Theorie

der sechsstelligen Characteristiken.

Eine zur Erlangung des Grades
eines
Magisters der Mathematik
der physiko-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat
vorgelegte
Abhandlung

von
Peter Kadik,
Cand. math.

Ordentliche Opponenten:
Prof. Dr. **Helmling.** — Prof. Dr. **Weihrauch** — Mag. **Molien.**

Dorpat.
Schnakenburg's Buchdruckerei.
1885.

Gedruckt mit Genehmigung der physiko-mathematischen Facultät der Kaiserlichen Universität Dorpat.

Dorpat, den 23. November 1885.

Nr. 184. Dr. **Arthur v. Oettingen,**

z. Z. Decan der physiko-mathematischen Facultät.

Da die Characteristikentheorie einen sehr wichtigen Theil von der Theorie der ϑ-Functionen bildet, so schien es mir geboten, dieselbe von allen ihren Anwendungen abzutrennen und als eine selbständige Theorie zu behandeln. Was die Methode der Behandlung anbetrifft, so ist dieselbe streng zahlentheoretisch. Um das zu erlangen, mussten die Begriffe des Productes und der Gruppe eingeführt werden. Daher habe ich kein Bedenken getragen von der bis jetzt in der Characteristikentheorie üblichen Terminologie abzuweichen. Die Einführung des Begriffes der Gruppe, hoffe ich, wird die folgende Arbeit vollständig rechtfertigen, indem dadurch alle Zusammenhänge der behandelten Systeme untereinander und ihre Symmetrie scharf hervortreten.

Obgleich die von mir angewandte Methode sich ohne weitere Schwierigkeiten sofort auf n-stellige Characteristiken anwenden liesse, so habe ich doch nur sechsstellige Characteristiken behandelt, um einestheils ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu baben und anderntheils die Mittel für die Behandlung der ϑ-Functionen dreier Variabeln und der damit zusammenhängenden hyperelliptischen Functionen zweiter Ordnung zu liefern.

Da die Göpelschen Systeme und die Fundamentalsysteme schon von anderer Seite bearbeitet sind, so habe ich mich begnügt, nur eine leichte aus ihren Definitionen unmittelbar folgende Methode, um dieselben zu berechnen, anzugeben und dieselben in übersichtliche Tabellen zu bringen; in Bezug auf alle übrigen Eigenschaften der genannten Systeme habe ich auf die betreffenden Abhandlungen hingewiesen.

Der Gedankengang in dieser Arbeit, glaube ich, wird dem Leser ohne weitere Erläuterung klar sein; daher will ich darüber kein Wort verlieren. Nur über den letzten § will ich bemerken, dass die daselbst angegebene aus der Gruppentheorie folgende Methode, um zu den ϑ-Functionen mit Characteristiken zu gelangen, auch sonst in der Theorie dieser Functionen gute Dienste leistet. Das in demselben § auf rein zahlentheoretischem Gebiete abgeleitete Gleichungssystem ist identisch mit demjenigen, welches man aus der Riemannschen Thetaformel erhält und aus welchem man mit Hilfe der Characteristikentheorie alle sogenannten Additionstheoreme der ϑ-Functionen erhalten kann.

1.

Um die spätere Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir hier einige bekannte Definitionen voraus.

Ein System von Grössen, welches sich durch Multiplication und Division reproducirt d. h. in welchem die Producte und Quotienten je zweier Grössen wiederum in demselben System enthalten sind, heist eine Gruppe.

Zwei Grössen heissen in Bezug auf eine Gruppe einander gleich, wenn ihr Quotient eine Grösse der Gruppe ist.

Das Element einer Gruppe, welches gleich der Einheit E gesetzt ist, heisst das Hauptelement und bildet für sich eine Gruppe $\mathfrak{E}$. welche die Hauptgruppe heisst.

Mehrere Elemente einer Gruppe bilden eine Basis derselben, wenn sich aus ihnen durch Potenziren und Multipliciren alle Elemente der Gruppe zusammensetzen lassen.

Die *Ordnung* einer Gruppe ist die Anzahl der verschiedenen Elemente, aus denen die Gruppe besteht, und der *Rang* einer Gruppe ist die *kleinste* Anzahl von Elementen, welche eine *Basis* derselben bilden können.

Eine Gruppe heisst *primär*, wenn ihre Ordnung eine Potenz einer Primzahl ist, und *elementar*, wenn ihr Rang gleich 1 ist.

Multiplicirt man jedes Element einer Gruppe $\mathfrak{A}$ mit jedem Elemente einer anderen Gruppe $\mathfrak{B}$, so bilden die Producte, soweit sie verschieden sind, wieder eine Gruppe, welche das *Product* der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heisst.

Wenn alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{B}$ auch der Gruppe $\mathfrak{A}$ angehören, so heisst $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ *theilbar* oder $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ *enthalten* oder $\mathfrak{B}$ ein *Divisor* von $\mathfrak{A}$.

Alle Elemente, welche zwei oder mehrere Gruppen gemeinsam haben, bilden eine Gruppe, welche der *grösste gemeinsame Divisor* jener Gruppen heisst.

Zwei Gruppen, deren grösster gemeinsame Divisor die Hauptgruppe ist, heissen *theilerfremd*.

Mehrere Gruppen sind theilerfremd, wenn das Product aus einem Element der ersten, einem der zweiten, einem der dritten Gruppe u. s. w. nicht gleich dem Hauptelemente sein kann, ohne dass jeder Factor für sich demselben gleich ist.

Mehrere Elemente heissen *unabhängig*, wenn die elementaren Gruppen, deren Basen sie bilden, theilerfremd sind.

Eine Gruppe $\mathfrak{H}$ heisst in die Factoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ *zerlegbar*, wenn $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}. \mathfrak{B}. \mathfrak{C} \ldots.$ ist und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ theilerfremd sind.

Eine Gruppe heisst *unzerlegbar* oder *irreductibel*, wenn sie nicht gleich dem Producte zweier Factoren sein kann, ohne dass einer derselben gleich der ganzen Gruppe ist. Damit eine Gruppe unzerlegbar sei, ist nothwendig und hinreichend, dass sie primär und elementar ist*).

Ein System von Grössen, welches sich durch Addition und Subtraction reproducirt d. h. in welchem die Summen und Differenzen je zweier Grössen wiederum in demselben System enthalten sind, heisst ein *Modul*.

Ueber die Theorie der Moduln sehe man *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie. Dritte Aufl. § 165.

Zwei Grössenreihen *componiren* heisst die entsprechenden Grössen der Reihen mit einander multipliciren und die erhaltenen Producte addiren. Die Bezeichnung ist:

$$|a_1\, a_2 \ldots a_n,\ b_1\, b_2 \ldots b_n| = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 \ldots + a_n\, b_n.$$

Eine sechsstellige *Characteristik* ist die Zusammenstellung von irgend welchen sechs reellen, rationalen oder irrationalen, Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge.

---

*) *Frobenius und Stickelberger*, Gruppen von vertauschbaren Elementen. Crelle Journ. Bd. 86.

Jede in einer Characteristik enthaltene Zahl heisst ein Glied derselben und zwar je nach der Stelle, welche sie in der Characteristik von links nach rechts gerechnet einnimmt, das erste, zweite, u. s. w. Glied der Characteristik.

Die Glieder zweier Characteristiken, welche in denselben die gleichen Stellen einnehmen, heissen einander entsprechende Glieder der beiden Characteristiken.

Eine Characteristik heisst zum Modul [n] gehörig, wenn alle ihre Glieder in dem Modul [n] vorkommen.

Setzt man die Characteristik $000000 = 1$, so ist das Product oder der Quotient zweier Characteristiken eine dritte Characteristik, deren Glieder die Summen oder die Differenzen der entsprechenden Glieder der beiden Characteristiken sind.

Die Composition zweier Characteristiken ist die Composition ihrer Glieder.

2.

Bevor wir die eben gegebenen Difinitionen auf die Theorie der Characteristiken anwenden, wollen wir noch etwas über die Bezeichnung derselben vorausschicken. Bei den Thetafunctionen pflegt man die Glieder einer Characteristik in zwei Reihen zu schreiben und sie mit $\binom{g}{h} = \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}$ zu bezeichnen, aber wir wollen die Glieder einer Characteristik in eine einzige Reihe schreiben und festsetzen, dass aus einer einreihigen Characteristik eine zweireihige entsteht, indem man die erstere in der Mitte einknickt und die zweite Hälfte derselben nach unten zu umbiegt, sodass $g_1\, g_2\, g_3\, h_3\, h_2\, h_1 = \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}$ ist. Nach der Analogie der Bezeichnung eines Punctes in einer Mannigfaltigkeit, wollen wir auch für die Characteristiken die Bezeichnung:

$$(a) = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$$

einführen. Doch wo kein Missverständniss zu befürchten ist, bezeichnen wir eine Characteristik mit einem einfachen griechischen kleinen Buchstaben.

Jetzt wollen wir die Characteristiken classificiren. Zunächst zerfallen sie in zwei grosse Classen, je nachdem ihre Glieder irrational oder rational sind. Im Folgenden betrachten wir nur solche Characteristiken, deren Glieder rational sind. Man kann nun die Gesammtheit dieser Characteristiken als eine Gruppe von Characteristiken ansehen, welche dem rationalen Zahlenkörper zugehört, weil alle Glieder derselben in dem rationalen Zahlenkörper vorkommen. Doch diese Gruppe ist, wie man sich leicht davon überzeugt, von unendlicher Ordnung und unendlichem Range. Wir wollen daher versuchen diese Gruppe in einfachere Gruppen zu zerlegen.

Zunächst ist klar, dass alle Characteristiken, deren Glieder rationale Zahlen sind, in zwei Theile zerfallen: erstens in Characteristiken, deren Glieder ganze Zahlen, und zweitens in Characteristiken, deren Glieder gebrochene Zahlen sind. Der erste Theil dieser Characteristiken bildet für sich eine Gruppe. Die Characteristiken des zweiten Theiles aber lassen sich systematisiren nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Multiplum der Nenner derjenigen Brüche, welche in den Characteristiken als Glieder vorkommen, indem wir zwei Characteristiken zu demselben Systeme rechnen, wenn ihre eben erwähnten kleinsten gemeinschaftlichen Multipla einander gleich sind. Eine jede Characteristik wird auf diese Weise zu einem und nur zu einem Systeme gehören; auch die Characteristiken, deren Glieder ganze Zahlen sind, kann man als zu einem Systeme mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Multiplum 1 gehörig betrachten. Wir bezeichnen die eben gebildeten Systeme der Reihe nach mit: S_1, S_2, ... S_n, ...

Diese Systeme, mit Ausnahme von S_1, bilden für sich keine Gruppen, können aber leicht zu Gruppen ergänzt werden, indem man alle in einem Systeme enthaltenen Characteristiken als die Basis einer Gruppe ansieht d. h. sie alle mit sich selbst und mit allen übrigen in demselben Systeme enthaltenen Characteristiken multiplicirt und dividirt. Die aus den Systemen S_1, S_2 . . . . S_n . . . . entstandenen Gruppen bezeichnen wir mit: $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... $\mathfrak{A}_n$, ...

Die Gruppen $\mathfrak{A}$ haben zwar noch immer eine unendliche Ordnung, aber ihr Rang ist endlich; denn man kann z. B. für die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ als Basis die sechs folgenden Characteristiken annehmen: $\frac{1}{n}00000$, $0\frac{1}{n}0000$, $00\frac{1}{n}000$, $000\frac{1}{n}00$, $0000\frac{1}{n}0$, $00000\frac{1}{n}$.

Das Product aus allen den unendlich vielen Gruppen $\mathfrak{A}$ ist zwar gleich der Gruppe, welche dem rationalen Zahlenkörper zugehört und welche wir kurz mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen, aber die Gruppen $\mathfrak{A}$ sind nicht theilerfremd; denn ist der grösste gemeinschaftliche Divisor der beiden Zahlen m und n gleich d, so ist auch der grösste gemeinschaftliche Divisor der beiden Gruppen $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{A}_n$ gleich $\mathfrak{A}_d$. Die Gruppen $\mathfrak{A}$ verhalten sich also in Bezug auf ihre Theilbarkeit ganz so wie ihre Indices. Berücksichtigt man die Definitionen für die Theilbarkeit der Moduln von Herrn Dedekind, so kann man auch sagen: Die Characteristikengruppen $\mathfrak{A}$ verhalten sich in Bezug auf ihre Theilbarkeit gerade umgekehrt wie die zu ihnen gehörigen Moduln.

Nach dem Obigen müssten wir nur solche Gruppen $\mathfrak{A}$ betrachten, deren Indices Primzahlen oder Potenzen von solchen sind, aber auch diese Gruppen haben alle die Gruppe $\mathfrak{A}_1$ gemeinschaftlich. Wir nehmen daher die Gruppe $\mathfrak{A}_1$ als Hauptgruppe an. Dann zerfallen die unendlich vielen in einer Gruppe $\mathfrak{A}_n$ enthaltenen Characteristiken in Geschlechter, wenn man alle Characteristiken, welche in Bezug auf $\mathfrak{A}_1$ gleich sind, zu einem Geschlechte rechnet. Jetzt wollen wir zeigen, dass die Anzahl der Geschlechter in einer Gruppe $\mathfrak{A}_n$ endlich ist. Aus der Definition der Gleichheit zweier Elemente in Bezug auf eine Gruppe folgt für unseren speciellen Fall unmittelbar: zwei Characteristiken sind in Bezug auf die Gruppe $\mathfrak{A}_1$ immer und nur dann einander gleich, wenn die Differenzen ihrer entsprechenden Glieder ganze Zahlen sind. Hieraus folgt wieder, dass es in einem Geschlechte immer und nur eine Characteristik giebt, deren Glieder aus Nullen und positiven echten Brüchen bestehen. Eine solche Characteristik nennen wir eine Normalcharacteristik und nehmen dieselbe als Repräsentanten ihres ganzen Geschlechtes an.

Es sind also in einer Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ebensoviele Geschlechter enthalten als es in derselben Normalcharacteristiken giebt. In einem Modul $\left[\frac{1}{n}\right]$ sind aber nur $n-1$ positive echte Brüche enthalten. In einer Gruppe $\mathfrak{A}_n$ sind also soviele Normalcharacteristiken enthalten als es Variationen mit Wiederholung zur sechsten Classe aus n Elementen, nämlich 0 und den $n-1$ positiven echten Brüchen, giebt. Aus allem Obigen folgt, dass es in der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ n^6 Normalcharacteristiken und ebensoviele Geschlechter giebt. Betrachtet man nun nicht die einzelnen Characteristiken, sondern die Geschlechter derselben als Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}_n$, so ist diese von der Ordnung n^6.

Lassen wir n alle Primzahlen durchlaufen, so erhalten wir lauter primitive Gruppen $\mathfrak{A}_n$, welche alle gegen einander theilerfremd sind. Multipliciren wir aber diese Gruppen alle mit einander, so erhalten wir eine Gruppe $\mathfrak{R}_1 = \prod_p \mathfrak{A}_p$, wo p alle Primzahlen durchläuft. Doch die Gruppe $\mathfrak{R}_1$ ist nicht identisch mit der Gruppe R_1 sondern nur ein Divisor derselben; denn die Gruppe $\mathfrak{R}_1$ enthält keine Characteristik, in welcher Brüche mit dem Nenner von der Form $p^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots$ vorkommen, wenn irgend eins der α von 0 und 1 verschieden ist.

Bildet man weiter die Reihe von Gruppen:

$$\mathfrak{R}_1 = \prod_p \mathfrak{A}_p$$
$$\mathfrak{R}_2 = \prod_p \mathfrak{A}_{p^2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mathfrak{R}_m = \prod_p \mathfrak{A}_{p^m},$$

so überzeugt man sich leicht, dass jeder dieser Producte alle vorhergehenden Producte in sich als Divisoren enthält und in jedem der Producte z. B. R_m die Gruppen $\mathfrak{A}_{p^m}$ theilerfremd sind. Daher können wir die Gruppe R als Grenzwerth von R_m für $m = \infty$ auffassen und setzen:

$$\mathfrak{R} = \lim_{m=\infty} \mathfrak{R}_m = \lim_{m=\infty} \prod_p \mathfrak{A}_{p^m}.$$

3.

Nachdem wir einen allgemeinen Ueberblick über alle zu dem rationalen Zahlenkörper gehörigen Characteristiken gewonnen haben, wollen wir uns von jetzt ab nur mit einer zu einem bestimmten Modul $\left[\frac{1}{p}\right]$, wo p eine Primzahl bedeutet, gehörigen Characteristikengruppe eingehend beschäftigen. Wir betrachten wie im vorigen § als Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ die in derselben enthaltenen Geschlechter und nehmen als Repräsentanten die in denselben enthaltenen Normalcharacteristiken an. Daher wollen wir alle Characteristiken, welche als Resultate irgend einer Operation z. B. der Multiplication in einer anderen als der Normalform auftreten, auf dieselbe reducirt denken.

Wir haben schon gefunden, dass die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ gleich p^6 ist und dass der Rang derselben nicht grösser als 6 sein kann; jetzt wollen wir noch beweissen, dass der Rang von $\mathfrak{A}_p$ auch nicht kleiner als 6 sein kann und folglich gleich 6 ist. Nehmen wir an, der Rang der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ sei kleiner als 6, so müsste er $r < 6$ Characteristiken: $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r$ von der Beschaffenheit geben, dass $X = \alpha_1^{x_1}\, \alpha_2^{x_2} \cdots \alpha_r^{x_r}$ alle Characteristiken der Gruppe darstellt, wenn $x_1 \ldots x_r$ alle Werthe von 0 bis $p-1$ durchlaufen; dadurch würde man aber höchstens p^r Characteristiken erhalten. Also würde die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ höchstens $p^r < p^6$ sein, was dem widerspricht, dass die Ordnung von $\mathfrak{A}_p$ gleich p^6 ist. Also ist der Rang der Gruppe $\mathfrak{A}_p = 6$.

