

Zur Theorie des Stufenspectroscops.

Von Fürsten B. Galitzin.

(Der Akademie vorgelegt am 12. October 1905).

N 2381.

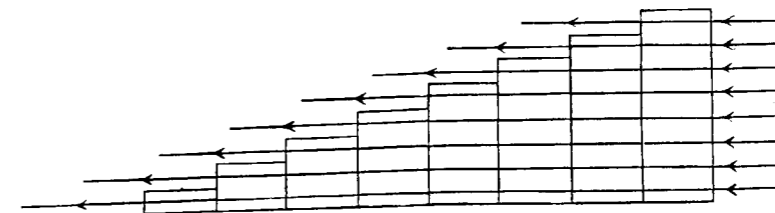
§ 1.

EINLEITUNG.

Zum Zweck der Untersuchung der Beschaffenheit und Eigenthümlichkeiten bestimmter Spectrallinien, resp. der Aenderungen im Aussehen derselben unter verschiedenen äusseren Bedingungen, wie Temperatur, Druck, Entladungsart u. s. w., ist von Michelson eine ganz besondere Art von Spectroscop vorgeschlagen worden¹⁾, das unter dem Namen Stufenspectroscop bekannt ist.

Der wesentlichste Teil desselben besteht aus einer Anzahl fein geschliffener, planparalleler Glasplatten von gleicher Dicke, die um denselben Betrag in der Breite verschieden sind. Diese Platten werden nach der Breite geordnet eine auf die andere direkt aufgesetzt, sodass ein stufenartiger Glaskörper oder ein so genanntes Echelon (Siehe Fig. 1) entsteht, dem das Spectroscop seinen Namen verdankt.

Fig. 1.



Es soll nun auf dieses Echelon ein homogenes, paralleles Strahlenbündel von einem Collimator fallen, wobei die aus dem Echelon heraustretenden

¹⁾ Astrophysical Journal. June (1898). Journal de Physique. 3^me Série. T. VIII, p. 305 (1899).

Strahlen in der Focalebene eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs gesammelt sein mögen.

Die Strahlen, welche durch die Stufen zweier benachbarten Platten hindurchgehen, erhalten immer einen und denselben Gangunterschied und erzeugen im Fernrohr eine Art Interferenzerscheinungen, welche zum Studium des Charakters bestimmter Spectrallinien besonders geeignet sind.

Es entsteht im Gesichtsfelde des Fernrohrs bei geeigneter Stellung des Echelons eine grosse Anzahl mehr oder weniger heller, aequidistanter Streifen, welche den Hauptmaximen benachbarter Ordnungen entsprechen. Das Dispersions- und Auflösungsvermögen eines solchen Stufenspectroscops ist im Allgemeinen ein sehr bedeutendes, wodurch alle Eigenthümlichkeiten in der Construction einzelner Spectrallinien sehr scharf zum Ausdruck gebracht werden. Es muss aber ausdrücklich betont werden, dass das Stufenspectroscop sich überhaupt nicht dazu eignet, bestimmte Spectralgebiete gleichzeitig zu erforschen, sondern es muss zur Erforschung nur eine bestimmte Spectrallinie ausgewählt und nur diese mit Hülfe des Echelons studiert werden. Dies wird sofort verständlich, wenn wir bemerken, dass bei dem für das Physikalische Laboratorium der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg geschaffenen Stufenspectroscop die Entfernung zweier Hauptmaxima, oder, sagen wir auch, zweier Spektra benachbarter Ordnungen z. B. für die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5460,947 \text{ \AA. E.}$) nur $0,477 \text{ \AA. E.}$ entspricht.

Folglich können nur diejenigen Linien, welche in der unmittelbaren Nähe der Hauptlinie sich befinden, zweckmässig erforscht werden, und, ist das auffallende Strahlenbündel nicht genügend homogen, so entsteht im Gesichtsfeld ein solches Wirrwarr von Linien, dass es überhaupt sehr schwer möglich ist aus denselben irgend etwas herauszubekommen. Je schärfer die zu untersuchende Spectrallinie ist, möge sie auch mehrere Begleiter haben, desto schärfer und schöner entsteht ihr Bild im Stufenspectroscop. Ist aber der Bau einer Spectrallinie unscharf und verschwommen, so erhält ihr Bild im Stufenspectroscop einen sehr undeutlichen und verwaschenen Charakter. So z. B. eignen sich die Natrium D-Linien recht schlecht zum Studium im Stufenspectroscop.

Um eine gute Wirksamkeit des Echelons zu erzielen, müssen die Glasplatten desselben äusserst sorgfältig geschliffen werden. Dies ist allerdings eine recht schwierige technische Aufgabe, die jedoch vom Optiker Adam Hilger in London (75^a Camden Road) in allerbefriedigendster Weise gelöst ist. Hilger ist zur Zeit, meines Wissens, der einzige Constructeur von Stufenspectroscopen. Er baut kleine und grössere Typen derselben; da aber nach der Theorie des Echelons (siehe weiter unten) die Lichtstärke der im Fernrohr

erzeugten Bilder der Spectrallinien bei gleichen übrigen Bedingungen proportional dem Quadrate der Anzahl der Platten ist, so habe ich für das Physikalische Laboratorium der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg das grösste von Hilger überhaupt gebaute Modell bestellt, nämlich eins mit 33 Stufen.

Dieser Apparat kam am Anfang dieses Jahres (1905) in meinen Besitz und wurde sofort einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Er erwies sich in der That als ein vortreffliches Instrument von aussergewöhnlicher Lichtstärke, wobei alle möglichen Feinheiten und Details in der Struktur einzelner Spectrallinien besonders scharf und schön zum Ausdruck kamen.

Die Fig. 2 giebt eine allgemeine und die Fig. 3 eine schematische Abbildung (von oben gesehen) des Instruments.

Die Anwendung des Stufenspectroscops zum Studium einzelner Spectrallinien geschieht auf folgende Weise.

Fig. 2.

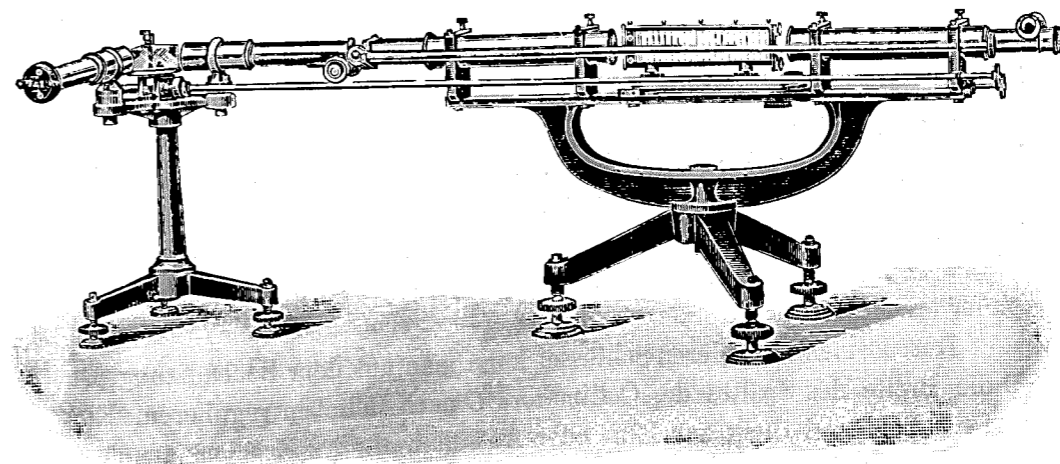
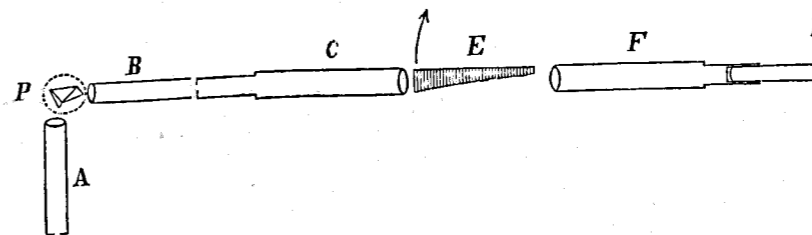


Fig. 3.



Die Strahlen von einer gegebenen Lichtquelle werden mittelst einer Hülfslinse (auf der Zeichnung nicht angedeutet) auf den Spalt des Collimators A eines kleinen Hülfspectroscops concentrirt. Dieses Spectroscop

hat ein stark dispergierendes Ablenkungsprisma, das vom Beobachtungsort D mittelst eines besonderen, langen Schlüssels gedreht werden kann, um nach Belieben verschiedene Spectrallinien ins Gesichtsfeld des Fernrohrs F bringen zu können.

Die aus dem Prisma heraustretenden Strahlen werden von dem Objectiv des kleinen Fernrohrs B des Hilfsspectroscops gesammelt und zwar auf den Spalt des grossen Collimators C . Zu diesem Zweck wird das Ocular des Fernrohrs B weggenommen.

Das Collimator C wird auf Unendlich eingestellt, somit fällt auf das Echelon ein paralleles Strahlenbündel, welches einer bestimmten, nach Belieben ausgewählten Spectrallinie entspricht.

Nun werden weiter die aus dem Echelon heraustretenden parallelen Strahlen wiederum in das Fernrohr F gesammelt. In der Focalebene des Objectivs desselben befindet sich ein Ocularmicrometer mit Fäden von aussergewöhnlicher Feinheit, die mittelst einer kleinen electrischen Glühlampe besonders beleuchtet werden können. Die Schraubenhöhe des Ocularmicrometers betrug $\frac{1}{4}$ m/m und, da die Trommel desselben in 100 Theile getheilt ist, so entspricht ein Theilstrich auf der Trommel $\frac{1}{400}$ m/m.

Anstatt die Linien direct mit dem Ocularmicrometer auszumessen, kann man dieselben auch photographieren. Zu diesem Zweck ersetzt man den Tubus mit dem Ocularmicrometer durch einen besonderen mit einer photographischen Platte. Dieser Tubus enthält noch eine kleine plan-concave Linse, durch die eine weitere, etwa dreifache, Vergrößerung der erhaltenen Bilder erzielt wird.

Durch einen besonderen Schlüssel kann man aus dem Beobachtungsort D die Breite des Spaltes des Collimators C nach Belieben regulieren. Ein anderer Schlüssel dient zur Ein- oder Ausschaltung des Echelons aus dem Strahlengang. Zu diesem Zweck ist die kleine Plattform, auf welcher das Echelon ruht, so eingerichtet, dass sie um einen Punkt am engeren Ende des Echelons sich drehen kann; somit bewegt sich beim Ausschalten des Echelons sein breites Ende in der Richtung des Pfeils. Durch diese Vorrichtung kann man dem Echelon auch beliebige Neigungen in Bezug auf das auffallende Strahlenbündel geben, was, wie wir es weiter sehen werden, von besonderer Wichtigkeit ist, nämlich beim Auswählen der zum Beobachtungszweck günstigsten Ordnung des entsprechenden Spektrums.

Die Handhabung des Apparates, wenn alles richtig aufgestellt ist, bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar, und da die erhaltenen Bilder von besonderer Schärfe und Schönheit sind, so bietet das Stufenspectroscop ein sehr werthvolles Mittel zur Erforschung charakteristischer Eigenschaften bestimmter Spectrallinien.

Es ist mir nicht bekannt, dass eine vollständige Theorie des Echelons irgend wo publiciert worden ist, da aber dieselbe an und für sich sehr interessant ist und ausserdem manche interessante Specialfälle darbietet, so schien es mir sehr wünschenswerth, dieselbe in einer besonderen Abhandlung darzulegen und insbesondere die für die Praxis sehr wichtige Frage nach dem Dispersionsvermögen des Apparats für verschiedene Spectrallinien und für Spectra verschiedener Ordnung einer näheren Besprechung zu unterziehen.

Bei gewöhnlichen Spectrographen, wo man auf der photographischen Platte oder bei visuellen Beobachtungen im Gesichtsfelde des Fernrohrs zu gleicher Zeit mehrere, verschiedene Spectrallinien erhält, bietet die Frage nach der Bestimmung des Dispersionsvermögens des Apparates, nämlich die Feststellung, welchem Bruchtheil eines Millimeters etwa 0,01 Ä.E. entspricht, überhaupt keine Schwierigkeit.

Bei dem Stufenspectroscop dagegen verhält sich die Sache ganz anders. Bei demselben erhält man gewöhnlich im Gesichtsfeld nur eine oder mehrere Abbildungen einer und derselben Linie, somit fehlen überhaupt alle Anhaltspunkte, um das Dispersionsvermögen aus den Beobachtungen direct bestimmen zu können. Diese Frage bedarf also einer besonderen Erörterung.

Im nächsten Paragraphen ist nun die allgemeine Theorie des Echelons dargelegt. Die erhaltenen Formeln habe ich alsdann einer experimentellen Prüfung unterzogen. Die entsprechenden Beobachtungen sind in dem folgenden § 3 angegeben.

In dem Schlussparagraphen 4 wird nun die Theorie mit den Beobachtungsergebnissen verglichen, wobei, wie wir es weiter sehen werden, die Übereinstimmung als eine sehr befriedigende zu bezeichnen ist.

§ 2.

THEORIE DES ECHELONS.

Denken wir uns nun ein paralleles, homogenes Strahlenbündel S vorhanden, welches auf die breite Seite des Echelons fällt. (Siehe Fig. 4).

Die Anzahl der Stufen des Echelons sei n , die Höhe einer Stufe t und die Breite derselben s , wobei wir die Stufen von 00_2 nach links zählen werden.

Ist CD die k^{te} Stufe, so wird, wie leicht einzusehen ist,

$$OA = (k - 1)s,$$

$$OB = ks$$

Führen wir dazu folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} C_0P &= d \\ PP_1 &= d_0 \\ P_1C_1 &= d_1, \end{aligned}$$

dann lässt sich die Gleichung des Strahles C_0P für den Punkt C_1 auf der Ebene O_1D_1 folgendermaassen schreiben:

$$y_1 = a_1 \sin \left[2\pi \left\{ \frac{T}{\tau} - \frac{x+d+\mu d_0+d_1}{\lambda} \right\} + \gamma \right].$$

a_1 unterscheidet sich für schwach absorbierende Medien recht wenig von a .

