

I.KULL

MATEMAATILINE
loogika

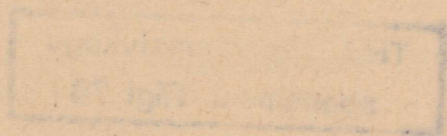
I. KULL

MATEMAATILINE
LOOGIKA

A-25795

I. KULL

MATEMAATILINE
LOOGIKA



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1964

Kaane kujundanud *H. Polberg*

*Lubatud Eesti NSV Ministrite Nõukogu Riikliku Kõrgema
ja Kesk-erihariduse Komitee poolt kasutada õpikuna vaba-
riigi kõrgemates õppeasutustes*

TRÜ Õpperaamatukogu
abonement Tiigi 78

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

SISSEJUHATUS

Esemete ja nähtuste kohta teeme harva otsustusi ainuüksi vahetu taju või kujutluse põhjal. Sagedamini tugineb otsustus lühemale või pikemale mõttekäigule. Kuid mitte igasugune mõttekäik ei tarvitse anda tõe vastavat tulemust. Et tõele vastata, peab mõttekäik rahuldama teatavaid tingimusi, mille selgitamine on loogika ülesanne. Formaalse loogika ülesandeks on mõttekäikude tõe vastavuse formaalsete tingimuste uurimine. Nii näiteks mõistab P. V. Tavanets [35, lk. 5] formaalset loogikat kui formaalse deduktsiooni teooriat.

Esimesena avaldas loogiliste probleemide matemaatilise käsitlemise idee G. W. Leibniz aastail 1679—1690 (mõtete tähistamine sümbolite ja sümbolite kombinatsioonide abil, järelduste väljaarvutamine). Et need ideed jäid aga Leibnizil endal üksikasjalikumalt välja töötamata ning esinesid laialipillatult tema kirjjutistes, siis nad matemaatilise loogika arenemiseks tol ajajärgul mingit tõuget ei andnud. Matemaatilise loogika arenemisele panid aluse alles iiri matemaatiku George Boole'i tööd *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) ja *Investigation of the Laws of Thought* (1854). Et sellest ajast alates hakkas matemaatiline loogika pidevalt ja üha kiiremini arenema, siis loevad paljud uurijad matemaatilise loogika tegelikuks tekkeajaks XIX sajandi keskpaika.

Pikemalt matemaatilise loogika ajaloo juures peatumata märgime ainult selle mõningaid olulisemaid momente. Matemaatilise loogika ajaloo esimest perioodi tuleb nimetada Boole'i algebra ehk loogika algebra perioodiks. Olulisemateks töödeks peale Boole'i enda tööde on sellel perioodil E. Schröderi (*Vorlesungen über die Algebra der Logik*, I—III, 1890—1895) ja P. S. Poretski tööd. Matemaatika aluste uurimisega tol perioodil ei tegeldud. Sellele perioodile on teataval määral iseloomulik rakenduste otsimine keerukate loogiliste ülesannete lahendamises, nagu seda on näiteks paragrahvis 28 toodud ülesanded.

Matemaatilise loogika ajaloo järgmist etappi iseloomustab matemaatilise loogika rakendamine matemaatiliste teooriate üleshitamisel. Siia kuuluvad G. Frege tööd *Begriffsschrift* (1879) ja

Grundgesetze der Arithmetik (1893—1903), G. Peano ja tema kaastööliste *Formulaire de mathématiques* (1894—1908) ning A. N. Whiteheadi ja B. Russelli *Principia mathematica* (1910—1913).

Kolmandat, kaasaegset etappi iseloomustavad D. Hilberti tööd tõestuste teooria ehk metamatemaatika alal [7, lisad VI—X], [52], K. Gödeli tulemused formaliseeritud teooriate mittetäielikkuse kohta [51], tööd rekursiivsete funktsioonide ja algoritmide teooria (S. C. Kleene, A. M. Turing, E. L. Post, A. Church, A. A. Markov jt.), konstruktiivse loogika (L. E. J. Brouwer, A. N. Kolmogorov, V. I. Glivenko, A. Heyting, G. Gentzen jt.), kombinatoorse loogika (M. Schönfinkel, H. Curry jt.), modaalse loogika (C. Lewis, J. Łukasiewicz jt.), mitmevalentse loogika (E. L. Post, I. B. Rosser, A. R. Turquette jt.) ja mudelite teooria alal (L. Löwenheim, A. Tarski, A. Maltsev jt.). Peale selle on kaasaegsele etapile iseloomulik ka matemaatilise loogika rakendamine paljudel teistel aladel, nagu näiteks tehnikas — eriti elektriliste skeemide analüüsimisel ja konstrueerimisel (V. I. Šestakov, 1935, C. Shannon ja A. Nakasima, 1938), küberneetikas, füüsikas, keeleteaduses, bioloogias, õigusteaduses ja teistel aladel. Käesoleval ajajärgul stimuleerivad matemaatilise loogika arenemist eriti tehnika ja küberneetika vajadused. Paralleelselt arenemisega sügavuti areneb matemaatiline loogika ka laiuti: otsitakse ja leitakse üha uusi matemaatilise loogika rakendusvõimalusi ja rakendusalasid. Teatava ülevaate kaasaegsest matemaatilisest loogikast võib saada artiklitest [25], [32] ja [44] — [46].

Loomulikult tekib küsimus — mida siis õieti kujutab endast matemaatiline loogika? Kas on ta klassikalise formaalse loogika edasiarendus või midagi muud, kas ta ongi üldse loogika või kuulub ta hoopis matemaatika valda?

Püüame nendele küsimustele vastata. Piirdudes matemaatilise loogika lihtsamate (kuid see-eest põhilisemate) arvutussüsteemide — lausearvutuse ja predikaatarvutusega, võime öelda, et nendes arvutussüsteemides (nagu üldse formaalses loogikas) jäetakse kõrvale väidete sisuline tähendus, säilitatakse aga väidete loogiline struktuur ja väite koostisosade (komponentide) tõele vastavuse määr (tõeväärtus). Erinevates arvutussüsteemides abstraheritakse ja fikseeritakse väidete struktuur erinevast aspektist lähtudes ja samuti ka erineva täpsusega. Nii näiteks on predikaatarvutuses väidete struktuur fikseeritud palju täpsemalt kui lausearvutuses. Samuti võib tõeväärtusi fikseerida mitmesuguse täpsusega: kahevalentses loogikas näiteks «kahepallilises» süsteemis (väide kas vastab tegelikkusele või mitte). Kogu arvutussüsteem ehitatakse üles väidete struktuurile ja tõeväärtustele tuginedes. Et väidete struktuuri analüüs ja struktuuri teisendamine toimub samuti nagu matemaatikas, siis sarnaneb loogiliste arvutus-

süsteemide ülesehitamine matemaatiliste teooriate ülesehitamisega.

Millest tuleneb aga asjaolu, et väidete struktuuri põhjal saame teha tegelikkusele vastavaid järeldusi? See tuleneb ainult sellest, et väidete struktuur on samasugune tegelikkuse struktuuriga. Seega ei uurita matemaatilises loogikas mitte ainult väidete struktuuri, vaid samaaegselt ka tegelikkuse teatavaid vahekordi. Kui mõista formaalset loogikat formaalse deduktsiooni teooriana, siis tuleb tunnistada, et matemaatilise loogika ainevaldkond on laiem: siin uuritakse tegelikkuses esinevaid teatavat tüüpi vahekordi (sisalduvus, järjestus, samasus jne.), mis muuhulgas esinevad ka formaliseeritud väidete puhul. Peale selle tuleb veel märkida, et matemaatilise loogika mõned osad pole üldse seotud formaalse deduktsiooniga, nagu näiteks peatükk loogiliste tehete täielike süsteemidest, normaalkujude minimeerimisest, kahendmuutuja funktsioonide optimaalsest laiendamisest jne. Ainult osaliselt on formaalse deduktsiooniga seostatav rekursiivsete funktsioonide teooria. Matemaatilise loogika tehnilised rakendused pole samuti seostatavad formaalse deduktsiooniga. Kõikides tehnilistes rakendustes sarnaneb matemaatiline loogika matemaatiliste distsipliinidega. Kõigele sellele vaatamata tuleb aga märkida, et matemaatilises loogikas on formaal-loogiline aspekt vägagi domineeriv. Mõned autorid (peamiselt loogikud) peavad sellepärast matemaatilist loogikat 100%-liselt loogikaks. Eespool toodud mõttekäigust järeldub aga, et matemaatilist loogikat tuleks lugeda nii matemaatikasse kui ka loogikasse kuuluvaks alaks, s. t. matemaatilise loogiliseks distsipliiniks. Seejuures tuleb matemaatilist loogikat lugeda klassikalise formaalse loogika edasiarenduseks kaasaegsel kujul.

*

Käesoleva õpiku ülesandeks on lugejat tutvustada kaasaegse matemaatilise loogika põhilisemate arvutussüsteemide — lausearvutuse ja predikaatarvutusega, mis on ka seni kõige rohkem rakendamist leidnud loogilised arvutussüsteemid. Parema arusaamise huvides ehitame need arvutussüsteemid algul (I ja III ptk.) üles mitteaksiomaatilisel, teatavatest sisulistest kontseptsioonidest lähtudes. II ja IV peatükis aga ehitame needsamad arvutussüsteemid üles aksiomaatiliste teooriatena. Loogiliste arvutussüsteemide aksiomaatiline ülesehitamine on vajalik kas või matemaatiliste teooriate aksiomaatiliseks ülesehitamiseks. Asi seisab nimelt selles, et loogiliste arvutussüsteemide mitteaksiomaatilisel ülesehitamisel kasutatakse hulga- ja funktsiooniteooria kontseptsioone. Sellisel viisil saadud loogiliste arvutussüsteemide kasutamine hulga- ja funktsiooniteooria ülesehitamisel tekitab aga juba loogilise ringkäigu.

I—IV peatüki materjal on püütud esitada võimalikult sidusal kujul. Tõestamata tuakse ainult E. Posti ja S. Jablonski teoreem loogiliste tehete täielikest süsteemidest (§ 9) ja K. Gödeli tulemus esimest järku predikaatarvutuse täielikkuse kohta (§ 23). Tuleb märkida, et paragrahvidel 6—8 on puhtrakenduslik tähtsus seoses elektriliste skeemide sünteesiga, paragrahvis 9 esitatud materjal on aga täienduseks lausearvutuse eelnevale käsitlusele. Selliseks täienduseks on õieti ka V peatükk, kus käsitletakse hulgateoreetilise algebra, Boole'i algebra ja loogiliste arvutussüsteemide vahetõrka (§ 24), funktooreid ja operaatoreid (§ 25), teist järku predikaatarvutust (§ 26) ja tüpiseeritud predikaatarvutust (§ 27). Seejuures on käsitlus siiski sedavõrd üksikasjalik, et neid meetodeid ja arvutussüsteeme oleks võimalik ka praktiliselt kasutada. Nii kasutatakse näiteks paragrahvis 36 funktori mõistet, paragrahvis 37 aga mitmeliigilist predikaatarvutust. Õpikus esitatud näited matemaatilise loogika rakenduste kohta on jaotatud kahte peatükki. VI peatükis on toodud matemaatilise loogika sellised rakendused, mis pole seotud teooriate aksiomaatilise ülesehitusega. Nii on paragrahvis 28 esitatud mõned klassikalised ülesanded. Paragrahvis 29 esitatud ülesanne võiks peale puhtloogilise huvi äratada veel juristide, paragrahvis 34 esitatud probleemid aga matemaatika õpetajate tähelepanu. Paragrahvid 31 ja 32 näitavad võimalusi matemaatilise loogika aparatuuri rakendamiseks haiguste diagnoosimisel ja tunniplaanide ning töögraafikute koostamisel, kus muuhulgas on otstarbekohane kasutada ka elektronarvutusmasinate abi. Üldse tuleb märkida, et matemaatilise loogika aparatuuri abil formuleeritavate probleemide uurimist on suhteliselt kerge üle kanda kaasaegsetele elektronarvutusmasinatele. VII peatükis on esitatud näiteid matemaatilise loogika kasutamisest matemaatiliste teooriate aksiomaatilisel ülesehitamisel. Need rakendused võiksid peale matemaatikute-küberneetikute huvitada veel keskkooli matemaatika õpetajaid ja võib-olla ka teiste teadusalade esindajaid. Asi seisab nimelt selles, et aksiomaatilistel printsiipidel on võimalik üles ehitada mitte ainult matemaatilisi teooriaid. Aksiomaatilistest printsiipidest lähtudes on üles ehitatud füüsikalisi teooriaid ([49], [50], [58]), bioloogilisi teooriaid ([49], [50], [60]) jt. Sellise ülesehituse korral tõuseb reljeefselt esile see moment, missugused mõisted ja tulemused aksepteeritakse vahetult kogemustest või eksperimendist, missugused mõisted ja tulemused aga on tuletatavad nendest matemaatilis-loogiliselt.

Peale nende selgituste õpiku sisu kohta teeme veel mõned üldist laadi märkused. Õpiku lugemiseks on tarvis teada mõningaid põhimõisteid hulga- ja funktsiooniteooriast (hulk, hulga element, osahulk, tühi hulk, algebralised tehted hulkadega, üks-ühene vastavus, hulga võimsus ja funktsiooni mõiste). Neid mõisteid on võimalik leida igast reaalmuutuja funktsioonide teooria õpikust. Muide, osa neist on toodud paragrahvis 24. Õpiku paragrahvide

omavahelise järgnevuse kohta on toodud üksikasjalikud andmed pärast sissejuhatust. Teoreemid, lemmad ja valemid on nummerdatud igas paragrahvis eraldi, joonised ja tabelid on antud ühtses numeratsioonis. Teoreemide juurde on mõningatel juhtudel märgitud autori nimi (nii näiteks on § 8 teoreemi 2 juures toodud J. Žuravljovi nimi). Suurem osa tulemusi on aga toodud ilma selliste märkusteta. Vastavate märkuste tegemata jätmist ei tule mõista nii, et autor omistab need tulemused enesele, vaid et need moodustavad matemaatilise loogika juba ammu rajatud alusmüüri.

Lõpuks avaldan suurt tänu füüsika-matemaatika kandidaatidele Ü. Kaasikule ja J. Hionile, kes lugesid läbi õpiku käsikirja ja abistasid autorit paljude väärtuslike näpunäidetega. Ühtlasi tänan südamest H. Tera, U. Jürgensoni ja R. Tomingat suure töö eest käsikirja tehnilisel vormistamisel ja toimetamisel.

Tartu, 1963

I. KULL

PARAGRAHVIDE SISULINE JÄRGNEVUS

Loetelus on toodud iga paragrahvi mõistmiseks vajalikud paragrahvid. Näiteks on paragrahvi 5 mõistmiseks vaja teada paragrahvide 1—4 sisu

§ 1 —		§ 22 — §§ 1—4, 10, 11, 14—21.
§ 2 — § 1.		§ 23 — §§ 1—4, 10—19, 21—22.
§ 3 — §§ 1—2.		§ 24 — §§ 1—4, 14—19.
§ 4 — §§ 1—3.		§ 25 — §§ 1—4, 9, 14—19.
§ 5 — §§ 1—4.		§ 26 — §§ 1—4, 10—23.
§ 6 — §§ 1—4.		§ 27 — §§ 1—4, 10—23, 25—26.
§ 7 — §§ 1—4, 6.		§ 28 — §§ 1—4.
§ 8 — §§ 1—4, 6.		§ 29 — §§ 1—4.
§ 9 — §§ 1—4.		§ 30 — §§ 1—4.
§ 10 — §§ 1—4.		§ 31 — §§ 1—4.
§ 11 — §§ 1—4, 10.		§ 32 — §§ 1—4, 9.
§ 12 — §§ 1—4, 10, 11.		§ 33 — §§ 1—4, 14—20.
§ 13 — §§ 1—4, 10—12.		§ 34 — §§ 1—4, 14—19.
§ 14 — §§ 1—4.		§ 35 — §§ 1—4, 10—19, 21—23, 34.
§ 15 — §§ 1—4, 14.		§ 36 — §§ 1—4, 10—19, 21—23, 25, 34, 35.
§ 16 — §§ 1—4, 14, 15.		§ 37 — §§ 1—4, 10—19, 21—23, 27, 34, 35.
§ 17 — §§ 1—4, 14—16.		§ 38 — §§ 1—4, 10—19, 21—23, 34, 35, 37.
§ 18 — §§ 1—4, 14—17.		
§ 19 — §§ 1—4, 14—18.		
§ 20 — §§ 1—4, 14—19.		
§ 21 — §§ 1—4, 10, 14—19.		

I P E A T U K K

LAUSEARVUTUS

Käesoleva peatüki ülesandeks on kahevalentse lausearvutuse ülesehitamine mitteaksiomaatilistest seisukohtadest lähtudes.

§ 1. LAUSEARVUTUSE PÕHIMÕISTEID

Lausearvutuse põhimõisteteks on lause, tõeväärtuse ja loogilise tehte mõiste.

Lausearvutuse lauseks võib olla iga grammatiline lause, mille puhul on mõtet kõnelda selle sisu vastavusest tegelikkusele. Laused või väljendid, mille puhul pole mõtet kõnelda nende sisu vastavusest tegelikkusele, ei saa olla lausearvutuse lauseteks. Lausearvutuses vaadeldakse lauseid kui tervikuid ja tähistatakse neid suurte ladina tähtedega A, B, C, X, Y, Z, kasutades vajaduse korral indekseid nende tähtede juures. Nii näiteks võime lauseid

«Tartu on ülikoolilinn.»

«Tartus õpib palju noori.»

ja

$$«2 + 2 = 5»$$

tähistada vastavalt *A*, *B* ja *C* abil. Laused *A*, *B* ja *C* on ilmselt lausearvutuse laused. Seevastu pole lausearvutuse lauseteks järgmised laused, väljendid ja avaldised:

«Tere hommikust, poisid!»

«Mida teha?»

«raske ülesanne»

$$«\int x dx»$$

$$«\sin \frac{\pi}{2}»$$

Kui lause sisu vastab tegelikkusele, siis ütleme, et lause on tõene, vastupidisel korral ütleme, et lause on väär. Kahe-

valentses lausearvutuses võib lause olla kas tõene või väär, kolmas võimalus on välistatud. Lause tegelikkusele vastavuse määra (tõene, väär) nimetatakse lause tõeväärtuseks. Tõeväärtusi tähistame sümbolite t ja v abil, sagedasti ka numbrite 1 ja 0 abil.

Eespool toodud lausetest on A ilmselt tõene, C väär. Lause B puhul peame aga täpsustama väljendit «palju noori». Kui lepime kokku, et väljend «palju noori» tähendab «üle 5000 inimese, vanusega 16—30 aastat (*incl.*)», siis on ka lause B tõene. Üksikute lausete tõeväärtuse kindlakstegemine, mis võib sageli olla väga raske (teaduslikud väited, hüpoteesid kohtupraktikas), on konkreetsete teadusalade ja uurimiste ülesandeks. Kaasaegne matemaatiline loogika nende küsimustega ei tegele. Oma konstruktsioonides ta eeldab, et üksikute lausete tõeväärtused on leitavad.

Asudes loogiliste tehete käsitlemisele, teeme kõigepealt kaks põhimõttelist kokkulepet:

1) loogilisi tehteid võib sooritada mistahes sisuga lausetega, sisulist seost nende vahel ei nõuta;

2) loogiliste tehete abil moodustatud liitlause (valemi) tõeväärtus oleneb ainult seda liitlause moodustavate lausete (komponentlausete) tõeväärtustest, mitte aga nende lausete sisust.

Need kokkulepped on vajalikud selleks, et anda loogilistele tehetele komponentlausete sisust sõltumatut iseloomu.

Loogilistest tehetest vaatleme konjunktsiooni (mida tähistame sümboliga $\&$), disjunktsiooni (\vee), implikatsiooni (\rightarrow), ekvivalentsi (\sim), mitteekvivalentsi (\approx), alternatiivset eitust (tähisteks on nn. Shefferi kriips $/$) ja eitust (tähistame üldiselt sümboliga \neg , üksiku lause eitust märgime sageli ka $-$ abil, mille kirjutame lause tähise kohale, näiteks \bar{X}).

Kokkuleppe punkti 2) põhjal on loogiliste tehete defineerimisel vaja kindlaks määrata, missuguste komponentlausete tõeväärtuste korral loome tehte tulemuse tõeseks, missuguste korral vääraks.

Lausete X ja Y konjunktsiooni $X \& Y$ loome tõeseks siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlausead X ja Y on tõesed. Tavalises keeles vastab konjunktsioonile sidesõna «ja».

Lausete X ja Y disjunktsiooni $X \vee Y$ loome tõeseks siis ja ainult siis, kui vähemalt üks komponentlausest on tõene. Tavalises keeles vastab disjunktsioonile sidesõna «või» mittevälis-tavas mõttes, s. t. väljend «kas X või Y või mõlemad».

Lausete X ja Y implikatsiooni $X \rightarrow Y$ loome tõeseks siis ja ainult siis, kui implikatsiooni tagaliige Y on tõene või kui implikatsiooni eesliige X on väär või kui kehtivad mõlemad juhud. Implikatsiooni loome vääraks ainult siis, kui implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär. Implikatsiooni ligikaudne keeleline vaste on «kui X , siis Y ». Implikatsiooni täpne keeleline vaste on «kas mitte- X või Y või mõlemad» [vt. § 3, seos (15)].

Lausetel X ja Y ekvivalentsi $X \sim Y$ loeme tõeseks siis ja ainult siis, kui laused X ja Y on mõlemad tõesed või mõlemad väärad. Tavalises keeles vastab ekvivalentsile väljend « X on samatõene Y -ga».

Lausetel X ja Y mitteekvivalentsi $X \approx Y$ loeme tõeseks siis ja ainult siis, kui lausetel X ja Y on erinev tõeväärtus. Tavalises keeles vastab mitteekvivalentsile väljend « X pole samatõene Y -ga» ehk «kas X või Y », s. t. sidesõna «või» välistavas mõttes.

Lausetel X ja Y alternatiivset eitust X/Y loeme tõeseks siis ja ainult siis, kui vähemalt üks komponentlausetest on väär. Alternatiivset eitust loeme vääraks ainult sel juhul, kui mõlemad komponentlausead on tõesed. Tavalises keeles vastab alternatiivsele eitusele väljend «vähemalt üks lausetest X ja Y on väär» või « X ja Y ei ole mõlemad korraga tõesed».

Eespool defineeritud tehted sidusid kaht lauset ehk, teiste sõnadega, olid binaarsed tehted. Eitus seevastu on rakendatav ühele lausele, s. t. on unaarne tehe.

Lause X eitust $\neg X$ (ehk \bar{X}) loeme tõeseks siis ja ainult siis, kui X on väär. Tavalises keeles vastab eitusele väljend «mitte- X » või « X ei kehti».

Loogiliste tehete definitsioonid on esitatud kokkuvõtlikult tabelites 1, 2 ja 3. Tabelitest nähtub, missuguste komponentlausetel tõeväärtuste korral loeme vastava tehete tulemuse tõeseks, missuguste korral vääraks.

Tabel 1

	X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \leftrightarrow Y$
1)	t	t	t	t	t
2)	t	v	v	t	v
3)	v	t	v	t	t
4)	v	v	v	v	t

Tabel 2

	X	Y	$X \sim Y$	$X \approx Y$	X/Y
1)	t	t	t	v	v
2)	t	v	v	t	t
3)	v	t	v	t	t
4)	v	v	t	v	t

Tabel 3

X	$\neg X$
1) t	v
2) v	t

Selgitame loogiliste tehete olemust veel keeleliste näidete varal, kasutades selleks eespool toodud lauseid A , B ja C .

Konjunktsioon $A \& B$ tuleb sõnastada nii: «Tartu on ülikoolilinn ja Tartus õpib palju noori.» Konjunktsioon $A \& B$ on tõene, sest mõlemad komponentlauseid on tõesed.

Disjunktsioon $A \vee C$ tuleb sõnastada nii: «Kas Tartu on ülikoolilinn või $2 + 2 = 5$ või kehtivad mõlemad väited.» Disjunktsioon $A \vee C$ on tõene, sest komponentlause A on tõene.

Implikatsiooni $C \rightarrow B$ võib sõnastada ligikaudu nii: «Kui $2 + 2 = 5$, siis õpib Tartus palju noori.» Esitatud implikatsioon on tõene, sest implikatsiooni tagaliige B on tõene. Tuleb märkida, et tavalises keeles lausetele «Kui C , siis B », kus ees- ja tagaliige pole põhjuslikult ega ka muul viisil seotud, mingisugust mõtet ega tõeväärtust ei omistata. Põhjuseks on asjaolu, et tavalises keeles kokkulepped 1) ja 2) üldiselt ei kehti. Teiselt poolt tuleb aga märkida, et kasutasime siin $C \rightarrow B$ ligikaudset keelelist vastet. Täpse keelelise vaste «Kas $2 + 2 \neq 5$ või õpib Tartus palju noori või kehtivad mõlemad väited» korral mingisugust vastuolu tavalise keelega ei ilmne.

Ekvivalents $C \sim A$ kõlab: « $2 + 2 = 5$ on samatõene sellega, et Tartu on ülikoolilinn.» Esitatud ekvivalents on väär, sest lausetel C ja A on erinevad tõeväärtused.

Mittekvivalents $C \approx B$ kõlab: « $2 + 2 = 5$ pole samatõene sellega, et Tartus õpib palju noori.» Esitatud mittekvivalents on tõene, sest lausetel C ja B on erinevad tõeväärtused.

Alternatiivne eitus A / B kõlab: ««Tartu on ülikoolilinn» ja «Tartus õpib palju noori» ei ole mõlemad korruga tõesed.» Esitatud alternatiivne eitus on väär, sest A ja B on mõlemad tõesed.

Eitus $\neg A$ (ehk \bar{A}) kõlab: «Tartu pole ülikoolilinn.» Esitatud eitus on väär, sest A on tõene.

Lõpuks märgime, et kokkulepetel 1) ja 2) on lausearvutuse ülesehituses üldse põhjanev tähtsus. Et kogu edasine käsitus baseerub tõeväärtuse ja loogiliste tehete mõistritel, viimased on aga lausete sisust sõltumatud, siis võime lausearvutuse ülesehitamisel üldse loobuda lausete sisu arvestamisest. Lausete sisuline tähendus on oluline ainult lausearvutuse konkreetsetes rakendustes. Lauset, millele me oleme andnud mingi kindla sisulise tähenduse, nimetame konstantseks lauseks.

Konstantse lause näideteks on «Tartu on ülikoolilinn», « $2 + 2 = 5$ » jms. Konstantseid lauseid tähistame tähtedega A , B , C

(kasutades vajaduse korral ka indekseid). Konkretiseerimata siuga lauseid nimetame muutuvateks lauseteks. Nende tähisteks on X, Y, Z (vajaduse korral koos indeksitega). Muutuvat lauset võib seega vaadelda kui kahendmuutujat, s. t. muutujat, mis võib omandada väärtusi kaheelemendilisest hulgast (hulgast $\{t, v\}$ ehk $\{1, 0\}$). Sellest lähtudes võib lausearvutust käsitleda kui kahendmuutuja funktsioonide teooriat, kus ka funktsioonid võivad omandada ainult kaht väärtust. Mõned autorid nimetavad sellisest seisukohast üles ehitatud lausearvutust ka loogika algebraks. Kahendmuutuja funktsioonide teooria (loogika algebra) ehitatakse üles kui tüüpiline matemaatiline teooria, kus mõisteid ja tulemusi loogika seisukohast tavaliselt ei tõlgendata. Kuigi me lausearvutuse ülesehituses käesoleva õpiku I peatükis kasutame suurel määral kahendmuutuja funktsioonide teooria kontseptsioone, ei taandu meie käsitlus siiski täielikult kahendmuutuja funktsioonide teooriale. Muu hulgas pöörame me mõistete ja tulemuste tõlgendamisele loogika seisukohalt hoopis suuremat tähelepanu, kui seda tehakse kahendmuutuja funktsioonide teoorias.

§ 2. LAUSEARVUTUSE VALEMID

Eelmises paragrahvis märkisime, et loogiliste tehete teostamisel lausetega saame valemi. Selles paragrahvis anname valemi definitsiooni ja käsitleme teisi valemitega seoses olevaid küsimusi (substitutsioonid, asendused, valemite tõeväärtuse väljaarvutamise jne.).

Defineerime lausearvutuse valemi järgmiselt:

- 1) kõik laused on valemid;
- 2) kui \mathcal{A} ja \mathcal{B} on valemid, siis on valemid ka $(\mathcal{A}) \& (\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}) \sim (\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}) \approx (\mathcal{B})$ ja $(\mathcal{A}) / (\mathcal{B})$;
- 3) kui \mathcal{A} on valem, siis on valem ka $\neg(\mathcal{A})$;
- 4) teisi valemeid peale nende, mis on defineeritavad kooskõlas punktidega 1)–3), pole.

Esitatud definitsioon on induktiivse definitsiooni näiteks. Induktiivse definitsiooni iseloomulik joon seisneb selles, et ja võimaldab defineeritavaid objekte konstrueerida [antud juhul punktide 1)–3) abil, mida nimetatakse definitsiooni otsesteks punktideks]. Definitsiooni punkt 4) (definitsiooni kaudne punkt) võrdustab aga defineeritavate objektide hulga otseste punktide abil konstrueeritavate objektide hulgaga ja viib sellega kogu definitsiooni lõpule.

Sulge kasutame valemi defineerimisel [punktides 2) ja 3)] sellepärast, et need võimaldavad valemis täiesti üldiselt kindlaks määrata tehete järjekorra. Näiteks, kui kirjutise $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ asemel kirjutaksime lihtsalt $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, siis valemite

$$\mathfrak{A} = (X \rightarrow (Y)) \text{ ja } \mathfrak{B} = (Y \rightarrow (Z))$$

korral saaksime esimesel juhul

$$((X \rightarrow (Y)) \rightarrow ((Y \rightarrow (Z))),$$

teisel juhul aga

$$(X \rightarrow (Y \rightarrow (Y \rightarrow (Z))),$$

kus puudub (esialgne) informatsioon tehete järjekorra kohta. Kuid see informatsioon on üldreeglina oluline.

Põhimõtteliselt võime sulud ära jätta kõikidel juhtudel, kus informatsioon tehete järjekorra kohta kas pole oluline või saadakse lisaeldustest valemi struktuuri kohta või täiendavatest kokkulepetest.

Lausearvutuse valemiteks on näiteks järgmised avaldised:

$$A, X, \neg(X),$$

$$(A) \& (\neg(X)) \tag{1}$$

ja

$$\neg(((A) \& (\neg(X))) \rightarrow ((\neg(Y)) \vee (\neg(B)))) \tag{2}$$

milles võib veenduda definitsiooni punktide 1)–3) korduva rakendamise teel.

Lausearvutuse valemiteks pole aga avaldised

$$\&, \sim A \neg X, X \rightarrow Y \rightarrow Z, (X) \rightarrow t.^1$$

Otstarbekohane on defineerida veel antud valemi osavalem. Selle defineerime samuti induktiivselt:

1) valemi \mathfrak{A} osavalemiks on valem \mathfrak{A} ;

2) kui \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on valemid, siis on nende osavalemid ka valemite $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \approx (\mathfrak{B})$ ja $(\mathfrak{A}) / (\mathfrak{B})$ osavalemiteks;

3) kui \mathfrak{A} on valem, siis on tema osavalemid ka valemi $\neg(\mathfrak{A})$ osavalemiteks;

4) valemile omistame nimetuse «antud valemi osavalem» siis ja ainult siis, kui see on talle omistatav punktide 1)–3) alusel. Nii on näiteks valemi (2) osavalemiteks valemid

$$A, X, \neg(X), Y, \neg(Y), B, \neg(B),$$

$$(A) \& (\neg(X)), (\neg(Y)) \vee (\neg(B)),$$

$$((A) \& (\neg(X))) \rightarrow ((\neg(Y)) \vee (\neg(B)))$$

ja lõpuks valem (2) ise.

¹ Kirjutisi kujul $(X) \rightarrow t$, $(Z) \& t$ jne. me valemiteks ei nimeta, kuigi nad defineerivad teatavad kahendmuutuja funktsioonid.

Märgime, et valem \mathfrak{B} võib esineda valemis \mathfrak{A} osavalemina mitmes erinevas kohas, nagu näiteks valem $(X) \rightarrow (Y)$ valemis

$$((X) \rightarrow (Y)) \& ((Z) \sim ((X) \rightarrow (Y))).$$

Selliseid esinemisi võime nimetada järjekorras (lugedes vasakult paremale) valemis \mathfrak{B} esimeseks esinemiseks valemis \mathfrak{A} , teiseks esinemiseks valemis \mathfrak{A} jne.

Valemis (2) esineb muide 10 paari sulge, mis teeb selle valemis küllaltki ebaülevaatlikuks. Sulgude hulka võimaldavad vähendada järgmised kokkulepped:

1° üksikuid lauseid pole vaja sulgudesse paigutada;

2° eitusmärk on seotud valemiga tugevamini kui ükski teine tehtmärk, s. t. kui mingi valemiga tuleb teostada eitus ja mõni teine tehe, siis tuleb kõigepealt teostada eitus (eeldusel, et sulud ei nõua teistsugust järjekorda);

3° konjunktsiooni- ja disjunktsioonimärk on seotud valemiga tugevamini kui ükski teine tehtmärk peale eitusmärgi.

Neid kokkuleppeid kasutades võime kirjutada näiteks valemis (1) kujul

$$A \& \neg X \text{ ehk } A \& \bar{X},$$

valemis (2) aga kujul

$$\neg(A \& \bar{X} \rightarrow \bar{Y} \vee \bar{B}).$$

Kokkuleppeid 1°—3° võime vaadelda kui täiendusi lausearvutuse valemis definitiooni juurde. Parema ülevaatlikkuse huvides kasutame valemites peale ümarsulgude (,) ka nurksulge [,] ja loogelisi sulge {,}, ilma nendele mingisugust tähenduslikku erinevust omistamata.

Valemitega seoses on meil vaja tunda kaht operatsiooni: asendust ja substituutsiooni.

Esinegu valemis \mathfrak{A} osavalem \mathfrak{B} n ($n \geq 1$) korda. Valemis \mathfrak{A} osavalemis \mathfrak{B} k -nda ($k \leq n$) esinemise asendamist valemiga \mathfrak{C} mõistame kui niisuguse valemis \mathfrak{A} konstrueerimist, mis erineb valemist \mathfrak{A} ainult selle poolest, et seal osavalemis \mathfrak{B} k -nda esinemise asemel on valem \mathfrak{C} .

Asendusest kõneleme ka siis, kui osavalemis \mathfrak{B} mitmete (isegi kõikide) esinemiste asemele oleme paigutanud mingi valemis \mathfrak{C} . Asendamise tulemusena saame ikka valemis.

N ä i d e 1. Asendame valemis

$$(X \rightarrow Y) \& (Z \rightarrow (X \rightarrow Y)) \quad (3)$$

osavalemis $X \rightarrow Y$ teise esinemise valemiga $A \rightarrow B$. Saame

$$(X \rightarrow Y) \& (Z \rightarrow (A \rightarrow B)).$$

Esinegu valemis \mathfrak{A} mingi muutuv lause X n ($n \geq 1$) korda. Lause X substituueerimiseks valemiga \mathfrak{B} valemis \mathfrak{A} [tähistame $S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$] nimetame niisuguse valemi \mathfrak{A}' konstrueerimist, mis erineb valemist \mathfrak{A} ainult selle poolest, et seal igal pool lause X asemel on valem \mathfrak{B} . Juhime tähelepanu sellele, et substituueerida saab ainult muutuvat, mitte aga konstantset lauset.

Antud valemis võime substituueerida ka mitut lauset [kui näiteks X substituueerime \mathfrak{B} -ga ja Y substituueerime \mathfrak{C} -ga, siis tähistame kogu substituutsiooni $S_{X,Y}^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}(\mathfrak{A})$]. Kui valem \mathfrak{A} , milles teostame substituutsiooni, on eelnevalt teada, siis võime substituutsiooni tähistada lihtsalt $S_X^{\mathfrak{B}}, S_{X,Y}^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ jne. Substituutsiooni tulemusena saame ikka valemi. On kerge näha, et substituutsioon on asenduse erijuhtum.

N ä i d e 2. Teostame valemis (3) substituutsiooni $S_{X,Y}^{A,B \rightarrow X}$. Saame
 $(A \rightarrow (B \rightarrow X)) \& (Z \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow X)))$.

Asume nüüd valemite tõeväärtuse probleemide käsitlemisele. Olgu mingis valemis \mathfrak{A} n komponentlauseid X_1, X_2, \dots, X_n , mida tähistame järgmiselt:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (4)$$

Et iga komponentlause võib teistest sõltumatult omandada kaks väärtust t ja v , siis on n komponentlause korral kõikvõimalikke erinevaid komponentlauseite tõeväärtuste komplekte 2^n . Kindlas järjekorras võetud komponentlauseite tõeväärtuste komplekte nimetatakse komponentlauseite väärtustusteks ja neid tähistatakse nii:

$$(t, v, t, \dots, t),$$

kus väärtustuse koordinaadid t, v, t, \dots annavad vastavalt esimese, teise jne. komponentlauseite tõeväärtuse.

On selge, et igale komponentlauseite väärtustusele vastab ka valem (4) mingi kindel tõeväärtus, mida saab leida loogiliste tehete definitsioonide (*resp.* tabelite 1, 2 ja 3) põhjal.

Leiame näiteks valemi

$$X \vee Y \rightarrow X \& Y \quad (5)$$

tõeväärtused. Et komponentlauseid on 2, siis on siin komponentlauseite väärtustusi 4. Vastavad arvutused tuleb teostada kõigil neil 4 juhul. Esitame need tabelina.

Tabel 4

	X	Y	$X \vee Y$	$X \& Y$	$X \vee Y \rightarrow X \& Y$
1)	t	t	t	t	t
2)	t	v	t	v	v
3)	v	t	t	v	v
4)	v	v	v	v	t

Viimasest veerust nähtub, et valem (5) on väärtustuste (t, t) ja (v, v) korral tõene, väärtustuste (t, v) ja (v, t) korral aga väär.

Otstarbekohane on arvutusi teostada ja üles märkida nii, et poleks vaja välja kirjutada valemi osavalemeid. Selleks võime toimida järgmiselt: arvutused paigutame valemi alla, nii et igale väärtustusele vastab oma rida; komponentlausete alla kirjutame nende tõeväärtuse, tehtemärkide alla vastava tehte puhul saadud tõeväärtuse; valemi tõeväärtus antud väärtustuse korral tuleb viimase tehtemärgi alla.

Kasutame seda arvutuste ülesmärgimise viisi valemi

$$\neg(X \sim Y) \vee [(X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)] \quad (6)$$

tõeväärtuste väljaarvutamiseks.

Tabel 5

	$\neg(X \sim Y)$				$\vee [(X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)]$							
	(4)	(1)	(3)	(2)	(8)	(1)	(5)	(2)	(7)	(2)	(6)	(1)
1)	v	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
2)	t	t	v	v	t	t	v	v	v	v	t	t
3)	t	v	v	t	t	v	t	t	v	t	v	v
4)	v	v	t	v	t	v	t	v	t	v	t	v

Numbrid veergude kohal näitavad arvutuste järjekorda. Arvutuste tulemustest nähtub [vt. veerg (8)], et valem (6) on komponentlausete iga väärtustuse korral tõene, on lühidalt öeldes samaselt tõene ehk üldkehtiv.

Esineb ka valemeid, mis on komponentlausete kõikide väärtustuste korral väärad ehk lühidalt öeldes on samaselt väärad. Näiteks iga samaselt tõese valemi eituse on samaselt väär valem.

Samaselt väärad on ka valemid

$$X \& \neg X,$$

$$X \vee Y \sim \neg X \& \neg Y, \quad (7)$$

mida saab kontrollida tabelimeetodil.

Seda, kas antud valem on samaselt väär (*resp.* samaselt tõene) või mitte, saab kindlaks teha ka mõnevõrra lihtsamal viisil. Demonstreerime seda menetlust valemi (7) puhul. Oletame vastuväiteliselt, et valem (7) on mingi väärtustuse korral tõene, ja püüame selle väärtustuse leida. Kui see katse lõpeb vastuolu tekimisega, siis ei saa valem (7) olla tõene mitte mingisuguse väärtustuse korral ja on seega samaselt väär.

Arvutused esitame tabelina, kus numbritega on märgitud tehte järjekord. Kasutame asjaolu, et ekvivalents on tõene siis ja ainult siis, kui mõlematel ekvivalentsi pooltel on sama tõeväärtus.

	X	\vee	Y	\sim	\neg	X	$\&$	\neg	Y
	(8)	(2)	(9)	(1)	(4)	(6)	(3)	(5)	(7)
1)	v	t	v	t	t	v	t	t	v
		v							
		(10)							
	(4)	(2)	(5)	(1)	(8)	(6)	(3)	(9)	(7)
2)	v	v	v	t	t	v	v	t	v
							t		
							(10)		

Juhul 1) ilmneb vastuolu sammude (2) ja (10) tulemustes (disjunktsioon peab samaaegselt olema tõene ja väär), juhul 2) aga sammude (3) ja (10) tulemustes, mis ütlebki, et valem (7) on samaselt väär.

Seega on lausearvutuse valemeid kolme liiki: ühed on samaselt tõesed, teised samaselt väärad ja kolmandad on mõne väärtustuse korral tõesed, mõne väärtustuse korral väärad. Esimest kaht liiki valemeid nimetatakse ka loogiliselt determineeritud (ehk loogiliselt määratud) valemiteks, kolmandat liiki valemid on loogiliselt determineerimata (loogiliselt määramata) valemid.

Defineerime veel valemi tõesus- ja vääruspiirkonna mõiste. Valemi \mathfrak{A} tõesuspiirkonnaks nimetame kõigi nende väärtustuste hulka, mille korral see valem on tõene. Valemi \mathfrak{A} tõesuspiirkonda tähistame $M_t(\mathfrak{A})$. Valemi \mathfrak{A} vääruspiirkond on kõigi nende väärtustuste hulk, mille korral see valem on väär. Vääruspiirkonda tähistame $M_v(\mathfrak{A})$. Iga valemi \mathfrak{A} puhul on hulgad $M_t(\mathfrak{A})$ ja $M_v(\mathfrak{A})$ üheselt määratud.

Tähistades valemi \mathfrak{A} kõigi väärtustuste hulga $M(\mathfrak{A})$ abil, saame üles kirjutada järgmised ilmsed võrdused:

$$M(\mathfrak{A}) = M_t(\mathfrak{A}) \cup M_v(\mathfrak{A})$$

ja

$$M_t(\mathfrak{A}) \cap M_v(\mathfrak{A}) = \emptyset$$

(valemi tõesus- ja vääruspiirkondade summa võrdub kõikide väärtustuste hulgaga; tõesus- ja vääruspiirkondadel pole ühiseid elemente).

Samaselt tõese valemi puhul kehtivad võrdused $M_t(\mathfrak{A}) = M(\mathfrak{A})$ ja $M_v(\mathfrak{A}) = \emptyset$, samaselt väära valemi puhul aga $M_v(\mathfrak{A}) = M(\mathfrak{A})$ ja $M_t(\mathfrak{A}) = \emptyset$.

Märgime, et iga lausearvutuse valem $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ defi-

neerib hulgal $M(\mathfrak{M})$ teatava kahendmuutujate X_1, X_2, \dots, X_n funktsiooni²

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{cases} t, & \text{kui } (X_1, X_2, \dots, X_n) \in M_t(\mathfrak{M}), \\ v, & \text{kui } (X_1, X_2, \dots, X_n) \in M_v(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

mida nimetame valemi \mathfrak{A} karakteristikuks funktsiooniks. See vastavus pole üks-ühene: erinevatel valemitel võivad olla samad karakteristikud funktsioonid. Valemid

$$X \rightarrow Y \quad \text{ja} \quad \bar{X} \vee Y$$

näiteks on erinevad, kuid neil on sama karakteristik funktsioon

$$f(X, Y) = \begin{cases} t, & \text{kui } (X, Y) \in \{(t, t), (v, t), (v, v)\}, \\ v, & \text{kui } (X, Y) \in \{(t, v)\}. \end{cases}$$

§ 3. SAMASELT TÕESED VALEMID

Kuigi samaselt tõesed lausearvutuse valemid ei saa sisaldada informatsiooni komponentlausete abil kirjeldatavate olukordade kohta, on nad olulised lausearvutuse ülesehitamisel.³

Samaselt tõeste valemite hulgas on kõige olulisemad samaselt tõesed ekvivalentsid, s. t. samaselt tõesed valemid kujul

$$(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B}). \quad (1)$$

Kui valem (1) on samaselt tõene, siis peab valemil \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} iga väärtustuse korral olema üks ja sama tõeväärtus. Tõeväärtuse seisukohalt lähtudes võib seega valemi \mathfrak{A} asemel kasutada valemil \mathfrak{B} ja ümberpöörduvalt.

Kui valem (1) on samaselt tõene, siis nimetame valemid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} loogiliselt samaväärseteks valemiteks. Asjaolu, et valemid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on loogiliselt samaväärsed, tähistame

$$\mathfrak{A} \stackrel{\sim}{=} \mathfrak{B}. \quad (2)$$

Seejuures märgime, et avaldis (2) pole lausearvutuse valem, vaid teatav väide kahe lausearvutuse valemi kohta. Kirjutisi kujul (2) nimetame seosteks.

Valemite loogilist samaväärsust võib defineerida ka veel teisel

² Võrdusmärki kasutame funktsioonide ja avaldiste korral, nagu $X \rightarrow t = t$, $X \& t = X$, $t \vee v = t$, samuti ka valemite defineerimisel, nagu $\mathfrak{A}(X, Y) = X \rightarrow Y$ (s. t. valem \mathfrak{A} on nimelt $X \rightarrow Y$).

³ Vaatleme näiteks samaselt tõest valemil $A \vee \bar{A}$, kus A abil olgu tähistatud lause «Täna sajab vihma». Valem $A \vee \bar{A}$ ei sisalda mingit informatsiooni selle kohta, kas täna sajab või mitte.

viisil, kuid enne seda tuleb tähelepanu juhtida ühele asjaolule. Nimelt ei nõua valemite \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} loogiline samaväärsus seda, et neil oleksid ainult ühed ja needsamad komponentlauseid. Nii on näiteks valemid

$$\mathfrak{A} = X \rightarrow Y \quad (3)$$

ja

$$\mathfrak{B} = (X \rightarrow Y) \vee (Y \& \bar{Z}) \quad (4)$$

loogiliselt samaväärsed, kuigi valemis \mathfrak{B} esineb komponentlause Z , mis valemis \mathfrak{A} ei esine. Samasugune on loomulikult vahekord ka valemite (3) ja (4) karakteristiklike funktsioonide argumentide vahel. Argument Z valemis \mathfrak{B} karakteristiklikus funktsioonis aga tegelikult mingit osa ei etenda, ta on seal ainult fiktiivne argument.

Kahendmuutuja funktsiooni $f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$ argumenti (muutujat) X_i nimetame fiktiivseks, kui võrdus $f(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) = f(X_1, \dots, X_{i-1}, \bar{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$ kehtib muutujate $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ kõikide väärtustuste korral. Kui muutuja X_i pole fiktiivne, nimetame teda tegelikuks muutujaks.

Kahendmuutuja funktsioone f_1 ja f_2 , mis erinevad teineteisest ainuüksi fiktiivsete argumentide poolest, me ei loe oluliselt erinevateks funktsioonideks.

Seega võime öelda, et valemid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on loogiliselt samaväärsed siis ja ainult siis, kui nende karakteristiklikud funktsioonid pole oluliselt erinevad.

Selgitame, missugune on vahekord loogiliselt samaväärsete valemite tõesuspiirkondade (*resp.* vääruspiirkondade) vahel.

Kui loogiliselt samaväärsetel valemitel \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on ühed ja needsamad komponentlauseid, siis on vahekord ilmne: nende valemite tõesus- ja vääruspiirkonnad peavad olema vastavalt võrdsed:

$$M_t(\mathfrak{A}) = M_t(\mathfrak{B})$$

ja

$$M_v(\mathfrak{A}) = M_v(\mathfrak{B}).$$

Vahekord komplitseerub aga juhul, kui valemitel \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on ka erinevaid komponentlauseid [nagu valemite (3) ja (4) korral]. Valemite (3) ja (4) tõesuspiirkonnad on

$$M_t(\mathfrak{A}) = \{(t, t), (v, t), (v, v)\}$$

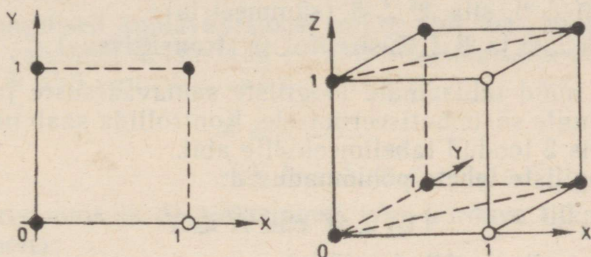
ja

$$M_t(\mathfrak{B}) = \{(t, t, v), (v, t, v), (v, v, v), (t, t, t), (v, t, t), (v, v, t)\}.$$

Need hulgad pole otseselt võrreldavad, sest nende elemendid on erinevad objektid (ühel järjestatud paarid ehk geomeetrilises

interpretatsioonis punktid tasandil, teisel järjestatud kolmikud ehk punktid ruumis).

Kujutame hulki $M_t(\mathfrak{A})$ ja $M_t(\mathfrak{B})$ geomeetriliselt (joon. 1).



Joon. 1

(joonisel on võetud t ja v asemel vastavalt 1 ja 0).

Geomeetrilisest interpretatsioonist nähtub, et hulka $M_t(\mathfrak{B})$ võib vaadelda kui silindrit, mille põhi asub XY -tasandil. Oluline on seejuures, et silindri $M_t(\mathfrak{B})$ põhi on samasuguse ehitusega kui hulk $M_t(\mathfrak{A})$. Hulga $M_t(\mathfrak{B})$ elementide kolmas koordinaat Z on seega fiktiivne: olenemata selle väärtustest element kuulub (või ei kuulu) hulka $M_t(\mathfrak{B})$. Kui hulga elemendi kaks esimest koordinaati on näiteks t, t , siis kuulub see element hulka $M_t(\mathfrak{B})$ olenemata Z väärtusest.

Üldiselt, kui hulga M elemendid on vektorid kujul

$$(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) \quad (5)$$

(X_1, X_2, \dots, X_n võivad omandada väärtusi t ja v), siis nimetame hulga M elementide i -ndat koordinaati X_i fiktiivseks, kui vahekorrad

$$(X_1, \dots, X_{i-1}, t, X_{i+1}, \dots, X_n) \in M$$

ja

$$(X_1, \dots, X_{i-1}, v, X_{i+1}, \dots, X_n) \in M$$

iga $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ korral üheaegselt kehtivad või ei kehti. Elemendi (5) kuulumine või mittekuulumine hulka M ei olene seega üldse fiktiivsete koordinaatide väärtustest. Kui koordinaat X_i pole fiktiivne, siis nimetame teda tegelikuks koordinaadiks.

Hulga M põhihulgaks nimetame hulka, mille moodustavad hulga M elemendid (vektorid), milles on säilitatud ainult tegelikud koordinaadid.

Et esitatud näites on koordinaat Z fiktiivne, siis on kerge näha, et hulga $M_t(\mathfrak{B})$ põhihulk on võrdne hulgaga $M_t(\mathfrak{A})$. Seega võime öelda, et valemid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on loogiliselt samaväärsed siis ja ainult siis, kui nende tõesuspirkondade põhihulgad on võrdsed. Analooiline väide kehtib ka vääruspiirkondade puhul.

Märgime, et loogilisel samaväärsusel on kolm põhiomadust:

1° iga valemi \mathfrak{A} korral kehtib $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}$ (loogilise samaväärsuse refleksiivsus ehk enesekohasus);

2° kui $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, siis $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ (sümmeetria);

3° kui $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$, siis $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$ (transitiivsus).

Asume nüüd tähtsamate loogiliste samaväärsuste ja samaselt tõeste valemite süstematiseerimisele. Kontrollida saab neid seoseid paragrahvis 2 toodud tabelimeetodite abil.

1. Loogiliste tehete põhiomadused:

$$\neg\neg X \sim X \text{ ehk } \overline{\overline{X}} \sim X \quad (6)$$

(kahekordse eituse võib ära jätta);

$$X \& Y \sim Y \& X, \quad (7)$$

$$X \vee Y \sim Y \vee X \quad (8)$$

(konjunktsiooni ja disjunktsiooni kommutatiivsus);

$$(X \& Y) \& Z \sim X \& (Y \& Z), \quad (9)$$

$$(X \vee Y) \vee Z \sim X \vee (Y \vee Z) \quad (10)$$

(konjunktsiooni ja disjunktsiooni assotsiatiivsus);

$$X \& (Y \vee Z) \sim (X \& Y) \vee (X \& Z), \quad (11)$$

$$X \vee (Y \& Z) \sim (X \vee Y) \& (X \vee Z) \quad (12)$$

(konjunktsiooni distributiivsus disjunktsiooni suhtes ja disjunktsiooni distributiivsus konjunktsiooni suhtes);

$$\neg(X \& Y) \sim \overline{X} \vee \overline{Y}, \quad (13)$$

$$\neg(X \vee Y) \sim \overline{X} \& \overline{Y} \quad (14)$$

(konjunktsiooni ja disjunktsiooni duaalsus).

2. Loogilised samaväärsused, kus implikatsioon, ekvivalents, mitteekvivalents ja alternatiivne eitus on avaldatud konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse kaudu:

$$X \rightarrow Y \sim \overline{X} \vee Y, \quad (15)$$

$$X \rightarrow Y \sim \neg(X \& \overline{Y}), \quad (16)$$

$$X \sim Y \sim (X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X), \quad (17)$$

$$X \sim Y \sim (\overline{X} \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}), \quad (18)$$

$$X \sim Y \sim (X \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y}), \quad (19)$$

$$X \approx Y \sim \neg(X \sim Y), \quad (20)$$

$$X \approx Y \sim (X \vee Y) \& (\overline{X} \vee \overline{Y}), \quad (21)$$

$$X \approx Y \stackrel{!}{\sim} (X \& \bar{Y}) \vee (\bar{X} \& Y), \quad (22)$$

$$X/Y \stackrel{!}{\sim} \neg(X \& Y), \quad (23)$$

$$X/Y \stackrel{!}{\sim} \bar{X} \vee \bar{Y}. \quad (24)$$

3. Loogilised samaväärsused, mille abil on võimalik lausearvutuse valemeid lihtsustada (\mathfrak{A} abil tähistame siin samaselt tõest valemite, \mathfrak{B} abil samaselt väära valemite):

$$X \& X \stackrel{!}{\sim} X, \quad (25)$$

$$X \vee X \stackrel{!}{\sim} X \quad (26)$$

(konjunktsioonis ja disjunktsioonis võib korduva liikme kirjutada ühekordselt);

$$X \vee \bar{X} \stackrel{!}{\sim} \mathfrak{A} \quad (27)$$

(lause ja tema eituse disjunktsioon on samaselt tõene);

$$X \& \bar{X} \stackrel{!}{\sim} \mathfrak{B} \quad (28)$$

(lause ja tema eituse konjunktsioon on samaselt väär);

$$X \vee \mathfrak{A} \stackrel{!}{\sim} \mathfrak{A} \quad (29)$$

(kui disjunktsioonis on samaselt tõene liige, siis on kogu disjunktsioon samaselt tõene);

$$X \vee \mathfrak{B} \stackrel{!}{\sim} X \quad (30)$$

(samaselt väära liikme võib disjunktsioonis ära jätta);

$$X \& \mathfrak{A} \stackrel{!}{\sim} X \quad (31)$$

(samaselt tõese liikme võib konjunktsioonis ära jätta);

$$X \& \mathfrak{B} \stackrel{!}{\sim} \mathfrak{B} \quad (32)$$

(kui konjunktsioonis on samaselt väär liige, siis on kogu konjunktsioon samaselt väär).

4. Lõpuks esitame veel mõned samaselt tõesed implikatsioonid:

$$X \& Y \rightarrow X, \quad (33)$$

$$X \& Y \rightarrow Y, \quad (34)$$

$$X \rightarrow X \vee Y, \quad (35)$$

$$Y \rightarrow X \vee Y. \quad (36)$$

Seoste (6) — (36) puhul teeme nüüd rea märkusi.

Kõigepealt tähendame, et seosed (6) — (36) kehtivad ka sel juhul, kui muutujad X, Y, Z on substitueeritud mistahes lausearvutuse valemitega.

T e o r e e m 1. Kui valem \mathfrak{A} on samaselt tõene, siis on samaselt tõene ka valem $S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$.

Tõestus. 1) Kui valem \mathfrak{A} ei sisalda muutujat X , siis $S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, millega teoreemi kehtivus on sel juhul näidatud.

2) Kui valem \mathfrak{A} sisaldab muutujat X , siis on valem \mathfrak{A} tõene sõltumatult X tõeväärtustest t ja v . Kuid valem \mathfrak{B} saab omandada ainult neidsamu väärtusi. Järelikult peab valem \mathfrak{A} jääma samaselt tõeseks ka pärast substituutsiooni teostamist.

Järeldus 1. Kui $\mathfrak{A} \stackrel{t}{\sim} \mathfrak{B}$, siis $S_X^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{A}) \stackrel{t}{\sim} S_X^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{B})$.

Tõestus tugineb asjaolul, et $(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B})$ on samaselt tõene valem ja

$$S_X^{\mathfrak{C}}[(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B})] = S_X^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{A}) \sim S_X^{\mathfrak{C}}(\mathfrak{B})$$

on teoreemi 1 põhjal samaselt tõene.

Näide 1. Teostades seoses (7) substituutsiooni $S_X^{X \rightarrow Z}$, saame seose

$$(X \rightarrow Z) \& Y \stackrel{t}{\sim} Y \& (X \rightarrow Z).$$

Teoreem 2. Kui valemis \mathfrak{A} asendada mingi osavalem \mathfrak{B} (kas ühes, mitmes või kõikides kohtades) temaga loogiliselt samaväärse valemiga \mathfrak{C} , siis on esialgne valem $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ loogiliselt samaväärne asendamisel saadud valemiga $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$.

Tõestus. Et valemitel \mathfrak{B} ja \mathfrak{C} on kõikide väärtustuste korral vastavalt ühed ja samad tõeväärtused, siis valemis \mathfrak{A} asendamine valemiga \mathfrak{C} valemis \mathfrak{A} ei saa muuta valemis \mathfrak{A} tõeväärtusi.

Näide 2. Asendame valemis

$$(X \rightarrow Y) \& Z$$

osavalemi $X \rightarrow Y$ temaga loogiliselt samaväärse valemiga $\bar{X} \vee Y$ [seos (15)]. Teoreemi 2 põhjal võime kirjutada

$$(X \rightarrow Y) \& Z \stackrel{t}{\sim} (\bar{X} \vee Y) \& Z.$$

Näide 3. Teisendame valemis

$$\bar{X} \& \neg(Y \vee \bar{Z})$$

teoreemide 1 ja 2 põhjal. Substituutsiooni $S_{X,Y}^{\bar{Y},\bar{Z}}$ abil saame seosest (14)

$$\neg(Y \vee \bar{Z}) \stackrel{t}{\sim} \bar{Y} \& \bar{Z}.$$

Teoreemi 2 põhjal saame

$$\bar{X} \& \neg(Y \vee \bar{Z}) \stackrel{t}{\sim} \bar{X} \& (\bar{Y} \& \bar{Z}),$$

kust seose (6) põhjal

$$\bar{X} \& (\bar{Y} \& \bar{Z}) \stackrel{t}{\sim} \bar{X} \& (\bar{Y} \& Z).$$

Võimase 10 päeva jaoks
Sisenemiseleht

Seega

$$\bar{X} \& \neg(Y \vee \bar{Z}) \stackrel{!}{\sim} X \& (\bar{Y} \& Z).$$

Tuginedes seostele (6) — (36) ning rakendades teoreeme 1 ja 2, saame tõestada rea vajalikke seoseid.

1) n lause konjunktsiooni ja disjunktsiooni puhul pole oluline lausete järjekord ega sulgude asetus, sest tulemuse tõeväärtus sellest ei sõltu.

Seega

$$\begin{aligned} & (\dots((X_1 \& X_2) \& X_3) \& \dots \& X_n) \stackrel{!}{\sim} \\ & \stackrel{!}{\sim} (\dots((X_{\alpha_1} \& X_{\alpha_2}) \& X_{\alpha_3}) \& \dots \& X_{\alpha_n}) \end{aligned} \quad (37)$$

ja

$$\begin{aligned} & (\dots((X_1 \vee X_2) \vee X_3) \vee \dots \vee X_n) \stackrel{!}{\sim} \\ & \stackrel{!}{\sim} (\dots((X_{\alpha_1} \vee X_{\alpha_2}) \vee X_{\alpha_3}) \vee \dots \vee X_{\alpha_n}), \end{aligned} \quad (38)$$

kus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ on mingi permutatsioon indeksitest 1, 2, 3, ..., ..., n .

Seoseid (37) ja (38) saab tõestada näiteks väärtustuste abil kontrollimise teel.

Seoste (37) ja (38) tõttu võime n liikme konjunktsiooni ja disjunktsiooni puhul sulud ära jätta, kirjutades lihtsalt

$$X_1 \& X_2 \& \dots \& X_n \quad (39)$$

ja

$$X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n.$$

Komponentlausete konjunktsioonis, nagu seda on valem (39), võime soovi korral ära jätta ka konjunktsioonimärgi, kirjutades lihtsalt

$$X_1 X_2 \dots X_n.$$

Äsja toodud kokkuleppeid võib jällegi vaadelda kui lisandusi lausearvutuse valemi definitsioonile.

2) Distributiivsuse seosed kehtivad samuti mistahes n liikme korral:

$$X \& (Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_n) \stackrel{!}{\sim} (X \& Y_1) \vee (X \& Y_2) \vee \dots \vee (X \& Y_n) \quad (40)$$

ja

$$X \vee (Y_1 \& Y_2 \& \dots \& Y_n) \stackrel{!}{\sim} (X \vee Y_1) \& (X \vee Y_2) \& \dots \& (X \vee Y_n). \quad (41)$$

Kehtivad veelgi üldisemad seosed:

$$\begin{aligned} & (X_{11} \vee X_{12} \vee \dots \vee X_{1n_1}) \& (X_{21} \vee X_{22} \vee \dots \vee X_{2n_2}) \& \dots \\ & \dots \& (X_{k1} \vee X_{k2} \vee \dots \vee X_{kn_k}) \stackrel{!}{\sim} \\ & \stackrel{!}{\sim} X_{11} X_{21} \dots X_{k1} \vee X_{11} X_{21} \dots X_{k2} \vee \dots \end{aligned} \quad (42)$$

$$\dots \vee X_{11}X_{2n_2} \dots X_{kn_k} \vee \dots \vee X_{1n_1}X_{2n_2} \dots X_{kn_k}$$

ja

$$X_{11}X_{12} \dots X_{1n_1} \vee X_{21}X_{22} \dots X_{2n_2} \vee \dots \vee X_{k1}X_{k2} \dots X_{kn_k} \overset{l}{\sim} \\ \overset{l}{\sim} (X_{11} \vee X_{21} \vee \dots \vee X_{k1}) \& (X_{11} \vee X_{21} \vee \dots \vee X_{k2}) \& \dots \quad (43) \\ \dots \& (X_{11} \vee X_{2n_2} \vee \dots \vee X_{kn_k}) \& \dots \& (X_{1n_1} \vee X_{2n_2} \vee \dots \vee X_{kn_k}).$$

Tõestame näiteks seose (42). Selleks näitame, et seose (42) vasaku poole tõesusest järeldub parema poole tõesus ja vasaku poole väärusest järeldub parema poole väärus.

Tõepoolest, kui seose (42) vasak pool on tõene, peavad olema tõesed mingisugused komponentlauseid

$$X_{1t_1}, X_{2t_2}, \dots, X_{kt_k} \quad (1 \leq t_i \leq n_i; i = 1, 2, \dots, k).$$

Siis on aga tõene ka nende lausete konjunktsioon

$$X_{1t_1}X_{2t_2} \dots X_{kt_k},$$

mis esineb seose (42) paremal poolel. Seega on ka parem pool tõene.

Kui seose (42) vasak pool on väär, siis peab väär olema vähemalt üks vasaku poole liige

$$X_{i1} \vee X_{i2} \vee \dots \vee X_{in_i},$$

millest järeldub, et

$$X_{i1} = X_{i2} = \dots = X_{in_i} = v.$$

Igas seose (42) parema poole liikmes on aga i -ndal kohal mingi komponentlause X_{ij} ($1 \leq j \leq n_i$), mis muudab vääraks kõik need liikmed. Seega on ka seose (42) parem pool väär.

Seos (42) on sellega tõestatud.

Seoseid (40), (41) ja (43) saab tõestada analoogilisel viisil.

3) Üldistada saab ka duaalsuse seoseid (13) ja (14). Vaatleme valemite, mis on konstrueeritud ainult konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse abil. Piirdudes selliste valemitega, defineeritakse valemite duaalsuse mõiste. Valemite \mathfrak{A} ja \mathfrak{A}^* nimetatakse duaalseteks, kui üks saadakse teisest konjunktsiooni- ja disjunktsioonimärkide ümbervahetamise teel. Nii on duaalsed valemid

$$X \& (Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_n) \text{ ja } X \vee (Y_1 \& Y_2 \& \dots \& Y_n).$$

T e o r e e m 3. Valemi \mathfrak{A} eituse on loogiliselt samaväärne valemi \mathfrak{A} duaalse valemiga, kus kõik komponentlauseid on asendatud nende eitustega, s. t.

$$\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n) \overset{l}{\sim} \mathfrak{A}^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n). \quad (44)$$

Tõestus. Seost (44) saab tõestada seoste (13) ja (14) korduval rakendamisel, arvestades ka järeldust 1.

Teoreem 4. Kui $\mathfrak{A} \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{B}$, siis $\mathfrak{A}^* \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{B}^*$.

Tõestus. Lähtume seosest (44). Saame

$$\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{B}^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n). \quad (45)$$

Kui $\mathfrak{A} \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{B}$, siis ilmselt ka $\neg \mathfrak{A} \stackrel{L}{\sim} \neg \mathfrak{B}$, kust seoseid (44) ja (45) kasutades saame

$$\mathfrak{A}^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{B}^*(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n).$$

Teostades substituutsiooni $S_{\substack{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n \\ X_1, X_2, \dots, X_n}}$ ning kasutades seost (6) ja järeldust 1 saamegi soovitud tulemus.

Teoreemi 4 põhjal võib näiteks seosest (40) otsekohe saada seose (41), seosest (42) seose (43).

4) Ka samaselt tõeste implikatsioonide kohta võib anda üldise teoreemi.

Teoreem 5. Valem

$$(\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)) \rightarrow (\mathfrak{B}(X_1, X_2, \dots, X_n)) \quad (46)$$

on samaselt tõene siis ja ainult siis, kui valemi \mathfrak{A} tõesuspiirkond sisaldub \mathfrak{B} tõesuspiirkonnas.

Tõestus. Kui kehtib seos $M_t(\mathfrak{A}) \subset M_t(\mathfrak{B})$, siis väärtustus, mille korral \mathfrak{A} on tõene, muudab tõeseks ka \mathfrak{B} . Seega on valem (46) samaselt tõene. Teiselt poolt, kui valem (46) on samaselt tõene, siis ei saa esineda väärtustust, mille korral \mathfrak{A} oleks tõene ja \mathfrak{B} väär, s. t. \mathfrak{A} tõesusest peab järelduma \mathfrak{B} tõesus. Seega peab kehtima seos $M_t(\mathfrak{A}) \subset M_t(\mathfrak{B})$, m. o. t. t.

Märkus. Kui \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} ei sisalda ühtesid ja samu muutujaid, siis võib neid täiendada fiktiivsete muutujatega.

Näide 4. Selgitame, kas valem

$$X \& Y \& Z \rightarrow X \& Z \quad (47)$$

on samaselt tõene. Täiendades tagaliiget fiktiivse muutujaga Y , võime öelda, et eeslikme tõesuspiirkond $M_t(\mathfrak{A}) = \{(t, t, t)\}$ sisaldub tagaliikme tõesuspiirkonnas $M_t(\mathfrak{B}) = \{(t, v, t), (t, t, t)\}$, mistõttu valem (47) on samaselt tõene.

§ 4. LAUSEARVUTUSE VALEMITE NORMAALKUJUD

Lausearvutuse rakendustes, valemite lihtsustamisel ja mitmete teiste küsimuste lahendamisel on sageli otstarbekohane kasutada valemite normaalkujusid. Valemi normaalkujud on antud valemiga loogiliselt samaväärsed spetsiaalse ehitusega valemid, mis on ülevaatlikumad ja rakendamisel mugavamad kui mistahes ehitusega valemid. Normaalkujud on kahte tüüpi: disjunktiivsed ja

konjunktiiwsed, mis omakorda jagunevad veel täielikeks ja mitte-täielikeks.

Kõigepealt toome mõned vajalikud tähised ja mõisted.

Sümboleid t ja v astmenäitaja kohal mõistame järgmiselt:

$$X^t = X, \quad X^v = \bar{X}.$$

Seega kehtivad võrdused

$$t^t = t, \quad t^v = v, \quad v^t = v, \quad v^v = t$$

ehk kokkuvõtlikult

$$a^\beta = \begin{cases} t, & \text{kui } \alpha = \beta, \\ v, & \text{kui } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

kus α ja β on kahendmuutujad, mis võivad omandada väärtusi t ja v .

Konjunksiooni

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n} \quad (1)$$

nimetame elementaarconjunksiooniks, kui selles iga muutuja X_i (kas kujul X_i või \bar{X}_i) esineb mitte üle ühe korra. Conjunksiooni (1) nimetame täielikuks elementaarconjunksiooniks, kui selles iga muutuja (mingist kindlast muutujate hulgast) esineb täpselt üks kord.

Analoogiliselt võime defineerida elementaardisjunksiooni ja täieliku elementaardisjunksiooni mõiste.

Tõestame nüüd mõned teoreemid kahendmuutuja funktsioonide kohta, millel on enesestmõistetavalt otsene tähendus ka lausearvutuse valemite jaoks.

Teoreem 1. Iga kahendmuutuja funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$, kus $n \geq 1$, võib esitada kujul ⁴

$$\begin{aligned} & f(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) = \\ & = \bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_k^{\alpha_k} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, X_{k+1}, \dots, X_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Esitust kujul (2) nimetatakse funktsiooni disjunktiiwseks arenduseks muutujate X_1, X_2, \dots, X_k järgi.

Tõestus. Näitame, et võrdus (2) kehtib mingi suvalise komponentalause väärtustuse ($X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n$) korral. Ilmselt kehtib tulemus

⁴ Kirjutiste $\bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \mathfrak{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ja $\&_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \mathfrak{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ abil tähistame vastavalt disjunkttsiooni ja conjunkttsiooni liikmetest $\mathfrak{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, kusjuures muutujad $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ omandavad kõikvõimalikud väärtused t ja v üksteisest sõltumatult.

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_k^{\alpha_k} = \begin{cases} t, & \text{kui } X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2, \dots, X_k = \alpha_k; \\ v, & \text{teistel juhtudel.} \end{cases} \quad (3)$$

Annahme muutujatele $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ kõikvõimalikud väärtused ja moodustame konjunktsioonid

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_k^{\alpha_k} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, X_{k+1}, \dots, X_n). \quad (4)$$

Võrduse (3) tõttu on need kõik väärad, välja arvatud üks, kus $\alpha_1 = X_1, \alpha_2 = X_2, \dots, \alpha_k = X_k$. Arvestades seda, et väärad liikmed võib disjunktsioonis ära jätta [§ 3, seos (30)], saame võrduse (2) paremal poolel ainult ühe liikme kujul (4), kus $\alpha_1 = X_1, \alpha_2 = X_2, \dots, \alpha_k = X_k$. Et sel juhul $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_k^{\alpha_k} = t$, siis võime ka selle kirjutamata jätta [§ 3, seos (31)], millega saame seose (2) paremale poolele $f(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$, m. o. t. t.

J ä r e l d u s 1. Kui $f(X_1, \dots, X_n)$ pole samaselt väär, siis on ta esitatav kujul

$$f(X_1, \dots, X_n) = \bigvee_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = t}} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}. \quad (5)$$

T õ e s t u s. Teoreemi 1 põhjal võime kirjutada

$$f(X_1, \dots, X_n) = \bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (6)$$

Et liikmed $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kus $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = v$, on ise ka väärad, siis võime nad disjunktsioonis (6) kirjutamata jätta. Arvestades ainult neid liikmeid, mille korral $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = t$, saamegi võrduse (5).

Võrduse (5) paremat poolt nimetame funktsiooni $f(X_1, \dots, X_n)$ täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks. Analoogiliselt nimetame valemi $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$ täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks (muutujate X_1, \dots, X_n suhtes) täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni, mis on loogiliselt samaväärne valemiga $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$.

Järelduse 1 põhjal võime väita, et igal funktsioonil $f(X_1, \dots, X_n)$ või valemil $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$, mis pole samaselt väär, on olemas täielik disjunktiivne normaalkuju.

J ä r e l d u s 2. Iga kahendmuutuja funktsiooni saab esitada lausearvutuse valemiga, mis on moodustatud ainult konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse abil.

T õ e s t u s. Arvestame asjaolu, et samaselt väära funktsiooni $f(X_1, \dots, X_n)$ saame esitada valemiga $X_1 \& \bar{X}_1$ ja mitte samaselt väärade funktsioonide puhul on kehtiv võrdus (5).

Näide 1. Leiame valemi $X \sim Y$ täieliku disjunktiivse normaalkuju. Et valem (või vastav karakteristik funktsioon) on tõene väärtustuste (t, t) ja (v, v) korral, saame võrduse (5) põhjal

$$X \sim Y \sim X^t Y^t \vee X^v Y^v \sim XY \vee \overline{XY}.$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $f(X, Y, Z)$ (mis on defineeritud tabeli 7 abil) täieliku disjunktiivse normaalkuju.

Tabel 7

X	Y	Z	$f(X, Y, Z)$
1)	t	t	t
2)	t	t	v
3)	t	v	t
4)	t	v	v
5)	v	t	v
6)	v	t	t
7)	v	v	t
8)	v	v	v

Võrduse (5) põhjal võime selle kohe üles kirjutada:

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z) &= X^t Y^t Z^t \vee X^t Y^v Z^t \vee X^v Y^t Z^v \vee X^v Y^v Z^t \vee X^v Y^v Z^v = \\ &= XYZ \vee X\overline{Y}Z \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z}. \end{aligned}$$

Näide 3. Leiame funktsiooni (resp. valemi)

$$(X \& \overline{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) \quad (7)$$

täieliku disjunktiivse normaalkuju, lähtudes funktsiooni disjunktiivsest arendusest (2). Arendades funktsiooni muutuja X järgi, saame

$$\begin{aligned} (X \& \overline{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) &= \{X \& [(t \& \overline{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)]\} \vee \{\overline{X} \& \\ &\& [(v \& \overline{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)]\} = \{X \& [\overline{Y} \sim (Y \rightarrow Z)]\} \vee \\ &\vee \{\overline{X} \& [\overline{1}(Y \rightarrow Z)]\}. \end{aligned}$$

Viimasel sammul kasutasime seoseid $t \& \overline{Y} = \overline{Y}$, $v \& \overline{Y} = v$ ja $v \sim \overline{1} = \overline{1}$. Nüüd rakendame nurksulgudes olevatele avaldistele samasugust menetlust, arendades neid Y järgi. Saame

$$\begin{aligned} (X \& \overline{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) &= \{XY \& [v \sim (t \rightarrow Z)]\} \vee \{X\overline{Y} \& [t \sim \\ &\sim (v \rightarrow Z)]\} \vee \{\overline{X}Y \& [\overline{1}(t \rightarrow Z)]\} \vee \{\overline{X}\overline{Y} \& [\overline{1}(v \rightarrow Z)]\} = \\ &= \{XY \& [\overline{Z}]\} \vee \{X\overline{Y} \& [Z \vee \overline{Z}]\} \vee \{\overline{X}Y \& [\overline{Z}]\} \vee \{\overline{X}\overline{Y} \& \\ &\& [Z \& \overline{Z}]\} = XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}Y\overline{Z}, \end{aligned}$$

mis ongi funktsiooni (valemi) (7) täielik disjunktiivne normaalkuju.

Viimane loogelistes sulgudes olev avaldis on samaselt väär (on konjunktsioon kujul $\overline{X}Y\overline{Z}\overline{Z}$) ja jääb seetõttu kirjutamata.

Täieliku konjunktiivse normaalkuju leidmiseks tuleb kõigepealt tõestada järgmine teoreem.

T e o r e e m 2. Kui kahendmuutuja funktsioon $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, kus $n \geq 1$, pole samaselt tõene, siis on ta esitatav kujul

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigwedge_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ f(a_1, \dots, a_n) = v}} (\overline{X}_1^{a_1} \vee \overline{X}_2^{a_2} \vee \dots \vee \overline{X}_n^{a_n}). \quad (8)$$

T õ e s t u s. Et eelduse kohaselt $f(X_1, X_2, \dots, X_n) \not\equiv t$, siis $\neg f(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv v$ ja funktsiooni $\neg f$ korral saab kasutada võrdust (5):

$$\neg f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ \neg f(a_1, \dots, a_n) = t}} X_1^{a_1} X_2^{a_2} \dots X_n^{a_n}. \quad (9)$$

Võrduse (9) mõlemat poolt eitades saame võrduse

$$\neg \neg f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \neg \left(\bigvee_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ \neg f(a_1, \dots, a_n) = t}} X_1^{a_1} X_2^{a_2} \dots X_n^{a_n} \right).$$

Jättes vasakul poolel ära kahekordse eituse, kasutades paremal poolel üldistatud duaalsuse seost (§ 3, teoreem 3) ning asendades tingimuse $\neg f(a_1, \dots, a_n) = t$ samaväärse tingimusega $f(a_1, \dots, a_n) = v$, saamegi võrduse (8).

Võrduse (8) paremat poolt nimetame funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ täielikuks konjunktiivseks normaalkujuks. Analoogiliselt nimetame valemi $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ täielikuks konjunktiivseks normaalkujuks (muutujate X_1, X_2, \dots, X_n suhtes) täielike elementaardisjunktsioonide konjunktsiooni, mis on loogiliselt samaväärne valemiga $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Teoreemi 2 põhjal võime väita, et igal funktsioonil või valemil, mis pole samaselt tõene, on olemas täielik konjunktiivne normaalkuju.

Toome nüüd kolm näidet täieliku konjunktiivse normaalkuju leidmise kohta.

N ä i d e 4. Leiame valemi $X \sim Y$ täieliku konjunktiivse normaalkuju. Et valem $X \sim Y$ on väär väärtustuste (t, v) ja (v, t) korral, siis võrdust (8) kasutades saame kirjutada

$$X \sim Y \stackrel{t}{\sim} (\overline{X}^t \vee \overline{Y}^v) \& (\overline{X}^v \vee \overline{Y}^t) \stackrel{v}{\sim} (\overline{X} \vee Y) \& (X \vee \overline{Y}),$$

mis ongi valemi $X \sim Y$ täielikuks konjunktiivseks normaalkujuks.

Näide 5. Leiame tabeli 7 abil defineeritud funktsiooni $f(X, Y, Z)$ täieliku konjunktiivse normaalkuju. Et $f(X, Y, Z) = v$ väärtustuste (t, t, v) , (t, v, v) ja (v, t, t) korral, siis võrdust (8) kasutades saame

$$f(X, Y, Z) = (\bar{X}^t \vee \bar{Y}^t \vee \bar{Z}^v) \& (\bar{X}^t \vee \bar{Y}^v \vee \bar{Z}^v) \& (\bar{X}^v \vee \bar{Y}^t \vee \bar{Z}^t) = \\ = (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z) \& (\bar{X} \vee Y \vee Z) \& (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}),$$

mis ongi $f(X, Y, Z)$ täielikuks konjunktiivseks normaalkujuks.

