг. 1). Между прочим, такой же вывод получен и ранее [2, 3].

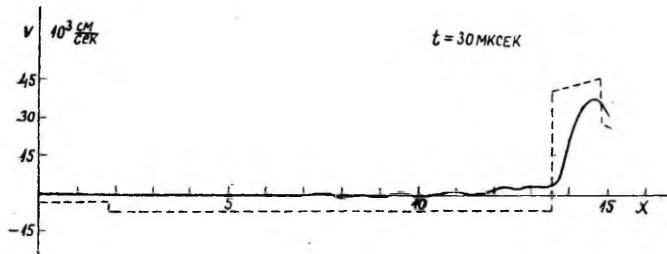
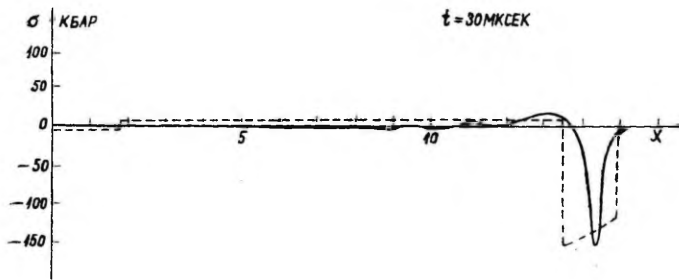
Остальные результаты вычислений представлены на фиг. 2—11. На графиках 2—10 даны распределения напряжения и скорости частиц по толщине пластины для различных моментов времени. На фиг. 2—4 нанесены пунктирными линиями значения напряжения и скорости, найденные методом характеристик [1]. Как видно из этих чертежей, совпадение результатов, най-



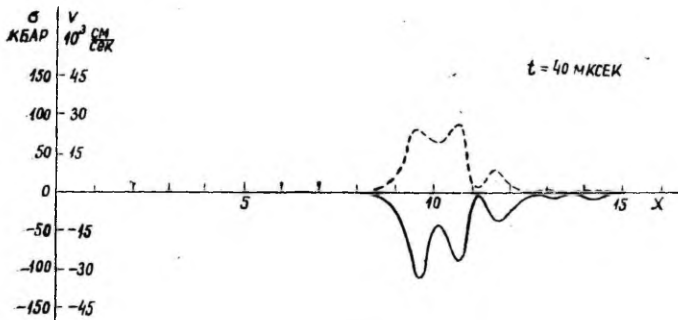
Фиг. 2.



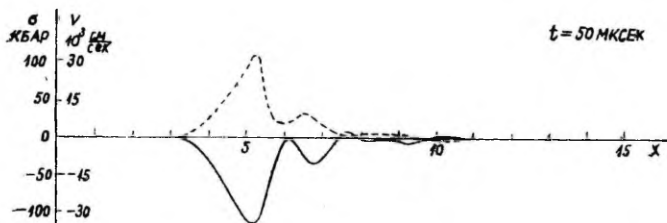
Фиг. 3.



Фиг. 4.



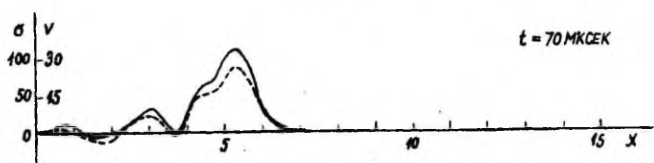
Фиг. 5.



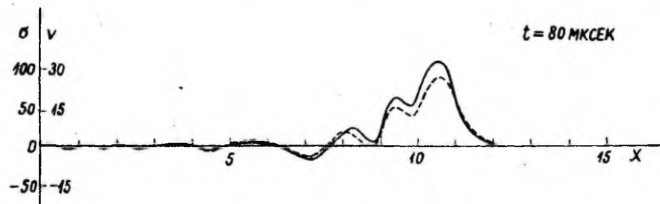
Фиг. 6.



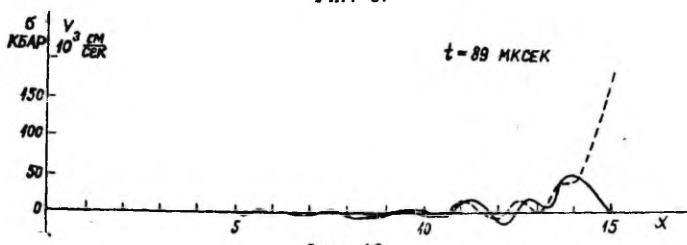
Фиг. 7.



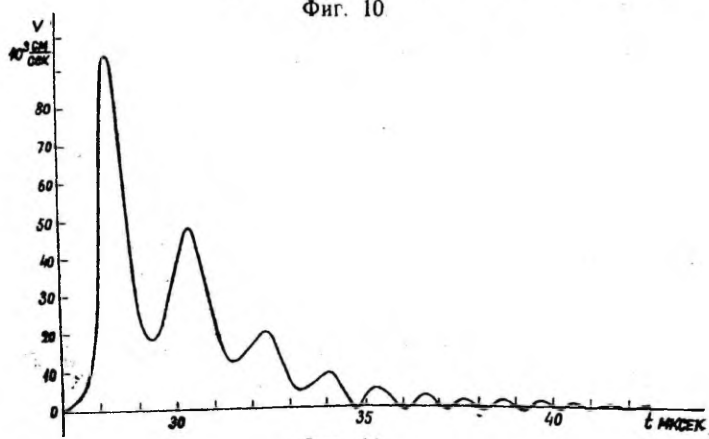
Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10



Фиг. 11.

денных обоими методами, вполне удовлетворительно. На фиг. 5—10 пунктирной линией отмечено распределение скоростей, непрерывной линией — волна напряжения. Из этих фигур хорошо видно отражение ударной волны на границе  $h = 15$ , а также повторное отражение на лицевой поверхности  $h = 0$ . Зависимость скорости от времени на тыльной поверхности  $h = 15$  дана на фиг. 11.

### Литература

1. Лепик Ю. Р., К распространению плоских пластических волн в толстой пластине. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1971, № 1, 100—106.
2. Нейман Дж., Рихтмайер Р., Метод численного расчета гидродинамических скачков. Механика, Период. сб. перев. ин. статей, 1951, № 1, 27—30.
3. Уилкинс М. Л., Расчет упруго-пластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». Изд. «Мир», М., 1967, 212—263.

Поступило  
28 II 1972

### LÕPLIKE ELEMENTIDE MEETODI RAKENDAMINE TASA-PINNALISTE LÕOKLAINETE LEVIKU UURIMISEKS PAKSUS PLAADIS

U. Lepik ja M. Zimirev

#### Resümee

Tasapinnaliste suure amplituudiga lainete leviku ja peegeldamise probleem paksus plaadis on lahendatud karakteristikute meetodil töös [1]. Käesolevas töös lahendatakse sama ülesanne lõplike elementide meetodil. Toodud arvulisest näitest nähtub, et mõlemate meetoditega saadud tulemused on kooskõlas.

### APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN THE PROBLEM ON THE PROPAGATION OF PLANE SHOCK WAVES IN A THICK PLATE

U. Lepik and M. Zimirev

#### Summary

The problem of the propagation and reflection of plane waves with high amplitude in a thick plate was solved by the characteristics method in [1]. In this paper the same problem is solved with the aid of the finite element method. A numerical example is given; from this it follows that the results achieved by both methods are in accordance.

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ

Э. Вирма

Эстонская сельскохозяйственная академия

Предлагается метод решения задачи о динамическом нагружении свободно опертой пластины на основе экстремального принципа Тамужа, предложенного в [3]. На пластину действует равномерно распределенная нагрузка, приложенная мгновенно и сохраняющаяся в некотором интервале времени постоянное значение, а затем нагрузка внезапно снимается. Используются условия текучести Треска и обычные предпосылки теории жестко-пластического тела. Получено приближенное решение задачи, причем остаточный профиль деформированной пластины и время деформирования совпадают с точным решением, найденным при условии текучести Иохансена в работе [4].