Statt einzelne Strahlen zu betrachten, wollen wir ein unendlich kleines Strahlenbündel von der Breite dz einführen.

Bezeichnen wir durch $z = OP$ die Entfernung des Punktes P von O , so können wir statt a_1 in der vorigen Gleichung αdz einsetzen, wo α eine gewisse Constante bedeutet.

Somit haben wir für die Gleichung des gegebenen unendlich kleinen Strahlenbündels um den Punkt C_1 den Ausdruck:

$$y_1 = \alpha \sin \left[2\pi \left\{ \frac{T}{\tau} - \frac{x+d+\mu d_0+d_1}{\lambda} \right\} + \gamma \right] dz \dots \dots \dots (5)$$

Nun ist, wie leicht einzusehen ist,

$$\begin{aligned} d &= z \sin \theta, \dots \dots \dots (6) \\ d_0 &= h \sec \varphi, \end{aligned}$$

oder, nach der Gleichung (1),

$$d_0 = \{n - (k-1)\} t \cdot \sec \varphi \dots \dots \dots (7)$$

Wollen wir nun $d_1 = P_1C_1$ bestimmen.

Zu dem Zweck ziehen wir durch den Schnittpunkt F der Normale zur entsprechenden Echelonstufe in P_1 mit O_1D_1 eine zu OO_1 senkrechte Linie. Wir haben also (siehe die Gleichung (3))

$$O_1G = \{z + h \operatorname{tg} \varphi\} \operatorname{tg} (\theta - \psi).$$

Nun ist offenbar

$$O_2O_3 = (k-1)t,$$

also

$$P_1F = (k-1)t + l - \{z + h \operatorname{tg} \varphi\} \operatorname{tg} (\theta - \psi)$$

und schliesslich, mit Rücksicht auf die Beziehung (1),

$$d_1 = \{(k-1)t + l\} \cos (\theta - \psi) - [z + \{n - (k-1)\} t \operatorname{tg} \varphi] \sin (\theta - \psi). \quad (8)$$

Bringen wir nun die Werthe von d , d_0 und d_1 aus den Gleichungen (6), (7) und (8) in die Gleichung (5) ein, wobei wir vorher folgende vereinfachende Bezeichnungen einführen wollen:

$$\sin (\psi - \theta) + \sin \theta = q \dots \dots \dots (9)$$

$$2\pi \frac{t}{\lambda} [\cos (\psi - \theta) - \{\mu \operatorname{Sec} \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sin (\psi - \theta)\}] = p \dots \dots (10)$$

$$2\pi \left[\frac{T}{\tau} - \frac{x+l \cos (\psi - \theta) + nt \{\mu \operatorname{Sec} \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sin (\psi - \theta)\}}{\lambda} \right] + \gamma = \xi \dots (11)$$

Es giebt sich dann

$$y_1 = \alpha \sin \left\{ \xi - (k-1)p - 2\pi q \frac{z}{\lambda} \right\} dz \dots \dots \dots (12)$$

Um den entsprechenden Theil der Lichtintensität von der k ten Stufe zu berechnen, müssen wir nun nach dem Prinzip der Superposition kleiner Bewegungen die einzelnen Werthe von y_1 summieren, mit anderen Worten, den Ausdruck von y_1 aus der Formel (12) einfach integrieren und zwar zwischen den Grenzen OA_1 und OB_1 .

Nun ist aber

$$OA_1 = (k-1)s - h \operatorname{tg} \varphi,$$

es folgt also

$$Y_k = \Sigma y_1 = \alpha \int \sin \left\{ \xi - (k-1)p - 2\pi q \frac{z}{\lambda} \right\} dz \dots \dots \dots (13)$$

Das entsprechende bestimmte Integral wird, mit Rücksicht auf die Beziehung (1), gleich

$$Y_k = \alpha s \left(\frac{\sin u}{u} \right) \sin \left[\xi - (k-1)p - u - 2\pi \frac{q}{\lambda} \{(k-1)s - (n - (k-1))t \operatorname{tg} \varphi\} \right],$$

wo

$$u = \pi \frac{qs}{\lambda} \dots \dots \dots (14)$$

gesetzt wird.

Setzen wir nun

$$\xi - u + 2\pi \frac{q}{\lambda} nt \operatorname{tg} \varphi = \xi_1 \dots \dots \dots (15)$$

und

$$p + 2\pi \frac{q}{\lambda} s + 2\pi \frac{q}{\lambda} t \operatorname{tg} \varphi = \varepsilon, \dots \dots \dots (16)$$

so folgt

$$Y_k = \alpha s \left(\frac{\sin u}{u} \right) \sin \left\{ \xi_1 - (k-1) \varepsilon \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Auf Grund der Gleichungen (9), (10) und (16) wird nun

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \left[qs + t \left\{ \cos(\psi - \vartheta) - \mu \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sin \vartheta \right\} \right] \dots \dots (18)$$

Nun liefert jede Stufe des Echelons einen ähnlichen Beitrag Y_k .

Es handelt sich also nur darum, die Summe der Y_k , und zwar von $k = 1$ bis $k = n$ zu bilden.

Sei also

$$Y = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha s \left(\frac{\sin u}{u} \right) \sin \left\{ \xi_1 - (k-1) \varepsilon \right\}.$$

Die Berechnung dieser Summe geschieht nach den bekannten üblichen Methoden (siehe die Theorie des Diffractionsgitters) und es ergibt sich

$$Y = n \alpha s \left(\frac{\sin u}{u} \right) \left(\frac{\sin \left(n \frac{\varepsilon}{2} \right)}{n \sin \frac{\varepsilon}{2}} \right) \sin \left\{ \xi_1 - (n-1) \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Nach den Formeln (15), (11) und (18) ist $\sin \left\{ \xi_1 - (n-1) \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ eine periodische Function der Zeit T , folglich erhalten wir für die resultierende gesuchte Lichtintensität I den folgenden Ausdruck, wenn wir mit C einen Proportionalitätsfactor bezeichnen,

$$I = C (n \alpha s)^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(n \frac{\varepsilon}{2} \right)}{n \sin \frac{\varepsilon}{2}} \right)^2 \dots \dots \dots (19)$$

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$I_0 = C (n \alpha s)^2 \dots \dots \dots (20)$$

$$F(u) = \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \dots \dots \dots (21)$$

$$v = - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \left[t \left\{ \mu \sec \varphi - \cos(\psi - \vartheta) - \operatorname{tg} \varphi \sin \vartheta \right\} - qs \right] \quad (22)$$

und

$$\Phi(v) = \left(\frac{\sin nv}{n \sin v} \right)^2, \dots \dots \dots (23)$$

so können wir schreiben

$$I = I_0 F(u) \Phi(v) \dots \dots \dots (24)$$

Der Maximalwerth der Functionen $F(u)$ und $\Phi(v)$ ist gleich 1, folglich bedeutet I_0 die maximale Lichtintensität eines Streifens im Fernrohr.

Wir sehen also, dass I_0 proportional dem Quadrate der Anzahl der Stufen n und der Breite jeder Stufe s ist.

Es ist leicht aus der Fig. (4) einzusehen, dass für gewisse Werthe von θ und ψ , namentlich für negative Werthe von θ und positive Werthe von ψ , die Ecken der Echelonstufen etwas störend wirken können und einen kleinen Theil der aus dem Echelon heraustretenden Strahlen auffangen¹⁾, wodurch die wirksame Fläche der Echelonstufen etwas verkleinert wird, aber für kleine Werthe von θ und ψ , die bei den Beobachtungen mit dem Stufenspectroscop überhaupt nur vorkommen, können wir diese unbedeutende störende Wirkung ausser Acht lassen.

Der Gang der Function $F(u)$ ist aus der Theorie des Diffractionsgitters bekannt. $F(u)$ kann nie negativ werden.

Für $u = 0$ wird $F(u) = 1$ (Hauptmaximum). Für $u = \pm 2i \frac{\pi}{2}$, wo i eine ganze Zahl bedeutet, wird $F(u) = 0$. Die Minima sind aequidistant.

Für $u = \pm 2,86 \frac{\pi}{2}$ tritt das erste secundäre Maximum ein. $F(u) = 0,0472$

Für $u = \pm 4,92 \frac{\pi}{2}$ » » zweite » » » . $F(u) = 0,0165$
u. s. w.

Mit wachsender Ordnungszahl nähern sich die entsprechenden secundären Maxima der Mitte zwischen zwei benachbarten Minimen, wobei der Werth von $F(u)$ ziemlich rasch abnimmt und zwar ungefähr umgekehrt, wie die Quadrate der ungeraden Zahlen. In der Nähe von $u = \pm \frac{\pi}{2}$ befindet sich kein secundäres Maximum, und es wird für $u = \pm \frac{\pi}{2}$ $F(u) = 0,4053$.

Ausserdem sehen wir, dass die secundären Maxima überhaupt sehr schwach sind, so z. B. der Werth des ersten secundären Maximums nur $\frac{1}{21}$ des Werthes des Hauptmaximums bildet.

Wenden wir uns jetzt der Function $\Phi(v)$ zu.

Bei dieser Function sind nur die Hauptmaxima von Belang. Sie sind bekanntlich alle aequidistant und alle gleich 1.

Sie treten ein für $v = \pm m\pi$, wo m irgend eine ganze Zahl bedeutet, inclusive den Werth $m = 0$.

Wollen wir nun jetzt die Werthe von u und v ausarbeiten.

Bei den Beobachtungen mit dem Stufenspectroscop sind die Werthe von ψ immer sehr klein, folglich kann man

$$\sin \psi = \psi$$

1) Die nach der linken Seite (siehe die Fig. (4)) gewandten Stufen (t) des Echelons sind matt geschliffen.

und

$$\cos \psi = 1$$

setzen.

Dann ergibt sich aus den Gleichungen (9) und (14)

$$q = \psi \cos \theta \dots \dots \dots (25)$$

und

$$u = \pi \frac{s}{\lambda} \cdot \psi \cos \theta.$$

s ist die Breite und t die Höhe einer Stufe, folglich sind $\frac{s}{\lambda}$ und $\frac{t}{\lambda}$ reine Zahlen, die praktisch sehr gross sind.

Führen wir dementsprechend folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{s}{\lambda} &= n_1 \\ \frac{t}{\lambda} &= n_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Bei meinem Echelon war z. B. für die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5460,947 \text{ \AA. E.}$)

$$n_1 = 1756,1$$

$$n_2 = 18277.$$

Wir können also setzen

$$u = \pi n_1 \psi \cos \theta \dots \dots \dots (27)$$

Aus der Formel (22) erhalten wir, bei Einführung der Bezeichnungen (26),

$$v = \pi [n_2 \{ \mu \sec \varphi - \cos \theta - \psi \sin \theta - \operatorname{tg} \varphi \sin \theta \} - n_1 \psi \cos \theta].$$

Nun ist nach der Gleichung (2)

$$\sec \varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta}},$$

somit folgt

$$v = \pi [n_2 \{ \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta \} - r \psi], \dots \dots \dots (28)$$

wenn

$$r = n_1 \cos \theta + n_2 \sin \theta \dots \dots \dots (29)$$

gesetzt wird.

Nach Ableitung dieser allgemeinen Formeln wollen wir nun zur Untersuchung gewisser Specialfälle übergehen.

Setzen wir also fürs Erste voraus, dass das Echelon senkrecht zum auffallenden Strahlenbündel aufgestellt ist ($\theta = 0$).

Dann wird

$$u = \pi n_1 \psi \dots \dots \dots (30)$$

$$v = \pi [n_2 \{ \mu - 1 \} - n_1 \psi] \dots \dots \dots (31)$$

Wollen wir für einen Augenblick von dem Gang der Function $F(u)$ absehen, dann werden im Felde des Fernrohrs helle Streifen nur dort auftreten, wo die Function $\Phi(v)$ Hauptmaxima besitzt, wo also

$$n_2 \{ \mu - 1 \} - n_1 \psi = m \dots \dots \dots (32)$$

wird, wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

Aus dieser Formel lässt sich die Lage (ψ) der einzelnen Streifen berechnen, wo man für m der Reihe nach ganze Zahlen einzusetzen hat. Wir sehen auch, dass alle Streifen aequidistant sind.

Für denjenigen Streifen, welcher am nächsten zur Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohrs liegt, wollen wir ψ durch ψ_0 bezeichnen.

Es ist also

$$\psi_0 = \frac{n_2(\mu - 1) - m}{n_1} \dots \dots \dots (33)$$

$n_2(\mu - 1)$ ist eine sehr grosse Zahl.

Wäre dieselbe genau eine ganze Zahl, so würde $\psi_0 = 0$ sein.

Auf jeden Fall kann ψ_0 nie grösser als

$$\pm \frac{1}{2n_1}$$

werden.

Bei meinem Echelon wird für dieselbe grüne Quecksilberlinie also immer

$$\psi_0 \leq 59''$$

sein, was in der Focalebene des Fernrohrs bei visuellen Beobachtungen nur $0,15 \frac{m}{m}$ entsprechen würde (Focaldistanz des Fernrohrobjectivs $524,2 \frac{m}{m}$).

Das entsprechende m ergibt sich gleich zu 10566; dies ist die zu $n_2(\mu - 1)$ am nächsten liegende ganze Zahl.

Wir sehen also, dass die Ordnungszahlen der Interferenzstreifen im Echelon sehr bedeutende Werthe haben, was eben die besondere Eigenthümlichkeit des Stufenspectroscopis ist.

Wollen wir nun denjenigen Streifen, welcher ψ_0 entspricht, fixieren und alsdann θ ändern.

Ändert man θ , so verschiebt sich auch der Streifen, wobei es eine bestimmte Lage des Echelons giebt, für welche das entsprechende ψ ein Minimum ist, d. h. bei Drehung des Echelons nach rechts und links der Streifen immer in dieselbe Richtung sich verschiebt, ganz analog der Minimalablenkung bei einem Prisma.

Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von ψ und θ durch ψ_m und θ_m und wollen wir dieselben aufsuchen.

Setzt man in der Gleichung (28) $v = m\pi$, so folgt

$$\psi = \frac{n_2 \{ \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta \} - m}{r} \dots \dots \dots (34)$$

Es muss nun

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 0.$$

sein.