Märgime, et kehtib ka võrdus

$$f(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) = \quad (10) \\ = \& [\bar{X}_1^{\alpha_1} \vee \bar{X}_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee \bar{X}_k^{\alpha_k} \vee f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, X_{k+1}, \dots, X_n)], \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k$$

mida saab tõestada analoogiliselt teoreemi 2 tõestusega. Esitust kujul (10) nimetatakse funktsiooni konjunktiivseks arenduseks muutujate X_1, X_2, \dots, X_k järgi.

Näide 6. Leiame funktsiooni (*resp.* valemi)

$$(X \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) \quad (7)$$

täieliku konjunktiivse normaalkuju, lähtudes funktsiooni konjunktiivsest arendusest. Saame

$$(X \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) = \{ \bar{X} \vee [(t \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)] \} \& \{ X \vee \\ \vee [(v \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)] \} = \{ \bar{X} \vee [\bar{Y} \sim (Y \rightarrow Z)] \} \vee \\ \vee \{ X \vee [\top(Y \rightarrow Z)] \}.$$

Arendades saadud avaldist edasi Y järgi, võime kirjutada

$$(X \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) = \{ \bar{X} \vee \bar{Y} \vee [v \sim (t \rightarrow Z)] \} \& \\ \& \{ \bar{X} \vee Y \vee [t \sim (v \rightarrow Z)] \} \& \\ \& \{ X \vee \bar{Y} \vee [\top(t \rightarrow Z)] \} \& \{ X \vee Y \vee [\top(v \rightarrow Z)] \} = \\ = \{ \bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z} \} \& \{ \bar{X} \vee Y \vee (Z \vee \bar{Z}) \} \& \{ X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z} \} \& \\ \& \{ X \vee Y \vee (Z \& \bar{Z}) \} = \\ = (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \& (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \& \\ \& (X \vee Y \vee Z) \& (X \vee Y \vee \bar{Z}),$$

mis ongi funktsiooni (valemi) (7) täielik konjunktiivne normaalkuju. Teine loogelistes sulgudes olev avaldis $\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z \vee \bar{Z}$ pole

elementaardisjunktsioon, sest seal esinevad samaaegselt Z ja \bar{Z} . Et see liige on samaselt tõene, jääb ta kirjutamata.

Muutujate X_1, X_2, \dots, X_n suhtes täielik elementaarkonjunktsioon

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$$

on tõene täpselt ühe väärtustuse $X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n$ korral.

Analoogiliselt: muutujate X_1, X_2, \dots, X_n suhtes täielik elementaardisjunktsioon

$$X_1^{\alpha_1} \vee X_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee X_n^{\alpha_n}$$

on väär täpselt ühe väärtustuse $X_1 \neq a_1, X_2 \neq a_2, \dots, X_n \neq a_n$ korral.

Seega vastab täieliku disjunktiiivse normaalkuju igale liikmele (nn. disjunktiiivsele liikmele, mis ise kujutab endast kuidagi konjunktsiooni) täpselt üks väärtustus, mille korral see valem on tõene. Analoogiliselt vastab täieliku konjunktiivse normaalkuju igale liikmele (nn. konjunktiivsele liikmele) täpselt üks väärtustus, mille korral see valem on väär.

Seda asjaolu kasutasimegi nende normaalkujude konstrueerimiseks näidetes 1, 2, 4 ja 5. Kuid olles need normaalkujud leidnud mingil teisel viisil, nagu näidetes 3 ja 6, saame nende põhjal kohe välja kirjutada vastava valemi tõesus- ja vääruspiirkonna.

Näiteks valemi $(X \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)$ täieliku disjunktiiivse (näide 3) ja täieliku konjunktiivse (näide 6) normaalkuju põhjal saame kohe

$$M_t = \{(t, t, v), (t, v, t), (t, v, v), (v, t, v)\}$$

ja

$$M_v = \{(t, t, t), (v, t, t), (v, v, v), (v, v, t)\}.$$

Et n komponentlause korral on kõiki väärtustusi 2^n , iga väärtustus aga kuulub kas hulka M_t või M_v , siis peab nendes hulkades kokku olema 2^n elementi. Et igale M_t elemendile vastab parajasti üks täieliku disjunktiiivse normaalkuju liige ja M_v elemendile parajasti üks täieliku konjunktiivse normaalkuju liige, siis saame

$$d + k = 2^n,$$

kus d ja k tähistavad vastavalt täieliku disjunktiiivse ja täieliku konjunktiivse normaalkuju liikmete arvu. Üks-ühesest vastavusest M_t ja M_v elementide ja täielike normaalkujude liikmete vahel järeldub nende normaalkujude ühesus (liikmete järjekorra erinevusi mitte arvestades).

Kuigi täielikud normaalkujud on väga ülevaatlikud funktsioonide või valemite uurimisel, ei ole nad kaugeltki kõige lihtsamad

funktsioonide või valemite esitusviisid. Vaatleme näiteks tabeli 7 abil defineeritud funktsiooni $f(X, Y, Z)$ täielikku disjunktiivset normaalkuju

$$XYZ \vee X\bar{Y}Z \vee \bar{X}Y\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}Z \vee \bar{X}Y\bar{Z}.$$

Kasutades distributiivsuse seost, saame kokku võtta 1. ja 2. ning 4. ja 5. liikme, mille puhul saadav valem

$$[XZ \& (Y \vee \bar{Y})] \vee \bar{X}Y\bar{Z} \vee [\bar{X}\bar{Y} \& (Z \vee \bar{Z})]$$

on endisega loogiliselt samaväärne. Jättes nurksulgudes olevates konjunktsioonides samaselt tõesed valemid $Y \vee \bar{Y}$ ja $Z \vee \bar{Z}$ kirjutamata, saame valemi

$$XZ \vee \bar{X}Y\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}, \quad (11)$$

mis on esialgse valemiga loogiliselt samaväärne, kuid sisaldab palju vähem lausemärke.

Analoogiliselt $f(X, Y, Z)$ täielikku konjunktiivset normaalkuju

$$(\bar{X} \vee \bar{Y} \vee Z) \& (\bar{X} \vee Y \vee Z) \& (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})$$

lihtsustades saame

$$\begin{aligned} & \sim (\bar{X} \vee Z \vee [\bar{Y} \& Y]) \& (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \sim \\ & \sim (\bar{X} \vee Z) \& (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}). \end{aligned} \quad (12)$$

Valemeid (11) ja (12) nimetame funktsiooni $f(X, Y, Z)$ disjunktiivseks ja konjunktiivseks normaalkujuks.

Elementaarconjunksioonide disjunktsiooni, mis on loogiliselt samaväärne valemiga \mathfrak{A} , nimetame antud valemi disjunktiivseks normaalkujuks.

Analoogiliselt defineeritakse ka konjunktiivne normaalkuju.

Normaalkujude kohta võime väita järgmist.

1) Disjunktiivse normaalkuju liikmetest saame leida väärtustusi, mille korral see valem on tõene. Kui valem on samaselt väär, siis tal disjunktiivne normaalkuju puudub.

2) Konjunktiivse normaalkuju liikmetest saame leida väärtustusi, mille korral see valem on väär. Kui valem on samaselt tõene, siis tal konjunktiivne normaalkuju puudub.

Nii näiteks saame disjunktiivse liikme XZ [valemis (11)] põhjal väita, et valem (11) on tõene väärtustuste (t, t, t) ja (t, v, t) korral. Konjunktiivse liikme $\bar{X} \vee Z$ [valemis (12)] põhjal aga saame väita, et valem (12) on väär väärtustuste (t, t, v) ja (t, v, v) korral.

3) Valemi $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$ või funktsiooni $f(X_1, \dots, X_n)$ disjunktiivne ja konjunktiivne normaalkuju pole ühesed. Et selles

veenduda, võime võrrelda tabeli 7 abil defineeritud funktsiooni täielikke normaalkujusid (mis on ka normaalkujud) normaalkujudega (11) ja (12).

Valemi \mathcal{N} disjunktiiitse ja konjunktiiitse normaalkuju leidmiseks on kõige otstarbekohasem kõik loogilised tehted antud valemis avaldada konjunkttsiooni, disjunkttsiooni ja eituse abil ning seejärel rakendada distributiivsuse, duaalsuse ja muid lihtsustavaid seoseid [§ 3, seosed (25) — (32)], kuni jõutakse soovitava normaalkujuni.

Märgime, et kui valemi taandamisel konjunktiiitsele normaalkujule osutub, et igas nn. konjunktiiivses liikmes $X_{i_1}^{\alpha_1} \vee X_{i_2}^{\alpha_2} \vee \dots \vee X_{i_k}^{\alpha_k}$ esineb vähemalt üks komponentlause koos oma eitusega, siis on see valem samaselt tõene. Ilmselt on see tingimus tarvilik ja piisav valemi üldkehtivuseks.

Analoogiline tingimus disjunktiiitse normaalkuju korral on tarvilik ja piisav, et valem oleks samaselt väär.

Näide 7. Leiame valemi $(X \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z)$ disjunktiiitse ja konjunktiiitse normaalkuju.

$$(X \& \bar{Y}) \sim (Y \rightarrow Z) \stackrel{L}{\sim} [(X \& \bar{Y}) \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \& [(Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \& \bar{Y})] \stackrel{L}{\sim}$$

(asendasime ekvivalentsi)

$$\stackrel{L}{\sim} [\neg (X \& \bar{Y}) \vee (\bar{Y} \vee Z)] \& [\neg (\bar{Y} \vee Z) \vee (X \& \bar{Y})] \stackrel{L}{\sim}$$

(asendasime implikatsioonid)

$$\stackrel{L}{\sim} [(\bar{X} \vee Y) \vee (\bar{Y} \vee Z)] \& [(Y \& \bar{Z}) \vee (X \& \bar{Y})] \stackrel{L}{\sim}$$

(kasutasime duaalsuse seoseid)

$$\stackrel{L}{\sim} [\bar{X} \vee Y \vee \bar{Y} \vee Z] \& [(Y \& \bar{Z}) \vee (X \& \bar{Y})] \stackrel{L}{\sim} \underline{(X \& \bar{Y}) \vee (Y \& \bar{Z})},$$

mis ongi selle valemi disjunktiiivne normaalkuju.

Konjunktiiitse normaalkuju leiame sellest distributiivsuse seost kasutades. Saame

$$(X \& \bar{Y}) \vee (Y \& \bar{Z}) \stackrel{L}{\sim} (X \vee Y) \& (X \vee \bar{Z}) \& (\bar{Y} \vee Y) \& (\bar{Y} \vee \bar{Z}) \stackrel{L}{\sim} \\ \stackrel{L}{\sim} (X \vee Y) \& (X \vee \bar{Z}) \& (\bar{Y} \vee \bar{Z}),$$

mis ongi konjunktiiivseks normaalkujuks.

Nendest normaalkujudest saame soovi korral leida ka täielikud normaalkujud liikmete täiendamise teel. Nii näiteks täiendame liiget $X \& \bar{Y}$ nii:

$$(X \& \bar{Y}) \stackrel{L}{\sim} X \& \bar{Y} \& [Z \vee \bar{Z}] \stackrel{L}{\sim} (X \& \bar{Y} \& Z) \vee (X \& \bar{Y} \& \bar{Z})$$

ja liiget $X \vee Y$ nii:

$$(X \vee Y) \sim X \vee Y \vee [Z \& \bar{Z}] \sim (X \vee Y \vee Z) \& (X \vee Y \vee \bar{Z}),$$

millest nähtub, et puuduvad komponentlauseid tuleb igale liikmele juurde kirjutada kõikvõimalikes kombinatsioonides.

§ 5. JÄRELDUSTE TULETAMINE

Järelduste tuletamise probleem mis võib eristada kolme juhtu.

1. On antud eeldused (lausearvutuse valemid) ja mingi väide (valem). Tuleb selgitada, kas see väide järeldub nendest eeldustest või mitte.

2. On antud eeldused. Tuleb leida kõik nendest eeldustest tuletatavad valemid.

3. On antud mingi väide. Tuleb leida kõik valemid, millest see väide järeldub.

Kõigepealt tuleb muidugi defineerida järelduse mõiste.

Olgu antud k ($k \geq 1$) valemit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$, mis on moodustatud n ($n \geq 1$) komponentlausest A_1, A_2, \dots, A_n (mõned komponentlauseid võivad mõnes valemis esineda ka fiktiivsete muutujatena). Valemit \mathcal{B} nimetatakse valemite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ järelduseks, kui implikatsioon

$$(\mathcal{A}_1) \& (\mathcal{A}_2) \& \dots \& (\mathcal{A}_k) \rightarrow (\mathcal{B}) \quad (1)$$

on samaselt tõene.

See definitsioon on täielikus kooskõlas järelduse mõistega tavajärgelises loogikas. Tõepoolest, sisuliselt tähendab ju valemi (1) üldkehtivus seda, et iga kord (s. t. iga väärtustuse puhul), kui kehtivad eeldused, kehtib ka valem \mathcal{B} .

1. Selleks, et kontrollida, kas etteantud valem \mathcal{B} on valemite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ järelduseks või mitte, on kõige otstarbekohasem kasutada tabeli meetodit (vt. § 2, tabel 6). Kuid siin tuleb meil teha oletus, et implikatsioon (1) on mingi väärtustuse korral väär. Kui selle väärtustuse leidmine viib vastuolule, siis on valem (1) samaselt tõene.

Selgitame seda näite varal.

Näide 1. Tähistame lause «Võrdus $2^n = 2n$ on $n = 1$ korral kehtiv» tähega A , lause «Võrduse $2^n = 2n$ kehtivusest mingi n korral järeldub selle võrduse kehtivus $n + 1$ korral» tähega B ja lause «Võrdus $2^n = 2n$ kehtib iga naturaalarvu korral» tähega C .

Otseselt on kontrollitav, et A on tõene ja C on väär, samuti on tõene $A \& B \rightarrow C$, sest see pole midagi muud kui täieliku induktiooni printsiip võrduse $2^n = 2n$ puhul. Meie eeldused on seega

$$\mathcal{A}_1 = A, \mathcal{A}_2 = A \& B \rightarrow C \text{ ja } \mathcal{A}_3 = \neg C.$$

Näitame, et nendest eeldustest jäeldub $\neg B$, s. t. väide «Pole õige, et võrduse $2^n = 2n$ kehtivusest mingi n korral jäeldub selle võrduse kehtivus $n + 1$ korral». Selleks peame näitama, et valem

$$A \& (A \& B \rightarrow C) \& \neg C \rightarrow \neg B \quad (2)$$

on samaselt tõene. Paigutame vastavad arvutused alljärgnevasse tabelisse.

Tabel 8

$[A \& (A \& B \rightarrow C)] \& \neg C \rightarrow \neg B$													
(7)	(6)	(10)	(13)	(11)	(8)	(12)	(2)	(5)	(9)	(1)	(3)	(4)	
t	t	t	t	t	t	v	t	t	v	v	v	t	
v													
(14)													

Arvutused annavad vastuolulise tulemuse, mis tõestab valemi (2) üldkehtivuse. Seega on $\neg B$ jäelduseks antud eeldustest.

2. Antud eeldustest $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k$ kõikvõimalike jäelduste tegemiseks tuleb valem

$$(\mathfrak{A}_1) \& (\mathfrak{A}_2) \& \dots \& (\mathfrak{A}_k) \quad (3)$$

(eelduste konjunktsioon) viia komponentlausete A_1, A_2, \dots, A_n suhtes täielikule konjunktiivsele normaalkujule. Võttes seejärel nende konjunktiivsete liikmete (nn. konstituentide) kõikvõimalikud kombinatsioonid ja ühendades need konjunktsioonimärkidega, saamegi kõikvõimalikud valemid $\mathfrak{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, mille korral valem (1) on samaselt tõene. Toodud väite põhjendus tugineb asjaolul, et täieliku konjunktiivse normaalkuju igale liikmele vastab parajasti üks väärtustus, mille korral see valem on väär, ja sellel, et \mathfrak{B} vääruspiirkond peab sisalduma valemi (3) vääruspiirkonnas (vrd. § 3, teoreem 5).

Kui valem (3) täielikus konjunktiivses normaalkujus on l konstituenti, siis võib eeldustest $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_k$ üldse teha $2^l - 1$ erinevat jäeldust (arvestamata samaselt tõest valemit, mis on triviaalseks jäelduseks).

Näide 2. Olgu eeldustena antud valemid

$$\mathfrak{A}_1 = A \rightarrow B \quad \text{ja} \quad \mathfrak{A}_2 = B \rightarrow C,$$

kus A, B ja C on komponentlausel. Leiame eeldustest \mathfrak{A}_1 ja \mathfrak{A}_2 tehtavad kõikvõimalikud jäeldused. Selleks viime valemi $(\mathfrak{A}_1) \& (\mathfrak{A}_2)$, s. t.

$$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \quad (4)$$

A, B ja C suhtes täielikule konjunktiivsele normaalkujule. Asendades implikatsioonid ja täiendades konjunktiivseid liikmeid, saamegi soovitud normaalkuju

$$(\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C). \quad (5)$$

Et täielikus konjunktiivses normaalkujus (5) on 4 konstituenti, siis on erinevate järelduste arv $2^4 - 1 = 15$. Järeldused on kergesti väljakirjutatavad: 1) $\bar{A} \vee B \vee C$, 2) $\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$, 3) $A \vee \bar{B} \vee C$, 4) $A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$, 5) $(\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$, 6) $(\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee C)$, 7) $(\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee \bar{C})$, 8) $(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee C)$, 9) $(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee \bar{C})$, 10) $(A \vee \bar{B} \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$, 11) $(\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee C)$, 12) $(\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee C)$, 13) $(\bar{A} \vee B \vee C) \& (A \vee \bar{B} \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$, 14) $(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (A \vee \bar{B} \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)$, 15) valem (5), mis on muidugi loogiliselt samaväärne valemiga (4).

Tuleb märkida, et paljusid järeldusi saab lihtsustada. Nii näiteks lihtsustub järeldus 5):

$$(\bar{A} \vee B \vee C) \& (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \sim (\bar{A} \vee B) \vee (C \& \bar{C}) \sim \bar{A} \vee B \sim A \rightarrow B.$$

Märgime veel üht olulist momenti seoses järelduste tegemisega. Kui antud eelduste hulgas esineb vähemalt kaks valemit, mis on teineteisega vahekorras nagu \mathfrak{A} ja $\neg(\mathfrak{A})$, siis järeldub nendest eeldustest mistahes valem \mathfrak{B} . Tõepoolest, antud eeldustest moodustatud konjunktsioon

$$(\mathfrak{A}) \& \neg(\mathfrak{A}) \& \dots$$

on samaselt väär. Samaselt väära eesliikmega implikatsioon on igasuguse tagaliikme puhul samaselt tõene. Seega on valem

$$(\mathfrak{A}) \& \neg(\mathfrak{A}) \& \dots \rightarrow \mathfrak{B}$$

samaselt tõene mistahes valemi \mathfrak{B} korral. Valemeid, mis on teineteisega vahekorras nagu \mathfrak{A} ja $\neg(\mathfrak{A})$, nimetame vasturääkivateks valemiteks. Seega võime öelda, et vasturääkivaist eeldustist järeldub mistahes valem. Siit nähtub, et eeldustel, kus esineb vähemalt kaks vasturääkivat valemit, ei ole mitte mingisugust väärtust ja nad on täiesti kõlbmatud.

3. Täieliku konjunktiivse normaalkuju abil saab leida ka valemid, mis on antud valemist mitterõngemad, s. t. millest antud valem ise järeldub. Selleks tuleb antud valem taandada täielikule konjunktiivsele normaalkujule. Kui valem pole samaselt väär, siis on tema täielikus konjunktiivses normaalkujus $l < 2^n$ konstituenti. Ühendades antud valemiga seal mitte esinenud konstituente (konjunktsioonimärgiga), saame valemid, millest järeldub antud valem. Et antud valemis mitte esinevate konstituentide arv on $k = 2^n - l$, siis on antud valemist mitterõngemate valemite arv $2^k - 1$ (ilma samaselt väära valemitega).

Näide 3. Näite 2 puhul saadud täielikus konjunktiivses normaalkujus oli 4 konstituenti (s. t. $l = 4$). Et komponentlausete arv $n = 3$, siis $k = 2^3 - 4 = 4$. Järelikult on valemist (4) mittenõrgemaid valemeid (ilma samaselt väära valemitega) $2^4 - 1 = 15$. Need valemid saame, kui antud valemile (4) lisame (konjunktsioonimärgi abil) mingi kombinatsiooni selles valemis puuduvatest konstituentidest

$$A \vee B \vee C, A \vee B \vee \bar{C}, A \vee \bar{B} \vee \bar{C}, \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}.$$

Nii näiteks on üheks selliseks valemiks

$$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \& (A \vee B \vee C).$$

§ 6. LAUSEARVUTUSE VALEMITE MINIMISEERIMINE

Paragrahvis 4 märkisime, et täielik disjunktiivne ning täielik konjunktiivne normaalkuju pole alati kõige otstarbekohasemad funktsioonide ja valemite esitusviisid, kas või juba sellepärast, et nad pole kaugeltki kõige lihtsamad ja kompaktsamad.

See asjaolu viibki meid valemite lihtsustamise probleemi juurde, mille võib sõnastada järgmiselt.

Olgu antud mingi valem $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ [või funktsioon $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$] ja mingi valemite hulk $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \dots\}$. Leida sellest hulgast valem \mathfrak{B}_i , mis rahuldab tingimust

$$\mathfrak{B}_i \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{A}$$

ja on mittekeerulisem igast teisest valemist \mathfrak{B}_j , mis rahuldab tingimust $\mathfrak{B}_j \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{A}$.

Probleemi käsitlemisel tuleb muidugi täpsustada väljendit «mittekeerulisem». Praktika seisukohalt on otstarbekohane mõista seda järgmiselt: «sisaldab kas vähem või niisama palju lausemärke». Konkretiseerida tuleb ka lubatavate valemite hulka $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \dots\}$. Selleks võib vaadelda näiteks disjunktiivseid või konjunktiivseid normaalkujusid või valemeid, mis sisaldavad tehtemärke $\&$, \vee ja \neg või tehtemärke \rightarrow ja \neg või tehtemärki / vms.

Niisiis jaguneb eespool sõnastatud probleem paljudeks alaprobleemideks. Rõhutada tuleb seda, et probleemi lahendamine ei seisne meetodi andmises minimaalse kuju põhimõtteliseks leidmiseks, vaid just selle kuju efektiivseks leidmiseks (s. t. leidmiseks praktiliselt vastuvõetava aja ja materiaalsete vahendite kuluga).

Vaadeldavate probleemide uurimisel on kõige kaugemale jõutud juhul, kui hulk $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \dots\}$ on disjunktiivsete või konjunktiivsete normaalkujude hulk. Ka meie vaatleme valemite minimeerimise probleemi sellel juhul.

Et seosed

$$\bigvee_{v_1, \dots, v_k} \left(X_{v_1}^{\alpha_{v_1}} \& X_{v_2}^{\alpha_{v_2}} \& \dots \& X_{v_k}^{\alpha_{v_k}} \right) \sim f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

ja

$$\& \left(\bar{X}_{v_1}^{\alpha_{v_1}} \bigvee \bar{X}_{v_2}^{\alpha_{v_2}} \bigvee \dots \bigvee \bar{X}_{v_k}^{\alpha_{v_k}} \right) \sim \neg f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2)$$

on samaväärsed [s. t. seosest (1) järeldub (2) ja ümberpöördukt], siis tarvitseb vaadelda valemite minimiseerimise probleemi ainult disjunktiivsete normaalkujude korral.

Et n komponentlauset X_1, X_2, \dots, X_n sisaldavate disjunktiivsete normaalkujude hulk on lõplik, siis on käsitletav probleem triviaalselt lahendatav kõigi nende normaalkujude läbivaatamise teel. Kuid selline meetod on äärmiselt ebaökoonomne.

Vaatleme nüüd praktiliselt rakendatavaid meetodeid.

1. Määramata kordajate meetod

Selle meetodi puhul eeldame, et valem või funktsioon on antud kas täieliku disjunktiivse normaalkuju abil või selle valemi või funktsiooni tõesuspiirkonna M_t abil.

Valemi $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ minimaalsesse disjunktiivsesse normaalkujusse võib mingi elementaarkonjunktsioon, näiteks

$$X_1 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_6 \text{ või } X_{v_1}^{\alpha_1} X_{v_2}^{\alpha_2} \dots X_{v_k}^{\alpha_k},$$

kas kuuluda või mitte kuuluda. Selle asjaolu iseloomustamiseks võime iga elementaarkonjunktsiooni varustada kordajaga, näiteks

$$A_{1256}^{1010} \text{ või } A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k},$$

ja omistada talle vastavalt esinemisele või mitteesinemisele väärtuse t või v (ehk 1 või 0). Märgime, et kordajat $A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$ võib vaadelda kui lauset « $X_{v_1}^{\alpha_1} X_{v_2}^{\alpha_2} \dots X_{v_k}^{\alpha_k}$ esineb disjunktiivses normaalkujus».

Kordajad $A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$ peame nüüd leidma kahte tingimust silmas pidades:

1) saadav disjunktiivne normaalkuju peab olema loogiliselt samaväärne esialgse valemiga $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, s. t.

$$\bigvee_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \\ v_1, v_2, \dots, v_k}} A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} X_{v_1}^{\alpha_1} X_{v_2}^{\alpha_2} \dots X_{v_k}^{\alpha_k} \sim \mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_k); \quad (3)$$

2) saadav disjunktiivne normaalkuju peab olema minimaalne, s. t. lausemärkide arv selles normaalkujus peab olema väiksem kui kõikides teistes tingimust (3) rahuldavates normaalkujudes.

Kuidas tingimusi 1) ja 2) rahuldavaid kordajaid $A_{v_1 v_2 \dots v_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$ leida, selgitame näite varal.

Olgu valem $\mathfrak{A}(X_1, X_2, X_3)$ antud täieliku disjunktiivse normaalkuju abil:

$$\mathfrak{A}(X_1, X_2, X_3) = \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 X_2 X_3.$$

Tingimused, mis garanteerivad seose (3) kehtivuse, tulevad järgmised:

$$A_1^0 \vee A_2^0 \vee A_3^0 \vee A_{12}^{00} \vee A_{13}^{00} \vee A_{23}^{00} \vee A_{123}^{000} = \mathfrak{A}(v, v, v) = v,$$

$$A_1^0 \vee A_2^0 \vee A_3^1 \vee A_{12}^{00} \vee A_{13}^{01} \vee A_{23}^{01} \vee A_{123}^{001} = \mathfrak{A}(v, v, t) = v,$$

$$A_1^0 \vee A_2^1 \vee A_3^0 \vee A_{12}^{01} \vee A_{13}^{00} \vee A_{23}^{10} \vee A_{123}^{010} = \mathfrak{A}(v, t, v) = v,$$

$$A_1^0 \vee A_2^1 \vee A_3^1 \vee A_{12}^{01} \vee A_{13}^{01} \vee A_{23}^{11} \vee A_{123}^{011} = \mathfrak{A}(v, t, t) = t,$$

$$A_1^1 \vee A_2^0 \vee A_3^0 \vee A_{12}^{10} \vee A_{13}^{10} \vee A_{23}^{00} \vee A_{123}^{100} = \mathfrak{A}(t, v, v) = v,$$

$$A_1^1 \vee A_2^0 \vee A_3^1 \vee A_{12}^{10} \vee A_{13}^{11} \vee A_{23}^{01} \vee A_{123}^{101} = \mathfrak{A}(t, v, t) = t,$$

$$A_1^1 \vee A_2^1 \vee A_3^0 \vee A_{12}^{11} \vee A_{13}^{10} \vee A_{23}^{10} \vee A_{123}^{110} = \mathfrak{A}(t, t, v) = t,$$

$$A_1^1 \vee A_2^1 \vee A_3^1 \vee A_{12}^{11} \vee A_{13}^{11} \vee A_{23}^{11} \vee A_{123}^{111} = \mathfrak{A}(t, t, t) = t.$$

Iga üksik võrdus nõuab seda, et otsitaval normaalkujul oleks ühe teatava väärtustuse korral sama tõeväärtus mis valemil $\mathfrak{A}(X_1, X_2, X_3)$.

Kui mingi kordaja, näiteks 1. reas asuv kordaja A_{12}^{00} on väärtusega t , siis tähendab see seda, et liige $\bar{X}_1 \bar{X}_2$ esineb otsitavas normaalkujus. Sel korral on aga otsitav normaalkuju väärtustuse (v, v, v) korral tõene ja esialgne valem ning otsitav normaalkuju pole loogiliselt samaväärsed. Ridades, kus valemil $\mathfrak{A}(X_1, X_2, X_3)$ tõeväärtus on v , peavad järelikult kõik kordajad olema võrdsed v -ga. Seega võime kirjutada $A_1^0 = A_1^1 = A_2^0 = A_2^1 = A_3^0 = A_3^1 = A_{12}^{00} = A_{12}^{01} = A_{12}^{10} = A_{12}^{11} = A_{13}^{00} = A_{13}^{01} = A_{13}^{10} = A_{13}^{11} = A_{23}^{00} = A_{23}^{01} = A_{23}^{10} = A_{23}^{11} = A_{123}^{000} = A_{123}^{001} = A_{123}^{010} = A_{123}^{011} = A_{123}^{100} = v$.

Väärade liikmete väljajätmisel omandavad tingimused kuju

$$A_{23}^{11} \vee A_{123}^{011} = t,$$

$$A_{13}^{11} \vee A_{123}^{101} = t,$$

$$A_{12}^{11} \vee A_{123}^{110} = t,$$

$$A_{12}^{11} \vee A_{13}^{11} \vee A_{23}^{11} \vee A_{123}^{111} = t.$$

Siit on juba kerge üles kirjutada kordajaid, mis garanteerivad minimaalsuse. Need on

$$A_{23}^{11}, A_{13}^{11} \text{ ja } A_{12}^{11},$$

millega minimaalseks disjunktiivseks normaalkujuks tuleb

$$\mathfrak{N}(X_1, X_2, X_3) \sim^L X_1X_2 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3.$$

2. Minimiseerivate tabelite meetod

Minimiseerivate tabelite meetod erineb määramata kordajate meetodist ainult väliselt, tähistuste ja arvutuste paigutuse poolest.

Siin eeldame samuti seda, et valem või funktsioon on antud kas täieliku disjunktiivse normaalkuju või tõesuspiirkonna M_f abil.

Selgitame seda meetodit ka näite abil. Olgu kolme muutuja funktsioon $f(X_1, X_2, X_3)$ antud oma tõesuspiirkonna

$$M_f = \{(t, t, t), (t, v, t), (v, t, v), (v, v, t), (v, v, v)\}$$

abil.

Koostame järgmise tabeli:

Tabel 9

X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	$f(X_1, X_2, X_3)$
X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	t
X_1	X_2	\bar{X}_3	X_1X_2	$X_1\bar{X}_3$	$X_2\bar{X}_3$	$X_1X_2\bar{X}_3$	v
X_1	\bar{X}_2	X_3	$X_1\bar{X}_2$	X_1X_3	\bar{X}_2X_3	$X_1\bar{X}_2X_3$	t
X_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3	$X_1\bar{X}_2$	$X_1\bar{X}_3$	$\bar{X}_2\bar{X}_3$	$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3$	v
\bar{X}_1	X_2	X_3	\bar{X}_1X_2	\bar{X}_1X_3	X_2X_3	$\bar{X}_1X_2X_3$	v
\bar{X}_1	X_2	\bar{X}_3	\bar{X}_1X_2	$\bar{X}_1\bar{X}_3$	$X_2\bar{X}_3$	$\bar{X}_1X_2\bar{X}_3$	t
\bar{X}_1	\bar{X}_2	X_3	$\bar{X}_1\bar{X}_2$	\bar{X}_1X_3	\bar{X}_2X_3	$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3$	t
\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3	$\bar{X}_1\bar{X}_2$	$\bar{X}_1\bar{X}_3$	$\bar{X}_2\bar{X}_3$	$\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$	t

Lihtsalt saab näidata, et kui funktsioon on mõne väärtustuse, näiteks (t, t, v) korral väär (tabeli rida nr. 2), siis ei saa üheski disjunktiivses normaalkujus, mis on selle funktsiooniga loogiliselt samaväärne, esineda 2. rea konjunktsioone. Näiteks ei saa esineda konjunktsioon $X_1\bar{X}_3$. Tõepoolest, kui see liige esineks disjunktiivses normaalkujus, siis võiksime seda täiendada:

$$X_1\bar{X}_3 \sim^L X_1(X_2 \vee \bar{X}_2)\bar{X}_3 \sim^L X_1X_2\bar{X}_3 \vee X_1\bar{X}_2\bar{X}_3,$$

mildest nähtub, et see valem on vastupidi eeldusele väärtustuse (t, t, v) korral tõene.

Seega, kui funktsioon on mõne väärtustuse korral väär, tuleb maha tõmmata kogu vastav rida. Edasi tuleb veergudes maha

tõmmata need liikmed, mis ridades on juba maha tõmmatud. Igast ülejäänud reast tuleb seejärel valida üks mahatõmbamata konjunktsioon, nii et nendes liikmetes olevate komponentlausete arv oleks minimaalne.

Anname selle ülesande lahendi ka tabeli kujul.

Tabel 10

X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$
X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$
X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 \bar{X}_3$	$X_2 \bar{X}_3$	$X_1 X_2 \bar{X}_3$
X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$\bar{X}_2 X_3$	$X_1 \bar{X}_2 X_3$
X_1	\bar{X}_2	X_3	$X_1 \bar{X}_2$	$X_1 \bar{X}_3$	$\bar{X}_2 \bar{X}_3$	$X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$
X_1	X_2	X_3	$\bar{X}_1 X_2$	$\bar{X}_1 X_3$	$X_2 X_3$	$\bar{X}_1 X_2 X_3$
X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 \bar{X}_3$	$X_2 \bar{X}_3$	$\bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3$
X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$\bar{X}_2 X_3$	$\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3$
X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$\bar{X}_1 \bar{X}_3$	$X_2 \bar{X}_3$	$\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$

Minimaalne disjunktiivne normaalkuju on seega

$$\bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee X_1 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_3.$$

Tuleb märkida, et minimiseerivate tabelite meetodit saab praktiliselt kasutada kuni 5 tundmatu puhul. Selleks otstarbeks tuleb aga tabelit ratsionaalsemaks muuta. Olulised on ainult muutujate kombinatsioonid: iga selline kombinatsioon asub eri veerus. Väärtustused märgime kaheksandsüsteemis — nende arendamisel kahendsüsteemi leiame muutujate tõeväärtused. Nii saame arvu 5 esitamisel kahendsüsteemis 0101, mis ütleb, et $X_1 = v$, $X_2 = t$, $X_3 = v$ ja $X_4 = t$. Selle väärtustuse korral on X_1, X_2, X_3 tõeväärtused vastavalt v, t, v ehk 010, mis kaheksandsüsteemis on lihtsalt 2. Arv 2 esinebki 6. rea ja 11. veeru ristumiskohal. Arvutuste käik tabelis jääb samaks. Esitame näiteks tabeli $n = 4$ korral.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4	$X_1X_3X_4$	$X_1X_2X_4$	$X_1X_3X_4$	$X_2X_3X_4$	$X_1X_2X_3X_4$
1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2)	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
3)	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	2	2
4)	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	3	3	3
5)	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	2	2	0	4	4
6)	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1	2	3	1	5	5
7)	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2	3	2	2	6	6
8)	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7
9)	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0	4	4	4	0	10
10)	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1	4	5	5	1	11
11)	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2	5	4	6	2	12
12)	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3	5	5	7	3	13
13)	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0	6	6	4	4	14
14)	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1	6	7	5	5	15
15)	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2	7	6	6	6	16
16)	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	17

3. Disjunktiivsete normaalkujude minimiseerimise teisi meetodeid

Enne disjunktiivsete normaalkujude minimiseerimise teiste efektiivsete meetodite esitamist on vaja tuua mõningaid abimõisteid ja tulemusi.

Elementaarkonjunktsioon

$$\mathfrak{R} = X_{v_1}^{\alpha_1} X_{v_2}^{\alpha_2} \dots X_{v_r}^{\alpha_r}$$

määrab teatava väärtustuste hulga $M_t(\mathfrak{R})$, mille korral \mathfrak{R} on tõene. Hulka $M_t(\mathfrak{R})$ nimetatakse ka r -järku intervalliks (vastavalt lausete arvule konjunktsioonis \mathfrak{R}). Geomeetriselt saab seda vaadelda kui n -mõõtmelise kuubi mingi $(n-r)$ -mõõtmelise tahu tippude hulka.

Iga disjunktiivne normaalkuju kujutab endast mingisugust hulga $M_t(\mathfrak{M})$ katmist intervallidega $M_t(\mathfrak{R}_i)$, kusjuures peavad olema täidetud tingimused

$$M_t(\mathfrak{R}_i) \subset M_t(\mathfrak{M}) \quad (4)$$

ja

$$\bigcup_i M_t(\mathfrak{R}_i) = M_t(\mathfrak{M}). \quad (5)$$

Ilmselt kehtib ka vastupidine vahekord: igale hulga $M_t(\mathfrak{M})$ katmisele intervallidega, kus kehtivad võrdused (4) ja (5), vastab üks disjunktiivne normaalkuju.

Intervalli $M_t(\mathfrak{R}_i) \subset M_t(\mathfrak{A})$ nimetatakse maksimaalseks, kui ei leidu intervalli $M_t(\mathfrak{R}_j)$, mille järk on väiksem $M_t(\mathfrak{R}_i)$ järgust, nii et

$$M_t(\mathfrak{R}_i) \subset M_t(\mathfrak{R}_j) \subset M_t(\mathfrak{A}). \quad (6)$$

Valemi või funktsiooni disjunktiiivset normaalkuju, kus esinevad kõik $M_t(\mathfrak{A})$ maksimaalsetele intervallidele vastavad disjunktiiivsed liikmed (elementaarkonjunktsioonid), nimetatakse taandatud disjunktiiivseks normaalkujuks.

Taandatud disjunktiiivse normaalkuju definitsioonist järeldub, et selles ei saa esineda konjunktsioone

$$\mathfrak{R}_i \neq \mathfrak{R}_j,$$

nii et

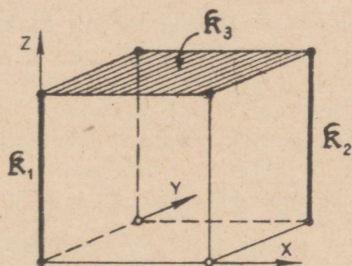
$$M_t(\mathfrak{R}_i) \subset M_t(\mathfrak{R}_j).$$

See on vastuolus intervallide maksimaalsuse tingimusega (6).

Näide 1. Olgu antud valem $\mathfrak{A}(X, Y, Z)$ oma täieliku disjunktiiivse normaalkuju kaudu:

$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \vee XY\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}Z \vee \bar{X}YZ \vee X\bar{Y}Z \vee XYZ.$$

Taandatud disjunktiiivse normaalkuju leidmiseks peame leidma maksimaalsed intervallid hulgas $M_t(\mathfrak{A}) = \{(v, v, v), (t, t, v), (v, v, t), (v, t, t), (t, v, t), (t, t, t)\}$.



Joon. 2.

Antud juhul saame seda teha geomeetrilist interpretatsiooni (vt. joon. 2) kasutades. Maksimaalseteks intervallideks on siin ilmselt $M_t(\mathfrak{R}_1)$, $M_t(\mathfrak{R}_2)$ ja $M_t(\mathfrak{R}_3)$, mis annavad taandatud disjunktiiivse normaalkuju

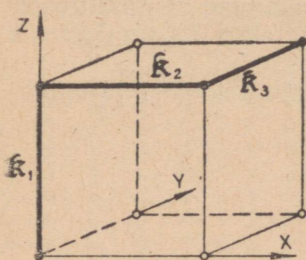
$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) \sim \bar{X}\bar{Y} \vee XY \vee Z.$$

Praeguses näites on taandatud disjunktiiivne normaalkuju ühtlasi ka minimaalne disjunktiiivne normaalkuju, kuid see ei tarvitse kaugeltki alati nii olla.

Näide 2. Olgu antud valem $\mathfrak{A}(X, Y, Z)$ oma täieliku disjunktiivse normaalkuju kaudu:

$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}Z \vee X\bar{Y}Z \vee XYZ.$$

Geomeetrisest interpretatsioonist (joon. 3) lähtudes leiame, et maksimaalseteks intervallideks on



Joon. 3.

$$M_t(\mathfrak{R}_1), M_t(\mathfrak{R}_2) \text{ ja } M_t(\mathfrak{R}_3),$$

mis annavad taandatud disjunktiivse normaalkuju

$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) \sim \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{Y}Z \vee XZ.$$

Kuid see pole minimaalne disjunktiivne normaalkuju. Minimaalne disjunktiivne normaalkuju on siin

$$\bar{X}\bar{Y} \vee XZ,$$

mille me saame taandatud normaalkujust liikme $\bar{Y}Z$ ärajätmisel.

Selline vahetõde kehtib nende normaalkujude vahel üldiselt.

Teoreem 1. Valemi $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ minimaalne disjunktiivne normaalkuju saadakse sama valemi taandatud disjunktiivsest normaalkujust mõningate disjunktiivsete liikmete väljajätmise teel.

Tõestus. Teoreemi tõestamiseks piisab, kui näitame, et minimaalse disjunktiivse normaalkuju liikmetele vastavad intervallid peavad tingimata olema maksimaalsed. Oletame vastuväiteliselt, et valemi \mathfrak{A} minimaalses disjunktiivses normaalkujus leidub r -järku konjunktsioon \mathfrak{R}_i , millele vastav intervall pole maksimaalne. Siis leidub madalamat järku konjunktsioon \mathfrak{R}_j , nii et

$$M_t(\mathfrak{R}_i) \subset M_t(\mathfrak{R}_j) \subset M_t(\mathfrak{A}).$$

Kuid sel juhul saame minimaalses disjunktiivses normaalkujus konjunktsiooni \mathfrak{R}_i asendada konjunktsiooniga \mathfrak{R}_j . Saadud disjunktiivne normaalkuju on eelmisega loogiliselt samaväärne seose $M_t(\mathfrak{R}_j) \subset M_t(\mathfrak{A})$ tõttu. Et \mathfrak{R}_j on madalamat järku konjunktsioon võrreldes konjunktsiooniga \mathfrak{R}_i , siis sisaldab ta vähem lausemärke kui \mathfrak{R}_i . Seega on konstrueeritud disjunktiivses normaalkujus vähem lausemärke kui minimaalses disjunktiivses normaalkujus. Tekkinud vastuolu näitab, et püstitatud oletus ei pea paika, millega teoreem on tõestatud.

Nüüd tekib loomulikult küsimus, kuidas jätta välja liikmeid taandatud normaalkujust, et saada minimaalset normaalkuju. Selleks annab meile üldise idee näide 2: välja tuleb jätta niisugused intervallid, mis tervikuna asuvad ülejäänud intervallide summas:

$$M_t(\mathfrak{R}) \subset M_t(\mathfrak{R}_1) \cup M_t(\mathfrak{R}_2) \cup \dots \cup M_t(\mathfrak{R}_m).$$

Sellisel korral ütleme ka, et $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ neelab elementaarkonjunktsiooni \mathfrak{R} . Selleks, et selgitada, kas mingi intervall $M_t(\mathfrak{R})$ asub tervikuna ülejäänud intervallide summas, võib piirduda ainult nende intervallide summa vaatlemisega, millel on intervalliga $M_t(\mathfrak{R})$ ühiseid elemente. Teisiti öeldes tarvitseb vaadelda ainult neid disjunkttiivseid liikmeid (elementaarkonjunktsioone) \mathfrak{R}_j , mille puhul $(\mathfrak{R}) \& (\mathfrak{R}_j)$ pole samaselt väär. Selliseid elementaarkonjunktsioone nimetame mitteortogonaalseteks. Ortogonaalseteks nimetame konjunktsioone \mathfrak{R} ja \mathfrak{R}_j siis, kui

$$(\mathfrak{R}) \& (\mathfrak{R}_j)$$

on samaselt väär, mis sisuliselt tähendab seda, et vastavatel intervallidel ei ole ühiseid punkte. Analüütiliselt tähendab ortogonaalsus seda, et \mathfrak{R} ja \mathfrak{R}_j sisaldavad vähemalt üht lausemärki X_i , mis ühes elementaarkonjunktsioonis on eitusega ja teises elementaarkonjunktsioonis ilma eitusega.

Nii on näiteks elementaarkonjunktsioonid

$$XY \text{ ja } \bar{X}Z$$

ortogonaalsed, elementaarkonjunktsioonid

$$XY \text{ ja } XZ$$

aga mitte.

Intervallide väljajätmise aluseks on järgmine teoreem.

Teoreem 2 (J. Žuravljov). Selleks, et disjunktsoon $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ (\mathfrak{R}_i — elementaarkonjunktsioonid) neelaks elementaarkonjunktsiooni \mathfrak{R} , mis pole ortogonaalne mitte ühegi \mathfrak{R}_i -ga, on tarvilik ja piisav, et iga konjunktsiooni \mathfrak{R}_i saaks esitada kujul

$$\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{C}_i) \& (\mathfrak{D}_i)$$

(konjunktsioonid \mathfrak{C}_i ja \mathfrak{D}_i võivad erijuhul kōduda ka t -ks), kusjuures on täidetud järgmised tingimused:

$$1^\circ \bigvee_{i=1}^m \mathfrak{D}_i \text{ on samaselt tõene,}$$

$$2^\circ \mathfrak{R} \rightarrow \big\&_{i=1}^m \mathfrak{C}_i \text{ on samaselt tõene.}$$

Tõestus. Tarvilikkus. Lähtume sellest, et $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ neelab konjunktsiooni \mathfrak{R} . Tähistame \mathfrak{C}_i abil nende komponentlausete konjunktsiooni, mis on ühised konjunktsioonidel \mathfrak{R}_i ja \mathfrak{R} . Kui neid pole, siis võtame $\mathfrak{C}_i = t$. Valemi \mathfrak{R}_i ülejäänud komponentlausete konjunktsiooni tähistame \mathfrak{D}_i abil. Kui ülejäänud komponentlauseid pole, siis võtame $\mathfrak{C}_i = t$.

Konstruktsiooni põhjal $\mathfrak{R}_i = (\mathfrak{C}_i) \& (\mathfrak{D}_i)$. Et \mathfrak{R} ja \mathfrak{R}_i pole ortogonaalsed, siis ei sisalda \mathfrak{D}_i ja \mathfrak{R} üldse ühiseid muutujaid.

Tingimuse 1° kehtivus. Oletame vastuväiteliselt, et $\bigvee_{i=1}^m \mathfrak{D}_i$ pole samaselt tõene. Siis leidub selline väärtustus γ muutujatest, mis esinevad konjunktsioonides $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_m$, et $\bigvee_{i=1}^m \mathfrak{D}_i$ on väär. Tähistame seda asjaolu järgmiselt:

$$[\bigvee_{i=1}^m \mathfrak{D}_i]_{\gamma} = v.$$

Sellest järeldub, et $[\mathfrak{D}_i]_{\gamma} = v$ iga $i = 1, 2, \dots, m$ korral. Edasi, $[\mathfrak{R}_i]_{\gamma} = [(\mathfrak{C}_i \& \mathfrak{D}_i)]_{\gamma} = (\mathfrak{C}_i \& [\mathfrak{D}_i]_{\gamma}) = v$ iga $i = 1, 2, \dots, m$ korral. Seega on selle väärtustuse korral väär ka $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$. Konjunktsioonides $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_m$ mitte esinevatele muutujatele anname sellised väärtused, et \mathfrak{R} oleks tõene. Võttes kahe komponentlausete rühma väärtustused kokku, saame kõikide komponentlausete sellise väärtustuse, mille korral \mathfrak{R} on tõene ja $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ väär. Kuid see ütleb, et $\mathfrak{R} \rightarrow (\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ pole samaselt tõene, s. t. $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ ei neela valemit \mathfrak{R} , mis on vastuolus eeldusega. Oletus, et $\bigvee_{i=1}^m \mathfrak{D}_i$ pole samaselt tõene, ei pea seega paika.

Tingimuse 1° kehtivus on tõestatud.

Tingimus 2° kehtib, sest konjunktsioonid \mathfrak{C}_i on moodustatud ainult nendest komponentlausetest, mis esinevad konjunktsioonis \mathfrak{R} .

P i i s a v u s. Lähtume sellest, et tingimused 1° ja 2° on täidetud, ja näitame, et $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ neelab konjunktsiooni \mathfrak{R} , s. t. $\mathfrak{R} \rightarrow (\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_m)$ on samaselt tõene. Selleks vaatleme väärtustust γ , mis muudab \mathfrak{R} tõeseks, s. t. $[\mathfrak{R}]_{\gamma} = t$. Tingimuse 2° põhjal kehtib siis ka $[\mathfrak{C}_i]_{\gamma} = t$. Leiame tagaliikme tõeväärtuse selle väärtustuse γ korral:

$$\begin{aligned} [\bigvee_{i=1}^m (\mathfrak{R}_i)]_{\gamma} &= [\bigvee_{i=1}^m (\mathfrak{C}_i \& \mathfrak{D}_i)]_{\gamma} = \bigvee_{i=1}^m ([\mathfrak{C}_i]_{\gamma} \& \\ &\& [\mathfrak{D}_i]_{\gamma}) = \bigvee_{i=1}^m [\mathfrak{D}_i]_{\gamma} = [\bigvee_{i=1}^m \mathfrak{D}_i]_{\gamma} = t, \end{aligned}$$

kus viimasel sammul kasutasime tingimust 1°.

N ä i d e 3. Kasutame näites 2 leitud taandatud disjunktiivset normaalkuju

$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) \sim \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{Y}Z \vee XZ$$

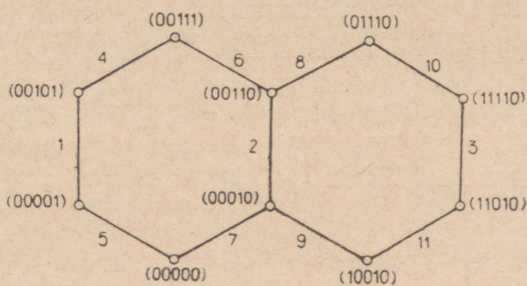
ja kontrollime, kas liikmete $\mathfrak{R}_1 = \bar{X}\bar{Y}$ ja $\mathfrak{R}_2 = XZ$ disjunktsioon neelab liikme $\mathfrak{R} = \bar{Y}Z$.

Teoreemis 2 toodud konstruktsiooni kasutades leiame, et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \bar{Y}, \quad \mathcal{D}_1 = \bar{X}, \\ \mathcal{C}_2 &= Z, \quad \mathcal{D}_2 = X, \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2 = X \vee \bar{X} = t$, $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2$ tuleb $\bar{Y}Z \rightarrow \bar{Y}Z$, mis on samaselt tõene. Et tingimused 1° ja 2° on täidetud, siis võime teoreemile 2 tuginedes väita, et $\bar{Y}Z$ neelatakse ülejäänud liikmete poolt, ja me võime ta järelikult hoopis kirjutamata jätta.

Kasutades teoreemis 2 esitatud kriteeriumi, võime järjest läbi kontrollida kõik taandatud disjunktiivse normaalkuju liikmed, tõmmates seejuures järjekorras maha kõik teiste liikmete poolt neelatavad liikmed. Teataval sammul see protsess lõpeb (sest liikmete arv on lõplik). Kuid tuleb märkida, et iga kord ei tarvitse me saada minimaalset disjunktiivset normaalkuju. Seda asjaolu katsume selgitada järgmise näite varal.



Joon. 4.

Näide 4. Olgu antud järgmine taandatud disjunktiivne normaalkuju:

$$\begin{aligned} &\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 X_5 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_4 \bar{X}_5 \vee X_1 X_2 X_4 \bar{X}_5 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_5 \vee \\ &\vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_4 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_5 \vee \bar{X}_1 X_3 X_4 \bar{X}_5 \vee \\ &\vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 X_4 \bar{X}_5 \vee X_2 X_3 X_4 \bar{X}_5 \vee X_1 \bar{X}_3 X_4 \bar{X}_5. \end{aligned}$$

Nende konjunksioonide vahekorda aitab iseloomustada joonis 4. Joonisel esitatud punktihulk

$$\{(0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1), \dots, (1, 0, 0, 1, 0)\}$$

kujutab endast hulka $M_7(\mathcal{M})$. Maksimaalsed intervallid kujutavad geomeetriselises interpretatsioonis lõike 1, 2, ..., 11 (lõikude järjekorranumbrid vastavad liikmete järjekorrale antud normaalkujus). Kasutades teoreemi 2 tingimusi, selgitame, kas $\mathcal{R}_1 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 X_5$ neelatakse ülejäänud liikmete poolt või mitte. Kõigepealt leiame, et konjunksiooniga \mathcal{R}_1 on mitteortogonaalsed ainult

$\mathfrak{R}_4 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_5$ ja $\mathfrak{R}_5 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$. Kasutades teoreemi 2 konstruktsiooni, saame

$$\mathfrak{C}_4 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_5, \quad \mathfrak{D}_4 = X_3,$$

$$\mathfrak{C}_5 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4, \quad \mathfrak{D}_5 = \bar{X}_3,$$

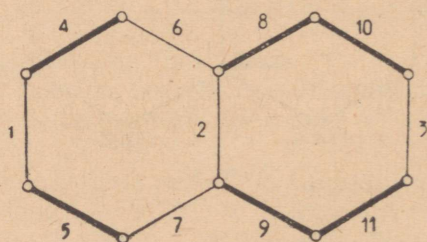
kust edasi $\mathfrak{D}_4 \vee \mathfrak{D}_5 = X_3 \vee \bar{X}_3 = t$ ning $\mathfrak{R}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_4 \mathfrak{C}_5$ tuleb $\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 X_5 \rightarrow \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_4 X_5$, mis on samaselt tõene. Liikmete \mathfrak{R}_4 ja \mathfrak{R}_5 disjunktsioon neelab seega liikme \mathfrak{R}_1 . See ilmneb ka jooniselt 4: liikmete \mathfrak{R}_4 ja \mathfrak{R}_5 korral pole liiget \mathfrak{R}_1 vaja, sest punktid $(0, 0, 0, 0, 1)$ ja $(0, 0, 1, 0, 1)$ sisalduvad juba hulkades $M_t(\mathfrak{R}_5)$ ja $M_t(\mathfrak{R}_4)$.

Liikmeid $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \dots, \mathfrak{R}_{11}$ järjekorras kontrollides saame maha tõmmata $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_6$ ja \mathfrak{R}_7 , kuna kõik teised liikmed jäävad alles.

Disjunktiivset normaalkuju

$$(\mathfrak{R}_4) \vee (\mathfrak{R}_5) \vee (\mathfrak{R}_8) \vee (\mathfrak{R}_9) \vee (\mathfrak{R}_{10}) \vee (\mathfrak{R}_{11})$$

nimetatakse mittelihtsustuvaks disjunktiivseks normaalkujuks. Seda aitab iseloomustada joonis 5, kus alles-



Joon. 5.

jäänud liikmed on kujutatud rasvaste sirglõikudena. Selles normaalkujus on 6 liiget, kokku 24 lausemärki. Kuid see pole veel minimaalne normaalkuju.

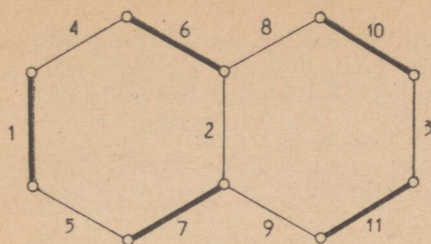
Kui kontrolliksime liikmeid teises järjekorras, näiteks alates \mathfrak{R}_2 -st, siis jääksid välja $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_8$ ja \mathfrak{R}_9 , millega saaksime normaalkuju (vt. joon. 6)

$$(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_6) \vee (\mathfrak{R}_7) \vee (\mathfrak{R}_{10}) \vee (\mathfrak{R}_{11}).$$

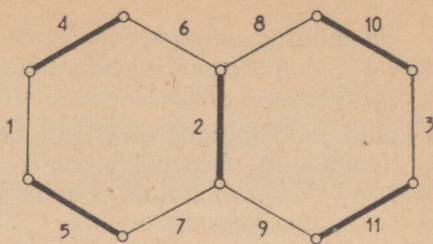
Selles normaalkujus on 5 liiget, kokku 20 lausemärki. Kui alustaksime kontrollimist liikmest \mathfrak{R}_6 , siis langeksid välja $\mathfrak{R}_7, \mathfrak{R}_8, \mathfrak{R}_9, \mathfrak{R}_{10}, \mathfrak{R}_{11}$ ja saaksime normaalkuju (vt. joon. 7)

$$(\mathfrak{R}_2) \vee (\mathfrak{R}_4) \vee (\mathfrak{R}_5) \vee (\mathfrak{R}_{10}) \vee (\mathfrak{R}_{11}).$$

Selles normaalkujus on samuti 5 liiget ja kokku 20 lausemärki.



Joon. 6.



Joon. 7.

Antud juhul ongi minimaalne disjunktiivne normaalkuju 20 lausemärgiga. Toodud näite põhjal võime väita järgmist. 1) Antud valemi minimaalne disjunktiivne normaalkuju pole üheselt määratud. 2) Rakendades neelamise kriteeriumi (teoreem 2) taandatud disjunktiivse normaalkuju korral, saame mittelihtsustuvad disjunktiivsed normaalkujud, mis ei tarvitse olla minimaalsed. Minimaalse disjunktiivse normaalkuju leidmiseks tuleb leida kõikvõimalikud mittelihtsustuvad normaalkujud ja leida nende hulgast minimaalne. Selleks, et leida kõikvõimalikud mittelihtsustuvad disjunktiivsed normaalkujud, tuleb liikmeid kontrollida väljajätmise seisukohalt kõikvõimalikes erinevates järjestustes. Siin ongi selle meetodika kõige raskem koht. Vähegi suuremate ülesannete puhul on liikmete kontrollimine kõikvõimalikes järjekordades äärmiselt tülikas töö. Tavaliselt piirduakse «peaaegu» minimaalse disjunktiivse normaalkujuga.

Nüüd tuleb aga selgitada, kuidas leida taandatud disjunktiivset normaalkuju.

1) Konjunktsioonide järkjärgulise «kokkuliimimise» meetod.

Sama järku konjunktsioone \mathfrak{R}_1 ja \mathfrak{R}_2 nimetame naaberkonjunktsioonideks, kui

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{C} \& X_i^\alpha \text{ ja } \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{C} \& \bar{X}_i^\alpha,$$

s. t. kui nad erinevad teineteisest ainult ühe komponentlause eituse poolest.

Naaberkonjunktsioone \mathfrak{R}_1 ja \mathfrak{R}_2 saab kokku võtta («liimida») järgmiselt:

$$(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) = (\mathfrak{C} \& X_i^\alpha) \vee (\mathfrak{C} \& \bar{X}_i^\alpha) = \mathfrak{C} \& (X_i^\alpha \vee \bar{X}_i^\alpha) = \mathfrak{C}.$$

Olgu meil mingi r -järku konjunktsioonide hulk ja mingi r -järku konjunktsioon \mathfrak{R} . Konjunktsiooni \mathfrak{R} nimetame isoleerituks selle konjunktsioonide hulga suhtes, kui tal ei ole selles hulgas ühtegi naaberkonjunktsiooni.

Taandatud disjunktiivse normaalkuju leidmiseks lähtume täielikust disjunktiivsest normaalkujust.

Eraldame n -järku konjunktsioonidest kõik isoleeritud konjunktsioonid ja tähistame need $\mathfrak{R}_1^{(n)}, \mathfrak{R}_2^{(n)}, \dots, \mathfrak{R}_{m_1}^{(n)}$.

Ülejäänud konjunktsioonid pole isoleeritud. Moodustame nendest kõikvõimalikud naaberkonjunktsioonide paarid ja teostame naaberkonjunktsioonide liimimise. Saame teatava $(n-1)$ -järku elementaarkonjunktsioonide hulga $\mathfrak{C}_1^{(n-1)}, \mathfrak{C}_2^{(n-1)}, \dots, \mathfrak{C}_{k_1}^{(n-1)}$, kus korduvad liikmed on muidugi kirjutatud ühekordselt. Nende hulgast eraldame jälle kõik isoleeritud konjunktsioonid, tähistades need $\mathfrak{R}_1^{(n-1)}, \mathfrak{R}_2^{(n-1)}, \dots, \mathfrak{R}_{m_2}^{(n-1)}$. Ülejäänutest moodustame kõikvõimalikud naaberkonjunktsioonide paarid ja teostame liimimise. Saame teatava $(n-2)$ -järku elementaarkonjunktsioonide hulga $\mathfrak{C}_1^{(n-2)}, \mathfrak{C}_2^{(n-2)}, \dots, \mathfrak{C}_{k_2}^{(n-2)}$, kus koondame korduvad liikmed, eraldame kõik isoleeritud konjunktsioonid jne. See protsess peab lõppema teatava arvu sammude järel, millega saame taandatud disjunktiivse normaalkuju

$$(\mathfrak{R}_1^{(n)} \vee \mathfrak{R}_2^{(n)} \vee \dots \vee \mathfrak{R}_{m_1}^{(n)}) \vee (\mathfrak{R}_1^{(n-1)} \vee \mathfrak{R}_2^{(n-1)} \vee \dots \vee \mathfrak{R}_{m_2}^{(n-1)}) \vee \dots \vee (\mathfrak{R}_1^{(n-l)} \vee \mathfrak{R}_2^{(n-l)} \vee \dots \vee \mathfrak{R}_{m_{l+1}}^{(n-l)}).$$

Märgime, et see meetod on rakendatav ainult täielikust disjunktiivsest normaalkujust või hulgast M_t lähtumisel. Mistahes disjunktiivsest normaalkujust lähtudes ei tarvitse me saada õiget tulemust.

N ä i d e 5. Olgu antud täielik disjunktiivne normaalkuju

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \vee XY\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}Z \vee \bar{X}YZ \vee X\bar{Y}Z \vee XYZ.$$

Kirjutame välja naaberkonjunktsioonide paarid

$$(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}, \bar{X}\bar{Y}Z), (XY\bar{Z}, XYZ), (\bar{X}\bar{Y}Z, \bar{X}YZ), (\bar{X}\bar{Y}Z, X\bar{Y}Z), (\bar{X}YZ, XYZ), (X\bar{Y}Z, XYZ),$$

millest selgub, et kolmandat järku isoleeritud konjunktsioone ei esine. Teostades liimimised, saame

$$\bar{X}\bar{Y}, XY, \bar{X}Z, \bar{Y}Z, YZ \text{ ja } XZ.$$

Isoleeritud konjunktsioone on kaks: $\bar{X}\bar{Y}$ ja XY . Naaberkonjunktsioonide paare on samuti kaks: $(\bar{X}Z, XZ)$, $(\bar{Y}Z, YZ)$. Teostades liimimise, saame

$$Z \text{ ja } Z.$$

Seega saame taandatud disjunktiivse normaalkuju

$$\bar{X}\bar{Y} \vee XY \vee Z.$$

Antud juhul on see ka minimaalseks disjunktiivseks normaalkujuks.

2) Blake'i meetod.

Selle meetodi puhul võib lähtuda mistahes disjunktiivsest normaalkujust.

Taandatud normaalkuju leidmiseks kasutatakse järgmisi disjunktiivse normaalkuju teisendusi.

1) Kui disjunktiivses normaalkujus esinevad liikmed

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{C}_1 \& X_i^{a_i} \quad \text{ja} \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{C}_2 \& \bar{X}_i^{a_i},$$

kusjuures \mathfrak{C}_1 ja \mathfrak{C}_2 pole ortogonaalsed, siis lisatakse disjunktiivsele normaalkujule liige

$$(\mathfrak{C}_1) \& (\mathfrak{C}_2).$$

Et liige $(\mathfrak{C}_1) \& (\mathfrak{C}_2)$ on neelatav $(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2)$ poolt (vt. teoreem 2), siis

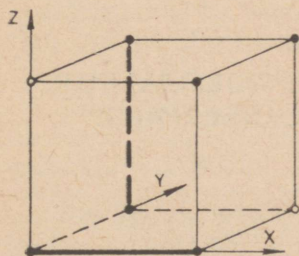
$$(\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \sim (\mathfrak{R}_1) \vee (\mathfrak{R}_2) \vee [(\mathfrak{C}_1) \& (\mathfrak{C}_2)],$$

s. t. esialgne normaalkuju on saadud normaalkujuga loogiliselt samaväärne.

2) Korduvad liikmed kirjutatakse ühekordselt ja kõrvaldatakse liikmed, mis neelatakse mõne teise liikme poolt (vastavalt intervallide maksimaalsuse nõudele).

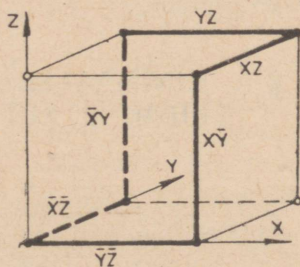
Näide 6. Olgu antud valem $\mathfrak{R}(X, Y, Z)$ oma disjunktiivse normaalkuju

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z) = \bar{Y}\bar{Z} \vee \bar{X}Y \vee X\bar{Y}Z \vee XYZ \quad (7)$$



Joon. 8.

Joonisel on disjunktiivse normaalkuju (7) liikmed kujutatud rasvaste punktide, punktiirjoonte ja joontega.



Joon. 9.

abil (vt. joon. 8). Leiame selle valemi taandatud disjunktiivse ja minimaalse disjunktiivse normaalkuju.

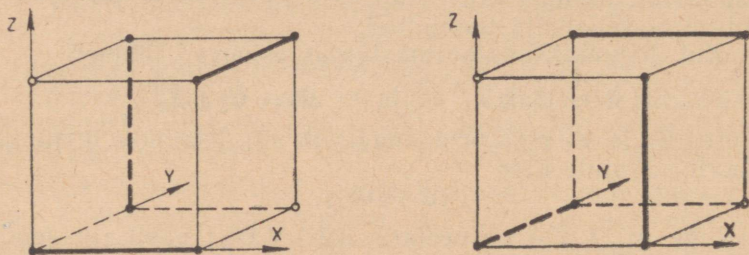
Kasutades teisendust 1), saame

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z) \sim \bar{Y}\bar{Z} \vee \bar{X}Y \vee X\bar{Y}Z \vee XYZ \vee \bar{X}\bar{Z} \vee X\bar{Y} \vee YZ \vee XZ.$$

Teisenduse 2) puhul neelatakse $X\bar{Y}Z$ (näiteks $X\bar{Y}$ poolt) ja XYZ (näiteks XZ poolt).

Saame taandatud normaalkuju (vt. joon. 9).

$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) \sim X\bar{Y} \vee \bar{X}Y \vee XZ \vee \bar{X}\bar{Z} \vee YZ \vee \bar{Y}\bar{Z}. \quad (8)$$



Joon. 10.

Taandatud normaalkujust lähtudes võime leida minimaalse normaalkuju teoreemi 2 abil.

Antud juhul on minimaalseid normaalkujusid kaks:

$$\mathfrak{A}_1(X, Y, Z) = XZ \vee \bar{X}Y \vee \bar{Y}\bar{Z},$$

$$\mathfrak{A}_2(X, Y, Z) = X\bar{Y} \vee \bar{X}\bar{Z} \vee YZ.$$

Geomeetriliselt võib neid kujutada nii, nagu on näidatud joonisel 10.

§ 7. MINIMAALSE DISJUNKTIIVSE NORMAALKUJU LEIDMINE KUI LINEAARSE PLANEERIMISE ÜLESANNE

Lineaarse planeerimise ülesanne sõnastatakse järgmiselt: leida mittenegatiivsete komponentidega vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) , mis minimiseeriks lineaarvormi

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (1)$$

kusjuures on täidetud järgmised tingimused:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

kus a_{ij} , b_i ja c_j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) on etteantud suurused ja $m < n$.

Väga paljusid, eriti majandusliku sisuga ülesandeid (näiteks söödakultuuride optimaalsete vahetõrgete leidmist, tööde ratsionaalset jaotamist tööpinkide vahel, optimaalsete transpordiplaanide koostamist jms.) saab taandada eespool toodud kujule. Lineaarse planeerimise ülesandeks on taandatav ka minimaalse disjunktiivse normaalkuju leidmise ülesanne. Tõsi küll, sel korral tuleb otsida mittenegatiivsete ja täisarvuliste komponentidega lahendit. Üldiselt komplitseerib täisarvulisuse nõue oluliselt lahendusmeetodit. Minimaalse disjunktiivse normaalkuju leidmisel on meil siiski tegemist teatava erikujulise ülesandega (kordajad a_{ij} on kas 1, -1 või 0), mille korral on ilma eriliste muudatusteta rakendatavad tavalised lahendusmeetodid (näiteks simpleks-meetod).

Simpleks-meetodi idee seisneb selles, et teatavast algühendist [mittenegatiivsete komponentidega vektor, mis rahuldab võrrandisüsteemi (2)] lähtudes konstrueerime uusi sama tüüpi vektoreid, mille korral lineaarvormi (1) väärtus on väiksem kui eelmise vektori puhul, kuni jõuame vektorini, mille puhul lineaarvormi (1) väärtust pole enam võimalik vähendada. Viimane vektor ongi lineaarse planeerimise ülesande lahend.

Käesolevas paragrahvis pole meil võimalik tuua lineaarse planeerimise ülesannete lahendamise meetodika üksikasjalikku põhjendust.⁵ Anname aga siiski simpleks-meetodi algoritmi. Seejuures eeldame, et võrrandisüsteemi (2) vasakute poolte vektorite hulgas on m erinevat ühikvektorit. Ilma üldisust kitsendama võime oletada, et need ühikvektorid asuvad m esimeses veerus, kusjuures ka võrrandid on järjestatud nii, et ühikmaatriks esineb oma tavalisel kujul.

Suurused a_{ij} , b_i ja c_j paigutame tabelisse (tabel 12).

Tabeli 12 põhiosas on m rida. Iga rea täidame süsteemi (2) vastava võrrandi kordajatega. Esimene veerg «Baas» võimaldab määrata algühendi: $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0$. Hiljem saame selle abil leida nii vahe- kui ka lõpptulemused. Märkime, et baasi mittekuuluvad komponendid x_i on alati võrdsed nulliga. Alumises reas esinevad suurused $z_j - c_j$, kus $z_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ja $z_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i$. Suurus z_0 on lineaarvormi väärtuseks algühendi korral; edasistes arvutustes tuleb sellesse ruutu lineaarvormi väärtus uue vektori korral. Märkime veel, et baasi kuuluvate komponentide puhul kehtib võrdus $z_j - c_j = 0$.

⁵ Lineaarse planeerimise ülesande lahendusmeetoditega lähemaks tutvumiseks võib soovitada teoseid С. Гасс, Линейное программирование, Москва, 1961 ja М. И. Ромакин, Элементы линейной алгебры и линейного программирования, Москва, 1963.

		c_1	c_2	\dots	c_l	\dots	c_m	c_{m+1}	\dots	c_k	\dots	c_n	
Baas	\rightarrow	x_1	x_2	\dots	x_l	\dots	x_m	x_{m+1}	\dots	x_k	\dots	x_n	\rightarrow
	c												b
x_1	c_1	1	0	\dots	0	\dots	0	$a_{1,m+1}$	\dots	a_{1k}	\dots	a_{1n}	b_1
x_2	c_2	0	1	\dots	0	\dots	0	$a_{2,m+1}$	\dots	a_{2k}	\dots	a_{2n}	b_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_l	c_l	0	0	\dots	1	\dots	0	$a_{l,m+1}$	\dots	a_{lk}	\dots	a_{ln}	b_l
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	c_m	0	0	\dots	0	\dots	1	$a_{m,m+1}$	\dots	a_{mk}	\dots	a_{mn}	b_m
		0	0	\dots	0	\dots	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	\dots	$z_k - c_k$	\dots	$z_n - c_n$	z_0

Kui kõik vahed on mittepositiivsed, s. t. $z_j - c_j \leq 0$, siis oleme saanud minimiseeriva vektori. Kui aga mõni vahe on positiivne, näiteks $z_k - c_k$ (kui positiivseid vahesid $z_j - c_j$ on rohkem kui üks, valitakse välja tavaliselt suurim), siis leitakse indeks i , mille korral jagatis

$$\frac{b_i}{a_{ik}} \quad (\text{kus } a_{ik} > 0)$$

on minimaalne. Olgu selleks indeksiks $i = l$. Siis tuleb simpleks-tabelis teostada järgmised teisendused:

- 1) l -ndas reas x_l asendada x_k -ga, c_l asendada c_k -ga,
- 2) l -nda rea teised elemendid jagada a_{lk} -ga, millega endise elemendi a_{lk} asemele saame 1,
- 3) k -nda veeru teised elemendid teisendada nullideks l -nda rea lineaarteisenduste abil.

Märgime, et lineaarteisendused ei puuduta baasi ja lineaarvormi (1) kordajate c veergu, samuti tabeli kahte esimest rida (tabeli «pead»).

Pärast neid märkusi asume näidete vaatlemisele.

Näide 1. Vaatleme sama näidet, mille me tõime määramata kordajate meetodi käsitlemisel. Pärast teatavate kordajate välajätmist saime järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} A_{23}^{11} \vee A_{123}^{011} &= t, \\ A_{13}^{11} \vee A_{123}^{101} &= t, \\ A_{12}^{11} \vee A_{123}^{110} &= t, \\ A_{12}^{11} \vee A_{13}^{11} \vee A_{23}^{11} \vee A_{123}^{111} &= t. \end{aligned}$$

Samastades tõeväärtuse t arvuga 1 ja v arvuga 0, võime need võrdused üles kirjutada järgmiselt (disjunktsiooni märgi asemele tuleb $+$, mille tõttu võrdused muutuvad võrratusteks):

$$A_{23}^{11} + A_{123}^{011} \geq 1,$$

$$A_{13}^{11} + A_{123}^{101} \geq 1$$

jne.

Et lineaarse planeerimise ülesande lahendamisel simpleks-metodi abil peavad lisatingimused olema võrdused, siis tuleb meil kasutada abisuurusi u_1, u_2, u_3, u_4 .

Seega saame lisatingimused kujul

$$\begin{aligned} A_{23}^{11} &+ A_{123}^{011} && - u_1 &= 1, \\ &A_{13}^{11} &+ A_{123}^{101} && - u_2 &= 1, \\ &&A_{12}^{11} &+ A_{123}^{110} && - u_3 &= 1, \\ A_{23}^{11} + A_{13}^{11} + A_{12}^{11} &&& + A_{123}^{111} && - u_4 &= 1. \end{aligned}$$

Tundmatud $A_{23}^{11}, A_{13}^{11}, \dots, A_{123}^{111}$ võivad omandada väärtusi 0 või 1. Suurused u_i võivad omandada ka teisi positiivseid täisarvulisi väärtusi. Minimiseeritav lineaarvorm on

$$2(A_{12}^{11} + A_{13}^{11} + A_{23}^{11}) + 3(A_{123}^{011} + A_{123}^{101} + A_{123}^{110} + A_{123}^{111}),$$

mille väärtus annab lausemärkide arvu disjunktiivses normaal-kujus.

Alglähendiks võtame $A_{123}^{011} = A_{123}^{101} = A_{123}^{110} = A_{123}^{111} = 1$, ülejäänud tundmatud on võrdsed nulliga.

Esimene simpleks-tabel tuleb järgmine.

Tabel 13

		2	2	2	3	3	3	3	0	0	0	0	
Baas	\rightarrow c	A_{23}^{11}	A_{13}^{11}	A_{12}^{11}	A_{123}^{011}	A_{123}^{101}	A_{123}^{110}	A_{123}^{111}	u_1	u_2	u_3	u_4	\rightarrow b
A_{123}^{011}	3	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
A_{123}^{101}	3	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
A_{123}^{110}	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	1
A_{123}^{111}	3	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	1
$z_k - c_k$		4	4	4	0	0	0	0	-3	-3	-3	-3	12

Et osa suurusi $z_k - c_k$ on positiivsed, pole alglähend optimaalne. Toome baasi sisse elementi A_{23}^{11} ja viime välja A_{123}^{011} . Pärast vastavaid teisendusi saame uue tabeli.

Tabel 14

		2	2	2	3	3	3	3	0	0	0	0	
Baas	$\rightarrow c$	A_{23}^{11}	A_{13}^{11}	A_{12}^{11}	A_{123}^{011}	A_{123}^{101}	A_{123}^{110}	A_{123}^{111}	u_1	u_2	u_3	u_4	$\rightarrow b$
A_{23}^{11}	2	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
A_{123}^{101}	3	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
A_{123}^{110}	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	1
A_{123}^{111}	3	0	1	1	-1	0	0	1	1	0	0	-1	0
$z_k - c_k$		0	4	4	-4	0	0	0	1	-3	-3	-3	8

Toome nüüd baasi A_{13}^{11} . Tekib küsimus, missugune element viia baasist välja, kas A_{123}^{101} või A_{123}^{111} . Jagatise $\frac{b_i}{a_{ik}}$ miinimumi kriteeriumi järgi tuleks välja viia A_{123}^{111} (A_{123}^{101} puhul tuleb vastav jagatis $\frac{1}{1} = 1$, A_{123}^{111} korral $\frac{0}{1} = 0$). Antud tüüpi ülesannete korral, kus muutujatel A_{123}^{011} , A_{123}^{101} , A_{123}^{110} , A_{123}^{111} on igaühel vastasmärgiline paariline, vastavalt u_1, u_2, u_3, u_4 , ei ole aga vaja arvestada neid nulliga võrduvaid miinimume, mis tulevad elementide A_{123}^{011} , A_{123}^{101} , A_{123}^{110} , A_{123}^{111} puhul. Sel korral viime baasist välja siiski A_{123}^{101} , A_{123}^{111} asendame aga u_4 -ga. Neljanda rea liikmete märgid muudame vastupidisteks. Kirjeldatud teisendusvõte on ainuke erinevus tavalise simpleksi-meetodiga võrreldes.

Seda tehes saame tabeli 15.

Lõpuks toome baasi A_{12}^{11} ja viime välja A_{123}^{110} (siin pole teist võimalust, sest u_4 -le vastav element on negatiivne ja langeb seetõttu jagatiste $\frac{b_i}{a_{ik}}$ hindamisel kõrvale).

Pärast teisendusi saame tabeli 16.

Tabel 15

		2	2	2	3	3	3	3	0	0	0	0	
Baas	$\rightarrow c$	A_{23}^{11}	A_{13}^{11}	A_{12}^{11}	A_{123}^{011}	A_{123}^{101}	A_{123}^{110}	A_{123}^{111}	u_1	u_2	u_3	u_4	$\rightarrow b$
A_{23}^{11}	2	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
A_{13}^{11}	2	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
A_{123}^{110}	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	1
u_4	0	0	0	-1	1	1	0	-1	-1	-1	0	1	1
$z_k - c_k$		0	0	1	-1	-1	0	-3	-2	-2	-3	0	7

Tabel 16

		2	2	2	3	3	3	3	0	0	0	0	
Baas	$\rightarrow c$	A_{23}^{11}	A_{13}^{11}	A_{12}^{11}	A_{123}^{011}	A_{123}^{101}	A_{123}^{110}	A_{123}^{111}	u_1	u_2	u_3	u_4	$\rightarrow b$
A_{23}^{11}	2	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
A_{13}^{11}	2	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
A_{12}^{11}	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	1
u_4	0	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	2
$z_k - c_k$		0	0	0	-1	-1	-1	-3	-2	-2	-2	0	6

Et suurused $z_k - c_k$ on kõik mittepositiivsed, oleme saanud minimiseeriva vektori: $A_{23}^{11} = A_{13}^{11} = A_{12}^{11} = 1$, $u_4 = 2$, teised muutujad on võrdsed nulliga. Lineaarvormi väärtus, s. t. lausemärkide arv on 6.