Bei dem obigen Beweise haben wir vorausgesetzt, dass man höchstens p von einander verschiedene Characteristiken erhält, wenn man eine beliebige Characteristik α der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ potenzirt. Dies wollen wir näher begründen. Die n^{te} Potenz einer Characteristik erhält man nun, wenn man alle Glieder derselben mit n multiplicirt; also ist die p^{te} Potenz einer zum Modul $\left[\frac{1}{p}\right]$ gehörigen Characteristik gleich E. Bildet man jetzt alle Potenzen einer beliebigen Characteristik α der Gruppe A_p, also die Reihe

$$E,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ \alpha^n,\ \ldots,$$

so können dieselben nicht alle von einander verschieden sein, weil es nur eine endliche Anzahl von einander verschiedener Characteristiken giebt; daher muss nothwendig der Fall vorkommen dass

$$\alpha^n = \alpha^{n+m} = \alpha^n . \alpha^m \text{ und also } \alpha^m = E \text{ ist.}$$

Durch ganz dieselben Betrachtungen wie in der Zahlentheorie findet man, dass wenn m die kleinste Zahl ist, für welche $\alpha^m = E$ ist, alle Potenzen von α^1 bis α^{m-1} von einander verschieden sind und dass jede Zahl s, für welche $\alpha^s = E$, ein Multiplum von m sein muss. Oben haben wir aber gefunden, dass $\alpha^p = E$ ist; also muss p ein Multiplum von m und da p eine Primzahl ist, $m = p$ sein. Also erhält man durch Potenziren von α nur p von einander verschiedene Characteristiken.

Alles oben Gesagte fassen wir in folgenden Satz zusammen:

„Nennt man die Ordnung der elementaren Gruppe, welche aus den Potenzen einer Characteristik α besteht, die Ordnung der Characteristik α selbst; so ist jede zu dem Modul $\left[\frac{1}{p}\right]$, wo p eine Primzahl bedeutet, gehörige Characteristik von der p^{ten} Ordnung oder genügt der Gleichung $X^p = E$. Die Gruppe aller zum Modul $\left[\frac{1}{p}\right]$ gehörigen Characteristiken ist eine primäre Gruppe von der Ordnung p^6 und vom Range 6".

Wir wollen jetzt die Gruppe $\mathfrak{A}_p$ in irreductibele Factoren zerlegen. Nimmt man irgend welche 6 unabhängige Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_p$: $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4\ \varphi_5\ \varphi_6$ und bildet die zu ihnen gehörigen elementaren Gruppen: $\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_6$, so sind diese theilerfremd und es ist auch:

$$\mathfrak{A}_p = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_3 \cdot \mathfrak{F}_4 \cdot \mathfrak{F}_5 \cdot \mathfrak{F}_6.$$

Die Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ in irreductibele Factoren ist also nicht, wie in der Zahlentheorie die Zerlegung einer Zahl in Primfactoren, eine vollkommen bestimmte, sondern sie ist auf soviele verschiedene Weisen möglich als es in der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ Systeme von je 6 unabhängigen Characteristiken giebt. Eine Methode, alle solche Systeme von sechs und auch von weniger als 6 unabhängigen Characteristiken zu finden, werden wir weiterhin für den Fall $p = 2$ angeben; hier begnügen wir uns bloss mit der Bemerkung, dass die Anzahl obiger Systeme offenbar endlich ist.

Trotz der eben erwähnten Unbestimmtheit der Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ in irreductibele Factoren, ergiebt sich doch aus dieser Zerlegung eine sehr übersichtliche Anordnung der Characteristiken in der Gruppe, welche für alles Folgende von fundamentaler Bedeutung sein wird. Ordnet man die Characteristiken in den Gruppen $\mathfrak{F}$ nach Potenzen der ihnen als Basen zu Grunde liegenden Characteristiken φ, so erhält man alle Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_p$, jede nur einmal, wenn man die p Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{F}_1$:

$$1, \varphi_1, \varphi_1^2, \ldots \varphi_1^{p-1}$$

der Reihe nach hinschreibt, diese mit den Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{F}_2$, welche von 1 verschieden sind, also mit $\varphi_2, \varphi_2^2, \ldots \varphi_2^{p-1}$ der Reihe nach multiplicirt; dann alle diese p^2 Characteristiken weiter mit den Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{F}_3$: $\varphi_3, \varphi_3^2, \ldots \varphi_3^{p-1}$ multiplicirt u. s. w. Wenn die Characteristiken: $\varphi_1, \ldots \varphi_6$ bestimmt sind, so kommt in der obigen Anordnung der Characteristiken einer jeden derselben eine ganz bestimmte Stelle zu; man kann daher alle Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ durch ihre Stellenzahlen in der eben angegebenen Anordnung bezeichnen.

Lässt man den überall in den Gliedern der Normalcharacteristiken auftretenden gleichen Nenner p weg und schreibt nur die Zähler der Brüche neben einander, so erscheinen die Normalcharacteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ als die Darstellungen aller Zahlen von 0 bis p^6-1 in dem Zahlensystem mit der Grundzahl p.

Man kann also auch die Characteristiken nach der Grösse der durch dieselben im Zahlensystem mit der Grundzahl p dargestellten Zahlen ordnen und sie in dieser Anordnung mit den dekadischen Zahlen von 1 bis p^6 bezeichnen. Diese Bezeichnung hat den Vortheil, dass zwischen der Characteristik nnd ihrer Bezeichnung folgender einfache Zusammenhang besteht:

„Ist n eine dekadische Ziffer und ν die durch dieselbe bezeichnete Characteristik in der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ so erhält man ν, indem man die Zahl $n-1$ im Zahlensystem mit der Grundzahl p hinschreibt und derselben soviele Nullen vorsetzt als nöthig sind, um die 6 Stellen der Characteristik auszufüllen, und umgekehrt n aus ν, indem man die Zahl $\nu + 1$ als eine dekadische schreibt."

Die eben auseinandergesetzte Anordnung der Characteristiken ist aber nichts anderes als ein specieller Fall der früheren allgemeinen Anordnung derselben und man erhält denselben, wenn man als Basischaracteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ folgende sechs wählt:

$$\varphi_1 = 000001 \; \varphi_2 = 000010 \; \varphi_3 = 000100$$
$$\varphi_4 = 001000 \; \varphi_5 = 010000 \; \varphi_6 = 100000.$$

Denkt man sich aber die Characteristiken in zwei Reihen geschrieben, so steht der obigen Anordnung derselben noch eine zweite daraus abgeleitete zur Seite. Man ordne nämlich nach den obigen Prinzipien alle ersten Reihen der Characteristiken für sich und bezeichne sie mit den Zahlen von 1 bis p^3 und ebenso verfahre man mit den zweiten Reihen, dann kann man die ganzen Characteristiken in Bruchform schreiben und also jeder Characteristik einen Bruch zuordnen. Dieses Verfahren ist nur ein specieller Fall des allgemeinen Verfahrens, nach welchem man einer n-stelligen Characteristik ν Zahlen zuordnen kann, indem man die n Glieder der Characteristik in ν Abtheilungen bringt, jede Abtheilung für sich nach den obigen Principien ordnet und mit ganzen Zahlen bezeichnet. Man multiplicirt dann zwei Characteristiken mit einander, indem man Zähler und Nenner oder jede Abtheilung der ersten Characteristik als selbständige Characteristiken aufgefasst mit den entsprechenden Grössen der zweiten Characteristik multiplicirt.

4.

Nachdem wir uns im vorigen § über die Gruppe $\mathfrak{A}_p$ im Allgemeinen orientirt haben, wollen wir von jetzt ab uns auf die Betrachtung der einfachsten unter den Gruppen $\mathfrak{A}_p$, nämlich $\mathfrak{A}_2$ beschränken. Daher werden wir im Folgenden, weil kein Missverständniss zu befürchten ist, unter einer Characteristik immer nur eine zum Modul $\left[\frac{1}{2}\right]$ gehörige Normalcharacteristik verstehen und den gemeinsamen Nenner 2 in den Gliedern der Characteristiken weglassen. Unsere zu betrachtenden Zahlencomplexe werden also alle Variationen mit Wiederholung zur sechsten Classe von den beiden Elementen 0 und 1 sein. Die im Vorigen erlangten Resultate sind für unseren Fall specialisirt folgende:

„Jede zum Modul $\left[\frac{1}{2}\right]$ gehörige Characteristik ist von der 2^{ten} Ordnung oder genügt der Gleichung $X^2 = E$; daher fällt die Multiplication zweier Characteristiken mit der Division derselben zusammen, weil $\frac{x}{\gamma} = x\gamma^{-1} = x\gamma^{-1}\gamma^2 = x\gamma$ ist. Alle zum Modul $\left[\frac{1}{2}\right]$ gehörigen Characteristiken bilden eine primäre Gruppe von der Ordnung $2^6 = 64$ und vom Range 6."

Wählt man als Basis der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ die sechs Characteristiken:

$$\varphi_1 = 000001 \quad \varphi_2 = 000010 \quad \varphi_3 = 000100$$
$$\varphi_4 = 001000 \quad \varphi_5 = 010000 \quad \varphi_6 = 100000,$$

so ist die Anordnung der Characteristiken folgende:

$1 = 000000 = \varphi_1^0$
$2 = 000001 = \varphi_1$
I.
$3 = 000010 = \varphi_2$
$4 = 000011 = \varphi_1\,\varphi_2$
II.
$5 = 000100 = \varphi_3$
$6 = 000101 = \varphi_1\,\varphi_3$
$7 = 000110 = \varphi_2\,\varphi_3$
$8 = 000111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$
III.
$9 = 001000 = \varphi_4$
$10 = 001001 = \varphi_1\,\varphi_4$
$11 = 001010 = \varphi_2\,\varphi_4$
$12 = 001011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4$
$13 = 001100 = \varphi_3\,\varphi_4$
$14 = 001101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_4$
$15 = 001110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4$
$16 = 001111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4$
IV.
$17 = 010000 = \varphi_5$
$18 = 010001 = \varphi_1\,\varphi_5$

$19 = 010010 = \varphi_2\,\varphi_5$
$20 = 010011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_5$
$21 = 010100 = \varphi_3\,\varphi_5$
$22 = 010101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_5$
$23 = 010110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_5$
$24 = 010111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_5$
$25 = 011000 = \varphi_4\,\varphi_5$
$26 = 011001 = \varphi_1\,\varphi_4\,\varphi_5$
$27 = 011010 = \varphi_2\,\varphi_4\,\varphi_5$
$28 = 011011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4\,\varphi_5$
$29 = 011100 = \varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5$
$30 = 011101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5$
$31 = 011110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5$
$32 = 011111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5$
V.
$33 = 100000 = \varphi_6$
$34 = 100001 = \varphi_1\,\varphi_6$
$35 = 100010 = \varphi_2\,\varphi_6$
$36 = 100011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_6$
$37 = 100100 = \varphi_3\,\varphi_6$
$38 = 100101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_6$
$39 = 100110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_6$
$40 = 100111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_6$
$41 = 101000 = \varphi_4\,\varphi_6$
$42 = 101001 = \varphi_1\,\varphi_4\,\varphi_6$
$43 = 101010 = \varphi_2\,\varphi_4\,\varphi_6$
$44 = 101011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4\,\varphi_6$
$45 = 101100 = \varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_6$
$46 = 101101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_6$

$47 = 101110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_6$
$48 = 101111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_6$
$49 = 110000 = \varphi_5\,\varphi_6$
$50 = 110001 = \varphi_1\,\varphi_5\,\varphi_6$
$51 = 110010 = \varphi_2\,\varphi_5\,\varphi_6$
$52 = 110011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_5\,\varphi_6$
$53 = 110100 = \varphi_3\,\varphi_5\,\varphi_6$
$54 = 110101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_5\,\varphi_6$
$55 = 110110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_5\,\varphi_6$
$56 = 110111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_5\,\varphi_6$
$57 = 111000 = \varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$58 = 111001 = \varphi_1\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$59 = 111010 = \varphi_2\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$60 = 111011 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$61 = 111100 = \varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$62 = 111101 = \varphi_1\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$63 = 111110 = \varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$
$64 = 111111 = \varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$

VI. $1 = 000000 = \varphi_1{}^0$

Aus der obigen Anordnung der Characteristiken erhält man folgende Sätze:

I. „Die Characteristik 1 und dann die 2, 4, 8, 16, 32 ersten Characteristiken bilden Gruppen für sich von den resp. Ordnungen 1, 2, 4, 8, 16, 32.“

II. „Die Multiplication einer beliebigen Characteristik α mit den Basischaracteristiken: $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\,\varphi_5\,\varphi_6$ ist gleichbedeutend mit einer Verschiebung der Characteristik α um resp. 1, 2, 4, 8, 16, 32 Stellen vorwärts oder rückwärts, je nachdem die Characteristik α die betreffende φ nicht enthält oder enthält.“

Bezeichnet man die Puncte zwischen 2 und 3, 4 und 5, 8 und 9, 16 und 17, 32 und 33, 64 und 1 der Reihe nach als den ersten, zweiten u. s. w. Ruhepunct, so gilt auch der Satz:

III. „Nimmt man alle Characteristiken bis zu einem beliebigen Ruhepuncte, so theilt der nächstvorhergehende Ruhepunct die Characteristikenfolge in zwei gleiche Hälften. Bezeichnet man nun die Characteristiken der zweiten Hälfte mit denselben Ziffern, nur mit einem Striche oben versehen, in derselben Reihenfolge wie die der ersten Hälfte, so ist das Product je zweier Characteristiken der zweiten Hälfte gleich dem Producte der entsprechenden Characteristiken der ersten Hälfte oder $\alpha'.\,\beta' = \alpha.\,\beta.$“

5.

Mit Hilfe obiger drei einfachen Sätze kann man die folgende Aufgabe bequem lösen.

Aufgabe I.

Eine Multiplicationstabelle oder das Einmaleins der zum Modul $\left[\frac{1}{2}\right]$ gehörigen Characteristiken zu construiren.

1. Lösung.

Man schreibe die die Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ bezeichnenden Ziffern von 1 bis 64 in eine Horizontalreihe und von derselben 1 anfangend auch in eine Vertikalreihe hin. Die das Product zweier Characteristiken bezeichnende Ziffer schreibe man da hin, wo die Vertikalreihe, an deren Spitze der eine Factor steht, von der Horizontalreihe, an deren Spitze der andere Factor sich befindet, geschnitten wird. Dadurch erhält man ein Quadrat von 64 . 64 Ziffern. Zieht man aber durch den Ruhepunct V sowohl der Vertikal- als auch der Horizontalreihen gerade Linien, so zerfällt das ganze Quadrat in vier congruente kleinere Quadrate, wie es die nebenstehende Figur zeigt.

A	B
B′	A′

Aus dem Satze III des vorigen § folgt nun, dass A = A′ und weil $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$, so ist auch B = B′. Weiter besteht nach Satz I A nur aus den Ziffern von 1 bis 32 und weil man B aus A durch Multiplication einer jeden Characteristik in A mit φ_6 erhält, so ist nach Satz II B aus den Ziffern von 33 bis 64 ebenso zusammengesetzt wie A aus den Ziffern von 1 bis 32. Man kann also das ganze Quadrat leicht hinschreiben, wenn man nur A kennt.

Nun ist aber A nach Satz I aus den Ziffern von 1 bis 32 ebenso zusammengesetzt wie das ganze Quadrat aus den Ziffern von 1 bis 64; daher kann man A wiederum durch gerade Linien durch die Ruhepuncte IV in vier Quadrate a, a′, b, b′ zerfällen, welche sich zu einander ebenso verhalten wie die eben beschriebenen Quadrate A, A′, B, B′. Auf diese Weise

kann man die Theilung in kleinere Quadrate fortsetzen bis man zu dem Quadrate $\boxed{\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}}$ kommt und von diesem ausgehend kann man das ganze Quadrat von 64 . 64 Ziffern leicht hinschreiben.

Auf die eben angegebene Weise ist die Tabelle I construirt worden.

Anm. Wenn die Tabelle I ihres zu grossen Umfanges wegen für manche practische Zwecke zu unbequem sein sollte, so kann man diesem Uebelstande vollständig durch die Bezeichnung der Characteristiken mit zwei Ziffern abhelfen.

2. Lösung.

Eine zweite Lösung des Problems, das Einmaleins der Characteristiken zu construiren, ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Characteristiken eine Gruppe bilden und folglich durch Multiplication aller Characteristiken mit einer beliebigen unter ihnen wiederum alle Characteristiken nur in einer anderen Reihenfolge erhalten werden. Also entspricht der Multiplication aller Characteristiken mit einer beliebigen derselben eine Substitution, welche wir die der Characteristik entsprechende Substitution nennen wollen. Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu jeder Characteristik die ihr entsprechende Substitution zu finden. Man kann aber nach Satz II des vorigen §. die den Basischaracteristiken φ entsprechenden Substitutionen unmittelbar hinschreiben und die einer beliebigen

Characteristik entsprechende Substitution setzt sich in derselben Weise aus den den Basischaracteristiken entsprechenden Substitutionen zusammen wie die Characteristik selbst aus den Basischaracteristiken zusammengesetzt ist.

Man sieht auch ohne Weiteres ein, dass die allen Characteristiken entsprechenden Substitutionen eine Gruppe bilden, deren Zusammensetzung gleich ist der Zusammensetzung der Characteristikengruppe $\mathfrak{A}_2$*).

Weiter besteht eine jede der obigen Substitutionen aus lauter Transpositionen und multiplicirt man die in einer Transposition enthaltenen Characteristiken mit einander, so erhält man die der Substitution entsprechende Characteristik. Zerlegt man also die Substitutionen in ihre circulären Factoren, so hat man zugleich alle Zerlegungen der entsprechenden Characteristiken in zwei von einander verschiedene Characteristiken.