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{n_2 \left\{ \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta}} + \sin \theta \right\}}{r} - \frac{n_2 \{ \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta \} - m}{r^2} \{ n_2 \cos \theta - n_1 \sin \theta \}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen, da θ bei den Beobachtungen mit dem Stufenspectroscop immer sehr klein bleibt. Bei mir war für die gelbe Quecksilberlinie ($\lambda = 5790,917 \text{ \AA. E.}$) im fünften Spectrum θ höchstens gleich $2^\circ 10'$. Wollen wir also in erster Annäherung Glieder von der Ordnung θ^2 vernachlässigen.

Dann folgt

$$n_2 \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \theta_m - \frac{n_2(\mu - 1) - m}{n_1 + n_2 \theta_m} \cdot \{ n_2 - n_1 \theta_m \} = 0.$$

$\frac{n_2(\mu - 1) - m}{n_1} = \psi_0$ ist eine sehr kleine Grösse, folglich können wir mit derselben Genauigkeit setzen,

$$n_2 \frac{\mu - 1}{\mu} \theta_m - \psi_0 n_2 = 0,$$

also

$$\theta_m = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \psi_0 \dots \dots \dots (35)$$

Für die Glassorte des Echelons ist z. B. für die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5460,947$) $\frac{\mu}{\mu - 1} = 2,730$.

Wir sehen also, dass auch θ_m eine sehr kleine Grösse ist.

Bringen wir nun diesen Ausdruck von θ_m in die Formel (34) ein, so ersehen wir sofort, dass ψ_m sich nur durch Glieder höherer Ordnung von ψ_0 unterscheidet.

Für ein beliebiges, aber festes θ , sind alle Streifen immer aequidistant, wobei die Entfernung $\Delta\psi$ zweier benachbarter Streifen immer gleich $\frac{1}{r}$ wird, also

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \dots \dots \dots (36)$$

Es giebt nun zwei Methoden der Anwendung des Stufenspectroscops.

Die erste Methode besteht darin, das Echelon auf die Minimalablenkung des Hauptstreifens zu bringen, also $\theta = \theta_m$ zu machen.

Da θ_m sehr klein ist, können wir setzen

$$r = n_1 \left[1 + \frac{n_2}{n_1} \theta_m \right] \dots \dots \dots (37)$$

und, nach der Formel (27),

$$u = \pi n_1 \psi \dots \dots \dots (38)$$

Wollen wir nun die Intensität der einzelnen Streifen betrachten. Da für alle Streifen $\Phi(v) = 1$ wird, so hängt ihre Intensität nur noch von dem Werth des Factors $I'(u)$ ab.

Für den mittleren Streifen haben wir

$$u_0 = \pi n_1 \psi_0,$$

und für alle übrigen

$$u = u_0 \pm i \frac{\pi n_1}{r},$$

wo i die Ordnungszahl der benachbarten Streifen bedeutet, wobei für diejenigen Streifen, welche im Gesichtsfeld rechts vom einfallenden Strahlenbündel liegen, i als positiv anzunehmen ist.

Nach der Formel (33) ist

$$n_1 \psi_0 = n_2 (\mu - 1) - m \dots \dots \dots (39)$$

Wollen wir nun $n_2(\mu - 1) - m$ durch ρ bezeichnen. ρ ist ein echter positiver oder negativer Bruch, der nie grösser als $\frac{1}{2}$ sein kann.

Es ist also

$$u_0 = \pi \rho$$

und, nach den Formeln (37), (35) und (39)

$$u = u_0 \pm i \pi \left\{ 1 - \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\rho}{n_1} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

Ist $\rho = 0$, so wird ψ_0 und u_0 ebenfalls gleich 0 und $I'(u) = 1$.

Nach der Formel (40) wird für alle übrigen u $I'(u) = 0$.

Wir erhalten somit in der Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohrs nur einen einzigen hellen Streifen, da alle benachbarten gänzlich verschwinden.

Sei jetzt $\rho = \pm \frac{1}{2}$.

Dann wird

$$u_0 = \pm \frac{\pi}{2}$$

und

$$I(u_0) = 0,4053.$$

Die Intensität des mittleren Streifens wird also um mehr als die Hälfte geschwächt.

Was nun die übrigen Streifen anbelangt, so ergibt sich bei den früher angegebenen Zahlenwerthen für die grüne Quecksilberlinie

$$\text{für } \rho = +\frac{1}{2} \quad u = \frac{\pi}{2} \pm i\pi \{1 - 0,0081\}$$

$$\text{» } \rho = -\frac{1}{2} \quad u = -\frac{\pi}{2} \pm i\pi \{1 + 0,0081\}.$$

Wir sehen also, dass diese Werthe von u für verschiedene Werthe von i ungefähr den secundären Maximen der Function $I'(u)$ entsprechen, mit Ausnahme von $u = \pm \frac{\pi}{2}$ (annähernd), wo kein Maximum vorhanden ist, aber $I'(u)$ noch einen verhältnissmässig beträchtlichen Werth besitzt.

In diesem Fall sind also auch die benachbarten Streifen sichtbar, aber ihre Intensität nimmt im Allgemeinen mit wachsender Ordnungszahl i rasch ab. Alle übrigen Fälle, bei welchen der absolute Werth von ρ zwischen 0 und $\pm \frac{1}{2}$ liegt, lagern sich zwischen diesen zwei Grenzfällen.

Was nun das Dispersionsvermögen des Echelons anbelangt, so lässt sich dasselbe mit Leichtigkeit aus der Formel (34) berechnen.

Wir brauchen nur den Differentialquotienten $\frac{d\psi}{d\lambda}$ zu bilden.

Dividirt man den Ausdruck (34) durch n_2 , so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen (29) und (26),

$$\psi = \frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta - \frac{m}{t} \lambda}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta + \sin \theta}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist unabhängig von λ , somit ergibt sich

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{\mu \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{m}{t}}{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta + \sin \theta},$$

oder, wegen der Kleinheit von θ , mit ganz ausreichender Genauigkeit,

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{1}{r} \left[n_2 \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{m}{\lambda} \right] \dots \dots \dots (41)$$

Dieser Ausdruck entspricht der Änderung von ψ für 1 Ä. E.

Bei der hohen Dispersion des Echelons ist es zweckmässiger, die Änderung von ψ für 0,01 Ä. E. zu bestimmen. Bezeichnen wir den entsprechenden Werth durch $\delta\psi$, so ergibt sich sofort

$$\delta\psi = \frac{0,01}{r} \left[n_2 \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{m}{\lambda} \right], \dots \dots \dots (42)$$

oder mit hinreichender Genauigkeit für den mittleren Streifen, wenn man m durch $n_2(\mu - 1)$ ersetzt,

$$\delta\psi = \frac{0,01}{r} n_2 \left[\frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{\mu - 1}{\lambda} \right]$$

oder noch

$$\delta\psi = 0,01 \frac{t}{r} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\mu - 1}{\lambda} \right).$$

Die zweite und sogar die bequemste Methode zur Benutzung des Stufenspectroscops besteht darin, zwei benachbarte Streifen in der Nähe der optischen Axe des Fernrohrs auf gleiche Helligkeit zu bringen. Das zu erforschende Spectralgebiet beschränkt sich dann auf das Intervall zwischen diesen zwei hellen Streifen.

Die diesen beiden Streifen entsprechenden Diffractionswinkel seien ψ und ψ' .

Nach der Formel (27) werden die entsprechenden u folgende sein:

$$u = \pi n_1 \psi \cos \theta$$

$$u' = \pi n_1 \psi' \cos \theta.$$

Fordert man, dass beide Streifen gleich hell werden sollen, so muss nach der Formel (19)

$$u = -u',$$

somit

$$\psi = -\psi' \dots \dots \dots (43)$$

sein.

Ist z. B. ψ positiv, so wird ψ' negativ sein.

Dann folgt aus der Formel (34)

$$\psi' = \frac{n_2 \{ \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta \} - (m + 1)}{r} = \psi - \frac{1}{r}.$$

Nach der Bedingung (43) ergibt sich

$$\psi = \frac{1}{2r}, \dots\dots\dots(44)$$

wobei die Entfernung $\Delta\psi$ beider Streifen ebenfalls gleich $\frac{1}{r}$ wird.

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \dots\dots\dots(45)$$

Die Streifen liegen also symmetrisch in Bezug auf die optische Axe des Fernrohrs.

Es fragt sich nun, für welche Werthe von θ dieser Fall eintritt.

Setzen wir somit in der Gleichung (34) $\psi = \frac{1}{2r}$, so folgt

$$\sqrt{\mu^2 - \text{Sin}^2 \theta} - \text{Cos } \theta = \frac{m}{n_2} + \frac{1}{2n_2}.$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$p = \frac{2m+1}{2n_2}, \dots\dots\dots(46)$$

so bekommt man

$$\sqrt{\mu^2 - \text{Sin}^2 \theta} = p + \text{Cos } \theta.$$

Daraus findet man mit Leichtigkeit

$$\text{Cos } \theta = \frac{\mu^2 - 1 - p^2}{2p} \dots\dots\dots(47)$$

Setzt man für m der Reihe nach benachbarte ganze Zahlen ein, so erhält man die verschiedenen Werthe von θ .

Die Formel (47) lehrt uns ausserdem, dass die mittleren Streifen gleich intensiv werden, nicht nur für positive, sondern auch für gleiche negative Werthe von θ , aber die Entfernungen beider Streifen werden in beiden Fällen total verschieden. Die Formeln (45) und (29) zeigen uns weiter, dass beim Zunehmen des absoluten Werthes von θ $\Delta\psi$ für positive Werthe von θ sich verkleinert und für negative sich vergrössert¹⁾.

θ ist immer sehr klein, folglich eignet sich die Formel (47) sehr schlecht zur Berechnung dieser Grösse.

Esetzen wir $\text{Cos } \theta$ durch $1 - \frac{\theta^2}{2}$, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\theta = \sqrt{\frac{(p+1)^2 - \mu^2}{p}}.$$

Mit wachsendem p , d. h. mit wachsendem m , wächst auch θ .

1) n_2 ist etwa 10 Mal grösser als n_1 und θ immer sehr klein.

Der kleinste Werth von θ entspricht derjenigen ganzen Zahl m , welche am nächsten zu $n_2(\mu-1)$ liegt.

Setzen wir, wie früher,

$$n_2(\mu-1) - m = \rho,$$

wo ρ positiv oder negativ, aber nie grösser als $\frac{1}{2}$, sein kann, und bezeichnen wir die Ordnungszahl der entsprechenden Werthe von θ durch i , so wird

$$\theta_i = \sqrt{\frac{(p_i+1)^2 - \mu^2}{p_i}},$$

wo nach der Formel (46)

$$p_i = \frac{2im + (i-1)! + 1}{2n_2} = (\mu-1) + \frac{1-2\rho}{2n_2} + \frac{i-1}{n_2}.$$

Daraus ergibt sich, bei Vernachlässigung äusserst kleiner Grössen von der Ordnung $(\frac{1}{n_2})^2$,

$$\theta_i = \sqrt{\frac{2\mu}{\mu-1} \left\{ \frac{1-2\rho}{2n_2} + \frac{i-1}{n_2} \right\}} \dots\dots\dots(48)$$

Nach dieser Formel könnten eventuell die Werthe von θ_i für verschiedene Werthe von i sich berechnen lassen.

Für $i = 1$ wird

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{\mu-1} \left\{ \frac{1-2\rho}{2n_2} \right\}}, \dots\dots\dots(49)$$

also

$$\theta_i = \sqrt{\theta_1^2 + \frac{2\mu}{\mu-1} \cdot \frac{i-1}{n_2}} \dots\dots\dots(50)$$

Von dieser letzten Formel werden wir später Gebrauch machen.

Diese Formeln lehren uns auch, dass die Werthe von θ_i sehr klein sind.

Wollen wir nun noch die Intensität der Haupt- und Nebenstreifen betrachten.

Für alle Streifen wird $\phi(v) = 1$, folglich hängt die Intensität derselben vom Factor $F(u) = \left(\frac{\text{Sin } u}{u}\right)^2$ ab.

Für den einen der beiden Hauptstreifen haben wir, wenn $\text{Cos } \theta_i = 1$ gesetzt wird,

$$u_i = \pi n_1 \psi_i = \pi n_1 \frac{1}{2r_i},$$

oder, mit derselben Genauigkeit,

$$u_i = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1} \theta_i} \dots\dots\dots(51)$$

und für den j^{ten} Streifen

$$u_{j,i} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1} \theta_i} \pm j \frac{\pi}{1 + \frac{n_2}{n_1} \theta_i} \dots \dots \dots (52)$$

θ_i ist immer sehr klein.

Für die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5460,947$) war z. B. bei den photographischen Beobachtungen für $i = 1$ θ_i nur gleich $0^\circ 35,2$ und für $i = 5$ $\theta_i = 2^\circ 3,7$.

Daraus ergibt sich bei Zugrundelegung der früher angegebenen Zahlenwerthe für n_1 und n_2 :

$$i = 1 \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1} \theta_1} = 0,9037 & F(u_i) = 0,4850 \\ \frac{1}{1 - \frac{n_2}{n_1} \theta_1} = 1,1193 & F(u_{-i}) = 0,3123 \end{cases}$$

$$i = 5 \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1} \theta_5} = 0,7275 & F(u_i) = 0,6338 \\ \frac{1}{1 - \frac{n_2}{n_1} \theta_5} = 1,5987 & F(u_{-i}) = 0,0551 \end{cases}$$

Wäre $\theta_1 = 0$, so würde $u_1 = \frac{\pi}{2}$ und $F(u_1) = 0,4053$ sein, und die Nebestreifen würden sich in der Nähe der secundären Maxima der Function $F(u)$ befinden (mit Ausnahme für $u_{j,i} = -\frac{\pi}{2}$).

Wenn der absolute Werth von θ_i wächst, so vermehrt sich die Intensität der beiden Hauptstreifen, falls θ_i positiv ist, und vermindert sich, falls θ_i negativ ist, d. h. je kleiner die Entfernung der beiden Hauptstreifen ist, desto grösser wird auch ihre Intensität. Die Formel (52) lehrt uns noch, dass auch die Nebestreifen im Gesichtsfelde vorhanden sein werden, aber ihre Intensität wird im Allgemeinen sehr schwach.

