B. KORDEMSKI

MATEMAATILISI PÄHKLEID



A-23457 IV

B. A. KORDEMSKI

MATEMAATILISI PÄHKLEID

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1960

Originaali tiitel:

Б. А. Кордемский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

Издание шестое, стереотипное

Государственное Издательство
Физико-математической литературы
Москва 1959

Tõlkinud L. Võhandu

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
51016

TEISE VENEKEELSE TRÜKI EESSÕNA

Töös, õpinguis, mängus, igasuguses loomingulises tegevuses vajab inimene taibukust, leidlikkust, oskust loogiliselt mõtelda. Neid omadusi saab järjekindlate süstemaatiliste harjutustega kasvatada ja arendada. Eriti sobivad selleks matemaatilised ülesanded, olgu need siis pärit koolimatemaatikast või praktilisest elust, mis on seotud meid ümbritseva maailma asjade ja sündmuste jälgimisega.

«Matemaatika,» ütles M. I. Kalinin keskkooliõpilaste poole pöördudes, «distsiplineerib mõistust, õpetab loogiliselt mõtlema. Ega asjata kõnelda, et matemaatika on ajude gümnastika.»

Igas perekonnas, kus vanemad tunnevad muret oma laste vaimse arenemise pärast, läheb puhketundide mitmekesistamiseks kindlasti vaja sobivalt valitud kasulikke, mõistlikke ja samal ajal huvitavaid matemaatilisi harjutusi.

Just seda laadi programmivälisteks õppusteks, vestlusteks ja meelelahutuseks vabadel õhtutel perekondlikus ringis ja sõprade hulgas või koolis klassiväliseks tööks ongi mõeldud «Matemaatilisi pähkleid» — matemaatiliste miniatüüride kogumik. Siin leidub mitmesuguseid ülesandeid, matemaatilisi mänge, naljaülesandeid ja trikke, mille lähem uurimine nõuab vaimset pingutust, arendab taibukust ning vajalikku loogilisust mõttekäikudes.

Revolutsioonieelsel Venemaal olid laialt tuntud J. I. Ignatjevi kogumikud «В царстве смекалки». Meie lugeja jaoks on need raamatud juba aegunud ja see-

pärast neid enam uuesti ei trükita. Siiski on ka nendes kogumikes ülesandeid, mis pole veel kaotanud pedagoogilist ja üldhariduslikku väärtust. Mõned neist on «Matemaatilistesse pähklitesse» muudatusteta sisse võetud, teistele aga on antud kas muudetud või täiesti uus sisu.

«Matemaatiliste pähklite» jaoks otsisin ma laialdase kodumaise ja välismaise populaarteadusliku kirjanduse veergudelt välja rea laialipillatud ülesandeid ning vajaduse korral töötasin neist osa ümber. Samal ajal püüdsin ma mitte korrata ülesandeid, mis esinevad J. I. Perelmani väga laialt levinud raamatutes huvitava matemaatika kohta.*

Sellised «väikeseformaadilised» matemaatilised ülesanded tekivad mõnikord teadlaste tõsiste uurimuste kõrvalproduktina; paljud ülesanded aga mõeldakse välja ka nende harrastajate ja pedagoogide poolt otseselt «ajude gümnastika» jaoks. Nagu mõistatuste ja vanasõnade puhul, nii ka nende ülesannete juures autorsus tavaliselt ei säili ja nad muutuvad ühiskondlikuks omandiks.

«Matemaatilisi pähkleid» on mõeldud kõige erinevama matemaatika-alase ettevalmistusega lugejate jaoks. Teda võivad ühel ajal kasutada nii 10—11-aastased noorukid, kes teevad alles esimesi samme iseseisva mõtlemise suunas, nii matemaatika vastu huvi tundvad vanemate klasside õpilased kui ka täiskasvanud, kes soovivad oma taipu kontrollida ja treenida.

Ülesannete süstematiseerimine peatükkidesse on loomulikult üsna tinglik; igas peatükis leidub nii kergeid kui raskeid ülesandeid.

Raamatus on viisteistkümmend peatükki.

Esimene peatükk sisaldab mitmesuguseid keerdülesannete tüüpi algharjutusi, mille lahendamine nõuab kas lihtsalt taipu või otsest eksperimenti. Mõnikord on tarvis teha ka lihtsaid arvutusi täisarvudega (peatüki esimene osa) või murdudega (peatüki teine osa). Kuna osa lugejaid ei oska veel kergete ja raskete ülesannete vahel

---

* Enamik ülesandeid või teemasid ülesannete jaoks pärineb järgmistest raamatutest ja ajakirjadest: Е. И. Игнатьев, В царстве смекалки, кн. I, кн. II, 1923; M. Kraitchik, Mathematical recreations, 1943; S. Jones, Mathematical nuts, 1932; «Математика в школе»; «Затейник»; «Scripta mathematica»; «The American Mathematical Monthly» jt.

iseseisvalt vahet teha, siis ma rikkusin mõnevõrra raamatu süstemaatilist ülesehitust ja paigutasin esimesse peatükki lihtsaid ülesandeid, mis temaatiliselt peaksid kuuluma järgnevatesse peatükkidesse. Esimese peatüki mitmekesiseid ülesandeid lahendades võivad need lugejad oma jõudu proovida ja kui neil mõne teema vastu tekib eriline huvi, siis võib hilisematest peatükkidest leida selle teema kohta veel hulga materjali.

Teise peatükki kuuluvate ülesannete lahendamisel peavad matemaatiline taibukus ja püsivus võitma kõikvõimalikud takistused ja näitama väljapääsu keerukatest olukordadest.

Kolmas peatükk «Tuletikkude geomeetria» sisaldab terve rea geomeetrilisi ülesandeid.

Peatükk «Seitse korda mõõda, üks kord lõika» koosneb kujundite tükeldamise ülesannetest.

Peatükis «Oskus leiab kõikjal rakendamist» esinevad ülesanded on seotud praktilise tegevusega, tehnikaga.

Peatükk nimega «Matemaatika peaaegu ilma arvutusteta» sisaldab ülesandeid, mille lahendamiseks on vaja konstrueerida ilusate loogiliste mõttekäikude ahelaid.

Mängud ja trikid on koondatud omaette peatükki, aga neid leidub laialipillatult ka kogu raamatus. Nad baseeruvad kõik matemaatilistel printsiipidel ja kuuluvad kindlasti meid huvitavasse valdkonda.

Kolm peatükki — «Ristsummamõistatused ja maagilised ruudud», «Tõsist ja naljakat arvude vallast», «Igivanad, kuid igavesti noored arvud» — on pühendatud mõningatele arvude ja nende vaheliste seoste huvitavatele omadustele, mis on matemaatikasse kogunenud pikkade aastatuhandete vältel.

Viimane peatükk sisaldab kaks väikest olukirjeldust meie kodumaa põldudel ja tehastes töötavate inimeste oskusest ületada keerulisi olukordi.

Raamatus on mitmes kohas esitatud lugejatele iseseisvaks uurimiseks sobivaid teemasid.

Raamatu lõppu on paigutatud ülesannete lahendused, kuid ei maksa kiirustada nende vaatamisega.

Iga «nutikust» nõudev ülesanne sisaldab mõne «rosinakese» ja kujutab endast enamasti kõva pähklit, mida

polegi nii kerge katki hammustada. Seda meelitavamad need ülesanded aga on!

Kui teil ülesande lahendamine esimese korraga ei õnnestu, siis võite ta ajutiselt vahele jätta ja teiste ülesannete juurde asuda. Hiljem katsuge uuesti oma jõudu vahelejäänud ülesande kallal.

«Matemaatilisi pähkleid» pole raamat, mida saab «ühe hingetõmbega» läbi lugeda. Ta pakub tööd võibolla mitmeks aastaks. See on raamat, millest saab ajude gümnastikaks materjali võtta väikeste portsjonite kaupa ja mis on lugeja kaaslaseks ta pidevas matemaatilises arengus.

Kogu raamatu materjal on allutatud ühele mõttele: virgutada lugejat iseseisvale loovale mõtlemisele, ta matemaatiliste teadmiste edasisele täiendamisele.

«Matemaatiliste pähklite» teine trükk pole esimese trüki lihtne kordustrükk. Mõnede ülesannete teksti ja lahendusi on muudetud; osa ülesandeid on asendatud uute, sisukamatega. Raamat on saanud uue kujunduse.

Raamatu parandamiseks tegi tõsist tööd toimetaja M. M. Gorjatšaja.

Lugejad leidsid ülesandeid lahendades üksikutel juhtudel lisalahendusi või ka lihtsamaid lahendusi, kui raamatus oli toodud ja andsid need lahkelt minu käsutusse. Kõige huvitavamate lahenduste autorite nimed on raamatus vastavatel kohtadel ära toodud.

Loodan saada «Matemaatiliste pähklite» lugejatelt arvamusi ja soove, mis aitaksid raamatut veelgi parandada. Ühtlasi ootan neilt omapoolseid originaalseid ülesandeid ja rahvaloomingulist matemaatilist materjali.

Aadress: Москва, Б-62, ул. Чернышевского, д. 31, кв. 53, Борису Анастасьевичу Кордемскому.

B. Kordemski

ÜLESANDED

«Raamat raamatuks, aga ka aju tuleb liigutada.»

V. Majakovski

I PEATÜKK

KEERDÜLESANDED

I OSA

Kontrollige ja treenige oma taipu algul selliste ülesannetega, mille lahendamine nõuab vaid sihikindlat püsivust, kannatust, kujutlusvõimet ning oskust liita, lahutada, korrutada ja jagada täisarve.

1. Tähelepanelikud pioneerid

Kaks õpilast, poiss ja tüdruk, olid just äsja lõpetanud meteoroloogilised vaatlused. Nüüd puhkasid nad raudteeäärsel kingul ja vaatasid neist mööduvat kaubarongi.

Vedur pahvis järsul tõusul meeleheitlikult ja ajas paksu suitsu välja. Piki raudteetammi puhus ühtlane, puhanguteta tuul.

«Millise tuule kiiruse me saime mõõtmisel?» küsis poiss.

«Seitse meetrit sekundis.»

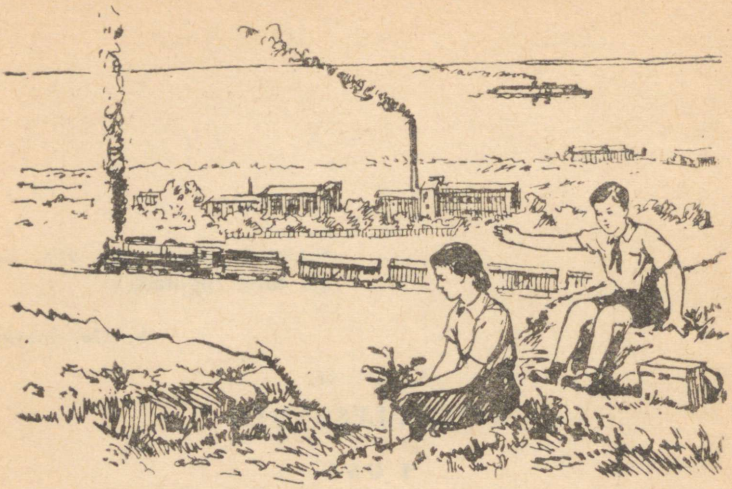
«Sellest on mulle täna küllalt, et määrata rongi kiirust.»

«Kas tõesti?» kahtles tüdruk.

«Sa jälgi tähelepanelikumalt rongi liikumist.»

Tüdruk nuputas veidi ja taipas varsti samuti, milles asi seisis.

Nad nägid täpselt seda, mida on kujutanud meie kunstnik (joon. 1). Kui kiiresti liikus rong?

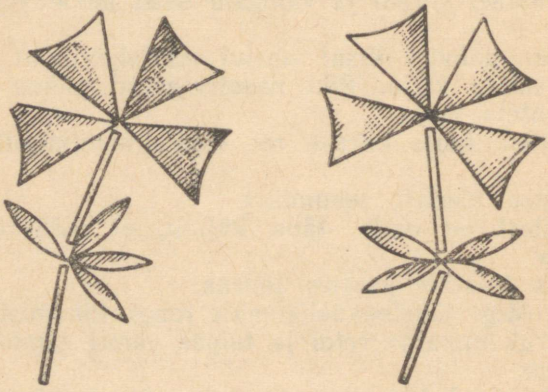


Joon. 1. Kui kiiresti liigub rong?

2. «Kivililll»

Kas mäletate andekat meistrit Danilat P. Bažovi muinasjutust «Kivililll»?

Uraalis jutustatakse, et Danila nikerdas oma õpilaspäevil kaks lille (joon. 2), mille lehed, varred ja õie-



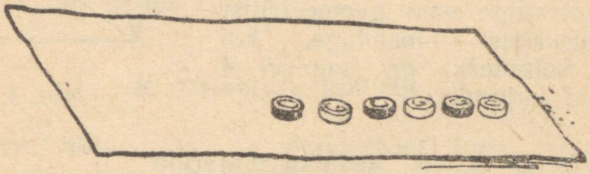
Joon. 2. Koostage nende kahe lille osadest ring!

lehed olid lahtivõetavad. Nende kahe lille osadest võis aga moodustada ringikujulise plaadikese.

Proovige! Kopeerige Danila lilled paberile või papile, lõigake välja õielehed, varred ja lehed ning moodustage ring.

3. Kabenuppude ümberpaigutamine

Asetage lauale ühte ritta 6 kabenuppu vaheldumisi — must, valge, veel üks must, veel üks valge jne. (joon. 3).



Joon. 3. Valged kabenupud peavad olema vasakul, mustad paremal.

Vasakule või paremale jätke nelja kabenupu jaoks tühi ruum.

Nõutakse kabenuppude ümberpaigutamist nii, et vasakul pool asetseksid kõik valged nupud, nende kõrval paremal pool aga kõik mustad nupud. Seejuures tuleb vabasse kohta tõsta korraga kaks kõrvutiasetsevat nuppu, nende järjekorda muutmata. Ülesande lahendamiseks piisab kolmest ümberpaigutamisest (kolmest käigust).*

Kui teil pole käepärast kabenuppe, siis kasutage münte või lõigake endale väikesi papi- või paberitükikesi.

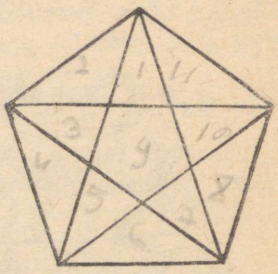
4. Kolme käiguga

Asetage lauale 3 kuhja tuletikke, kusjuures esimeses kuhjas olgu 11 tuletikku, teises 7 tuletikku ja kolmandas 6 tuletikku. Tuletikke mistahes kuhjast mistahes kuhja tõstes võrdsustage kõik kuhjad, nii et igaühes oleks 8 tuletikku. See on võimalik, sest tuletikkude üldarv — 24 — jagub kolmega täpselt. Tuletikkude tõstmisel tuleb

* Selle ülesande teema leiab edasist arendamist ülesannetes 96 ja 97 (lk. 57 ja 58).

aga silmas pidada järgmist reeglit: igasse kuhja tohib tõsta täpselt nii palju tuletikke, kui seal neid ees on. Kui kuhjas on näiteks 6 tuletikku, siis tohib lisada samuti 6 tuletikku, kui kuhjas on 4 tuletikku, siis tohib lisada samuti 4.

Ülesanne on lahendatav kolme käiguga.



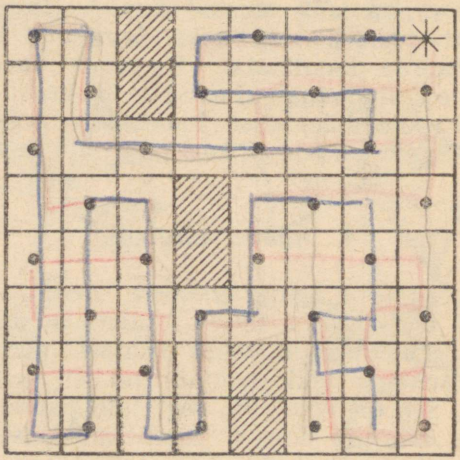
Joon. 4.

5. Loendage!

Kontrollige oma geomeetrilist nägemisoskust: loendage, kui palju kolmnurki on joonisel 4 esitatud kujundis.

6. Aedniku marsruut

Joonisel 5 on toodud väikese õunaaia plaan (õunapuud on tähistatud mustade punktidega). Aednik asus õunaaia harimisele tärniga märgitud ruudust ning pidi läbima nii ruudud, milles asetsesid õunapuud, kui ka tühjad ruudud, astumata seejuures juba kord läbitud ruutu. Viirutatud ruutudes ta ei käinud, sest seal aset-



Joon. 5. Õunaaia plaan.

sesid mitmesugused hooned, samuti ei liikunud ta mööda diagonaale.

Pärast ringkäigu lõpetamist oli aednik jällegi tärniga märgitud ruudus.

Joonistage ruudulisele paberile aedniku marsruut.

7. Kuidas jaotada?

Korvis on viis õuna. Kuidas need õunad jaotada viie tüdruku vahel, nii et iga tüdruk saaks ühe õuna, ja et üks õun jääks korvi?

8. Otsustage kiiresti!

Ütelge, mitu kassi on nelinurkses toas, kui igas nurgas istub kass, iga kassi vastas istub kolm kassi ja iga kassi saba peal istub üks kass.

9. Üles-alla

Poiss surub sinise ja kollase pliiatsi tahud tihedasti vastamisi, kusjuures pliiatsite alumised otsad on kohakuti. Kollase pliiatsiga kokkupuutes oleva sinise pliiatsi tahu alumine ots on ühe sentimeetri pikkuselt määritud värske värviga. Kollast pliiatsit paigal hoides hakkab poiss sinist pliiatsit üles-alla liigutama, teda endiselt vastu kollast pliiatsit hoides. Ta lükkab sinise pliiatsi ühe sentimeetri võrra allapoole ning tõmbab selle siis algasendisse tagasi. Poiss kordab seda operatsiooni kümme korda, s. t. langetab sinist pliiatsit 10 korda ja tõstab samuti 10 korda (kokku 20 liigutust).

Kui oletada, et selle aja jooksul värv ei kuiva ega kulu, siis mitme sentimeetri pikkuselt on kollane pliiats määritud pärast kahekümnendat liigutust?

Märkus: Selle ülesande mõtles välja matemaatik Leonid Mihhailovitš Rõbakov koduteel pärast õnnestunud pardijahti. Mis oli ülesande loomise ajendiks, seda võib lugeda pärast ülesande lahendamist leheküljelt 377.

10. Muistne ülesanne jõe ületamisest

Väike väesalk jõudis jõeni, mis tuli tingimata ületada. Sild oli lagunenud ning jõgi oli sügav. Mida teha? Järsku märkas ohvitser kalda läheduses kahte paadis vallatlevat poisikest. Paat oli aga nii väike, et ta suutis korraga kanda ainult ühte sõdurit või kahte poisikest, mitte rohkem! Kuid ometi pääsesid kõik sõdurid üle just selle paadi abil. Kuidas?

Lahendage see ülesanne peast või praktiliselt, kasutades abivahenditeks tuletikke, kabenuppe või midagi muud taolist ja liigutades neid mööda lauda üle kujuteldava jõe.

11. Hunt, kits ja kapsapea

See on samuti vanaaegne ülesanne; ta esineb juba VIII sajandi käsikirjades.



Joon. 6. Hunti ja kitse ei võinud üksi jätta...

Üks mees pidi paadiga üle jõe viima hundi, kitse ja kapsapea. Paati mahtus aga ainult mees ja koos temaga kas hunt või kits või kapsapea. Kui jätta hunt ja kits kahekesi ühele kaldale, siis oleks hunt kitse ära söönud. Kui aga jätta ühele kaldale kits ja kapsapea, siis sööks kits muidugi kapsapea ära. Kui inimene

on juures, siis «keegi kedagi ei söö». Mees vedas oma koorma siiski tervelt üle jõe.

Kuidas ta sellega hakkama sai?

12. Veeretage mustad kuulid välja

Kitsas ja väga pikas rennis asuvad 8 kuuli: neli musta asetsevad vasakul ja neli veidi suurema läbimõõduga valget kuuli asetsevad paremal pool (joon. 7). Renni keskmises osas asub seinas väike nišš, kuhu mahub parajasti üks kuul (ükskõik mis värvi). Kaks



Joon. 7. Veeretage mustad kuulid välja.

kuuli mahuvad teineteisest mööduma ainult niši kohal. Renni vasakpoolne ots on suletud, paremas otsas on avaus, millest mahuvad läbi ainult mustad kuulid, valged ei mahu. Kuidas rennist kõik mustad kuulid välja veeretada? Kuule rennist välja tõsta ei tohi.



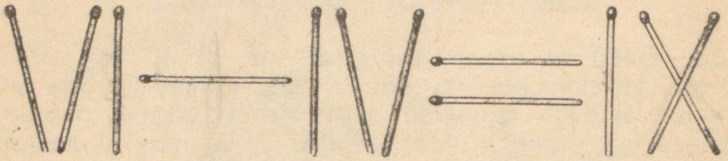
Joon. 8. Kuidas peab meister toimima?

13. Ahela parandamine

Kas te teate, miks noor meister on nii mõtteisse vajunud (joon. 8)? Ta ees on viis ahelatükki, mis tuleb lisalülisid kasutamata ühendada. Kui näiteks kolmas lüli katki lõigata (üks operatsioon) ja ühendada neljanda lüliga (teine operatsioon), seejärel katki lõigata kuues lüli ja ühendada seitsmenda lüliga jne., siis kuluks kokku kaheksa operatsiooni. Meister aga soovib läbi ajada ainult kuue operatsiooniga. See õnnestuski tal. Kuidas ta seda tegi?

14. Parandage viga

Võtke 12 tuletikku ja moodustage nende abil joonisel 9 toodud «võrdus».



Joon. 9. Parandage viga ainult üht tikku ümber tõstes.

Võrdus pole ilmselt kehtiv, sest 6—4 ei ole ju 9. Tõstke üks tuletikk niiviisi ümber, et me saaksime õige võrduse.

15. Kolmest neli (naljaülesanne)

Laual on kõrvuti kolm tuletikku.

Ühtegi tuletikku lisamata tehke kolmest neli. Tuletikke murda ei tohi.

16. Kolm pluss kaks on kaheksa (veel üks naljaülesanne)

Toome veel ühe analoogilise naljaülesande. Võite seda pakkuda lahendamiseks mõnele oma sõbrale.

Pange lauale kolm tuletikku ja tehke sõbrale üles-

andeks lisada juba laual olevatele tuletikkudele veel kaks tikku nii, et kokku saaks kaheksa. Tuletikke muidugi katki murda ei tohi.

17. Kolm ruutu

Kaheksast pulgakesest (näiteks tuletikust), millest neli on ülejäänutest poole lühemad, tuleb moodustada 3 võrdse pindalaga ruutu.

18. Mitu detaili?

Tehase treimistsehhis treitakse tinatoorikutest detaile. Igast toorikust saab ühe detaili. Kuue detaili töötlemisel tekkivatest metallilaastudest saab ümbersulatamise teel veel ühe tooriku. Mitu detaili saab sel kombel valmistada kolmekümne kuuest tinatoorikust?

19. Katsetage!

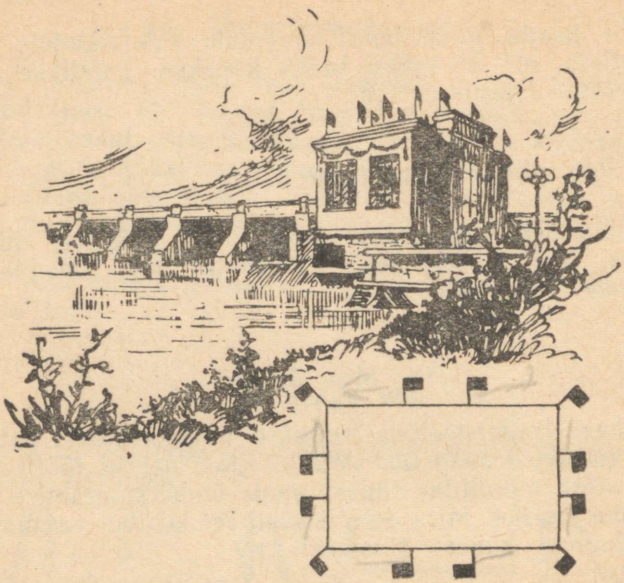
Paigutage ruudukujulises tantsusaalis seinte äärde 10 tugitooli nii, et iga seina ääres oleks tugitoole võrdselt.

20. Lippude paigutus

Kommunistlikud noored ehitasid väikese kolhoosidevahelise hüdroelektrijaama. Selle käikulaskmise päevaks ehtisid pioneerid elektrijaama kõigist neljast küljest vanikutega, värviliste lampidega ja lippudega. Lippe oli vähe, kokku ainult 12 tükki.

Pioneerid paigutasid need 12 lippu algul nii, nagu on näidatud skeemil (joon. 10), siis aga taipasid, et nad võivad need 12 lippu paigutada veidi teisiti, nii et igal küljel oleks viis või isegi kuus lippu. Teine projekt meeldis neile rohkem ja nad otsustasid igale küljele paigutada viis lippu.

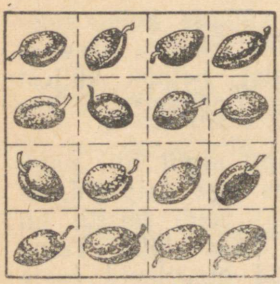
Näidake skeemil, kuidas pioneerid paigutasid 12 lippu nii, et igal küljel oli 5 lippu ja kuidas nad oleksid võinud igale küljele paigutada 6 lippu.



Joon. 10. Kuidas lippe teisiti paigutada?

21. Ikka paarisarv!

Võtke 16 mingisugust eset (paberitükke, metallraha, ploome või kabenuppe) ja paigutage nad neljakaupa ritta (joon. 11). Nüüd eemaldage 6 eset, kuid nii, et igasse horisontaal- ja vertikaalritta jääks paarisarv esemeid. Eemaldatavaid esemeid erineval viisil valides võime saada erinevaid lahendusi.



Joon. 11. Te võite kuus ploomi ära süüa, kuid igasse ritta peab neid jääma paarisarv.

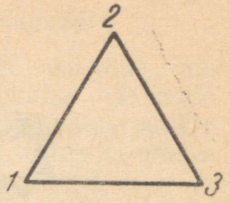
22. «Maagiline» arvukolmnurk

Ma paigutasin kolmnurga tippudesse arvud 1, 2 ja 3. Teie aga paigutage kolmnurga külgedele arvud 4, 5, 6, 7, 8, 9 nii, et igal küljel asetsevate arvude summa oleks 17. See on lihtne, kuna ma juba reetsin teile, millised arvud tuleb paigutada kolmnurga tippudesse.

Hoopis kauem tuleb teil aga vaeva näha, kui ma teile ei ütle, millised arvud tuleb paigutada kolmnurga tippudesse ja palun, et te jaotaksite jällegi arvud

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

kolmnurga tippude ning külgede vahel, kuid seekord niiviisi, et külgedel asetsevate arvude summa oleks 20.



Joon. 12.

Kui te olete otsitava arvude paigutuse leidnud, siis katsuge leida veel teisi lahendusvariante, sest ülesande tingimused on täidetavad üsna eriilmeliste arvude paigutamisviiside juures.

23. Kuidas 12 tüdrukut palli mängisid

Kaksteist tüdrukut moodustasid ringi ja hakkasid palli mängima. Iga tüdruk viskas palli oma vasakule naabrile. Kui ring oli täis, pandi pall liikuma vastassuunas. Mõne aja pärast ütles üks tütarlaps: «Viskame parem palli üle ühe.»

Nataša aga vaidles vastu: «Meid on ju kaksteist, siis ei saa pooled tüdrukud üldse mängida.»

«Siis mängime üle kahe!» (Iga kolmas tüdruk püüab palli).

«Veel hullem, siis mängivad ju ainult neli tüdrukut... Kui te tahate, et kõik tüdrukud saaksid mängida, siis tuleb palli visata üle nelja (viies püüab). Muid võimalusi ei ole.»

«Aga kui visata üle kuue?»

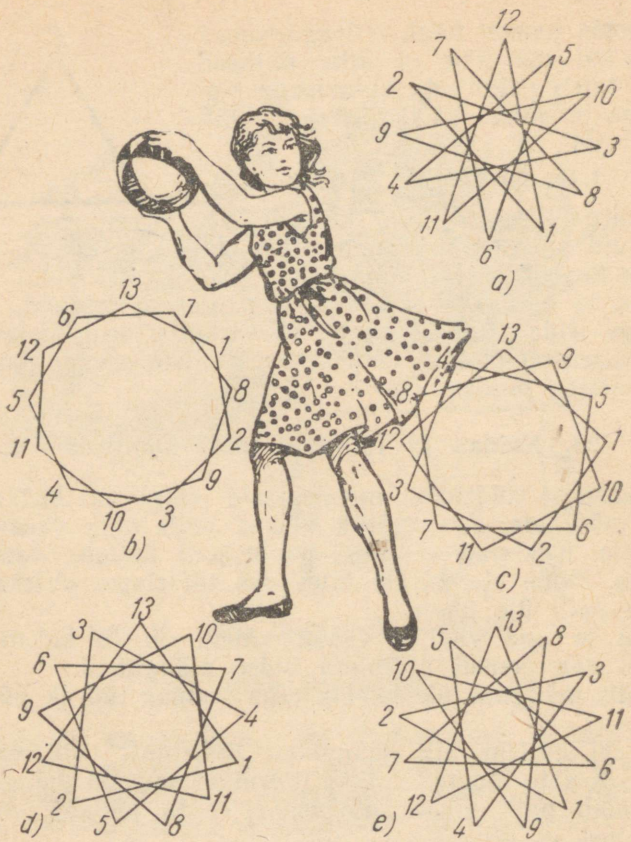
«See on seesama kombinatsioon, ainult et pall liigub vastassuunas.»

«Aga kui visata üle kümne (iga üheteistkümnes püüab)?» küsisid tüdrukud.

«Nii me juba mängisime...»

Tüdrukud joonistasid liivale kõigi ettepanekute skeemid ja veendusid peagi, et Natašal oli õigus. Peale esialgse mänguviisi haaras ainult üks mänguskeem kõiki osavõtjaid (joon. 13, *a*).

Kui aga mängust osavõtvaid tüdrukuid oleks olnud kolmteist, siis oleks võinud palli visata nii üle ühe (joon. 13, *b*), üle kahe (joon. 13, *c*), üle kolme (joon. 13, *d*) kui ka üle nelja (joon. 13, *e*), kusjuures igal juhul



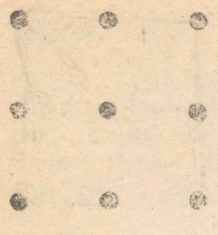
Joon. 13. Iga tüdruk viskas palli oma vasakpoolsele naabrile.

oleksid kõik tüdrukud saanud mängida. Tehke kindlaks, kas kolmeteistkümne mängija puhul saab palli visata üle viie mängija? Kuidas oleks lugu üle kuue mängija viskamisega? Mõtelge järele ja joonistage selguse mõttes vastavad skeemid paberile.

24. Nelja sirgega

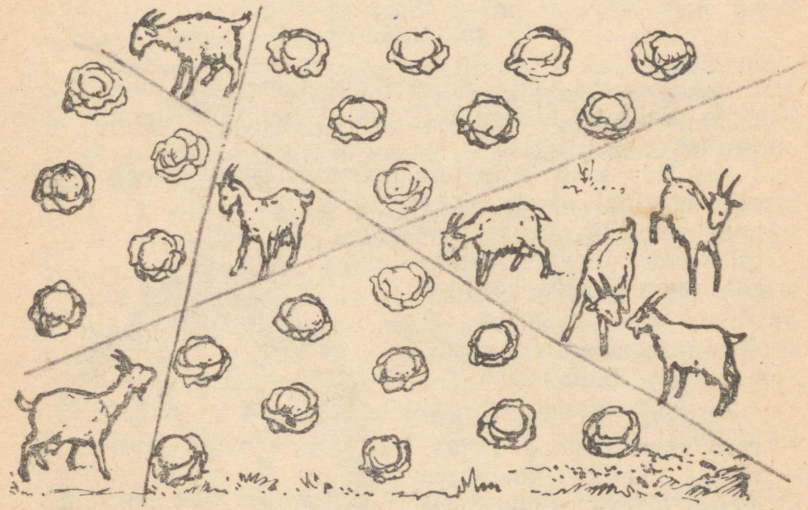
Võtke paberileht ja kandke sellele joon. 14 eeskujul üheksa punkti nii, et nad moodustaksid ruudu. Ühendage kõik punktid pliiatsit paberilt tõstmata nelja sirglõiguga.

25. Päästke kapsad!



Joon. 14.

Nüüd aga lahendage ülesanne, mis on teatud mõttes eelmise ülesande vastandiks. Seal me ühendasime punkte sirglõikudega, siin aga tuleb tõmmata kolm sirgjoont nii, et kitsed ei pääseks kapsaste kallale (joon. 15). Raamatusse ei maksa jooni tõmmata. Kandke kitsede ja kapsaste asetuse skeem üle paberile ja püüdke alles siis ülesandest jagu saada. Muide, kui kasutada abivahenditena kudumisvardaid või traadijuppe, siis saaks läbi ka jooni tõmbamata.

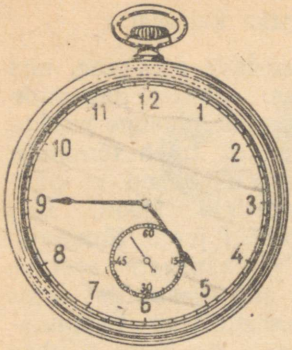


Joon. 15. Nende maiasmokkade vastu tuleb kiiresti abinõud tarvitusele võtta ...

26. Kaks rongi

Kiirrong väljus Moskvast Leningradi suunas ja sõitis peatusi tegemata 60-kilomeetrise tunnikiirusega. Teine rong väljus samal ajal Leningradist Moskva suunas ja sõitis samuti peatusteta, kuid ainult 40-kilomeetrise tunnikiirusega.

Kui kaugel on need rongid teineteisest üks tund enne kohtumist?



Joon. 16.

27. Tõusu ajal (naljaülesanne)

Kalda läheduses seisva laeva reelingult oli vette lastud nöörredel. Redelil oli 10 pulka, pulkade vahe oli 30 sentimeetrit. Kõige alumine pulk puudutas parajasti veepinda.

Ookean oli rahulik, kuid peagi algas tõus, kiirusega 15 sentimeetrit tunnis. Kui palju aega oli möödunud tõusu algusest kui vee alla kadus nöörredeli kolmas pulk?

28. Numbrilaud

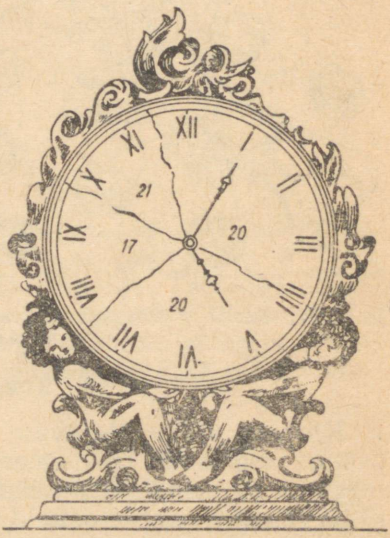
a) Jaotada kella numbrilaud kahe sirgjoonega kolmeks osaks nii, et igal osal olevate numbrite summa oleks võrdne.

b) Kas saab kella numbrilauda jagada kuueks osaks nii, et igal osal oleks kaks numbrit, ja et kõigil osadel olevate numbrite summa oleks võrdne?

29. Purunenud numbrilaud

Muuseumis ma nägin vanaaegset rooma numbritega kella, kusjuures meile tuttava numbri nelja (IV asemel oli tõmmatud neli kriipsu (IIII). Praod jagasid numbrilaua nelja ossa (joon. 17). Eri osadel asetsevate arvude summad ei olnud võrdsed — ühel 21, teisel 20, kolmandal 20 ja neljandal 17.

Ma märkasin, et pragude veidi teistsuguse



Joon. 17. Praod jagasid kella numbrilaua nelja ossa.

paigutuse korral oleks igal neljal osal asetsevate arvude summa 20. Uued praod ei pea tingimata läbima numbrilaua tsentrit. Joonistage see numbrilaud paberilehele ja leidke pragude uus paigutus.

30. Kummaline kell (Hiina mõistatus)

Kord nõuti ühte majja kiiresti kellasseppa.

«Ma olen haige ja ei saa tulla,» vastas kellassepp. «Kuid kui viga pole tõsine, siis ma saadan oma õpilase.»

Selgus, et kella murdunud osutid oli vaja uutega asendada.

«Sellega saab mu õpilane hakkama,» ütles meister. «Ta kontrollib teie kella mehhanismi ja valib neile uued sobivad osutid.»

Õpilane tegi tööd väga püüdlikult ja kui ta kella ülevaatuse lõpetas, hakkas juba pimenema. Lugedes töö lõpetatuks, pani ta väljavalitud osutid paigale oma kella järgi, suure osuti numbrile 12 ja väikse numbrile 6 (oli just kell kuus õhtul).

Kuid varsti pärast seda, kui õpilane jõudis meistri juurde tagasi, helises telefon. Poiss võttis telefonitoru ja kuulis tellija pahast häält:

«Te parandasite kella halvasti, ta ei näita õiget aega.»

Meistri õpilane, keda see teade hämmastas, kiirustas tellija juurde. Kui ta saabus, näitas remonditud kell üheksanda õhtutunni algust. Õpilane võttis oma taskukella välja ja ulatas selle pahasele majaperemehele:

«Palun kontrollige. Teie kell ei jää ju sekunditki maha.»

Jahmunud tellija pidi nõustuma, et kell näitas antud momendil tõepoolest õiget aega.

Kuid juba järgmise päeva hommikul helistas tellija uuesti ja ütles, et kella osutid on ilmselt hulluks läinud ning luusivad mööda numbrilauda just nii, nagu neile meeldib. Meistri õpilane jooksis tellija poole. Kella osutid näitasid mõni minut üle seitsme. Kontrollides nende näitu oma kella järgi, vihastas nüüd õpilane omakorda tõsiselt:

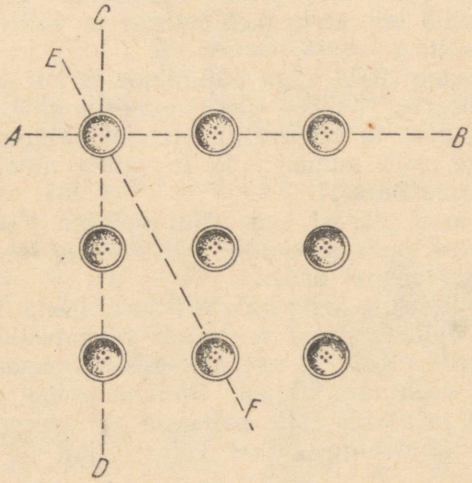
«Te vist pilkate mind. Teie kell näitab ju õiget aega!»

Kell näitas tõepoolest õiget aega. Nördinud õpilane tahtis kohe lahkuda, kuid peremees palus teda pisut

oodata. Mõne minuti pärast avastasid nad nende uskumatute sündmuste tõelise põhjuse. Kindlasti taipate ka teie, milles asi seisab.

31. Kolm tükki reas

Paigutage lauale üheksa nööpi nii, nagu on näidatud joonisel 18. Lepime kokku, et niipea, kui mingil sirgjoonel asetseb kaks või enam nööpi, siis sellist asetust me nimetame «reaks». Nii on joonisel 18 *AB* ja *CD* read, milles on kolm nööpi, ja *EF* rida, milles on kaks nööpi. Tehke kindlaks, kui palju on joonisel kolme nööbiga ridu, ja kui palju on ainult kahe nööbiga ridu.



Joon. 18. Mitu rida siin on?

Seejärel eemaldage kolm meelevaldset nööpi ja paigutage ülejäänud kuus nööpi kolme ritta nii, et igas reas oleks kolm nööpi.

32. Kümme rida

Üpris lihtne on taibata, kuidas tuleb kuusteistkümmend kabenuppu paigutada kümnesse ritta nii, et igas reas oleks neli nuppu. Hoopis raskem on asetada üheksa

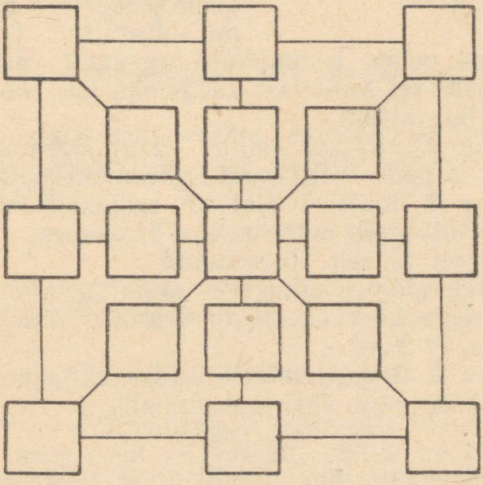
nuppu kümnesse ritta nii, et igas reas oleks kolm nuppu.
Lahendage mõlemad ülesanded!

33. Müntide paigutamine

Joonistage puhtale paberilehele joonisel 19 toodud kujund, suurendades seejuures kõiki mõõtmeid 2—3 korda. Peale selle hankige endale 17 münti alljärgnevas väärtuses:

20-kopikalisi 5 tükki,
15-kopikalisi 3 tükki,
10-kopikalisi 3 tükki,
5-kopikalisi 6 tükki.



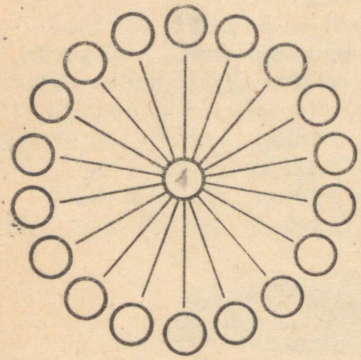


Joon. 19. Paigutage mündid selle kujundi ruutudesse.

Paigutage need mündid joonistatud kujundi ruutudesse nii, et igal joonisel antud sirgjoonel asetsevate kopikate summa oleks 55.

34. Ühest üheksateistkümneni

Paigutage joonisel nr. 20 toodud üheksateistkümnesse ringi täisarvud ühest kuni üheksateistkümneni nii, et igas ühel sirgel asetsevate ringide kolmikus olevate arvude summa oleks 30.



Joon. 20. Paigutage ringidesse numbrid ühest kuni üheksateistkümneni.

35. Kiiresti, kuid ettevaatlikult!

Järgmised neli ülesannet lahendage «aja peale», s. t. võitja on see, kes annab kõige kiiremini õige vastuse.

Ülesanne 1. Keskpäeval väljub Moskvast Tuula suunas autobuss. Tund aega hiljem hakkab Tuulast Moskva poole sama teed mööda sõitma jalgrattur. Tema kiirus on autobussi omast loomulikult tunduvalt väiksem. Kes on kohtumishetkel Moskvast kaugemal, kas reisijad autobussis või jalgrattur?

Ülesanne 2. Mis on kallim, kas kilogramm kümnekopikalisi või pool kilogrammi kahekümnekopikalisi?

Ülesanne 3. Kella 6 ajal lõi seinakell kuus korda. Taskukella abil tegin ma kindlaks, et esimese ja kuuenda löögi vahe oli täpselt 30 sekundit.

Kui kuuele löögile kulub pool minutit, palju kulub siis löömiseks aega keskpäeval või kesköö, millal seinakell peab lööma 12 korda?

Ülesanne 4. Ühest punktist lendas välja kolm pääsukest. Millal on nad ühel tasapinnal?

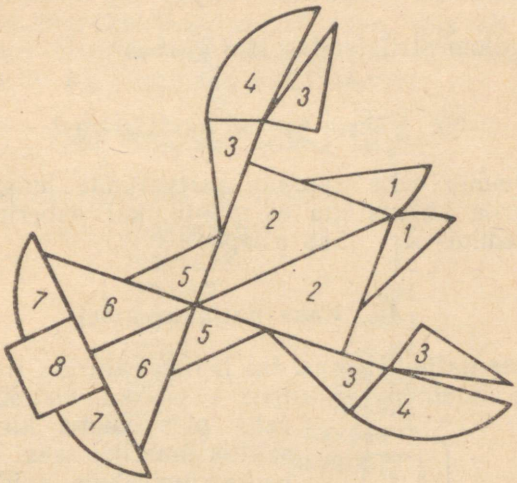
Aga nüüd kontrollige rahulikult järele mõteldes oma mõttekäike ja vaadake seejärel «Vastuste» osa.

Noh, kuidas oli? Ega te ometi sattunud mõnda väiksesse lõksu, mis neis lihtsais ülesandeis peituvad?

Taolised ülesanded just sellepoolest ongi huvitavad, et nad teritavad tähelepanu ja manitsevad ettevaatusele ka päris lihtsana näivas mõttekäigus.

36. Geomeetriline vähk

Joonisel 21 kujutatud geomeetriline «vähk» koosneb 17 tükist.



Joon. 21. Moodustage «vähi» tükkidest ring ja ruut.

Moodustage selle «vähi» tükkidest korraga kaks geomeetrilist kujundit — ring ja selle kõrvale ruut.

37. Raamatu hind

Raamatu eest maksti üks rubla ja veel pool raamatu hinda. Kui kallis oli raamat?

38. Rahutu kärbes

Moskva — Simferoopoli autoteel alustasid kaks jalgratturit üheaegselt treeningut, sõites teineteisele vastu. Sel hetkel, kui jalgrattureid lahutas veel kõigest 300 km, hakkas treeningsõidu vastu huvi tundma kärbes. Olles startinud ühe jalgratturi õlalt, hakkas ta teisele vastu lendama. Jõudnud teise jalgratturini ja veendunud, et kõik on korras, pöördus ta otsekohe tagasi. Kärbes lendas esimese sportlaseni ning pöördus jälle tagasi teise juurde.

Nii ta lendas teineteisele lähenevate jalgratturite vahel kuni jalgratturite kohtumiseni. Seejärel kärbes rahunes ja istus ühele neist ninale.

Kärbes lendas jalgratturite vahel kiirusega 100 km tunnis, jalgratturid aga sõitsid kogu aeg kiirusega 50 km tunnis.

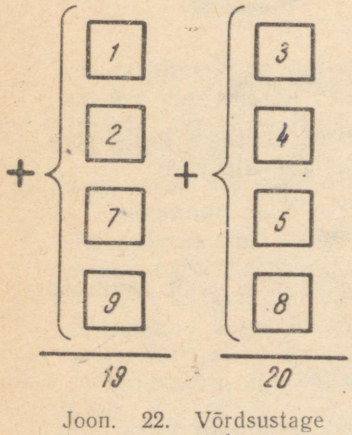
Mitu kilomeetrit lendas läbi kärbes?

39. Vähem kui 50 aasta pärast

Kas leidub selle sajandi aastaarvude hulgas arvu, mis paberile kirjutatuna ei muutu, kui paberit pöörata nii, et ülemine serv jääb allapoole?

40. Kaks naljaülesannet

Esimene naljaülesanne. Isa helistas tütrele, ning palus osta talle ärasõiduks üht-teist vajalikku. Ostuks vajalik raha pidi asuma kirjutuslaua sahtlis ümbriku sees. Tütarlaps heitis ümbrikule vaid põgusa pilgu, nägi sellele kirjutatud arvu 98, võttis raha välja ja pistis selle üle lugemata käekotti. Ümbriku ta kägardas kokku ning viskas minema.



Joon. 22. Võrdsustage summad.

Tütarlaps ostis kaupluses 90 rubla eest asju. Kui ta kauba eest maksma hakkas, siis selgus ootamatult, et tal ei jää mitte 8 rubla üle, vaid tuleb hoopis 4 rubla puudu.

Kodus ta rääkis sellest isale, ning küsis, kas see pole raha lugemisel eksinud. Isa vastas, et raha oli õigesti loetud ning selgitas naerma hakates tütrele ta eksituse. Milles oli viga?

Teine naljaülesanne. Võtke käärid ja pliiats ning valmistage endale 8 paberitükikest numbritega 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9. Need numbrid paigutage joon. 22 eeskujul kahte veergu.

Kaht paberitükki ümber paigutades võrdsustage mõlema veeru numbrite summad!

41. Kui vana ma olen?

Kui ma olin kaheksa aastat vana, siis oli mu isa kolmekümne ühe aastane. Praegu on ta minust kaks korda vanem. Kui vana ma nüüd olen?

42. Hinnake «silma järgi»

Teie ees on kaks veergu arve:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Kui neid veerge lähemalt vaadelda, siis selgub, et teises tulbas on samad arvud mis esimeseski, ainult ümberpööratud järjekorras. (Näitlikkuse mõttes on esimeses veerus nullid ära jäetud).

Kumb veerg annab liitmisel suurema arvu?

Algul hinnake neid summasid «silma järgi», s. o. püüdke liitmist tegelikult teostamata kindlaks teha, kas veergude summad on võrdsed või on üks neist suurem, seejärel aga kontrollige liitmise abil.

43. Kiirliitmine

Kaheksa kuuekohalist arvu

$$+\begin{cases} 328\,645 \\ 491\,221 \\ 816\,304 \\ 117\,586 \\ 671\,355 \\ 508\,779 \\ 183\,696 \\ 882\,414 \end{cases}$$

on valitud niiviisi, et neid mõistlikult rühmitades saab summa leida 8 sekundi jooksul. Kas te tulete sellega toime?

«Vastuste» osas on toodud mõningaid näpunäiteid, kuid... nende otsimiseks kulub rohkem kui 8 sekundit.

Oma sõpradele demonstreerige veel kaht trikki, mida võite nalja pärast samuti «kiirliitmiseks» nimetada.

Esimene trikk. Ütelge sõpradele järgmist: «Kirjutage ühte tulpa nii palju ühepikkusi mitmekohalisi arve, kui teile iganes meeldib. Ma kirjutan sinna tulpa kiiresti veel niisama palju arve juurde ning liidan selle kõik välgukiirusel kokku.»

Oletame, et sõbrad kirjutasid paberile järgmised arvud:

7621
3057
2794
4518

Teie kirjutate nüüd juurde veel neli arvu, nii et igas tulbas oleva arvu ja teie poolt selle arvu jaoks juurde kirjutatud arvu summa oleks 9999. Selliste arvude kirjutamine läheb üsna kiiresti:

5481
7205
6942
2378

Tõepoolest:

4518	2794	3057	7621
+ 5481	+ 7205	+ 6942	+ 2378
9999	9999	9999	9999

Summa leidmine on juba lihtne:

7621
3057
2794
+ 4518
5481
7205
6942
2378

Summa leidmiseks tuleb vaid 9999 kiiresti korrutada neljaga. Seda on peast kerge teha, tarvitseb vaid 10 000 korrutada neljaga ja lahutada 4 ülearust ühelist. Saame:

$$10\,000 \times 4 - 4 = 39\,996.$$

Eks ole lihtne!

Teine trikk. Kirjutage teineteise all kaks ühepikkust ükskõik kui suurt arvu. Ma lisan omalt poolt veel kolmanda arvu juurde ning kirjutan siis otsekohe, ilma mõtlemata kõigi kolme arvu summa number numbrilt vasakult alates üles.

Oletame, et te panite kirja järgmised arvud:

72 603 294
51 273 081

Mina kirjutan omalt poolt juurde veel näiteks arvu 48 726 918 ja ütlen otsekohe kõigi kolme arvu summa.

Missugune arv tuleb juurde kirjutada ja kuidas seejärel kiiresti summat leida, see mõtelge ise välja!

44. Kummas käes?

Andke oma sõbrale kaks metallraha: üks paarisarvulise ja teine paarituarvulise kopikate arvuga (näiteks kahe- ja kolmekopikaline). Las sõber võtab ühe raha paremasse ja teise vasakusse pihku (loomulikult seda teile näitamata). Väikese matemaatilise triki abil saate kergesti öelda, kumb raha on kummas käes.

Selleks paluge, et sõber korrutaks paremas käes oleva kopikate hulga kolmega ja vasakus käes oleva kopikate hulga kahega. Kui ta sellega valmis on, siis paluge, et ta liidaks need korrutised ning ütleks teile saadud summa.

Kui saadud summa on paarisarv, siis asub kahekopikaline paremas käes, kui aga summa on paaritu, siis asub kahekopikaline vasakus käes.

Tehke endale selgeks, miks see alati nõnda on ja püüdke seda trikki mitmekesistada.

45. Kui palju neid on?

Poisil on õdesid ja vendi ühepalju, tema õel aga on õdesid kaks korda vähem kui vendi.

Mitu venda ja mitu õde on selles perekonnas?

46. Ühesuguste numbritega

Ainult liitmistehet kasutades kirjutage arv 28 üles viie kahe abil ja arv 1000 kaheksa kaheksa abil.

47. Sada

Mistahes aritmeetilisi tehteid kasutades moodustage kas viie ühe või viie viie abil arv 100. Viie viie abil on see võimalik kahel erineval viisil.

48. Aritmeetiline kahevõitlus

Meie kooli matemaatikaringis oli üksvahe järgmine komme. Ringi vanem andis igale ringi liikmeks astuda soovijale jõukatsumiseks mõne lihtsa ülesande — väikese matemaatilise pähkli. Kes ülesande lahendas, see võeti kohe ringi liikmeks vastu, kes aga pähklist jagu ei saanud, sellel tuli esialgu jääda vabakuulajaks.

Meenub, kuidas meie ringi vanem esitas kord ühele uustulnukale — ta nimi oli Viktor — järgmise ülesande:

«Paberile on kirjutatud rida arve:

1 1 1
3 3 3
5 5 5
7 7 7
9 9 9

Asendada 12 numbrit nullidega nii, et me liitmise tulemusena saaksime 20.»

Viktor mõtles veidi ja kirjutas peagi:

```
  0 1 1          0 1 0
  0 0 0          0 0 3
+ 0 0 0    või + 0 0 0
  0 0 0          0 0 7
  0 0 9          0 0 0
  -----          -----
    2 0            2 0
```

Seejärel ta naeratas ning ütles: «Kui antud viies kolmekohalises arvus teha nulliks üheksa teatavat numbrit, siis võib saada liitmisel summaks 1111. Proovige!»

Ringi vanem hämmeldus veidi, kuid asus vapralt asja

juurde. Hätta ta ei jäänud. Ülesanne oli varsti lahendatud ja isegi omapoolne lisaülesanne välja mõeldud: «Muide, ka siis saame nende viie kolmekohalise arvu summana 1111, kui me ei asenda nullidega mitte üheksa, vaid ainult kaheksa numbrit!»

Nüüd oli nuputamise järjekord Viktori käes. Ringi liikmed jälgisid ootamatult tekkinud aritmeetilist kahevõitlust suure huviga. Viktor hammustas katki ka selle pähkli ja pakkus kõigi kohalviibijate suureks meeleheaks välja ülesande uue jätku: «Nende kolmekohaliste arvude juures piisab sama summa 1111 saamiseks isegi sellest, kui asendada nulliga ainult 6 numbrit.»

Matemaatikaõpetaja kiitis mõlemat «duellanti» ja lisas omalt poolt täiendusena juurde, et summa 1111 saamiseks piisab sellest, kui nullidega asendada vaid viis numbrit.

Leidke selle ülesande kõigi nelja variandi lahendus. Koostage analoogiline ahelülesanne mitte kolmest, vaid viiest ühesugusest numbrist koosnevate arvude jaoks.

49. Kakskümmend

Neljast paaritust arvust pole raske kokku saada summat, mis võrduks kümnega:

$$1 + 1 + 3 + 5 = 10,$$

või siis

$$1 + 1 + 1 + 7 = 10.$$

On veel kolmaski võimalus:

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10.$$

Rohkem lahendusi sel ülesandel ei ole (liidetavate järjekorra muutmine ei anna ju meile uut lahendust).

Hoopis rohkem erinevaid lahendusi on aga järgmisel ülesandel:

Leida kaheksa paaritut arvu, mille summa on 20, kusjuures liidetavate hulgas võib olla ka võrdseid arve.

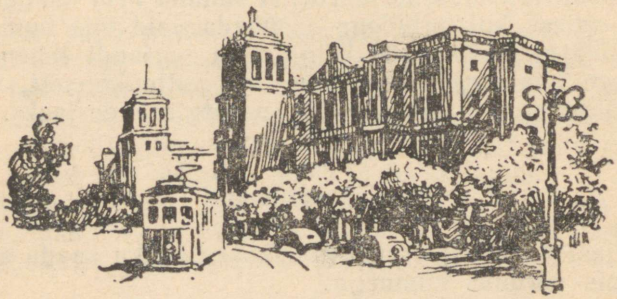
Leidke selle ülesande kõik erinevad lahendused ning tehke kindlaks, kui palju on nende hulgas selliseid, milles on maksimaalne hulk erinevaid liidetavaid.

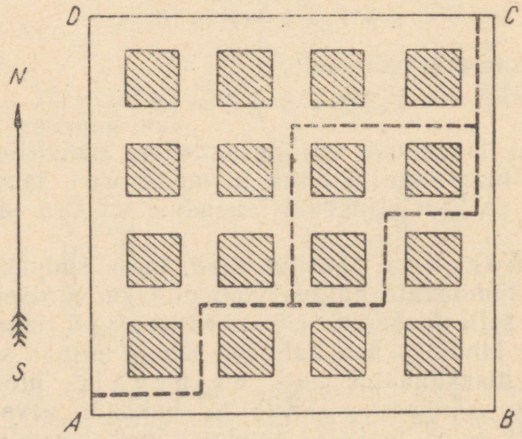
Väike nõuanne. Kui te hakkate arve huupi valima, siis te võite kätte saada mõned lahendid, kuid süsteemitu katsetamise juures te ei või kindel olla, et te

olete tõepoolest võimalike lahendite hulga ammendanud. Kui te aga loote teatud katsetamise süsteemi, siis ei pääse teie käest ükski lahend.

50. Mitu erinevat marsruuti?

Hiljuti saime rühma kooliõpilaste käest kirja, milles jutustati järgmist: «Matemaatikaringis töötades me joonistasime üles meie linna kuueteistkümne kvartali plaani. Juuresoleval skeemil (joon. 23) on üksikud kvartalid tinglikult tähistatud ühesuguste ruutudega.





Joon. 23. Mitu marsruuti viib *A*-st *C*-sse?

Meid huvitas järgmine küsimus.

Mitmel erineval marsruudil võib jõuda punktist *A* punkti *C*, kui liikuda piki meie linna tänavaid ainult põhja ja ida suunas? Üksikud marsruudi osad võivad seejuures ühte langeda (vt. punktiirjooni skeemil).

Meil tekkis mulje, et sellele küsimusele pole sugugi lihtne vastata. Kas me lahendasime ülesande õigesti, kui me leidsime, et kokku on võimalikud 70 erinevat marsruuti?»

Mida tuleb vastata sellele kirjale?

51. Muutke arvude järjestust

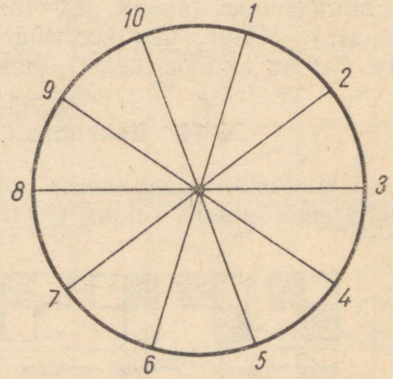
Viie diameetri otspunktidesse on paigutatud arvud 1 kuni 10, nagu on näidatud joonisel 24. Toodud paigutuse korral on vaid ühel juhul kõrvutiasetsevate arvude summa võrdne samade diameetrite vastasotstes olevate arvude summaga:

$10 + 1 = 5 + 6$. Teiste arvupaaride juures see seos ei kehti, näiteks

$1 + 2 \neq 6 + 7$

või

$2 + 3 \neq 7 + 8$.



Joon. 24.

Paigutage antud arvud niiviisi ümber, et iga kõrvutioleva arvudepaari summa võrduks diameetrite vastasotstes olevate arvude summaga.

Ülesandel on arvatavasti mitu lahendit, s. o. leidub mitu erinevat arvude paigutust, mis rahuldavad ülesande tingimusi.

Püüdke leida selline lahendusviis, mis võimaldaks kindlaks teha ka kõigi võimalike lahendite arvu.

52. Erinevad tehted, aga sama tulemus

Kui kahe kahe vahel plussmärk asendada korrutamismärgiga, siis tulemus ei muutu. Tõepoolest: $2 + 2 =$

$= 2 \times 2$. Raske pole leida ka kolme sama omadusega arvu, nimelt $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$. Leiduvad ka neli ühekohalist arvu, mis nii omavahel korrutatuna kui ka liidetuna annavad ühe ja sama tulemuse.

Kes suudab need arvud kõige kiiremini leida? Valmis? Jätkake nüüd võistlust! Algul leidke viis, siis kuus, seitse jne. samade omadustega ühekohalist arvu. Siin tuleb silmas pidada asjaolu, et viiest arvust alates võib vastuseid olla mitu.

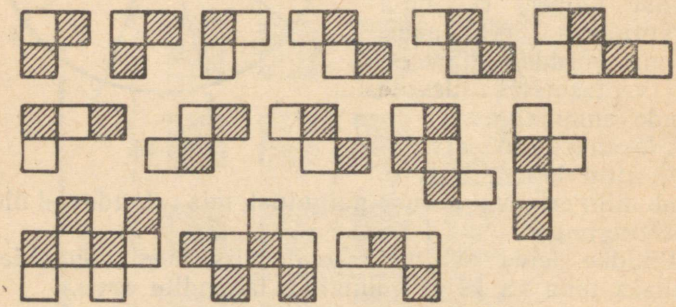
53. Üheksakümmend üheksa ja sada

Mitu plussmärki tuleb paigutada arvu 987 654 321 numbrite vahele, et summa oleks 99?

Siin on võimalikud kaks erinevat lahendust. Neid pole küll kuigi kerge leida, kuid see-eest te omandate vilumust, mis võimaldab teil juba üsna kiiresti paigutada plussmärgid seitsme numbri 1 2 3 4 5 6 7 vahele nii, et summa tuleks täpselt 100 (numbrite järjekorda ei tohi muuta). Muide, üks koolitüdruk Kemerovo linnast väidab, et ka siin on kaks võimalikku lahendust.

54. Kokkupandav malelaud

Üks lustakas malemees lõikas oma papist malelaua neljateistkümneks tükiks (joon. 25). Sõpradele, kes tulid



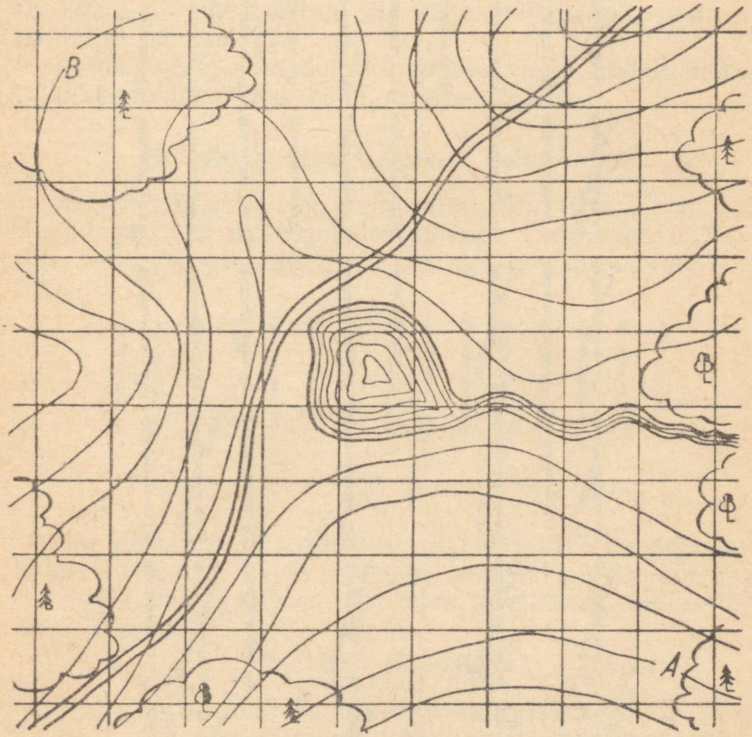
Joon. 25. Niisugusteks tükkideks lõikas lustakas malemees oma malelaua.

tema juurde malet mängima, tegi ta kõigepealt ülesandeks malelaud 14 tükist kokku panna.

Lõigake ruudulisest paberist välja samasugused tükid ja otsustage ise, kas on kerge või raske neist malelauda koostada.

55. Miine otsimas

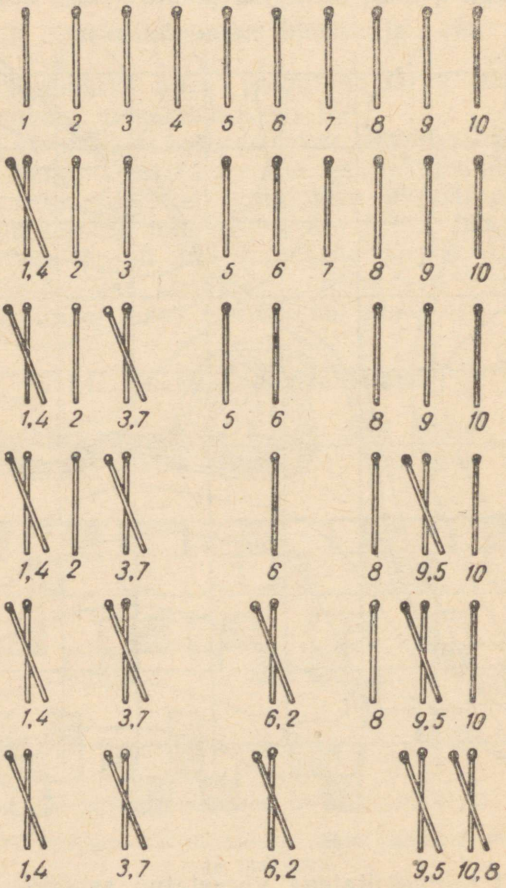
Pärast väljaõppuste lõppu suvoorovlaste rühmaga otsustas polkovnik oma kasvandikele anda jõukatsumiseks ühe nuputamisülesande. Ta võttis kaarditaskust ruutvõrguga kaetud maastiku plaani (joon. 26) ja ütles:



Joon. 26. Kahel sapööril tuleb see piirkond läbi uurida.

«Kahel miiniotsijatega varustatud sapööril tuleb see piirkond läbi uurida, et teha kahjutuks vaenlase poolt mahapandud miinid. Selleks peavad nad läbima kõik

kaardil märgitud ruudud peale keskmise, milles asub väike tiik. Ruutu, mille üks sapöör juba läbi on uurinud, teine sapöör ei lähe. Liikuda võib vaid horisontaal- ja vertikaalsuunas, diagonaale pidi käimine ei ole lubatud. Üks sapöör alustab oma marsruuti ruudust *A* ja lõpetab ruudus *B*. Teine sapöör alustab ruudust *B* ning jõuab lõpuks ruutu *A*. Märkige sapööride võimalikud liikumisteed nii, et mõlemal tuleb läbida ühepalju ruute. Need



Joon. 27. Üle kahe tiku hüpates tõstame 10 tikku viieks paariks.

mõnevõrra ebaharilikud tingimused on mõeldud vaid teie taibukuse kontrollimiseks.»

Suvoorovlased joonistasid plaani oma vihikutesse ning mõne aja pärast oli ka lahendus käes. Oma tubliduse eest said nad polkovnikult kiita. Lahendage ka teie see polkovniku poolt antud ülesanne.

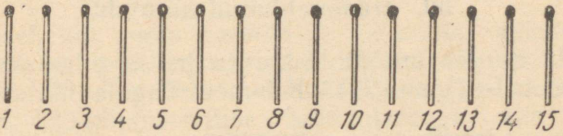
56. Rühmitage tuletikud kahekaupa

Lauale on ühte ritta paigutatud 10 tuletikku. Ma võin need tuletikud rühmitada viieks paariks, tõstes sealjuures iga kord ühe tuletiku üle kahe, näiteks nii, nagu on näidatud joonisel 27.

Leidke nüüd samadel tingimustel mõni hoopis erinev tuletikkude paarideks rühmitamise süsteem.

57. Rühmitage tuletikud kolmekaupa

Viisteist tuletikku on paigutatud ühte ritta (joon. 28). Koondage need tuletikud kolmekaupa viide rühma. Tuletikke võib tõsta ainult ükshaaval, iga kord üle kolme tuletiku.



Joon. 28.

See ülesanne on eelmisest raskem; ta lahendamiseks kulub 10 tõstet. Et te saaksite oma lahendust võrrelda raamatus tooduga, kirjutage üles tuletikkude ümbertõstmise järjekord.

58. Kell jäi seisma

Mul pole taskukella, on vaid suur seinakell ja seegi jäi ühel heal päeval seisma. Ma läksin ühe oma tuttava poole, kelle kell käib õigesti, sain teada õige aja ning pöördusin varsti koju tagasi. Kodus ma tegin kiiresti paar lihtsat arvutust ning panin seejärel seinakella õigeks.

Kuidas ma toimisin, ning kuidas ma arvutasin välja õige aja, kui pidada silmas, et mul ei olnud algul teada, kui palju aega kulub tuttava juurde minekuks?

59. Nelja aritmeetilise tehtega

Teie ees on seitse rida järjestikku paigutatud numbreid:

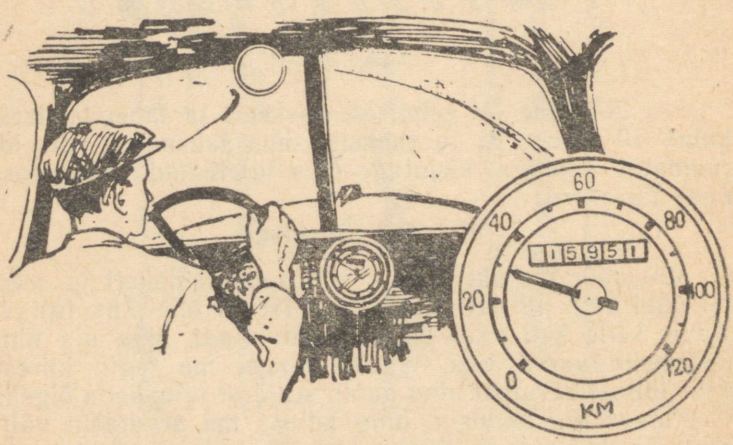
1 2 3 = 1
1 2 3 4 = 1
1 2 3 4 5 = 1
1 2 3 4 5 6 = 1
1 2 3 4 5 6 7 = 1
1 2 3 4 5 6 7 8 = 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Numbrite järjestust muutmata paigutage nende vahele aritmeetiliste tehete märgid nii, et igas reas oleks tehete tulemuseks üks. Tehteid tuleb teostada nende kirjutamise järjekorras, s. t. vasakult paremale. Kuna siin võib liitmine eelneda korrutamisele, siis tuleb mõnikord vajalikes kohtades kirjutise korrektsuse säilitamiseks kasutada ka sulgusid.

Kui on tarvis, võite kaht kõrvutiasetsevat numbrit arvestada ka ühe kahekohalise arvuna.

60. Hämmeldunud autojuht

Mida mõtles autojuht, kui ta heitis pilgu oma auto spidomeetrile (joon. 29)? Kilomeetrilugeja näitas 15951.



Joon. 29. Spidomeeter näitas sümmeetrilist arvu.

Autojuht märkas, et auto poolt läbitud kilomeetrite hulk väljendus sümmeetrilise arvuga, s. o. arvuga, mille korral on ükskõik, kas teda lugeda algusest või lõpust.

«Huvitav!...» pomises autojuht. «Nüüd vist ei tule kilomeetrilugejasse enam niipea sellist omapärast arvu.»

Ent täpselt kahe tunni pärast näitas kilomeetrilugeja jällegi sümmeetrilist arvu. Tehke kindlaks, kui kiiresti sõitis autojuht viimase 2 tunni vältel?

61. Tsimljanski hüdrosõlme jaoks

Tsimljanski hüdrosõlme jaoks määratud mõõteriistade kiirtellimust asus täitma eeskujuliku kvaliteedi brigaad, mille koosseisu kuulus brigadir — vana ja kogenud tööline — ning 9 äsja tööstuskooli lõpetanud noortöölist.

Päeva jooksul monteeris iga noortööline kokku 15 mõõteriista, brigadir aga 9 riista rohkem, kui neid tuli kümneliikmelise brigaadi iga liikme kohta keskmiselt.

Mitu mõõteriista monteeris brigaad ühe päevaga?

62. Õigeks ajaks

Sügisel, kui algas normivilja vedamine, otsustas kolhoosi juhatus asja organiseerida nii, et viljavoor jõuaks linna täpselt kella üheteistkümneks hommikul. Kui autod sõidaksid 30-kilomeetrilise tunnikiirusega, siis jõuaks kolonn linna kella kümneks; kui aga autod sõidaksid 20-kilomeetrilise tunnikiirusega, siis kella kaheteistkümneks.

Kui kaugel on linn kolhoosist ja millise kiirusega tuleb sõita, et õigeks ajaks kohale jõuda?

63. Linnalähedases rongis

Kaks sõbratari-koolitüdrukut sõitsid kord elektrirongiga linnast maale.

«Kuule,» ütles järsku üks sõbrataridest, «ma panin tähele, et iga viie minuti järel me kohtame üht linna poole sõitvat rongi. Mis sa arvad, mitu elektrirongi saabub ühe tunni jooksul linna, kui rongid liiguvad mõlemas suunas ühesuguse kiirusega?»

«Loomulikult 12, sest 60 : 5 = 12,» ütles teine sõbratar.

Kuid küsimuse esitaja ei olnud sõbratari vastusega päri ja esitas talle omapoolsed kaalutlused.

Mis arvate teie sellest asjast?

64. Ühest miljardini

Jutustatakse, et kui õpetaja tegi 9-aastasele Gaussile * ülesandeks leida saja esimese täisarvu summa $(1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100)$, siis väike Gauss mõtles ise välja võtte nende arvude ülikiireks liitmiseks.

Selleks tuleb liita esimene ja viimane arv, teine ja eelviimane arv jne. Iga sellise arvupaari summa on 101 ja ja paare täpselt 50. Järelikult on esimese saja täisarvu summa $101 \times 50 = 5050$.

Kasutage sama võtet raskema ülesande lahendamiseks: leida miljardi esimese täisarvu kõigi numbrite summa.

Pange tähele: siin ei ole juttu mitte a r v u d e summast, vaid kõigi arvude n u m b r i t e summast!

65. Jalgpallihaige kohutav unenägu

Jalgpallihaige tundis meelehärmi «oma» meeskonna kaotuse pärast ja magas rahutult. Ta nägi unes tühja nelinurkset tuba. Toas treenis väravavaht, kes lõi palli vastu seina ja püüdis selle siis osavasti kinni.



Joon. 30. Kera püüdis väikest palli puruks muljuda.

Äkki hakkas väravavaht kahanema. Ta kahanes seni, kuni muutus väikeseks valgeks lauatennise palliks. Jalg-

* K. F. G a u s s (1777—1855) — tuntud saksa matemaatik.

pall aga muundus samal ajal metallkeraks ja hakkas mööda põrandat ringi tormama, püüdes väikest tselluloidpalli laiaks litsuda. Vaene pall viskus meeleheites siia-sinna, väsis peagi ja ei olnud enam võimeline metallkera eest põgenema.

Kas tal aga siiski ei leidunud võimalust põrandalt lahkumata metallkuuli eest pääseda?

II OSA

Teises osas leiduvate ülesannete lahendamisel läheb juba tarvis oskust opereerida liht- ja kümnendmurdudega. Lugeja, kes pole veel murde õppinud, võib selle osa ülesanded algul vahele jätta ja minna üle järgmiste peatükkide juurde.

66. Kell

Mööda meie suurt ja toredat kodumaad rännates tuli mul kord viibida sellises paigas, kus päevase ja öise õhutemperatuuri vahe oli sedavõrd suur, et kui ma kogu aeg värskes õhus viibisin, siis see mõjus juba isegi mu kella käigule. Ma panin tähele, et temperatuuri muutuste mõjul mu kell käis päeval $1/2$ minutit ette ja jäi öö jooksul $1/3$ minutit maha.

Esimese mai hommikul näitas kell veel õiget aega. Milliseks kuupäevaks on mu kell täpselt 5 minutit ette käinud?

67. Trepp

Mitu korda on sama treppi mööda ronides tee kuuendale korrusele pikem kui tee kolmandale korrusele? Eeldatud on, et korrused on ühekõrgused.

68. Keeruline ülesanne

Milline märk tuleb asetada kõrvuti kirjutatud numbrite 2 ja 3 vahele, et me saaksime arvu, mis on kahest suurem, kuid kolmest väiksem?

69. Huvitavad murrud

Kui murru $^1/_3$ lugejale ja nimetajale liita murru nimetaja, siis murru väärtus kahekordistub.

Leidke selline murd, mille lugejale ja nimetajale murru nimetajat liites murru väärtus a) kolmekordistub, b) neljakordistub.

(Need, kes tunnevad algebrat, võivad seda ülesannet üldistada ja lahendada selle võrrandi abil).

70. Milline arv?

Millisest arvust moodustab pool ühe kolmandiku?

71. Koolipoisi tee

Borjal tuleb igal hommikul kooli jõudmiseks läbida üsna pikk tee.

Kodu ja kooli ühendava tee esimese veerandi kohal asub tehnikajaama hoone elektrikellaga fassaadil, koolitee esimese kolmandiku kohal aga raudteejaam. Tavaliselt möödub ta tehnikajaamast kella poole kaheksa ajal ning raudteejaamast kell 7.35.

Millal Borja väljub kodust ja millal ta jõuab kooli?

72. Staadionil

Piki jooksurada on üksteisest võrdsesse kaugusse paigutatud 12 lippu. Startides esimese lipu juurest, jõudis sportlane kaheksa sekundi pärast kaheksanda lipu juurde. Mitme sekundi pärast on ta jooksu sama kiirusega jätkates kaheteistkümnenda lipu juures?

Ärge ainult sisse kukkuge!

73. Kas ta võitis aega?

Ostap pöördus Kiievist koju tagasi. Esimese poole teest ta sõitis rongiga ning läbis selle 15 korda kiiremini kui jala käies. Teine pool teest tuli tal paraku läbida härgadel, seega kaks korda aeglasemalt kui jala käies.

Kas Ostap võitis aega võrreldes sellega, mis tal oleks kulunud kogu maa jalgsi läbimiseks?

74. Äratuskell

Äratuskell jääb tunnis 4 minutit maha; 3,5 tunni eest seati ta õigeks. Praegu näitab õige kell 12. Mitme minuti pärast näitab ka äratuskell 12?

75. Väikeste tükkide asemel suured

Masinaehitustehastes on üheks huvitavamaks erialaks märkija elukutse. Märkija tõmbab töötlemisele minevale toormaterjalile jooned peale, mille järgi sellele siis vajalik kuju antakse.

Märkijal tuleb lahendada huvitavaid ja mõnikord päris raskeid geomeetrilisi ülesandeid, tegelda aritmeetiliste arvutustega jne.

Kord tuli tehases 7 ühesugust ristkülikukujulist plaati jagada võrdsetes osades kaheteistkümne detaili vahel. Toodi siis need plaadid märkija kätte ja paluti, et ta kavandaks selle tükeldamise nii, et ühtegi plaati ei tuleks väga väikesteks tükkideks saagida. Järelikult kõige lihtsam lahendus — saagida iga plaat kaheteistkümneks tükiks — ei sobinud, sest see andis suure hulga väikseid tükke. Mis teha?

Kas neid plaate ei saaks kuidagi jagada suurematèks tükkideks? Märkija mõtles natuke aega, tegi mingisuguseid tehteid murdarvudega ja lõpuks leidiski kõige ökonoomsema plaatide jaotamise viisi.

Hiljem oli tal juba üsna lihtne jagada viis plaati võrdselt kuue detaili vahel, 13 plaati 12 detaili vahel, 13 plaati 36 detaili vahel, 26 plaati 21 detaili vahel jne.

Kuidas märkija toimis?

76. Seebitükk

Ühele kaalupoolele asetati seebitükk, teisele kaalupoolele aga pandi tasakaalustamiseks $^3/_4$ samasugusest seebitükist ja veel $^3/_4$ kilogrammi. Kui palju kaalub seebitükk?

77. Aritmeetilisi pähkleid

Ülesanne 1. Kirjutage kahe numbri abil üles vähim positiivne täisarv.

Ülesanne 2. Arvu 37 võib avaldada viie kolme abil:

$$37 = 33 + 3 + {}^3/_3$$

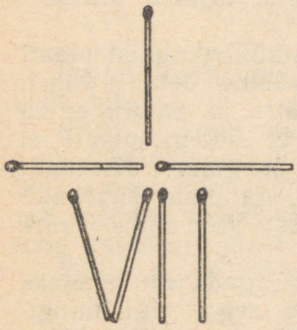
Leidke veel üks võimalus arvu 37 avaldamiseks viie kolme abil.

Ülesanne 3. Kirjutage arv 100 kuue ühesuguse numbri abil.

Ülesanne 4. Kirjutage arv 55, kasutades selleks ainult viit nelja.

Ülesanne 5. Kirjutage nelja üheksa abil arv 20.

Ülesanne 6. Seitsmest tikust on moodustatud arv $^1/_7$ (joon. 31). Muutke see murd arvuks $^1/_3$, kusjuures tikkude hulk peab jääma samaks.



Joon. 31.

Ülesanne 7. Kirjutage arv 20, kasutades selleks ainult numbreid 1, 3, 5, 7 ning igaüht neist täpselt kolm korda.

Ülesanne 8. Numbritest 1, 3, 5, 7 ja 9 moodustatud kahe arvu summa on võrdne numbritest 2, 4, 6 ja 8 moodustatud kahe arvu summaga. Leidke need arvud, kasutades iga numbrit vaid üks kord.

Märkus. Liigmurde ei tohi kasutada.

Ülesanne 9. Missugused kaks arvu annavad teineteisega korrutamisel ja suuremast väiksema lahutamisel sama tulemuse?

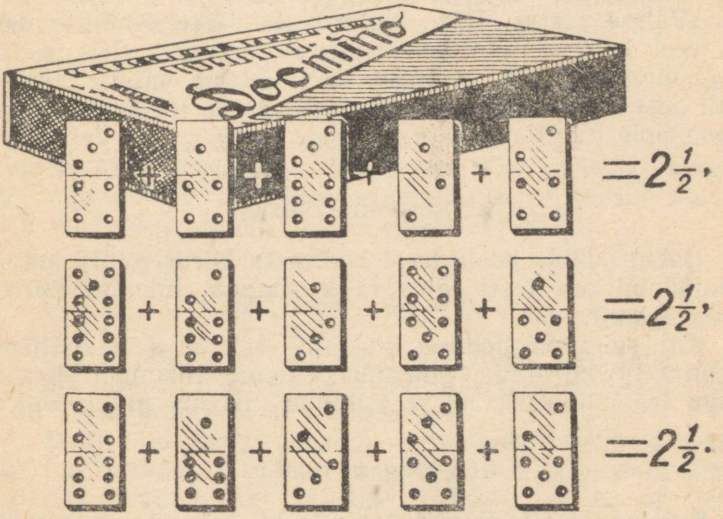
Selliseid arvupaare on lõpmata palju. Kuidas neid leida?

Ülesanne 10. Moodustage numbritest 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kaks võrdset murdu, mille summa on 1. Seejuures tuleb kasutada kõiki numbreid ja igaüht ainult üks kord. (Sellel ülesandel on mitu lahendust.)

Ülesanne 11. Numbreid 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 igaüht üks kord kasutades moodustada sellised segamurrud, mille summa oleks 100. (Sellel ülesandel on mitu lahendust.)

78. Murru-doomino

Sorteerige doominokivide komplekti hulgast välja kaksikkivid (6—6, 1—1 jne.) ning kivid, kus silmad puuduvad vähemalt ühel poolel (nn. plangud). Ülejäänud viitteistkümmet kivi võime vaadelda kui murdusid ja paigutada need kolme ritta nii, et murdude summa oleks igas reas $2^1/_2$ (joon. 32).



Joon. 32. Murdude summa on iga reas $2^1/_2$.

Huvitav on märkida, et neid 15 kivi ümber paigutades võib saada murduderead, mille summad on täisarvud (kuigi eri ridades erinevad).

Kasutades mõningaid doominokive kui liigmurde ($^4/_3$, $^6/_1$, $^3/_2$ jne.), proovige need 15 kivi viiekaupa kolme ritta paigutada nii, et igas reas oleks murdude summa 10.

Esimesel korral see teil ei õnnestu. Tuleb veidi nuputada ja natuke aega harjutada.

Milliseid arve õnnestuks teil peale selles ülesandes toodute veel saada, kui paigutada kivid viiekaupa kolme ritta ja nõuda, et kõigi ridade summad oleksid võrdsed?

79. Miša kassipojad

Kui Miša näeb kusagil hüljatud kassipoega, võtab ta selle tingimata kaasa ja viib koju. Tal on kodus alati mitu kassipoega. Kui palju neid just on, sellest ta ei armasta rääkida, sest ta kardab, et poisid hakkavad teda ta harrastuse pärast pilkama.

Kord juhtus, et talt küsiti:

«Mitu kassipoega sul praegu on?»

«Vähe,» vastas Miša. «Kolm neljandikku nende arvust ja veel kolmveerand kassipoega.»

Sõbrad arvasid, et Miša teeb lihtsalt nalja. Tegelikult aga andis ta neile väikse ülesande, mille lahendamine pole kuigi raske. Proovige!

80. Keskmine kiirus

Hobune läbis poole teest koormata kiirusega 12 km/t. Ülejäänud osa teest läbis ta koormaga, liikudes kiirusega 4 km/t.

Kui suur on hobuse keskmine kiirus, s. t. millise muutmatu kiirusega pidanuks hobune liikuma, et tal kogu tee läbimiseks oleks kulunud niisama palju aega?

81. Magav reisija

Kui reisija oli läbinud poole teest, heitis ta magama. Ta magas seni, kuni tal jäi veel sõita pool sellest teest, mis ta oli läbinud magades. Millise osa kogu teest ta läbis magades?

82. Kui pikk oli rong?

Kaks paralleelteedel teineteisele vastu sõitvat rongi kohtuvad. Esimene rong sõidab kiirusega 36 km/t, teine rong aga kiirusega 45 km/t. Teises rongis istuv reisija pani tähele, et esimene rong möödus temast 6 sekundi jooksul. Kui pikk oli esimene rong?

83. Jalgrattur

Kui jalgrattur oli läbinud $^2/_3$ teest, lõhkes rattakumm. Ülejäänud teeosa lükkas ta ratast käekõrval,

kulutades seejuures kaks korda rohkem aega kui jalgrattaga sõites.

Mitmekordselt ületas jalgratturi sõidukiirus kõndimise kiiruse?

84. Enne tähtaega

Tööstuskooli õpilased, treialid Volodja ja Kostja said meistri käest ühesuguse töökäsu: valmistada partii teatavaid detaile. Poisid otsustasid tööülesande täita üheaegselt ja enne tähtaega.

Mõne aja pärast aga selgus, et Kostja oli valmis teinud vaid poole sellest, mis Volodjal veel teha jäi, Volodjal jäi aga teha veel pool sellest, mis tal juba oli tehtud. Mitu korda pidi nüüd Kostja oma päevatoodangut Volodja omaga võrreldes suurendama, et poisid jõuaksid oma tööülesande üheaegselt täita?

85. Kellel on õigus?

Maša lahendas aritmeetikaülesannet. Viimane operatsioon seisis mullatööde mahu määramises, selleks aga tuli leida kolme arvu korrutis.

Maša sai kahe esimese arvu korrutamisega päris kähku hakkama ja pidi juba tulemuse korrutama kolmanda arvuga, kui ta äkki märkas, et ta oli teise teguri valesti üles kirjutanud; see oli tervelt kolmandiku võrra suurem õigest arvust.

Et juba tehtud tööd mitte lasta raisku minna, otsustas Maša, et mullatööde õige mahu leidmiseks piisab, kui ta vähendab kolmandat tegurit eelnevalt ühe kolmandiku võrra, seda enam, et teine ja kolmas tegur olid omavahel võrdsed.

«Nii ei tohi teha,» ütles talle sõbratar. «Sinu poolt saadud tulemus erineb õigest tervelt 20 kuupmeetri võrra.»

«Noh, mis siin peaks valesti olema? Kui ma ühte arvu suurendasin, teist temaga võrdset arvu aga niisama palju vähendasin, siis peaks minu arvates korrutis ju õige olema,» vaidles Maša sõbratarile vastu.

Kellel on õigus?

Kas te ise võiksite toodud andmetest lähtudes leida mullatööde õige mahu?

86. Kolm praetud leivaviilukat

Ema praeb väga maitsvaid leivaviilukaid. Selleks kasutab ta väikest panni, millele mahub ainult kaks leivaviilukat. Viilukaid praeb ta mõlemalt küljelt, kusjuures ühe külje praadimiseks kulub 30 sekundit.

Mõtelge nüüd välja, kuidas emal õnnestub kolm leivaviilukat pruuniks praadida ainult $1^1/_2$ minuti jooksul. Esimesel pilgul näib ju, et alla kahe minuti ei tohiks ta selle tööga kuidagi hakkama saada.

II PEATÜKK

RASKED OLUKORRAD

87. Sepp Hetšo kavalus

Möödunud suvel Gruusias matkates me lõbustasime end mõnikord sellega, et mõtlesime välja igasuguseid ebatavalisi lugusid, mida meile sisendasid vanaaja salapärased mälestusmärgid.

Kord me jõudsime üksiku muistse torni juurde. Vaatasime ta igast kandist üle ning istusime maha jalgu puhkama. Meie hulgas juhtus olema üks matemaatikaüliõpilane, kes mõtles kohe välja järgmise huvitava ülesande:

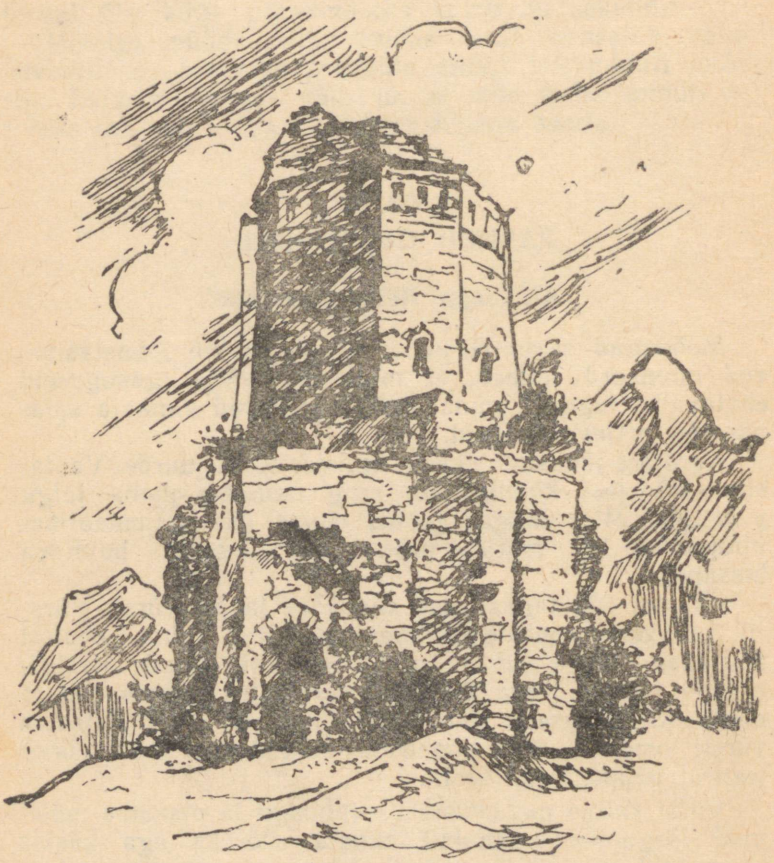
«Aastat 300 tagasi elas siin kõrk ja õel vürst. Vürstil oli kena meheleminekuealine tütar, nime poolest Daridžan. Vürst lubas oma Daridžani rikkale naabrimehele naiseks, aga Daridžan armastas hoopis lihtsat noormeest, külasepp Hetšot. Daridžan ja Hetšo katsusid vürsti omavoli eest põgeneda mägedesse, kuid vürsti teenrid püüdsid nad kinni.

Vürst sattus metsikusse raevuhoogu ja otsustas mõlemad järgmisel hommikul hukata. Ööseks aga käskis ta vangid paigutada sellesse kõrgesse, süngesse, üksikusse ning alles lõpuni väljaehitamata torni. Torni suleti ka Daridžani teenija, alaealine tütarlaps, kes oli aidanud noortel põgeneda.

Hetšo ei sattunud tornis meeleheitesse, vaid asus pääsemisvõimalust otsima. Ta ronis treppi mööda torni ülemisse ossa ja vaatas aknast välja — aken oli kõrgel, allahüppamine oleks võrdunud kindla surmaga. Siis aga

TRÜ Raamatukogu

märkas Hetšo akna kõrval ehitajate poolt unustatud köit, mis oli heidetud üle akna kohal asetseva roostetanud ploki. Nööri kummassegi otsa oli kinnitatud tühi korv. Hetšole meenus, et nende korvide abil tõstavad



Joon. 33. Me jõudsime üksiku muistse torni juurde.

müürsepad üles telliskive, alla aga lasevad kiviprügi. Kui ühe korvi kaal ületas teise oma umbes 5—6 kilogrammi võrra (kaasaegsete kaaluühikute järgi), siis see korv langes üsna sujuvalt maapinnale, teine korv aga tõusis samal ajal üles torni akna juurde.

Hetšo määras silma järgi, et Daridžan kaalus umbes 50 kilogrammi, teenija aga mitte üle 40 kilogrammi. Oma kaalu Hetšo teadis — umbes 90 kilogrammi. Peale selle leidis ta tornist veel 30 kilogrammi kaaluva ahela. Kuna igasse korvi mahtus vabalt inimene ja ahel, või isegi kaks inimest, siis õnnestus kõigil kolmel laskuda maapinnale, kusjuures koos inimesega laskuva korvi kaal ei ületanud tõusva korvi kaalu kunagi enam kui 10 kilogrammi võrra.

Kuidas vangid tornist pääsesid?»

88. Kass ja hiired

Kass Murlõka «aitas» oma noorel perenaisel äsja ülesandeid lahendada. Nüüd magab ta magusat und ja näeb unes, et ta on kolmeteistkümne hiire poolt sisse piiratud. Kaksteist hiirt on hallid, kolmeteistkümnes on aga lumi-



Joon. 34. Missugusest hiirest alustada?

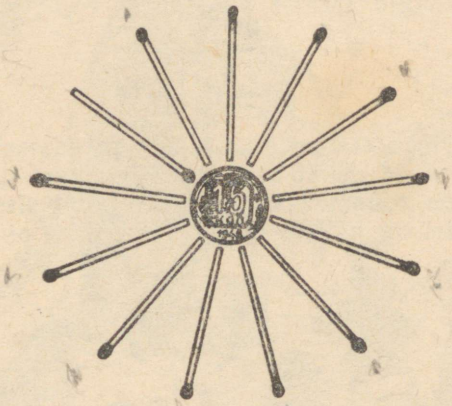
valge. Ja kass kuuleb, kuidas kellegi tuttav hääl räägib: «Murlõka, sa pead ära sööma iga kolmeteistkümnenda hiire, lugedes neid ringi mööda kogu aeg ühes suunas, kuid sellise arvestusega, et v a l g e hiir jääks v i i m a s e k s!»

Millisest hiirest tuleb alustada, et ülesannet õigesti lahendada?

Aidake Murlõkat.

89. Tuletikud mündi ümber

Asendame nüüd kassi mündiga ja hiired tuletikkudega. Ülesandeks on kõrvaldada laualt kõik tuletikud peale selle, mille pea on pööratud mündi poole (joon. 35).



Joon. 35. Missugusest tikust alustada?

Sealjuures tuleb silmas pidada järgmist tingimust: alguses tuleb laualt ära võtta üks tuletikk ja seejärel päripäeva lugedes iga kolmeteistkümnes tuletikk.

Nuputage välja, missugune tuletikk tuleb esimesena ära võtta.

90. Loos langes siisikesele ja põõsalinnule

Pioneerid otsutasid suvise laagriperioodi lõpul vabadusse lasta noorte poolt kinnipüütud põldude ja salude sulelised elanikud. Kokku oli püütud 20 lindu, igaüks neist asus eraldi puuris. Pioneerijuht tegi järgmise ettepaneku:

«Pange kõik puurid ühte ritta ja avage vasakult paremale lugedes iga viienda puuri uks. Kui te jõuate lugemisega rea lõppu, siis jätkake lugemist jällegi rea algusest, kuid juba avatud puure ärge enam arvesse

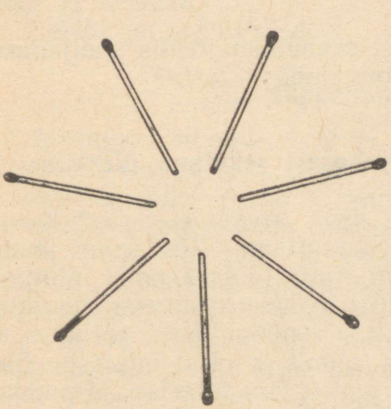
võtke. Niiviisi lugege seni, kuni on avatud kõik puurid peale viimase kahe. Nendes puurides olevad linnud võtame linna kaasa.»

Pioneerijuhi ettepanekuga olid kõik nõus. Enamikule lastest oli ükskõik, millised kaks lindu linna kaasa võtta (kui kõiki nagunii võtta ei saa), kuid Tanja ja Alik soovisid, et loos langeks just siisikesele ja põõsalinnule. Kui nad aitasid puure ritta seada, siis neile meenus ülesanne kassist ja hiirtest (ülesanne 88). Nad arvutasid kiiresti välja, missugustele kohtadele tuleb siisike ja põõsalind paigutada, et nende puurid jääksid avamata, ja paigutasid need...

Muide, ka teie võite ilma erilise vaevata ise leida, missugustele kohtadele Tanja ja Alik siisikese ja põõsalinnu puurid asetasid.

91. Jaotage mündid õigesti

Muretsege endale 7 tikku ja 6 münti. Tikud asetage lauale tähekujuliselt, nagu see on näidatud joonisel 36. Ükskõik millisest tikust alates lugege kellaosuti liikumise suunas kolmanda tikuni ja asetage selle pea juurde üks münt. Seejärel lugege jällegi samal viisil samas suunas kolmanda tikuni, alustades loendamist meelevaldsest tikust, mille juures pole veel metallraha. Niiviisi toimides püüdke kõik 6 metallraha asetada kuue tiku «päitsisse». Tikkude lugemisel tuleb arvesse võtta ka need tikud, mille juures juba asub münt; loendamist tuleb tingimata alustada tikust, mille juures münti veel pole; ühe tiku juurde ei tohi kahte raha asetada.

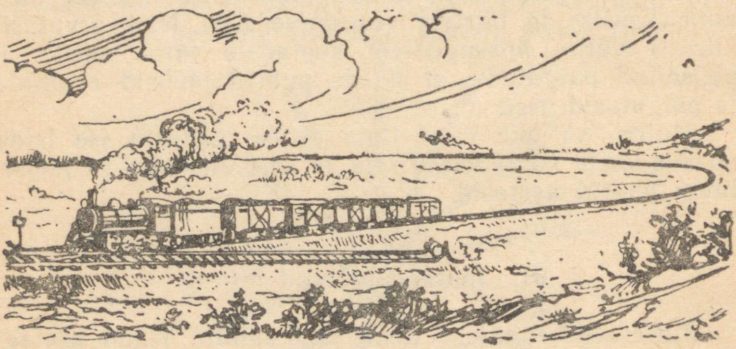


Joon. 36.

Millise reegli järgi tuleb toimida, et ülesannet oleks kerge lahendada?

92. Reisirong tuleb mööda lasta!

Üheröömelise raudteeliini väikeses pooljaamas peatus vedurist ja viiest vagunist koosnev rong, mis tõi kohale tööliste brigaadi uue teeharu ehitamiseks. Seniajani oli pooljaamas olemas ainult väike tupik, millesse vaevu-vaevu mahtus vedur kahe vaguniga.



Joon. 37. Kuidas reisirong mööda lasta?

Varsti pärast ehitusrongi saabumist jõudis pooljaama ka reisirong. Kuidas reisirong mööda lasta?

93. Kolme tütarlapse tujukusest tekkinud ülesanne

Selle ülesande teema on üsna auväärse eaga. * Kolm tütarlast läksid oma isadega jalutama. Kõik kuus jõudsid varsti väikese jõekeseni ning tahtsid oma jalutuskäiku jätkata jõe teisel kaldal. Nende käsutuses oli vaid üks paat, millel polnud küll omanikku, kuid aerud olid siiski sees. Paat mahutas ainult k a k s inimest. Üle jõe minek oleks olnud üpris lihtne, kui tütarlapsed poleks äkki kuulutanud, ei tea kas tujukusest või koerusest, et ükski neist pole nõus sõitma paadis või olema kaldal kas ühe või kahe võõra isaga, ilma et juures poleks oma isa. Tütarlapsed olid küll võrdlemisi väikesed, kuid

* Mõnevõrra erinevas redaktsioonis leidub ta ühes XIII sajandi käsikirjas.

siiski oli igaüks neist võimeline paadiga üksinda üle jõe sõitma.

Seega tekkisid jõe ületamiseks täiesti ootamatult lisatingimused, kuid teelised otsustasid ajaviiteks neid siiski püüda täita. Kuidas nad seda tegid?

94. Eelmise ülesande edasiarendus

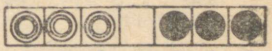
Lõbus seltskond jõudis õnnelikult vastaskaldale ja istus jalgu puhkama. Tekkis küsimus: kas samade tingimuste juures ei saaks organiseerida ka nelja paari ülevedu? Üsna peatselt selgus, et tütarlaste poolt ülesseatud tingimuste korral (vt. eelmine ülesanne) võib nelja paari ülevedu teostada vaid k o l m e inimest kandva paadiga, kusjuures ülesanne on lahenduv viie reisiga. Kuidas?

Ülesande teemat veelgi arendades leidsid meie jalutajad, et ka paadiga, millesse mahub ainult kaks inimest, võib teostada nelja paari ülevedu, seda juhul kui jõe keskel asub saar, millel võib teha vahepeatuse ja soovikorral ka maabuda. Kui nõuda nagu varemgi, et ükski tütarlaps ei viibiks võõraste isade juures ilma oma isata, siis sel juhul tuleb üleveo lõpetamiseks sooritada vähemalt 11 ülesõitu.

Leidke ka see lahendus!

95. Hüppavad kabendid

Asetage ruutudele 1, 2 ja 3 (joon. 38) kolm valget kabendit, ruutudele 5, 6 ja 7 aga kolm musta kabendit. Kasutades tühja ruutu 4, vahetage valgete ja mustade kabendite positsioonid. Seejuures tuleb kinni pidada järgmisest reeglist: kabendeid võib nihutada kõrvalolevale tühjale ruudule, lubatakse ka hüpata üle naaberkabendi, kui selle taga on tühi ruut. Valged ja mustad kabendid peavad liikuma üksteisele vastu. Tagasikäigud pole lubatud. Ülesanne on lahendatav 15 käiguga.



Joon. 38.

96. Mustad ja valged

Võtke neli valget ja neli musta kabendit (või neli vask- ja neli hõbemünti) ning paigutage nad lauale

kirjusse ritta: valge, must, valge, must ja nõnda edasi. Vasakule või paremale jätke niipalju vaba ruumi, et sinna mahuks parajasti kaks kabendit (münti). Kasutades vaba ruumi võib iga käiguga ümber tõsta vaid kaks kõrvutiasetsevat kabendit (münti), nende vastastikust asendit seejuures muutmata.

Neljast sellisest käigust piisab selleks, et neli musta kabendit asetseksid kõrvuti ning nende järel omakorda neli valget kabendit. Veenduge selles!

97. Keerukam ülesanne

Kabendite (müntide) arvu suurendamisega võib eelmist ülesannet muuta keerukamaks.

Kui te näiteks paigutate ühte ritta vaheldumisi viis valget ja viis musta kabendit, siis kulub viis tõstmist selleks, et kõik mustad kabendid ja samuti ka valged kabendid asetseksid kõrvuti.

Kuue paari korral kulub kuus tõstmist, seitsme paari korral seitse jne. Leidke ülesande lahendus viie, kuue ja seitsme paari kabendite korral.

Pidage meeles, et esialgsel kabendite rittapaigutamisel tuleb vasakule (või paremale) jätta ruumi parajasti kahe kabendi mahutamiseks ja et iga kord võib tõsta vaid kaht kabendit omavahelist järjekorda muutmata.

98. Kaardid jaotuvad numbrite järjekorras

Lõigake papist välja 10 kaarti mõõtmetega 4 × 6 cm ja nummerdage need järjest ühest kuni kümneni. Seejärel pange kaardid hunnikusse ja võtke nad kätte. Alustades ülemisest kaardist pange esimene kaart lauale, teine eelmise alla, kolmas lauale, neljas hunniku alla. Niiviisi toimige seni, kuni olete lauale paigutanud kõik kaardid.

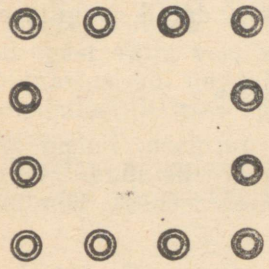
Täiesti kindlasti võib väita, et kaardid ei asu laual numbrite järjekorras.

Mõtelge järele, millises järjekorras tuleks kaardid algul hunnikusse panna, et ülaltoodud jaotamisviisi juures lauale reastuksid järjestikused numbrid ühest kuni kümneni.

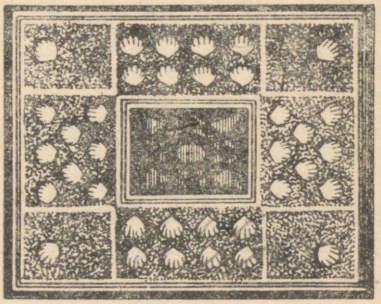
99. Kaks paigutamisülesannet

Esimene ülesanne. Kahtteistkümmet kabendit (münti, paberitükki jne.) on üpris kerge paigutada lauale ruudukujulise raamina nii, et igal küljel asetseks 4 kabendit. Kuid proovige korraks need kabendid niiviisi ümber paigutada, et igal ruudu küljel asetseks viis kabendit.

Teine ülesanne. Paigutage lauale 12 kabendit nii, et nad moodustaksid kolm horisontaalrida ja kolm vertikaalrida, kusjuures igas reas oleks neli kabendit.



Joon. 39. Kuidas paigutada igale küljele 5 kabenuppu?



Joon. 40. Laeka kaane igal äärel on 10 teokarpi.

100. Salapärane laegas

Miša puhkas möödunud suvel Artekis ja tõi sealt oma nooremale õele Irale kaasa toreda laeka, mille kaant kaunistasid 36 teokarpi. Laeka kaas oli joontega jagatud kaheksaks osaks. Ira ei käi küll veel koolis, kuid oskab juba lugeda kümneni. Kõige rohkem meeldis talle kingituse juures see, et piki iga laeka äärt oli paigutatud 10 teokarpi (joon. 40). Teokarpe lugedes võttis Ira arvesse kõik karbid, mis asetsesid piki mingit laeka äärt paiknevates osades; nurkmistes osades olevad karbid luges Ira nii ühel kui teisel äärel olevaks.

Kord vajutas ema laegast tolmust puhtaks pühkides kogemata neli teokarpi puruks. Oh õnnetust! Nüüd pole enam igal laeka äärel kümmet teokarpi. Kui Ira lasteaiast koju tuleb ja seda näeb, on ta meel kindlasti üpris kurb.

Miša aga rahustas ema: «Ära muretse, seda viga saab kergesti parandada.»

Ta nokitses ettevaatlikult lahti osa ülejäänud 32-st teokarbist ja liimis nad laeka kaanele nii, et piki iga serva oli jälle 10 teokarpi.

Mõne päeva pärast aga juhtus jällegi äpardus. Laegas kukkus maha ja purunes veel 6 teokarpi. Nüüd jäi neid järele veel ainult 26, kuid Miša oskas ka seekord nad niiviisi paigutada, et Ira sai loendades iga äärt pidi ikkagi 10 teokarpi. Õige küll, nüüd ei asetsenud nad piki ääri enam nii sümmeetriliselt kui varem, kuid Ira ei pööranud sellele erilist tähelepanu.

Leidke mõlemad Miša poolt kavandatud paigutused.

101. Vahva garnison

Lumest kindlust kaitseb vahva garnison. Poisid lõid tagasi viis vastase rünnakut, kuid ei alistunud. Mängu algul koosnes garnison neljakümnest mehest. Kindluse



Joon. 41. Lumest kindlust kaitseb vahva garnison.

komandant jaotas tema käsutuses olevad jõud algul vastavalt all toodud skeemile (keskmises ruudus on garnisoni kuuluvate meeste üldarv).

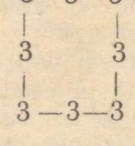
1	9	1
9	40	9
1	9	1

«Vastane» nägi, et kindluse iga külge kaitses 11 meest. Vastavalt mängureeglitele pidi garnison esimese, teise, kolmanda ja neljanda rünnakuga kaotama iga kord 4 meest. Viienda rünnakuga lõid vastased lumepallide abil reast välja veel kaks meest. Suur oli aga vastaste hämmastus, kui nad nägid, et hoolimata nende edukatest rünnakutest kaitses iga kindluse külge ikkagi pidevalt 11 meest.

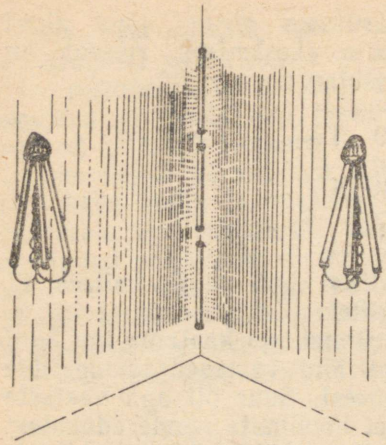
Kuidas paigutas kindluse komandant oma garnisoni väed pärast iga rünnakut?

102. Päevavalguslambid televisioonistuudios

Televisioonistuudio ühte tuba ülekandeks ettevalmistav valgustustehnik katsetas päevavalguslampide * abil mitmesuguste valgustusskeemidega. Algul ta pani toa igasse nurka 3 lampi ja igale seinale veel 3 lampi. Nelinurkses toas oli seega kokku 24 lampi (joon. 42). Seejärel lisas valgustustehnik veel neli lampi ning lõpuks veel neli lampi. Ta proovis lampide arvu vähendada ka kahekümneni ja isegi kaheksateistkümneni. Kõigi nende variantide puhul jaotas tehnik lambid nii, et piki iga seina oli alati üheksa lampi.



* Nendes torukujulistes lampides pole hõõgniite. Nad on täidetud hõrendatud gaasiga ning torude seinad on kaetud spetsiaalse seguga, mis hakkab valgust kiirgama, kui torus olevast gaasist elektrivool läbi lasta. Need lambid annavad valget, päevavalgusele lähedast valgust.



Joon. 42. Lampide esialgne paigutus.

Leidke lampide paigutamise skeemid nii 28 ja 32 kui ka 20 ja 18 lambi jaoks.

Püüdke selgitada, milliste piirideni võis valgustustehnik suurendada ja vähendada lampide arvu, nii et igal seinal oleks ikkagi 9 lampi.

Mis te arvate, kas valgustustehnik võis suurendada või vähendada lampide arvu mitte ainult neljakaupa, vaid ka ühe-, kahe- või kolmekaupa, sealjuures igale seinale ikkagi üheksat lampi paigutades?

103. Katsejäneste paigutamine

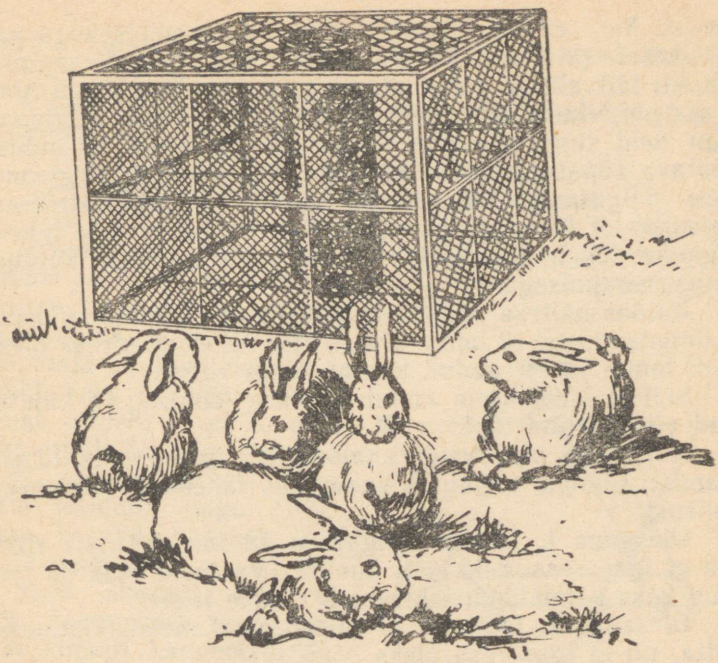
Ühes teadusliku uurimise instituudis valmistati jänestega teostatavate spetsiaalsete katsete ja vaatluste läbiviimiseks kahekordne puur, mille kummalgi korrusel oli 9 sektsiooni (joon. 43). Kahes keskmises sektsioonis asetsesid aparaadid, ülejäänud 16 sektsiooni olid määratud katsejäneste jaoks (8 sektsiooni alumisel ja 8 ülemisel korrusel).

Katsetingimuste kohaselt tuli jänesed paigutada puuri nii, et:

1) kõigis kuueteistkümnes sektsioonis oleks jäneseid;
2) üheski sektsioonis ei oleks üle kolme jänese;
3) igal puuri küljel oleks 11 jänest;
4) ülemisel korrusel oleks kaks korda rohkem jäneseid kui alumisel korrusel.

Instituut sai aga 3 jänest vähem, kui oli ette nähtud. Sellele vaatamata jaotati jänesed sektsioonidesse kooskõlas toodud tingimustega.

Tehke kindlaks, mitu jänest taheti algul puuri paigutada ja kuidas neid kavatseti sektsioonidesse jaotada. Kui te sellega hakkama olete saanud, siis leidke veel, kuidas paigutati sektsioonidesse tegelikult saadud jänesed.



Joon. 43. Katseteks valmistati puur.

104. Ettevalmistused pühadeks

Eelneva viie ülesande geomeetriline mõte seisnes esemete paigutamises piki *nelja* sirgjoont (ristküliku või ruudu külge) nii, et piki iga sirget paiknevate esemete hulk ei muutuks esemete üldarvu muutumisel.

Selline paiknemine saavutati selle arvel, et nurkades asetsevaid esemeid loeti mõlemale nurga küljele kuuluvaiks, just nagu kahe sirge lõikepunkt on mõlema sirge ühiseks punktiks.

Kui eeldada, et iga kujundi külgedel asetsev ese hõivab vastaval küljel teatava punkti, siis nurkades asetsevaid esemeid tuleb ette kujutada ühte punkti (nurga tippu) kuhjunuina.

Edaspidises loobume sellisest kas või ettekujutatavast esemete ühte geomeetrilisse punkti kuhjamise võima-

lusest. Me loeme tasapinnal asetsevate esemete kogu iga üksikeset (kivikest, lampi, puud jne.) ühte tasapinna punkti täitvaks ja me ei piira end edaspidises enam nõudega paigutada neid esemeid ainult piki nelja sirgjoont. Kui neid tingimusi veel täiendada ülesande lahenduse teatava sümmeetrilisuse nõudega, siis esemete sirgjoonelise paigutamise ülesanded muutuvad geomeetrilisest seisukohast üsna huvitavateks. Selliste ülesannete lahendamine lõpeb tavaliselt teatava geomeetrilise kujundi konstrueerimisega.

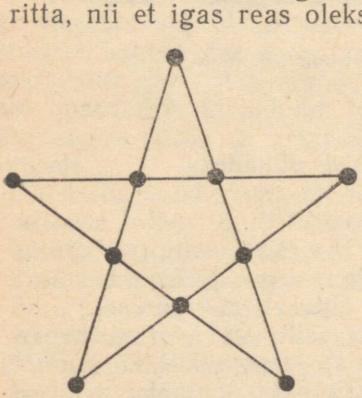
Kuidas näiteks paigutada pühadeaegse illuminatsiooni valmistamiseks 10 lampi viide ritta, nii et igas reas oleks neli lampi ja et saadud kujund oleks nägus?

Sellele küsimusele annab vastuse joonisel 44 kujutatud viieharuline täht.

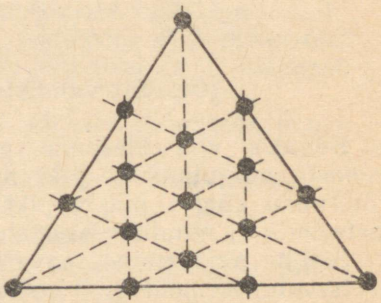
Harjutage veel veidi analoogiliste ülesannete lahendamist; püüdke seejuures saavutada lahenduse sümmeetrilisust.

Ülesanne 1. Kuidas paigutada 12 lampi kuude ritta, nii et igas reas oleks neli lampi? (Vastuste osas on toodud kaks võimalikku lahendust. Leidke teisi!)

Ülesanne 2. Istutage 13 ilupõõsast kaheteistkümnesse ritta, nii et igas reas oleks 3 põõsast.



Joon. 44. Viis rida neljakaupa.



Joon. 45. Kuidas saada 15 neljalist rida?

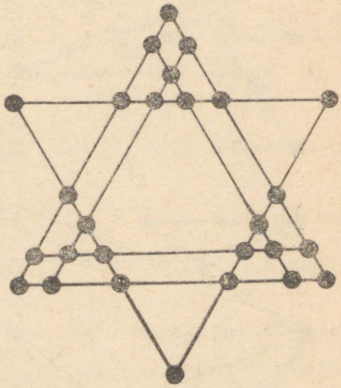
Ülesanne 3. Aednik kasvatas kolmnurksel maatükil (joon. 45) 16 roosi, mis asetsesid kaheteistkümnes sirgjoonelises reas, kusjuures igas reas oli 4 roosi. Aednik istutas need roosid lillepeenrale ümber, saades nüüd

15 rida, kusjuures igas reas oli endiselt neli roosi. Kuidas ta seda tegi?

Ülesanne 4. Paigutage 25 puud viiekaupa kaheteistkümnesse ritta.

105. Istutage noored tammed ümber!

Joonisel 46 toodud skeemilt on näha, kuidas 27 noort tamme on istutatud üheksasse ritta, igas reas kuus puud. Selline paigutus on silmale küll kaunis, aga iga metsakasvataja tunnistaks selle kõhklemata praagiks. Tamm nõuab nimelt, et päike paistaks ainult ülalt ja et ümberringi oleks rohelus. Tammele meeldib, nagu räägitakse, kasvada kasukas, kuid palja peaga.



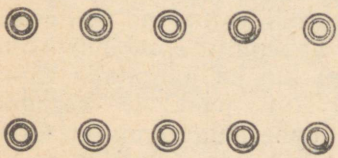
Joon. 46. Leidke teistsugune paigutus.

Meie skeemil aga on kolm tammekest teiste hulgast kuhugi kaugemale ära eksinud ja konutavad seal täielikus üksinduses!

Proovige need 27 noort tamme niiviisi ümber istutada, et nad oleksid nagu ennegi üheksas reas, igas reas kuus puud, aga et kõik puud oleksid kolmes suures rühmas, ilma et ükski neist oleks eraldunud. Säilitage ka paigutuse sümmeetria.

106. Geomeetrilised mängud

Esimene mäng. Pange lauale 10 kabendit (või münti, nööpi jne.) kahte viielisse ritta, nii nagu on näidatud joonisel 47.



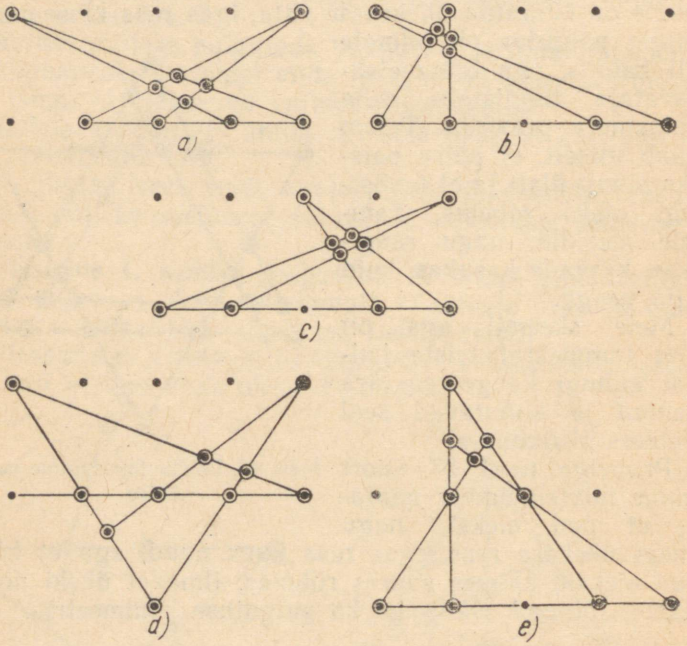
Joon. 47.

Ühest reast tuleb ümber paigutada kolm kabendit ja teisest reast üks kabend, nii et me saaksime viis rida nelja kabendiga igas reas

(ülejäänud kabendeid ei tohi liigutada, samuti ei tohi kabendeid panna üksteise otsa).

Siin pole erinevalt varasematest ülesannetest nõutud lahenduse sümmeetrilisust. Näitena on joonisel 48 toodud viis erinevat lahendust.

Märkus. Lahendusi loetakse erinevateks, kui saadud kujundid on erinevad kabendite asetuse poolest (nagu näiteks joonisel 48 toodud lahendused).

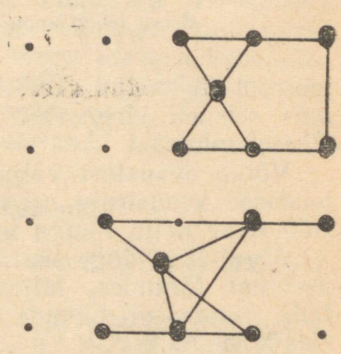


Joon. 48. Viis erinevat lahendust.

Te võib-olla arvate, et ma nende lahendusega ammendasin selle ülesande võimalikud lahendused. Kaugeltki mitte! Ülesande lahendamiseks võib valida nii erinevaid ümberpaigutamiseks määratud kabendite kombinatsioone (vt. joon. 48 skeemid *a*, *b*, *c*, *e*) kui ka paigutada sama kombinatsiooni erineval viisil (vt. joon. 48 skeemid *a* ja *d*). Oletame, et te võtate ümberpaigutamiseks kolm kabendit ülemisest reast ja ühe kabendi alumisest reast. Juba ainuüksi neid kolme kabendit võite valida kümnel

erineval viisil. Veenduge selles! Iga sellise kombinatsiooniga võime aga ühendada veel mistahes kabendi alumisest reast. Kokku saame seega $10 \cdot 5 = 50$ erinevat ümberpaigutamiseks määratud neljalist kabendite rühmitust!

Lisamärkus esimese mängu juurde. Organiseerige järgmine võistlusmäng. Iga osavõtja ette asetage 10 kabendit (võib papist välja lõigata) kahte ritta ja las iga mängija paigutab neli kabendit (kolm ühest ja üks teisest reast) niiviisi ümber, et moodustuks viis rida nelja nupuga igas reas. Loomulikult tuleb mängijad asetada niiviisi, et neil poleks võimalik teiste mängijate lahendusi näha.



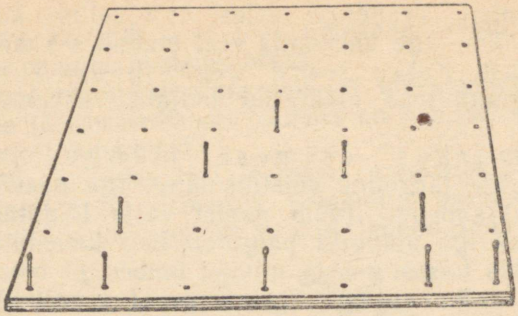
Joon. 49. Kaks võimalikku lahendust.

Pärast võrrelge lahendusi. Need mängijad, kellel on ühesugused lahendused, saavad ühe punkti, need mängijad, kellel on teistest erinevad lahendused, saavad kaks punkti. Kindlaksmääratud aja jooksul ülesannet mitte lahendanud mängijad ei saa üldse punkte. Korrake seda mängu mõned korrad, leidke iga mängija poolt saadud punktide summa ja määrake võitjad.

Mängu võib läbi viia ka ilma kabenditeta. Andke igale mängijale paberileht ja joonlaud. Kabendid asendatakse punktidega paberil, mis algul tehakse samuti viiekaupa kahte ritta. Ühest reast kolme ja teisest reast üht punkti läbi tõmmates tuleb paberile märkida neli uut punkti, nii et me saaksime jällegi viis rida nelja punktiga igas reas.

Veel üks märkus esimese mängu juurde. Esimest mängu võib täiendada veel nii, et kummastki reast võib võtta kaks kabendit, ja et neid võib panna ka teineteise otsa. Siis tekivad hoopis uued võimalused. Mõned neist on toodud joonisel 49. See täiendav kokkulepe suurendab võimalike lahenduste arvu üsna tunduvalt.

Teine mäng. Võtke tükk pappi ja torgake sellesse ruudukujuliselt 49 avaust. Kümnesse avausse paigutage



Joon. 50. Kümme tuletikku kümnes augus.

joonisel 50 toodud skeemi kohaselt tuletikud. Mängu olemus seisneb järgnevale ülesandele sarnaste ülesannete lahendamises.

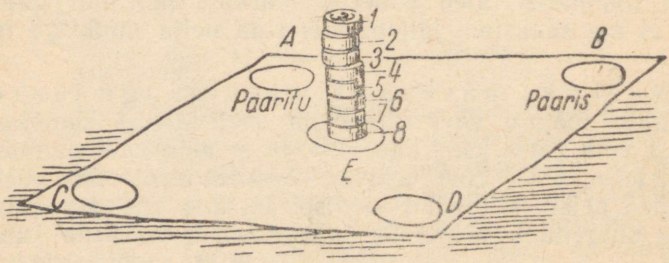
Võtke avaustest välja kolm tikku ja paigutage nad teistesse avaustesse niiviisi ümber, et me saaksime viis rida tikke nelja tikuga igas reas.

Algul lahendage see ülesanne joonisel 50 toodud algasendist lähtudes, hiljem võite ülesannet mitmekesistada, muutes nii tikkude algasendit kui ka kujundatavate ridade hulka.

M ä r k u s. «Mänguvälja» loomiseks sobib suurepäraselt plastiliin.

107. Paaris ja paaritu

Pange 8 järjestikku ühest kuni kaheksani nummerdatud kabendit joonisel 51 toodud skeemi kohaselt kesk-



Joon. 51. Reeglitest kinni pidades paigutage kabenupud ringidesse *A* ja *B*.

misse ringi. Ülesanne seisab selles, et vähima käikude arvuga kabendid 1, 3, 5, 7 keskmisest ringist paaritute numbritega kabendite jaoks määratud ringi ja kabendid 2, 4, 6, 8 paarisnumbritega kabendite jaoks määratud ringi viia. Käiguks loetakse igasugune kabendi ühest kohast teise tõstmine. Ühe käiguga võib tõsta ühest ringist teise ainult ühe kabendi (alati kõige ülemise), kuid seejuures ei tohi suurema numbriga kabendit asetada väiksema numbriga kabendile; samuti ei tohi paarisnumbriga kabendit asetada paaritule ja vastupidi.

Nii näiteks võime kabendit numbriga 1 asetada kabendile numbriga 3, või kolme seitsmele, kuid mitte vastupidi. Kabendit numbriga 2 võime asetada kabendile numbriga kuus, kuid mitte kabendile numbriga 3, sest siis oleks kohakuti «paaris» ja «paaritu».

Mitu käiku teil kulub selle ülesande lahendamiseks?

108. Järjestage kabendid

Paigutage 25 nummerdatud kabendit 25-ruudulisele lauale, nagu on näidatud joonisel 52. Kabendite asukohti vahetades seadke nad järjekorda, s. o. paigutage numbrid 1, 2, 3, 4, 5 vasakult paremale esimesse ritta; numbrid 6, 7, 8, 9, 10 vasakult paremale teise ritta jne. kuni lõpuni. Te võite näiteks vahetada numbrid 7 ja 1, 24 ja 2 jne.

7	24	10	19	3
12	20	8	22	23
2	15	25	18	13
11	21	5	9	16
17	4	14	1	6

Joon. 52.

Tehke kindlaks vahetamiseks vajalik minimaalne käikude arv. Asjatute ümberpaigutuste vältimiseks tuleb kasutada mingit kindlat süsteemi. Missugune see on?

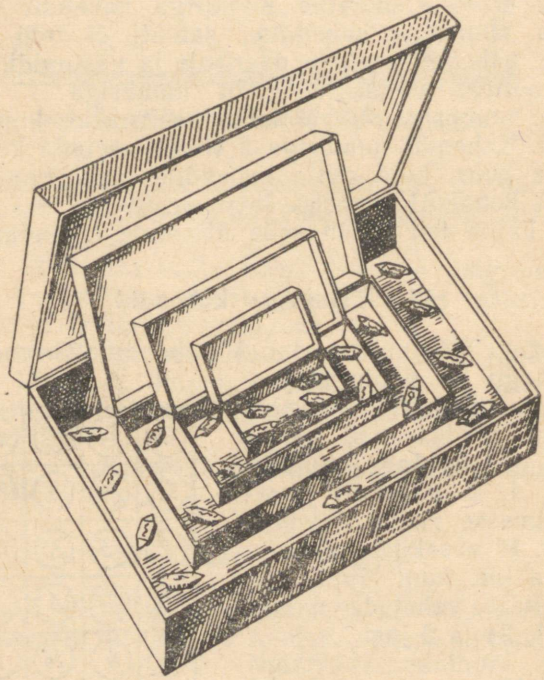
109. Kingitus nuputajatele

Kindlasti on kõik lugejad näinud või vähemalt kuulnud omapärasest mänguasjast — karbist, mille sees on jälle karp, selle sees omakorda karp jne.

Tehke ka endale selline neljast karbist koosnev mänguasi. Kõige väiksemasse karpi pange 4 kompvekki, ka

kahte järgmisse karpi pange kummassegi 4 kompvekki. Kõige suuremasse karpi aga pange üheksa kompvekki. Seega on kõigis neljas karbis kokku 21 kompvekki (joon. 53).

Kinkige see karp koos kompvekkidega mõnele oma sõbrale sünnipäevaks. Tingimuseks aga seadke, et



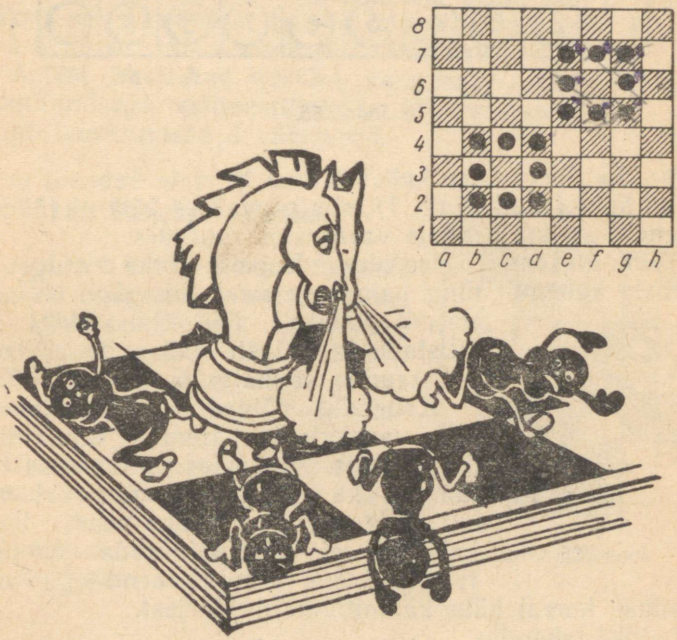
Joon. 53. Kingitus nuputajatele.

«juubilar» ei sööks kompvekke enne ära, kui ta on need 21 kompvekki nii ümber paigutanud, et igas karbis oleks p a a r i s a r v kompvekkide p a a r e ja veel üks kompvek!

Loomulikult tuleb teil enne sellise kingituse tegemist see pähkel kõigepealt endal katki hammustada. Pidage silmas, et siin ei aita mingid aritmeetika reeglid, tuleb olla lihtsalt mõnevõrra teravmeelne.

110. Ratsu käiguga

Selle lustaka maleülesande lahendamiseks pole vaja osata malet mängida. Tuleb vaid teada, kuidas ratsu liigub malelaual. Malelauale on joonisel 54 toodud



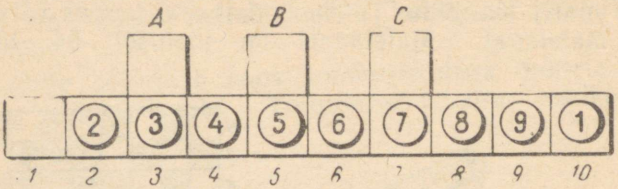
Joon. 54. Lööge ratsuga kõik etturid!

skeemi kohaselt paigutatud mustad etturid. Paigutage valge ratsu mistahes vabale ruudule arvestusega, et ta saaks kõik mustad etturid maha lüüa vähima käikude arvuga.

111. Kabendite ümberpaigutamine

Esimene ülesanne. Nummerdage 9 kabendit ühest kuni üheksani. Paigutage kabendid joonisel 55 kujutatud spetsiaalsele väljale, nii et välja ruutude ja kabendite numbrid ühtuksid; ainsa erandina paigutage kabend numbriga 1 kümnendasse ruutu ja väli nr. 1 jätke tühjaks.

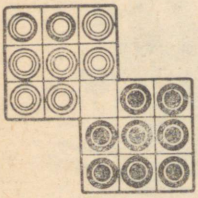
Kabendeid ühe ruudu kaupa nihutades viige kabend nr. 1 tema «koduväljale». Ajutiselt võib kabendeid asetada ühekaupa ka ruutudesse *A*, *B* ja *C*; ükski kabend ei



Joon. 55.

hüppa üle ühegi teise kabendi. Kui te olete kabendi nr. 1 viinud koju (ruudule nr. 1), siis peavad ka kõik ülejäänud kabendid asuma nendele vastavates ruutudes.

Teine ülesanne. Teise ülesande jaoks võtke 8 valget ja 8 musta kabendit ning paigutage need nii, nagu on näidatud joonisel 56. Ülesandeks on mustade ja valgete kabendite asukoha vahetamine 46 käiguga.



Joon. 56.

Kabendid võivad liikuda üles ja alla, vasakule ja paremale, kuid mitte diagonaalis. Samades suundades on lubatud ka hüpata üle ühe kabendi, kui selle taga on vaba ruut. Kaht kabendit ei või paigutada samasse ruutu. Sama värvi kabenditega võib vajaduse korral käia ka mitu korda järjest.

Leidke lahendus.

112. Arvude 1 kuni 15 originaalne rühmitamine

Vaadake, kui huvitavalt võib arve 1 kuni 15 paigutada kolmekaupa viide rühma:

$$\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\} d=7;\quad \left.\begin{matrix}4\\9\\14\end{matrix}\right\} d=5;\quad \left.\begin{matrix}2\\6\\10\end{matrix}\right\} d=4;\quad \left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\} d=2;\quad \left.\begin{matrix}11\\12\\13\end{matrix}\right\} d=1.$$

Arvud on rühmadesse jaotatud nii, et igas rühmas olevate arvude vahe d on võrdne nii teise ja esimese, kui kolmanda ja teise arvu puhul. Näiteks: $8-1=7$ ja $15-8=7$ või $9-4=5$ ja $14-9=5$ (iga arvude

rühmitus, milles kahe järjestikuse arvu vahe on konstantne, moodustab jada, mida nimetatakse *aritmeetiliseks progressiooniks*). See viieteistkümne esimese arvu rühmitamisviis konstantsete vahedega rühmadesse pole ainuke. Kui jätta esimene rühm (1, 8, 15) muutmata, siis saab ülejäänud 12 arvu (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14) rühmitada uutesse kolmikutesse, kuid nii, et vahed jääksid endisteks ($d = 5$, $d = 4$, $d = 2$, $d = 1$).

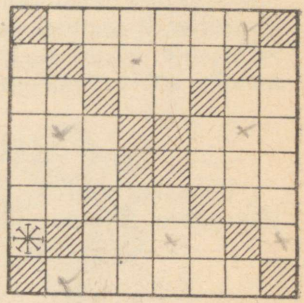
Leidke see uus arvude rühmitamisviis.

Asjast huvitatud võivad katsetada nende 15 arvu rühmitamisega aritmeetilistesse progressioonidesse, millel on teistsugused d väärtused.

113. Kaheksa tähekest

Joonisel nr. 57 toodud skeemil on ühte valgesse ruutu paigutatud täheke. Asetage valgetesse ruutudesse veel 7 tähekest nii, et ükski tähepaar ei oleks samal horisontaalil, vertikaalil või diagonaalil.

Ülesanne tuleb loomulikult lahendada proovimise teel, seepärast peitub ülesande lisavõlu veel selles, et vajalikke katseid viia kindlasse süsteemi.



Joon. 57.

114. Kaks ülesannet tähtede paigutamise kohta

Esimene ülesanne. Kuueteistkümneks ruuduks jagatud ruudukujulisele väljale paigutage 4 tähte nii, et igas horisontaalreas, igas vertikaalreas ja kummalgi suure ruudu diagonaalil oleks üksainus täht. Kui suur on selle ülesande lahenduste arv juhul, kui kõik neli tähte on ühesugused ja juhul, kui kõik tähed on erinevad?

Teine ülesanne. Kuueteistkümneks ruuduks jagatud ruudukujulisele väljale paigutage 4 *a*-d, 4 *b*-d, 4 *c*-d ja 4 *d*-d nii, et igas horisontaalreas, igas vertikaalreas ja kummalgi suure ruudu diagonaalil oleks erinevad tähed. Mitu lahendust on sellel ülesandel?

115. Koostage kirju ruut

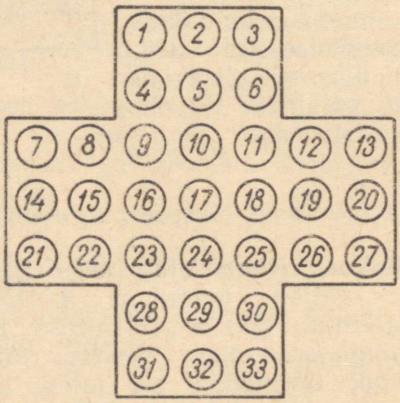
Võtke 16 ühesugust ruudukujulist paberitükki ja värvige need neljakaupa eri värvidega, ütleme näiteks valgeks, mustaks, punaseks ja roheliseks. Te saate niiviisi neli erivärviliste ruutude komplekti. Igale esimese komplekti kaardile kirjutage number 1, igale teise komplekti kaardile number 2, kolmandale komplektile 3 ja neljandale 4.

Paigutage nüüd need 16 paberitükki ruudukujuliselt nii, et igas horisontaalreas, igas vertikaalreas ja kummalgi diagonaalil asetseksid mingis meelevaldses järjekorras numbrid 1, 2, 3 ja 4, ja et nad seejuures oleksid kõik erivärvilised.

Sellel ülesandel on väga palju lahendusi. Mõtelge ka selle üle, kuidas leida nõutud paigutuste moodustamiseks sobiv süsteem.

116. Viimane nupp *

Lõigake papist välja 32 meelevaldse kujuga, kuid ühesugust nuppu ja asetage need ühekaupa joonisel



Joon. 58.

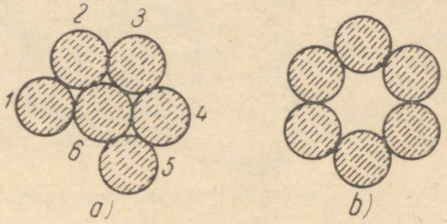
nr. 58 toodud mänguväljale. Kuna mänguväljal on 33 ruutu, siis üks neist (ükskõik milline) jääb tühjaks.

* See on vanaaegne ajaviitemäng, mis on mõeldud ühele inimesele. Ta on matemaatilises kirjanduses tuntud «*solitaire*'i» nime all juba XVIII sajandi algusest saadik.

Ülesanne seisab selles, et kõik nupud peale viimase tuleb mängulaualt «maha lüüa». See viimane nupp peab jääma ruutu, mis mängu alguses oli tühi. Nuppe saab ära lüüa ühe nupuga üle teise hüpates nagu kabemängus. Lüüa võib vertikaal- ja horisontaalsuunas. Iga käiguga lüüakse ära üks nupp, järelikult tuleb ülesanne lahendada 31 käiguga.

117. Müntidest ring

Võtke kuus ühesugust münti ja suruge nad tihedasti kokku, nagu on näidatud joonisel 59, *a*. Ülesandeks on need mündid 4 käiguga paigutada ringikujuliselt (joon. 59, *b*). «Käik» seisneb järgnevas: surudes mingid viis münti vastu lauda, tuleb kuues münt veeretada



Joon. 59. Jõudke nelja käiguga asendist *a* asendisse *b*.

uude kohta, nii et ta veeretamise ajal ei eralduks teistest müntidest, ja et ta uues kohas puudutaks vähemalt kaht münti. Seda ülesannet polegi nelja käiguga nii lihtne lahendada, kui see esimesel pilgul võib näida.

Lisaülesanne. Äsjase ülesande lahendamine seisneb järjestikuses müntide nihutamises. Muutes müntide nihutamise järjekorda, võime leida sellele ülesandele erinevaid lahendusi. Leidke kõik selle ülesande lahendused. Et teil lahendused segi ei läheks, kasutage müntide asemel nummerdatud papist kettakesi ja pange iga käik järgneva süsteemi kohaselt kirja:

1 — 2, 3, mis tähendab, et ketast nr. 1 tuleb nihutada kuni kokkupuutumiseni ketastega nr. 2 ja nr. 3.

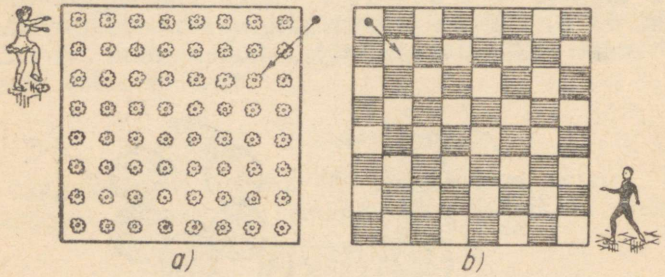
2 — 6, 5, mis tähendab, et ketast nr. 2 tuleb nihutada kuni kokkupuutumiseni ketastega nr. 6 ja nr. 5 jne. Toome näitena ülesande ühe lahenduse:

1 — 2, 3; 2 — 6, 5; 6 — 1, 3; 1 — 6, 2.

Leidke ülejäänud 23 lahendust!

118. Iluuisutajad kunstliku jääga liuväljal

Iluuisutamiskooli õpilased harjutasid Moskvas kunstliku jääga liuväljal peatselt esietenduvat jääballetti. Liuvälja dekoreeriv kunstnik oli ühele väljakupoolele maa-



a) *b)*

Joon. 60. Leidke iluuisutajate marsruudid.

linud 64 lillest koosneva mustrilise vaiba (joon. 60, *a*), teise poole aga oli ta kujundanud malelauaga sarnanevaks must-valgeks parketiks (joon. 60, *b*).

Ühel proovide vaheajal jätkasid kaks väsimatut noort iluuisutajat — poiss ja tüdruk — «kõverate joonistamist» peegelsiledale jääväljale.

Tütarlast huvitasid jäise vaiba toredad lilled ja tal tekkis soov ühe sõiduga (loomulikult mõnedes väljaku punktides pöördeid tehes) läbida kõik 64 lille. Ta otsustas liikuda ainult sirgjooneliselt, kusjuures viimane sirgjooneline tee pidi ta viima tagasi punkti, kust ta sõitu alustas (joonisel märgitud musta punktiga).

See sõit õnnestus tal tõepoolest, kusjuures kogu tee koosnes ainult neljateistkümnest sirgjoonelisest tükist. (Mõnest lillest sõitis tütarlaps mitu korda üle.)

Joonistage paberilehele tütarlapse marsruudi skeem.

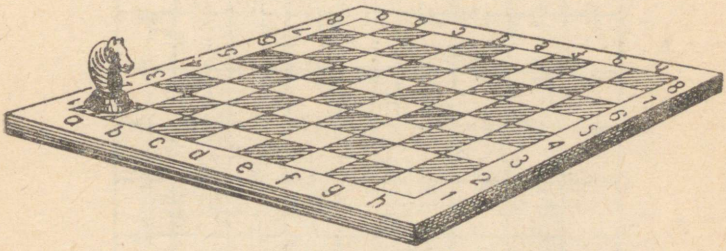
Poiss treenis samal ajal väljaku teisel poolel. Saanud kuulda oma naabri «geomeetrilistest» saavutustest, ei

tahtnud ta võlgu jääda ja püstitas endale veel raskema geomeetrilise ülesande: ainult valgeid ruute pidi uisutades jõuda väljaku vasakpoolsest ülemisest nurgast parempoolsesse alumisse nurka, seejuures iga valget ruutu läbides ja ruutude tippe ülimalt üks kord lõigates.

Joonistage välja ka poisi liikumise skeem, kui on teada, et ta tee koosnes seitsmeteistkümnest sirgjoonelisest lõigust.

119. Naljaülesanne

Neljanda klassi õpilane Kolja Sinitškin püüab kogu hingest viia maleratsut malelaua vasakpoolsest alumisest nurgast (ruudult a1) ülemisse parempoolsesse nurka



Joon. 61. Kas ratsut saab viia väljalt a1 väljale h8?

(ruudule h8) nii, et ratsu astuks igasse ruutu ainult üks kord. Seni pole selle ülesande lahendamine Koljal veel õnnestunud. Aga võib-olla lahendab ta hoopis lahendamatut ülesannet?

Arutage seda asja teoreetiliselt ja tehke Kolja Sinitškinile selgeks, milles peitub probleem.

