

MISCELLANEOUS ASTROPHYSICAL NOTES

I ON THE EMPIRICAL MASS-LUMINOSITY RELATION

BY JACOB GABOVITŠ

II ON THE ORIENTATION OF THE ORBITAL PLANES IN MULTIPLE SYSTEMS

BY JACOB GABOVITŠ

III ON THE MASS RATIO OF SPECTROSCOPIC BINARIES WITH ONE SPECTRUM VISIBLE

BY JACOB GABOVITŠ

IV ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT DER INTERSTELLAREN ABSORPTION VON DER WELLENLÄNGE

VON G. KUSMIN

V ÜBER DIE PARTIKELDURCHMESSERVERTEILUNG IN DER INTER- STELLAREN MATERIE

VON G. KUSMIN

VI A TENTATIVE DETERMINATION OF THE SURFACE BRIGHTNESS OF DARK NEBULAE

BY V. RIIVES

VII THE INFLUENCE OF SELECTIVE ABSORPTION IN SPACE UPON A DIFFERENTIAL SCALE OF STELLAR MAGNITUDES

BY V. RIIVES

VIII ON THE UPPER LIMIT OF STELLAR MASSES

BY E. ÖPIK

IX THE DENSITY OF THE WHITE DWARF A. C. + 70° 8247

BY E. ÖPIK

MISCELLANEOUS ASTROPHYSICAL NOTES

I ON THE EMPIRICAL MASS-LUMINOSITY RELATION

BY JACOB GABOVITŠ

II ON THE ORIENTATION OF THE ORBITAL PLANES IN MULTIPLE SYSTEMS

BY JACOB GABOVITŠ

III ON THE MASS RATIO OF SPECTROSCOPIC BINARIES WITH ONE SPECTRUM VISIBLE

BY JACOB GABOVITŠ

IV ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT DER INTERSTELLAREN ABSORPTION VON DER WELLENLÄNGE

VON G. KUSMIN

V ÜBER DIE PARTIKELDURCHMESSERVERTEILUNG IN DER INTER- STELLAREN MATERIE

VON G. KUSMIN

VI A TENTATIVE DETERMINATION OF THE SURFACE BRIGHTNESS OF DARK NEBULAE

BY V. RIIVES

VII THE INFLUENCE OF SELECTIVE ABSORPTION IN SPACE UPON A DIFFERENTIAL SCALE OF STELLAR MAGNITUDES

BY V. RIIVES

VIII ON THE UPPER LIMIT OF STELLAR MASSES

BY E. ÖPIK

IX THE DENSITY OF THE WHITE DWARF A. C. + 70° 8247

BY E. ÖPIK

Est. A



Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A XXXIII, 8.

I. On the Empirical Mass-Luminosity Relation¹.

By Jacob Gabovitš.

1. Introduction. Empirical mass-luminosity relations have been established on several occasions; the question of the statistical error in such relations mostly remains obscure. Thus, in a recent paper, Huffer (*Ap. J.* **80**, 269, 1934) published a list of known mass ratios of visual binary stars; from these data and the orbital elements he computes the masses of sixty stars and gives an empirical mass-luminosity relation using the visual absolute magnitudes instead of the bolometric magnitudes. The dispersion of the masses from the mean curve obtained from Huffer's material is considerable, but it is due more probably to observational errors than to a real cosmic spread. The aim of the present note is to confirm this supposition, as well as to establish a reliable empirical mass-bolometric magnitude relation; only the best observed binaries with good trigonometric parallaxes were chosen for this purpose.

2. Selection of Material. The masses of the two components of a visual binary star (μ_1 and μ_2) are given by the formulae:

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \frac{k a^3}{P^2 \pi^3} \\ \mu_1 &= \mu_2 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

where a denotes the semi-major axis in seconds of arc, π — the parallax, P — the period in years, and $k = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$. As the greatest uncertainty in the determination of mass appears to originate from the error in parallax, we decided to use only stars with a probable error in the parallax not exceeding 8 per cent

¹ Seminar in Astrophysics, 1936/37, conducted by E. Öpik.

of the parallax itself. Further, we rejected stars with unknown spectra, since the bolometric correction in such cases is quite uncertain. In complex systems all visual components which are spectroscopic binaries were also rejected. The following stars were further excluded: 70 Ophiuchi A (invisible companion), 85 Pegasi (unreliable mass ratio), 61 Cygni (uncertain orbital elements), and α^2 Eridani B and Sirius B (white dwarfs). All

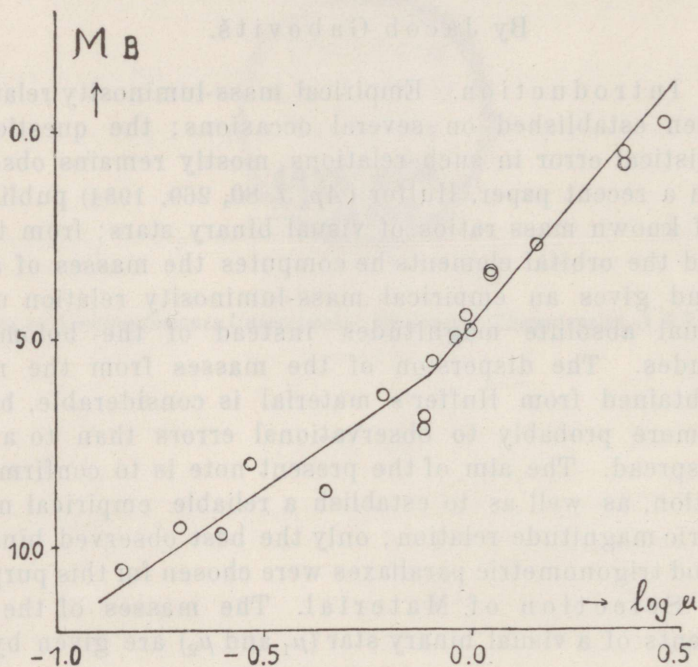


Fig. 1. The mass-luminosity relation. Abscissae — logarithm of mass; ordinates — bolometric absolute magnitude.

unsuitable stars having thus been eliminated, a small but well determined material of masses and bolometric magnitudes is left over.

3. Observational Data. Table I gives the observational data for the stars considered. The consecutive columns give: (1) the name of the star; (2) the spectrum; (3) the apparent visual magnitude (from *T. P.* 25. 6); (4) the period of revolution in years; (5) the semi-major axis of the orbit in seconds of arc; the orbital elements are taken from Finsen's catalogue,

Table I.
The Masses and Bolometric Absolute Magnitudes of Visual Binary Stars.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Star	Sp.	vis. mag.	P	a	k	$\pi \pm \Delta \pi$	μ ☉ = 1	M_v	C	ΔM_B	M_B	$\log \mu$
η Cas A	F9	3.7	479 ^y	11".9	0.24	0".182 ± 0".005	0.93	5.0	0.41	0.02	5.0	-0.03
" B	M0	7.4					0.29	8.6	1.38	0.62	8.0	-0.53
σ^2 Eri C	M5	11.0	248	6.89	.31	.202	0.20	11.3	2.25	1.75	9.5	-0.70
Capella A	G1	0.74	0.285	0.0536	.44	.071	2.97	0.00	0.75	0.13	-0.13	0.47
" a	F5	1.2					2.33	0.5	0.39	0.02	0.5	0.37
Sirius A	A0	-1.58	49.9	7.62	.32	.373	2.33	1.28	(10000 ⁰⁰)	0.48	0.80	0.37
Procyon A	F3	0.48	40.2	4.26	.26	.291	1.44	2.80	0.28	0.03	2.77	0.16
γ Vir A	F0	3.65	182	3.74	.50	.089	1.12	3.40	0.22	0.04	3.36	0.05
" B	F0	3.68					1.12	3.43	0.22	0.04	3.39	0.05
ξ Boo A	G5	4.80	151	4.87	.49	.147	0.81	5.64	0.63	0.08	5.56	-0.09
" B	K5	6.8					0.78	7.6	1.20	0.46	7.1	-0.11
44 ι Boo A	G1	5.28	205	3.58	.54	.079	1.01	4.77	0.50	0.03	4.74	0.00
β 416 A	K5	5.99	42.2	1.83	.43	.147	0.61	6.82	1.20	0.46	6.36	-0.21
26 Dra A	G1	5.34	80.6	1.51	.47	.066	0.97	4.44	0.47	0.03	4.41	-0.01
μ Her B	M3	10.2	43.0	1.29	.50	.109	0.45	9.9	1.85	1.20	8.7	-0.35
70 Oph B	K6	6.0	87.7	4.495	.50	.196	0.78	7.5	1.29	0.55	6.9	-0.11
Kr 60 A	M3	9.2	44.5	2.36	0.37	0".258 ± 0".004	0.25	10.8	1.85	1.20	9.6	-0.60
" B	M4	10.7					0.14	12.0	1.99	1.4	10.6	-0.84

Union Observatory Circular No. 91 (except for 26 Draconis; cf. Huffer, *loc. cit.*); (6) the mass ratio from Huffer's list; (7) the trigonometric parallax and its probable error, from Schlesinger's new Parallax Catalogue; (8) the mass, computed from formula (1); (9) the visual absolute magnitude, computed from the data in columns (3) and (7); in the case of the M type stars the TiO correction, as given in *T. P.* 28.5, Table II, is added; (10) the colour index, taken from *T. P.* 27.1 (F and G stars), and *T. P.* 28.5 (K and M stars); as to Sirius A (H. D. spectrum AO), it seems to be advisable in this case to use the ionization temperature instead of the colour temperature; we assume for Sirius A: $T = 10\,000^{\circ}$ Abs.; (11) the bolometric correction (for derivation cf. *T. P.* 28.3, formulae 7 and 9); (12) the bolometric absolute magnitude; (13) the logarithm of mass.

4. The Mass-Luminosity Relation. Fig. 1 shows the correlation between $\log \mu$ and bolometric absolute magnitude, obtained from the data in Table I. Although the material is scanty, the correlation is of a small dispersion and thus well defined. Actually the mass-luminosity law, as given in our graph, may be fairly well represented by two linear relations between $\log \mu$ and M_B . For the A — dK stars we get:

$$\log \mu = 0.40 - 0.085 M_B \dots \dots \dots (2),$$

and for the M dwarfs:

$$\log \mu = 0.77 - 0.15 M_B \dots \dots \dots (3).$$

Introducing the luminosity L ($\odot = 1$) into the expressions (2) and (3), we obtain:

$$L = 0.90 \mu^{4.7} \dots \dots \dots (2 a)$$

and

$$L = 0.56 \mu^{2.7} \dots \dots \dots (3 a).$$

Thus, the luminosities of the A — K stars vary nearly as the fifth power of the masses, whereas the luminosities of the M-type dwarfs are approximately proportional to the cube of the masses.

The observed dispersion of $\log \mu$ from the mean curve [actually we take the dispersions from the straight lines (2) and (3)] is calculated from $\Delta_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n-k}}$, where n is the number of stars, and k the effective number of groups, or normal

points; we assume $k=3$, because three points determine our pair of intersecting straight lines. We find:

$$\Delta_0 = \pm 0.07.$$

The observational error dispersion (Δ_e) of $\log \mu$ is given by

$$0,674 \Delta_e = \sqrt{\Delta_k^2 + \Delta_a^2 + \left(\Delta_m \cdot \frac{d \log \mu}{d M_B}\right)^2 + (3 \Delta_\pi)^2},$$

where Δ_k is the p. e. of $\log k$, Δ_a — the p. e. of $\log \frac{a^3}{P^2}$, Δ_m — the photometric error of M_B , and Δ_π — the p. e. of $\log \pi$. As the error of $\log \mu$ is mostly due to the parallax error, we shall consider the “minimum” value of Δ_e , putting $\Delta_k = \Delta_a = \Delta_m = 0$, and taking into account Δ_π only. From column 7 of Table I we get $\Delta_\pi = \pm 0.04$, whence

$$\Delta_e = \pm 0.18.$$

Thus the observed dispersion of $\log \mu$ amounts to only two-fifths of the “minimum” error dispersion, and the true cosmic spread of the masses from the mean curve must be practically zero. We conclude that, as revealed by our selected first-class data, the stars (chiefly of the main sequence) probably follow a strict mass-luminosity law.

II. On the Orientation of the Orbital Planes in Multiple Systems¹.

By Jacob Gabovitš.