Da wir bei der Lösung unserer Aufgabe den Basischaracteristiken φ weder eine bestimmte Bedeutung beigelegt noch dieselben irgend welcher anderen als der nothwendigen Bedingung, unabhängig zu sein, unterworfen haben, so bleiben alle obigen Auseinandersetzungen und folglich auch die Multiplicationstabelle unverändert, wenn man statt $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6$ irgend ein anderes System unabhängiger Characte-

*) Camille Jordan, Traité des substitutions p. 56; Crell Journ. Bd. 84 p. 101.

ristiken als das früher von uns benutzte setzt. Hieraus entsteht die neue Aufgabe: aus einem gegebenen Systeme von sechs unabhängigen Characteristiken alle übrigen derartigen Systeme abzuleiten. Doch wollen wir auf diese Aufgabe dann näher eingehen, nachdem noch eine für die Characteristikentheorie fundamentale Aufgabe gelöst sein wird.

6.

Die eben erwähnte Aufgabe bezieht sich auf die Operation des Componirens; daher schicken wir die hierzu gehörigen Bezeichnungen voraus. Ist $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$, so soll $(\alpha) = \alpha_6 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$ sein; doch da kein Missverständniss zu befürchten ist, soll im Folgenden

$$|\alpha, (\beta)| = |\alpha, \beta|$$

gesetzt werden. Denkt man sich die Characteristiken in zwei Reihen geschrieben, so zerfällt die Composition zweier Characteristiken in zwei Theile, nämlich: $|\alpha, \beta| = \begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix}$, wo $\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ die Composition der oberen Zeile von α mit der unteren Zeile von β und ebenso $\begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix}$ die Composition der oberen Zeile von β mit der unteren Zeile von α bedeutet. Ein specieller Fall des Symbols $\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ ist $\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\end{vmatrix} = |\alpha| = \alpha_1 \alpha_6 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_4$. Je nachdem nun die Zahl $|\alpha|$ gerade oder ungerade ist, nennt man auch die Characteristik α gerade oder ungerade. $(-1)^{|\alpha|}$ nennt man nach Frobenius den Character der Characteristik α. Ueber die Rechnungsregeln der obigen Symbole, welche leicht aus ihren Definitionen folgen, vgl. man Frobenius, Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Crelle's Journ. Bd. 89.

Es sei hier noch ein Hilfssatz aus der Theorie der linearen Congruenzen, den wir öfters brauchen werden, ohne Beweis angeführt. Der Satz lautet:

„Sind

$$u_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + \dots + a_{\alpha \rho} x_\rho \ (\alpha = 1, 2 \dots \sigma)$$

σ mod 2 unabhängige lineare Formen der ρ Variabeln $x_1 \dots x_\rho$ und sind $C_1, C_2, \dots C_\sigma$ beliebige Zahlen, so haben die σ Congruenzen $u_\alpha \equiv C_\alpha \pmod 2$ $2^{\rho-\sigma}$ verschiedene Lösungen."

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns jetzt die Aufgabe:

Aufgabe II.

Die Werthe der Symbole: $(-1)^{|\alpha, \beta|}$, $(-1)^{\left|\begin{smallmatrix}\alpha \\ \beta\end{smallmatrix}\right|}$ und $(-1)^{|\alpha|}$ in übersichtliche Tabellen zu bringen und die Bedingungen, unter welchen diese unverändert bleiben, zu untersuchen.

Die obige Aufgabe enthält eigentlich drei Aufgaben in sich; wir wollen dieselben getrennt von einander behandeln.

a) Setzen wir $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha, \beta|}$ und lassen α und β unabhängig von einander alle 64 Characteristiken durch-

laufen, so kann man die Grössen $C_{\alpha\beta}$ wie bei der Multiplicationstabelle in ein Quadrat anordnen, nämlich:

$$\begin{array}{l} C_{11}\ C_{12} \dots C_{1\,64} \\ C_{21}\ C_{22} \dots C_{2\,64} \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_{64\,1}\ C_{64\,2} \dots C_{64\,64} \end{array}$$

Aus den Definitionen der Symbole folgen für dieses System folgende Eigenschaften:

1) Für jeden Werth von α und β ist

$$C^2_{\alpha\beta} = 1, C_{\alpha 1} = 1, C_{1\beta} = 1 \text{ und } C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}.$$

2) $C_{\alpha\beta} \cdot C_{\alpha'\beta} = C_{\alpha.\alpha'\beta}$. Man erhält daher aus irgend zwei Horizontalreihen des Systems der Grössen C immer wieder eine Horizontalreihe desselben, wenn man jedes Glied der einen mit dem ihm entsprechenden der andern multiplicirt und es entspricht einer solchen auf zwei Horizontalreihen bezüglichen Multiplication stets die Multiplication der beiden den Horizontalreihen entsprechenden Characteristiken. Dasselbe gilt auch für irgend zwei Vertikalreihen.

Versteht man also unter dem Producte zweier Horizontal- oder zweier Verticalreihen der Grössen C eine dritte Reihe, welche aus den beiden durch Multiplication ihrer entsprechenden Glieder entsteht, so bilden alle 64 Horizontalreihen eine Gruppe, welche ebenso zusammengesetzt ist wie die Characteristikengruppe $\mathfrak{A}_2$; man kann daher jeder Characteristik α die Horizontalreihe der C: $C_{\alpha 1}\ C_{\alpha 2} \dots C_{\alpha 64}$ zuordnen.

Die Vertikalreihen der Grössen C bilden nach 1) dieselbe Gruppe wie die Horizontalreihen.

Um also das ganze System der C zu berechnen, braucht man nur die den Basischaracteristiken entsprechenden Horizontalreihen zu kennen. Weiter sieht man aber, dass das Product zweier beliebiger Grössen C in derselben Horizontalreihe, z. B. $C_{\alpha\beta} \cdot C_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\beta \cdot \gamma}$ wiederum ein Glied derselben Horizontalreihe ist und dass daher eine jede Horizontalreihe als eine Gruppe betrachtet werden kann. Die Zusammensetzung dieser Gruppe ist gleich der Zusammensetzung von $\mathfrak{A}_2$. Dasselbe gilt auch von den Vertikalreihen. Um aber eine beliebige Horizontalreihe α zu berechnen, braucht man nur die sechs Werthe der C zu kennen, welche zugleich in den den Basischaracteristiken entsprechenden Vertikalreihen liegen, also: $C_{\alpha\varphi_1} \dots C_{\alpha\varphi_6}$.

Nach allem Obigen ist das ganze System der Grössen C eindeutig bestimmt durch die 36 Grössen:

$$\begin{array}{cccccc}
C_{\varphi_1\varphi_1} & C_{\varphi_1\varphi_2} & C_{\varphi_1\varphi_3} & C_{\varphi_1\varphi_4} & C_{\varphi_1\varphi_5} & C_{\varphi_1\varphi_6} \\
C_{\varphi_2\varphi_1} & C_{\varphi_2\varphi_2} & C_{\varphi_2\varphi_3} & C_{\varphi_2\varphi_4} & C_{\varphi_2\varphi_5} & C_{\varphi_2\varphi_6} \\
C_{\varphi_3\varphi_1} & C_{\varphi_3\varphi_2} & C_{\varphi_3\varphi_3} & C_{\varphi_3\varphi_4} & C_{\varphi_3\varphi_5} & C_{\varphi_3\varphi_6} \\
C_{\varphi_4\varphi_1} & C_{\varphi_4\varphi_2} & C_{\varphi_4\varphi_3} & C_{\varphi_4\varphi_4} & C_{\varphi_4\varphi_5} & C_{\varphi_4\varphi_6} \\
C_{\varphi_5\varphi_1} & C_{\varphi_5\varphi_2} & C_{\varphi_5\varphi_3} & C_{\varphi_5\varphi_4} & C_{\varphi_5\varphi_5} & C_{\varphi_5\varphi_6} \\
C_{\varphi_6\varphi_1} & C_{\varphi_6\varphi_2} & C_{\varphi_6\varphi_3} & C_{\varphi_6\varphi_4} & C_{\varphi_6\varphi_5} & C_{\varphi_6\varphi_6}
\end{array}$$

Unter diesen 36 Grössen sind aber, weil nach 1) $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ und ausserdem $C_{\alpha\alpha} = 1$ ist, nur 15 un-

abhängige vorhanden, so dass das ganze System von 64×64 Grössen eine eindeutige Function von 15 Grössen ist.

3) Es ist:

$$C_{\alpha 1} + C_{\alpha 2} + \dots + C_{\alpha 64} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha > 1 \\ 64, & \text{wenn } \alpha = 1 \end{cases}$$

Da die Grössen C entweder $+1$ oder -1 sind, so erhält man ihre Summe, wenn man weiss, wie viele in der Reihe den Werth $+1$ oder -1 haben. $C_{\alpha x}$ hat aber den Werth $+1$, wenn

$$\alpha_1 x_6 + \alpha_2 x_5 + \alpha_3 x_4 + \alpha_4 x_3 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 x_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Wenn nun nicht alle α verschwinden, so hat die Congruenz nach dem Hilfsatze aus der Theorie der linearen Congruenzen $2^{6-1} = 32$ Lösungen, sind aber alle α gleich 0, so sieht man, dass alle 64 Variationen von 0 und 1 statt $x_1 \dots x_6$ gesetzt der Congruenz genügen. Hieraus folgt die obige Gleichung, welche man auch mit Worten so aussprechen kann: Jede einer Characteristik α entsprechende Horizontalreihe in dem Systeme der Grössen C enthält ebensoviele $+1$ als -1, mit Ausnahme der der Characteristik 1 entsprechenden Horizontalreihe, welche nur $+1$ enthält.

4) Es ist stets:

$$C_{\alpha 1} C_{\beta 1} + C_{\alpha 2} C_{\beta 2} + \dots + C_{\alpha 64} C_{\beta 64} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha \gtrless \beta \\ 64, & \text{wenn } \alpha = \beta \end{cases}$$

Man hat nämlich nach 2) und 3)

$$C_{\alpha 1} C_{\beta 1} + \dots + C_{\alpha 64} C_{\beta 64} = C_{\alpha \cdot \beta 1} + \dots + C_{\alpha\beta 64} = \begin{cases} 0, & \text{w. } \alpha\beta > 1 \\ 64, & \text{w. } \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

woraus die aufgestellte Gleichung folgt.

Berücksichtigt man dann noch, dass $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ ist, so erkennt man, dass aus den Grössen $C_{\alpha\beta}$, indem man eine jede derselben durch $\sqrt{64}$ dividirt, Grössen $e_{\alpha\beta}$ hervorgehen, die als Coefficienten eines orthogonalen involutorischen Systems betrachtet werden können. Die Gleichungen:

$$(A) \quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=64} C_{1\alpha} X_\alpha = \sqrt{64} \,.\, X'_1 \ldots\ldots \sum_{\alpha=1}^{\alpha=64} C_{64\alpha}\, X_\alpha = \sqrt{64}.X'_{64}$$

ziehen daher immer die Gleichungen:

$$(B) \quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=64} C_{1\alpha} X^1_\alpha = \sqrt{64} \,.\, X_1 \ldots\ldots \sum_{\alpha=1}^{\alpha=64} C_{64\alpha}\, X^1_\alpha = \sqrt{64}.X_{64}$$

nach sich, oder, was dasselbe, es können in den Gleichungen (A) und daher auch in allen ausschliesslich auf Grund derselben abgeleiteten Formeln, unbeschadet der Richtigkeit, die Grössen X mit den Grössen X' beziehlich vertauscht werden.

Nach 2) ist die Tabelle für die Grössen $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha, \beta|}$ nicht von der Wahl der Basischaracteristiken $\varphi_1 \ldots \varphi_6$ wie die Multiplicationstabelle unabhängig, sondern von 15 Grössen, die man willkürlich wählen darf, abhängig. Hat man aber für irgend ein System der φ die erwähnte Tabelle berechnet und genügen die φ dem folgenden Systeme von bilinearen Congruenzen:

$$(C) \quad \begin{array}{lll} |\varphi_1, \varphi_2| \equiv \varepsilon_1; & |\varphi_1, \varphi_3| \equiv \varepsilon_2; & |\varphi_1, \varphi_4| \equiv \varepsilon_3; \\ |\varphi_1, \varphi_5| \equiv \varepsilon_4; & |\varphi_1, \varphi_6| \equiv \varepsilon_5; & |\varphi_2, \varphi_3| \equiv \varepsilon_6; \\ |\varphi_2, \varphi_4| \equiv \varepsilon_7; & |\varphi_2, \varphi_5| \equiv \varepsilon_8; & |\varphi_2, \varphi_6| \equiv \varepsilon_9; \\ |\varphi_3, \varphi_4| \equiv \varepsilon_{10}; & |\varphi_3, \varphi_5| \equiv \varepsilon_{11}; & |\varphi_3, \varphi_6| \equiv \varepsilon_{12}; \\ |\varphi_4, \varphi_5| \equiv \varepsilon_{13}; & |\varphi_4, \varphi_6| \equiv \varepsilon_{14}; & |\varphi_5, \varphi_6| \equiv \varepsilon_{15}; \end{array} \quad (\text{mod } 2).$$

wo die ε entweder 0 oder 1 bedeuten, so ist die nothwendige und auch hinreichende Bedingung dafür, dass irgend ein anderes System von 6 unabhängigen Characteristiken φ dieselbe Tabelle für die Grössen $C_{\alpha\beta}$ liefert, diejenige, das die φ dem Congruenzsystem (C) genügen.

Wählt man für die φ die Characteristiken:

$$\varphi_1 = 000001 \quad \varphi_2 = 000010 \quad \varphi_3 = 000100$$
$$\varphi_4 = 001000 \quad \varphi_5 = 010000 \quad \varphi_6 = 100000,$$

so ist das Grössensystem ε folgendes:

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon_1 = 0 & \varepsilon_2 = 0 & \varepsilon_3 = 0 & \varepsilon_4 = 0 & \varepsilon_5 = 1 \\ \varepsilon_6 = 0 & \varepsilon_7 = 0 & \varepsilon_8 = 1 & \varepsilon_9 = 0 & \\ \varepsilon_{10} = 1 & \varepsilon_{11} = 0 & \varepsilon_{12} = 0 & & \\ \varepsilon_{13} = 0 & \varepsilon_{14} = 0 & & & \\ \varepsilon_{15} = 0. & & & & \end{array}$$

Schreibt man noch statt + 1 und — 1 einfach + und —, so ist das Grössensystem $C_{\varphi_\alpha \varphi_\beta}$ für das obige System der φ:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_1	+	+	+	+	+	—
φ_2	+	+	+	+	—	+
φ_3	+	+	+	—	+	+
φ_4	+	+	—	+	+	+
φ_5	+	—	+	+	+	+
φ_6	—	+	+	+	+	+

Auf Grund dieses Tabellchens ist die Tabelle II berechnet worden, welche jetzt durch den blossen Anblick verständlich sein wird.

b) Setzt man $a_{\alpha\beta} = (-1)^{\left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right|}$, so kann man das System der Grössen $a_{\alpha\beta}$ ebenso in ein Quadrat anordnen wie die Grössen $C_{\alpha\beta}$. Das Quadrat der $a_{\alpha\beta}$ hat folgende Eigenschaften:

1) Es ist: $a^2_{\alpha\beta} = 1$, $a_{1\beta} = 1$, $a_{\alpha 1} = 1$, aber nicht mehr $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

2) Es ist stets: $a_{\alpha\beta} \cdot a_{\alpha\beta'} = a_{\alpha\beta\,.\,\beta'}$ und

$$a_{\alpha\beta} \cdot a_{\alpha'\beta} = a_{\alpha\alpha'\beta}.$$

Daher bilden die Horizontalreihen der Grössen $a_{\alpha\beta}$ eine Gruppe, welche ebenso zusammengesetzt ist

wie die Characteristikengruppe $\mathfrak{A}_2$; man kann daher jeder Charácteristik α die Horizontalreihe:

$$a_{\alpha 1}\, a_{\alpha 2} \ldots a_{\alpha 64}$$

zuordnen. Die Vertikalreihen der Grössen $a_{\alpha\beta}$ bilden wiederum eine Gruppe, aber nicht mehr dieselbe wie die Horizontalreihen.

Das ganze System der $a_{\alpha\beta}$ ist eindeutig durch 36 Grössen bestimmt. Alle diese 36 Grössen sind im Allgemeinen von einander verschieden, doch nicht vollständig unabhängig von einander.

Die Eigenschaften 3) und 4) der Grössen $c_{\alpha\beta}$ fehlen den $a_{\alpha\beta}$, dafür aber hat man:

3) Zu jeder Horizontalreihe und ebenso zu jeder Vertikalreihe in dem Systeme der Grössen $a_{\alpha\beta}$ giebt es noch sieben andere ihnen gleiche Horizontalreihen resp. Vertikalreihen, sodass in dem Systeme nur 8 verschiedene Horizontalreihen und ebenso viele verschiedene Vertikalreihen enthalten sind.

Diese Eigenschaft ergiebt sich einfach aus der Bemerkuug, dass es nur 8 Variationen mit Wiederholung zur dritten Classe von 0 und 1 giebt.

Nimmt man wieder das schon benutzte specielle System der φ als Basis der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ an, so ist das System der 36 Grössen, von welchen das System der $a_{\alpha\beta}$ eindeutig abhängt, folgendes:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_1	+	+	+	+	+	+
φ_2	+	+	+	+	+	+
φ_3	+	+	+	+	+	+
φ_4	+	+	−	+	+	+
φ_5	+	−	+	+	+	+
φ_6	−	+	+	+	+	+

Aus der obigen Tabelle folgt der Satz:

„In dem Systeme der Grössen $a_{\alpha\beta} = (-1)^{\left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right|}$ zerfallen die Horizontalreihen in je acht und acht gleiche und zwar sind die ersten acht einander gleich, dann die weiteren acht wiederum einander gleich u. s. w.