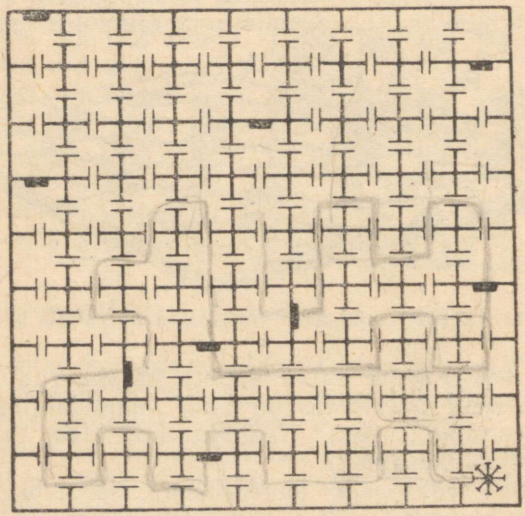
120. 145 ust

Keskaegsed feodaalid muutsid mõnikord oma losside keldrid vanglateks-labürintideks igasuguste trikkide ja saladustega: kambrite seinad liikusid, siin-seal leidus salakäike ja mitmesuguseid lõkse.

Kes juhtub sellist vanaaegset lossi nägema, sellel tekib paratamatult soov veidi fantaseerida.

Kujutame endale ette, et ühte sellisesse keldrisse, mille plaan on toodud joonisel 62, on heidetud vang,

üks nendest, kes võitlesid feodaalide vägivalla vastu. Kujutleme, et keldri ehituses on järgmine saladus. Keldri 145-st uksest on ainult 9 lukustatud (need on joonisel 62 tähistatud paksude joontega), ülejäänud on pärani lahti. Näib, et on üpris lihtne jõuda vabadusse viiva ukseni ja püüda siis seda avada. Aga võta näpust, lukus olevat ust ei saa millegagi avada. See uks aga avaneb ise, kui ta on täpselt üheksas uks, s. o. kui enne teda on läbitud 8 lahtist ust. Sealjuures tuleb läbida kõik suletud uksed; igaüks neist avaneb iseenesest, kui enne teda on läbitud 8 lahtist ust. Viga parandada ja kahte-kolme suletud ukse lähedast ust aga



Joon. 62. Labürindi plaan.

pole kaheksani jõudmiseks võimalik läbida, sest niipea kui vang on mõne kambri läbinud, sulguvad kõik kambris enne avatud olnud uksed ja lukustuvad nii et teist korda samasse kambrisse enam ei pääse. Feodaalid olid selle asja üsna kavalasti korraldanud.

Vang tundis keldri saladust. Oma kambri (plaanil on see märgitud tähekesega) seinalt leidis ta isegi naelaga seinale kraabituna täpse keldri plaani. Vang murdis kaua aega pead selle üle, kuidas koostada mars-

ruuti nii, et iga lukustatud uks oleks täpselt üheksas. Lõpuks ta siiski lahendas selle ülesande ja pääses vabadusse.

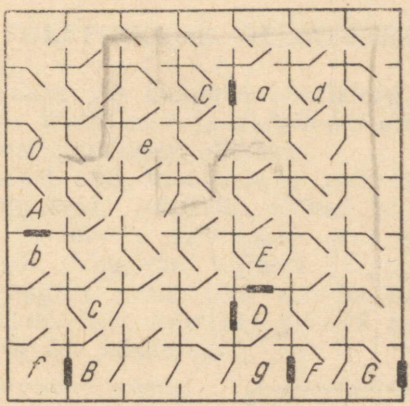
Millise lahenduse vang leidis?

121. Kuidas vang pääses vabadusse?

Kellel soovi on, võib veel veidi vaeva näha eelmise ülesande järgmise variandiga.

Kujutlege, et kasematt, milles vang vaevleb, koosneb 49-st kambrist.

Seitsmes kambris, mis on keldri plaanil (joon. 63)



Joon. 63. Kelder koosneb 49 kambrist.

tähistatud tähtedega *A, B, C, D, E, F* ja *G* on igaühes üks uks, mis avaneb ainult võtme abil, kusjuures kambri *A* võti asub kambris *a*, kambri *B* võti kambris *b*, ülejäänud kambrite *C, D, E, F* ja *G* võtmed aga vastavalt kambrites *c, d, e, f* ja *g*.

Ülejäänud uksed avanevad lihtsalt käepidemele vajutamisel, kuid käepide asetseb ainult ühel ukse poolel ja uks sulgub peale läbimist automaatselt. Teisel ukse poolel käepidet ei ole. Maa-aluse keldri plaanil on näidatud, kummale poole avanevad lukustamata uksed,

kuid millises järjekorras tuleb läbida suletud uksed, see on teadmata. Ühest ja samast uksest võib läbi käia kuitahes palju kordi, loomulikult silmas pidades ukse avamise tingimusi.

Vang asub kambris *O*. Näidake talle vabadusse viiv tee.

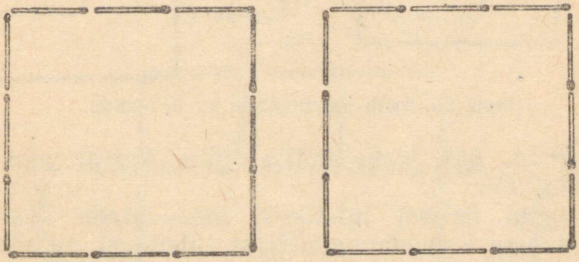
III PEATÜKK

TULETIKKUDE GEOMEETRIA

Toos tuletikke või kimbuke ühepikkusi pulgakesi on suurepäraseks leidlikkust ja taibukust arendavate geomeetriliste meelelahutuste allikaks.

Tuletikkudest võib moodustada kõikvõimalikke sirgjoonelisi kujundeid; tuletikke ümber tõstes võib üht kujundit muuta teiseks; tuletikkude abil võib isegi teoreeme tõestada. Vaatleme näitena järgmist ülesannet.

Mitu ühesugust ruutu võib moodustada kahekümne neljast tuletikust, kui tuletikke ei tohi murda ja kõik tuletikud tuleb ära kasutada?

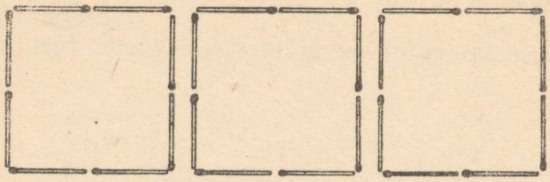


Joon. 64. 24 tuletikust 2 ruutu.

Kui iga ruudu külje jaoks kasutada kuut tuletikku (rohkem ei saa), siis saame ü h e ruudu.

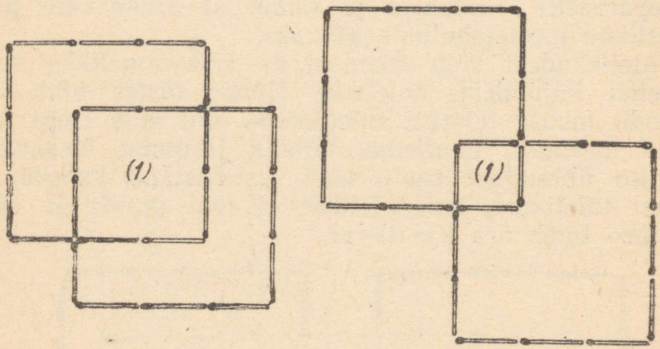
Kui ruudu külg võtta viie- või neljatikuline, siis kõiki 24 tuletikku kasutades pole ühesuguste ruutude saamine võimalik. Kolmetikulise ruudu külje puhul saame

juba k a k s ühesugust ruutu (joon. 64). Kahetikulise külje puhul saame aga k o l m ruutu (joon. 65).



Joon. 65. 24 tuletikust 3 ruutu.

Pöörake tähelepanu sellele, et kahe- või kolmetikuliste külgedega ruutude korral võib moodustada veel teiste mõõdetega lisaruute, nagu seda on näidatud joonistel 66 ja 67. Kolmetikulise ruudu külje puhul saame ühe lisa-



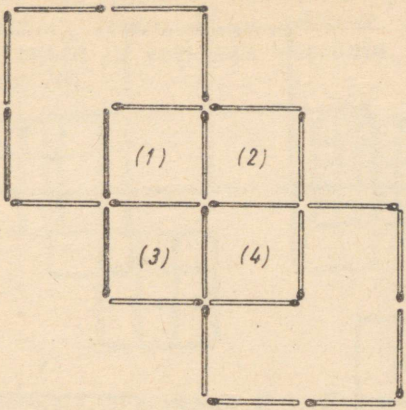
Joon. 66. Saab moodustada ka lisaruudu.

ruudu (joon. 66), kahetikulise külje korral aga isegi neli (joon. 67).

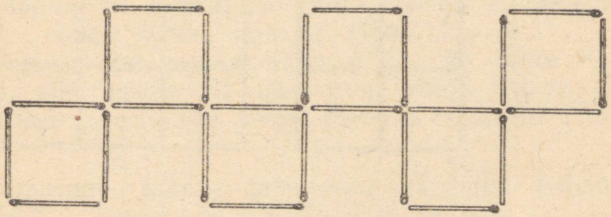
Kui igast neljast tuletikust moodustada üks ruut, siis me saame kahekümne neljast tuletikust moodustada kuus ühesugust ruutu (joon. 68, *a*).

Kui aga mõnda tuletikku lugeda korraga kahe ruudu külgedele kuuluvaks, siis võib kahekümne neljast tuletikust moodustada seitse (joon. 68, *b*), kaheksa (joon. 69, *a, b*) või isegi üheksa (joon. 69, *c*) ühesugust ruutu.

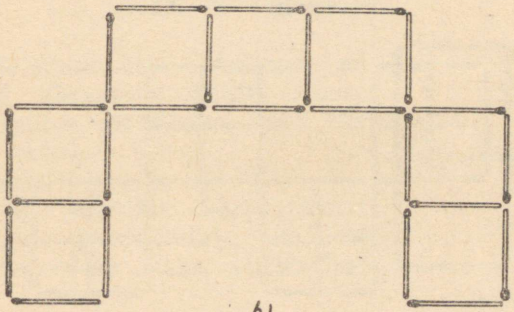
Viimase kolme kujundi konstrueerimisel tekkisid veel teiste mõõdetega lisaruudud: üks ruut joonisel 69, *a*,



Joon 67 Neli lisaruutu

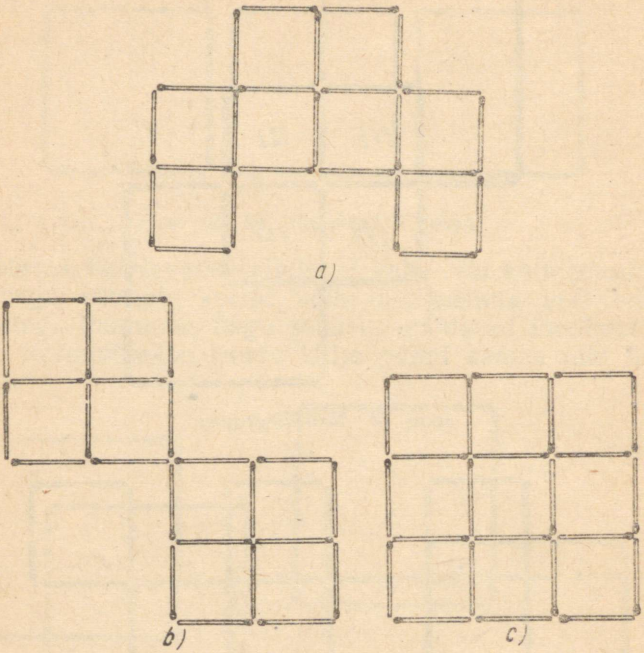


a)

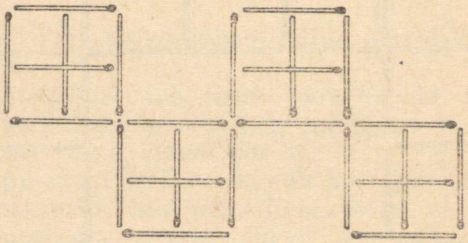


b)

Joon. 68. 24 tuletikust 6 ja 7 ruutu.



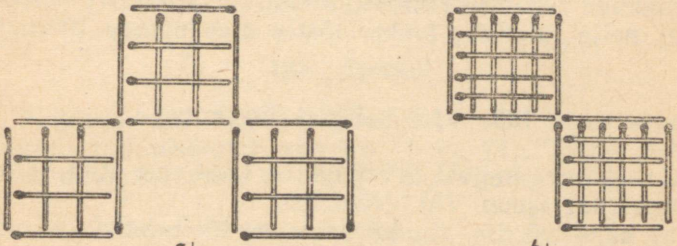
Joon. 69. 24 tuletikust 8 ja 9 ruutu.



Joon. 70. 24 tuletikust 20 ruutu.

kaks ruutu joonisel 69, *b* ja viis ruutu joonisel 69, *c* (leidke need).

Kui lubada tuletikkude üksteisele asetamist, siis võib pooletikulise ruudu külje pikkuse juures saada 16 ühesugust ruutu ja veel neli lisaruutu. Kokku seega 20 ruutu (joon. 70).



Joon. 71. 24 tuletikust 42 ja 50 ruutu.

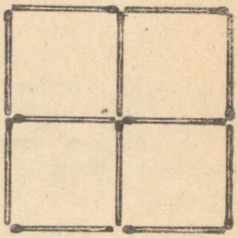
Kui kasutada ruudu külje pikkuseks $^1/_3$ tuletikku, siis saame 27 ühesugust ruutu, teiste mõõdetega lisaruute arvesse võttes aga 42 (joon. 71, *a*).

Lõpuks, kui ruudu külje pikkuseks võtta $^1/_5$ tuletikku, siis saame 50 ühesugust ruutu (joon. 71, *b*), kõiki lisaruute juurde arvestades aga saaksime 110 ruutu!

Nuputage, kuidas lahendada järgmisi tuletikuülesandeid.*

122. Viis ülesannet

Kaheteistkümnest tuletikust on tehtud 4 ühesugust ruutu (joon. 72); seejuures moodustus veel üks lisaruut (suur).



Joon. 72.

Nõutakse:

a) kahe tuletiku kõrvaldamist (ülejäänuid puutumata), nii et tulemuseks oleks kaks ebavõrdset ruutu;

---

* Ühe numbri alla on koondatud ülesanded, mille lahendamine algab ühest ja samast tuletikkude algasetusest. Iga järgnev ülesanne on eelmisest sõltumatu.

b) kolme tuletiku ümberpaigutamist, nii et moodustuks kolm võrdset ruutu;

c) nelja tuletikku ümber tõstes moodustada kolm võrdset ruutu;

d) kaht tuletikku ümber paigutades moodustada seitse ruutu (selles ja järgmises ülesandes on lubatud tuletikkude üksteisele asetamine);

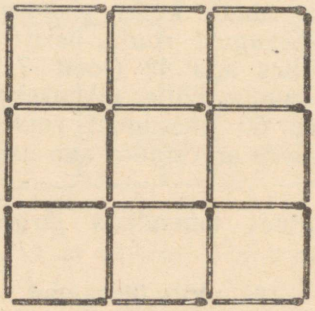
e) nelja tuletikku ümber tõstes moodustada 10 ruutu.

123. Veel kaheksa ülesannet

Kahekümne neljast tuletikust on konstrueeritud üheksa pesaga ruut (joon. 73). Nõutakse:

a) kahe võrdse ruudu saamist 12 tuletikku ümber tõstes;

b) nelja tuletiku eemaldamist, nii et ülejäänud moodustaksid ühe suure ja neli väikest ruutu;



Joon. 73.

c) viie võrdse ruudu moodustamist nii nelja kui ka kuue või kaheksa tuletiku eemaldamise teel;

d) kaheksa tuletiku eemaldamist, nii et ülejäänud tuletikud moodustaksid neli võrdset ruutu (kaks lahendust);

e) kuue tuletiku eemaldamisega kolme ruudu moodustamist;

f) kaheksa tuletiku eemaldamist, nii et jääks kaks ruutu (2 lahendust);

g) kaheksa tuletiku eemaldamisega moodustada kolm ruutu;

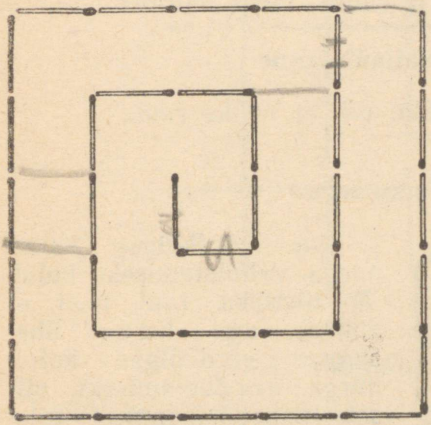
h) eemaldada kuus tuletikku, nii et tekiks kaks ruutu ja 2 võrdset ebakorrapärast kuusnurka.

124. Üheksast tuletikust

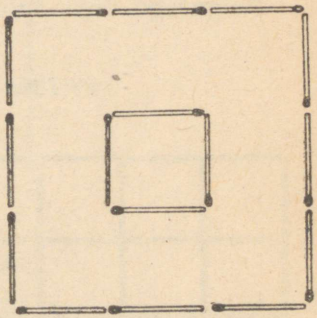
Üheksast tuletikust konstrueerida kuus ruutu (tuletikkude ristamisi asetamine on lubatud).

125. Spiraal

Kolmekümne viiest tuletikust on konstrueeritud kujund, mis meenutab spiraali (joon. 74). Tõstke 4 tuletikku niiviisi ümber, et tekiks kolm ruutu.



Joon. 74. Spiraal.



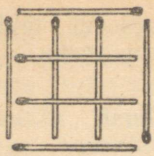
Joon. 75. Kindluse «plaan».

126. Naljaülesanne

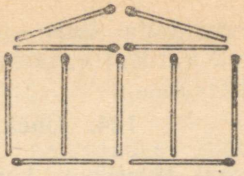
Kuueteistkümnest tuletikust on tehtud sügava kraaviga ümbritsetud kindluse «plaan» (joon. 75). Kuidas pääseda kahe laua (tuletiku) abil kindlusesse, kui laudade pikkus on täpselt võrdne kraavi laiusega?

127. Eemaldage kaks tuletikku

Joonisel 76 on toodud kaheksast osaliselt üksteisele asetatud tuletikust koosnev kujund. Eemaldage kaks tuletikku, nii et järele jääks kolm ruutu.



Joon. 76.



Joon. 77. «Maja».

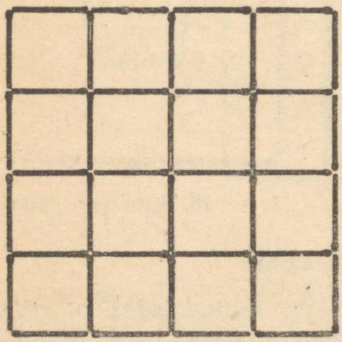
128. «Maja» fassaad

Üheteistkümne tuletiku abil on kujutatud «maja» fassaad (joon. 77). Kaht tuletikku ümber tõstes võib saada 11 ruutu, nelja tuletikku ümber tõstes võib aga saada kujundi, milles on 15 ruutu. Tehke valmis!

129. Naljaülesanne

Paigutage kuus tuletikku nii, et tekiks ruut.

130. Kolmnurgad



Joon. 78.

Ühe võrdkülgse kolmnurga valmistamiseks kulub 3 tuletikku (kui neid ei murta), aga k u u e ühesuguse võrdkülgse kolmnurga moodustamiseks piisab kaheteistkümnest tuletikust. Proovige!

Kui te sellega olete hakkama saanud, siis tõstke 4 tuletikku ümber, nii et tekiks kolm võrdkülgset kolmnurka, millest ainult kaks on omavahel võrdsed.

131. Mitu tuletikku tuleb ära võtta?

Lauale on tuletikkudest tehtud 16 ühesugust ruutu (joon. 78). Kui kõik kujundis olevad ruudud arvesse võtta, siis saame... Muide, loendage ise!

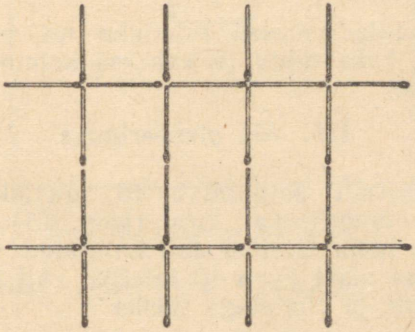
Kui suur on tuletikkude vähim arv, mida eemaldades ei jää kujundisse enam ühtegi ruutu, ei suurt ega väikest?

132. Naljaülesanne

Iga tuletiku pikkus on 4,5 cm. Kuidas saab kahekümne kahest tuletikust kokku panna terve meetri?

133. «Tara»

Joonisel 79 kujutatud «taras» tuleb 14 tuletikku niiviisi ümber tõsta, et tekiks 3 ruutu.



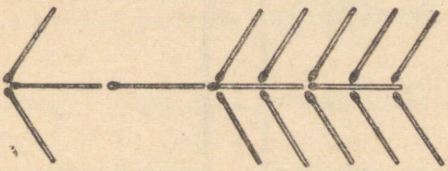
Joon. 79. «Tara».

134. Naljaülesanne

Tuletikke murdmata või katki lõikamata moodustada kahe tuletiku abil ruut.

135. «Nool»

Joonisel 80 on toodud kuueteistkümnest tuletikust valmistatud nool.



Joon. 80. «Nool».

a) Tõstke 8 tuletikku niiviisi ümber, et tekiks 8 võrdset kolmnurka.

b) Tõstke 7 tuletikku niiviisi ümber, et tekiks 5 võrdset nelinurka.

136. Ruudud ja rombid

Tehke kümne tuletiku abil kolm ruutu. Seejärel võtke üks tuletikk ära ja tehke ülejäänud tuletikkudest üks ruut ja kaks rombi.

137. Erinevad hulknurgad ühes kujundis

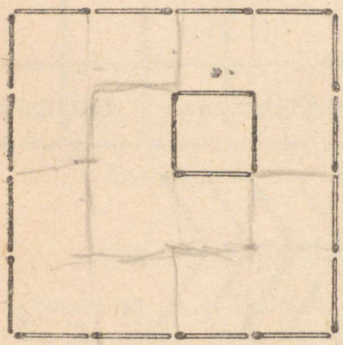
Pange lauale kaheksa tuletikku nii, et tekiks üks kaheksanurk, kaks ruutu ja kaheksa kolmnurka — kõik ühes kujundis.

138. Aia planeerimine

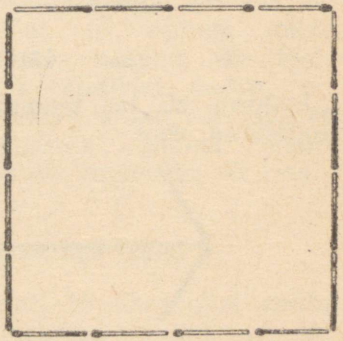
Ruudukujuliselt paigutatud 16 tuletikku kujutavad endast aeda ümbritsevat tara (joon. 81). Osa sellest aiast hõlmab nelja tuletiku abil kujutatud väike majake. Ülejäänud osa aiast tuleb 10 tuletiku abil jagada viieks ühesuguse kuju ja pindalaga tükiks.

139. Pindvõrdsed tükid

a) Joonisel 82 on toodud kuueteistkümnest tuletikust moodustatud ruut. Jagage see 11 tuletiku abil neljaks



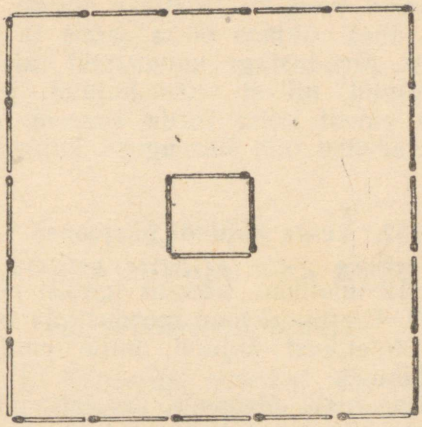
Joon. 81. Maja ja aia «plaan».



Joon. 82.

pindvõrdseks tükiks, nii et iga tükk puutuks kokku ülejäänud kolmega.

b) Ruudukujulise aia piirid on märgitud 20 tuletiku



Joon. 83. Kaevuga aia «plaan».

abil, aia keskel asub kaev (joon. 83). Nõutakse aia jagamist

1) 18 tuletiku abil kuueks ühesuguseks ja pindvõrdseks tükiks,

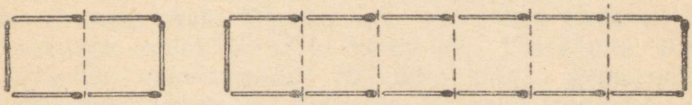
2) 20 tuletiku abil kaheksaks ühesuguseks ja pindvõrdseks tükiks.

140. Parkett

Kui palju kulub tuletikke, et pindvõrdsete ruutude abil kokku panna üks ruutmeeter? Loeme tuletiku keskmiseks pikkuseks 5 sentimeetrit.

141. Pindalade suhe säilib

Kahekümnest tuletikust on moodustatud kaks ristkülikut: üks kuuest ja teine neljateistkümnest tuletikust (joon. 84).



Joon. 84. Muutke kujundeid, säilitades pindalade suhet.

Esimene ristkülik on punktiirjoonega tükeldatud kaheks ruuduks, teise jagavad punktiirjooned kuueks ruuduks. Teise ristküliku pindala on esimese omast seega kolm korda suurem.

Jaotage nüüd need 20 tuletikku uuesti kaheks rühmaks, nii et ühes rühmas oleks seitse ja teises kolmteist tuletikku. Moodustage kummastki tuletikkude rühmast üks kujund, nii et teise kujundi pindala oleks jälle esimese omast kolm korda suurem. Märgime, et kujundid ei tarvitse olla ühesuguse kujuga.

142. Leida kujundi piirjooned *

Antud on 12 tuletikku. Võtame igaühe neist võrdseks pikkusühikuga. Ülesandeks on moodustada nendest kaheteistkümnest tuletikust kujund, mille pindala võrduks kolme ruutühikuga.

See on päris raske ülesanne, kui jätta välja lihtsaim kujund, mis on koostatud kolmest tippe pidi ühendatud ruudust.

143. Leidke tõestus

Pange kaks tuletikku otsakuti kokku, nii et nad moodustaksid sirgjoone ja tõestage vastava arutluse abil selle konstruktsiooni õigsus.

Tõestuseks tuleb tuletikkude abil teha lisakonstruktsioon, milleks võite kasutada mistahes hulka tuletikke.

144. Konstrueerida ja tõestada

Konstrueerige tuletikkudest korrapärane kuusnurk ja tõestage konstruktsiooni korrektsus!

---

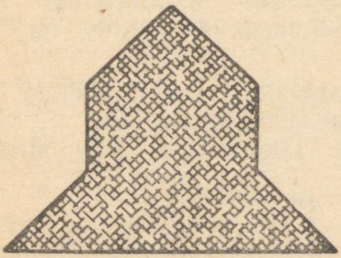
* Viimased 3 ülesannet on mõeldud kaheksanda ja üheksanda klassi õpilastele.

IV PEATÜKK

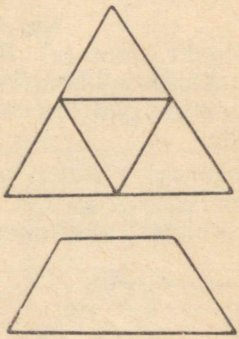
SEITSE KORDA MÕÕDA, ÜKS KORD LÕIKA

145. Võrdseteks osadeks

Ülesanne 1. Kopeerige joonisel 85 toodud kujund paberilehele ja lõigake ta neljaks võrdseks nelinurgaks (kujundeid nimetatakse võrdseteks, kui nad ühe kujundi teisele asetamisel täpselt kattuvad).



Joon. 85. Kuidas seda kujundit lõigata võrdseteks nelinurkadeks?

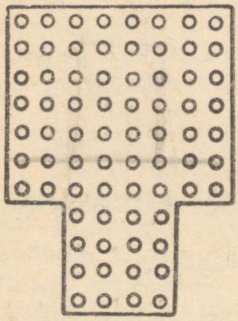


Joon. 86. Kuidas trapetsit lõigata neljaks võrdseks osaks?

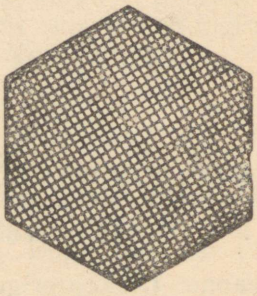
Ülesanne 2. Kuidas võrdkülgset kolmnurka neljaks võrdseks osaks lõigata, seda võib näha jooniselt 86. Kõrvaldage nüüd ülemine kolmnurk. Ülejäänud kolm kolmnurka moodustavad kujundi, mida geomeetrias nimetatakse trapetsiks. Proovige ka seda kujundit neljaks võrdseks tükiks lõigata.

Ülesanne 3. Tükeldage joonisel 87 toodud plaat kuueks võrdseks tükiks.

Ülesanne 4. Kui hulknurga kõik küljed ja kõik sisenurgad on võrdsed, siis sellist hulknurka nimetatakse korrapäraseks hulknurgaks.



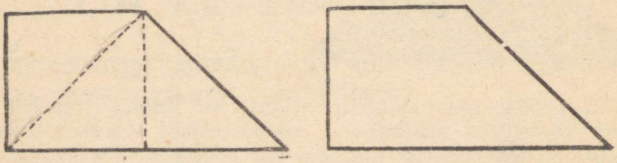
Joon. 87. Tükeldage see kujund kuueks ühesuguseks plaadiks.



Joon. 88. Kuidas saada 12 võrdset nelinurka?

Lõigake joonisel 88 kujutatud korrapärane kuusnurk kaheteistkümneks võrdseks nelinurgaks. Kas need nelinurgad on korrapärased, s. t. kas nad on ruudud?

Ülesanne 5. Mitte iga trapetsit ei saa tükeldada kolmeks-neljaks omavahel võrdseks trapetsiks. Eks ole tõsi? Kuid kolmest võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast

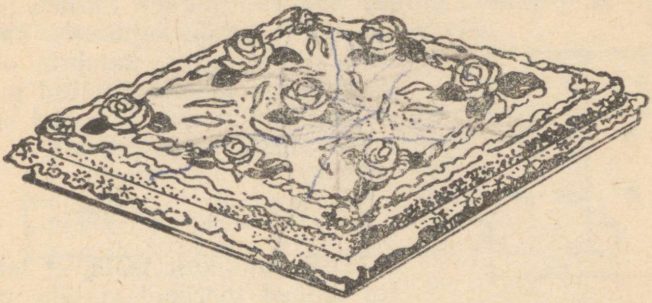


Joon. 89.

moodustatud trapetsit, mis sarnaneb varreta haamri läbilõikega (joon. 89), saab üsna kergesti lõigata neljaks ühesuguseks täisnurkseks trapetsiks.

146. Seitse roosi

Tee juurde osteti tort, see lõigati kolme sirgjoonse



Joon. 90. Kolm lõiget — ja igaüks saab ühe roosi.

lõikega seitsmeks tükiks. Igale torditükile jäi parajasti üks roos.

Kuidas tort lahti lõigati?

147. Kustunud jooned

Joonisel 91 te näete ruutu, mida kavatseti lõigata neljaks ruudu keskpunkti suhtes sümmeetriliseks ja võrdseks tükiks. Ruudu tükid olid sellised, et kui ükskõik millist neist pöörata ruudu keskpunkti ümber 90 kraadi võrra, siis nad oleksid täpselt kattunud. Kuid häda on selles, et keegi kustutas kavatsetavad lõikejooned ära ja säilisid vaid ruutudesse kirjutatud numbrid, mille kohta me teame, et igas tükis esines iga number parajasti üks kord.

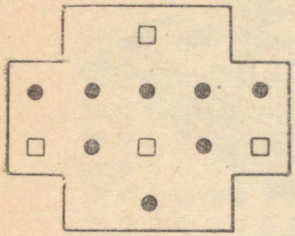
			3		1	1	
			3	4			
				2			
	1		4	2			
	1						
		3	3				
					4	2	2
					4		

Joon. 91. Ruut oli tükeldamiseks valmis.

Ma usun, et nendest andmetest piisab kustunud joonte taastamiseks, kui on teada veel see, et lõikejooned võisid minna ainult mööda väikeste ruutude külgi.

148. Andke nõu

Joonisel 92 on kujutatud ühe aparaadi alumise osa plaan. Andke nõu, kuidas aparaati jagada neljaks ühesuuruseks ja ühekujuliseks kambriks, nii et igas kambris oleks 2 tihvti (joonisel kujutatud punktidena) ja üks ava (joonisel kujutatud väikeste ruutudena).

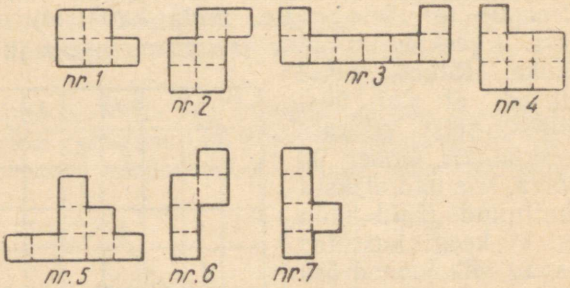


Joon. 92. Jagage neljaks ühesuguseks kambriks.

149. Ilma kadudeta

Te loomulikult teate, et tehastes mõned toorikud ei lähe otsekohe töötlemisele, vaid antakse enne märkija kätte, kes kannab detailidele töötlemisel vajalikud jooned ja punktid. Märkija taibukus ja osavus võib üsna palju kaasa aidata materjali säästmisel.

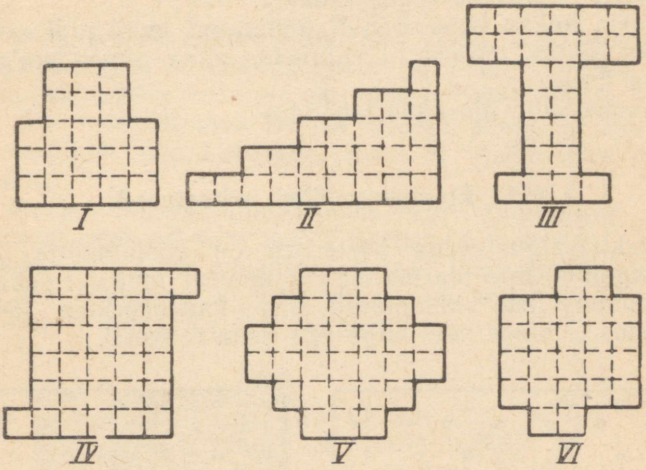
Kord tuli tehases valmistada suur partii üsna keerulise kujuga messingplaadikesi, mida läks tarvis tervelt seitset eri tüüpi (joon. 93). Märkija pani tähele, et üks



Joon. 93. Oli tarvis niisuguseid plaadikesi.

nendest seitsmest plaadist (milline?) mahtus ristkülikukujulisele plekitükile parajasti 6 korda. Ülejäänud plaatide valmistamiseks aga oskas märkija messingpleki lõikejäätmete hulgast (joon. 94) välja valida nii parajaid tükke, et igaüht neist sai tükeldada ühte teatavat tüüpi plaatideks, ilma et messingit oleks ainsatki ruutsentimeetrit läinud kaduma.

Nii näiteks saab jäätmetükist *I* (joon. 94) kolm plaadikest nr. 4 (joon. 93), jäätmetükist *II* — viis plaadikest nr. 7 jne. Milliseid joonisel 93 kujutatud plaatide tüüpe saab joonisel 94 toodud ülejäänud jäätmetükkidest välja lõigata, seda püüdke juba ise otsustada.



Joon. 94. Märkija poolt väljavalitud jäätmetükid.

Ütleme veel vaid niipalju, et jäätmetükk *III* jaguneb kolmeks ühesuguseks plaadikeseks, jäätmetükk *IV* neljaks ühesuguseks plaadikeseks, jäätmetükk *V* kuueks ja jäätmetükk *VI* neljaks ühesuguseks plaadikeseks. Ärge unustage, et üks seitsmest vajalikust plaadikeste tüübist lõigatakse kuues eksemplaris välja ristkülikukujulisest messingplaadist.

Joonistage joon. 94 ruudulisele paberile ümber ja leidke iga jäätmetüki jaoks vastavad lõikejooned.

Lahendamise kergendamiseks on joonised 93 ja 94 juba ruudustatud.

150. Kui fašistid tungisid meie maale kallale...

Suure Isamaasõja aastail tuli rindelähedastes linnades aknad pimendada. Kord ei leitud ühes korteris pimendamisaja saabumisel pimendamiskatet. Ruudukujulise akna (120 × 120 cm) katmiseks ei olnud muud käepärast,

kui ristkülikukujuline vineeritahvel; vineeritahvli pindala oli küll niisama suur kui aknagi oma, kuid mõõtmed ei sobinud: 90 × 160 cm.

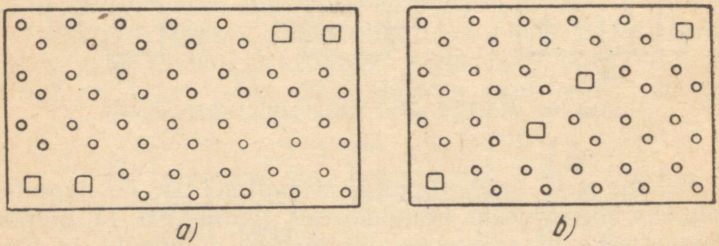
Algul sattusid kõik nagu veidi segadusse, kuid veidi aja pärast hakkas pioneer Vasja joonlaua abil kibekiiresti vineeritahvlile jooni vedama.

Vasja lõikas vineeritahvli tõmmatud jooni pidi ainult kaheks tükiks, millest ta valmistas akna pimendamiseks sobiva katte.

Leidke selle ülesande lahendus.

151. Elektrimontööri mälestused

Elektrivalgustusega korterites on voolumõõtja juures sageli eriline marmorist või mõnest muust tulekindlast materjalist valmistatud kilp kaitsekorkide jaoks. Tehastes te näete neid kilpe aga üsna rohkesti.



Joon. 95. Meil oli kaks suurt marmortahvlit...

Tavaliselt on kilbid ristküliku- või ruudukujulised, kuid Suure Isamaasõja ajal kaldus meie montööride brigaad marmori säästmise eesmärgil mõnikord kindlakskujunenud vormidest kõrvale. Mulle meenub, et meil oli kord kaks suurt marmortahvlit (joon. 95), millesse oli puuritud rida väikseid ümmargusi ja mõned ruudukujulised avaused. Me pidime nendest tahvlitest välja lõikama 8 väikest kilpi.

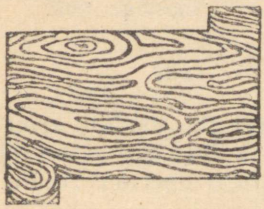
Brigadir nuputas tükk aega, kuni lõpuks taipas, et esimese tahvli (joon. 95, *a*) võib lõigata neljaks võrdseks kilbiks, nii et igas kilbis on üks ruudukujuline ja 12 ümmargust ava. Teist tahvlit (joon. 95, *b*) aga saab samuti jagada neljaks võrdseks kilbiks, kuid siin tuleb

igasse kilpi üks kandiline ja kümme ümmargust ava. Nii me toimisimegi. Kuidas tuli need tahvlid tükkideks lõigata?

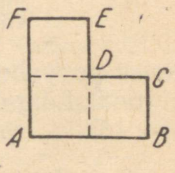
152. Kõik läheb käiku

«Kas sellest tükist saab teha korralikku kuuekümne nelja ruudulist malelauda või ei saa,» arutasin ma endamisi, vaadeldes joonisel 96 toodud pähklipuust kujundit. Ma mõõtsin laua üle ja leidsin peagi, et ma võin ta täielikult ära kasutada, ilma et ükski tükk läheks raisku.

Ma joonistasin lauatükile 64 ruutu (kummaski väljaulatuvas osas oli parajasti 2 ruutu) ja saagisin ta ainult kaheks kujult ja suuruselt täiesti ühesuguseks tükiks. Nendest tükkidest oli juba lihtne malelauda kokku seada ja kinni liimida. Leidke lõikejoon.



Joon. 96. Kas sellest lauatükist saab teha malelauda?



Joon. 97.

153. Mõistatus

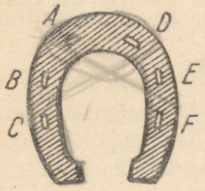
Kujund *ABCDEF* (joon. 97) koosneb kolmest võrdsest ruudust. Nõutakse selle kujundi kaheks tükiks lõikamist, nii et tekkinud osadest saaks ehitada ruudukujulise pildiraami. Raami sees olev ava peab samuti olema ruudukujuline ning seejuures pindvõrdne iga antud kujundit moodustava ruuduga.

154. Raiuge hobuseraud tükkideks

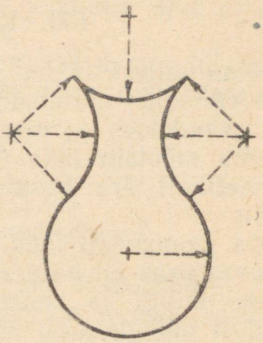
Joonistage paberile hobuseraud ja nuputage, kuidas saaks seda kahe sirgjoonse lõikega tükeldada kuueks osaks (ilma tükke lõikamise ajal kohalt liigutamata).

155. Igasse tükki naelaauk

Teie ees on harilik hobuseraud kuue naelaauguga (joon. 98). Raiuge ta kahe sirgjoonse löögiga kuueks tükiks, nii et igas tükis oleks üks naelaauk.



Joon. 98.



Joon. 99. Tükeldage ja koostage ruut.

156. «Kruusist» — ruut

Kopeerige paberilehele joonisel 99 toodud kruusitaoline kujund. Lõigake see kujund kahe sirgjoonse lõikega kolmeks tükiks, millest saaks konstrueerida ruudu.

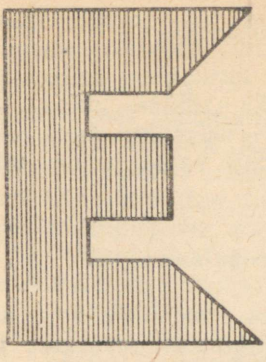
157. Ruut E-tähest

Joonistage paberilehele kujund (joon. 100), mis sarnaneb E-tähega. See kujund tuleb ülimalt nelja sirgjoonse lõikega tükeldada seitsmeks osaks nii, et tekkivatest tükkidest saaks kokku panna ruudu.

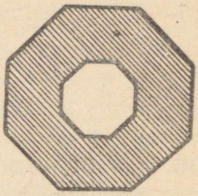
Märkus. Iga teravnurk selles kujundis on parajasti võrdne poolega täisnurgast, iga nürinurk on aga teravnurgast kolm korda suurem. Pikkuste õigeid vahekordi on lihtne määrata joonise järgi.

158. Kaunis moondumine

Kopeerige õhukesele papile või paksule paberile joonisel 101 kujutatud korrapärane kaheksanurk. Selle keskelt lõigake sümmeetriliselt välja samasugune, kuid väiksemate mõõtmetega kaheksanurk. Tekkinud kujund tuleb lõigata kaheksaks võrdseks tükiks, mida kokku pannes



Joon. 100. Kuidas tükeldada, nii et tükkidest saaks koostada ruudu?

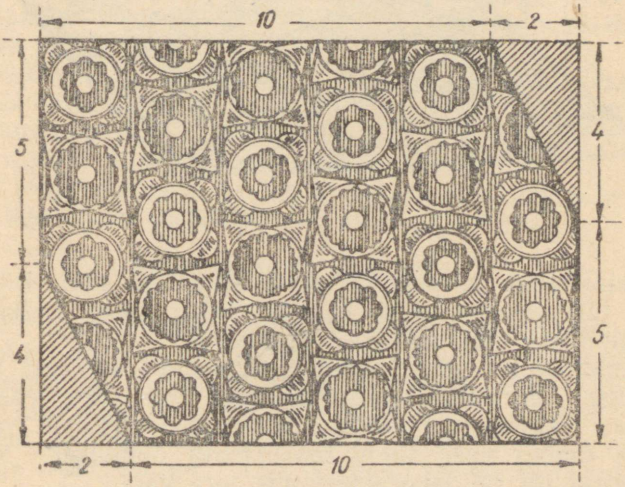


Joon. 101. Tükeldage ja koostage täht.

saaks moodustada kaheksatipulise tähe, millel samuti oleks keskel kaheksanurkne avaus.

159. Vaiba taastamine

Vanal, kuid ikka veel väärtuslikul vaibal tuli kõrvaldada kaks rikutud kolmnurkset tükki (rikutud tükid on joonisel 102 kujutatud triibuliste kolmnurkadena).



Joon. 102. Kuidas vaipa taastada?

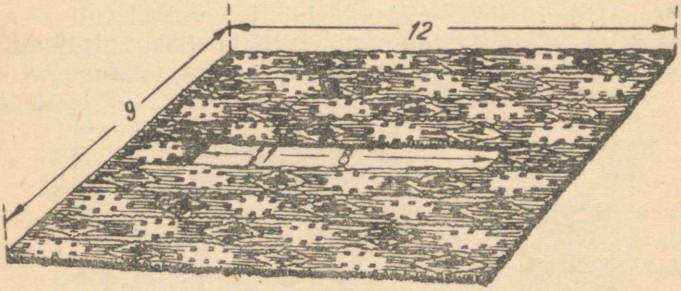
Tarbekunstikooli kasvandikud otsustasid taastada vaiba esialgse ristkülikulise kuju, säilitades seejuures mustri ja raiskamata ühtegi hinnalise vaiba tükki. Õpilased lõikasid vaiba kaheks tükiks, mida teisiti kokku pannes nad saidki uue ristküliku (mis osutus ruuduks). Seejuures ei tulnud neil vaiba juures midagi ümber teha.

160. Väärtuslik autasu

Kui Nuria Saradževa oli alles noor tütarlaps, siis ta hakkas oma kolhoosis ühena esimestest kasutama täiuslikumat puuvilla kogumise meetodit. Nuria sai autasuks turkmeeni vaibakudujate poolt valmistatud toreda vaiba. See esimene autasu oli Nuriale väga südamelähedane.

Nüüd on Nuria juba tükk maad vanem ja töötab oma kodukolhoosis agronoomina. Vaip asub loomulikult Nuria laboratooriumis.

Kord mingit uurimistööd tehes kallas Nuria kogemata



Joon. 103. Tekkis ristkülikukujuline auk.

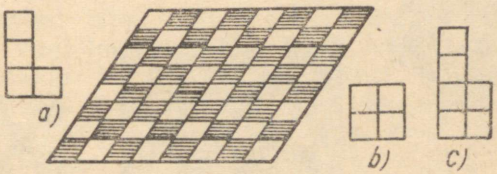
vaibale hapet ja põletas vaiba keskkoha läbi. Rikutud koht tuli vaibast välja lõigata. Tekkis suur ristkülikukujuline auk, mõõtmetega 1 × 8 dm.

Kuid Nuria ei visanud veel sellepärast oma vaipa minema. Ta lõikas vaiba säilinud osa väga osavasti kaheks tükiks, mis kokkupanduna moodustasid ruudu. Nuria õmbes need tükid märkamatu õmblusega kokku ja jällegi oli tal laboratooriumis tore vaip.

Kuidas ta seda tegi?

161. Aidake vaesekest!

Kas te mäletate 54. ülesandes toodud mõistatust kokkupandavast malelauast? Ülesande avastaja kaaslased õppisid lõppude lõpuks nende ette pandud neljateistkümnest tükist üsna väledasti malelauda kokku panema. Siis otsustas lustakas malemees tükkide arvu ja kuju muuta. Tema suureks õnnetuseks tuli talle aga pähe idee lõigata malelaud viieteistkümneks ühesuguseks L-tähe kujuliseks tükiks (joon. 104, *a*), kusjuures üle-



Joon. 104. Lustaka malemehe ülesanne.

jäänud kuueteistkümnes tükk oleks ruudukujuline (joon. 104, *b*). Sellest ajast peale on noore konstruktori meelerahu kadunud. Tal ei õnnestu kuidagi malelauda sellisteks tükkideks lõigata! Nüüd kaldub ta arvama, et sellist tükeldamist ei saagi läbi viia ja püüab seda tõestada, kuid ka see pole tal veel seni õnnestunud.

Püüdke teda aidata ning tõestage toodud ülesande lahendamatus. Ühtlasi tehke talle ettepanek lõigata malelaud kümneks b-tähe kujuliseks tükiks (joon.104, *c*) ja üheks L-tähe kujuliseks tükiks (joon. 104, *a*).

Ka see ülesanne pole just kerge, kuid lahendus on tal siiski olemas.

162. Kingitus vanaemale

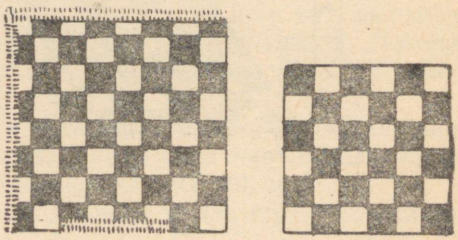
Tütarlapsel oli kaks ruudulise mustriga ruudukujulist riidetükki: ühel oli 64 ja teisel 36 ruutu. Tütarlaps otsustas need kaks riidetükki üheks ruudukujuliseks rätikuks kokku õmmelda ja vanaemale kinkida. Loomulikult tuli kokkuõmblemisel säilitada range mustade ja valgete ruutude vaheldumine. Asja muutis keeruliseks see, et suurema riidetüki kaks äärt olid täielikult ja kolmas äär poolenisti narmastatud (joon. 105).



Tüdruku päästis hädast taibukus.

Ta lõikas mõlemad riidetükid nii teravmeelselt kaheks, et nelja saadud tükki kokku pannes tekkis sajaruuduline rätik, kusjuures kõik suuremal tükil olnud narmad olid ka nüüd rätiku äärtel.

Korrake paberist mudelite abil tütarlapse lahendust.

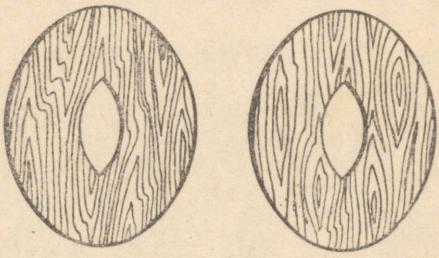


Joon. 105. Kuidas neist üht rätikut teha?

163. Tisleri ülesanne

Tisleri juurde toodi kaks ühesugust ovaalset lauda pikerguste avadega keskel (joon. 106) ja nõuti, et tisler teeks neist üheainsa ümmarguse, kuid ilma avadeta lauaplaadi.

Lauad olid tehtud kallist väärispuust ja meister tahtis neid nii ära kasutada, et ükski puutükk ei läheks kaotsi.



Joon. 106. Kuidas ilma kadudeta valmistada ümmargust lauaplaati?

Et mitte teha liigseid läbimõtlematuid lõikeid, valmistas tisler endale paksust paberist maketi, uuris laua kuju ja kontrollis üht-teist sirkli abil. Selgus, et meistri plaan oli täiesti teostatav ja seejuures üsna väheste saagimistega.

Kuidas tisler tükeldas tema juurde toodud lauad?

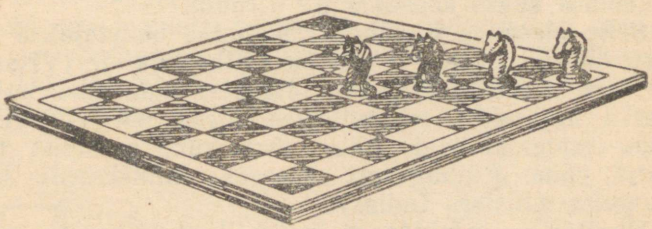
164. Ka köösner ei saa läbi geomeetriata!

Köösner pidi karusnahka paikama ebakorrapäraselt kolmnurkse lapiga. Ta lõikas samasugusest nahast välja lapi, kuid eksis lõikamisel. Karusnahas olevale auguie sobis lõigatud lapp vaid siis, kui karv oli sissepoole pööratud. Vaat kus lops! Ei või ju kallist nahast välja lõigatud tükki minema visata. Kuid kuidas pöörata karusnahatükki niiviisi ümber, et ta sobiks katkisele kohale? Köösner nuputas kaua aega, kuid lõpuks leidis siiski lahenduse. Ta taipas. et lapp tuleb mingil viisil tükkideks lõigata, nii et iga tükk jääks pärast ümberpööramist oma kohale.

Aga kuidas lõigata?

165. Igale ratsule oma tall

Joonisel 107 on kujutatud malelaud ja sellel neli



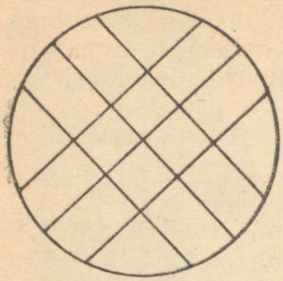
Joon. 107.

ratsut. Lõigake see malelaud neljaks ühesuguseks ja ühesuuruseks tükiks, nii et igasse ossa jääks üks ratsu.

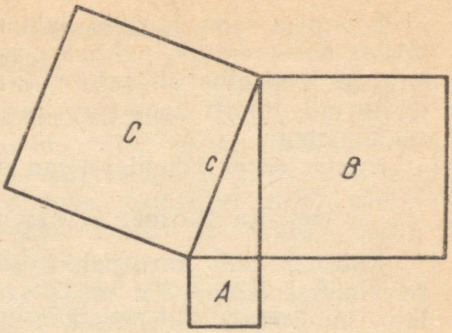
166. Veel rohkem!

Proovige ringi lõigata kuue sirgjoonega võimalikult suuremaks hulgaks tükkideks.

Joonisel 108 on näidatud, kuidas ringi saab lõigata



Joon. 108.



Joon. 109. «A» + «B» = «C».

16 osaks, kuid see pole veel kaugeltki võimaluste piir. Võib näidata, et osade maksimaalse arvu määrab valem $\frac{n^2+n+2}{2}$, kus n on lõikavate sirgete arv. *

Lahendamisel püüdke saavutada lõikesirgete sümmeetrilist asetust.

167. Hulknurga ruuduks teisendamine

Kas on võimalik kaht meelevaldset ruutu muuta üheks ruuduks? See tähendab, kas oskate kaht minu poolt joonistatud meelevaldset ruutu niiviisi tükkideks lõigata, et nendest saaks koostada ü h e ruudu?

Selle ülesande üldlahendi leidmine omistatakse harilikult muistse Kreeka õpetlasele Püthagorasele (VI sajandil enne meie ajaarvamise algust), kuid ühe kujundi teiseks kujundiks teisendamise ülesannetega tegelesid hindu matemaatikud juba tuhat kuni poolteist tuhat aastat enne Püthagorast (seoses ehituskunsti kõrge arenguga muistses Indias).

Huvitav on märkida, et kui meil on käes kaks ruutu, siis pole raske endale ette kujutada ka seda kolmandat ruutu, milleks kaks esimest ruutu liituvad. Selleks paigu-

---

* Topoloogias (kõrgema matemaatika haru) tõestatakse, et sirget võib n punktiga lõigata ülimalt $C^1_n + C^0_n = n + 1$ osaks, tasapinda võib n sirgega lõigata ülimalt $C^2_n + C^1_n + C^0_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ osaks; kolmemõõtmelist ruumi võib n tasandiga lõigata $C^3_n + C^2_n + C^1_n + C^0_n = \frac{n^3+5n+6}{6}$ osaks jne.

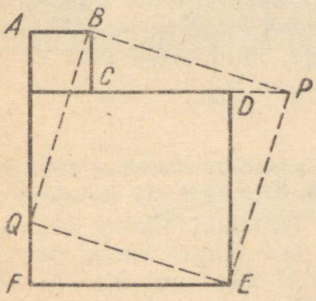
tage antud ruudud A ja B nii, et ühe ruudu küljed oleksid teise ruudu külgede pikenduseks (joon. 109) ja ühendage kaks ruutude tippu lõiguga c, nagu joonisel on näidatud. Sel viisil toimides saame täisnurkse kolmnurga. Selle kolmnurga hüpotenuusile, teiste sõnadega lõigule c ehitatud ruut C ongi parajasti ruuduks, milleks meie kaks esimest ruutu liituvad.

Aga kuidas antud ruute tükkideks lõigata? Kahe ja poole aastatuhande jooksul, mis meid Püthagorasest lahutavad, on selle ülesande lahendamiseks välja mõeldud väga palju praktilisi võtteid. Toome siinkohal ühe nendest — ökonoomse ja kauni.

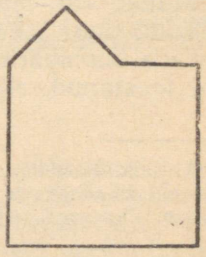
Paigutame kaks antud ruutu kujundina $ABCDEF$ (joon. 110). Eraldame küljel AF lõigu $FQ = AB$ ja lõikame kujundi katki piki sirgeid EQ ja BQ. Nüüd paigutame kolmnurga BAQ asendisse BCP ja kolmnurga EFQ asendisse EDP. Sel viisil moodustub ruut $EQBP$, mis sisaldab endas kahe antud ruudu kõik tükid. Ta külg on pikkuselt võrdne täisnurkse kolmnurga EFQ hüpotenuusiga EQ.

(Lugeja, kes on tuttav geomeetriaga, näiteks 7.—8. klassi õpilane, võib ise kergesti tõestada kolmnurkade BAQ, BCP, EFQ ja EDP võrdsuse ja ka seda, et $EQPB$ on ruut. See on tavalisest koolis esitatavast Püthagorase teoreemi tõestusest erinev tõestus).

Nüüd aga joonistage paberile kujund, mis on saadud ruudu ja võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ühendamisel (joon. 111); lõigake see kujund kolmeks tükiks ja moodustage nendest ruut.



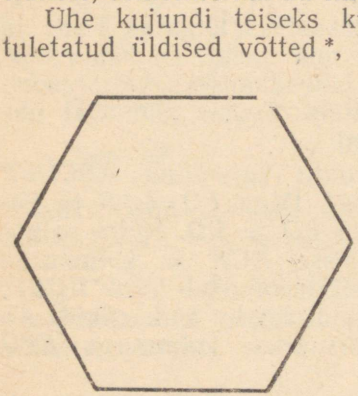
Joon. 110. Kahest ruudust üks.


Joon. 111. Kuidas seda kujundit tükeldada, nii et tekiks ruut?

168. Korrapärase kuusnurga muutmine võrdkülgseks kolmnurgaks

Geomeetrilised ülesanded, mis käsitlevad ühe kujundi osadest teise kujundi moodustamist, on juba mitme tuhande aasta vältel paelunud nii matemaatikuid-spetsialiste, arhitekte kui ka lihtsalt matemaatikaharrastajaid.

Ühe kujundi teiseks kujundiks muutmise jaoks on tuletatud üldised võtted *, kuid nende praktiline kasutamine on paljudel juhtudel äärmiselt ebamugav ja kohmakas.



Joon. 112. Kuidas kuusnurka tükeldada, nii et saaks koostada korrapärase kolmnurga?

Sellist tüüpi ülesannetes pakub huvi muudetava kujundi võimalikult väiksemaks hulgaks tükkideks lõikamine. See pole aga kuigi kerge töö ja nõuab suurt kannatust ja leidlikkust.

Kuidas näiteks paremini tükeldada joonisel 112 toodud korrapärast kuusnurka sirgjoonsete lõigetega, nii et tükkidest saaks moodustada korrapärase kolmnurga?

Sellel ülesandel on mitu lahendust; igaühes neist jagatakse kuusnurk ainult kuueks tükiks.

Püüdke leida selline lahendus.

*

Muide, seni pole veel keegi avastanud võimalust jaotada kuusnurk viieks selliseks tükiks, millest saaks moodustada korrapärase kolmnurga, kuid keegi pole ka veel seni tõestanud, et see pole võimalik.

---

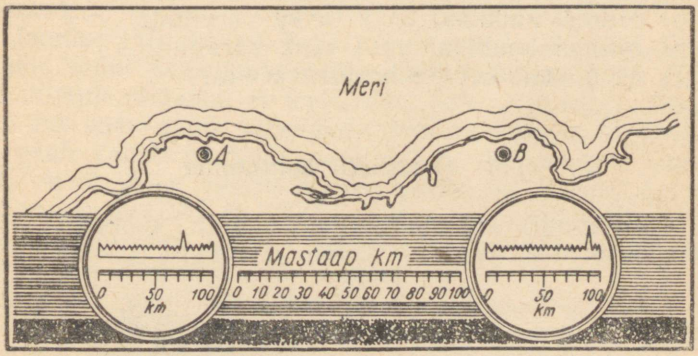
* Selle küsimuse kohta käivast populaarteaduslikust kirjandusest võib näiteks nimetada raamatut Б. А. Кордемский и Н. В. Русалев, Удивительный квадрат, Гостехиздат, 1952.

V PEATÜKK

OSKUS LEIAB KÕIKJAL RAKENDAMIST

169. Kus asub märk?

Joonisel 113 on sõõrides kujutatud kaht radaraparatuuri ekraani. Ekraanidel helendab siksakiline joon, mille all asetseb kauguste skaala.



Joon. 113. Kus asub laev?

Radarijaamast väljub raadiolaine. Ekraanil vastab see moment skaala nullpunktile. Kui raadiolaine kohtab oma teel mõnda takistust (näiteks laeva merel), siis ta pöördub jaama tagasi. Sel momendil tekib ekraanile ülespoole väljaulatuv sakk. Raadiolaine läbis ekraanini tagasijõudmiseni kahekordse vahemaa märgi ja jaama vahel. Kaugusi mõõtev skaala on aga niiviisi märgistatud, et

väljaulatuva saki all olev number näitab otseselt märgi ja jaama vahelist kaugust. Vasakpoolne ekraan annab andmeid punktis *A* asuva radarijaama töö kohta, parempoolne ekraan aga punktis *B* asuva jaama kohta.

Oletame, et mõlemad ekraanid esitavad mere kaldal asuvate radarijaamade samaaegselt võetud näitusid. Lugege ekraanidelt märgi kaugused kummastki jaamast (joon. 113) ja määrake, millises punktis asub märk.

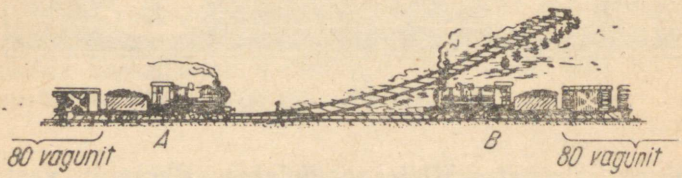
170. Nuputamist viieks minutiks

Kujutage endale ette üleni mustaks värvitud kolmedetsimeetrilise küljepikkusega puust kuupi.

1) Mitu lõiget kulub selleks, et kuupi jagada ühedetsimeetrilise küljepikkusega kuubikuteks?
2) Kui palju me selliseid kuubikuid saame?
3) Mitmel kuubikul on 4 tahku värvitud?
4) Mitmel kuubikul on 3 tahku värvitud?
5) Mitmel kuubikul on 2 tahku värvitud?
6) Mitmel kuubikul on 1 tahk värvitud?
7) Mitu kuubikut on hoopis värvita?

171. Ootamatu kohtumine

Kaks rongi, kummaski 80 vagunit, kohtusid üherööpmelisel teel. Kuidas mõlemad rongid saavad oma

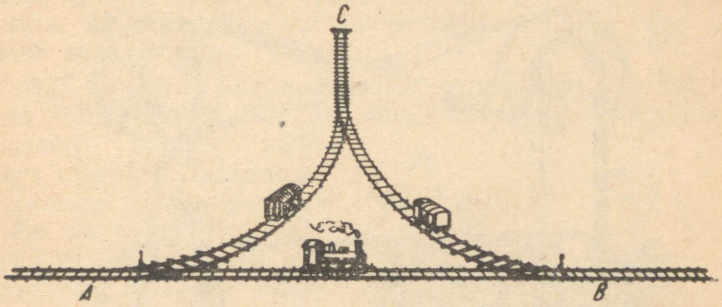


Joon. 114. Kuidas mööduda?

teed jätkata, kui manööverdamiseks on vedurijuhtide käsutuses ainult väike tupik, millesse mahub vedur ja nelikümmend vagunit (joon. 114)?

172. Teede kolmnurk

Paljudes raudteejaamades kasutatakse vedurite ümberpööramiseks nn. teede kolmnurka. See koosneb peateest *AB* ja kahest väikesest haruteest *AC* ja *BC* (joon. 115).



Joon. 115. Kuidas vahetada vagunite asukohti?

Kui peateel *AB* vedur seisab korstnaga paremale, siis pärast kolmnurga läbimist on veduri korsten pööratud vasakule.

Joonise 115 abil on üsna kerge endale ette kujutada, kuidas vedur peab ümberpööramiseks liikuma (siin peab loomulikult oletama, et teeharudel pole vaguneid). Nüüd aga on vedurijuhil lahendada hoopis raskem ülesanne. Ta peab vahetama teeharudel *AC* ja *BC* seisvad vagunid, nii et valge vagun läheks harult *BC* harule *AC* ja punane vagun *AC*-lt *BC*-le. Vedur ise peab pöörduma tagasi endisesse kohta. Tupikusse *C* mahub pöörangu taha ainult vedur või üks vagun.

Kuidas vedurijuht lahendas selle ülesande?

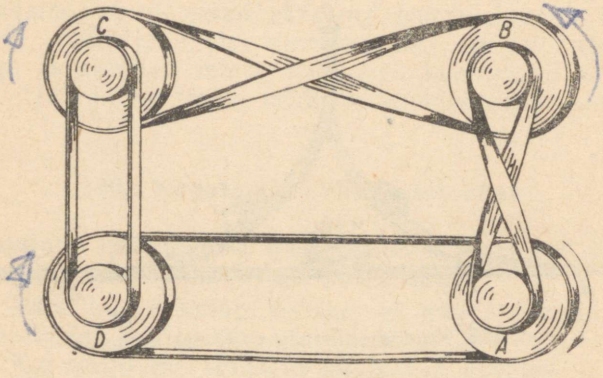
Kui iga haakimist ja lahtihaakimist lugeda üheks käiguks, siis võin ette ütelda, et vedurijuht lahendas ülesande 10 käiguga, teie aga võite ta lahendada 6 käiguga.

173. Kas te oskate kaaluda?

Pakendis on 9 kilogrammi kruupe. Kuidas neid kruupe kaaluda kaheks osaks, nii et ühes osas oleks 2 kilogrammi ja teises osas 7 kilogrammi, kui teie käsutuses on kausskaalud ning üks 200-grammine ja üks 50-grammine viht? Seejuures lubatakse kaaluda ainult kolm korda.

174. Rihmülekanne

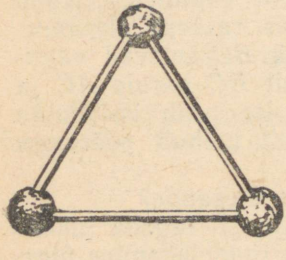
Rihmarattad *A*, *B*, *C* ja *D* on ühendatud rihmadega, nagu on näidatud joonisel 116. Kui kõik rattad saavad sellise ühendusviisi juures liikuda, millises suunas pöör-



Joon. 116. Millises suunas pöörleb iga rihmaratas?

leks siis iga üksik ratas, kui ratas *A* pöörleks noolega märgitud suunas?

Kas rihmarattad saavad pöörelda, kui kõik neli rihma on asetatud ristamisi, nagu näiteks rataste *A* ja *B* vaheline rihm? Kuidas oleks pöörlemisega lugu, kui ainult üks või kolm rihma oleks ristamisi asetatud?



Joon. 117.

175. Seitse kolmnurka

Kolme tuletiku otsi plastiliinikerakestesse kinnitades saame kergesti ehitada ühe võrdkülgse kolmnurga (joon. 117).

Võtke nüüd 9 tuletikku ja püüdke otsi samal viisil kinnitades moodustada 7 võrdkülgset kolmnurka.

176. Kunstniku lõuend

Üks veidrik kunstnik püüdis mind kord veenda, et tema tööde jaoks sobivad kõige paremini lõuendid, mille

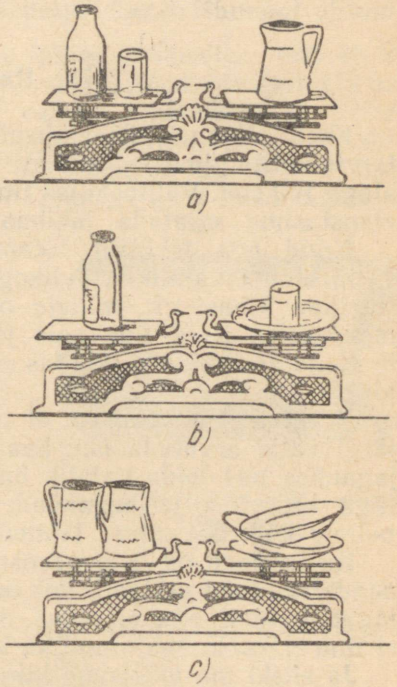
pindala on arvuliselt võrdne ümbermõõduga. Jätkem siinkohal kõrvale küsimus, kas lõuendi sellised mõõtmed aitavad kaasa kunstiteoste paremale mõistmisele, kuid püüdkem siiski kindlaks teha, milliste mõõtmetega (arvestame ainult täisarve) peab ristkülikukujuline lõuend olema, et ta pindala ja ümbermõõt avalduks ühe ja sama arvuga.

See pole just kerge ülesanne, kuid siiski üks tütarlaps Dzaudžikaust (ta käis muide tollal alles kuuendas klassis) mõtles välja väga elegantse lahenduse. Tütarlaps tõestas isegi, et üldse on võimalikud vaid kaks ristkülikut, mis rahuldavad ülesande tingimusi.

Noh, kes teist «avastab» tütarlapse lahenduse või mõtleb välja mitte vähem teravmeelse omapoolse lahenduse?

177. Kui palju kaalub pudel?

Kaalude vasakpoolsel plaadil asub pudel koos teeklaasiga, parempoolsel plaadil aga kann (joon. 118, *a*). Mõlemad plaadid on tasakaalus. Tõstame teeklaasi vasakult poolt üle paremale ja asendame kannu taldrikuga (joon. 118, *b*). Plaadid on jällegi tasakaalus.



Joon. 118. Neil juhtudel on kaalud tasakaalus.

Asendame nüüd vasakul plaadil pudeli kahe kannuga ja paremal plaadil teeklaasi kahe taldrikuga (joon. 188, *c*). Sellise vahetuse tulemusena selgub, et 2 kannu kaaluvad niisama palju kui 3 taldrikut.

Mitu korda on pudel teeklaasist raskem?

178. Kuubikud

Laste mänguasju valmistavale meistrimehele anti kätte teatud hulk ühesuguseid puust kuubikuid, et ta kleebiks neile tähed ja numbrid. Ootamatult selgus, et meistrile antud kuubikute pindalast ei jätkunud kõigi numbrite ja tähtede kleepimiseks. Tal oleks vaja olnud tervelt kaks korda suuremat pindala.

Kuidas meistrimees suurendas kuubikute tahkude pindala kahekordseks, ilma et oleks kusagilt kuubikuid juurde toonud?

179. Haavlid

Kord oli meil ühe niisutuskanali ehitamise juures tarvis välitingimustes kiiresti valmistada tinaplaat ruumalaga 100 cm^3. Välitöökojas tina ei leidunud, seepärast me otsustasime sulatada jahihaavleid.

Nüüd aga tekkisid ootamatud raskused — kuidas välja mõõta vajalik haavlikogus? Meil oli kaasas pooleliitriline klaaspurk, millele olid kantud jaotused nagu mensuurile. Kuid tina pole ju vesi, mensuuriga ei saa ta ruumala määrata. Kuidas siis määrata haavlite ruumala?

Keegi tegi ettepaneku, et tuleks kera ruumala valemi järgi välja arvutada ühe haavlitera ruumala ja seejärel jagamise teel leida vajalik haavlikogus. See tee aga oli liiga keeruline ja aeganõudev, seda enam, et haavlid polnud kõik ühesuguse läbimõõduga.

Kui esemed on homogeensed (ühest ainest), siis saab nende ruumala määrata kui eseme kaalu ja aine erikaalu jagatist. Meil aga ei olnud nagu kiuste kellelgi meeles ei tina erikaalu ega olnud ka kaasas ühtegi käsiraamatut.

Ja siiski me mõõtsime kiiresti ja küllalt täpselt välja vajaliku haavlikoguse. Kuidas me sellega hakkama saime?

180. Kuhu seersant välja jõudis?

Komandöri käsku täites väljus seersant asustatud punktist *M* asimuudiga 330°. Jõudnud künkani, ta läks edasi asimuudiga 30° ja jõudis üksiku puuni. Siit ta pöördus 60° võrra paremale. Jõudnud sillani, läks seer-

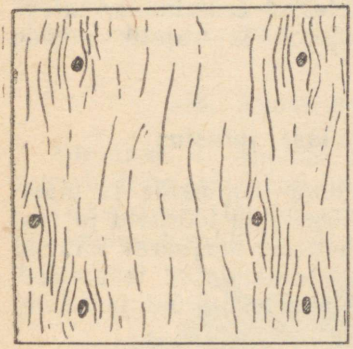
sant edasi mööda jõe kallast asimuudiga 150°. Poole tunni pärast saabus seersant veski juurde, kus ta jällegi muutis suunda. Nüüd ta kõndis asimuudiga 210°, orienteerudes möldri majale. Viimase juures tegi ta veelkord pöörde, ja minnes nüüd asimuudiga 270°, jõudiski komandöri poolt määratud sihtkohta.

Võtke mall appi ning konstrueerige paberilehele kogu seersandi marsruut ja määrake, kuhu seersant välja jõudis, kui on teada, et ta kõndis iga asimuudi järgi 2,5 kilomeetrit.

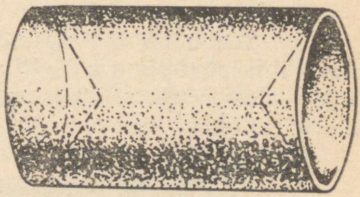
181. Leidke palgi diameeter

Kui suur on ligikaudu palgi diameeter, millest on valmistatud joonisel 119 toodud vineertahvel? Tahvli mõõtmed on 150×150 cm^2.

Tuletan meelde, et ringi diameetrit d võib ligikaudselt leida järgmise valemi abil: $d \approx \frac{c}{3{,}14}$, kus c on ringjoone pikkus. Ärge aga eksige selle ülesande lahendamisel. Palgi diameeter $d \neq \frac{150}{3{,}14}$.



Joon. 119. Milline oli palgi diameeter?



Joon. 120. Kuidas mõõta süvendi sügavust?

182. Ootamatu kimbatus

Kord küsiti Tšapajevilt, kas ta sõjalised võidud pole vast juhuslikud. Tšapajev vastas järgmiselt: «Oh ei, kuidas siin saab juhuslikkust olla — igal pool on tarvis pead, leidlikkust . . .»

Tõepoolest, juhuslikkus on üsna ebakindel alus edu

saavutamiseks mistahes tegevusalal. Ükskõik kas me teeme tööd või mängime näiteks malet — igal pool võivad tekkida näiliselt väljapääsmatud olukorrad. Aitab meid vaid püsivus ja taibukus...

Üks üliõpilane pidi kord joonestama silindrikujulise detaili, mille otstes olid süvendid (joon. 120). Süvendite sügavuse mõõtmiseks kasutatakse sellistel juhtudel tavaliselt koos varbsirkliga spetsiaalset sügavusmõõtjat, kuid üliõpilasel polnud peale hariliku joonlaua ja kroonsirkli käepärast ühtegi mõõduriista. Eset kroonsirkli abil mõõtes sattus üliõpilane ootamatult järgmisele takistusele: selleks et mõõta süvendite kõige sügavamate punktide vahelist kaugust piki silindri telge, tuleks tal kroonsirkel asetada mõõtjoonlauale. Kuid kuidas seda teha? Sest selleks, et kroonsirklit saaks detaililt eemaldada, tuleks kroonsirkli harud laiali õmmata... ja vajalik mõõde hävitada. Mida teha?

183. Tehnikakooli õpilase jutustus

Tehnikakoolis me õpime tundma tööpinkide ja masinate ehitust, õpime mõistlikult käsitsema tööriistu ja rasketes olukordades mitte meelt heitma. Seejuures aitavad meid muidugi suuresti keskkoolis omandatud teadmised.

Kord pistab meister mulle pihku traaditüki ja küsib:

«Millega mõõdetakse traadi läbimõõtu?»

«Mikromeetriga,» vastan.

«Noh, aga kui juhtub, et mikromeetrit pole käepärast, kuidas sa siis mõõdad?»

Ma ei küsinud seda kellegi käest. Läks aega mis läks, aga ma mõtlesin selle nõksu välja. Mulle meeldivad niisugused ülesanded!

Mõistatage, kuidas ma mõõtsin traadi diameetrit!

Teine kord oli lugu veel huvitavam. Ma sain ülesande teha poolteise-kahe millimeetri paksusesse katusepleki tahvlisse ümmargune avaus.

«Lähen toon puuri ja meisli,» ütlen meistrile.

«Pole tarvis,» vastab meister ja kissitab seejuures kavalasti silmi. «Ma näen, sul on haamer ja tasavii!. Püüa nende riistadega läbi ajada.»

Ma pean tunnistama, et selle ülesandega ma ei saanudki iseseisvalt hakkama.

Kuidas ma oleksin pidanud sel juhul toimima?

184. Kas on võimalik saada 100% kokkuhoidu?

Üks kodanik kuulis kord kolmest leiutisest. Esimene neist hoidis kokku 30% kütteainet, teine 45% ja kolmas 25%. Kodanik otsustas kõiki kolme leiutist korraga rakendada, lootes seejuures kokku hoida 30% + 45% + + 25% = 100% kütteainet. Kas asi aga niiviisi klapib? Kui suur on kokkuhoid tegelikult?

185. Vedrukaalude abil

Teie käsutuses on mitu vedrukaalu. Iga vedrukaalu kandevõime on ülimalt 5 kilogrammi. Kuidas ainult vedrukaalude abil kaaluda prussi, mille kaal on silma järgi umbes 15—20 kilogrammi?

186. Konstruktsioonilisi pähkleid

Ülesanne 1. Kuidas koostada kolmest paberiribast kolmelüliline ahel, nii et see laguneks ühe meelevaldse lüli läbilõikamisel kolmeks tükiks? Joonisel 121 toodud harilik aheldamisviis ei kõlba, sest ahel lagu-



Joon. 121.

neb kolmeks eraldi tükiks ainult keskmise lüli avamisel, mitte aga iga lüli korral, nagu nõuti ülesandes.

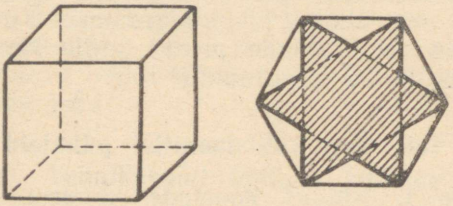
Ülesanne 2. Kuidas koostada viiest paberiribast viielülililine ahel, nii et leiduks ainult üks lüli, mida läbi lõigates ahel laguneks viieks eraldi tükiks?

Ülesanne 3. Kuidas koostada viiest paberiribast viielülilist ahelat, nii et ahel laguneks ühe meelevaldse lüli läbilõikamisel viieks eraldi tükiks?

187. Miša äpardus

Miša Gerassimov jälgis kord oma vanema venna Igori tegevust. Igor võttis väikese puust kuubikese ja saagis selle nii osavasti pooleks, et lõikepind moodustas korrapärase kuusnurga (joon. 122). Seejärel ühendas ta pliiatsi abil kuusnurga tipud üle ühe ja sai niiviisi kuueharulise tähe.

Igor lõikas taskunoa abil tähe harude vahel olevad kolmnurksed tükid pealispinnast veidi madalamaks (joonisel 122 on need märgitud viirutamata kolmnurkadena).

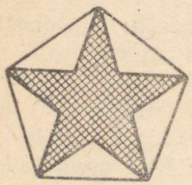


Joon. 122.

kleepis tähele kummiplaadi, lõikas sellel ülearused osad ära ja ütles: «Pitsat ongi valmis.»

Mišale see meeldis ja oma klassi seinalehe kunstnikuna ta otsustas, et selline pitsat kuluks temalegi ära, ainult see peaks olema v i i e h a r u l i s e tähe kujuline.

Ta teadis, et viieharulist tähte saab täpselt samal viisil valmistada korrapärasest viisnurgast (joon. 123). Sel eesmärgil võttiski Miša oma ehitusklotside tagavarast ühe kuubikujulise klotsi ja püüdis seda niiviisi katki saagida, et lõikepind moodustaks korrapärase viisnurga. Kuid Mišal ei läinud see korda.



Joon. 123

Kuidas ta ka saagi ei juhtinud, ühe lõikega ei saanud ta kuidagi viisnurka kätte. Tekkis küll mitmesuguses suuruses korrapäraseid kolmnurki ning rida ühesuurusi ruute ja korrapäraseid kuusnurki, aga mitte ühtki viisnurka.

Miša nägi hulk aega vaeva, saagis kõik oma ehitusklotsid katki, kuid ei saanud ikkagi aru, kas ta ise ei

oska kuupi niiviisi lõgata, et tekiks viisnurk, või polegi viisnurga saamine sel viisil võimalik.

Kõik tuleb sellest, et Miša on geomeetriat alles liiga vähe õppinud ega oska veel geomeetriliselt mõtelda.

Aidake Mišal selgusele jõuda järgmistes küsimustes:

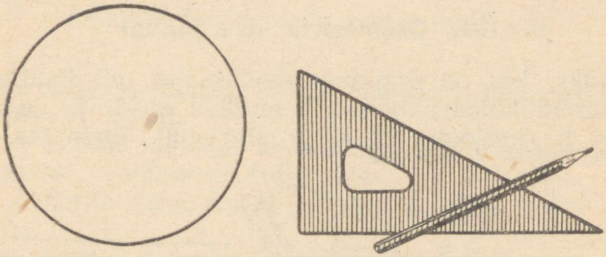
1) Kas korrapärase viisnurga saamine kuubi poolitamisel on üldse võimalik?

2) Kuidas tuleks kuup katki saagida, et lõikepind moodustaks korrapärase kolmnurga või korrapärase kuusnurga?

3) Kas kuupi tasapinnaga lõigates võib saada korrapärast hulknurka, millel oleks üle kuue külje?

188. Leidke ringjoone keskpunkt

Kuidas leida ringjoone (joon. 124) keskpunkti, kui teie käsutuses on ainult jaotusteta joonestuskolmnurk



Joon. 124. Leidke ringjoone keskpunkt.

ja pliiats (pliiatsit lubatakse kasutada ainult joonte tõmbamiseks)?

189. Kumb kast on raskem?

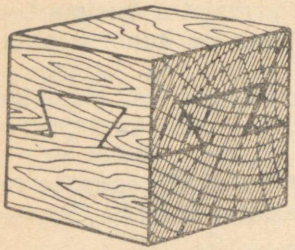
Kaks ühesuurust kuubikujulist kasti on täidetud ühest ja samast ainest ümmarguste kuulidega. Esimeses kastis on 27 ühesugust suurt kuuli, teises kastis aga 64 ühesugust väikest kuuli.

Kumb kast on raskem?

Eeldatakse, et kummaski kastis on igas kihis ühepalju kuule, kusjuures iga kihi äärmised kuulid puudutavad kasti seinu. Kui kast sulgeda, siis ka ülemise kihi kuulid puudutavad parajasti kasti kaant.

190. Puusepa osavus

Tööstuskooli õpilaste tööde näitusel demonstreeriti meile omapärast puust kuupi. Ta koosnes kahest tappide abil tihedalt ühendatud tükist. Tappide otsajooned on näha kuubi kõigil neljal küljel (joon. 125). Kuubi tükid pole kokku liimitud ja järelikult peaks neid saama eraldada, kuid kuidas?



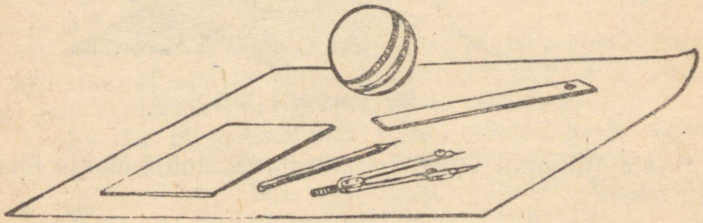
Joon. 125. «Nõksuga» kuup.

Me proovisime sikutada küll üles, küll alla, küll vasakule ja paremale, küll edasi ja tagasi, kuid kõik oli asjata.

Ehk oskate teie ütelda, kuidas seda kuupi saab tükeldada ja millised need tükid on?

191. Geomeetria kera pinnal

Igaüks, kes on õppinud geomeetriat, on kahtlemata lahendanud konstruktsiooniülesandeid sirkli ja joonlaua abil, s. t. ringjoone kaari ja sirgjooni tõmmates. See-



Joon. 126. Kuidas leida kuubi diameetriga võrdset lõiku?

juures toimus konstrueerimine harilikult kas paberil või klassitahvlil.

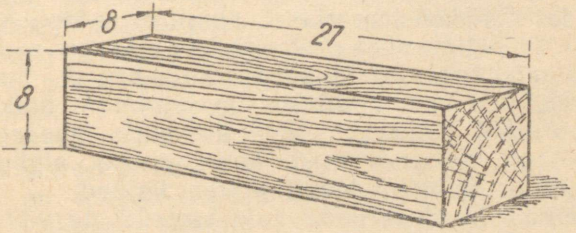
Vaevalt aga tuli teil geomeetrilisi ülesandeid lahendades teha konstruktsioone ka kõverpinnal, näiteks kera pinnal. Peab aga märkima, et sellist ruumilist konstruktsioonivõtet kasutades oleks mingi antud konkreetse kera diameetrit võrdlemisi lihtne leida.

Selleks pange lauale mingi kera, näiteks kroketipall

(joon. 126), võtke puhas paberileht, sirkel, jaotusteta joonlaud ning pliiats ja nuputage, kuidas konstrueerida paberile lõiku, mis võrduks kera diameetriga.

192. Siin tuleb tublisti nuputada

Proovige, kas te oskate puust risttahukat, mille mõõtmed on 8 cm, 8 cm ja 27 cm (joon. 127), vineerisae abil

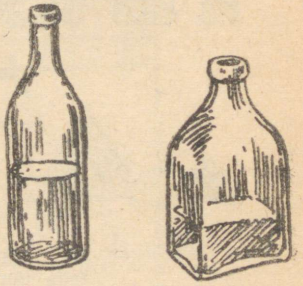


Joon. 127. Kuidas saaks prussist kuupi teha?

lõigata neljaks tükiks, nii et nendest tükkidest saaks moodustada kuubi.

Siin ei tohi muidugi kohe saega kuupi puuklotsi kallale asuda, vaid enne tuleb ühteist paberile joonistada ja planeerida.

Hoiatame, et see ülesanne nõuab teilt head ruumilist kujutlusvõimet ja tõsist nuputamist.



Joon. 128. Kuidas leida pudeli ruumala?

193. Rasked tingimused

Kujutage endale ette järgmist keerukat olukorda. Te peate määrama osaliselt vedelikuga täidetud pudeli ruumala, kusjuures teil on ainsaks abivahendiks sentimeetrijaotustega joonlaud! Asja kergendab mõnevõrra see, et pudelid on ainult kas ringi-, ruudu- või ristkülikukujulise põhjaga. Eeldame veel, et pudel on tasase põhjaga, ja et pudelis oleva vedeliku ruumala sisse- või väljakallamisega muuta ei tohi!

Nagu näete, on tingimused üsna rasked. Aga eks seda huvitavam ole nende raskuste ületamine!

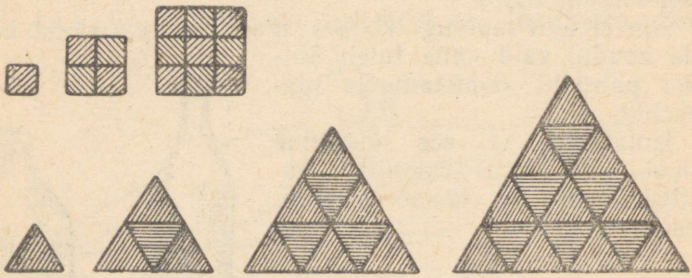
194. Kokkupandavad hulknurgad

Viimasel ajal valmistatakse üha rohkem kokkupandavaid maju. Tehastes valminud plokkide abil läheb maja «üleslöömine» üsna kiiresti.

Kas ka meie ei prooviks organiseerida niisugust «plokkide» abil konstrueerimist, ainult et sedapuhku geomeetrias ja selle vahega, et «plokkideks» on meil ühesuguste mõõtmete ja kujudega hulknurgad. Kujutage endale ette, et meie käsutuses on piiramatu hulk omavahel võrdseid hulknurki. Neid hulknurki tihedalt üksteise kõrvale asetades tuleb konstrueerida alghulknurgaga sarnane, kuid tunduvalt suurem kujund.

Alghulknurki üksteise kõrvale asetades te võite neid igat pidi pöörata, ei tohi aga painutada ega tükkideks murda.

Selleks otstarbeks ei sobi kaugeltki igasugused hulknurgad. Näiteks korrapärased kuusnurgad liituvad hästi



Joon. 129. Ruutudest ja korrapärastest kolmnurkadest on kerge koostada nendega sarnaseid kujundeid.

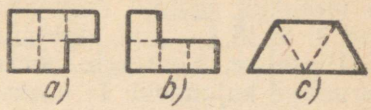
(meenutage metlahhplaatidest põrandaid), kuid üht suurt korrapärast kuusnurka neist konstrueerida ei saa.

Võrdsetest ruutudest või võrdkülgsetest kolmnurkadest saab kergesti laduda nendega sarnaseid kujundeid (joon. 129).

Üsna sobivateks «ehitusplokkideks» endaga sarnaste kujundite konstrueerimisel on joonisel 130 toodud kujundid ja nendega analoogilised kujundid, mis on moodus-

tatud võrdsetest ruutudest (näiteks ruudulisest paberist) või võrdsetest võrdkülgsetest kolmnurkadest.

Ükskõik millise joonisel 130 toodud kujundiga sarnase kujundi konstrueerimiseks kulub 4, 9, 16 ... antud hulknurka.

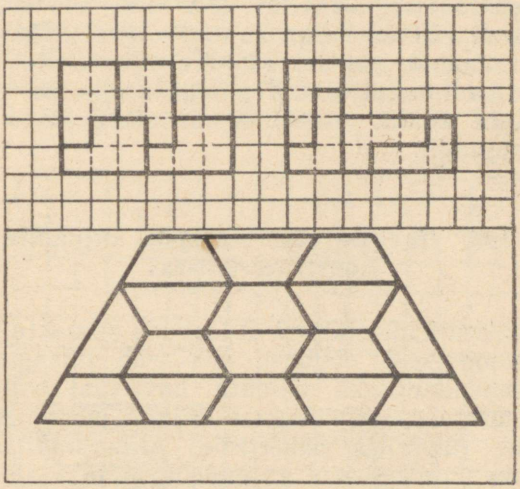


Joon. 130. Sobivad «plokid».

Joonisel 131 on toodud näide, kuidas neljast hulknurgast *a* ja *b* või kuueteistkümnest hulknurgast *c*, mis on kujutatud joonisel 130, konstrueerida algkujunditega sarnaseid kujundeid.

Nagu näete, peab algkujundiga sarnaste kujundite «ehitamiseks» kasutama vähemalt nelja algkujundit, edasi üheksat kuutteistkümmet ja üldiselt n^2 kujundit (n on konkreetne täisarv).

See on kõigiti seaduspärane tulemus. Nimelt siit saame praktilise kinnituse tuntud geomeetrilisele teo-


Joon. 131. Kujundid, mis sarnanevad nende koostisosadeks olevate «plokkidega».

reemile selle kohta, et sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu nende vastavate lineaarmõõtmete ruudud.

Ühesuguste hulknurkade komplektist nendega sarnaste kujundite koostamisel me võime oodata, et nende külgede pikkused on algkujundi külgede pikkustest 2, 3,

4, ..., n korda suuremad. Siis on nende kujundite pindalad 2^2, 3^2, ... , n^2 korda suuremad algkujundi pindalast ja järelikult nõutud kujundite ehitamiseks kulub vastavalt 4, 9, 16, ... , n^2 algkujundit.

Ülesanne. Koostage joonisel 130 toodud kujunditega sarnaseid kujundeid: 1) üheksast kujundist *a*, 2) üheksast kujundist *b*, 3) neljast kujundist *c*, 4) kuueteistkümnest kujundist *b*, 5) üheksast kujundist *c*.

Valmistage ruudulisest paberist teisi, joonisel 130 toodud plokkidega analoogilisi plokke (lõigake neid paberist välja küllalt suurel hulgal) ja korraldage võistlus — kes ehitab kiiremini võimalikult väikest plokkide hulka kasutades algkujundiga sarnase kujundi.

Pidage silmas, et mitte iga hulknurka ei saa koostada neljast või üheksast temaga sarnasest kujundist.

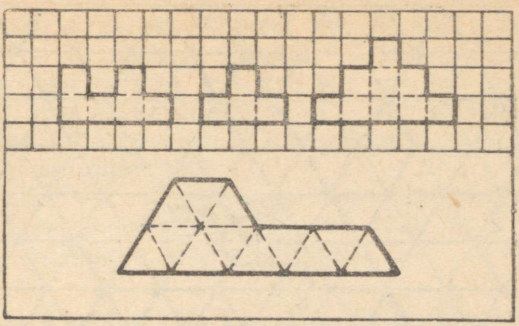
Sarnase kujundi koostamiseks vajalik minimaalne kujundite arv võib olla ka 16, 25, 36 ja üldiselt n^2, kus n on suvaline täisarv. Arv n ei ole enne lahendamist teada, seepärast ongi huvitav, kes saab moodustada sarnase kujundi vähima hulga kujundite abil. Mõned näidisplokid on toodud joonisel 132. Te võite nende plokkide kuju suvaliselt muuta, kuid pidage seejuures meeles, et võib leiduda plokke, millest ei saa moodustada nendega sarnast kujundit.

195. Huvitav võte sarnaste kujundite konstrueerimiseks

Kui hulknurkade ehitamisel loobuda sarnaste kujundite arvu minimaalsuse nõudest, siis võib niisuguste ülesannete lahendamiseks näidata huvitavat võtet, mille puhul kasutatakse samasuguse kujuga murdjooni.

Võtame ruudulise paberilehe. Algkujunditena vaatleme alguses niisuguseid kujundeid, mida saab koostada ühikruutudest. Tähistame iga sellise kujundi tähega P, talle vastava sarnase hulknurga aga tähega P'.

Joonistame suvaliste mõõtmetega ruudu, mis sisaldab neljaga jaguva hulga ühikruute. Selle ruudu tsentrist tõmbame piki ühikruutude külgi murdjoone, mis väljub ruudu äärele. Järgnevalt tõmbame samast tsentraalpunktist täpselt samasuguse murdjoone, mille iga lüli on esimese murdjoone iga vastava lüliga risti. Siis tõm-



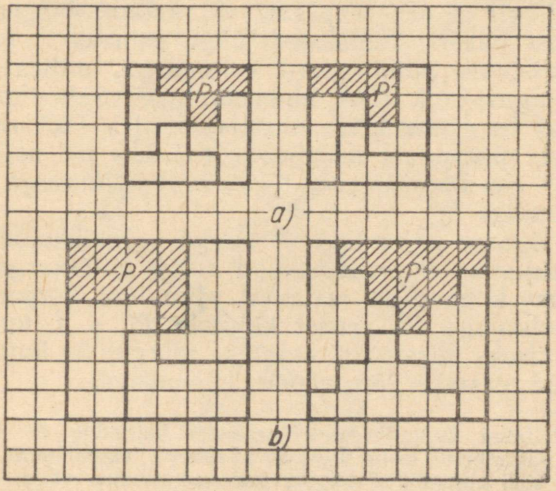
Joon. 132. Võimalike «plokkide» näiteid.

bame teise murdjoonega risti oleva samasuguse murdjoone (näiteks nii, nagu on näidatud joonisel 133).

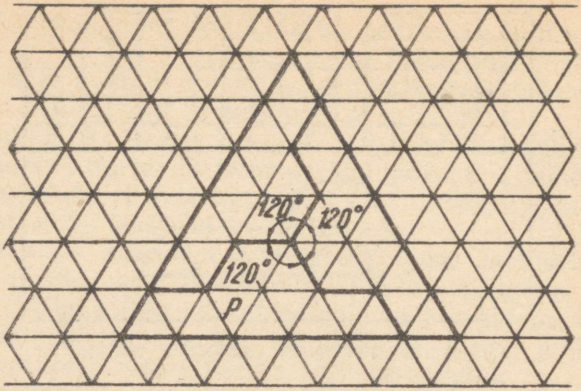
Need murdjooned lõikavad ruudu neljaks võrdseks kujundiks, mida me nimetame algkujunditeks P.

Kui igasse algkujundisse P kuulub n ühikruutu, siis saab n algkujundit kasutades kindlasti konstrueerida kujundi P'. Kuna ühes suures ruudus on 4 kujundit P, siis järelikult saab kujundit P' koostada $4n$ kujundist P.

Seega saab igast neljast joonisel 133, *a* toodud suu-



Joon. 133. «Plokkide» moodustamise näiteid.



Joon. 134. Näide nürinurksest «plokist».

rest ruudust, s. t. kuueteistkümnest kujundist P, koostada kergesti temaga sarnase kujundi P'.

Joonisel 133, *b* esitatud üheksaruudulise hulknurgaga P sarnase kujundi konstrueerimiseks piisab *, kui kasutada 36 kujundit P. Sama võtet saab laiendada ka võrdsetest võrdkülgsetest kolmnurkadest koostatud hulknurkadele (joon. 130, tüüp *c*).

Võrdkülgseteks kolmnurkadeks joonitud paberit harilikult müügil ei ole, seepärast valmistame kõigepealt ise niisuguse paberi. Tähistused jäägu samaks.

Joonistame nüüd suure kolmnurga, milles on kolmega jaguv hulk ($3n$) ühikkolmnurki. Selle kolmnurga tsentrist tõmbame kolm üksteise suhtes 120° nurga all asetsevat ühesugust murdjoont (näiteks nii nagu joonisel 134). Need murdjooned tükeldavad kolmnurga kolmeks algkujundiks P.

Kui igasse kujundisse P kuulub n ühikkolmnurka ja kolm kujundit P moodustavad suure kolmnurga, siis n niisugust kolmnurka annavad võimaluse kergesti koostada kujundiga P sarnast kujundit P', s. t. kujundi P' koostamiseks piisab (vt. reaalune märge) $3n$ kujundist P.

Nüüd vastake järgmistele küsimustele.

---

* Esitatud kujunditega P sarnaste kujundite P' koostamise meetod garanteerib meile teatava p i i s a v a algkujundite P hulga; kui aga kõik kujundid P lõigata tekkinud ruudust välja, s. t. kasutada neid üksteisest sõltumatult, siis võib kujundi P' konstrueerimiseks t a r v i l i k kujundite P hulk olla tunduvalt väiksem.

1) Millisest arvust joonisel 133, *b* kujutatud kujundist *P* piisab sarnase kujundi *P'* koostamiseks? Katselisel teel kontrollige, kas see arv on vähim võimalik.

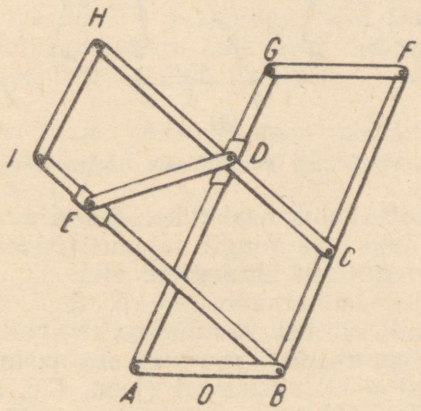
2) Milliseid algkujundeid *P* saab murdjoonte abil veel moodustada joonisel 133, *b* toodud ruudust või joonisel 134 toodud kolmnurgast?

Kui teile see sarnaste hulknurkade moodustamise võte meeldis, siis mõtelge, kuidas teda kasutada algkujundite saamiseks ka ristkülikust.

196. Šarniirseadis korrapäraste hulknurkade konstrueerimiseks

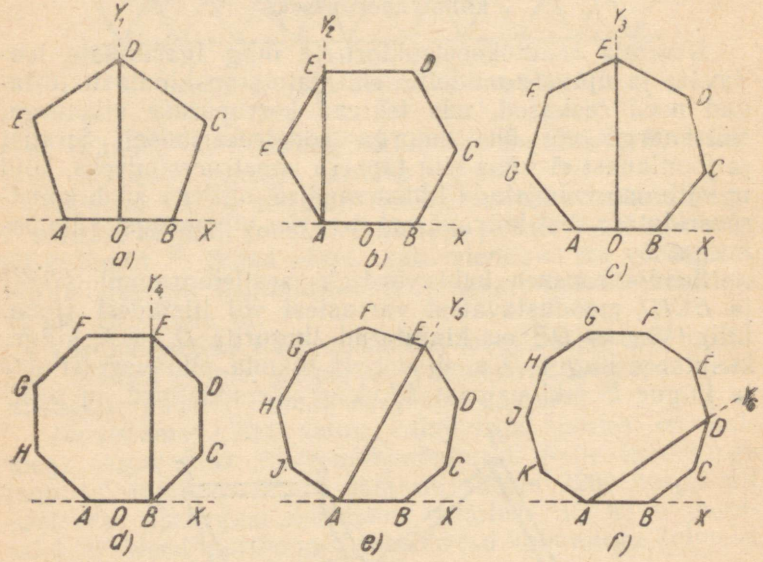
Noortele raadiokonstruktoritele ning igasuguste lendavate ja ujuvate mudelite ehitajatele on kindlasti tuttavad need raskused, mis tekivad korrapärase viisnurga, seitsenurga või üheksanurga konstrueerimisel. Sirklist ja joonlauast ei piisa siin täpseks konstrueerimiseks, kuid te võite ise valmistada lihtsa seadise, millega saab konstrueerida suvalist korrapärast *n*-nurka viisnurgast kümmenurgani.

Seadis koosneb kaht võrdset parallelogrammi *ABFG* ja *BCHI* moodustavatest varrastest või liistudest (joon. 135). Varras *DE* on kinnitatud liugurite *D* ja *E* külge, kusjuures liugur *D* saab vabalt liikuda piki varrast *AG* ja liugur *E* piki varrast *BI*. Varraste mõõtmed on selli-



Joon. 135. Seadis korrapäraste hulknurkade konstrueerimiseks.

sed, et $AB = BC = CD = DE$. Suvaliste D ja E nihete korral jäävad parallelogrammid $ABFG$ ja $BCHI$ ikka võrdseteks; samuti jäävad võrdseteks ka trapetsid $ABCD$ ja $BCDE$, garanteerides sellega suvalise varraste asendi korral ka n-nurga nurkade võrdsuse. Nende trapetsite külgedeks on alati AB, BC, CD ja DE ning sisenurkadeks $\angle ABC$, $\angle BCD$ ja $\angle CDE$. Selline šarniirne parallelogrammide ühendamine annab nende küllaldase pikkuse korral võimaluse ühesuguse võttega mehaaniliselt konstrueerida suvalist korrapärast hulknurka viisnurgast kümmenurgani.



Joon. 136. Mõningaid korrapäraste hulknurkade omadusi.

Selle seadise abil saaks konstrueerida isegi ruutu (milleks muidugi pole mingit vajadust), kui saaks punktid E ja A praktiliselt ühtumiseni viia.

Korrapäraste n-nurkade ($n = 5$, 6, 7, 8, 9 ja 10) konstrueerimise võtted šarniirseadise abil baseeruvad vastavate hulknurkade järgmistel omadustel:

a) $\angle DOB = 90°$ viisnurgal (joon. 136, *a*);
b) $\angle EAB = 90°$ kuusnurgal (joon. 136, *b*);
c) $\angle EOB = 90°$ seitsenurgal (joon. 136, *c*);
d) $\angle EBA = 90°$ kaheksanurgal (joon. 136, *d*);

e) $\angle EAB = 60°$ üheksanurgal (joon. 136, *e*);
f) $\angle DAB = 36°$ kümmenurgal (joon. 136, *f*).

Šarniirseadise abil korrapärase *n*-nurga konstrueerimiseks vajalikud abikonstruktsioonid on järgmised (juhtudel $n = 5$, 6, 7 ja 8). Kõigepealt tuleb konstrueerida täisnurgad Y_1OX, Y_2AX, Y_3OX, Y_4BX, siis tuleb seadise varras AB asetada sirgele AB, seejuures (vastavalt joonistele *a*—*d*) kas punkte O või B ühtima viies. Nüüd surume varda AB tugevasti vastu paberit ja liigutame ülejäänud vardaid seni, kuni D langeb sirgele OY_1 (viisnurga jaoks), või kuni E langeb sirgele AY_2 (kuusnurga jaoks) või kuni E langeb sirgele OY_3 (seitsenurga jaoks), või lõpuks, kuni E langeb sirgele BY_4 (kaheksanurga jaoks).

Korrapärase üheksa- ja kümmenurga konstrueerimiseks tuleb kõigepealt tõmmata jooned AY_5 ja AY_6 nii, et $\angle Y_5AX = 60°$ ja $\angle Y_6AX = 36°$. Seejärel tuleb varras AB asetada sirgele AB nii, et punktid A ühtuksid ja varrast AB vastu paberit surudes tuleb ülejäänud vardaid pöörata seni kuni E langeb sirgele AY_5 (üheksanurga jaoks) või kuni D langeb sirgele AY_6 (kümmenurga jaoks).

Seadist jäigalt vajalikku asendisse kinnitades saame kätte otsitava *n*-nurga 4 järjestikust külge (ja 5 tippu). Nelja *n*-nurga külge omades on jäigalt kinnistatud seadist «šabloonina» pöörates kerge kätte saada ka *n*-nurga ülejäänud külgi.

On ilmne, et iga konstrueeritud hulknurga külje pikkus võrdub varda AB pikkusega. Kui meil on tarvis mõne teise küljepikkusega hulknurki, siis me võime nad kätte saada konstrueeritud hulknurga sarnaste kujunditena.

Teoreetiliselt on konstruktsioon absoluutselt täpne, praktiliselt sõltub aga saavutatud täpsus seadise valmistamise täpsusest.

Kirjeldatud seadise võib valmistada kas puust või kergest metallist.

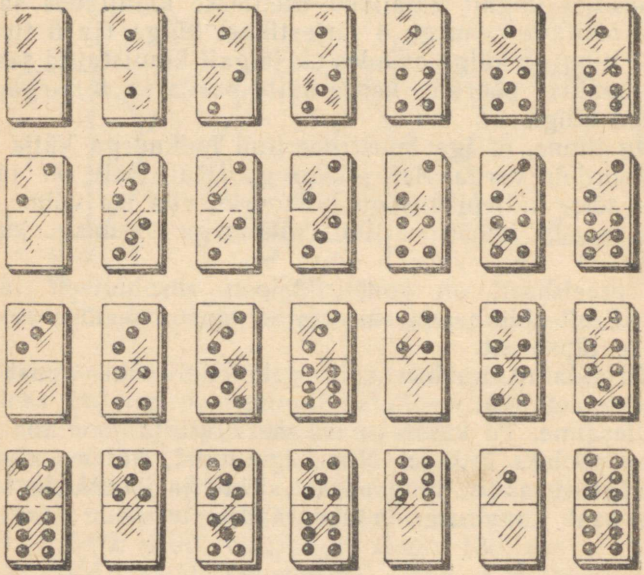
Ülesanne. Te kindlasti oskate sirkli ja joonlaua abil nurka pooleks jagada. Nuputage nüüd, kuidas alguses seda šarniirseadist ning pärast sirklit ja joonlauda kasutades saab konstrueerida ühekraadise nurga.

VI PEATÜKK

DOOMINO JA TÄRING

A. DOOMINO

Doomino koosneb tavaliselt 28 ristkülikukujulisest kivist (joon. 137). Iga kivi on jagatud kaheks ruuduks, millele on märgitud teatav hulk punkte. Punktid on jaga-



Joon. 137. Komplekt doominokive.

tud ruutudele nii, et punktide rühm igal kivil kujutab endast üht võimalikku kombinatsiooni kahekaupa 7 arvust: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sellele vastavalt on iga dominokivi määratav kahe arvuga: punktide arvuga, mis asuvad ühes ruudus, ja punktide arvuga, mis asuvad teises ruudus. Kivi kõikide punktide summa annab tema «silmade» arvu. Kui kivi mõlemal otsal on ühesugune silmade arv või on mõlemad tühjad, siis sellist kivi me nimetame kaksikkiviks.

Doomino mängureeglid on niivõrd üldtuntud, et nende juures pole mõtet pikemalt peatuda. Märgime vaid põhireeglit: lauale pandud kivi ükskõik kumma otsa juurde tuleb panna ükskõik milline teine kivi, mille ühel otsal on niisama palju silmi kui lauale pandud kivi vastaval otsal.

Kõigi 28 dominokivi tähistused võib paigutada ritta järgmise süsteemi kohaselt:

0–6	1–6	2–6	3–6	4–6	5–6	6–6
0–5	1–5	2–5	3–5	4–5	5–5	
0–4	1–4	2–4	3–4	4–4		
0–3	1–3	2–3	3–3			
0–2	1–2	2–2				
0–1	1–1					
0–0						

Dominomäng ise ei paku matemaatilises mõttes suurt huvi. Kui teil aga on käepärast komplekt dominokive, siis katsuge jõudu järgnevate ülesannete kallal.

197. Mitu silma?

Doomino põhireeglile tuginedes lahendage järgmine ülesanne: kõik 28 dominokivi paigutada lauale ahelana nii, et ahela ühes otsas oleks 5 silma. Mitu silma on siis ahela teises otsas?

Algul proovige ülesannet lahendada peast, siis aga kontrollige tulemust praktiliselt.

198. Kaks trikki

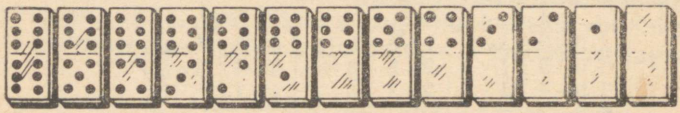
Esimene trikk. Kõrvaldage märkamatult üks dominokivi (ainult mitte kaksikkivi) ja paluge, et sõbrad moodustaksid ahela, mis sisaldaks k õ i k i käepärastolevaid

kive. Teie ülesande täitmine pole neil kuigi raske, huvitav on ainult see, et te võite juba enne ahela valmimist ette öelda ahela kummaski otsas olevate silmade arvu.

Nendeks on arvud, mis asuvad teie poolt kõrvaldatud doominokivil. Miks?

Teine trikk. Võtke 25 doominokivi, pöörake nad kummuli ja paigutage nad ühte ritta nii, et kivide pikemad küljed oleksid vastamisi. Seejärel teatage, et te võite kas selja pöörata või isegi teise tuppa minna, aga keegi kohalolijatest tõstku sel ajal ahela paremast otsast teatud kindel hulk kivisid (kuid mitte üle 12) vasakusse otsa. Te lubate eksimatult ütelda ümbertõstetud kivide arvu.

Ettevalmistumise ajal, s. t. kivide ümberpööramise ajal, paigutage 13 kivi vastavalt joonisel 138 toodud



Joon. 138. Kivid paiknevad silmade arvu kahanemise järjekorras.

skeemile. Kividel olevate silmade arv annab meile parajasti kaheteistkümnest nullini kahanevate täisarvude jada. Ülejäänud 12 kivi paigutage nendest kolmeteistkümnest kivist paremale poole meelevaldses järjekorras.

Tuppa tagasi tulnud, pöörake ümber keskmine kivi (s. o. ükskõik kummast otsast lugedes kolmeteistkümnes kivi). Sellel kivil olevate silmade arv ütlebki, mitu kivi tõsteti paremalt poolt vasakule ümber.

Miks nii?

199. Võit on kindel

Oletame, et doominot mängivad kaks paari: *A* ja *C* *B* ja *D* vastu. Kivid jaotatakse mängijate vahel võrdselt, s. t. igaühel on 7 kivi.

Proovime selgitada, millest sõltub võidu saavutamine. See sõltub loomulikult mingil määral mängijate oskusest, kuid on võimalikud ka sellised kivide algjaotused kahe paari vahel, et esimene paar võidab kindlasti (s. t. —

üks selle paari mängijatest saab kõik oma kivid enne teisi mängijaid maha panna).

Olgu näiteks mängijal *A* järgmised kivid:

1-0, 1-1, 1-2, 1-3, 0-4, 0-5, 0-6,

mängijal *D* aga järgmised kivid:

0-0, 0-2, 0-3, 1-4, 1-5, 1-6

ja veel mingi kivi. Ülejäänud kivid olgu jaotatud *B* ja *C* vahel meelevaldselt.

Sel juhul taandub kogu mäng kahevõitluseks esimese paari mängija *A* ja teise paari mängija *D* vahel, ülejäänud mängijad (*B* ja *C*) ei saa lauale panna ühtki kivi!

Mängija *A* alustab ja paneb lauale 1-1. *B* ja *C* passivad, sest neil pole sobivat kivi. *D* võib aga lauale panna ükskõik millise kivi kolmest: 1-4, 1-5, või 1-6. *A* peab seejärel lauale panema kas 4-0, 5-0 või 6-0. *B* ja *C* passivad jälle, sest neil pole käes ühtegi planku ega ühte. *D* võib jälle lauale panna ühe kivi, kuid *A*-l on alati käes kivi, mis võimaldab tal ahela otstel hoida kas plangu või ühe.

Lõppude lõpuks vabaneb *A* kõigist kividest, *B* ja *C* ei saa ühtegi kivi lauale panna, *D*-le aga jääb kätte üks kivi. Tähendab mängu võitis paar *A* ja *C*. (Mängige see mäng algusest lõpuni läbi.)

Kivide esialgsel jaotamisel mängijate vahel võis muidugi nullide ja ühtede kombinatsiooni asendada arvude 2, 3, 4, 5 ja 6 vastavate kombinatsioonidega.

On üsna kerge arvutada, et äsjavaadeldud mängule sarnaste mängude arv võrdub erinevate kombinatsioonide arvuga seitsmest elemendist kahe kaupa, s. t. selliste mängude hulk on 21. Sellise mängu *juhusliku* esinemise tõenäosus on aga üsna väike.

Toodud näites kestis mäng seni, kuni ühel partneril said kivid otsa. Kuid mõnikord juhtub ka nii, et pärast mõnda käiku mäng sulgub, sest ühelgi mängijal pole käes kivi, mida ta saaks käia. Sel juhul loetakse võitjaks paar, kellel on silmade summa kättejäänud kividel väiksem.

Püüdke nüüd ühe sellise lühipartii kohta teadaolevate kaudsete andmete põhjal mõistatada, millised kivid pandi lauale.

Mängivad jälle samad paarid: *A* ja *C* ning *B* ja *D*.

Igaühel on 6 kivi ja 4 kivi jäävad suletuks, kuid mängijad leppisid kokku käigupuuduse korral maast kive mitte «osta».

Mängija *A* kivid on teada:

2-4, 1-4, 0-4, 2-3, 1-3, 1-5.

Tema partneril *C*-l on käes viis kaksikkivi. Ülejäänud kaks kaksikkivi on *D* käes; kõigi tema kivide silmade summa on 59.

A alustas mängu kiviga 2-4, *B* passis, *C* käis, *D* passis, *A* käis, *B* passis jällegi, *C* käis ja sulges mängu. Paar *B* ja *D* kaotas mängu ühtegi käiku tegemata. Paaril *A* ja *C* jäi kätte 35 silma, paaril *B* ja *D* 91 silma. Nelja lauale pandud kivi silmade summa oli 22.

Määrake nende andmete põhjal, missugused 4 kivi pandi algul kõrvale ja jäid kasutamata ning missugused 4 kivi käidi lauale.

200. Raam

Moodustage doominokive mängu reeglitele vastavalt lauale pannes ruudukujuline raam. Kasutage seejuures kõiki 28 kivi ja asetage nad nii, et igal ruudu küljel olevate silmade arv oleks 44.

201. Raam raamis

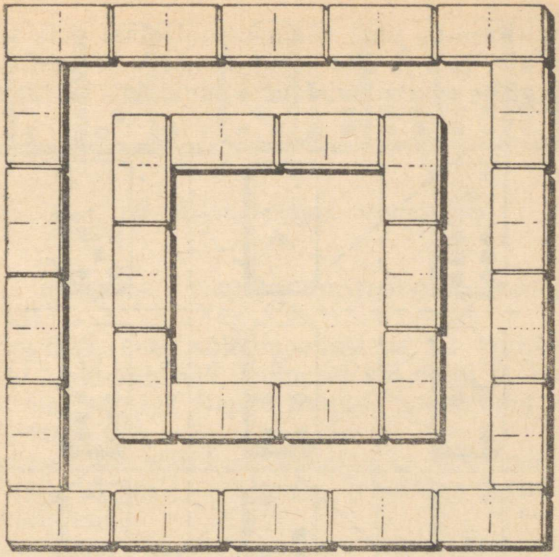
Moodustage 28-st doominokivist joonisel 139 toodud kujund, nii et kujundi kõigil kaheksal küljel oleks silmade arv võrdne.

Seejuures lubatakse meelevaldset kivide aheldumist, s. t. pole nõutud, et kive peaks paigutama vastavalt mängureeglitele.

202. «Aknad»

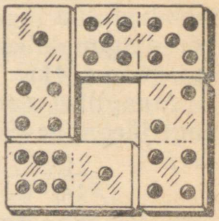
Doominokividest võib moodustada joonisel 140 toodud viisil «aknaid», mille igal küljel olevate silmade summa on konstantne.

Kasutades tervet kividekomplekti (28), koostage 7 ühesugust nimetatud omadusega «akent», kusjuures nende hulgas ei tohi olla joonisel 140 toodud «akent».



Joon. 139. Silmade summad piki külgi peavad olema võrdsed.

Märkused: 1) Nurgaruutudes olevad silmad lähevad arvesse kaks korda: nii horisontaal- kui ka vertikaalsuunas, 2) Silmade summa peab olema konstantne ainult ühe «akna» piires. Erinevatel «akendel» võib silmade summa olla erinev.



Joon. 140. «Aken».

203. Maagilised ruudud doominokividest

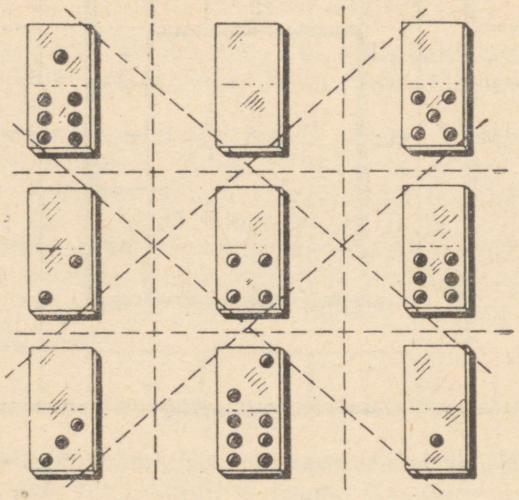
Doominokividest saab peale «akende» ja «raamide» ehitada ka ruute, sealjuures koguni «maagilisi ruute».

Kui erinevad arvud on paigutatud ruudukujuliselt, nii et igas vertikaal- või horisontaalreas ja kummalgi diagonaalil asetsevate arvude summa on võrdne, siis sellist ruutu nimetatakse «*maagiliseks*».*

Nii näiteks võib kõiki seitset planku (nii nimetatakse

* Arvudest koostatud maagiliste ruutude kohta võite palju huvitavat leida XII peatükist.

doominokive, mille ühel või mõlemal otsal pole silmi) ja veel kaht kivi (1-6 ja 2-6) kasutades üsna kergesti moodustada maagilise ruudu konstantse summaga 12 (joon. 141).



Joon. 141. Maagiline ruut summaga 12.

Märkus. Nii selles kui ka teistes doominokividest moodustatud maagilistes ruutudes loetakse reaks, veeruks või diagonaaliks riba, mis hõlmab vastavat kivide rivi (vt. joon. 141).

Maagilise doominoruudu üleskirjutamiseks on mugavam järgmine tähistus:

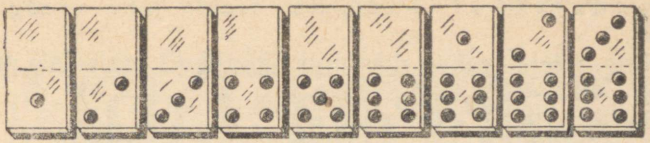
1-6	0-0	0-5
0-2	0-4	0-6
0-3	2-6	0-1

ehk arvudes:

7	0	5
2	4	6
3	8	1

Huvitav on märkida, et meie poolt valitud üheksa doominokivi silmade summad kujutavad endast naturaalarvude jada kaheksat esimest arvu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja veel nulli.

Kui aga valida 9 kivi, mis moodustavad naturaalarvude jada 9 esimest liiget (joon. 142), siis saab nendest



Joon. 142. Üheksa esimest naturaalarvu.

koostada maagilise ruudu konstantse summaga 15 (joon. 143).

Analoogilisi ruute võib moodustada ka kividest, mis sisaldavad kõiki kahtesid, kolmesid või nelju ja veel kaht vastavalt valitud kivi. Nende ruutude konstandid on vastavalt 18, 20 ja 24.

Maagilisi ruute võib konstrueerida ka suuremast kivide hulgast (16, 25 jne.); seejuures lubatakse kasutatavate arvude kordumist.

Näitena toome kuueteistkümnest kivist ehitatud maagilise ruudu skeemi konstantse summaga 18:

2-6	1-2	1-3	0-3
1-4	0-2	3-6	1-1
0-5	1-5	0-1	0-6
0-0	2-5	0-4	1-6

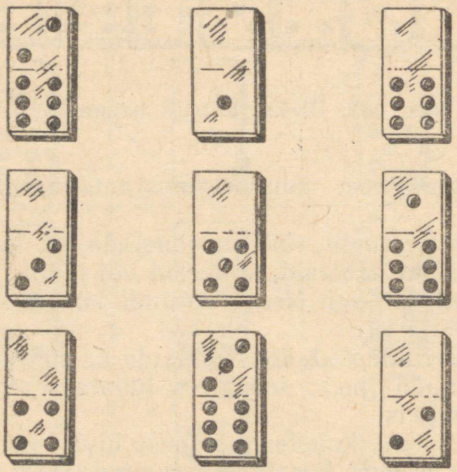
See on koostatud kividest, mille hulgas on kõik nullid ja ühed ning veel kolm kivi: 2-5, 2-6, 3-6. Selle ruudu igas veerus, igas reas ja igal diagonaalil olevate silmade summa on 18. Mõnedel kividel on võrdne hulk silmi, näiteks $1 + 4 = 0 + 5$ (esimene veerg), $2 + 5 = 1 + 6$ (viimane rida) jne.

Saadud ruudul on veel see huvitav omadus, et esimese veeru võib nihutada neljandaks või kõige ülemise rea võib tuua alla — igal juhul saame jälle maagilise ruudu. Kui selles ruudus asendada kõik nulle ja ühtesid sisaldavad kivid ühe võrra suurema silmade arvuga kividega, siis saame tulemusena jälle maagilise ruudu. Samasugune oleks tulemus ka juhul, kui me asendaksime nulle ja ühtesid sisaldavad kivid nendest 2 või 3 silma võrra suuremate kividega.

Lõpuks märgime veel huvitavat fakti, et iga kivi

täiendkiviga* asendades saame jälle maagilise ruudu.

Nagu näete, annab doomino rikkalikult materjali maa-



Joon. 143. Maagiline ruut summaga 15.

giliste ruutudega opereerimiseks. Lahendage nüüd järgmised ülesanded:

Ülesanne 1. Koostage joonisel 144 toodud üheksast kivist maagiline ruut konstantse summaga 21.

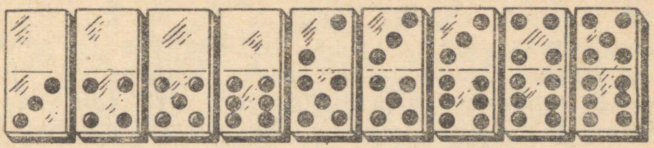
Ülesanne 2. Valige välja 9 doominokivi, mille silmade summa moodustab jada 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ja ehitage nendest maagiline ruut. Milline on selle maagilise ruudu konstant?

Ülesanne 3. Valige välja 16 doominokivi järgmiste silmade summadega: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9 ja 10 ning moodustage nendest maagiline ruut.

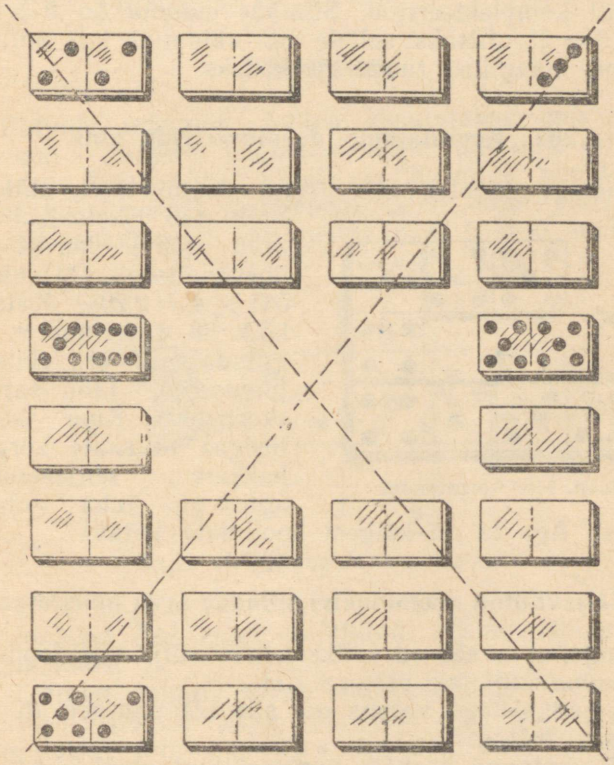
Ülesanne 4. Koostage maagiline ruut konstandiga 27, järgmisest 25 kivist: 0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 0-3, 1-2, 0-4, 2-2, 1-3, 2-3, 1-4, 0-5, 1-5, 0-6, 2-4, 3-3, 1-6, 3-4, 2-5, 2-6, 3-5, 4-4, 4-5, 3-6, 4-6. (Tervest kivide komplektist on eraldatud kivid 5-5, 5-6 ja 6-6).

---

* Doominokive nimetatakse täiendkivideks, kui ühe kivi ruutudes olevad silmad täiendavad teise kivi ruutudes olevaid silmi kuueni. Sellised on näiteks kivid 2-3 ja 4-3, 1-2 ja 5-4 jne. 28-kivilises komplektis on 4 kivi, mis täiendavad iseendid: 0-6, 1-5, 4-2 ja 3-3.



Joon. 144. Koostage maagiline ruut summaga 21.



Joon. 145. Auguga maagilise ruudu skeem.

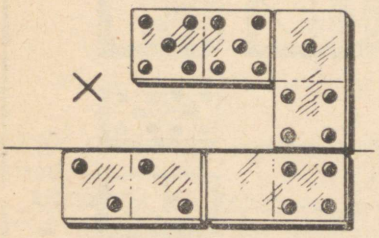
204. Auguga maagiline ruut

Paigutage kõik 28 doominokivi vastavalt joonisel 145 toodud skeemile auguga ruuduna, nii et kaheksas horisontaalreas, kaheksas vertikaalreas ja punktiiriga märgitud diagonaalides oleks igaühes 21 silma. Erinevalt eelmistest ülesannetest on vertikaalridade ja diagonaalide silmade summa arvutamisel kumbki kivi ots siin «iseseisev».

Joonisel 145 on ülevalt neljas horisontaalrida juba täielikult komplekteeritud. Silmade summa on $5+6+5+5=21$. Lisaks sellele on näidatud ka, millised kivid on maagilise ruudu nurkadeks.

205. Korrutamine doominokivide abil

Vaadelge joonist 146. Nelja doominokivi abil on kujutatud kolmekohalise arvu (551) korrutamist ühekohalisega (4), nimelt $551 \times 4 = 2204$. Katsuge kõik 28 doominokivi paigutada nii, et tekiks 7 joonisega 146 sarnast «korrutist». Kuue «korrutisega» te saate kergesti hakkama, seitsmendaga aga on juba rohkem tegemist. Aga ta on kõigest hoolimata leitav!



Joon. 146. Korrutamine.

206. Väljavalitud doominokivi silmade arvu mõistatamine

Paluge, et te sõbrad valiksid koos välja ühe doominokivi (loomulikult teie eest salaja).

Kui nad sellega valmis on, siis las nad teevad läbi järgmised tehted:

1) Korrutavad ükskõik kummal kivi otsal oleva silmade arvu kahega;

2) liidavad korrutisele mingi teie poolt nimetatud arvu m;

3) korrutavad saadud summa viiega;

4) liidavad tulemusele kivi teises otsas olevate silmade arvu.

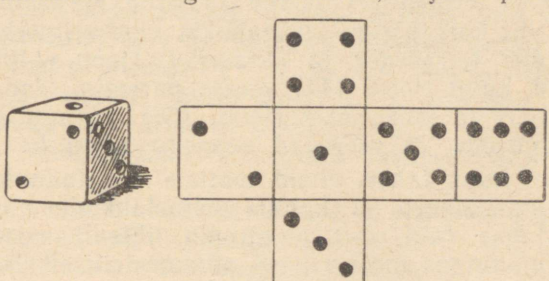
Nüüd küsige sõprade käest, milline oli nende poolt saadud lõpptulemus ja lahutage sellest $5m$. Saadud kahekohalise arvu kaks numbrit annavadki teile valitud dominokivi otstel olevad silmad.

Eeldame näiteks, et sõbrad valisid kivi 6-2. Nad korrutasid 6 kahega ja liitsid teie nõudel arvu $m = 3$. Saadi 15. Korrutati 15 viiega ja liideti teisel kivi otsal olnud 2 silma. Saadi 77. Lahutame sellest arvust $5m = 15$. Saame $77 - 15 = 62$. Valitud kivi on 6-2.

Uurige välja, miks see nii on!

B. Täring

Paljude mängude juures kasutatakse abivahendina täringut — väikest kuubikest, mille tahkudele on tehtud punktid. Kuubi ühel tahul on üksainus punkt, teisel tahul kaks punkti, kolmandal tahul kolm punkti, ülejäänud tahkudel on aga vastavalt 4, 5 ja 6 punkti.



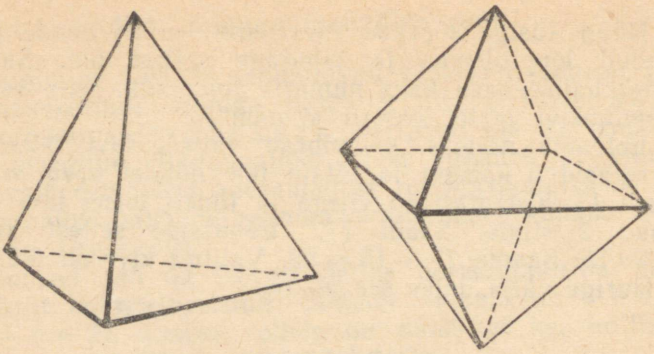
Joon. 147. Täring ja ta pinnalaotus.

Joonisel 147 ongi kujutatud selline täring ja ta pinnalaotus.

Täringu mingil tahul olev punktide hulk määrab vastava silmade arvu. Punktid on kuubi tahkudele paigutatud nii, et vastastahkudel olevate silmade summa oleks 7.

Miks just kuup osutus hulktahukaks, mis paremini sobis täringuks?

Eelkõige on ilmselt selge, et täring peab olema korrapärane hulktahukas, sest ainult sel korral garanteerib täringu vise igale tahule võrdseid võimalusi olla just pealmiseks, visatud silmade arvu

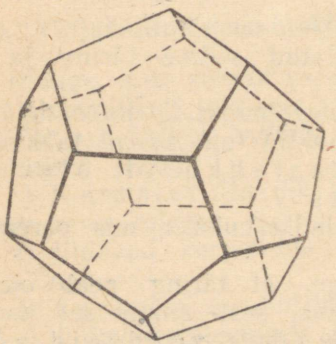


Joon. 148. Tetraeeder ja oktaeeder.

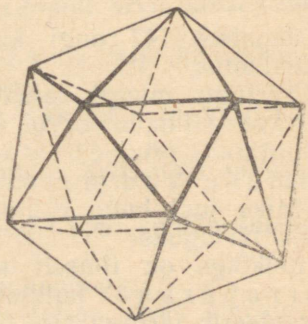
määravaks tahuks. Korrapäraste hulktahukate viiest tüübist sobib täringuks parimini kuup: teda on kerge valmistada ja viskamisel veereb ta üsna kergesti.

Kui viit korrapärast hulktahukat visata igaüht võrdse jõuga, siis tetraeeder ja oktaeeder (joon. 148) vaevu veerevad, kuup (joon. 147) veereb paremini, dodekaeeder (joon. 149) ja ikosaeeder (joon. 150) on aga sedavõrd «ümmargused», et veerevad peaaegu nagu kera.

Kuubi kuus tahku viisid mõttele kasutada kuut esimest naturaalarvu ja kuubi vastastahkude paralleelne asetus lubas neid arve paigutada lihtsalt, seaduspäraselt ja mõningas mõttes isegi sümmeetriliselt (igal vastastahkude paaril olevate silmade summa on 7).



Joon. 149. Dodekaeeder.



Joon. 150. Ikosaeeder.

See seitsme-printsiip ongi võtmeks mitmesuguste ühe- või mitme täringu kohta käivate trikkülesannete lahendamisel. Nendel, kes pole seda täringu silmade paigutuse omapära märganud, võib selliste «mõistatamiste» saaduste paljastamine osutuda üsna raskeks.

207. Aritmeetiline trikk täringutega

Triki esitamiseks on vaja 3 täringut. Kui teil neid käepärast pole, siis kopeerige joonisel 147 toodud täringu pinnalaotus paksule paberile või õhukesele papile, lõigake välja ja kleepige kokku.

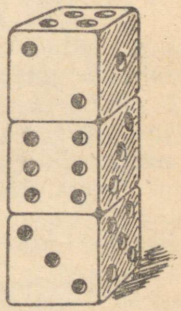
«Fakiir» pöörab selja. Keegi «publiku» hulgast heidab lauale 3 täringut. «Fakiir» palub publikut leida kõigepealt kolme täringu ülemistel tahkudel olevate silmade summa, seejärel tõsta üks täringutest üles ja liita selle alumisel tahul olevad silmad eelmisele summale. Edasi palub «fakiir» tõstetud täringut uuesti visata ja ta ülemisel tahul olevate silmade summa liita varemsaadud summale. Seejärel «fakiir» pöördub ümber, tuletab «publikule» meelde, et ta ei tea, millist täringut teist korda heideti; võtab kõik kolm täringut kätte, raputab neid (salapärasuse saavutamiseks) ja «publiku» üllatuseks «mõistatabki» sooritatud aritmeetiliste tehete lõpptulemuse.

«Mõistatamise» meetod. Täringute ülemistel tahkudel olevate silmade summale tuleb liita 7. Saadud summa ongi see, mida tuli «mõistatada».

Selgitage, miks on see nii?

208. Varjatud tahud

Olgu kolm täringut paigutatud üksteise otsa (joon. 151). Saadud tulbas ei näe me kõige alumist tahku ja neid tahke, mida mööda täringud kokku puutuvad. Ometi piisab meile ühestainsast pilgust tulba ülemisele tahule, et eksimatult määrata nimetatud viiel varjatud tahul asetsevate silmade summat. Näiteks joonisel 151 toodud täringute asetuse juures on see summa kindlasti 17.



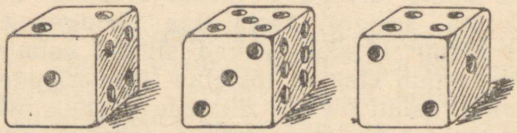
Joon. 151. Tulp kolmest täringust.

Nuputage, millisest reeglist tuleks juhinduda, et mõistatada varjatud silmade summat.

Tulba kahel küljel leiduvate silmade põhjal võib kindlaks teha koguni silmade arvu igal varjatud tahul eraldi. Kuidas?

209. Millisesse järjekorda on täringud paigutatud?

Andke sõpradele kolm täringut, tükk paberit ja pliiats ning paluge, et nad moodustaksid täringuid meelevaldselt ritta seades kolmekohalise arvu, mille numbreid näitaksid täringute ülemistel tahkudel olevad silmad. Nii näiteks on joonisel 152 toodud täringute ase-



Joon. 152. Ülemised tahud moodustavad arvu 254.

tuse juures selleks arvuks 254. Edasi paluge, et nad kirjutaksid sellele arvule lõppu juurde kolm numbrit, mis tähistavad vastavate täringute alumistel tahkudel olevaid silmi. Niiviisi saadakse kuuekohaline arv. Meie näites 254 523. Saadud kuuekohalist arvu paluge jagada 111-ga ja tulemus teile teatada.

Te võite kiiresti kindlaks määrata selle kuuekohalise arvu kolm esimest numbrit ja järelikult võite ka öelda, millises järjekorras olid täringud laual.

Mõistatamise meetod. Lahutage jagatisest 7 ja jagage vahe üheksaga. Saadud jagatise numbrid näitavadki täringute esialgset paigutust.

Seega, jätkates näite vaatlemist, saame:

$$254\,523 : 111 = 2\,293; \quad 2\,293 - 7 = 2\,286; \quad 2\,286 : 9 = 254.$$

Milles peitub selle triki matemaatiline olemus?

VII PEATÜKK

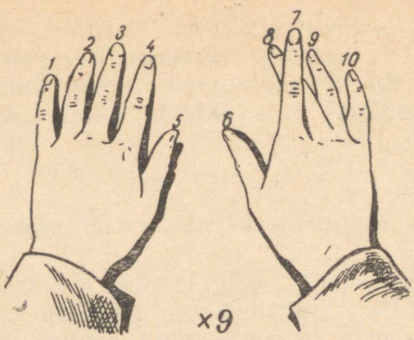
ÜHEKSA OMADUSED

Täisarvudega teostatavate aritmeetiliste tehete mõningad iseärasused on seotud arvuga 9. Iga arvu 9 omadust võib kasutada mitmesuguste matemaatiliste lõbustuste väljamõtlemise ajendina. Väga laialt on näiteks tuntud järgmine üheksaga jaguvuse tunnus: arv jagub üheksaga, kui ta numbrite summa jagub üheksaga. Siit järeldub, et iga üheksaga korrutamisel saadud arvu numbrite summa (ristsumma) on kas üheksa või jagub üheksaga. Näiteks $354 \times 9 = 3186$. Korrutise numbrite summa $3 + 1 + 8 + 6 = 18$ jagub üheksaga.

Selle omadusega on seotud üks huvitav juhtum. Kord kurtis üks väikemees isale, et ükskordühest ei taha talle üheksaga korrutamise tabel kuidagi meelde jääda. Isa õpetas poisile lihtsa võtte, kuidas sõrmedega mälu aidata. Teeme selle võtte ka teistele tuttavaks.

Ühe sõrmeliigutusega. Pange mõlemad käed lauale ja sirutage sõrmed välja. Iga sõrm vasakult paremale lugedes tähistab üht arvu: esimene sõrm — 1, teine — 2, jne. kuni kümnenda sõrmeni, mis tähistab arvu 10. Nõutagu nüüd mistahes esimesse kümnesse kuuluva arvu korrutamist üheksaga. Selleks tuleb teil vaid kõverdada või tõsta see sõrm, mis tähistab korrutatavat. Kõverdatud sõrmest vasakule poole jäävate sõrmede arv näitab korrutise kümneliste hulka, paremale poole jäävate sõrmede arv aga üheliste hulka.

N ä i d e. Selleks et korrutada seitset üheksaga, pange käed lauale ja tõstke seitsmes sõrm üles (joon. 153). Tõstetud sõrmest vasakul on 6 sõrme, paremal 3 sõrme.



Joon. 153. «Arvutusmasin».

Tähendab, seitset üheksaga korrutades me saame 63. See esimesel pilgul võib-olla üllatav mehhaaniline korrutamisvõte on kergesti arusaadav, kui tuletada meelde, et korrutustabelis on kõigi üheksaga korrutamisel saadud arvude numbrite summa võrdne üheksaga. Kümneliste arv aga on alati ühe võrra väiksem arvust, millega me üheksat korrutame. Vastava sõrme tõstmisega me tähistame seda olukorda ja... järelikult korrutame.

Inimese käsi ongi üks esimestest arvutusmasinatest!

Veel mõningaid omadusi. Toome veel mõned huvitavad ja edaspidi kasulikud arvu üheksa omadused.

1. Üheksaga jagub alati:

a) mistahes arvu ja ta numbrite summa vahe;

b) ühesugustest, kuid erinevatele kohtadele paigutatud numbritest koostatud arvude vahe;

c) ühesuguste ristsummadega arvude vahe.

2. Kui mingitest numbritest on moodustatud arvud, mis erinevad vaid numbrite järjekorra poolest, siis neid üheksaga jagades me saame iga arvu korral sama jäägi.

Selle jäägi leidmiseks tarvitseb meil vaid jagada ühe nimetatud arvu ristsummat üheksaga — tekkiv jääk annabki meile vajaliku vastuse.

3. Kui nimetada arvu ristsumma üheksaga jagamisel tekkivat jääki «liiaks», siis:

a) arvude summa või vahe liig võrdub vastavalt nende arvude liigade summa või vahe liiaga.

b) kahe arvu korrutise liig võrdub nende arvude liigade korrutise liiaga.

Neid omadusi te võite kergesti kontrollida arvuliste

näidete abil; kui te aga olete tuttav algebraga, siis te võite nende omaduste õigsust isegi tõestada.

Iseseisva harjutusülesandena leidke analoogiline reegel kahe arvu jagatise liia jaoks.

Kui te selles peatükis toodud ülesannetest jagu saate, siis te võite paljusid neist kasutada matemaatiliste trikkidena.

210. Missugune number on maha tõmmatud?

Ülesanne 1. Laske oma sõbral kirjutada salaja paberile mõni kolme- või enamkohaline arv, jagada see üheksaga ja teatada teile jagamisel saadud jääk. Nüüd paluge, et ta kustutaks valitud arvus mistahes numbri ja jagaks saadud arvu jällegi üheksaga. Kui sõber nüüd teatab teile jagamisel tekkinud jäägi suuruse, siis te võite silmapilk öelda, millise numbri ta maha tõmbas. Seda pole järgmisi reegleid arvestades kuigi raske teha:

a) kui teine jääk on esimesest väiksem, siis esimesest jäägist teist jääki lahutades saamegi kätte mahatõmmatud numbri;

b) kui teine jääk on esimesest suurem, siis tuleb esimesele jäägile liita üheksa ja lahutada teine jääk; vahe annabki kustutatud numbri;

c) kui jäägid on võrdsed, siis on maha tõmmatud kas null või üheksa. Miks nii?

Ülesanne 2. Nüüd paluge, et te sõber mõtleks välja kaks samadest, kuid erineva asetusega numbritest koosnevat arvu ja lahutaks suuremast arvust väiksema. Ta ei pea teile teatama ei kirjutatud arve ega saadud vahet, kuid las ta tõmbab maha ühe vahe numbritest (mitte nulli) ja teatab teile vahe kõigi ülejäänud numbrite summa. Selleks et leida mahatõmmatud arvu, tarvitseb teil vaid nimetatud arvu täiendada lähima üheksaga jaguva arvuni.

Näiteks,

$$72\,105 - 25\,071 = 47\,034.$$

Kriipsutame läbi numbri 3. Ülejäänud numbrite summa on $4 + 7 + 4 = 15$. Lähim suurem üheksaga jaguv arv on 18. Kustutatud numbri leidmiseks tuleb vaid kaheksateistkümnest lahutada viisteist, vastuseks saame 3.

Miks nii?

Märkus: Ülesannet võib ülaltoodud arvu 9 omaduse põhjal veel mitmeti varieerida. Võib näiteks paluda, et arvust lahutataks ta ristsumma, saadud vahes kustutataks üks number (peale 0 ja 9) ning teie ütlete järelejäänud numbrite summa põhjal otsekohe, milline oli kustutatud number.

Ülesanne 3. Kirjutame üles mingisuguse arvu, näiteks 7146. Tõmbame selles arvus maha ühe numbri, näiteks 4. Ülejäänud arvust (millel on üks number vähem) lahutame esialgu üleskirjutatud arvu numbrite summa (18). Meie näite korral saame: 716 — 18 = 698. Tulemus paluge teatada.

Kuidas seda vahet teades saab kindlaks teha mahatõmmatud arvu?

Ülesanne 4. Kirjutage üles kaks või rohkem võrdse numbrite hulgaga arvu. Ma ise kirjutan neile juurde veel niisama palju arve ja eemaldun. Nüüd ma palun, et te kustutaksite ükskõik millise numbri peale nulli ja leiaksite ülejäänud arvude summa. Kui te mulle nüüd teatate selle summa suuruse või vähemalt summa numbrite summa, siis ma võin teile kohe öelda, millise numbri te kustutasite.

Näiteks:

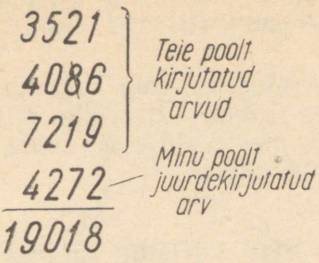
605 218	Teie poolt kirjutatud arvud
781 394	Minu poolt juurdekirjutatud arvud
1298	

Summa numbrite summa on 1 + 2 + 9 + 8 = 20. Kustutati number 7.

Millised arvud ma pean omalt poolt juurde kirjutama ja kuidas leida kustutatud arvu?

Ülesanne 5. Eelmises ülesandes soovitati juurde kirjutada niisama palju arve, kui neid üles kirjutas teie «ohver». Tegelikult piisab samade tingimuste korral üheainsa arvu juurdekirjutamisest.

Näiteks:

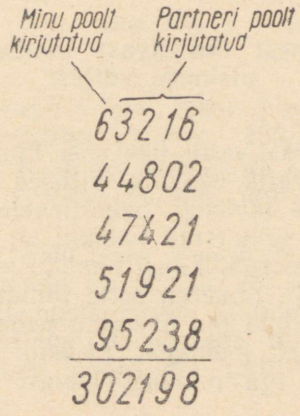


Summa numbrite summa on $1+9+1+8=19$. Kustutati number 8.

Millise arvu ma pean sel puhul juurde kirjutama ja kuidas leida kustutatud arvu?

Ülesanne 6. Sama ideed võib väljendada ka teises vormis. Paluge, et teie partner kirjutaks kõrvuti üles mõned ühekohaliste arvude tulbad, teie aga kirjutate vastavalt partneri soovile kas paremale või vasakule poole veel ühe tulba juurde (iga teie arv peab olema selline, et ta täiendaks kõrvalasetseva horisontaalrea numbrite summa mingiks üheksakordseks). Nüüd te võite julgesti teha partnerile ettepaneku, et ta kustutaks maha mistahes numbri (välja arvatud null), liidaks ülejäänud arvud mitmekohaliste arvude liitmise eeskirja põhjal kokku ja teataks teile ainult saadud summa numbrite summa. Sellest piisab teile kustutatud numbri mõistatamiseks täielikult.