## § 1. Постановка задачи

В динамике жестко-пластического тела установлено [1, 3, 5] несколько простых теорем, позволяющих получать приближенные решения задач. В работе А. Р. Ржаницына [2] для нахождения формы движения балки и пластины впервые используется вариационный принцип. В работе [3] В. П. Тамуж показал, что для жестко-пластического тела действительные ускорения и напряжения в каждый момент времени минимизируют функционал, имеющий для пластин следующий вид:

$$J = 0,5 \int_S m v^2 dS - \int_S P(X, Y) v dS + D(v) + D_l(v). \quad (1.1)$$

Здесь  $m$  — масса единицы площади срединной поверхности пластины,  $S$  — площадь пластины,  $\dot{v}$  — кинематически возможное ускорение прогиба,  $P(X, Y)$  — нормальная нагрузка, приложенная к пластине,  $D(\dot{v})$  — ускорение рассеивания внутренней энергии,  $D_l(\dot{v})$  — ускорение рассеивания внутренней энергии при переходе через шарнирную линию  $l$ .

Рассмотрим свободно опертую квадратную пластину со стороной  $2L$  (рис. 1а). На пластину действует постоянная равномерная нагрузка в интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$ , при  $t = t_1$  нагрузка снимается. Требуется определить поведение пластины при  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $t > t_1$ , остаточный прогиб в момент времени, когда движение прекратится, а также время деформирования.

Будем предполагать, что распределение скоростей прогиба  $v = \dot{w}$  в каждый момент времени имеет форму усеченной пирамиды (рис. 1б). Тогда третий член в (1.1) равен нулю, а послед-

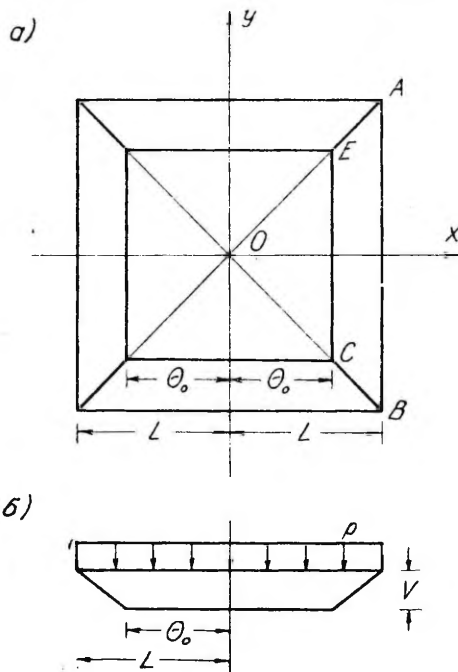


Рис. 1.

ний при условии текучести Треска имеет вид (см. [6])

$$D_l = M_0 \int_l \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 \right]^{1/2} dl. \quad (1.2)$$

Здесь  $M_0$  — максимальный пластический момент,  $l$  — длина шарнирной линии. Вследствие симметрии достаточно рассматривать только часть  $OAB$  пластины (рис. 1а).

Переходим к безразмерным величинам

$$x = X/L, \quad \theta_0 = \theta_0/L, \quad (1.3)$$

где  $2\theta_0$  — длина центральной части пластины. Граничные и начальные условия следующие:

$$\begin{aligned} w = v = \dot{v} = 0 & \quad \text{при} \quad x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \\ w = 0, \quad v = 0 & \quad \text{при} \quad t = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом в начальный момент времени кинематически возможные скорости должны совпадать с действительными скоростями.

## § 2. Движение пластины в первой фазе $0 \leq t \leq t_1$

Рассмотрим кинематически возможное поле скоростей

$$v(x, y, t) = \begin{cases} V & \text{при } 0 \leq x \leq \theta_0, \\ V(1-x)/(1-\theta_0) & \text{при } \theta_0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $V = V(t)$  — неотрицательная функция, зависящая только от времени и удовлетворяющая начальному условию

$$V(0) = 0. \quad (2.2)$$

Так как нагрузка в первой фазе постоянна во времени и начальные скорости соответствуют предполагаемой форме движения, то  $\theta_0$  зависит только от значения  $p$  и не зависит от  $t$ . Следовательно, для поля ускорений имеем

$$v'(x, y, t) = \begin{cases} \dot{V} & \text{при } 0 \leq x \leq \theta_0, \\ \dot{V}(1-x)/(1-\theta_0) & \text{при } \theta_0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для ускорения диссипации по шарнирной линии  $EA$  получим выражение

$$D_{EA} = 2M_0 \dot{V}. \quad (2.4)$$

Ускорение диссипации по шарнирной линии  $CE$

$$D_{CE} = 2M_0 V \dot{\theta}_0 / (1 - \theta_0). \quad (2.5)$$

На основании (2.3), (2.4) и (2.5) выражение (1.1) принимает вид

$$J = \frac{V \cdot L^2}{3} [mV(1+2\theta_0+3\theta_0^2) - 4p(1+\theta_0+\theta_0^2)] + \frac{8M_0 V}{1-\theta_0}. \quad (2.6)$$

Вычисляя производные от  $J$  по  $V$  и  $\theta_0$  и приравнявая нулю, получим систему равенств

$$mV \cdot L^2(1+2\theta_0+3\theta_0^2) - 2pL^2(1+\theta_0+\theta_0^2) + \frac{12M_0}{1-\theta_0} = 0 \quad (2.7)$$

$$mV \cdot L^2(1+3\theta_0) - 2pL^2(1+2\theta_0) + \frac{12M_0}{(1-\theta_0)^2} = 0.$$

Умножая второе уравнение на  $1 - \theta_0$  и вычитая от первого, получим

$$\theta_0^2(mV - p) = 0. \quad (2.8)$$

Если  $\theta_0 \neq 0$ , то

$$mV = p, \quad (2.9)$$

и из (2.7) найдем

$$p = \frac{12M_0}{L^2(1-\theta_0)^2(1+\theta_0)}. \quad (2.10)$$

Следовательно,  $\theta_0 \neq 0$  при  $p > 2p_0$ , где

$$p_0 = 12M_0/L^2 \quad (2.11)$$

является верхней границей предельной нагрузки в случае задачи статики при скоростях, имеющих форму пирамиды.

а) Случай  $p < 2p_0$ ,  $\theta_0 = 0$ . Из (2.7) следует:

$$mV = 2(p - p_0). \quad (2.12)$$

Интегрируя (2.12) и используя начальное условие (2.2), получим

$$mV = 2(p - p_0)t. \quad (2.13)$$

Подстановка (2.13) в (2.1) дает

$$mv(x, y, t) = 2(p - p_0)t(1 - x). \quad (2.14)$$

Интегрируя (2.14) при начальном условии (1.4), находим  $w(x, y, t)$ . Остаточный прогиб в конце первой фазы имеет вид

$$mw(x, y, t_1) = (p - p_0)t_1^2(1 - x). \quad (2.15)$$

б) Случай  $p > 2p_0$ ,  $\theta_0 \neq 0$ . На основании (2.1) и (2.9) для поля скоростей получим

$$mv(x, y, t) = \begin{cases} pt & \text{при } 0 \leq x \leq \theta_0, \\ pt(1 - x)/(1 - \theta_0) & \text{при } \theta_0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Остаточный прогиб при  $t = t_1$  определяется выражениями

$$w(x, y, t_1) = \begin{cases} \omega_1 & \text{при } 0 \leq x \leq \theta_0, \\ \omega_1(1 - x)/(1 - \theta_0) & \text{при } \theta_0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.17)$$

где символом

$$\omega_1 = \frac{pt_1^2}{2m} \quad (2.18)$$

обозначен прогиб в центре пластины.