Täpselt samasugust meetodikat saab kasutada loomulikult ka minimiseerivate tabelite puhul.

Selgitame nüüd, kuidas seda meetodikat saab kasutada taandatud normaalkuju korral.

Sellel juhul kujutab iga maksimaalne intervall tundmatut (mis võib omandada väärtusi 0 ja 1). Iga väärtustus, mille korral valem on tõene, defineerib ühe võrrandi. Võrrandis esinevad need muutujad (maksimaalsed intervallid), mis sisaldavad seda väärtustust. Igas võrrandis esineb üks abitundmatu, mis võib oman-

dada ka teisi positiivseid väärtusi peale 1. Tundmatutel (maksimaalsetel intervallidel) lineaarvormis (1) on kordajateks nende järgud.

Näide 2. Vaatleme näites 6 (§ 6) toodud minimaalse disjunktivse normaalkuju leidmise ülesannet. Lähtume taandatud disjunktivsest normaalkujust (8) ja tähistame selle elementaar-konjunktsioonid vastavalt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ja x_6 abil. Võrrandisüsteem (2) tuleb siis järgmine:

$$\left. \begin{array}{rcccccc} x_1 & + & x_3 & & & & - & u_1 & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_4 & & & - & u_2 & & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_5 & & & - & u_3 & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & & & & - & u_4 & = & 1 \\ x_1 & & & & & & & & & & + & x_6 & & - & u_5 & = & 1 \\ & x_2 & & & & + & x_5 & & & & & & & - & u_6 & = & 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Minimiseeritav lineaarvorm tuleb

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6). \quad (4)$$

Et süsteemi (3) võrrandite vasakute poolte veeurvektoritest ei saa moodustada positiivset ühikmaatriksit, moodustatakse see kunstlikult süsteemi (3) iga võrrandi vasakule poolele uue tundmatu lisamise teel. Seega tulevad juurde tundmatud $x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. Antud juhul on neil ka sisuline tähendus: nad tähistavad täielike elementaar-konjunktsioonide $X\bar{Y}Z, \bar{X}Y\bar{Z}, XYZ, \bar{X}\bar{Y}Z, X\bar{Y}\bar{Z}, \bar{X}YZ$ esinemist disjunktivses normaalkujus. Seega tuleks tundmatute x_7, x_8, \dots, x_{12} kordajaks minimiseeritavas lineaarvormis võtta arv 3.

Minimaalse disjunktivse normaalkuju leidmine toimub samuti nagu näites 1.

§ 8. MITTE KÕIKJAL DEFINEERITUD KAHENDMUUTUJA FUNKTSIOONI OPTIMAALSEST LAIENDAMISEST

Elektriliste skeemide teoorias on sageli tegemist kahendmuutuja funktsioonidega $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, mis võivad samuti omandada ainult kaht väärtust t ja v (*resp.* 1 ja 0), kuid pole defineeritud kõikide argumendi väärtustuste korral. Sel juhul tuleb funktsiooni f laiendada koguruumile, s. t. tuleb funktsiooni täiendavalt defineerida ülejäänud argumendi väärtustuste puhul. Skeemi funktsioneerimise seisukohalt on kõik need täiendavad definitsioonid samaväärsed. Funktsiooni minimiseerimisel aga võib üks lisadefinitsioon teisest paremaks osutada, andes hoopis lihtsama minimaalkuju. Otstarbekohane on lisadefinitsioon anda just selline, et funktsiooni minimaalkuju tuleks võimalikult lihtne. Sel-

list funktsiooni laiendamist nimetamegi funktsiooni optimaalseks laiendamiseks.

Olgu antud funktsioon

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{cases} t, & \text{kui } (X_1, X_2, \dots, X_n) \in M_t, \\ v, & \text{kui } (X_1, X_2, \dots, X_n) \in M_v, \end{cases}$$

kusjuures $M_t \cap M_v = \emptyset$ ja $M_t \cup M_v$ on hulga M pärisosahulk.

Ülesanne seisneb niisuguste hulkade M_1 ja M_2 leidmises, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

$$1^\circ M_1 \cap M_2 = \emptyset,$$

$$2^\circ M_t \subset M_1, M_v \subset M_2,$$

$$3^\circ M_1 \cup M_2 = M,$$

4° M_1 ja M_2 on sellised, et funktsiooni laiendi g [funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ laiend $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$] defineeritakse nii:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \begin{cases} t, & \text{hulgal } M_1, \\ v, & \text{hulgal } M_2 \end{cases}$$

minimaalne disjunktiivne normaalkuju sisaldab kõige vähem lausemärke võrreldes kõigi teiste minimaalsete disjunktiivsete normaalkujudega, mis saadakse tingimusi 1°, 2° ja 3° rahuldavate hulkade põhjal.

Probleem seisneb hulkade M_t ja M_v eraldamises lihtsaima struktuuriga ülemhulkade M_1 ja M_2 abil.

Kui komponentlausete arv on väike, võib ka siin kasutada paraagrahis 6 esitatud minimiseerivate tabelite meetodit, seda mõnevõrra teisendades.

Nimelt tuleb tabeli viimases, funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tõeväärtuste veerus märkida peale t ja v ka tõeväärtus «määramata» (m). Edasi toimime analoogiliselt minimiseerivate tabelite meetodile — tõmbame tabelis maha need read, kus $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = v$, ja tõmbame veergudes maha need liikmed, mis on ridades juba maha tõmmatud. Mahatõmbamata liikmetest tuleb valida minimaalse lausemärkide arvuga kombinatsioon, nii et igast reast, kus $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = t$, on võetud vähemalt üks liige. Reast, kus $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = m$, ei tarvitse võtta ühtegi liiget.

Selgitame seda meetodit näite varal.

Näide 1. Olgu $M_t = \{(v, v, t), (t, t, v), (t, t, t)\}$ ja $M_v = \{(v, v, v), (v, t, t), (t, v, v)\}$. Moodustame minimiseeriva tabeli, kasutades komponentlausete kombinatsioonide tähistamiseks numbreid. Pärast mahatõmbamisi saame tabeli kujul

X	Y	Z	XY	XZ	YZ	XYZ	$f(X, Y, Z)$
0	0	0	0	0	0	0	v
0	0	1	0	1	①	1	t
0	1	0	1	0	2	2	m
0	1	1	1	1	3	3	v
1	0	0	2	2	0	4	v
1	0	1	2	3	①	5	m
1	1	0	③	2	2	6	t
1	1	1	③	3	3	7	t

Tabelist nähtub, et lahend (funktsiooni optimaalne laiend) on järgmine:

$$g(X, Y, Z) = XY \vee \bar{Y}Z.$$

Kui komponentlausete arv on aga suurem kui 5, siis on otstarbekohane kasutada meetodeid, mis on analoogilised punktis 3 (§ 6) käsitletud meetoditega. Esitame ühe sellise meetodi.

Hulga $M \setminus M_v$ maksimaalseid intervale, millel on mittetühi ühisosa hulgaga M_t , nimetame hulgapaari $[M \setminus M_v, M_t]$ maksimaalseteks intervallideks. Need intervallid on hulkadega M , M_t ja M_v üheselt määratud. Funktsiooni g minimaalset disjunktiiivset normaalkuju, mis rahuldab tingimusi 1°, 2°, 3° ja 4°, tähistame \mathfrak{R}_{min} abil.

Teoreem 1. \mathfrak{R}_{min} saadakse $[M \setminus M_v, M_t]$ maksimaalsetele intervallidele vastavatest elementaarkonjunktsioonidest teatavate elementaarkonjunktsioonide väljajätmise teel.

Tõestus. Tõestuseks piisab, kui näidata, et normaalkuju \mathfrak{R}_{min} mistahes elementaarkonjunktsioon \mathfrak{R} rahuldab tingimusi

- 1) $M_t(\mathfrak{R}) \subset M \setminus M_v$,
- 2) $M_t(\mathfrak{R})$ on $M \setminus M_v$ maksimaalne intervall,
- 3) $M_t(\mathfrak{R}) \cap M_t(f)$ on mittetühi.

1) Tingimuse 2° põhjal kehtib $M_v \subset M_2 = M_v(\mathfrak{R}_{min})$. Lahutades hulgast M hulgad M_v ja $M_v(\mathfrak{R}_{min})$, saame vastupidise sisaldusvahekorra $M \setminus M_v \supset M \setminus M_v(\mathfrak{R}_{min}) = M_t(\mathfrak{R}_{min})$, kust $M_t(\mathfrak{R}) \subset M_t(\mathfrak{R}_{min})$ tõttu järeldubki 1).

2) Kui $M_t(\mathfrak{R})$ poleks $M \setminus M_v$ maksimaalne intervall, asuks ta tervikuna hulga $M \setminus M_v$ mingis maksimaalses intervallis $M_t(\mathfrak{R}')$. Asendades normaalkujus \mathfrak{R}_{min} elementaarkonjunksiooni \mathfrak{R} elementaarkonjunksiooniga \mathfrak{R}' , saaksime normaalkuju \mathfrak{R}' , mis rahuldab tingimusi 1°, 2° ja 3° ning sisaldab vähem lausemärke kui \mathfrak{R}_{min} . See pole aga kooskõlas \mathfrak{R}_{min} definitsiooniga.

3) Kui normaalkujus \mathfrak{R}_{min} oleks mingi elementaarkonjunksioon \mathfrak{R} , mille korral $M_t(\mathfrak{R}) \cap M_t(f)$ on tühi, siis selle konjunksiooni \mathfrak{R} väljajätmisel saaksime normaalkuju \mathfrak{R}' , mis rahuldab tingimusi 1°, 2° ja 3° ning sisaldab vähem lausemärke kui \mathfrak{R}_{min} . See pole aga kooskõlas \mathfrak{R}_{min} definitsiooniga.

Teoreem 1 on tervikuna tõestatud.

Loomulikult tekib küsimus: missugused maksimaalsed intervallid tuleb siis $[M \setminus M_v, M_t]$ maksimaalsete intervallide hulgast välja jätta. Vastus on: need maksimaalsed intervallid $M_t(\mathfrak{R}_i)$, mille ühisosa hulgaga M_t asub ülejäänud maksimaalsete intervallide summas. Hulgateooria sümboolikas saab selle vahekorra esitada kujul

$$M_t(\mathfrak{R}_i) \cap M_t(f) \subset \bigcup_{j \neq i} M_t(\mathfrak{R}_j),$$

lausearvutuse sümboolikas aga kujul

$$\mathfrak{R}_i \& f \rightarrow \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{R}_j, \quad (1)$$

kus valem (1) peab olema samaselt tõene.

Kui eeldada, et funktsioon $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ on antud mingisuguse disjunktiivse normaalkuju $\bigvee_k \mathfrak{A}_k$ abil, tuleb valem (1) selline:

$$\mathfrak{R}_i \& \left(\bigvee_k \mathfrak{A}_k \right) \rightarrow \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{R}_j. \quad (2)$$

Et kontrollida, kas valem (2) on antud \mathfrak{R}_i korral samaselt tõene või mitte, tarvitseb ilmselt võtta arvesse ainult need konjunksioonid \mathfrak{A}_k ja \mathfrak{R}_j ($j \neq i$), mis pole ortogonaalsed konjunksiooniga \mathfrak{R}_i . Seega saame valemi (2) asemel

$$\mathfrak{R}_i \& \left(\bigvee_k^* \mathfrak{A}_k \right) \rightarrow \bigvee_{j \neq i}^* \mathfrak{R}_j, \quad (3)$$

kus * tähistab asjaolu, et disjunktsioonist on välja jäetud konjunksiooniga \mathfrak{R}_i ortogonaalsed liikmed. Kui valem (2) on samaselt tõene, siis on seda ka (3) ja ümberpöördukt.

Teoreem 2 (J. Zuravljov). Valem (3) on samaselt tõene siis ja ainult siis, kui $\mathfrak{R}_j = \mathfrak{C}_j \& \mathfrak{D}_j$ ($j \neq i$); kus \mathfrak{C}_j ja \mathfrak{D}_j on elementaarkonjunksioonid, mis rahuldavad tingimusi

1) $\bigvee_k^* \mathfrak{A}_k \rightarrow \bigvee_{j \neq i}^* \mathfrak{D}_j$ on samaselt tõene,

2) $\mathfrak{R}_i \rightarrow \bigwedge_{j \neq i}^* \mathfrak{C}_j$ on samaselt tõene.

$$\mathfrak{R}_i = X_{v_1}^{\alpha_{v_1}} X_{v_2}^{\alpha_{v_2}} \dots X_{v_s}^{\alpha_{v_s}}.$$

Konjunktsiooni \mathfrak{R}_j ($j \neq i$) esitame kujul $\mathfrak{R}_j = \mathfrak{C}_j \& \mathfrak{D}_j$ järgmiselt: konjunktsiooni \mathfrak{C}_j moodustavad \mathfrak{R}_j ja \mathfrak{R}_i ühised lausemärgid (kui neid pole, võtame $\mathfrak{C}_j = t$); kõik ülejäänud \mathfrak{R}_j lausemärgid moodustavad \mathfrak{D}_j (kui neid pole, võtame $\mathfrak{D}_j = t$).

Märgime, et konjunktsioonides \mathfrak{D}_j ei saa esineda lausemärke

$$X_{v_1}^{\alpha_{v_1}}, X_{v_2}^{\alpha_{v_2}}, \dots, X_{v_s}^{\alpha_{v_s}}$$

(\mathfrak{D}_j konstruktsiooni põhjal) ja

$$\bar{X}_{v_1}^{\alpha_{v_1}}, \bar{X}_{v_2}^{\alpha_{v_2}}, \dots, \bar{X}_{v_s}^{\alpha_{v_s}}$$

(konjunktsioonide \mathfrak{R}_i ja \mathfrak{R}_j mitteortogonaalsuse põhjal).^{*}

Näitame, et valem $\mathbf{V}_k^* \mathfrak{A}_k \rightarrow \mathbf{V}_j^* \mathfrak{D}_j$ on samaselt tõene. Oletame,

et see ei ole nii. Siis peab mingi väärtustuse γ korral olema $[\mathbf{V}_k^* \mathfrak{A}_k]_\gamma = t$ ja $[\mathbf{V}_j^* \mathfrak{D}_j]_\gamma = v$. Siis on ka $[\mathbf{V}_j^* \mathfrak{R}_j]_\gamma = [\mathbf{V}_j^* \mathfrak{C}_j \& \mathfrak{D}_j]_\gamma = v$.

Et \mathfrak{D}_j ei sisalda üldse neid muutujaid, mis esinevad valemis \mathfrak{R}_i , siis võib nende muutujate väärtused valida nii, et $[\mathfrak{R}_i]_\gamma = t$. Sellega saame väärtustuse, mille korral valem (3) on väär, mis on vastuolus eeldusega.

Tingimus 2) on triviaalselt kehtiv, sest valemid \mathfrak{C}_j sisaldavad ainult neid komponentlauseid, mis esinevad valemis \mathfrak{R}_i .

P i i s a v u s. Olgu tingimused 1) ja 2) täidetud. Vaatleme väärtustust γ , mille korral $[\mathfrak{R}_i \& \mathbf{V}_k^* \mathfrak{A}_k]_\gamma = t$. Siis peab olema

$[\mathfrak{R}_i]_\gamma = t$ ja $[\mathbf{V}_k^* \mathfrak{A}_k]_\gamma = t$. Tingimustest 1) ja 2) saame, et

$[\mathbf{V}_j^* \mathfrak{D}_j]_\gamma = t$ ja $[\mathfrak{C}_j]_\gamma = t$, millest järeldub $[\mathfrak{C}_j]_\gamma^* = t$. Siis

$$[\mathbf{V}_j^* \mathfrak{R}_j]_\gamma = [\mathbf{V}_j^* \mathfrak{C}_j \& \mathfrak{D}_j]_\gamma = \mathbf{V}_j^* [\mathfrak{C}_j \& \mathfrak{D}_j]_\gamma = \mathbf{V}_j^* ([\mathfrak{C}_j]_\gamma \& [\mathfrak{D}_j]_\gamma) = \\ = \mathbf{V}_j^* [\mathfrak{D}_j]_\gamma = [\mathbf{V}_j^* \mathfrak{D}_j]_\gamma = t. \text{ Et selle väärtustuse korral on ka valemi}$$

(3) tagaliige tõene, siis on valem (3) samaselt tõene. Teoreem on tõestatud.

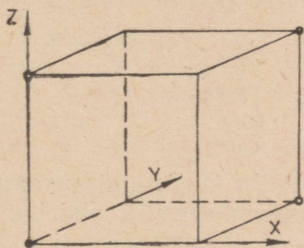
Tuleb märkida, et samuti nagu minimaalse disjunktiivse normaalkuju leidmisel taandatud disjunktiivsest normaalkujust lähtudes (§ 6) oleneb ka siin liikmete väljajätmise tulemus liikmete kontrollimise järjekorrast. Mingis järjekorras liikmeid kontrollides (ja välja jättes) jõuame mingi mittelihtsustuva disjunktiivse normaalkujuni. Otsitav minimaalne disjunktiivne normaalkuju leidub mittelihtsustuvate disjunktiivsete normaalkujude hulgas.

Märgime, et ka siin saab kasutada lineaarse planeerimise meetodeid. Iga M_t element annab ühe võrrandi, iga $[M \setminus M_v, M_t]$ maksimaalne intervall on tundmatuks. Tundmatute kordajateks minimeeritavas lineaarvormis on elementaarkonjunktsioonis esinevate lausemärkide arv.

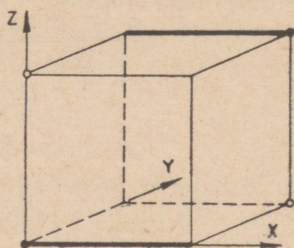
Näide 2. Olgu hulgad M_t ja M_v järgmised (joon. 11):

$M_t = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ ja $M_v = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. Hulk $M \setminus M_v = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. Hulga $M \setminus M_v$ maksimaalsed intervallid on $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$, $\{(0, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $\{(0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$, $\{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$. Neist kolmandal ja neljandal intervallil ei ole ühiseid punkte hulgaga M_t ja nad tuleb edasisest vaatlusest välja jätta. Ülejäänud intervallidele vastavad konjunktsioonid

$$\bar{Y}\bar{Z}, \bar{X}\bar{Z}, YZ, XZ.$$



Joon. 11.



Joon. 12.

Joonisel on kujutatud rasvaselt \mathcal{R}^4_{min} .

Kontrollime liikmeid nende väljajätmise seisukohalt. Võtame $\mathcal{R}_i = \bar{Y}\bar{Z}$. Siis $\mathbf{v}^* \mathcal{R}_k = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, $\mathbf{v}^* \mathcal{R}_j = \bar{X}\bar{Z}$. Teoreemi 2 konstruktsiooni põhjal $\mathcal{C}_j = \bar{Z}$, $\mathcal{D}_j = \bar{X}$.

Et $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \rightarrow \bar{X}$ ja $\bar{Y}\bar{Z} \rightarrow \bar{Z}$ on samaselt tõesed, siis võib liikme $\bar{Y}\bar{Z}$ konstrueeritavas minimaalses disjunktiivses normaalkujus ära jätta. Üldse saame siin 4 erinevat minimaalset disjunktiivset normaalkuju:

$$\mathcal{R}^1_{min} = \bar{X}\bar{Z} \vee XZ,$$

$$\mathcal{R}^2_{min} = \bar{X}\bar{Z} \vee YZ,$$

$$\mathcal{R}^3_{min} = \bar{Y}\bar{Z} \vee XZ,$$

$$\mathcal{R}^4_{min} = \bar{Y}\bar{Z} \vee YZ,$$

kus esimene ei sisalda üldse lausemärki Y , neljas aga lausemärki X . Normaalkujude \mathcal{R}^1_{min} ja \mathcal{R}^4_{min} korral ei sõltu tulemus seega sisendsignaali Y või vastavalt X vigadest.

§ 9. LAUSEARVUTUSE MÕNINGAID TEISI PROBLEEME

Käesolevas paragrahvis vaatleme lühidalt mõningaid teisi olulisemaid probleeme ja meetodeid, mida võib vaja minna lausearvutuse rakendustes.

1. Lausearvutuse valemite tõeväärtuse väljaarvutamise teisi meetodeid

a) Žegalkini meetod.

Žegalkini meetodi põhimõte seisneb selles, et valemite tõeväärtuse väljaarvutamine taandatakse arvutustele jäägiklassikorpuses 2 järgi. Jäägiklassikorpuses 2 järgi (lühidalt $R^{(2)}$) samastatakse kõik arvud (kusjuures vaadeldakse ainult täisarve) jääkidega, mis tekivad vastavate arvude kahega jagamisel. Seega on korpuses $R^{(2)}$ ainult kaks elementi: 0 ja 1. Liitmise ja korrutamise puhul kehtivad järgmised võrdused:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0, & 0 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 = 1, & 0 \cdot 1 = 0, \\ 1 + 0 = 1, & 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 + 1 = 0, & 1 \cdot 1 = 1. \end{array}$$

Korpuses $R^{(2)}$ kehtivad peale liitmise ja korrutamise kommutatiivsuse veel liitmise ja korrutamise assotsiatiivsus, distributiivsus

$$a(b + c) = ab + ac$$

ning võrdused

$$\begin{array}{ll} 0 + a = a, & 0 \cdot a = 0, \\ a + a = 0, & 1 \cdot a = a, \\ & a \cdot a = a \end{array}$$

$R^{(2)}$ mistahes elementide a , b ja c korral.

Samastades nüüd tõeväärtused t ja v vastavalt elementidega 1 ja 0, saame kergesti kontrollida, et

$$\begin{array}{l} \bar{X} = 1 + X, \\ X \& Y = X \cdot Y. \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Võrdustele (1) ja (2) tuginedes saame nüüd avaldada ka teised loogilised tehted. Lähtudes seosest (14) (§ 3), saame

$$\begin{aligned} X \vee Y &= \neg(\bar{X} \& \bar{Y}) = 1 + [(1 + X)(1 + Y)] = \\ &= 1 + [1 + X + Y + XY] = X + Y + XY. \end{aligned} \quad (3)$$

Analoogiliselt

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y = 1 + X + XY, \\ X \sim Y = 1 + X + Y, \\ X \approx Y = X + Y, \\ X / Y = 1 + XY. \end{array} \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}$$

Lausearvutuse valemi tõeväärtuse väljaarvutamine taandub nüüd pärast loogiliste tehete asendamist võrduste (1)–(7) alusel arvutustele jäägiklassikorpuses $R^{(2)}$.

Näide 1. Leiame valemi

$$(X \rightarrow Y) \& \bar{Z} \rightarrow X \vee (Y \sim Z) \quad (8)$$

tõesuspiirkonna.

Asendades järk-järgult loogilised tehted liitmise ja korrutamisega jäägiklassikorpuses $R^{(2)}$, saame

$$\begin{aligned} [(1 + X + XY)(1 + Z)] &\rightarrow [X + (1 + Y + Z) + X(1 + Y + Z)] = \\ &= (1 + X + Z + XY + XZ + XYZ) \rightarrow (1 + X + X + Y + Z + \\ &+ XY + XZ) = 1 + (1 + X + Z + XY + XZ + XYZ) + (1 + X + \\ &+ Z + XY + XZ + XYZ) \cdot (1 + Y + Z + XY + XZ). \end{aligned}$$

Pärast läbikorrutamist ja koondamist saame

$$1 + Y + XY + YZ + XYZ. \quad (9)$$

Leiame loogilise polünoomi (9) tõesuspiirkonna. Kui $Y = 0$, siis omandab polünoom (9) väärtuse 1 sõltumatult X ja Z väärtusest. Kui $Y = 1$, siis omandab polünoom kuju $X + Z + XZ$. Kui $X = 1$, siis saame $1 + Z + Z = 1$. Kui $X = 0$, siis taandub polünoom muutujaks Z , mis peab seega omandama väärtuse 1. Järelikult on valem (8) tõene $Y = 0$ korral (sõltumatult muutujatest X, Y), $Y = X = 1$ korral (sõltumatult muutujast Z) ja $Y = Z = 1, X = 0$ korral. Valem (8) on väär ainult ühe väärtustuse ($X = Z = 0$ ja $Y = 1$) korral.

Valemite teisendamisel loogiliseks polünoomiks võib kasutada ka võrdust

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 \cdot f(1, X_2, \dots, X_n) + (X_1 + 1)f(0, X_2, \dots, X_n), \quad (10)$$

mis on võrduse (2) (§ 4) erijuhtum.

Lõpuks märgime, et tõeväärtusi t ja v võib samastada ka vastavalt elementidega 0 ja 1. Sel korral tulevad loogiliste tehete aritmeetilised ekvivalendid muidugi teistsugused:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 1 + X, & X \rightarrow Y &= Y + XY, \\ X \vee Y &= X \cdot Y, & X \sim Y &= X + Y, \\ X \& Y &= X + Y + X \cdot Y, & X \approx Y &= 1 + X + Y, \\ X / Y &= 1 + X + Y + XY, \end{aligned}$$

kusjuures arvutused toimuvad ikka korpuse $R^{(2)}$ reeglite kohaselt.

b) Loogiliste tehete aritmetiseerimine kõigi täisarvude vallas.

Selle meetodi korral teostatakse arvutusi (liitmine, lahutamine ja korrutamine) täisarvude vallas tavalise aritmeetika reeglite kohaselt. Muutujad X, Y, Z, \dots võivad seejuures omandada ainult väärtusi 0 ja 1, mis samastatakse vastavalt tõeväärtustega v ja t .

Selles interpretatsioonis kehtib seos $X \cdot X = X$, kuid erinevalt arvutustest jäägiklassikorpuses $R^{(2)}$ kehtib siin

$$X + X = 2X, \quad 2X + X = 3X, \dots,$$

kus ühest erinevaid kordajaid 2, 3, ... ei või enam ära jätta.

Loogiliste tehete aritmeetilised ekvivalendid tulevad siin järgmised:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 1 - X, & X \rightarrow Y &= 1 - X + XY, \\ X \& Y &= X \cdot Y, & X \sim Y &= 1 - X - Y + 2XY, \\ X \vee Y &= X + Y - XY, & X \approx Y &= X + Y - 2XY, \\ X / Y &= 1 - XY. \end{aligned}$$

Väärtusi 0 ja 1 võib samastada ka vastavalt tõeväärtustega t ja v . Loogiliste tehete aritmeetilised ekvivalendid tulevad siis muudugi teistsugused.

Valemi tõeväärtuste leidmine toimub samuti nagu Žegalkini meetodi korral.

2. Loogiliste tehete täielikud süsteemid

Paragrahvis 1 defineerisime loogilised tehted: konjunktsiooni, disjunktsiooni, implikatsiooni, ekvivalentsi, mitteekvivalentsi, alternatiivse eituse ja eituse.

Tuleb märkida, et kahevalentse lausearvutuse kõikvõimalikke binaarseid tehteid on niisama palju kui kahest argumentidist sõltuvaid kahendmuutuja funktsioone, s. t. 16 (vt. tabel 18).

Tabel 18

X	Y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	t	t	t	t	t	t	t	t
v	t	v	v	v	v	t	t	t	t	v	v	v	v	t	t	t	t
t	v	v	v	t	t	v	v	t	t	v	v	t	t	v	v	t	t
t	t	v	t	v	t	v	t	v	t	v	t	v	t	v	t	v	t

Varem defineeritud loogilised tehted avalduvad järgmiselt:

$$X \& Y = f_2(X, Y), \quad X \vee Y = f_8(X, Y), \quad X \rightarrow Y = f_{14}(X, Y),$$

$X \sim Y = f_{10}(X, Y)$, $X \approx Y = f_7(X, Y)$, $X / Y = f_{15}(X, Y)$, $\neg X = f_{13}(X, Y)$. Et matemaatilises loogikas käsitletakse just neid binaarseid tehteid ja mitte teisi, on tingitud sellest, et neid tehteid on võimalik lihtsal viisil loogiliselt interpreteerida. Puhtformaalsest seisukohast lähtudes võib väga hästi kasutada ka teisi binaarseid tehteid (f_3, f_5, f_9 jms.).

Kõige selle juures tuleb aga tähelepanu pöörata ühele olulisele asjale: mistahes kahendmuutuja funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ peab

olema võimalik avaldada valitud tehete süsteemi abil, kasutades lisaks veel funktsioonide superpositsiooni (funktsioonide järjest rakendamise) operatsiooni. Loogiliste tehete süsteemi nimetame täielikuks, kui mistahes kahendmuutuja funktsioon on avaldatav selle süsteemi tehete ja superpositsiooni abil.

Järelduse 2 (§ 4) põhjal võime öelda, et konjunktsioon, disjunktsioon ja eitus moodustavad juba täieliku süsteemi.

Duaalsuse seoseid (13) ja (14) (§ 3) kasutades saame avaldada konjunktsiooni eituse ja disjunktsiooni või disjunktsiooni vastavalt eituse ja konjunktsiooni abil. Seega moodustavad täieliku tehete süsteemi ka disjunktsioon ja eitus või vastavalt konjunktsioon ja eitus.

Selle küsimuse ammendavaks lahendamiseks toome mõned mõisted. Kahendmuutuja funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nimetame paaritufunktsiooniks, kui

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \neg f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n).$$

Paaritufunktsiooni näideteks on funktsioonid $f(X) = X$ ja $f(X) = \bar{X}$.

Kahendmuutuja funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nimetame lineaarseks, kui kehtib

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n \pmod{2}.$$

Lineaarse funktsiooni näideteks on $f(X) = \bar{X}$, $f(X, Y) = X \sim Y$ ja $f(X, Y) = X \approx Y$ [vt. võrdused (1), (5) ja (6)].

Kahendmuutuja funktsiooni $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nimetame monotoonseks, kui väärtustuste $(X_1', X_2', \dots, X_n')$ ja $(X_1'', X_2'', \dots, X_n'')$ korral, kus X_i' on mitte suurema tõeväärtusega kui X_i'' ($i = 1, 2, \dots, n$), kehtib sama vahekord ka funktsiooni väärtuste

$$f(X_1', X_2', \dots, X_n') \text{ ja } f(X_1'', X_2'', \dots, X_n'')$$

vahel.

Monotoonse funktsiooni näideteks on funktsioonid $f(X) = X$, $f(X, Y) = X \& Y$ ja $f(X, Y) = X \vee Y$.

Ütleme, et funktsioon säilitab konstanti t , kui

$$f(t, t, \dots, t) = t,$$

ja konstanti v , kui

$$f(v, v, \dots, v) = v.$$

Teoreem 1 (E. Post, S. Jablonski). Selleks, et funktsioonide süsteem

$$\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{k_1}), f_2(x_1, x_2, \dots, x_{k_2}), \dots, f_s(x_1, x_2, \dots, x_{k_s})\}$$

oleks täielik, on tarvilik ja piisav, et selles süsteemis leiduks

1) funktsioon, mis ei säilita konstanti t , 2) funktsioon, mis ei säilita konstanti v , 3) funktsioon, mis pole paaritu, 4) funktsioon, mis pole lineaarne, 5) funktsioon, mis pole monotoonne.

Süsteem $\&$, \uparrow on täielik. Seda väidet saab nüüd tõestada teoreemi 1 abil, sest konjunktsioon rahuldab teoreemi 1 tingimusi 3) ja 4), eitus aga tingimusi 1), 2) ja 5).

Et disjunktsioon rahuldab samuti teoreemi 1 tingimusi 3) ja 4), siis on ka süsteem \vee , \uparrow täielik.

Et implikatsioon rahuldab teoreemi 1 tingimusi 2), 3) ja 4), on süsteem \rightarrow , \uparrow täielik.

Alternatiivne eitus rahuldab kõiki tingimusi 1)–5). Järelikult piisab ainuüksi sellest funktsioonist kõigi kahendmuutuja funktsioonide esitamiseks.

Et praktikas pole oluline mitte ainult valemite ja kahendmuutuja funktsioonide üleskirjutamise võimalus, vaid nende ökonoomne üleskirjutamine, siis kasutatakse tavaliselt laiemat loogiliste tehete süsteemi.

3. Mitmevalentsest lausearvutusest

Kahevalentses lausearvutuses hindasime lausete vastavust tegelikkusele kaheastmelise skaala (vastab tegelikkusele — t , ei vasta tegelikkusele — v) alusel. Täiesti mõeldav on aga lausete vastavust tegelikkusele hinnata näiteks mingisuguse 3-, 4- või rohkemaastmelise skaala alusel. Sellisel korral kõnelemegi 3-, 4-jne. -valentsest lausearvutusest (loogikast). n -valentset lausearvutust (loogikat), kus $n \geq 3$, nimetame üldiselt mitmevalentseks lausearvutuseks (loogikaks).

Näiteks võib kolmevalentses lausearvutuses vaadelda tõeväärtusi «tõene», «väär» ja «määramata», lugedes viimast vahepealseks tõeväärtuseks t ja v vahel. Tõeväärtust «määramata» võib seejuures vaadelda kui üleminekuolukorda tõeväärtuste t ja v määramisel. Mitmevalentse loogika tõeväärtusi võib aga vaadelda ka kui lausete tõesuse tõenäosusi. Üldiselt võib mitmevalentse loogika tõeväärtusi mõista mitmel viisil.

Vaatleme üht konkreetset kolmevalentset lausearvutust, kus tõeväärtused on «tõene», «määramata» ja «väär». Loogilised tehted defineerime tabeli 19 abil.

Tõeväärtuste t , v korral ühtivad tehted vastavate kahevalentse loogika tehetelega. Kui komponentlauseid sisaldavad tõeväärtust m , siis on tehted defineeritud nii, et nad pole vastuolus tulemustega, mis me saame m asendamisel t või v -ga.

Kui tõeväärtusi v , m , t kujutame vastavalt arvudega 0, 1, 2, siis saame tehteid aritmetiseerida järgmiselt: $X \& Y = \min(X, Y)$, $X \vee Y = \max(X, Y)$, $X \rightarrow Y = \max(2 - X, Y)$, $X \sim Y = \min[\max(2 - X, Y), \max(2 - Y, X)]$, $\uparrow X = 2 - X$.

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	$\neg X$
t	t	t	t	t	t	v
t	m	m	t	m	m	v
t	v	v	t	v	v	v
m	t	m	t	t	m	m
m	m	m	m	m	m	m
m	v	v	m	m	m	m
v	t	v	t	t	v	t
v	m	v	m	t	m	t
v	v	v	v	t	t	t

Valemi ja väärtustuse mõiste defineerime samuti nagu paragrahvis 2 (lauset tuleb vaadelda muidugi kui kolmendmuutujat). Valemite loogiline samaväärsus tuleb defineerida vastavate kolmendmuutuja funktsioonide samasuse kaudu. Kui valemite loogilist samaväärsust mõista selliselt, siis kehtivad seosed (6)–(19), (25), (26) ja (29)–(32). Kõige olulisemad erinevused kahevalentse lausearvutusega võrreldes on järgmised: valem $X \vee \bar{X}$ pole samaselt tõene (kuigi ta ei saa omandada ka tõeväärtust «väär») ja valem $X \& \bar{X}$ pole samaselt väär (kuigi ta ei saa omandada ka tõeväärtust «tõene»).

Märgime, et matemaatilises loogikas uuritakse ka nn. lõpmatusvalentseid loogikaid, s. t. selliseid loogilisi arvutussüsteeme, kus tõeväärtuste hulk on lõpmatu.

Toome näitena ühe lõpmatusvalentse lausearvutuse. Lausete tõeväärtused X, Y, \dots on reaalarvud, mis rahuldavad tingimust $0 \leq X \leq 1$. Äärmised tõeväärtused 0 ja 1 tähendavad vastavalt «väära» ja «tõest». Vahepealseid tõeväärtusi võib mõista kui tõenäosusi.

Tehteid võib defineerida näiteks selliselt:

$$\begin{aligned}\neg X &= 1 - X, \\ X \& Y &= \min(X, Y), \\ X \vee Y &= \max(X, Y), \\ X \rightarrow Y &= \min(1 - X + Y, 1).\end{aligned}$$

Mitmevalentse ja lõpmatusvalentse lausearvutuse puhul võib käsitleda kõiki neidsamu probleeme, mida käsitlesime kahevalentse lausearvutuse korral.

Senini on kõige rohkem tähelepanu pööratud tehete süsteemide täielikkuse ja teooria aksiomaatilise ülesehituse küsimustele.

Märgime, et mitmevalentsed ja lõpmatusvalentsed loogikad leiavad rakendamist elektriliste skeemide teoorias.

II PEATÜKK

LAUSEARVUTUSE AKSIOMAATILINE ÜLESEHITUS

§ 10. LAUSEARVUTUSE AKSIOMAATIKA

Lausearvutuse mitteaksiomaatilisel ülesehitamisel I peatükis kasutasime hulga- ja funktsiooniteooria kontseptsioone ning mitmesuguseid matemaatilisi-loogilisi tõestusvõtteid (vastuväitelist tõestust jms.). Selliselt ülesehitatud lausearvutus on rakendatav kõikidel aladel peale matemaatiliste teooriate aksiomaatilise ülesehitamise, kus tema rakendamine tekitab loogilise ringkäigu. Lausearvutuse aksiomaatilise ülesehitamise eesmärgiks ongi see, et lausearvutus oleks sõltumatu mistahes teisest distsipliinist ja järelikult rakendatav mistahes teooria ülesehitamisel.

Seoses deduktiivsete teooriate (nagu seda on matemaatilised teooriad) ülesehitusega teeme mõned selgitavad märkused.

On selge, et kui teooria ülesehituses tunnistada loogiline ringkäik mittelubatavaks, siis pole võimalik defineerida selle teooria kõiki mõisteid ja tõestada selle teooria kõiki tulemusi. Tõepoolest, kui mingi mõiste μ defineerida mõistete μ_1 ja μ_2 abil, siis nõuavad omakorda defineerimist (mõistest μ erinevate mõistete abil) mõisted μ_1 ja μ_2 jne. Analoogiline on olukord ka tulemuste tõestamisel. Seega tuleb deduktiivses teoorias paratamatult osa tulemusi aktsepteerida ilma tõestuseta, osa mõisteid ilma definitsioonita.

Teooria mitteaksiomaatilisel ülesehitamisel kasutatakse teiste teooriate mõisteid ja tulemusi, matemaatilisi-loogilist intuitsiooni (näiteks vastuväitelist tõestusvõtet), mis on inimestel välja kujunenud tegeliku elu põhjal, ja vahetuid pöördumisi tegelikkuse poole. Neid mitmesuguseid pöördumisi teiste valdkondade poole aga mitteaksiomaatilises teoorias ei registreerita, ei süstematiseerita ega analüüsita. Muuhulgas ei selgitata, missugune on teooria algmõistete (defineerimata mõistete) ning tõestuseta aktsepteeritavate väidete süsteem. Fikseerimata jääb samuti teooria ülesehitamisel kasutatavate loogiliste vahendite (tõestusvõtete) süsteem. Mitteaksiomaatilise teooria näidetena võib tuua matemaati-

lise analüüsi G. M. Fichtenholzi õpikus [39], hulgateooria P. S. Aleksandrovi õpikus [2] ja suurema osa teisi matemaatilisi distsipliine tavalises ülikoolikursuse käsitluses.

Mingi teooria aksiomaatilise ülesehituse all mõeldakse teooria sellist esitust, kus kõik selle teooria mõisted on defineeritud algmõistete ja juba varem defineeritud mõistete kaudu (mis lõpuks ikkagi tuginevad algmõistetel) ja kõik selle teooria tulemused on tuletatavad aksioomidest ja varem tõestatud tulemustest loogilismatemaatiliste arutelude (nn. tõestuste) abil. Seejuures on algmõisted ja aksioomid muudest mõistetest ja tulemustest spetsiaalselt välja tõstetud kõikide teooria algmõistete ja aksioomide täieliku loetlemise teel.

Tuleb märkida, et teooriat võib aksiomaatilise teooriana esitada üldiselt väga mitmel viisil, mitme erineva aksiomaatika abil. Seejuures võib ühes aksiomaatilises teoorias mingi tulemus olla aksioomiks, teises aksiomaatilises teoorias aga tõestatavaks tulemuseks. Mõistete liigitamisel algmõisteteks ja defineeritavateks mõisteteks, tulemuste liigitamisel aksioomideks ja tõestatavateks tulemusteks on niisiis mõte ainult ühe kindla aksiomaatilise teooria raames.

Teooriate aksiomaatilises ülesehituses tuleb eristada kaht taset.

1) Teooria algmõisted ja aksioomid (tõestuseta aktsepteeritavad väited) on fikseeritud, fikseerimata on aga teooria ülesehitamisel kasutatavad loogilised vahendid. Niisuguste aksiomaatiliste teooriate näidetena võib tuua tasapinnalise eukleidilise geomeetria ülesehituse Hilberti teoses [7] ja naturaalarvude teooria ülesehituse Peano aksioomidest lähtudes E. Landau teoses [20].

2) Teooria algmõisted, aksioomid ja loogilised vahendid (tõestusmetoodika) on kõik fikseeritud. Tavaliselt määratakse lubatavad loogilised vahendid teatava loogilise arvutussüsteemi fikseerimisega. Sellise aksiomaatilise teooria näitena võib tuua aritmeetika aksiomaatika S. C. Kleene'i monograafias [15].

Et teha vahet aksiomaatilise teooria ülesehituse kahe taseme vahel, kõneldakse teisel juhul sageli ka formaliseeritud aksiomaatilisest teooriast ehk formaliseeritud teooriast. On ilmne, et loogiliste arvutussüsteemide eneste aksiomaatilisel ülesehitamisel tuleb nad üles ehitada nimelt formaliseeritud aksiomaatiliste teooriatena.

Käesoleva paragrahvi eesmärgiks on anda selline lausearvutuse aksiomaatika, millest lähtudes on võimalik saada kõik I peatüki mõttes samaselt tõesed valemid. Et lausearvutuse aksiomaatilisel ülesehitamisel tuleb see arvutussüsteem üles ehitada I peatükiga võrreldes täiesti erinevatel alustel, siis ei saa siin kasutada mitte ühtegi I peatükis tõestatud tulemust ega selles peatükis defineeritud mõistet.

Kõigepealt esitame algmõisted ehk defineerimatud mõisted. Et nendele mõistetele on vastavusse seatud teatavad kindlad tähised

ehk sümbolid (*resp.* tähiste ehk sümbolite rühmad), siis kõnel-
dakse ka defineerimatutest sümbolitest.

Defineerimatud sümbolid (algmõisted) on järgmised:

1. $X, Y, Z, X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots, Z_1, Z_2, \dots$ (laused);
2. \vee (disjunktsioon);
3. \neg (eitus);
4. $(,)$ (sulud).

Valem on juba defineeritav mõiste.

Definitsioon 1.

- 1) kõik laused on valemid;
- 2) kui \mathcal{A} ja \mathcal{B} on valemid, siis on valem ka $(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{B})$;
- 3) kui \mathcal{A} on valem, siis on valem ka $\neg(\mathcal{A})$;
- 4) teisi valemiteid peale nende, mis on defineeritavad kooskõlas punktidega 1)–3), pole.

Definitsioon 2. (Osavalemi definitsioon.)

- 1) valem \mathcal{A} osavalemiks on valem \mathcal{A} ;
- 2) valemite \mathcal{A} ja \mathcal{B} osavalemid on ka valem $(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{B})$ osavalemid;
- 3) valem \mathcal{A} osavalemid on ka valem $\neg(\mathcal{A})$ osavalemid;
- 4) valemil pole teisi osavalemeid peale nende, mis on defineeritavad kooskõlas punktidega 1)–3).

Definitsioon 3. (Substitutsiooni definitsioon.)

- 1) kui \mathcal{A} on lause X , siis $S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ on valem \mathcal{B} ;
- 2) kui \mathcal{A} on lausest X erinev lause Y , siis $S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ on Y ;
- 3) kui \mathcal{A}_1 ja \mathcal{A}_2 on valemid, siis $S_X^{\mathcal{B}}((\mathcal{A}_1) \vee (\mathcal{A}_2))$ on $S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_1) \vee S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_2)$;
- 4) kui \mathcal{A} on valem, siis $S_X^{\mathcal{B}}(\neg(\mathcal{A}))$ on $\neg S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

Definitsioon 4. (Konjunktsiooni definitsioon.)

Valemit $\neg(\neg(\mathcal{A})) \vee (\mathcal{B})$ võime tähistada $(\mathcal{A}) \& (\mathcal{B})$ ja vastupidi.

Definitsioon 5. (Implikatsiooni definitsioon.)

Valemit $(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{B})$ võime tähistada $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ ja vastupidi.

Märkus 1. Definitsioonidest 3, 4 ja 5 järeldub, et kui \mathcal{A}_1 ja \mathcal{A}_2 on valemid, siis

$$S_X^{\mathcal{B}}((\mathcal{A}_1) \& (\mathcal{A}_2)) \text{ on } S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_1) \& S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_2)$$

ja

$$S_X^{\mathcal{B}}((\mathcal{A}_1) \rightarrow (\mathcal{A}_2)) \text{ on } S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_1) \rightarrow S_X^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_2).$$

Kerge on veenduda, et substitutsiooni $S_X^{\mathfrak{B}}$ rakendamine valemile annab jälle valemi.

Märkus 2. Sulgude arvu vähendamiseks lepime kokku, et 1) valemite, milles esineb ainult üks lausemärk, pole vaja sulgudesse paigutada; 2) kui sulgudega pole määratud mingit muud tehete järjekorda, tuleb kõigepealt teostada eitus, seejärel disjunktsioon ning konjunktsioon ja pärast neid tehteid implikatsioon. Seega võib valemid $(\neg(\mathfrak{A}))\vee(\mathfrak{B})$, $((\mathfrak{A})\vee(\mathfrak{B}))\rightarrow(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A})\rightarrow((\mathfrak{B})\&\&(\mathfrak{C}))$ kirjutada lihtsalt kujul $\neg(\mathfrak{A})\vee(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A})\vee(\mathfrak{B})\rightarrow(\mathfrak{C})$ ja $(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{B})\&(\mathfrak{C})$.

Järgmise sammuna lausearvutuse aksiomaatika esitamises tuleb välja tõsta teatavad valemid, mida me nimetame tõesteks valemiteks. Tõesed valemid määratakse allpool esitatavate aksiomide 1—6 abil, kusjuures on kerge näha, et sellel määramisviisil on samasugune induktiivne iseloom, nagu see on valemi definitsioonil.

Aksiom 1. $X\vee X\rightarrow X$ on tõene valem.

Aksiom 2. $X\rightarrow X\vee Y$ on tõene valem.

Aksiom 3. $X\vee Y\rightarrow Y\vee X$ on tõene valem.

Aksiom 4. $(X\rightarrow Y)\rightarrow(Z\vee X\rightarrow Z\vee Y)$ on tõene valem.

Aksiom 5. (Substitutsiooni aksiom.) Kui \mathfrak{A} on tõene valem, siis $S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ on tõene valem mistahes lause X ja valemi \mathfrak{B} korral. Aksiomi 5 tähistame $\frac{\mathfrak{A}}{S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})}$.

Aksiom 6. (*Modus ponens* ehk järelduse aksiom.) Kui \mathfrak{A} ja $(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{B})$ on tõesed valemid, siis on tõene ka valem \mathfrak{B} .

Aksiomi 6 tähistame $\frac{\mathfrak{A}, (\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}}$.

Definitsioon 6. Valemi \mathfrak{A} tõestuseks nimetame lõplikku valemite jada

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \quad (1)$$

kus \mathfrak{A}_1 on üks aksiomides 1—4 esitatud valemitest, valem \mathfrak{A}_i ($1 < i \leq n$) on kas üks aksiomides 1—4 esitatud valemitest või on saadud eelmistest valemitest aksiomide 5 ja 6 abil ning valem \mathfrak{A}_n on samane valemiga \mathfrak{A} .

Märgime, et definitsioonide 4 ja 5 ning sulgude ärajätmise reeglite kasutamisel saadud valemite loeme lähtevalemitega samasteks valemiteks.

Definitsioon 7. Valemite \mathfrak{A} nimetame tõeseks siis ja ainult siis, kui tal on vähemalt üks tõestus.

Märgime, et kõik aksiomides 1—4 toodud valemid on tõesed ka definitsiooni 7 mõttes, sest kõigil nendel valemitel on triviaalne tõestus, mis koosneb vastavast valemist endast. Soovi korral võib

defineerida tõestust kui valemite jada (1), kus $n > 1$. Sel korral tuleb teha muudatus tõese valemi definitsioonis 7, nimetades valemite tõeseks siis ja ainult siis, kui ta on kas aksiomides 1—4 esitatud valem või valem, millel on vähemalt üks tõestus. Mõlemad moodused on sisuliselt samaväärsed.

Näitena toome valemi $X \rightarrow X$ tõestuse.

Teoreem 1. $X \rightarrow X$ (ehk $\neg X \vee X$) on tõene valem.

Tõestus. Lähtume aksiomis 4 esitatud valemist:

$$\mathfrak{A}_1 = (X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y).$$

Teostades substituutsiooni $S_X^{X \vee X}(\mathfrak{A}_1)$, saame

$$\mathfrak{A}_2 = (X \vee X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee (X \vee X) \rightarrow Z \vee Y),$$

kust pärast substituutsiooni $S_Y^X(\mathfrak{A}_2)$ leiame

$$\mathfrak{A}_3 = (X \vee X \rightarrow X) \rightarrow (Z \vee (X \vee X) \rightarrow Z \vee X).$$

Valemi \mathfrak{A}_3 puhul kasutame aksiomi *modus ponens* ja aksiomi 1, millest saame

$$\mathfrak{A}_4 = Z \vee (X \vee X) \rightarrow Z \vee X,$$

kust substituutsiooni $S_Z^{\neg X}(\mathfrak{A}_4)$ abil jõuame valemieni

$$\mathfrak{A}_5 = \neg X \vee (X \vee X) \rightarrow \neg X \vee X,$$

mis on definitsiooni 5 põhjal samane valemiga

$$\mathfrak{A}_5' = (X \rightarrow (X \vee X)) \rightarrow (X \rightarrow X).$$

Teostades aksiomis 2 esitatud valemis

$$\mathfrak{A}_6 = X \rightarrow X \vee Y$$

substituutsiooni $S_Y^X(\mathfrak{A}_6)$, saame

$$\mathfrak{A}_7 = X \rightarrow X \vee X.$$

Kasutades valemite \mathfrak{A}_7 ja \mathfrak{A}_5' puhul aksiomi *modus ponens*, saamegi

$$\mathfrak{A}_8 = X \rightarrow X.$$

Valemite tõestamist vaatleme üksikasjalikumalt järgmises paragrahvis. Siin esitame lühidalt mõningad teised lausearvutuse aksiomaatikad.

1. Defineerimata sümboliteks on $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots$, &, $\vee, \rightarrow, \neg, (,)$.

Aksiomid:

- 1) $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$,
- 2) $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$,
- 3) $X \& Y \rightarrow X$,
- 4) $X \& Y \rightarrow Y$,
- 5) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \& Z))$,
- 6) $X \rightarrow X \vee Y$,

- 7) $Y \rightarrow X \vee Y$,
 8) $(X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z))$,
 9) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$,
 10) $X \rightarrow \neg\neg X$,
 11) $\neg\neg X \rightarrow X$,
 12) substituutsiooni aksioom $\frac{\mathfrak{A}}{S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})}$,
 13) järelduse aksioom $\frac{\mathfrak{A}, (\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}}$.

Selles aksiomaatikas on võetud defineerimatutena kõik enamkasutatavad loogilised tehted. See asjaolu lihtsustab küll mõnevõrra valemite tuletamist, kuid komplitseerib aksioomide süsteemi ja selle süsteemi uurimist. Lihtsamad aksioomide süsteemid saame muidugi väiksema algmõistete hulga korral.

2. G. Frege ja J. Łukasiewicz'i lausearvutuse aksiomaatika. Defineerimata sümbooliteks on $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots, \rightarrow, \neg, (,)$.

Aksioomid:

- 1) $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$,
 2) $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$,
 3) $(\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$,
 4) substituutsiooni aksioom $\frac{\mathfrak{A}}{S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})}$,
 5) järelduse aksioom $\frac{\mathfrak{A}, (\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})}{\mathfrak{B}}$.

3. Nagu näitas J. Nicod, saab lausearvutuse aksiomaatikat konstrueerida ka ühtainsat loogilist tehet — alternatiivset eitust — kasutades. Defineerimata sümbooliteks on siin $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots, /, (,)$.

Aksioomid on järgmised:

- 1) $(X_1/(X_2/X_3))/((X_4/(X_4/X_4))/((X_5/X_2)/((X_1/X_5)/(X_1/X_5))))$.
 2) substituutsiooni aksioom $\frac{\mathfrak{A}}{S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})}$,

3) valemitest \mathfrak{A} ja $(\mathfrak{A})/((\mathfrak{B})/(\mathfrak{C}))$ järeldub valem \mathfrak{C} .

Põhjalikuma ülevaate saamiseks teistest lausearvutuse aksiomaatikatest võib soovitada A. Churchi monograafiat [41].

§ 11. LAUSEARVUTUSE VALEMITE TÕESTAMINE

Lausearvutuse aksiomaatikast lähtudes saab tõestada kõiki valemeid nii, nagu seda tegime valemi $X \rightarrow X$ puhul. Kuid üldiselt on valemite tõestused küllaltki pikad. Paljudes tõestustes korra-

takse seejuures ühtesid ja samu tõestuskäike. Ülevaatlikkuse ja ökonoomsuse printsiipidest lähtudes on otstarbekohane korduvalt esinevad kindlakujulised tõestuskäikude osad kokku võtta nn. tõe st u s r e e g l i t e k s. Kõik tõestusreeglid tuleb muidugi põhjendada aksiomaatikast lähtudes. Märgime, et kui mingi valem \mathfrak{A} on tõestatud tõestusreegleid kasutades, siis saab selle tõestuse põhjal ilma eriliste raskusteta välja kirjutada ka üksikasjaliku tõestuse.

Reegel 1. Kui $(\mathfrak{A})\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ on tõene, siis on tõene ka \mathfrak{A} .

Reegel 2. Kui \mathfrak{A} on tõene, siis on tõene ka $(\mathfrak{A})\mathbf{V}(\mathfrak{B})$, kus \mathfrak{B} on mistahes valem.

Reegel 3. Kui $(\mathfrak{A})\mathbf{V}(\mathfrak{B})$ on tõene, siis on tõene ka $(\mathfrak{B})\mathbf{V}(\mathfrak{A})$.

Reegel 4. Kui $(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{B})$ on tõene, siis on tõene ka $(\mathfrak{C})\mathbf{V}\mathbf{V}(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{C})\mathbf{V}(\mathfrak{B})$, kus \mathfrak{C} on mistahes valem.

Reegel 5. Kui $(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{B})$ ja $(\mathfrak{B})\rightarrow(\mathfrak{C})$ on tõesed valemid, siis on tõene ka $(\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{C})$.

Reeglid 1—4 saab põhjendada aksiomidest 1—4 lähtudes, kui nendes aksiomides esitatud valemite teostada substituutsioonid $S_X^{\mathfrak{A}}$, $S_Y^{\mathfrak{B}}$ ja $S_Z^{\mathfrak{C}}$ ning kasutada aksiomi 6.

Reegli 5 põhjendamine toimub järgmiselt. Lähtume aksiomis 4 esitatud valemist

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \mathbf{V} X \rightarrow Z \mathbf{V} Y)$$

ja teostame selles substituutsioonid $S_X^{\mathfrak{B}}$, $S_Y^{\mathfrak{C}}$ ja $S_Z^{\mathfrak{A}}$, millest saame

$$((\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{C})) \rightarrow (\mathfrak{A} \mathbf{V} (\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{A} \mathbf{V} (\mathfrak{C})).$$

Eeldades, et $(\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{C})$ on tõene, saame aksiomi *modus ponens* ja definitsiooni 5 kasutades

$$((\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})) \rightarrow ((\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{C})),$$

kust $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ tõesuse ja aksiomi *modus ponens* abil jõuamegi valemieni

$$(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{C}), \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 1. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$ on tõene.

Tõestus. Lähtume teoreemis 1 (§ 10) tõestatud valemist

$$\neg X \mathbf{V} X.$$

Teostades selles valemis substituutsiooni $S_X^{\neg Y}$, kasutades reeglit 3 ja definitsiooni 5, saame

$$Y \rightarrow \neg \neg Y. \quad (1)$$

Kasutades reeglit 4, kus võtame valemiks \mathfrak{C} valemi $\neg X$, saame

$$\neg X \mathbf{V} Y \rightarrow \neg X \mathbf{V} \neg \neg Y,$$

mis on samane valemiga

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow \neg \neg Y). \quad (2)$$

Teostades aksiomis 3 esitatud valemis

$$X \vee Y \rightarrow Y \vee X$$

substitutsioonid $S_X^{\neg X}$, $S_Y^{\neg Y}$ ja kasutades definitsiooni 5, saame

$$(X \rightarrow \neg \neg Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X). \quad (3)$$

Rakendades valemite (2) ja (3) puhul reeglit 5, saamegi

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X), \text{ m. o. t. t.}$$

Reegel 6. Kui $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ ja $(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A})$ on tõesed, siis on tõesed ka $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{B})$ ja $\mathfrak{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{A})$.

Kirjutisega $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ tähistame valemit, milles esineb osavalem \mathcal{A} . $\mathfrak{F}(\mathcal{B})$ abil tähistame valemist $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ ainult selle poolest, et osavalem \mathcal{A} on seal asendatud valemiga \mathcal{B} . Reegel 6 võimaldab väita, et kui $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ ja $(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A})$ ning $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ on tõesed, siis on ka $\mathfrak{F}(\mathcal{B})$ tõene.

Põhjendame reeglit 6 kõigepealt kolmel erijuhul: kui $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ on

1) $\neg(\mathcal{A})$,

2) $(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{C})$,

3) $(\mathcal{C}) \vee (\mathcal{A})$.

Juhul 1) tuleb $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ ja $(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A})$ tõesusest lähtudes tões-tada

$$\neg(\mathcal{A}) \rightarrow \neg(\mathcal{B}) \quad \text{ja} \quad \neg(\mathcal{B}) \rightarrow \neg(\mathcal{A}).$$

Seda saab teha teoreemile 1 tuginedes ja teostades valemis

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

üks kord substitutsioonid $S_X^{\mathcal{A}}$ ja $S_Y^{\mathcal{B}}$, teine kord $S_X^{\mathcal{B}}$ ja $S_Y^{\mathcal{A}}$ ühes aksioomi 6 rakendamisega.

Juhul 2) tuleb $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ ja $(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A})$ tõesusest lähtudes tões-tada

$$(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B}) \vee (\mathcal{C}) \quad \text{ja} \quad (\mathcal{B}) \vee (\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A}) \vee (\mathcal{C}).$$

Tõestame esimese valemi. Selleks lähtume aksiomis 3 esitatud valemist

$$X \vee Y \rightarrow Y \vee X \quad (4)$$

ja teostame selles substitutsioonid $S_X^{\mathcal{A}}$ ja $S_Y^{\mathcal{C}}$. Siis saame

$$(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{C}) \vee (\mathcal{A}). \quad (5)$$

Eeldades $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ tõesust, saame reegli 4 põhjal

$$(\mathcal{C}) \vee (\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C}) \vee (\mathcal{B}). \quad (6)$$

Rakendades valemitele (5) ja (6) reeglit 5, saame

$$(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{C}) \vee (\mathcal{B}). \quad (7)$$

Teostades valemis (4) substituutsioonid $S_X^{\mathcal{C}}$ ja $S_Y^{\mathcal{B}}$, saame

$$(\mathcal{C})\mathbf{V}(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B})\mathbf{V}(\mathcal{C}). \quad (8)$$

Reegli 5 rakendamine valemitele (7) ja (8) annabki

$$(\mathcal{A})\mathbf{V}(\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B})\mathbf{V}(\mathcal{C}), \text{ m. o. t. t.}$$

Teine valem tõestatakse analoogiliselt.

Juhul 3) tuleb $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$ ja $(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A})$ tõesusest lähtudes tõestada

$$(\mathcal{C})\mathbf{V}(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C})\mathbf{V}(\mathcal{B}) \text{ ja } (\mathcal{C})\mathbf{V}(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{C})\mathbf{V}(\mathcal{A}),$$

mida saab teha reegli 4 rakendamisega.

Üldjuhul, kui $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ on mistahes valem \mathcal{A} sisaldav valem, saab reeglit 6 põhjendada reegli 6 erijuhtude 1)–3) korduva rakendamisega.

Teoreem 2. $X \rightarrow \neg\neg X$ ja $\neg\neg X \rightarrow X$ on tõesed valemid.

Tõestus. Lähtume teoreemi 1 tõestuses esinevast valemist

(1) ja teostame selles substituutsiooni S_Y^X , millega

$$X \rightarrow \neg\neg X \quad (9)$$

on tõestatud. Seega tuleb tõestada veel teine valem. Substituutsioon $S_X^{\neg X}$ valemis (9) annab

$$\neg X \rightarrow \neg\neg\neg X,$$

millest reegli 4 abil (valemiks \mathcal{C} on X) saame

$$X \mathbf{V} \neg X \rightarrow X \mathbf{V} \neg\neg\neg X. \quad (10)$$

Kasutades teoreemi 1 (§ 10) tulemuse puhul reeglit 3, saame

$$X \mathbf{V} \neg X. \quad (11)$$

Modus ponens annab valemite (10) ja (11) korral valemi

$$X \mathbf{V} \neg\neg\neg X,$$

millest reegli 3 abil saame

$$\neg\neg\neg X \mathbf{V} X \text{ ehk } \neg\neg X \rightarrow X, \text{ m. o. t. t.}$$

Teoreem 3. $\neg X \mathbf{V} \neg Y \rightarrow \neg(X \& Y)$ ja $\neg(X \& Y) \rightarrow \neg X \mathbf{V} \neg Y$ on tõesed valemid.

Tõestus. Lähtume teoreemis 2 tõestatud valemist $X \rightarrow \neg\neg X$ ja teostame selles substituutsiooni $S_X^{\neg X} \mathbf{V} \neg Y$. Saame

$$\neg X \mathbf{V} \neg Y \rightarrow \neg\neg(\neg X \mathbf{V} \neg Y),$$

mis konjunktsiooni definitsiooni põhjal (definitsioon 4, § 10) ongi

$$\neg X \mathbf{V} \neg Y \rightarrow \neg(X \& Y).$$

Teise valemi tõestamisel lähtume teoreemis 2 tõestatud valemist $\neg\neg X \rightarrow X$ ja teostame selles substituutsiooni $S_X^{\neg X} \mathbf{V} \neg Y$. Saame

$$\neg\neg(\neg X \mathbf{V} \neg Y) \rightarrow \neg X \mathbf{V} \neg Y,$$

mis konjunktsiooni definitsiooni arvestamisel annabki soovitava valemi. Teoreem on tõestatud.

Teoreem 4. $\neg(X \vee Y) \rightarrow \neg X \ \& \ \neg Y$ ja $\neg X \ \& \ \neg Y \rightarrow \neg(X \vee Y)$ on tõesed valemid.

Tõestus. Lähtume teoreemis 1 (§ 10) tõestatud valemist $X \rightarrow X$ ja teostame selles substituutsiooni $S_X^{\neg(X \vee Y)}$. Saame

$$\neg(X \vee Y) \rightarrow \neg(X \vee Y).$$

Asendame implikatsiooni tagaliikmes X ja Y vastavalt valemitega $\neg\neg X$ ja $\neg\neg Y$. Teoreemi 2 ja reegli 6 põhjal võime väita, et sel viisil saadud valem

$$\neg(X \vee Y) \rightarrow \neg(\neg\neg X \vee \neg\neg Y)$$

on tõene. Konjunktsiooni definitsiooni kasutades saamegi sellest

$$\neg(X \vee Y) \rightarrow \neg X \ \& \ \neg Y.$$

Teoreemi 4 teise valemi tõestus on äsjatooduga analoogiline. Vastav asendus tuleb seal teostada implikatsiooni eesliikmes.

Teoreem 5. $X \ \& \ Y \rightarrow Y \ \& \ X$ on tõene valem.

Tõestus. Lähtume aksiomis 3 esitatud valemist

$$X \vee Y \rightarrow Y \vee X, \tag{12}$$

millest substituutsioonide S_X^Z , S_Y^X ja S_Z^Y teostamisel saame valemi

$$Y \vee X \rightarrow X \vee Y. \tag{13}$$

Tuginedes valemitele (12) ja (13) ning reeglile 6, saame väita, et valemi osavalemites disjunktsiooni liikmete kommuteerimisel jääb tõene valem tõeseks.

Kasutame teoreemis 1 (§ 10) tõestatud valemist

$$X \rightarrow X$$

ja teostame selles substituutsiooni $S_X^{\neg(\neg X \vee \neg Y)}$. Saame valemi

$$\neg(\neg X \vee \neg Y) \rightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y),$$

kus tagaliikmes disjunktsiooni kommutatiivsust kasutades võime kirjutada

$$\neg(\neg X \vee \neg Y) \rightarrow \neg(\neg Y \vee \neg X),$$

mis konjunktsiooni definitsiooni põhjal ongi

$$X \ \& \ Y \rightarrow Y \ \& \ X, \text{ m. o. t. t.}$$

Analoogiliselt sellega, kuidas teoreemi 5 tõestuses [valemid (12) ja (13)] on näidatud disjunktsiooni kommutatiivsust, saame näidata, et valemi osavalemites konjunktsiooni liikmete kommuteerimisel jääb tõene valem tõeseks.

Teoreem 6. $X \ \& \ Y \rightarrow X$ ja $X \ \& \ Y \rightarrow Y$ on tõesed valemid.

Tõestus. Lähtume aksiomis 2 esitatud valemist

$$X \rightarrow X \vee Y$$

ja teostame selles substituutsioonid $S_X^{\neg X}$ ja $S_Y^{\neg Y}$. Saame

$$\neg X \rightarrow \neg X \vee \neg Y. \quad (14)$$

Teostades teoreemis 1 tõestatud valemis

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

substituutsioonid $S_X^{\neg X}$ ja $S_Y^{\neg X \vee \neg Y}$, saame

$$(\neg X \rightarrow \neg X \vee \neg Y) \rightarrow (\neg(\neg X \vee \neg Y) \rightarrow \neg \neg X). \quad (15)$$

Kasutades valemite (14) ja (15) puhul aksiomi *modus ponens*, saame

$$\neg(\neg X \vee \neg Y) \rightarrow \neg \neg X,$$

millest konjunktsiooni definitsiooni, teoreemi 2 ja reegli 6 abil saamegi

$$X \& Y \rightarrow X. \quad (16)$$

Valemi $X \& Y \rightarrow Y$ tõestamiseks lähtume valemist (16). Teostame selles substituutsioonid S_Y^Z , S_X^Y ja S_Z^X ning rakendame konjunktsiooni kommutatiivsust.

Teoreem 7. $X \vee (Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Y) \vee Z$ ja $(X \vee Y) \vee Z \rightarrow X \vee (Y \vee Z)$ on tõesed valemid.

Tõestus. Lähtume aksiomis 2 esitatud valemist

$$X \rightarrow X \vee Y \quad (17)$$

ja rakendame kaks korda reeglit 4, võttes esimene kord $\mathcal{C} = Z$ ja teine kord $\mathcal{C} = Y$. Saame valemi

$$Y \vee (Z \vee X) \rightarrow Y \vee (Z \vee (X \vee Y)).$$

Substituutsioonide $S_Y^{X_1}$, S_Z^Y , S_X^Z ja $S_{X_1}^X$ teostamisel saame sellest valemist

$$X \vee (Y \vee Z) \rightarrow X \vee (Y \vee (Z \vee X)). \quad (18)$$

Teostades valemis (17) substituutsioonid S_Y^Z ja $S_X^{X \vee Z}$, saame vastavalt valemid

$$X \rightarrow X \vee Z$$

ja

$$X \vee Z \rightarrow (X \vee Z) \vee Y,$$

mille puhul reegli 5 rakendamine annab

$$X \rightarrow (X \vee Z) \vee Y.$$

Rakendades sellele valemile reeglit 4, kus $\mathcal{C} = (X \vee Z) \vee Y$, saame

$$((X \vee Z) \vee Y) \vee X \rightarrow ((X \vee Z) \vee Y) \vee ((X \vee Z) \vee Y).$$

Kasutades siin valemist $(\mathcal{C}) \vee (\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{C})$, kus $\mathcal{C} = (X \vee Z) \vee Y$, ja reeglit 5, saame

$$((X \vee Z) \vee Y) \vee X \rightarrow (X \vee Z) \vee Y. \quad (19)$$

Rakendades valemitele (18) ja (19) disjunktsiooni kommutatiivsust ja reeglit 5, saame

$$X \vee (Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Z) \vee Y,$$

millest substituutsioone S_Z^Y , S_Y^Z , S_Y^Y ja disjunktsiooni kommutatiivsust kasutades jõuamegi valemini

$$X \vee (Y \vee Z) \rightarrow (X \vee Y) \vee Z. \quad (20)$$

Teise seose tõestamisel lähtume valemist (20), teostame selles substituutsioonid S_X^Z , S_Z^X , S_Z^Z ja kasutame disjunktsiooni kommutatiivsust.

Teoreem 7 koos reegluga 6 võimaldab kasutada disjunktsiooni assotsiatiivsust.

Teoreem 8. $X \rightarrow (Y \rightarrow X \& Y)$ on tõene valem.

Tõestus. Lähtume teoreemis 1 (§ 10) tõestatud valemist

$$X \rightarrow X,$$

kus teostame substituutsiooni $S_X^{\neg X \vee \neg Y}$, mille tulemusena saame

$$\neg X \vee \neg Y \rightarrow \neg X \vee \neg Y \text{ ehk } \neg(\neg X \vee \neg Y) \vee (\neg X \vee \neg Y).$$

Viimane valem annab reegli 3 kasutamisel

$$(\neg X \vee \neg Y) \vee \neg(\neg X \vee \neg Y),$$

millest disjunktsiooni assotsiatiivsust rakendades saame

$$\neg X \vee (\neg Y \vee \neg(\neg X \vee \neg Y)) \text{ ehk } X \rightarrow (Y \rightarrow X \& Y), \text{ m. o. t. t.}$$

Reegel 7. Kui valemid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on tõesed, siis on tõene ka valem $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$.

Reegli 7 põhjendus tugineb teoreemil 8. Teostame valemis $X \rightarrow (Y \rightarrow X \& Y)$ substituutsioonid $S_X^{\mathfrak{A}}$, $S_Y^{\mathfrak{B}}$. Kasutades aksiomi 6 ja eeldades \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} tõesust, saamegi näidata, et $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$ on tõene.

Valemite tõestamist samalaadselt jätkates saame tõestada näiteks valemid

$$X \& (Y \& Z) \rightarrow (X \& Y) \& Z, \quad (21)$$

$$(X \& Y) \& Z \rightarrow X \& (Y \& Z), \quad (22)$$

mis reegli 6 põhjal võimaldavad kasutada konjunktsiooni assotsiatiivsust,

$$X \vee (Y \& Z) \rightarrow (X \vee Y) \& (X \vee Z), \quad (23)$$

$$(X \vee Y) \& (X \vee Z) \rightarrow X \vee (Y \& Z), \quad (24)$$

mis reegli 6 põhjal võimaldavad kasutada disjunktsiooni distributiivsust, ning

$$X \& (Y \vee Z) \rightarrow (X \& Y) \vee (X \& Z), \quad (25)$$

$$(X \& Y) \vee (X \& Z) \rightarrow X \& (Y \vee Z), \quad (26)$$

mis reegli 6 abil annavad konjunktsiooni distributiivsuse.

Valemite (21)–(26) tõestuste juures peatumata märgime, et

teoreemide 1 (§ 10) ja 1—8 (§ 11), reeglite 1—7 ning valemite (21)—(26) abil saame iga valemi \mathfrak{A} teisendada kujule

$$(\mathfrak{B}_1) \& (\mathfrak{B}_2) \& \dots \& (\mathfrak{B}_k), \quad (27)$$

kus valemid \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$) on lausete ja nende eituste disjunktsioonid. Märgime, et valem (27) pole konjunktiivne normaalkuju, sest valemites \mathfrak{B}_i võib esineda lauseid ühes oma eitusega. Valemi \mathfrak{A} teisendamisel kujule (27) ülalmärgitud teoreemide, reeglite ja valemite abil osutuvad valemid

$$(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B}_1) \& (\mathfrak{B}_2) \& \dots \& (\mathfrak{B}_k), \quad (28)$$

$$(\mathfrak{B}_1) \& (\mathfrak{B}_2) \& \dots \& (\mathfrak{B}_k) \rightarrow (\mathfrak{A}) \quad (29)$$

tõesteks.

Teoreem 9. Valemi \mathfrak{A} tõesuseks on piisav, et valemi esitamisel kujul (27) igas liikmes \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$) leiduks vähemalt üks lause ühes oma eitusega.

Tõestus. Oletame, et igas liikmes \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$) leidub mingi lause X_{n_i} ühes oma eitusega. Disjunktsiooni kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse tõttu võib selle liikme avaldada kujul

$$(X_{n_i} \vee \neg X_{n_i}) \vee (\mathfrak{C}_i), \quad (30)$$

kusjuures

$$(\mathfrak{B}_i) \rightarrow (X_{n_i} \vee \neg X_{n_i}) \vee (\mathfrak{C}_i)$$

ja

$$(X_{n_i} \vee \neg X_{n_i}) \vee (\mathfrak{C}_i) \rightarrow (\mathfrak{B}_i) \quad (31)$$

on tõesed valemid.

Teoreemi 1 (§ 10) ja reegli 3 põhjal on valem $X_{n_i} \vee \neg X_{n_i}$ tõene. Reegli 2 põhjal on seega tõene valem (30). Valemist (31) nähtub, et tõene on siis ka \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$). Reeglist 7 järeldub, et tõene on siis konjunktsioon (27) ja valemi (29) tõesuse põhjal ka valem \mathfrak{A} . Sellega on teoreem tõestatud.

Lõpuks selgitame veel seda, kuidas antud eeldustest tuletada järeldusi lausearvutuse aksiomaatika põhjal. Märgime, et paragrahvis 5 käsitlesime sama küsimust mitteaksiomaatiliselt ülesehitatud lausearvutuse korral.

Siin vaatleme eeldusi samadel alustel lausearvutuse aksiomidega 1—4. Eelduste puhul on aga erinevuseks see, et nendes esinevad konstantsed laused A, B, C, \dots , mida pole võimalik substitueerida. See asjaolu ongi järelduste tuletamisel ainukeseks erinevuseks valemite tõestamisega võrreldes.

Selgitame järelduste tuletamist näite abil.

Näide 1. Olgu antud kaks eeldust: $A \rightarrow B$ ja $\neg B$. Näitame, et nendest saab järeldada $\neg A$. Selleks võtame tõe valemite (teoreem 1)

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

ja teostame selles substituutsioonid S_X^A ja S_Y^B . Saame

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

Kasutades aksiomi 6 ja arvestades $A \rightarrow B$ tõesust, saame

$$\neg B \rightarrow \neg A.$$

Arvestades $\neg B$ tõesust, saame aksiomi 6 abil sellest soovitud järelduse

$$\neg A.$$

§ 12. AKSIOMIDE SÜSTEEMI MITTEVASTURÄÄKIVUS

Mingi teooria aksiomaatilisel ülesehitamisel tekib rida spetsiifilisi probleeme, mis on seotud vastava aksiomide süsteemi kui terviku omaduste uurimisega. Loomulikult ei saa neid probleeme esineda mingi ainevaldkonna mitteaksiomaatilisel käsitlemisel.

Aksiomide süsteemi kui terviku omaduste uurimine pole võimalik sellesama aksiomide süsteemi vahenditega, sest konstrueeritud aksiomaatika on loomulikult ette nähtud teiseks otstarbeks (lausearvutuse aksiomaatika näiteks samaselt tõeste valemite tuletamiseks). Aksiomide süsteemi omaduste uurimisel kasutatakse peamiselt interpretatsioonide meetodit. Aksiomide süsteemi algmõisteid suvalisel viisil interpreteerides (tõlgendades), nii et nad rahuldavad aksiomide nõudeid, saamegi antud aksiomide süsteemi interpretatsiooni. Et iga interpretatsioon rahuldab aksiomide tingimusi, siis peavad iga interpretatsiooni puhul kajastuma ka kõik aksiomide süsteemist tehtavad järeldused ehk aksiomide süsteemi omadused. Ümberpöörduvalt: kui antud aksiomide süsteemi kas või ühel interpretatsioonil ei esine teatavat vahekorda või omadust, siis ei saa vastav omadus esineda ka antud aksiomide süsteemil enesel. Viimane asjaolu ongi aluseks aksiomide süsteemide üldiste omaduste kindlakstegemisel.

Kõigepealt tekib küsimus aksiomide süsteemi mittevasturääkivuse kohta. Aksiomide süsteemi nimetame mittevasturääkivaks, kui sellest aksiomaatikast lähtudes pole võimalik tuletada mittekooskõlastatavaid, üksteisele vasturääkivaid tulemusi. Vasturääkivast aksiomide süsteemist on seega võimalik saada üksteisele vasturääkivaid tulemusi, mis sisuliselt muudavad selle süsteemi kõlbmatuks mistahes ainevaldkonna uurimiseks ja kirjeldamiseks. Mittevasturääkivus on seega aksiomide süsteemi üks kõige olulisemaid omadusi.

Lausearvutuse aksiomaatikat nimetame mittevasturääkivaks, kui sellest aksiomaatikast lähtudes pole võimalik tõestada kaht valemit, mis on teineteisega sellises vahekorras nagu valemid

$$\mathfrak{A} \text{ ja } \neg(\mathfrak{A}).$$

Näitame, et kui lausearvutuse mingist aksiomaatikast (milles kehtivad aksiomid 2, 5 ja 6) lähtudes on tõestatavad valemid

$$\mathfrak{A} \text{ ja } \neg(\mathfrak{A}),$$

siis on selles aksiomide süsteemis tõestatav mistahes valem \mathfrak{B} .⁶ Lähtume aksiomis 2 esitatud valemist

$$X \rightarrow X \vee Y. \quad (1)$$

Teostame substituutsioonid $S_X^{\neg(\mathfrak{A})}$ ja $S_Y^{\mathfrak{B}}$. Saame

$$\neg(\mathfrak{A}) \rightarrow \neg(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B}). \quad (2)$$

Silmas pidades, et $\neg(\mathfrak{A})$ on tõestatav, kasutame aksiomi 6, mille abil saame

$$\neg(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B}) \text{ ehk } (\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B}). \quad (3)$$

Arvestades \mathfrak{A} tõestatavust ja aksiomi 6, saamegi valemist (3) valemi \mathfrak{B} , m.o.t.t.

Seega ühtib selles aksiomaatikas tõese valemi mõiste valemi mõistega üldse ja kogu aksiomaatika kaotab igasuguse mõtte.

Paragrahvis 10 esitatud lausearvutuse aksiomaatika mittevas-turääkivuse tõestamiseks kasutame järgmist interpretatsiooni. Interpreteerime lauseid X, Y, Z, \dots kui aritmeetilisi muutujaid, mis võivad omandada ainult kaht väärtust: 0 ja 1. Tehted defineerime nii:

$$\begin{array}{lll} \neg 1 = 0 & 0 \vee 0 = 0 & 1 \vee 0 = 0 \\ \neg 0 = 1 & 0 \vee 1 = 0 & 1 \vee 1 = 1, \end{array}$$

s. t. $\neg X = 1 - X$ ja $X \vee Y = X + Y$.

Sellise interpretatsiooni korral kujutavad lausearvutuse valemid endast kahendmuutuja funktsioone, mis samuti võivad omandada ainult kaht väärtust: 0 ja 1. Aksiomides 1—4 antud valemid võime siis esitada järgmiselt.

Aksiom 1: $(1 - X^2)X = (1 - X)X$.