Näiteks:



Summa numbrite summa on 23 (3 + 2 + 1 + 9 + 8 = = 23). Teie lahutate kahekümne seitsmest kakskümmend kolm ja ütlete partnerile, et tema poolt kustutatud number oli 4.

Huvitava täiendusena võib märkida, et terve veeru juurdekirjutamise asemel te võite piirduda ka ühe-ainsa numbri meelevaldsesse kohta juurdekirjutamisega. Kas taipate, miks?

211. Varjatud omadus

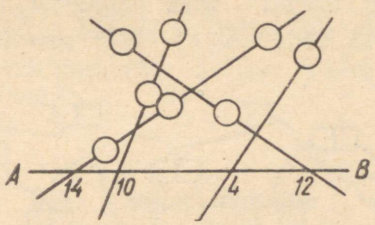
Kui keegi tahab oma sõpradele demonstreerida mahakriipsutatud numbri mõistatamist, siis ta võib sel otstarbel edukalt kasutada kergesti meeldejäävat arvu 1313. Paluge, et sõbrad kirjutaksid selle arvu üles ja lahutaksid temast ühe teie poolt antud arvu. Lahutamiseks võite esitada mistahes arvu, ühele osavõtjale ühe arvu, teisele teise arvu jne. Seejärel laske igal osavõtjal kirjutada tulemusele vasakule või paremale juurde (just kirjutada juurde, mitte liita) arv, mille ta lahutas 1313-st, kuid 100 võrra suurendatuna. Tekkinud arvus paluge kustutada ükskõik missugune number peale nulli ning ülejäänud numbrid laske endale läbisegi ette lugeda. Nende numbrite põhjal võite kergesti öelda, milline number kustutati.

Milline arvu 1313 iseärasus seoses 9 omadustega aitab teid kustutatud numbri leidmisel ja kuidas teda leida?

212. Veel mõnest huvitavast puuduvate numbrite otsimise võttest

Ülesanne 1. Ma valin üheksast numbrist 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 välja ükskõik millised kaheksa numbrit ja kirjutan need läbisegi paberilehele. Et teile mitte näidata, millised arvud ma valisin, on nad joonisel 154 asendatud ringikestega. Edasi tõmban ma meelevaldsesse kohta sirge AB ja nimetan selle lühiduse mõttes «tulemuste sirgeks». Nüüd ma ühendan paberile laialipillatud numbrid omavahel joontega, ükskõik kas sirgete või kõveratega, kuid iga numbrit läbigu ainult üks joon.

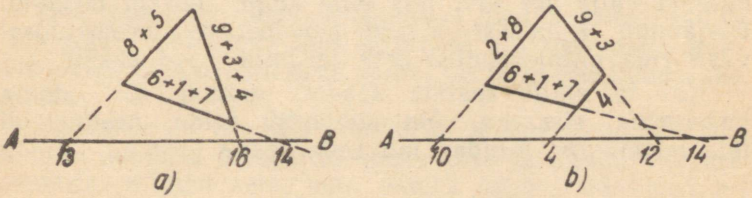
Tulemuste sirgele ma kirjutan igal joonel asetsevate numbrite summa. Teile ma näitan ainult tulemuste sirgel asetsevaid arve või teatan teile isegi ainult nende ristsumma.



Joon. 154. Milline number jäi välja?

Nii näiteks on joonisel 154 kujutatud «tulemuste sirgel» asetsevate arvude ristsumma: $1+4+1+4+1+2=13$. Ainult seda ristsummat teades määrake, milline number jäi algul valimata.

Märkus. Selle asemel et valitud numbreid juhuslikul viisil mööda paberit laiali pilduda, võin ma neid

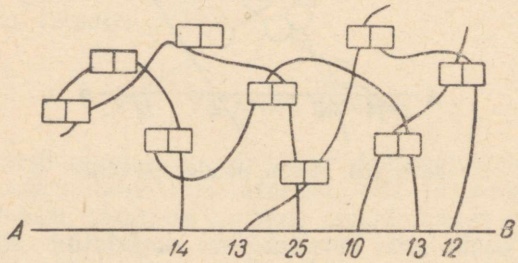


Joon. 155.

paigutada ka meelevaldsel viisil piki varem valmisjoonistatud kolmnurga (joon. 155, *a*), nelinurga (joon. 155, *b*) või mistahes hulknurga külgi ja tulemuste sirgele kirjutada vastava kujundi igal küljel asetsevate numbrite summa.

Ülesanne 2. Nüüd ma paigutan paberile täiesti juhuslikul viisil arvud 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Tõmban jälle «tulemuste sirge» ja ühendan kõik numbrid peale ühe väljavalitu joontega nii, et iga number asetseks vaid ühel joonel. Et mitte näidata, millise

arvu ma valisin, on joonisel 156 numbrid asendatud kaheruuduliste ristkülikutega. Ma kirjutan tulemuste sirgele välja igal joonel asuvate numbrite summa ja palun teid nende summade põhjal jällegi määrata arvestamata jäänud numbrit. Kes eelmisest ülesandest aru sai, sellele pole see kuigi raske töö.



Joon. 156. Millise numbri ma valisin?

Ülesanne 3. Kirjutage üles kaheksa esimest järjestikust täisarvu ühest kuni kaheksani ja valige nende hulgast välja see arv, mis teile kõige rohkem meeldib. Ülejäänud seitsmest arvust moodustage meelevaldsel viisil rida mitmekohalisi arve ja liitke need kokku.

Kui te mulle teatate saadud summa või summa ristsumma, siis ma võin silmapilk öelda, milline oli teie lemmikarv. Kuidas ma seda tean?

213. Leidke tulemuse ühe numbri põhjal kolm ülejäänut

Kahest ühesugusest numbrist koosnevat kahekohalist arvu korrutati 99-ga. On ilmne, et korrutiseks peab tulema neljakohaline arv. Kahjuks on tulemusest säilinud vaid kolmas number. Kuidas seda numbrit teades saab tulemust täielikult taastada?

Oletame, et säilinud number oli 5. Missugune oli kogu tulemus?

214. Väike trikk

Kirjutage minu eest salajas üles mingi kolmekohaline arv erinevate äärmiste numbritega (näiteks 621) ja pöörake see arv ümber (126). Nüüd lahutage suuremast arvust väiksem (621 — 126 = 495) ja ütelge mulle vahe viimane number (5). Sellest piisab mulle kogu tulemuse leidmiseks.

Kuidas nii?

215. Vanuse leidmine

Kui te paigutate *A* vanust väljendava arvu numbrid ümber, siis te saate *B* vanuse. *A* ja *B* vanuste vahe annab kahekordse *C* vanuse. *B* aga on *C*-st 10 korda vanem.

Leidke igaühe vanus.

216. Milles peitub saladus?

Üks külaline meie seltskonnas teatas kord, et ta võib pikalt mõtlemata üles kirjutada kuitahes palju paaritu hulga numbritega arve, millel on järgmine imepärane omadus:

kui selle arvu kõik numbrid kokku liita, saadud summa numbrid omakorda kokku liita ja niiviisi korrata numbrite liitmist seni, kuni lõpuks saame ühekohalise arvu, siis see on kindlasti võrdne algul üleskirjutatud arvu keskmise numbriga.

Ja tõepoolest, ta lausa uputas meid selliste arvudega. Nende hulgas oli kolmekohalisi (näiteks 435), viiekohalisi (näiteks 46853) ja isegi kolmeteistkümnekohalisi (näiteks 1207941800554). Ta kirjutas üles arve, mis sisaldasid selliseid numbreid, mida meie nõudsime... Ja iga kord säilis see numbrite omadus.

Kontrollime seda kas või toodud näidete puhul.

$$4+3+5=12;\ 1+2=3;$$
$$4+6+8+5+3=26;\ 2+6=8;$$
$$1+2+7+9+4+1+8+5+5+4=46;\ 4+6=10;$$
$$1+0=1.$$

Tõepoolest, numbrite lõppsumma võrdub iga kord arvu keskmise numbriga.

Meie külalise originaalne «anne» avaldas meile küllalt suurt mõju. Ta ei saanud ju pähe õppida sellist suurte arvude laviini!

Me proovisime ise kah hea õnne peale mõnda sellist arvu välja kirjutada, kuid meie arvudel polnud peaaegu kunagi sellist toredat omadust.

Milles peitus meie külalise arvude saladus?

VIII PEATÜKK

ALGEBRAGA JA ILMA SELLETA

Koos matemaatika kui teaduse arenemisega täiustus ka ülesannete lahendamise kunst. Puhtaritmeetilised lahendusvõtted pidid tähtsümboolika kasutamiselevõtmise arenguga pikkamööda alla vanduma algebrale, eriti just tema võrrandite aparaadile. Tundmatute arvude tähistamine tähtedega koos järgneva tundmatute ja tuntud arvude vaheliste seoste kindlaksmääramisega, s. t. võrrandite koostamine, osutus erinevatüübiliste ülesannete lahendamisel võimsaks, üldarusaadavaks ja standardseks meetodiks.

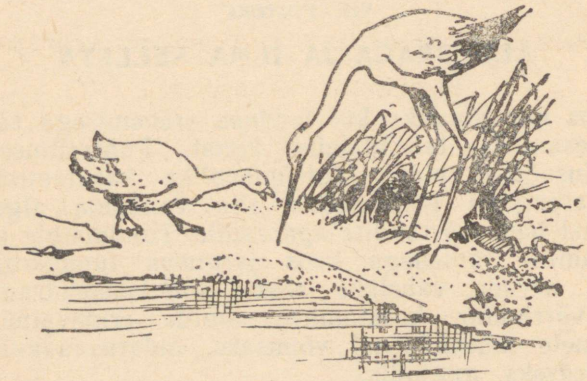
Ülesandeid lahendades me arendame alati järjekindlat loogilist mõttelõnga, kuid püüame siiski läbi saada võimalikult lühima mõttekäiguga. Mõnel juhul on mugavam ja lihtsam minna «tundmatu poolt tuntu» poole, lõpetades mõttekäigu kas ühe või mitme võrrandi koostamisega (algebraline tee). Seda teed mööda minnes tuleb tundmatu valik teostada iga antud ülesande konkreetseid iseärasusi arvestades. Et rasketest ülesannetest edukalt jagu saada, tuleb kindlasti omandada mõttekäikude arendamise algebraline tehnika. Teistel juhtudel on just vastupidiselt loomulikum minna «tuntu poolt tundmatu» poole, seejuures iga lahenduse etappi konkreetselt tõlgendades (aritmeetiline tee).

Mõlemad lahendusmeetodid otsekui täiendaksid teineteist; kummagi meetodi juures kohtame teravmeelseid ja elegantseid ülesannete lahendamise näiteid.

Nii näiteks rändab juba vähemalt pool sajandit

rahvasuus järgmine ülesanne, mida vahel kohtab ka kooliseinte vahel.

Kuidas hani ja kurg ülesannet lahendasid. Üks hani kohtas kord hanekarja ja kaagutas tervituseks: «Olge tervitatud, sada hane!» Hanekarja juht, vana ja väärikas hani aga vastas talle: «Ei, kullake, meid pole sada hane! Aga kui meid oleks niipalju, kui meid on, ja veel niipalju, ja veel pool niipaljust, ja veel veerand niipaljust, ning kui sina, hani, oleksid ka meiega, siis alles oleks meid sada, aga nüüd... Noh, eks sa rehkenda ise, kui palju meid on.»



Joon. 157. «Pane nüüd hoolega tähele ...»

Üksik hani lendas edasi ja jäi mõttesse. Tõepoolest, kui palju neid hanesid oli, keda ta kohtas? Mõtles nii ja mõtles naa, kuid ühestki otsast ei jõudnud lahendusele lähemale. Äkki aga märkas hani tiigi kaldal uhkelt edasi-tagasi kõndivat ja konni otsivat punajalgset kurge. Kurel on teiste lindude hulgas matemaatiku kuulsus — ta võib tundide kaupa liikumatult ühel jalal seista ja aina mõtelda — küllap ta vist lahendab ülesandeid. Hani rõõmustas, lendas tiigile, ujus kure juurde ja jutustas, kuidas ta oma kaasvendi kohtas, kuidas juht-hani talle ülesande andis ja kuidas ta sellest ülesandest kuidagi jagu ei saa.

«Hm!...» köhatas kurg. «Noh, eks me siis proovi seda ülesannet lahendada. Sa ole ainult õige tähelepanelik ja püüa aru saada! Kuuled?»

«Kuulen ja püüan!» vastas hani.

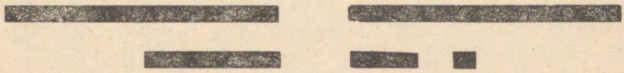
«Noh, olgu siis. Kuidas sulle öeldi? Kui hanedele liita niipalju, kui neid on, veel pool sellest, veel veerand sellest ja kui sind, hane, kah veel sinna juurde panna, siis saaks kokku sada? Kas oli nii?»

«Täpselt nii,» vastas hani.

«Pane nüüd hoolega tähele, mis ma siia kaldaliivale joonistan,» ütles kurg.

Kurg kõverdas kaela ja tõmbas oma nokaga liivale pika kriipsu, selle kõrvale veel ühe samasuguse, siis poole sellest, siis veerandi sellest ja siis veel ühe päris lühikese kriipsu, peaaegu punkti.

Liivale jäi niisugune pilt:



Hani ujus kalda äärde, ronis taarudes liivale ja vaatas joonist, kuid ei saanud mõhkugi aru.

«Kas said aru?» küsis kurg.

«Veel ei saanud,» vastas hani masendatult.

«Oh sind! Noh, vaata ometi, sulle öeldi ju, et kari, veelkord kari, pool karja, veerand karja ja veel sina, hani — nii ma siia liivale joonistasingi, kriips, veel kord kriips, pool kriipsu, veerand kriipsu ja veel väikese kriipsukese, see tähendab sinu. Kas said aru?»

«Sain küll!» rõõmustas hani.

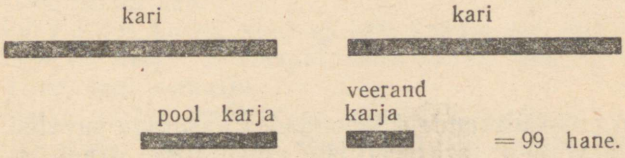
«Kui sellele hanekarjale lisada veel üks kari ja pool karja, veerand karja ja ka sind, hane, mitu hane siis kokku on?»

«Sada hane!»

«Aga kui palju neid ilma sinuta jääb?»

«Üheksakümmend üheksa.»

«Hästi! Kustutame nüüd jooniselt selle punkti, mis sind kujutas, ja märgime, et järele jäi 99 hane.» Kurg tegi oma nokaga liivale niisuguse joonise:



«Nüüd aga ütle mulle,» jätkas kurg, «mitu veerandit on pooles karjas?»

Hani jäi mõttesse, vaatas liivale tõmmatud kriipse ja ütles lõpuks:

«Poolt karja kujutav kriips on kaks korda nii pikk, kui veerandit karja kujutav kriips, see tähendab, et pooles on kaks veerandit.»

«Tubli poiss!» kiitis kurg hane. «Noh, aga mitu veerandit on terves karjas?»

«Loomulikult neli!» vastas hani.

«Nii! Kui nüüd üks kari teha veeranditeks, siis veel kari, siis pool karja ja siis veerand karja, palju siis kokku veerandeid saab?»

Hani mõtles ja vastas:

«Kari, see on niisama hea kui neli veerandit karja; veel üks kari, see on neli veerandit, kokku on 8 veerandit; pooles karjas on 2 veerandit, kokku on 10 veerandit; veel veerand karja, see teeb kokku 11 veerandit karja. Ja see kõik on 99 hane.»

«Nii!» kinnitas kurg jälle. «Ütle nüüd õige, mida sa siis lõppude lõpuks kätte said?»

Hani vastas: «Ma sain kätte, et üheteistkümnes minu poolt kohatud karja veerandis on kokku 99 hane.»

«Mitu hane siis ühes veerandis on?»

Hani jagas 99 üheteistkümnega ja vastas:

«Veerandis karjas on üheksa hane.»

«Noh, aga palju siis terves karjas on?»

«Terves karjas on 4 veerandit... Ma kohtasin 36 hane!» hüüatas hani rõõmsalt.

«Noh, lõpuks ometi on käes,» lausus kurg tähtsalt. «Ja ise sa seda tühja asja kätte ei saanud!... Oh, sind... hane!»

Seda ülesannet saab õige lühidalt üles kirjutada ja lahendada, kui appi võtta algebra. Tähistame veerand karja tähega x, terve kari on siis $4x$ ja pool karja on $2x$. Tingimuse kohaselt: $4x + 4x + 2x + x = 99$ ehk $11x = 99$, kust $x = 99 : 11 = 9$ ja $4x = 4 \cdot 9 = 36$. Hanekarjas oli seega 36 hane.

*

Järgmisi ülesandeid lahendades kasutage suvalisi teile tuntud võtteid: aritmeetilisi, algebralisi, graafilisi jne. Täiendage raamatu lõpus toodud vastuseid omapoolsete arutluste ja lahendustega.

217. Vastastikune abi

Esimestel aastatel pärast Suurt Isamaasõda ei jätkunud põllutööde kõrghooajal mõnes masina-traktorijaamas kolhooside teenindamiseks ühtesid või teisi põllutöömasinaid. Seepärast varustasid masina-traktorijaamad üksteist vastastikku vajalike masinate ja riistadega.

Kord andis üks kolmest lähestikku asuvast masina-traktorijaamast teisele ja kolmandale nii palju igasuguseid põllutöömasinaid, kui neid juba oli kummaski masina-traktorijaamas.

Mõne aja pärast andis teine masina-traktorijaam omakorda esimese ja kolmanda masina-traktorijaama käsutusse nii palju masinaid, kui neid sel ajal kummaski oli. Veidi enne töödehooaja lõppu andis ka kolmas masina-traktorijaam esimesele ja teisele nii palju masinaid, kui neid oli sel ajal kummaski. Pärast seda oli igas masina-traktorijaamas 24 masinat.

Mitu põllutöömasinat oli igas masina-traktorijaamas töödehooaja alguseks?

218. Laiskvorst ja kurat

Ühel heal päeval sigines töökate inimeste hulka Laiskvorst. Õppida ta ei viitsi, töö juures ta viilib niipalju kui vähegi võimalik, kuid raha ta armastab ja on sellele üsna maias. Ta ei taha aga kuidagi aru saada, et ainult see raha omab väärtust, mis on ausa tööga teenitud.

Laiskvorst lonkis kord tegevuseta ringi ja ohkis: «Oh seda mu kibedat saatust küll! Keegi ei taha mind enam tuttavakski pidada. Muudkui aga räägivad: «Laiskvorste pole meil tarvis. Sa ei tee ise midagi ega lase ka meil tööd teha. Käi põrgu!» Suudab siis mõni kurat mulle head nõu anda, kuidas rikkaks saada!?»

Vaevalt jõudis Laiskvorst niiviisi mõtelda, kui juba kurat seisiski ta ees.

«Noh,» ütles kurat, «kui sa just tahad, siis ma aitan sind. Töö on kerge ja rikkaks saad sa ka. Kas sa näed seda silda seal eemal?»

«Näen,» vastas pisut araks löönud Laiskvorst.

«Noh, mine siis mööda seda silda jõe teisele kaldale ja niipea, kui sa sinna jõuad, ongi sul taskus kaks korda rohkem raha kui enne. Ja niiviisi iga kord — niipea, kui

sa lähed üle silla, on sul raha kaks korda rohkem kui enne.»

«Kas tõesti?» rõõmustas Laiskvorst.

«Ausõna!» kinnitas kurat. «Mul on ainult üks tingimus. Selle eest, et ma sulle niisuguse heateo tegin, pead sa üle silla minnes mulle iga kord andma 24 kopikat.»

«Noh, mis siis ikka,» nõustus Laiskvorst. «Kui raha iga korraga kahekordistub, miks siis sulle neid kopikaid keelata. Minu pärast võib peale hakata.»

Laiskvorst läks prooviks korra üle silla, luges oma raha üle, ja ennäe imet — raha oli tõesti poole rohkem kui enne. Ta viskas kuradile 24 kopikat ja läks teist korda üle silla. Raha oli jälle kaks korda rohkem kui enne. Laiskvorst luges kuradile 24 kopikat peo peale ja astus kolmandat korda üle silla. Raha hulk muidugi kahekordistus, kuid oh õnnetust, seda oli nüüd täpselt 24 kopikat, seega parajasti just nii palju, et jätkus kuradile võla tasumiseks.

Kurat kihistas õelat naeru ja kadus Laiskvorsti silmist.

Laiskvorst jäi sedamoodi oma viimastest rahadest ilma. Nagu näha, ei tohi alati võõrast nõuannet uskuda, tuleb ise kah üht-teist osata!

Kui palju oli Laskvorstil alguses raha?

219. Nutikas poisike

Kolmele vennale anti 24 õuna, kusjuures igaüks neist pidi saama niimitu õuna, kui vana ta oli kolme aasta eest. Kõige noorem vend tegi vanematele vendadele järgmise huvitava vahetusettepaneku.

«Ma jätan endale ainult pooled õunad alles, ülejäänud ma jaotan teie vahel võrdselt ära. Seejärel las keskmine vend jagab oma pooled õunad samuti minu ja vanima venna vahel ära ja lõpuks las vanim vend jagab samuti oma pooled õunad võrdselt minu ja keskmise venna vahel.»

Vennad ei aimanud noorima venna ettepanekus mingit püünist ja jäid selle vahetusega nõusse.

Peale vahetuste lõppemist selgus aga, et ... kõigil oli ühepalju õunu.

Kui vanad olid vennad?

220. Jahimehed

Kolm jahimeest viibisid mitu päeva järjest taigas jahil.

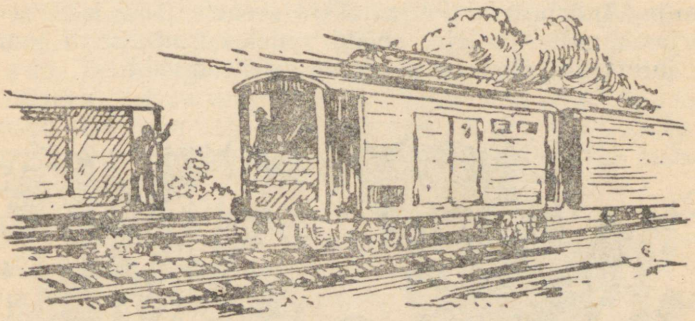
Viimase jahipäeva hommikul juhtus aga äpardus: väikese jõe koolme läbimisel said kahe jahimehe padrunitaskud märjaks. Osa padruneid muutus kasutamiskõlbmatuks ning kolmel sõbral tuli ülejäänud laskemoon võrdselt omavahel ära jagada.

Pärast seda, kui iga jahimees laskis neli pauku, jäi kolmele jahimehele kokku niipalju padruneid, kuipalju neid oli igaühel pärast jagamist.

Mitu tarvitamiskõlblikku padrunit oli jahimeeste käsutuses jagamise momendil?

221. Kohtuvad rongid

Kaks kahesaja viiekümne meetri pikkust kaubarongi lähenevad naaberteedel teineteisele võrdse kiirusega



Joon. 158. Konduktorite kohtumine.

45 km/t. Mitu sekundit pärast vedurijuhte kohtuvad viimastes vagunites asunud konduktorid?

222. Veera kirjutab käsikirja ümber

Ema andis Veerale kirjutusmasinal ümberlöömiseks ühe käsikirja.

«Ma kirjutan iga päev keskmiselt 20 lehekülge,» otsus-

tas Veera. Ta oli aga algul laisavõitu ja kirjutas poole käsikirjast ümber kiirusega kümme lehekülge päevas. Teise poole käsikirjast kirjutas ta ümber kiirusega 30 lehekülge päevas.

«Noh, näe, keskmiselt tuligi 20 lehekülge päevas,» järeldas Veera.

«See ei ole õige,» ütles ema.

«Kuidas ei ole õige? $10 + 30 = 40$; $40 : 2 = 20$. Käsikirja esimese poole juures ma jäin iga päev 10 lehekülge võlgu, teist poolt aga kirjutasin see-eest iga päev 10 lehekülge rohkem.»

«Seda küll, aga sa kirjutasid keskmiselt siiski vähem kui 20 lehekülge päevas,» jäi ema oma arvamuse juurde kindlaks. «Sa mõtle õige selle asja üle hoolega järele.»

Kas Veera põhjendus oli veenev? Mida näitavad teie arvutused?

223. Lugu seentega

Viis pioneerilaagris puhkavat sõpra — Marusja, Kolja, Vanja, Andrjuša ja Petja läksid seenele. Tõsi küll, seeni korjas ainult Marusja, poisid vedelesid niisamuti murul ja jutustasid üksteisele igasuguseid lugusid.



Joon. 159. Marusja jagas kõik oma seened poistele.

Tulemuseks oli see, et kui laagrisse minema hakati, siis poiste korvides haigutas tühjus. Marusja korvis oli aga 45 seent.

«Poisid, teil on tühjade korvidega ju näotu laagrisse minna,» haletses Marusja ja puistas kõik oma seened poiste korvidesse. Tagasiteel leidis Kolja veel kaks seent, Andrjuša aga isegi kahekordistas oma korvis olnud seente hulga.

Vanja ja Petja hullasid kogu tee ja kaotasid osa oma seentest. Vanjal pudenes korvist kaks seent, Petjal aga koguni pool sellest, mis ta Marusja käest sai.

Kõige hämmastavam oli aga see, et kui laagris hakati seeni üle lugema, siis selgus, et kõigil poistel oli neid ühepalju. Kui seenelised oma seiklustest pajatasid, siis tärkas nii mõnelgi matemaatikahuvilisel küsimus, kas nendest andmetest on küllalt, et öelda, mitu seent iga poiss Marusja käest sai. Mida teie arvate?

224. Kes jõuab varem tagasi?

Kaks sõudjat korraldasid kord treeningul väikese võidusõidu. Üks neist sõitis mööda jõge, nii päri- kui vastuvoolu. Teine aga läbis täpselt sama vahemaa jõe kõrval asetsevas seisva veega järves. Oletame, et sõudjate pingutused olid kogu aeg täiesti võrdsed. Kumb neist jõuab sel juhul lähtekohta enne tagasi? Ümberpööramiseks kulunud aega arvesse ei võeta.

Märkus. Umbes nelikümmend aastat tagasi kerkis taoline probleem üles ka lennuasjanduses. Nimelt organiseeriti tolleaegsed lennuvõistlused tavaliselt nii, et lendurid pidid lendama ümber nelja tulbaga tähistatud suure väljaku, kusjuures pöörded tuli teha väljaspool poste.

Kuna võistlused kestsid kaua, siis aja jooksul tuuletingimused muutusid ning kerkis loomulik küsimus, kas kõigil osavõtjatel on võrdsed võimalused?

225. Ujuja ja kaabu

Oletame, et keegi hüppas vette paadist, mida kandis jõevool, ujus veidi aega vastu voolu, pöördus siis ümber ja püüdis paadi jälle kinni.

Millele ta kulutas rohkem aega: kas vastu voolu ujumisele või paadi kinnipüüdmisele? Või olid mõlemad ajad võrdsed?

Seejuures eeldatakse, et ujuja jõupingutused olid mõlemal juhul võrdsed.

Milline on teie esimene «tunde järgi» antud vastus ja kas hilisem arutlus kinnitab seda või mitte?

Õige vastus on niisugune: ujujal kulus paadi püüdmiseks just niisama palju aega kui temast eemaldumiseks. Tõepoolest, veevool kannab nii ujujat kui ka paati võrdse kiirusega pärivett, tähendab voolus ei mõjuta ujuja ja paadi vahelist kaugust. Siit järeldub, et ujujal kulub paadini ujumiseks niisama palju aega, kui enne kulus paadist eemaldumiseks.

*

Kujutage nüüd endale ette, et üks sportlane hüppas üle jõe viivalt sillalt vette ja hakkas vastu voolu ujuma. Samal hetkel kukkus vette ka ühe pealtvaataja kaabu ning kandus pärivoolu alla. Ujuja hakkas 10 minuti pärast tagasi ujuma. Kui ta jõudis sillani, siis paluti teda, et ta ujuks peatumata edasi ja püüaks kübara kinni. Ujuja sai kübara kätte parajasti teise silla all, mis oli esimesest sillast ühe kilomeetri kaugusel. Ujuja kiirus pole teada, kuid igatahes ta ujus kogu aeg ühtlaselt pingutades. Nende andmete põhjal te võite leida selle jõe voolu kiiruse. Kui te oma lahendust võrdlete «Lahenduste ja vastuste» osas tooduga, siis pöörake kindlasti tähelepanu seal esitatud teisele lahendusviisile.

226. Kaks mootorlaeva

Kaks õppelaeva väljusid üheaegselt sadamast. Mootorlaev «Stepan Razin» suundus pärivett, mootorlaev «Timirjazev» aga vastuvett. Nende omakiirused olid võrdsed.* Väljumishetkel kukkus mootorlaevalt «Stepan Razin» vette päästerõngas, mis ujus pärivett. Tunni aja pärast said mõlemad mootorlaevad raadio teel käsu muuta kurss vastupidiseks. Kas «Stepan Razini» meeskond saab päästerõnga kätte enne, kui mõlemad laevad kohtuvad?

* «Omakiiruseks» nimetatakse kiirust, millega laev sõidaks sama energiakulu juures seisvas vees.

227. Kontrollige oma taibukust!

Kaks liugpaati lahkusid üheaegselt suure järve vastaskallastelt, sõitsid üle järve ja pöördusid viivitamatult tagasi. Kummagi liugpaadi kiirus oli seejuures püsiv. Liugpaat «*M*» startis kaldalt «*A*», liugpaat «*N*» aga kaldalt «*B*». Nad kohtusid esimesel korral 500 meetri kaugusel kaldast «*A*»; tagasiteel kohtusid nad 300 meetri kaugusel kaldast «*B*».

Leidke nende andmete põhjal järve pikkus ja liugpaatide kiiruste suhe. Muide, ülesanne on lahendatav «peast» ilma keerukate arvutusteta.

228. Ootamatu probleem

Kolhoosi puuviljaaia istutamisel lõid aktiivselt kaasa ka pioneerid, kusjuures pioneerisalgad võistlesid omavahel.

Kõik töötasid väga püüdlikult, ainult Pavlik Morozovi nimelises pioneerisalgas pidi asi peaaegu viltu minema. Vitja Vetlugin teatas, et tema brigaad istutab poole salga ülejäänud pioneeride poolt istutatud puudest. Kirjuša Tšernov aga teatas kõige suurema brigaadi nimel, et nad istutavad niipalju puid kui kõik salga ülejäänud pioneerid (sealhulgas ka Vitja Vetlugini salk).

Pioneerid ei olnud tööl kõik korraga, vaid kordamööda. Vitja ja Kirjuša brigaadid pidid mõlemad töötama viimases vahetuses. Kõik nende salga ülejäänud brigaadid täitsid endi ülesanded edukalt. Nad istutasid kokku 40 puud. Kui töökord jõudis Vitja ja Kirjuša brigaadide kätte, siis tekkis ootamatu probleem, millele keegi varem ei mõelnud, ehkki seda võis ette näha. Nimelt pidi Vitja brigaad oma lubaduse täitmiseks teadma, mitu puud istutavad Kirjuša poisid, Kirjuša pidi aga omakorda teadma, mitu puud istutab Vitja brigaad. Nii nad siis seisid ja ootasid, et teine brigaad peale hakkaks. Olukord näis juba lootusetuna, kuni äkki vanempioneerijuht näitas üsna lihtsa ja loogilise lahenduse.

Millise?

229. Mitu korda suurem?

Kui kahest antud arvust lahutada pool väiksemat arvu, siis suurema arvu jääk on kolm korda suurem väiksema arvu jäägist.

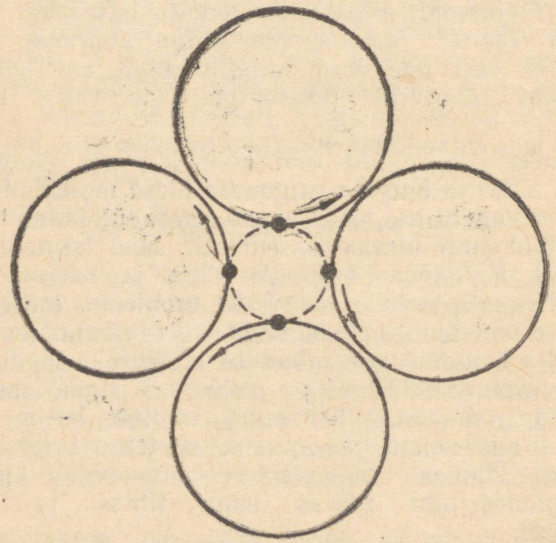
Mitu korda on suurem arv väiksemast arvust suurem?

230. Mootorlaev ja vesilennuk

Mootorlaev suundus pikale merereisile. Kui ta oli jõudnud kaldast 180 miili kaugusele, lendas talle järele vesilennuk erakorralise postisaadetisega. Vesilennuki kiirus on 10 korda suurem laeva kiirusest. Kui kaugel kaldast jõuab lennuk laevale järele?

231. Jalgratturid areenil

Areeniks on suur ühetasane väljak nelja ringikujulise rajaga. Neli jalgratturit töötavad siin välja oma ühist tsirkusenumbrit. Iga jalgrattur sõidab omal rajal (joon. 160). Liikumist alustavad nad üheaegselt, kusjuures iga-



Joon. 160. Iga jalgrattur sõidab omal rajal.

üks stardib sellest raja punktist, mis on areeni tsentrile kõige lähemal. Iga jalgratturi kiirus on arvestatud matemaatilise täpsusega ja kokkulepitud tinglikes ühikutes võib seda väljendada järgmiste arvudega:

$$V_1 = 6 \frac{\text{ühikut}}{\text{tunnis}},$$

$$V_2 = 9 \frac{\text{ühikut}}{\text{tunnis}},$$

$$V_3 = 12 \frac{\text{ühikut}}{\text{tunnis}},$$

$$V_4 = 15 \frac{\text{ühikut}}{\text{tunnis}}.$$

Iga ringi pikkus moodustab ühe kolmandiku kokkulepitud ühikust. Jalgratturite esinemine kestab 20 minutit. Mitu korda jõuavad jalgratturid selle 20 minuti jooksul üheaegselt läbida stardipunkti?

232. Treial Bõkovi töökiirus

Kui Stalini preemia laureaat kiirtreial P. Bõkov tõstis malmi lõikamiskiirust 1690 meetri võrra minutis, siis detaili töötlemise aeg lühenes 35 minutilt $2\frac{1}{2}$ minutile. Millise lõikamiskiiruse ta saavutas?

233. Jack Londoni reis

Ühes Jack Londoni jutustuses kirjeldatakse, kuidas ta kord kelguga, mille ette oli rakendatud 5 koera, kiirustas Squagway'st oma laagrisse, kus asus ta surev seltsimees.

Selles jutustuses on omapäraseid üksikasju, mis võimaldavad temast luua huvitava ülesande.

Esimese ööpäeva jooksul liikus kelk Jack Londoni poolt planeeritud kiirusega. Ööpäeva möödudes aga kiskusid kaks koera endi rakmed katki ja jooksid koos kelku jälitava hundikarjaga minema.

Londonil tuli teekonda jätkata kolme koeraga, kes tõmbasid kelku kiirusega, mis moodustas kolm viiendikku esialgsest kiirusest. Viivituse tagajärjel jõudis London sihtkohta 2 päeva pärast planeeritud tähtaega.

Jutustuse autor lisab veel: «Kui need kaks ärajooksnud koera oleksid läbinud rakmetes veel 150 miili, siis ma oleksin hilinenud ainult ühe päeva.»

Tekib küsimus: kui suur on vahemaa Squagway ja laagri vahel? Jutustuses pole selle kohta küll vähimatki märget, kuid toodud andmeist piisab vahemaa määramiseks täielikult.

234. Ebaõnnestunud analoogiatest võivad tekkida vead

Mitmed järeldused ja isegi terved avastused tehakse *analoogia põhjal*, mis lähtub oletusest, et kaks eset omavad teatavat ühist tunnust või omadust, kui nende esemete teised tunnused on sarnased.

Kuid paljas analoogia ei tõesta veel kõige vähematki. Ta võib meid ainult viia mõttele, mille õigsust tuleb veel kontrollida ja kinnitada.

Õige analoogia omab üsna tähtsat kohta ka matemaatikas.

On selge, et iga avastatud sarnasus matemaatilistes tehetes, reeglite kasutamises jne. kergendab ülesande lahendamist ja mõttekäikude arendamist, kuid *sarnaseid* omadusi ja tunnuseid vaadeldes ei tohi unustada ka *erinevusi* nende vahel.

Ebaõnnestunud analoogiast sünnib sageli ebaõigeid kujutlusi.

Küsime näiteks endi jutukaaslaselt: «Kui palju on 40 suurem 32-st?» Ta vastab muidugi vähimagi vaevata: «8 võrra.» «Aga kui palju on 32 väiksem 40-st?» «Loomulikult samuti 8 võrra,» vastab jutukaaslane.

«Õige. Nüüd aga ütelge, mitme protsendi võrra on 40 suurem 32-st? Muide, ärge pingutage! Ma ütlen teile seda ise. Täpselt kahekümne viie protsendi võrra. Aga mitme protsendi võrra on 32 väiksem 40-st, seda vist tuleb juba arvutada.»

«Mis siin arvutada,» katkestab mind jutukaaslane, «te ju ise just äsja ütlesite, et 40 on 32-st suurem 25 protsendi võrra, tähendab, 32 on 40-st väiksem samuti 25 protsendi võrra.»

See on väga sageli esinev eksitus, ning meil tuleb jutukaaslasele ta viga üsna põhjalikult selgitada. Vahe on mõlemal juhul tõesti 8, erinevus on aga selles, et esimesel juhul on sajaks protsendiks võetud arv 32, teisel

juhul aga arv 40. Kaheksa on neljakümnest $\frac{1}{5}$ ehk 20 protsenti. Tähendab, 40 on 32-st suurem 25 protsendi võrra, aga 32 on 40-st väiksem 20 protsendi võrra.

Jutukaaslase viga tekkis valest analoogiast.

Esitage oma tuttavaile niisuguseid ülesandeid:

Ülesanne 1. Oletame, et teie kuupalk suurenes 30 protsenti. Mitme protsendi võrra kasvas teie ostuvõime?

Ülesanne 2. Jäägu teie kuupalk endiseks, kuid alanegu kaupade hinnad 30 protsendi võrra. Kui palju kasvab teie ostuvõime sel juhul?

Ülesanne 3. Antikvariaat müüs raamatu 10 protsendi võrra odavamalt, kui esialgu oli planeeritud, kuid sai sellele vaatamata ikka veel 8 protsenti kasumit. Mitu protsenti kasumit lootis kauplus selle raamatu müügist esialgu saada?

Ülesanne 4. Kui tööline lühendas detaili töötlemise aega p protsendi võrra, mitme protsendi võrra kasvas siis ta tööviljakus?

Ebaõigeid vastuseid te kuulete kindlasti päris tihti, kuid ... kõigepealt kontrollige iseennast!

235. Juriidiline kaasus

Muistsed roomlased ei jätnud matemaatikasse peaaegu mingeid jälgi. Õigusteaduse vallas on nad rohkem tuntud. Säilinud muistse Rooma matemaatilised teosed on peaasjalikult praktilise, utilitaarse iseloomuga.

Üheks aritmeetiliste ülesannete allikmaterjaliks oli rooma pärimisõigus. Toome siinkohal ühe vana, kuid huvitava ülesande .

Üks mees suri ning jättis oma raseda naise jaoks maha testamendi järgmiste tingimustega: kui sünnib poeg, siis tuleb $\frac{2}{3}$ varandusest anda pojale ja $\frac{1}{3}$ jätta emale. Kui aga sünnib tütar, siis saab ema varandusest $\frac{2}{3}$ ja tütar $\frac{1}{3}$.

Naine aga sünnitas kaksikud — poisi ja tüdruku. Seda juhtu ei olnud testamendiga ette nähtud.

Kuidas jaotada varandus kolme pärija vahel nii, et testamendi tingimused oleksid parimini rahuldatud?

Selle ülesande matemaatiline lahendus sõltub pärandaja tahte juriidilisest tõlgendamisest. Rooma jurist Salvianus Julianus andis ühe selle ülesande võimalikest

juriidilistest tõlgendustest. Ta lahendus on toodud vastuste osas, kuid teie ärge kiirustage vastuse vaatamisega. Mõtelge, vaielge omavahel, esitage oma lahendus!

236. Paaris- ja kolmiksammudega

Ma otsustasin sammude abil kindlaks määrata oma kodu ja sõbra elukoha vahelise kauguse. Selleks ma astusin võimalikult ühtlase sammuga ja lugesin pool teed samme kahekaupa, pool teed aga kolmekaupa, kusjuures paarissamme sai 250 võrra rohkem kui kolmiksamme.

Mitu sammu on minu majast sõbra majani?

237. Kes sõitis hobusega?

Kaks kodanikku — üks hobusega, teine autoga — alustasid külast üheaegselt sõitu linna poole. Üks nendest oli noor, teine juba elatanud. Mõne aja pärast selgus, et kui elatanud kodanik oleks läbinud kaks korda pikema vahemaa, siis oleks tal sõita jäänud kaks korda vähem. Kui noor oleks läbinud kaks korda väiksema vahemaa, oleks tal sõita jäänud kolm korda rohkem.

Arvake ära, kes neist sõitis hobusega?

238. Kaks mootorratturit

Kaks mootorratturit väljusid üheaegselt samast kohast lõbusõidule. Mõlemad läbisid võrdse vahemaa ning jõudsid koju ühel ja samal ajal.

Teel mootorratturid puhkasid. Seejuures on teada, et üks neist sõitis 2 korda kauem, kui teine puhkas; teine aga sõitis kolm korda kauem, kui esimene puhkas.

Kumb mootorrattur sõitis kiiremini?

239. Missuguses lennukis oli Volodja isa?

«Ütle, isa,» pöördus Volodja küsimusega oma lendurist isa poole, «missuguses lennukis sa olid õhuparaadi ajal?»

«Sa võid selle ise kergesti välja arvutada,» vastas isa Volodjale, joonistades samal ajal paberile üheksast lennukist koosneva rivi (joon. 161).

«Mul on meeles, et minust paremal pool olnud lennukite arvu korrutis minust vasakul pool olnud lennukite arvuga andis tulemuseks kolme võrra väiksema



Joon. 161. Missuguses lennukis oli Volodja isa?

arvu sellest, milline see oleks olnud siis, kui minu lennuk oleks olnud kolme koha võrra paremal.»

Volodja mõtles veidi ja näitaski joonisel lennuki, milles oli sõitnud tema isa.

Kuidas leidis Volodja oma isa lennuki?

240. Jagage 45 osadeks

Jagage arv 45 neljaks osaks nii, et kui esimesele osale lisada 2, teisest osast lahutada 2, kolmas osa korrutada kahega ja neljandat osa jagada kahega, siis kõik tulemused oleksid võrdsed.

Kas te saate sellega hakkama?

241. Kaks küünalt

Laual põlevad 2 erineva pikkuse ja jämedusega küünalt. Pikem põleb lõpuni 3½ tunniga, lühem 5 tunniga.

Pärast kahetunnist üheaegset põlemist osutusid küünlad ühepikkusteks.

Mitu korda oli üks küünal alguses teisest lühem?

242. Imestusväärne läbinägelikkus

Kui lapsed külastavad oma vana sõpra, raamatupidajat Nikanorovit, siis annab see neile tingimata midagi nuputamiseks. Ja mis eriti huvitav: mõnikord ta ise ei teagi, missuguseid arve lapsed liitsid või lahutasid, vaatab ainult korraks tulemusele ja ütleb kohe, kellel on õige, kellel vale vastus.

«Noh,» ütleb ta, «mõtelge mingi neljakohaline arv, igaüks omaette. Mõtlesite? Nii... Nüüd tõstke esimene number arvu lõppu. Te saate niiviisi veel ühe neljakohalise arvu. Liitke nüüd mõlemad arvud kokku. Näiteks $1234 + 2341 = 3575$. Lugege nüüd oma tulemused mulle ette.»

Kolja: 8612,
Polja: 4322,
Tolja: 9867,
Olja: 13 859.

«Kõik eksisid peale Tolja.»

Lapsed kontrollisid oma arvutusi ja leidsid, et tõepoolest ainult Toljal oli õige tulemus.

Kuidas Nikanorov selle kindlaks tegi?

Ta ju üldse ei teadnud, milliseid arve lapsed liitsid!

243. «Õige aeg»

Töökotta «Õige aeg» toodi neli kella: seina-, laua-, äratus- ja käekell.

Seinakell jääb õige aja signaalist ühe tunni jooksul maha 2 minutit. Lauakell käib ühe tunni jooksul seinakellaga võrreldes 2 minutit ette. Äratuskell jääb lauakellast tunnis 2 minutit maha. Käekell käib äratuskellast ühe tunni jooksul 2 minutit ette.

Keskpäeval seati kõik kellad ajasignaali järgi õigeks. Missugust aega näitab käekell õhtul kell 19 antava õige aja signaali kõlamise hetkel?

244. Kellad

Küll on häda nende kelladega! 2. jaanuari keskpäeval seadsime Vasjaga nad õigeks. Mõne päeva pärast kontrollisime neid uuesti. Selgus, et minu kell käib natuke ette, Vasja oma aga jääb taha. «Viltukäimise» hulka ühe tunni kohta ümber arvestades selgus, et minu kell käib tunnis 1 sekundi võrra ette, Vasjal aga jääb 1½ sekundi võrra taha.

Meid hakkasid huvitama järgmised küsimused: kui me endi kellade osuteid õigeks ei sea,

1) millal siis minu ja Vasja kellad näitavad jälle sama aega,

2) millal nad jälle näitavad korraga õiget aega?

245. Mis kella ajal?

Ülesanne 1. Veidi aega pärast keskpäeva läks meister sööma. Ära minnes vaatas ta kella. Kui meister tagasi tuli, avastas ta, et minuti- ja tunniosuti olid kohad vahetanud. Mis kella ajal tuli meister tagasi?

Kui te tulete toime esimese ülesande lahendamisega, siis pole teil teist ja kolmandat ülesannet enam nii raske lahendada.

Ülesanne 2. Ma olin kodunt ära üle kahe tunni, kuid vähem kui kolm tundi. Kui ma koju tulin, siis ma märkasin, et seinakella osutid olid kohad vahetanud. Mitme minuti võrra ületas mu äraolek kahte tundi?

Ülesanne 3. Õpilane asus ülesande lahendamisele õhtupoolikul kella 4 ja 5 vahel, hetkel, mil kellaosutid asusid kohakuti. Ülesande lahendamise ta lõpetas hetkel, mil minutiosuti ja tunniosuti jõudsid ühele sirgele. Mitu minutit kulus õpilasel ülesande lahendamiseks ja mis kella ajal ta lõpetas?

246. Millal nõupidamine algas ja millal ta lõppes?

Nõupidamine algas õhtul kella kuue ja seitsme vahel ning lõppes õhtul kella üheksa ja kümne vahel.

Proovige nüüd täpselt kindlaks teha, millal koosolek algas ja millal ta lõppes. Teada on, et selle koosoleku kestel vahetasid minuti- ja tunniosuti oma kohad.

247. Seersant treenib luurajaid

Luurajate jao komandör seersant Sjomotškin kasutab iga sobivat juhust oma alluvate tähelepanelikkuse, taibukuse ja sõjakavaluse treenimiseks. Kord küsib ta ootamatult:

«Mitu tuge oli sillal, millest me täna üle läksime?»

Teinekord annab ta aga oma sõduritele mõne huvitava ülesande puhketunnil nuputamiseks.

«Võtame näiteks niisuguse olukorra,» ütleb Sjomotškin piipu popsutades. «Oletame, et kaks meie üksuse luurajat saadeti ühte ja samasse punkti. Mõlemal tuli katta võrdne maa, kuid nad kulutasid selleks erinevalt aega. Esimene luuraja kõndis esimese poole kogu ta poolt kulutatud ajast mingi kindla kiirusega. Teine luuraja läbis sama kiirusega pool teed. Teise poole oma ajast kõndis esimene luuraja konstantse, kuid muutunud kiirusega. Sama kiirusega läbis oma teise poole teed ka teine luuraja.

Kumb neist jõudis enne sihtkohta?»

Luurajad valisid terve rea arve nii teepikkuse kui ka kiiruste jaoks ning jõudsid pärast vastavaid arvutusi ikka ühele ja samale tulemusele:

esimesel luurajal kulus retkeks vähem aega kui teisel.

Need luurajad, kes võtsid ülesande lahendamiseks appi algebra, jõudsid sama tulemuseni. Sellega nad tõestasid, et sõltumatult tee pikkusest ja valitud kiirusest jõuab esimene luuraja ülesande tingimuste järgi käitudes sihtkohta enne kui teine luuraja.

Kas teie saate selle ülesande üldjuhu lahendamisega hakkama?

248. Kahe teate põhjal

Esimene teade:

«Rongil N kulus minust möödumiseks t_1 sekundit.»

Teine teade:

«Seesama rong N ületas a meetri pikkuse silla t_2 sekundiga.»

Kuidas nende kahe teate põhjal leida rongi pikkust ja kiirust (eeldusel, et rongi kiirus on konstantne).

249. Kui palju ehitati uusi jaamu?

«Tööstuse ja põllumajanduse tormilise arenguga meie maal kaasneb uute asulate ja linnade ehitamine ja järelikult ka pidev raudteedevõrgu laiendamine,» ütles N. raudtee ülem tööliste ja teenistujate üldkoosolekul.

«Ühel meie tee harul,» jätkas ta, «lõpetatakse lähemal ajal jaamahoonete ehitamine. Me peame käikulaskmiseks hoolega ette valmistuma ning ei tohi lubada, et meie töös esineks häireid.»

«Kas uued piletite komplektid on juba trükitud?» tundis huvi raudtee vanemkassiir.

«Jah, kõik vajalikud piletid on trükitud, kusjuures selleks, et reisija võiks meie raudtee igas jaamas osta pileti igasse selle raudteeharu teise jaama, tuli seoses uute jaamade avamisega trükkida 46 lisakomplekti pileteid.»

Leidke nende andmete põhjal, mitu jaama oli sellel raudteeharul enne ja kui palju ehitati uusi?

250. Valige neli sõna

AU
ODA
LIPP
MASIN
RAAMAT
TELEFON
AUTOJUHT
KANTSELEI
KIRJAPRESS
MATEMAATIKA
KERGEJÕUSTIK
TAKISTUSJOOKS
EHITUSTÖÖLISED
KVALIFIKATSIOON

Vasakul asuvas tulbas on 14 sõna, kusjuures igas järgmises sõnas on üks täht rohkem kui eelmises. Viimases sõnas «kvalifikatsioon» on 15 tähte.

Nendest neljateistkümnest sõnast valige välja neli sõna nii, et oleks täidetud kaks järgnevat võrdust:

$$a^2 = bd, \quad ad = b^2c.$$

Tähtedega a, b, c ja d on tähistatud teie poolt valitud sõnades olevate tähtede hulk (vastavalt esimeses, teises, kolmandas ja neljandas sõnas).

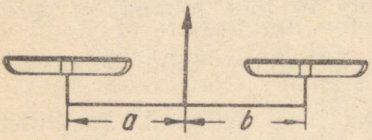
Millised need sõnad on?

251. Kas niisugune kaalumine on lubatav?

Head kausskaalud peavad olema võrdõlgsed ($a = b$, joon. 162). Hiljuti avati kolhoositurul uus toidukaupade kiosk. Kahjuks selgus, et kioskile antud kaalud ei olnud võrdõlgsed ja neid ei lubatud kasutada.

«Homseks tuuakse teile uued kaalud, täna aga kaubelge valmiskaalutud kaubaga,» ütles direktor müüjale.

Otse kauplemisaja lõpu eel müüdi viimane pakk suhkrut, kuid äkki sisenes kioskisse veel üks ostja, kes soovis osta 2 kg suhkrut. Müüja ei tahtnud ostjat tühjalt tagasi saata ning otsustas siiski kasutada valekaale. Ta tegi ostjale järgmise ettepaneku:



Joon. 162

«Ma panen kaalukausse enne tasakaalustamata vasakule poole kilose pommi ja paremale poole suhkru, pärast aga teeme vastupidi — paneme kaalupommi paremale poole ja suhkru vasakule poole. Ma mõtlen, et ega te sel viisil tüssata ei saa, sest kui teil esimesel korral on veidi alla ühe kilo suhkrut, siis teisel korral on suhkrut see-eest niisama palju üle kilogrammi.»

Kas ostja võib niisuguse kaalumisega nõustuda?

Lisaküsimused. 1) Kas te teate, et ka tasakaalustamata ja valedel kaaludel saab õigesti kaaluda ja isegi mitmel viisil?

2) Kuidas leida valedel, kuid eelnevalt tasakaalustatud kaaludel kauba õiget kaalu?

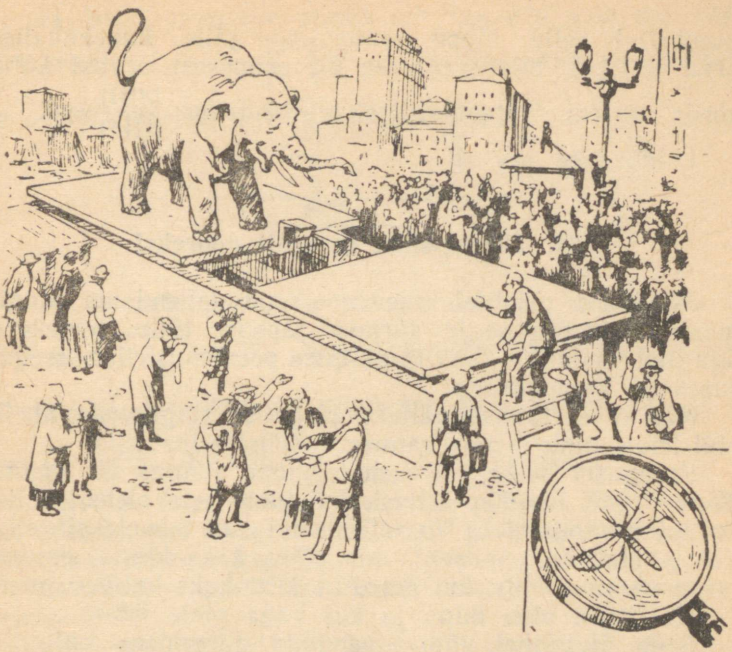
252. Sääsk ja elevant

Üks matemaatiliste meelelahutuste harrastaja jõudis kord pärast mitmesuguste algebraliste avaldiste teisendamist kummalisele järeldusele, et sääsk ja elevant kaaluvad ühepalju!

Ta mõttekäik oli järgmine.

Olgu elevandi kaal x ja sääse kaal y. Tähistame nende kaalude summa $2v$-ga:

$$x + y = 2v.$$



Joon. 163. Elevant ja sääsk kaaluvad ühepalju!

Sellest võrdusest saame kaks võrdust:

$$x - 2v = -y, \quad x = -y + 2v.$$

Korrutame kaks viimast võrdust liikmeti läbi:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy.$$

Mõlemale võrduse poolele suurust v^2 liites saame: $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$ ehk $(x - v)^2 = (y - v)^2$. Viimase võrduse mõlemast poolest ruutjuurt võttes saame: $x - v = y - v$ ehk $x = y$. Teiste sõnadega — sääsk kaalub niisama palju kui elevant!?

Selgitage, milles peitub siin «konks»!

253. Viiekohaline arv

Ma nägin kord üht huvitavat viiekohalist arvu A. Kui ma talle numbri 1 ette kirjutasin, siis ma sain loomulikult kuuekohalise arvu $[1]\,[A]$. Kirjutades aga

numbri 1 selle lõppu, sain ma jälle kuuekohalise arvu [A] [1], mis seejuures oli esimesest arvust kolm korda suurem. Matemaatiliselt väljendades: $\frac{[A][1]}{[1][A]} = 3$.

Leidke see arv A!

254. Jäägu süda igavesti nooreks!

Mõnikord meelitab ülesanne end lahendama tingimuste lakoonilisuse ja äärmise täpsuse tõttu, teinekord aga just vastupidi, oma tingimuste peenemustrilise «segasuse» ja keerukusega.

Kas te ei tahaks näiteks järgmise tingimuste ahela abil leida minu ja teie vanuse vahelist erinevust.

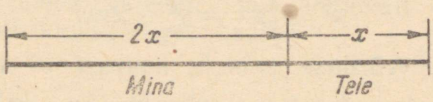
Praegusel hetkel on meie vanuste summa 86 aastat. Minu vanus on $^{15}/_{16}$ sellest, kui vana teie oleksite siis, kui minu vanus oleks $^{9}/_{16}$ sellest, kui vana teie oleksite siis, kui te elaksite vanuseni, mis oleks kaks korda suurem minu vanusest siis, kui ma olen teist kaks korda vanem.

Kui vana olen mina ja kui vana olete teie?

Seda ülesannet võib lahendada järgmisel küllaltki teravmeelsel viisil.

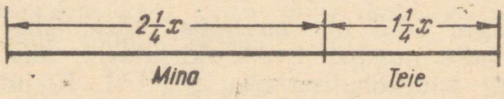
L a h e n d u s. Selle ülesande tingimuste keerisesse süvenedes võib leida järgmisi lõpust alguseni viivaid niite.

1) Mingil ajamomendil ma võin olla teist kaks korda vanem. Kui teie vanus on sel hetkel x, siis minu vanus

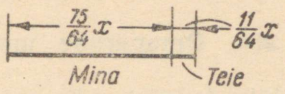


on $2x$. Siit järeldub, et ma olen teist x aasta võrra vanem ja et see vanuste vahe säilib kogu aeg.

2) Mingil teisel ajamomendil on minu vanus $^{9}/_{4}$ sellest, kui vana teie oleksite ajamomendil 1). Minu vanus oleks seega $2^{1}/_{4}$ ja teie vanus jälle x võrra väiksem, s. t. $1^{1}/_{4}x$:



3) Minu praegune vanus on $^{15}/_{16}$ teie vanusest ajamomendil 2), s. t. $\frac{15}{16} \cdot \frac{5}{4} x = \frac{75}{64} x$; teie aga olete endiselt x aastat noorem, s. t. $\frac{75}{64} x - x = \frac{11}{64} x$:



Kuna meie praegune vanuste summa on 86 aastat, siis $\frac{75}{64} x + \frac{11}{64} x = 86$. Seda võrrandit lahendades leiame, et $x = 64$. Järelikult on minu praegune vanus $\frac{75}{64} \cdot 64 = 75$ aastat. Teie vanus on $\frac{11}{64} \cdot 64 = 11$ aastat.

Niiviisi tuleb välja ülesande põhjal. Tegelikkuses pole mina veel kaugeltki nii vana ja ka teil on aastaid kindlasti rohkem kui 11.

Lahendage nüüd iseseisvalt veel üks analoogiline ülesanne.

Ma olen praegu kaks korda nii vana, kui teie olite siis, kui mina olin nii vana, kui teie olete praegu. Kui teie saate nii vanaks, kui mina olen praegu, siis on meie vanuste summa 63 aastat. Kui vanad me kumbki praegu oleme?

255. Lucas' ülesanne

Selle ülesande autoriks on möödunud sajandil elanud prantsuse matemaatik E. Lucas. Tema kaasmaalane matemaatik Legenne jutustas Lucas'st järgmise lookese, vastutades selle õigsuse eest.

Ühel teadusliku kongressi ajal toimunud hommikusöögil, millest võtnud osa palju kuulsaid matemaatikuid üsna mitmetest maadest, tõusnud korraga Lucas püsti ja teatanud, et ta tahaks kõigile kohalviibijaile esitada ühe väga raske ülesande.

Lucas' ülesanne oli järgmine.

Igal keskpäeval väljub Le Havre'i sadamast New Yorki aurik ning samal momendil väljub sama laevakompanii aurik ka New Yorgist Le Havre'i suunas.

Sõit kestab täpselt 7 ööpäeva nii ühes kui ka teises suunas. Mitut vastutulevat oma kompanii laeva kohtab täna keskpäeval Le Havre'ist väljuv aurik?

Kuidas te vastaksite Lucas' küsimusele? Mõtelge, kuidas seda ülesannet lahendada graafiliselt.

256. Omapärane matk

Kaks poissi läksid kord väikesele jalgrattamatkale. Teel purunes ühel neist jalgratas ning see tuli jätta töökotta remontimiseks. Poisid otsustasid matka siiski ühe jalgratta abil jätkata.

Nad mõlemad asuvad teele üheaegselt, üks jalgrattal, teine jalgsi. Kokkulepitud kohas jätab jalgrattur jalgratta maha ning jätkab teed jalgsi. Teine poiss istub jalgrattani jõudes omakorda sellele ja kihutab oma sõbrale järele. Niipea kui ta sõbra kinni püüab, jätab ta jalgratta sellele ja jätkab teekonda jalgsi.

Kui kaugel matka sihtpunktist tuleb jalgratas viimast korda maha jätta, et mõlemad poisid jõuaksid korraga sihtkohta? Teada on, et avariikohalt sihtkohta oli maad 60 kilomeetrit, et jalamees käis tunnis 5 kilomeetrit, ja et rattamees jõudis tunni jooksul edasi 15 kilomeetrit.

Kas selline edasiliikumisviis oli poistele kasulik?

257. Üks lihtmurdude huvitav omadus

Kirjutage üles niipalju lihtmurde, kui te just soovite, peaasi et nende lugejad ja nimetajad oleksid positiivsed arvud.

Moodustage nüüd uus murd, mille lugejaks on kõigi teie poolt moodustatud lihtmurdude lugejate summa ja nimetajaks kõigi nende murdude nimetajate summa. See uus murd on kindlasti suurem kui kõige väiksem teie poolt üleskirjutatud murd ja kindlasti väiksem kui kõige suurem teie poolt üleskirjutatud murd.

Kontrollige seda omadust mingi näite varal ja tõestage ta õigsust suvalise hulga positiivsete murdude korral.

IX PEATÜKK

MATEMAATIKA PEAAEGU ILMA ARVUTUSTETA

Iga ülesande lahendamine tugineb suuremal või vähemal määral teatud «mõttekäigule». Eriti huvitavad on aga niisugused ülesanded, milles peamist, otsustavat osa mängivad täpsete, mõnikord üsna peente mõttekäikude ahelad.

Mõned sellist tüüpi ülesanded kuuluvad pigem loogiliste kui matemaatiliste ülesannete hulka, kuid ka sellised ülesanded arendavad «matemaatilist mõtlemist», õpetavad «analüüsima» ning sunnivad otsima mittešabloonseid lahendusteid.

258. Pimedas toas

Ma astusin tuppa, et võtta kapist oma saapaid ja sokke. Selles toas magas mu õde ja tuba oli päris pime. Ma teadsin täpselt, kus asusid mu kolm erineva tegumoega saapapaari. Samas asusid ka mu kaksteist paari musti ja pruune sokke. Ma ei tahtnud tuld süüdata, sest õde oleks võinud ärgata.

Ma leidsin saapad ja sokid tõepoolest kapist, kuid pean oma häbiks tunnistama, et nad olid seal kohutavas segaduses. Minu ees asus hunnik kuuest saapast ja kahekümne neljast sokist.

Mitu saabast ja mitu sokki (minimaalselt) ma pidin kaasa võtma, et saada ükskõik missuguse paari saapaid ja paari üht värvi sokke?

259. Õunad

Kastis oli segamini kolme sorti õunu. Mitu õuna (minimaalselt) tuleb kastist huupi võtta, et väljavõetud õunte hulgas oleks: 1) vähemalt kaks õuna ühest sordist; 2) vähemalt kolm õuna ühest sordist?

260. Ilmaennustus (naljaülesanne)

Kui kesköö sajab vihma, kas võib siis loota, et 72 tunni pärast on päikesepaisteline ilm?

261. Metsapäev

Meie kooli neljanda ja kuuenda klassi pioneerisalkadele tehti metsapäeval ülesandeks kummalegi poole tänava äärde istutada võrdne arv puid.

Et VI klassi pioneeride ees mitte häbisse jääda, läksid IV klassi pioneerid varem tööle ning jõudsid enne VI klassi pioneeride tulekut istutada 5 puud. Kogemata olid IV klassi pioneerid alustanud oma tööd VI klassile ettenähtud tänavapoolel ning neil tuli oma tänavapoolele tagasi minna ja tööd uuesti alustada.

Nüüd said VI klassi pioneerid loomulikult töö varem valmis.

VI klassi rühmanõukogu esimees ütles oma rühma pioneeridele: «Läheme nüüd kõik IV klassi pioneeridele appi!» Kõik olid sellega nõus. Nad läksid tänava teisele poolele, istutasid 5 puud (s. t. tasusid oma võla) ja istutasid siis veel 5 puud. Sellega oligi töö lõpetatud.

«Kuigi te tulite enne meid siia, istutasime me ikkagi rohkem puid,» naeris üks VI klassi pioneer IV klassi salga poole pöördudes.

«Jah, läksite küll ette! Viie puu võrra ainult,» vaidles keegi vastu.

«Meie istutasime ju 10 puud rohkem!» tõstsid VI klassi pioneerid kära.

Puhkes vaidlus. Ühed väitsid, et VI klassi pioneerid istutasid 5 puud rohkem, teised väitsid, et nad istutasid 10 puud rohkem. Lõpuks jõuti siiski tõeni välja, kuid vaidlus kestis päris kaua.

Kellel oli õigus?

262. Missugune eesnimi kellelgi on?

«Lapsed, meie laagrisse saabub homme hommikul kolm teile tundmatut poissi: Burov, Gridnjov ja Klimenko,» ütles pioneerijuht murul istuvatele vanematele pioneeridele.

«Ma võin teile öelda ka nende poiste eesnimed: Kolja, Petja ja Griša.»

«Kuid kes neist on Burov, kes Gridnjov ja kes Klimenko?»

«Proovime õige mõistatada,» tegi üks lastest ettepaneku.

«Ma arvan, et Kolja perekonnanimi on Burov,» kostis veel üks hääl.

«Ei, sa ei arvanud õigesti,» ütles pioneerijuht. «Ja üldse pole tarvis mõistatada, te võite ise päris täpselt kindlaks teha Burovi, Gridnjovi ja Klimenko eesnimed ja peale selle võite leida ka iga poisi vanuse. Selleks piisab mõningaist kaudseist andmeist, mida ma teile kohe teatan.»

Ettepanek oli ahvatlev ja võeti heameelega vastu.

«Lisaks sellele, mida te nende poiste kohta juba teate, on tarvis teada veel järgmisi fakte:

1) Teile hästituntud Nadja Serova isa on Burovi ema vend.

2) Petja astus 7-aastaselt kooli ja õpib väga hästi. Kirjas, mille ma temalt hiljuti sain, kirjutab ta: «Lõpuks ometi ma hakkan sel aastal õppima algebrat ja füüsikat...»

Ma lisan veel, et meie mesinik Semjon Zahharovitš Mokroussov on Petja vanaisa ning ootab oma lapselast kannatamatusega.

3) Gridnjov on Petjast aasta vanem.

4) Griša on Petjast aasta vanem.»

«On see kõik?»

«Jah.»

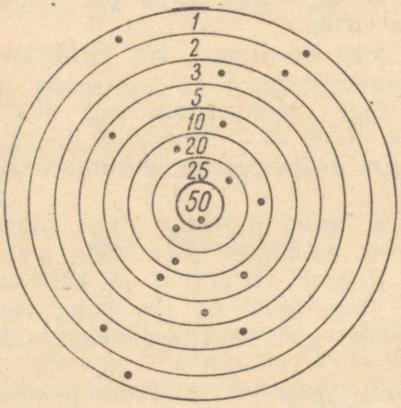
«Kas me ei saanud poiste kohta siiski liiga vähe teada?» kahtles keegi.

«Sellest on küllalt, et seda ülesannet täielikult lahendada.»

Pärast lühikest vaidlemist, nuputamist ja saadud faktide kokkusobitamist leidsid lapsed ainsa võimaliku lahenduse ning määrasid oma uute kaaslaste eesnimed ja vanuse täpselt kindlaks.

263. Märkilaskmine

Kolm poissi — Andrjuša, Borja ja Volodja — lasksid väikesekaliibrilisest vintpüssist joonisel 164 kujutatud märklauda. Igaüks neist laskis 6 lasku. Tabamused on



Joon. 164. Võistluse tulemused.

märklaual märgitud punktidega. Kui tulemused kokku võeti, osutus, et iga poiss laskis 71 silma. Seejuures sattus üks lask märklaua südamikku (50 silma).

Ma olen unustanud, kellele poistest see parim lask kuulus, kas Andrjušale, Borjale või Volodjale. Kuid te võite selle ise kindlaks teha järgmiste andmete põhjal: Andrjuša sai kahe esimese lasuga 22 silma, Volodja esimene lask sattus kolmelisse ringi.

Kes poistest tabas märklaua südamikku?

264. Ost

Tütarlaps ostis poest 42 pliiatsit: 15 harilikku pliiatsit hinnaga 16 kopikat tükk, 7 värvilist pliiatsit hinnaga 28 kopikat tükk, 12 joonestuspliiatsit ja 8 keemilist pliiatsit. Ta pidi vastavalt väljakirjutatud tšekile tasuma kassasse 8 rubla 90 kopikat. Tütarlaps ei mäletanud küll keemiliste pliiatsite ja joonestuspliiatsite hinda, kuid avastas ainult nende hulka teades tšekis kohe

vea ja teatas sellest müüjale. Müüja kontrollis arvet, vabandas ja tegi tšekile paranduse.

Kuidas tütarlaps avastas vea?

265. Ühe kupee reisijad

Moskva—Odessa rongi vaguni ühes kupees sõitsid moskvalane, leningradlane, tuulalane, kiievlane, harkovlane ja odessalane. Nende perekonnanimed algasid tähtedega A, B, D, E, F ja G.

Teel selgus, et A ja moskvalane on arstid, F ja leningradlane on õpetajad, tuulalane ja D on aga insenerid. B ja G võtsid osa Suurest Isamaasõjast, tuulalane aga ei olnud üldse armees teeninud. Harkovlane on A-st vanem ning odessalane on D-st vanem. B ja moskvalane väljusid Kiievis, D ja harkovlane aga Vinnitsas. Leidke nende kuue reisija elukutsed ja elukohad.

M ä r k u s. Huvitav oleks kindlaks teha selles ülesandes esitatud faktide hulga tarvilikkust ja piisavust. Võib-olla pakub teile huvi seda uurida?

266. Nõukogude armee maletšempionaat

Nõukogude armee maletšempionaadil mängisid 8 erineva sõjaväelise auastmega maletajat: polkovnik, major, kapten, leitnant, vanem, seersant, jefreitor ja reamees. Igaüks oli erinevast väeliigist: üks oli jalaväelane, teine lendur, siis olid seal veel tankist, suurtükiväelane, ratsaväelane, miinipildur, sapöör ja sideväelane.

Kui te õigesti arutlete, siis te võite leida kõigi nende maletajate sõjalise eriala järgmiste andmete põhjal.

Esimeses voorus mängis polkovnik ratsaväelasega. Lendur jõudis kohale alles teiseks vooruks.

Teises voorus olid edukad mustade malenditega mängijad: jalaväelane, jefreitor ja major saavutasid oma vastaste üle kindla võidu. Ainult vanem suutis valgete malenditega mängides viigistada.

Kolmandas voorus võitis leitnant jalaväelase ja kapten seersandi, polkovnik aga mängis suurtükiväelasega viiki.

Katkestatud ja vahelejäänud partiide mängimisel

pärast kolmandat vooru võitis kapten majori, kuid pidi seejärel turniirist tervislikel põhjustel loobuma. Seetõttu jäi neljandas voorus vabaks tankist.

Neljandas voorus võitis sapöör leitnandi ja vanem polkovniku. Enne viimast vooru mängisid ratsaväelane ja miinipildur lõpuni oma partii, mis oli katkestatud kuuendas voorus.

Märkused. 1) Selle ülesande lahendamiseks pole vaja osata malet mängida. Tuleb vaid teada, et turniiri kestel ei saa üks maletaja olla 2 korda vaba, ning et igaüks mängib igaühega ühe partii.

2) Kui te olete selle ülesande lahendanud, siis te võite soovi korral välja kirjutada ka täieliku kohtumiste tabeli voorude järgi.

267. Pühapäevak

Enne uue õppeaasta algust organiseerisid kommunistlikud noored koolile küttepuude varumise pühapäevaku. Kuus neist hakkasid erineva pikkusega ümmargusi palke saagima poole meetri pikkusteks tükkideks. Saagijad jagunesid kolmeks paariks, kus üks paari liige oli brigadiriks. Brigadiride eesnimed olid Volodja, Petja ja Vasja. Volodja ja Miša saagisid keskmise jämedusega 2 meetri pikkusi propse. Petja ja Kostja saagisid $1^1/_2$ meetri pikkusi veidi jämedamaid propse. Vasja ja Fedja saagisid 1 meetri pikkusi väga jämedaid propse.

Järgmisel päeval märgiti kooli seinalehes kolme saagijate brigaadi head tööd. Seinalehes oli ära toodud ka brigadiride nimed: Lavrov, Galkin ja Medvedjev. Teatati, et Lavrov ja Kotov saagisid 26 tükki, Galkin ja Pastuhhov 27 tükki, Medvedjev ja Jevdokimov aga 28 tükki.

Kuidas on Pastuhhovi eesnimi?

268. Mis on vedurijuhi nimi?

Moskva—Leningradi rongis sõidavad reisijad Ivanov, Petrov ja Sidorov. Samad nimed on ka vedurijuhil, kütjal ja konduktoril. On teada, et

1) reisija Ivanov elab Moskvas;

2) konduktor elab Moskva ja Leningradi vahel poolel teel;

3) konduktoriga ühenimeline reisija elab Leningradis;

4) see reisija, kes elab konduktorile kõige lähemal, teenib kuus täpselt kolm korda rohkem kui konduktor;

5) reisija Petrov teenib kuus 2000 rubla;

6) Sidorov rongi brigaadist võitis hiljuti kütjat piljardimängus.

Mis on vedurijuhi nimi?

269. Kriminaalne lugu

(Ajakirjast «Scripta Mathematica»)

Ühel New Yorgi osariigi algkooli õpetajannal kadus rahakott. Rahakoti varastajaks võis olla ainult üks järgmisest viiest õpilasest: Lilian, Judy, David, Theo või Margaret.

Laste ülekuulamisel andis igaüks neist kolm seletust.

Lilian: 1) mina ei võtnud rahakotti; 2) oma elus pole ma mitte kunagi midagi varastanud; 3) seda tegi Theo.

Judy: 4) mina ei varastanud rahakotti; 5) minu isa on küllalt rikas ja mul on oma isiklik rahakott; 6) Margaret teab, kes seda tegi.

David: 7) mina ei võtnud rahakotti; 8) ma ei olnud enne kooli tulekut Margaretiga üldse tuttav; 9) seda tegi Theo.

Theo: 10) mina ei ole süüdi; 11) seda tegi Margaret; 12) Lilian valetab, kinnitades, et mina varastasin rahakoti.

Margaret: 13) mina õpetaja rahakotti ei võtnud; 14) Judy on selles süüdi; 15) David võib minu eest vastutada, sest ta tunneb mind juba sündimisest saadik.

Edaspidisel küsitlemisel tunnistasid kõik õpilased, et nende poolt antud kolmest vastusest on kaks õiget ja üks vale.

Mängige veidi detektiivi ja tehke kindlaks, milline õpilane varastas õpetaja rahakoti.

270. Ravimtaimede korjajad

Kaks pioneerisalka korjasid suvel matkal viibides üht ja sama sorti ravimtaimi. Apteegivalitsus maksis kogutud taimede eest teatava summa raha, millest suurema osa pidid saama esimese salga pioneerid, sest nad korjasid rohkem ravimtaimi kui teise salga pioneerid.

Kui peale apteegivalitsuse poolt makstud üldsumma oleks teada veel kummagi salga poolt korjatud taimede kilogrammide arv, siis oleks raha jaotamine kahe salga vahel kujutanud endast üsna lihtsat ülesannet, kuid lapsed šifreerisid kõik raha jaotamiseks vajalikud aritmeetilised tehted, tähistades kõiki arve peale üheainsa seitsme tärnikestega. Proovige, kas te saate nende poolt antud salakirjastatud lahendusest jagu.

Lahendus ise on siin:

1) Kui palju üldse korjati taimi?

$$\begin{array}{r} * \\ +\ * \\ \hline ** \end{array}$$

2) Mitu rubla maksab üks kilogramm taimi?

$$\begin{array}{r|l} *** & *7 \\ \cline{2-2} ** & ** \\ \cline{1-1} ** & \\ ** & \\ \cline{1-1} == & \end{array}$$

3) Kui palju raha saab esimene salk?

$$\begin{array}{r} ** \\ \times\ \ * \\ \hline ** \end{array}$$

4) Kui palju raha saab teine salk?

$$\begin{array}{r} ** \\ \times\ \ * \\ \hline ** \end{array}$$

271. Varjatud jagamine

Pioneeride palee lauamängude toas käis kahe noore maletaja vahel vaikne «võitlus».

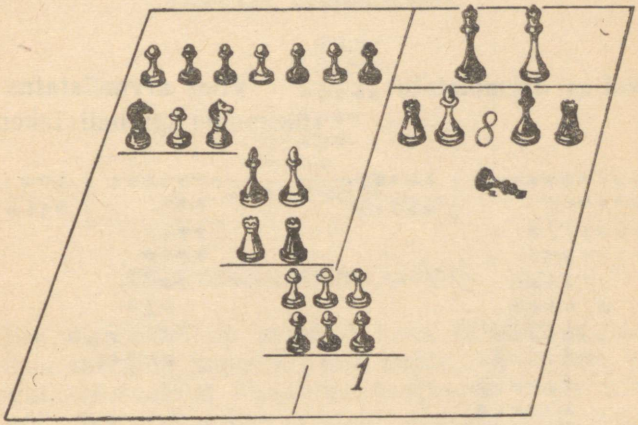
Poiste juurde oli istet võtnud ka matemaatilise seinalehe «Nuputa!» toimetaja Olja, kes koostas just ülesannet seinalehe järgmise numbri jaoks.

Olja lõpetas seitsmekohalise arvu jagamise kahekohalise arvuga ja asus joonise kallale. Samal ajal hakkasid maletajad mahalöödud malendeid nalja pärast Olja arvutustele paigutama. Kui partii lõppes, siis olid kõik jagatava, jagaja, jagatise ja vahetulemuste numbrid, peale kõige viimase, ühega võrduva jäägi, kaetud malenditega.

«Kuule, Olja, siin ongi su seinalehe jaoks paras ülesanne,» ütles üks maletajatest. «Sa tee sellest «viguritega jagamisest» joonis või foto ja las lugejad proovivad malendite all olevaid numbreid leida.»

«Tõepoolest, see on huvitav ülesanne,» rõõmustas Olja. «Ainult me peame ise enne proovima, kas ta üldse lahendub.»

Pärast lühikest analüüsi jõudsid lapsed järeldusele, et niisugusel kujul pakub ülesanne vähe huvi, sest tal



Joon. 165. Leidke jagatav, jagaja ja jagatis.

on palju erinevaid lahendusi. Kui aga eemaldada ka jagatise keskmiselt numbrilt (8) malend, siis jääb ülesandele ainult üks lahendus.

Leidke joon. 165 põhjal jagatava, jagaja ja jagatise väärtused.

272. Šifreeritud tehted (arvmõistatused)

Siin on kõik tehted šifreeritud: numbrid on asendatud tähtede ja tärnidega. Samadele tähtedele vastavad võrdsed numbrid ning erinevatele tähtedele erinevad numbrid. Tärnide asemel võivad aga paikneda igasugused numbrid, nii võrdsed kui erinevad. Iga arvmõistatust saab lahendada täpsete ja järjekindlate kaalutluste ahela abil. Pange tähtede ja tärnide asemele õiged numbrid.

Esimene arvmõistatus

```
  ABC
× BAC
------
 ****
 **A
***B
------
******
```

Teine arvmõistatus

```
  ***
× *2*
------
 ***
****
*8*
------
**9*2*
```

Kolmas arvmõistatus

```
PIME | ME
ME   | ---
---  | IME
 KM
 ET
---
IME
IME
---
 =
```

Neljas arvmõistatus

```
**7*******  | ****7*
******      | ------
------      | **7**
****77*
*******
-------
  *7****
  *7****
  -------
  *******
  ****7**
  -------
    ******
    ******
    ------
     =
```

Viies arvmõistatus
(ülesandel on neli lahendust)

```
******4  | ***
 ***     | ---
 ------  | *4**
 **4*
 ****
 ------
  ****
   *4*
  -----
   ****
   ****
   ----
    =
```

Kuues arvmõistatus. See mõistatus on tehtud veel keerulisemaks sellega, et isegi jagaja kohtade arvu pole antud. Kõigest hoolimata on tal siiski üksainus lahend.

Leidke see.

```
**********  |   ?
***         | -------
---         | *****8**
  ***
  ***
  ---
   ***
   ***
   ---
     **
     **
     --
      ***
      ***
      ---
       =
```

Seitsmes arvmõistatus
(ülesandel on kaks lahendust)

$$DO + RE = MI$$
$$FA + SI = LA$$
$$RE + SI + LA = SOL$$

Kaheksas arvmõistatus
(ülesandel on mitu lahendust)

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\ DEF \\ \hline GHI \end{array}$$

Üheksas arvmõistatus

$$\begin{array}{r} \times\ RAHU \\ RAHU \\ \hline ***** \\ ***** \\ ***** \\ ***** \\ \hline ****RAHU \end{array}$$

273. Aritmeetiline mosaiik

Selles ülesandes on esitatud kaks tähtede ja matemaatiliste märkide mosaiiki, mis kujutavad endast kaht huvitavat aritmeetilist ülesannet, kusjuures nende lahendusi võib leida loogilise arutelu põhjal, mitte pimesi kobades.

Esimene ülesanne

$$\begin{array}{rcl} DTA + RDL & = & RRTZ \\ - & - & : \\ \overline{WZK} : \overline{RUK} & = & \overline{Z} \\ \overline{EDA} - \overline{WL} & = & \overline{EED} \end{array}$$

Teine ülesanne

$$\begin{array}{rcl} HEB + EUS & = & LFS \\ - & + & : \\ \overline{WUB} : \overline{EH} & = & \overline{US} \\ \overline{EHB} - \overline{ESU} & = & \overline{RA} \end{array}$$

Nagu eelmistes arvmõistatustes, nii tuleb ka siin tähtede asemele panna numbrid, kusjuures erinevatele tähtedele vastavad kindlasti ka erinevad numbrid. Sifreeritud arvude vahele on paigutatud matemaatilised märgid, mis näitavad vajalikke tehteid nii horisontaalkui ka vertikaalsuunas. Horisontaalridades asuvad tulemused nagu harilikult võrdusmärgist paremal pool ning vertikaalridades joone all.

Pange tähtede asemele numbrid, nii et kõiki nõutud tehteid saaks täpselt teostada.

Kui te olete kõigi tähtede numbrilised väärtused leidnud, siis paigutage tähed numbrite järjekorras (nullist üheksani) ritta. Esimesest mosaiigist te saate ühe silmapaistva eestlase nime, teisest mosaiigist aga saksakeelse sõna, mis kõneleb ühest tähtsast sammust iga inimese elus.

274. Mootorrattur ja ratsanik

Postkontorist saadeti mootorrattur lennuväljale järjekordse postisaadetise järele. Lennuk oli seekord aga saabunud ettenähtud ajast varem ja postkontorile määratud post saadeti lennuväljalt ratsanikuga teele.

Pärast pooletunnist kihutamist kohtas ratsanik mootorratturit, kes võttis posti vastu ja asus viivitamata tagasiteele.

Mootorrattur jõudis postkontorisse 20 minutit enne seda, kui teda teati oodata.

Mitme minuti võrra tavalisest varem maandus sel päeval lennuk lennuväljale?

275. Jalgsi ja autoga

Kes eelmise ülesandega hakkama sai, sellel on kindlasti kerge leida ka järgmise, eelmisega analoogilise ülesande lahendust.

Linnalähedases tehases töötav insener jõudis igal hommikul kell 8.30 kohalikku jaama. Täpselt samaks ajaks tuli talle alati jaama vastu tehase «Pobeda» ja viis ta viivitamata töökohta.

Ühel hommikul jõudis insener aga jaama juba kella kaheksaks. Autot ootamata hakkas ta tehase poole astuma. Teel kohtas ta «Pobedat», mis ta siis hariliku kiirusega sõites tehasesse viis. Insener jõudis sel hommikul tehasesse kümme minutit varem kui tavaliselt.

Leidke, kui palju oli kell hetkel, mil insener kohtas «Pobedat» ja mitu korda ületas auto kiirus jalgsikäigu kiiruse.

276. Vastuväiteliselt

Kujutlege, et on olemas kaks väidet «A» ja «B», mis lülitavad teineteist vastamisi välja. Nendest väidetest

saab loomulikult õige olla ainult üks. Oletame, et me soovime tõestada väite «A» õigsust.

Väite «A» otsese tõestuse asemel kasutatakse mõnikord ka kaudset tõestust, s. t. tõestatakse, et vastuväide «B» pole õige, sest ta on vastuolus kindlasti paikapidavate faktidega. Seda mõttekäiku, nn. «vastuväitelise tõestuse meetodit» kasutatakse laialdaselt geomeetrias, koolialgebras ja mõnikord ka aritmeetikas. Seda meetodit võib aga edukalt kasutada ka ülesannete lahendamiseks.

Vaatleme vastuväitelise mõttekäigu rakendamist järgmise ülesande juures.

Kahe arvu summa on 75. Esimene arv on teisest 15 võrra suurem. Tõestage vastuväiteliselt, et teine arv on 30.

L a h e n d u s. Eeldame vastuväiteliselt, et teine arv ei ole 30, vaid on sellest suurem või väiksem. Kuid juhul, kui teine arv on üle kolmekümne, siis esimene arv on üle 45 ja nende summa on üle 75, mis on ülesande algtingimustega vastuolus. Kui aga teine arv on kolmekümnest väiksem, siis on esimene arv neljakümne viiest väiksem ja nende summa on seitsmekümne viiest väiksem, mis aga on jälle vastuolus ülesande tingimusega.

Järelikult on teine arv 30.

Lahendage kaks järgmist ülesannet vastuväiteliselt.

Ülesanne 1. Kahe täisarvu korrutis on suurem seitsmekümne viiest. Tõestage, et vähemalt üks teguritest on suurem kui 8.

Ülesanne 2. Mingit kahekohalist arvu viiega korrutades saame jälle kahekohalise arvu. Tõestage, et korrutatava esimene number on 1.

277. Missugune raha on vale?

Vaevalt, et teil kunagi tekiks vajadust vihtideta kangkaalude abil otsida ühesuguste rahade hulgast üles üht valeraha, kuid oma mõtte treenimiseks võtame selle lähtekoha järgmise kolme ülesande puhul aluseks.

Esimene ülesanne (kerge). Olgu antud üheksa ühesugust münti. On teada, et kaheksal neist on võrdne kaal, aga üheksas (valeraha) on teistest veidi kergem. Kuidas vihtideta kangkaalude abil k a h e kaalumisega leida valeraha?

Teine ülesanne (veidi raskem eelmisest). Samadel tingimustel eraldada 8 raha hulgast teistest kergem valeraha samuti k a h e kaalumisega.

Kolmas ülesanne (raske). 12 raha hulgas on üks valeraha, kusjuures on teada, et ta erineb teistest veidi kaalu poolest, aga ei teata, kas ta on raskem või kergem. Õiged rahad on kõik ühe kaaluga. Eraldage vihtideta kangkaalude abil k o l m e kaalumisega valeraha ja ütelge, kas ta on teistest rahadest kergem või raskem.

Ü l e s a n d e i d i s e s e i s v a k s l a h e n d a m i s e k s (ilma vastusteta):

Ülesanne 1. Valmistati 13 detaili. Kõik nad on ühesuguse välimusega ja peaksid omama võrdse kaalu, kuid on siiski võimalik, et selles partiis on ü k s detail, mis erineb teistest detailidest kaalu poolest.

Tehke kangkaalude abil k o l m e kaalumisega kindlaks, kas nende detailide hulgas on üks detail mittestandardne. Kui on, siis leidke ta ja ütelge, kas ta on ülejäänutest kergem või raskem. Vihte pole, kuid kaalumisel võib appi võtta üht standardset lisadetaili (neljateistkümnendat).

Ülesanne 2. Üldistame eelmist ülesannet. Tingimused jäävad samaks, kuid kontrollitavate detailide arv on $\frac{3^n - 1}{2}$ ja kaaludel lubatakse sooritada n kaalumist ($n = 1, 2, 3, \ldots$).*

278. Loogiline viik

Ühel peamurdmisülesannete lahendusvõistlusel paistsid eriti silma 3 isikut. Et nende hulgast leida lõplikku võitjat, otsustati teha veel viimane katse. Neile näidati viit paberitükki — kolme valget ja kaht musta. Seejärel seoti kõigil kolmel silmad kinni ja kleebiti igaühele laubale valge paberitükk. Peale seda võeti kõigil sidemed ära ja teatati, et võitja on see, kes ütleb esimesena õigesti oma laubal oleva paberitüki värvuse. Ükski osavõtja ei võinud näha oma paberitükki. Küll aga nägi

---

* Kaks viimast ülesannet pärinevad Zagrebi matemaatikult V. Davidelt.

võistlejate omi. Lühikese mõtlemise järel jõudsid kõik kolm ühekorraga järeldusele, et neil on kõigil laubal valged paberitükid. Kuidas nad sellise järelduseni jõudsid?

279. Kolm mõttetarka

Vaidlusest ja suvisest kuumusest väsinuna heitsid kord kolm vanakreeka filosoofi Akadeemia aeda puu alla veidi puhkama ning uinusid. Sellal kui nad magasid, määrisid naljahambad nende laubad söega mustaks. Niipea kui nad ärkasid ja üksteisele korraks otsa vaatasid, puhkesid kõik korraga naerma, sest igaühele näis algul loomulikuna, et kaks ülejäänut naeravad vastamisi teineteist.

Äkki aga lakkas üks mõttetark naermast, sest ta taipas, et ka tema oma laup oli tahmaga mustaks määritud.

Millise mõttekäiguga ta jõudis niisugusele tulemusele?

280. Viis küsimust kooliõpilastele

Matemaatiliste formuleeringute sõnastus peab olema küllalt täielik ja seejuures ülearuste sõnadeta. Matemaatilise keele lühidus ja täpsus on ta eriliseks ja samal ajal ilusaks jooneks.

1. Leidke järgmistes teile tuttavates matemaatilistes formuleeringutes kõik ülearused sõnad:

a) Täisnurkse kolmnurga kahe teravnurga summa on 90°.

b) Kui täisnurkse kolmnurga kaatet on võrdne poole hüpotenuusi pikkusega, siis tema vastas oleva teravnurga suurus on 30°.

2. Vastavaid matemaatilisi termineid kasutades lihtsustage järgmisi lauseid:

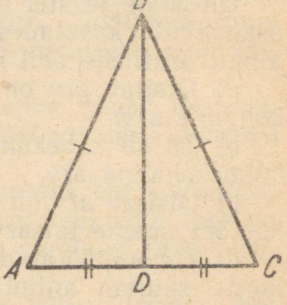
a) Ringi sees olev lõikaja osa.

b) Vähima külgede arvuga hulknurk.

c) Ringi keskpunkti läbiv kõõl.

d) Võrdhaarne kolmnurk, mille alus on võrdne küljega.

e) Kaks erineva raadiusega, kuid ühise keskpunktiga ringjoont.



Joon. 166.

3. Kolmnurgas ABC (joon. 166) on $AB = BC$, $AD = DC$. Leidke vähemalt viis terminit, mis iseloomustavad lõiku BD.

4. Järgnevalt on loetletud seitse sugulasterminit: parallelogramm, geomeetriline kujund, ruut, hulknurk, tasapinnaline kujund, romb, kumer nelinurk. Järjestage need sõnad nii, et eelmise sõnaga kirjeldatud mõiste sisaldaks järgmise sõnaga kirjeldatava mõiste.

5. Teades, et suvalise kumera hulknurga välisnurkade summa võrdub nelja täisnurgaga, proovige kindlaks teha, milline suurim sisemiste t e r a v n u r k a d e hulk võib esineda kumera hulknurga korral.

281. Arutlus võrrandi asemel

Igale inimesele, kes vähegi on õppinud matemaatikat, on tuttavad ühed või teised aritmeetika, algebra või mõne teise matemaatika haru võtted, mille abil ta lahendabki matemaatilisi ülesandeid.

Muidugi leidub ülesandeid, mis pole vähemalt algebrat mittetundvale inimesele üldse jõukohased, kuid leidub loomulikult ka selliseid ülesandeid, mille ees ei pea taganema ka see, kes ei oska võrrandeid koostada ega lahendada. Meid võib ju hädast välja aidata kõige tavalisem terve mõistus, tähelepanuoskus ja oskus loogiliselt mõtelda. Ka need «võtted» on ülesande lahendamisel täiesti «seaduslikult» lubatud. Proovige kahe järgmise ülesandega hakkama saada võrrandit koostamata.

Ülesanne 1. Kui mingit kahekohalist arvu lugeda paremalt vasakule, siis saadud «ümberpööratud» arv on antud arvust $4\frac{1}{2}$ korda suurem. Milline see arv on?

Ülesande tekstis on kaunis vähe andmeid, kuid neid oskuslikult kasutades võime selle ülesande lahendada ainult arutluste abil näiteks nii:

a) Otsitav arv on kümnest suurem, sest ta on kahekohaline arv.

b) Ta on kahekümne viiest väiksem, sest $25 \times 4\frac{1}{2}$ on kolmekohaline arv.

c) Otsitav arv on paarisarv, sest seda arvuga $4\frac{1}{2}$ korrutades saame täisarvu.

d) Ümberpööratud arv on andmete kohaselt üheksa korda suurem antud arvu poolest, tähendab ta jagub üheksaga.

e) Kuna ümberpööratud arv jagub üheksaga, siis ta ristsumma jagub ka üheksaga ning kuna antud arv koosnes samadest numbritest, siis ka tema jagub üheksaga.

Leidke selle mõttekäigu jätk ja lõpetage ülesande lahendamine.

Ülesanne 2. Nelja järjestikuse täisarvu korrutis on 3024. Leidke need arvud.

Selle ülesande «loogiliseks» lahendamiseks võib soovitada järgmist mõttekäiku:

a) Tuleb teha kindlaks, et nende arvude hulgas pole arvu 10.

b) Otsitavate arvude hulgas peab olema kümnest väiksemaid arve.

c) Punktidest a) ja b) ning ülesande tekstist järeldub, et kõik otsitavad arvud peavad olema kümnest väiksemad, s. t. ühekohalised arvud.

d) Nende arvude hulgas ei saa olla numbrit viis.

e) Jaotame kõik ülejäänud ühekohalised arvud kahte rühma, nii et igas rühmas oleks neli järjestikust täisarvu ja kontrollime, milline rühm rahuldab ülesande tingimusi.

282. Terve mõistuse abil

Pedagoogilise instituudi üliõpilane Galja Karpova valmistub oma «proovitunniks» matemaatikas keskkooli kaheksandas klassis.

«Näita mulle õige, Galja, milliseid ülesandeid sa tahad oma õpilastele anda,» tundis asja vastu huvi Galja isa, kuulus vedurijuht.

«Kui lapse vanusele lisada kolm aastat, siis saab saadud arvust võtta täpse ruutjuure, kusjuures juure väärtuse me saame, kui me lapse vanusest lahutame kolm aastat. Kui vana on laps?»

«Noh, see on päris paras ülesanne peast lahendamiseks. Taibukamad lapsed saavad sellega ühe minutiga hakkama.»

«Kuidas peast lahendamiseks ja kuidas ühe minutiga? Ma just mõtlesin selle ülesande varal veel kord näidata õpilastele algebralise lahendusviisi paremust aritmeetilisega võrreldes.»

«Sel juhul see ülesanne küll ei kõlba. Igaüks, kes

su ülesande sisusse süveneb, lahendab selle ülesande peast, praktiliselt ilma arvutusteta.»

Kuidas lahendas selle ülesande Galja-isa, vana vedurijuht.

Lisaküsimus nendele, kes oskavad koostada ja lahendada ruutvõrrandeid: Kuidas Galja kavatses seda ülesannet algebraliselt ja aritmeetiliselt lahendada?

283. Ei või jah

Oletame, et teie sõber mõtles mingile täisarvule ühe ja tuhande vahel. Selle arvu leidmiseks te esitate küsimusi, kusjuures sõber vastab teie küsimustele «jah» või «ei».

Võib näida ebausutavana, et kümnest küsimusest piisab ühe ja tuhande vahel asuva arvu täpseks mõistmiseks, kuid see on siiski nii.

Nuputage, milliseid küsimusi tuleb selleks esitada!

X PEATÜKK

MATEMAATILISED MÄNGUD JA TRIKID

A. MÄNGUD

Leidub terve rida mänge, mille puhul mängu lõpptulemus ei sõltu mitte juhuslikust soodsate asjaolude kokkusattumisest, vaid mängija enda taibukusest ja eelnevast arvestusest. See, kes oskab mängu lõpptulemust ette arvestada, saab mängu «saladuse» valdajaks, mis kindlustab talle võidu vastaste üle, kes veel ei valda selle mängu matemaatilist teooriat. Sellised mängud kuuluvad rohkem matemaatiliste ülesannete kui mängude valda. Teiselt poolt on peaaegu igale «matemaatiliste meelelahutuste» tüüpi ülesandele omased mängu elemendid.

284. Üksteistkümmend eset

Laual on üksteistkümmend ühesugust eset, näiteks tuletikku. Esimene mängija võtab nende hulgast endale oma äranägemise järgi 1, 2 või 3 eset; seejärel võtab teine mängija endale ülejäänud esemete hulgast samuti oma äranägemise järgi 1, 2 või 3. Siis võtab jälle esimene jne. Nii võtavad mängijad kordamööda laualt esemeid, seejuures iga kord ülimalt 3 eset. Kaotab see, kel tuleb võtta laualt viimane ese. Kas mängu alustaja saab oma vastast sundida laualt viimast eset võtma?

Kuidas tuleb mängu planeerida, et võita juhul, kui esemete esialgne arv on 30?

Mängu üldistus. Kaks mängijat võtavad kordamööda laualt tuletikke. Kuidas tuleb mängu planeerida, et sundida vastast võtma viimast tuletikku, kui esialgu on laual n tuletikku ja ühe korraga on lubatud võtta 1 kuni p tuletikku (p on tunduvalt väiksem kui n)?

285. Viimase tuletiku võtja on võitja

Muudame eelmise mängu põhitingimust. Ärgu osutugu nüüd mängija, kes võtab laualt viimased tuletikud, kaotajaks, vaid olgu hoopis võitja. Mängijaid on kaks ja nad võtavad laualt vaheldumisi üks kuni kuus tuletikku.

Kuidas tuleb mängida, et võtta laualt viimased tuletikud, kui mängu alguses on laual 30 tuletikku?

286. Võidab paarisarv

Laual asuvast 27 tuletikust võtavad 2 mängijat kordamööda vähemalt 1 ja ülimalt 4 tuletikku. Võitjaks loetakse see, kellel on mängu lõpul paarisarv tikke.

Kuidas mängu võita?

287. Tsjanšitsõ

Tsjanšitsõ on hiina rahvamäng. Sõna «tsjanšitsõ» tähendab täpses tõlkes «kivide valimine».

Mängijaid on kaks. Asetanud kivid maha kahte hunnikusse, võtavad mängijad kordamööda nendest hunnikutest kive, pidades silmas järgmisi reegleid:

a) ühest hunnikust võib korraga võtta ükskõik kui palju kive (isegi terve hunniku korraga).

b) võib võtta kive kahest hunnikust korraga, kuid mõlemast hunnikust tingimata ü h e p a l j u.

Võidab see, kes võtab viimase kivi.

Kive võib muidugi asendada ükskõik milliste muude esemetega.

Mäng «tsjanšitsõ» kujutab endast äsjakirjeldatud tuletikkudega mängude edasiarendust ja laiendust. Tsjanšitsõs ei piirata esemete esialgset arvu, nad pannakse kahte hunnikusse ja mängijatel lubatakse võtta korraga niipalju esemeid kui neile meeldib.

Mängu matemaatiline huvitavus seisneb tema teooria

«konstrueerimises», s. o. niisuguse mänguviisi leidmises ja põhjendamises, mis kindlustaks konkreetsele mängijale võidu.

On näiteks selge, et seisus (1, 0), mis tähendab: ühes kuhjas on 1 kivi, teises 0, ja (n, n), mis tähendab, et mõlemas kuhjas on sama arv kive, võidab mängu see, kelle kord on järjekordselt võtta. Ta võtab korraga kõik kivid (esimesel juhul reegli a), teisel juhul reegli b) alusel).

Seisus (1, 2) kaotab mängija, kes peab järjekordselt võtma. Selles on kerge veenduda, kui koostada mängu kõigi seisude tabel, mis tulenevad seisust (1, 2):

Kivide arv	Käigud *A*	*B*	Kivide arv	Käigud *A*	*B*	Kivide arv	Käigud *A*	*B*	Kivide arv	Käigud *A*	*B*
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
2	2	0	2	0	0	2	1	0	2	1	0

Tabeli esimeses veerus on näidatud kivide arv kummaski kuhjas. Numbrid *A* ja *B* all näitavad, mitu kivi jäi kuhjadesse pärast järjekordset võtmist (mängija A võtab esimesena).

Niisiis, kivide kombinatsioon (1, 2) toob kaotuse mängijale, kes järjekordselt võtab. Tähistame selle kombinatsiooni AK-ga («alustaja kaotab»).

Jätkame uurimist. Kui esimeses kuhjas on 1 kivi, teises aga vähemalt 3 kivi, siis võidab mängu alustav mängija *A* kindlasti: ta võtab teisest kuhjast kõik kivid peale kahe; see viib seisuni (1, 2), s. t. sellise kivide kombinatsioonini, mille puhul mängija *B*, kelle kord on võtta, kaotab.

Siit tuleneb, et seis $(1, n)$ osutub kombinatsiooniks AK ainult siis, kui $n = 2$; kõikidel ülejäänud juhtudel osutub ta kombinatsiooniks AV — «alustaja võidab».

Mängija, kes tahab võita, peab juhinduma printsiibist: oma võtmisega viia kivide seis kuhjades kombinatsioonini AK.

Millised kivide seisud veel peale (1, 2) on kombinatsioonideks AK?

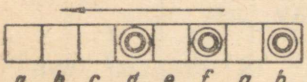
Vaadake ise üksikasjaliselt läbi kõik mängu jätkamise võimalused seisust $(2,n)$, kui $n > 1$, siis seisust $(3, n)$

jne. ja te leiate kindlasti veel terve rea kombinatsioone AK, mille teadmine on vajalik võidu saavutamiseks mängus «tsjanšitsõ».

Edasi võite proovida leida seaduspärasuse kombinatsioonide AK järjestikkuses ja üldse püüda omal jõul lõpetada tsjanšitsõ matemaatilist teooriat, kuigi see on muidugi üsna raske ja tõsine ülesanne. Selle ülesande ammendava lahenduse leidis esmakordselt alles 1930. aastal Moskva professor Igor Vladimirovitš Arnold. *

288. Kuidas võita?

Mängitakse kahekesi. Mängulauaks on kaheksaks ruuduks jaotatud pabeririba. Ruutudesse *d*, *f* ja *h* on paigutatud kabenupud (joon. 167). Mängijad tõstavad kordamööda antud kolmest kabenupust vabalt valitud nupu edasi ükskõik millisele ruudule noolega näidatud suunas. Üht nuppu võib tõsta üle teise või panna ka ruudule, kus on juba teine nupp ees. Võidab see, kes viimasena paneb kabenupu ruudule *a*. See, kes teeb selles mängus esimese käigu, võib alati võita, kui ta eelnevalt on loonud õigete käikude süsteemi. Alustajatele võitu kindlustavate käikude süsteemi loomise ma jätan lugejatele iseseisvaks uurimiseks.



Joon. 167. Mänguväli.

289. Ruutude konstrueerimine

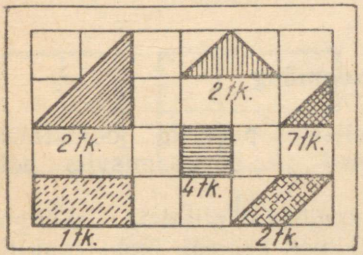
Mängijaid on kaks. Kummagi mängija jaoks valmistatakse papist kaheksateistkümnest kujundist koosnev komplekt (joon. 168). Kumbki komplekt peab olema eri värvi.

Ruudukujuline mänguväljak koosneb üheksast neljaruudulisest sektsioonist (joon. 169), kusjuures kujundite ja ruutude mõõtmed peavad sobima. Antud kujunditest saab väikese kombineerimisega moodustada mänguvälja sektsioonide suurusi ruute (s. t. neljaruudulisi). Loomu-

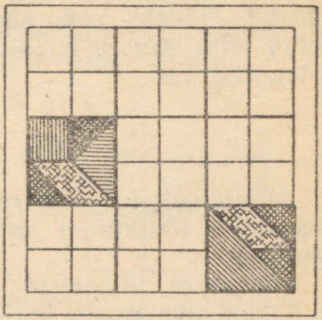
* Arnoldi uurimus on avaldatud 1936. aastal kogumikus «Математическое просвещение», nr. 8.

likult saab iga mängija konstrueerida ülimalt neli ruutu, sest tema käsutuses oleva 18 kujundi kogupindala on 17½ ruutu

Ruute konstrueeritakse vaheldumisi käies. Iga käik seisneb selles, et üks mängija asetab ühe talle kuuluva



Joon. 168. Kujundid.



Joon. 169. Mänguväli

kujundi suvalisse partneri poolt hõivamata ruutu. Ükski mängija ei tohi aga oma kujunditega hõivata üle nelja sektsiooni.

Kord juba paigaldatud kujundeid ei tohi pärast enam liigutada. Mängu mõte seisneb kujundite läbimõeldud ja otstarbekas kasutamises suurima ruutude arvu saavutamiseks.

Mäng lõpeb siis, kui kumbki partner ei saa oma ülejäänud kujunditest enam moodustada ruutu.

Võidab see, kes konstrueeris rohkem ruute.

Joonisel 169 on toodud mõned võimalikud kujundite asetusviisid.

290. Kes ütleb esimesena «sada»?

Mängijaid on kaks. Esimene mängija nimetab mõne kümmet mitteületava täisarvu, see tähendab, ta võib öelda 10 või mistahes muu suvalise kümnest väiksema arvu. Teine mängija lisab nimetatud arvule omalt poolt kah mõne kümmet mitteületava arvu ja teatab saadud summa. Uuele summale lisatakse jälle samadel tingimustel mõni üheteistkümnest väiksem arv jne. seni, kuni lõppsumma võrdub sajaga.

Esimene mängija võib öelda näiteks 7, teine 12, esimene 22 jne.

Võidab see, kes esimesena jõuab sajani.

Kuidas võita?

Kui te olete võiduvariandi avastanud, siis mõtelge ka sellele, kuidas seda mängu mängida teistel tingimustel. Näiteks võib piirliidetavaks kümne asemel olla mõni teine arv ja ka piirsummaks võib olla mõni teine etteantud arv.

291. Ruudumäng

Mänguväljaks on ruudulisele paberile joonistatud ristkülik. Ristküliku mõõtmed ja ääristamisviis pole olulised.

Mängijad tõmbavad kordamööda pliiatsiga mänguväljakule ühe ruudu külje pikkuse kriipsu. Neid ruutude külgi, mis asuvad rajajoonel, pole enam tarvis üle kriipsutada, vaid nad loetakse juba konstrueerituteks. See, kes tõmbab ruudu neljandat külge sulgeva kriipsu, võib seda ruutu lugeda oma «sõjasaagiks» ning märgib ta kas nulli või ristiga. Ühtlasi on ruudu võitjal õigus (ja kohustus) väljaspool järjekorda tõmmata veel üks kriips. Selle reegli tõttu võib mõnikord järjest võita mitu ruutu.

Mängu võidab see, kes mängu lõpuks omandab suurema ruutude hulga. Võidu suuruse määrab võidetud ja kaotatud ruutude hulga vahe.

Selle mängu teooria on tunduvalt keerulisem, kui esimesel pilgul võib näida. Kui mänguväli on suur, siis on võimalike kombinatsioonide arv nii suur, et neid on praktiliselt võimatu eelnevalt läbi uurida ja veel vähem pähe õppida.

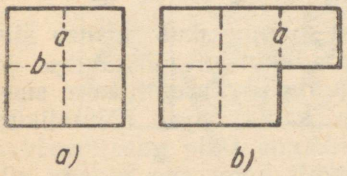
Piirdume vaid mõnede lihtsamate juhtude vaatlemisega, mille puhul saab mängu tulemust ette arvestada. Nende elementide tundmine annab teile vastase ees väikese paremuse.

1) Iga neljast väljast koosneva ruudu (joon. 170, *a*) kaotab täielikult see, kes alustab. Tõepoolest, kui käigul olev mängija tõmbab kriipsu näiteks küljele *a*, siis ta vastane suleb külje *b*, ning omades käiguõigust, võidab ka kõik ülejäänud kolm ruutu.

2) Kui kujundis on viis välja (joon. 170, *b*), siis

õige mängu juures alustaja kaotab ainult kolm välja (ühe võidab ja neli kaotab); halva mänguga võib ta aga kõik viis ruutu kaotada. Parim on alguses võita ruut käiguga *a* ja loovutada siis ülejäänud ruudud vastasele. Iga teise avakäigu korral võidab vastane kõik ruudud.

3) Kuuest ruudust koosneva ristküliku võidab see, kes esimese käiguga katab külje *a* (joon. 171).

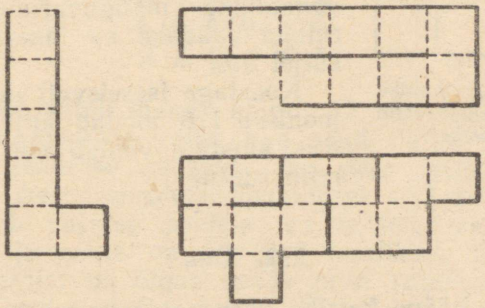


Joon. 170.



Joon. 171.

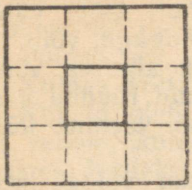
4) Ühe ruudu laiuse, kuid muidu suvalise kujuga «kanali» (joon. 172), mille sees pole tühimikke, võidab tavaliselt see, kes on käigul. Kui aga «kanal» ümbritseb



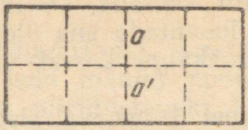
Joon. 172. Need kujundid võidab alustaja.

mõnda tühimikku (näiteks juba võidetud ruutu), siis on sellesse kujundisse kahjulik esimesena «sisse tungida» — iga käik kaotab kõik ruudud (joon. 173).

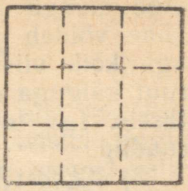
5) Kaheksaruudulise ristküliku korral (joon. 174) võib lõpptulemuseks olla viik, kui esimese käiguga katta külg *a* või *a'*. Teistsugune algus toob kindla kaotuse.



Joon. 173.



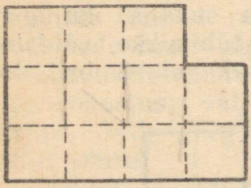
Joon. 174.



Joon. 175.

Toodud näidetest nähtub, et mänguoskus seisneb siin esialgse kujundi lihtsamateks tükkideks lõhkumises ja siis vastase sundimises kaotavatesse kujunditesse sisenemisele. «Oskaja» ise peab samal ajal võimalikult alustama ainult neid kujundeid, mis talle garanteerivad võidu. Seejuures tuleb loomulikult kogu aeg pidada silmas juba võidetud ruutude hulka.

Ülesanne. Üheksaruudulisse kujundisse (joon. 175) sisenedes võib üheksast ruudust võita vähemalt seitse ruutu (8 võita ja 1 kaotada). Leidke, millise külje katmisega tuleb sel juhul mängu alustada ja analüüsige ka võimalikke mänguvariante. Kontrolliks vaadake ka lahendust leheküljel 510.



Joon. 176. Leidke mänguplaan selle välja jaoks.

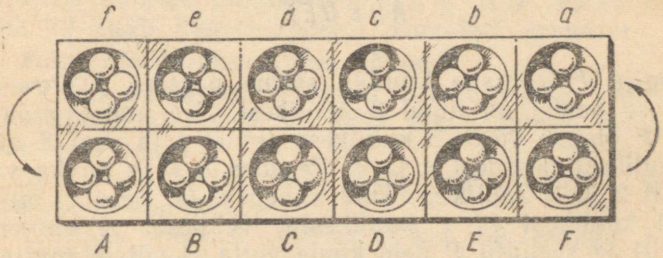
Koostage iseseisvalt mänguplaan joonisel 176 toodud kujundi jaoks. Kas alustaja võidab või kaotab ja mitu ruutu?

292. Oua

Oua on Lääne-Aafrika pärismaalaste rahvuslik mäng. Seda mängitakse laual, mis on jaotatud kaheteistkümneks pesaks (kahes reas). Igasse pessa asetatakse mängu algul 4 kuulikest (joon. 177). Aafrika lapsed lepivad sageli sellega, et teevad maa sisse 12 süvendit ja mängivad 48 kivikesega. Mängijaid on 2. Üks mängija (tähistame teda tähega P) asub ühel pool (AF) ja teine mängija (p) teisel pool (af) lauda. «Käik» seisneb selles, et mängija võtab mingist pesast välja kõik kuulikesed oma poolel ja asetab nad ühekaupa järgne-

vatesse pesadesse (järjekorras). Pesade järjekord on vastupidine kellaosuti liikumise suunale.

Kui näiteks mängija *P* oma esimest käiku tehes võtab kuulikesed välja pesast *D*, siis ta peab nad asetama ühekaupa pesadesse *E*, *F*, *a*, *b*. Vastuseks võib



Joon. 177. Oua.

mängija *p* võtta välja kõik kuulikesed pesast *a* (milles pärast *P* käiku on 5 kuulikest). Nende käikude tulemusena tekib järgmine seis:

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
5	5	5	5	6	0
4	4	4	0	5	5
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*

Kui pessa satub mängu käigus 12 või rohkem kuulikest ja kui mängija võtab nad sealt välja, siis tuleb kuulikesi pesadesse asetades see pesa tühjaks jätta.

Kui kuulikeste pesadesse jaotamisel viimane kuulikene satub vastase poolele viimasesse pesasse (*f* või *F*) ja selles on 2 või 3 kuulikest, siis käigu teinud mängijal on õigus saada need kuulikesed «saagiks». Ta saab «saagiks» ka kuulikesed eelnevatest pesadest, kui seal on 2 või 3 kuulikest, kuni sellise pesani, kus kuulikeste arv pole 2 või 3.

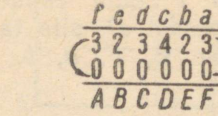
Selgitame seda reeglit näidetega:

Näide 1. Seisus

f	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*
2	1	2	3	1	2
0	0	0	0	0	6
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*

(1)

teeb mängija P käigu pesast F (teist võimalust tal pole). Saame järgmise seisu:

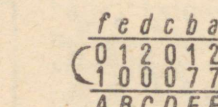


(2)

Mängija P viimane kuulike sattus pesasse f. Pesas f vastase poolel on nüüd 3 kuulikest. See annab mängijale P õiguse võtta 3 kuulikest pesast f ja veel 2 ning 3 kuulikest pesadest e ja d. Pesades b ja a on ka vastavalt 2 ja 3 kuulikest, kuid vahepeal on pesa c, milles on 4 kuulikest (s. t. kuulikeste arv pesas ei ole ei 2 ega 3) ja seetõttu P neid kuule võtta ei või. Mängija P poolt tehtud käik tõi talle saagiks 8 kuulikest.

Seisus (2) ei tohi mängija p, kui ta tahab, et mäng jätkuks, käia pesadest a ja b, kuna siis mängija P poolele jäävad tühjad pesad ja mäng katkeb.

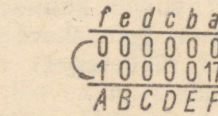
N ä i d e 2. Seisus



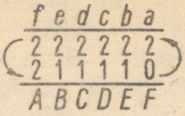
P ei saavuta midagi käiguga pesast F, kuna siis kuulike satub tema enda poolele.

Tehes käigu pesast E, mängija ei saavuta samuti midagi, olgugi et tema viimane kuulike satub pesasse f, seal ei ole pärast seda 2 ega 3 kuulikest.

N ä i d e 3. Tühi pesa ei kindlusta alati ohutut seisu. Seisus



on küll kõik mängija p poolel asuvad pesad tühjad, kuid sellegipärast võidab mängija P 12 kuulikest. Ta algab F-pesast ja tekitab järgmise seisu:



Viimane kuulike pannakse pessa *f* ja *P* võtab endale kõik 12 kuuli vastase poolel asuvatest pesadest.

Mäng lõpetatakse kahel põhjusel:

1) Kui mängijad jõuavad kokkuleppele selles, et allesjäänud kuulidest ei piisa enam mingi võiduseisu saamiseks.

2) Kui mängijal, kes peab tegema käigu, ei ole oma poolel kuulikesi.

Võitjaks loetakse mängija, kes on mängu lõpuks võitnud rohkem kuulikesi.*

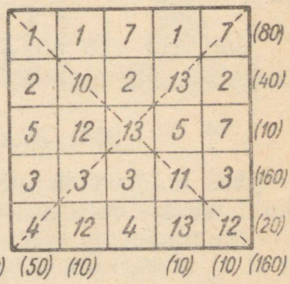
See mäng nõuab, samuti nagu malegi, mitme käigu ettemõtlemist. Oua teooriat pole keegi veel seni uurinud.

293. Matematico (itaalia mäng)

Mängu jaoks lõigake papist või paksust paberist 52 kaardikest. Igale kaardikesele kirjutage üks arv 1—13, nii et ühesuguse arvuga kaardikesi oleks 4 tükki.

Mängust võib osa võtta piiramatu hulk mängijaid.

Iga mängija võtab endale paberilehe, millele on joonistatud kahekümne viie väljaline ruut, ja pliiatsi. Üks mängijatest (mängu juht) võtab kaardipaki, segab selle, võtab esimese kaardi ja ütleb sellel oleva arvu. Iga mängija kirjutab selle arvu paberile ja nimelt mingisse kindlasse ruu-



Joon. 178. Silmade arvestamine.

* Kui mäng lõppes esimesel põhjusel, siis lauale jäänud kuulikesi lõpptulemuses kaasa ei arvestata. Kui mäng lõppes teisel põhjusel, siis eelneva kokkuleppe põhjal antakse laualejäänud kuulikesed kas sellele mängijale, kes jättis vastase ilma käiguta, või sellele mängijale kompensatsiooniks, kes jäi ilma käiguta.

dukesse (kui arv on kirjutatud, siis teda kuhugi teise ruutu tõsta ei tohi). Mängu juht ütleb nüüd järgmisel kaardikesel oleva arvu, mängijad kirjutavad selle jällegi mingisse ruutu ja nii läheb mäng edasi.

Mäng lõpeb, kui kõik 25 ruutu on arve täis. Iga mängija saavutust hinnatakse teatud punktide arvuga, mis sõltub sellest, kuidas arvud on ruutudesse paigutatud. Võitjaks loetakse mängija, kellel on kõige rohkem punkte.

Punktide arvestamine toimub järgmise tabeli kohaselt:

Arvude kombinatsioon	Reas või veerus	Diagonaalil
Kahe ühesuguse arvu eest	10 punkti	20 punkti
Kahe ühesuguste arvude paari eest . .	20 „	30 „
Kolme ühesuguse arvu eest	40 „	50 „
Kolme ühesuguse arvu ja ühesuguste arvude paari eest	80 „	90 „
Nelja ühesuguse arvu eest	160 „	170 „
Viie järjestikuse arvu eest (järjekord pole oluline)	50 „	60 „
Kolme 1 ja kahe 13 eest	100 „	110 „
Arvude 1, 13, 12, 11 ja 10 eest (järjekord pole oluline)	150 „	160 „
Nelja 1 eest	200 „	210 „

Joonisel 178 on antud näide arvude paigutusest ja punktide arvestamisest.

294. Maagiliste ruutude mäng

See mäng võib olla meelelahutuseks ühele inimesele, kuid temast võib osa võtta ka piiramatu hulk mängijaid

Iga mängija võtab paberilehe ja joonistab sellele 4×4, 5×5 või 6×6 jne. väljalise ruudu (ruutude mõõtmetes tuleb eelnevalt kokku leppida). Igaks mänguvooruks antakse teatud hulk täisarve, millest igaüht tuleb kasutada v ä h e m a l t ü k s k o r d, paigutades neid mänguväljale nii, et igas reas ja igas veerus olevate arvude summad oleksid võrdsed, s. t. moodustaksid maagilise ruudu. Rangelt võttes on see ruut küll ainult peaaegu maagiline, sest tõelisel maagilisel ruudul on ka diagonaalide summad konstantsed (vt. XII peatükk).

Mängu jaoks on tingimusi veidi lõdvendatud ja sel kujul on ta jõukohane igaühele, kes oskab liita ja lahutada.

Lahendamise käigus võib arve tõsta ühest kohast teise ja võib ka komplekti üht arvu asendada selle komplekti mõne teise arvuga. Arve on kõige parem kirjutada ruutudesse õrnalt pliiatsiga ja vajaduse korral kasutada kustutuskummi.

Arvude komplekt, millest me ruutu koostame, ei tohi olla eriti suur, sinna võivad näiteks kuuluda kõik ühekohalised arvud või ka osa neist.

Mitme mängust osavõtja korral võib olla kaks võitjat: üks ülesande kiireima lahendajana ja teine suurima konstantse summaga ruudu konstrueerijana.

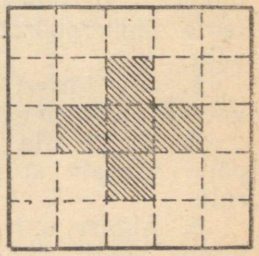
N ä i d e 1. Olgu meil mänguväljaks ruut 5×5. Antud arvud olgu: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Iga arvu vähemalt üks kord kasutades tuleb koostada maagiline ruut. Üks võimalik lahendus on toodud joonisel 179. Igas reas ja veerus olevate arvude summa on 30.

6	8	7	0	9
6	5	8	9	2
9	2	7	9	3
5	7	7	4	7
4	8	1	8	9

Joon. 179.

7	3	4	2
3	4	4	5
5	4	4	3
1	5	4	6

Joon. 180.



Joon. 181.

N ä i d e 2. Mänguväljaks olgu ruut 4×4. Valitud arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7. Koostage maagiline ruut lisatingimusega, et mänguvälja nelja keskmise ruudu summa võrduks iga rea või veeru summaga.

Üks võimalik lahendus on toodud joonisel 180.

T e e m a m ä n g u k s. Mänguväljaks on ruut 5×5. Antud on arvud: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8.

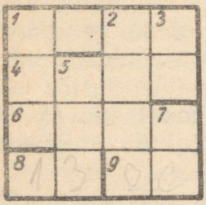
Koostage maagiline ruut järgmisi lisatingimusi arvestades:

a) viirutatud ruutudes (joon. 181) olevate arvude summa peab võrduma iga rea või veeru summaga;

b) numbreid 0 ja 6 tohib kasutada ainult üks kord.

295. Arvristsõnad

Harilike ristsõnade eeskujul võib koostada ka arvristsõnu. Iga otsitava arvu esimene number asub nummerdatud ruudus ja viimane number asub vahetult tõkestava rasvase joone ees. Arve loeme siin nagu ristsõnadeski piki horisontaale (vasakult paremale) ja piki vertikaale (ülalt alla). (Edaspidi kasutame lühiduse mõttes sõnu «põiki» ja «alla»). Igasse ruutu võib kirjutada üheainsa numbri.



Joon. 182.

Toome näiteks mõned arvristsõnad.

Ülesanne 1. Täitke kõik joonisel 182 toodud ruudu väljad arvudega, mis rahuldavad järgmisi nõudeid:

Põikread

1. Neljast järjestikusest numbrist koosneva arvu ja tema ümberpööratud arvu vahe.

4. Arv järjestikku kasvavate numbritega.

6. Nr. 3 alla ja nr. 8 põiki asuvate arvude korrutis.

8. Algarv, s. t. arv, mis jagub ainult ühe ja iseendaga.

9. Kolmeteistkümnega jaguv arv.

Püstread

1. Nr. 1 põiki asuva arvu ühe numbri kuup.

2. Selle arvu kolm viimast numbrit ühtivad nr. 1 põiki ja nr. 7 alla asuvate arvude korrutise viimaste numbritega.

3. Arvude nr. 6 põiki ja nr. 8 põiki jagatis.

5. Koosneb kolmest järjestikusest numbrist.

7. Nr. 3 alla teguri ja nr. 1 põiki teguri korrutis.

Nagu ristsõnades, nii ka siin tuleb alustada kõige lihtsamast (ilmsemast) küsimusest. Nii näiteks saame me väikese arvutuse järel leida nr. 1 põiki. Kuna ümberpööratud arv on küsimuse põhjal originaalist väiksem, siis originaali numbrid moodustavad ilmselt kahaneva jada:

$$a,\ a-1,\ a-2,\ a-3.$$

Neid tähti numbriteks lugedes kirjutame selle neljakohalise arvu üles aritmeetilisel viisil:

$[a]\ [a-1]\ [a-2]\ [a-3]$.

Leiame selle arvu ja ümberpööratud arvu vahe:

$$\begin{array}{r} [a]\ [a-1]\ [a-2]\ [a-3] \\ -\ [a-3]\ [a-2]\ [a-1]\ [a] \\ \hline \end{array}$$

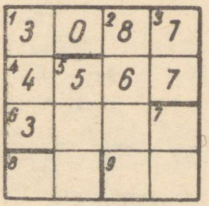
$a-3$ ühelist on vähem kui a ühelist; laename ühe kümnelise ja peenestame ühelisteks, siis $(10+a-3)-a=7$. Kümnelisi oli $a-2$, ühe laenasime, tähendab, neid jäi alles $a-3$, mis on vähem kui $a-1$. Laename ühe sajalise ja peenestame ta kümnelisteks, siis $(10+a-3)-(a-1)=8$. Sajalisi jäi alles parajasti niipalju, kui on vaja lahutada, tähendab vahe võrdub nulliga ja tuhandeliste kohale tuleb $a-(a-3)=3$.

Lõplikult:

$$\begin{array}{r} [a]\ [a-1]\ [a-2]\ [a-3] \\ -\ [a-3]\ [a-2]\ [a-1]\ [a] \\ \hline 3\qquad 0\qquad 8\qquad 7 \end{array}$$

Kirjutame selle arvu kujundi esimesse ritta ((joon. 183). Nüüd on kerge vastata ka küsimusele nr. 1 alla. Vastavalt nõudele peab seal asuma kas 3, 7 või 8 kuup. Sobib arvu 7 kuup 343. Nõuet nr. 4 põiki rahuldab ilmselt arv 4567. Nüüd selgus ka nr. 3 alla.

Ülejäänud arvud leidke iseseisvalt.



Joon. 183.

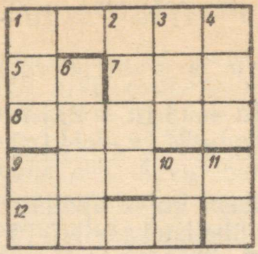
Ülesanne 2. Täitke kõik joonisel 184 toodud ruudu väljad arvudega, mis rahuldavad järgmisi nõudeid:

Põikread

1. Arv, mille kõik numbrid on erinevad, kusjuures tal pole ühiseid numbreid

Püstread

1. Esimene number on võrdne kahe järgmise numbri summaga.



Joon. 184.

arvuga nr. 8 põiki, millel samuti on kõik numbrid erinevad.

5. Arvu nr. 3 alla suurim tegur.

7. Arvu 3 alla ümberpööratud kuju.

8. Vt. nr. 1 põiki.

9. Üks üheksandik arvude nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki summast.

12. Kolme kahekohalise algarvu korrutis, kusjuures kaks neist teguritest on ümberpööratud arvu nr. 6 alla teguriteks.

2. Kaheksateistkümnenda sajandi teise poolde kuuluv aasta.

3. Arvude nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki vahe.

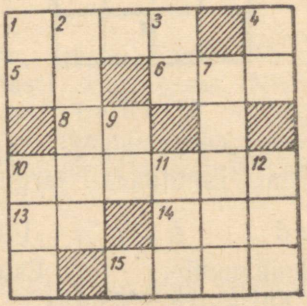
4. Arvu viimane number võrdub ta kahe esimese numbri korrutisega.

6. Ümberpööratud arv jagub arvuga nr. 3 alla ja koosneb kolmest kahekohalisest algarvulisest teguritest.

9. Üks ümberpööratud arvu nr. 6 tegureid.

10. Sama, mis nr. 5 põiki.

11. Vähim arvu nr. 3 alla tegur.



Joon. 185.

Ülesanne 3. Täitke kõik joonisel 185 kujutatud ruudu väljad arvudega, mis rahuldavad järgmisi nõudeid:

Põikread

1. Mingi algarvu ruut.
5. Pool arvude nr. 10 alla ja nr. 11 alla suurimast ühisjagajast.
6. Mingi ruutarvu kuup.
8. Algarv, mille ruut asub nr. 1 põiki.
10. Teatava arvu ruut. See ruut on sümmeetriline arv, s. t. nii algusest kui lõpust lugedes saame sama tulemuse.
13. Ühe võrra suurem kui nr. 9 alla.
14. Viis korda suurem kui nr. 8 põiki.
15. Nr. 13 põiki asuvast arvust ühe võrra suurema arvu ruut.

Püstread

1. See arv on 8 võrra väiksem arvust, mis annab 2, 3, 4, 5 ja kuuega jagamisel vastavalt jäägid 1, 2, 3, 4 ja 5.
2. Ta ristsumma on 29.
3. Algarv.
4. Algarv, mis on arvu nr. 11 alla teguriks.
7. Neli kümnendikku arvude nr. 15 põiki ja nr. 13 põiki korrutisest.
9. Arvu nr. 4 alla kahekordne.
10. Ümberpööratud arv nr. 11 alla.
11. Ruutjuur arvust nr. 10 põiki.
12. Arv, mis jagub nr. 13 põiki suurima teguriga.

B. TRIKID

Aritmeetiliste trikkide põhiteemaks on mõeldud arvude või nendega teostatud tehete tulemuste mõistatamine. Nende trikkide kogu «saladus» seisab selles, et «mõistataja» tunneb ja oskab kasutada arvude spetsiaalseid omadusi, arvude «mõtleja» aga neid omadusi ei tunne.*

Iga triki matemaatiline huvitavus peitub tema teoreetiliste aluste «paljastamises», mis enamasti on üsna lihtsad, kuid mõnikord küllalt kavalalt maskeeritud. Iga triki teostatavust saab tõestada ükskõik millise näitega, kuid enamiku aritmeetiliste trikkide põhjendamiseks on

* Palju matemaatilisi trikke või materjali nende loomiseks leidub ka selle raamatu teistes peatükkides. Kümnendsüsteemist erinevatel arvusüsteemidel põhinevaid trikke võite leida J. I. Perelmani raamatust «Huvitav aritmeetika».

kõige mugavam siirduda algebrasse. Esialgu te võite trikkide tõestused ära jätta ja piirduda ainult nende sisu omandamisega, et neid siis demonstreerida oma sõpradele. Kuid ka tõestused ei tee neile, kes armastavad nuputada ja tunnevad algebra algmõisteid, raskusi.

Siin me esitame ainult trikkide põhiraamistiku, sest nende praktiline kujundamine võib olla erinev sõltuvalt esitamise kohast ja tingimustest ning ka teie enda maitsest, teravmeelsusest ja fantaasiast.

296. Mõeldud arvu mõistatamine (7 trikki)

Esimene trikk. Mõtelge üks arv. Lahutage sellest 1. Jääk korrutage kahega ja liitke tulemusele esialgu mõeldud arv. Teie ütelge lõpptulemus ja mina ütlen, millise arvu te valisite.

Mõistatamise viis. Liitke teile öeldud arvule 2 ja jagage saadud summa kolmega. Jagatis annabki mõeldud arvu.

Näide. Olgu mõeldud arv 18; $18 - 1 = 17$; $17 \times 2 = 34$; $34 + 18 = 52$. Mõistatame $52 + 2 = 54$; $54 : 3 = 18$.

Tõestus. Tähistame mõeldud arvu tähega x. Teostame nõutud tehted:

$$x - 1,\ 2(x - 1),\ 2(x - 1) + x.$$

Tulemus:

$$2x - 2 + x = 3x - 2.$$

Sellele kaht liites ja tulemust kolmega jagades leiamegi mõeldud arvu x.

Teine trikk. Soovitage oma sõbral mõelda mingisugune arv. Siis käskige tal seda arvu mõned korrad järgimööda korrutada ja jagada mitmesuguste teie poolt vabalt valitud arvudega. Las ta jätab tehete tulemuse enda teada.

Pärast mõnda korrutamist ja jagamist paluge, et sõber jagaks tulemuse arvuga, mille ta valis ja seejärel liidaks jagatisele mõeldud arvu. Lõpuks nimetagu ta teile oma tulemus. Selle tulemuse põhjal te võite sõbrale kohe öelda, millise arvu ta valis.

Selle triki saladus on väga lihtne.

Mõistataja peab ka ise vabalt valima ühe arvu (näiteks arvu 1) ja tegema sellega läbi kõik ta enda poolt

soovitatud jagamised ja korrutamised. Sel hetkel, kui ta laseb sõbral tulemust jagada algul valitud arvuga, saavad nad mõlemad tulemuseks ühe ja sama arvu, hoolimata sellest, et neil alguses olid mõlemal mõeldud erinevad arvud. Pärast seda tuleb mõistatajal talle teatatud arvust lahutada oma tulemus. Saadud vahe võrdubki otsitava arvuga.

Näide. Olgu mõeldud arv 7, korrutame selle kõigepealt 12-ga. Tulemuse (84) jagame kahega. Saadud arvu (42) korrutame viiega ning jagame tulemuse kolmega. Saadakse 70 ning pärast valitud arvuga jagamist ja sama arvu liitmist saame 17.

Samal ajal te endamisi toimisite järgmiselt: te valisite arvu 1, korrutasite 12-ga, jagasite 2-ga ning saite 6. Selle arvu korrutate 5-ga ja saate 30, jagate selle 3-ga, saate 10. Lahutades 17-st 10 leiategi otsitava arvu 7.

Märkus 1. Efekti suurendamiseks te võite sõbrale anda võimaluse ise valida arve, millega ta tahaks korrutada ja jagada saadud tulemusi ainsa tingimusega, et ta iga kord ütleks, millised need arvud on.

Märkus 2. Korrutamised ja jagamised ei pea tingimata vahelduma. Algul võib lasta mõned korrad järjest korrutada ja siis mõned korrad järjest jagada ehk vastupidi.

Tõestage algebra abil, et trikk õnnestub iga suvaliselt valitud arvu puhul.

Kolmas trikk. Lepime kokku nimetada paaritu arvu suuremaks pooleks seda osa, mis on teisest osast ühe võrra suurem. Nii näiteks on arvu 13 suuremaks pooleks 7, arvu 21 suuremaks pooleks 11.

Valige mõttes üks arv. Liitke talle pool temast endast või kui ta on paaritu arv, siis ta suurem pool. Sellele summale liitke jällegi juurde pool temast või kui see arv on paaritu, siis suurem pool. Jagage saadud arv üheksaga, teatage kui suur on jagatis ja kui jagamisel tekib jääk, siis ütelge, kas ta on viiest suurem või väiksem või võrdne viiega.

Sõltuvalt saadud vastusest on valitud arv võrdne

neljakordse jagatisega
- kui jääki ei ole;
- + 1, kui jääk on viiest väiksem;
- + 2, kui jääk on viis;
- + 3, kui jääk on viiest suurem.

Näide. Olgu valitud arv 15. Nõutud tehteid teostades saame: $15 + 8 = 23$, $23 + 12 = 35$, $35 : 9 = 3$ (jääk 8). Meile öeldi: «Jagatis on 3, jääk on viiest suurem.»

Mõistatame: $3 \cdot 4 + 3 = 15$, tähendab valiti arv 15.

Tõestage ka see trikk. Tõestusmeetodi otsimisel soovitan silmas pidada, et iga täisarv, tähendab ka valitud arv, peab omama üht järgnevatest kujudest:

$$4n,\ 4n + 1,\ 4n + 2,\ 4n + 3,$$

kus tähele n võib anda väärtusi 0, 1, 2, 3, 4, ...

Neljas trikk. Algul toimige nii nagu eelmises trikiski. See tähendab, laske sõbral valida mingi arv, liita sellele ta pool või suurem pool ja siis uuesti liita summale pool või suurem pool. Kuid nüüd, selle asemel et lasta jagada üheksaga, paluge, et sõber loetleks teile järkude kaupa kõik tulemuse numbrid peale üheainsa, ainsa tingimusega, et mõistatajale teadmatuks jääv number ei oleks null. Peale selle on vajalik, et sõber nimetaks meile tundmatuks jäänud numbri ja ütleks, kas ja kunas tal tuli liita arvu suuremat poolt. Valitud arvu leidmiseks tuleb kõik loetletud numbrid kokku liita ja veel lisada

0, kui ühtegi korda polnud vaja liita arvu suuremat poolt;

6, kui ainult esimesel korral tuli liita arvu suurem pool;

4, kui ainult teisel korral tuli liita arvu suurem pool;

1, kui mõlemal korral tuli liita arvu suurem pool.

Edasi tuleb saadud summa lahutada lähemast suuremast üheksaga jaguvast arvust. Leitud vahe võrdubki meile ütlemata jäänud arvuga. Nüüd, teades kõiki tulemuse numbreid ja seega ka kogu tulemust, on kerge leida ka valitud arve. Selleks jagame tulemuse üheksaga, korrutame jagatise neljaga ja sõltuvalt jäägi suurusest liidame korrutisele kas 1, 2 või 3.

Näide 1. Mõeldud oli arv 28. Peale kõigi nõutud tehete sooritamist, saadi arv 63. Meie eest varjati numbrit 3. Me täiendame öeldud kümneliste hulga 6 üheksani ja saamegi vahena ühelisteks 3. Seega on tulemus 63 leitud. Valitud arv oli $(63 : 9) \cdot 4 = 28$.

Näide 2. Valiti arv 125. Peale kõigi nõutud tehete sooritamist saadi arv 282. Oletame, et meie eest varjati kaht sajalist. Meile teatati, et arvus on 8 kümnelist ja 2 ühelist, ning et suuremat poolt tuli liita esimesel korral.

Kõigepealt leiame peidetud sajaliste arvu: $8+2+6=16$; $18-16=2$.

Valitud arvu leidmine on nüüd lihtne: $282:9=31$ (jääk 3); $31\cdot 4+1=125$.

Näide 3. Oletame, et teile öeldi: «Lõpptulemuses on kolm kohta, kusjuures esimene number on 1, viimane on 7 ja suuremat poolt liita mõlemal korral.»

Mõistatame ütlemata jäänud arvu: $1+7+1=9$.

Saadud arv jagub ise üheksaga. Kuna nulli ei võinud varjata, siis peab see number olema üheksa. Kogu tulemus oli seega 197. Jagame 197 üheksaga, saame 21 (jääk 8). Tähendab valitud arv oli $21\cdot 4+3=87$.

Tõestage see trikk. See pole raske, eriti kui te tegite endale eelmise triki olemuse selgeks.

Viies trikk. Valige mõttes mingi arv ja tõstke ta ruutu (arvutuste lihtsustamiseks valige sajast väiksem arv). Nüüd liitke valitud arvule ükskõik milline arv (ainult öelge, milline) ja tõstke ka saadud summa ruutu. Leidke nende ruutude vahe ja teatage mulle tulemus.

Valitud arvu mõistatamiseks tuleb nimetatud vahe jagada vahepeal liidetud arvu kahekordsega ja jagatisest lahutada pool liidetud arvust.

Näide. Olgu mõeldud arv 53. $53^2=2809$. Liideti arv 6: $53+6=59$; $59^2=3481$; $3481-2809=672$. See tulemus tehti teatavaks.

Valitud arvu leidmiseks jagame 672 12-ga, saame 56. Edasi $6:2=3$, $56-3=53$.

Mõeldud arv oli 53.

Leidke tõestus.

Kuues trikk. Paluge, et te sõber valiks mõne kuue ja kuuekümne vahel asuva arvu. Jagagu ta algul seda arvu kolmega, siis sedasama arvu neljaga ja lõpuks viiega, ning teatagu iga kord saadud jäägid. Spetsiaalset valemit kasutades on teil nende jääkide põhjal kerge leida valitud arvu.

Olgu jäägid r_1, r_2 ja r_3. Pidage nüüd hoolega meeles niisugust valemit:

$$S=40r_1+45r_2+36r_3.$$

Kui $S=0$, siis mõeldud arv on 60. Kui $S\neq 0$, siis jagame teda kuuekümnega ja saadud jääk annabki meile mõeldud arvu. Teie sõbral pole kindlasti kuigi kerge saada triki jälile.

N ä i d e. Mõeldi arv 14. Teatati jäägid: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$.

Leiame:

$S = 40 \cdot 2 + 45 \cdot 2 + 36 \cdot 4 = 314$; $314 : 60 = 5$ (jääk 14). Tähendab valiti arv 14.

Tõestuseta toodud valemit ei tohi pimesi uskuda, vaid teil tuleb veenduda, et ta annab tingimustes lubatud juhtudel tõepoolest alati õige tulemuse.

Esinege oma sõprade ees alles siis, kui te valemi õigsuses olete veendunud.

Seitsmes trikk. Kui te olete kõigi nende trikkide olemuse endale selgeks teinud, siis te võite neid mitut moodi teisendada, mõelda välja uusi trikke arvude mõistatamiseks, mitmekesistada sõpradele esitatavaid küsimusi.

Vaatleme näitena üht võimalikku arendusvarianti. Eelmises trikis toimus valitud arvu mõistatamine kolmega, neljaga ja viiega jagamisel tekkivate jääkide abil. Asendame need arvud uute jagajatega, näiteks kolme, viie ja seitsmega. Sel korral muutuvad arvude valikupiirid, mis hõlmavad nüüd kõik arvud seitsme ja saja vahel. Loomulikult muutuvad sellega ka lahendusvalemi kordajad. Proovige neid ise leida.

V a s t u s: $S = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3$, kus r_1, r_2 ja r_3 on vastavalt kolme, viie ja seitsmega jagamisel tekkivad jäägid. Mõeldud arvu leiate suuruse S 105-ga jagamisel tekkiva jäägina.

297. Arvutustulemuste mõistatamine ilma midagi küsimata

Üsna kerge on konstrueerida arvutuseeskirju, mis annavad ühe ja sama tulemuse, sõltumatult sellest, millised olid lähtearvud. Siit järeldub võimalus terve rea huvitavate trikkide konstrueerimiseks, milles me mõistatame arvutustulemused ilma et me arvu mõtlejalt midagi küsiksime.

Kaks järgmist trikki illustreerivad seda väidet. Neid trikke võib läbi viia nii ühe kui ka suvalise hulga osavõtjate korral.

Esimene trikk. Paluge, et valitud arvu k o r r u t a t a k s teie poolt nimetatud suvaliselt valitud arvuga, ja et korrutisele l i i d e t a k s teie poolt suvaliselt valitud

arv. Saadud summat paluge jagada teie poolt valitud kolmanda suvalise arvuga.

Te ise jagate sellal esimese teie poolt nimetatud arvu kolmandaga ja palute siis, et sõber lahutaks saadud jagatisest teie jagatisega võrduva arvu kordselt mõeldud arvu. Selle viimase tulemuse ennustamine ei tekita teile erilisi raskusi. Ta on võrdne teie poolt valitud teise arvu ja kolmanda arvu jagatisega.

Näide. Oletame, et valiti arv 6. Te palute seda arvu korrutada neljaga (nelja peate meeles, kui esimese arvu). Saadi arv 24. Te palute nüüd liita arv 15 (teine arv). Saadi 39. Nüüd te palute seda arvu jagada kolmega (kolmas arv). Saadi 13.

Te ise arvutate sellal peast $4 : 3 = 1\frac{1}{3}$ ja palute nüüd sõpra, et ta lahutaks saadud jagatisest mõeldud arvu ja veel ühe kolmandiku sellest. Ta lahutab kuue ja siis veel kaks ning saab $13 - 6 - 2 = 5$. Te jagate sellal teise enda poolt valitud arvu kolmandaga $(15 : 3 = 5)$ ja teatate, et sõber sai tulemuseks viie.

Tõestage, et selline tulemuste ühtelangemine pole mingi juhus, vaid järeldub kõigest eelnevast paratamatult.

Teine trikk. Kirjutage paberitükile mingi 1 ja 50 vahel asuv arv, nii et teised seda arvu ei näeks.

Nüüd las iga osavõtja kirjutab üles mingi 50 ja 100 vahel asetseva arvu ja sooritab teile näitamata järgmised tehted:

1) liidab oma arvule $99 - x$, kus x on teie poolt paberitükile kirjutatud arv (selle vahe te leiate ise peast ja nimetate osavõtjaile ainult lõpptulemuse);

2) kustutab saadud arvu vasakpoolseima numbri ja liidab selle ülejäänud arvule juurde;

3) lahutab saadud arvu algul valitud arvust.

Kõik osavõtjad saavad tulemuseks ühe ja sama arvu ning just selle, mille te paberitükile kirjutatuna ära peitsite.

Näide. Te kirjutasite üles ja peitsite arvu 18. Oletame, et üks osavõtja kirjutas üles arvu 64. Te palute, et ta liidaks sellele $99 - 18 = 81$. Ta saab: $64 + 81 = 145$.

Nüüd kustutab ta numbri 1 ja liidab ülejäänud arvule: $45 + 1 = 46$. Mõeldud ja saadud arvu vahe: $64 - 46 = 18$ ühtib tõepoolest teie poolt paberitükile kirjutatud arvuga.

Nagu ikka, püüdke endale kõigepealt triki matemaatilised alused selgeks teha.