### § 3. Движение пластины при $t > t_1$

Рассмотрим поле скоростей

$$v(x, y, t) = \begin{cases} V_1 & \text{при } 0 \leq x \leq \theta, \\ V_1(1 - x)/(1 - \theta) & \text{при } \theta \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

в предположении, что  $\theta = \theta(t)$ . Для ускорений получим выражения

$$v'(x, y, t) = \begin{cases} V_1 & \text{при } 0 \leq x \leq \theta, \\ \frac{V_1(1 - \theta) + V_1\dot{\theta}}{(1 - \theta)^2}(1 - x) & \text{при } \theta \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Соотношение (1.1) имеет вид

$$J = \frac{mL^2}{3} \left[ V_1^2(3\theta^2 + 2\theta + 1) + \left( 2V_1V_1\dot{\theta} + \frac{V_1^2\dot{\theta}^2}{1 - \theta} \right) (1 + 3\theta) \right] + \frac{8M_0}{(1 - \theta)^2} [V_1(1 - \theta) + V_1\dot{\theta}], \quad (3.3)$$

Приравнивая нулю производные от  $J$  по  $V_1$  и  $\dot{\theta}$ , получим систему

$$mL^2[V_1(1+2\vartheta+3\vartheta^2)(1-\vartheta)+V_1\vartheta'(1+2\vartheta-3\vartheta^2)]+12M_0=0$$

$$mL^2[V_1(1-\vartheta)^2+V_1\vartheta'(1-\vartheta)](1+3\vartheta)+12M_0=0. \quad (3.4)$$

Отсюда

$$V_1\vartheta^2=0. \quad (3.5)$$

а) Случай  $p < 2p_0$ ,  $\vartheta = 0$ . Согласно (3.4) получим  $V_1 = -2p_0/m$ . Из условия непрерывности  $w$  и  $v$  при  $t = t_1$  следует, что

$$mv(x, y, t) = 2(pt_1 - p_0t)(1-x), \quad (3.6)$$

$$m\omega(x, y, t) = (2pt_1t - p_0t^2 - pt_1^2)(1-x). \quad (3.7)$$

Движение прекращается при

$$t_k = pt_1/p_0. \quad (3.8)$$

Распределение прогибов в конце второй фазы (т. е. при  $t = t_k$ ) определяется выражением

$$m\omega(x, y, t_k) = pt_1^2(p/p_0 - 1)(1-x). \quad (3.9)$$

В центре пластины

$$m\omega(0, 0, t_k) = pt_1^2(p/p_0 - 1). \quad (3.10)$$

б) Случай  $p > 2p_0$ . Согласно (3.5) движение при  $t > t_1$  разбивается на две фазы. В фазе  $t_1 \leq t \leq t_2$  происходит затухание движения с уменьшением  $\vartheta$  от величины  $\vartheta(t_1)$  до  $\vartheta(t_2) = 0$ . В последней фазе  $t_2 \leq t \leq t_k$  движение совершается при  $\vartheta = 0$  вплоть до остановки.

1. Фаза  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $\vartheta \neq 0$ ,  $V_1 = 0$ . На основании (3.4) имеем

$$mL^2V_1\vartheta'(1-\vartheta)(1+3\vartheta)+12M_0=0. \quad (3.11)$$

Из условия непрерывности  $v$  при  $t = t_1$  следует, что

$$V_1 = pt_1/m. \quad (3.12)$$

Подстановка (3.12) в (3.11) дает

$$\vartheta'(1+2\vartheta-3\vartheta^2)pt_1 = -2p_0. \quad (3.13)$$

Интегрируя (3.13) с учетом (2.10), получим

$$(1+\vartheta)(1-\vartheta)^2pt_1 = 2p_0t. \quad (3.14)$$

Так как  $\vartheta = 0$  при  $t = t_2$ , то

$$t_2 = pt_1/(2p_0). \quad (3.15)$$

Для скоростей в зоне  $\vartheta_0 \leq x \leq 1$  имеем

$$mv(x, y, t) = pt_1(1-x)/(1-\vartheta). \quad (3.16)$$

Интегрируя (3.16) с учетом (3.14) и используя начальное условие (2.10), находим  $w(x, y, t)$ . Остаточный прогиб в конце фазы

$$w(x, y, t_2) = \frac{p^2t_1^2}{4mp_0}(1+2\vartheta_0+2\vartheta_0^2)(1-x) \text{ при } \vartheta_0 \leq x \leq 1. \quad (3.17)$$

Для скоростей в зоне  $x < \vartheta_0$  получим

$$mv(x, y, t) = \begin{cases} pt_1 & \text{при } 0 \leq x \leq \vartheta, \\ pt_1(1-x)/(1-\vartheta) & \text{при } \vartheta \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Распределение остаточного прогиба определяется выражением

$$\omega(x, y, t_2) = \omega_1 + \int_{t_1}^{t'} \frac{pt_1}{m} dt + \int_{t'}^{t_2} \frac{pt_1}{m} \frac{1-x}{1-\vartheta} dt,$$

где  $t = t'$  соответствует условию  $x = \vartheta$ .

Вычисления дают

$$\omega(x, y, t_2) = -\omega_1 + \frac{p^2 t_1^2}{4mp_0} (2 - x^2 - x^3) \text{ при } 0 \leq x \leq \vartheta_0, \quad (3.19)$$

где  $\omega_1$  определено выражением (2.18).

2. Фаза  $t_2 \leq t \leq t_k$ , где  $t = t_k$  — время остановки пластины. Скорость прогиба в последней фазе определяется согласно выражению (3.6). Движение прекращается при

$$t_k = pt_1/p_0. \quad (3.20)$$

Распределение остаточного прогиба в момент времени остановки пластины имеет вид

$$\omega(x, y, t_k) = \frac{p^2 t_1^2}{4mp_0} (3 - x - x^2 - x^3) - \omega_1 \text{ при } 0 \leq x \leq \vartheta_0, \quad (3.22)$$

$$\omega(x, y, t_k) = \frac{p^2 t_1^2}{2mp_0} (1 + \vartheta_0 + \vartheta_0^2) (1 - x) \text{ при } \vartheta_0 \leq x \leq 1.$$

В центре пластины

$$\omega(0, 0, t_k) = \frac{pt_1^2(3p - 2p_0)}{4mp_0}. \quad (3.23)$$

Результаты совпадают с точным решением, полученным при условии текучести Иохансена в работе [4]. Описанный метод значительно проще, так как результаты получены непосредственно, без условия уравнения динамического равновесия.

## Литература

1. Ерхов М. И., Об экстремальных принципах динамики жесткопластического тела. Строит. мех. и расчет сооруж., 1970, № 5, 55—61.
2. Ржаницын А. Р., Экстремальное свойство формы движения жесткопластической системы, нагруженной за пределом несущей способности. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1959, № 2, 163—165.
3. Тамуж В. П., Об одном минимальном принципе в динамике жесткопластического тела. Прикл. матем. и механ., 1962, 26, № 4, 715—721.
4. Cox, A. D., Morland, L. W., Dynamic plastic deformations of simply-supported square plates. J. Mech. Phys. Solids, 1959, 7, 229—241.
5. Martin, J., Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1964, 90, № 5, 27—42.
6. Shull, H. E., Hu, L. W., Load-carrying capacities of simply supported rectangular plates. J. Appl. Mech., 1963, 30, 617—622.

Поступило  
9 XII 1971

## VABALT TOETATUD RUUDUKUJULISE PLAADI DÜNAAMIKAST

E. Virma

### Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse vabalt toetatud ruudukujulist jäikplastsest materjalist plaati. Plaadile mõjub teatud lühikese ajavahemiku jooksul ühtlaselt jaotatud ristsuunaline koormus. Eeldatakse, et materjal allub Tresca plastsus-tingimusele. Kasutades Tamuzi [3] printsiipi, on leitud ligikaudne lahend kaht liiki koormuse väärtuse (keskmise ja suure) jaoks. Läbipaindunud plaadi kuju ja liikumise aeg ühtivad Coxi ja Morlandi töös esitatud tulemustega [4]. Vaadeldav meetod on matemaatiliselt lihtne ja seetõttu kergesti laiendatav ristkülikukujulise plaadi dünaamika ülesannetele.

## THE DYNAMIC PLASTIC BEHAVIOUR OF SIMPLY-SUPPORTED SQUARE PLATES

E. Virma

### Summary

In this paper an analysis is given of the problem of a simply-supported square plate subjected to a uniformly-distributed rectangular pressure pulse. The plate is supposed to be made of rigid-plastic material obeying the Tresca yield condition. Using the variational principle of Tamuzi [3] for the dynamically loaded rigid-plastic continua, an approximate solution is given, which falls into two cases depending upon the magnitude of the applied load. The results for the permanent deflections and the total time of motion agree with the analytical result of Cox and Morland [4].

# ДИНАМИКА ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Э. Вирма

Эстонская сельскохозяйственная академия

В настоящей статье рассматривается динамическое поведение свободно опертых прямоугольных пластин на основе экстремального принципа, предложенного в работе [1]. Используются обычные предпосылки теории жестко-пластического тела. Получено приближенное аналитическое решение как функция, зависящая от отношения сторон пластины. На основе неравенств, установленных в работах [4, 5, 6], определены нижняя и верхняя оценки максимального остаточного прогиба для частного вида нагружения.

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную пластину со стороной  $2a$  и отношением сторон  $\eta \leq 1$  (рис. 1). На пластину действует постоянная равномерная нагрузка  $p$  в интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$ , а при  $t = t_1$  нагрузка снимается. Требуется определить остаточный прогиб в момент времени, когда движение прекратится, а также время деформирования.