Aksiom 2: $(1 - X)XY$.

Aksiom 3: $(1 - XY)YX$.

Aksiom 4: $(1 - (1 - X)Y)(1 - ZX)ZY$.

Kergesti on kontrollitav, et aksiomides 1—3 antud valemid on samaselt võrdsed nulliga. Ka aksiomis 4 antud valem on samaselt võrdne nulliga. Kui $Z \cdot Y = 0$, siis on kogu avaldis võrdne nulliga. Kui $Z \cdot Y = 1$, s. t. kui $Z = Y = 1$, taandub valem kujule $X(1 - X)$, mis on võrdne nulliga iga X korral. Seega on aksiomides 1—4 antud valemid samaselt võrdsed nulliga.

Nüüd näitame, et aksiomid 5 ja 6 on sellised, mis võimaldavad samaselt nulliga võrduvatest valemitest saada ikka samaselt nulliga võrduvaid valemid.

⁶ Analoogiliselt saab näidata, et kui eelduste hulgas on valemid \mathfrak{A} ja $\neg(\mathfrak{A})$, siis saab nendest eeldustest lausearvutuse aksiomaatika põhjal järeldada mistahes lausearvutuse valemi.

Aksiomi 5 puhul peame näitama seda, et kui valem \mathfrak{A} on samaselt võrdne nulliga, siis mistahes lausemärgi X asendamisel mingi valemiga \mathfrak{B} saame valemis, mis on samaselt võrdne nulliga.

Tõepoolest, lause X võib valemis \mathfrak{A} omandada kaht väärtust: 0 ja 1. Mõlemate korral tuleb valemis \mathfrak{A} väärtuseks 0. Et valemis \mathfrak{B} väärtuste hulk ei saa ületada lause X väärtuste hulka, siis X asendamisel valemiga \mathfrak{B} peab valem \mathfrak{A} olema samuti samaselt võrdne nulliga.

Aksiomi 6 puhul peame näitama seda, et kui \mathfrak{A} on samaselt 0 ja $(1 - \mathfrak{A})\mathfrak{B}$ on samaselt 0, siis on ka valem \mathfrak{B} samaselt 0. Tõepoolest, see omadus kehtib, sest eeldusest, et \mathfrak{A} on samaselt 0, järeldub, et $1 - \mathfrak{A}$ on samaselt 1. Valemitel $(1 - \mathfrak{A})\mathfrak{B}$ ja \mathfrak{B} on samad väärtused, m.o.t.t.

Nüüd võime tõesti väita, et oleme andnud teatava lausearvutuse aksiomaatika interpretatsiooni. Silmas pidades seda, et aksiomides 1—4 esitatud valemid olid samaselt võrdsed nulliga, samuti ka seda, et aksiomide 5 ja 6 abil saame samaselt nulliga võrdvate valemitest ikka samaselt nulliga võrdvaid valemid, võime väita, et tõesteks valemiteks võivad olla ainult samaselt nulliga võrduvad valemid. Järelikult ei ole võimalik tõestada kaht valemis, mis on teineteisega vahekorras nagu

$$\mathfrak{A} \text{ ja } \neg \mathfrak{A},$$

sest need valemid ei saa mõlemad korraga olla samaselt võrdsed nulliga.

Märgime, et kui valem \mathfrak{A} on esitatav kujul

$$(\mathfrak{B}_1) \& (\mathfrak{B}_2) \& \dots \& (\mathfrak{B}_k), \quad (4)$$

kus valemid \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$) on lausete ja nende eituste disjunktsioonid, ja valemis (4) kas või ühes liikmes \mathfrak{B}_j ei esine ühtegi lauset ühes oma eitusega, siis seda valemis (4) või vastavalt \mathfrak{A} ei saa tõestada antud aksiomaatikast lähtudes.

Selle väite tõestamiseks peame näitama, et valem (4) ei saa samaselt võrduda nulliga. Valime välja liikme \mathfrak{B}_j , kus pole ühtegi lauset ühes oma eitusega. Olgu liige \mathfrak{B}_j näiteks selline:

$$X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4 \vee \neg X_5, \quad (5)$$

mis vaadeldavas aritmeetilises interpretatsioonis annab

$$X_1 X_2 (1 - X_3) X_4 (1 - X_5). \quad (6)$$

Valides lausete väärtused $X_1 = X_2 = X_4 = 1$ ja $X_3 = X_5 = 0$, saame anda avaldisele (6) ehk disjunktsioonile (5) väärtuse 1. Kasutades konjunktsiooni definitsiooni ja pidades silmas vaadeldavat aritmeetilist interpretatsiooni, saame

$$X \& Y = \neg(\neg X \vee \neg Y) = X + Y - XY,$$

millest nähtub, et konjunktsioon võrdub ühega, kui tema üks komponentidest võrdub ühega. Lausetes X_1, X_2, \dots, X_5 ülalleitud väärtustel on seega kogu valem (4) võrdne ühega, m.o.t.t.

Teoreemi 8 (§ 11) ja äsjatõestatud tulemuse põhjal võime väita, et valemi \mathfrak{A} tõesuseks on tarvilik ja piisav, et valemi esitamisel kujul (4) igas liikmes \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$) leiduks vähemalt üks lause ühes oma eitusega.

Saadud tulemus ütleb, et paragrahvis 10 esitatud lausearvutuse aksiomaatika võimaldab leida kõik mitteaksiomaatilise lausearvutuse samaselt tõesed valemid ja ainult need.

§ 13. AKSIOOMIDE SÕLTUMATUS. AKSIOOMIDE SÜSTEEMI TÄIELIKKUS

Mingit aksiomi nimetame teistest aksiomidest sõltumatuks, kui leidub valem, mis on tõestatav kõikidest aksiomidest lähtudes, kuid mis pole enam tõestatav ilma selle aksiomi kasutamisetä.

Et esitatud lausearvutuse aksiomaatika puhul aksiomid 1–4 väitsid igaüks teatava valemi tõesust, siis on nende aksiomide sõltumatuse selgitamiseks otstarbekohane kasutada neidsamu valemid.

Aksiomi 1 sõltumatust saame näidata järgmise interpretatsiooni abil. Vaatleme lauseid X, Y, Z, \dots kui muutujaid, mis võivad omandada väärtusi 0, 1 ja 2. Tehted defineerime järgmiselt:

\vee	0	1	2	X	$\neg X$
0	0	0	0	0	1
1	0	1	2	1	0
2	0	2	0	2	2

Aksiomis 1 esitatud valemil $X \vee X \rightarrow X$ ehk $\neg(X \vee X) \vee X$ on $X = 2$ korral väärtus 2, aksiomides 2, 3 ja 4 esitatud valemid on aga samaselt võrdsed nulliga. Kui samaselt nulliga võrduvate valemite puhul rakendame aksiome 5 ja 6, siis saame ikka samaselt nulliga võrduvaid valemid.

Tõepoolest, kui mingis samaselt nulliga võrduvas valemis \mathfrak{A} asendame mingi lause X mingi valemiga \mathfrak{B} , siis ei saa \mathfrak{B} väärtuste hulk ületada X väärtuste hulka. Valem \mathfrak{A} ei saa siis ka pärast substituutsiooni omandada ühtki muud väärtust peale 0.

Kui nüüd valemid \mathfrak{A} ja $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ ehk $\neg(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$ on samaselt nullid, siis on $\neg(\mathfrak{A})$ samaselt 1. Selleks, et $1 \vee (\mathfrak{B})$ oleks samaselt 0, peab \mathfrak{B} olema samaselt 0.

Seega saame aksiomidest 2–6 lähtudes ainult selliseid valemid, mis on samaselt võrdsed nulliga. Aksiomis 1 märgitud va-

lem aga pole niisuguse omadusega. Järelikult ei saa teda tõestada nende aksiomide abil.

Aksioomi 2 sõltumatus tõestamiseks kasutame järgmist interpretatsiooni. Lauseid X, Y, Z, \dots vaatleme kui muutujaid, mis võivad omandada väärtusi 0, 1, 2 ja 3. Tehted defineerime järgmiselt:

V	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	3	0	3
2	0	0	2	2
3	0	3	2	3

X	$\neg X$
0	3
1	2
2	1
3	0

Aksioomis 2 esitatud valemil $X \rightarrow X \vee Y$ ehk $\neg X \vee (X \vee Y)$ on $X = Y = 1$ korral väärtus 2, aksiomides 1, 3 ja 4 esitatud valemid on aga samaselt võrdsed nulliga. Samuti saame näidata, et aksiomide 5 ja 6 rakendamine samaselt nulliga võrduvate valemite puhul annab ikka samaselt nulliga võrduvaid valemeid. Et aksioomis 2 esitatud valem pole sellise omadusega, siis ei ole ta ülejäänud aksiomide abil tõestatav.

Aksioomi 3 sõltumatus tõestamiseks kasutame järgmist interpretatsiooni. Lauseid X, Y, Z, \dots vaatleme kui muutujaid, mis võivad omandada väärtusi 0, 1 ja 2. Tehted defineerime järgmiselt:

V	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	0	2

X	$\neg X$
0	1
1	2
2	0

Aksioomis 3 esitatud valem $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$ ehk $\neg(X \vee Y) \vee (Y \vee X)$ on $X = 2$ ja $Y = 1$ korral võrdne ühega, aksiomides 1, 2 ja 3 esitatud valemid on aga samaselt võrdsed nulliga. Samuti võimaldavad aksiomid 5 ja 6 saada samaselt nulliga võrduvaist valemeist ikka samaselt nulliga võrduvaid valemeid. Et aksioomis 3 esitatud valem pole selline, siis ei ole ta ka ülejäänud aksiomide abil tõestatav.

Aksioomi 4 sõltumatus tõestamiseks kasutame järgmist interpretatsiooni. Lauseid X, Y, Z, \dots võivad omandada väärtusi 0, 1, 2 ja 3. Tehted defineerime nii:

V	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

X	$\neg X$
0	1
1	0
2	3
3	0

Aksioomis 4 esitatud valem $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$ ehk $\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg(Z \vee X) \vee (Z \vee Y))$ on $X=3$, $Y=1$ ja $Z=2$ korral võrdne kahega, aksioomides 1—3 esitatud valemid on aga samaselt võrdsed nulliga. Samuti võimaldavad aksioomid 5 ja 6 saada samaselt nulliga võrduvaist valemest ikka samaselt nulliga võrduvaid valemeid. Järelikult ei ole aksioomis 4 esitatud valem ülejäänud aksioomide abil tõestatav.

Aksioom 5 on teistest sõltumatu. Ilma selle aksioomita ei saa näiteks tõestada valemit $\neg(\neg X \vee \neg X) \vee \neg X$. Et selles veenduda, vaatleme järgmist interpretatsiooni. Laused X , Y , Z , ... võivad omandada väärtusi 0. Tehted defineerime nii:

V	0	1	2	
0	0	0	1	$\neg 0 = 2,$
1	0	1	1	$\neg 1 = 0,$
2	0	1	1	$\neg 2 = 0,$

Selle interpretatsiooni korral on aksioomides 1—4 esitatud valemid samaselt võrdsed nulliga. Aksioom 6 võimaldab samaselt nulliga võrduvaist valemest saada ikka samaselt nulliga võrduvaid valemeid. Valem $\neg(\neg X \vee \neg X) \vee \neg X$ on aga $X=0$ korral võrdne ühega ega ole järelikult tõestatav ilma aksioomi 5 abita.

Aksioom 6 on teistest sõltumatu. Ilma selle aksioomita ei saa näiteks tõestada valemit $X \vee \neg X$. Et selles veenduda, vaatleme järgmist interpretatsiooni. Valemid X , Y , Z , ... võivad omandada väärtusi 0 ja 1. Tehted defineerime järgmiselt:

V	0	1	X	$\neg X$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

Aksioomides 1—4 esitatud valemid võrduvad samaselt nulliga. Aksioom 5 võimaldab samaselt nulliga võrduvaist valemest saada ikka samaselt nulliga võrduvaid valemeid. Valem $X \vee \neg X$ on aga $X=0$ korral võrdne ühega ega ole järelikult tõestatav ainult aksioomide 1—5 abil.

Sellega on tõestatud iga üksiku aksioomi sõltumatus ülejäänud aksioomidest.

Lõpuks uurime veel aksioomide süsteemi täielikkust. Muide, aksioomide süsteemi täielikkust ennast võib mõista mitmel eri viisil. Aksioomide süsteemi täielikkust võib mõista mingi teise väidete hulga suhtes. Defineerime sellisest aspektist mõistetud täielikkuse järgmiselt: antud aksioomide süsteemi nimetatakse täielikuks mingi väidete hulga suhtes, kui selle väidete hulga iga väide on tõestatav antud aksioomide süsteemist lähtudes.

Loomulik on lausearvutuse aksiomaatika täielikkust uurida mitteaksiomaatilise lausearvutuse suhtes. Paragrahvi 12 lõpus toodud arutelu põhjal võime väita, et esitatud lausearvutuse aksiomaatika on täielik mitteaksiomaatilise lausearvutuse suhtes.

Kuid aksiomaatilise süsteemi täielikkust võib mõista ka sõltumatult ühestki teisest väidete hulgast. Sel korral kõneleme lihtsalt aksiomide süsteemi täielikkusest. Defineerime selle täielikkuse järgmiselt.

Aksiomide süsteemi nimetame täielikuks, kui sellele süsteemile mistahes uue aksiomi lisamisel, mis on sõnastatav esialgse aksiomaatika mõistete abil, kuid mis pole tõestatav esialgsest aksiomaatikast lähtudes, saame vasturääkiva aksiomide süsteemi.

Esitatud lausearvutuse aksiomaatika on ka selles mõttes täielik, kui mõista uute aksiomide lisamise all konkreetselt uute tõeste valemite juurdevõtmist. Tõepoolest, esialgsest aksiomide süsteemist lähtudes saame tõestada kõik mitteaksiomaatilise lausearvutuse samaselt tõesed valemid ja ainult need.

Aksiomide süsteemi juurdevõetav «tõene» valem, mis pole esialgsest süsteemist lähtudes tõestatav, peab siis olema selline, et tema esituses kujul

$$(\mathfrak{B}_1) \& (\mathfrak{B}_2) \& \dots \& (\mathfrak{B}_k), \quad (1)$$

kus valemid \mathfrak{B}_i ($1 \leq i \leq k$) on lausete ja nende eituste disjunktsioonid, vähemalt ühes liikmes \mathfrak{B}_i ei esine ühtegi lauset ühes oma eitusega. Olgu see liige näiteks

$$X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3 \neg X_4 \vee X_5.$$

Teostame valemis (1) substituutsioonid $S_{X_1}^X$, $S_{X_2}^{\neg X}$, $S_{X_3}^X$, $S_{X_4}^{\neg X}$ ja $S_{X_5}^X$. Kogu valem omandab siis kuju

$$(\mathfrak{A}) \& X. \quad (2)$$

Kasutades teoreemi 6 (§ 11), saame väita, et tõene on ka valem

$$(\mathfrak{A}) \& X \rightarrow X,$$

kust aksiomi 6 abil leiame, et ka valem X on tõene. Teostades viimases valemis substituutsiooni $S_X^{\neg X}$, leiame, et tõene on ka valem $\neg X$. Viimased tulemused ütlevad aga, et uus aksiomide süsteem on juba vasturääkiv. Seega on esialgne aksiomide süsteem täielik ka teise definitsiooni mõttes.

Märgime, et aksiomide süsteemi täiendamine uue «tõese» valemiga käesolevas paragrahvis ja aksiomide süsteemi täiendamine eeldustega järelduste tegemise eesmärgil paragrahvis 11 on oluliselt erinevad toimingud, sest eeldused sisaldavad konstantseid lauseid, mida ei saa substituueerida. Vastuolu konstrueerimisel esimesel juhul kasutasimegi aga just substituutsiooni aksiomi.

III PEATUKK

PREDIKAATARVUTUS

Käesoleva peatüki ülesandeks on kahevalentse predikaatarvutuse ülesehitamine mitteaksiomaatilistest seisukohtadest lähtudes.

§ 14. PREDIKAATARVUTUSE PÕHIMÕISTEID

Lausearvutuses vaadeldakse lauseid kui tervikuid, predikaatarvutuses aga jaotatakse lause kaheks oluliselt erinevaks osaks: indiviidiks või indiviidideks (objektideks, mille kohta midagi väidetakse) ja predikaadiks (indiviidide omaduseks või vahekorraks).

Indiviidide ja predikaatide eristamine lausetes võimaldab uurida paljusid loogilisi vahekordi, mida polnud võimalik käsitleda lausearvutuse abil. Näiteks väited

«Kui Juri Gagarin on kosmonaut, siis eksisteerivad kosmonau did.» (1)

«Kui $a_i \in M$ ($i = 1, 2, \dots$), siis $a_1 \in M$.» (2)

on esitatavad lausearvutuse sümboolikas implikatsioonina

$$A \supset B, \quad (3)$$

millest kuidagi ei järeldu, et valem (3) oleks samaselt tõene. Ometi tunnistame väited (1) ja (2) samaselt tõesteks nende loogilise struktuuri põhjal. Predikaatarvutuses üldistatakse aga lausearvutuse aparatuuri nii, et seda tüüpi väited nagu (1) ja (2) on selles üldistatud arvutussüsteemis samaselt tõesed.

Mingi ainevaldkonna uurimisel on meil tegemist teatava kindlalt piiritletud objektide hulgaga, mille elementide (objektide) kohta midagi väidetakse. Seda objektide hulka nimetame indiviidide piirkonnaks ja tähistame I abil. Indiviidide piirkonna elemente — objekte — nimetame indiviidideks. Neid tähistame a, b, c abil (kasutades vajaduse korral indekseid). Nõuame, et indiviidide piirkond sisaldaks indiviide, s. t. poleks

tühi hulk. Elementide arvukuse kohta indiviidide piirkonnas (indiviidide piirkonna võimsuse kohta) me muid nõudeid ei esita.

Kindlas järjekorras võetud indiviidide lõplikke loendeid nimetame indiviidide korteežideks ehk lihtsalt korteežideks. Korteeže tähistame nii:

$$(a_1), (a, b, c), (a_2, b_1, b_1, a_2).$$

Korteeže liigitame elementide arvu järgi üheelemendilisteks, kaheelemendilisteks jne., üldiselt n -elemendilisteks. Ülaltoodud näites on esimene korteež üheelemendiline, teine kolme- ja kolmas neljaelemendiline. Korteežides võib esineda ka korduvaid elemente (kolmas korteež ülaltoodud näites). Korteeže loeme võrdseteks, kui neil on sama arv elemente ja nende esimesed, teised, ..., n -indad elemendid on vastavalt võrdsed.

n -kohalist ($n \geq 1$) predikaati võime defineerida kui funktsiooni, mis igale n -elemendilisele indiviidide korteežile seab vastavusse ühe kindla tõeväärtuse t või v . Ühekohalist predikaati võime seega vaadelda sisuliselt kui indiviidide mingit kindlat omadust, n -kohalist ($n > 1$) predikaati kui n -elemendiliste korteežide mingit omadust ehk mingit vahekorda n indiviidi vahel.

n -kohalisi predikaate tähistame sümbolitega

$$P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)},$$

kasutades vajaduse korral ka alumisi indekseid. Ülemised indeksid tähistavad predikaadi kohtade arvu. Predikaate võime tähistada aga ka nii:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n), Q(y_1, y_2, \dots, y_n), R(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (4)$$

kus sümbolid x, y, z (ühes indeksitega) on individuaalmuutujate tähisteks. Individuaalmuutuja on muutuja, mida võib substituuerida mistahes indiviidiga (individuaalkonstandiga) vaadeldavast indiviidide piirkonnast. Kirjutisi kujul (4) ja kujul

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

nimetame n -kohalise predikaadi täislauseteks.

Predikaate $P^{(n)}$ ja $Q^{(n)}$ loeme võrdseteks, kui iga korteeži korral on predikaatidel $P^{(n)}$ ja $Q^{(n)}$ vastavalt üks ja sama tõeväärtus. Predikaatide võrdsust tähistame kas $P^{(n)} = Q^{(n)}$ või

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_i \in I).$$

Otstarbekohane on kasutada ka predikaatmuutuja mõistet. n -kohaline predikaatmuutuja on mistahes n -kohalise predikaadi esindajaks. Teda võib substituuerida mistahes konkreetse n -kohalise predikaadiga. Predikaatmuutujate tähistamiseks kasutame tähti F, G, H (vajaduse korral ühes indeksitega). Kirjutisi kujul (4) nimetame ka siin predikaadi täislauseteks.

Predikaatarvutuses kasutame seega:

- 1) konstantseid lauseid (tähisteks $A, B, C, A_1, B_1, C_1, \dots$),
- 2) muutuvaid lauseid (tähisteks $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots$),
- 3) individuaalkonstante (tähisteks $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \dots$),
- 4) individuaalmuutujaid (tähisteks $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$),
- 5) konstantseid predikaate (tähisteks $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, \dots$),
- 6) predikaatmuutujaid (tähisteks $F, G, H, F_1, G_1, H_1, \dots$).

Konstantide ja muutujate erinevus seisneb selles, et esimestel on mingi konkreetne sisuline tähendus, teistel aga mitte; muutujate puhul võime teostada substituutsioone, konstantide puhul mitte. Lisame veel, et matemaatiliste teooriate loogilise struktuuri uurimisel tähistatakse individuaalkonstante ja konstantseid predikaate tavaliste, traditsiooniliste tähistega. Näiteks tähistame naturaalarve ikka $1, 2, 3, \dots$.

Toome nüüd näiteid predikaatide ja nende täislausete kohta.

Näide 1. Olgu uuritavaks ainevaldkonnaks astronoomia. Tähistame indiviidid ja predikaadid järgmiselt:

Päike	— a	... on kinnistäht	— $Q^{(1)}$
Maa	— b	... on planeet	— $P^{(1)}$
Kuu	— c	... tiirleb ümber ...	— $R^{(2)}$

Vaadeldav indiviidide piirkond $I = \{a, b, c\}$. Kirjutame nüüd üles järgmised predikaadi täislauseid:

$Q(a)$	— «Päike on kinnistäht.»
$P(b)$	— «Maa on planeet.»
$R(c, b)$	— «Kuu tiirleb ümber Maa.»

Need täislauseid on kõik tõesed. Predikaatide $Q^{(1)}$, $P^{(1)}$ ja $R^{(2)}$ puhul kehtivad järgmised seosed:

$Q(a) = t$,	$P(a) = v$,	
$Q(b) = v$,	$P(b) = t$,	
$Q(c) = v$,	$P(c) = v$,	
$R(a, a) = v$,	$R(b, a) = t$,	$R(c, a) = v$,
$R(a, b) = v$,	$R(b, b) = v$,	$R(c, b) = t$,
$R(a, c) = v$,	$R(b, c) = v$,	$R(c, c) = v$.

Kasutades loogilisi tehteid, saame üles kirjutada järgmised valemid:

- (5) $\neg R(a, b)$ — «Päike ei tiirle ümber Maa.»
- (6) $Q(a) \& P(b)$ — «Päike on kinnistäht ja Maa on planeet.»
- (7) $R(b, a) \rightarrow P(b)$ — «Kui Maa tiirleb ümber Päikese, siis on Maa planeet.»
- (8) $R(c, b) \rightarrow P(c)$ — «Kui Kuu tiirleb ümber Maa, siis on Kuu planeet.»

Antud juhul on valemid (5), (6) ja (7) tõesed, (8) on aga väär.

Näide 2. Indiviidide piirkond I olgu naturaalarvude hulk. Indiviidid, s. t. naturaalarvud tähistame tavalisel viisil: 1, 2, 3, Muutujaid x, y, z kasutame mistahes naturaalarvude tähistamiseks.

Defineerime nüüd järgmised predikaadid:

- $P_1^{(1)}$ — ... on algarv,
 $P_2^{(1)}$ — ... on kordarv,
 $Q_1^{(1)}$ — ... on paaritu arv,
 $Q_2^{(1)}$ — ... on paarisarv,
 $R_1^{(2)}$ — ... on võrdne arvuga ...,
 $R_2^{(2)}$ — ... jagub arvuga

Nüüd võime üles kirjutada näiteks järgmised predikaadi täislausel:

- (9) $P_1(2)$ — «2 on algarv.»
 (10) $Q_1(5)$ — «5 on paaritu arv.»
 (11) $R_2(3, 2)$ — «3 jagub arvuga 2.»

Antud juhul on predikaadi täislausel (9) ja (10) tõesed, (11) aga väär. Kasutades loogilisi tehteid, saame üles kirjutada järgmised valemid:

- (12) $\neg P_1(x) \sim P_2(x) \vee R_1(x, 1)$ — « x pole algarv on samatõene sellega, et x on kordarv või võrdne arvuga 1.»
 (13) $\neg R_2(x, 2) \rightarrow Q_1(x)$ — «Kui x ei jagu arvuga 2, siis on x paaritu arv.»
 (14) $R_1(x, y) \rightarrow (F(x) \sim F(y))$ — «Kui $x = y$, siis on $F(x)$ samatõene $F(y)$ -ga.»
 ($F^{(1)}$ tähistab mistahes ühekohalist predikaati indiviidide piirkonnas I .)
 (15) $Q_1(z) \rightarrow R_2(z, 3) \vee R_2(z, 5)$ — «Kui z on paaritu arv, siis jagub z arvuga 3 või arvuga 5 (või mõlema arvuga).»
 (16) $\neg P_2(z) \& \neg R_1(z, 2) \& Q_2(z)$ — «Arv z pole kordarv, ei ole võrdne arvuga 2 ja on paarisarv.»

Valemid (12) ja (13) on tõesed iga x korral, (14) on tõene iga x, y ja $F^{(1)}$ korral, (15) on tõene kõikide paarisarvude ja arvude 3 ja 5 kordsete korral. Valem (16) on väär iga z korral.

§ 15. KVANTORID JA PREDIKAATARVUTUSE VALEMID

Olgu indiviidide piirkonnas I antud mingi ühekohaline predikaat $F^{(1)}$. Väidet, et predikaat $F^{(1)}$ kehtib indiviidide piirkonnas I iga indiviidi korral, tähistame

$$(\forall x)F(x), \quad (1)$$

kus sümbolit \forall nimetame universaalsuse ehk üldisuse kvantoriks. Väidet, et predikaat $F^{(1)}$ kehtib vähemalt ühe indiviidi puhul indiviidide piirkonnast I , tähistame

$$(\exists x)F(x), \quad (2)$$

kus sümbolit \exists nimetame eksistentsi ehk olemasolu kvantoriks. Vastavalt predikaadile $F^{(1)}$ omandavad avaldised (1) ja (2) ilmselt ühe kindla tõeväärtuse t või v :

$$(\forall x)F(x) = \begin{cases} t, & \text{kui iga } x \in I \text{ korral } F(x) \text{ on tõene,} \\ v, & \text{kui mingi } x \in I \text{ korral } F(x) \text{ on väär;} \end{cases} \quad (3)$$

$$(\exists x)F(x) = \begin{cases} t, & \text{kui mingi } x \in I \text{ korral } F(x) \text{ on tõene,} \\ v, & \text{kui iga } x \in I \text{ korral } F(x) \text{ on väär;} \end{cases} \quad (4)$$

Seega tähendavad kirjutised (1) ja (2) sisuliselt sedasama, mida

$$\bigwedge_{x \in I} F(x)$$

ja

$$\bigvee_{x \in I} F(x).$$

Lõpliku indiviidide piirkonna $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ puhul ongi võimalik asendada avaldisi (1) ja (2) vastavalt valemitega

$$F(a_1) \& F(a_2) \& \dots \& F(a_n) \quad (5)$$

ja

$$F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n). \quad (6)$$

Kvantoreid saab aga rakendada ka n -kohaliste ($n > 1$) predikaatide korral. Kvantorite rakendamine n -kohalistele ($n > 1$) predikaatidele tähendab sisuliselt uute, $(n - 1)$ -kohaliste predikaatide defineerimist järgmisel viisil:

$$\begin{aligned} & (\forall x_i)F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ & = G_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} t, & \text{kui liikseeritud muutujate} \\ & x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, \\ & x_n \text{ ja iga } x_i \in I \text{ korral} \\ & F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \\ & \dots, x_n) \text{ on tõene,} \\ v, & \text{kui leidub } x_i \in I \text{ nii, et} \\ & F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \\ & \dots, x_n) \text{ on väär;} \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\exists x_i) F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\
 & = G_2(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} t, & \text{kui leidub } x_i \in I \text{ nii, et} \\ & F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \\ & \dots, x_n) \text{ on tõene,} \\ v, & \text{kui iga } x_i \in I \text{ korral} \\ & F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \\ & \dots, x_n) \text{ on väär.} \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Definitsioonid (7) ja (8) on kooskõlas kvantorite definitsioonidega ühekohaliste predikaatide korral [(3) ja (4)]. Lõpliku indiviidide piirkonna puhul võib ka siin kasutada valemeid, mis on analoogilised valemitega (5) ja (6).

Püüame kvantorite rakendamist selgitada veel mõningate näidete varal, kasutades näites 2 (§ 14) defineeritud predikaate.

Kirjutis $(\exists x)P_1(x)$ tähendab: «leidub naturaalarv x , mis on algarv». Väide on tõene. $(\forall x)Q_2(x)$ tähendab: «iga naturaalarv x on paarisarv» ja on loomulikult väär. $(\forall x)R_2(x, y)$ tähendab: «iga naturaalarv x jagub naturaalarvuga y ». Selle väite tõesus sõltub indiviidi y konkreetsest väärtusest. Kui $y = 1$, siis on väide tõene; kui $y \neq 1$, siis on väide väär.

Seoses kvantoritega teeme nüüd rea märkusi. Ühtlasi defineerime ka predikaatarvutuse valemi ja mõningaid teisi mõisteid. Kõigepealt märgime järgmist.

1. Individuaalmuutujaid, mis esinevad koos kvantori märgiga [nagu x avaldistes $(\forall x)F(x)$ ja $(\exists x)G(x, y)$], nimetame seotud individuaalmuutujateks ehk lihtsalt seotud muutujateks. Kõiki teisi individuaalmuutujaid nimetame vabadeks muutujateks. Kvantoritega võib siduda ainult individuaalmuutujaid.⁷

Kvantorite kasutamise moodused määratakse kindlaks predikaatarvutuse valemi definitsiooniga:

1) kõik lausearvutuse laused ja predikaadi täislaused on predikaatarvutuse valemid;

2) kui \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on predikaatarvutuse valemid, kusjuures valem \mathfrak{A} vabade muutujad ei esine valemis \mathfrak{B} seotult ja \mathfrak{A} seotud muutujad ei esine valemis \mathfrak{B} vabalt, siis on ka $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \approx (\mathfrak{B})$ ja $(\mathfrak{A}) / (\mathfrak{B})$ predikaatarvutuse valemid;

3) kui \mathfrak{A} on predikaatarvutuse valem, siis on ka $\neg(\mathfrak{A})$ predikaatarvutuse valem;

4) kui valemis $\mathfrak{A}(x)$ esineb vaba individuaalmuutuja x , siis on $(\forall x)\mathfrak{A}(x)$ ja $(\exists x)\mathfrak{A}(x)$ predikaatarvutuse valemid;

5) teisi predikaatarvutuse valemid peale nende, mis on defineeritud kooskõlas punktidega 1)–4), pole.

⁷ Teist järku predikaatarvutuses lubatakse kvantoritega siduda ka predikaatmuutujaid. Seda arvutussüsteemi vaallemle hiljem.

Nii on näiteks predikaatarvutuse valemiteks kõik lausearvutuse valemid, paragrahvis 14 toodud avaldised (5)—(16) ja avaldised kujul

$$(\forall x)[F(x, y) \& G(x)], (\exists x)\{(\forall y)[F(x, y, z) \rightarrow G(y)]\}.$$

Predikaatarvutuse valemiteks pole aga näiteks avaldised

$$[(\forall x)F(x, y)] \& G(x), \quad (9)$$

$$(\exists z)[G(x, y) \rightarrow P(x)], \quad (10)$$

sest avaldises (9) esineb muutuja x ühes konjunktsiooni liikmes seotult, teises vabalt, avaldises (10) seotakse aga muutuja z , mis valemis $G(x, y) \rightarrow P(x)$ üldse ei esine.

Põhimõtteliselt võiks muidugi predikaatarvutuse valemi defineerida nii, et avaldised nagu (9) ja (10) oleksid predikaatarvutuse valemiteks. Sisuliselt see predikaatarvutuse võimalusi ei avarda, kuid komplitseerib valemitega opereerimist, sest siis tuleks valemiga (9) analoogiliste valemite puhul eristada mingi muutuja seotud ja vabu esinemisi selles valemis. Kõike seda saab aga vältida muutujate sobiva ümbertähistamisega. Valemiga (10) analoogilised valemid suurendaksid tarbetult valemite hulka, sest nad võimaldavad kirjutada valemi ette kvantori ühes selles valemis mitte esineva individuaalmuutujaga. Seega saame igast valemist lõpmata palju uusi valemid, mis ütlevad sisuliselt sedasama, mida ütleb antud valem. Avaldis (10) ütleb sisuliselt täpselt sedasama, mida valem

$$G(x, y) \rightarrow P(x).$$

2. Loogiliste tehete sooritamisel ja kvantorite rakendamisel pole vaja üksikuid predikaadi täislauseid (isegi kui nad esinevad ühes eitustega) sulgudesse paigutada. Üldse kasutame kõiki lausearvutuses tehtud kokkuleppeid sulgude ärajätmise kohta, laiendades neid predikaadi täislausetele. Seejuures lepime kokku, et kvantorid $(\forall x)$, $(\exists x)$, ... on seotud predikaadi täislausetega tugevamini kui mistahes teine tehtemärk.

3. Kvantorite järjestikku rakendamisel, nagu valemis

$$(\forall x_1)((\exists x_2) \dots ((\forall x_n)(\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n))) \dots),$$

pole vaja kvantorite järjekorra kindlaksmääramisel sulgusid kasutada. Võime kirjutada lihtsalt

$$(\forall x_1)(\exists x_2) \dots (\forall x_n)(\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (11)$$

Järjestikku rakendatud kvantorite korral, nagu valemis (11), loetakse kõigi nende kvantorite mõjupiirkonnaks kvantoravaldisele $(\forall x_1)(\exists x_2) \dots (\forall x_n)$ järgnev sulgavaldis.

4. Seotud muutujat mingis kvantorite mõjupiirkonnas võib tähistada mingi teise tähisega, tehes seda nii vaadeldavas mõjupiirkonnas kui ka vastava kvantori märgi juures. Seejuures tuleb silmas pidada, et muutuja uus tähis ei ühtiks selle valemi ühegi

vaba muutuja tähisega ega mõne teise seotud muutuja tähisega selles mõjupiirkonnas ja seda piirkonda hõlmavates mõjupiirkondades.

Kitsendavad tingimused ümbertähistamisel on arusaadavad, sest kui uus muutuja ühtiks mõne vaba muutujaga teisest mõjupiirkonnast, tekiks vastuolu valemi definitsiooni punktiga 2). Kui uus muutuja ühtiks mõne vaba muutujaga sellest samast mõjupiirkonnast, muutuks vabade ja seotud muutujate vahetuseks ja me saaksime hoopis teise tähendusega valemi. Illustreerime seda olukorda näidete varal. Tähistame predikaadi «naturaalarvule x järgneb naturaalarv y » $R(x, y)$ abil. Valem $(\exists y)R(x, y)$ tähendab siis: «leidub naturaalarv y , mis järgneb naturaalarvule x » ja on ilmselt tõene iga x korral. Kui nüüd tähistame muutuja y muutuja x abil, saame $(\exists x)R(x, x)$ — «leidub naturaalarv x , mis järgneb arvule x endale», mis on ilmselt väär. Analoogilisi olukordi esineb ka matemaatikas summeerimisindeksite ja integreerimismuutujate ümbertähistamisel, kus näiteks $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ ja $\int_a^b f(x, y) dx$ asemel võib

kirjutada $\sum_{k=1}^n a_{kj}$ ja $\int_a^b f(t, y) dt$, aga mitte $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ ega $\int_a^b f(y, y) dy$.

Kui uue muutuja tähis ühtib vaadeldavas mõjupiirkonnas mingi teise seotud muutuja tähisega, siis tekib vastuolu valemi definitsiooni punktiga 4). Et vaadeldav nõue pole mitte ainult formaalsest põhjusest tingitud ja sellest mitte kinnipidamine muudab valemi enda iseloomu, selgitab järgmine näide. Silmas pidades predikaadi $R(x, y)$ tähendust, võime $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$ sõnastada: «leiduvad naturaalarvud x ja y , nii et naturaalarvule x järgneb y ». Seega on $(\exists x)(\exists y)R(x, y)$ tõene. Tähistades aga $y x$ abil ja jättes teise kvantori kirjutamata, saame $(\exists x)R(x, x)$ — «leidub naturaalarv x , mis järgneb arvule x endale», mis on ilmselt väär.

Toome nüüd veel mõningaid näiteid predikaatide valemite kohta, kasutades paragrahvis 14 defineeritud predikaate.

(12) $(\exists x)\neg P_1(x)$ — «Eksisteerib naturaalarv x , mis pole algarv.»
Valem (12) on tõene.

(13) $\neg(\exists x)P_1(x)$ — «Ei eksisteeri ühtegi naturaalarvu, mis oleks algarv.» See on väite «eksisteerib naturaalarv x , mis on algarv» eitus. Valem (13) on väär.

(14) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)[R_2(z, x) \& R_2(z, y)]$ — «Iga naturaalarvu x ja y korral leidub naturaalarv z , mis jagub arvuga x ja arvuga y .» Valem (14) on tõene, sest selliseks arvuks z sobib $x \cdot y$.

(15) $(\exists z)(\forall x)(\forall y)[R_2(z, x) \& R_2(z, y)]$ — «Eksisteerib naturaalarv z , nii et iga naturaalarvu x ja y korral jagub z arvuga x ja arvuga y .» Valem (15) on väär.

(16) $(\forall x)(\forall y)[R_2(z, x) \& R_2(z, y)]$ — «Iga naturaalarvu x ja y korral jagub naturaalarv z arvuga x ja arvuga y .» Valem (16) on väär.

Valemitest (12)–(16) nähtub, et kvantorite järjekorra muutmine, kvantorite ja eitusmärkide vahetamine võib oluliselt muuta kogu valemit.

Märgime lõpuks, et predikaatarvutuse rakendustes on ülevaatlikkuse huvides sageli otstarbekohane kasutada nn. tõekestatud kvantoreid

$(\forall x)$ — «iga x korral hulgast I_1 kehtib ...»

$(\exists x)_{x \in I_1}$ — «leidub x hulgast I_1 , nii et ...»

Võttes kasutusele teatava spetsiaalse predikaadi $P(x)$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$P(x) = \begin{cases} t, & \text{kui } x \in I_1, \\ v, & \text{kui } \neg(x \in I_1), \end{cases}$$

saame tõekestatud kvantorid taandada harilikeks kvantoriteks. Tõepoolest, kergesti on kontrollitav, et

$$(\forall x)_{x \in I_1} F(x) = (\forall x)[P(x) \rightarrow F(x)]$$

ja

$$(\exists x)_{x \in I_1} F(x) = (\exists x)[P(x) \& F(x)].$$

Seega võib tõekestatud kvantoritega valemiteid vaadelda kui teatavate tavaliste kvantoritega valemite lihtsustatud tähistusi. Midagi põhimõtteliselt erinevat tavaliste kvantoritega valemitega võrreldes nad endast ei kujuta.

§ 16. SAMASELT TÕESED PREDIKAATARVUTUSE VALEMID

Käesolevas paragrahvis vaatleme predikaatarvutuse valemiteid, mis ei sisalda ühtki konstantset lauset, indiviidi ega predikaati.

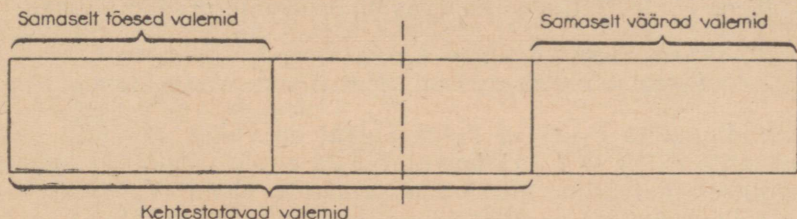
Konstantseid lauseid, indiviide ja predikaate sisaldavate valemite (nagu näites 2, § 14) tõesust selgitame järelduste tuletamise meetodika abil.

Et vaadeldavates valemities ei esine konstantseid indiviide ja predikaate, siis pole ka oluline indiviidide piirkonna elementide

iseloom, vaid ainult indiviidide piirkonna võimsus (lõpliku indiviidide piirkonna puhul lihtsalt indiviidide arv). Seega võime väljendi « n -elemendilises indiviidide piirkonnas I » asemel öelda lihtsalt « n -elemendilises indiviidide piirkonnas» ehk «indiviidide piirkonnas võimsusega n ».

Predikaatarvutuse valemit, mis ei sisalda eespool märgitud konstante, nimetame samaselt tõeseks indiviidide piirkonnas võimsusega α , kui selles valemis esinevate muutujate mistahes konkretiseerimise korral see valem osutub ikka tõeseks.⁸

Predikaatarvutuse valemit nimetame kehtestatavaks indiviidide piirkonnas võimsusega α , kui selles valemis esinevaid muutujaid on võimalik nii konkretiseerida, et see valem osutub selle konkretiseerimise korral tõeseks. Valemi kehtestatavus mingis indiviidide piirkonnas tähendab sisuliselt



Joon. 13.

seda, et see valem pole selles indiviidide piirkonnas samaselt väär. Samuti on ilmne, et kui valem on samaselt tõene mingis indiviidide piirkonnas, siis on ta seal ka kehtestatav.

Illustreerime mõistete «samaselt tõene (indiviidide piirkonnas võimsusega α)», «kehtestatav (indiviidide piirkonnas võimsusega α)» ja «samaselt väär (indiviidide piirkonnas võimsusega α)» vahekorda joonise abil (joon. 13).

Kujutades joonisel 13 mingit valemit \mathfrak{A} punktina ja valemi eitust $\neg(\mathfrak{A})$ sellega sümmeetrilise punktina kriipsjoone suhtes, saame jooniselt välja lugeda ka järgmised vahekorrad (alljärgnevates lausetes jätame väljendi «indiviidide piirkonnas võimsusega α » kirjutamata): 1) Kui \mathfrak{A} pole samaselt tõene, siis $\neg(\mathfrak{A})$ on kehtestatav ja vastupidi, 2) Kui \mathfrak{A} on samaselt tõene, siis $\neg(\mathfrak{A})$ pole keh-

⁸ Konkretiseeritud (*resp.* konkreetse) predikaadi all mõistame mingit kindlat funktsiooni, mis igale n -elemendilisele indiviidide korteežile (kus indiviidid kuuluvad indiviidide piirkonda võimsusega α) seab vastavusse tõeväärtuse t või v . Konkretiseeritud indiviid on mingi fikseeritud indiviid sellest piirkonnast. Konstantne predikaat on sisuliselt konkreetne predikaat täiesti konkreetsest indiviidide piirkonnast.

testatav (s. t. on samaselt väär) ja vastupidi. Seega saab valemite kehtestatavuse abil samuti selgitada, kas need valemid on samaselt tõesed või mitte.

Vaatleme näiteks predikaatarvutuse valemite

$$F(x) \rightarrow (\forall y) F(y) \quad (1)$$

üheelemendilises indiviidide piirkonnas. Selles piirkonnas on erinevaid predikaate $F^{(1)}$ ainult kaks:

$$F_1(a) = t \quad \text{ja} \quad F_2(a) = v.$$

Et

$$(\forall y) F_1(y) = F_1(a) = t \quad \text{ja} \quad (\forall y) F_2(y) = F_2(a) = v,$$

siis kehtib valem (1) muutujate mistahes konkretiseerimise korral ja on seega üheelemendilises indiviidide piirkonnas samaselt tõene.

Kaheelemendilises indiviidide piirkonnas valem (1) enam samaselt tõene ei ole. Selles piirkonnas on erinevaid predikaate neli:

$$\begin{aligned} F_1(a_1) = v, & \quad F_2(a_1) = v, & \quad F_3(a_1) = t, & \quad F_4(a_1) = t, \\ F_1(a_2) = v, & \quad F_2(a_2) = t, & \quad F_3(a_2) = v, & \quad F_4(a_2) = t. \end{aligned}$$

Predikaatide $F_1(x)$ ja $F_4(x)$ korral on valem (1) küll tõene, kuid mitte $F_2(x)$ ja $F_3(x)$ korral. Seega ei ole valem (1) kaheelemendilises indiviidide piirkonnas samaselt tõene. Valem (1) on aga kaheelemendilises indiviidide piirkonnas kehtestatav.

Predikaatarvutuses ei huvita meid valemid, mis mõnes indiviidide piirkonnas on samaselt tõesed, mõnes piirkonnas aga mitte. Seame endale eesmärgiks leida sellised predikaatarvutuse valemid, mis on samaselt tõesed mistahes mittetühjas indiviidide piirkonnas. Niisuguseid valemite nimetame samaselt tõeseks predikaatarvutuse valemiteks. Predikaatarvutuse valemite nimetame kehtestatavaks, kui ta on kehtestatav mingis mittetühjas indiviidide piirkonnas. Valemite kehtestatavus tähendab sisuliselt seda, et ta pole samaselt väär. Vahekorrad mõistete «samaselt tõene», «kehtestatav» ja «samaselt väär» vahel on graafiliselt esitatavad samuti joonise 13 abil. Loomulikult kehtivad ka väited 1) ja 2).

Vaatleme näiteks predikaatarvutuse valemite

$$(\forall x) F(x) \rightarrow F(y) \quad (2)$$

ja näitame, et see on samaselt tõene. Valem (2) võib olla väär ainult ühel juhul: kui implikatsiooni eesliige on tõene ja tagaliige väär. Oletusel, et $(\forall x) F(x)$ on tõene, peab $F(y)$ olema tõene iga indiviidi korral, mispuhul ka $F(y)$ on tõene. Kuid sel juhul on tõene ka valem (2). Et valem (2) ei saa üldse omandada tõeväärust v , siis on ta samaselt tõene.

Märgime, et erinevalt lausearvutusest puudub ühtne algoritm

kõigi samaselt tõeste predikaatarvutuse valemite kindlakstegemiseks.⁹ Sellised algoritmid leiduvad aga mõningate spetsiaalsete predikaatarvutuse valemite klasside puhul, nagu näiteks valemite klassi puhul, kus valemid sisaldavad ainult ühekohalisi predikaate. Vastav algoritm on olemas ka kõigi samaselt tõeste lausearvutuse valemite leidmiseks (lausearvutuse valemid on ka predikaatarvutuse valemiteks). Asjaolu, et ühtset algoritmi kõigi samaselt tõeste predikaatarvutuse valemite kindlakstegemiseks ei leidu, nõuab nende valemite samaselt tõesuse selgitamiseks, vastavalt valemi kujule, eri tõestusvõtete kasutamist (mitmesugused hulgateoreetilised konstruktsioonid, vastuväiteline tõestus jms.).

Enne kui asume selgitama konkreetsete predikaatarvutuse valemite samaselt tõesust, toome veel mõningaid üldisemaid tulemusi.

Teoreem 1. Kui mingi valem on kehtestatav mingis indiviidide piirkonnas, siis on ta kehtestatav ka sellest piirkonnast suuremas (*resp.* võimsamas) piirkonnas.

Tõestus. Olgu valem \mathfrak{A} kehtestatav piirkonnas I_1 . Et näidata tema kehtestatavust piirkonnas $I = I_1 \cup I_2 (I_1 \cap I_2 = \emptyset)$, valime piirkonnast I_1 mingi elemendi a ja üldistame kõik predikaadid piirkonnale I , vaadeldes kõiki I_2 elemente nii, nagu oleksid nad samased elemendiga a :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^*(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x_i \in I,$$

kus

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{kui } x_i \in I_1 \\ a, & \text{kui } x_i \in I_2 \end{cases}$$

ja kus predikaadid $F^*(y_1, y_2, \dots, y_n)$ on defineeritud selliselt, et nad muudavad valemi \mathfrak{A} piirkonnas I_1 tõeseks. Kui fikseerime täpselt samad individuaalmuutujad, mis muutsid valemi \mathfrak{A} tõeseks piirkonnas I_1 , siis muutub valem \mathfrak{A} tõeseks ka piirkonnas I .

Teoreem 2. Kui valem \mathfrak{A} pole samaselt tõene mingis indiviidide piirkonnas võimsusega α , siis pole ta samaselt tõene üheski võimsamas piirkonnas.

Tõestus. Kui \mathfrak{A} pole samaselt tõene indiviidide piirkonnas võimsusega α , siis $\neg(\mathfrak{A})$ on selles piirkonnas kehtestatav. Kuid siis on $\neg(\mathfrak{A})$ teoreemi 1 põhjal kehtestatav ka igas sellest piirkonnast võimsamas piirkonnas. Järelikult pole \mathfrak{A} samaselt tõene üheski sellises piirkonnas, m. o. t. t.

Teoreem 3 (L. Löwenheim). Kui mingi valem on kehtestatav mingisuguses lõpmatus indiviidide piirkonnas, siis on ta kehtestatav ka loendavas indiviidide piirkonnas.

Selle teoreemi tõestuse esitame paragrahvis 19.

⁹ Sellise ühtse algoritmi olemasolu korral oleksid automaatselt lahendatavad kõik need probleemid, mida saab formuleerida predikaatarvutuse sümbolika abil, muuhulgas ka seni veel mitte lahendatud probleemid, nagu näiteks Fermat' suur teoreem.

Teoreem 4. Kui mingi valem on samaselt tõene loenduvast indiviidide piirkonnas, siis on ta samaselt tõene.

Tõestus. Kui valem \mathfrak{A} on samaselt tõene loenduvast indiviidide piirkonnas, siis on ta samaselt tõene ka kõigis lõplikes indiviidide piirkondades, sest muidu tekiks vastuolu teoreemiga 2. Oletame, et valem \mathfrak{A} pole samaselt tõene mingis indiviidide piirkonnas, mille võimsus on suurem loenduva hulga võimsusest. Siis on $\neg(\mathfrak{A})$ kehtestatav selles indiviidide piirkonnas ja Löwenheimi teoreemi põhjal on $\neg(\mathfrak{A})$ kehtestatav ka loenduvast indiviidide piirkonnas. Kuid siis pole \mathfrak{A} samaselt tõene loenduvast indiviidide piirkonnas, vastupidiselt eeldusele. Järelikult peab valem \mathfrak{A} olema samaselt tõene.

Teoreem 4 võimaldab mingi valemi samaselt tõesuse näitamisel alati eeldada, et indiviidide piirkond on loenduv hulk.

Asudes samaselt tõeste predikaatarvutuse valemite selgitamisele, märgime, et kõik samaselt tõesed lausearvutuse valemid on samaselt tõesed predikaatarvutuse mõttes, sest nende tõesus ei sõltu üldse indiviidide piirkonnast. Peale selle, võttes mistahes samaselt tõesed lausearvutuse valemid, näiteks

$$X \vee \neg X, \quad (3)$$

ja teostades selles substituutsiooni, näiteks kas $S_X^{F(x)}$ või $S_X^{(\exists x)F(x)}$ vms., saame vastavalt predikaatarvutuse valemid

$$F(x) \vee \neg F(x) \quad (4)$$

ja

$$(\exists x)F(x) \vee \neg(\exists x)F(x), \quad (5)$$

mis on samaselt tõesed predikaatarvutuse mõttes. Väite põhjenduseks märgime seda, et lähtekohaks olev lausearvutuse valem on tõene komponentlausete mistahes väärtustuse korral. Et lausemärgi substituueerimiseks kasutatud predikaatarvutuse valem võib samuti omandada ainult kaht tõeväärtust, siis peab valem (3) pärast substituutsiooni olema ka samaselt tõene. Valemite (4) ja (5) korral [millele vastav lausearvutuse valem (3) on samaselt tõene] ütleme, et need valemid on samaselt tõesed oma lausearvutusliku struktuuri poolest. Samaselt tõesed predikaatarvutuse valemile (2) vastaval lausearvutuse valemil on kuju

$$X \rightarrow Y,$$

millest nähtub, et valemil (2) pole samaselt tõesed lausearvutuslikku struktuuri.

Asume just seda tüüpi predikaatarvutuse valemite samaselt tõesuse selgitamisele. Nagu lausearvutuses, nii on ka siin eriti tähtsad samaselt tõesed ekvivalentsid, mida tähistame nii:

$$\mathfrak{A} \mathcal{L} \mathfrak{B}.$$

Valemeid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} , mille puhul kehtib seos $\mathfrak{A} \stackrel{p}{\sim} \mathfrak{B}$, nimetame loogiliselt samaväärseteks valemiteks predikaatarvutuse mõttes. Ilmselt on kõik lausearvutuse mõttes loogiliselt samaväärsed valemid loogiliselt samaväärsed ka predikaatarvutuse mõttes.

1. Kvantorite vaherkorda iseloomustavad seosed

$$(\exists x)F(x) \stackrel{p}{\sim} \neg(\forall x)\neg F(x), \quad (6)$$

$$(\exists x)\neg F(x) \stackrel{p}{\sim} \neg(\forall x)F(x), \quad (7)$$

$$\neg(\exists x)F(x) \stackrel{p}{\sim} (\forall x)\neg F(x), \quad (8)$$

$$\neg(\exists x)\neg F(x) \stackrel{p}{\sim} (\forall x)F(x). \quad (9)$$

Tõestame näiteks seose (6). Oletame, et seose (6) vasak pool on tõene. Siis leidub vähemalt üks indiviid x_i , mille korral $F(x_i)$ on tõene. Kuid siis on $\neg F(x_i)$ väär, samuti ka $(\forall x)\neg F(x)$. Viimase valemi eitus, s. t. seose (6) parem pool on siis aga tõene.

Oletame, et seose (6) vasak pool on väär. Siis on $F(x)$ iga indiviidi korral väär ja selle eitus $\neg F(x)$ iga indiviidi korral tõene. Kuid siis on $(\forall x)\neg F(x)$ tõene ja selle eitus, s. t. seose (6) parem pool väär. Seose (6) kehtivus on tõestatud.

Analoogiliselt saab tõestada seosed (7)–(9). Seoste (6)–(9) põhjal võib näiteks olemasolu kvantori alati asendada üldisuse kvantoriga või ümberpöörduvalt. Kuid otstarbekohasem on neid seoseid rakendada kvantorite ees olevate eituste viimiseks vahetult predikaatide ette. Kõik need neli seost võib pilllikult kokku võtta järgmises sõnastuses: eitusemärgi viimisel üle kvantori märgi tuleb olemasolu kvantor asendada üldisuse kvantoriga ja vastupidi.

2. Sama liiki kvantorid on kommuteeritavad:

$$(\forall x)(\forall y)H(x, y) \stackrel{p}{\sim} (\forall y)(\forall x)H(x, y), \quad (10)$$

$$(\exists x)(\exists y)H(x, y) \stackrel{p}{\sim} (\exists y)(\exists x)H(x, y). \quad (11)$$

Tõestame näiteks seose (10). Olgu seose (10) vasak pool tõene. Siis peab $H(x, y)$ iga korteeži (x, y) korral olema tõene. Kuid siis on tõene ka seose (10) parem pool. Kui seose (10) vasak pool on väär, leidub korteež (x_i, y_j) , mille korral $H(x, y)$ on väär. Kuid siis on väär ka seose (10) parem pool.

Seos (11) tõestatakse analoogiliselt.

3. Erinevat liiki kvantorid pole kommuteeritavad.

Valem

$$(\exists x)(\forall y)H(x, y) \not\sim (\forall y)(\exists x)H(x, y) \quad (12)$$

on samaselt tõene. Kui eesliige on tõene, siis leidub niisugune x_i , et $H(x_i, y)$ on tõene mistahes y korral. Kuid siis on tõene iga y korral ka $(\exists x)H(x, y)$ ja seega ka $(\forall y)(\exists x)H(x, y)$, m. o. t. t.

Valem

$$(\forall y)(\exists x)H(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)H(x, y) \quad (13)$$

pole aga samaselt tõene. Selles võib veenduda, kui predikaati $H(x, y)$ järgmiselt konkretiseerida:

$$H(x, y) = \begin{cases} t, & \text{kui } x = y, \\ v & \text{kui } x \neq y. \end{cases}$$

$H(x, y)$ sellise konkretiseerimise korral on valemi (13) eesliige tõene: iga y korral leidub niisugune $x (= y)$, et $H(x, y)$ on tõene. Valemi (13) tagaliige on aga väär: ei leidu sellist x , et iga y korral kehtiks $H(x, y)$.

4. Kvantorite rakendamisel predikaatide konjunktsioonile ja disjunktsioonile kehtivad seosed

$$(\forall x)[F(x) \& G(x)] \stackrel{p}{\sim} (\forall x)F(x) \& (\forall x)G(x), \quad (14)$$

$$(\exists x)[F(x) \vee G(x)] \stackrel{p}{\sim} (\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x). \quad (15)$$

Valemid

$$(\exists x)[F(x) \& G(x)] \rightarrow (\exists x)F(x) \& (\exists x)G(x), \quad (16)$$

$$(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)[F(x) \vee G(x)] \quad (17)$$

on samaselt tõesed.

Tõestame näiteks seose (14). Oletame, et seose (14) vasak pool on tõene. $F(x)$ ja $G(x)$ on siis tõesed iga x korral, millest järeldub $(\forall x)F(x)$ ja $(\forall x)G(x)$ tõesus ning seega ka seose (14) parema poole tõesus. Teiselt poolt, kui seose (14) vasak pool on väär, siis leidub vähemalt üks x_i , mille puhul vähemalt üks predikaadi täislausetest $F(x_i)$ ja $G(x_i)$ on väär. Kuid siis on väär vähemalt üks valemitest $(\forall x)F(x)$ ja $(\forall x)G(x)$, millest järeldub ka seose (14) parema poole väärus. Seos (14) on sellega tõestatud.

5. Kvantorite rakendamisel lause ja predikaadi konjunktsioonile, disjunktsioonile ja implikatsioonile kehtivad seosed

$$(\forall x)[X \& F(x)] \stackrel{p}{\sim} X \& (\forall x)F(x), \quad (18)$$

$$(\forall x)[X \vee F(x)] \stackrel{p}{\sim} X \vee (\forall x)F(x), \quad (19)$$

$$(\forall x)[X \rightarrow F(x)] \stackrel{p}{\sim} X \rightarrow (\forall x)F(x), \quad (20)$$

$$(\exists x)[X \& F(x)] \stackrel{p}{\sim} X \& (\exists x)F(x), \quad (21)$$

$$(\exists x)[X \vee F(x)] \stackrel{p}{\sim} X \vee (\exists x)F(x), \quad (22)$$

$$(\exists x)[X \rightarrow F(x)] \stackrel{p}{\sim} X \rightarrow (\exists x)F(x). \quad (23)$$

Tõestame näiteks seose (20). Oletame, et seose (20) vasak pool on tõene. Siis peab $X \rightarrow F(x)$ olema tõene iga x korral, mis on võimalik kolmel juhul: kui 1) X on väär, 2) X on tõene ja $F(x)$ on tõene iga x korral, 3) $F(x)$ on väär iga x korral. Kõigil neil juhtudel on tõene ka $X \rightarrow (\forall x)F(x)$. Kui seose (20) vasak pool on väär, siis peab $X \rightarrow F(x)$ olema väär vähemalt ühe indi-

viidi x_i korral. See on võimalik ainult siis, kui X on tõene ja $F(x_i)$ väär. Kuid sel korral on väär ka $X \rightarrow (\forall x)F(x)$. Seos (20) on sellega tõestatud.

6. Lõpuks esitame veel kaks olulisemat samaselt tõest implikatsiooni:

$$(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists x)F(x), \quad (24)$$

$$F(y) \rightarrow (\exists x)F(x). \quad (25)$$

Tõestame näiteks valemi (25) samaselt tõesuse. $F(y)$ võib olla kas tõene või väär. Kui $F(y)$ on tõene, siis on $(\exists x)F(x)$ ja ühtlasi ka valem (25) tõene. Kui $F(y)$ on väär, siis on valem (25) tõene sõltumatult implikatsiooni tagaliikmest. Seega on valem (25) samaselt tõene.

Muide, valemite (24) ja (25) samaselt tõesus ilmneb juba nende sõnastamisel. Valem (24) kõlab nii: «Kui iga x puhul kehtib predikaat $F^{(1)}$, siis leidub x , mille puhul kehtib $F^{(1)}$.» Valem (25): «Kui y korral kehtib $F^{(1)}$, siis leidub mingi x , mille puhul kehtib $F^{(1)}$.»

§ 17. SAMASELT TÕESTE PREDIKAATARVUTUSE VALEMITE LEIDMISEST ERIJUHTUDEL

Nagu me eelmises paragrahvis märkisime, puudub ühtne algoritm kõigi samaselt tõeste predikaatarvutuse valemite kindlaks-tegemiseks. Sellised algoritmid leiduvad aga mõningate erikujuliste predikaatarvutuse valemite klasside korral. Käesolevas paragrahvis annamegi ülevaate nendest klassidest.

Ühe olulisema klassi moodustavad valemid, mis sisaldavad ainult ühekohalisi predikaate. Selliseid erikujulisi valemeid kasutatakse muide ka süllogismide teoorias. Vastav algoritm tugineb järgmisele teoreemile.

Teoreem 1. Kui predikaatarvutuse valem, mis sisaldab ainult ühekohalisi predikaate, on samaselt tõene indiviidide piirkonnas, milles on 2^n indiviidi, kus n on valemis esinevate erinevate predikaatide arv, siis on see valem samaselt tõene.

Tõestus. Teoreemile 2 (§ 16) tuginedes võime väita, et vaadeldav valem \mathfrak{A} on samaselt tõene kõigis indiviidide piirkondades, mis sisaldavad α elementi ($1 \leq \alpha \leq 2^n$). Oletame vastuväiteliselt, et vaadeldav valem \mathfrak{A} pole samaselt tõene mingis indiviidide piirkonnas I võimsusega β ($\beta > 2^n$). Siis leiduvad sellised valemis \mathfrak{A} esinevate predikaatide F_1, F_2, \dots, F_n konkretisatsioonid $F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*$ ning vabade indiviidide konkretisatsioonid, et valem \mathfrak{A} on nende konkretiseeritud vabade indiviidide ja predikaatide korral väär. Jaotame nüüd indiviidide piirkonna elemendid klassidesse (mittelõikuvatesse osahulkadesse, mis hõlmavad kõiki indiviide), nii et ühte klassi kuuluvad elemendid x ja y täpselt

siis, kui

$$F_1^*(x) = F_1^*(y),$$

$$F_2^*(x) = F_2^*(y),$$

$$F_n^*(x) = F_n^*(y),$$

s. t. elementide x ja y korral on kõigil valemis \mathfrak{A} esinevatel konkretiseeritud predikaatidel vastavalt üks ja sama tõeväärtus. Et $F_i^*(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) võib omandada tõeväärtuse t või v , siis on erinevaid tõeväärtuskorteeže

$$F_1^*(x), F_2^*(x), \dots, F_n^*(x) \quad (1)$$

üldse 2^n . Seega võib indiviidide piirkonnal I olla $k \leq 2^n$ erinevat klassi. Võtame igast sellisest klassist K_j täpselt ühe elemendi a_j ja moodustame indiviidide piirkonna

$$I' = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Predikaadid F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) konkretiseerime piirkonnas I' järgmiselt:

$$F_i^{**}(x) = F_i^*(x), x \in I'.$$

Vabad indiviidid piirkonnast I' konkretiseerime aga järgmiselt: $x = a_j$, kui vastav konkretiseeritud vaba indiviid piirkonna I korral kuulus klassi K_j .

Sellisel viisil predikaate ja indiviide konkretiseerides saame valemile \mathfrak{A} sama tõeväärtuse, mis esines eespool mainitud konkretiseerimise korral piirkonnas I . Seega osutub valem vääraks ühe kindla konkretiseerimise korral indiviidide piirkonnas võimsusega $k \leq 2^n$, mis aga on eeldusega vastuolus. Järelikult peab valem \mathfrak{A} olema samaselt tõene igas indiviidide piirkonnas, m. o. t. t.

Selgitame nüüd näidete varal samaselt tõeste valemite leidmise meetodikat seda tüüpi valemite puhul.

N ä i d e 1. Vaatleme valemit (17) (§ 16):

$$(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)[F(x) \vee G(x)]. \quad (2)$$

Valemis (2) on kaks predikaati: $F(x)$ ja $G(x)$. Järelikult tuleb meil kontrollida selle valemi samaselt tõesust neljaelemendilises indiviidide piirkonnas $I = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Valem kujul $(\forall x)F(x)$ on piirkonnas I samaväärne valemiga

$$F(a_1) \& F(a_2) \& F(a_3) \& F(a_4).$$

Seda asjaolu silmas pidades ja kasutades ühtlasi tähistusi $F(a_i) = X_i$, $G(a_i) = Y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), saame valemist (2) lausearvutuse valemi

$$X_1 X_2 X_3 X_4 \vee Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \rightarrow (X_1 \vee Y_1) (X_2 \vee Y_2) (X_3 \vee Y_3) (X_4 \vee Y_4),$$

mis on samaselt tõene, sest eesliikme tõesusest järeldub tagaliikme tõesus. Teoreemi 1 põhjal võime nüüd väita, et valem (2) on samaselt tõene predikaatarvutuse valem.

$$(\forall x)[F(x) \vee G(x)] \rightarrow (\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \quad (3)$$

saame analoogilist protseduuri rakendades lausearvutuse valemi

$$(X_1 \vee Y_1) (X_2 \vee Y_2) (X_3 \vee Y_3) (X_4 \vee Y_4) \rightarrow X_1 X_2 X_3 X_4 \vee Y_1 Y_2 Y_3 Y_4,$$

mis pole samaselt tõene. Sellest järeldub, et valem (3) pole samaselt tõene predikaatarvutuse valem.

Demonstreerime eespool toodud meetodikat juhul, kui valemid sisaldavad veel lausearvutuse lauseid.

N ä i d e 2. Vaatleme valemit (22) (§ 16):

$$(\exists x)[X \vee F(x)] \sim X \vee (\exists x)F(x). \quad (4)$$

Et valemis (4) esineb üks predikaat, $F(x)$, siis tuleb tema samaselt tõesust kontrollida kaheelemendilises indiviidide piirkonnas $I = \{a, b\}$. Tähistades $F(a)$ ja $F(b)$ vastavalt Y ja Z abil ning pidades silmas, et antud juhul

$$(\exists x)F(x) = F(a) \vee F(b) = Y \vee Z,$$

saame valemist (4)

$$(X \vee Y) \vee (X \vee Z) \sim X \vee (Y \vee Z)$$

ehk pärast lihtsustamist

$$X \vee Y \vee Z \sim X \vee Y \vee Z,$$

mis on samaselt tõene lausearvutuse valem. Seega on valem (4) samaselt tõene predikaatarvutuse valem.

Teiseks vaatleme predikaatarvutuse valemeid kujul

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n) \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5)$$

kus $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on mingi predikaatarvutuse valem, mis sisaldab individuaalmuutujaid x_1, x_2, \dots, x_n ega sisalda ühtegi kvantorit. Selliste valemite puhul kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 2. Predikaatarvutuse valemid kujul (5) on samaselt tõesed, kui nad on samaselt tõesed n -elemendilises indiviidide piirkonnas.

Tõestus. Kui valem (5) on samaselt tõene n -elemendilises indiviidide piirkonnas, siis on ta teoreemi 2 (§ 16) põhjal tõene ka igas α -elemendilises ($1 \leq \alpha \leq n$) indiviidide piirkonnas. Oletame vastuväiteliselt, et valem (5) pole samaselt tõene, s. t. pole samaselt tõene mingis m -elemendilises ($m > n$) indiviidide piirkonnas. Siis peavad selles indiviidide piirkonnas leiduma sellised konkretiseeritud predikaadid

$$F_1^*, F_2^*, \dots, F_s^*$$

ja indiviidid a_1, a_2, \dots, a_n , et valem

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

on nende konkreetsete indiviidide ja predikaatide korral väär. Kuid ilmselt pole siis valem (5) samaselt tõene ka indiviidide piirkonnas $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Oletusest tekkinud vastuolu tõttu tuleb valem (5) tunnistada samaselt tõeseks.

Märgime, et tulemus on kehtiv ka valemite kohta kujul

$$(\forall x_1) (\forall x_2) \dots (\forall x_n) \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (6)$$

kus vabad muutujad y_1, y_2, \dots, y_m võib valemi (6) ees siduda üldsuse kvantoritega:

$$(\forall y_1) \dots (\forall y_m) (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m). \quad (7)$$

Kui valem (6) on samaselt tõene, siis peab ta olema tõene kõikide indiviidide y_i korral. See aga tähendab, et valem (7) peab olema samaselt tõene. Teiselt poolt, valemi (7) samaselt tõesusest järeldub valemi (6) samaselt tõesus. Et valemi (7) korral on teoreem 2 rakendatav, siis võime esitatud mõttekäigu põhjal teoreemi 2 rakendada ka valemitele (6).

Predikaatarvutuse valemite

$$(\exists x_1) (\exists x_2) \dots (\exists x_n) \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8)$$

kohta kehtib järgmine teoreem.

T e o r e e m 3. Predikaatarvutuse valemid kujul (8) on samaselt tõesed, kui nad on samaselt tõesed üheelemendilises indiviidide piirkonnas.

T õ e s t u s. Kui valem

$$(\exists x) \mathfrak{A}(x, x, \dots, x) \quad (9)$$

on samaselt tõene, siis on ilmselt samaselt tõene ka valem (8). Kui valem (9) pole samaselt tõene, siis tähendab see seda, et valem (8) pole samaselt tõene üheelemendilises indiviidide piirkonnas. Kuid sel juhul ei saa valem (8) olla samaselt tõene. Seega on valemid (8) ja (9) mõlemad korraga kas samaselt tõesed või mitte. Valemi (9) puhul aga on ilmselt piisav, kui selgitada samaselt tõesuse üheelemendilises indiviidide piirkonnas. Teoreem on tõestatud.

Predikaatarvutuse valemite

$$(\forall x_1) (\forall x_2) \dots (\forall x_n) (\exists y_1) (\exists y_2) \dots (\exists y_m) \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (10)$$

kohta kehtib järgmine teoreem.

T e o r e e m 4. Predikaatarvutuse valemid kujul (10) on samaselt tõesed, kui nad on samaselt tõesed n -elemendilises indiviidide piirkonnas.

Tõestus. Moodustame n^m liikmest disjunktsiooni

$$\bigvee_{\substack{y_i = x_j \\ i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n}} \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

ja tähistame selle $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ abil. Vaadeldes valemeid (10) ja

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n) \mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11)$$

n -elemendilises indiviidide piirkonnas, võime väita, et valemi (10) samaselt tõesusest selles piirkonnas järeldeb valemi (11) samaselt tõesus selles piirkonnas. Valemi (11) samaselt tõesusest n -elemendilises indiviidide piirkonnas järeldeb aga teoreemi 2 põhjal tema samaselt tõesus mistahes indiviidide piirkonnas. Valemi (11) samaselt tõesusest järeldeb omakorda valemi (10) samaselt tõesus. Seega saame valemi (10) samaselt tõesusest n -elemendilises indiviidide piirkonnas järeldada tema samaselt tõesust mistahes indiviidide piirkonna puhul, m. o. t. t.

Märgime lõpuks, et ka valemi

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall z_1)\dots(\forall z_m) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2, z_1, \dots, z_m) \quad (12)$$

samaselt tõesuse probleemi on võimalik lahendada teatava lõpliku indiviidide piirkonna vaatlemise abil.

Osutub, et valemitega, mis sisaldavad ainult ühekohalisi predikaate, ja valemitega kujul (5), (6), (8), (10) ja (12) ongi ammendatud need juhud, mille korral valemite samaselt tõesuse probleem on taandatav samaselt tõesuse probleemiks mingis lõplikus indiviidide piirkonnas. Kõikide teiste kvantorite kombinatsioonide korral võib konstrueerida valemeid, mis on samaselt tõesed mistahes lõplikus indiviidide piirkonnas, pole aga samaselt tõesed lõpmatu indiviidide piirkonna puhul.

§ 18. ASENDUSED JA SUBSTITUTSIOONID

Asendusi ja substitutsioone lausearvutuse valemite puhul käsitlesime paragrahvides 2 ja 3. Et predikaatarvutuse valem on lausearvutuse valemist komplitseerituma struktuuriga, siis on ka võimalusi asendusteks ja substitutsioonideks predikaatarvutuse valemi korral palju rohkem. Üldiselt on asendus ja substitutsioon operatsioonid, mis võimaldavad mingisugustest antud valemitest lähtudes saada uusi predikaatarvutuse valemeid. Oluline on seejuures asjaolu, et nende operatsioonide abil on võimalik samaselt tõesest valemist lähtudes saada uusi samaselt tõesed valemeid.

Vaatleme kõigepealt asendust. Asenduse mõiste selgitamiseks on vaja defineerida predikaatarvutuse valemi osavalemi mõiste:

1) valemis \mathfrak{A} osavalemiks on valem \mathfrak{A} ;

2) valemite \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} osavalemid on ka valemite $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \approx (\mathfrak{B})$ ja $(\mathfrak{A}) / (\mathfrak{B})$ osavalemiteks [siin eeldame enesestmõistetavalt, et valemis \mathfrak{A} vabad muutujad ei esine valemis \mathfrak{B} seotult ja vastupidi, sest muidu poleks avaldised $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}$, ... üldse predikaatarvutuse valemid (vt. predikaatarvutuse valemis definitsiooni punkti 2) paragrahvis 15)];

3) valemis \mathfrak{A} osavalemid on ka valemis $\neg(\mathfrak{A})$ osavalemiteks;

4) valemis $\mathfrak{A}(x)$ osavalemid, kus x on vaba individuaalmuutuja, on ka valemite $(\forall x)\mathfrak{A}(x)$ ja $(\exists x)\mathfrak{A}(x)$ osavalemiteks;

5) teisi osavalemeid peale nende, mis on defineeritavad kooskõlas punktidega 1) — 4), pole.

Nii on näiteks valemis

$$(\forall x)[X \& F(x) \rightarrow G(x, y)] \quad (1)$$

osavalemiteks valem (1) ja valemid

$$\begin{aligned} X \& F(x) \rightarrow G(x, y), \\ X \& F(x), G(x, y), X \text{ ja } F(x). \end{aligned}$$

Osavalemi \mathfrak{B} asemendamiseks valemis \mathfrak{A} valemiga \mathfrak{C} nime-tame sellist operatsiooni, mille abil saame valemist $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ valemis $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$, s. t. valemis, mis erineb lähtevalemist $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ ainult selle poolest, et seal osavalemi \mathfrak{B} mingi kindla esinemise (*resp.* mingite kindlate esinemiste) asemel esineb osavalemina \mathfrak{C} .

Selleks, et asendamise tulemusena üldse saaksime valemis, peavad olema täidetud teatavad tingimused. Piisavateks osutuvad näiteks järgmised tingimused.¹⁰

1. Sisaldagu asendamisele kuuluv valem \mathfrak{B} individuaalmuutujaid x_1, x_2, \dots, x_n , mis on vabad valemis \mathfrak{B} , kuid on seotud valemis \mathfrak{A} . Valem \mathfrak{C} peab kõiki neid muutujaid sisaldama vabalt.

2. Valem \mathfrak{C} võib sisaldada seotud muutujaid y_1, y_2, \dots, y_m , mis ei tohi kuskil valemis \mathfrak{A} esineda vabalt. Kui valem \mathfrak{B} asub kvantorite mõjupiirkonnas, siis peavad nende kvantoritega seotud muutujad ja valemis \mathfrak{C} seotud muutujad y_1, y_2, \dots, y_m olema erinevad.

3. Valem \mathfrak{C} võib sisaldada (peale muutujate x_1, x_2, \dots, x_n) veel vabu muutujaid z_1, z_2, \dots, z_k , mis ei tohi kuskil valemis \mathfrak{A} esineda seotult.

Nii võib näiteks valemis

$$(\forall x) (\forall y) [F(x) \& F(z_1) \rightarrow G(y)] \rightarrow (\exists z) G(z, z_2)$$

osavalemi $F(x) \& F(z_1)$ asendada valemitega $F(x, z_1)$, $F(x)$ või $(\exists z_3) F(x, z_3)$, mitte aga valemitega $F(z_1)$ (vastuolus tingimu-

¹⁰ Märgime, et punktides 1 ja 3 esitatud tingimusi saab mõnevõrra avardada. Et me aga tegelikult kasutame asenduse erijuhte, siis piisab meile täiesti ülalesitatud kitsamast asenduse mõistest.

sega 1), $(\exists z_2)F(x, z_2)$ (vastuolus tingimusega 2), $(\forall y)F(x, y)$ (vastuolus tingimusega 2), $F(x, z)$ (vastuolus tingimusega 3) või $F(x, y)$ (vastuolus tingimusega 3).

Asenduste kohta tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 1. Kui valemitel \mathfrak{B} ja \mathfrak{C} on vastavalt ühed ja samad seotud ja vabad individuaalmuutujad ning $\mathfrak{B} \mathcal{L} \mathfrak{C}$, siis valemi $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ osavalemi \mathfrak{B} asendamisel valemiga \mathfrak{C} (kas ühes või mitmes kohas) saame valemi $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$, kusjuures $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}) \mathcal{L} \mathfrak{A}(\mathfrak{C})$.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et kui valemid \mathfrak{B} ja \mathfrak{C} sisaldavad ühtesid ja samu vabu ja seotud muutujaid ning $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ on valem, siis on tingimused 1)–3) täidetud ja $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ on samuti valem. Et valemitel \mathfrak{B} ja \mathfrak{C} on kõikide konkreetsete predikaatide ja indiviidide korral vastavalt üks ja sama tõeväärtus, siis peab ka valemitel $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ ja $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$ kõikide konkreetsete predikaatide ja indiviidide korral olema vastavalt üks ja sama tõeväärtus, m.o.t.t.

Järeldus 1. Kui $\mathfrak{B} \mathcal{L} \mathfrak{C}$ ja $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ on samaselt tõene valem, siis on seda ka $\mathfrak{A}(\mathfrak{C})$.

Näide 1. Vaatleme samaselt tõest valemit (20) (§ 16)

$$(\forall x)[X \rightarrow F(x)] \sim [X \rightarrow (\forall x)F(x)]$$

ja asendame selles valemid $X \rightarrow F(x)$ ning $X \rightarrow (\forall x)F(x)$ vastavalt valemitega $\neg X \vee F(x)$ ning $\neg X \vee (\forall x)F(x)$. Saame samaselt tõese valemi

$$(\forall x)[\neg X \vee F(x)] \sim \neg X \vee (\forall x)F(x).$$

Edasi, asendades $F(x)$ valemiga $\neg \neg F(x)$ ning $(\forall x)F(x)$ valemiga $\neg(\exists x)\neg F(x)$, saame

$$(\forall x)[\neg X \vee \neg \neg F(x)] \sim \neg X \vee \neg(\exists x)\neg F(x).$$

Asendades $\neg X \vee \neg \neg F(x)$ valemiga $\neg \neg F(x) \vee \neg X$ ning $\neg X \vee \neg(\exists x)\neg F(x)$ valemiga $\neg(\exists x)\neg F(x) \vee \neg X$, saame

$$(\forall x)[\neg \neg F(x) \vee \neg X] \sim \neg(\exists x)\neg F(x) \vee \neg X,$$

millest saame $\neg \neg F(x) \vee \neg X$ asendamisel valemiga $\neg F(x) \rightarrow \neg X$ ning $\neg(\exists x)\neg F(x) \vee \neg X$ asendamisel valemiga $(\exists x)\neg F(x) \rightarrow \neg X$ valemi

$$(\forall x)[\neg F(x) \rightarrow \neg X] \sim [(\exists x)\neg F(x) \rightarrow \neg X], \quad (2)$$

mis on järelduse 1 põhjal samaselt tõene valem.