Wir haben gesehen, dass die Entfernung zweier Hauptstreifen

$$\Delta\psi_i = \frac{1}{r_i} \dots \dots \dots (53)$$

ist.

Es fragt sich nun, welcher Aenderung $\Delta\lambda$ im Werthe der Wellenlänge λ eine solche Entfernung entsprechen würde.

Dazu braucht man nur in der Formel (41) $d\psi$ durch $\Delta\psi_i$ und $d\lambda$ durch $\Delta\lambda$ zu ersetzen.

Es folgt

$$\Delta\lambda = \frac{1}{n_2 \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{m}{\lambda}} \dots \dots \dots (54)$$

Da m eine sehr grosse Zahl ist, so behält $\Delta\lambda$ praktisch seinen Werth für verschiedene Ordnungszahlen i .

Das Dispersionsvermögen des Echelons wird auch in diesem Falle durch die Formel (42) gegeben.

Diese Formel lässt sich offenbar auch so schreiben:

$$\delta\psi_i = 0,01 \frac{\Delta\psi_i}{\Delta\lambda} \dots \dots \dots (55)$$

$\delta\psi_i$ ist die Aenderung des Winkels ψ_i für 0,01 Ä. E.

$\Delta\lambda$ ändert sich praktisch nicht mit i , während $\Delta\psi_i$ mit wachsendem i für negative Werthe von θ_i wächst.

Folglich lohnt es sich bei Benutzung des Stufenspectroscops, die Beobachtungen bei negativen Werthen von θ_i anzustellen, um eine grössere Dispersion zu erzielen, und die Ordnung i des entsprechenden Spectrums so hoch wie möglich zu wählen, soweit es die Intensität der beiden Hauptstreifen gestattet.

$\Delta\lambda$ ist beim Stufenspectroscop immer sehr klein. Bei meinem Instrument war z. B. für die grüne Quecksilberlinie

$$\Delta\lambda = -0,477 \text{ Ä. E.}$$

$\Delta\lambda$ ist immer negativ, d. h. die kleineren Wellenlängen befinden sich immer rechts vom directen einfallenden Strahlenbündel.

Wir sehen auch, dass in diesem Fall $\Delta\lambda$ kleiner als die Hälfte einer Ängströmschen Einheit ist. Das Spectralgebiet, welches das Stufenspectroscop in zweckentsprechender Weise mit einem Mal zu studieren gestattet, ist also äusserst beschränkt und bezieht sich nur auf die unmittelbare Umgebung der ausgewählten Hauptlinie des betreffenden Spectrums. Aber wegen seines sehr hohen Dispersionsvermögens eignet sich der Apparat besonders gut zum Studium etwaiger Veränderungen im Aussehen einzelner Spectrallinien, wie Verbreiterungen, Verdoppelungen u. s. w.

Die allgemeine, hier entwickelte Theorie des Stufenspectroscops wurde nun einer experimentellen Prüfung unterzogen.

Diese Prüfung bezog sich auf einen Vergleich der berechneten und beobachteten Werthe von θ_i , $\Delta\psi_i$ und $\delta\psi_i$ für verschiedene Werthe von i und zwar für zwei Hauptlinien des Quecksilberdampfspectrums, nämlich

für die grüne ($\lambda = 5460,947$) und für eine der gelben ($\lambda = 5790,917$), die beide Begleiter besitzen.

Die entsprechenden Versuche und Zahlenangaben sind nun in folgenden Paragraphen mitgetheilt.

§ 3.

VERSUCHE MIT DEM STUFENSPECTROSCOP.

Die Wellenlängen der zwei ausgewählten Quecksilberlinien, sowie auch diejenigen ihrer Hauptbegleiter wurden mit Hilfe eines grossen Rowland'schen Diffractionsgitters ermittelt. Die Versuchsanordnung für diese Beobachtungen ist in meiner in Gemeinschaft mit meinem Assistenten Herrn Wilip, der auch bei diesen Versuchen mir sehr behilflich war, ausgeführten Arbeit «Spektroskopische Untersuchungen»¹⁾ ausführlich beschrieben. Nur waren die photographischen Aufnahmen, nicht etwa wie dort, im Spectrum zweiter Ordnung, sondern, um die Begleiter der Linien schärfer auftreten zu lassen, im Spectrum dritter Ordnung gemacht.

Als Vergleichsstandards dienten die Eisennormalen nach Rowland. Die Ausmessung der Platten geschah mit Hilfe eines Mikroskops mit beweglichem Tisch. Der Schraubengang dieses Tisches betrug $\frac{1}{4}$ mm.; ausserdem war die zugehörige Trommel in 100 Theile getheilt.

Die gesuchten Wellenlängen der Quecksilberlinien wurden nach mehreren Eisennormalen bestimmt und aus den erhaltenen Werthen das Mittel genommen.

Als Beispiel dafür werde ich die Zahlenangaben für die grüne Quecksilberlinie anführen.

Eisennormalen nach Rowland. λ der grünen Quecksilberlinie.

5405,989 Ä. E.	5460,949 Ä. E.
5424,290	5460,962
5429,911	5460,943
5434,740	5460,938
5447,130	5460,939
5455,834	5460,948
5497,735	5460,957
5507,000	5460,941

Mittelwerth 5460,947 Mittl. Fehler $\epsilon_\lambda = \pm 0,009$.

1) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. T. XVII (1905).

Auf diese Weise ergaben sich folgende definitive Zahlenwerthe:

Grüne Quecksilberlinie.

Hauptlinie.	Hauptbegleiter.	
$\lambda = 5460,947$ Ä. E.	$\lambda' = 5460,734$ Ä. E.	$\delta\lambda' = \lambda' - \lambda = -0,213$ Ä. E.

Gelbe Quecksilberlinie.

Hauptlinie.	Begleiter.	
$\lambda = 5790,917$ Ä. E.	$\lambda' = 5790,816$ Ä. E.	$\delta\lambda' = \lambda' - \lambda = -0,101$ Ä. E.
	$\lambda'' = 5791,051$ » »	$\delta\lambda'' = \lambda'' - \lambda = +0,134$ » »
	$\lambda''' = 5791,129$ » »	$\delta\lambda''' = \lambda''' - \lambda = +0,212$ » »

Diese Werthe von $\delta\lambda$ sind überhaupt sehr klein, und es ist äusserst schwer sie mit einem Diffractionsgitter sehr genau zu bestimmen. Bezugnehmend auf den mittleren Fehler von λ für die grüne Quecksilberlinie, ist es wohl anzunehmen, dass einige von diesen Werthen von $\delta\lambda$ etwa 10% falsch sein können. Dieser Umstand darf beim Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie nicht ausser Acht gelassen werden.

Die mittlere Breite s und Höhe t der Echelonstufen wurde mit Hilfe eines Kathetometers bestimmt und aus den erhaltenen Zahlen das Mittel genommen.

Auf diese Weise ergab sich

$$s = 0,959 \text{ mm.}$$

$$t = 9,981 \text{ mm.}$$

Auf Grund der Formeln (26) folgt weiter:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für die grüne Linie} \\ \text{für die gelbe Linie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} n_1 = 1756,1 \\ n_2 = 18277 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} n_1 = 1656,1 \\ n_2 = 17236 \end{array} \right\} \end{array} \frac{n_2}{n_1} = 10,408.$$

Was nun den Brechungsindex μ des Echelonglases anbelangt, so habe ich denselben auf Grund der Zahlenangaben berechnet, welche sich in der von Hilger in London veröffentlichten kleinen Notiz über das Stufenspectroscop befinden.

Es findet sich dort für einige Fraunhofer'sche Linien

$$\mu_c = 1,5706$$

$$\mu_D = 1,5746$$

$$\mu_F = 1,5845.$$

Die entsprechenden Wellenlängen sind:

$$\lambda_c = 6563 \text{ \AA. E.}$$

$$\lambda_D = 5893 \text{ » »}$$

$$\lambda_F = 4861 \text{ » »}$$

Es handelt sich nun darum, μ und $\frac{d\mu}{d\lambda}$ für die grüne ($\lambda=5460,9$) und für die gelbe ($\lambda=5790,9$) Quecksilberlinie zu berechnen.

Dazu muss man sich einer Dispersionsformel bedienen.

Nach Ketteler ist

$$\mu^2 = a - k\lambda + \frac{b}{\lambda^2} \dots\dots\dots(\text{Ketteler})$$

und nach Cauchy

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \dots\dots\dots(\text{Cauchy})$$

a, k, b, A, B und C sind gewisse Constanten, die sich auf Grund der Daten für die drei erwähnten Fraunhofer'shen Linien berechnen lassen. Sind diese Constanten einmal bestimmt, so lassen sich μ und $\frac{d\mu}{d\lambda}$ leicht nach diesen Formeln für die beiden gegebenen Quecksilberlinien berechnen.

Ich habe bei dieser Berechnung die Cauchy'sche Formel zu Grunde gelegt und fand auf diese Weise:

	μ	$\frac{d\mu}{d\lambda}$
Grüne Linie	1,5781	— 0,058951
Gelbe Linie	1,5754	— 0,057447.

Von diesen Zahlen werden wir später Gebrauch machen.

Sind nun die Werthe von n_2 und μ für beide Linien bekannt, so lässt sich der Werth $n_2(\mu-1)$ bestimmen. Es ergab sich:

für die grüne Linie	$n_2(\mu-1) = 10566,0$;	also $m = 10566$
» » gelbe Linie	$n_2(\mu-1) = 9917,8$;	» $m = 9918.$

Die Beobachtungen mit dem Stufenspectroscop selber wurden auf zweierlei Art durchgeführt. Erstens, nach Einstellung des Stufenspectroscops auf eine der beiden Quecksilberlinien, wurde die Entfernung Δl der beiden auf

gleiche Helligkeit eingestellten Hauptstreifen und zwar für verschiedene Ordnungszahlen i direct mit dem Ocularmikrometer des Fernrohrs gemessen, so wie auch die Entfernung Δl der einzelnen Begleiter von der entsprechenden Hauptlinie. Zweitens wurden die Linien direct photographiert und alsdann die erhaltenen photographischen Platten ausgemessen.

In beiden Fällen wurden die entsprechenden Drehungswinkel θ_i des Echelons auf folgende Weise ermittelt.

Man stellte zuerst das Echelon annähernd senkrecht zum einfallenden Strahlenbündel von der entsprechenden Quecksilberlinie und drehte alsdann dasselbe nach beiden Richtungen, bis der Hauptstreifen in der Mitte des Gesichtsfeldes seine minimale Ablenkung aufwies. Der entsprechende Winkel sei θ_m , wo θ_m nach der Formel (35) sehr klein wird. Dieser Winkel θ_m wurde nicht direct bestimmt. In dieser ersten Hauptlage des Echelons wurde auch die Entfernung der Begleiter von der Hauptlinie gemessen.

Alsdann drehte man das Echelon so weit, bis beide Hauptlinien in der Mitte des Gesichtsfeldes gleich intensiv ausfielen. Je nach der Richtung, in welcher das Echelon gedreht wird, wird θ_i positiv oder negativ sein. Die negativen Werthe von θ_i wollen wir mit θ_{-i} bezeichnen, d. h. der Ordnungszahl das negative Vorzeichen beigegeben.

Um den entsprechenden Drehungswinkel des Echelons zu bestimmen, wurde folgendes Verfahren angewandt.

Man befestigte am Echelon in der unmittelbaren Nähe seiner Drehungsaxe einen kleinen Spiegel und maass den Drehungswinkel θ'_i des Echelons mit Hilfe von Fernrohr und Scala nach der gewöhnlichen Methode. Bei den visuellen Beobachtungen betrug die Entfernung der Scala vom Spiegel $D = 1695,5 \text{ m/m}$ und bei den photographischen $1694,5 \text{ m/m}$.

Bedeutet $L_i - L_0$ die Differenz der Ablesungen an der Scala, so lässt sich der entsprechende Drehungswinkel θ'_i nach folgender Formel berechnen:

$$\text{tg } 2\theta'_i = \frac{L_i - L_0}{D} \dots\dots\dots (56)$$

θ'_i ist nicht eigentlich der Winkel, welchen die Echelonnormale mit dem einfallenden Strahlenbündel bildet, sondern es wird, wenn unter $\theta'_i, \theta'_{-i}, \theta_i$ und θ_{-i} immer der absolute Werth des entsprechenden Winkels verstanden wird,

$$\theta'_i = \theta_i - \theta_m$$

$$\theta'_{-i} = \theta_{-i} + \theta_m.$$

Nach der Theorie ist $\theta_i = \theta_{-i}$; daraus folgt

$$\theta_i = \frac{1}{2} \{ \theta_i' + \theta_{-i}' \} \dots \dots \dots (57)$$

$$\theta_m = \frac{1}{2} \{ \theta_{-i}' - \theta_i' \} \dots \dots \dots (58)$$

Sind nun θ_i' und θ_{-i}' aus den Beobachtungen bekannt, so lassen sich aus diesen Formeln die entsprechenden Werthe von θ_i und θ_m berechnen.

Bei den visuellen Beobachtungen wurden alle Ausmessungen zweimal ganz unabhängig von einander vorgenommen.

Es ergaben sich nun folgende Werthe.

Grüne Linie.

Erste Beobachtungsreihe.

<i>i</i>	θ_{-i}'	θ_i'	θ_i	θ_m
1	0°30',4	0°30',0	0°30',2	+ 0',2
2	1 7,3	1 8,8	1 8,0	— 0,8
3	1 29,4	1 30,2	1 29,8	— 0,4
4	1 48,1	1 45,3	1 46,7	+ 1,4
Im Mittel				+ 0',1

Zweite Beobachtungsreihe.

<i>i</i>	θ_{-i}'	θ_i'	θ_i	θ_m
1	0°33',6	0°33',2	0°33',4	+ 0',2
2	1 8,4	1 7,1	1 7,7	+ 0,7
3	1 31,2	1 30,0	1 30,6	+ 0,6
4	1 48,4	1 47,2	1 47,8	+ 0,6
Im Mittel				+ 0',5

Gelbe Linie.

Erste Beobachtungsreihe.