Приближенное решение задачи на основе принципа Тамужа [1] состоит в задании кинематически возможного поля скоростей в пластине, зависящего от некоторого числа параметров. Путем дифференцирования вычисляется возможное поле ускорений, после чего ищется минимум определенного функционала как функции, зависящей от этих параметров.

Минимизируемый функционал для пластины имеет вид (см. [1])

$$J = \int_S \frac{m}{2} v^2 dS - \int_S p v^* dS + D(v) + D_l(v^*), \quad (1.1)$$

где  $m$  — масса единицы площади срединной поверхности пластины,  $\dot{v} = \dot{\psi}$  — кинематически возможное ускорение прогиба,  $S$  — площадь пластины,  $D_l(\dot{v})$  — ускорение рассеивания внутренней энергии при переходе через шарнирную линию  $l$ .

Допустим, что распределение скоростей  $v$  в каждый момент времени имеет форму «усеченного клина» (рис. 1). Вследствие симметрии достаточно рассмотреть только часть  $OABC$  пластины.

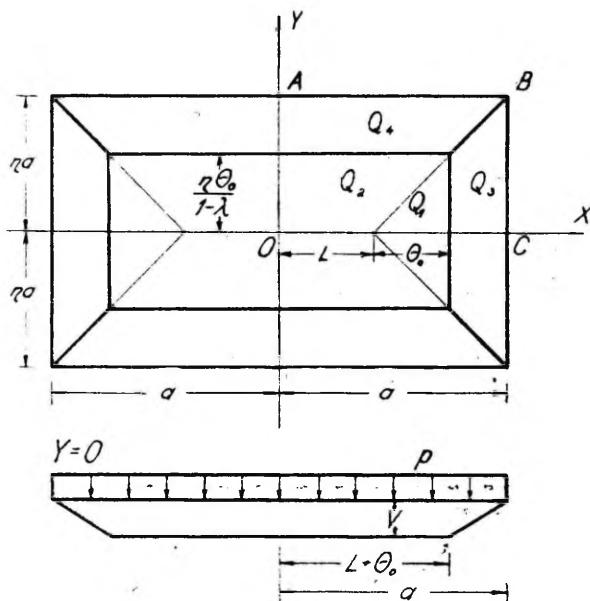


Рис. 1.

Будем пользоваться следующими безразмерными величинами:

$$x = X/a, \quad y = Y/a, \quad \varrho_0 = \theta/a, \quad \lambda = L/a, \quad (1.2)$$

где  $2(\theta_0 + L)$  — длина центральной части пластины. Отношение  $(1 - \lambda)/\eta$  считается постоянным в каждый момент времени.

Граничные и начальные условия следующие:

$$\begin{aligned} \omega = v = v' = 0 & \text{ при } x = 1, \quad 0 \leq y \leq \eta, \\ \omega = v = v' = 0 & \text{ при } y = \eta, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \omega = 0, \quad v = 0 & \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

## § 2. Движение пластины в первой фазе $0 \leq t \leq t_1$

Рассмотрим кинематически возможное поле скоростей

$$v(x, y, t) = \begin{cases} V & \text{на } Q_1 \cup Q_2, \\ V \frac{1-x}{1-(\lambda+\varrho_0)} & \text{на } Q_3, \\ V \frac{(\eta-y)(1-\lambda)}{\eta[1-(\lambda+\varrho_0)]} & \text{на } Q_4, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \left\{ (x, y): \quad \lambda \leq x \leq \lambda + \varepsilon_0, \quad 0 \leq y \leq \frac{x - \lambda}{1 - \lambda} \eta \right\}, \\
 Q_2 &= \left\{ (x, y): \quad 0 \leq x \leq \lambda + \frac{y}{\eta} (1 - \lambda), \quad 0 \leq y \leq \frac{\eta \varepsilon_0}{1 - \lambda} \right\}, \\
 Q_3 &= \left\{ (x, y): \quad \lambda + \varepsilon_0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{x - \lambda}{1 - \lambda} \eta \right\}, \\
 Q_4 &= \left\{ (x, y): \quad 0 \leq x \leq \lambda + \frac{y}{\eta} (1 - \lambda), \quad \frac{\eta \varepsilon_0}{1 - \lambda} \leq y \leq \eta \right\},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

а  $V = V(t)$  — неотрицательная функция, зависящая только от времени и удовлетворяющая начальному условию

$$V(0) = 0. \tag{2.3}$$

Для поля ускорений  $\dot{v}(x, y, t)$  получим (2.1), где вместо  $V$  будет  $\dot{V}$ . Выражение (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
 J &= mV^2 \alpha [3\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0(1 + \lambda) + 1 - \lambda^2] - \\
 &\quad - 2p\alpha V [2\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0(2 + \lambda) + (1 - \lambda)(2 + \lambda)] + \\
 &\quad + 4M_0 V \beta [1 - (\lambda + \varepsilon_0)],
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $M_0$  — максимальный пластический момент, а символом  $\alpha$  и  $\beta$  обозначены величины

$$\alpha = \frac{a^2 \eta}{3(1 - \lambda)}, \quad \beta = \frac{\eta^2 + 1 - \lambda}{\eta [1 - (\lambda + \varepsilon_0)]^2}. \tag{2.5}$$

Приравнивая нулю производные от  $J$  по  $V$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\lambda$ , получим систему

$$\begin{aligned}
 mV\alpha [3\varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0(1 + \lambda) + 1 - \lambda^2] + 2M_0\beta [1 - (\lambda + \varepsilon_0)] - \\
 - p\alpha [2\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0(2 + \lambda) + (1 - \lambda)(2 + \lambda)] &= 0, \\
 mV\alpha [6\varepsilon_0 + 2(1 + \lambda)] - 2p\alpha [4\varepsilon_0 + 2 + \lambda] + 4M_0\beta &= 0, \\
 mV\alpha [3\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_0 + (1 - \lambda)^2] - 2p\alpha [2\varepsilon_0^2 + 3\varepsilon_0 + (1 - \lambda)^2] + \\
 + 4M_0\beta \frac{(1 - \lambda)(\varepsilon_0 + \eta^2)}{\eta^2 + 1 - \lambda} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отсюда

$$\lambda = \eta^2 + 1 - \eta \sqrt{\eta^2 + 3}, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_0(mV - p) = 0. \tag{2.8}$$

Если  $\varepsilon_0 \neq 0$ , то согласно (2.8)

$$mV = p, \tag{2.9}$$

и из (2.6) найдем

$$p = \frac{(1 - \lambda)^2(2 + \lambda)p_0}{[1 - (\lambda + \varepsilon_0)]^2(1 + \varepsilon_0)}, \tag{2.10}$$

где

$$p_0 = \frac{6M_0(\eta^2 - \lambda + 1)}{a^2 \eta^2(1 - \lambda)(2 + \lambda)} \tag{2.11}$$

является верхней границей предельной нагрузки при аналогичной задаче статике (см. [7]). Из (2.10) следует, что  $\vartheta_0 \neq 0$ , если удовлетворяется неравенство

$$p > p_0(2 + \lambda). \quad (2.12)$$

а) Случай  $p < p_0(2 + \lambda)$ ,  $\vartheta_0 = 0$ . Из (2.6) после преобразований получим

$$mV = (2 + \lambda)(p - p_0)/(1 - \lambda). \quad (2.13)$$

Интегрируя (2.13) при начальном условии (2.3), имеем

$$mV = (2 + \lambda)(p - p_0)t/(1 + \lambda). \quad (2.14)$$

Подстановка (2.14) в (2.1) дает распределение скоростей  $v(x, y, t)$  в первой фазе. Интегрируя (2.1) с учетом (2.14) и используя начальное условие (1.3), получим  $w(x, y, t)$ .

Распределение прогибов в конце первой фазы определяется выражениями

$$w(x, y, t) = \begin{cases} w_0(1-x)/(1-\lambda) & \text{на } Q_1 \cup Q_3, \\ w_0(\eta-y)/\eta & \text{на } Q_2 \cup Q_4, \end{cases} \quad (2.15)$$

где символом

$$w_0 = \frac{(2 + \lambda)(p - p_0)t_1^2}{2m(1 + \lambda)}$$

обозначено значение прогиба в центре пластины.

