



ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БАКУСОВА

Светлана Михайловна

**АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА
ОПЕРАТОРОВ НЕПРЕРЫВНЫХ
ОТНОСИТЕЛЬНО СЛАБЫХ ТОПОЛОГИЙ**

Диссертация написана на русском языке
(01.01.01. — теория функций и функциональный
анализ)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ТА Р Т У — 1974

На правах рукописи

БАКУСОВА
Светлана Михайловна

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛАБЫХ ТОПОЛОГИЙ

Диссертация написана на русском языке
(01.01.01 — теория функций и функциональный анализ)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре теории функций Уральского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени А. М. Горького.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор А. А. МЕЛЕНЦОВ.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Г. Ф. КАНГРО;

кандидат физико-математических наук, доцент Э. И. ЮРИМЯЭ.

Ведущее научное учреждение — Институт математики и механики УНЦ АН СССР (г. Свердловск)

Автореферат разослан « 14 » октября 1974 г.

Защита состоится « 15 » ноября 1974 г.

в 15 часов на заседании Совета математического факультета Тартуского государственного университета (г. Тарту, ул. Юликооли 18).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Ученый секретарь университета
Н. МААРООС

Н. Маароос

В предлагаемой работе изучаются поля эффективности и ограниченности линейных операторов, отображающих пространство $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$ всех последовательностей с элементами из полного локально выпуклого пространства $(X, \tilde{p}_i)$, топология которого порождена счетной системой полунорм

$$\tilde{p}_i(\xi), \xi \in (X, \tilde{p}_i), i = 1, 2, \dots,$$

в пространство $\Sigma(Y)$ всех последовательностей с элементами из банахова пространства Y . Если пространства $(X, \tilde{p}_i)$ и Y совпадают с полем комплексных чисел, то частным случаем таких операторов являются матричные операторы, порожденные бесконечными комплекснозначными матрицами.

Обозначим через N_S класс линейных операторов A , отображающих некоторое подпространство $S(X)$ пространства $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$ в пространство $\Sigma(Y)$.

Система полунорм

$$p_k(x) = \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i(\xi_k), k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $x = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots] \in \Sigma(X, \tilde{p}_i)$, определяет в пространстве $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$ топологию $\sigma(p_k)$, названную автором квазитихоновской.

В работах [2, 3, 4, 9] методами функционального анализа для некоторых операторов из класса N_S были получены обобщения известных для матричных операторов теорем Кожима — Шура ([12], стр. 78), Сильвермана — Теплица ([12], стр. 79) и Шура ([7], стр. 17.)

В настоящей работе исследованы некоторые аппроксимативные свойства операторов из класса N_S , непрерывных относительно квазитихоновской топологии, на основе которых рассмотрены вопросы включения полей эффективности и ограниченности, совместности, получены обобщения известных теорем Штейнгауза ([12], стр. 93) и Мазура — Орлича ([12], стр. 375).

Целью диссертационной работы является не только приложение полученных обобщений к решению некоторых задач тео

рии суммирования, например, вопросов включения полей эффективности и совместности матричных методов суммирования. Не менее важным представляется нам использование методов теории суммирования для развития теории линейных операторов в линейных топологических пространствах.

В § 1 и § 2 первой главы изучаются необходимые определения и некоторые известные результаты теории суммирования.

О п р е д е л е н и е 1. Поле эффективности $P_S(A)$ (соответственно полем ограниченности $Q_S(A)$) линейного оператора $A \in N_S$ называют множество всех тех элементов из $S(X)$, которые переводятся оператором A в сходящиеся (ограниченные) в пространстве Y последовательности.

Пусть $x \in S(X)$, $A \in N_S$ и $A(x) = \{\eta_n\} \in \Sigma(Y)$, где $\eta_n \in Y$. Равенство $f_n(x) = \eta_n$ определяет линейный оператор f_n , отображающий пространство $S(X)$ в Y . Тогда оператор $A \in N_S$ можно рассматривать как последовательность линейных операторов f_n . Назовем $\lim_n f_n(x)$ A -пределом элемента $x \in P_S(A)$ и обозначим его через $A\text{-}\lim x$.

О п р е д е л е н и е 2. Отрезком элемента $x = \{\xi_k\} \in \Sigma(X, \tilde{p}_i)$ длины r называют элемент $x_r = \{\xi_1, \dots, \xi_r, 0, 0, \dots\}$.

Будем считать, что подпространство $S(X)$ вместе с каждым своим элементом содержит и все его отрезки.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть f — линейный оператор, отображающий подпространство $S(X)$ в пространство Y . Линейный оператор f_r , отображающий $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$ в Y и такой, что $f_r(x) = f(x_r)$ для любого $x \in S(X)$, будем называть срезкой длины r оператора f .