Substitutsiooni puhul märgime kõigepealt seda, et substitueerida pole võimalik konstante (konstantseid lauseid, individuaalkonstante, konstantseid predikaate) ja seotud individuaalmuutujaid.¹¹ Erinevalt asendustest tuleb substitutsiooni puhul muutuja

¹¹ Seotud muutuja ümbertähistamist mingis kvantorite mõjupiirkonnas tuleb eristada individuaalmuutuja substitueerimisest. Substítueerida tuleb vastava muutuja iga esinemine antud valemis, seotud muutuja ümbertähistamist aga võib teostada eraldi igas kvantorite mõjupiirkonnas (vt. § 15, p. 4).

asendada mingisuguse teise indiviidi või valemiga selle muutuja iga esinemise kohal antud valemis \mathfrak{A} .

Tuleb eristada kolme substitutsioonide alajuhtumit: 1) vaba individuaalmuutuja substitueerimist, 2) lausemuutuja substitueerimist, 3) predikaatmuutuja substitueerimist.

1. Vaba individuaalmuutujat on võimalik substitueerida suvalise individuaalmuutujaga, mis ei esine selles valemis üheski kohas seotult. Vaba individuaalmuutujat võib substitueerida ka individuaalkonstandiga.

2. Lausemuutujat võib substitueerida mistahes predikaatarvutuse valemiga \mathfrak{B} , kusjuures peavad olema täidetud järgmised tingimused:

1) valemi \mathfrak{B} vabad muutujad peavad erinema antud valemi \mathfrak{A} seotud muutujatest ja valemi \mathfrak{B} seotud muutujad valemi \mathfrak{A} vabadest muutujatest;

2) kui lausemuutuja X , mille substitueerime valemiga \mathfrak{B} , esineb valemis \mathfrak{A} mingisuguses kvantorite mõjupiirkonnas, siis peavad valemi \mathfrak{B} seotud muutujad erinema nendest muutujatest, mis sellesamas mõjupiirkonnas olid juba varem kvantoritega seotud.

3. Predikaatmuutujat $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ võib substitueerida mistahes predikaatarvutuse valemiga \mathfrak{B} , mis sisaldab vabalt individuaalmuutujaid x_1, x_2, \dots, x_n . Valem \mathfrak{B} võib sisaldada peale nende muutujate veel teisi muutujaid, z_1, z_2, \dots, z_k (kas vabalt või seotult), kusjuures nende muutujate puhul peab olema täidetud lausemuutujate substitutsiooni tingimus 1) ja tingimus

3) kui predikaatmuutuja $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, mille substitueerime valemiga \mathfrak{B} , esineb valemis \mathfrak{A} mingisuguses kvantorite mõjupiirkonnas, siis peavad valemi \mathfrak{B} seotud muutujad erinema nendest muutujatest, mis sellesamas mõjupiirkonnas olid juba varem kvantoritega seotud.

Märgime, et üks ja sama predikaat $F^{(n)}$ võib esineda valemis \mathfrak{A} üldiselt erinevate argumentide korteežidega, nagu näiteks predikaat $F^{(2)}$ valemis

$$(\exists y) (\exists z) [F(x, y) \vee \neg F(x, z)] \rightarrow (\forall x_1) F(x_1, z_1). \quad (3)$$

Predikaadi $F(x, y)$ substitueerimist valemiga $P(x) \& Q(y)$ valemis (3) tuleb mõista selliselt, et valemis (3) tuleb

$F(x, y)$ asendada valemiga $P(x) \& Q(y)$,

$F(x, z)$ asendada valemiga $P(x) \& Q(z)$,

$F(x_1, z_1)$ asendada valemiga $P(x_1) \& Q(z_1)$.

Substitutsioon $S_{F(x,y)}^{P(x) \& Q(y)}$ annab järgmise tulemuse:

$$(\exists y) (\exists z) \{ [P(x) \& Q(y)] \vee \neg [P(x) \& Q(z)] \} \rightarrow (\forall x_1) [P(x_1) \& Q(z_1)].$$

Toome veel mõningaid näiteid substitutsioonide kohta. Valemis (3) näiteks võime teostada substitutsiooni S_x^a või $S_x^{y_1}$, mitte

aga $S_x^{x_1}$ (vastuolus punktiga 1). Samuti võime valemis (3) teostada substituutsiooni $S_{F(x,y)}^{G(x,y)}$ või $S_{F(x,y)}^{(\forall x_0)G(x,y,x_0)}$, mitte aga $S_{F(x,y)}^{G(y)}$ või $S_{F(x,y)}^{P(x)}$ (vastuolus muutujate arvu tingimusega punktis 3), $S_{F(x,y)}^{G(x,y,x_1)}$ [vastuolus tingimusega 1)] või $S_{F(x,y)}^{(\exists z)G(x,y,z)}$ [vastuolus tingimusega 3)].

Kerge on näha, et kui mõni substituutsiooni tingimus pole täidetud, siis me ei tarvitse sellise «substituutsiooni» tulemusena enam saada predikaatarvutuse valemit. Kuid substituutsiooni tingimused ei garanteeri mitte ainult seda, et predikaatarvutuse valemist saame pärast substituutsiooni jälle predikaatarvutuse valemi, vaid võimaldavad väita palju rohkem. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 2. Kui predikaatarvutuse valem \mathfrak{A} on samaselt tõene, siis on ka substituutsioonide $S_x^y(\mathfrak{A}(x))$, $S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ ja $S_{F(n)}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ puhul saadavad valemid samaselt tõesed.

Tõestus. 1) Individuaalmuutuja substituutsioon $S_x^y(\mathfrak{A})$ taandub sisuliselt kas vaba individuaalmuutuja ümbertähistamiseks mingi valemis \mathfrak{A} mitte esineva individuaalmuutuja tähisega või valemis \mathfrak{A} juba esineva vaba individuaalmuutuja tähisega. Et esimesel juhul valemi \mathfrak{A} samaselt tõesusest järeldub $S_x^y(\mathfrak{A})$ samaselt tõesus, on ilmne. Et valem \mathfrak{A} on samaselt tõene, siis on ta tõene vabade indiviidide kõikide vahekordade puhul, ka siis, kui $x = y$. Seega peab valem $S_x^y(\mathfrak{A})$ jääma samaselt tõeseks ka teisel juhul.

2) Lausemuutuja substituutsiooni $S_X^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ puhul on samuti kaks juhtu, vastavalt sellele, kas valemi \mathfrak{B} vabad muutujad esinesid või ei esinenud enne substituutsiooni valemis \mathfrak{A} . (Märgime, et \mathfrak{B} vabad muutujad võivad valemis \mathfrak{A} esineda ainult vabalt.) Vaatleme teist juhtu. Et lausemuutuja substituutsiooni korral pole ükski valemi \mathfrak{B} muutuja seotud kvantoriga, mis asub väljaspool valemist \mathfrak{A} , ja ka \mathfrak{B} vabad muutujad ei esine valemis \mathfrak{A} väljaspool osavalemit \mathfrak{B} , siis on osavalem \mathfrak{B} valemi \mathfrak{A} teistest osadest täiesti sõltumatu. Seega omandab osavalem \mathfrak{B} , täpselt samuti nagu lause X , sõltumatult valemi \mathfrak{A} teistest osadest tõeväärtusi t või v . Et valem \mathfrak{A} on sõltumatult X tõeväärtustest samaselt tõene, siis peab ta jääma samaselt tõeseks ka pärast sellist substituutsiooni.

Kui valemi \mathfrak{B} vabad muutujad esinevad mujal valemis \mathfrak{A} , siis tuleb äsjatõestatule lisada samasugune mõttekäik nagu individuaalmuutuja substituutsiooni teise juhu korral.

3) Predikaatmuutuja substituutsiooni $S_{F(n)}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ korral vaatleme kõigepealt juhtu, kus predikaatmuutuja $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ substi-

tueerime mingi teise predikaatmuutujaga $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, millel on täpselt samad muutujad. Kui \mathfrak{A} on samaselt tõene, siis on seda ilmselt ka $S_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathfrak{A})$.

Kui nüüd $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ substitueerime predikaadiga $G(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$, kus muutujad y_1, y_2, \dots, y_m ei esinenud varem valemis \mathfrak{A} , siis ei saa samaselt tõene valem \mathfrak{A} muuta pärast substituutsiooni mitte samaselt tõeseks. Tõepoolest, kui $S_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{G(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)}(\mathfrak{A})$ poleks samaselt tõene, leiduksid konkreetsed predikaadid ja indiviidid, mille korral see valem oleks väär. Muu hulgas leiduksid $G^{*(n+m)}$ ja $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$. Kui aga defineeriksime siis

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = G^*(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*),$$

muudaks see $F^{*(n)}$ ühes teiste eespool mainitud konkreetsete predikaatide ja indiviididega vääraks valemis \mathfrak{A} . Kui muutujad y_1, y_2, \dots, y_m esinevad juba varem valemis \mathfrak{A} (sel puhul võivad nad valemis \mathfrak{A} esineda ainult vabalt), tuleb rakendada samasugust mõttekäiku nagu individuaalmuutuja substituutsiooni teise juhu korral. Seega säilitab substituutsioon $S_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{G(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)}$ valemi omaduse olla samaselt tõene.

Üldkujulise predikaatmuutuja substituutsiooni puhul tarvitseb ainult lisada seda, et valem \mathfrak{B} ei ole midagi muud kui spetsialiseeritud struktuuriga predikaat.

Sellega on teoreem 2 tervikuna tõestatud.

Asendused ühes substituutsioonide ja seotud muutujate ümberühendamise ja vahetamise võimaldavad samaselt tõestest valemitest saada uusi samaselt tõeseid valemiteid. Demonstreerime seda mõne näite varal.

N ä i d e 2. Vaatleme näites 1 saadud valemite (2)

$$(\forall x)[\neg F(x) \rightarrow \neg X] \sim [(\exists x)\neg F(x) \rightarrow \neg X],$$

mis on samaselt tõene. Teostades substituutsioonid $S_{F(x)}^{\neg F(x)}$ ja $S_X^{\neg X}$ ning kasutades asendust $\neg \neg(\mathfrak{A}) \mathcal{L} \mathfrak{A}$, saame

$$(\forall x)[F(x) \rightarrow X] \sim [(\exists x)F(x) \rightarrow X], \quad (4)$$

mis on teoreemide 1 ja 2 põhjal samaselt tõene.

N ä i d e 3. Teostades samaselt tõeses valemis (21) (§ 16)

$$(\exists x)[X \& F(x)] \sim X \& (\exists x)F(x) \quad (5)$$

substituutsiooni $S_X^{(\exists y)G(y)}$, saame samaselt tõese valemi

$$(\exists x)[(\exists y)G(y) \& F(x)] \sim (\exists y)G(y) \& (\exists x)F(x). \quad (6)$$

Tähistame valemis (5) seotud muutuja x y abil ning teostame see-

järel substitutsioonid $S_{F(y)}^{G(y)}$ ja $S_X^{F(x)}$. Saame valemi

$$(\exists y)[F(x) \& G(y)] \sim F(x) \& (\exists y) G(y), \quad (7)$$

mis on samaselt tõene. Asendades valemi (6) nurksulgudes oleva osavalemi valemi (7) vasaku poolega, võime teoreemide 1 ja 2 põhjal öelda, et valem

$$(\exists x) (\exists y)[F(x) \& G(y)] \sim (\exists x) F(x) \& (\exists y) G(y)$$

on samaselt tõene, s. t. kehtib seos

$$(\exists x) (\exists y)[F(x) \& G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\exists x) F(x) \& (\exists y) G(y). \quad (8)$$

Analoogilisel viisil saame tõestada näiteks seosed

$$(\exists x)[F(x) \rightarrow X] \stackrel{p}{\sim} (\forall x) F(x) \rightarrow X, \quad (9)$$

$$(\exists x) (\forall y)[F(x) \& G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\exists x) F(x) \& (\forall y) G(y), \quad (10)$$

$$(\forall x) (\exists y)[F(x) \& G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\forall x) F(x) \& (\exists y) G(y), \quad (11)$$

$$(\forall x) (\forall y)[F(x) \& G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\forall x) F(x) \& (\forall y) G(y), \quad (12)$$

$$(\exists x) (\exists y)[F(x) \vee G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\exists x) F(x) \vee (\exists y) G(y), \quad (13)$$

$$(\exists x) (\forall y)[F(x) \vee G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\exists x) F(x) \vee (\forall y) G(y), \quad (14)$$

$$(\forall x) (\exists y)[F(x) \vee G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\forall x) F(x) \vee (\exists y) G(y), \quad (15)$$

$$(\forall x) (\forall y)[F(x) \vee G(y)] \stackrel{p}{\sim} (\forall x) F(x) \vee (\forall y) G(y), \quad (16)$$

kus seoste (10)—(16) puhul ei ole oluline vasakul pool asuvate kvantorite järjekord. Seostel (10)—(16) on rakenduslik tähtsus, sest nad võimaldavad kvantoreid osavalemi ette tuua.

§ 19. PREDIKAATARVUTUSE VALEMITE NORMAALKUJUD

Samuti nagu lausearvutuses, on ka predikaatarvutuses valemitega opereerimisel otstarbekohane kasutada spetsiaalse kujuga valemeid, mis on lähtevalemitega loogiliselt samaväärsed.

Kõigepealt defineerime normaalvalemi mõiste. Predikaatarvutuse valemite \mathfrak{N} nimetame normaalvalemiks, kui on täidetud järgmised tingimused:

1) valemis \mathfrak{N} esinevad loogilistest tehtemärkidest ainult $\&$, \vee ja \neg , kusjuures eitismärk, kui ta valemis esineb, on vahetult üksikute predikaadi täislausete ja lausete ees;

2) kui valemis \mathfrak{N} esineb kvantoreid, siis asuvad nad valemis alguses, kusjuures nendele kvantoritele järgneb ühine mõjupiirkond, mis ulatub valemis \mathfrak{N} lõpuni.

Nii on normaalvalemiks näiteks valem

$$(\exists x)[\neg P(x) \vee Q(y)], \quad (1)$$

kuna valemid

$$\begin{aligned} & (\exists x)[P(x) \rightarrow Q(y)], (\exists x) \neg P(x) \vee Q(y), & (2) \\ & (\exists x) \{ \neg [P(x) \& \neg Q(y)] \}, (\forall x) \{ (\exists y) P(x, y) \vee Q(x, z) \} \end{aligned}$$

pole normaalvalemid.

Valemi \mathfrak{A} normaalkujuks nimetame valemiga \mathfrak{A} loogiliselt samaväärset normaalvalemit. Valemite (2) normaalkujuks näiteks on valem (1). Teisi normaalkujude näiteid saab seostest (8) ja (10) — (16) (§ 18).

Normaalkujude olemasolu küsimuse selgitab järgmine teoreem.

Teoreem 1. Igal valemil \mathfrak{A} on vähemalt üks normaalkuju.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et kõik loogilised tehted on avaldatavad konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse abil, kusjuures eitusmärkide viimine vahetult üksikute predikaadi täislausete või lausete ette on võimalik duaalsuse seoste ning seoste (6) — (9) (§ 16) abil. Kui valem \mathfrak{A} ei sisalda kvantoreid, siis on ta pärast ülalmärgitud teisendusi juba normaalkujul. Kui aga valem sisaldab kvantoreid, tuleb need valemi ette tuua. Kvantorite valemi ette toomisel peab teisendatud valem jääma esialgsega loogiliselt samaväärseks, kusjuures peab olema täidetud tingimus 2). Üldisust kitsendamata võime oletada, et seotud muutujad on igas kvantorite mõjupiirkonnas tähistatud erinevalt. Kvantorid toome osavalemite ette järk-järgult, kusjuures võivad esineda järgmised juhud:

$$\begin{aligned} & (\exists x)\mathfrak{A}(x) \& (\exists y)\mathfrak{B}(y), (\exists x)\mathfrak{A}(x) \& (\forall y)\mathfrak{B}(y), (\forall x)\mathfrak{A}(x) \& (\exists y)\mathfrak{B}(y), \\ & (\forall x)\mathfrak{A}(x) \& (\forall y)\mathfrak{B}(y), (\exists x)\mathfrak{A}(x) \vee (\exists y)\mathfrak{B}(y), (\exists x)\mathfrak{A}(x) \vee (\forall y)\mathfrak{B}(y), \\ & (\forall x)\mathfrak{A}(x) \vee (\exists y)\mathfrak{B}(y), (\forall x)\mathfrak{A}(x) \vee (\forall y)\mathfrak{B}(y), (\exists x)\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}, \\ & (\forall x)\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}, (\exists x)\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}, (\forall x)\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Rakendades nendel juhtudel vastavalt seoseid (8) ja (10) — (16) (§ 18) ning (21) (18), (22), (19) (§ 16), saame $(\exists x)(\exists y)[\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}(y)]$, $(\exists x)(\forall y)[\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}(y)]$, $(\forall x)(\exists y)[\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}(y)]$, $(\forall x)(\forall y)[\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}(y)]$, $(\exists x)(\exists y)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(y)]$, $(\exists x)(\forall y)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(y)]$, $(\forall x)(\exists y)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(y)]$, $(\forall x)(\forall y)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(y)]$, $(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}]$, $(\forall x)[\mathfrak{A}(x) \& \mathfrak{B}]$, $(\exists x)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}]$, $(\forall x)[\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}]$.

Märgime, et juhtudel $(\forall x)\mathfrak{A}(x) \& (\forall x)\mathfrak{B}(x)$ ja $(\exists x)\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}(x)$ pole vaja seotud muutujat x teises mõjupiirkonnas ümber tähistada, vaid võib kasutada seoseid (14) ja (15) (§ 16). Kui ülalmärgitud viisil kvantoreid osavalemite ette toome, jääb teisendatud valem esialgsega loogiliselt samaväärseks. On ilmne, et pärast lõplikku arvu selliseid teisendusi jõuame normaalkujuni. Et valemi konstrueerimine konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse abil pole ühene, siis pole ka normaalkuju ühene.

Demonstreerime normaalkuju leidmist näite varal.

Näide 1. Leiame valemi

$$[(\forall x) \neg F(x) \vee (\exists x) G(x)] \rightarrow [(\forall x) H(x, y) \rightarrow P(y)] \quad (3)$$

normaalkuju. Selleks asendame kõigepealt implikatsiooni:

$$\neg [(\forall x) \neg F(x) \vee (\exists x) G(x)] \vee [\neg (\forall x) H(x, y) \vee P(y)].$$

Kasutades seoseid (6)–(9) (§ 16) ja duaalsuse seoseid, saame

$$[(\exists x)F(x) \& (\forall x)\neg G(x)] \vee [(\exists x)\neg H(x, y) \vee P(y)].$$

Tähistades osavalemis $(\forall x)\neg G(x)$ seotud muutuja z abil, toome nurksulgudes asuvates osavalemites seoste (21) ja (22) (§ 16) põhjal kvantori $(\exists x)$ sulgude ette. Saame

$$(\exists x)[F(x) \& (\forall z)\neg G(z)] \vee (\exists x)[\neg H(x, y) \vee P(y)].$$

Esimesest nurksulgudes olevast valemist saame seose (18) (§ 16) põhjal ette tuua $(\forall z)$:

$$(\exists x)(\forall z)[F(x) \& \neg G(z)] \vee (\exists x)[\neg H(x, y) \vee P(y)].$$

Kasutades seoseid (15) ja (19) (§ 16), saame lõpuks normaalkuju

$$(\exists x)(\forall z)\{[F(x) \& \neg G(z)] \vee \neg H(x, y) \vee P(y)\}. \quad (4)$$

Normaalkuju (4) võib nimetada disjunktiivseks normaalkujuks. Kui valemi (4) loogelistes sulgudes asuvas osavalemis kasutame distributiivsuse seost, saame konjunktiivse normaalkuju

$$(\exists x)(\forall z)\{[F(x) \vee \neg H(x, y) \vee P(y)] \& [\neg G(z) \vee \neg H(x, y) \vee P(y)]\}. \quad (5)$$

Märgime, et valemite (4) ja (5) loogelistes sulgudes asuvaid osavalemeid saab teisendada nagu lausearvutuse valemeid, sest seal ei esine enam kvantoreid. Selles seisnebki müide üks normaalkujude eeliseid. Nii näiteks saame valemite (4) ja (5) loogelistes sulgudes asuvates osavalemites liikmete täiendamise teel viia need valemid vastavalt täielikule disjunktiivsele ja täielikule konjunktiivsele normaalkujule. Viimane normaalkuju on sobiv järelduste tuletamisel, mida vaatleme järgmises paragrahvis.

Praegu peatume aga ühe teise küsimuse, nimelt kvantorite järjekorra juures. Valemite (4) ja (5) tuletamisel kvantoreid teises järjekorras ette tuues saaksime kvantoravaldise $(\exists x)(\forall z)$ asemel $(\forall z)(\exists x)$. Seostes (8) ja (10)–(16) (§ 18) saame samuti vasakul poolel asuvate kvantorite järjekorda muuta, kusjuures valem jääb esialgse valemiga loogiliselt samaväärseks. Ülalnimetatud teisendused kvantorite järjekorras olid võimalikud nende valemite spetsiaalse struktuuri tõttu. Üldiselt, kahe eri liiki kvantori järjekorra muutmisel pole saadav valem enam esialgsega loogiliselt samaväärne [vt. valemeid (12) ja (13), § 16]. Enne kui tõestame üldise teoreemi kvantorite järjekorra kohta, toome mõned abitulemused.

L e m m a 1. Kui valem

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6)$$

kus x_1, x_2, \dots, x_n on vabad muutujad, on samaselt tõene, siis on samaselt tõesed ka valemid

$$(\exists x_1)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\exists x_1)\mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7)$$

ja

$$(\forall x_1)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\forall x_1)\mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8)$$

Tõestus. Kui oletame, et valem (7) pole samaselt tõene, siis peavad leiduma sellised konkreetised predikaadid ja indiviidid $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, et $\mathfrak{A}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ on tõene, aga $\mathfrak{B}(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*)$ on väär iga x_1 korral. Kuid siis on nende konkreetsete predikaatide ja indiviidide korral väär ka valem (6), mis on vastuolus eeldusega. Valemi (8) samaselt tõesuse tõestamine toimub analoogiliselt.

L e m m a 2. Kui kehtib seos

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{p}{\sim} \mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kus x_1, x_2, \dots, x_n on vabad muutujad, siis kehtivad ka seosed

$$(\exists x_1)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{p}{\sim} (\exists x_1)\mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ja

$$(\forall x_1)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{p}{\sim} (\forall x_1)\mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tõestus. Kasutame lemmat 1, arvestades seda, et valemi $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ samaselt tõesus on samaväärne valemite $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ samaselt tõesusega.

T e o r e e m 2. Valemid

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_{i-1} x_{i-1}) (\exists x_i) (\forall x_{i+1}) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \rightarrow \\ & \rightarrow (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_{i-1} x_{i-1}) (\forall x_{i+1}) (\exists x_i) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_{i-1} x_{i-1}) (\forall x_i) (\forall x_{i+1}) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \sim \\ & \sim (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_{i-1} x_{i-1}) (\forall x_{i+1}) (\forall x_i) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (10)$$

ja

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_{i-1} x_{i-1}) (\exists x_i) (\exists x_{i+1}) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \sim \\ & \sim (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_{i-1} x_{i-1}) (\exists x_{i+1}) (\exists x_i) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (11)$$

(sümbol σ_j tähistab kas kvantorit \forall või \exists) on samaselt tõesed.

Seega: kaht sama liiki naaberkvantorit kommuteerides saame esialgse valemiga loogiliselt samaväärse valemi. Eri liiki naaberkvantorite kommuteerimisel saame aga samaselt tõese implikatsiooni (9).

Tõestus. Näitame, et valem (9) on samaselt tõene. Selleks teostame valemis (12) (§ 16) substituutsiooni

$$\underset{H(x,y)}{S}(\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, y, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

ja tähistame seotud muutujad x ja y vastavalt x_i ja x_{i+1} abil. Saame samaselt tõese valemi

$$\begin{aligned} & (\exists x_i) (\forall x_{i+1}) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \rightarrow \\ & \rightarrow (\forall x_{i+1}) (\exists x_i) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (12)$$

Rakendades valemi (12) puhul lemmat 1, saamegi väita, et valem (9) on samaselt tõene.

Valemi (10) samaselt tõesuse näitamiseks teostame substitutsiooni $S_{H(x,y)}^{(\sigma_{i+2} x_{i+2})} \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, y, x_{i+2}, \dots, x_n)$ valemis (10) (§ 16). Tähistades seotud muutujad x ja y vastavalt x_i ja x_{i+1} abil, saame samaselt tõese valemi

$$\begin{aligned} & (\forall x_i) (\forall x_{i+1}) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \sim \\ & \sim (\forall x_{i+1}) (\forall x_i) (\sigma_{i+2} x_{i+2}) \dots \\ & \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (13)$$

Rakendades valemi (13) puhul lemmat 2, saamegi väita, et valem (10) on samaselt tõene.

Valemi (11) tõestus on eeltooduga analoogiline. Vastav substitutsioon aga tuleb sel juhul teostada valemis (11) (§ 16).

Teoreemist 2 järeldub, et ühe ja sama valemi $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$ ja samade kvantorite

$$(\exists x_1), \dots, (\exists x_{i-1}), (\forall x_i), \dots, (\forall x_n) \quad (14)$$

korral on kõige «tugevam» väide

$$(\exists x_1) \dots (\exists x_{i-1}) (\forall x_i) \dots (\forall x_n) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \quad (15)$$

(kõik olemasolu kvantorid on üldisuse kvantoritest eespool) ja kõige «nõrgem» väide

$$(\forall x_i) \dots (\forall x_n) (\exists x_1) \dots (\exists x_{i-1}) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \quad (16)$$

(kõik üldisuse kvantorid on olemasolu kvantoritest eespool). Üldiselt, kui võtame kvantorite (14) korral mistahes suvalise järjekorra $(\sigma_{\alpha_1} x_{\alpha_1}) (\sigma_{\alpha_2} x_{\alpha_2}) \dots (\sigma_{\alpha_n} x_{\alpha_n})$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ abil tähistame per-

mutatsiooni numbritest $1, 2, \dots, n$ ja $\sigma_{\alpha_j} = \begin{cases} \forall, & \text{kui } \alpha_j \geq i \\ \exists, & \text{kui } \alpha_j < i \end{cases}$ ja moodustame valemi

$$(\sigma_{\alpha_1} x_{\alpha_1}) (\sigma_{\alpha_2} x_{\alpha_2}) \dots (\sigma_{\alpha_n} x_{\alpha_n}) \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n), \quad (17)$$

siis on valemite (15) ja (17) implikatsioon samaselt tõene. Samaselt tõene on ka valemite (17) ja (16) implikatsioon.

Lõpuks esitame L. Löwenheimi teoreemi (teoreem 3, § 16) tõestuse. Enne seda tuleb meil aga teha mõned selgitavad märkused. Kõigepealt võime ilma üldisust kitsendamata eeldada, et vaadel-

davates valemities on 1) kõik individuaalmuutujad seotud, 2) kõik kvantorid on valemi alguses, kusjuures kvantoravaldisel on ühine mõjupiirkond, mis ulatub valemi lõpuni, ja 3) viimane kvantor on olemasolu kvantor.

Kui eeldus 1) ei kehti, võime siduda vabad individuaalmuutujad olemasolu kvantoritega (mis tuleb kirjutada valemi ette), sest

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kehtestatavusest mingis indiviidide piirkonnas I järeldeb

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kehtestatavus sellesamas piirkonnas I ja ümberpöörduvalt.

Kui eeldus 2) ei kehti, võime valemi taandada soovitud kujule käesolevas paragrahvis kirjeldatud viisil. Seejuures on taandamisel saadav valem esialgse valemiga loogiliselt samaväärne.

Kui eeldus 3) ei kehti, siis võime kvantoravaldisele järgneva osavalemi \mathfrak{A} asemel võtta

$$(\exists u)[\mathfrak{A} \& P(u)], \quad (18)$$

kus $P(u)$ on samaselt tõene predikaat ja muutuja u ei esine valemis \mathfrak{A} . Neid tingimusi silmas pidades saame

$$(\exists u)[\mathfrak{A} \& P(u)] \mathcal{L} \mathfrak{A} \& (\exists u)P(u) \mathcal{L} \mathfrak{A},$$

s. t. valem (18) on valemiga \mathfrak{A} loogiliselt samaväärne.

Seega võib ilma üldisust kitsendamata eeldada, et vaadeldavad valemid esinevad kujul

$$\begin{aligned} &(\forall x_{11})(\forall x_{12})\dots(\forall x_{1n_1})(\exists y_{11})\dots(\exists y_{1m_1}) \\ &(\forall x_{21})\dots(\forall x_{2n_2})(\exists y_{21})\dots(\exists y_{2m_2}) \\ &\dots\dots\dots \\ &(\forall x_{k1})\dots(\forall x_{kn_k})(\exists y_{k1})\dots(\exists y_{km_k})[\mathfrak{A}(x_{11}, x_{12}, \dots, y_{km_k}, \\ &F_1, F_2, \dots, F_l)], \quad (19) \end{aligned}$$

kus esimene kvantorite rühm $(\forall x_{11})(\forall x_{12})\dots(\forall x_{1n_1})$ võib ka puududa (sel juhul puuduvad valemis \mathfrak{A} ka muutujad $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$) ja valem \mathfrak{A} kvantoreid ei sisalda. Kui valemis (19) esinevad predikaatmuutujad F_1, F_2, \dots, F_l konkretiseerime, saame valemi

$$\begin{aligned} &(\forall x_{11})(\forall x_{12})\dots(\forall x_{1n_1})(\exists y_{11})\dots(\exists y_{1m_1}) \\ &(\forall x_{21})\dots(\forall x_{2n_2})(\exists y_{21})\dots(\exists y_{2m_2}) \\ &\dots\dots\dots \\ &(\forall x_{k1})\dots(\forall x_{kn_k})(\exists y_{k1})\dots(\exists y_{km_k}) \\ &[\mathfrak{A}^*(x_{11}, x_{12}, \dots, y_{km_k})], \quad (20) \end{aligned}$$

kus

$$\mathfrak{A}^*(x_{11}, x_{12}, \dots, y_{km_k}) \quad (21)$$

Võtame nüüd piirkonna I mingi lõpliku osahulga J_0 . Moodustame hulkade jada

$$J_0, J_1, J_2, \dots, J_n, J_{n+1}, \dots,$$

kus

$$J_{n+1} = J_n \cup S_n$$

ja hulk S_n on Skolemi funktsioonide (22) väärtuste hulk, kui argumendid kuuluvad hulka J_n . Hulga J_n on kõik lõplikud. Seega on summa

$$J = \bigcup_{i=0}^{\infty} J_i$$

kas lõplik või loenduv hulk. Ilmselt $J \subset I$. Kergesti saab ka veenduda, et hulk J on kinnine Skolemi funktsioonide (22) väärtuste suhtes, s. t. kui Skolemi funktsioonide argumendid kuuluvad hulka J , siis kuuluvad hulka J ka Skolemi funktsioonide väärtused.

Vaatleme nüüd Skolemi funktsioone (22) hulgal J . Kui asetame funktsioonid (22) valemisse (21) individuaalmuutujate $y_{11}, \dots, y_{1m_1}, \dots, y_{km_k}$ asemele, siis on sel teel saadav valem tõene iga $x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{kn_k} \in J$ korral. Seega on funktsioonid (22) valemi (20) Skolemi funktsioonideks ka piirkonnas J . Valemi (20) tõesusest piirkonnas J jäeldub aga valemi (19) kehtestatus piirkonnas J . Kui piirkond J on loenduv, on teoreem sel juhul tõestatud. Kui piirkond J on lõplik, tuleb rakendada veel teoreemi 1 (§ 16). Sellega on L. Löwenheimi teoreem tõestatud.

§ 20. JÄRELDUSTE TULETAMINE

Järelduste tuletamise probleem predikaatarvutuses on põhimõtteliselt samasugune kui vastav probleem lausearvutuses. Valemite \mathfrak{B} nimetame järelduseks valemite $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ ($n \geq 1$), kui valem

$$(\mathfrak{A}_1) \& (\mathfrak{A}_2) \& \dots \& (\mathfrak{A}_n) \rightarrow (\mathfrak{B}) \quad (1)$$

on samaselt tõene.¹²

Analoogiliselt järelduste tuletamise probleemiga lausearvutuses, kus kasutatakse eeldustes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ ainuüksi konstantseid lauseid, kasutame ka siin eeldustes üldreeglina konstante: konstantseid lauseid, konstantseid predikaate ja vabade muutujate korral individuaalkonstante. Konstantide kasutamine on täiesti arusaadav: kui eeldused, mida me aktsepteerime tõeste väidetena, pole samaselt tõesed, siis peavad nad olema tõesed vähemalt mõningate nendes valemites esinevate predikaatide, lausete ning

¹² Ilma üldisust kitsendamata võime eeldada, et valemite $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ ja \mathfrak{B} esinevad seotud muutujad on tähistatud erinevalt nendes valemites esinevatest vabade muutujatest.

indiviidide spetsiaalse sisu tõttu. Ilmselt pole siis aga neid spetsiaalse sisuga predikaate, lauseid ja indiviide võimalik substituue-rida. Seda silmas pidades olemegi õigustatud neid käsitlema konstantidena. Märgime, et muid erinevusi nendega opereerimisel (võrreldes muutuva lause, predikaatmuutuja ning individuaalmuutu-
jaga) ei esine.

Järelduste tuletamise probleem predikaatarvutuses on muidugi komplitseeritum vastavast lausearvutuse probleemist. Erinevalt lausearvutusest pole predikaatarvutuses valemi (1) samaselt tõe-
suse kindlakstegemiseks ühtset algoritmi. Selline algoritm leidub aga näiteks juhul, kui valemis (1) esinevad ainult ühekohalised predikaadid. Üldse leiduvad sellised algoritmid juhtudel, kus va-
lemi (1) taandamisel normaalkujule saame mingisuguse para-
grahvis 17 vaadeldud valemitüübi. Raskused tekivad ka kõikide
antud konstantsete lausete, konstantsete predikaatide ja indivi-
duaalkonstantide (mis esinevad eeldustes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$) abil
sõnastatavate järelduste leidmisel. Valemi $(\mathfrak{A}_1) \& (\mathfrak{A}_2) \& \dots \& (\mathfrak{A}_n)$
taandamine lausete ja predikaatide täislausete suhtes täielikule
konjunktiivsele normaalkujule võimaldab küll leida suure hulga
järeldusi, kuid sel teel ei saa leida siiski kõiki loogiliselt mitte-
samaväärseid järeldusi (vt. näidet 3).

Märgime, et järelduste tuletamisel saab kasutada ka samasu-
gust meetodikat, nagu me kasutasime lausearvutuse valemite tões-
tamisel aksiomidest lähtudes. Silmas tuleb pidada ainult seda, et
konstante pole võimalik substituueerida.

Tõestame nüüd järelduste tuletamise kohta mõned lemmad.

L e m m a 1. Valem

$$(\sigma_1 x_1) (\sigma_2 x_2) \dots (\sigma_n x_n) [(\mathfrak{C}_1) \& (\mathfrak{C}_2) \& \dots \& (\mathfrak{C}_m)] \rightarrow \\ \rightarrow (\sigma_1 x_1) (\sigma_2 x_2) \dots (\sigma_n x_n) [(\mathfrak{C}_{\alpha_1}) \& \dots \& (\mathfrak{C}_{\alpha_k})] \quad (2)$$

on samaselt tõene. $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_m$ abil on tähistatud täieliku kon-
junktiivse normaalkuju liikmed, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ kujutab üht k -elemen-
dilist kombinatsiooni indeksitest 1, 2, \dots, m .

T õ e s t u s. Valem

$$(\mathfrak{C}_1) \& (\mathfrak{C}_2) \& \dots \& (\mathfrak{C}_m) \rightarrow (\mathfrak{C}_{\alpha_1}) \& \dots \& (\mathfrak{C}_{\alpha_k}) \quad (3)$$

on samaselt tõene, sest ta on samaselt tõene juba lausearvutuse
mõttes. Rakendades valemi (3) korral lemmat 1 (§ 19), saamegi
väita, et valem (2) on samaselt tõene.

L e m m a 2. Kui valemis

$$(\sigma_1 x_1) (\sigma_2 x_2) \dots (\sigma_n x_n) [(\mathfrak{D}) \& (\mathfrak{C}_{\alpha_1}) \& \dots \& (\mathfrak{C}_{\alpha_k})] \quad (4)$$

esineb täieliku konjunktiivse normaalkuju liige \mathfrak{D} , mis ei sisalda
ühtegi lauset ega predikaadi täislauset ühes oma eitusega [nagu
näiteks $F(x_1, x_2) \vee \neg F(y_1, y_2) \vee \dots$] ja mis ei esine täielikus kon-
junktiivses normaalkujus

$$(\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_n x_n) [(\mathcal{C}_1) \& (\mathcal{C}_2) \& \dots \& (\mathcal{C}_m)], \quad (5)$$

siis valem (4) ei järeldu valemist (5).

Tõestus. Kui valem (4) järeldub valemist (5), siis peab valem

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_n x_n) [(\mathcal{C}_1) \& (\mathcal{C}_2) \& \dots \& (\mathcal{C}_m)] \rightarrow \\ \rightarrow & (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_n x_n) [(\mathcal{D}) \& (\mathcal{C}_{\alpha_1}) \& \dots \& (\mathcal{C}_{\alpha_k})] \end{aligned} \quad (6)$$

olema samaselt tõene. Kuid siis peab valem (6) olema samaselt tõene ka üheelemendilises indiviidide piirkonnas. See aga tähendab, et valem

$$(\mathcal{C}_1) \& (\mathcal{C}_2) \& \dots \& (\mathcal{C}_m) \rightarrow (\mathcal{D}) \& (\mathcal{C}_{\alpha_1}) \& \dots \& (\mathcal{C}_{\alpha_k}),$$

kus kõik indiviidid on tähistatud ühe tähega, peab olema samaselt tõene. Et \mathcal{D} pole samaselt tõene ja erineb igast liikmest \mathcal{C}_i ($i = 1, 2, \dots, m$), siis viimati mainitud olukord ei kehti. Seega ei saa ka valem (6) olla samaselt tõene.

Lemmas 3. Valemist $(\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_n x_n) \mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ saame teha järeldusi ka ainuüksi kvantoravaldise teisendamise abil: 1) asendades naaberkvantorid $(\exists x_i)$ $(\forall x_j)$ kvantoritega $(\forall x_j)$ $(\exists x_i)$, 2) jättes kvantoravaldises kirjutamata mingi üldisuse kvantori $(\forall x_j)$, 3) sidudes vaba muutuja üldisuse kvantoriga, mille kirjutame kvantoravaldise algusesse, 4) asendades kvantoravaldise alguses seisva üldisuse kvantori olemasolu kvantoriga.

Tõestus. Teisenduse 1) puhul saame lähtevalemist järelduva valemi teoreemi 2 (§ 19) põhjal. Teisenduse 2) puhul arvestame, et üldisuse kvantori võime tuua järkjärguliste ümberpaigutustega kvantoravaldises esikohale, kusjuures teiste kvantorite järjekord jääb samaks. Valemi (2) (§ 16) põhjal saame kvantoravaldise alguses seisva olemasolu kvantori ärajätmisega tõesti ühe järelduse. Teisendus 3) annab ühe järelduse, sest $\mathfrak{A}(x)$ ja $(\forall x)\mathfrak{A}(x)$ on isegi loogiliselt samaväärsed väited. Teisendus 4) annab ühe järelduse seose (24) (§ 16) põhjal. Märgime veel, et sama liiki naaberkvantorite kommuteerimisel saame loogiliselt samaväärsed valemi.

Näiteks saame lemma 3 põhjal valemi $(\exists x)(\forall y)(\forall z)\mathfrak{A}(x, y, z)$ kvantoravaldise $(\exists x)(\forall y)(\forall z)$ teisendamisel järgmised kvantoravaldised (alljärgnevas loetelus on sama liiki naaberkvantorite kommuteerimisel saadavad kvantoravaldised jäetud kirjutamata):

$$\begin{aligned} & (\forall y)(\exists x)(\forall z), \quad (\forall z)(\exists x)(\forall y), \quad (\forall y)(\forall z)(\exists x), \\ & (\exists y)(\exists x)(\forall z), \quad (\exists z)(\exists x)(\forall y), \quad (\exists y)(\forall z)(\exists x), \\ & (\exists z)(\forall y)(\exists x), \quad (\forall y)(\exists z)(\exists x), \quad (\forall z)(\exists y)(\exists x), \\ & (\exists y)(\exists z)(\exists x), \quad (\exists x)(\forall y), \quad (\exists x)(\forall z), \quad (\forall y)(\exists x), \\ & (\forall z)(\exists x), \quad (\exists y)(\exists x), \quad (\exists z)(\exists x), \quad (\exists x), \end{aligned}$$

mis annavad kõik ühe ja sama valemi $\mathfrak{R}(x, y, z)$ korral (mis seisab kvantoravaldise taga) uusi järeldusi.

Selgitame nüüd järelduste tuletamist näidete varal.

Näide 1. Teha kindlaks, kas valem $(\exists x)(\exists y)[P(x) \rightarrow Q(y)]$ järeldub valemist $(\exists x)(\forall y)[P(x) \rightarrow Q(y) \& C]$.

Antud juhul tuleb seega selgitada, kas valem

$$(\exists x)(\forall y)[P(x) \rightarrow Q(y) \& C] \rightarrow (\exists x)(\exists y)[P(x) \rightarrow Q(y)] \quad (7)$$

on samaselt tõene või mitte. Arvestades seda, et valemis (7) esineb kaks ühekohalist predikaati, võime valemi (7) samaselt tõestust selgitada 4-elementilises indiviidide piirkonnas. Tähistades elemente a, b, c, d abil ja $F(a) = A_1, F(b) = A_2, F(c) = A_3, F(d) = A_4, Q(a) = B_1, Q(b) = B_2, Q(c) = B_3, Q(d) = B_4$, asendades olemasolu ning üldisuse kvantorid vastavalt disjunktsiooni ja konjunktsiooniga, saame

$$\begin{aligned} & [(A_1 \rightarrow B_1 \& C) \& (A_1 \rightarrow B_2 \& C) \& (A_1 \rightarrow B_3 \& C) \& (A_1 \rightarrow B_4 \& C)] \vee \\ & [(A_2 \rightarrow B_1 \& C) \& (A_2 \rightarrow B_2 \& C) \& (A_2 \rightarrow B_3 \& C) \& (A_2 \rightarrow B_4 \& C)] \vee \\ & [(A_3 \rightarrow B_1 \& C) \& (A_3 \rightarrow B_2 \& C) \& (A_3 \rightarrow B_3 \& C) \& (A_3 \rightarrow B_4 \& C)] \vee \\ & [(A_4 \rightarrow B_1 \& C) \& (A_4 \rightarrow B_2 \& C) \& (A_4 \rightarrow B_3 \& C) \& (A_4 \rightarrow B_4 \& C)] \rightarrow \\ & \rightarrow [(A_1 \rightarrow B_1) \vee (A_1 \rightarrow B_2) \vee (A_1 \rightarrow B_3) \vee (A_1 \rightarrow B_4) \vee \dots \vee (A_4 \rightarrow B_4)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Viies valemi (8) eesliikme konjunktiivsele normaalkujule (kasutades näiteks distributiivsust) ja lihtsustades tagaliiget, saame

$$\begin{aligned} & (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee B_1) \& (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee B_2) \& \\ & \& (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee B_3) \& (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee B_4) \& \\ & \& (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee C) \rightarrow \\ & \rightarrow (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee B_1 \vee B_2 \vee B_3 \vee B_4), \end{aligned}$$

millest nähtub selle valemi samaselt tõesus. Järelikult on siis samaselt tõene ka valem (7), mille põhjal võime väita, et valem $(\exists x)(\exists y)[P(x) \rightarrow Q(y)]$ järeldub valemist $(\exists x)(\forall y)[P(x) \rightarrow Q(y) \& C]$.

Selle küsimuse selgitamiseks võib aga kasutada ka teist meetodit: eelduse täielikule konjunktiivsele normaalkujule taandamist. Teeme seda:

$$\begin{aligned} & (\exists x)(\forall y)[P(x) \rightarrow Q(y) \& C] \stackrel{p}{=} (\exists x)(\forall y)[\neg P(x) \vee (Q(y) \& C)] \stackrel{p}{=} \\ & \stackrel{p}{=} (\exists x)(\forall y)[(\neg P(x) \vee Q(y)) \& (\neg P(x) \vee C)] \stackrel{p}{=} \\ & \stackrel{p}{=} (\exists x)(\forall y)[(\neg P(x) \vee Q(y) \vee C) \& \\ & \& (\neg P(x) \vee Q(y) \vee \bar{C}) \& (\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee C)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Võttes kokku kaks esimest konjunktiivset liiget, saame järelduse

$$\begin{aligned} & (\exists x)(\forall y)[(\neg P(x) \vee Q(y) \vee C) \& (\neg P(x) \vee Q(y) \vee \bar{C})] \stackrel{p}{=} \\ & \stackrel{p}{=} (\exists x)(\forall y)[\neg P(x) \vee Q(y)] \stackrel{p}{=} (\exists x)(\forall y)[P(x) \rightarrow Q(y)]. \end{aligned}$$

Lemma 3 põhjal saame sellest omakorda järelduse

$$(\exists x)(\exists y)[P(x) \rightarrow Q(y)].$$

Märgime, et soovitud järelduse oleks saanud ka valemist (9) ilma seda teisendamata.

N ä i d e 2. Tuletada valemitest

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)Q(x) \text{ ja } (\exists x)Q(x) \rightarrow A$$

järeldusi, kasutades lemmasid 1 ja 3.

Selleks moodustame valemi

$$[(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)Q(x)] \& [(\exists x)Q(x) \rightarrow A]$$

ja viime selle täielikule konjunktiivsele normaalkujule. Selle leiame järk-järgult:

$$\begin{aligned} & [(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y) \vee (\exists y)Q(y)] \& [(\forall x)\neg Q(x) \vee A] \stackrel{L}{=} \\ & \stackrel{L}{=} (\forall x)(\exists y)[\neg P(x, y) \vee Q(y)] \& (\forall x)[\neg Q(x) \vee A] \stackrel{L}{=} \\ & \stackrel{L}{=} (\forall x)(\exists y)\{[\neg P(x, y) \vee Q(y)] \& [\neg Q(x) \vee A]\} \stackrel{L}{=} \\ & \stackrel{L}{=} (\forall x)(\exists y)\{(\neg P(x, y) \vee Q(y) \vee Q(x) \vee A) \& \\ & \quad \& (\neg P(x, y) \vee Q(y) \vee Q(x) \vee \bar{A}) \& \\ & \quad \& (\neg P(x, y) \vee Q(y) \vee \neg Q(x) \vee A) \& \\ & \quad \& (\neg P(x, y) \vee Q(y) \vee \neg Q(x) \vee \bar{A}) \& \\ & \quad \& (P(x, y) \vee Q(y) \vee \neg Q(x) \vee A) \& \\ & \quad \& (P(x, y) \vee \neg Q(y) \vee \neg Q(x) \vee A) \& \\ & \quad \& (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y) \vee \neg Q(x) \vee A)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Võttes nüüd konjunktiivsete liikmete kõikvõimalikud kombinatsioonid ja teisendades kvantoravaldist lemma 3 põhjal, saame valemist (10) tuletatavad valemid ehk järeldused. Paljusid neist saab lihtsustada. Nii näiteks annavad 6. ja 7. liige

$$(\forall x)(\exists y)\{\neg Q(y) \vee \neg Q(x) \vee A\} \stackrel{L}{=}$$

$$\stackrel{L}{=} \neg (\forall y)Q(y) \vee \neg (\exists x)Q(x) \vee A \stackrel{L}{=} (\forall y)Q(y) \rightarrow [(\exists x)Q(x) \rightarrow A].$$

N ä i d e 3. Olgu eeldustena antud valemid

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \text{ ja } P(a).$$

Kasutame siin järelduste tuletamisel samasugust meetodikat nagu lausearvutuse valemite tõestamisel aksiomidest lähtudes.

Eeldusest $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ saame järeldada [valem (2) paragrahvis 16], et

$$P(y) \rightarrow Q(y) \quad (11)$$

on tõene iga y korral. Teostades valemis (11) substituutsiooni S_y^a saame

$$P(a) \rightarrow Q(a). \quad (12)$$

Kasutades aksiomi *modus ponens* ja arvestades, et $P(a)$ on tõene, saame valemist (12)

$$Q(a).$$

Järeldust $Q(a)$ ei saa aga tuletada näites 2 rakendatud metoodika abil. Tõepoolest, taandades eelduste konjunktsiooni

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \& P(a)$$

täielikule konjunktiivsele normaalkujule, saame

$$\begin{aligned} (\forall x) \{ & [\neg P(x) \vee Q(x) \vee P(a)] \& [\neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg P(a)] \& \\ & \& [\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee P(a)] \& [P(x) \vee \neg Q(x) \vee P(a)] \& \\ & \& [P(x) \vee Q(x) \vee P(a)] \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Et valemis (13) ei esine üldse predikaadi Q täislauset $Q(a)$, siis ei saa see esineda ka üheski konjunktiivsete liikmete kombinatsioonis.

Kui aga kasutame peale konjunktiivsele normaalkujule taandamise meetodi veel substituutsioone, siis on järeldus $Q(a)$ tuletatav. Võtame valemis (13) teise ja viienda konjunktiivse liikme ning jätame ära kvantori $(\forall x)$. Saame järelduse

$$[\neg P(x) \vee Q(x) \vee \neg P(a)] \& [P(x) \vee Q(x) \vee P(a)].$$

Teostades selles valemis substituutsiooni S_x^a , saame

$$[\neg P(a) \vee Q(a) \vee \neg P(a)] \& [P(a) \vee Q(a) \vee P(a)].$$

Kirjutades korduvad liikmed ühekordselt, saame

$$\begin{aligned} & [\neg P(a) \vee Q(a)] \& [P(a) \vee Q(a)] \stackrel{L}{=} \\ & \stackrel{L}{=} Q(a) \vee [\neg P(a) \& P(a)] \stackrel{L}{=} Q(a). \end{aligned}$$

IV PEATÜKK

PREDIKAATARVUTUSE AKSIOMAATILINE ÜLESEHITUS

§ 21. PREDIKAATARVUTUSE AKSIOMAATIKA

Predikaatarvutuse mitteaksiomaatilisel ülesehitamisel, samuti nagu mitteaksiomaatilises lausearvutuseski, kasutasime hulga- ja funktsiooniteooria kontseptsioone ning väga mitmesuguseid matemaatilisi-loogilisi tõestusvõtteid. Mitteaksiomaatilise predikaatarvutuse rakendamine matemaatiliste teooriate aksiomaatiliseks ülesehitamiseks tekitaks seega loogilise ringkäigu. Käesoleva peatüki eesmärgiks on predikaatarvutuse niisugune ülesehitamine, et ta oleks teistest teooriatest sõltumatu ja seega rakendatav mistahes ainevaldkondade uurimisel ja ülesehitamisel.

Käesolevas paragrahvis esitame sellise predikaatarvutuse aksiomaatika, mis sisaldab II peatükis esitatud lausearvutuse aksiomaatikat. See asjaolu võimaldab kõiki II peatükis tõestatud valemeid ja tõestusreegleid lugeda tõestatuteks ilma mingisuguste lisatõestusteta ka siin. Ilmselt ei või me aga kasutada ühtki III peatükis tõestatud tulemust. Esitatavas predikaatarvutuse aksiomaatikas me ei kasuta üldse konstantseid lauseid, predikaatkonstante ega individuaalkonstante.

Kõigepealt loetleme defineerimatud sümbolid (algmõisted):

1. $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots$ (muutuvad laused);
2. $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ (individuaalmuutujad);
3. $F, G, H, F_1, G_1, H_1, \dots$ (predikaatmuutujad).

Kirjutisi $F(x), G(x, y), H(x_1, x_2, x_3), \dots$ nimetame predikaadi täislauseteks. Kui ühel ja samal predikaadi tähisel on erinev arv argumentkohti, siis on need predikaadid erinevad. Märgime, et predikaadi täislausel võivad esineda mõningatel (või kõikidel) argumentkohtadel ühed ja samad individuaalmuutujad.

4. \vee (disjunktsioon);
5. \neg (eitus);
6. $(,)$; $[,]$; $\{, \}$ (sulud).

Erineva kuju ja suurusega sulgudele me mingisugust erinevat tähendust ei omista.

7. $(\exists x)$, $(\forall x)$, $(\exists x_1)$, $(\forall x_1)$, ... (olemasolu kvantor, üldisuse kvantor).

Kvantorid on rakendatavad ainult individuaalmuutujatele. Individuaalmuutujat, millele on rakendatud mingi kvantor, nimetame seotud muutujaks. Vastupidisel juhul nimetame individuaalmuutujat vabaks muutujaks.

Edasi defineerime predikaatarvutuse valemi.

Definitsioon 1.

- 1) Kõik laused ja predikaadi täislaused on predikaatarvutuse valemid;
- 2) kui \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on predikaatarvutuse valemid, kus \mathfrak{A} vabad muutujad ei esine valemis \mathfrak{B} seotult ja überpöördukt, siis on ka $(\mathfrak{A})\mathfrak{V}(\mathfrak{B})$ predikaatarvutuse valem;
- 3) kui \mathfrak{A} on valem, siis on valem ka $\neg(\mathfrak{A})$;
- 4) kui $\mathfrak{A}(x)$ on valem, milles x esineb vabalt, siis on $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$ ja $(\exists x)[\mathfrak{A}(x)]$ valemid;
- 5) teisi valemeid peale nende, mis on defineeritud kooskõlas punktidega 1)–4), pole.

Definitsioon 2. (Osavalemi definitsioon.)

- 1) valemi \mathfrak{A} osavalemiks on valem \mathfrak{A} ;
- 2) kui $(\mathfrak{A})\mathfrak{V}(\mathfrak{B})$ on valem, siis on tema osavalemiteks valemite \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} osavalemid;
- 3) valemi $\neg(\mathfrak{A})$ osavalemiteks on valemi \mathfrak{A} osavalemid;
- 4) valemite $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$ ja $(\exists x)[\mathfrak{A}(x)]$ osavalemiteks on valemi $\mathfrak{A}(x)$ osavalemid;
- 5) valemitel pole teisi osavalemeid peale nende, mis on defineeritud kooskõlas punktidega 1)–4).

Definitsioon 3. (Substitutsiooni definitsioon.)

- 1) Vaba muutuja x võib valemis \mathfrak{A} substitueerida muutujaga y , kui y ei esine kuski selles valemis \mathfrak{A} seotult;
- 2) lause X võib valemis \mathfrak{A} substitueerida valemiga \mathfrak{B} , kui \mathfrak{A} seotud muutujad erinevad \mathfrak{B} vabatest muutujatest ja überpöördukt ning
- 3) kui X asub valemis \mathfrak{A} mingisuguses kvantorite mõjupiirkonnas, siis muutujad, mis esinevad selles mõjupiirkonnas seotult, ei tohi esineda valemis \mathfrak{B} (ei vabalt ega seotult);
- 4) predikaadi $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ võib valemis \mathfrak{A} substitueerida valemiga $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, mis peab sisaldama muutujaid x_1, x_2, \dots, x_n vabalt. Kuid peale nende muutujate võib valem \mathfrak{B} sisaldada veel teisi muutujaid y_1, y_2, \dots, y_k (kas vabalt või seotult). Seejuures peavad olema täidetud järgmised tingimused:

- 5) valemis \mathfrak{A} seotud muutujad peavad erinema \mathfrak{B} vabadest muutujatest, mis on võetud hulgast $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, ja \mathfrak{A} vabad muutujad peavad erinema \mathfrak{B} seotud muutujatest, mis on võetud hulgast $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$;
- 6) kui $F^{(n)}$ asub valemis \mathfrak{A} mingisuguses kvantorite mõjupiirkonnas, siis muutujad, mis esinevad selles mõjupiirkonnas seotult, peavad erinema seotud muutujatest, mis on võetud hulgast $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

Kui need tingimused on täidetud, siis saab substituutsiooni tulemuse leida järgmistest seostest:

$$1^\circ S_x^y(X) = X, S_x^y(F(z_1, z_2, \dots, z_n)) = F(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$S_x^y(F(x, x_1, \dots, x_n)) = F(y, x_1, \dots, x_n);$$

$$2^\circ S_X^{\mathfrak{B}}(X) = \mathfrak{B}, S_X^{\mathfrak{B}}(Y) = Y, S_X^{\mathfrak{B}}(F(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n);$$

$$3^\circ S_{F(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n)}(F(x_1, \dots, x_n)) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n),$$

$$S_{F(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n)}(F(y_1, \dots, y_n)) = \mathfrak{B}(y_1, \dots, y_n),$$

$$S_{F(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n)}(X) = X, S_{F(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n)}(G(x_1, \dots, x_n)) = G(x_1, \dots, x_n);$$

$$4^\circ S_\beta^\alpha[(\mathfrak{A}_1) \vee (\mathfrak{A}_2)] = S_\beta^\alpha(\mathfrak{A}_1) \vee S_\beta^\alpha(\mathfrak{A}_2),$$

$$S_\beta^\alpha[\neg(\mathfrak{A})] = \neg S_\beta^\alpha(\mathfrak{A}),$$

$$S_\beta^\alpha\{(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]\} = (\forall x)[S_\beta^\alpha(\mathfrak{A}(x))],$$

$$S_\beta^\alpha\{(\exists x)[\mathfrak{A}(x)]\} = (\exists x)[S_\beta^\alpha(\mathfrak{A}(x))],$$

kus α, β tähistavad muutujaid vastavalt kolmele substituutsiooni juhule.

Definitsioon 4. (Konjunktsiooni definitsioon.)

Valemit $\neg[(\neg(\mathfrak{A})) \vee (\neg(\mathfrak{B}))]$ võime tähistada $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$ ja vastupidi. Selliseid ümbertähistusi võib soovi korral teostada mistahes osavalemis.

Definitsioon 5. (Implikatsiooni definitsioon.)

Valemit $\neg(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$ võime tähistada $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ ja vastupidi. Selliseid ümbertähistusi võib soovi korral teostada mistahes osavalemis.

Sulgude arvu vähendamiseks kasutame peale lausearvutuses (§ 10) tehtud kokkulepete veel järgmisi: 1) kvantorid on predikaadi täislausetega seotud tugevamini kui mistahes tehtmärk, 2) üksikuid predikaadi täislauseid ja nende eitusi pole vaja sulgudesse paigutada, 3) üksteisele vahetult järgnevaid kvantoreid, mille mõjupiirkond ulatub ühe ja sama kohani, pole vaja sulgudega eraldada.

Edasi esitame teatavad predikaatarvutuse valemid, mida me nimetame tõestéks valemiteks, samuti tuletusvõtted.

Aksioom 1. $X \vee X \rightarrow X$ on tõene valem.

Aksioom 2. $X \rightarrow X \vee Y$ on tõene valem.

Aksioom 3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$ on tõene valem.

Aksioom 4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$ on tõene valem.

Aksioom 5. $(\forall x)F(x) \rightarrow F(y)$ on tõene valem.

Aksioom 6. $F(y) \rightarrow (\exists x)F(x)$ on tõene valem.

Aksioom 7. (Substitutsiooni aksioom.) Kui \mathfrak{A} on tõene valem, siis $S_x^y(\mathfrak{A})$, $S_x^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$, $S_{F(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n)}(\mathfrak{A})$ on tõesed valemid.

Muutujate ja valemite $x, y, X, \mathfrak{B}, F(x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n)$ puhul tuleb eeldada ainult seda, et kõik substitutsiooni tingimused (vastavalt substitutsiooni liigile) on täidetud.

Aksioom 8. (*Modus ponens* ehk järelduse aksioom.) Kui \mathfrak{A} ja $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ on tõesed valemid, siis on tõene ka valem \mathfrak{B} .

Aksioom 9. (Aksioom üldisuse kvantoriga sidumise kohta.) Kui valem $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ on tõene ja \mathfrak{A} ei sisalda muutujat x , siis on tõene ka $\mathfrak{A} \rightarrow (\forall x)[\mathfrak{B}(x)]$.

Aksioom 10. (Aksioom olemasolu kvantoriga sidumise kohta.) Kui valem $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}$ on tõene ja \mathfrak{B} ei sisalda muutujat x , siis on tõene ka $(\exists x)[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow \mathfrak{B}$.

Aksioom 11. (Aksioom seotud muutuja ümbertähistamise kohta.) Kui valem \mathfrak{A} on tõene, siis on tõene ka valem \mathfrak{A}' , mis on saadud valemist \mathfrak{A} mingi seotud muutuja ümbertähistamisel.

Seotud muutuja ümbertähistamist teostame ühe kvantorite mõjupiirkonna ulatuses ja vastava kvantori märgi juures. Uus seotud muutuja tähis peab erineva valemis \mathfrak{A} vabade muutujate tähistest ja nendest seotud muutujate tähistest, mis asuvad antud mõjupiirkonda hõlmavates või antud mõjupiirkonnas sisalduvates mõjupiirkondades.

Definitsioon 6. Valemis \mathfrak{A} tõestuseks nimetame lõplikku valemite jada

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \quad (1)$$

kus \mathfrak{A}_1 on üks aksioomides 1—6 esitatud valemitest, valem \mathfrak{A}_i ($1 < i \leq n$) on kas üks aksioomides 1—6 esitatud valemitest või on saadud valemist \mathfrak{A}_j ($j < i$) aksioomide 7—11 abil ning valem \mathfrak{A}_n on samane valemiga \mathfrak{A} .

Märgime, et definitsioonide 4 ja 5 ning sulgude ärajätmise reeglite kasutamisel saadud valemid loeme lähtevalemitega samasteks valemiteks.

Definitsioon 7. Valemis \mathfrak{A} nimetame tõeseks siis ja ainult siis, kui tal on vähemalt üks tõestus.

Märgime, et ka siin võiks defineerida tõestust kui valemite jada (1), kus $n > 1$. Sel korral tuleks aga vastavalt muuta definitsiooni 7.

Esitatud predikaatarvutuse aksiomaatika abil on võimalik tõestada kõiki mitteaksiomaatilise predikaatarvutuse samaselt tõeseid valemmeid. Juhime tähelepanu ka sellele, et esitatud predikaatarvutuse aksiomaatika sisaldab tervikuna paragrahvis 10 toodud lausearvutuse aksiomaatikast (esimest varianti). See asjaolu annab võimaluse kasutada kõiki II peatükis tõestatud valemmeid ja tõestusreegleid.

Teeme mõned märkused ka teiste võimalike predikaatarvutuse aksiomaatikate kohta.

Lähtudes paragrahvis 10 esitatud lausearvutuse aksiomaatika teisest variandist, saame predikaatarvutuse aksiomaatika variandi, kus aksiomideks on vastava lausearvutuse aksiomid 1)–11) ja äsja esitatud predikaatarvutuse aksiomid 5–11.

Lähtudes paragrahvis 10 esitatud lausearvutuse aksiomaatika kolmandast variandist (G. Frege ja J. Łukasiewicz aksiomaatikast), saame predikaatarvutuse aksiomaatika variandi, kus aksiomideks on vastava lausearvutuse aksiomid 1)–3), äsja esitatud predikaatarvutuse aksiomid 5, 7, 8, 11, aksiom « $(\forall x)[X \rightarrow F(x)] \rightarrow [X \rightarrow (\forall x)F(x)]$ » on tõene valem ning aksiom «kui $\mathfrak{A}(x)$ on tõene valem, siis on tõene ka $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$ ».

§ 22. PREDIKAATARVUTUSE VALEMITE TÕESTAMINE AKSIOMAATIKAST LÄHTUDES

Predikaatarvutuse valemite tõestamisel predikaatarvutuse aksiomaatikast lähtudes on otstarbekohane kasutada tõestusreegleid, nagu seda tegime lausearvutuseski. Tõestusreeglid tuleb muidugi põhjendada aksiomaatikast lähtudes. Ilma tõestusteta kasutame peatükis II tõestatud tulemusi. Kasutades mõningaid samaselt tõeseid lausearvutuse valemmeid, mille tõestust pole II peatükis esitatud, märgime lühidalt, kuidas seda valemmit saaks tõestada.

Käesolevas paragrahvis esitame ainult näitena üksikute predikaatarvutuse valemite tõestused.

Reegel 1. Kui valem $\mathfrak{A}(x)$, kus muutuja x esineb vabalt, on tõene, siis on tõene ka $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$.

Tõestus. Kui $\mathfrak{A}(x)$ on tõene, siis on reegli 2 (§ 11) põhjal tõene ka

$$[\mathfrak{A}(x)] \vee \neg(X \rightarrow X)$$

ehk, kui kasutada disjunktsiooni kommutatiivsust ja implikatsiooni definitsiooni,

$$(X \rightarrow X) \rightarrow [\mathfrak{A}(x)].$$

Rakendades sellele valemile aksiomi 9, saame

$$(X \rightarrow X) \rightarrow (\forall x)[\mathfrak{A}(x)],$$

kust aksiomi *modus ponens* kasutamisel ja $X \rightarrow X$ tõesuse arvestamisel järeldubki valem $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$ tõesus.

Reegel 2. Kui valem $(\mathfrak{A}) \rightarrow [(\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{C}(x))]$, kus valemid \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} ei sisalda muutujat x , on tõene, siis on tõene ka $(\mathfrak{A}) \rightarrow [(\mathfrak{B}) \rightarrow (\forall x)[\mathfrak{C}(x)]]$.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et lausearvutuse valemid

$$[X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [X \& Y \rightarrow Z] \quad (1)$$

ja

$$[X \& Y \rightarrow Z] \rightarrow [X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \quad (2)$$

on tõesed. Nende tõestamisel tuleb rakendada konjunktsiooni ja implikatsiooni definitsiooni ning disjunktsiooni assotsiatiivsust.

Teostades valemis (1) substituutsioonid $S_X^{\mathfrak{A}}$, $S_Y^{\mathfrak{B}}$ ja $S_Z^{\mathfrak{C}(x)}$ ning kasutades aksiomi *modus ponens*, võime eeldust silmas pidades väita, et valem

$$[(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})] \rightarrow [\mathfrak{C}(x)]$$

on tõene. Aksiomi 9 põhjal näeme, et tõene on siis ka valem

$$[(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})] \rightarrow (\forall x)[\mathfrak{C}(x)]. \quad (3)$$

Teostades valemis (2) substituutsioonid $S_X^{\mathfrak{A}}$, $S_Y^{\mathfrak{B}}$ ja $S_Z^{(\forall x)[\mathfrak{C}(x)]}$, kasutades aksiomi *modus ponens* ning arvestades valemi (3) tõesust, saamegi reegli 2 põhjendada.

Reegel 3. Kui valem $[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow [\mathfrak{B}(x)]$, kus x esineb valemites \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} vabalt, on tõene, siis on tõene ka $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow [\mathfrak{B}(y)]$.

Tõestus. Lähtudes tõesest lausearvutuse valemist

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$$

ning valemist

$$(\neg Y \rightarrow \neg X) \rightarrow [Z \vee \neg Y \rightarrow Z \vee \neg X],$$

mis on tõene reegli 4 (§ 11) põhjal, saame reegli 5 (§ 11) abil tõesse valemi

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow [(Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z)]. \quad (4)$$

Teostades valemis (4) substituutsioonid $S_X^{(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]}$, $S_Y^{\mathfrak{A}(y)}$ ja $S_Z^{\mathfrak{B}(y)}$, saame

$$\begin{aligned} ((\forall x)[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow [\mathfrak{A}(y)]) \rightarrow \{([\mathfrak{A}(y)] \rightarrow [\mathfrak{B}(y)]) \rightarrow \\ \rightarrow [(\forall x)[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow [\mathfrak{B}(y)]]\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Arvestades seda, et valem $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow [\mathfrak{A}(y)]$ on tõene aksiomi 5 põhjal ja valem $[\mathfrak{A}(y)] \rightarrow [\mathfrak{B}(y)]$ on tõene eelduse põhjal, saamegi valemile (5) kaks korda aksiomi *modus ponens* rakendades soovitud tulemuse.

Reegel 4. Kui valem $[\mathfrak{A}(x)] \rightarrow [\mathfrak{B}(x)]$, kus x esineb valemites \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} vabalt, on tõene, siis on tõene ka $[\mathfrak{A}(y)] \rightarrow (\exists x)[\mathfrak{B}(x)]$.

Tõestus. Teostades valemis (4) substituutsioonid $S_X^{\mathfrak{A}(y)}$, $S_Y^{\mathfrak{B}(y)}$ ja $S_Z^{(\exists x)[\mathfrak{B}(x)]}$, saame

$$\{\mathfrak{A}(y)\} \rightarrow \{\mathfrak{B}(y)\} \rightarrow \{\{\mathfrak{B}(y)\} \rightarrow \rightarrow (\exists x)[\mathfrak{B}(x)]\} \rightarrow \{[(\exists x)[\mathfrak{B}(x)]] \rightarrow \{[\mathfrak{A}(y)] \rightarrow (\exists x)[\mathfrak{B}(x)]\}\}. \quad (6)$$

Arvestades seda, et valem $\mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{B}(y)$ on tõene eelduse põhjal ja valem $\mathfrak{B}(y) \rightarrow (\exists x)[\mathfrak{B}(x)]$ on tõene aksiomi 6 põhjal, saamegi valemile (6) kaks korda aksiomi *modus ponens* rakendades soovitud tulemuse.

Teoreem 1. Valem $(\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow [(\forall x)F(x) \rightarrow \rightarrow (\forall x)G(x)]$ on tõene.

Tõestus. Teostades aksiomis 5 esitatud valemis substituutsiooni $S_{F(x)}^{F(x) \rightarrow G(x)}$, saame

$$(\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow [F(y) \rightarrow G(y)], \quad (7)$$

mis on samuti tõene valem.

Lausearvutuse valem

$$[X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [Y \rightarrow (X \rightarrow Z)] \quad (8)$$

on tõene, mida saab näidata implikatsiooni definitsiooni ja disjunktsiooni kommutatiivsust ning assotsiatiivsust kasutades. Teostame valemis (8) substituutsioonid $S_X^{(\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)]}$, $S_Y^{F(y)}$ ja $S_Z^{G(y)}$ ning kasutame aksiomi *modus ponens*. Saame

$$F(y) \rightarrow [(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow G(y)]. \quad (9)$$

Rakendades valemile (9) reegleid 3 ja 2, saame

$$(\forall x)F(x) \rightarrow [(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x)G(x)]. \quad (10)$$

Teostades valemis (8) substituutsioonid $S_X^{(\forall x)F(x)}$, $S_Y^{(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))}$ ja $S_Z^{(\forall x)G(x)}$, arvestades valemi (10) tõesust ning kasutades aksiomi *modus ponens*, saamegi soovitud tulemuse.

Teoreem 2. Valem $(\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow [(\exists x)F(x) \rightarrow \rightarrow (\exists x)G(x)]$ on tõene.

Tõestus. Teostame valemis (1) substituutsioonid $S_X^{F(y)}$, $S_Y^{(\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)]}$ ja $S_Z^{G(y)}$, arvestame valemi (9) tõesust ning kasutame aksiomi *modus ponens*. Siis saame valemi

$$F(y) \& (\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow G(y).$$

Reegli 4 abil saame sellest omakorda

$$F(y) \& (\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)] \rightarrow (\exists x)G(x). \quad (11)$$

Teostades valemis (2) substituutsioonid $S_X^{F(y)}$, $S_Y^{(\forall x)[F(x) \rightarrow G(x)]}$ ja

$S_Z^{(\exists x)G(x)}$, arvestades valemis (11) tõesust ning kasutades aksioomi *modus ponens*, saame

$$F(y) \rightarrow [(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\exists x)G(x)].$$

Rakendades sellele valemile aksioomi 10, saame

$$(\exists x)F(x) \rightarrow [(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\exists x)G(x)],$$

mis valemis (8) põhjal võimaldabki saada soovitud tulemuse.

Teoreem 3. Valem $(\exists x)(\forall y)F(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)F(x, y)$ on tõene.

Tõestus. Teostades tõeses valemis $X \rightarrow X$ substituiooni $S_X^{F(x,y)}$, saame

$$F(x, y) \rightarrow F(x, y). \quad (12)$$

Rakendades sellele valemile reeglit 4, saame

$$F(x_1, y) \rightarrow (\exists x)F(x, y),$$

millele omakorda reeglit 3 rakendades jõuame valemis

$$(\forall y)F(x_1, y) \rightarrow (\exists x)F(x, y_1).$$

Rakendades viimasele valemile aksiome 9 ja 10, saamegi soovitud tulemuse.

Teoreem 4. Valem $(\forall x)(\forall y)F(x, y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)F(x, y)$ on tõene.

Tõestus. Rakendades valemile (12) kaks korda reeglit 3, saame

$$(\forall x)(\forall y)F(x, y) \rightarrow F(x_1, y_1).$$

Sellele valemile kaks korda aksioomi 9 rakendades ja tagaliikmes seotud muutujaid ümber tähistades saamegi soovitud tulemuse.

Teoreem 5. Valem $(\exists x)(\exists y)F(x, y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)F(x, y)$ on tõene.

Tõestus. Tõestus on analoogiline teoreemi 4 tõestusega: kasutame kaks korda reeglit 4 ja aksioomi 10.

Teoreem 6. Valem $(\forall x)(\forall y)[F(x, y) \& G(x, y)] \rightarrow (\forall x)(\forall y)F(x, y)$ on tõene.

Tõestus. Teostades tõeses valemis $X \& Y \rightarrow X$ substituioonid $S_X^{F(x,y)}$ ja $S_Y^{G(x,y)}$, saame

$$F(x, y) \& G(x, y) \rightarrow F(x, y),$$

kust reegli 1 põhjal saame

$$(\forall y)[F(x, y) \& G(x, y) \rightarrow F(x, y)] \quad (13)$$

Teostades teoreemis 1 tõestatud valemis (kus seotud muutuja on tähistatud y abil) substituioonid $S_{F(x)}^{F(x,y) \& G(x,y)}$ ja $S_{G(x)}^{F(x,y)}$, arves-

tades valem (13) tõesust ning kasutades aksioomi *modus ponens*, saame

$$(\forall y)[F(x, y) \& G(x, y)] \rightarrow (\forall y)F(x, y).$$

Rakendades sellele valemile reeglit 1, saame

$$(\forall x)\{(\forall y)[F(x, y) \& G(x, y)] \rightarrow (\forall y)F(x, y)\}. \quad (14)$$

Teostades teoreemis 1 tõestatud valemis substituutsioonid $S_{F(x)}^{(\forall y)[F(x, y) \& G(x, y)]}$ ja $S_{G(x)}^{(\forall y)F(x, y)}$, arvestades valem (14) tõesust ning kasutades aksioomi *modus ponens*, saamegi soovitud tulemuse.

Analoogiliselt saab tõestada ka järgmised teoreemid.

Teoreem 7. Valem $(\forall x)(\exists y)[F(x, y) \& G(x, y)] \rightarrow (\forall x)(\exists y)F(x, y)$ on tõene.

Teoreem 8. Valem $(\exists x)(\forall y)[F(x, y) \& G(x, y)] \rightarrow (\exists x)(\forall y)F(x, y)$ on tõene,

Teoreem 9. Valem $(\exists x)(\exists y)[F(x, y) \& G(x, y)] \rightarrow (\exists x)(\exists y)F(x, y)$ on tõene.

Teoreemide 7, 8 ja 9 tõestuste kohta märgime ainult seda, et seal tuleb olemasolu kvantori korral rakendada teoreemi 1 asemel teoreemi 2.

Samasugusel viisil valemite tõestamist jätkates saame tõestada näiteks kõik paragrahvis 16 esitatud samaselt tõesed valemid.

Samaselt tõesele ekvivalentsile $\mathfrak{A} \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{B}$ vastavad seejuures kaks tõest valem (1) \rightarrow (2) ja (2) \rightarrow (1). Märgime, et predikaatarvutuse valemite tõestus sõltub oluliselt tõestatavast valemist; ühtset tõestusalgoritmi kõigi tõeste valemite jaoks ei eksisteeri.

Analoogiliselt predikaatarvutuse valemite tõestamisega tuleatakse ka järeldusi antud eeldustest. Erinevuseks on ainult see asjaolu, et konstante pole võimalik substituuerida. Muus osas vaadeldakse eeldusi samadel alustel predikaatarvutuse aksiomidega 1—6.

§ 23. PREDIKAATARVUTUSE AKSIOOMIDE SÜSTEEMI MITTEVASTURÄÄKIVUS, AKSIOOMIDE SÕLTUMATUS JA AKSIOOMIDE SÜSTEEMI TÄIELIKKUS

Predikaatarvutuse aksiomide süsteemi mittevasturääkivust mõistame samuti nagu paragrahvis 12, s. t. kui aksiomide süsteemi sellist omadust, mis ei võimalda sellest süsteemist lähtudes tõestada ühtegi valem (1) ühes oma eitusega.

Kui mingisugune valem \mathfrak{A} oleks tõestatav ühes oma eitusega $\neg(\mathfrak{A})$, siis oleks sellest süsteemist lähtudes tõestatav iga predikaatarvutuse valem, muuhulgas iga lausearvutuse valem.

Näitame seda. Oletame, et valemid \mathfrak{A} ja $\neg(\mathfrak{A})$ on tõesed. Võtame suvalise predikaatarvutuse valemi \mathfrak{B} . Tähistades valemite \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} seotud muutujaid teisiti, võime alati eeldada, et valemi \mathfrak{A} vabad muutujad ei esine valemis \mathfrak{B} seotult ja samuti vastupidi. Seega saame moodustada valemi $\neg(\mathfrak{A})\vee(\mathfrak{B})$, mis reegli 2 (§ 11) põhjal on tõene. Kasutades implikatsiooni definitsiooni ja aksioomi *modus ponens*, saamegi tõestada valemi \mathfrak{B} .

Järelikult, kui leiduvad predikaatarvutuse valemid, mis pole tõestatavad antud aksiomide süsteemist lähtudes, siis on see aksiomide süsteem mittevasturääkiv.

Näitamegi, et antud aksiomide süsteemist lähtudes pole iga predikaatarvutuse valem tõestatav. Selleks kasutame järgmist mõttekäiku. Seame igale predikaatarvutuse valemile vastavusse ühe lausearvutuse valemi järgmisel viisil: 1) kõik muutuvad laused ja loogilised tehtmärgid jätame muutmata, 2) kõik kvantorid jätame kirjutamata, 3) kõik individuaalmuutujad tähistame ühe tähe, näiteks x abil. Predikaadi täislauseid $F(x)$, $G(x)$, $F(x, x)$, $G(x, x)$, ... võime seega tähistada lihtsalt $F^{(1)}$, $G^{(1)}$, $F^{(2)}$, $G^{(2)}$, ... Seega saame ilmselt lausearvutuse valemi, kusjuures lausearvutuse valemid üldse ei muutu. Sellel teisendusel on muide kindel sisuline tähendus: indiviidide piirkond koosneb ainult ühest elemendist. Selle teisenduse puhul aksiomides 1—4 esitatud valemid ei muutu, aksiomides 5 ja 6 esitatud valemid aga taanduvad tõeseks valemiks $F^{(1)} \rightarrow F^{(1)}$. Substitutsiooni aksiomist 7 saame lausearvutuse substitutsiooni aksioomi, *modus ponens* taandub vastavaks aksiomiks lausearvutuse valemite jaoks, aksiomid 9, 10 ja 11 taanduvad triviaalseks väiteks «kui \mathfrak{A} on tõene, siis on \mathfrak{A} tõene». Seega: teisendatud valemite korral taandub predikaatarvutuse aksiomaatika lausearvutuse aksiomaatikaks. On kerge näha, et kui mingi predikaatarvutuse valemi $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$ tõestuses

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}, \dots, \mathfrak{A}_n \quad (1)$$

kasutame valemilt \mathfrak{A}_i valemile \mathfrak{A}_{i+1} üleminekuks mingit aksioomi 7—11, siis teisendatud valemite jadas

$$\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_2^*, \dots, \mathfrak{A}_i^*, \mathfrak{A}_{i+1}^*, \dots, \mathfrak{A}_n^* \quad (2)$$

saame valemi \mathfrak{A}_{i+1}^* eelmistest valemitest vastavalt teisendatud aksioomi abil. Seega vastab predikaatarvutuse valemi $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$ tõestusele lausearvutuse valemi $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_n^*$ tõestus. Järelikult on tõestatavad ainult need predikaatarvutuse valemid, millele vastavad lausearvutuse valemid on tõesed. Lausearvutuse aksiomaatika uurimisel näitasime, et lausearvutuse aksiomaatika on mittevasturääkiv ja sellest lähtudes pole tõestatav iga lausearvutuse valem. Järelikult pole tõestatav ka iga predikaatarvutuse valem, millega esitatud predikaatarvutuse aksiomaatika mittevasturääkivus on kindlaks tehtud.