б) Случай  $p > p_0(2 + \lambda)$ ,  $\vartheta_0 = 0$ . Согласно (2.9) и (2.3) получим

$$mV = pt. \quad (2.16)$$

Интегрируя (2.1) с учетом (2.16) и используя начальное условие (1.3), находим  $w(x, y, t)$ . После прогибов в конце первой фазы имеет вид

$$w(x, y, t_1) = \begin{cases} w_1 & \text{на } Q_1 \cup Q_2, \\ w_1 \frac{1-x}{1-(\lambda+\vartheta_0)} & \text{на } Q_3, \\ w_1 \frac{(\eta-y)(1-\lambda)}{\eta[1-(\lambda+\vartheta_0)]} & \text{на } Q_4, \end{cases} \quad (2.17)$$

где обозначено  $w_1 = pt_1^2/2m$ .

### § 3. Движение пластины при $t > t_1$

В фазе замедленного движения ( $t > t_1$ ,  $p = 0$ ) поле  $v(x, y, t)$  принимаем в виде

$$v(x, y, t) = \begin{cases} V_1 & \text{на } Q_1 \cup Q_2, \\ V_1 \frac{1-x}{1-(\lambda+\vartheta)} & \text{на } Q_3, \\ V_1 \frac{(\eta-y)(1-\lambda)}{\eta[1-(\lambda+\vartheta)]} & \text{на } Q_4. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь  $V_1 = V_1(t)$ , а  $\vartheta$  зависит от  $p$  и  $t$ . Путем дифференцирования (3.1) по  $t$ , получим для поля ускорений

$$v'(x, y, t) = \begin{cases} V_1 & \text{на } Q_1 \cup Q_2, \\ \alpha_1(1-x)\eta & \text{на } Q_3, \\ \alpha_1(\eta-y)(1-\lambda) & \text{на } Q_4, \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{V_1[1 - (\lambda + \vartheta)] + V_1\vartheta}{\eta[1 - (\lambda + \vartheta)]^2}.$$

Вычисляя выражение (1.1) с учетом (3.2) и приравнивая нулю производные от  $J$  по  $V_1$  и  $\vartheta$ , получим систему

$$2ma\{V_1[\theta(3\vartheta + 2 - 2\lambda) + 1 - \lambda^2] + V_1\vartheta(1 + \lambda + 3\theta)\} + 4M_0\beta[1 - (\lambda + \theta)] = 0, \quad (3.3)$$

$$2ma\{V_1[\theta(2 - 4\lambda - 3\vartheta) + 1 - \lambda^2] + V_1\vartheta(1 + \lambda + 3\theta)\} + 4M_0\beta[1 - (\lambda + \theta)] = 0.$$

Здесь  $a$  и  $\beta$  определяются согласно выражениям (2.5). Из (3.3) следует:

$$V_1\vartheta = 0. \quad (3.4)$$

а) Случай  $p < p_0(2 + \lambda)$ ,  $\vartheta = 0$ . Согласно (3.3) имеем

$$mV_1 = -(2 + \lambda)p_0/(1 + \lambda). \quad (3.5)$$

Из условия непрерывности  $v$  при  $t = t_1$  следует, что

$$v(x, y, t) = \begin{cases} v_2(1-x)/(1-\lambda) & \text{на } Q_1 \cup Q_3, \\ v_2(\eta-y)/\eta & \text{на } Q_2 \cup Q_4, \end{cases} \quad (3.6)$$

где обозначено

$$v_2 = \frac{2 + \lambda}{m(1 + \lambda)}(pt_1 - p_0t).$$

Движение прекращается при

$$t_k = pt_1/p_0. \quad (3.7)$$

Интегрируя (3.6) и используя условие непрерывности  $w$  при  $t = t_1$ , находим  $w(x, y, t)$ . Распределение прогибов в конце фазы имеет вид

$$w(x, y, t_k) = \begin{cases} \omega_2(1-x)/(1-\lambda) & \text{на } Q_1 \cup Q_3, \\ \omega_2(\eta-y)/\eta & \text{на } Q_2 \cup Q_4, \end{cases} \quad (3.8)$$

где символом

$$\omega_2 = \frac{2 + \lambda}{2m(1 + \lambda)}pt_1^2(p/p_0 - 1) \quad (3.9)$$

обозначено значение остаточного прогиба в центре пластины, а  $\lambda$  и  $p_0$  определяются выражениями (2.7) и (2.11).

б) Случай  $p > p_0(2 + \lambda)$ . Движение при  $t > t_1$  разбивается на две фазы. В фазе  $t_1 \leq t \leq t_2$  происходит затухание движения с уменьшением  $\vartheta$  от величины  $\theta(t_1)$  до  $\vartheta(t_2) = 0$ . В последней фазе  $t_2 \leq t \leq t_k$  движение совершается при  $\vartheta = 0$  вплоть до остановки.

1. Фаза  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Если  $\hat{\sigma} \neq 0$ , то из (3.4) следует, что  $V_1 = 0$ . Условие непрерывности  $v$  при  $t = t_1$  приводит к равенству

$$mV_1 = pt_1. \quad (3.10)$$

На основании (3.3) и (3.10) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\hat{\sigma} [1 - \lambda^2 + 2\hat{\sigma}(1 - 2\lambda) - 3\hat{\sigma}^2] pt_1 = -\rho_0(1 - \lambda)^2(2 + \lambda). \quad (3.11)$$

Интегрируя (3.11) при начальном условии (2.10), имеем

$$\frac{\theta[\hat{\sigma}^2 - \theta(1 - 2\lambda) - (1 - \lambda^2)]}{(1 - \lambda)^2} pt_1 = \rho_0(2 + \lambda)t - pt_1. \quad (3.12)$$

Поскольку  $\hat{\sigma} = 0$  при  $t = t_2$ , то

$$t_2 = \frac{pt_1}{\rho_0(2 + \lambda)}. \quad (3.13)$$

Форма движения пластины в конце второй фазы состоит из четырех зон: двух центральных  $Q_1, Q_2$  и двух пограничных  $Q_3, Q_4$ . Интегрируя (3.1) с учетом (3.10) и (3.12) и используя условие непрерывности  $w$  при  $t = t_1$ , находим  $w(x, y, t)$ . Распределение прогибов в конце фазы определяется выражениями

$$\begin{aligned} w(x, y, t_2) &= -\omega_1 + \alpha_1 \eta^3 [2(1 - \lambda)^2 - (x - \lambda)^2(1 + x)] && \text{на } Q_1, \\ w(x, y, t_2) &= -\omega_1 + \alpha_1(1 - \lambda)^2 [2\eta^3 - y^3(1 - \lambda) - y^2\eta(1 + \lambda)] && \text{на } Q_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$w(x, y, t_k) = \alpha_2(1 - x)/(1 - \lambda) \quad \text{на } Q_3,$$

$$w(x, y, t_k) = \alpha_2(\eta - y)/\eta \quad \text{на } Q_4,$$

где обозначено  $\omega_1 = pt_1^2/2m$ ,

$$\alpha_1 = \frac{p^2 t_1^2}{2m\rho_0 \eta^3 (2 + \lambda) (1 - \lambda)^2}, \quad (3.15)$$

$$\alpha_2 = \frac{p^2 t_1^2 [1 - \lambda + \hat{\sigma}_0(2 + \lambda) - 2\hat{\sigma}_0^2]}{2m\rho_0(2 + \lambda)(1 - \lambda)}. \quad (3.16)$$

2. Фаза  $t_2 \leq t \leq t_k$ , где  $t = t_k$  — время остановки пластины. Скорость прогиба в последней фазе определяется согласно выражению (3.6). Движение прекращается при

$$t_k = pt_1/\rho_0. \quad (3.17)$$

Для остаточного прогиба в конце третьей фазы имеем

$$w(x, y, t_k) = -\omega_1 + \alpha_1 \eta^3 [(1 - \lambda)(3 - x - \lambda - \lambda x) - (x - \lambda)^2(1 + x)] \quad \text{на } Q_1,$$

$$w(x, y, t_k) = -\omega_1 + \alpha_1(1 - \lambda)^2 [\eta^3(3 + \lambda) - \eta y(1 + \lambda)(\eta + y)] - \alpha_1 y^3(1 - \lambda)^3 \quad \text{на } Q_2, \quad (3.18)$$

$$w(x, y, t_k) = \alpha_3(1 - x)/(1 - \lambda) \quad \text{на } Q_3,$$

$$w(x, y, t_k) = \alpha_3(\eta - y)/\eta \quad \text{на } Q_4,$$

где обозначено

$$\alpha_3 = \frac{p^2 t_1^2 [(2 + \lambda)(1 - \lambda + \hat{\sigma}_0) + 2\hat{\sigma}_0^2]}{2m\rho_0(2 + \lambda)(1 - \lambda)}. \quad (3.19)$$

Максимальный остаточный прогиб при  $x = y = 0$

$$\omega(0, 0, t_k) = \frac{\rho t_1^2 [(3+\lambda)p - (2+\lambda)p_0]}{2mp_0(2+\lambda)}, \quad (3.20)$$

где  $\lambda$  и  $p_0$  определяются выражениями (2.7), и (2.11).