Die ersten acht Vertikalreihen dagegen durchlaufen die acht möglichen Werthe, dann bilden die weiteren acht einen dem aus den ersten acht Reihen bestehenden Streifen congruenten Streifen u. s. w.“

Nach allem Obigen kann man mit Leichtigkeit die vollständige Tabelle der Grössen $a_{\alpha\beta}$ construiren, doch unterlassen wir hier die Mittheilung derselben, weil wir sie im Folgenden nicht benutzen werden.

c) Was nun endlich die Werthe des Symbols $(-1)^{|\alpha|}$ betrifft, so sind sie zwar schon in dem unter

b) betrachteten Systeme der Grösse $a_{\alpha\beta}$ als Diagonalreihe enthalten; doch kann man dieselben auch auf das System der $C_{\alpha\beta}$ zurückführen. Lässt man nämlich die Characteristik α alle 64 sechsstelligen Characteristiken durchlaufen, so nimmt $(-1)^{|\alpha|}$ der Reihe nach dieselben Werthe an wie $c_{\mu\nu} = (-1)^{|\mu, \nu|}$, wo μ und ν dreistellige Characteristiken bedeuten, wenn der Doppelindex $\mu\nu$ sich so ändert, dass der Reihe nach die Grössen:

$$\begin{array}{l} c_{11}\ c_{12} \dots c_{18} \\ c_{21}\ c_{22} \dots c_{28} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{81}\ c_{82} \dots c_{88} \end{array}$$

entstehen. Hierbei ist das schon öfters benutzte specielle System der φ vorausgesetzt.

Lässt man aber in der Tabelle der Grössen $c_{\mu\nu}$ gerade $+1$ und ungerade -1 bedeuten, so giebt dieselbe die Reihenfolge und gegenseitige Lage der geraden und der ungeraden sechsstelligen Characteristiken an. Wir fügen die folgende Tabelle hinzu, wo das + gerade und das — ungerade bedeuten.

1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	6 +	7 +	8 +
9 +	10 +	11 +	12 +	13 −	14 −	15 −	16 −
17 +	18 +	19 −	20 −	21 +	22 +	23 −	24 −
25 +	26 +	27 −	28 −	29 −	30 −	31 +	32 +
33 +	34 −	35 +	36 −	37 +	38 −	39 +	40 −
41 +	42 −	43 +	44 −	45 −	46 +	47 −	48 +
49 +	50 −	51 −	52 +	53 +	54 −	55 −	56 +
57 +	58 −	59 −	60 +	61 −	62 +	63 +	64 −

Aus der obigen Tabelle folgt der Satz: „Unter den 64 zum Modul $\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right]$ gehörigen Characteristiken giebt es 36 gerade und 28 ungerade Characteristiken.“

Es erübrigt noch, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen die geraden und ungeraden Characteristiken mit denselben Ziffern bezeichnet werden, wenn die Basis der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ sich ändert. Aus den vorigen Untersuchungen ist uns aber bekannt, dass einer bestimmten Wahl der φ eine bestimmte Anordnung der übrigen Characteristiken entspricht. Nimmt man nun weiter diejenige Anordnung der Characteristiken, welche den Basischaracteristiken:

$$\varphi_1 = 000001 \quad \varphi_2 = 000010 \quad \varphi_3 = 000100$$
$$\varphi_4 = 001000 \quad \varphi_5 = 010000 \quad \varphi_6 = 100000,$$

auch in dieser Reihenfolge genommen, entspricht, als die Haupt- oder Fundamentalanordnung an, so kann man einem jeden System der φ eine Substitution aus den 63 Elementen 2 . . . 64 bestehend zuordnen. Sind nun alle Systeme der φ gegeben, so kann man leicht die ihnen zugeordneten Substitutionen und umgekehrt sind alle die Substitutionen bekannt, so kann man aus ihnen die Systeme von φ berechnen. Hier wollen wir aber nicht weiter die Gruppe dieser Substitutionen untersuchen, sondern nur die in ihr enthaltene specielle Gruppe von solchen Substitutionen, welche die geraden Characteristiken mit geraden und die ungeraden mit ungeraden vertauschen, näher in's Auge fassen.

Man erhält aber aus einer jeden ungeraden Characteristik immer und nur dann eine ungerade Characteristik, wenn man 1) zwei übereinanderstehende Glieder mit zwei anderen eben solchen Gliedern oder 2) zwei übereinanderstehende Glieder mit einander vertauscht. Da nun einer solchen Vertauschung der Glieder einer Characteristik eine Vertauschung der Basischaracteristiken entspricht, so hat man den folgenden Satz:

„Wendet man auf die Gruppe $\mathfrak{A}_2$ irgend eine der folgenden fünf Substitutionen an:

$$\mathrm{I} = (\varphi_1\ \varphi_2)\ (\varphi_5\ \varphi_6)$$
$$\mathrm{II} = (\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3)\ (\varphi_4\ \varphi_5\ \varphi_6)$$
$$\mathrm{III} = (\varphi_1\ \varphi_6)$$
$$\mathrm{IV} = (\varphi_2\ \varphi_5)$$
$$\mathrm{V} = (\varphi_3\ \varphi_4)$$

so werden dadurch nur gerade Characteristiken mit geraden und ungerade mit ungeraden vertauscht; zugleich ist die aus den fünf Substitutionen als Basis gebildete Gruppe die einzige dieser Art.“

Die im Satze erwähnte Substitutionsgruppe kann mit Vortheil auf viele Probleme, wo zwischen geraden und ungeraden Characteristiken unterschieden wird, angewandt werden.

7.

Nachdem die Aufgabe II vollständig gelöst ist, wenden wir uns der unerledigt gebliebenen Aufgabe zu, nämlich: Aus einem gegebenen Systeme von sechs unabhängigen Characteristiken alle übrigen derartigen Systeme abzuleiten.

Man nehme das gegebene System von sechs unabhängigen Characteristiken als Basischaracteristiken an und ordne nach dem uns wohlbekannten Verfahren die übrigen Characteristiken. Denkt man sich dann irgend ein anderes System von sechs unabhängigen Characteristiken und nimmt noch ihr Product hinzu, so ist das Product aus allen sieben Characteristiken gleich 1, aber jede andere Combination von 1 verschieden und umgekehrt hat man irgend ein System von sieben Characteristiken, deren Product gleich 1, aber jede andere Combination derselben von 1 verschieden ist, so erhält man ein System von sechs unabhängigen Characteristiken, indem man irgend welche

sechs aus dem System von sieben Characteristiken herausgreift. Von den sieben Characteristiken wollen wir sagen, dass zwischen ihnen nur eine Beziehung bestehe. Unsere Aufgabe ist also auf die andere zurückgeführt, alle Systeme von sieben Characteristiken, zwischen denen nur eine Beziehung besteht anzugeben.

Da wir weiter wissen, dass zwischen sieben beliebigen Characteristiken wenigstens eine Beziehung besteht, so besteht unsere Aufgabe darin, von allen Combinationen zur siebenten Classe der 63 Elemente 2 . . 64 diejenigen auszuschliessen, welche aus Elementen bestehen, von denen weniger als 7 das Product 1 geben. Diese letzteren Combinationen zerfallen wieder in mehrere Classen, je nachdem sie aus Elementen bestehen, zwischen derer 6 oder 5 oder 4 oder 3 nur eine Beziehung besteht. Unsere Aufgabe hat sich also erweitert zu der Aufgabe, **alle** Beziehungen zwischen den 63 Characteristiken 2 . . . 64 zu finden. Die Lösung dieser verallgemeinerten Aufgabe ist folgende:

Man denke sich alle Combinationen zur 3ten, 4ten, 5ten, 6ten und 7ten Classe aus den 63 Elementen 2 . . . 64 successive gebildet, doch braucht man sie nicht alle factisch hinzuschreiben. Unter den Combinationen dritter Classe suche man nun solche auf, wo das Product der zwei ersten Elemente das dritte giebt, so ist die ganze Combination $= 1$. Hat man nun gefunden, dass $\alpha . \beta . \gamma = 1$, so braucht man alle übrigen Combinationen welche mit $\alpha . \beta$ beginnen nicht weiter zu untersuchen, weil es keine zweite Beziehung $\alpha . \beta . \gamma' = 1$ giebt. Ganz ebenso braucht man auch nicht die Combinationen, welche mit $\alpha . \gamma$ und $\beta . \gamma$ beginnen, zu untersuchen, weil die Producte $\alpha . \gamma$ und $\beta . \gamma$ kleiner sind als der eine ihrer Factoren.

Hat man auf diese Weise alle Beziehungen dritter Classe hergestellt, so muss man alle Combinationen einer höheren Classe, welche mit irgend einer Beziehung dritter Classe beginnen, weglassen. In der ersten der übriggebliebenen Combinationen vierter Classe vereinige man die zwei ersten Elemente entweder nach der Multiplicationstabelle oder am besten nach den schon fertigen Beziehungen dritter Classe in ein Product, zerlege dieses Product mit Hilfe derselben Beziehungen dritter Classe wiederum in zwei Factoren, die beide grösser als die früheren Factoren des Productes sind und man hat eine Beziehung vierter Classe. Es ist hier zu bemerken, dass die angegebene Zerlegung nicht eindeutig ist. Hat man aber alle Zerlegungen der obigen Art an dem Producte $\alpha . \beta$ ausgeführt, so braucht man alle die übrigen Combinationen vierter Classe, welche mit $\alpha . \beta$ beginnen, nicht weiter zu berücksichtigen. Auf die eben angegebene Weise erhält man alle Beziehungen vierter Classe.

Das Wesentliche bei der obigen Operation war, dass man nach den schon fertigen Beziehungen Elemente zu einem Producte vereinigte und dieses

Product wiederum in Factoren zerlegte, die alle grösser als die früheren sind. Durch Anwendung dieses Gedankens erhält man auch alle Beziehungen der 5ten, 6ten und 7ten Classe, z. B. der siebenten, indem man in allen den nicht auszuschliessenden Combinationen zur siebenten Classe mit Hilfe der schon fertigen Beziehungen 3ter, 4ter, 5ter, 6ter Classe, entweder die 2 ersten oder die 3, 4, 5 ersten Elemente in ein Product vereinigt und dieses wiederum in 5 oder resp. in 4, 3, 2 Factoren zerlegt, welche sämmtlich grösser als die früheren sind. Man kann also eine vollständige Tabelle aller Beziehungen zwischen den Characteristiken herstellen. Doch wegen ihres zu grossen Umfangs theilen wir dieselbe hier nicht mit.

Hat man aber eine vollständige Tabelle aller Beziehungen zwischen den Characteristiken, so lassen sich daraus leicht alle Systeme unabhängiger Characteristiken ableiten. Diese sind:

1) alle Combinationen zweiter Classe;

2) alle die Combinationen, welche man erhält, indem man in irgend einer Beziehung vierter Classe die Elemente zu je drei verbindet;

3) alle Combinationen, welche man aus den Beziehungen 5ter Classe erhält, indem man die Elemente derselben zu je vier verbindet;

4) alle Combinationen fünfter Classe, welche man auf die obige Weise aus den Beziehungen sechster Classe erhält, und

5) alle Combinationen sechster Classe, welche aus den Beziehungen siebenter Classe abgeleitet werden können.

Mit Hilfe der vollständigen Tabelle der Beziehungen zwischen den Characteristiken kann man mehrere auf die Zerlegung sowohl der Characteristikengruppe $\mathfrak{A}_2$ als auch der einzelnen Characteristiken Bezug habenden Aufgaben lösen. Als Beispiel wollen wir hier folgende zwei Aufgaben lösen.

Aufgabe 1.

Alle Divisoren der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ anzugeben.

Aufgabe 2.

Eine bestimmte Characteristik α auf alle möglichen Arten in n sowohl von einander als auch von den beiden Characteristiken α und 1 verschiedene Characteristiken zu zerlegen.

Ad 1. Man nehme irgend ein System von unabhängigen Characteristiken, bilde aus ihnen als Basis eine Gruppe und lasse alle die Systeme unabhängiger Characteristiken, deren Elemente sämmtlich in der Gruppe vorkommen, weg; von den übrig gebliebenen Systemen wähle man ein zweites aus, bilde daraus eine Gruppe und streiche alle die Systeme, deren Elemente sämmtlich in dieser Gruppe vorkommen. Setzt man dieses Verfahren fort bis alle Systeme unabhängiger Characteristiken erschöpft sind, so hat man alle Divisoren der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ gefunden.

Ad 2. Hat man irgend eine Zerlegung der Characteristik α in n Characteristiken, so ist das Product der Characteristik α in die n Characteristiken gleich 1 und umgekehrt kann man aus einem jeden Systeme von $n + 1$ verschiedenen Characteristiken, unter denen die Characteristik α vorkommt und deren Product gleich 1 ist, eine Zerlegung der Characteristik α erhalten. Man muss also alle derartigen Systeme von $n + 1$ Characteristiken bilden. Zu dem Zwecke schreibe man die Zahl $n + 1$ auf alle möglichen Weisen unter der Form:

$$n + 1 = 3x + 4y + 5z + 6u + 7v, \text{ wo}$$

x . . v 0 oder positive ganze Zahlen sind.

Dann bilde man aus den Beziehungen 3^{ter} Classe alle solche Combinationen x^{ter} Classe, die keine Characteristik mehrmals enthalten, und wähle eine beliebige unter ihnen; weiter bilde man aus den Beziehungen 4^{ter} Classe alle solche Combinationen y^{ter} Classe, welche keine Characteristik mehrmals und keine in der gewählten Combination x^{ter} Classe schon vorkommende Characteristik enthalten, und wähle unter diesen Combinationen wieder eine beliebige u. s. w. Die Characteristik α muss in irgend einer der gewählten Combinationen vorkommen. Multiplicirt man schliesslich alle die auf diese Weise ausgewählten Beziehungen mit einander, so ist das Product gleich 1 und multiplicirt man noch diese Gleichung auf beiden Seiten mit α, so erhält man eine Zerlegung derselben. Die Reihenfolge, in welcher man die Beziehungen der verschiedenen Classen benutzt, muss man auf alle 5! mögliche Weisen verändern und davon unabhängig die Characteristik α der Reihe nach in den Beziehungen 3ter, 4ter, 5ter, 6ter und 7ter Classe auftreten lassen.

8.

Bevor wir specielleren Bedingungen unterworfene Characteristikensysteme und Zerlegungen discutiren, wollen wir einen merkwürdigen Zusammenhang der Tabellen I und II betrachten.

Die beiden Tabellen kann man aus einem gemeinsamen Gesichtspuncte auf folgende Weise erhalten. Durch die zum Modul $\left[\frac{1}{2}\right]$ gehörige Gruppe von Normalcharacteristiken $\mathfrak{A}_2$ ist die algebraische Form:

$$\mathfrak{f} = \sum_{i_1 \ldots i_6} a_{i_1 \ldots i_6} x_1^{i_1} \ldots x_6^{i_6},$$

welche ein jedes x höchstens in erster Potenz enthält, bestimmt. Weiter nehme man die sechs algebraischen Formen:

$$\varphi_1 = x_1^2 - 1, \varphi_2 = x_2^2 - 1, \varphi_3 = x_3^2 - 1,$$
$$\varphi_4 = x_4^2 - 1, \varphi_5 = x_5^2 - 1, \varphi_6 = x_6^2 - 1$$

und bilde die Resultante dieser 7 Formen.

Die Resultante der Formen kann man auf zwei verschiedene Weisen darstellen, sie ist nämlich:

$$1)\ R = \Pi_\varepsilon \left\{\sum a_{i_1 \ldots i_6} \varepsilon_1^{i_1} \ldots \varepsilon_6^{i_6}\right\},$$

wo $\varepsilon_\rho^2 = 1$ ($\rho = 1, 2 \ldots 6$) und wo das Product Π_ε über alle 64 Werthsysteme der ε auszudehnen ist;

2) gleich der Determinante Δ der 64 Formen:

$$\varepsilon_1^{k_1} \ldots \varepsilon_6^{k_6} \sum a_{i_1 \ldots i_6} \varepsilon_1^{i_1} \ldots \varepsilon_6^{i_6},$$

die als lineare in den 64 Variabeln:

$$\varepsilon_1^{h_1} \varepsilon_2^{h_2} \ldots \varepsilon_6^{h_6}$$

aufgefasst werden, wo die $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_6$ ein System der 2ten Wurzel der Einheit bilden. Die 64 Formen erhalten wir, indem wir statt $k_1 \ldots k_6$ alle 64 Characteristiken unserer Gruppe $\mathfrak{A}_2$ der Reihe nach setzen.

Die Glieder in einer jeden dieser Formen ordnen wir wiederum so, dass die Variabeln $\varepsilon_1^{h_1} \ldots \varepsilon_6^{h_6}$ auf einander folgen, wenn $h_1 \ldots h_6$ die 64 Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ durchläuft, wobei natürlich $h_\rho + 2 = h_\rho$ ist.

In der Determinante Δ der so geordneten Formen treten nun alle Characteristiken der Multiplicationstabelle in derselben Reihenfolge als Indices $i_1 \ldots i_6$ der Coefficienten a auf.

In dem Producte $R = \Pi_\varepsilon$ bedeuten die ε entweder $+1$ oder -1, wir können daher setzen:

$$\varepsilon_1 = (-1)^{k_1} \quad \varepsilon_2 = (-1)^{k_2} \quad \varepsilon_3 = (-1)^{k_3}$$
$$\varepsilon_4 = (-1)^{k_4} \quad \varepsilon_5 = (-1)^{k_5} \quad \varepsilon_6 = (-1)^{k_6}.$$

Die ε nehmen dann alle möglichen Werthe an, wenn $k_1 \ldots k_6$ die Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ durchläuft; ebenso denken wir uns die $i_1 \ldots i_6$ die Characteristiken derselben Gruppe der Reihe nach durchlaufen. Nach dem eben Gesagten ist also:

$$\varepsilon_1^{i_1} \ldots \varepsilon_6^{i_6} = (-1)^{k_1 i_1 + \ldots + k_6 i_6}$$

also gleich $+1$ oder -1 jenachdem $|k,i| \equiv 0 \pmod 2$ oder $|k,i| \equiv 1 \pmod 2$. Berücksichtigt man noch, dass es zu jeder Characteristik eine umgekehrte giebt und dass ein Product unverändert bleibt, wenn seine Factoren mit einander vertauscht werden, so sieht man, dass eine jede Reihe in der Tabelle II die Vorzeichen der Coefficienten a in einem Factor des Productes Π_ε angiebt. Da endlich $\Delta = R$ ist, so hat man folgenden Satz:

„Die Multiplicationstabelle der Characteristiken giebt der Reihe nach die Indices der Coefficienten a in der Resultante Δ der sieben Formen:

$$\mathfrak{f} = \sum_{i_1 \ldots i_6} a_{i_1 \ldots i_6} x_1^{i_1} \ldots x_6^{i_6}$$

$$\varphi_1 = x_1^2 - 1,\ \varphi_2 = x_2^2 - 1,\ \varphi_3 = x_3^2 - 1,$$

$$\varphi_4 = x_4^2 - 1,\ \varphi_5 = x_5^2 - 1,\ \varphi_6 = x_6^2 - 1$$

und entwickelt man die Determinante Δ in das geordnete Product:

$$\Delta = R = \Pi_\varepsilon \left\{ \sum_{i_1 \ldots i_6} a_{i_1 \ldots i_6} \varepsilon_1^{i_1} \ldots \varepsilon_6^{i_6} \right\},$$

so giebt die Tabelle der Werthe von $(-1)^{|\alpha,\beta|}$ die Vorzeichen in den Factoren von R.“ *)

Anm. Aus dem Obigen ersieht man, wie man durch Resultantenbildung von algebraischen Formen die den Tabellen I und II entsprechenden für die allgemeine Gruppe $\mathfrak{A}_p$ bilden kann.