Selgitame nüüd predikaatarvutuse aksioomide sõltumatuse.

Aksioomide 1—4, aksioomi 7 (lause substitueerimise juhtum) ja aksioomi 8 (*modus ponens*) sõltumatuse näitamiseks kasutame samu interpretatsioonitabeleid mis lausearvutuse puhul (§ 13). Lisaks tuleb ainult interpreteerida kvantoreid. Nendega toimime samuti nagu predikaatarvutuse mittevasturääkivuse tõestamisel: jätame nad kirjutamata. Kõik individuaalmuutujad asendame üheainsaga, mis võimaldab predikaadi täislauseid vaadelda kui lauseid $F^{(1)}, G^{(1)}, F^{(2)}, G^{(2)}, \dots$

Aksioomis 1 esitatud valem $X \vee X \rightarrow X$ omandab paragrahvis 13 toodud interpretatsiooni puhul (esimesed kaks tabelit) $X = 2$ korral väärtuse 2, kusjuures aksioomides 2, 3 ja 4 esitatud valemid on samaselt võrdsed nulliga. Aksioomides 5 ja 6 toodud valemid taanduvad mõlemad kujule $F^{(1)} \rightarrow F^{(1)}$, mis on samaselt võrdne nulliga. Substitutsiooni aksioom võimaldab samaselt nulliga võrduvaist valemeist saada ikka nulliga võrduvaid valemeid. Sama olukord kehtib aksioomi 8 (*modus ponens*) puhul. Aksioomid 9 ja 10 taanduvad triviaalseks väiteks «kui \mathfrak{A} on tõene, siis on \mathfrak{A} tõene». Seega on aksioom 1 teistest aksioomidest sõltumatu.

Aksioomide 2, 3 ja 4, substitutsiooni aksioomi (lause substitueerimise juhtum) ja aksioomi 8 (*modus ponens*) sõltumatuse näitamine toimub samuti nagu lausearvutuse puhul. Kvantoreid interpreteerime samuti nagu eespool.

Aksioomide sõltumatuse tõestamisel kasutatavat mõttekäiku võiks üldiselt iseloomustada järgmiselt. Olgu aksioomid järgmised:

« \mathfrak{D}_1 on tõene valem»

« \mathfrak{D}_m on tõene valem»

«tõestusreegliga \mathfrak{R}_1 saame tõesest valemist tõe valemist».

«tõestusreegliga \mathfrak{R}_n saame tõesest valemist tõe valemist»

Teisendame (interpreteerime) neid mingil viisil T , mispuhul saame uued valemid $T(\mathfrak{D}_1), \dots, T(\mathfrak{D}_m)$ ja uued tõestusreeglid $T(\mathfrak{R}_1), \dots, T(\mathfrak{R}_n)$. Eeldame, et teisendusel T on järgmine omadus: kui valemist \mathfrak{A} saame reegli \mathfrak{R}_i abil valemi \mathfrak{B} , siis valemist $T(\mathfrak{A})$ saame reegli $T(\mathfrak{R}_i)$ abil valemi $T(\mathfrak{B})$.

Tõestame nüüd järgmise tulemuse.

Teoreem 1. Kui valemil $T(\mathfrak{D}_j)$ ($j \neq k$) on mingi omadus ω ja tõestusreeglid $T(\mathfrak{R}_i)$ säilitavad selle omaduse, valemil $T(\mathfrak{D}_k)$ aga omadus ω puudub, siis ei ole valem \mathfrak{D}_k tuletatav ülejäänud aksioomidest (s. t. on sõltumatu teistest aksioomidest).

Tõestus. Oletusel, et valem \mathfrak{D}_k on tuletatav ülejäänud aksioomidest, peab leiduma valemi \mathfrak{D}_k tõestus, s. t. valemite jada

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_\nu, \dots, \mathfrak{A}_\tau, \quad (3)$$

kus $\mathfrak{A}_\tau = \mathfrak{D}_k$ ja $\mathfrak{A}_\nu (\nu = 1, 2, \dots, \tau - 1)$ on kas mõni aksioomides esitatud valemitest $\mathfrak{D}_j (j \neq k)$ või on saadud valemitest $\mathfrak{A}_\mu (\mu < \nu)$ tõestusreeglite \mathfrak{R}_i abil. Teisenduse T abil saame jadast (3) uue jada

$$T(\mathfrak{A}_1), T(\mathfrak{A}_2), \dots, T(\mathfrak{A}_\nu), \dots, T(\mathfrak{A}_\tau),$$

kus valemid $T(\mathfrak{A}_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \dots, \tau - 1$) on kas $T(\mathfrak{D}_j)$ ($j \neq k$) või on saadud valemitest $T(\mathfrak{A}_\mu)$ ($\mu < \nu$) tõestusreeglite $T(\mathfrak{R}_i)$ abil vastavalt tõestusele (3). Et omadus ω esines valemitel $T(\mathfrak{D}_j)$ ($j \neq k$) ja tõestusreeglid $T(\mathfrak{R}_i)$ säilitasid selle omaduse, siis peaks see omadus esinema ka valemil $T(\mathfrak{A}_\tau)$ ehk $T(\mathfrak{D}_k)$. Et see omadus aga valemil $T(\mathfrak{D}_k)$ puudub, siis ei saa valemil \mathfrak{D}_k teiste aksioomide abil tõestada.

Analoogiline tulemus kehtib ka tõestusreeglite puhul. Tõestusreeglite puhul tuleb aga leida valem \mathfrak{A} , mis on tõestatav kõikidest aksioomidest lähtudes, nii et mingi interpretatsiooni T korral uuri-taval tõestusreeglil \mathfrak{R}_i ja valemil \mathfrak{A} puudub teatav omadus ω , samal ajal kui teistel aksioomidel see omadus esineb.

Aksioomi 1 sõltumatus tõestuses oli omaduseks ω omadus olla samaselt võrdne nulliga. Alljärgnevate aksioomide sõltumatus tõestustes on omaduseks ω omadus olla tõene.

Aksioomi 5 sõltumatus tõestamiseks kasutame järgmist teisendust T_1 : asendame üldisuse kvantorid igal pool olemasolu kvantoritega, jättes kõik muu samaks.

Aksioomid 1—4 ja 6 selle teisenduse puhul ei muutu, sest nad ei sisalda üldisuse kvantorit.

Aksioomi 7 võib teisendatud kujul sõnastada järgmiselt: «Valemist $T_1(\mathfrak{A})$ saame valemi $T_1[S_\alpha^\beta(\mathfrak{A})]$.» Et vahekord $T_1[S_\alpha^\beta(\mathfrak{A})] = S_\alpha^{T_1(\beta)}[T_1(\mathfrak{A})]$ ilmselt kehtib, siis säilitab teisendatud substitutsiooni aksioom valemite tõesuse.

Aksioom 8 kõlab teisendatud kujul järgmiselt: «Valemist $T_1(\mathfrak{A})$ ja $T_1(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ saame valemi $T_1(\mathfrak{B})$.» Et kehtib $T_1(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) = T_1(\mathfrak{A}) \rightarrow T_1(\mathfrak{B})$, siis säilitab teisendatud aksioom 8 valemite tõesuse.

Aksioom 9 kõlab teisendatud kujul nii: «Valemist $T_1[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)] = T_1(\mathfrak{A}) \rightarrow T_1(\mathfrak{B}(x))$ saame valemi $T_1[\mathfrak{A} \rightarrow (\forall x)\mathfrak{B}(x)] = T_1(\mathfrak{A}) \rightarrow (\exists x)T_1(\mathfrak{B}(x))$.» Teisendatud aksioom 9 säilitab valemite tõesuse, mida võib väita aksioomide 5 ja 6 ning reegli 5 (§ 11) põhjal.

Aksioom 10 kõlab teisendatud kujul nii: «Valemist $T_1[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}] = T_1(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow T_1(\mathfrak{B})$ saame valemi $T_1[(\exists x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}] = (\exists x)T_1(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow T_1(\mathfrak{B})$ » ja säilitab ilmselt valemite tõesuse.

Aksioomi 11 võib sõnastada nii: «Valemist $T_1(\mathfrak{A})$ saame valemi $T_1(U_y^x(\mathfrak{A})) = U_y^x T_1(\mathfrak{A})$ » ja ta säilitab ilmselt valemite tõesuse.

Aksioomis 5 esitatud valemil on aga pärast teisendust T_1 kuju

$$(\exists x)F(x) \rightarrow F(y),$$

millest näeme, et ta pole tõene. Seega pole aksioom 5 teistest aksioomidest tuletatav.

Aksioomi 6 sõltumatuse näitamiseks kasutame teisendust T_2 : asendame olemasolu kvantorid igal pool üldisuse kvantoritega, jättes kõik muu samaks.

Aksioomid 1 — 5, 8, 9 ja 11 teisenduvad analoogiliselt eespool vaadeldud juhuga. Teisenduse T_2 korral säilitavad nad tõesuse või vastavalt võimaldavad tõestest valemite tuletada jälle tõeseid valemeid. Teisendatud aksioom 10 tuleb sõnastada nii: «Valemist $T_2[\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}] = T_2(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow T_2(\mathfrak{B})$ saame valemi $T_2[(\exists x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}] = (\forall x)T_2(\mathfrak{A}(x)) \rightarrow T_2(\mathfrak{B})$.» Kasutades samasugust tõestust nagu reegli 3 (§ 22) puhul, saame väita, et teisendatud aksioom 10 säilitab valemite tõesuse.

Aksioomis 6 esitatud valemil on pärast teisendust T_2 kuju

$$F(y) \rightarrow (\forall x)F(x),$$

millest näeme, et ta pole tõene. Järelikult pole aksioom 6 teistest aksioomidest tuletatav.

Substitutsiooni aksioomi 7 individuaalmuutuja substitutsiooni erijuhu sõltumatuse näitamiseks kasutame teisendust T_3 : jätame igal pool valemis kirjutamata vaba individuaalmuutuja z . Predikaadi täislausetes $F(z)$, $F(x, z)$, ... asemele tuleb siis kirjutada lihtsalt F^1 , $F(x)$, Rakendades tõesele valemile $(\forall x)F(x) \rightarrow F(z)$ teisendust T_3 , saame valemi $(\forall x)F(x) \rightarrow F^{(1)}$, mis pole tõene. Et kõik aksioomid säilitavad teisenduse T_3 korral tõesuse, mitte aga substitutsiooni aksioom individuaalmuutuja substitutsiooni erijuhul, siis on individuaalmuutuja substitutsiooni erijuht teoreemi 1 lõpus toodud märkuse põhjal teistest aksioomidest sõltumatu.

Substitutsiooni aksioomi 7 predikaatmuutuja substitutsiooni erijuhu sõltumatuse näitamiseks kasutame teisendust T_4 : asendame kõik predikaati $G^{(1)}$ sisaldavad osavalemid kujul $(\forall x)G(x)$, $(\forall y)G(y)$, ... osavalemitega $(\forall x)G(x) \vee X \vee \bar{X}$, $(\forall y)G(y) \vee X \vee \bar{X}$, Rakendades tõesele valemile $(\forall x)G(x) \rightarrow G(y)$ teisendust T_4 , saame valemi $(\forall x)G(x) \vee X \vee \bar{X} \rightarrow G(y)$, mis pole tõene. Et kõik aksioomid säilitavad teisenduse T_4 korral tõesuse, mitte aga substitutsiooni aksioom predikaatmuutuja substitutsiooni erijuhul, siis on see erijuht teistest aksioomidest sõltumatu.

Aksioomi 9 sõltumatuse näitamiseks kasutame teisendust T_5 : asendame osavalemid kujul $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$, $(\forall y)[\mathfrak{A}(y)]$, ... osavale-

mittega $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)] \& X \& \bar{X}$, $(\forall y)[\mathfrak{A}(y)] \& X \& \bar{X}$, Rakendades tõesele valemile $(\forall x)[F(x) \vee \neg F(x)]$ teisendust T_5 , saame vlemi $(\forall x)[F(x) \vee \neg F(x)] \& X \& \bar{X}$, mis ilmselt pole tõene. Et kõik aksiomid säilitavad teisenduse T_5 korral tõesuse, mitte aga aksiom 9 (sest vlemi $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B}(x))$ tõesusest ei järeldu $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\forall x)[\mathfrak{B}(x)] \& X \& \bar{X}$ tõesus), siis on aksiom 9 teistest aksiomidest sõltumatu.

Aksiomi 10 sõltumatuse näitamiseks kasutame teisendust T_6 : asendame osavalemid kujul $(\exists x)[\mathfrak{A}(x)]$, $(\exists y)[\mathfrak{A}(y)]$, ... osavalemitega $(\exists x)[\mathfrak{A}(x)] \vee X \vee \bar{X}$, $(\exists y)[\mathfrak{A}(y)] \vee X \vee \bar{X}$, Rakendades tõesele valemile $\neg(\exists x)[F(x) \& \neg F(x)]$ teisendust T_6 , saame vlemi $\neg\{(\exists x)[F(x) \& \neg F(x)] \vee X \vee \bar{X}\}$, mis ilmselt pole tõene. Et kõik aksiomid säilitavad teisenduse T_6 korral tõesuse, mitte aga aksiom 10, siis on aksiom 10 teistest aksiomidest sõltumatu.

Aksiomi 11 sõltumatuse näitamiseks kasutame teisendust T_7 : jätame kirjutamata kõik seotud muutujad z . Rakendades tõesele valemile $(\forall z)F(z) \rightarrow F(y)$ teisendust T_7 , saame vlemi $F^1 \rightarrow F(y)$, mis ilmselt pole tõene. Et kõik aksiomid säilitavad teisenduse T_7 korral tõesuse, mitte aga aksiom 11, siis on aksiom 11 teistest aksiomidest sõltumatu.

Sellega on paragrahvis 21 esitatud predikaatarvutuse aksiomide süsteemi aksiomide sõltumatus üksteisest tõestatud.

Aksiomide süsteemi täielikkust, nagu seda selgitasime juba lausearvutuse aksiomaatika uurimisel, võib mõista kahel viisil.

1) Aksiomide süsteemi nimetame täielikuks, kui nende aksiomide abil mitte tõestatava, muutuvaid lauseid, indiviidide ja predikaate sisaldava vlemi lisamine aksiomidele muudab selle aksiomaatika vasturääkivaks. Selles mõttes pole predikaatarvutuse aksiomaatika täielik. Nii pole näiteks valem

$$(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall x)F(x) \quad (4)$$

predikaatarvutuse aksiomaatikast lähtudes tõestatav. Selle vlemi lisamine predikaatarvutuse aksiomaatikale mingisugust vasturääkivust ei tekita, sest see valem tähendab sisuliselt seda, et indiviidide piirkond koosneb ainult ühest elemendist.

Valemi (4) asemel võime predikaatarvutuse aksiomaatikale lisada veel teisigi selliseid valsemeid, nagu näiteks

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_{n+1}) \{ \neg F_1(x_1) \vee F_1(x_2) \vee \dots \vee F_1(x_n) \vee F_1(x_{n+1}) \vee \\ \vee \neg F_2(x_2) \vee \dots \vee F_2(x_n) \vee F_2(x_{n+1}) \vee \\ \dots \vee \neg F_n(x_n) \vee F_n(x_{n+1}) \},$$

mis sisuliselt väidab, et indiviidide piirkond ei sisalda üle n elemendi.

2) Täielikkust võib mõista mingi teise tõdede süsteemi suhtes. Predikaatarvutuse aksiomaatika täielikkuse selgitamisel viimati mainitud mõttes on loomulik võtta teiseks tõdede süsteemiks mitteaksiomaatiline predikaatarvutus. K. Gödel tõestaski 1930. aastal, et iga samaselt tõene valem mitteaksiomaatilises predikaatarvutuses on tõestatav predikaatarvutuse aksiomaatikast lähtudes. Vastava teoreemi tõestuse leiab lugeja Hilberti ja Ackermanni õpikust [8] või Novikovi õpikust [27].

PREDIKAATARVUTUSE ÜLDISTUSI JA TEISI KÜSIMUSI

§ 24. HULGATEOREETILISE ALGEBRA, BOOLE'I ALGEBRA JA LOOGILISTE ARVUTUSSÜSTEEMIDE VAHEKORD

Hulgateoorias defineeritakse hulkadega järgmised tehted: summa, ühisosa, vahe, sümmeetriline vahe ja täiend. Need definitioonid on sõltumatud hulkade elementide konkreetsest tähendusest ja hulkade iseloomust (kas hulgad on lõplikud või lõpmatud). Eeldatakse ainult seda, et vaadeldavad hulgad sisaldavad üldiselt elemente, s. t. pole üldiselt tühjad hulgad. Ülalmärgitud tehted ühes kindlate vahekordadega (näiteks alati kehtivate võrdustega) hulkade vahel moodustavadki teatava algebralise süsteemi, mida võib nimetada hulgateoreetiliseks algebraks. Et täiend nõuab teatava hulga (nn. ülemhulga) M fikseerimist, mille «raamides» me hulkadega opereerime, siis fikseerime selle kohe käsitluse alguses.

Niisiis vaatleme hulki $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, mis on kõik teatava fikseeritud mittetühja hulga M osahulgad. Seega

$$E_i \subset M \text{ iga } i = 1, 2, \dots \text{ korral.} \quad (1)$$

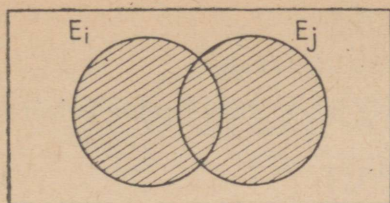
Juhul $E_i \subset E_j$ ütleme ka, et hulk E_i sisaldub hulgas E_j . Hulki E_i ja E_j nimetatakse võrdseteks, kui üheaegselt kehtivad seosed

$$E_i \subset E_j \text{ ja } E_j \subset E_i, \quad (2)$$

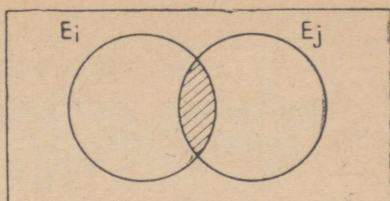
s. t. hulgad E_i ja E_j koosnevad ühtedest ja samadest elementidest. Hulkade E_i ja E_j võrdsust tähistatakse $E_i = E_j$. Tehted hulkadega defineeritakse järgmiselt.

1. Hulkade E_i ja E_j s u m m a $E_i \cup E_j$ on hulk, mille elementideks on kõik E_i ja E_j elemendid ja ainult need. Graafiliselt kujutab hulkade summat joonis 14, kus summa $E_i \cup E_j$ on viirutatud.

2. Hulkade E_i ja E_j ü h i s o s a $E_i \cap E_j$ on hulk, mille elementideks on E_i ja E_j ühised elemendid ja ainult need. Joonisel 15 on ühisosa $E_i \cap E_j$ viirutatud.

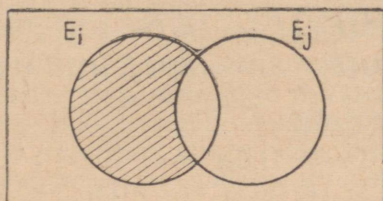


Joon. 14.



Joon. 15.

3. Hulkade E_i ja E_j vahe $E_i \setminus E_j$ on hulk, mille elementideks on need E_i elemendid, mis hulka E_j ei kuulu, ja ainult need. Joonisel 16 on vahe $E_i \setminus E_j$ viirutatud.

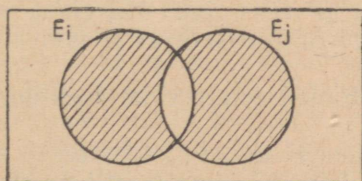


Joon. 16.

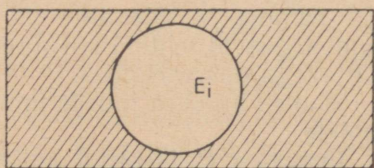
4. Hulkade E_i ja E_j sümmeetriline vahe $E_i \triangle E_j$ defineeritakse võrdusega

$$E_i \triangle E_j = (E_i \setminus E_j) \cup (E_j \setminus E_i).$$

Joonisel 17 on sümmeetriline vahe $E_i \triangle E_j$ viirutatud.



Joon. 17.



Joon. 18.

5. Hulga E_i täiend E_i' defineeritakse võrdusega

$$E_i' = M \setminus E_i.$$

Joonisel 18 on täiend E_i' viirutatud.

Kõik tehted on teostatavad mistahes hulkade $E_i, E_j \subset M$ korral, kusjuures tulemuseks saame jälle mingi hulga $E_k \subset M$. Tehete tulemused on ühesed. Et vahe ja sümmeetriline vahe on avaldatavad summa, ühisosa ja täiendi kaudu:

$$E_i \setminus E_j = E_i \cap E_j',$$

$$E_i \triangle E_j = (E_i \cap E_j') \cup (E_i' \cap E_j),$$

siis võime vaadelda ainult neid kolme tehet. Nende puhul kehtivad näiteks järgmised samasused:

$$E_i \cup E_j = E_j \cup E_i, \quad (3)$$

$$E_i \cap E_j = E_j \cap E_i, \quad (4)$$

(summa ja ühisosa kommutatiivsus);

$$E_i \cup (E_j \cup E_k) = (E_i \cup E_j) \cup E_k, \quad (5)$$

$$E_i \cap (E_j \cap E_k) = (E_i \cap E_j) \cap E_k, \quad (6)$$

(summa ja ühisosa assotsiatiivsus);

$$E_i \cap (E_j \cup E_k) = (E_i \cap E_j) \cup (E_i \cap E_k), \quad (7)$$

$$E_i \cup (E_j \cap E_k) = (E_i \cup E_j) \cap (E_i \cup E_k), \quad (8)$$

(distributiivsuse seosed);

$$(E_i \cup E_j)' = E_i' \cap E_j', \quad (9)$$

$$(E_i \cap E_j)' = E_i' \cup E_j', \quad (10)$$

$$E_i'' = E_i, \quad M' = \emptyset, \quad \emptyset' = M, \quad (11)$$

(vahekorrad täiendi puhul).

Viimastes võrdustes on \emptyset abil tähistatud tühi hulk. Erinevalt reaalarvude algebrast kehtivad siin samasused

$$E_i \cup E_i = E_i, \quad (12)$$

$$E_i \cap E_i = E_i. \quad (13)$$

Võrdustest (9) ja (10) nähtub, et saaksime läbi ka kahe tehtega: kas summa ja täiendiga või ühisosa ja täiendiga. Märkime, et samasuguseid tehteid kasutatakse ka tõenäosusteoorias sündmuste väljadega opereerimisel.

Boole'i algebra juurde minnes tuleb meil defineerida struktuuri mõiste.

Osaliselt järjestatud hulka S nimetatakse **struktuuriks**, kui tema mistahes kahe elemendi a, b korral leiduvad sellised elemendid $c, d \in S$, et on täidetud järgmised tingimused:

1) $c \leq a, c \leq b$, kusjuures seostest $e \leq a$ ja $e \leq b$ ($e \in S$) järeldub $e \leq c$;

2) $d \geq a, d \geq b$, kusjuures seostest $e \geq a$ ja $e \geq b$ ($e \in S$) järeldub $e \geq d$.

Elementi c nimetatakse elementide a ja b **ühisosaks** ($c = a \cap b$), elementi d elementide a ja b **summaks** ($d = a \cup b$).

Kui struktuuris S leidub selline element a_0 , et iga $b \in S$ puhul kehtib seos $a_0 \leq b$, siis nimetatakse elementi a_0 struktuuri S **nul-**

lik s ja tähistatakse sümboliga 0. Kui struktuuris S leidub selline element a_1 , et iga $b \in S$ puhul kehtib seos $a_1 \geq b$, siis nimetatakse elementi a_1 struktuuri S ühikuks ja tähistatakse sümboliga 1. Kui struktuuris S kehtib distributiivsuse seos, s.t. mistahes elementide $a, b, c \in S$ korral kehtib

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c),$$

siis nimetatakse struktuuri S distributiivseks.

Struktuuri S , mis sisaldab elemente 0 ja 1, nimetatakse täiendiga struktuuriks, kui iga elemendi $a \in S$ puhul leidub niisugune element $a' \in S$, et $a \cap a' = 0$ ja $a \cup a' = 1$. Distributiivset täiendiga struktuuri nimetataksegi Boole'i algebraks.

On ilmne, et mistahes mittetühja hulga M kõigi osahulkade $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ süsteem kujutab endast Boole'i algebrat. Tõepoolest, M osahulgad E_i kujutavad endast struktuuri elemente a_i . Sisalduvusvahekorda $E_i \subset E_j$ tõlgendame kui vahekorda $a_i \leq a_j$. Tehted hulkadega \cup, \cap ja $'$ samastame vastavate tehetega struktuuri elementide vahel. Hulkadele M ja \emptyset vastavad struktuuri elemendid 1 ja 0. Kõik Boole'i algebra tingimused on seejuures täidetud. Teiselt poolt võib väita, et iga lõplik Boole'i algebra on isomorfne¹³ mingi hulga kõigi osahulkade süsteemiga. Mistahes Boole'i algebra on isomorfne mingi hulga kõigi osahulkade hulga teatava alamsüsteemiga. Seega võib väita, et hulgateoreetilise algebra iga samasus [näiteks võrdused (3)–(13)] on tõlgendatav kui Boole'i algebra samasus. Et hulgateoreetilise algebra samasusteks loeme ainult neid võrdusi või vahekordi, mis kehtivad iga mittetühja hulga M osahulkade korral, siis kehtivad nad ka üheelemendilise hulga M korral. Hulga M osahulki on sel juhul kaks: M ja \emptyset . Vastaval Boole'i algebral on siis täpselt kaks elementi: 1 ja 0. Sel juhul taandub vastav hulgateoreetiline algebra ehk Boole'i algebra kahevalentseks lausearvutuseks. Seega on iga hulgateoreetilise algebra (*resp.* Boole'i algebra) samasus esitatav samaselt tõese valemiga kahevalentses lausearvutuses. Seejuures tuleb ainult hulgad (*resp.* Boole'i algebra elemendid) asendada lausetega, tehted $\cap, \cup, '$ vastavate lausearvutuse tehetega $\&, \vee$ ja \neg .

Teiselt poolt aga võiksime vaadelda hulgateoreetilist algebrat mingi suurema võimsusega hulga M korral. Sellise hulgateoreetilise algebra samasusi pole enam võimalik esitada ülalmärgitud vahetul viisil kahevalentse lausearvutuse samasuste abil. Kuid neid saab soovi korral esitada ühekohaliste predikaatide abil. Tõepoolest, mistahes mittetühja hulga M osahulkade ja indiviidide piirkonnas M defineeritud ühekohaliste predikaatide vahel saab korraldada üks-ühese vastavuse. Hulga $E_i \subset M$ seame vastavusse predikaadi $F_i(x)$ järgmiselt:

¹³ Artud juhul tähendab isomorfism üks-ühest vastavust S elementide ja M osahulkade vahel, mis säilitab ka vastavusse seatud elementide ja osahulkade vahekorrad \leq ja \subset .

$$F_i(x) = \begin{cases} t, & \text{kui } x \in E_i, \\ v, & \text{kui } x \in M \setminus E_i. \end{cases}$$

Nii näiteks võib hulgateoreetilise samasuse $(E_i \cap E_j) \subset E_j$ esitada predikaatarvutuses selliselt: $F_i(x) \& F_j(x) \rightarrow F_j(x)$. Paragrahvist 17 on aga teada, et predikaatarvutuse valemeid, mis sisaldavad ainult ühekohalisi predikaate, on alati võimalik taandada lausearvutuse valemiteks, mis on üheaegselt lähtevalemiga samaselt tõesed või mitte.

Teiselt poolt aga ei ole võimalik iga ühekohalisi predikaate sisaldavat valemit esitada ainuüksi hulgateoreetilise algebra sümbolika abil. Nii näiteks pole seda võimalik teha valemi $(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists x)F(x)$ korral. Valemit $(\exists x)F(x)$ saame esitada hulgateooria sümbolika abil küll kujul $F \neq \emptyset$, kuid see ei kujuta endast enam hulka, vaid juba mingit väidet teatava hulga kohta. Selle väite sidumine ülaltoodud valemi muu osaga nõuab loogiliste tehtemärkide kasutamist.

§ 25. FUNKTORID JA OPERAATORID

Olgu fikseeritud mingi indiviidide piirkond I . Funktoriks (täpsemini n -kohaliseks funktoriks) indiviidide piirkonnas I nimetame vastavust, mille puhul igale n -elemendilisele indiviidide korteežile (x_1, x_2, \dots, x_n) on vastavusse seatud mingi kindel indiviid x piirkonnast I . Seega n -kohaline funktor on ühene funktsioon, mille

1) määramispiirkond on kõigi n -elemendiliste korteežide (x_1, x_2, \dots, x_n) hulk, kus $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$;

2) väärtused kuuluvad hulka (indiviidide piirkonda) I .

Võrdluseks meenutame, et predikaati $P^{(n)}$ mõistame kui vastavust, mille puhul igale n -elemendilisele indiviidide korteežile on vastavusse seatud tõeväärtus t või v (resp. 1 või 0). Seega on funktori mõiste selgesti eristatav predikaadi mõistest: predikaat on mingi väide n indiviidi kohta, funktor aga määrab n indiviidi abil mingi uue indiviidi.

Funktoreid tähistame väikeste ladina tähtedega $p^{(n)}, q^{(n)}, r^{(n)}$ (konstantsed funktorid), $f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}$ (muutuvad funktorid ehk funkormuutujad), mille juures vajaduse korral kasutame veel indekseid. Kirjutisi kujul

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n), f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ v.m.s}$$

nimetame funktoore täisavaldisteks.

Funktoore näideteks võib tuua:

1) kahe reaalarvu korrutise $p_1(x, y) = x \cdot y$; tõepoolest, $p_1(x, y)$ on ühene funktsioon, mis on defineeritud kõigi reaalarvude paaride (x, y) korral, kusjuures funktori väärtus (s. t. korrutis) on samuti reaalarv;

2) n reaalarvu summa: $p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$;

3) kahe reaalarvu vahe: $q_1(x, y) = x - y$;

4) naturaalarvule n järgneva naturaalarvu: $q_2(n) = n + 1$.

5) Toome mõned mittematemaatiliste funktoirite näited. Olgu indiviidide piirkond I kõigi inimeste hulk. Indiviidi x isa $r_1(x)$ ja indiviidi x ema $r_2(x)$ on funktoirid. Sel korral tuleb aga eeldada, et antud momendil mitte enam elavad inimesed kuuluvad samuti indiviidide piirkonda I .

Toome nüüd mõned näited indiviidide piirkondades defineeritud funktsioonide kohta, mis pole funktoirid. Funktoiriks pole kahe reaalarvu jagatis (nulliga jagamine pole defineeritud). Kui indiviidide piirkonnaks on naturaalarvude hulk, siis kahe naturaalarvu vahe pole funktoir (naturaalarvude vahe pole alati naturaalarv). Kui indiviidide piirkonnaks I on kõigi elavate inimeste hulk, siis $r_1(x)$ ja $r_2(x)$ pole funktoirid, sest nad pole defineeritud kõigi x väärtuste korral. Samuti pole funktoiriks indiviidi x tuttav, sest see pole ühene funktsioon.

Kui indiviidide piirkonnas defineeritud funktsioon ei rahulda funktoirile esitatavaid nõudeid, siis võib toimida mitmeti.

1. Täiendavalt defineerida funktoiri väärtuse nende argumendi väärtuste korral, mille puhul ta polnud defineeritud. Kahe naturaalarvu vahe näiteks võib defineerida järgmiselt (siin on arv 0 loetud naturaalarvude hulka):

$$q_1(m, n) = \begin{cases} m - n, & \text{kui } m \geq n, \\ 0, & \text{kui } m < n. \end{cases}$$

2. Indiviidide piirkonda laiendada. Funktsioone $r_1(x)$ ja $r_2(x)$ näiteks võib vaadelda mitte ainult praegusel momendil elavate inimeste puhul.

3. Kui funktsioon pole ühene, siis võib teda muuta üheseks täiendavate lisatingimuste abil. Indiviidi x tuttavate hulgast näiteks võime leida sellise tuttava y , kes elab indiviidile kõige lähemal, vms.

Et menetlustega 1 ja 2 kaasnevad omad probleemid, siis on uuritud ka seda, mida annab funktoiri tingimustest 1) või 2) loobumine. Märgime siinjuures, et funktoiri abil defineeritava indiviidi ühesuse nõuet ei või mingil juhul ära jätta.

Kui jätame ära tingimuse 1), ei tarvitse funktoir defineerida mingit uut indiviidi iga korteeži (x_1, x_2, \dots, x_n) korral $(x_1, x_2, \dots, x_n \in I)$. See toob enesega kaasa kolmanda tõeväärtuse « m » (määramata) ja nõuab predikaatarvutuse ülesehitamist lähtekohast, mida on kirjeldatud paragrahvis 9.

Kui jätame ära tingimuse 2), ei tarvitse funktoiri väärtus kuuluda indiviidide piirkonda I . Selliseid funktoireid vaatleme paragrahvis 27.

Pöördume nüüd tagasi esialgse funktoiri definitsiooni juurde. Et funktoiri mõistet kasutada III või IV peatükis ülesehitatud pre-

dikaatarvutuses, on vaja selles predikaatarvutuses teha teatavaid täiendusi.

1. Defineerida nn. funkctorsubstitutsioonid $S_x^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\mathfrak{A}(x)]$ ja $S_x^{p(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\mathfrak{A}(x)]$ (muutuja x esineb valemis \mathfrak{A} vabalt), s. t. substitutsioonid, kus vaba individuaalmuutuja substitueeritakse kas konstantse funktori või funktermuutuja täisavaldisega, milles esinevad individuaalmuutujad ei tohi valemis \mathfrak{A} esineda seotult.

2. Predikaatarvutuse valemi definitsiooni täiendada järgmiselt: kui $\mathfrak{A}(x)$ (kus x esineb valemis \mathfrak{A} vabalt) on predikaatarvutuse valem, siis on predikaatarvutuse valemid ka $S_x^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\mathfrak{A}(x)]$ ja $S_x^{p(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\mathfrak{A}(x)]$.

Funktorsubstitutsioonide korral kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1. Kui $\mathfrak{A}(x)$ (kus x esineb valemis \mathfrak{A} vabalt) on samaselt tõene predikaatarvutuse valem, siis on samaselt tõesed ka valemid $S_x^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\mathfrak{A}(x)]$ ja $S_x^{p(x_1, x_2, \dots, x_n)} [\mathfrak{A}(x)]$.

Teoreemi 1 tõestus on analoogiline teoreemi 2 (§ 18) tõestusega ja jääb seepärast esitamata.

Lõpuks märgime, et n -kohalise funktori $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ abil kirjeldatavaid vahekordi saab mõnel juhul esitada ka $(n+1)$ -kohalise predikaadi $P(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ abil, defineerides viimase järgmiselt:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \begin{cases} t, & \text{kui } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ v, & \text{kui } y \neq f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Kui aga soovime opereerida funktorite asemel ainult predikaatidega, siis tekib probleem, kuidas esitada funkctorsubstitutsioone. Funktorsubstitutsioonide esitamine predikaatide abil nõuab uue mõiste, nimelt operaatori mõiste kasutuselevõtmist.

Operaatoriks nimetame tehet, mis predikaadist või predikaatarvutuse valemist lähtudes defineerib mingi uue objekti: kas predikaadi või indiviidi.

Operaatori sellise defineerimise korral on üldisuse ning olemasolu kvantorid operaatorid. Tõepoolest, valemid

$$(\forall x_i) P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$(\exists x_i) P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2)$$

defineerivad teatavad uued $(n-1)$ -kohalised predikaadid

$P_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ja $P_2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, mis on valemitega (1) või vastavalt (2) loogiliselt samaväärsed (vt. § 15).

Toome näiteid teist liiki operaatoritest.

1) Operaator μ (väikseim arv). Seda operaatorit kasutatakse juhul, kui indiviidide piirkond on kõigi naturaalarvude hulk.

Kirjutist

$$(\mu x_i)P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (3)$$

tuleb mõista nii: väikseim naturaalarv m , nii et

$$P(x_1, \dots, x_{i-1}, m, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

on tõene. Kui sellist naturaalarvu m ei leidu, on avaldis (3) määrata.

2) Operaator τ . Kirjutist

$$(\tau x_i)P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

tuleb mõista nii: indiviid y , mille puhul

$$P(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

on tõene. Operaatori τ rakendamisel kerkivad muidugi samad probleemid mis funktorite kasutamisel: 1) kas vastav indiviid leidub iga korteeži $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ korral, 2) kas leidub ainult üks selline indiviid?

Sisuliselt kujutavad teist liiki operaatorid endast funktooreid ja nende puhul kehtib kõik see, mida kõnelesime funktorite korral. Nende abil on võimalik esitada ka funktoorsubstitutsioone, näiteks kujul

$$S_x^{(\tau x_i)P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}[\mathfrak{A}(x)],$$

kusjuures pärast substitutsiooni jäävad valemisse muutujad x_i , mida tuleb käsitleda kui seotud muutujaid. Viimast asjaolu arvestades on substitutsioonide korral nähtavasti siiski mõnevõrra mugavam opereerida funktoritega. Teiselt poolt on aga otstarbekohane operaatoreid kasutada juhul, kui on vaja defineerida uusi predikaate või indiviide, lähtudes mingisugustest predikaatarvutuse valemitest, nagu näiteks juhul

$$(\mu x)[P(x, y) \& Q(x, z) \rightarrow R(x, y, z)].$$

Seetõttu kasutatakse uuritavate ainevaldkondade matemaatilis-loogilisel käsitlemisel üldiselt mõlemaid konstruktsioonimooduseid: nii funktooreid kui ka operaatoreid.

§ 26. TEIST JÄRKU PREDIKAATARVUTUS

III peatükis ülesehitatud predikaatarvutuses (samuti temaga sisuliselt samaväärses aksiomaatiliselt ülesehitatud predikaatarvutuses) loetakse samaselt tõesteks (*resp.* tõesteks) sellised valemid, mis on tõesed nendes valemites esinevate predikaatide kõikvõimalike konkreetsete erijuhtude korral. Selle predikaatarvutuse vahenditega ei saa aga kuidagi väljendada asjaolu, et mingi valem on tõene selles valemis esinevate predikaatide teatavate konkreetsete erijuhtude korral. Nii näiteks pole valem

$$(\forall x)F(x) \quad (1)$$

samaselt tõene. Valem (1) pole ka samaselt väär, s. t. ka $\neg(\forall x)F(x)$ pole samaselt tõene. Valem (1) on aga tõene teatava konkreetse $F^{(1)}$ puhul, nimelt $F^*(x) = t(x \in I)$ korral. Selleks, et esitada väidet «valem (1) on tõene teatava konkreetse $F^{(1)}$ korral» valemina, peame kasutama kvantoreid ka predikaatmuutujate ja lausemuutujate puhul. Sel juhul saame ülaltoodud väite esitada kujul

$$(\exists F)(\forall x)F(x), \quad (2)$$

mis on järelikult tõene valem.

Indiviidide samasus aga on sel juhul defineeritav järgmiselt:

$$P \equiv (x, y) =_{\text{def.}} (\forall F)[F(x) \sim F(y)],$$

s. t. indiviid x ja y on samased, kui iga predikaat, mis kehtib x korral, kehtib ka y korral ja ümberpöörduvalt.

Laiendades kvantorite rakendusala ka predikaat- ja lausemuutujatele, saame III ja IV peatükis ülesehitatud predikaatarvutuse üldistuse, mida nimetame teist järku predikaatarvutuseks. Vahe-tegemiseks nimetame peatükkides III ja IV ülesehitatud predikaatarvutust esimest järku predikaatarvutuseks.

Et paljud esimest järku predikaatarvutuse põhimõisted (lausemuutuja, konstantne lause, predikaatmuutuja, konstantne predikaat jne.) kanduvad muutumatult üle teist järku predikaatarvutusse, siis me nende juures ei peatu. Märgime ainult erinevaid momente.

1. Kvantorigega võib siduda mistahes vaba individuaal-, predikaat- või lausemuutujat. Kvantori märgi all esinevat muutujat nimetame seotud muutujaks.

2. Teist järku predikaatarvutuse valemiks on iga esimest järku predikaatarvutuse valem. Lisaks täiendame valemi definitsiooni veel kahe punktiga:

1) kui $\mathfrak{A}(X)$ on teist järku predikaatarvutuse valem, milles lausemuutuja X esineb vabalt, siis on $(\forall X)\mathfrak{A}(X)$ ja $(\exists X)\mathfrak{A}(X)$ teist järku predikaatarvutuse valemid;

2) kui $\mathfrak{A}(F^{(n)})$ on teist järku predikaatarvutuse valem, milles predikaatmuutuja $F^{(n)}$ esineb vabalt, siis on $(\forall F^{(n)})\mathfrak{A}(F^{(n)})$ ja $(\exists F^{(n)})\mathfrak{A}(F^{(n)})$ teist järku predikaatarvutuse valemid.

3. Seotud muutujate ümbertähistamise reegel ühes vastavate kitsendustega laieneb seotud lausemuutujatele ja predikaatmuutujatele.

4. Substitutsiooni korral tuleb märkida ainult seda, et kitsendused seotud ja vabade muutujate kohta kanduvad üle ka predikaat- ja lausemuutujatele.

Teist järku predikaatarvutuse valemite samaselt tõesuse selgitamisel võime lähtuda esimest järku predikaatarvutuses kasutatud interpretatsioonist: indiviidid kuuluvad indiviidide piirkonda I , predikaadid $F^{(n)}$, $G^{(n)}$, $H^{(n)}$, ... kujutavad endast funktsioone, mis

igale piirkonna I n -elemendilisele indiviidide korteežile seavad vastavusse ühe tõeväärtuse t või v . Valemite nimetame samaselt tõeseks, kui ta on samaselt tõene igas mittetühjas indiviidide piirkonnas. Samuti nagu esimest järku predikaatarvutuses on siin oluline muidugi ainult indiviidide piirkonna võimsus. Valemite kehtestatavust mõistame samuti nagu III peatükis: valemite nimetame kehtestatavaks, kui leiduvad indiviidide piirkond I ja vabade muutujate sellised konkretisatsioonid, et valem osutub tõeseks. Kui valemis vabu muutujaid üldse ei esine, siis tähendab valemite samaselt tõesus seda, et valem kujutab endast tõest väidet mistahes mittetühja indiviidide piirkonna puhul. Valemite kehtestatavus aga tähendab sellel juhul seda, et leidub indiviidide piirkond I , mille puhul see valem kujutab endast tõest väidet. Valemite \mathfrak{A} samaselt tõesus on teist järku predikaatarvutuses samaväärne väitega, et valem $\neg(\mathfrak{A})$ pole kehtestatav.

Erinevalt esimest järku predikaatarvutusest ei kehti siin aga väide: kui valem \mathfrak{A} on kehtestatav mingis n -elemendilises indiviidide piirkonnas, siis on ta kehtestatav ka $(n + 1)$ -elemendilises indiviidide piirkonnas.

Ülaltoodud väite paikapidamatust tõestab valem

$$(\forall F) (\forall x) (\forall y) [F(x) \vee \neg F(y)], \quad (3)$$

mis on tõene üheelemendilises indiviidide piirkonnas, väärib aga kõikides teistes indiviidide piirkondades. Et valemis (3) vabu muutujaid üldse ei esine, siis on valemite (3) tõesus k -elemendilises indiviidide piirkonnas samaväärne tema kehtestatavusega k -elemendilises indiviidide piirkonnas. Seega: valem (3) on kehtestatav üheelemendilises indiviidide piirkonnas, kuid kaheelemendilises indiviidide piirkonnas ta enam kehtestatav ei ole.

Kasutades ülaltoodud vahekorda valemite kehtestatavuse puhul, saab esimest järku predikaatarvutuses tõestada, et kui valem \mathfrak{A} pole samaselt tõene k -elemendilises indiviidide piirkonnas, siis pole ta samaselt tõene üheski võimsamas piirkonnas. Sellest tulemusest võib omakorda järeldada, et kui valem \mathfrak{A} on mingis indiviidide piirkonnas samaselt tõene, aga pole samaselt tõene iga indiviidide piirkonna puhul, siis peab ta olema samaselt tõene üheelemendilises indiviidide piirkonnas, kaheelemendilises indiviidide piirkonnas jne., kusjuures mingist indiviidide piirkonna võimsusest n alates ta enam samaselt tõene ei ole.

Viimane tulemus ei kehti enam teist järku predikaatarvutuses. Nii on näiteks valem

$$(\exists F) (\exists x) (\exists y) [F(x) \& \neg F(y)]$$

väärib üheelemendilises indiviidide piirkonnas, kõikides teistes (mittetühjades) piirkondades aga tõene. Valem

$$(\exists F) (\forall x) (\exists y) (\forall z) \{F(x, y) \& \neg F(x, x) \& [F(z, x) \rightarrow F(z, y)]\} \quad (4)$$

on samaselt tõene mistahes lõpmatus indiviidide piirkonnas, vää-
 aga igas lõplikus indiviidide piirkonnas. Valemeid, mis on sama-
 suguse omadusega nagu valem (4), nimetatakse seetõttu ka lõp-
 matuse aksiomideks.

Vaatleme nüüd näiteid teist järku predikaatarvutuse samaselt
 tõeste valemite kohta.

1. Kõik esimest järku predikaatarvutuse samaselt tõesed valemid
 on samaselt tõesed ka teist järku predikaatarvutuses.

2. Vaatleme mingisugust esimest järku predikaatarvutuse
 samaselt tõest valemist $\mathfrak{A}(F^{(n)}, X, x)$, mis sisaldab näiteks predi-
 kaatmuutujat $F^{(n)}$, lausemuutujat X ja individuaalmuutujat x (va-
 balt). Valemid, mis saadakse valemist $\mathfrak{A}(F^{(n)}, X, x)$ muutujate
 $F^{(n)}, X, x$ sidumisel kvantoritega \forall ja \exists valemis \mathfrak{A} ees (kusjuures
 osa muutujaid võib jääda ka vabaks), on teist järku predikaat-
 arvutuses samaselt tõesed. Seega on samaselt tõesed näiteks valemid
 kujul

$$\begin{aligned} &(\forall F^{(n)}) (\forall X) (\forall x) [\mathfrak{A}(F^{(n)}, X, x)], \\ &(\exists X) (\forall F^{(n)}) [\mathfrak{A}(F^{(n)}, X, x)] \end{aligned}$$

või konkreetseid valemeid

$$\begin{aligned} &(\forall F^{(2)}) (\forall X) (\forall x) \{ (\forall y) [X \rightarrow F(x, y)] \rightarrow [X \rightarrow (\forall y) F(x, y)] \}, \\ &(\exists X) (\forall F^{(2)}) \{ (\forall y) [X \rightarrow F(x, y)] \rightarrow [X \rightarrow (\forall y) F(x, y)] \}. \end{aligned}$$

3. Vaatleme mingisugust esimest järku predikaatarvutuse
 valemist \mathfrak{A} , mis on kehtestatav üheelemendilises indiviidide piir-
 konnas. Teatavasti on valem \mathfrak{A} sel juhul kehtestatav mistahes mit-
 tetühjas indiviidide piirkonnas. Sidudes kõik selles valemis esine-
 vad predikaat- ja lausemuutujad ning vabad individuaalmuutujad
 olemasolu kvantorite märkidega valemis \mathfrak{A} ees, saame valemis, mis
 on samaselt tõene teist järku predikaatarvutuses. Nii on teist järku
 predikaatarvutuses näiteks samaselt tõene valem (2) või valem

$$(\exists F) (\exists G) (\exists x) (\exists y) [F(x) \rightarrow G(y)].$$

Kuid sellega pole kaugeltki ammendatud teist järku predikaat-
 arvutuse samaselt tõeste valemite erikujud. Nii näiteks on valemid

$$(\forall X) [XY \vee \bar{X}Z] \sim Y \& Z$$

ja

$$(\exists X) [XY \vee \bar{X}Z] \sim Y \vee Z$$

teist järku predikaatarvutuses samaselt tõesed, kuid ei mahu ees-
 pool vaadeldud juhtude 1—3 alla.

Loomulikult tekib soov saada teist järku predikaatarvutuse
 aksiomaatika, millest oleks tuletatav iga samaselt tõene teist järku
 predikaatarvutuse valem. K. Gödel tõestas 1931. aastal [51], et sel-
 list aksiomaatikat pole võimalik anda. Mistahes mittevasturääkiva

teist järku predikaatarvutuse aksiomaatika korral võib alati leida sisulise interpretatsiooni mõttes samaselt tõese teist järku predikaatarvutuse valemiga, mis pole tõestatav sellest aksiomide süsteemist lähtudes. Seega — andes mingi teist järku predikaatarvutuse aksiomaatika, peame olema teadlikud, et see aksiomaatika on alati mittetäielik sisulise interpretatsiooni mõttes samaselt tõeste teist järku predikaatarvutuse valemite suhtes. Muu hulgas ei leidu ka algoritmi, mis iga teist järku predikaatarvutuse valemiga \mathfrak{A} puhul annaks vastuse küsimusele, kas \mathfrak{A} on samaselt tõene või mitte.

Allpool anname ühe teist järku predikaatarvutuse aksiomaatika. Defineerimatud sümbolid (algmõisted) on samad mis esimest järku predikaatarvutuse puhul.

Aksiom 1. $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ on tõene.

Aksiom 2. $[X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)]$ on tõene.

Aksiom 3. $(\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$ on tõene.

Aksiom 4. $(\forall x)[X \rightarrow F(x)] \rightarrow [X \rightarrow (\forall x)F(x)]$ on tõene.

Aksiom 5. $(\forall X)[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(X)] \rightarrow [\mathfrak{A} \rightarrow (\forall X)\mathfrak{B}(X)]$ on tõene (lausemuutuja X ei esine valemis \mathfrak{A} , valemis $\mathfrak{B}(X)$ aga esineb ta vabalt).

Aksiom 6. $(\forall F^{(n)})[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(F^{(n)})] \rightarrow [\mathfrak{A} \rightarrow (\forall F^{(n)})\mathfrak{B}(F^{(n)})]$ on tõene (predikaatmuutuja $F^{(n)}$ ei esine valemis \mathfrak{A} , valemis $\mathfrak{B}(F^{(n)})$ aga esineb ta vabalt).

Aksiom 7. $(\forall x)F(x) \rightarrow F(y)$ on tõene.

Aksiom 8. $(\forall X)\mathfrak{A}(X) \rightarrow S_X^{\mathfrak{B}}[\mathfrak{A}(X)]$ on tõene.

Aksiom 9. $(\forall F^{(n)})\mathfrak{A}(F^{(n)}) \rightarrow S_{F^{(n)}}^{\mathfrak{B}}[\mathfrak{A}(F^{(n)})]$ on tõene.

Aksiom 10. (*Modus ponens.*) Kui valemid \mathfrak{A} ja $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ on tõesed, siis on tõene ka \mathfrak{B} .

Aksiom 11. Kui valem $\mathfrak{A}(a)$, kus a tähistab mingit vaba muutujat (lause-, predikaat- või individuaalmuutujat), on tõene, siis on tõene ka valem $(\forall a)\mathfrak{A}(a)$.

Aksiom 12. Kui valem $\mathfrak{A}(x)$, kus individuaalmuutuja x esineb vabalt ja individuaalmuutuja y ei esine seotult, on tõene, siis on tõene ka valem $S_x^y[\mathfrak{A}(x)]$.

Aksiom 13. Seotud muutujat võib tähistada mingi teise tähisega, kusjuures vastav tähis peab olema esialgse tähisega samast liigist. Seotud muutujate ümbertähistamisel tuleb silmas pidada tingimusi, mis on analoogilised seotud muutujate ümbertähistamise tingimustega esimest järku predikaatarvutuses.

Samaselt tõeste valemite tõestamine lähtudes teist järku predikaatarvutuse aksiomaatikast, samuti järelduste tuletamine ei erine põhimõtteliselt vastavatest konstruktsioonidest II ja IV peatükis.

§ 27. TÜPISEERITUD PREDIKAATARVUTUS

Esimest ja teist järku predikaatarvutuses eristatakse indiviide ja predikaate nende sisulise tähenduse ning nendega opereerimise reeglite poolest. Nii esinevad nendes arvutussüsteemides indiviidid predikaatide argumentavaldistes, predikaadid aga predikaatide argumentavaldistes esineda ei või. Loomulikult tekib küsimus, kas viimane kitsendus on mittevasturääkivate loogiliste arvutussüsteemide ülesehitamiseks tingimata vajalik.

Osutub, et viimati mainitud kitsendus pole tingimata vajalik loogiliste arvutussüsteemide ülesehitamiseks. Sellega avaneb võimalus eespool käsitletud arvutussüsteemide oluliseks laiendamiseks, millega jõuamegi tüpiseeritud predikaatarvutuse ehk tüüpide teooria juurde.

Tüpiseeritud predikaatarvutuses on võimalik predikaatide omadusi avaldada omakorda predikaatide abil. Nii on näiteks võimalik kahekohalise predikaadi $P_{\equiv}(x, y)$ (x on samane indiviidiga y) refleksiivsuse, sümmeetria ja transitiivsuse omadusi esitada vastavate predikaatide $\text{Refl}(P_{\equiv})$, $\text{Süm}(P_{\equiv})$ ja $\text{Trans}(P_{\equiv})$ abil, defineerides need predikaadid järgmiselt:

$$\text{Refl}(F) = (\forall x)F(x, x), \quad (1)$$

$$\text{Süm}(F) = (\forall x)(\forall y)[F(x, y) \rightarrow F(y, x)], \quad (2)$$

$$\text{Trans}(F) = (\forall x)(\forall y)(\forall z)[F(x, y) \& F(y, z) \rightarrow F(x, z)]. \quad (3)$$

Predikaadid Refl , Süm ja Trans , mis on defineeritud vastavalt seostega (1), (2) ja (3), pole aga veel tüpiseeritud predikaatarvutuse predikaatideks, sest nendele pole omistatud mingit kindlat tüüpi. Selgitame, milleks on vajalik tüpiseeritud predikaatarvutuses kasutatavatele objektidele (predikaatidele, funktoritele, indiviididele) omistada kindel tüüp.

Olgu meil mingi ühekohaline predikaat $P^{(1)}$. Kui lubame predikaate esineda ka predikaatide argumentavaldistes, siis omab kirjutus $P(P)$ mõtet ja peab olema kas tõene või väär, sõltuvalt predikaadist P . Nii on näiteks predikaat (omadus) «vajalik» ise ka vajalik (mitmete vahekordade esitamisel). Tähistades selle predikaadi P_1 abil, võime öelda, et predikaadil täislause $P_1(P_1)$ on tõene. Tähistades predikaati (omadust) «uinutav» P_2 abil, võime öelda, et $P_2(P_2)$ on väär, sest predikaadil «uinutav» pole endal uinutavat toimet. Defineerime nüüd ühekohalise predikaadi $\text{Pred}^{(1)}$ järgmiselt:

$$\text{Pred}(P) = P(P). \quad (4)$$

$\text{Pred}(P)$ väljendab seda, kas predikaat P on predikaabel predikaat, s. t. on omistatav iseenesele või mitte. Nii näiteks on $\text{Pred}(P_1)$ tõene, $\text{Pred}(P_2)$ aga on väär. Et predikaat Pred on ühekohaline predikaat, siis võime moodustada näiteks predikaadi täis-

laused $\text{Pred}(\text{Pred})$ ja $\neg\text{Pred}(\neg\text{Pred})$, millel peab olema teatav kindel tõeväärtus. Selgitame, missuguse tõeväärtusega on tegemist juhul $\neg\text{Pred}(\neg\text{Pred})$.

1) Oletame, et $\neg\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ on tõene. Definiitsiooni (4) põhjal on siis tõene ka $\text{Pred}(\neg\text{Pred})$. Teiselt poolt aga järeldub $\neg\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ tõesusest, et $\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ on väär. Seega peab $\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ üheaegselt olema nii tõene kui ka väär. Järelikult viib esimene oletus vastuoluni.

2) Oletame, et $\neg\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ on väär. Definiitsiooni (4) põhjal on siis väär ka $\text{Pred}(\neg\text{Pred})$. Teiselt poolt aga järeldub $\neg\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ väärusest $\text{Pred}(\neg\text{Pred})$ tõesus. Seega saime jälle vastuolulise tulemuse.

Esitatud paradoks (mille avastas B. Russell) näitab, et predikaatide kasutamisel predikaatide argumentavaldistes ilma ühegi kitsenduseeta võivad tekkida vastuolud. Selliste paradoksides vältimiseks ongi vajalik predikaatidele, funktoritele ja indiviididele kindlate tüüpide omistamine. Mainitud idee kuulub A. Whiteheadile ja B. Russellile.

Olgu antud mingi mittetühi indiviidide piirkond I . Selle indiviidide piirkonna mistahes indiviidi tüübiks võtame sümboli (tähe) i . Indiviidide piirkonna I elementide korteeži (a_1, a_2, \dots, a_n) tüüpi tähistame i, i, \dots, i abil, kusjuures igale korteeži elemendile vastab üks sümbol i . Indiviidide piirkonnas I defineeritud n -kohalise predikaadi tüüpi tähistame (i, i, \dots, i) abil. Üldiselt, kui n -kohalise predikaadi $F^{(n)}$ argumentidel on tüübid vastavalt t_1, t_2, \dots, t_n , siis on selle predikaadi tüüp (t_1, t_2, \dots, t_n) . Et lauseid võib vaadelda kui 0-kohalisi predikaate indiviidide piirkonnas I , siis on lausete tüübiks (\emptyset) . Kui n -kohalise funktori $f^{(n)}$ argumentidel on tüübid vastavalt t_1, t_2, \dots, t_n ja funktor $f^{(n)}$ määrab uue objekti, mille tüüp on t_s , siis on selle funktori tüüp $(t_1, t_2, \dots, t_n \rightarrow t_s)$. Tüüpiseeritud predikaatarvutuses lubatakse kasutada igal kindlal kohal argumentavaldises ainult teatavat kindlat tüüpi objekte.

Toome nüüd mõned konkreetsed näited predikaatide ja funktoirite tüüpide kohta. Oletusel, et kahekohalise predikaadi $F^{(2)}$ tüüp on (i, i) , on predikaatide Refl (F), Süm (F) ja Trans (F) tüüp $((i, i))$. Kui predikaat $P^{(2)}$ on defineeritud võrdusega

$$P(X, F) = (\forall x)[X \rightarrow F(x)], \quad (5)$$

kus predikaadi $F^{(1)}$ tüüp on (i) , siis on predikaadi $P^{(2)}$ tüüp $((\emptyset), (i))$. Kui funktori $p_1(x, y) = x \cdot y$ argumentide tüüp on i , siis on funktori p_1 tüüp $(i, i \rightarrow i)$. Funktori $q_2(n) = n + 1$ tüüp on aga $(i \rightarrow i)$.

Tüüpiseeritud predikaatarvutuses pole predikaatide kasutamine nendesamade predikaatide argumentavaldistes üldse võimalik. Tõepoolest, kui kirjutises $P(\dots, P, \dots)$ sisemine predikaat P on tüüpi t_k , siis peab väline predikaat P olema tüüpi (\dots, t_k, \dots) . Tüübid t_k ja (\dots, t_k, \dots) on aga ilmselt erinevad vähemalt ühe

paari sulgude poolest. Et konstruktsioon (4) pole tüpiseeritud predikaatarvutuses lubatud, siis ei saa selles arvutussüsteemis loomulikult esineda ka Russell'i paradoks.

Tüpiseeritud predikaatarvutuses on otstarbekohane defineerida ka t a s e m e mõiste. Objekti (predikaadi, funktori, indiviidi) taseme määrame järgmiselt: fikseerime objekti tüübi tähises sümboli i ja loendame, mitu paari sulge seda sümbolit i sisaldab. Sel viisil saame igale sümbolile i vastavusse seada teda sisaldavate sulgude arvu. Mingit sümbolit i sisaldavate sulgude maksimaalset arvu objekti tüübi tähises nimetataksegi vastava objekti tasemeks. Nii on näiteks indiviidide piirkonna I elemendi tüüp i ja elemendi tase seega 0. Predikaadid tüüpi (i, i, \dots, i) on tasemega 1. Funktorid $p_1(x, y)$ ja $q_2(n)$ on samuti tasemega 1. Predikaadid, mille argumentavaldises on argument tasemega 1 ja pole ühtegi kõrgema tasemega argumenti, on kas tüüpi $(\dots, (i, i, \dots, i), \dots)$ või $(\dots, (i, i, \dots, i \rightarrow i), \dots)$ ja seega tasemega 2. Tasemega 2 on näiteks predikaadid Refl (F), Süm (F), ja Trans (F). Üldiselt, kui n -kohalise predikaadi argumentid on vastavalt tasemega $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, siis on predikaat ise tasemega $\beta = 1 + \max \alpha_k$. Valemi tasemeks nimetame selle valemi kõrgeima tasemega predikaadi taset. Arvutussüsteemi tasemeks nimetame selle arvutussüsteemi kõrgeima tasemega valemi taset. Nii on näiteks esimest ja teist järku predikaatarvutus tasemega 1.

Mõnikord on otstarbekohane kasutada loogilistes konstruktsioonides mitte ühtainsat indiviidide piirkonda, vaid mitmeid piirkondi. Kui loogilistes konstruktsioonides vaadeldavad indiviidid on väga erineva sisulise tähendusega (näiteks arvud, võrrandid, loomad, taimed, nende organid ja koed, keemilised ühendid ja protsessid), siis nende ühendamine ühteainsasse indiviidide piirkonda tooks enesega kaasa väga erineva sisulise tähendusega indiviidide korteežide moodustumise. Predikaadid $P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)}$, mis on näiteks tüüpi (i, i, \dots, i) , peavad aga olema defineeritud iga n -elemendilise indiviidide korteeži korral. Seega tuleks sisuliselt defineeritud predikaate laiendada, nii et nad seaksid kõikidele i, i, \dots, i tüüpi korteežidele vastavusse kindla tõeväärtuse t või v . Sellega kaasneb aga asjatu lisatöö. Lihtsam on vaadelda neid eri tüüpi objekte kui eri indiviidide piirkondade elemente. Indiviidide piirkondade I_1, I_2, \dots, I_m elementide tüüpe tähistame vastavalt i_1, i_2, \dots, i_m abil, kusjuures kõiki neid loeme 0-tasemega objektideks. Predikaadi tüüp, näiteks (i_1, i_2, i_3) vms., ütleb nüüd kohe, missugune argument peab missugusesse indiviidide piirkonda kuuluma. Predikaate pole vaja enam täiendavalt defineerida. Analoogiline on olukord loomulikult ka funktorite korral. Funktorit, mis suvalisele kahele vektorile \bar{x}, \bar{y} seab vastavusse nende skalaarkorrutise $p(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$, on näiteks otstarbekohane vaadelda kui $(i_1, i_1 \rightarrow i_2)$ -tüüpi funktorit, kus i_1 on vektorite tüübiks, i_2 aga skalaari (reaalarvu) tüübiks. Arvutussüsteeme, kus

indiviidide piirkondi on rohkem kui üks, nimetame mitmeliigilisteks (ehk mitmesordilisteks) arvutussüsteemideks. Kui indiviidide piirkondi on m , nimetame arvutussüsteemi ka m -liigiliseks (m -sordiliseks).

Lõpuks märgime, et analoogiliselt mitmevalentse lausearvutusega võib üles ehitada ka mitmevalentseid predikaatarvutuse süsteeme. Mitmevalentse predikaatarvutuses tuleb lauseid käsitleda samuti nagu mitmevalentse lausearvutuses, predikaate tuleb aga vaadelda kui funktsioone, mis igale teatavat kindlat tüüpi elementide korteežile seavad vastavusse ühe kindla tõeväärtuse kõikide tõeväärtuste hulgas.

Predikaatarvutust iseloomustavad seega järgmised põhilised näitajad: 1) predikaatarvutuse valents (kas kahe-, kolme- või rohkema-valentne), 2) järk (kas esimest või teist järku), 3) predikaatide argumentide arv (0-kohalised predikaadid on samased lausetega; kui esinevad ainult need, saame lausearvutuse), 4) arvutussüsteemi tase, 5) kas arvutussüsteemis kasutatakse funktooreid või mitte ja 6) arvutussüsteemi liigilisus. Kõiki neid põhinäitajaid varieerides võime saada suure hulga erinevaid loogilisi arvutussüsteeme. Märgime, et süstemaatilisemalt on uuritud seni siiski ainult üksikuid erikujulisi arvutussüsteeme. Nii prevaleerib kahevalentsete arvutussüsteemide uurimine mitmevalentsete ees, tase-mega 1 arvutussüsteemide uurimine kõrgema tasemega arvutussüsteemide ees.

Esitame lõpuks ühe võimaliku tüpiseeritud predikaatarvutuse aksiomaatika. Loomulikult on see aksiomaatika mittetäielik sisulises mõttes. Kõigepealt teeme mõned märkused kvantorite, valemite ja substituatsioonide kohta.

1. Kvantoritega \forall ja \exists võib siduda mistahes tüüpi vabu muutujaid. Kvantori märgi all esinevat muutujat nimetame seotud muutujaks.

2. Tüpiseeritud predikaatarvutuse valemiks on: 1) lause, 2) kui objektidel $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ on vastavalt tüübid t_1, t_2, \dots, t_n ja predikaadil $F^{(n)}$ tüüp (t_1, t_2, \dots, t_n) , siis on $F(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ (s. t. predikaadi $F^{(n)}$ täislause) tüpiseeritud predikaatarvutuse valem, 3) kui \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} on tüpiseeritud predikaatarvutuse valemid, kus \mathfrak{A} vabad muutujad ei esine valemis \mathfrak{B} seotult ja ümberpöörduvalt, siis on ka $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$ ja $(\mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{B})$ tüpiseeritud predikaatarvutuse valemid, 4) kui \mathfrak{A} on tüpiseeritud predikaatarvutuse valem, siis on ka $\neg(\mathfrak{A})$ tüpiseeritud predikaatarvutuse valem, 5) kui $\mathfrak{A}(\Delta)$, kus muutuja Δ esineb vabalt, on tüpiseeritud predikaatarvutuse valem, siis on ka $(\forall\Delta)[\mathfrak{A}(\Delta)]$ ja $(\exists\Delta)[\mathfrak{A}(\Delta)]$ tüpiseeritud predikaatarvutuse valemid, 6) teisi tüpiseeritud predikaatarvutuse valemite peale nende, mis on defineeritud kooskõlas punktidega 1) — 5), pole.

3. Substitutsiooni korral tuleb eristada kahte juhtu: kas muutuja Δ , mis substitueeritakse mingi teise muutuja või valemiga Γ , esineb mingi predikaadi või funktori argumentavaldises või mitte. Esimesel juhul peab substitueeriv objekt Γ olema muutujaga Δ sama tüüpi, kuna teisel juhul pole seda vaja. Nõuded seotud ja vabade muutujate kohta (nagu esimest järku predikaatarvutuses) peavad aga olema täidetud mõlemal juhul.

Aksiomid on nüüd järgmised.

Aksiom 1. $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ on tõene.

Aksiom 2. $[X \rightarrow (Y \rightarrow X)] \rightarrow [(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)]$ on tõene.

Aksiom 3. $(\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$ on tõene.

Aksiom 4. $(\forall \Delta)[\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\Delta)] \rightarrow [\mathfrak{A} \rightarrow (\forall \Delta)\mathfrak{B}(\Delta)]$ on tõene [siin eeldame, et muutuja Δ ei esine valemis \mathfrak{A} , valemis $\mathfrak{B}(\Delta)$ aga esineb ta vabalt].

Aksiom 5. $(\forall \Delta)[\mathfrak{A}(\Delta)] \rightarrow \mathfrak{A}(\Gamma)$ on tõene [siin eeldame, et muutuja Γ ei esine valemis $\mathfrak{A}(\Delta)$ seotult; valem $\mathfrak{A}(\Gamma)$ on substitutsiooni $S_{\Delta}^{\Gamma}[\mathfrak{A}(\Delta)]$ resultaat].

Aksiom 6. (*Modus ponens.*) Kui valemid $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ ja \mathfrak{A} on tõesed, siis on tõene ka \mathfrak{B} .

Aksiom 7. Kui valem $\mathfrak{A}(\Delta)$, kus Δ tähistab mingit vaba muutujat, on tõene, siis on tõene ka $(\forall \Delta)[\mathfrak{A}(\Delta)]$.

Aksiom 8. Seotud muutujat võib tähistada mingi teise tähisega, kusjuures vastav tähis peab olema esialgse tähisega sama tüüpi. Seotud muutujate ümbertähistamisel tuleb silmas pidada tingimusi, mis on analoogilised vastavate tingimustega esimest järku predikaatarvutuses.

On kerge näha, et esitatud aksiomaatika on paragrahvis 26 toodud teist järku predikaatarvutuse aksiomaatika üldistuseks.

VI PEATÜKK

MATEMAATILISE LOOGIKA RAKENDUSI

Käesolevas peatükis vaatleme matemaatilise loogika rakendusi mitmesuguste ülesannete lahendamisel, mis ei ole seotud deduktiivsete teooriate aksiomaatilise ülesehitamisega.

§ 28. PORETSKI ÜLESANDED LINDUDEST JA NEIDUDEST

P. S. Poretski tööd matemaatilise loogika alal kuuluvad Boole'i algebra valdkonda. Ka ülalmainitud ülesannete lahendamisel kasutas ta oma lahendusmeetodit, mis baseerub Boole'i algebra (*resp.* hulgateooria) mõistetel. Käesolevas paragrahvis aga lahendamise need ülesanded lausearvutuse meetoditega.

1. Ülesanne lindudest

Mingi zooloogiaaia lindude kohta kehtivad järgmised väited:¹⁴ 1) laululinnud on kas suured või teatava omadusega Y , 2) linnud, kellel pole omadust Y , on kas mittesuured või neil pole omadust X , 3) laululinnud ühes suurte lindudega hõlmavad kõik linnud omadusega X , 4) iga mittesuur lind on kas laululind või lind omadusega X , 5) lindude hulgas, kes on omadusega X , pole neid, kellel on omadus Y ja kes on ühtlasi suured ning pole samaaegselt laululinnud.

Nende vahekordade põhjal tuleb selgitada, kas linnud omadusega X on laululinnud või mitte või kas nad on suured või mittesuured linnud. Samasugused küsimused tuleb selgitada ka omaduse Y puhul. Peale selle tuleb leida omaduste X ja Y vahekord.

Ülesandelaendus. Tähistame laused «Linnul on omadus X », «Linnul on omadus Y », «Lind on laululind» ja «Lind on

¹⁴ Sidesõna «või» kasutame mittevälistavas mõttes, s. t. samas tähenduses nagu disjunktsiooni.

suur» vastavalt tähtedega A_1, A_2, A_3 ja A_4 . Eespooltoodud vahekordi võib siis üles kirjutada järgmiste lausearvutuse valemite abil:

$$A_3 \rightarrow A_4 \vee A_2, \quad (1)$$

$$\bar{A}_2 \rightarrow \bar{A}_4 \vee \bar{A}_1, \quad (2)$$

$$A_1 \rightarrow A_3 \vee A_4, \quad (3)$$

$$\bar{A}_4 \rightarrow \bar{A}_3 \vee \bar{A}_1, \quad (4)$$

$$A_1 \rightarrow \neg(A_2 \& A_4 \& \bar{A}_3). \quad (5)$$

Teisendades valemeid (1) — (5) lausearvutuse samasuste abil, saame valemid

$$A_2 \vee \bar{A}_3 \vee A_4, \quad (6)$$

$$\bar{A}_1 \vee A_2 \vee \bar{A}_4, \quad (7)$$

$$\bar{A}_1 \vee A_3 \vee A_4, \quad (8)$$

$$A_1 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4, \quad (9)$$

$$\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee A_3 \vee \bar{A}_4. \quad (10)$$

Kogu ülesande eelduste kompleks on valemite (6) — (10) konjunktsioon

$$\begin{aligned} & (A_2 \vee \bar{A}_3 \vee A_4) \& (\bar{A}_1 \vee A_2 \vee \bar{A}_4) \& \\ & \& (\bar{A}_1 \vee A_3 \vee A_4) \& (A_1 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4) \& \\ & \& (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee A_3 \vee \bar{A}_4), \end{aligned}$$

mis tuleb ülesande lahendamiseks teisendada disjunktiivsele normaalkujule. Kasutades üldistatud distributiivsuse seoseid 1. ja 5. ning 2. ja 4. liikme puhul, saame

$$\begin{aligned} & (\bar{A}_1 A_2 \vee A_2 A_3 \vee A_2 \bar{A}_4 \vee \bar{A}_1 \bar{A}_3 \vee \bar{A}_2 \bar{A}_3 \vee \bar{A}_3 \bar{A}_4 \vee \bar{A}_1 A_4 \vee \bar{A}_2 A_4 \vee A_3 A_4) \& \\ & \& (A_1 A_2 \vee A_1 \bar{A}_4 \vee \bar{A}_1 A_3 \vee A_2 A_3 \vee A_3 \bar{A}_4 \vee \bar{A}_1 A_4 \vee A_2 A_4) \& (\bar{A}_1 \vee A_3 \vee A_4). \end{aligned}$$

Kasutades veel üldistatud distributiivsuse seost ja jättes kirjutamata need elementaarkonjunktsioonid, mis neelatakse madalamat järku elementaarkonjunktsioonide poolt, saame lõpptulemuseks valemi

$$\bar{A}_1 A_4 \vee A_2 A_3. \quad (11)$$

Valemi (11) põhjal võib öelda, et zooloogiaaia linnud on kas suured linnud ilma omaduseta X või laululinnud omadusega Y (või nad on kõikide ülalmärgitud omadustega). Valemi (11) annab vastuse ka küsimusele omaduste X ja Y vahekorra kohta teiste omadustega. Selleks otstarbeks võib valemi (11) elementaarkonjunktsioone täiendada lausetega A_1 ja A_2 . Pärast täiendamist saame

$$\bar{A}_1 A_2 A_4 \vee \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_4 \vee A_1 A_2 A_3 \vee \bar{A}_1 A_2 A_3. \quad (12)$$

Valemist (12) leiame, et kui $A_1 = t$, siis $A_2 = A_3 = t$, kuna A_4 tõeväärtus on suvaline. Seega: iga lind omadusega X on laululind omadusega Y ning võib olla nii suur kui ka mittesuur. Omadusest X järeldub omadus Y . Kui $A_2 = t$, siis on kolm võimalust:

$A_1 = v, A_4 = t; A_1 = t, A_3 = t$ ja $A_1 = v, A_3 = t$. Kõigist juhtudest annab ülevaate tabel 20, mille saame valemī (11) või (12) põhjal.

Tabel 20

A_1	A_2	A_3	A_4
v	v	v	t
v	v	t	t
v	t	v	t
v	t	t	v
v	t	t	t
t	t	t	v
t	t	t	t

167

2. Ülesanne neidudest

Mingil ballil viibinud neidude kohta kehtivad järgmised väited:

- 1) iga neid oli kas hästi kasvatatud, lõbus, noor või ilus; 2) kõik mittetantsivad neidud olid mitteilusad ja iga tantsiv neid oli kas hästi kasvatatud, lõbus või noor; 3) kui eraldada mittenoored neidud, võis ülejäänud neidude kohta öelda, et nad on kas ilusad, lõbusad või hästi kasvatatud; 4) kui eraldada kõik mittenoored ja seejärel kõik mitteilusad neidud, siis jäid järele hästi kasvatatud või lõbusad neidud; 5) kui eraldada kõik mittelõbusad neidud, jäid järele kas hästi kasvatatud või noored või ilusad neidud; 6) ballil ei olnud neide, kes olles noored ja lõbusad, polnud samaaegselt ilusad ja hästi kasvatatud; 7) noorte neidude hulgas polnud selliseid, kes olid ilusad ja lõbusad, kuid polnud hästi kasvatatud; 8) iga hästi kasvatatud neid oli kas noor, ilus või lõbus; 9) iga hästi kasvatatud ja ühtlasi ilus neid oli kas lõbus või noor; 10) iga mittelõbus neid polnud kas noor, ilus või hästi kasvatatud; 11) kõik hästi kasvatatud ja lõbusad neidud, kes polnud noored, olid ilusad; 12) mittenoored neidud olid kas mittelõbusad, mitteilusad või mitte hästi kasvatatud; 13) mitteilusate neidude hulgas polnud neide, kes olid samaaegselt hästi kasvatatud, noored ja lõbusad; 14) kui lahkusid kõik mitte hästi kasvatatud neidud, kõik mittenoored neidud, kõik mittelõbusad neidud ja kõik mitteilusad neidud, siis ühtegi neidu enam ballile ei jäänud.

Selgitada ballil viibinud neidude rühmade vahekorrad.

Tähistades laused «Neid on hästi kasvatatud», «Neid on lõbus», «Neid on noor» ja «Neid on ilus» vastavalt tähtedega A , B , C ja D , võime eeldused üles kirjutada järgmiselt:

- 1) $A \vee B \vee C \vee D$,
- 2) $A \vee B \vee C \vee \bar{D}$,
- 3) $A \vee B \vee \bar{C} \vee D$,
- 4) $A \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{D}$,
- 5) $A \vee \bar{B} \vee C \vee D$,
- 6) $\bar{A}BC\bar{D} = v$ ehk $A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee D$,
- 7) $\bar{A}BCD = v$ ehk $A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D}$,
- 8) $A \rightarrow B \vee C \vee D$ ehk $\bar{A} \vee B \vee C \vee D$,
- 9) $AD \rightarrow B \vee C$ ehk $\bar{A} \vee B \vee C \vee \bar{D}$,
- 10) $\bar{B} \rightarrow \bar{A} \vee \bar{C} \vee \bar{D}$ ehk $\bar{A} \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{D}$,
- 11) $ABC \rightarrow D$ ehk $\bar{A} \vee \bar{B} \vee C \vee D$,
- 12) $\bar{C} \rightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{D}$ ehk $\bar{A} \vee \bar{B} \vee C \vee \bar{D}$,
- 13) $\bar{D} \rightarrow \neg(ABC)$ ehk $\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee D$,
- 14) $\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D}$.

Moodustades eelduste 1) — 14) konjunktsiooni ja teisendades selle disjunktiiivsele normaalkujule, saame

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}BC\bar{D}, \quad (13)$$

s. t. ballil viibinud neiud jagunevad kahte rühma: ühte rühma kuuluvad noored ja hästi kasvatatud, kuid mittelõbusad ja mitteilusad neiud, teise rühma aga lõbusad ja ilusad, kuid mittenoored ja mitte hästi kasvatatud neiud.

Ülesannet saab aga lahendada ka ilma eelduste 1) — 14) konjunktsiooni moodustamata ja teisendamata. Selleks paneme tähele, et iga eeldus on väärtustuse korral. Esimene eeldus näiteks väärtustuse (v, v, v, v) , teine (v, v, v, t) , kolmas (v, v, t, v) jne. korral. Kõikide eelduste konjunktsioon on väärtustusega 14 väärtustuse korral ja tõene ainult 2 väärtustuse korral (4 komponentlause puhul on kõiki väärtustusi 16). Need 2 väärtustust on kergesti leitavad. Need väärtustused on (v, t, v, t) ja (t, v, t, v) , mis annavadki disjunktiiivse normaalkuju (13).

