

5. — 8. KLASSI
ÕPILASTE
MATEMAATIKAVIGADE
PSÜHHOLOOGIAST

A - 23092
-36
EESTI NSV PEDAGOOGIKA TEADUSLIKU
UURIMISE INSTITUUT

J. SÕERD

5. — 8. KLASSI
ÕPILASTE
MATEMAATIKAVIGADE
PSÜHHOLOOGIAST

KIRJASTUS „VALGUS“ • TALLINN 1970

I. ÕPILASTE MATEMAATIKAVIGADE PSÜHHO- LOOGILISTE ALUSTE UURIMISEST

Igapäevases pedagoogilises tegevuses tuleb õpetajal alatasa kokku puutada vigadega õpilaste töös. Õpetamise ja õppimise protsess ei kulge täiesti sujuvalt, ilma takistusteta. Õpilane ei suuda õpitud materjali kohe veatult reprodutseerida, ta eksib vastamisel, teeb vigu; antud harjutust ei suuda ta täiesti õigesti teha, selle tekstis esineb vigu; mitmesuguste ülesannete lahendamisel läheb õpilaste mõttekäik ebaõiget teed mööda ning tulemuseks on jällegi viga.

Viga on õppetöös teguriks, mida suurel määral arvestatakse. Õpilaste teadmiste hindamisel arvestatakse tõsiselt vastustes esinevaid vigu, nende hulka ja iseloomu. Vead õpilaste töödes on tähtsaks kriteeriumiks selle kohta, kuivõrd täielikult ja õigesti on õpilased omandanud vastavad teadmised ja vilumused, kuivõrd täielikult ja õigesti oskavad nad rakendada omandatud mõisteid, seadusi, reegleid ja valemeid. Vigade esinemine viitab alati objektiivsetele raskustele teadmiste omandamisel ja rakendamisel. Õpilaste vigade ja nende tekkemehhanismide tundmine võimaldab õpetajal vajaliku paindlikkusega juhtida õppeprotsessi.

Õpilaste vigade analüüsimisel läheksime lihtsustatud teed mööda, kui nõustuksime väitega, et vea tekkimise põhjuseks on reegli, seaduse või valemi mittetundmine. Vastava reegli jne. mittetundmine ei saa olla antud konkreetse vea tekkepõhjuseks. Õige seose puudumine ei ole iseenesest ebaõige (väär) seose põhjuseks. Muidugi mõista saab vaid õige seose puudumise korral võimalikuks väär seose tekkimine. Nende väärade seoste uurimine, nende olemuse avastamine võimaldab meil läheneda vigade tegelikele allikatele.

Õpilaste vigade küllaltki suur osatähtsus õpetamise praktikas on tõstatanud ka antud ala teoreetilise uurimise vajaduse.

Esimesed sammud selle küsimuse teoreetiliseks läbitöötamiseks, vigade tekkimist põhjustavate tegurite väljaselgitamiseks ja vigade klassifitseerimiseks tehti 19. sajandi lõpus ja 20. sajandi alguses. Eriti palju tähelepanu pöörati sellele käesoleva sajandi esimestel aastakümnetel, millal rida teadlasi hakkas tegelema vigadeteooria väljatöötamisega.

Kõige suuremaid üldistusi ja ulatuslikumaid kokkuvõtteid tegid A. Kießling ja H. Weimer, kelle sulest ilmus antud probleemi kohta rida teoseid.¹ Eriti palju on vigade uurimisel ära teinud H. Weimer, kelle poolt loodud vigade klassifikatsioon on Lääne-Euroopa pedagoogikas kasutamisel tänapäevani.²

H. Weimer annab oma teoses «Psychologie der Fehler» järgmise vigade klassifikatsiooni:

1. **Ladususvead.** Need vead tekivad seepärast, et õpilane eelistab teatud sõnu, sõnaühendeid, matemaatilisi tehteid teistele nende sagedase, harjumuspärase esinemise tõttu ning kasutab neid valesti. Nii võib lugeda ladususveaks seda, kui õpilane kasutab temale harjumuspäraseks saanud liitmist talle suhteliselt vähem tuntud korrumtamise asemel: $3 \times 3 = 6$, $7 \times 5 = 12$.

2. **Perseverantsuse ehk tardumuse vead.** Vead olemus seisneb siin selles, et mingi täht või number mõjutab, muutes omasarnaseks, püsivaks, mingi eelneva või järgneva tähe või numbri. Mõju suuna järgi saame kaks alaliiki: a) järelmõjuvead, näiteks $7, \frac{1}{2} + 2,5 =$, siin teatud järgnev komponent mõjutab eelnevat ja b) eelmõjuvead: $7 + 9 = 19$; $5 + 5 = 5$; $6 + 8 = 14$, $5 + 3 = 14$, mille puhul mingi eelnev komponent mõjutab järgnevat.

3. **Sarnasusvead** esinevad millegipoolt sarnaste elementide (tähed, numbrid, märgid) ärasegamisel. Näi-

¹ A. Kießling. «Die Bedingungen der Fehlsamkeit. Leipzig, 1925.

H. Weimer. Psychologie der Fehler. Leipzig, 1925; H. Weimer. Fehlerbehandlung und Fehlerbewertung. Leipzig, 1926.

² «Lexikon der Pädagogik» in 3 Bänden, Verlag A. Francke AG., Bern, 1950, Bd. I, S. 427.

teks õpilane võib ära segada arvud 6 ja 9, 1 ja 7, märkeid $>$ ja $<$.

4. Segunemisvead. Nende aluseks on ebaõige kontaminatsioon 2 elemendist.

5. Tundmustest ja tahtest tingitud vead võivad olla väga mitmekesised.

Vigade esinemise sageduse ja ulatuse järgi eristab H. Weimer veel järgmisi vealiike¹: esmased vead — viga esineb õpilasel esimest korda; korduvad vead — viga esineb mitmendat korda; harjumuslikud vead — viga kordub sageli; tüüpilised vead — viga esineb suuremal rühmal (näiteks klassis); eelistatud vead — esinevad mitmetel inimestel ühetaolistena (näiteks eelisassotsiatsioonid); massilised vead esinevad väga suurel hulgal inimestel.

Arusaadavalt ei saa me H. Weimeri süsteemi lugeda universaalseks, mis küllaldase põhjalikkusega avaks vigade kõik põhjused iga õppeaine aspektist. Siin on esitatud vaid mõned üldist laadi põhimõtted. Vigade sügavamaks analüüsiks tuleb paratamatult arvestada õppeaine spetsiifilisi iseärasusi.

Vigade tekkimise üldisi põhjusi käsitleb A. Kießling oma teoses «Die Bedingungen der Fehlsamkeit» (Leipzig, 1925). A. Kießling ei käsitle mitte niivõrd konkreetsete vigade tekkepõhjusi, kuivõrd üldisi tingimusi, mis võivad vigu esile kutsuda ning üldkokkuvõttes õppeedukusele negatiivset mõju avaldada. Autor jagab vigade tekkimise tingimused kaheks põhiliseks kategooriaks, nimelt objektiivseteks ja subjektiivseteks tingimusteks.

Vigade tekkimise objektiivsete tingimuste hulka kuuluvad A. Kießlingi järgi looduslik keskkond (ilma, aastaaja, maastiku mõju); kunstlik keskkond (riietus, töökoht, liikluskära ja tolm linnas, klassiruumi ehitus, valgustus, õhutatus, küte, seinavärv); samuti sotsiaalne keskkond (elukoht, vanemate seisund).

Subjektiivsete tingimuste hulgas seab autor füüsiliste ja vaimsete tingimuste kõrval esikohale pärilikud tingimused, kusjuures kalduvust vigu teha peab ta sünnipäraseks. A. Kießling väidab, et tööliste lapsed teevad kaks korda rohkem vigu kui intelligentsi lapsed. Ilmselt aval-

¹ H. Weimer. Psychologie der Fehler. Leipzig, 1925, S. 90.

dub selles tüüpilise kodanliku psühholoogi-biologiseerija klassipositsioon.

Peale vigade tekkimise objektiivsete ja subjektiivsete tingimuste märgib autor kolmanda kategooriana tingimusi, mis tulenevad õppetöö organiseerimisest (õpetamise metoodikast).

A. Kießlingi seisukohtade suhtes võime märkida, et siin antakse küll üldine ülevaade vigade tekkimise võimalikest tingimustest, millest enamik on paikapidavad, kuid jäädakse seejuures äärmiselt abstraktsele pinnale, ei seostata teatud tingimusi ühe või teise vealiigi või -kategooria ilmumisega. Sageli ei seostata ühtede või teiste tingimuste mõju mitte niivõrd konkreetsete vigadega, kuivõrd üldse õppeedukuse langusega. Tuleb märkida ka seda, et vigade põhjuste väljaselgitamisel omistab A. Kießling ülemäära suurt tähtsust bioloogilistele faktoritele.

Nõukogude teadlased on õpilaste vigu uurinud mitmesuguste õppeainete ja vanusejärgkude seisukohalt. T. Jegorov on vaadelnud lugemisvigu, D. Pomerantseva nooremate õpilaste suulise kõne vigu, L. Zankov vigu ajalooliste sündmuste kronoloogias.

Õpilaste matemaatikavigu käsitlevad tööd võime liigitada kahte kategooriasse: 1. vigade vaatlemine metoodilisest aspektist ja 2. psühholoogilisest aspektist.

Esimesse rühma kuuluvatest töödest on üheks silmapaistvamaks ja põhjalikumaks V. Protšuhhajevi teos «Анализ ошибок учащихся средней школы по математике» (1948). Selles teoses nagu paljudes teistes metoodilistes töödes ei sea autor endale ülesandeks vigade psühholoogilist analüüsi, õpilase mõttekäigu jälgimist ja vigade põhjuste väljaselgitamist.

Psühholoogilisest aspektist ei ole õpilaste matemaatikavigu palju uuritud. N. Mentšinskaja on teinud seda peamiselt algklasside aritmeetikakursusest lähtudes, G. Mendeljan on uurinud V—VI klassi õpilaste vigu, mis tekivad osa leidmisel arvust ja arvu leidmisel osa järgi. Kuna P. Ševארjov on analüüsinud õpilaste algebravigu üldistatud assotsiatsioonide seisukohalt.

Nendes töödes rõhutatakse, et vea esinemisel tuleb vahet teha kahe juhtumi vahel: 1) õpilane ei tunne vastavat seadust, reeglit ega valemit ning see viibki veani; 2) õpilane tunneb küll vastavat reeglit, kuid teeb selle

rakendamisel siiski vea. (Seda vahet teeb ka Weimer, kasutades siin isegi erinevaid termineid: *Irrtum* — eksimus ja *Fehler* — viga.) Nendest teine liik on uurimistöö seisukohalt huvitavam ja väärtuslikum ning seda ongi tavaliselt silmas peetud.

Vigade tekkimise ühe põhjusena on viidatud õpilaste tähelepanule, õigemini tähelepanematusale. Selle faktori arvestamine selgitab aga vea olemust vähe, ei näita, miks viga tekkis just niisugusel, aga mitte teistsugusel kujul.

Teatud veakategooriate puhul on põhjust siiski tähelepanematusest rohkem kõnelda. A. Ptšolko püstitas hüpoteesi, et mitmekohaliste täisarvude liitmisel tehakse rohkem vigu nendes arvujärkudes, kus liidetavate summa on suurem kui teistes arvujärkudes. Selle kontrollimiseks anti niisugune ülesanne, milles kõige suuremaks arvuks oli üheliste summa, veidi väiksem kümnelite summa, veelgi väiksem sajaliste summa. See aga ei kinnitanud püstitatud hüpoteesi: õpilased tegid ikkagi kõige vähem vigu üheliste liitmisel, rohkem kümnelite ja kõige rohkem sajaliste liitmisel. Arvatavasti on siin tegemist väsimusega, tähelepanu nõrgenemisega, samuti tuleb arvestada seda, et viga madalamas järgus kutsub esile vea ka kõrgemas järgus.