В § 2 из класса операторов N_S выделен подкласс $\Omega[S]$ таких линейных операторов $A = \{f_n\}$, что для любого n :

1) существуют операторы срезки f_n^r любой длины, непрерывные относительно квазитихоновской топологии в пространстве $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$;

2) для любого $x \in S(X)$ имеем $\lim_r f_n(x - x_r) = 0$.

Таким образом, операторы из класса $\Omega[S]$ аппроксимируются операторами, непрерывными относительно квазитихоновской топологии.

В § 3 в поле ограниченности $Q_S(A)$ оператора $A \in \Omega[S]$ введена система полунорм φ_A :

$$p_k(x), k = 1, 2, \dots,$$

$$h_n(x), n = 0, 1, \dots,$$

где

$$h_0(x) = \sup_n \|f_n(x)\|,$$

$$h_n(x) = \sup_r \|f_n^r(x)\|, n \geq 1,$$

а полунормы $p_k(x)$ определены равенством (1), порождающая в пространстве $Q_S(A)$ топологию более сильную, чем квазитихоновская. В дальнейшем всюду при рассмотрении FH -пространств ([6], стр. 202) исходным хаусдорфовым пространством является

пространство $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$, которое будем предполагать полным.

Основным результатом § 3 является

Теорема 1.7. Если оператор $A \in \Omega[S]$, где $S(X)$ является FH -пространством с топологией $\sigma(\psi^*)$, порожденной некоторой системой полунорм ψ^* , то пространство $Q_S(A)$ является FH -пространством с топологией $\sigma(\psi^* \cup \varphi_A)$.

Аналогичный результат получен и для поля эффективности $P_S(A)$ оператора $A \in \Omega[S]$. Эти теоремы обобщают результаты К. Целлера и А. Виланского [5, 6], полученные для полей эффективности матричных методов суммирования, а также обобщают результаты из [13], полученные для полей эффективности операторов из N_S , непрерывных относительно тихоновской топологии в случае, когда пространство $(X, \tilde{p}_i)$ банахово.

Далее в § 4 теоремы из § 3 обобщаются на тот случай, когда пространство Y является полным, локально выпуклым метрическим пространством.

Во второй главе изучаются локально выпуклые FH -пространства, для которых имеют место аналоги классического принципа фиксации особенности и теоремы Банаха—Штейнгауза ([11], стр. 229), полученные в этой работе в терминах ψ -норм, введенных автором в § 1 второй главы.

Пусть $S(X)$ — подпространство пространства $\Sigma(X, \tilde{p}_i)$ с топологией $\sigma(\psi)$, порожденной системой полунорм ψ :

$$p_k(x), k = 1, 2, \dots; q_i(x), i = 0, 1, \dots;$$

где $\{q_i(x)\}$ — некоторая система полунорм, определенных на подпространстве $S(X)$.

О п р е д е л е н и е 4. Длиною линейного оператора g , отображающего пространство $S(X)$ в Y , называется минимальное из натуральных чисел k , таких, что $g(x - x_k) = 0$ для любого $x \in S(X)$.

Определим ψ -норму линейного оператора g , непрерывного относительно квазитихоновской топологии пространства $S(X)$ равенством

$$\|g\|_{\psi}^S = \inf_i \sup_{x_l \in \tilde{S}_l^i} \|g(x_l)\|,$$

где $\tilde{S}_l^i = \{x_l \in S(X) : q_i(x_l) + p_1(x_l) + \dots + p_l(x_l) \leq 1\}$, а l — длина оператора g . В качестве примеров найдены ψ -нормы некоторых операторов.

Обозначим T_S множество последовательностей линейных операторов $\{g_n\}$, где каждый из операторов g_n , отображает пространство $S(X)$ в Y и непрерывен относительно квазитихоновской топологии.

Основным результатом § 2 является аналог принципа фиксации особенности:

Теорема 2.1. Пусть пространство $S(X) \subset \Sigma(X, \tilde{p}_1)$ является пространством второй категории в себе относительно топологии $\sigma(\psi)$, а последовательность операторов $\{g_n\} \in T_S$. Если для любого $x \in S(X)$ существует число M_x , такое, что неравенство

$$\|g_n(x)\| \leq M_x$$

выполняется при любых значениях n , то существует число M , такое, что для любых n

$$\|g_n\|_\psi^S \leq M.$$

В § 3 введено понятие слабо равномерно ограниченной последовательности линейных операторов, обобщающее аналогичное определение работы [16].

О п р е д е л е н и е 5. Последовательность операторов $\{g_n\} \in T_S$ назовем слабо равномерно ограниченной в пространстве $S(X)$ с топологией $\sigma(\psi)$, если существуют положительные числа C и C' и натуральное число k , такие, что для любого $x \in S(X)$ найдется число $N(x)$, что для всех $n > N(x)$

$$\|g_n(x)\| \leq (C + C' \|g_n\|_\psi^S) \cdot \left(\sum_{i=0}^k q_i(x) + \sum_{i=1}^k p_i(x) \right).$$

Основной здесь является аналог теоремы Банаха — Штейнгауза.