§ 29. MATEMAATILISE LOOGIKA RAKENDAMINE KOHTUPRAKTIKAS

Matemaatilise loogika rakendamisesest kohtupraktikas on seni väga vähe kõneldud ja kirjutatud (vt. näiteks [54]). Ometi on matemaatilise loogika meetodid juristile kaheldamatuks abivahendiks, võimaldades anda ülevaate üksteisele vasturääkivate väidete keerukast kompleksist. Katsume viimast väidet põhjendada konkreetse näite esitamisega.

N ä i d e. Uhel N linna kooliõpetajannal kadus rahakott. Rahakoti varastajaks võis olla ainult üks (või kaks) järgmisest viiest õpilasest: Lilian, Judy, David, Theo või Margaret. Ülekuulamisel andis igaüks neist kolm seletust.

Lilian: 1) mina ei võtnud rahakotti; 2) oma elus pole ma mitte kunagi midagi varastanud; 3) seda tegi Theo.

Judy: 4) mina ei varastanud rahakotti; 5) minu isa on küllalt rikas ja mul on oma isiklik rahakott; 6) Margaret teab, kes seda tegi.

David: 7) mina ei võtnud rahakotti; 8) ma ei olnud enne kooli tulekut Margaretiga üldse tuttav; 9) seda tegi Theo.

Theo: 10) mina ei ole süüdi; 11) seda tegi Margaret; 12) Lilian valetab, kinnitades, et mina varastasin rahakoti.

Margaret: 13) mina õpetaja rahakotti ei võtnud; 14) Judy on selles süüdi; 15) David võib minu eest vastutada, sest ta tunneb mind juba sünnimisest saadik.

Tuleb leida, kes varastas (*resp.* varastasid) rahakoti.

B. A. Kordemski raamatus [18], kust see ülesanne on võetud, lisatakse veel, et edaspidisel küsitlemisel tunnistas iga õpilane, et tema kolmest väitest vastavad ainult kaks tõele. Ülesande lahenduse käigus näitame, et kõik need lisaemeldused pole vajalikud. Et seda näidata, ei arvesta me alguses üldse lisaemeldusi, vaid võtame nad arvesse alles ülesande lahendamise teisel etapil. Ühtlasi näitame, missugused on tulemused teistsuguste lisaemelduste korral.

L a h e n d u s. Tähistame väited 1) — 15) vastavalt A_1, A_2, \dots, A_{15} abil. Sisulise analüüsi põhjal võime nende väidete omavahelise vahekorra esitada järgmiste lausearvutuse valemite abil: $A_2 \rightarrow A_1$ ehk $A_1 \vee \bar{A}_2$; $A_3 \approx A_{10}$ ehk $A_3 \bar{A}_{10} \vee \bar{A}_3 A_{10}$; $A_3 \approx A_{12}$ ehk $A_3 \bar{A}_{12} \vee \bar{A}_3 A_{12}$; $A_4 \approx A_{14}$ ehk $A_4 \bar{A}_{14} \vee \bar{A}_4 A_{14}$; $A_6 \rightarrow A_{14}$ ehk $\bar{A}_6 \vee A_{14}$; $A_8 \approx A_{15}$ ehk $A_8 \bar{A}_{15} \vee \bar{A}_8 A_{15}$; $A_{10} \sim A_{12}$ ehk $A_{10} A_{12} \vee \bar{A}_{10} \bar{A}_{12}$; $A_{11} \approx A_{13}$ ehk $A_{11} \bar{A}_{13} \vee \bar{A}_{11} A_{13}$. Saadud valemities ei esine laused A_5 ja A_7 (sest nad ei ole seostatavad teiste lausetega) ning A_9 (sest ta ei samane lausega A_3).

Moodustame eelduste konjunktsiooni:

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) (A_3 \bar{A}_{10} \vee \bar{A}_3 A_{10}) (A_3 \bar{A}_{12} \vee \bar{A}_3 A_{12}) (A_4 \bar{A}_{14} \vee \bar{A}_4 A_{14}) \& \\ \& (\bar{A}_6 \vee A_{14}) (A_8 \bar{A}_{15} \vee \bar{A}_8 A_{15}) (A_{10} A_{12} \vee \bar{A}_{10} \bar{A}_{12}) (A_{11} \bar{A}_{13} \vee \bar{A}_{11} A_{13}).$$

Pärast distributiivsuse seoste rakendamist saame eelduste konjunktsiooni esitada kujul

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) (A_3 \bar{A}_{10} \bar{A}_{12} \vee \bar{A}_3 A_{10} A_{12}) (A_4 \bar{A}_6 \bar{A}_{14} \vee \bar{A}_4 A_{14}) \& \\ \& (A_8 \bar{A}_{15} \vee \bar{A}_8 A_{15}) (A_{11} \bar{A}_{13} \vee \bar{A}_{11} A_{13}). \quad (1)$$

Et valemi (1) põhjal võib teha 2^5 eri oletust, siis tuleb meil edasi kasutada täiendavat informatsiooni.

1. v a r i a n t. Oletame, et edaspidisel küsitlemisel tunnistas Theo, et tema kolmest väitest ainult kaks vastavad tõe. Seega saame lisainformatsiooni esitada kujul

$$A_{10} A_{11} \bar{A}_{12} \vee A_{10} \bar{A}_{11} A_{12} \vee \bar{A}_{10} A_{11} A_{12}. \quad (2)$$

Ühendades valemid (1) ja (2) konjunktsioonimärgiga ning kasutades seejärel distributiivsuse seost, saame

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) \& \bar{A}_3 A_{10} \bar{A}_{11} A_{12} A_{13} \& \\ \& (A_4 \bar{A}_6 \bar{A}_{14} \vee \bar{A}_4 A_{14}) (A_8 \bar{A}_{15} \vee \bar{A}_8 A_{15}). \quad (3)$$

Kui edasi oletame, et Margareti kolmest väitest ainult kaks vastavad tõe, saame lisainformatsiooni esitada kujul

$$A_{13} A_{14} \bar{A}_{15} \vee A_{13} \bar{A}_{14} A_{15} \vee \bar{A}_{13} A_{14} A_{15}. \quad (4)$$

Ühendades valemid (3) ja (4) konjunktsioonimärgiga ning kasutades seejärel distributiivsuse seost, saame

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) (\bar{A}_3 \bar{A}_4 A_8 A_{10} \bar{A}_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \bar{A}_{15} \vee \bar{A}_3 A_4 \bar{A}_6 \bar{A}_8 A_{10} \bar{A}_{11} A_{12} A_{13} \bar{A}_{14} A_{15}). \quad (5)$$

Kui nüüd eeldame, et Davidi kolmest väitest ainult kaks vastavad tõe, saame lisainformatsiooni esitada kujul (lause A_9 on samane lausega A_3)

$$A_3 A_7 \bar{A}_8 \vee A_3 \bar{A}_7 A_8 \vee \bar{A}_3 A_7 A_8. \quad (6)$$

Ühendades valemid (5) ja (6) konjunktiivselt ja rakendades distributiivsust, saame

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_7 A_8 A_{10} \bar{A}_{11} A_{12} A_{13} A_{14} \bar{A}_{15}. \quad (7)$$

Oletades näiteks, et $A_1 = t$, saame valemist (7), et rahakoti varastas Judy (\bar{A}_4, A_{14}).

2. v a r i a n t. Lähtume valemist (1), kuid kasutame teistsuguseid lisa-eeldusi. Oletame näiteks, et Theo kolmest väitest ainult üks vastab tõe. Seega saame lisainformatsiooni esitada kujul

$$A_{10} \bar{A}_{11} \bar{A}_{12} \vee \bar{A}_{10} A_{11} \bar{A}_{12} \vee \bar{A}_{10} \bar{A}_{11} A_{12}. \quad (8)$$

Ühendades valemid (1) ja (8) konjunktiivselt, saame pärast mõningaid teisendusi valemi

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) \& A_3 \bar{A}_{10} A_{11} \bar{A}_{12} \bar{A}_{13} \& \\ \& (A_4 \bar{A}_6 \bar{A}_{14} \vee \bar{A}_4 A_{14}) (A_8 \bar{A}_{15} \vee \bar{A}_8 A_{15}). \quad (9)$$

Kui edasi oletame, et Margareti kolmest väitest ainult üks vastab tõele, saame lisaelduse kujul

$$A_{13}\bar{A}_{14}\bar{A}_{15} \vee \bar{A}_{13}A_{14}\bar{A}_{15} \vee \bar{A}_{13}\bar{A}_{14}A_{15}, \quad (10)$$

mis valemiga (9) konjunktiivselt ühendatuna annab

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) (A_3\bar{A}_4A_8\bar{A}_{10}A_{11}\bar{A}_{12}\bar{A}_{13}A_{14}\bar{A}_{15} \vee A_3A_4\bar{A}_6\bar{A}_8\bar{A}_{10}A_{11}\bar{A}_{12}\bar{A}_{13}\bar{A}_{14}A_{15}). \quad (11)$$

Kui veel oletame, et Davidi vastus on iseloomustatav valemiga

$$A_3A_7\bar{A}_8 \vee \bar{A}_3A_7A_8, \quad (12)$$

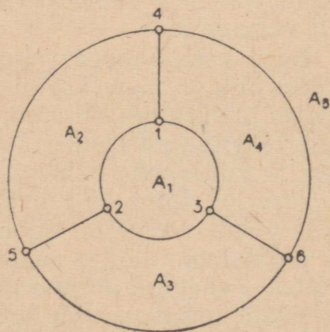
siis saame eeldust (12) valemiga (11) konjunktiivselt ühendades valemi

$$(A_1 \vee \bar{A}_2) A_3A_4\bar{A}_6A_7\bar{A}_8\bar{A}_{10}A_{11}\bar{A}_{12}\bar{A}_{13}\bar{A}_{14}A_{15}. \quad (13)$$

Oletades näiteks jälle, et $A_1 = t$, saame valemist (13), et rahakoti varastasid Theo (A_3, \bar{A}_{10}) ja Margaret (A_{11}, \bar{A}_{13}).

§ 30. LAUSEARVUTUSE RAKENDUSI TOPOLOOGILISTE KAARTIDE UURIMISEL

Topoloogiliseks kaardiks nimetatakse kerapinna jaotust pidevate kõverate abil lõplikuks arvuks piirkondadeks, kusjuures igal piirkonnal on vähemalt kaks naaberpiirkonda. Et topoloogiliste kaartide puhul on oluline ainult iga piirkonna naaberpiirkondade teadmine, s. t. kaardi topoloogiline struktuur, siis loetakse ühesuguse topoloogilise struktuuriga kaarte samasteks. See-tõttu võib topoloogilisi kaarte vaadelda ka tasapinnaliste kaartidena (projekteerides kerapinna kaardi näiteks stereograafilise projektsiooni teel tasandile). Tasapinnale projekteerimisel teisendub üks piirkond tõkestamata piirkonnaks, s. t. selles leidub üksteisest kuitahes kaugel asuvaid punkte.



Joon. 19.

Topoloogilise kaardi näiteks on kaart joonisel 19. Sõlmpunktid on siin tähistatud numbritega 1—6, piirkonnad tähtedega A_1 — A_5 (tõkestamata piirkond on A_5). Lüliliks nimetame piirkondade raja-joone osa, mis asub kahe naabersõlmpunkti vahel. Et sõlmpunktid 1 ja 2 on naabersõlmpunktid, siis moodustab neid ühendav ringjoone kaar ühe lüli. Lülisid tähistame tähega B , lisades sellele indeksitena sõlmpunktide numbrid. Eespool mainitud lüli võib

seega tähistada kas B_{12} või B_{21} abil. Naaberpiirkondadeks nime-tame selliseid piirkondi, mille rajajoontel on ühine lüli. Nii on naa-berpiirkondadeks näiteks A_1 ja A_3 (sest neil on ühine lüli B_{23}), naaberpiirkondadeks pole aga A_1 ja A_5 .

Topoloogiliste kaartide puhul on püstitatud nn. neljavärviprobleem: kas on võimalik iga topoloogilist kaarti värvida nelja värviga nii, et iga piirkond oleks värvitud ainult ühe värviga ja mis-tahes kaks naaberpiirkonda oleksid värvitud erinevate värvidega.

Püstitatud probleem on tänini lahendamata. Et aga praktikas pole esinenud ühtki topoloogilist kaarti, mida poleks saanud ülal-märgitud viisil nelja värviga värvida, siis arvatakse, et probleem peaks olema lahendatav jaatavalt. Märgime siinkohal, et nelja-värviprobleemi uurimisel võib piirduda ainult normaalkaartidega. Normaalkaardiks nimetatakse sellist topoloogilist kaarti, kus igast sõlmpunktist väljub täpselt kolm lüli. Joonisel 19 toodud kaart on näiteks normaalkaart.

Normaalkaartide puhul võib sõnastada ka nn. kahevärviüles-ande (H. Jaakson [42]): värvida kaardi piirkonnad kahe värviga nii, et iga piirkond oleks värvitud ainult ühe värviga ja et iga sõlmpunkti juures asuvast kolmest piirkonnast oleks üks piirkond värvitud ühe värviga ja kaks ülejäänud piirkonda teise värviga. Kahevärviülesannet võib aga sõnastada ka selliselt: värvida normaalkaardi kõik lülid kahe värviga (näiteks värvidega m ja p), nii et iga lüli oleks värvitud ühe värviga ja et iga sõlmpunkti juures asuvast kolmest lülist kaks lüli oleksid värvitud värviga m ja üks lüli värviga p .

Need kaks kahevärviülesande formulatsiooni on samaväärsed. Võttes mingi kahevärviülesande lahendi esimese formulatsiooni mõttes ja värvides lülid värviga m , kui nad eraldavad erineva värviga värvitud piirkondi, ning värviga p vastupidisel juhul, saamegi kahevärviülesande lahendi teise formulatsiooni mõttes. Värviga m värvitud lülid kujutavad seega värvide lahtusjoont piirkon-dade puhul. Kerge on näha, et kahevärviprobleemi lahendist teise formulatsiooni mõttes saame kaks lahendit esimese formulatsiooni mõttes. Lahendid on ühe ja sama struktuuriga ning saadakse tei-neteisest ainult värvide ümbervahetamisega.

H. Jaakson tõestas [42] mistahes normaalkaardi kahevärvilah-endi olemasolu. Ta näitas, et kui kahevärvilahendi korral kõik värvide lahtusjooned koosnevad paarisarvust lülidest, siis saab selle lahendi alusel leida antud kaardi neljavärvilahendi.

Näitame, et kahevärvilahendite leidmisel saab kasutada lause-arvutuse meetodeid. Vaatleme joonisel 19 toodud normaalkaarti ja leiame selle kaardi kõik kahevärvilahendid. Lähtume esimesest formulatsioonist. Värvide võime ilmselt tähistada t ja v abil. Seega $A_1 = t$ tähendab, et piirkond A_1 on värvitud värviga t , $A_2 = v$ (ehk $\bar{A}_2 = t$) tähendab, et piirkond A_2 on värvitud värviga v . Kahe-värviülesande tingimuseks on, et ühegi sõlmpunkti juures asuvad

kolm piirkonda ei tohi kõik olla värvitud ühe värviga. Vaadelda-
val kaardil on sõlmpunkti 1 juures piirkonnad A_1 , A_2 ja A_4 . Need
ei tohi kõik korraga olla värvitud värviga t ega ka värviga v .
Seega saame tingimuse: valem

$$\uparrow(A_1 A_2 A_4) \& \uparrow(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_4) \quad (1)$$

peab kahevärvilahendi korral olema tõene. Valemit (1) teisenda-
des saame

$$(A_1 \vee A_2 \vee A_4) \& (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_4). \quad (2)$$

Valemiga (2) analoogilised valemid saame ka teiste sõlmpunktide
jaoks. Kahevärvilahendile vastava väärtustuse korral peavad kõik
need valemid olema tõesed, seega peab tõene olema ka nende
konjunktsioon

$$\begin{aligned} &(A_1 \vee A_2 \vee A_4) (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_4) \& \\ &\&(A_1 \vee A_2 \vee A_3) (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \bar{A}_3) \& \\ &\&(A_1 \vee A_3 \vee A_4) (\bar{A}_1 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_4) \& \\ &\&(A_2 \vee A_4 \vee A_5) (\bar{A}_2 \vee \bar{A}_4 \vee \bar{A}_5) \& \\ &\&(A_2 \vee A_3 \vee A_5) (\bar{A}_2 \vee \bar{A}_3 \vee \bar{A}_5) \& \\ &\&(A_3 \vee A_4 \vee A_5) (\bar{A}_3 \vee \bar{A}_4 \vee \bar{A}_5). \end{aligned} \quad (3)$$

Ilmselt on iga väärtustus, mille korral valem (3) on tõene,
ka vastava kaardi kahevärviülesande lahendiks. Selleks, et need
väärtustused leida, tuleb valem (3) teisendada disjunktiiivsele või
täielikule disjunktiiivsele normaalkujule. Viimane tuleb järgmine:

$$\begin{aligned} &A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5 \vee A_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 A_5 \vee A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5 \vee A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5 \vee \\ &\vee \bar{A}_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5 \vee \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 \bar{A}_5 \vee \bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 \bar{A}_5 \vee \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 \bar{A}_5. \end{aligned} \quad (4)$$

Valemist (4) nähtub, et see valem on tõene 8 väärtustuse korral.
Seega on ka uuritaval normaalkaardil 8 kahevärvilahendit.

Lähtume nüüd kahevärviülesande lahendi teisest formulatsioo-
nist. Värve tähistame jälle t ja v abil. Nõudeks on siin, et iga
sõlmpunkti juures asuvast kolmest lülist kaks oleksid värvitud
värviga t , üks värviga v . Esimese sõlmpunkti puhul on tingimus
järgmine:

$$B_{12} B_{13} \bar{B}_{14} \vee B_{12} \bar{B}_{13} B_{14} \vee \bar{B}_{12} B_{13} B_{14}.$$

Kirjutades välja analoogilised tingimused iga sõlmpunkti jaoks
ja ühendades need tingimused konjunktiivselt, saame järgmise
valemi:

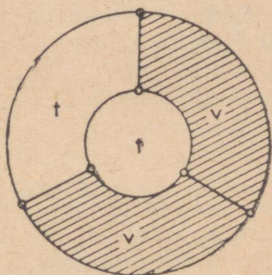
$$\begin{aligned} &(B_{12} B_{13} \bar{B}_{14} \vee B_{12} \bar{B}_{13} B_{14} \vee \bar{B}_{12} B_{13} B_{14}) \& \\ &\&(B_{12} B_{23} \bar{B}_{25} \vee B_{12} \bar{B}_{23} B_{25} \vee \bar{B}_{12} B_{23} B_{25}) \& \\ &\&(B_{13} B_{23} \bar{B}_{36} \vee B_{13} \bar{B}_{23} B_{36} \vee \bar{B}_{13} B_{23} B_{36}) \& \\ &\&(B_{14} B_{45} \bar{B}_{46} \vee B_{14} \bar{B}_{45} B_{46} \vee \bar{B}_{14} B_{45} B_{46}) \& \\ &\&(B_{25} B_{45} \bar{B}_{56} \vee B_{25} \bar{B}_{45} B_{56} \vee \bar{B}_{25} B_{45} B_{56}) \& \\ &\&(B_{36} B_{46} \bar{B}_{56} \vee B_{36} \bar{B}_{46} B_{56} \vee \bar{B}_{36} B_{46} B_{56}). \end{aligned} \quad (5)$$

Kasutades valemi (5) teisendamiseks distributiivsuse seost, saame selle valemi taandada täielikule disjunktivsele normaal-kujule:

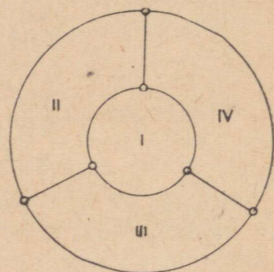
$$B_{12}B_{13}\bar{B}_{14}\bar{B}_{23}B_{25}B_{36}B_{45}B_{46}\bar{B}_{56} \vee B_{12}B_{13}\bar{B}_{14}B_{23}\bar{B}_{25}\bar{B}_{36}B_{45}B_{46}B_{56} \vee \quad (6)$$

$$\vee B_{12}\bar{B}_{13}B_{14}B_{23}\bar{B}_{25}B_{36}B_{45}\bar{B}_{46}B_{56} \vee \bar{B}_{12}B_{13}B_{14}B_{23}B_{25}\bar{B}_{36}\bar{B}_{45}B_{46}B_{56}.$$

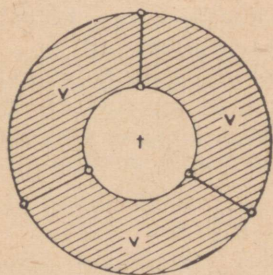
Valemist (6) nähtub, et teise formulatsiooni puhul on uuritaval kaardil 4 kahevärvilahendit (igast kahevärvilahendist teise formulatsiooni mõttes saab aga kaks lahendit esimese formulatsiooni mõttes).



Joon. 20.



Joon. 21.



Joon. 22.

Esitame mõningad kahevärvilahendid ka graafiliselt. Valemi (4) 1. disjunktivse liikmele näiteks vastab joonisel 20 kujutatud kahevärvilahend.

Valemist (6) lähtudes saaksime selle lahendi 4. liikme põhjal. Et värvide lahutusjoon koosneb 6 lülist, siis on selle lahendi põhjal konstrueeritav ka neljavärvilahend, mille saame värvide t ja v «ülevärvimisel» vastavate värvidega I, II ja III, IV. Vastav neljavärvilahend on esitatud joonisel 21.

Esitame veel valemi (4) 4. liikmele [ehk valemi (6) 2. liikmele] vastava kahevärvilahendi (joon. 22). Et mõlemad värvide lahutusjooned koosnevad kolmest lülist, siis pole selle kahevärvilahendi põhjal võimalik ülal-märgitud viisil neljavärvilahendit konstrueerida.

§ 31. LAUSEARVUTUSE RAKENDAMINE HAIGUSTE DIAGNOOSIMISEL

Käesolevas paragrahvis näitame, kuidas kahevalentset lausearvutust on võimalik rakendada haiguste diagnoosimisel. Siinjuures tuleb aga märkida, et haiguste tegelikul diagnoosimisel pole ainuüksi kahevalentse lausearvutusega piirdumine nähtavasti otsustarbekohane.

Esiteks, üksikuid sümptoome on sageli vaja eristada mitmesugustes tugevusastmetes, kahevalentsel lausearvutusel on aga ainult kaks astet: t ja v . Nimetatud puudust saab küll kõrvaldada, kasutades eri lausemärke erineva tugevusega sümptomide jaoks. Nii näiteks eristades mingi sümptoomi i korral k tugevusastet võtame kasutusele lausemärgid

$$S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ij}, \dots, S_{ik},$$

kus S_{ij} tähendab, et sümptoom i esineb tugevusastmes j . Selline võte suurendab aga oluliselt lausemärkide arvu.

Teiseks pole ammendav ka ütlus, et haiguse H_t korral esinevad sümptoomid S_1, \dots, S_i ega esine sümptoomid S_{i+1}, \dots, S_{i+k} . Niimelt puudub informatsioon ülejäänud sümptomide $S_{i+k+1}, \dots, S_{i+k+n}$ kohta. Need võivad esineda teatavate tõenäosustega. Seega on haiguste ja sümptomide vahekorra täpsemaks iseloomustamiseks nähtavasti vajalik kasutada mitmevalentset lausearvutust või tõenäosusteooria mõisteid (tõenäosus ja tinglik tõenäosus).

Asume nüüd küsimuse üksikasjalikumale käsitlemisele. Eraldatud on teatav haiguste rühm

$$H_1, H_2, \dots, H_m,$$

mida iseloomustab teatav sümptomide rühm

$$S_1, S_2, \dots, S_n.$$

Olemasolevate meditsiiniliste teadmiste põhjal haiguste H_1, \dots, H_m ja sümptomide S_1, \dots, S_n vahekorra kohta koostame lausearvutuse valemi

$$\mathfrak{X}(H_1, \dots, H_m, S_1, \dots, S_n). \quad (1)$$

Valem (1) on tegelikult meile teada olevate meditsiiniliste faktide konjunktsioon (kogusumma). Haiguse diagnoosimiseks tuleb sellele püsivale informatsioonile (1) lisada uuritava haige sümptomide kompleks

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(S_1, S_2, \dots, S_n).$$

Diagnoosiks on valem

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(H_1, H_2, \dots, H_m),$$

mis järeldub valemist $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, s. t. valem

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$$

peab olema samaselt tõene.

Selgitame seda mõttekäiku konkreetse näite abil.

Näide. Olgu uuritavas haiguste rühmas kaks haigust H_1 ja H_2 , mis on iseloomustatud kahe sümptoomiga S_1 ja S_2 . Püsiv meditsiiniline informatsioon olgu esitatud järgmise valemiga:

$$\mathfrak{A} = (H_1 \rightarrow S_1 \vee S_2) \& (H_2 \rightarrow S_2) \& (S_1 \rightarrow H_1 \vee H_2) \& (S_2 \rightarrow H_1 \vee H_2) \& [(H_1 \& \bar{H}_2) \rightarrow (S_1 \vee \bar{S}_2)]. \quad (2)$$

Need väärtustused, mille puhul valem (2) on tõene, tähendavad sisuliselt neid juhtumeid, mis meditsiini seisukohalt võivad üldse esineda.

Taandades valemi (2) täielikule disjunktiivsele normaalkujule, saame

$$S_1 S_2 H_1 H_2 \vee S_1 S_2 H_1 \bar{H}_2 \vee S_1 S_2 \bar{H}_1 H_2 \vee S_1 \bar{S}_2 H_1 \bar{H}_2 \vee \bar{S}_1 S_2 H_1 H_2 \vee \bar{S}_1 S_2 \bar{H}_1 H_2 \vee \bar{S}_1 \bar{S}_2 \bar{H}_1 \bar{H}_2. \quad (3)$$

Valemi (3) põhjal võime koostada ka tabeli.

Tabel 21

S_1	t	t	t	t	v	v	v
S_2	t	t	t	v	t	t	v
H_1	t	t	v	t	t	v	v
H_2	t	v	t	v	t	t	v

kus täieliku disjunktiivse normaalkuju igale liikmele vastab kindel veerg.

Valemi (3) või tabeli 21 põhjal saame nüüd kergesti määrata diagnoose. Olgu haigel näiteks sümptoomide kompleks

$$S_1 \& \bar{S}_2.$$

Sellele vastab haiguste kompleks (vt. tabeli 21 4. veerg)

$$H_1 \& \bar{H}_2,$$

s. t. haigel on haigus H_1 , kuid haigust H_2 tal ei esine.

Kui haigel on sümptoomide kompleks

$$\bar{S}_1 \& S_2,$$

siis võib tal olla kaks haiguste kompleksi

$$\bar{H}_1 \& H_2 \text{ ja } H_1 \& H_2,$$

s. t. haigus H_2 esineb kindlasti ja peale selle võib esineda ka haigus H_1 .

Tulemusi võib saada ka otseselt valemist (2) ilma valemite (3) või tabelit 21 kasutamata. Sümptoomide kompleksi S_1 & \bar{S}_2 korral näiteks asetame valemisse (2) S_1 asemele t ja S_2 asemele v . Saame

$$\mathfrak{A}' = (H_1 \rightarrow t \vee v) \& (H_2 \rightarrow v) \& (t \rightarrow H_1 \vee H_2) \& \\ \& (v \rightarrow H_1 \vee H_2) \& [(H_1 \& \bar{H}_2) \rightarrow (t \vee \bar{v})],$$

kust samaselt tõeseid konjunktiivseid liikmeid ära jättes saame

$$\mathfrak{A}'' = (H_2 \rightarrow v) \& (t \rightarrow H_1 \vee H_2).$$

Lihtsustades konjunktiivseid liikmeid, saame

$$\mathfrak{A}'' = \bar{H}_2 \& (H_1 \vee H_2) \sim (H_1 \& \bar{H}_2) = \mathfrak{E}.$$

Sümptoomide kompleksi \bar{S}_1 & S_2 korral võib esineda kaks, sümptoomide kompleksi S_1 & S_2 puhul koguni kolm haiguste kompleksi. Lausearvutuse meetodid ei võimalda tulemust enam täpsustada. Tõenäosusteooria kontseptsioone kasutades saab aga arvutada iga haiguste kompleksi esinemistõenäosuse.

Selleks tuleb kasutada Bayesi valemit

$$P(A_i / B_k) = \frac{P(A_i) P(B_k / A_i)}{\sum_{j=1}^4 P(A_j) P(B_k / A_j)},$$

kus $P(A_i)$ tähistab i -nda haiguste kompleksi esinemise tõenäosust ja $P(B_k / A_i)$ tähistab k -nda sümptoomide kompleksi esinemise tõenäosust eeldusel, et esineb i -s haiguste kompleks. Nende tõenäosuste põhjal võime arvutada tõenäosuse $P(A_i / B_k)$ — i -nda haiguste kompleksi esinemise tõenäosuse k -nda sümptoomide kompleksi esinemise korral.

Tähistades

$$A_1 = \bar{H}_1 \& \bar{H}_2, \quad A_2 = \bar{H}_1 \& H_2, \quad A_3 = H_1 \& \bar{H}_2, \quad A_4 = H_1 \& H_2$$

ja

$B_1 = \bar{S}_1 \& \bar{S}_2, \quad B_2 = \bar{S}_1 \& S_2, \quad B_3 = S_1 \& \bar{S}_2, \quad B_4 = S_1 \& S_2,$
esitame vajalikud tõenäosused ja tinglikud tõenäosused. Olgu need näiteks sellised:

$$P(A_1) = \frac{85}{100}, \quad P(A_2) = \frac{5}{100}, \quad P(A_3) = \frac{8}{100}, \quad P(A_4) = \frac{2}{100},$$

$$P(B_1 / A_1) = 1, \quad P(B_1 / A_2) = 0, \quad P(B_1 / A_3) = 0, \quad P(B_1 / A_4) = 0,$$

$$P(B_2 / A_1) = 0, \quad P(B_2 / A_2) = \frac{3}{5}, \quad P(B_2 / A_3) = 0, \quad P(B_2 / A_4) = \frac{1}{5},$$

$$P(B_3 / A_1) = 0, \quad P(B_3 / A_2) = 0, \quad P(B_3 / A_3) = \frac{1}{3}, \quad P(B_3 / A_4) = 0,$$

$$P(B_4 / A_1) = 0, \quad P(B_4 / A_2) = \frac{2}{5}, \quad P(B_4 / A_3) = \frac{2}{3}, \quad P(B_4 / A_4) = \frac{4}{5}.$$

Märgime möödamindes, et tõenäosused $P(A_i)$ olenevad geograafilisest kohast, aastaajast jms., kuna tinglikud tõenäosused $P(B_k/A_i)$ on haigusi endid iseloomustavad suurused ja oluliselt püsivad.

Bayesi valemit kasutades saame

$$P(A_2/B_2) = \frac{15}{17}, \quad P(A_4/B_2) = \frac{2}{17};$$

$$P(A_2/B_4) = \frac{30}{134}, \quad P(A_3/B_4) = \frac{80}{134}, \quad P(A_4/B_4) = \frac{24}{134}.$$

Sümptomide kompleksi $B_2 = \bar{S}_1 \& S_2$ korral on seega tõenäosem haiguste kompleks $A_2 = \bar{H}_1 \& H_2$, sümptomide kompleksi $B_4 = S_1 \& S_2$ korral aga haiguste kompleks $A_3 = H_1 \& \bar{H}_2$.

§ 32. LAUSEARVUTUSE RAKENDAMINE TUNNIPLAANIDE JA TÖÖGRAAFIKUTE KOOSTAMISEL

Olgu vaja koostada tunniplaan mingi kooli jaoks, kus on n klassi K_1, K_2, \dots, K_n ja m õpetajat O_1, O_2, \dots, O_m . Tähistame t_{ij} abil nende tundide arvu, mida annab klassis K_i õpetaja O_j ühes nädalas. Vaatleme paare (i, j) , kus $t_{ij} \neq 0$, ja moodustame neile vastavalt laused A_{ijk} ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq t_{ij}$). Igale nädalas antavale tunnile vastab seega kindel lause A_{ijk} ja ümberpöörduvalt. Oletame, et tunde võib anda nädalas μ tööpäeval, iga päev ν tundi. Nummerdame kõikvõimalikud õppetundide ajad mingil viisil, näiteks tabeli 22 eeskujul (kus on võetud $\mu = 6$ ja $\nu = 5$).

Tabel 22

E	T	K	N	R	L
1	6	11	16	21	26
2	7	12	17	22	27
3	8	13	18	23	28
4	9	14	19	24	29
5	10	15	20	25	30

Otstarbekohane on tunniplaani koostamisel kasutada ω -valentset ($\omega = \mu \cdot \nu$) lausearvutust, kus tõeväärtusteks on naturaalarvud $1, 2, 3, \dots, \omega$. Lause A_{ijk} tõeväärtus λ tähendab seda, et õpetaja O_j annab klassis K_i oma k -nda tunni ajavahemikus λ .

Põhiliseks nõudeks igasuguse tunniplaani puhul on nõue, et tunniplaanis ei esineks erinevate tundide ühtelangemisi (s. t. üks

ja sama õpetaja ei anna üheaegselt kahte eri tundi ning ühes ja samas klassis ei anta üheaegselt kahte eri tundi). Tundide ühtelangemine tähendab teatava kahe komponentlause tõeväärtuse ühtimist. Kui tähistame komponentlausete A ja B tõeväärtuste mitteühtimist näiteks $A \neq B$ abil, siis saame üles kirjutada tarvilikud tingimused tunniplaani jaoks:

$$1) A_{ijk} \neq A_{ijk'} \quad (1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k, k' \leq t_{ij}, \\ k \neq k', \quad t_{ij} \neq 0),$$

ükski õpetaja ei saa ühes ja samas klassis anda üheaegselt kahte eri tundi;

$$2) A_{ijk} \neq A_{i'j'k'} \quad (1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j, j' \leq m, \quad 1 \leq k \leq t_{ij}, \\ 1 \leq k' \leq t_{i'j'}, \quad j \neq j', \quad t_{ij} \neq 0, \quad t_{i'j'} \neq 0),$$

erinevad õpetajad ei saa ühes ja samas klassis anda üheaegselt kahte eri tundi;

$$3) A_{ijk} \neq A_{i'jk'} \quad (1 \leq i, i' \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq t_{ij}, \\ 1 \leq k' \leq t_{i'j}, \quad i \neq i', \quad t_{ij} \neq 0, \quad t_{i'j} \neq 0),$$

ükski õpetaja ei saa erinevates klassides anda üheaegselt kahte eri tundi.

Tingimuste 1)–3) arv on järgmine: tingimusi 1) tuleb

$$\sum_{(i,j) \in E} \binom{t_{ij}}{2}, \quad (1)$$

kus E on kõikide nende paaride (i, j) hulk, mille puhul $t_{ij} \geq 2$; tingimusi 2) saame

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{j'=j+1}^m t_{ij} \cdot t_{ij'}, \quad (2)$$

ja tingimusi 3)

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i'=i+1}^n t_{ij} \cdot t_{i'j}. \quad (3)$$

Kõik need tingimused peavad kehtima üheaegselt, s. t. peab kehtima nende tingimuste konjunktsioon. Tunniplaaniks on komponentlausete A_{ijk} selline väärtustus, mille puhul kõikide tingimuste 1)–3) konjunktsioon on tõene. Märgime, et valemi $A \neq B$ [ja järelikult ka valemi $(A_1 \neq B_1) \& (A_2 \neq B_2) \& \dots$] tõeväärtust võime mõista kahevalentse lausearvutuse mõttes, nimelt

$$A \neq B = \begin{cases} t, & \text{kui lausetel } A \text{ ja } B \text{ on erinev tõeväärtus,} \\ v, & \text{kui lausetel } A \text{ ja } B \text{ on üks ja sama tõeväärtus.} \end{cases}$$

Märgime, et mitmevalentsete lausete A_{ijk} asemel võime kasutada ka kahevalentseid lauseid. Selleks tuleb vastavalt valentsile

ω leida niisugune naturaalarv p , et $2^{p-1} < \omega \leq 2^p$. Ühe ω -valentse lause A_{ijk} asemel tuleb nüüd kasutada p kahevalentset lauset $A_{ijk}^{(1)}$, $A_{ijk}^{(2)}$, ..., $A_{ijk}^{(p)}$. Valemi $A \neq B$ asendub sel korral kahevalentse lausearvutuse valemiga

$$\bigvee_{s=1}^p (A^{(s)} \neq B^{(s)}).$$

Lausete $A^{(s)}$ sisuline tähendus on järgmine: mitmevalentse lause A tõeväärtuse esituses kahendsüsteemi arvuna on s -ndas kahendkohas number 1. Analoogilisel viisil võib mitmevalentseid lauseid asendada kahevalentsete lausetega loomulikult ka muudel juhtudel (näiteks § 31). Kuid mitmevalentsete lausete asendamine kahevalentsetega pole tingimata vajalik, sest näiteks elektronarvutusmasinaid kasutades saab valemi $A \neq B$ tõeväärtuse kindlaks teha selleks otstarbeks ettenähtud ühe käsu (arvude võrdlemise käsu) abil.

Näide 1. Olgu vaja koostada tunniplaan 3 klassi K_1, K_2, K_3 ja 3 õpetaja O_1, O_2, O_3 jaoks, kusjuures algandmed (suurused t_{ij}) on esitatud tabelis 23.

Tabel 23

	O_1	O_2	O_3
K_1	2	1	1
K_2	2	1	1
K_3	0	2	2

Kõiki tunde on kokku 12. Tähistame nad nagu eespool A_{111}, A_{112}, \dots abil. Erinevaid ajamomente on 4, s. t. komponentlauseid A_{111}, A_{112}, \dots võivad omandada tõeväärtusi hulgast $\{1, 2, 3, 4\}$. Valemitest (1)–(3) leiame, et tingimusi 1) tuleb 4, tingimusi 2) tuleb 14 ja tingimusi 3) tuleb samuti 14. Kirjutades välja kõik tingimused 1)–3) ja ühendades nad konjunktsioonimärgiga, saame järgmise lausearvutuse valemi:

$$\begin{aligned} & (A_{111} \neq A_{112}) \& (A_{211} \neq A_{212}) \& (A_{321} \neq A_{322}) \& (A_{331} \neq A_{332}) \& \\ & \text{[tingimused 1)]} \\ & \& (A_{111} \neq A_{121}) \& (A_{111} \neq A_{131}) \& (A_{112} \neq A_{121}) \& (A_{112} \neq A_{131}) \& \\ & \& (A_{121} \neq A_{131}) \& (A_{211} \neq A_{221}) \& (A_{211} \neq A_{231}) \& (A_{212} \neq A_{221}) \& \\ & \& (A_{212} \neq A_{231}) \& (A_{221} \neq A_{231}) \& (A_{321} \neq A_{331}) \& (A_{321} \neq A_{332}) \& \\ & \& (A_{322} \neq A_{331}) \& (A_{322} \neq A_{331}) \& (A_{111} \neq A_{211}) \& (A_{111} \neq A_{212}) \& \\ & \text{[tingimused 2)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \&(A_{112} \neq A_{211}) \&(A_{112} \neq A_{212}) \&(A_{121} \neq A_{221}) \&(A_{121} \neq A_{321}) \& \\
 & \&(A_{121} \neq A_{322}) \&(A_{221} \neq A_{321}) \&(A_{221} \neq A_{322}) \&(A_{131} \neq A_{231}) \& \\
 & \&(A_{131} \neq A_{331}) \&(A_{131} \neq A_{332}) \&(A_{231} \neq A_{331}) \&(A_{231} \neq A_{332}). \quad (4) \\
 & \text{[tingimused 3]}
 \end{aligned}$$

Valem (4) on tõene näiteks järgmise komponentlausete väärtustuse korral: $A_{111} = 1$, $A_{112} = 2$, $A_{121} = 3$, $A_{131} = 4$, $A_{211} = 3$, $A_{212} = 4$, $A_{221} = 1$, $A_{231} = 2$, $A_{321} = 2$, $A_{322} = 4$, $A_{331} = 1$, $A_{332} = 3$. Vastav tunniplaan on esitatud tabelis 24.

Tabel 24

	K_1	K_2	K_3
1.	O_1	O_2	O_3
2.	O_1	O_3	O_2
3.	O_2	O_1	O_3
4.	O_3	O_1	O_2

Toodud näide oli muidugi väga lihtne ja nõutava tunniplaani oleks siin võinud otsekohe välja kirjutada. Tegelike koolitunniplaanide koostamine on aga küllaltki aegaviitev ülesanne, eriti sel juhul, kui tuleb arvestada veel lisatingimusi, näiteks: 1) igal õpetajal peab olema vähemalt üks vaba päev, 2) teatavad õpetajad ei tohi ühel ja samal päeval anda ühes ja samas klassis üle ühe tunni ega tohi samas klassis anda tunde ka vahetult järgneval päeval jms. Kõik need lisatingimused on aga samuti sõnastatavad loogiliste valemitega ja neid võib konjunktiivselt ühendada põhivalemiga. Ülesanne on otstarbekohane jaotada etappideks: esiteks jaotada tunnid päevadele (nõuab 6-valentset loogikat), teiseks aga koostada üksikute päevade tunniplaanid. Lausearvutuse valentsi vähenemine vähendab oluliselt ka arvutustöid. Peale selle tuleb arvestada kõiki asjaolusid, mis võimaldavad väärtustuste kontrollimisel välja jätta osa niisuguseid väärtustusi, millele ilmselt ei vasta mingisugust tunniplaani.

Tunniplaani koostamise ülesandega on analoogiline tehaste töögraafikute koostamise ülesanne. Sisuliselt on töögraafikud teatavate lisatingimustega tunniplaanid, kusjuures võib esineda ka mõningate suuruste minimeerimise (maksimeerimise) nõue. Esitame näiteks järgmise töögraafikute koostamise ülesande.

Näide 2. Olgu tehases n masinat M_1, M_2, \dots, M_n ja m tööülesannet U_1, U_2, \dots, U_m . Iga tööülesanne U_j vajab masina M_i aega t_{ij} ajaühikut. Oletame, et suurused t_{ij} on mittenegatiivsed täisarvud. Masinate kasutamise järjekord olgu kõikide tööde puhul üks ja seesama: esiteks tuleb kasutada masinat M_1 , seejärel masinat M_2 jne., kuni lõpuks masinat M_n . Koostada töögraafik, mille puhul ooteaegade kogusumma on minimaalne.

Vaatleme neid paare (i, j) , mille puhul $t_{ij} \neq 0$. Moodustame nende i, j jaoks laused A_{ij} . Lausete A_{ij} tõeväärtus ütleb, missugusel ajamomendil alustatakse i -ndal masinal j -ndat tööd. Vastav töö lõpetatakse siis ajamomendiks $A_{ij} + t_{ij}$. Tingimused tööde järjekorra kohta avalduvad kujul

$$A_{ij} + t_{ij} \leq A_{i+1, i}, \quad (5)$$

kus $t_{ij} \neq 0, t_{i+1, i} \neq 0$, tingimused tööde mittekattumise kohta aga kujul

$$(A_{ij} + t_{ij} \leq A_{ij}) \vee (A_{ij} + t_{ij} \leq A_{ij'}), \quad (6)$$

kus $j \neq j', t_{ij} \neq 0, t_{ij'} \neq 0$. Kõikvõimalikud valemid kujul (5) ja (6) tuleb ühendada konjunktsioonimärgiga. Komponentlausete A_{ij} väärtustus, mis muudab selle konjunktsiooni tõeseks, annabki töögraafiku. Kui tahame minimaalse koguooteajaga töögraafikut, tuleb leida selline väärtustus, kus peale konjunktsiooni tõesuse on minimiseeritud summa $\sum_{j=1}^m A_{nj}$ (n_j on j -nda töö tegemiseks kasutatava viimase masina number).

Esitatud ülesannet võib lahendada ka pisut teisiti. Tähistame B_{ij} abil kumulatiivse (summaarse) ooteaja kogu töö algusest kuni j -nda töö alustamiseni i -ndal masinal. Kumulatiivse tööaja [s. t. j -nda töö aja esimese masina kasutamisest kuni i -nda masina kasutamiseni (*incl.*)] aga tähistame T_{ij} abil ($T_{ij} = \sum_{r=1}^i t_{rj}$). Kumulatiivsed ooteajad peavad rahuldama tingimusi

$$B_{1j} \leq B_{2j} \leq \dots \leq B_{nj}, \quad (7)$$

kusjuures lisatingimused tööde mittekattumise kohta tulevad järgmised:

$$(B_{ij'} + T_{ij'} \leq B_{ij} + T_{i-1, j}) \vee (B_{ij} + T_{ij} \leq B_{ij'} + T_{i-1, j'}). \quad (8)$$

Valemid (7) ja (8) tuleb jälle ühendada konjunktsioonimärgiga.

Minimiseerida tuleb suurus $\sum_{j=1}^m B_{nj}$.

Esitatud töögraafikute koostamise ülesannet võib vaadelda kui teatavat erikujulist lineaarse planeerimise ülesannet, kus lisatingimusteks on valemid kujul (7) ja (8) [*resp.* (5) ja (6)]. Kuid erinevalt tavalisest lineaarse planeerimise ülesandest on selles ülesandes mõned lisatingimused disjunktsioonid. Seega saame nn. disjunktiivse lineaarplaneerimise ülesande, kus teatavate lisatingimuste rühma puhul peab olema täidetud vähemalt üks selle rühma tingimus.

Kõikide siin vaadeldud meetodite kasutamisel on otstarbekohane rakendada elektronarvutusmasinaid.

§ 33. KLASSIKALISE SÜLLOGISMIDE TEOORIA KÄSITLEMINE PREDIKAATARVUTUSE VAATEKOHALT

Klassikalist süllogismide teooriat on käsitletud matemaatilise loogika seisukohalt D. Hilbert ja W. Ackermann [8] ja J. Łukasiewicz [22]. Kuid nende käsitluses ei võeta aluseks predikaatarvutus. Hilbert ja Ackermann lähtuvad näiteks lausearvutuse teatavast modifikatsioonist (interpretatsioonist). Selles modifikatsioonis tõlgendatakse lauseid P, Q, \dots kui väiteid, et omadus P (resp. Q) on kõikidel asjadel. Peale lausearvutuse sümbolite kasutatakse veel püstkriipse, mille abil saab esitada järgmisi väiteid: omadus \bar{P} on kõikidel asjadel — $|\bar{P}|$; pole õige, et omadus P on kõikidel asjadel — $\neg|P|$ jne. Sellise sümboolika abil on üleskirjutatavad kõik A, I, E ja O tüüpi otsustused. Süllogismide käsitlemine nõuab lausearvutust mõningate täiendustega. J. Łukasiewicz käsitluse eesmärgiks aga on anda aksiomaatika, millest on tuletatavad kõik süllogismi moodused (Barbara, Celarent, Darii jne.). Peale lausearvutuse sümbolite kasutab ta veel kvantoreid ja tähiseid A, I, E ja O otsustuste liikide jaoks.

Alustame küsimuse käsitlemist otsuste liigitamise ja üleskirjutamisega. Teatavasti jaotuvad kõik süllogismides kasutatavad otsustused nelja üksteist välistavasse liiki.

1) Üldjaatavad otsustused (tähis A): «kõik S on P ». Predikaatarvutuse sümboolika abil võib selle otsustuse kirja panna valemiga

$$(\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)]. \quad (1)$$

2) Osajaatavad otsustused (tähis I): «mõned S on P ». Predikaatarvutuse valemina

$$(\exists x)[S(x) \& P(x)]. \quad (2)$$

3) Üldeitavad otsustused (tähis E): «ükski S ei ole P ». Predikaatarvutuse valemina

$$(\forall x)[S(x) \rightarrow \neg P(x)]. \quad (3)$$

4) Osaeitavad otsustused (tähis O): «mõned S ei ole P ». Predikaatarvutuse valemina

$$(\exists x)[S(x) \& \neg P(x)]. \quad (4)$$

Otsustuste I ja O puhul järeldub valemi 16 (§ 16) põhjal, et $(\exists x) S(x)$ on tõene. Nõudest, et otsustused A ja E on mittesamaväärsed iga vaadeldava S ja P korral, järeldub samuti, et $(\exists x) S(x)$ peab olema tõene.

Otsustuste puhul võib vaadelda nende vahekordi: vasturääkivust, vastupidisust, alluvust ja osavastupidisust.

1. Kaht otsustust nimetatakse vasturääkivaks, kui üks otsustus on teise eitus, s. t. otsustused on sellises vahekorras nagu valemid \mathfrak{A} ja $\neg(\mathfrak{A})$.

Otsustused A ja O ning E ja I on vasturääkivad. Näitame seda E ja I puhul. Võtame otsustuse E eituse

$$\neg(\forall x)[S(x) \rightarrow \neg P(x)].$$

Teisendades saame

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)[S(x) \rightarrow \neg P(x)] \stackrel{p}{\sim} \\ & \stackrel{p}{\sim} (\exists x) \neg[S(x) \rightarrow \neg P(x)] \stackrel{p}{\sim} (\exists x) \neg[\neg S(x) \vee \neg P(x)] \stackrel{p}{\sim} \\ & \stackrel{p}{\sim} (\exists x)[S(x) \& P(x)], \end{aligned}$$

kus viimane valem on otsustus tüüpi I .

2. Otsustusi \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} nimetatakse vastupidisteks, kui mõlemad otsustused ei saa üheaegselt kehtida, s. t. kui valemid

$$(\mathfrak{A}) \rightarrow \neg(\mathfrak{B}) \text{ ja } (\mathfrak{B}) \rightarrow \neg(\mathfrak{A})$$

on samaselt tõesed.

Otsustused A ja E on vastupidised. Selle tõestamiseks tuleb näidata, et valemid

$$(\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)] \rightarrow \neg(\forall x)[S(x) \rightarrow \neg P(x)] \quad (5)$$

ja

$$(\forall x)[S(x) \rightarrow \neg P(x)] \rightarrow \neg(\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)] \quad (6)$$

on samaselt tõesed. Näitame seda valemi (5) kohta. Asendades implikatsioonid ja viies eitused vahetult predikaadi täislausete ette, saame valemi (5) kujul

$$(\exists x)[S(x) \& \neg P(x)] \vee (\exists x)[S(x) \& P(x)].$$

Kasutades seost (15) (§ 16), saame

$$\begin{aligned} & (\exists x)[(S(x) \& \neg P(x)) \vee (S(x) \& P(x))] \stackrel{p}{\sim} \\ & \stackrel{p}{\sim} (\exists x)[S(x) \& [\neg P(x) \vee P(x)]] \stackrel{p}{\sim} (\exists x)S(x), \end{aligned}$$

millest nähtubki valemi (5) samaselt tõesus. Valemi (6) samaselt tõesust saab näidata analoogiliselt. Märgime, et otsustuste A ja E vastupidisus tuleneb just sellest, et $(\exists x) S(x)$ on tõene.

3. Otsustus \mathfrak{B} allub otsustusele \mathfrak{A} , kui \mathfrak{A} kehtivusest järeldub \mathfrak{B} kehtivus, s. t. kui valem

$$(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$$

on samaselt tõene. Väljend « \mathfrak{B} allub \mathfrak{A} -le» tähendab seega seda-sama mis väljend « \mathfrak{B} järeldub \mathfrak{A} -st».

Kergesti saab kontrollida, et otsustus I allub otsustusele A ja otsustus O otsustusele E .

4. Otsustusi \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} nimetame osavastupidisteks, kui mõlemad otsustused ei saa olla üheaegselt mittekehtivad, s. t. kui valemid

$$\neg(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B}) \text{ ja } \neg(\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{A})$$

on samaselt tõesed.

Kergesti saab näidata, et otsustused I ja O on osavastupidised.

Punktide 1—4 põhjal võime koostada kokkuvõtliku tabeli otsustuste vahekorra kohta (tabel 25).

Tabel 25

kui A	kehtib, siis ...	—	I kehtib	E ei kehti	O ei kehti
kui I	kehtib, siis ...	A on määrata	—	E ei kehti	O on määrata
kui E	kehtib, siis ...	A ei kehti	I ei kehti	—	O kehtib
kui O	kehtib, siis ...	A ei kehti	I on määrata	E on määrata	—
kui A	ei kehti, siis ...	—	I on määrata	E on määrata	O kehtib
kui I	ei kehti, siis ...	A ei kehti	—	E kehtib	O kehtib
kui E	ei kehti, siis ...	A on määrata	I kehtib	—	O on määrata
kui O	ei kehti, siis ...	A kehtib	I kehtib	E ei kehti	—

Märgime, et punkti 1 põhjal on väited « A ei kehti», « I ei kehti», « E ei kehti» ja « O ei kehti» samaväärsed vastavalt väidetega « O kehtib», « E kehtib», « I kehtib» ja « A kehtib».

Niisiis, teades, et mingi otsustus kehtib (või ei kehti), saame juba midagi järeldada teiste otsustuste kehtivuse kohta. Selliseid järeldusi nimetatakse nn. **otsustuste järeldusteks**.

Süllogismiks nimetatakse niisugust järelduse vormi, mida võib esitada samaselt tõese implikatsioonina.

$$(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{C}), \quad (7)$$

kus 1) eeldused \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} ning järeldus \mathfrak{C} on otsustused, 2) eeldused \mathfrak{A} ja \mathfrak{B} sisaldavad kokku täpselt kolme predikaati [tähistame need näiteks $P(x)$, $M(x)$ ja $S(x)$ abil], 3) järeldus ei ühti üksikute eeldustega ja 4) järeldus on maksimaalne [s. t. iga teine tingimusi 1) ja 3) rahuldav järeldus peab olema tuletatav sellest järeldusest].

Kui tähistame esimeses eelduses esinevad predikaadid $P(x)$ ja $M(x)$ abil, teises eelduses esinevad predikaadid $M(x)$ ja $S(x)$

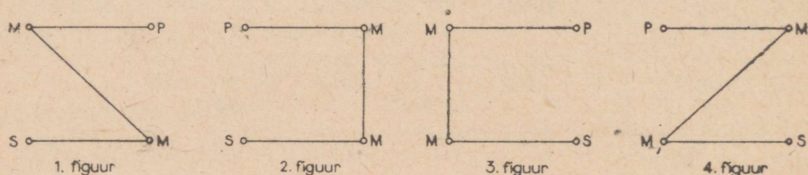
abil, siis võime üldjaatavate eelduste korral saada näiteks sellised eeldused:

$$(\forall x)[M(x) \rightarrow P(x)] \text{ ja } (\forall x)[S(x) \rightarrow M(x)]. \quad (8)$$

Eeldustes (8) võtsime predikaatide järjekorra [kas $M(x) \rightarrow P(x)$ või $P(x) \rightarrow M(x)$ jne.] suvaliselt. Tegelikult on aga predikaatide asetust eeldustes tingimata vaja teada, sest nende ümbervahetamisel eeldustes saame üldiselt loogiliselt mittesamaväärseid valemid. Nii näiteks pole valemid

$$(\forall x)[M(x) \rightarrow P(x)] \text{ ja } (\forall x)[P(x) \rightarrow M(x)]$$

loogiliselt samaväärsed.



Joon. 23.

Predikaatide kõikvõimalikke asetusi eeldustes (ehk nn. i g u r e) on üldse 4. Skemaatilisel iseloomustab neid joonis 23. Seega on süllogismi eelduste täpseks fikseerimiseks vaja anda 1) eelduste kui otsustuste liik (kas AA , AE , AI vms.), 2) predikaatide asetust otsustustes ehk figuur (*resp.* figuuri number).

Kirjutame üles eelduste konjunktsiooni näiteks juhul AA kõikide figuuride 1—4 jaoks. Vastavad valemid tulevad järgmised:

$$(\forall x)[M(x) \rightarrow P(x)] \& (\forall x)[S(x) \rightarrow M(x)], \quad (9)$$

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow M(x)] \& (\forall x)[S(x) \rightarrow M(x)], \quad (10)$$

$$(\forall x)[M(x) \rightarrow P(x)] \& (\forall x)[M(x) \rightarrow S(x)], \quad (11)$$

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow M(x)] \& (\forall x)[M(x) \rightarrow S(x)]. \quad (12)$$

Selgitame, missuguseid järeldusi saab valemitest (9)—(12) tuletada, arvestades süllogismi nõudeid. Et süllogismi tingimuse 3) põhjal langevad järelduste hulgast välja üksikud eeldused ja tingimuse 4) põhjal samaselt tõesed otsustused, näiteks $(\forall x)[M(x) \rightarrow M(x)]$, $(\forall x)[S(x) \rightarrow S(x)]$ jms., mis järelduvad igast otsustusest, siis võivad järeldused esineda ainult kujul (1), (2), (3) või (4).

Moodustades näiteks valemite (9) ja (1) implikatsiooni, saame valemi

$$(\forall x)[M(x) \rightarrow P(x)] \& (\forall x)[S(x) \rightarrow M(x)] \rightarrow (\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)]. \quad (13)$$

Näitame, et valem (13) on samaselt tõene. Selleks lähtume samaselt tõesest valemist

$$(S(x) \rightarrow M(x)) \& (M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (S(x) \rightarrow P(x)).$$

Kasutades lemmat 1 (§ 19), võime väita, et valem

$$(\forall x)[(S(x) \rightarrow M(x)) \& (\bar{M}(x) \rightarrow P(x))] \rightarrow (\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)] \quad (14)$$

on samaselt tõene. Kasutades valemi (14) puhul seost (14) (§ 16), võime väita, et valem (13) on samaselt tõene. Seega võime väita, et eelduste AA puhul saame 1. figuuri korral järelduse A . Sellega on kogu analüüs 1. figuuri korral ka lõppenud, sest (vt. tabelit 24) kui A kehtib, siis kehtib I (et I tuleb \bar{A} -st, siis me seda järeldust ei arvesta), kuna otsustused E ja O ei kehti.

Moodustame nüüd valemite (10) ja (1) implikatsiooni:

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow M(x)] \& (\forall x)[S(x) \rightarrow M(x)] \rightarrow (\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)] \quad (15)$$

ja kontrollime, kas see valem on samaselt tõene. Selleks kasutame paragrahvis 17 toodud teoreemi 1. Selle teoreemi põhjal tuleb meil kontrollida valemi tõesust 8-elementilises indiviidide piirkonnas. Tähistades $P(a_i) = P_i$, $M(a_i) = M_i$ ja $S(a_i) = S_i$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) ning asendades üldisuse kvantorid konjunktsiooniga, saame järgmise lausearvutuse valemi:

$$(\bar{P}_1 \vee M_1) (\bar{P}_2 \vee M_2) \dots (\bar{P}_8 \vee M_8) (\bar{S}_1 \vee M_1) (\bar{S}_2 \vee M_2) \dots \\ \dots (\bar{S}_8 \vee M_8) \rightarrow (\bar{S}_1 \vee P_1) (\bar{S}_2 \vee P_2) \dots (\bar{S}_8 \vee P_8). \quad (16)$$

Valem (16) pole samaselt tõene. Selle näitamiseks konstrueerime väärtustuse, mille puhul eesliige on tõene, kuid tagaliige väär.

Konstrueerime selle väärtustuse näiteks nii, et $(\bar{S}_1 \vee P_1)$ on väär. Siis peab olema $S_1 = t$, $P_1 = v$. Eesliikme tõesuseks peab M_1 olema tõene ja tõesed peavad olema ka kõik konjunktsioonid

$$(\bar{P}_i \vee M_i) (\bar{S}_i \vee M_i), \quad (i = 2, 3, \dots, 8),$$

mida saab teostada kas $M_i = t$, S_i ja P_i suvalised või $M_i = v$, $S_i = v$, $P_i = v$ ($i = 2, 3, \dots, 8$) kaudu. Märgime, et seda tüüpi valemite nagu (13) ja (15) samaselt tõesuse näitamiseks on vaja see omadus tõestada 8-elementilise indiviidide piirkonna puhul. Selle näitamiseks, et mingi valem pole samaselt tõene, võib aga väga hästi kasutada väiksema indiviidide arvuga piirkondi.

Seega nägime, et teises figuuris pole süllogismi moodus $AA \rightarrow A$ (ehk lihtsalt AAA) võimalik.

Valemite (10), (2); (10), (3) ja (10), (4) implikatsiooni mitte samaselt tõesuse selgitamiseks kasutame näiteks kahest indiviidist koosnevat piirkonda. Vastavad lausearvutuse valemid tulevad järgmised:

$$(\bar{P}_1 \vee M_1) (\bar{P}_2 \vee M_2) (\bar{S}_1 \vee M_1) (\bar{S}_2 \vee M_2) \rightarrow S_1 P_1 \vee S_2 P_2, \quad (17)$$

$$(\bar{P}_1 \vee M_1) (\bar{P}_2 \vee M_2) (\bar{S}_1 \vee M_1) (\bar{S}_2 \vee M_2) \rightarrow (\bar{S}_1 \vee \bar{P}_1) (\bar{S}_2 \vee \bar{P}_2), \quad (18)$$

$$(\bar{P}_1 \vee M_1) (\bar{P}_2 \vee M_2) (\bar{S}_1 \vee M_1) (\bar{S}_2 \vee M_2) \rightarrow S_1 \bar{P}_1 \vee S_2 \bar{P}_2. \quad (19)$$

Kerge on näha, et valem (17) on väär näiteks väärtustuse $S_1 = v, P_1 = t, S_2 = t, P_2 = v, M_1 = M_2 = t$ korral, valem (18) väärtustuse $S_1 = P_1 = M_1 = t, S_2 = P_2 = M_2 = v$ ning valem (19) väärtustuse $S_1 = P_1 = M_1 = v, S_2 = P_2 = M_2 = t$ korral. Seega pole teises figuuris võimalikud süllogismide moodused *AAI*, *AAE* ja *AAO*.

Kolmanda figuuri puhul pole moodus *AAA* võimalik. Mooduse *AAI* tõestamiseks tuleb kasutada 8-elementilist indiviidide piirkonda. Vastav lausearvutuse valem tuleb järgmine:

$$(\overline{M}_1 \vee P_1) \dots (\overline{M}_8 \vee P_8) (\overline{M}_1 \vee S_1) \dots (\overline{M}_8 \vee S_8) \rightarrow \\ \rightarrow S_1 P_1 \vee S_2 P_2 \vee \dots \vee S_8 P_8, \quad (20)$$

mille puhul tuleb lisaks eeldada, et vähemalt üks $M_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ (näiteks M_1) on tõene. Sellisel korral järeldub tagaliikme väärtusest ka eesliikme väärus, mis ütleb, et valem (20) on samaselt tõene. Seega on tõestatud ka kolmanda figuuri moodus *AAI*. Neljanda figuuri mooduse *AAI* tõestamisel tuleb arvestada lisa-eeldust $(\exists x)P(x)$. Analoogilisel viisil saame süllogismide mooduseid analüüsida ka kõikidel teistel juhtudel, arvestades mõningatel juhtudel lisa-eeldusi kujul $(\exists x)P(x)$.

Võrreldes süllogismi paragrahvides 5 ja 20 käsitletud üldise järelduse mõistega, näeme, et süllogism on selle üldise järelduse võrdlemisi kitsas erijuht, mille puhul tuleb arvestada mitmeid tingimusi [tingimused 1)–4) süllogismi definitsioonis] ja lisa-eeldusi kujul $(\exists x)P(x)$. Seetõttu ei ole teda mugav kasutada ka matemaatiliste mõistete jt. komplitseeritumate vahekordade analüüsimiseks, milleks sobib näiteks predikaatarvutus. Sellele vaatamata on süllogismil vaieldamatu üldloogiline tähtsus.

§ 34. MATEMAATILISE LOOGIKA KASUTAMISEST MATEMAATIKA ÕPETAMISEL

Matemaatilise loogika aparatuuri on sageli otstarbekohane kasutada matemaatilistes mõttekäikudes ja matemaatilise loogiliste probleemide käsitlemisel ka siis, kui vastavad matemaatilised teooriad pole üles ehitatud aksiomaatiliste teooriatena. Nii võib matemaatilise loogika aparatuuri kasutada näiteks mõistete ja väidete sõnastamisel, nende vahekordade analüüsimisel, eituste moodustamisel, loogiliste küsimuste käsitlemisel; nagu näiteks teoreemi ja pöördteoreemi või tarvilike ja piisavate tingimuste vahekorra selgitamisel või muudel sellistel juhtudel. Matemaatilise loogika aparatuuri kasutamine sellistel juhtudel on suurel määral meetodilise tähendusega, võimaldades täpsustada mõisteid ja tähelepanu juhtida ühtedele või teistele loogilistele nüanssidele.

Toome mõningaid näiteid matemaatilise loogika aparatuuri kasutamisest ülalmärgitud küsimuste käsitlemisel.

1. Matemaatiliste mõistete ja väidete sõnastustes esinevad sageli väljendid nagu «iga positiivse x korral ...» või «leidub niisugune positiivne x , et ...». Sellistel juhtudel on meil tegemist nn. tõkestatud kvantoritega, millest kõnelesime juba paragrahvis 15. Teatavasti saab tõkestatud kvantoreid $(\forall x)_{x \in J}$, $(\exists x)_{x \in J}$ seoste¹⁵

$$(\forall x)_{x \in J} F(x) = (\forall x)[(x \in J) \rightarrow F(x)], \quad (1)$$

$$(\exists x)_{x \in J} F(x) = (\exists x)[(x \in J) \& F(x)] \quad (2)$$

abil taandada harilikele, mittetõkestatud kvantoritele, kuid sel juhul muutub komplitseeritumaks kvantoritele järgnev valem. Sellepärast on ülevaatlikum kasutada tõkestatud kvantoreid, näidates, et tõkestatud kvantoritega saab opereerida nagu harilike kvantoritega.

Seoste (1) ja (2) alusel saab harilikele kvantoritele taandada ka mitmest tõkestatud kvantorist koosnevat kvantoravaldist. Näiteks juhul

$$(\forall x_1)_{x_1 \in J_1} (\exists x_2)_{x_2 \in J_2} (\forall x_3)_{x_3 \in J_3} [\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3)] \quad (3)$$

saame seoseid (1) ja (2) kasutades valemi

$$(\forall x_1)[(x_1 \in J_1) \rightarrow (\exists x_2)[(x_2 \in J_2) \& (\forall x_3)[(x_3 \in J_3) \rightarrow (\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3))]]]. \quad (4)$$

Seoste (18), (20), (21) ja (23) (§ 16) abil aga saame valemi (4) omakorda taandada kujule

$$(\forall x_1) (\exists x_2) (\forall x_3)[(x_1 \in J_1) \rightarrow [(x_2 \in J_2) \& [(x_3 \in J_3) \rightarrow (\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3))]]]. \quad (5)$$

Eituse moodustamisel võime implikatsiooni asendada disjunktsiooni kaudu, mispuhul näiteks valemi (5) korral saame

$$(\forall x_1) (\exists x_2) (\forall x_3) [\neg (x_1 \in J_1) \vee [(x_2 \in J_2) \& [\neg (x_3 \in J_3) \vee (\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3))]]]. \quad (6)$$

Eitades valemit (3) või temaga samaväärset valemit (6), saame predikaatarvutuse samasusi kasutades valemi

$$(\exists x_1) (\forall x_2) (\exists x_3)[(x_1 \in J_1) \& [\neg (x_2 \in J_2) \vee [(x_3 \in J_3) \& \neg (\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3))]]],$$

kust, teostades teisenduse (3)—(4)—(5)—(6) vastupidises järjekorras, saame valemi

$$(\exists x_1)_{x_1 \in J_1} (\forall x_2)_{x_2 \in J_2} (\exists x_3)_{x_3 \in J_3} \neg [\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3)].$$

Seega toimub eituse moodustamine tõkestatud kvantorite korral analoogiliselt eitusega harilike kvantorite korral: üldisuse kvantor $(\forall x)_{x \in J}$ asendatakse vastava olemasolu kvantoriga

¹⁵ Ülevaatlikkuse huvides tähistame siin matemaatilisi predikaate nagu $x \in J$, $x > 0$ jms. tavalisel viisil, kasutamata nende puhul predikaadi tähiseid P , Q , R .

$(\exists x)_{x \in J}$ ja ümberpöördult ning kvantoravaldisele järgneva valemi ette tuleb eitusmärk.

Kergesti saab näidata, et kaks sama liiki tõkestatud naaberkvantorit on kommuteeritavad. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} & (\forall x_1)_{x_1 \in J_1} (\forall x_2)_{x_2 \in J_2} [\mathfrak{M}(x_1, x_2)] = \\ & = (\forall x_1) (\forall x_2) [(x_1 \in J_1) \rightarrow [(x_2 \in J_2) \rightarrow [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]] \stackrel{p}{=} \\ & \stackrel{p}{=} (\forall x_2) (\forall x_1) [(x_2 \in J_2) \rightarrow [(x_1 \in J_1) \rightarrow [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]] = \\ & = (\forall x_2)_{x_2 \in J_2} (\forall x_1)_{x_1 \in J_1} [\mathfrak{M}(x_1, x_2)], \end{aligned}$$

kasjuures valemite teisendamisel kasutasime samasust $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \stackrel{t}{=} Y \rightarrow (X \rightarrow Z)$ ning sama liiki harilike naaberkvantorite kommuteeritavust. Analoogiliselt saame vastava tulemuse ka tõkestatud olemasolu kvantori puhul.

Valemiga (12) (§ 16) analoogiline valem tõkestatud kvantorigega

$(\exists x_1)_{x_1 \in J_1} (\forall x_2)_{x_2 \in J_2} [\mathfrak{M}(x_1, x_2)] \rightarrow (\forall x_2)_{x_2 \in J_2} (\exists x_1)_{x_1 \in J_1} [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]$ (7) on samaselt tõene. Valemi (7) samaselt tõesuse näitamiseks läheme samaselt tõesest valemist

$$X \& (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Y \rightarrow X \& Z),$$

millest substituutsioonide abil saame samaselt tõese valemi

$$\begin{aligned} & (x_1 \in J_1) \& [(x_2 \in J_2) \rightarrow [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]] \rightarrow \\ & \rightarrow [(x_2 \in J_2) \rightarrow [(x_1 \in J_1) \& [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]]. \end{aligned} \quad (8)$$

Rakendades valemi (8) korral lemmat 1 (§ 19), saame samaselt tõese valemi

$$\begin{aligned} & (\exists x_1) (\forall x_2) [(x_1 \in J_1) \& [(x_2 \in J_2) \rightarrow [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]] \rightarrow \\ & \rightarrow (\exists x_1) (\forall x_2) [(x_2 \in J_2) \rightarrow [(x_1 \in J_1) \& [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]]. \end{aligned} \quad (9)$$

Kasutades valemi (9) tagaliikme puhul valemist (12) (§ 16), saame

$$\begin{aligned} & (\exists x_1) (\forall x_2) [(x_2 \in J_2) \rightarrow [(x_1 \in J_1) \& [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]] \rightarrow \\ & \rightarrow (\forall x_2) (\exists x_1) [(x_2 \in J_2) \rightarrow [(x_1 \in J_1) \& [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]]] = \\ & = (\forall x_2)_{x_2 \in J_2} (\exists x_1)_{x_1 \in J_1} [\mathfrak{M}(x_1, x_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Valemist (9) ja (10) järeldubki valemi (7) samaselt tõesus.

Märgime lõpuks, et tõkestatud kvantorite korral võib moodustada ka täiesti uut tüüpi samaselt tõeseid predikaatarvutuse valemid, nagu näiteks valemid

$$(\forall x)_{x \in J_1} F(x) \rightarrow (\forall x)_{x \in J_2} F(x), \text{ kui } J_2 \subset J_1, \quad (11)$$

ja

$$(\exists x)_{x \in J_1} F(x) \rightarrow (\exists x)_{x \in J_2} F(x), \text{ kui } J_1 \subset J_2. \quad (12)$$

2. Esitame nüüd mõningaid matemaatilisi mõisteid, kasutades matemaatilise loogika aparatuuri. Seejuures tähistame $a, b, x, z, \varepsilon, \delta$ abil üldiselt reaalarve, m, n abil naturaalarve. Teiste tähtede kasutamisel märgime iga kord ära nende sisulise tähenduse.

1) Arvu a nimetatakse jada $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ piirväärtuseks täpselt siis, kui valem

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\exists m) (\forall n) \{ (n > m) \rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon) \}$$

on tõene.

2) Arvu b nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumendi x lähenemisel arvule a täpselt siis, kui valem

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\exists \delta)_{\delta > 0} (\forall x) \{ (x \in D) \& (x \neq a) \& (|x - a| < \delta) \rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon) \}$$

on tõene. D abil tähistame funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda.

3) Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks punktis x_0 täpselt siis, kui valem

$$(x_0 \in D) \& (\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\exists \delta)_{\delta > 0} (\forall x) \{ (x \in D) \& (|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \}$$

on tõene.

4) Funktsioonide jada $f_n(x)$ koondumine funktsiooniks $f(x)$ piirkonna D igas punktis defineeritakse valemiga

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\forall x)_{x \in D} (\exists m) (\forall n) \{ (n > m) \rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \}. \quad (13)$$

5) Funktsioonide jada $f_n(x)$ ühtlane koondumine funktsiooniks $f(x)$ piirkonnas D defineeritakse valemiga

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\exists m) (\forall x)_{x \in D} (\forall n) \{ (n > m) \rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \}. \quad (14)$$

Valemid (13) ja (14) erinevad teineteisest ainult kvantorite järjekorra poolest (teine ja kolmas kvantor on ümber vahetatud). Valemi (7) põhjal võime öelda, et valemist (14) järeldeb valem (13). Seega: funktsioonide jada ühtlasest koonduvusest järeldeb selle jada koonduvus juba n.-ö. puhtloogiliselt.

6) Meetrilises ruumis M asuvat hulka U nimetatakse punkti $x \in M$ sfääriliseks ümbruseks täpselt siis, kui valem

$$(\exists \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\forall y)_{y \in M} [(\varrho(x, y) < \varepsilon) \sim (y \in U)] \quad (15)$$

on tõene. Sümboliga $\varrho(x, y)$ tähistame punktide x ja y vahelist kaugust. Valemit (15) võib vaadelda kui kahekohalise predikaadi $S(U, x)$ — « U on punkti x sfääriline ümbrus» — definitsiooni.

7) Meetrilise ruumi M punkti x nimetatakse hulga $E \subset M$ kuhjumispunktiks täpselt siis, kui valem

$$(\forall U)_{U \subset M} \{ S(U, x) \rightarrow (\exists y)_{y \in M} [(y \subset U) \& (y \in E) \& (y \neq x)] \} \quad (16)$$

on tõene.

8) Meetrilise ruumi M punkti x nimetatakse hulga $E \subset M$ puutepunktiks täpselt siis, kui valem

$$(\forall U)_{U \subset M} \{ S(U, x) \rightarrow (\exists y)_{y \in M} [(y \in U) \& (y \in E)] \} \quad (17)$$

on tõene. Valemite (16) ja (17) nurksulgudes asuvate osavalemite põhjal võib öelda, et valemist (16) järeldeb valem (17). Seega: kui punkt x on hulga E kuhjumispunkt, siis on ta ka selle hulga puutepunkt.

3. Eituste moodustamine toimub punktis 1 näidatud viisil, kusjuures kvantoreid ei ole tarvis eituse moodustamiseks tingimata tuua valemi ette. Selles võime veenduda, kui pärast kvantorite ettetoomist ja eitamist viime kvantorid teisendatud kujul vana-
dele kohtadele tagasi.

1) Arv b pole funktsiooni $f(x)$ piirväärtus argumendi x lähene-
misel arvule a [vt. definitsiooni 2)]:

$$(\exists \varepsilon) \varepsilon > 0 (\forall \delta) \delta > 0 (\exists x) \{ (x \in D) \& (x \neq a) \& (|x - a| < \delta) \& \\ \& (|f(x) - b| \geq \varepsilon) \},$$

s. t. leidub niisugune $\varepsilon > 0$, et mistahes $\delta > 0$ korral leidub funktsiooni määramispiirkonnas selline x , mis rahuldab tingimust $|x - a| < \delta$ (on seega arvu a kuitahes väikeses ümbruses), erineb arvust a , ja mille puhul kehtib võrratus $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

2) Punkt x pole hulga E kuhjumispunkt [vt. valemit (16)]:

$$(\exists U) U \subset M \{ S(U, x) \& (\forall y)_{y \in M} [\neg (y \in U) \vee \\ \vee \neg (y \in E) \vee \neg (y \neq x)] \} \not\subseteq (\exists U) U \subset M \{ S(U, x) \& \\ \& (\forall y)_{y \in M} [(y \in U) \& (y \in E) \rightarrow (y = x)] \},$$

s. t. leidub x selline ümbrus U , et iga selle ümbruse U punkt y , mis on ühtlasi hulga E punkt, on võrdne punktiga x . Seega pole selles ümbruses punktist x erinevaid hulga E punkte.

4. Matemaatiliste mõistete vahekorra analüüsimisel kasutame peale tavaliste predikaatarvutuse samasuste veel samaselt tõeseid valemeid (11) ja (12).

1) Defineerime funktsioonide hulga M_1 ja M_2 :

$$(f(x) \in M_1) = (\exists z)_{z < 1} (\forall x)_{x \in [0,1]} [|f(x)| \leq z], \quad (18)$$

$$(f(x) \in M_2) = (\exists z)_{z < 2} (\forall x)_{x \in [0,1]} [|f(x)| \leq z]. \quad (19)$$

Et valemi (19) olemasolu kvantori juures olev kitsendus $z < 2$ on avaram vastavast kitsendusest valemis (18), siis võime valemi (12) põhjal öelda, et hulk M_1 sisaldub hulgas M_2 . Seda saame öelda ka valemeid (18) ja (19) sisuliselt analüüsides: hulka M_1 kuuluvad funktsioonid peavad rahuldama tingimust $|f(x)| \leq z < 1$, hulka M_2 kuuluvad funktsioonid aga tingimust $|f(x)| \leq z < 2$ ($0 \leq x \leq 1$).

2) Vaatleme kõiki lõigul $[0, 1]$ defineeritud ühe muutuja funktsioone, mis omandavad reaalarvulisi väärtusi. Defineerime selle funktsioonide hulga teatavad osahulgad. Nii moodustavad selle funktsioonide hulga teatava osahulga kõik tingimust

$$(\forall \varepsilon) \varepsilon > 0 (\exists \delta) \delta > 0 (\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]} (\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow \\ \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \} \quad (20)$$

rahuldavad funktsioonid. Et valem (20) kujutab endast lõigul $[0, 1]$ määratud funktsiooni ühtlase pidevuse definitsiooni, siis on tingimust (20) rahuldavate funktsioonide hulk kõigi lõigul $[0, 1]$ defineeritud ja ühtlaselt pidevate funktsioonide hulk. Muuseas, Cantori teoreemi põhjal võime väita, et see funktsioonide hulk on võrdne kõigi lõigul $[0, 1]$ defineeritud ja pidevate funktsioonide hulgaga.

3) Moodustame nüüd uue funktsioonide hulga, jättes ära valemis (20) üldisuse kvantori juures oleva kitsenduse $\varepsilon > 0$. Seega peavad uuritava hulga funktsioonid rahuldama tingimust

$$(\forall \varepsilon) (\exists \delta)_{\delta > 0} (\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]} (\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \}. \quad (21)$$

Valemi (11) põhjal võime öelda, et uuritav funktsioonide hulk sisaldub pidevate funktsioonide hulgas. Selgitame täpselt, misugune on see funktsioonide hulk. Võtame negatiivse ε ja $x_1 = x_2 = x \in [0, 1]$. Nende muutujate väärtuste korral, sõltumatult δ -st ($\delta > 0$), on loogelistes sulgudes asuv osavalem väär. Seega ei leidu ühtegi lõigul $[0, 1]$ defineeritud funktsiooni, mis rahuldaks valemit (21). Valemiga (21) defineeritud funktsioonide hulk on tühi hulk.