Nii nagu iga teisegi aine õppimisel kujuneb matemaatika õppimisel õpilase ajukoos suur hulk seoseid ja seoste süsteeme. Vigade uurimine võimaldab mõningal määral jälgida nende seoste funktsioneerimist arvutusoperatsioonide sooritamisel.

P. Ševarjovi mitmed tööd näitasid¹, et algebraülesannete (ja ka teiste ülesannete) lahendamisel on suur osa üldistatud ehk «reeglitaolistel» assotsiatsioonidel. Niisugustel assotsiatsioonidel on järgmised iseärasused: iga assotsiatsioon vastab kindlale reeglile ja koosneb kahest liikmest. Esimeseks liikmeks on algebraalise avaldise (või selle osa) või äsja sooritatud tegevuse iseärasuste tunnetamine; teiseks liikmeks on suunitlus teatud intellektuaalse operatsiooni sooritamiseks. Reegli kui üldise seisukoha tajumine ei kuulu niisuguse assotsiatsiooni koosseisu.

Kui õpilane esmakordselt lahendab teatud algebra-

¹ П. А. Шеварев. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника. Издательство АПН РСФСР, Москва, 1959.

ülesannet, siis tunnetab ta selle iseärasusi, meenutab vastavat reeglit, teeb rea loogilisi järeldusi, mille abil on reegel rakendatav antud konkreetset juhul, ning lõpuks tekib tal suunitlus teatud intellektuaalse tegevuse sooritamiseks. Ülesannete korduval lahendamisel keskmised lülid — reegli meenutamine ja loogilised tuletised — kaovad, jäävad vaid protsessi äärmised lülid: antud matemaatilise avaldise üldiste iseärasuste tunnetamine tekitab kohe suunitluse teatud intellektuaalse tegevuse sooritamiseks.

Vigade tekkimise aluseks on vigaste assotsiatsioonide tekkimine ja nende hilisem aktualiseerumine.

Mingi assotsiatsiooni aktualiseerumise tarvilikeks ja piiravateks tingimusteks on

a) matemaatilise avaldise tajumine või tegevuse sooritamine, mis vastab selle assotsiatsiooni esimesele liikmele;

b) arusaamine ülesandest, mida saab lahendada selle assotsiatsiooni aktualiseerimise abil. See mõistmine on sageli väga ähmane;

c) suunitlus; hoiak ülesande lahendamiseks assotsiatsioonide aktualiseerimise teel, s. t. ilma reegleid meenutamata.

Näiteks analüüsib Ševarjov õpilaste $(a^m)^n = a^{m+n}$ -tüüpi vigu. Ta näitab, et reegli unustamisega ei saa antud juhul viga seletada, kuna samas kontrolltöös tuli õpilastel sõnastada reegel astme astendamise kohta (antud ülesanne oli kontrolltöös esimeseks küsimuseks, reegli sõnastamine kolmandaks). Vea põhjuseks oli siin mingisuguse vigase assotsiatsiooni aktualiseerumine, mille teiseks liikmeks oli astendajate liitmine. Kuidas võis niisugune assotsiatsioon tekkida ja missugune oli selle esimene liige?

Võib arvata, et õpilased segasid ära assotsiatsioonid, mis tekivad $(a^m)^n$ ja $a^m \cdot a^n$ puhul. Sel juhul on ära segatud, ühendatud kaks assotsiatsiooni ja saadud tulemuseks uus, kuid vigane assotsiatsioon.

Neid iseärasusi, mis on omased mõlemale algebralisele avaldisele — nii $(a^m)^n$ kui ka $a^m \cdot a^n$ — nimetatakse üldisteks iseärasusteks, neid aga, mis on omased ainult ühele nendest avaldistest, nimetatakse spetsiifilisteks iseärasusteks.

Seega võib väita, et vaadeldaval juhul oli vigase assotsiatsiooni esimeseks liikmeks mõlema avaldise üldiste

iseärasuste tajumine, teiseks liikmeks aga suunitlus astendajate liitmiseks.

Õpilastel tekkinud vigase assotsiatsiooni säilimist soodustas teatud meetodiline taust. Nimelt olid ülesannete kogus mõlemat tüüpi ülesanded (astmete korrutamine ja astme astendamise ülesanded) antud teineteisest eraldi, mitte aga paralleelselt. Piisava võrdlusvõimaluse puudumine eri tüüpi ülesannete lahendamisel ei võimaldanud õpilastel neid küllaldaselt diferentseerida, mis soodustaski vigase assotsiatsiooni säilimist. Õige assotsiatsioon astme astendamise kohta ei aktualiseerunud kontrolltöö ajal ka sellepärast, et ülesannete kogus oli astmete korrutamise kohta mitu korda rohkem ülesandeid kui astmete astendamise kohta.

Antud juhu vaatlemisel tekib täiesti seaduspäraselt kaks küsimust: 1. miks õpilased ei meenutanud ülesande lahendamisel reeglit? ja 2. miks nad hiljem, pärast reegli meenutamist ja sõnastamist, ei parandanud ära ülesandes esinevat viga?

Esimesele küsimusele vastamisel peame arvestama järgmist. Reeglit ei meenutanud nad sellepärast, et ülesanne oli neile harjumuspärane, tuttav, mistõttu nad asusid kohe lahendama. Vastavad uurimused näitavad, et reeglit meenutatakse ainult siis, kui ülesanne pole küllaldaselt tuttav, kui tekib küsimus: kuidas ülesannet lahendada?¹

Vastuse otsimisel teisele küsimusele tuleb lähtuda sellest, et assotsiatsiooni esimese liikmena tajuti ainult ülesande üldisi iseärasusi, mistõttu ei võetud seda kui astme astendamist. Sellepärast jäigi tehtud viga parandamata.

Ševarjov jagab vigased assotsiatsioonid struktuuri ja tekkimise tingimuste järgi kaheks tüübiks.

Esimest tüüpi iseloomustab asjaolu, et assotsiatsiooni esimesse liikmesse ei kuulu andmete mõningate tüüpiliste iseärasuste tunnetamine, s. t. sinna ei kuulu mingisugune tunnus, mis tegelikult peaks sinna kuuluma.

Selle näitena võiks tuua juba eespool üldisemal kujul

esitatud veaskeemi: $\left(\frac{a^{m_1} b^{m_2}}{c^{m_3}}\right)^n = \frac{a^{m_1+n} b^{m_2+n}}{c^{m_3+n}}$. Siin on

¹ П. А. Шеварев. К вопросу о природе алгебраических навыков. Ученые записки Государственного института психологии, т. II, 1941.

õpilased tajunud küll avaldise üldisi iseärasusi, puudub aga spetsiifiliste iseärasuste tajumine (astme astendamine). Sellepärast tekkiski assotsiatsiooni teises liikmes ebaõige suunitlus astendajate liitmiseks.

Samasse tüüpi kuulub ka viga algebraise murru taandamisel $\frac{a^5b^{12}}{a^c b^0} = \frac{a^5b^6}{a^3b^3}$, kus õpilased toimisid nii, nagu oleksid arvud 8, 12, 6 ja 10 mitte astendajad, vaid murru lugeja ja nimetaja kordajad. Ka siin puudub assotsiatsiooni esimeses liikmes spetsiifiliste tunnuste tajumine.

Teatud tingimustes on võimalik, et õpilane ei taju algebraülesannete lahendamisel andmete mõningaid olulisi iseärasusi, kuid lahendab ülesande siiski õigesti. See on võimalik siis, kui õpilane juba varem, enne kui ta ülesande andmeid tähelepanelikult tajub, teab, missugune operatsioon tuleb sooritada. Seda esineb sageli nii aritmeetikas kui ka algebras.

Kui õpilane lahendab niisugusel viisil teatud tüüpi ülesandeid, siis võib tal tekkida vigane assotsiatsioon. Selle esimeseks liikmeks on ülesande andmete ainult üldiste iseärasuste tajumine. Teiseks liikmeks on hoiak teatud tehte sooritamiseks, mis vastab antud ülesande tüübile. Niisugune vigane assotsiatsioon erineb õigest assotsiatsioonist ainult sellepoolest, et tema esimene liige on sisult vaesem kui õige assotsiatsiooni esimene liige, mahult aga laiem kui peaks olema.

Senini kui õpilasel on tegemist ainult antud tüüpi ülesannetega, s. t. nende ülesannetega, mille lahendamisel tekkis vigane assotsiatsioon, õpilane ei tee viga. Seetõttu vigane assotsiatsioon järjest tugevneb. Kuid varem või hiljem tuleb õpilasel tegemist teha teist tüüpi ülesannetega, mille andmetes esinevad samad üldised iseärasused, mis eelmisel tüübilgi, kuid spetsiifilised iseärasused on teised. Seepärast tuleb neid ülesandeid lahendada mitte nii nagu eelmist tüüpi, vaid teisiti. Kuna mõlemal ülesande tüübil esinevad ühised üldised iseärasused, siis varem tekkinud vigane assotsiatsioon aktualiseerub ka teise tüübi puhul. Selle aktualiseerumise tulemuseks on aga viga.

Kui õpilasel on tekkinud vigane assotsiatsioon, siis ei pruugi ta veel antud tingimustes alati teha viga. On võimalik, et teist tüüpi ülesannete puhul pöörab õpilane tähelepanu andmete spetsiifilistele iseärasustele, meenu-

tab vastavat reeglit ja lahendab ülesande vastavalt sellele. Uut tüüpi ülesannete puhul, millega õpilane pole varem palju kokku puutunud, toimub lahendamine just selliselt.

Kui õpilane lahendab teist tüüpi ülesandeid ja meenutab seejuures reeglit, siis kujuneb tal õige assotsiatsioon, vigane tavaliselt atrofeerub. Õige assotsiatsioon kinnistub lõplikult ainult sel juhul, kui õpilane lahendab õigesti küllalt palju uut tüüpi ülesandeid. Kui uut tüüpi ülesandeid lahendatakse vähem kui eelmist tüüpi, siis võib aktualiseeruda vigane assotsiatsioon.

Eespool vaadeldud vigase assotsiatsiooni iseärasuseks on see, et tema esimene liige oli sisult kitsam ja mahult laiem kui vaja. Ševarjov näitab, et selle kõrval esineb teine vigase assotsiatsiooni tüüp. Siia kuuluvad juhused, millal mõiste sisusse, mis vastab assotsiatsiooni esimesele liikmele, kuulub mingisugune ülearune tunnus, s. t. assotsiatsiooni esimene liige sisaldab midagi, mis sinna ei peaks kuuluma, mistõttu maht on liiga kitsas.

Niisugune assotsiatsioon aktualiseerub teatud alatüüpi kuuluvate ülesannete puhul, kuid ei aktualiseeru antud üldtüübi alla kuuluvate teiste alatüüpide puhul. Kõikidel juhtudel, kui see assotsiatsioon aktualiseerub, viib see õigetele tulemustele. Kuid ta ei aktualiseeru mõnedel juhtudel, kui õige assotsiatsioon peaks aktualiseeruma. Selle tõttu jääb ülesanne lahendamata või läheb lahenduskäik ebaõiget teed mööda.

Ühes kontrolltöös anti õpilastele taandada järgmised murrud:

$$\frac{a^9 y^5}{a y^{10}}; \quad \frac{x^{a+1} a}{x a^{1-v}}; \quad \frac{a^4 (x-y)^5}{a (x-y)^{15}}.$$

Esimesed kaks nendest ülesannetest lahendasid õpilased õigesti, kolmandat aga kas ei lahendatud üldse või tehti järgmisi vigu:

$$\frac{a^4 (x-y)^5}{a (x-y)^{15}} = \frac{a^4 x^5 - a^4 y^5}{a x^{15} - a y^{15}};$$

$$\frac{a^4 (x-y)^5}{a (x-y)^{15}} = \frac{a^4 (x^5 - y^5)}{a (x^{15} - y^{15})}.$$

Siin õpilased ei saanud aru sellest, et kolmas ülesanne on sama tüüpi kui kaks eelmist ning et siin tuleb murru lugejat ja nimetajat jagada avaldisega $a(x-y)^5$.