Our knowledge of the relative inclinations of the orbits in multiple systems is rather scanty. The question is, whether the plane of revolution of a close pair coincides, at least approximately, with the plane of revolution of the farther component, or whether the two planes are independent of each other. Only in one case do we know with certainty that the two planes of revolution practically coincide, namely in the triple system 44 ι Bootis. The inclination of the visual pair AB is 83° (W. Finsen, *Union Obs. Circ.* No. 91); the fainter component is an eclipsing variable, and thus its inclination must also be near 90° . In order to get more information on the relative inclinations, we propose to treat the problem statistically; for the inclinations we use the catalogue compiled by Finsen (*loc. cit.*).

We consider separately the visual binary stars with two known components only, and the visual systems, where at least one component is a spectroscopic binary. If there exists no correlation between the two planes of revolution in complex systems, the distribution of the visual inclinations must be the same in both classes of systems. If, however, the planes in question coincide, the average visual inclination in complex systems must be greater than the average inclination in simple systems, on account of the well-known fact that, owing to observational selection, the average inclination of spectroscopic binaries is greater than the expected statistical average. The actual averages from our material are as follows:

¹ Seminar in Astrophysics, 1936/37, conducted by E. Öpik.

Table I.

	$\overline{\sin i}$	Number
Triple (or multiple) systems	0.850 ± 0.022	20
Double systems	0.735 ± 0.020	122
All	0.750 ± 0.017	142

The difference between the two values of $\overline{\sin i}$ seems to be real, which speaks in favour of the coincidence of the orbital planes in multiple systems. The effect is still more pronounced, if we consider the distribution of $\sin i$ in both cases (Table II). Whereas in the simple systems all values of $\sin i$ from 0.0 to 1.0 are present, the values of $\sin i$ in complex systems occur exclusively in the interval from 0.6 to 1.0.

Table II.

Distribution of $\sin i$ in Visual Binaries.

$\sin i$ of the visual binary	.0—0.1	.1—0.2	.2—0.3	.3—0.4	.4—0.5	.5—0.6	.6—0.7	.7—0.8	.8—0.9	.9—1.0
Multiple (spectroscopic) systems (visual binaries with spectroscopic components)	—	—	—	—	—	—	4	3	4	9
Double systems without known sp. components	2	1	2	4	8	9	20	24	20	32

If the law of distribution were the same in both cases, we should expect 5.4 multiple systems in the interval of $\sin i$ from 0.0 to 0.6, whereas the observed number is zero. By Poisson's formula the probability for such a result to be accidental is $e^{-5.4} = 0.005$, or small enough to be considered improbable. On the contrary, the hypothesis of a coincidence of the orbital planes in multiple systems explains our result, since the discovery of spectroscopic binaries is strongly favoured by high inclination.

Returning to Table I, we notice that the average value of $\sin i$ for all computed orbits is slightly smaller than the expected statistical average for a random distribution ($\frac{\pi}{4} = 0.785$).

This may be the result of a slight selection in discovery and computation, because, contrary to what happens to spectroscopic binaries, greater inclination of the orbit makes the visual binary a more difficult object.

We might expect a priori some kind of influence of the galactic plane upon the orbital planes. If a galactic orientation exists, in the sense of the galactic plane being a preferential plane for binaries, the average value of $\sin i$ for systems in high galactic latitudes must be smaller, in low galactic latitudes larger than the average. A slight effect in this direction is shown by Table III, although its reality is not certain.

Table III.

Galactic latitude	$\overline{\sin i}$
0° to $\pm 30^\circ$	0.764 ± 0.023
$\pm 30^\circ$ to $\pm 90^\circ$	0.736 ± 0.025

III. On the Mass Ratio of Spectroscopic Binaries with One Spectrum Visible¹.

By Jacob Gabovitš.

The circumstance that the orbital planes in a multiple system are very likely to coincide (at least approximately), as appears probable from the preceding note, provides us with a new method of determining the mass ratios of spectroscopic binaries with one spectrum, if both the spectroscopic and the visual orbits of a complex system are calculated.

The mass function

$$f = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} \dots \dots \dots (1)$$

may be written as

$$\frac{(1+k_1)^2}{k_1^3} = \frac{m_1 \sin^3 i}{f} \dots \dots \dots (2),$$

where $k_1 = \frac{m_2}{m_1}$ is the mass ratio to be determined. Assuming for i the inclination of the visual orbit, and determining the mass of the primary (m_1) from the empirical mass-luminosity relation, we get the mass ratio. The results of this computation are given in Table I, where all complex systems with known spectroscopic (all with one spectrum visible) and visual orbits are collected.

The successive columns give: (1) the name of the star; (2) the inclination of the visual orbit (W. Finsen, *Union Obs. Circ.* No. 91); (3) the mass function of the spectroscopic orbit (J. Moore, *Fourth Catalogue of Spectroscopic Binaries*); (4) the spectrum (J. Moore, *loc. cit.*); (5) the bolometric absolute magni-

¹ Seminar in Astrophysics, 1936/37, conducted by E. Öpik.

tude deduced from the visual abs. magnitude (from Beer's list in *Ver. Berl. Bab.* 5. 6) by the usual bolometric corrections; (6) the logarithm of the mass of the primary obtained from an empirical mass-luminosity relation (cf. the first note in this number); (7) the mass ratio, computed from formula (2).

Table I.

Mass Ratios (k_1) of Spectroscopic Binaries with one Spectrum Visible.

Star	i	f	Sp.	M_B	Log m_1	k_1
13 Cet	520	0.0108	F7	4.2	0.048	0.33
O Σ 82	136	.0193	F8	3.9	.072	.47
μ Ori	110	.0113	A2	1.7	.258	.23
α^1 Gem	115	.00150	A2	1.0	.317	.11
α^2 Gem	115	.0097	A2	1.9	.240	.23
ξ UMa B	123	.000053	Go	5.2	-.036	.05
ξ UMa A	123	.0214	Go	4.7	.000	.38
α Peg	1020	0.045	F2	2.6	0.182	0.39

The average mass ratio of the spectroscopic binaries with one spectrum visible, calculated from the data in column 7 of Table I, is 0.27, with an individual dispersion of ± 0.13 . According to the mass-luminosity relation, established in this publication, the corresponding difference in magnitude between the two components is $\Delta m = 4.5$, being thus much larger than suggested by many authors as an average for invisible components of spectroscopic binaries. Thus, we arrive at the important practical conclusion that, in order to obtain the magnitude of the primary, no correction need be added to the combined magnitude of spectroscopic binaries with one spectrum visible; without doubt, the correction hitherto used by many authors, 0.3 mag., must be regarded as too large.

Tartu, May 21, 1937.

IV. Über die Abhängigkeit der interstellaren Absorption von der Wellenlänge¹.

Von G. Kusmin.

Die Erforschung der interstellaren Absorption als Funktion der Wellenlänge bietet ein besonderes Interesse, da es auf diesem Wege möglich erscheint, gewisse Kenntnisse über die Eigenschaften der interstellaren Materie zu erhalten. Es sind gegenwärtig verhältnismässig wenig entsprechende Messungen vorhanden, wobei dieselben, einzeln genommen, auch noch ziemlich ungenau sind (mittlerer Fehler grösser als $0^m.05$). Dennoch steht für die meisten untersuchten Raumrichtungen mehr als eine Messung für jede Wellenlänge zur Verfügung, und sind die Mittelwerte aus diesen Messungen schon viel vertrauenswürdiger. Abb. 1 zeigt zwei Kurven, die solche Mittelwerte darstellen. Die obere Kurve repräsentiert die Abhängigkeit der Absorption (differentielle Absorption) von der Wellenlänge, die auf Grund der Messungen an dem Sternhaufen NGC 6913 erhalten wurde (nach Trümpler²). Die Kurve stellt das Resultat einer Vergleichung zwischen drei im obenerwähnten Sternhaufen und zwei viel näher zu uns gelegenen Sternen dar. Die untere Kurve stellt das Mittel aller Messungen der Absorption an 55 Cygni dar (nach 6—4 Messungen von O. Struve, P. Keenan und J. Hynek³ und nach einer Messung von J. Rudnick⁴). Beide Kurven sind verhältnismässig genau bestimmt, und wir können den mittleren Fehler ihrer Punkte annähernd auf $0^m.02 - 0^m.04$ schätzen.

Wie aus Abb. 1 zu ersehen ist, zeigen die beiden Kurven, die einen ziemlich unglatten, wellenförmigen Verlauf aufweisen,

¹ Astrophysikalisches Seminar 1936/37, geleitet von E. Öpik.

² Publ. A. S. P. **42**, 267 (1930).

³ Ap. J. **79**, 1 (1934).

⁴ Ap. J. **83**, 394 (1936).

eine merkwürdige Ähnlichkeit miteinander. Scheinbar ist der Charakter der Absorption in beiden Raumrichtungen durchschnittlich derselbe. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass die durchschnittliche Absorption auch in der ganzen Milchstrassenebene qualitativ dieselbe ist. Besonders kommt das zutage, wenn wir alle Messungen durch Reduktion zu einer Normalkurve vereinigen. Abb. 2 enthält eine solche Zusammenstellung, wo die Messungen in den einzelnen Richtungen (oder die Mittelwerte der Messungen in verschiedenen Richtungen) durch die Form der Punkte zu unterscheiden sind (s. hierzu die folgende Tabelle); als Normalkurve ist die obere Kurve in Abb. 1 angenommen.

Tabelle zu Abb. 2.

Bezeichnung der Punkte auf Abb. 2	Gemessenes Objekt	Galaktische Koordinaten		Quelle
		l	b	
1	NGC 6910	46°	+1°	R. Trümpler ²
2	NGC 6913	45	0	"
3	55 Cygni	53	1	1) O. Struve, P. Keenan u. J. Hynek ³ ; 2) J. Rudnick ⁴
4	13 Cephei	67	1	O. Struve u. a. ³
5	Verschiedene Sterne, fast über die ganze Milch- strasse verteilt			H. Wilkens ⁵ (nach den Messungen von S. Thorndike ⁶)

Wie aus Abb. 2 zu ersehen, ist in der Tat die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Punkten eine ziemlich gute. Die Kurve, die durch die Punkte gezogen ist, erscheint als ganz zuverlässig und ihr Verlauf ist den in Abb. 1 dargestellten Kurven ähnlich. Bei kleiner Wellenlänge ($< 400 \mu\mu$) werden die Ergebnisse wegen verschiedener Wasserstoffabsorption in den Vergleichssterne stark ungenau (Wirkung der Absorptionsumrisse der naheliegenden Einzellinien der Balmerreihe). In diesem Bereiche haben wir nur die Messungen von Trümpler berücksichtigt, denn diese Messungen beziehen sich auf B0-Sterne, wo die Wirkung der Wasserstoffabsorption wahrscheinlich eine kleine ist. Bei den anderen Messungen muss aber diese Wirkung beträchtlich sein.

⁵ Breslau Mitt. IV, 52 (1937).

⁶ Lick Obs. Bull. 17, 461 (1934).

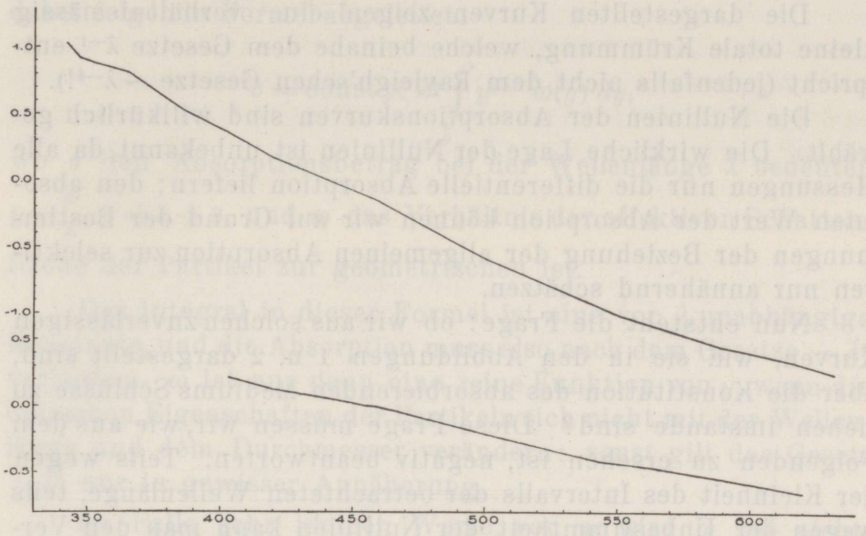


Abb. 1. Abhängigkeit der interstellaren Absorption von der Wellenlänge nach Messungen an NGC 6913 (obere Kurve) und 55 Cygni (untere Kurve). In allen Abbildungen zeigen die Abszissen die Wellenlängen (in $\mu\mu$) und die Ordinaten die Werte der Absorption.