*) Vgl. Nöther, Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten. Math. Ann. XVI. Puchta, Ein Determinantensatz und seine Umkehrung. Denkschr. d. Wien. Ac. Bd. 38.

9.

Schon bei der Construction der Multiplicationstabelle der Characteristiken haben wir gesehen, dass der Multiplication der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ mit einer Characteristik α eine Substitution entspricht. Von dieser Substitution wissen wir weiter, dass sie aus lauter Transpositionen besteht und dass die zwei Glieder jeder Transposition eine Zerlegung der Characteristik α in zwei von einander verschiedene Characteristiken darstellt. Ausserdem ist aus der Entstehungsweise der Substitutionen klar, dass in jeder derselben alle Characteristiken vorkommen müssen und dass daher jede Substitution aus 32 Transpositionen besteht. Unter diesen Tranpositionen kann man zwei Gattungen unterscheiden, je nachdem sie Characteristiken von gleichem oder ungleichem Character enthalten. Die erste Gattung zerfällt wieder in zwei Arten, je nachdem die Characteristiken gerade oder ungerade sind.

Wir wollen nun die Anzahlen der in den verschiedenen Arten und Gattungen enthaltenen Characteristiken bestimmen. Es sei also α eine beliebige Characteristik und $(\beta\gamma)$ irgend eine Transposition der α entsprechenden Substitution, so ist immer $\alpha = \beta \cdot \gamma$ und weil auch $\beta = \alpha \cdot \gamma$, so erhält man alle Transpositionen, jede zweimal, wenn γ alle 64 Characteristiken durchläuft und immer die dazu gehörige $\beta = \alpha \cdot \gamma$ bestimmt wird. Durchläuft aber γ die 36 geraden Characteristiken, so erhält man offenbar jede Transposition der ersten Art 2 Mal und jede Transposition der zweiten Gattung 1 Mal; durchläuft weiter γ die 28 ungeraden Characteristiken, so erhält man jede Transposition der zweiten Art 2 Mal und jede Transposition der zweiten Gattung wieder 1 Mal. Bezeichnet man nun die resp. Anzahlen der Transpositionen mit x, x', y, so hat man also:

$$36 = 2\,x + y$$
$$28 = 2\,x' + y$$

Eine dritte Gleichung erhält man aus der Bemerkung, dsss, wenn β und γ gleichen Character haben, der Ausdruck $(-1)^{|\beta|} . (-1)^{|\gamma|}$ den Werth $+ 1$ und wenn β und γ entgegengesetzten Character haben, den Werth -1 erhält. Es ist also:

$$2\,(x + x' - y) = \Sigma\,(-1)^{|\beta| + |\gamma|} = \Sigma\,(-1)^{|\alpha\gamma| + |\gamma|}$$
$$= \Sigma(-1)^{|\alpha| + |\gamma| + |\alpha\gamma|} . (-1)^{|\alpha|} = (-1)^{|\alpha|} \Sigma(-1)^{|\alpha,\gamma|} = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man: $x = 10$ $x' = 6$ und $y = 16$. Man hat also den Satz:

„Die einer beliebigen Characteristik α entsprechende Substitution besteht aus 32 Transpositionen, unter welchen 10 aus nur geraden, 6 aus nur ungeraden und 16 aus einer geraden und einer ungeraden Characteristik bestehen“ *).

Hiernach kann man die Gruppe aller 64 Characteristiken in Bezug auf eine beliebige, die nicht 1

*) Vgl. Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel. Leipzig 1882.

sein darf, Characteristik α, in zwei Systeme eintheilen, indem man alle Characteristiken, welche in den Transpositionen erster Gattung vorkommen, zum ersten und alle die, welche in den Transpositionen zweiter Gattung sich vorfinden, zum zweiten Systeme rechnet. Von den in derselben Transposition enthaltenen Characteristiken sagt man, dass sie in dem Systeme gepaart vorkommen. Die Characteristik α, welche das Product je zweier in einem Systeme gepaart vorkommenden Characteristiken ist, nennen wir die Systemcharacteristik.

Die in der Multiplicationstabelle enthaltene Substitutionsgruppe kann man also in zwei Systeme von Substitutionen zerfällen, indem man jede Substitution in zwei andere zerlegt, von denen die eine alle Transpositionen erster Gattung und die andere alle Transpositionen zweiter Gattung enthält.

Der Characteristikengruppe $\mathfrak{A}_2$ kann man also zwei Systeme von Substitutionen zuordnen, wenn man die identische Substitution als zu beiden Systemen gehörig betrachtet und der Characteristik 1 zuordnet.

Bezeichnet man die den Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ zugeordneten Substitutionen aus dem Systeme erster Gattung der Reihe nach mit:

$$a_1'\ a_2' \ldots a_{64}',$$

und diejenigen aus dem Systeme zweiter Gattung mit:

$$a_1''\ a_2'' \ldots a_{64}'',$$

so kommen die Substitutionen der $\mathfrak{A}_2$ zugeordneten Gruppe in dem Polynom:

$$\left| a_1' \, a_2' \ldots a_{64}', \, a_1'' \, a_2'' \ldots a_{64}'' \right|$$

als Glieder vor.

Da das der Gruppe $\mathfrak{A}_2$ zugeordnete System von Substitutionen erster Gattung den Gegenstand eingehender Untersuchungen der Herren Weber und Noether bildet, so verweisen wir den Leser auf dieselben*). Das Mittel, durch welches sowohl Herr Weber als auch Herr Noether alle von ihnen betrachteten Characteristikensysteme herleiten, ist eine vollständige Tabelle der Substitutionen erster Gattung, so dass man ihre Characteristikentheorien als eine Theorie dieser Tabelle bezeichnen kann. Wir theilen daher diese Tabelle, welche bei Herrn Weber nicht vollständig ist, hier als Tabelle I^a mit. In derselben sind die beiden Glieder einer Transposition übereinander geschrieben. Im Vorigen haben wir die Characteristiken nach dem Symbole $\varepsilon = (-1)^{|\alpha|}$ systematisirt, jetzt wollen wir dieselben nach dem Symbole $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha,\beta|}$ in Systeme bringen und stellen uns daher die beiden Aufgaben:

*) Weber, Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1881.

Noether, Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten. Math. Ann. XVI.

Vgl. auch Riemann, Zur Theorie der Abelschen Functionen für den Fall $p = 3$. Werke p. 456.

1) alle Characteristikensysteme zu finden, zwischen derer je zweien Characteristiken die Beziehung $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha,\beta|} = +1$ und

2) die Beziehung $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha,\beta|} = -1$ besteht. Um diese Aufgaben zu lösen, entnehmen wir der Tabelle II folgende zwei Hilfstabellen:

1) Wir schreiben neben einer jeden Characteristik α alle die Characteristiken β hin, welche mit dieser in der Beziehung $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha,\beta|} = +1$ stehen und deren sie bezeichnende Ziffern grösser sind als die die α bezeichnende, also $\beta > \alpha$;

2) wir schreiben neben einer jeden Characteristik α alle die Characteristiken β hin, welche mit dieser in der Beziehung $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha,\beta|} = -1$ stehen und deren sie bezeichnende Ziffern grösser sind als die die α bezeichnende, also $\beta > \alpha$.

Diese Tabellen finden sich hier als II^a und II^b aufgeführt. Die Methode, wie man mit Hilfe derselben die gestellten Aufgaben löst, will ich an einem Beispiele erläutern.

Wir wollen z. B. alle Systeme von 8 Characteristiken finden, deren je zwei in der Beziehung $C_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha,\beta|} = +1$ stehen. Diese Systeme werden offenbar unter den Combinationen zur 8$^{\text{ten}}$ Classe von den Elementen $1 \ldots 64$ vorkommen, da aber 1 mit jeder anderen Characteristik in der Beziehung $(-1)^{|1,\beta|} = +1$

steht, so wird sie in jedem der gesuchten Systeme vorkommen, wir brauchen daher nur die Combinationen zur 7^{ten} Classe von den Elementen 2 ... 64 zu betrachten. Beginnen wir mit den Combinationen, die mit 2 anfangen; unter diesen brauchen wir nur solche zu berücksichtigen, derer Elemente die in der Tabelle II^a neben 2 stehenden Ziffern sind. Unter diesen sind nun solche, welche mit 2,3 beginnen, wir müssen daher die gemeinschaftlichen Elemente der Reihen 2 und 3 nehmen, diese sind:

$$\left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right| \; 4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15\;16.$$

Die den Reihen 2, 3 und 4 gemeinschaftlichen Elemente sind aber:

$$\left.\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right| \; 5\;6\;7\;8\;9\;10\;11\;12\;13\;14\;15\;16.$$

Auf diese Weise fortfahrend überzeugt man sich, dass unter allen Combinationen, welche mit 2 3 4 beginnen, nur folgende zwei den aufgestellten Bedingungen genügen:

2 3 4 9 10 11 12
2 3 4 13 14 15 16.

Ich glaube, dass durch dieses Beispiel die einfache Methode, nach welcher die Tabellen III und IV berechnet worden sind, klar genug gemacht ist.

Die Tabelle III enthält alle 135 Systeme von 8 Characteristiken, derer je zwei der Bedingung $C_{\alpha\beta} = +1$ genügen. Multiplicirt man irgend eines dieser

Systeme mit allen 64 Characteristiken, so erhält man nur 8 von einander verschiedene Systeme, weil aus $(-1)^{|\alpha,\beta|} = +1$ und $(-1)^{|\alpha,\gamma|} = +1$ $(-1)^{|\alpha,\beta\gamma|}$ folgt und also alle in der Tabelle enthaltenen Systeme Gruppen sind. Diese 8 Systeme nennt man nach Frobenius einen Complex Göpelscher Systeme.

Die Tabelle IV enthält, wenn man darin überall die 1 weglässt, alle 288 Systeme von 7 Characteristiken, derer je zwei der Bedingung $(-1)^{|\alpha,\beta|} = -1$ genügen. Diese Systeme sind nach dem Producte der in ihnen vorkommenden ungeraden oder auch geraden Characteristiken geordnet. Dieses Product ist in der Rubrik K neben den acht zusammengehörigen Systemen angeschrieben. Die acht zusammengehörigen Systeme erhält man aus einem derselben, indem man es der Reihe nach mit den in ihm enthaltenen Characteristiken multiplicirt. Entnimmt man der Tabelle IV 36 Systeme, je eines von den acht zusammengehörigen Systemen, und multiplicirt dieselben mit allen 64 Characteristiken, so erhält man die 36 Complexe von Fundamentalsystemen aus je 64 Systemen bestehend. In jedem Complexe von Fundamentalsystemen kommen 8 Systeme vor, welche von Herrn Weber „vollständige Systeme von ungeraden Charakteristiken“ genannt sind. Man erhält dieselben, wenn man jedes System in der Tabelle IV mit der nebenstehenden Characteristik K multiplicirt.

In der Tabelle IV beanspruchen die ersten acht zusammengehörigen Systeme ein besonderes Interesse, weil sie eine Multiplicationstabelle liefern, wo nur ungerade Characteristiken enthalten sind; sie sind daher auch in der Form einer Multiplicationstabelle geschrieben.

Um unsere gestellten Aufgaben vollständig zu lösen, müssten wir noch alle Systeme von je 6, 5, 4, 3 und 2 Characteristiken, welche den oben gestellten Bedingungen genügen, berechnen, doch da diese von keinem besonderen Interesse sind, unterlassen wir hier die Mittheilung derselben. Ebenso führen wir die Systematisirung der Characteristiken nach dem Symbole $(-1)^{\left|\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right|}$ nicht an.

Die in den Tabellen III und IV berechneten Systeme von Characteristiken sind von den Herren Prym, Frobenius und Stahl ausführlich behandelt worden.

Die Characteristikentheorien der genannten Herren könnte man als die Theorie obiger Systeme bezeichnen. Wir begnügen uns, den Leser auf die betreffenden Abhandlungen zu verweisen. Diese sind:

Stahl, Beweis eines Satzes von Riemann über die ϑ-Characteristiken. Crelle Journ. Bd 88.

Frobenius, das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Crelle Journ. Bd 89.

Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel.

10.

Zum Schlusse wollen wir noch einige Anwendungen unserer Characteristikentheorie anführen.

Wir nehmen irdend welche sechs Primzahlen p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 und bilden daraus alle Zahlen durch Multiplication und Potenzirung sowohl mit positiven als auch negativen rationalen Exponenten. Die Gesammtheit aller dieser Zahlen bilden offenbar eine Gruppe. Jeder Zahl der Gruppe kann man nun eine Characteristik zuordnen, nämlich die Exponenten der Zahlen p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6, womit diese der Reihe nach potenzirt werden müssen, um die Zahl zu erhalten. Man sieht auch sofort, dass, wenn der Zahl a die Characteristik α und der Zahl b die Characteristik β zugeordnet sind, dem Producte a . b das Product $\alpha . \beta$ zugeordnet werden muss.

Die zugeordneten Characteristiken werden also auch eine Gruppe und zwar von derselben Zusammensetzung wie die Zahlengruppe bilden. Diese Characteristikengruppe haben wir im Vorigen als dem rationalen Zahlenkörper R zugehörig betrachtet. Man kann daher diese Gruppe in die Gruppen $\mathfrak{A}_p$ zerlegen. Also ist jeder Characteristiken-Gruppe $\mathfrak{A}_p$ eine Zahlengruppe A_p zugeordnet. Der Eintheilung der Characteristiken in Geschlechter entspricht die Eintheilung der Zahlen nach den Irrationalitäten, indem man zwei Zahlen zu demselben Geschlechte rechnet, wenn sie dieselbe Irrationalität haben. Da aber die p^{ten} Wurzeln aus reellen Zahlen mehrdeutig sind, so werden auch die Zahlen der Gruppe A_p im Allgemeinen mehrdeutig sein. Um in diese Mehrdeutigkeiten Ordnung hineinzubringen, wenden wir dieselbe Characteristikengruppe $\mathfrak{A}_p$ zum zweiten Male an. Alle Werthe einer bestimmten Zahl aus der Gruppe A_p erhalten wir, wenn wir den absoluten Betrag derselben mit gewissen Potenzen der Einheitswurzel $\varepsilon = \sqrt[p]{1}$ multipliciren und zwar einen jeden derselben ein- oder mehrmal, wenn wir den absoluten Betrag mit den Potenzen von ε, deren Exponenten die Compositionen der der Zahl zugeordneten Characteristik mit allen Characteristiken der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ sind, der Reihe nach multipliciren. Also entspricht einer jeden Characteristik der Gruppe $\mathfrak{A}_p$ ein eindeutig bestimmter Werth der von uns betrachteten Zahl. In dieser Bedeutung vertritt die Gruppe $\mathfrak{A}_p$ gewissermassen die Riemann'sche Fläche, indem sie Mehrdeutigkeiten auf Eindeutigkeiten zurückführt.

Die Zahlengruppe A_p zerfällt in p^6 Zweige, wenn man die eindeutigen Werthe der Zahlen, welche derselben Characteristik entsprechen, zu einem Zweige rechnet. Bezeichnen wir nun mit s_β die Summe aller Repräsentanten des Zweiges β von der Gruppe A_p und mit $a_1\, a_2 \dots a_{p^6}$ die absoluten Beträge der Repräsentanten, so ist:

$$\overset{p^6}{\underset{1}{\beta}}\left(s_\beta\right) = \left|\, \varepsilon^{|\alpha,\beta|},\ a_1\, a_2 \dots a_{p^6} \right|.$$

Dieses Gleichungssystem nennt Herr Prym in seiner Abhandlung: Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel, ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System und hat es auch für den Fall $p = 2$ theilweise untersucht und mit Hilfe der Thetaformel interpretirt; doch unsere Characteristikentheorie bietet die Mittel dar, dasselbe viel vollständiger zu untersuchen.

Durch den vorigen ganz ähnliche Betrachtungen kann man auch auf die ebenfalls von Herrn Prym so benannten characteristischen Functionen kommen, auf welche sich die Theorie der hyperelliptischen Functionen bequem gründen lässt.

Obgleich die Anwendung der Characteristiken auf die Thetafunctionen allbekannt ist, so ist doch bis jetzt kein anderer als der Riemann'sche Weg betreten worden, um zu den Characteristiken der Thetafunctionen zu gelangen.

Daher, glaube ich, wird es nicht ganz ohne Interesse sein, wenn ich hier einen anderen Weg mittheile.