Nendel õpilastel kuulusid assotsiatsiooni esimese liikme alla ülesanded $\frac{a^n}{a^m}$ -tüüpi, kuid mitte $\frac{(A)^n}{(A)^m}$ -tüüpi, kus A on hulkliige. Siin kuulus assotsiatsiooni esimesse liikmesse tunnus, et astme aluseks on täht, kuid mitte sulgudes olev hulkliige.

Niisugune assotsiatsioon võis tekkida selle tõttu, et ülesannete kogus oli esimest tüüpi ülesandeid umbes kaks ja pool korda rohkem kui teist tüüpi ülesandeid. Võib arvata, et esialgu tekkis õpilastel õige assotsiatsioon, hiljem aga, kui seda tüüpi ülesandeid ei lahendatud, see kujunes ümber, esimese liikme maht muutus liiga kitsaks.

N. Mentšinskaja ja M. Moro jagavad kõik arvutusvead kahte põhilisse rühma sõltuvalt sellest, milles seisneb vea põhjus.¹ Esimese rühma puhul, nõndanimetatud mehhaaniliste vigade puhul, on vea põhjus antud operatsiooni sooritamise tingimustes. Vigade teise põhilise rühma tekkepõhjused peituvad aga aritmeetiliste teadmiste ja vilumuste omandamise kvaliteedis.

Mehhaanilised vead tekivad siis, kui teatud tingimuste mõjul (väsimus, huvi kadumine, ärritus, tähelepanu kõrvalekaldumine) nõrgeneb õpilasel teadlik kontroll ülesande lahendamise käigu üle. Siia rühma kuuluvad vead ei teki mitte sellepärast, et õpilane ei tunne teatud aritmeetilist operatsiooni või pole seda küllalt kindlalt omandanud, vaid nad tekivad ainuüksi õpilase tähelepanu, teadliku kontrolli nõrgenemise tõttu. Seetõttu on mehhaanilised vead muutliku iseloomuga, nad ei allu mingile kindlale skeemile. Mehhaaniliste vigade puhul võivad väärad vastused vahelduda õigetega, s. t. kord võib esineda ülesandes viga, järgmine kord aga sellesamas ülesandes mitte, ja isegi sel juhul, kui esimene viga oli jäänud parandamata.

Sellesse rühma kuuluvad ka niinimetatud perseverantsuse vead, mille puhul mingi arv pealetükkivalt püsib teadvuses. Selliseks veaks võib olla $43 + 7 = 70$; siin on kirjutatud summasse seesama number, mis esines teises liidetavas.

Mõnikord võib see viga avalduda assimilatsiooni kujul, s. t. üks arv muutub teisetaoliseks. Niisuguseks on viga

¹ Н. Л. Менчинская, М. Н. Моро. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. Москва, 1965.

$6 + 7 = 12$, kus tõenäoliselt teine liidetav on muutunud esimesesarnaseks ($6 + 6$).

Teadliku kontrolli nõrgenemine võib põhjustada ka vea, mis avaldub selles, et ei sooritata seda tehet, mida nõuab märk. Sellisel juhul võib tehe sõltuda ülesandes esinevate arvude iseärasustest. Näiteks arvud 56 ja 6 võivad luua hoiaku lahutamiseks, mis võibki teadliku kontrolli nõrgenemise tõttu toimuda, vaatamata sellele, et arvude vahel on teine märk (näiteks $56 + 6$).

Samasugust viga, s. t. tehtemärgi ignoreerimist võib põhjustada ka eelnevate tehete mõju, mida on tinglikult nimetatud tehete «inertsiks». See viga esineb näiteks siis, kui õpilane teeb üksteise järel mitmeid tehteid, kus tuleb liita; selle tõttu ei pööra ta lõpuks enam tähelepanu märgile ja sooritab liitmistehte ka mõne muu märgi, näiteks lahutamismärgi esinemise puhul.

Teiseks põhiliseks vigade liigiks on Mentšinskaja ja Moro järgi vead, mis tekivad mitte küllalt kindlate arvutusvilumuste tõttu. See liik jaguneb omakorda kaheks suureks alaliigiks, sõltuvalt sellest, missugune on teadmiste ja vilumuste aluseks olevate psüühiliste protsesside olemus.

Ühe alaliigi moodustavad need vead, mille aluseks on juhuslikud seosed. Need on nn. «ebareeglipärased» vead, mis esinevad kord niisugusel, kord teistsugusel kujul. Need vead ei ole püsivad, vaid muudavad sageli oma kuju, vead võivad vahelduda õige vastusega. Näiteks ühel õpilasel esines ülesandes $7 \cdot 8$ kolm erinevat vastust. Kord oli vastuseks vigaselt 54, teine kord esines õige vastus — 56, kolmandal korral oli aga kontrolltöös jällegi viga: $7 \cdot 8 = 58$. Seda liiki vigade põhjuseks on asjaolu, et vastav vilumus ei ole küllaldaselt kinnistunud.

Vigade teiseks alaliigiks on niisugused vead, mis baseeruvad reeglitaolistel seostel. Nende vigade puhul on õpilastel kujunenud reeglist, seadusest või valemist kindel, kuid väär käsitus. Niisugust reeglitaolist seost õpilane tavaliselt endale ei sõnasta, kuid toimib selle järgi. Seejärel annavadki need vead alati printsiipiaalselt ühesuguse veaskeemi ja on suhteliselt püsiva iseloomuga.

Mentšinskaja ja Moro toovad näite, kuidas II ja III klassi kontrolltöodes tehti ülesandes 1000:200 üle 50 vea, kuid kõik need esinesid ainult kahesugusel kujul: 50 ja 500. Mõnedel õpilastel on need vead väga püsivad, esine-

sid näiteks kahes kontrolltöös, mille vahe oli kolm ja pool kuud. Samasse liiki kuulub ka viga $96:16 = 10$.

Nende vigade aluseks on varem omandatud reeglite ülemäärane generaliseerumine, s. t. reegel omandab liiga laia mahu, mõned olulised lülid langevad välja ning reeglit hakatakse rakendama ka nendel juhtudel, mis tegelikult selle alla ei kuulu. Nii tekivad vead $1000:200 = 500$ või $100:200 = 50$. Nulliga lõppevate arvude liitmisel ja lahutamisel toimisid õpilased vastavalt reeglile: jätsid nullid kõrvale, sooritasid tehte, lisasid tulemusele nullid juurde. Asudes lahendama ülesandeid jagamise valdkonnast, toimisid nad täpselt samuti. Ülesandes $1000:200$ jagasid nad $10:2$, said 5, millele kirjutasid juurde ühe või kaks nulli.

Seoste süsteem õpilase mõtlemisprotsessis oli järgmine: ülesande tingimuste tajumine, nulli (või nullide) ärajätmine \rightarrow tehte sooritamine sajaliste ja kümnelistega nagu ühelistega \rightarrow saadud tulemusele nulli (või nullide) lisamine.

Analoogiliselt on tekkinud ka viga $96:16 = 10$. Õpilane saab selle tulemuse järgmiselt: $90:10 = 9$; $6:6 = 1$; $9 + 1 = 10$. Siin on jällegi liitmise ja lahutamise reeglit, mille puhul tehted sooritatakse eraldi kümneliste ja ühelistega, rakendatud jagamisel. Esitatud näidetes avaldus reegli laiendamine selles, et liitmise ja lahutamise asemel hakati reeglit rakendama ka teiste tehete puhul.

Teise alarühma kuuluvad ka vead, mis tekivad kahe sarnase reegli esinemise korral. Näiteks on kaks sarnast reeglit 9 liitmiseks ja lahutamiseks. Mõlemal juhul tuleb esialgu sooritada vastav tehe 10-ga, seejärel aga vastupidine tehe 1-ga. Viimast mõistavad õpilased mõnikord väga üldiselt ja ebamäärasel kujul (tuleb teha mingi tehe 1-ga). Vigase vastuse tekkimist soodustab siin õpilastel esinev tendents sooritada ühega sama tehe, mille nad sooritasid eelnevalt 10-ga. Sooritades näiteks tehet $15 + 9$, saadakse vastuseks 26, sest 15-le liidetakse 10 ja seejärel veel 1 (selle asemel, et lahutada 1).

Mentšinskaja ja Moro rõhutavad, et harjumusest tekkinud vigu ei saa vaadelda ühe rühmana, sest harjumus võib avalduda erinevates psüühilistes protsessides. Esiteks võib harjumus avalduda suunitluses harjumuslikule tegevusele. Sellisel juhul on ta kergesti kõrvaldatav tähelepanu tugevdamise teel. Sellesse piirkonda kuuluvad Mentšinskaja ja Moro poolt esitatud I rühma vead. Tei-

seks võib harjumus avalduda harjumusliku üldistuse kujul, mis tekitab äsja kirjeldatud II alagrupi vigu.

Mentšinskaja ja Moro vigade liigitust võib hinnata kui tõsist katset anda üldine ülevaade aritmeetikavigade psühholoogilistest alustest. Kuigi nimetatud autorite vigade jaotamise süsteem ei ole täiesti originaalne, vaid toetub näiteks perseverantsuse vigade osas H. Weimerile, on see nõukogude psühholoogias siiski üheks esimehseks katseks ulatuslikumalt üldistada ja süstematiseerida vigade tekkimise psühholoogilisi mehhanisme.

Käsitletud autorid ei vaatle matemaatikavigu mitte kõikides kooliastmetes, vaid piirduvad aritmeetikavigadega algklassides.

Kuid antud autorid ei ole endale püstitanud ülesannet selgitada vigade sõltuvust õpilaste individuaalsetest iseärasustest, s. t. nad vaatlevad vigade psühholoogilisi aluseid üldises plaanis väljaspool õpilaste individuaalsust.

Samuti on uurimuse piirkonnast välja jäänud üksikute vealiikide kvantitatiivne külg, ei ole selgitatud seda, missuguseid vealiike esineb õpilastel rohkem, missuguseid vähem.

G. Medeljan on uurinud V—VI klassi õpilaste aritmeetikavigu, mis tekivad osa leidmisel arvust ja arvu leidmisel osa järgi.¹ Vigade psühholoogiliste aluste analüüsimisel toetub G. Medeljan peamiselt Mentšinskaja ja Ševarjovi seisukohtadele. Vigade põhjuste uurimisel, vigade kategooriate väljaselgitamisel lähtub Medeljan assotsiatsioonidest, seostest ja nende süsteemidest.

G. Medeljan esitab oma uurimuses järgmised veakategooriad. Kõigepealt vaatleb ta vigu, mis tekivad seoste süsteemide nõrga diferentseerimise tulemusena. Autor lähtub sellest, et aritmeetikas nõrgalt edasijõudvad õpilased ei suuda materjali küllaldaselt diferentseerida. Uue materjali õppimisel, mis nõuab peent diferentseerimist, kasutavad need õpilased elementaarsemaid, harjumuslikke võtteid, millega nad on senini ülesannete lahendamisel edu saavutanud, nüüd aga viib nende võtete kasutamine vigadele. Niisugust kategooriat nimetab autor tinglikult nõrga diferentseerimise vigadeks.

¹ Г. А. Меделян. Психологический анализ ошибок при решении арифметических задач учащимся V—VI классов. Автореферат канд. дисс. Москва, 1953.

Seda tüüpi vigu on esinenud järgmise ülesande lahendamisel: leida arv, kui $1,5\% = \frac{3}{25}$. Seda tehakse tihti nii:

$$\frac{1,5 \cdot 100}{\frac{3}{25}} \text{ või siis } \frac{1,5 \cdot \frac{3}{25}}{100}. \text{ Õige lahendus oleks } \frac{\frac{3}{25} \cdot 100}{1,5}.$$

Siin on iseloomulik asjaolu, et nii õige kui ka vigase tehte puhul on joone peal kaks arvu, joone all aga üks.