#### § 4. Импульсивная нагрузка

Рассмотрим частный вид нагружения, при котором время действия нагрузки очень мало. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  на пластине заданы некоторые постоянные скорости  $v_0$ , край пластины остается неподвижным.

Анализ поведения пластины в основном аналогичен случаю высоких давлений при  $t > t_1$  (см. § 3, случай б), причем вместо  $\rho t_1$  следует принимать  $mv_0$ . Первая фаза здесь полностью отсутствует, а границы центральной части в начальный момент времени совпадают с краями пластины ( $\lambda + \vartheta = 1$ ).

Движение разбивается на две фазы. В фазе  $\vartheta \leq t \leq T_1$  происходит затухание движения с уменьшением  $\vartheta$  от величины  $\vartheta(0) = 1 - \lambda$  до  $\vartheta(T_1) = 0$ . В фазе  $T_1 \leq t \leq T_2$  движение совершается при  $\vartheta = 0$  вплоть до остановки.

В конце первой фазы

$$T_1 = \frac{mv_0}{\rho_0(2+\lambda)};$$

$$\omega(x, y, T_1) = \begin{cases} \beta_1 \eta^3 [2(1-\lambda)^2 - (x-\lambda)^2(1+x)] & \text{на } Q_1 \cup Q_3, \\ \beta_1 (1-\lambda)^2 [2\eta^3 - y^3(1-\lambda) - y^2\eta(1+\lambda)] & \text{на } Q_2 \cup Q_4, \end{cases} \quad (4.1)$$

где обозначено

$$\beta_1 = \frac{mv_0^2}{2\rho_0(2+\lambda)(1-\lambda)^2\eta^3}.$$

В момент времени

$$T_2 = mv_0/\rho_0, \quad (4.2)$$

когда движение прекратится, имеем

$$\omega(x, y, T_2) = \beta_1 \eta^3 [(1-\lambda)(3-x-\lambda-\lambda x) - (x-\lambda)^2(1+x)] \quad \text{на } Q_1 \cup Q_3, \quad (4.3)$$

$$\omega(x, y, T_2) = \beta_1 (1-\lambda)^2 [\eta^3(3+\lambda) - \eta y(1+\lambda)(\eta+y) - y^3(1-\lambda)] \quad \text{на } Q_2 \cup Q_4.$$

Остаточный прогиб в центре пластины имеет вид

$$\omega(0, 0, T_2) = \frac{mv_0^2(3+\lambda)}{2\rho_0(2+\lambda)}. \quad (4.4)$$

## § 5. Оценка результатов

Рассматриваемая задача не имеет точного решения, поэтому результаты можно сопоставлять только с решениями, полученными другими приближенными методами.

В работах [4, 5] доказаны теоремы, позволяющие приближенно вычислить максимальный остаточный прогиб и время деформирования. Для рассматриваемой задачи нижняя оценка времени деформирования имеет вид (см. [4])

$$t_k^- = (mv_0 + pt_1)/p^+, \quad (5.1)$$

где  $p^+$  — верхняя граница предельной нагрузки при задаче статики. Если  $p = 0$ , то  $t_k^- = mv_0/p^+$ , что совпадает с нижней оценкой Мартина [5].

а) Случай  $v_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho \quad \text{при } 0 < t < t_1, \\ \rho(t) &= 0 \quad \text{при } t > t_1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Согласно (5.1)

$$t_k^- = pt_1/p^+. \quad (5.3)$$

Если принимать  $p^+ = p_0$ , то полученная оценка времени совпадает с приближенным решением (3.17).

Для приближенного определения максимального остаточного прогиба в [4] установлено соотношение

$$\omega_{\max} = \frac{\int v^c dS}{\int m(v^c)^2 dS} pt_1^2 (\rho/p_0 - 1), \quad (5.4)$$

где  $v^c$  — кинематически возможное поле скоростей, не зависящее от времени.

Рассмотрим следующее поле скоростей (рис. 2):

$$\begin{aligned} v^0 &= v_0(t)(1-x)/(1-\lambda) \quad \text{на } Q_1 \cup Q_3, \\ v^0 &= v_0(t)(\eta-y)/\eta \quad \text{на } Q_2 \cup Q_4, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\lambda$  определяется соотношением (2.7).

Согласно (5.4) и (5.5)

$$\omega_{\max} = \frac{2+\lambda}{2m(1+\lambda)} pt_1^2 (\rho/p_0 - 1). \quad (5.6)$$

Из сопоставления (3.9), (3.20) и (5.6) следует, что оба приближенных решения совпадают при  $\rho < p_0(2+\lambda)$  и слегка отличаются при  $\rho > (2+\lambda)p_0$ .

б) Случай импульсивной нагрузки ( $\rho = 0$ ). Из (5.1) следует, что

$$t_k^- = mv_0/p^+. \quad (5.7)$$

При  $p^+ = p_0$  оценка времени совпадает с соотношением (4.2).

Если считать, что величина (5.7) достаточно близка к истинному значению времени деформирования, то остаточный прогиб не может быть больше величины  $v_0 t_k^-$ . Следовательно, верхняя

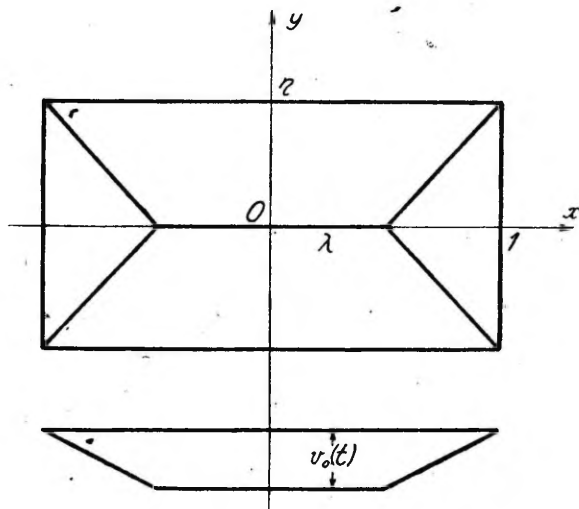


Рис. 2.

оценка максимального прогиба определяется выражением

$$\omega_{\max} \leq m v_0^2 / \rho_0. \quad (5.8)$$

В работе [6] была установлена нижняя оценка максимальной остаточной деформации. Если  $v^0 = v^c(t_k^- - t) / t_k^-$  — кинематически возможные скорости, зависящие от времени, а  $v^c$  — функция только от  $x$  и  $y$ , то удовлетворяется неравенство

$$\omega_{\max} \geq \frac{t_k^-}{\int_S m v^c dS} \left[ \int_S m v_0 v^c dS - \int_0^{t_k^-} D(v^0) dt \right], \quad (5.9)$$

где  $D(v^0)$  — скорость рассеивания внутренней энергии.

При скоростях (5.5) неравенство (5.9) принимает вид

$$\omega_{\max} \geq m v_0^2 / 2 \rho_0. \quad (5.10)$$

В таблице 1 представлены численные результаты для двух значений  $\eta = 0,5$  и  $\eta = 1,0$ . Используются следующие обозначения:  $\omega_T$  — приближенное решение (4.4),  $\omega^-$  — нижняя оценка (5.10),  $\omega^+$  — верхняя оценка (5.8),  $\gamma = m v_0^2 a^2 / M_0$ .

Таблица 1

$\eta$	$\omega^- / \gamma$	$\omega_T / \gamma$	$\omega^+ / \gamma$
0,5	0,035	0,050	0,071
1,0	0,083	0,125	0,167

В работе [5] Мартином получена нижняя оценка времени деформирования для свободно опертой круглой пластины, совпадающая с точным решением. В работе [3] показано, что

оценка Мартина для защемленной прямоугольной пластины при небольших прогибах хорошо согласуется с экспериментальными данными. Значение времени  $t_k^- = mv_0/\rho_0$ , полученное в настоящей работе для свободно опертой квадратной пластины ( $\eta = 1$ ), совпадает с точным решением, полученным при условии текучести Иохансена в работе [2]. Следовательно, можно ожидать, что оценка (5.8) достаточно близка к истинному времени деформирования и величина  $v_0 t_k^-$ , таким образом, является обоснованной верхней границей остаточного прогиба.