298. Kui palju keegi võttis

Esimene osavõtja võtku laualt neljakaupa mingeid esemeid (tuletikke, münte jne.). Teine osavõtja võtku neid esemeid niisama palju kordi seitsmekaupa. Kolmas osavõtja võtku neid esemeid niisama palju kordi kolmeteistkümnekaupa.

Edasi andku kolmas osavõtja oma esemetest esimesele ja teisele osavõtjale niipalju esemeid, kui neil juba on. Siis andku teine osavõtja kolmandale ja esimesele osavõtjale niipalju esemeid kui neil pärast eelmist jagamist oli. Lõpuks toimigu samuti ka esimene.

Küsige ükskõik milliselt osavõtjalt, mitu eset tal on. Nimetatud arvu kahega jagades leiate, mitu eset võttis algul esimene osavõtja. Esimese osavõtja esemete hulka neljaga jagades ja seitsmega korrutades saame alguses teise osavõtja käes olnud esemete arvu. Kolmas osavõtja aga võttis laualt sama palju kordi 13 eset, kui teine võttis 7 eset.

Seda trikki on väga kerge põhjendada.

299. Mitme katsega...

Valige mõttes kaks positiivset täisarvu. Liitke nende arvude summale nende arvude korrutis ja öelge mulle tulemus. Just nagu sportlastel on kõrgushüppes antud iga kõrguse ületamiseks kolm katset, nii proovin ka mina neid valitud arve mõistatada kiiresti, kuigi võib-olla mitte esimese katsega.

Meetod on lihtne, kuigi mitte just silmanähtav. Ma liidan teie tulemusele ühe, jaotan saadud arvu kahe teguri korrutiseks ning lahutan siis kummastki tegurist ühe.

Näide 1. Mulle öeldi tulemus: 34. Ma arvutan järgmiselt: $34 + 1 = 35$; $35 = 5 \cdot 7$ aga ka $35 \cdot 1$. Järelikult on mõeldud arvud kas 4 ja 6 või 34 ja 0.

Ma võin seda trikki esitada ka veidi teisel kujul. Nimelt ma palun, et te lahutaksite valitud arvude korrutisest nende arvude summa. Sel juhul liidan ma jälle teie tulemusele ühe, lahutan saaduse kahe teguri korrutiseks ja liidan kummalegi tegurile ühe.

Näide 2. Tulemus oli 64. Ma arvutan järgmiselt: $64 + 1 = 65$; $65 = 5 \cdot 13$ või $65 \cdot 1$. Järelikult on mõeldud arvud kas 6 ja 14, või 66 ja 2.

Tõestage selle mõistatamisviisi õigsus!

300. Kelle käes on kumm ja kelle käes on pliiats?

Pöörake oma sõpradele selg ja paluge, et kaks neist (olgu need Ženja ja Šura) võtaksid laualt pliiatsi ja kummi. Edasi ütelge: «Pliiatsi võtjale ma määran arvu 7 ja kummi võitjale arvu 9.» (Arvud võivad olla ka teistsugused, kuid üks neist peab kindlasti olema *algarv*, teine aga esimese arvuga mittejaguv *kordarv*.)

«Ženja, sina korruta oma arvu kahega ja Šura, sina korruta oma arvu kolmega!» (Üks nendest arvudest peab täisarv kordi kuuluma teie poolt nimetatud kordarvu; nagu näiteks üheksa jagub kolmega; teine arv aga peab nimetatu suhtes olema ühistegurita, nagu näiteks 3 ja 2.)

«Liitke oma tulemused kokku ja ütelge, kui palju te saite! Või ütelge, kas see summa jagub ilma jäägita kolmega.» (Kontrollime jaguvust selle arvuga, mis on meie poolt määratud kordarvu teguriks.) Seda teada saades te võite kohe öelda, kes võttis pliiatsi, kes kummi.

Tõepoolest, kui saadud summa jagub kolmega, siis see tähendab, et kolmega korrutati temaga mittejaguvat arvu 7. Teades seda, kes korrutas oma arvu kolmega (Šura) ja teades, et arv 7 oli määratud pliiatsi võtjale, võite te kohe öelda, et pliiats on Šura käes. Vastupidi, kui saadud summa ei jagu kolmega, siis see tähendab, et kolmega korrutati temaga jaguvat arvu, s. t. üheksat. Sel juhul on Šura käes kumm.

Kuidas te seda trikki põhjendate?

301. Kolme mõeldud liidetava ja summa mõistatamine

Paluge, et teie külalised kirjutaksid üles 3 kuueküm-nest väiksemat järjestikust täisarvu (näiteks 31, 32, 33). Veel paluge, et nad ühe sajast väiksema ja kolmega jaguva arvu nimetaksid kõigile kuuldavalt (näiteks 27). Paluge, et nad liidaksid kõik 4 arvu kokku ($31 + 32 + 33 + 27 = 123$) ja korrutaksid saadud summa kuuekümne seitsmega ($123 \times 67 = 8241$). Laske oma külalistel kuuldavalt nimetada tulemuse 2 viimast numbrit. Nüüd võite te otsekohe nimetada kogu tulemuse ja ka kolm mõeldud arvu.

Mõistatamise viis. Jagage 27 kolmega, saate 9. Üheksale üht liites saate lahenduse võtmena arvu

kümme. Seda arvu teile teatatud viimasest kahest numbrist lahutades (41 — 10 = 31) leiame v ä h i m a kolmest mõeldud arvust. Arvu 41 kahega korrutades saame 82 (tulemuse 2 esimest numbrit). Selle mõistatamisviisi põhjendamine on kaunis huvitav ülesanne, proovige sellega hakkama saada.

302. Korraga mitme mõeldud arvu leidmine

Leidub päris lihtne võte mitme mõeldud ühekohalise arvu mõistatamiseks. Selleks tuleb esimene mõeldud arv korrutada kahega ja korrutisele liita viis. Tulemus tuleb korrutada viiega ja korrutisele liita kümme. Tulemusele tuleb liita teine mõeldud arv ja kõik korrutada kümnega. Saadud tulemusele tuleb liita kolmas mõeldud arv ja jälle korrutada kümnega, siis liita neljas mõeldud arv ja jälle korrutada kümnega ja nii edasi kuni ka viimane mõeldud arv on juurde liidetud. Viimane summa ja mõeldud arvude hulk paluge endale teatada.

Mõeldud arvude leidmiseks tuleb sellest summast lahutada:

35, kui mõeldi 2 arvu;
350, kui mõeldi 3 arvu;
3500, kui mõeldi 4 arvu;
. . . . . .

Vahe numbrid annavadki meile mõeldud arvud.

N ä i d e. Mõeldi arvud 3, 5, 8 ja 2. Korrutame neist esimese kahega: $3 \cdot 2 = 6$; liidame viis: $6 + 5 = 11$; korrutame viiega: $11 \cdot 5 = 55$; liidame eelmisele tulemusele 10: $55 + 10 = 65$; nüüd liidame teise mõeldud arvu: $65 + 5 = 70$; korrutame kümnega: $70 \cdot 10 = 700$; liidame kolmanda mõeldud arvu: $700 + 8 = 708$ ja edasi: $708 \cdot 10 = 7080$; $7080 + 2 = 7082$. Lõppsummast lahutame 3500 ja saame 3582. Selle vahe numbrid ongi mõeldud arvud.

Tõestage see arvude mõistatamise viis.

M ä r k u s. Seda trikki võib vormistada, kui täringutega heidetud silmade mõistatamist. Hästi sobib see võti mõistatamiseks ka juhul, kui me tahaksime leida, millise inimese millise käe millise sõrme millisel liikmel asub sõrmus. Viimasel juhul tuleb kõik osavõtjad nummerdada ja kokku leppida, kumba kätt lugeda esimeseks, kumba

teiseks. Tuleb nummerdada kõik sõrmed ja sõrmede liikmed. Oletame näiteks, et osavõtja number neli pani sõrmuse teise käe viienda sõrme kolmandale liikmele.

Te palute, et sõrmuse võtja korrutaks oma järjekorranumbri kahega (saame kaheksa), liidaks viis, korrutaks viiega, liidaks kümme, liidaks käe numbri, korrutaks kümnega, liidaks sõrme numbri, korrutaks jälle kümnega, liidaks sõrmeliikme numbri ja teataks lõppsumma.

Selle näite korral öeldakse teile 7753. Te lahutate 3500 ja saate 4253. Selle arvu numbrid jutustavad järgmist: sõrmus asub neljanda osavõtja teise käe viienda sõrme kolmandal liikmel.

303. Kui vana te olete?

«Te ei taha öelda? Noh olgu, ütelge ainult, missuguse arvu te saate, kui te enda vanusest 10 korda suuremast arvust lahutate mingi ühekohalise arvu ja 9 korrutise. Tänan teid, nüüd ma tean, kui vana te olete.»

M õ i s t a t a m i s e v i i s. Eraldage teile öeldud tulemusest ühelised ja liitke ülejäänud arvule.

N ä i d e. Kümnekordne vanus olgu 170. Sellest lahutati näiteks 27 ning teatati teile tulemus — 143.

Leiame vanuse: $14 + 3 = 17$ aastat.

Lihtne ja efektne! Sissekukkumise vältimiseks mõtelge siiski läbi selle triki põhimõtted.

304. Vanuse mõistatamine

Vahelduseks te võite lasta korrutada vanuse kahega, liita viis, ning korrutada saadud summa jälle viiega. Tulemus paluge endale teatavaks teha. Selle viimane number on ilmselt viis. Otsitava vanuse leidmiseks tuleb see 5 kõrvale jätta ja ülejäänud arvust lahutada 2.

N ä i d e. Olgu kellegi vanus 21 aastat. Ta teostab nõutud tehted:

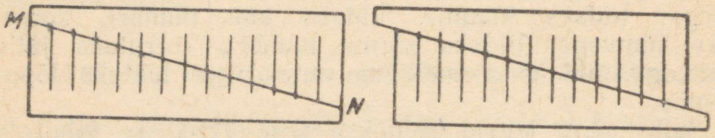
$$21 \cdot 2 = 42,\ 42 + 5 = 47,\ 47 \cdot 5 = 235.$$

Mõistatame vanuse: $23 - 2 = 21$ aastat.

Tõestage ka see vanuse mõistatamise variant.

305. Geomeetriline trikk (saladuslik kadumine)

Joonistage ristkülikukujulisele papitükile 13 ühepikkust üksteisest võrdsel kaugusel olevat kriipsu (vt. joonis 186). Nüüd lõigake ristkülik pooleks vasakpoolseima



Joon. 186. Kuhu kadus üks kriips?

kriipsu ülemist otsa ja parempoolseima kriipsu alumist otsa ühendavat sirget mööda. Nihutage saadud pooli piki lõikejoont, nagu see on joonisel näidatud.

Ilmnes hämmastav fakt: 13 kriipsu asemel jäi järele ainult 12. Kuhu kadus üks kriips?

XI PEATÜKK

ARVUDE JAGUVUS

Aritmeetilistest tehetest on jagamine kõige tujukam. Tal on terve rida iseäralikke omadusi. Võtame kas või ta suhtumise nulli. Teiste aritmeetiliste tehete jaoks on null kõigiti võrdõiguslik arv. Teda võib nii liita kui lahutada, ta võib olla ka korrutamisel teguriks, aga jagada temaga ei saa kunagi. Nulliga ei tohi jagada ühtegi arvu ega ka ühtegi algebralist avaldist. See on jagamistehte tähtis iseärasus ja kui seda silmas ei peeta, siis võib päris kimpu jääda; võib näiteks «tõestada» iga teadaolevalt vale väidet — «paradoksi».

Kuidas te näiteks suhtuksite järgmisse väitesse.

Iga arv võrdub poolega iseendast.

«T õ e s t u s». Olgu a ja b kaks võrdset suurust: $a = b$. Korrutame võrduse mõlemaid pooli a-ga:

$$a^2 = ab.$$

Nüüd lahutame kummastki võrduse poolest suuruse b^2. Ka tekkinud vahed $a^2 - b^2$ ja $ab - b^2$ on võrdsed:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Lahutame nüüd võrduse mõlemad pooled teguriteks:

$$(a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Võrduse mõlemaid pooli suurusega $a - b$ jagades saame jälle võrduse:

$$a + b = b.$$

Kuna $b = a$, siis me võime viimases võrduses b asen-

dada a-ga. Sel korral $a + a = a$ ehk $2a = a$. Kahega jagades saame tõepoolest, et

$$a = \frac{a}{2}$$

ehk teiste sõnadega — iga arv on iseenda poolega võrdne (?).

Väliselt, ehk nagu kõneldakse, «formaalselt» on kõik korras, aga sisuliselt on meil mõttekäiku sisse lipsanud viga. Te loomulikult olite tähelepanelikud ja märkasite, millises teisenduste osas viga esineb.

Jagamise «loomus» ei avaldu ainult nulliga jagamise võimatuses. Matemaatikas pööratakse suurt tähelepanu täisarvude omadustele ja nende kohta käivatele seadustele. Kui näiteks piirduda ainult positiivsete ja negatiivsete täisarvude hulgaga, siis «tujutseb» jällegi ainult jagamine. Nagu te teate, pole täisarvude vallas jagamine alati teostatav. Kõneldakse, et täisarv a jagub täisarvuga b, kui leidub niisugune täisarv c, mille korrutis b-ga annab täpselt arvu a. Kui niisugust arvu c ei leidu, siis a ei jagu b-ga.

Kõik need jagamise iseärasused soodustasidki niisuguste mõistete tekkimist, nagu algarvud, suurim ühisjagaja (S.Ü.J.), vähim ühiskordne (V.Ü.K.), arvude jaguvuse tunnused jt. Arvude jaguvuse teooria järkjärguline areng viis kogu arvude teooria sügavale laiendamisele.

Ma usun, et selle peatüki ülesannete juures töötamine aitab teataval määral suurendada teie poolt koolipingist hangitud teadmisi arvude jaguvuse kohta, aga võib-olla isegi õhutab teid kogu arvude teooriaga süstemaatiliselt tutvuma.

306. Arv hauakambrist

Teadlased avastasid ühe egiptuse püramiidi hauakambri seinal hieroglüüfidena kivitahvlisse raiutud arvu 2520. Raske on täpselt öelda, miks just sellele arvule niisugune au osaks sai. Võib-olla sellepärast, et ta jagub jäägita kõigi ühe ja kümne vahel asuvate täisarvudega. Tõepoolest, ühelgi temast väiksemal arvul pole sellist omadust. Kerge on veenduda, et see arv on esimese arvu-kümne vähimaks ühiskordseks.

307. Uusaastakingid

Meie asutuse ametiühingukomitee otsustas organiseerida lastele nääripuu. Kompvekkide ja küpsiste pakkidesse jaotamine läks kiiresti, aga mandariinidega me sattusime omapärasele raskusele. Alguses me tahtsime mandariinid jaotada pakkidesse kümnekaupa (ülejäänud pakkidesse me pidime panema õunu), aga sellest ei tulnud midagi välja — ühe paki jaoks jäi ainult 9 mandariini. Kui me oleksime mandariinid jaotanud üheksakaupa, siis oleks jäänud ühe paki jaoks 8 mandariini. Me proovisime mandariine jaotada ka kaheksa-, seitsme- ja kuuekaupa, aga ikkagi jäi ühes pakis üks mandariin puudu.

Küll on lugu! Kas siis tõepoolest kogu aeg niiviisi edasi läheb? Võtsime paberi ja pliiatsi ning hakkasime kalkuleerima. Ja olge lahke! Kui me jagasime mandariinide arvu viiega, jäi neli üle; kui me jagasime neljaga, jäi kolm üle; kui me jagasime kolmega, jäi kaks üle; kui me jagasime kahega, jäi üks üle!

Näete nüüd, millise haruldase mandariinide koguse omanikud me olime. Kui palju neid oli?

308. Kas leidub niisugune arv?

Kui leidub niisugune arv, mis kolmega jagades annaks jäägiks ühe, neljaga jagades kahe, viiega jagades kolme ja kuuega jagades nelja?

309. Korvitäis mune
(vanast prantsuse ülesannetekogust)

Üks naine viis kord turule korvitäie mune. Teel tõukas teda üks möödamineja kogemata nii tugevasti, et korv kukkus maha ja munad purunesid. Süüdlane tahtis munade hinna tasuda ja küsis: «Mitu muna siin korvis oli?»

«Ma täpselt ei mäleta,» vastas naine, «kuid ma tean, et kui ma võtsin korvist mune kahe-, kolme-, nelja-, viie- või kuuekaupa, siis jäi igakord korvi üks muna üle. Kui ma aga võtsin korvist mune seitsmekaupa, siis ei jäänud sinna ühtegi muna.»

Mitu muna oli korvis?

310. Kolmekohaline arv

Kui minu poolt mõeldud kolmekohalisest arvust lahutada seitse, siis ta jagub seitsmega; kui temast lahutada kaheksa, siis ta jagub kaheksaga; kui temast lahutada üheksa, siis ta jagub üheksaga.

Missugusele arvule ma mõtlesin?

311. Neli mootorlaeva

Sadamas oli ankrus 4 mootorlaeva. Teisel jaanuaril 1953. aastal lahkusid nad kõik ühekorraga täpselt keskpäeval sadamast.

On teada, et esimene laev peatub selles sadamas iga nelja nädala järel, teine laev iga kaheksa nädala, kolmas laev iga kaheteistkümne ja neljas laev iga kuueteistkümne nädala järel.

Millal on kõik neli laeva jälle korraga selles sadamas ankrus?

312. Kassiiri eksimus

Ostja läks kaupluse kassa juurde ja ütles:

«Ma vajan 2 pakki soola hinnaga 90 kopikat pakk; kaks tükki seepi hinnaga 2 rubla 70 kopikat tükk; 3 pakki suhkrut ja 6 toosi tikke. Suhkru ja tikkude hinda ma aga ei mäleta.»

Kassiir andis ostjale tšeki, millele oli märgitud 29 rbl. 17 kop. Ostja vaatas korraks tsekile ja andis selle siis kassiirile tagasi: «Te eksisite!»

Kassiir kontrollis oma arvestust ja pidi ostja väitega nõustuma. Ta vabandas ning andis ostjale teise tšeki.

Kuidas ostja nii kiiresti vea avastas?

313. Arvmõistatus

Aritmeetiliste kaalutluste põhjal leidke, millised arvväärtused peaksid olema järgmises võrduses tähtedel a ja t:

$$[3(230 + t)]^2 = 492a04.$$

314. Üheteistkümnega jaguvuse tunnus

Üheks peamiseks keerukate ülesannete lahendamise võtteks on nende taandamine järjest lihtsamatele ülesannetele.

Olgu meil näiteks tarvis kindlaks teha, kas mingisugune mitmekohaline arv jagub teise antud arvuga. Sellele küsimusele vastamiseks pole tervel real juhtudel jagamist ennast tegelikult vaja läbi viia. Väga tihti ilmneb, et püstitatud ülesande lahendamist saab taandada antud arvu numbritest teatud kindla eeskirja põhjal koostatud arvu jaguvuse uurimisele, kusjuures see saadud arv pole enam mitmekohaline. Nii tekivadki arvude jaguvustunnused.

Kas te näiteks tunnete järgmist lihtsat üheteistkümnega jagumise tunnust?

Kui antud arvu paariskohtadel asuvate numbrite summa ja paaritutel kohtadel asuvate numbrite summa vahe on null või jagub üheteistkümnega, siis jagub üheteistkümnega ka see arv ise.

Kui see tingimus pole täidetud, siis antud arv üheteistkümnega ei jagu.

N ä i d e. Kas 3 528 041 jagub 11-ga?

Kasutame jaguvustunnust:

$$S_1 = 3 + 2 + 0 + 1 = 6,$$
$$S_2 = 5 + 8 + 4 = 17,$$
$$S_2 - S_1 = 11.$$

$S_2 - S_1$ jagub üheteistkümnega. Vastavalt tunnusele peab ka arv 3 528 041 jaguma üheteistkümnega. Kui te näete veidi vaeva ja jagamise tõepoolest läbi viite, siis te näete, et tunnus teid ei petnud.

Seda jaguvustunnust on kerge põhjendada, kui eelnevalt märkida, et arvud $10 + 1$, $100 - 1$ $1000 + 1$, $10\,000 - 1$, $100\,000 + 1$ jne. jaguvad üheteistkümnega.

Vaatleme algul vahesid: $100 - 1 = 99$; $10\,000 - 1 = 9999$ jne. Kõik nad sisaldavad paarisarvulist hulka üheksaid ja järelikult jaguvad ka üheteistkümnega. Üheteistkümnega jaguvad ka summad: $10 + 1 = 11$, $1\,000 + 1 = 99 \cdot 10 + 11$, $100\,000 + 1 = 9999 \cdot 10 + 11$ jne., sest neid võib lahutada kaheks üheteistkümnega jaguvaks liidetavaks.

Asume nüüd üheteistkümnega jaguvuse tunnuse

juurde. Võtame mingi arvu, näiteks 3 516 282 ja kirjutame ta ümber niisugusel kujul:

$$2 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 1000 + 1 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 1\,000\,000.$$

Kõik teised tegurid (ühed nullidega) esitame nüüd niisugusel kujul, et nad moodustaksid eespool vaadeldud summad ja vahed: $10 + 1$, $100 - 1$ jne. Saame:

$$\begin{aligned}3\,516\,282 &= 2 + 8(10 + 1 - 1) + 2(100 - 1 + 1) + \\ &+ 6(1000 + 1 - 1) + 1(10\,000 - 1 + 1) + \\ &+ 5(100\,000 + 1 - 1) + 3(1\,000\,000 - 1 + 1) = \\ &= 2 + 8(10 + 1) - 8 + 2(100 - 1) + 2 + 6(1000 + 1) - \\ &- 6 + (10\,000 - 1) + 1 + 5(100\,000 + 1) - 5 + \\ &+ 3(1\,000\,000 - 1) + 3 = (2 - 8 + 2 - 6 + 1 - 5 + 3) + \\ &+ [8(10 + 1) + 2(100 - 1) + 6(1000 + 1) + (10\,000 - 1) + \\ &+ 5(100\,000 + 1) + 3(1\,000\,000 - 1)].\end{aligned}$$

Kõik kandilistes sulgudes olevad liidetavad jaguvad kindlasti üheteistkümnega. Tähendab, vaadeldava arvu üheteistkümnega jaguvus oleneb täielikult esimestes ümarsulgudes oleva arvu üheteistkümnega jaguvusest. Kui sulgudes olev arv jagub (vastavalt — ei jagu) 11-ga, siis ka vaadeldav arv jagub (ei jagu) üheteistkümnega.

Esimeses ümarsulus on aga parajasti meie arvu paaris- ja paaritutel kohtadel asuvate numbrite summade vahe: $(2 + 2 + 1 + 3) - (8 + 6 + 5) = -11$. Kuna see vahe on -11 ja jagub üheteistkümnega, siis jagub üheteistkümnega ka antud arv ise.

Kui kontrollsumma ei jaguks üheteistkümnega, siis ei jaguks üheteistkümnega ka antud arv. Tõepoolest, me saame äsjavaadeldud näitest võtte, mille abil me saame mingi suvalise täisarvu N lahutada kaheks liidetavaks x ja y ($N = x + y$), nii et üks neist (x) jaguks kindlasti üheteistkümnega, teine liidetav y aga kujutaks endast paaris- ja paarituarvulistel kohtadel asuvate arvu N numbrite summade vahet.

On selge, et kui mõlemad liidetavad x ja y jaguvad üheteistkümnega, siis ka N jagub üheteistkümnega; kui aga x jagub ja y ei jagu üheteistkümnega, siis ka N ei jagu üheteistkümnega.

Ümberpöördult, kui N ja x jaguvad üheteistkümnega, siis peab üheteistkümnega jaguma ka y; kui aga N ei

jagu üheteistkümnega ja x jagub, siis y ei tohi jaguda üheteistkümnega.

Nii taandub suvalise täisarvu üheteistkümnega jaguvuse küsimus hoopis lihtsamale summade vahe üheteistkümnega jaguvuse kontrollimisele.

*

Lahendage iseseisvalt veel üks aritmeetiline tähtmõistatus. Kuidas leida kiiresti puuduvat numbrit a ja millise arvuga tuleks asendada täht x, et kehtiks võrdus

$$[11(492 + x)]^2 = 37a10201?$$

315. Ühine jaguvustunnus arvude 7, 11 ja 13 jaoks

Algarvudeks me nimetame arve, mis jaguvad ainult iseenda ja ühega. Arvud 7, 11 ja 13 asuvad algarvude tabelis kõrvuti (vt. lk. 337). Nende korrutis on $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 = 1000 + 1$. Esialgu peame meeles, et 1001 jagub nii seitsme, üheteistkümne kui ka kolmeteistkümnega. Edasi paneme tähele, et kui suvalist kolmekohalist arvu korrutada arvuga 1001, siis tulemuse saamiseks piisab korrutatava kaks korda järjest kirjutamisest.

Olgu abc mingi kolmekohaline arv (a, b ja c on selle arvu numbrid). Korrutame ta arvuga 1001:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \times\ 1001 \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ \hline \overline{abcabc}. \end{array}$$

Järelikult kõik $\overline{abcabc}$ tüüpi arvud jaguvad seitsmega, üheteistkümnega ja kolmeteistkümnega. Nende arvudega jagub ka arv 999 999 ehk teisiti $1\,000\,000 - 1$.

Need seaduspärasused lubavad mitmekohalise arvu seitsmega, üheteistkümnega ja kolmeteistkümnega jaguvuse küsimust taandada ülimalt kolmekohalise arvu jaguvuse uurimisele.

Oletame näiteks, et on vaja kontrollida arvu 42 623 295 jaguvust arvudega 7, 11 ja 13. Selleks jaotame antud arvu paremalt alates kolme numbri kaupa rühmadesse, kusjuures vasakpoolsemas rühmas võib olla ka vähem kui kolm numbrit:

$$42\,623\,295 = 295 + 623 \cdot 1000 + 42 \cdot 1\,000\,000.$$

Analoogiliselt üheteistkümnega jaguvuse juhule teisendame selle summa järgmisele kujule:

$$\begin{aligned} &42\,623\,295 = \\ &= 295 + 623(1000 + 1 - 1) + 42(1\,000\,000 - 1 + 1) = \\ &= (295 - 623 + 42) + [623(1000 + 1) + \\ &\quad + 42(1\,000\,000 - 1)]. \end{aligned}$$

Kandilistes sulgudes olev arv jagub kindlasti nii seitsme kui ka üheteistkümne ja kolmeteistkümnega. Tähendab, vaadeldava arvu jaguvuse küsimus taandub esimestes ümarsulgudes seisva arvu arvudega 7, 11 ja 13 jaguvuse uurimisele. Vaadeldes uuritava arvu iga rühma iseseisva arvuna, võime sõnastada arvude 7, 11 ja 13 jaoks kehtiva ühise jaguvustunnuse:

Kui antud arvu üle ühe võetud rühmade summade vahe jagub kas seitsmega, üheteistkümnega või kolmeteistkümnega, siis on see jagaja ka antud arvu teguriks.

Pöördume nüüd tagasi arvu 42 623 295 juurde. Leiame rühmade summade vahe: $(42 + 295) - 623 = -286$. Arv -286 jagub üheteistkümnega ja kolmeteistkümnega, aga seitsmega ta ei jagu. Järelikult kehtib sama ka arvu 42 623 295 kohta.

On ilmne, et praktikas kõige sagedamini esineval juhul, mil uuritav arv on nelja-, viie- või kuuekohaline, taandub ta seitsmega, üheteistkümnega ja kolmeteistkümnega jaguvuse küsimus antud arvu kahe rühma vahe jaguvuse uurimisele. Nii näiteks on kerge kindlaks teha, et arv 29 575 jagub seitsmega ja kolmeteistkümnega, aga üheteistkümnega ei jagu. Tõepoolest rühmade vahe on $575 - 29 = 546$. See arv jagub seitsme ja kolmeteistkümnega ning ei jagu üheteistkümnega.

Ülesanne. Seda ühist jaguvustunnust tuletades me opereerisime arvuga, milles oli kolm kolmenumbrilist rühma. Kontrollige nüüd selle tunnuse kehtivust ka juhul, kui arv jaguneb neljaks kolmenumbriliseks rühmaks.

316. Kaheksaga jaguvuse tunnuse lihtsustamine

Keskkoolis esitatakse tavaliselt järgmine kaheksaga jaguvuse tunnus.

Kui antud arvu kolmest viimasest kohast moodustatud

arv jagub kaheksaga, siis jagub kogu see arv kaheksaga. See tähendab, et küsimus taandub mingi kolmekohalise arvu kaheksaga jaguvusele.

Seejuures ei kõnelda sõnagi sellest, kuidas omakorda oleks võimalik kiiresti teada saada, kas see kolmekohaline arv jagub kaheksaga. Kolmekohalise arvu kaheksaga jaguvus pole aga alati kohe silmanähtav ja tihti tuleb kaheksaga jagamine ka tegelikult teostada.

Neljaga jaguvuse tunnus on lihtsam. Sel juhul piisab, et neljaga jaguks ainult arvu kahest viimasest numbrist koosnev arv.

Loomulikult tekib küsimus: kas ei saaks kaheksaga jaguvuse tunnust lihtsustada? Saab küll, selleks tuleb teda täiendada spetsiaalse kolmekohalise arvu kaheksaga jaguvuse tunnusega.

Kaheksaga jagub iga kolmekohaline arv, mille sajalistest ja kümnelistest moodustatud arvu ja üheliste hulgast poole summa jagub neljaga.

Näide. Olgu antud arv 592. Arvutame: $59 + 1 = 60$. 60 jagub neljaga, tähendab arv 592 jagub kaheksaga.

Tõestage siintoodud jaguvustunnus ja sõnastage kaheksaga jaguvuse lihtsustatud tunnus suvaliste arvude jaoks.

Märkus 1. On ilmne, et paaritu numbriga lõppev arv ei saa jaguda kaheksaga.

Märkus 2. Suurel enamikul juhtudest on arv, mille neljaga jaguvust me peame kontrollima, kahekohaline arv.

Summa on kolmekohaline ainult arvude $984 - 998$ puhul, kuid ka siis ta ei ületa arvu $103 (99 + 4 = 103)$.

317. Harukordne mälu

Ütelge oma sõpradele, et isegi siis, kui piirduda ainult kuue- ja üheksakohaliste kolmekümne seitsmega jaguvate arvudega, on neid ikka veel tohutult palju. Teie aga olete selline fenomeen, et teate neid kõiki peast.

Efekti suurendamiseks ütelge, et te võite silmapilkselt ükskõik millisele kolmekohalisele arvule juurde kirjutada veel kolm või isegi kuus kohta, nii et tekkinud kuue- või üheksakohaline arv jaguks kindlasti kolmekümne seitsmega.

Oletame, et teile öeldi arv 412. Kirjutage sellele arvule

ükskõik kas vasakule või paremale poole juurde arv 143. Sel moel tekivad arvud 143 412 või 412 143, mis mõlemad jaguvad kolmekümne seitsmega.

Siin ei seisa asi muidugi fenomenaalses mälus. Teie mälu võib olla kõige harilikum, kuid te peate teadma küllaltki lihtsat kolmekümne seitsmega jaguvuse tunnust, mis seisneb järgnevas.

Jaotame antud arvu paremalt vasakule kolmenumbrilisteks rühmadeks (viimases vasakpoolses rühmas võib ka vähem kui kolm numbrit olla). Vaatleme iga rühma iseseisva arvuna ja liidame nad kõik kokku. Kui saadud summa jagub kolmekümne seitsmega, siis jagub sellega ka antud arv.

Näiteks arv 153 217 jagub kolmekümne seitsmega, sest selle arvuga jagub summa $153 + 217 = 370$.

Tõestus. Olgu N arv, mis koosneb kahest kolmenumbrilisest rühmast. Esitame ta kujul $N = 1000a + b$, kus a on antud arvu vasakpoolne rühm ja b parempoolne rühm. Kui N jagub kolmekümne seitsmega, siis $1000a + b = 37k$ (k on positiivne täisarv). Tõestame, et sel juhul ka $a + b$ jagub kolmekümne seitsmega.

Avaldame esimesest võrdusest b ja asetame ta väärtuse summasse $a + b$.

Tõepoolest, avaldis

$$a + b = a + (37k - 1000a) = 37k - 999a = 37(k - 27)$$

jagub kolmekümne seitsmega.

Ümberpöördult, jagugu $a + b$ arvuga 37, siis $a + b = 37k$. Avaldame siit b ja asetame ta võrdusesse $N = 1000a + b$.

Saame

$$N = 1000a + 37k - a = 999a + 37k = 37(27 + k),$$

s. o. N jagub kolmekümne seitsmega.

Suuremaks hulgaks rühmadeks jagunevate arvude korral on mõttekäik analoogiline.

Triki saladus seisneb järelikult teie sõprade poolt valitud arvule ühe (kuuekohaliste arvude jaoks) või kahe (üheksakohaliste arvude jaoks) omapoolse arvu sobivas juurdekirjutamises, nii et saadud arvurühmade summa jaguks kolmekümne seitsmega.

Kuidas sellega toime tulla?

Väga lihtsalt. Kirjutage juurde niisugused arvude rühmad, mis liidetuna juba nimetatud rühmaga annaks kolmest ühesugusest numbrist koosneva arvude rühma: 111, 222, ..., 999. Iga niisugune arv jagub ilmselt kolmekümne seitsmega, sest $111 = 3 \cdot 37$.

Kui sõbrad valisid näiteks arvu 314, siis te kirjutate juurde 103 (täiendus arvuni 444) või 214 (täiendus arvuni 555) jne. Niisugust täiendamist on peast väga kerge teostada, ning see asjaolu tagabki triki teostamiseks vajaliku kiiruse saavutamise.

Juhul, kui nõutakse üheksakohalise arvu kirjutamist, mis jaguks kolmekümne seitsmega, siis kirjutage algul üles kolm suvalist numbrit, kuid niisuguse arvestusega, et kolme viimase numbri abil saaks moodustada jällegi ühesuguste numbritega üldsumma.

Kui teile näiteks valiti arv 412, siis te võite algul kirjutada juurde 101 ja pärast arvuga 042 täiendada üldsumma arvuni 555. Nii saame arvu 412 101 042.

Pidage meeles, et triki mitmekesistamiseks võib oma arvu kirjutada antud arvu erinevatele pooltele.

Kui valitud arv ise koosneb ühesugustest numbritest (näiteks 333), siis võib veelkordne ühesugustest numbritest koosneva arvu lisamine triki olemuse kergesti paljastada. Selle vältimiseks liitke teie poolt mõeldud ühesugustest numbritest koosnevale arvule mõttes 37 või 74 juurde (soovikorral võite need arvud ka lahutada).

Te võite lubada ka ühe või kahekohalise arvu etteandmist. Niisugusel juhul te kirjutate kõigepealt suvaliselt juurde vastavalt kaks numbrit või ühe numbri ja siis tegutsete nagu varem.

Ülesanne. Tõestage kolmekümne seitsmega jaguvuse tunnus ka kolmeks rühmaks jaguneva arvu jaoks.

318. Ühendatud jaguvustunnus 3, 7 ja 19 jaoks

Algarvude 3, 7 ja 19 korrutis on 399. Sellel korrutisel on väga huvitav omadus.

Kui arv $100a + b$ (kus b on kahekohaline arv ja a on suvaline positiivne täisarv) jagub arvuga 399 või mõne selle teguriga, siis on sama omadus ka arvul $a + 4b$.

Tõestage see väide.

Sõnastage ja tõestage ka pöördteoreem.

Tõestatu põhjal andke arvude 3, 7 ja 19 jaoks ühine jaguvustunnus.

319. Kaksliikme jaguvus

Kõigepealt teeme mõned sissejuhatavad märkused:

1) Hulkliikmeks nimetatakse algebralist avaldist

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kus n on naturaalarv, kordajad $a_0, a_1, \ldots, a_n$ on suvalised reaalarvud ja ka muutuja x võib olla suvaline reaalarv.

2) Kui äsjatoodud definitsiooni rahuldav hulkliige p on võrdne kahe teise hulkliikme m_1 ja m_2 korrutisega, $p = m_1 m_2$, siis me kõneleme, et hulkliige p jagub hulkliikmega m_1 (või m_2) ja jagatiseks on hulkliige m_2 (või m_1).

Näiteks hulkliige $x^2 - 9$ jagub hulkliikmega $3x + 9$, kusjuures jagatiseks on hulkliige $\frac{1}{3}x - 1$. Tõepoolest,

$$(3x + 9)(\tfrac{1}{3}x - 1) = x^2 - 9.$$

Juhime muuseas lugeja tähelepanu faktile, et osa jagatise kordajaid on murdarvud, aga jagatava ja jagaja kordajad on samal ajal täisarvud.

3) Tõsiasjast, et mingi täisarvuliste kordajatega hulkliige jagub mingi teise täisarvuliste kordajatega hulkliikmega, ei järgne veel, et jaguksid ka arvud, mis saadakse jagatavas ja jagajas suuruse x asendamisel suvalise täisarvuga (siin me mõtleme loomulikult jaguvust täisarvude aritmeetika seisukohalt).

Vaatleme näitena eelmises punktis toodud hulkliikmeid: $(x^2 - 9) : (3x + 9) = \frac{1}{3}x - 1$. Kui $x = 6$, siis jagatav muutub arvuks $6^2 - 9 = 27$ ja jagaja arvuks $3 \cdot 6 + 9 = 27$. Sel korral jagatava väärtus jagub tõesti jagaja väärtusega: $27 : 27 = 1$. Kui aga $x = 7$, siis me saame vastavalt arvud 40 ja 30 ning nüüd täisarvude aritmeetika seisukohalt need arvud pole jaguvad.

4) Kui jagatava, jagaja ja jagatise kõik kordajad on täisarvud, siis x mingi täisarvuga asendamisel tekkivad väärtused jäävad samadesse vahekordadesse, välja arvatud juht, mil x väärtus muudab jagaja nulliks.

Näitena vaatleme võrdust

$$(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12) : (x^2 - 4) = 2x - 3.$$

Et kõik kordajad on täisarvud, siis järelikult suvalise täisarvulise x väärtuse korral jagatava ja jagaja väärtused on jaguvad täisarvud (erandiks on x väärtused $x = \pm 2$, mis muudavad jagaja nulliks; nulliga jagamine pole aga võimalik). Nii näiteks leiame $x = 3$ korral:

jagatava väärtus: $2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = 15$,

jagaja väärtus: $3^2 - 4 = 5$.

Jagatava väärtus jagub tõesti jagaja väärtusega ($15 : 5 = 3$). Lisaks võrdub kolmega ka jagatise väärtus: $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

*

Mõningate ülesannete lahendamiseks ja osalt ka täisarvude jaguvustunnuste tuletamiseks ja tõestamiseks on kasulik teada, millistel tingimustel kahe täisarvu astmete summa ja vahe ($x^m + a^m$ ja $x^m - a^m$, kus m on positiivne täisarv) jagub nende kahe täisarvu summa ja vahega ($x + a$ ja $x - a$).

Sellele küsimusele antakse vastus keskkooli viimase klassi algebra kursuses. Kuid ka lugejale, kes pole oma haridusredelil veel nii kõrgele roninud, ei tekita selle küsimuse lahendusest arusaamine erilist vaeva.

Algebralised avaldised $x^m + a^m$ ja $x^m - a^m$ on hulkliikme

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (*)$$

erijuhud (hulkliikme kordajateks võivad siin olla kõik täisarvud, sealhulgas ka null).

Kui näiteks valida $m = 4$, $a_m = 1$, $a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_1 = 0$, $a_0 = 16$, siis saamegi hulkliikme $x^4 + 16$ ehk $x^4 + 2^4$.

Proovime nüüd hulkliiget $x^4 + 2^4$ jagada kaksliikmega $x + 2$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 16 & x + 2 \\ \hline -\,(x^4 + 2x^3) & x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ \hline -2x^3 & \\ -\,(-2x^3 - 4x^2) & \\ \hline 4x^2 & \\ -\,(4x^2 + 8x) & \\ \hline -8x + 16 & \\ -\,(-8x - 16) & \\ \hline 32 \text{ (jääk)} & \end{array}$$

Näeme, et $x^4 + 2^4$ ei jagu kaksliikmega $x + 2$. Ühtlasi märgime, et jääk ei sisalda muutujat x, vaid on konstant.

Kerge on aru saada, et mitte ainult selle näite korral, vaid kõigil juhtudel, mil me jagame hulkliiget esimese kaksliikmega, on jäägiks konstant (või null).

Selleks et jagamisel jääki ei jääks, tuleb jagatavat jäägi suuruse võrra vähendada. Alati on seega õige väide, et jagatava ja jäägi vahe võrdub jagaja ja jagatise korrutisega. Näiteks,

$$(x^4 + 16) - 32 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8).$$

Veenduge otsese kontrollimisega, et see algebraliste avaldiste võrdus kehtib iga suuruse x konkreetse arvulise väärtuse korral. Niisugust võrdust nimetatakse lühiduse mõttes s a m a s u s e k s.

Oletame nüüd, et te võtate suvalise (*)-tüüpi hulkliikme, jagate selle kaksliikmega $x + a$ ja koostate võrduse

$$A = (x - a)\,B + C,$$

kus lühiduse mõttes on A-ga tähistatud jagatavat hulkliiget, B-ga jagatist ja C-ga jääki.

Küsime, kas võrdus

$$A = (x - a)\,B + C \qquad (**)$$

on alati ka samasus?

V a s t u s: jah, alati.

Selle väite tõestus on üldjuhul üsna kohmakas, aga iga näide kinnitab ta õigsust.

Samasus (**) on veel selle poolest huvitav, et ta võimaldab j a g a m i s t t e o s t a m a t a leida jääki. Näiteks olgu jagatav $x^4 + 1$, jagaja $x - 1$ ja jagatis $x^3 + x^2 + x + 1$. Millega võrdub sel juhul jääk C?

L a h e n d u s. Koostame võrduse

$$x^4 + 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) + C.$$

Kuna see võrdus peab olema samaaegselt ka samasus, siis valime näiteks $x = 1$. Sel juhul saame $1 + 1 = 0 + C$. Siit $C = 2$. Ka kõigi teiste x väärtuste puhul saame ikka sama C. Olgu veel näiteks $x = 2$. Siis $16 + 1 = (2 - 1)(8 + 4 + 2 + 1) + C$ ehk $17 = 15 + C$. Jällegi $C = 2$.

Tähendab jagamisel ei saa muud jääki tulla, kui ainult $C = 2$. Kontrollige seda otsese jagamise teel.

Sel võrdusel on veel huvitavamaid omadusi. Nimelt võime me jäägi leida jagamist teostamata ka siis, kui me jagatist ei tea. Olgu näiteks jagatavaks $x^4 - 1$ ja jagajaks $x + 1$. Kuidas leida jääki jagamist teostamata?

Tähistame jagatishulkliikme tähega B ja jäägi tähega C. Siis

$$x^4 - 1 = (x + 1)\,B + C.$$

Teades, et me saame ühe ja sama C ükskõik millise x väärtuse korral, valime $x = -1$. See väärtus on meile eriti sobiv, sest ta teeb jagatise B kordaja nulliks ja meil pole B-d ennast tarvis teada.

Sel juhul saame: $(-1)^4 - 1 = 0 + C$ ehk $1 - 1 = C$. Siit $C = 0$. Ilmnes, et jääk võrdub nulliga. See tähendab, et $x^4 - 1$ jagub kaksliikmega $x + 1$ jäägita. Kontrollige seda otsese jagamisega!

*

Nüüd me võime lahendada ka hoopis üldisema ülesande.

Millistel tingimustel kaksliige $x^m + 1$ jagub $x + 1$-ga (m on positiivne täisarv)?

Lahendus. Olgu jagatis B ja jääk C, siis

$$x^m + 1 = (x + 1)\,B + C.$$

Võtame $x = -1$, siis $(-1)^m + 1 = C$. On ilmne, et kui m on paarisarv ($m = 2n$), siis $C = 2$; kui aga m on paaritu arv ($m = 2n + 1$), siis $C = 0$.

Järelikult paarisarvulise m korral ($m = 2n$) ei jagu $x^m + 1$ ehk $x^{2n} + 1$ kaksliikmega $x + 1$, kui aga m on paarituarvuline ($m = 2n + 1$), siis $x^m + 1$ ehk $x^{2n+1} + 1$ jagub kaksliikmega $x + 1$. Üsna kerge on veenduda, et jagatis koosneb vahelduvate märkidega x-i astmetest, nii et me saame järgmise üldvalemi:

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \ldots - x + 1).$$

Kui uurida lähemalt kaksliiget $x^m - 1$, siis selgub, et kaksliikmega $x - 1$ ta jagub iga m korral, kaksliikmega $x + 1$ ainult paarisarvulise m korral ($m = 2n$).

Veenduge selles iseseisvalt.

Et leida $x^m + a^m$ kaksliikmega $x + a$ jagamisel tekkivat jääki, tuleb samasusse $x^m + a^m = (x + a)\,B + C$ paigutada x-i eriväärtus $x = -a$.

Vastavat mõttekäiku kõikvõimalike juhtude jaoks läbi viies leiame, et

$$\left.\begin{array}{ll} x^{2n}+a^{2n} & \text{ei jagu kaksliikmetega } x+a \text{ egá } x-a; \\ x^{2n+1}+a^{2n+1} & \text{jagub kaksliikmega } x+a, \text{ ei jagu aga kaksliikmega } x-a; \\ x^{2n}-a^{2n} & \text{jagub kaksliikmetega } x+a \text{ ja } x-a; \\ x^{2n+1}-a^{2n+1} & \text{ei jagu kaksliikmega } x+a, \text{ jagub aga kaksliikmega } x-a. \end{array}\right\} \quad (***)$$

Ma juhin veel kord tähelepanu faktile, et kui $x^m \pm a^m$ jagub kaksliikmetega $x+a$ või $x-a$, siis a ja x täisarvuliste eriväärtuste korral jaguvad ka vastavad täisarvulised jagatava ja jagaja väärtused (vt. lk. 239).

Ülesanne. Tõestage avaldist $11^{10}-1$ üksikasjaliselt välja arvutamata, et ta jagub sajaga.

320. Vana ja uut seitsmega jaguvusest

Millegipärast on arv 7 olnud alati rahva hulgas populaarne ja on leidnud kajastamist paljudes lauludes ning vanasõnades:

Seitse korda mõõda, üks kord lõika.

Seitse häda, üks pääsemine.

Nädalas on seitse reedet.

Üks adraga, seitse lusikaga...

Arvu 7 jaoks on välja otsitud ka palju jaguvustunnuseid. Kaht neist (koos 11 ja 13-ga) te juba tunnete. Kuid peale nende tunnuste on seitsmel veel terve rida individuaalseid jaguvustunnuseid.

Valige nende hulgast välja see, mis teile kõige rohkem meeldib.

Esimene seitsmega jaguvuse tunnus. Võtame kontrollitavaks arvu 5236. Kirjutame selle arvu ümber järgmisel kujul: $10^3 \cdot 5 + 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6$ ja asendame kõikjal aluse 10 alusega 3*: $3^3 \cdot 5 + 3^2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 = 168$.

---

* Teiste sõnadega, me loeme seda arvu nii, nagu oleks ta kirjutatud üles mitte kümnendsüsteemis vaid k o l m e n d s ü s t e e m i s, kusjuures me ei pööra vähimatki tähelepanu asjaolule, et numbritest 0,1 ja 2 erinevaid numbreid kolmendsüsteemis ei tohiks olla.

Kui saadud arv jagub (ei jagu) seitsmega, siis ka antud arv jagub (ei jagu) seitsmega.

Kuna 168 jagub seitsmega, siis ka 5236 jagub seitsmega.

Tõestus. Olgu a_{m-1}, a_{m-2}, ..., a_2, a_1, a_0 m-kohalise arvu N järjestikuste järkude numbrid, siis

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0,$$
$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3^2a_2 + 3a_1 + a_0.$$

Lahutame esimesest avaldisest teise:

$$N - P = (10^{m-1} - 3^{m-1})a_{m-1} + (10^{m-2} - 3^{m-2})a_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (10^2 - 3^2)a_2 + (10 - 3)a_1.$$

Valemite (***) ja märkuse 4 põhjal lk. 238 võib väita, et sulgudes olevad kaksliikmed jaguvad $10 - 3 = 7$-ga. Järelikult, kui lahutatav P jagub (ei jagu) seitsmega, siis ka vähendatav N jagub (ei jagu) seitsmega ning ümberpöördult.

Esimese seitsmega jaguvuse tunnuse modifikatsioon. Korrutage kontrollitava arvu kõige vasakpoolsemat numbrit kolmega ja liitke talle järgmine number; saadus korrutage kolmega ja liitke jälle järgmine number jne. kuni viimase numbrini. Arvutuste lihtsustamiseks võite igast vahetulemusest lahutada seitsme või arvu, mis jagub seitsmega.

Kui lõpptulemus jagub (ei jagu) seitsmega, siis ka antud arv jagub (ei jagu) seitsmega.

Näide. Vaatame, kas arv 48 916 jagub seitsmega. Korrutame kõige vasakpoolsemat numbrit kolmega:

$$4 \times 3 = 12.$$

Edasisteks arvutusteks võib arvu 12 asendada temast seitsme võrra väiksema arvuga, s. t. viiega. Kui me asendame arvu a temast mingi seitsmega jaguva arvu võrra väiksema arvuga b, siis seda asendust me tähistame märgiga $\equiv$. Esimese tehte lühike üleskirjutus oleks seega $4 \times 3 = 12 \equiv 5$. Nüüd liidame viiele teise numbri 8 ja saame: $5 + 8 = 13 \equiv 6$.

Edasi:

$$6 \times 3 = 18 \equiv 4, \quad 4 + 9 = 13 \equiv 6, \quad 6 \times 3 = 18 \equiv 4,$$
$$4 + 1 = 5, \quad 5 \times 3 = 15 \equiv 1, \quad 1 + 6 = 7.$$

Lõpptulemus on seitse. Järelikult arv 48 916 jagub seitsmega. Selle reegli eeliseks on asjaolu, et teda on kerge peast rakendada. Proovige nüüd ka tõestusest jagu saada.

Tõestus. Olgu

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Toimides vastavalt eeskirjale saame:

$$3a_{m-1} + a_{m-2},$$
$$3^2a_{m-1} + 3a_{m-2} + a_{m-3},$$
$$3^3a_{m-1} + 3^2a_{m-2} + 3a_{m-3} + a_{m-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3a_1 + a_0.$$

Leiame nüüd arvude N ja P vahe:

$$N - P = a_{m-1}(10^{m-1} - 3^{m-1}) + a_{m-2}(10^{m-2} - 3^{m-2}) + \ldots + a_1(10 - 3).$$

Kuna m on positiivne täisarv (arvu numbrite hulk), siis jaguvad kõik sulgudes olevad kaksliikmed seitsmega (vt. valemeid (***) ja märkust 4 leheküljel 238). Järelikult on arvud P ja N seitsmega jaguvuse mõttes ekvivalentsed.

Märkus. On huvitav märkida, et kui lõpptulemust taandada seitsme või neljateistkümne lahutamisega seitsmest väiksemaks arvuks, siis saadud jääk võrdub arvu N seitsmega jagamisel tekkiva jäägiga. Kontrollige!

Teine seitsmega jaguvuse tunnus. Siin tuleb toimida analoogiliselt eelmise tunnusega. Vahe seisab ainult selles, et korrutamist tuleb alustada arvu lõpust ja korrutada tuleb mitte kolmega, vaid viiega.

Näide. Kas arv 37 184 jagub seitsmega?

$4 \times 5 = 20 \equiv 6$, $6 + 8 = 14 \equiv 0$, $0 \cdot 5 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 \times 5 = 5$; arvu 7 liitmise võib ära jätta; $5 \times 5 = 25 \equiv 4$, $4 + 3 = 7 \equiv 0$.

Arv 37 184 jagub seitsmega.

Tõestus. Olgu

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10_1 + a_0.$$

Tegutsedes kooskõlas toodud näitega, saame

$5a_0 + a_1$,
$5^2a_0 + 5a_1 + a_2$,
$5^3a_0 + 5^2a_1 + 5a_2 + a_3$,

. . . . . .

$P = 5^{m-1}a_0 + 5^{m-2}a_1 + \ldots + 5a_{m-2} + a_{m-1}$.

Korrutame mõlemaid võrduse pooli arvuga 10^{m-1} ja lahutame tulemusest arvu N:

$$10^{m-1}P = 50^{m-1}a_0 + 10 \cdot 50^{m-2}a_1 + \ldots$$
$$\ldots + 10^{m-2} \cdot 50a_{m-2} + 10^{m-1}a_{m-1},$$
$$10^{m-1}P - N = a_0(50^{m-1} - 1) + 10a_1(50^{m-2} - 1) + \ldots$$
$$\ldots + 10^{m-2}a_{m-2}(50 - 1).$$

Kõik sulgudes olevad kaksliikmed jaguvad arvuga $50 - 1 = 49$. Tähendab nad jaguvad ka seitsmega. Kuna 10^{m-1} ei jagu seitsmega, siis on arvud N ja P seitsmega jaguvuse mõttes ekvivalentsed.

Kolmas seitsmega jaguvuse tunnus. See tunnus on peastarvutamiseks mõnevõrra raskem, kuid ta on samuti väga huvipakkuv.

Korrutage arvu viimane number kahega ja lahutage eelmine number. Niiviisi astuge vaheldumisi liites ja lahutades ettepoole, seejuures igas võimalikus kohas jällegi seitsmeid ja seitsmekordseid arvestustest välja jättes. Kui lõpptulemus jagub (ei jagu) seitsmega, siis ka kontrollitav arv jagub (ei jagu) seitsmega.

Kontrollige selle tunnuse kehtivust konkreetsete näidete varal. Kes soovib, võib ise leida ka tõestuse. Üldkujulise arvu jaoks on see tõestus veidi raskepärane, seepärast piirduge nelja- või viiekohaliste arvudega.

*

Kolme järgneva võrdlemisi omapärase teoreemi tõestused te võite leida lahenduste osas, kuid kõigepealt proovige neid tõestada iseseisvalt.

Teoreem 1. Kui mingi kahekohaline arv jagub seitsmega, siis jagub seitsmega ka ümberpööratud arv, kui sellele liita antud arvu kümneliste hulk.

Näiteks, arv 14 jagub seitsmega, järelikult jagub seitsmega ka arv $41 + 1$.

Teoreem 2. Kui mingi kolmekohaline arv jagub seitsmega, siis jagub seitsmega ka ümberpööratud arv, kui sellest on lahutatud antud arvu üheliste ja sajaliste vahe.

Näide 1. Arv 126 jagub seitsmega. Järelikult jagub seitsmega ka arv $621 - (6 - 1) = 616$.

Näide 2. Arv 693 jagub seitsmega. Järelikult jagub seitsmega ka arv $396 - (3 - 6) = 399$.

Teoreem 3. Kui kolmekohalise arvu numbrite summa on seitse, siis ta jagub seitsmega ainult juhul, kui kümnelised ja ühelised on võrdsed.

Ümberpöördult, kui kolmekohalise arvu numbrite summa on seitse ning kümnelised ja ühelised on võrdsed, siis see arv jagub seitsmega.

321. Jaguvustunnuste laiendamine teistele arvudele

Eelmises paragrahvis esitatud kolm seitsmega jaguvuse tunnust on oma metoodika poolest sarnased arvude 3 ja 9 hästituntud jaguvustunnustega. Nii siin kui seal koostatakse lihtsate aritmeetiliste tehete abil antud arvust N uus arv P, mille jaguvusest meid huvitava jagajaga sõltub ka antud arvu jaguvus. Arv P koostatakse iga kord nii, et vahe $N-P$ (mõnikord võib olla ka summa $N+P$) jagub antud jagajaga. Meetodi aluseks on kaksliikme $a^n + b^n$ jaguvus kaksliikmega $a+b$ paarituarvulise n korral ja kaksliikme $a^n - b^n$ jaguvus kaksliikmetega $a+b$ paarisarvulise n korral.

Sama mõttekäiku kasutades võime veenduda järgmise omapärase jaguvustunnuse kehtivuses, mis võimaldab uurida arvudega 13, 17 ja 19 jaguvust.

Nende arvudega jaguvuse kontrollimiseks korrutame vasakpoolseima numbri vastavalt kas 3, 7 või üheksaga ja lahutame järgmise numbri; tulemuse korrutame jälle 3, 7 või üheksaga ja liidame järgmise numbri jne., vaheldumisi liites ja lahutades. Pärast iga tehet võib tulemust vähendada või suurendada vastavalt kas 13, 17 või 19 kordse võrra.

Kui lõpptulemus jagub (ei jagu) arvudega 13, 17 või 19, siis jagub (ei jagu) nendega ka antud arv.

Näide 1. Kas arv 2 075 427 jagub arvuga 19?

Kasutame reeglit

$$2 \times 9 = 18 \equiv -1$$

(kui te negatiivsete arvudega ei taha opereerida, siis te võite jätta ka alles arvu 18);

$$-1-0=-1,\quad -1\times 9=-9,\quad -9+7=-2,$$
$$-2\times 9=-18\equiv 1;$$
$$1-5=-4,\quad -4\times 9=-36\equiv 2,\quad 2+4=6,$$
$$6\times 9=54\equiv 16;$$
$$16-2=14\equiv -5,\quad -5\times 9=-45\equiv 12,$$
$$12+7=19\equiv 0.$$

Jagub.

Näide 2. Kas arv 81 452 jagub arvuga 13?

Kasutame reeglit:

$$8\times 3=24\equiv -2,\qquad -2-1=-3;$$
$$-3\times 3=-9,\qquad -9+4=-5;$$
$$-5\times 3=-15\equiv -2,\qquad -2-5=-7\equiv 6,$$
$$6\times 3=18\equiv 5;\qquad 5+2=7.$$

Ei jagu. Jääk 7.

Selle tunnuse tõestus on analoogiline ülalvaadeldud seitsmega jaguvuse tunnuste tõestusega.

322. Üldistatud jaguvustunnus

Mõte kasutada arvude jaguvuse kontrollimiseks nende numbrite rühmitamist ja rühmade kokkuliitmist osutus väga viljakaks ja viis üsna paljude algarvudega jaguvuse kontrollimise ühtsele tunnusele. Ühte «õnnelike» jagajate rühma kuuluvad kõik algarvud p, mis on arvu $d=10^n+1$ teguriteks ($n=1, 2, 3, 4, \ldots$, kusjuures suurte n väärtuste korral pole tunnusel enam praktilist väärtust).

Kui $n=1$, $d=11$, $p=11$;
„ $n=2$, $d=101$, $p=101$;
„ $n=3$, $d=1\,001$, $p=7$, 11 ja 13;
„ $n=4$, $d=10\,001$, $p=73$ ja 137.

Selleks, et kontrollida, kas mingi antud arv jagub mõnega arvudest p, tuleb toimida järgmiselt:

1) jaotada antud arv lõpust alates n numbri kaupa rühmadesse (igale p-le vastab oma n; äärmises vasakpoolses rühmas võib numbreid olla vähem kui n);

2) liita kõik lõpust arvates paaritutel kohtadel seisvad rühmad;

3) liita kõik ülejäänud rühmad;

4) suuremast summast lahutada väiksem.

Kui tulemus jagub (ei jagu) arvuga p, siis jagub (ei jagu) ka antud arv.

Nii näiteks üheteistkümnega jaguvuse kontrollimiseks ($p = 11$) jaotame arvu ühenumbrilisteks rühmadeks ($n = 1$). Toimides siintoodud eeskujule vastavalt, jõuame meile juba tuttava üheteistkümnega jaguvuse tunnuseni (lk. 231). Arvudega 7, 11 ja 13 jaguvuse kontrollimiseks rühmitame enda arvu kolme numbri kaupa ($n = 3$). Arvudega 73 ja 137 jaguvuse kontrollimiseks aga jaotame arvu neljalisteks rühmadeks ($n = 4$).

Kontrollime näiteks, kas viieteistkümnekohaline arv 837 362 172 504 831 jagub 73 või 137-ga. Selleks jaotame arvu neljalisteks rühmadeks 837 | 3621 | 7250 | 4831.

Liidame rühmad üle ühe kokku:

$$\begin{array}{r} 4831 \\ +\ 3621 \\ \hline 8452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7250 \\ +\ 837 \\ \hline 8087 \end{array}$$

Lahutame suuremast summast väiksema:

$$8452 - 8087 = 365.$$

Leiame, et 365 jagub arvuga 73, aga ei jagu arvuga 137. Tähendab, samuti on lugu ka antud viieteistkümnekohalise arvuga.

Teise «õnnelike» jagajate rühma kuuluvad arvu $d = 10^n - 1$ ($n = 1, 3, 5, 7, \ldots$) täisarvulised tegurid p. Piirdume astendaja n paarituarvuliste väärtuste vaatlemisega, sest paarisarvulise n korral ($n = 2m$) laguneb avaldis $10^{2m} - 1$ ruutude vahena tegurite korrutiseks, $10^m + 1$ tüüpi teguritega aga me alles äsja tutvusime lähemalt.

Arv $d = 10^n - 1$ omab järgmisi tegureid:

kui $n = 1$, $d = 9$, $p = 3$;
„ $n = 3$, $d = 999$, $p = 37$;
„ $n = 5$, $d = 99\,999$, $p = 41$, 271 jne.

Selleks, et kontrollida, kas mingi antud arv jagub mõnega nendest arvudest p, tuleb toimida järgmiselt:

1) jaotada antud arv lõpust alates n numbri kaupa rühmadeks (igale p-le vastab oma n; äärmises vasakpoolses rühmas võib numbreid olla vähem kui n);

2) liita kõik rühmad.

Kui tulemus jagub (ei jagu) arvuga p, siis jagub (ei jagu) ka antud arv.

Märgime möödaminnes, et arv, mille kõik n järku on ühed, jagub juhul kui $n > 3$ vastava p-ga. Nii näiteks 111 jagub arvuga 37, 11 111 jagub arvudega 41 ja 271.

323. Jaguvuse kurioosum

Peatüki lõpuks ma tahaksin teile näidata nelja hämmastamapanevat kümnekohalist arvu:

2 438 195 760; 4 753 869 120;
3 785 942 160; 4 876 391 520.

Kõigis nendes arvudes esinevad kõik numbrid nullist üheksani ja seejuures täpselt üks kord. Igaüks neist arvudest jagub arvudega 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ja 18.

XII PEATÜKK

RISTSUMMAMÕISTATUSED JA MAAGILISED RUUDUD

A. RISTSUMMAMÕISTATUSED

Võtame kõik täisarvud ühest kuni üheksani ja püüame neid paigutada kahte ritta, nii et kummaski reas olevate arvude summad oleksid omavahel võrdsed.

Peame kõigepealt veidi nõu, kas niisugune arvude rühmitamine on üldse võimalik.

Kõikide ühest kuni üheksani kulgevate täisarvude summa on 45. Kui me paigutame iga arvu *ainult ühte ritta*, siis kummagi rea liikmete summa peaks võrduma poolega kõigi arvude summast. 45 aga ilmselt ei jagune kaheks võrdseks täisarvuliseks pooleks, järelikult neid arve ei saa jaotada *kahte võrdsummalisse* ritta. Püstitatud eesmärgi saavutamine on aga üsna lihtne, kui lubada arvude paigutamist *lõikuvatesse ridadesse*:

5
9
3 7 1 8 4 | 23 — summa
6
2
23 — summa

Selles esituses kuulub arv 1 mõlemasse ritta.

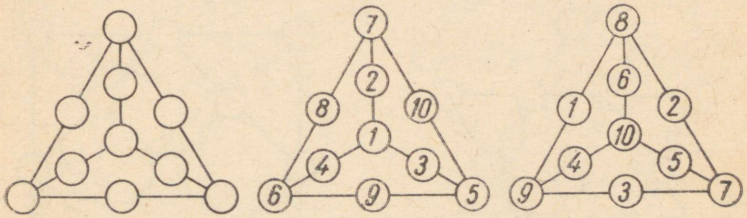
Lepime kokku nimetada selliseid võrdsete summadega ristuvate ridade otsimise ülesandeid ristsummamõistatusteks (analoogiliselt ristsõnamõistatustega). Arvude paigutamise suunad on tavaliselt ette antud, kõige sage-

damini paigutatakse neid piki sümmeetriliste kujundite koostisjooni. Arve, mis asuvad kahe või enama joone lõikekohal, loeme kuuluvaks kõigile lõikuvatele joontele.

Lahendage selles raamatus esitatud ristsummamõistatused ja püüdke seejärel neid ka ise koostada. Muide, katsuge seejuures arvude ridasid paigutada võimalikult sümmeetriliselt. Pidage ka silmas, et ristsummamõistatused omavad erinevalt ristsõnamõistatustest tavaliselt mitu lahendust.

324. Huvitavad rühmitamised

Võrdkülgse kolmnurga külgedel ja raadiustel asuvasse kümnesse ringi (joon. 187) võib paigutada kõik täisarvud ühest kümneni, nii et i g a väikese kolmnurga külgedel olevate arvude summa võrduks kahe-



Joon. 187. Kaks võimalikku lahendusvarianti.

kümne kaheksaga. Üks võimalik lahendusvariant on toodud joonisel 187 (keskel). Keskmises ringis asuv arv 1 kuulub kõikidele kolmnurkadele: $1+2+7+8+6+4=1+4+6+9+5+3=1+3+5+10+7+2=28$.

Neid kümmet arvu võib kolmnurka paigutada ka teisiti, näiteks nii, nagu on näidatud joonisel 187 paremal. Sel juhul on igal väiksel kolmnurgal olevate arvude summa võrdne 38-ga:

$$10+6+8+1+9+4=10+4+9+3+7+5=$$
$$=10+5+7+2+8+6=38.$$

Kõige huvitavam on aga see, et me võime nendest kümnest arvust moodustada üha uusi ja uusi rühmitusi,

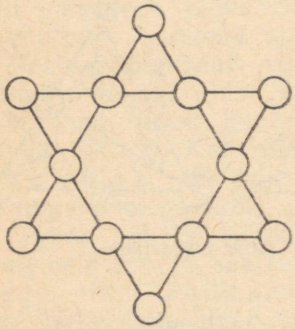
nii et igas väikeses kolmnurgas olevate arvude summa omandaks kõik väärtused kahekümne üheksast kuni kolmekümne seitsmeni!

Kuidas peavad arvud igal eri juhul ringides paiknema?

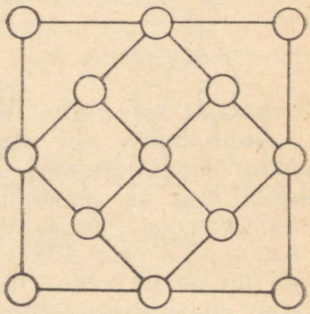
Kombinatsioonide leidmise hõlbustamiseks lõikame paberist välja 10 väikest kettakest, kirjutame neile järjest numbrid ühest kuni kümneni ja nihutame neid skeemil ühest asendist teise seni, kuni soovitud tulemus on käes.

325. «Täht»

Valmistage papist 12 nuppu, nummerdage need ühest kaheteistkümneni ja paigutage nad siis joonisel 188 toodud kuusnurkse tähe ringidesse nii, et igal sirgel asuva nelja arvu summa oleks 26.



Joon. 188.



Joon. 189. «Kristallvõre».

326. «Kristall»

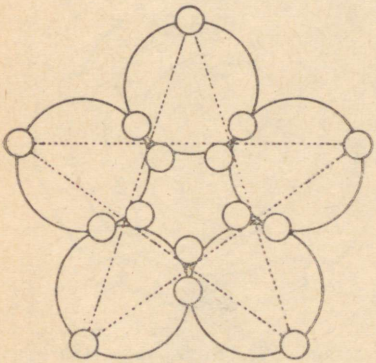
Joonisel 189 on toodud osa fantastilisest «kristalli ruumvõrest», milles «aatomid» on tinglikult joontega ühendatud kümnesse ritta kolme «aatomiga» igas reas. Leidke nüüd 13 täisarvu, millest 11 on erinevat ja 2 ühesugust, ning paigutage nad «aatomitesse» nii, et iga kolmiku summa oleks 20.

Nende arvude valiku kergendamiseks teatame, et vähim neist on 1 ja suurim 15.

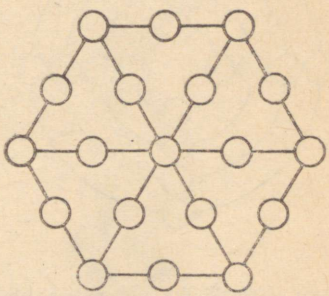
327. Vitriini kaunistus

Noor meister valmistas vääriskivide kaupluse vitriini jaoks viiest läbipõimunud äärisringist toreda viisnurkse tähe kujulise kaunistuse (joon. 190). Raami pesadesse paigutas meister kõikvõimalikke vääriskive (joonisel pole neid näidatud). Ühte pesasse pani ta ühe kalliskivi, teise pesasse kaks kalliskivi, kolmandasse kolm ja nii edasi kuni viieteistkümne kivini. Ta paigutas kivid sedavõrd oskuslikult, et nii igal ringil kui ka viisnurkse tähe tippudes on kokku täpselt 40 kivi.

Leidke ülesande tingimusi rahuldav kivide jaotus.



Joon. 190. Raami ja pesade skeem.



Joon. 191. Kuusnurkne mänguväli.

328. Kes saab enne valmis?

Valmistage papist kaks komplekti nuppe ja nummerdage nad ühest kuni üheksateistkümneni.

Kopeerige nii enda kui ka oma sõbra jaoks joonisel 191 toodud kuusnurkne kujund. Andke üks komplekt nummerdatud nuppe sõbrale ja kutsuge ta võistlema. Kumbki osavõtja peab paigutama oma nupud kuusnurkse kujundi ringidesse nii, et ühel võistlejal oleks igal kuusnurga raadiusel ja küljel summaks 22, teisel võistlejal aga 23. Probleemid on täiesti võrdse raskusega.

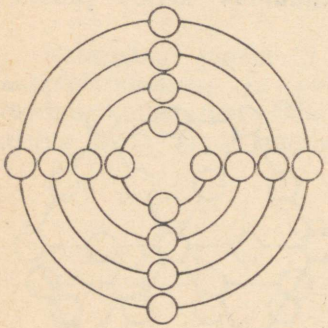
Kes saab oma ülesande enne valmis?

Pidage meeles, et üks teist peab saama 12 kahekümne kahega võrduvat summat, teine aga 12 kahekümne kolmega võrduvat summat.

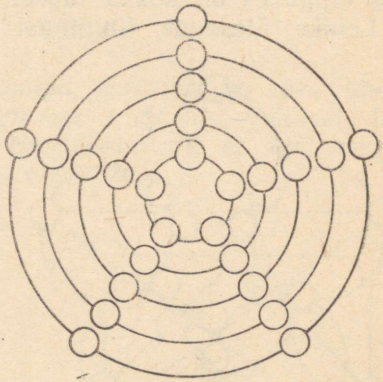
329. «Planetaarium»

Väikeses «planetaariumis» asuvad kõik «planeedid» neljakaupa «orbiitidel» ja neljakaupa ka raadiustel (joon. 192), suures «planetaariumis» aga asuvad «planeedid» nii raadiustel kui ka orbiitidel viiekaupa (joon. 193).

«Väikese planetaariumi» «planeedid» omavad kõiki kaale ühest kuni kuueteistkümne ühikuni, «suure planetaariumi» «planeedid» aga kõiki kaale ühest kuni kahe-



Joon. 192. Väike «planetaarium».

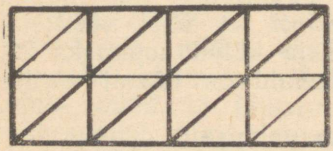


Joon. 193. Suur «planetaarium».

kümne viie ühikuni. Toodud skeeme rikkumata paigutage «planeedid» selliselt, et nii piki raadiusi kui ka mööda orbiite võetud kaalude summa oleks «väikeses planetaariumis» 34 ja «suures planetaariumis» 65.

Siin on võimalikud mitmesugused paigutusskeemid.

330. Ornament



Joon. 194. Ornament.

Teie ees on kuueteistkümnest väikesest kolmnurgast koosnev omapärane ornament. Osa väikseid kolmnurki moodustavad neljakaupa suuremaid kolmnurki. Ornamendi skeemil (joon. 194) on kerge eristada kuut üksteisega läbipõimunud suurt kolmnurka.

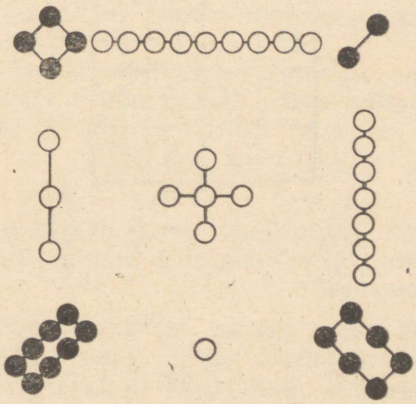
Kirjutage väikestesse kolmnurkadesse kõik täisarvud ühest kuni kuueteistkümneni, nii et igas suures kolmnurgas olevate arvude summa oleks parajasti 34.

B. MAAGILISED RUUDUD

331. Idamaised külalised

Ristsummamõistatuste üheks vanimaks ja täiuslikumaks vormiks on nn. maagilised ruudud.

Esmakordselt mõeldi maagilised ruudud välja nähta-



Joon. 195. Vanim maagiline ruut.

vasti hiinlaste poolt, sest kõige varasem märge nende kohta leidub ühes 4000—5000 aastat e. m. a. kirjutatud hiina raamatus.

Hiinlaste muistne maagiline ruut on esitatud joonisel 195. Selles ruudus on mustade ringidega tähistatud paarisarve ja valgetega paarituid. Harilikus kirjapildis ta pole nii efektne:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Kuid siiski, millise haruldase summade kombinatsiooniga meil siin on tegemist! Üheksa järjestikust arvu on paigutatud ruudu üheksasse pesasse nii, et igas reas, igas veerus ja kummalgi diagonaalil olevate arvude summa on sama (see on maagiliste ruutude põhiomadus).

Tunduvalt hilisemaid andmeid (I sajand) leiame maagiliste ruutude esinemise kohta Indias. Toome siin ühe peaaegu 2000-aastase muinasindia pärandi:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Siin on 16 järjestikust arvu paigutatud kuueteistkümnesse ruutu, nii et maagilise ruudu põhitingimus on täidetud. Tõepoolest:

$$+\begin{cases} 1+14+15+4=34, \\ 12+7+6+9=34, \\ 8+11+10+5=34, \\ 13+2+3+16=34 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{l} 1+7+10+16=34, \\ 13+11+6+4=34. \end{array}$$

$$34 \quad 34 \quad 34 \quad 34$$

Iga maagilise ruudu element võtab osa kahe summa moodustamisest ning diagonaalidel asetsevad elemendid lähevad isegi kolmes suunas arvesse, ja ometi on kõik summad omavahel võrdsed.

Ega tollel hallil ebausu ajastul muistsed hindud ja nende eeskujul hiljem ka araablased asjatult omistanud taolistele arvukombinatsioonidele saladuslikke maagilisi omadusi.

Kogu see omapärane konstantsete summadega arvude mosaiik annab maagilisele ruudule tõepoolest kunstiteose «võlujõu». See jõud on köitnud mitte ainult matemaatikuid, vaid ka kunstnikke.

See maagiline ruut jõudis Indiast Lääne-Euroopasse alles XVI sajandi alguses ja võlus silmapaistvat saksa

kunstnikku, graafikut ja asjaarmastajat matemaatikut Albrecht Dürerit sedavõrd, et kunstnik isegi reprodutseeris selle ühes oma gravüüris («Melanhoolia», 1514).

Selle maagilise ruudu võlu ei peitu kaugeltki ainult tema summade konstantsuses, mis on ainult ta põhiomaduseks. Just samuti, nagu me tõelises kunstiteoses avastame seda rohkem meeldivaid jooni, mida rohkem me temaga tutvume, nii ka siin peitub peale põhiomaduse veel küllalt palju köitvat.

Juhime lugeja tähelepanu selle kuueteistkümneruudulise maagilise ruudu kuuele omadusele:

1) Meie maagilise ruudu nurkades olevate arvude summa on samuti 34.

2) Suure ruudu nurkadele toetuvate neljaliste alaruutude ja suure ruudu keskel asuva neljalise alaruudu arvude summa on jällegi võrdne 34-ga:

$$\begin{aligned} 1+14+12+7&=34,\\ 8+11+13+2&=34,\\ 10+5+3+16&=34,\\ 15+4+6+9&=34,\\ 7+6+11+10&=34. \end{aligned}$$

3) Igas selle maagilise ruudu reas leidub kõrvutiseisvate arvude paar, mille summa on 15, ja veel üks kõrvutiseisvate arvude paar, mille summa on 19.

4) Arvutame nüüd eraldi kahe äärmise rea ja kahe keskmise rea liikmete ruutude summa:

$$1^2+14^2+15^2+4^2=483 \text{ ja } 13^2+2^2+3^2+16^2=438,$$
$$12^2+7^2+6^2+9^2=310 \text{ ja } 8^2+11^2+10^2+5^2=310.$$

Nagu näete, saime jällegi paariti võrdsed summad!

5) Kerge on veenduda, et ka veergudel on analoogilised omadused. Kahe äärmise veeru ja kahe sisemise veeru liikmete ruutude summad on jällegi paariti võrdsed.

6) Kui antud maagilisse ruutu joonistada veel üks ruut, mille tipud asuvad antud ruudu külgede keskpunktides, siis

a) sissejoonistatud ruudu vastaskülgedel asetsevate arvude summa on jällegi 34:

$$12+14+3+5=15+9+8+2=34;$$

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

b) veel huvitavam on see, et omavahel on võrdsed ka nende arvude ruutude ja kuupide summad:

$$12^2 + 14^2 + 3^2 + 5^2 = 15^2 + 9^2 + 8^2 + 2^2,$$
$$12^3 + 14^3 + 3^3 + 5^3 = 15^3 + 9^3 + 8^3 + 2^3.$$

Kui maagilise ruudu veergude ja ridade osad ära vahetada (esimese veeru arvud paigutada samas järjekorras esimese rea asemele, teise veeru arvud paigutada teise rea asemele jne.), siis jääb maagiline ruut ikkagi maagiliseks ruuduks.

Üksikute ridade või veergude kohtade vahetamisel võivad mõned ülalloetletud maagilise ruudu omadustest hävida, kuid loomulikult võivad ka kõik omadused säilida ja võib isegi mõni juurde tulla. Vahetame näiteks toodud maagilises ruudus esimese ja teise veeru:

12	7	6	9
1	14	15	4
8	11	10	5
13	2	3	16

Ridade ja veergude summad loomulikult ei muutu, diagonaalide summad aga ei võrdu enam 34-ga. Maagiline ruut kaotas osa enda põhiomadustest ja muutus sellega «mittetäielikuks maagiliseks ruuduks».

Jatkates maagilise ruudu ridade ja veergude vahetamist, võime saada üha uusi ja uusi maagilisi ruute, kusjuures osa neist on jällegi täielikud maagilised ruudud.

Ülesanne. Meie poolt toodud maagilise ruudu (vt. lk. 256) ridu ja veerge vahetades saavutage niisugune olukord, et

1) tekiks maagiline ruut (s. t. et kõigi ridade, veergude ja diagonaalide summad oleksid võrdsed);

2) diagonaalidel olevate arvude ruutude summad oleksid võrdsed;

3) diagonaalidel olevate arvude kuupide summad oleksid võrdsed.

332. Kuidas ise koostada maagilist ruutu?

Kui teatav hulk järjestikusi täisarve (näiteks 1—16, 1—9, 1—25 või 1—100 jne.) on paigutatud ruudukujuliselt nii, et iga veeru, iga rea ja kummagi diagonaali arvude summad oleksid võrdsed, siis, nagu me juba varem nägime, see ruut kannab maagilise ruudu nime.

Maagiliste ruutude loomise idee, mis tärkas umbes seitsme aastatuhande eest, võlus pikkamööda nii matemaatiliste meelelahutuste harrastajaid kui ka spetsialiste-matemaatikuid. Peagi algasid selle omapärase ja kauni arvude maailma nähtuse teoreetilise põhjendamise katsed, mis kestavad veel tänini. Sadade aastate jooksul on välja mõeldud sadu teravmeelseid reegleid ja meetodeid mitmesuguste maagiliste ruutude loomiseks.

Võib-olla te soovite mõne huvitavamaga nendest tutvuda? Sel juhul me toimime nagu raadioamatöörid. Raadiovastuvõtu teooriat veel täielikult tundmata oskavad nad juba valmisskeemide abil valmisdetailidest vastuvõtjaid kokku monteerida.

Meie «detailideks» on arvud, «šassiiks», millele me need detailid monteerime, on harilik ruut. Anname kõigepealt kuueteistkümneruudulise maagilise ruudu «montaažiskeemi».

Esimene samm. Paigutada ruutu järjestikku kõik arvud ühest kuni kuueteistkümneni:

Teine samm. Muuta arvude järjestus kolmandas ja neljandas reas ümberpööratuks ning vahetada II ja III rida:

I	1	2	3	4
II	5	6	7	8
III	9	10	11	12
IV	13	14	15	16
	1	2	3	4

Kolmas samm. Teise ja kolmanda veeru arvude järjekord muuta ümberpööratuks:

I	1	2	3	4
II	12	11	10	9
III	5	6	7	8
IV	16	15	14	13
	1	2	3	4

Neljas samm. Kolmanda ja neljanda rea arvude järjekord muuta ümberpööratuks:

I	1	15	14	4
II	12	6	7	9
III	5	11	10	8
IV	16	2	3	13
	1	2	3	4

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Maagiline ruut ongi valmis. Te võite kontrollida, et igaüks meid huvitavatest summadest on 34 (seda arvu nimetatakse ka maagilise ruudu *konstandiks*).

Edasises te leiate veel mõned kuueteistkümneruudulise maagilise ruudu koostamise skeemid (vt. ülesanded 333, 340, 341). Kasutades nendest skeemidest ükskõik millist (või ka siintoodud varianti), koostage maagilisi ruute mitte ainult kuueteistkümnest järjestikusest arvust, vaid ka meelevaldsest kuueteistkümnest arvust, mis erinevad üksteisest järjestikku mingi ühe ja sama suuruse võrra. Esialgset maagilise ruudu definitsiooni üldistades nimetame ka selliseid ruute maagilisteks.

Ülesanne. Koostage maagiline ruut kuueteistkümnest esimesest paaritust arvust. Muide, see maagiline ruut peab põhiomaduste kõrval rahuldama veel tervet rida täiendavaid tingimusi:

1) Maagilise ruudu konstant peab olema 64, kus-

juures selle arvuga peavad võrduma järgmised summad: a) suure ruudu neljas nurgas olevate arvude summa, b) nelja üheksaruudulise ruudu neljas nurgas olevate arvude summa, c) üheksa neljaruudulise ruudu elementide summa, d) kuue 4×2-ruudulise ristküliku tippudes olevate arvude summa, e) põhiruudu külgede keskkohtadele toetuva sissejoonistatud ruudu vastaskülgedel asuvate arvude summa.

2) Kahe rea (samuti ka veeru) arvude ruutude summad peavad olema paariti võrdsed.

Algul saadud maagilise ruudu ridu ja veerge vahetades koostage nõutud omadusi rahuldav ruut!

333. Üldiste meetodite lähistel

Maagilise ruudu igas reas olevate arvude hulka nimetame maagilise ruudu «järguks».

Kolmanda järgu maagilise ruudu igas reas on 3 arvu, neljanda järgu maagilisel ruudul on igas reas 4 arvu jne.

Eelmises punktis vaadeldud neljanda järgu maagilise ruudu koostamise skeem oli väga individuaalne, muud järku maagiliste ruutude puhul ta pole üldse rakendatav. Seepärast püüame tutvuda ka maagiliste ruutude koostamiseks kasutatavate üldisemate võtetega. Kõige lihtsam on koostada paaritut järku maagilisi ruute, sellepärast alustamegi nendest.

Paaritu järguga maagilised ruudud. Paaritu järguga maagiliste ruutude koostamiseks võib anda küllalt lihtsa ja seejuures täiesti üldise meetodi. Vaatleme seda võtet konkreetselt viienda järgu ruutude puhul. Kui te olete temaga juba tutvunud, siis on kolmanda, seitsmenda ja üldse mistahes paarituarvulise järguga maagilise ruudu koostamine juba naljaasi.

Joonistame 25-väljalise ruudu *ABCD* (joon. 196) ja täiendame ta vastavalt toodud joonisele sümmeetriliseks trepikujuliste äärtega kujundiks.

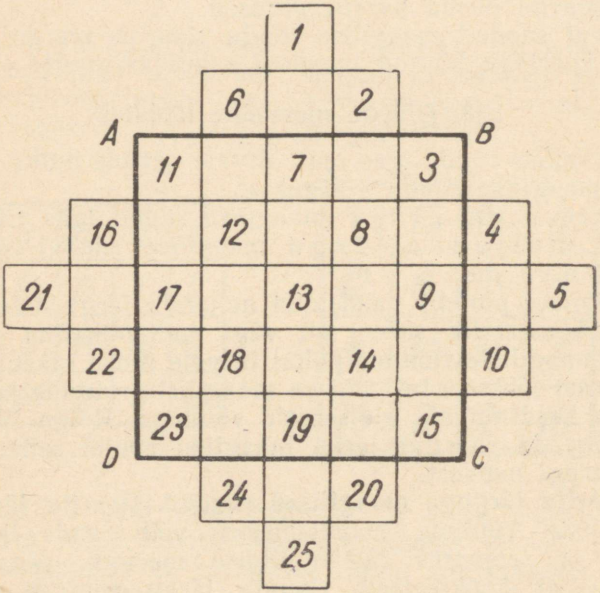
Saadud kujundisse paigutame vasakult ülalt alla paremale kulgevate ridadena 25 esimest järjestikust naturaalarvu.

Nüüd tõstame iga põhiruudust väljaspool oleva arvu edasi ruudu järguga võrduva arvu kohtade võrra piki sama rida või veergu, millel ta asub (praegusel juhul 5 kohta).

Meie ruudu puhul tuleb vastavalt sellele reeglile arv 6 paigutada arvu 18 all olevasse tühja ruutu, arv 24 arvu 12 kohale, arv 1 arvu 13 alla, arv 25 arvu 13 kohale, arv 16 arvust 8 paremale, arv 4 arvust 12 vasakule jne.

Lõpuks saame niiviisi joonisel 197 toodud maagilise ruudu.

Pole raske veenduda, et tekkinud ruudul on kõik maagilise ruudu omadused, kusjuures ruudu konstant on 65.



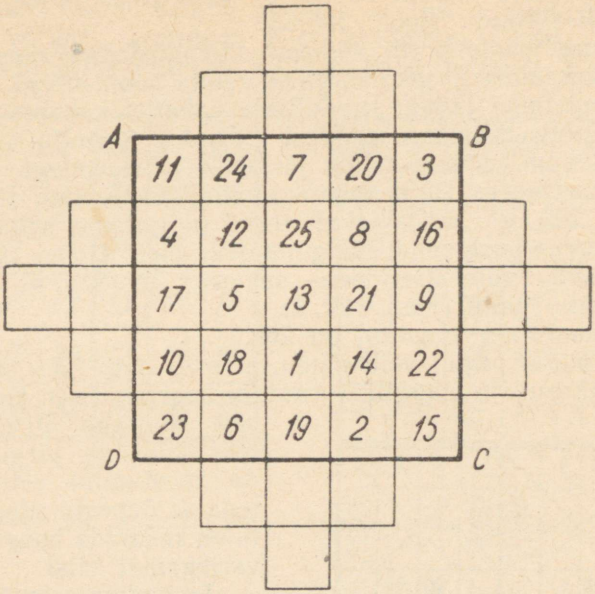
Joon. 196. Viienda järgu maagilise ruudu koostamine.

Nagu eelmise maagilise ruudu puhul, nii võib ka siin järjestikusi naturaalarve asendada suvaliste arvudega, mille vahed peavad olema konstantsed.

Ülesanne. Mõtelge, kuidas kirjeldatud meetodit rakendada kolmanda ja seitsmenda järgu maagiliste ruutude koostamiseks.

Mõned paarisjärguga maagilised ruudud. Paarisjärguga maagiliste ruutude koostamine on hoopis raskem ülesanne. Nende jaoks leitud koostamisvõtted ei ole kahjuks kuigi ühtsed.

Pöördume veel kord neljanda järgu maagilise ruudu

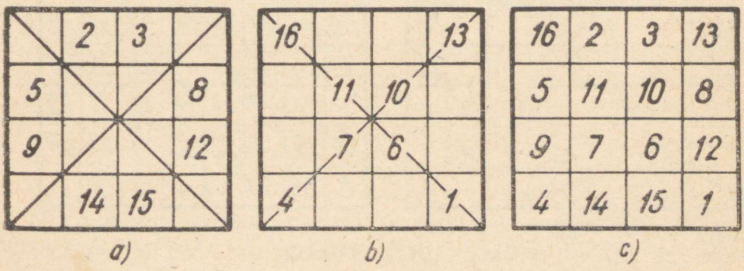


Joon. 197. Maagiline ruut on valmis.

juurde tagasi. Joonistame ruudulisele paberile kaks 4 × 4 ruutu ja tõmbame mõlemale ruudule diagonaalid.

Esimesse ruutu kirjutame kasvavas järjekorras kõik arvud ühest kuni kuueteistkümneni, jättes seejuures esialgu kirjutamata läbikriipsutatud diagonaalidel asuvad arvud (joon. 198, *a*).

Vahelejäetud arvud paigutame teise ruudu diagonaalidele kahanevas järjekorras (joon. 198, *b*).



Joon. 198. Neljanda järgu maagilise ruudu koostamine.

Üht ruutu teisele asetades saamegi neljanda järgu maagilise ruudu (joon. 198, *c*).

Sama printsiip on väikeste täiendustega rakendatav ka kaheksanda järgu maagilise ruudu koostamisel.

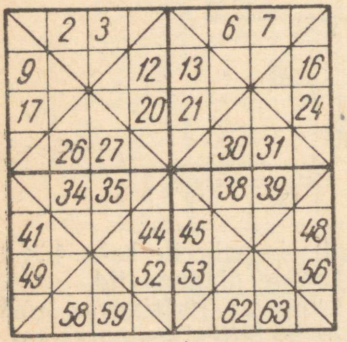
Joonistame jällegi ruudulisele paberile kaheksa 4×4 ruutu ning koostame nendest kaks 8×8 ruutu.

Täidame esimese ruudu järjestikuste arvudega 1—64, jättes seejuures läbikriipsutatud diagonaalväljad tühjaks (joon. 199, *a*). Väljajäetud arvud paigutame kahanevas järjekorras teise ruudu diagonaalväljadele (joon. 199, *b*). Mõlemaid ruute ühendades saamegi kaheksanda järgu maagilise ruudu (joon. 199, *c*).

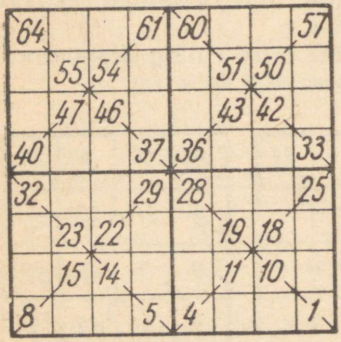
Selle ruudu konstant on 260.

Esimesel pilgul võib näida, et meil ongi käes meetod paarisjärguliste maagiliste ruutude koostamiseks. Kahjuks pole see aga õige. Näiteks kuuenda järgu ruudu koostamine selle võttega ei õnnestu ning meil tuleb kasutada hoopis vaevarikkamat viisi.

Joonistame ruudulisele paberile 6×6 ruudu ning jagame ta neljaks 3×3 ruuduks (joon. 200, *a*). Ülemisse vasakpoolsesse ruutu konstrueerime



a)



b)

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

c)

Joon. 199. Kaheksanda järgu maagilise ruudu koostamine.

varemkirjeldatud paaritu järguga maagilise ruudu koostamise võttega arvudest 1—9 maagilise ruudu. Sama printsiibi järgi täidame ka ülejäänud ruudud. Alumisse

4	9	2	22	27	20
3	5	7	21	23	25
8	1	6	26	19	24
31	36	29	13	18	11
30	32	34	12	14	16
35	28	33	17	10	15

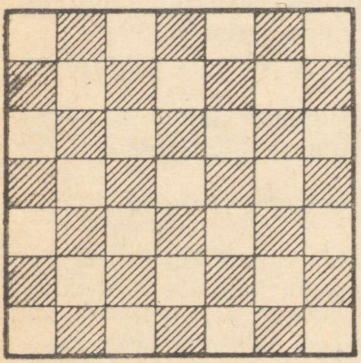
a)

31	9	2	22	27	20
3	32	7	21	23	25
35	1	6	26	19	24
4	36	29	13	18	11
30	5	34	12	14	16
8	28	33	17	10	15

b)

Joon 200. Kuuenda järgu maagilise ruudu koostamine.

parempoolsesse nurka paigutame arvud 10—18, ülemisse parempoolsesse nurka arvud 19—27 ja lõpuks alumisse vasakpoolsesse nurka arvud 28—36 (joon. 200, *a*). Pärast seda tuleb vahetada arvud 4, 5 ja 8 arvudega 31, 32 ja 35 ning maagiline ruut ongi valmis (joon. 200, *b*). Ta konstant on 111.



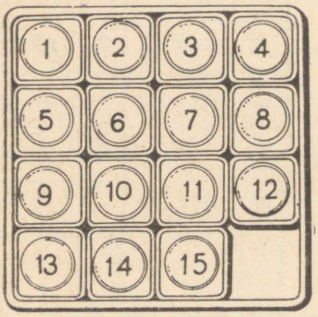
Joon. 201. Paigutage arvud valgetele väljadele.

334. Nupukuse eksam

Paigutage joonisel 201 toodud ruudu valgetele väljadele kõik täisarvud 30—54, nii et igas vertikaal- ja horisontaalreas olevate arvude summa oleks 150 ja kummalgi diagonaalil olevate arvude summa oleks 300. Ärge tegutsege huupi, vaid püüdke välja mõelda mingit arvude paigutamise korrapärast skeemi.

335. Maagiline viieteistkümnemäng

Kuutteistkümmend ruudukujulist mängunuppu mahutavas karbis on üks koht tühi (joon. 202). Tavaliselt seisab viieteistkümnemäng selles, et mingist meelevaldsest numbrite asetusest lähtudes püütakse neid paigutada joonisel 202 toodud «normaalseisu». Nuppude kohtade vahetamine toimub tühja ruudu abil ning nuppe ei tohi karbist välja võtta.



Joon. 202. Viieteistkümnemäng.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Joon. 203. Järjekord pole õige.

Niisugusel kujul pakub see mäng vähe huvi. Ta matemaatilist sisu võib tunduvalt rikastada, kui tuua sisse eritingimus, et karbis olevatest nuppudest tuleb nihutamisega koostada maagiline ruut (tühja ruutu loeme nulliks).

Kui teil seda mängu ei ole, siis te võite ta kergesti ka ise valmistada.

Paigutage nüüd viieteistkümnemängu nupud nii, nagu on näidatud joonisel 203 (kahe viimase nupu asukohad on vahetatud).

Nihutage nupud niisugusesse asendisse, et tekiks maagiline ruut konstandiga 30.

Proovige sellega hakkama saada vähem kui 50 nihutusega! Siin tuleb kahtlemata ilmutada kannatust ja suurt visadust.

Ka joonisel 202 toodud asetusest lähtudes saab moodustada maagilise ruudu, kuid see on alati erinev joonisel 203 toodud asetusest tekkivast maagilisest ruudust. Veenduge selles!

336. Mittetraditsiooniline maagiline ruut

Traditsioonilise maagilise ruudu elemendid on kõik üksteisele teatud konstantse vahega järgnevad arvud.

Üldisemal juhul võib aga maagilist ruutu koostada suvalistest arvudest.

Nii näiteks saab joonisel 204 toodud arvudest koostada maagilise ruudu, mille iga horisontaal-, vertikaal- ja diagonaalrea summa on 18.

Peale selle võrdub kaheksateistkümnega veel: 1) ruudu nurkades olevate arvude summa, 2) iga nelja ruudukuju-

1	2	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5
4	3	2	1

Joon. 204. Arve ümber tõstes koostage maagiline ruut.

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Joon. 205. «Libahunt».

liselt paikneva naaberarvu summa, 3) suvalise 3×3 ruudu nurkades olevate arvude summa, kusjuures nendes summades ükski number ei kordu.

Katsuge seda ülesannet lahendada proovimise teel, aga võib-olla suudate välja mõtelda ka mõne lihtsa skeemi.

*

Üks naljahammas koostas joonisel 205 toodud mittetraditsioonilise maagilise ruudu konstandiga $S = 264$ ja ristis ta «libahundiks».

Mis te arvate, millest on tingitud niisugune kummaline nimi?

337. Missugune arv asub ruudu keskel?

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S=15$

49	54	47
48	50	52
53	46	51

$S=150$

Joon. 206. Keskmises ruudus olev arv on $^1/_3 S$.

Selgitame nüüd, missugune arv asub paaritujärgulise maagilise ruudu keskmisel väljal. Vaatleme kaht üheksaväljalist maagilist ruutu (joon. 206). Mõlema ruudu puhul moodustab keskmisel väljal asuv arv ühe kolmandiku ruudu konstandist.

Järgmise näitena vaatleme joonisel 207 esitatud viienda järgu maagilist ruutu. Siin on keskmisel väljal asuv arv võrdne ühe viiendikuga ruudu konstandist.

Toodud näidete põhjal tundub, nagu võrduks paarituväljalise maagilise ruudu keskmisel väljal asuv arv maagilise ruudu ühe rea arvude aritmeetilise keskmisega. Iga vaatluse põhjal tehtud järeldust tuleb aga loomulikult lugeda õigeks alles pärast selle järelduse kehtivuse kontrollimist ka «üldjuhul». Piirdume esialgu kolmanda järgu

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	**13**	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

$S = 65$

Joon. 207. Keskmises ruudus olev arv on $^1/_5 S$.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Joon. 208. Kolmanda järgu ruut.

maagilise ruudu üldkujuga (joon. 208). Arvude asemel on ruutu paigutatud tähed. Väljendame nende tähtede abil ka kõik maagilise ruudu põhiomadused:

$$a_1 + a_2 + a_3 = S, \qquad a_1 + a_4 + a_7 = S,$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = S, \qquad a_2 + a_5 + a_8 = S,$$
$$a_7 + a_8 + a_9 = S, \qquad a_3 + a_6 + a_9 = S,$$
$$a_1 + a_5 + a_9 = S, \qquad a_3 + a_5 + a_7 = S.$$

Tõestage nüüd, et nende tingimuste täidetuse korral kehtib kindlasti võrdus

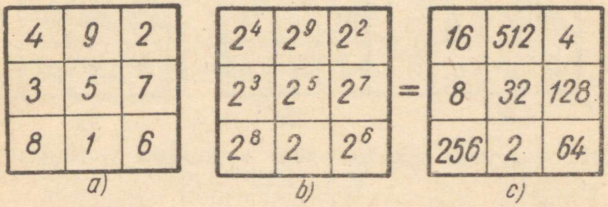
$$a_5 = \frac{S}{3}.$$

338. Maagilised korrutised

Maagiliste ruutude üheks eriliigiks on ruudud, mille ridade, veergude ja diagonaalide elementide (erinevate naturaalarvude) k o r r u t i s e d on konstantsed. Järjestikustest arvudest pole keegi veel seni niisugust ruutu koostanud ja seda ei saagi nähtavasti teha. Kui aga lubada arvude suvalist valikut, siis naturaalarvude lõpmatus hulgas leidub kindlasti sobivaid arve.

Kuidas neid leida?

Maagiliste korrutiste koostamiseks on olemas võrdlemisi lihtne ja teatud mõttes isegi ammendav meetod. Selle



Joon. 209. Maagilise korrutisruudu koostamine konstandiga 2^{15}.

võtte aluseks on tuntud astmete korrutamise reegel: võrdsete alustega astmete korrutamisel jääb alus samaks, astendajad aga liituvad. Näiteks,

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^{4+3+8} \text{ ehk } 2^8 \cdot 2 \cdot 2^6 = 2^{8+1+6}.$$

Meie poolt valitud näidetes olid astendajate summad võrdsed:

$$4 + 3 + 8 = 8 + 1 + 6,$$

järelikult on võrdsed ka astmete korrutised:

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^8 \cdot 2 \cdot 2^6.$$

Nüüd peaks olema ilmne, et kui võtta astme aluseks mingi suvaline arv (näiteks 2), astendajateks aga mingi konstantse summaga maagilise ruudu elemendid (näiteks joon. 209, *a*), siis saadud arvud moodustavad maagilise korrutisruudu konstandiga *P* (joon. 209, *b*).

Leiame selle ruudu konstandi *P*:

$$P = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^2 = 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = \text{jne.} = 2^{15} = 32\,768.$$

Täpselt samal viisil võib igast konstantse summaga maagilisest ruudust saada maagilise korrutisruudu.

Maagiliste korrutisruutude konstrueerimiseks võib kasutada ka teist, maagilistest ruutudest sõltumatut skeemi.

Lahutame a^3 kolme teguri korrutiseks: $a^3 = 1 \cdot a \cdot a^2$. Neid kolme arvu mitmel viisil kombineerides on üsna kerge moodustada maagilist korrutisruutu konstandiga a^3. Kõigepealt täidame nende teguritega mingi diagonaali väljad (näiteks joon. 210, a alt üles paremale). Edasi ase-

a	1	a^2
a^2	a	1
1	a^2	a

a)

1	b^2	b
b^2	b	1
b	1	b^2

b)

a	b^2	a^2b
a^2b^2	ab	1
b	a^2	ab^2

c)

Joon. 210. Maagiliste korrutisruutude koostamine konstantidega a^3, b^3 ja a^3b^3.

tame need arvud 1, a, a^2 täidetud diagonaali suhtes s ü m m e e t r i l i s e l t, nii et iga arv esineks igas reas ja veerus üks kord (joon. 210, *a*). Selle operatsiooni tulemusena tekkis maagiline korrutisruut konstandiga a^3. Ta ei vasta aga veel meie poolt seatud nõuetele, sest ta elemendid pole kõik erinevad.

Toimime nüüd täpselt samuti ka arvudega 1, b ja b^2, selle ainsa vahega, et esimesena täidame ülalt vasakult alla paremale mineva diagonaali (joon. 210, *b*). Asetame nüüd mõlemad ruudud kohakuti ja korrutame samadel väljadel olevad arvud omavahel läbi (joon. 210, *c*). Igas reas, igas veerus ja kummalgi diagonaalil asetsevate arvude korrutis on konstantne ja võrdub arvuga a^3b^3.

2	9	12
36	6	1
3	4	18

Joon. 211. $P = 216$.

Asendades nüüd a ja b mingite konkreetsete arvudega (kõige parem algarvudega, sest siis on kõik arvud kindlasti erinevad), saamegi maagilise korrutisruudu.

Olgu näiteks $a = 2$, $b = 3$, siis saame joonisel 211 toodud maagilise korrutisruudu konstandiga $P = 216$.

Ülesanne 1. Koostage parameetritest a, b ja c kolmanda järgu maagiline korrutisruut, nii et selle ruudu konstant oleks $a^3b^3c^3$.

*

Neljanda järgu maagiliste korrutisruutude koostamiseks võib kasutada analoogilist skeemi * (joon. 212, *a*). Korrutisruudu konstant $P = ABCDabcd$.

A·a	B·d	C·b	D·c
D·b	C·c	B·a	A·d
B·c	A·b	D·d	C·a
C·d	D·a	A·c	B·b

a)

1	10	21	36
27	28	2	5
8	3	45	7
35	9	4	6

b)

Joon. 212. Neljanda järgu maagilise korrutisruudu valem ja näide.

1	12	10
15	2	4
8	5	3

Joon. 213. Mittetäielik kolmanda järgu ruut.

Tähtedele konkreetseid väärtusi andes (näiteks: $A = 1$, $B = 2$, $C = 7$, $D = 9$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$) saame maagilise korrutisruudu, kus $P = 7560$ (joonis 212, *b*).

*

Muide, joonisel 213 toodud mittetäielikul maagilisel korrutisruudul (ta diagonaalide elementide korrutised pole võrdsed) on huvitav lisaomadus:

$$8^2 + 5^2 + 3^2 = 7^2 + 7^2,$$
$$8^4 + 5^4 + 3^4 = 7^4 + 7^4.$$

Ülesanne 2. Äsjatoodud mittetäieliku maagilise korrutisruudu iga rea ja veeru elementide korrutis avaldub üldvalemi kaudu järgmiselt: $P = a^3bc$. Asendage selle ruudu kõik elemendid vastavate tähekombinatsioonidega.

339. «Laekatäis» aritmeetilisi kurioosumeid

Täisarvude vahel võib avastada kõige kurioossemaid seoseid. Võtame kas või järgmised kaksteistkümmend harilikku täisarvu:

* See skeem esines ka ülesande 115 lahenduses.

1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 18, 21, 22, 23.

Pealtnäha pole neis midagi iseäralikku. Nüüd aga jaotan ma nad kahte rühma:

1, 6, 7, 17, 18, 23 ja 2, 3, 11, 13, 21, 22.

Võrrelge nüüd omavahel nende rühmade summasid:

$$1+6+7+17+18+23=72,$$
$$2+3+11+13+21+22=72.$$

Summad on võrdsed. Kuidas on lugu nende arvude ruutude summaga?

$$1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2=1228,$$
$$2^2+3^2+11^2+13^2+21^2+22^2=1228.$$

Ruutude summad on samuti võrdsed. Kuidas on lugu nende arvude kuupide summaga? Te võite ise vahetult veenduda, et nii nende arvude kuupide kui ka neljandate ja viiendate astmete summad on võrdsed:

$$1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3=$$
$$=2^3+3^3+11^3+13^3+21^3+22^3;$$
$$1^4+6^4+7^4+17^4+18^4+23^4=$$
$$=2^4+3^4+11^4+13^4+21^4+22^4;$$
$$1^5+6^5+7^5+17^5+18^5+23^5=$$
$$=2^5+3^5+11^5+13^5+21^5+22^5.$$

Ja mis on veel hämmastavam: kõiki neid arve ü h e j a s a m a a r v u võrra suurendades või vähendades saame ikka samade omadustega arvude rühmad. Kui näiteks vähendada kõiki antud arve 12 võrra, siis saame:

−11, −6, −5, 5, 6, 11 ja −10, −9, −1, 1, 9, 10.

On päris ilmne, et mõlema arvuderühma summa on null. Võrdsed on ka arvude kuupide ja viiendate astmete summad (samuti nullid). Pole raske veenduda summade võrdsuses ka ruutude ja neljandate astmete puhul:

$$(-11)^2+(-6)^2+(-5)^2+5^2+6^2+11^2=$$
$$=(-10)^2+(-9)^2+(-1)^2+1^2+9^2+10^2;$$
$$(-11)^4+(-6)^4+(-5)^4+5^4+6^4+11^4=$$
$$=(-10)^4+(-9)^4+(-1)^4+1^4+9^4+10^4.$$

Nüüd jääb veel teha vaid üks väike üldistav samm ja teie käsutuses ongi valem, mis annab teile selliste huvitavate omadustega arvude rühmi niipalju, kui te aga iganes soovite:

$$(m-11)^n+(m-6)^n+(m-5)^n+$$
$$+(m+5)^n+(m+6)^n+(m+11)^n=$$
$$=(m-10)^n+(m-9)^n+(m-1)^n+$$
$$+(m+1)^n+(m+9)^n+(m+10)^n,$$

kus m on suvaline arv ja $n=1, 2, 3, 4$ või 5.

Omapärased on ka need arvud, mida me viimases valemis arvule m liidame või temast lahutame. Igaüks neist arvudest kuulub kas pluss- või miinusmärgiga võetuna joonisel 214 esitatud nullsummaga mittetäieliku maagilise ruudu esimese või kolmanda rea koosseisu. Selle nullsummaga mittetäieliku maagilise ruudu elementide vahel kehtib veel mitu omapärast seost:

6	-11	5
-16	12	4
10	-1	-9

Joon. 214. Nullsummaga ruut.

1) $6^2+(-11)^2+5^2=10^2+(-1)^2+(-9)^2$,
$6^4+(-11)^4+5^4=10^4+(-1)^4+(-9)^4$;

2) omavahel on võrdsed kõik ridade, veergude ja diagonaalide elementide korrutiste summad, mis võivad tekkida selle ruudu ridade ja veergude järjekorra suvalisel muutmisel:

$$[6\cdot(-16)\cdot 10]+[(-11)\cdot 12\cdot(-1)]+[5\cdot 4\cdot(-9)]=$$
$$=[6\cdot(-11)\cdot 5]+[(-16)\cdot 12\cdot 4]+$$
$$+[10\cdot(-1)\cdot(-9)]=[6\cdot 12(-9)]+$$
$$+[(-11)\cdot 4\cdot 10]+[5\cdot(-16)\cdot(-1)]=$$
$$=(5\cdot 12\cdot 10)+[(-11)\cdot(-16)\cdot(-9)]+$$
$$+[6\cdot 4\cdot(-1)]=-1008;$$

3) kui mistahes rea või veeru elemente tähistada tähtedega a, b ja c, siis peale põhiseose $a+b+c=0$ kehtivad veel järgmised elementidevahelised seosed:

$$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab,\quad a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Veenduge selles!

Nagu näete, on see nullsummaga maagiline ruut tõepoolest «laekaks», mis sisaldab päris palju kurioosseid aritmeetilisi seoseid.

340. Täiendarvulised ruudud

Olgu a, a', b, b', c, c', d, d', e, e', f, f', g, g', h ja h' traditsioonilise neljanda järgu maagilise ruudu elemendid (joon. 215), kusjuures

$$a + a' = b + b' = c + c' = \ldots = 17.$$

Selline ruudu elementide vaheline seos on täiesti võimalik, sest maagilist ruutu moodustavaid arve võib jagada kaheksaks paariks, nii et iga paari elemendid täiendavad teineteist seitsmeteistkümneni. Näiteks 1 ja 16, 2 ja 15, 3 ja 14 jne. Püstitame nüüd järgmise ülesande.

Tähti arvudega asendades tehke kindlaks, kui palju võib moodustada oluliselt erinevaid maagilisi ruute, mille puhul võrduks 34-ga nii iga rea, veeru ja diagonaali summa kui ka ruudu neljas nurgas olevate arvude summa, kõigi neljaväljalisi ruute moodustavate naaberarvude summa ja lõpuks ka kõigi üheksaväljaliste alaruutude tippudes asuvate arvude summa.

a	h	e	c
g	b	d	f
e'	c'	a'	h'
d'	f'	g'	b'

Joon. 215. Arvud on maagilises ruudus asendatud tähtedega.

Oluliselt erinevateks nimetame niisuguseid maagilisi ruute, mille puhul e i s a a üht ruutu teisest kätte lihtsa ridade ja veergude asukoha ja järjekorra vahetamisega.

Vastavalt tingimustele peab kehtima võrdus $a + b + g + h = 34$. Tingimusi piiramata võime lugeda, et $a = 1$, siis $a' = 16$. Sel juhul b, g ja h on kõik kuueteistkümnest väiksemad. Siit järgneb omakorda, et nad on kõik kolmest suuremad. Kui näiteks tähe b korral kehtiks seos $b \leqslant 3$, siis peaks paratamatult ka g või h olema kuueteistkümnest suurem või sellega võrdne.

Tingimuste kohaselt peab kehtima veel ka võrdus $a + b' + c + d' = 34$. Täpselt analoogiliselt arutledes jõuame ka siin järelduseni, et b', c ja d' on kõik kolmest suuremad. Kui nüüd b oleks 14 või 15, siis peaks b' vastavalt olema 3 või 2, mis on aga võimatu. Tähendab, $3 < b < 14$.

Tingimusi piiramata võime arvestada, et $b \leqslant 8$, sest kui b oleks kaheksast suurem siis oleks $b' \leqslant 8$ ja ta võiks täielikult asendada kõikjal arvu b. Järelikult piisab, kui me vaatleme b võimalike väärtustena ainult arve 4, 5, 6, 7 ja 8. Me ei piira tingimusi ka juhul, kui eeldame, et $h > g$.

Nüüd on juba lihtne välja kirjutada kõiki võimalikke nelikuid (a, b, g ja h):

(1, 4, 14, 15), (1, 6, 13, 14,), (1, 8, 10, 15),
(1, 5, 13, 15), (1, 7, 11, 15), (1, 8, 11, 14),
(1, 6, 12, 15), (1, 7, 12, 14), (1, 8, 12, 13).

Saadud nelikute abil on kerge leida ka kõiki võimalikke c ja d' väärtusi, sest vastavalt tingimustele peab kehtima võrdus $a + b' + c + d' = 34$.

Näiteks, kui a, b, g ja h võrduvad vastavalt 1, 4, 14 ja 15 (esimene komplekt), siis $b' = 13$, $c + d' = 34 - 1 - 13 = 20$ ja järelikult võiksid sobida ainult järgmised väärtuste paarid: 8 ja 12, 12 ja 8, 9 ja 11 või 11 ja 9 (muud väärtused ei sobi, sest arvud ei tohi korduda).

Täpselt samal viisil võime välja valida kõik võimalikud c ja d' väärtused, mis vastavad a, b, g ja h väärtuste ülejäänud komplektidele. Tehke see sorteerimine läbi ja moodustage kõik väärtuste a, b, g, h, b', c ja d' komplektid. Neid polegi nii väga palju — kokku ainult 24.

Nüüd tuleb saadud 24 kombinatsiooni jaoks välja valida sobivad f ja f' väärtused. Seda võib teha tingimuse abil, et üheksaväljaliste alaruutude tippudes olevate arvude summa peab olema 34:

$$b + f + b' + f' = 34.$$

Sobivaid f ja f' väärtusi valides tuleb silmas pidada, et iga leitud f või f' väärtus lubab kohe üheselt määrata viimase tundmatute paari e ja e'. Vastavaid proove kõigi 24 juhu jaoks läbi viies avastate, et kümnel juhul ei ole võimalikke f ja f' väärtusi, neljal juhul aga ei leidu vastavasse ritta või veergu kolmele juba olemasolevale arvule lisaks sellist neljandat arvu, mis annaks summaks kokku 34. Nii näiteks ei sobi arvude kombinatsioonid (1, 10, 13) või (1, 9, 15), sest maagilises ruudus peavad kõik arvud olema erinevad. Esimene kombinatsioon jätab aga meile vaid võimaluse 10 valikuks ($34 - 1 - 10 - 13 = 10$) ja teine kombinatsioon ainult 9 valimiseks ($34 - 1 - 9 - 15 = 9$). Seitsmel juhul

pole maagilised ruudud oluliselt erinevad, s. t. neid võib saada üksteisest ridade või veergude asukoha või järjekorra vahetamisega.

Lõpuks selgub, et ainult k o l m e kombinatsiooni korral saab kõiki püstitatud nõudeid rahuldada.

Tähendab, leidub ainult kolm meie tingimusi rahuldavat oluliselt erinevat neljanda järgu täiendarvulist maagilist ruutu. Nad on toodud joonisel 216. Viimane nendest ruutudest erineb ainult veergude ja ridade asetuse järjekorra poolest meie poolt juba varem vaadeldud maagili-

1	15	10	8
14	4	5	11
7	9	16	2
12	6	3	13

1	15	6	12
14	4	9	7
11	5	16	2
8	10	3	13

1	15	4	14
12	6	9	7
13	3	16	2
8	10	5	11

Joon. 216. Kolm oluliselt erinevat maagilist ruutu.

sest ruudust (vt. joon. lk. 256). Tollel ruudul oli terve rida lisaomadusi. Peaaegu kõik nendest lisaomadustest on omased ka kahele esimesele maagilisele ruudule.

Determinante tundvale lugejale pakub kindlasti huvi teadmine, et kui neid maagilisi ruute vaadelda kui neljanda järgu determinante, siis kõik nad on võrdsed nulliga. Sama omadus on mõnikord ka kaheksanda järgu maagilisel ruudul (vt. joon. 199).

341. «Korrapärased» neljanda järgu maagilised ruudud

Iga traditsioonilist neljanda järgu maagilist ruutu võib lahutada nelja ruudu summaks, nii et esimeses ruudus oleks ainult ühed, teises ainult kahed, kolmandas ainult neljad ja neljandas ainult kaheksad. Tõepoolest, traditsioonilise neljanda järgu maagilise ruudu elementideks on kõik arvud ühest kuni kuueteistkümneni, seega iga elementi ühe võrra vähendades saame maagilise ruudu, mille elementideks on kõik täisarvud nullist kuni viieteistkümneni.

9	14	2	5
15	4	8	3
0	11	7	12
6	1	13	10

Joon. 217. «Korrapärane» maagiline ruut ...

Nelja arvu 1, 2, 4 ja 8 abil saab moodustada kõiki arve ühest kuni viieteistkümneni, iga põhiarvu ainult üks kord kasutades:

$1 = 1$, $6 = 2 + 4$, $11 = 1 + 2 + 8$,
$2 = 2$, $7 = 1 + 2 + 4$, $12 = 4 + 8$,
$3 = 1 + 2$, $8 = 8$, $13 = 1 + 4 + 8$,
$4 = 4$, $9 = 1 + 8$, $14 = 2 + 4 + 8$,
$5 = 1 + 4$, $10 = 2 + 8$, $15 = 1 + 2 + 4 + 8$.

Lahutame seda tabelit arvestades kõik maagilise ruudu elemendid osadeks ja kogume kõik koostisosad omaette ruutudesse. Nii näiteks on joonisel 217 toodud

1			1
1			1
	1	1	
	1	1	

	2	2	
2			2
	2	2	
2			2

	4		4
4	4		
		4	4
4		4	

8	8		
8		8	
	8		8
		8	8

Joon. 218. ... ja seda moodustavad ruudud.

0	4	15	11
9	13	2	6
14	10	5	1
7	3	8	12

Joon. 219. «Eba-korrapärane» maagiline ruut ...

maagiline ruut esitatud joonisel 218 neljaks ruuduks lahutatuna. Joonisel 219 esitatud maagiline ruut on lahutatud neljaks ruuduks joonisel 220.

Neljanda järgu maagilist ruutu nimetatakse *korrapäraseks,* kui iga ta koostisruut on samuti maagiline ruut. Esimese näitena toodud ruut on korrapärane, teine ruut aga pole seda (diagonaalide summad ei võrdu veergude ja ridade summadega).

Ainult kahe erineva arvu abil koostatud maagilisi ruute on üldse kaheksa (joon. 221).

Neid kaheksat ruutu neljakaupa kokku liites võime saada kõikvõimalikke korrapäraseid neljanda järgu maagilisi ruute. Nende hulgas on ainult ü k s t e i s t sellist, mille kõik elemendid on erinevad.

Kui kaheksat lihtsamat ruutu tähistada vastavalt tähtedega *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* ja *H*, siis 11 korrapärast

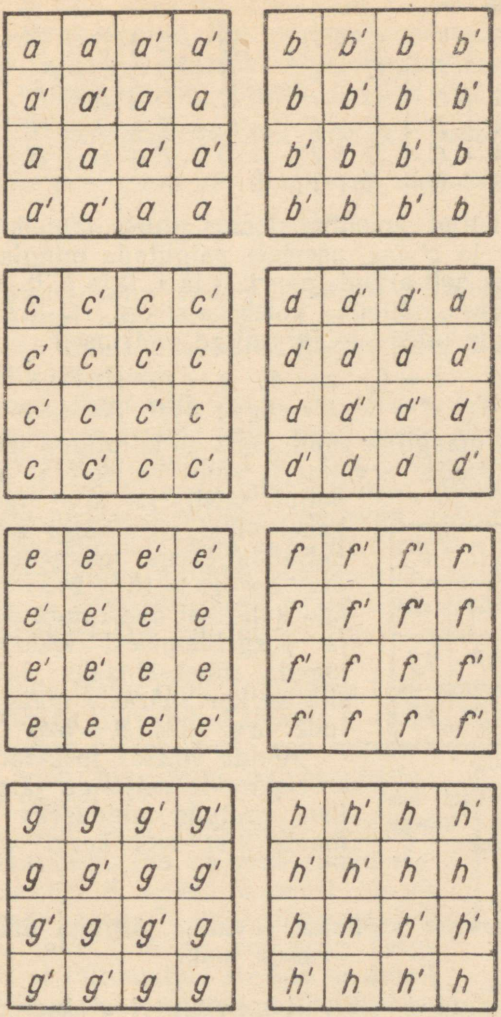
		1	1
1	1		
		1	1
1	1		

		2	2
		2	2
2	2		
2	2		

	4	4	
	4		4
4		4	
4			4

		8	8
8	8		
8	8		
		8	8

Joon. 220. ... ja seda moodustavad ruudud.



Joon 221. Maagilised ruudud, milles on ainult kaks erinevat arvu

maagilist ruutu avalduvad nende järgmiste kombinatsioonidena:

$$A+B+C+D, \quad B+C+D+F,$$
$$A+B+C+E, \quad B+C+E+F,$$
$$A+B+D+F, \quad C+D+E+F,$$
$$A+B+E+F, \quad C+E+G+H,$$
$$A+C+D+E, \quad D+F+G+H.$$
$$A+D+E+F,$$

Igas leitud kombinatsioonis tuleb tähtede a ja a', b ja b', c ja c' jne. asemele paigutada mingis suvalises järjekorras neli arvude paari: 0 ja 1, 0 ja 2, 0 ja 4, 0 ja 8.

Vaatleme näitena kombinatsiooni $C+E+G+H$ ning valime tähtedele järgmised väärtused:

$$c=0, \quad e=4, \quad g=8, \quad h=0,$$
$$c'=2, \quad e'=0, \quad g'=0, \quad h'=1.$$

Saame maagilise ruudu, mis on kujutatud joonisel 222. Kuna nelja arvupaari võib varieerida kahekümne neljal viisil ja arve igas paaris kahel viisil, siis kõigi korrapäraste neljanda järgu maagiliste ruutude arv on $11 \times 16 \times 24 = 4224$. Kui aga kaheksat ühe ruudu pööramisest ja peegeldamisest tekkinud ruutu lugeda üheksainsaks lahenduseks, siis on korrapäraste maagiliste ruutude arv $4224 : 8 = 528$.

12	15	0	3
11	1	14	4
2	8	7	13
5	6	9	10

Joon. 222. Veel üks korrapärane maagiline ruut.

Mõnda lihtsat meetodit ka ebakorrapäraste neljanda järgu maagiliste ruutude leidmiseks pole siiamaale vist veel keegi avastanud.

342. Arvude valimine suvalise järguga maagilise ruudu jaoks

Olgu antud $n \times n$ väljaga ruut. Nõutakse ruudu täisarvudega täitmist, nii et iga rea, iga veeru ja iga diagonaali summa võrduks meie poolt suvaliselt valitud arvuga S (ruudu konstandiga). Teiste sõnadega — meil tuleb koostada maagiline ruut, aga see ei tarvitse olla traditsiooniline, s. t. ei nõuta järjestikuste arvude kasutamist.

Traditsioonilise maagilise ruudu puhul ei saa ruudu konstant S olla suvaline arv, vaid ta on juba arvude valikuga ette määratud. Kui me koostame n-järgu maagilist ruutu ja kasutame kõiki arve ühest kuni n^2-ni, siis on kõigi nende arvude summa $1+2+3+\ldots+n^2=$ $=\frac{(1+n^2)n^2}{2}$ (aritmeetilise rea liikmete summa). Järelikult on ühe rea, veeru või diagonaali elementide summa

$$S=\frac{(1+n^2)n}{2}.$$

Meie aga lubame endale vabaduse kasutada suvalisi täisarve (isegi negatiivseid) ja pealegi ei nõua, et iga arv esineks ainult üks kord (loomulikult kõik n^2 arvu ei tohi olla võrdsed).

Esimesel pilgul võib näida, et selliste vabaduste korral pole sobivate arvude valik kuigi raske. Proovige kord ise ja te veendute peagi, et asi pole kaugeltki nii lihtne. Ma soovitan, et te enne edasilugemist tingimata prooviksite suvalistest arvudest koostada mõnda suvalise konstandiga viienda järgu maagilist ruutu.

Enne kui minna üldjuhu vaatlemisele, peatume eraldi kolmanda ja neljanda järgu maagiliste ruutude juures. Küsimuse lähemaks uurimiseks tuleb meil appi võtta algebra.

Kolmanda järgu ruut. Tähistame kõik otsitavad arvud kahe indeksiga varustatud tähega a (joon. 223). Esimene indeksinumber näitab meile rea numbrit, milles a asub, ning teine number näitab vastavat veergu.

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Joon. 223. Arvud asendame indeksitega varustatud tähega a.

Kuna ruut peab tingimuste kohaselt olema maagiline, siis on meil ruudu elementide vahel 8 seost: 6 seost ridade ja veergude ning 2 seost diagonaalide summade jaoks. Muide, on üsna kerge veenduda, et sõltumatuid seoseid on ainult 6 (ülejäänud on eelmiste järeldused). Tõepoolest, arvestades, et $a_{22}=\frac{S}{3}$, kus S on ruudu konstant, saame järgmise võrrandsüsteemi:

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}=S, \quad (1)$$
$$a_{31}+a_{32}+a_{33}=S, \quad (2)$$

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = S, \quad (3)$$
$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = S, \quad (4)$$
$$a_{21} + a_{23} = \frac{2}{3}S, \quad (5)$$
$$a_{12} + a_{32} = \frac{2}{3}S, \quad (6)$$
$$a_{11} + a_{33} = \frac{2}{3}S, \quad (7)$$
$$a_{13} + a_{31} = \frac{2}{3}S. \quad (8)$$

Võrrandeid (6), (7) ja (8) liites ning tulemusest võrrandit (2) lahutades saame parajasti võrrandi (1). See näitabki, et võrrand (1) sõltub ülejäänud võrranditest, ehk nagu räägitakse — ta järeldub teistest võrranditest. Kustutame ta oma süsteemist. Võrrandeid (5), (7) ja (8) liites ning tulemusest võrrandit (3) lahutades saame võrrandi (4). Siit järeldub, et ka võrrand (4) pole iseseisev ja me võime ta kustutada. Meil jääb seega järele kuus võrrandit kaheksa tundmatuga. Me peaksime nüüd näitama, et need võrrandid pole enam sõltuvad üksteisest. Selleks me peaksime kaheksast tundmatust välja valima mingid kuus tundmatut ning avaldama nende kaudu 2 ülejäänud tundmatut ja tuntud arvu S. Kui meil see õnnestub, siis süsteem on sõltumatu. Veenduge iseseisvalt, et võrrandisüsteem (2), (3), (5), (6), (7) ja (8) on lahenduv näiteks tundmatute a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23} ja a_{32} suhtes.

$k+x$	$k-x-y$	$k+y$
$k-x+y$	k	$k+x-y$
$k-y$	$k+x+y$	$k-x$

Joon. 224. Kolmanda järgu maagilise ruudu valem.

Niisiis selgus, et kaheksast üheksa tundmatuga võrrandist on ainult kuus võrrandit sõltumatud. See annab meile õiguse üheksast otsitavast arvust kolm valida suvaliselt.

Pidades silmas, et $a_{22} = \frac{S}{3}$, võtame

$$a_{22} = k.$$

Arvud a_{11} ja a_{13} võtame võrdseks arvudega $k + x$ ja $k + y$, kus k, x ja y on suvalised:

$$a_{11} = k + x, \quad a_{22} = k, \quad a_{13} = k + y.$$

Nendest väärtustest lähtudes saame koostada joonisel 224 toodud lahenduse.

Paigutades selles lahenduses arvu x asemele arvu $-x$ ja y asemele $-y$, või siis x asemele y ja y asemele x, saame oluliselt mitteerineva maagilise ruudu, kus ainult ridade ja veergude paiknemine on veidi erinev. Seepärast me võime eeldada, et

$$x \geqslant y,$$

kus x ja y on mõlemad positiivsed arvud. Saadud maagilises ruudus on vähimaks elemendiks $k - x - y$, suurimaks $k + x + y$. Seda teades on meil kerge kätte saada traditsioonilist maagilist ruutu, mille vähimaks elemendiks on 1 ja suurimaks 9.

Vastavalt eelnevale arutelule

$$k - x - y = 1,$$
$$k + x + y = 9,$$

peale selle,

$$k = \frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Siit leiame, et $x = 3$, $y = 1$ ning saame ridade ja veergude paigutuse täpsuseni määratud ainuvõimaliku traditsioonilise kolmanda järgu maagilise ruudu (joon. 225).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Joon. 225. Traditsiooniline kolmanda järgu maagiline ruut.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Joon. 226. Arvud on asendatud indeksitega varustatud tähega a.

Neljanda järgu maagiline ruut. Kuueteistkümne arvu leidmiseks, millest võiks koostada neljanda järgu maagilise ruudu (joon. 226), on meie käsutuses kaheksa sõltumatut võrrandit.

Kui oskuslikult valida 8 tundmatut ja anda neile

suvalised väärtused, siis ülejäänud 8 tundmatut võime leida võrrandisüsteemi lahendades.

Märgime muuseas, et igas neljanda järgu maagilises ruudus on nelja sisemise elemendi summa võrdne ruudu konstandiga S:

$$a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

Selle neljanda järgu maagilisele ruudule iseloomuliku omaduse õigsuses te võite veenduda iseseisvalt.

Toome nüüd sisse kaheksa suvalist arvu (A, B, C, D, a, b, c, d) järgmiste seoste kaudu:

$$a_{32} = A,\ a_{22} = B,$$
$$a_{23} = C,\ a_{33} = D,$$
$$a_{11} = A - a,$$
$$a_{12} = C + a + c,$$
$$a_{13} = B + b - c,$$
$$a_{21} = D + a - d.$$

Ülejäänud kaheksat arvu on nüüd lihtne leida ja me saame 1910. aastal E. Bergholtzi poolt esitatud maagilise ruudu valemi (joon. 227).

Professor V. P. Jermakov esitas ajakirjas «Журнал элементарной математики» juba tunduvalt varem (1884. aastal) maagilise ruudu valemi, mida võib esitada kahe maagilise ruudu summana (joon. 228).

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

Joon. 227. Neljanda järgu maagilise ruudu valem.

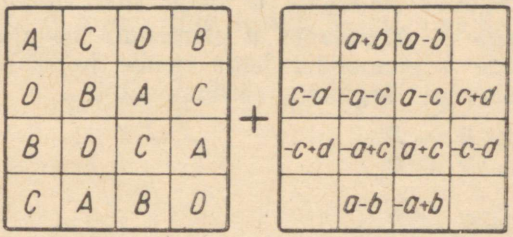
Kaheksat arvu A, B, C, D, a, b, c, d vabalt valides ja mõlemaid ruute vastavate elementide kaupa liites saamegi otsitava maagilise ruudu.

Selle kohta, kuidas neid kaheksat arvu nii valida, et maagilise ruudu elementideks oleksid arvud 1—16, kirjutab V. P. Jermakov järgmist: «Me ei tunne selle küsimuse lihtsat lahendust ja jätame ta leidmise lugeja hooleks.»

N-järguline maagiline ruut ($n > 4$). Arve, mis moodustavad n-järgulise maagilise ruudu ($n > 4$), võib esitada järgmiselt:

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1,p-1}, & a_{1p}, & a_{1,p+1}, & \ldots, & a_{1,n-1}, \quad a_{1n}, \\
a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2,p-1}, & a_{2p}, & a_{2,p+1}, & \ldots, & a_{2,n-1}, \quad a_{2n}, \\
a_{31}, & a_{32}, & \ldots, & a_{3,p-1}, & a_{3p}, & a_{3,p+1}, & \ldots, & a_{3,n-1}, \quad a_{3n}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \ldots, & a_{n-1,p-1}, & a_{n-1,p}, & a_{n-1,p+1}, & \ldots, & a_{n-1,n-1}, \quad a_{n-1,n}, \\
a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{n,p-1}, & a_{n,p}, & a_{n,p+1}, & \ldots, & a_{n,n-1}, \quad a_{n,n}.
\end{array}
$$

Siin on n^2 tundmatut, mis võivad olla suvalised algebralised suurused, peaasi, et ridade, veergude ja diagonaalide elementide summad võrduksid varem valitud suvalise konstandiga S.



Joon. 228. V. P. Jermakovi valem.

See tingimus annab meile n^2 tundmatu jaoks $2n+2$ lineaarset seost. Nendest on sõltumatuid seoseid ülimalt $2n$. Tähendab, $n^2 - 2n$ tabeli elementi me võime vabalt valida. Küsimus seisab ainult selles, missuguseid ruudu elemente me võime vabalt niiviisi ette anda, et igal juhul saaks garanteerida ülejäänud $2n$ elemendi leidmist vastavalt püstitatud tingimustele.

Jätame nende elementide jaoks, mida me kavatseme lugeda suvalisteks, kehtima tähistuse indeksitega varustatud tähe a abil. Ülejäänud otsitavaid tähistame aga tähtedega $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}, b_{2n}$ ja paigutame nad ruutu vastavalt järgmisele skeemile:

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1,p-1}, & a_{1p}, & a_{1p+1}, & \ldots, \quad a_{1,n-2}, \quad a_{1,n-1}, \quad a_{1,n}, \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2,p-1}, & a_{2p}, & a_{2,p+1}, & \ldots, \quad a_{2,n-2}, \quad a_{2,n-1}, \quad b_1, \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots, & a_{3,p-1}, & a_{3p}, & a_{3,p+1}, & \ldots, \quad a_{3,n-2}, \quad a_{3,n-1}, \quad b_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-2,1}, & a_{n-2,2}, & a_{n-2,3}, & \ldots, & a_{n-2,p-1}, & a_{n-2,p}, & a_{n-2,p+1}, & \ldots, \\
 & & & & & & \ldots, & a_{n-2,n-2}, \quad a_{n-2,n-1}, \quad b_{n-3},
\end{array}
$$

$b_{2n-2}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \ldots, a_{n-1,p-1}, b_{2n-1}, a_{n-1,p+1}, \ldots,$
$\ldots, a_{n-1,n-2}, a_{n-1,n-1}, b_{n-1},$
$b_{2n-3}, b_{2n-4}, b_{2n-5}, \ldots, b_{2n-v-1}, b_{2n}, b_{2n-v-2}, \ldots,$
$\ldots, b_{n+1}, b_n, b_{n-2}.$

Olgu i-ndas reas asuvate a-de summa R_i, kusjuures $R_1 = S$, ja i-ndas veerus asuvate a-de summa C_i.

Edasi võtame kasutusele veel tähistused diagonaalidel asuvate elementide summade jaoks:

$$D_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{n-1,n-1},$$
$$D_2 = a_{1,n} + a_{2,n-1} + a_{3,n-2} + \ldots + a_{n-1,2}.$$

Kõigi ruudus leiduvate a elementide summat tähistame tähega $\overline{S}$. Asendades a elementid usvaliste arvudega, võime b elementid leida nende indeksite kasvamise järjekorras järgmiste võrduste abil:

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= R_1 - R_2,\\
b_2 &= R_1 - R_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_{n-3} &= R_1 - R_{n-2},\\
b_{n-2} &= R_1 - D_1,\\
b_{n-1} &= R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-3} + b_{n-2}),\\
b_n &= R_1 - C_{n-1},\\
b_{n+1} &= R_1 - C_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_{2n-p-2} &= R_1 - C_{p+1},\\
b_{2n-p-1} &= R_1 - C_{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_{2n-4} &= R_1 - C_2,\\
b_{2n-3} &= R_1 - D_2,\\
b_{2n-2} &= R_1 - C_1 - b_{2n-3},\\
b_{2n-1} &= R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2},\\
b_{2n} &= R_1 - C_p - b_{2n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Märgime, et b_{2n-1} asub reas $(n-1)$, kuid ei kuulu kummagi diagonaali elementide hulka. Selline asetus oleks $n \leqslant 4$ korral võimatu. Järelikult meie poolt varem analüüsitud juhud ei kuulu praegu käsitletavasse skeemi.

Kõik viimases reas asetsevad b elementid leitakse üksteisest sõltumatult, seepärast me peame kindlasti kontrollima, kas nende summa

$$b_{n-2} + b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} \qquad (**)$$

tõepoolest võrdub maagilise ruudu konstandiga $S = R_1$. Selleks valime võrdustest (*) välja meile sobivad ja eelnevalt teisendame neist mõned:

$$b_{n-1} = R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-3} + b_{n-2}) = R_1 - C_n - (R_1 - R_2 + R_1 - R_3 + \ldots + R_1 - R_{n-2} + R_1 - D_1) = R_1 - C_n - R_1 + R_2 - R_1 + R_3 - \ldots - R_1 + R_{n-2} - R_1 + D_1 = D_1 - C_n + (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2}) - \underbrace{(R_1 + R_1 + \ldots + R_1)}_{(n-2)\text{ korda}}.$$

Tuletades meelde arvude R_i ja $\bar{S}$ definitsioone, ning märkides, et a elemente leidub kõigis ridades peale viimase, saame:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2} = \bar{S} - R_{n-1},$$

järelikult,

$$b_{n-1} = D_1 - C_n + \bar{S} - R_{n-1} - (n-2)\,R_1,$$

. . . . . .

$$b_{2n-2} = R_1 - C_1 - b_{2n-3} = R_1 - C_1 - (R_1 - D_2) = D_2 - C_1,$$

$$b_{2n-1} = R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2} = R_1 - R_{n-1} - [D_1 - C_n + \bar{S} - R_{n-1} - (n-2)R_1] - (D_2 - C_1) = (n-1)R_1 + C_1 + C_n - D_1 - D_2 - \bar{S};$$

$$b_{2n} = R_1 - C_p - b_{2n-1} = R_1 - C_p - (n-1)R_1 - C_1 - C_n + D_1 + D_2 + \bar{S} = D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2)R_1 + \bar{S}.$$

Asetades leitud seosed avaldisse (**), saame

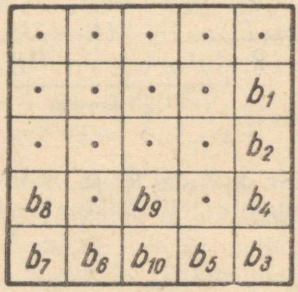
$$b_{n-2} + \underbrace{(b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-4} + b_{2n-3})}_{(n-2)\text{ liidetavat}} + b_{2n} = R_1 - D_1 + (R_1 - C_{n-1} + R_1 - C_{n-2} + \ldots + R_1 - C_2 + R_1 - D_2) + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2)R_1 + \bar{S} = R_1 - D_1 + [R_1\,(n-2) - (C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots + C_2) - D_2] + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2)\,R_1 + \bar{S} = R_1 - (C_n + C_{n-1} + \ldots + C_p + \ldots + C_2 + C_1) + \bar{S}.$$

Kuna $C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1} + C_n = \bar{S}$, siis järelikult

$$b_{n-2} + b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} = R_1.$$

Siin vaadeldud üldised reeglid garanteerivad seega tõepoolest suvalise järgu (üldiselt mittetraditsioonilise) maagilise ruudu koostamise võimaluse.

Juhu $n=5$ jaoks on maagilise ruudu konstruktsiooniskeem toodud joonisel 229.



Joon. 229. Viienda järgu maagilise ruudu koostamine.

Punktide asemele paigutage suvalised arvud, elemendid $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ aga määrake kindlaks numeratsiooni järjekorras vastavalt seostele. Tekkinud ruut on kindlasti maagiline.

XIII PEATÜKK

TÕSIST JA NALJAKAT ARVUDE VALLAST

Meid ümbritseva maailma objektides te märkate kõigepealt neid omadusi, mille poolest nad üksteisest erinevad. Kõikidele objektidele *ühiseid* omadusi on hoopis raskem avastada, sest nad on alati varjatud rohkete individuaalsete omaduste poolt.

Üheks tähtsamaks reaalse maailma objektide üldiseks omaduseks on see, et neid võib *loendada ja mõõta*. See objektide üldine omadus peegeldub *arvu* mõistes.

Reaalse maailma objektide loendamise ja võrdlemise (mõõtmise) vajadus ei tekkinud inimestel otsekohe, aga siiski väga ammu. See vajadus tekkis tööprotsessis, inimsoo arengu üpris varasel perioodil.

Inimestel kulus loendama õppimiseks, s. t. arvu mõiste omandamiseks, üsna palju aega.

«Loendamiseks,» kirjutas F. Engels, «on vaja mitte ainult loendatavaid esemeid, vaid samuti juba võimet selliste esemete vaatlusel jätta tähele panemata kõik nende muud omadused peale arvu, säärane võime aga on pika ajaloolise, kogemusele rajatud arenemise tulemus.»*

Arvude abil loendama õpib kaasajal iga inimene märkamatult juba lapsepõlves, peaaegu samaaegselt rääkima õppimisega. Kuid see meile nii sisseharjunud

---

* F. Engels, Anti-Dühring, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1954, lk. 34—35.

loendamisviis läbis üsna pika arengutee ja omandas rea erinevaid vorme.

Oli aeg, mil esemete loendamiseks oli käibel ainult kaks arvsõna: üks ja kaks. Loendamisprotsessi edasise arengu käigus võeti appi inimese kehaosad, esmajärjekorras muidugi sõrmed. Kui seda liiki «arvudest» ei jätkunud, võeti veel appi pulki, kive ja muid esemeid.

N. N. Mikluhho-Maklai jutustab oma «Reisides» omapärasest loendusmeetodist, mida kasutavad Uus-Ginea pärismaalased:

«Eelistatuim loendusviis seisab selles, et paapua kõverdab üksteise järel sõrmi, kusjuures ta toob kuuldavale mingi heli, näiteks «be, be, be,» ... Niiviisi viieni jõudnud, ütleb ta «ibon-be» (käsi). Seejärel ta kõverdab teise käe sõrmed, korrates endamisi «be, be, be» ..., kuni jõuab väärtuseni «ibon-ali» (kaks kätt). Seejärel ta loendab esemeid edasi kuni jõuab arvudeni «samba-be» ja «samba-ali» (üks jalg, kaks jalga). Kui loendamist on vaja veel jätkata, siis paapua võtab appi mõne teise paapua sõrmed ja varbad.»*

Arvude tekkimise ja arenemise järel tärkas peagi ka suurepärane teadus nende arvude omadustest ja seadustest, millele arvud alluvad: «arvude teooria».

Arvudega opereerides, s. t. mitmesuguseid aritmeetilisi tehteid teostades, me ei avasta mitte ainult arvude üldisi omadusi, mille uurimisega tegeleb arvude teooria, vaid huvitume ka kitsamatest, ainult teatavatele arvude rühmadele või isegi ainult üksikutele arvudele omastest seadustest.

Neil erilistel omadustel ei tarvitse olla kuigi suurt teoreetilist tähtsust, kuid nad on sageli väga huvitavad. Tuhnige tohutus arvude massis ja te leiate sealt palju huvitavat ja üllatavat, kummalist ja naljakat, ootamatut ja kurioosset.

Te kohtute unikaalsete arvudega, s. t. niisugustega, mille sarnaseid teisi pole, ja ka tervete arvukimpudega, mis moodustavad võluvaid kombinatsioone.

---

* Н. Миклухо-Маклай, Путешествия, Изд. АН СССР, 1940, т. I, стр. 280.

343. Kümme numbrit (vaatlus)

I. Peaaegu kogu maailmas kasutatakse praegu ühtset loendussüsteemi — kümnendsüsteemi. Selles süsteemis on üldse kümme numbrit: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 0, millest piisab kõikvõimalike arvude üleskirjutamiseks.

Näiteks proovime nende numbrite abil moodustada suurimat kümnekohalist arvu ilma ühtegi numbrit kordamata. See arv on niisugune:

9876543210.

Iga numbrite asukoha vahetamine annab meile kindlasti väiksema arvu. Eks ole?

Mõõdaminnes oleks huvitav selgitada, mitu kümnekohalist, kuid erinevate numbritega arvu saab üldse üles kirjutada.

Miljon? Või vähem? Kuidas seda kindlaks teha?

Loomulikult ärge proovige neid arve kõiki üles kirjutada, sellest ei tule midagi välja!

*

II. Nagu me eelmises punktis nägime, on erinevate numbritega kümnekohalisi arve üle kolme miljoni (vt. lk. 533).

Sorteerime nüüd sellest tohutust lasust välja ainult kuus arvu:

1 037 246 958, 1 046 389 752, 1 286 375 904;
1 307 624 958, 1 370 258 694, 1 462 938 570.

Mis on siis huvitavat nende arvude juures?

Jagage kõik need arvud kahega ja siis veel üheksaga. Valmis? Esimene jagamine andis meile üheksakohalised arvud, teine jagamine aga kaheksakohalised arvud.

Kas kõigi leitud arvude hulgas leidub ühtainustki, mille numbrid poleks erinevad?

Edasi — teine jagamine andis meile arvud, millest üheski ei esine numbrit 9. Kui me selle kadumaläinud 9 kirjutame ühele nendest kuuest arvust lõppu juurde, siis see arv muutub täisruuduks (s. t. temast saab võtta täisarvulise ruutjuure). Proovige nüüd ise leida, millisel neist kuuest kaheksakohalisest arvust on see kummaline omadus.

*

III. Arvude kurioossete omaduste edasiseks uurimiseks võtame vaatluse alla kaks arvu:

$$a = 123\,456\,789 \text{ ja } b = 987\,654\,321.$$

Esimene neist on vähim ja teine suurim erinevate numbrite abil üleskirjutatud arvudest, kui null välja jätta.

Nende arvude vahe koosneb jällegi erinevatest numbritest:

$$987\,654\,321 - 123\,456\,789 = 864\,197\,532.$$

Kui neid arve a ja b korrutada kõigi ühekohaliste arvudega (peale ühe ja nulli), siis saadud korrutisi võib jagada üldiste omaduste järgi kahte rühma, ning koos sellega võib jaotada kahte rühma ka neid ühekohalisi arve:

2, 4, 5, 7, 8 ja 3, 6, 9.

Millised omadused on nende rühmade liikmete korrutistel arvudega a ja b?

Ka arvude a ja b jagamisel nende ühekohaliste arvudega tekkivaid arve saab samade rühmade järgi eritleda. Millise omaduse põhjal?

Arvust a on arvu b päris kerge kätte saada: tarvitseb vaid arvu a korrutada teatava ühekohalise arvuga ja liita veel üks ühekohaline arv.

Leidke selleks sobiv kordaja ja liidetav.

*

IV. Kui arvu 12 345 679 korrutada algul suvalise ühekohalise arvuga ja pärast üheksaga, siis tulemusena saame arvu, mille kõik numbrid ühtivad esimese kordajaga.

Näiteks

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times \quad 7 \\ \hline 86\,419\,753 \\ \times \quad 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times \quad 8 \\ \hline 98\,765\,432 \\ \times \quad 9 \\ \hline 888\,888\,888 \end{array}$$

Kontrollige seda omadust ka teiste kordajate puhul ning leidke selle kurioosse nähtuse põhjendus.