Taoliste vigade tekkimisel tajutakse sageli ülesannet valesti, moonutatult, kusjuures nähakse ülesannet sellisena, mille lahendamisel on juba kogemusi. Näiteks üks õpilane sai järgmise ülesande: «Pärast seda, kui loeti $\frac{2}{9}$ raamatust, selgus, et järelejäänud osas oli 95 lehekülge rohkem kui loetud osas. Mitu lehekülge on raamatus?» Õpilane reprodutseeris ülesande tingimused järgmiselt: loeti $\frac{2}{9}$ raamatust, jäi $\frac{7}{9}$, mis sisaldas 95 lehekülge. Mitu lehekülge on raamatus? Siin õpilane transformeerib ülesande harjumuspäraselt sellele tüübile, mida ta varem on lahendanud.

Medeljan konstateerib, et uue ülesande samastamise vead vana, hästi tuntud ülesandega tekivad nõrgalt diferentseeritud assotsiatsioonisüsteemide aktualiseerumise tõttu. Ülesande üldiste iseärasuste selge tajumine ilma spetsiifiliste iseärasuste küllalt selge eristamiseta viibki antud juhul ebaõigele lahendusele.

Ülesande tingimuste diferentseerimata üldine tajumine avaldub mõnikord ka ebaratsionaalse lahendustee valikus. Näiteks ülesande puhul: leida $\frac{1}{5}$ arvust, millest $\frac{3}{5}$ on 27, on kõige ratsionaalsem lahendada see ühe tehtega: $27 : 3 = 9$. Paljud õpilased aga ei taju selle ülesande lahendamise spetsiifikat, tajuvad üldist, ühist varasemate ülesannetega ja selle diferentseerimata taju alusel valivad harjumusliku lahendustee: $27 : \frac{3}{5} = 45$; $45 \cdot \frac{1}{5} = 9$.

Käsitletud juhtudel kannavad õpilased õigustamatult varem omandatud seaduspärasused üle uuele materjalile. Teistel juhtudel toimub see ülekandmine aga vastupidises suunas, uelt materjalilt vanale, s. t. need reeglid ja lahendusvõtted, mis esinesid õpilase kogemustes viimastena, omandavad liiga laia mahu ning neid rakendatakse ka nendel juhtudel, kui neid rakendada ei tohi.

G. Medeljan esitab fakte, mis kõnelevad sellest, et

assotsiatsioonide väljakujunenud süsteemide muutumisel tekib «võistlus» väljakujunenud ja uute assotsiatsioonide vahel. Näiteks õpilasel on vaja leida $\frac{3}{8}$ arvust 8, ta ütleb, et 8 tuleb jagada $\frac{3}{8}$ -ga korrutamise teel. Seejärel teeb aga tehte õigesti, korrutab $\frac{3}{8} \cdot 8$.

Järgmise veakategooriana toob Medeljan esile vead, mis tekivad siis, kui puuduvad seosed ühtse süsteemi lülide vahel. Siin ei suuda õpilane õigesti lahendada ülesannet kujul $a : b$, kui tulemus pole täisarv, küll aga lahendab õigesti kujul $\frac{a}{b}$.

Nende vigade näiteid: $45 \text{ m} : 18 = 2 \text{ m } 9 \text{ cm}$, $18 : 5 = \frac{3}{5} = 1$; $18 : 14 = 1\frac{4}{18}$ ($\frac{18}{14} = 1\frac{4}{14}$ lahendab õigesti)

Autor märgib, et mõlematel juhtudel (nii $18 : 14$ kui ka $\frac{18}{14}$) peab toimuma üks ja sama tehe — jagamine. Assotsiatsioonid, mis on seotud täisarvu jagamisega täisarvuga, ja assotsiatsioonid, mis on seotud liigmurru teisendamiselega segaarvuks, peavad olema ühe süsteemi lülideks. Eespool vaadeldud vigade puhul aga on need ühtse süsteemi lülid jäänud eraldatuks. Õpilaste jaoks on «liigmurru muutmine segaarvuks» üks mõiste, «ühe segaarvu teisega jagamine» aga hoopis teine mõiste, mis ei ole esimesega seotud.

Omaette vigade liigina käsitleb Medeljan järgnevuse viga. Nende vigade olemus seisneb selles, et ühetüübiliste ülesannete lahendamisel õpilased kannavad nende lahendusmeetodid üle uutele ülesannetele, millel on varem lahendatud ülesannetega kas või väline sarnasus.

Näiteks anti üksteise järel kaks ülesannet: esimene — 2 töolist said kokku 360 rbl., kusjuures esimene sai $\frac{4}{5}$ sellest summast, mille sai teine. Kui palju raha sai kumbki tööline?; teine — 2 töolist said kokku 360 rbl., kusjuures teine sai $\frac{4}{5}$ võrra rohkem kui esimene. Kui palju raha kumbki sai?

Järgnevuse viga avaldub siin selles, et õpilased hakkavad teist ülesannet lahendama sarnaselt esimesega.

*

Kuigi nägime, et mitmed psühholoogid on vigade psühholoogiliste aluste uurimisel pööranud tõsist tähelepanu vastava liigituse loomisele ja selles osas teinud nii mõndagi, puudub ometi matemaatikavigade psühholoogiline klassifikatsioon, mida võiks aluseks võtta 5.—8. klassi õpilaste vigade läbitöötamisel. Kõige kaugemale niisuguse klassifikatsiooni loomisel on jõudnud vast Mentšinskaja, kes on aga probleemile lähenenud algklasside aspektist.

Õpilaste vigade psühholoogiliste aluste edasine uurimine peab võimalikult täpselt ja detailselt välja selgitama vigade psühholoogilised mehhanismid ja looma vigade psühholoogilise klassifikatsiooni.

Meie püüdsime oma uurimuses koondada tähelepanu järgmistele põhilistele probleemidele.

1. Näidata, et vead ei ole kaootilised, vaid et neil on oma kindlad põhjused.

2. Vigade psühholoogiliste mehhanismide avamise kaudu on võimalik vigu süstematiseerida, luua vigade liigitus.

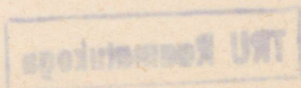
3. Vigade psühholoogilise analüüsi ja liigituse põhjal näidata vigade sõltuvust õpilaste individuaalsusest.

II. VIGADE LIIGID

Õpilaste matemaatikavigade psühholoogiliste aluste uurimiseks ja vigade liigituse loomiseks vajaliku faktilise materjali saamiseks fikseerisime 1964/65. õppeaastal Tallinna 46. Keskkooli ühes 5., 6., 7. ja 8. klassis (V-c, VI-b, VII-b ja VIII-b) kõik õpilaste matemaatika kontrolltööde vead.

Materjali kogumisel lähtusime järgmistest põhimõtetest. Vaatluse alt jätsime välja geomeetria õppimisel esinevad vead, sest siin on õpilaste intellektuaalse tegevuse laad oluliselt erinev vaimsest tegevusest aritmeetika ja algebra õppimisel. Geomeetria valdkonnas on õpilaste kujutlusvõimel, visuaalsel spatsiaalfaktoril hoopis olulisem kaal kui aritmeetika või algebra õppimisel. Seepärast piirdusime ainult aritmeetikas ja algebras tehtavate vigade fikseerimise ja analüüsiga.

Kontrolltööde vigadele pöörasime tähelepanu kaalutlusel, et need esindavad kõige tüüpilisemaid ja olulisemaid



eksimusi õpilase mõtlemises. Kontrolltöö tehakse alati enam või vähem õpitud ja harjutatud materjali põhjal, nii et juhuslikud asjaolud siin õpilase mõtlemist ja vigade tekkimist oluliselt ei mõjusta.

Fikseerimist ei leidnud vead, mis seisnesid selles, et õpilasel on ülesande lahendamine jäänud pooleli, kuigi mõttekäik on olnud õige.

Nii koguti 1004 viga, mis kanti ükshaaval perfokaartidele. Perfokaardid võimaldasid vigu objektiivselt ja mitmekülgset analüüsida ning kergendasid vigade liigituse väljatöötamist.

Vigade liigituse aluste leidmiseks tuli süveneda vigade psühholoogilisse olemusse. Selleks püüdsime analüüsida iga üksikut viga küllaldase põhjalikkusega, rekonstrueerida õpilase mõttekäiku vea tekkimisel ja teha oletusi viga põhjustavate tegurite kohta.

Loogiliselt õige liigituse saamiseks tuleb lähtuda ühelt aluselt, s. t. ühest kindlast tunnusest, mille põhjal liigitamine toimub. Valisime liigituse aluseks kujundilised ja mõistelised komponendid mõtlemises, kaemuslikud ja abstraktsed komponendid õpilase intellektuaalses tegevuses.

Mõistagi ei kujuta selline liigituse alus enesest üksikut tunnust, vaid pigem printsiipi, tervet tunnuste kompleksi, millest liigitamisel lähtutakse. Ometi on siin tegemist ühe põhimõttega, mis võimaldab liigitamisel kinni pidada formaalse loogika vastavatest reeglitest.

Selle aluse põhjal liigitades saame järgmised põhilised veakategooriad.

1. Prevaleeriva kujundi vead.
2. Kujundi ignoreerimise vead.
3. Diferentseerimisvead.
4. Metamorfoossed vead.
5. Sünteetilise tajumise vead.
6. Analüütilise tajumise vead.

1. PREVALEERIVA KUJUNDI VEAD

Prevaleeriva kujundi vead seisnevad selles, et matemaatilise avaldise mingi komponent (kas number, täht või märk) astub õpilase mõtlemisprotsessis otsekui konflikti mingi teise komponendiga, saavutab ülekaalu ja avaldab

sellele teisele komponendile sarnastavat mõju. Näiteks number võib osutada tähelisest komponendist tugevaks, hakata prevaleerima: $1 \cdot a = 1$.

Prevaleeriva kujundi vead on suures osas analoogilised Weimeri ladusus- ja perseverantsuse vigadega. Nimelt esineb siingi oma ladusus- ehk harjumuspärane moment — prevaleerima hakkab kujund, mille kasutamisega õpilane on harjunud; perseverantsus avaldub aga eelmõjuvigadena — prevaleerima hakkab eelnev komponent järgneva suhtes.

Prevaleeriva kujundi vigade olemuse iseloomustamiseks toome järgmised näited:

$$\begin{array}{r}
 1748,5 : 15 = 117,2 \\
 \hline
 15 \\
 24 \\
 \hline
 14 \\
 \hline
 108 \\
 105 \\
 \hline
 35 \\
 30 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4,2 : 0,1 = 4 \frac{1}{2} : 10 \\
 \hline
 4,2 \\
 10 \\
 \hline
 42
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 24,2 \\
 + 4,50 \\
 \hline
 28,70 \\
 - 180 \\
 \hline
 80
 \end{array}$$

Püüdes rekonstrueerida õpilase intellektuaalset tegevust esimese jagamise puhul, näeme, et siin on nagu konflikti astunud 4 (arvu 24 viimane number) ja 5 (jagaja, s. t. arvu 15 viimane number) ning ülekaalu on saavutanud 4.

Kümnendmurru teisendamisel harilikuks murruks $(0,2 = \frac{1}{2})$ ilmneb numbrilise 2 prevaleeriv mõju.

Analoogilise nähtusega on tegemist ka liitmisel: $4 + 4 = 4$.