<i>i</i>	θ_{-i}'	θ_i'	θ_i	θ_m
1	0°42',9	0°43',7	0°43',3	— 0',4
2	1 14,2	1 14,8	1 14,5	— 0,3
3	1 37,3	1 36,3	1 36,8	+ 0,5
4	1 55,4	1 53,6	1 54,5	+ 0,9
Im Mittel				+ 0',2

Zweite Beobachtungsreihe.

<i>i</i>	θ_{-i}'	θ_i'	θ_i	θ_m
1	0°38',5	0°35',8	0°37',1	+ 1',4
2	1 12,0	1 11,1	0 11,6	+ 0,5
3	1 34,9	1 35,4	1 35,1	— 0,3
4	1 52,4	1 53,6	1 53,0	— 0,6
Im Mittel				+ 0',3

Nimmt man das Mittel aus den Zahlenwerthen beider Beobachtungsreihen, so erhält man folgende definitive Werthe für θ_i und θ_m , die in den folgenden zwei Tabellen zusammengestellt sind.

Tabelle I.

Grüne Quecksilberlinie.

$\lambda = 5460,947.$

<i>i</i>	θ_i	θ_m
1	0°31',8	+ 0',3
2	1 7,9	
3	1 30,2	
4	1 47,3	

Tabelle II.

Gelbe Quecksilberlinie.

$\lambda = 5790,917.$

<i>i</i>	θ_i	θ_m
1	0°40',2	+ 0',2
2	1 13,0	
3	1 36,0	
4	1 53,7	

Wir sehen, dass die Werthe von θ_i in beiden Beobachtungsreihen zuweilen Differenzen von einigen Minuten aufweisen.

Diese Differenzen können nicht auf eine Ungenauigkeit der Beobachtungen mit Fernrohr und Scala zurückgeführt werden, da der entsprechende Werth von θ_i' nach der Formel (56) nur etwa um 1' falsch sein könnte, wenn man im Werth von $L_i - L_0$ selbst einen Fehler von $1 \frac{m}{m}$ annehmen würde, was kaum zulässig ist.

Die nicht vollständige Uebereinstimmung der einzelnen Werthe von θ_i in beiden Beobachtungsreihen ist auf andere Ursachen zurückzuführen.

Erstens ist es nicht ganz leicht, zwei Streifen auf gleiche Helligkeit einzustellen, da die subjective Auffassung dabei eine ziemlich wesentliche Rolle spielt, daher können kleine Differenzen in den Werthen von θ_i zustande kommen. Zweitens, was auch viel wichtiger ist, übt eine kleine Temperaturdifferenz schon einen beträchtlichen Einfluss auf den Werth von θ_i aus.

Wir werden in der That später, bei Besprechung der Frage nach der Berechnung von θ_1 , sehen, dass eine Temperaturerhöhung des Echelons nur um 1°C. schon den Werth von θ_1 um 9' verändern kann. Es ist also wohl ganz denkbar, dass bei zwei nach einander folgenden Bestimmungen von θ_i , die durch ein gewisses Zeitintervall getrennt sind, Differenzen von einigen Minuten auftreten können.

Man würde geneigt sein zu befürchten, dass ein solcher grosser Einfluss der Temperatur die Beobachtungen mit dem Stufenspektroskop sehr erschweren würde. Glücklicherweise ist dies, wie wir später sehen werden, nicht immer der Fall, da z. B. eine Veränderung von θ_i eine ziemlich geringe Wirkung auf die Entfernung zweier Hauptstreifen und folglich auch auf das Dispersionsvermögen des Echelons hat.

Wenden wir uns jetzt der Bestimmung der Entfernung der Hauptstreifen und der der Begleiter von den Hauptlinien zu.

Diese Entfernungen Δl und δl wurden direct mit dem Ocularmicro-
meter des Fernrohrs bestimmt. Die Schraubenhöhe war ebenfalls, wie beim Mikroskop, $\frac{1}{4}$ mm. und die Trommel in 100 Theile getheilt.

Nun betrug die Entfernung des Objectivcentrums des Fernrohrs bis zu den Mikrometerfäden $F = 524,2$ mm. Sind also die gemessenen Entfernungen der Streifen Δl in Trommeltheilen gegeben, so muss man, um dieselben in Bogensekunden auszudrücken, Δl mit dem Factor $\frac{1}{400 \cdot F \cdot \sin 1''}$ multiplicieren.

Es ist also

$$\Delta \psi_i'' = 0,9837 \Delta l_i.$$

Jeder Trommeltheilstrich entspricht also ungefähr $1''$.

Das Dispersionsvermögen, bezogen auf 0,01 Ä. E., lässt sich, wie leicht einzusehen ist, nach folgender Formel berechnen:

$$\delta \psi_i'' = 0,01 \cdot 0,9837 \frac{\delta l_i}{\delta \lambda} \dots \dots \dots (59)$$

Hierin bedeutet $\delta \lambda$ die Differenz der Wellenlängen des Begleiters und der entsprechenden Hauptspectrallinie.

Bei der grünen Linie war die Ausmessung nur für einen Begleiter vorgenommen, während bei der gelben die Entfernungen dreier solcher Begleiter ausgemessen wurden. Die aus ihnen berechneten drei Werthe von $\delta \psi_i$ müssten freilich identisch ausfallen; es treten aber, wie wir gleich sehen werden, Differenzen auf, die wohl meistens auf die Ungenauigkeit der entsprechenden Werthe von $\delta \lambda$ zurückzuführen sind, worauf ich schon früher aufmerksam gemacht habe. Aus diesen drei Werthen von $\delta \psi_i$ wurde alsdann das Mittel genommen.

Alle Ausmessungen bei jeder der beiden bei den visuellen Beobachtungen ausgeführten Beobachtungsreihen wurden unabhängig von einander vorgenommen und alsdann das Gesamtmittel gebildet.

Die entsprechenden Zahlenangaben mögen nun weiter folgen.

Grüne Linie.

Tabelle III.

θ_i 1)	$\Delta \psi_i$		
	I Beobachtungsreihe.	II Beobachtungsreihe.	Mittel.
θ_{-1}	0° 2' 5''	0° 2' 8''	0° 2' 6''
θ_{-2}	2 23	2 25	2 24
θ_{-3}	2 36	2 39	2 38
θ_{-4}	2 50	2 50	2 50
θ_1	1 46	1 46	1 46
θ_2	1 35	1 36	1 35
θ_3	1 32	1 32	1 32
θ_4	1 27	1 27	1 27

1) Die negativen Indices bei θ_i bedeuten, dass der entsprechende Winkel negativ ist.

Tabelle IV.

θ_i	$\delta\psi_i$		
	I Beobachtungsreihe.	II Beobachtungsreihe.	Mittel.
θ_m	-2",8	-2",8	-2",8
θ_{-1}	-2,7	-2,9	-2,8
θ_{-2}	-3,4	-3,4	-3,4
θ_{-3}	-3,9	-3,7	-3,8
θ_{-4}	-4,1	-4,0	-4,0
θ_1	-2,4	-2,5	-2,4
θ_2	-2,1	-2,3	-2,2
θ_3	-2,1	-2,2	-2,1
θ_4	-1,9	-2,1	-2,0

Die Zahlen in der ersten Zeile der vorigen Tabelle IV (und in der folgenden Tabelle VI) entsprechen dem Fall, wo der Hauptstreifen in der Mitte des Gesichtsfeldes auf das Minimum der Ablenkung ψ_m eingestellt ist. (Erste Beobachtungsmethode).

Gelbe Linie.

Tabelle V.

θ_i	$\Delta\psi_i$		
	I Beobachtungsreihe.	II Beobachtungsreihe.	Mittel.
θ_{-1}	0°2'17"	0°2'17"	0°2'17"
θ_{-2}	2 34	2 37	2 35
θ_{-3}	2 52	2 50	2 51
θ_{-4}	3 4	3 4	3 4
θ_1	1 46	1 52	1 49
θ_2	1 40	1 41	1 41
θ_3	1 34	1 36	1 35
θ_4	1 31	1 32	1 31

Tabelle VI.

θ_i	$\delta\psi_i$						Mittel.
	I Beobachtungsreihe.			II Beobachtungsreihe.			
	Nach $\delta\lambda'$	Nach $\delta\lambda''$	Nach $\delta\lambda'''$	Nach $\delta\lambda'$	Nach $\delta\lambda''$	Nach $\delta\lambda'''$	
θ_m	-3",4	-2",0	-2",2	-2",9	-2",2	-2",3	-2",5
θ_{-1}	-3,0	-2,4	—	-3,2	-2,4	-2,5	-2,7
θ_{-2}	-3,2	-2,7	—	-3,7	-2,7	-3,0	-3,1
θ_{-3}	-3,8	-3,2	-3,3	-3,8	-3,1	-3,2	-3,4
θ_{-4}	-4,0	-3,3	-3,7	-4,0	—	—	-3,7
θ_1	-2,4	-2,0	—	-2,7	-1,9	—	-2,3
θ_2	-2,3	-1,7	—	-2,4	-1,8	—	-2,1
θ_3	-2,1	-1,7	—	-2,2	—	—	-2,0
θ_4	-2,1	-1,7	-1,8	-2,0	—	—	-1,9

Für einige Werthe von $\delta\lambda''$ und $\delta\lambda'''$ fehlen die Zahlenangaben, da die Lagen der entsprechenden Begleiter sich schwer genau bestimmen lassen.

Wenden wir uns jetzt zu den photographischen Bestimmungen.

Die Einstellung des Echelons und die Bestimmung der Winkel θ_i geschah in ganz ähnlicher Weise, wie bei den visuellen Beobachtungen. Es wurde aber nur eine Beobachtungsreihe ausgeführt. Für negative Werthe von θ_i wurde noch eine Zusatzaufnahme gemacht für $i = 5$. Die Dauer der Expositionszeit betrug in diesem Fall für die grüne Linie 6 und für die gelbe Linie 20 Minuten¹⁾.

Eine Zeichnung der originellen photographischen Aufnahmen in etwa fünffacher Vergrößerung ist auf der Fig. 5 wiedergegeben.

Die Werthe der Winkel θ_i wurden ebenfalls aus den beobachteten Drehungswinkeln θ'_i und θ'_{-i} des Echelons nach der Formel (57) berechnet. Was aber den Werth von θ_5 betrifft, da für diese Ordnungszahl $i = 5$ nur eine Einstellung für negative Werthe von θ_i gemacht wurde, so liess sich θ_5 aus dem aus den übrigen vier Einstellungen ermittelten Werth von θ_m und dem direct beobachteten Werth θ'_{-5} nach der Formel

$$\theta_5 = \theta'_{-5} - \theta_m$$

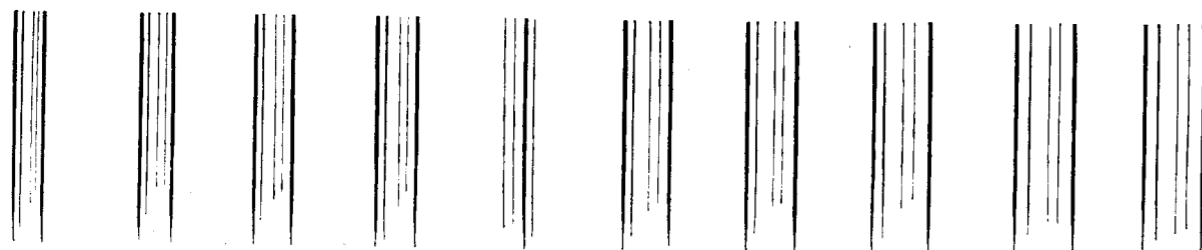
berechnen²⁾.

1) Für eine mit Homocol sensibilisierte «Ilford Process» Platte.

2) $\theta_5 = \theta_{-5}$.

Fig. 5.

Gelbe Linie.



Roth. ←

→ Violett.

Grüne Linie.

Die entsprechenden Zahlenwerthe sind in den folgenden Tabellen VII und VIII zusammengestellt.

Grüne Linie.

Tabelle VII.

i	θ'_{-i}	θ'_i	θ_i	θ_m
1	0°35,7	0°34,7	0°35,2	+0,5
2	1 10,2	1 8,6	1 9,4	+0,8
3	1 32,1	1 30,2	1 31,2	+1,0
4	1 49,2	1 48,2	1 48,7	+0,5
5	2 4,4	—	2 3,7	—
Im Mittel				+0,7

Gelbe Linie.

Tabelle VIII.

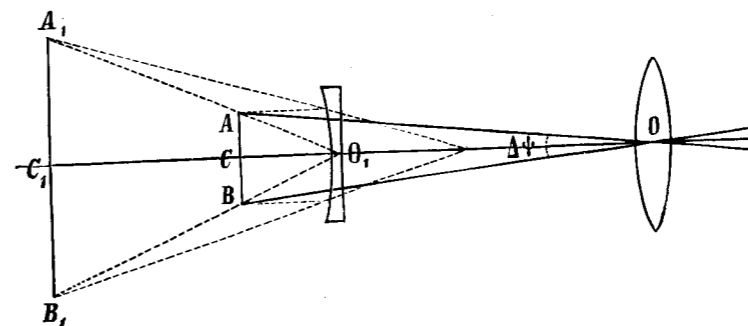
i	θ'_{-i}	θ'_i	θ_i	θ_m
1	0°43,7	0°43,4	0°43,6	+0,2
2	1 14,6	1 14,4	1 14,5	+0,1
3	1 36,5	1 36,4	1 36,4	0
4	1 55,6	1 53,9	1 54,8	+0,9
5	2 10,3	—	2 10,0	—
Im Mittel				+0,3

Für die photographischen Aufnahmen wurde an Stelle des Fernrohr-oculars mit dem Ocularmicrometer ein besonderer Tubus mit einer plan-concaven Linse und besonderen Cassette zur Aufnahme der photographischen Platten eingesetzt.

Die Focaldistanz f dieser kleinen Zusatzlinse wurde durch besondere Versuche ermittelt und im Mittel gleich 118,1 mm. gefunden¹⁾.

Mittelst dieser Vorrichtung ergaben sich die Bilder der Linien auf der photographischen Platte im vergrößerten Maassstabe. Das Vergrößerungsverhältniss h lässt sich in folgender Weise bestimmen. (Siehe die Fig. 6).