344. Veel mõningaid huvitavaid tähelepanekuid

I. Telegraafilint purunes täpselt arvu 9801 keskkohast. Ühele linditükile jäi 98 ja teisele tükile 01. Ma leidsin ajaviiteks nende arvude summa, tõstsin selle ruutu ja oma üllatuseks sain uuesti esialgse arvu: $(98 + 01)^2 = 9801$.

Pole raske kontrollida, et selline omadus on ka arvul 3025. Kui selle arvu pooled kokku liita ja ruutu tõsta, siis tulemus on võrdne lähtearvuga.

Peale siintoodute on neljakohaliste arvude seas veel ainult üks arv, millel on sama omadus. Kuidas ma selle kindlaks tegin, sellest ma räägin lahenduste osas. Millise lahendusviisi valiksite teie selle ülesande puhul?

*

II. Kirjutame üksteise alla mõned read arve:

A

1	3	5	7	9	11	13 ...
1	4	7	10	13	16	19 ...
1	5	9	13	17	21	25 ...
1	6	11	16	21	26	31 ...
1	7	13	19	25	31	37 ...
1	8	15	22	29	36	43 ...
1	9	17	25	33	41	49 ...
.	.	.	.	.	.	*C*

Kõikides horisontaalridades on ühe rea ulatuses iga kahe järjestikuse arvu vahe jääv suurus (selliseid ridu nimetatakse aritmeetilisteks progressioonideks).

Kui sellisel viisil tekkinud tabeli arve rühmitada punktiirjoonte abil nurkribadeks, siis igas nurkribas olevate arvude summa võrdub riba järjekorranumbri kuubiga.

Nii näiteks saame teise nurkriba puhul

$$1 + 4 + 3 = 2^3.$$

Kolmanda nurkriba puhul leiame analoogiliselt

$$1 + 5 + 9 + 7 + 5 = 3^3$$

jne.

Üldiselt, n-nda nurkriba elementide summa on n^3. Sellel tabelil on veelgi huvitavaid omadusi. Nii näiteks on kõik tabeli diagonaalil AC asuvad arvud võrdsed vastavate ridade kohanumbrite ruutudega. Edasi on iga suurest tabelist eraldatud ruut, mille diagonaaliks on mingi AC osa, niisuguse omadusega, et tema elementide summa on mingi täisruut.

Näiteks arvude summa ruudus, mille diagonaalis on arvud 25, 36 ja 49, on:

$$25 + 31 + 37 + 29 + 36 + 43 + 33 + 41 + 49 = 324 = 18^2.$$

Kontrollige seda omadust ka teiste diagonaali AC osade suhtes. Otsige analoogilisi omadusi ka järgnevas tabelis toodud arvude juurest:

1	3	5	7	9	11	13 ...
1	5	9	13	17	21	25 ...
1	7	13	19	25	31	37 ...
1	9	17	25	33	41	49 ...
1	11	21	31	41	51	61 ...
.	.	.	.	.	.	. . .

*

III. Palju huvitavaid omadusi on ka arvul 37.

1) Kui teda korrutada arvuga 3 või mingi kolmega jaguva arvuga, mis ei ületa kahtkümmend seitset, siis saame tulemuseks mingi kolmest ühesugusest numbrist koosneva kolmekohalise arvu:

$$37 \cdot 3 = 111,\ 37 \cdot 6 = 222,\ 37 \cdot 9 = 333,$$
$$37 \cdot 12 = 444,\ 37 \cdot 27 = 999.$$

2) Kui korrutada arvu 37 ta numbrite summaga, siis saame parajasti numbrite kuupide summa:

$$37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3.$$

3) Kui arvu 37 numbrite ruutude summast lahutada nende numbrite korrutis, siis saame tulemuseks jällegi 37:

$$(3^2 + 7^2) - 3 \cdot 7 = 37.$$

4) Arvu 37 üheks huvitavamaks omaduseks on see, et kui võtta mingi 37-ga jaguv kolmekohaline arv ja paigutada selle numbreid tsükliliselt ümber, siis kõik saadud arvud jaguvad 37-ga.

Näiteks arvu $37 \cdot 7 = 259$ puhul leiame, et ka arvud 925 ja 592 jaguvad 37-ga.

Arvude tsükliliseks ümberpaigutamiseks nimetame järjestikust arvu viimase numbri esikohale tõstmist, ilma et ülejäänud numbrite järjekorda muudetaks.

Võtame veel huupi ühe 37-ga jaguva kolmekohalise arvu. Olgu see näiteks $37 \cdot 5 = 185$. Tsükliline arvude ümberpaigutamine annab arvud 518 ja 851, mis tõepoolest jaguvad 37-ga.

Kontrollige, kas see seaduspära peab tõepoolest paika kõigi kolmekohaliste 37-ga jaguvate arvude puhul.

Analoogiline omadus on ka viiekohalistel 41-ga jaguvatel arvudel. Nii näiteks jaguvad arvud 15 498, 81 549, 98 154, 49 815, 54 981 kõik 41-ga ja on saadud üksteisest tsüklilise arvude ümberpaigutuse teel.

345. Kaks huvitavat katset

Esimene katse. Kirjutame üles neli s u v a l i s t naturaalarvu, näiteks 8, 17, 3, 107. Leiame nüüd esimese ja teise, teise ja kolmanda, kolmanda ja neljanda, neljanda ja esimese arvu vahed (lahutades iga kord suuremast arvust väiksema):

$$17 - 8 = 9, \quad 17 - 3 = 14, \quad 107 - 3 = 104, \quad 107 - 8 = 99.$$

Nimetame leitud vahed esimesteks vahedeks ja paigutame nad leidmise järjekorras ritta: 9, 14, 104, 99.

Leiame jälle esimese ja teise, teise ja kolmanda, kolmanda ja neljanda ning lõpuks neljanda ja esimese arvu vahed, lahutades iga kord suuremast arvust väiksema:

$$14 - 9 = 5, \quad 104 - 14 = 90, \quad 104 - 99 = 5, \quad 99 - 9 = 90.$$

Niiviisi saame teiste vahede rea: 5, 90, 5, 90.

Täpselt samuti leiame kolmandad vahed: 85, 85, 85.

Neljandad vahed on aga juba kõik nullid: 0, 0, 0, 0.

Kordame seda katset mõne teise arvude rühmaga. Toome vahede jaoks sisse järgmised tähistused: A_0 —

esialgsed arvud, A_1 — esimesed vahed, A_2 — teised vahed jne.

Koosnegu esialgsete arvude rühm A_0 järgmistest arvudest:

$$(93,\ 5,\ 21,\ 50).$$

Arvutame nüüd järjest kõik vahed välja:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (93,\ 5,\ 21,\ 50),\\
A_1 &= (88,\ 16,\ 29,\ 43),\\
A_2 &= (72,\ 13,\ 14,\ 45),\\
A_3 &= (59,\ 1,\ 31,\ 27),\\
A_4 &= (58,\ 30,\ 4,\ 32),\\
A_5 &= (28,\ 26,\ 28,\ 26),\\
A_6 &= (\ 2,\ 2,\ 2,\ 2),\\
A_7 &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}$$

Juba seitsme sammuga jõudsime nullide rühmani.

Iga eksperimentaator peab oma katse tingimusi võimalikult mitmekesistama. Proovime ka meie uuesti õnne mõne üsna hajunud arvude nelikuga, näiteks arvudega 1, 11, 130, 1760:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (\ 1,\ 11,\ 130,\ 1760),\\
A_1 &= (\ 10,\ 119,\ 1630,\ 1759),\\
A_2 &= (\ 109,\ 1511,\ 129,\ 1749),\\
A_3 &= (1402,\ 1382,\ 1620,\ 1640),\\
A_4 &= (\ 20,\ 238,\ 20,\ 238),\\
A_5 &= (\ 218,\ 218,\ 218,\ 218),\\
A_6 &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}$$

Saime ikkagi kätte nullide rea ja sealjuures vastu ootusi ainult kuue sammuga.

Tehke ise veel kümmekond katset meelevaldsete naturaalarvude nelikutega, enamasti te jõuate nullideni ülimalt kaheksa sammuga (kuid mitte alati).

Kas meie poolt märgitud seaduspära on üldine või võib-olla leidub selline naturaalarvude rühm, mille korral me kunagi ei jõua nullideni välja? Seda pole sugugi kerge kindlaks teha. Vastava mõttekäigu konstrueerimine nõuab teatud leidlikkust. Proovige sellega hakkama saada. Lahenduse otsimine toob kasu isegi sel juhul, kui te iseseisvalt ei jõua täieliku lahenduseni välja.

Märkus 1. Samasugune nulliks muutumise omadus on ka igal kaheksast või kuueteistkümnest arvust koosneval arvude järjestikuste vahede rühmal, ehk üldi-

selt 2^n arvust koosneval rühmal, kus n on suvaline naturaalarv.

Märkus 2. Kui arvude hulk rühmas ei võrdu mingi kahe astmega (s. t. pole 4, 8, 16, 32 jne), siis järjestikune vahede moodustamine ei tarvitse meid üldse nullideni välja viia. Olgu näiteks $A_0 = (2, 5, 9)$, siis

$$A_0 = (2, 5, 9), \quad A_5 = (1, 1, 0),$$
$$A_1 = (3, 4, 7), \quad A_6 = (0, 1, 1),$$
$$A_2 = (1, 3, 4), \quad A_7 = (1, 0, 1),$$
$$A_3 = (2, 1, 3), \quad A_8 = (1, 1, 0).$$
$$A_4 = (1, 2, 1),$$

A_8 ühtib A_5-ga, järelikult korduvad nüüd lõpmatuseni vahed A_6, A_7, A_8.

Teine katse.* Kirjutage üles mingi täisarv ja leidke ta numbrite ruudud. Saadud tulemusega toimige samuti. Seda operatsiooni mõned korrad korrates te jõuate kindlasti välja kas arvuni 1 või arvuni 89. Näiteks arvu 31 puhul me saame:

$$3^2 + 1^2 = 10,$$
$$1^2 + 0^2 = 1.$$

Sama tulemuseni viivad meid ilmselt kõik arvud kujuga 10^n, kus n on suvaline naturaalarv, aga ka arvud, mis koosnevad suvalisest hulgast nullidest ning arvudest 1 ja 3, 6 ja 8, kus iga number esineb üks kord.

Sellisteks arvudeks on näiteks 13, 103, 3001, 68, 608, 8006 jne.

Võtame nüüd mõne muu arvu, näiteks 48. Sel juhul

$$4^2 + 8^2 = 80, \quad 5^2 + 2^2 = 29,$$
$$8^2 + 0^2 = 64, \quad 2^2 + 9^2 = 85,$$
$$6^2 + 4^2 = 52, \quad 8^2 + 5^2 = 89.$$

Operatsiooni jätkates saame:

$$8^2 + 9^2 = 145, \quad 4^2 = 16,$$
$$1^2 + 4^2 + 5^2 = 42, \quad 1^2 + 6^2 = 37,$$
$$4^2 + 2^2 = 20, \quad 3^2 + 7^2 = 58,$$
$$2^2 + 0^2 = 4, \quad 5^2 + 8^2 = 89.$$

---

* Raamatu esimeses väljaandes kuulus see katse peatükki «Katkihammustamata pähklid». Nagu Moskva matemaatik I. J. Tanatar autorile teatas, on see pähkel purustatud. Tanatari poolt esitatud lahendus on toodud leheküljel 535.

Kaheksandal sammul jõudsime jälle arvuni 89. Märgime, et vahepealseteks arvudeks olid 145, 42, 20, 4, 16, 37 ja 58. Siit järeldub, et kui arvude numbrite ruutude liitmine tõepoolest viib lõpuks välja kas ühe või 89-ni, siis me võiksime soovi korral viimase numbri sama edukalt asendada ükskõik millisega arvudest 145, 42, 20, 4, 16, 37 või 58.

Tehke ise veel mõned proovid mitmesuguste arvudega ja proovige siis seda omadust ka tõestada.

Vähem huvitavad pole ka seaduspärasused, mis tekivad suvaliste arvude numbrite *kuupide* ja *neljandate astmete summade* korduval arvutamisel. Nende vaatluste läbitöötamise ja seaduspärasuste avastamise ma jätan lugejatele iseseisvate uurimiste teemana.

346. Arvude karussell

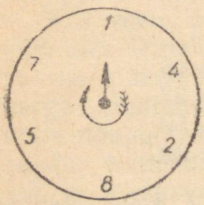
1) Valime põhjatust arvude laekast välja arvu 142 857. Ta koosneb kuuest erinevast numbrist. Asetame nad ringina nagu kella numbrilauale (joon. 230). Korrutame nüüd antud arvu järjest arvudega 1, 2, 3, 4, 5 ja 6:

$$142\,857 \times \begin{cases} 1 = 142\,857, \\ 2 = 285\,714, \\ 3 = 428\,571, \\ 4 = 571\,428, \\ 5 = 714\,285, \\ 6 = 857\,142. \end{cases}$$

Numbrilauda mööda noole suunas liikudes võime nendest numbritest välja lugeda järjest kõik korrutised.

Iga numbrilaua number on parajasti ühe korrutise esimeseks numbriks.

Tõeline numbrite karussell, eks olel



Joon. 230. «Karussell».

2) Nendel korrutistel on veel üks huvitav omadus. Kui ükskõik millist neist lahutada kaheks kolmekohaliseks tükiks ja need tükid kokku liita, siis saame igal juhul ühe ja sama arvu: 999. Tõepoolest, $142 + 857 = 999$, $285 + 714 = 999$ jne.

3) Jätkame nüüd endi arvu 142 857 korrutamist seitsmest suuremate arvudega (seitsmega korrutamist vaatleme veidi hiljem):

$$142\,857 \times \begin{cases} 8 = 1\,142\,856 & (142\,856 + 1 = 142\,857), \\ 9 = 1\,285\,713 & (285\,713 + 1 = 285\,714), \\ 10 = 1\,428\,570 & \ldots\ldots\ldots \\ 11 = 1\,571\,427 & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 69 = 9\,857\,133 & (857\,133 + 9 = 857\,142). \end{cases}$$

Tulemusena saame terve rea seitsmekohalisi arve, kusjuures kõigil neil on üks ja sama veider omadus. Nimelt kui eraldada nende esimene number ja liita arvu järelejäävale osale, siis me saame alati mõne arvu 142 857 tsüklilise ümberpaigutuse (teiste sõnadega, ühe meie karussellil leiduvatest arvudest).

Arvu 142 857 numbritest tekib samasugune karussell (mõningate eranditega) ka kaheksakohaliste korrutustulemuste puhul, kui vaid eraldada tulemuse algusest 2 kohta ja liita need järelejäävale osale juurde.

4) Arvu 142 857 seitsmega korrutades saame hoopis erineva tulemuse:

$$142\,857 \times 7 = 999\,999.$$

See korrutistulemus aitab meid oluliselt nii arvu 142 857 saamisloo kui ka ta «saladuslike» omaduste uurimisel. Kas ta ei ole järsku murru $\frac{1}{7}$ kümnendperioodiks?

Kontrolliks jagamegi arvu 1 seitsmega:

1	| 7
10	0,142 857
30	
20	
60	
40	
50	
1	

Viimaseks jäägiks saime arvu 1 ja järelikult edasisel jagamisel korduvad kõik jagatise numbrid täpselt samas järjekorras. See tähendabki, et meil on tegemist perioodilise murruga, s. o. niisuguse lõpmatu kümnendmurruga,

milles teatud numbrite rühm kordub teatud kohast peale lõpmatu hulk kordi.

Meie väide oli seega õige: arv 142 857 on tõepoolest murru $\frac{1}{7}$ kümnendperioodiks. Et selgitada, miks see arv 2, 3, 4, 5 ja 6-ga korrutamisel andis tulemuseks ikka mõne oma numbrite tsüklilise ümberpaigutuse, selleks pöördume uuesti tagasi ühe seitsmega jagamise skeemi juurde.

Kogu seda jagamist võib jaotada järgmisteks etappideks:

$$\frac{1}{7} = 0{,}1 + \frac{3}{7}\cdot 10^{-1} = 0{,}14 + \frac{2}{7}\cdot 10^{-2} = 0{,}142 + \frac{6}{7}\cdot 10^{-3} =$$

$$= 0{,}1428 + \frac{4}{7}\cdot 10^{-4} = 0{,}14285 + \frac{5}{7}\cdot 10^{-5} = 0{,}142\,857 +$$

$$+ \frac{1}{7}\cdot 10^{-6} = \ldots$$ (edasi korduvad kogu aeg samad arvud).

Siit on pikemata selge, et näiteks murru $\frac{3}{7}$ kümnendmurruks teisendamisel algab periood vahetult ühele järgnevast numbrist arvus 1 428 571 428 571 4..., s. o. perioodiks on 428 571; sama arv peab ilmselt olema ka arvude 142 857 ja 3 korrutiseks, sest $\frac{3}{7} = \frac{1}{7}\cdot 3$.

Edasi saame samadest seostest, et murru $\frac{2}{7}$ kümnendmurruks teisendamisel algab periood numbrist, mis asub arvus 14 285 714 285 714... numbrite 1 ja 4 järel, s. t. perioodiks on arv 285 714, kusjuures sama arv on ka arvude 142 857 ja 2 korrutiseks, sest $\frac{2}{7} = \frac{1}{7}\cdot 2$ jne.

Niisama lihtne on põhjendada, miks arvu 142 857 korrutis 7-ga koosneb ainult üheksatest. Asi on selles, et lõpmatut puhtperioodilist kümnendmurdu perioodiga 9 loetakse võrdseks ühega, s. t. $1 = 0{,}999\,999\ldots$ ja murru $\frac{1}{7}$ korrutis seitsmega on ka võrdne ühega.

5) Kui murd $\frac{a}{b}$ teisendub perioodiliseks kümnendmurruks, siis ta periood ei saa olla üle $b - 1$ numbri. Tõepoolest, jagamisel peab jääk alati olema jagajast väiksem, kuid alati leidub ainult lõplik hulk b-st väiksemaid naturaalarve ja nimelt arvud 1, 2, 3, ..., $b - 1$.

Igaüks neist arvudest võib olla a b-ga jagamisel jäägiks ja igaühele neist vastab mingi jagatise number. Edasi minnes hakkavad jäägid kindlasti korduma ja koos sellega ka jagatise numbrid. Siit järeldubki, et suurim võimalik perioodi numbrite arv on nimetajast ühe võrra väiksem.

Murd $\frac{1}{7}$ annab meile just maksimaalse pikkusega perioodi (6 numbrit).

Niisugust maksimaalse pikkusega perioodi nimetatakse *täielikuks perioodiks.*

Kuid kaugeltki mitte igal murrul ei ole täielikku perioodi. Näiteks murru $\frac{1}{39}$ periood ei sisalda 38 numbrit, nagu võiks oodata, vaid ainult kuut:

$$\frac{1}{39} = 0{,}025641025641\ldots$$

Murru $\frac{1}{7}$ perioodi «tsüklilisuse» omadus on olemas kõigil arvudel, mille periood on t ä i e l i k.

Nii näiteks on murdude $\frac{1}{17}$ ja $\frac{1}{29}$ perioodid täielikud:

$$\frac{1}{17} = 0{,}(0588235294117647),$$

$$\frac{1}{29} = 0{,}(0344827586206896551724137931).$$

Esimeses perioodis on 16, teises 28 numbrit.

Nende perioodide numbritest moodustatud arvudel on seega kõik omadused, mis olid arvul 142 857.

347. Välkkiire korrutamise ketas

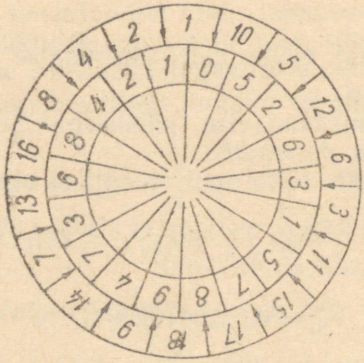
Samasse tsükliliste arvude peresse, mille esindajaks on arv 142 857 (vt. ülesanne 346), kuulub ka arv

$$M = 052\,631\,578\,947\,368\,421.$$

Joonisel 231 kujutatud ketta abil võib seda arvu välkkiirelt korrutada iga naturaalarvuga vahemikust 1—18.

Ketta välimisele ringile on paigutatud kõik 18 kordajat. Sisemisel ringil asetsevad kõik arvu M numbrid, mis ühtlasi annavad ka kõigi võimalike korrutiste väärtused.

Et leida arvu *M* korrutist mistahes välimisel ringil asuva arvuga, tuleb alustada korrutise lugemist sisemise ringi numbrist, mis asub ketta keskpunktist vaadates tegurist p a r e m a l pool oleva noole kohal. Sellest numbrist



Joon. 231. Välkkiire korrutamise ketas.

alustades tuleb lihtsalt teha kellaosuti liikumise suunas täisring mööda sisemist rada ja tulemus ongi käes!

Näiteks arvust 14 paremal pool asetsev nool näitab numbrile 7. See tähendab, et $M \cdot 14 = 736\,842\,105\,263\,157\,894$. Leidke veel paar arvu *M* korrutist.

Kui arvu *M* korrutada 19-ga, siis saame tulemuseks ainult üheksatest koosneva arvu. Te taipate nüüd kindlasti kohe, et arv *M* on murru $^1/_{19}$ kümnendperiood. Selle murru periood on täielik (koosneb 18-st numbrist) ja järelikult tsükliline. See selgitabki (vt. ülesanne 346) meie ketta konstruktsioonilised saladused.

Valmistage papist veel kümmekond välkkiire korrutamise ketast. Nüüd juba muidugi teiste murdude perioodidest ja demonstreerige sõpradele oma fenomenaalset arvutamiskiirust.

348. Ajude gümnastika

Proovige kord korrutada arvu 142 857 peast näiteks arvuga 493 või mõne teise kahe- või kolmekohalise arvuga. Ärge arvake, et see on väga raske ülesanne.

Selleks pole tarvis mingeid erilisi arvutuslikke võimeid, et vastust anda ühe minuti jooksul ja teatud vilumuse korral juba palju-palju kiiremini.

Tuletage meelde arvu 142 857 kahe- ja kolmekohaliste arvudega korrutamisel saadud arvude omadusi: kui nende lõpust eraldada kuus kohta ja ettepoole jääv arvu osa liita lõpposale juurde, siis saame parajasti ühe arvu 142 857 tsüklilistest ümberpaigutustest (vt. ülesanne 346). Arv 142 857 on murru $^1/_7$ kümnendperiood.

Järelikult taandub arvu 142 857 arvuga 493 korrutamine arvu 493 seitsmega jagamisele ja tekkiva murru perioodi leidmisele.

Kuidas neid tehteid peast teostada?

Algul eraldame murru $^{497}/_7$ täisosa. See on 70. Paneme kohe selle arvu kirja tulemuse kahe esimese kohana. Järele jääb veel murd $^3/_7$ ehk teiste sõnadega murru $^1/_7$ periood (s. t. arv 142 857) korrutatuna kolmega.

Ülesandest 346 on teada, et selle korrutise tulemuseks on üks arv 142 857 tsüklilistest ümberpaigutustest. Järelikult taandub ülesanne sellele, et tuleb leida ainult tulemuse esimene number. Kõige lihtsam on seda teha kolme seitsmega jagades: esimene jagatise number on 4.

(Tulemuse esimest numbrit võiks leida ka teisiti, nimelt korrutise $142\,857 \cdot 3$ viimase numbri abil. Kuna $3 \cdot 7 = 21$, siis korrutise viimane number on 1, tähendab, otsitava perioodi esimeseks numbriks on perioodis 142 857 ühele järgnev arv, s. t. 4).

Leitud number 4 määrab meile kogu perioodi: 428 571. Jätkame nüüd otsitava tulemuse väljakirjutamist. Selleks lisame meie poolt juba varem leitud arvule 70 perioodi 428 571 neli esimest numbrit, perioodi kahest viimasest numbrist aga lahutame 70; see annab meile otsitava korrutise kaks viimast numbrit.

Tähendab, lõplikult saame

$$142\,857 \times 493 = 70\,428\,501.$$

Selle peastkorrutamise näite kirjeldamine võtab palju aega, ta tegelik teostamine kulgeb aga erakordselt kähku.

Kui te olete endale meetodi olemuse selgeks teinud ja veidi harjutanud (see on päris kasulik ajude gümnastika),

siis te võite oma mitte midagi aimavaid sõpru hämmastada arvutuste tempoga.

Kirjutage paberile arv 142 857 ja paluge, et mõni sõber lisaks sinna mõne kahe- või kolmekohalise korrutaja. Pärast lühikest mõtlemist te kirjutategi üles lõpliku arvutustulemuse.

Oletame näiteks, et teid paluti leida korrutist $142\,857 \cdot 816$. Kõigepealt jagame mõttes 816 seitsmega. Saame 116 ja $^4/_7$. Esialgu paneme kirja 116. Järgneva osa esimene number on 5 ($4 : 7 = 0{,}5\ldots$). See number määrab ülejäänud perioodi elementide asukoha: 571 428. Viimastest numbritest tuleb meil aga lahutada juba varem, leitud arv 116. Jäägi 571 312 kirjutame 116-st paremale poole ja tulemuseks ongi:

$$142\,857 \times 816 = 116\,571\,312.$$

Teie võimeid fenomenaalse arvutajana tunnustavad niisuguse näite järel kindlasti kõik.

Mõnikord võib juhtuda ka nii, et esitatud arv jagub ilma jäägita seitsmega. Vaatleme üht konkreetset näidet: $142\,857 \times 378$.

Siit saame

$$\frac{378}{7} = 54 = 53\frac{7}{7},$$

tähendab tulemuse esimesed kohad on 53. Arvu 142 857 seitsmega korrutades saame teatavasti kuus üheksat. Lahutame nüüd 999 999-st 53 ja kirjutame saaduse 53-st paremale:

$$142\,857 \times 378 = 53\,999\,946.$$

349. Numbritest mustrid

Numbrid võivad arvudeks ühendatuna ja meie soovi kohaselt aritmeetilistest tehetest osa võttes moodustada mõnikord üsna veidraid ja omamoodi ilusaid arvude kombinatsioone, mis meenutavad jäälillede kristalseid mustreid aknaklaasidel.

I. Vaadake korraks neid harilikke korrutustehete tulemusi, mis on paigutatud küll veidi omapäraselt, kuid annavad õige tulemuse:

$$\begin{array}{r} \times\ 77 \\ 77 \\ \hline 49 \\ 49 \\ \hline 4949 \\ 5929 \end{array}$$

ehk

$$\begin{array}{r} \times\ 77 \\ 77 \\ \hline 7 \\ 777 \\ \hline 847 \times 7 = 5929 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 666 \\ 666 \\ \hline 36 \\ 3636 \\ 363636 \\ 3636 \\ 36 \\ \hline 443556 \end{array}$$

ehk

$$\begin{array}{r} \times\ 666 \\ 666 \\ \hline 6 \\ 666 \\ 66666 \\ \hline 73926 \times 6 = 443556 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 777777777777 \\ 777777777777 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ 494949 \\ 49494949 \\ 4949494949 \\ 494949494949 \\ 49494949494949 \\ 4949494949494949 \\ 494949494949494949 \\ 49494949494949494949 \\ 4949494949494949494949 \\ 494949494949494949494949 \\ 49494949494949494949 \\ 4949494949494949 \\ 494949494949 \\ 49494949494 \\ 4949494949 \\ 494949494 \\ 49494949 \\ 4949494 \\ 494949 \\ 49494 \\ 4949 \\ 494 \\ 49 \\ \hline 604938271603728395061729 \end{array}$$

ehk

$$\begin{array}{r} \times\ 777777777777 \\ 777777777777 \\ \hline 7 \\ 777 \\ 77777 \\ 7777777 \\ 777777777 \\ 77777777777 \\ 7777777777777 \\ 77777777777777 \\ 777777777777777 \\ 7777777777777777 \\ 77777777777777777 \\ 777777777777777777 \\ 7777777777777777777 \\ \hline 864197530862469135802 47 \\ \times\ 7 \\ \hline 6049382716037283950617 29 \end{array}$$

II. Veel 8 korrutist:

$1738 \times 4 = 6952$, $483 \times 12 = 5796$,
$1963 \times 4 = 7852$, $297 \times 18 = 5346$,
$198 \times 27 = 5346$, $157 \times 28 = 4396$,
$138 \times 42 = 5796$, $186 \times 39 = 7254$.

Igas võrduses koosnevad kõik kolm arvu üheksast erinevast numbrist.

*

III. Kõik järgnevad võrdused on õiged ning kummalgi pool võrdusmärki on tegemist ühtede ja samade numbritega:

$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2$,
$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3$,
$95 : 5 = 9 + 5 + 5$,
$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$,
$5^{6-2} = 625$,
$(8 + 9)^2 = 289$,
$2^{10} - 2 = 1022$,
$2^{8-1} = 128$,
$4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2$,

$\sqrt{121} = 12 - 1$,
$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$,
$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4}$,
$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9$,
$\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6$,
$\sqrt{324} = 3 \cdot (2 + 4)$,
$\sqrt{11\,881} = 118 - 8 - 1$,
$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36$,
$\sqrt[3]{1331} = 1 + 3 + 3 + 1 + 3$.

Mõtelge ka ise välja mõned analoogilised toredad näited!

*

IV. Meie jääkristall-numbrid moodustasid sedapuhku niisuguse «mustri»: mingi arvu korrutis ta numbrite summaga

$$37 \times (3 + 7).$$

Äkki esimene tegur «sulas ära», teine tegur aga muutus kuupide summaks: $3^3 + 7^3$ ning kujutlege — tulemus ei muutunud:

$$37 \times (3 + 7) = 3^3 + 7^3.$$

Vaadake vaid, ka teise «mustriga» juhtus sama lugu:

$$48 \times (4 + 8).$$

Korrutise esimene tegur haihtus, teise teguri liidetavad tõusid kuupi ja tulemus ei muutunud:

$$48 \times (4 + 8) = 4^3 + 8^3.$$

Siin on veel neli analoogilist «mustrit»:

$$\begin{aligned} 147 \times (14 + 7) &= 14^3 + 7^3, \\ 148 \times (14 + 8) &= 14^3 + 8^3, \\ 111 \times (11 + 1) &= 11^3 + 1^3, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \times (1 + 2 + 3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3. \end{aligned}$$

*

V. Kaks lumehelbekest-numbrit 1 ja 6 moodustasid kord arvu

$$16 = 4^2.$$

Siis aga langes nende numbrite 1 ja 6 vahele veel üks «lumehelbeke»: 15. Ka tekkinud uus arv 1156 oli täisruut:

$$1156 = 34^2.$$

Veelkord langes samasugune «lumehelbeke» (15) ja maandus täpselt arvu 1156 keskele. Nüüd tekkis uus arv 111 556, kuid ka see oli täisruut:

$$111\,556 = 334^2.$$

Kui nendest viieteistkümnetest tekiks päris «lumesadu» ja iga järgmine maanduks täpselt eelmise arvu keskkohta, siis jääksid tekkivad arvud ikka täisruutudeks, ükskõik kui kaua see «sadu» ka kestaks:

$$\begin{aligned} 11\,115\,556 &= 3\,334^2, \\ 1\,111\,155\,556 &= 33\,334^2, \\ 111\,111\,555\,556 &= 333\,334^2 \text{ jne.} \end{aligned}$$

See protsess kulgeb nähtavasti seaduspäraselt, kuid täieliku kindlustunde saavutamiseks me peaksime ikkagi tõestama, et iga arv, mille n kõrgemat järku kohta on hõivatud numbri 1 poolt (n on suvaline naturaalarv) ja $n - 1$ järgmist kohta on hõivatud numbri 5 poolt, ning mis lõpeb numbriga 6, s. t. arv

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ korda}}\,\underbrace{55\ldots56}_{n-1 \text{ korda}}$$

on kindlasti mingi täisarvu ruut. Seda võib mitmel viisil tõestada. Väike annus vaimukust ja te leiate võrdlemisi lühikese tõestuse faktile, et iga naturaalarvulise n korral N on arvu $\frac{10^n+2}{3}$ täpne ruut.

Tõestage iseseisvalt, et iga naturaalarvulise n korral

1) arv $\frac{10^n+2}{3}$ on täisarv,

2) $\frac{10^n+2}{3} = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ korda}} + 1.$

350. Üks kõigi eest ja kõik ühe eest

I. Arvude 1 kuni 26 üleskirjutamiseks piisab loomulikult, kui teie käsutuses on kõik 10 numbrit: 0, 1, 2, ..., 9. Nendest numbritest muidugi piisab, kuid nad pole tarvilikud. Soovi korral võib läbi ajada ka ainult numbriga 2, teda seejuures iga arvu saamiseks täpselt viis korda kasutades ja ainult nelja aritmeetilist põhitehet pruukides. (Vajaduse korral võib appi võtta ka sulud ja ruutu tõstmise). Mõnel vabal minutil pakub see ajude gümnastika päris palju huvi.

Toome näitena 10 esimese arvu saamisloo:

$1 = 2+2-2-\frac{2}{2}$, $6 = 2+2+2+2-2$,

$2 = 2+2+2-2-2$, $7 = 22:2-2-2$,

$3 = 2+2-2+\frac{2}{2}$, $8 = 2\times2\times2+2-2$,

$4 = 2\times2\times2-2-2$, $9 = 2\times2\times2+\frac{2}{2}$,

$5 = 2+2+2-\frac{2}{2}$, $10 = 2+2+2+2+2$.

Toodud näidete eeskujul proovige ka ülejäänud 16 arvu esitada viie kahe abil.

Arvu 27 ei saa püstitatud tingimustel esitada viie kahe abil.

Ma tuletan veelkord meelde, et iga arvu kujutamiseks peab kasutama täpselt viit kahte.

*

II. Numbrit 4 iga arvu jaoks neli korda kasutades moodustage kõik täisarvud ühest kuni kümneni.

*

III. Üldistame eelmist ülesannet nende jaoks, kellele meeldivad aritmeetilised mõistatused.

Proovime täisarve esitada nelja ühesuguse, kuid muidu suvalise numbri abil. See tähendab, et kui me oleme mõne esitusviisi leidnud, siis peab see võrdus paika pidama ka kõigi suvaliste, kuid ühesuguste numbritega nelikute puhul (numbri 0 jätame muidugi mängust välja).

Võtame näiteks arvu 3 esituse nelja nelja abil:

$$3 = (4 + 4 + 4) : 4.$$

Selle esitusviisi korral me võime neljad tõepoolest asendada mistahes võrdsete arvudega (peale nulli). Näiteks,

$$3 = (5 + 5 + 5) : 5 \text{ ehk } 3 = (8 + 8 + 8) : 8$$

ning üldiselt

$$3 = (n + n + n) : n.$$

Kui aga vaadelda arvu 5 esitust nelja nelja abil: $5 = (4 \times 4 + 4) : 4$, siis me ei saa siin nelja vahetada ühegi teise numbri vastu. Järelikult tuleb otsida mõnda teist arvu 5 esitusviisi. Seejuures lubatakse kasutada järgmisi matemaatilisi märke: $+$, $-$, $\times$, $:$ ja ( ).

Kui nendest märkidest puudus tuleb, siis võime veel appi võtta

1) ruutjuure märgi: $\sqrt{\ }$ (pidades silmas ainult positiivset juure väärtust, s. t. $\sqrt{9} = 3$, mitte -3);

2) faktoriaali märgi: !. See märk pannakse arvust paremale poole ja ta tähendab kõigi ühest kuni selle arvuni kulgevate naturaalarvude korrutist; näiteks

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

üldiselt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n;$$

3) arvu ees seisvat punkti, näiteks $.4$; arvu ees ja kohal seisvat punkti, näiteks $\dot{.}4$.

Esimese sümboliga tähistatakse mõningates maades kümnendmurde $.4 = 0{,}4$, teise sümboliga aga perioodilisi

kümnendmurde: $.\dot{4} = 0,(4)$. Meenutame lugejale, et perioodilist kümnendmurdu saab asendada täpse lihtmurruga:

$$0,(4) = \frac{4}{9}, \quad 0,(n) = \frac{n}{9}.$$

Mõtelge, kuidas neid matemaatilisi märke kasutades saaks täisarve esitada nelja suvalise, kuid ühesuguse numbri abil.

Näiteid.

$$1 = (n : n) \times (n : n),$$

$$5 = \frac{n + .\dot{n}}{.\dot{n} + .\dot{n}}, \quad 16 = \frac{n}{.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!,$$

kus n on suvaline number ühest kuni üheksani.

Valime viimases näites n võrdseks seitsmega, siis

$$\frac{7}{.7} + \left(\sqrt{\frac{7}{.\dot{7}}}\right)! = \frac{7}{0,7} + \left(\sqrt{\frac{7}{0,(7)}}\right)! = 10 + (\sqrt{9})! =$$

$$= 10 + 3! = 10 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$$

Mõtelge ise välja analoogilised esitused kõigi täisarvude jaoks ühest kuni kahekümne üheni. Nimetatud vahemikust ma pole taolist esitust seni veel näinud ainult arvu 14 jaoks.

Kui te juhtute selle leidma, siis palun teatage.

*

IV. Kui arv 2 suutis ülimalt viis korda kasutatuna asendada iga arvu vahemikust 1 kuni 9 ja arv 4 sai sellega hakkama isegi ainult neljakordselt kasutatuna, siis ei või ju numbrite sõbralik pere neile kuidagi võlgu jääda.

Kõik korraga välja astudes võivad nad asendada suvalist endi pere liiget.

Vaatame näiteks, kuidas nad asendavad kaht ja nelja:

$$2 = \frac{13\,458}{6729}, \quad 4 = \frac{15\,768}{3942}.$$

Kumbki liigmurd sisaldab kõiki numbreid ühest kuni üheksani, seejuures igaüht üks kord.

Analoogilisi murde koostades te võite leida ka arvude 3, 5, 6, 7, 8 ja 9 jaoks samasuguse esituse.

Arvu 1 üheksa numbri abil esitamiseks tuleb aga välja mõelda spetsiaalne võte.

Ärge rutake kohe vastust vaatama, püüdke parem ise sellega hakkama saada.

*

V. Toome nüüd asumiselt tagasi ka kümnenda numbri nulli. Kümne erineva numbri abil saab nüüd koostada kuus niisugust murdu, mille väärtus on 9.

Kolm murdu on niisugused:

$$9 = \frac{97\,524}{10\,836} = \frac{95\,823}{10\,647} = \frac{57\,429}{06\,381},$$

ülejäänud kolm aga koostage ise.

Kümne numbri abil on ka üht väga lihtne moodustada (tehke seda!). Võite proovida ka teiste ühekohaliste arvude esitamist kõigi kümne numbri abil.

351. Huvitavad seosed

Arvude vahel on lõpmata palju kõige mitmekesisemaid seoseid. Ühed neist on väga tähtsad ja on sügavate teaduslike uurimuste aineks. Teised neist pole nii olulised; nende omadused on kitsad, erijuhulised, kuid just oma erandlikkusega nad mõnikord ongi eriti võluvad.

I. Täisarvude hulgast on leitud mõned arvude paarid, kus paaride summa ja korrutis erinevad ainult numbrite asetuse poolest:

$$\begin{aligned} 9+9&=18, & 9\times 9&=81,\\ 24+3&=27, & 24\times 3&=72,\\ 47+2&=49, & 47\times 2&=94,\\ 263+2&=265, & 263\times 2&=526,\\ 497+2&=499, & 497\times 2&=994. \end{aligned}$$

*

II. Mõnedel kahekohaliste arvude paaridel on aga hoopis teistsugune huvitav omadus: paaride korrutise väärtus ei muutu, kui kummaski paaris vahetada numbrite järjekorda. Vaadake vaid korraks:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$, $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$,
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$, $24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$,
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$, $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$,
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$, $36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$,
$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$, $46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$.

Peale nende paaride on veel 4 kahekohaliste arvude paari, mis rahuldavad nimetatud tingimust. Leidke need paarid.

*

III. Siin on mõned kõrvutiasetsevate täisarvude paarid, mille ruudud sisaldavad samu numbreid, ainult teises järjekorras kirjutatuna:

$13^2 = 169$, $157^2 = 24\,649$, $913^2 = 833\,569$,
$14^2 = 196$, $158^2 = 24\,964$, $914^2 = 835\,396$.

*

IV. Kas täisarvude hulgas ei leidu vähemalt üht arvu, millel oleksid järgmised omadused:

1) ta peab olema oma numbrite summa neljandaks astmeks (siit järeldub, et ta peab olema ka teatava arvu täisruuduks);

2) kui teda lahutada kahe numbri kaupa kolmeks tükiks, siis nende kahekohaliste arvude summa peab olema täisruut;

3) kui teda kirjutada ümberpööratud järjekorras ja uuesti lõhkuda kolmeks kahekohaliseks arvuks, siis ka nüüd on nende arvude summa täisruut.

Pärast vastavaid arvutusi leitigi see arv. Siin ta on:

234 256.

Veenduge iseseisvalt, et ta rahuldab kõiki püstitatud nõudeid.

*

V. Rühmitame arvud nagu taevatähedki mitmesugusteks arvude «tähtkujudeks».

Kuuest arvust 2, 3, 7, 1, 5 ja 6 koosnev «tähtkuju» on selle poolest huvitav, et ta kolme esimese arvu summa võrdub ülejäänud kolmiku summaga. Vähe sellest, ka nende «tähtede» ruutude summad on võrdsed:

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6,$$
$$2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2.$$

Võib öelda, et need kuus arvu 2, 3, 7, 1, 5 ja 6 kujutavad endast kuue tundmatuga võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{cases}$$

lahendeid. Leidub veel lõpmatu hulk seda võrrandisüsteemi rahuldavaid arvukuusikuid. Oleks huvitav teada, kui kiiresti te suudaksite leida veel kas või ainult ühe seda süsteemi rahuldava arvude rühma?

Veel säravamad on «tähtkujud» kaheksast arvust

$$0, 5, 5, 10, \quad 1, 2, 8, 9$$

ja kümnest arvust

$$1, 4, 12, 13, 20, \quad 2, 3, 10, 16, 19.$$

Nende puhul pole võrdsed mitte ainult poolte summad ja ruutude summad, vaid on võrdsed ka «tähtede» kuupide summad:

$$\begin{cases} 0 + 5 + 5 + 10 = 1 + 2 + 8 + 9, \\ 0^2 + 5^2 + 5_2 + 10^2 = 1^2 + 2^2 + 8^2 + 9^2, \\ 0^3 + 5^3 + 5^3 + 10^3 = 1^3 + 2^3 + 8^3 + 9^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 4 + 12 + 13 + 20 = 2 + 3 + 10 + 16 + 19, \\ 1^2 + 4^2 + 12^2 + 13^2 + 20^2 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2, \\ 1^3 + 4^3 + 12^3 + 13^3 + 20^3 = 2^3 + 3^3 + 10^3 + 16^3 + 19^3. \end{cases}$$

Kahtlemata leidub ka teisi selliselt seotud arvude rühmi, kuid kuidas neid leida?

Kõigi siintoodud «arvtähtkujude» saladusse tungisid juba üle 200 aasta tagasi (1750—1751) kaks Peterburi akadeemikut — Goldbach ja geniaalne Euler. Nad leidsid rea valemeid, mis sobisid teatavate võrrandisüsteemide täisarvuliste lahendite leidmiseks, sealhulgas ka niisuguste süsteemide puhul, mis tekitavad meie poolt vaadeldud «tähtkujusid».

Nii näiteks esimest tähtkuju moodustava süsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 + y_3, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \end{aligned}$$

lahendamiseks said nad niisugused valemid:

$$x_1 = a + c, \quad x_2 = b + c, \quad x_3 = 2a + 2b + c$$

ja

$$y_1 = c, \quad y_2 = 2a + b + c, \quad y_3 = a + 2b + c.$$

Teil tarvitseb vaid nendes valemites tähed a, b ja c asendada suvaliste arvudega ning te saate just nii palju sellesse «tähtkujju» kuuluvaid arve, kui te iganes soovite.

Valik $a = 1$, $b = 2$ ja $c = 1$ annab meile esimese näitena toodud tähtkuju 2, 3, 7, 1, 5, 6.

Koostage tähtedele a, b ja c mitmesuguseid väärtusi andes veel mõned esimese «tähtkuju» arvude rühmad.

Euler ja Goldbach andsid esimese «tähtkuju» arvude jaoks veel teise valemite rühma:

$$\begin{array}{lll} x_1 = ad, & x_2 = ac + bd, & x_3 = bc, \\ y_1 = ac, & y_2 = ad + bc, & y_3 = bd, \end{array}$$

kus a, b, c ja d on samuti suvalised arvud.

Teist «tähtkuju» moodustavate arvude

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4^2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3. \end{cases}$$

valikuks sobivad järgmised valemid:

$$\begin{array}{llll} x_1 = a, & x_2 = b, & x_3 = 3a + 3b, & x_4 = 2a + 4b, \\ y_1 = 2a + b, & y_2 = a + 3b, & y_3 = 3a + 4b, & y_4 = 0. \end{array}$$

Asendage jälle tähed a ja b suvaliste arvudega, ning te saate nii palju teise «tähtkujju» kuuluvaid arve, kui te iganes soovite.

Siin esitatud valemeid on kasulik kontrollida mitte ainult üksikute konkreetsete näidete varal vaid ka üldkujul, asendades igas võrrandis kõik tundmatud nende väärtustega.

*

VI. Pärast Eulerit avaldati palju huvitavaid seoseid, mis olid seotud nn. võrrandite täisarvudes lahenduvuse probleemiga.* Näiteid selle probleemi kohta lei-

* Vaata ka brošüüri А. О. Гельфонд, Решение уравнений в целых числах, Популярные лекции по математике, вып. 8. Гостехиздат, 1952.

dub kaheteistkümnendas peatükis (vt. ülesanne 342). Töö, püsivus ja matemaatiline taibukus täiendavad meie arvude «tähtkujude» vakka pidevalt uute huvitavate näidistega.

Kas te ei tahaks näiteks tutvuda ühe uue, väga hiilgava «tähtkujuga»? Arvude 1, 6, 7, 17, 18 ja 23 esimese viie astme summad on võrdsed arvude 2, 3, 11, 13, 21 ja 22 samade astmete summadega:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = \\ = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22,$$
$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = \\ = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2,$$
$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = \\ = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = \\ = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = \\ = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Selle «tähtkuju» teiste arvude leidmise võtmeks on samasus

$$a^n + (a + 4b + c)^n + (a + b + 2c)^n + (a + 9b + 4c)^n + \\ + (a + 6b + 5c)^n + (a + 10b + 6c)^n = \\ = (a + b)^n + (a + c)^n + (a + 6b + 2c)^n + \\ + (a + 4b + 4c)^n + (a + 10b + 5c)^n + (a + 9b + 6c)^n.$$

Asendage tähed a, b ja c suvaliste arvudega ning andke n-le järjest väärtusi ühest kuni viieni, see garanteerib teile nii palju võrdseid summasid viiekaupa kui te soovite.

*

VII. Te võite moodustada ka toredaid ruutude summasid vahetatud numbritega kahekohalistest arvudest. Selleks koostage algul kaks niisugust ühekohalist arvude rühma, et sinna kuuluvate arvude ruutude summad oleksid võrdsed, näiteks

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2.$$

Nüüd moodustage arvudest 4, 5, 6 ja 8, 3, 2 kolm suvalist kahekohalist arvu, kasutades seejuures esimese

rühma arve kümnelistena ja teise rühma arve ühelistena. Te saate niiviisi kindlasti kolm kahekohalist arvu, mille ruutude summa võrdub ümberpööratud arvude ruutude summaga.

Nii näiteks võib toodud arvudest moodustada järgmised võrdused:

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2$$

või

$$43^2 + 52^2 + 68^2 = 86^2 + 25^2 + 34^2 \text{ jne.}$$

Juhime lugejate tähelepanu nende võrduste ühele toredale omadusele — nimelt asuvad kõik numbrid võrdusmärgi suhtes sümmeetriliselt.

Üldistades võib öelda, et kui n ühekohalist arvu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja n ühekohalist arvu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on seotud võrdusega

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,$$

siis on kindlasti rahuldatud ka võrdus

$$(10x_1 + y_1)^2 + (10x_2 + y_2)^2 + \ldots + (10x_n + y_n)^2 =$$
$$= (10y_n + x_n)^2 + (10y_{n-1} + x_{n-1})^2 + \ldots + (10y_1 + x_1)^2.$$

Kes soovib, võib selles ise veenduda, kui ta avab teises võrduses sulud ja arvestab seejuures esimest võrdust. Harjutage selliste summade koostamist!

Võtke näiteks 8 esimest naturaalarvu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Proovige nüüd kindlaks teha, millised neist arvudest peaksid kuuluma arvude rühma x_1, x_2, x_3, x_4 ning millised arvude rühma y_1, y_2, y_3, y_4. Seejärel koostage vastavalt äsjanäidatud reeglile mõned vahetuvate numbritega kahekohaliste arvude ruutude võrdsed summad.

*

VIII. Meie arvude «tähtkujude» laekas on uudiseks veelgi keerukamad vahetuvate numbritega kahekohaliste arvude rühmad. Näiteks

$$13 + 42 + 53 + 57 + 68 + 97 =$$
$$= 79 + 86 + 75 + 35 + 24 + 31,$$
$$13^2 + 42^2 + 53^2 + 57^2 + 68^2 + 97^2 =$$
$$= 79^2 + 86^2 + 75^2 + 35^2 + 24^2 + 31^2,$$

$$13^3 + 42^3 + 53^3 + 57^3 + 68^3 + 97^3 = \\ = 79^3 + 86^3 + 75^3 + 35^3 + 24^3 + 31^3;$$

$$12 + 32 + 43 + 56 + 67 + 87 = \\ = 78 + 76 + 65 + 34 + 23 + 21,$$

$$12^2 + 32^2 + 43^2 + 56^2 + 67^2 + 87^2 = \\ = 78^2 + 76^2 + 65^2 + 34^2 + 23^2 + 21^2,$$

$$12^3 + 32^3 + 43^3 + 56^3 + 67^3 + 87^3 = \\ = 78^3 + 76^3 + 65^3 + 34^3 + 23^3 + 21^3.$$

Uurige, kas ka siin ei ole seost ühekohaliste arvude astmete summade ja otsitavate summade vahel.

*

IX. Veel üks pärl! Arvu 145 võib avaldada ta numbrite faktoriaalide (vt. ülesanne 350, III) summana: $145 = 1! + 4! + 5!$. Samuti $1 = 1!$, $2 = 2!$. Taškendi üliõpilane N. Golovin tõestas, et teisi arve niisuguse omadusega ei leidu. Siiski, kui leppida kokku, et $0! = 1$, võib leida veel ühe niisuguse arvu. Millise?

*

X. Leidub ainult 2 kolmekohalist arvu, mille iga naturaalarvuline aste lõpeb samade kolme numbriga samas järjekorras:

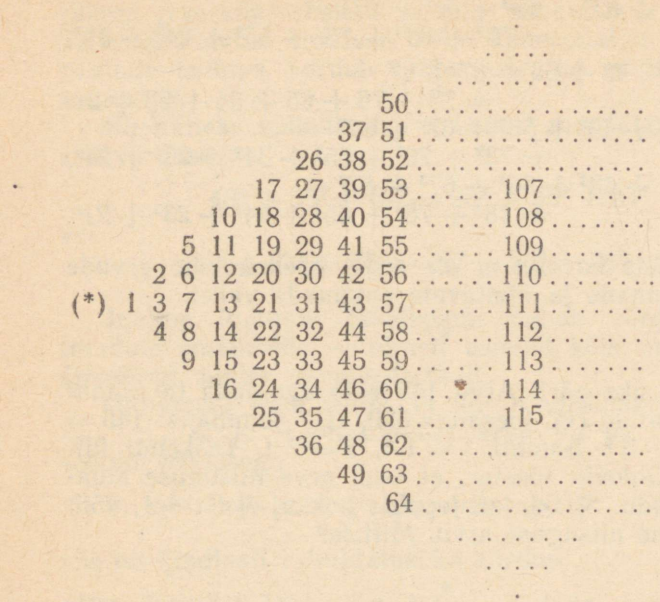
$376^2 = 141\,\mathbf{376}$, $376^3 = 53\,157\,\mathbf{376}$ jne.,
$625^2 = 390\,\mathbf{625}$, $625^3 = 244\,140\,\mathbf{625}$ jne.

Kuidas need kolmekohalised arvud leiti ja kuidas tehti kindlaks, et neid on ainult kaks?

See oli üks ajakirja «Математика в школе» poolt kõigi matemaatilise nuputamise harrastajate jaoks korraldatud iga-aastase konkursi ülesannetest. Tal on lühike, kuid küllaltki keerukas lahendus. Sellest aru saada on muidugi kasulik, kuid veelgi kasulikum on oma vaimsete võimete rakendamine lahenduse otsimiseks.

352. Naturaalarvude rida vaadeldes...

I. Paigutame naturaalarvud 1, 2, 3, 4, ... kolmnurga kujuliselt:



Süvenege sellesse arvude kolmnurka ja te avastate kindlasti terve rea arvude paiknevuse seaduspärasusi piki ridu ja veerge, samuti arvude ja nende asukohtade vahel jne. Kas te näiteks märkasite, et

1) iga veeru alumine arv võrdub veeru kohanumbri ruuduga;

2) iga mingi rea kahe naaberarvu korrutis on jällegi samasse ritta kuuluv arv. Näiteks: $5 \times 11 = 55$, mõlemad tegurid ja korrutis asuvad samas reas. Korrutis asub väiksemast tegurist paremal veergude arvu võrra, mis võrdub väiksema teguriga. Nii näiteks korrutis $5 \times 11 = 55$ asub samas reas viie koha võrra arvust 5 paremal; $7 \times 13 = 91$ asub vastavas reas seitsmest seitsme koha võrra paremal,

3) kõik tähekesega (*) märgitud rea elemendid on leitavad valemiga $n^2 - n + 1$, kus $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Selles reas jagub alates arvust 3 iga kolmas arv arvuga 3. Iga seitsmes arv pärast arve 7 või 21 jagub seitsmega. Iga kolmeteistkümnes arv pärast arve 13 või 91 jagub arvuga 13 jne. Analoogilised omadused on iga rea arvudel.

*

II. Kas ei saaks naturaalarvude jada 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$, n, $n+1$, ... lahutada võrdsete summade järjestikusteks paarideks?

Katsetame. Esimene paar torkab kohe silma: $1+2=3$. Katsetame nüüd järgmiste arvudega: $4+5+6=7+8$.

Esialgu läheb kõik hästi. Teeme veel paar proovi ja jällegi jõuame võrdse summani

$$9+10+11+12=13+14+15.$$

Märgime, et liidetavate arv kasvab korrapäraselt. Iga kord lisandub võrduse mõlemale poolele üks liidetav, kusjuures vasakul pool on alati üks liige rohkem kui paremal pool. Kontrollime seda korrapärasust järgmise summade paari juures:

$$16+17+18+19+20=21+22+23+24.$$

Sobib!

Vaatame nüüd, mida kujutab endast iga võrdse summade paari v ä h i m liidetav (äärmine vasakpoolne liige). Vaatlused näitavad, et see arv on väiksema liidetavate hulgaga summa liikmete hulga r u u t.

Tõepoolest esimese võrduse parem pool koosneb ainult ü h e s t arvust (3) ja vähim liidetav selles võrduses on 1^2. Teise võrduse paremal poolel on k a k s liidetavat $(7+8)$ ja selle võrduse vähimaks liikmeks on 2^2. Kolmanda võrduse paremal poolel on kolm liidetavat ja selle võrduse vähimaks liikmeks on 3^2.

Äsjaavastatud seaduspärasus võimaldab meil kiiresti üles kirjutada võrdsete summade paare, milles on kindel etteantud hulk liidetavaid.

Olgu meil näiteks tarvis leida seitset järjestikust algtingimusi rahuldavat arvu. Leiame vähima liidetava: $7-1=6$, $6^2=36$. Järelikult on otsitav võrdsete summade paar selline:

$$36+37+38+39+40+41+42=$$
$$=43+44+45+46+47+48.$$

Seega vaatlused näitasid, et $n+1$ järjestikuse arvu summa, mille vähimaks liidetavaks on arv n^2, on võrdne talle järgneva n arvu summaga. Kui e s i m e s e summa esimene liidetav on n^2, siis selle summa teine liidetav on

tingimuse kohaselt ühe võrra suurem, kolmas liidetav kahe võrra suurem, neljas kolme võrra suurem ning liige $n+1$ on n võrra esimesest liikmest suurem. Tähendab esimese summa viimane liidetav on n^2+n. Siit järeldub, et t e i s e summa esimene liidetav on tingimuste kohaselt n^2+n+1, teine liidetav, nagu varemgi, on ühe võrra esimesest suurem, kolmas liidetav on esimesest kahe võrra suurem ning n-is liige on esimesest $n-1$ võrra suurem. Tähendab teise summa viimane liidetav on

$$n^2+n+1+(n-1) \text{ ehk } n^2+2n.$$

Meie vaatluste lõpptulemust võib väljendada järgmise algebralise valemi abil:

$$\underbrace{n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+\ldots+(n^2+n)}_{n+1 \text{ liidetavat}} =$$

$$= \underbrace{(n^2+n+1)+(n^2+n+2)+\ldots+(n^2+2n)}_{n \text{ liidetavat}}.$$

Need, kes tunnevad aritmeetilise progressiooni liikmete summa valemit, võivad kergesti t õ e s t a d a selle võrduse kehtivust.

*

III. Pärast edukaid naturaalarvude summade vaatlusi asume nüüd naturaalarvude r u u t u d e summade juurde. Vaatleme kõigepealt n järjestikuse naturaalarvu ruutude summat:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2.$$

See pole progressioon. Selle summa leidmiseks on vaja spetsiaalset valemit ning see esitatakse algebra õpikutes:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Kui me liidame ainult paaris või vastupidi ainult paaritute naturaalarvude ruute, siis läheb meil tarvis teistsuguseid valemeid. Kõigi esimese kümne hulka kuuluvate p a a r i t u t e naturaalarvude r u u t u d e summat võib näiteks leida niisuguse valemi abil:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = \frac{1}{6}(10^3 - 10).$$

Kui me aga tahaksime leida kõigi esimese kümne naturaalarvu hulka kuuluvate paarisarvude ruutude summat, siis on väga mugav kasutada niisugust valemit:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = \frac{1}{6}(11^3 - 11).$$

Neid kaht võrdust liites saame esimese kümne naturaalarvu ruutude summa jaoks teistsuguse valemi, kui me varem leidsime:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2 = \frac{1}{6}[10^3 + 11^3 - (10 + 11)].$$

Üldistage ise neid valemeid suvalise liidetavate hulga jaoks.

*

IV. Kui kolmnurga kaatetid on 3 ja 4 ning hüpotenuus on 5 (nn. egiptuse kolmnurk), siis $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Siin on kahe järjestikuse naturaalarvu ruutude summa võrdne järgmise arvu ruuduga.

Veel üks tähelepanek. 19. saj. lõpus valmis kunstnik N. P. Bogdanov-Belskil (1868—1945) maal «Raske ülesanne», millel ta kujutas rühma maakooli õpilasi, kes püüavad peast lahendada õpetaja poolt koolitahvlile kirjutatud S. A. Ratšinski ülesannet:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Tõepoolest, see on päris raske ülesanne kiireks peast lahendamiseks, kui ei tea selle ülesande lahendamise «nõksu». «Nõks» on aga väga lihtne. Asi on selles, et $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$ ja $13^2 + 14^2 = 365$. Järelikult on otsitav vastus 2.

Pöörame aga nüüd tähelepanu teisele asjaolule. Äsjakirjutatud võrdustest järeldub, et

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2,$$

see tähendab mitme järjestikuse naturaalarvu ruutude summa on võrdne järgnevate arvude ruutude sum-

maga ja jällegi on võrduse vasakul poolel üks liidetav rohkem kui paremal poolel. Ma usun, et teil tekib vähemalt 2 küsimust:

1) Kas naturaalarvude hulgas leidub veel võrdsete summade paare, mis koosnevad kahest ja ühest või kolmest ja kahest liidetavast, või annavad egiptuse kolmnurk ja Ratšinski ülesanne meile ainsad võimalikud paarid?

2) Kas järjestikuste naturaalarvude ruutudest saab moodustada kolme ja nelja liidetavaga, nelja ja viie liidetavaga ja üldiselt n ja $n+1$ liidetavaga summasid?

Ilma mingite lisateadmisteta võite te lahendada järgmise ülesande:

Ülesanne. Leida $n+1$ järjestikust arvu, mille ruutude summa on võrdne järgneva n arvu ruutude summaga.

*

V. Naturaalarvude hulgas ei leidu kolme järjestikust arvu, mille puhul kahe esimese arvu kuupide summa võrduks kolmanda arvu kuubiga. Selles aitab meid veenduda algebra.

Kui kolme suvalist naturaalarvu tähistada $x-1$, x ja $x+1$, siis tingimuse kohaselt

$$(x-1)^3+x^3=(x+1)^3$$

ehk pärast lihtsaid teisendusi:

$$x^3-6x^2-2=0.$$

Anname tekkinud kuupvõrrandile järgmise kuju:

$$x^2(x-6)=2.$$

Nüüd on üsna kerge veenduda, et tekkinud võrrandit ei rahulda ükski täisarv. Tõepoolest, võrduse parem pool on positiivne, järelikult peab seda olema ka vasak pool. See on võimalik ainult juhul kui x on suurem kuuest. Vähimaks kuuest suuremaks naturaalarvuks on arv seitse, seitsme korral on aga võrduse vasak pool palju suurem paremast poolest, kusjuures iga veel suurema x väärtuse puhul see vahe muutub veel suuremaks. Järelikult sellel võrrandil pole täisarvulist lahendit.

Umbes 15 aastat tagasi õnnestus aga selliste numbriliste keerdülesannete armastajatel ka järjestikuste ar-

vude k u u p i d e s t luua võrdseid summasid (kuigi mitte «puhastest» kuupidest):

$$[5^3 + 6^3] + 1^3 = [7^3] - 1^3,$$
$$[16^3 + 17^3 + 18^3] + (1^3 + 2^3) = [19^3 + 20^3] - (1^3 + 2^3),$$
$$[33^3 + 34^3 + 35^3 + 36^3] + (1^3 + 2^3 + 3^3) =$$
$$= [37^3 + 38^3 + 39^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3) \text{ jne.}$$

Kandilistes sulgudes on järjestikuste naturaalarvude kuubid, kusjuures igale n liidetavale parempoolses sulus vastab jällegi $n + 1$ vasakpoolses sulus; ümarsulgudes on mõlemal pool võrdusmärki järjestikuste naturaalarvude kuupide summa (ühest alates).

Nende huvitavate seoste avastajad märkasid seejuures, et allakriipsutatud arvud (ilma astendajateta) on kandilistes sulgudes olevate liidetavate hulgaga seotud järgmisel originaalsel viisil: allakriipsutatud arv võrdub vasakpoolsetes ja parempoolsetes kandilistes sulgudes olevate arvude hulga kolmekordse korrutisega. Nii näiteks on esimeses võrduses vasakul 2 arvu ja paremal 1 arv ning järelikult

$$3(2 \cdot 1) = \underline{6}.$$

Teises võrduses on vasakpoolsetes kandilistes sulgudes 3 arvu, paremal 2 ja vastavalt

$$3(3 \cdot 2) = \underline{18}.$$

Kolmandas võrduses

$$3(4 \cdot 3) = \underline{36}.$$

Peatumata avastatud seaduspära üldsuse küsimusel, piirdume veel erijuhu koostamise ja praktilise kontrollimise juures. Proovime näiteks koostada võrdust, milles vasakpoolsetes kandilistes sulgudes oleks 5 liidetavat ja parempoolsetes 4. Selleks leiame nende arvude kolmekordse korrutise: $3(5 \cdot 4) = \underline{60}$. Siit saame

$$[56^3 + 57^3 + 58^3 + 59^3 + 60^3] + (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) =$$
$$= [61^3 + 62^3 + 63^3 + 64^3] - (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3).$$

Veenduge otsese arvutamisega selle võrduse õigsuses!

Muide, analoogilisi seaduspärasusi võib leida ka naturaalarvude eneste ja nende ruutude puhul kehtivate võrduste juures. Tuletame korraks meelde, et esimeste astmete puhul kehtisid järgmised võrdused:

$$1 + 2 = 3,$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8,$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15.$$

Ilmselt võrdub allakriipsutatud arv vasakul ja paremal pool võrdusmärki olevate arvude hulga korrutisega.

Arvude ruutude puhul aga kehtisid järgmised võrdused:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2,$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Siin võrdub allakriipsutatud arv (ilma astendajata võetuna) võrdusmärgist vasakul ja paremal pool olevate arvude hulga kahekordse korrutisega.

*

VI. Kas teile on tuttav niisugune korrutustabel:

1	2	3	4	5	...	...	p	...	n
2	4	6	8	10	...	...	$2p$	...	$2n$
3	6	9	12	15	...	...	$3p$	...	$3n$
4	8	12	16	20	...	...	$4p$	...	$4n$
5	10	15	20	25	...	...	$5p$	...	$5n$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
p	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	...	...	p^2	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	...	...	...	...	n^2

Mingi ülemises reas asuva arvu korrutise vasakpoolses äärmises veerus oleva suvalise arvuga leiame tegurite asukohale vastavate ridade ja veergude lõikepunktist. Nii näiteks arv 12 asetseb neljanda veeru ja kolmanda

rea lõikepunktis või ka kuuenda veeru ja teise rea lõikepunktis.

Seda korrutustabelit lähemalt uurides võime leida terve rea omapärased seosed.

a) Arvude summa igas ruudus, mille tipp asub tabeli vasakus ülemises nurgas, on alati täisruut (s. t. on mingi arvu ruut):

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 2 + 2 + 4 = 3^2 = (1 + 2)^2,$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$

jne.

b) Iga täisruut saadakse eelmisest täisruudust teatava nurkriba liitmise teel. Igas nurkribas olevate arvude summa kujutab endast mingi arvu kuupi:

$$1 = 1^3,$$
$$2 + 4 + 2 = 2^3,$$
$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3 \text{ jne.}$$

c) Iga ruut koosneb parajasti tema külje pikkusele vastavast nurkribade hulgast (näiteks ruut külje pikkusega 5 koosneb viiest nurkribast). Eelmises punktis toodud seost arvesse võttes saame juba antiikajast tuntud valemi:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

*

VII. Äsjasaadud kuupide summa klassikalises valemis on liidetavateks naturaalarvude rea järjestikused liikmed: 1, 2, 3, 4 jne. Prantsuse matemaatik Liouville püstitas üldisema ülesande: leida s u v a l i s e d naturaalarvud a, b, c, d, ..., mille kuupide summa võrduks nende arvude summa ruuduga:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^2.$$

Arvude a, b, c, d, ... hulgas võib olla ka omavahel võrdseid arve.

Sobivate arvude huupi otsimisest ei ole küll midagi head loota, kuid tehke siiski paar-kolm proovi ning jätkake siis lugemist.

Liouville'il õnnestus saada väga omapärast tulemust, mille olemust on kerge selgitada paari lihtsa näitega.

N ä i d e 1. Võtame arvu 6. Selle teguriteks on arvud 1, 2, 3 ja 6. Mitu tegurit on aga igaühel neist

teguriteset? Arvul 1 on üks tegur, arvul 2 on kaks tegurit (1 ja 2), arvul 3 on kaks tegurit (1 ja 3), ning lõpuks arvul 6 on neli tegurit (1, 2, 3, 6). Need tegurite hulka näitavad arvud (1, 2, 2, 4) rahuldavadki Liouville'i ülesande tingimusi:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2 = 81.$$

Näide 2. Võtame arvu 30. Selle teguriteks on arvud 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, kusjuures igaühel neist on vastavalt 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8 tegurit. Järelikult

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 8^3 = \\ = (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8)^2.$$

Meetod on lihtne ja teravmeelne. Proovige teda ise ka rakendada mõnede konkreetsete arvude puhul.

*

VIII. Naturaalarvude rea huvitavate omaduste loetelu võiks jätkata lõpmatuseni. Toome veel ühe näite huvitavast naturaalarvude vahelisest seosest.

Jaotame naturaalarvude rea järgmisteks rühmadeks: 1; 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; ... Esimeses rühmas on üks arv, teises rühmas on kaks arvu, kolmandas kolm arvu jne.; n-ndas rühmas on n arvu. Märgime, et iga rühma esimene ja viimane arv on leitavad valemitega

$$\frac{(n-1)n}{2} + 1 \quad \text{ja} \quad \frac{n(n-1)}{2},$$

kus n tähistab rühma numbrit.

Igas rühmas olevad arvud moodustavad aritmeetilise progressiooni vahega $d = 1$. Teades iga rühma liikmete hulka ning iga rühma esimest (a_1) ja viimast (a_n) arvu, võime leida igas rühmas olevate arvude summa.

Aritmeetilise progressiooni liikmete summa leitakse teatavasti valemiga

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Seda valemit kõikide rühmade jaoks rakendades saame

$$S = \frac{\left[\frac{(n-1)n}{2} + 1 + \frac{n(n+1)}{2}\right]n}{2} = \frac{(n^2+1)n}{2} = \frac{n^3+n}{2}.$$

Võttes erinevate rühmade summade jaoks kasutusele tähistused S_1, S_2, S_3, S_4, ... ja tundes huvi ainult paaritute indeksitega rühmade vastu, saame:

$$S_1 = \frac{1^3+1}{2}; \qquad S_3 = \frac{3^3+3}{2};$$

$$S_5 = \frac{5^3+5}{2}; \qquad \ldots; \qquad S_{2k-1} = \frac{(2k-1)^3+(2k-1)}{2}.$$

Kõigi nende summade summa on

$$S_1 + S_3 + \ldots + S_{2k-1} =$$

$$= \frac{[1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+5+\ldots+(2k-1)]}{2}.$$

Siit saame algebraliste teisenduste harrastajate jaoks üsna huvitava ülesande.

Ülesanne. Tõestada, et

$$\frac{[1^3+3^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+\ldots+(2k-1)]}{2} = k^4.$$

N ä p u n ä i d e. Eelkõige teisendage kuupide summa valemit (vt. lk. 325), nii et te saaksite valemi paaritute arvude kuupide summa jaoks:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3.$$

Pöördume nüüd tagasi summa $S_1 + S_3 + \ldots + S_{2k-1}$ juurde. Nende teisenduste tulemustena, mida me äsja teha soovitasime, peab välja tulema võrdus

$$S_1 + S_3 + \ldots + S_{2k-1} = k^4.$$

See valem toob esile küllaltki huvitavaid seoseid arvurühmade

$$1; \quad 2, 3; \quad 4, 5, 6; \quad 7, 8, 9, 10; \quad \ldots,$$

vahel. Nimelt kui sellest rühmade reast välja visata paariskohtadel asuvad rühmad (teine, neljas jne.) ning ülejäänud rühmad kokku liita, siis nende summa on võrdne liidetavate rühmade arvu neljanda astmega.

Nii näiteks võib kohe öelda, et

$$1 + (4+5+6) + (11+12+13+14+15) = 3^4 = 81.$$

*

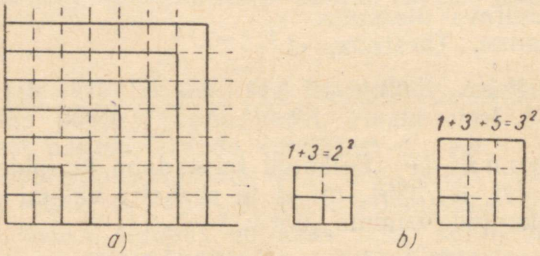
IX. Igaüks, kes tundis huvi naturaalarvude vaheliste seoste vastu, pidi kindlasti märkama naturaalarvude summa lihtsamaid omadusi ja eriti just paaritute naturaalarvude 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$ summa omadusi.

Kahe esimese paaritu naturaalarvu summa $1+3$ on võrdne arvu 2 ruuduga.

Kolme esimese paaritu naturaalarvu summa $1+3+5$ on võrdne arvu 3 ruuduga.

Nelja esimese paaritu naturaalarvu summa $1+3+5+7$ on võrdne arvu 4 ruuduga jne.

See paaritute naturaalarvude summa omadus on eriti ilmekas, kui kujutada endale ette nurkribadeks jaotatud ruutu (joon. 232, *a*), kus iga nurkriba koosneb ühikruutudest ja sisaldab neid alati paarituarvulise



Joon. 232. Paaritute arvude summa omadus.

hulga. Järjestikune nurkribade liitmine jätab ikka ruudu ruuduks (joon. 232, *b*) ja illustreerib sellega järjestikuste paaritute arvude summa omadust — kujutada alati mõnd ruutarvu.

Üsna loomulik on arvata, et märgitud seaduspärasus säilib mistahes esimese n paaritu arvu summa korral, see tähendab, et alati kehtib võrdus

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{n\text{ liidetavat}}=n^2.$$

Aga äkki on see arvamus vale? Kas äkki mingist (võib-olla väga suurest) liidetavast peale see seaduspärasus ei kaota kehtivust?

Katselisel teel saadud seaduspärasustega võib tõepoolest niiviisi juhtuda.

Kuna naturaalarvude hulk on lõpmatu, siin on katselisel teel võimatu kontrollida selle seose kehtivust kõigi n-de korral. Selleks aga polegi vajadust, sest matemaatika annab meile kätte võimaluse lõpptulemuse ettenägemiseks.

Arutleme järgmiselt: kehtigu mingi liidetavate arvu k puhul väide, et

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k\ \text{liidetavat}}=k^2.$$

Liidame nüüd sellele summale järgmise paaritu arvu: $2k+1$ ja vaatame, kas varemmärgitud seaduspärasus jääb kehtima ka $k+1$ liidetava korral:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=$$
$$=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Tõepoolest, seaduspärasus säilis!

Summa on endiselt võrdne liidetavate arvu ruuduga.

Järelikult me tegime kindlaks, et juhul kui seaduspärasus kehtib kasvõi mingi üheainsa liidetavate arvu k puhul, siis ta kehtib ka k-st ühe võrra suurema liidetavate hulga puhul.

Tähendab, seaduspärasuse katselist kontrolli tuleb ikkagi teostada, k u i d a i n u l t ü k s k o r d. Võtame kõige väiksema liidetavate hulga — kaks liidetavat. Sel korral kehtib võrdus $1+3=2^2$. Kahe liidetava summa ($k=2$) on võrdne liidetavate arvu ruuduga. Järelikult on meie poolt tõestatu põhjal seaduspärasus õige ka kolme liikme korral ($k+1=3$); kuid juhul, kui ta on õige kolme liidetava puhul, siis ta on õige ka nelja liidetava korral ($k+1=4$) ja nii võime sammsammult minna mistahes liidetavate arvuni välja.

See lihtne, kuid range arutlusviis kannab matemaatilise induktsiooni nime.

Niisiis, kahtlused on hajutatud! Esimese n paaritu arvu summa on suvalise liidetavate arvu n puhul võrdne liidetavate arvu ruuduga. Me oleksime võinud valemi

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

õigsuses suvalise n korral veenduda ka lihtsalt rea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

summa leidmisega aritmeetilise rea summa valemi abil (kontrollige!), kuid sisuliselt oleks see ikkagi sama arutlusviis, sest ka aritmeetilise rea summa valemi saamine baseerub matemaatilise induktsiooni printsiibil.

*

X. Paaritute arvude summade omadused pole aga veel kaugeltki ammendatud. Võtame kasvõi järgmise huvitava korrapärasuse. Kui jaotada paaritute arvude rida ühest alates rühmadeks, nii et esimeses rühmas oleks üks arv, teises rühmas kaks arvu, kolmandas rühmas kolm arvu jne., siis iga rühma liikmete s u m m a on võrdne rühma järjekorranumbri k u u b i g a (Nikomahhose teoreem).

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1, \\
2^3 &= 3 + 5, \\
3^3 &= 7 + 9 + 11, \\
4^3 &= 13 + 15 + 17 + 19, \\
5^3 &= 21 + 23 + 25 + 27 + 29, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Iga rida on n liikme summa (kus n on rea järjekorranumber), kusjuures need liikmed moodustavad aritmeetilise progressiooni vahega $d = 2$ ja erinevad read ei sisalda ühesuguseid liikmeid. Kas näiteks iga rea esimene arv sõltub rea järjekorranumbrist? Kahtlemata.

Kui te tahate mainitud omadust tõestada suvalise n jaoks, siis püüdke kõigepealt oma võimeid rakendada iga rea esimese liikme ja n vahelise seose saamiseks.

Kui n-nda rea e s i m e s t liiget tähistada a_n-ga, siis $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$ jne. Teie ülesandeks jääb nüüd tõestada, et

$$a_n = n^2 - n + 1.$$

Pidage aga silmas, et te peate otsima l a h e n d u s t e e d, mitte piirduma ainult palja oletusega.

353. Pealetükkiv vahe

Kirjutage üles mõni neljakohaline arv, milles kõik numbrid pole ühesugused. Kirjutatud arvu numbritest moodustage kaks uut arvu: M — suurim võimalik arv ja m — vähim võimalik arv. Leidke nüüd saadud arvude vahe $d = M - m$ ja toimige temaga täpselt samuti. Seda operatsiooni mõned korrad korrates te jõuate paratamatult arvuni 6174, mis jääbki protsessi edasisel jätkamisel alatiseks korduma.

Olgu näiteks algul üleskirjutatud arvuks 4818.

$M_1 = 8841$; $m_1 = 1488$; $d_1 = 7353$;
$M_2 = 7533$; $m_2 = 3357$; $d_2 = 4176$;
$M_3 = 7641$; $m_3 = 1467$; $d_3 = 6174$;
$M_4 = 7641$; $m_4 = 1467$; $d_4 = 6174$ jne.

Kuidas tõestada, et see nähtus kehtib suvalise neljakohalise arvu puhul?

J. N. Lambina Rjazanist näitas, et selle omaduse tõestamiseks piisab, kui veenduda ta õigsuses 30 neljakohalise arvu puhul.

Milline võis olla sm. Lambina mõttekäik ja millised need 30 arvu peaksid olema?

Kas ei saaks kontrollimisele kuuluvate arvude hulka veelgi vähendada?

354. Sümmeetriline summa (purustamata pähkel)

Kirjutage üles suvaline kahe-, kolme- või enamkohaline täisarv. Liitke talle sama arv ümberpööratult. Täpselt samuti toimige ka saadud summaga. Kogemused näitavad, et peale mõnekordset paariti liitmist me saame tulemuseks sümmeetrilise arvu, s. t. arv, mis jääb iseendaks ükskõik kummast otsast lugedes.

Toome mõned näited:

$$\begin{array}{r} 38 \\ +\ 83 \\ \hline 121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 139 \\ +\ 931 \\ \hline 1070 \\ +\ 0701 \\ \hline 1771 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48\,017 \\ +\ 71\,084 \\ \hline 119\,101 \\ +\ 101\,911 \\ \hline 221\,012 \\ +\ 210\,122 \\ \hline 431\,134 \end{array}$$

Mõnikord tuleb sümmeetrilise tulemuseni jõudmiseks teha üsna palju samme. Kui te näiteks alustate arvust 89, siis saabub sümmeetriline tulemus alles pärast 24-ndat sammu: 8 813 200 023 188.

Veenduge selles!

Võib-olla leidub ka selline arv, mis kunagi ei anna sümmeetrilist tulemust?

XIV PEATÜKK

IGIVANAD, KUID IGAVESTI NOORED ARVUD

A. ALGARVUD

355. Alg- ja kordarvud

Kui me saame täisarvu N täisarvuga a jagamisel tulemuseks jälle täisarvu, siis nimetatakse arvu a täisarvu N teguriks.

Vähim täisarv on 1. Ta jagub jäägita ainult iseendaga; tähendab, arvul 1 on vaid üks tegur. Igal teisel täisarvul on kas kaks tegurit (1 ja see arv ise) või on tal neid rohkem kui kaks.

Ainult ühe ja iseendaga jaguvad näiteks arvud 2, 3, 5, 7 ja veel paljud teised.

Arvul 4 on kolm tegurit: 1, 2 ja 4; arvul 6 on neli tegurit: 1, 2, 3 ja 6 jne.

Arve, millel on ainult kaks tegurit, nimetatakse kokkuleppeliselt *algarvudeks*. Arve, millel on üle kahe teguri, nimetatakse *kordarvudeks*.

Vähim algarv on arv 2. See on ainus paarisarvuline algarv. Kõiki ülejäänud algarve tuleb ilmselt otsida ainult paaritute arvude hulgast, kuigi loomulikult iga paaritu arv pole veel kaugeltki algarv.

Nii näiteks on paaritud arvud 3, 5, 7, 11, 13 algarvud, aga arvud 9, 15, 21 on kordarvud. Üheksal on kolm tegurit: 1, 3, 9; viieteistkümnel on neli tegurit: 1, 3, 5, 15 jne.

Ükskõik millist kordarvu saab lahutada tegurite korrutiseks, nii et iga tegur oleks algarvuline. Näiteks: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $363 = 3 \cdot 11 \cdot 11$ jne.

Algarvud on nagu algelemendid, milledest saab konstrueerida kõiki ülejäänud arve. Seepärast on ka arusaadav matemaatikute erakordne huvi algarvude vastu.

356. «Eratosthenese sõel»

Kuidas eraldada algarve kõigi täisarvude hulgast? Mida suurema arvuga meil tegemist on, seda raskem on otsustada, kas tal on endast väiksemaid tegureid.

Kui vilja puhastatakse prahist, siis kasutatakse selleks spetsiaalset sõela, mille avaused vastavad viljaterade läbimõõdule.

Umbes samasuguse võtte abil eraldatakse ka algarvud kordarvudest. Oletame näiteks, et meil on tarvis eraldada kõik algarvud arvude hulgast, mis algavad arvuga 2 ja lõpevad teatava täisarvuga *N*. Kirjutame algul järjest välja kõik täisarvud alates kahest ja lõpetades arvuga *N*: 2, 3, 4, 5, ..., *N*. Esimene algarv on 2. Tõmbame talle kriipsu alla ja kustutame pliiatsijoontega kõik paarisarvud (s. t. kõik arvud, mis jaguvad kahega). Esimene allesjäänud arvudest on 3. Tähistame ta allakriipsutusega ja kustutame nüüd kõik arvud «üle kahe» (s. o. kõik kolmega jaguvad arvud). Esimene allesjäänud arv on nüüd 5. (Neli on juba kustutatud). Kriipsutame ta alla kui algarvu ja kustutame kõik arvud «üle nelja» (s. t. kõik viiega jaguvad arvud) jne.

Kõik sel viisil allakriipsutamisega tähistatud arvud moodustavadki arvude 2 ja *N* vahel asetsevate algarvude tabeli:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30,
31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,
. . . . . .

Selle arvude «väljasõelumise» meetodi autoriks on kreeka matemaatik Eratosthenes, kes elas rohkem kui 2000 aastat tagasi (276—196 e. m. a.). Eratosthenes ei

kriipsutanud 2, 3, 5 jne. kordseid arve läbi, vaid torkas nende kohale väikese augukese. Niiviisi tekkis midagi sõelataolist, mille aukudest kordarvud nagu läbi kukkusid. Seepärast nimetataksegi seda algarvude tabeli koostamise viisi Eratosthenese sõelaks.

Nagu te näete, on meetod küllaltki vaevarikas, kuid see-eest absoluutselt usaldatav.

Teadlaste ühiste jõupingutuste tulemusena on kaasajaks algarvude tabel arendatud kuni 10 miljonini, see tähendab, et on olemas k õ i g i 1 ja 10 000 000 vahel asetsevate algarvude tabel. Väljaspool seda tabelit on tuntud ainult üksikud algarvud. Nii näiteks tõestas matemaatik-iseõppija I. M. Pervušin 1883. aastal, et arv

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

on algarv.

Kaua aega oli suurimaks teadaolevaks algarvuks arv

$$2^{127} - 1 =$$
$$= 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727.$$

Kaasaegsete elektronarvutusmasinate abil saadi Los Angeleses veel suurem algarv:

$$2^{2281} - 1.$$

See arv ongi praegu suurim teadaolev algarv.

I. M. Pervušin tõestas pealekauba veel, et arv $2^{2^{23}} + 1$ on k o r d a r v, sest ta jagub arvuga 167 772 161. Arvus $2^{2^{23}}$ on 2 525 223 numbrit... Pervušini tulemusi kontrolliti Peterburi ja Pariisi teaduste akadeemias ning leiti need olevat õiged.

Hiljuti teostas väga põhjaliku ja vaevarikka uurimuse $2^p + 1$ kujuliste suurte arvude tegurite otsimisel M. I. Slobodskoi. Ta leidis ja tõestas huvitava teoreemi, mis võimaldab korraga leida $2^p - 1$ kujulise arvu tegureid mitmesuguste p väärtuste puhul. Ta tõestas näiteks, et arv $2^{5002331} - 1$, milles on üle poolteise miljoni numbri, jagub arvuga 10 004 663. Huvitav on märkida, et Slobodskoi oli oma töö teostamise ajal alles Groznõi pedagoogilise instituudi üliõpilane.*

* M. I. Slobodskoi töö on avaldatud ajakirjas «Математика в школе», nr. 1, 1953.

Matemaatikud ei võinud muidugi sellega leppida, et algarve leiti taolisel käsitööndusliku viisil. Nad oleksid loomulikult tahtnud anda *valemit*, mille abil saaks sõltuvalt suuruse n kõikvõimalikest väärtustest leida vaid algarve. Sellise valemi otsimine on kahjuks jäänud ainult «sinilinnu» püüdmiseks. Teda ei ole keegi senini kinni püüdnud.

357. Uus algarvude «sõel»

Kahe aastatuhande jooksul, mis eraldavad meid Eratosthenesest, on algarvude primitiivne sõelumine asendunud elektronmasinate kasutamisega, mis võimaldavad arvutusi teostada tohutu kiirusega.*

«Koduste vajaduste» jaoks on aga päris hea, kui elektronmasina asemel oleks käepärast üks korralik «sõel». Pikapeale moderniseerus ka algarvude käsitsi sõelumise tehnika. Nii näiteks mõtles aastat kakskümmend viis tagasi uue ja võrdlemisi hea sõela välja india matemaatikaüliõpilane S. P. Sundaram **:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
.	.	.	.	.	.	.

See «sõel» kujutab lõpmatust hulgast lõpmatutest aritmeetilistest progressioonidest koostatud tabelit, kusjuures esimese progressiooni

4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

iga element on ühtlasi uue aritmeetilise progressiooni alguseks.

Progressioonide vahedeks on kõik paaritud arvud alates kolmest:

$$d_1 = 3,\ d_2 = 5,\ d_3 = 7,\ d_4 = 9 \text{ jne.}$$

---

* Kaasaegsed ülikiired elektronarvutusmasinad teostavad kümnekohaliste arvudega kuni 40 000 tehet sekundis. *Tõlk.*

** Kaks uut sõela läkitas raamatu autorile sideinsener M. Soukup (Tšehhoslovakkia).

Kuigi mingi arv N esineb selles tabelis, siis on arv $2N+1$ tingimata kordarv. Kui aga mingit arvu N pole selles tabelis, siis on arv $2N+1$ algarv.

N ä i t e i d. 1) Tabelis pole arvu $N=3$, järelikult on arv $2N+1=7$ algarv.

2) Tabelis pole arvu $N=5$, järelikult on arv $2N+1=11$ algarv.

3) Arv 6 puudub tabelist, järelikult on 13 algarv.

4) Arv 7 on tabelis, järelikult on 15 kordarv jne.

Asendades valemis $2N+1$ arvu N järjest arvudega, mida pole tabelis (mis nagu oleks selle sõela poolt välja sõelutud), võib leida kõik algarvud peale arvu 2.

Kuidas tõestada, et $2N+1$ on k o r d a r v sõelale jäänud arvude puhul ja a l g a r v väljasõelutud arvude puhul?

358. Viiskümmend esimest algarvu

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

359. Veel üks algarvude leidmise meetod

Võtame arvu 1 ja n esimest algarvu. Jaotame need arvud meelevaldsel viisil kahte rühma. Kummagi rühma arve omavahel läbi korrutades saame kaks arvu. Kui nende arvude summa või vahe annab $(n+1)$-nda algarvu ruudust väiksema arvu N, siis on see arv N algarv.

Võtame näiteks arvu 1 ja neli esimest algarvu, s. o. arvud 1, 2, 3, 5 ja 7. Viies algarv on 11. Kuna $11^2=121$, siis võime tähendatud viisil leida algarve, mis on arvust 121 väiksemad.

Jaotame need arvud kahte rühma: 2, 3, 5, 7 ja 1. Moodustame korrutiste vahe: $2\cdot3\cdot5\cdot7-1=209$. Kuna 209 on suurem kui 121, siis me tema algarvulisuse eest vastutada ei või. Tõepoolest, eelmises punktis toodud algarvude tabelis teda pole.

Rühmitame need arvud nüüd teisiti: 1, 3, 5, 7 ja 2.

Moodustame korrutiste summa ja vahe:

$$N_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 = 103, \quad N_2 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 = 107.$$

Mõlemad arvud on väiksemad kui 121, järelikult peavad nad olema algarvud. Tõepoolest, kui nad oleksid kordarvud, siis nad laguneksid algarvude korrutiseks (vt. lk. 333). Nende arvude moodustamise viisist aga järeldub otseselt, et kumbki neist ei jagu ei 2, 3, 5 ega 7-ga. Samuti ei saa need arvud N_1 ja N_2 jaguda ka järgmise suurema algarvuga, s. t. 11-ga.

Tõepoolest, oletame, et N_1 (või N_2) jagub arvuga 11. Kuna kumbki neist on väiksem kui 121, siis jagatis on väiksem kui 11 ja ei või järelikult peale algarvude 2, 3, 5 ja 7 sisaldada muid algarvulisi tegureid. Kuid sel juhul N_1 (või N_2) jaguks ühega nendest teguritest, mis aga on vastuolus arvu N_1 (või N_2) moodustamise viisiga. Kui esimesse rühma võtame arvud 1, 5 ja 7 ning teise rühma 2 ja 3, siis me saame kätte veel kaks algarvu:

$$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 29 \quad \text{ja} \quad 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 41.$$

Toome veel mõned võimalikud kombinatsioonid:

$$1 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11, \quad 1 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 31,$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 - 7 = 23, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37 \text{ jne.}$$

Samuti on ilmne, et kui suurendada mõne teguri astet ükskõik kummas rühmas, siis korrutiste vahe ja summa annab endiselt tulemuseks algarvu, kui nad vaid jäävad väiksemaks kui $(n+1)$-nda algarvu ruut.

Tõepoolest:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2^3 = 97, \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 = 113,$$
$$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3^2 = 17, \quad 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3^2 = 53,$$
$$1 \cdot 3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 7 = 47, \quad 1 \cdot 3 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 7 = 103 \text{ jne.}$$

Koostades taolisi kombinatsioone ainult kolme arvu 1, 2 ja 3 abil, võib saada kätte kõik kahekümne viiest väiksemad algarvud.

Selle algarvude leidmise meetodi põhjendamine ei osutu teile kindlasti kuigi raskeks.

360. Mitu algarvu?

Algarvude tabelil pole lõppu, sest algarvude hulk on lõpmatu. Seda tõestas juba Eukleides.* Algarvud paiknevad naturaalarvude reas aga väga ebaühtlaselt. Esimese kümne naturaalarvu hulgas on algarve 4, s. t. 40%. Esimese saja hulgas on neid 25, s. t. 25%. Esimese miljoni hulgas aga on juba ainult 8% algarve jne.

Kuidas arvutuste abil määrata kas või ligikaudselt kindlaks algarvude hulka ühest kuni mingi meelevaldse arvuni N kulgevas naturaalarvude reas?

See küsimus osutus sedavõrd raskeks, et täpset valemit pole veel siiani olemas. Küll on aga leitud ligikaudne valem, mis võimaldab seda täpsemini määrata N esimese naturaalarvu hulgas olevate algarvude hulka n, mida suurem on N:

$$n \approx \frac{0{,}43429...}{\lg N} \cdot N.$$

B. FIBONACCI ARVUD

361. Avalik eksam

Kolmeteistkümnenda sajandi alguses elas Itaalias Pisa linnas matemaatik Leonardo, kes oli üsna osav arvutaja ja tundis pealekauba ka suurepäraselt igasuguseid arvudevahelisi seoseid. Laiemale üldsusele sai ta tuttavaks Fibonacci nime all, mis tõlkes tähendab Bonacci poeg. Aastal 1202 andis ta välja ladinakeelse raamatu «Incipit Liber, Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano», mis sisaldas kogu tollal tuntud aritmeetika- ja algebra-alaste teadmiste hulga. See oli üks esimesi Euroopas ilmunud raamatuid, mis õpetas kümnendsüsteemi kasutamist.

Leonardo raamat levis laialdaselt ja oli rohkem kui kaks sajandit kõige autoriteetsemaks teadmiste allikaks arvude vallas.

Vastavalt tolle aja kommetele võttis Fibonacci osa ka

---

* Eukleidese tõestuse võib leida arvuteooria õpikutest, aga ka raamatutest Г. Н. Берман, Число и наука о нем, Гостехиздат, 1954; Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, ОНТИ, 1936.

matemaatilistest turniiridest (avalikest võistlustest raskete ülesannete parima ja kiireima lahendaja nimele; tolleaegne turniir oli seega midagi meie praeguste matemaatiliste olümpiaadide sarnast).

Leonardo osavus numbriliste ülesannete lahendamisel hämmastas kõiki.

Fibonacci hea reputatsioon meelitas 1225. aastal Pisasse ka Rooma impeeriumi valitseja Friedrich II, kes saabus matemaatikute rühmaga Leonardo võimeid kontrollima. Üks turniiril esitatud ülesannetest oli järgmine: *Leida täisruut, mis jääb selleks ka pärast viie võrra suurendamist või vähendamist.*

Tuletan lugejaile meelde, et täisruuduks nimetatakse arvu, millest saab võtta täpse ruutjuure.

Fibonacci leidiski pärast lühiajalist mõtlemist niisuguse arvu. See osutus murruks:

$$\frac{1681}{144} \quad \text{ehk} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2.$$

Tõepoolest,

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144}, \quad \frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144}$$

ehk teisiti kirjutades

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2, \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Millistest kaalutlustest Fibonacci turniiri ajal lähtus, seda me ei saa kunagi teada, kuid ülesande lahendas ta igatahes hiilgavalt.

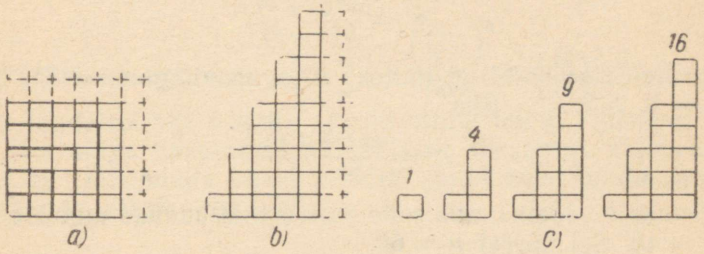
Muide, võib-olla polegi tõest kuigi kaugel arvamus, mida väljendas Joškar-Ola metsatehnilise instituudi üliõpilane Vjatšeslav Nezabudkin:

«Kas ei lähtunud Fibonacci selle ülesande lahendamisel võimalusest esitada iga täisruutu järjestikuste paaritute arvude summana (vt. ülesanne 352, IX)?»

Vjatšeslav Nezabudkin leidis sellelt seisukohalt lähtudes Fibonacci ülesandele originaalse ja näitliku lahenduse, mis on huvitav just selle poolest, et ta on oma lahendusidee poolest lähedane tollal rakendatud võtetele.

Toome sm Nezabudkini lahenduse mõningate väikeste muudatustega.

Ühikruutu mistahes täisruuduni täiendavaid nurkribasid (joon. 233, *a*) sirgestades saame lõpmatu treppkujundi, mille iga «astme» kõrgus on 2 ruutu (joon. 233, *b*). Seda treppkujundit ükskõik millisele astmele vastava veeru



Joon. 233. Täisarvud — ruudud.

kohalt katkestades saame rea «trepitükke», mis igaüks kujutab mingi täisarvu ruutu (joon. 233, *c*).

Jooniselt 233 on näha, et täisarvude hulgas ei saa ülesande tingimustele vastavat arvu olla.

Järelikult omab otsitav arv kuju $\frac{m^2}{n^2}$. Lahutades sellest arvust 5 ja liites 5 saame:

$$\frac{m^2-5n^2}{n^2}, \quad \frac{m^2}{n^2}, \quad \frac{m^2+5n^2}{n^2}.$$

Tingimuse kohaselt peavad arvud m^2-5n^2, m^2 ja m^2+5n^2 olema ruuttäisarvud. Sellised arvud on olemas, kui leiduvad niisugused kõrvutiasetsevad ühesuurused nurkribad *BEFGDC* ja *EHJKGF* (joon. 234, *a*), milles kummaski on $5n^2$ ruutu. Lahutades sel juhul ruutarvust *AEFG* (m^2) nurkriba *BEFGDC* ($5n^2$) saame ruutarvu *ABCD* (m^2-5n^2). Liites ruutarvule *AEFG* nurkriba *EHJKGF* ($5n^2$) saame ruutarvu *AHJK* (m^2+5n^2). Leiame need arvud.

Lõikame nurkriba katki piki treppjoont *CFJ* (iga aste on võrdne ruudu küljega) ja konstrueerime saadud tükkidest ristkülikud *DEBG* ja *GHLK* (joon. 234, *b*).

Kanname pikkuse $GK=b$ üle küljele *DG* nii et $GN=b$ ja tõmbame joone $NM \parallel DE$. Kuna *DEBG* ja *GHLK* on võrdse pindalaga, siis ka *BHLP* ja *DEMN* on pindvõrdsed.

Siit aga saame, et

$$\frac{\text{pindala } DEBG}{\text{pindala } DEMN} = \frac{a}{a-b} \quad \text{ehk} \quad \frac{5n^2}{b(a+b)} = \frac{a}{a-b}.$$

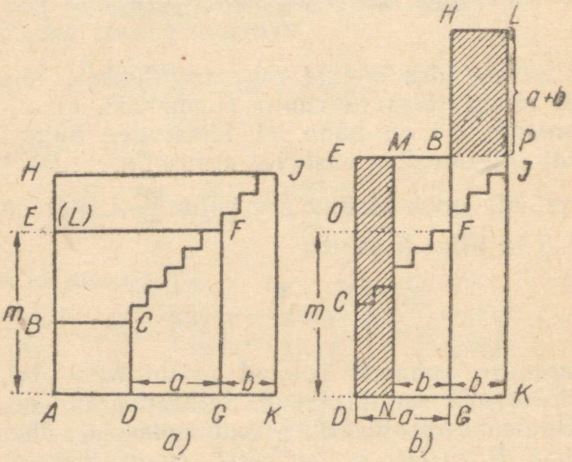
Järelikult

$$n^2 = \frac{ab(a+b)}{5(a-b)}.$$

Eeldame nüüd, et näiteks a jagub viiega: $a = 5k$, kus $k = 1, 2, 3, \ldots$ Siis

$$n^2 = \frac{kb(5k+b)}{5k-b}.$$

Ainuke b väärtus, mis selle murru täisruuduks muudab on $b = 4k$. Sel korral $n = 6k$.



Joon. 234. Nii võis selle ülesande lahendada Fibonacci.

Niisiis: $a = 5k$, $b = 4k$, $n = 6k$. Otsitava murru nimetaja on seega $n^2 = (6k)^2$. Leiame nüüd murru lugeja m^2. Jooniselt 234 näeme, et

$$ED = \frac{\text{pindala } DEMN}{a-b} = \frac{\text{pindala } BHLP}{a-b} = \frac{b(a+b)}{a-b} = 36k.$$

Edasi, $m = FG$, kuid samal ajal $FG = EC$ ja $FG = OD$. Samuti kehtivad ilmselt võrdused $OC = OF = a$; $ED = EC + OD - OC = 2EC - a$.

Siit

$$EC = \frac{ED + a}{2} \quad \text{ja} \quad m = FG = EC = \frac{ED + a}{2} =$$

$$= \frac{36k + 5k}{2} = \frac{41k}{2}.$$

Otsitav murd on seega $\frac{m^2}{n^2} = \frac{\left(\frac{41}{2}k\right)^2}{(6k)^2} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$. Seega me jõudsime välja sama arvuni, mille leidis Fibonacci.

Ka kõige kavalamad katsed seda ülesannet algebralisel teel lahendada viisid parimal juhul kahe tundmatuga neljanda astme võrrandini.

362. Fibonacci rida

Fibonacci koostas ka arvude rea, mis hiljem osutus teaduses üsna kasulikuks:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 . . .

Seaduspärasus, mis võimaldas selle rea liikmete leidmist, on väga lihtne: kaks esimest liiget on ühed, iga edasine liige aga saadakse kahe talle vahetult eelneva liikme summana. Näiteks, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$ jne.

Fibonacci reas rahuldab iga kõrvutiasetsevate liikmete paar kas võrrandit

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$

või võrrandit

$$x^2 - xy - y^2 = -1,$$

kusjuures suurem arv tuleb asetada x ja väiksem arv y asemele.

Näiteks väärtuste paarid

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} x = 5, \\ y = 3 \end{cases} \text{ ehk } \begin{cases} x = 13, \\ y = 8 \end{cases} \text{ jne.}$$

rahuldavad esimest võrrandit. Teist võrrandit rahuldavad aga väärtuste paarid

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8, \\ y = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 21, \\ y = 13 \end{cases} \text{ jne.}$$

Selle omaduse tõestus on üldjuhu jaoks toodud lehekülgel 349 (3. omadus).

*

Fibonacci rida pole tuttav mitte ainult matemaatikutele, vaid teda tunnevad hästi ka botaanikud.

Kui lehed asuvad okstel ühekaupa, siis nad paigutuvad ümber varre mitte ringjoonselt, vaid mööda kruvijoont, s. t. iga järgmine leht on eelmisest veidi ülevalpool ja kõrval. Seejuures on igal taimeliigil oma kindel lehtede hajumisnurk, mis botaanikute väidete järgi on kogu varre ulatuses võrdlemisi täpselt ühesuurune. Seda nurka iseloomustatakse harilikult murruga, mis näitab, millise osa hajumisnurk moodustab täisringist. Nii näiteks pärnal ja jalakal moodustab hajumisnurk $\frac{1}{2}$ täisringi, pöökpuul $\frac{1}{3}$, tammel ja kirsipuul $\frac{2}{5}$, paplil ja pirnipuul $\frac{3}{8}$, pajul $\frac{5}{13}$ jne. Sama taimeliigi juures säilib see nurk ka okste, pungade, pungasiseste soomuste ja õite paigutuses.

Taimede hulgas on kõige enam levinud järgmised hajumisnurgad (täisringi osades):

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{13},\ \frac{8}{21},\ \ldots$$

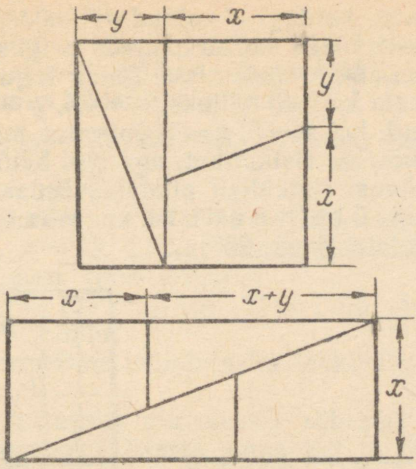
Nende murdude lugejad ja nimetajad moodustavad Fibonacci rea, kusjuures kolmandast murrust alates iga järgmine saadakse vastavalt kahe eelmise lugejate ja nimetajate liitmisel:

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3},\quad \frac{3}{8}=\frac{1+2}{3+5}\ \text{jne.}$$

363. Paradoks

Fibonacci arvudega on kaudselt seotud huvitav geomeetriline paradoks.

On ju päris ilmne, et kui me lõikame mõne tasase kujundi tükkideks ja siis paigutame need tükid üksteise kõrvale (mitte peale), siis nad moodustavad uue kujundi, mille kuju on küll arvatavasti eelmisest erinev, kuid



Joon. 235. Ruudu ristkülikuks muutmine.

mille p i n d a l a peab jääma samaks: ühtegi ruutühikut ei saa ju juurde tekkida ega ka kaduma minna. See üpris ilmne näide on üks geomeetrilistest aksioomidest, millel baseerub kogu pindalade mõõtmise teooria.

Joonisel 235 on näidatud ruudu ristkülikuks teisendamist. Ruut on lõigatud kaheks võrdseks kolmnurgaks ja kaheks võrdseks trapetsiks, mille külgede pikkused on esialgselt tähistatud tähtedega x ja y. Nendest osadest on koostatud ristkülik. Kui selline ruudu ristkülikuks teisendamine on võimalik, millisteks osadeks x ja y tuleb siis ruudu külg jaotada?

Üks mu noortest sõpradest otsustas seda praktiliselt proovida ja sattus seejuures hämmastavale nähtusele.

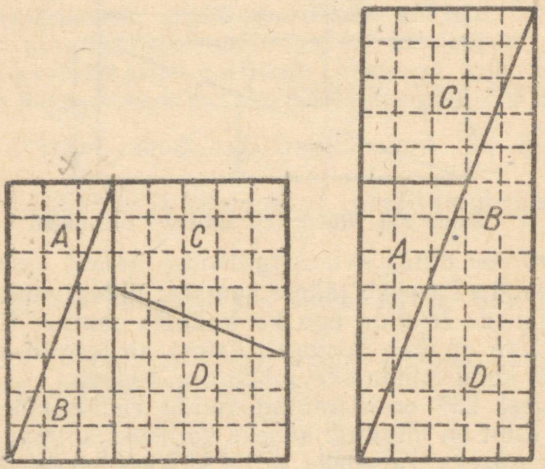
Toon väljavõtte ta kirjast, milles ta kirjeldas oma juhtumusi.

«Ma mõtlesin, et proovin õige ise seda teisendust praktiliselt läbi viia. Raamatust ma ei tahtnud joonist maha kopeerida ja seepärast otsustasin ma ise jõudu proovida mõne konkreetse ruudu juures vastavalt joonisele 235.

Joonistasin ruudulisele paberile 8×8 ruudu ja hakkasin proovima, millisteks osadeks x ja y tuleb ruudu külg jagada. Algul ma mõtlesin, et see pole üldse tähtis ja ma võtsin $x = 6$, $y = 2$. Tõmbasin vastavad jooned, lõikasin ruudu tükkideks ja hakkasin ristkülikut konstrueerima,

aga võta näpust, kuidagi ei tulnud välja! Joonisel toodud skeemi kohaselt tükke kokku pannes selgus, et ristküliküle jääb suur auk keskele sisse. Sama lugu oli ka teiste x ja y väärtuste korral, näiteks $x = 4{,}5$, $y = 3{,}5$.

Ainult juhul, kui $x = 5$, $y = 3$ õnnestus mul ruudu tükkidest konstrueerida ristkülikut, aga siin hämmastas mind uus ebameeldivus: ristküliku pindala võrdus 65 ruudukesega, s. t. oli ühe ruudukese võrra suurem kui ruudu pindala (joon. 236).



Joon. 236. Tükid on samad, aga pindala suurenes! Miks?

Tõepoolest, ristküliku pikkus peab olema $x + x + y = 2x + y = 2 \cdot 5 + 3 = 13$ ühikut (vt. joon. 235) ja ma saingi tõepoolest 13 ühikut. Ristküliku laius peab olema x, s. t. 5 ühikut ja ma sain tõepoolest kätte ka selle pikkuse. Siit aga järeldub ju otsekohe, et ristküliku pindala on $13 \cdot 5 = 65$ ruutühikut (joon. 236).

See aga pole veel kõik. Ma jagasin sama mustri järgi tükkideks ka 13×13 kujulise ruudu. Kui ma võtsin $x = 8$ ja $y = 5$, siis sai ruudu tükkidest kombineerida parajasti ristküliku, aga seekord ruudu pindalast ühe ruutühiku võrra väiksema pindalaga!

Veenduge selles ise: ruudu pindala on $13^2 = 169$ ruudukest, ristküliku pindala aga on $(2x + y)x = (2 \cdot 8 + 5) \cdot 8 = 168$ ruudukest!

Veel kaks näidet.

1) Ma võtan ruudu $21 \times 21 = 441$. Jaotan küljed osadeks $x = 13$, $y = 8$. Lõikan ruudu tükkideks ja koostan ristküliku. Leian ristküliku pindala:

$$(2x + y)x = (2 \cdot 13 + 8) \cdot 13 = 442$$ ruudukest!

Jälle üks ruut üle!

2) Ma võtan ruudu $34 \times 34 = 1156$. Jaotan küljed osadeks $x = 21$, $y = 13$. Lõikan ruudu tükkideks ja koostan ristküliku. Leian selle pindala:

$(2x + y)x = (2 \cdot 21 + 13) \cdot 21 = 1155$ ruudukest. Üks ruuduke jääb puudu!

Millest on selline mõistatuslik tekkimine ja kadumine tingitud?»

Mida te vastaksite mu noorele sõbrale? Mõtelge hoolega selle paradoksi juures, enne kui te lahendust vaatate. Millist osa siin mängivad Fibonacci arvud?

364. Fibonacci rea arvude omadusi

Fibonacci rea

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

liikmetel on terve rida huvitavaid omadusi.

1) Fibonacci rea kolme järjestikuse liikme S_{n-2}, S_{n-1} ja S_n vahel kehtib rea määrangu põhjal seos

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

See seos annab võimaluse rea kahe esimese liikme abil leida kolmandat liiget, teise ja kolmanda abil saab leida neljanda liikme jne.

2) Oleks huvitav anda otsene valem liikme S_n leidmiseks, kui on teada vaid ta kohanumber n. Selgub, et see on täiesti võimalik, kuid ühtlasi selgub, et me kohtume üldise seaduspära leidmisel üsna üllatavate nähtudega, mis muide on matemaatikas üsna sagedased.

Nii iga Fibonacci rea liige kui ka selle kohanumber on täisarvud, järelikult oleks loomulik oodata, et suvaline rea liige S_n avalduks kohanumbri n kaudu ainult täisarvudega teostatud operatsioonide kaudu (nagu näiteks progressioonides). See pole aga õige. Ei täis- ega ratsionaalarvud ei saa meid aidata otsitava valemi moodustamisel.

Hädast päästavad meid kaks irratsionaalarvu:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ja} \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Tuletage meelde, et need kaks arvu muutsid nulliks ristküliku ja ruudu pindalade vahelise erinevuse R (vt. ülesande nr. 363 lahendus, lk. 542). Tõesti ootamatu kohtumine!

Ja selgubki, et kui n on kohanumber, siis iga Fibonacci rea liige S_n on leitav valemiga

$$S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{{a_1}^n - {a_2}^n}{\sqrt{5}}. \qquad (*)$$

Kontrollime seda valemit konkreetsetel üksikjuhtudel. Kui $n = 1$

$$S_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

kui $n = 2$

$$S_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1.$$

Kuna kahe kõrvutise rea liikme korral on valemi õigsus kontrollitud ja iga edasine Fibonacci rea liige on leitav kahe eelmise liikme summana, siis pole meil mõtet kontrollida valemi (*) õigsust edasistel üksikjuhtudel, vaid kontrollime kohe õigsust suvalise n puhul.

Kirjutame üles kahe kõrvutise realiikme avaldised:

$$S_{n-2} = \frac{{a_1}^{n-2} - {a_2}^{n-2}}{\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad S_{n-1} = \frac{{a_1}^{n-1} - {a_2}^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Valem (*) kehtib iga n korral, kui nende kahe avaldise summa võrdub S_n-ga:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{{a_1}^{n-2} - {a_2}^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{{a_1}^{n-1} - {a_2}^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{{a_1}^{n-2}(a_1+1) - {a_2}^{n-2}(a_2+1)}{\sqrt{5}}.$$

Teades, mida kujutavad endast arvud a_1 ja a_2, võite ise otsese arvutamisega veenduda, et

$$a_1 + 1 = a_1^2 \quad \text{ja} \quad a_2 + 1 = a_2^2.$$

Pöördudes nüüd tagasi summa $S_{n-2} + S_{n-1}$ juurde saame:

$$S_{n-2} + S_{n-1} = \frac{a_1^{n-2} a_1^2 - a_2^{n-2} a_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} = S_n,$$

mida oligi vaja tõestada.

3) Teades, et iga Fibonacci rea liige S_n on seotud oma kohanumbriga n järgmiselt:

$$S_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{kus} \quad a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ja} \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

on üsna kerge tõestada, et iga kõrvutiasetsevate Fibonacci rea liikmete paar S_n ja S_{n+1} rahuldab üht võrrandi-test $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, kusjuures kui $y = S_n$, siis $x = S_{n+1}$. Nendes võrrandites tundmatute asemele vastavalt avaldisi

$$y = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad x = \frac{a_1^{n+1} - a_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

asetades saame

$$\frac{(a_1^{n+1} - a_2^{n+1})^2}{5} - \frac{(a_1^{n+1} - a_2^{n+1})(a_1^n - a_2^n)}{5} - \frac{(a_1^n - a_2^n)^2}{5} = \pm 1.$$

$$a_1^{2n+2} - 2a_1^{n+1}a_2^{n+1} + a_2^{2n+2} - a_1^{2n+1} + a_1^n a_2^{n+1} +$$
$$+ a_1^{n+1}a_2^n - a_2^{2n+1} - a_1^{2n} + 2a_1^n a_2^n - a_2^{2n} = \pm 5.$$

Rühmitame saaduse ühesuguste astme alustega liikmete järgi:

$$a_1^{2n}(a_1^2 - a_1 - 1) + a_2^{2n}(a_2^2 - a_2 - 1) +$$
$$+ a_1^n a_2^n(-2a_1 a_2 + a_2 + a_1 + 2) = \pm 5,$$

ning paigutame suluavaldistesse a_1 ja a_2 konkreetsed väärtused. Selle tulemusena saame

$$5a_1^n a_2^n = \pm 5,$$

ehk

$$5(a_1 a_2)^n = \pm 5.$$

Kuna

$$a_1 a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1, \text{ siis}$$

paarisarvulise n korral me saame $5(-1)^n = 5$ ja paarituarvulise n korral $5(-1)^n = -5$.

4) Fibonacci rea n esimese liikme summa valemilgi on üsna omapärane kuju:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S_{n+2} - 1.$$

Sõnades: Fibonacci rea n esimese liikme summa on ühe võrra väiksem liikmest kohanumbriga $n + 2$.

Tõestus. Rea liikmete moodustamise eeskirja põhjal võime kirjutada:

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= S_{n+1} + S_n, \\ S_{n+1} &= S_n + S_{n-1}, \\ S_n &= S_{n-1} + S_{n-2}, \\ &\ldots\ldots \\ S_4 &= S_3 + S_2, \\ S_3 &= S_2 + S_1. \end{aligned}$$

Kõik need võrdused kokku liites ja sarnased liikmed vastamisi kustutades saame lõpuks

$$S_{n+2} = (S_n + S_{n-1} + \ldots + S_1) + S_2;$$

järelikult

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \ldots + S_n &= S_{n+2} - S_2, \\ S_1 + S_2 + \ldots + S_n &= S_{n+2} - 1, \end{aligned}$$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1.$$

5) Fibonacci rea liikmete ruutude summa avaldub kahe kõrvutise realiikme korrutise kaudu:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2 = S_n \cdot S_{n+1}. \qquad (**)$$

Näiteks

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 &= 1 \cdot 2, \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 &= 2 \cdot 3, \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 3 \cdot 5 \text{ jne.} \end{aligned}$$

Tõestuseks kasutame jällegi täieliku matemaatilise induktsiooni meetodit. Olgu valem (**) õige mingi liikmete arvu k puhul:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2 = S_k \cdot S_{k+1}.$$

Liidame võrduse mõlemale poolele suuruse S^2_{k+1}:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S^2_k + S^2_{k+1} = S_k \cdot S_{k+1} + S^2_{k+1} = \\ = S_{k+1}(S_k + S_{k+1}) = S_{k+1} \cdot S_{k+2}.$$

Valem, mis eelduse põhjal oli õige k liidetava puhul, jäi õigeks ka $k+1$ liidetava puhul. Kuna otsene kontrollimine näitas valem (**) õigsust $k = 2$ puhul, siis on sellest küllalt, et väita valemi õigsust suvalise n korral.

*

Tõestage valemit (*) või täieliku induktsiooni meetodit kasutades veel mõned Fibonacci arvude omadused.

6) Lahutades suvalise Fibonacci rea liikme ruudust talle vahetult eelneva ja järgneva liikme korrutise, saame tulemuseks vaheldumisi kas pluss või miinus ühe.

Näiteks,

$$2^2 - 1 \cdot 3 = +1,$$
$$3^2 - 2 \cdot 5 = -1,$$
$$5^2 - 3 \cdot 8 = +1,$$
$$\ldots\ldots$$

üldiselt

$$S^2_n - S_{n-1}S_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

7) $S_1 + S_3 + \ldots + S_{2n-1} = S_{2n}$.

8) $S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n} = S_{2n+1} - 1$.

9) Fibonacci reas jagub iga kolmas arv kahega, iga neljas arv kolmega, iga viies arv viiega ja iga viieteistkümnes arv kümnega.

10) Ei saa konstrueerida kolmnurka, mille külgedeks oleksid Fibonacci rea arvud.

11) Kui võtta neli järjestikust Fibonacci rea liiget ja vaadelda äärmiste liikmete korrutist ning keskmiste liikmete kahekordset korrutist kui täisnurkse kolmnurga kaateteid, siis on selle kolmnurga hüpotenuusiks üks selle rea liikmeid:

$$(a_n \cdot a_{n+3})^2 + (2a_{n+1} \cdot a_{n+2})^2 = a^2_{2n+3}.*$$

---

* Täiendavaid andmeid Fibonacci arvude omaduste kohta võite leida raamatust Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, Гостехиздат, 1951. Fibonacci ridadega analoogilistele ridadele on pühendatud raamat А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности. Гостехиздат, 1950.

365. Kujundiliste arvude omadusi

1) Juba ammu enne meie ajaarvamise algust koostasid tolleaegsed teadlased naturaalarvude kombinatsioonidest veidraid ridu, andes nende ridade elementidele ühe või teise geomeetrilise tõlgenduse.

Nii näiteks tekkis umbes V—IV sajandil e. m. a. *kujundiliste arvude* rea mõiste.

Vaatleme algul niisugust arvude rida, milles iga järgmise ja eelmise liikme vahe on konstantne (aritmeetiline progressioon), näiteks

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \text{ (vahe } d = 1),$$
$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots \text{ (vahe } d = 2),$$
$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots \text{ (vahe } d = 3)$$

ehk üldkujul

$$1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d, 1 + 4d, \ldots$$

Igal rea elemendil on oma kindel koht. Selleks et saada rea n-ndat elementi a_n, tuleb rea esimesele elemendile liita reavahe ja elemendi kohanumbrist ühe võrra väiksema arvu korrutis:

$$a_n = 1 + d(n - 1).$$

Selliste ridade elemente nimetatakse *lineaarseteks kujundilisteks arvudeks* ehk ka *esimest järku kujundilisteks arvudeks.*

2) Moodustame lineaarsete kujundiliste ridade elementidest järjestikku summasid: esimeseks «summaks» võtame lihtsalt rea esimese elemendi, teise summa leidmiseks liidame rea kaks esimest elementi, kolmanda summa leidmiseks liidame rea kolm esimest elementi jne. (n-nda summa leidmiseks liidame n esimest rea elementi).

Nii saame esimesest lineaarsete kujundiliste arvude reast 1, 2, 3, 4, 5, ... uue rea — summade rea:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 + 2 = 3,\ S_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$
$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,\ S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,\ \ldots,$$

ehk

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

Need arvud kannavad *kolmnurksete* arvude nime.

Teisest lineaarsete kujundiliste arvude reast

1, 3, 5, 7, 9, ...

saame nn. *ruutarvude* rea:

1, 4, 9, 16, 25, ...

Kolmandast lineaarsete kujundiliste arvude reast

1, 4, 7, 10, 13, ...

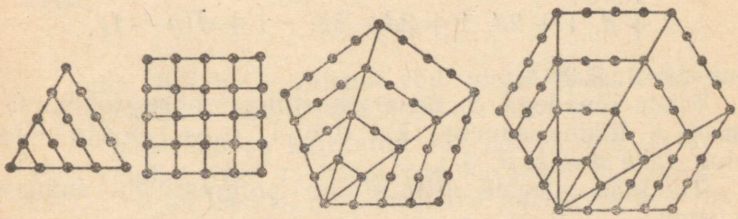
võib tuletada *viisnurksete* arvude rea:

1, 5, 12, 22, 35, ...

Analoogiliselt võib tuletada ka *kuusnurkseid*, *seitsenurkseid* jne. arve.

Kõiki neid arve nimetatakse *tasasteks* kujundilisteks arvudeks ehk *teist järku kujundilisteks arvudeks.*

3) Nendele arvudele omistatud geomeetrilised «nimed» seletuvad võimalusega neid geomeetriliselt tõlgendada. Konstrueerime võrdkülgse kolmnurga, ruudu, korrapärase viisnurga, kuusnurga jne. nii, et servade pikkused võrduksid parajasti ühega. Seejärel pikendame igas kujundis ühest tipust lähtudes kõiki kujundi külgi 2, 3, 4, ... korda ehk, nagu ütlevad matemaatikud, konstrueerime antud kujunditele perspektiivselt sarnased kujundid (joon. 237).



Joon. 237. Kujundilised arvud.

Kõigi tekkinud kujundite tippudesse ja külgedele paigutame üksteisest ühiku kaugusele ringikesed. Igas kolmnurgas olevate ringide arvu loendades saamegi kolmnurksete arvude rea:

1, 3, 6, 10, 15, ...

Igas ruudus olevate punktide loetelu annab meile

ruutarvude rea

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$$

Analoogiline punktide loendamine viisnurkades, kuusnurkades jne. toob meid viisnurksete, kuusnurksete jne. arvude juurde.

4) Koondame kõik tasased kujundilised arvud ühte tabelisse:

d	Kujund	Arvud						Üldliige S_n
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		
1	Kolmnurk	1	3	6	10	15	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	Ruut	1	4	9	16	25	...	n^2
3	Viisnurk	1	5	12	22	35	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
4	Kuusnurk	1	6	15	28	45	...	$n(2n-1)$
.	. . . .	.	.	.	.	.	...	. . . . .
d		1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$	...	$\frac{n[dn-(d-2)]}{2}$

Tasaste kujundiliste arvude iga rea üldliige S_n avaldub definitsiooni põhjal vastava lineaarsete kujundiliste arvude rea n esimese elemendi summana:

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ \ldots,\ 1+d(n-1),$$

kus $d = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Teiste sõnadega, S_n on aritmeetilise progressiooni esimese n liikme summa, kui $a_1 = 1$, $a_n = 1 + d(n-1)$ ning vahe $d = 1, 2, 3, \ldots$

Tuletame meelde aritmeetilise progressiooni summa valemi:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Selle järgi saame:

$$S_n = \frac{[1+1+d(n-1)]\,n}{2} = \frac{n[dn-(d-2)]}{2}.$$

Siit saame $d = 1$ puhul tabeli esimese rea üldliikme avaldise, $d = 2$ puhul saame aga tabeli teise rea üldliikme avaldise jne.

5) Naturaalarvude ja tasaste kujundiliste arvude ning tasaste kujundiliste arvude eneste vahel eksisteerib terve rida huvitavaid seoseid.

Pierre de Fermat (1601—1665), jurist ja ühiskonnategelane Toulouse'i linnast (Prantsusmaa), kes tegeles matemaatikaga vaid puhkehetkedel, mis aga ei olnud talle takistuseks suurte avastuste tegemisel arvude teooria alal, leidis näiteks, et

a) *iga naturaalarv on kas ise kolmnurkne arv või on kahe või kolme kolmnurkse arvu summa;*

b) *iga naturaalarv on kas ise ruutarv või on kahe, kolme või nelja ruutarvu summa; iga naturaalarv on kas ise viisnurkne arv või on kahe, kolme, nelja või viie viisnurkse arvu summa;*

c) *üldse iga naturaalarvu võib esitada ülimalt k k-nurkse arvu summana.*

Üksikute erijuhtude jaoks andis selle teoreemi tõestuse Peterburi akadeemia liige Euler, üldise tõestuse aga andis 1815. aastal prantsuse matemaatik Cauchy.

Proovige nüüd treeninguks mõnd naturaalarvu lahutada kolmnurksete, ruut- või viisnurksete arvude summaks. Et asi oleks huvitavam, võite korraldada isegi väikese kiirusvõistluse.

6) Kreeka matemaatik Diofantes (III saj.) leidis lihtsa seose kolmnurksete arvude K ja ruutarvude R vahel:

$$8K + 1 = R.$$

Seda Diofantese valemit võib väga ilmekalt demonstreerida kolmnurkse arvu 21 abil.

Joonisel 238 on kujutatud 169 punkti, mis paiknevad ühes ruudus. Nad moodustavad ruutarvu R. Üks punkt hõivab ruudu tsentri, ülejäänud 168 punkti on aga rühmitatud kaheksa kolmnurkse arvuna K.

Saame: $8K + 1 = R$.

7) Iseseisva harjutusena tõestage algebraliselt:

a) et Diofantese valem kehtib alati,

b) et ükski kolmnurkne arv ei saa lõppeda numbritega 2, 4, 7 ja 9,

c) et iga kuusnurkne arv on paaritu kohanumbriga kolmnurkne arv.

8) Naturaalarvude astmete summa (s. t. lineaarsete

kujundiliste arvude ühe liigi) jaoks tuntakse niisugust valemit:

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

(vt. lk. 325). Saksa matemaatik Jacobi avastas samade arvude puhul veel ühe huvitava seose:

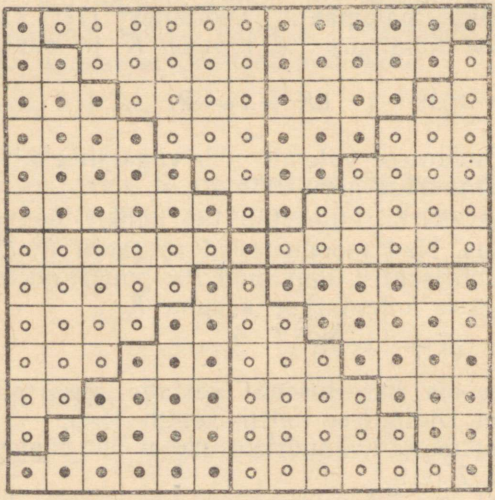
$$2(1+2+3+\ldots+n)^4 = (1^5+2^5+\ldots+n^5) + \\ +(1^7+2^7+\ldots+n^7).$$

Analoogiline seos on leitud ka kolmnurksete arvude astmete summade vahel, s. t. tasaste kujundiliste arvude vahel:

$$3\left[1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}\right]^3 = \\ =\left[1^3+3^3+\ldots+\frac{[n(n+1)]^3}{2^3}\right]+ \\ +2\left[1^4+3^4+\ldots+\frac{[n(n+1)]^4}{2^4}\right].$$

Näiteks

$$3(1+3+6)^3 = 1^3+3^3+6^3+2(1^4+3^4+6^4) = 3000,$$



$8K+1=R$

Joon. 238. Seos kolmnurksete ja ruutarvude vahel.

$$3(1+3+6+10)^3 = \\ = 1^3+3^3+6^3+10^3+2(1^4+3^4+6^4+10^4) = 24\,000.$$

9) Tasastest kujundilistest arvudest järjestikku summasid $V_1 = S_1$, $V_2 = S_1 + S_2$, $V_3 = S_1 + S_2 + S_3$, $V_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ jne. moodustades saame *ruumilised kujundilised arvud* ehk *kolmandat järku kujundilised arvud:* V_1, V_2, V_3, ...

Nii näiteks saab kolmnurksetest arvudest

1, 3, 6, 10, 15, ...

järgmise kolmandat järku kujundiliste arvude rea

1, 4, 10, 20, 35, ...

Neid arve nimetatakse ka püramidaalseteks arvudeks, sest nende geomeetriliseks esitamiseks tuleb ühesuguse läbimõõduga keradest moodustada järjestikku püramiide. Asetame lauale kolm kera ja nende peale veel ühe kera, niiviisi saame neljakeralise püramiidi kui arvu 4 kujutise. Selle püramiidi alla veel kuut kera paigutades saame kümnekeralise püramiidi kui arvu 10 kujutise jne.

10) Anname nüüd väikeses tabelis ülevaate kõigist kolmandat järku kujundilistest arvudest:

d	Arvud						Üldliige V_n
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
1	1	4	10	20	35	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
2	1	5	14	30	55	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3	1	6	18	40	75	...	$\frac{1}{2}n^2(n+1)$
4	1	7	22	50	95	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
.	.	.	..	..	..	...	. . . . .
d	1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$		$\frac{1}{6}n(n+1)[dn-(d-3)]$

Ruumiliste kujundiliste arvude üldliikme V_n valemit on tunduvalt raskem tuletada kui tasaste kujundiliste



Joon. 239. Arvude 4 ja 10 kujutised.

arvude puhul. Need lugejad, kes pole kombinatoorikat õppinud, võivad järgneva üldliikme V_n tuletuskäigu vahele jätta.

Toome sisse tähistused

$V_2 - V_1 = b_1$, kusjuures $b_1 = 3 + d - 1 = 2 + d$;
$V_3 - V_2 = b_2$, kusjuures $b_2 = 6 + 4d - 3 - d = 3 + 3d$;
$V_4 - V_3 = b_3$, kusjuures $b_3 = 10 + 10d - 6 - 4d = 4 + 6d$;
$V_5 - V_4 = b_4$, kusjuures $b_4 = 15 + 20d - 10 - 10d = 5 + 10d$;
$V_6 - V_5 = b_5$
. . . . . .

$$V_2 = V_1 + b_1,$$
$$V_3 = V_2 + b_2,$$
$$V_4 = V_3 + b_3,$$
$$V_5 = V_4 + b_4,$$
$$V_6 = V_5 + b_5,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Edasi tähistame

$b_2 - b_1 = r_1$, kusjuures $r_1 = 3 + 3d - 2 - d = 1 + 2d$;
$b_3 - b_2 = r_2$, kusjuures $r_2 = 4 + 6d - 3 - 3d = 1 + 3d$;
$b_4 - b_3 = r_3$, kusjuures $r_3 = 5 + 10d - 4 - 6d = 1 + 4d$;
$b_5 - b_4 = r_4$
. . . . . .

$$b_2 = b_1 + r_1,$$
$$b_3 = b_2 + r_2,$$
$$b_4 = b_3 + r_3,$$
$$b_5 = b_4 + r_4,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Märgime nüüd, et

$$r_2 - r_1 = d,$$
$$r_3 - r_2 = d,$$
$$r_4 - r_3 = d \text{ jne.},$$

millest

$$r_2 = r_1 + d,$$
$$r_3 = r_2 + d = r_1 + 2d,$$
$$r_4 = r_3 + d = r_1 + 3d \text{ jne.}$$

Need seosed annavad meile võimaluse avaldada arve $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ arvude V_1, b_1, r_1 ja d kaudu;

$V_2 = V_1 + b_1$,

$V_3 = V_2 + b_2 = V_1 + b_1 + b_1 + r_1 = V_1 + 2b_1 + r_1$.

Suuruste b_1 ja r_1 juures olevaid kordajaid võib avaldada kombinatsioonidena kahest elemendist

$$2 = C_2^1, \; 1 = C_2^2.$$

Tähendab

$$V_3 = V_1 + C_2^1 b_1 + C_2^2 r_1.$$

Järgmise ruumilise arvu juurde edasi minnes saame

$$V_4 = V_3 + b_3 = V_1 + 2b_1 + r_1 + b_2 + r_2 =$$
$$= V_1 + 2b_1 + r_1 + b_1 + r_1 + r_1 + d = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d.$$

Kuna $3 = C_3^1 = C_3^2$ ja $1 = C_3^3$, siis

$$V_4 = V_1 + C_3^1 b_1 + C_3^2 r_1 + C_3^3 d,$$
$$V_5 = V_4 + b_4 = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_3 + r_3 =$$
$$= V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_2 + r_2 + r_1 + 2d =$$
$$= V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_1 + r_1 + r_1 + d + r_1 + 2d =$$
$$= V_1 + 4b_1 + 6r_1 + 4d.$$

Kuna $4 = C_4^1 = C_4^3$ ja $6 = C_4^2$, siis

$$V_5 = V_1 + C_4^1 b_1 + C_4^2 r_1 + C_4^3 d.$$

V_6 jaoks saame:

$$V_6 = V_1 + C_5^1 b_1 + C_5^2 r_1 + C_5^3 d$$

ning V_n jaoks:

$$V_n = V_1 + C^1_{n-1} b_1 + C^2_{n-1} r_1 + C^3_{n-1} d.$$

Asetades sellesse seosesse b_1 ja r_1 konkreetsed väärtused ning arvutades kombinatsioonide väärtused, leiame:

$$V_n = 1 + (n-1)(2+d) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(1+2d) +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} d.$$

Pärast lihtsustamist

$$V_n = \frac{1}{6} n(n+1)[dn - (d-3)].$$

Erijuhul, kui $d=1$, saame:

$$V_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Kui $d=2$, siis

$$V_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ jne.}$$

(vt. leheküljel 357 toodud tabeli esimest ja teist rida).

11) Teema iseseisvaks harjutamiseks (ainult nendele, kes tunnevad kombinatsioonide omadusi ja valemeid): Täpselt samal viisil, nagu me tõime sisse kolmandat järku kujundilised arvud, moodustada ka neljandat järku kujundilised arvud ja tuletada üldliikme valem.

366. Püthagorase arvud

Mõnikord tekib vajadus täisnurkse kolmnurga konstrueerimiseks, millel nii kaatetid kui ka hüpotenuus oleks täisarvulised. Selleks otstarbeks sobivaid täisarve nimetatakse Püthagorase arvudeks, sest nad peavad rahuldama Püthagorase poolt avastatud seost kaatetite x, y ja hüpotenuusi z vahel:

$$x^2+y^2=z^2.$$

Kui anda huupi ette kaatetite x ja y väärtusi, siis saab hüpotenuusi z pikkust üsna kergesti leida valemist $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Kaatetite x ja y pikkusi huupi ette andes on aga üsna raske leida selliseid täisarve, mille korral ka z oleks täisarv.

Selliseid täisarve muidugi leidub; võtame kasvõi kõigile hästituntud «egiptuse» kolmnurga (3, 4, 5). Siin vastab kaatetitele 3 ja 4 hüpotenuus $z=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Samal ajal aga näiteks arvude $x=2$ ja $y=6$ korral hüpotenuus $z=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$ ei avaldu täisarvuna.

Märgime kohe, et Püthagorase arve eksisteerib lõpmatu hulk ja näitame ka ühtlasi tee nende kiireks leidmiseks.

Iga kompleksarv $a+bi$, kus a ja b on täisarvud, on Püthagorase arvude tuletamise baasiks.

Tuletame meelde, et $i = \sqrt{-1}$ ja $i^2 = -1$. Kompleksarvu ruutu loetakse kui «summa ruutu» kogu aeg võrdust $i^2 = -1$ silmas pidades.

Näiteks

a) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$,
b) $(2 + 5i)^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i$.

Iga kompleksarvu $a + bi$ ruut on alati kompleksarv kujuga $x + yi$. Arvud x, y ja $a^2 + b^2$ on seejuures alati Püthagorase arvud.

Nii näiteks äsjatoodud näite a) puhul

$$x = 5, \quad y = 12,$$
$$a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$$

kusjuures

$$5^2 + 12^2 = 13^2;$$

Näite b) puhul aga saame

$$x = -21, \quad y = 20,$$
$$a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29,$$

kusjuures

$$21^2 + 20^2 = 29^2.$$

Oletame, et me soovime tuletada Püthagorase arvude kolmikut arvudest 1 ja 4. Selleks koostame kompleksarvu $1 + 4i$ (loomulikult sobib ka arv $4 + i$) ja tõstame ta ruutu:

$$(1 + 4i)^2 = -15 + 8i.$$

Viimasest võrdusest saamegi

$$15^2 + 8^2 = 17^2 \quad (17 = 1^2 + 4^2).$$

Nagu näete, on see võte üsna kergesti meeldejääv.

Kui neid arvutusi teostada üldkujul, siis me saame hästituntud valemid Püthagorase arvude x, y ja z valimiseks:

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Siit

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2,$$

kus a ja b on suvalised täisarvud.

Huvitava täiendusena märgime, et iga kompleksarvu kuup viib meid analoogilisel viisil kuupvõrrandi

$$x^2 + y^2 = z^3$$

lahendini.

Olgu näiteks

$$a + bi = 1 + 2i.$$

Tõstame selle arvu kuupi:

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot 4i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i$$

(kuna $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$);

$$(1 + 2i)^3 = -11 - 2i.$$

Siit saame:

$$x = 11,\ y = 2,\ z = 1^2 + 2^2 = 5.$$

Tõepoolest,

$$11^2 + 2^2 = 5^3.$$

Toome veel ühe näite:

$$(5 + 3i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3 =$$
$$= -10 + 198i.$$

Järelikult

$$10^2 + 198^2 = 34^3.$$

Täpselt sama võttega te võite leida suvalise hulga täisarvulisi lahendeid võrrandile

$$x^2 + y^2 = z^n$$

suvalise täisarvulise astendaja n korral.

Leidke näiteks mõni arvude kolmik x, y ja z, mis rahuldaks võrrandit

$$x^2 + y^2 = z^4.$$

XV PEATÜKK

GEOMEETRIA IGAPÄEVASES TÖÖS

367. Külvamise geomeetria

Mõned aastad tagasi hakkasid Ukraina NSV kolhoosnikud-novaatorid kasutama uut teraviljakultuuride külvimeetodit. Hariliku reaskülvi asemel hakkasid nad kasutama nn. ristkülvi ja viimasel ajal isegi diagonaalristkülvi.

Milles seisneb siis ristkülvimeetodi olemus? Kui kogu põllul on lõpetatud külvieelne pinnase töötlemine, siis suunatakse reaskülvajad algul piki põldu ja külvatakse pool kogu seemnest, mis selle põllu jaoks on ette nähtud (joon. 240, *a*). Ülejäänud pool seemnest külvatakse samale põllule eelneva külviga ristsuunaliselt (joon. 240, *b*).

Kolhoosides, kus kasutati ristkülvi, oli talinisu saak hektarilt 10—12 tsentnerit suurem kui põldudelt, kus kasutati harilikku külvi. *

Kui pinnast töödelda joonisel 240, *a* toodud skeemi kohaselt, siis saab ristkülvi teostada teise külviagregaadi abil koos pikikülviga alles pärast kogu põllu külviks ettevalmistamist (joon. 240, *b*).

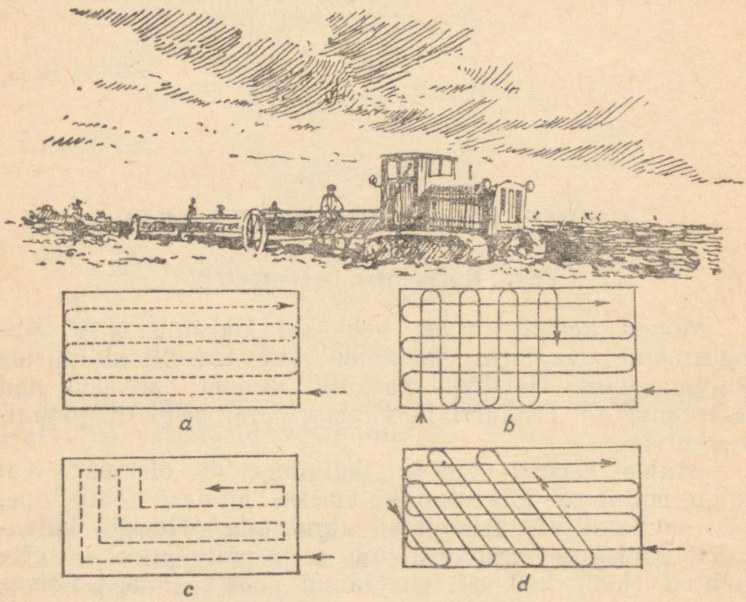
Taibukus aitas ületada ka selle raskuse. Kultivaatorid, mis valmistasid pinnast külviks ette, suunati joonisel 240, *c* punktiirjoonega märgitud marsruudi kohaselt.

---

* Siin esitatud materjalid on saadud põllumajandusteaduste kandidaadi P. Prisjažnjuki artiklist, mis ilmus 15. augustil 1951 ajalehes «Київська правда».

Selline omapärane põllu pikuti ja risti kündmine võimaldas vahetult kultivaatori järel tööle panna teineteisega ristsuunaliselt liikuvad külvimasinad.

Suur võit külviaja lühendamises kattis väikese kahju, mis tekkis niisuguse kündmisviisiga (joon. 240, *c*): kulti-



Joon. 240. Kahe külvimeetodi skeem.

vaatori töölõikude järkjärgulise lühenemise tõttu jäi töö lõpul üle väike neljanurgeline põllutükk, mida oli raske masinatega künda. Peale selle tuli kultivaatoreid ümber pöörata otse põllul, mille tagajärjel pööramiskohad jäid halvasti küntuks.

Põllumajanduse eesrindlased ei võinud aga niisuguste puudustega leppida.

Kuidas seda kitsaskohta kõrvaldada ja siiski samal ajal säilitada põllu kahes suunas kündmise ja külvamise eeliseid?

Selle praktiliselt tähtsa ülesande seni parimaks lahenduseks on üleminek diagonaal-ristkülvi meetodile.

Diagonaal-ristkülvi meetodi puhul pannakse põldu hariv kultivaator tööle ainult ühes suunas, näiteks piki

põldu (joon. 240, *a*.). Tema järel samas suunas liigub ka esimene külvimasin. Niipea, kui haritud põllusiil on küllalt lai (järelikult tükk aega enne kogu põllu harimise lõpetamist), pannakse tööle ka teine külvimasin, kuid mitte kultivaatori liikumissuunaga risti, vaid «diagonaalselt» (joon. 240, *d*).

Seemnevili kallatakse külvimasinasse «käigu pealt» pöörete ajal.

Kõrgete saakide meistrid ühendavad seda muudetud külvigeomeetriat taimede parima tiheduse saavutamiseks vajaliku terade hulga normi arvutamisega.

See seisneb järgnevas:

1) Leitakse 1000 tera kaal grammides (olgu see näiteks 46 grammi).

2) Leitakse terade idanemisprotsent (olgu see näiteks 98 protsenti).

3) Leitakse seemnete puhtuse protsent (olgu see näiteks 96 protsenti).

4) Arvutatakse seemnete majandusliku väärtuse koefitsient (protsentides) kui idanemisprotsendi ja puhtuse protsendi korrutise sajandik (meie näite korral on seemnete majandusliku väärtuse koefitsient $\frac{98 \cdot 96}{100} \approx 94\%$).

5) Tehakse kindlaks külvikoefitsient, s. t. arv, mis näitab taimede parima tiheduse saamiseks vajalikku hulka miljonites seemnetes hektari kohta (näiteks hektarile 4 100 000 seemne külvamise korral on külvikoefitsient 4,1).

6) Tuhande tera kaal grammides korrutatakse külvikoefitsiendiga. Saadud tulemus moodustab nii mitu protsenti külvinormist (kilogrammides), nagu seda on seemnete majandusliku väärtuse koefitsient.

Kaalugu näiteks 1000 tera 46 grammi, olgu külvikoefitsient 4,1 ja seemnete majandusliku väärtuse koefitsient 94%. Siis $46 \cdot 4{,}1 = 188{,}6$ kg on 94% külvinormist. Järelikult hektari külvinormiks on

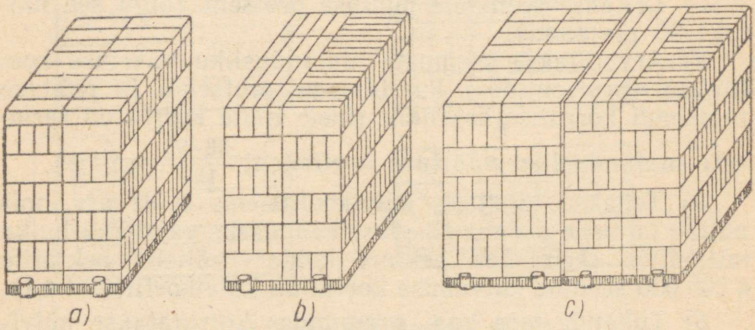
$$\frac{188{,}6 \cdot 100}{94} \approx 200 \text{ kg}.$$

Järelikult hektari kohta tuleva seemnete külvinormi (kilogrammides) leidmiseks tuleb tuhande tera kaal (kilogrammides) korrutada külvikoefitsiendiga, veel kord korrutada sajaga ja jagada seemnete majandusliku väärtuse koefitsiendiga.

368. Telliste veo ratsionaliseerimine

Väga paljude aastate vältel kasutati telliste tehasest ehitusele toimetamiseks väga vaevarikast ja kivide «tervisele» kahjulikku vedamisviisi. Tehases pandi tellised autokasti, ehitusel laoti maha, seejärel laoti töökohale toimetamiseks jälle väikestesse hunnikutesse, sealt viidi müürsepa juurde, kus tellised uuesti maha laoti. Sellise retke tagajärjel oli tellisel raske terveks jääda.

Üks Stalini preemia laureaadi müürsepp I. P. Širkovi ettepanek seisis selles, et tehases laotakse tellised otsekohe spetsiaalsetesse kastidesse — «konteineritesse», mida võiks ilma korduvate ümberladumisteta viia kohe müürsepa töökohale. Kuigi see meetod leidis üldist tunnustust ja heakskiitu, ei jäänud Ivan Pigassovitš Širkov



Joon. 241. I. P. Širkovi poolt soovitatud telliste ladumisviis nende transporteerimiseks.

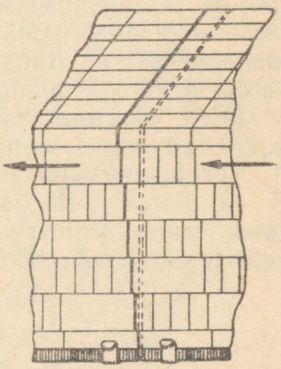
siiski päris rahule. Meetod oli küll suurepärane, kuid nõudis suurt konteinerite tagavara ja pealegi olid need veel küllalt kallid.

Ivan Pigassovitš töötas 1954. a. alguseks välja veel täiuslikuma telliste vedamise süsteemi, mis vähendas veokulusid kümneid kordi. Kalli konteineri asemel ta soovitas kasutada lihtsat ja odavat aluslauda, millele tellised paigutatakse plokkidena nii, nagu on näidatud joonisel 241, *a* ja *b*. Aluslauad koos nendele paigutatud tellistega kinnistatakse autokasti sisemiste liikuvate laudade abil. Kui auto jõuab ehitusplatsile, siis iga telliste plokk kaetakse konksudega varustatud spet-

siaalse kattega. Seejärel tõstetakse telliste plokid kraanaga otse töökohale.