Tüüpilisteks prevaleeriva kujundi vigadeks võime lugeda ka järgmisi vigu, mis esinevad liigmurdude teisendamisel segaarvudeks:

$$\begin{array}{r}
 \frac{833}{21} = 39 \frac{14}{39} \\
 \hline
 11 + 10 \\
 \hline
 12
 \end{array}
 = 1 \frac{11}{12}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{140}{25} = 5 \frac{125}{140} \\
 \hline
 \frac{55}{44} = 1 \frac{11}{14}
 \end{array}$$

Prevaleeriva kaemusliku kujundi mõju muudab mõtle-
mise staatiliseks ja vähepaindlikuks. Mõtlemisprotsessis
üks kujund «surub ennast peale», nii et ta hakkab valit-
sema ja jääb samaseks, vaatamata sellele, et ülesande tin-
gimused nõuavad tema muutumist. Näiteks isenimeliste
algebraaliste murdude lahutamisel leitakse küll ühine
nimetaja, kuid lugejatele laiendajaid ei leita. Lugejad
kirjutatakse kohe, nii nagu nad on, kõrvuti ühisele murru-
joonele:

$$\frac{3x}{4a^2b} - \frac{5g}{6ab^2} = \frac{3x - 5g}{24a^3b^3}.$$

Jättes antud juhul kõrvale vea ühise nimetaja leidmi-
sel, näeme siin prevaleeriva kujundi staatilist mõju mõt-
lemisele.

Analoogiline mõju esineb ka järgmiste algebraaliste mur-
dude liitmisel ja lahutamisel, murdudele laiendajate leid-
misel:

$$\frac{a^2 + b^2}{a-b} \overset{a-b}{\text{---}} + \frac{a}{1} \overset{a-b}{\text{---}} - \frac{b}{1} \overset{a-b}{\text{---}} =$$

$$\frac{a^2(a-b) + b^2(a-b) + a(a-b) - b(a-b)}{a-b}.$$

Siin on esimese liidetava murru laiendaja leidmisel
tehtud järgmine tehe:

$$(a-b) : (a-b) = a-b.$$

Murdude lahutamisel on esinenud niisugune viga:

$$\frac{a+b}{a-b} \overset{a-b}{\text{---}} - \frac{a-b}{a+b} \overset{a+b}{\text{---}} - \frac{4a}{a^2-b^2} = \frac{a^2-b^2 - a^2 + b^2 - 4a}{(a-b)(a+b)}.$$

Siin on sisuliselt toimitud nii:

$$\frac{\overbrace{(a-b)(a+b)}^{\downarrow}}{(a-b)(a+b)} : (a-b) = a-b$$

$$(a-b)(a+b) : \underbrace{(a+b)}^{\uparrow} = a+b$$

Käsitleva veakategooria võib esineda ka nii, et algeb-
ralise murru taandamisel muudab murru lugeja lõpuks
omasarnaseks ka nimetaja:

$$\frac{(b+a)(b-a)}{(b-a)(b-a)ab} = \frac{b+a}{(b+a)ab} = \frac{1}{ab}$$

Prevaleeriva kujundina võib esineda ka märk. Miinusmärk võib jääda püsima seal, kus ta ülesande tingimuste ja sisemiste seoste põhjal peaks kaduma:

$$\frac{-9}{-2} = -4\frac{1}{2}; \quad \left(-\frac{1}{2v}\right)^2 = \frac{-1}{4v^2}$$

$$\begin{aligned} x - 910 &= 1000 \\ 1000 - 910 &= 90 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Siin peaks olema} \\ 1000 + 910 &= 1910 \end{aligned}$$

Taolist mõju võib avaldada ka jagamismärk:

$$\begin{aligned} x : 240 &= 2 \\ 240 : 2 &= 120 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Siin peaks olema} \\ 2 \cdot 240 &= 480 \end{aligned}$$

Prevaleeriva kujundi vead võivad avalduda ka tegevuse ja selle resultaadi kaudu. Nii võib ühe komponendi sulgude ette toomine murru lugejas mõjutada mõtlemist nii, et niisugune operatsioon võetakse ette ka murru nimetajas, kuid jäetakse tähele panemata summa ruudu valem:

$$\frac{2x + 2y}{ax^2 + 2axy + ay^2} = \frac{2(x + y)}{axy(2ax + y)}$$

Prevaleeriva kujundi mõju võib avalduda veel selles, et mõtlemisprotsessis lähtutakse ainult kaemuslikust kujundist, kusjuures selle kujundi transleerimine sõnasutatud reegliks, tegevusjuhiseks on nõrk.

18% leidmisel arvust 315 sooritatakse tehe $18 \cdot 315 = 5670$. Siin ei osata käsitada kujundit 18% kujundina 0,18, s. t. 18 sajandikku, vaid lähtutakse ainult kujundist 18.

Vaadeldav veakategooria avaldub sageli mõnede matemaatiliste elementide isoleeritud tajumises, esilekerkimises, mille tõttu matemaatilise avaldise teatud kompo-

nendid otsekui kistakse välja avaldise üldisest struktuurist, matemaatilisest «kontekstist» ja käsitatakse neid eraldi seisvatena avaldiste seostest ja sõltuvustest.

Küllaltki tüüpilised on siin taandamisvead, mis seisnevad selles, et näiteks algebralise murru lugejas oleva hulkliikme mõned liikmed taandatakse nimetajas oleva korrutise ühe teguriga nende välise sarnasuse põhjal, prevaleeriva kujundi mõjul, arvestamata seejuures sisemisi seoseid. Niisugusteks vigadeks on näiteks

$$\frac{4x + \cancel{x} - y}{(\cancel{x} - y)x} = \frac{4x}{x} \cdot \frac{(\cancel{2x} + y) - (2x + y)}{(2x - y)(\cancel{2x} + y)} = \frac{-(2x + y)}{2x - y};$$

$$\frac{\cancel{2}}{2x + y} = \frac{1}{x + y}$$

Nendele lähedane on ka taandamisviga

$$\frac{\cancel{7}}{18} \cdot \frac{10}{\cancel{7}} = \frac{10}{18},$$

kus pole arvestatud arvude sisemisi seoseid, murdude jagamise reeglit, vaid on lähtunud välisest pildist, kaemuslikust kujundist. Siingi ilmneb selle kujundi sõnasutatud reegliks transleerimise nõrkus.

Siia kategooriasse kuuluvad vead, mis avalduvad selles, et ülesande lahendamisel toetutakse ainuüksi välisele pildile, kujundile, arvude naabrusele. Näiteks:

$$6x = 2, \quad x = 3.$$

Siin on ilmselt teostatud tehe 6 : 2, s. t. on jagatud arvud selles järjekorras, nagu nad võrrandis paiknevad, arvestamata nendevahelisi seoseid.

Vaatluse all olev vigade liik võib olla seotud ka nullide ärajätmisega vastusest. Sel juhul lähtutakse otsekui sellest, et «null ei ole number» ning et nulli olemasolu ei muuda oluliselt arvulise avaldise välist pilti, kujundit.

Näiteid selle kohta:

$$186,37 : 23 = 8,13 \text{ (õige } 8,103)$$

184

23

23

70

69

1

$$5992856 : 856 = 71 \text{ (õige } 7001)$$

5992

856

856

Samalaadilisi vigu võib esineda koma ärajätmisel. Siin avaldub kujundi prevaleeriv mõju selles, et koma ärajätmine ei muuda põhiliselt kujundit, arvkujund jääb samaks:

$$438000 : 5000 = 876 \text{ (õige } 87,6).$$

Prevaleeriva kujundi vigu esineb 5.—8. klassi õpilaste matemaatilises mõtlemises kõige rohkem, nad on teiste weakategoriate seas esikohal (vt. graafik lk. 33).

2. KUJUNDI IGNOREERIMISE VEAD

Sellesse kategooriasse kuuluvad vead, mis tekivad seetõttu, et matemaatilise avaldise mingeid ilmseid väliseid tunnuseid (näiteks märke, astendajat, koma) ei võeta arvesse. Seega esineb siin nii- või teistsugusel kujul kujundi teatud komponentide ignoreerimine, neid lihtsalt ei märgata või ei tajuta õigesti. Kujundi ignoreerimise vigu võime pidada põhimõtteliselt vastandlikeks eelmisele weakategoriale — prevaleeriva kujundi vigadele, mille aluseks oli just kujundi tugevus.

Alustame antud vealiigi analüüsimist järgmiste näidetega:

$$1) 22 - \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2},$$

$$2) + 7 + (+ 15) = 8,$$

$$3) \frac{4x + 3x}{x + x} = \frac{x}{x + x}.$$

Esimeses näites ei ole ilmselt õigesti tajutud arvu 22, teises lahutatakse liitmise asemel ja saadakse $15 - 7 = 8$ ning kolmandas ignoreeritakse täielikult plussmärki ja talitatakse nii, nagu oleks seal miinus.

Plussmärgi ignoreerimisest johtub seegi, et murdude liitmise puhul leitakse küll ühine nimetaja, kuid ühisel murrujoonel lugejaid ei liideta, nagu polekski nende vahel plussmärki, vaid hoopis korrutatakse:

$$\frac{m - 3 \overbrace{m+3}}{1} + \frac{7 \overbrace{m+3}}{m+3} = \frac{7(m+3)(m-3)}{m+3}$$

Märkide ignoreerimise, nende ebaõige tajumise tõttu on tekkinud ka niisugune viga:

$$\begin{aligned} 6x - 4 - 18 + 4x &= 3x + 6 \\ -3x + 10 &= 6 - 14. \end{aligned}$$

Siin esineb: $-4 - 18 = 14$; (samuti $6x + 4x = 10$).

Miinusmärgi tähele panemata jätmise tõttu võib tekkida hoiak nimetajate korrutamiseks, samal ajal kui lugejas põhimõtteliselt õigesti tehakse lahutamistehe (jätame antud juhul kõrvale märgivea):

$$\frac{a+b}{10} - \frac{a-b}{10} = \frac{a+b-a-b}{100}$$

Kujundi väliste tunnuste ignoreerimisega on tegemist ka juhul:

$$\begin{aligned} 5x + 30 &= 120 \\ 5x &= -30 + 120 \\ 5x &= 150 \end{aligned}$$

Siin on 120-st lahutatud 30 ja saadud 150, ilmselt ei ole miinusmärk õpilase teadvusesse jõudnud.

Matemaatilise avaldise ebaõigest tajumisest ja tõlgendamisest annab tunnistust viga:

$$\begin{aligned} (2x - 1) - (6x - 4) &= 0 \\ 2x - 24x &= 0 \end{aligned}$$

Siin on miinusmärgi ignoreerimise tõttu lahutamise tehe asendatud korrutamise ja $6x - 4$ asemel tehtud $6x \cdot 4$ (kadunud on ka -1).

Samuti võib selles veakategoorias esineda korrutamise asemel liitmist:

$$\frac{a^2 + 1}{2a} - \frac{a - 1}{2} = \frac{a^2 + 1 - 2a + a}{2a}.$$

Siin on $a \cdot a$ asemel $a + a$.

Lahutamisel võidakse ära vahetada vähendatav ja lahutatav:

$$\frac{3 \cdot 2 - 1}{5} - \frac{13 - 2}{2} = 5 \frac{1}{2} - 1 = 4 \frac{1}{2}.$$

Kujundi ignoreerimine võib viia ka selleni, et murru taandamisel tehakse jagamise asemel hoopis lahutamise tehe:

$$\frac{h \cdot 15n^3}{5n^2 \cdot 16h^3} = \frac{10n}{16h^2}.$$

Antud murru taandamisel 5-ga on lugejas 15:5 asemel tehtud tehe $15 - 5 = 10$.

Analoogiline viga esineb ka juhul

$$\frac{5x}{x(x-1)} = \frac{4x}{x-1},$$

kus jagamise asemel on tehtud $5x - x = 4x$.

Matemaatilise avaldise teatud tunnuste ignoreerimise tõttu esineb ka komavigu, nagu näiteks:

$$\begin{array}{r} 3,1 \\ \underline{21,0} \\ 31 \\ \underline{62} \\ 6,51 \end{array}$$

Siin on tulemuses komaga eraldatud kaks kohta, mitte aga üks, nagu vaja.

Korrutamise puhul $600 \cdot 736 = 4416$ toimitakse nii, nagu polekski olemas kahte nulli.