Wir verstehen unter der Composition einer Grössenreihe mit einem Complexe von mehreren Grössenreihen die Compositionen der ersten Reihe mit allen Reihen des Complexes. Soll in solchen Fällen angezeigt werden, dass die erste Grössenreihe mit dem erhaltenen Resultate noch einmal componirt werden soll, so setzen wir vor derselben zwei Compositionsstriche. Eine Gruppe wollen wir bezeichnen, indem wir die

Basis derselben in eckige Klammern einschliessen. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

so kann man die bekannte Thetareihe von drei Variabeln auch folgendermassen schreiben:

$$\vartheta\big((v)\big) = \sum_{[111]} e^{\|(m), A\,| + 2\,|(m),(v)|}$$

Diese Summe kann man nun dadurch verallgemeinern, dass man den Punct (m) statt die Gruppe [111] die Gruppe [111] . [(g)] durchlaufen lässt, wo (g) einen beliebigen festen Punct bedeutet. Die Summe:

$$\psi\big((v)\big) = \sum_{[111]\,.\,[(g)]} e^{\|(m), A\,| + 2\,|(m),(v)|}$$

kann man in ein Aggregat von Summen zerlegen, indem man die angedeutete Multiplication der Gruppen ausführt. Man hat dann:

$$\psi\big((v)\big) = \sum_{[(g)]} \Big(\sum_{(g')\,[111]} e^{\|(m), A\,| + 2\,|(m),(v)|} \Big).$$

Bei dieser Summation sind statt (g′) nur die in Bezug auf [111] nicht gleichen Puncte von [(g)] zu setzen. Sind $g_1\ g_2\ g_3$ irrationale Zahlen, so giebt es in der Gruppe [(g)] unendlich viele in Bezug auf [111] nicht gleiche Puncte, sind aber $g_1\ g_2\ g_3$ rational, so ist die Anzahl solcher Puncte stets eine endliche. Im ersten Falle zerfällt daher $\psi\big((v)\big)$ in unendlich viele Summen, im zweiten dagegen in ein endliches Aggregat. In beiden Fällen sind die bei $\psi\big((v)\big)$ vorkommenden Summen sehr ähnlich der ϑ-Function und diese kommt unter jenen auch als specieller Fall vor; man bezeichnet daher dieselben mit:

$$\vartheta_{(g)}\big((v)\big) = \sum_{[111]} e^{\|(m).(g), A\,| + 2\,|(m).(g),(v)|}$$

Die neue Function kann durch die ursprüngliche ausgedrückt werden mit Hilfe der Gleichung:

$$\vartheta_{(g)}\big((v)\big) = \vartheta\Big(v_1 + |(g),(a_1)|; v_2 + |(g),(a_2)|; v_3 + |(g),(a_3)|\Big) \times e^{\|(g), A\,| + 2\,|(g),(v)|}$$

Das Hinzufügen eines Index (g) bei einer ϑ-Function bedeutet also eine Vermehrung der Argumente um die Compositionen von (g) mit den zu der betreffenden Variablen gehörigen Perioden a und eine Multiplication der Function mit einer gewissen Exponentialgrösse. Nach dieser Analogie können wir die Thetafunction weiter verallgemeinern, indem wir den Argumenten $v_1\ v_2\ v_3$ auch noch die Compositionen eines beliebigen Punctes (h) mit den entsprechenden zweiten Periodensystemen: $\pi i\,0\,0$, $0\,\pi i\,0$, $0\,0\,\pi i$ hinzufügen.

Die so verallgemeinerte ϑ-Function können wir mit $\vartheta\binom{g}{h}$ bezeichnen. Es ist also:

$$\vartheta\binom{g}{h}\big((v)\big) = \sum_{[111]} e^{\|(m).(g), A\,| + 2\,|(m).(g),(v).(h\pi i)|}$$

Den Zahlencomplex $\binom{g}{h}$ nennt man die Characteristik der Thetafunction.

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17	20	19	22	21	24	23	26	25	28	27	30	29	32	31	34	33	36	35	38	37	40	39	42	41	44	43	46	45	48	47	50	49	52	51	54	53	56	55	58	57	60	59	62	61	64	63
3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14	19	20	17	18	23	24	21	22	27	28	25	26	31	32	29	30	35	36	33	34	39	40	37	38	43	44	41	42	47	48	45	46	51	52	49	50	55	56	53	54	59	60	57	58	63	64	61	62
4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13	20	19	18	17	24	23	22	21	28	27	26	25	32	31	30	29	36	35	34	33	40	39	38	37	44	43	42	41	48	47	46	45	52	51	50	49	56	55	54	53	60	59	58	57	64	63	62	61
5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12	21	22	23	24	17	18	19	20	29	30	31	32	25	26	27	28	37	38	39	40	33	34	35	36	45	46	47	48	41	42	43	44	53	54	55	56	49	50	51	52	61	62	63	64	57	58	59	60
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11	22	21	24	23	18	17	20	19	30	29	32	31	26	25	28	27	38	37	40	39	34	33	36	35	46	45	48	47	42	41	44	43	54	53	56	55	50	49	52	51	62	61	64	63	58	57	60	59
7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10	23	24	21	22	19	20	17	18	31	32	29	30	27	28	25	26	39	40	37	38	35	36	33	34	47	48	45	46	43	44	41	42	55	56	53	54	51	52	49	50	63	64	61	62	59	60	57	58
8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9	24	23	22	21	20	19	18	17	32	31	30	29	28	27	26	25	40	39	38	37	36	35	34	33	48	47	46	45	44	43	42	41	56	55	54	53	52	51	50	49	64	63	62	61	60	59	58	57
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	25	26	27	28	29	30	31	32	17	18	19	20	21	22	23	24	41	42	43	44	45	46	47	48	33	34	35	36	37	38	39	40	57	58	59	60	61	62	63	64	49	50	51	52	53	54	55	56
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7	26	25	28	27	30	29	32	31	18	17	20	19	22	21	24	23	42	41	44	43	46	45	48	47	34	33	36	35	38	37	40	39	58	57	60	59	62	61	64	63	50	49	52	51	54	53	56	55
11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6	27	28	25	26	31	32	29	30	19	20	17	18	23	24	21	22	43	44	41	42	47	48	45	46	35	36	33	34	39	40	37	38	59	60	57	58	63	64	61	62	51	52	49	50	55	56	53	54
12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5	28	27	26	25	32	31	30	29	20	19	18	17	24	23	22	21	44	43	42	41	48	47	46	45	36	35	34	33	40	39	38	37	60	59	58	57	64	63	62	61	52	51	50	49	56	55	54	53
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4	29	30	31	32	25	26	27	28	21	22	23	24	17	18	19	20	45	46	47	48	41	42	43	44	37	38	39	40	33	34	35	36	61	62	63	64	57	58	59	60	53	54	55	56	49	50	51	52
14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3	30	29	32	31	26	25	28	27	22	21	24	23	18	17	20	19	46	45	48	47	42	41	44	43	38	37	40	39	34	33	36	35	62	61	64	63	58	57	60	59	54	53	56	55	50	49	52	51
15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2	31	32	29	30	27	28	25	26	23	24	21	22	19	20	17	18	47	48	45	46	43	44	41	42	39	40	37	38	35	36	33	34	63	64	61	62	59	60	57	58	55	56	53	54	51	52	49	50
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
18	17	20	19	22	21	24	23	26	25	28	27	30	29	32	31	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	50	49	52	51	54	53	56	55	58	57	60	59	62	61	64	63	34	33	36	35	38	37	40	39	42	41	44	43	46	45	48	47
19	20	17	18	23	24	21	22	27	28	25	26	31	32	29	30	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14	51	52	49	50	55	56	53	54	59	60	57	58	63	64	61	62	35	36	33	34	39	40	37	38	43	44	41	42	47	48	45	46
20	19	18	17	24	23	22	21	28	27	26	25	32	31	30	29	4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13	52	51	50	49	56	55	54	53	60	59	58	57	64	63	62	61	36	35	34	33	40	39	38	37	44	43	42	41	48	47	46	45
21	22	23	24	17	18	19	20	29	30	31	32	25	26	27	28	5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12	53	54	55	56	49	50	51	52	61	62	63	64	57	58	59	60	37	38	39	40	33	34	35	36	45	46	47	48	41	42	43	44
22	21	24	23	18	17	20	19	30	29	32	31	26	25	28	27	6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11	54	53	56	55	50	49	52	51	62	61	64	63	58	57	60	59	38	37	40	39	34	33	36	35	46	45	48	47	42	41	44	43
23	24	21	22	19	20	17	18	31	32	29	30	27	28	25	26	7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10	55	56	53	54	51	52	49	50	63	64	61	62	59	60	57	58	39	40	37	38	35	36	33	34	47	48	45	46	43	44	41	42
24	23	22	21	20	19	18	17	32	31	30	29	28	27	26	25	8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9	56	55	54	53	52	51	50	49	64	63	62	61	60	59	58	57	40	39	38	37	36	35	34	33	48	47	46	45	44	43	42	41
25	26	27	28	29	30	31	32	17	18	19	20	21	22	23	24	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	57	58	59	60	61	62	63	64	49	50	51	52	53	54	55	56	41	42	43	44	45	46	47	48	33	34	35	36	37	38	39	40
26	25	28	27	30	29	32	31	18	17	20	19	22	21	24	23	10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7	58	57	60	59	62	61	64	63	50	49	52	51	54	53	56	55	42	41	44	43	46	45	48	47	34	33	36	35	38	37	40	39
27	28	25	26	31	32	29	30	19	20	17	18	23	24	21	22	11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6	59	60	57	58	63	64	61	62	51	52	49	50	55	56	53	54	43	44	41	42	47	48	45	46	35	36	33	34	39	40	37	38
28	27	26	25	32	31	30	29	20	19	18	17	24	23	22	21	12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5	60	59	58	57	64	63	62	61	52	51	50	49	56	55	54	53	44	43	42	41	48	47	46	45	36	35	34	33	40	39	38	37
29	30	31	32	25	26	27	28	21	22	23	24	17	18	19	20	13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4	61	62	63	64	57	58	59	60	53	54	55	56	49	50	51	52	45	46	47	48	41	42	43	44	37	38	39	40	33	34	35	36
30	29	32	31	26	25	28	27	22	21	24	23	18	17	20	19	14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3	62	61	64	63	58	57	60	59	54	53	56	55	50	49	52	51	46	45	48	47	42	41	44	43	38	37	40	39	34	33	36	35
31	32	29	30	27	28	25	26	23	24	21	22	19	20	17	18	15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2	63	64	61	62	59	60	57	58	55	56	53	54	51	52	49	50	47	48	45	46	43	44	41	42	39	40	37	38	35	36	33	34
32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
34	33	36	35	38	37	40	39	42	41	44	43	46	45	48	47	50	49	52	51	54	53	56	55	58	57	60	59	62	61	64	63	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17	20	19	22	21	24	23	26	25	28	27	30	29	32	31
35	36	33	34	39	40	37	38	43	44	41	42	47	48	45	46	51	52	49	50	55	56	53	54	59	60	57	58	63	64	61	62	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14	19	20	17	18	23	24	21	22	27	28	25	26	31	32	29	30
36	35	34	33	40	39	38	37	44	43	42	41	48	47	46	45	52	51	50	49	56	55	54	53	60	59	58	57	64	63	62	61	4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13	20	19	18	17	24	23	22	21	28	27	26	25	32	31	30	29
37	38	39	40	33	34	35	36	45	46	47	48	41	42	43	44	53	54	55	56	49	50	51	52	61	62	63	64	57	58	59	60	5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12	21	22	23	24	17	18	19	20	29	30	31	32	25	26	27	28
38	37	40	39	34	33	36	35	46	45	48	47	42	41	44	43	54	53	56	55	50	49	52	51	62	61	64	63	58	57	60	59	6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11	22	21	24	23	18	17	20	19	30	29	32	31	26	25	28	27
39	40	37	38	35	36	33	34	47	48	45	46	43	44	41	42	55	56	53	54	51	52	49	50	63	64	61	62	59	60	57	58	7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10	23	24	21	22	19	20	17	18	31	32	29	30	27	28	25	26
40	39	38	37	36	35	34	33	48	47	46	45	44	43	42	41	56	55	54	53	52	51	50	49	64	63	62	61	60	59	58	57	8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9	24	23	22	21	20	19	18	17	32	31	30	29	28	27	26	25
41	42	43	44	45	46	47	48	33	34	35	36	37	38	39	40	57	58	59	60	61	62	63	64	49	50	51	52	53	54	55	56	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	25	26	27	28	29	30	31	32	17	18	19	20	21	22	23	24
42	41	44	43	46	45	48	47	34	33	36	35	38	37	40	39	58	57	60	59	62	61	64	63	50	49	52	51	54	53	56	55	10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7	26	25	28	27	30	29	32	31	18	17	20	19	22	21	24	23
43	44	41	42	47	48	45	46	35	36	33	34	39	40	37	38	59	60	57	58	63	64	61	62	51	52	49	50	55	56	53	54	11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6	27	28	25	26	31	32	29	30	19	20	17	18	23	24	21	22
44	43	42	41	48	47	46	45	36	35	34	33	40	39	38	37	60	59	58	57	64	63	62	61	52	51	50	49	56	55	54	53	12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5	28	27	26	25	32	31	30	29	20	19	18	17	24	23	22	21
45	46	47	48	41	42	43	44	37	38	39	40	33	34	35	36	61	62	63	64	57	58	59	60	53	54	55	56	49	50	51	52	13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4	29	30	31	32	25	26	27	28	21	22	23	24	17	18	19	20
46	45	48	47	42	41	44	43	38	37	40	39	34	33	36	35	62	61	64	63	58	57	60	59	54	53	56	55	50	49	52	51	14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3	30	29	32	31	26	25	28	27	22	21	24	23	18	17	20	19
47	48	45	46	43	44	41	42	39	40	37	38	35	36	33	34	63	64	61	62	59	60	57	58	55	56	53	54	51	52	49	50	15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2	31	32	29	30	27	28	25	26	23	24	21	22	19	20	17	18
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
50	49	52	51	54	53	56	55	58	57	60	59	62	61	64	63	34	33	36	35	38	37	40	39	42	41	44	43	46	45	48	47	18	17	20	19	22	21	24	23	26	25	28	27	30	29	32	31	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
51	52	49	50	55	56	53	54	59	60	57	58	63	64	61	62	35	36	33	34	39	40	37	38	43	44	41	42	47	48	45	46	19	20	17	18	23	24	21	22	27	28	25	26	31	32	29	30	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14
52	51	50	49	56	55	54	53	60	59	58	57	64	63	62	61	36	35	34	33	40	39	38	37	44	43	42	41	48	47	46	45	20	19	18	17	24	23	22	21	28	27	26	25	32	31	30	29	4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13
53	54	55	56	49	50	51	52	61	62	63	64	57	58	59	60	37	38	39	40	33	34	35	36	45	46	47	48	41	42	43	44	21	22	23	24	17	18	19	20	29	30	31	32	25	26	27	28	5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12
54	53	56	55	50	49	52	51	62	61	64	63	58	57	60	59	38	37	40	39	34	33	36	35	46	45	48	47	42	41	44	43	22	21	24	23	18	17	20	19	30	29	32	31	26	25	28	27	6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
55	56	53	54	51	52	49	50	63	64	61	62	59	60	57	58	39	40	37	38	35	36	33	34	47	48	45	46	43	44	41	42	23	24	21	22	19	20	17	18	31	32	29	30	27	28	25	26	7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10
56	55	54	53	52	51	50	49	64	63	62	61	60	59	58	57	40	39	38	37	36	35	34	33	48	47	46	45	44	43	42	41	24	23	22	21	20	19	18	17	32	31	30	29	28	27	26	25	8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9
57	58	59	60	61	62	63	64	49	50	51	52	53	54	55	56	41	42	43	44	45	46	47	48	33	34	35	36	37	38	39	40	25	26	27	28	29	30	31	32	17	18	19	20	21	22	23	24	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
58	57	60	59	62	61	64	63	50	49	52	51	54	53	56	55	42	41	44	43	46	45	48	47	34	33	36	35	38	37	40	39	26	25	28	27	30	29	32	31	18	17	20	19	22	21	24	23	10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7
59	60	57	58	63	64	61	62	51	52	49	50	55	56	53	54	43	44	41	42	47	48	45	46	35	36	33	34	39	40	37	38	27	28	25	26	31	32	29	30	19	20	17	18	23	24	21	22	11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6
60	59	58	57	64	63	62	61	52	51	50	49	56	55	54	53	44	43	42	41	48	47	46	45	36	35	34	33	40	39	38	37	28	27	26	25	32	31	30	29	20	19	18	17	24	23	22	21	12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5
61	62	63	64	57	58	59	60	53	54	55	56	49	50	51	52	45	46	47	48	41	42	43	44	37	38	39	40	33	34	35	36	29	30	31	32	25	26	27	28	21	22	23	24	17	18	19	20	13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
62	61	64	63	58	57	60	59	54	53	56	55	50	49	52	51	46	45	48	47	42	41	44	43	38	37	40	39	34	33	36	35	30	29	32	31	26	25	28	27	22	21	24	23	18	17	20	19	14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3
63	64	61	62	59	60	57	58	55	56	53	54	51	52	49	50	47	48	45	46	43	44	41	42	39	40	37	38	35	36	33	34	31	32	29	30	27	28	25	26	23	24	21	22	19	20	17	18	15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabelle Ia.