Fig. 6.



Wäre die Zusatzlinse nicht vorhanden, so würden sich die Bilder der beiden Hauptstreifen in A und B befinden, wo $OC = F$, wie früher, gleich 524,2 mm. würde.

1) f ist eigentlich negativ. Die Dicke der Linse in ihrem engsten Theil betrug nur 3,9 mm.

Durch Einführung dieses neuen optischen Systems verlegen sich diese Bilder nach A_1 und B_1 , wo sich die photographische Platte befindet, wobei das Vergrößerungsverhältniss

$$h = \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{O_1 C_1}{O_1 C}$$

wird.

Die Entfernungen $O_1 C_1$ und OO_1 wurden durch directe Messungen gewonnen und können respect. gleich 220,6 mm. und 450,6 mm. gesetzt werden.

Es ergibt sich also

$$O_1 C = F - OO_1 = 524,2 - 450,6 = 73,6 \text{ mm.}$$

und das Vergrößerungsverhältniss wird

$$h = \frac{220,6}{73,6} = 2,997,$$

oder rund gleich 3.

Nun ist

$$A_1 B_1 = h \cdot AB = h \cdot F \cdot \Delta\psi.$$

Die Entfernungen Δl_i der Streifen auf der photographischen Platte wurden in Trommeltheilen des Mikroskops bestimmt. Da aber ein Trommeltheil desselben $\frac{1}{400}$ mm. entspricht, so wird

$$A_1 B_1 = \frac{\Delta l_i}{400}$$

und

$$\Delta\psi_i'' = \frac{\Delta l_i}{h \cdot F \cdot 400 \sin 1''}$$

sein, oder

$$\Delta\psi_i'' = \frac{1}{h} \cdot 0,9837 \Delta l_i = 0,3282 \Delta l_i.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\delta\psi_i'' = 0,01 \cdot 0,3282 \frac{\delta l_i}{\delta \lambda}.$$

Die nach diesen Formeln berechneten Werthe von $\Delta\psi_i$ und $\delta\psi_i$ sind nun in den folgenden Tabellen IX und X zusammengestellt.

Grüne Linie.

$$\lambda = 5460,947.$$

Tabelle IX.

θ_i	$\Delta\psi_i$	$\delta\psi$
θ_m	—	—2,7
θ_{-1}	2' 9"	—3,0
θ_{-2}	2 27	—3,4
θ_{-3}	2 40	—3,7
θ_{-4}	2 52	—4,0
θ_{-5}	3 4	—4,3
θ_1	1 45	—2,5
θ_2	1 37	—2,3
θ_3	1 32	—2,1
θ_4	1 29	—2,1

Gelbe Linie.

$$\lambda = 5790,917.$$

Tabelle X.

θ_i	$\Delta\psi_i$	$\delta\psi_i$			
		Nach $\delta\lambda'$	Nach $\delta\lambda''$	Nach $\delta\lambda'''$	Mittel
θ_m	—	—2,8	—2,3	—2,5	—2,5
θ_{-1}	2' 21"	—3,1	—2,6	—2,8	—2,8
θ_{-2}	2 38	—3,5	—2,9	—3,2	—3,2
θ_{-3}	2 53	—3,8	—3,2	—3,4	—3,5
θ_{-4}	3 8	—4,1	—3,4	—3,7	—3,7
θ_{-5}	3 21	—4,4	—3,7	—4,0	—4,0
θ_1	1 49	—2,4	—2,0	—2,1	—2,2
θ_2	1 42	—2,2	—1,9	—2,0	—2,0
θ_3	1 36	—2,1	—1,8	—1,9	—1,9
θ_4	1 33	—2,0	—1,7	—1,8	—1,8

Nach Erhaltung aller Zahlendata wurde nun der Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung vorgenommen.

§ 4.

VERGLEICH ZWISCHEN THEORIE UND BEOBACHTUNG.

Zuerst wurden die berechneten und beobachteten Werthe von θ_1 mit einander verglichen.

Dieselben lassen sich aus den Formeln (50) und (49) berechnen.

Bei der Berechnung von θ_1 tritt aber eine erhebliche Schwierigkeit auf.

Fangen wir mit der grünen Linie an.

Wir haben gesehen, dass für dieselbe $n_2 (\mu - 1) = 10566,0$ wird; es ist also $\rho = 0$.

Daraus ergibt sich nach der Gleichung (49)

$$\theta_1 = 0^\circ 42' 0.$$

Die direct beobachteten Werthe waren:

bei den visuellen Bestimmungen $\theta_1 = 0^\circ 31' 8$

» » photographischen Bestimmungen $\theta_1 = 0^\circ 35' 2$.

Wir sehen, dass die berechneten und beobachteten Werthe von θ_1 , so wie diese letzteren untereinander, ganz bedeutende Differenzen aufweisen.

Dies kann auch nicht anders sein, wie wir es gleich sehen werden.

Um θ_1 überhaupt genügend genau bestimmen zu können, muss ρ , folglich $n_2 (\mu - 1)$, sehr genau bekannt werden.

Es ist nun

$$\rho = n_2 (\mu - 1) - m.$$

Setzen wir diesen Werth in die Formel (49) ein, so folgt

$$\theta_1^2 = \frac{2\mu}{\mu - 1} \left\{ \frac{1 + 2m}{2n_2} - (\mu - 1) \right\},$$

oder mit hinreichender Genauigkeit, da m eine sehr grosse ganze Zahl ist,

$$\theta_1^2 = 2 \left[\frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{m}{n_2} - \mu \right].$$

Wollen wir nun sehen, welchen Einfluss ein kleiner Fehler in den Werthen von μ und n_2 ($\delta\mu$ und δn_2) auf den entsprechenden Werth von θ_1 ausübt.

Wir erhalten ohne Weiteres

$$\delta\theta_1 = -\frac{1}{\theta_1} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{(\mu - 1)^2} \cdot \frac{m}{n_2} \right\} \delta\mu + \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{m}{n_2^2} \delta n_2 \right],$$

oder, da $n_2 (\mu - 1)$ sich recht wenig von m unterscheidet,

$$\delta\theta_1 = -\frac{1}{\theta_1} \left[\frac{\mu}{\mu - 1} \delta\mu + \frac{\mu}{n_2} \delta n_2 \right] \dots \dots \dots (60)$$

Setzen wir $\theta_1 = 0^\circ 31' 8$, so ergibt sich, wenn an Stelle von μ und n_2 die früher angegebenen Werthe für die grüne Linie eingesetzt werden und θ_1 in Bogenminuten ausgedrückt sein soll,

$$\delta\theta_1' = -1014500 \delta\mu - 32,088 \delta n_2;$$

da aber nach der zweiten der Formeln (26)

$$\delta n_2 = \frac{\delta t}{\lambda}$$

ist, so wird

$$\delta\theta_1' = -1014500 \cdot \delta\mu - 58759 \cdot \delta t \dots \dots \dots (61)$$

Wir sehen also, wie grosse Zahlenfactore bei $\delta\mu$ und δt auftreten.

Diese Formel lässt sofort erkennen, wie genau eigentlich μ und t bekannt sein müssen, um einen zuverlässigen Werth von θ_1 überhaupt berechnen zu können.

Wäre $\delta\mu$ nur 0,00001, so würde $\delta\theta_1'$ schon etwa 10' ausmachen. Beträgt der Fehler δt in der Bestimmung der Höhe t der Stufen des Echelons etwa 0,0001 $\frac{m}{m}$, so verändert das den Werth von θ_1 fast um 6'.

Aus der Formel (61) lässt sich auch sofort erkennen, dass eine kleine Temperaturänderung des Echelons sehr den Werth von θ_1 beeinflussen wird.

Nehmen wir den Ausdehnungscoefficienten des Glases $\alpha = 0,000085$ an, so wird für 1° C.

$$\delta t = \alpha t = 0,000085 \frac{m}{m}$$

und

$$\delta n_2 = 0,155.$$

Was nun die Aenderung von μ mit der Temperatur für 1° C. anbelangt, so finden sich darüber in den Tabellen von Landolt und Börnstein für Flintglas folgende Zahlenangaben:

Für die Linie D	$\delta\mu = + 0,0323$
» » » $b_1 (\lambda = 5183)$	$\delta\mu = + 0,03443$.

1) Es ist hier vorausgesetzt, dass die Aenderungen von μ und n_2 so klein sind, dass m (als ganze Zahl) seinen Werth behält.

2) δt soll dabei in $\frac{m}{m}$ ausgedrückt werden.

Für die gegebene grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5461$) kann man also setzen

$$\delta\mu = 0,0,396.$$

Legt man nun diese Werthe von δt und $\delta\mu$ zu Grunde, so ergibt sich für einen Temperaturzuwachs von nur 1°C .

$$\delta\theta_1' = -9,0.$$

Wir sehen also, dass es überhaupt fast unmöglich ist, θ_1 auf Grund der gegebenen Werthe von μ und t genau zu bestimmen. Es ist auch verständlich, warum die Werthe von θ_1 für verschiedene nach einander folgende Beobachtungsreihen nicht identisch ausfallen.

Diese Ueberlegungen zeigen, dass der Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung betreffs der Werthe von θ_i in einer etwas anderen Weise vorgenommen werden soll. Da es unmöglich ist, θ_1 genau zu berechnen, so muss θ_1 aus den Beobachtungen selber entnommen und dann schon die übrigen Werthe von θ_i nach der Formel (50) berechnet werden.

In diesem Fall übt ein Fehler in den Werthen von μ und n_2 einen erheblich geringeren Einfluss aus.

Man findet nämlich ohne Schwierigkeit in ähnlicher Weise wie früher¹⁾

$$\delta\theta_i = -\frac{1}{\theta_i} \cdot \frac{i-1}{m} \left[\frac{\delta\mu}{\mu-1} + \mu \frac{\delta n_2}{n_2} \right] \dots \dots \dots (62)$$

Ein Vergleich mit der Formel (60) zeigt ganz deutlich, dass in diesem Fall der bei der Berechnung von θ_i begangene Fehler schon sehr klein wird (m ist sehr gross).

In den folgenden zwei Tabellen XI und XII sind nun die in dieser Weise berechneten und aus den Tabellen I, II, VII und VIII entnommenen, beobachteten Werthe von θ_i zusammengestellt.

Tabelle XI.
Visuelle Beobachtungen.

i	Grüne Linie.		Gelbe Linie.	
	θ_i		θ_i	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
1	—	0°31,8	—	0°40,2
2	1° 7,4	1 7,9	1°13,3	1 13,0
3	1 29,8	1 30,2	1 35,5	1 36,0
4	1 47,7	1 47,3	1 53,5	1 53,7

1) In diesem Falle ist $\delta\theta_1 = 0$ gesetzt.

Tabelle XII.
Photographische Beobachtungen.

i	Grüne Linie.		Gelbe Linie.	
	θ_i		θ_i	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
1	—	0°35,2	—	0°43,6
2	1° 9,1	1 9,4	1°15,2	1 14,5
3	1 31,1	1 31,2	1 37,0	1 36,4
4	1 48,8	1 48,7	1 54,7	1 54,8
5	2 3,9	2 3,7	2 10,1	2 10,0

Unter Berücksichtigung des möglichen Fehlers, welcher bei der experimentellen Bestimmung von θ_i begangen werden kann, ist die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als eine sehr befriedigende zu bezeichnen.

Wenden wir uns jetzt zu der Berechnung der Entfernung $\Delta\psi_i$ beider Hauptstreifen für die verschiedenen Winkel θ_i .

Zur Berechnung dieser Grösse dient die Formel (53)

$$\Delta\psi_i = \frac{1}{r_i}, \dots \dots \dots (53)$$

wo nach der Formel (29)

$$r_i = n_1 \text{ Cos } \theta_i + n_2 \text{ Sin } \theta_i \dots \dots \dots (63)$$

wird.

Bei diesen Ausrechnungen habe ich die berechneten Werthe von θ_i zu Grunde gelegt¹⁾.

Die entsprechenden Zahlenangaben sind in den zwei folgenden Tabellen XIII und XIV zusammengestellt, wobei die beobachteten Werthe aus den Tabellen III, V, IX und X entnommen sind.

1) Mit Ausnahme für θ_1 , wo nur ein beobachteter Werth vorliegt.

Tabelle XIII.

Visuelle Beobachtungen.

θ_i	Grüne Linie.		Gelbe Linie.	
	$\Delta\psi_i$		$\Delta\psi_i$	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
θ_{-1}	0°2'10"	0°2' 6"	0°2'22"	0°2'17"
θ_{-2}	2 28	2 24	2 40	2 35
θ_{-3}	2 41	2 38	2 55	2 51
θ_{-4}	2 54	2 50	3 10	3 4
θ_1	1 47	1 46	1 51	1 49
θ_2	1 38	1 35	1 42	1 41
θ_3	1 32	1 32	1 37	1 35
θ_4	1 29	1 27	1 33	1 31

Tabelle XIV.

Photographische Beobachtungen.

θ_i	Grüne Linie.		Gelbe Linie.	
	$\Delta\psi_i$		$\Delta\psi_i$	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
θ_{-1}	0°2'11"	0°2' 9"	0°2'23"	0°2'21"
θ_{-2}	2 29	2 27	2 41	2 38
θ_{-3}	2 42	2 40	2 56	2 53
θ_{-4}	2 55	2 52	3 11	3 8
θ_{-5}	3 8	3 4	3 26	3 21
θ_1	1 46	1 45	1 50	1 49
θ_2	1 37	1 37	1 41	1 42
θ_3	1 32	1 32	1 36	1 36
θ_4	1 28	1 29	1 32	1 33

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist wiederum eine ganz befriedigende. Allein scheinen die berechneten Werthe von $\Delta\psi_i$ in den meisten Fällen ein wenig zu gross zu sein, als ob ein kleiner constanter Fehler in den zur Berechnung von $\Delta\psi_i$ dienenden Zahlendaten vorhanden wäre. Die Differenz zwischen den berechneten und beobachteten

Werthen von $\Delta\psi_i$ ist allerdings sehr klein; im ungünstigsten Fall beträgt dieselbe nur 6".

Wollen wir nun sehen, welchen Einfluss ein Fehler in den Werthen von θ_i , n_1 und n_2 auf den entsprechenden Werth von $\Delta\psi_i$ hat.