4) Moodustame nüüd uue funktsioonide hulga, jättes ära valemis (20) olemasolu kvantori juures oleva kitsenduse $\delta > 0$. Saame valemi

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\exists \delta) (\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]} (\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \}. \quad (22)$$

Valemit (22) rahuldavad kõik lõigul $[0, 1]$ defineeritud funktsioonid. Tõepoolest, iga ε , x_1 , x_2 valiku puhul võime võtta $\delta = -1$, mille korral implikatsiooni eesliige on väär ja kogu valem (22) seega tõene.

5) Moodustame funktsioonide hulga valemiga

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0} (\forall \delta)_{\delta > 0} (\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]} (\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \}. \quad (23)$$

Näitame, et valemit (23) rahuldavad funktsioonid on lõigul $[0, 1]$ defineeritud konstantsed funktsioonid ja ainult need.

Tõepoolest, kõik konstantsed funktsioonid rahuldavad valemit (23), sest implikatsiooni tagaliige on nende funktsioonide korral samaselt tõene. Võtame mingi funktsiooni, mis pole konstantne funktsioon. Selle funktsiooni puhul peab leiduma vähemalt kaks niisugust argumendi väärtust a ja b ($a, b \in [0, 1]$), et $f(a) \neq f(b)$. Võtame nüüd $\varepsilon < |f(a) - f(b)| \neq 0$, $\delta = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$. Nende konkreetsete väärtuste korral on valem (23) väär. Järelikult ei

saa valemid (23) rahuldavad funktsioonid omandada erinevaid väärtusi, s. t. peavad olema konstantsed funktsioonid.

6) Valemitega

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]}(\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \}, \quad (24)$$

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0}(\exists \delta)_{\delta > 0}(\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]}(\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (x_1 - x_2 < \delta) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \}, \quad (25)$$

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0}(\exists \delta)_{\delta > 0}(\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]}(\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow (f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon) \}, \quad (26)$$

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0}(\exists \delta)_{\delta > 0}(\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]}(\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \varepsilon) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \delta) \}, \quad (27)$$

ja

$$(\forall \varepsilon)_{\varepsilon > 0}(\exists \delta)_{\delta > 0}(\forall x_1)_{x_1 \in [0,1]}(\forall x_2)_{x_2 \in [0,1]} \{ (|x_1 - x_2| < \delta) \rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon) \} \quad (28)$$

defineeritud funktsioonide hulgad on järgmised: (24) — kõikide lõigul $[0, 1]$ defineeritud funktsioonide hulk; (25) — kõikide lõigul $[0, 1]$ defineeritud konstantsete funktsioonide hulk; (26) — kõikide lõigul $[0, 1]$ defineeritud pidevate funktsioonide hulk; (27) — kõikide lõigul $[0, 1]$ defineeritud tõkestatud funktsioonide hulk; (28) — tühi hulk. Valemite (24)–(28) lähem analüüs jäägu lugejatele. Teisi analoogilisi ülesandeid leiab lugeja A. Mõskise artiklist [26]. Toodud näidetest ilmneb kvantorite juures olevate kitsenduste suur tähtsus, rääkimata muidugi kvantorite liigi ja järjekorra tähtsusest.

5. Matemaatikas sõnastatavad teoreemid on matemaatilise loogika seisukohalt vaadeldavad väidetena kujul $A \rightarrow B$. Teoreemi, pöördteoreemi, vastandteoreemi ja pöördteoreemi vastandteoreemi vahekorral selgitamiseks aga on otstarbekohane nendes väidetes eeldust liigendada, vaadeldes seda kui kahe komponendi konjunktsiooni.

Teoreemi (väite) $C \& A \rightarrow B$ pöördteoreemiks nimetame väidet kujul $C \& B \rightarrow A$. Teoreemi $C \& A \rightarrow B$ vastandteoreemiks nimetame väidet kujul $C \& \bar{A} \rightarrow \bar{B}$. Teoreemi $C \& A \rightarrow B$ pöördteoreemi vastandteoreem ehk vastandteoreemi pöördteoreem on järelikult väide kujul $C \& \bar{B} \rightarrow \bar{A}$.

Et valemid

$$(C \& A \rightarrow B) \sim (C \& \bar{B} \rightarrow \bar{A})$$

ja

$$(C \& B \rightarrow A) \sim (C \& \bar{A} \rightarrow \bar{B})$$

on samaselt tõesed, siis võime öelda, et teoreem ja tema pöördteoreemi vastandteoreem on loogiliselt samaväärsed väited, samuti on teoreemi pöördteoreem ja vastandteoreem loogiliselt samaväärsed väited.

Teoreem ja pöördteoreem on aga loogiliselt mittesamaväärsed ja teineteisest mittejärelduvad väited, sest valemid

$$(C \& A \rightarrow B) \rightarrow (C \& B \rightarrow A) \quad (29)$$

ja

$$(C \& B \rightarrow A) \rightarrow (C \& A \rightarrow B) \quad (30)$$

pole kumbki samaselt tõesed. Et aga valemid (29) ja (30) on kehtestatavad, siis võib konkreetsetel juhtudel nii teoreem kui ka tema pöördteoreem samaaegselt kehtida. Seega on ülaltoodud neljast väitest $C \& A \rightarrow B$, $C \& B \rightarrow A$, $C \& \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ ja $C \& \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ ainult kaks (näiteks kaks esimest) loogiliselt sõltumatud. Märgime, et erijuhul võib eelduse komponent C ka puududa (selliselt käsitlevad seda küsimust näiteks A. Kisseljov [53] ja V. Bradis [48]).

Toome mõned näited. Olgu antud teoreem «Rööpküliku diagonaalide lõikepunkt poolitab kumbagi diagonaali». Tähistame C abil lause «Kujund on nelinurk», A abil lause «Kujund on rööpkülik», B abil lause «Kujundi diagonaalide lõikepunkt poolitab kumbagi diagonaali». Antud teoreem on siis esitatav kujul $C \& A \rightarrow B$ (antud juhul järeldeb lause C lausest A ja seega võiks teoreemi esitada ka kujul $A \rightarrow B$). Teoreem kujutab endast tõeset väidet. Teoreemi pöördteoreem $C \& B \rightarrow A$ kõlab mõnevõrra redigeeritud kujul nii: «Nelinurk, mille diagonaalide lõikepunkt poolitab kumbagi diagonaali, on rööpkülik.» Pöördteoreem kehtib samuti. Vastandteoreem $C \& \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ kõlab: «Nelinurgal, mis pole rööpkülik, ei poolita diagonaalide lõikepunkt mõlemat diagonaali.» Pöördteoreemi vastandteoreem $C \& \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ kõlab: «Nelinurk, kus diagonaalide lõikepunkt ei poolita mõlemat diagonaali, ei ole rööpkülik.» Nii vastandteoreem kui ka pöördteoreemi vastandteoreem kehtivad.

Olgu antud teoreem «Rombi diagonaalid on risti». Tähistades C abil lause «Kujund on nelinurk», A abil lause «Kujund on romb» ja B abil lause «Kujundi diagonaalid on risti», saame antud teoreemi esitada kujul $C \& A \rightarrow B$ (ka siin järeldeb lause C lausest A). Antud teoreem kehtib. Tema pöördteoreem $C \& B \rightarrow A$ — «Nelinurk, mille diagonaalid on risti, on romb» — kujutab endast aga väärast väidet. Vastandteoreem $C \& \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ — «Nelinurgal, mis pole romb, pole diagonaalid risti» — on järelikult samuti väär. Pöördteoreemi vastandteoreem $C \& \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ — «Nelinurk, mille diagonaalid pole risti, pole romb» — on aga tõene väide.

6. Tarvilike ja piisavate tingimuste vahekorra selgitamine on analoogiline eespool öelduga. Ütlus «Eeldusel C on tingimused A_1, A_2, \dots, A_n tarvilikud ja piisavad väite B kehtivuseks» tähendab seda, et valemid

$$C \& A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \rightarrow B \quad (31)$$

(tingimuste A_1, A_2, \dots, A_n piisavus) ja

$$\begin{cases} C \& B \rightarrow A_1, \\ C \& B \rightarrow A_2, \\ \dots \dots \dots \\ C \& B \rightarrow A_n \end{cases} \quad (32)$$

(tingimuste A_1, A_2, \dots, A_n tarvilikkus) on tõesed. Et valemid (31) ja (32) peavad kõik olema tõesed, siis peab olema tõene ka nende konjunktsioon

$$(C \& A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \rightarrow B) \& (C \& B \rightarrow A_1) \& \dots \& (C \& B \rightarrow A_n),$$

mis pärast teisendusi annab

$$(C \& A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \rightarrow B) \& (C \& B \rightarrow A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n)$$

ja mis on loogiliselt samaväärne valemiga

$$C \& A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \sim C \& B.$$

Märgime, et erijuhul võib eeldus C ka puududa.

Vaatleme punktis 5 toodud väiteid. Eeldusel, et meil on tegemist nelinurkadega, on tingimus «diagonaalide lõikepunkt poolitab kumbagi diagonaali» tarvilik ja piisav selleks, et see kujund oleks rööpkülik. Samal eeldusel on aga tingimus «diagonaalid on risti» ainult tarvilik selleks, et see kujund oleks romb. Tarvilike ja piisavate tingimuste saamiseks viimasel juhul tuleb tingimuste hulka täiendada veel näiteks tarviliku tingimusega «kujundi kõik küljed on võrdsed».

7. Matemaatilise loogika aparatuuri võib edukalt kasutada ka selliste puhtmatemaatiliste ülesannete puhul, nagu seda on võrratuste lahendamine. Selgitame seda konkreetse näite varal.

Lahendame näiteks võrratuste süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0, \\ x^3 + 6x^2 - 4x - 24 \geq 0. \end{cases} \quad (33)$$

Lahutades võrratuste vasakud pooled teguriteks, saame süsteemi kujul

$$\begin{cases} (x + 4)(x - 1) \geq 0, \\ (x + 1)(x - 3) \geq 0, \\ (x + 6)(x + 2)(x - 2) \geq 0, \end{cases}$$

mille põhjal on kergesti välja kirjutatavad üksikute võrratuste lahendid:

$$\begin{aligned} &(x \leq -4) \vee (x \geq 1), \\ &(x \leq -1) \vee (x \geq 3), \\ &(-6 \leq x \leq -2) \vee (x \geq 2). \end{aligned}$$

Süsteemi (33) lahend on süsteemi kõigi võrratuste lahendite konjunktsioon. Seega saame süsteemi lahendiks

$$\begin{aligned} &[(x \leq -4) \vee (x \geq 1)] \& [(x \leq -1) \vee \\ &\vee (x \geq 3)] \& [-6 \leq x \leq -2) \vee (x \geq 2)], \end{aligned}$$

mis pärast teisendusi (distributiivsuse seose abil) annab

$$(-6 \leq x \leq -4) \vee (x \geq 3).$$

Matemaatilise loogika mõistete kasutamine aitab esile tuua võrratuste süsteemi lahendi loogilise olemuse — et see on üksikute võrratuste lahendite konjunktsioon. Peale selle on kogu meetod formaliseeritav ja annab seega võimaluse ülesannete lahendamiseks ka elektronarvutusmasinatel.

VII PEATÜKK

MATEMAATILISE LOOGIKA RAKENDUSI TEOORiate AKSIOMAATILISEL ÜLESEHITAMISEL

§ 35. MÕNINGATEST ÜLDISTEST PROBLEEMIDEST SEoses TEOORiate AKSIOMAATILISE ÜLESEHITAMISEGA

Teooriate (nimelt lausearvutuse ja predikaatarvutuse) aksiomaatilise ülesehitusega tegelesime juba II ja IV peatükis. Seoses sellega selgitasime (§ 10), mida tähendab teooria aksiomaatiline ülesehitamine, mida tähendavad algmõisted, defineeritavad mõisted, aksioomid ja teoreemid. Muu hulgas märkisime, et aksiomaatiliselt ülesehitatud teooria võib olla n.-ö. formaliseeritud aksiomaatiline teooria või ka mitteformaliseeritud aksiomaatiline teooria. Nagu juba paragrahvis 10 märgitud, teeme nende aksiomaatilise teooria tasemete vahel vahet selle põhjal, kas vastavas aksiomaatilises teoorias loogilised vahendid on täpselt fikseeritud või mitte. Käesoleva peatüki eesmärgiks ongi mõningate matemaatiliste teooriate ülesehitamine formaliseeritud aksiomaatiliste teooriatena. Võrreldes paragrahvis 34 toodud näidetega matemaatilise loogika aparatuuri kasutamisest matemaatikas on siin käsitusviis kvalitatiivselt erinev: teooria kogu oma komplitseerituses esitatakse ühtse süsteemina. Teooria sellisel esitamisel on peale metoodilise tähtsuse ka suur teoreetiline tähtsus, sest sel korral on võimalik uurida teooriat kui tervikut, teha kindlaks teooria kui terviku omadused (aksioomide sõltumatus, teooria täielikkus, mitmesuguste osasüsteemide vahekord jms.).

Seoses teooriate ülesehitamisega formaliseeritud aksiomaatiliste teooriatena tekib küsimus nende formaliseeritud teooriate täielikkusest vastavate mitteaksiomaatiliste teooriate suhtes. Täpsemini — tekib küsimus, kas iga formaliseeritud teooria algmõistete abil sõnastatav väide (*resp.* moodustatav valem), mis on tõene vastavas mitteaksiomaatilises teoorias, on tuletatav formaliseeritud teooria aksiomaatikast lähtudes. Äsjasõnastatud formali-

seeritud teooriate täielikkuse probleem on üks formaliseeritud teooriate põhiprobleeme. Põhitulemused selle probleemi lahendamisel kuuluvad K. Gödelile, kes 1931. aastal tõestas [51], et suur hulk formaliseeritud teooriaid on mittetäielikud, kusjuures neid pole ka võimalik laiendada täielike teooriateni.

K. Gödeli tulemuste üksikasjalik esitamine nõuab rekursiivsete funktsioonide teooria kasutamist ja pole sellepärast käesolevas õpikus kahjuks võimalik. Et aga K. Gödeli tulemused seoses formaliseeritud aksiomaatiliste teooriatega on sedavõrd põhilised, siis esitame tema tõestuskäigu põhiidee.

Oletame, et meil on antud mingi (formaliseeritud) aksiomide süsteem, mis

- 1) on mittevasturääkiv,
- 2) sisaldab naturaalarvude aksiomaatikat (näiteks Peano aksiome),
- 3) võimaldab selle aksiomaatilise süsteemi algmõistete abil defineerida mõiste «tõestatav (tuletatav) antud aksiomide süsteemist lähtudes».

Kahte viimast tingimust rahuldavad paljud aksiomide süsteemid, näiteks paragrahvis 36 käsitletav naturaalarvude aritmeetika aksiomide süsteem (ja järelikult kõik sellest aksiomide süsteemist võimsamad aksiomide süsteemid), A. N. Whiteheadi ja B. Russelli monograafias «*Principia mathematica*» esitatud aksiomide süsteem.

Aksiomide süsteemi mittevasturääkivust on aga raskem tõestada. Nii näiteks puudub tänini eespool nimetatud kahe aksiomide süsteemi mittevasturääkivuse tõestus. Et nendest aksiomide süsteemidest pole aga saadud ühtegi vasturääkivat järeldust, siis on alust arvata, et need süsteemid on siiski mittevasturääkivad.

Niisiis vaatleme mingis aksiomide süsteemis [mis rahuldab tingimusi 1) — 3)] valemuid, mis sisaldavad ühtainsat vaba muutujat naturaalarvude tüübist. Sisuliselt defineerivad sellised valemid naturaalarvude hulga mingi osahulga. Kõik sellised valemid saame esitada ühes jadas, näiteks valemis esinevate sümbole arvu kasvamise järjekorras, kusjuures võrdse sümbole arvu puhul võime kasutada leksikograafilist printsiipi. Sellega seame igale ülalmärgitud tüüpi valemile vastavusse kindla naturaalarvu. Valem $\mathfrak{A}(x)$, mille järjekorranumber on n , tähistame näiteks $N_n(x)$ abil. Defineerime nüüd naturaalarvude osahulga järgmiselt:

$$(n \in K) =_{\text{def}} \neg [T\text{õestatav } N_n(n)], \quad (1)$$

kus «Tõestatav $\mathfrak{A}(x)$ » tähendab: «Valem $\mathfrak{A}(x)$ on tõestatav antud aksiomide süsteemist lähtudes.» Eelduse 3) kohaselt on see mõiste defineeritav antud aksiomide süsteemi algmõisteist lähtudes. Sel korral on aga väide « $\neg [T\text{õestatav } N_n(n)]$ » esitatav ka mingi konkreetse valemuna. Et nimetatud valemis on täpselt üks naturaalarvuline muutuja, siis peab see valem esinema eespool maini-

tud valemite jadas ja tal peab olema mingi kindel järjekorranumber, näiteks k . Seega

$$N_k(n) = \neg [T\text{õestatav } N_n(n)]. \quad (2)$$

Valem $N_k(n)$ ütleb seda, et n kuulub osahulka K [ehk sisuliselt: $N_n(n)$ pole tõestatav antud aksiomide süsteemist lähtudes], $\neg N_k(n)$ ütleb aga, et n ei kuulu osahulka K [ehk sisuliselt: $N_n(n)$ on tõestatav antud aksiomide süsteemist lähtudes].

Näitame, et valemid $N_k(k)$ ja $\neg N_k(k)$ pole kumbki tõestatavad antud aksiomide süsteemist lähtudes. Tõepoolest, kui $N_k(k)$ oleks tõestatav antud aksiomide süsteemist lähtudes, siis oleks ta ka tõene. $N_k(k)$ tõesusest järeldub aga valem (2) põhjal, et $N_k(k)$ pole tõestatav antud aksiomide süsteemist lähtudes. Saime vastuolu, mis ütleb, et tehtud oletus ei pea paika. Oletusel, et $\neg N_k(k)$ on tõestatav, on $\neg N_k(k)$ tõene valem. Valemist (2) järeldub siis, et $N_k(k)$ on tõestatav valem. Seega saame, et antud aksiomide süsteemist lähtudes on tõestatavad nii $\neg N_k(k)$ kui ka $N_k(k)$, mis on vastuolus aksiomide süsteemi mittevasturääkivusega. Seega: aksiomide süsteemis, mis rahuldab tingimusi 1)–3), saab konstrueerida valemid

$$N_k(k) \text{ ja } \neg N_k(k),$$

mis kumbki pole tõestatavad sellest aksiomide süsteemist lähtudes. Samal ajal on võimalik sisulise arutelu abil näidata, et $N_k(k)$ on tõene, $\neg N_k(k)$ aga järelikult väär. Tõepoolest, valem $N_k(k)$ väidab sisuliselt seda, et $N_k(k)$ on antud aksiomide süsteemist mittetuletatav, mis ka tõesti nii on.

Saab näidata, et antud aksiomide süsteemi pole võimalik laiendada täieliku süsteemini. Tõepoolest, laiendamisel peab aksiomide süsteem jääma tingimata mittevasturääkivaks. Tingimus 2) jääb aksiomaatika laiendamisel automaatselt kehtima. Lõpliku hulga aksiomide juurdevõtmisel on kerge veenduda, et tingimus 3) jääb kehtima. Lõpmatu hulga aksiomide juurdevõtmisel tuleb juurdevõetavad aksiomid esitada mingisugusel rekursiivsel viisil, kuid sel juhul jääb kehtima ka tingimus 3). Seega saab laiendatud aksiomide süsteemi mittetäielikkust näidata samasuguse mõttekäigu abil nagu laiendamata süsteemi mittetäielikkust.

K. Gödeli tulemustest (ja teistest analoogilistest tulemustest) on võimalik teha mitmeid olulisi matemaatilisi, loogilisi ja filosoofilisi järeldusi. Nii võime öelda, et kogu matemaatikat pole põhimõtteliselt võimalik esitada üheainsa formaliseeritud aksiomaatilise teooriana. Et ka teist järku predikaatarvutus on mittetäielik, siis pole kogu loogikat võimalik esitada üheainsa formaliseeritud aksiomaatilise teooriana. Seega pole ka kogu teadust (teaduslike teooriate summat) võimalik esitada üheainsa formaliseeritud aksiomaatilise teooria abil. Need järeldused pole muidugi eriti üllatavad, üllatav on aga see, et neid väiteid on võimalik matemaatilise loogika meetoditega täiesti rangelt tõestada.

K. Gödeli tulemustest ei saa järeldada seda, et teooriate esitamise formaliseeritud teooriatena on mõttetu tegevus. See etapp on vajalik mistahes deduktiivse teooria arendamisel, teooria kui teraviku omaduste uurimisel. Gödeli tulemused juhvivad aga tähelepanu sellele, et konstrueeritavad formaliseeritud teooriad ei tarvitse olla täielikud (sisulise teooria suhtes). Gödeli tulemustest ei järeldu ka see, et kõik formaliseeritud aksiomaatilised teooriad on mittetäielikud. Nagu teame, on lausearvutus ja predikaatarvutus esitatavad täielike formaliseeritud aksiomaatiliste teooriatena (§ 12, 13 ja 23).

Esitame lõpuks veel ühe K. Gödeli tulemuse formaliseeritud aksiomaatiliste teooriate kohta.

Kui naturaalarvude aritmeetikat sisaldav formaliseeritud aksiomaatiline teooria on mittevasturääkiv, siis ei saa tema mittevasturääkivust tõestada ainuüksi nende meetoditega, mis on sõnastatavad selle formaliseeritud teooria algmõistetest lähtudes.

Muuseas kehtib see väide ka loogiliste arvutussüsteemide korral, millest kõnelesime paragrahvis 12. Nii kasutatakse lausearvutuse aksiomaatika mittevasturääkivuse tõestamiseks interpretatsioonide meetodit, mis pole esitatav lausearvutuse aksiomaatika algmõistete abil. Predikaatarvutuse aksiomaatika mittevasturääkivuse tõestamisel kasutasime (peale interpretatsioonide) mõttekäike, mis samuti polnud sõnastatavad predikaatarvutuse aksiomaatika algmõistete abil. See tähendab, et meil tuleb formaliseeritud teooriate üldiste omaduste (näiteks mittevasturääkivuse) uurimiseks kasutada ka niisuguseid meetodeid, mis põhimõtteliselt ei saa kuuluda uuritavasse formaliseeritud teooriasse. Sellist teooriat, mille abil uurime mingit formaliseeritud teooriat, nimetame selle formaliseeritud teooria metateooriak¹⁶. Metateooria on sisuline, mitteformaliseeritud teooria, mis peab (eespool toodud Gödeli tulemuse põhjal) sisaldama võimsamaid vahendeid kui uuritav formaliseeritud teooria. Liidet «meta» kasutame veel teistelgi juhtudel. Nii kõneldakse näiteks metasümbolitest ehk metamärkidest. Nende all mõistetakse märke, mis kuuluvad metateooriasse, või märke, mis võimaldavad üldiselt kõnelda formaliseeritud teooria objektidest. Metamärkideks on näiteks \mathfrak{M} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} ja paragrahvis 13 kasutatavad märgid, 0, 1, 2, 3. Metateoreemi all mõistetakse metateooria teoreemi (tulemust), mis väidab midagi uuritava formaliseeritud teooria kohta. Nii on näiteks paragrahvis 23 esitatud teoreem 1 metateoreem. Üldse kujutavad endast paragrahvid 12, 13 ja 23 vastavalt lausearvutuse ja predikaatarvutuse metateooriat.

Järgmistes paragrahvides esitatud matemaatilisi teooriaid käsitleme formaliseeritud aksiomaatiliste teooriatena. Nende teooriate metateooriat me ei esita.

¹⁶ Liide «meta» on kreekakeelse päritoluga ja tähendab järele, koos, ümber.

§ 36. NATURAALARVUDE ARITMEETIKA AKSIOMAATILINE ÜLESEHITUS

Käesolevas paragrahvis esitame naturaalarvude aritmeetika teatava formaliseeritud aksiomaatilise teooria kujul. Ühtlasi demonstreerime teoreemide tõestamist selles formaliseeritud teoorias. Muide, põhimõtteliselt on teoreemide tõestamine siin samasugune nagu loogiliste arvutussüsteemide puhul paragrahvides 11 ja 22.

Formaliseeritud aksiomaatilise teooria esitamisel peame kõigepealt kindlaks määrama lubatavad loogilised vahendid. Selleks fikseerime loogilise arvutussüsteemi — esimest järku predikaatarvutuse. Predikaatarvutus on üheliigiline, s. t. kasutame ühtainsat indiviidide piirkonda (naturaalarvude hulka). Kasutame ka funktooreid. Seega kasutame paragrahvides 21 ja 22 ülesehitatud predikaatarvutust ühes paragrahvis 25 esitatud tingimustega funktoorte ja kokkulepetega funktorsubstitutsioonide kohta. Muutuvaid indiviide tähistame nagu varemgi x, y, z abil (kasutades ka indekseid). Sisuliselt tähendavad nad naturaalarve. Arvu 0 loeme ka naturaalarvuks. Seega on 0 konstantse indiviidi tähiseks. Edasi kasutame kahekohalist konstantset predikaati $P_{\equiv}(x, y)$, mida tähistame aga lihtsalt $x = y$ abil (mis tähendab sisuliselt: naturaalarv x on võrdne naturaalarvuga y). Kasutame veel kahekohalist konstantset funktoorit $p(x, y)$, mida tähistame lihtsalt $x + y$ (mis tähendab sisuliselt naturaalarvude x ja y summat), kahekohalist konstantset funktoorit $x \cdot y$ (mis tähendab sisuliselt naturaalarvude x ja y korrutist) ja ühekohalist konstantset funktoorit x' (mis tähendab sisuliselt naturaalarvule x järgnevat naturaalarvu). Sümbolid $=, +, \cdot$ ja $'$ loeme defineerimatuteks sümboliteks (resp. algmõisteteks).

Peale loogilise arvutussüsteemi fikseerimise tuleb meil loomulikult esitada ka spetsiaalsed naturaalarvude aritmeetika aksiomid. Nendele lisame aga nn. «võrduse aksiomi» (aksiom 10°), mis on üldloogilise iseloomuga. Aksiomides jätame valemite ette kirjutamata üldisuse kvantorid, sest nagu teame (reegel 1, § 22), järeldub $\mathfrak{A}(x)$ tõesusest $(\forall x)[\mathfrak{A}(x)]$ tõesus. Aksiomide sõnastamisel jätame kirjutamata ka fraasi «... on tõene valem», mida peame enesestmõistetavaks.

Naturaalarvude aritmeetika aksiomid on järgmised:

- 1° $F(0) \& (\forall x)[F(x) \rightarrow F(x')] \rightarrow F(y)$
(täieliku induktsiooni aksiom),
- 2° $\top(x' = 0)$,
- 3° $(x = y) \rightarrow (x' = y')$,
- 4° $(x' = y') \rightarrow (x = y)$,
- 5° $(x = y) \rightarrow [(x = z) \rightarrow (y = z)]$,

- 6° $x + 0 = x$,
 7° $x + y' = (x + y)'$,
 8° $x \cdot 0 = 0$,
 9° $x \cdot y' = x \cdot y + x$,

millele lisandub «võrduse aksioom»

10° $(x = y) \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$.

Nüüd võime defineerida mitmed uued sümbolid, näiteks konstandid 1, 2, 3, ..., konstantsed predikaadid nagu $x \neq y$ jne.

Definitsioon 1. Defineerime konstandi 1 kui naturaalarvu 0', konstandi 2 kui naturaalarvu 1' ehk (0)', konstandi 2 kui naturaalarvu 1' ehk (0)''', konstandi 3 kui naturaalarvu 2' ehk ((0)')' jne.

Et x' on funktor, siis peab ta olema defineeritud ja ühene argumenti iga väärtuse korral. Seega on 0', (0)'', ((0)')' jne. üheselt määratud naturaalarvud.

Definitsioon 2. Kahekohalise predikaadi $x \neq y$ (naturaalarv x ei ole võrdne naturaalarvuga y) defineerime valemiga $\neg(x = y)$.

Definitsioon 3. Kahekohalise predikaadi $x < y$ (naturaalarv x on väiksem naturaalarvust y) defineerime valemiga $(\exists z)(z' + x = y)$.

Definitsioon 4. Kahekohalise predikaadi $x \leq y$ (naturaalarv x on väiksem naturaalarvust y või sellega võrdne) defineerime valemiga $(x < y) \vee (x = y)$.

Kahekohalisi predikaate $x > y$ ja $x \geq y$ võime defineerida analoogiliselt definitsioonidega 3 ja 4 või kui vastavalt predikaate $y < x$ ja $y \leq x$.

Asume nüüd teoreemide tõestamisele.

Teoreem 1. Valem $x = x$ on tõene (võrduse refleksiivsus ehk enesekohasus).

Tõestus. Võtame aksioomi 5°

$$(x = y) \rightarrow [(x = z) \rightarrow (y = z)]$$

ja teostame selles substituutsiooni S_x^{x+0} , seejärel substituutsioonid S_z^x ning S_y^x . Saame valemi

$$(x + 0 = x) \rightarrow [(x + 0 = x) \rightarrow (x = x)].$$

Rakendades kaks korda aksioomi *modus ponens* ja silmas pidades aksioomi $x + 0 = x$, saamegi $x = x$, m. o. t. t.

Nagu lausearvutuse ja predikaatarvutuse aksiomaatilise käsitluse puhul, nii on ka siin otstarbekohane kasutada tõestusreegleid. Need reeglid tuleb aga samuti tõestada aksioomidest lähtudes. Et paragrahvides 11 ja 22 esitatud lause- ja predikaatarvutuse tõestusreeglid on juba vastavates paragrahvides tõestatud, siis võime neid siin kasutada ilma mingisuguste lisapõhjendusteta.

Reegel 1. Kui üks valemitest $(\mathcal{A}) \rightarrow [(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{C})]$, $(\mathcal{B}) \rightarrow \rightarrow [(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C})]$ või $(\mathcal{A}) \& (\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{C})$ on tõene, siis on tõesed ka ülejäänud kaks valemit.

Tõestus. Lähtume näiteks $(\mathcal{A}) \rightarrow [(\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{C})]$ tõesusest. Kasutades implikatsiooni definitsiooni, saame

$$\neg(\mathcal{A}) \vee [\neg(\mathcal{B}) \vee (\mathcal{C})],$$

mis disjunktsiooni assotsiatiivsuse tõttu annab

$$[\neg(\mathcal{A}) \vee \neg(\mathcal{B})] \vee (\mathcal{C}). \quad (1)$$

Disjunktsiooni kommutatiivsuse tõttu saame valemist (1)

$$[\neg(\mathcal{B}) \vee \neg(\mathcal{A})] \vee (\mathcal{C}),$$

kust assotsiatiivsust kasutades saame

$$\neg(\mathcal{B}) \vee [\neg(\mathcal{A}) \vee (\mathcal{C})],$$

mis ongi valem $(\mathcal{B}) \rightarrow [(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C})]$. Valemi (1) võime aga kirjutada kujul

$$\neg\neg[\neg(\mathcal{A}) \vee \neg(\mathcal{B})] \vee (\mathcal{C}),$$

kust konjunktsiooni ja implikatsiooni definitsiooni kasutades saame

$$(\mathcal{A}) \& (\mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{C}).$$

Analoogilisel viisil järeldub ka teise või vastavalt kolmanda valemi tõesusest kahe ülejäänud valemi tõesus.

Teoreem 2. Valemid $(x = y) \rightarrow (y = x)$ ja $(y = x) \rightarrow (x = y)$ on tõesed (võrduse sümmeetria).

Tõestus. Võtame aksioomi 5°

$$(x = y) \rightarrow [(x = z) \rightarrow (y = z)]$$

ja teostame selles substituutsiooni S_2^x . Saame

$$(x = y) \rightarrow [(x = x) \rightarrow (y = x)].$$

Kasutame nüüd reeglit 1, kus valemiteks \mathcal{A} , \mathcal{B} ja \mathcal{C} võtame vastavalt valemid $x = y$, $x = x$ ja $y = x$. Reegli 1 põhjal võime väita, et tõene on ka valem

$$(x = x) \rightarrow [(x = y) \rightarrow (y = x)].$$

Kasutades järelduse aksioomi *modus ponens* (silmas pidades, et $x = x$ on tõene), saamegi

$$(x = y) \rightarrow (y = x).$$

Sellest valemist saame substituutsiooni abil, et ka valem $(y = x) \rightarrow (x = y)$ on tõene.

Teoreem 3. Valem $(x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z)$ on tõene (võrduse transitiivsuse omadus).

Tõestus. Lähtume aksiomist 5°

$$(x = y) \rightarrow [(x = z) \rightarrow (y = z)]$$

ja teostame selles substituutsioonid $S_y^{x_1}$, S_x^y ja $S_{x_1}^x$. Saame valemi

$$(y = x) \rightarrow [(y = z) \rightarrow (x = z)]. \quad (2)$$

Reegli 6 (§ 11) põhjal saame valemite $(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{A})$ ja $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ tõesusest järeldada, et $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ on tõene. Kasutame seda reeglit valemi (2) puhul, silmas pidades teoreemi 2 väidet. Saame uue valemi

$$(x = y) \rightarrow [(y = z) \rightarrow (x = z)],$$

mille puhul reegli 1 rakendamine annabki soovitud valemi

$$(x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z).$$

Teoreem 4. Valem

$$(x = y) \rightarrow (x + z = y + z) \quad (3)$$

on tõene.

Tõestus. Tähistame valemi (3) $\mathfrak{A}(x, y, z)$ abil. Mistahes naturaalarvude x, y ja $z = 0$ korral taandub valem (3) kujule

$$(x = y) \rightarrow (x + 0 = y + 0),$$

mis on aksiomide 6° ja 10° tõttu tõene. Seega on $\mathfrak{A}(x, y, 0)$ tõene. Näitame, et valem

$$\mathfrak{A}(x, y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y, z')$$

on tõene iga z korral. Selleks lähtume valemist

$$[(x = y) \rightarrow (x + z = y + z)] \rightarrow [(x = y) \rightarrow (x + z = y + z)], \quad (4)$$

mis on valem kujul $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ ja seetõttu tõene. Kasutades aksiome 3° ja 4°, saame predikaadi täislause $x + z = y + z$ teise esinemise asendada samaväärse avaldisega $(x + z)' = (y + z)'$. Seega saame valemi

$$[(x = y) \rightarrow (x + z = y + z)] \rightarrow [(x = y) \rightarrow ((x + z)' = (y + z)')].$$

Kasutades aksiome 7° ja 10°, saame valemi

$$[(x = y) \rightarrow (x + z = y + z)] \rightarrow [(x = y) \rightarrow (x + z' = y + z')],$$

mis ongi $\mathfrak{A}(x, y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y, z')$. Et viimane valem on tõene, siis on tõene ka

$$(\forall z)[\mathfrak{A}(x, y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y, z')]. \quad (5)$$

Arvestades $\mathfrak{A}(x, y, 0)$ ja valemi (5) tõesust, saame aksiomi 1° abil, et valem $\mathfrak{A}(x, y, z)$ on tõene, m. o. t. t.

Järgmiste teoreemide puhul anname ainult näpunäiteid tõestuse kohta. Üksikasjaliku tõestuse soovitame läbi viia lugejatel enesetel.

Teoreem 5. Valem $(x + y) + z = x + (y + z)$ on tõene (summa assotsiatiivsus).

Tõestuseks kasutame täielikku induktsiooni z järgi. Tõestatav valem $\mathfrak{A}(x, y, z)$ kehtib $z = 0$ korral. Valemi $\mathfrak{A}(x, y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y, z')$ kehtivuse näitamiseks kasutame valemit

$$[(x + y) + z = x + (y + z)] \rightarrow [((x + y) + z)' = (x + (y + z))'],$$

mille tõesus järgeldub aksioomist 3°.

Teoreem 6. Valem $x' + y = (x + y)'$ on tõene.

Tõestuseks kasutame täielikku induktsiooni y järgi. Valemi $\mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y')$ kehtivuse näitamiseks kasutame valemit

$$[x' + y = (x + y)'] \rightarrow [(x' + y)' = ((x + y)')'],$$

mille tõesus järgeldub aksioomist 3°.

Teoreem 7. Valem $x + y = y + x$ on tõene (summa kommutatiivsus).

Kõigepealt tuleb tõestada valem $x + 0 = 0 + x$, milleks kasutame täielikku induktsiooni x järgi. $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[x + 0 = 0 + x] \rightarrow [(x + 0)' = (0 + x)']$$

ja muu hulgas ka teoreemi 6. Edasi teostame induktsiooni y järgi. Valemi $\mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[x + y = y + x] \rightarrow [(x + y)' = (y + x)'].$$

Teoreem 8. Valem $x(y + z) = xy + xz$ on tõene (distributiivsus).

Tõestuseks kasutame induktsiooni z järgi. Valemi $\mathfrak{A}(x, y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y, z')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[x(y + z) = xy + xz] \rightarrow [x(y + z) + x = (xy + xz) + x],$$

mis on tõene teoreemi 4 põhjal.

Teoreem 9. Valem $(xy)z = x(yz)$ on tõene (korrutise assotsiatiivsus).

Tõestuseks kasutame induktsiooni z järgi. Valemi $\mathfrak{A}(x, y, z) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y, z')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[(xy)z = x(yz)] \rightarrow [(xy)z + xy = x(yz) + xy],$$

mis on tõene teoreemi 4 põhjal. Tõestuskäigus tuleb kasutada ka aksioomi 9° ja distributiivsust.

Teoreem 10. Valem $x'y = xy + y$ on tõene.

Tõestuseks kasutame induktsiooni y järgi. Valemi $\mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[x'y = xy + y] \rightarrow [x'y + x' = (xy + y) + x'],$$

mis on tõene teoreemi 4 põhjal. Tõestuskäigus tuleb tagaliikme teisendamisel kasutada aksioomi 7°, teoreemi 6, summa assotsiatiivsust ja kommutatiivsust.

Teoreem 11. Valem $xy = yx$ on tõene (korrutise kommutatiivsus).

Kõigepealt tuleb tõestada valem $x \cdot 0 = 0 \cdot x$, milleks kasutame täielikku induktsiooni x järgi. $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(x')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[x \cdot 0 = 0 \cdot x] \rightarrow [x \cdot 0 + 0 = 0 \cdot x + 0],$$

kus tagaliikme teisendamisel kasutame aksioomi 9° ja teoreemi 10. Edasi teostame induktsiooni y järgi. Valemi $\mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \mathfrak{A}(x, y')$ tõestamiseks kasutame valemit

$$[x \cdot y = y \cdot x] \rightarrow [x \cdot y + x = y \cdot x + x],$$

kus samuti kasutame aksioomi 9° ja teoreemi 10.

Teoreem 12. Valem $x + 1 = x'$ on tõene.

Tõestuseks kasutame induktsiooni x järgi.

Teoreem 13. Valem $x \cdot 1 = x$ on tõene.

Tõestuseks kasutame induktsiooni x järgi.

Teoreem 14. Valem $(x + z = y + z) \rightarrow (x = y)$ on tõene.

Tõestuseks kasutame induktsiooni z järgi.

Teoreem 15. Valem $(x < y) \& (y < z) \rightarrow (x < z)$ on tõene.

Tõestus järeldeb valemist

$$(z_1' + x = y) \& (z_2' + y = z) \rightarrow [(z_2' + z_1)' + x = z],$$

kui kasutada lemmat 1 (§ 19). Märkime, et enne lemma 1 kasutamist tuleb see tõestada predikaatarvutuse aksiomaatikast lähtudes, s. t. tuleb tegelikult kasutada lemma 1 aksiomaatilist analoogi.

Teoreem 16. Valem $(x \leq y) \& (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$ on tõene.

Tõestatakse üksikute juhtude $(x < y), (y < z); (x < y), (y = z); (x = y), (y < z); (x = y), (y = z)$ kaudu.

Analoogiliselt saab teoreemide tõestamist jätkata.

§ 37. EUKLEIDILISE GEOMEETRIA TEATAVA OSA FORMALISEERITUD AKSIOMAATILINE KÄSITLUS

Käesolevas paragrahvis esitame eukleidilise geomeetria selle osa formaliseeritud aksiomaatika, mis käsitleb objektide kuuluvust (punkt asub sirgel, punkt asub tasandil jne.). Esitatava aksiomaatika aluseks on Hilberti mitteformaliseeritud aksiomaatika [7]. Loogilised vahendid määrame põhiliselt arvutussüsteemiga — olgu see esimest järku kolmeliigiline predikaatarvutus, millele lisanduvad võrduse aksioomid. Seega — indiviide on kolme liiki: 1) punktid, mida tähistame x, y, z abil (ühes indeksitega), 2) sirged, mida tähistame r, s abil (ühes indeksitega), ja 3) tasandid, mida tähistame u, w abil (ühes indeksitega). Konstantseid predi-

kaate on samuti kolm: $P(x, r)$, mis tähendab sisuliselt, et punkt x asub sirgel r ehk sirge r läbib punkti x ; $Q(x, u)$, mis tähendab sisuliselt, et punkt x asub tasandil u ehk tasand u läbib punkti x ; peale nimetatute kasutame kahekohalist predikaati «on võrdne (samane)», mida tähistame tavalisel viisil $=$ abil. Kõigi kolme indiviidide piirkonna puhul võime kasutada ühte predikaati $=$. Sümboolid $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots, r, s, r_1, s_1, \dots, u, \omega, u_1, \omega_1, \dots, P, Q, =$ kuuluvad defineerimatute sümboolite ehk algmõistete hulka.

Aksiomide loetlemisel toome kõigepealt nn. võrduse aksiomid:

$$1^\circ x = x$$

ja

$$2^\circ (x = y) \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)].$$

Teised võrduse põhiomadused, nagu võrduse sümmeetria

$$(x = y) \rightarrow (y = x)$$

ja võrduse transitiivsuse

$$(x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z),$$

saab tõestada juba aksiomidest 1° ja 2° lähtudes.

Aksiomid 1° ja 2° on üles kirjutatud ainult punktide (x, y, z, \dots) jaoks, kuid me aktsepteerime need aksiomid ka sirgete (r, s, \dots) ja tasandite (u, ω, \dots) korral. Et aksiomide kuju sirgete ja tasandite korral ei muutu, siis me neid uuesti välja kirjutama ei hakka.

Definitsioon 1. Predikaadi $x \neq y$ (analoogiliselt ka sirgete ja tasandite puhul) defineerime kui $\neg(x = y)$.

Spetsiaalsed geomeetrised aksiomid on järgmised:

$$3^\circ (\forall x) (\forall y) (\exists r) [P(x, r) \& P(y, r)]$$

(iga punkti x ja y puhul leidub sirge r , mis läbib neid punkte),

$$4^\circ (\forall x) (\forall y) [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(x, s) \& P(y, r) \& P(y, s) \rightarrow (r = s)]$$

(kui kaht erinevat punkti x, y läbivad kaks sirget r ja s , siis on need sirged samased),

$$5^\circ (\forall r) (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(y, r)]$$

(igal sirgel leiduvad kaks erinevat punkti),

$$6^\circ (\exists x) (\exists y) (\exists z) (\forall r) \neg [P(x, r) \& P(y, r) \& P(z, r)]$$

(leiduvad kolm punkti, mis ei asu ühel sirgel),

$$7^\circ (\forall x) (\forall y) (\forall z) \{ \neg (\exists r) [P(x, r) \& P(y, r) \& P(z, r)] \rightarrow \rightarrow (\exists u) [Q(x, u) \& Q(y, u) \& Q(z, u)] \}$$

(mistahes kolme punkti puhul, mis ei asu ühel sirgel, leidub tasand, mis läbib neid kolme punkti),

8°

$$(\forall u) (\exists x) Q(x, u)$$

(iga tasandi puhul leidub punkt, mis asub sellel tasandil),

$$9^\circ \quad (\forall x) (\forall y) (\forall z) \{ \neg (\exists r) [P(x, r) \& P(y, r) \& P(z, r)] \& \\ \& Q(x, u) \& Q(x, w) \& Q(y, u) \& Q(y, w) \& Q(z, u) \& \\ \& Q(z, w) \rightarrow (u = w) \}$$

(kui mistahes kolme punkti, mis ei asu ühel sirgel, läbib kaks tasandit, siis on need tasandid samased),

$$10^\circ \quad (\forall u) (\forall r) (\forall x) (\forall y) \{ (x \neq y) \& P(x, r) \& P(y, r) \& \\ \& Q(x, u) \& Q(y, u) \rightarrow (\forall z) [P(z, r) \rightarrow Q(z, u)] \}$$

(kui mistahes sirge r kaks erinevat punkti asuvad mingil tasandil u , siis asuvad tasandil u sirge r kõik punktid),

$$11^\circ \quad (\forall u) (\forall w) \{ (\exists x) [Q(x, u) \& Q(x, w)] \rightarrow \\ \rightarrow (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \& Q(x, u) \& Q(x, w) \& Q(y, u) \& Q(y, w)] \}$$

(kui mistahes kahel tasandil on ühine punkt, siis on neil veel teine ühine punkt),

$$12^\circ \quad (\exists x) (\exists y) (\exists z) (\exists z_1) (\forall u) \neg [Q(x, u) \& Q(y, u) \& \\ \& Q(z, u) \& Q(z_1, u)]$$

(leiduvad neli punkti, mis ei asu ühel tasandil).

Aksioome tuleb mõista kui väiteid, et aksioomide loetelus toodud valemid on tõesed. Aksioomide sisulise mõistmise kergendamiseks selgitasime neid tavalises eesti keeles, kusjuures väljenduste lühiduse huvides kasutasime arvsõnu kaks, kolm, neli. Nende arvsõnade kasutamine ei tähenda aga seda, et geomeetria selle fragmendi formaliseeritud aksiomaatiliseks ülesehitamiseks on vaja naturaalarvude teooriat. See asjaolu nähtub ka aksioomide loetelus toodud valemitest, kus ei kasutata naturaalarvude aksiomaatilise teooria algmõisteid. Märgime, et predikaatarvutuse aksiomi 5 (§ 21) ja reegli 1 (§ 22) põhjal võib valemi alguses olevaid üldisuse kvantoreid ära jätta ja vabade muutujate jaoks valemi algusesse ka juurde kirjutada.

Teoreemide tõestamisel võime kasutada paragrahvides 11 ja 22 põhjendatud tõestusvõtteid.

Teoreem 1. Kahel erineval sirgel ei saa olla üle ühe ühise punkti.

Valemi abil saame teoreemi 1 sõnastada nii:

$$(\forall r) (\forall s) \{ (r \neq s) \rightarrow \neg (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \& \\ \& P(x, r) \& P(x, s) \& P(y, r) \& P(y, s)] \}$$

on tõene.

Tõestus. Lähtume aksiomist 4°, jättes ära üldisuse kvantorid. Saame valemi

$$(x \neq y) \& P(x, r) \& P(x, s) \& P(y, r) \& P(y, s) \rightarrow (r = s). \quad (1)$$

Kasutades teoreemi 1 (§ 11), saame valemist (1) valemi

$$(r \neq s) \rightarrow \neg [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(x, s) \& P(y, r) \& P(y, s)]. \quad (2)$$

Rakendades valemile (2) üldisuse kvantoreid ($\forall x$) ja ($\forall y$), saame aksiomi 9 (§ 21) tõttu

$$(r \neq s) \rightarrow (\forall x) (\forall y) \neg [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(x, s) \& P(y, r) \& P(y, s)]. \quad (3)$$

Silmas pidades, et kvantorite ja eitismärkide vahetada iseloomustavad valemid (6), (7), (8), (9) (§ 16) on tõestatavad predikaatarvutuse aksiomidest lähtudes, saame valemist (3) valemi

$$(r \neq s) \rightarrow \neg (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(x, s) \& P(y, r) \& P(y, s)]. \quad (4)$$

Rakendades valemile (4) üldisuse kvantoreid ($\forall r$) ja ($\forall s$), saame teoreemis 1 nõutud valemi, m.o.t.t.

Teoreem 2. Kui sirge ei asu tasandil, siis ei ole tal selle tasandiga üle ühe ühise punkti.

Valemi abil saame teoreemi 2 sõnastada nii:

$$(\forall u) (\forall r) \{ \neg (\forall z) [P(z, r) \rightarrow Q(z, u)] \rightarrow \\ \rightarrow \neg (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(y, r) \& Q(x, u) \& Q(y, u)] \}$$

on tõene.

Tõestus. Lähtume aksiomist 10°, jättes ära valemi ees seisvad üldisuse kvantorid. Kasutades seejärel teoreemi 1 (§ 11), saame valemi

$$\neg (\forall z) [P(z, r) \rightarrow Q(z, u)] \rightarrow \neg [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(y, r) \& Q(x, u) \& Q(y, u)].$$

Rakendades üldisuse kvantoreid ($\forall x$) ja ($\forall y$) ja pidades silmas nende vahetada eitismärgiga, saame

$$\neg (\forall z) [P(z, r) \rightarrow Q(z, u)] \rightarrow \\ \rightarrow \neg (\exists x) (\exists y) [(x \neq y) \& P(x, r) \& P(y, r) \& Q(x, u) \& Q(y, u)]. \quad (5)$$

Rakendades valemile (5) üldisuse kvantoreid ($\forall u$) ja ($\forall r$), saamegi teoreemis 2 nõutud valemi.

Teoreem 3. Kui kaks erinevat punkti asuvad mingil tasandil, siis asub sellel tasandil iga sirge, mis läbib neid kahte punkti.

Ehk lühidalt: valem

$$(\forall u) (\forall x) (\forall y) \{ (x \neq y) \& Q(x, u) \& Q(y, u) \rightarrow \\ \rightarrow (\forall r) [P(x, r) \& P(y, r) \rightarrow (\forall z) (P(z, r) \rightarrow Q(z, u))] \}$$

on tõene.

Tõestus. Lähtume aksiomist 10°, jättes ära valemi ees seisvad üldisuse kvantorid. Kasutades reeglit 1 (§ 36), saame selle valemi esitada kujul

$$(x \neq y) \& Q(x, u) \& Q(y, u) \rightarrow [P(x, r) \& P(y, r) \rightarrow (\forall z) (P(z, r) \rightarrow Q(z, u))]. \quad (6)$$

Kasutades aksiomi 9 (§ 21), saame valemist (6) valemi

$$(x \neq y) Q(x, u) \& Q(y, u) \rightarrow (\forall r) [P(x, r) \& P(y, r) \rightarrow (\forall z) (P(z, r) \rightarrow Q(z, u))],$$

millele üldisuse kvantorite $(\forall u)$, $(\forall x)$ ja $(\forall y)$ rakendamise teel saamegi teoreemis 3 nõutud valemi.

Analoogiliselt saab teoreemide tõestamist jätkata.

§ 38. HULGATEORIA AKSIOMAATILINE ÜLESEHITUS

Hulgateooria põhimõistete suure mahu tõttu kasutatakse seda teooriat väga paljude matemaatiliste distsipliinide (näiteks algebra, matemaatilise analüüsi, funktsiooniteooria, funktsionaalanalüüsi ja teiste distsipliinide) ülesehitamiseks. Hulgateooria kontseptsioone kasutasime ka meie lausearvutuse ja predikaatarvutuse mitteaksiomaatilisel ülesehitamisel I ja III peatükis.

Seejuures tuleb märkida, et enamasti ehitatakse hulgateooria üles võrdlemisi naiivsetel alustel seisva mitteaksiomaatilise teooriana. Nii aktsepteeritakse selle teooria algmõisted, nagu hulga mõiste, inimeste igapäevaste hulgateoreetiliste kogemuste põhjal, neid kogemusi eelnevalt analüüsimata. Näiteks ei pöörata mingit tähelepanu sellele, et inimesed opereerivad tegelikult ainult lõplike hulkadega. Mõnikord tuginetakse hulga mõiste Cantori definitsioonile: «Hulk on meie kujutluse või mõtlemise kindlalt piiritletud ja erinevate objektide (mida nimetatakse hulga elementideks) kokkuvõtte üheks tervikuks», mis samuti ei anna mingit kindlamat lähtekohta hulgateooria ülesehitamiseks. Hulgateooria sellise ülesehituse korral on aga võimalik peale tõeste tulemuste (mida korduvalt on kinnitanud inimkonna praktika) konstrueerida ka hulgateoreetilisi paradokse (näiteks paradoks seoses kõigi hulkade hulga ja tema kõigi osahulkade hulga võimsusega, paradoks kõigi ennast mitte sisaldavate hulkade kohta jt.).

Et hulgateooria põhialuste täpsustamise peaaegu ainuvõimalikuks teeks on selle teooria esitamine aksiomaatilise teooriana, siis on arusaadav, et matemaatikud hakkasid tegelema nende küsimustega varsti pärast hulgateooria loomist. Esimese hulgateooria aksiomaatika andis E. Zermelo (1908). A. A. Fraenkel (1922), T. Skolem (1922—1923), J. Neumann (1925 ja 1928), P. Bernays

(1937—1954), K. Gödel (1938—1940), A. S. Jessenin-Volpin (1960) jt. on andnud teisi võimalikke hulgateooria aksiomaatikaid või täiendanud olemasolevaid. Käesolevas paragrahvis esitame Zermelo-Fraenkeli [12, 40, 47, 49, 50] hulgateooria aksiomaatika.

Zermelo-Fraenkeli hulgateooria aksiomaatika ehitatakse üles esimest järku üheliigilise predikaatarvutuse baasil. Indiviide tähistame x, y, z, u, w abil, kasutades vajaduse korral ka indekseid. Sisuliselt tähendavad indiviidid kas hulki või hulga elemente. Et indiviidide piirkond on ühtne, siis tähendab see seda, et hulga elemente vaadeldakse samuti hulkadena. Konstantseid predikaate on kaks: $x = y$ (hulk x on võrdne hulga y) ja $x \in y$ (hulk x on hulga y element).

Hulgateooria aksiomide esitamisel märgime kõigepealt, et aktsepteerime nn. võrduse aksiomid, s. t. aksiomid 1° ja 2° (§ 37). Seejärel, enne spetsiaalsete hulgateooria aksiomide esitamist, on otstarbekohane defineerida mõned uued sümbolid.

Definitsioon 1. (Ekvivalentsi definitsioon.) Valemit $(\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B})$ võime tähistada $[(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})] \& [(\mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{A})]$ abil ja ümberpöörduvalt.

Definitsioon 2. Kahekohalise predikaadi $x \subset y$ (sisuliselt: hulk x on hulga y osahulk) defineerime valemiga $(\forall z)[(z \in x) \rightarrow (z \in y)]$. Seega: hulk x on hulga y osahulk, kui hulga x iga element on ka hulga y elemendiks.

Aksiom 3° $(x \subset y) \& (y \subset x) \rightarrow (x = y)$ (kui hulk x on hulga y osahulk ja hulk y on hulga x osahulk, siis on hulgad x ja y võrdsed).

Aksiom 4° $(\exists x)(\forall u)[(u \in x) \sim (u = y) \vee (u = z)]$ (mistahes hulkade y ja z korral leidub hulk x , mille elementideks on need y ja z ja millel pole teisi elemente). Hulka x nimetatakse hulkade y ja z paarhulgaks ja tähistatakse $\{y, z\}$ abil. Kui $y = z$, saame üheelemendilise hulga, mida tähistame $\{y\}$ abil.

Aksiom 5° $(\exists x)(\forall u)\{(u \in x) \sim (\exists z)[(u \in z) \& (z \in y)]\}$ (mistahes hulga y korral eksisteerib hulk x , mille elemendid on hulga y elementide elemendid).

Aksiom 6° $(\exists x)(\forall u)[(u \in x) \sim (u \subset y)]$ (mistahes hulga y korral leidub hulk x , mille elemendid on y osahulgad).

Aksiom 7° $(\exists x)(\forall u)[(u \in x) \sim (u \in y) \& F(u)]$ (mistahes y ja mistahes ühekohalise predikaadi (omaduse) F korral leidub hulk x , mille elementideks on need y elemendid, millel on omadus F).

Definitsioon 3. (Valikuhulga definitsioon.) Defineerime kahekohalise predikaadi $P_{\text{val}}(x, y)$ (x on y valikuhulk) valemiga

$$\begin{aligned} & (\forall z)\{(z \in x) \rightarrow (\exists w)[(w \in y) \& (z \in w)]\} \& \\ & \& (\forall w)\{(w \in y) \rightarrow (\exists z)[(z \in x) \& \\ & \& (z \in w)] \& (\forall z_1)(\forall z_2)[(z_1 \in x) \& (z_2 \in x) \& \\ & \& (z_1 \in w) \& (z_2 \in w) \rightarrow (z_1 = z_2)]\}. \end{aligned}$$

Sisuliselt tähendab hulga y valikuhulk hulka, mille elementideks on y elementide (hulkade) w elemendid ja millel on täpselt üks element igast hulgast w .

Aksioom 8° (Valiku aksioom.)

$$(\forall z)[(z \in y) \rightarrow (\exists u)(u \in z)] \& (\forall u)(\forall w)(\forall z)[(u \in w) \& \& (u \in z) \& (w \in y) \& (z \in y) \rightarrow (w = z)] \rightarrow (\exists x)P_{\text{val}}(x, y)$$

(mistahes hulga y jaoks, mille elemendid on mittetühjad ega sisalda ühiseid elemente, leidub valikuhulk).

Aksioom 9° (Lõpmatuse aksioom.)

$$(\exists x)\{(\exists y)(y \in x) \& (\forall z)\{(z \in x) \rightarrow (\exists u)[(u \in x) \& (z \subset u) \& \& (\exists w)[(w \in u) \& \neg(w \in z)]]]\}$$

(leidub mittetühi hulk x , mis ühes iga elemendiga z sisaldab teatava elemendi u , mille päris-osahulgaks on element z).

Aksioom 10°

$$(\forall u)(\forall w)(\forall z)[F(z, u) \& F(z, w) \rightarrow \rightarrow (u = w)] \rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)[(z \in y) \sim (\exists u)[(u \in x) \& F(u, z)]]$$

[iga hulga x ja predikaadi $F(z, u)$ puhul (mis fikseeritud z korral on tõene ülimalt ühe u puhul) leidub hulk y , mis koosneb parajasti nendest elementidest, mis predikaadi F^2 abil on hulga x elementidele vastavusse seatud].

Aksioom 11° (Regulaarsuse aksioom.)

$$(\exists u)(u \in x) \rightarrow (\exists y)[(y \in x) \& \neg(\exists z)[(z \in y) \& (z \in x)]]$$

(mistahes mittetühjal hulgal x leidub niisugune element y , et hulkadel x ja y pole ühiseid elemente).

Tõestame nüüd mõningad teoreemid, lähtudes Zermelo-Fraenkeli aksiomaatikast. Et teoreemide tõestamise tehniline külg on samasugune nagu paragrahvides 36 ja 37, siis anname ainult tõestuse põhiidee.

Teoreem 1. Leidub hulk, mis ei sisalda ühtegi elementi.

Tõestus. Substitueerime aksioomis 10° $F(z, u)$ samaselt väära valemiga $F(z, u) \& X \& \bar{X}$. Kasutades aksioomi *modus ponens*, saame valemi

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\{(z \in y) \sim (\exists u)[(u \in x) \& F(u, z) \& X \& \bar{X}]\}.$$

Arvestades seda, et nurksulgudes olev valem on samaselt väär, saame loogelistes sulgudes asuva valemi asendada temaga samaväärse valemiga $\neg(z \in y)$, millest saamegi

$$(\exists y)(\forall z)\neg(z \in y), \text{ m.o.t.t.}$$

Hulka, mis ei sisalda ühtegi elementi, nimetatakse tühjaks hulgaks.

Teoreem 2. Mistahes kaks tühja hulka on võrdsed.

Tõestus järeldub vahetult aksioomist 3. Et me võrdsed objektid sisuliselt samastame, siis võime ütelda ka, et eksisteerib ainult üks tühi hulk.

Teoreem 3. Ükski hulk ei ole omaenda elemendiks.

Tõestus. Kui mõne hulga x puhul kehtiks $x \in x$, siis poleks hulk x tühi hulk. Moodustame üheelemendilise hulga $\{x\}$. Hulga $\{x\}$ ainus element x sisaldab elementi x , mis on ühine hulga $\{x\}$ elemendiga. Saadud tulemus on vastuolus aksioomiga 11°. Seega peab kehtima $\neg(x \in x)$.

Teoreem 4. Kehtib $(x \in y) \rightarrow \neg(y \in x)$ ehk $\neg[(x \in y) \& (y \in x)]$.

Tõestus. Oletades, et $(x \in y) \& (y \in x)$ kehtib teatavate hulkade x ja y korral, moodustame paarhulga $\{x, y\}$, mis pole ilmselt tühi hulk. Nüüd tekib olukord, kus hulgal $\{x, y\}$ ja tema elemendil x on ühine element y , hulgal $\{x, y\}$ ja tema elemendil y aga on ühine element x , mis on vastuolus aksioomiga 11°. Seega tuleb aktsepteerida teoreemi 4 väide.

Harjutuseks soovitame lugejatel tõestada järgmised valemid ehk hulgateooria teoreemid:

$$(x = y) \rightarrow [(x \in z) \rightarrow (y \in z)],$$

$$(x = y) \rightarrow [(z \in x) \rightarrow (z \in y)],$$

$$(x = y) \rightarrow [(x \in z) \sim (y \in z)],$$

$$(x = y) \rightarrow [(z \in x) \sim (z \in y)],$$

$$(x \subset y) \& (y \subset z) \rightarrow (x \subset z).$$

Lõpuks märgime, et on tõestatud mitmete hulgateooria aksiomaatikate suhteline mittevasturääkivus (s. t. mittevasturääkivuse eeldusel, et teatav teine aksiomide süsteem on mittevasturääkiv).¹⁷ Muidugi on selline mittevasturääkivuse tõestamine ainult probleemi osaliseks lahenduseks. Teiselt poolt aga peab märkima seda, et kuni käesoleva momendini pole konstrueeritud ühtegi hulgateoreetilist paradoksi ühegi hulgateooria aksiomaatika baasil.

¹⁷ Vt. näiteks K. Gödel [6], või A. S. Jessenin-Volpin [12].

KIRJANDUS

1. Автоматы, сб. статей под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти. Москва, 1956.
2. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций. М.-Л., 1948.
3. Э. Беркли, Символическая логика и разумные машины. Москва, 1961.
4. Г. Биркгоф, Теория структур. Москва, 1952.
5. С. Гасс, Линейное программирование. Москва, 1961.
6. К. Гедель, Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. УМН, 1948, т. III, вып. 1 (23), 96—149.
7. Д. Гильберт, Основание геометрии. М.-Л., 1948.
8. Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики. Москва, 1947.
9. И. С. Градштейн, Прямая и обратная теорема. Москва, 1961.
10. Р. Л. Гудстейн, Математическая логика. Москва, 1961.
11. А. С. Есенин-Вольпин, Анализ потенциальной осуществимости. Логические исследования (сб.), Москва, 1959, 218—262.
12. А. С. Есенин-Вольпин, К обоснованию теории множеств. Применение логики в науке и технике (сб.), Москва, 1960, 22—118.
13. И. И. Жегалкин, О технике вычислений предложений в символической логике. Матем. сборник, 1927, 34, 9—28.
14. Ю. И. Журавлев, Об отделимости подмножеств вершин n -мерного единичного куба. Труды мат. ин-та им. Стеклова, LI, Москва, 1958, 143—157.
15. С. К. Клини, Введение в метаматематику. Москва, 1957.
16. Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтенброт, Введение в теорию конечных автоматов. Москва, 1962.
17. Н. И. Кондаков, Логика. Москва, 1954.
18. Б. А. Кордемский, Математическая смекалка. Москва, 1954. (Eesti keelses tõlkes: B. A. Korдемski, Matemaatilised pähkliid. Tallinn, 1960).
19. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
20. Э. Ландау, Основы анализа. Москва, 1947.
21. Р. С. Ледли, Л. Б. Ластед, Объективные основания диагноза. Кибернетический сборник, 2, Москва, 1961, 5—40.
22. Я. Лукасевич, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. Москва, 1959.
23. Р. Мак-Нотон, Теорема о бесконечнозначной логике высказываний. Кибернетический сборник, 3, Москва, 1961, 59—78.
24. А. А. Марков, Теория алгорифмов. Труды мат. ин-та им. Стеклова, XLII, Москва—Ленинград, 1954.
25. А. Мостовский, Современное состояние исследований по основаниям математики. УМН, 1954, т. IX, вып. 3 (61), 3—38.

26. А. Д. Мышкис, Студенческий конкурс на физико-математическом факультете Латвийского государственного университета. УМН, 1951, т. VI, вып. 4 (44), 229—231.
27. П. С. Новиков, Элементы математической логики. Москва, 1959.
28. И. Н. Песин, Об использовании некоторых символов математической логики в преподавании. Математическое просвещение, 3, Москва, 1958, 195—200.
29. Р. Петер, Рекурсивные функции. Москва, 1954.
30. А. И. Попов, Введение в математическую логику. Ленинград, 1959.
31. М. И. Ромакин, Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Москва, 1963.
32. Г. И. Рузавин, П. В. Таванец, Основные этапы развития формальной логики. Философские вопросы современной формальной логики (сб.), Москва, 1962, 16—52.
33. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем. Москва, 1954.
34. Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра, под ред. Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского, Москва, 1962.
35. П. В. Таванец, Формальная логика и философия. Философские вопросы современной формальной логики (сб.), Москва, 1962, 3—15.
36. А. Тарский, Введение в логику и методологию дедуктивных наук. Москва, 1948.
37. Б. А. Трахтенброт, Алгоритмы и машинное решение задач. Москва, 1960.
38. В. А. Успенский, Лекции о вычислимых функциях. Москва, 1960.
39. Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа. т. I, Москва, 1955; т. II, Москва, 1956.
40. Ван Хао, Р. Мак-Нотон, Аксиоматические системы теории множеств. Москва, 1963.
41. А. Черч, Введение в математическую логику I. Москва, 1960.
42. Х. Яксон, О решениях топологической проблемы о двух красках. Труды ест.-мат. фак. Тартуского ун-та, вып. 46, 1957, 43—62.
43. С. В. Яблонский, Функциональные построения в k -значной логике. Труды мат. ин-та им. Стеклова, LI, Москва, 1958, 5—142.
44. С. А. Яновская, Основания математики и математическая логика. Математика в СССР за тридцать лет (сб.), Москва—Ленинград, 1948, 11—45.
45. С. А. Яновская, Математическая логика и основания математики. Математика в СССР за сорок лет (сб.), т. I, Москва, 1959, 13—120.
46. С. А. Яновская, О некоторых чертах развития математической логики и отношении ее к техническим приложениям. Применение логики в науке и технике (сб.), Москва, 1960, 3—21.
47. P. Bernays, A. A. Fraenkel, Axiomatic Set Theory. Amsterdam, 1958.
48. V. Bradis, Matemaatika õpetamise meetodika keskkoolis. Tallinn, 1957.
49. R. Carnap, Symbolische Logik. Wien, 1954.
50. R. Carnap, Introduction to Symbolic Logic and its Applications. New York, 1958.
51. K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931, 38, 171—198.
52. D. Hilbert, P. Bernays, Grundlagen der Mathematik I—II. Berlin, 1934—1939.
53. A. Kissel'ov, Geomeetria. Planimeetria VI—IX klassile. Tallinn, 1950.
54. U. Klug, Juristische Logik. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
55. J. C. C. McKinsey, On the Independence of Hilbert and Ackermann's Postulates for the Calculus of Proportional Functions. Amer. J. Math., 58, 336—344.
56. A. Rose, Many-valued Logical Machines. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 54, 1958, 3, 307—321.

57. J. B. Rosser, A. R. Turquette, Many-valued Logics. Amsterdam, 1952.
58. The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics. L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (toimetajad), Amsterdam, 1959.
59. G. I. Tšelpaņov, Loogika õpperaamat. Tallinn, 1948.
60. J. H. Woodger, The Axiomatic Method in Biology. Cambridge, 1937.

TERMINITE JA SÜMBOLITE REGISTER

A

Aksioom 75
 Aksioomide sõltumatus 90
 — süsteemi mittevasturääkivus 87
 — — täielikkus 92, 93
 Algmõiste 74, 75
 Alluvad otsustused 184
 Alternatiivne eitus (\neg) 13
 Asendused 17, 114

B

Bayesi valem 177
 Binaarsed tehted 13, 70
 Blake'i meetod 55
 Boole'i algebra 5, 151

D

Defineerimatu mõiste (sümbol) 75, 76
 Disjunktiivne normaalkuju 36
 Disjunktsioon (\vee) 12
 Disjunktsiooni assotsiatiivsus 24, 85
 — distributiivsus 24, 27, 85
 — ja konjunktsiooni duaalsus 24
 — kommutatiivsus 24, 83
 Duaalsed valemid 28

E

Eeldus 38
 Eitus (\neg või $\bar{}$) 13
 Ekvalents (\sim) 13
 Elementaar-disjunktsioon 30
 Elementaar-konjunktsioon 30

F

Fiktiivne argument (muutuja) 22
 Formaliseeritud aksiomaatiline teooria
 (ehk formaliseeritud teooria) 75

Frege ja Łukasiewicz'i lausearvutuse
 aksiomaatika 79
 Funktor 152
 Funktori täisavaldis 152
 Funktormuutuja ($f^{(n)}$, $g^{(n)}$, $h^{(n)}$) 152
 Funktorsubstitutsioon 154
 Funktsioonide superpositsioon 71
 Funktsiooni disjunktiivne arendus 30
 — konjunktiivne arendus 34
 — laiend 63

H

Hulgapaari $[M \setminus M_0, M_1]$ maksimaalne
 intervall 64
 Hulgateoreetiline algebra 148
 Hulga täiend ($'$) 149
 Hulkade summa (\cup) 148
 — sümmeetriline vahe (Δ) 149
 — vahe (\setminus) 149
 — võrdsus 148
 — ühisosa (\cap) 148

I

Implikatsioon (\rightarrow) 12
 Implikatsiooni eesliige 12
 — tagaliige 12
 Indiivid 94
 Indiividide piirkond 94
 — samasus 156
 Individuaalkonstant 96
 Individuaalmuutuja 95
 Induktiivne definitsioon 15
 Interpretatsioon 87
 Interpretatsioonide meetod 87
 Isoleeritud konjunktsioon 53

J

Järeldus 38, 86, 127, 141
 Järgiklassikorpused $R^{(2)}$ 68

K

- Kahendmuutuja 15
 — funktsioonide teooria 15
 Kehtestatav valem 103
 Komponentlause 18
 Konjunktiivne normaalkuju 36
 Konjunktsioon ($\&$) 12
 Konjunktsiooni assotsiatiivsus 24, 85
 — distributiivsus 24, 27, 85
 — ja disjunktsiooni duaalsus 24
 — kommutatiivsus 24, 83
 Konjunktsioonide kokkuliimimine 53
 Konkretiseeritud predikaat 103
 Konstanti t säilitav funktsioon 71
 — v säilitav funktsioon 71
 Konstantne funktor ($p^{(n)}, q^{(n)}, r^{(n)}$) 152
 — lause (A, B, C) 14
 — predikaat 96
 Konstituent 39
 Korteež 95
 Kvantorid ($\forall x$), ($\exists x$) 98
 Kvantorite mõjupiirkond 100

L

- Lause (A, B, C, X, Y, Z) 11
 Lausearvutus 11
 Lausearvutuse valem 15
 Lineaarne funktsioon 71
 Lineaarse planeerimise ülesanne 56
 Lõogika algebra 15
 Loogiline polünoom 69
 — tehe 12
 Loogiliselt determineerimata e. loogiliselt määramata valem 20
 — determineeritud e. loogiliselt määratud valem 20
 — samaväärsed valemid 21, 107
 Loogiliste tehete täielik süsteem 71
 Lõpmatuse aksiom 158, 213
 Lõpmatuvalentne loogika 73

M

- Maksimaalne intervall 47
 Metateooria 201
 Metateoreem 201
 Metasümbolid e. metamärgid 201
 Minimizeerivate tabelite meetod 44
 Mitmeliigilised arvutussüsteemid 163
 Mitmevalentne lausearvutus 72
 Mitteekvivalents (\approx) 13
 Mittelihtsustav disjunktiivne normaalkuju 52, 53
 Mitteortogonaalne elementaarkonjunktsioon 49

Modus ponens 77

- Monotoonne funktsioon 71
 Muutuv lause ($X, Y, Z \dots$) 15
 Määramata kordajate meetod 42

N

- Naaberkonjunktsioonid 53
 Nicod' lausearvutuse aksiomaatika 79
 Normaalkuju 120
 Normaalivelem 119

O

- Operaator 154
 Operaator μ (väikseim arv) 154
 Operaator τ 154
 Ortogonaalne elementaarkonjunktsioon 49
 Osaaitav otsustus (O) 183
 Osajaatav otsustus (I) 183
 Osavalem 16, 144
 Osavastupidised otsustused 184
 Otsesed järeldused 185

P

- Paaritufunktsioon 71
 Predikaabel predikaat 160
 Predikaadi täislause 95
 Predikaat 95
 Predikaatarvutuse valem 99
 Predikaatmuutuja 95
 Põhihulk 23
 Pöördteoreem 194

R

- r -järku intervall 46
 Russelli paradoks 161

S

- Samaselt tõene valem 19
 — väär valem 19
 Seos 21, 107
 Seotud muutuja 99
 — muutujate ümbertähistamine 100
 Simpleks-meetod 57
 Skolemi funktsioonid 125
 Struktuur 150
 Substitutsioon 18, 115
 Sulgude ärajätmise kokkulepped 17, 27, 77, 100, 135
 Sulud 17, 133, 134

Süllogism 185
Süllogismi figuur 186
— moodus 187

Z

Zegalkini meetod 68

T

Taandatud disjunktiivne normaalkuju 47
Tabelimeetod 18, 44, 63
Tarvilikud ja piisavad tingimused 196
Tase 162
Tegelik muutuja 22
Teist järku predikaatarvutus 155
— — predikaatarvutuse valem 156
Teoreem 194
Tõene (t) 11
Tõene valem 77
Tõestus 77
Tõestusreeglid 80
Tõeväärtus 12
Tõeväärtus «määramata» (m) 72
Tõkestatud kvantorid 102
Täielik disjunktiivne normaalkuju 31
— elementaardisjunktsioon 30
— elementaarkonjunktsioon 30

— konjunktiivne normaalkuju 33
Tüpiseeritud predikaatarvutus 160
Tüüp (indiviidi, predikaadi, funktori)
161
Tüüpide teooria 160

V

Vaba muutuja 99
Valem 15, 99, 154, 156, 163
Valemi karakteristiklik funktsioon 21
— lausearvutuslik struktuur 106
— tõesuspiirkond $M_t(\mathfrak{A})$ 20
— vääruspiirkond $M_v(\mathfrak{A})$ 20
Valiku aksiom 213
Vastandteoreem 194
Vastupidised otsustused 184
Vasturääkivad otsustused 183
— valemid 40
Võrduse aksiomid 202, 203, 208
Väär (v) 11
Väärtustus 18

Ü

Üldeitav otsustus (E) 183
Üldjaatav otsustus (A) 183

SISUKORD

Sissejuhatus	5
Paragrahvide sisuline järgnevus	10
I peatükk. Lausearvutus	11
§ 1. Lausearvutuse põhimõisteid	11
§ 2. Lausearvutuse valemid	15
§ 3. Samaselt tõesed valemid	21
§ 4. Lausearvutuse valemite normaalkujud	29
§ 5. Järelduste tuletamine	38
§ 6. Lausearvutuse valemite minimeerimine	41
1. Määramata kordajate meetod	42
2. Minimeerivate tabelite meetod	44
3. Disjunktiivsete normaalkujude minimeerimise teisi meetodeid	46
§ 7. Minimaalse disjunktiivse normaalkuju leidmine kui lineaarse planeerimise ülesanne	56
§ 8. Mitte kõikjal defineeritud kahendmuutuja funktsiooni optimaalsest laiendamisest	62
§ 9. Lausearvutuse mõningaid teisi probleeme	68
1. Lausearvutuse valemite tõeväärtuse arvutamise teisi meetodeid	68
a) Zegalkini meetod	68
b) Loogiliste tehete aritmetiseerimine kõigi täisarvude vallas	69
2. Loogiliste tehete täielikud süsteemid	70
3. Mitmevalentsest lausearvutusest	72
II peatükk. Lausearvutuse aksiomaatiline ülesehitus	74
§ 10. Lausearvutuse aksiomaatika	74
§ 11. Lausearvutuse valemite tõestamine	79
§ 12. Aksiomide süsteemi mittevasturääkivus	87
§ 13. Aksiomide sõltumatus. Aksiomide süsteemi täielikkus	90
III peatükk. Predikaatarvutus	94
§ 14. Predikaatarvutuse põhimõisteid	94
§ 15. Kvantorid ja predikaatarvutuse valemid	97
§ 16. Samaselt tõesed predikaatarvutuse valemid	102
§ 17. Samaselt tõeste predikaatarvutuse valemite leidmisest erijuhtudel	109
§ 18. Asendused ja substituatsioonid	113
§ 19. Predikaatarvutuse valemite normaalkujud	119
§ 20. Järelduste tuletamine	127
IV peatükk. Predikaatarvutuse aksiomaatiline ülesehitus	133
§ 21. Predikaatarvutuse aksiomaatika	133
§ 22. Predikaatarvutuse valemite tõestamine aksiomaatikast lähtudes	137

§ 23.	Predikaatarvutuse aksiomide süsteemi mittevasturääkivus, aksiomide sõltumatus ja aksiomide süsteemi täielikkus	141
V	pe a t ü k k. Predikaatarvutuse üldistusi ja teisi küsimusi	148
§ 24.	Hulgateoreetilise algebra, Boole'i algebra ja loogiliste arvutus-süsteemide vahekorid	148
§ 25.	Funktorid ja operaatorid	152
§ 26.	Teist järku predikaatarvutus	155
§ 27.	Tüüpiseeritud predikaatarvutus	160
VI	pe a t ü k k. Matemaatilise loogika rakendusi	165
§ 28.	Poretski ülesanded lindudest ja neidudest	165
§ 29.	Matemaatilise loogika rakendamine kohtupraktikas	169
§ 30.	Lausearvutuse rakendusi topoloogiliste kaartide uurimisel	171
§ 31.	Lausearvutuse rakendamine haiguste diagnoosimisel	175
§ 32.	Lausearvutuse rakendamine tunniplaanide ja töögraafikute koostamisel	178
§ 33.	Klassikalise süllogismide teooria käsitlemine predikaatarvutuse vaatekohalt	183
§ 34.	Matemaatilise loogika kasutamisest matemaatika õpetamisel	188
VII	pe a t ü k k. Matemaatilise loogika rakendusi teooriate aksiomaatilisel ülesehitamisel	198
§ 35.	Mõningatest üldistest probleemidest seoses teooriate aksiomaatilise ülesehitamisega	198
§ 36.	Naturaalarvude aritmeetika aksiomaatiline ülesehitus	202
§ 37.	Eukleidilise geomeetria teatava osa formaliseeritud aksiomaatiline käsitlus	207
§ 38.	Hulgateooria aksiomaatiline ülesehitus	211
	Kirjandus	215
	Terminite ja sümbolite register	218

Куль Ивар Георгиевич
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

На эстонском языке
Оформление Х. Полберг

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. Toming
Kunstiline toimetaja L. Kruusmaa
Tehniline toimetaja H. Kohu
Korrektorid V. Põlde ja O. Kajando

Ladumisele antud 30. X 1963. Trükkimisele antud
17. III 1964. Paber 60×90 , $\frac{1}{16}$. Trükipoognaid 14.
Arvestuspoognaid 12,9. Trükiarv 1000. MB-01464.
Tellimise nr. 8399. Hans Heidemanni nim. trüki-
koda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 59 kop.

59 kop.

A
25795
5704889

TÜ RAAMATUKOGU

1 0300 00570488 9