1																
2	13/14	15/16	19/20	23/24	27/28	29/30	1/2	3/4	5/6	7/8	9/10	11/12	17/18	21/22	25/26	31/32
3	13/15	14/16	34/36	38/40	42/44	45/47	1/3	2/4	5/7	6/8	9/11	10/12	33/35	37/39	41/43	46/48
4	13/16	14/15	50/51	54/55	58/59	61/64	1/4	2/3	5/8	6/7	9/12	10/11	49/52	53/56	57/60	62/63
5	19/23	20/24	34/38	36/40	50/54	51/55	1/5	2/6	3/7	4/8	17/21	18/22	33/37	35/39	49/53	52/56
6	19/24	20/23	42/45	44/47	58/61	59/64	1/6	2/5	3/8	4/7	17/22	18/21	41/46	43/48	57/62	60/63
7	27/29	28/30	34/40	36/38	58/64	59/61	1/7	2/8	3/5	4/6	25/31	26/32	33/39	35/37	57/63	60/62
8	27/30	28/29	42/47	44/45	50/55	51/54	1/8	2/7	3/6	4/5	25/32	26/31	41/48	43/46	49/56	52/53
9	19/27	20/28	34/42	36/44	50/58	51/59	1/9	2/10	3/11	4/12	17/25	18/39	33/41	35/43	49/57	52/60
10	19/28	20/27	38/45	40/47	54/61	55/64	1/10	2/9	3/12	4/11	17/26	18/25	37/46	39/48	53/62	56/63
11	15/44	23/29	24/30	36/42	54/64	55/61	1/11	2/12	3/9	4/10	21/31	22/32	33/43	35/41	53/63	56/62
12	23/30	24/29	38/47	40/45	50/59	51/58	1/12	2/11	3/10	4/9	21/32	22/31	37/48	39/46	49/60	52/57
13	23/27	24/28	38/42	40/44	54/58	55/59	5/9	6/10	7/11	8/12	21/25	22/26	37/41	39/43	53/57	56/60
14	23/28	24/27	34/45	36/47	50/61	51/64	5/10	6/9	7/12	8/11	21/26	22/25	33/46	35/48	49/62	52/63
15	19/29	20/30	38/44	40/42	50/64	51/61	5/11	6/12	7/9	8/10	17/31	18/32	37/43	39/41	49/63	52/62
16	19/30	20/29	34/47	36/45	54/59	55/58	5/12	6/11	7/10	8/9	17/32	18/31	33/48	35/46	53/60	56/57
17	14/30	31/29	34/50	38/54	42/58	45/61	1/17	2/18	5/21	6/22	9/25	10/39	33/49	37/53	41/57	46/62
18	13/30	14/29	36/51	40/55	44/59	47/64	1/18	2/17	5/22	6/21	9/26	10/25	35/52	39/56	43/60	48/63
19	15/29	16/30	36/50	40/54	44/58	47/61	3/17	4/18	7/21	8/22	11/25	12/26	35/49	39/53	43/57	48/62
20	15/30	16/29	34/51	38/55	42/59	45/64	3/18	4/17	7/22	8/21	11/26	12/25	33/52	37/56	41/60	46/63
21	15/27	16/28	34/54	38/50	44/64	47/59	1/21	2/22	5/17	6/18	11/31	12/32	33/53	37/49	43/63	48/60
22	15/28	16/27	36/55	40/51	42/61	45/58	1/22	2/21	5/18	6/17	11/32	12/31	35/56	39/52	41/62	46/57
23	13/27	14/28	36/54	40/50	42/64	45/59	3/21	4/22	7/17	8/18	9/31	10/32	35/53	39/49	41/63	46/60
24	13/28	14/27	34/55	38/51	44/61	47/58	3/22	4/21	7/18	8/17	9/32	10/31	33/56	37/52	43/62	48/57
25	23/15	24/16	34/58	40/64	50/42	55/47	1/25	2/26	7/31	8/32	17/9	18/10	33/57	39/63	49/41	56/48
26	15/24	16/23	36/59	38/61	44/51	45/54	1/26	2/25	7/32	8/31	9/18	10/17	35/60	37/62	43/52	46/53
27	13/23	14/24	36/58	38/64	44/50	45/55	3/25	4/26	5/31	6/32	11/17	12/18	35/57	37/63	43/49	46/56
28	13/24	14/23	34/59	40/61	42/51	47/54	3/26	4/25	5/32	6/31	11/18	12/17	33/60	39/62	41/52	48/53
29	19/15	20/16	38/58	36/64	51/47	54/42	3/31	4/32	5/25	6/26	21/9	22/10	35/63	37/57	52/48	53/41
30	19/16	20/15	34/61	40/59	50/45	55/44	3/32	4/31	5/26	6/25	21/10	22/9	33/62	39/60	49/46	56/43
31	13/19	14/20	34/64	40/58	44/54	45/51	1/31	2/32	7/25	8/26	11/21	12/22	33/63	39/57	43/53	46/52
32	13/20	14/19	36/61	38/59	42/55	47/50	1/32	2/31	7/26	8/25	11/22	12/21	35/62	37/60	41/56	48/49
33	13/45	15/47	19/51	23/55	27/59	29/61	1/33	3/35	5/37	7/39	9/41	11/43	17/49	21/53	25/57	31/63
34	14/45	16/47	20/51	24/55	28/59	30/61	2/33	4/35	6/37	8/39	10/41	12/43	18/49	22/53	26/57	32/63
35	13/47	15/45	20/50	24/54	28/58	30/64	1/35	3/33	5/39	7/37	9/43	11/41	18/52	22/56	26/60	32/62
36	14/47	16/45	19/50	23/54	27/28	29/64	2/35	4/33	6/39	8/37	10/43	12/41	17/52	21/56	25/60	31/62
37	14/42	16/44	19/55	23/51	28/64	30/58	1/37	3/39	5/33	7/35	10/46	12/48	17/53	21/49	26/62	32/60
38	13/42	15/44	20/55	24/51	27/64	29/58	2/37	4/39	6/33	8/35	9/46	11/48	18/53	22/49	25/62	31/60
39	14/44	16/42	20/54	24/50	27/61	29/59	1/39	3/37	5/35	7/33	10/48	12/46	18/56	22/52	25/63	31/57
40	13/44	15/42	19/54	23/50	28/61	30/59	2/39	4/37	6/35	8/33	9/48	11/46	17/56	21/52	26/63	32/57
41	14/38	16/40	19/59	24/64	27/51	30/54	1/41	3/43	6/46	8/48	9/33	11/35	17/57	22/62	25/49	32/56
42	13/38	15/40	20/59	23/64	28/51	29/54	2/41	4/43	5/46	7/48	10/33	12/35	18/57	21/62	26/49	31/56
43	14/40	16/38	20/58	23/61	28/50	29/55	1/43	3/41	6/48	8/46	9/35	11/33	18/60	21/63	26/52	31/53
44	13/40	15/38	19/58	24/61	27/50	30/55	2/43	4/41	5/48	7/46	10/35	12/33	17/60	22/63	25/52	32/53
45	14/34	16/36	20/64	23/59	27/55	30/50	2/46	4/48	5/41	7/43	9/37	11/39	18/62	21/57	25/53	32/52
46	13/34	15/36	19/64	24/59	28/55	29/50	1/46	3/48	6/41	8/43	10/37	12/39	17/62	22/57	26/53	31/52
47	14/36	16/34	19/61	24/58	28/54	29/51	2/48	4/46	5/43	7/41	9/39	11/37	17/63	22/60	26/56	31/49
48	13/36	15/34	20/61	23/58	27/54	30/51	1/48	3/46	6/43	8/41	10/39	12/37	18/63	21/60	25/56	32/49
49	13/61	16/64	20/36	24/40	28/44	29/45	1/49	4/52	5/53	8/56	9/57	12/60	17/33	21/37	25/41	32/48
50	14/61	15/64	19/36	23/40	27/44	30/45	2/49	3/52	6/53	7/56	10/57	11/60	18/33	22/37	26/41	31/48
51	14/64	15/61	20/34	24/38	28/42	29/47	2/52	3/49	6/56	7/53	10/60	11/57	17/35	21/39	25/43	32/46
52	13/64	16/61	19/34	23/38	27/42	30/47	1/52	4/49	5/56	8/53	9/60	12/57	18/35	22/39	26/43	31/36
53	14/58	15/59	20/40	24/36	27/47	30/42	1/53	4/56	5/49	8/52	10/62	11/63	17/37	21/33	26/46	31/43
54	13/58	16/59	19/40	23/36	28/47	29/42	2/53	3/56	6/49	7/52	9/62	12/63	18/37	22/33	25/46	32/43
55	13/59	16/58	20/38	24/34	27/45	30/44	2/56	3/53	6/52	7/49	9/63	12/62	17/39	21/35	26/48	31/41
56	14/59	15/58	19/38	23/34	28/45	29/44	1/56	4/53	5/52	8/49	10/63	11/62	18/39	22/35	25/48	32/41
57	14/54	15/55	20/44	23/47	28/36	30/38	1/57	4/60	6/62	7/63	9/49	12/52	17/41	22/46	25/33	31/39
58	13/54	16/55	19/44	24/47	27/36	29/38	2/57	3/60	5/62	8/63	10/49	11/52	18/41	21/46	26/33	32/39
59	13/55	16/54	20/42	23/45	28/34	30/40	2/60	3/57	5/63	8/62	10/52	11/49	17/43	22/48	25/35	31/37
60	14/55	15/54	19/42	24/45	27/34	29/40	1/60	4/57	6/63	7/62	9/52	12/49	18/43	21/48	26/35	32/37
61	14/50	15/51	19/47	24/44	28/40	30/34	2/62	3/63	5/57	8/60	9/53	12/56	18/46	21/41	25/37	31/35
62	13/50	16/51	20/47	23/44	27/40	29/34	1/62	4/63	6/57	7/60	10/53	11/56	17/46	22/41	26/37	32/35
63	13/51	16/50	19/45	24/42	28/38	30/36	1/63	4/62	6/60	7/57	10/56	11/53	18/48	21/43	25/39	31/33
64	14/51	15/50	20/45	23/42	27/38	29/36	2/63	3/62	5/60	8/57	9/56	12/53	17/48	22/43	26/39	32/33

Tabelle II.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
6	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
9	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
10	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+
11	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+
12	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
13	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
14	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
15	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
16	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
17	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
18	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+
19	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+
20	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
21	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
22	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−
23	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−
24	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
25	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
26	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−
27	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−
28	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
29	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
30	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+
31	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+
32	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
33	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
34	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
35	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
36	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
37	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
38	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−
39	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−
40	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
41	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
42	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−
43	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−
44	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
45	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
46	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+
47	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+
48	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
49	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
50	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−
51	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−
52	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
53	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
54	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+
55	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+
56	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
57	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
58	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+
59	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+
60	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
61	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
62	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−
63	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−
64	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

Tabelle IIa.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
5	6	7	8	17	18	19	20	21	22	23	24	33	34	35	36	37	38	39	40	49	50	51	52	53	54	55	56
6	7	8	17	18	19	20	21	22	23	24	41	42	43	44	45	46	47	48	57	58	59	60	61	62	63	64
7	8	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	57	58	59	60	61	62	63	64
8	25	26	27	28	29	30	31	32	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
9	10	11	12	17	18	19	20	25	26	27	28	33	34	35	36	41	42	43	44	49	50	51	52	57	58	59	60
10	11	12	17	18	19	20	25	26	27	28	37	38	39	40	45	46	47	48	53	54	55	56	61	62	63	64
11	12	21	22	23	24	29	30	31	32	33	34	35	36	41	42	43	44	53	54	55	56	61	62	63	64
12	21	22	23	24	29	30	31	32	37	38	39	40	45	46	47	48	49	50	51	52	57	58	59	60
13	14	15	16	17	18	19	20	29	30	31	32	33	34	35	36	45	46	47	48	49	50	51	52	61	62	63	64
14	15	16	17	18	19	20	29	30	31	32	37	38	39	40	41	42	43	44	53	54	55	56	57	58	59	60
15	16	21	22	23	24	25	26	27	28	33	34	35	36	45	46	47	48	53	54	55	56	57	58	59	60
16	21	22	23	24	25	26	27	28	37	38	39	40	41	42	43	44	49	50	51	52	61	62	63	64
17	18	21	22	25	26	29	30	33	34	37	38	41	42	45	46	49	50	53	54	57	58	61	62
18	21	22	25	26	29	30	35	36	39	40	43	44	47	48	51	52	55	56	59	60	63	64
19	20	23	24	27	28	31	32	33	34	37	38	41	42	45	46	51	52	55	56	59	60	63	64
20	23	24	27	28	31	32	35	36	39	40	43	44	47	48	49	50	53	54	57	58	61	62
21	22	27	28	31	32	33	34	37	38	43	44	47	48	49	50	53	54	58	60	63	64
22	27	28	31	32	35	36	39	40	41	42	45	46	51	52	55	56	57	58	61	62
23	24	25	26	29	30	33	34	37	38	43	44	47	48	51	52	55	56	57	58	61	62
24	25	26	29	30	35	36	39	40	41	42	45	46	49	50	53	54	59	60	63	64
25	26	31	32	33	34	39	40	41	42	47	48	49	50	55	56	57	58	63	64
26	31	32	35	36	37	38	43	44	45	46	51	52	53	54	59	60	61	62
27	28	29	30	33	34	39	40	41	42	47	48	51	52	53	54	59	60	61	62
28	29	30	35	36	37	38	43	44	45	46	49	50	55	56	57	58	63	64
29	30	33	34	39	40	43	44	45	46	49	50	55	56	59	60	61	62
30	35	36	37	38	41	42	47	48	51	52	53	54	57	58	63	64
31	32	33	34	39	40	43	44	45	46	51	52	53	54	57	58	63	64
32	35	36	37	38	41	42	47	48	49	50	55	56	59	60	61	62
33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	62
34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
35	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	58	60	62	64
36	38	40	42	44	46	48	49	51	53	55	57	59	61	63
37	39	42	44	46	48	49	51	53	55	58	60	62	64
38	40	41	43	45	47	50	52	54	56	57	59	61	63
39	42	44	46	48	50	52	54	56	57	59	61	63
40	41	43	45	47	49	51	53	55	58	60	62	64
41	43	46	48	49	51	54	56	57	59	62	64
42	44	45	47	50	52	53	55	58	60	61	63
43	46	48	50	52	53	55	58	60	61	63
44	45	47	49	51	54	56	57	59	62	64
45	47	49	51	54	56	58	60	61	63
46	48	50	52	53	55	57	59	62	64
47	50	52	53	55	57	59	62	64
48	49	51	54	56	58	60	61	63
49	52	53	56	57	60	61	64
50	51	54	55	58	59	62	63
51	54	55	58	59	62	63
52	53	56	57	60	61	64
53	56	58	59	62	63
54	55	57	60	61	64
55	57	60	61	64
56	38	59	62	63
57	60	62	63
58	59	61	64
59	61	64
60.	62	63
61	64
62	63

Tabelle IIb.

2	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
3	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
4	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	48	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
5	9	10	11	12	13	14	15	16	25	26	27	28	29	30	31	32	41	42	43	44	45	46	47	48	57	58	59	60	61	62	63	64
6	9	10	11	12	13	14	15	16	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	49	50	51	52	53	54	55	56
7	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	33	34	35	36	37	38	39	40	57	58	59	60	61	62	63	64
9	13	14	15	16	21	22	23	24	29	30	31	32	37	38	39	40	45	46	47	48	53	54	55	56	61	62	63	64
10	13	14	15	16	21	22	23	24	29	30	31	32	33	34	35	36	41	42	43	44	49	50	51	52	57	58	59	60
11	13	14	15	16	17	18	19	20	25	26	27	28	37	38	39	40	45	46	47	48	49	50	51	52	57	58	59	60
12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	26	27	28	33	34	35	36	41	42	43	44	53	54	55	56	61	62	63	64
13	21	22	23	24	25	26	27	28	37	38	39	40	41	42	43	44	53	54	55	56	57	58	59	60
14	21	22	23	24	25	26	27	28	33	34	35	36	45	46	47	48	49	50	51	52	61	62	63	64
15	17	18	19	20	29	30	31	32	37	38	39	40	41	42	43	44	49	50	51	52	61	62	63	64
16	17	18	19	20	29	30	31	32	33	34	35	36	45	46	47	48	53	54	55	56	57	58	59	60
17	19	20	23	24	27	28	31	32	35	36	39	40	43	44	47	48	51	52	55	56	59	60	63	64
18	19	20	23	24	27	28	31	32	33	34	37	38	41	42	45	46	49	50	53	54	57	58	61	62
19	21	22	25	26	29	30	35	36	39	40	43	44	47	48	49	50	53	54	57	58	61	62
20	21	22	25	26	29	30	33	34	37	38	41	42	45	46	51	52	55	56	59	60	63	64
21	23	24	25	26	29	30	35	36	39	40	41	42	45	46	51	52	55	56	57	58	61	62
22	23	24	25	26	29	30	33	34	37	38	43	44	47	48	49	50	53	54	59	60	63	64
23	27	28	31	32	35	36	39	40	41	42	45	46	49	50	53	54	59	60	63	64
24	27	28	31	32	33	34	37	38	43	44	47	48	51	52	55	56	57	58	61	62
25	27	28	29	30	35	36	37	38	43	44	45	46	51	52	53	54	59	60	61	62
26	27	28	29	30	33	34	39	40	41	42	47	48	49	50	55	56	57	58	63	64
27	31	32	35	36	37	38	43	44	45	46	49	50	55	56	57	58	63	64
28	31	32	33	34	39	40	41	42	47	48	51	52	53	54	59	60	61	62
29	31	32	35	36	37	38	41	42	47	48	51	52	53	54	57	58	63	64
30	31	32	33	34	39	40	43	44	45	46	49	50	55	56	59	60	61	62
31	35	36	37	38	41	42	47	48	49	50	55	56	59	60	61	62
32	33	34	39	40	43	44	45	46	51	52	53	54	57	58	63	64
33	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
34	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63
35	36	38	40	42	44	46	48	49	51	53	55	57	59	61	63
36	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	58	60	62	64
37	38	40	41	43	45	47	50	52	54	56	57	59	61	63
38	39	42	44	46	48	49	51	53	55	58	60	62	64
39	40	41	43	45	47	49	51	53	55	58	60	62	64
40	42	44	46	48	50	52	54	56	57	59	61	63
41	42	44	45	47	50	52	53	55	58	60	61	63
42	43	46	48	49	51	54	56	57	59	62	64
43	44	45	47	49	51	54	56	57	59	62	64
44	46	48	50	52	53	55	58	60	61	63
45	46	48	50	52	53	55	57	59	62	64
46	47	49	51	54	56	58	60	61	63
47	48	49	51	54	56	58	60	61	63
48	50	52	53	55	57	59	62	64
49	50	51	54	55	58	59	62	63
50	52	53	56	57	60	61	64
51	52	53	56	57	60	61	64
52	54	55	58	59	62	63
53	54	55	57	60	61	64
54	56	58	59	62	63
55	56	58	59	62	63
56	57	60	61	64
57	58	59	61	64
58	60	62	63
59	60	62	63
60	61	64
61	62	63
62	64
63	64

Tabelle III.