Telliste aluslauale paigutamiseks kasutati alguses ainult üht joonisel 241, *a* ja *b* kujutatud kahest ladumisviisist.

Nüüd soovitab Ivan Pigassovitš kasutada kindlasti mõlemat kivide aluslaudadele ladumise viisi ja vedamisel paigutada aluslauad niiviisi, et erinevate telliste ladumisviisidega aluslauad asetseksid kõrvuti (joon. 241, *c*).



Joon. 242. «Difusioon».

Milline siis on joonisel 241, *c* toodud aluslaudade autokasti paigutamise viisi mõte? Miks on selline plokkide paigutamise viis otstarbekam kui esialgne, kus kasutati ainult üht ladumisviisi?

Kui algul olid tellised laotud aluslaudadele ühesuguselt, siis vedamisel see plokkide esialgne kuju paratamatult muutus. Auto ebaühtlase liikumise tõttu toimus kivide nihkumine sõidu suunas (joon. 242). Äärmised tellised nihkusid osaliselt naaberploki sisse, mis tekitas auto tühjendamisel lisaraskusi ja ebamugavusi.

Kui aga kahel kõrvutisel aluslaual olid tellised laotud erinevalt (joonis 241, *c*), siis oli telliste «difusioon» võimatu, sest alates teisest kihist olid erinevate plokkide telliste alumised tahud erineval kõrgusel.

369. Töölised-geomeetrid

Kes on märkijad. On teil aimu ühest huvitavast elukutsest tehases — märkija elukutsest?

Kes on märkija, kas tööline või insener?

Ta on samal ajal nii tööline kui ka insener, veel rohkem — ta on korraga nii geomeeter, joonestaja, konstruktor kui ka ... kunstnik.

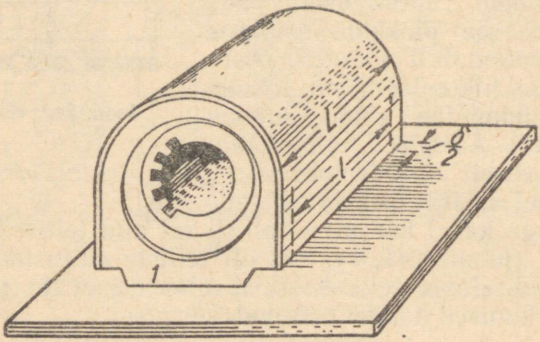
Märkija töötab enamasti nn. märkimislaua juures. Ta kasutab tööriistu, mis on sageli ta enda loodud. Märkija võib parandada konstruktorit ja anda nõu tehnoloogile; ta «loeb» jooniseid ja realiseerib neid mitte paberil või klassitahvlil, vaid vahetult esemel. Metallist

või terasest detailidel on see palju kordi raskem ja läheneb kunstile.

Märkija kannab toordetailile jooned, mille järgi seda detaili töötlevad treialid, puurijad, freesijad jt. Nad kõrvaldavad ülearuse metalli ja annavad esemele selle kuju, mille kontuurid fikseeris märgistaja. Märkija töö on väga vastutusrikas, tema tööd harilikult keegi ei kontrolli. Kui ta eksib märkimisel, siis kordab viga ka tööline ja tulemuseks on praak. Märkija peab ise välja nuputama, kuidas märkida kiiresti ja täpselt, millest on otstarbekas alustada, kuidas valmistada seadist või šablooni töö kiirendamiseks ja lihtsustamiseks.

Mida paremini märkija tunneb matemaatikat, seda suuremad on ta loomingulised saavutused.

Turbogeneraatori staatori märkimisest. Leningradi S. M. Kirovi nimelises tehases «Elektrosila» valmistatakse suure võimsusega tohutult suuri turbogeneraatoreid (elektrivoolu tekitajaid).



Joon. 243. Valatud staator.

Turbogeneraatori välimine liikumatu osa (staator) on 5 meetrit pikk ja kaalub 12—20 tonni.

Enne töötlemist on staatori toorvalu (joon. 243) pikkus (L) suurem kui tal peaks olema joonise kohaselt (l).

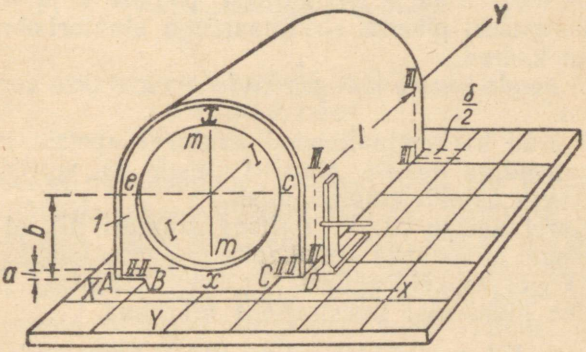
See ülearune pikkuste vahe $\delta = L - l$ kõrvaldatakse märkija näpunäidete kohaselt staatori esi- ja tagaseina edasisel töötlemisel freespingil.

Staatori külgpinnal paistvad punktiirjooned (joon. 243) näitavadki, kui palju tuleb ülearust metalli kõrvaldada.

Märkija ülesandeks on nende joonte tõmbamine staatori pinnale. Kuidas seda teha?

Näib, et asi on lihtne: tuleb vaid staator asetada märkimislauale ning märkida korpuse ühele küljele kummassegi otsa pool ülearust pikkust $\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Saadud konstruktiivne (s. o. joonisele vastav) pikkus l kantakse varbsirkli abil korpuse teisele küljele ja tehakse vastavad märgid. Harilikult nii ka toimiti.

Selle märkimisviisi juures oli alati garanteeritud otste pralleelsus pärast freesimist, kuid kaugeltki mitte alati ei saavutatud otste ristumist staatori teljega. See tähendab, et kui asetada staator pärast töötlemist ühele



Joon. 244. Staatori märgistamine.

otsale püsti, siis ei saa me püstsilindrit, nagu see peaks olema, vaid saame kaldsilindri. Tekkis praak.

Tehase märkija tootmisnovaator Mihhail Pudovitš Boitsov muutis staatori märkimisviisi nii, et otste teljega mitteristumisest tingitud praak kadus täielikult. Staatori märkimisele asudes tõmbas ta märkimislauale kaks ristuvat telge XX ja YY ning paigutas staatori lauale nii, et staatori ots (I) ühtis teljega XX ja telg YY oli paralleelne staatori teljega $I-I$ (joon. 244).

Loe abil kontrollides ja vajaduse korral kiile alla pannes andis ta staatorile niisuguse asendi, mille korral nii telg $I-I$ kui ka tappide AB ja CD tasand olid paralleelsed märkimislaua tasandiga.

Nüüd peab märkija staatori otsale kandma avause

horisontaal- ja vertikaaldiameetrid ehk, nagu neid nimetatakse, horisontaalse ja vertikaalse tsentraaltelje.

Selleks ta kannab töötlemata avause tsentrist alla poole pikkuse $b = \frac{d}{2} + a$, kus d on tema poolt mõõdetud töötlemata avause diameeter, a aga on kaugus avause madalamast punktist tappide tasandini, nii nagu see peab olema valmis staatoril. Ühtlasi kannab ta staatorile tappide töötlemiseks vajalikud märgid $II - II$. Nüüd ta kannab nendest märkidest alustades sama varbsirkli avaga b staatori otsale horisontaalse tsentraaltelje ce, kus c ja e tähistavad punkte, mis asuvad horisontaalteljel staatori välispinnast võrdsetel kaugustel.

Punktidest c ja e tõmmatakse poolest c ja e vahelisest kaugusest pikema sirklihaardega staatori otsale (I) lõikuvad kaared.

Läbi nende kaarte lõikepunktide tõmmatakse vertikaaltelg mm.

Märgitud horisontaaljooned kantakse spetsiaalse ülekandevahendiga teisele staatori otsale ja vertikaaltelg tõmmatakse äsjakirjeldatud viisil.

Seejärel asetab M. P. Boitsov staatori nii, et mõlemale otsale tõmmatud vertikaalteljed mm lõikuksid teljega YY või asuksid sellest võrdsetel kaugustel ja hakkab alles nüüd otsi freesimiseks märkima.

Teljelt XX ta mõõdab pikkuse $\frac{\delta}{2}$ (poole ülearusest pikkusest ja kannab nurklauaga staatori külgpinnale märkjoone $III - III$. Sellelt märkjoonelt mõõdab ta ristsuunas staatori konstruktiivpikkuse l ja tõmbab teise märkjoone $III - III$.

Lihtsatest geomeetrilistest kaalutlustest on kohe ilmne, et selline märkimisviis garanteerib staatori otste vastastikuse paralleelsuse ja staatori teljega ristumise.

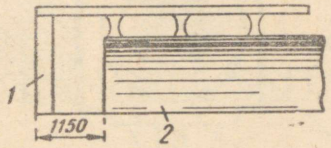
M. P. Boitsovi matemaatiline taibukus kaotas lõplikult ühe peamisi praagi põhjusi niisuguse kalli toote juures, nagu seda on 20-tonnine turbogeneraatori staator.

Rohkem kui nelikümmend aastat tehase «Elektrosila» märkimislaua juures loominguliselt töötanud M. P. Boitsov on lahendanud veel palju teisi tähtsaid matemaatilisi ja tehnilisi ülesandeid.

Seadis staatori avause tsentri leidmiseks. Vaadake nüüd, milline näeb välja turbogeneraatori staatori

pikilõige (joon. 245). Staatori sees, tema otsast (*1*) 1150 mm kaugusel asub niinimetatud aktiivse raua (*2*) avaus, kusjuures selle avause tsenter ei tarvitse asuda staatori otste tsentreid ühendaval teljel *I — I* (vt. joon. 244).

Geomeetriliselt te võite endale ette kujutada kaht silindrit, kusjuures väiksema diameetriga silinder asub suurema sees, kuid nende silindrite teljed päriselt ei ühti.



Joon. 245. Turbogeneraatori staatori pikilõige.

Ülesanne on niisugune. Staatori otsal (*1*) (joon. 243) tuleb märkida avaused sisemiste ja välimiste kilpide kinnitamiseks. Selle ülesande raskus seisneb järgnevas: peale kilpide kinnitamist staatori otstele peavad nende kilpide tsentrid asuma mitte teljel *I — I*, vaid aktiivse raua avauste tsentreid ühendaval teljel (pidage meeles, et need 2 telge ei tarvitse ühtida).

Jällegi geomeetrilist analoogiat tarvitades võime öelda: kilpide tsentrid peavad asuma mitte välimise, vaid sisemise silindri teljel.

Ülesanne taandub tegelikult sellele, et otsa (*1*) välispinnale tuleb konstrueerida ringjoon, mille tsenter asuks sisemiste avauste telje ja otsa tasapinna kujutletavas lõikepunktis.

Boitsov lahendas ka selle geomeetrilise ülesande teravmeelselt ja lihtsalt.

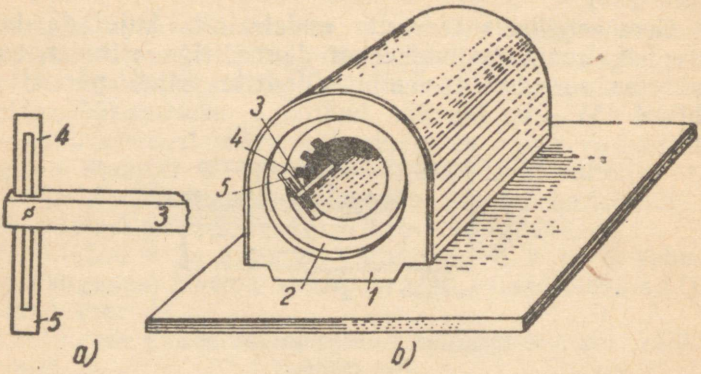
Mida teeksite sel juhul teie?

Märgime veel lisaks, et

1) sisemise avause tsenter on ligipääsmatu selleks, et sinna panna sirkli haara;

2) te näete joonisel 243 sisemise avause ringjoonel asuvaid nukke. Need on sooned, mis asuvad piki kogu seda ringjoont teineteisest võrdsetel kaugustel. Eeldame konkreetsuse mõttes, et neid sooni on 40.

Boitsovi lahendus. Mihhail Pudovitš konstrueeris ja valmistas reissini-tüüpi lihtsa seadise (joon. 246, *a*). Varda (*3*) ta asetab soonde nii nagu on näidatud joonisel 246, *b* ja ristsoone abil vardaga ühendatud joon-



Joon. 246. Boitsovi seadis.

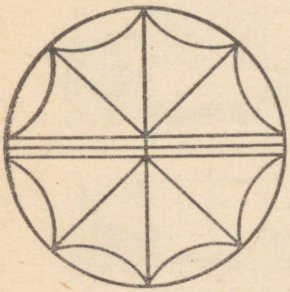
laua (*4*) abil ta teeb staatori otsale märgi. Mihhail Pudovitš märkas, et soonte arv jagub alati neljaga. Järelikult varrast veerandi soonte arvu järel soontesse paigutades ja iga kord staatori otsale punkte märkides ta saab otsal 2 paari diametraalselt vastastikku asuvaid punkte. Nüüd võib otsaavasse asetada puulati ja märkida sellele leitud punktide paare ühendavate sirgete lõikepunkti. See punkt asub konstruktsiooni põhjal sisemise avause teljel ning temasse võib asetada ühe sirklihaara ja teise haaraga võib tõmmata staatori otsale antud raadiusega ringjoone, mida mööda võib seejärel märkida vajaliku hulga auke kilpide kinnitamiseks.

LAHENDUSED JA VASTUSED

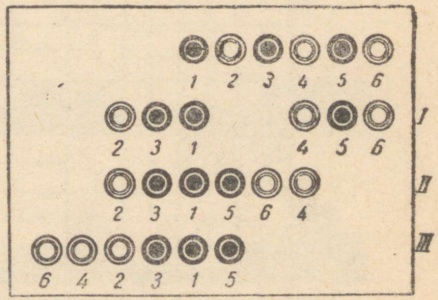
I peatüki juurde

1. Tuleb pöörata tähelepanu veduri korstnast tõusvale suitsule. Kui rong seisaks, siis veduri suits kalduks sinna poole, kuhu puhub tuul. Kui aga rong liiguks edasi tuulevaikuses, siis veduri suits suunduks tahapoole. Nagu jooniselt 1 nähtub (vt. lk. 10) tõuseb liikuva veduri suits otse üles, järelikult on rongil tuule kiirusega võrdne kiirus, s. t. 7 m sekundis ehk umbes 25 km tunnis.

2. Lahendus on toodud joonisel 247.



Joon. 247.



Joon. 248.

3. Nummerdame kabenupud vasakult paremale, nii nagu on näidatud joonisel 248. Kui vaba ruum on nuppudest vasakul, siis tõstame nupud nr. 2 ja nr. 3 vasakule rea algusse, nii et nupp nr. 3 oleks nr. 1 kõrval (vt. joonis 248 I variant). Vabanenud kohale tõstame nupud nr. 5 ja nr. 6 (II variant). Lõpuks viime nupud nr. 6 ja nr. 4 vasakule nupu nr. 2 ette (III variant).

Lahendage see ülesanne ka vastupidises suunas! Toimetage kabenupud lõppasendist 3 käiguga algasendisse.

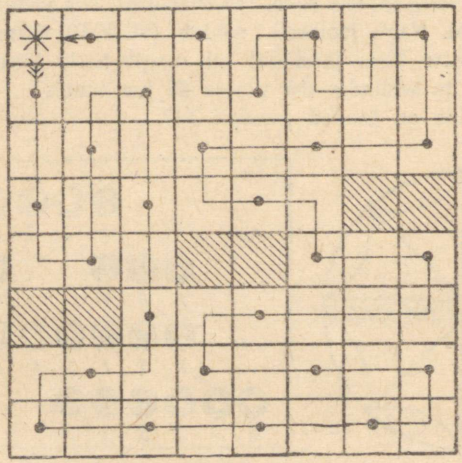
Nüüd on see üsna lihtne!

4. Lahenduse skeem:

Kuhi	Esialgne jaotus	1. käik	2. käik	3. käik
Esimene	11	11−7=4	4	4+4=8
Teine	7	7+7=14	14−6=8	8
Kolmas	6	6	6+6=12	12−4=8

5. Kolmkümmend viis kolmnurka. Nüüd aga loendage iseseisvalt, mitu kõikvõimalikku nelinurka on joonisel 4 (lk. 12) toodud kujundis.

6. Üks võimalikest teedest on näidatud noolega joonisel 249.



Joon. 249.

7. Neljale tüdrukule tuleb anda igaühele üks õun ja viiendale tüdrukule õun koos korviga.

8. Neli kassi.

9. Pliiatsite algasendis on kollane pliiats määritud ühe sentimeetri pikkuselt. Sinise pliiatsi allapoole liikumisel määrdub viimase pikkusest teine sentimeeter. Järgmisel ülespoole liikumisel sinise pliiatsi teine sentimeeter määrib kollase pliiatsi teise sentimeetri.

Seega iga pliiatsi üles-alla liikumise paar määrib kollase pliiatsi ühe sentimeetri pikkuselt. Kümme liikumiste paari määrivad seega pliiatsi kümne sentimeetri pikkuselt. Kuna algul oli määritud üks

sentimeeter pliiatsist, siis pärast kümmet liigutust on kollane pliiats (samuti ka sinine) määritud 11 cm pikkuselt.

*

Leonid Mihhailovitš märkas oma säärikutele vaadates, et nad on üleni poriga määritud just nendest kohtadest, kust saapad käigul teineteise vastu puutuvad.

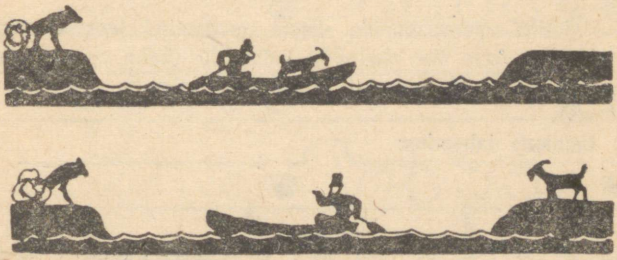
«Vaat, kus lugu,» mõtles Leonid Mihhailovitš, «sügavas poris ma ei käinud, aga siiski olen põlvini porine.»

Nüüd on meil selle «loo» põhjus selge.

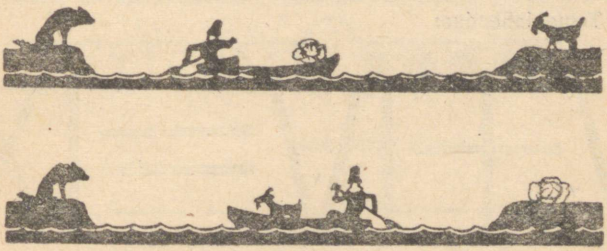
10. Poisid sõitsid üle jõe. Üks neist jäi kaldale, teine tõi paadi sõdurite juurde ja ronis ise paadist välja. Paati istus nüüd üks sõdur ja sõitis teisele kaldale. Teisel kaldal olev poiss tõi paadi sõdurite juurde tagasi, viis oma sõbra teisele kaldale ja sõitis siis uuesti sõdurite juurde tagasi, nüüd istus paati teine sõdur ja sõitis üle jõe...

Nii jõudis pärast paadi iga kaht ülesõitu üks sõdur üle jõe. Niiviisi sõideti seni, kuni kõik sõdurid olid üle jõe veetud.

11. Et hunt kapsast ei söö, siis tuleb ülevedamist alustada kitsest, sest hundi ja kapsa võib julgesti kaldale järelevalveta jätta.



Olles kitse üle jõe viinud, sõidab mees tagasi, võtab paati kapsapea ja sõuab jälle üle jõe. Nüüd jätab ta kapsapea teisele kaldale, kuid võtab kitse paati ja toob ta esimesele kaldale tagasi.



Nüüd viib mees hundi üle jõe kapsapea juurde ja sõidab ise



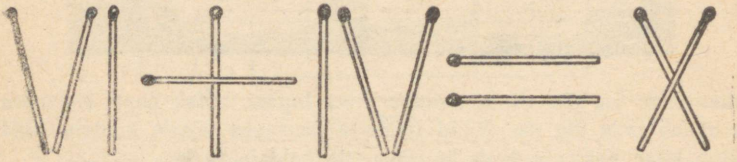
tagasi kitse tooma. Ta toob selle üle jõe ja kogu lugu ongi õnnelikult lõppenud.



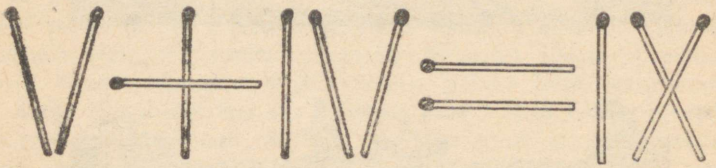
12. Vajalike operatsioonide skeem on toodud joonisel 250.

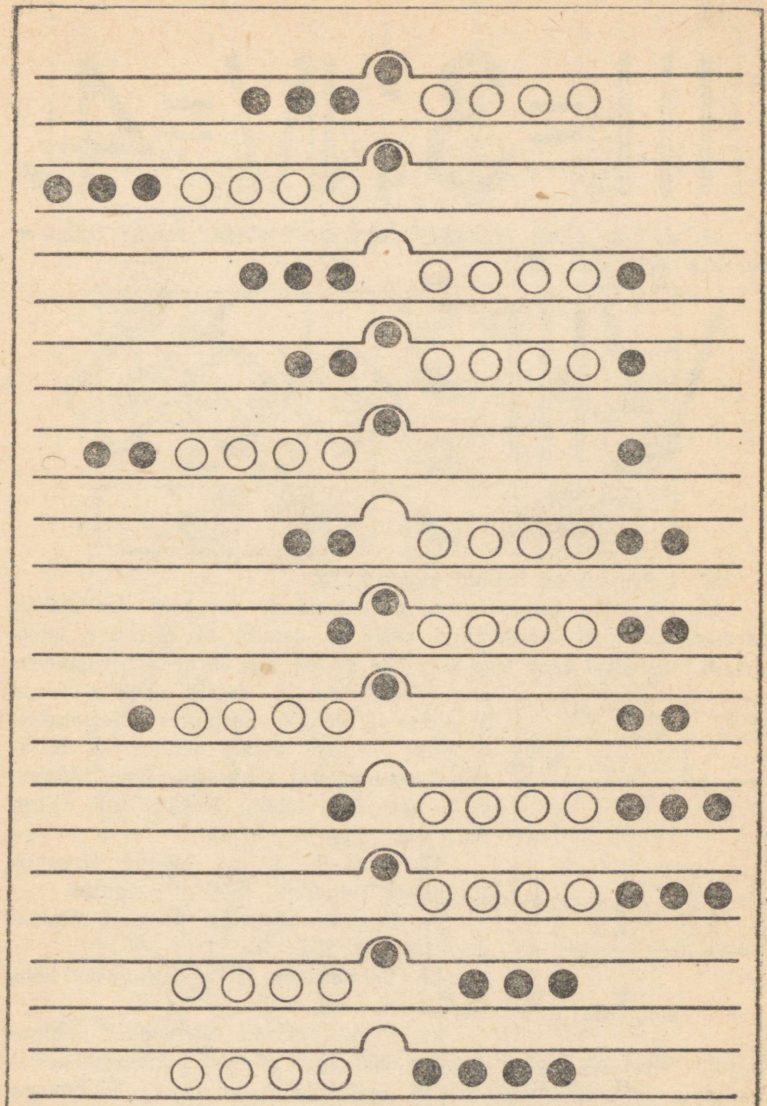
13. Meister avas ühe ahelatüki kolm lüli (kolm operatsiooni) ja ühendas nende abil ülejäänud 4 tükki (veel kolm operatsiooni, seega kokku kuus).

14. Esimene lahendus:



Teine lahendus:



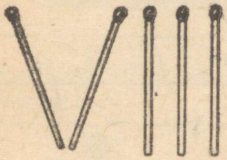


Joon 250

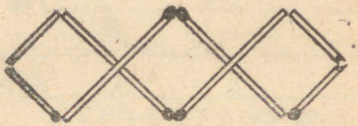
15.



16. Antud viiest tikust tuleb moodustada rooma number kaheksa (vt. joon. 251).



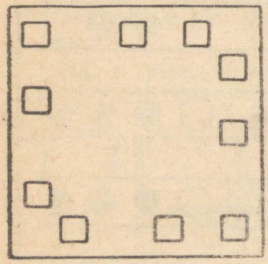
Joon. 251.



Joon. 252.

17. Lahendus on toodud joonisel 252.

18. Ülesande tingimustega pealiskaudselt tutvudes arutletakse harilikult nii: 36 toordetailist saab 36 detaili; et aga iga kuue detaili laastudest saab teha veel ühe detaili, siis 36 detaili laastudest saab teha veel 6 detaili, kokku seega $36 + 6 = 42$ detaili. Seejuures unustatakse, et kuue viimase detaili töötlemisel tekkivatest laastudest saab ka ühe tooriku, s. t. veel ühe detaili. Kokku saab seega mitte 42, vaid 43 detaili.



Joon. 253.

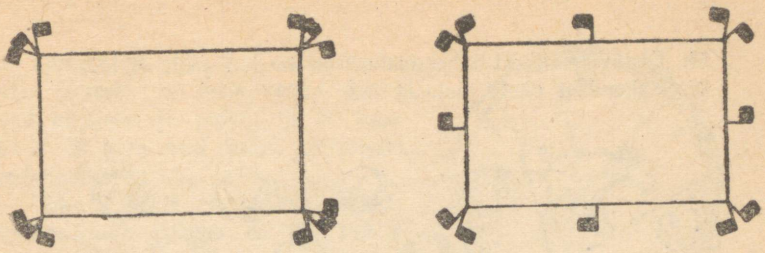
19. Joonisel 253 on toodud ülesande tingimusi rahuldav toolide paigutus.

20. Lippude paigutuse skeemid on toodud joonisel 254.

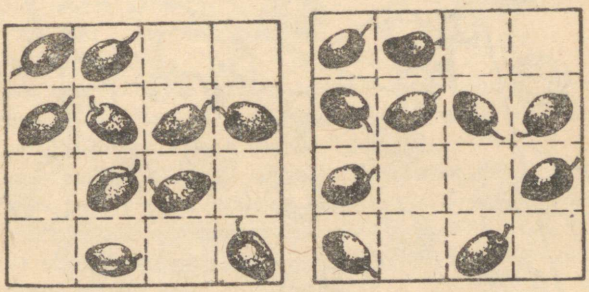
21. Võimalikest lahendustest on kaks toodud joonisel 255.

22. Mõned arvude võimalikest paigutamisviisidest on toodud joonisel 256. Igal esimese kolmnurga küljel asetsevate arvude summa on 17, igal teise ja kolmanda kolmnurga küljel asetsevate arvude summa on 20. Esitatud tingimustel võib arve ka teisiti paigutada.

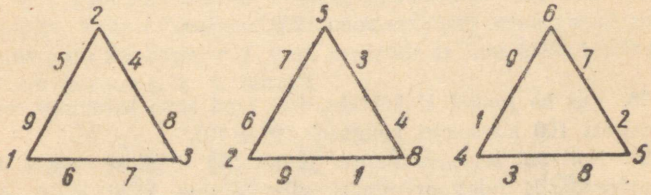
23. Kolmeteistkümne mängija puhul võib palli visata ka üle viie mängija (joon. 257). Kui palli visata üle kuue mängija (iga seitsmes püüab), siis selgub, et pall käib lihtsalt vastupidises suunas.



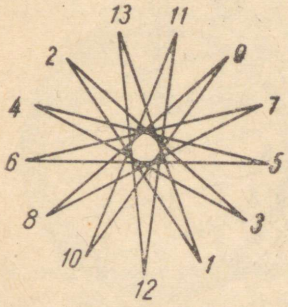
Joon. 254.



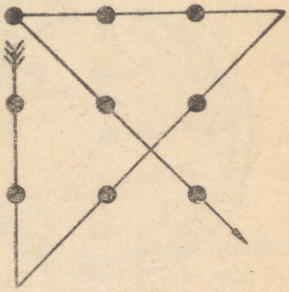
Joon. 255.



Joon. 256.

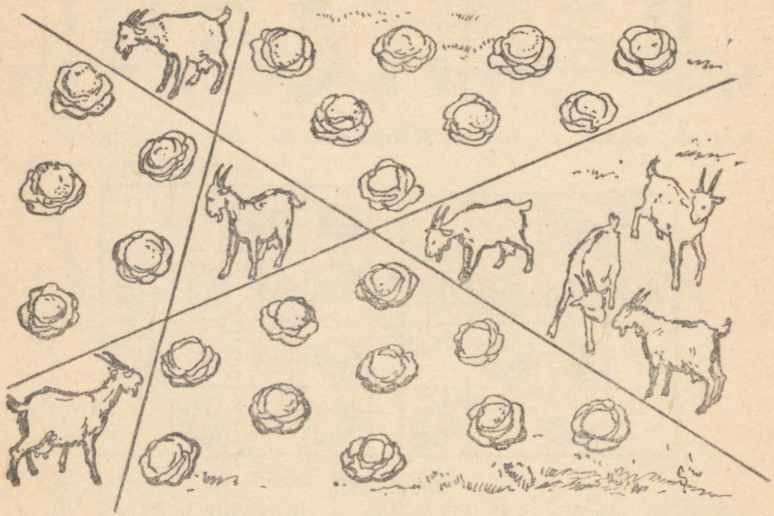


Joon. 257.



Joon. 258.

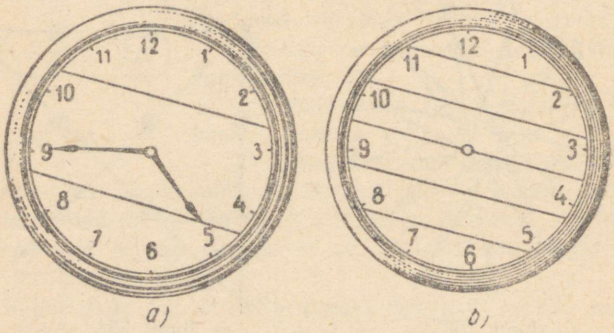
24. Üks võimalikest lahendustest on toodud joonisel 258.
25. Lahendust näete joonisel 259.



Joon. 259.

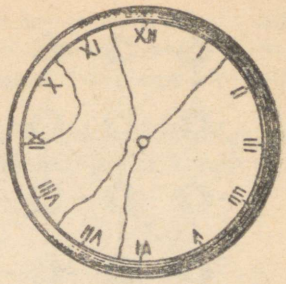
26. Kus ka rongid ei kohtuks, üks tund enne kohtumist on nad teineteisest 100 kilomeetri kaugusel $(60 + 40)$.

27. Kui on tegemist mõne füüsikalise nähtuse kohta käiva ülesandega, siis tuleb arvestada selle nähtuse kõiki külgi, muidu võib üsna kergesti sisse kukkuda. Nii on lugu ka siin. Ükski arvutus



Joon. 260.

ei anna õiget tulemust, kui me ei võta arvesse, et koos veega tõusevad ka laev ja redel, nii et tegelikult ei kata vesi iialgi kolmandat redelipulka.



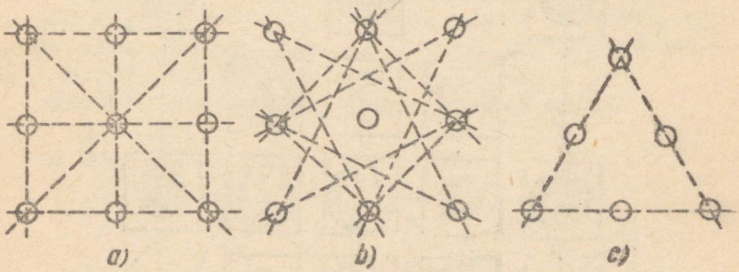
Joon. 261.

28. 1. Kõigi numbrilaual asetsevate arvude summa on 78. Tähendab, igal osal asuvate arvude summa peab olema seega $78 : 3 = 26$. Märgime, et $12 + 1 = 13$ ja $11 + 2 = 13$. Siit tulenebki joonisel 260, *a* toodud lahendus

2. Igas ribas olevate arvude summa peab olema $78 : 6 = 13$. Otsime numbrilaual üles sellised arvude paarid, mille summa on 13, ja me saamegi joonisel 260, *b* toodud lahenduse.

29. Arvudes IX, X ja XI on kolm kümnelist (X) kõrvuti. On selge, et kaks neist peavad kuuluma ühele osale. Seega jääb üle vaid kaks katsetamisvõimalust, ning pärast mõnd proovi te leiate kindlasti joonisel 261 toodud pragude asetuse. Igal numbrilaua tükil asetsevate arvude summa on 20.

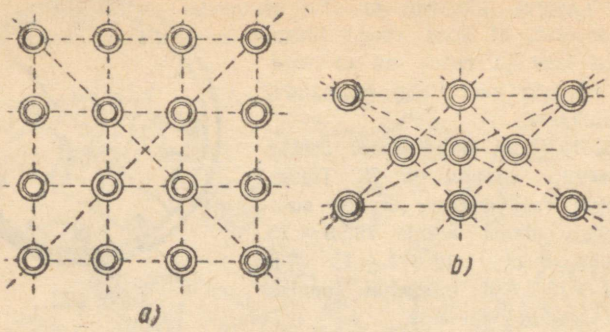
30. Pärast kellamehhanismi kontrollimist valis poiss küll õiged osutid, kuid pani nad valesti paigale: minutiosuti tunniosuti kohale ja vastupidi. Selle tulemusena hakkas minutiosuti numbrilaual ringlema tunniosuti kiirusega, s. t. väga aeglaselt ja tunniosuti omakorda minutiosuti kiirusega, s. t. kiiresti.



Joon. 262.

Esimesel korral jõudis poiss tellija juurde umbes 2 tundi ja 10 minutit pärast seda, kui ta oli kellaosutid paigale seadnud.

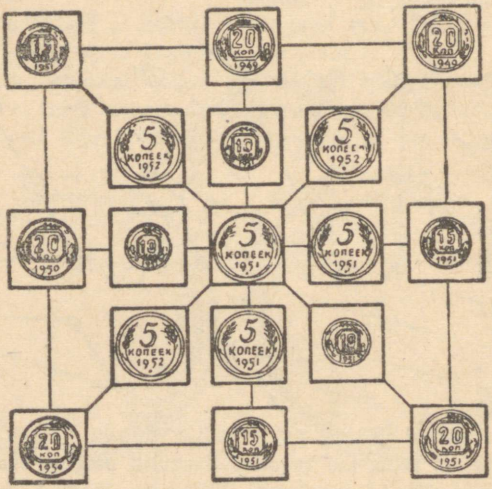
Suur osuti jõudis tunniosuti kiirusega liikudes kaheteistkümnelt kahele. Väike osuti, pööreldes minutiosuti kiirusega, tegi kaks



Joon. 263.

täistiiru ja liikus veel 10 minuti võrra edasi. Järelikult näitas kell õiget aega.

On päris lihtne arvutada, et järgmise väljakutse peale saabus poiss 13 tundi ja 5 minutit pärast seda, kui ta oli osutid paigale seadnud. Selle ajaga läbis suur osuti tunniosutina kolmteist tundi ja jõudis parajasti numbrile 1. Väike osuti tegi minutiosutina selle ajaga 13 täistiiru ja veel viis minutit, jõudes niiviisi numbrile 7. Seega näitas kell õiget aega ka teisel juhul.



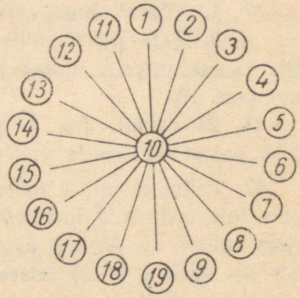
Joon. 264.

31. Kolme nööbiga ridu on 8 (vt. skeemi joonisel 262, *a*), kahe nööbiga ridu 12 (joon. 262, *b*) (ridu tähistavad punktiirjooned). Ülejäänud 6 nööpi saab paigutada kolme 3-nööbilisse ritta kolmnurga kujul (joon. 262, *c*).

32. Kuidas 16 kabenuppu neljakaupa kümnesse ritta paigutada, seda võib näha joonisel 263, *a*. Üheksa kabendi asetus kümnes reas on näidatud joonisel 263, *b*.

33. Müntide asetus on toodud joonisel 264.

34. Pidades silmas asjaolu, et $1 + 19 = 20$, $2 + 18 = 20$, $3 + 17 = 20$ jne., kirjutame iga sellise summa liidetavad vastakuti asetsevatesse ringidesse, keskmisse ringi aga paigutame arvu 10. Ülesande täielik lahendus on toodud joonisel 265.



Joon. 265.

35. 1. Sageli vastatakse, et autobussis sõitjad on Moskvast kaugemal kui jalgrattur, mis on aga vale, sest kohtumishetkel on kohtujad kohakuti ja järelikult ka Moskvast ühekaugusel.

2. Kilogramm metalli on alati kallim kui pool kilogrammi sama metalli.

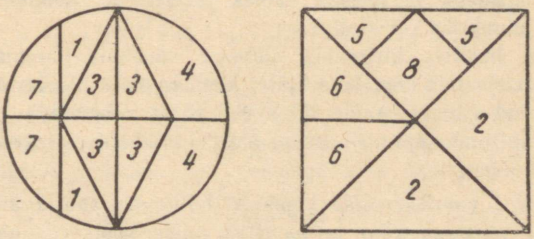
3. Sageli võime kohata järgmist ebaõiget mõttekäiku: 6 lööki vältas 30 sekundit, tähendab 12 löögile kulub 60 sekundit.

Kui kell lõi 6 lööki, siis oli löökide vahel 5 vahemikku, millest igaüks kestis $30 : 5 = 6$ sekundit. Esimese ja kaheteistkümnenda löögi vahel on aga 11 kuuesekundilist vahemikku.

Tähendab, kaheteistkümnele löögile kulub 66 sekundit.

4. Alati.

36. Lahendus on toodud joonisel 266.



Joon. 266.

37. Kaks rubla.

38. Esimesel pilgul näib ülesanne olevat võrdlemisi keeruline ja nõudvat üsna kõrgetasemelisi matemaatilisi teadmisi. Kui aga asjasse veidi süveneda, siis on päris selge, et kärbes lendas peatumatult täpselt 3 tundi, läbides järelikult 300 km.

39. 1961. aasta. Üks jääb paberitüki ümberpööramisel üheks, kuus muutub üheksaks ja üheksa kuueks.

40. 1. Tüdruk luges arvu tagurpidi: 86 asemel 98.

2. Paberitükid, millel on numbrid 8 ja 9, tuleb ära vahetada ja seejuures 9 ümber pöörata. Niiviisi saame kummaski tulbas summana 18.

41. 23 aastat. Isa ja poja vanusevahe on 23 aastat, et isa oleks pojast kaks korda vanem, peab poeg järelikult olema 23 aastane.

42. Esimesel pilgul näib, et kummagi tulba liitmisel ei saa tulla sama tulemust, kuid liidetavaid veidi lähemalt uurides näeme, et kui teises tulbas on üheksa ühte ($9 \cdot 1$), siis esimeses tulbas on vastavalt üks üheksa ($1 \cdot 9$) teises tulbas on seitse kolme ($7 \cdot 3$), esimeses tulbas aga kolm seitset ($3 \cdot 7$) jne.

Siit järeldub, et kummaski tulbas olevate arvude summa on võrdne. Veenduge selles ka otsese liitmise teel!

43. Esimeses ja viiendas reas on üheliste summa 10, kümneliste, sajaliste ja ülejäänud järkude summa on 9, järelikult on neis kahes reas olevate arvude summa 1 000 000.

Sama omadus on ka ülejäänud kolmel arvudepaaril: teisel ja kuuendal, kolmandal ja seitsmendal, neljandal ja kaheksandal.

Iga arvudepaari summa on 1 000 000. Tähendab kõigi kaheksa arvu summa on 4 000 000.

Teise triki lahendus. Te tõenäoliselt taipasite, et juurde kirjutatakse niisugune arv, mille kõik numbrid täiendavad ühe üleskirjutatud arvu, näiteks teise arvu, numbreid üheksani. Sel juhul tuleb summa viimane number esimese liidetava viimasest numbrist ühe võrra väiksem, summa ülejäänud numbrid aga ühtivad esimese liidetava omadega ja asuvad samas järjekorras, kusjuures summa esimeseks numbriks on alati 1.

Niisiis, hakates kirjutama summat vasakult paremale, pange kõigepealt kirja 1 ja korrake seejärel kõiki esimese liidetava numbreid, välja arvatud viimane, mida tuleb ühe võrra vähendada.

Enne kui oma sõpradele matemaatilisi trikke demonstreerida, treenige ise hoolega.

44. Olgu paarisarvulise kopikate hulgaga raha (näiteks kahekopikaline) paremas käes ja paarituarvulise kopikate hulgaga raha (näiteks kolmekopikaline) vasakus käes. Sel juhul kolmekordne

paarisarv jääb ikka paarisarvuks ja kahekordne paaritu arv on samuti paarisarv, paarisarvude summa aga on samuti paarisarv.

Olgu nüüd paarituarvulise kopikate hulgaga raha (näiteks kolmekopikaline) paremas käes ja paarisarvulise kopikate hulgaga raha (näiteks kahekopikaline) vasakus käes. Sel juhul kolmekordne paaritu arv on ikka paaritu arv, kahekordne paaritu arv on aga paarisarv. Nende summa on kindlasti paaritu arv.

Seda trikki võib mitmekesistada järgmiselt: te lubate paremas käes olevat kopikate hulka korrutada ükskõik missuguse paaritu arvuga, vasakus käes olevat kopikate hulka aga meelevaldse paarisarvuga.

45. Neli venda ja kolm õde.

46. $22+2+2+2$ ja $888+88+8+8+8$.

47. $100=111-11$, $100=5\cdot5\cdot5-5\cdot5$,

$$100=(5+5+5+5)\cdot5.$$

48.

1)	2)	3)	4)
100	111	100	111
000	003	330	333
+ 005	+ 000	+ 505	+ 500
007	007	077	077
999	990	099	090
1111	1111	1111	1111

49. Kui meil on tarvis mõnda kasti laduda hulk erineva suurusega esemeid, siis me alustame ikka suurematest esemetest. Ka antud summa koostamisel on parem alustada võimalikult suurematest liidetavatest. Vastavalt ülesande tingimustele peavad liidetavateks olema paaritud arvud.

Arutleme nõnda.

Arvud 19, 17 ja 15 ei saa olla liidetavateks, sest siis ei jää ruumi üle seitsme liidetava jaoks. Kui võtta liidetavaks 13, siis 20 saamiseks on tarvilik ja piisav kolmeteistkümnele liita seitse ühte:

$$13+1+1+1+1+1+1+1=20.$$

Kui esimene liidetav on 11, siis teine liidetav ei või olla ei 9, 7 ega 5 (pole ruumi ülejäänud liidetavate jaoks). Katsetame kolmega: $11+3=14$. Kahekümnest jääb puudu 6 ja meil on vaja leida veel 6 liidetavat. Järelikult siit saamegi teise lahenduse:

$$11+3+1+1+1+1+1+1=20.$$

Võtame nüüd esimeseks liidetavaks arvu üheksa. Teiseks liide-

tavaks ei saa olla seitse ($9+7=16$; kuue liidetava jaoks jääb veel 4 ühelist). Proovime arvu 5. Saame $9+5=14$. Kuue liidetava jaoks jääb kuus ühelist. See on täiesti võimalik. Saame kolmanda lahenduse:

$$9+5+1+1+1+1+1+1=20.$$

Proovime nüüd teise liidetavana arvu 3. Saame $9+3=12$. Kuue liidetava jaoks jääb üle kaheksa ühelist. Liidame veel ühe kolme: $9+3+3=15$. Viie liidetava jaoks jääb viis ühelist. See annabki meile neljanda lahenduse:

$$9+3+3+1+1+1+1+1=20.$$

Nüüd peaks vist proovide süsteem selge olema. Jätkake mõttekäiku iseseisvalt, võttes algul esimeseks liidetavaks arvu 7 ja seejärel 5 ning 3. Kokku peab välja tulema 11 lahendust:

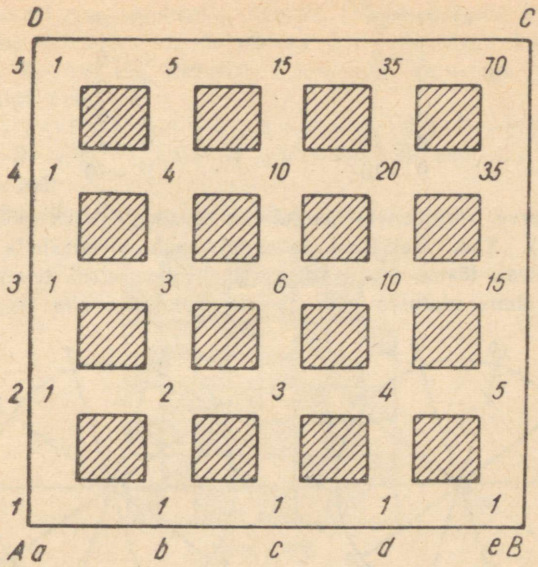
$$13+1+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$11+3+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$9+5+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$9+3+3+1+1+1+1+1=20,$$
$$7+7+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$7+5+3+1+1+1+1+1=20,$$
$$7+3+3+3+1+1+1+1=20,$$
$$5+5+5+1+1+1+1+1=20,$$
$$5+5+3+3+1+1+1+1=20,$$
$$5+3+3+3+3+1+1+1=20,$$
$$3+3+3+3+3+3+1+1=20.$$

Ülevalt kuues lahendus on ainus, mis koosneb neljast erineva suurusega liidetavast, teistes kõigis on ainult kaks või kolm erisugust liidetavat.

50. Kõiki marsruute, mis viivad *A*-st *C*-sse, on vahetult väga raske loendada — võib üsna kergesti segi minna. Seepärast tuleb alustada loendamist alguspunkti *A* läheduses asetsevate tänavaristmeteni viivatest marsruutidest (joon. 267).

On ilmne, et iga külgedel *AB* ja *AD* asuva tänavaristmeni viib vaid üks tee; tänavaristmeni *2b* viib kaks teed. Tänavaristmele *2c* võib esiteks jõuda punktist *2b*, s. t. samuti kahel marsruudil, ja teiseks ka punktist *1c*, s. t. veel ühel marsruudil. Järelikult viivad tänavaristmele *2c* kokku $2+1=3$ marsruuti (leidke nad!). Analoogiliselt arutledes jõuame järelduseni, et ka tänavaristmele *3b* viib kolm marsruuti.

Tänavaristmele *3c* viivad needsamad 3 marsruuti, mille kaudu võib jõuda tänavaristmele *3b*, ja need 3 marsruuti, mille kaudu



Joon. 267.

võib jõuda tänavaristmele $2c$, s. t. kokku 6 marsruuti. Seda mõttekäiku jätkates näeme, et mistahes tänavaristmeni viivate marsruutide hulk võrdub sellest tänavaristmest vasakul ja otse selle all asetsevate tänavaristmeteni viivate marsruutide summaga. Kui me näiteks leidsime, et punkti $3c$ viib 6 marsruuti, punkti $2d$ aga 4, siis punkti $3d$ viivate marsruutide hulk on 10 jne.

Niiviisi võib leida marsruutide arvu, mis viivad alguspunktist A ükskõik missuguse tänavaristmeni. Lõpp-punkti C võib seega jõuda 70 erinevat teed pidi.

(Marsruutide arv on C_8^4; üldiselt aga C^n_{m+n}, kus m on küljel AB olevate kvartalite hulk, n aga küljel BC olevate kvartalite hulk.)

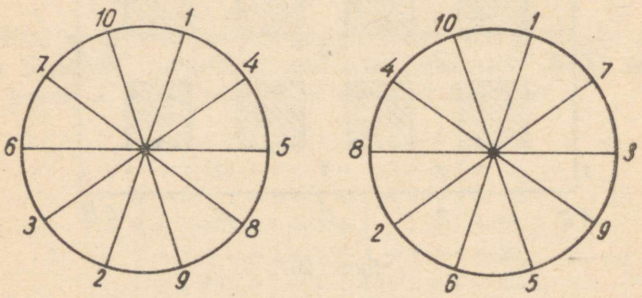
51. Kui mingi diameetri otstesse paigutada arvud A ja a, naaberdiameetri otstesse aga arvud B ja b, siis tingimuste kohaselt $A+B=a+b$. Siit $A-a=b-B$, s. t. vastakuti asetsevate arvude vahed peavad olema omavahel võrdsed.

Selles ongi võti ülesande kõigi lahenduste otsimiseks.

Nüüd on ilmne, et ülesande lahendamiseks tuleb täisarvudest 1 kuni 10 moodustada 5 samade vahedega arvudepaari. Lihtne proovimine näitab, et seda tingimust rahuldavad ainult kaks paaride rühma:

a) vahega 1	b) vahega 5
1 — 2	1 — 6
4 — 3	7 — 2
5 — 6	3 — 8
8 — 7	9 — 4
9 — 10	5 — 10

Neid arve ringjoonele paigutades saamegi kaks põhilahendit (joon. 268). Kõik ülejäänud lahendid saab moodustada nendest põhilahenditest, tõstes arvude paare ühelt diameetrilt teisele ümber, sest ühe rühma ulatuses võib arvude paiknevus olla meelevaldne.



Joon. 268.

Nii näiteks võib paari 1—2 kõrval väga hästi asetseda nii paar 4 — 3, kui ka 6 — 5, 8 — 7 või 10 — 9.

See annab neli erinevat lahendit. Igas tekkivas positsioonis jääb meile vabadus kolmandale diameetrile paigutada ükskõik milline ülejäänud kolmest paarist. See annab kokku $4 \times 3 = 12$ lahendit. Igas neist on veel kaks võimalust ülejäänud kahe paari paigutamiseks neljandale ja viiendale diameetrile. Kokku saame seega kummagi arvuderühma jaoks $12 \times 2 = 24$ lahendit.

Üldse on lahendeid 48. (Lahendite üldarv võrdub kahekordse variatsioonide arvuga neljast elemendist.)

52. Neljast arvust saab moodustada vaid ühe rühma:

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4.$$

Viiest arvust saab moodustada kolm rühma:

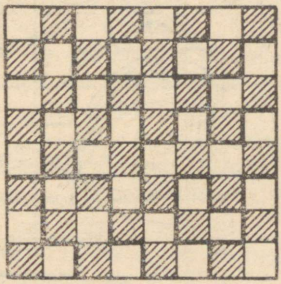
$$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5,$$
$$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3,$$
$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Taoliste rühmade moodustamise kuuest, seitsmest ja rohkemast

arvude hulgast jätame lugeja hooleks. Võtke näiteks kaks arvu 2 ja 6 ning täiendage nende summa $2+6$ ühtedega kuni nende korrutiseni $2 \times 6 = 12$, korrutist 2×6 aga korrutage omakorda vastava hulga ühtedega.

53. $9+8+7+65+4+3+2+1=99$ ehk $9+8+7+6+5+43+21=99$; $1+2+34+56+7=100$ ehk $1+23+4+5+67=100$.

54. Võimalik lahendus on toodud joonisel 269.



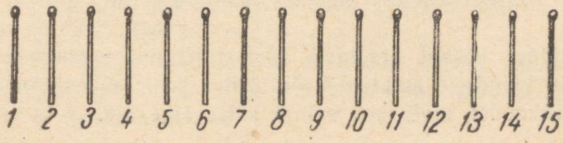
Joon. 269.

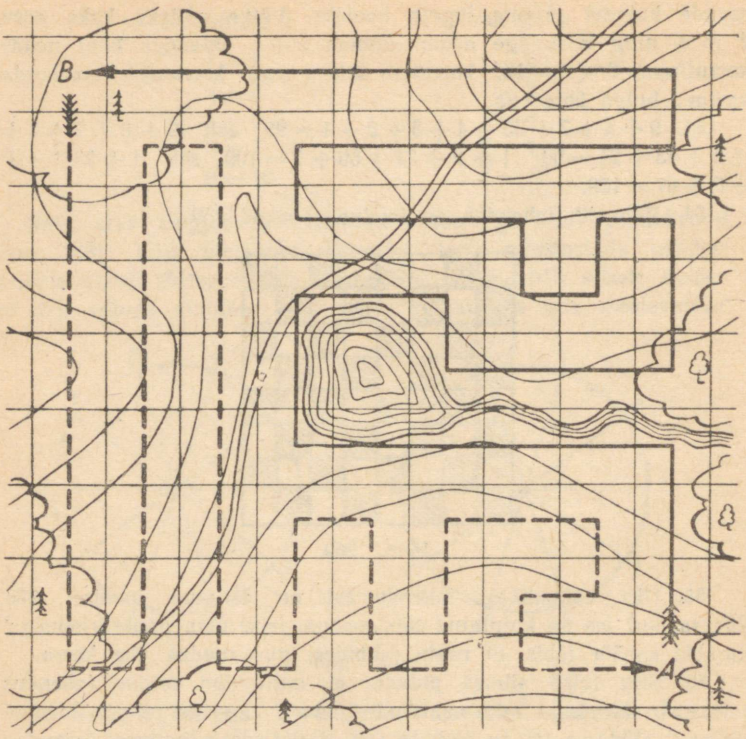
55. Üks võimalikest lahendustest on esitatud joonisel 270. Ühe sapööri tee on kujutatud täisjoonega, teise oma punktiirjoonega. Kumbki sapöör läbis 40 ruutu, viibides igas ruudus ühe korra.

56. Siin tuleb silmas pidada, et mitte iga erinev lahendus pole uus, ehk nagu matemaatikud ütlevad, ei erine tekstis toodust oluliselt. Oletame, et te leidsite sellise tikkude paigutuse (võrrelge lk. 38 joonisel 27 toodud lahendusega): $7 \to 10$, $4 \to 8$, $6 \to 2$, $5 \to 9$ ja $1 \to 3$. See lahendus ei ole «hoopis erinev», nagu ülesande tingimustes nõutakse, sest ta kordab täielikult ülesande tekstis toodud näitelahendust. Selles on kerge veenduda, kui te nummerdate tikud paremalt vasakule ümber.

Oluliselt uueks lahenduseks on aga näiteks järgmine: $5 \to 2$, $7 \to 10$, $3 \to 8$, $1 \to 4$, $9 \to 6$.

57. Et siin toodud skeemi tikkude ümberpaigutamiseks oleks kergem kasutada, kirjutage paberile üles 15 täisarvu ühest kuni viieteistkümneni ja paigutage iga arvu kohale üks tikk, nagu on näidatud sellel joonisel:





Joon. 270.

Paigutage tikud ümber niisuguses järjekorras: 5 → 1, 6 → 1, 9 → 3, 10 → 3, 8 → 14, 7 → 14, 4 → 2, 11 → 2, 13 → 15, 12 → 15.

Teine lahendus: 5 → 1, 6 → 1, 9 → 3, 10 → 3, 8 → 14, 4 → 13, 11 → 14, 15 → 13, 7 → 2, 12 → 2.

58. Lahenduse «konks» peitub selles, et ma taipasin kodust ära minnes seinakella käima panna ja vaadata, millal ma seinakella järgi väljusin ning millal ma hiljem koju tagasi jõudsin. Tähendab, seinakell näitas mulle, kui kaua ma kodust ära olin. Tuttava juurde jõudes ja sealt lahkudes ma jätsin meelde tema kella näidud. See andis mulle võimaluse kindlaks määrata tuttava juures veedetud aega.

Lahutades kodust äraoldud ajast tuttava juures veedetud aja, ma leidsin käimisele kulutatud aja. Liites poole sellest ajast tuttava juurest lahkumise ajale, ma saingi kätte õige aja.

59. $(1 + 2) : 3 = 1$,
$12 : 3 : 4 = 1$,
$[(1 + 2) \times 3 - 4] : 5 = 1$,
$(1 \times 2 + 3 - 4 + 5) : 6 = 1$,
$\{[(1 + 2) \times 3 - 4] : 5 + 6\} : 7 = 1$,
$[(1 + 2) : 3 \times 4 + 5 + 6 - 7] : 8 = 1$,
$(1 \times 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) : 9 = 1$.

60. Auto kilomeetrilugeja näitas 15 951. Kahe tunniga ei saanud kümnetuhandeliste arv muutuda. Järelikult uue sümmeetrilise arvu esimene ja viimane number on 1. Tuhandeliste hulk aga võis ja pidigi muutuma, sest auto läbis kahe tunniga kindlasti üle 49 kilomeetri. Et ta aga üle 1000 kilomeetri ei saanud läbida, siis on uues arvus tuhandelisi ja samuti ka kümnelisi 6.

Sadade hulk on ilmselt 0 või 1. Kilomeetrilugeja näitab seega kas 16 061 või 16 161.

Sadade hulk ei saa olla kaks, sest siis pidanuks auto kahe tunniga läbima $16\,261 - 15\,951 = 310$ kilomeetrit. Selline kiirus on aga omane vaid spordiautodele.

Kui kilomeetrilugeja näitas arvu 16 061, siis auto läbis kahe tunniga $16\,061 - 15\,951 = 110$ kilomeetrit ja sõitis järelikult kiirusega

$$110 : 2 = 55 \text{ km/t}.$$

Teisel juhul oli auto kiirus 105 km/t.

61. Ülesande lahendamiseks peab teadma, mitu aparaati monteeris brigadir. Selleks peab omakorda teadma, mitu aparaati monteeris igaüks brigaadi kümnest liikmest keskmiselt. Jaotades 9 noortöölise vahel brigadiri poolt lisaks monteeritud üheksa aparaati, leiame, et iga brigaadi liige monteeris keskmiselt $15 + 1 = 16$ aparaati. Siit järeldub, et brigadir valmistas $16 + 9 = 25$ aparaati ja kogu brigaad $(15 \times 9) + 25 = 160$ aparaati.

Kes tunnevad algebrat, võivad selle ülesande lahendada ühe tundmatuga võrrandi abil.

62. 30-kilomeetrilise tunnikiirusega sõitev auto läbib iga kilomeetri kahe minutiga, 20-kilomeetrilise tunnikiirusega sõites kulub igale kilomeetrile kolm minutit. Tähendab, 20-kilomeetrilise tunnikiirusega sõites kaotab auto igal kilomeetril ühe minuti. Ülesandes on öeldud, et kogu kaotus on kaks tundi ehk 120 minutit. Järelikult on kolhoosist linna 120 kilomeetrit.

Millise kiirusega tuleb sõita, et jõuda õigeks ajaks kohale? Tihti arvatakse, et vajalikuks kiiruseks on aritmeetiline keskmine 20 ja 30 km/t vahel, s. o.

$$\frac{20+30}{2} = 25 \text{ km/t},$$

see aga pole õige.

Kogu sõidule tuleb kulutada viis tundi $\left(\frac{120}{30}+1=5\right)$, järelikult, et kella üheteistkümneks linna jõuda, tuleb sõita kiirusega $\frac{120}{5} = 24$ km/t.

63. Esimese sõbratari arvestus oleks õige, kui me vaatleksime vastutulevate rongide liikumist *seisva* vaguni aknast, kuid meie vagun liigub linna poole sõitvale rongile vastu, järelikult kui meie rongi kohtumisest ühe vastassuunas sõitva rongiga kohtumiseni teise vastassuunalise rongiga on möödunud 5 minutit, siis see tähendab, et teine rong jõuab sellele kohale, kus me kohtusime esimesega, veel 5 minuti pärast ja et rongid liiguvad vastassuunas 10-minutiliste vahedega.

Seega saabub tunni jooksul linna mitte 12 rongi, vaid ainult 6.

64. Otsitakse arvude

1, 2, 3, 4, ..., 999 999 998, 999 999 999, 1 000 000 000

numbrite summat.

Selleks tuleb arvud rühmitada paaridena:

999 999 999 ja 0,
999 999 998 ja 1,
999 999 997 ja 2 jne.

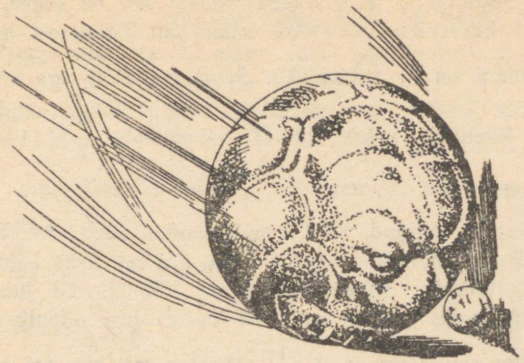
Taolisi paare on pool miljardit (500 000 000), iga paari numbrite summa on 81. Viimasel arvul (1 000 000 000) pole paarilist ja ta numbrite summa on 1.

Otsitav numbrite summa on seega $(500\,000\,000 \times 81) + 1 = 40\,500\,000\,001$.

65. Kui küllalt väike pall surub end ükskõik millises kohas seina ja põranda vahelisse nurka, siis ei saa suur malmkera teda puruks muljuda. Väikest palli võib mõnevõrra segada põranda äärelaud, sel juhul on tal kõige kindlam minna mööda toanurka.

Need, kes tunnevad geomeetriat, võivad välja arvutada, et juhul kui väikese palli diameeter on suure palli diameetrist umbes 5,83 korda (täpselt $3+2\sqrt{2}$ korda) väiksem, siis on tal seina vastu surutuna, nagu joonisel 271 näidatud, täielik julgeolek.

Jalgpalli ja lauatennise palli mõõtmed on vastavate mängude reeglitega unifitseeritud ja nende diameetrite suhte lihtne võrdlemine arvuga 5,83 näitab, et seina äärde peitu pugenud pallil pole midagi karta.



Joon. 271.

66. Ööpäeva jooksul käib kell ette $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ minutit. Esimesel pilgul näib, et kell käib 5 minutit ette 30 päeva jooksul $(5:\frac{1}{6}=30)$, s. t. 31 mai hommikuks. See järeldus on aga õige ainult osaliselt. Nimelt jõuab kell antud tingimustel õigest ajast 5 minutit ette üldse viiel korral, leitud lahendus aga tähistab neist kõige viimast.

Kahekümne kaheksanda mai hommikuks on kell ette käinud juba 4,5 minutit $(27\times\frac{1}{6}=4{,}5)$ ja kuna kell käis päevas ette pool minutit, siis täitub viis minutit esimest korda juba sama päeva õhtuks.

67. 2,5 korda.

68. Koma; saame 2,3.

69. a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{7}$.

70. Kui $\frac{1}{2}$ on üks kolmandik otsitavast arvust, siis terve arv on 3 korda $\frac{1}{2}$, s. t. $1\frac{1}{2}$.

71. Vahemaa tehnikajaama ja raudteejaama vahel on $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$ $=\frac{1}{12}$ kogu kooliteest. Poiss läbib selle viie minutiga. Kogu teele kulub tal järelikult $12\times5=60$ minutit ehk 1 tund. Veerandi kooliteest läbib ta $60:4=15$ minutiga, järelikult väljub poiss kodust kell 7.15 ja jõuab kooli kell 8.15.

72. 12 sekundit — ei ole õige vastus! Asi on selles, et esimesest lipust kaheksandani on seitse vahemikku. Esimesest lipust kaheteistkümnendani on 11 vahemikku. Sportlane läbib iga vahemiku $\frac{8}{7}$ sekundiga, järelikult kulub tal 11 vahemikule $\frac{8}{7} \times 11 = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$ sekundit.

73. Ostap ei võitnud, vaid hoopis kaotas aega. Tee teise poole läbimiseks kulus tal niisama palju aega, kui tal oleks kulunud kogu tee jalgsi katmiseks. Tähendab, valitud liikumisviisi juures ta ei võinud, vaid hoopis kaotas aega. Ta kaotas just niipalju aega, kui kulus rongiga sõitmiseks, s. t. $\frac{1}{15}$ sellest ajast, mis tal oleks kulunud poole tee jalgsi läbimiseks, ehk $\frac{1}{30}$ sellest ajast, mis oleks kulunud kogu tee jalgsi katmiseks.

74. Kolme ja poole tunniga jääb äratuskell maha 14 minutit. Kell 12 näitab äratuskell 11.46. Äratuskella järgi jääb kella 12-ni 14 minutit, kuid selle aja jooksul jääb ta veel ühe minuti maha. Seega näitavad äratuskella osutid 12 alles 15 minuti pärast.

75. Märkija pani tähele, et $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Tähendab, kui me seitsmest plaadist neli plaati lõikame kolmeks võrdseks tükiks, siis saame kokku 12 kolmandikku, s. t. iga detaili jaoks ühe kolmandiku; ülejäänud kolmest plaadist igaüht neljaks võrdseks osaks lõigates saame kokku 12 veerandit, s. t. iga detaili jaoks ühe veerandi.

Kui me tahame viit plaati jagada võrdselt kuue detaili vahel, siis peame silmas, et $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Tähendab, kolmest plaadist teeme kuus poolt ja kahest plaadist kuus kolmandikku.

Edasi, $\frac{13}{12} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$. Järelikult iga detaili jaoks me võtame ühe osa kolmeks võrdseks osaks jagatud neljast plaadist ja kolm osa neljaks võrdseks osaks jagatud üheksast plaadist.

Analoogiliselt $\frac{13}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$. Üheksa plaati jagame neljaks võrdseks osaks ja neli plaati jagame üheksaks võrdseks osaks.

Kuna $\frac{26}{21} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7}$, siis sel juhul tuleb 14 plaati jagada kolmeks võrdseks osaks ja 12 plaati tuleb jagada seitsmeks võrdseks osaks.

Koostage toodud võtet kasutades veel mõned taolised ülesanded.

76. $\frac{1}{4}$ seebitükki kaalub $\frac{3}{4}$ kilogrammi, kogu seebitükk aga 3 kilogrammi.

77. 1. $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{9}{9}$ ne.

2. $37 = \frac{333}{3 \times 3}$.

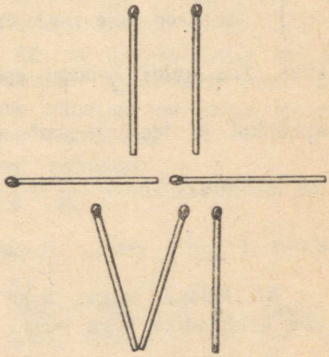
3. Näiteks nii: $99 + \frac{99}{99}$.

4. $44 + \frac{44}{4}$.

5. $9 + \frac{99}{9}$.

6. Vt. joon. 272; $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

7. $1 + 3 + 5 + 7 + \frac{75}{75} + \frac{33}{11}$.



Joon. 272.

8. $79\frac{1}{3} + 5 = 84 + \frac{2}{6}$.

9. 1 ja $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{n}$ ja $\frac{1}{n+1}$, kus n on suvaline täisarv alates arvust 1, ehk x ja $\frac{x}{x+1}$, kus x on suvaline arv (välja arvatud $x = -1$).

10. $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$; $0{,}5 + \frac{1}{2}(9-8)(7-6)(4-3) = 1$.

Leidub ka teisi lahendusi.

11. $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100$ ehk $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$.

Leidub ka teisi lahendusi.

78. Üks võimalikest lahendustest:

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = 10;$$

$$\frac{2}{1} + \frac{5}{1} + \frac{2}{6} + \frac{6}{3} + \frac{4}{6} = 10;$$

$$\frac{4}{1} + \frac{2}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{6} = 10.$$

79. Pole raske taibata, et $^3/_4$ kassipoega oli veerand kassipoegade koguhulgast. Tähendab kassipoegi oli üldse $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$.

Kontrolli: $^3/_4$ kolmest on $2\frac{1}{4}$; kui $2\frac{1}{4}$-le liita veel $\frac{3}{4}$, siis saame 3.

80. Enamik lugejaid vastab pikemalt mõtlemata: 8 km/t $\left(\frac{12+4}{2} = 8\right)$, kuid see pole õige vastus. Võtame kogu läbitud maa ühikuks. Siis kulus hobusel esimese teepoole läbimiseks $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{24}$ ajaühikut ja teise teepoole läbimiseks $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ ajaühikut. Terve tee läbimiseks kulus $\frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$ ajaühikut. Järelikult on keskmine kiirus $1 : \frac{1}{6} = 6$ km/t.

81. Reisija magas kaks kolmandikku poolest teest, järelikult ühe kolmandiku kogu teest.

82. Teises rongis asuva reisija kiirus esimese rongi suhtes on $45 + 36 = 81$ km/t ehk $\frac{81\,000}{60 \cdot 60}$ m/sek $= \frac{45}{2}$ m/sek.

Järelikult on esimese rongi pikkus $\frac{45}{2} \times 6 = 135$ meetrit.

83. Jalgrattur läbis jalgsi $\frac{1}{3}$ teest, s. t. poole vähem sellest, mis ta läbis sõites, aga aega kulutas kaks korda rohkem. Järelikult sõitis ta 4 korda kiiremini kui kõndis.

84. Volodja oli täitnud $\frac{2}{3}$ tööülesandest ja tal jäi teha veel $\frac{1}{3}$. Kostja oli täitnud $\frac{1}{6}$ ülesandest ja tal jäi teha veel $\frac{5}{6}$.

Järelikult, selleks et lõpetada töö Volodjaga üheaegselt, peab Kostja suurendama oma päevatoodangut Volodja omaga võrreldes $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2}$ korda.

85. Õigus on Maša sõbrataril. Ühe teguri suurendamisel $\frac{1}{3}$ võrra suureneb korrutis $\frac{4}{3}$ võrra. Teise teguri vähendamisel

$\frac{1}{3}$ võrra väheneb korrutis $\frac{3}{2}$ korda (sõltumata sellest, kas ta on võrdne suurendatud teguriga). Kokkuvõttes vähenes korrutis seega $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ korda ning moodustas õigest tulemusest ainult $\frac{8}{9}$. Vea suurus $\left(\frac{1}{9}\right)$ on meil teada, see oli 20 m³.

Järelikult pidi ülesande vastus olema 180 m³.

86. Kogenud perenaine asetab pannile kaks leivakääru ja praeb neid ühel küljel 30 sekundit. Seejärel pöörab ta ühe kääru ümber, teise kääru asemele paneb ta aga pannile kolmanda kääru. Peale järjekordse poole minuti möödumist on esimene leivakäär täielikult praetud ning ülejäänud poole minutiga on kerge lõpuni praadida ka kaht poolenisti praetud leivakääru.

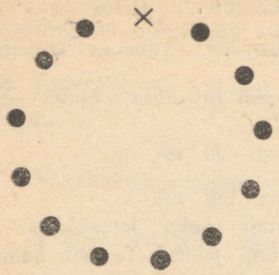
Seega jätkub tõepoolest poolteisest minutist!

II peatüki juurde

87. Vangid panid algul korvi ahela (30 kg) ja lasksid selle alla. Ülestõusnud tühja korvi istus teenijanna (40 kg) ja laskus ahela poolt tasakaalustatuna alla, teine korv aga tõusis samal ajal üles. Hetšo võttis nüüd korvist ahela välja ja tõstis sinna Daridžani (50 kg). Daridžan laskus alla, tõstes üles teenijatüdruku. Mõlemad väljusid korvidest. Hetšo pani ülemisse korvi ahela ja laskis sellel teist korda torni jalale vajuda. All ronis Daridžan ahela juurde korvi ($50 + 30 = 80$ kg), üles tõusnud korvi aga istus Hetšo (90 kg). Hetšo laskus alla ja tuli korvist välja, Daridžan aga läks torni. Ahel jäi korvi ja laskus kolmandat korda torni jalale. Nüüd istus tornis korvi teenijanna ja laskus alla, tõstes keti üles. Daridžan võttis ahela korvist välja ja ronis ise korvi, tõstes üles teenijanna. Sõidu lõpul väljusid mõlemad korvidest. Teenijanna laskis ahela veel kord alla kukkuda ja laskus seejärel ka ise, tõstes ahela üles. Nüüd olid nad kolmekesi kõik pääsenud ja peitsid end raevunud vürsti eest mägedesse.

88. Lugege valgest hiirest alates (teda ennast välja jättes) kellaosuti liikumise suunas k u u e n d a hiireni. Sellest hiirest tulebki päripäeva minnes lugemist alustada.

Vaatleme nüüd ka seda, kuidas niisuguse tulemuseni jõuda. Joonistame kõigepealt paberile 12 punktikest ja ühe risti (joon. 273). Hakkame nüüd ühes kindlas suunas punktikesi lugema, seejuures iga kolmeteistkümnendat punktikest läbi kriipsutades (lugemist



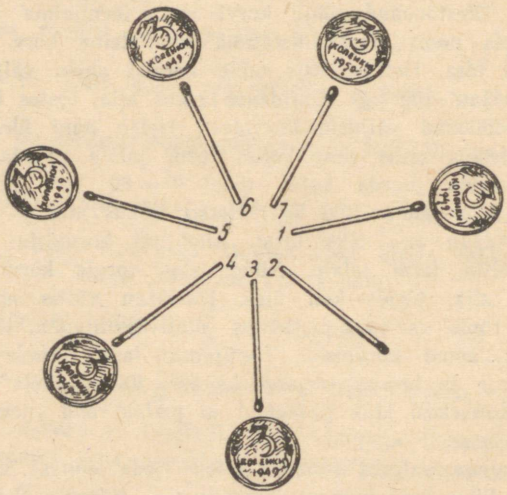
Joon. 273.

alustame ristist). Kui kolmeteistkümnes number just risti kohale langeb, siis tõmbame ka selle läbi. Niiviisi talitame seni, kuni jääb järele üksainus punktike. Kui me nüüd selle viimase punktikese kohale paigutame valge hiire, siis ristike näitabki meile, missugusest hiirest tuleb lugemist alustada.

89. Just nagu eelmises ülesandeski, leiame ka siin üpris kergesti, et kõigepealt tuleb ära võtta ümberpööratud tikust viie tiku võrra paremal pool asetsev tikk.

90. Kui reas on 20 linnupuuri ja iga viies avatakse, siis jäävad suletuks vasakult seitsmes ja neljateistkümnes puur.

91. Lahenduse idee on järgmine: iga raha tuleb asetada selle tuletiku juurde, millest te viimati alustasite lugemist. Oletame, et te alustate lugemist viiendast tuletikust (joon. 274).



Joon. 274.

Esimene raha «maandub» seitsmenda tuletiku juurde. Nüüd tuleb raha paigutada viienda tuletiku juurde. Selleks me peame lugemist alustama kolmandast tuletikust. Järgmine kord tuleb meil

alustada esimesest tuletikust, siis «maandub» raha kolmanda tuletiku juurde jne.

92. Ehitusrongi vedurijuht lükkas tupikusse oma rongi kolm viimast vagunit, haakis need lahti ja sõitis ülejäänutega eemale. Reisirong sõitis algul tupikust mööda, andis siis tagasikäigu ja haakis kolm ehitusrongi vagunit endale sappa. Seejärel sõitis ta tagurpidi tupikust eemale ning haakis ehitusrongi vagunid lahti. Ehitusrongi vedur koos kahe ülejäänud vaguniga sõitis nüüd tagurpidi tupikusse ja reisirongi tee oligi vaba!

93. Lahenduse skeem. Märgime isad tähtedega *A*, *B*, *C* ja tütred vastavalt tähtedega *a*, *b*, *c*.

Esimene kallas	Teine kallas
A B C	. . .
a b c	. . .

I. Algul sõidavad üle jõe kaks tütart:

A B C	. . .
a . .	. *b c*

II. Üks tütardest pöördub tagasi ja toob kolmanda tüdruku üle jõe:

A B C	. . .
. . .	*a b c*

III. Üks tütar pöördub tagasi ja jääb oma isa juurde, kaks ülejäänud isa sõidavad teisele kaldale:

A . .	. *B C*
a . .	. *b c*

IV. Üks isa sõidab oma tütrega tagasi esimesele kaldale; tüdruk jääbki sinna, kaks isa aga sõuavad teisele kaldale:

. . .	*A B C*
a b .	. . *c*

V. Tütar *c* sõidab üle jõe ja toob veel ühe tütre teisele kaldale:

. . .	*A B C*
a . .	. *b c*

VI. Viimase tütre järele läheb kas ta isa või üks sõbrataridest:

. . .	*A B C*
. . .	*a b c*

Kõik on rahul!

94. Ülesõit kolme inimest mahutava paadiga. Olgu isad *A*, *B*, *C*, *D* ja tütred *a*, *b*, *c*, *d*.

Esimene kallas	Paadis	Teine kallas
A B C D		. . . .
a b c d		. . . .

I. Kaks tüdrukut sõidavad üle jõe:

A B C D		. . . .
a b . .	→ *c d*	→ . . *c d*

Üks neist tuleb tagasi:

A B C D		. . . .
a b c .	← *c*	← . . . *d*

II. Nüüd asuvad paati üks isa oma tütrega ja teisel kaldal oleva tüdruku isa:

A B . .	→ *C D*	→ . . *C D*
a b . .	*c*	. . *c d*

Üks isa tuleb oma tütrega tagasi:

A B C .	← *C*	← . . . *D*
a b c .	*c*	. . . *d*

III. Seejärel asuvad paati 3 isa:

. . . .	→ *A B C*	→ *A B C D*
a b c .		. . . *d*

Ainus teisel kaldal olev tütar sõuab oma sõbratariide juurde:

. . . .		*A B C D*
a b c d	← *d*	← . . . .

IV. Kolm tüdrukut sõuavad üle jõe:

. . . .		*A B C D*
a . . .	→ *b c d*	→ . *b c d*

Isa *A* (või mõni tüdruk) sõidab tütre *a* järele:

A . . .	← *A*	← . *B C D*
a . . .		. *b c d*

V. Ka viimane paar sõuab teisele kaldale:

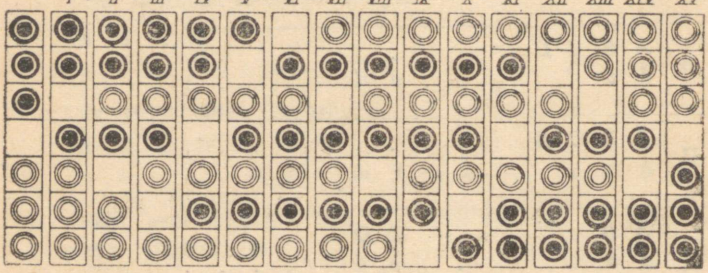
. . . .	→ *A*	→ *A B C D*
. . . .	*a*	*a b c d*

Ülevedu ongi lõppenud.

Ülevedu kaht inimest mahutaval paadil, kus-juures kasutatakse ka keset jõge olevat saart.

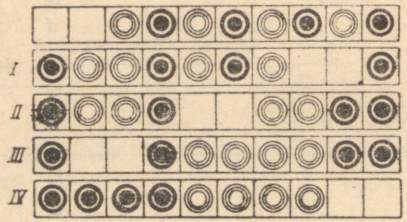
	Esimene kallas	Saar	Teine kallas	
	A B C D	. . . .	. . . .	
	a b c d	. . . .	. . . .	
I	*A B C D*	. . . .	. . . .	
	a b . .	. . *c d*	. . . .	
II	*A B C D*	. . . .	. . . .	
	a . . .	. *b c d*	. . . .	
III	*A B* . .	. . *C D*	. . . .	
	a b . .	. . *c d*	. . . .	
IV	*A B* . .	. . *C* .	. . . *D*	
	a b . .	. . *c* .	. . . *d*	
V	*A B* . .	. . . .	. . *C D*	
	a b . .	. . *c* .	. . . *d*	
VI	*A B C* .	. . . .	. . . *D*	
	. . . .	*a b c* .	. . . *d*	
VII	*A* . . .	. . . .	. *B C D*	(*a* viis paadi 1. kaldale tagasi, *B* ja *C* sõitsid otse 2. kaldale)
	a . . .	. *b c* .	. . . *d*	
VIII	*A* . . .	. . . .	. *B C D*	
	a . . .	. *b* . .	. . *c d*	
IX	. . . .	. . . .	*A B C D*	(*B* tõi *A* otse teisele kaldale)
	a . . .	. *b* . .	. . *c d*	
X	. . . .	. . . .	*A B C D*	
	a . . .	. . . .	. *b c d*	
XI	. . . .	. . . .	*A B C D*	
	. . . .	. . . .	*a b c d*	

95. Liikugu valged kabendid (*v*) ainult ülespoole ja mustad kabendid (*m*) ainult allapoole (tingimuste kohaselt võivad nad liikuda ainult üksteisele vastu). Liigutame kabendeid niisuguses järjekorras: *m v v m m m v v v m m m v v m.* Parema näitlikkuse huvides on kabendite liikumise skeem toodud joonisel 275.



Joon. 275.

96. Ülesande lahenduse leiate jooniselt 276.



Joon. 276.

Peale neljandat tõstmist ongi neli musta ja neli valget kabendit järjestikku. Lõppseisust võib algseisu jõuda loomulikult samuti nelja sammuga. Pöördülesande lahendamine on nüüd juba lihtne asi.

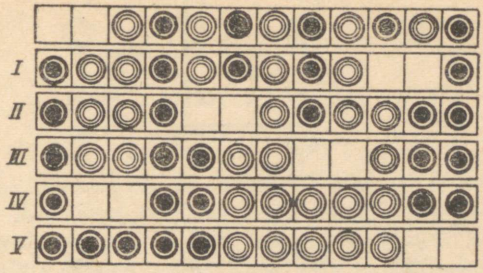
97. Viie paari kohta on lahendus esitatud joonisel 277.

Kuue paari kohta on lahendus esitatud joonisel 278.

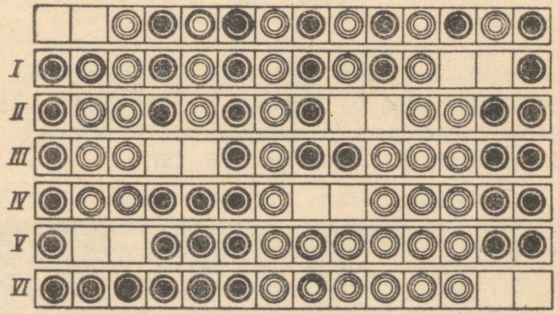
Seitsme paari kohta on lahendus esitatud joonisel 279.

98. Paigutage kaardid hunnikusse niisuguses järjekorras: 1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5, 8.

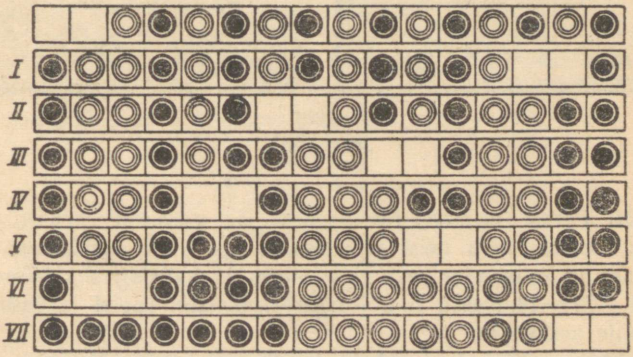
99. Esimene ülesanne. Ruudu nurkadesse tuleb panna kaks kabendit teineteise otsa (joon. 280, *a*).



Joon 277

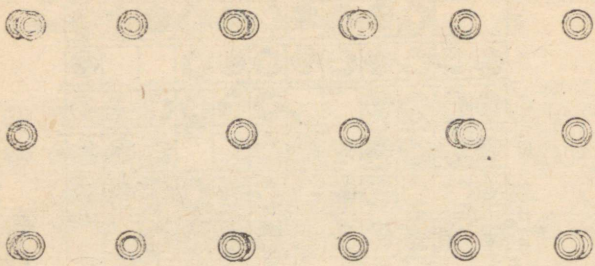


Joon. 278.



Joon. 279.

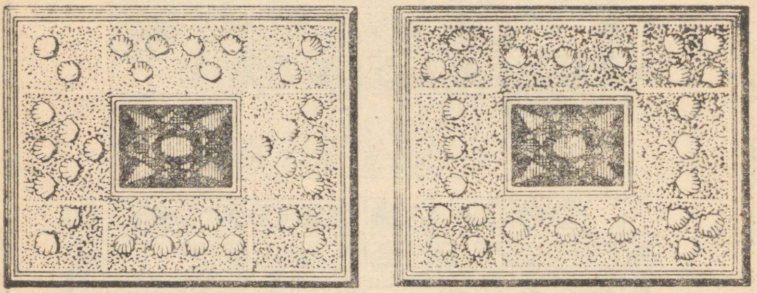
Teine ülesanne. Üheksa kabendit tuleb paigutada ruudukujuliselt (joon. 280, *b*). Sel viisil tekib kolm horisontaalrida ja kolm



Joon. 280.

vertikaalrida kolme kabendiga igas reas. Ülejäänud kolm kabendit tuleb paigutada nii nagu on näidatud joonisel. Nõnda saame tõepoolest igasse horisontaal- ja vertikaalritta 4 kabendit.

100. Lahendused on toodud joonisel 281.



Joon. 281.

101. Pärast esimest tormijooksu jäi garnisoni koosseisu 36 meest. Leiame, mitu neist pidi asuma iga külje keskkohas. Kuna esimeses ja kolmandas reas peab olema 11 kaitsjat, siis teises reas on $36 - 22 = 14$ meest, s. t. 7 meest kummalgi poolel ja ühtlasi ka iga külje keskkohas.

Kokku on külgede keskkohtadel 28 meest. Ülejäänud 8 meest jaotuvad kindluse nelja nurga vahel. Enne teist tormijooksu on

jõudude paigutus seega niisugune:

I rida	2	7	2
II rida	7	36	7
III rida	2	7	2

Pärast teist tormijooksu jäi järele 32 kindluse kaitsjat. Vajaliku paigutuse leidmiseks arutleme nagu ennegi. Esimeses ja kolmandas reas peab olema 11 meest, teises reas $32 - 22 = 10$ meest. Tähendab iga külje keskele asetub 5 meest ja igasse nurka 3 meest.

Enne kolmandat tormijooksu paiknevad mehed seega järgmiselt:

I rida	3	5	3
II rida	5	32	5
III rida	3	5	3

Täpselt samal viisil võib leida jõudude paigutuse ka pärast kolmandat ja neljandat tormijooksu:

4	3	4
3	28	3
4	3	4

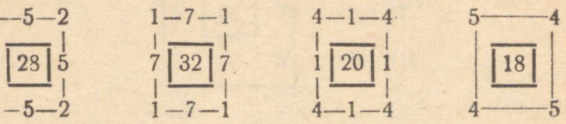
5	1	5
1	24	1
5	1	5

Pärast viiendat tormijooksu jäi järele vaid 22 kindluse kaitsjat. Sel juhul külgede keskele ei jäägi mehi, sest $22 - 22 = 0$. Järelikult peavad nad kõik asuma kindluse nurkades:

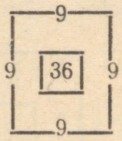
6	—	5
—	22	—
5	—	6

Kui mõni mees veel rivist välja langeb, siis ei saa ülejäänud mehi enam nii paigutada, et igal küljel oleks 11 meest.

102. Arutledes täpselt samuti nagu eelmise ülesande puhul, leiame järgmised lampide asetuse skeemid (keskmises ruudus on lampide üldarv):



Kaheksateist lampi tuleb paigutada toa nurkadesse. Kui võtta 36 lampi, siis jäävad aga nurgad tühjaks:



Siit näeme, et kogu aeg piki iga seina üheksat lampi säilitades võis valgustustehnik kasutada minimaalselt 18 lampi ja maksimaalselt 36 lampi.

Ülesande viimasele küsimusele vastamiseks tuleb kas lihtsalt teha katseid või kasutada algebrat.

(Kes ei tunne huvi järgnevate matemaatiliste kaalutluste vastu või kellele see käib üle jõu, võib rahulikult asuda järgmise ülesande lahendamisele.)

Tähistame igas nurgas olevate lampide arvu tähega a ja igal seinal olevate lampide arvu tähega b. Siis on selge, et kõigi lampide hulk $n = 4\,(a + b)$. Seda arvu võib kirjutada ümber ka niisugusel kujul:

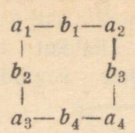
$$n = 2\,(a + b + a) + 2b.$$

Siin $a + b + a = s$ on lampide hulk piki iga seina. Kui me arvu s ei muuda, siis lampide üldhulk n muutub koos b muutumisega. Kui b suureneb kahe võrra, siis n suureneb nelja võrra. Valgustustehnik toimiski niiviisi: kui ta lampide arvu nelja võrra suurendas, siis ta suurendas iga b-d kahe võrra ning s konstantsuse säilitamiseks vähendas kõiki a-sid ühe võrra. Seejuures säilis lampide asetuses teatav sümmeetria.

Piki ühte seina asuvate lampide hulga konstantsust võib säilitada ka ilma sümmeetrilise paigutuseta.

Olgu nurkades paiknevate lampide hulgad a_1, a_2, a_3 ja a_4

ning seintel asuvate lampide hulgad b_1, b_2, b_3 ja b_4:

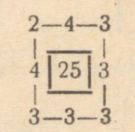


Kõigi lampide hulka n võib avaldada järgmiselt: $n = 4s - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, kus s on konstantne lampide hulk piki iga seina ($s = a_1 + b_1 + a_2 = a_1 + b_2 + a_3 = a_3 + b_4 + a_4 = a_2 + b_3 + a_4$). Kui s on konstantne, siis lampide üldarv suureneb $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ vähenemisega ja väheneb $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ suurenemisega. Suurendame näiteks b_1 ja b_2 kummatki x lambi võrra, s. t. lampide üldarv suureneb $2x$ võrra. Kui a_1 vähendada x lambi võrra, siis s ei muutu, lampide üldarv n aga suureneb x võrra. Sama efekti saame ka siis, kui me suurendame b_1 ja b_3 kummatki x lambi võrra ja vastavalt vähendame suurust a_2 x lambi võrra jne.

Lampide üldarvu n võime suurendada ka $2x$ võrra, ilma et s muutuks. Selleks tarvitseb vaid suurendada arve b_1, b_2, b_3 ja b_4 igaüht x võrra ning vastavalt lahutada a_1- ja a_4-st või a_2- ja a_3-st suurus x (võib ka iga a-d vähendada $\frac{x}{2}$ võrra).

Lubades lampide ebasümmeetrilist paigutamist, võime seega nende üldarvu suurendada 1, 2, 3, 4 jne. lambi võrra.

Kui valgustustehnik suurendaks lampide arvu kahekümne neljalt kahekümne viiele, siis tuleks nad paigutada näiteks nii:



103. Kolmandast tingimusest järeldub, et puuris peab olema vähemalt 22 ja ülimalt 44 jänest (võrrelge ülesande nr. 101 lahendusega).

Neljanda tingimuse põhjal peab jäneste üldarv jaguma kolmega. Tähendab, neid võis olla kas 24 või 27, 30, 33, 36, 39, 42. Edasi võib kergesti veenduda, et kahtkümmend nelja küülikut (16 ja 8) ei saa jaotada puuri nii, et igal puuri küljel oleks 11 küülikut, ilma et ei jääks tühje sektsioone (esimene tingimus).

Kui aga võtta 33, 36, 39 või 42 küülikut, siis neid saab küll paigutada nii, et igal küljel oleks 11 küülikut, kuid sel

juhul tuleks neid mõnda sektsiooni paigutada rohkem kui kolm, mis on vastuolus teise tingimusega (veenduge selles!).

Järjestikuse eliminatsiooni abil me jõudsime selgusele, et algul loodeti saada 30 küülikut ning nende paigutus pidi olema järgmine (keskmistes ruutudes on märgitud küülikute arv kummalgi korrusel):

2	3	3
3	20	2
3	2	2

Teise korruse plaan.

1	1	1
1	10	2
1	2	1

Esimese korruse plaan.

Instituut sai aga tegelikult 3 küülikut vähem, s. t. 27. Neid võis kambritesse paigutada näiteks nii:

3	1	3
1	18	2
3	2	3

Teise korruse plaan.

2	1	1
1	9	1
1	1	1

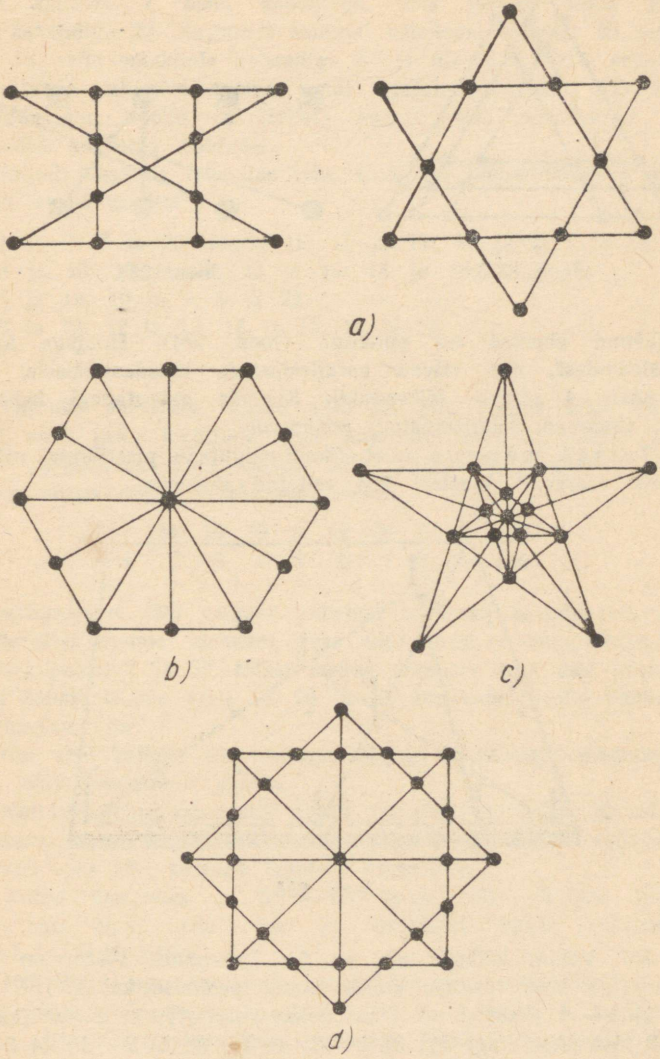
Esimese korruse plaan.

104. Ülesannete 1, 2, 3, 4 lahendused on esitatud vastavalt joon. 282 *a*, *b*, *c* ja *d*.

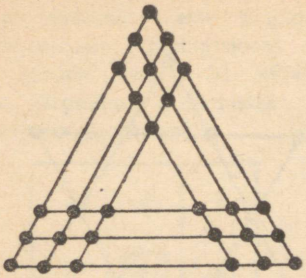
105. Lahendus on toodud joonisel 283.

106. Näpunäide esimese mängu variantide analüüsimiseks. Meie ülesandeks oli kümnest kahte ritta paigutatud kabendist neli niiviisi ümber tõsta, et tekiks viis rida nelja kabendiga igas reas. Selle ülesande kõik lahendused võib leida päris lihtsate geomeetriliste konstruktsioonide abil. Asendage kabendid paberilehele joonistatud punktidega ja tõmmake läbi kolm suvalist ülemise rea punkti ning üks alumise rea punkt. Ühendage esimene ülemises reas allesjäänud punkt sirgjoonte abil kahe alumisse ritta kuuluva punktiga.

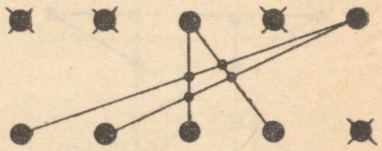
Ülemise rea teine ring aga ühendage sirgjoonte abil kahe



Joon. 282.



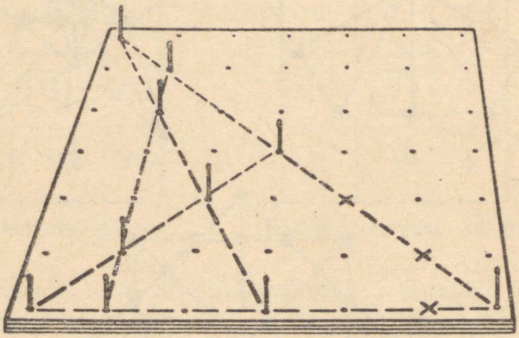
Joon. 283.



Joon. 284.

ülejäänud alumise rea punktiga (joon. 284). Hoiduge kombinatsioonidest, mis viivad paralleeljoonte moodustumisele, ning te saate 4 sirgete lõikepunkti. Nendele paigutagegi kabendid, mis vastavad läbitõmmatud punktidele.

Teises mängus tuleb tikud paigutada plastiliinist mängulauale vastavalt joonisel 285 esitatud skeemile.



Joon. 285.

107. Vähim käikude arv on 24. Lahenduse skeem on järgmine (iga kord tõstame ümber ainult pealmise kabendi):

1) 1 — *A* (kabend nr. 1 tõstetakse ringi *A*); 2) 2 — *B* (kabend nr. 2 tõstetakse ringi *B*); 3) 3 — *C*; 4) 4 — *D*; 5) 2 — *D*; 6) 5 — *B*; 7) 3 — *B*; 8) 1 — *B*; 9) 6 — *C*; 10) 7 — *A*; 11) 1 — *A*; 12) 6 — *E*; 13) 3 — *C*; 14) 1 — *C*; 15) 5 — *A*; 16) 1 — *B*; 17) 3 — *A*; 18) 1 — *A*; 19) 6 — *C*; 20) 8 — *B*; 21) 6 — *B*; 22) 2 — *E* (või siis *C*); 23) 4 — *B*; 24) 2 — *B*.

108. Vähim vahetuste arv on 19.

Kõige ökonoomsem on mängunuppude vahetamine ahela-süsteemis. Nii näiteks vahetame algul kabendid 1 ja 7, siis vahetame kabendi 7 selle kabendiga, mis hõivab tema koha, s. t. kabendiga 20. Järgmisel sammul vahetame kabendi 20 kabendiga 16, selle omakorda kabendiga 11 ja nii edasi, kuni mõlemad vahetatavad kabendid satuvad endi õigetele kohtadele. Siis tuleb alustada uut ahelat ja jätkata samal viisil seni, kuni kõik kabendid on oma kohtadel.

Antud ülesande lahendamiseks vajalikud ümbertõstmised koosnevad viiest ahelast:

1 ja 7; 7 ja 20; 20 ja 16; 16 ja 11; 11 ja 2; 2 ja 24;
3 ja 10; 10 ja 23; 23 ja 14; 14 ja 18; 18 ja 5;
4 ja 19; 19 ja 9; 9 ja 22;
6 ja 12; 12 ja 15; 15 ja 13; 13 ja 25;
17 ja 21.

Vajalike vahetuste skeemi võib ka ette valmis teha, selleks tuleb vaid välja kirjutada kõik kabendite numbrid nende tegelikus järjekorras ning nende alla paigutada järjestikku kõik naturaalarvud ühest kahekümne viieni:

7	24	10	19	3	12	20	8	22	jne.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	jne.

Kriipsutame läbi esimest vahetust määrava arvudepaari 1 ja 7. Seejärel otsime alumises reas üles arvu 7 ning kustutame vastava paari: 7 ja 20. Edasi otsime alumises reas üles arvu 20, tema kohalt leiame arvu 16. 20 ja 16 annavadki meile kolmanda vahetuspaari jne.

Kui ahel katkeb, siis alustame jällegi äärmisest vasakpoolsest seni läbikriipsutamata paarist.

Halvimal juhul moodustub ainult üks ahel, siis kuluks 25 kabendi kohalepaigutamiseks $25 - 1 = 24$ vahetust (viimase vahetusega satuvad kaks kivi korraga õigetele kohtadele).

Antud ülesandes on 5 ahelat, peale selle oli üks kabend juba oma õigel kohal (nr. 8), seepärast kulub vahetusteks $25 - 5 - 1 = 19$ käiku.

109. Kui kõige suuremas karbis olevatest kompvekkidest üks tõsta kõige väiksemasse karpi, siis on seal kokku 5 kompvekki, s. t. kaks paari pluss üks kompvek. Need 5 kompvekki tuleb lugeda ka teise, suuruselt järgmisse karpi kuuluvaiks.

Siit järeldub, et teises karbis on $5 + 4 = 9$ kompvekki, ehk teiste sõnadega 4 paari ja üks üksik kompvek.

Samal viisil edasi arutledes järeldame, et kolmandas karbis on $9 + 4 = 13$ kompvekki, s. t. jällegi niisugune kompvekkide arv, mis rahuldab ülesande nõudeid, jne.

Leidke iseseisvalt veel mõned toodust erinevad kompvekkide jaotused.

110. Kõik etturid saab lüüa 16 käiguga. Ratsu võib paigutada nii, et esimene löök oleks suunatud etturile *c*2, seejärel etturile *b*4 ja edasi *d*3 — *b*2 — *c*4 — *d*2 — *b*3 — *d*4 — *e*6 — *g*7 — *f*5 — — *e*7 — *g*6 — *e*5 — *f*7 — *g*5.

Esimese löögi võib anda ka etturile *b*3, ning samuti sümmeetriliselt paiknevatele etturitele *f*7 ja *g*6.*

111. Esimene ülesanne. Lepime kokku, et esimene number näitab kabendi järjekorranumbrit, teine number (mõnel juhul ka täht) aga ruutu, kuhu see kabend astub. Siis võib kasutada näiteks niisugust matkaskeemi:

2-1; 3-2; 4-3; 4-*A*; 5-4; 5-3; 6-5; 6-4; 7-6; 7-5; 7-*B*; 8-7; 8-6; 8-5; 9-8; 9-7; 9-6; 1-9; 1-8; 1-7; 1-*C*; 9-7; 9-8; 9-9; 9-10; 8-6; 8-7; 8-8; 8-9; 7-5; 7-6; 7-7; 7-8; 1-7; 1-6; 1-5; 1-*B*; 6-5; 6-6; 6-7; 6-*C*; 5-4; 5-5; 5-6; 5-7; 4-3; 4-4; 4-5; 4-6; 1-5; 1-4; 1-3; 1-*A*.

Edasine ümberpaigutuste järjekord on silmanähtav.

Teine ülesanne. Tähistame võimalikke kabendite liikumissuundi ilmakaarte rahvusvaheliste leppemärkidega: põhi — N, ida — O, lõuna — S, lääs — W. Nende märkide abil võime lahenduse esitada järgmiselt:

1) samm itta (s. O);
2) hüpe läände (h. W);
3) samm läände (s. W);
4) hüpe itta (h. O);
5) samm põhja (s. N);
6) hüpe lõunasse (h. S);

edasi lühendatud kirjaviisis:

7) s. S;
8) h. N;
9) h. O;
10) s. W;
11) h. W;
12) s. N;
13) s. O;
14) h. W;
15) s. S;
16) h. O;
17) s. N;
18) h. S;
19) s. O;
20) s. N;
21) h. S;
22) s. W;
23) h. N;
24) h. N;
25) s. S;
26) h. S;
27) h. O;

---

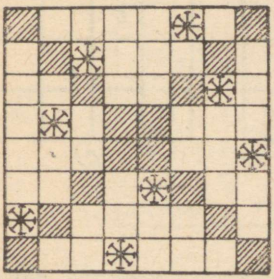
* Tegelikult on vaid kuus etturit, mida ei või esimesena lüüa: *c*4, *d*3, *d*4, *e*5, *e*6 ja *f*5. (*Toim.*)

28) s. N;
29) h. S;
30) h. W;
31) h. N;
32) s. O;
33) h. W;
34) h. N;
35) s. O;
36) h. W;
37) h. S;
38) h. O;
39) h. O;
40) s. W;
41) h. W;
42) s. O;
43) h. N;
44) s. S;
45) h. S;
46) s. N.

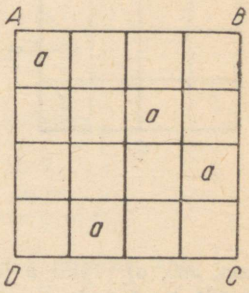
112. $\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\} d=7$ $\left.\begin{matrix}2\\7\\12\end{matrix}\right\} d=5$ $\left.\begin{matrix}6\\10\\14\end{matrix}\right\} d=4$

$\left.\begin{matrix}9\\11\\13\end{matrix}\right\} d=2$ $\left.\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\right\} d=1.$

113. Ülesandel on üksainus lahendus, mis on esitatud joonisel 286. Asjatu ekslemise vältimiseks võib kasutada järgmist võtet: paigutame teise rea tähe nii madalale, kui seda võimaldab esimese rea täht (muidugi ainult valgetele ruutudele). Kolmandas veerus paigutame tähe jälle nii madalale kui vähegi võimalik jne. Püüame kogu aeg saavutada võimalikku madalaimat tähtede asendit. Niipea kui selgub, et järjekordset tähte ei saa vajalikku veergu kuidagi paigutada, tuleb eelmises veerus olevat tähte tõsta ülespoole nii vähe kui võimalik; kui teda pole kuhugi tõsta, siis võtame ta päris ära ja tõstame eelmist tähte jne. Kogu aeg tuleb lähtuda järgmisest põhimõttest — kord juba paigale pandud tähti tõsta ainult siis, kui paremal pool ei ole kohta järgmise tähe jaoks.



Joon. 286.



Joon. 287.

Selline proovimismeetod võib näida pikana, kuid ta on süstemaatiline ja viib igal juhul sihile.

114. Esimene ülesanne Vaatleme kõigepealt juhtu, kus kõik tähed on ühesugused. Asetame ühe tähe mingisse diagonaali AC ruutu, näiteks ülemisse vasakpoolsesse nurka (joon. 287). Teise diagonaali BD nelja ruudu hulgas on kaks ruutu, mis ei asu esimese paigutatud tähega samas reas. Paigutame ühte neist teise tähe.

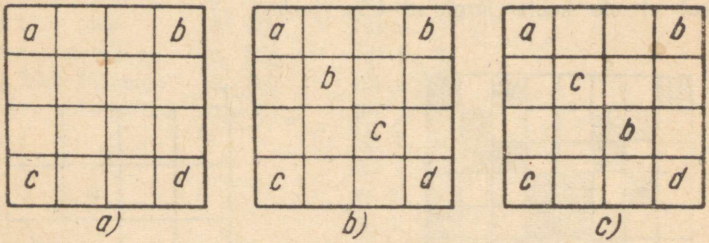
Päris kerge on veenduda, et niipea kui me oleme kaks tähte kohale paigutanud, on kahe ülejäänud tähe asupaik üheselt määratud, s. o. kummaski vabas horisontaalreas leidub ainult üks ruut, kuhu saab ülesande tingimuste kohaselt paigutada ülejäänud tähed.

Nüüd on kerge hinnata ka võimalike lahenduste hulka. Igale diagonaali AC ruudule vastab kaks võimalikku asetust diagonaalil BD. Tähendab, kokku on ülesandel $4 \times 2 = 8$ lahendust.

Kõik lahendused võime kätte saada esimest lahendit pöörates ja peegeldades (peegli abil).

Eeldame nüüd, et kõik 4 tähte on erinevad: a, b, c, d. Paigutame need tähed mingis vabalt valitud järjekorras joonisel 287 märgitud ruutudesse, näiteks a, b, c, d. Samahästi võiks neid tähti paigutada ka näiteks järjekorras b, c, d, a. Niiviisi võib ruutusid vahetamata muuta tähtede järjekorda 24 viisil. Kõik need on erinevad lahendused. Kokku on erinevaid lahendusi: $8 \times 24 = 192$.

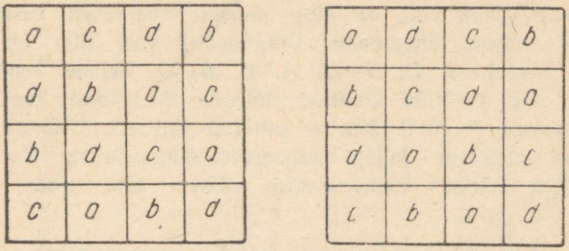
Teine ülesanne. Ülesande sõnastusest järeldub, et nurkades seisvad tähed peavad olema erinevad. Seepärast asetame kõigepealt vabas järjekorras nurkadesse neli erinevat tähte



Joon. 288.

(joon. 288, *a*). Tähti a ja d hõlmavale diagonaalile tuleb paigutada tähed b ja c. Seda me saame teha kahel viisil (joon. 288, *b* ja *c*).

Pärast seda, kui need 6 ruutu on täidetud, pole ülejäänud ruutude juures enam mingit vabadust. Kõigepealt täidame ääred ja siis ka kaks sisemist ruutu. Lõplik asetus on toodud joonisel 289.



Joon. 289.

Niisiis, kui tähed on nurkadesse paigaldatud, on meie ülesandel 2 lahendust. Kuna aga nelja tähte saab nurkadesse paigutada 24 viisil, siis on ülesandel $24 \times 2 = 48$ lahendust.

Ühest juba täidetud ruudust võib pööramise ja peegeldamise abil saada veel 7 asetust.

Kui lugeda pööramise ja peegeldamise abil saadud lahendused üheks lahendiks, siis on ülesandel üldse $48 : 8 = 6$ erinevat lahendust.

115. Rea katsete järel te saite kindlasti mõne lahenduse kätte. Sellel ülesandel on palju lahendusi. Üks nendest on toodud juuresolevas tabelis.

1 punane	4 must	2 roheline	3 valge
2 valge	3 roheline	1 must	4 punane
3 must	2 punane	4 valge	1 roheline
4 roheline	1 valge	3 punane	2 must

Selle lahenduse võib kätte saada järgmise arutluse abil.

Tähistame ruutude värvid tähtedega A, B, C ja D ning numbrid 1, 2, 3, 4 tähtedega a, b, c, d. Ülesande lahendamiseks

tuleb seega suured tähed *A*, *B*, *C*, *D* paigutada nii, et kõik neli asetseksid igas veerus ja reas, aga ka igal diagonaalil, ja kuskil ei korduks. Samuti tuleb toimida ka väikeste tähtedega. Paneme algul paigale suured tähed, näiteks niisuguse skeemi kohaselt: asetame nad esimesse horisontaalritta tähestikulises järjekorras (joon. 290, *a*) ning täidame siis ülalt vasakult alla paremale mineva diagonaali. Diagonaalil võib olla ainult kaks asetust, kas *A*, *C*, *D*, *B* või *A*, *D*, *B*, *C*. Valime neist esimese asetuse, see määrab kindlaks kõikide ülejäänud ruutude sisu ja me saame joonisel 290, *a* esitatud kujundi. Väikeste tähtede jagamisel alustame jällegi esimesest diagonaalist. Paneme iga suure tähe kõrvale samanimelise väikese tähe (joon. 290, *b*).

A	*B*	*C*	*D*
D	*C*	*B*	*A*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*A*	*B*

a)

Aa	*Bd*	*Cb*	*Dc*
Db	*Cc*	*Ba*	*Ad*
Bc	*Ab*	*Dd*	*Ca*
Cd	*Da*	*Ac*	*Bb*

b)

Joon. 290.

Ruudu ülejäänud väljadele asetame diagonaaliga sümmeetriliselt paikneva välja nimelise väiketähe. Kokkuvõttes saame joonisel 290, *b* toodud skeemi.

Kui nüüd asendada tähed *A*, *B*, *C*, *D* vastavalt punaste, mustade, roheliste ja valgete ruutudega ja väikestele tähtedele *a*, *b*, *c*, *d* anda numbrilised väärtused 1, 2, 3 ja 4, siis saamegi selle ülesande lahenduskäigu alguses antud tabeli. Nelja tähte võime kombineerida 24 viisil, samuti ka nelja numbrit. Järelikult on sellel ülesandel $24 \times 24 = 576$ erinevat lahendust.

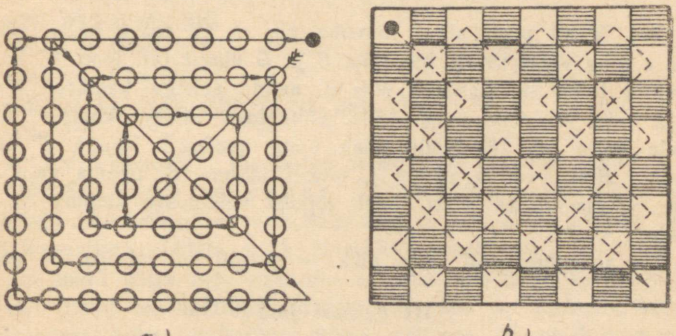
116. Oletame, et algul jäeti vabaks väli nr. 1. Iga käiku võime kirjutada üles kahe numbri abil: esimene number näitab käigu algvälja, teine number käigu lõppvälja. Nii saab lahendust esitada üsna lühidalt: 9-1; 7-9; 10-8; 21-7; 7-9; 22-8; 8-10; 6-4; 1-9; 18-6; 3-11; 16-18; 18-6; 30-18; 27-25; 24-26; 28-30; 33-25; 18-30; 31-33; 33-25; 26-24; 20-18; 23-25; 25-11; 6-18; 9-11; 18-6; 13-11; 11-3; 3-1.

117. Pähklil on üldse 24 lahendust:

1.	1 — 2, 3	2 — 6, 5	6 — 1, 3	1 — 6, 2
2.	1 — 2, 3	4 — 1, 3	3 — 6, 5	5 — 3, 4
3.	1 — 4, 5	3 — 4, 1	4 — 2, 6	2 — 3, 4
4.	1 — 4, 5	5 — 2, 6	6 — 4, 1	1 — 6, 5
5.	2 — 3, 4	3 — 1, 6, 5	6 — 2, 4	2 — 1, 6
6.	2 — 3, 4	5 — 2, 3	3 — 1, 6	1 — 3, 5
7.	2 — 4, 5	5 — 1, 3, 6	6 — 2, 4	2 — 1, 6
8.	2 — 4, 5	3 — 2, 5	5 — 1, 6	1 — 5, 3
9.	3 — 1, 2	5 — 3, 2	2 — 6, 4	4 — 5, 2
10.	3 — 1, 2	4 — 3, 1	1 — 6, 5	5 — 1, 4
11.	3 — 1, 2	1 — 2, 6, 4	6 — 2, 3	3 — 6, 5
12.	3 — 1, 2	2 — 1, 6, 5	6 — 3, 1	3 — 6, 4
13.	3 — 4, 5	2 — 3, 5	5 — 1, 6	1 — 2, 5
14.	3 — 4, 5	1 — 3, 4	4 — 2, 6	2 — 1, 4
15.	3 — 4, 5	4 — 1, 6, 5	6 — 5, 3	3 — 2, 6
16.	3 — 4, 5	5 — 2, 6, 4	6 — 3, 4	3 — 1, 6
17.	4 — 3, 2	3 — 1, 6, 5	6 — 2, 4	4 — 5, 6
18.	4 — 3, 2	1 — 4, 3	3 — 5, 6	5 — 3, 1
19.	4 — 1, 2	1 — 3, 6, 5	6 — 2, 4	4 — 6, 5
20.	4 — 1, 2	3 — 1, 4	1 — 6, 5	5 — 1, 3
21.	5 — 3, 4	4 — 1, 6	6 — 3, 5	5 — 6, 4
22.	5 — 3, 4	2 — 3, 5	3 — 1, 6	1 — 2, 3
23.	5 — 1, 2	3 — 2, 5	2 — 6, 4	4 — 3, 2
24.	5 — 1, 2	1 — 4, 6	6 — 2, 5	5 — 1, 6

118. Tüdruku ja poisi marsruudid võite leida vastavalt skeemidelt *a* ja *b* joonisel 291.

119. Ratsu saab astuda mustalt ruudult ainult valgele ruudule.



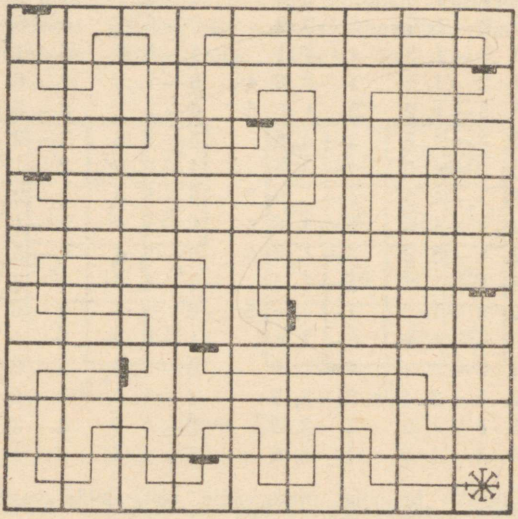
Joon. 291.

valgelt väljalt ainult mustale jne. Malelaual on 64 ruutu. Selleks, et igal väljal ainult üks kord viibides jõuda väljale *h*8, tuleb ratsul teha 63 käiku.

Algseisus asub ratsu mustal väljal (vt. joon. 61, lk. 77) ning lõppseisus peab ta jällegi olema mustal väljal (*h*8).

See on võimatu, sest 63. käik on paaritu käik. Kõik paaritud käigud viivad algul mustal ruudul seisnud ratsu valgele väljale.

120. Vangi poolt avastatud põgenemistee leiate jooniselt 292.



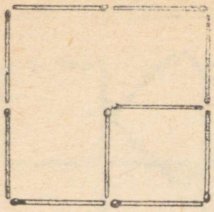
Joon. 292.

121. Vang peab algul minema nii, et ta saaks kätte võtmed *d* ja *e* ning võiks avada kambrite *E* ja *D* uksed (vt. joon. 63, lk. 79). Seejärel tuleb tal hankida võti *c*, avada sellega kamber *C* ning võtta võti *a*, mis avab talle võimaluse läbida kamber *A* ja saada kätte võti *b*. Nüüd peab vang veelkord läbima *E* ja *D*, jõudma *B*-sse, võtma võtme *f*, uuesti läbima *E*, avama kambri *F* ukse, võtma võtme *g* ja jõuab lõpuks vabadusse kambri *G* ukse kaudu.

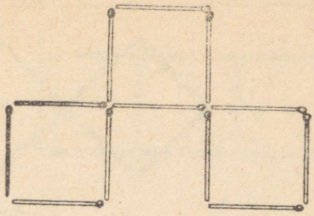
Tee vabadusse oli üsna pikk — vangil tuli läbida 84 ust.

III peatüki juurde

122. a) Vt. joon. 293; b) vt. joon. 294; c) vt. joon. 295; d) vt. joon. 296; e) vt. joon. 297.



Joon. 293.



Joon. 294.

123. a) Tuleb kõrvaldada suure ruudu sees olevad 12 tuletikku ning moodustada neist samasugune ruut; b) vt. joon. 298; c) vt. joon. 299, *a* (kui eraldada 4 tuletikku); vt. joon. 299, *b* (kui eraldada 6 tuletikku); vt. joon. 299, *c* (kui eraldada 8 tuletikku); d) vt. joon. 300; e) vt. joon. 301; f) vt. joon. 302; g) vt. joon. 303; h) vt. joon. 304.

124. Vt. joon. 305.

125. Vt. joon. 306.

126. Vt. joon. 307.

127. Vt. joon. 308.

128. Vt. joon. 309.

129. Kaks tuletikku tuleb keskelt pooleks murda (joon. 310).

130. Vt. joon. 311.

131. Vt. joon. 312.

132. Vt. joon. 313.

133. Vt. joon. 314.

134. Kaks tuletikku tuleb panna laua või raamatu äärele, nii et laua või raamatu ääred moodustaksid kaks ruudu külge.

135. a) Vt. joon. 315, *a*; b) vt. joon. 315, *b*.

136. Vt. joon. 316.

137. Vt. joon. 317.

138. Vt. joon. 318.

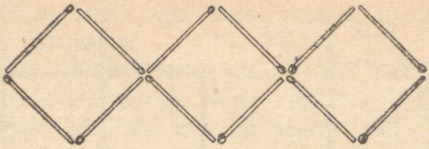
139. a) Vt. joon. 319; b) vt. joon. 320.

140. 840.

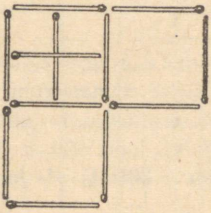
141. Vt. joon. 321. Ka teised lahendused on võimalikud.

142. Esimene lahendus. Kaheteistkümnest tuletikust tuleb algul teha täisnurkne kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 tikku (joon. 322). Selle kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 4) = 6$ ruutühikut.

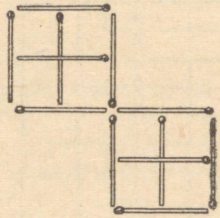
Kui nüüd võtta neli täisnurka moodustavat tikku ja paigutada nad nii, nagu on näidatud joonisel 322, siis on tekkinud kujund kolmnurgast kolme ruutühiku võrra väiksem. Joonisel viirutatud osa pindala ongi seega 3 ruutühikut!



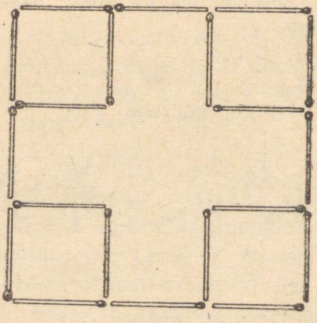
Joon. 295.



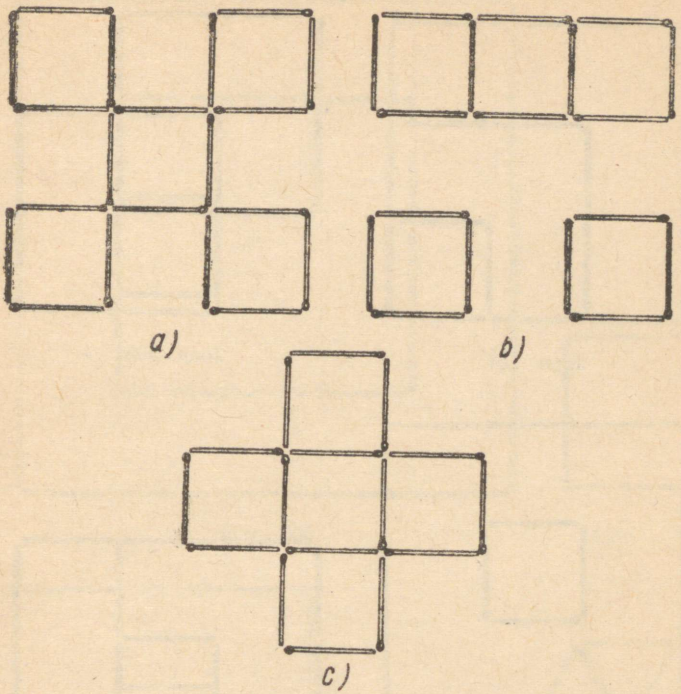
Joon. 296.



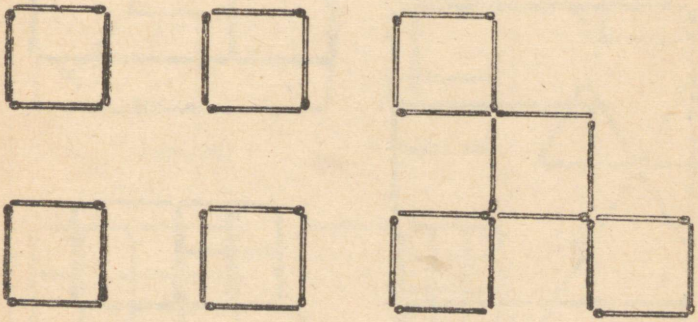
Joon. 297.



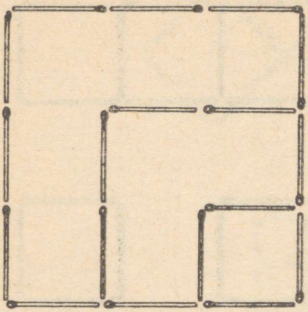
Joon. 298.



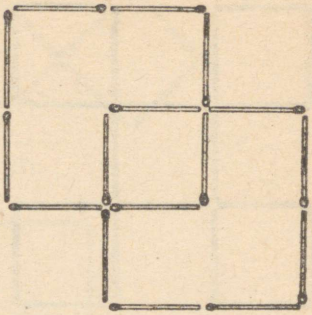
Joon. 299.



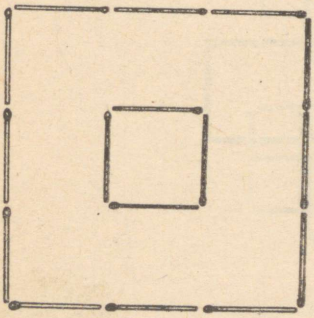
Joon. 300.

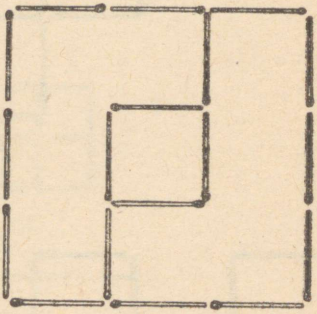


Joon 301.

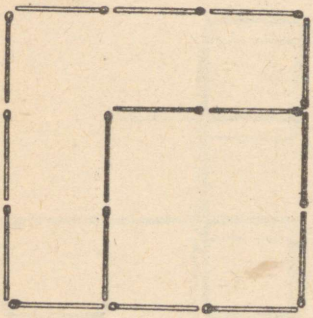


Joon. 303.

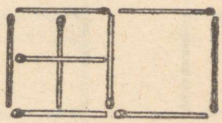




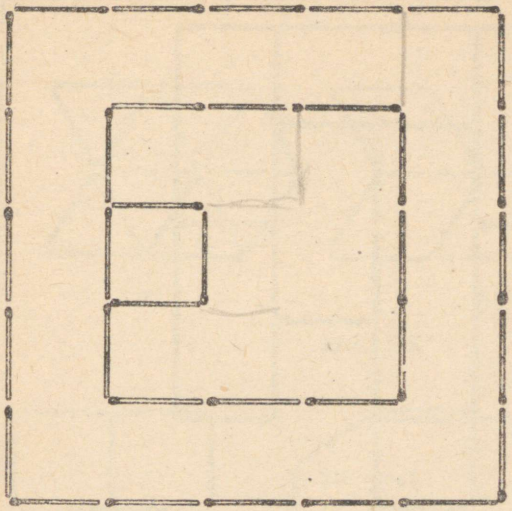
Joon. 304.



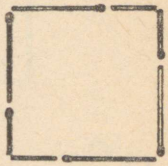
Joon 302.



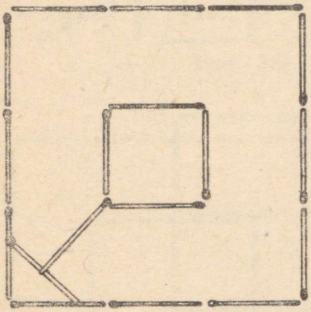
Joon. 305.



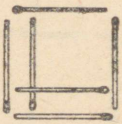
Joon. 306.



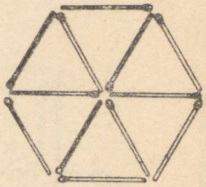
Joon 310

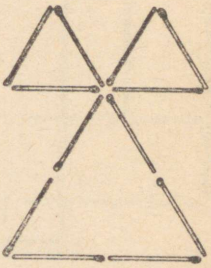


Joon. 307.

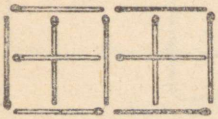


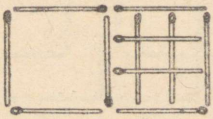
Joon. 308.



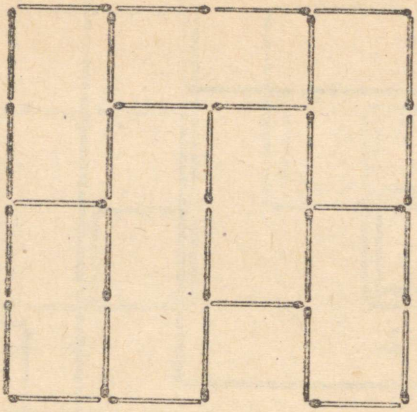


Joon. 311.

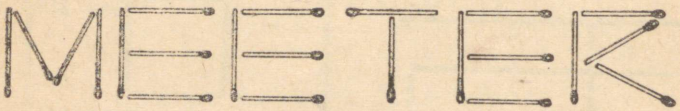




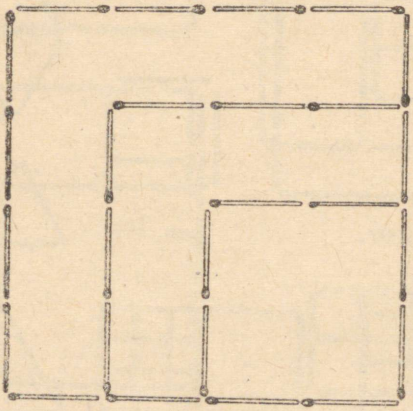
Joon. 309.



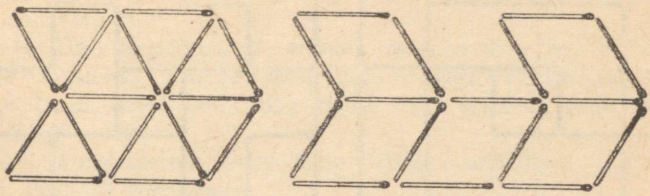
Joon 312.



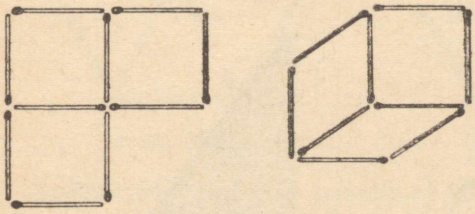
Joon 313.



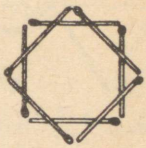
Joon. 314.



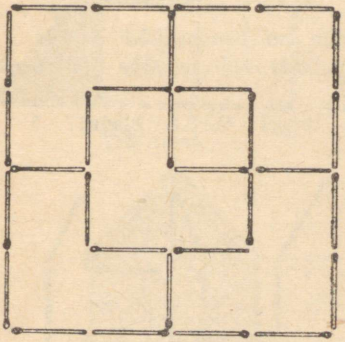
Joon. 315.



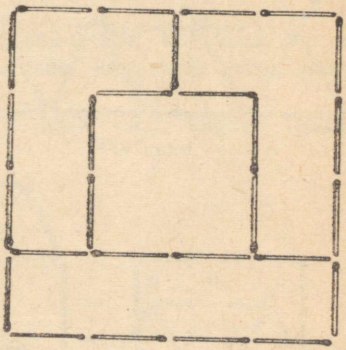
Joon. 316.



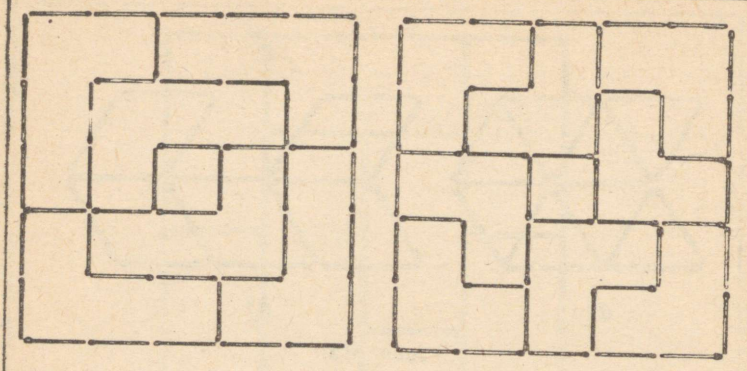
Joon. 317.



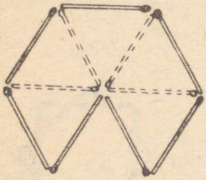
Joon. 318.

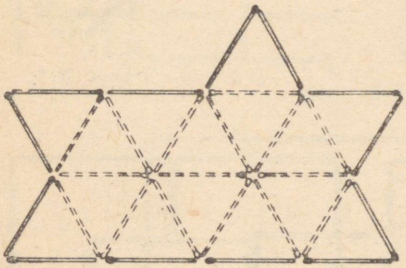


Joon. 319.

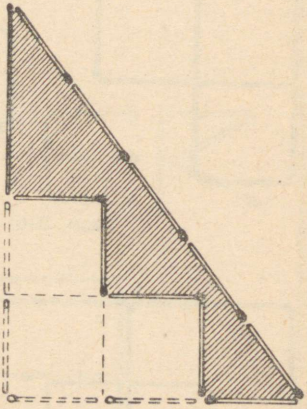


Joon 320

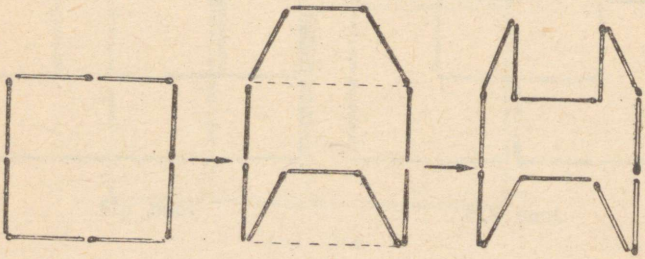




Joon. 321



Joon. 322

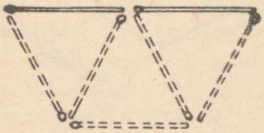


Joon 323

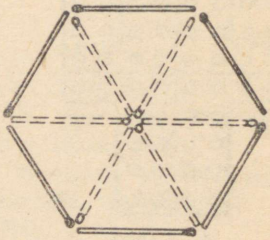
Teine lahendus. Teravmeelse lahenduse esitas «Pähklite» lugeja insener N. I. Aržanov (Leningrad). Ta tegi nelja ruut-ühikulise ruudu (joon. 323), muutis selle pindvõrdseks kujundiks ning vähendas siis kahe ülejäänud tiku abil selle kujundi pindala ühe ühiku võrra.

143. Ühel sirgel asuvate tikkude vaheline nurk on 180°. Selle nurga saamiseks ehitage kolm ühise tipuga võrdkülgset kolmnurka (joon. 324). Ühise tipu juures ongi nurkade summa 180°, sest $3 \cdot 60° = 180°$.

144. Konstrueerime kuus ühise tipuga võrdkülgset kolmnurka (joon. 325) ja kõrvaldame kõik sisemised tikud.



Joon. 324.



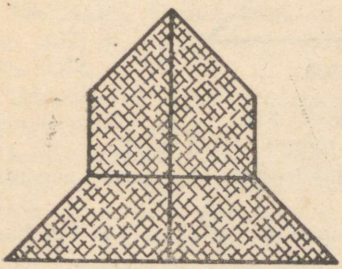
Joon. 325.

Järelejäänud kujund ongi korrapärane kuusnurk, sest iga kujundi serv on võrdne ümberjoonestatud ringi raadiusega, missugune omadus on aga ainult korrapärasel kuusnurgal.

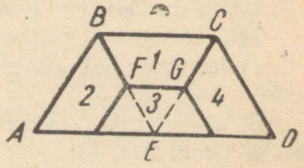
IV peatüki juurde

145. 1. Lõikejooned on näha joonisel 326. Kui kogu töö on täpne, siis võib saadud tükkide võrdsust kontrollida lihtsa peale-asetamisega.

2. Trapets *ABCD* (joon. 327) tuleb lahti lõigata lõikude



Joon. 326.

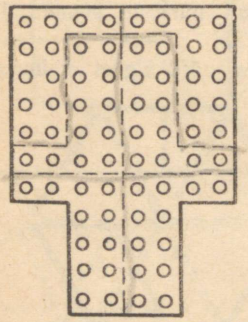


Joon. 327.

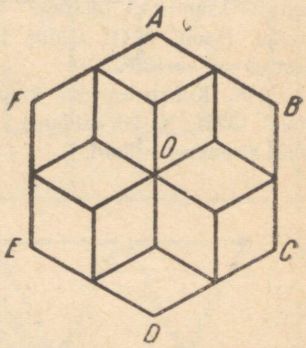
AE, *BE*, *CE* ja *DE* keskpunkte ühendavat murdjoont pidi ning veel piki jooni *BF* ja *CG*. Nii saame neli võrdset trapetsit.

Võrdsust võib kontrollida pealeasetamisega. Need, kes tunnevad geomeetriat, võivad võrdsust tõestada päris lihtsalt ka harilikul matemaatilisel viisil.

3. Lõikejooned on näidatud joonisel 328.



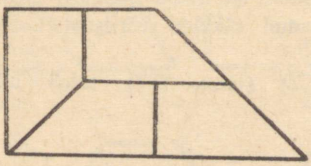
Joon. 328.



Joon. 329.

4. Et leida korrapärase kuusnurga *ABCDEF* (joon. 329) vajalikke lõikejooni, tuleb ta külgede keskpunktid ühendada raadiuste *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE* ja *OF* keskpunktidega. Iga kuusnurga tükk kujutab endast rombi (seda võib kas kontrollida või tõestada). Romb ei ole korrapärane nelinurk, sest hoolimata külgede võrdusest, pole ta nurgad võrdsed.

5. Lahendus on toodud joonisel 330.



Joon. 330.

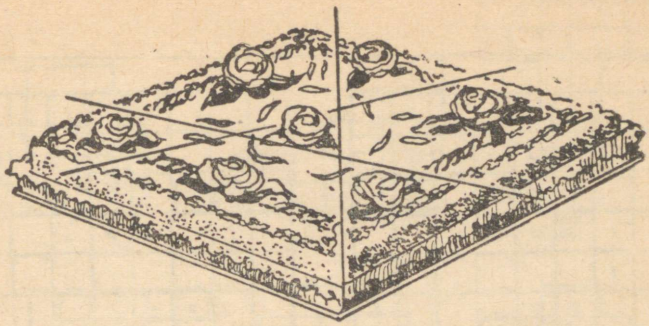
146. Lahendus on toodud joonisel 331.

147. Lõikejoone taastame järk-järgult (joon. 332):

a) märgime lõikejooned kõrvutiasetsevate ühesuguste numbrite vahel (joon. 332, *a*);

b) sümmeetriale vastavalt kordame iga lõikejoont veel kolmes kohas (joon. 332, *b*);

c) lahutame joontega üksteisest neli keskmist ruutu, sest nad peavad kõik kuuluma erinevatesse kujunditesse; lõpuks tõmbame



Joon. 331.

viimased eraldusjooned, pidades silmas, et nurgaruudud peavad kuuluma erinevatele kujunditele ja et igas kujundis peavad neli numbrit 1, 2, 3, 4 esinema üks kord (joon. 332, *c*).

148. Vaheseinad on joonisel 333 tähistatud punktiirjoontega.

149. Proovimise teel on kerge veenduda, et ristkülikut saab koostada kuuest plaadist nr. 1 (joon. 334).

Joonisel 94 toodud kujund *III* jaguneb kolmeks joonisel 93 esitatud plaadiks nr. 3, kujund *IV* jaguneb neljaks plaadiks nr. 5, kujund *V* jaguneb kuueks plaadiks nr. 6, kujund *VI* jaguneb neljaks plaadiks nr. 2. Kõik vajalikud lõiked on esitatud skemaatiliselt joonisel 335.

150. Vasja taipas, et ristkülikukujuline vineeritahvel tuleb lõigata pooleks trepikujuliselt (joon. 336).

Tuleb märkida, et ristküliku trepikujuline tükeldamine ei vii alati sihile. Raamatus «Удивительный квадрат» on näidatud, et iga ristküliku jaoks leidub siiski võte, kuidas teda teisendada ruuduks.

151. Lõikejooned on joonisel 337 tähistatud punktiirjoontega.

152. Lõikejoon on toodud joonisel 338.

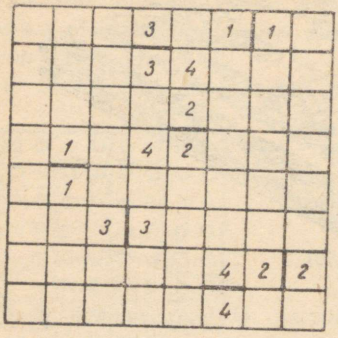
153. Antud kujund tuleb tükkideks lõigata piki joont *abcde* (joon. 339, *a*), kus *b*, *c* ja *d* on kujundit moodustavate ruutude keskpunktid.

Lahtilõigatud osasid vastavalt joonisele 339, *b* paigutades saamegi nõutud raami.

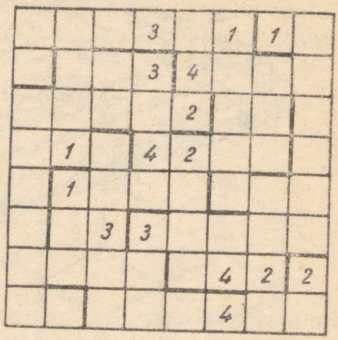
Leidke samadel tingimustel teine lõikejoon.

154. Siin ei saa piirduda hobuseraua skemaatilise kujutamisega kaarena (joon. 341). Kui te ei anna hobuserauale vajalikku ruumilisust, siis kuidas te ka ei püüaks, teil ei õnnestu hobuserauda lõigata rohkem kui viieks tükiks.

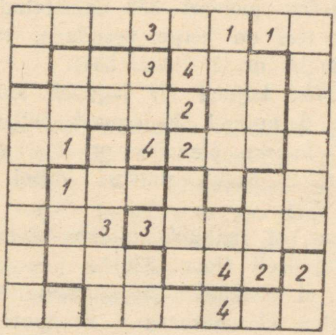
Samal joonisel on toodud reaalsusele lähedasem kujutus ja



a)

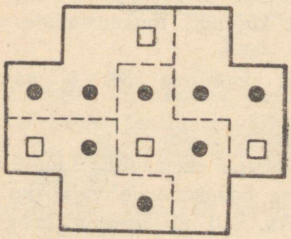


b)

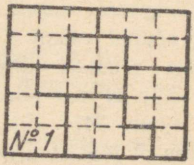


c)

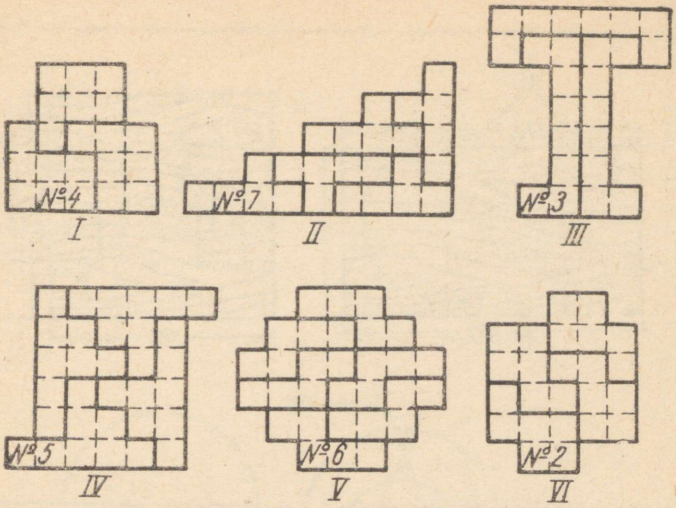
Joon. 332.



Joon. 333.



Joon. 334.



Joon. 335.

on ühtlasi ka näidatud sobiv lõikeskeem, mis garanteerib kuue tüki saamise.

155. Lugeja peab tähele panema, et erinevalt eelnevast ülesandest puudub siin tükkide liigutamise keeld peale teostatud lõiget. Selles peitubki lahenduse saladus.

Esimese lõikega eraldame hobuseraua osa, mis sisaldab auke *A* ja *D* (vt. joon. 98, lk. 100). Hobuseraud laguneb sellega kolmeks tükiks. Asetame need tükid nii, et augud *B*, *A* ja *E* oleksid ühel sirgel ning augud *C*, *D* ja *F* teisel sirgel. Sellise paigutuse korral on teise lõikega kerge saada kuut nõutavat tükki.

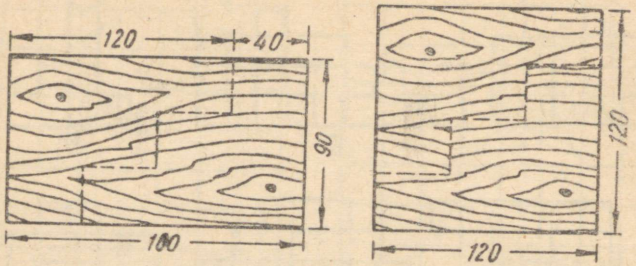
156. Lahendus on toodud joonisel 340.

157. Lahendus on esitatud joonisel 342. Lõikejooned on tähistatud punktiirjoontega. Võrdsed tükid kannavad ühesuguseid numbreid.

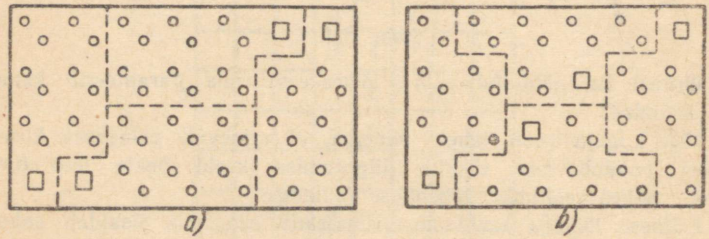
Lõikejoone *MN* tõmbamiseks kandke küljele *AB* lõik $AM = KL$ ning tõmmake sirge läbi punktide *K* ja *M*. Lõikejoone *NP* saamiseks tuleb tõmmata sirge läbi punktide *N* ja *F*. Ülejäänud lõikejoonte saamisviis on joonisel selgesti näha. Kui kujund oli kopeeritud täpselt, siis on nurk *MNP* täisnurk ning lõigud *MB*, *BN*, *NC* ja *CP* on võrdse pikkusega.

158. Lahendus on toodud joonisel 343.

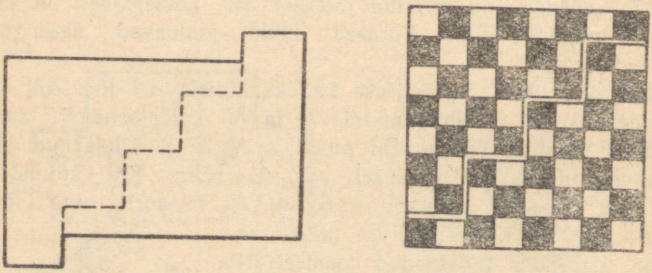
159. Lahenduse leiate jooniselt 344. Kui ülemist hambulist osa tõsta ühe «hamba» võrra paremale, siis vaip omandabki ruudu kuju.



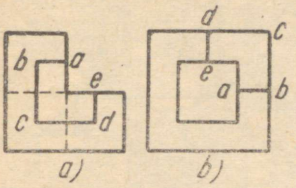
Joon. 336.



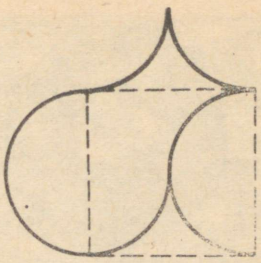
Joon 337.



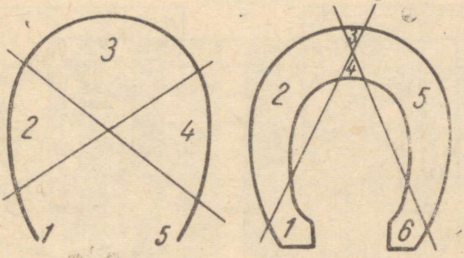
Joon. 338.