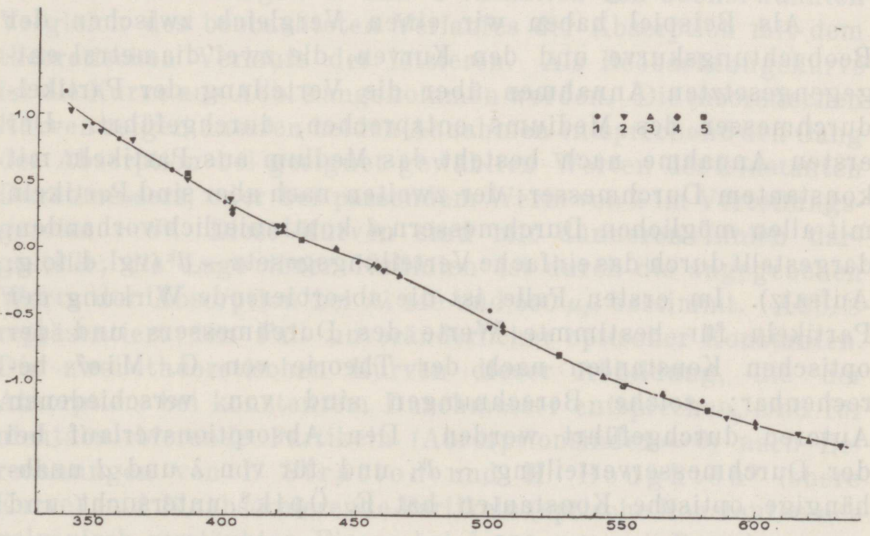


Abb. 2. Abhängigkeit der interstellaren Absorption von der Wellenlänge. Zusammenstellung der Messungen (vgl. Tabelle).

Die dargestellten Kurven zeigen eine verhältnismässig kleine totale Krümmung, welche beinahe dem Gesetze λ^{-1} entspricht (jedenfalls nicht dem Rayleigh'schen Gesetze $\sim \lambda^{-4}$!).

Die Nulllinien der Absorptionskurven sind willkürlich gewählt. Die wirkliche Lage der Nulllinien ist unbekannt, da alle Messungen nur die differentielle Absorption liefern; den absoluten Wert der Absorption können wir auf Grund der Bestimmungen der Beziehung der allgemeinen Absorption zur selektiven nur annähernd schätzen.

Nun entsteht die Frage: ob wir aus solchen zuverlässigen Kurven, wie sie in den Abbildungen 1 u. 2 dargestellt sind, über die Konstitution des absorbierenden Mediums Schlüsse zu ziehen imstande sind? Diese Frage müssen wir, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist, negativ beantworten. Teils wegen der Kleinheit des Intervalls der betrachteten Wellenlänge, teils wegen der Unbestimmtheit der Nulllinien kann man den Verlauf der Beobachtungskurven auf ganz verschiedene Weise erklären. Absorbierende Medien von ganz verschiedener Konstitution zeigen bei so engem Intervall von λ , falls die Nulllinie und der Parameter des Verteilungsgesetzes der Partikeln geeignet gewählt sind, beinahe denselben relativen Verlauf der Absorption mit der Wellenlänge.

Als Beispiel haben wir einen Vergleich zwischen der Beobachtungskurve und den Kurven, die zwei diametral entgegengesetzten Annahmen über die Verteilung der Partikeldurchmesser des Mediums entsprechen, durchgeführt. Der ersten Annahme nach besteht das Medium aus Partikeln mit konstantem Durchmesser; der zweiten nach aber sind Partikeln mit allen möglichen Durchmessern d kontinuierlich vorhanden, dargestellt durch das einfache Verteilungsgesetz $\sim d^k$ (vgl. d. folg. Aufsatz). Im ersten Falle ist die absorbierende Wirkung der Partikeln für bestimmte Werte des Durchmessers und der optischen Konstanten nach der Theorie von G. Mie⁷ berechenbar; solche Berechnungen sind von verschiedenen Autoren durchgeführt worden. Den Absorptionsverlauf bei der Durchmesser-Verteilung $\sim d^k$, und für von λ und d unabhängige optische Konstanten hat E. Öpik⁸ untersucht und

⁷ Ann. d. Phys. (4 F.) 25, 377 (1908).

⁸ H. C. 359, 7 (1931).

dabei folgende Formel abgeleitet:

$$\sigma = \text{const} \times \lambda^p \int_0^{\infty} y^{p-1} \omega(y) dy,$$

wo σ den Absorptionsbetrag bei der Wellenlänge λ bedeutet, $y = \frac{d}{\lambda}$, $p = k + 3$, und ω das Verhältnis der effektiven Schattenfläche der Partikel zur geometrischen ist.

Das Integral in dieser Formel ist eine von λ unabhängige Konstante, und die Absorption muss also nach dem Gesetze $\sim \lambda^p$ verlaufen. ω ist nur dann eine reine Funktion von y , wenn die optischen Eigenschaften der Partikeln sich nicht mit der Wellenlänge und dem Durchmesser verändern; sonst gilt das Gesetz $\sim \lambda^p$ nur in gewisser Annäherung.

Im Falle sehr kleiner Werte von y wird ω bei nicht-absorbierenden Partikeln y^4 proportional sein (Rayleigh'sches Ges.), bei absorbierenden aber y ; im Falle sehr grosser y -Werte ist dagegen $\omega = 1$. Dementsprechend konvergiert das Integral in der oben gegebenen Formel, wenn $0 > p > -4$ resp. $0 > p > -1$ ist (oder $-3 > k > -7$ resp. $-3 > k > -4$).

Die Abbildungen 3 und 4 enthalten den obenerwähnten Vergleich des beobachteten Verlaufes der Absorption mit dem theoretischen Verlaufe der letzteren. Als Beobachtungskurve ist die Kurve aus Abb. 2 angenommen worden. Die theoretischen Kurven zeigen unseren beiden Annahmen entsprechend den Gang der Absorption bei geeignet gewählten Werten des konstanten Durchmessers, oder bei passendem Werte von k im Verteilungsgesetze $\sim d^k$. Diese Kurven sind mit dünneren Linien dargestellt; die Lage ihrer Nulllinien ist durch die angegebenen Werte der Absorption bei $\lambda \lambda$ 440 und 550 $\mu\mu$ bestimmt. Abb. 3 repräsentiert den Fall unveränderlicher optischer Konstanten. Die zwei theoretischen Kurven dieser Abbildung, die der Absorption bei konstantem Durchmesser entsprechen, sind für nichtabsorbierende Partikeln (Absorptionsindex = 0) nach Berechnungen von I. Stratton und H. Houghton⁹ (obere Kurve) und für absorbierende Partikeln (optische Konstanten des galvanisch zerstäubten Eisens bei λ 550 $\mu\mu$) nach Berechnungen

⁹ Phys. Rev. 38, 159 (1931).

2
Ex lib. naty. Th

von C. Schalén¹⁰ gegeben (untere Kurve). Die theoretische Kurve für die zweite Annahme der Konstitution des Mediums stellt das Gesetz $\sim \lambda^{-0.7}$ dar, welches der Durchmesser-Verteilung $\sim d^{-3.7}$ entsprechen muss (das Integral in der Formel von Öpik ist bei $p = -0.7$ jedenfalls konvergent).

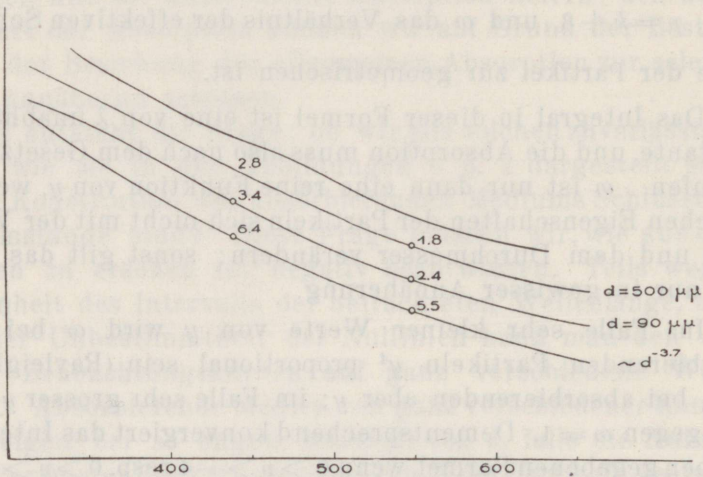


Abb. 3. Vergleich der Beobachtungskurve mit den theoretischen Kurven für den Fall der mit der Wellenlänge nicht veränderlichen optischen Konstanten. Kurven von oben nach unten: 1) Beobachtungskurve; 2) theoretische Kurve für $d = \text{const.} = 500 \mu\mu$ und nicht absorbierende Partikeln; 3) theoretische Kurve für $d = \text{const.} = 90 \mu\mu$ und absorbierende Partikeln mit unveränderlichen opt. Konstanten; 4) theoretische Kurve für das Verteilungsgesetz der Durchmesser $d^{-3.7}$ und unveränderliche optische Konstanten. Der absolute Wert der Absorption ist in den beigegefügtten Zahlen angegeben (für 440 u. 550 $\mu\mu$).

Abb. 4 enthält drei Beispiele für den Fall veränderlicher optischer Konstanten. Die zwei oberen theoretischen Kurven entsprechen den optischen Konstanten des galvanisch zerstäubten Eisens, die zwei mittleren denjenigen des elektrolytischen Nickels und die zwei unteren dem massiven Kupfer. Für die Kurven, die den Absorptionsverlauf bei konstantem Durchmesser geben, sind die Berechnungen von C. Schalén^{10, 11} (Eisen, Nickel und Kupfer) und von E. Schoenberg und B. Jung¹² (Eisen) benutzt worden. Die Kurven der Verteilung d^k sind auf Grund der Berechnungen von Schalén^{10, 11} durch numerische

¹⁰ Upsala Medd. **64**, 1 (1936).

¹¹ Upsala Medd. **58**, 38 (1934).

¹² Breslau Mitt. IV, 66 (1937).

Integration erhalten. Die Integration wurde für $k = -3^{1/3}$, $-3^{1/2}$, $-3^{2/3}$, $-3^{4/5}$ (nur Eisen) und $\lambda\lambda$ 395, 440, 477 (nur Eisen), 550 $\mu\mu$ durchgeführt. Bei Kupfer sind für λ 550 $\mu\mu$ die Schalén'schen Berechnungen für die opt. Konstanten 0.84; 2.62 benutzt, die sich nicht viel von den wahren Konstanten bei dieser Wellenlänge (0.89; 2.23) unterscheiden. Für die letzteren ist bei

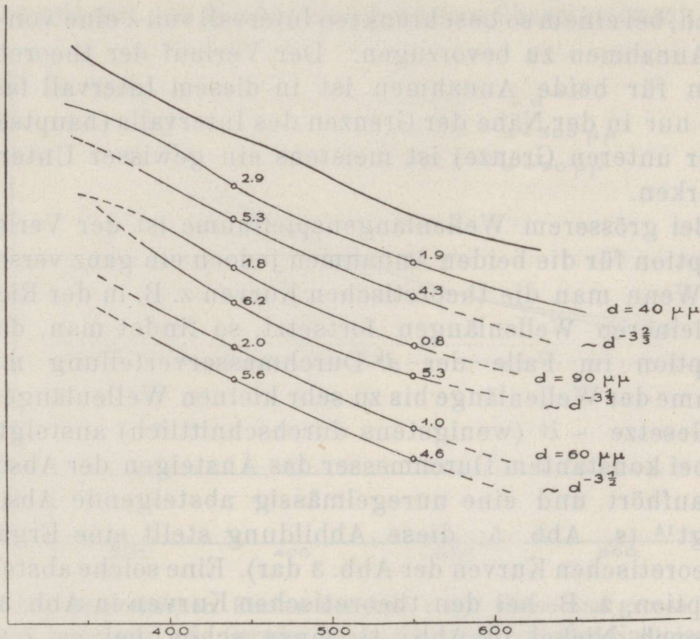


Abb. 4. Vergleich der Beobachtungskurve mit den theoretischen Kurven für den Fall der mit der Wellenlänge veränderlichen optischen Konstanten (Fe, Ni, Cu). Kurven von oben nach unten: 1) Beobachtungskurve; 2) galvanisch zerstäubtes Eisen, $d = 40 \mu\mu = \text{const.}$; 3) dasselbe, Verteilung $d^{-3^{2/3}}$; 4) elektrolytischer Nickel, $d = 90 \mu\mu = \text{const.}$; 5) derselbe, Verteilung $\sim d^{-3^{1/2}}$; 6) massives Kupfer, $d = 60 \mu\mu = \text{const.}$; 7) dasselbe, Verteilung $\sim d^{-3^{1/2}}$.