Теорема 2.2. Для того чтобы последовательность линейных операторов $\{g_n\} \in T_S$, где $S(X)$ есть FH -пространство с топологией $\sigma(\psi)$, сходилась в каждой точке пространства $S(X)$, необходимо и достаточно выполнение трех условий:

1. $\|g_n\|_\psi^S < M$ для любого n .

2. В пространстве $S(X)$ существует множество G , плотное относительно топологии $\sigma(\psi)$, на каждом элементе которого последовательность $\{g_n\}$ сходится.

3. Последовательность $\{g_n\}$ слабо равномерно ограничена.

Далее, как следствия теоремы 2.2 в терминах ψ -норм получены необходимые и достаточные условия включения поля эффективности (или поля ограниченности) оператора из класса $\Omega[S]$ в поле эффективности оператора из класса N_S , непрерывного относительно квазитихоновской топологии. Эти результаты обобщают для класса операторов $\Omega[S]$ результаты А. А. Меленцова [16].

В § 4 показано, что в полях эффективности более узкого, чем $\Omega[S]$, класса равномерно ограниченных операторов систему полунорм φ_A можно заменить эквивалентной системой полунорм $\tilde{\varphi}_A$ так, что $\tilde{\varphi}_A$ -норма оператора является полунормой и для нее остаются справедливыми все результаты § 2 и § 3.

При доказательстве этого утверждения использована конструкция, данная в работе [15].

Третья глава посвящена вопросам совместности линейных операторов, а именно получены условия, при которых выполнено равенство

$$A\text{-}\lim x = D\text{-}\lim x,$$

где $x \in P_S(A) \cap P_S(D)$, $A \in N_S$, $D \in N_S$.

Хорошо известна теорема Мазура — Орлича — Брудно о совместности регулярных методов суммирования на ограниченных последовательностях, а также ее обобщение, полученное А. Алексеевичем и В. Орличем [1].

Автору не представляется возможным использовать методы этих работ для решения вопросов совместности операторов на неограниченных последовательностях. Решение вопросов совместности многих классических методов суммирования осуществляется при помощи построения обратных преобразований на основе применения теоремы Г. Ф. Кангро [10], однако обратные преобразования не всегда существуют. Основной целью третьей главы является не только обобщение для операторов из класса N_S результатов о совместности на ограниченных последовательностях; одновременно ставится задача: получить метод, при помощи которого можно было бы исследовать совместность операторов и на некоторых неограниченных последовательностях.

В § 1 **третьей главы** обобщены результаты А. А. Меленцова [14, 17] о совместности операторов, непрерывных относительно тихоновской топологии для некоторого более широкого класса треугольных операторов, а именно, для таких операторов $A = \{f_n\} \in N_S$, у которых при любом n длина оператора f_n не больше n .

Далее, в § 1 для оператора $A \in N_S$ в пространстве $S(X)$ построено такое подпространство F_A , в точках которого возможна аппроксимация оператора A треугольными операторами и получена следующая аппроксимативная теорема, лежащая в основе многих результатов третьей и четвертой главы.

Теорема 3.2. Для оператора $A = \{f_n\} \in N_S$ и точки $x = \xi_l \in F_A \cap P_S(A)$ существует треугольный оператор $A^A \in N_S$, такой, что

$$1) \Phi_x \cap P_S(A) = \Phi_x \cap P_S(A^A),$$

где $\Phi_x = \{x' \in S(X) : x' = \{\alpha_l \xi_l\}, 0 \leq \alpha_l \leq 1\}$.

- 2) $A\text{-}\lim x' = A^\Delta\text{-}\lim x'$ для любого $x' \in \Phi_x \cap P_S(A)$.
 3) $F_A \subset F_{A^\Delta}$

В § 2 введены множество $K_{A,D}^x$ операторов и множество $M_{(A,D)}^x$ пар операторов, согласованных с парой операторов A и D из N_S в точке $x \in P_S(A)$ и показано, что построение операторов из $K_{(A,D)}^x$ возможно как для ограниченных, так и для неограниченных последовательностей.

Основными результатами третьей главы являются теоремы о совместности 3.4, 3.5, 3.7, 3.8, полученные в терминах согласованных операторов или пар согласованных операторов. Здесь мы приведем лишь одну из них.

Пусть $P_S^0(A) = \{x \in P_S(A) : A\text{-}\lim x = 0\}$.