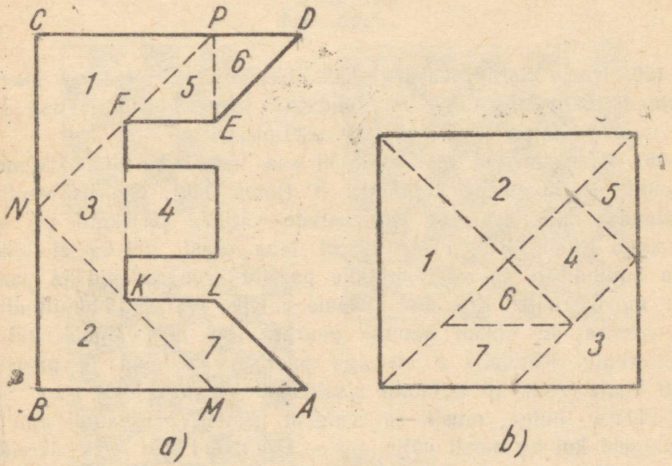
Joon. 339.



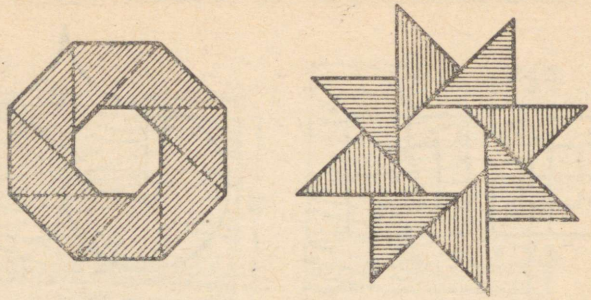
Joon. 340.



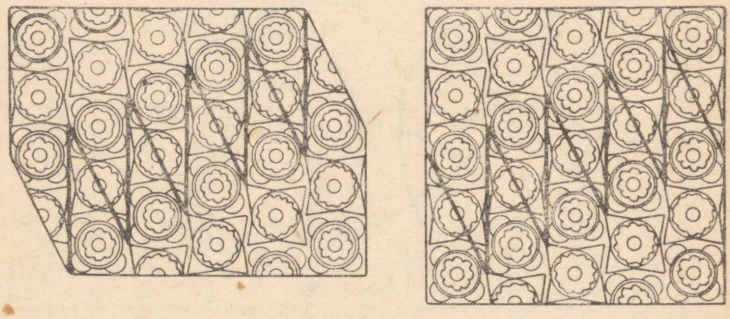
Joon. 341.



Joon. 342.



Joon. 343.

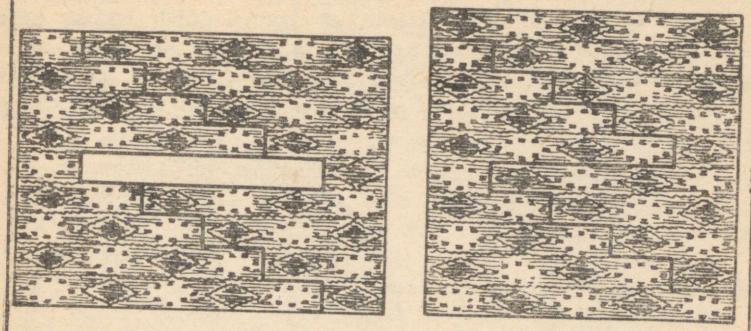


Joon. 344.

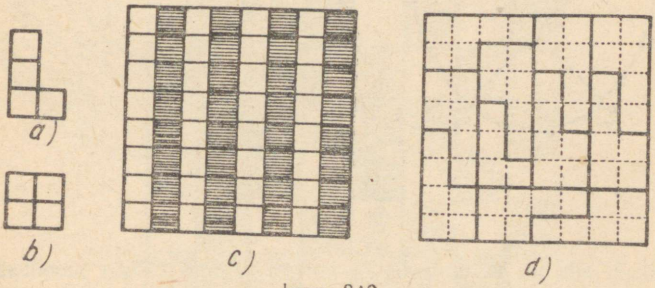
160. Nuria Saradževa tegi kaks trepikujulist lõiget ja ühendas tekkinud tükid nii, nagu on näidatud joonisel 345. Astme laius on 20 sentimeetrit ja kõrgus 10 sentimeetrit.

161. Tõestame, et malelauda ei saa tükeldada viieteistkümneks kujundiks *a* ja üheks kujundiks *b* (joon. 346). Selleks vaatleme malelauda, millel valgete ja mustade väljade järjekord on veidi muudetud (joon. 346, *c*). Millisest laua osast me ka ei lõikaks välja kujundit *a*, ta sisaldab ikka paaritu arvu valgeid ja paaritu arvu musti ruute. Kui me lõikame niiviisi välja 15 kujundit *a*, siis nendes on kokku samuti paaritu arv nii valgeid kui ka musti ruute. Kujundis *b* on aga paarisarv valgeid ja paarisarv musti ruute. Kõik 16 kujundit sisaldavad seega kokku paaritu-arvulise hulga musti ja valgeid ruute. Malelaual aga on nii valgeid kui ka musti välju paarisarvuline hulk. Järelikult pole see ülesanne lahendatav.

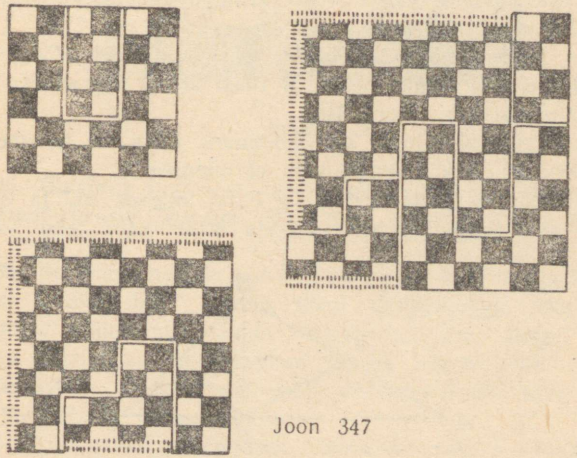
Lisaülesande üks lahendusi on toodud joonisel 346, *d*. Täisjooned märgivad lõikejooni.



Joon. 345.



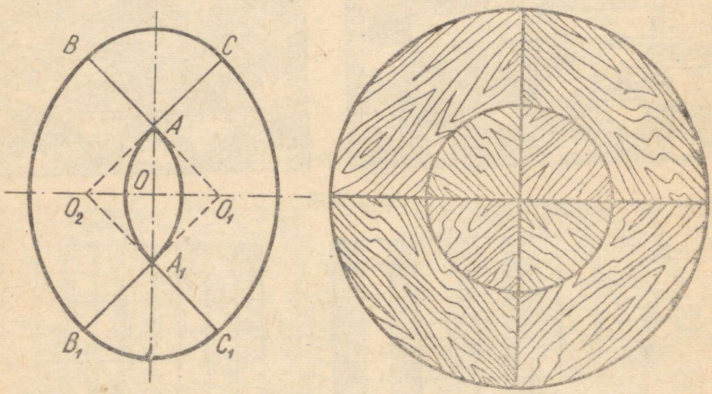
Joon. 346.



Joon 347

162. Lahendusskeem on toodud joonisel 347. Kitsas valge riba tähistab lõikejoont; narmastatud ääred on viirutatud.

163. Tisler pani algul tähele, et laud kujutab endast kahe sümmeetriateljega kujundit. Seejärel ta avastas, et kui avause pikem pooltelg (OA joonisel 348) paigutada ristteljele ($OO_1 = OA$ ja $OO_2 = OA$) ja tõmmata sirged läbi punktide O_1 ja A ning



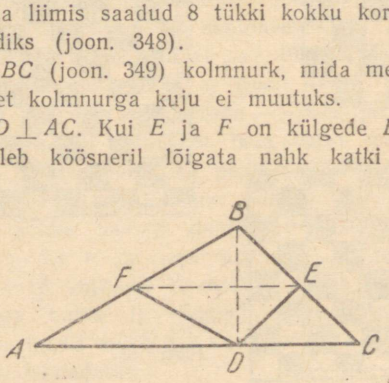
Joon. 348.

O_2 ja A, siis nii kujund BO_1B_1 kui ka kujund CO_2C_1 moodustavad parajasti veerandi ringist raadiusega O_1B. Kujundid ABC ja $A_1B_1C_1$ aga moodustavad veerandi ringist raadiusega A_1B_1 (seal-juures $A_1B_1 = {}^1/_2\ O_1B_1$).

Tisler lõikas mõlemad lauad piki jooni BA, CA, B_1A_1 ja C_1A_1 tükkideks ja liimis saadud 8 tükki kokku korralikuks ümmarguseks lauaplaadiks (joon. 348).

164. Olgu ABC (joon. 349) kolmnurk, mida me tahame niiviisi ümber pöörata, et kolmnurga kuju ei muutuks.

Tõmbame $BD \perp AC$. Kui E ja F on külgede BC ja AB keskpunktid, siis tuleb köösneril lõigata nahk katki piki jooni DE

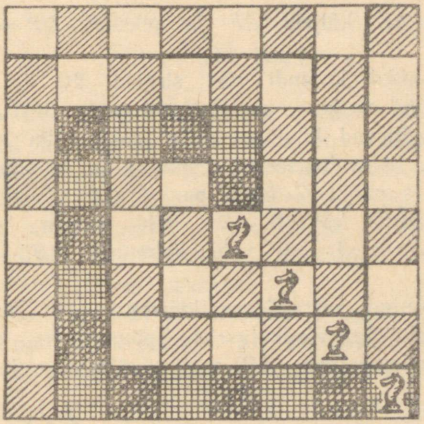


Joon. 349

ja *DF*, iga tükk oma kohal ümber pöörata ja uuesti kokku õmmelda. Siis on karusnahatüki *ABC* karv väljapoole pööratud ja esialgne kuju on säilitatud. Seda võib tõestada täiesti rangelt.

On teada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile langetatud mediaan võrdub poole hüpotenuusiga. *DF* ja *DE* ongi täisnurksete kolmnurkade *ABD* ja *BDC* mediaanideks ja järelikult $DF = AF = FB$ ning $DE = BE = CE$. Siit järeldub, et $\triangle FBE = \triangle FDE$ ja et kolmnurgad *AFD* ning *DEC* on võrdhaarsed. Tähendab, kui võrdhaarseid kolmnurki *AFD* ja *DEC* pöörata ümber nende kõrguste ja nelinurka *FBED* ümber telje *FE*, siis igaüks neist kujunditest asub täpselt oma endisele kohale.

Kolmnurga «pahempidi» pööramise ülesannet võib lahendada ka teiste võtetega, kuid siintoodu on neist kõige ökonoomsem.



Joon. 350.

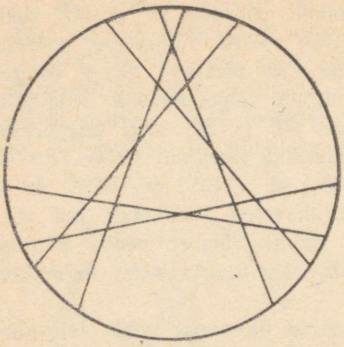
165. Ülesande tingimusi rahuldavad lõikejooned on joonisel 350 tõmmatud rasvase joonega. Üks tükk on ilmekuse mõttes viirutatud.

166. Suurima tükkide arvu saamiseks tuleb sirged tõmmata nii, et igaüks neist lõikuks kõigi ülejäänutega. Sealjuures ei tohi ühtegi lõikepunkti läbida rohkem kui kaks sirget.

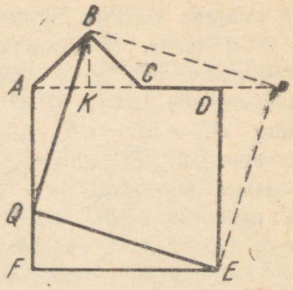
Üks võimalikke lahendusi on toodud joonisel 351.

Tõmmatud jooned paiknevad sümmeetriliselt ning jaotavad ringi kahekümne kaheks tükiks.

167. Lõikamisviis sarnaneb ülesande tekstis tooduga (vt. lk. 107). Leiame lõigu *AC* keskpunkti *K* (joon. 352). Kanname



Joon. 351.



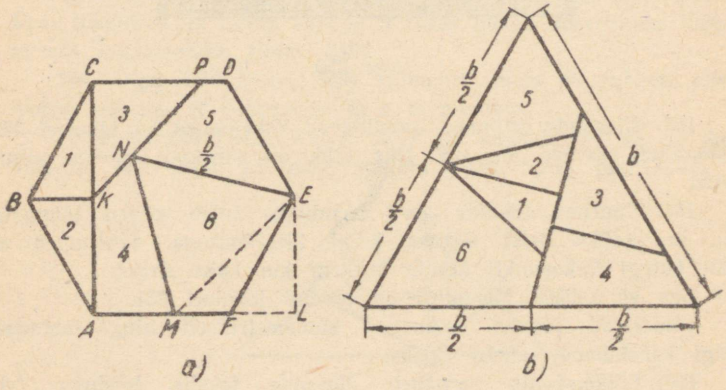
Joon. 352.

pikkuse $FQ = AK$ küljele AF ja pikkuse $DP = AK$ külje CD pikendusele.

Lõikame nüüd kujundi piki sirgeid BQ ja QE tükkideks. Saadud tükkidest on kerge moodustada ruutu $BPEQ$. Kes tunnevad geomeetriat, mõtlevad kindlasti selle jaoks välja ka tõestuse.

M ä r k u s. Lahendusmeetod ei muutu, kui kolmnurkne eend ABC on nii suur, et punkt C ühtib punktiga D. Isegi juhul, kui AC on pikem ruudu küljest AD (kuid vähem kui AD võrra) kõlbab sama meetod, kui vaid kolmnurk ABC on võrdhaarne ja täisnurkne.

168. On antud korrapärane kuusnurk $ABCDEF$ (joon. 353). Et teda teisendada võrdkülgseks kolmnurgaks, selleks toimime järgmiselt: tõmbame joone AC, seejärel tõmbame jooned $BK \perp AC$,



Joon. 353.

$EL \perp AF$, $LM = LE$; tõmbame joone EM; ehitame võrdkülgse kolmnurga EMN, mille külje pikkuseks on EM ja, lõpuks, tõmbame lõigu KP kui KN pikenduse lõikumiseni küljega CD.

Kontrollimiseks võime kasutada asjaolu, et kui kõik konstruktsioonid on teostatud õigesti, siis $CP = CK$.

Lõikejooned on joonisel 353, *a* kujutatud täisjoontega, abijooned punktiirjoontega. Kuidas neid kuut tükki pärast kokku panna, seda näete jooniselt 353, *b*.

Kopeerige kuusnurk paksule paberile või kartongile ja lõigake ta märgitud tükkideks. Sellega on teil valmis väike ülesanne sõprade jaoks: nendest tükkidest koostada kas korrapärane kuusnurk või võrdkülgne kolmnurk.

Kes soovib ülesande sisusse veidi sügavamalt tungida, see võib toodud konstruktsioonide õigsust tõestada kergesti geomeetriliselt.

V peatüki juurde

169. Vastavalt lokaatorite ekraanide näitudele asub märk 75 kilomeetri kaugusel jaamast *A* ja 90 kilomeetri kaugusel jaamast *B*. Võtame sirkliga joonise 113 (lk. 109) alumisel äärel toodud mastaabilt pikkused 75 ja 90 kilomeetrit ning tõmbame kaks ringjoont. Ühe neist jaamast *A* raadiusega 75 km ja teise jaamast *B* raadiusega 90 kilomeetrit. Ringjoonte lõikepunkt merel määrabki avastatud märgi asukoha.

170. 1) Kuus lõiget; 2) 27 kuubikut; 3) mitte ühelgi; 4) kaheksal (niipalju on kuubil tippe); 5) kaheteistkümnel (niipalju on kuubil servi); 6) kuuel (niipalju on kuubil tahke); 7) üks.

171. Rongid peavad koos veduritega *A* ja *B* teineteisest möödapääsemiseks manööverdama järgmiselt (vt. joonisel 354 toodud skeem):

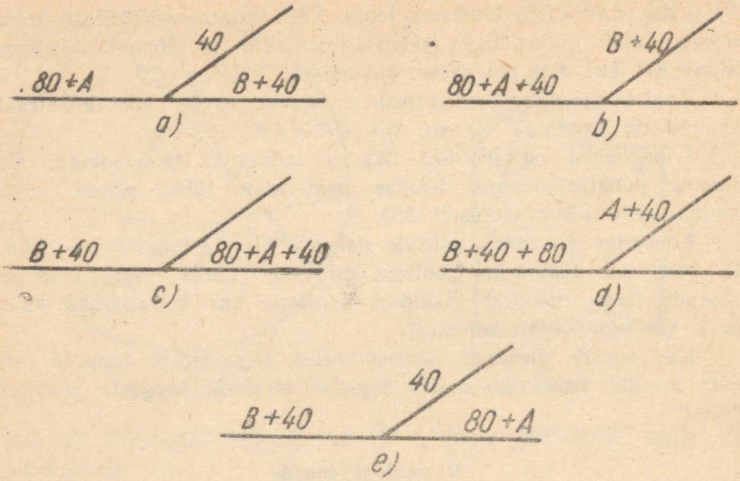
a) Vedur *B* sõidab oma vagunitega üle pöörangu, lükkab seejärel tagurpidi liikudes 40 vagunit tupikusse ning pöördub ülejäänud vagunitega endisele kohale tagasi.

b) Vedur *A* veab tupikust 40 vagunit välja ning vedur *B* sõidab oma 40 vaguniga tupikusse.

c) Vedur *A* sõidab 120 vaguniga vaba teed pidi tupikust mööda. Vedur *B* väljub oma 40 vaguniga peateele.

d) Vedur *A* sõidab nüüd 120 vaguniga tagurpidi vasakule, jätab oma 80 vagunit maha ja viib 40 teisele rongile kuuluvat vagunit tupikusse.

e) Vedur *A* sõidab oma 80 vaguni juurde tagasi, haagib need külge ja sõidab oma teed — paremale.



Joon. 354.

Vedur *B* haagib tupikust oma 40 vagunit rongi sappa ja sõidab edasi vasakule.

172. Vedurijuhi poolt leitud lahendust on kerge jälgida joonisel 355 esitatud skeemi abil, mille kirjeldamisel me kasutame järgmisi tähistusi: valge vagun «*v*», punane vagun «*p*».

1) Vedur läheb teeharule *BC*, haagib külge «*v*» ja viib ta tupikusse *C*.

2) Vedur jätab vaguni tupikusse ja sõidab teeosale *AB*.

3) Vedur sõidab teeosale *AC*, haagib külge vaguni «*p*» ja lükkab selle tupiku juurde.

4) Vedur haagib külge ka «*v*» ja sõidab teele *AB*.

5) Vedur jätab «*v*» teele *AB* maha ja sõidab teeharule *AC*.

6) Vedur lükkab «*p*» tupikusse ja sõidab ise tagasi teele *AB*.

7) Vedur haagib külge «*v*» ja viib ta teele *AC*.

8) Vedur jätab «*v*» teele *AC* ning läheb mööda teed *AB* teele *BC*.

9) Vedur haagib külge «*p*» ja viib ta teele *BC*.

10) Vedur jätab «*p*» teele *BC* ja sõidab ise tagasi teele *AB*.

Leidke iseseisvalt veel mõned lahendused. Ma tean näiteks veel kaht kümnekäigulist lahendusvarianti.

Ülesande lahendamine 6 käiguga (joon. 356).

1) Vedur sõidab teele *BC*, haagib külge vaguni «*v*» ja sõidab teele *AB*.

2) Vedur jätab «*v*» *AB*-le ja sõidab tupiku *C* kaudu teele *AC*.

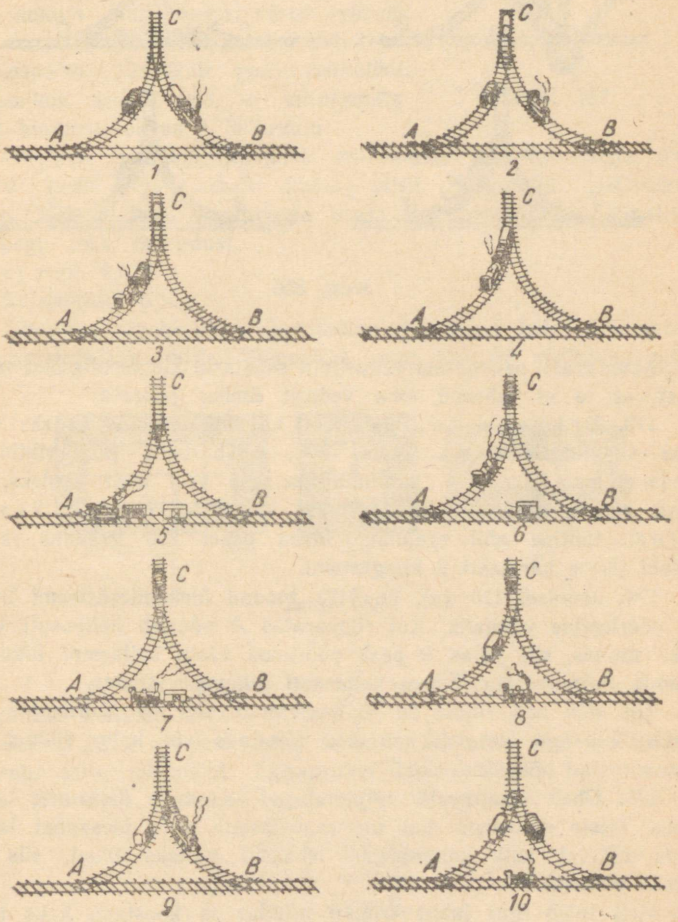
3) Vedur haagib külge «*p*» ja sõidab teele *AB*.

4) Vedur haagib külge ka «*v*» ja sõidab vagunitega «*p*» ja «*v*» teele *BC*.

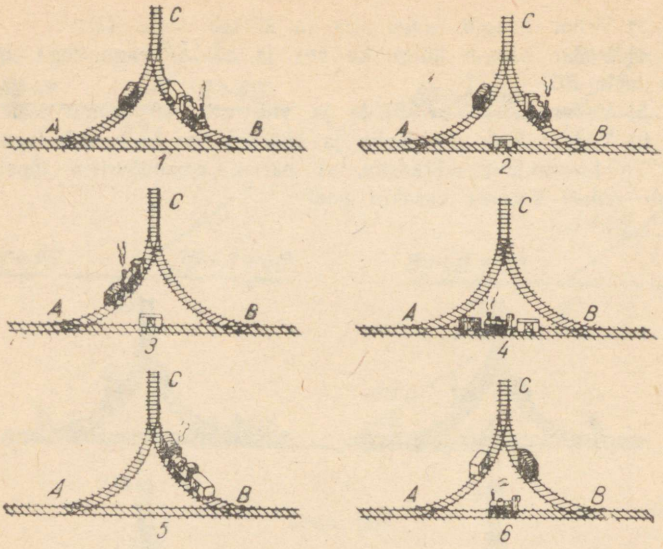
5) Vedur jätab «*p*» *BC*-le ja viib «*v*» *AB* kaudu teele *AC*.

6) Vedur jätab «*v*» maha ja pöördub ise teele *AB* tagasi.

Te loomulikult märkasite, et pärast «manöövrite» lõpetamist asub veduri korsten vasakul pool.



Joon. 355.



Joon. 356.

Arvatavasti sellepärast vedurijuht eelistaski kümnekäigulist lahendust, et ta ei tahtnud oma vedurit ümber pöörata.

173. Esimene kaalumine: kaalume kruubid kaheks võrdseks 4,5-kilogrammiseks osaks (seda saab teha ilma vihtideta). Teine kaalumine: kaalume ühe osa veel kord pooleks. Sel viisil saame kaks 2,25-kilogrammist kogust. Kolmas kaalumine: vihtide abil eraldame ühest osast 250 grammi ja nii jääbki järele parajasti 2 kilogrammi.

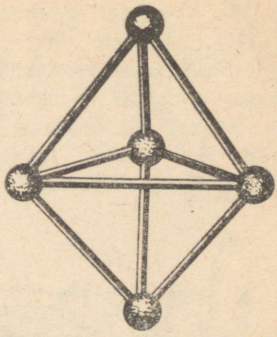
174. Joonisel 116 (vt. lk. 112) toodud ülekandesüsteemi korral on pöörlemine võimalik. Kui rihmaratas *A* pöörleb kellaosuti liikumise suunas, siis ratas *B* peab pöörlema vastu kellaosuti liikumise suunda, rattad *C* ja *D* aga kellaosuti liikumise suunas.

Kui kõik neli rihma on risti asetatud, siis on pöörlemine võimalik, kui aga ristamisi on kas üksainus või kolm rihma, siis ei saa rattad pöörelda.

175. Ühelt tasapinnalt väljumata ei saa seda ülesannet lahendada. Teiste sõnadega, kui me prooviksime seda ülesannet lahendada nii, et kõik kolmnurgad lebaksid näiteks laual, siis see poleks võimalik.

Meil tuleb igal juhul «ruumi minna» ja koostada kaks ühise alusega püramiidi, nii nagu näidatud joonisel 357.

176. Tütarlaps Dzaudžikaust soovitab meil algul võtta suvalise täisarvuliste külgedega ristküliku ja jaotada see ühikruutudeks (joon. 358). Vaatleme nüüd ristküliku ühe ruudu laiust «äärist» (joonisel 358, *a* on see ääris viirutatud).



Joon. 357.

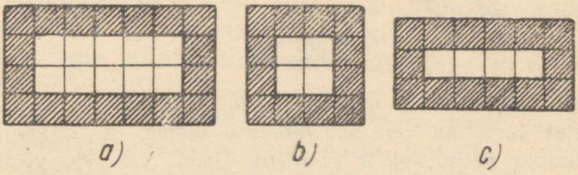
Äärise pindala on juba osa ristküliku pindalast, kuid äärise pindalas on ühikuid alati nelja võrra vähem kui arvus, mis väljendab ristküliku ümbermõõtu. Järelikult peab ristküliku südamikus (joon. 358, *a* viirutamata osa) kindlasti olema 4 ühikruutu.

Otsitava ristküliku südamik on samuti ristkülik. Nelja ühikruutu saab aga ainult kahel viisil paigutada ristkülikuna (joon. 358, *b* ja *c* viirutamata osa). Neid ristkülikuid ääristades saamegi kaks lahendust.

1) ruut 4×4,

2) ristkülik 6×3.

Ülesande algebraline lahendamine viib meid kahe tundmatuga määramatule võrrandile. Tõepoolest, olgu otsitava ristküliku mõõt-



Joon. 358.

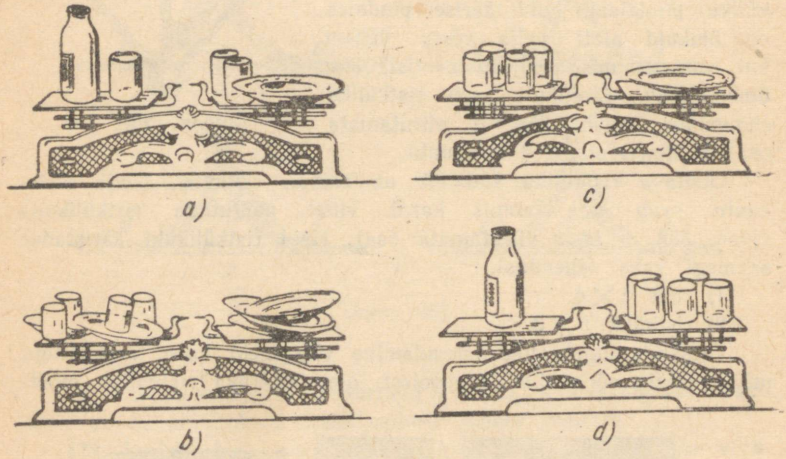
med x ja y. Tema pindala on siis xy ja ümbermõõt $2(x+y)$. Tingimuse kohaselt $2(x+y) = xy$.

Kui x ja y ei pea olema täisarvud, siis on sellel ülesandel lõpmatu hulk lahendeid. Täisarvulisi lahendeid on tal vastavalt meie tütarlapse arutelule aga ainult kolm:

$$x = 4, \quad y = 4;$$
$$x = 6, \quad y = 3;$$
$$x = 3, \quad y = 6.$$

Geomeetrilisest aspektist on viimased lahendused samaväärsed.

177. Tuletame meelde kõik ülesande tingimused (joon. 118, lk. 113). Alustame joonisest 118, *a*, millel on näidatud, et pudel ja teeklaas tasakaalustavad kannu. Teiselt jooniselt (joon. 118, *b*) näeme, et pudel tasakaalustab teeklaasi ja taldriku. Kummalegi poolele veel üht teeklaasi lisades jääb tasakaal püsima. Järelikult pudel ja teeklaas tasakaalustavad taldriku ja kaks teeklaasi (joon. 359, *a*). Võrreldes joonistel 118, *a* ja 359, *a* toodud asetusi,



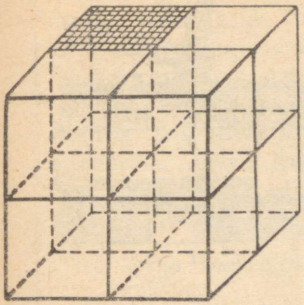
Joon. 359.

näeme, et kann kaalub niisama palju kui taldrik ja kaks teeklaasi. Kui lugu nii on, siis arvesse võttes, et 2 kannu kaaluvad niisama palju kui 3 taldrikut (joon. 118, *c*), võime kohe öelda, et kolm taldrikut tasakaalustavad 2 taldrikut ja 4 teeklaasi (joon. 359, *b*).

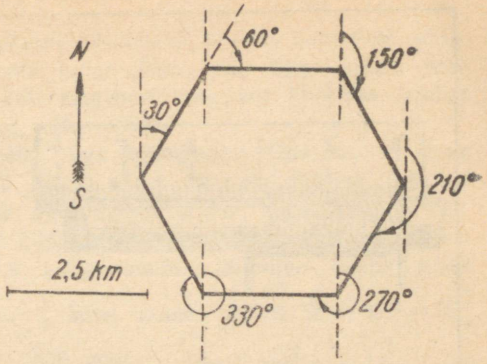
Eemaldame nüüd kummaltki kaaluplaadilt kaks taldrikut (joon. 359, *c*). Joonis näitab, et üks taldrik kaalub niisama palju kui neli teeklaasi.

Pöördume nüüd tagasi joonise 118, *b* juurde. Asetame ühe taldriku asemele 4 teeklaasi. Näeme, et 5 teeklaasi tasakaalustavad pudeli (joon. 359, *d*), järelikult on pudel teeklaasist viis korda raskem. Ühtlasi selgub ka, et kann on teeklaasist kuus korda raskem.

178. Meister tükeldas iga suure kuubi kaheksaks kuubiks (joon. 360). Kuupide tahkude pindala vähenes neli korda, kuid kuna kuupide üldarv kasvas see-eest kaheksakordseks, siis kõikide kuupide välispindala kasvas kahekordseks.



Joon. 360.



Joon. 361.

179. Me täitsime purgi 400 cm³ tähistava kriipsuni veega. Seejärel kallasime purki haavleid, kuni vesi tõusis ülemise kriipsuni. Et purgi maht oli $^1/_2$ liitrit (s. o. ligikaudu 500 cm³), vett selles aga 400 cm³, siis pidi purgis olevate haavlite ruumala võrduma 100 cm³-ga.

180. Nagu jooniselt 361 selgub, saabus seersant samasse punkti, kust ta liikumist alustas.

181. Oksakohtade vahemaa vahetu mõõtmine jooniselt 119 näitab, et oksteväheline kaugus ehk teiste sõnadega puukihi ümbermõõt moodustab $^2/_3$ vineeritahvli laiusest.

Vineeritahvli laius on 150 sentimeetrit. Järelikult oli puukihi ümbermõõt 100 sentimeetrit ja palgi diameeter $d \approx 100 : 3{,}14 \approx 32$ cm.

182. Kroonsirklit detaililt eemaldamata teeme ühele ta haarale pliiatsiga märgi, mis näitab teise haara asukohta.

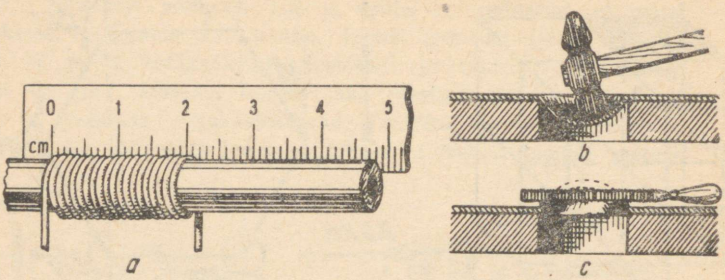
Seejärel eemaldame kroonsirkli, asetame märgi järgi algasendisse ja leiame joonlaua abil otsitava mõõtme.

183. Kui kerida mõned keerud traati õige tihedalt ümber naela või ümmarguse pliiatsi, siis saab traadi läbimõõtu leida ka hariliku joonlaua abil (joon. 362, *a*).

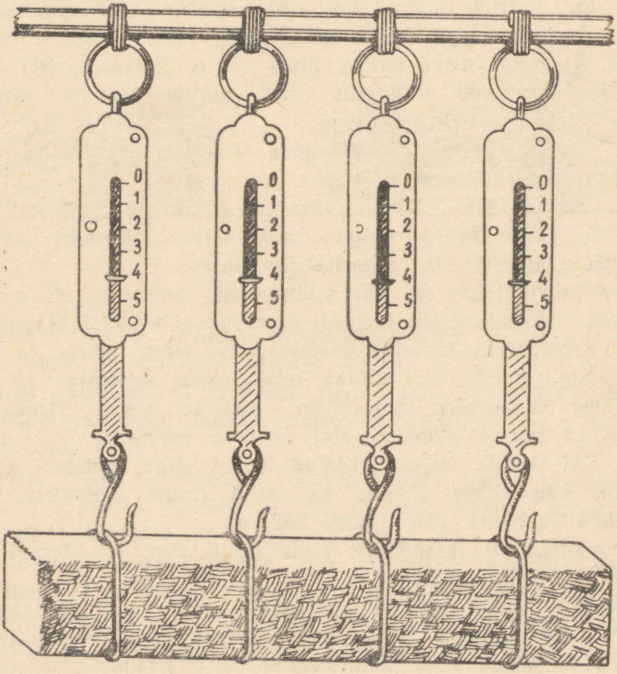
Kui näiteks 20 traadikeeru laius on 6 mm, siis traadi diameeter on 0,3 millimeetrit.

Selleks et ainult haamri ja tasaviili abil teha plekitahvlisse ümmargust auku, tuleb plekk panna ümmarguse auguga alusele ja taguda haamriga seni, kuni plekisse tekib kuplikujuline süvend (joon. 362, *b*). Seejärel tuleb plekitahvel ümber pöörata ja kuppel maha viilida (joon. 362, *c*).

184. Mingite leiutistega pole võimalik saavutada sajaprotsendilist kütte kokkuhoidu, sest energia ei saa tekkida «mitte-



Joon. 362.



Joon. 363.

millestki». Juba ainult see kaalutlus näitab, et kodanik lähenes asjale mõtlematult.

Kui igaüks neist leiutistest võimaldab teistest leiutistest sõltumatult kokku hoida teatava hulga kütet, siis kõigi kolme leiutise rakendamine annab küll suuremat kasu kui üheainsa leiutise rakendamine, kuid muidugi mitte 100%.

Õige kalkulatsioon oleks aga niisugune. Oletame, et enne leiutiste kasutuselevõtmist kulus kütet 100 kg. Pärast 30%-list kokkuhoidu andva leiutise rakendamist kulub kütet veel 70 kg.

Teine leiutis hoiab 70 kilogrammist kokku 45%, s. t. vähendab kütte kulu $0{,}55 \cdot 70 = 38{,}5$ kilogrammini. Järgmine leiutis hoiab kütet kokku veel 25%, s. t. kütet kulub ainult $0{,}75 \cdot 38{,}5 = 28\frac{7}{8}$ kilogrammi. Üldine kütte kokkuhoid on $100 - 28\frac{7}{8} = 71\frac{1}{8}$ kg ehk teiste sõnadega $71\frac{1}{8}$ %.

Leiutiste rakendamise järekorda võib muuta suvaliselt; näiteks võib kõigepealt rakendada 45%-list, siis 30%-list ja lõpuks 25%-list, see aga ei muuda lõpptulemust.

Veenduge selles!

Kui aga ühe leiutise rakendamise efekt sõltub teiste leiutiste rakendamisest, siis võib praktiliselt nii juhtuda, et kõik kolm leiutist koos rakendatuna annavad niisama palju kasu kui kõige tugevam leiutis üksinda rakendatuna (praegusel juhul 45%).

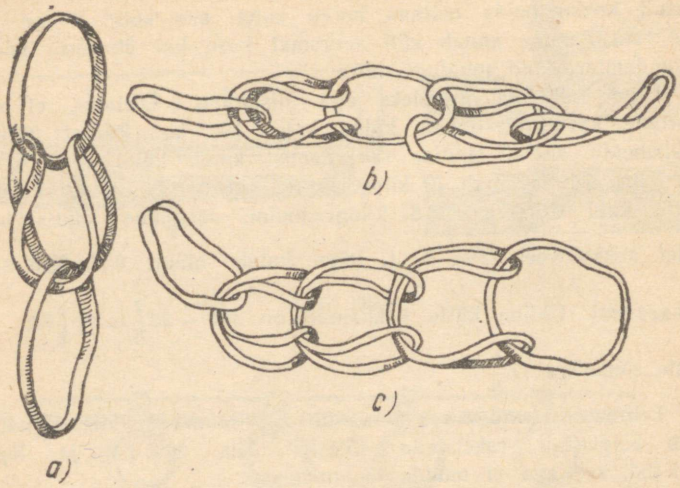
185. Pruss tuleb riputada nelja vedrukaalu konksude otsa (joon. 363). Iga konks võtab enda kanda teatava osa kogukaalust. Kõigi kaalude näitude summa annabki kogukaalu. Joonilselt võime lugeda, et pruss kaalub 16 kilogrammi.

186. Joonisel 364, *a*, *b* ja *c* on toodud vastavalt ülesannete *1*, *2* ja *3* lahendused.

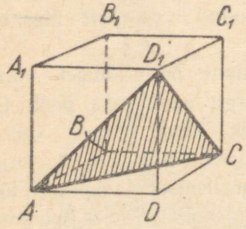
187. 1) Korrapärast viisnurka on kuubi poolitamisel võimatu saavutada. Tõepoolest: korrapärase viisnurga saamiseks peab lõiketasapind läbima viit kuubi tahku. Kõik kuubi tahud on aga paralleelsed ja järelikult saab lõikepinnaks olla ainult kujund, millel on paralleelseid külgi (kui kaht paralleelset tasapinda lõikab kolmas, siis on lõikejooned paralleelsed). Korrapärases viisnurgas aga paralleelseid külgi olla ei saa.

2) Kui kuup läbi lõigata mööda tippe D_1, A ja C läbivat tasapinda (joon. 365), siis saame lõikepinnaks ilmselt võrdkülgse kolmnurga, sest ta külgedeks on võrdsete ruutude diagonaalid AD_1, AC ja D_1C.

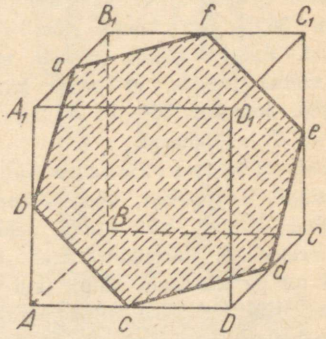
Võrdkülgne kolmnurk tekib ka lõikele AD_1C paralleelse lõike



Joon. 364.



Joon. 365



Joon. 366.

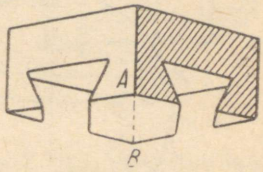
A_1BC_1 korral ja üldse iga lõike puhul, mis on nende lõigetega paralleelsed, kuid **ei asu nende vahel.**

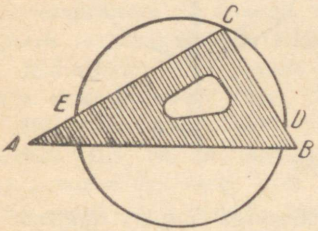
Tehke iseseisvalt kindlaks, missugune kujund tekib, kui lõige on paralleelne lõigetega A_1BC_1 ja AD_1C ning **asub nende vahel.**

Et lõikepinnaks saada korrapärast kuusnurka, tuleb viia tasapind läbi servade A_1B_1, AA_1, AD, DC, CC_1, B_1C_1 keskpunktide *a, b, c, d, e, f* (joon. 336). Teiste servade keskpunkte kasutades võib saada veel kolm korrapärast kuusnurka (kokku neli), kuid kõik nad on ühesuurused.

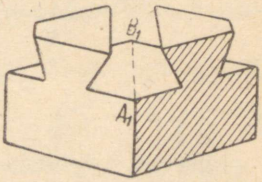
3) Lõiketasapind saab igat kuubi tahku läbida vaid ühel korral. Tahke on üldse 6. Järelikult ei saa kuupi tasapinnaga lõigates kunagi hulknurka, millel oleks üle kuue külje.

188. Asetame joonestuskolmnurga ringjoonele nii, et kolmnurga täisnurkne tipp *C* asuks ringjoone mingis punktis, ning märgime ära kaatetite ja ringjoone lõikepunktid *D*





Joon. 367.



Joon. 368.

ja *E*. Lõik *DE* on ringjoone diameetriks (joon. 367).

Analoogiliselt saab konstrueerida ka teise diameetri. Diameetrite lõikepunkt on ringjoone keskpunktiks.

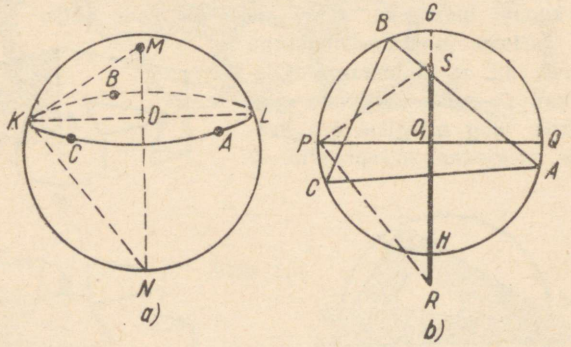
189. Kuna mõlemad kastid on kuubikujulised, siis ühes kastis on reas kolm kuuli, teises 4 kuuli. Ühesugustel kastidel on ka võrdsed servad, järelikult on suurema kuuli diameeter väiksema kuuli omast suurem $\frac{4}{3}$ korda, kaal ja ruumala aga seega $\frac{64}{27}$ korda (sest kere ruumala ja kaal on võrdelised tema diameetri kuubiga).

Arvesse võttes, et iga suur kuul on väikesest raskem $\frac{64}{27}$ korda

ja et suuri kuule on väikestest $\frac{64}{27}$ korda vähem, jõuame järeldusele, et mõlemad kastid on üheraskused.

190. Kuup koosnes joonisel 368 kujutatud osadest. Kuupi saab lahutada tükkideks ainult siis, kui püüda ta osi eraldada diagonaali AB suunas.

191. Asetanud sirkli teraviku suvalisse kera punkti M, tõmbame ta pinnale vabalt valitud raadiusega ringjoone, millel valime kolm suvalist punkti A, B ja C (joon. 369, *a*). Nende punktide vahelised kaugused kanname sirkli abil paberile ja moodustame kolmnurga ABC (joon. 369, *b*).



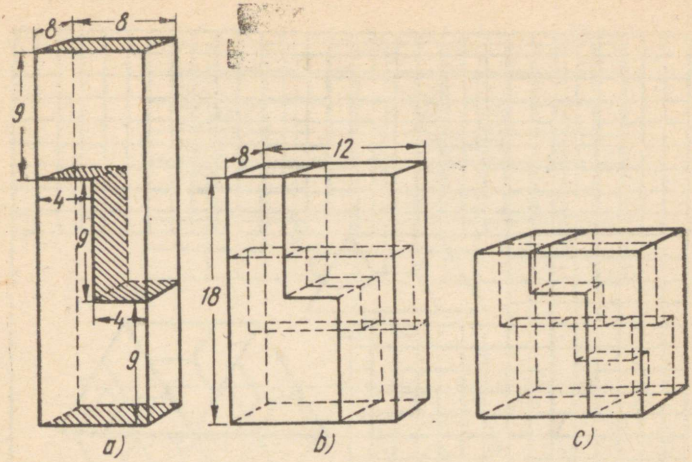
Joon. 369.

Järgnevalt joonestame selle kolmnurga ümber ringjoone ja tõmbame kaks ristuvat diameetrit PQ ja GH. See ringjoon on võrdne kerale joonestatud ringjoonega, järelikult $PQ = KL$. Vastaku ringjoone punkt P kera punktile K. Mõõdame nüüd sirkliga kauguse KM ja märgime punktist P raadiusega KM sirgel GH punkti S. Joonistame nüüd lõigu $PR \perp PS$ kuni lõikumiseni sirge GH pikendusega punktis R. Lõik SR ongi võrdne kera diameetriga.

Tõepoolest, kui punkt K ühendada diameetri MN otstega, siis tekkinud täisnurkne kolmnurk MKN on kongruentne kolmnurgaga SPR, sest $KM = PS$ ja $KO = PO_1$.

192. Lõikame prussi (risttahuka) vastavalt joonisele 370, *a* kaheks astmeliseks kujundiks, kusjuures astme kõrguseks võtame 9 ja laiuseks 4 sentimeetrit. Ülemist kujundit ühe astme võrra allapoole lastes saame uue prussi mõõtmetega $12 \times 8 \times 18$ cm (joon. 370, *b*).

Saadud prussi lõikame jälle kaheks treppkujundiks, kuid nüüd juba eelnevaga võrreldes ristisuunas. Astme kõrguseks võtame



Joon. 370.

kuus sentimeetrit ja laiuseks 4 sentimeetrit. Iga astmeline kujund laguneb seejuures kaheks tükiks, nii et kokku saab neid 4.

Risttahuka kaht ülemist tükki ühe astme võrra allapoole lastes saamegi kuubi (joon. 370, *c*).

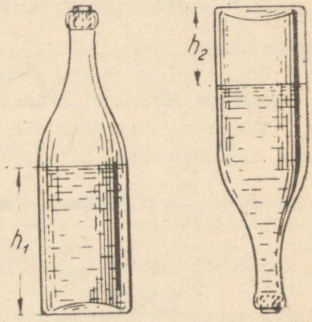
193. Kuna pudeli põhi on kas ringi-, ruudu- või ristkülikukujuline, siis on ta pindala hariliku joonlaua abil kerge leida. Tähistame pudeli põhja pindala tähega s.

Mõõdame vedeliku kõrguse pudelis h_1. Vedeliku ruumala on seega sh_1 (joon. 371).

Pöörame nüüd pudeli põhja püsti ja mõõdame tühja osa kõrguse h_2. Selle osa ruumala on sh_2. Ülejäänud osa pudelist on täidetud vedelikuga, mille ruumala oli sh_1.

Siit järeldub, et kogu pudeli ruumala on

$$sh_1 + sh_2 = s\,(h_1 + h_2).$$

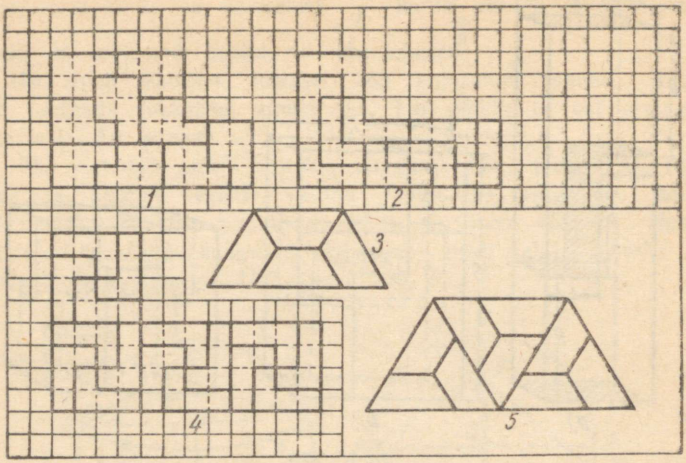


Joon. 371.

194. Lahenduse leiate jooniselt 372.

195. 1) 36.

2) Mõned näited on toodud joonistel 373 ja 374. Selleks et saada ristkülikust algkujundeid P, tuleb joonistada paarisarvulist hulka ühikruute sisaldav ristkülik ($ab = 2n$) ja tõmmata selle



Joon. 372.

tsentrist kaks teineteise suhtes 180° võrra pööratud ühesugust murdjoont (joon. 375). Need murdjooned moodustavad kokku ühe (ristküliku tsentri suhtes sümmeetrilise) murdjoone. See murdjoon jaotab ristküliku kaheks kujundiks P, milles kummaski on $\frac{ab}{2} = n$ ühikruutu.

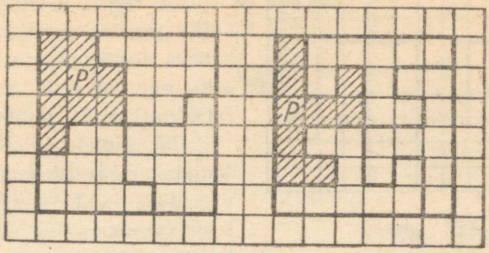
Edasi on võrdsetest ristkülikutest kerge moodustada suurt ruutu ja suurtest ruutudest omakorda kujundit P'.

Kui a on ühikruutude arv ristküliku ühel küljel ja b ühikruutude arv ristküliku teisel küljel, siis on ruudu koostamiseks tarvilik ja piisav võtta $\frac{ab}{m^2}$ ristkülikut, kus m on arvude a ja b suurim ühistegur.

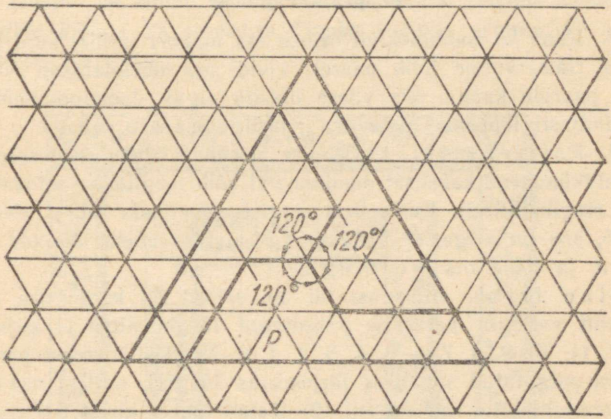
Igas ruudus on $\frac{2ab}{m^2}$ kujundit P ja kogu kujundi P' jaoks on meil seega tarvis $\frac{2abn}{m^2}$ kujundit P, ehk kuna $2n = ab$, siis kulub P' konstrueerimiseks $\frac{a^2b^2}{m^2}$ kujundit P.

Nii näiteks kulub kujundiga P sarnase kujundi P' konstrueerimiseks

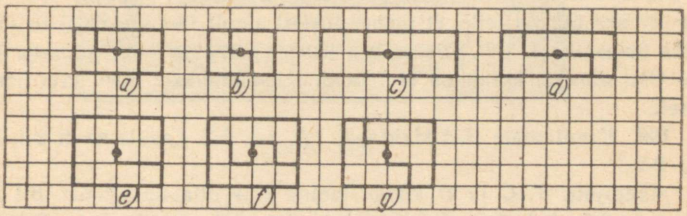
16	joonisel	375, a	toodud kujundit	P,
36	„	375, b, c	„ „	P,
100	„	375, d	„ „	P,
144	„	375 e, f, g	„ „	P.



Joon. 373.

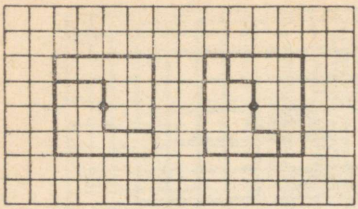


Joon. 374.



Joon. 375.

Üht või teist kujundit P' võib arvatavasti koostada ka väiksemast hulgast kujunditest P, kuid praegusel juhul see meid ei huvitanud. Lisaajaviitena võite seda katselisel teel ise selgitada.



Joon. 376.

Ka ruutu võib nagu ristkülikutki jagada mitte neljaks, vaid kaheks tsentri suhtes sümmeetriliseks kujundiks *P*. Vastava illustratsiooni leiate jooniselt 376.

196. Kuna üheksanurga ja kümmenurga sisenurgad on vastavalt 140° ja 144°, siis neid nurki šarniirseadme abil ühest tipust *A* konstrueerides me saame nurga 4°, Seda nurka kaks korda poolitades saamegi kätte nurga 1°.

VI peatüki juurde

197. Kuna 28 doominokivil esineb iga number nullist kuni kuueni 8 korda (täisarvuline hulk paare), kivid aga ühendatakse võrdsete otstega paaride kaupa, siis viiese otsaga algav doominokivide ahel peab kindlasti lõppema algusotsa paarilisega, s. o. viiega.

198. E s i m e n e t r i k k. Eelmise ülesande lahendusest selgub, et kõiki kahtkümmend kaheksat doominokivi võib reeglitele vastavalt paigutada ringikujuliselt. Kui sellest ringist eemaldada mingi kivi, näiteks 3-5, siis on selge, et ülejäänud 27-kivilise ahela üks ots algab v i i e g a ja teine ots k o l m e g a.

T e i n e t r i k k. Miks asi nii on, sellest on kerge aru saada. Teie poolt vasakult paremale paigutatud 13 doominokivi kujutavad jada 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Nendest kividest paremale poole on paigutatud suvalises järjekorras 12 kivi, millest osa (tingimuse kohaselt mitte rohkem kui 12) tõsteti ümber kivist 6-6 vasakule poole. Enne kivide ümbertõstmist asus ahela keskel tühi kivi, s. t. 0-0.

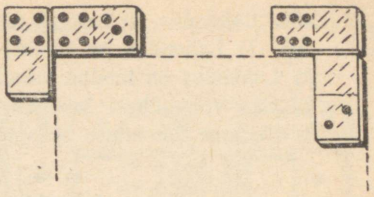
Oletame nüüd, et teie äraolekul tõsteti paremalt poolt üks kivi vasakule. Milline kivi on nüüd ahela keskkohas? Ilmselt 0-1. See number üks ütlebki teile, et ümber tõsteti ainult üks kivi. Kui te sõber tõstis ümber kaks kivi, siis on rea keskel parajasti kahe silmaga kivi jne. Ühe sõnaga, keskmine kivi ütleb teile kindlasti, mitu kivi ümber tõsteti.

199. Kasutamata jäid kivid 0-2, 1-2, 2-5, 6-2. Lauale käidi 2-4, 3-4, 3-2, 2-2.

Mängijate *B*, *C* ja *D* kivide jaotus võis olla niisugune: *B*-l 0-1, 0-3, 0-6, 0-5, 3-6, 3-5; *C*-l 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 ja 3-4; *D*-l 6-6, 5-5, 6-5, 6-4, 5-4, 6-1.

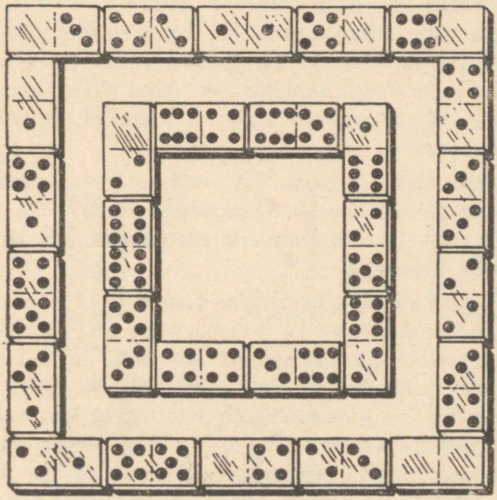
200. Ülemine külg (vasakult paremale): 4-3, 3-3, 3-1, 1-1, 1-4, 4-6, 6-0. Parempoolne külg (ülevalt alla): 0-2, 2-4, 4-4, 4-5, 5-5, 5-1, 1-2. Alumine külg (paremalt vasakule): 2-3, 3-5, 5-0, 0-3, 3-6, 6-2, 2-2. Vasakpoolne külg (alt üles): 2-5, 5-6, 6-6, 6-1, 1-0, 0-0, 0-4. Kuidas

kive kahes ülemises nurgas ühendada, seda näete jooniselt 377.



Joon. 377.

201. Siin on võimalikud mitu lahendusvarianti. Kui te nurkade tippudesse panete igale poole plangu (0 silma), siis te võite koostada niisuguse «ruudu ruudus», mille igal küljel on 21 silma. Kui kaheksas tipus on kokku 8 silma, nagu joonisel 378, siis on igal selle kujundi küljel 22 silma. Igal kujundi küljel on 23 silma, kui kõigis tippudes olevate silmade summa on 16. Tippude summa 24 annab igale küljele 24 silma; tippude summa 32 annab igale küljele 25 silma ja lõpuks tippude summa 40 annab igale küljele 26 silma.



Joon. 378.

Kui me prooviksime konstrueerida «raami raamis», mille igal küljel oleks 27 silma, siis see ei õnnestuks, sest kaheksas tipus peaks sel juhul kokku olema 48 silma, mis aga pole võimalik. Tõepoolest, kui me seitsmesse tippu paneksime isegi kõik kuuelised kivid, jääks ikkagi kaheksanda tipu jaoks üle ainult viieline «ots» ja me saame kokku $6 \times 7 + 5 = 47$ silma.

202. Lahendus on toodud joonisel 379.

203. 1) Lahendus on toodud joonisel 380.

2) Lahendus on toodud joonisel 381. Ruudu konstant on 24.

3) Üks võimalikest lahendustest on esitatud joonisel 382.

4) Esitame lahenduse skemaatiliselt:

3-5	0-3	0-6	2-2	1-5
1-1	2-3	1-6	4-5	0-4
2-6	4-6	0-0	1-2	2-4
0-1	1-3	2-5	3-6	3-3
4-4	1-4	3-4	0-2	0-5

Selles ruudus veerge või ridasid ümber tõstes saame jälle maagilisi ruute, just nagu 16 kivist koostatud ruudu korral (vt. lk. 137).

204. Lahendus on toodud joonisel 383.

205. Lahendus on toodud joonisel 384.

206. Olgu väljavalitud kivi $x - y$. Täidame ülesande tingimustes toodud tehted (vt. lk. 140): 1) $2x$; 2) $2x + m$; 3) $(2x + m)5 = 10x + 5m$; 4) $10x + 5m + y$. Lahutame $5m$. Alles jääb kahekohaline arv $10x + y$, mille kümnelised ja ühelised näitavad väljavalitud kivil olnud silmade arvu.

207. Tingimustest järeldub, et «mõistatatav» silmade summa koosneb kõikide täringute silmade summast lõppasendis pluss mingi täringu kahel vastastahul olevate silmade summa, mis aga teatavasti alati on võrdne seitsmega.

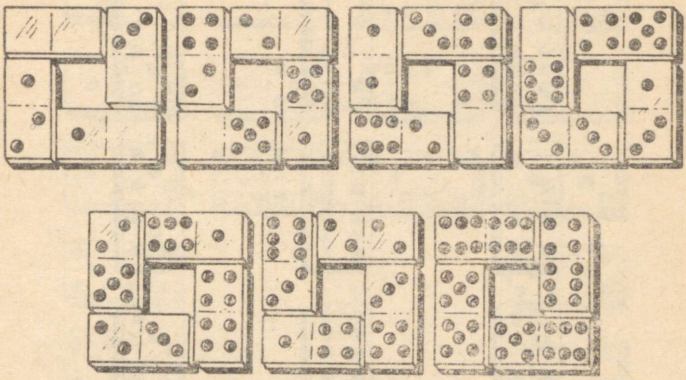
208. a) Varjatud silmade summa leidmine tulba ülemises otsas olevate silmade põhjal. Puutetahkudel ja põhjatahul olevate silmade summa saamiseks tuleb 21-st lahutada tulba otsas olev silmade arv (vt. joon. 151, lk. 143).

Tõepoolest, kui me liidaksime kõigil täringute horisontaaltahkudel olevad silmad, siis me saaksime 21 ($3 \times 7 = 21$). Meie poolt püstitatud ülesandes on aga kõige ülemine horisontaaltahk välja jäetud. Sellel tahul olevat silmade arvu 21-st lahutades leiamegi otsitava summa.

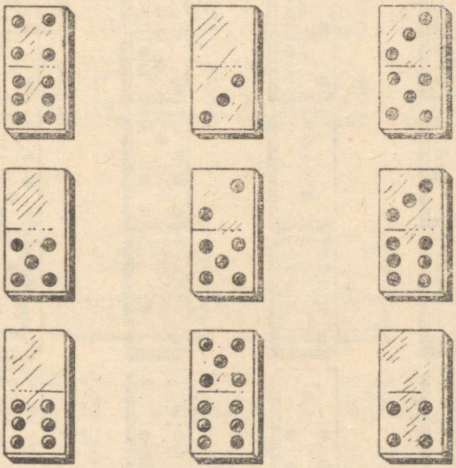
b) Varjatud silmade leidmine kahel külgtahul olevate silmade põhjal.

Isegi «seitsme-printsiibist» kinni pidades võib saada kaks erinevat silmade asetusviisi täringu tahkudel. Asetage täring lauale nii, et «üks» oleks ülemisel tahul. Siis 2 ja 3 võivad paikneda külgtahkudel kas kellaosuti liikumise suunas (joon. 385, *a*.) või vastu kellaosuti liikumise suunda (joon. 385, *b*).

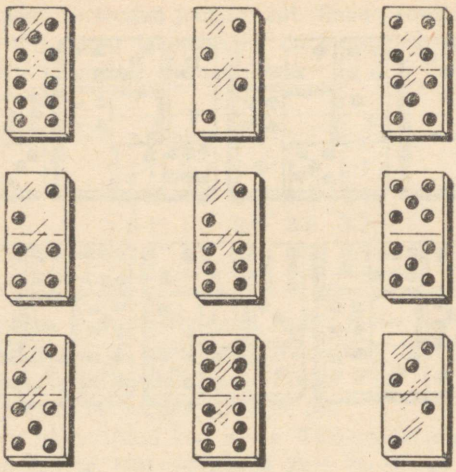
Kui «1», «2» ja «3» on juba täringule paigaldatud, siis ülejäänud silmade asetus on «seitsme printsiibi» põhjal üheselt määratud



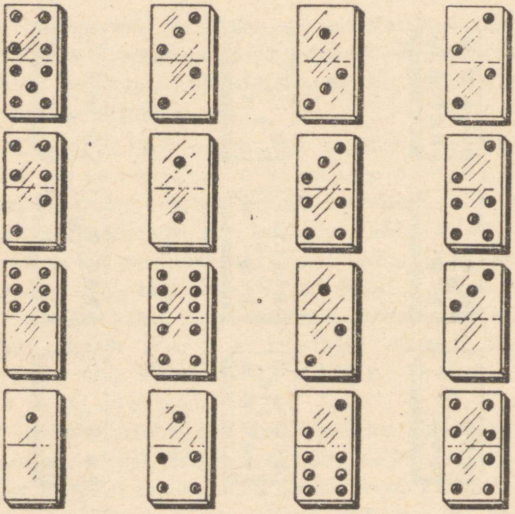
Joon. 379.



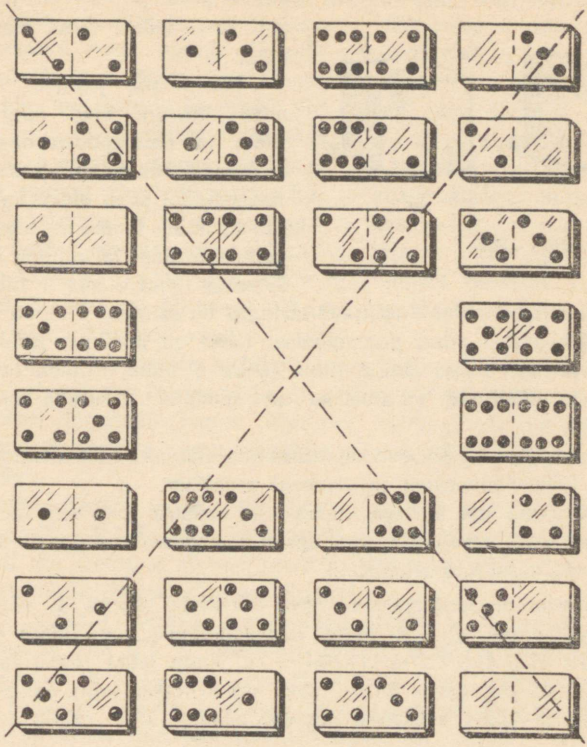
Joon. 380.



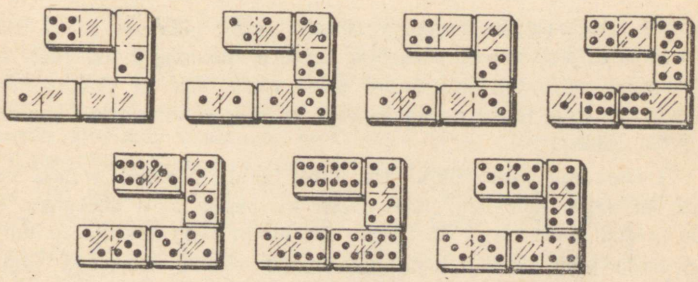
Joon. 381.



Joon. 382.

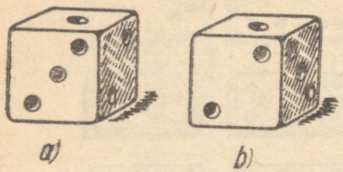


Joon. 383.



Joon. 384.

Kui me teame eelnevalt silmade relatiivset asetust täringu tahkudel, siis piisab meil kahe naaberkülgtahu silmade arvu nägemisest, et leida ülemisel tahul olevate silmade arvu ja «seitsme-printsiibi» abil ka alumisel tahul olevate silmade arvu.



Joon. 385.

Nii näeme joonisel 151 alumise täringu ühel külgtahul 3 silma ja parempoolsel naabertahul 5 silma. Tähendab, vasakpoolsel naabertahul peab olema kaks silma. Kui me nüüd teame, et tegemist on näiteks *a*-tüüpi täringuga, siis peab ülemisel tahul olema 6 silma ning alumisel tahul 1 silm. Keskmisel täringul on esitahul 6 silma ja tagatahul järelikult 1 silm; parempoolsel tahul on 3 silma, järelikult on *b*-tüüpi täringu puhul ülal 2 silma ja all 5 silma, *a*-tüübi puhul aga vastupidi. Eksituste vältimiseks on soovitav kasutada üht tüüpi täringuid.

Loomulikult on selle mõistatamisviisi edukaks rakendamiseks vaja teravat tähelepanuoskust ja eelnevat praktikat.

209. Kuna iga täringu ülemise ja alumise tahu silmade summa on seitse, siis juurdekirjutatud arvud täiendavad esialgselt üleskirjutatud arvu numbreid seitsmeni.

Kui esialgu üleskirjutatud arvu tähistada tähega A, siis juurdekirjutatud arv on $777 - A$, kogu kuuekohaline arv aga $1000A + (777 - A)$ ehk $999A + 777 = 111(9A + 7)$. Nagu näha jagub ta arvuga 111 ja annab jagatiseks $9A + 7$. See arv öeldakse teile. Sellest seitset lahutades ja vahet üheksaga jagades saategi kätte esialgse arvu A.

VII peatükk juurde

210. 1) Arvu üheksaga jagamisel tekkiv jääk on sama, mille me saame ta ristsummat üheksaga jagades (omadus 2, lk. 146). Kui ristsummat vähendati kustutatud arvu võrra, siis ka jääk väheneb selle arvu võrra. Ilmne on ka asjaolu, et jääk ei muutu kui kustutati nulli või üheksa.

2) Omaduse 1(b) põhjal (lk. 146) jagub mõeldud arvude vahe alati üheksaga, tähendab, vahe ristsumma jagub alati üheksaga. Kui teile öeldud arv ei jagu üheksaga, siis ainult tänu kustutatud numbrile, mida võib ilmselt leida ristsummat lähima üheksaga jaguva arvuni täiendades. Kui öeldu jagub ise üheksaga, siis kustutatud number on 9.

Märkuses toodud ülesande variant põhineb omadusel 1 (a) (lk. 146).

3) Tuleb leida saadud vahe ristsumma ($6+9+8=23$). Seda summat lähima üheksaga jaguva arvuni täiendades leiamegi kustutatud numbri. Meie näites: $27-23=4$; kustutati number 4.

Reegel järeldub üheksa omadustest.

4) Igale teie poolt üleskirjutatud arvule ma kirjutan lisaks niisuguse arvu, mille numbrid täiendavad teie arvu numbreid üheksani, siis peab summa jaguma üheksaga. Kui te kustutasite numbri 9, siis jagub summa tõesti üheksaga; kui te aga kustutate mõne muu numbri, siis summa ei jagu üheksaga ja kustutatud numbri võime leida teile öeldud summat lähima üheksaga jaguva arvuni täiendades.

5) Ma kirjutan juurde arvu, mille iga number täiendab vastava tulba numbrite summat üheksani või üheksaga jaguva arvuni. Otsitava arvu leiame harilikul viisil.

6) Alguses tuleb juurde kirjutada veerg numbreid, mis täiendavad iga rea ristsumma üheksaga jaguva arvuni. Terve numbrite veeru asemel võime kirjutada juurde üheainsa numbri, kui me selleks valime juurdekirjutatava veeru numbrite summa üheksaga jagamisel tekkiva jäägi.

Meie näite korral on juurdekirjutatud arvude summa (üheksat välja jättes) $6+4+4+5=19$. Üheksaga jagamisel saame jäägi 1. Järelikult me oleksime võinud terve numbrite veeru 6, 4, 4, 5 ja 9 asemel kirjutada juurde üheainsa numbri 1.

211. Te palusite näiteks arvust 1313 lahutada 48. Saadi 1265. Kirjutati juurde arv 148 ja kustutati näiteks number 6. Jäi järele 125 148. Nüüd tuleb leida selle arvu ristsumma: $1+2+5+1+4+8=21$. Täiendus lähima üheksaga jaguva arvuni on kuus ($27-21=6$), järelikult kustutati number kuus.

Miks see just nii on, sellest on kerge aru saada. Me teame, et arvude lahutamisel liiad lahutuvad ja arvude liitmisel liiad liituvad (vt. omadus 3 (a) lk. 147).

Siin me kirjutame juurde endi poolt kustutatud arvu saja võrra suurendatuna, järelikult on tulemuse jääk ühe võrra suurem kui arvu 1313 jääk. Kuna 1313 numbrite summa on $1+3+1+3=8$ ja jääk on samuti 8, siis enne numbrite kustutamist lõpptulemuses saadud arv jagub kindlasti üheksaga. Kustutatud arvu saame seega jälle leida lähima üheksakordse arvuni täiendamise teel.

On vist päris selge, et lähtearvuks me võisime võtta mistahes muu arvu, mille ristsumma on 8 või annab liiaks kaheksa.

Vahelduseks võib leitud vahele, millest ülesandes juttu on, lisada lõppu ka lahutatud arvu enda (ilma eelneva saja võrra suurendamiseta). Sel juhul tuleb kustutatud numbri leidmiseks kõigepealt rist-

summat suurendada ühe võrra ja alles siis arvutada täiendus lähima suurema üheksaga jaguva arvuni. (Üldjuhul tuleb ristsummale liita lähtearvu üheksaga jagamisel tekkiva jäägi ja üheksa vahe.)

212. 1) Tuleb leida «tulemuste sirgel» asuvate arvude ristsumma ja lahutada see lähimast suuremast üheksaga jaguvast arvust. Tekkiv vahe võrdubki otsitava numbriga.

Asi on selles, et niipea kui on «käiku lastud» kõik numbrid ühest kuni üheksani, on nende ristsumma jaguv üheksaga. Tõepoolest, summa $(1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5)$ jagub ilmselt üheksaga, seega peab «tulemuste sirgel» olevate arvude summa või ristsumma kõigi numbrite kasutamise korral jaguma üheksaga. Kui üks number on välja jäetud, siis on teda kerge leida hariliku täienduse arvutamise võttega. Näiteks on lk. 151 joonisel 154 toodud «tulemuste sirgel» asuvate numbrite ristsumma $1+4+1+4+1+2=13$. Täiendus arvuni 18 on 5, järelikult on otsitav number viis.

2) Otsitav number on 3. Joonisel 156 lk. 152 esitatud «tulemuste sirgel» asuvate numbrite ristsumma on $1+4+1+3+2+5+1+1+3+1+2=24$. Täiendus ja ühtlasi ka otsitav arv on $27-24=3$.

Lahendusmeetodi põhjendus on täiesti analoogiline eelmisele ülesandele.

3) Varasemast käsitlusest on selge, et otsitav arv võrdub teatatud arvu ristsumma täiendusega lähima suurema üheksaga jaguva arvuni.

213. Vaatleme kõigi võimalike tulemuste tabelit:

$11\times 99=$	1	0	8	9
$22\times 99=$	2	1	7	8
$33\times 99=$	3	2	6	7
$44\times 99=$	4	3	5	6
$55\times 99=$	5	4	4	5
$66\times 99=$	6	5	3	4
$77\times 99=$	7	6	2	3
$88\times 99=$	8	7	1	2
$99\times 99=$	9	8	0	1

Nendel korrutistel on järgmised kergesti märgatavad omadused:

1) Tulemuse esimese ja kolmanda ning teise ja neljanda veeru numbrite summa on üheksa.

2) Teine number on esimesest ühe võrra väiksem.

3) Korrutatava numbrid ühtivad korrutise esimeste numbritega.

Nende omaduste teadmine võimaldab ilma tabelisse vaatamata leida ükskõik millist korrutist vaadeldute hulgast üheainsa etteantud numbri järgi.

Oletame näiteks, et tulemuse kolmas number on 5. Tähendab, esimene number on 4 (esimese omaduse põhjal), teine number on 3 (teise omaduse põhjal), neljas number on 6 (esimese omaduse põhjal). Seega otsitav arv on 4356.

Kolmas omadus võimaldab kohe leida ka korrutatavat, ilma et meil oleks vaja tulemust jagada korrutajaga. Antud juhul on korrutatavaks arv 44.

214. Vahe keskmine number on alati 9 ning äärmiste numbrite summa on alati 9 (viimane asjaolu järeldub ka omadusest 1 (b), vt. lk. 146).

Tõepoolest, olgu A, B ja C mingi kolmekohalise arvu numbrid. Kirjutame antud arvu üles niisugusel kujul: $[A]$ $[B]$ $[C]$. Ümberpööratud arv on $[C]$ $[B]$ $[A]$. Olgu $A > C$, siis $[A]$ $[B]$ $[C] > [C]$ $[B]$ $[A]$.

Leiame vahe:

$$\begin{array}{r} [A]\ [B]\ [C] \\ -\ [C]\ [B]\ [A] \\ \hline \end{array}$$

Vahe viimane number on $10 + C - A$ (sest $C < A$ ja järelikult tuleb kümneliste hulgast B üks kümneline laenata). Vahe keskmine number on $10 + (B - 1) - B = 9$ kümneliste hulk vähenes ühe võrra ja lahutamiseks tuleb sajalistelt A võtta 10 kümnelist laenuks).

Seega on vahe keskmine number tõesti alati 9.

Vahe esimene number on $(A - 1) - C$. Esimese ja viimase numbri summa on $A - 1 - C + 10 + C - A = 9$.

215. Kahe ümberpaigutatud numbritega suvalise arvu vahe jagub alati üheksaga. Kerge on kontrollida, et ülesande tingimusi saab rahuldada ainult siis, kui A ja B vanuste vahe on 9 aastat. Kuid siis on C vanus $\frac{1}{2} \cdot 9 = 4\frac{1}{2}$ aastat ja kuna B on 10 korda C-st vanem, siis B on 45 aastat vana ja A on 54 aastat vana.

216. Kas te taipasite, et külaline koostas neid suuri arve niiviisi: arvu keskmiseks numbriks võttis ta suvalise numbri (välja arvatud 0) ja ülejäänud numbrid ta valis nii, et nende summa jagus ühek-

saga jäägitult. Taipamisest üksinda on aga vähe. Te peate ka tõestama, et suvaline niisuguse ehitusega arv vastab tõesti ülesandes püstitatud tingimustele.

Sel eesmärgil meenutame eelkõige, et kui mingi arv S jagub üheksaga, siis jagub üheksaga tema ristsumma S_1. Edasi, kui ristsumma S_1 on mitmekohaline arv, siis tema ristsummat S_2 leides saame arvu, mis peab kindlasti jaguma üheksaga jne.

Seda protsessi jätkates me jõuame paratamatult välja üheksaga jaguva ühekohalise arvuni. Ainsaks üheksaga jaguvaks ühekohaliseks arvuks on aga arv üheksa ise.

Nüüd vaatleme arvu $\overline{\ldots cbaxmnp \ldots}$, mille kõigi numbrite summa, kui keskmine number x välja jätta, on

$$S = \ldots c + b + a + m + n + p \ldots,$$

kusjuures S jagub üheksaga.

Kui S on ühekohaline arv, siis ta peab olema ise üheksa. Kui ta on mitmekohaline arv, siis on ta ühekohaline ristsumma üheksa. Järelikult mõned korrad kõiki arvu $\overline{\ldots cbaxmnp \ldots}$ numbreid kokku liites me jõuame kindlasti arvuni $9 + x$, kus x on antud arvu keskmine number. Arvu $9 + x$ numbrite summa on aga kindlasti x. Tõepoolest, anname arvule $9 + x$ niisuguse kuju: $10 + (x - 1)$. Selle arvu numbrite summa on $1 + 0 + x - 1 = x$.

VIII peatüki juurde

217. Ülesande lahendamist on kõige parem alustada lõpust. Kolmas masina-traktorijaam suurendas esimese ja teise masina-traktorijaama masinate arvu kahekordseks, kusjuures kõigil kolmel masina-traktorijaamal oli võrdselt 24 masinat. Järelikult oli enne seda vahetust esimesel jaamal 12 masinat, teisel samuti 12 masinat ja kolmandal 48 masinat. Selline masinate jaotus tekkis pärast seda, kui teine masina-traktorijaam kahekordistas esimese ja kolmanda masina-traktorijaama masinate hulga. Järelikult oli enne teist vahetamist esimeses jaamas 6 masinat ja kolmandas jaamas 24 masinat. Kuna teine jaam andis esimesele ja kolmandale 30 masinat, siis tal endal oli $12 + 30 = 42$ masinat. Nii jaotusid masinad pärast seda, kui esimene masina-traktorijaam kahekordistas teise ja kolmanda jaama masinate arvu. Järelikult oli teisel ja kolmandal jaamal alguses vastavalt 21 ja 12 masinat ning esimesel jaamal $6 + 33 = 39$ masinat.

218. Ka selle ülesande lahendamist on parem alustada lõpust, arvesse võttes seda, et pärast kolmandat silla ületamist oli laisk-

vorstil täpselt 24 kopikat, mis ta pidi ära andma. Kui laiskvorstil pärast viimast silla ületamist oli täpselt 24 kopikat, siis enne seda oli tal järelikult 12 kopikat. Need kaksteist kopikat jäid talle taskusse pärast seda, kui ta andis ära 24 kopikat. Tähendab, pärast teist silla ületamist oli tal taskus 36 kopikat. Järelikult teist korda asus ta silda ületama 18 kopikaga taskus, kusjuures need 18 kopikat jäid talle taskusse pärast seda, kui ta läks esimest korda üle silla ja andis ära 24 kopikat. Tähendab, pärast esimest üleminekut oli tal $18 + 24 = 42$ kopikat. Siit selgub, et alguses oli laiskvorstil taskus 21 kopikat.

219. Vahetamise lõpul oli igal vennal 8 õuna. Järelikult oli vanimal vennal enne seda, kui ta andis poole oma õuntest noorematele vendadele, 16 õuna. Keskmisel ja noorimal vennal oli ainult 4 õuna. Enne seda, kui keskmine vend jaotas oma õunu, oli tal 8 õuna, vanimal vennal 14 õuna, noorimal 2 õuna. Siit järeldub, et enne kui noorim vend jaotas oma õunu, oli tal 4 õuna, keskmisel vennal 7 õuna ja vanimal 13 õuna. Kuna igaüks sai niipalju õunu, kui vana ta oli 3 aasta eest, siis on noorem vend praegu 7 aastane, keskmine vend 10 ja vanem vend 16 aastane.

220. Pärast padrunite jaotamist kulutasid kolm kütti kokku 12 padrunit. Peale seda jäi kõigil kokku niipalju padruneid, kuipalju oli neid pärast jaotamist igaühel eraldi, s. t. üldine padrunite arv vähenes 3 korda. Teiste sõnadega: jahimehed kulutasid 2 osa padrunitest ja järele jäi 1 osa. 12 padrunit moodustavad 2 osa, järelikult on ühes osas 6 padrunit. See ongi padrunite hulk, mille igaüks sai jagamisel. Järelikult oli enne jagamist üldse 18 kõlblikku padrunit.

221. Vedurijuhtide kohtumise hetkel on konduktorite vaheline kaugus $250 + 250 = 500$ meetrit. Kuna kumbki rong sõitis kiirusega 45 km/t., siis konduktorid lähenevad teineteisele kiirusega $45 + 45 = 90$ km/t. ehk 25 m sekundis.

Otsitav aeg on seega $500 : 25 = 20$ sek.

222. Iga ülesande lahendamise lühidus ja lihtsus sõltub mõttekäigu algpunkti õnnestunud valikust ehk algebra keeles kõneldes tundmatu valikust. Seda ülesannet lahendades paneme tähele, et Veera kirjutas teise poole käsikirjast kolm korda kiiremini ümber kui esimese poole. Tähistame Veera poolt käsikirja teise poole ümberkirjutamiseks kulunud päevade hulga tähega n. Siis kulus Veeral käsikirja I poole ümberkirjutamiseks $3n$ päeva, kusjuures ta kirjutas päevas 10 lehekülge. Pool käsikirja sisaldab seega $3n \times 10 = 30n$ lehekülge ning kogu käsikiri $60n$ lehekülge. Kogu käsikirja ümberkirjutamisele kulus Veeral $3n + n = 4n$

päeva. Järelikult kirjutas Veera suvalise lehekülgede hulga korral keskmiselt $60n : 4n = 15$ lehekülge päevas. Emal oli õigus. Lahendage see ülesanne, valides tundmatuks mõne teise teguri.

223. Oletame, et iga poiss viis laagrisse x seent. Ülesande tingimustest järeldub, et Marusja andis Koljale $x - 2$ seent, Vanjale $x + 2$ seent, Andrjušale $\frac{x}{2}$ ja Petjale $2x$ seent, seega kokku

$$(x-2) + (x+2) + \frac{x}{2} + 2x = 4\frac{1}{2}x.$$

Vastavalt ülesande tingimustele

$$4\frac{1}{2}x = 45.$$

Siit järeldub, et $x = 10$.

Vastus. Kolja sai Marusjalt 8 seent, Vanja 12 seent, Andrjuša 5 seent, Petja 20 seent. Kui jõuti laagrisse, siis oli igal poisil 10 seent.

224. Tihti vastatakse, et mõlemad jõudsid korraga tagasi. Nii mõtlejad põhjendavad oma vastust sellega, et kuigi jõel pärivoolu sõudev sportlane ennetab oma partnerit teatava aja võrra, siis tagasiteel vastuvoolu sõudes ta kaotab niisama palju aega.

See on vale põhjendus. Voolav vesi tõepoolest lühendab pärivoolu sõudmise aega ja pikendab vastuvoolu sõudmise aega. Ühelt poolt jõgi nagu aitaks liikumisele kaasa, teisel juhul aga nagu takistaks. Abistamine kestab aga lühemat aega kui takistamine — järelikult on loomulik oodata, et jõge mööda sõudev sportlane jõuab lähtekohta tagasi hiljem, kui seisval veel sõudev sportlane.

Samale järeldusele toob meid järgmise piirjuhu uurimine. Olgu paadi omakiirus (s. t. kiirus, millega paat liiguks seisvas vees sõudja samade pingutuste juures) võrdne jõevoolu kiirusega, siis jõge mööda sõudev sportlane jõuab pärivoolu sõudes sihtpunkti 2 korda kiiremini kui tema partner basseinis. Kuid kui esimene sportlane hakkab lähtekohta tagasi sõudma, siis jõevool peab teda paigal ja ta ei pääse üldse kohalt minema.

Asume nüüd üldjuhu vaatlemisele. Olgu jõevoolu kiirus x ja paadi omakiirus v. Siis kulub seisvas vees tee pikkuse s ühekordseks läbimiseks $\frac{s}{v}$ ajaühikut. Sama teepikkuse s läbimiseks pärivoolu aga $\frac{s}{v+x}$ ajaühikut. Ajavõit on seega $\frac{s}{v} - \frac{s}{v+x}$, mis

pärast ühisele nimetajale viimist annab:

$$\frac{s}{v} - \frac{s}{v+x} = \frac{sx}{v(v+x)}$$ ajaühikut.

Sama teepikkuse s läbimiseks vastuvoolu kulub $\frac{s}{v-x}$ ajaühikut ja seisvas vees liikumisega võrreldes kaotatakse

$$\frac{s}{v-x} - \frac{s}{v} = \frac{sx}{v(v-x)}$$ ajaühikut.

Võrreldes murde $\frac{sx}{v(v+x)}$ ja $\frac{sx}{v(v-x)}$, s. t. jõge mööda liikumisel saavutatud ajavõitu ja ajakaotust, on kerge näha, et esimene murd on teisest väiksem, sest ta erineb teisest murrust ainult suurema nimetaja poolest. Järelikult jõel kaotatakse vastuvoolu sõudmisel rohkem aega, kui võidetakse pärivoolu sõudmisel. Niisiis seisvas vees sõudja jõuab lähtekohta tagasi varem.

Proovige iseseisvalt uurida järgmist küsimust: kuidas jõevoolu kiiruse muutumine mõjutab jõel sõudva sportlase ajakaotuse suurust.

225. Ülesande tekstis toodud mõttekäik lubab kindlaks teha, et ujuja poolt esimesest sillast kuni pöördekohani ujumiseks kulutatud aeg võrdub pöördekohast kuni teise sillani ujumiseks kulutatud ajaga. Teise silla all ta püüdis kaabu kinni. Siit järeldub, et ujuja ja kaabu olid vees mõlemad 20 minutit. Kaabu läbis selle ajaga veevoolu kiirusega liikudes esimese ja teise silla vahe, see on tuhat meetrit. Järelikult jõevoolu kiirus on $1000 : 20 = 50$ m/min.

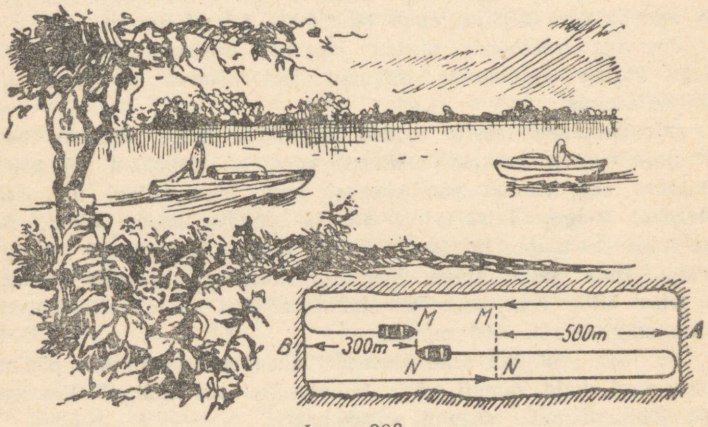
Ma toon veel ühe selle ülesande lahendusvariandi, mis põhineb teistsugusel, kuid samuti väga teravmeelsel mõttekäigul. Vaatleme seda juhtumit nüüd «kaabu seisukohast».

Lepime kokku, et mitte kaabu ei liigu jõevoolust kantuna esimese silla poolt teise silla poole, vaid et teine sild ujub jõevoolu kiirusega kaabu suunas, mis püsib esimese silla all seisvas vees paigal. Asja olemus sellest ei muutu, eks ole? Mis siis nüüd sünnib? Kaabu kukub vette ning seisab paigal, tema poole kiirustab teine sild. Mis juhtub ujujaga? Ujuja ujub seisvas vees ühes suunas 10 minutit, ning kulutab siis tagasi pöördumiseks niisama palju aega (vesi on seisev). Olles 20 minutit ujunud jõuab ta lähtekohta tagasi ja kohtab uuesti kaabut. Samal hetkel jõuab kaabu juurde pärast 1000 meetri läbimist ka sild number 2. (Ülesande tingimustes oli märgitud, et ujuja püüdis kaabu kinni teise silla all.)

Tähendab, sild liikus kiirusega $100 : 20 = 50$ m/min. See ongi jõevoolu kiirus. Ujuja kiirus pole aga üldse oluline.

226. Mootorlaevad jõuavad päästerõnga juurde üheaegselt. Tõepoolest, kui liikumist jälgida sadamast, siis pärivoolu minev mootorlaev saab voolu kiirusega võrdse lisakiiruse ja vastuvoolu liikuv mootorlaev kaotab niisama palju kiirusest. Kui aga mootorlaevade liikumist jälgida päästerõngalt, mis voolu kiirusega liigub pärivett, siis tema suhtes on olukord selline, nagu seisaks ta paigal ja mootorlaevad liiguksid seisvas vees. Siit järeldub, et tunni aja pärast on mootorlaevad päästerõngast võrdsel kaugusel, sest nende omakiirused on võrdsed ning liikumissuunda muutes jõuavad nad päästerõnga juurde täpselt tunni aja pärast, s. o. üheaegselt.

227. Kaldalt A startinud liugpaat M läbis 500 meetrit ja kohtus siis liugpaadiga N. Kokku nad olid seega läbinud ühe järve pikkuse (joon. 386). Liikumist jätkates jõudis liugpaat M kaldani B ja tagasi-



Joon. 386.

teel kohtus uuesti liugpaadiga N, seekord 300 m kaugusel kaldast B. Selleks hetkeks olid mõlemad liugpaadid kokku ületanud järve kolm korda (vt. skeemi joonisel 386). Siit järeldub, et liugpaatide liikumiseks kuni nende teise kohtumiseni kulus 3 korda rohkem aega kui nende esimese kohtumiseni.

Kuna liugpaat M oli läbinud esimese kohtumise hetkeks 500 meetrit, siis teise kohtumise ajaks oli ta läbinud $500 \cdot 3 = 1500$ m. (Konstantse kiiruse juures on läbitud vahemaa võrdeline ajaga.) Järve pikkus on 300 meetrit lühem liugpaadi M poolt teise kohtumiseni läbitud teest, s. t. järve pikkus on $1500 - 300 = 1200$ m. Liugpaadid

olid olnud oma esimese kohtumiseni teel ühepalju aega ja järelikult nende kiiruste suhe on võrdne nende poolt selleks ajaks läbitud vahemaade suhtega, s. t.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{500}{1200 - 500} = \frac{5}{7}.$$

228. Siin on üksainus väljapääs: tuleb teostada esialgne arvestus. Oletame, et kogu pioneerisalk istutas x puud. Kirjuša brigaad lubas istutada niipalju puid, kuipalju istutavad kogu salga ülejäänud pioneerid. Tähendab Kirjuša brigaad pidi istutama poole kogu salga puudest: $\frac{x}{2}$.

Vitja lubas oma brigaadi jõududega istutada poole puude hulgast, mida istutasid kõik salga ülejäänud pioneerid. See tähendab, et kui tema brigaadi osa lugeda üheks osaks istutatud puudest, siis ülejäänud pioneerid pidid istutama 2 samasugust osa. Siit järeldub, et Vitja brigaad pidi istutama $\frac{1}{3}$ kogu salga poolt istutatud puude hulgast, s. o. $\frac{x}{3}$.

Kirjuša ja Vitja brigaadid lubasid kokku istutada $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$ puud. Nende salga ülejäänud pioneerid istutasid järelikult $\frac{x}{6}$ puud, milline arv vastavalt ülesande tekstile oli 40. Seega pidi kogu salk istutama 240 puud, Kirjuša brigaad 120 puud ja Vitja brigaad 80 puud.

229. Kaks korda. Kui poolt väiksemast arvust tähistada tähega m, siis väiksema arvu jääk on ka m, suurema arvu jääk on aga $3m$. Väiksem arv on siis $m + m = 2m$ ja suurem arv $3m + m = 4m$. Siit järeldub, et suurem arv on väiksemast suurem $4m : 2m = 2$ korda.

230. Algebraline lahendus. Mootorlaeva kiirus olgu x; vesilennuki kiirus on siis $10x$. Vesilennuk lendas kohtumiseni s miili, mootorlaev läbis $s - 180$ miili, järelikult

$$\frac{s}{10x} = \frac{s - 180}{x}.$$

Korrutame mõlemaid võrduse pooli suurusega $10x$ ($x \neq 0$) ja leiamegi, et $s = 200$ miili.

Aritmeetiline lahendus. Iga kümne lennuki poolt läbitud miiliga kaugeneb mootorlaev ühe miili võrra. Seega, kui lennuk läbib 180 miili, on laev sõitnud lisaks 18 miili.

Kuni lennuk läbib veel 10 miili, jõuab mootorlaev kaugeneda veel ühe miili võrra ning nende vaheline kaugus on nüüd 9 miili. Kahekümnendal miilil püüab lennuk laeva kinni. Seejuures on nad mõlemad kaldast 200 miili kaugusel.

231. Jalgratturite sõidukiirusi teades võib kohe öelda, et ühe tingliku pikkusühiku läbimiseks kulub neil vastavalt $^1/_6$, $^1/_9$, $^1/_{12}$ ja $^1/_{15}$ tundi. Ühe ringi läbimiseks kulutab aga igaüks neist kolm korda vähem aega, s. t. $^1/_{18}$, $^1/_{27}$, $^1/_{36}$ ja $^1/_{45}$ tundi (iga ringi ümbermõõt on $^1/_3$ tinglikust pikkusühikust). Ühe tunni jooksul teevad jalgratturid 18, 27, 36 ja 45 täistiiru, 20 minuti jooksul teevad nad seega 6, 9, 12 ja 15 täistiiru. Kõik arvud on täisarvud, järelikult on 20 minuti möödumisel kõik jalgratturid üheaegselt lähtekohtades. Üldse võivad jalgratturid läbida üheaegselt lähtekohti ainult siis, kui nad teevad kõik mingi ajaühiku vältel täisarvulise (kuigi igaüks isesuguse) hulga tiire. Suurim võimalik kohtumiste hulk 20 minuti jooksul on seega arvude 6, 9, 12 ja 15 suurimaks ühisjagajaks. Nende arvude suurim ühisjagaja on 3. Järelikult kohtuvad jalgratturid 20 minuti jooksul kolm korda, iga $6\frac{2}{3}$ minuti järel $\left(20 : 3 = 6\frac{2}{3}\right)$.

232. Detaili lõikamiskiiruse ja töötlemisaja vahel on pöördvõrdeline seos. See tähendab, et kui detaili töötlemisaeg t_1 (kiiruse v_1 juures) muutus suuruseks t_2 (kiiruse v_2 juures), siis

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Vastavalt ülesande tingimustele oli kiirusel v_2 m/sek. töötlemisaeg $t_2 = 2\frac{1}{2}$ minutit ja kiirusel $v_1 = v_2 - 1690$ m/min. töötlemisaeg $t_1 = 35$ minutit.

Koostame võrde

$$\frac{2\frac{1}{2}}{35} = \frac{v_2 - 1690}{v_2}.$$

Sellest võrdest leiame, et $v_2 = 1820$.

Vastus. Treial P. Bõkov saavutas tol ajal lõikekiiruseks 1820 m/min.

233. Squagway ja Jack Londoni sihtkoha vaheline kaugus on $133\frac{1}{3}$ miili.

Tõepoolest, ülesande tekstis on öeldud, et kui Jack London oleks saanud sõita veel täie kiirusega 50 miili, siis ta oleks jõudnud laagrisse ühe päeva võrra varem. Järelikult, kui Jack London oleks saanud sõita täie kiirusega 100 miili, siis ta oleks võitnud kaks päeva, s. t. poleks üldse hilinenud. Siit me võime järeldada, et esimese päevatee lõpul jäi laagrisse veel 100 miili. Kui Jack London oleks kogu aeg sõitnud täie kiirusega, siis ta oleks 100 miili asemel läbinud $\frac{100 \cdot 5}{3} = 166\frac{2}{3}$ miili. Ülearused $66\frac{2}{3}$ miili oleks tal aidanud kokku hoida kaks päeva. Siit järeldub, et Londoni poolt varem arvestatud kiirus oli $33^1/_3$ miili päevas. Esimesel ööpäeval ta läbiski $33^1/_3$ miili.

Liites esimese päeva sõidule veel 100 miili, saamegi kätte otsitava kauguse: $100 + 33^1/_3 = 133^1/_3$ miili.

234. 1) Kui kuupalk kasvab 30% võrra, siis ostuvõime kasvab niisama palju.

2) Kui kuupalk jääb muutmatuks, kuid kaupade hinnad alanevad 30% võrra, siis ostujõud ei kasva 30% võrra, nagu paljud arvavad, vaid hoopis rohkem. Tõepoolest, kui te näiteks ühe rubla eest saite osta ühe rublase eseme, siis pärast 30-protsendilist hinnaalandust maksab see ese 70 kopikat ja te saate oma rubla eest osta $\frac{100}{70} = \frac{10}{7}$ eset. Teiste sõnadega, te saate osta $^3/_7$ eset rohkem, see aga on umbes 43%.

3) Ebaõige analoogia võib ka siin viia valele tulemusele: $10 + 8 = 18\%$. Tegelikult oli alguses planeeritud kasum 20%.

Tõepoolest, kauplus müüs raamatu 10% võrra odavamalt ja sai ikka veel 8% kasu. See tähendab, et 90% planeeritud hinnast moodustab 108% raamatu omahinnast.

Nüüd on kerge leida, mitu protsenti raamatu omahinnast moodustas planeeritud hind. Selleks koostame võrde:

$$\frac{90}{100} = \frac{108}{x}.$$

Võrret lahendades saame $x = 120\%$. Tähendab alguses planeeriti kasumiks 20%.

4) Väga paljud arvavad, et kui detaili töötlemisaeg lüheneb teatava hulga protsentide võrra, siis niisama palju kasvab ka tööviljakus. Kerge on näha, et see arvamine on vale.

Kulugu ühe detaili valmistamiseks 1 tund. Pärast töötlemisaja p-protsendilist lühenemist kulub aega $\frac{p}{100}$ tundi vähem kui

enne, s. t. $1-\frac{p}{100}$ tundi. Tähendab ühe tunniga valmistatakse nüüd ühe detaili asemel $1:\left(1-\frac{p}{100}\right)=\frac{100}{100-p}$ detaili ehk $\frac{100}{100-p}-1=\frac{p}{100-p}$ detaili rohkem kui enne.

Kui see juurdekasv avaldada protsentides, siis saame $\frac{100p}{100-p}$ %.

Sellest valemist leiame, et kui töötlemisaeg lüheneb 50% võrra ($p=50$), siis tööviljakus kasvab mitte 50%, vaid 100% võrra, s. t. kahekordistub.

235. Kui pärandaja tahtes lugeda oluliseks ema pärandusosa (e) suhet poja pärandusosasse (p) ja tütre pärandusosasse (t), siis järeldub ülesande tekstist, et tütar peab saama kaks korda vähem kui ema ja poeg kaks korda rohkem kui ema. Tähendab, pärandus tuleb jaotada seitsmeks võrdseks osaks, millest kaks osa tuleb anda emale, neli osa pojale ja üks osa tütrele: $e:p:t=2:4:1$.

Niiviisi soovitas varandust jaotada ka Salvianus Julianus. See jaotamisviis on aga ema suhtes vastuvõtmatu. Tõepoolest, pärandaja tahet võiks ka nii tõlgendada, et ta tahtis emale jätta v ä h e m a l t $^1/_3$ kogu varandusest, Rooma juristi lahendus oleks talle jätnud ainult $^2/_7$. Seepärast tuleks ema huvisid kaitstes talle anda $^1/_3$ pärandusest ja ülejäänud osa jagada poja ning tütre vahel vahekorras 4 : 1. Siis saab poeg $\frac{2}{15}\cdot 4=\frac{8}{15}$ ja tütar $\frac{2}{15}\cdot 1=\frac{2}{15}$ kogu pärandusest ehk kokkuvõttes $e:p:t=5:8:2$. Kuna ülesannet võib lahendada kahte moodi, siis me peame tegema paratamatult järelduse, et pärandaja tahe oli sõnastatud ebatäpselt.

236. Olgu otsitav vahemaa $2x$ sammu. Ühes teekonna pooles on $\frac{x}{2}$ paarissammu ja teises pooles $\frac{x}{3}$ kolmiksammu. Ülesande tekstist on näha, et paarissamme pidi olema 250 võrra rohkem kui kolmiksamme.

Järelikult

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=250,\quad \frac{x}{6}=250,\quad x=1500 \text{ sammu.}$$

Kogu vahemaa on seega $2x=3000$ sammu.

237. Olgu külast linna maad x kilomeetrit. Kui elatanud kodanik läbis y kilomeetrit, siis tal jäi sõita veel $(x-y)$ km.

Kui ta oleks läbinud $3y$ kilomeetrit, siis tal oleks sõita jäänud veel $(x - 3y)$ km.

Tingimuste kohaselt on kaugus $x - 3y$ kaks korda väiksem vahemaast $x - y$. Järelikult

$$x - y = 2(x - 3y) \quad \text{ehk} \quad x - y = 2x - 6y.$$

Siit

$$y = \frac{1}{5}x.$$

Oletame, et noor kodanik läbis algul z kilomeetrit, siis tal jäi veel sõita $(x - z)$ kilomeetrit. Kui ta oleks läbinud $\frac{z}{2}$ kilomeetrit, siis tal oleks jäänud sõita veel $(x - \frac{z}{2})$ kilomeetrit.

Tingimuste kohaselt

$$3(x - z) = x - \frac{z}{2}.$$

Siit

$$z = \frac{4}{5}x.$$

Et $\frac{4}{5}x$ on suurem $\frac{1}{5}x$-st, siis $z > y$. See aga tähendab, et noor oli läbinud rohkem maad kui elatanud kodanik.

Järelikult noor kodanik sõitis autoga, elatanud kodanik aga hobusega.

238. Oletame, et

esimene mootorrattur sõitis x tundi ja	teine mootorrattur puhkas $\frac{x}{2}$ tundi ja
puhkas $\frac{y}{3}$ tundi,	sõitis y tundi.

Kuna mõlemad mootorratturid olid teel ühekaua, siis

$$x + \frac{y}{3} = \frac{x}{2} + y \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{2} = \frac{2}{3}y.$$

Siit järeldub, et $x = \frac{4}{3}y$ ja $y < x$.

Teine mootorrattur sõitis esimesest kiiremini.

239. Kui otsitav lennuk asus vasakult poolt paremale lugedes n-ndal kohal, siis on temast paremal pool $9-n$ lennukit (vt. joonis 161 lk. 171) ja vasakul pool $n-1$ lennukit. Nende arvude korrutis on $(9-n)(n-1)$. Kui lennuk asuks 3 koha võrra paremal, siis oleks temast paremal pool $6-n$ lennukit ja vasakul pool $n+2$ lennukit. Ülesande tingimuste kohaselt

$$(6-n)(n+2)-(9-n)(n-1)=3.$$

Siit $n=3$.

Otsitav lennuk on vasakult paremale lugedes kolmas.

240. Otsitavad arvud on 8, 12, 5 ja 20.

241. Olgu pikema küünla pikkus x ja lühema küünla pikkus y. Ühe tunniga lüheneb esimene küünal $x:3\frac{1}{2}=\frac{2}{7}x$ võrra ja teine küünal $y:5=\frac{1}{5}y$ võrra. Kahe tunniga lühenevad nad järelikult $\frac{4}{7}x$ ja $\frac{2}{5}y$ võrra. Esimesest küünlast jääb alles $\frac{3}{7}x$, teisest küünlast $\frac{3}{5}y$. Ülesande tingimuste kohaselt $\frac{3}{7}x=\frac{3}{5}y$, järelikult üks küünal oli teisest lühem $\frac{5}{7}$ korda.

242. Kogu trikk seisab selles, et sel viisil saadud arvud peavad kindlasti jaguma üheteistkümnega. Tõepoolest, valitud neljakohalist arvu $[a]\,[b]\,[c]\,[d]$ võib üles kirjutada kujul $1000a+100b++10c+d$, pärast esimese numbri lõppu tõstmist aga kujul $1000b++100c+10d+a$. Nende arvude summa on:

$$1000a+100b+10c+d+1000b+100c+10d+a=$$
$$=1001a+1100b+110c+11d.$$

Kerge on näha, et iga liidetav jagub üheteistkümnega ja järelikult ka lõpptulemus.

Laste poolt nimetatud tulemustest jagus aga ainult Tolja oma üheteistkümnega.

Siit võib järeldada, et Kolja, Polja ja Olja arvutasid valesti, ning et Tolja tulemus võib olla õige.

243. Esimesel pilgul võib näida, et seinakella mahajäämus kompenseerub täielikult lauakella ettekäimisega ja äratuskella mahajäämus käekella ettekäimisega, nii et käekell näitab õiget aega. See pole aga õige.

Tõepoolest, ühe õige tunni jooksul käib seinakell 58 minutit. Seinakella 60 minuti jooksul käib lauakell 62 minutit. Järelikult iga

seinakella minuti jooksul käib lauakell $\frac{62}{60}$ minutit ja seinakella 58 minuti (s. t. 60 õige minuti) jooksul käib lauakell $\frac{58 \cdot 62}{60}$ minutit.

Edasi. Lauakella 60 minuti jooksul käib äratuskell 58 minutit. Järelikult lauakella iga minuti jooksul käib äratuskell $\frac{58}{60}$ minutit ja lauakella $\frac{58 \cdot 62}{60}$ minuti (s. t. 60 õige minuti) jooksul käib äratuskell $\frac{58 \cdot 62}{60} \cdot \frac{58}{60}$ minutit.

Täpselt samuti käib käekell iga äratuskella minuti jooksul $\frac{62}{60}$ minutit ja ühe õige tunni jooksul $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{60 \cdot 60} \cdot \frac{62}{60}$ minutit. Vastavaid arvutusi teostades saame ligikaudselt 59,86 minutit.

Tähendab, iga õige tunni jooksul jääb käekell maha 0,14 minutit. Seitsme õige tunni jooksul jääb käekell seega maha $0{,}14 \cdot 7 = 0{,}98 \approx$ ≈ 1 min.

Kell 19 antava õige aja signaali momendil näitab käekell 18.59.

244. Näidaku meie kellad jälle võrdset aega x tunni pärast. See juhtub siis, kui minu kell käib ette ja Vasja kell jääb maha niipalju, et kokku saaks parajasti 12 tundi (43 200 sek.). Minu kell käib x tunniga ette x sekundit, Vasja oma aga jääb $\frac{3}{2}x$ sekundit maha.

Saame võrrandi

$$x + \frac{3}{2}x = 43\,200.$$

Siit $x = 17\,280$ tundi ehk 720 päeva.

Järelikult tuleb meil oodata peaaegu kaks aastat, enne kui meie kellad jälle ühte aega näitavad.

Veel kauem tuleks meil oodata, kui me sooviksime, et meie kellade näidud ühtiksid ajasignaaliga.

Tõepoolest, selleks peab minu kell käima 12 tundi ette ja Vasja oma jääma 12 tundi maha.

Minu kell saaks sellega hakkama 43 200 tunni ehk 1800 päevaga, Vasja oma aga $^3/_2$ korda kiiremini, s. t. 1200 päevaga. Minu ja Vasja kella üheaegset ajasignaaliga ühtimist võib loota alles päevade arvu pärast, mis jagub 1800 ja 1200-ga, see on 3600 päeva ehk peaaegu 10 aasta pärast!

245. 1) Meistri äraoleku ajal tegid osutid kokku täisringi. Kuna minutiosuti liigub 12 korda kiiremini tunniosutist, siis nende poolt läbitud pikkused moodustavad vastavalt $\frac{12}{13}$ ja $\frac{1}{13}$ ringi ümbermõõdust. Siit järeldub, et meister oli ära $\frac{12}{13} \cdot 60 = 55\frac{5}{13}$ minutit. Kui osutite poolt läbitud teed arvestada minutites ja x minutiga tähistada minutite hulka, mille võrra oli aeg üle keskpäeva meistri lõunale mineku hetkel, siis tunniosuti liikus nende x minuti jooksul edasi ainult $\frac{1}{12}x$ võrra. Tähendab, meistri lahkumise hetkel oli osutite vaheline «kaugus» $x - \frac{x}{12} = \frac{11}{12}x$ minutit. Siit saame võrrandi

$$\frac{11}{12}x = \frac{1}{13} \cdot 60,$$

millest

$$x = 5\frac{5}{143} \text{ minutit.}$$

Järelikult läks meister lõunale $5\frac{5}{143}$ minutit pärast keskpäeva ja oli ära $55\frac{5}{13}$ minutit.

Kui ta lõunalt tagasi tuli, siis oli kell $55\frac{5}{13} + 5\frac{5}{143} = 60\frac{60}{143}$ minutit üle keskpäeva ehk $\frac{60}{143}$ minutit kahel.

2) Kaks tundi pärast seda, kui ma jalutama läksin, asus kella minutiosuti samas kohas ja tunniosuti oli täisringi $\frac{2}{12}$ osa võrra edasi nihkunud.

Et osutid vahetaksid enam kui kahe tunni jooksul oma kohad, peavad nad kokku läbima $^{10}/_{12}$ kogu täisringist ehk veel 50 minutit. Minutiosuti liigub tunniosutist 12 korda kiiremini ja seega on tema teepikkus $\frac{12}{13} \cdot 50 = 46\frac{2}{13}$ minutit. Järelikult olin ma ära 2 tundi ja $46\frac{2}{13}$ minutit.

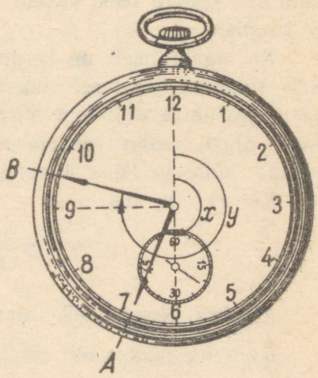
3) Kella 4 ja 5 vahel asuvad osutid kohakuti $20 : \frac{11}{12} = 21\frac{9}{11}$

minutit pärast nelja. Minutiosuti on tunniosuti pikenduseks $50 : \frac{11}{12} =$ $= 54\frac{6}{11}$ minutit pärast nelja. Järelikult kulus õpilasel ülesande lahendamiseks $54\frac{6}{11} - 21\frac{9}{11} = 32\frac{8}{11}$ minutit.

Ta lõpetas töö $54\frac{6}{11}$ minutit pärast nelja.

246. Ülesande tingimustest järeldub, et hetkel, mil koosolek algas, asus tunniosuti numbrilaua kuuenda ja seitsmenda jaotuse vahel ning minutiosuti üheksanda ja kümnenda jaotuse vahel (joon. 387).

Võtame teeühikuks tunniosuti poolt ühe tunni jooksul läbitava nurga (s. t. tee, mis vastab viiele minutile). Kui koosolek algas ajamomendil x, siis tunniosuti poolt keskpäevast alates läbitud tee on samuti x. Kui koosolek lõppes ajamomendil y, siis tunniosuti poolt keskpäevast alates läbitud tee on ka y. Sellesama tee läbis minutiosuti ajavahemiku jooksul, mis algas kell 6.00 (kui ta oli numbril 12) ja lõppes koosoleku alguse hetkel. 12 korda aeglasemalt liikuv tunniosuti liikus numbrilaua kuuendalt jaotuselt seega edasi suuruse $\frac{y}{12}$ võrra.



Joon. 387.

Siit

$$x = 6 + \frac{y}{12}.$$

Koosoleku lõpuks vahetasid osutid oma kohad. Analoogiliselt arutades saame, et

$$y = 9 + \frac{x}{12}.$$

Seda võrrandisüsteemi lahendades leiame, et $x = 6\frac{114}{143} =$ $= 6$ t. 47 min. $49\frac{133}{143}$ sek. Teiste sõnadega — koosolek algas 47 minu-

tit ja $49\frac{133}{143}$ sekundit pärast kella kuut. Koosolek lõppes 33 minutit ja $59\frac{23}{143}$ sekundit pärast kella üheksat $\left(y = 9\frac{81}{143}\right)$.

247. Kuna esimene luuraja käis poole kogu ajast suurema kiirusega, siis ta läbis ilmselt ü l e poole teest, teine luuraja aga käis sama kiirusega ainult poole teest.

Oletame konkreetsuse mõttes, et kummagi luuraja algkiirus on suurem muutunud kiirusest. Siis läbisid mõlemad luurajad esimese poole teest võrdse ajaga, kuid teise poole läbis esimene luuraja kiiremini kui teine, sest teine luuraja käis väiksema kiirusega kogu teepoole, esimene aga ainult osa sellest. Tähendab, esimene luuraja kulutas ka kogu teele vähem aega. See ongi kogu lahendus — lühike ja kaunis.

Ka algebraliselt on kerge põhjendada väidet, et esimene luuraja käis suurema osa teest suurema kiirusega. Olgu luurajate kiirused m ja n, kusjuures $m > n$, t olgu pool kogu esimese luuraja poolt kulutatud ajast, s olgu tee pikkus, mille ta läbis kiirusega m, ja s_1 tee pikkus, mille ta läbis kiirusega n.

Kui $m > n$, siis

$$\frac{s}{t} > \frac{s_1}{t}, \quad \text{kust } s > s_1.$$

Algebra keeles võiks ülesande lahendamine jätkuda nii:

kogu tee pikkus on: $mt + nt$;

pool teepikkust on: $\frac{mt+nt}{2} + \frac{(m+n)t}{2}$;

esimese luuraja koguaeg $x = 2t$; teise luuraja koguaeg on

$$y = \frac{(m+n)t}{2m} + \frac{(m+n)t}{2n}.$$

Leiame vahe $y - x$:

$$y - x = \frac{(m+n)t}{2m} + \frac{(m+n)t}{2n} - 2t =$$

$$= \frac{(mn + n^2 + m^2 + mn - 4mn)t}{2mn} = \frac{(m-n)^2 t}{2mn}.$$

Kuna kõik paremal pool olevad tegurid on positiivsed, siis $y - x > 0$ ehk $y > x$. Teine luuraja kulutas rohkem aega kui esimene.

248. Olgu rongi pikkus x ja kiirus y. Kuna rong möödus vaatlejast t_1 sekundiga, s. t. läbis maa, mis on võrdne ta enda pikkusega

x, t_1 sekundiga, siis $y = \frac{x}{t_1}$. Edasi me teame, et rong ületas a meetri pikkuse silla t_2 sekundiga, s. t. läbis selle ajaga vahemaa, mis võrdus ta enda pikkuse ja silla pikkuse summaga.

Järelikult $y = \frac{x+a}{t_2}$. Siit saame, et $x = \frac{at_1}{t_2 - t_1}$; $y = \frac{a}{t_2 - t_1}$.

249. Kui raudteeharul on n jaama, siis peab igas jaamas olema $n-1$ komplekti pileteid. Kokku peab jaamades seega olema $n(n-1)$ komplekti pileteid.

Kui raudteeharul oli enne x jaama ja nüüd on y jaama, siis läheb tarvis $y(y-1) - x(x-1)$ uut piletite komplekti.

Tingimuste kohaselt saame võrrandi

$$y(y-1) - x(x-1) = 46 \text{ ehk } y^2 - x^2 - (y-x) = 46,$$
$$(y-x)(y+x-1) = 46.$$

Mõlemad tegurid peavad olema positiivsed ja täisarvulised suurused. Arvu 46 saab lahutada niisuguste arvude korrutiseks kahel viisil: $46 = 2 \cdot 23$ ja $46 = 1 \cdot 46$.

Esimesel juhul saame

$$y - x = 2, \qquad y + x - 1 = 23.$$

Seda süsteemi lahendades leiame, et

$$x = 11, \quad y = 13.$$

Järelikult raudteeharul oli enne 11 jaama ja pärast kahe uue jaama avamist on nüüd 13 jaama.

Teine juht $(46 = 1 \cdot 46)$ tähendaks seda, et uute jaamade hulk $y - x$ oleks 1. Raudtee ülema sõnavõtust aga nähtub, et jaamu oli rohkem kui üks.

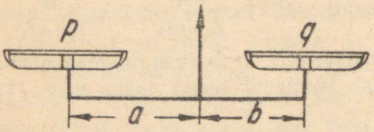
250. Võrduste $a^2 = bd$ ja $ad = b^2c$ vasakuid ja paremaid pooli läbi korrutades saame $a^3d = b^3dc$ ning pärast d-ga jagamist $a^3 = b^3c$.

Siit järeldub, et c peab olema mingi täisarvu kuubiks. Kahe ja viieteistkümne vahel on aga ainult üks arv, mis on kuup. See arv on kaheksa. Järelikult $c = 8$. Siit saame: $a^3 = 8b^3$ ehk $a = 2b$.

Kuna tingimuste kohaselt $a^2 = bd$, siis $4b^2 = bd$ ehk $4b = d$. Kuid b ei saa olla 2, sest siis $d = 8$, mis on aga $c = 8$ tõttu võimatu; b ei saa olla ka kolmest suurem, sest antud sõnade hulgas pole 16- ja enamatähelist sõna. Järelikult $b = 3$. Siit saame, et $a = 6$ ja $d = 12$. Tähendab, valitud sõnades on 6, 3, 8 ja 12 tähte. Antud sõnade hulgast vastava pikkusega sõnu välja otsides leiame, et nendeks on sõnad: *raamat*, *oda*, *autojuht* ja *kergejõustik*.

251. Ei või. Tegelik ostja poolt saadud suhkru hulk on üle kahe kilo.

Teeme väikese arvestuse. Kui kaalud on tasakaalus, siis sõltumatult sellest, kas nad on võrdõlgsed või mitte, on igal juhul täidetud võrdus $ap = bq$, kus a ja b on parempoolse ja vasakpoolse õla pikkused ning p ja q on kaalukaussidel olevate kaupade kaalud (joon. 388).



Joon. 388.

Ülesande tingimuste kohaselt $a \neq b$. Vastaku ühekilogrammilisele vihile üks kord x kg suhkrut ja teine kord y kg suhkrut. Siis $a \cdot 1 = bx$ ja $b \cdot 1 = ay$. Siit järeldub, et $x = \frac{a}{b}$ ja $y = \frac{b}{a}$ ning ostja poolt saadud suhkru hulk oleks $x + y = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ kilogrammi. Iga positiivse arvu $\frac{a}{b}$ (välja arvatud 1) ja tema pöördarvu $\frac{b}{a}$ summa on aga alati kahest suurem. Tõepoolest, kui $a \neq b$, siis $(a-b)^2 > 0$. Siit saame: $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ ehk $a^2 + b^2 > 2ab$. Mõlemaid võrratuse pooli ab-ga jagades leiamegi, et

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Müüja ilmselt eksis, kui ta mõtles, et kahte moodi kaaludes saab kätte õige kaalu. Kahe kauba «poole» kaalude summa on alati suurem vihtide kaalust.

K u i d a s v a l e d e k a a l u d e g a õ i g e s t i k a a l u d a.

1) Kaup tuleb millegagi tasakaalustada, näiteks haavlitega. Siis tuleb kauba asemele asetada kaaludele haavleid tasakaalustav hulk vihte. Need vihid näitavadki kauba õiget kaalu.

2) «Kaaluge» kaupa kaks korda, üks kord vihte ühele ja teine kord teisele kaalukausile asetades. Kui esimesel korral saite kauba «kaaluks» p ja teisel korral q, siis tõeline kaal on $\sqrt{p \cdot q}$. Selle tõestusega te saate ise kergesti hakkama.

252. Algebraliste teisenduste harrastaja jättis võrdusest

$$(x - v)^2 = (y - v)^2$$

ruutjuurt võttes tähele panemata asjaolu, et juurimise tulemuseks võib olla kaks võrdust, kas $x - v = y - v$ või $x - v = v - y$. Nendest võrdustest on õige aga ainult teine ja seda järgmistel põhjustel.

Kuna x ja y on positiivsed arvud, siis lähtevõrdusest $x+y=2v$ järeldub, et kui $x>v$, siis $y<v$ (esimene juht) ja kui $x<v$, siis $y>v$ (teine juht).

Esimesel juhul on $x-v>0$ ja $y-v<0$, järelikult võrdus $x-v=y-v$ ei saa kehtida, sest positiivne arv ei saa võrduda negatiivse arvuga.

Teisel juhul on $x-v<0$ ja $y-v>0$, mis jällegi ei kinnita võrduse $x-v=y-v$ kehtivust.

Teine võrdus $x-v=v-y$ aga pole vastuolus kummagi tingimusega.

Kui me asjaarmastaja oleks kasutanud teist võrdust, siis ta poleks teinud seda viga, kuid ... ta poleks saanud ka mingit uut tulemust. Võrdusest $x-v=v-y$ järeldub jällegi lähtevõrdus $x+y=2v$.

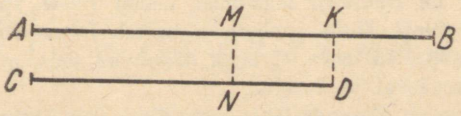
253. Kui me viiekohalisele arvule $[A]$ kirjutame ette numbri 1, siis me suurendame seda arvu 100 000 võrra. Nii et $[1]\,[A]=A+100\,000$. Kui me aga kirjutame numbri 1 selle arvu $[A]$ lõppu, siis me sellega korrutame A-d kümnega ja liidame ühe. Nii et $[A]\,[1]=A\times 10+1$.

Ülesande tingimustest järeldub, et

$$\frac{10A+1}{A+100\,000}=3.$$

Siit $10A+1=3A+300\,000$ ehk $7A=299\,999$, $A=42\,857$.

254. Kui minu vanust kujutada lõiguna AB (joon. 389) ja teie vanust lõiguna CD, siis lõik KB näitab, mitu aastat tagasi ma



Joon. 389.

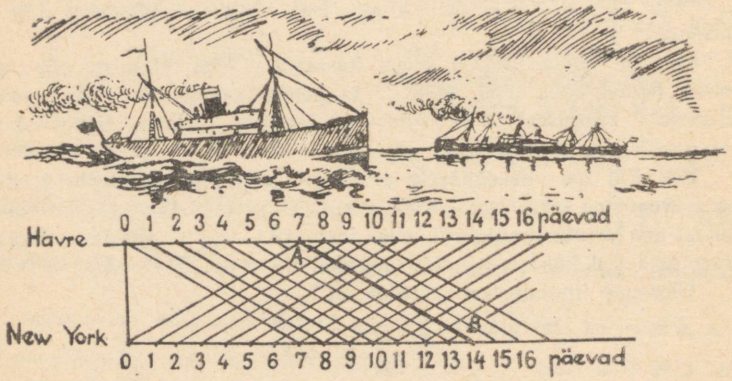
olin teievanune. Kuid niipalju aastaid tagasi oleks teie vanus lõigu $ND=KB$ võrra väiksem ja väljenduks lõiguga CN, mis on lõigust AB kaks korda lühem. Siit järeldub, et lõik KB mahub kaks korda lõiku MB, neli korda lõiku AB ja kolm korda lõiku CD.

Kui teie olete nii vana, kui mina olen praegu, siis teie vanus on võrdne lõiguga AB, mis vastavalt äsjaleitule on lõigust KB neli korda pikem. Ka minu vanus kasvab selle aja jooksul KB võrra ja kujutub lõiguna, mis on lõigust KB viis korda pikem.

Vastavalt ülesande tekstile peab kehtima võrdus $4KB+5KB=63$, s. t. lõik KB vastab seitsmele aastale. Tähendab, praegu te olete

21 aastane ja mina 28 aastane. Seitse aastat tagasi olite te 14 aastat vana, mis tõepoolest moodustab poole minu praegusest vanusest.

255. Siin võib sageli kuulda ebaõigeid vastuseid, näiteks öeldakse, et Le Havre'ist väljuv aurik kohtus teel seitsme laevaga. Seda eksitust põhjustab asjaolu, et arvestatakse ainult neid aurikuid, mis väljuvad teekonna ajal New Yorgi sadamast, aga unustatakse need laevad, mis on juba teel. Väga veenva ja ilmeka lahenduse võib saada aurikute liikumisteid graafiliselt kujutades (joon. 390).



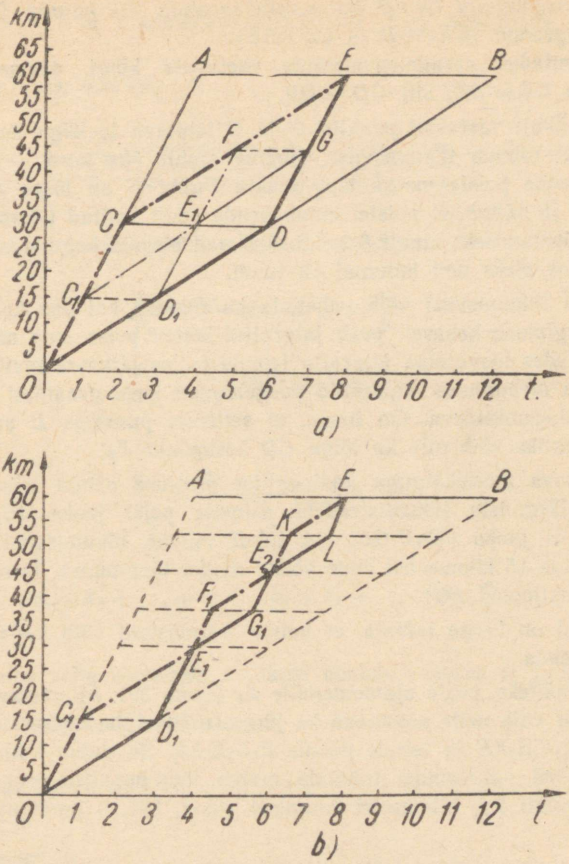
Joon. 390.

Rasvase joonega *AB* kujutatud Le Havre'ist New Yorki mineva auriku liikumisteed jälgides näeme, et ta kohtab merel 13 laeva ja veel kaht: üht Le Havre'ist lahkumise hetkel (New Yorgist saabuv laev) ja teist New Yorki saabumise hetkel (New Yorgist lahkuv laev). Seega kokku 15 laeva. Graafik näitab ka seda, et laevad kohtuvad igal keskpäeval ja kesköösl.

256. Ka siin on ülesande lahendamiseks ja analüüsimiseks mugav kasutada graafikut. Vertikaalteljele (joon. 391, *a*) kanname läbitud vahemaad (kilomeetrites) ja horisontaalteljele aja (tundides). Mastaap võib olla suvaline.

Kui kogu teekond toimuks jalgratastel (kiirusega 15 km/t), siis kuluks selleks neli tundi (vt. joone *OA* lõpp-punkti *A* ajakoordinaati). Kui kogu tee läbida jalgsi (peatusi tegemata, kiirusega 5 km/t), siis, nagu näitab punkt *B*, kuluks selleks 12 tundi. Mõlemad poisid käisid aga vaheldumisi jalgsi ja sõitsid jalgratastega ning lõpetasid matka üheaegselt, tähendab, nende liikumisteedel peab olema ühine lõpp-punkt.

Ülesande tekstis pole öeldud, mitu korda poisid jalgratast vahetasid. Oletame, et nad tegid seda üksainus kord. Sel puhul peavad nende liikumisteede graafikud moodustama parallelogrammi.



Joon. 391.

Tõepoolest, oletame, et jalgratturi liikumistee OC asendus mingis punktis C jalakäija liikumisteed iseloomustava graafikuga CE, mis on paralleelne sirgega OB.

Teise poisi liikumistee «murdub» jalgrattasõidule üle minnes punktis D, mis asub horisontaalteljest C-ga võrdsel kaugusel, sest see poiss pidi jalgsi jõudma kohani, kuhu ta sõber jättis talle jalgratta (s. t. peab jalgsi läbima selle sama tee, mille esimene poiss läbis jalgrattaga). Ülejäänud teeosa läbib teine poiss jalgrattal, järelikult on ta liikumisgraafiku lõik DE paralleelne lõiguga OA.

Niisiis, kujund $OCED$ on parallelogramm. Ka kujund $CDBE$ on parallelogramm ($CE \parallel DB$ ja $CD \parallel BE$).

Võrrutades parallelogrammide vastavaid külgi, saame: $OD = CE$ ja $CE = DB$, siit $OD = DB$.

Järelikult vastavad punktid D ja C läbitava teelõigu keskkohale. Sel juhul toimub liikumisviisi vahetus ainult üks kord — 30 kilomeetrit enne poiste matka lõpp-punkti. Punkt E on lõigu AB keskpunktiks ja näitab, et poistel kulub nende poolt valitud liikumisviisiga matka lõpetamiseks ainult 8 tundi. Kui nad oleksid kogu maa läbinud jalgsi, siis oleks neil kulunud 12 tundi.

Kuid liikumisviisi võib vahetada ka rohkem kui üks kord. Ülesande tingimuse kohaselt peab jalgrattal sõitev poiss oma seltsimeest kinni püüdes loovutama jalgratta temale ja ise jätkama matka jalgsi. Jalgratta üleandmise momendid peegelduvad meie graafikul liikumisteede lõikepunktidena. On ilmne, et selliseks punktiga E analoogiliseks punktiks võib olla ka lõigu CD keskpunkt E_1.

Eelneva mõttekäiguga analoogilise arutluse põhjal võime jõuda näiteks järgmiste liikumisteedeni: esimese poisi jaoks OC_1E_1FE ja teise poisi jaoks OD_1E_1GE. Sel juhul toimub liikumisviisi viimane vahetamine 15 kilomeetrit enne poiste matka lõpp-punkti (joon. 391, *a* horisontaaljoonel FG).

Nüüd on kerge taibata, et poiste liikumisteid võib väga mitmeti kokku seada.

Nii näiteks, peale ajamomendile E_1 (joon. 391, *b*) vastavat poiste kohtumist võib neile soovitada ka järgmisi liikumisvariante: esimesele poisile $E_1F_1E_2KE$ ja teisele poisile $E_1G_1E_2LE$. Sel juhul võib viimane liikumisviisi vahetamine toimuda matka lõpp-punktile veel lähemal, nimelt ainult $7^1/_2$ kilomeetri kaugusel (joon. 391, *b* horisontaaljoonel KL).

Nagu näete, lubavad ülesande tingimused poiste liikumisgraafikute jaoks välja mõelda lõpmatut hulka variante. Selles mõttes võib ülesannet pidada määramatuks. Üks vastus jääb aga igal juhul üheselt määratuks — ükskõik kui palju kordi ka poisid liikumisviisi ei vahetaks, ikka kestab nende matk täpselt 8 tundi.

257. Näiteid võiks siin tuua kuipalju tahes. Näidetega aga ei saa tõestada omaduse üldsust. Selleks eesmärgiks on asendamatu algebraline meetod, mis lubab hiljem vajaduse või võimalikkuse korral tähtede asemele paigutada suvalisi arve.

Olgu $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ suvalistest positiivsetest arvudest moodustatud lihtmurrud. Eeldame, et nad on paigutatud kasvamise

järjekorras, s. t. et vähimaks murruks on $\frac{a_1}{b_1}$ ja suurimaks murruks $\frac{a_n}{b_n}$. On vaja tõestada, et

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

Vastavalt kokkuleppele kehtivad võrratused:

$$\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1} \text{ ehk } a_2 > b_2 \frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{a_3}{b_3} > \frac{a_1}{b_1} \text{ ehk } a_3 > b_3 \frac{a_1}{b_1},$$

. . . . . .

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_1}{b_1} \text{ ehk } a_n > b_n \frac{a_1}{b_1}.$$

Siit

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n > (b_2 + b_3 + \ldots + b_n) \frac{a_1}{b_1}.$$

Liidame selle võrratuse vasakule poolele suuruse a_1 ja paremale poolele suuruse $b_1 \cdot \frac{a_1}{b_1}$, siis

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_n) \frac{a_1}{b_1}.$$

Siit saamegi, et

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} > \frac{a_1}{b_1}.$$

Analoogiliselt tõestatakse ka teoreemi teist osa, s. t. võrratust

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

258. Neli saabast ja kolm sokki. Nelja kapist võetud saapa hulgast on kaks kindlasti ühe tegumoega ning kolme soki hulgas on kaks ühevärvilist.

Kui kapist võtta ainult 2 või 3 saabast, siis võib juhtuda, et nad kõik on erineva tegumoega. Kui võtta ainult 2 sokki, siis võivad nad olla eri värvi.

259. 1) 4 õuna, 2) 7 õuna.

260. Ei või, sest 72 tunni, s. o. kolme ööpäeva pärast on jällegi kesköö ja öösel ju päike ei paista (kui ei ole just tegemist polaarvööndis kestva polaarpäevaga).

261. VI klassi pioneerid ületasid oma plaani viie puu võrra, järelikult jäi IV klassi pioneeridel plaanist puudu 5 puud. Seega istutasid vanemad pioneerid 10 puud rohkem kui nooremad.

262. 1) Petja perekonnanimi pole Gridnjov (see oleks vastuolus kolmanda tingimusega).

2) Burovi ema on Serovi õde (esimene tingimus), s. t. ta neiupõlvenimi oli Serova. Petja vanaisa nimi on Mokroussov (teine tingimus); tähendab ta on Petja ema isa, aga mitte isa isa, sest Petja isa on kas Burov või Klimenko (vt. lahenduse esimest punkti). Järelikult Burovi ema ja Petja ema on erinevad isikud.

Sellega on kindlaks tehtud, et Burovi eesnimi pole Petja. Burovi eesnimi aga ei saa olla ka Kolja, sest seda ütles pioneerijuht päris jutuajamise alguses.

Kui Burovi eesnimi pole ei Petja ega Kolja, siis see peab olema Griša.

3) Kui Burovi eesnimi on Griša, siis tähendab, et Gridnjovi eesnimi ei ole Griša, kuid tema eesnimeks ei saa olla ka Petja (vt. lahenduse esimene punkt). Järelikult on Gridnjovi eesnimi Kolja ja Klimenko eesnimi Petja.

4) Petja hakkab sel aastal õppima algebrat ja füüsikat (teine tingimus). Järelikult ta läheb keskkooli VI klassi. Kuna ta esimesse klassi läks 7 aastaselt, siis nüüd on ta 12 aastane (kuna ta oli hea õpilane, siis ta üheski klassis ei «istunud»).

5) Ülesande kolmanda ja neljanda tingimuse põhjal on Gridnjov ja Griša Petjast aasta võrra vanemad. Tähendab, Gridnjov ja Burov on mõlemad 13 aastased.

Lõplikult:

Griša Burov, 13 aastat vana,
Kolja Gridnjov, 13 aastat vana,
Petja Klimenko, 12 aastat vana.

263. Alguses tuleb välja kirjutada kõigi 18 lasu silmad ning siis jaotada kuuekaupa kolme ritta, nii et igas reas olevate silmade summa oleks 71.

Niisuguseks jaotamiseks on üksainus võimalus:

Esimene rida:	25, 20, 20, 3, 2, 1 — kokku 71 silma.
Teine rida:	25, 20, 10, 10, 5, 1 — kokku 71 silma.
Kolmas rida:	50, 10, 5, 3, 2, 1 — kokku 71 silma.

Kuna Andrjuša kaks esimest lasku andsid kokku 22 silma, siis kuulub esimene rida temale, sest ainult selles reas on 2 arvu, mille summa on 22.

Volodja esimene lask andis 3 silma, järelikult kuulub talle kolmas rida (teises reas pole arvu 3). Selles reas on ka 50 silma.

Järelikult märklaua südamikku tabas Volodja. Teine rida kuulub ilmselt Borjale.

264. Joonestuspliiatsite ja keemiliste pliiatsite arv ning harilike pliiatsite ja värviliste pliiatsite hind — kõik need jaguvad neljaga. Järelikult peab ka kõigi pliiatsite koguhind jaguma neljaga. Kuna 890 neljaga ei jagu, siis oli summa kindlasti valesti arvutatud.

265. Sellist tüüpi ülesandeid lahendatakse elimineerimisvõttega. Loendame järjest kõik ülesande tekstis toodud faktid:

1) *A* ja moskvalane on arstid.
2) *F* ja leningradlane on õpetajad.
3) *D* ja tuulalane on insenerid.
4) *B* ja *G* võtsid osa Isamaasõjast, tuulalane aga pole üldse armees teeninud.
5) Harkovlane on *A*-st vanem.
6) Odessalane on *D*-st vanem.
7) *B* ja moskvalane väljusid rongist Kiievis.
8) *D* ja harkovlane väljusid rongist Vinnitsas.

Nendest faktidest saab loogilise arutelu teel kätte terve rea varjatud fakte.

Nii näiteks järeldub faktidest 1 ja 2, et *A* ei ole moskvalane (1), kuid *A* pole ka leningradlane (1 — 2); *F* pole leningradlane (2), kuid pole ka moskvalane (1—2) jne.

Koostame meie reisijate kohta käivate kõigi põhiliste ja järelduvate faktide jaoks tabeli, paigutades vastavasse tabeli ruutu tingimuste numbrid, millest järeldub niisuguse kombinatsiooni võimatus:

	A	B	D	E	F	G
Moskvalane	1	7	1-3 7-8	–	1-2	*
Leningradlane	1-2	*	2-3	–	2	–
Kiievlane	–	–	*	–	–	–
Tuulalane	1-3	4	3	*	2-3	4
Odessalane	*	–	6	–	–	–
Harkovlane	5	7-8	8	–	*	–

Tabelist järeldub kohe, et *D* on kiievlane (märgime seda tärnikesega). Ülejäänud reisijad ei ole kiievlased (asetame «kiievlase» rea ülejäänud tühjadesse ruutudesse miinused).

Kohe selgub ka *A* elukoht. Reisija *A* on odessalane. Asetame vastavasse tabeli ruutu tärni ning selle rea vabadesse ruutudesse paneme miinused.

Samal viisil jätkates leiame lõpuks, et *A* on odessalane, *B* — leningradlane, *D* — kiievlane, *E* — tuulalane, *F* — harkovlane, *G* — moskvalane.

Nüüd on kerge leida ka reisijate erialasid: *A* ja *G* on arstid, *B* ja *F* on õpetajad, *D* ja *E* on insenerid.

Lisamärkus. Tabelist on näha, et ülesande tekstist me leidsime 17 fakti. Selle faktide hulga piisavus järeldub asjaolust, et me ülesande siiski ära lahendasime ja et lahenduse käigus ei tekkinud mingeid vastuolusid. Kas aga kõik 17 fakti on ülesande lahendamiseks vajalikud? Ilmselt mitte. Näiteks 2 fakti väidavad, et *D* pole moskvalane.

Missugune on selle ülesande lahendamiseks vajalik minimaalne faktide hulk?

Kuna iga reisija elab ühes kuuest linnast, siis tema elukoha leidmiseks elimineerimismeetodi abil peab meil esimese reisija jaoks olema 5 fakti, mis näitavad, millises viies linnas ta ei ela.

Teise reisija elukoha määramiseks on tarvilik ja piisav, et meie käsutuses oleks ainult 4 sama tüüpi fakti jne.

Kuue reisija kohta käiva ülesande kõige ökonoomsemaks konstrueerimiseks ja lahendamiseks on tarvilik ja piisav omada $5+4+3+2+1=15$ toodud tüüpi fakti.

Meie ülesandes on 2 fakti ülearused.

266. Selle ülesande lahendamiseks sobib hästi eelmises ülesandes kasutatud meetod. Loetleme kõigepealt ülesande tekstis antud fakte:

1) Esimeses voorus mängis polkovnik ratsaväelasega.
2) Esimeses voorus lendur ei mänginud.
3) Teises voorus jalaväelane võitis.
4) Teises voorus jefreitor võitis.
5) Teises voorus major võitis.
6) Teises voorus vanem viigistas.
7) Kolmandas voorus mängis leitnant jalaväelasega.
8) Kolmandas voorus mängis kapten seersandiga.
9) Kolmandas voorus mängis polkovnik suurtükiväelasega.
10) Pärast kolmandat vooru mängis kapten majoriga.
11) Pärast kolmandat vooru kapten loobus.
12) Seetõttu oli neljandas voorus vaba tankist.
13) Neljandas voorus mängis sapöör leitnandiga.
14) Neljandas voorus mängis vanem polkovnikuga.
15) Kuuenda vooru järel lõpetati ratsaväelase ja miinipilduri vaheline katkestatud partii.

Koostame ja täidame ka siin turniirist osavõtjate ja nende väeliikide tabeli:

	Jalaväelane	Lendur	Tankist	Kahurväelane	Ratsaväelane	Miinipildur	Sapöör	Sideväelane
Polkovnik	7-9	1-2	12-14	9	1	1-15	13-14	*
Major	3-5	—	10-12	*	—	—	—	—
Kapten	7-8	*	12	8-9	11-15	11-15	11-13	—
Leitnant	7	—	12-13	7-9	*	—	13	—
Vanem	3-6	—	12-14	9-14	1-14	*	13-14	—
Seersant	7-8	—	8-12	8-9	—	—	*	—
Jefreitor	3-4	—	*	—	—	—	—	—
Reamees	*	—	—	—	—	—	—	—

Tabelis olevad tärnid tähistavad turniirist osavõtjate väeliike. Tabelis on registreeritud 28 ülesande tekstist selgunud fakti, kusjuures selle ülesande lahendamiseks vajalik minimaalne faktide arv on samuti 28 ($7+6+5+4+3+2+1=28$). Järelikult antud ülesandes ülearuseid fakte ei ole.

267. Meetriste propside poolitamisel tekkinud tükkide hulk peab jaguma kahega. Poolteisemeetristest propsidest saadud tükkide arv peab jaguma kolmega ja kahemeetriste propside tükkide arv peab jaguma neljaga.

Lavrov ja Kotov saagisid kokku 26 tükki (jagub kahega).

Galkin ja Pastuhhov saagisid 27 tükki (jagub kolmega).

Medvedjev ja Jevdokimov saagisid 28 tükki (jagub neljaga).

Järelikult poolteise meetri pikkusi propse saagisid Galkin ja Pastuhhov, kelle eesnimed vastavalt ülesandele olid Petja ja Kostja. Petja peab olema brigadir. Teiselt poolt on meil teada, et Pastuhhov ei ole brigadir. Järelikult Pastuhhovi eesnimi on Kostja.

268. On teada, et konduktor elab Moskva ja Leningradi vahel täpselt poolel teel (2). Üks reisijatest elab Moskvas (1), teine Leningradis (3). Tähendab, kumbagi ei või lugeda konduktori lähimaks naabriks (4). Järelikult konduktori lähimaks naabriks ei saa olla Ivanov (1) ega ka Petrov (5), kelle kuupalk ei jagu täpselt kolmega (4), vaid on hoopis Sidorov. Sel juhul konduktor ei saa olla Sidorov (3). Kütja ei saa ka Sidorov olla (6). Järelikult on Sidorov vedurijuht.

Nüüd on kerge leida ka rongibrigaadi ülejäänud liikmete perekonnanimesid. Kuna reisija Ivanov elab Moskvas ning reisija Sidorov elab Moskva—Leningradi raudtee keskpaiga läheduses, siis reisija Petrov elab ilmselt Leningradis (3). Järelikult konduktori perekonnanimi on Petrov (3) ning kütja perekonnanimi on Ivanov.

269. Mõttekäik võiks näiteks niisugune olla. Kui (3) on õige, siis on (10) ja (12) valed, mis on aga ülesande tingimuste põhjal võimatu. Järelikult on (3) vale (s. t. rahakotti ei varastanud Theo). Kuna (3) on vale, siis on vale ka (9). Kuna (9) on vale, siis on (8) õige. Kuna (8) on õige, siis on (15) vale. Kuna (15) on vale, siis on (14) õige. Järelikult on süüdlane Judy.

270. 1) Teise tehte jagaja on saadud esimese tehte juures liituvate arvude summeerimisel. Järelikult siit me saame teada, et kogutud ravimtaimede üldhulk avaldub seitsmega lõppeva kahekohalise arvuga. Selle arvu esimene number on ilmselt 1, sest kahe suvalise ühekohalise arvu summa on väiksem kahekümnest. Seega korjati kokku 17 kg ravimtaimi.

2) Ühekohalisteks arvudeks, mille summa on 17, peavad olema 8 ja 9. Teisi ühekohalisi arve, mille summaks oleks 17, ei ole. Kui me

esimest liidetavat suurendaksime kaheksalt üheksale, siis teine liidetav väheneb üheksalt kaheksale, s. t. arvud jäävad samadeks. Esimese liidetava suurendamine, kas või ainult ühe võrra, muudab teise liidetava kahekohaliseks arvuks, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

3) Teise tehte jagatav peab olema võrdne kolmanda ja neljanda tehte tulemuste summaga, s. t. kahe kahekohalise arvu summaga. Kuid isegi kõige suuremate arvude summa ($99 + 99 = 198$) algab numbriga 1, järelikult on teises tehtes jagatava esimene number 1.

4) Teises tehtes esineva jagatise esimene number on ilmselt ka 1, sest jagatav ja jagaja algavad mõlemad ühega ja jagaja peab olema väiksem arv kui jagaja kahest esimesest numbrist moodustatud arv, sest muidu ei oleks jagatis kahekohaline arv. Siit järeldub, et jagatava teine number peab olema seitsmest suurem.

5) Jagatava teine number teises tehtes peab olema 8 või 9. 9 langeb välja, sest siis peaks kolmas rida algama numbriga 2, aga kahekohaline arv, mis algab numbriga 2, ei saa jäägita jaguda seitsmeteistkümnega. Tähendab, jagatava teine number on 8. Siis on kolmanda rea esimene number 1 ja teine number 7, sest 17-ga jagamine pidi toimuma ilma jäägita. Seega on teises tehtes jagamise tulemuseks 11.

Vastus. Esimene lüli sai $9 \times 11 = 99$ rbl. Teine lüli sai $8 \times \times 11 = 88$ rbl.

271. Jagatises on 5 numbrit, jagatava alla korrutisse aga on kirjutatud ainult 3 numbrit. Järelikult peavad jagatise viiest numbrist 2 olema nullid. Korrutise järgi otsustades ei saa need olla ei jagatise esimene ega viimane number. Tähendab, nullid — teine ja neljas number — on kaetud valge ja musta odaga. Edasi, kui kahekohalist jagajat korrutada kaheksaga, siis me saame kahekohalise korrutise, kui aga jagajat korrutada jagatises valge vankri alla peidetud arvuga, siis me saame kolmekohalise korrutise. Järelikult peab valge vankri alla peidetud arv olema kaheksast suurem — ilmselt 9. Jagatise viimast numbrit jagajaga korrutades saame samuti kolmekohalise arvu. Tähendab, ka viimane jagatise number on 9. Sellega on meil jagatis täielikult leitud: 90809.