Aus den Formeln (53) und (63) ergibt sich

$$\delta(\Delta\psi_i) = -\frac{\delta r_i}{r_i^2} \dots \dots \dots (64)$$

θ_i ist immer sehr klein; es folgt also

$$\delta r_i = \{n_2 - n_1 \theta_i\} \delta\theta_i + \delta n_1 + \theta_i \delta n_2 \dots \dots \dots (65)$$

Führen wir die Berechnung für die grüne Linie durch.

Setzen wir zuerst δn_1 und δn_2 gleich Null.

Es folgt dann, wenn $\delta(\Delta\psi_i)$ in Bogensekunden und $\delta\theta_i$ in Bogenminuten ausgedrückt sein soll:

für $\theta_i = 0$	$5,32 \delta\theta_i'$	$-0,356 \delta\theta_i'$
» $\theta_i = 1^\circ$	$5,31 \delta\theta_i'$	$-0,254 \delta\theta_i'$
» $\theta_i = 2^\circ$	$5,30 \delta\theta_i'$	$-0,191 \delta\theta_i'$
» $\theta_{-i} = -1^\circ$	$5,33 \delta\theta_i'$	$-0,532 \delta\theta_i'$
» $\theta_{-i} = -2^\circ$	$5,33 \delta\theta_i'$	$-0,882 \delta\theta_i'$

Wir ersehen hieraus, dass ein Fehler $\delta\theta_i$ im Werthe von θ_i einen ziemlich geringen Einfluss auf den entsprechenden Werth von $\Delta\psi_i$ hat. Das habe ich auch früher betont.

Für $\delta\theta_i' = 1'$ wird $\delta(\Delta\psi_i)$ höchstens (für $\theta_{-i} = -2^\circ$) 0,9 ausmachen.

Wollen wir nun sehen, was ein Fehler in den Werthen von n_1 und n_2 ausmacht.

Diese Fehler können praktisch nur von einer Ungenauigkeit in der Bestimmung der Breite und Höhe der Echelonstufen herrühren.

Nach den Formeln (26) wird nun

$$\delta n_1 = \frac{1}{\lambda} \delta s$$

und

$$\delta n_2 = \frac{1}{\lambda} \delta t.$$

Wollen wir δs und δt in Millimetern ausdrücken.

Es ergibt sich also:

	δr_i	$\delta (\Delta\psi_i')$
für $\theta_i = 0$	$1831 \cdot \delta s$	$-122 \delta s$
» $\theta_i = 1^\circ$	$1831 \delta s + 31,96 \delta t$	$- \{ 88 \delta s + 1,5 \delta t \}$
» $\theta_i = 2^\circ$	$1831 \delta s + 63,92 \delta t$	$- \{ 66 \delta s + 2,3 \delta t \}$
» $\theta_{-i} = -1^\circ$	$1831 \delta s - 31,96 \delta t$	$- \{ 183 \delta s - 3,2 \delta t \}$
» $\theta_{-i} = -2^\circ$	$1831 \delta s - 63,92 \delta t$	$- \{ 303 \delta s - 10,6 \delta t \}$

Die Zahlen der letzten Colonne zeigen, dass ein Fehler in δt einen verhältnissmässig kleineren Einfluss auf den Werth von $\Delta\psi_i$ hat.

Die grösste Abweichung wird durch die Ungenauigkeit von s verursacht.

Setzt man $\delta s = 0,01^m/m$, was ein verhältnissmässig grosser Fehler wäre, so würde sich ergeben für $\theta_{-i} = -2^\circ$

$$\delta (\Delta\psi_i'') = -3''.$$

Eine Temperaturänderung von 1° C. würde den Werth von $\delta (\Delta\psi_i')$ höchstens um $\pm 0,0016$ beeinflussen können.

Die Zahlen der Tabellen III und V zeigen aber, dass zwischen den direct beobachteten Werthen von $\Delta\psi_i$ für zwei verschiedene Beobachtungsreihen Differenzen bis $6''$ auftreten können, folglich darf man die in den Tabellen XIII und XIV noch vorhandenen kleinen Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Werthen von $\Delta\psi_i$ ohne Zweifel auf Versuchsfehler zurückführen.

Wenden wir uns jetzt zur Berechnung des Dispersionsvermögens $\delta\psi_i$ des Echelons für verschiedene Einstellungswinkel θ_i .

Diese Grösse wird durch die Formel (42), resp. durch (55) gegeben.

$$\delta\psi_i = 0,01 \frac{\Delta\psi_i}{\Delta\lambda}, \dots \dots \dots (55)$$

wo nach der Formel (54)

$$\Delta\lambda = \frac{1}{n_2 \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{m}{\lambda}} \dots \dots \dots (54)$$

wird.

Wir haben schon bemerkt, dass $\Delta\lambda$ für dieselbe Spectrallinie für verschiedene Ordnungszahlen i als constant angesehen werden darf, folglich ist die Berechnung von $\delta\psi_i$, da $\Delta\psi_i$ schon bekannt ist, ganz einfach.

Auf Grund der früher angegebenen Zahlendata ergibt sich:

für die grüne Linie ($\lambda = 5460,947$)	$\Delta\lambda = -0,4766$ Ä. E.
für die gelbe Linie ($\lambda = 5790,917$)	$\Delta\lambda = -0,5432$ Ä. E.

Wollen wir zuerst sehen, welchen Fehler man in dem Werthe von $\Delta\lambda$ begehen kann.

Für diese Berechnung wollen wir m durch $n_2 (\mu - 1)$ ersetzen. Wir nehmen also an, dass die Aenderungen von n_2 und μ so bedeutend sind, dass auch m sich dabei verändert.

Dann folgt [siehe auch die zweite der Formeln (26)]

$$\delta (\Delta\lambda) = -(\Delta\lambda)^2 \left[n_2 \left\{ \delta \left(\frac{d\mu}{d\lambda} \right) - \frac{\delta\mu}{\lambda} \right\} + \left\{ \frac{d\mu}{d\lambda} - \frac{\mu-1}{\lambda} \right\} \left(\frac{\delta t}{\lambda} \right) \right]^1.$$

Führen wir diese Berechnung für die grüne Linie durch.

Es ist

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = -0,058951.$$

Setzen wir $\delta \left(\frac{d\mu}{d\lambda} \right) = \pm 0,02$; der mögliche Fehler wird kaum grösser werden können. Für $\delta\mu$ und δt nehmen wir verhältnissmässig grosse Werthe an, nämlich

$$\begin{aligned} \delta\mu &= \pm 0,0005 \\ \delta t &= \pm 0,01^m/m., \end{aligned}$$

dann bekommt man im ungünstigsten Falle

$$\delta (\Delta\lambda) = \pm 0,0017 \text{ Ä. E.}$$

Wollen wir noch sehen, wie genau $\delta\psi_i$ sich berechnen lässt.

Aus der Gleichung (55) folgt sofort

$$\delta (\delta\psi_i) = 0,01 \left\{ \frac{\delta (\Delta\psi_i)}{\Delta\lambda} - \frac{\Delta\psi_i}{(\Delta\lambda)^2} \delta (\Delta\lambda) \right\}.$$

Wir haben früher gesehen, dass $\delta (\Delta\psi_i)$ höchstens $3''$ sein kann und dies noch unter der Bedingung, dass man im Werth von s einen Fehler von $0,01^m/m$ zugiebt, was auch kaum zulässig ist. Nehmen wir noch für $\Delta\psi_i$ den grössten Werth $3'8''$ an (siehe die Tabelle XIV), so ergibt sich für die grüne Quecksilberlinie im ungünstigsten Falle

$$\delta (\delta\psi_i) = \pm 0,08.$$

1) In dem Ausdruck $\left(\frac{\delta t}{\lambda} \right)$ muss λ in m/m ausgedrückt werden, da t in Millimetern gegeben ist.

Wir sehen also, dass $\delta\psi_i$ sich sehr genau berechnen lässt.

In den beiden folgenden Tabellen XV und XVI sind nun die berechneten und beobachteten Werthe von $\delta\psi_i$ zusammengestellt, wobei die beobachteten Werthe aus den Tabellen IV, VI, IX und X entnommen sind.

Tabelle XV.
Visuelle Beobachtungen.

θ_i	Grüne Linie.		Gelbe Linie.	
	$\delta\psi_i$		$\delta\psi_i$	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
θ_m	-2",5	-2",8	-2",3	-2",5
θ_{-1}	-2,7	-2,8	-2,6	-2,7
θ_{-2}	-3,1	-3,4	-2,9	-3,1
θ_{-3}	-3,4	-3,8	-3,2	-3,4
θ_{-4}	-3,7	-4,0	-3,5	-3,7
θ_1	-2,2	-2,4	-2,0	-2,3
θ_2	-2,0	-2,2	-1,9	-2,1
θ_3	-1,9	-2,1	-1,8	-2,0
θ_4	-1,9	-2,0	-1,7	-1,9

Tabelle XVI.
Photographische Beobachtungen.

θ_i	Grüne Linie.		Gelbe Linie.	
	$\delta\psi_i$		$\delta\psi_i$	
	Berechnet.	Beobachtet.	Berechnet.	Beobachtet.
θ_m	-2",5	-2",7	-2",3	-2",5
θ_{-1}	-2,8	-3,0	-2,6	-2,8
θ_{-2}	-3,1	-3,4	-3,0	-3,2
θ_{-3}	-3,4	-3,7	-3,2	-3,5
θ_{-4}	-3,7	-4,0	-3,5	-3,7
θ_{-5}	-3,9	-4,3	-3,8	-4,0
θ_1	-2,2	-2,5	-2,0	-2,2
θ_2	-2,0	-2,3	-1,9	-2,0
θ_3	-1,9	-2,1	-1,8	-1,9
θ_4	-1,9	-2,1	-1,7	-1,8

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist wiederum ganz befriedigend. Der grösste Unterschied zwischen dem berechneten und direct beobachteten Werth von $\delta\psi_i$ beträgt im ungünstigsten Fall nur 0",4. Dieser Unterschied ist bei weitem kleiner, als die grösste Differenz zwischen den einzelnen beobachteten Werthen von $\delta\psi_i$. Nach der Tabelle X geht diese Differenz bis auf 0",7, in der Tabelle VI für visuelle Beobachtungen sogar bis 1",0 und in einem Falle (für θ_m) bis 1",4 hinauf. Diese Differenzen rühren ohne Zweifel hauptsächlich von der Ungenauigkeit der Bestimmung mit Hilfe des Diffractionsgitters der $\delta\lambda$ für die einzelnen Begleiter der Hauptlinie her. Für die gelbe Linie stimmen bei den photographischen Beobachtungen die nach dem zweiten Begleiter ($\delta\lambda''$) bestimmten Werthe von $\delta\psi_i$ fast genau mit dem nach der Theorie berechneten überein. (Man vergleiche die Zahlen der Tabellen X und XVI).

In Anbetracht der vielen aus den Beobachtungen entnommenen Grössen, welche bei dieser Prüfung der Theorie des Echelons zu Grunde gelegt sind, muss überhaupt die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als eine sehr befriedigende bezeichnet werden.

Wollen wir nun sehen, in welchem Sinne sich die bei der Theorie des Echelons vorkommenden Grössen $n_1, n_2, m, \theta_i, \Delta\psi_i, \Delta\lambda$ und $\delta\psi_i$ mit wachsender Wellenlänge der entsprechenden Spectrallinie ändern.

Mit wachsender Wellenlänge nimmt der Brechungsindex des Glases μ , so wie $\frac{d\mu}{d\lambda}$ in seinem absoluten Werth ab, während der Bruch $\frac{\mu}{\mu-1}$ zunimmt.

Auf Grund der Formeln (26) und in Anbetracht dessen, dass m sich sehr wenig von $n_2 (\mu-1)$ unterscheidet, wird:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{d\lambda} &< 0 \\ \frac{dn_2}{d\lambda} &< 0 \\ \frac{dm}{d\lambda} &< 0. \end{aligned}$$

Auf Grund der Formel (48) ergibt sich weiter für den absoluten Werth von θ_i ,

$$\frac{d\theta_i}{d\lambda} > 0.$$

Nach der Gleichung (63) ist

$$r_i = n_2 \left[\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i + \sin \theta_i \right]$$

$\frac{n_1}{n_2}$ ist unabhängig von λ und da θ_i immer sehr klein bleibt, so wird, da $\frac{dn_2}{d\lambda} < 0$ ist,

$$\frac{dr_i}{d\lambda} < 0,$$

also, nach der Gleichung (53),

$$\frac{d(\Delta\psi_i)}{d\lambda} > 0.$$

Ersetzt man in der Formel (54) m durch $n_2 (\mu - 1)$, so folgt

$$-\Delta\lambda = \frac{1}{n_2 \left\{ -\frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{\mu - 1}{\lambda} \right\}}.$$

$\frac{d\mu}{d\lambda}$ ist immer negativ, folglich wird $\Delta\lambda$ ebenfalls immer < 0 sein.

Nun aber nehmen mit wachsendem λ die absoluten Werthe der Glieder im Nenner dieses Ausdruckes ab, folglich nimmt der absolute Werth von $\Delta\lambda$ zu.

Was $\delta\psi_i$ anbelangt, so wird diese Grösse durch die Formel (55) gegeben. Nun aber nehmen mit wachsendem λ der Zähler $\Delta\psi_i$ und auch der absolute Werth des Nenners $\Delta\lambda$ dieses Ausdruckes zu, folglich ändert sich $\delta\psi_i$ wenig mit λ , aber im Resultat wird mit wachsendem λ der absolute Werth von $\delta\psi_i$ etwas kleiner werden.

Wollen wir zum Orientierungszwecke noch folgende zwei Tabellen XVII und XVIII zusammenstellen.

In ihnen sind die Entfernungen Δl_i zweier Hauptstreifen für verschiedene Ordnungszahlen i angegeben, und zwar sind diese Entfernungen in Trommeltheilen des Ocularmikrometers, so wie des zur Ausmessung der Platten dienenden Mikroscoops, d. h. in $\frac{1}{400}$ Theilen eines Millimeters angegeben. Diese Zahlen sind aus den directen Beobachtungen entnommen.