Теорема 3.4. Если для операторов A и D из класса N_S

$$1) K_{(A,D)}^x \neq \emptyset$$

для любого $x \in P_S^0(A) \cap F_D$;

$$2) P_S^0(A) \cap F_D \subset P_S(D),$$

то $D\text{-}\lim x = 0$ для любого $x \in P_S^0(A) \cap F_D$.

Если пространства $(X, \tilde{p}_i)$ и Y совпадают с полем комплексных чисел, пространство $S(X)$ есть пространство ограниченных числовых последовательностей, а операторы A и D порождены регулярными матрицами, то в качестве следствия нетрудно получить теорему Мазура — Орлича — Брудно.

В § 3 построены согласованные операторы для некоторых классических матричных операторов и получены некоторые следствия теорем совместности из § 2, в частности теорема Алексеевича — Орлича.

В § 1 четвертой главы для операторов из класса N_S обобщена известная теорема Штейнгауза ([12], стр. 93).

Теорема 4.2. Пусть оператор $A \in N_S$ и существует элемент $x_0 = \{\xi_l\} \in F_A \cap P_S(A)$, такой, что $A\text{-}\lim x_0 = \omega \neq 0$. Тогда найдется элемент $x'_0 = \{\alpha_l \xi_l\}$, где α_l равны нулям и единицам, не имеющий A -предела.

В § 2 четвертой главы получено обобщение теоремы Мазура — Орлича ([12], стр. 375), а именно приведены достаточные условия при которых из суммируемости ограниченной расходящейся последовательности оператором из класса N_S к некоторому элементу ω следует существование несчетного линейно независимого множества последовательностей, суммируемых этим оператором к элементу ω .

Основные результаты диссертации содержатся в работах [18, 19, 20] и являются дальнейшим развитием идей работы [13]. Результаты диссертации были доложены на семинаре ка-

федры теории функций Уральского государственного университета, на семинаре кафедры математического анализа Тартуского государственного университета, а также на заседании Уральского математического общества.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Alexiewicz A., Orlicz W. Consistency theorems for Banach space analogues of Toeplitzian methods of summability. Stud. math, 1959, **18**, 199—210.
2. Melvin-Melvin H. Generalised K-transformations in Banach space. Proc. London Math. Soc. (2) 1951, **53**, 83 — 108.
3. Robinson A. On functional transformations and summability. Proc. London. Math. Soc., (2), 1950, **52**, 132—160.
4. Ramanujan M. S. Generalised Kojima Toeplitz matrices in certain linear topological spaces. «Math. Ann.», 1965, **159**, 365—373.
5. Wilansky A., Zeller K. Summation of bounded divergent sequences topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, 501—509.
6. Wilansky A.; Functional analysis. New Jork, Blaisdell, 1964.
7. Барон С. А. Введение в теорию суммирования рядов. Тарту, 1966.
8. Брудно А. Л. Суммирование ограниченных последовательностей матрицами. Мат. сб., 1945, **16**, 191—247.
9. Кангро Г. Ф. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1956, **5**, 108—128.
10. Кангро Г. Ф. О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартус. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
12. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1959.
13. Меленцов А. А., Бакусова С. М. Топология полей эффективности операторов, непрерывных относительно тихоновской системы окрестностей. Матем. зап. Уральск. ун-та 1968, **6**, № 4, 133—148.
14. Меленцов А. А. Совместность операторов, непрерывных относительно тихоновской топологии. Матем. зап. Уральск. ун-та 1969, **7**, № 2, 130—137.
15. Меленцов А. А. Замечания по основам линейного анализа в полях эффективности. Матем. зап. Уральск. ун-та, 1969, **7**, № 2, 98—102.
16. Меленцов А. А. Усиление основных теорем линейного анализа в полях эффективности. Матем. зап. Уральск. ун-та 1970, **7**, № 4, 133—134.
17. Меленцов А. А. Исправление к статье «Совместность операторов, непрерывных относительно тихоновской топологии». Матем. зап. Уральск. ун-та, 1971, **8**, № 2, 165.

Работы, опубликованные по материалам диссертации

18. Бакусова С. М. Совместность линейных операторов в пространствах последовательностей. Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1972, № 10 (аннотация статьи, принятой к печати).

19. Бакусова С. М. Некоторые свойства полей эффективности линейных операторов. Уральск. ун-т. Свердловск 1973, 12с, библи. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 1 ноября 1973 г № 7223—73 Деп.)

20. Бакусова С. М. Аналоги принципа фиксации особенности и теоремы Банаха-Штейнгауза в пространствах последовательностей. Уральск. ин-т Свердловск 1973, 12с, библи. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 1 ноября 1973 г № 7224—73 Деп.)

МВО4081. Подписано к печати 16/VII-1974 г.
Тираж 200 экз. Заказ № 603.

г. Уфа, полиграфкомбинат, проспект Октября, 2.