Из таблицы 1 видно, что  $\omega_T$  приближенно равно среднему значению двух границ. При этом, результаты для квадратной пластины совпадают с аналитическим решением работы [2].

Описанный метод, таким образом, позволяет получить приближенное решение для динамически нагруженных прямоугольных пластин, достаточно близкое к истинному решению. При этом, метод сравнительно прост и его можно легко применить к пластинам другого вида нагружения и опирания.

## Литература

1. Тамуж В. П., Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела. Прикл. матем. и механ., 1962, 26, № 4, 715—721.
2. Cox, A. D., Morland, L. W., Dynamic plastic deformations of simply-supported square plates. J. Mech. Phys. Solids, 1959, 7, 229—241.
3. Jones, N., Urgan, T. O., Tekin, S. A. The dynamic plastic behavior of fully clamped rectangular plates. Int. J. Solids and Struct., 1970, 6, № 12, 1499—1512.
4. Kaliszky, S., Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua. Int. J. Non-Linear Mech., 1970, 5, № 1, 143—158.
5. Martin, J. B., Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua, J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs., 1964, 90, № 5, 27—42.
6. Morales, W. J., Nevill, G. E., Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua. AIAA Journal, 1970, 8, № 11, 2043—2046.
7. Shull, H. E., Hu, L. W., Load-carrying capacities of simply supported rectangular plates. J. Appl. Mech. 1963, 30, 617—622.

Поступило  
23 III 1972

## RISTKÜLIKUKUJULISTE PLASTSETE PLAATIDE DÜNAAMIKAST

E. Virma

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse jäikplastsest materjalist ristkülikukujulist plaati, millele mõjub dünaamiline koormus. Kasutades Tamuzi [1] printsiipi, on leitud ligikaudne lahend vabalt toetatud plaadi korral. Impulsiivse koormuse juhu jaoks on arvutatud tõkkes deformatsioonijale ja maksimaalsetele läbipainetele, kusjuures on kasutatud töödes [4, 5, 6] saadud võrratusi. Ruudukujulise plaadi erijuhul ühtib ligikaudne lahend Coxi ja Morlandi töö tulemustega [2].

# ON THE DYNAMICS OF PLASTIC RECTANGULAR PLATES

E. Virma

## Summary

In the present paper the rectangular plates of rigid plastic material subjected to a uniformly-distributed dynamic load are considered. Using the variational principle of Tamuz [1], the approximate solution for simply-supported rectangular plates is given. For impulsively loaded plates the procedure developed by the authors of Refs. [4, 5, 6] has been used to study the response time and the permanent deflections.

For the particular case of a square plate the approximate solution agrees with the result of Cox and Morland [2].

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Е. Габович

В статье «Упорядоченные группоиды и их выпуклые подсистемы» (Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 7—26) по моей вине допущены следующие ошибки.

В формулировке теоремы 4 из § 2 условие 1) должно выглядеть так:  
1)  $A$  — целый или дуальный целый архимедовский группоид;

На стр. 16 в доказательстве теоремы 4 абзац, начинающийся словами «Если  $A$  состоит ...» нужно заменить следующей его редакцией:

Если  $A$  состоит из одного архимедовского класса, то  $A$  удовлетворяет условию 1). Если в  $A$  два архимедовских класса  $A_1$  и  $A_2$ , где  $a < b$  для любых  $a \in A_1$ ,  $b \in A_2$ , то выполнено условие 2). Действительно, из  $a^2 < a$  (аналогично из  $b^2 > b$ ) следует стандартное противоречие при

$$B = \{x \mid x \leq a^2, x \in A_1\}, \quad D = \{x \mid x \leq a, x \in A_1\}, \quad C = A_2.$$

Таким образом, из модулярности структуры  $V(A)$  следует, что  $A$  удовлетворяет одному из условий 1) и 2).

Благодарю проф. Т. Саито, указавшего мне эту ошибку.

Поступило  
25 II 1972

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

М. Трепетин

В моей статье «Полукольца эндоморфизмов коммутативных нильпотентных полугрупп» (Уч. Зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 20—36), имеются неточности, допущенные по моему недосмотру.

1. На стр. 23 в начале доказательства теоремы 2 нужно наложить на полугруппы  $A'_1$  и  $A'_2$ , кроме указанных соотношений, еще условие абелевости.

2. На стр. 33 надо последние три предложения из доказательства леммы 3.3 заменить следующим текстом: «Тогда для всякого  $b \in B$  из  $k\varepsilon_B = \theta = (k+1)\varepsilon_B$  получим  $b^k = (b\varepsilon_B)^k = b(k\varepsilon_B) = b\theta = b(k+1)\varepsilon_B = (b\varepsilon_B)^{k+1} = b^{k+1}$ . Покажем, что  $b^k$  есть нуль полугруппы  $B$ . Так как  $b^k$  есть идемпотент, то отображение  $\varphi(b^k)$ , переводящее все  $B$  в  $b^k$ , является эндоморфизмом. При этом из  $b^k\varphi = (b\theta)\varphi = b\theta = b^k$  (для любого  $\varphi \in R_B$ ) получим  $c^k = b^k\varphi(c^k) = b^k$  при всех  $b, c \in B$ . Следовательно,  $k$ -тые степени произвольных элементов полугруппы  $B$  совпадают. При этом из  $ab^k = aa^k = a^{k+1} = a^k = b^k$  и  $b^ka = b^k$  следует, что  $b^k$  — нуль полугруппы  $B$ »

3. На стр. 34, в строке 20 сверху надо символ  $B_j$  заменить на  $B, \lambda$ .  
Отмечу, что все результаты статьи сохраняются.

Поступило  
5 VI 1972

## СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

A. Tauts. Связь обобщенных моделей Бета с топологическими псевдо-булевыми алгебрами	3
A. Tauts. Üldistatud Bethi mudelite seos topoloogiliste pseudo-Boole'i algebratega. <i>Resümee</i>	8
A. Tauts. Der Zusammenhang der verallgemeinerten Beth-Modelle mit topologischen pseudo-Booleschen Algebren. <i>Zusammenfassung</i>	8
A. Tauts. Семантическая интерпретация формул в обобщенных моделях Бета и псевдо-булевых алгебрах	9
A. Tauts. Valemite semantiline interpretatsioon üldistatud Bethi mudelite ja pseudo-Boole'i algebrates. <i>Resümee</i>	20
A. Tauts. Die semantische Interpretation von Formeln durch verallgemeinerte Beth-Modelle und pseudo-Boolesche Algebren. <i>Zusammenfassung</i>	20
A. Parring. Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве	21
A. Parring. Sümplektiliste tasandite parved aafiinses sümplektilises ruumis. <i>Resümee</i>	45
A. Parring. Die Scharen symplektischer Ebenen im affinen symplektischen Raum. <i>Zusammenfassung</i>	45
Л. Туулметс. Фокальные поверхности фокальной псевдоконгруэнции в $R_4$	46
L. Tuulmets. Fokaalse pseudokongruentsi fokaalpinnad ruumis $R_4$ . <i>Resümee</i>	62
L. Tuulmets. Focal surfaces of the focal pseudocongruence in the space $R_4$ . <i>Summary</i>	62
Л. Туулметс и Э. Вага. Фокальная псевдоконгруэнция Рибокура в $R_4$	63
L. Tuulmets ja E. Vaga. Ribaucouri fokaalne pseudokongruents ruumis $R_4$ . <i>Resümee</i>	70
L. Tuulmets and E. Vaga. Focal pseudocongruence of Ribaucour in space $R_4$ . <i>Summary</i>	71
Л. Туулметс и Т. Пюсса. Фокальные псевдоконгруэнции в $R_4$ , фокальные поверхности которых имеют нулевые гауссовы кривизны или кручения	72
L. Tuulmets ja Püssa. Fokaalsed pseudokongruentsid ruumis $R_4$ , mille fokaalpinnad on nulliga võrdse Gaussi kõverusega või väändega. <i>Resümee</i>	84
L. Tuulmets und T. Püssa. Fokalen Strahlenpseudokongruenzen im $R_4$ , welche die Brennflächen mit verschwindenden Gaußschen Krümmungen oder Windungen besitzen. <i>Zusammenfassung</i>	84
В. Спесивых. Подгруппы Ли с максимальными двумерными нелинейчатыми орбитами в комплексном $P_3(C)$	85
V. Spesivõhh. Lie alamrühmad maksimaalsete kahemõõtmeliste mittejoonorbiitidega kompleksses ruumis $P_3(C)$ . <i>Resümee</i>	95