$80 \cdot 1495 = 11960$; siin jääb samuti null lõppu lisamata. Arvus 80 ei hakka null oma rolli mängima eriti selle tõttu, et korrutis niikuinii juba lõpeb nulliga ja nulli lisamist ei peeta vajalikuks.

Hulkliikmete koondamisel võime täheldada, et arvulised kordajad otsekui jäävad kõrvale õpilase sensoorsest väljast:

$$3a^2b - 4a^2b^2 + 5a^2b + 8a^2b^2 = 8a^2b.$$

Siin on koondatud valesti $-4a^2b^2$ ja $8a^2b^2$, ignoreerides arvuliste kordajate erinevust.

3. DIFERENTSEERIMISVEAD

Diferentseerimis- ehk eristamisraskustega laiemas mõttes on meil tegemist iga vealiigi puhul. Tekib ju viga selle tõttu, et õpilane ei oska vahet teha õige ja väära tegutsemisjuhise vahel, ajab midagi segamini, ei tee vahet oluliste ja ebaoluliste tunnuste vahel.

Antud juhul me käsitame eristamist veidi kitsamalt ja mõtleme diferentseerimisvigade all niisuguseid vigu, kus õpilane ei tee vahet kahe teatud mõttes sarnase tegutsemisviisi vahel, ta ei suuda kaht teineteisele lähedast tehet diferentseerida.

Tüüpilisi diferentseerimisvigu esineb murdudega (ja segaarvudega) jagamise puhul. Teatavasti nõuab reegel, et murruga jagamise puhul tuleb korrutada tema pöördarvuga. Reegli õige rakendamine nõuab, et õpilase teaduses aktualiseeruksid 3 olulist momenti:

1. just nimelt $j a g a j a s t$ tuleb moodustada pöördarv;
2. just nimelt $p ö ö r d a r v$ tuleb moodustada;
3. saadud pöördarv tuleb jagatavaga korrutada, s. t. tuleb korrutada arvud nii lugejas kui ka nimetajas.

Nende kolme olulise tunnuse ärasegamine võib tekitada järgmisi vigu:

$$\frac{5}{12} : 1 \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 4} = \frac{25}{48}.$$

Antud juhul on jagamise asemel küll korrutatud, kuid mitte pöördarvuga, viimane on jäänud moodustamata, jagaja lugejat ja nimetajat ei ole ära vahetatud.

$$24 : \frac{3}{10} = \frac{3}{24 \cdot 10}; \quad 8 : \frac{5}{6} = \frac{5}{8 \cdot 6}.$$

Siin näeme, et pöördarv on küll moodustatud, kuid hoopis jagatavast, mitte aga jagajast.

Selle vealiigi puhul esineb ebaõigeid üldistusi, mille olemust illustreerime järgmiste näidetega:

$$2 \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot 23} ;$$

$$\frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{4}{5 \cdot 8} = \frac{1}{10} .$$

Siin on tegemist ilmse ületaotlusega, õpilasel on kujunenud «oma reegel»: kui murdude jagamisel oli vaja korrutada, siis järelikult korrutamisel tuleb jagada, s. t. korrutada pöördarvuga.

Reegli väära generaliseerumisega on tegemist ka järgmistel juhtumitel:

$$3 \frac{2}{5} \cdot 4 \frac{3}{5} = \frac{17:23}{5:5} ; 42 \cdot \frac{3}{4} = \frac{42:3}{4} .$$

On selge, et siin on murruga korrutamisel jagatud ja seda sõna otseses mõttes, on jagatud lugeja lugejaga ja nimetaja nimetajaga.

Diferentseerimisvigade alla kuulub ka

$$4 \frac{5}{12} - \frac{5}{6} = 4 \frac{5}{6} .$$

Õpilase mõttekäigu rekonstrueerimisest nähtub, et siin on lahutamisel aluseks võetud murdude korrutamine, kus korrutatakse eraldi lugeja ja nimetaja. Siin on püütud lahutada nii lugejas kui ka nimetajas. Et aga $5 - 5$ annaks nulli, on see tehe jäetud tegemata ja on lahutatud ainult nimetajas: $12 - 6 = 6$.

Üldiselt iseloomustab diferentseerimisvigu mõisteliste elementide nõrkus mõtlemisprotsessis, reegli sõnastamise nõrkus, mille tõttu sõnalisel eristamisel tehakse vigu. Selles suhtes sarnanevad diferentseerimisvead eelmise veakategooriaga, kujundi ignoreerimise vigadega, mille puhul samuti ilmses reegli sõnastamise nõrkus. Erinevus on aga selles, et diferentseerimisvigade puhul kujund ei dikteeri otseselt midagi, näiteks murruga jagamisel ei näita kujund, et siin tuleb pöördarvuga korrutada. Kujundi mõju reegli sõnastamisele on siin väiksem, mille tõttu siin ei ole tegemist kujundi ignoreerimisega.

4. METAMORFOOSSED VEAD

Metamorfoossed ehk muutumisvead avalduvad matemaatilise kujundi teatud elementide muutumises või kadumises. Väga tüüpilised on siin kadumistähtused, nagu näiteks:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \right) \cdot 2 = \frac{9+3+4}{36} \quad (\text{kaob } 2)$$

$$0,892 : 0,01 = 9,2 \quad (\text{õige } 89,2)$$

$$4a^2b \cdot 5ab = 20a^2 \quad (20a^3b^2)$$

$$4ab \cdot 6a^2 = 24b \quad (24a^3b)$$

$$1 \frac{5}{21} + 2 \frac{7}{30} = 3 \frac{50+49}{210} = 3 \frac{99}{210} = \frac{33}{70} \quad (\text{kaob } 3)$$

$$\frac{a + \overbrace{b^{b-a}}}{b} - \frac{\overbrace{2b^b}}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{b(b-a)} \quad (\text{lugejast on kadunud } -2b^2).$$

Kaduda võib ka märk:

$$\frac{-(a^2 + b^2)(b-a)}{b(b-a)(a^2 + b^2)} = \frac{1}{b}.$$

Omapärane kadumine esineb järgmise metamorfoosse vea puhul:

$$\left(1 \frac{2}{5} \right)^2 = 49.$$

Siin on segaarv kõigepealt teisendatud liigmurruks

$$1 \frac{2}{5} = \frac{7}{5},$$

viimase astendamisel on aga ainult lugeja

ruutu võetud $7 \cdot 7 = 49$, nimetaja aga on kadunud.

Kaduda võib korraka koguni mitu elementi

$$85 \frac{3^e}{5} + 15 \frac{5^s}{6} = 10 \frac{18}{30} \quad \left(\text{õige } 100 \frac{18+25}{30} \right).$$

Segaarvulises summas on kadunud täisosast null ja murdosas lugejast üks liidetav (25).

Kadumise kõrval esineb metamorfoossete vigade valdkonnas ka mitmesuguseid muundumisi, nagu näiteks

$$\begin{array}{r|l} 1344672 & 168 \\ \hline 1344 & 7004 \\ \hline 672 & \\ \hline 672 & \end{array}$$

Õigeks jagatiseks peab olema 8004. Siin on jagatises 8 asendunud 7-ga, kuigi korrutatud on tegelikult 8-ga. Õpilane on küll kirjutanud 7, kuid on seda tajunud kui 8.

Teatud muundumised võivad olla tingitud arvude välisest sarnasusest:

$$12 \frac{1}{2} + 73 \frac{3}{10} = 35 \frac{5+3}{10} \left(85 \frac{5+3}{10} \right);$$

$$(-6,8) + (-0,09) = -0,8 - 0,09(-6,8 - 0,09).$$

Teatud sarnasus 3 ja 8, 6 ja 0 vahel võis viia vea tekkimisele.

Kuid kõiki muundumisi ei saa me sarnasusega seletada, nagu näiteks:

$$5 \frac{6+3+4}{8} = 5 \frac{13}{8} = 16 \frac{5}{8};$$

$$\frac{x(x-y)}{x(x+y)} \cdot \frac{xy(x+y)}{xy} = \frac{x(x-y) \cdot xy}{x(x+y) \cdot xy(x+y)}.$$

Mõnikord avalduvad metamorfoossed vead selles, et tekst kirjutatakse valesti tahvlilt ära. Nii kirjutatakse 3,395 asemel 2,395, asendatakse korrutamismärk jagamismärgiga jms.

On selge, et metamorfoossete vigade olemus seisneb kujundiliste elementide nõrkuses õpilaste vaimses tegevuses. Sellest kaemusliku kujundi nõrkusest tulenevadki kõik kadumised, muundumised ja väärad tajumised.

Kujundi nõrkus võib avalduda ka kujutluse nõrkuses. Sellel tasandil kuuluvad metamorfoossete vigade hulka ka peastarvutamise vead, mis johtuvad arvkujutluse nõrkusest, nagu

$$4 \frac{5}{12} \cdot 30 = \frac{51 \cdot 30}{12} \quad (\text{siin: } 48 + 5 = 51)$$

$$\begin{array}{r}
 \times 39 \\
 \hline
 194 \\
 \hline
 156 \\
 271 \quad (\text{peab olema } 351) \\
 39 \\
 \hline
 5766
 \end{array}$$

Siin on teises osakorrutises jäetud 27-le (3×9) liitmata «meeles» peetud 8.

5. SÜNTEETILISE TAJUMISE VEAD

Analüüs ja süntees on mõtlemisoperatsioonid, mida teineteisest on raske eraldada. Matemaatikaülesandeid lahendava õpilase vaimne tegevus on kindlasti analüütilis-sünteeiline tegevus, milles mõlemad operatsioonid on tihedates vastastikustes seostes. Kaldume siiski arvama, et teatud ülesannete puhul on ülekaalus süntees, teiste ülesandetüüpide puhul aga analüüs. Selles plaanis saame analüüsi ja sünteesi osa eristada ainult ulatuslikumate algebraliste avaldiste puhul, lihtsamate aritmeetikatehete juures ei ole see võimalik.

Ulatuslikuma algebralise avaldise olemuse mõistmiseks peab õpilane tajuma seda kui üht tervikut. Esikohal on siin sünteeiline tajumise. Et õpilane näeks avaldises $81x^2 + 72x + 16$ summa ruutu, tuleb tal seda tajuda kui üht tervikut koos selle osade vastastikuse sõltuvusega.

Mõistame, et sünteeetilise tajumise vead tekivad matemaatiliste avaldiste sünteeetilisel tajumisel. On ilmne, et siin on tegemist kujundiliste elementide nõrkusega, I signaalsüsteemi lünkadega õpilaste vaimses tegevuses.

Antud veakategooriat iseloomustavad vead, mis tekivad õpilase mõttekäigus hulkliikme teguriteks lahutamisel valemi kasutamise, mõttekäigus, mis liigub hulkliikmelt korrutisele.

Sünteeetilise tajumise nõrkusest annavad tunnistust vead:

$$a^2 - 2ab + b^2 - x^2 = (a^2 - 2ab) + (b^2 - x^2);$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - x^2 = (a + ab)(a - ab),$$

kus ei osata avaldises näha vahe ruutu. Mõnikord nähakse seda jälle valesti:

$$3m^2 - 48 + 12 = (m - 4)^2;$$

$$\frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 + 2a + 4} = \frac{(a - 2)^2}{(a + 2)^2}.$$

Viimastes näidetes tajutakse vahe või summa ruutu ka seal, kus seda tegelikult pole.

Antud veakategooria võib esineda ka niisugusel kujul, et hulkliiget, mis kujutab enesest summa või vahe kuupi, tajutakse summa ruuduna:

$$a^3 + 30a^2 + 300a + 1000 = (a + 10)^2;$$

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a + 2)^2.$$

Analoogilised on ka vead, kus teguriteks tuleb lahutada ruutude vahe:

$$9m^2 - 9 = 9(m^2 + 1)(m^2 - 1).$$

6. ANALÜÜTILISE TAJUMISE VEAD

Selle kategooria alla me kanname vead, mis tekivad matemaatilise avaldise analüütilisel tajumisel, ühe kompaktsema terviku liigendamisel koostisosadeks. Läh-tume seisukohast, et nende vigade tekkimise aluseks on mõistelist elementide, sõnalis-loogiliste seoste nõrkus õpilaste vaimses tegevuses.