Schalén die absorbierende Wirkung nicht berechnet. Für grosse Partikeldurchmesser wurde, wo keine direkten Berechnungen vorhanden sind, eine einfache Extrapolationsformel benutzt. Bei (algebraisch) kleinen Werten von k ($k < -3^{1/2}$), die für Eisen zutreffend erscheinen, spielt die Wahl dieser Extrapolationsformel keine wesentliche Rolle; bei grösseren Werten dagegen,

z. B. $k = -3^{1/3}$, wie er für Nickel gewählt ist¹³, kann die ungenaue Extrapolationsformel die Ergebnisse beträchtlich verfälschen, hauptsächlich aber die Lage der Nulllinie beeinflussen.

Aus Abb. 3 u. 4 ist nun zu ersehen, dass bei zwei so verschiedenen Annahmen von der Konstitution des absorbierenden Mediums, wie die hier gemachten, eine gleichgute Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen erreicht wurde. Es ist aber nicht möglich, bei einem so beschränkten Intervall von λ eine von diesen zwei Annahmen zu bevorzugen. Der Verlauf der theoretischen Kurven für beide Annahmen ist in diesem Intervall fast derselbe; nur in der Nähe der Grenzen des Intervalls (hauptsächlich bei der unteren Grenze) ist meistens ein gewisser Unterschied zu merken.

Bei grösserem Wellenlängenspielraume ist der Verlauf der Absorption für die beiden Annahmen jedoch ein ganz verschiedener. Wenn man die theoretischen Kurven z. B. in der Richtung der kleineren Wellenlängen fortsetzt, so findet man, dass die Absorption im Falle der d^k -Durchmesserverteilung mit der Abnahme der Wellenlänge bis zu sehr kleinen Wellenlängen nach dem Gesetze $\sim \lambda^p$ (wenigstens durchschnittlich) ansteigt, während bei konstantem Durchmesser das Ansteigen der Absorption bald aufhört und eine unregelmässig absteigende Absorption anfängt¹⁴ (s. Abb. 5; diese Abbildung stellt eine Ergänzung der theoretischen Kurven der Abb. 3 dar). Eine solche absteigende Absorption, z. B. bei den theoretischen Kurven in Abb. 3 und 5 (und auch Nickel in Abb. 4), muss schon bei ca λ 250 $\mu\mu$ anfangen.

Hier sei aber bemerkt, dass das Aufhören des Absorptionsanstiegs mit der Abnahme der Wellenlänge im Falle von absorbierenden Partikeln (grosser Absorptionsindex) sich auch nur bei viel kleineren Wellenlängen vorfinden kann. Wegen der etwaigen Veränderung der optischen Konstanten der Partikeln mit der Wellenlänge kann nämlich der Absorptionsverlauf der

¹³ Bei Nickel ist die Übereinstimmung zwischen der d^k und der Beobachtungskurve bei $k = -3^{1/3}$ ziemlich ungenügend, bei noch grösseren k -Werten ist eine bessere Übereinstimmung zu erwarten.

¹⁴ Da die Partikeln nicht kleiner als Moleküle sein können, muss das Ansteigen der Absorption immer bei einer gewissen Wellenlänge aufhören, jedoch z. B. im Fall der d^k -Verteilung nur bei einer Wellenlänge von der Grössenordnung der Moleküle.

ganz kleinen absorbierenden Partikeln der Beobachtungskurve entsprechen, ohne dass die Veränderung der opt. Konstanten dabei sehr gross zu sein braucht. Bekanntlich ist bei sehr kleinen absorbierenden Partikeln die Absorption λ^{-1} und einem Faktor, der von den optischen Konstanten abhängt, proportional. Unsere Beobachtungskurven sind ja auch in erster Annäherung an das Gesetz λ^{-1} darstellbar (die Kurve $\lambda^{-0.7} = d^{-3.7}$ auf Abb. 3, die ganz gut mit den Beobachtungskurven übereinstimmt, unter-

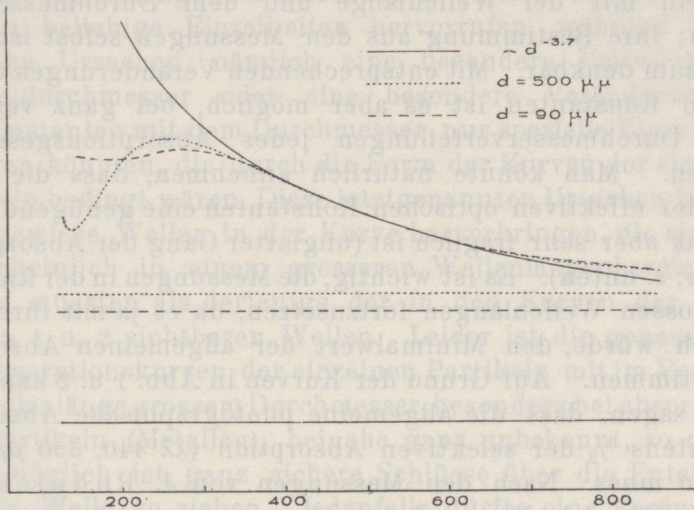


Abb. 5. Die theoretischen Kurven der Abb. 3 auf kleine und grosse Wellenlängen fortgesetzt (die Geraden geben die entsprechenden Nulllinien an).

scheidet sich nur wenig von der λ^{-1} -Kurve). Bei sehr kleinen absorbierenden Partikeln ist aber das Aufhören des Absorptionsanstiegs gerade nur bei kleineren Wellenlängen zu erwarten. Im Falle des galv. zerst. Eisens z. B., bei dem $d = 40 \mu\mu$ zutreffend ist, beginnt die abnehmende Absorption vielleicht erst bei etwa $\lambda = 150 \mu\mu$. In solchem Falle zeigen die Kurven, die den beiden Annahmen entsprechen, auch bei ganz kleinen Wellenlängen nur einen kleinen Unterschied.

Bei grossen Wellenlängen ist ein Unterschied zwischen den den beiden Annahmen entsprechenden Kurven auch vorhanden (s. Abb. 5). Bei der d^k -Verteilung muss die Absorption mit der Zunahme der Wellenlänge schneller abnehmen, als bei konstantem Durchmesser; die Absorptionskurven müssen sich

asymptotisch ihren Nulllinien nähern, wobei die Lage der Nulllinien bei den beiden Annahmen, wie man aus den Abbildungen 3, 4 u. 5 ersehen kann, eine ganz verschiedene ist.

Die Fortsetzung der Messungen in der Richtung der kleinen¹⁵ und grossen Wellenlängen bietet also einige Möglichkeiten, um gewisse Schlüsse über die Partikelverteilung ziehen zu können. Doch können die Ergebnisse kaum sehr sicher sein, da es unbekannt ist, wie sich die effektiven optischen Konstanten der Partikeln mit der Wellenlänge und dem Durchmesser verändern; ihre Bestimmung aus den Messungen selbst ist ebenfalls kaum denkbar. Mit entsprechenden Veränderungen der optischen Konstanten ist es aber möglich, bei ganz verschiedenen Durchmesserverteilungen jedes Absorptionsgesetz zu erklären. Man könnte natürlich annehmen, dass die Änderung der effektiven optischen Konstanten eine genügend kleine sei, was aber sehr fraglich ist (unglatter Gang der Absorptionskurven; s. unten). Es ist wichtig, die Messungen in der Richtung der grossen Wellenlängen fortzusetzen, da es ja mit ihrer Hilfe möglich würde, den Minimalwert der allgemeinen Absorption zu bestimmen. Auf Grund der Kurven in Abb. 1 u. 2 kann man schon sagen, dass die allgemeine photographische Absorption wenigstens $\frac{3}{2}$ der selektiven Absorption ($\lambda\lambda$ 440, 550 $\mu\mu$) ausmachen muss. Nach den Messungen von J. Rudnick⁴ an ζ Persei, die sich bis zu λ 755 $\mu\mu$ erstrecken, ist aber die allgemeine photographische Absorption schon dreimal grösser als die selektive (leider sind diese Messungen ziemlich ungenau; sie sind wegen grosser Dispersion der Messungspunkte in Abb. 2 nicht in Betracht gezogen worden). Auf diesem Wege könnte man natürlich nur eine gewisse untere Grenze der allgemeinen Absorption erreichen; der wahre Wert der allgemeinen Absorption und ihre Beziehung zur selektiven Absorption ist nur auf stellarstatistischem Wege zu bestimmen, wobei das Resultat doch ziemlich unsicher sein dürfte. Die Kenntnis der Werte der allgemeinen Absorption ist aber sehr wichtig, da die Lagen der Nulllinien im Falle desselben Verlaufes der differentiellen Absorption bei verschiedenen Annahmen von der Konsti-

¹⁵ In der Richtung der kleinen Wellenlängen kann man die Messungen nur bis auf etwa λ 290 $\mu\mu$ ausdehnen; bei noch kleineren Wellenlängen ist die irdische Atmosphäre infolge der grossen Absorption des Ozons praktisch undurchsichtig.

tution des absorbierenden Mediums ganz verschieden sein können (wie das bei unseren zwei Annahmen der Fall ist; s. die Abbildungen).

Sehr interessant ist eine Einzelheit der Beobachtungskurven — die Welle bei $\lambda 460 \mu\mu$. Wenn diese Welle wirklich eine Besonderheit der Absorption darstellen sollte, so wäre die Ursache ihrer Erscheinung wahrscheinlich auf die Veränderung der optischen Konstanten der Partikeln des absorbierenden Mediums mit der Wellenlänge zurückzuführen. Diese Ursache könnte ja ganz beliebige Einzelheiten hervorrufen, während andere mögliche Ursachen, nämlich eine besondere Verteilung der Partikeldurchmesser oder eine besondere Veränderung der opt. Konstanten mit dem Durchmesser, nur spezielle Einzelheiten erzeugen könnten, die durch die Form der Kurven der einzelnen Partikeln bedingt wären. Diese letztgenannten Ursachen könnten auch gewisse Wellen in der Kurve hervorbringen, die sich aber wahrscheinlich in einem grösseren Wellenlängenbereiche abspielen müssten als derjenige der in den Kurven der Abbildungen 1 u. 2 sichtbaren Wellen. Leider ist die genaue Form der Absorptionskurven der einzelnen Partikeln mit im Vergleich zur Wellenlänge grossem Durchmesser, besonders bei absorbierenden Partikeln (Metallen), beinahe ganz unbekannt, so dass es nicht möglich ist, ganz sichere Schlüsse über die Entstehung unserer Welle zu ziehen. Jedenfalls dürfte eine Veränderung der optischen Konstanten mit sich verändernder Wellenlänge ihre a priori wahrscheinlichste Ursache bilden.

Die Annahme einer Unveränderlichkeit der optischen Konstanten wäre also sehr riskant. Wohl aber könnte angenommen werden, dass die Veränderung der effektiven optischen Konstanten der Partikeln mit denen eines gewissen wahrscheinlichen Stoffes identisch sei. Es sei jedoch bemerkt, dass die opt. Konstanten, besonders die opt. Konstanten der Metalle, Veränderungen in deren Bestande und in den Bedingungen gegenüber sehr empfindlich sind. Es steht ja sicher, dass im interstellaren Raume kein reines Metall vorhanden sein kann; die gemessenen optischen Konstanten beziehen sich aber gerade auf reine massive, elektrolytische oder galvanisch zerstäubte Metalle. Ausserdem ist die Veränderung der effektiven optischen Konstanten in Fällen, wo im Vergleich zur Wellenlänge die Partikeln gross oder klein sind, fast sicher eine verschiedene da

im ersten Falle die absorbierenden (Metalle) und nichtabsorbierenden (Nichtmetalle) Partikeln beinahe gleich wirksam sind, im zweiten Falle aber die absorbierenden Partikeln viel wirksamer sein können.