In der entsprechenden Colonne dieser Tabellen ist das Dispersionsvermögen δl_i des Echelons, wiederum in Trommeltheilen, angegeben; für die photographischen Beobachtungen befinden sich nebenbei in der benachbarten Colonne dieselben Zahlen in Millimetern ausgedrückt.

δl_i bedeutet hier in Linienmaass die Entfernung, welche 0,01 Ä. E. entspricht.

Auf Grund der Formel (55) wird

$$\delta l_i = 0,01 \frac{\Delta l_i}{\Delta\lambda} \dots\dots\dots(66)$$

Man könnte diese Werthe ebenfalls aus den directen Beobachtungen entnehmen, aber für den vorliegenden Zweck wäre dies gar nicht vortheilhaft, da die beobachteten Werthe des Dispersionsvermögens, wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeit in der Bestimmung mit Hilfe des Diffractions-

gitters der Wellenlängen der Begleiter der Hauptlinien ($\delta\lambda$), nicht auf grosse Genauigkeit Anspruch erheben können.

Es ist viel besser und genauer, die gesuchten Werthe von δl_i nach der Formel (66) zu berechnen, da die Δl_i ziemlich genau aus den Beobachtungen bekannt sind und die entsprechenden Werthe von $\Delta\lambda$, die für dieselbe Spectrallinie als constant angesehen werden können, sich sehr gut, wie wir es früher gesehen haben, berechnen lassen.

Bei Verwerthung späterer Versuche mit dem Stufenspectroscop lohnt es sich von diesen Zahlen δl_i keinen directen Gebrauch zu machen, sondern in jedem einzelnen Fall das entsprechende Dispersionsvermögen besonders zu bestimmen. Dazu braucht man nur für jede Einstellung des Echelons die Entfernung Δl_i zweier Hauptstreifen zu bestimmen und die entsprechende Zahl durch den bekannten Werth von $\Delta\lambda$ zu dividieren.

In den entsprechenden letzten Columnen der folgenden beiden Tabellen sind noch für jede Linie die Werthe von

$$\epsilon_i = \frac{1}{\delta l_i}$$

angegeben.

ϵ_i ist der Werth eines Trommeltheils in Hundertstel einer Ängström'schen Einheit.

Tabelle XVII.
Visuelle Beobachtungen.

i	Grüne Linie. $\lambda = 5460,947$ $\Delta\lambda = 0,4766$ Ä. E.			Gelbe Linie. $\lambda = 5790,917$ $\Delta\lambda = 0,5432$ Ä. E.		
	Δl_i	δl_i	ϵ_i	Δl_i	δl_i	ϵ_i
0_{-1}	128,5 Tr.th.	2,70 Tr.th.	0,371	139,6 Tr.th.	2,57 Tr.th.	0,389
0_{-2}	146,6	3,08	0,325	157,9	2,91	0,344
0_{-3}	160,1	3,36	0,298	173,7	3,20	0,313
0_{-4}	172,7	3,62	0,276	186,9	3,44	0,291
0_1	107,3	2,25	0,444	110,9	2,04	0,490
0_2	97,0	2,04	0,491	102,2	1,88	0,532
0_3	93,1	1,95	0,512	96,5	1,78	0,563
0_4	88,7	1,86	0,537	92,8	1,71	0,585

Tabelle XVIII.

Photographische Beobachtungen.

θ_i	Grüne Linie.				Gelbe Linie.			
	$\lambda = 5460,947$		$\Delta\lambda = 0,4766 \text{ \AA. E.}$		$\lambda = 5790,917$		$\Delta\lambda = 0,5432 \text{ \AA. E.}$	
	Δl_i	δl_i in Tr.th.	δl_i in $\frac{m}{m}$	ϵ_i	Δl_i	δl_i in Tr.th.	δl_i in $\frac{m}{m}$	ϵ_i
θ_{-1}	393,2 Tr.th.	8,25	0,0206	0,121	430,4 Tr.th.	7,92	0,0198	0,126
θ_{-2}	446,9	9,38	0,0234	0,107	482,0	8,87	0,0222	0,113
θ_{-3}	486,1	10,20	0,0255	0,098	526,8	9,70	0,0242	0,103
θ_{-4}	522,9	10,97	0,0274	0,091	571,8	10,53	0,0263	0,095
θ_{-5}	561,8	11,79	0,0295	0,085	611,2	11,25	0,0281	0,089
θ_1	320,7	6,73	0,0168	0,149	333,2	6,13	0,0153	0,163
θ_2	294,1	6,17	0,0154	0,162	310,4	5,71	0,0143	0,175
θ_3	280,3	5,88	0,0147	0,170	293,5	5,40	0,0135	0,185
θ_4	270,0	5,67	0,0142	0,177	282,1	5,19	0,0130	0,193

Wir sehen aus dieser Tabelle, dass für die grüne Linie und für die Ordnungszahl $i = 5$ $\delta l_i = 0,0295 \frac{m}{m}$ wird, d. h. mit anderen Worten, dass 0,01 \AA. E. auf der zugehörigen photographischen Platte etwa $0,03 \frac{m}{m}$ entsprechen würde. Wir sehen also, welch ein hohes Dispersionsvermögen das Stufenspectroscop besitzt, und wie geeignet es zum Studium etwaiger Veränderungen im Aussehen und Bau einzelner Spectrallinien ist.

Nehme man den Einstellungsfehler des Mikroscoops im Mittel gleich 1 Trommeltheil an, so würde man für dieselbe grüne Quecksilberlinie und bei derselben Ordnungszahl $i = 5$ eventuell Verschiebungen der Linien bis auf $0,00085 \text{ \AA. E.}$ genau ermitteln können.

Zum Schluss dieser Untersuchung wollen wir kurz eine eventuelle specielle Verwendung des Stufenspectroscops besprechen, nämlich die zur experimentellen, laboratorischen Prüfung des Doppler'schen Prinzips für Lichtstrahlen.

Bekanntlich hat schon Bielopolsky¹⁾ eine solche Prüfung vorgenommen, aber bei ihm waren die zu beobachtenden Grössen etwa von derselben Ordnung wie die möglichen, noch zulässigen Beobachtungsfehler, folglich ergaben diese Versuche keine sehr scharf ausgeprägten Resultate.

1) Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. T. XIII (V^e série), p. 461 (1900).

Mit dem Stufenspectroscop würde sich die Sache wahrscheinlich anders verhalten.

Nähert sich eine homogene Lichtquelle dem Beobachter mit der Geschwindigkeit v , so erfährt nach dem Doppler'schen Princip ihre Wellenlänge λ eine kleine Aenderung $\delta\lambda$, wo

$$\delta\lambda = -\frac{v}{V}\lambda \dots\dots\dots(67)$$

wird.

Hierin bedeutet V die Geschwindigkeit des Lichtes.

Nimmt man den Einstellungsfehler bei Ausmessung der photographischen Platten gleich einem Trommeltheil des Mikroscoops an, so kann man nach der Tabelle XVIII (für $\theta_i = \theta_{-5}$) $\delta\lambda = 0,0009 \text{ \AA. E.}$ setzen. Diese Aenderung von λ müsste eigentlich sich noch bestimmen lassen.

Diesem Werth von $\delta\lambda$ entspricht nach der Formel (67)

für die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 5460,947$) $v = 49,4 \text{ Met.}$

» » gelbe » ($\lambda = 5790,917$) $v = 46,6 \text{ »}$

Die Bewegung der Lichtquelle hat Bielopolsky durch ein System rotierender Spiegel, die von besonderen Electromotoren getrieben wurden, bewerkstelligt. Bei 44 Umdrehungen des Systems in der Secunde, die eine Stromstärke von $7\frac{1}{4}$ Amp. verlangten, war die lineare Geschwindigkeit der Mitte der Spiegel 29 Meter in der Secunde. Dies würde einer Geschwindigkeit der entsprechenden Lichtquelle von 58 Meter entsprechen.

Durch Umsetzung der Drehungsrichtung der Spiegel in die entgegengesetzte könnte eine Verschiebung der Linien hervorgebracht werden, die schon einer Geschwindigkeit von 116 Met. entsprechen würde und zwar nur bei einer Reflexion. Bielopolsky hat bei seinen Versuchen eine sechsfache Reflexion benutzt, aber bei dem Stufenspectroscop würde man wahrscheinlich sich mit nur einer, höchstens zwei Reflexionen begnügen können, was auch viel vortheilhafter ist, da die Schwächung des Lichtes durch Reflexion viel geringer wird und folglich auch die nöthige Expositionszeit viel kürzer ausfallen würde, was auch sehr wünschenswerth ist, um jede mögliche Verstellung und Veränderung des Apparates während des Versuches möglichst zu vermeiden.

Wollen wir nun sehen, welchen Fehler eine Temperaturänderung bei diesen Versuchen eventuell verursachen könnte.

Bei Anwendung der zweiten Beobachtungsmethode mit dem Stufenspectroscop, wo zwei benachbarte Streifen in der Nähe der Mitte des Gesichtsfeldes auf gleiche Helligkeit eingestellt sind, wird die Lage (ψ) einer

dieser Streifen nach den Formeln (44) und (45) sich folgendermaassen ausdrücken lassen:

$$\psi = \frac{1}{2} \Delta\psi.$$

Für die grüne Quecksilberlinie und die Ordnungszahl $i = 5$ wird bei photographischen Beobachtungen nach der Tabelle XIV $\Delta\psi = 3' 4''$, also $\psi = 1' 32''$ und nach der Tabelle XII der entsprechende Drehungswinkel des Echelons $\theta_{-i} = -2^\circ 4'$.

Der zugelassene Einstellungsfehler beim Mikroskop wurde gleich 1 Trommeltheil angenommen. Dies entspricht nach den früheren Auseinandersetzungen¹⁾ einem Fehler $\partial\psi$ im Werthe von ψ , wo

$$\partial\psi = \pm 0''33$$

wird.

Dies ist die noch zulässige Fehlergrenze im Werthe von ψ .

Wir haben früher gesehen, dass eine Temperaturänderung des Echelons um 1°C . äusserst wenig ($\pm 0''0016$) die Entfernung $\Delta\psi$ der Hauptstreifen beeinflusst, folglich bei Untersuchungen, wo es sich nur darum handelt, Veränderungen in dem Aussehen und dem Bau einzelner Spectrallinien zu studieren, braucht man über die Constanz der Temperatur des Echelons sich nicht besonders zu kümmern²⁾. Aber dort, wie z. B. bei der Prüfung des Doppler'schen Princip's, wo es sich um Verschiebungen der Linien handelt, verhält sich die Sache schon ganz anders.

Die Entfernung der Streifen wird freilich von einer Temperaturänderung fast gar nicht beeinflusst, aber beide Streifen können dadurch nach der einen oder anderen Seite verschoben werden und von dieser möglichen Verschiebung, die jetzt schon sehr wichtig und maassgebend ist, muss unbedingt Rechenschaft getragen werden.

Um die einer Temperaturänderung $\partial\tau$ entsprechende Verschiebung der Linien zu bestimmen, müssen wir zu der allgemeinen Formel (34) zurückgreifen.

$$\psi = \frac{n_2 \{\mu^2 - \sin^2 \theta - \cos \theta\} - m}{r} \dots \dots \dots (34)$$

Der Winkel θ ist sehr klein, folglich können wir mit hinreichender Genauigkeit ψ folgendermaassen schreiben:

1) Man siehe die Bestimmung der einzelnen $\Delta\psi$ bei den photographischen Beobachtungen.

2) Etwaige Temperaturschwankungen würden nur die Schärfe der erhaltenen Bilder etwas beeinträchtigen.

$$\psi = \frac{\mu - 1 - \frac{m}{n_2}}{\frac{r}{n_2}}.$$

Da der Winkel θ bei diesen Beobachtungen unverändert bleiben soll, so wird der Nenner $\left(\frac{r}{n_2}\right)$ dieses Ausdruckes unabhängig von der Temperatur sein. Wir wollen ebenfalls voraussetzen, dass die Aenderung von μ und n_2 , $\partial\mu$ und ∂n_2 , durch eine kleine Temperaturänderung $\partial\tau$ so klein ist, dass m seinen Werth behält (m ist immer eine ganze Zahl); dann ergibt sich

$$\partial\psi = \frac{1}{r} \left\{ n_2 \partial\mu + \frac{m}{n_2} \partial n_2 \right\},$$

oder, da m sich recht wenig von $n_2 (\mu - 1)$ unterscheidet,

$$\partial\psi = \frac{1}{r} \left\{ n_2 \partial\mu + (\mu - 1) \partial n_2 \right\}.$$

Bedeute α den Ausdehnungscoefficienten des Glases, so wird nach der zweiten der Formeln (26),

$$\partial n_2 = \frac{\partial t}{\lambda} = \frac{\alpha t \partial\tau}{\lambda} = \alpha n_2 \partial\tau,$$

also

$$\partial\psi = \frac{n_2}{r} \left\{ \partial\mu + (\mu - 1) \alpha \partial\tau \right\}.$$

Setzt man in diese Formel die früher angegebenen Zahlenwerthe für die grüne Linie ein, so ergibt sich, wenn $\partial\psi$ in Bogensekunden ausgedrückt sein soll,

$$\partial\psi'' = 30''5 \partial\tau^\circ.$$

Wir sehen also, dass eine Temperaturänderung von nur 1°C . die Streifen schon um $30''5$ verschiebt. Da unsere Genauigkeitsgrenze $0''33$ beträgt, so muss bei diesen Versuchen bei den photographischen Aufnahmen die Temperatur bis auf $0''01\text{C}$. genau constant gehalten werden.

Will man also das Stufenspectroscop zur Prüfung des Doppler'schen Princip's und ähnlichen Versuchen verwenden, so muss man unbedingt, wenn die photographischen Aufnahmen nach einander erhalten werden sollen, ein Schutzmittel treffen, um jeglichen Temperaturschwankungen möglichst vorzubeugen.

Es empfiehlt sich deshalb die nöthigen photographischen Aufnahmen zugleich zu machen, indem man etwa die eine Hälfte des Spaltes mit einer ruhenden und die andere mit einer beweglichen Lichtquelle beleuchtet.

Aber auch in diesem Falle empfiehlt es sich über einen guten Thermostaten zu verfügen, um möglichst scharfe Bilder der Linien zu bekommen.