Analüütilise tajumise vigade alla kuuluvad näiteks vead, mis tekivad õpilase mõttekäigus üleminekul hulkliikmete korrutamisel summa ja vahe ruudu ning kuubi valemi kasutamisele.

Nii summa kui ka vahe ruudu valemi rakendamisel «leiutavad» õpilased väga mitmesuguseid võimalusi:

$$\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2};$$

$$\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)^2 = \frac{a^2 + 9}{a^2 + a^2};$$

$$\left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)^2 = \frac{(a - 2)^2}{(3a)^2};$$

$$\left(\frac{a}{2} - 2\right)^2 = \frac{(a-2)^2}{4};$$

$$\left(\frac{a}{2} - 2\right)^2 = \frac{a^2 - 4a + 4}{4}.$$

Taolisi vigu esineb ka summa kuubi valemi rakendamisel:

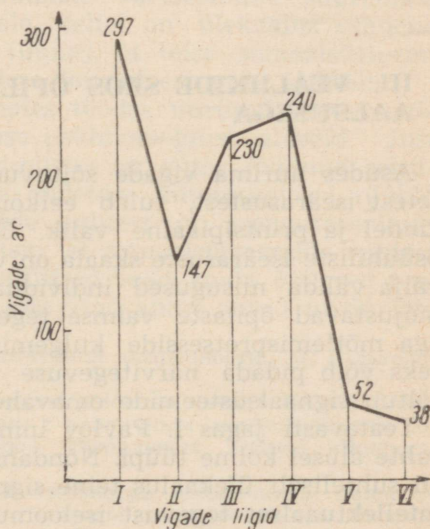
$$(2 + a)^3 = 8 + 12a + 6a^2 + a^3;$$

$$(a - 2)^3 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8.$$

On ilmne, et need vead annavad tunnistust mõisteliste elementide nõrkusest õpilaste mõtlemises, sõnaliste formuleeringute halvast säilimisest.

*

Järgnevalt esitatud diagramm näitab, kui palju vigu igas veakategoorias esineb. Nendest andmetest selgub, et vealiikide pingereas on esikohal prevaleeriva kujundi vead, mille tekkimise aluseks on kujundiliste komponentide tugevus ja mõisteliste komponentide nõrkus õpilase mõtlemises. See seaduspärasus on täiesti koos-



kõlas murdeealiste õpilaste mõtlemise arengu seaduspärasustega. Teatavasti iseloomustab murdeealiste mõtlemist abstraktse, üldistava mõtlemise suhteliselt tagasihoidlik arengutase.

Kuid selle kõrval näitab metamorfoosete ja kujundi ignoreerimise vigade küllaltki kõrge esinemissagedus, et õpilaste vaimses tegevuses võib esineda ka vastupidist puudust — kujundiliste elementide nõrkust.

Mõistagi on ülimalt tõenäoline, et diagrammis esitatud absoluutarvude taga peitub olulisi individuaalseid erinevusi. Antud juhul me ei pääse mööda vajadusest analüüsida üksikute vealiikide esinemist õpilaste individuaalsuse aspektist lähtudes.

Niisugune analüüs on seda olulisem, et eespool esitatud vigade liigitus püsib suurel määral hüpoteetilisel pinnal. Õpilase mõttekäigu rekonstrueerimine, vigade tekkepõhjuste otsimine kujundiliste ja mõisteliste vaimse tegevuse komponentide nõrkuses või tugevuses võib olla küll tõenäoline, kuid jääb esialgu ometi oletuseks. Oma oletusi suudaksime tõestada ainult sel juhul, kui meil õnnestuks näidata, et individuaalsed erinevused õpilase vaimse tegevuse konkreetsetes ja abstraktsetes komponentides on seotud ka vastavate veakategooriatega.

III. VEALIIKIDE SEOS ÕPILASE INDIVIDU- AALSUSEGA

Asudes uurima vigade sõltuvust õpilaste individuaalsetest iseärasustest, tuleb eelkõige viimaste osas teha kindel ja printsiipaalne valik. Õpilaste individuaalsete psüühiliste iseärasuste skaala on väga lai. Eelkõige tuleks välja valida niisugused individuaalsed iseärasused, mis mõjustavad õpilaste vaimse tegevuse üldist laadi, eriti aga mõtlemisprotsesside kulgemist. Selliseks iseärasuseks võib pidada närvitegevuse spetsiaalset tüüpi, mis sõltub signaalsüsteemide omavahelisest suhtest.

Teatavasti jagas I. Pavlov inimesed signaalsüsteemide suhte alusel kolme tüüpi. Nõndanimetatud mõtleja-tüübil on suhteliselt ülekaalus teine signaalsüsteem. Selle tüübi intellektuaalset tegevust iseloomustab üldiselt sõnaline, abstraktne laad. Tegelikkuse vahetutel muljetel, kujun-

ditel on siin hoopis tagasihoidlikum osa. Mõtleva-tüübile on omane analüüs, tegelikkuse jagamine osadeks, elementideks, kategooriateks, tegelikkuse analüütiline tajumine. Teiseks tüübiks on kunstniku-tüüp, kellel on ülekaalus esimene signaalsüsteem. Seepärast tajubki kunstniku-tüüp tegelikkust elavalt, värvikalt ja terviklikult, temale on omane süntees, tegelikkuse sünteetiline tajumine. Konkreetset kaemuslikul kujundil on tema vaimses tegevuses peamine osa. Kolmanda tüübina esitas I. Pavlov keskmise tüübi, kellel on mõlemad signaalsüsteemid suhtelises tasakaalus, mis tingib ka tasakaalu tema vaimses tegevuses kujundi ja abstraktsete komponentide vahel.

Mitmed uurijad on jälginud signaalsüsteemide suhte seost inimese vaimse tegevusega, selle suhte avaldumist ühes või teises konkreetsetes tegevuses (näiteks matemaatika õppimises). N. Leites märgib, et signaalsüsteemide suhe ei määra üldiste vaimsete võimete taset, kuid sellest suhtest sõltub mõistuse teatud omapära.¹ Seega pole mõtleja-tüüp targem kunstniku-tüübist, erinevus on vaid mõtlemislaadis.

B. Kossov näitab oma uurimuses, et signaalsüsteemide suhe mõjutab teatud viisil õppematerjali omandamist.² Sellest tööst selgub, et algebraülesannete lahendamisel tekitab mitteoluliste tunnuste varieerimine suuremaid raskusi nendele õpilastele, kellel on ülekaalus esimene signaalsüsteem. Samuti ilmnes, et teise signaalsüsteemi ülekaal soodustab sõnaliste formuleeringute säilimist.

V. Krutetski on mitmetes töodes uurinud matemaatilise andekuse ja andetuse psühholoogilisi aluseid. Just viimast käsitlevates uurimustes on autor jõudnud seisukohale, et matemaatilise andetuse mitmesugused tüübid sõltuvad signaalsüsteemide suhtest ja arengutasemest.³ Samas väidab V. Krutetski, et signaalsüsteemide suhtest sõltuvad ka teatud spetsiifilised vead, mida õpilased teevad oma töödes. Et aga märgitud autor antud uurimuses

¹ Н. С. Лейтес. Об умственной озаренности. М, издательство АПН РСФСР, 1960.

² Б. Б. Коссов. Особенности усвоения начальных алгебраических знаний школьниками с различным литологическим соотношением первой и второй сигнальных систем. «Вопросы психологии» 1956, № 4.

³ В. А. Крутецкий. К типологии школьников, малоспособных к математике. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников», М, издательство «Просвещение», 1964.

spetsiaalselt vigade probleemiga ei tegele, jääb esitatud väide puht hüpoteetilisele pinnale.

V. Krutetski seisukoht vajab lahtimõtestamist. Spetsiifiliste vigade sõltuvus signaalsüsteemide suhtest, s. t. närvitegevuse spetsiaalsest tüübist võib tähendada kõigepealt seda, et esineb niisuguseid vigade liike, mis on omased ainult mõnele närvitegevuse tüübile, puuduvad aga teistel. Antud seisukohta võib aga tõlgendada ka nii, et spetsiifiliste vigade sõltuvus signaalsüsteemide suhtest tähendab seda, et närvitegevuse spetsiaalne tüüp määrab teatud vealiigi esinemise sageduse, s. t. ühel tüübil esineb teatud liiki vigu märgatavalt rohkem kui teisel.

Meie peame õigeks viimast seisukohta, millest lähtudes püstitasime ka oma töö hüpoteesi: õpilaste matemaatikavigade seos signaalsüsteemide suhte tüpoloogiliste iseärasustega avaldub selles, et kunstniku-tüüp teeb rohkem niisuguseid vigu, milles avaldub mõistelistel komponentide nõrkus, mõtleja-tüüp aga selliseid vigu, milles avaldub kujundiliste komponentide nõrkus. Selle hüpoteesi poolt kõnelesid ka esialgsed katseandmed.¹

Hüpoteesi kontrollimiseks oli vajalik kõikides nendes klassides, kust vead olid kogutud, määrata kindlaks õpilaste närvisüsteemi spetsiaalne tüüp. Tüübi eksperimentaalsel kindlaksmääramisel kasutasime M. Borissova meetodikat.²

Selle meetodika järgi toimub kaks seeriat katseid, millest üks on suunatud kujundi, sünteetilise taju tugevuse, esimese signaalsüsteemi taseme kindlaksmääramiseks; teine aga analüütilise taju, erinevate tunnuste märkamise ja nende verbaliseerimise, teise signaalsüsteemi taseme kindlaksmääramiseks. Esimeses seerias on seega tegemist visuaalse kujundi äratundmisega, teises aga tajutud visuaalse kujundi verbaal-mõistelise kirjeldamisega.

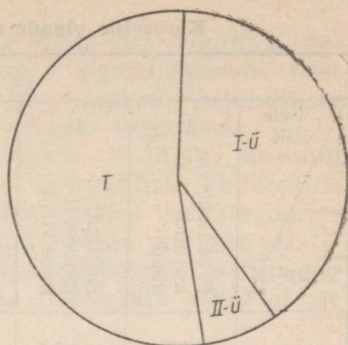
Katsematerjalina kasutati joonistatud puulehtede kujutisi (tušijoonised). Esimeses katseseerias eksponeeriti katseisikule ühe objekti kujutist lühikese aja jooksul

¹ J. Sõerd. Õpilaste matemaatikavigade seosest signaalsüsteemide suhte tüpoloogiliste iseärasustega. «Nõukogude Kool», 1966, nr. 1.

² М. Н. Борисова. Методика определения соотношения первой и второй сигнальных систем в условиях зрительного запоминания. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека». Т. I. М, издательство АПН РСФСР, 1956.

**Õpilaste jagunemine
närvitegevuse spetsiaal-
seteks tüüpideks:**

T — 54 õpilast,
I-Ü — 42 õpilast,
II-Ü — 7 õpilast.



(3 sek.) ning lasti pärast seda see objekt üles otsida 10 väga sarnase lehe hulgast. Seda on kerge teha kaemuslik-kujundilise mulje põhjal, raskem aga mõtestatud tunnuste järgi. Teises seerias eksponeeriti kõik kümme objekti pikema aja jooksul (10 sek.), kusjuures üks nendest oli paigutatud eraldi, mida tuli võrrelda ülejäänutega. Seejärel tuli katseisikul mälu järgi oma jutustus esile tuua võrreldud objekti kohta võimalikult palju eristavaid tunnuseid. Katse andis positiivse tulemuse (ühe punkti), kui selle jutustuse põhjal oli võimalik antud objekti eristada kõikidest ülejäänutest. Kummaski seerias toimus viis üksikkatset, millest igaüks andis tulemuseks 0 või 1 punkti. Kogu seeria tulemusi saame väljendada punktide arvuga 0 kuni 5.