Zum Schluss sei bemerkt, dass es ziemlich wahrscheinlich ist, dass Partikeln mit einem bestimmten Durchmesser bevorzugt sind, d. h. dass in der Verteilungskurve der Durchmesser ein scharfes Maximum hervortritt. Im letzteren Falle ist die Entstehung der erwähnten Absorptionsbesonderheit (Welle) leichter zu begreifen. Ein bevorzugter Durchmesser entspricht unserer ersten Annahme über die Konstitution des absorbierenden Mediums; solche Wellen in der Absorptionskurve könnten einige Gründe für diese Annahme, die in den Arbeiten von Schalén^{10, 11} eine besondere Rolle spielt, liefern. Jedoch ist auch bei der d^k -Verteilung im Falle $k < -4$ (absorbierende Partikeln; bei nichtabsorbierenden $k < -7$) ein genügend bevorzugter Durchmesser — und zwar der kleinste — vorhanden.

V. Über die Partikeldurchmesserverteilung in der interstellaren Materie ¹.

Von G. Kusmin.

Wie aus der Statistik der Sternschnuppen folgt, wächst deren Anzahl nach dem d^k -Gesetz an² (d — Durchmesser, k — beinahe konstant). Wir können nun (nach Öpik²) annehmen, dass solch ein Anwachsen nach dem d^k -Gesetze sich bis zu sehr kleinen, schon absorbierend wirkenden Partikeln der interstellaren Materie erstrecken muss, und dass dieses Gesetz nicht nur in der Sonnenumgebung, sondern auch im ganzen interstellaren Raume mit durchschnittlich derselben Konstante k seine Geltung bewahrt. Die folgenden elementaren Berechnungen zeigen, dass die Beobachtungsergebnisse über die interstellare Absorption dieser Annahme jedenfalls nicht widersprechen.

Wir berechnen auf Grund der Anzahl der sporadischen (interstellaren) Sternschnuppen in cm^3 , von dem d^k -Gesetz ausgehend, die allgemeine photographische Absorption. Dazu benutzen wir die in der vorhergehenden Abhandlung vom Verfasser gegebene Formel von Öpik (Seite 17), die gerade für die d^k -Durchmesserverteilung abgeleitet ist. Der Proportionalitätsfaktor in dieser Formel ist der folgende:

$$2.5 \log e \frac{\pi}{4} cH,$$

wo c den Proportionalitätsfaktor des d^k -Gesetzes und H die Länge des Lichtweges in dem absorbierenden Medium bedeutet.

¹ Astrophysikalisches Seminar 1936/37, geleitet von E. Öpik.

² E. Öpik, H. C. **359**, 7 (1931).

Wir nehmen $H = 1 \text{ kpc} = 3.1 \times 10^{21} \text{ cm}$ an, den Faktor c berechnen wir aus der Anzahl der sporadischen Sternschnuppen:

$$A = c \int_{d_0}^{\infty} d^k dd \text{ pro cm}^3.$$

d_0 ist hier die untere Durchmessergränze der in Betracht genommenen Sternschnuppen. Wenn wir $d_0 = 0.1 \text{ cm}$ wählen, so ist rund $A = 10^{-24} \text{ pro cm}^3$, welche Zahl grössenordnungsgemäss als Mittelwert für den interstellaren Raum zu betrachten ist (Schätzung von E. Ö p i k, dem Verfasser mitgeteilt). Für k nehmen wir verschiedene Werte zwischen -3.3 (teleskopische Sternschnuppen) und -4.5 (helle Sternschnuppen) an². Weiter setzen wir $\lambda = 440 \mu\mu = 0.44 \times 10^{-4} \text{ cm}$ an, wonach wir den Wert von λ^p ($p = k + 3$) berechnen. Das Verhältnis des effektiven Querschnittes der Partikeln zum wahren, ω , ist bekanntlich im Falle der kleinen y bei nichtabsorbierenden Partikeln $\sim y^4$ und bei absorbierenden $\sim y$ ($y = \frac{d}{\lambda}$). Als Proportionalitätsfaktoren benutzen wir runde Werte, im ersten Falle 10 und im zweiten 3. Diese Werte erhalten wir aus den bekannten Formeln von Mie³, wenn wir im ersten Falle den Brechungsexponenten gleich 1.3, und im zweiten gleich 1.5 — $3i$ ansetzen. Bei grösserem y wächst ω mehr oder weniger über 1 und bei weiterem Anwachsen von y rückt ω zu 1 asymptotisch zurück⁴. Dementsprechend setzen wir schematisch $\omega = 10 y^4$ resp. $3y$, wenn $y < 0.6$ resp. 0.4 , und $\omega = 1.5$, wenn $y > 0.6$ resp. 0.4 ist. Tabelle 1 enthält die Ergebnisse der Berechnungen für verschiedene k (I — nichtabsorbierende Partikeln, II — absorbierende Partikeln).

Tabelle 1.

Berechnete Werte der interstellaren Absorption pro kpc (photographisch), von der beobachteten Sternschnuppenhäufigkeit ausgehend.

k	-3.7	-3.8	-3.9	-4.0	-4.1	-4.2	-4.3
I	0m.06	0m.12	0m.26	0m.56	1m.3	2m.9	6m.5
II	0m.17	0m.45	1m.3	4m.0	13m	43m	150m

³ Vgl. Ann. d. Phys., Fussn. 7 des vorhergehenden Aufsatzes.

⁴ Rechenfehler in H. C. 359: Tab. III, ω mit 70 zu dividieren

Im Falle der absorbierenden Partikeln ist hier als untere Grenze der Integration $y = 10^{-3}$ benutzt (welcher Wert etwa dem Durchmesser der Moleküle entspricht), statt $y = 0$ in der Formel von Öpik. Bei nichtabsorbierenden Partikeln spielt die Wahl der unteren Grenze keine wesentliche Rolle.

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, kann man die auf stellarstatistischem Wege geschätzten Werte der allgemeinen Absorption im interstellaren Raume (von der Grössenordnung 1^m pro kpc) wohl durch die d^k -Verteilungshypothese erklären, und zwar bei nichtabsorbierenden Partikeln durch $k = -4.0$ bis -4.2 und bei absorbierenden Partikeln durch $k = -3.8$ bis -4.0 . Die Wirkung der nichtabsorbierenden Partikeln ist, wie diese Tabelle zeigt, beträchtlich kleiner als die Wirkung der absorbierenden Partikeln. Dementsprechend sind in der Tabelle 2 die Werte der Absorption für verschiedene Mischungen der absorbierenden und nichtabsorbierenden Partikeln dargestellt. In dieser Tabelle ist der Anteil der absorbierenden (metallischen) Partikeln in zwei Fällen kleiner als derjenige der nichtabsorbierenden (Mineralstaub) angenommen, was wahrscheinlich der Wirklichkeit entspricht, wie das die Erforschung der Sternschnuppen auch ahnen lässt.

Tabelle 2.

Photographische Absorption pro kpc, für verschiedene Mischungsverhältnisse absorbierender und nichtabsorbierender Partikeln.

Anteil der absorb. Partikeln	k						
	-3.7	-3.8	-3.9	-4.0	-4.1	-4.2	-4.3
1/2	0m.11	0m.28	0m.8	2m.3	7m	23m	80m
1/5	0m.08	0m.19	0m.47	1m.2	3m.6	11m	35m
1/10	0m.07	0m.15	0m.36	0m.9	2m.5	7m	21m

Das Gesetz und der Betrag der Verfärbung der Absorption entsprechen bei der d^k -Verteilung auch ziemlich genau der Wirklichkeit. Bei nichtabsorbierenden Partikeln muss die Absorption nämlich auf Grund der Formel von Öpik nach dem Gesetze $\sim \lambda^p$ mit $p = k + 3$ vor sich gehen (wenn die optischen Konstanten der Partikeln sich wenig mit dem Durchmesser und der Wellenlänge ändern). Nehmen wir $k = -4$, welcher Wert für verschiedene Mischungen der absorbierenden und nicht-

absorbierenden Partikeln die Absorption von $0^m.56$ bis $4^m.0$ pro kpc fordert (Tabellen 1 u. 2), so ist das Verfärbungsgesetz des nichtabsorbierenden Anteils $\sim \lambda^{-1}$. Dieses Gesetz stimmt mit der beobachteten Verfärbung der Absorption mit der Wellenlänge, die in Abb. 1 u. 2 der vorgehenden Abhandlung vom Verfasser gegeben ist, ziemlich gut überein. Die totale Krümmung der Beobachtungskurve unterscheidet sich nur wenig von der theoretischen Krümmung, welche etwas zu gross erscheint (das Gesetz $\sim \lambda^{-0.7}$ stimmt besser mit den Beobachtungen überein, siehe Abb. 3 jener Abhandlung). Die allgemeine Absorption (λ 440 $\mu\mu$) im Vergleich zur selektiven (λ 440, 550 $\mu\mu$) ist für das Gesetz $\sim \lambda^p$ in Tabelle 3 (I) für verschiedene k gegeben. Es variiert bei den betrachteten Werten von k ($=p-3$), wie die Tabelle zeigt, zwischen 4 und 6.

Bei den absorbierenden Partikeln ist das Gesetz $\sim \lambda^p$ für $-1 < p < -0.7$ wegen des Vorhandenseins einer unteren Grenze der Partikeldurchmesser nicht ganz genau, da im Falle der absorbierenden Partikeln bei solchen Werten von p das Integral in Öpiks Formel sehr langsam konvergiert. Genauer ist das Gesetz:

$$a \lambda^p - b \lambda^{-1},$$

wo das zweite Glied das Fehlen von sehr kleinen Partikeln (kleiner als Moleküle) bedeutet. Bei $p \leq -1$ ($k \leq -4$) ist aber im Falle von absorbierenden Partikeln das Integral überhaupt nicht konvergent. In diesem Falle ist die Annahme einer unteren Durchmessergränze unbedingt nötig. Bei $p = -1$ muss, wie nicht schwer zu ersehen ist, das folgende Gesetz gelten:

$$(b_1 + a_1 \log \lambda) \lambda^{-1},$$

bei $p < -1$ aber:

$$b \lambda^{-1} - a \lambda^p.$$

Die Übereinstimmung zwischen den Kurven der oben gegebenen Gesetze für absorbierende Partikeln und der Beobachtungskurve ist noch grösser als bei dem $\sim \lambda^p$ -Gesetz mit $p \approx -1$ (nicht-absorbierende Partikeln); sie ist durch eine kleinere Krümmung der Kurven bei Berechnungen nach diesen Gesetzen bedingt, was besser den Beobachtungen entspricht. Jedoch ist auch hier die theoretische Kurve etwas zu sehr gekrümmt. Tabelle 3 (II) bietet für die absorbierenden Partikeln die allgemeine Absorption im Verhältnis zur selektiven und ausserdem Angaben über die

Parameter der Absorptionsgesetze (für λ in μ -Einheiten). Aus der Tabelle ersehen wir, dass das Verhältnis der allgemeinen Absorption zur selektiven bei beiden Arten von Partikeln fast dasselbe ist; bei absorbierenden Partikeln ist die allgemeine Absorption relativ etwas grösser und variiert zwischen 5 und $6\frac{1}{2}$.

Tabelle 3.