V. Spesivich, Lie's Untergruppen mit maximalen zweidimensionalen nicht-geradlinigen Orbiten im komplexen $P_3(\mathbb{C})$ . <i>Zusammenfassung</i>	95
A. Фляйшер. О двумерных орбитах в действительном $P_3$ и их однородных пространствах	96
A. Fljaiser. Reaalse projektivse ruumi $P_3$ kahemõõtmelistest orbiitidest ja nende homogeensetest ruumidest. <i>Resüme</i>	115
A. Fleischer. Über die zweidimensionalen Orbiten im reellen $P_3$ und ihre Kleinschen Räume. <i>Zusammenfassung</i>	115
К. Рийвес. Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве $R_n$ . I	116
K. Riives. Eukleidilise ruumi $R_n$ kumerate hulktahukate afiinsest klassifikatsioonist ja tunnustest. <i>Resüme</i>	126
K. Riives. About affine classification and characters of convex polytopes in Euclidean space $R_n$ . <i>Summary</i>	126
Э. Кольк. О рефлексивности и суммируемости в пространствах Фреше	127
E. Kolk. Refleksiivsusest ja summeeruvusest Fréchet' ruumides. <i>Resüme</i>	130
E. Kolk. Über Reflexivität und Summierbarkeit in Frecheträumen. <i>Zusammenfassung</i>	130
Л. Лооне. Ядро Кноппа и ядро почти-сходимости в пространстве $m$	131
L. Loone. Knoppi tuum ja peaaegu koonduvuse tuum ruumis $m$ . <i>Resüme</i>	144
L. Loone. Knopp's core and almost convergency core in space $m$ . <i>Summary</i>	144
М. Абель. Некоторые свойства алгебр функций со значениями в банаховой алгебре	145
M. Abel. Mõningaid Banachi algebra väärtustega funktsioonialgebrale omadusi. <i>Resüme</i>	155
M. Abel. Some properties of algebras of functions with values in a Banach algebra. <i>Summary</i>	155
Г. Кангро. Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. II	156
G. Kangro. Jäakliikmega Tauberi teoreem Riesz'i menetluse jaoks. II. <i>Resüme</i>	166
G. Kangro. A Tauberian remainder theorem for the Riesz method. II. <i>Summary</i>	166
Т. Сырмус. Несколько обобщенных тауберовых теорем	167
T. Sõrmus. Mõned üldistatud Tauberi teoreemid. <i>Resüme</i>	177
T. Sõrmus. Einige allgemeine Taubersche Sätze. <i>Zusammenfassung</i>	178
И. Огиевецкий и А. Пидгайко. О двойных числовых последовательностях ограниченной вариации	179
I. Ogievetski ja A. Pidgaiko. Tõkestatud muuduga kahekordsetest arvjadadest. <i>Resüme</i>	184
I. Ogievetski and A. Pidgaiko. On double sequences of numbers of bounded variation. <i>Summary</i>	184
С. Барон и М. Тяхт. О множителях суммируемости двойных рядов для методов $A_{\alpha, \beta}$	185
S. Baron ja M. Täht. Kahekordsete ridade summeeruvustegurid menetluste $A_{\alpha, \beta}$ jaoks. <i>Resüme</i>	198
S. Baron and M. Täht. Summierbarkeitsfaktoren für Summierungsverfahren $A_{\alpha, \beta}$ der Doppelreihen. <i>Zusammenfassung</i>	198
Х. Тюрнпу. О суммируемости функциональных рядов почти всюду	199
H. Törnpu. Funktsionaalridade summeeruvus peaaegu kõikjal. <i>Resüme</i>	211
H. Törnpu. Fast überall Summerbarkeit der Funktionalreihen. <i>Zusammenfassung</i>	212
Х. Тюрнпу. О сходимости интегралов почти всюду	213
H. Törnpu. Integraalide koonduvusest peaaegu kõikjal. <i>Resüme</i>	221
H. Törnpu. The almost everywhere convergence of integrals. <i>Summary</i>	221

<b>Э. Мартин. О суммируемости со скоростью ортогональных рядов методами Эйлера—Кноппа и Чезаро</b>	222
<b>E. Martin. Ortogonaalridade kiirusega summeerimisest Euler-Knoppi ja Cesàro menetlustega. Resümee</b>	236
<b>E. Martin. Summability with speed of orthogonal series by the Euler-Knopp and Cesàro methods. Summary</b>	237
<b>А. Квинукк. О порядке приближения периодических функций</b>	238
<b>A. Kivinukk. Perioodiliste funktsioonide lähendamiskiirusest. Resümee</b>	246
<b>A. Kivinukk. Über den Approximationsgrad periodischer Funktionen. Zusammenfassung</b>	246
<b>М. Тыинов. Некоторые теоремы о мультипликаторах</b>	247
<b>M. Tõnnov. Mõned teoreemid multiplikaatoritest. Resümee</b>	250
<b>M. Tõnnov. Einige Sätze von Multiplikatoren. Zusammenfassung</b>	250
<b>С. Барон. Замечания о локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье, продифференцированных рядов Фурье и сопряженных рядов</b>	251
<b>S. Baron. Märkused Fourier' rea, diferentseeritud Fourier' rea ja kaasrea absoluutse summeeruvuse lokaalsuse omaduse kohta. Resümee</b>	257
<b>S. Baron. Remarks on the local property of absolute summability of the Fourier series, its conjugate series and derived Fourier series. Summary</b>	258
<b>Я. Хион. О целочисленности вершин выпуклого многогранника</b>	259
<b>J. Hion. Kumera hulknurga tippude täisarvulisusest. Resümee</b>	268
<b>J. Hion. Conditions for all vertices of a convex polytope having integer coordinates. Summary</b>	268
<b>А. Лейтен. О получении отсечений в В-алгоритме</b>	269
<b>A. Leiten. Lõigete konstrueerimisest В-algoritmis. Resümee</b>	272
<b>A. Leiten. Zur Konstruktion der Schnitte im В-Algorithmus. Zusammenfassung</b>	272
<b>Ю. Лепик и М. Зимирев. Применение метода конечных элементов для решения задачи о распространении плоских ударных волн в толстой пластине</b>	273
<b>Ü. Lepik ja M. Zimirev. Lõplike elementide meetodi rakendamine tasapinnaliste lööklainete leviku uurimiseks paksus plaadis. Resümee</b>	281
<b>Ü. Lepik and M. Zimirev. Application of the finite element method in the problem on the propagation of plane shock waves in a thick plate. Summary</b>	281
<b>Э. Вирма. Динамическое поведение жестко-пластической свободно опертой квадратной пластины</b>	282
<b>E. Virma. Vabalt toetatud ruudukujulise plaadi dünaamikast. Resümee</b>	288
<b>E. Virma. The dynamic plastic behavior of simply-supported square plates. Summary</b>	288
<b>Э. Вирма. Динамика пластических прямоугольных пластин</b>	289
<b>E. Virma. Ristkülikukujuliste plastsete plaatide dünaamikast. Resümee</b>	298
<b>E. Virma. On the dynamics of plastic rectangular plates. Summary</b>	299
<b>Е. Габович. Письмо в редакцию</b>	300
<b>М. Третьин. Письмо в редакцию</b>	300

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ  
XII

На русском языке

Резюме на эстонском, английском и немецком языках

Тартуский государственный университет,

ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ответственный редактор С. Барон

Корректоры В. Логинова, А. Норберг, О. Мутт, Т. Микенберг

Сдано в набор 17 III 1972. Подписано к печати 27 XII 1972. Печ. листов 19,0.

Учетно-издат. листов 19,35. Тираж 500 экз. Бумага типографская, № 2. 60×90. 1/16.

МВ-11421. Заказ № 1624.

Типография им. Х. Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II

Цена 1 руб. 93 коп.

Цена 1 руб. 93 коп.

TU RAAMATUKOGU



1 0300 00289174 7