Leiame nüüd jagaja. Seda kaheksaga korrrutades peame saama kahekohalise arvu ning üheksaga korrutades peame saama kolmekohalise arvu. Ainuke kahekohaline arv, mis vastab nendele nõuetele, on 12, sest $12 \times 8 = 96$ ja $12 \times 9 = 108$. Järelikult on jagaja 12. Korrutades jagajat (12) jagatisega (90 809) ja liites jäägi 1, saamegi jagatava, milleks on arv 1 089 709.

272. Esimene arvmõistatus. Vaatleme algul arvu *ABC* korrutist arvuga *A* (neljas rida). Selle korrutise viimane number

on A, järelikult ta pole 1, sest vastasel korral oleks ka $C = 1$, erinevad tähed aga pidid vastama erinevatele numbritele.

Järgmiseks paneme tähele, et A ei saa olla kolmest suurem, sest vastasel korral oleks vaadeldavas korrutises üle kolme numbri; joonis aga näitab, et ta on kolmekohaline. Järelikult A saab olla ainult 2 või 3.

Oletame, et $A = 3$. Missugune peab siis olema C, et kolme ja C korrutis lõpeks kolmega? Seda tingimust rahuldab ainult C väärtus 1 ($3 \cdot 1 = 3$). Kolmandast reast on aga näha, et C ei saa olla 1, sest ABC ja C korrutis peab olema neljakohaline arv. Järelikult ei saa A olla kolm, vaid peab kehtima võrdus $A = 2$. Otsime jälle sobiva C väärtuse, nii et $2C$ lõpeks numbriga 2. Ainuke võimalik C väärtus on 6.

Nüüd vaatame arvude $2B6$ ja B korrutist (viies rida). Selle korrutise viimane number peab olema B. Tähendab, korrutis CB peab lõppema B-ga. B jaoks sobiksid väärtused 4, 6, või 8, aga et $246 \times 4 = 984$ on ainult kolmekohaline arv (korrutis peab olema neljakohaline arv) ja et $C = 6$, siis jääb B jaoks üle üksainus võimalus — $B = 8$. Järelikult $ABC = 286$ ja $BAC = 826$.

T e i n e a r v m õ i s t a t u s. 1) Et neljandasse ritta peab kolmekohalist arvu kahega korrutades saama neljakohalise arvu, kolmandasse ning viiendasse ritta aga peavad tulema kolmekohalised arvud, siis peavad mõlemad teise rea äärmised liikmed olema kahest väiksemad; see tähendab, nad peavad mõlemad võrduma ühega.

Seega on kordaja 121.

2) Et viies rida saadakse korrutatavat ühega korrutades, siis näitab viiendas reas olev number 8, et korrutatava teine number peab olema 8 (esimene rida) ja järelikult ka kolmanda rea keskmine number peab olema 8 (kolmas rida saadakse esimest rida ühega korrutades).

Võtame senised tulemused kokku:

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r} *8* \\ 121 \end{array} \\ \hline *8* \\ +\ \begin{array}{r} **** \\ *8* \end{array} \\ \hline **9*2* \end{array}$$

3) Esimese rea esimene number peab olema neljast suurem, sest muidu ei saaks neljandas reas olla neljakohaline arv, kuid samal ajal ei saa neljanda rea esimene number olla ühest suurem isegi siis, kui esimese rea esimene number oleks üheksa. Ilmne on ka veel fakt, et neljanda rea viimane number peab olema 4 (summa peab lõppema numbriga 2; vt. kuuendat rida).

4) Nüüd on selge, et kuuenda rea esimene number saab olla ainult 1, ja viienda rea esimene number (ning koos sellega ka kolmanda ja esimese rea esimene number) saab olla ainult kas 8 või 9, sest muidu ei saaks kuuendas reas olla kuuekohaline arv

$$\begin{array}{r} *8* \\ +\ 121 \\ \hline *8* \\ \times\ 1**4 \\ *8* \\ \hline 1*9*2* \end{array}$$

5) Et neljanda rea viimane number on 4 (vt. p. 3), siis esimese, kolmanda ja viienda rea viimane number saab olla ainult 2 või 7.

6) Neljanda rea kolmas number on 6 või 7, sest ta on korrutise 2×8 lõpunumber, tähendab ta võib suureneda ülimalt ühiku võrra. Neljanda rea teine number on kas 7 või 9, sõltuvalt sellest, kas esimese rea esimene number on 8 või 9 (vt. p. 4). Kui neljanda rea teine number oleks 7, siis seda veergu, milles ta asub $(7 + 8)$ tuleks täiendada neljaga, et summa lõpeks üheksaga. Ent järgmises tulbas olevate arvude summa ei saa isegi siis nelja kümnelist anda, kui nad oleksid kõik üheksad.

Järelikult on neljanda rea teine number 9.

7) Tingimustest 6 ja 4 järeldub, et esimese rea esimeseks numbriks (ja seega ka kolmanda ja viienda rea esimeseks numbriks) võib olla ainult 9:

$$\begin{array}{r} 98* \\ \times\ 121 \\ \hline 98* \\ +\ 19*4 \\ 98* \\ \hline 1*9*2* \end{array}$$

8) Kuna korrutatava viimane tundmatu number määrab kindlaks kõik ülejäänud korrutise numbrid, siis on selge, et esimese rea kolmandaks numbriks on 7, mitte 2 (vt. p. 5). Kui esimese rea viimane number oleks 2, siis see ei võimaldaks kuuenda rea kolmandaks numbriks saada 9.

Seega osutus võimalikuks leida kõigi šifreeritud numbrite väärtused. Lõpptulemus:

$$987 \times 121 = 119\,427.$$

K o l m a s a r v m õ i s t a t u s. $3125 : 25 = 125$.

N e l j a s a r v m õ i s t a t u s. $7\,375\,428\,413 : 125\,473 = 58\,781$.

Viies arvmõistatus. $1\,337\,174 : 943 = 1418$
ehk $1\,202\,464 : 848 = 1418$
ehk $1\,343\,784 : 949 = 1416$
ehk $1\,200\,474 : 846 = 1419$

Kuues arvmõistatus. $1\,091\,889\,708 : 12 = 90\,990\,809$.

Seitsmes arvmõistatus. $DOREMIFASOL \equiv$
$\equiv \begin{cases} 34\,569\,072\,148 \text{ või} \\ 23\,679\,048\,135. \end{cases}$

Kaheksas arvmõistatus. $\underset{576}{192+384}$, $\underset{819}{273+546}$, $\underset{639}{482+157}$; $\underset{864}{591+273}$ jt.

Üheksas arvmõistatus. $RAHU = 9\,376$.

273. Esimene ülesanne. Tuletame veel kord meelde, et iga number on šifreeritud ühe tähega ja et erinevatele numbritele vastavad erinevad tähed.

Kõigepealt näeme, et esimeses tulbas me saame A-st K-d lahutades jälle A. See tähendab, et $K = 0$.

Järgmiseks vaatleme vahet $RDL - RUK = WL$. Kuna $K = 0$ ja sajalised on võrdsed, siis

$$D - U = W. \tag{1}$$

Nüüd asume vahe $EDA - WL = EED$ uurimisele. Teisendame ta kõigepealt summaks: $EED + WL = EDA$. Kuna sadade numbrid ühtivad, siis peab kehtima üks kahest järgnevast võrrandisüsteemist:

$$(\alpha)\ \begin{cases} D + L = A \\ E + W = D \end{cases} \quad \text{või} \quad (\beta)\ \begin{cases} D + L = A + 10 \\ E + W + 1 = D \end{cases}$$

(üheliste summa < 10), (üheliste summa > 10)

Ühendades nüüd võrrandi (1) süsteemist (α) võetud võrrandiga $E + W = D$, saame $E + W - U = W$. Siit järeldub, et $E = U$, mis on aga võimatu, sest erinevad numbrid olid šifreeritud erinevate tähtedega. Tähendab, õige on süsteem (β).

Ühendades võrrandi (1) võrrandiga $E + W + 1 = D$, saame $E + W + 1 = W + U$. Siit

$$E + 1 = U. \tag{2}$$

Kuna $K = 0$, siis arve WZK ja RUK kümnega jagades saame $WZ : RU = Z$ ehk $RU \times Z = WZ$. Siit saame jälle kaks võimalust:

$$\begin{cases} ZU = Z \\ ZR = W \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} ZU = Z + 10 \\ ZR + 1 = W. \end{cases}$$

Kui esimene süsteem on korrektne, siis $U = 1$ ja (2) põhjal $E = 0$, mis pole aga võimalik, sest, nagu juba teada, $K = 0$. Järelikult on õige teine võrrandisüsteem. Võrranditest $ZU = Z + 10$ ja $E + 1 = U$ saame: $Z(E + 1) = Z + 10$ ehk

$$ZE = 10. \tag{3}$$

Nüüd asume võrrandi $RRTZ : Z = EED$ juurde. Anname talle järgmise kuju: $(100E + 10E + D) \times Z = 1000R + 100R + 10T + Z$. Siit $100EZ + 10EZ + DZ = 1000R + 100R + 10T + Z$ ehk seost (3) arvestades:

$$1000 + 100 + DZ = 1000R + 100R + 10T + Z.$$

See võrdus saab ilmselt kehtida ainult siis, kui $R = 1$ ja

$$DZ = 10T + Z. \tag{4}$$

Vaatleme summat $DTA + RDL = RRTZ$.
Kuna $R = 1$, siis

$$\begin{array}{r} DTA \\ +\ 1DL \\ \hline 11TZ. \end{array}$$

Teades, et $D < 10$ ja et kümneliste summa ei saa anda üle ühe sajalise, saame $D + 1 + 1 = 11$.

Siit $D = 9$. Seda väärtust võrrandisse paigutades saame

$$\begin{array}{r} 9TA \\ +\ 19L \\ \hline 11TZ. \end{array}$$

Juht $A + L = Z$ on võimatu, sest siit järelduksid võimatud võrdused $T + 9 = T$ ehk $T + 9 = T + 10$.

Järelikult

$$A + L = Z + 10. \tag{5}$$

Ülejäänu on juba lihtne. Võtame näiteks käsile võrrandi $DTA - WZK = EDA$. Asendame D ta leitud väärtusega ja anname võrrandile niisuguse kuju:

$$\begin{array}{r} E9A \\ +\ WZ0 \\ \hline 9TA. \end{array}$$

Kuna Z ei saa olla null ega üks, siis

$$9 + Z = T + 10 \quad \text{ehk} \quad Z - T = 1, \tag{6}$$
$$E + W + 1 = 9 \quad \text{ehk} \quad E + W = 8. \tag{7}$$

Kõrvutame seosed (4) ja (6):

$$\begin{cases} DZ = 10T + Z \\ Z - T = 1, \end{cases}$$

ja kuna $D = 9$, siis $Z = 5$ ja $T = 4$.

Seosest (3) järeldub, et $E = 2$. Seosest (7) järeldub, et $W = 6$ ja lõpuks (1) annab $U = 3$.

Tähtede L ja A väärtused leiame seose (5) ja süsteemi (β) esimese võrrandi abil:

$$\begin{cases} A + L = Z + 10 \\ D + L = A + 10. \end{cases}$$

Kuna $D = 9$ ja $Z = 5$, siis $L = 8$ ja $A = 7$.

Võtame tulemused kokku järgmise tabelina:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	*R*	*E*	*U*	*T*	*Z*	*W*	*A*	*L*	*D*

Teine ülesanne. Lahendus on analoogiline esimese ülesande omaga, ainult veidi raskem. Tähtede väärtused on koondatud tabelisse:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	*E*	*R*	*U*	*F*	*S*	*W*	*A*	*H*	*L*

Saksakeelne sõna *Berufswahl* tähendab tõlkes elukutse valikut — tõepoolest, väga tähtsat sammu inimese elus.

Märkus. Üsna huvitav on ka selliste mosaiikülesannete iseseisev loomine.

274. Mootorrattur oli teel 20 minutit vähem kui tavaliselt. Aja kokkuhoid tuli sellest, et ta ei pidanud seekord lennuväljani välja sõitma. Need 20 minutit oleks ta kulutanud selleks, et sõita ratsanikuga kohtumise kohast lennuväljale ja siis sinna tagasi. Järelikult ühe otsa läbimiseks tal oleks kulunud 10 minutit. Teiselt poolt me teame, et mootorrattur kohtus ratsanikuga siis, kui see oli juba pool tundi teel viibinud. Kuna mootorrattur väljus postkontorist õigel ajal, siis järelikult kolmekümnele minutile kümmet minutit

juurde liites saame, et lennuk saabus sel päeval lennuväljale 40 minutit tavalisest varem.

275. Mõttekäik on eelmisega analoogiline. «Pobeda» jõudis tehasesse 10 minutit varem kui tavaliselt, sest tal polnud vaja jaamani välja sõita. Nende 10 minuti jooksul oleks «Pobeda» sõitnud kohtumiskohast jaama ja sinna tagasi. Ühe otsa läbimiseks oleks autol kulunud 5 minutit. Selle maa jalgsi käimiseks kulus inseneril 25 minutit (30 minutit — 5 minutit). Tähendab insener kohtus «Pobedaga» kell 8.25.

Ta kõnnib 5 korda aeglasemalt kui sõidab autoga.

276. 1) Eeldame, et ükski tegur pole kaheksast suurem, siis võib esineda kolm juhtu: a) kõik tegurid on võrdsed kaheksaga, b) üks teguritest on kaheksa, teine on kaheksast väiksem, c) mõlemad tegurid on kaheksast väiksemad. Kerge on näha, et kõigil neil juhtudel on korrutis seitsmekümne viiest väiksem, mis on ülesande tingimusega vastuolus. Järelikult peab vähemalt üks teguritest olema kaheksast suurem.

2) Eeldame, et esimene number pole üks. Siis ta peab olema vähemalt 2 ja arv ise peab olema vähemalt 20. Kui me aga korrutame kahekümne viiega, siis me saame sada, s. o. kolmekohalise korrutise, ja see on vastuolus ülesande tingimusega.

Järelikult peab antud kahekohalise arvu esimene number olema 1.

277. 1. Jaotame üheksa raha kolmeks võrdseks rühmaks ja paneme kummalegi kaalukausile 3 raha (esimene kaalumine). Kolmanda rühma jätame esialgu kõrvale. Nüüd on võimalikud kaks juhtu.

Esimene juht. Kaalud on tasakaalus. Sel juhul asub otsitav valeraha kõrvalepandud rahade rühmas. Võtame nendest kaks suvalist raha ja paneme kummalegi kaalukausile ühe raha (teine kaalumine). Kui nüüd kausid pole tasakaalus, siis valerahaga kauss tõuseb üles (valeraha oli kergem); kui kausid on tasakaalus, siis on vale selle rühma kolmas raha, mida me kaalule ei asetanud.

Teine juht. Kaalud pole tasakaalus. Järelikult on valeraha kaalukausil, mis tõusis üles. Seega ka siin näitab esimene kaalumine kolmiku, mille hulgas on valeraha. Teise kaalumisega eraldamegi otsitava raha (just nagu esimesel juhul).

2. Ülesanne lahendub analoogiliselt eelmisega. Lisaraskus peitub selles, et tuleb jõuda rahade ebavõrdse jaotamiseni: kaks kolmelist rühma ja üks kaheline rühm. Alguses paneme kaaludele kaks kolmelist rühma (esimene kaalumine). Kui kaalud on tasakaalus, siis on otsitav raha kahelises rühmas ja teise kaalumisega on ta kohe käes. Kui kausid pole tasakaalus, siis tõuseb valerahaga pool

üles ja me saame ta ühe kaalumisega kätte (just nagu eelmise ülesande lahenduses on kirjeldatud).

3. Kogu raskus peitub siin selles, et me ei tea, kas valeraha on kergem või raskem õigetest rahadest. Seepärast tuleb meil rahasid kolme neljalisse rühma jaotades neid lähemalt individualiseerida, näiteks nummerdada. Ühele kaalukausile asetame rahade rühma 1, 2, 3 ja 4 ning teisele kaalukausile rahade rühma 5, 6, 7 ja 8 (esimene kaalumine). Siin on võimalikud 2 juhtu.

Juht A. Kaalud on tasakaalus. Järelikult valeraha on kolmandas rühmas (9, 10, 11 ja 12). Võrdleme nüüd rahade 9, 10 ja 11 kaalu rahade 1, 2 ja 3 kaaluga (teine kaalumine). Kui kaalud jäävad tasakaalu, siis on valeraha kaheteistkümnes ja teda näiteks esimese rahaga võrreldes saame kohe kätte, kas ta on kergem või raskem (kolmas kaalumine). Kui aga teine kaalumine ei anna tasakaalu, siis on vale kas nr. 9, nr. 10 või nr. 11, kusjuures kaalude asend näitab kohe, kas ta on kergem või raskem. Oletame näiteks, et kauss rahadega 9, 10, 11 vajus alla. Tähendab valeraha on raskem. Et teda eraldada ülejäänute hulgast piisab ühest (kolmandast) kaalumisest. Selleks paneme kaalule rahad 9 ja 10. Siis valeraha kas vajub allapoole või on nr. 11 vale.

Juht B. Esimene kaalumine ei anna tasakaalu. Ütleme, et kauss, millel on rahad 1, 2, 3 ja 4, vajus allapoole. Siis võib otsitav raha olla raskem ja asuda rahade 1, 2, 3 ja 4 hulgas või võib olla ka kergem ja asuda rahade 5, 6, 7 ja 8 hulgas. Ühtlasi saame teada, et rahad 9, 10, 11 ja 12 on õiged. Teise kaalumisega võrdleme rahasid 9, 10, 11 ja 5 (kolme õiget ja üht kergemate rahade hulgast) rahadega 3, 4, 6 ja 7 (kaks raha kergemate ja kaks raskemate rühmast).

Siin võib esineda kolm juhtu:

a) Kaalud on tasakaalus. See tähendab, et valitud rahad on õiged ja valeraha on kas nr. 8 ja on kergem, või on ta rahade nr. 1, 2 hulgas ja on raskem. Rahasid 1 ja 2 võrreldes (kolmas kaalumine) leiame, kas valeraha on nr. 8 (kui kaalud on tasakaalus), või on valeraha nende endi hulgas, siis raskem vajutab kaalukausi allapoole.

b) Rahade rühm 9, 10, 11 ja 5 vajutab kausi alla. Sel juhul nende hulgas ei saa olla valeraha, sest 9, 10 ja 11 on õiged, ning kergemate rahade hulgast võetud nr. 5 ei saa olla raskem! Tähendab, valeraha on kausi teisel poolel, kus on rahad 3, 4, 6 ja 7 ning just kergemate rahade hulgas (kas 6 või 7). Kolmanda kaalumisega me leiamegi, kumb neist on valeraha. Selleks on ilmselt kergem raha.

c) Rahad 3, 4, 6 ja 7 on raskemad. Siis kas valeraha on raskem ja asub rahade 3 ja 4 hulgas või on kergem ja on raha nr. 5. Seega valeraha leidmiseks piisab, kui asetada kaalule rahad 3 ja 4 (kolmas kaalumine). Kui kaalud ei jäänud tasakaalu, siis on raskem vale, kui kaalud on tasakaalus siis on raha nr. 5 vale (kergem).

278. *A* arutles nõnda: «Mu kaaslastel on laubal valged paberid, tähendab, mul võib olla laubal nii valge kui must paber. Eeldame, et seal on must paber. Siis *B* saaks otsekohe oma paberi värvi kindlaks teha. Ta võiks mõelda nii: «Ma näen, et *A* laubal on must paber ja *C* laubal on valge paber. Tähendab, minu laubal võib olla nii must kui ka valge paber. See ei saa aga olla must paber, sest siis võiks *C* kohe öelda, et ta laubal on valge paber (üldse oli ju kaks musta paberit). *C* aga ei teinud seda kohe, tähendab ta mõtleb, et tal võib olla laubal must paber ja seega on minu laubal valge paber.» *B* aga vaikib samuti, järelikult pole minu paber must, vaid valge.»

Niiviisi arutles *A*, kes oli kindel, et ta kaaslased oskavad niisama loogiliselt mõelda. Analoogiliselt arutlesid ka teised võistlejad ja seepärast nad jõudsidki kõik kolm ühekorraga õigele järeldusele, et neil kõigil on laubal valge paber.

279. *A* arutles nii: «Igaüks meist võib mõtelda, et ta oma nägu on puhas. *B* on veendunud, et ta nägu on puhas ja naerab *C* määritud laupa. Kuid kui *B* näeks, et minu nägu on puhas, siis ta oleks hämmastunud, miks naerab *C*, sest sel puhul *C*-l poleks ju põhjust naermiseks. Kuna aga *B* pole hämmastunud, siis ta võib arvata, et *C* naerab minu nägu. Järelikult on ka minu nägu määritud.»

280. 1) a) «Kahe teravnurga» asemel tuleks öelda «teravnurkade». b) Ülearused sõnad on «täisnurkse kolmnurga» ja «teravnurga» asemel tuleb öelda lihtsalt «nurga».

2) a) Kõõl. b) Kolmnurk. c) Läbimõõt. d) Võrdkülgne kolmnurk. e) Kontsentrilised ringjooned.

3) Kõrgus, mediaan, nurgapoolitaja, sümmeetriatelg, punktidest *A* ja *C* võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriline koht.

4) Geomeetriline kujund → tasapinnaline kujund → hulknurk → kumer nelinurk → parallelogramm → romb → ruut.

5) Kumera hulknurga kõigi välisnurkade summa võrdub nelja täisnurgaga, järelikult ei saa ühelgi kumeral hulknurgal olla rohkem kui 3 välist nürinurka. Siit järeldub, et ühelgi kumeral hulknurgal ei saa olla rohkem kui kolm teravat sisenurka. Kolme teravnurgaga kujundiks võib olla kolmnurk.

281. 1. Me tegime kindlaks, et otsitav arv on paarisarv ja jagub üheksaga. Ta jagub järelikult ka kaheksateistkümnega. Samuti on kindlaks tehtud, et ta on 10 ja 25 vahel. Siit järeldub vahetult, et otsitav arv on 18, sest 10 ja 25 vahel on see ainus arv, mis jagub kaheksateistkümnega.

Kontroll: $18 \times 4^1/_2 = 81$.

2. a) Otsitavate arvude hulgas ei või olla arvu 10, sest vastasel korral lõpeks korrutis nulliga.

b) Kui kõik otsitavad arvud oleksid kümnest suuremad, siis nende korrutis oleks suurem arvust $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$. Tähendab, otsitavate arvude hulgas peab leiduma kümnest väiksemaid arve.

c) Kui üks arv on kümnest väiksem, siis peavad seda olema ka teised, sest arvud pidid olema järjestikused ja ükski neist ei või olla 10. Järelikult on kõik arvud ühekohalised.

d) Otsitavate arvude hulgas ei saa olla arvu 5, sest siis kuuluks nende hulka ka kas 4 või 6 ja otsitavate arvude korrutis lõpeks nulliga.

e) Vaatleme kaht võimalikku arvude rühma:

1, 2, 3, 4 ja 6, 7, 8, 9.

Esimene rühm langeb välja, sest $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Järelikult, kui ülesanne on lahenduv, siis otsitava arvu võivad anda vaid arvud 6, 7, 8 ja 9.

Kontroll: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$.

282. Vana vedurijuht arutles nii: ülesande tingimuste kohaselt ei saa lapse vanus olla alla 3 aasta ja üle 12 aasta (mõiste «laps» kohaselt). Tähendab, kolme aasta pärast on lapse vanus kuue ja viieteistkümne aasta vahel. Selles vahemikus on aga ainult üks ruuttäisarv, see on 9. Tähendab, laps on praegu 6 aastat vana.

Galja aga pidas silmas järgmisi lahendusviise.

a) Aritmeetiline lahendusviis. Olgu a lapse vanus kolme aasta eest. Ülesande tingimuste kohaselt on selle arvu ruut arvust endast suurem 6 võrra, s. t. $a^2 - a = 6$ ehk $a(a-1) = 6$.

Kui eeldada, et a on täisarv, siis a ja $a-1$ on arvu 6 teguriteks. Arv 6 lahutub kahel viisil tegurite korrutiseks: $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$. Nendest sobib ainult esimene, sest tegurite vahe peab olema 1. Järelikult $a = 3$ ja lapse vanus on $3 + 3 = 6$ aastat.

b) Algebraline lahendusviis. Olgu x praegune lapse vanus. Kolm aastat tagasi oli ta $x-3$ aastat vana ja kolme aasta pärast on ta $x+3$ aastane. Tingimuste kohaselt $x+3 = (x-3)^2$. Siit $x^2 - 7x + 6 = 0$. Selle võrrandi juured on $x_1 = 6$ ja $x_2 = 1$. Ülesande sisu põhjal $x > 3$. Järelikult on meie ülesandel üks lahendus: $x = 6$.

283. Me peame jagama vahemiku, milles valitud arv asub, pooleks ning selgitama kummas pooles otsitav arv asub. Poole võrra vähendatud vahemikus toimime jälle samuti.

Kust on aga näha, et arvu leidmiseks piisab kümnest küsimusest?

Asi on selles, et arvude vahemiku 1—1000 kümnekordne poolitamine viib meid vahemikuni, milles on ainult kaks arvu ja millest teine arv on otsitav. Tõepoolest, võtame kahest arvust — ühest ja kahest koosneva vahemiku. Kahekordistame selle vahemiku, saame vahemiku 1 — 4. Kahekordistame jälle. Vahemiku ülemiseks rajaks tuleb nüüd arv 8 ehk 2^3. Veel kord kahekordistades saame ülemiseks piiriks 16 ehk 2^4.

Vahemike kahekordistamist jätkates nihutame ülemise raja algul arvuni 2^5, siis arvuni 2^6 jne., kuni kümne sammu järel jõuame arvuni $2^{10} = 1024$, mis, nagu näete, on tuhandest isegi veidi suurem.

Küsimuste esitamist selgitame näidete varal.

Näide 1. Olgu mõeldud arv 1. Küsime:

1) «Kas mõeldud arv on suurem kui 512 (pool vahemikust 1 — 1024)?»

«Ei.»

2) «Kas mõeldud arv on suurem kui 256 (pool vahemikust 1 — 512)?»

«Ei.»

3) «Kas ta on suurem kui 128?» — «Ei.»

4) «On ta suurem kui 64?» — «Ei.»

5) «On ta suurem kui 32?» — «Ei.»

6) «On ta suurem kui 16?» — «Ei.»

7) «On ta suurem kui 8?» — «Ei.»

8) «On ta suurem kui 4?» — «Ei.»

9) «On ta suurem kui 2?» — «Ei.»

10) «On ta suurem kui 1?»

Arvu mõtleja vastab ka viimasele küsimusele loomulikult eitavalt. Siit on meil selge, et mõeldi arv 1.

Näide 2. Olgu mõeldud arv 860. Küsime:

1) «Kas mõeldud arv on suurem kui 512?» — «Jah.»

Tähendab mõeldud arv on 512 ja 1000 vahel. Mugavuse mõttes loeme, et ta on 512 ja 1024 vahel. Liidame endamisi poole sellest vahemikust (s. t. 256) 512-le ja küsime:

2) «Kas see arv on suurem kui 768?» — «Jah.»

Märgime endamisi, et otsitav arv on vahemikus 768—1024. Liidame jälle 768-le poole sellest vahemikust (s. t. 128) ja küsime:

3) «Kas see arv on suurem kui 896?» — «Ei.»

Peame meeles, et otsitav arv on 768 ja 896 vahel. Liidame jälle poole vahemikku (s. t. 64) 768-le ja küsime:

4) «Kas see arv on suurem kui 832?» — «Jah.»
Otsitav arv kuulub vahemikku 832—896. Liidame 832-le poole vahemikust (s. t. 32) ja küsime:
5) «Kas see arv on suurem kui 864?» — «Ei.»
Otsitav arv on suletud 32-arvulisse vahemikku 832—864.
6) «Kas see arv on suurem kui 848?» — «Jah.»
Vahemik kitsenes 16 arvule: 848—864.
7) «Kas see arv on suurem kui 856?» — «Jah.»
Vahemik vähenes 8 arvuni: 856—864.
8) «Kas see arv on suurem kui 860?» — «Ei.»
Otsitav arv on vahemikus 856—860.
9) «Kas see arv on suurem kui 858?» — «Jah.»
Tähendab, otsitav arv on kas 859 või 860.
10) «Kas see arv on suurem kui 859?» — «Jah.»
Tähendab mõeldud arv on 860.

X peatüki juurde

284. Esimene mängija võib alati sundida teist mängijat laualt viimast tuletikku võtma. Vastavaid arvutusi on kõige mugavam alustada mängu lõpust. Viimases ringis peab esimene mängija jätma oma vastasele laualt võtmiseks ühe eseme. Mitu eset ta peab oma vastasele jätma eelviimases ringis? Ilmselt 5.

Tõepoolest, kui teine mängija võtab nüüd 1, 2 või 3 eset, siis esimene mängija võtab vastavalt 3, 2 või 1 eset ja igal juhul jääb teisele mängijale $5 - 4 = 1$ ese.

Analoogiliselt arutledes leiame, et veel üks ring varem pidi esimene mängija oma vastasele jätma 9 eset. Kui nüüd teine mängija võtaks 1, 2 või 3 eset, siis esimene mängija võtaks vastavalt 3, 2 või 1 eset ja jätab igal juhul teisele mängijale $9 - 4 = 5$ eset.

Esemeid on kokku 11. Järelikult peab alustaja võtma laualt 2 eset, nii et teisele mängijale jääks 9 eset, edasi kulgeb mäng juba vastavalt äsjasele kirjeldusele. Esimese mängija poolt pärast tema võtmist lauale jäetud esemete arv on lõpust alates 1, 5, 9 ja moodustab arvude rea, mille esimene arv on 1 ja iga järgmine arv on eelmisest nelja võrra suurem. Seda arvude rida jätkates saame võidutee kätte 30 eseme puhuks: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. Järelikult peab 30 eseme korral alustaja võtma ühe eseme ning järgmistel kordadel peab ta oma vastasele jätma vastavalt 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1 eset.

M ä n g u ü l d i s t u s. Analoogiliselt eelnevale leiame, et mängu

võidab see, kes võib lõpust alates jätta oma vastasele

$$1,\ p+2,\ 2p+3,\ 3p+4$$

jne. eset, kuni arvuni, mis on arvule n kõige lähemal, kuid sellest siiski veel väiksem. Tähistame seda arvu tähega N.

Kui esimene mängija peab toodud reeglist kinni, siis tal tuleb võitmiseks esimesel korral võtta $n-N$ tuletikku. Kui aga $n-N=0$, siis võidab teine mängija.

285. Võidab see, kes jätab oma partnerile mängu lõpuks 7 tuletikku. Tõepoolest, seitset tuletikku partner korraga võtta ei saa ja ükskõik kui palju ta ka ei võtaks, ikka jääb ta viimastest tuletikkudest ilma. Võitja peab vastavalt enne 7 tuletiku lauale jätmist omama võimaluse 14 tuletiku, 21 tuletiku ja 28 tuletiku lauale jätmiseks.

Mängu alustav mängija peab võtma kaks tuletikku, siis ta on reegli järgi toimides kindel võitja.

286. Oige mängu juures võidab ka siin alustaja. Kindlat võitu andvat reeglit on siin aga hoopis raskem leida, kui eelmistes mängudes.

Alustaja peab esimesel korral eemaldama laualt 2 tuletikku, ja pärast tuleb tal partneri käigule vastavalt võtta laualt tuletikke järgmisest reeglist kinni pidades.

Kui vastasel on paarisarv tuletikke, siis tuleb talle lauale jätta niisugune tuletikkude hulk, mis oleks mõnest kuuega jaguvast arvust ühe võrra suurem (19, 13, 7); kui aga vastasel on paaritu arv tuletikke, siis tuleb talle jätta alles kuuega jaguvast arvust ühe võrra väiksem hulk tuletikke (23, 17, 11, 5). Kui see on võimatu, siis tuleb talle jätta kuuega jaguv hulk tuletikke (24, 18, 12, 6).

Näiteks teie võtate laualt 2 tuletikku ja teie vastane 4 või 2 tuletikku (paarisarv). Lauale jääb $27-6=21$ või $27-4=23$ tuletikku. Vastavalt reeglile te jätate nüüd lauale 19 tuletikku. Kui aga vastane võttis 3 tuletikku, siis jäi lauale $27-5=22$ tuletikku. Kuna te seitsmeteistkümne tuletikuni ei küüni (viit tuletikku ei või korraga võtta), siis teil tuleb laualt võtta 4 tuletikku, nii et jääk oleks 18. Kui vastane võttis ühe tuletiku, siis ka teil tuleb võtta üks tuletikk, nii et jääk oleks $27-4=23$ tuletikku jne.

See reegel järeldub järgmistest kaalutlustest (mängivad A ja B):

1) Jäägu mängu lõpul lauale 5 tuletikku. See on mängijale A kasulik ainult siis, kui mängijal B on käes paaritu arv tule-

tikke ja ühtlasi ka võtmise järjekord (kuna laualt on eemaldatud 22 tuletikku, siis on ka mängijal *A* käes paaritu arv tuletikke).

Vaatleme kõikvõimalikke mängu jätke:

	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
käes oli	paaritu	paaritu	paaritu	paaritu	paaritu	paaritu	paaritu	paaritu
võttis	—	1	—	2	—	3	—	4
võttis	3	1	3	—	1	1	1	—
	paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu

Kui aga *B*-l oli käes paarisarv tuletikke (ja järelikult ka *A*-l), siis pole *A*-l kasulik jätta viit tuletikku *B* võtmise ajaks. See variant viiks *A* kaotusele (veenduge selles!).

2) Jäägu mängu lõpul lauale 6 tuletikku. See on *A*-le kasulik ainult siis, kui *B* peab võtma ja tal on paaritu arv tuletikke. (Ilmselt *A*-l on sel korral paarisarv tuletikke.) Tõepoolest:

	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
käes oli	paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu
võttis	—	1	—	2	—	3	—	4
võttis	4	1	4	—	2	1	2	—
	paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu

Kui aga *B*-l on käes paarisarv tuletikke ja *A*-l paaritu arv, siis *A* ei tohi jätta võtmisõigust *B*-le, sest *B* võtaks laualt ühe tuletiku ja saavutaks punktis 1 toodud võiduseisu.

3) Jäägu mängu lõpul lauale 7 tuletikku. See on kasulik *A*-le ainult siis, kui võtma peab *B* ja tal on käes paarisarv tuletikke. (Sel korral on ilmselt ka *A*-l paarisarv tuletikke.) Tõepoolest

	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
käes oli	paaris	paaris	paaris	paaris	paaris	paaris	paaris	paaris
võttis	—	1	—	2	—	3	—	4
võttis	1	—	4	1	4	—	2	1
	edasi nagu p. 1		paaris	paaritu	paaris	paaritu	paaris	paaritu

Kui aga *B*-l (ja ühtlasi ka *A*-l) on käes paaritu arv tuletikke, siis *A* ei tohi jätta *B* jaoks lauale seitset tuletikku ja

võtmisõigust, sest see tooks kaotuse. Tõepoolest, *B*-l tarvitseb vaid laualt võtta 1 tuletikk ja *A* on kaotusseisus (vt. p. 2).

4) Kui *A* jätab pärast võtmist lauale 8, 9 või 10 tuletikku, siis ta kaotab. Oletame näiteks, et pärast *A* käiku jäi lauale 8 tuletikku. Siis on võimalikud kaks juhtu:

a) *A*-l on paaritu arv tuletikke ja *B*-l paarisarv. *B* võtab sel juhul laualt 3 tuletikku ja jätab sellega lauale seisu 1, milles kaotab see, kes peab võtma. Kuna on *A* kord võtta, siis *A* kaotab.

b) *A*-l on paarisarv tuletikke ja *B*-l paaritu arv. *B* võtab ühe tiku. Tal on seega paarisarv tikke. Lauale jääb 7 tikku. Sel juhul kaotab see, kelle kord on võtta (vt. p. 3). Võtta tuleb *A*-l, järelikult *A* kaotab. Sama üleminekuvõimalus on *B*-l ka siis, kui *A* jätab pärast võtmist lauale 9 või 10 tuletikku. Nende juhtude analüüsimise jätame lugeja hooleks.

5) Edasisel tuletikkude hulga suurendamisel, s. t. 11, 12, 13 ... tuletiku korral korduvad võiduseisud samas järjekorras nagu 5, 6, 7 ... tuletiku korral. See kinnitabki varemkirjeldatud võiduskeemi kehtivust.

Jäägu näiteks pärast *A* võtmist lauale 11 tuletikku. Pole raske näidata, et *A* võidab, kui *B*-l (ja *A*-l endal) on käes paaritu arv tuletikke. Tõepoolest

	A	*B*	*A*	*B*
käes oli	paaritu	paaritu	paaritu	paaritu
võttis	—	1 või 3	—	2 või 4
võttis	3 või 1	—	4 või 2	—
	edasi nagu p. 3		edasi nagu p. 1	

Uurige iseseisvalt läbi veel mõned juhud (kas või näiteks juht, millal laual on 12 või 13 tuletikku).

6) Nüüd jääb veel tõestada, miks 27 tuletiku korral tuleb esimesel korral võtta laualt täpselt 2 tuletikku. Kui te võtate ühe tuletiku, siis vastane võib võtta 2 tuletikku; lauale jääb 24 tuletikku ja teil ei õnnestu jätta talle 19 tuletikku, nagu seda nõuab reegel.

Kui te võtate laualt 3 tuletikku, siis võib vastane võtta laualt ühe tuletiku, nii et lauale jääb kokku 23 tuletikku. Selle tuletikkude arvu juures aga kaotab see, kellel on paaritu arv tuletikke ning kelle kord on võtta (vt. p. 5).

Kui te võtate 4 tuletikku, siis vastane võtab niisama palju; lauale jääb 19 tuletikku. Teie kord on võtta, aga 19 tuletiku

juures kaotab see, kellel on paarisarv tuletikke ja võtmiskord (vt. p. 5).

Kui te aga võtate laualt 2 tuletikku, siis ükskõik kui palju neid vastane ka ei võtaks, ikka te saate vastavalt reeglile juhtida mängu endale kasulikele rööbastele.

287. Kombinatsioonideks «AK» on järjestikku paarid (1,2); (3,5); (4,7); (6,10); (8,13); (9,15), ...

Tähistades nende paaride esimesi arve tähtedega a_i ja teisi arve tähtedega b_i, saame moodustada kaks rida:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & \ldots, \\ 1, & 3, & 4, & 6, & 8, & 9, & \ldots; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} 2, & 5, & 7, & 10, & 13, & 15, & \ldots, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, & \ldots \end{cases}$$

Paneme tähele, et b_1 on a_1-st suurem ühe võrra, b_2 on a_2-st suurem kahe võrra, ..., b_n on a_n-st suurem n võrra, nii et

$$b_n = a_n + n.$$

Millise printsiibi järgi on aga koostatud esimene rida? Me teame, et $a_1 = 1$ ja $b_1 = 2$. Moodustame kolmanda arvude jada, mis esialgu koosneb küll ainult kahest arvust:

(III) 1, 2, ...

Vähimaks naturaalarvuks, mis peaks nüüd III jadas järgnema, oleks 3. See arv annabki järgmise I jada liikme: $a_2 = 3$, siit $b_2 = 3 + 2 = 5$.

Täiendame nüüd III jada arvudega 3 ja 5:

(III) 1, 2, 3, 5, ...

Vähimaks naturaalarvuks, mis puudub III jadas on 4. See arv annabki järgmise $a : a_3 = 4$. Siit $b_3 = 4 + 3 = 7$. Siis

(III) 1, 2, 3, 4, 5, 7, ...

Sama printsiibi järgi jätkates leiame, et $a_4 = 6$ ja $b_4 = 6 + 4 = 10$ jne.

Tähendab, igas kombinatsioonis «AK» : (a_n, b_n) on väiksem arv a_n niisugune vähim naturaalarv, mis pole eelmistes kombinatsioonides veel esinenud.

Professor Arnoldi poolt tuletatud valemite

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} n\right] \quad \text{ja} \quad b_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} n\right]$$

põhjal võib kõiki neid arve leida ka otseselt, andes järjest n-le väärtusi 1, 2, 3, ...* Märk [ ] tähendab, et kui sulgudes olev arv avaldub kümnendmurruna, siis tuleb säilitada ainult selle arvu täisosa. Nii näiteks $[1{,}61] = 1$, $[3{,}2] = 3$ jne. Mängu üldise teooria täielikuks selgitamiseks esitame siin ilma tõestuseta veel ühe Min Sõ-hao poolt tõestatud teoreemi.

Mängu reegleid rikkumata ei saa ühtegi kombinatsiooni «AK» ühe võtmisega muuta kombinatsiooniks «AK», küll aga saab iga kombinatsiooni, mis pole kombinatsioon «AK», muuta ühe käiguga niisuguseks kombinatsiooniks.

Sellest teooriast järeldub, et iga kombinatsioon, mis pole kombinatsioon «AK» on kombinatsioon «AV».

Muide, nüüd veel mõni sõna arvust $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mille abil saab tuletada kõiki võitu kindlustavaid arve. See arv peab keskkooli vanemate klasside õpilastele olema tuttav — ta on «kuldlõike» koefitsient. Sama arv kuulub ka valemisse, mis lubab ilma eelmisi liikmeid teadmata leida suvalist Fibonacci rea liiget (vt. lk. 348).

Selle mängu valemite ja Fibonacci arvude seos pole juhuslik. Üks professor Arnoldi seltsimehi I. M. Abramov leidis, et kasutades Fibonacci rea

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

arve, kus $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ ja $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, võib iga indeksi n korral üsna kergesti leida kombinatsioone «AK» moodustavaid arvupaare.

Selleks tuleb otsitava paari järjekorranumber n viia Fibonacci arvude summa kujule, kusjuures iga kord peab nende arvude hulgas olema kindlasti ka arv $u_0 = 1$. Arvud a_n ja b_n saame kätte Fibonacci rea niisuguste liikmete summadena, mille numbrid on vastavalt ühe ja kahe võrra suuremad arvu n moodustavate liikmete numbritest.

Olgu näiteks $n = 7$. Siis $7 = 1 + 1 + 5$ ehk $7 = u_0 + u_1 + u_4$; siit $a_n = u_1 + u_2 + u_5 = 1 + 2 + 8 = 11$, $b_n = u_2 + u_3 + u_6 = 2 + 3 + 13 = 18$.

Veenduge ise selles, et paar (11, 18) on kombinatsioon «AK».

290. Kui te tahate esimesena jõuda sajani, siis te peate esimesena jõudma ka arvuni 89. Tõepoolest, kui vastane sellest

---

* Nende valemiteni jõudis hiljem teisel teel välja ka matemaatik Min Sõ-hao, kelle tulemused on avaldatud hiinakeelses ajakirjas «Tšungo Šusjue Tsatši», 1952, nr. 2.

seisust nimetab mõne arvu, siis te saate ikka valida arvu, mis annaks summaks saja. Selleks et jõuda esimesena 89-ni, tuleb vastane asetada olukorda, kus tal jääb sellest arvust puudu jälle 11, s. t. me peame esimesena ütlema arvu 78. Seda mõttekäiku jätkates leiamegi võitu garanteeriva arvude rea. See rida algab arvust 1: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Nüüd on selge, et kui te ütlete esimesena arvu 1, siis ükskõik millist arvu te vastane ka ei nimetaks, ikka te saate järjest kätte kõik selle rea liikmed. Seda võtmearvude rida on kerge meeles pidada, — ta koosneb arvudest, mille üheliste hulk on kümnelistest ühe võrra suurem.

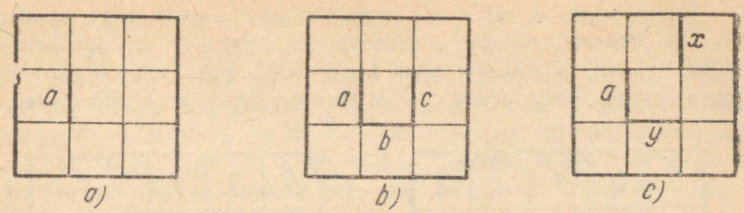
(Kui partner ei tunne veel mängu «võtit», siis ta liidab loomulikult juhuslikult pähe tulevaid arve, ja seepärast te võite esimese viiekümne piires riskida ning «jälgede segamiseks» võtmearve mitte kasutada.)

Mängu võib piirliidetava ja piirsumma muutmisega mitmekesistada. Ütleme näiteks, et piirliidetavaks on endiselt 10, piirsummaks aga on saja asemel 120. Lahutades sellest arvust üheteistkümneid, leiamegi võtmearvud: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109. Selle «saladuse» teadja võidab, kui ta alustab kümnest.

Olgu nüüd piirsummaks sada ja piirliidetavaks 8. Siis me leiame võtmearvud sajast järjest üheksat lahutades: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Ka sel juhul võidab see, kes alustab ja tunneb mängu «saladust».

Kui võtta aga piirliidetavaks arv 9, siis on võtmearvud järgmised: 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10. Sel juhul alustaja kaotab, loomulikult eeldusel, et partner tunneb mängu võtit.

291. Kui mängitakse üheksaruudulisel väljal, siis tuleb mängu alustada keskmise ruudu mingi külje *a* läbitõmbamisega (joon. 392, *a*). Kui vastane nüüd suleb mingi äärmise vasakpoolse veeru ruudu külje, siis te võidate kohe kõik selle veeru ruuduküljed ja võite ühtlasi teha võitva käigu allesjäänud ristkülikusse (vt. «mängu teooriat», lehekülg 205, p. 3). Sellega kuuluvad kõik 9 ruutu teile. Kui vastane teie esimese käigu järel (külje *a* läbitõmbamine) katsub pääseda külje *b* läbitõmbamisega, siis te katate viivitamatult külje *c* (joon. 392, *b*) ja vastasel ei jää muud üle, kui võita keskmine ruut ja kaotada kõik ülejäänud 8. (Muidu ta kaotaks kõik 9.) Kui aga vastane pärast teie esimest käiku (*a*) tõmbab läbi mõne parempoolse äärmise veeru ruudu külje, näiteks külje *x* (joon. 392, *c*), siis te võite võita parempoolses ülemises nurgas oleva ruudu, vastata talle käiguga *y* ja jälle on kõik 9 ruutu teie omad.



Joon. 392.

295. Ülesanne 1. Selleks, et leida arvu nr. 5 alla, võib teha kaks eeldust: see on kas 543 või 567 (vt. tingimusi). Katsetame neist esimesega, s. o. arvuga 543. Kui see arv on õige, siis nr. 6 põiki asuva neljakohalise arvu kaks esimest numbrit on 34. See arv peab aga võrduma tingimuste kohaselt arvude 77 ja $\overline{x3}$ korrutisega (x on tundmatu kümneliste number). Sobivaimaks x väärtuseks on 4, kuid $77 \times 43 = 3311$. Järelikult pole sajalised õiged.

Proovime nüüd teist võimalikku arvu nr. 5 alla: 567. Siis algab arv nr. 6 põiki numbritega 36, kusjuures need numbrid peavad olema neljakohalise korrutise $77 \times \overline{x7}$ esimesteks numbriteks. Sobivaim x väärtus on 4. Kontrollime: $77 \times 47 = 3619$. See arv ongi siis nr. 6 põiki, ja 47 rahuldab ühtlasi nr. 8 põiki nõudeid.

Nüüd jääb leida veel arv nr. 7 alla ja nr. 9 põiki. Kombineerides nr. 1 põiki ja nr. 3 alla kulgevate arvude tegureid, leiame kergesti, et arv nr. 7 alla on 99 ja nr. 9 põiki — 39. Sellega ongi kõik väljad täidetud (joon. 393).

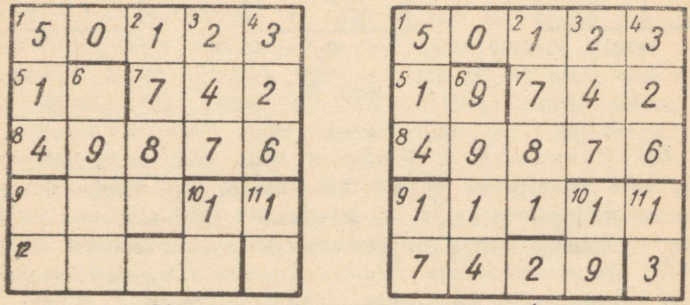
Ülesanne 2. Lahendust võib leida näiteks järgmise mõttekäiguga. Kõigepealt proovime kätte saada arve nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki. Nende kahe viiekohalise arvu moodustamiseks tuleb kasutada kõiki kümmet numbrit ning nende arvude vahe peab olema kolmekohaline arv. See tähendab, et otsitavate arvude esimeste numbrite vahe peab olema 1. Ühtlasi selguvad siit ka arvude nr. 5 ja nr. 10 esimesed numbrid (joon. 394, *a*).

1 3	0	2 8	3 7
4 4	5 5	6	7
6 3	6	1	7 9
8 4	7	9 3	9

Joon. 393.

Kui arvu nr. 3 suurim tegur (vt. nr. 5) algab numbriga 1, siis ta vähim kahekohaline tegur algab ka ilmselt numbriga 1. Sellega on käes ka arvu nr. 11 esimene number.

Ka arvu nr. 2 esimeseks numbriks on 1. Selle teine number on 7. Seesama number väljendab ka arvu nr. 8 kümneliste hulka (vt. nr. 7). Kuna arvu nr. 9 põiki kaks viimast numbrit on selgunud (kaks ühte), ja et ta tervikuna peab moodustama



Joon. 394.

ühe üheksandiku arvude nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki summast, siis on nende arvude üheliste summa ja kümneliste summa mõlemad võrdsed üheksaga. Järelikult on arvu nr. 3 esimene number 2. Ühtlasi on see number ka arvu 7 viimaseks numbriks. Kui x ja y on arvude nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki ühelised, siis on selgunud, et $x+y=9$ ja $2x=y$ (vt. nr. 4). Siit saame, et $x=3$, $y=6$. Arv nr. 4 on seega täielikult selgunud: 326

Arvu nr. 7 teine number on $11-7=4$ (vt. nr. 3). Teades arvude nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki vahe sajaliste numbrit ja arvu nr. 1 põiki sajaliste numbrit (1), võime kergesti leida, et arvu nr. 8 sajaliste number on 8. Niisama kergesti leiame nüüd ka arvude nr. 1 põiki ja nr. 8 põiki esimesed kaks numbrit (joon. 394, *a*). Edasi leiame arvu nr. 9 põiki: 11 111. Arvul 247 on kaks tegurit: 19 ja 13. See annab meile arvud nr. 5, 10 ja 11. Nüüd leiame arvu nr. 6 alla. Ta ümberpööratud arv on neljakohaline, lõpeb numbritega 99 ja koosneb arvu 247 ja ühe kahekohalise algarvu korrutisest. Ainsana sobib 17. Järelikult arvu nr. 6 ümberpööratud arv on 4199 ning sellel on kolm algarvulist tegurit: 13, 17 ja 19. Arv nr. 6 on seega 9914. Täielik lahendus on toodud joonisel 394, *b*.

Ülesanne 3. Kolmekohaliste arvude ruutude tabelit silmitsedes näeme, et ainus sümmeetriline arv on 698896. Selle arvu teadmine annab meile võtme arvude nr. 10 ja nr. 11 alla leid-

miseks. Edasi saame leida arvud nr. 4 ja nr. 9 alla ning nr. 13, nr. 15 ja nr. 5 põiki.

Arvu nr. 1 alla leidmiseks tuleb lahendada ülesanne: leida vähim täisarv, mis annab 2, 3, 4, 5 ja kuuega jagamisel jäägi vastavalt 1, 2, 3, 4, ja 5. Kui me otsitavale arvule lisame ühe, siis ta jagub 2, 3, 4, 5 ja kuuega. Nende arvude vähim ühiskordne on 60 ja otsitav arv on seega 59. Tähendab nr. 1 alla on $59 - 8 = 51$.

1 5	2 3	2	3 9		4 1
5 1	1		6 7	7 2	9
	8 7	9 3		4	
10 6	9	8	11 8	9	12 6
13 3	9		14 3	6	5
8		15 1	6	0	0

Joon. 395.

Nüüd leiame nr. 1 põiki. Leidub ainult kaks viiega algavat neljakohalist arvu, mis on algarvu ruuduks: 5041 ($= 71^2$) ja 5329 ($= 73^2$). Esimene neist ei sobi, sest arv nr. 2 ei saa alata nulliga. Ühtlasi saame siit kätte ka nr. 8 põiki: 73.

Nr. 2 alla tuli iseendast välja, jääb üle vaid kontrollida ta ristsummat. Ainus üheksaga algav kahekohaline algarv on 97. Sellega on käes ka nr. 3 alla. Ülejäänu on juba lihtne. Täieliku lahenduse leiate jooniselt 395.

296. Teine trikk. Oletame, et teie sõber valis arvu n ja teie arvu p. Mõlemate arvudega samasuguseid tehteid tehes saame ilmselt niisugused tulemused:

$$n\frac{a\ b\ c\ldots}{x\ y\ z\ldots};\quad p\frac{a\ b\ c\ldots}{x\ y\ z\ldots}.$$

Kui esimest tulemust jagada arvuga n ja teist tulemust arvuga p, siis saame tulemuseks ilmselt ühe ja sama arvu:

$$\frac{a\ b\ c\ldots}{x\ y\ z\ldots}.$$

Teades seda arvu ja summat $\frac{a\ b\ c\ldots}{x\ y\ z\ldots} + n$, tuleb meil arvu n leidmiseks arvutada nende suuruste vahe.

Kolmas trikk. Esimene juht. Mõeldud arv on kujuga $4n$. Teostame nõutud tehted:

$$4n + 2n = 6n, \qquad 6n + 3n = 9n, \qquad 9n : 9 = n$$

(jääki ei ole). Mõeldud arv on $4n$.

Teine juht. Mõeldud arv on kujuga $4n + 1$.

Selle suurem pool on $2n + 1$. Edasi arvutades saame:

$$(4n + 1) + (2n + 1) = 6n + 2; \quad (6n + 2) + (3n + 1) = 9n + 3;$$

$$(9n + 3) : 9 = n \quad \text{(jääk 3)}.$$

Jääk on viiest väiksem, mõeldud arv on $4n + 1$.

Kolmas juht. Mõeldud arv on kujuga $4n + 2$. Liites talle poole temast, saame:

$$(4n + 2) + (2n + 1) = 6n + 3.$$

Liites sellele tulemusele ta suurema poole, s. t. arvu $3n + 2$, saame:

$$(6n + 3) + (3n + 2) = 9n + 5, \quad (9n + 5) : 9 = n \quad \text{(jääk 5)}.$$

Jääk on 5, mõeldud arv on $4n + 2$.

Neljas juht. Mõeldud arv on kujuga $4n + 3$. Ta suurem pool on $2n + 2$. Liites saame

$$(4n + 3) + (2n + 2) = 6n + 5.$$

Tulemuse suurem pool on $3n + 3$, seepärast

$$(6n + 5) + (3n + 3) = 9n + 8, \quad (9n + 8) : 9 = n \quad \text{(jääk 8)}.$$

Jääk on viiest suurem. Mõeldud arv on $4n + 3$.

Neljas trikk. On ilmne, et kui mõeldud arv on kujuga $4n$, kus $n = 0, 1, 2, 3\ldots$, siis arvutuste lõpptulemuseks saame arvu $9n$, s. t. üheksaga jaguva arvu. Järelikult peab selle arvu ristsumma jaguma üheksaga, see aga tähendab, et varjatud number täiendab allesjäänute summat lähima üheksaga jaguva arvuni. Kui aga tuntud arvude summa jagub üheksaga, siis see tähendab, et varjati numbrit üheksa (0 on kokkuleppe põhjal välja lülitatud).

Arvude puhul, mis omavad kuju $4n + 1$, $4n + 2$ või $4n + 3$, saame arvutuste tulemusena vastavalt $9n + 3$, $9n + 5$, $9n + 8$. Nende arvude ristsumma jagub üheksaga alles siis, kui me esimesel juhul liidame arvu 6, teisel juhul arvu 4 ja kolmandal juhul arvu 1.

Tähendab, ka nendel juhtudel peab varjatud number täiendama allesjäänute summat üheksaga jaguva arvuni.

Viies trikk. Tähistame mõeldud arvu tähega x ja liidetava arvu tähega y. Nõutud tehteid teostades saame

$$(x+y)^2 - x^2 = 2xy + y^2 = 2y\left(x + \frac{y}{2}\right) = z.$$

Siit on näha, et mõeldud arvu (x) leidmiseks peab tulemust jagama kahega, siis veel jagama liidetud arvuga (y) ja lõpuks peab veel lahutama pool jagajast $\left(\frac{y}{2}\right)$.

Kuues trikk. Tähistame mõeldud arvu tähega x, selle arvu kolme, nelja ja viiega jagamisel saadud jagatised tähtedega a, b, c ja jäägid tähtedega r_1, r_2, r_3. Seega kehtivad kolm ilmset samasust:

$$x = 3a + r_1,$$
$$x = 4b + r_2,$$
$$x = 5c + r_3.$$

Siit

$$r_1 = x - 3a, \quad r_2 = x - 4b, \quad r_3 = x - 5c.$$

Kasutame nüüd ülesande tekstis antud valemit:

$$\begin{aligned} S &= 40r_1 + 45r_2 + 36r_3 = \\ &= 40(x - 3a) + 45(x - 4b) + 36(x - 5c) = \\ &= 121x - 120a - 180b - 180c. \end{aligned}$$

Tegurid 40, 45, ja 36 on niiviisi valitud, et kõik tekkiva algebralise summa liikmed peale esimese liikme ($121x$) jaguksid kuuekümnega. Esimene liige aga annab kuuekümnega jagamisel mõeldud arvuga x võrdse jäägi. Reegli kehtivus on seega tõestatud.

297. Esimene trikk. Mõeldud arvuga n teostatud tehteid võib väljendada nii: $\frac{na+b}{c}$. Seda avaldist võib esitada kujul $\frac{na}{c} + \frac{b}{c}$. Siit on selge, et lahutades $n \cdot \frac{a}{c}$, saame jäägiks $\frac{b}{c}$.

Märkus. Alati võib valida niisuguseid arve, et ei tekiks murde.

Teine trikk. Tähistame tähega x teie poolt üleskirjutatud arvu ja tähega y osavõtja poolt kirjutatud arvu. Esimene osavõtja poolt teostatud tehe annab meile arvu $y + 99 - x$. Kuna x ei ületa arvu 50 ja y on 50 ja 100 vahel, siis $y + 99 - x$ on saja ja saja üheksakümne üheksa vahel. Tähendab, ta on kindlasti kolmekohaline arv, mille sadade number on 1. Kui me selles arvus kustutame numbri 1, siis me vähendame teda sellega saja võrra. Seepärast osavõtja poolt

teostatud teine tehe viib meid arvuni $y + 99 - x - 100 + 1 = y - x$. Viimane tehe, $y - (y - x) = x$, viib meid arvule x, mida oligi tarvis tõestada.

Märkus. Te võite osavõtjatel lubada arve valida ka mõnest teisest vahemikust, näiteks vahemikust 201—1000, kuid siis peab peidetud arv kuuluma vahemikku 100—200 ning edasistes arvutustes tuleb 99 asemel kasutada arvu 999.

298.

	Esimesel	Teisel	Kolmandal
Esialgu oli	4 k	7 k	13 k
Pärast esimest ümberjaotust	8 k	14 k	2 k
Pärast teist ümberjaotust	16 k	4 k	4 k
Pärast kolmandat ümberjaotust	8 k	8 k	8 k

Pärast kolmandat ümberjaotust on neil kõigil esemeid kaks korda rohkem, kui alguses oli esimesel osavõtjal. Ülejäänu on iseenesest selge.

299. Olgu mõeldud arvud a ja b. Vastavalt tingimustele moodustame $(a + b) + ab$. Sellele arvule üht liites saame arvu, mis lahutub kergesti teguriteks:

$$(a + b) + ab + 1 = a + 1 + b(a + 1) = (a + 1)(b + 1).$$

Nagu näha, on iga tegur ühe võrra suurem vastavast mõeldud arvust.

Võib välja mõelda ka analoogilisi trikke, mis põhinevad mõeldud arvude vahe ja nende korrutise summa või vahe arvutamisel.

300. Olgu A algarv ja B arvuga A mittejaguv kordarv. Kahel teisel arvul x ja y ei ole ühiseid tegureid, kuid y ise on üks arvu B teguritest. Peale nõutud korrutiste teostamist võib tekkida summa $Ax + By$ või summa $Ay + Bx$. On selge, et esimene summa ei jagu arvuga y, aga teine jagub. Järelikult, vastavalt sellele, kas lõpptulemus jagub või ei jagu arvuga y, võime kindlaks määrata, kas y-ga korrutati arvu A või arvu B.

301. Kolme mõeldud arvu ja kolmega jaguva arvu summa on

$$a + (a + 1) + (a + 2) + 3k = 3a + 3k + 3 = 3(a + k + 1).$$

Korrutades seda summat arvuga 67, saame:

$$201(a + k + 1).$$

Vastavalt tingimustele $a < 60$, $3k < 100$ ehk $k < 34$. Järelikult arv $a + k + 1$ on ülimalt kahekohaline arv. Suvalise ühe- või kahekohalise arvu korrutis arvuga 201 lõpeb aga arusaadavalt alati sellesama ühe- või kahekohalise arvuga ning algab sellest 2 korda suurema arvuga.

Näiteks

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times\ 201 \\ \hline +\ 41 \\ 82 \\ \hline 8241 \end{array}$$

Niisiis, $a + k + 1$ võrdub korrutise kahest viimasest numbrist moodustatud arvuga. Sellest tuntud arvust tuntud arvu $k + 1$ lahutades leiamegi arvu a — kolmest mõeldud arvust vähima.

302. 1) Olgu mõeldud 2 arvu: a ja b. Teostame nõutud tehted:

$$(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25, \quad 10a + 25 + 10 = 10a + 35,$$
$$10a + 35 + b = 10a + b + 35.$$

Tulemusest arvu 35 lahutades saame kahekohalise arvu $10a + b$, mis koosneb mõeldud arvudest.

2) Olgu mõeldud 3 arvu a, b ja c. Teostame nõutud tehted:

$$(10a + b + 35) \cdot 10 + c = 100a + 10b + c + 350.$$

Tulemusest arvu 350 lahutades leiamegi mõeldud numbritest koosneva kolmekohalise arvu $100a + 10b + c$.

Ka suurema hulga mõeldud arvude korral jääb käsitlus täiesti analoogiliseks.

303. Kui otsitav vanus on x, siis nõutud tehete tulemusena saame arvu $10x - 9k$, kus k on suvaline ühekohaline arv. Teisendame nüüd saadud vahe veidi teistsugusele kujule:

$$10x - 9k = 10x - 10k + k = 10(x - k) + k.$$

Meie vestluskaaslane on arvatavasti vanem kui 9 aastat ($x > 9$). Kuna k rahuldab võrratust $k \leqslant 9$, siis järelikult vahe $x - k$ on positiivne. Sel juhul on arvus $10(x - k) + k$ k ühelist. Kui need k ühelist kustutada, siis koos sellega muutub ülejäänud numbrite järk, s. t. kümnelised muutuvad ühelisteks, sajalised kümnelisteks jne., ühe sõnaga arv väheneb 10 korda ja on võrdne vahega $x - k$. Liites sellele vahele mahatõmmatud numbri k, leiamegi otsitava vanuse x.

304. Otsitav vanus olgu x. Teostame nõutud tehted:

$$(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25.$$

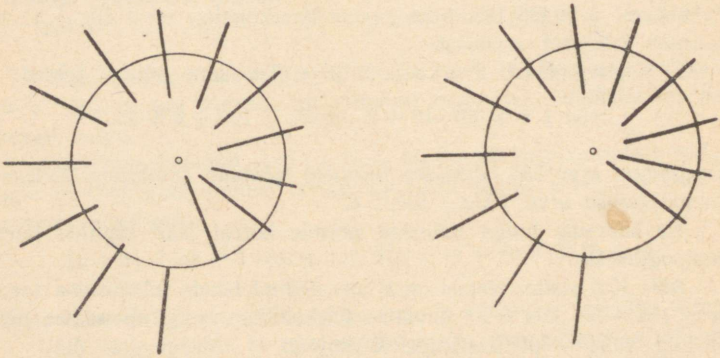
Teisendame seda tulemust:

$$10x + 25 = 10x + 20 + 5 = 10(x + 2) + 5.$$

Lõppnumbrit 5 kustutades saame arvu $x + 2$ (vt. eelmine tõestus). Tulemusest kaht lahutades leiame otsitava vanuse x.

305. Kolmeteistkümnes kriips ei läinud kaotsi, vaid jaotus ülejäänud kaheteistkümne vahel, neid pikendades. Selles võib veenduda kas esialgsete ja pärastiste kriipsude võrdlemisega või ka geomeetriliselt. Kujutleme sirget, mis ühendab nende kolmeteistkümne kriipsu ülemisi otsi (vt. joon. 186 lk. 226). See sirge ja sirge *MN* on nurga haaradeks, mis on lõigatud rea võrdsetel kaugustel asuvate paralleelsirgete poolt. Vastavat geomeetrilist teoreemi meelde tuletades me taipame, et sirge MN eraldab teisest kriipsust $^1/_{12}$ ta pikkusest, kolmandast kriipsust $^2/_{12}$, neljandast kriipsust $^3/_{12}$ jne.

Mõlemaid papitükke nihutades me liidame igast kriipsust eraldatud lõigu eelmise kriipsu alumisele osale. Kuna aga iga eraldatud lõik on eelmisest ühe ja sama pikkuse ($^1/_{12}$) võrra suurem, siis iga kriips pike-



Joon. 396.

neb selle operatsiooni mõjul $^1/_{12}$ võrra ja kriipse peab kokku tulema 12. Palja silmaga vaadates me seda pikenemist ei märka. Nii et kolmeteistkümnenda kriipsu kadumine võib näida küllalt mõistatuslikuna.

Efekti tugevdamiseks võib kriipse paigutada ka ringjooneliselt, nagu on näidatud joonisel 396. Kui sisemine ring välja lõigata, nii et keskmine osa saaks vabalt pöörelda, siis ringi teataval määral pöörates me saavutame jälle ühe kriipsu kadumise.

306. Mitme arvu vähimaks ühiskordseks (V.Ü.K.) on ühe arvu kõigi algarvuliste tegurite ja ülejäänud arvude arvestamata jäänud tegurite korrutis. Esimese arvukümne V.Ü.K. koosneb ilmselt teguritest $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3$, mis annabki arvu 2520.

Huvitav on märkida, et arvude 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 V.Ü.K. ühtib selle arvukümne teise poole, s. t. arvude 6, 7, 8, 9, 10 vähima ühiskordsega. Esitatu on näiteks, mis illustreerib üldist seaduspärasust, et suvalise paarisarvulise järjestikuste naturaalarvude rea 1 kuni $2n$ V.Ü.K. ühtib nende teise poole vähima ühiskordsega: $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

307. Kõigil mandariinide kingituspakkidesse jaotamise juhtudel jäi parajasti üks mandariin puudu. Järelikult, kui oleks olnud üks mandariin rohkem, siis nende hulk oleks jagunud nii 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 kui ka kahega.

Selliseks arvuks aga on arv 2520 või mõni tema kordne.

Tähendab meil oli vähemalt 2519 mandariini.

308. Selliseid arve on lõpmatu palju. Vähim neist on 58. Tõepoolest, vahe jagaja ja jäägi vahel on igal juhul 2. Järelikult, kui otsitavale arvule liita 2, siis ta jaguks ilma jäägita kõigi ülesande tekstis nimetatud jagajatega.

Arvude 3, 4, 5 ja 6 V.Ü.K. on 60. Sellest kaht lahutades saame 58.

309. Arvude 2, 3, 4, 5 ja 6 vähim ühiskordne on 60. Meil tuleb leida seitsmega jaguv arv, mis on ühe võrra suurem kuuekümnega jaguvast arvust. Paneme tähele, et

$$60n + 1 = 7 \cdot 8n + 4n + 1.$$

Arv $60n + 1$ jagub seitsmega, kui $4n + 1$ jagub seitsmega. Vähimaks sobivaks n väärtuseks on arv 5.

Tähendab, korvis võis olla 301 muna. Järgmise sobiva n väärtuse $n = 12$ korral me saaksime 721 muna, kuid nii see, kui ka järgnevad juhud ei sobi, sest niisugust raskust naine ei jõudnud kindlasti kanda.

310. On ilmne, et mõeldud arv jagub 7, 8 ja 9-ga. Tähendab, ta on $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Teisi tegureid tal pole, sest kui tal oleks ka kõige väiksem neist (s. t. 2) teguriks, siis oleks ta juba neljakohaline arv.

311. Arvude, 4, 8, 12 ja 16 V.Ü.K. on 48. Järelikult on mootorlaevad sadamas jälle korraga 48 nädala pärast, s. t. 4. detsembril 1953. a.

312. Soola ja seebi hind jagub kolmega. Suhkrupakkide ja tikutooside hulk jagub samuti kolmega, seepärast peab ka kogusumma jaguma kolmega. Tšekil leiduva arvu ristsumma $(2+9+1+7=19)$ aga ei jagu kolmega. Tähendab, arvestusse oli lipsanud viga.

313. Lahendus põhineb tähelepanekul, et võrrandi vasak pool jagub üheksaga. Tähendab, ka parem pool peab jaguma üheksaga. Järelikult peab üheksaga jaguma ka parema poole ristsumma, $4+9+2+a+4$. Et $4+9+2+4=19$, siis järelikult $a=8$. Teisi väärtusi a-l olla ei saa, sest ta asendab üht numbrit.

Võttes nüüd arvust 492 804 ruutjuure, saame: $3(230+t)=$ $=702$, siit $t=4$.

314. Võrduse vasak pool jagub üheteistkümnega, tähendab, ka parem pool peab jaguma üheteistkümnega. Vastavalt üheteistkümnega jaguvuse tunnusele saame: $1+2+1+7=a+3$, siit $a=8$. (Teised a väärtused ei sobi, sest nad annavad a-le negatiivse või kahekohalise väärtuse.)

Arvust 37 810 201 ruutjuurt võttes saame 6 149. Nüüd meil tuleb lahendada lihtne võrrand:

$$11(492+x)=6\,149. \quad \text{Siit } x=67.$$

315. Me teame, et arvud 10^3+1 ja 10^3-1 jaguvad arvuga 1001. Pole raske veenduda, et ka arv 10^9+1 jagub arvuga 1001, s. t. ka arvudega 7, 11 ja 13.

Nüüd võtame suvalise arvu, mis jagub neljaks rühmaks, näiteks 31 218 001 416 ja esitame ta järgmisel kujul: $31\,218\,001\,416=$ $=416+1\cdot 10^3+218\cdot 10^6+31\cdot 10^9=416+1(10^3+1-1)+$ $+218(10^6-1+1)+31(10^9+1-1=(416-1+218-31)+[(10^3+$ $+1)+218(10^6-1)+31(10^9+1)]$.

Kandilistes sulgudes olev arv jagub arvudega 7, 11 ja 13, järelikult kontrollitava arvu jaguvus arvudega 7, 11 ja 13 sõltub ainult esimestes ümarsulgudes oleva arvu jaguvusest nendega. Nendes sulgudes olev arv on võrdne üle ühe võetud rühmade summade vahega: $(416+218)-(1+31)=602$.

Arv 602 ja koos temaga ka kontrollitav arv jagub seitsmega ning ei jagu arvudega 11 ja 13.

316. Kirjutame kolmekohalise arvu üles harilikul algebralisel kujul: $100x+10y+z$. Me peame tõestama, et see arv jagub kahekssaga, kui arv $10x+y+\frac{z}{2}$ jagub neljaga.

Olgu

$$10x+y+\frac{z}{2}=4k,$$

kus k on suvaline naturaalarv. Avaldame siit z ja asetame saaduse kolmekohalisse arvu, mille kaheksaga jaguvus meid huvitab:

$$20x + 2y + z = 8k, \quad z = 8k - 20x - 2y,$$
$$100x + 10y + z = 100x + 10y + 8k - 20x - 2y = 80x + 8y + 8k.$$

Ilmselt viimane avaldis ja koos temaga ka kontrollitav arv jaguvad mõlemad kaheksaga.

Noh, aga kui $10x + y + \frac{z}{2}$ ei jagu neljaga? Kas järeldub sellest, et ka antud arv $100x + 10y + z$ ei jagu kaheksaga?

Vastuse annab ümberpööratud teoreem:

Kui $100x + 10y + z$ jagub kaheksaga, siis $10x + y + \frac{z}{2}$ tingimata jagub neljaga.

Tõepoolest, olgu

$$100x + 10y + z = 8k.$$

Avaldame siit z ja asetame ta arvu $10x + y + \frac{z}{2}$. Saame:

$$10x + y + \frac{z}{2} = 10x + y + \frac{1}{2}(8k - 100x - 10y) =$$
$$= -40x - 4y + 4k.$$

Selle avaldise jaguvus neljaga on silmanähtav.

Nüüd on kolmekohalise arvu kaheksaga jaguvuse tunnus lõplikult tõestatud. Ühendades seda tunnust üldtuntud mitmekohalise arvu kaheksaga jaguvuse tunnusega, võime lugeda tõestatuks, et antud arv jagub (ei jagu) kaheksaga, kui jagub (ei jagu) neljaga arv, mis on moodustatud antud arvu sajaliste ja kümneliste numbritest ja millele on liidetud pool antud arvu ühelistest.

317. Olgu N kolmeks rühmaks jagunev arv. Esitame selle järgmisel kujul:

$$N = 10^6 a + 10^3 b + c,$$

kus a, b ja c on rühmi moodustavad arvud. Jagugu $a + b + c$ arvuga 37. Siis $a + b + c = 37k$. Avaldame siit c ja asetame N-avaldisse:

$$N = 10^6 a + 10^3 b + 37k - a - b = a(10^6 - 1) + b(10^3 - 1) + 37k.$$

Arvud $10^6 - 1$, $10^3 - 1$ ja 37 jaguvad kolmekümne seitsmega, järelikult jagub selle arvuga ka arv N.

Pöördteoreemi tõestage iseseisvalt.

318. Kasutage sama tõestusskeemi, nagu eelmises ülesandeski. Tõestatud omadusest järeldub niisugune 3, 7 ja 19-ga jaguvuse tunnus:

Eraldage antud arvu kaks viimast numbrit, korrutage need neljaga ja liitke allesjäänud osale. Jätkake seda protsessi seni, kuni jõuate arvuni, mille jaguvust arvudega 3, 7 ja 19 või $399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$ on kerge kindlaks teha. Kui tulemus jagub (ei jagu) arvuga 399 või selle teguritega, siis ka antud arv jagub (ei jagu) arvuga 399 või selle teguritega.

Kontrollime selle võtte abil arvude 138 264 ja 40 698 jaguvust 3, 7 ja 19-ga.

Arv 138 264:

$64 \times 4 = 256,$

$+ \begin{array}{r} 1382 \\ 256 \\ \hline 1638; \end{array}$

$38 \times 4 = 152$

$+ \begin{array}{r} 16 \\ 152 \\ \hline 168 \end{array}$

Protsessi pole enam mõtet jätkata, sest võime teha järelduse, et 168 ja koos temaga ka 138 264 jagub kolme ja seitsmega, aga ei jagu üheksateistkümnega.

Arv 40 698:

$98 \times 4 = 392,$

$+ \begin{array}{r} 406 \\ 392 \\ \hline 798; \end{array}$

$98 \times 4 = 392$

$+ \begin{array}{r} 7 \\ 392 \\ \hline 399 \end{array}$

399 jagub 3, 7 ja 19-ga, järelikult jagub ka 40 698 nende arvudega ja ühtlasi ka arvuga 399.

319. On teada, et $x^m - 1$ jagub kaksliikmega $x - 1$ (vt. lk. 241). Järelikult $11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1)$. Esimene tegur on 10. Teine tegur jagub samuti kümnega, sest ta koosneb kümnest liidetavast, mis kõik lõpevad numbriga 1 (iga naturaalarvuline 11 aste lõpeb ühega). Kui kumbki tegur jagub kümnega, siis nende korrutis jagub sajaga, järelikult $11^{10} - 1$ jagub tõesti sajaga.

320. 1) Jagugu $N = 10x + y$ seitsmega. Siis

$$10x + y = 7k,$$

kus k on positiivne täisarv. Ümberpööratud ja kümneliste numbri võrra suurendatud arv omab kuju $10y + x + x = 10y + 2x$. Paigutame siia y asemele $7k - 10x$ ja saame $10(7k - 10x) + 2x = 70k - 98x$. Ilmselt see arv jagub seitsmega.

2) Jagugu $N = 100x + 10y + z$ seitsmega. Siis

$$100x + 10y + z = 7k,$$

kus k on positiivne täisarv.

Ümberpööratud ja üheliste ning sajaliste vahe võrra **vähendatud** arv omab kuju:

$$100z + 10y + x - (z - x) = 99z + 10y + 2x.$$

Asendame siin z avaldisega $7k - 100x - 10y$; saame arvu:

$$\begin{aligned} &99(7k - 100x - 10y) + 10y + 2x = \\ &= 99 \cdot 7k - 9900x - 990y + 10y + 2x = \\ &= 99 \cdot 7k - 9898x - 980y. \end{aligned}$$

See arv jagub ilmselt seitsmega.

3) Tõestame algul otsese teoreemi.

Olgu $N = 100z + 10x + y$, kusjuures $x + y + z = 7$. Siis

$$\begin{aligned} &N = 100(7 - x - y) + 10x + y = 700 - 90x - 99y = \\ &= 700 - 91x - 98y + x - y = 7(100 - 13x - 14y) + (x - y). \end{aligned}$$

Et N jaguks seitsmega, selleks peab vahe $x - y$ jaguma seitsmega. Kuna tingimuste kohaselt $x < 7$ ja $y < 7$, siis peab paratamatult kehtima võrdus $x - y = 0$ ehk $x = y$.

Otsene teoreem andis seega meile vajaliku tingimuse arvu N seitsmega jaguvuseks.

Tõestame nüüd pöördteoreemi.

Olgu $N = 100(7 - x - y) + 10x + y$, kusjuures $x = y$. Siis

$$N = 100(7 - 2x) + 10x + x = 700 - 189x = 7(100 - 27x).$$

Ilmselt see arv jagub seitsmega. Järelikult pöördteoreem andis meile piisava tingimuse arvu N seitsmega jaguvuseks.

XII peatüki juurde

324. Üks võimalik lahendusvariant on toodud joonisel 397.

325. Lahendus on toodud joonisel 398.

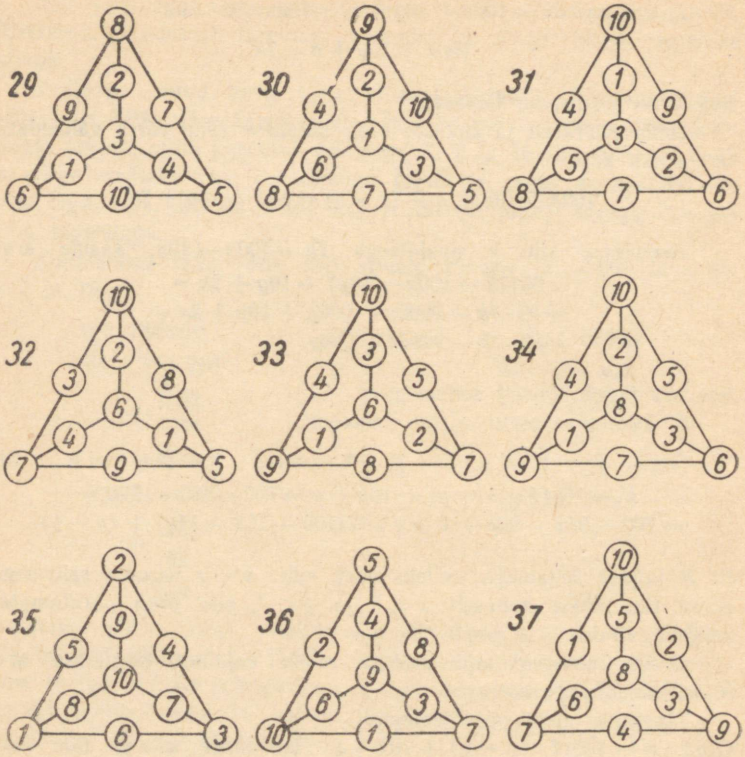
326. Lahendus on toodud joonisel 399.

327. Lahendus on toodud joonisel 400.

328. Joonisel 401, *a* on toodud kuusnurk, mille igal küljel ja igal raadiusel paiknevate arvude summa on 22, joonisel 401, *b* on tegemist vastavalt summaga 23.

329. Lahendus on toodud joonisel 402.

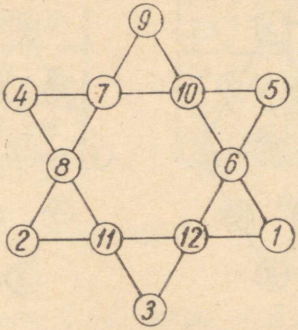
330. Lahendus on toodud joonisel 403.



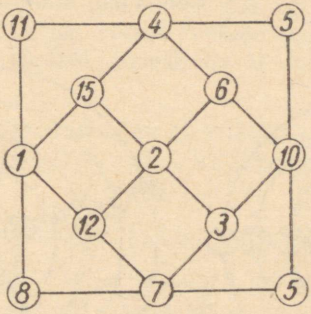
Joon. 397.

331. Lahendamisviisi kirjeldamise hõlbustamiseks nummerdame antud ruudu read ja veerud (joon. 404, *a*). Selle ruudu arvude hulgas leidub niisuguseid, mille ruutude summad ja kuupide summad on võrdsed (vt. omadus 6*b*). Need arvud on 12, 14, 3, 5 ja 15, 9, 8, 2. Antud ruudus need arvud ei paikne aga diagonaalil. Nende diagonaalidele toimetamiseks viime II rea esimeseks, IV rea teiseks, I rea kolmandaks ja III rea neljandaks ning vahetame teise ja kolmanda veeru kohad. Kerge on veenduda, et sel viisil saadud uus ruut (joon. 404, *b*) vastab kõigile nõuetele.

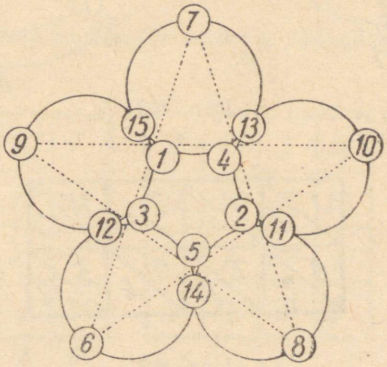
332. Koostame maagilise ruudu vastavalt ülesande tekstis toodud skeemile (joon. 405, *a*). Tal on küll terve rida ülesande tekstis näidatud lisaomadustest, kuid siiski mitte kõik.



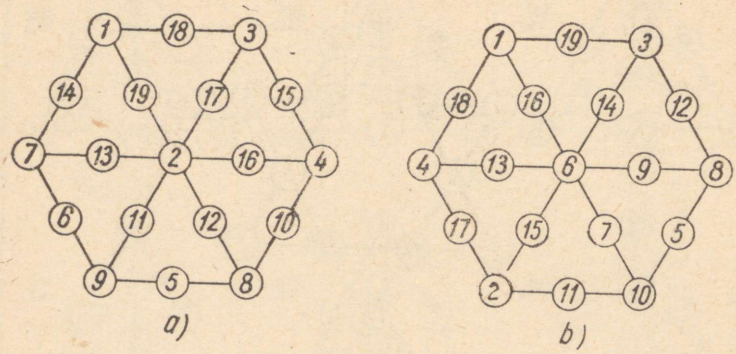
Joon. 398.



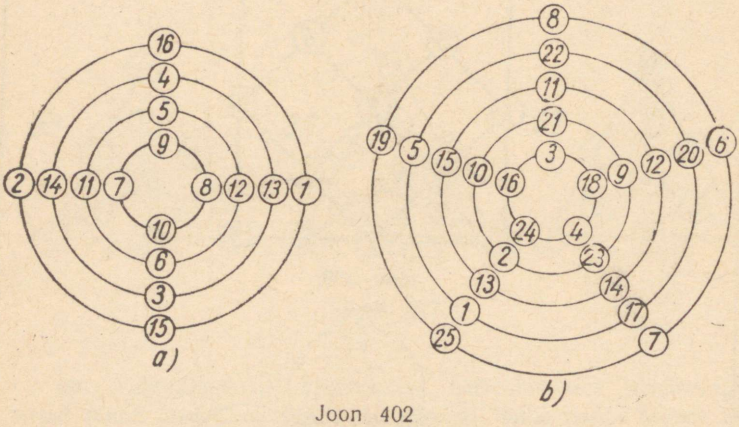
Joon. 399.



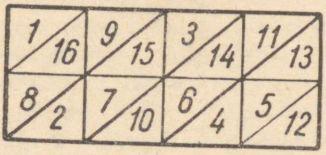
Joon. 400



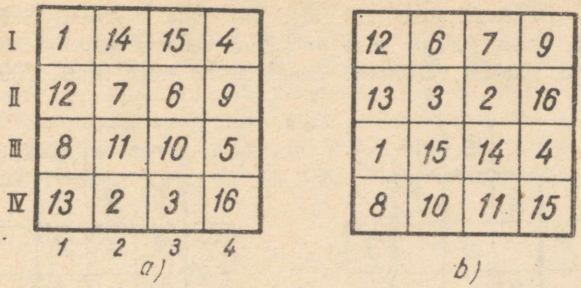
Joon 401



Joon 402



Joon. 403.



Joon. 404.

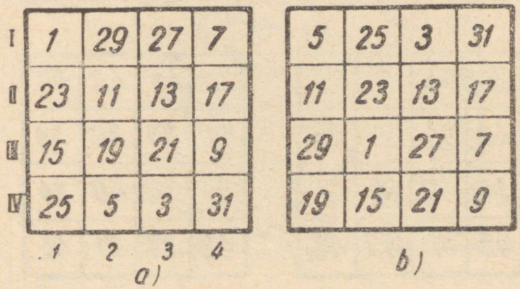
Kui nüüd IV rida panna I rea asemele, I rida III rea asemele ja III rida IV rea asemele ning vahetada esimene ja teine veerg, siis rahuldab tekkiv maagiline ruut (joon. 405, *b*) kõiki püstitatud nõudeid. Nii näiteks on I rea arvude ruutude summa ja III rea arvude ruutude summa võrdsed (samuti ka II ja IV rea arvude ruutude summad):

$$5^2 + 25^2 + 3^2 + 31^2 = 29^2 + 1^2 + 27^2 + 7^2,$$
$$11^2 + 23^2 + 13^2 + 17^2 = 19^2 + 15^2 + 21^2 + 9^2.$$

Analoogiliselt saame veergude jaoks:

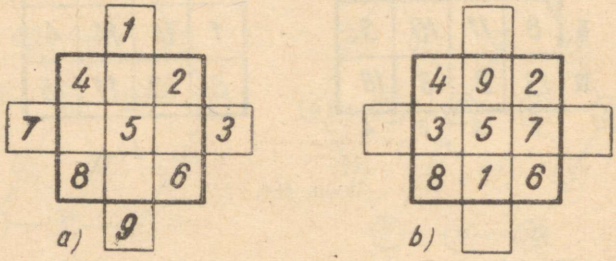
$$5^2 + 11^2 + 29^2 + 19^2 = 3^2 + 13^2 + 27^2 + 21^2,$$
$$25^2 + 23^2 + 1^2 + 15^2 = 31^2 + 17^2 + 7^2 + 9^2.$$

Veenduge ka ise ülesande tekstis näidatud ülejäänud omaduste kehtivuses.



Joon. 405.

333. Üheksaväljaline ruut tuleb täiendada sümmeetriliseks treppkujundiks (joon. 406, *a*) ning paigutada sellesse kaldridadena arvud 1—9. Kõik ruudust väljaspool olevad arvud tuleb transportida ruutu

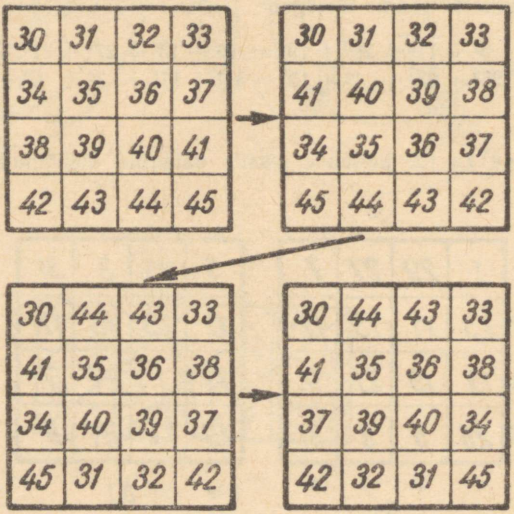


Joon. 406.

vastavalt ülesande tekstis toodud reeglile (joon. 406, *b*). Maagilise ruudu põhitunnused on kõik olemas. Selle ruudu konstant on 15.

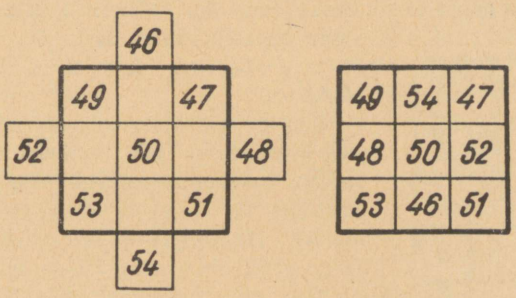
Seitsmenda järgu maagiline ruut koostage iseseisvalt.

334. Antud ruudus (vt. joon. 201, lk. 265) on neli rida ja neli veergu, milles igaühes on 4 valget välja ning kolm rida ja kolm veergu, milles igaühes on kolm valget välja. Tähendab, teda



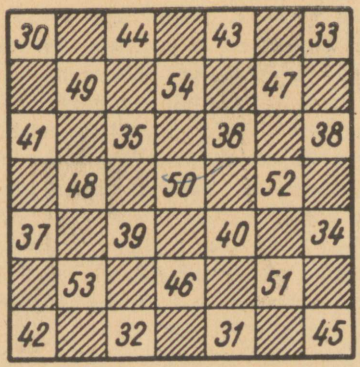
Joon. 407.

võib koostada kahe maagilise ruudu veerge ja ridu vaheldumisi asetades. Üks maagiline ruut on 16-väljaline, teine 9-väljaline. Üheksaväljalises maagilises ruudus on välju vähem kui kuueteistkümneväljalises, aga nende ruutude konstandid peavad olema siiski võrdsed. Järelikult üheksaväljalise ruudu jaoks tuleb võtta antud arvudest 9 kõige suuremat. Koostame nüüd vastavate skeemide põhjal mõlemad ruudud (joon. 407 ja 408). Nende ruutude konstantideks



Joon. 408.

on arv 150. Nüüd jääb üle vaid saadud ruudud üheks ruuduks ühendada (joon. 409). Suure ruudu diagonaalil olevad arvud kuuluvad mõlema väikese ruudu diagonaalidele, seega nende summa on tõepoolest 300.



Joon. 409.

335. Võttes algseisuks joonisel 203 (lk. 266) toodud asendi, tuleb nuppe liigutada niisuguses järjekorras (iga kord tühja ruutu täites): 12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

Täpselt 50 käiku!

Uus nuppude asetus on toodud joonisel 410. Kerge on kontrollida, et see ruut on maagiline ruut konstandiga 30. Loomulikult võib nuppe liigutades jõuda ka mõnele teisele maagilist ruutu moodustavale asetusele, kuid ma ei tea lahendust, mis oleks lühem kui 50 käiku.

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

Joon. 410.

Katsuge väiksema käikude arvuga hakkama saada! Teile tuttavat maagilise ruudu koostamise skeemi kasutades on arvudest 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ja 15 võimalik koostada tervet rida maagilisi ruute.

Kui me alustame maagilise ruudu koostamist joonisel 202 (lk. 266) toodud seisust, siis me ei saa kunagi jõuda joonisel 203 toodud seisust tekkivate maagiliste ruutudeni. Kogu erinevus nende kahe seisu vahel on selles, et teisel juhul on nuppude normaalne järjestus rikutud kahe viimase nupu vahetusega.

Kuigi see erinevus on näiliselt tähtsusetu, ei õnnestu meil nuppude nihutamisega üht asendit teiseks muuta. Selline on möödunud sajandi lõpul (1879. a.) matemaatikute poolt loodud «viieteistkümnemängu» teooria põhitulemus.

Igast suvalisest nuppude paigutusest võime jõuda nihutamise abil kas nuppude normaalse järjestuseni või seisuni, kus ainult kahe viimase nupu järjekord on vahetatud.

On huvitav märkida, et juba algseisu põhjal võib ütelda, kumma seisuni me välja jõuame. Selleks tuleb nupud viia oma õigetele kohtadele mitte nihutamise, vaid kõrvuti asetsevate nuppudega järjestuse vahetamise teel ja ühtlasi tuleb lugeda, mitu vahetamist selleks kulus.

Kui saadud arv on p a a r i s a r v, siis see tähendab, et karbis olevaid nuppe s a a b nihutamiste abil õigesse järjekorda viia, kui aga vahetamiste arv on p a a r i t u, siis e i o l e s e e v õ i m a l i k.

See abioperatsioon on kergesti teostatav. Vahetamise käigus võib karbi tühja ruutu kasutada nuppude lähendamiseks. Tühjale ruudule nihutamine ei muuda vahetuste üldarvu. Võtame näiteks

algasendiks joonisel 410 toodud maagilisele ruudule vastava seisu. Kontrollime, kas me saavutame nihutamise abil nuppude õige järjestuse.

Selleks viime läbi nuppude vahetamise. Alustame esimesest nupust. Et teda oma kohale viia, tuleb teostada kohavahetus nupuga nr. 13. Edasi peab nr. 13 loovutama oma koha nupule nr. 2 (teine vahetus). Selleks et oma kohale viia nuppu nr. 3, võib kasutada kaht teed. Esiteks me võime teda järjest vahetada nuppudega 15, 8, 11, 5 ja 6 ning teiseks me võime ta kõigepealt nihutada tühjale ruudule ja siis vahetada nuppudega 14, 13, 5 ja 6 (neli vahetust). Me valime teise viisi. Nupp nr. 4 jõuab oma kohale pärast vahetamist nuppudega 7, 9 ja 10 (kolm vahetust). Me oleme siiani teinud $1+1+4+3=9$ vahetust ning 4 nuppu on jõudnud oma kohtadele (joon. 411).

Kõigiks vahetusteks kuuluvate käikude summa on antud juhul paaritu arv. Järelikult ei saa joonisel 410 toodud maagilise ruudu nuppe viia nihutamisega õigesse järjekorda.

1	2	3	4
13	5	6	10
14	12	11	9
	15	8	7

Joon. 411.

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Joon. 412.

Järelikult on võimatu teha ka vastupidist, s. t. «õiges» järjekorras olevatest nuppudest (joon. 202, lk. 266) ei saa moodustada niisugust maagilist ruutu, nagu on kujutatud joonisel 410.

336. Otsitav arvude paigutus on toodud joonisel 412. Et kõik ülesande nõuded on täidetud, selles on kerge veenduda.

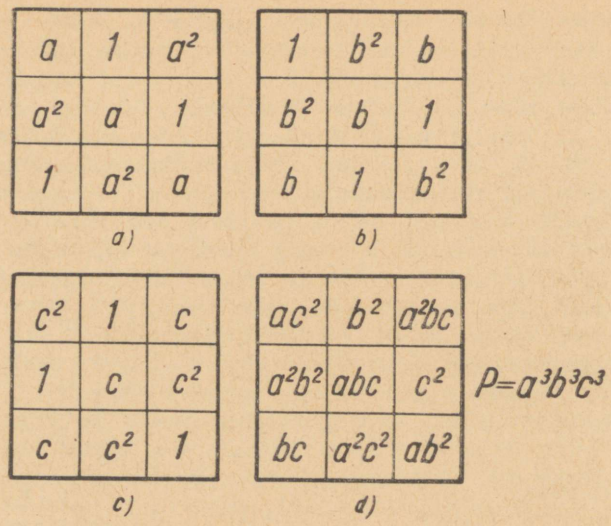
Joonisel 205 esitatud maagilist ruutu nimetatakse «libahundiks» sellepärast, et ta jääb sama konstandiga maagiliseks ruuduks ka siis, kui ta ümber pöörata.

337. Vastavalt tingimustele kehtivad võrdused

$$a_1+a_4+a_7=S,\quad a_3+a_6+a_9=S,$$
$$a_1+a_5+a_9=S,\quad a_3+a_5+a_7=S.$$

Siit

$$a_4+a_7=S-a_1,\quad a_6+a_9=S-a_3,$$
$$a_5+a_9=S-a_1,\quad a_5+a_7=S-a_3$$

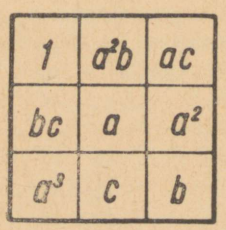


Joon. 413.

ja järelikult $a_4 + a_7 = a_5 + a_9$, $a_6 + a_9 = a_5 + a_7$. Kaht viimast võrdust liites saame $a_4 + a_7 + a_6 + a_9 = 2a_5 + a_9 + a_7$ ehk $a_4 + a_6 = 2a_5$. Selle võrduse mõlemale poolele suurust a_5 liites saame $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5$, et aga $a_4 + a_5 + a_6 = S$, siis

$$3a_5 = S \text{ ehk } a_5 = \frac{S}{3}.$$

338. 1. Koostage kolm täielikku abikonstruktsioonilist maagilist ruutu. Esimesed neist koostame vastavalt ülesande tekstis toodud näpunäidetele, nii et nende konstantsed korrutised oleksid a^3 ja b^3 (joon. 413, *a* ja *b*). Samal printsiibil koostage ka kolmas maagiline ruut konstantse korrutisega c^3, kusjuures paigutage arvud 1, c, c^2 diagonaalile alt paremalt üles vasakule (joon. 413, *c*).



Joon. 414.

Nüüd korrutame ruutude vastavatel väljadel olevad arvud ja saamegi joonisel 413, *d* kujutatud otsitava maagilise korrutisruudu konstandiga $P = a^3b^3c^3$.

2. Vt. joon. 414.

343. I. Tingimuste kohaselt võib üks arv erineda teisest arvust numbrite paigutuse poolest.

Võtame mingi numbri, näiteks 1. See number võib seista kümnekohalise arvu ükskõik millisel kohal. Sellega on meil käes juba 10 erinevat kümnekohalist arvu. Igas niisuguses arvus jääb üheksa kohta veel vabaks ja neile kohtadele võime paigutada näiteks numbri 2. Niiviisi saame juba $10 \cdot 9 = 90$ arvu, milles igas on veel 8 vaba kohta kolmanda numbri jaoks. Vabu kohti numbriga 3 täites saame $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ arvu, milles igaühes on neljanda numbri jaoks 7 vaba kohta. Kõik võimalikud neljanda numbri paigutusvariandid annavad kokku $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ arvu, milles igas on veel kuus vaba kohta.

Niiviisi vabade kohtade arvestamist jätkates jõuame lõpuks tulemuseni, et kümmet numbrit saab kümnele kohale paigutada $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$ viisil. Kuna aga nende numbrite hulgas on ka number 0, siis kõigil 3 628 800 juhul ei ole tekkinud arvud kümnekohalised. Kui null on vasakult lugedes esimesel kohal, nagu näiteks arvus 0 123 456 789, siis teda ei loeta tüvenumbriks ja arv on üheksakohaline. Iga number peab esimesel kohal paiknema võrdne arv kordi. Üldse on numbreid 10. Tähendab $^1/_{10}$ juhtudel 3 628 800 võimalikust juhust on esimeseks numbriks null ja arv on üheksakohaline. Ülejäänud kordadel aga saame nõutavad kümnekohalised arvud. Seega igat numbrit ainult üks kord kasutades, võime koostada $\frac{9 \cdot 3\,628\,800}{10} = 3\,265\,920$ kümnekohalist arvu.

III. Iga arvu a korrutis mõne esimese rühma arvuga koosneb üheksast erinevast numbrist. Iga arvu b korrutis mõne esimese rühma arvuga koosneb kümnest erinevast numbrist. Arvude a ja b korrutised teise rühma arvudega sisaldavad korduvaid numbreid. Esimese rühma arvud ei oma arvudega a ja b ühiseid ühest erinevaid tegureid. Teise rühma arvud aga omavad niisuguseid tegureid. Kui korrutada arvu a kaheksaga ja liita üheksa, siis saame arvu b: $123\,456\,789 \cdot 8 + 9 = 987\,654\,321$.

IV. Nähtuse põhjus seisab selles, et korrutis koosneb ainult ühtedest: $12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$.

344. I. Ma lihtsalt kontrollisin arvude 32 kuni 99 ruutude tabelit ja teostasin vastavad arvutused. Ei tohi põlata ka niisuguseid lahendusmeetodeid.

345. Esimene katse. Kõigepealt teeme kindlaks, et antud arvudest vahede koostamise mõttes ei loeta erinevateks ühest

arvude rühmast (a, b, c, d) tsüklilise teisenduse teel saadud arvude rühmi: (d, a, b, c), (c, d, a, b), (b, c, d, a) või (c, b, a, d), (b, a, d, c) jne., sest lõpptulemuse saamisel pole oluline, millisel kohal on antud arv oma rühmas, peaasi, et teda ümbritseksid samad naabrid (neljanda numbri naabriks loeme esimest numbrit).

Vaatame nüüd, mitu omavahel erinevat neljaarvulist lähterühma me saame moodustada kombineerides paaris ja paarituid arve, nende suurust konkretiseerimata.

Esimene kombinatsioon: kõik arvud on paarisarvud [p, p, p, p]. Teine kombinatsioon: kolm paaris ja üks paaritu arv: [p, p, p, $ü$]. Edasi järgnevad kombinatsioonid: [p, p, $ü$, $ü$], [p, $ü$, $ü$, $ü$], [p, $ü$, p, $ü$], [$ü$, $ü$, $ü$, $ü$]. Kokku on seega kuus kombinatsiooni. Iga ülejäänud kombinatsioon on mõne siintoodud kombinatsiooni tsükliliseks teisenduseks.

Kõigi nende rühmade puhul neljandad vahed koosnevad eranditult paarisarvudest. Esimese arvude kombinatsiooni [p, p, p, p] puhul on selle väite kehtivus ilmne. Veendume ta kehtivuses ka teise $A_0 = [p, p, p, ü]$ puhul. Kuna kahe paarisarvu ja kahe paaritu arvu vahe on alati paarisarv ning paaris ja paaritu arvu vahe on alati paaritu arv, siis $A_1 = [p, p, ü, ü]$, $A_2 = [p, ü, p, ü]$ $A_3 = [ü, ü, ü, ü]$, $A_4 = [p, p, p, p]$.

Kontrollige iseseisvalt selle väite kehtivust kõigi nelja kombinatsiooni korral. Kõigil neil juhtudel neljandate vahede rida (A_4) koosneb ainult paarisarvudest (s. t. kõik rea A_4 arvud jaguvad kahega).

Tõestame nüüd, et kõik kaheksandate vahede rea (A_8) arvud jaguvad neljaga.

Tõestuseks asendame ajutiselt neljanda vahede rea arvud nende pooltega ja leiame nende poolte esimeste vahede rea. Mille poolest see rida erineb tegelike viiendate vahede reast?

Vastus. Selle rea arvud on poole väiksemad rea A_5 arvudest. Näiteks kui $A_4 = (4, 6, 12, 22)$, siis $A_5 = (2, 6, 10, 18)$. Kui me aga koostame poolte rea: (2, 3, 6, 11), siis vahede rida (1, 3, 5, 9) moodustab samuti poole rea A_5 arvudest.

Niisugune vahekord arvude vahel jääb kehtima ka vahede ridade korral, s. o. kaks korda väiksemate arvude vahede teine rida moodustab poole reast A_6, kaks korda väiksemate arvude vahede kolmas rida moodustab poole reast A_7, kaks korda väiksemate arvude vahede neljas rida moodustab poole reast A_8. Korrutades kaks korda väiksemate arvude neljanda rea kõiki arve kahega, saame rea A_8. Kuid kaks korda väiksemate arvude vahede neljas rida koosneb kindlasti paarisarvudest (nagu ikka neljandad vahed) ja seega arvud reas A_8, mis on nendest kaks korda suuremad,

jaguvad neljaga, mida oligi tarvis tõestada. Kui näiteks $A_4 = (4, 6, 12, 22$ — kahega jaguvad arvud), siis $A_5 = (2, 6, 10, 18)$, $A_6 = (4, 4, 8, 16)$, $A_7 = (0, 4, 8, 12)$, $A_8 = (4, 4, 4, 12$ — neljaga jaguvad arvud).

Mõttekäiku jätkates leiame, et veel nelja rea võrra edasi minnes jõuame kaheteistkümnenda vahede reani A_{12}, mille kõik arvud jaguvad kaheksaga, s. t. arvuga 2^3; veel nelja võrra edasi minnes jõuame reani A_{16}, mille arvud jaguvad arvuga 2^4 jne. Nii näiteks vahede rea A_{40} arvud peavad jaguma $2^{10} = 1024$-ga. Eeldame, et ükski algrea arv ei ületanud tuhandet. Ükskõik kui palju vahesid me nendest arvudest ka ei moodustaks, tekkinud arvud ei ületa ammugi tuhandet.

Oletame, et antud neljast arvust on moodustatud 39 korda vahesid ja ükski vahede rida ei koosne ainult nullidest. Siis A_{40} koosneb kindlasti ainult nullidest, sest ükski selle vahede rea arvudest ei ületa tuhandet, aga samal ajal kõik arvud reas A_{40} peavad jaguma arvuga $2^{10} = 1024$. Leidub aga ainult üks mittenegatiivne arv, mis on tuhandest väiksem ja jagub arvuga 1024 — see arv on null. Järelikult kõik arvud reas A_{40} on nullid.

Kui algrea arvud on tuhande ja miljoni vahel, siis peavad nullid tekkima hiljemalt kaheksakümnendas vahes (praktikas aga alati tunduvalt varem), sest rea A_{80} arvud peavad jaguma arvuga $2^{20} = 1\,048\,576$, ning ainus miljonist väiksem mittenegatiivne arv, mis jagub arvuga 1 048 576 on null. Nii võib tõestust üldistada suvalisele antud arvude nelikule.

Tähendab, ei leidu niisugust arvude nelikut, mille järjestikused vahed ei muutuks varem või hiljem nulliks.

Teine katse. Seda arvude omadust võib põhjendada nii:

1) On kerge tõestada, et suvalise vähemalt kolmekohalise arvu numbrite ruutude summa on arvust endast väiksem.

Siit järeldub, et ükskõik millisest arvust me ka ei alustaks, ikka me jõuame teataval katseetapil kahekohalise arvuni.

2) Kahekohaliste arvude puhul saab nimetatud omadust kontrollida otsese arvutamisega.

Nagu seda tihti juhtub, oli ka siin näiliselt raske ülesande lahendamine üsna lihtne.

349. V. Vähendame katsealust arvu ühe võrra ja kirjutame ta juurde eraldi liidetavana:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ korda}}\ \underbrace{55\ldots5}_{n\text{ korda}} + 1.$$

Kui $n = 1$. siis saame arvu $15 + 1 = 16$; $n = 2$ korral $1155 + 1 = 1156$ jne. Märgime, et arvu $\underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}}$ võib esitada kümne astmete summana pluss 1:

$$\underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1.$$

Seda asjaolu silmas pidades viime katsealuse arvuga läbi rida teisendusi:

$$\underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}}\,\underbrace{55 \ldots 5}_{n \text{ korda}} + 1 = \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}}\,\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ korda}} + \underbrace{55 \ldots 5}_{n \text{ korda}} + 1 =$$

$$= \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}} \cdot 10^n + 5 \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}} + 1 = \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}} \cdot (10^n + 5) + 1 =$$

$$= (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) \cdot (10^n + 5) + 1.$$

Esimestes sulgudes olev avaldis omandab geomeetrilise progressiooni summa valemi abil kuju

$$10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

(mõningaid andmeid selle valemi kohta saab peatükist XI, «Arvude jaguvus», lk. 241), siis

$$\underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}}\,\underbrace{55 \ldots 5}_{n \text{ korda}} + 1 = \frac{(10^n - 1)\,(10^n + 5)}{10 - 1} + 1 =$$

$$= \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2,$$

mida oligi tarvis tõestada. Järelikult ükskõik kui palju ka ei lisanduks arvu 16 südamikku «15-lumehelbeid», arv $\underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ korda}}\,\underbrace{55 \ldots 56}_{n-1 \text{ korda}}$ on alati arvu $\frac{10^n + 2}{3}$ ruut.

350. I. $11 = 22 : 2 + 2 - 2$,
$12 = 2 \times 2 \times 2 + 2 + 2$,
$13 = (22 + 2 + 2) : 2$,
$14 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 2$,
$15 = 22 : 2 + 2 + 2$,
$16 = (2 \times 2 + 2 + 2) \times 2$,
$17 = (2 \times 2)^2 + \frac{2}{2}$,
$18 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2$,
$19 = 22 - 2 - \frac{2}{2}$,
$20 = 22 + 2 - 2 - 2$,

$$21 = 22 - 2 + \frac{2}{2},$$
$$22 = 22 \times 2 - 22,$$
$$23 = 22 + 2 - \frac{2}{2},$$
$$24 = 22 - 2 + 2 + 2,$$
$$25 = 22 + 2 + \frac{2}{2},$$
$$26 = 2 \times \left(\frac{22}{2} + 2\right).$$

II. $1 = (4 : 4) \times (4 : 4)$,
$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$,
$3 = (4 + 4 + 4) : 4$,
$4 = 4 + (4 - 4) \times 4$,
$5 = (4 \times 4 + 4) : 4$,
$6 = 4 + (4 + 4) : 4$,
$7 = 4 + 4 - 4 : 4$,
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$,
$9 = 4 + 4 + 4 : 4$,
$10 = (44 - 4) : 4$.

III. $2 = (n : n) + (n : n)$,

$$4 = \frac{n - \dot{n}}{\dot{n} + \dot{n}},$$

$$7 = \frac{n - \dot{n} - \dot{n}}{\dot{n}},$$

$$12 = \frac{n + .n + .n}{.n},$$

$$13 = \frac{n}{.n} + \sqrt{\frac{n}{.n}},$$

$$15 = \frac{n}{.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{.n}}\right)!,$$

$$17 = \frac{n + n + \dot{n}}{\dot{n}},$$

$$21 = \frac{n + n - .n}{.n}.$$

Kuidas kujutada ülejäänud arve, see mõtelge ise välja.

IV. $3 = \frac{17\,469}{5823}$, $5 = \frac{13\,485}{2697}$, $6 = \frac{17\,658}{2943}$, $7 = \frac{16\,758}{2394}$,
$8 = \frac{25\,496}{3187}$, $9 = \frac{57\,429}{6381}$.

Arvu 1 saab üheksa numbri abil üles kirjutada nii: $1^{23\,456\,789}$ (astendajat võib arvudest 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 koostada suvalisel viisil).

V. $9 = \frac{95\,742}{10\,638} = \frac{75\,249}{08\,361} = \frac{58\,239}{06\,471}$.

351. X. Olgu n otsitav arv. Tingimuste kohaselt lõpeb ka n^2 kolme samasuguse numbriga. Järelikult lõpeb vahe $n^2 - n$ kolme nulliga.

Vaatleme avaldist $n^k - n$, kus k on suvaline naturaalarv.

Toome n sulgude ette:

$$n^k - n = n(n^{k-1} - 1).$$

Siit on kohe näha, et see avaldis jagub n-ga; ta jagub aga ka arvuga $n - 1$, sest $n^{k-1} - 1$ jagub arvuga $n - 1$ (vt. lk. 241). Järelikult jagub avaldis $n^k - n$ ka arvude n ja $n - 1$ korrutisega,

s. o. arvuga $n^2 - n$. Et $n^2 - n$ lõpeb kolme nulliga, siis ka $n^k - n$ peab lõppema vähemalt kolme nulliga. Tähendab, ka n^k lõpeb iga naturaalarvulise k korral nende kolme numbriga, millega lõpeb n. Ülesande lahendamiseks piisab järelikult arvude otsimisest, mille ruut lõpeb samade numbritega.

Arvud n ja $n - 1$ on kahe kõrvutise naturaalarvuna vastastikku ühisteguriteta; nende korrutis peab aga jaguma tuhandega, järelikult üks neist peab olema paarisarv ja jaguma kaheksaga, teine aga peab olema paaritu arv ja jaguma 125-ga.

Viimast tingimust rahuldavaid kolmekohalisi arve on ainult neli: 125, 375, 625 ja 875. Nende naaberarvud on 124 ja 126, 374 ja 376, 624 ja 626 ning 874 ja 876. Kaheksaga jaguvad neist ainult kaks: 376 ja 624. Järelikult need arvud ongi otsitavad.

352. IV. Olgu vähimaks otsitavaks arvuks x; nimetame teda esimeseks arvuks. Siis esimese liidetavate rühma teine arv on $x + 1$, kolmas arv on $x + 2, \ldots,$ $(n + 1)$-s arv on $x + n$.

Teise rühma esimene arv on $x + n + 1$, teine arv on $x + n + 2$, kolmas arv on $x + n + 3, \ldots,$ n-s arv on $x + n + n = x + 2n$.

Vastavalt ülesande tingimustele koostame võrrandi:

$$\underbrace{x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+n)^2}_{n+1 \text{ liidetavat}} =$$

$$= \underbrace{(x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2}_{n \text{ liidetavat}}. \qquad (*)$$

Selle võrrandi edasiste teisenduste lihtsustamiseks jätame x^2 võrrandi vasakule poolele, teised n liidetavat aga viime paremale poolele ning rühmitame ruutude vahedena:

$$x^2 = [(x+n+1)^2 - (x+1)^2] + [(x+n+2)^2 - (x+2)^2] + \\ + \ldots + [(x+2n)^2 - (x+n)^2].$$

Iga ruutude vahet teisendame tuntud valemi abil: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$x^2 = \underbrace{n(2x+n+2) + n(2x+n+4) + \ldots + n(2x+n+2n)}_{n \text{ liidetavat}},$$

ehk

$$x^2 = n[\underbrace{(2x + 2x + \ldots + 2x)}_{n \text{ liidetavat}} + \underbrace{(n + n + \ldots + n)}_{n \text{ liidetavat}} + \\ + \underbrace{(2 + 4 + \ldots + 2n)}_{n \text{ liidetavat}}].$$

Viimastes ümarsulgudes on aritmeetilise progressiooni n liikme summa: $2+4+\ldots+2n=\frac{(2+2n)n}{2}=(n+1)n$. Seda arvesse võttes leiame, et $x^2=n[2xn+n^2+n(n+1)]$ ehk $x^2-2n^2x-n^3-n^3-n^2=0$.

Ruutvõrrandit

$$x^2-2n^2x-n^2(2n+1)=0$$

lahendades saame, et $x_1=n(2n+1)$ ja $x_2=-n$, kus $n=1, 2, 3, \ldots$ Vaatleme algul lahendit $x_1=n(2n+1)$. Valime $n=1$. See tähendab, et me piirdume võrduse (*) paremal pool ü h e liikmega, vasemal pool k a h e liikmega. Kui $n=1$, siis $x_1=3$ ja me saame $3^2+4^2=5^2$. Kui $n=2$, siis $x_1=10$ ja võrdus (*) annab:

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

Kui $n=3$, siis on võrduse (*) paremal poolel 3 ja vasakul poolel 4 liidetavat. Kui $n=3$, siis $x_1=21$ ning me saame

$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2.$$

Järjestikuste arvude võrdsete summade moodustamist te võite nüüd jätkata kuitahes kaugele.

Teine ruutvõrrandi lahend $x_2=-n$ annab seosesse (*) paigutatuna iga n korral kehtiva võrduse:

$$(-n)^2+(-n+1)^2+\ldots+(-1)^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$$

VIII. Me teame, et $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots++n)^2$ (vt. lk. 325). Kui n on paarisarv ($n=2k$), siis valemi vasak pool omandab niisuguse kuju:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k)^3.$$

Rühmitame selle summa liikmed üle ühe kahte rühma:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(2k-1)^3+(2k)^3=$$
$$=[1^3+3^3+\ldots+(2k-1)^3]+[2^3+4^3+\ldots+(2k)^3]=$$
$$=[1^3+3^3+\ldots+(2k-1)^3]+2^3[1^3+2^3+\ldots+k^3].$$

Sellest võrdusest järeldub, et

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=$$
$$=[1^3+2^3+\ldots+(2k)^3]-8[1^3+2^3+\ldots+k^3]$$

ehk

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=$$
$$=(1+2+3+\ldots+2k)^2-8(1+2+3+\ldots+k)^2.$$

Me saime paaritute arvude kuupide summa valemi, mida meil on tarvis avaldise

$$\frac{[1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+5+\ldots+(2k-1)]}{2}$$

teisendamiseks. Äsjasaadud seoseid silmas pidades leiamegi, et

$$\frac{[1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+5+\ldots+(2k-1)]}{2} =$$

$$= \frac{(1+2+\ldots+2k)^2-8(1+2+\ldots+k)^2+[1+3+\ldots+(2k-1)]}{2}.$$

Teisendame nüüd iga suluavaldise kui aritmeetilise progressiooni liikmete summa.

$$S_1+S_3+\ldots+S_{2k-1} =$$

$$= \frac{\left[\frac{(1+2k)2k}{2}\right]^2-8\left[\frac{(1+k)k}{2}\right]^2+\frac{[1+(2k-1)]k}{2}}{2} =$$

$$= \frac{(1+2k)^2k^2-2(1+k)^2k^2+k^2}{2} =$$

$$= \frac{k^2(1+4k+4k^2-2-4k-2k^2+1)}{2} = \frac{k^2\cdot 2k^2}{2} = k^4.$$

X. Püüame algul leida iga rea e s i m e s e liikme sõltuvust rea järjekorranumbrist ja e e l m i s e rea esimesest liikmest (seda muidugi teisest reast alates). Märgime, et

$$3=1+2\cdot 1,\ 7=3+2\cdot 2,\ 13=7+2\cdot 3,\ 21=13+2\cdot 4 \text{ jne.}$$

Vastavalt saame n-nda rea esimese liikme jaoks:

$$a_n = a_{n-1}+2(n-1).$$

Sellele reale eelneva rea jaoks saame:

$$a_{n-1} = a_{n-2}+2(n-2)$$

ning edasi

$$a_{n-2} = a_{n-3}+2(n-3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_2 = a_1+2\cdot 1.$$

See trepikujuline seoste ahel võimaldab meil saada ka otsese seose a_n ja a_1 vahel. Selleks elimineerime esimesest võrdusest suuruse a_{n-1},

asendades ta vastava avaldusega teisest võrdusest:

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-1) + 2(n-2).$$

Nüüd elimineerime samal viisil a_{n-2}, siis a_{n-3} jne. Tulemuseks saame

$$a_n = a_1 + 2[(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1] =$$

$$= a_1 + 2\,\frac{(n-1)+1}{2}\,(n-1) = a_1 + n(n-1)$$

ehk

$$a_n = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1.$$

Selline ongi Nikomahhose kolmnurga suvalise rea esimese liikme sõltuvus rea järjekorranumbrist.

Teades, et igas reas on n liiget, ja et nende vahed on kõik võrdsed kahega, on teil juba kerge leida iga rea liikmete summat ja näidata, et see on tõepoolest n^3.

XIV peatüki juurde

357. Tõestuseks leiame algul tabeli iga rea üldliikme. Iga aritmeetilise rea üldliige a_n avaldub teatavasti kujul:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

kus a_1 on rea esimene liige ja d on rea vahe.

Tähistame sümboliga a_{nk} k-nda rea n-nda liikme, sümboliga d_k aga k-nda rea vahe.

Tabeli esimeses reas $a_{11} = 4$ ja $d_1 = 3$, järelikult

$$a_{n1} = 4 + 3(n-1) = 1 + 3n.$$

Tabeli teises reas $a_{12} = 7$ ja $d_2 = 5$, järelikult

$$a_{n2} = 7 + 5(n-1) = 2 + 5n.$$

Kolmandas reas $a_{13} = 10$ ja $d_3 = 7$, järelikult

$$a_{n3} = 10 + 7(n-1) = 3 + 7n.$$

K-nda rea puhul $a_{1k} = 1 + 3k$ ja $d_k = 1 + 2k$, järelikult

$$a_{nk} = 1 + 3k + (1 + 2k)(n-1) = k + (2k+1)n.$$

Valem $a_{nk} = k + (2k+1)n$, kus $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ning temast sõltumatult $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, väljendab tabeli s u v a l i s t elementi.

Kui mingi arv N esineb tabelis, siis ta peab võrduma ühega arvudest a_{nk}, s. t. $N = k + (2k+1)n$.

Siis aga

$$2N + 1 = 2[k + (2k + 1)n] + 1 = 2k + 1 + 4kn + 2n = \\ = 2k + 1 + 2n(2k + 1) = (2k + 1)(2n + 1),$$

s. t. arv $2N + 1$ on kahe arvu korrutis, millest kumbki pole 1. Järelikult on arv $2N + 1$ kordarv, mida oligi tarvis tõestada.

Tõestame nüüd ka vastupidi, et kui $2N + 1$ on mingi suvaline paaritu kordarv, siis ta tingimata laguneb kahe paarituarvulise ühest erineva teguri korrutiseks:

$$2N + 1 = (2k + 1)(2n + 1),$$

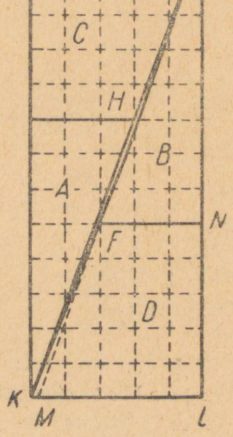
kus k ja n on mingid naturaalarvud. Lahendades saadud võrduse N suhtes, leiame:

$$N = \frac{(2k + 1)(2n + 1) - 1}{2} = k + (2k + 1)n = a_{nk},$$

s. t. arv N peab olema kindlasti üks tabelis esinev arv.

Sellega me tõestasime, et igast tabelis leiduvast arvust saab valemiga $2N + 1$ kätte ainult kordarvud ja vastupidi, et iga paarituarvulise kordarvu $2N + 1$ jaoks leidub tabelis alati vastav N.

Kuid kõik algarvud (peale arvu 2) on paaritud ja iga paaritu arv (peale arvu 1) on kas algarv või kordarv. Siit me võime teha järelduse, et paarituarvulise algarvu $2N + 1$ jaoks ei leidu tabelis vastavat arvu N.



Joon. 415.

363. Meie noor sõber uskus liialt oma silmi ja ei kinnitanud oma toiminguid tõestustega. See viiski teda näiliste vastuoludeni.

Vastupidiselt tema väidetele ei saanud ühelgi korral ruudu tükkidest konstrueerida täielikku ristkülikut. Tingimata pidid tekkima silmale märkamatud praod või pidi üks tükk silmale märkamatult nihkuma teisele tükile.

Analüüsime lähemalt mõnda «õnnelikku» juhust, näiteks seda, millal ta kuuekümne nelja väljalise ruudu küljed jaotas viie ja kolme ühiku pikkusteks osadeks (joon. 236, lk. 346). Kui me paigutame kolmnurgad A ja B ning trapetsid C ja D vastavalt joonisele 415, siis me ei saa-

vuta joonte EFK ja EHK ühtimist ristküliku diagonaaliks EK, sest jooned EFK ja EHK pole sirged, vaid murdjooned väga väikeste murdumistega punktides F ja H. Seda on kerge tõestada. Olgu M punkt, milles ristküliku külg KL lõikub kolmnurga EFN külje EF pikendusega.

Kui EFK on sirgjoon, siis punkt M ühtib punktiga K. Kontrollime arvutustega, kas need punktid ühtivad.

Kolmnurkade EFN ja EML sarnasuse põhjal saame võrde

$$ML : FN = EL : EN \text{ ehk } ML : 3 = 13 : 8.$$

Siit $ML = \frac{13 \cdot 3}{8} = 4{,}875$, samal ajal aga $KL = 5$. Nagu näete, punkt M ei ühti tipuga K ja järelikult on EFK ja samuti ka EHK murdjooned.

Ristkülikulise kujundi $KLEG$ pindala on tõepoolest 65 ruutu, kuid temas on rombikujuline pilu $EFKH$, mille pindala on parajasti võrdne ühe ruuduga.

Jääb lähemalt uurida veel kaht küsimust:

1) miks meie «eksperimentaatoril» tekkis õnnestunutena näivatel juhtudel ruudu pindala ja «ristküliku» pindala vahel täpselt üheruuduline vahe ning

2) millise ruudu külje jaotamissuhte juures ta oleks võinud saada täieliku ristküliku ja järelikult ka täieliku pindalade ühtimise.

Võtame appi algebra. Ruudu pindala on (vt. joon. 235, lk. 345) võrdne avaldisega $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Ristküliku pindala on (vt. joon. 235) $(2x + y)x = 2x^2 + xy$. Ristküliku pindala ja ruudu pindala vahe on $R = x^2 - xy - y^2$. Ruudu ja ristküliku pindalad on võrdsed, kui

$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Jagades seda võrdust y^2-ga, saame $\frac{x}{y}$ leidmiseks ruutvõrrandi:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Ainult positiivset lahendit arvesse võttes saame

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

A i n u l t niisuguse ruudu külje osade x ja y suhte korral saame teda lõigata kaheks võrdseks kolmnurgaks ja kaheks võrdseks trapetsiks, nii et ruudu ja ristküliku pindalad oleksid võrdsed. Märgime, et see osade suhe on irratsionaalne.

Ratsionaalsete x ja y väärtuste korral ei saa R olla 0. Täisarvuliste x ja y väärtuste korral on vähimaks võimalikuks pindalade vaheks $R = 1$. Selle vähima täisarvulise vaheni jõudiski mu noor sõber, kui ta valis x ja y väärtusteks Fibonacci reas kõrvuti seisvate arvude paarid (esimesel juhul $x = 5$, $y = 3$ (lk. 346), teisel juhul $x = 8$, $y = 5$ ning kahel ülejäänud juhul $x = 13$, $y = 8$ ja $x = 21$, $y = 13$). Niisuguse valikuga ta rahuldas kas võrrandi $x^2 - xy - y^2 = 1$ või võrrandi $x^2 - xy - y^2 = -1$ (vt. lk. 343).

SISUKORD

Teise venekeelse trüki eessõna . . . . . .

I PEATÜKK

KEERDÜLESANDED

I osa

	Ülesanne	Lahendus
1. Tähelepanelikud pioneerid	9	375
2. «Kivilill»	10	375
3. Kabenuppude ümberpaigutamine	11	375
4. Kolme käiguga	11	376
5. Loendage!	12	376
6. Aedniku marsruut	12	376
7. Kuidas jaotada?	13	376
8. Otsustage kiiresti!	13	376
9. Üles-alla	13	376
10. Muistne ülesanne jõe ületamisest	14	377
11. Hunt, kits ja kapsapea	14	377
12. Veeretage mustad kuulid välja	15	378
13. Ahela parandamine	16	378
14. Parandage viga	16	378
15. Kolmest neli (naljaülesanne)	16	380
16. Kolm pluss kaks on kaheksa (veel üks naljaülesanne)	16	380
17. Kolm ruutu	17	380
18. Mitu detaili?	17	380
19. Katsetage!	17	380
20. Lippude paigutus	17	380
21. Ikka paarisarv!	18	380
22. «Maagiline» arvukolmnurk	18	380
23. Kuidas 12 tüdrukut palli mängisid	19	380
24. Nelja sirgega	20	382

	Ülesanne	Lahendus
25. Päästke kapsad!	21	382
26. Kaks rongi	21	382
27. Tõusu ajal (naljaülesanne)	22	382
28. Numbrilaud	22	383
29. Purunenud numbrilaud	22	383
30. Kummaline kell (Hiina mõistatus)	23	383
31. Kolm tükki reas	24	385
32. Kümme rida	24	385
33. Müntide paigutamine	25	385
34. Ühest üheksateistkümneni	26	385
35. Kiiresti, kuid ettevaatlikult!	26	385
36. Geomeetriline vähk	27	385
37. Raamatu hind	27	386
38. Rahutu kärbes	27	386
39. Vähem kui 50 aasta pärast	28	386
40. Kaks naljaülesannet	28	386
41. Kui vana ma olen?	29	386
42. Hinnake «silma järgi»	29	386
43. Kiirliitmine	29	386
44. Kummas käes?	31	386
45. Kui palju neid on?	31	387
46. Ühesuguste numbritega	32	387
47. Sada	32	387
48. Aritmeetiline kahevõitlus	32	387
49. Kakskümmend	33	387
50. Mitu erinevat marsruuti?	34	388
51. Muutke arvude järjestust	35	389
52. Erinevad tehted, aga sama tulemus	35	390
53. Üheksakümmend üheksa ja sada	36	391
54. Kokkupandav malelaud	36	391
55. Miine otsimas	37	391
56. Rühmitage tuletikud kahekaupa	39	391
57. Rühmitage tuletikud kolmekaupa	39	391
58. Kell jäi seisma	39	392
59. Nelja aritmeetilise tehtega	40	393
60. Hämmeldunud autojuht	40	393
61. Tsimljanski hüdrosõlme jaoks	41	393
62. Õigeks ajaks	41	393
63. Linnalähedases rongis	41	394
64. Ühest miljardini	42	394
65. Jalgpallihaige kohutav unenägu	42	394

II osa

66. Kell	43	395
67. Trepp	43	395
68. Keeruline ülesanne	43	395
69. Huvitavad murrud	44	395
70. Milline arv?	44	395
71. Koolipoisi tee	44	395
72. Staadionil	44	396
73. Kas ta võitis aega?	44	396
74. Äratuskell	45	396

		Ülesanne	Lahendus
75.	Väikeste tükkide asemel suured	45	396
76.	Seebitükk	45	397
77.	Aritmeetilisi pähkleid	45	397
78.	Murru-doomino	47	397
79.	Miša kassipojad	48	398
80.	Keskmine kiirus	48	398
81.	Magav reisija	48	398
82.	Kui pikk oli rong?	48	398
83.	Jalgrattur	48	398
84.	Enne tähtaega	49	398
85.	Kellel on õigus?	49	398
86.	Kolm praetud leivaviilukat	50	399

II PEATÜKK

RASKED OLUKORRAD

87.	Sepp Hetšo kavalus	51	399
88.	Kass ja hiired	53	399
89.	Tuletikud mündi ümber	54	400
90.	Loos langes siisikesele ja põõsalinnule	54	400
91.	Jaotage mündid õigesti	55	400
92.	Reisirong tuleb mööda lasta!	56	401
93.	Kolme tütarlapse tujukusest tekkinud ülesanne	56	401
94.	Eelmise ülesande edasiarendus	57	402
95.	Hüppavad kabendid	57	404
96.	Mustad ja valged	57	404
97.	Keerukam ülesanne	58	404
98.	Kaardid jaotuvad numbrite järjekorras	58	404
99.	Kaks paigutamisülesannet	59	404
100.	Salapärane laegas	59	406
101.	Vahva garnison	60	406
102.	Päevavalguslambid televisioonistuudios	61	408
103.	Katsejäneste paigutamine	62	409
104.	Ettevalmistused pühadeks	63	410
105.	Istutage noored tammed ümber!	65	410
106.	Geomeetrilised mängud	65	410
107.	Paaris ja paaritu	68	412
108.	Järjestage kabendid	69	413
109.	Kingitus nuputajatele	69	413
110.	Ratsu käiguga	71	414
111.	Kabendite ümberpaigutamine	71	414
112.	Arvude 1 kuni 15 originaalne rühmitamine	72	415
113.	Kaheksa tähekest	73	415
114.	Kaks ülesannet tähtede paigutamise kohta	73	416
115.	Koostage kirju ruut	74	417
116.	Viimane nupp	74	418
117.	Müntidest ring	75	419
118.	Iluuisutajad kunstliku jääga liuväljal	76	419
119.	Naljaülesanne	77	419
120.	145 ust	77	420
121.	Kuidas vang pääses vabadusse?	79	420

III PEATÜKK

TULETIKKUDE GEOMEETRIA

		Ülesanne	Lahendus
122.	Viis ülesannet	85	420
123.	Veel kaheksa ülesannet	86	421
124.	Üheksast tuletikust	87	421
125.	Spiraal	87	421
126.	Naljaülesanne	87	421
127.	Eemaldage kaks tuletikku	87	421
128.	«Maja» fassaad	88	421
129.	Naljaülesanne	88	421
130.	Kolmnurgad	88	421
131.	Mitu tuletikku tuleb ära võtta?	88	421
132.	Naljaülesanne	89	421
133.	«Tara»	89	421
134.	Naljaülesanne	89	421
135.	«Nool»	89	421
136.	Ruudud ja rombid	90	421
137.	Erinevad hulknurgad ühes kujundis	90	421
138.	Aia planeerimine	90	421
139.	Pindvõrdsed tükid	90	421
140.	Parkett	91	421
141.	Pindalade suhe säilib	91	421
142.	Leida kujundi piirjooned	92	421
143.	Leidke tõestus	92	429
144.	Konstrueerida ja tõestada	92	429

IV PEATÜKK

SEITSE KORDA MÕÕDA, ÜKS KORD LÕIKA

145.	Võrdseteks osadeks	93	429
146.	Seitse roosi	95	430
147.	Kustunud jooned	95	430
148.	Andke nõu	96	431
149.	Ilma kadudeta	96	431
150.	Kui fašistid tungisid meie maale kallale	97	431
151.	Elektrimontööri mälestused	98	431
152.	Kõik läheb käiku	99	431
153.	Mõistatus	99	431
154.	Raiuge hobuseraud tükkideks	99	431
155.	Igasse tükki naelaauk	100	433
156.	«Kruusist» — ruut	100	433
157.	Ruut E-tähest	100	433
158.	Kaunis moondumine	100	433
159.	Vaiba taastamine	101	433
160.	Väärtuslik autasu	102	436
161.	Aidake vaesekest!	103	436
162.	Kingitus vanaemale	103	438
163.	Tisleri ülesanne	104	438
164.	Ka köösner ei saa läbi geomeetriata!	105	438
165.	Igale ratsule oma tall	105	439
166.	Veel rohkem!	105	439

		Ülesanne	Lahendus
167.	Hulknurga ruuduks teisendamine	106	439
168.	Korrapärase kuusnurga muutmine võrdkülgseks kolmnurgaks	108	440

V PEATÜKK

OSKUS LEIAB KÕIKJAL RAKENDAMIST

169.	Kus asub märk?	109	441
170.	Nuputamist viieks minutiks	110	441
171.	Ootamatu kohtumine	110	441
172.	Teede kolmnurk	111	442
173.	Kas te oskate kaaluda?	111	444
174.	Rihmülekanne	112	444
175.	Seitse kolmnurka	112	444
176.	Kunstniku lõuend	112	445
177.	Kui palju kaalub pudel?	113	446
178.	Kuubikud	114	446
179.	Haavlid	114	447
180.	Kuhu seersant välja jõudis?	114	447
181.	Leidke palgi diameeter	115	447
182.	Ootamatu kimbatus	115	447
183.	Tehnikakooli õpilase jutustus	116	447
184.	Kas on võimalik saada 100% kokkuhoidu?	117	447
185.	Vedrukaalude abil	117	449
186.	Konstruktsioonilisi pähkleid	117	449
187.	Miša äpardus	118	449
188.	Leidke ringjoone keskpunkt	119	451
189.	Kumb kast on raskem?	119	451
190.	Puusepa osavus	120	452
191.	Geomeetria kera pinnal	120	452
192.	Siin tuleb tublisti nuputada	121	452
193.	Rasked tingimused	121	453
194.	Kokkupandavad hulknurgad	122	453
195.	Huvitav võte sarnaste kujundite konstrueerimiseks	124	453
196.	Sarniirseadis korrapäraste hulknurkade konstrueerimiseks	127	456

VI PEATÜKK

DOOMINO JA TÄRING

A. Doomino

197.	Mitu silma?	131	456
198.	Kaks trikki	131	456
199.	Võit on kindel	132	456
200.	Raam	134	456
201.	Raam raamis	134	457
202.	«Aknad»	134	458
203.	Maagilised ruudud doominokividest	135	458

	Ülesanne	Lahendus
204. Auguga maagiline ruut	140	458
205. Korrutamine doominokivide abil	140	458
206. Väljavalitud doominokivi silmade arvu mõistatamine	140	458

B. Täring

207. Aritmeetiline trikk täringutega	143	458
208. Varjatud tahud	143	458
209. Millisesse järjekorda on täringud paigutatud?	144	462

VII PEATÜKK

ÜHEKSA OMADUSED

210. Missugune number on maha tõmmatud?	147	462
211. Varjatud omadus	150	463
212. Veel mõnest huvitavast puuduvate numbrite otsimise võttest	150	464
213. Leidke tulemuse ühe numbri põhjal kolm ülejäänut	152	464
214. Väike trikk	153	465
215. Vanuse leidmine	153	465
216. Milles peitub saladus?	153	465

VIII PEATÜKK

ALGEBRAGA JA ILMA SELLETA

217. Vastastikune abi	159	466
218. Laiskvorst ja kurat	159	466
219. Nutikas poisike	160	467
220. Jahimehed	161	467
221. Kohtuvad rongid	161	467
222. Veera kirjutab käsikirja ümber	161	467
223. Lugu seentega	162	468
224. Kes jõuab varem tagasi?	163	468
225. Ujuja ja kaabu	163	469
226. Kaks mootorlaeva	164	470
227. Kontrollige oma taibukust!	165	470
228. Ootamatu probleem	165	471
229. Mitu korda suurem?	166	471
230. Mootorlaev ja vesilennuk	166	471
231. Jalgratturid areenil	166	472
232. Treial Bõkovi töökiirus	167	472
233. Jack Londoni reis	167	472
234. Ebaõnnestunud analoogiatest võivad tekkida vead	168	473
235. Juriidiline kaasus	169	474
236. Paaris- ja kolmiksammudega	170	474
237. Kes sõitis hobusega?	170	474
238. Kaks mootorratturit	170	475

		Ülesanne	Lahendus
239.	Missuguses lennukis oli Volodja isa?	170	476
240.	Jagage 45 osadeks	171	476
241.	Kaks küünalt	172	476
242.	Imestusväärne läbinägelikkus	172	476
243.	«Õige aeg»	172	476
244.	Kellad	173	477
245.	Mis kella ajal?	173	478
246.	Millal nõupidamine algas ja millal ta lõppes?	173	479
247.	Seersant treenib luurajaid	174	480
248.	Kahe teate põhjal	174	480
249.	Kui palju ehitati uusi jaamu?	175	481
250.	Valige neli sõna	175	481
251.	Kas niisugune kaalumine on lubatav?	176	482
252.	Sääsk ja elevant	176	482
253.	Viiekohaline arv	177	483
254.	Jäägu süda igavesti nooreks!	178	483
255.	Lucas' ülesanne	179	484
256.	Omapärane matk	180	484
257.	Üks lihtmurdude huvitav omadus	180	486

IX PEATÜKK

MATEMAATIKA PEAAEGU ILMA ARVUTUSTETA

258.	Pimedas toas	181	488
259.	Õunad	182	488
260.	Ilmaennustus (naljaülesanne)	182	488
261.	Metsapäev	182	488
262.	Missugune eesnimi kellelgi on?	183	488
263.	Märkilaskmine	184	489
264.	Ost	184	489
265.	Ühe kupee reisijad	185	489
266.	Nõukogude armee maletšempionaat	185	491
267.	Pühapäevak	186	492
268.	Mis on vedurijuhi nimi?	186	492
269.	Kriminaalne lugu	187	492
270.	Ravimtaimede korjajad	187	492
271.	Varjatud jagamine	188	493
272.	Šifreeritud tehted (arvmõistatused)	189	493
273.	Aritmeetiline mosaiik	191	496
274.	Mootorrattur ja ratsanik	192	498
275.	Jalgsi ja autoga	192	499
276.	Vastuväiteliselt	192	499
277.	Missugune raha on vale?	193	499
278.	Loogiline viik	194	501
279.	Kolm mõttetarka	195	501
280.	Viis küsimust kooliõpilastele	195	501
281.	Arutlus võrrandi asemel	196	502
282.	Terve mõistuse abil	197	502
283.	Ei või jah	198	503

X PEATÜKK

MATEMAATILISED MÄNGUD JA TRIKID

A. Mängud

		Ülesanne	Lahendus
284.	Üksteistkümmend eset	199	504
285.	Viimase tuletiku võtja on võitja	200	505
286.	Võidab paarisarv	200	505
287.	Tsjanšitsõ	200	508
288.	Kuidas võita?	202	—
289.	Ruutude konstrueerimine	202	—
290.	Kes ütleb esimesena «sada»?	203	509
291.	Ruudumäng	204	510
292.	Oua	206	—
293.	Matematico (itaalia mäng)	209	—
294.	Maagiliste ruutude mäng	210	—
295.	Arvristsõnad	212	511

B. Trikid

296.	Mõeldud arvu mõistatamine (7 trikki)	216	513
297.	Arvutustulemuste mõistatamine ilma midagi küsimata	220	515
298.	Kui palju keegi võttis	222	516
299.	Mitme katsega	222	516
300.	Kelle käes on kumm ja kelle käes on pliiats?	223	516
301.	Kolme mõeldud liidetava ja summa mõistatamine	223	516
302.	Korraga mitme mõeldud arvu leidmine	224	517
303.	Kui vana te olete?	225	517
304.	Vanuse mõistatamine	225	517
305.	Geomeetriline trikk (saladuslik kadumine)	226	518

XI PEATÜKK

ARVUDE JAGUVUS

306.	Arv hauakambrist	228	519
307.	Uusaastakingid	229	519
308.	Kas leidub niisugune arv?	229	519
309.	Korvitäis mune (vanast prantsuse ülesannetekogust)	229	519
310.	Kolmekohaline arv	230	519
311.	Neli mootorlaeva	230	519
312.	Kassiiri eksimus	230	520
313.	Arvmõistatus	230	520
314.	Üheteistkümnega jaguvuse tunnus	231	520
315.	Ühine jaguvustunnus arvude 7, 11 ja 13 jaoks	233	520
316.	Kaheksaga jaguvuse tunnuse lihtsustamine	234	520
317.	Harukordne mälu	235	521
318.	Ühendatud jaguvustunnus 3, 7 ja 19 jaoks	237	522
319.	Kaksliikme jaguvus	238	522
320.	Vana ja uut seitsmega jaguvusest	242	522
321.	Jaguvustunnuste laiendamine teistele arvudele	246	—
322.	Üldistatud jaguvustunnus	247	—
323.	Jaguvuse kurioosum	249	—

XII PEATÜKK

RISTSUMMAMÕISTATUSED JA MAAGILISED RUUDUD

A. Ristsummamõistatused

		Ülesanne	Lahendus
324.	Huvitavad rühmitamised	251	523
325.	«Täht»	252	523
326.	«Kristall»	252	523
327.	Vitriini kaunistus	253	523
328.	Kes saab enne valmis?	253	523
329.	«Planetaarium»	254	523
330.	Ornament	254	523

B. Maagilised ruudud

331.	Idamaised külalised	255	524
332.	Kuidas ise koostada maagilist ruutu?	259	524
333.	Üldiste meetodite lähistel	261	528
334.	Nupukuse eksam	265	528
335.	Maagiline viieteistkümnemäng	266	530
336.	Mittetraditsiooniline maagiline ruut	266	531
337.	Missugune arv asub ruudu keskel?	267	531
338.	Maagilised korrutised	269	532
339.	«Laekatäis» aritmeetilisi kurioosumeid	271	—

C. Maagiliste ruutude teooria elemente

340.	Täiendarvulised ruudud	274	—
341.	«Korrapärased» neljanda järgu maagilised ruudud	276	—
342.	Arvude valimine suvalise järguga maagilise ruudu jaoks	280	—

XIII PEATÜKK

TÕSIST JA NALJAKAT ARVUDE VALLAST

343.	Kümme numbrit (vaatlus)	291	533
344.	Veel mõningaid huvitavaid tähelepanekuid	293	533
345.	Kaks huvitavat katset	295	533
346.	Arvude karussell	298	—
347.	Välkkiire korrutamise ketas	301	—
348.	Ajude gümnastika	302	—
349.	Numbritest mustrid	304	535
350.	Üks kõigi eest ja kõik ühe eest	308	536
351.	Huvitavad seosed	311	537
352.	Naturaalarvude rida vaadeldes	317	538
353.	Pealetükkiv vahe	331	—
354.	Sümmeetriline summa (purustamata pähkel)	331	—

XIV PEATÜKK

IGIVANAD, KUID IGAVESTI NOORED ARVUD

A. Algarvud

		Üles-anne	Lahendus
355.	Alg- ja kordarvud	333	—
356.	«Eratosthenese sõel»	334	—
357.	Uus algarvude «sõel»	336	541
358.	Viiskümmend esimest algarvu	337	—
359.	Veel üks algarvude leidmise meetod	337	—
360.	Mitu algarvu?	339	—

B. Fibonacci arvud

361.	Avalik eksam	339	—
362.	Fibonacci rida	343	—
363.	Paradoks	344	542
364.	Fibonacci rea arvude omadusi	347	—

C. Kujundilised arvud

365.	Kujundiliste arvude omadusi	352	—
366.	Püthagorase arvud	360	—

XV PEATÜKK

GEOMEETRIA IGAPÄEVASES TÖÖS

367.	Külvamise geomeetria	363	—
368.	Telliste veo ratsionaliseerimine	366	—
369.	Töölised-geomeetrid	367	—

Trükivigu

Lk.	Rida	On	Peab olema
305		$\begin{array}{r} \times\ 77 \\ 77 \\ \hline 49 \\ 49 \\ \hline 4949 \\ 5929 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ 77 \\ 77 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ 49 \\ \hline 5929 \end{array}$
313	17. ülalt	$0^2 + 5^2 + 5_2 + 10^2$	$0^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2$
314	16. ülalt	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4{}^2$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
326	1. ülalt	teguriteset?	teguritest?
519	3. alt	Arvude,	Arvude
520	14. alt	$31(10^{\circ} + 1 - 1$	$31(10^9 + 1 - 1)$

Tell. 5461

Кордемский, Борис Анастасьевич

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. M ä g i
Tehniline toimetaja Ü. L a u l
Korrektor S. K õ i v

Ladumisele antud 26. V 1960. Trükkimisele antud 7. X 1960. Paber 54 × 84, 1/16. Trükipoognaid 34,75. Formaadile 60 × 92 kohaldatud trükipoognaid 28,50. Arvutuspoognaid 28,7. Trükiarv 6000. Tellimise nr. 5461. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind rbl. 9.60 (96 kop.)

2—2

Rbl. 9.60
1961. a. — 96 kop.

A-23457

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU
1 0300 00037135 3