Verhältnis der photographischen Absorption zur selektiven:
I, nichtabsorbierende; II, absorbierende Partikeln.

k	-3.8	-3.9	-4.0	-4.1	-4.2
I	6.1	5.5	5.0	4.6	4.2
II	6.5	6.0	5.7	5.5	5.3
b/a	0.20	0.45	(1.00)	2.2	5.0
b_1/a_1	—	—	3.5 ⁵	—	—

Im Falle einer grossen Veränderung der optischen Konstanten der Partikeln kann der Betrag der Verfärbung ganz anders erscheinen und die selektive Absorption mehr oder weniger von den berechneten Beträgen von $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{6}$ der allgemeinen Absorption sich unterscheiden. Fast alle gemessenen Metalle liefern eine grössere selektive Absorption. Tabelle 4 stellt die allgemeine Absorption im Vergleich zur selektiven für einige Metalle dar. Diese Angaben sind bei $k = -3\frac{2}{3}$ auf Grund der in der vorhergehenden Abhandlung erwähnten numerischen Integration, und für $k = -4\frac{1}{2}$ auf Grund der Berechnungen nach der Formel für sehr kleine absorbierende Partikeln gegeben (das Absorptionsgesetz bei $k = -4\frac{1}{2}$ unterscheidet sich nur wenig von demjenigen bei sehr kleinen Partikeln, denn die relative Wirkung der grösseren Partikeln ist bei diesem k schon verschwindend klein).

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, erweist sich die allgemeine Absorption im Verhältnis zur selektiven wegen der Veränderung der optischen Konstanten von 2 bis 3 mal kleiner als bei unveränderlichen Konstanten. Die Anwesenheit von Partikeln mit veränderlichen optischen Konstanten kann also

⁵ Für Log_{10} .

die selektive Absorption verhältnismässig beträchtlich vergrössern. Eine solche grössere Verfärbung kann noch besser den Beobachtungstatsachen entsprechen.

Tabelle 4.

Verhältnis der photographischen Absorption zur selektiven für Metalle.

Metall	k	
	$-3^{2/3}$	$-4^{1/2}$
Galvanisch zerstäubtes Eisen	5.5	3.0
Elektrolytischer Nickel	4.0	2.1
Massives Kupfer	3.8	1.9
Massiver Stahl	—	2.0
Unveränderliche optische Konstanten	> 7	5.0

Wir sehen also, dass unsere Hypothese über die Verteilung der Partikeldurchmesser in ganz gutem Einklang mit den Beobachtungen der allgemeinen und selektiven Absorption steht. Die etwas kleinere Krümmung der beobachteten Absorptionskurve kann man leicht durch ein kleineres k bei feineren Partikeln oder durch eine Veränderung der opt. Konstanten erklären (von den Ursachen der wellenförmigen Besonderheit in der Kurve ist schon in der ersten Abhandlung die Rede gewesen). Jedenfalls lässt die beobachtete Anzahl der Sternschnuppen sich auf kleine Teilchen durch eine kontinuierliche Verteilung (etwa d^k -Verteilung) extrapolieren, wobei die beobachtete beinahe λ^{-1} -Verfärbung, die das Ähnlichbleiben der Spektralenergiekurve einer Planckschen Kurve hervorruft, eine entsprechende Erklärung findet.

Zu ganz anderen Ergebnissen sind E. Schoenberg und B. Jung⁶ gelangt. Sie finden nämlich, dass ein kontinuierlicher Übergang von Sternschnuppen zu feineren

⁶ Breslau Mitt. IV, 76 (1937).

Partikeln überhaupt nicht möglich ist. Zu einem solchen Schlusse sind sie durch die Wahl eines konkreten Verteilungsgesetzes gekommen. Von ihren zwei Hypothesen über die Durchmesser-
verteilung:

$$\sim \frac{1}{d^3} \text{ und } \sim \frac{1}{d^3} \frac{1}{1 + h^2 d^2} \quad (h = 5 \text{ bei } d \text{ in } \mu)$$

haben sie die letztere gewählt, da diese den Betrag der Verfärbung besser angebe. Auf Grund dieser Hypothese finden sie aber die Gesamtdichte des nichtverfärbenden Anteils der absorbierenden Materie, wenn diese aus Eisen, Nickel und anderen Metallen besteht, als nur 6×10^{-27} , während nach C. Hoffmeister⁷ schon die Gesamtdichte nur der teleskopischen Sternschnuppen rund 10^{-24} g/cm³ beträgt.

Dieser Unterschied zwischen unseren Ergebnissen und denen von Schoenberg und Jung ist erstens natürlich durch die verschiedenen Verteilungshypothesen bedingt. Nach der Hypothese von Schoenberg und Jung entsteht der nicht-nichtverfärbende Anteil der Absorption durch die Wirkung durchschnittlich feinerer, weniger massiver Partikeln, als bei der Hypothese der d^k -Verteilung ($k \approx -4$), was durch eine steilere Abnahme der Anzahl der grossen Partikeln (nach dem Gesetze $\sim d^{-5}$) bei der ersten Hypothese bedingt ist. Wie die entsprechenden Berechnungen zeigen, erfordert die erste Hypothese bei gleichem nichtverfärbendem Anteil der Absorption eine 10^3 bis 10^4 mal kleinere Anzahl von massiven Partikeln mit einem Durchmesser > 0.1 cm, als die zweite Hypothese. Auf die Dichte bezüglich kann ein noch etwas grösserer Unterschied entstehen (dieser hängt von der Wahl der oberen Durchmessergränze ab⁸). Zweitens scheint auch, dass Hoffmeisters Wert der Gesamtdichte der teleskopischen Sternschnuppen stark überschätzt ist (bis 10^2 mal).

⁷ Astr. Abh., Erg.-Hefte z. d. A. N. 4 Nr. 5 (1922).

⁸ Z. B. bei der effektiven oberen Gränze 10^5 cm ist der Unterschied schon beträchtlich grösser, als dem Verhältnis 10^4 entspricht. Die Gesamtdichte der interstellaren Materie hat bei der d^k -Verteilung (falls $k = -4$, 10^{-7} cm $\leq d \leq 10$ cm und $A = 10^{-24}$ pro cm³) den Wert $2,9 \times 10^{-26} \times \rho$ g/cm³ (ρ — durchschnittliche Partikeldichte), d. h. eine ca. 10 mal grössere Gesamtdichte als nach Schoenberg und Jung's Hypothese (7.6×10^{-27} g/cm³).

Welch eine Verteilung der Partikeldurchmesser der interstellaren Materie in der Tat statthat, ist schwer zu entscheiden. Die d^k -Verteilung mit $k \approx -4$ stellt jedenfalls die Durchmesser-Verteilung der Sternschnuppen gut dar und liefert das richtige Gesetz und einen plausiblen Betrag der Absorption. Diese Verteilung entspricht wenigstens schematisch den realen Verhältnissen, wobei die wirkliche Verteilung einen viel komplizierteren Charakter (mit Extremen) haben kann.

Tartu, Juni 1937.

VI. A Tentative Determination of the Surface Brightness of Dark Nebulae.¹

By V. Riives.

Absorbing clouds appear on the bright belt of the Milky Way as dark markings. But the dark nebulae doubtlessly possess some surface brightness of their own, because their particles must reflect the starlight. In the following it is attempted to derive a probable value of their surface brightness, and from that to estimate the albedo of interstellar matter.

The total surface brightness of the night sky mainly consists of the following components: the direct starlight, the atmospheric light, the zodiacal light, and the starlight reflected by interstellar matter. Knowing the total amount of the light of an area, and that of the light from other sources, it is possible to determine the amount of the last-mentioned component. On certain assumptions results can be obtained without knowing the amount of terrestrial or zodiacal light. Therefore, it is sufficient to know only the following data: 1. The observed value of the surface brightness of the night sky. 2. For each area the stellar distribution according to apparent magnitude reaching down to the faintest stars recorded.

Photographic photometry is of sufficient exactness for the present purpose. A work belonging here is: Wolf-Pannekoek, "Photographische Photometrie der nördlichen Milchstrasse", Amsterdam Publ. 3, 1932. The data given there are used in the present investigation. The surface brightness given in their photometric charts includes the light from all stars fainter than about 7^m5. When calculating the part due to starlight this limit must be taken into account.

¹ Seminar in Astrophysics 1936/37, conducted by E. Öpik.

For the Selected Areas data exist giving the stellar distribution down to sufficiently faint stars. The material used here is taken from Groningen Publ. 43, tab. 1, which gives the log of star number per square degree down to apparent magnitude $18^m.5$. Being confined to the Selected Areas it was impossible to pay attention to other known areas with great absorption.

For each Selected Area the stars were divided into groups, by intervals of one magnitude, and the amount of starlight for each group was calculated. The total light of stars fainter than $18^m.5$ was found by extrapolation. The total amount of starlight is set equal to the sum of light from all magnitude groups. The extrapolation may cause a quite considerable error, especially for the areas rich in stars. For this reason it was impossible to find any satisfactory value of the starlight for Selected Areas 64 and 98.

In the Wolf-Pannekoek charts, which are reduced to a common zero point (from plates covering each other), the combined value of atmospheric and zodiacal light appears as a more or less constant correction. This enables us on certain assumptions to determine the quantity of starlight scattered by interstellar matter without knowing the absolute value of the correction.

Subtracting from the mean observed surface brightness, given in the charts, the total light due to the corresponding mean stellar distribution, we obtain a difference which contains the constant correction plus a certain mean value of the surface brightness of the absorbing matter for the given area. Table 1 contains mean values of this difference for different galactic latitudes, derived from the entire material of the Wolf-Pannekoek charts.

Table 1.

b	I'	A'	α
0°	136	92	44
5°	132	83	49
10°	112	69	43
15°	97	50	47
		mean	46

b — galactic latitude

I' — mean surface brightness taken from Amst.

Publ. 3

A' — computed mean starlight per square degree

$\alpha = I' - A'$

Unit of surface brightness = the light of a 10^m star per square degree

In calculating A' , the stellar distribution given in Mount Wilson Contrib. 301 is used, because this and Amst. Publ. 3 refer to the same portion of the sky, namely the northern hemisphere.

Table 2 contains all the material discussed in the present note.

Table 2.

Sel. Area	I	A	H	d	Sel. Area	I	A	H	d
2	107	48	+13	+0.5	49	120	75	-1	+1.0
8	160	83	+31	+1.3	50	130	76	+8	+1.0
9	111	56	+9	+2.2	63	120	112	-38	-0.1
10	81	36	-1	+1.3	65	140	73	+21	+0.3
18	118	84	-12	+0.5	73	100	40	+14	+1.1
19	136	81	+9	+1.7	74	130	69	+15	+1.9
22	115	55	+14	+0.9	75	90	64	-20	+0.9
23	111	55	+10	+1.1	86	105	70	-11	-0.2
24	105	50	+9	+1.9	87	130	73	+11	+1.0
25	100	49	+5	+1.7	88	140	110	-16	+0.1
39	139	127	-34	-0.7	97	120	46	+28	+1.9
40	169	105	+18	+1.1	109	95	44	+5	-0.1
41	162	119	-3	+0.2	110	95	27	+22	+3.4
42	115	74	-5	+0.5	111	130	59	+25	+0.5
48	95	35	+14	+0.9					

I — total surface brightness taken from Amst. Publ. 3

A — computed starlight per square degree

$H = I - A - a \dots$ — residual surface brightness

$d = 18.^m5 - m_N$; m_N — effective limiting magnitude found from starnumber $N_{18.^m5}$ of the area, and from the mean stellar distribution in the corresponding galactic latitude as given in Groningen Publ. 43, tab. 6; thus d is a measure of the excess (-) or defect (+) of starnumber in the given individual area expressed in magnitudes

The relative diminution of light in an absorbing layer of optical depth x equals $1 - e^{-x}$. A part of this quantity is reflected (or diffused) by the absorbing matter. For the purpose of our estimates the amount of reflected light can be assumed to be proportional to the total diminution of light. On this account the surface brightness $K = K_0 (1 - e^{-x})$. In the simplest case the albedo is proportional to the surface brightness, $a = a_0 (1 - e^{-x})$; K_0 and a_0 are surface brightness

and albedo of a layer with infinite optical depth. Further, denoting $r = \frac{a}{a_0} = 1 - e^{-x}$, we have $K = K_0 r$.

On the assumption that the interstellar matter is illuminated more or less uniformly by stars, it is possible to use the preceding formulae. Denoting the total absorption in stellar magnitudes by Δm , the following equation is obtained: $2.512^{-\Delta m} = e^{-x}$. Thus the relative albedo $r = 1 - 2.512^{-\Delta m}$ (1).

Supposing that H given in Table 2 includes besides K only a constant term Δ , we have $H = K_0 r + \Delta$ (2).

Knowing the values of H with the corresponding total absorption Δm [which determines r by (1)], it is possible to derive the correlation (2). For our purposes, it is only important to find K_0 and a_0 .