1	2	3	4	5	6	7	8	1	5	17	21	33	37	49	53	1	9	17	25	33	41	49	57	1	13	17	29	33	45	49	61
1	2	3	4	9	10	11	12	1	5	17	21	34	38	50	54	1	9	17	25	34	42	50	58	1	13	17	29	34	46	50	62
1	2	3	4	13	14	15	16	1	5	18	22	35	39	52	56	1	9	18	26	35	43	52	60	1	13	18	30	35	47	52	64
1	2	5	6	17	18	21	22	1	5	18	22	36	40	51	55	1	9	18	26	36	44	51	59	1	13	18	30	36	48	51	63
1	2	5	6	19	20	23	24	1	5	19	23	33	37	51	55	1	9	19	27	33	41	51	59	1	13	19	31	33	45	51	63
1	2	7	8	25	26	31	32	1	5	19	23	34	38	52	56	1	9	19	27	34	42	52	60	1	13	19	31	34	46	52	64
1	2	7	8	27	28	29	30	1	5	20	24	35	39	50	54	1	9	20	28	35	43	50	53	1	13	20	32	35	47	50	62
1	2	9	10	17	18	25	26	1	5	20	24	36	40	49	53	1	9	20	28	36	44	49	57	1	13	20	32	36	48	49	61
1	2	9	10	19	20	27	28																								
1	2	11	12	21	22	31	32	1	6	17	22	41	46	57	62	1	10	17	26	37	46	53	62	1	14	17	30	37	42	53	58
1	2	11	12	23	24	29	30	1	6	17	22	42	45	58	61	1	10	17	26	38	45	54	61	1	14	17	30	38	41	54	57
1	2	13	14	17	18	29	30	1	6	18	21	43	48	60	63	1	10	18	25	39	48	56	63	1	14	18	29	39	44	56	59
1	2	13	14	19	20	31	32	1	6	18	21	44	47	59	64	1	10	18	25	40	47	55	64	1	14	18	29	40	43	55	60
1	2	15	16	21	22	27	28	1	6	19	24	41	46	59	64	1	10	19	28	37	46	55	64	1	14	19	32	37	42	55	60
1	2	15	16	23	24	25	26	1	6	19	24	42	45	60	63	1	10	19	28	38	45	56	63	1	14	19	32	38	41	56	59
								1	6	20	23	43	48	58	61	1	10	20	27	39	48	54	61	1	14	20	31	39	44	54	57
1	3	5	7	33	35	37	39	1	6	20	23	44	47	57	62	1	10	20	27	40	47	53	62	1	14	20	31	40	43	53	58
1	3	5	7	34	36	38	40																								
1	3	6	8	41	43	46	48	1	7	25	31	33	39	57	63	1	11	21	31	33	43	53	63	1	15	21	27	33	47	53	59
1	3	6	8	42	44	45	47	1	7	25	31	34	40	58	64	1	11	21	31	34	44	54	64	1	15	21	27	34	48	54	60
1	3	9	11	33	35	41	43	1	7	26	32	35	37	60	62	1	11	22	32	35	41	56	62	1	15	22	28	35	45	56	58
1	3	9	11	34	36	42	44	1	7	26	32	36	38	59	61	1	11	22	32	36	42	55	61	1	15	22	28	36	46	55	57
1	3	10	12	37	39	46	48	1	7	27	29	33	39	59	61	1	11	23	29	33	43	55	61	1	15	23	25	33	47	55	57
1	3	10	12	38	40	45	47	1	7	27	29	34	40	60	62	1	11	23	29	34	44	56	62	1	15	23	25	34	48	56	58
1	3	13	15	33	35	45	47	1	7	28	30	35	37	58	64	1	11	24	30	35	41	54	64	1	15	24	26	35	45	54	60
1	3	13	15	34	36	46	48	1	7	28	30	36	38	57	63	1	11	24	30	36	42	53	63	1	15	24	26	36	46	53	59
1	3	14	16	37	39	42	44																								
1	3	14	16	38	40	41	43	1	8	25	32	41	48	49	56	1	12	21	32	37	48	49	60	1	16	21	28	37	44	49	64
								1	8	25	32	42	47	50	55	1	12	21	32	38	47	50	59	1	16	21	28	38	43	50	63
1	4	5	8	49	52	53	56	1	8	26	31	43	46	52	53	1	12	22	31	39	46	52	57	1	16	22	27	39	42	52	61
1	4	5	8	50	51	54	55	1	8	26	31	44	45	51	54	1	12	22	31	40	45	51	58	1	16	22	27	40	41	51	62
1	4	6	7	57	60	62	63	1	8	27	30	41	48	51	54	1	12	23	30	37	48	51	53	1	16	23	26	37	44	51	62
1	4	6	7	58	59	61	64	1	8	27	30	42	47	52	53	1	12	23	30	38	47	52	57	1	16	23	26	38	43	52	61
1	4	9	12	49	52	57	60	1	8	28	29	43	46	50	55	1	12	24	29	39	46	50	59	1	16	24	25	39	42	50	63
1	4	9	12	50	51	58	59	1	8	28	29	44	45	49	56	1	12	24	29	40	45	49	60	1	16	24	25	40	41	49	64
1	4	10	11	53	56	62	63																								
1	4	10	11	54	55	61	64																								
1	4	13	16	49	52	61	64																								
1	4	13	16	50	51	62	63																								
1	4	14	15	53	56	58	59																								
1	4	14	15	54	55	57	60																								

Tabelle IV.

								K
1	13	23	28	40	42	54	59	
13	1	27	24	44	38	58	55	
23	27	1	14	50	64	36	45	
28	24	14	1	61	51	47	34	1
40	44	50	61	1	15	19	30	
42	38	64	51	15	1	29	20	
54	58	36	47	19	29	1	16	
59	55	45	34	30	20	16	1	
1	13	23	28	39	41	53	60	
1	13	24	27	37	43	56	57	
1	14	23	27	35	46	49	63	
1	14	24	28	33	48	52	62	2
1	15	19	30	39	43	49	62	
1	15	20	29	37	41	52	63	
1	16	19	29	35	48	53	57	
1	16	20	30	33	46	56	60	
1	13	21	26	40	42	56	57	
1	13	22	25	38	44	53	60	
1	14	21	25	36	45	52	62	
1	44	22	26	34	47	49	63	3
1	15	17	32	40	44	52	63	
1	15	18	31	38	42	49	62	
1	16	17	31	36	47	56	60	
1	16	18	32	34	45	53	57	
1	13	21	26	39	41	55	58	
1	13	22	25	37	43	54	59	
1	14	21	25	35	46	51	61	
1	14	22	26	33	48	50	64	4
1	15	17	32	39	43	51	64	
1	15	18	31	37	41	50	61	
1	16	17	31	35	48	55	59	
1	16	18	32	33	46	54	58	
1	9	23	32	40	46	54	63	
1	9	24	31	38	48	55	62	
1	10	23	31	36	41	50	60	
1	10	24	32	34	43	51	57	5
1	11	19	26	40	48	50	57	
1	11	20	25	38	46	51	60	
1	12	19	25	36	43	54	62	
1	12	20	26	34	41	55	63	
1	9	23	32	39	45	53	64	
1	9	24	31	37	47	56	61	
1	10	23	31	35	42	49	59	
1	10	24	32	33	44	52	58	6
1	11	19	26	39	47	49	58	
1	11	20	25	37	45	52	59	
1	12	19	25	35	44	53	61	
1	12	20	26	33	42	56	64	

								K
1	9	21	30	40	46	56	61	
1	9	22	29	38	48	53	64	
1	10	21	29	36	41	52	58	
1	10	22	30	34	43	49	59	7
1	11	17	28	40	48	52	59	
1	11	18	27	38	46	49	58	
1	12	17	27	36	43	56	64	
1	12	18	28	34	41	53	61	
1	9	21	30	39	45	55	62	
1	9	22	29	37	47	54	63	
1	10	21	29	35	42	51	57	
1	10	22	30	33	44	50	60	8
1	11	17	28	39	47	51	60	
1	11	18	27	37	45	50	57	
1	12	17	27	35	44	55	63	
1	12	18	28	33	42	54	62	
1	5	27	32	44	46	58	63	
1	5	28	31	42	48	59	62	
1	6	27	31	36	37	50	56	
1	6	28	32	34	39	51	53	9
1	7	19	22	44	48	50	53	
1	7	20	21	42	46	51	56	
1	8	19	21	36	39	58	62	
1	8	20	22	34	37	59	63	
1	5	27	32	43	45	57	64	
1	5	28	31	41	47	60	61	
1	6	27	31	35	38	49	55	
1	6	28	32	33	40	52	54	10
1	7	19	22	43	47	49	54	
1	7	20	21	41	45	52	55	
1	8	19	21	35	40	57	61	
1	8	20	22	33	38	60	64	
1	5	25	30	44	46	60	61	
1	5	26	29	42	48	57	64	
1	6	25	29	36	37	52	54	
1	6	26	30	34	39	49	55	11
1	7	17	24	44	48	52	55	
1	7	18	23	42	46	49	54	
1	8	17	23	36	39	60	64	
1	8	18	24	34	37	57	61	
1	5	25	30	43	45	59	62	
1	5	26	29	41	47	58	63	
1	6	25	29	35	38	51	53	
1	6	26	30	33	40	50	56	12
1	7	17	24	43	47	51	56	
1	7	18	23	41	45	50	53	
1	8	17	23	35	40	59	63	
1	8	18	24	33	38	58	62	

								K
1	3	29	32	52	54	58	63	
1	3	30	31	50	56	60	61	
1	4	29	31	35	38	42	48	
1	4	30	32	34	39	43	45	17
1	7	11	14	45	48	50	52	
1	7	12	13	42	43	54	56	
1	8	11	13	38	39	58	60	
1	8	12	14	34	35	61	63	
1	3	29	32	51	53	57	64	
1	3	30	31	49	55	59	62	
1	4	29	31	36	37	41	47	
1	4	30	32	33	40	44	46	18
1	7	11	14	46	47	49	51	
1	7	12	13	41	44	53	55	
1	8	11	13	37	40	57	59	
1	8	12	14	33	36	62	64	
1	3	25	28	52	54	59	62	
1	3	26	27	50	56	57	64	
1	4	25	27	35	38	44	46	
1	4	26	28	34	39	41	47	21
1	7	9	16	46	47	54	56	
1	7	10	15	41	44	50	52	
1	8	9	15	38	39	62	64	
1	8	10	16	34	35	57	59	
1	3	25	28	51	53	60	61	
1	3	26	27	49	55	58	63	
1	4	25	27	43	45	36	37	
1	4	26	28	33	40	42	48	22
1	7	9	16	45	48	53	55	
1	7	10	15	42	43	49	51	
1	8	9	15	37	40	61	63	
1	8	10	16	33	36	58	60	
1	3	21	24	52	55	58	62	
1	3	22	23	50	53	60	64	
1	4	21	23	35	40	42	46	
1	4	22	24	34	37	43	47	25
1	5	11	16	46	47	58	60	
1	5	12	15	42	43	62	64	
1	6	11	15	37	40	50	52	
1	6	12	16	34	35	53	55	
1	3	21	24	51	56	57	61	
1	3	22	23	49	54	59	63	
1	4	21	23	36	39	41	45	
1	4	22	24	33	38	44	48	26
1	5	11	16	45	48	57	59	
1	5	12	15	41	44	61	63	
1	6	11	15	38	39	49	51	
1	6	12	16	33	36	54	56	

								K
1	3	17	20	51	56	60	64	
1	3	19	18	49	54	58	62	
1	4	18	20	34	37	41	45	
1	4	17	19	35	40	44	48	31
1	5	9	14	45	48	62	64	
1	5	10	13	41	44	58	60	
1	6	9	13	37	40	54	56	
1	6	10	14	34	35	49	51	
1	3	17	20	52	55	59	63	
1	3	18	19	50	53	57	61	
1	4	17	19	36	39	43	47	
1	4	18	20	33	38	42	46	32
1	5	9	14	46	47	61	63	
1	5	10	13	42	43	57	59	
1	6	9	13	38	39	53	55	
1	6	10	14	33	36	50	52	
1	2	45	48	52	55	59	62	
1	2	46	47	51	56	60	61	
1	4	18	23	27	32	45	46	
1	4	19	22	26	29	47	48	33
1	6	10	15	29	32	51	52	
1	6	12	13	26	27	55	56	
1	8	10	13	22	23	59	60	
1	8	12	15	18	19	61	62	
1	2	45	48	50	53	57	64	
1	2	46	47	49	54	58	63	
1	4	17	24	28	31	47	48	
1	4	20	21	25	30	45	46	35
1	6	10	15	30	31	49	50	
1	6	12	13	25	28	53	54	
1	8	10	13	21	24	57	58	
1	8	12	15	17	20	63	64	
1	2	41	44	52	55	58	63	
1	2	42	43	51	56	57	64	
1	4	18	23	28	31	41	42	
1	4	19	22	25	30	43	44	37
1	6	9	16	30	31	55	56	
1	6	11	14	25	28	51	52	
1	8	9	14	22	23	63	64	
1	8	11	16	18	19	57	58	
1	2	41	44	50	53	60	61	
1	2	42	43	49	54	59	62	
1	4	17	24	27	32	43	44	
1	4	20	21	26	29	41	42	39
1	6	9	16	29	32	53	54	
1	6	11	14	26	27	49	50	
1	8	9	14	21	24	61	62	
1	8	11	16	17	20	59	60	

								K
1	2	37	40	52	54	59	63	
1	2	38	39	51	53	60	64	
1	4	18	24	27	31	37	38	
1	4	19	21	26	30	39	40	41
1	5	10	16	30	31	59	60	
1	5	12	14	26	27	63	64	
1	7	10	14	21	24	51	52	
1	7	12	16	18	19	53	54	
1	2	37	40	50	56	57	61	
1	2	38	39	49	55	58	62	
1	4	17	23	28	32	39	40	
1	4	20	22	25	29	37	38	43
1	5	10	16	29	32	57	58	
1	5	12	14	25	28	61	62	
1	7	10	14	22	23	49	50	
1	7	12	16	17	20	55	56	
1	2	33	36	50	56	60	64	
1	2	34	35	49	55	59	63	
1	4	18	24	28	32	33	34	
1	4	19	21	25	29	35	36	46
1	5	11	13	25	28	59	60	
1	5	9	15	29	32	63	64	
1	7	11	15	18	19	49	50	
1	7	9	13	21	24	55	56	
1	2	33	36	52	54	58	62	
1	2	34	35	51	53	57	61	
1	4	17	23	27	31	35	36	
1	4	20	22	26	30	33	34	48
1	5	9	15	30	31	61	62	
1	5	11	13	26	27	57	58	
1	7	9	13	22	23	53	54	
1	7	11	15	17	20	51	52	
1	2	35	40	44	46	61	63	
1	2	36	39	43	45	62	64	
1	3	18	24	28	31	61	62	
1	3	20	22	26	29	63	64	49
1	6	10	16	29	31	35	36	
1	6	11	13	26	28	39	40	
1	7	10	13	22	24	43	44	
1	7	11	16	18	20	45	46	
1	2	33	38	42	48	62	64	
1	2	34	37	41	47	61	63	
1	3	17	23	27	32	63	64	
1	3	19	21	25	30	61	62	52
1	7	11	16	17	19	47	48	
1	7	10	13	21	23	41	42	
1	6	10	16	30	32	33	34	
1	6	11	13	25	27	37	38	

								K
1	2	35	40	42	48	57	59	
1	2	36	39	41	47	58	60	
1	3	18	24	27	32	57	58	
1	3	20	22	25	30	59	60	53
1	6	9	15	30	32	39	40	
1	6	12	14	25	27	35	36	
1	7	9	14	22	24	47	48	
1	7	12	15	18	20	41	42	
1	2	33	38	44	46	58	60	
1	2	34	37	43	45	57	59	
1	3	17	23	28	31	59	60	
1	3	19	21	26	29	57	58	56
1	6	9	15	29	31	37	38	
1	6	12	14	26	28	33	34	
1	7	9	14	21	23	45	46	
1	7	12	15	17	19	43	44	
1	2	35	38	44	48	53	55	
1	2	36	37	43	47	54	56	
1	3	18	23	28	32	53	54	
1	3	20	21	26	30	55	56	57
1	5	10	15	30	32	43	44	
1	5	11	14	26	28	47	48	
1	8	10	14	21	23	35	36	
1	8	11	18	20	15	37	38	
1	2	33	40	42	46	54	56	
1	2	34	39	41	45	53	55	
1	3	17	24	27	31	55	56	
1	3	19	22	25	29	53	54	60
1	5	10	15	29	31	41	42	
1	5	11	14	25	27	45	46	
1	8	10	14	22	24	33	34	
1	8	11	15	17	19	39	40	
1	2	33	40	44	48	50	52	
1	2	34	39	43	47	49	51	
1	3	18	23	27	31	49	50	
1	3	20	21	25	29	51	52	62
1	5	9	16	29	31	47	48	
1	5	12	13	25	27	43	44	
1	8	9	13	21	23	39	40	
1	8	12	16	18	20	33	34	
1	2	35	38	42	46	49	51	
1	2	36	37	41	45	50	52	
1	3	17	24	28	32	51	52	
1	3	19	22	26	30	49	50	63
1	5	9	16	30	32	45	46	
1	5	12	13	26	28	41	42	
1	8	9	13	22	24	37	38	
1	8	12	16	17	19	35	36	

Thesen.

1) Die transcendentalen Axiome der Geometrie sind nicht zur Begründung der letzteren hinreichend.

2) Die Hypothese, dass alle unendlich entfernten Puncte der Ebene auf einer Geraden liegen, führt auf Widersprüche.

3) Die Theorie der ϑ-Functionen und auch der hyperelliptischen Functionen lässt sich am besten auf zahlentheoretische Principien gründen.

4) Die antike Mathematik bildet ein Aggregat von Sätzen, die neuere dagegen einen Organismus.

5) Bei den griechischen Mathematikern ist keine Exhaustionsmethode zu finden.

6) Jede Wissenschaft muss schliesslich in der Mathematik aufgehen.