Lõplikku katsetulemust ja signaalsüsteemide suhet, s. t. tüüpi, saame väljendada kahe arvuga, millest esimene väljendab esimese signaalsüsteemi taset, teine aga teise signaalsüsteemi taset. Nii näiteks väljendab mõtleja-tüüpi indeks 2—5, kunstniku-tüüpi 4—0, keskmist tüüpi 3—3. Ühe signaalsüsteemi ülekaalu järeldasime vähemalt 2-punktilise erinevuse puhul indeksis.

Eksperimendi tulemuste põhjal jagasime õpilased signaalsüsteemide suhte järgi tüüpidesse, mida kujutab diagramm lehekülje ülaosas.

Nagu sellest diagrammist nähtub, jagunesid õpilased ($N = 103$) tüüpidesse järgmiselt: 54 õpilast ehk 52,4% kuulus tasakaalustatud tüüpi (tähistame sümboliga *T*), 1. signaalsüsteem oli ülekaalus 42 õpilasel ehk 40,8% (sümbol *I-Ü*) ja ainult 7 õpilasel ehk 6,8% oli ülekaalus 2. signaalsüsteem (sümbol *II-Ü*).

Keskmine vigade arv erinevatel tüüpidel

		$(\bar{x} \pm PE^1)$					
Tüüp \ Vealiik	I	II	III	IV	V	VI	
	Prevaleeriva kujundi vead	Kujundi ignoreerimise vead	Diferentseerimisvead	Metamorfoossed vead	Sünteesilise tajumise vead	Analüütilise tajumise vead	
<i>T</i>	1,96 ±0,09	1,06 ±0,03	1,18 ±0,11	1,77 ±0,04	0,54 ±0,07	0,42 ±0,03	
<i>I-Ü</i>	4,24 ±0,24	1,83 ±0,10	3,47 ±0,29	2,80 ±0,09	0,43 ±0,05	0,33 ±0,03	
<i>II-Ü</i>	1,86 ±0,42	1,86 ±0,28	1,28 ±0,04	3,71 ±0,37	1,71 ±0,24	0,71 ±0,10	

Nüüd, kus meil olid ühelt poolt fikseeritud vigade liigid ja teiselt poolt tehtud kindlaks õpilaste jagunemine närvisüsteemi spetsiaalsetesse tüüpidesse, võisime asuda uurima vealiikide esinemist erinevatel tüüpidel.

Selle analüüsi tulemused on kujutatud käesoleval leheküljel tabelina, järgmisel aga diagrammina.

Püüame nüüd diagrammi põhjal analüüsida üksikute vealiikide esinemist tüüpide kaupa. Selleks et otsustada, kas aritmeetiliste keskmiste erinevused on usaldatavad, kasutati materjali statistilisel läbitöötamisel kriitilist

jagatist² ($t = \frac{D}{\sigma_D}$).

Diagrammi põhjal alustame vealiigi ja -tüübi suhte jälgimist prevaleeriva kujundi vigadest (I vealiik). Vigade aritmeetilistes keskmistes on suur erinevus *I-Ü* ja *T* ning *I-Ü* ja *II-Ü* vahel. See erinevus on statistiliselt täiesti usaldatav. Nii tõuseb prevaleeriva kujundi vigade osas

¹ *PE* — aritmeetilise keskmise tõenäoline viga. Mida väiksem on *PE*, seda suurem on aritmeetilise keskmise usaldatavus ja vastupidi.

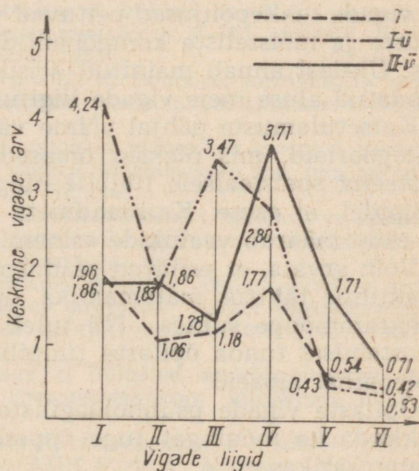
² *t* — nn. kriitiline jagatis, mille põhjal otsustatakse, kas aritmeetiliste keskmiste erinevused on usaldatavad. Üldiselt on aritmeetiliste keskmiste erinevus usaldatav, kui $t > 2$.

selgelt esiplaanile $I-\dot{U}$ -tüüp. See on täiesti loomulik seetõttu, et $I-\dot{U}$ -tüübil on ülekaalus 1. signaalsüsteem, prevalenceeriva kujundi vead aga on tingitud kujundiliste elementide tugevusest õpilase vaimses tegevuses.

Meie vigade liigituses on vigade II liigiks kujundi ignoreerimise vead, mis tekivad kujundiliste elementide nõrkuse tõttu õpilaste mõtlemises. Selles veakategoorias on vigade aritmeetiline keskmine kõige kõrgem $II-\dot{U}$ -tüübil, kellel on ülekaalus 2. signaalsüsteem. Aritmeetiliste keskmiste diferents $I-\dot{U}$ - ja $II-\dot{U}$ -tüübi vahel ei ole statistiliselt siiski oluline.

III vealiigina esinevad meie süsteemis diferentseerimisvead, mis tekivad mõistelis-eristatavate elementide nõrkuse tõttu. Selle seisukohaga on täielikus kooskõlas diagrammist nähtuv fakt, et vaadeldava veakategooria keskmine on kõrgem just $I-\dot{U}$ -tüübil ja madalam $II-\dot{U}$ -tüübil. Seega leiab ka diferentseerimisvigade alus eksperimentaalset kinnitust.

Metamorfoossed vead olid meie liigituses IV vealiigiks. Nende põhjuste seletamisel lähtusime seisukohast, et muutused, metamorfoosid, mis neile vigadele on omased, on tingitud 1. signaalsüsteemi, s. o. kujundiliste elementide nõrkusest. Kui meie seisukoht peab paika, siis peaks neid vigu kõige rohkem esinema $II-\dot{U}$ -tüübil, kellel on ülekaalus 2. signaalsüsteem, ja vähem $I-\dot{U}$ -tüübil, kellel



on ülekaalus 1. signaalsüsteem. Diagrammis kujutatud andmed seda just kinnitavadki. T -tüüp ei pruugi ei siin ega ka mujal nende kahe vahel asuda, kuna selle tüübi juures on tegemist signaalsüsteemide tasakaaluga, mis võib esineda väga mitmesugusel tasemel.

Süntheetilise tajumise vigade (V vealiik) põhjusena nägime me süntheetilise taju nõrkust. Kuna süntheetiline taju on tugevam I - \dot{U} - ja nõrgem II - \dot{U} -tüübil, siis on täiesti seaduspärane, et selleski veakategoorias on vigade keskmine statistiliselt arvestataval kujul ülekaalus II - \dot{U} -tüübil ja kõige väiksem I - \dot{U} -tüübil.

VI vealiigis erinevad analüütilise tajumise vigade keskmised arvud niivõrd vähe, et mingit seaduspärasust siit järeldada ei ole võimalik.

*

Kokkuvõttes lubab katseandmete analüüs kinnitada, et individuaalsed erinevused õpilase vaimse tegevuse kujundilistes ja mõistelistes komponentides on tõepoolest seotud ka vastavate vealiikidega. 1. signaalsüsteemi ülekaal kutsub esile rohkem neid vigu, mis on tingitud kas kujundiliste komponentide tugevusest või mõistelistes komponentide nõrkusest. 2. signaalsüsteemi ülekaalu puhul esineb aga rohkem selliseid vigu, mis tulenevad kujundiliste komponentide, süntheetilise taju nõrkusest.

Seega me võime lugeda eksperimentaalselt tõestatuks, et vigade tekkepõhjused peituvad vaimse tegevuse kujundiliste ja mõistelistes komponentide tugevuses või nõrkuses. Ühtlasi annab mainitud seisukoht teoreetiliselt põhjendatud aluse meie vigade liigitusele.

Katsetulemuste põhjal võime väita, et niisuguseid veakategooriaid, mis oleksid omased ainult mõnele närvisüsteemi spetsiaalsele tüübile ning mis puuduksid teistel tüüpidel, ei esine. Katseandmete analüüs näitab selgelt, et tüüp määrab vealiikide esinemise sageduse.

Võib arvata, et esitatud seaduspärasustel on mõningane praktiline tähtsus matemaatika õpetamise meetoodika ja programmõppe suhtes. Nii tuleb eriti hargprogrammide koostamisel tunda õpilaste tüüpilisi vigu ja nende psühholoogilisi aluseid.

Õpilaste vigade psühholoogiliste aluste uurimine võiks pakkuda ka mõningat tuge õppetöö individualiseerimisel matemaatikas.

KASUTATUD KIRJANDUS.

- Kießling, A. Die Bedingungen der Fehlsamkeit. Leipzig, 1925. Lexikon der Pädagogik in 3 Bänden, Verlag A. Francke AG., Bern, 1950, Bd. I.
- Sõerd, J. Õpilaste matemaatikavigade seosest signaalsüsteemide suhte tüpoloogiliste iseärasustega. «Nõukogude Kool», 1966, nr. 1.
- Weimer, H. Fehlerbehandlung und Fehlerbewertung. Leipzig, 1926.
- Weimer, H. Psychologie der Fehler. Leipzig, 1925.
- Борисова М. Н. Методика определения соотношения первой и второй сигнальных систем в условиях зрительного запоминания. Сб. «Типологические особенности высшей нервной деятельности человека». Т. I. М, издательство АПН РСФСР, 1956.
- Коссов Б. Б. Особенности усвоения начальных алгебраических знаний школьниками с различным типологическим соотношением первой и второй сигнальных систем. «Вопросы психологии», 1956, № 4.
- Крутецкий В. А. К типологии школьников, малоспособных к математике. Сб. «Вопросы психологии способностей школьников». М., Издательство «Просвещение», 1964.
- Лейтес Н. С. Об умственной одаренности. М, издательство АПН РСФСР, 1960.
- Меделян Г. А. Психологический анализ ошибок при решении арифметических задач учащихся V—VI классов. Автореферат канд. дисс. Москва, 1953.
- Менчинская Н. Л., Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. Москва, 1965.
- Прочухаев В. Г. Анализ ошибок учащихся средней школы по математике. Ученые записи Московского гос. пед. института им. В. И. Ленина, т. XVII, 1948.
- Сьерд Ю. Зависимость математических ошибок учащихся от их индивидуальных различий. Материалы конференции психологов Прибалтики. Вильнюс, 1966.
- Сьерд Ю. Некоторые психологические основы ошибок учащихся. «Программированное обучение. Труды межреспубликанской конференции по программированному обучению». Минск, 1967.
- Шеварев П. А. К вопросу о природе алгебраических навыков. Ученые записи Государственного института психологии, т. II, 1941.
- Шеварев П. А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника. Издательство АПН РСФСР, Москва, 1959.

SISUKORD

I. Õpilaste matemaatikavigade psühholoogiliste aluste uurimisest	3
II. Vigade liigid	18
III. Vealiikide seos õpilase individuaalsusega	34
Kasutatud kirjandus	41

Юхан Сьерд. О ПСИХОЛОГИИ ОШИБОК ПО МАТЕМАТИКЕ У УЧАЩИХСЯ 5-8 КЛАССОВ. На эстонском языке. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.
Toimetaja E. Randma. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja E. Toomsalu. Korrektorid E. Kask ja U. Karelaid.
Laduda antud 11. III 1970. Trükkida antud 27. V 1970. Formaat 54×84/16. Trükipoognaid 2,75. Tingtrükipoognaid 2,31. Arvestuspoognaid 2,04. Trükiarv 1000. MB-04470. Tellimuse nr. 2085. Trükikoda «Kommunist», Tallinn, Pikk t. 2.
Hind 6 kop.

6 kop.

A

23592

77132

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00380024 2