It is impossible to obtain the amount of total absorption of starlight in interstellar space for each area separately. In Table 2 the values of d denote only the excess of starnumber of the area over the mean starnumber in the given galactic latitude. Thus d contains the effect of interstellar absorption together with local irregularities of stellar distribution. Taking the mean value of d from several areas, the effect of local irregularities in starnumber must be partly compensated. However, the accidental error of H seems to be quite considerable. On this account it is necessary to combine the available data into normal groups, and to find the corresponding mean values for each group separately. The whole material we choose to subdivide into four groups according to the value of d .

Further, the mean d represents only a deviation of the local absorption from the mean absorption. Therefore the total absorption is $\Delta m = d + \mu$, μ being a mean value of total absorption for the given galactic latitude. It is possible to obtain minimum values of the surface brightness and albedo of a dark nebula by taking $\mu = 0$ and $\Delta m = d$.

From the distribution of the extragalactic nebulae, Hubble (Mt. W. Contrib. 485) estimates the total absorption in the direction of the galactic pole to be 0^m25 . In other directions it varies approximately with the cosecant of galactic latitude. On the assumption that this law holds in low galactic latitudes, it is possible to compute the value of μ .

This was found for each group separately by using the mean galactic latitude of each group. In such a manner another set of values of the surface brightness and albedo is obtained.

In Table 3 are given the results for the two cases.

Table 3.

Limits of d	\bar{H}	e	\bar{d}	n	r_1	$ \bar{b} $	μ	r_2
≤ 0.5	- 5.0	± 4.1	+ 0.14	11	0.12	11 ^o .1	1.30	0.73
0.6 - 1.2	+ 7.6	± 2.6	+ 1.00	9	0.60	9 ^o .1	1.51	0.90
1.3 - 2.0	+ 12.3	± 3.0	+ 1.67	7	0.78	5 ^o .7	2.5	0.98
2.1 \leq	+ 15.5	± 4.3	+ 2.8	2	0.92	2 ^o	-	1.0

\bar{H} — mean H

e — probable error of \bar{H} derived from the dispersion of individual H

\bar{d} — mean value of d

n — number of Selected Areas in the group

r_1 — relative albedo $\frac{a}{a_0}$ (minimum) computed on the assumption $\mu = 0$

$|\bar{b}|$ — mean absolute galactic latitude

$\mu = 0.25 \operatorname{cosec} |\bar{b}|$ = assumed mean total absorption

r_2 — relative albedo corresponding to the above value of μ

In fig. 1 the values of H and r are represented graphically. According to formula (2), the correlation obtained should be linear; in the figure, I corresponds to the hypothesis $\mu = 0$ (r_1); II — to $\mu = 0.25 \operatorname{cosec} |\bar{b}|$ (r_2).

As it turns out, in both cases all the four points fall close to a straight line. The agreement is closer than required by the probable errors of the data, thus the good correlation is evidently accidental.

The total amount of starlight according to Seares, Van Rhijn, Joyner, and Richmond, Ap. J. **62**, 373, 1925, equals the light of 577 first magnitude stars or fifty-six 10^m stars per square degree. Assuming the mean surface brightness of the sky due to the starlight in interstellar space to be the same as observed from the earth, it is possible to estimate the albedo.

The correlation I of fig. 1 furnishes a lower limit of surface brightness $K_0 = 25$ and $a_0 = 0.5$, which refers to the albedo of a cloud of infinite optical thickness.

Using Hubble's data for the total absorption of starlight in the Galactic System, i. e., the correlation II of fig. 1, the surface brightness is estimated at $K_0 = 70$ units, and the albedo appears to be unreasonably great, namely, $a_0 > 1$. This second solution is especially uncertain. A deviation from the cosecant law, and a small error in the absorption

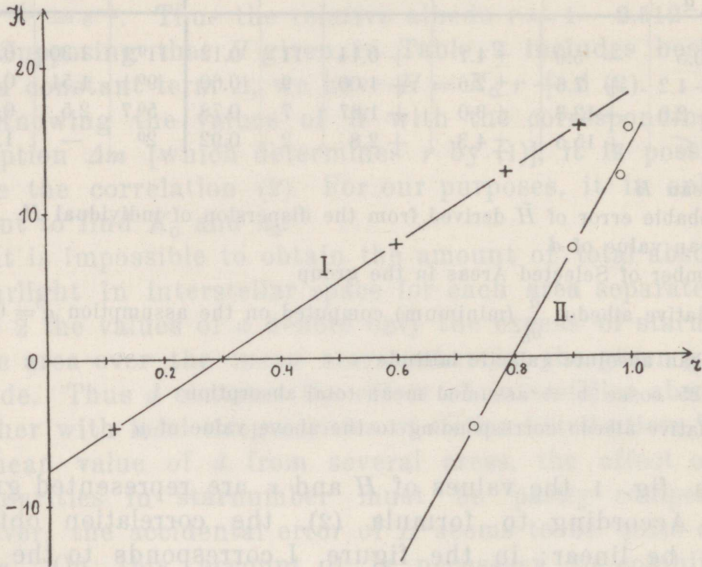


Fig. 1.

coefficient given by Hubble may cause very different results. Taking into account the possible deviation from the cosecant law in low galactic latitudes, the value of K_0 here found may be regarded as a maximum value.

From our results it seems to be certain that the albedo of interstellar matter is comparatively high. It is known that clouds consisting of dielectric particles (water, ice, etc.) have much higher an albedo than mettalic dust. The results obtained seem to indicate that dielectric particles (mineral dust?) are more abundant than absorbing particles (metals) in interstellar space.

Taking into account the provisional nature of the present paper, the results obtained may indicate only the order of

magnitude of the effect which we wanted to determine. The uncertainties in the limited observational data and in the hypotheses used are sufficiently great to cover the tiny effect of the surface brightness of dark nebulae.

After this paper had been finished, the author found in Ap. J. 85, 213, 1937 the same problem treated by C. T. Elvey and F. E. Roach. Remarkably enough, the conclusions reached by these authors coincide entirely with those of the present investigation, though the method and observational data are quite different.

Tartu, June 4, 1937.

VII. The Influence of the Selective Absorption in Space upon a Differential Scale of Stellar Magnitudes.¹

By V. Riives.

In the catalogue of Tartu Obs. Publ. 28₂ the scale of photographic magnitudes is based upon Harvard visual magnitudes of stars earlier than F8. Assumed mean colour indices are there added to the visual magnitudes, and standard photographic magnitudes are obtained in this manner.

In general the faint stars are farther away than the brighter ones. On account of selective absorption the colour indices of faint stars must be larger than the mean assumed value. This may cause a systematic error in the photometric scale of the catalogue.

In the following an upper limit to the correction for the selective absorption is estimated. The coefficient of the selective absorption is certainly overestimated if we assume $+0.{}^m5$ per 1000 parsec. For each star, used for calibrating the photometric scale, the distance was calculated from the known absolute magnitude, or from a mean value of the absolute magnitude of the given spectral type. The distance being known, it is possible to find the correction for selective absorption.

The stars are divided into groups according to their apparent brightness. For each group the mean value of the correction was computed. The zero point of the colour index has no influence upon the scale correction. Therefore the values of the scale correction are given relative to the mean selective absorption.

The results are presented in the following table and in the accompanying figure.

¹ Seminar in Astrophysics 1936/37, conducted by E. Öpik.

m	A	Δi	n
	m	m	
4.0 — 4.5	0.017	-0.059	3
4.5 — 5.0	0.04	-0.036	1
5.0 — 5.5	0.038	-0.038	4
5.5 — 6.0	0.03	-0.046	1
6.0 — 6.5	0.062	-0.014	13
6.5 — 7.0	0.063	-0.013	14
7.0 — 7.5	0.084	+0.008	14
7.5 — 8.0	0.094	+0.018	19
8.0 — 8.5	0.087	+0.011	14
8.5 — 9.0	0.120	+0.044	3
9.0 — 9.5	0.12	+0.044	1
Mean	0.076	0.000

m — magnitude interval of the group
 A — mean computed selective absorption
 Δi — relative scale correction
 n — number of stars in the group

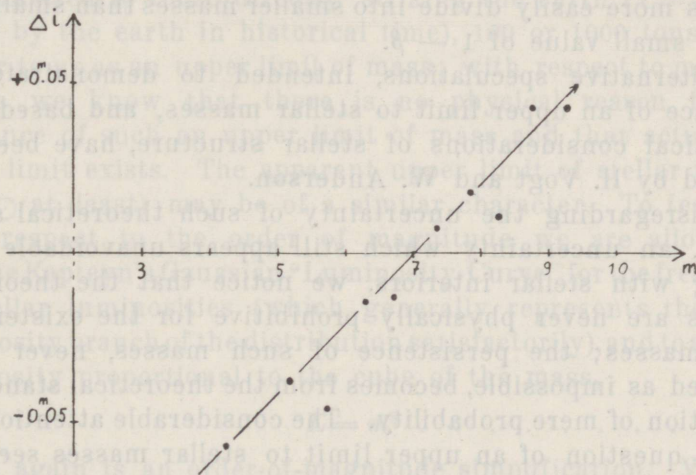


Fig. 2.

Our theoretical scale correction appears to be quite close to a linear function of magnitude. Considering the fact that our assumed value of the coefficient of space absorption amounts to at least the double of the probable value, the actual corrections must be much smaller than those given in the table; they are small enough to be disregarded in the above mentioned catalogue.

Tartu, May 27, 1937.

VIII. On the Upper Limit of Stellar Masses.

By E. Öpik.

A widely adopted opinion, first expressed by Eddington, is that stars of large mass are unlikely to persist for a very long interval of time; because of the large ratio of radiation pressure to gravitation ($1 - \beta$ approaching 1), these stars, under the action of external or internal disturbing factors, may perhaps more easily divide into smaller masses than small stars with a small value of $1 - \beta$.

Alternative speculations, intended to demonstrate the existence of an upper limit to stellar masses, and based upon theoretical considerations of stellar structure, have been put forward by H. Vogt and W. Anderson.

Disregarding the uncertainty of such theoretical speculations, an uncertainty which still appears unavoidable when dealing with stellar interiors, we notice that the theoretical reasons are never physically prohibitive for the existence of large masses; the persistence of such masses, never being regarded as impossible, becomes from the theoretical standpoint a question of mere probability. The considerable attention paid to the question of an upper limit to stellar masses seems to have been stimulated by a general belief, or impression, that observations indicate the existence of such an upper limit. Below we try to demonstrate that the belief is not well founded.

In the first place, the absence of very large stellar masses from our observational records may be a mere statistical phenomenon, referring to the probability of origin, and not to the probability of persistence. A universal law makes large masses less numerous than small masses; the law holds, in broad outline, equally for meteors, planets, and stars; the trivial explanation of the law is that from a limited amount of material there can be made more small bodies than large ones. If V is the total volume (may be proportional to the total number of

objects, or to the volume of space) of a sample, $p(m)$ the probability for a mass to exceed m , the expected observable number of masses greater than m is $Vp(m)$. When $p(m)$ is a rapidly decreasing function (such as a Gaussian at large values of the argument), the "observational", or catalogue limit of m is with a mostly low accidental error practically defined by the equation

$$Vp(m) = 1 \dots \dots \dots (1);$$

further, the limit of m defined in such a manner varies but slowly with V , and an apparent "upper limit" of m may result when the different volumes V in different samples remain of the same order of magnitude.

Thus, if our knowledge of the masses of celestial bodies were limited to those directly striking the earth (V = volume swept by the earth in historical time), 100 or 1000 tons might appear to us as an upper limit of mass; with respect to meteoric bodies we know that there is no physical reason for the existence of such an upper limit of mass and that actually no upper limit exists. The apparent upper limit of stellar masses ($\sim 70\odot$ at least) may be of a similar character. To test this, with respect to the order of magnitude we are allowed to assume Kapteyn's Gaussian "Luminosity-Curve" for the frequency of stellar luminosities (which generally represents the high-luminosity branch of the distribution satisfactorily), and to assume luminosity proportional to the cube of the mass,

$$L = m^3 \dots \dots \dots (2),$$

which again is an order-of-magnitude simplification. We get, using a well known approximation for the Gaussian integral at large values of the argument:

$$Vp(m) = \frac{0.045 V e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \dots \dots \dots (3),$$

where $x = \frac{\log m/m\odot + 0.36}{0.473}$, in agreement with Kapteyn's figures

(Mt. Wilson Contr. 188); V is the volume of space in cubic parsecs, of constant stardensity equal to the stardensity in the neighbourhood of the sun.

Below are computed upper limits to stellar masses, according to formulae (1) and (3).

Table 1.

Statistical Apparent Upper Limits of Stellar Masses for
a Gaussian Distribution

V , cubic parsecs	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
Total stellar population	45	$4.5 \cdot 10^4$	$4.5 \cdot 10^7$	$4.5 \cdot 10^{10}$	$4.5 \cdot 10^{13}$
m/m_{\odot} limit	4.7	11.5	32	74	162

The case $V=10^{12}$ corresponds approximately to the stellar population of the whole galaxy; the statistical upper limit, 70—80 solar masses, corresponds approximately to what is believed to have been observed actually¹. It is interesting to follow the gradual increase of the "limit" of mass as the volume of selection increases; for $V=10^3$ ($\pi > 0''.16$), among the nearest stars a normal giant or an A0 star, of mass 4—5 \odot may be found; for $V=10^6$ ($\pi > 0''.016$), B stars, of mass 10—12 \odot occur; $V=10^9$ corresponds more or less to the actual selection of our observational data with respect to stars of high luminosity and mass in our galaxy; V Puppis, Y Cygni, with masses ranging up to 20 \odot , indicate that the tabular limit, 32 \odot , is not much beside the point. The brightest star in the Large Magellanic Cloud, S Doradus, according to Shapley has a luminosity $\sim 4 \cdot 10^{5\odot}$, which with the conventional cubic relation gives a mass of about 70—80 \odot , which corresponds to $V=10^{12}$ in our table (the true mass of S Doradus is probably greater, as for the Trumpler stars). If there is anything peculiar in the frequency of the more massive stars, it appears that they are observed more readily and in greater numbers than would follow from our assumed statistical law (Trumpler's O stars, loc. cit.); thus, if there is any deviation, it is in the sense that the existence of massive stars may be more secure than the existence of the smaller ones. In any case, the actual data do not imply a physical upper limit to stellar masses; the frequency of large masses seems to be governed practically by the same law as the frequency of small masses (with an excess of large masses); the law is apparently a statistical one connected with

¹ Larger masses as found by Trumpler for O stars, 100—300 \odot (P. A. S. P. 47, 249, 1935), do not interfere yet with our formal way of reasoning, in which luminosity is the cube of mass, and the frequency of luminosities is actually considered. The luminosity of Trumpler's stars is only $\sim 2 \cdot 10^4\odot$, corresponding to a "luminosity-mass" of $\sim 30\odot$ for our formulae.

the mode of origin of the stars, not with their physical stability. From Table 1, $V = 10^{15}$ corresponding to a population of about 1000 galaxies, we infer that the maximum stellar "cube-law" mass we may some day discover in a spiral nebula may be of the order of $160\odot$, corresponding approximately to absolute magnitude — 12. These data, of course, are extrapolations.

From the above it appears that our present state of observational data does not allow us to decide whether there exists an actual upper limit to stellar masses, or whether the observed limit is only the result of a "statistical perspective". But even if such a real limit could ever be observationally established, the interpretation is not necessarily bound to considerations of physical instability. On the contrary, below we try to show that a limit of this order of magnitude, produced by energetic causes, is very likely to exist, even when stellar masses of different size are mechanically equally stable.

According to the modern physical theory of stellar interiors, as first outlined by Eddington, there exists a certain mass-luminosity relation for gaseous stars, such that the luminosity is more or less independent of the degree of compression of the stellar material; for supergiant stars any kind of atomic transmutations (Atkinson) as a source of stellar energy seems to be inadequate even with the short time scale; these sources are soon exhausted and the star (as a whole, or its nucleus only) starts to contract; unless a new source of energy comes into action (annihilation of matter), the star must live at the expense of its gravitational energy — which, after all, represents an ideal mechanism for converting mass into radiant energy (cf. W. Anderson, T. P. 29₁, 1936); a star of sufficiently great mass, $> 1.6\odot$ for matter not containing hydrogen (cf. Chandrasekhar, Zts. f. Astroph. 5, 321, 1932), cannot become a "degenerate" white dwarf; it is thus compelled to radiate with non-decreasing intensity (with the exhaustion of hydrogen, even an increase of the luminosity may follow). Thus, in one or another way, the supergiant rapidly burns down its mass. With (2) as the conventional law of luminosity ($\odot = 1$), the equation of variable mass (year as unit of time) becomes:

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{2}{3} \cdot 10^{-13} m^2, \text{ whence}$$

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m_0^2} + \frac{4}{3} \cdot 10^{-13} t \dots \dots \dots (4);$$

here m_0 is the initial mass, m the mass after the time interval t . Assuming $m_0 = \infty$, (4) yields a maximum value for the masses of stars of an age t . Now, it is probable, although not certain, that most stars are more or less of the same age, $t = 3 \cdot 10^9$ y (the "short" time scale); substituting this into (4), we get as an upper limit of stellar masses observable at present

$$m = 50 \odot.$$

Such is the present mass of a star which started $3 \cdot 10^9$ years ago with an infinite mass.

This, again, is remarkably close to the "observed", as well as to the "statistically predicted" upper limit of the "cube-law" mass. Without doubt, there may exist massive stars of a younger age, and consequently of a greater present mass. For $t = 7,5 \cdot 10^8$ y, $m = 100 \odot$ is the maximum. Further, the luminosity for large masses varies less rapidly than with m^3 , so that a longer life, or a larger upper limit of the true mass results. On the other hand, $m_0 = \infty$ cannot represent a real case; for a finite initial mass, the final mass is obviously smaller.

It is not advisable to lead our discussion further, because our considerations are based on simplifications and schematizations. We feel contented to point out, however, that by using more detailed laws instead of those expressed by formulae (2) and (3) (cf. Eddington, *Internal Constitution of Stars*, Cambridge 1926, p. 308 ff.), we do not arrive at essential changes in our conclusions.

Summary. There is no observational evidence for the existence of a definite upper limit to stellar masses; the observed frequency of large masses corresponds more or less to what would occur in a Gaussian distribution of mass logarithms such as suggested by Kapteyn for stellar luminosities; on the other hand, a true upper limit to stellar masses may exist as the result of the radiation of mass during the life time of the stars, if the life time amounts to a large fraction of the supposed age of the universe ($3 \cdot 10^9$ y on the short time scale).

Tartu, Sept. 6, 1937.

IX. The Density of the White Dwarf A. C. + 70° 8247.

By E. Öpik.

For this star Kuiper finds a density of the order of $> 10^7$ gr/cm³ (Publ. Astr. Soc. Pacific 47, 307, 1935); a revision of his data indicates that his estimate cannot be accepted, and that the star must have a density of $\sim 10^5$ gr/cm³, thus nothing exceptional as compared with the two well determined cases (Sirius B, $3 \cdot 10^4$ gr/cm³; σ^2 Eridani B, $5 \cdot 10^4$ gr/cm³; cf. Gabovitch and Öpik, T. P. 28₃, 1935). The absence of the hydrogen Balmer lines in the spectrum of this star is explained as the result of the exhaustion of hydrogen, the main source of subatomic energy.

Kuiper's estimate is based on a comparison of the colour of A. C. + 70° 8247 with 10 Lacertae (H. R. 8622, mag. 4,91; H. D. 214680, sp. Oe 5); he finds the colours of the two stars essentially equal, and concludes that the effective temperature of the white dwarf is equal to 28000°, the "true" effective temperature of the O star; he thinks that space reddening does not affect the colour of the comparison star, 10 Lacertae. The latter assumption is quite arbitrary. The distance of 10 Lacertae (absol. mag. ~ -5 to -6) exceeds 1000 parsecs and space reddening at such a distance cannot be entirely absent. For the white dwarf, at ~ 15 parsecs distance, the space reddening is negligible. Thus the colour of the white dwarf must be redder than the "true" colour of 10 Lacertae by the whole amount of space reddening over 1000 — 1600 parsecs.

In the general catalogue of stellar colours by the writer (T. P. 27₁, 1929), the colour of 10 Lacertae is $C = -0.41 \pm 0.03$; the system of these colours is connected with the effective temperature by the relation

$$\frac{C_2}{T} = 1.47 C + 1.82 \text{ (cf. Öpik, Ap. J. 81, 177, 1935),}$$

which gives $T = 11700^{\circ} \pm 300^{\circ}$. If the temperature is too low for the O star on account of space reddening, it must be accurate for A. C. + 70° 8247 if the colours are equal. Our empirical formula for the colour temperature cannot be much in error for such a low temperature as 12000° ; Wien's formula which underlies theoretically (not empirically) the linear relation leads to an error in the colour temperature of only -100° , as compared with Planck's law, and the actual error must be smaller on account of the empirical derivation of the relation. As no spectral lines appear in A. C. + 70° 8247, there can be no question of the spectral energy distribution to be distorted by absorption lines.

On the other hand, there is a direct indication of a not inconsiderable space reddening of 10 Lacertae. In the above mentioned catalogue of stellar colours we find fifteen northern stars which are at least as blue, or bluer than 10 Lacertae:

Harvard Revised Photometry Numbers

Star No.	153	6787	7298	7426	7739	7131	8603
<i>m</i>	3.7	4.3	4.5	4.8	4.8	5.5	5.1
H. D. Sp.	B3	B3	B3	B3	B3	B3	B3 + B5
<i>C</i>	-0.43	-0.42	-0.62	-0.48	-0.45	-0.45	-0.45
<i>p. e.</i>	± 0.03	± 0.04	± 0.04	± 0.04	± 0.03	± 0.04	± 0.04

Göttingen Aktinometrie Numbers

Star No.	584	720	791	1016	1068	2766	2772	2950
<i>m</i>	7.3	6.4	7.2	7.1	6.8	6.7	7.2	8.0
H. D. Sp.	B3	B3	B8	B2	B5	AO	B3	B5
<i>C</i>	-0.53	-0.41	-0.46	-0.44	-0.41	-0.45	-0.49	-0.42
<i>p. e.</i>	± 0.04	± 0.04	± 0.04	± 0.04	± 0.04	± 0.04	± 0.04	± 0.04

The prevalence of spectrum B3 in this list is remarkable. Thus, a number of stars of spectra later than 10 Lacertae show the same colour (and colour temperature) in spite of the well known effect of the wings of hydrogen Balmer lines which tend to make the B and A spectra redder¹; the ionization temperatures of these stars are about 15000° ; a comparison of the colour of A. C. + 70° 8247 with one of these B3 stars would have led, according to Kuiper's way of reasoning, to a tempe-

¹ Violet — blue colour indices of AO stars are almost equal to those of KO stars, on account of Balmer absorption, cf. T. P. 26₃, 1925.

perature of $15\,000^{\circ}$ for the white dwarf; but even this must be considered as too high because some space reddening is doubtlessly present already in the B3 stars.

There is no reason to assume that the colour temperature of $11\,700^{\circ}$ for A. C. + 70° 8247 is systematically in error, as it is from space reddening for the distant B and O stars, and for the B and A stars on account of Balmer absorption. As the estimated density varies with the sixth power of the effective temperature, Kuiper's density must be decreased 190 times; his estimate of mass as a function of radius (Chandrasekhar's relation) must also require a reduction factor of ~ 2.5 , and the corrected density of A. C. + 70° 8247 becomes

$$\frac{3,6 \cdot 10^8}{190 \cdot 2,5} = 70\,000 \text{ gr/cm}^3,$$

or by only 40 per cent greater than for o^2 Eridani B.

The absence of lines (cf. Kuiper, loc. cit.), chiefly of the Balmer lines of hydrogen in the spectrum of A. C. + 70° 8247 (which should be the most prominent lines at $11\,700^{\circ}$, corresponding to a normal B9 — AO star) may be considered as a proof of Atkinson's theory of atomic synthesis; a star cannot become a white dwarf before all its internal store of hydrogen is exhausted. For Sirius B and o^2 Eridani B the mixing is apparently incomplete, so that some hydrogen is preserved at the surface; in A. C. + 70° 8247 the mixing is probably complete, and hydrogen absent from the atmosphere, as it must be absent from its interior.

Tartu, October 10, 1937.

Est.

A-12154

19742